NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. IX.

pro Annis MDCCLXII. et MDCCLXIII.

PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXIV.

SVMMARIVM DISSERTATIONVM

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS IX.

MATHEMATICA.

I.

De Resolutione Formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros.

Auctore Leon. Eulero pag. 3.

Consideratio numerorum, quamuis plerisque omni vsu carere videatur, tamen per se non solum admodum est iucunda, sed etiam animum ad veritatis indagationem non mediocriter acuit, eiusque vires quasi magis intendit. Maxime enim abundat doctrina numerorum veritatibus abstrusissimis, quarum inuestigatio et demonstratio tantam ingenii penetrationem postulat, vt nunquam cuncta, quae inuoluit, mysteria erui et explicari posse videantur. Quod certe eo magis mirum videri debet, quod numeri nusquam per se re vera existant, sed per solam abstractionem in mente formentur, qua primo quidem series numerorum naturalium ab vnitate in infinitum progredientium constituitur, tum vero ad interualla implenda numeri fracti et surdi, atque adeo transcendentes, introducuntur. Quorum generum tractatio etsi ad Arithmeticam referri solet, tamen in hac scientia insignes proprietates, quibus numeri sunt affecti, vix

vix attinguntur, quippe quae vulgo tantum ad vſitatas numerorum operationes explicandas reſtringitur. Accuratius autem numerorum natura inueſtigatur in ea Analyſeos parte, quae ab antiquiſſimo auctore methodus Diophantea vocari ſolet, vbi eiusmodi problemata perpenduntur, quae in ſe ſunt indeterminata, atque infinitas ſolutiones admittunt, ex quibus autem eas elici oportet, quae numeris vel ſaltem rationalibus, vel integris tantum contineantur. Cuius methodi vis per exemplum clariſſime perſpicietur: Sumamus eiusmodi numeros quaeri debere, quorum quadrata duplicata vnitate aucta iterum fiant quadrata, ſeu vt forma $2xx-11$ extractionem radicis quadratae admittat. Quodſi fractiones non excludantur, huic quaeſtioni facillime ſatisfit, aequando formulam $2xx-11$ huic quadrato $(xy-1)^2$. Quia enim aequatio $2xx-11=xxyy-2xy-11$, vnitate vtrinque deleta, per x diuiſionem admittit, prodit $2x=xyy-2y$, hincque $x=\frac{2y}{yy-2}$, vbi quicunque numeri pro y accipiantur, ſiue integri, ſiue fracti, pro x ſemper eiusmodi numeri rationales reſultant, quibus formula $2xx-11$ euadit quadratum, quippe cuius radix quadrata futura $xy-1$. Qui numeri, quo facilius obtineantur, loco y ſcribi poteſt fractio $\pm\frac{p}{q}$, vnde prodit vel $x=\frac{2pq}{pp-2qq}$, vel $x=\frac{2pq}{2qq-pp}$. Hic igitur ſufficit, pro p et q numeros quoscunque integros accipi, veluti ſi capiatur $p=5$ et $q=3$, prodit $x=\frac{30}{7}$ qui eſt huiusmodi numerus, vt eius quadratum $\frac{900}{49}$ ſi duplicetur $\frac{1800}{49}$, et vnitas adiiciatur $\frac{1849}{49}$, ſumma haec ſit quadratum radice exiſtente $\frac{43}{7}$. Verum ſi pro x tantum nume-

numeri integri desiderentur, qui hac proprietate gaudeant, solutio modo data nihil vtilitatis affert, cum pro p et q eiusmodi numeri assumi deberent, vt $2pq$ diuisibile fieret per $pp-2qq$, quod non minus est difficile, quam ipsum problema, de quo agitur. Interim tamen hac conditione adiecta problema etiamnum recipit innumeras solutiones, et numeri pro x assumendi hac lege procedunt: 0, 2, 12, 70, 408, 2378, 13860, etc. vbi continuo sequens aequatur sextuplo vltimi demto penultimo, cuiusmodi series vocari solent recurrentes, vnde euidens est, harum solutionum multitudinem esse infinitam, etiamsi continuo rarius occurrant. Ideoque facile intelligitur, earum inuentionem multo magis esse arduam.

Cel. Auctor huius dissertationis methodum peculiarem exponit huiusmodi problemata facile resoluendi, quibus in genere omnis numeri integri pro x assumendi quaeruntur, vt haec formula $\alpha xx + \beta x - \gamma$ euadat numerus quadratus, dum α, β, γ denotant numeros quoscunque datos. Vbi primo quidem obseruat, solutionem non succedere, nisi α sit numerus positiuus non quadratus, tum vero necesse esse, vt vna saltem solutio iam aliunde sit cognita, cuiusmodi solutio vnica statim ac si praesto fuerit, quemadmodum inde omnes reliquae in infinitum inueniri queant, perspicue docet. Cum autem hoc problema iam alibi sit pertractatum, etsi methodo minus commoda, Auctor hic inprimis naturam huiusmodi problematum accuratius perscrutatur, et criteria elicit, quibus problemata huius generis impossibilia a possibilibus distingui possunt. Denotante scilicet α nume-

numerum quemcunque positiuum non quadratum, quia expressionem superiorem semper ad hanc formam $\alpha xx + \gamma$ reuocare licet, ostendit, quinam numeri pro γ assumti problema reddant possibile, nec ne. Veluti si sit $\alpha = 3$, notum est, has formulas $3xx+2$, $3xx+5$, $3xx+8$ etc. nunquam fieri posse quadratas. In maioribus autem numeris pro α sumtis hoc iudicium multo magis fit arduum; verum tamen Auctor criteria certissima indicat, quibus in omnibus casibus expedite vti licet, vbi multa, quibus miranda numerorum natura non mediocriter illustratur, occurrunt, et quae in aliis quaestionibus vsum insignem habitura videntur.

II.

De progressionibus arcuum circularium, quorum tangentes secundum certam legem procedunt.

Auctore L. Eulero pag. 40.

Plurimae iam passim traditae sunt methodi progressionum, in infinitum excurrentium, summas inuestigandi, in quo Analyseos genere cum ab aliis tum a Cel. *Eulero* insignia specimina sunt edita. Seriem autem fractionum continuo decrescentium, etiamsi in infinitum continuentur, summam habere posse finitam assignabilem, aduersus difficultates e principiis methaphysicis perperam intellectis petitas, nemo nunc quidem amplius in in dubium vocare ſuſtinet, veluti ex primis adeo elementis oſtendi poteſt, huius ſeriei geometricae: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} +$ etc. in infinitum ſummam binario eſſe aequalem. Quanquam autem haud difficulter iudicare licet, vtrum huiusmodi ſerierum, quarum termini continuo fiunt minores, dummodo certa lege progrediantur, ſummae ſint finitae, nec ne? tamen ſaepe numero accidit, vt ſumma, etiamſi certo ſit finita, nihilo minus aſſignari nequeat, quemadmodum vſu venit in hac ſerie $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \frac{1}{33} +$ etc. cuius denominatores, quia vnitate ſuperant praecedentes, ſumma ſine omni dubio minor eſt, quam illius, neque vero eius verus valor vllo modo adhuc inueſtigari potuit, ita vt is non ſolum non rationaliter, ſed etiam non per numeros ſurdos, quin ne per tranſcendentes quidem vſu ſatis tritas, cuiusmodi ſunt, quae vel a quadratura circuli, vel logarithmis pendent, exprimi poſſe videatur. Simili modo haec fractionum ſeries: $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{43} +$ etc. cuius lex denominatorum differentiis ſumendis, quae ſunt 4. 6. 8. 10. 12 etc. per ſe eſt perſpicua, etſi certe eſt finita, nullo tamen quantitatum genere cognito exhiberi poteſt: ex quo eo magis mirum videri debet, quod ſi in circulo, cuius radius $= 1$, arcus capiuntur, quorum tangentes ſint ſucceſſiue $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{21}$ etc. horum omnium arcuum in infinitum continuatorum ſumma aſſignari poſſit, atque adeo quartae peripheriae parti ſit aequalis.

In hac igitur diſſertatione Cel. Auctor plura huiusmodi ſerierum genera perpendit, quarum termini ſinguli ſunt arcus circulares, quorum tangentes certo modo progrediuntur, et quemadmodum ſummae earum pariter ad arcus circulares deduci queant, oſtendit. Methodum autem perfacilem proponit, innumerabiles huiusmodi ſeries ſummabiles inueſtigandi, in quo negotio ne calculus formulis nimis intricatis perturbetur, in ſubſidium vocat algorithmum quendam nouum ac peculiarem, cuius indoles in ſequentibus exponetur. Tum vero etiam theoriam fractionum continuarum in ſuperioribus voluminibus prolixius expoſitam ad has inueſtigationes felici ſucceſſu accommodat, ita vt iam huius generis ſeries perinde tractari poſſint, atque eae, quae per ſimplices fractiones progrediuntur, dum arcus illius, cui ſeriei ſumma aequatur, tangens ſatis concinne per fractionem continuam exprimi poteſt.

III.

Specimen algorithmi ſingularis.

Auct. L. Eulero pag. 53.

Accuratius inquirenti cur Analyſis mathematica aliis ſcientiis, quae in veritatis inueſtigatione verſantur, tantopere antecellat, mox patebit cauſam in idoneo et ſuccincto ſignorum vſu potiſſimum eſſe quaerendam. Cum enim in omni ratiocinatione ſermo atque vſus vocabulorum, quibus ideae plerumque ſatis complicatae deſignari ſolent, maximum affert ſubſidium, vt ſermone ſublato vix vllus rationis vſus nobis relinqui videatur; vtilitas horum ſigno-

ſignorum manifeſto in eo eſt poſita, quod eorum beneficio menti ideae valde compoſitae vno quaſi intuitu ſimul ita repraeſentantur, vt, ſi vim cuiusque ſigni, quantumuis eius ſignificatus fuerit complexus, ſemel intellexerit, id deinceps in mente vicem omnium idearum, quas comprehendit, gerat. Atque hoc idem per vniuerſam Analyſin mathematicam multo clarius cernitur, vbi omnes formulae in calculo receptae nihil aliud ſunt, niſi ſigna idonea, quibus ideae et operationes tantopere compoſitae menti vno quaſi ictu offeruntur, vt earum explicatio plerumque maximam verborum ambagem requireret; vbi hoc imprimis eſt obſeruandum, huiusmodi ſignum, cum eius vis ſemel fuerit percepta, menti deinceps perpetuo inſigni compendio vniuerſam rem ſignificatam repraeſentare. Quemadmodum ergo in communi ſermone ſingula verba ideas ſimpliciores in animo excitant, ita in Analyſi mathematica eiusmodi ſigna vſurpantur, quae ideas multo magis compoſitas animo ſimul exhibent, eundemque effectum praeſtant, ac ſi omnia verba eius ſignificatum explicantia ordine recitarentur; quae prolixitas, cum animum maxime eſſet diſtractura, vires etiam ingenii in comparatione plurium huiusmodi repraeſentationum plurimum eſſet perturbatura. Ex quo perſpicuum eſt, praeſtantiam Analyſeos vſui potiſſimum idoneorum ſignorum, quibus res maxime complicatae deſignantur, acceptam eſſe referendam. Veluti quoties in calculo analytico hanc formulam $\sqrt{(aa+bb)}$ conſpicimus, hoc ſigno menti oblato intelligimus, litteris a et b certas quantitates deſignari, quarum quadrata per addi-tionem coniungi, et ex ſumma radicem quadratam extrahi oportere; hancque radicem quadratam iſta formula indicari. Statim autem atque hunc ſignificatum probe percepimus, nobisque familiarem reddidimus, ſolus aſpectus huius formulae $\sqrt{(aa+bb)}$ vno quaſi ictu menti totam illam deſcriptionem repraeſentat, ita vt ea tanquam idea ſimplici in vlteriori inueſtigatione vti poſſit. Similis eſt ratio omnium reliquorum ſignorum in Analyſi receptorum, quae omnia ita ſunt comparata, vt iis quantitates, per certas ſaepiusque repetitas operationes natae, vno quaſi aſpectu menti diſtincte repraeſententur. Quodſi ergo eueniat, vt in Analyſi nouae quaedam operationes in vſum vocentur, nouoque modo inter ſe combinentur, ad calculi ſubſidium plurimum interea quantitates inde natas nouis iisque idoneis ſignis deſignari, vt iis deinceps ſimili ſucceſſu in calculo vti liceat. Cum igitur Cel. Auctor obſeruaſſet, in euolutione fractionum continuarum, quarum vſus in Analyſi eſt ampliſſimus, quantitates certo quodam modo per varias operationes inter ſe combinari, quantitates hinc ortas ſignis peculiaribus denotare ſtatuit, ſimulque ſpecimen noui algorithmi circa has quantitates exhibere decreuit, cuius vſum inſignem adeo iam in praecedente diſſertatione oſtendit, et in ſequentibus fortaſſe adhuc vberius eſt declaraturus. Propoſitis nimirum quotcunque numeris a, b, c, d, e, formula hoc ſigno expreſſa $(a, b, c, d, e,)$ numerum denotat per certas quasdam operationes inde oriundum, cuius valor per pauciores continuo procedendo ita ſe habet, vt, ſi nulla littera vncinulis includatur, veluti $()$ valor ſit perpe-

perpetuo vnitas; deinde si vnica littera sit inclusa, vt (a), valor sit hic ipse numerus a. Hinc autem si plures litterae includantur, valores per praecedentes sequenti modo definiuntur:

$$
\begin{aligned}
&() = 1 \\
&(a) = a \\
&(a, b) = b(a) + () \\
&(a, b, c) = c(a, b) + (a) \\
&(a, b, c, d) = d(a, b, c) + (a, b) \\
&(a, b, c, d, e) = (a, b, c, d) + (a, b, c)
\end{aligned}
$$

etc.

circa numeros autem hoc modo natos plures eximias proprietates demonstrat, veluti quod indicum ordine inuerso idem valor semper resultet, sitque $(a, b, c, d, e) = (e, d, c, b, a)$ vnde plures aliae insignes affectiones concluduntur.

IV.

De Resolutione aequationum cuiusuis gradus.

Auct. L. Eulero pag. 70.

Quaestio hic versatur circa aequationes algebraicas, quorum gradus aestimatur ex potestate summa quantitatis incognitae, cuius valorem inde determinari oportet, ita postquam huiusmodi aequationes ad debitam formam fuerint perductae, secundum gradus ita in genere repraesentari possunt:

gradus	aequationes
I.	$x + A = 0$
II.	$x^2 + Ax + B = 0$
III.	$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$
IV.	$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$
V.	$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$
VI.	$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$

etc.

Iam notum est, harum aequationum resolutionem in genere non vltra quartum gradum adhuc esse inuestigatam, quod eo magis mirandum videtur, quod cum secundus gradus iam ab antiquissimis Geometris Graecis et Arabibus, tertius vero et quartus iam pridem a Scipione ferreo et Bombello in ipsa quasi Analyseos infantia sint expediti, ab illo tempore, postquam Analysis summo studio est exculta, nondum vltra hos limites propredi licuerit. Cum autem constet, resolutionem cuiusque gradus ab omnibus gradibus inferioribus pendere, et quantitatem incognitam tot valores recipere, quoti gradus fuerit aequatio. Cel. Auctor huius dissertationis iam olim coniecturam proposuit, quod pro quouis gradu, veluti quinto $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$, detur aequatio vno gradu inferior, vti $y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta = 0$, quam vocat illius resoluentem, ita vt si huius radix fuerit p, q, r, s, illius radix ita se sit habitura $x = f + \sqrt[5]{p} + \sqrt[5]{q} + \sqrt[5]{r} + \sqrt[5]{s}$, vbi quidem perspicuum est, fore $f = -\frac{1}{5}A$, quae coniectura eo minus

minus ratione destituta videtur, quod non solum cum resolutione cognita aequationum secundi, tertii et quarti gradus egregie consentiat, sed etiam casus illos resolubiles particulares altiorum graduum a *Moiuraeo* olim detectos in se complectatur. Nunc autem Cel. Auctor animaduertit istius coniecturae formam, qua verbi gratia aequationis quinti gradus radix ita exprimitur: $x = f + \sqrt[5]{p} + \sqrt[5]{q} + \sqrt[5]{r} + \sqrt[5]{s}$, nondum satis esse limitatam. Cum enim singulae hae formulae radicales quinos diuersos valores natura sua inuoluant, facile intelligitur, non omnes combinationes eorum locum habere posse, quia alioquin numerus diuersorum valorum ipsius x in immensum excresceret, quem tamen quinarium superare non posse certum est. Formam igitur illam nimis vagam nunc ita restringit, vt statuat aequationis quinti gradus radicem ita in genere exprimi: $x = f + \mathfrak{A}\sqrt[5]{p} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{p^2} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{p^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{p^4}$, similique modo de reliquis gradibus; vbi iam perspicuum est, plures, quam quinque diuersos valores, pro x locum habere non posse. Statim enim ac significatus partis $\sqrt[5]{p}$ definitur, quod quinque modis fieri potest, simul etiam reliquae partes determinantur. Deinde etiam patet, expressionem pro casu allato non plures, quam quinque partes, complecti posse, quoniam formulae vlteriores $\sqrt[5]{p^5}$, $\sqrt[5]{p^6}$ etc. sponte ad praecedentes redirent, neque nouam irrationalitatem implicarent. Hanc igitur nouam coniecturam quam pulcre cum resolutionibus iam cognitis consentiat, ostendit, et quamuis ex hoc fonte minime adhuc aequationum quartum gradum superantium

tium resolutionem in genere perficere liceat, tamen hinc pro superioribus gradibus alios insuper casus resolubiles praeter *Moivreanos* deducit, vnde non parum luminis in hanc maxime absconditam Analyseos partem redundare videtur.

V.

De numeris primis valde magnis.

Auctore L. Eulero pag. 99.

Cum primum a *Pellio*, ac deinceps ab aliis, tabula numerorum primorum ad centena millia vsque sit constructa, nunc quidem proposito quocunque numero hunc limitem non superante facillime iudicare licet, vtrum is sit primus, nec ne? atque adeo ex ista tabula pro lubitu numeri primi excerpi possunt, si forte vsus exigat, qui quidem centena millia non excedant. Verum si quis desideret numeros primos hoc termino maiores, nonnisi exantlato immenso fere labore, voti sui compos reddi poterit, quandoquidem alia methodus numeros primos inuestigandi vix patet, nisi vt successiue omnes numeri per alios minores diuisibiles expungantur, quippe quo facto numeri primi soli relinquentur. Quin etiam proposito numero praegrandi, vtrum is sit primus, nec ne? ante pronunciare non licet, quam eius diuisio per omnes numeros primos, eius radice quadrata minores, fuerit tentata. Ita si quis quaerat, vtrum hic

hic numerus 2237791 primus ſit, nec ne? diuiſionem per omnes numeros primos vsque ad 1496 tentare cogitur, hocque labore maxime taedioſo ſuſcepto tandem diuiſionem per 1481 ſuccedere deprehendet. Ex quo patet problema olim inter *Fermatium* et *Wallifium* tractatum, quo methodus certa requiritur, numeros primos dato quouis maiores inueſtigandi, maxime eſſe arduum, atque adeo vires ingenii humani ſuperare, poſtquam ſolutio a *Fermatio* tradita iam olim ab Auctore huius diſſertationis eſt profligata. Quin etiam quaeſtio iam maxime difficilis eſt reputanda, ſi numeri primi centenis millibus vel adeo vno millione maiores deſiderentur. Interim tamen in hac diſſertatione methodus ſatis expedita traditur hoc praeſtandi, dum Auctor alios numeros non contemplatur, niſi qui vnitate ſuperent quadratos, ſeu in hac forma $aa+1$ ſint contenti. Cum enim huiusmodi numeri alios diuiſores non recipiant, niſi qui ipſi ſint duorum quadratorum aggregata, atque adeo in hac forma $4m+1$ contineantur, ex ſerie numerorum formae $aa+1$ quamuis longe continuata, quae quidem ſeries mox ad maximos numeros excreſcit, facili negotio numeri compoſiti expunguntur, ita vt de relictis certi ſimus, eos eſſe primos. Huius igitur artificii beneficio labore non nimis operoſo omnes numeros primos formae $aa+1$ vltra binos milliones eſt adeptus, quos in tabula peculiari complexus eſt; vnde iam certo conſtat, hunc v. gr. numerum praegrandem 2232037 eſſe primum, quae veritas ſi more conſueto eſſet exploranda, diuiſionem per omnes numeros primos vsque ad 1494 tentari oporteret. Quo

 autem

autem multitudo huius modi grandium numerorum primorum magis augeatur, etiam eos casus indicat, quibus formulae $\frac{aa+1}{2}$ et $\frac{aa+1}{5}$ praebent numeros primos.

VI.

De Resolutione aequationis

$$dy + ayy\,dx = bx^m\,dx.$$

Auctore L. Eulero pag. 154.

Aequatio haec, iam dudum a Comite *Riccati* Geometris proposita, tanto studio a summis ingeniis est pertractata, vt vix quicquam noui circa eius resolutionem proferri posse videatur. Statim quidem infiniti valores pro exponente m assumendi sunt obseruati, quibus integrale exhibere liceat, qui valores hac serie progrediuntur: $0 - 4 - \frac{3}{4}, - \frac{8}{3} - \frac{8}{5} - \frac{12}{5}, - \frac{12}{7}, - \frac{16}{7} - \frac{16}{9}$ etc. ac methodus, qua hi casus sunt euoluti, ita erat comparata, vt ex cognito cuiusque casus integrali, integrale sequentis definiretur, neque adeo casuum posteriorum integralia exhiberi possent, nisi iam omnes antecedentes fuerint expediti. In hac autem dissertatione id praestatur, vt vnica operatione omnium illorum casuum integralia simul eruantur, indeque statim vel centesimi casus integrale assignari possit. Methodus, qua hoc commodi est assecutus, omnino est singularis, dum primo aequationem

nem propofitam, ope certae fubftitutionis, in aliam, quae adeo differentialia fecundi gradus inuoluit, transformat, eamque deinceps per feriem infinitam integrat, quae autem feries ita eft comparata, vt fupra memoratis cafibus alicubi abrumpatur, expreffionemque finitam fuppeditet, vnde integrale quaeitum facillime colligatur. Verum tamen omnia haec integralia non nifi funt particularia, neque totam vim aequationis differentialis propofitae exhauriunt, deinde etiam, quoties quantitas *b* eft negatiua, imaginariis ita inquinantur, vt omni plane vfu deftituantur. Vtrique incommodo Cel. Auctor ita medetur, vt primo methodum exponat, ex cognito huiusmodi aequationum integrali quopiam particulari integrale completum eliciendi, quod fi quantitas *b* fuerit pofitiua, quantitates exponentiales implicat: deinde vero oftendit, quomodo iftae quantitates exponentiales, quae, exiftente *b* negatiuo, fiunt imaginariae, per tangentes arcuum circularium realiter exprimi queant. Denique cum methodus illa, ex integrali particulari completum eliciendi, certam quandam integrationem exigat, quae moram faceffere queat, etiam huic incommodo occurrit, dum obferua, tpro quouis cafu primam euolutionem non vnum, fed adeo duo integralia particularia, praebere, quoniam ibi formula radicalis $\sqrt{b}$ ingreditur, quam aeque negatiue, ac pofitiue, accipere licet. Alia igitur methodo vtitur, cuius ope ex cognitis duobus integralibus particularibus integrale completum, fine vlla noua integratione, concludi queat. Quod cum ab eo, quod priori methodo erat erutum, difcrepare nequeat, ex vtriusque collatione integrationem priori implicatam effi-

 cere

cere licet, vnde poſtremo hanc integrationem maxime memorabilem deducit, quod ſit

$$\int \frac{e^{\frac{2ac}{n}x^n}dx}{uu} = \frac{Ce^{\frac{2ac}{n}x^n}z-u}{Cu(2acx^{n-1}uz+\frac{udz}{dx}-\frac{zdu}{dx})}$$

vbi quantitates z et u per x ita definiuntur, vt ſit:

$$z = x^{\frac{-n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8nac}.x^{\frac{-3n+1}{2}} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8.n16na^2c^2}x^{\frac{-5n+1}{2}} + \text{etc.}$$

$$u = x^{\frac{-n+1}{2}} - \frac{(nn-1)}{8nac}x^{\frac{-3n+1}{2}} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n16na^2c^2}x^{\frac{-5n+1}{2}} - \text{etc.}$$

Cum igitur hae formae z et u adeo in infinitum excurrere queant, eo magis eſt mirandum, quod formula $e^{\frac{2ac}{n}x^n}\frac{dx}{uu}$ integrale, idque per expreſſionem ſatis ſimplicem, exhiberi poſſit. Tum vero etiam hoc conſuetae integralium formae aduerſari videtur, quod quantitas conſtans arbitraria C, per integrationem ingreſſa, quae alioquin nude adiicitur, hic ipſi formae integrali ſit implicata. Quod ſingulare phaenomenon ſi attentius perpendatur, mox patebit, integrationem illam veritati conſentaneam eſſe non poſſe, niſi denominatoris pars

$$2acx^{n-1}uz + \frac{udz-zdu}{dx}$$

fuerit quantitas conſtans, puta A; tum enim iſtud integrale in formam naturalem abit:

$$e^{\frac{2ac}{n}x^n}\frac{z}{Au} - \frac{1}{AC}.$$

Num autem res ita ſe habeat, hoc modo explicari poteſt: Quoniam quantitates z et u per ſeries exprimuntur, easque ipſas, quae initio ex euolutione aequatio-

nis

nis differentialis secundi gradus sunt eruta, viciſſim patet, eas ita pendere ab x, vt sit:

$ddz + 2acx^{n-1}dxdz + (n-1)acx^{n-2}zdx^2 = 0$ et

$ddu - 2acx^{n-1}dxdu - (n-1)acx^{n-2}udx^2 = 0.$

Nunc prior aequatio per u, posterior vero per z, multiplicetur, ac productorum differentia dabit

$uddz - zddu + 2acx^{n-1}dx(udz + zdu) + 2(n-1)acx^{n-2}uzdx^2 = 0,$

cuius integrale manifesto est

$$udz - zdu + 2acx^{n-1}uzdx = A\,dx.$$

Cum autem, facto $ac = \infty$, fiat $u = z = x^{\frac{-n+1}{2}}$ et $uz = x^{-n+1}$, euidens est, statui debere $A = 2ac$, sicque integratio superior abit in hanc formam:

$$\int e^{\frac{2ac}{n}x^n}\frac{dx}{uu} = e^{\frac{2ac}{n}x^n}\frac{z}{2acu} - \text{Const.}$$

quae non solum principiis est conformis, sed etiam, facta differentiatione, ob

$$udz - zdu = 2acdx(1 - x^{n-1}ux)$$

eius veritas egregie confirmatur. Hinc autem iam aequationis $dy + ayydx = accx^m dx$, posito $m = 2n - 2$, et quantitatis z valore per superiorem seriem expresso, integrale multo succinctius ita exhiberi poterit, vt sit:

$$y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx} + \frac{2Cce^{\frac{-2ac}{n}x^n}}{z(Cz - Ce^{\frac{-2ac}{n}x^n}u)} \quad \text{seu}$$

$$y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx} + \frac{2c}{z(De^{\frac{2ac}{n}x^n}z - u)}$$

vbi D est illa constans arbitraria per integrationem iniecta ad integrale completum constituendum.

VII.

Inueſtigatio functionum ex data differentialium conditione.

Auctore L. Eulero pag. 110.

In ſuperiori volumine a Cel. Auctore huius diſſertationis iam nouus quaſi campus Analyſeos infinitorum eſt detectus, in quo colendo Geometrae vires ſuas ad ſummum vniuerſae matheſeos ſublimioris incrementum exercere queant. Poſtquam enim obſeruaſſet omnia praecepta, quae vulgo circa differentiationem et integrationem tradi ſolent, ad functiones tantum vnicae variabilis referri, ita vt etiamſi plures variabiles in calculo occurrant, tamen ſemper per eliminationem negotium eo perduci debeat, vt tandem ad aequationem duas tantum variabiles complectentem perueniatur, ex qua, qualis altera alterius ſit functio, definiri oporteat. Hinc iſtam Analyſeos partem, quae adhuc fere ſola eſt exculta, ita definiuit Auctor, vt ſit methodus functionem vnius variabilis ex data eius differentialium cuiusque gradus conditione inueſtigandi, ex quo ſecunda Analyſeos pars circa functiones binarum variabilium verſari eſt cenſenda, ita vt ex data quapiam relatione inter eius differentialia eius vera indoles inueſtigari debeat, quae inueſtigatio denuo in partes ſubdiuidetur, prout in relationem illam differentialia, vel tantum primi, vel etiam ſecundi, altiorumue ordinum ingrediantur.

diantur. Iam in hac differtatione prima iftius fubdiuifionis elementa ftabiliuntur, atque variae methodi proferuntur, functiones binarum variabilium indagandi, ex data quacunque differentialium primi gradus relatione. Quodfi nimirum littera V denotet functionem quamcunque binarum variabilium x et y, quas a fe inuicem prorfus independentes intelligi oportet, ita vt vtramque feorfim per omnes valores variare liceat, geminas inde formulas differentiales nafci, eft manifeftum, hoc modo indicari folitas $(\frac{dV}{dx})$ et $(\frac{dV}{dy})$, quarum illa ex variatione folius x, haec vero folius y oritur, vtraque autem eft quantitas finita, et more folito ita per differentiationem reperitur, vt, fi differentiatio praebeat $dV = P dx + Q dy$, vbi fine dubio litterae P et Q iterum erunt certae functiones ipfarum x et y, futurum fit $P = (\frac{dV}{dx})$ et $Q = (\frac{dV}{dy})$. Nunc igitur omnes quaeftiones huc pertinentes ita funt comparatae, vt data quacunque relatione inter quantitates x, y, V, et P, Q, inde litterae P et Q eliminentur, et aequatio ab illis libera tantum inter x et y et V indagetur, quippe qua indoles functionis V, quemadmodum a binis x et y pendet, declarabitur. Cum autem, quando de functionibus vnicae variabilis agitur, plurimae quaeftiones adhuc calculi vires fuperent, tum hoc idem multo magis in his quaeftionibus circa duas variabiles vfu venit, vt numerus earum, quas quidem refoluere licet, admodum fit limitatus, praefertim hoc tempore, quo ifta noua Analyfeos pars demum tractari eft coepta. Interim tamen methodi, quas Auctor hunc in finem excogitauit, mox vberiorem tractationem polliceri videntur.

PHYSICO-

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

De motu vibratorio fili flexilis corpusculis quotcunque onusti.

Auctore L. Eulero pag. 215.

Problema hoc, iam ab aliis solutum, Cel. Auctor hic ita tractat, vt id ad solutionem generalem problematis de cordis vibrantibus accommodet. Postquam enim motus omnes, cuius corda tensa et aequaliter crassa est capax, facili constructione determinasset, plures obiectiones contra hanc solutionem, a more Analyseos solito recedentem, est expertus, quarum vis eo potissimum erat directa, vt, nisi cordae initio certa quaedam figura fuerit inducta, eius motus nullo plane modo per Analysin definiri posse asseueraretur, quamvis negari non posset, ad quamcunque figuram corda initio fuerit detrusa, ea demissa certum quendam motum necessario subsequi debere. Controuersia igitur non tam in hoc agitabatur, quod Auctoris solutio sit, erronea, sed quod problema ipsum ita sit comparatum, vt nullam plane solutionem admittat, atque adeo nefas sit, solutionem a quoquam tentari. Facile quidem Auctor concedebat, solutionem a se datam a consueto more huiusmodi problemata resoluendi discrepare, atque adeo vires Analyseos adhuc plerumque excultae superare, scilicet ideo

ideo ista Analyseos pars huiusmodi quaestionibus soluendis non sufficit, quia in functionum tantum vnicae variabilis inuestigatione versatur; indeque enim certe nunquam eiusmodi solutionem obtinere licet, quae curuam quamcumque, pro lubitu ductam, nullaque certa lege contentam, qualis forte cordae initio fuerit impressa, in se complecteretur. Verum vel hoc exemplo alterius illius Analyseos partis supra laudatae vis maxime eluceti, ex qua sola huius problematis solutio est petenda. Durante enim cordae motu, interuallum, quo punctum eius quoduis a situ naturali distat, re vera, vt functio duarum variabilium, debet tractari, quoniam id non solum a loco puncti in corda, sed etiam a tempore iam elapso, pendet. Docuit vero Cel. Auctor, quoties per integrationes ad huiusmodi functiones deducimur, tum non, vti in integrationibus vulgaribus, quantitatem constantem arbitrariam in calculum inuehi, sed eius loco adeo functionem arbitrariam cuiuspiam variabilis, quam deinceps hoc casu chordarum ita determinari oporteat, vt ad figuram illam prorsus arbitrariam, quae cordae initio fuerit inducta, accommodetur. Quam insignem obseruationem cum Auctor postmodum demum clarissime illustrasset, in hac disquisitione, loco cordae, filum perfecte flexile ponduscul is quotcunque onustum, dataque vi tensum, considerat, et postquam singula ponduscula a situ naturali pro lubitu vtcunque fuerint diducta, subitoque dimissa, motum eorum secuturum determinat; quod cum sine subsidio sublimioris illius Analyseos partis praestari queat, siquidem singulorum corpusculorum motus seorsim indagare licet, ex ipsa so-

 lutio-

lutione luculenter apparet, motum huiusmodi fili, quotcunque ponduſculis onuſti, ſemper analytice aſſignari poſſe, quomodocunque ſingula ponduſcula initio a ſitu naturali fuerint deducta. Nunc igitur, tam ponduſcula, quam eorum interualla, in infinitum diminuantur, vt hoc modo corda continua craſſitie praedita exoriatur, quo facto nulli quoque dubio relinquetur locus, quin huiusmodi cordae motus, poſtquam ipſi initio figura quaecunque fuerit inducta, per Analyſin determinari poſſit. Ad hoc vero neceſſario altera illa Analyſeos pars, circa functiones binarum variabilium occupata, requiritur, neque iam amplius de ſolutione generali, quam Auctor pro motu cordarum vibrantium inuenit, dubitare licebit. Caeterum inter infinitos motus, quos tale filum ponduſculis onuſtum recipere poteſt, et qui plerumque maxime ſunt irregulares, imprimis notaſſe iuuabit, dari quoque motus ſpecies regulares, aequalibus vibrationum interuallis diſtinctas, quae propterea ſonos determinatos edant. Si tam interualla, quam ponduſcula, ſint aequalia, filum duobus onuſtum duos ſonos edere poteſt, qui ſunt inter ſe, vt ſinus angulorum 30° et 60°, hoc eſt, vt 1 ad $\sqrt{3}$; filum autem tribus onuſtum tres ſonos edere poteſt, qui ſunt inter ſe, vt ſeries angulorum $22\frac{1}{2}^\circ$ 45°. et $67\frac{1}{2}^\circ$; quatuor vero ponduſculis onuſtum quatuor ſonos, qui ſunt, vt ſinus angulorum $18^\circ.36^\circ$ $54^\circ 72^\circ$. et ita porro, qui ergo ſoni plerumque ſunt irrationales inter ſe, ac propterea maxime diſſoni.

II.

II.

De motu cordarum inaequaliter crassarum.

Auctore L. Eulero pag. 246.

Notum est inter musicos, cordas, quibus in instrumentis musicis vti solent, sonos harmoniae aptos non edere, nisi eae per totam longitudinem eandem vbique habeant crassitiem, atque a cordis inaequaliter crassis sonos rudes et maxime ingratos produci, ex quo huiusmodi cordae falsae appellantur. Quod autem cordae aequaliter crassae sonos ad musicam idoneos edant, id non solum inde venit, quod earum vibrationes aequalibus temporis interuallis absoluantur, sicque sonum certi tenoris exhibeant, sed etiam potissimum eam ob causam, quod eadem corda pulsata, praeter sonum principalem, simul alios sonos acutiores auditui percipiendo offerat, qui cum principali gratissimam harmoniam constituant. Huiusmodi scilicet corda pulsa, praeter sonum principalem, alii soni, cum octaua, tum duodecima, porro duplici octaua, seu decima quinta, ac denique decima septima altiores, debiliter quidem, sed satis distincte, percipiuntur, qui soni, cum ad principalem sint, vt numeri 2, 3, 4, 5, ad vnitatem, egregia harmonia sensum auditus permulcent. Quomodo autem hi soni ab eadem corda simul producantur, quo phaenomeno plerisque vniuersa motus vibratorii theoria euerti eſt viſa, primum ab acutiſſimo Geometra *Daniele Bernoulli* feliciſſime eſt explicatum. Qui autem hanc rationem minus perſpexerunt, mira myſteria in his ſonis ab eadem corda ſimul editis quaeſiuerunt, inter quos adeo peritiſſimus rei muſicae artifex Gallus *de Rameau* principium vniuerſae harmoniae in hoc phaenomeno ſe feliciter detexiſſe gloriatur. Non ideo ſcilicet plures ſonos ſuauem harmoniam auribus exhibere arbitratur, quod vibrationum eodem tempore editarum numeri ſimplicem ac perceptu facilem inter ſe teneant rationem, quemadmodum omnes ſcriptores muſici adhuc ſtatuerunt, ſed potius, euerſo hoc principio indoli vibrationum innixo, ideo plures ſonos nobis placere, ſi ab eodem corpore ſonoro ſimul excitari queant: hoc modo putat verum harmoniae principium nobis ab ipſa natura declarari, neque id alibi quaeri oportere. Verum praeterquam quod ſententia recepta circa harmoniae principium ſolidiſſimis rationibus ſit confirmata, neque ea tali phaenomeno, quod ab eodem corpore plures ſoni harmonici ſimul edi queant, infringatur; haec noua opinio, omni ratione deſtituta, penitus refelletur, ſtatim atque eiusmodi corpora ſonora in natura exiſtere oſtendentur, quae ſimul plures ſonos minime harmonicos edant. Huiusmodi autem exempla iam in ſuperiori diſſertatione ſunt prolata, vbi a filo pluribus corpuſculis onuſto eiusmodi ſoni diuerſi edi poſſunt, qui, dum ne rationalem quidem rationem inter ſe tenent, maxime ab harmonia abhorrent, cuiusmodi plurima alia exempla in corporibus ſonoris, veluti campanis, laminis elaſticis, aliisque, in medium proferri poſſent. Idem

quoque

quoque in cordis inaequaliter craſſis plerumque vſu venit, quarum motum vibratorium Auctor in hac diſſertatione definire eſt aggreſſus. Verum haec inueſtigatio tantis implicatur difficultatibus, vt non niſi pro certis inaequalitatis legibus expediri poſſit, idque euenit ob defectum illius alterius Analyſeos partis iam ſaepius memoratae, quae circa integrationem functionum duas variabiles inuoluentium occupatur, et quae minime adhuc eousque eſt exculta, vt cordae, vtcunque inaequaliter craſſae, motus vibratorius inde definiri poſſit. Duos igitur tantum caſus Auctor expediuit, alterum, quo cordae craſſities ſecundum certam figuram conicam varíatur, alterum vero, quo corda ex duabus partibus diſparibus eſt compoſita, cuiusmodi oritur, ſi duae cordae ordinariae, altera craſſior, altera tenuior, connectantur. Talium cordarum motum ſemper fore maxime irregularem, neque idcirco vlli ſono muſico edendo aptum, obſeruat Auctor, niſi partium longitudo reciprocam teneat rationem diametri craſſitiei, quo ſolo caſu corda perinde ſonabit, atque corda vbique aequaliter craſſa. Praeterea vero quoque ſub certis tantum conditionibus vibrationes iſochronae naſci poſſunt, quas Auctor accurate inueſtigat, ad quod cum calculus ſatis prolixus requiratur, quem in genere expedire haud licet, caſum euoluit, quo ambae partes paris ſint longitudinis, pondus autem alterius altero quadruplo ſit maius; calculoque abſoluto inuenit, talem cordam plures ſonos ſimul edere, qui ſint inter ſe, vt hi numeri 0,30408; 0,69591; 1,30408; 1,69591; 2,30408 etc. qui cum ſint incommenſurabiles, maxime quoque erunt diſſoni, etiam ſi ab eodem corpore ſonoro ſimul edantur. Denique Auctor iterum ad cordas vtcunque inaequaliter craſſas reuertitur, atque in eos caſus inquirit, quibus ſaltem vibrationes iſochronae produci queant, poſtquam ſcilicet corda initio certo quodam modo fuerit impulſa, hocque ſimilibus caſibus euenire obſeruat, quibus aequationem *Riccatianam*, de qua ſupra eſt actum, reſoluere licet.

III.

Thermometri metallici deſcriptio.

Auctore I. E. Zeihero p. 305.

Omnium thermometrorum ratio huic innititur phaenomeno vniuerſali, quod omnia corpora calore in maius volumen expanduntur, frigore autem in minus contrahuntur. Quodſi ergo cuiusque corporis verum volumen quauis tempeſtate exactiſſime dimetiri liceret, mutatio in caloris gradu facta inde commode diiudicari poſſet, nihilque referret, ſiue corpus illud foret ſolidum, ſiue liquidum; etiamſi forte vera caloris quantitas perperam incremento voluminis proportionalis cenſeatur. Quantumuis autem iſtud thermometrorum principium firmum videatur, et ad ſcopum egregie accommodatum, id tamen in ſe ſpectatum omni plane vſu deſtitueretur, niſi ſingularis conditio ei eſſet adiuncta, qua fit, vt ab eodem caloris gradu in diuerſis corporum generibus omnino diſpares voluminis expanſiones

ſiones producantur, quam circumſtantiam auctores non ſemper ſatis ſollicite perpendiſſe videntur. Quodſi enim omnia corpora pro ratione magnitudinis ab eodem gradu caloris aequalia voluminis incrementa acciperent, nullo plane modo, nobis quidem, has mutationes, quantumuis fuerint magnae, obſeruare liceret, quandoquidem etiam menſurae, quibus vti conſueuimus, parem mutationem ſubirent, ſicque perpetuo ad corpora menſuranda eandem rationem conſeruarent. Neque ergo thermometra vulgaria, etiam in maxima tempeſtatis commutatione, vllam variationem eſſent indicatura, ſi vitrum pari expanſioni a calore oriundae eſſet obnoxium, atque liquor in eo contentus. Ex quo haec thermometra eatenus tantum variationi caloris ac frigoris indicandae ſunt apta, quatenus liquor, quo tubi vitrei cum bulla ſubnexa impleri ſolent minorem mutationem a calore patitur, quam ipſum vitrum; quin etiam neceſſe eſt, vt mutatio vitri multo ſit minor, quam liquoris, quia alioquin effectus parum eſſet ſenſibilis. Hoc idem ergo quoque de corporibus ſolidis, quae ad ſimilem effectum producendum fuerint adhibenda, erit tenendum, vt ſcilicet parietes, vel alius generis ſuſtentacula, iuxta quae menſura inſtitui debet, multo minus a calore afficiantur, quam virgae illae, vel bacilli, ex quorum expanſione gradum caloris diiudicari oportet. Pluribus igitur experimentis edoctus obſeruauit ſolertiſſimus Auctor, in hunc finem optimo ſucceſſu bacillos, ſeu cylindros, metallicos adhiberi poſſe, inter quos argenteos, ſeu ſaltem cupreos, eligendos potiſſimum arbitratur, quod non ſolum a caloris mutatione inſignem variationem accipiant, ſed etiam prae-

praegrandem caloris gradum ſine fuſione ſuſtinere queant. Tum vero modum excogitauit, plures huiusmod cylindros ita inter ſe adaptandi, vt mutationes ope vectium indicandae tandem quantumuis magnae reddantur, neque vero et hunc effectum expectari poſſe euidens eſt, niſi paries, vel fulcrum, in quo, tanquam corpore fixo, hypomochlia illorum vectium conſtituuntur, multo minorem expanſionem ab aucto calore patiantur. His circumſtantiis probe perpenſis nullum eſt dubium, quin huiusmodi noua thermometra metallica aeque commode ad tempeſtatis mutationes indicandas vſurpari queant, atque vulgaria, ſiue ſpiritu vini, ſiue mercurio, impleri ſolita.

IV.

Thermometrorum punctis conſtantibus gaudentium emendatio.

Auctore I. E. Zeihero p. 314.

Nimis ſaepe euenire ſolet, vt cum thermometra omni cura fuerint conſtructa, ac praecipue ſcalae diviſionum, in tabulis metallicis nitidiſſime elaboratae, tum, diffracto forte tubo vitreo, omnis opera pereat, neque eadem ſcala deinceps iterum ad ſimilem ſcopum adhiberi poſſit. Graduum enim in ſcala exſculptorum magnitudo ita pendet a ratione, quam tubi amplitudo tenet, ad bulbi capacitatem, vt niſi in duobus huiusmodi inſtruſtrumentis haec ratio exactiſſime fuerit eadem, quod certe rariſſime contingit, eadem iis inſeruire nequeat. Hinc Cl. Auctor remedium ingenioſe excogitatum proponit, quod in hoc conſiſtit, vt tubo thermometrico loco bulbi vitrei capſula ferrea adaptetur, quae ope cochleae ipſi inſertae facile ita parari poteſt, vt eius cauitas pro lubitu ampliari et coarctari queat. Sic enim paucis experimentis inſtitutis haud difficulter ea capacitas capſulae definietur, quae ad tubi amplitudinem relata praeciſe eandem graduum magnitudinem exigat, quae deſideratur, eique proinde ſcala iam confecta optimo ſucceſſu adiungi queat, ſi modo tantum liquoris infundatur, vt vnicus temperiei gradus recte deſignetur.

V.

Emendatio Microſcopii Solaris.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 316.

Obiectorum minimorum per microſcopia ſolaria, qualia adhuc ab artificibus ſunt conſtructa, repraeſentationem pluribus vitiis eſſe inquinatam, vel inde intelligitur, quod cum radii lucidi per ipſa obiecta transmittantur, horum forma eatenus tantum in imagine exprimatur, quatenus ipſa ſunt pellucida, ita vt, ſi hac proprietate carerent, nulla prorſus repraeſentatio efficeretur.

retur. Deinde ob eandem rationem, quod radii ſolares, qui ad illuminationem adhiberi ſolent, per ipſam quaſi ſubſtantiam obiectorum tranſire debent, inſignes refractiones patiuntur, quibus fit, vt imagines intolerabilibus iridis coloribus circumfuſae exhibeantur. Hoc ſcilicet vitio microſcopia ob ingentem ſpeciei multiplicationem multo magis premuntur, quam laternae magicae, quarum conſtructio certam rationem ſequi ſolet. Vtrumque autem horum inſtrumentorum genus Cel. *Eulerus* ab hoc ingenti vitio feliciter liberauit, dum eiusmodi ſtructuram docuit, qua obiectorum maxime opacorum imagines, tam per microſcopia ſolaria, quam per laternas magicas, ſine vlla confuſione nitidiſſime repraeſentantur, dummodo ſufficienti luminis copia illuſtrentur, quod egregium inuentum in Tom. III. Nou. Comment. Academiae noſtrae ita accurate extat explicatum, vt huiusmodi inſtrumenta a ſolerti artifice haud difficulter confici poſſint. Maximum autem ad hunc ſcopum adiumentum Cel. huius diſſertationis Auctor attuliſſe merito eſt cenſendus, dum vulgaria microſcopia ſolaria, ope leuis mutationis in eorum ſtructura faciendae, ad hunc nouum vſum transferre docuit, neque vllum eſt dubium, quin duabus pluribusue lentibus adhibendis repraeſentatio adhuc praeſtantior obtineri poſſit, quem ſummum perfectionis gradum Auctor pollicetur.

VI.

Diſſertatio de Experimento quodam magnetico.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 326.

Additamentum ad praecedentem Diſſertationem auctore eodem p. 340.

Virtute magnetica impraegnatur filum ferreum nonſolum, cum ad polos magnetis affricatur, ſed etiam dum quodam interuallo remotum ſuper ambos polos traducitur. Quod cum olim diligentiſſimus naturae ſcrutator Gallus *Du Fay* plurimis experimentis eſſet proſecutus, inſigne ac maxime mirandum phaenomenum obſeruauit, quod poli magnetici, qui filo ferreo in minori diſtantia ſuper polos magnetis traducto imprimuntur, iidem in maiori diſtantia ita inter ſe permutentur, vt qui terminus in minori diſtantia naturam poli borealis eſſet nactus, idem in maiori diſtantia ad polum auſtralem dirigeretur. Quod phaenomenum cum omni Theoriae, quae quidem ad magneticos effectus explicandos excogitari queat, maxime aduerſari videatur, Cel. Auctor in eo eſt occupatus, vt eius egregium conſenſum cum ea Theoria, quam nuper circa vires magneticas et electricas protulit, dilucide demonſtret. Quem in finem ſupponit, vires attrahentes et repellentes amborum cuiusque magnetis polorum

lorum in vnicum punctum coactas esse, et rationem sequi inuersam distantiarum, indeque euenire posse per calculum omni rigore geometrico institutum ostendit, vt ab istis viribus coniunctis in maiori distantia omnino ei contrarius producatur effectus, qui alias in distantia minori exeratur. Deinde animaduertit, quod etsi adsumtae hypotheses naturae minus sint consentaneae, et etiamsi verae vires magneticae ab hac lege discrepent, similem tamen effectum inde resultare debere, in quo haud debile Theoriae suae firmamentum situm esse contendit. Iungit tum huic dissertationi supplementum eximium, in quo multa alia experimenta noua, *Fayano* non absimilia, a priori ex theoria sua praeuisa, et experientiae penitus consona, recenset et explicat.

VII.

Cogitationes de aggeribus construendis. Auctore L. Eulero pag. 352.

In prouinciis maritimis haec quaestio maximi est momenti, vbi littora aduersus fluctuum impetum aggeribus muniri oportet, quorum tam exstructio, quam conseruatio, ingentes sumtus postulat. Antequam igitur huiusmodi opus suscipiatur, sollicite est disquirendum, vtrum reditus ex terris hoc modo munitis percipiendi expensus ad aggeres requisitas superent, nec ne? Nisi enim cultura terrae plus fructuum afferret, de aggerum ex-

extructione cogitandum ne quidem foret. Tum vero etiam imprimis est perpendendum, si littorum ora fuerit valde irregularis et sinuosa, minime esse consultum, aggeres iuxta ipsam littoris figuram duci, sed potius praestare, vt aggeribus a littore reductis forma commodior tribuatur. Quanquam enim hoc modo minor terrae tractus includitur, vnde propterea minores fructus percipiantur, tamen fieri potest, vt haec iactura aggeris contractione ob multo minores sumtus in eius extructionem requisitos largiter compensentur. Semper igitur haec quaestio diligentissime euolui meretur, qua quaeritur: quomodo data littoris cuiuspiam figura aggeres in eo sint construendi, vt fructus ex terra percipiendi maximo lucro excedant sumtus in aggerum tam extructionem, quam conseruationem, impendendos, in qua disquisitione facile intelligitur saepius euenire posse, vt maxime expediat minorem terrae portionem hoc modo muniri, lucrumque inde expectandum ob aggeris diminutionem multo maius esse aestimandum. Ad huiusmodi ergo quaestiones enodandas ante omnia expendi oportet: primo, quantas expensas exstructio aggeris datae longitudinis, veluti vnius perticae, postulet; secundo, quantum ad conseruationem talis portionis aggeris quotannis requiratur, quos annuos sumtus, tanquam vsuram, ad sortem fixam reuocari conuenit, quibus coniunctis totum pretium vnius perticae aggeris habebitur; tertio vero ad fertilitatem et vsum terrae muniendae est spectandum, vt pateat, quantos fructus a qualibet pertica quadrata quotannis expectari liceat, quos pariter ad sortem fixam reduci conueniet. His rebus accurate determinatis quaeſtio ad meram Geometriam et Analyſin reuocatur, cuius tamen reſolutio ingentem circumſpectionem poſtulat, ideo neceſſariam, quod aggeres quidem quantumuis intra continentem reduci, neutiquam vero vltra extremam littoris oram extendi licet. In prouinciis etiam aggeribus iam munitis haec eadem quaeſtio ſaepius occurrere ſolet, quando ſcilicet fluctus marini ſenſim tantum terrae vltra aggeres alluunt, vt operae pretium videatur, hanc nouam terram nouo aggere cingi, et in vſum conuerti. Quod cum non ita pridem in prouincia Germaniae maritima contigerit, atque haud leuis controuerſia circa noui aggeris extructionem fuerit orta, et ad Auctorem delata, anſam ei praebuit, hoc argumentum, quod ſaepius ſummum vſum habere poteſt, accurate pertractandi.

PHYSICA.

PHYSICA.

I.

Ad Obſeruationes et Experimenta de Mercurio ex ſcriptis *Hermanni Boerhaue*. Supplementum I. recenſente *Carolo Friderico Kruſe* p. 381.

Si quis Chemicorum naturam mirabilis metalli Mercurii (quidni enim metallum dicamus, quod noſtra aetate a frigore ambiente condenſari, et iterum ab augmento caloris fluidum fieri experti ſumus?) intelligenter ac indefeſſo ſtudio explorauit, is certe eſt vir ſummus, in arte ſalutari et hermetica communis Medicorum praeceptor, immortalis *Hermannus Boerhaue*. Fidem faciunt huius aſſerti ſcripta eius cum Regia Scientiarum Academia Pariſienſi, et cum Societate Regia Londinenſi communicata. Stupendo labore, conſtantia Herculea, per XV. annos, vno igne, Mercurium torſit, naturam variis artificiis ſollicitauit, immo coegit, vt vel inuita ſecreta ipſi ſua reuelaret. Superaddidit praeterea IV. annorum labores. Perrexit enim in hac opera, quoad vixit, ita vt nil dici poſſit, quod ipſius experimentis et obſeruationibus aequiparari queat. Felici Chemicae artis, imo vniuerſae ſalutaris doctrinae, fato, factum eſt, vt ſcripta viri immortalis, typis nondum exſcripta, poſtquam ab *Hermanno* et *Abrahamo Kaau*, fratribus, *Boerhauiis*, in Ruſſiam perlata eſſent, haere-

haereditaria possessione cesserint Viro Illustri *Carolo Friderico Kruse*, AVGVSTAE omnium Russiarum IMPERATRICIS Archiatro ac Consiliario Status actuali, Academiae Imperialis Scientiarum Socio, *Hermanni Kaau Boerhauii* genero, qui, quod *Abrahamus* animo conceperat, at immatura morte facere prohibitus est, scripta *Boerhauiana*, publico emolumento studens, singillatim edet. Primum hoc, quod praedicamus, specimen ostendit, quid inposterum expectare debeamus. Academia non potest non lubenter recipere et in publicum vsum emittere scripta viri, quem inter Collegas quondam suos numerasse honori sibi ducit. Scopus tantorum Mercurio impensorum laborum hic fuit, vt constaret, quid de promissis Alchemistarum, fixationem, solidationem, transformationem, Mercurii iactantium, sperare fas sit. Si, quod nonnullis placet, primum fauorabiliter sensit de via, Mercurii ope, ad magnum, quod vocant, opus ducente, procul dubio ad mirabiles huius metalli qualitates respexit, quae quo difficiliores essent explicatu, eo magis inducere debuerunt sincerum atque veritatis amantem virum, vt non omnem prorsus fidem denegaret exemplis, de metallo hermetica arte parato afferri solitis. Philosophi est in dubium vocare, quae non intelligit, aut quae explicare nescit; negare non item. Ad hoc requiritur, vt impossibilitatem demonstrare valeat. Id autem est, quod millies et nouies repetita experimenta Philosophum docuerunt. Obseruauit namque, Mercurium, varias licet induentem personas, ast re ipsa immutabilem, vehementiore nimirum ignis actione, in pristinam semper formam redire.

Ergo

Ergo non inutiliter operam ſuam collocaſſe eſt cenſendus magnus *Boerhauius*; in periculoſo mari ſyrtes, ad quas multi bonorum ſuorum naufragia fecerunt, euitare docuit: vtilius ſane, quam ſi poſſibilitatem transmutationis Mercurii in aurum oſtendiſſet, aut ſi ipſum aurum, in perniciem aliorum et ſui, conficere docuiſſet.

II. et III.

Obſeruationes meteorologicae annis 1757 et 1758. Petropoli factae, cum animaduerſionibus et conſectariis.

Auctore I. A. Braun p. 392. et 440.

De ipſis obſeruationibus, vt quae eadem methodo, iisdemque ac praecedentes inſtrumentis, ſunt inſtitutae, nil dicere attinet. Operae autem pretium eſt, ſingularia quaedam notatu digna huc transferre.

Anno 1757.

Altitudo Barometrica, maxima ex omnibus, quae Petropoli obſeruatae fuerunt, hoc anno fuit,

29. 12 poll. Pariſ.
30. 35 — Lond.

Calor maximus 97 grad. therm. Delisliani hoc aeque ac ſequente anno obſeruatus eſt, qui aequalis eſt calori

 hominis

hominis naturali et ſanguinis in homine ſano. Calor fere perpetuus per totam aeſtatem ac intolerabilis. Serenitas dierum per totum annum extraordinaria.

Anno 1758.

Calor maximus, etiamſi calori praecedentis anni aequalis fuit, minus tamen frequenter accidit. Menſe Iulio nullum tonitru, quod ſatis inſolitum. Copia pluviae per omnem aeſtatem 16 poll. Pariſ. quod etiam inſolitum, quare a nimia humiditate annona multa et foenum periere. Declinatio magnetis, vt fere ſemper ſolet $4\frac{1}{2}°$ W. Maculae in ſole copioſiſſimae.

Tempus medium, quo glacies Neuae fluuii ſolui ſolet, eſt circa d 8 Aprilis, congelationis terminus medius circa 20 Nouembris, monſtrante thermometro Delisliano 166 gradus, ſi quidem hoc frigus per aliquod dies durat.

IV.

Deſcriptionis Piſcium rariorum e Muſeo Petropolitano exceptorum continuatio.

Auctore I. T. Koelreuter p. 420.

Sex piſces ſunt, eadem methodo, ac iſti in praecedente volumine, deſcripti, nempe:

Cyprinus pinna caudae horizontali, ſubtrifida; dorſuali faſtigata, paruula.

Gobio

Gobio pinna ventrali ſubrotunda, acetabuliformi, e duobus pedunculis, octoque radiis, valde ramoſis, compoſita.

Gobio pinna dorſuali vnica, longa; pectoralibus latiſſimis, acetabulum planiuſculum includentibus.

Sparus duabus vtrinque maculis notatus; primo pinnarum ventralium radio longiſſimo, aſtaci antennam referente.

Labrus valde oblongus, taeniis tribus candidis, diuerſae longitudinis, inſignitus, cauda integra.

Scomber dorſi anique pinna continua, aculeis ad vtriusque initium acceſſoriis.

ASTRONOMICA.

I.

Obſeruationes aliquot aſtronomicae et meteorologicae, Lipſiae habitae a Godofr. Heinſio p. 473.

Varias continet hoc a Cl. *Heinſio* ad nos transmiſſum ſcriptum Obſeruationes, ſeparatim hic indicandas.

D. 24. Ian. ſtyl. nou. An. 1758. Eclipſin Lunae totalem obſeruabat Cl. Vir, quae vero Obſeruatio per intercurrentes nubes, et male terminatam, praeſertim ſub initium, vmbram telluris, turbata quodammodo fuit.

D. 26. Ian. eiusd. anni poſt merid. hora circ. $2\frac{5}{8}$ occupatus erat in capiendis altitudinibus Solis correſpondentibus, atque direxerat quadrantem ita, vt linea fiduciae $11°.40\frac{3}{4}'$. reſponderet. Pronus ad contactum iam erat cum filo tubi horizontali Solis nubi denſiori inuoluti ſuperior limbus, cuius admodum exigua portio infra filum horizontale adhuc perſiſtere videbatur, fruſtra vero per aliquod tempus ipſius contactus celebrationem exſpectabat. Per 20 enim minuta ſecunda nulla ſenſibilis huius portionis imminutio, nullus ſenſibilis acceſſus limbi ad filum, obſeruari poterat, vsque dum tandem $17''$ ſerius, quam fieri debuiſſet, contactus conſe-

consequeretur. Inusitata haec a nube interposita producta irregularis refractio (pro huius enim effectu sine dubio hoc phaenomenon habendum est) cautos reddere debet Astronomos, ne per nubes captis altitudinibus astrorum coecam habeant fidem.

Cum Anno 1753. d. 17. Apr. st. nou. Lunae partialis obscuratio contingeret, ob varia incommoda non nisi finem Eclipseos annotare potuit Cl. Auctor, quem consequutum esse 8^h $35\frac{1}{4}'$. sufficiente cum certitudine statuere se posse putat.

D. 21 Iun. Anno 1757. $8^h. 57'. 55''$. emergentem post Lunae discum stellam, primae magnitudinis, *Cor Leonis* vocatam, vidit Cl. *Heinsius*, et d. 10. Iulii eiusdem anni $9^h. 31'. 20''$. secundi Satellitis Iouis emersionem totalem annotauit.

Indicauit etiam Cl. Auctor, visam a se An. 1756. vltimis Septembr. primisque Octobr. diebus Venerem interdiu oculis nudis, per duas tres ve horas, post Solis ortum, vt anno 1748. in Obseruationibus ad Academiam missis, et in Tom. III. Comm. nostrorum euulgatis, praedixerat, ac denique obseruationes quasdam meteorologicas communicauit, ex quibus patet, maximum calorem aestiuum, barometrique altitudinem mediam Lipsiensem, Petropolitanis fere aequari, Petropoli vero barometrum ab hoc termino vtrinque notabiliter longius excurrere, quam Lipsiae fieri solet.

II.

Obſeruatio Eclipſeos Solaris, quae contigit Anno 1758. d. $\frac{19}{30}$. Decemb. habita Petropoli

a b

A. N. Griſchow pag. 486.

Poſt indicatas obſeruationes, pro examinando motu horologii penduli inſtitutas, finem huius Eclipſeos contigiſſe $9^h. 36'. 45''$ - - - - $9^h. 37'. 0''$. ſtatuit Cl. Auctor. In limite $15''$. dubiam reddiderunt hanc obſeruationem, fumus focorum atque vapores vndantes, qui aerem inquinabant.

III.

Inſtrumentorum Aſtronomicorum, Reticulo, aut Micrometro, inſtructorum, noua emendatio.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 428.

Commoditati obſeruatoris, vt in imaginanda inſtrumentorum aſtronomicorum conſtructione, proſpiciatur, res eſt maioris momenti, quam ad primum intuitum videri poſſit, cum obſeruationum fides atque

acumen

acumen manifesto inde patiantur, si assumere aut diu seruare incommodum corporis situm cogitur Astronomus.

Laborant incommodo tali instrumenta astronomica micrometro praedita, consueto more constructa, quod obseruator ipsis vtens, si ad obiectum super horizontem valde eleuatum ipsa dirigit, reclinare caput atque corpus, immo supinum interdum situm assumere debeat. Conatur ipsa ab hoc defectu liberare Cl. Auctor, ope speculi metallici plani, quod tubo non longe a foco vitri obiectiui inclinato ad axem visionis situ, ita inserendum est, vt radii per axin tubi incecentes, in directione horizonti parallela ab ipso resiliant. Imponit autem prouti auctor monet, nouum hoc instrumentorum additamentum, nouae verificationis necessitatem Astronomo, quae, qua ratione commode perfici queat, sub finem exponit.

IV.

Obseruatio Eclipseos Lunae d. 18. Maii st. v. Anno 1760. Petropoli habita. Auctore N. Popow, Andr. Krasilnikow et Nic. Kurganow pag. 492.

Obseruatum est initium huius Eclipseos $11^h.18'.47''$. circiter, finis vero $12^h.4'.42''$. cum aliquibus momentis aliis, quorum tamen nullum praeter finem, satis securum est, vti obseruatores declarant.

Ad-

Adiunxerunt Cl. *Popow* et *Krasilnikow* obseruationem initii Eclipseos Solaris eod. anno d. 2. Iunii st. v. visae, quod $9^h. 1'. 44''.$ accidisse statuitur.

V.

Eclipsis Solis Lipsiae visa hor. mat. d. 13. Iunii stil. nou. Anno 1760.

Auctore G. Heinsio pag. 494.

Eiusdem huius Eclipseos similiter non nisi initium vidit Clar. *Heinsius*, quod statuit cecidisse in $7^h.25' 34''$. tam exacte, vt ingressus Solis in discum Lunae ad instans quasi, in oculos incurreret.

VI.

Obseruatio Eclipseos Lunaris d. $\frac{7}{18}$. Maii 1761. habita in Obseruatorio Imper. Petropolitano.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 496.

Praeter initium et finem Eclipseos, discique Lunae immersionem totalem, atque emersionis initium, praecipuarum quoque macularum immersionem et emersionem ex vmbra, annotauit Cl. Auctor, qui monet, ob ob vapores denſos, ac forte crepuſculum, de immerſione et emerſione macularum ſe ipſum per minutum dimidium immo vlterius inter obſeruandum dubium haeſiſſe, reliquis vero momentis maiorem fidem adſcribit.

Tam denſa erat vmbra terreſtris, vt per ſat longum tempus penitus quaſi Luna ex coelo euaneſceret, neque vllum ipſius veſtigium ſupereſſet.

VII.

Ad Noua Acta Petropolitana Acad. Scient. Tom. III. Additamentum ex Sinis P. *Antonii Gaubil* S. I. p. 499.

Obſeruationes ſatellitum Iouis pro determinanda locorum poſitione Geographica ſedulo ac ſollerter inſtituere, ſuprema Obſeruatoribus Aſtronomis, qui Sibiriam et Kamtſchatkam peragrarunt, lex fuit. Dolendum autem, non valde multas obſeruationes huius generis, et publica luce dignas, ad Academiam perueniſſe, quod vtrum praematurae morti Viri Cl. *Ludouici De l'Isle de la Croyere* d. x. Octobris 1741 in Kamtſchatka extincti, an aliis cauſis, adſcribendum ſit, non inquirimus. Palmam reliquis praeripere viſae ſunt obſeruationes a ſollertiſſimo obſeruatore *Kraſilnikouio* habitae, quare in Vol. III. Nou. Comment. typis exſcriptae ſunt, addita collatione cum ſimilibus in ſpecula Aſtronomica Petropolitana inſtitutis obſeruationibus,

 vnde

vnde differentia temporis Petropolin inter et varia Sibiriae et Kamtſchatkae loca pateſcit.

Aſt dices, ipſius Petropoleos Longitudo adhuc quidem dubia videri poteſt, quia trifariam notata reperitur, et vtra determinatio reliquis praeferenda ſit, non liquet. Tom. I. Comment. pag. 480. habetur 47°. 57′. 30″. in Syllabo Long et Latit. Atlanti Ruſſico praefixo extat 47°. 49′. et ex Ephemeridibus Aſtronomicis Pariſienſibus colligitur, eſſe 47°.53′.45″. Hac occaſione notare iuuabit, vltimam determinationem, ſecundum obſeruationes b. *Griſchouii* factam eſſe videri, quia in diſſertatione Tom. VIII. Nou. Comm. inſerta p. 434. differentiam temporis Petropolin inter et Pariſios eandem, quam Ephemerides Pariſienſes nobis exhibent, aſſumſit, nimirum: 1^h. 52′. Dum autem *Griſchouium* nominamus, cuius obſeruationes quanta accuratione ſe commendare ſoleant, nemo ignorat, maximam ſimul conciliamus huic determinationi auctoritatem. Ideoque, interea dum Obſeruatores noſtri Aſtronomi certius quid hac de re ſtatuent, non dubitamus, longitudines locorum ex obſeruationibus *Kraſilnikouii* poſita long. Petrop. 47°.53′.45″. ſequentem in modum ſtabilire:

Kirenskoi oſtrog - - -	125°.36′.30″.
Iakuzk - - - - - - -	147. 14. 45.
Portus Petri Pauli - - -	176. 8. 45.
Bolſcherezkoi oſtrog - -	174. 52. 0.
Ochozkoi oſtrog - - -	160. 47. 15.
Iudomskoi kreſt - - -	157. 27. 15.
Tomsk - - - - - -	102. 33. 15.

Addi-

Addimus longitudinem Caſtelli Iamyſchewskaia, quae, cum differentia meridianorum eiusdem et Petropoleos, ſecundum obſeruationes *Kraſilnikouii* a b. *Griſchouio* quondam ſtatuta ſit 43°. 47′. erit 91°. 40′. 45″.

His praemonitis, diſpiciamus nouas locorum determinationes, quas R. P. *Gaubil* in hoc additamento nobis offert. Comparauit obſeruationes *Kraſilnikouii* cum aliis eodem tempore Pekini et in ſtatione Gallica Chandernagor, quae ad Gangetis fluuii oſtium in India orientali exſtat, inſtitutis, differentiamque temporis annotauit, quae quidem opera ſuperuacanea videri nequit, tum quod confirmantur inde poſitiones ſupra determinatae, tum quod duorum locorum determinationes adduntur, quorum obſeruationibus correſpondente ante non extabant. Sciendum autem, quod ex Ephemeridibus Pariſienſibus conſtat, Pekinum et Pariſios differentiam temporis 7^h. 36′. 10″. intercedere, Chandernagor Pariſiis 5^h. 44′. 37″. diſtare. Iam poſita longitudine obſeruatorii Pariſienſis, vt ex nouiſſimis obſeruationibus ſtabilita eſt 19°. 53′. 45″. emergunt inde longitudines pro

Ilginskoi oſtrog	- -	122°.30′. 0″.
Olecminskoi oſtrog	-	137. 4 45.
Iakuzk	- - - -	146.13. 7.
Portus Petri Pauli		
ex obſ. Pekin.	-	176. 4.15.
ex obſ. Chandern.	-	176.28.31.
Bolſcherezkoi oſtrog	-	174.12. 0.

Vbi obſeruationes, ſi illas, quae vrbem Iakuzk concernunt, excipias, ſic ſatis cum ſuperioribus conſentiunt.

Latitudines recenſitorum hactenus locorum ſecundum eiusdem *Kraſilnikouii* obſeruationes hae ſunt:

Ilginskoi oſtrog	- -	54°. 42′.
Kirenskoi oſtrog	- -	57. 47.
Olecminskoi oſtrog	-	60. 22.
Iakuzk	- - - -	62. 2.
Iudomskoi kreſt	- -	60. 5. 3½″.
Ochozkoi oſtrog	- -	59. 20. 10.
Bolſcherezkoi oſtrog	-	52. 54. 30.
Portus Petri Pauli	-	53°. 1. 20.
Tomsk	- - - -	56. 29. 58.
Iamyſchewskaia Caſtellum		51. 53. 10.

Notari meretur altitudo Poli a R. P. *Gaubil* Pekini in Collegio Gallico obſeruata, quae eſt 39°. 55′. 21″. Ephemerides Pariſienſes habent 39°. 54′. 0″. quae quidem latitudo competit Collegio Ieſuitarum Luſitanorum et Germanorum, vt infra adparebit.

Finit R. P. *Gaubil* additamentum ſuum obſeruatione de ſitu vrbis Aigun, qua error circa poſitionem huius vrbis in Atlante Ruſſico commiſſus corrigitur. Ex re ſane. Attamen diffitendum non eſt, eundem errorem nos quoque animaduertiſſe, et in Tabula acceſſiones Geographicas in vltima Expeditione Kamtſchatkienſi detectas repraeſentante, ratione habita Atlantis Sinici a Celeb. *Danville* euulgati; correxiſſe. Eſt autem Aigun, vel Aiiunchun, vetus nomen caſtri cuiusdam deſerti, vallo ex terra congeſto muniti, et dimidio fere milliari a Seiae, vel Dſiae, fluuii in Amurem oſtio, ſecundis aquis, diſſiti. Hoc cum Sinenſes

nenſes ſaeculi ſuperioris octogeſimo tertio anno, ferente cum Ruſſis bello, inſederint, duobus annis poſtea ex oppoſito illius, aut paullo infra, ad ripam Amuris meridionalem, vrbem Sagalin - Ula - Choton, vti in Cel. *Danvilli* Tabula Geographica videre eſt, exaedificarunt. In noſtra Tabula nomen Aigun adſcriptum eſt, quia ita quoque vrbs Sinica communiter adpellari ſolet. Ipſe quoque R. P. *Gaubil* non vetus caſtrum deſertum, ſed vrbem a Sinis inhabitatam, ſub nomine Aigun intellexiſſe videtur.

VIII.

Mercurius in Sole obſeruatus Pekini Sinarum Anno 1756. d. 7. Nouemb. a P. *Auguſtino Hallerſtein* S. I. p. 503.

Non haec prima eſt, quam ex Sinis habemus, Mercurii in Sole viſi obſeruatio; namque iam annis ſuperioris ſaeculi 90 et 97 eundem tranſitum Cantoni et in vrbe Tſchaotſcheu contemplatus eſt P. *Fontenay* S. I. cuius obſeruata in Memoriis Academiae Pariſienſis extant; aſt prima eſt atque palmaria haec obſeruatio, ſi indefeſſum Auctoris ſtudium, ſi inſtrumentorum aptitudinem, ſi laborum ſucceſſus ſpectes; prima, quam doctiſſimus Auctor ex ditiſſima penu obſeruationum ſuarum aſtronomicarum, quam praelo parat, excerpſit, et cum Academia communicauit. Pergunt nimirum eodem ſemper ſtudio Ieſuitae in Sinis aſtrorum ſcientiam obſeruationibus ſuis locupletare, cognitionem ſyſtematis noſtri Solaris, terreſtrisque globi, amplificare, et perfectiorem reddere. Quod niſi eſſet, multa ſane incognita nobis manſiſſent, quae illorum ope comperta habemus atque explorata. Vnum dicam, quod vtilitatem obſeruationum Sinenſium clare oſtendit. Innumera phaenomena coeleſtia contingunt, dum atra nox tegit Europam, eadem autem in extremitate Aſiae, in Sinis, expertum ac ſedulum obſeruatorem non effugiunt. Huc quoque pertinet obſeruatus in Sinis Mercurii ſub Sole tranſitus, qui 7. Nouembris 1756. accidit. Hunc in Europa totum conſpicere non licuit, quoniam, cum inciperet, Sol adhuc ſub horizonte morabatur. Perfectiorem autem, quam, quae hoc loco exhibetur, obſeruationem, vix Aſtronomi deſiderabunt. Praeter initium atque finem huius phaenomeni exacte notata, Mercurii ſub Sole incedentis 58 loca determinauit R. Auctor, capiendo Micrometri ope differentias declinationum, et ex appulſibus ad horarium differentias aſcenſionum rectarum deducendo. Eſt autem R. Pater *Auguſtinus Hallerſtein* Tribunalis mathematici in Sinis Praeſes, PP. *Adami Schall*, *Ferdinandi Verbieſtii* et *Ignatii Koegleri* dignus ſucceſſor, vir, cuius ſingularem eruditionem, humanitatem et ardorem in bonas artes, ex commercio epiſtolico, quod nobis cum ipſo intercedit, hac occaſione data, encomio celebrare, officii ratio poſtulat.

INDEX

INDEX
COMMENTARIORVM.

Mathematica.

L. Euleri, De Resolutione Formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros p. 3.
Eiusdem, De progressionibus arcuum circularium, quorum tangentes secundum certam legem procedunt p. 40.
Eiusdem, Specimen Algorithmi singularis p. 53.
Eiusdem, De Resolutione aequationum cuiusuis gradus p. 70.
Eiusdem, De numeris primis valde magnis p. 99
Eiusdem, De Resolutione aequationis $dy + ayydx = bx^m dx$ pag. 154.
Eiusdem, Inuestigatio functionum ex data differentialium conditione p. 170.

Physico - Mathematica.

L. Euleri, De motu vibratorio fili flexilis, corpusculis quotcunque onusti p. 215.
Eiusdem, De motu vibratorio cordarum inaequaliter crassarum p. 246.
Zeiheri, Thermometri metallici descriptio p. 305.
Eiusdem, Thermometrorum punctis constantibus gaudentium emendatio p. 314.
Aepini, Emendatio Microscopii Solaris p. 316.
Eiusdem, Dissertatio de Experimento quodam magnetico p. 326. Additamentum ad praecedentem Dissertationem auctore eodem p. 340
L. Euleri, Cogitationes de aggeribus construendis p. 352.

Physica.

Physica.

Ad Obſeruationes et Experimenta de Mercurio ex manu ſcriptis *Hermanni Boerhaue* Supplementum I. recenſente *Carolo Friderico Kruſe* p. 381.

Braunii, Obſeruationes meteorologicae annis 1757 et 1758 Petropoli factae, cum animaduerſionibus et conſectariis p. 392. et 400.

Koelreuteri, Deſcriptionis Piſcium rariorum e Muſeo Petropolitano exceptorum continuatio p. 420.

Aſtronomica.

Heinſii, Obſeruationes aliquot aſtronomicae et meteorologicae, Lipſiae habitae p. 473.

Griſchouii, Obſeruatio Eclipſeos Solaris, quae contigit Anno 1758. d. $\frac{19}{30}$. Decemb. habita Petropoli pag. 486.

Aepini, Inſtrumentorum Aſtronomicorum, Reticulo, aut Micrometro, inſtructorum, noua emendatio p. 488.

Obſeruatio Eclipſeos Lunae d. 18. Maii ſt. v. Anno 1760. Petropoli habita a *N. Popow*, *Andr. Kraſilnikow* et *Nic. Kurganow* p. 492.

Heinſii, Eclipſis Solis Lipſiae viſa hor. mat. d. 13. Iunii ſtil. nou. Anno 1760. p. 494.

Aepini, Obſeruatio Eclipſeos Lunaris d. $\frac{7}{18}$. Maii 1761. habita in Obſeruatorio Imper. Petropolit. p. 496.

A. Gaubil, Ad Noua Acta Petropolitana Acad. Scient. Tom. III. Additamentum ex Sinis p. 499.

Hallerſtein, Mercurius in Sole obſeruatus Pekini Sinarum Anno 1756. d. 7. Nouemb. p. 503.

* * *

MATHE-

MATHEMATICA.

DE

RESOLVTIONE FORMVLARVM QVADRATICARVM INDETERMINATARVM PER NVMEROS INTEGROS.

Auctore

L. EVLERO.

Problema I.

1.

Propoſita formula irrationali $\sqrt{(\alpha xx+\beta x+\gamma)}$ inuenire numeros pro x ſubſtituendos, qui eam rationalem reddant.

Solutio.

Ante omnia notantum eſt, hanc inueſtigationem fruſtra ſuſcipi, niſi vnus ſaltem caſus conſtet, quo ea fiat rationalis. Ponamus ergo hoc euenire caſu $x=a$, eoque eſſe:

$$\sqrt{(\alpha aa+\beta a+\gamma)}=b$$

ita vt b ſit numerus rationalis. Huiusmodi autem caſus, vnico cognito, innumerabiles alios ex eo deriuare licet. Ponatur in hunc finem

$$x=a+mz \text{ et } \sqrt{(\alpha xx+\beta x+\gamma)}=b+nz$$

et hac aequatione quadrata fit:

$$\begin{aligned} &+\alpha aa + 2\alpha maz + \alpha mmzz = bb + 2nbz + nnzz \\ &+ \beta a + \beta mz \\ &+ \gamma. \end{aligned}$$

Cum iam per hypothefin fit $bb = \alpha aa + \beta a + \gamma$, reliqua aequatio per z diuifa dabit:

$$2\alpha ma + \beta m + \alpha mmz = 2nb + nnz$$

ex qua elicitur:

$$z = \frac{2\alpha ma - 2nb + \beta m}{nn - \alpha mm}$$

Quo valore fubftituto concludimus:

fi ponatur $x = \frac{(nn + \alpha mm)a - 2mnb + \beta mm}{nn - \alpha mm}$

fore $\sqrt{(\alpha xx + \beta x + \gamma)} = \frac{2\alpha mna - (nn + \alpha mm)b + \beta mn}{nn - \alpha mm}$

Quicunque ergo numeri pro m et n accipiantur, ex cafu cognito: $\sqrt{(\alpha aa + \beta a + \gamma)} = b$, infinitis aliis modis formula $\sqrt{(\alpha xx + \beta x + \gamma)}$ rationalis effici poteft, et quia numerum b tam negatiue, quam affirmatiue, affumere licet, exploratis numeris a et b, ac pro lubitu affumtis numeris m et n, capiatur

$$x = \frac{(nn + \alpha mm)a \pm 2mnb + \beta mm}{nn - \alpha mm}$$

eritque:

$$\sqrt{(\alpha xx + \beta x + \gamma)} = \frac{2\alpha mna \pm (nn + \alpha mm)b + \beta mn}{nn - \alpha mm}.$$

Scholion.

2. Ad hoc ergo problema foluendum neceffe eft, vt aliunde vnus faltem cafus fit cognitus, quo formula propofita fiat rationalis. Neque vero, pro huiusmodi cafu explorando vlla certa regula praefcribi poteft, cum etiam

etiam dentur eiusmodi formulae, quas nullo plane casu rationales fieri posse demonstratum est. Si enim verbi gratia haec formula $\sqrt{(3xx+2)}$ proponeretur, certum est, nullum numerum rationalem pro x inueniri posse, quo ea fieret rationalis. Quanquam autem satis noti sunt casus, quibus formula $\alpha xx + \beta x + \gamma$ talis reductionis est capax, quippe quod euenit, quoties in hac formula generali $(px+q)^2 + (rx+s)(tx+u)$ continetur: tamen hic non curo, vnde casus ille, quem cognitum assumo, sit haustus, siue certa quadam ratione, siue diuinatione innotuerit. Verum cum cognito vno casu inuentio infinitorum aliorum nulla laboret difficultate, hic potissimum ad solutiones, quae numeris integris absoluuntur, respicio. Cum enim valores pro x inuenti per fractionem exprimantur, noua iam oritur quaestio, quomodo numeros m et n assumi oporteat, vt inde numeri integri pro x obtineantur.

Problema II.

3. Si α, β, γ sint numeri integri dati, inuenire numeros integros pro x sumendos, qui formulam $\alpha xx + \beta x + \gamma$ quadratam reddant.

Solutio.

Iterum assumo vnum numerum integrum a constare, qui quaesito satisfaciat, ita vt sit:

$$\sqrt{(\alpha aa + \beta a + \gamma)} = b$$

ac modo vidimus,

si sumatur $x = \frac{(nn+\alpha mm)a \pm 2mnb + \beta mm}{nn - \alpha mm}$

 fore

ſore $\sqrt{}(\alpha xx + \beta x + \gamma) = \frac{2\alpha mna \pm (nn + \alpha mm)b + \beta mn}{nn - \alpha mm}$
Supereſt ergo tantum, vt videamus, cuiusmodi numeros pro m et n aſſumi oporteat, vt hae formulae integrae euadant. Quod quidem ſtatim fieri perſpicuum eſt, ſi vtriusque denominator $nn - \alpha mm$ ſtatuatur vnitati aequalis. Sit igitur $nn - \alpha mm = 1$, ſeu

$$nn = \alpha mm + 1\text{, ideoque } n = \sqrt{}(\alpha mm + 1)$$

niſi autem ſit α vel numerus quadratus, vel negatiuus, huic formulae ſemper ſatisfieri poteſt; ſin autem ſit vel quadratus, vel negatiuus, ne problema quidem propoſitum reſoluere licet. Etſi enim quandoque duo pluresue caſus aſſignari queant, tamen infiniti non dantur, cuiusmodi tamen hic euolui conuenit. Sit ergo α numerus integer poſitiuus non quadratus, ac ſemper numeri m et n aſſignari poſſunt, vt fiat $n = \sqrt{}(\alpha mm + 1)$, quod etſi infinitis modis fieri poteſt, tamen ſufficit minimos ſolos noſſe. Erit ergo

$$x = (nn + \alpha mm)a \pm 2mnb + \beta mm \text{ et}$$

$$\sqrt{}(\alpha xx + \beta x + \gamma) = 2\alpha mna \pm (nn + \alpha mm)b + \beta mn,$$

ſicque habetur nouus caſus quaeſtioni ſatisfaciens. Ex hoc vero ſimili modo, quo is ex a et b prodiit, nouus deriuabitur, hincque porro continuo alii in infinitum. Ponantur enim valores hoc modo pro x oriundi ſucceſſiue: a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, etc. reſpondentes vero valores formulae $\sqrt{}(\alpha xx + \beta x + \gamma)$ ſint b, b^{I}, b^{II}, b^{III} etc. ac ſequenti modo bini quique poſteriores ex binis antecedentibus definientur,

$$a^{I} = (nn + \alpha mm)a \pm 2mnb + \beta mm;\ b^{I} = 2\alpha mna \pm (nn + \alpha mm)b + \beta mn$$
$$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} \pm 2mnb^{I} + \beta mm;\ b^{II} = 2\alpha mna^{I} \pm (nn + \alpha mm)b^{I} + \beta mn$$
$$a^{III} = (nn + \alpha mm)a^{II} \pm 2mnb^{II} + \beta mm;\ b^{III} = 2\alpha mna^{II} \pm (nn + \alpha mm)b^{II} + \beta mn$$
etc.

Hac igitur ratione continuo vlterius progredi licet, ficque ex vna folutione, in numeris integris cognita, innumerabiles aliae in numeris integris quoque elicientur.

Coroll. 1.

4. Vt igitur formula $\alpha xx + \beta x + \gamma$ infinitis modis in numeris integris quadratum effici poffit, necesse eft, vt α neque fit numerus quadratus, neque negatiuus, ac praeterea, vt vnus cafus, quo ea fit quadratum, vndecunque fit cognitus.

Coroll. 2.

5. At fi α fuerit numerus pofitiuus non quadratus, tum primum quaerantur duo numeri m et n, vt fit $n = \sqrt{(\alpha mm + 1)}$, id quod femper fieri poteft. Quibus inuentis, fi ponatur:

$$\sqrt{(\alpha xx + \beta x + \gamma)} = y$$

atque iam cognitus fuerit cafus quaeftioni fatisfaciens, qui fit $x = a$ et $y = b$, ex eo per primam operationem non folum vnus, fed duo noui, inuenientur ob figni ambiguitatem. Erit quippe:

$$x = (nn + \alpha mm)a \pm 2mnb + \beta mm \text{ et}$$
$$y = 2\alpha mna \pm (nn + \alpha mm)b + \beta mn.$$

Coroll. 3.

Coroll. 3.

6. Si ſumantur tantum ſignorum ambiguorum ſuperiora, vt continuo ad maiores numeros ſatisfacientes perueniamus, atque valores pro x hoc modo ſucceſſiue prodeuntes deſignentur per $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$ etc. valores autem pro y reſpondentes per $b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}$ etc. erit:

$$a^{I} = (nn + \alpha mm)a + 2mnb + \beta mm; \quad b^{I} = 2\alpha mna + (nn + \alpha mm)b + \beta mn$$

$$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} + 2mnb^{I} + \beta mm; \quad b^{II} = 2\alpha mna^{I} + (nn + \alpha mm)b^{I} + \beta mn$$

$$a^{III} = (nn + \alpha mm)a^{II} + 2mnb^{II} + \beta mm; \quad b^{III} = 2\alpha mna^{II} + (nn + \alpha mm)b^{II} + \beta mn$$

etc.

Coroll. 4.

7. Duplicem ergo hinc progreſſionem numerorum $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$ etc. et b $b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}$ etc. adipiſcimur, quarum vtriusque continuatio ab vtraque pendet, vtraque tamen ab altera iſta ſeiungi poteſt, vt termini vtriusque ſenſim ſine adminiculo alterius continuari queant; formabitur autem tum in vtraque ſerie quilibet terminus ex binis praecedentibus.

Coroll. 5.

8. Si enim in valore a^{II} pro b^{I} eius valor ſubſtituatur, habebitur:

$$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} + 4\alpha m^{2}n^{2}a + 2mn(nn + \alpha mm)b + 2\beta mmnn + \beta mm$$

Verum

Verum ex valore ipſius a^{I} eſt:

$$2mnb = a^{I} - (nn + \alpha mm)a - \beta mm$$

quo valore ipſius $2mnb$ ibi ſubſtituto prodibit:

$$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} + 4\alpha mmnna$$
$$+ (nn + \alpha mm)a^{I} - (nn + \alpha mm)^{2}a - \beta mm(nn + \alpha mm)$$
$$+ 2\beta mmnn$$
$$+ \beta mm.$$

At ob $nn = \alpha mm + 1$, eſt $4\alpha mmnn - (nn + \alpha mm)^{2}$ $= -(nn - \alpha mm)^{2} = -1$, et $2\beta mmnn - \beta mm(nn + \alpha mm)$ $= \beta mm(nn - \alpha mm) = \beta mm$, vnde fit:

$$a^{II} = 2(nn + \alpha mm)a^{I} - a + 2\beta mm.$$

Coroll. 6.

9. Cum igitur ſimili modo ſit:

$$a^{III} = 2(nn + \alpha mm)a^{II} - a^{I} + 2\beta mm \text{ etc.}$$

Statim atque in ſerie a, a^{I}, a^{II}, a^{III} etc. duo primi termini habentur, primus ſcilicet a vndecunque, et ſecundus ex formula $a^{I} = (nn + \alpha mm)a + 2mnb + \beta mm$, ex his ſequentes omnes per has formulas definientur:

$$a^{II} = 2(nn + \alpha mm)a^{I} - a + 2\beta mm$$
$$a^{III} = 2(nn + \alpha mm)a^{II} - a^{I} + 2\beta mm$$
$$a^{IV} = 2(nn + \alpha mm)a^{III} - a^{II} + 2\beta mm.$$

Coroll. 7.

10. Pari autem modo progreſſio numerorum b, b^{I}, b^{II}, b^{III} etc. eſt comparata. Primo enim eius termino aliunde cognito, et ſecundo per formulam

$b^{I} = 2\alpha mna + (nn + \alpha mm)b + \beta mn$, si in b^{II} pro a^{I} valor substituatur, erit:

$$b^{II} = 2\alpha mn(nn + \alpha mm)a + 4\alpha mmnnb + 2\alpha\beta m^{3}n + (nn + \alpha mm)b^{I} + \beta mn$$

at ex valore ipsius b^{I} est $2\alpha mna = b^{I} - (nn + \alpha mm)b - \beta mn$ quo substituto fit ob $nn - \alpha mm = 1$

$$b^{II} = 2(nn + \alpha mm)b^{I} - b \text{ similiterque}$$
$$b^{III} = 2(nn + \alpha mm)b^{II} - b^{I}$$
$$b^{IV} = 2(nn + \alpha mm)b^{III} - b^{II}$$
etc.

Coroll. 8.

11. Cum igitur vtraque series ita sit comparata, vt quilibet terminus ex binis praecedentibus secundum certam legem definiatur; vtraque series erit recurrens, scala relationis existente $2(nn + \alpha mm), -1$. Hinc ergo, formata aequatione $zz = 2(nn + \alpha mm)z - 1$, eius radices erunt:

$$z = 2nn - 1 \pm 2n\sqrt{(nn - 1)} = (n \pm m\sqrt{\alpha})^{2}.$$

Coroll. 9.

12. Hinc ergo ex doctrina serierum recurrentium progressionis $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$ etc. terminus quicunque indefinite per sequentem formulam exprimetur:

$$\left(\tfrac{a}{2} + \tfrac{\beta}{4\alpha} + \tfrac{b}{2\sqrt{\alpha}}\right)(n + m\sqrt{\alpha})^{2\nu} + \left(\tfrac{a}{2} + \tfrac{\beta}{4\alpha} - \tfrac{b}{2\sqrt{\alpha}}\right)(n - m\sqrt{\alpha})^{2\nu} - \tfrac{\beta}{2\alpha} = x$$

alterius vero seriei $b, b^{I}, b^{II}, b^{III}$ etc. terminus quicunque per hanc:

$$\left(\tfrac{b}{2} + \tfrac{a\sqrt{\alpha}}{2} + \tfrac{\beta}{4\sqrt{\alpha}}\right)(n + m\sqrt{\alpha})^{2\nu} + \left(\tfrac{b}{2} - \tfrac{a\sqrt{\alpha}}{2} - \tfrac{\beta}{4\sqrt{\alpha}}\right)(n - m\sqrt{\alpha})^{2\nu} = y$$

sumto pro ν numero quocunque integro.

Scholion.

Scholion.

13. Si hic pro 2ν ſubſtituamus ſucceſſiue omnes numeros integros 0, 1, 2, 3, 4, 5 etc. vtraque progreſſio prodibit interpolata, cuius termini medii quaeſito aeque ſatisfacient, dummodo fuerint integri. At reperiemus: poſito

$$2\nu = 0;\ x = a;$$
$$2\nu = 1;\ x = na + mb + \frac{\beta(n-1)}{2\alpha};$$
$$2\nu = 2;\ x = (nn + \alpha mm)a + 2mmb + \beta mm;$$
$$y = b$$
$$y = nb + \alpha ma + \frac{\beta m}{2}$$
$$y = (nn + \alpha mm)b + 2\alpha mna + \beta mn.$$

Quae vtraque ſeries eſt recurrens, ſcalam relationis habens $2n, -1$; ac pro priori quidem valorum ipſius x, ſi terni termini conſecutiui ſint P, Q, R, erit

$$R = 2nQ - P + \frac{\beta(n-1)}{\alpha};$$

at ſi in progreſſione valorum ipſius y terni termini ſe ordine ſequentes ſint P, Q et R, erit

$$R = 2nQ - P:$$

Quodſi ergo fuerit $\frac{\beta(n-1)}{2\alpha}$ numerus integer, omnes hi termini problema aeque reſoluent, ſicque duplo plures obtinebimus ſolutiones, quam methodus adhibita ſuppeditauerat. Quod autem plures locum habere poſſint ſolutiones, quam inuenimus, inde facile colligitur, quod praeter neceſſitatem primum erutarum formularum $nn - \alpha mm$ vnitati aequalem poſuimus, cum tamen ſine dubio ſaepe etiam numerator per denominatorem diuidi possit, etiamsi hic vnitate sit maior. Quemadmodum igitur omnes plane solutiones in numeris integris inueniri queant, sequenti problemate accuratius examinemus.

Problema 3.

14. Si α sit numerus integer positiuus non quadratus, dato vno numero integro a, qui pro x positus reddat formulam $\alpha xx + \beta x + \gamma$ quadratam, inuenire infinitos alios numeros integros, qui pro x sumti idem sint praestituri.

Solutio.

Ponatur in genere $\sqrt{(\alpha xx + \beta x + \gamma)} = y$, casu autem cognito, quo $x = a$, esse $\sqrt{(\alpha aa + \beta a + \gamma)} = b$, atque hinc in genere fractionibus non exclusis fore vidimus:

$$x = \frac{(nn + \alpha mm)a + 2mnb + \beta mm}{nn - \alpha mm}$$

$$y = \frac{(nn + \alpha mm)b + 2\alpha mna + \beta mn}{nn - \alpha mm}$$

Iam quidem, vt hi numeri fiant integri, non absolute necesse est, vt denominator $nn - \alpha mm$ ad vnitatem reuocetur, verum sufficit, vt fractiones $\frac{nn + \alpha mm}{nn - \alpha mm}$ et $\frac{2mn}{nn - \alpha mm}$ in numeros integros abeant. Ponamus ergo esse

$$\frac{nn + \alpha mm}{nn - \alpha mm} = p, \text{ et } \frac{2mn}{nn - \alpha mm} = q$$

vnde fit $p - 1 = \frac{2\alpha mm}{nn - \alpha mm}$; ideoque

$$\frac{\beta mm}{nn - \alpha mm} = \frac{\beta}{2\alpha}(p - 1) \text{ et } \frac{\beta mn}{nn - \alpha mm} = \tfrac{1}{2}\beta q.$$

Deinde

Deinde autem ex formulis assumtis fiet

$$pp-\alpha qq = \frac{(nn+\alpha mm)^2 - 4\alpha m^2 n^2}{(nn-\alpha mm)^2} = 1$$

ita vt sit $pp = \alpha qq + 1$ et $p = \sqrt{(\alpha qq + 1)}$.
Iterum igitur vt ante ex numero α binos numeros p et q assignari oportet, vt sit $p = \sqrt{(\alpha qq + 1)}$, quibus inuentis habebitur:

$$x = pa + qb + \frac{\beta}{2\alpha}(p-1) \text{ et } y = pb + \alpha qa + \tfrac{1}{2}\beta q.$$

Dummodo ergo fuerit $\frac{\beta}{2\alpha}(p-1)$ numerus integer, hi valores satisfaciunt. Quia autem numeros p et q tam negatiue, quam positiue, sumere licet, hae formulae insuper tres alias solutiones suppeditant:

$$x = pa - qb + \frac{\beta}{2\alpha}(p-1); \text{ et } y = pb - \alpha qa - \tfrac{1}{2}\beta q$$
$$x = -pa + qb - \frac{\beta}{2\alpha}(p+1); \text{ et } y = -pb + \alpha qa + \tfrac{1}{2}\beta q$$
$$x = -pa - qb - \frac{\beta}{2\alpha}(p+1); \text{ et } y = -pb - \alpha qa - \tfrac{1}{2}\beta q$$

Quod si porro horum bini quicunque pro a et b assumantur, ex quolibet quatuor nouae solutiones orientur. Hinc tamen non 61, sed tantum sex diuersae oriuntur, inter quas adeo prima cognita $x = a$ et $y = b$, et quae huic est affinis $x = -a - \frac{\beta}{\alpha}$, et $y = b$ continentur; reliquae vero quatuor sunt

$$x = (pp + \alpha qq)a \pm 2pqb + \beta qq;$$
$$y = (pp + \alpha qq)b \pm 2\alpha pqa \pm \beta pq$$
$$x = -(pp + \alpha qq)a \pm 2pqb - \frac{\beta}{\alpha}pp;$$
$$y = (pp + \alpha qq)b \mp 2\alpha pqa \mp \beta pq$$

ex quibus deinceps nouae aliae in infinitum inueniri possunt.

Coroll. 1.

15. Quodſi ergo fuerit vel $\beta = 0$, vel eiusmodi numerus, vt $\beta(p-1)$, vel etiam $\beta(p+1)$ per 2α diuiſibile exiſtat, tum hoc modo plures ſolutiones in integris obtinentur, quam modo ante expoſito.

Coroll. 2.

16. In genere autem obſeruandum eſt, ſi ſatisfecerit caſus quicunque $x = v$, tum etiam ſatisfacturum eſſe caſum $x = -v - \frac{\beta}{\alpha}$, ex vtroque enim y eundem valorem nanciſcitur. Quare cum hi caſus ex illis tam facile eliciantur, his omiſſis inueſtigatio ſolutionum conuenientium ad dimidium reducitur.

Coroll. 3.

17. Reiectis ergo caſibus $x = -v - \frac{\beta}{\alpha}$, quippe qui ſponte ſe produnt inuentis caſibus $x = v$, ex caſu $x = a$ et $y = b$ ſtatim bini reperiuntur:

$$x = pa \pm qb + \frac{\beta}{2\alpha}(p-1);\ y = \alpha qa \pm pb + \tfrac{1}{2}\beta q$$

hincque porro per operationem ſecundam bini:

$$x = (pp+\alpha qq)a \pm 2pqb + \beta qq;\ y = 2\alpha pqa \pm (pp+\alpha qq)b + \beta pb$$

quae duplicitas ex ſigno ambiguo numeri b naſcitur.

Coroll. 4.

18. Si haec cum §. §. 12 et 13 conferantur, patebit omnes has formulas in ſequentibus expreſſionibus generalibus contineri, ſiquidem pro μ ſucceſſiue omnes numeri integri ſubſtituantur.

I.

$$\mathrm{I}\begin{cases} x=\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}+\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{\beta}{2\alpha} \\ y=\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu} \end{cases}$$

et

$$\mathrm{II}\begin{cases} x=\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}+\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{\beta}{2\alpha} \\ y=\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu} \end{cases}$$

Coroll. 5.

19. Hinc igitur duplices ſeries pro valoribus numerorum x et y reperiuntur, quae eandem progreſſionis legem tenebunt. Si enim ponamus:

$$x = a;\ a^{\mathrm{I}};\ a^{\mathrm{II}};\ a^{\mathrm{III}};\ a^{\mathrm{IV}};\ a^{\mathrm{V}};\ \text{etc. } \mathrm{P},\ \mathrm{Q},\ \mathrm{R}$$
$$y = b;\ b^{\mathrm{I}};\ b^{\mathrm{II}};\ b^{\mathrm{III}};\ b^{\mathrm{IV}};\ b^{\mathrm{V}};\ \text{etc. } \mathrm{S},\ \mathrm{T},\ \mathrm{V}$$

erit pro altera: $a^{\mathrm{I}} = pa+qb+\frac{\beta}{2\alpha}(p-1)$ et $b^{\mathrm{I}} = \alpha qa+pb+\frac{1}{2}\beta q$
et pro altera: $a^{\mathrm{I}} = pa-qb+\frac{\beta}{2\alpha}(p-1)$ et $b^{\mathrm{I}} = \alpha qa-pb+\frac{1}{2}\beta q$
pro vtraque vero haec communis progreſſionis lex valebit, vt ſit:

$$\mathrm{R} = 2p\mathrm{Q}-\mathrm{P}+\frac{\beta}{\alpha}(p-1) \text{ et } \mathrm{V} = 2p\mathrm{T}-\mathrm{S}.$$

Coroll. 6.

20. Cum ſit $pp-\alpha qq = 1$, erit $(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu} = (p-q\sqrt{\alpha})^{-\mu}$ et $(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu} = (p+q\sqrt{\alpha})^{-\mu}$, hincque, ſi alterae ſeries retrorſum continuentur, prodibunt alterae. Sufficit ergo pro altero caſu has ſeries inſtruxiſſe, quae tam antrorſum, quam retrorſum, continuatae omnes ſolutiones, ex ambiguitate numeri b oriundas, in ſe continebunt.

Scholion.

Scholion.

21. Si ergo fuerit $\beta = 0$, vt habeatur haec formula: $\sqrt{(\alpha xx + \gamma)} = y$, rationalis reddenda, casusque constet, quo sit $\sqrt{(\alpha aa + \gamma)} = b$, sumtis numeris p et q ita, vt sit $p = \sqrt{(\alpha qq + 1)}$, innumerabiles alii valores satisfacientes continebuntur in his seriebus:

$$x = a,\ a^{\mathrm{I}},\ a^{\mathrm{II}},\ a^{\mathrm{III}},\ a^{\mathrm{IV}},\ \ldots\ldots \mathrm{P},\ \mathrm{Q},\ \mathrm{R}$$
$$y = b,\ b^{\mathrm{I}},\ b^{\mathrm{II}},\ b^{\mathrm{III}},\ b^{\mathrm{IV}},\ \ldots\ldots \mathrm{S},\ \mathrm{T},\ \mathrm{V}$$

vbi secundi termini ita debent accipi, vt sit

$$a^{\mathrm{I}} = pa + qb;\ b^{\mathrm{I}} = \alpha qa + pb$$

deinde vtraque series est recurrens, scala relationis existente $2p, -1$. Erit scilicet:

$$a^{\mathrm{II}} = 2pa^{\mathrm{I}} - a;\ \text{et in genere } \mathrm{R} = 2p\mathrm{Q} - \mathrm{P}$$
$$b^{\mathrm{II}} = 2pb^{\mathrm{I}} - b;\ \ldots\ldots\ \mathrm{V} = 2p\mathrm{T} - \mathrm{S}$$

ambae vero series etiam retrorsum continuari debent, sicque duplo plures prodibunt solutiones, nisi sit vel $a = 0$, vel $b = 0$. Neque autem hic in censum veniunt solutiones negatiuae, quibus si satisfecerit $x = v$, etiam satisfacit $x = -v$. Omnes porro istae solutiones continentur in his formulis generalibus,

$$x = \tfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}(a\sqrt{\alpha} + b)(p + q\sqrt{\alpha})^{\mu} + \tfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}(a\sqrt{\alpha} - b)(p - q\sqrt{\alpha})^{\mu}$$
$$y = \tfrac{1}{2}(a\sqrt{\alpha} + b)(p + q\sqrt{\alpha})_{\mu} - \tfrac{1}{2}(a\sqrt{\alpha} - b)(p - q\sqrt{\alpha})^{\mu}$$

Pro variis igitur numeris, qui coefficientem α constituunt, sequentia exempla euoluamus, et quidem generalius, vt etiam coefficientis β ratio habeatur, pro casibus scilicet, quibus forte $\frac{\beta}{2\alpha}(p - 1)$ fuerit numerus integer.

Exem-

Exemplum I

22. *Proposita formula* $\sqrt{(2xx+\beta x+\gamma)}=y$, *inuenire infinitos valores integros ipsius* x, *quibus haec formula rationalis euadit, siquidem vna solutio constet.*

Sit solutio cognita $x=a$ et $y=b$, et ob $\alpha=2$, habebimus $p=\sqrt{(2qq+1)}$, ideoque $q=2$ et $p=3$. Hinc secundi valores erunt:

$$a^{\mathrm{I}}=3a\pm 2b+\tfrac{\beta}{2};\ b^{\mathrm{I}}=4a\pm 3b+\beta.$$

Cum igitur in §. 19, sit $R=6Q-P+\beta$ et $V=6T-S$, habebimus sequentes series valorum satisfacientium et quidem integrorum, si β fuerit numerus par:

Valores ipsius x	Valores ipsius y
a	$\pm b$
$3a\pm 2b+\frac{\beta}{2}$	$4a\pm 3b+\beta$
$17a\pm 12b+4\beta$	$24a\pm 17b+6\beta$
$99a\pm 70b+\frac{49}{2}\beta$;	$140a\pm 99b+35\beta$
$577a\pm 408b+144\beta$,	$816a\pm 577b+204\beta$
$3363a\pm 2378b+\frac{1681}{2}\beta$;	$4756a\pm 3363b+1189\beta$
etc.	etc.

Tum vero cum y eosdem retineat valores, si pro x scribatur $-x-\frac{\beta}{2}$, etiam hae solutiones locum habebunt:

Valores ipsius x	Valores ipsius y
$-a-\frac{1}{2}\beta$	$\pm b$
$-3a\mp 2b-\beta$	$4a\pm 3b+\beta$
$-17a\mp 12b-\frac{9}{2}\beta$	$34a\pm 17b+6\beta$
$-99a\mp 706b-25\beta$	$140a\pm 99b+35\beta$
$-577a\mp 408b-\frac{289}{2}\beta$	$816a\pm 577b+204\beta$
$-3363a\mp 2378b-841\beta$	$4756a\pm 3363b+1189\beta$
etc.	etc.

 Etiamsi

Etiamsi ergo β non fuerit numerus par, tamen in vtroque ordine semissis valorum ipsius x fuerit numeri integri.

Exemplum 2.

23. *Proposita formula* $\sqrt{(3xx+\beta x+\gamma)}=y$, *inuenire infinitos valores integros ipsius* x, *quibus haec formula rationalis euadit, siquidem vnus casus constet.*

Praebeat casus cognitus $x=a$ et $y=b$, tum vero ob $\alpha=3$ capiatur $p=\sqrt{(3qq+1)}$, eritque $q=1$ et $p=2$. Hinc pro secundo casu habebimus:

$$a^{I}=2a\pm b+\tfrac{\beta}{6};\ b^{I}=3a\pm 2b+\tfrac{1}{2}\beta,$$

ex quibus formentur binae series recurrentes, secundum has scalas relationis:

$$R=4Q-P+\tfrac{\beta}{3};\ V=4T-S,$$

vnde obtinentur:

Valores ipsius x	Valores ipsius y
a	$\pm b$
$2a\pm b+\frac{1}{6}\beta$	$3a\pm 2b+\frac{1}{2}\beta$
$7a\pm b+\beta$	$12a\pm 7b+2\beta$
$26a\pm 15b+\frac{25}{6}\beta$	$45a\pm 26b+\frac{15}{2}\beta$
$97a\pm 56b+26\beta$	$168a\pm 97b+28\beta$
$362a\pm 209b+\frac{361}{6}\beta$	$627a\pm 362b+\frac{209}{2}\beta$
$1351a\pm 780b+225\beta$	$2340a\pm 1351b+390\beta$
etc.	etc.

Praete-

Praeterea vero ſcribendo $-x-\frac{\beta}{3}$ pro x prodibunt

valores ipſius x	valores ipſius y
$-a-\frac{1}{3}\beta$	$\pm b$
$-2a\mp b-\frac{1}{2}\beta$	$3a\pm 2b+\frac{1}{2}\beta$
$-7a\mp 4b-\frac{4}{3}\beta$	$12a\pm 7b+2\beta$
$-26a\mp 15b\frac{9}{2}\beta$	$45a\pm 26b+\frac{15}{2}\beta$
$-97a\mp 56b-\frac{49}{3}\beta$	$168a\pm 97b+28\beta$
$-362a\mp 209b-\frac{121}{2}\beta$	$627a\pm 362b+\frac{209}{2}\beta$
$-1351a\mp 780b-\frac{676}{3}\beta$	$2340a\pm 1351b+390\beta$
etc.	etc.

Prout ergo numerus β diuiſibilis fuerit per 2, vel 3, vel vtrumque, hinc eo plures ſolutiones in integris eliciuntur.

Exemplum 3.

24. *Propoſita formula* $\sqrt{(5xx+\beta x+\gamma)}=y$, *inuenire infinitos valores integros ipſius* x, *quibus haec formula rationalis euadat, ſiquidem vnus caſus fuerit cognitus.*

Pro caſu cognito ſit $x=a$ et $y=b$, et ob $\alpha=5$, quaerantur numeri p et q, vt ſit $p=\sqrt{(5qq+1)}$. Fiet ergo $q=4$ et $p=9$; et hinc ſecunda ſolutio prodibit:

$$a^{\mathrm{I}}=9a\pm 4b+\tfrac{4}{5}\beta;\ b^{\mathrm{I}}=20a\pm 9b+2\beta.$$

Cum ergo ſit $a^{\mathrm{II}}=18a^{\mathrm{I}}-a+\frac{8}{5}\beta$ et $b^{\mathrm{II}}=18b^{\mathrm{I}}-b$, ſequentes ſolutiones habebuntur:

Valores ipſius x	Valores ipſius y
a	$\pm b$
$9a\pm 4b+\frac{4}{5}\beta$	$20a\pm 9b+2\beta$
$161a\pm 72b+16\beta$	$360a\pm 161b+36\beta$
$2889a\pm 1292b+\frac{1444}{5}\beta$	$6460a\pm 2839b+646\beta$
etc.	etc.

 vbi

vbi pro quolibet valore ipſius x etiam poni poteſt $-x-\frac{\beta}{\varsigma}$.

Scholion 1.

25. Cum hoc modo ex vna ſolutione in integris cognita, infinitae aliae ſolutiones etiam in integris eliciantur, quaeſtio naſcitur, an hoc modo omnes plane ſolutiones integrae obtineantur, nec ne? Ac in exemplis quidem primo et ſecundo nullum erit dubium, quin hac methodo omnes ſolutiones integrae obtineantur. Verum in exemplo tertio vtique dantur caſus, quibus multo plures ſolutiones in integris exhiberi poſſunt, quam quidem hac methodo reperiuntur. Veluti ſi propoſita fuerit formula $\sqrt{(5xx+4)}=y$, quae pro caſu cognito praebet $a=0$ et $b=2$, noſtra ſolutio dat:

Valores ipſius x	Valores ipſius y
0	2
8	18
144	322
2584	5778
etc.	etc.

Verum hanc formulam diligentius ſcrutanti patebit, non ſolum his caſibus $\sqrt{(5xx+4)}$ fieri rationalem, ſed etiam iſtis numeris pro x ſubſtituendis

$$x=0,\ 1,\ 3,\ 8,\ 21,\ 55,\ 144,\ 377,\ 987,\ \text{etc.}$$

vnde ſolutionum numerus triplicatur. Cuius rei ratio eſt, quod ad formulam $p=\sqrt{(5qq+1)}$ reſoluendam poſuimus $q=4$; vnde fit $p=9$, quae quidem eſt ſimpliciſſima ſolutio in numeris integris. At quoniam in ſcala

ſcala relationis ineſt $2p$, ea numeris integris conſtabit, etiamſi p ſit fractio denominatorem habens 2. Hanc ob rem iſtas ſimpliciores ſolutiones nanciſcemur, ſi ponamus $q = \frac{1}{2}$, vnde fit $p = \frac{3}{2}$; ſicque, ob $\alpha = 5$, ſecundi valores erunt:

$$a^{\mathrm{I}} = \tfrac{3}{2}a \pm \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{20}\beta; \quad b^{\mathrm{I}} = \tfrac{5}{2}a \pm \tfrac{3}{2}b + \tfrac{1}{4}\beta$$

ac tertii cum ſequentibus per hanc legem ſuppeditabuntur:

$$a^{\mathrm{II}} = 3a^{\mathrm{I}} - a + \tfrac{1}{10}\beta, \quad b^{\mathrm{II}} = 3b^{\mathrm{I}} - b,$$

vnde nanciſcimur hos valores:

Valores ipſius x	Valores ipſius y
a	$\pm b$
$\frac{3}{2}a \pm \frac{1}{2}b + \frac{1}{20}\beta$	$\frac{5}{2}a \pm \frac{3}{2}b + \frac{1}{4}\beta$
$\frac{7}{2}a \pm \frac{3}{2}b + \frac{1}{4}\beta$	$\frac{15}{2}a \pm \frac{7}{2}b + \frac{3}{4}\beta$
$9a \pm 4b + \frac{4}{5}\beta$	$20a \pm 9b + 2\beta$
$\frac{47}{2}a \pm \frac{21}{2}b + \frac{9}{4}\beta$	$\frac{105}{2}a \pm \frac{47}{2}b + \frac{21}{4}\beta$
$\frac{123}{2}a \pm \frac{55}{2}b + \frac{121}{20}\beta$	$\frac{275}{2}a \pm \frac{123}{2}b + \frac{55}{4}\beta$
$161a \pm 72b + 16\beta$	$360a \pm 161b + 36\beta$
etc.	etc.

Atque hinc illae triplo plures ſolutiones oriuntur, quoties fuerit $a \pm b$ numerus par, ac β vel $= 0$, vel per 20 diuiſibile.

Scholion 2.

26. Quandoque ergo plures ſolutiones in numeris integris reperiuntur, ſi pro p et q fractiones cum denominatore 2 aſſumuntur, quod quando in genere eueniat, operae pretium erit inueſtigaſſe. Plerumque autem hi caſus locum non habent, niſi ſit vel $\beta = 0$,

vel

vel formula ad talem formam reduci poſſit. Sit ergo propoſita formula $\sqrt{(\alpha xx + \gamma)} = y$, cui ſatisfaciat caſus $x = a$ et $y = b$; tum ſtatuatur $p = \frac{m}{2}$ et $\frac{n}{2}$, ſeu quaerantur numeri m et n, vt ſit $mm = \alpha nn + 4$ et $m = \sqrt{(\alpha nn + 4)}$. Tum vero ſolutio prima ſtatim dat ſecundam:

$$a^{\mathrm{I}} = \frac{ma + nb}{2} \quad \text{et} \quad b^{\mathrm{I}} = \frac{\alpha na + mb}{2},$$

vbi quidem numeri m et n tam negatiue, quam affirmatiue, accipi poſſunt. Denique his binis primis inventis, ſequentes per hanc regulam reperientur:

$$a^{\mathrm{II}} = ma^{\mathrm{I}} - a \quad \text{et} \quad b^{\mathrm{II}} = mb^{\mathrm{I}} - b.$$

In genere autem quilibet numerus pro x ſatisfaciens continetur hac formula:

$$x = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(a\sqrt{\alpha} + b)\left(\frac{m + n\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{\mu} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(a\sqrt{\alpha} - b)\left(\frac{m - n\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{\mu},$$

ex qua fit:

$$y = \frac{1}{2}(a\sqrt{\alpha} + b)\left(\frac{m + n\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{\mu} - \frac{1}{2}(a\sqrt{\alpha} - b)\left(\frac{m - n\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{\mu}.$$

Quoties igitur $ma + nb$ prodierit numerus par, neque tamen m et n ſint pares, toties triplo plures ſolutiones in integris prodeunt, quam methodo praecedente. Hae vero ſolutiones ita ſe habebunt:

$$= a \qquad\qquad b = b$$

$$a^{\mathrm{I}} = \frac{ma + nb}{2} \qquad b^{\mathrm{I}} = \frac{mb + \alpha na}{2}$$

$$a^{\mathrm{II}} = \frac{(mm - 2)a + mnb}{2} \qquad b^{\mathrm{II}} = \frac{(mm - 2)b + \alpha mna}{2}$$

$$a^{\mathrm{III}} = \frac{(m^3 - 3m)a + (mm - 1)nb}{2} \qquad b^{\mathrm{III}} = \frac{(m^3 - 3m)b + \alpha(mm - 1)na}{2}$$

$$a^{\mathrm{IV}} = \frac{(m^4 - 4mm + 2)a + (m^3 - 2m)nb}{2} \qquad b^{\mathrm{IV}} = \frac{(m^4 - 4m^2 + 2)b + \alpha(m^3 \;\; 2m)na}{2}$$

$$a^{\mathrm{V}} = \frac{(m^5 - 5m^3 + 5m)a + (m^4 - 3m^2 + 1)nb}{2} \qquad b^{\mathrm{V}} = \frac{(m5 - 5m^3 + 5m)b + \alpha(m^4 - 3m^2 + 1)na}{2}$$

etc.

Obſer-

Obſeruatio I.

27. Haec altera methodus tum demum plures ſolutiones in numeris integris ſuppeditat, quam prior, cum m et n fuerint numeri impares, ſimulque a et b ambo vel pares, vel impares. Si enim m et n ſint numeri pares, p et q erunt integri, et formula $m = \sqrt{(\alpha nn + 4)}$, easdem ſolutiones praebebit, ac formula $p = \sqrt{(\alpha qq + 1)}$. Deinde ſi $ma \pm nb$ non fuerit numerus par, valores a^{I}, a^{II} non euadent integri, neque propterea plures ſolutiones reperiuntur, quam priore methodo, dum adhibetur formula $p = \sqrt{(\alpha qq + 1)}$. Diſtingui ergo oportet eos caſus, quibus formulae $m = \sqrt{(\alpha nn + 4)}$, numeris imparibus pro m et n accipiendis, ſatisfieri poteſt, id quod ſtatim patet fieri non poſſe, ſi α fuerit numerus formae $4z - 1$, vel etiam huius $8z + 1$. Quare pro α alii numeri impares non relinquuntur, niſi qui ſint formae $4z + 5$. Pro his ergo caſibus minimos valores, formulae $m = \sqrt{(\alpha nn + 4)}$ ſatisfacientes, ſequens tabella exhibet:

Si fuerit	capiatur	eritque	Si fuerit	capiatur	eritque
$\alpha = 5$	$n = 1$	$m = 3$	$\alpha = 61$	$n = 195$	$m = 1523$
$\alpha = 13$	$n = 3$	$m = 11$	$\alpha = 69$	$n = 75$	$m = 623$
$\alpha = 21$	$n = 1$	$m = 5$	$\alpha = 77$	$n = 1$	$m = 9$
$\alpha = 29$	$n = 5$	$m = 27$	$\alpha = 85$	$n = 9$	$m = 83$
$\alpha = 37$	$n = -$	$m = -$	$\alpha = 93$	$n = 57$	$m = 839$
$\alpha = 45$	$n = 1$	$m = 7$			
$\alpha = 53$	$n = 7$	$m = 51$			

quaeritur hic ratio, cur caſus $\alpha = 37$ non recipiat valores impares pro m et n?

Hic

Hic igitur patet, ſi ſit $\alpha = 37$, non dari numeros impares pro m et n, pro reliquis autem caſibus reſolutio ſuccedit. Ita ſi proponatur haec formula $\sqrt{(53xx+28)} = y$, habetur ſtatim $a = 1$ et $b = 9$. Deinde ob $n = 7$ et $m = 51$, erit $a^{I} = \frac{51 + 63}{2} = 57$ et $b^{I} = \frac{371 + 459}{2} = 415$, ſeu etiam $a^{I} = -6$; et $b^{I} = -44$; et ſeries recurrentes pro x et y, quarum ſcala relationis eſt $51, -1$, erunt:

$$x = \text{etc.} - 307; - 6; 1; 57; 2906; \text{etc.}$$
$$y = \text{etc.} + 2235; + 44; 9; 415; 21156; \text{etc.}$$

Obſeruatio 2.

28. Sufficit autem caſus euoluiſſe, quibus in formula generali $\alpha xx + \beta x + \gamma$ ſecundus terminus deeſt, quoniam haec ad talem formam ſalua numerorum integritate reuocari poteſt. Vulgaris quidem modus, quo ex aequationibus ſecundus terminus tolli ſolet, ponendo $x = y - \frac{\beta}{2\alpha}$, hic locum habere nequit, niſi β ſit numerus per 2α diuiſibilis. Verum ſi $\alpha xx + \beta x + \gamma$ debeat eſſe quadratum, ponatur $\alpha xx + \beta x + \gamma = yy$, ac multiplicando per 4α prodibit $4\alpha\alpha xx + 4\alpha\beta x + 4\alpha\gamma = 4\alpha yy$,

ideoque $4\alpha yy + \beta\beta - 4\alpha\gamma = (2\alpha x + \beta)^2$

Quaerantur ergo caſus, quibus formula $4\alpha yy + \beta\beta - 4\alpha\gamma$ ſit quadratum, indeque habebuntur valores pro x ſubſtituendi, qui formulam $\alpha xx + \beta x + \gamma$ reddant quadratam, ſcilicet ſi fuerit $\sqrt{(4\alpha yy + \beta\beta - 4\alpha\gamma)} = z$, erit $2\alpha x + \beta = z$, hincque $x = \frac{z - \beta}{2\alpha}$.

Quodſi

Quodſi β fuerit numerus par, puta 2δ, poſito: $\alpha xx + 2\delta x + \gamma = yy$, erit $(\alpha x + \delta)^2 = \alpha yy + \delta\delta - \alpha\gamma$ ſicque formula $\alpha yy + \delta\delta - \alpha\gamma$ ad quadratum eſt revocanda; ac ſi inuenimus $\sqrt{(\alpha yy + \delta\delta - \alpha\gamma)} = z$, erit $\alpha x + \delta = z$, et $x = \frac{z - \delta}{\alpha}$, vnde plerumque pro x numeri integri reperiuntur; etſi enim forte $\frac{z - \delta}{\alpha}$ non fuerit integer, tamen ex vno valore z cognito, ſi modo ſupra tradito alii eliciantur in infinitum, alterni ſaltem erunt numeri integri. Ex quo perſpicuum eſt, reſolutionem formularum quadraticarum radicalium $\sqrt{(\alpha xx + \beta x + \gamma)}$ nulla limitatione affici, etiamſi terminus βx plane omittatur, ſicque totum negotium huc redit, vt formulae huiusmodi $\sqrt{(\alpha xx + \gamma)}$ rationales, et quidem in numeris integris reddantur.

Obſeruatio 3.

29. Iam annotaui, formulam $\alpha xx + \gamma$ in numeris integris ſaltem pluribus ac infinitis modis quadratum effici non poſſe, niſi α ſit numerus poſitiuus non quadratus. Exiſtente autem α tali numero, problema non ita reſolui poteſt, vt pro quocunque numero pro γ aſſumto, ſolutio ſuccedat: poſſent enim vtique eiusmodi numeri pro γ dari, vt problema nullam plane ſolutionem admitteret, atque hanc ob rem poſtulari vnam ſaltem ſolutionem cognitam eſſe debere, quo ipſo caſus inſolubiles excluſi. Verum dato α characteres exhiberi poſſunt, ex quibus dignoſci liceat, vtrum numerus γ ſit eiusmodi, qui ſolutionem admittat, nec ne? Ac primo quidem perſpicuum eſt, nullam ſolu-

tionem locum habere posse, nisi γ sit numerus in tali formula $bb-\alpha aa$ contentus. Dato ergo numero α, formetur series omnium numerorum, tam positiuorum, quam negatiuorum, qui quidem in formula $bb-\alpha aa$ sint contenti; ac nisi γ in hac serie reperiatur, certo pronunciare licet, formulam $\sqrt{}(\alpha xx+\gamma)$ nullo modo rationalem reddi posse: vicissim autem, quoties γ in hac serie comprehenditur, quia tum est $\gamma=bb-\alpha aa$, formula $\alpha xx+\gamma$ fit quadratum, ponendo $x=a$, eritque $\sqrt{}(\alpha xx+\gamma)=b$. Haec igitur series, cuius quasi terminus generalis est $bb-\alpha aa$, primo continebit, sumto $a=0$, omnes numeros quadratos 1, 4, 9, 16, 25, etc. tum vero omnes quadratos per $-\alpha$ multiplicatos nempe: $-\alpha$, -4α, $-\alpha 9$, $-\alpha 16$, etc. Praeterea si p et q fuerint numeri in hac serie contenti, in ea quoque reperietur eorum productum pq; nam cum sit $p=bb-\alpha aa$ et $q=dd-\alpha cc$, erit $pq=(bd+\alpha ac)-\alpha(bc+ad)^2$, et ob ambiguitatem signi hoc productum duplici modo est numerus formae $bb-\alpha aa$, ideoque statim habentur duae solutiones $x=bc+ad$ et $x=bc-ad$.

Obseruatio 4.

30. Hinc ergo consecuti sumus hoc Theorema eximium, quod fundamentum superiorum solutionum in se complectitur:

„Si fuerit $\alpha xx+p=yy$ casu $x=a$ et $y=b$ tum
„vero etiam $\alpha xx+q=yy$ casu $x=c$ et $y=d$; haec
„formula $\alpha xx+pq=yy$ adimplebitur capiendo

$$x=bc\pm ad \text{ et } y=bd\pm\alpha ac$$

Si

Si enim ſit $q=1$ et $dd=\alpha cc+1$, praeterea vero formulae $\alpha xx+p=yy$ ſatisfiat caſu $x=a$ et $y=b$; qui eſt caſus ſupra pro cognito aſſumtus; tum eidem formulae ſatisfacient valores:

$$x=bc\pm ad \text{ et } y=bd\pm\alpha ac$$

vnde eadem omnino ſolutio conficitur, quam ſupra exhibuimus, atque ex longe diuerſis principiis elicuimus: quocirca haec poſtrema inueſtigationis ratio ob concinnitatem et perſpicuitatem eo magis eſt notatu digna. Hic vero accedit, quod haec ratio multo latius pateat, quam praecedens, quippe quae ad caſum $q=1$ fuerat adſtricta. Demonſtratio autem iſtius Theorematis elegantiſſimi ita breuiſſime ſe habebit:

„ Cum ſit $\alpha aa+p=bb$, erit $p=bb-\alpha aa$
„ et ob $\alpha cc+q=dd$, erit $q=dd-\alpha cc$
„ hinc erit $pq=(bb-\alpha aa)(dd-\alpha cc)$, quae expres-
„ ſio reducitur ad hanc:

$$pq=(bd\pm\alpha ac)^2-\alpha(bc\pm ad)^2$$

„ Quodſi ergo fuerit $x=bc\pm ad$ et $y=bd\pm\alpha ac$,
„ erit $pq=yy-\alpha xx$, ideoque $\alpha xx+pq=yy$.

Q. E. D.

Obſeruatio. 5.

31. Cum igitur pro quolibet numero α formulae $\alpha xx+\gamma=yy$ numerus γ debeat eſſe formae $bb-\alpha aa$, numeri in hac forma contenti diligentius examinari merentur; et quoniam, ſi inter eos occurrunt numeri p et q, ſimul quoque eorum productum pq

 occur-

occurrit, praeter numeros quadratos 1, 4, 9, 16, 25 etc. eorumque multipla negatiua $-\alpha$, -4α, -9α, -16α, -25α etc. imprimis numeri primi in hac forma contenti sunt spectandi, quippe ex quibus deinceps per multiplicationem compositi nascuntur.

I. Sit $\alpha = 2$ et numeri primi formae $bb - 2aa$ sunt:

positiui: $+1, +2, +7, +17, +23, +31, +41, +47, +71, +73, +79, +89, +97$ etc.

negatiui: $-1, -2, -7, -17, -23, -31, -41, -47, -71, -73, -79, -89, -97$ etc.

qui praeter $+2$ et -2 omnes in forma $\pm(8n \pm 1)$ continentur.

II. Sit $\alpha = 3$ et numeri primi formae $bb - 3aa$ sunt:

positiui: $+1, +13, +37, +61, +73, +97, +109$, etc.

negatiui: $-2, -3, -11, -23, -47, -59, -71, -83, -107$, etc.

qui praeter -2 et -3 omnes continentur in forma $12n + 1$, siquidem pro n tam numeri positiui, quam negatiui, capiantur.

III. Sit $\alpha = 5$ et numeri primi formae $bb - 5aa$ sunt:

positiui: $+1, +5, +11, +19, +29, +31, +41, +59, +61, +71, +79, +89, +101$, etc.

negatiui: $-1, -5, -11, -19, -29, -31, -41, -59, -61, -71, -79, -89, -101$ etc.

qui praeter $+5$ et -5, omnes in forma $10n \pm 1$ continentur.

IV.

IV. Sit $\alpha = 6$ et numeri primi formae $bb - 6aa$ sunt:

positiui: $+1, +3, +19, +43, +67, +73, +97$, etc.

negatiui: $-2, -23, -29, -47, -53, -71, -101$, etc.

qui, praeter -2 et $+3$, omnes in alterutra harum formarum: $24n + 1$ et $24n - 5$ continentur, sumendo pro n numeros tam negatiuos, quam positiuos.

V. Sit $\alpha = 7$ et numeri primi formae $bb - 7aa$ sunt:

positiui: $+1, +2, +29, +37, +53, +109$ etc.

negatiui: $-7, -3, -19, -31, -47, -59, -83$ etc.

qui praeter $+2$ et -7 omnes in vna harum formarum continentur: $28n + 1$; $28n + 9$; $28n + 25$

Obseruatio 6.

32. Hinc colligimus, omnes numeros primos in formula $bb - \alpha aa$ contentos simul in quibusdam huiusmodi formulis $4\alpha n + A$ contineri, dum pro A certi quidam numeri substituuntur. Quod idem etiam hoc modo ostendi potest: ponatur $b = 2\alpha p + r$ et $a = 2q + s$ ac formula $bb - \alpha aa$ transit in hanc:

$$4\alpha\alpha pp + 4\alpha pr + rr - 4\alpha qq - 4\alpha qs - \alpha ss$$

statuatur $\alpha pp + pr - qq - qs = n$ et habebimus:

$$bb - \alpha aa = 4\alpha n + rr - \alpha ss$$

omnes ergo numeri primi formae $bb - \alpha aa$ quoque in hac forma $4\alpha n + rr - \alpha ss$ continentur; atque vt hi numeri sint primi, r et s ita accipi oportet, vt numerus $rr - \alpha ss$ ſit vel ipſe primus, vel ſaltem ad 4α primus. Primo ergo ſumto $s = 0$, pro r ſucceſſiue accipi poſſunt numeri impares ad α primi, ac ſi rr fuerit maius quam 4α, inde 4α toties ſubtrahatur, quoties fieri poteſt, vt reſiduum ſit minus quam 4α, et quot hoc modo diuerſi numeri reſultant, ii in formula $4\alpha n + A$ loco A collocentur. Deinde etiam ſimili modo colligantur numeri ex formulis $rr - \alpha$, qui quatenus ſunt diuerſi, ad illos inſuper adiiciantur. Non autem opus eſt, pro s alios numeros praeter vnitatem aſſumere; ſi enim s eſſet numerus par, numerus $-\alpha ss$ iam in forma $4\alpha n$ contineretur, et ſi s eſſet impar, numerus $-\alpha ss$ haberet formam $-4\alpha N - \alpha$, cuius pars $-4\alpha N$ iam in $4\alpha n$ continetur, ſicque ſufficit pro formulis $4\alpha n + A$, quouis caſu has $4\alpha n + rr$ et $4\alpha n + rr - \alpha$ euoluere, eaeque iam omnes numeros primos, qui quidem in formula $bb - \alpha aa$ comprehenduntur, in ſe complectentur. Num autem viciſſim omnes numeri primi, in his formulis $4\alpha n + rr$ et $4\alpha n + rr - \alpha$ contenti, ſimul ſint numeri formae $bb - \alpha aa$? quaeſtio eſt altioris indaginis, quae tamen affirmanda videtur.

Obſeruatio 7.

33. Quo haec exemplo illuſtremus, ſit $\alpha = 13$, et ex $4\alpha n + rr$ et $4\alpha n + rr - \alpha$ orientur hae formulae pro numeris primis:

ex $4an + rr$	ex $4a + rr - a$
$52n + 1$	$52n - 9$
$52n + 9$	$52n + 3$
$52n + 25$	$52n + 23$
$52n + 49 = 52n - 3$	$52n + 51 = 52n - 1$
$52n + 81 = 52n - 23$	$52n + 87 = 52n - 17$
$52n + 121 = 52n + 17$	$52n + 131 = 52n - 25$

quae formulae reducuntur ad has:

$52n \pm 1$; $52n \pm 3$; $52n \pm 9$; $52n \pm 17$; $52n \pm 23$; $52n \pm 25$

ac numeri primi in his contenti sunt:

± 1; ± 3; ± 17; ± 23; ± 29; ± 43; ± 53; ± 61; ± 79; ± 101; ± 103;

quibus addi debet $+ 13$; tum vero omnes numeri quadrati; atque si insuper adiiciantur producta ex binis pluribusque horum numerorum, obtinebuntur hoc quidem casu omnes numeri, qui pro γ substituti producunt formulam $13xx + \gamma = yy$ in numeris integris resolubilem; seu quicunque illorum numerorum pro γ accipiatur, vnus primo deinde infiniti numeri integri pro x inueniri possunt, quibus formula $13xx + \gamma$ quadratum reddatur. Omnes enim isti numeri simul in forma $bb - 13aa$ continentur; qui enim huc difficiliores reductu videntur, sunt: $-1 = 18^2 - 13.5^2$

$+13 = 65^2 - 13.18^2$; $-3 = 7^2 - 13.2^2$; $17 = 15^2 - 13.4^2$; $-17 = 10^2 - 13.3^2$

$-23 = 43^2 - 13.12^2$; $+29 = 9^2 - 13.2^2$; $-29 = 32^2 - 13.9^2$; $+43 = 76^2 - 13.21^2$

-43

$-43=3^2-13.2^2; +53=51^2-13.14^2; -53=8^2-13.3^2;$
$+61=23^2-13.6^2$
$-61=24^2-13.7^2; +79=14^2-13.3^2; -79=16^2-13.5^2;$
etc.

Cum ergo ſit $-1=18^2-13.5^2$, ſi fuerit $+\gamma=bb-13aa$, erit $-\gamma=(18b\pm65.a)^2-13(18a\pm5b)^2$, vnde caſus difficiliores reſoluuntur.

Propoſita ergo reſoluenda hac aequatione $13xx+43.79=yy$, cum ſit $\gamma=43.79=-43.-79$. habebitur per compoſitionem:

I. $\gamma=(14.76\pm13.63)^2-13(14.21\pm3.76)^2$
ergo $x=294\pm228$ et $y=1064\pm819$

II. $\gamma=(3.16\pm13.10)^2-13(2.16\pm3.5)^2$
ergo $x=32\pm15$ et $y=130\pm48$

vnde ſtatim 4 ſolutiones obtinentur.

Obſeruatio 8.

34. Verum non ſemper ex his numeris primis, quos modo inueſtigare docuimus, cum quadratis omnes plane numeri, qui pro γ aſſumi poſſunt, reperiuntur, cuius rei exemplum eſt caſus $\alpha=10$, pro quo valores ipſius γ in hac forma $bb-10aa$ continentur; iique ſunt, tam negatiue, quam poſitiue, ſumti:

1, 4, 6, 9, 10, 15, 16, 24, 25, 26, 31, 36, 39, 40, 41, 49, 54, 60, 64, 65, 71, 74, 79, 81, 86, 89, 90, 96, 100, 104, 106, 111, 121, 124, 129, 134, 135, 144, 150, 151, 156, 159, 160, 164, 166, 169, 185, 186, 191, 196, 199, 201, etc.

inter

inter quos numeros occurrunt primo omnes quadrati: 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196, etc. deinde numeri primi 31,41,71,79,89,151,191,199, etc. qui in his formulis continentur $40n \pm 1$ et $40n \pm 9$. insuperque accedunt producta ex binis pluribusue horum numerorum. Tertio vero praeter hos adsunt numeri ex binis numeris primis compositi, qui sunt:

2.3; 2.5; 2.13; 2.37; 2.43; 2.53; 2.67; 2.83; etc.
3.5; 3.13; 3.37; 3.43; 3.53; 3.67; etc.
5.13, 5.37, etc.

At hi numeri primi, quorum semper bini sunt in se multiplicandi, sunt primo 2 et 5, reliqui vero in his formulis continentur $40n \pm 3$ et $40n \pm 13$. Denique etiam secundum regulam generalem adiici debent producta ex binis pluribusue numeris, qui per se satisfaciunt. Ita resolui poterit haec aequatio $10xx + 13.53.151 = yy$ nam est $13.53 = bb - 10aa$ existente $b = 27$ et $a = 2$ et $151 = dd - 10cc$; existente $d = 31$ et $c = 9$. hincque

$$13.53.151 = (bd \pm 10ac)^2 - 10(ad \pm bc)^2$$

et $x = ad \pm bc$ et $y = bd \pm 10ac$.

Deinde cum etiam sit $-13.53 = BB - 10AA$ et $-151 = DD - 10CC$, hinc duae aliae solutiones reperiuntur. Cum autem sit $-1 = 3^2 - 10.1^2$, si fuerit $\gamma = bb - 10aa$, erit $-\gamma = (3a \pm b)^2 - 10(3a \pm b)^2$. Solutiones autem hinc oriundae sunt:

$$x = 181;\ x = 305;\ x = 307;$$
$$y = 657;\ y = 1017;\ y = 1023;$$

duae enim inter se conueniunt, ita vt hinc tres tantum reperiantur.

Obseruatio 9.

35. Hoc ergo casu $\alpha = 10$ pro γ triplicis generis numeros primitiuos inuenimus, primo scilicet numeros quadratos omnes, deinde certos numeros primos in formulis $40n \pm 1$ et $40n \pm 9$ contentos, tertio autem producta ex binis certis numeris primis, qui sunt 2, 5 et reliqui ex his formulis $40n \pm 3$ et $40n \pm 13$ petendi, atque ex hoc demum triplici ordine omnes numeri pro γ idonei formantur, vt huic aequationi $10xx + \gamma = yy$ satisfieri possit. Ipsi autem numeri primi in formulis $40n \pm 3$ et $40n \pm 13$ contenti non conueniunt, quia non sunt formae $bb - 10aa$, sed tamen hi numeri omnes sunt formae $2bb - 5aa$; vti etiam duo iis iungendi 2 et 5. Manifestum autem est, si habeantur duo numeri huiusmodi $2bb - 5aa$ et $2dd - 5cc$, eorum productum fore $= (2bd \pm 5ac)^2 - 10(bc \pm ad)^2$, ideoque pro γ adhiberi posse. Huiusmodi igitur producta binorum numerorum primorum, qui ipsi non satisfaciunt, occurrere nequeunt, si α fuerit numerus primus, sed tantum, vti hic vsu venit, si α fuerit numerus compositus; quod tamen etiam non semper locum habet, vti vidimus casu $\alpha = 6 = 2 \cdot 3$, quo numeri formae $3bb - 2aa$ conueniunt cum numeris formae $bb - 6aa$. Quodsi ergo in genere fuerit $\alpha = pq$, et aequatio $pqxx + \gamma = yy$ resolui debeat, numerus γ vel esse debet numerus quadratus, vel primus formae $bb - pqaa$, vel productum ex duobus numeris primis formae $pbb - qaa$, propterea quod huiusmodi productum est:

$$(pbb - qaa)(pdd - qcc) = (pbd \pm qac)^2 - pq(bc \pm ad)^2$$

Nisi

Nisi ergo tales numeri primi iam ipsi $pbb-qaa$ in forma $bb-pqaa$ contineantur, tertius ille ordo numerorum ex binis numeris primis conflatorum accedit. Quemadmodum deinde numeri primi solitarii continentur in formulis

$$4pqn+rr \quad \text{et} \quad 4pqn+rr-pq$$

ita numeri primi alteri combinandi ex formula hac:

$$4pqn+prr-qss$$

deriuari debent.

Exemplum 1.

36. Inuestigentur omnes valores idonei ipsius γ, vt haec aequatio $30xx+\gamma=yy$ resolutionem admittat.

Primo quidem pro γ assumi possunt omnes numeri quadrati, deinde omnes numeri primi in his formis $120n+rr$ et $120n+n-30$ contenti, quae reducuntur ad has:

$120n+1$; $120n+49$; $120n+19$; $120n-29$, cum -5

vnde oriuntur hi numeri primi infra 200

positiui: $+19, +139$

et negatiui: $-5, -29, -71, -101, -149, -191$

Tertio ob $\alpha=2.3.5$, sumi possunt producta trinorum primorum, qui contineantur vel ambo in vna harum formularum:

I. $120n+2rr-15ss$; II. $120n+3rr-10ss$;
III. $120n+5rr-6ss$

harum autem binae priores eosdem numeros primos dant, qui sunt $+2.+3$, et reliqui in his formulis

 conti-

continentur:

$120n-7$; $120n-13$; $120n+17$; $120n-37$

vnde nascuntur hi numeri primi infra 200

positiui: $+2$; $+3$; $+17$; $+83$; $+107$; $+113$; $+137$

negatiui: -7; -13; -37; -103; -127

quorum binorum producta pro γ capienda sunt;

$+6, +34, +51, +91, +166$

$-14, -21, -26, -39, -74, -111, -119$

Tertia autem formula continet numerum primum $+5$, cum his formis:

$120n-1$; $120n-19$; $120n+29$; $120n-49$

vnde nascuntur hi numeri primi infra 200

positiui: $5, +29, +71, +101, +149, +191$

negatiui: $-1, -19, -139$

At ex horum combinatione iidem nascuntur numeri, qui iam ex numeris primis primitiuis oriuntur. Quocirca omnes numeri, qui pro γ substitui possunt, erunt infra 200:

$+1, +4, +9, +16, +25, +36, +49, +64, +81, +100, +121, +144, +169, +196,$

$-5, +19, -29, -71, -101, +139, -149, -191$

$+6, -14, -21, -26, -34, -39, +51, -74, +91, -111, -119, +166$

$-20, +24, -30, -45, +54, -56, +70, +76, -80, -84, -95, +96, -104, +105$

$+114, -116, -125, -126, +130, +136, +145, +150, -156, -170, +171, -189, +195$

reliqui

reliqui autem numeri omnes pro γ assumti reddent problema impossibile.

Exemplum 2.

37. *Resoluere in numeris integris aequationem*

$$5xx + 11.\ 19.\ 29 = yy$$

Quia est $\alpha = 5$ et $\gamma = 11.\ 19.\ 29$, factores hi cum forma $bb - 5aa$ conueniunt, et singuli in ea contineri deprehenduntur: nam

pro 11 est $b = 4$, $a = 1$ vnde etiam producta ex
19 -- $b = 8$, $a = 3$ binis in eadem forma
29 -- $b = 7$, $a = 2$ continentur

pro 11. 19 est $\left\{\begin{array}{l} b = 17;\ a = 4 \\ b = 47;\ a = 20 \end{array}\right\}$ ergo tertium adiungendo

$$\text{pro } 11.\ 19.\ 29 \text{ est } \left\{\begin{array}{l} b = 79;\ a = 6 \\ b = 159;\ a = 62 \\ b = 129;\ a = 46 \\ b = 529;\ a = 234 \end{array}\right\}$$

Cum iam sit $1 = 9^2 - 5.4^2$, seu $b = 9$ et $a = 4$ pro 1, hae formulae insuper per 1 multiplicatae duplicabuntur, fietque pro 11. 19. 29

$b = 591;\ a = 262$	$b = 241;\ a = 102$
$b = 831;\ a = 370$	$b = 2081;\ a = 930$
$b = 191;\ a = 78$	$b = 81;\ a = 10$
$b = 2671;\ a = 1194$	$b = 9441;\ a = 4222$

Hinc ergo iam duodecim solutiones problematis sumus nacti, quae sunt:

I. $x=6$; $y=79$	VII. $x=234$; $y=529$
II. $x=10$; $y=81$	VIII. $x=262$; $y=591$
III $x=46$; $y=129$	IX. $x=370$; $y=831$
IV. $x=62$; $y=159$	X. $x=930$; $y=2081$
V. $x=78$; $y=191$	XI. $x=1194$; $y=2671$
VI. $x=102$; $y=241$	XII. $x=4222$; $y=9441$

ex quibus porro cum formula $1=9^2-5.4^2$ coniungendis infinite nouae eaeque omnes elicientur: ex secunda scilicet prodit

$x=414$; $y=929$; et ex sexta $x=1882$; $y=4209$ ex quinta $x=1466$; $y=3279$; ex octaua $x=4722$; $y=10559$; sicque iam sedecim solutiones sumus adepti.

Conclusio.

38. His expositis non amplius coacti sumus, proposita huiusmodi aequatione $axx+\gamma=yy$, primum quasi diuinando vnum casum satisfacientem anquirere, sed numerum γ examinando secundum formulas modo traditas statim pronunciare possumus, vtrum aequatio resolutionem admittat, nec ne? ac si admittit, per eadem principia vnam saltem solutionem elicere licebit, quod quidem promte fieri poterit, si numerus γ fuerit resolubilis in factores non nimis magnos. Verum si numerus γ sit primus ac praegrandis, iudicium quidem solubilitatis aeque est facile, at inuentio vnius solutionis maiorem laborem requirit. Veluti si proponatur $30xx+1459=yy$, quia 1459 est numerus primus formae $120n+19$, aequatio est resolubilis; verum ei satisfieri sumendo $x=39$ et $y=217$ non

non tam facile inueſtigatur. Inueſtigatio tamen ſubleuatur, ſi ſtatuamus $y = 30z + 7$, vnde fit $xx = 30zz + 14z - 47$, et iam citius reperiemus $z = 7$, et $x = 39$ vnde prodit $y = 217$. At ſi ponamus $y = 30z + 13$, fit $xx = 30zz + 26z - 43$, promtiusque inuenitur $x = 5$ et $y = 47$. Verum in numeris multo maioribus labor euadit inſuperabilis, methodusque certa adhuc deſideratur negotium conficiendi: deinde etiam quod omnes numeri primi, in ſupra allatis formulis $4\alpha n + A$ contenti, ſimul ſint numeri huius formae $bb - \alpha aa$, ad eas propoſitiones pertinet, quas veras credimus, etiamſi demonſtrare non valeamus. In quo cum eximia pars Theoriae numerorum verſetur, qui huius generis problemata diligentius perſcrutari voluerit, nullum eſt dubium, quin non contemnendas veritates ſit eruturus; ob eandemque cauſam confido haec ipſa, quae hic attuli, vſu non eſſe caritura: ea ipſa enim quae adhuc ſunt incognita accuratius expoſuiſſe non parum iuuabit.

DE

DE PROGRESSIONIBVS ARCVVM CIRCVLARIVM QVORVM TANGENTES SECVNDVM CERTAM LEGEM PROCEDVNT.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Infinitas huiusmodi progressiones exhiberi posse vel ex his exemplis liquet, quae olim proposui, scilicet denotante π arcum duos angulos rectos metientem inueni, esse

$$\tfrac{\pi}{4} = \text{A tang } \tfrac{1}{2} + \text{A tang } \tfrac{1}{8} + \text{A tang. } \tfrac{1}{18} + \text{A tang. } \tfrac{1}{32} + \text{A tang. } \tfrac{1}{50} + \text{etc.}$$

quae series arcuum in infinitum progreditur, tangente cuiusque indefinite existente $= \frac{1}{2xx}$, simili modo est

$$\tfrac{\pi}{4} = \text{A tang } \tfrac{1}{3} + \text{A tang. } \tfrac{1}{7} + \text{A tang. } \tfrac{1}{13} + \text{A tang } \tfrac{1}{21} + \text{A tang } \tfrac{1}{31} + \text{etc.}$$

hac arcuum serie pariter in infinitum continuata, cuius quisque terminus indefinite est A tang. $\frac{1}{xx+x+1}$. Tales autem series eo magis videntur omni attentione dignae, quod nulla adhuc constet methodus earum summam a priori inueniendi, atque etiam ipsi arcus omnes inter se sint incommensurabiles. Quin etiam ne expectare quidem licet methodum, cuius ope in genere huiusmodi serierum, quamcunque legem tangentes sequantur, summa inuestigari queat; sed potius, nisi haec

haec lex certis conditionibus ſit adſtricta, nullo modo eae ad ſummam reuocari poſſe videntur, quae quidem arcu circulari exprimatur. Quam ob rem in hoc negotio alia via non patet, niſi vt a poſteriori huiusmodi ſeries inueſtigemus, quarum deinceps contemplatio fortaſſe viam quandam directam patefaciet; hincque modum exponam facilem ad quotcunque huiusmodi ſeries perueniendi, qui cum, ſimpliciſſimis principiis innixus, ad tam ardua perducat, omnino mereri videtur, vt diligentius euoluatur.

2. Non ſolum autem hoc modo ad ſeries infinitas deducimur, ſed pro lubitu progreſſiones dato terminorum numero conſtantes conſequi poſſumus. Fundamentum enim totius inueſtigationis in eo conſiſtit, vt pro lubitu numeros quotcunque aſſumamus, qui ſint:

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon,$$

qui vt tangentes angulorum ſpectentur. Cum enim manifeſto ſit

$$\left.\begin{matrix} +\text{Atang.}\alpha+\text{Atang.}\beta+\text{Atang.}\gamma+\text{Atang.}\delta \\ -\text{A tang.}\beta-\text{A tang.}\gamma-\text{A tang.}\delta-\text{Atang.}\varepsilon \end{matrix}\right\} = \text{Atang.}\alpha-\text{Atang.}\varepsilon$$

binis arcubus ſubſcriptis colligendis ob $\text{A tang.}p-\text{A tang.}q = \text{A tang.}\frac{p-q}{pq+1}$ habebimus

$$\text{A tang.}\ \alpha-\text{A tang.}\ \varepsilon = \text{A tang.}\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta+1} + \text{A tang.}\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma+1}$$
$$+ \text{A tang.}\frac{\gamma-\gamma}{\gamma\delta+1} + \text{A tang.}\frac{\delta-\varepsilon}{\delta\varepsilon+1} = \text{A tang.}\frac{\alpha-\varepsilon}{\alpha\varepsilon+1}.$$

En ergo formam maxime generalem, vnde omnes huiusmodi ſeries arcuum originem ducunt, ſiue in infinitum excurrant, siue finito terminorum numero constent:

$$\text{A tang.}\tfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta+1}+\text{A tang.}\tfrac{\beta-\gamma}{\beta\gamma+1}+\text{A tang}\tfrac{\gamma-\delta}{\gamma\delta+1}+\text{A tang.}\tfrac{\delta-\varepsilon}{\delta\varepsilon+\varepsilon}+\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots+\text{A tang.}\tfrac{\psi-\omega}{\psi\omega+1}=\text{A tang.}\tfrac{\alpha-\omega}{\alpha\omega+1}.$$

3. Casui, quo numerus terminorum est finitus, hic non immorans, statim in series infinitas inquiram. Primo ergo pro α, β, γ etc. seriem harmonicam assumam in genere:

Hypothesis I. $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+2b}, \frac{1}{a+3b}, \frac{1}{a+4b}, \frac{1}{a+5b}$ etc.

vnde cum sit $\omega=0$ habebimus:

$$\text{A tang.}\tfrac{1}{a}=\text{A tang.}\tfrac{b}{aa+ab+1}+\text{A tang}\tfrac{b}{aa+3ab+2bb+1}$$
$$+\text{A tang.}\tfrac{b}{aa+5ab+6bb+1}+\text{A tang.}\tfrac{b}{aa+7ab+12bb+1}+\text{etc.}$$

in infinitum.

Ac si singulis illis fractionibus communem tribuamus numeratorem c, erit simili modo

$$\text{A tang}\tfrac{c}{a}=\text{A tang.}\tfrac{bc}{a(a+b)+cc}+\text{A tang.}\tfrac{bc}{(a+b)(a+2b)+cc}$$
$$+\text{A tang.}\tfrac{bc}{(a+2b)(a+3b)+cc}+\text{A tang.}\tfrac{bc}{(a+3b)(a+4b)+cc}+\text{etc.}$$

n infinitum.

Hinc praecipue notari merentur casus, quibus numerator horum tangentium fit vnitas, quod euenit, si fuerit vel $bc=1$, vel si denominatores singuli per bc fiant diuisibiles.

4. Vtroque casu capi oportet vel $c=1$, vel $c=2$; ac si pro priori sumatur $b=1$, prodibit

$$\text{A tang.}\tfrac{1}{a}=\text{A tang.}\tfrac{1}{aa+a+1}+\text{A tang.}\tfrac{1}{aa+3a+3}$$
$$+\text{A tang.}\tfrac{1}{aa+5a+7}+\text{A tang.}\tfrac{1}{aa+7a+13}$$

cuius

cuius terminus in genere eſt A tang. $\frac{1}{aa+(2x-1)a+xx-x+1}$ vnde pro ſimplicioribus valoribus ipſius a naſcuntur hae ſeries :

$$\text{A tang.}\tfrac{1}{0} = \text{A tang.}\, 1 + \text{A tang.}\tfrac{1}{3} + \text{A tang.}\tfrac{1}{7} + \text{A tang.}\tfrac{1}{13} + \text{A tang.}\tfrac{1}{21} + \text{A tang.}\tfrac{1}{31} + \text{etc.}$$

$$\text{A tang.}\, 1 = \text{A tang.}\tfrac{1}{3} + \text{A tang.}\tfrac{1}{7} + \text{A tang.}\tfrac{1}{13} + \text{A tang.}\tfrac{1}{21} + \text{A tang.}\tfrac{1}{31} + \text{etc.}$$

$$\text{A tang.}\tfrac{1}{2} = \text{A tang.}\tfrac{1}{7} + \text{A tang.}\tfrac{1}{13} + \text{A tang.}\tfrac{1}{21} + \text{A tang.}\tfrac{1}{31} + \text{A tang.}\tfrac{1}{43} + \text{etc.}$$

$$\text{A tang.}\tfrac{1}{3} = \text{A tang.}\tfrac{1}{13} + \text{A tang.}\tfrac{1}{21} + \text{A tang.}\tfrac{1}{31} + \text{A tang.}\tfrac{1}{43} + \text{A tang.}\tfrac{1}{57} + \text{etc.}$$

$$\text{A tang.}\tfrac{1}{4} = \text{A tang.}\tfrac{1}{21} + \text{A tang.}\tfrac{1}{31} + \text{A tang.}\tfrac{1}{43} + \text{A tang.}\tfrac{1}{57} + \text{A tang.}\tfrac{1}{73} + \text{etc.}$$

etc.

5. Pro b alios numeros capere non licet, niſi qui ſint diuiſores ipſius $aa+1$, vnde ſi $b=2$, neceſſe eſt ſit a numerus impar: hincque ſequentes naſcuntur ſeries:

$$\text{A tang.}\, 1 = \text{A tang.}\tfrac{1}{2} + \text{A tang.}\tfrac{1}{8} + \text{A tang.}\tfrac{1}{18} + \text{A tang.}\tfrac{1}{32} + \text{A tang.}\tfrac{1}{50} + \text{A tang.}\tfrac{1}{72}\ \text{etc.}$$

$$\text{A tang.}\tfrac{1}{3} = \text{A tang.}\tfrac{1}{8} + \text{A tang.}\tfrac{1}{18} + \text{A tang.}\tfrac{1}{32} + \text{A tang.}\tfrac{1}{50} + \text{A tang.}\tfrac{1}{72} + \text{A tang.}\tfrac{1}{98}\ \text{etc.}$$

$$\text{A tang.}\tfrac{1}{5} = \text{A tang.}\tfrac{1}{18} + \text{A tang.}\tfrac{1}{32} + \text{A tang.}\tfrac{1}{50} + \text{A tang.}\tfrac{1}{72} + \text{A tang.}\tfrac{1}{98}\ \text{etc.}$$

$$\text{A tang.}\tfrac{1}{7} = \text{A tang.}\tfrac{1}{32} + \text{A tang.}\tfrac{1}{50} + \text{A tang.}\tfrac{1}{72} + \text{A tang.}\tfrac{1}{98}\ \text{etc.}$$

etc.

6. Si ſtatuatur $b = 5$, ſumi debet $u = 5n \pm 2$; hinc fit:

$$A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2} = A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{3} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{17} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{41} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{75} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{119} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{174} + \text{etc.}$$

$$A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{3} = A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{5} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{21} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{47} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{83} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{129} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{185} + \text{etc.}$$

$$A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{7} = A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{17} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{41} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{75} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{119} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{174}\ \text{etc.}$$

$$A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{8} = A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{21} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{47} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{83} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{129} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{185}\ \text{etc.}$$

Primae terminus generalis eſt $A\,\text{tang.}\,\frac{1}{5xx - x - 1}$, ſecundae $A\,\text{tang.}\,\frac{1}{5xx + x - 1}$, ſequentes autem ex prioribus facile deducuntur, quas ideo poſthac omittemus.

7. Si $b = 10$, ſumi debet $a = 10n \pm 3$, vnde oriuntur hae duae ſeries:

$$A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{3} = A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{4} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{30} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{76} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{142} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{228} + \text{etc.}$$

termino generali exiſtente $A\,\text{tang.}\,\frac{1}{10xx - 4x - 2}$

$$A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{7} = A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{12} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{46} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{100} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{174} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{268} + \text{etc.}$$

termino generali exiſtente $A\,\text{tang.}\,\frac{1}{10xx + 4x - 2}$

8. Simili modo poſito $b = 13$, et $a = 13n \pm 5$, prodibunt

$$A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{3} = A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{7} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{43} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{105} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{193} + \text{etc.}$$

termi-

termino generali existente A tang. $\frac{1}{13xx-3x-1}$

A tang. $\frac{1}{8}$ = A tang. $\frac{1}{13}$ + A tang. $\frac{1}{55}$ + A tang. $\frac{1}{123}$ + A tang $\frac{1}{217}$ + etc.

termino generali existente A tang. $\frac{1}{13xx+3x-1}$.

9. Sit $b=17$, capiaturque $a=17n\pm 4$, ac prodibunt

A tang. $\frac{1}{4}$ = A tang. $\frac{1}{5}$ + A tang. $\frac{1}{47}$ + A tang. $\frac{1}{123}$ + A tang. $\frac{1}{233}$ + A tang $\frac{1}{377}$ etc.

termino generali existente A tang. $\frac{1}{17xx-9x-1}$

A tang. $\frac{1}{13}$ = A tang. $\frac{1}{23}$ + A tang. $\frac{1}{83}$ + A tang. $\frac{1}{177}$ + A tang. $\frac{1}{305}$ + A tang. $\frac{1}{467}$ etc.

termino generali existente A tang. $\frac{1}{17xx+9x-1}$.

10. Sit $b=25$, captoque $a=25n\pm 7$, erit

A tang $\frac{1}{7}$ = A tang. $\frac{1}{9}$ + A tang. $\frac{1}{73}$ + A tang. $\frac{1}{187}$ + A tang. $\frac{1}{351}$ + A tang. $\frac{1}{565}$ + etc.

termino generali existente A tang $\frac{1}{25xx-11x-6}$.

A tang. $\frac{1}{18}$ = A tang. $\frac{1}{31}$ + A tang. $\frac{1}{117}$ + A tang. $\frac{1}{253}$ + A tang. $\frac{1}{439}$ + A tang. $\frac{1}{675}$ etc.

termino generali existente A tang. $\frac{1}{25xx+11x-6}$.

11. Hinc iam in genere colligere poterimus, si fuerit a numerus quicunque, sitque $aa+1=mn$, fore

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{a} = \text{A tang.}\,\frac{1}{a+m} + \text{A tang.}\,\frac{1}{3a+m+2n} + \text{A tang.}\,\frac{1}{5a+m+6n} + \text{A tang.}\,\frac{1}{7a+m+12n}\ \text{etc.}$$

termino generali exiſtente A tang. $\frac{1}{nxx+(2a-n)x-a+m}$

ſeu hoc modo: A tang. $\frac{1}{nx(x-1)+a(2x-1)+m}$

Si ergo ſummam huius ſeriei infinitae per $\int$ A tang. $\frac{1}{nxx+(2a-n)x-a+m}$ indicemus, conſequemur hoc Theorema:

$$\int \text{A tang.} \frac{1}{nxx+(2a-n)x-a+m} = \text{A tang.} \frac{1}{a}, \text{ exiſtente } aa+1=mn.$$

12. Videamus ergo, quibus caſibus ſeries, cuius terminus generalis eſt A tang. $\frac{1}{Lxx+Mx+N}$, ſummari queat; et comparatione inſtituta deprehendemus, hoc fieri poſſe, quoties fuerit $MM+4=LL+4LN$; ideoque

vel $L=-2N+\sqrt{(MM+4NN+4)}$, vel $M=\sqrt{(LL+4LN-4)}$

vel $N=\frac{MM-LL+4}{4L}$.

Atque ſi haec relatio inter coefficientes L, M N locum habuerit, erit $\int$A tang. $\frac{1}{Lxx+Mx+N}$ = A tang. $\frac{2}{L+M}$ ſiue erit

$$\text{A tang.} \frac{2}{L+M} = \text{A tang.} \frac{1}{L+M+N} + \text{A tang.} \frac{1}{4L+2M+N}$$
$$+ \text{A tang.} \frac{1}{9L+3M+N} + \text{A tang.} \frac{1}{16L+4M+N} + \text{etc.}$$

Hypotheſis II. 13. Cum haec ex progreſſione harmonica ſequantur, pro α, β, γ, δ etc. ſumamus hanc ſeriem:

$$\frac{c}{a};\ \frac{c+d}{a+b};\ \frac{c+2d}{a+2b};\ \frac{c+3d}{a+3b};\ \frac{c+4d}{a+4b};\ \text{etc.}$$

vnde cum ſit $\alpha=\frac{c}{a}$ et $\omega=\frac{d}{b}$, hanc adipiſcemur ſummationem:

$$\text{A tang.} \frac{bc-ad}{ab+cd} = \text{A tang.} \frac{bc-ad}{a(a+b)+c(c+d)} + \text{A tang.} \frac{bc-ad}{(a+b)(a+2b)+(c+d)(c+2d)} + \text{etc.}$$

cuius

cuius terminus generalis est A tang. $\frac{bc-ad}{(a+b(x-1))(a+bx)+(c+d(x-1))(c+dx)}$.

14. Vt iam numerator huius tangentis vnitati fiat aequalis, vel esse debet $bc-ad=1$, vel denominator per numeratorem $bc-ad$ diuisibilis, quod posterius euenit sumendo:

$$a=pr+qs;\ c=ps-qr;\ b=pt+qu;\ d=pu-qt$$
dum sit $st-ru=1$.

tum enim fiet:

A tang. $\frac{1}{rt+su}=\int$ A tang. $\frac{1}{rr+ss+(rt+su)(2x-1)+(tt+uu)x(x-1)}$.
Verum haec formula cum praecedente ita conuenit, vt hinc nullae nouae series eliciantur.

15. Fractiones autem continuae admodum idoneos praebent valores pro numeris $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. assumendos. Si enim fuerit: *Hypothesis III.*

$$z=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\cfrac{1}{g+\text{etc.}}}}}}}$$

hinc sequens series fractionum constituitur, pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. capiendarum:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+1}{b}; & \frac{abc+c+a}{bc+1}; & \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}; \text{ etc.} \end{array}$$

qua-

quarum vltima ipſi valori ipſius z eſt aequalis.

16. Quodſi hic eam notandi formam, quam in Algorithmi ſingularis ſpecimine tradidi, introducamus, hae fractiones ita exprimentur:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta \\ \frac{1}{0}; & \frac{(a)}{1}; & \frac{(a,b)}{(b)}; & \frac{(a,b,c)}{(b,c)}; & \frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}; & \frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} \text{ etc.} \end{array}$$

vti notari oportet, eſſe

$$(a,b) = a(b) + 1 = b(a) + 1$$

$$(a,b,c) = a(b,c) + (c) = c(a,b) + (a)$$

$$(a,b,c,d) = a(b,c,d) + (c,d) = d(a,b,c) + (a,b)$$

$$(a,b,c,d,e) = a(b,c,d,e) + (c,d,e) = e(a,b,c,d) + (a,b,c)$$

etc.

17. Cum igitur ſit $\alpha = \frac{1}{0}$, et $\omega = z$, erit

$$\text{A tang.} \tfrac{1}{z} = \text{A tang.} \tfrac{1}{\beta} + \text{A tang.} \frac{\beta - \gamma}{\beta\gamma + 1} + \text{A tang.} \frac{\gamma - \delta}{\gamma\delta + 1} + \text{A tang.} \frac{\delta - \varepsilon}{\delta\varepsilon + 1} + \text{etc.}$$

vbi eſt $\beta = a$; et $\frac{\beta - \gamma}{\beta\gamma + 1} = \frac{-1}{(a)(a,b) + (b)}$; tum vero

$$\frac{\gamma - \delta}{\gamma\delta + 1} = \frac{+1}{(a,b)(a,b,c) + (b)(b,c)}$$

$$\frac{\delta - \varepsilon}{\delta\varepsilon + 1} = \frac{-1}{(a,b,c)(a,b,c,d) + (b,c)(b,c,d)}$$

$$\frac{\varepsilon - \zeta}{\varepsilon\zeta + 1} = \frac{-1}{(a,b,c,d)(c,b,c,d,e) + (b,c,d)(b,c,d,e)}$$

etc.

ita vt omnes numeratores iam ſint, vel $+1$, vel -1.

18. Quodſi breuitatis gratia loco illius ſeriei ſcribamus

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{B}{\mathfrak{B}}; & \frac{C}{\mathfrak{C}}; & \frac{D}{\mathfrak{D}}; & \frac{E}{\mathfrak{E}}; & \frac{F}{\mathfrak{F}}; \text{ etc} \end{array}$$

vt

vt fit:

$$B = ab + 1 \qquad \mathfrak{B} = b$$
$$C = cB + a \qquad \mathfrak{C} = c\mathfrak{B} + 1$$
$$D = dC + B \qquad \mathfrak{D} = d\mathfrak{C} + \mathfrak{B}$$
$$E = eD + C \qquad \mathfrak{E} = e\mathfrak{D} + \mathfrak{C}$$
$$F = fE + D \qquad \mathfrak{F} = f\mathfrak{E} + \mathfrak{D}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

erit

$$\text{Atang.}\tfrac{1}{z} = \text{Atang.}\tfrac{1}{a} - \text{Atang.}\frac{1}{a+b(aa+1)} + \text{Atang.}\frac{1}{a+b(aa+1)+c(BB+\mathfrak{B}\mathfrak{B})}$$
$$- \text{Atang.}\frac{1}{a+b(aa+1)+c(BB+\mathfrak{B}\mathfrak{B})+d(CC+\mathfrak{C}\mathfrak{C})}$$
$$+ \text{Atang.}\frac{1}{a+b(aa+1)+c(BB+\mathfrak{B}\mathfrak{B})+d(CC+\mathfrak{C}\mathfrak{C})+e(DD+\mathfrak{D}\mathfrak{D})}$$
$$\text{etc.}$$

19. Confideremus fractionem continuam definitam hanc:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 \text{ etc.}}}}}$$

cuius valor eft $= \sqrt{2}$

vnde fractiones, quarum vltima eft $= \sqrt{2}$, funt

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{1}{0}; & \frac{1}{1}; & \frac{3}{2}; & \frac{7}{5}; & \frac{17}{12}; & \frac{41}{29}; & \frac{99}{70}; & \frac{239}{169} \text{ etc.} \end{array}$$

Cum iam fit $\alpha = \infty$, et $\omega = \sqrt{2}$, erit

$$\text{A tang.}\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \text{A tang.}\,1 - \text{A tang.}\tfrac{1}{5} + \text{A tang.}\tfrac{1}{31} - \text{A tang.}\tfrac{1}{179}$$
$$+ \text{A tang.}\tfrac{1}{1045} - \text{etc.}$$

 cuius

cuius ſeriei lex non ſatis eſt perſpicua, propterea quod in fractione continua ordo indicum eſt interruptus, qui ſi obſeruatur, vt ſit

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}} = 1+\sqrt{2}$$ vnde oriuntur hae fractiones

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{12}{5}, & \frac{29}{12}, & \frac{70}{29}, & \frac{169}{70}, & \frac{408}{169} \text{ etc.} \end{array}$$

$$A\,\text{tang.}\,\frac{1}{1+\sqrt{2}} = A\,\text{tang.}\,\frac{1}{2} - A\,\text{tang.}\,\frac{1}{12} + A\,\text{tang.}\,\frac{1}{70} - A\,\text{tang.}\,\frac{1}{408} + A\,\text{tang.}\,\frac{1}{2378} - \text{etc.}$$

vbi eſt $70 = 6.12 - 2$; $408 = 6.70 - 12$; $2378 = 6.408 - 70$ etc.

et $A\,\text{tang.}\,\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8}$.

20. Hoc modo quaecunque alia fractio continua tractari poteſt; veluti cum ſit

$$\sqrt{3} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2\ \text{etc.}}}}}}}$$

hinc oriuntur ſequentes ex indicibus fractiones:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{3}, & \frac{7}{4}, & \frac{19}{11}, & \frac{26}{15}, & \frac{71}{41}, & \frac{97}{56} \text{ etc.} \end{array}$$

vbi ob $\alpha = \infty$, et $\omega = \sqrt{3}$, erit

$$A\,\text{tang.}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = A\,\text{tang.}\,1 - A\,\text{tang.}\,\frac{1}{3} + A\,\text{tang.}\,\frac{1}{15} - A\,\text{tang.}\,\frac{1}{41} + A\,\text{tang.}\,\frac{1}{577} - A\,\text{tang.}\,\frac{1}{859} + \text{etc.}$$

ſin

sin autem tantum fractiones alternae sumantur

$\frac{1}{0}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{26}{15}, \quad \frac{97}{56}, \quad \frac{362}{209}$ etc.

obtinebimus:

$A\,tang.\frac{1}{\sqrt{3}} = A\,tang.\frac{1}{2} + A\,tang.\frac{1}{18} + A\,tang.\frac{1}{242} + A\,tang.\frac{1}{3362} + \text{etc.}$

cuius denominatores omnes sunt duplicata quadrata; scilicet

$$A\,tang.\frac{1}{\sqrt{3}} = A\,tang.\frac{1}{2.1^2} + A\,tang.\frac{1}{2.3^2} + A\,tang.\frac{1}{2.11^2} + A\,tang.\frac{1}{2.41^2} + A\,tang.\frac{1}{2.153^2} + \text{etc.}$$

Sumtis autem alteris alternis, prodit ob $A\,tang.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ et $A\,tang.\,1 = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{12} = A\,tang.\frac{1}{4} + A\,tang.\frac{1}{64} + A\,tang.\frac{1}{900} + A\,tang.\frac{1}{12544} + \text{etc.}$

qui denominatores sunt quadrata, quorum radices hanc progressionem constituunt:

$$\begin{array}{llllll} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \qquad x \\ 2, & 8, & 30, & 112, & 418, \ldots\ldots & \frac{(2+\sqrt{3})^x - (2-\sqrt{3})^x}{\sqrt{3}} \end{array}$$

21. Cum autem fractiones continuae ad huiusmodi series arcuum deduxerint, vicissim summa talis seriei ope fractionis continuae exhiberi poterit, quod commodissime sequenti modo praestabitur.

$$\text{Sit } A\,tang.\frac{1}{z} = A\,tang.\frac{1}{a} - A\,tang.\frac{1}{b} + A\,tang.\frac{1}{c} - A\,tang.\frac{1}{d} + A\,tang.\frac{1}{e} - A\,tang.\frac{1}{f} \text{ etc.}$$

ac ponatur

$$\begin{array}{ll} A\,tang.\frac{1}{z} = A\,tang.\frac{1}{a} - A\,tang.\frac{1}{B} & \text{erit } z = \frac{aB+1}{B-a} = a + \frac{aa+1}{-a+B} \\ A\,tang.\frac{1}{B} = A\,tang.\frac{1}{b} - A\,tang.\frac{1}{C} & \text{erit } B = \frac{bC+1}{C-b} = b + \frac{bb+1}{-b+C} \\ A\,tang.\frac{1}{C} = A\,tang.\frac{1}{c} - A\,tang.\frac{1}{D} & \text{erit } C = \frac{cD+1}{D-c} = c + \frac{cc+1}{-c+D} \\ A\,tang.\frac{1}{D} = A\,tang.\frac{1}{d} - A\,tang.\frac{1}{E} & \text{erit } D = \frac{dE+1}{E-d} = d + \frac{dd+1}{-d+E} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

 hinc

hinc ergo colligendo habebitur per fractionem continuam:

$$z = a + \cfrac{aa+1}{-a+b+\cfrac{bb+1}{-b+c+\cfrac{cc+1}{-c+d+\cfrac{dd+1}{-d+e+\cfrac{ee+1}{-e+f+\text{etc.}}}}}}$$

vnde valor ipsius z definitur.

SPECIMEN ALGORITHMI SINGVLARIS.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Conſideratio fractionum continuarum, quarum vſum vberrimum per totam Analyſin iam aliquoties oſtendi, deduxit me ad quantitates certo quodam modo ex indicibus formatas, quarum natura ita eſt comparata, vt ſingularem algorithmum requirat. Cum igitur ſumma Analyſeos inuenta maximam partem algorithmo ad certas quasdam quantitates accommodato innitantur, non immerito ſuſpicari licet, et hunc algorithmum ſingularem non exigui vſus in Analyſi eſſe futurum, ſi quidem diligentius excolatur: etiamſi ei tantum non tribuendum cenſeam, vt cum receptis algorithmis comparari mereatur.

2. Sequenti autem modo ad eas quantitates, de quibus hic agere conſtitui, ſum deductus: ſi habeatur fractio continua $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}$ cuius valor ſit inveſtigandus, ex numeris a, b, c, d, tanquam indicibus aſſumtis, ſequenti modo fractiones formantur:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+1}{b}, & \frac{abc+c+a}{bc+1}, & \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}. \end{array}$$

Primum ſcilicet locum obtinet ſemper fractio $\frac{1}{0}$, ſecundum $\frac{a}{1}$, cuius numerator eſt primus indicum a, denominator vero vnitas. Sequentis cuiusque fractionis tam numerator, quam denominator, inuenitur, ſi praecedentium vltimus per indicem ſupra ſcriptum multiplicetur, et ad productum penultimus addatur.

3. Conſtat autem harum fractionum poſtremam ipſi fractioni continuae propoſitae eſſe aequalem, praecedentes autem tam prope ad hunc ipſum valorem accedere, vt nulla fractio numeris non maioribus contenta exhiberi queat, quae ad illum propius accedat. Atque ex hoc fonte problema illud a Walliſio olim tractatum facile reſoluitur, quo propoſita quacunque fractione ex ingentibus numeris conſtante, aliae quaeruntur fractiones ex minoribus numeris conſtantes, quae tam parum a propoſita diſcrepent, vt minus diſcrepantes exhiberi plane nequeant, niſi maiores numeros adhibere velimus.

4. Hoc autem aliisque vſibus, quos fractiones continuae ſuppeditant, praetermiſſis, hic inprimis obſeruo, in ſerie illa fractionum ex indicibus formatarum, tam numeratores, quam denominatores, eandem, progreſſionis legem ſequi, et ſeorſim efformari poſſe. In vtraque enim ſerie, ſiue numeratorum, ſiue denominatorum, quilibet terminus per indicem ſupra ſcriptum multiplicatus, et termino antecedente auctus, praebet terminum ſequentem. Vltimus autem numerus ſuperioris ſeriei componitur ex omnibus quatuor indicibus a, b, c, d, penultimus tantum ex tribus a, b, c, antepenultimus

tantum

tantum ex duobus a, et b. Inferiores autem numeri primum indicem a plane non inuoluunt, ſed ex reliquis b, c, d aequali lege formantur.

5. Quoniam igitur ratio formationis ex indicibus, tam pro numeratoribus, quam pro denominatoribus, eſt eadem, ac datis indicibus numerus inde formatus innoteſcit, hos ipſos numeros, quatenus ex indicibus ſunt formati, hic ſum contemplaturus, eorumque algorithmum traditurus. Propoſitis autem indicibus quibuscunque et quotcunque a, b, c, d, numerum ex iis formatum hoc modo (a, b, c, d) denotabo, eritque ergo euolutione inſtituta:

$$(a, b, c, d) = abcd + cd + ad + ab + 1$$

ſimilique modo pro denominatoribus indicem primum a omittendo

$$(b, c, d) = bcd + d + b.$$

6. Haec ergo teneatur definitio ſignorum ( ), inter quae indices ordine a ſiniſtra ad dextram ſcribere conſtitui; atque indices hoc modo clauſulis incluſi inpoſterum denotabunt numerum ex iſtis indicibus formatum. Ita a ſimpliciſſimis caſibus inchoando, habebimus:

$$\begin{aligned}
(a) &= a \\
(a,b) &= ab + 1 \\
(a,b,c) &= abc + c + a \\
(a,b,c,d) &= abcd + cd + ad + ab + 1 \\
(a,b,c,d,e) &= abcde + cde + ade + abe + abc + e + c + a
\end{aligned}$$

etc.

cx

ex qua progreſſione patet, vnitatem tenere locum huius ſigni ( ) ſi ſcilicet nullus adſit index.

7. Quemadmodum hae expreſſiones creſcente indicum numero vlterius ſint continuandae ex formationis lege, qua quilibet ex duobus antecedentibus componitur, ſponte liquet. Eſt ſcilicet:

$$(a,b) \qquad = b(a) + 1 = b(a) + (\,)$$
$$(a,b,c) \qquad = c(a,b) + (a)$$
$$(a,b,e,d) \qquad = d(a,b,c) + (a,b)$$
$$(a,b,c,d,e) = e(a,b,c,d) + (a,b,c)$$

In genere ergo habebitur:

$$(a,b,c\ldots.p,q,r) = r(a,b,c\ldots.p,q) + (a,b,c\ldots.p)$$

quae connexio, tanquam corollarium definitionis numerorum, quos hic contemplamur, ſpectari debet.

8. In euolutione horum valorum, vti ante §. 6 ſunt exhibiti, difficulter ratio compoſitionis cernitur. Poſſunt autem ii quoque hoc modo repraeſentari:

$$(a) \qquad = a(1)$$
$$(a,b) \qquad = ab\left(1 + \tfrac{1}{ab}\right)$$
$$(a,b,c) \qquad = abc\left(1 + \tfrac{1}{ab} + \tfrac{1}{bc}\right)$$
$$(a,b,c,d) = abcd\left(1 + \tfrac{1}{ab} + \tfrac{1}{bc} + \tfrac{1}{cd} + \tfrac{1}{abcd}\right)$$
$$(a,b,c,d,e) = abcde\left(1 + \tfrac{1}{ab} + \tfrac{1}{bc} + \tfrac{1}{cd} + \tfrac{1}{de} + \tfrac{1}{abcd} + \tfrac{1}{qbde} + \tfrac{1}{bcde}\right)$$

In his autem denominatoribus occurrunt primo facta ex binis indicibus contiguis, tum vero producta ex binis illorum factorum, qui nullum indicem communem inuoluunt, tum ſequentur producta ex ternis, quater-

nis

nis etc. combinationibus, quae nullum implicant indicem communem; vnde ratio compoſitionis iam fit perſpicua.

9. Ex hac euolutione iam manifeſtum eſt, ſi indices ordine retrogrado diſponantur, eosdem plane prodire numeros inde formatos. Erit ſcilicet

$$(a, b) = (b, a)$$
$$(a, b, c) = (c, b, a)$$
$$(a, b, c, d) = (d, c, b, a)$$
$$(a, b, c, d, e) = (e, d, c, b, a).$$

Dummodo ergo ordo indicum detur, ſiue ſit directus, ſiue retrogradus, perinde eſt; vtroque enim modo idem numerus inde formatus obtinetur.

10. Hinc ergo ſequitur, fore formulas §. 7 hoc modo inuertendo:

$$(a, b) = a\,(b) + 1$$
$$(a, b, c) = a\,(b, c) + (c)$$
$$(a, b, c, d) = a\,(b, c, d) + (c, d)$$
$$(a, b, c, d, e) = a\,(b, c, d, e) + (c, d, e)$$

atque in genere erit pro quotcunque indicibus:

$$(a, b, c, d, \text{etc.}) = a\,(b, c, d, \text{etc}) + (c, d, \text{etc.})$$

11. Si ergo ponatur:

$$(a, b, c, d, e, \text{etc.}) = A$$
$$(b, c, d, e, \text{etc.}) = B$$
$$(c, d, e, \text{etc.}) = C$$
$$(d, e, \text{etc.}) = D$$
$$(e, \text{etc.}) = E$$

habebimus has aequalitates:

$$A = aB + C \text{ seu } \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$$

$$B = bC + D \text{ seu } \frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}$$

$$C = cD + E \text{ seu } \frac{C}{D} = c + \frac{E}{D}$$

etc. etc.

12. Cum igitur sit

$$\frac{C}{B} = \frac{1}{b + \frac{D}{C}};\quad \frac{D}{C} = \frac{1}{c + \frac{E}{D}};\quad \frac{E}{D} = \frac{1}{d + \frac{F}{E}} \text{ etc.}$$

erit his valoribus substituendis:

$$\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{D}{C}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{E}{D}}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{F}{E}}}}.$$

Vnde si e sit indicum vltimus, ita vt sit $E = e$ et $F = 1$, erit

$$\frac{A}{B} = \frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$$

sicque patet, quemadmodum per huiusmodi numeros valores fractionum continuarum commode exprimi queant.

13. Si ergo indicum numerus fuerit infinitus, etiam fractio continua in infinitum excurret, eiusque valor erit $= \frac{(a,b,c,d\ e, \text{etc.})}{(b,c,d,e\ \text{etc.})}$. Vicissim autem fractionum continuarum proprietates cognitae nobis insignes affectiones huiusmodi numerorum ex indicibus formatorum manifesta-

nifeſtabunt, quas diligentius euoluere operae erit pretium. Sit igitur fractio continua, ſiue in infinitum excurrens, ſiue ſecus propoſita:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f \text{ etc.}}}}}}$$

cuius valor indicetur littera V et ſumendis omnibus indicibus a, b, c, d, e, f etc. erit, vti demonſtrauimus:

$$V = \frac{(a, b, c, d, e, f \text{ etc.})}{(b, c, d, e, f, \text{ etc.})}.$$

14. Si quispiam horum indicum fiat infinite magnus, is in hac expreſſione cum omnibus ſequentibus poterit omitti, et valor fractionis continuae tantum per indices, qui infinitum praecedunt, exprimetur.

Ita ſi ſit $b = \infty$ erit $V = \frac{(a)}{1}$

ſi ſit $c = \infty$ erit $V = \frac{(a, b)}{(b)}$

ſi ſit $d = \infty$ erit $V = \frac{(a, b, c)}{(b, c)}$

ſi ſit $e = \infty$ erit $V = \frac{(a, b, c, d)}{b, c, d}$.

Vti ergo his caſibus fractio continua abrumpitur, ita etiam valor V alios indices non implicat, niſi qui indicem infinitum antecedunt.

15. Sin autem nullus indicum in infinitum excreſcit, hi ipſi valores continuo propius ad verum va-

lorem V accedunt. Scilicet si fuerit $V = \frac{(a, b, c, d, e \text{ etc.})}{(b, c, d, e, \text{etc.})}$ fractiones in sequenti serie expositae:

$$\frac{(a)}{1}; \frac{(a, b)}{(b)}; \frac{(a, b, c)}{(b, c)}; \frac{(a, b, c, d)}{(b, c, d)}; \frac{(a, b, c, d, e)}{(b, c, d, e)}; \text{etc.}$$

continuo proprius ad valorem V accedunt, earumque vltima demum eius valorem verum exhibebit; siquidem indices a, b, c, d etc. fuerint numeri vnitate maiores. Prima quidem $\frac{a}{1}$ notabiliter ab V discrepare poterit; secunda autem propius accedet, tertia adhuc propius, et ita porro, donec tandem vltima verum valorem V sit praebitura.

16. Necesse ergo est, vt differentiae inter binas huiusmodi fractiones contiguas continuo fiant minores; quod quo clarius perspiciatur, has differentias inuestigemus, quae erunt:

$$\frac{(a)}{1} - \frac{(a, b)}{(b)} = \frac{(a)(b) - 1(a, b)}{1(b)}$$

$$\frac{(a, b)}{(b)} - \frac{(a, b, c)}{(b, c)} = \frac{(a, b)(b, c) - (b)(a, b, c)}{(b)(b, c)}$$

$$\frac{(a, b, c)}{(b, c)} - \frac{(a, b, c, d)}{(b, c, d)} = \frac{(a, b, c)(b, c, d) - (b, c)(a, b, c, d)}{(b, c)(b, c, d)}$$

$$\frac{(a, b, c, d)}{(b, c, d)} - \frac{(a, b, c, d, e)}{(b, c, d, e)} = \frac{(a, b, c, d)(b, c, d, e) - (b, c, d)(a, b, c, d, e)}{(b, c, d)(b, c, d, e)}.$$

17. De harum differentiarum denominatoribus, qui ex binis factoribus sunt conflati, primum obseruo, hos factores inter se esse numeros primos, quod quidem ex antecedentibus est satis manifestum. Cum enim pro denominatore $(b, c, d)(b, c, d, e)$ sit $(b, c, d, e) = e(b, c, d) + (b, c)$ erit $\frac{(b, c, d, e)}{(b, c, d)} = e + \frac{(b, c)}{(b, c, d)}$, vnde factores (b, c, d) et (b, c, d, e) communem diuisorem non habebunt, nisi qui simul sit communis diuisor numerorum (b, c) et (b, c, d); verum ob eandem rationem horum numerorum communis

nis divisor non datur, nisi qui simul sit communis divisor horum (b) et (b, c), ac denique horum 1 et b, qui cum nullum habeant communem divisorem, neque illi habebunt, eruntque propterea numeri primi. Hinc vero etiam intelligitur, numeros $(a, b, c, d$, etc.$)$ et $(b, c, d$, etc.$)$ esse inter se primos.

18. Differentiae ergo illae minores esse nequeunt, quam si numeratores in unitatem, sive affirmativam, sive negativam, abeant, id quod re vera omnia exempla declarant. Conveniet ergo, idem ex natura illorum numeratorum per indices formatorum demonstrari. Pro primo quidem numeratore cum sit $(a, b) = b(a) + 1$ per §. 7. erit:

$$(a)(b) - 1(a, b) = ab - b(a) - 1 = -1.$$

Tum vero pro secundo, ob $(b, c) = c(b) + 1$ et $(a, b, c) = c(a, b) + (a)$ erit

$$(a, b)(b, c) - (b)(a, b, c) = (a, b)c(b) + (a, b) - (b)c(a, b) - (b)(a)$$

quae propter terminos $(a, b)c(b) - (b)c(a, b)$ se tollentes abit in

$(a, b) - (b)(a) = +1$, ita ut sit secundus numerator

$$(a, b)(b, c) - (b)(a, b, c) = +1.$$

19. Quemadmodum hic numerator secundus ad primum negative sumtum est reductus, ita tertius ostendi potest secundo negative sumto esse aequalis.
Nam quia $(b, c, d) = d(b, c) + (b)$ et

$$(a, b, c, d) = d(a, b, c) + (a, b) \text{ erit}$$

$$(a, b, c)(b, c, d) - (b, c)(a, b, c, d) = (a, b, c)d(b, c) + (a, b, c)(b) - (b, c)d(a, b, c) - (b, c)(a, b)$$

Haec ergo expressio transit in $-(a,b)(b,c)+(b)(a,b,c)=-1$, quia est denominator secundus negatiue sumtus. Eodem autem modo numerator quartus aequabitur tertio negatiue sumto, et in genere quilibet sequens praecedenti negatiue sumto.

20. Hinc ergo consequimur sequentes reductiones non parum notatu dignas:

$$(a)(b) - 1(a,b) = -1$$
$$(a,b)(b,c) - (b)(a,b,c) = +1$$
$$(a,b,c)(b,c,d) - (b,c)(a,b,c,d) = -1$$
$$(a,b,c,d(b,c,d,e) - (b,c,d)(a,b,c,d,e) = +1$$

et in genere

$$(a,b,c,d\ldots\ldots m)(b,c,d,\ldots\ldots m,n) - (b,c,d\ldots\ldots m)(a,b,c,d\ldots\ldots m,n) = \pm 1$$

vbi $+1$ valet, si in primis vinculis numerus indicum fuerit par, contra vero -1.

21. Ipsae ergo differentiae supra expositae erunt:

$$\frac{(a)}{1} - \frac{(a,b)}{(b)} = \frac{-1}{1(b)}$$
$$\frac{(a,b)}{(b)} - \frac{(a,b,c)}{(b,c)} = \frac{+1}{(b)(b,c)}$$
$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)} - \frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)} = \frac{-1}{(b,c)(b,c,d)}$$
$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)} - \frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} = +\frac{1}{(b,c,d)(b,c,d,e)}$$
$$\frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} - \frac{(a,b,c,d,e,f)}{(b,c,d,e,f)} = -\frac{1}{(b,c,d,e)(b,c,d,e,f)}$$

etc.

vnde, cum hae differentiae minores esse nequeant, ipsae fractiones tam prope ad se inuicem accedunt, quam fieri potest.

22. Cum ſit ex §. 7. $(b,c)-1=c(b)$; $(b,c,d)-(b)=d(b,c)$; $(b,c,d,e)-(b,c)=e(b,c,d)$ etc. erit binis illarum differentiarum addendis

$$\frac{(a)}{1}-\frac{(a,b,c)}{(b,c)}=-\frac{c}{1(b,c)}$$
$$\frac{(a,b)}{(b)}-\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}=+\frac{d}{(b)(b,c,d)}$$
$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)}-\frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)}=-\frac{e}{(b,c)(b,c,d,e)}$$
$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}-\frac{(a,b,c,d,e,f)}{(b,c,d,e,f)}=+\frac{f}{(b,c,d)(b,c,d,e,f)}$$

etc.

eritque hic $\frac{(a)}{1}=a$, et $\frac{(a,b)}{(b)}=a+\frac{1}{b}$; vnde reliquae formulae concinne poterunt exhiberi.

23. Ex formulis ergo §. 21. habebimus ſequentes fractionum continuarum valores:

$$\frac{(a)}{1}=a$$
$$\frac{(a,b)}{(b)}=a+\frac{1}{1(b)}$$
$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)}=a+\frac{1}{1(b)}-\frac{1}{(b)(b,c)}$$
$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}=a+\frac{1}{1(b)}-\frac{1}{(b)(b,c)}+\frac{1}{(b,c)(b,c,d)}$$

etc.

vnde in genere erit, ſi etiam indices in infinitum excurrant,

$$\frac{(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ etc.)}{(b,\ c,\ d,\ e,\ etc.)}=a+\frac{1}{1(b)}-\frac{1}{(b)(b,c)}+\frac{1}{(b,c)(b,c,d)}-\frac{1}{(b,c,d)(b,c,d,e)}+\text{etc.}$$

24. Ex formulis autem §. 22. obtinebimus:

$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)}=a+\frac{c}{1(b,c)}$$
$$\frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)}=a+\frac{c}{1(b,c)}+\frac{e}{(b,c)(b,c,d,e)}$$

vnde

vnde generaliter:

$$\frac{(a,b,c,d,e,\text{etc.})}{(b,c,d,e,\text{etc.})} = a + \frac{1}{1(b,c)} + \frac{e}{(b,c)(b,c,d,e)} + \frac{g}{(b,c,d,e)(b,c,d,e,f,g)} \text{ etc.}$$

Tum vero etiam:

$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)} = a + \frac{1}{b} - \frac{d}{(b)(b,c,d)}$$

$$\frac{(a,b,c,d,e,f)}{(b,c,d,e,f)} = a + \frac{1}{b} - \frac{d}{(b)(b,c,d)} - \frac{f}{(b,c,d)(b,c,d,e,f)}$$

ideoque generaliter:

$$\frac{(a,b,c,d,e,\text{etc.})}{(b,c,d,e\ \text{etc.})} = a + \frac{1}{b} - \frac{d}{(b)(b,c,d)} - \frac{f}{(b,c,d)(b,c,d,e,f)} - \frac{h}{(b,c,d,e,f)(b,c,d,e,f,g,h)} - \text{etc.}$$

25. Sed miſſis his, quae ad ſeries ſpectant, quoniam ea iam fuſius ſum perſecutus, perpendamus ea, quae ad ſingularem harum quantitatum algorithmum pertinent. Et formulas quidem iis ſimiles, quae in §. 20. ſunt inuentae, ſuppeditabit nobis §. 22. ex quo patet eſſe:

$$(a)(b,c) - 1(a,b,c) = -c$$

$$(a,b)(b,c,d) - (b)(a,b,c,d) = +d$$

$$(a,b,c)(b,c,d,e) - (b,c)(a,b,c,d,e) = -e$$

$$(a,b,c,d)(b,c,d,e,f) - (b,c,d)(a,b,c,d,e,f) = +1$$

ideoque generaliter:

$$(a,b\ldots\ldots l)(b\ldots\ldots l,m,n) - (b\ldots\ldots l)(a,b\ldots\ldots l,m,n) = \pm n$$

vbi ſignum + valet, ſi in primo vinculo numerus indicum ſit par; contra ſignum −.

26. Per ſimiles autem reductiones intelligitur fore,

$$(a)(b,c,d) - 1(a,b,c,d) = -(c,d)$$

$$(a,b)(b,c,d,e) - (b)(a,b,c,d,e) = +(d,e)$$

$$(a,b,c)(b,c,d,e,f) - (b,c)(a,b,c,d,e,f) = -(e,f)$$

et

et generaliter:

$$(a,b\ldots k)(b\ldots k,l,m,n) - (b\ldots k)(a,b\ldots k,l,m,n) = \pm (m,n)$$

vbi ſignorum, vel ſuperius, vel inferius, valet, prout in primo vinculo numerus indicum fuerit, vel par, vel impar.

27. Ratio autem huius formulae ex ſupra repertis facile deriuatur. Si enim ponatur:

$$(a,b\ldots k,l,m)(b..k,l,m,n) - (b..k,l,m)(a,b..k,l,m,n) = A$$
$$(a,b\ldots\ldots k,l)(b..k,l,m,n) - (b\ldots k,l)(a,b..k,l,m,n) = B$$
$$(a,b\ldots\ldots\ldots k)(b..k,l,m,n) - (b\ldots\ldots k)(a,b..k,l,m,n) = C$$

manifeſtum eſt, eſſe $A = mB + C$. At eſt $A = \pm 1$; et $B = \mp n$; ideoque $C = \pm 1 \pm mn = \pm (m,n)$, vbi de ambiguitate ſignorum tenenda ſunt praecepta ſuperiora.

28 Si ordo indicum in his formulis inuertatur, eae fient:

$$(a\ldots\ldots y)(a,b\ldots y,z) - (a,b\ldots y,z)(a,b..y) = 0$$
$$(a,b\ldots y)(b,c\ldots y,z) - (a,b\ldots y,z)(b,c\ldots y) = \pm 1$$
$$(a,b,c\ldots y)(c,d\ldots y,z) - (a,b\ldots y,z)(c,d\ldots y) = \pm (a)$$
$$(a,b,c,d\ldots y)(d,e\ldots y,z) - (a,b\ldots y,z)(d,e\ldots y) = \pm (a,b)$$
$$(a,b,c,d,e\ldots y)(e,f\ldots y,z) - (a,b\ldots y,z)(e,f\ldots y) = \pm (a,b,c)$$
$$(a,b\ldots y)(f,g\ldots y,z) - (a,b\ldots y,z)(f,g\ldots y) = \pm (a,b,c,d)$$

vbi ſigna valent ſuperiora, ſi numerus indicum in ſecundo vinculo fuerit par, contra autem valent inferiora.

 29. Si

29. Si haec indicum ſeries in fine duobus truncetur, orietur ſimili modo:

$$(a\ldots x)(a\ldots z)-(a\ldots z)(a\,.\,.\,x)=0$$
$$(a\ldots x)(b\ldots z)-(a\ldots z)(b\,.\,.\,x)=\pm(z)$$
$$(a\ldots x)(c\ldots z)-(a\ldots z)(c\,.\,.\,x)=\pm(a)(z)$$
$$(a\ldots x)(d\ldots z)-(a\ldots z)(d\,.\,.\,x)=\pm(a,b,)(z)$$
$$(a\ldots x)(e\ldots z)-(a\ldots z)(e\,.\,.\,x)=\pm(a,b,c)(z)$$

atque hinc tandem colligitur fore generaliter:

$$(a\ldots\ldots l,m,n\ldots\ldots p)\ (n\ldots\ldots p,q,r\ldots\ldots z)$$
$$-(a\ldots l,m,n\ldots\ldots p,q,r\ldots\ldots z)\ (n\ldots\ldots p)$$
$$=\pm(a\ldots\ldots l)\ (r\ldots\ldots z).$$

30. Quo ratio ambiguitatis ſignorum pateat, notandum eſt, ſi ſit $m=a$, fore $(a\ldots\ldots l)=1$, et ſi ſit $q=z$, fore $(r\ldots\ldots z)=1$, vnde caſus ſpeciales, in quibus ratio ſignorum eſt cognita, erunt

$$(a)\,(b)-\ (a,b)\ 1=-1$$
$$(a)\,(b,c)-(a,b,c)\ 1=-(c)$$
$$(a,b)\,(c)\ -(a,b,c)\ 1=-(a)$$
$$(a,b)(b,c,d)-(a,b,c,d)(b)=+(d)$$
$$(a)\,(b,c,d)\ -(a,b,c,d)\ (1)=-(c,d)$$

vnde concluditur, valorem fore affirmatiuum, ſi in extremo quaternorum vinculorum numerus indicum ſit impar, ſin autem fuerit par, valor erit negatiuus. Ita in exemplis ſubiunctis erit

$$(a,b,c,d)(e,f,g,h)-(a,b,c,d,e,f,g,h)\ 1=-(a,b,c)(f,g,h)$$
$$(a,b,c,d,e)\ (c,d,e,f,g,h)-(a,b,c,d,e,f,g,h)\ (c,d,e)$$
$$=+(a)\ (g,h).$$

31. Hu-

31. Huiusmodi autem formulae, quot lubuerit, facile ſequenti modo exhiberi poſſunt; ſumatur tertium vinculum, quod eſt completum, et omnes indices continet, abſcindantur ab initio ſuperne ii indices, qui primum vinculum conſtituant, tum inferne a fine ii, qui vinculum ſecundum conſtituant; ita tamen, vt in duobus primis vinculis omnes indices occurrant. Tum qui locis abſciſſis vtrinque ſunt vicini puncto notentur, indeque facile huiusmodi formulae exhibentur:

vt $\overline{a,\; b,\; \underline{c,\; d,}}\,\underline{\; e,\; f,}$ dabit

$$(a,b,c,d)(c,d,e,f)-(a,b,c,d,e,f)(c,d)=-(a)(f)$$

vt $\overline{a,\; b,\; c,}\; \underline{d,\; e,\; f,}$ dat

$$(a,b,c)(d,e,f)-(a,b,c,d,e,f)\,1=-(a,b)(e,f)$$

vt $\overline{a,\; b,\; c,\; d,}\!\!\underline{\;d,\; e,\; f}$ dat

$$(a,b,c,d)(d,e,f)-(a,b,c,d,e,f)(d)=+(a,b)(f).$$

32. Quodſi ergo in duobus vinculis nulla littera bis occurrat, quartum vinculum erit vnitas, vnde ſequentes formulae naſcuntur:

$$\begin{cases}(a,b,c)=(a,b)(c)+(a)\\(a,b,c)=(a)(b,c)+(c)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a,b,c,d)=(a,b,c)(d)+(a,b)\\(a,b,c,d)=(a,b)(c,d)+(a)(d)\\(a,b,c,d)=(a)(b,c,d)+(c,d)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a,b,c,d,e)=(a,b,c,d)(e)+(a,b,c)\\(a,b,c,d,e)=(a,b,c)(d,e)+(a,b)(e)\\(a,b,c,d,e)=(a,b)(c,d,e)+(a)(d,e)\\(a,b,c,d,e)=(a)(b,c,d,e)+(e,d,e)\end{cases}$$

$$\begin{cases} (a,b,c,d,e,f) = (a,b,c,d,e)(f) + (a,b,c,d) \\ (a,b,c,d,e,f) = (a,b,c,d)(e,f) + (a,b,c)(f) \\ (a,b,c,d,e,f) = (a,b,c)(d,e,f) + (a,b)(e,f) \\ (a,b,c,d,e,f) = (a,b)(c,d,e,f) + (a)(d,e,f) \\ (a,b,c,d,e,f) = (a)(b,c,d,e,f) + (c,d,e,f) \end{cases}$$

etc.

33. Si ordo indicum inuertatur, ſequentes formulae hinc facile elicientur:

$$(\alpha)(a,b,c,d\ldots) = (\alpha,a,b,c,d\ldots) - (b,c,d\ldots)$$

$$(\alpha,\beta)(a,b,c,d\ldots) = (\alpha,\beta,a,b,c,d\ldots) - (\alpha)(b,c,d\ldots)$$

$$(\alpha,\beta,\gamma)(a,b,c,d\ldots) = (\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,d\ldots) - (\alpha,\beta)(b,c,d\ldots)$$

etc.

vnde producto ex duobus huius generis numeris ad eiusmodi numeros ſimplices reuocari poterunt:

$$(\alpha)(a,b,c,d\ldots) = (\alpha,a,b,c,d\ldots) - (b,c,d\ldots)$$

$$(\alpha,\beta)(a,b,c,d\ldots) = (\alpha,\beta,a,b,c,d\ldots) - (\alpha,b,c,d\ldots) + (c,d\ldots)$$

$$(\alpha,\beta,\gamma)(a,b,c,d\ldots) = \begin{cases} +(\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,d\ldots) \\ -(\alpha,\beta,b,c,d\ldots) \\ +(\alpha,c,d\ldots) \\ -(d\ldots) \end{cases}$$

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)(a,b,c,d,e\ldots) = \begin{cases} +(\alpha,\beta,\gamma,\delta,a,b,c,d,e\ldots) \\ -(\alpha,\beta,\gamma,b,c,d,e\ldots) \\ +(\alpha,\beta,c,d,e\ldots) \\ -(\alpha,d,e\ldots) \\ +(e\ldots) \end{cases}$$

etc.

quia ergo in vtroque factore ordo indicum inuerti poteſt, hae formae pluribus modis variari poterunt.

34. Re-

34 Reuertamur autem ad fractiones continuas, vnde haec sunt nata, sitque valor huius

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\text{etc.}}}}}}=S$$

atque supra iam inuenimus hos valores

$$A=\frac{(a)}{1};\ B=\frac{(a,b)}{(b)};\ C=\frac{(a,b,c)}{(b,c)};\ D=\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)};$$
$$E=\frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)}\ \text{etc.}$$

continuo propius ad valorem S accedere. Horum terminorum igitur singulas differentias perpendamus:

$A-B=-\frac{1}{1(b)}$	$B-C=+\frac{1}{(b)(b,c)}$	$C-D=-\frac{1}{(b,c)(b,c,d)}$
$A-C=-\frac{(c)}{1(b,c)}$	$B-D=+\frac{(d)}{(b)(b,c,d)}$	$C-E=-\frac{(e)}{(b,c)(b,c,d,e)}$
$A-D=-\frac{(c,d)}{1(b,c,d)}$	$B-E=+\frac{(d,e)}{(b)(b,c,d,e)}$	$C-F=-\frac{(e,f)}{(b,c)(b,c,d,e,f)}$
$A-E=-\frac{(c,d,e)}{1(b,c,d,e)}$	$B-F=+\frac{(d,e,f)}{(b)(b,c,d,e,f)}$	$C-G=-\frac{(e,f,g)}{(b,c)(b,c,d,e,f,g)}$.

35. Quoniam igitur in doctrina de fractionibus continuis, cuius iam aliquot specimina edidi, huius generis numeri per indices formati totum negotium conficiunt: algorithmi eorum species, quam hic exposui, nec non insignes comparationes inuentae, non exiguum praestabunt vsum in hoc argumento vberius excolendo, vnde has animaduersiones vsu non carituras esse confido.

DE RESOLVTIONE AEQVATIONVM CVIVSVIS GRADVS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae in Algebra adhuc de resolutione aequationum sunt tradita, ea, si ad regulas generales spectemus, tantum ad aequationes, quae quartum gradum non superant, patent, neque etiamnum regulae sunt inuentae, quarum ope aequationes quinti altiorisue cuiuspiam gradus resolui queant: ita vt vniuersa Algebra ad aequationes quatuor primorum ordinum restringatur. Hoc autem de regulis generalibus est tenendum, quae ad omnes aequationes eiusdem gradus sint accommodatae; nam in quouis gradu dantur infinitae aequationes, quae per diuisionem in duas pluresue aequationes graduum inferiorum resolui possunt, quarum idcirco radices iunctim sumtae praebent omnes radices illarum aequationum altiorum graduum. Tum vero a Cel. *Moiuraeo* obseruatae sunt in quouis gradu quaedam aequationes speciales, quae etsi per diuisionem in factores resolui nequeunt, tamen earum radices assignare liceat.

2. Ex cognita autem resolutione generali aequationum primi, secundi, tertii et quarti gradus, constat

ſtat quidem, aequationes primi gradus ſine vlla radicis extractione reſolui poſſe: at aequationum ſecundi gradus reſolutio iam extractionem radicis quadratae poſtulat. Reſolutio autem aequationum tertii gradus tam extractionem radicis quadratae, quam cubicae, implicat, et quarti gradus reſolutio inſuper extractionem radicis biquadratae exigit. Ex his autem tuto concludere licet, reſolutionem aequationis quinti gradus generalem extractionem radicis ſurdeſolidae praeter omnes radices inferiores poſtulare, atque in genere radix aequationis cuiusuis gradus n exprimetur per formam, quae ex omnibus ſignis radicalibus, tam gradus n, quam graduum inferiorum, erit compoſita.

3. Haec perpendens olim in Comment. Acad. Imper. Petrop Tomi VI. coniecturam auſus ſum proferre circa formas radicum cuiuscunque aequationis. Propoſita namque aequatione gradus cuiusuis

$$x^n + A x^{n-2} + B x^{n-3} + C x^{n-4} + \text{etc.} = 0.$$

in qua ſecundum terminum deeſſe aſſumſi, quod quidem ſemper ponere licet, ſuſpicatus ſum, ſemper dari aequationem vno gradu inferioris, veluti

$$y^{n-1} + \mathfrak{A} y^{n-2} + \mathfrak{C} y^{n-3} + \mathfrak{B} y^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

quam illius reſoluentem appellaui, ita vt, ſi huius conſtent omnes radices, quae ſint α, β, γ, δ, ε etc. quarum numerus eſt $n-1$; ex iis radix illius aequationis ita exprimatur, vt ſit:

$$x = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} + \text{etc.}$$

Quam

Quam coniecturam confirmaui, oſtendens, reſolutionem aequationum inferiorum reuera ex hac forma generali deduci: neque etiam nunc dubito, quin haec coniectura veritati ſit conſentanea.

4. Praeterquam autem quod inuentio aequationis reſoluentis, ſi propoſita quartum gradum tranſcendit, ſit difficillima, atque adeo in genere vires noſtras aeque ſuperare videtur, atque ipſa propoſitae aequationis reſolutio; ita vt praeter formas ſpeciales caſibus Moivreanis ſimiles nobis nihil admodum ſuppeditet: alia inſuper incommoda in illa forma obſeruaui, quae me eo induxerunt, vt arbitrarer, aliam forte dari formam illi non admodum diſſimilem, quae iſtis incommodis non eſſet ſubiecta, ideoque maiorem ſpem nobis faceret, in hoc arduo Algebrae opere tandem vlterius penetrandi Non parum autem in hoc negotio proderit, veram formam radicum cuiusque aequationis accuratius perſpexiſſe.

5. In forma autem per ſuperiorem coniecturam eruta hoc imprimis deſidero, quod omnes aequationis propoſitae radices non ſatis diſtincte exprimantur. Etſi enim quoduis ſignum radicale $\sqrt[n]{\alpha}$ tot valores diuerſos complectitur, quot numerus n continet vnitates, ita vt, ſi $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ etc. omnes valores formulae $\sqrt[n]{1}$ denotent, pro $\sqrt[n]{\alpha}$ ſcribere liceat quamlibet harum formularum $\mathfrak{a}\sqrt[n]{\alpha}$, $\mathfrak{b}\sqrt[n]{\alpha}$, $\mathfrak{c}\sqrt[n]{\alpha}$, $\mathfrak{d}\sqrt[n]{\alpha}$ etc. tamen manifeſtum

ſtum, hanc variationem in ſingulis terminis $\sqrt[n]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, $\sqrt[n]{\delta}$ etc. non pro lubitu conſtitui poſſe. Si enim combinatio horum terminorum cum litteris $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ etc. arbitrio noſtro relinqueretur, tum multo plures combinationes reſultarent, quam aequatio continet radices, quarum numerus eſt $= n$.

6. Quo igitur forma radicis x ſupra exhibita omnes aequationis radices ſimul complectatur, neceſſe eſt, vt combinationes terminorum $\sqrt[n]{\alpha}, \sqrt[n]{\beta}, \sqrt[n]{\gamma}, \sqrt[n]{\delta}$ etc. cum litteris $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ etc. certo quodam modo circumſcribantur, atque combinationes, quae ad aequationes radices repraeſentandas ſunt ineptae, excludantur. Ex reſolutione quidem aequationum tertii et quarti gradus vidimus inter radices vnitatis eiusdem nominis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, certum quendam ordinem conſtitui debere, ſecundum quem etiam combinationes ſint perficiendae. Hunc in finem autem ſimilis ordo in ipſis radicis membris $\sqrt[n]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, $\sqrt[n]{\delta}$ etc. erit tenendus, quo combinatio dirigatur. Verum quia non conſtat quemadmodum in radicibus ſuperiorum graduum talis ordo ſit conſtituendus, hoc ſine dubio inſigne eſt incommodum, quo forma coniecturae meae innixa laborat, quod igitur remouere in hac diſſertatione mihi eſt propoſitum.

7. Primum autem conueniet, ordinem certum in radicibus cuiusuis poteſtatis ex vnitate conſtituere, quo ſumma plerumque varietas combinationum reſtringatur.

 Quem

Quem in finem obſeruo, ſi praeter vnitatem alius quicunque valor ipſius $\sqrt[n]{1}$ ſit $= \mathfrak{a}$, tum etiam $\mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}^3, \mathfrak{a}^4$, etc idoneos valores ipſius $\sqrt[n]{1}$ exhibere: nam ſi ſit $\mathfrak{a}^n = 1$, erit quoque $(\mathfrak{a}^2)^n = 1$, $(\mathfrak{a}^3)^n = 1$, $(\mathfrak{a}^4)^n = 1$, etc. Hinc ſi reliquae radices ponantur $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, etc. quoniam in iis reperiuntur $\mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}^3, \mathfrak{a}^4$, etc. iam certus quidam ordo perſpicitur, quo hae litterae inter ſe diſponi debent. Ita ſi poſt vnitatem, quae ſemper primum locum tenere cenſenda eſt, a littera $\mathfrak{a}$ incipiamus, valores formulae $\sqrt[n]{1}$ erunt $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}^3, \mathfrak{a}^4 \ldots\ldots \mathfrak{a}^{n-1}$ quorum numerus eſt n; plures enim occurrere nequevnt, cum ſit $\mathfrak{a}^n = 1$, $\mathfrak{a}^{n+1} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^{n+2} = \mathfrak{a}^2$ etc. ſimilique modo res ſe habebit, ſi poſt vnitatem a quauis alia littera $\mathfrak{b}$, vel $\mathfrak{c}$, vel $\mathfrak{d}$ etc. incipiamus.

8. Hinc ergo merito ſuſpicor, talem quoque ordinem in ipſis terminis radicem aequationis x exprimentibus ineſſe; ſeu ſingula membra radicalia ita eſſe comparata, vt reſpectu vniuscuiusque reliquae ſint eius poteſtates: ſingulis autem membris nunc neceſſe erit, coefficientes indefinitos tribuere. Quare ſi aequatio, termino ſecundo deſtituta, fuerit:

$$x^n + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + Cx^{n-4} + Dx^{n-5} \ldots = 0$$

maxime probabile videtur radicem quamlibet huius aequationis ita exprimi, vt ſit:

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^4} + \ldots\ldots + \mathfrak{Q}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

vbi $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ etc. ſint quantitates, vel rationales, vel ſaltem non ſignum radicale $\sqrt[n]{}$ inuoluant, quippe pe quod tantum quantitatem v eiusque poteſtates afficiat, multo minus ipſa quantitas v tale ſignam inuoluat.

9 Ex hac forma primum patet, eam non plura membra, quam quorum numerus ſit $n-1$, continere poſſe: nam etiam ſi ſeriem illam ex ſua indole vlterius continuemus, termini ſequentes iam in praecedentibus contenti deprehendentur: erit enim $\sqrt[n]{v^{n+1}} = v\sqrt[n]{v}$; $\sqrt[n]{v^{n+2}} = v\sqrt[n]{v^4}$ etc. ita vt irrationalitas ſignum radicale $\sqrt[n]{}$ inuoluens, plures diuerſas ſpecies non admittat, quam quarum numerus eſt $= n-1$. Etiamſi ergo illa ſeries in infinitum continuetur, tamen terminos eiusdem ſpeciei ratione irrationalitatis addendo omnes ad terminos numero $n-1$ redigentur. Cum igitur iam ante viderimus, plures termines in radicis expreſſionem non ingredi; hinc non leue argumentum habetur, hanc nouam formam veritati plane eſſe conſentaneam: eius autem veritas per ſequentia argumenta multo magis confirmabitur.

10. Haec expreſſio quoque ſponte ſe extendit ad aequationes, in quibus ſecundus terminus non deeſt, dum ſuperior remotionem ſecundi termini exigebat, ex quo ipſo haec noua magis naturalis eſt aeſtimanda. Continuatio enim terminorum irrationalium $\sqrt[n]{v}$, $\sqrt[n]{v^2}$, $\sqrt[n]{v^3}$ etc. etiam terminos rationales $\sqrt[n]{v^0}$, $\sqrt[n]{v^n}$ inuoluit, qui ob aequationis terminum ſecundum adiici debent. Hinc generalius pronunciare poterimus, ſi aequatio completa ordinis cuiusque n fuerit propoſita:

$$x^n + \Delta x^{n-1} + A x^{n-2} + B x^{n-3} + C x^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

eius radicem exprimi huiusmodi forma:

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^4} \ldots\ldots + \mathfrak{O}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

vbi ω partem radicis rationalem exhibet, quam constat esse $= -\frac{1}{n}\Delta$. Reliqui autem termini continent partes irrationales radicem potestatis n inuoluentes, quarum, quatenus sunt diuersae, numerus excedere nequit $n-1$, omnino vti per formam superiorem intelligitur.

11. Hinc porro videmus, si v fuerit eiusmodi quantitas, vt ex ea radix potestatis n actu extrahi, seu $\sqrt[n]{v}$ vel rationaliter, vel per signa radicalia inferiorum potestatum exprimi queat, tum irrationalitatem gradus n prorsus ex forma radicis egredi. Hoc autem necessario vsu venire debet, quoties aequatio proposita in factores est resolubilis, tum enim nulla radix signum radicale $\sqrt[n]{}$ continebit. Quare cum natura rei postulet, vt his casibus omnia signa radicalia $\sqrt[n]{}$ euanescant, et ad signa simpliciora reducantur: ex forma autem superiori non pateat, quomodo euanescente vno huiusmodi signo $\sqrt[n]{\alpha}$ reliqua $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, etc. euanescant, ista expressio ob hanc rationem multo magis ad aequationum naturam accommodata est censenda.

12. Praeterea vero haec forma, in quo cardo totius negotii versatur, etiam omnes aequationis radices sine vlla ambiguitate ostendit: neque enim amplius haeremus, quomodo cum omnibus signis radicalibus $\sqrt[n]{}$ totidem valores radicis $\sqrt[n]{1}$ combinandi sint. Si enim

omnes

omnes radices potestatis n ex vnitate sint $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, etc. ac $\sqrt[n]{v}$ cum earum quacunque $\mathfrak{a}$ combinauerimus, propterea quod $\sqrt[n]{v}$ vtique est $\mathfrak{a}\sqrt[n]{v}$, tum pro $\sqrt[n]{v^2}$, $\sqrt[n]{v^3}$, $\sqrt[n]{v^4}$ etc. scribere oportebit $\mathfrak{a}^2\sqrt[n]{v^2}$, $\mathfrak{a}^3\sqrt[n]{v^3}$, $\mathfrak{a}^4\sqrt[n]{v^4}$, etc. Terminus autem constans ω, quia formam $\omega\sqrt[n]{v^0}$ repraesentat, abibit in $\mathfrak{a}^0\omega\sqrt[n]{v^0} = 1$ ob $\mathfrak{a}^0 = 1$, ideoque in omnibus radicibus nullam mutationem subit, quemadmodum reliqua membra. Quod cum ex resolutione omnium aequationum per se sit manifestum, hinc nouum ac satis luculentum habemus criterium veritatis huius nouae formae, quae omnium aequationum radices in se complecti videtur.

13. Hinc autem porro manifestum est, quomodo vna cuiusque aequationis radice cognita, reliquae radices omnes exhiberi queant: ad hoc tantum nosse oportet omnes radices eiusdem potestatis ex vnitate, seu omnes valores ipsius $\sqrt[n]{1}$, quorum numerus $= n$. Ac si istae vnitatis radices fuerint $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, etc. aequationisque vna radix inuenta sit

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \ldots \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

radices reliquae erunt:

$$x = \omega + \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}^3\sqrt[n]{v^3} + \ldots \mathfrak{D}\mathfrak{a}^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

$$x = \omega + \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^3\sqrt[n]{v^3} + \ldots \mathfrak{D}\mathfrak{b}^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

$$x = \omega + \mathfrak{A}\mathfrak{c}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{c}^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}^3\sqrt[n]{v^3} + \ldots \mathfrak{D}\mathfrak{c}^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

ſicque ſemper tot obtinentur radices, quot exponens n, qui aequationis gradum deſignat, continet vnitates.

14. His igitur argumentis noua haec radicum forma iam ad ſummum probabilitatis eſt euecta; atque ad plenam certitudinem oſtendendam nihil aliud requiritur, niſi vt regula inueniatur, cuius ope pro quauis aequatione propoſita iſta forma definiri, et coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. cum quantitate v aſſignari queant, quod ſi praeſtare poſſemus, haberemus ſine dubio generalem omnium aequationum reſolutionem, irrito adhuc omnium Geometrarum labore requiſitam. Neque igitur equidem tantum mihi tribuo, vt hanc regulam me inuenire poſſe credam; ſed contentus ero plene demonſtraſſe, omnium aequationum radices certo in hac forma eſſe contentas. Hoc autem ſine dubio plurimum luminis foenerabitur ad reſolutionem aequationum, cum cognita radicum vera forma via inueſtigationis non mediocriter facilior reddatur, quam ne ingredi quidem licet, quam diu forma radicum fuerit incognita.

15. Quanquam autem ex ipſa aequatione propoſita nobis adhuc non licet radicem eius, ſeu coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. cum quantitate v aſſignare, tamen demonſtratio veritatis aeque ſuccedet, ſi viciſſim ex aſſumta radice illam aequationem, cuius eſt radix, eliciamus. Haec autem aequatio libera eſſe debet a ſignis radicalibus $\sqrt[n]{}$, quoniam aequationes, quarum radices inveſtigantur, ex terminis rationalibus conſtare aſſumi ſolent.

lent. Quaeſtio ergo huc reducitur, vt huiusmodi aequatio $x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \ldots + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^{n-1}}$ ab irrationalitate, ſeu ſignis radicalibus $\sqrt[n]{}$, liberetur, atque aequatio rationalis inde deducatur, de qua deinceps certo affirmare poterimus, eius radicem eſſe ipſam expreſſionem aſſumtam; ſimulque inde reliquas radices, quae eidem aequationi aeque conueniunt, aſſignare valebimus. Hoc ergo modo ſaltem infinitas aequationes exhibere poterimus, quarum radices nobis erunt cognitae, atque ſi hae aequationes in ſe complectantur omnium graduum aequationes generales, etiam harum reſolutio in noſtra erit poteſtate.

16. Parum quidem a nobis praeſtitum iri videbitur, ſi tantum plures aequationes, quarum radices asſignari queant, exhibuerimus; cum ex primis elementis conſtet, quomodo cuiusuis gradus aequatio formari debeat, quae datas habeat radices: ſi enim quotcunque huiusmodi formulae $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc. in ſe inuicem multiplicentur, obtinebitur vtique aequatio, cuius radices futurae ſunt $x=a$, $x=b$, $x=c$, etc. ſed talis aequationis formatio parum lucri affert ad reſolutionem aequationum. Primum autem obſeruo, hoc modo alias aequationes non naſci, niſi quae ſint habiturae factores; aequationum autem, quae in factores reſolui poſſunt, reſolutio, nulla laborat difficultate. Haud maioris quoque momenti ſunt in hoc negotio aequationes, quae ex multiplicatione duarum pluriumue inferiorum aequationum producuntur, quarum reſolutio nihil plane prodeſt ad reſolutionem generalem perficiendam.

17.

17. Quodſi autem ex noſtra forma $x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} +$ etc. ad aequationem rationalem perueniamus, ea certo factores rationales non habebit: ſi enim haberet, eius radices, quae ſimul eſſent radices aequationum inferiorum graduum, ſignum radicale $\sqrt[n]{}$ non implicarent. Plurimum is praeſtare cenſendus eſt, qui aequationis cuiuspiam altioris gradus, quae in factores reſolui nequeat, radices aſſignauerit: quam ob rem etiam Cel. *Moivreo* ingentes debentur gratiae, quod ex ſingulis aequationum gradibus vnam exhibuerit in factores irreſolubilem, cuius radices aſſignari poſſunt; atque ſi eius formulae latius paterent, multo maiorem ſine dubio eſſent habiturae vtilitatem, dum contra aequationibus in factores reſolubilibus in hoc negotio nihil plane emolumenti attribui poteſt.

18. Verum reuertamur ad illam formam ab irrationalitate ſigni $\sqrt[n]{}$ liberandam, ac ſi conſuetas methodos ſigna radicalia eliminandi conſulamus, aequatio reſultans ad plurimas dimenſiones plerumque aſcendere videatur. Si enim vnicum adeſſet ſignum radicale, puta $x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v}$, aequatio rationalis ad n dimenſiones ipſius x aſcenderet, vnde ea ad multo plures dimenſiones aſcenſura videtur, ſi plura eiusmodi adſint ſigna radicalia; id quod ſine dubio euenire deberet, ſi illa ſigna radicalia a ſe inuicem prorſus non penderent. Sed quia omnia ſunt poteſtates primi, oſtendam, perfectam rationalitatem obtineri poſſe, non vltra poteſtatem exponentis n aſcendendo. Ita ſcilicet docebo formam

$x =$

$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \ldots + \mathfrak{O}\sqrt[n]{v^{n-1}}$
ita ab irrationalitate liberari posse, vt aequatio rationalis inde resultans potestatem x^n non superet. Prodibit ergo aequatio huius formae:

$$x^n + \Delta x^{n-1} + A x^{n-2} + B x^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

cuius radix erit illa forma assumta: et quia radicum huius aequationis numerus est $= n$, ex eadem forma omnes huius aequationis radices assignare poterimus.

19. Cum hoc iam sit eximium criterium veritatis huius formae, tum etiam annotasse iuuabit, quoniam forma radicis $n - 1$ quantitates arbitrarias continet, totidem quoque quantitates arbitrarias in aequationem rationalem ingredi, vnde perspicuum est, istas quantitates ita determinari posse, vt aequatio rationalis inde datos coefficientes Δ, A, B, C etc. obtineat, hoc est: vt aequatio generalis huius gradus obtineatur. Quae determinatio si actu institui queat, nanciscemur inde resolutionem generalem aequationum cuiuscunque gradus; ex quo saltem possibilitas resolutionis hoc modo perficiendae elucet. Difficultates quidem insignes in hoc negotio occurrent, quas eo clarius agnoscemus, si nostram formam ad quemuis gradum a simplicissimis incipiendo, accommodemus. Simplicitati autem et concinnitati calculi consulentes, partem radicis rationalem ω omittamus, vt in quouis gradu ad eiusmodi aequationes rationales pertingamus, in quibus secundus terminus desit, quo ipso amplitudo resolutionis non restringi est censenda.

I. Reſolutio aequationum ſecundi gradus.

20. Vt igitur ab aequationibus ſecundi gradus incipiamus, ſit $n = 2$, et poſito $\omega = 0$, forma noſtra radicis erit:

$$x = \mathfrak{A} \sqrt{v}$$

quae rationalis facta dat $xx = \mathfrak{A}\mathfrak{A} v$. Comparetur haec aequatio cum forma generali ſecundi gradus $xx = \mathrm{A}$, deficiente ſecundo termino, ſitque $\mathfrak{A}\mathfrak{A} v = \mathrm{A}$: cui vt ſatisfiat, ſtatuatur $\mathfrak{A} = 1$, eritque $v = \mathrm{A}$; vnde propoſita aequatione $xx = \mathrm{A}$, ſi ſumatur $\mathfrak{A} = 1$, et $v = \mathrm{A}$, eius radix vna erit $x = \mathfrak{A}\sqrt{v} = \sqrt{\mathrm{A}}$, et quia $\sqrt{1}$ duos habet valores 1 et -1, altera radix erit $x = -\mathfrak{A}\sqrt{v} = -\sqrt{\mathrm{A}}$: quod quidem per ſe eſt perſpicuum.

II. Reſolutio aequationum tertii gradus.

21. Poſito iam $n = 3$, forma radicis pro hoc caſu erit:

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2}$$

vnde vt aequatio rationalis eruatur, ſumatur primo cubus:

$$x^3 = \mathfrak{A}^3 v + 3\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B} v\sqrt[3]{v} + 3\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B} v\sqrt[3]{v^2} + \mathfrak{B}^3 v^2$$

Fingatur iam haec aequatio cubica:

$$x^3 = \mathrm{A}x + \mathrm{B}$$

vnde

vnde, pro x valorem aſſumtum ſubſtituendo, orietur quoque

$$x^3 = \mathrm{A}\,\mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + \mathrm{A}\,\mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2} + \mathrm{B}$$

quae forma illi aequalis eſt reddenda, aequandis inter ſe tam partibus rationalibus, quam irrationalibus, vtriusque ſpeciei $\sqrt[3]{v}$ et $\sqrt[3]{v^2}$.

22. Comparatio autem terminorum rationalium praebet:

$$\mathrm{B} = \mathfrak{A}^3 v + \mathfrak{B}^3 v^2$$

et ex collatione irrationalium fit:

$$\mathrm{A}\,\mathfrak{A} = 3\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,v \text{ et } \mathrm{A}\,\mathfrak{B} = 3\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}\,v$$

quarum vtraque dat $\mathrm{A} = 3\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,v$.

Hinc ſi iſta aequatio cubica fuerit propoſita:

$$x^3 = 3\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,v x + \mathfrak{A}^3 v^2 + \mathfrak{B}^3 v^2$$

eius radix vna erit:

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2}$$

et ſi 1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ſint tres radices cubicae vnitatis, duae reliquae radices erunt:

$$x = \mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{a}^2\sqrt[3]{v^2};\; x = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{b}^2\sqrt[3]{v^2}$$

eſt autem $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

23. Poſſunt autem viciſſim, ſi aequatio cubica proponatur

$$x^3 = \mathrm{A}x + \mathrm{B}$$

ex coefficientibus A et B quantitates $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et v determinari, vt inde omnes tres huius aequationis radices obtineantur. Hunc autem in finem, quia tantum duae aequationes adimplendae habentur, vna litterarum

$\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ pro lubitu aſſumi poteſt. Sit igitur $\mathfrak{A}=1$, et aequatio $A=3\mathfrak{A}\mathfrak{B}v=3\mathfrak{B}v$ praebet $\mathfrak{B}=\frac{A}{3v}$; vnde fit $\mathfrak{B}^3=\frac{A^3}{27v^3}$ qui valor in prima aquatione $B=v+\mathfrak{B}^3v^2$ ſubſtitutus dat:

$$B=v+\frac{A^3}{27v} \text{ ſeu } vv=Bv-\tfrac{1}{27}A^3$$

vnde fit $v=\frac{1}{2}B\pm\sqrt{(\frac{1}{4}BB-\frac{1}{27}A^3)}$: perinde autem eſt vter horum duorum valorum aſſumatur.

24. Inuento autem valore ipſius $v=\frac{1}{2}B\pm\sqrt{(\frac{1}{4}BB-\frac{1}{27}A^3)}$ erit $\mathfrak{B}=\frac{A}{3v}$ et $\mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2}=\frac{A}{3\sqrt[3]{v}}$ hincque tres aequationes propoſitae:

$$x^3=Ax+B$$

erunt radices:

I. $x=\sqrt[3]{v}+\frac{A}{3\sqrt[3]{v}}$: II. $x=\mathfrak{a}\sqrt[3]{v}+\frac{\mathfrak{b}A}{3\sqrt[3]{v}}$: III. $x=\mathfrak{b}\sqrt[3]{v}+\frac{\mathfrak{a}A}{3\sqrt[3]{v}}$

Cum autem ſit $\frac{1}{v}=\frac{\frac{1}{2}B\mp\sqrt{(\frac{1}{4}BB-\frac{1}{27}A^3)}}{\frac{1}{27}A^3}$ erit

$$\sqrt[3]{v}=\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}B\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}BB-\tfrac{1}{27}A^3)})} \text{ et}$$

$$\frac{A}{3\sqrt[3]{v}}=\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}B\mp\sqrt{(\tfrac{1}{4}BB-\tfrac{1}{27}A^3)})}$$

hincque naſcuntur formulae vulgares pro reſolutione aequationum cubicarum.

III. Reſolutio aequationum quarti gradus.

25. Poſito $n=4$, conſideremus hanc radicis formam:

$$x=\mathfrak{A}\sqrt[4]{v}+\mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2}+\mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3}$$

et

et quaeramus aequationem quarti gradus, cuius haec forma sit radix. Atque hoc quidem casu calculus facile instituitur, quo irrationalitates tolluntur; nam ob $\sqrt[4]{v^2} = \sqrt{v}$, sumatur haec aequatio:

$$x - \mathfrak{B}\sqrt{v} = \mathfrak{A}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3}$$

quae quadrata dat:

$$xx - 2\mathfrak{B}x\sqrt{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}v = \mathfrak{A}\mathfrak{A}\sqrt{v} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C}v + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v\sqrt{v}$$

quae partibus irrationalibus ad eandem partem translatis fit:

$$xx + (\mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v = 2\mathfrak{B}x\sqrt{v} + (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\sqrt{v}$$

et sumtis denuo quadratis prodibit haec aequatio rationalis:

$$\begin{aligned} x^4 + 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})vxx + (\mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2 vv &= 4\mathfrak{B}\mathfrak{B}vxx \\ &+ 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\mathfrak{B}vx + (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)^2 v \end{aligned}$$

quae ordinata abit in hanc formam;

$$\begin{aligned} x^4 = 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})vxx &+ 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\mathfrak{B}vx + \mathfrak{A}^4 v \\ &- \mathfrak{B}^4 vv + \mathfrak{C}^4 v^3 + 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv - \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{C}vv \end{aligned}$$

26. Huius igitur aequationis biquadraticae radix vna est:

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3}$$

ac si radices biquadratae vnitatis ponantur 1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ita vt sit:

$$\mathfrak{a} = +\sqrt{-1}; \quad \mathfrak{b} = -1; \quad \text{et} \quad \mathfrak{c} = -\sqrt{-1}$$

rit $\mathfrak{a}^2 = -1 = \mathfrak{b}$; $\quad \mathfrak{a}^3 = -\sqrt{-1} = \mathfrak{c}$;

$\mathfrak{b}^2 = +1$; $\quad \mathfrak{b}^3 = -1 = \mathfrak{b}$;

$\mathfrak{c}^2 = -1 = \mathfrak{b}$; $\quad \mathfrak{c}^3 = +\sqrt{-1} = \mathfrak{a}$;

vnde tres reliquae radices eiusdem aequationis erunt:

$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}\sqrt[4]{v^3}$$

$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v^3}$$

$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{c}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}\sqrt[4]{v^3}$$

27. Hinc autem vicissim aequatio biquadrata quaecunque ad illam formam reduci, eiusque radices assignari poterunt. Sit enim proposita haec aequatio:

$$x^4 = Axx + Bx + C$$

et quaeri opportet valores coefficientium $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ cum quantitate v, quibus inuentis simul huius aequationis radices innotescent. Erit autem:

$A = 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v$; $\quad B = 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\mathfrak{B}v$

$C = \mathfrak{A}^4 v \quad \mathfrak{B}^4 vv + \mathfrak{C}^4 v^3 + 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv - 2\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{C}vv$ seu

$C = (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)^2 v - (\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2 vv + 8\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv$

Illinc autem est $(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v = \frac{1}{2}A$; et $\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v = \frac{B}{4\mathfrak{B}v}$; qui valores hic substituti dant:

$C = \frac{BB}{16\mathfrak{B}\mathfrak{B}v} - \frac{1}{4}AA + 8\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv$

Prima autem formula praebet $4\mathfrak{A}\mathfrak{C}v = A - 2\mathfrak{B}\mathfrak{B}v$, qui valor denuo substitutus dat:

$C = \frac{BB}{16\mathfrak{B}\mathfrak{B}v} - \frac{1}{4}AA + 2A\mathfrak{B}\mathfrak{B}v - 4\mathfrak{B}^4 vv$

ita vt iam duae litterae $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ sint eliminatae.

28. Quia hic adhuc duae incognitae $\mathfrak{B}$ et v supersunt, valor ipsius $\mathfrak{B}$ arbitrio nostro relinquitur. Sit igitur $\mathfrak{B} = 1$, et quantitas v ex sequenti aequatione cubica determinari debebit:

$$v^3 - \frac{1}{2}Av^2 + \frac{1}{4}(C + \frac{1}{4}AA)v - \frac{1}{64}BB = 0$$

In-

Inuenta antem hinc radice v, ex prioribus aequationibus quaeri debent litterae $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$. Cum igitur sit:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v = \frac{B}{4v} \text{ et } 2\mathfrak{A}\mathfrak{C}\sqrt{v} = \frac{A-2v}{2\sqrt{v}}$$

erit tam addendo, quam subtrahendo, et radicem quadratam extrahendo

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\sqrt{v} = \sqrt{\left(\frac{B}{4v} + \frac{A}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}\right)} \text{ et}$$

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{C}\sqrt{v} = \sqrt{\left(\frac{B}{4v} - \frac{A}{2\sqrt{v}} + \sqrt{v}\right)} \text{ vnde reperietur;}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\sqrt{v}}\sqrt{(B + 2A\sqrt{v} - 4v\sqrt{v})} + \frac{1}{4\sqrt{v}}\sqrt{(B - 2A\sqrt{v} + 4v\sqrt{v})} \text{ et}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{4v}\sqrt{(B + 2A\sqrt{v} - 4v\sqrt{v})} - \frac{1}{4v}\sqrt{(B - 2A\sqrt{v} + 4v\sqrt{v})}.$$

29. Cum sit $\mathfrak{A}\sqrt[4]{v} \pm \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3} = (\mathfrak{A} \pm \mathfrak{C}\sqrt{v})\sqrt[4]{v}$ erunt aequationis propositae:

$$x^4 = Axx + Bx + C$$

postquam valor v inuentus fuerit ex aequatione:

$$v^3 - \tfrac{1}{2}Av^2 + \tfrac{1}{4}(C + \tfrac{1}{4}AA)v - \tfrac{1}{64}BB = 0$$

quatuor radices:

I. $x = \sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$

II. $x = \sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$

III. $x = -\sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(-B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$

IV. $x = -\sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(-B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$

Hocque modo, vt constat, resolutio aequationis biquadraticae ad resolutionem aequationis cubicae reducitur.

IV. Resolutio aequationum quinti gradus.

30. Posito $n = 5$, erit forma nostra radicis:

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{vv} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{v^4}$$

ac

ac primo quaeri debet aequatio quinti gradus, cuius haec futura ſit radix, ſeu quod eodem redit, ex hac forma ſigna radicalia eliminari oportet. In hoc autem ipſo ſumma occurrit difficultas, cum operatio haec eliminationis neutiquam eo modo, quo in aequationibus quarti gradus ſum vſus, inſtitui queat. Manifeſtum quidem eſt, quia omnes poteſtates ipſius x eadem ſigna radicalia inuoluunt, ſi aequatio quaeſita fingatur:

$$x^5 = A x^4 + B x^3 + C x + D$$

tum ſubſtituendo pro x valorem aſſumtum, quatuor obtineri aequationes, quarum ope quaterna ſigna radicalia eliminari liceat; ſed tum litterae hae aſſumtae A, B, C, et D ſingulae difficillime determinabuntur.

31. His difficultatibus perpenſis in alium incidi modum hanc operationem inſtituendi, qui ita eſt comparatus, vt ad omnes radicum formas, cuiuscunque ſint gradus, aeque pateat, et ex quo ſimul perſpicietur, aequationem rationalem nunquam vltra gradum, qui exponente n indicatur, eſſe aſcenſuram. Hic autem modus innititur ipſi naturae aequationum, qua ſingulorum terminorum coefficientes ex omnibus radicibus definiuntur. Cum igitur omnes quinque radices aequationis, quam quaerimus, conſtent, ex iis quoque coefficientes ſingulorum terminorum eius formari poſſunt per regulas cognitas. Sint igitur 1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, quinque radices ſurdeſolidae vnitatis, ſeu radices huius aequationis $z^5 - 1 = 0$, ac ponendo α, β, γ, δ, ε pro radicibus aequationis, quam quaerimus, erit:

$\alpha = \mathfrak{A}$

$$\alpha = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{v^4}$$
$$\beta = \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{a}^4\sqrt[5]{v^4}$$
$$\gamma = \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^4\sqrt[5]{v^4}$$
$$\delta = \mathfrak{A}\mathfrak{c}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{c}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{c}^4\sqrt[5]{v^4}$$
$$\varepsilon = \mathfrak{A}\mathfrak{d}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{d}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{d}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{d}^4\sqrt[5]{v^4}.$$

32. His quinque radicibus expoſitis, ſi aequatio quinti gradus has radices habens ſtatuatur:

$$x^5 - \Delta x^4 + A x^3 - B x^2 + C x - D = 0$$

hi coefficientes ex radicibus α, β, γ, δ, ε ita definiuntur, vt ſit

Δ = ſummae radicum

A = ſummae productorum ex binis

B = ſummae productorum ex termis

C = ſummae productorum ex quaternis

D = producto ex omnibus quinis.

Quo autem hos valores facilius colligere queamus, eos ex ſummis poteſtatum radicum concludamus. Sit igitur:

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$$
$$Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2$$
$$R = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3$$
$$S = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4$$
$$T = \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5.$$

His enim valoribus definitis erit, vti nouimus:

$$\Delta = P$$
$$A = \frac{\Delta P - Q}{2}$$
$$B = \frac{AP - \Delta Q + R}{3}$$
$$C = \frac{BP - AQ + \Delta R - S}{4}$$
$$D = \frac{CP - BQ + AR - \Delta S + T}{5}.$$

33. Iam ad valores P, Q, R, S, T inuestigandos, debemus prius radicum vnitatis $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ omnes poteſtates in vnam ſummam redigere; quae cum ſint radices aequationis $z^5 - 1 = 0$, erit

$$1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = 0$$
$$1 + \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 + \mathfrak{d}^2 = 0$$
$$1 + \mathfrak{a}^3 + \mathfrak{b}^3 + \mathfrak{c}^3 + \mathfrak{d}^3 = 0$$
$$1 + \mathfrak{a}^4 + \mathfrak{b}^4 + \mathfrak{c}^4 + \mathfrak{d}^4 = 0$$
$$1 + \mathfrak{a}^5 + \mathfrak{b}^5 + \mathfrak{c}^5 + \mathfrak{d}^5 = 5.$$

Summae poteſtatum ſextarum, ſeptimarum, etc. vsque ad decimas, iterum euaneſcunt, at decimarum ſumma iterum fit $= 5$, cum ſit $\mathfrak{a}^5 = 1$, $\mathfrak{b}^5 = 1$, $\mathfrak{c}^5 = 1$ et $\mathfrak{d}^5 = 1$. Breuitatis gratia in hoc calculo poterimus ſigna radicalia plane omittere, dummodo deinceps recordemur, cum literis $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ coniungenda eſſe $\sqrt[5]{v}, \sqrt[5]{v^2}, \sqrt[5]{v^3}, \sqrt[5]{v^4}$.

34. Nunc igitur addendis radicibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ habebimus:

$P = \mathfrak{A}(1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}) + \mathfrak{B}(1 + \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 + \mathfrak{d}^2) + \text{etc.} = 0.$

reliquis autem poteſtatibus ſumendis, eliciemus inſuper

P = ☉

$$P = 0$$
$$Q = 10(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C})$$
$$R = 15(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D})$$
$$S = 20(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3 + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3) + 30(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{C}) + 120\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$$
$$T = 5(\mathfrak{A}^5 + \mathfrak{B}^5 + \mathfrak{C}^5 + \mathfrak{D}^5) + 100(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3) + 150(\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}).$$

Hic alia producta non occurrunt, nisi quae adiungendis signis radicalibus potestatem ipsius v rationalem producunt: seu si litterae $\mathfrak{A}$ vnam dimensionem tribuamus, litterae $\mathfrak{B}$ duas, litterae $\mathfrak{C}$ tres et litterae $\mathfrak{D}$ quatuor, in omnibus his productis numerus dimensionum est per 5 diuisibilis, coefficiens autem cuiusuis producti est quintuplum eius coefficientis, qui eidem producto ex lege conbinationum competit.

35. Cum igitur sit $P = 0$, erit quoque $\Delta = 0$, et pro reliquis coefficientibus habebimus:

$A = -\frac{1}{2}Q$; $B = -\frac{1}{3}R$; $C = -\frac{1}{4}AQ - \frac{1}{4}S$; et $D = -\frac{1}{5}BQ + \frac{1}{5}AR + \frac{1}{5}T$.

Hinc ergo erit:

$$A = -5(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C})$$
$$B = 5(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D})$$
$$C = -5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3 + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3) + 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2) - 5\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$$
$$D = \mathfrak{A}^5 + \mathfrak{B}^5 + \mathfrak{C}^5 + \mathfrak{D}^5) - 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3) + 5(\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D})$$

cum quibus terminis iam debitae poteſtates ipſius v coniungi debent, vt obtineantur eorum iuſti valores.

36. Quodſi ergo mutatis ſignis coefficientium A et C proponatur haec aequatio:

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

cuius coefficientes hos teneant valores:

$$A = 5(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C})v$$
$$B = 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2v + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D}v)v$$
$$C = 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D}v + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3v + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3vv)v - 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2)vv + 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}v^2$$
$$D = \mathfrak{A}^5v + \mathfrak{B}^5v^2 + \mathfrak{C}^5v^3 + \mathfrak{D}^5v^4 - 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D}v + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3v)v^2 + 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D} + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2v + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2v)v^2$$

erunt eius quinque radices:

I. $x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{v^4}$

II. $x = \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{a}^4\sqrt[5]{v^4}$

III. $x = \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^4\sqrt[5]{v^4}$

IV. $x = \mathfrak{A}\mathfrak{c}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{c}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{c}^4\sqrt[5]{v^4}$

V. $x = \mathfrak{A}\mathfrak{d}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{d}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{d}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{d}^4\sqrt[5]{v^4}$

exiſtentibus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ praeter vnitatem reliquis quatuor radicibus ſurdeſolidis vnitatis, quarum valores imaginarii conſtant.

37. Si nunc viciſſim ex datis coefficientibus A, B, C, D definiri poſſent quantitates $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ cum littera v, haberetur reſolutio generalis omnium aequationum

tionum quinti gradus. Verum in hoc ipſo ſumma difficultas conſiſtit, cum nulla via pateat, litteras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, quarum quidem vnam pro lubitu aſſumere licet, ſucceſſiue ita eliminandi, vt aequatio ſolum incognitam v cum datis A, B, C, D inuoluens reſultet, quae quidem nullas radices ſuperfluas complectatur. Satis tuto autem ſuſpicari licet, ſi haec eliminatio rite adminiſtretur, tandem ad aequationem quarti gradus perueniri poſſe, qua valor ipſius v definiatur. Si enim aequatio altioris gradus prodiret, tum quoque valor ipſius v ſigna radicalia eiusdem gradus implicaret, quod abſurdum videtur. Quoniam autem multitudo terminorum hunc laborem tam difficilem reddit, vt ne tentari quidem cum aliquo ſucceſſu queat, haud abs re erit, caſus quosdam minus generales euoluere, qui non ad formulas tantopere complicatas deducant.

38. Ad caſus ergo particulares deſcenſuri, tribuamus litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ eiusmodi valores, quibus calculus in compendium reducatur; ac primo quidem ſint $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$, et $\mathfrak{D} = 0$, vnde nanciſcemur:

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0 \text{ et } D = \mathfrak{A}^5 v.$$

Hinc igitur fit $\mathfrak{A}\sqrt[5]{v} = \sqrt[5]{v}$. Quare ſi haec propoſita fuerit aequatio:

$$x^5 = D$$

erunt huius aequationis quinque radices:

$$\text{I. } x = \sqrt[5]{D};\ \text{II. } x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{D};\ \text{III. } x = \mathfrak{b}\sqrt[5]{D};\ \text{IV. } x = \mathfrak{c}\sqrt[5]{D};$$
$$\text{V } x = \mathfrak{d}\sqrt[5]{D}$$

 qui

qui caſus cum per ſe ſit manifeſtus, ab eo exordium capere viſum eſt, vt pateat quomodo noſtra methodus caſus cognitos in ſe complectatur.

39. Euaneſcant iam duae litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$, ſi enim tres euaneſcentes ponantur, quaecunque eae ſumantur, ſemper ad caſum praecedentem deducimur. Sint igitur $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ nihilo aequales, ſeu aequatio quaeratur, cuius radix ſit futura $x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2}$, atque obtinebimus:

$$A = 0;\ B = 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v;\ C = 5\mathfrak{A}^3\mathfrak{B}v;\ D = \mathfrak{A}^5 v + \mathfrak{B}^5 v^2$$

vnde propoſita radix conueniet huic aequationi:

$$x^5 = 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v x^2 + 5\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} v x + \mathfrak{A}^5 v + \mathfrak{B}^5 v^2$$

Quae aequatio ſi comparetur cum hac forma:

$$x^5 = 5Pxx + 5Qx + R$$

erit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v = P$; $\mathfrak{A}^3\mathfrak{B}v = Q$, vnde deducitnr $\mathfrak{A}^5 v = \frac{QQ}{P}$ et $\mathfrak{B}^5 v^2 = \frac{P^3}{Q}$, ita vt ſit $R = \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q}$.

40. Hinc ergo deducimur ad reſolutionem huius aequationis ſpecialis quinti gradus:

$$x^5 - 5Pxx + 5Qx + \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q}$$

cuius ob $\mathfrak{A}\sqrt[5]{v} = \sqrt[5]{\frac{QQ}{P}}$ et $\mathfrak{B}\sqrt[5]{vv} = \sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$ quinque radices erunt:

I. $x = \sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$

II. $x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{a}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$

III. $x = \mathfrak{b}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{b}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$

IV. $x = \mathfrak{c}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{c}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$

V. $x = \mathfrak{d}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{d}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$.

Aequa-

Aequatio autem haec non multum abſimilis eſt formulae Moivreanae, et quia ſe in factores reſolui non patitur, eius reſolutio hic tradita eo magis notari meretur.

41. Hanc aequationem a fractionibus liberare poterimus, ſi ponamus $P = MN$ et $Q = M^2N$, tum enim habebitur:

$$x^5 = 5MNxx + 5M^2Nx + M^3N + MN^2$$

cuius radix erit $x = \sqrt[5]{M^3N} + \sqrt[5]{MN^2}$, et ſi α quamlibet aliam radicem ſurdeſolidam vnitatis denotet, erit huius aequationis quaelibet alia radix:

$$x = \alpha\sqrt[5]{M^3N} + \alpha^2\sqrt[5]{MN^2}.$$

Ita ſi exempli gratia ſtatuatur $M = 1$; et $N = 2$, huius aequationis:

$$x^5 = 10xx + 10x + 6$$

radix quaecunque eſt $x = \alpha\sqrt[5]{2} + \alpha^2\sqrt[5]{4}$; haecque aequatio ita eſt comparata, vt per nullam methodum cognitam reſolui poſſe videatur.

42. Si $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{D}$ ſint nihilo aequales, ad eundem caſum reuoluimur. Fiet enim

$A = 0$; $B = 5\mathfrak{A}^2\mathfrak{C}v$; $C = 5\mathfrak{A}\mathfrak{C}^3vv$ et $D = \mathfrak{A}^5v + \mathfrak{C}^5v^3$ vnde ſi ſtatuatur haec aequatio:

$$x^5 = 5Pxx + 5Qx + R$$

vt ſit $P = \mathfrak{A}^2\mathfrak{C}v$ et $Q = \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3vv$, erit $\frac{QQ}{P} = \mathfrak{C}^5v^3$ et $\frac{P^3}{Q} = \mathfrak{A}^5v$: hincque fit, vt ante, $R = \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q}$, atque etiam eaedem reperiuntur radices. Eadem porro etiam aequatio reperitur, ſiue ponatur $\mathfrak{A} = 0$ et $\mathfrak{B} = 0$; ſiue $\mathfrak{A} = 0$ et $\mathfrak{C} = 0$. Sin autem vel $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{D}$, vel $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ euaneſcere

euanescere assumantur, vtrinque quidem eadem prodit aequatio, sed diuersa a praecedentibus casibus, quam ideo euoluere conueniet.

43. Sit igitur et $\mathfrak{B} = 0$ et $\mathfrak{C} = 0$, atque hinc consequemur sequentes valores:

$A = 5\mathfrak{A}\mathfrak{D}v$; $B = 0$, $C = -5\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{D}vv$; et $D = \mathfrak{A}^5 v + \mathfrak{D}^5 v^4$

Vnde si statuamus $\mathfrak{A}\mathfrak{D}v = P$; erit $A = 5P$ et $C = -5PP$ tum vero erit:

$DD\ 4P^5 = (\mathfrak{A}^5 v - \mathfrak{D}^5 v^4)^2$ et $\mathfrak{A}^5 v - \mathfrak{D}^5 v^4 = \sqrt{(DD - 4P^5)}$, ideoque

$$\mathfrak{A}^5 v = \tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}\sqrt{(DD - 4P^5)} \text{ et}$$
$$\mathfrak{D}^5 v^4 = \tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}\sqrt{(DD - 4P^5)}$$

Hinc si proposita sit haec aequatio:

$$x^5 = 5Px^3 - 5PPx + D$$

quaelibet eius radicum est:

$$x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{(\tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}\sqrt{(DD - 4P^5)})} + \mathfrak{a}^4\sqrt[5]{(\tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}\sqrt{(DD - 4P^5)})}$$

atque haec est ipsa illa aequatio cuius resolutionem Cel. Moivraeus docuit.

44. Possunt autem ex forma generali innumerabiles deduci aequationes quinti ordinis, quarum radices assignare licet, etiamsi ipsae illae aequationes in factores resolui nequeant. Proposita enim aequatione quinti gradus:

$$x^5 = A\,x^3 + B\,x^2 + C\,x + D$$

cuius coefficientes habeant sequentes valores:

A =

$$A = \frac{5}{gk}(g^3 + k^3)$$

$$B = \frac{5}{2mnrr}((m+n)(m^2g^3 - n^2k^3) - (m-n)rr)$$

$$C = \frac{5}{mnggkkrr}(g^3(m^2g^3 - n^2k^3)^2 - (m(m+n)g^6 - (m^2+mn-n^2)g^3k^3 + n(m-n)k^6)rr - k^3r^4)$$

$$D = \frac{gg}{mmnk^4g^3}((m^2g^3 - nnk^3)^3 - (m^2g^3 - n^2k^3)(m^2g^3 + rn^2k^3) - n^2k^3r^4) + \frac{kk}{mnng^4r^3}(m^2g^3r^2(m^2g^3 - n^2k^3) - (2m^2g^3 + n^2k^3)r^4 + r^6) + \frac{5(m-n)(g^3 - k^3)(m^2g^3 - n^2k^3)}{2mngkrr} - \frac{5(m+n)(g^3k^3)}{2mngk}$$

eius radices ſemper aſſignari poſſunt.

45. Ponatur enim breuitatis gratia:

$$T = (m^2g^3 - n^2k^3)^2 - 2(m^2g^3 + n^2k^3)rr + r^6$$

ſitque:

$$\left.\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}\right\} = \frac{(m^2g^3 - n^2k^3)^3 - (m^2g^3 - n^2k^3)(m^2g^3 + 2n^2k^3)rr - n^2k^3r^4 \pm ((m^2g^3 - n^2k^3)^2 - n^2k^3rr)\sqrt{T}}{2mnnr}$$

$$\left.\begin{matrix} R \\ S \end{matrix}\right\} = \frac{(m^2g^3 - n^2k^3)m^2g^3 - (2m^2g^3 + n^2k^3)rr + r^4 \pm (m^2g^3 - rr)\sqrt{T}}{2mnnr}$$

vbi ſigna ſuperiora pro valoribus P et R, inferiora pro Q et S valent, ac quaelibet radix aequationis erit:

$$x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{\tfrac{gg}{k^4}P} + \mathfrak{a}^2\sqrt[5]{\tfrac{kk}{g^4}R} + \mathfrak{a}^3\sqrt[5]{\tfrac{kk}{g^4}S} + \mathfrak{a}^4\sqrt[5]{\tfrac{gg}{k^4}Q}.$$

46. Vt rem exemplis illuſtremus, ex his formis ſequentia formari poſſunt:

I. Aequationis $x^5 = 40x^3 + 70xx - 50x - 98$ radix eſt

$$x = \sqrt[5]{(-31 - 3\sqrt{-7})} + \sqrt[5]{(-18 + 10\sqrt{-7})} + \sqrt[5]{(-18 - \sqrt{-7})} + \sqrt[5]{(-31 - 3\sqrt{-7})}$$

II. Aequationis $x^5 = 2625x + 16600$ radix eſt

$$x = \sqrt[5]{75(5+4\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35+11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35-11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{75(5-4\sqrt{10})}$$

quae eo magis ſunt notatu digna, quod hae aequationes nullo alio modo reſolui poſſunt. Simili autem modo huiusmodi inueſtigationes ad aequationes altiorum graduum extendi poſſunt: facileque erit, ex quouis gradu innumerabiles aequationes per alias methodos irreſolubiles exhibere, quarum huius methodi ope non ſolum vna, ſed omnes plane radices exhiberi queant.

DE

DE NVMERIS PRIMIS VALDE MAGNIS

Auctore

L. EVLERO.

Vix vllus reperietur Geometra, qui non, ordinem numerorum primorum inueſtigando, haud parum temporis inutiliter conſumſerit: videtur enim lex, qua numeri primi progrediuntur, in Arithmetica aeque abſtruſae eſſe indaginis, atque in Geometria circuli quadratura: ac ſi huius indagatio pro deſperata eſt habenda, non leuiores adſunt rationes, quae et ordinis, quo numeri primi ſe inuicem ſequuntur, cognitionem nos in perpetuum fugere perſuadent. Cum deinde etiam circuli quadratura, quamuis innoteſceret, vix quicquam vtilitatis allatura perhibeatur, eodem iure negare licebit, ex ordine numerorum primorum perſpecto vllum vſum eſſe redundaturum. Verum tamen nemo facile dubitabit, quin methodus ipſa, quae nos vel ad circuli quadraturam, vel ad legem progreſſionis numerorum primorum manuduceret, quoniam hae res tam diu fruſtra ſunt anquiſitae, eximium vſum ſit praeſtatura, propterea quod maxima impedimenta, quibus hae inueſtigationes adhuc fuerunt implicatae, feliciter ſuperauerit; ita vt inde omni iure ſumma ſubſidia per totam Matheſin nobis polliceri poſſemus. Haec ideo

N 2 monenda

monenda duxi, ne quis eos, qui forte in hoc ſtudio deſudauerint, etiamſi operam perdiderint, reprehendendos cenſeat. Ac profecto natura numerorum primorum, cum ex iis modo tam admirabili omnes numeri componantur, per ſe praeclariſſima videtur, et quo magis adhuc in proprietates, quibus ſunt praeditae, penetrare licuit, eo magis haec doctrina digna cenſeri debet, cui excolendae plus operae tribuatur, quam nunc quidem plerumque fieri ſolet. In hoc autem ſtudii genere inprimis excelluit acutiſſimus quondam *Fermatius*, cui plurimae inſignes numerorum proprietates acceptae ſunt referendae; neque parum eſt dolendum, quod eius ſcripta poſt mortem ita interciderint, vt plurimorum theorematum demonſtrationes, quas ſe adinueniſſe aſſeuerauerat, adhuc nobis ſint ignotae. Hic perſpicaciſſimus vir in doctrina numerorum primorum etiam non mediocriter laborauit, atque problema ſe digniſſimum olim *Wallisio* propoſuerat, quo modum requirebat, numerum primum dato quouis numero maiorem aſſignandi. Credebat quidem *Fermatius*, ſe huius problematis ſolutionem in poteſtate habere, dum affirmauerat, omnes numeros in hac forma 2^n+1 contentos, ſi quidem exponens n ipſe fuerit poteſtas binarii, eſſe numeros primos. Verum tamen eo erat candore, vt negaret, ſe huius aſſerti demonſtrationem habere, etiamſi de eius veritate minime dubitaret. Perſpicuum autem eſt, ſi haec forma 2^n+1, ſumendo pro n quasvis binarii poteſtates, ſemper numeros primos exhiberet, problema propoſitum perfecte fore ſolutum. Quocunque enim numero propoſito, non ſolum vna, ſed innumerabiles poteſtates bina-

binarii assignari poterunt, quae loco exponentis n positae praebiturae sint potestates 2^n dato illo numero maiores, ad quas si vnitas adiiceretur, haberentur vtique totidem numeri primi dato illo numero maiores. Hanc autem regulam a *Fermatio* prolatam veritati non esse consentaneam, iam ante plures annos animaduerti. Cum enim pro omnibus casibus inter centena millia subsistentibus satisfaceret, qui sunt:

$2^1 + 1 = 3$; $2^2 + 1 = 5$; $2^4 + 1 = 17$; $2^8 + 1 = 257$; $2^{16} + 1 = 65537$

statim sequentem casum $2^{32} + 1 = 4294967297$ non esse primum inueni, sed diuisibilem per numerum 641. Quare cum etiam de sequentibus maioribus numeris, ex hac formula natis, incerti simus, vtrum sint primi, nec nec? hinc nihil plane adiumenti consequimur ad problema memoratum soluendum. Ac primo quidem nullum est dubium, quin proposito numero quantumuis magno, infiniti adeo existant numeri primi illo maiores; postquam iam ab Euclide est demonstratum, omnium numerorum primorum multitudinem esse infinitam, etiamsi, vt ego ostendi, haec numerorum primorum multitudo se habeat ad multitudinem omnium prorsus numerorum, vt vnitas ad infinitum, seu potius, vt logarithmus numeri infiniti ad ipsum hunc numerum infinitum, quod posterius infinitum maius est, quam potestas quantumuis magna illius infiniti Solutionis quidem huius problematis compotes fieremus, si loco formulae $2^n + 1$ aliam formulam indefinitam detegere liceret, quae nonnisi numeros primos complecteretur; sed etiamsi fortasse talis reperiatur, quae vel centum numeros primos suppeditaret, tamen ei aeque parum confidere possemus pro sequentibus, nisi forte, quod autem vix est expectandum, firma demonstratio exhiberi queat. Nulla certe progressio algebraica datur, cuius omnes plane termini in infinitum crescentes futuri sint numeri primi. Sumto enim termino quocunque, inter sequentes semper infiniti termini eiusdem seriei assignari poterunt, quae omnes per illum diuidi queant, quod Theorema ita demonstro:

Theorema.

Nulla datur progressio algebraica, cuius omnes termini sint numeri primi.

Demonstratio.

Cum progressio sit algebraica, posito eius termino indici x respondente $= X$, erit:

$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 +$ etc.

Posito ergo termino indici a respondente $= A$, vt sit

$A = \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta a^3 + \varepsilon a^4 + \zeta a^5 + \eta a^6 +$ etc.

si capiatur $x = nA + a$, fiet terminus isti indici respondens X vtique per A diuisibilis. Omnes ergo progressionis propositae termini, qui indicibus in hac forma $nA + a$ contentis respondent, non erunt numeri primi, neque ergo vlla huiusmodi progressio meros numeros primos complectetur. Q. E D.

Verum etiamsi non omnes termini huiusmodi progressionis sint numeri primi, problemati tamen satisfieri possit, si modo inter eos infiniti dentur numeri primi, quorum indices certo quodam modo dignoscere lice-

liceret; veluti ſi eiusmodi daretur progreſſio, cuius omnes termini, quorum indices ſunt numeri primi, ipſi eſſent numeri primi. Sed hoc modo quaerenda eſſet eiusmodi functio ipſius x, quae, quoties x fuerit numerus primus, ipſa quoque foret numerus primus, vel, quod eodem redit, regula deſideraretur, cuius ope ex quouis numero primo propoſito inueniri poſſet nouus numerus primus. At huius modi regulam profundiſſimae eſſe indaginis, quilibet in huius modi inueſtigationibus vel leuiter verſatus facile agnoſcet, ita vt hinc nulla plane ſpes affulgeat, vnquam ad ſolutionem allati problematis *Fermatiani* perueniendi.

Certum igitur eſt, in hoc problemate nihil adhuc eſſe praeſtitum, poſtquam ipſius *Fermatii* conatus ſucceſſu ſint deſtituti. Atque adeo, cum tabula numerorum primorum nondum vltra centena millia habeatur extenſa, problema ſane iam non parum foret difficile, ſi modo numeri primi quaerantur, qui ſint centenis millibus maiores; vel cum nuper prodierit tabula numerorum primorum vsque ad 101000 excurrens, ſi numeri primi quaerantur hunc terminum ſuperantes. Neque enim ad hoc ſaltem problema ſoluendum alia via patere videtur, niſi vt more ſolito ex numeris vltra 101000 notatis omnes compoſiti expungantur, hoc eſt: omnes, qui per vllum numerum primum, radice quadrata minorem, diuiſibiles deprehendentur; qui numeri enim his expunctis relinquentur, erunt numeri primi. Haec autem operatio inſtituenda plane foret eadem ratione, ac ſi ipſam tabulam numerorum primorum ad vlteriores limites continuare vellemus; quod opus propterea eſſet im-

immensi laboris. Quodsi autem quis forte hunc laborem susciperet, certe non esset expectandum, vt vltra millionem a quoquam produceretur, eoque exantlato omnino impossibile videretur, vllum numerum primum exhibere, qui esset millione maior.

Occurrit autem mihi methodus peculiaris, ex qua per calculum non admodum taediosum plures sum adeptus numeros, non solum centies millibus, sed etiam millione maiores, quos esse primos certo asseuerare possum. Quoniam igitur in tam ardua inuestigatione leuiores successus non sunt contemnendi, haud inutile fore spero, si isthanc methodum meam exposuero, praesertim cum ipsa ex proprietatibus numerorum non spernendis sit deriuata, quae etiam in aliis inuestigationibus vsum insignem habere posse videntur.

Deductus autem sum ad hanc methodum per considerationem numerorum quadratorum vnitate auctorum, seu in hac formula $aa+1$ contentorum, in quibus, siquidem a sit numerus par, plures numeros primos occurrere manifestum est, sin autem a sit numerus impar, semissis illius formulae $\frac{1}{2}(aa+1)$ plurimos quoque suppeditat numeros primos. Quaesiui ergo omnes diuisores numerorum in hac forma $aa+1$ contentorum, qui labor non adeo erat taediosus, cum non opus esset diuisionem per omnes numeros primos radice a minores tentare, propterea quod demonstraui, atque id quidem post *Fermatium*, cuius autem demonstratio pro deperdita est habenda, huiusmodi numeros $aa+1$ alios diuisores non admittere, nisi qui ipsi sint

ſint ſummae duorum quadratorum. Quare ſi numerus in hac forma $aa+1$ contentus habeat diuiſores, certo ſcio, hos diuiſores ſingulos in forma $pp+qq$ eſſe contentos. Cum deinde omnes numeri primi formae $4n+1$ ſint ſummae duorum quadratorum, numerorum autem primorum formae $4n-1$ nullus ſit duorum quadratorum ſumma, nullus certe numerus formae $4n-1$ erit diuiſor formae $aa+1$; ſed ſi ea habeat diuiſores primos, eos in hac forma $4n+1$ contineri neceſſe eſt. Conſideraui itaque omnes numeros primos formae $4n+1$, et ea quadrata primum inueſtigaui, quae vnitate aucta eſſent per quemuis horum numerorum primorum diuiſibilia, quo pacto omnes numeros formae $aa+1$ ſum adeptus, qui non ſunt numeri primi, reliquos ergo neceſſario primos eſſe oportet. Primum autem manifeſtum eſt, per binarium, qui eſt etiam ſumma duorum quadratorum, formam $aa+1$ eſſe diuiſibilem, quoties a fuerit numerus impar. Supereſt ergo, vt ii ipſius a valores indagentur, qui reddant formam $aa+1$ diuiſibilem per quemquam horum numerorum primorum 5, 13, 17, 29, 37, 41, etc. qui ipſi ſunt duorum quadratorum ſummae; quem in finem praemitto ſequens problema:

Problema I.

Propoſito numero primo formae $4n+1$, inuenire omnia quadrata, quae vnitate aucta per illum ſunt diuiſibilia.

Solutio.

Cum iſte numerus primus ſit ſumma duorum quadratorum, ſit $4n+1=p^2+q^2$, quadratum vero vnitate auctum per illum diuisibile sit $aa+1$. Demonstraui autem, quando summa duorum quadratorum, veluti $aa+bb$, diuisibilis est per numerum primum $pp+qq$, semper dari duos huiusmodi numeros r et s, vt sit $a=pr+qs$ et $b=ps-qr$. Nostro casu ergo cum sit $bb=1$, necesse est, vt sit $ps-qr=\pm 1$: vnde perspicitur fractiones $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ proxime inter se convenire, ita vt earum differentia $\frac{ps-qr}{qs}$ minorem numeratorem, vnitati quippe aequalem, habere nequeat. Quare cum numeri p et q ex aequalitate $4n+1=pp+qq$ sint cogniti, formetur fractio $\frac{p}{q}$, quaeraturque in numeris minoribus fractio $\frac{r}{s}$ illi proxime aequalis, vt partibus per crucem multiplicatis productorum ps et qr differentia sit $=1$, id quod methodo a me alibi exposita facile fiet; tum ad fractionem $\frac{p}{q}$ inuenta hac fractione $\frac{r}{s}$, erit quadrati vnius quaesiti radix $a=pr+qs$, vel etiam $a=-pr-qs$. Tum vero si multiplum quodcunque diuisoris $4n+1$ addatur, habebitur quoque valor idoneus pro a. Generatim ergo erit $a=m(4n+1)\pm(pr+qs)$, in qua forma continentur radices omnium quadratorum, quae vnitate aucta per numerum primum propositum $4n+1$ sunt diuisibilia. Q. E. I.

Scholion.

Quemadmodum autem data fractione $\frac{p}{q}$ aliam fractionem $\frac{r}{s}$ inueniri conueniat, quae ab illa tam parum discrepet, vt producta per crucem orta ps et qr vnitate tantum differant, alio loco ostendi. Scilicet pro numeris p et q eadem operatio institui debet, quae vulgo

vulgo ad eorum maximum communem diuiſorem inueniendum inſtitui ſolet, tum ex quotis ordine ſcriptis formentur fractiones, quales ex fractionibus continuis prodeunt, earumque vltima erit ipſa fractio $\frac{p}{q}$, penultima autem pro $\frac{r}{s}$ aſſumi poterit, eritque differentia inter producta ps et qr vnitati aequalis; propterea quod numeri p et q erunt inter ſe primi, quoniam alias numerus $4n+1=pp+qq$ non foret primus. Inventa autem fractione $\frac{r}{s}$, manifeſtum eſt, eius loco quoque aſſumi poſſe has fractiones $\frac{p+r}{q+s}$, $\frac{2p+r}{2q+s}$ et ingenere $\frac{mp+r}{mq+s}$; nam et haec fractio cum fractione $\frac{p}{q}$ comparata dat producta per crucem $mpq+qr$ et $mpq+ps$ vnitate differentia. Quod ſi autem fractioni $\frac{p}{q}$ haec $\frac{mp+r}{mq+s}$ adiungatur, ex iis pro radice quadrati quaeſiti obtinetur $a=mpp+pr+mqq+qs=m(4n+1)$ $+pr+qs$ ob $pp+qq=4n+1$. Seu cum numeri r et s quoque negatiue accipi queant, $a=m(4n+1)$ $\pm(pr+qs)$, quae eſt ipſa forma generalis in ſolutione inuenta. Verum haec operatio commodiſſime per exempla docebitur.

Exemplum 1.

Inuenire omnia quadrata, quae vnitate aucta ſint per numerum primum 29 diuiſibilia.

Sit a radix quadrata ex quadratis quaeſitis, et cum 29 ſit numerus primus formae $4n+1$, erit certe ſumma duorum quadratorum, quae ſunt 25 et 4, ita vt ob $29=pp+qq=5^2+2^2$, ſit $p=5$ et $q=2$, vnde formatur ista fractio $\frac{p}{q} = \frac{5}{2}$. Nunc inter numeros 5 et 2 instituatur operatio ad maximum communem diuisorem inuestigandum, quae ita se habebit;

$$\begin{array}{l} 2)\,5\,(2 \\ \quad \underline{4} \\ \quad 1)\,2\,(2 \\ \qquad \underline{2} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Sunt ergo quoti 2 et 2, ex quibus formantur fractiones sequenti modo:

$$\begin{array}{ccc} & 2 & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2} \end{array}$$

eritque penultima $\frac{2}{1} = \frac{r}{s}$, ex his autem duabus vltimis fractionibus $\frac{2}{1}$ et $\frac{5}{2}$ valor idoneus pro a erit productum numeratorum $2.5 = 10$ aucta producto denominatorum $1.2 = 2$; vnde erit $a = 10 + 2 = 12$, et in genere $a = 29m \pm 12$; omniumque horum numerorum quadrata vnitate aucta per 29 erunt diuisibilia. Quare omnes valores ipsius a in his duabus progressionibus arithmeticis continebuntur:

12, 41, 70, 99, 128, 157, 186, 215, 244, 273, etc.
17, 46, 75, 104, 133, 162, 191, 220, 249, 278, etc.

Exemplum 2.

Inuenire omnia quadrata, quae vnitate aucta fiant per numerum primum 617 diuisibilia.

Cum

Cum ſit $617 = 16^2 + 19^2$, ſtatuatur $p = 19$ et $q = 16$, fiatque inter numeros 16 et 19 haec operatio:

$$
\begin{array}{l}
16)\,19\,(1 \\
\quad\;\; \underline{16} \\
\qquad 3)\,16\,(5 \\
\qquad\quad\;\; \underline{15} \\
\qquad\qquad 1)\,3\,(3 \\
\qquad\qquad\quad\;\; \underline{3} \\
\qquad\qquad\quad\;\; 0
\end{array}
$$

Ex quotis 1, 5, 3 ſequentes formentur fractiones:

$$
\begin{array}{cccc}
1. & 5. & 3 & \\
\frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{6}{5}, & \frac{19}{16}
\end{array}
$$

quarum binae poſtremae dant numeratorum productum $= 114$

. . . . . at denominatorum productum $= 80$

vnde idoneus isque minimus valor ipſius a erit $= 194$ et generatim $a = 617m \pm 194$. Omnes ergo ipſius a valores in duabus ſequentibus progreſſionibus arithmeticis comprehenduntur:

194, 811, 1428, 2045, 2662, 3279 etc.

423, 1040, 1657, 2274, 2891, 3508 etc.

Exemplum 3.

Inuenire omnia quadrata, quae vnitate aucta ſint per numerum primum 1709 diuiſibilia.

Cum sit $1709 = 22^2 + 35^2$, inter numeros 22 et 35 sequens instituatur operatio:

$$\begin{array}{llllll}
22)\,35\,(1 & & & & & \\
\underline{22} & & & & & \\
13)\,22\,(1 & & & & & \\
\underline{13} & & & & & \\
9)\,13\,(1 & & & & & \\
\underline{9} & & & & & \\
4)\,9\,(2 & & & & & \\
\underline{8} & & & & & \\
1)\,4\,(4 & & & & & \\
\underline{4} & & & & & \\
0 & & & & &
\end{array}$$

et ex quotis 1, 1, 1, 2, 4 formentur sequentes fractiones.

$$\begin{array}{cccccc}
1. & 1. & 1. & 2. & 4 & \\
\frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{8}{5}, & \frac{35}{22}
\end{array}$$

quarum duae vltimae dabunt pro vno ipsius a valore:

$$a = 8 \cdot 35 + 5 \cdot 22 = 390$$

ita vt omnes ipsius a valores satisfacientes sint:

$$a = 1709m \pm 390$$

Coroll. 1.

Si numerus primus $4n+1$ fuerit ipse quadratum vnitate auctum, veluti $4n+1 = p^2 + 1$, tum ob $q = 1$, sequens operatio erit instituenda:

$$1)\,p\,(p$$
$$\underline{p}$$

vni-

vnicus ergo habetur quotus p, ex quo nascentur fractiones

$$\begin{array}{cc} p & \\ \frac{1}{0}, & \frac{p}{1} \end{array}$$

vnde fit $a = 1\,p + 0.\,1 = p$, et generatim $a = m(4n+1) \pm p$.

Coroll. 2.

Si amborum quadratorum, quorum summae numerus primus $4n+1$ aequatur, radices vnitate differant, vt sit $4n+1 = pp + (p-1)^2$, tum ob $q = p-1$ sequens habebitur operatio:

$$\begin{array}{lll} p-1)\; p & (1 & \\ \quad\; \underline{p-1} & & \\ \qquad\quad 1)\; p-1 & (p-1 & \\ \qquad\qquad\; \underline{p-1} & & \\ \qquad\qquad\quad 0 & & \end{array}$$

Quoti ergo 1 et $p-1$ has dabunt fractiones:

$$\begin{array}{ccc} 1 & p-1 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{p}{p-1} \end{array}$$

vnde fit $a = 1.\,p + 1.\,(p-1) = 2p-1$, et in genere
$a = (4n+1)\,m \pm (2p-1)$.

Coroll. 3.

Si quaerantur omnia quadrata, quae vnitate aucta sint per numerum primum $2 = 1+1$ diuisibilia, etsi 2 non est formae $4n+1$, tamen, quia $p = 1$, et $q = 1$, erit primo $a = 1$ per coroll. 1, hincque in genere $a = 2m \pm 1$. Vnde sequitur, quod per se est manifestum, omnia

qua-

quadrata numerorum imparium, si vnitas addatur, fore per 2 diuisibilia.

Scholion 2.

Secundum hanc ergo regulam omnes numeros primos formae $4n+1$ tractaui, et postquam singulos in summam duorum quadratorum conuerti, quod semper et quidem vnico modo fieri potest, cuique formam generalem ipsius a, in qua radices omnium quadratorum, quae vnitate aucta per quemque numerum primum sint diuisibilia, adscripsi, vnde sequens nata est tabula:

Tabula omnium numerorum a

quorum quadrata vnitate aucta $aa+1$ sunt per quemlibet numerum primum formae $4n+1$ diuisibilia.

Numeri primi	Valor ipsius a
$2 = 1^2 + 2^2$	$a = 2m \pm 1$
$5 = 1^2 + 2^2$	$a = 5m \pm 2$
$13 = 2^2 + 3^2$	$a = 13m \pm 5$
$17 = 1^2 + 4^2$	$a = 17m \pm 4$
$29 = 2^2 + 5^2$	$a = 29m \pm 12$
$37 = 1^2 + 6^2$	$a = 37m \pm 6$
$41 = 4^2 + 5^2$	$a = 41m \pm 9$
$53 = 2^2 + 7^2$	$a = 53m \pm 23$
$61 = 5^2 + 6^2$	$a = 61m \pm 11$
$73 = 3^2 + 8^2$	$a = 73m \pm 27$
$89 = 5^2 + 8^2$	$a = 89m \pm 34$
$97 = 4^2 + 9^2$	$a = 97m \pm 22$

Numeri

Numeri primi	Valor ipſius a
$101 = 1^2 + 10^2$	$a = 101\,m \pm 10$
$109 = 3^2 + 10^2$	$a = 109\,m \pm 33$
$113 = 7^2 + 8^2$	$a = 113\,m \pm 15$
$137 = 4^2 + 11^2$	$a = 137\,m \pm 37$
$149 = 7^2 + 10^2$	$a = 149\,m \pm 44$
$157 = 6^2 + 11^2$	$a = 157\,m \pm 28$
$173 = 2^2 + 13^2$	$a = 173\,m \pm 80$
$181 = 9^2 + 10^2$	$a = 181\,m \pm 19$
$193 = 7^2 + 12^2$	$a = 193\,m \pm 81$
$197 = 1^2 + 14^2$	$a = 197\,m \pm 14$
$229 = 2^2 + 15^2$	$a = 229\,m \pm 107$
$233 = 8^2 + 13^2$	$a = 233\,m \pm 89$
$241 = 4^2 + 15^2$	$a = 241\,m \pm 64$
$257 = 1^2 + 16^2$	$a = 257\,m \pm 16$
$269 = 10^2 + 13^2$	$a = 269\,m \pm 82$
$277 = 9^2 + 14^2$	$a = 277\,m \pm 60$
$281 = 5^2 + 16^2$	$a = 281\,m \pm 53$
$293 = 2^2 + 17^2$	$a = 293\,m \pm 138$
$313 = 12^2 + 13^2$	$a = 313\,m \pm 25$
$317 = 11^2 + 14^2$	$a = 317\,m \pm 114$
$337 = 9^2 + 16^2$	$a = 337\,m \pm 148$
$349 = 5^2 + 18^2$	$a = 349\,m \pm 136$
$353 = 8^2 + 17^2$	$a = 353\,m \pm 42$
$373 = 7^2 + 18^2$	$a = 373\,m \pm 104$
$389 = 10^2 + 17^2$	$a = 389\,m \pm 115$
$397 = 6^2 + 19^2$	$a = 397\,m \pm 63$
$401 = 1^2 + 20^2$	$a = 401\,m \pm 20$
$409 = 3^2 + 20^2$	$a = 409\,m \pm 143$
$421 = 14^2 + 15^2$	$a = 421\,m \pm 29$

Numeri primi	Valor ipsius a
$433 = 12^2 + 17^2$	$a = 433\,m \pm 179$
$449 = 7^2 + 20^2$	$a = 449\,m \pm 67$
$457 = 4^2 + 21^2$	$a = 457\,m \pm 109$
$461 = 10^2 + 19^2$	$a = 461\,m \pm 48$
$509 = 5^2 + 22^2$	$a = 509\,m \pm 208$
$521 = 11^2 + 20^2$	$a = 521\,m \pm 235$
$541 = 10^2 + 21^2$	$a = 541\,m \pm 52$
$557 = 14^2 + 19^2$	$a = 557\,m \pm 118$
$569 = 13^2 + 20^2$	$a = 569\,m \pm 86$
$577 = 1^2 + 24^2$	$a = 577\,m \pm 24$
$593 = 8^2 + 23^2$	$a = 593\,m \pm 77$
$601 = 5^2 + 24^2$	$a = 601\,m \pm 125$
$613 = 17^2 + 18^2$	$a = 613\,m \pm 35$
$617 = 16^2 + 19^2$	$a = 617\,m \pm 194$
$641 = 4^2 + 25^2$	$a = 641\,m \pm 159$
$653 = 13^2 + 22^2$	$a = 653\,m \pm 144$
$661 = 6^2 + 25^2$	$a = 661\,m \pm 106$
$673 = 12^2 + 23^2$	$a = 673\,m \pm 58$
$677 = 1^2 + 26^2$	$a = 677\,m \pm 26$
$701 = 5^2 + 26^2$	$a = 701\,m \pm 135$
$709 = 15^2 + 22^2$	$a = 709\,m \pm 96$
$733 = 2^2 + 27^2$	$a = 733\,m \pm 353$
$757 = 9^2 + 26^2$	$a = 757\,m \pm 87$
$761 = 19^2 + 20^2$	$a = 761\,m \pm 39$
$769 = 12^2 + 25^2$	$a = 769\,m \pm 62$
$773 = 17^2 + 22^2$	$a = 773\,m \pm 317$
$797 = 11^2 + 26^2$	$a = 797\,m \pm 215$
$809 = 5^2 + 28^2$	$a = 809\,m \pm 318$
$821 = 14^2 + 25^2$	$a = 821\,m \pm 295$

Numeri

Numeris primi	Valor ipsius a
$829 = 10^2 + 27^2$	$a = 829\,m \pm 240$
$853 = 18^2 + 23^2$	$a = 853\,m \pm 333$
$857 = 4^2 + 29^2$	$a = 857\,m \pm 207$
$877 = 6^2 + 29^2$	$a = 877\,m \pm 151$
$881 = 16^2 + 25^2$	$a = 881\,m \pm 387$
$929 = 20^2 + 23^2$	$a = 929\,m \pm 324$
$937 = 19^2 + 24^2$	$a = 937\,m \pm 196$
$941 = 10^2 + 29^2$	$a = 941\,m \pm 97$
$953 = 13^2 + 28^2$	$a = 953\,m \pm 442$
$977 = 4^2 + 31^2$	$a = 977\,m \pm 252$
$997 = 6^2 + 31^2$	$a = 997\,m \pm 161$
$1009 = 15^2 + 28^2$	$a = 1009\,m \pm 469$
$1013 = 22^2 + 23^2$	$a = 1013\,m \pm 45$
$1021 = 11^2 + 30^2$	$a = 1021\,m \pm 255$
$1043 = 3^2 + 32^2$	$a = 1033\,m \pm 347$
$1039 = 5^2 + 32^2$	$a = 1049\,m \pm 426$
$1061 = 10^2 + 31^2$	$a = 1061\,m \pm 103$
$1069 = 13^2 + 30^2$	$a = 1069\,m \pm 249$
$1093 = 2^2 + 33^2$	$a = 1093\,m \pm 530$
$1097 = 16^2 + 29^2$	$a = 1097\,m \pm 341$
$1109 = 22^2 + 25^2$	$a = 1109\,m \pm 354$
$1117 = 21^2 + 26^2$	$a = 1117\,m \pm 214$
$1129 = 20^2 + 27^2$	$a = 1129\,m \pm 168$
$1153 = 8^2 + 33^2$	$a = 1153\,m \pm 140$
$1181 = 5^2 + 34^2$	$a = 1181\,m \pm 243$
$1193 = 13^2 + 32^2$	$a = 1193\,m \pm 186$
$1201 = 24^2 + 25^2$	$a = 1201\,m \pm 49$
$1213 = 22^2 + 27^2$	$a = 1223\,m \pm 495$
$1217 = 16^2 + 31^2$	$a = 1217\,m \pm 78$

Numeri primi	Valor ipſius a
$1229 = 2^2 + 35^2$	$a = 1229\,m \pm 597$
$1237 = 9^2 + 34^2$	$a = 1237\,m \pm 546$
$1249 = 15^2 + 32^2$	$a = 1249\,m \pm 585$
$1277 = 11^2 + 34^2$	$a = 1277\,m \pm 113$
$1289 = 8^2 + 35^2$	$a = 1289\,m \pm 479$
$1297 = 1^2 + 36^2$	$a = 1297\,m \pm 36$
$1301 = 25^2 + 26^2$	$a = 1301\,m \pm 51$
$1321 = 5^2 + 36^2$	$a = 1321\,m \pm 257$
$1361 = 20^2 + 31^2$	$a = 1361\,m \pm 614$
$1373 = 2^2 + 37^2$	$a = 1373\,m \pm 668$
$1381 = 15^2 + 33^2$	$a = 1381\,m \pm 366$
$1409 = 25^2 + 28^2$	$a = 1409\,m \pm 452$
$1429 = 23^2 + 30^2$	$a = 1429\,m \pm 620$
$1433 = 8^2 + 37^2$	$a = 1433\,m \pm 542$
$1453 = 3^2 + 38^2$	$a = 1453\,m \pm 497$
$1481 = 16^2 + 35^2$	$a = 1481\,m \pm 465$
$1489 = 20^2 + 33^2$	$a = 1389\,m \pm 225$
$1493 = 7^2 + 38^2$	$a = 1493\,m \pm 432$
$1549 = 18^2 + 35^2$	$a = 1549\,m \pm 88$
$1553 = 23^2 + 32^2$	$a = 1553\,m \pm 339$
$1597 = 21^2 + 34^2$	$a = 1597\,m \pm 610$
$1601 = 1^2 + 40^2$	$a = 1601\,m \pm 40$
$1609 = 3^2 + 40^2$	$a = 1609\,m \pm 523$
$1613 = 13^2 + 38^2$	$a = 1613\,m \pm 127$
$1621 = 10^2 + 39^2$	$a = 1621\,m \pm 166$
$1637 = 26^2 + 31^2$	$a = 1637\,m \pm 316$
$1657 = 19^2 + 36^2$	$a = 1657\,m \pm 783$
$1669 = 15^2 + 38^2$	$a = 1669\,m \pm 220$
$1693 = 18^2 + 37^2$	$a = 1693\,m \pm 92$

Numeri

Numeri primi	Valor ipsius a
$1697 = 4^2 + 41^2$	$a = 1097\,m \pm 414$
$1709 = 22^2 + 35^2$	$a = 1709\,m \pm 390$
$1721 = 11^2 + 40^2$	$a = 1721\,m \pm 473$
$1733 = 17^2 + 38^2$	$a = 1733\,m \pm 410$
$1741 = 29^2 + 30^2$	$a = 1741\,m \pm 59$
$1753 = 27^2 + 32^2$	$a = 1753\,m \pm 713$
$1777 = 16^2 + 39^2$	$a = 1777\,m \pm 775$
$1789 = 5^2 + 42^2$	$a = 1789\,m \pm 724$
$1801 = 24^2 + 35^2$	$a = 1801\,m \pm 824$
$1861 = 30^2 + 21^2$	$a = 1861\,m \pm 61$
$1873 = 28^2 + 33^2$	$a = 1873\,m \pm 737$
$1877 = 14^2 + 41^2$	$a = 1877\,m \pm 137$
$1889 = 17^2 + 40^2$	$a = 1889\,m \pm 331$
$1901 = 26^2 + 35^2$	$a = 1901\,m \pm 218$
$1913 = 8^2 + 43^2$	$a = 1913\,m \pm 712$
$1933 = 13^2 + 42^2$	$a = 1933\,m \pm 598$
$1949 = 10^2 + 43^2$	$a = 1949\,m \pm 589$
$1973 = 23^2 + 38^2$	$a = 1973\,m \pm 259$
$1993 = 12^2 + 43^2$	$a = 1993\,m \pm 834$
$1997 = 29^2 + 34^2$	$a = 1997\,m \pm 412$

Tabula ergo haec in se complectitur omnes numeros primos formae $4n+1$ infra 2000 existentes, eiusque ergo ope omnes numeri inueniri possunt, quorum quadrata vnitate aucta per vllum horum numerorum primorum sint diuisibilia. Eius ergo beneficio sequens solui poterit problema:

Problema.

Omnium numerorum, qui vnitate excedunt numeros quadratos, assignare omnes diuisores radicibus ipsorum quadratis minores.

Solutio.

Scribantur ordine omnes numeri ab vnitate ad 2000, quandoquidem praecedens tabula ad hunc terminum est producta, qui littera a designentur, ita pro quouis numeri inde nati $aa+1$ diuisores sint assignandi. Constat autem, hos numeros alios non esse habituros diuisores primos, nisi formae $4n+1$, praecedens vero tabula omnes numeros a exhibet, quorum quadrata vnitate aucta sint per quemque numerum primum huius formae diuisibilia. Verum pro quolibet numero $aa+1$ sufficit notasse diuisores primos radice a minores: quoniam his cognitis etiam diuisores radice a maiores sponte innotescunt. Quam ob rem singulis numeris a formae $2m\pm1$ adscribatur binarius: quia eorum quadrata vnitate aucta sunt per 2 diuisibilia; tum numeris $a=5m\pm2$ adscribatur 5, numeris $a=13m\pm5$ adscribatur 13, numeris $a=17m\pm4$ adscribatur 17, et ita porro; vbi quidem valores ipsius a minores ipso numero primo proposito omittuntur, quia tantum de diuisoribus ipso numero a minoribus quaeritur. Hoc ergo modo si ope tabulae praecedentis cuique numero a diuisores conuenientes adscribantur, obtinebuntur omnes diuisores numeri $aa+1$ ipsa radice a minores. Q. E. I.

Coroll.

Coroll. 1.

Si ergo hoc modo numeri a relinquentur, quibus nullus diuisor fuerit adscriptus, hoc indicio erit, numeros $aa+1$ inde natos esse primos, nullos quippe diuisores admittentes praeter vnitatem et se ipsos. Quibus igitur numeris a in tabula hoc modo condita nullus diuisor fuerit adscriptus, de iis certo affirmare poterimus, eorum quadrata vnitate aucta esse numeros primos.

Coroll. 2.

Quoniam igitur haec tabula pro numeris a facile ad 2000 extenditur, numeri inde nati $aa+1$ ad 4000000 exsurgent; vnde ista tabula omnes numeros primos formae $aa+1$ exhibebit, qui 4 milliones non superant, sicque ex ea numeri primi non solum centenis millibus sed etiam vno millione maiores depromi poterunt.

Coroll. 3.

Quibus autem numeris a vnicus diuisor α fuerit adscriptus, numeri inde nati $aa+1$ praeter vnitatem vnicum habebunt hunc diuisorem α, radice a minorem; ideoque $\frac{aa+1}{\alpha}$ erit numerus primus. Ita quibus numeris a soles binarius fuerit adscriptus, ex iis certo hos obtinemus numeros primos $\frac{aa+1}{2}$; atque adeo ex ista tabula omnes numeri primi formae $\frac{aa+1}{2}$ limite 2000000 non maiores assignari poterunt.

Coroll.

Coroll. 4.

Simili modo omnes numeri a, quibus ſolus quinarius eſt adſcriptus, praebebunt omnes numeros primos formae $\frac{aa+1}{5}$, qui infra limitem 800000 continentur. Atque omnes numeri a, qui tantum diuiſorem 13 habebunt adſcriptum, praebebunt omnes numeros primos formae $\frac{aa+1}{13}$, infra limitem 307692 contentos.

Coroll. 5.

Qui autem numeri a duos tantum diuiſores α et β habebunt adſcriptos, id indicio erit, numeros $\frac{aa+1}{\alpha\beta}$ fore primos. Hinc quibus numeris a tantum duo diuiſores 2 et 5 fuerint adſcripti, ex iis reperientur omnes numeri primi formae $\frac{aa+1}{10}$, qui quidem limitem 400000 non ſuperabunt.

Scholion 1.

Verum vt hae concluſiones ſint certae, probe notandum eſt, inter numeros $aa+1$, qui ſunt per numerum primum $4n+1$ diuiſibiles, etiam eiusmodi numeros contineri, qui ſint per quadratum $(4n+1)^2$, vel etiam per cubum $(4n+1)^3$, altioresue poteſtates $(4n+1)^4$, $(4n+1)^5$ etc. diuiſibiles. Quod quoties accidit, numero a non ſolum diuiſor $4n+1$, ſed eius ſumma poteſtas, per quam numerus $aa+1$ fuerit diviſibilis, adſcribi debebit, vt hoc modo omnes diuiſores primi numerorum $aa+1$ ipſa radice a minores obtineantur.. Si quidem diuiſor fuerit $=2$, nulla eius altior

altior poteſtas, veluti 4, 8, 16 etc. vnquam numeri $aa+1$ diuiſor eſſe poterit, id quod per ſe eſt manifeſtum, cum exiſtente a numero impari, forma $aa+1$ ſit numerus impariter par. At de numeris primis formae $4n+1$ dantur vtique eiusmodi quadrata, quae vnitate aucta ſint per quamuis eorum poteſtatem diuiſibilia, quos idcirco inueſtigari conueniet.

Scholion 2.

Cum autem ſit $4n+1=pp+qq$, erunt omnes quoque ipſius $4n+1$ poteſtates ſummae duorum quadratorum, et quidem pluribus modis, ex quibus vero id quadratorum par ſumi conueniet, quorum radices ſunt numeri primi inter ſe. Sic cum ſit in genere $(pp+qq)(rr+ss)=(pr+qs)^2+(ps-qr)^2$, erit

$$(4n+1)^2=(pp+qq)^2=4ppqq+(pp-qq)^2$$

$$(4n+1)^3=(pp+qq)^3=(p^3-3pqq)^2+(3ppq-q^3)^2$$

$$(4n+1)^4=(pp+qq)^4=(p^4-6ppqq+q^4)^2+(4p^3q-4pq^3)^2$$

Si ſimili modo, quo ante, valores ipſius a inueſtigentur, conficietur pro poteſtatibus numerorum primorum, quae infra terminum 2000 continentur, ſequens tabula:

Tabula omnium numerorum a,

quorum quadrata vnitate aucta $aa+1$ sint per potestates numerorum primorum $4n+1$ diuisibilia.

Potest. num. primor.	Valor ipsius a
$5^2 = 3^2 + 4^2$	$a = 25m \pm 7$
$5^3 = 2^2 + 11^2$	$a = 125m \pm 57$
$5^4 = 7^2 + 24^2$	$a = 625m \pm 182$
$5^5 = 38^2 + 41^2$	$a = 3125m \pm 1068$
$13^2 = 5^2 + 12^2$	$a = 169m \pm 70$
$13^3 = 9^2 + 46^2$	$a = 2197m \pm 239$
$13^4 = 119^2 + 120^2$	$a = 13^4 m \pm 239$
$17^2 = 8^2 + 15^2$	$a = 289m \pm 38$
$17^3 = 47^2 + 52^2$	$a = 17^3 m \pm 1985$
$29^2 = 20^2 + 21^2$	$a = 841m \pm 41$
$37^2 = 12^2 + 35^2$	$a = 1369m \pm 117$
$41^2 = 9^2 + 40^2$	$a = 1681m \pm 378$
$53^2 = 28^2 + 45^2$	$a = 53^2 m \pm 500$
$61^2 = 11^2 + 60^2$	$a = 61^2 m \pm 682$
$73^2 = 48^2 + 55^2$	$a = 73^2 m \pm 776$
$89^2 = 39^2 + 80^2$	$a = 89^2 m \pm 3861$
$97^2 = 65^2 + 72^2$	$a = 97^2 m \pm 4052$
$101^2 = 20^2 + 99^2$	$a = 101^2 m \pm 515$
$109^2 = 60^2 + 91^2$	$a = 109^2 m \pm 5744$
$113^2 = 15^2 + 112^2$	$a = 113^2 m \pm 1710$
$137^2 = 88^2 + 105^2$	$a = 137^2 m \pm 6613$
$149^2 = 51^2 + 140^2$	$a = 149^2 m \pm 1744$
$197^2 = 28^2 + 95^2$	$a = 197^2 m \pm 1393$
$257^2 = 32^2 + 255^2$	$a = 257^2 m \pm 2072$

Hic

His itaque subsidiis hic subiunctam construxi tabulam, ex qua statim pro singulis numeris a omnes diuisores formae $aa+1$ habentur. Hanc quidem tabulam non vltra 1500 in radicibus continuaui, sed ope harum formularum facile ad 2000 vsque progredi licebit.

Ex hac autem tabula iam plures numeri primi formae $aa+1$ desumi poterunt, qui non solum centenis millibus, sed etiam vno millione sint maiores: deinde etiam numeri primi formae $\frac{aa+1}{2}$ et $\frac{aa+1}{6}$ item $\frac{aa+1}{10}$ quos in sequentibus tabellis exhibebo.

Numeri primi formae $aa+1$.

Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$
1	2	66	4357	156	24337
2	5	74	5477	160	25601
4	17	84	7057	170	28901
6	37	90	8101	176	30977
10	101	94	8837	180	32401
14	197	110	12101	184	33857
16	257	116	13457	204	41617
20	401	120	14401	206	42437
24	577	124	15377	210	44101
26	677	126	15877	224	50177
36	1297	130	16901	230	52901
40	1601	134	17957	236	55697
54	2917	146	21317	240	57601
56	3137	150	22501	250	62501

Radi-

Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$
256	65537	536	287297	826	682277
260	67601	544	295937	860	739601
264	69697	556	309137	864	746497
270	72901	570	324901	890	792101
280	78401	576	331777	906	820837
284	80657	584	341057	910	828101
300	90001	594	352837	920	846401
306	93637	634	401957	930	864901
314	98597	636	404497	936	876097
326	106277	644	414737	946	894917
340	115601	646	417317	950	902501
350	122501	654	427717	960	921601
384	147457	674	454277	966	933157
386	148997	680	462401	986	972197
396	156817	686	470597	1004	1008017
400	160001	690	476101	1010	1020101
406	164837	696	484417	1036	1073297
420	176401	700	490001	1054	1110917
430	184901	704	495617	1060	1123601
436	190097	714	509797	1066	1136357
440	193601	716	512657	1070	1144901
444	197137	740	547601	1094	1196837
464	215297	750	562501	1096	1201217
466	217157	760	577601	1106	1223237
470	220901	764	583697	1124	1263377
474	224677	780	608401	1140	1299601
490	240101	784	614657	1144	1308737
496	246017	816	665857	1146	1313317

Radi-

Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$
1150	1322501	1294	1674437	1394	1943237
1156	1336337	1306	1705637	1406	1976837
1174	1378277	1314	1726597	1410	1988101
1176	1382977	1316	1731857	1416	2005057
1184	1401857	1320	1742401	1420	2016401
1210	1464101	1324	1752977	1430	2044901
1234	1522757	1340	1795601	1434	2056351
1244	1547537	1350	1822501	1440	2073601
1246	1552517	1354	1833317	1456	2119937
1274	1623077	1366	1865957	1460	2131601
1276	1628177	1374	1887877	1494	2232037
1290	1664101	1376	1893377		

Habentur ergo hic 112 numeri primi maiores quam 100000 et 49 numeri primi millionem superantes.

Praeterea autem plures numeri primi formarum $\frac{aa+1}{2}$, $\frac{aa+1}{5}$, $\frac{aa+1}{10}$ assignari possunt, qui etiam centena millia superant; vt ex sequentibus perspicere licet:

Valores numeri a, quibus forma $\frac{aa+1}{2}$ fit numerus primus.

1, 3, 5, 9, 11, 15, 19, 25, 29, 35, 39, 45, 49, 51, 59, 61, 65, 69, 71, 79, 85, 95

101, 121, 131, 139, 141, 145, 159, 165, 169, 171, 175, 181, 195, 199

201, 205, 209, 219, 221, 231, 245, 261, 271, 275, 279, 289, 299

309, 315, 321, 325, 329, 335, 345, 349, 371, 375, 379, 391, 399
405, 409, 415, 425, 435, 441, 445, 449, 451, 459, 461, 471
519, 521, 529, 535, 545, 559, 569, 571, 575, 579, 581, 595
609, 631, 639, 641, 649, 661, 669, 685, 689, 695, 699
711, 715, 739, 745, 751, 779, 781, 791, 799
815, 819, 821, 841, 855, 861, 869, 875, 881, 885
901, 909, 921, 925, 929, 935, 949, 951, 955, 959, 979, 981, 985, 989, 991
1001, 1011, 1025, 1029, 1031, 1039, 1051, 1055, 1069, 1081, 1091, 1095, 1099
1111, 1125, 1129, 1151, 1155, 1161, 1171, 1179, 1181, 1185, 1199
1205, 1219, 1225, 1241, 1251, 1255, 1265, 1281, 1285, 1299
1311, 1315, 1329, 1345, 1349, 1359, 1361, 1389, 1391
1405, 1411, 1419, 1421, 1439, 1459, 1465, 1469, 1489, 1495, 1499

Valores numeri a, quibus forma $\frac{aa+1}{5}$ fit numerus primus.

2, 8, 12, 22, 28, 42, 48, 52, 58, 62, 78, 88, 92
102, 108, 152, 158, 178, 188, 198
202, 222, 238, 248, 258, 262, 272, 292, 298
308, 312, 328, 352, 358, 362, 388
402, 422, 428, 458, 462, 478, 488, 492
508, 522, 558, 572, 588

602

602, 622, 628, 638, 652, 662, 692, 698
702, 728, 738. 758, 792
828, 838, 842, 848, 862, 872, 898
908, 912 942, 962, 972, 978, 988
1008, 1062, 1072, 1078, 1088
1108, 1112, 1138, 1192
1208, 1238, 1272, 1278, 1298
1312, 1342, 1358, 1372, 1378
1402, 1442, 1452, 1472, 1488, 1498

Valores numeri a, quibus forma $\frac{aa+1}{10}$ fit numerus primus.

3, 7, 13, 17, 23, 27, 33, 37, 53, 63, 67, 77, 87, 97
103, 113, 127, 137, 147, 153, 163, 167, 197
223, 227, 247, 263 267, 277, 283, 287, 297
303, 323, 347, 363, 367, 373, 383, 397
417, 427, 433, 453
503, 513, 517, 527, 533, 537, 547, 553, 573, 587
617, 627, 637, 653 673, 677, 683
753, 763, 773, 777, 797
817, 823, 833, 847, 867, 873, 877, 883
913, 917, 923 927, 933, 937, 947, 953, 963, 997
1047, 1053, 1063, 1073
1103, 1117, 1137, 1147, 1163, 1167, 1173, 1187, 1197
1213, 1233, 1247, 1273
1337, 1367, 1377, 1387, 1397
1413, 1417, 1423, 1447, 1473, 1497

Hinc autem iterum 9 numeri primi supra 1000000 obtinentur, ex forma scilicet $\frac{aa+1}{2}$, quando $a > 1414$.

a

a	Diuisores ipsius $aa+1$	a	Diuisores ipsius $aa+1$
1	2	30	17. 53
2	5	31	2. 13. 37
3	2. 5	32	5^2. 41
4	17	33	2. 5. 109
5	2 13	34	13. 89
6	37	35	2. 613
7	2. 5^2	36	1297
8	5. 13	37	2. 5. 137
9	2. 41	38	5. 17^2
10	101	39	2. 761
11	2. 61	40	1601
12	5. 29	41	2. 29^2
13	2. 5. 17	42	5. 353
14	197.	43	2. 5^2. 37
15	2. 113	44	13. 149
16	257	45	2. 1013
17	2. 5. 29	46	29. 73
18	5^2. 13	47	2. 5. 13 17
19	2. 181	48	5. 461
20	401	49	2. 1201
21	2. 13. 17	50	41. 61
22	5. 97	51	2. 1301
23	2. 5. 53	52	5 541
24	577	53	2. 5 281
25	2. 313	54	2917
26	677	55	2. 17 89
27	2 5. 73	56	3137
28	5 157	57	2. 5^3. 13
29	2. 421	58	5. 673

	Diuisores ipsius $aa+1$
59	2. 1741
60	13. 277
61	2. 1861
62	5. 769
63	2. 5. 397
64	17. 241
65	2. 2113
66	4357
67	2. 5. 449
68	5^3. 37
69	2. 2381
70	13^2. 29
71	2. 2521
72	5. 17. 61
73	2. 5. 13. 41
74	
75	2. 29. 97
76	53. 109
77	2. 5 593
78	5
79	2
80	37. 173
81	2. 17
82	5^2. 193. 269
83	2. 5. 13. 53
84	
85	2
86	13. 569
87	2. 5

	Diuisores ipsius $aa+1$
88	5
89	2. 17. 233
90	
91	2. 41. 101
92	5
93	2. 5^2. 173
94	
95	2
96	13. 709
97	2. 5
98	5. 17. 113
99	2. $13^2$29
100	73. 137
101	2
102	5
103	2. 5
104	29
105	2. 37
106	17
107	2. 5^2
108	5
109	2. 13
110	
111	2. 61. 101
112	5. 13
113	2. 5
114	41
115	2. 17
116	

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
117	2. 5. 37^2	146	
118	5^2	147	2. 5
119	2. 73. 97	148	5. 13
120		149	2. 17
121	2	150	
122	5. 13	151	2. 13
123	2. 5. 17. 89	152	5
124		153	2. 5
125	2. 13	154	37
126		155	2. 41
127	2. 5.	156	
128	5. 29. 113	157	2. 5^2. 17. 29
129	2. 53	158	5
130		159	2
131	2	160	
132	5^2. 17. 41	161	2. 13
133	2. 5. 29. 61	162	5. 29
134		163	2 5
135	2. 13	164	13
136	53	165	2
137	2. 5	166	17
138	5. 13	167	2. 5
139	2	168	5^2
140	17	169	2
141	2	170	
142	5. 37. 109	171	2
143	2. 5^2	172	5. 61. 97
144	89	173	2. 5. 41. 73
145	2	174	13. 17. 137

	Diuisores ipsius $aa+1$
175	2
176	
177	2. 5. 13
178	5
179	2. 37
180	
181	2
182	5^4. 53
183	2. 5. 17
184	
185	2. 109. 157
186	29
187	2. 5. 13
188	5
189	2. 53
190	13
191	2. 17. 29. 37
192	5. 73. 101
193	2. 5^3. 149
194	61
195	2
196	41
197	2. 5
198	5
199	2
200	13. 17. 181
201	2
202	5

	Diuisores ipsius $aa+1$
203	2. 5. 13
204	
205	2
206	
207	2. 5^2
208	5. 17
209	2
210	
211	2. 113. 197
212	5. 89. 101
213	2. 5. 13
214	41
215	2. 29
216	13. 37. 97
217	2. 5. 17
218	5^2
219	2
220	29
221	2
222	5
223	2. 5
224	
225	2. 17
226	13
227	2. 5
228	5. 37
229	2. 13
230	
231	2

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
232	5^2	261	2
233	2. 5. 61. 89	262	5
234	17	263	2. 5
235	2. 53	264	
236		265	2. 13. 37. 73
237	2. 5. 41. 137	266	173
238	5	267	2 5
239	2. 13^4	268	5^2 13^2. 17
240		269	2. 97
241	2. 113	270	
242	5. 13. 17. 53	271	2
243	2. 5^2	272	5
244	29	273	2. 5. 29. 257
245	2	274	193
246	73	275	2
247	2. 5	276	17
248	5	277	2. 5
249	2. 29	278	5. 13. 29. 41
250		279	2
251	2. 17^2. 109	280	
252	5. 13	281	2. 13
253	2. 5. 37. 173	282	5^2
254	149	283	2. 5
255	2. 13. 41. 61	284	
256		285	2. 17
257	2. 5^3	286	157
258	5	287	2. 5
259	2. 17	288	5. 53
260		289	2

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
290	37	319	2 17. 41. 73
291	2. 13	320	13
292	5	321	2
293	2. 5². 17. 101	322	5. 89. 233
294	13. 61. 109	323	2. 5
295	2 53	324	113
296	41	325	2
297	2. 5	326	
298	5	327	2. 5. 17². 37
299	2	328	5
300		329	2
301	2. 89	330	13
302	5 17 37. 29	331	2 29
303	2 5	332	5²
304	13	333	2. 5. 13
305	2. 193. 241	334	281
306		335	2
307	2. 5³. 13. 29	336	17. 229. 29
308	5	337	2. 5 41 277
309	2	338	5 73. 313
310	17	339	2. 37
311	2. 137	340	
312	5	341	2. 53
313	2. 5. 97. 101	342	5. 149 157
314		343	2. 5². 13. 181
315	2	344	17
316	61	345	2
317	2. 5. 13	346	13
318	5³	347	2. 5

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
348	5. 53	377	2. 5. 61. 233
349	2	378	5. 17. 41^2
350		379	2
351	2. 229. 269	380	197
352	5.	381	2. 181
353	2. 5. 17	382	5^2. 13
354	113	383	2. 5
355	2. 61	384	
356	13	385	2. 13
357	2. 5^2	386	
358	5	387	2 5. 17
359	2. 13	388	5
360	41. 109. 29	389	2. 29
361	2. 17	390	89
362	5	391	2
363	2. 5	392	5. 73
364	37	393	2. 5^2
365	2. 29	394	53. 101. 29
366	97	395	2. 13. 17. 353
367	2. 5	396	
368	5^2	397	2. 5
369	2. 13	398	5. 13
370	17	399	2
371	2	400	
372	5. 13	401	2. 37. 41. 53
373	2. 5	402	5
374	137	403	2. 5. 109. 149
375	2	404	17
376	37	405	2

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
406		435	2
407	2. 5^2	436	
408	5. 13^2. 197	437	2. 5. 13^2. 113
409	2	438	5. 17: 37. 61
410	97	439	2. 173
411	2. 13. 73. 89	440	
412	5. 17	441	2
413	2. 5. 37	442	5. 41
414	101	443	2. 5^4. 157
415	2	444	
416	61	445	2
417	2. 5	446	17
418	5^2. 29. 241	447	2. 5. 13. 53. 29
419	2. 41	448	5. 137. 293
420		449	2
421	2. 13. 17. 401	450	13. 37. 421
422	5	451	2
423	2. 5. 29	452	5. 29
424	13	453	2: 5
425	2	454	53
426	173	455	2. 17
427	2. 5	456	269
428	5	457	3. 5^2
429	2. 17	458	5
430		459	2
431	2. 293. 317	460	13. 41. 397
432	5^3	461	2
433	2. 5	462	5
434	13	463	2. 5. 13. 17. 97

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsins $aa+1$
464		493	$2.\ 5^2$
465	2. 73	494	277
466		495	2. 101
467	2. 5. 113. 193	496	
468	5^2	497	2. 5. 17
469	2. 109	498	5. 193. 257
470		499	2. 13. 61. 157
471	2	500	$53^2.\ 89$
472	5. 17	501	2. 41
473	2. 5. 13	502	5. 13
474		503	2. 5
475	2. 37	504	389
476	13. 29	505	2. 29
477	2. 5. 61. 373	506	17
478	5	507	$2.\ 5^2.\ 97$
479	2. 89	508	5.
480	17	509	2. 281. 461
481	2. 29	510	29
482	5^2	511	2. 137
483	2. 5. 41	512	5. 13. 37. 109
484	73	513	2. 5
485	2. 337 349	514	17
486	13	515	$2.\ 13.\ 101^2$
487	2. 5. 37	516	449
488	5	517	2. 5
489	2. 13. 17	518	5^2
490		519	2
491	2. 149	520	317
492	5	521	2

	Diuiſores ipſius $aa+1$
522	5.
523	2. 5. 17
524	37. 41. 181
525	2. 13
526	337
527	2. 5
528	5. 13
529	2
530	257
531	2. 17
532	5^2
533	2. 5
534	29
535	2
536	
537	2. 5
538	5. 13. 61. 73
539	2. 29
540	17^2
541	2. 13
542	5. 41
543	2. 5^2
544	
545	2
546	241
547	2. 5
548	5. 17
549	2. 37
550	113

	Diuiſores ipſius $aa+1$
551	2. 13
552	5. 149. 409
553	2. 5
554	13
555	2. 233
556	
557	2. 5^3. 17. 73
558	5
559	2
560	61. 97
561	2. 37
562	5. 181 349
563	2. 5. 29
564	13
565	2. 17. 41. 229
566	457
567	2. 5. 13
568	5^3. 89. 29
569	2
570	
571	2
572	5
573	2. 5
574	17
575	2
576	
577	2. 5. 13^2. 197
578	5. 109
579	2

	Diuifores ipfius $aa+1$		Diuifores ipfius $aa+1$
580	13. 113 229	609	2
581	2	610	233
582	5^2. 17	611	2. 73
583	2. 5. 41	612	5. 173. 433
584		613	2. 5. 53
585	2. 137	614	277
586	37	615	2. 281
587	2. 5	616	13. 17^2. 101
588	5	617	2. 5
589	2. 89	618	5^2
590	13	619	2. 13
591	2. 17	620	269
592	5. 29	621	2. 61. 109. 29
593	2. 5^2. 13. 541.	622	5
594		623	2. 5. 37
595	2	624	41
596	101	625	2. 17
597	2. 5. 29	626	29
598	5. 37	627	2. 5
599	2. 17. 61. 173	628	5
600	157	629	2. 13
601	2. 313. 577	630	73
602	5	631	2
603	2. 5. 13	632	5^2. 13
604	97	633	2. 5. 17
605	2. 197	634	
606	13^2. 41. 53	635	2. 37
607	2. 5^2	636	
608	5. 17	637	2. 5

638

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
638	5	667	2. 5. 17
639	2	668	5^2. 13
640	149	669	2
641	2	670	593
642	5. 13. 17. 373	671	2. 13
643	2. 5^2	672	5. 37
644		673	2. 5
645	2. 13	674	
646		675	2. 409. 557
647	2. 5. 41	676	17
648	5. 137. 613	677	2. 5
649	2	678	5. 89
650	17. 29	679	2. 29
651	2. 313	680	
652	5	681	2. 13
653	2. 5	682	5^3. 61^2
654		683	2. 5
655	2. 13. 569. 29	684	13. 17. 73. 29
656	157	685	2
657	2. 5^2. 89. 97	686	
658	5. 13	687	2. 5. 109. 433
659	2. 17. 53. 241	688	5. 41
660	37. 61. 193	689	2
661	2	690	
662	5	691	2. 193
663	2. 5. 113. 389	692	5
664	353	693	2. 5^3. 12. 113
665	2. 41	694	13
666	53	695	2

	Diuisores ipsius $aa+1$
696	
697	2. 5. 13. 37. 101
698	5
699	2
700	
701	2. 17. 97. 149
702	5
703	2. 5. 73. 677
704	
705	2. 181
706	41
707	2. 5^2. 13
708	5. 29
709	2. 37
710	13. 17
711	2
712	5. 53
713	2. 5. 29
714	
715	2
716	
717	2. 5. 101 509
718	5^2. 17
719	2. 53
720	13
721	2. 61
722	5. 137
723	2. 5. 13
724	293

	Diuisores ipsius $aa+1$
725	2. 269
726	601
727	2. 5. 17
728	5
729	2. 41
730	109
731	2. 397. 673
732	5^2
733	2. 5. 29
734	37
735	2. 17
736	13
737	2. 5. 13
738	5
739	2
740	
741	2. 293
742	5. 29
743	2. 5^2. 61. 181
744	17
745	2
746	13^2. 37. 89
747	2. 5. 41
748	5. 317. 353
749	2. 13
750	
751	2
752	5. 17
753	2. 5

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
754	97	783	2. 5. 37
755	2. 257	784	
756	521	785	2. 13. 137 173
757	2. 5^2. 73. 157	786	17
758	5	787	2. 5. 241. 257
759	2. 13	788	5. 13. 41. 233
760		789	2. 149
761	2. 17	790	281
762	5. 13	791	2
763	2. 5	792	5
764		793	2. 5^2
765	2. 53	794	229
766	29	795	2. 17. 29. 641
767	2. 5. 89. 661	796	109
768	5^2	797	2. 5
769	2. 17	798	5. 13. 97. 101
770	41	799	2
771	2. 37. 277. 29	800	29^2. 761
772	5. 13. 53. 173	801	2. 13
773	2. 5	802	5. 197. 653
774	197	803	2. 5. 17
775	2. 13^2	804	61
776	73^2. 113	805	2. 457. 709
777	2. 5	806	113
778	5. 17	807	2. 5^4. 521
779	2	808	5. 37
780		809	2. 229
781	2.	810	509
782	5^2. 61. 401	811	2. 13. 41. 617

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
812	5. 17	841	2
813	2. 5. 157. 421	842	5
814	13	843	2. 5^2. 61. 233
815	2	844	757
816		845	2. 37
817	2. 5	846	17
818	5^3. 53. 101	847	2. 5
819	2	848	5
820	17. 37	849	2. 73
821	2	850	13. 149. 373
822	5. 337. 401	851	2. 97
823	2. 5	852	5. 41
824	13 29	853	2. 5. 13. 29. 193
825	2. 53	854	17
826		855	2
827	2. 5. 13	856	89
828	5	857	2. 5^2. 37. 397
829	2. 17^2. 29. 41	858	5. 29
830	73	859	2. 137
831	2. 449. 769	860	
832	5^2	861	2
833	2. 5	862	5
834	349	863	2. 5. 13. 17. 337
835	2. 89	864	
836	701	865	2. 61
837	2. 5. 13. 17. 317	866	13
838	5	867	2. 5
839	2. 109	868	5^2
840	13	869	2

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
870	41	899	2. 101
871	2. 17. 53. 421	900	241
872	5	901	2
873	2. 5	902	5. 13
874	461	903	2. 5. 73
875	2	904	61
876	13	905	2. 13. 17^2. 109
877	2. 5	906	
878	5. 53	907	2. 5^2
879	2. 13	908	5
880	17	909	2
881	2	910	
882	5^2. 29^2. 37	911	2. 41. 349. 29
883	2. 5	912	5
884	193	913	2. 5
885	2	914	17. 157. 331
886	181	915	2. 13^2
887	2. 5. 29	916	29
888	5. 17	917	2. 5
889	2. 13. 113. 269	918	5^2. 13.
890		919	2. 37. 101. 113
891	2. 277	920	
892	5. 13	921	2
893	2. 5^2. 41. 389	922	5. 17. 73. 137
894	37	923	2. 5
895	2. 97	924	53. 89. 181
896	281	925	2
897	2. 5. 17	926	61
898	5	927	2. 5

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
928	5. 13	957	2. 5^2. 13
929	2	958	5. 173
930		959	2
931	2. 13. 17. 37. 53	960	
932	5^3	961	2. 409
933	2. 5	962	5
934	41	963	2. 5
935	2	964	313
936		965	2. 17. 61. 449
937	2. 5	966	
938	5. 149	967	2. 5. 13
939	2. 17	968	5^2. 37
940	29	969	2. 29
941	2. 13	970	13. 157. 461
942	5	971	2. 197
943	2. 5^3	972	5
944	13^2	973	2. 5. 17
945	2. 89. 173. 29	974	29
946		975	2. 41
947	2. 5	976	73
948	5. 17. 97. 109	977	2. 5. 53
949	2	978	5
950		979	2
951	2	980	13
952	5. 41	981	2
953	2. 5	982	5^2. 17
954	13	983	2. 5. 13
955	2	984	53
956	17. 37	985	2

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
986		1015	2. 373
987	2. 5. 61	1016	17. 41
988	5	1017	2. 5. 293. 353
989	2	1018	5^2
990	17	1019	2. 13
991	2	1020	101
992	5. 97	1021	2. 233
993	2. 5^2. 13. 37. 41	1022	5. 13
994	269	1023	2. 5. 229. 457
995	2. 73	1024	17
996	13 137. 557	1025	2
997	2. 5	1026	61
998	5. 29	1027	2. 5. 29
999	2. 17. 149. 197	1028	5 241. 877
1000	101	1029	2
1001	2	1030	37. 53. 541
1002	5. 113	1031	2
1003	2. 5. 29	1032	5^2. 13 29. 113
1004		1033	2. 5. 17
1005	2. 37	1034	41. 89. 293
1006	13	1035	2. 13
1007	2. 5^2. 17	1036	
1008	5	1037	2 5 53
1009	2. 13	1038	5. 229. 941
1010		1039	2
1011	2	1040	617
1012	5. 257. 797	1041	2. 17
1013	2. 5. 89	1042	5. 37
1014	109	1043	2. 5^2

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
1044	257	1073	2. 5
1045	2. 13. 97. 433	1074	13
1046	193	1075	2. 17. 41. 829
1047	2. 5	1076	233
1048	5. 13. 61. 277	1077	2. 5. 193. 601
1049	2. 73	1078	5
1050	17	1079	2. 37
1051	2	1080	773
1052	5. 389. 569	1081	2
1053	2. 5	1082	5^2
1054		1083	2. 5. 53
1055	2	1084	13^2. 17. 409
1056	29	1085	2. 29
1057	2. 5^3. 41. 109	1086	733
1058	5. 13. 17. 1013	1087	2. 5. 13. 61. 149
1059	2. 137	1088	5
1060		1089	2. 97
1061	2. 13. 29	1090	29. 53
1062	5	1091	2
1063	2. 5	1092	5. 17
1064	857	1093	2. 5^2
1065	2. 317	1094	
1066		1095	2
1067	2. 5. 17. 37. 181	1096	
1068	5^5. 73	1097	2. 5. 13
1069	2	1098	5. 41
1070		1099	2
1071	2. 13. 157. 281	1100	13
1072	5	1101	2. 17. 101. 353

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
1102	5. 89	1131	2. 173
3	2. 5	32	5^2
4	37	33	2. 5. 137. 937
5	2. 181	34	541
6		35	2. 17
7	2. 5^2	36	13. 53
8	5	37	2. 5
9	2. 17. 61. 593	38	5
1110	13	39	2. 13. 41
11	2	1140	
12	5	41	2. 37. 73. 241
13	2. 5. 13^2. 733	42	5. 97
14	29	43	2. 5^2. 17. 29. 53
15	2. 113	44	
16	37. 41. 821	45	2. 113
17	2. 5	46	
18	5^2. 17^2. 173	47	2. 5
19	2. 29	48	5. 29. 61. 149
1120	433	49	2. 13
21	2. 101	1150	
22	5. 73	51	2
23	2. 5. 13. 89. 109	52	5. 13. 17
24		53	2. 5. 37
25	2	54	317
26	13. 17	55	2
27	2. 5. 157. 809	56	
28	5. 397. 641	57	2. 5^2. 41. 653
29	2	58	5. 269. 997
1130	577	59	2. 337

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
1160	17	89	2. 53
61	2	1190	37
62	5. 13	91	2. 13. 89. 613
63	2. 5	92	5
64	1061	93	2. 5^3
65	2. 13	94	17^2
66	109	95	2. 73
67	2. 5	96	53. 137. 197
68	5^2. 197. 277	97	2. 5
69	2. 17	98	5. 41
1170	61	99	2.
71	2	1200	337
72	5. 29	1	2. 13. 29
73	2. 5	2	5. 101
74		3	2. 5. 17
75	2. 13	4	13
76		5	2.
77	2. 5. 17. 29. 281	6	29
78	5. 13. 37. 577	7	2. 5^2
79	2.	8	5
1180	41	9	2. 61
81	2	1210	
82	5^3	11	2. 17
83	2. 5. 349. 401	12	5. 89
84		13	2. 5
85	2	14	13. 73
86	17. 97. 853	15	2. 37
87	2. 5	16	661
88	5. 13	17	2. 5. 13

a	Diuisores ipsius $aa+1$	*a*	Diuisores ipsius $aa+1$
18	5^2	47	2. 5
19	2	48	5. 181
1220	17	49	2. 53
21	2. 41	1250	1201
22	5. 101	51	2
23	2. 5. 373. 401	52	5. 37^2. 229
24	569	53	2. 5. 13^2. 929
25	2	54	17. 233. 397
26	509	55	2
27	2. 5. 13. 37. 313	56	13
28	5. 17. 113. 157	57	2. 5^2
29	2. 773. 977	58	5. 113
1230	13. 29	59	2. 29
31	2. 61	1260	349
32	5^2. 109. 557	61	2. 613
33	2. 5	62	5. 17. 41. 457
34		63	2. 5. 269. 593
35	2. 29	64	29. 37
36	149	65	2
37	2. 5. 17	66	13
38	5	67	2. 5. 229. 701
39	2. 41. 97. 193	68	5^2. 73. 881
1240	13	69	2. 13. 241. 257
41	2	1270	61. 137. 193
42	5. 53	71	2. 17
43	2. 5^2. 13	72	5
44		73	2. 5
45	2. 17	74	
46		75	2. 109

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
1276		5	2. 13. 17
77	2. 5. 313 521	6	
78	5	7	2.5^3
79	2. 13. 17	8	5. 13
1280	41. 89. 449	9	2. 233
81	2	1310	293
82	$5^2.13^2.389$	11	2
83	2. 5. 97	12	5
84	157	13	2. 5. 17
85	2	14	
86	181	15	2
87	2. 5. 73	16	
88	5. 17. 29. 673. 1033	17	2. 5. 29
89	2. 37	18	$5^3.13$
1290		19	2. 509
91	2. 173	1320	
92	5. 13. 61	21	2. 13. 41
93	$2.5^2.29.1153$	22	5. 17 29. 709
94		23	2. 5. 101
95	2. 13. 53. 1217	24	
96	17	25	2. 277
97	2. 5. 149. 1129	26	37
98	5	27	2. 5. 293. 601
99	2	28	5. 521. 677
1300	809	29	2
1	2. 37 89. 257	1330	17
2	5 53	31	2 13. 61. 1117.
3	$2.5\ 41^2.101$	32	5^2
4	173	33	2. 5. 137. 1297.

	Diuisores ipsius $aa+1$
34	13
35	2. 461
36	97
37	2. 5
38	5. 37
39	2. 17
1340	
41	2. 73. 109. 113
42	5
43	2. 5^2
44	13. 41
45	2
46	29
47	2. 5. 13. 17. 821
48	5. 53
49	2
1350	
51	2. 29
52	5. 281. 1301
53	2. 5. 61
54	
55	2. 53
56	17
57	2. 5^2. 13
58	5
59	2
1360	13. 73
61	2
92	5. 41

	Diuisores ipsius $aa+1$
63	2. 5. 37
64	17
65	2. 197
66	
67	2. 5
68	5^2
69	2. 89
1370	13 353 409
71	2. 113
72	5
73	2. 5. 13. 17. 853
74	
75	2. 29. 37. 881
76	
77	2, 5
78	5
79	2. 797 1193
1380	29. 97. 677
81	2. 17
82	5^2. 241. 317
83	2. 5. 13
84	109
85	2 41. 149. 157
86	13
87	2. 5
88	5. 373
89	2
1390	17. 89. 1277
91	2

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
1392	5. 61	1421	2
93	2. 5^2. 197^2	22	5. 13^2
94		23	2. 5
95	2. 953	24	17. 101. 1181
96	13	25	2. 13
97	2. 5	26	41
98	5. 17	27	2. 5. 269. 757
99	2. 13	28	5. 617. 661
1400	37	29	2. 181
1	2. 53	1430	
2	5	31	2. 461
3	2. 5. 41	32	5^4. 17. 193
4	29. 101. 673	33	2. 5. 29. 73. 97
5	2	34	
6		35	2. 13
7	2. 5^2. 17^2. 137	36	641
8	5. 53	37	2. 5. 37
9	2. 13. 29	38	5. 13. 29. 1097
1410		29	2
11	2	1440	
12	5. 13. 37. 829	41	2. 17. 157. 389
13	2. 5	42	5
14	61. 73. 449	43	2. 5^3
15	2. 17	44	41
16		45	2. 277
17	2. 5	46	149
18	5^2	47	2. 5
19	2	48	5. 13
1420		49	2. 17. 37

1450

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
1450	109	6	769
1	$2.\ 13^2$	7	2. 5. 13. 97. 173
2	5	8	5. 433. 1009
3	2. 5. 61	9	2. 89
4	53. 113. 353	1480	457
1455	2. 653	1	2. 229
6		2	5^2
7	$2.\ 5^2$	3	$2.\ 5.\ 17^2.\ 761$
8	5. 17. 89. 281	4	113
9	2	1485	2. 41
1560		6	37^2
1	2. 13. 53	7	2. 5. 13. 73. 233
2	5. 29	8	5
3	2. 5. 193. 1109	9	2
4	13. 173. 953.	1490	13. 313
1465	2	1	2. 29
6	17	2	5. 17
7	2. 5. 29. 41. 181	3	$2.\ 5^2.\ 109.\ 409$
8	5^2	4	
9	2	1495	2
1470	137	6	29. 229. 337
1	2. 317	7	2. 5
2	5	8	5
3	2. 5	9	2
4	13. 37	1500	13. 17
1475	2. 17. 61. 1049		

DE RESOLVTIONE AEQVATIONIS

$$dy + ayy\,dx = bx^m\,dx.$$

Auctore

L. EVLERO.

Problema I.

I.

Inuenire numeros loco exponentis indefiniti m ſubſtituendos, vt valor ipſius y algebraice per x definiri queat.

Solutio.

Ponatur $y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx}$, ac poſito dx conſtante, erit $dy = (n-1)cx^{n-2}\,dx + \frac{ddz}{azdx} - \frac{dz^2}{azzdx^2}$. Cum vero ſit $yy = ccx^{2n-2} + \frac{2cx^{n-1}dz}{azdx} + \frac{dz^2}{a^2z^2dx^2}$ facta ſubſtitutione tranſibit aequatio propoſita in hanc:

$$\frac{ddz}{azdx} + (n-1)cx^{n-2}dx + accx^{2n-2}dx + \frac{2cx^{n-1}dz}{z} = bx^m\,dx.$$

Fiat $m = 2n-2$ et $b = acc$, habebiturque:

$$ddz + (n-1)acx^{n-2}zdx^2 + 2acx^{n-1}\,dxdz = 0$$

quae

quae ergo resultat ex hac aequatione propositae aequivalente

$$dy + ayy\,dx = acc\,x^{2n-2}\,dx$$

facta substitutione $y = c\,x^{n-1} + \frac{dz}{az\,dx}$. Fingatur iam haec aequatio:

$$z = A\,x^{\frac{-n+1}{2}} + Bx^{\frac{-3n+1}{2}} + Cx^{\frac{-5n+1}{2}} + Dx^{\frac{-7n+1}{2}} + \text{etc.}$$

eritque differentiando:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{(n-1)}{2}Ax^{\frac{-n-1}{2}} - \frac{(3n-1)}{2}Bx^{\frac{-3n-1}{2}} - \frac{(5n-1)}{2}Cx^{\frac{-5n-1}{2}} - \text{etc.}$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = +\frac{(nn-1)}{4}Ax^{\frac{-n-3}{2}} + \frac{(9nn-1)}{4}Bx^{\frac{-3n-3}{2}} + \frac{(25nn-1)}{4}Cx^{\frac{-5n-3}{2}} - \text{etc.}$$

Cum vero ex superiori aequatione per dx^2 diuisa sit:

$$\frac{ddz}{dx^2} + \frac{2acx^{n-1}dz}{dx} + (n-1)acx^{n-1}z = 0$$

si series assumta substituatur, prodibit sequens aequatio:

$$0 = \begin{cases} +\frac{(nn-1)}{4}Ax^{\frac{-n-3}{2}} + \frac{(9nn-1)}{4}Bx^{\frac{-3n-3}{2}} + \frac{(25nn-1)}{4}Cx^{\frac{-5n-3}{2}} \\ \qquad + \frac{(49nn-1)}{4}Dx^{\frac{-7n-3}{2}} + \text{etc.} \\ -(n-1)acAx^{\frac{n-3}{2}} - (3n-1)acBx^{\frac{-n-3}{2}} - (5n-1)acCx^{\frac{-3n-3}{2}} \\ \qquad - (7n-1)acDx^{\frac{-5n-3}{2}} - (9n-1)acEx^{\frac{-7n-3}{2}} - \text{etc.} \\ +(n-1)acAx^{\frac{n-3}{2}} + (n-1)acBx^{\frac{-n-3}{2}} + (n-1)acCx^{\frac{-3n-3}{2}} \\ \qquad + (n-1)acDx^{\frac{-5n-3}{2}} + (n-1)acEx^{\frac{-7n-3}{2}} - \text{etc.} \end{cases}$$

 Ponan-

Ponantur termini homogenei iunctim sumti nihilo aequales, vt determinentur coefficientes A, B, C, D, E, etc. eritque

$$B = \frac{(nn-1)A}{2n.4ac} = \frac{(nn-1)}{2} \cdot \frac{A}{4nac}$$

$$C = \frac{(9nn-1)}{4n} \cdot \frac{B}{4ac} = \frac{(nn-1)(9nn-1)}{2 \cdot 4} \cdot \frac{A}{4^2 n^2 a^2 c^2}$$

$$D = \frac{(25nn-1)}{6n} \cdot \frac{C}{4ac} = \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{A}{4^3 . n^3 a^3 c^3}$$

$$E = \frac{(49nn-1)}{8n} \cdot \frac{D}{4ac} = \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)(49nn-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{A}{4^4 n^4 a^4 c^4}$$

etc.

Determinabitur ergo z per x sequenti modo: $z =$

$$Ax^{\frac{-n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8} \frac{A}{nac} x^{\frac{-3n+1}{2}} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8 \cdot 16} \frac{A}{n^2a^2c^2} x^{\frac{-5n+1}{2}} + \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8 \cdot 16 \cdot 24} \frac{A}{n^3a^3c^3} x^{\frac{-7n+1}{2}} + \text{etc.}$$

Valore hoc substituto resultabit valor quaesitus: $y = cx^{n-1}$

$$-\frac{1}{a}\left\{\frac{\frac{(n-1)}{2} Ax^{\frac{-n-1}{2}} + \frac{(3n-1)(nn-1)}{2 \cdot 8} \frac{A}{nac} x^{\frac{-3n-1}{2}} + \frac{(5n-1)}{2} \cdot \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8 \cdot 16} \cdot \frac{A}{n^2a^2c^2} x^{\frac{-5n-1}{2}} + \text{etc.}}{Ax^{\frac{-n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8} \cdot \frac{A}{nac} x^{\frac{-3n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8} \cdot \frac{(9nn-1)}{16} \cdot \frac{A}{n^2a^2c^2} x^{\frac{-5n+1}{2}} + \text{etc.}}\right\}$$

siue numeratore ac denominatore per $Ax^{\frac{-n-1}{2}}$ diuiso:
$y = cx^{n-1}$

$$-\frac{1}{ax}\left\{\frac{\frac{(n-1)}{2} + \frac{(3n-1)(nn-1)}{2 \cdot 8} \frac{x^{-n}}{nac} + \frac{(5n-1)}{2} \cdot \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8 \cdot 16} \frac{x^{-2n}}{n^2a^2c^2} + \frac{(7n-1)}{2} \cdot \frac{(nn-1)(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 24} \frac{x^{-3n}}{n^3a^3c^3} + \text{etc.}}{1 + \frac{(nn-1)}{8} \cdot \frac{x^{-n}}{nac} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8 \cdot 16} \cdot \frac{x^{-2n}}{n^2a^2c^2} + \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8 \cdot 16 \cdot 24} \cdot \frac{x^{-3n}}{n^3a^3c^3} + \text{etc.}}\right\}$$

Haec

Haec ergo expreſſio generaliter in infinitum excurrens fit finita, ſi fuerit $(2i+1)^2 nn - 1 = 0$, denotante i numerum quemcunque integrum, hoc eſt, ſi fuerit $n = \frac{\pm 1}{2i+1}$; et $m = 2n - 2 = \frac{-4i-2\pm 2}{2i+1}$. Huius ergo aequationis, quoties i fuerit numerus integer:

$$dy + ayydx = accx^{\frac{-4i-2\pm 2}{2i+1}}dx$$

integrale ſemper in terminis finitis poterit exhiberi, ſeu valor ipſius y per x algebraice exponi.

Sit primo $n = \frac{+1}{2i+1}$, vt ſit $m = 2n - 2 = \frac{-4i}{2i+1}$, erit huius aequationis:

$$dy + ayydx = accx^{\frac{-4i}{2i+1}}dx$$

integrale in terminis algebraicis expreſſum:

$$ayx = acx^{\frac{1}{2i+1}}$$

$$\frac{+\frac{i}{2i+1} - \frac{i(i^2-1)}{2(2i+1)^2} \cdot \frac{x^{\frac{-1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)}{2\cdot 4(2i+1)^3} \cdot \frac{x^{\frac{-2}{2i+1}}}{a^2c^2} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)}{2\cdot 4\cdot 6(2i+1)^4} \cdot \frac{x^{\frac{-3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}{1 - \frac{i(i+1)}{2(2i+1)} \cdot \frac{x^{\frac{-1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)}{2\cdot 4(2i+1)^2} \cdot \frac{x^{\frac{-2}{2i+1}}}{a^2c^2} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2\cdot 4\cdot 6(2i+1)^3} \cdot \frac{x^{\frac{-3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}$$

ſeu facta ad communem denominatorem reductione erit: $ayx =$

$$\frac{acx^{\frac{+1}{2i+1}} - \frac{ii-i)}{2(2i+1} + \frac{i(i^2-1)(i-2)}{2\cdot 4(2i+1)^2} \cdot \frac{x^{\frac{-1}{2i+1}}}{ac} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i-3)}{2\cdot 4\cdot 6(2i+1)^3} \cdot \frac{x^{\frac{-2}{2i+1}}}{a^2c^2} + \text{etc.}}{1 - \frac{i(i+1)}{2(2i+1)} \cdot \frac{x^{\frac{-1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)}{2\cdot 4(2i+1)^2} \cdot \frac{x^{\frac{-2}{2i+1}}}{a^2c^2} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2\cdot 4\cdot 6(2i+1)^3} \cdot \frac{x^{\frac{-3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}$$

Sit deinde $n = \frac{-1}{2i+1}$, vt ſit $m = \frac{-4i-4}{2i+1}$, erit huius aequationis

$$dy + ayydx = accx^{\frac{-4i-4}{2i+1}}dx$$

integrale in terminis algebraicis expreſſum:

$$ayx = acx^{\frac{-1}{2i+1}} +$$

$$\frac{\frac{i+1}{2i+1} + \frac{i(i+1)(i+2)}{2(2i+1)^2}\frac{x^{\frac{1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)(i+3)}{2\cdot4(2i+1)^3}\cdot\frac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{a^2c^2} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)(i+4)}{2\cdot4\cdot6(2i+1)^4}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}{1 + \frac{i(i+1)}{2(2i+1)}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)}{2\cdot4\cdot(2i+1)^2}\cdot\frac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{a^2c^2} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2\cdot4\cdot6(2i+1)^3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}$$

ſeu facta ad communem denominatorem reductione, erit $ayx =$

$$\frac{acx^{\frac{-1}{2i+1}} + \frac{(i+1)(i+2)}{2(2i+1)} + \frac{i(i+1)(i+2)(i+3)}{2\cdot4(2i+1)^2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)(i+3)(i+4)}{2\cdot4\cdot6(2i+1)^3}\cdot\frac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{a^2c^2} + \text{etc.}}{1 + \frac{i(i+1)}{2(2i+1)}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)}{2\cdot4(2i+1)^2}\cdot\frac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{a^2c^2} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2\cdot4\cdot6(2i+1)^3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}$$

Quotiescunque igitur fuerit i numerus integer, toties huius aequationis:

$$dy + ayydx = accx^{\frac{-4i-2\pm2}{2i+1}}dx$$

integrale in terminis algebraicis poteſt exprimi. Q. E. I.

Coroll. 1.

Coroll. 1.

2. Aequatio ergo propoſita $dy + ayydx = accx^m dx$ integrationem algebraicam admittit, ſi fuerit exponens m, vel terminus huius ſeriei:

$$-0;\ -\tfrac{4}{3};\ -\tfrac{8}{5};\ -\tfrac{12}{7};\ -\tfrac{16}{9};\ -\tfrac{20}{11};\ -\tfrac{24}{13};\ \text{etc.}$$

vel ſi fuerit m terminus ex hac fractionum ſerie:

$$-\tfrac{4}{1};\ -\tfrac{8}{3};\ -\tfrac{12}{5};\ -\tfrac{16}{7};\ -\tfrac{20}{9};\ -\tfrac{24}{11};\ -\tfrac{28}{13};\ \text{etc.}$$

Coroll. 2.

3. Subſtituamus in priori integrabilitatis claſſe loco i ſucceſſiue numeros 0, 1, 2, 3, 4, etc. atque reperietur, vt ſequitur.

Si $i = 0$; huius aequationis:

I. $dy + ayydx = accdx$, integrale erit:

$ayx = acx$; ſiue $y = c$.

Si $i = 1$; huius aequationis:

II. $dy + ayydx = accx^{-\frac{4}{3}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{3}}}{1 - \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{ac}} \text{ ſeu } y = \frac{cx^{-\frac{2}{3}}}{1 - \frac{1}{3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{ac}} = \frac{3acc}{3acx^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}$$

Si $i = 2$; huius aequationis:

III. $dy + ayydx = accx^{-\frac{8}{5}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{5}} - \frac{2\cdot 1}{2\cdot 5}}{1 - \frac{2\cdot 3}{2\cdot 5}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{5}}}{ac} + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 5^2}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{5}}}{a^2c^2}} = \frac{acx^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}}{1 - \frac{3x^{-\frac{1}{5}}}{5ac} + \frac{3x^{-\frac{2}{5}}}{5^2a^2c^2}}$$

Si

Si $i = 3$ huius aequationis:

IV. $dy + ayydx = accx^{-\frac{12}{7}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{7}} - \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4}{2 \cdot 4 \cdot 7^2} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{7}}}{ac}}{1 - \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 7} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{7}}}{ac} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 7^2} \cdot \frac{x^{-\frac{2}{7}}}{a^2c^2} - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7^3} \cdot \frac{x^{-\frac{3}{7}}}{a^3c^3}} \text{ siue}$$

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{7}} - \frac{3}{7} + \frac{3 \cdot 1}{7^2} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{7}}}{ac}}{1 - \frac{6}{7} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{7}}}{ac} + \frac{3 \cdot 5}{7^2} \cdot \frac{x^{-\frac{2}{7}}}{a^2c^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{7^3} \cdot \frac{x^{-\frac{3}{7}}}{a^3c^3}}.$$

Si $i = 4$, huius aequationis:

V. $dy + ayydx = accx^{-\frac{16}{9}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{9}} - \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 9} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 9^2} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{9}}}{ac} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 9^3} \cdot \frac{x^{-\frac{2}{9}}}{a^2c^2}}{1 - \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 9} \frac{x^{-\frac{1}{9}}}{ac} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9^2} \cdot \frac{x^{-\frac{2}{9}}}{a^2c^2} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 9^3} \cdot \frac{x^{-\frac{3}{9}}}{a^3c^3} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9^4} \cdot \frac{x^{-\frac{4}{9}}}{a^4c^4}}$$

Si $i = 5$; huius aequationis

VI. $dy + ayydx = accx^{-\frac{20}{11}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{11}} - \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 11} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6}{2 \cdot 4 \cdot 11^2} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{11}}}{ac} - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 11^3} \cdot \frac{x^{-\frac{2}{11}}}{a^2c^2} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 11^4} \cdot \frac{x^{-\frac{3}{11}}}{a^3c^3}}{1 - \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 11} \frac{x^{-\frac{1}{11}}}{ac} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4}{2 \cdot 4 \cdot 11^2} \frac{x^{-\frac{2}{11}}}{a^2c^2} - \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 11^3} \frac{x^{-\frac{3}{11}}}{a^3c^3} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 11^4} \cdot \frac{x^{-\frac{4}{11}}}{a^4c^4} - \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11^5} \cdot \frac{x^{-\frac{5}{11}}}{a^5c^5}}.$$

Coroll. 3.

3. In posteriori integrabilitatis ordine substituamus pariter loco i numeros 0, 1, 2, 3, 4, etc. ac reperietur, vt sequitur.

Si

Si $i = 0$; huius aequationis:

I. $dy + ayydx = accx^{-4}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{-1} + \frac{1\cdot 2}{2\cdot 1}}{1} = 1 + \frac{ac}{x} \text{ seu } y = \frac{1}{ax} + \frac{c}{xx}$$

Si $i = 1$; huius aequationis:

II. $dy + ayydx = accx^{-\frac{8}{3}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{-\frac{1}{3}} + \frac{2\cdot 3}{2\cdot 3} + \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 3^2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}}{ac}}{1 + \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}}{ac}} = \frac{acx^{-\frac{1}{3}} + 1 + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{3ac}}{1 + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{3ac}}$$

Si $i = 2$ huius aequationis:

III. $dy + ayydx = accx^{-\frac{12}{5}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{-\frac{1}{5}} + \frac{3\cdot 4}{2\cdot 5} + \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 5^2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{5}}}{ac} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5^3}\cdot\frac{x^{\frac{2}{5}}}{a^2c^2}}{1 + \frac{2\cdot 3}{2\cdot 5}\cdot\frac{x^{\frac{1}{5}}}{ac} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 5^2}\cdot\frac{x^{\frac{2}{5}}}{a^2c^2}}$$

Si $i = 3$; huius aequationis:

IV. $dy + ayydx = accx^{-\frac{16}{7}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{-\frac{1}{7}} + \frac{4\cdot 5}{2\cdot 7} + \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 7^2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{7}}}{ac} + \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7^3}\cdot\frac{x^{\frac{2}{7}}}{a^2c^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 7^4}\cdot\frac{x^{\frac{3}{7}}}{a^3c^3}}{1 + \frac{3\cdot 4}{2\cdot 7}\cdot\frac{x^{\frac{1}{7}}}{ac} + \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 7^2}\cdot\frac{x^{\frac{2}{7}}}{a^2c^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7^3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{7}}}{a^3c^3}}$$

Atque ex his casibus analogia patet, cuius ope omnium casuum, qui quidem integrationem admittunt, integralia algebraica expedite formari poterunt.

Scholion.

5. De his integralibus autem probe notandum est, ea non esse completa, neque ideo aeque late patere,

ac aequationem differentialem; id quod vel ex primo casu $dy + ayydx = accdx$ patet, cui etsi satisfacit $y = c$, tamen facile intelligitur, logarithmos insuper in ea comprehendi. Manifestum autem hoc est quoque hinc, quod in his integralibus non contineatur noua constans arbitraria, quae in differentiali non inerat; in quo criterium integrationis completae versatur. Caeterum vero hinc duplicia integralia cuiusuis casus obtinentur, eo quod c tam affirmatiue, quam negatiue, accipere licet, aequatione differentiali, quae tantum cc continet non mutata.

Problema 2.

6. Inuento ope praecedentis methodi integrali particulari pro casibus assignatis aequationis $dy + ayydx = accx^m dx$, inuenire integrale completum pro iisdem casibus.

Solutio.

Posito $m = 2n - 2$, integrale particulare aequationis propositae inuentum est esse $ayx = acx^n -$

$$\frac{\frac{(n-1)}{2} - \frac{(3n-1)}{2}\frac{(nn-1)}{8n}\cdot\frac{x^{-n}}{ac} - \frac{(5n-1)}{2}\frac{(nn-1)}{8n}\frac{(9nn-1)}{16n}\cdot\frac{x^{-2n}}{a^2c^2} - \frac{(7n-1)}{2}\frac{(nn-1)}{8n}\frac{(9nn-1)}{16n}\frac{(25nn-1)}{24n}\cdot\frac{x^{-3n}}{a^3c^3} - \text{etc.}}{1 + \frac{(nn-1)}{8n}\cdot\frac{x^{-n}}{ac} + \frac{(nn-1)}{8n}\frac{(9nn-1)}{16n}\cdot\frac{x^{-2n}}{a^2c^2} + \frac{(nn-1)}{8n}\frac{(9nn-1)}{16n}\frac{(25nn-1)}{24n}\cdot\frac{x^{-3n}}{a^3c^3} + \text{etc.}}$$

cuius loco scribamus breuitatis gratia $y = P$. Cum igitur P sit eiusmodi valor, per variabilem x datus, qui satisfaciat aequationi $dy + ayydx = accx^{2n-2}dx$, erit vtique $dP + aP^2dx = accx^{2n-2}dx$. Ponamus iam, integrale completum aequationis propositae $dy + ayydx =$

$= accx^{2n-2}dx$ esse $y = P + v$, quo valore loco y substituto habebimus hanc aequationem $dP + dv + aP^2dx + 2aPvdx + avvdx = accx^{2n-2}dx$. Cum vero sit $dP + aP^2dx = accx^{2n-2}dx$, erit $dv + 2aPvdx + avvdx = 0$. Sit $v = \frac{1}{u}$, erit $du - 2aPudx = + adx$, quae multiplicata per $e^{-2a\int Pdx}$ denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, fit integrabilis; erit scilicet aequationis $e^{-2a\int Pdx}(du - 2aPudx) = e^{-2a\int Pdx}adx$, integrale $e^{-2a\int Pdx}u = \int e^{-2a\int Pdx}adx$: ideoque $u = e^{2a\int Pdx}\int e^{-2a\int Pdx}adx$. Quo valore cum sit $v = \frac{1}{u}$ substituto, erit integrale completum aequationis propositae $y = P + \frac{e^{-2a\int Pdx}}{\int e^{-2a\int Pdx}adx}$. At ex problemate primo est valor ipsius y particularis, quem hic ponimus $P = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx}$; existente

$$z = x^{\frac{-n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8n} \cdot \frac{x^{\frac{-3n+3}{2}}}{ac} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n \cdot 16n} \cdot \frac{x^{\frac{-5n+1}{2}}}{a^2c^2} + \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8n \cdot 16n \cdot 24n} \cdot \frac{x^{\frac{-7n+1}{2}}}{a^3c^3} + \text{etc.}$$

Hinc erit $\int Pdx = \frac{cx^n}{n} + \frac{1}{a}lz$, et $e^{-2a\int Pdx} = e^{\frac{-2acx^n}{n}} : zz$. Quo valore substituto habebitur integrale completum:

$$y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx} + \frac{e^{\frac{-2acx^n}{n}}}{zz\int e^{\frac{-2acx^n}{n}}adx : zz}. \quad \text{Q. E. I.}$$

Aliter.

Quemadmodum hac ratione ex vno integrali particulari inuenitur integrale completum, ita ex duobus integralibus particularibus expeditius integrale comple-

 tum

tum indagabitur, neque in hoc modo peruenitur ad formulam integralem, cuiusmodi est ea $\int e^{\frac{-2acx^n}{n}} a\,dx : zz$, quae integrali completo, quod inuenimus, inuoluitur. Cum enim aequatio $dy + ayy\,dx = accx^{2n-2}dx$ maneat inuariata, siue c affirmatiue, siue negatiue, accipiatur, habemus vtique duo integralia particularia, quorum prius est $y = P = cx^{n-1} + \frac{dz}{az\,dx}$, existente $z = x^{\frac{-n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8n} \cdot \frac{x^{\frac{-3n+1}{2}}}{ac} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n \cdot 16n} \cdot \frac{x^{\frac{-5n+1}{2}}}{a^2c^2} +$ etc. Posterius vero simili modo inuestigandum erit $y = Q = -cx^{n-1} + \frac{du}{au\,dx}$; fietque $u = x^{\frac{-n+1}{2}} - \frac{(nn-1)}{8n} \cdot \frac{x^{\frac{-3n+1}{2}}}{ac} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n \cdot 16n} \cdot \frac{x^{\frac{-5n+1}{2}}}{a^2c^2} -$ etc. qui duo valores z et u tantum signis inter se differunt. Erit ergo tam $dP + aP^2dx = accx^{2n-2}dx$, quam $dQ + aQ^2dx = accx^{2n-2}dx$. Ponamus iam $R = \frac{P-y}{Q-y}$, quae aequatio sit integralis completa propositae differentialis; quam formam ideo assumimus, quia in ea vtraque particularium $y = P$ et $y = Q$ continetur, illa nempe si fiat $R = 0$, haec si $R = \infty$. Fiet ergo $QR - Ry = P - y$, hincque $y = \frac{QR-P}{R-1}$, quae dat $dy = \frac{RRdQ - QdR - RdQ - RdP + dP + PdR}{(R-1)^2}$ substituantur hic valores supra inuenti $dP = -aP^2dx + accx^{2n-2}dx$ et $dQ = -aQQdx + accx^{2n-2}dx$, eritque $dy = accx^{2n-2}dx + \frac{aP^2dx}{R-1} - \frac{aQ^2Rdx}{R-1} + \frac{(P-Q)dR}{(R-1)^2} = -a\frac{(QR-P)^2dx}{(R-1)^2} + accx^{2n-2}dx$. Ex hac aequatione resultat haec $(P-Q)dR = -aRdx(P-Q)^2$, quae diuisa per $R(P-Q)$ dat $\frac{dR}{R} = a(Q-P)dx = -2acx^{n-1}dx$

+

$+\frac{du}{u}-\frac{dz}{z}$. Haec iam aequatio integrabilis exiſtit, eritque integrale $lR - lC = -\frac{2acx^n}{n} + lu - lz$. Cum vero ſit $R = \frac{P-y}{Q-y}$, erit $\frac{P-y}{Q-y} = \frac{(acx^{n-1}zdx+dz-ayzdx):z}{(-acx^{n-1}udx+du\ ayudx):u}$ $= \frac{Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}u}{z}$. Hinc ita, quia valores ipſarum u et z per x conſtant, habebitur aequatio integralis completa

$$Ce^{\frac{-2acx^n}{n}} = \frac{dz + acx^{n-1}zdx - ayzdx}{du - acx^{n-1}udx - ayudx} = \frac{(P-y)z}{(Q-y)u}$$

Q. E. I.

Coroll. 1.

7. Valor particularis, quem ſupra pro y inuenimus, ita erat comparatus, vt eſſet $y = cx^{n-1} - \frac{(K+L)}{ax(M+N)}$; exiſtente

$$K = \frac{(n-1)}{2} + \frac{(5n-1)(nn-1)}{2\cdot 8n}\cdot\frac{(9nn-1)}{16n}\cdot\frac{x^{-2n}}{a^2c^2} + \frac{(9n-1)}{2}\cdot\frac{(n^2-1)(9n^2-1)(25n^2-1)(49n^2-1)}{8n\cdot 16n\cdot 24n\cdot 32n}\cdot\frac{x^{-4n}}{a^4c^4} + \text{etc.}$$

$$L = \frac{(3n-1)(nn-1)}{2\cdot 8n}\cdot\frac{x^{-n}}{ac} + \frac{(7n-1)(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{2\cdot 8n\cdot 16n\cdot 24n}\cdot\frac{x^{-3n}}{a^3c^3} + \text{etc.}$$

$$M = 1 + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n\cdot 16n}\cdot\frac{x^{-2n}}{a^2c^2} + \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)(49nn-1)}{8n.\ 16n.\ 24n.\ 32n}\cdot\frac{x^{-4n}}{a^4c^4} + \text{etc.}$$

$$N = \frac{(nn-1)}{8n}\cdot\frac{x^{-n}}{ac} + \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8n.\ 16n.\ 24n}\cdot\frac{x^{-3n}}{a^3c^3} + \text{etc.}$$

Facto autem c negatiuo, erit alter valor particularis $y = -cx^{n-1} - \frac{(K-L)}{ax(M-N)}$. Erit ergo $P = \frac{acx^n(M+N)\ K\text{-}L}{ax(M+N)}$; $Q = \frac{-acx^n(M-N)-K+L}{ax(M-N)}$; et $z:u = M+N:M\text{-}N$.

Ex quibus colligitur, aequationis propositae: $dy + ayydx = accx^{2n-2}dx$ integrale completum fore:

$$Ce^{\frac{-2acx^n}{n}} = \frac{(acx^n - axy)(M+N)-K-L}{-(acx^n+axy)M-N)-K+L}$$ siue $-C$ posito loco C

$$Ce^{\frac{-2acx^n}{n}} = \frac{ax(cx^{n-1}-y)(M+N)-K-L}{ax(cx^{n-1}+y)(M-N)+K-L}.$$

Coroll. 2.

8. Si cc est numerus negatiuus, fiet c hincque L et N quantitates imaginariae, at $c\sqrt{-1}$; $L\sqrt{-1}$; et $N\sqrt{-1}$ quantitates reales: Tum autem integrale completum realiter expressum erit:

$$C + \frac{acx^n}{n}\sqrt{-1} = \text{A tang.}\frac{acx^n N - axyM - K}{acx^n M\sqrt{-1} - axyN\sqrt{-1} - L\sqrt{-1}}.$$

Coroll. 3.

9. Sit $c = b\sqrt{-1}$, vt habeatur haec aequatio integranda:

$$dy + ayydx + abbx^{2n-2}dx = 0.$$

Huius ergo aequationis integrale completum erit:

$$C - \frac{abx^n}{n} = \text{A tang.}\frac{abx^n N - axyM - K}{-abx^n M - axyN - L}$$ siue

$$C - \frac{abx^n}{n} = \text{A tang.}\frac{K - abx^n N + axyM}{L + abx^n M + axyN};$$ existente

$$K = \frac{(n-1)}{2} - \frac{(5n-1)(nn-1)(9nn-1)}{2 \cdot 8n \cdot 16n} \cdot \frac{x^{-2n}}{a^2b^2} + \frac{(9n-1)(nn-1)(9nn-)(25nn-1)(49nn-1)}{2 \cdot 8n \cdot 16n \cdot 24n \cdot 32n} \cdot \frac{x^{-4n}}{a^4b^4} - \text{etc.}$$

$$L = \frac{(5n-1)(nn-1)}{2 \cdot 8n} \cdot \frac{x^{-n}}{ab} - \frac{(7n-1)(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{2 \cdot 8n \cdot 16n \cdot 24n} \cdot \frac{x^{-3n}}{a^3b^3} + \text{etc.}$$

M =

$$M = 1 - \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n \cdot 16n} \cdot \frac{x^{-2n}}{a^2 b^2} + \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)(49nn-1)}{8n \cdot 16n \cdot 24n \cdot 32n} \cdot \frac{x^{-4n}}{a^4 b^4} - \text{etc.}$$

$$N = \frac{(nn-1)}{8n} \cdot \frac{x^{-n}}{ab} - \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8n \cdot 16n \cdot 24n} \cdot \frac{x^{-3n}}{a^3 b^3} + \text{etc.}$$

His igitur casibus integralia particularia, quae simul sint algebraica, non dantur.

Coroll. 4.

10. Quoties ergo fuerit $n = \frac{\mp 1}{2i \pm 1}$, denotante i numerum quemcunque integrum, expressiones finitae algebraicae pro litteris K, L, M et N reperiuntur. His igitur casibus integratio aequationis huius $dy + ayydx = accx^{2n-2}dx$ ope logarithmorum, huius vero aequationis $dy + ayydx + abbx^{2n-2}dx = 0$ ope quadraturae circuli absoluitur.

Scholion.

11. Quoniam aequationis differentialis propositae $dy + ayydx = accx^{2n-2}dx$ integrale completum duplici modo expressimus, poterimus formulae integralis $\int \frac{e^{\frac{-2acx^n}{n}} dx}{zz}$, quae in priori inest, valorem ex posteriori assignare, huiusque adeo integrationem, quae saepe numero maximopere difficilis videatur, exhibere. Posteriori modo autem inuenimus $y = \frac{QR - P}{R - 1} = \frac{P - QR}{1 - R}$ $= P + \frac{(P-Q)R}{1-R}$, at est $R = \frac{Ce^{\frac{-2acx^n}{n}} u}{z}$; $P = cx^{n-1}$

+

$+\frac{dz}{azdx}$ et $Q=-cx^{n-1}+\frac{du}{audx}$. Consequenter habebitur $y=cx^{n-1}+\frac{dz}{azdx}+\frac{(2cx^{n-1}+\frac{dz}{azdx}-\frac{du}{audx})Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}u}{z-Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}u}$.

Per priorem vero integrationem est $y=cx^{n-1}+\frac{dz}{azdx}$

$+\frac{e^{\frac{-2acx^n}{n}}}{zz\int e^{\frac{-2acx^n}{n}}adx:zz}$ ex quorum comparatione oritur $\frac{z-Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}u}{Czzu(2cx^{n-1}+\frac{dz}{azdx}-\frac{du}{audx})}=\frac{\int e^{\frac{-2acx^n}{n}}adx}{zz}$.

Quae transmutatur in hanc aequationem:

$$\frac{zdx-Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}udx}{Cz(2acx^{n-1}uzdx+udz-zdu)}=\int\frac{e^{\frac{-2acx^n}{n}}}{zz}dx.$$

Quodsi ergo fuerit:

$$z=x^{\frac{-n+1}{2}}+\frac{(nn-1)}{8n}.\frac{x^{\frac{-3n+1}{2}}}{ac}+\frac{(nn-1)}{8n.}\frac{(9nn-1)}{16n}.\frac{x^{\frac{-5n+1}{2}}}{a^2c^2}+\text{etc.}$$

$$u=x^{\frac{-n+1}{2}}-\frac{(nn-1)}{8n}.\frac{x^{\frac{-3n+1}{2}}}{ac}+\frac{(nn-1)}{8n}\frac{(9nn-1)}{16n}.\frac{x^{\frac{-5n+1}{2}}}{a^2c^2}-\text{etc.}$$

haec formula differentialis $\frac{e^{\frac{-2acx^n}{n}}dx}{zz}$ integrari poterit

eritque integrale $=\frac{zdx-Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}udx}{Cz(2acx^{n-1}uzdx+udz-zdu)}$.

Simili

Simili vero modo facto c negatiuo, quo z et u inter se permutantur, erit formulae differentialis $\frac{e^{\frac{+2acx^n}{n}}dx}{uu}$

integrale $= \frac{udx - Ce^{\frac{+2acx^n}{n}}zdx}{Cu(-2acx^{n-1}uzdx + zdu - udz)}$

$= \frac{Ce^{\frac{2acx^n}{n}}zdx - udx}{Cu(2acx^{n-1}uzdx + udz - zdu)}$ in quibus integrationibus C denotat eam constantem arbitrariam, quae per integrationem more solito ingreditur.

INVESTIGATIO FVNCTIONVM EX DATA DIFFERENTIALIVM CONDITIONE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si V denotet functionem quamcunque binarum variabilium x et y, eaque differentietur, vt prodeat eius differentiale:

$$dV = Pdx + Qdy$$

tum vero hae duae quantitates P et Q denuo differentientur, sicque proueniat:

$$dP = pdx + rdy \text{ et } dq = sdx + qdy$$

notum est, semper fore $r = s$. Quam proprietatem quoque ita exprimere soleo, vt dicam, esse:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Huiusmodi scilicet expressione $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ indico, functionem P ita differentiari, vt sola quantitas y pro variabili habeatur, et differentiale resultans per dy diuidi, quo pacto, quantitas finita a differentialibus libera proueniat, necesse est.

2. Quodsi ergo formula $Pdx + Qdy$ ita fuerit comparata, vt secundum hanc scribendi rationem in ea sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, hinc vicissim concludimus, istam formulam

mulam $Pdx+Qdy$ re vera oriri ex differentiatione cuiuspiam functionis V ipsarum x et y. Cum autem haec proprietas latissime pateat, plus inde concludere non licet, quam formulam $Pdx+Qdy$ esse integrabilem, neque quicquam per hanc solam conditionem in genere definitur, vnde vlla peculiaris proprietas eius functionis, ex cuius differentiatione est nata, colligi posset.

3. Quando autem functio V ad certum quoddam genus refertur, tum posito $dV=Pdx+Qdy$, inter quantitates P et Q, praeter illam generalem affectionem, alia quaedam particularis relatio intercedit Ita nouimus, si V sit functio nullius dimensionis binarum variabilium x et y, tum praeter illam generalem proprietatem, qua est $(\frac{dP}{dy})=(\frac{dQ}{dx})$, insuper hanc particularem locum semper habere, vt sit: $Px+Qy=0$. Deinde simili modo demonstratum extat, si V sit functio homogenea binarum variabilium x et y, cuius dimensionum numerus sit $=n$, eius differentiale $dV=Pdx+Qdy$ semper ita esse comparatum, vt sit

$$nV=Px+Qy.$$

Quo ergo casu hoc inprimis notatu dignum occurrit, quod formulae differentialis $Pdx+Qdy$ integrale statim assignari possit, cum sit $V=\frac{1}{n}(Px+Qy)$.

4. Quae cum sint demonstrata, iam pridem in mentem mihi venit, huiusmodi quaestiones inuerso modo tractare, atque in methodum inquirere, cuius ope, si

posito $dV = Pdx + Q\,dy$, compertum sit, esse vel $Px + Qy = 0$, vel $Px + Qy = nV$, viciſſim inueniri poſſit, functionem V vel eſſe nullius dimenſionis, vel eſſe functionem homogeneam, in qua binae variabiles x et y vbique n dimenſiones adimpleant. Scilicet nullo reſpectu, ad illas proprietates iam cognitas habito, ex hoc ſolo, quod ſit vel $Px + Q\,y = 0$, vel $Px + Q\,y = nV$, per legitima analyſeos ratiocinia elici oportet, functionem finitam V hac proprietate praeditam eſſe, vt vel ſit nullius dimenſionis, vel homogenea n dimenſionum. Intelligendum autem eſt, proprietatem generalem $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ſemper locum habere debere, ſine qua aequatio $dV = Pdx + Qdy$ adeo eſſet abſurda.

5. Hae quaeſtiones, quae vix adhuc tactae videntur, ampliſſimum aperiunt campum, fines analyſeos vlterius extendendi. Propoſita namque aequatione $dV = Pdx + Q\,dy$, quaeri poteſt indoles functionis V, ſi relatio quaecunque inter binas quantitates P et Q vel adeo inter ternas P, Q et V proponatur. Huiusmodi autem quaeſtiones etiamſi pene nouae videantur, tamen nullum eſt dubium, quin methodus eas rite reſoluendi maximam per totam matheſin allatura ſit vtilitatem. In problemate enim de cordis vibrantibus tota vis ſolutionis ad hoc genus eſt referenda, cum certa quadam relatione inter quantitates P et Q contineatur. Deinde etiam vniuerſam motus fluidorum ſcientiam in huiusmodi formulis differentialibus ſum complexus, vbi certa quaedam relatio inter partes differentialium praeſcribitur, ex qua autem ob defectum talis methodi vix quicquam concludere licet.

6.

6. Huiusmodi autem quaestiones etiam alio modo proponi possunt, vt solius functionis V, cuius natura quaeritur, mentio occurrat. Cum enim, posito $dV = P\,dx + Q\,dy$, sit $P = (\frac{dV}{dx})$ et $Q = (\frac{dV}{dy})$, prior quaestio ita enunciari poterit:

Inuenire indolem functionis V, *vt sit:*

$$x(\frac{dV}{dx}) + y(\frac{dV}{dy}) = 0$$

posterior vero hoc modo;

Inuenire indolem functionis V, *vt sit:*

$$x(\frac{dV}{dx}) + y(\frac{dV}{dy}) = nV$$

ac priori quidem ostendi debet, V esse functionem nullius dimensionis ipsarum x et y; posteriori vero, esse earumdem functionem homogeneam n dimensionum. Hoc scribendi autem modo in genere tenendum est, esse:

$$dV = dx(\frac{dV}{dx}) + dy(\frac{dV}{dy})$$

7. Problema igitur latius patens ita se habebit, vt proposita quacunque relatione inter quantitates V, $(\frac{dV}{dx})$ et $(\frac{dV}{dy})$ definiri debeat, qualis functio sit V ipsarum x et y. Deinde etiam huiusmodi quaestiones ad functiones trium pluriumue variabilium extendi possunt; quin etiam quantitates ex duplici vel triplici differentiatione oriundae introduci possunt; cuiusmodi sunt $(\frac{ddV}{dx^2})$; $(\frac{ddV}{dxdy})$; $(\frac{ddV}{dy^2})$; $(\frac{d^3V}{dx^3})$; $(\frac{d^3V}{dx^2dy})$ etc. quarum significatus ita se habet, vt verbi gratia $(\frac{d^3V}{dx^2dy})$ oriatur, si primo V differentietur sola x variabili sumta, et differentiale per dx diuidatur, vt prodeat $(\frac{dV}{dx})$; tum vero haec quantitas denuo differentietur, sola x variabili

 sumta

ſumta, vt eius differentiale per dx diuiſum praebeat $\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)$, quod denique rurſus differentiatum, ſumta ſola y variabili, et per dy diuiſum, dabit $\left(\frac{d^3V}{dx^2dy}\right)$.

8 Dum autem hunc ſignandi modum recipimus, notandum eſt, eſſe:

$$\left(\frac{ddV}{dxdy}\right)=\left(\frac{ddV}{dydx}\right) \text{ et}$$
$$\left(\frac{d^3V}{dx^2dy}\right)=\left(\frac{d^3V}{dxdydx}\right)=\left(\frac{d^3V}{dydx^2}\right)$$

Perinde ſcilicet eſt, quonam ordine quantitates x et y, quarum alterutra in qualibet differentiatione ſola variabilis aſſumitur, diſponantur, dummodo praeſcriptus differentiationum numerus inſtituatur. Quin etiam ſi V ſit functio trium variabilium x, y, z, ſimilis conuenientia locum habet; erit enim:

$$\left(\frac{d^3V}{dxdydz}\right)=\left(\frac{d^3V}{dxdzdy}\right)=\left(\frac{d^3V}{dydxdz}\right)=\left(\frac{d^3V}{dydzdx}\right)=\left(\frac{d^3V}{dzdxdy}\right)=\left(\frac{d^3V}{dzdydx}\right)$$

hic autem meas inueſtigationes tantum ad functiones duarum variabilium reſtringam.

9. Hoc modo deducimur non ſolum ad inſolitas et etiamnum vix tractatas quaeſtiones, ſed etiam ad noua ſigna, quibus adhuc parum ſumus adſueti; vnde haec methodus, cuius culturam tantopere expetere debemus, non immerito tanquam noua plane Analyſeos pars eſt ſpectanda. Non parum igitur mihi praeſtitiſſe videbor, ſi prima tantum iſtius methodi fundamenta conſtituero, neque ob rei nouitatem vix minimam aedificii iis ſuperſtruendi partem polliceri audeo. Tempore ſine dubio haud exiguo et indefeſſo labore opus erit, antequam iſtam Analyſeos partem, in ſe certe

certe difficillimam, non dicam perficere, ſed tantum ad vberiorem vſum accommodare liceat. Quam ob rem ea, quae mihi adhuc in hoc genere ſunt reperta, ordine ac dilucide exponere conſtitui, quo aliis, quos dignitas argumenti ad eundem laborem ſuſcipiendum alliciet, prima quaſi obſtacula de via remoueam, animosque ad nouum hoc inueſtigationum genus praeparem.

10. Antequam autem hoc munere fungar, principia quaedam per ſe perſpicua praemittenda ſentio. Primo ſcilicet, ſi fuerit $(\frac{dV}{dx}) = 0$, intelligitur, functionem V prorſus non ab x pendere, ſed ex ſola altera variabili y cum conſtantibus eſſe conflatam, ſicque etiam formam $(\frac{dV}{dy})$ fore functionem ipſius y tantum. Viciſſim autem ſi $(\frac{dV}{dy})$ fuerit functio ipſius y tantum, ipſa quantitas V erit aggregatum ex functione ipſius y tantum, et ex functione ipſius x tantum; quo ergo caſu forma $(\frac{dV}{dx})$ erit functio ipſius x tantum. Deinde ſi fuerit $dV = R\,ds$, neceſſe eſt, vt R ſit functio ipſius S, vel S ipſius R, vnde et V erit functio ipſius S, vel ipſius R; quia alioquin integrale $\int R\,ds$ non determinaretur. His igitur poſitis principiis primum binas quaeſtiones initio memoratas, quae huic inueſtigationi anſam praebuerunt, reſoluam, deinceps ad alias progreſſurus.

Problema I.

11. Exiſtente $dV = P\,dx + Q\,dy$, ſi fuerit $Px + Qy = 0$, inuenire, qualis V ſit functio ipſarum x et y, vt huic conditioni ſatisfiat.

Solutio.

Solutio.

Cum igitur inter quantitates P et Q haec conditio praescribatur, vt sit $Px+Qy=0$, erit $Q=-P\frac{x}{y}$, qui valor in aequalitate $dV=Pdx+Qdy$ substitutus dabit :

$$dV=P(dx-\frac{xdy}{y})=\frac{P(ydx-xdy)}{y}$$

necesse igitur est, vt formula $\frac{P(ydx-xdy)}{y}$ sit integrabilis. Quae vt ad formam RdS perducatur, ita repraesentetur :

$$dV=Py.\frac{ydx-xdy}{yy}$$

Sumto enim $\frac{ydx-xdy}{yy}=dS$ et $S=\frac{x}{y}$, cum sit $dV=PydS$, necesse est, vt Py sit functio ipsius S, ideoque et V erit functio ipsius S, hoc est, ipsius $\frac{x}{y}$. Proprietas igitur praescripta, qua est $Px+Qy=0$, huiusmodi indolem functionis V declarat, vt sit V functio quaecunque ipsius $\frac{x}{y}$; hinc autem manifestum est, pro V prodire functionem nullius dimensionis ipsarum x et y.

Coroll. 1.

12. Quodsi ergo ob $P=(\frac{dV}{dx})$ et $Q=(\frac{dV}{dy})$ haec proprietas functionis V proponitur, vt sit $x(\frac{dV}{dx})+y(\frac{dV}{dy})=0$ inde certo concludimus, V esse functionem formulae $\frac{x}{y}$ seu, quod eodem redit, esse functionem nullius dimensionis ipsarum x et y.

Coroll. 2.

13. Vicissim ergo hinc id, quod quidem iam dudum constat, confirmatur, vt, quoties fuerit V functio

ctio nullius dimensionis ipsarum x et y, toties quoque fore $x(\frac{dV}{dx})+y(\frac{dV}{dy})=0$. Verum vti hoc facillime ostenditur, ita eius inuersum singulari demonstratione indigebat.

Scholion.

14. Vis huius solutionis in eo est posita, quod differentiale functionis V ad istam formam $dV=R\,dS$ reduxerim, ex qua, cum vnicum differentiale dS contineat, liquido sequebatur, V esse functionem quantitatis S tantum; erat autem $S=\frac{x}{y}$, et notum est, omnes functiones ipsius $\frac{x}{y}$ simul esse functiones nullius dimensionis et vicissim. Eodem ergo principio in solutione sequentium problematum vtendum esse intelligetur. Caeterum sine litteris P et Q problema tam proponi, quam resolui, potuisset: si scilicet quaeri debeat indoles functionis V, vt sit $x(\frac{dV}{dx})+y(\frac{dV}{dy})=0$, cum sit $dV=dx(\frac{dV}{dx})+dy(\frac{dV}{dy})$, ob $(\frac{dV}{dy})=-\frac{x}{y}(\frac{dV}{dx})$, erit

$$dV=(dx-\frac{x\,dy}{y}).(\frac{dV}{dx})=y(\frac{dV}{dx}).\,d.\frac{x}{y}$$

manifestum est, V necessario esse debere huius vnius quantitatis $\frac{x}{y}$. Quemadmodum autem, si fuerit $dV=R\,dr$, recte concluditur, esse V functionem ipsius r tantum, ita porro, si fuerit $dV=R\,dr+S\,ds$, concludere debemus, V esse functionem binarum variabilium r et s; quod principium vtilitatem habebit, in indaganda indole functionum trium variabilium, dum quaepiam conditio differentialium proponitur.

Problema 2.

15. Existente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $Px + Qy = nV$, denotante n numerum quemcunque.

Solutio.

Ex conditione praescripta $Px + Qy = nV$ eliciatur altera quantitatum P et Q, puta $Q = \frac{nQ}{y} - \frac{Px}{y}$, qui valor in aequalitate differentiali substitutus dabit:

$$dV = Pdx + \frac{nVdy}{y} - \frac{Pxdy}{y}$$

cui statim ista forma inducatur:

$$dV - \frac{nVdy}{y} = Py\frac{(ydx - xdy)}{yy} = Pyd\frac{x}{y}$$

quae, vt prius membrum integrabile reddatur, per y^{-n} multiplicetur, sicque prodibit:

$$d.y^{-n}V = Py^{1-n}d.\frac{x}{y}$$

vnde concludimus, esse $y^{-n}V$ functionem quantitatis $\frac{x}{y}$, seu functionem nullius dimensionis binarum variabilium x et y. Denotet ergo Z huiusmodi functionem quamcunque nullius dimensionis, et cum sit $y^{-n}V = Z$, erit $V = y^n Z$; talis autem expressio continet omnes functiones homogeneas ipsarum x et y, quarum dimensionum numerus est $= n$.

Coroll. 1.

16. Quando ergo nouerimus, functionem V eius esse indolis, vt sit $nV = x(\frac{dV}{dx}) + y(\frac{dV}{dy})$, pro certo affirmare poterimus, V esse functionem homogeneam, in

in qua binae variabiles vbique n dimensiones adimpleant.

Coroll. 2.

17. Quodsi ergo ponatur $dV = Pdx + Qdy$, erunt etiam P et Q functiones homogeneae ipsarum x et y, sed quarum dimensionum numerus est $n-1$, scilicet vno ordine inferior.

Coroll. 3.

18. Quare si P et Q fuerint functiones homogeneae binarum variabilium x et y, quarum numerus dimensionum sit idem, puta $= n-1$; ac si praeterea fuerit $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$, ita vt $Pdx + Qdy$ sit formula differentialis completa; tum eius integrale facillime assignatur. Erit quippe:

$$\int (Pdx + Qdy) = \frac{Px + Qy}{n}.$$

Dummodo ergo n non euanescat, integrale huiusmodi formularum sine vlla alia operatione exhiberi potest.

Scholion.

19. En ergo solutionem ambarum quaestionum, quas initio commemoraui; quae cum iam contineat specimen methodi, qua in hoc genere est vtendum, eandem ad solutionem aliorum similium problematum adhibere licebit. Cum igitur hic proponatur certa quaedam relatio inter functionem V et quantitates inde deriuatas $P = (\frac{dV}{dx})$ et $Q = (\frac{dV}{dy})$, ex qua indolem functionis V definiri oportet, vt ordinem quendam in huiusmodi quaestionibus seruem, quoniam tam P et Q, quam V, sunt functiones ipsarum x et y; primum in-

dolem alterius litterarum P et Q dari assumam; deinde ad eiusmodi problemata progrediar, in quibus relatio quaedam inter P et Q praescribitur; tum vero ad talia, vbi vel inter P et V, vel inter Q et V, relatio quaedam intercedere debet. Denique vero relationem datam ad omnes tres quantitates V, P et Q extendi assumam, quemadmodum in problemate secundo est factum. Cum autem hic tantum ad quantitates V, $\left(\frac{dV}{dx}\right)$, $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ respiciamus, euidens est, huiusmodi inuestigationes multo latius extendi posse, dum relatio praescripta alias quantitates ex V deriuatas, veluti $\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddV}{dx\,dy}\right)$, et $\left(\frac{ddV}{dy^2}\right)$, complectitur. Verum tantum abest, vt omnium istiusmodi problematum solutiones promittere audeam, vt potius ea tantum, quae sunt faciliora, sim euoluturus. Mox enim patebit, innumerabilia eiusmodi problemata proponi posse, quorum solutiones primos hos conatus longe superent, neque antequam haec quasi noua Analyseos pars penitius fuerit exculta, sperari queant.

Problema 3.

20. Existente $dV = Pdx + Qdy$, si P fuerit functio ipsius x tantum, definire indolem functionis V.

Solutio.

Ex parte differentialis Pdx iam functionem V inuenire posse notum est, dum spectata y vt constante, differentiale Pdx integratur, constans arbitraria autem adiicienda alteram variabilem y vtcunque inuoluere assumi-

assumitur. Cum igitur P sit functio ipsius x tantum, erit $\int P dx$ etiam eiusmodi functio, quae sit $= X$, et constans addenda per Y functionem quamcunque ipsius y tantum repraesentetur. Hinc ergo prodibit $V = X + Y$, seu indoles quaesita functionis V in hoc consistet, vt sit V aggregatum duarum functionum, alterius ipsius x tantum, alterius vero ipsius y tantum.

Corollarium.

21. Cum ergo hinc fiat $dV = dX + dY$, manifestum est, si P fuerit functio ipsius x tantum, tum Q fore functionem ipsius y tantum, quae quidem proprietas per se est notissima.

Problema 4.

22. Existente $dV = P dx + Q dy$, si P fuerit functio ipsius y tantum, definire indolem functionis V.

Solutio.

Cum P sit functio ipsius y tantum, ex sola parte differentialis $P dx$, spectata y vt constante, functio V ita definitur, vt sit $V = Px + Y$, denotante Y functionem quamcunque ipsius y. Quare indoles quaesita functionis V in hoc consistet, vt designantibus P et Y functiones quascunque ipsius y, forma functionis V semper sit huiusmodi $V = Px + Y$.

Coroll. 1.

23. Si ergo $P = (\frac{dV}{dx})$ sit functio ipsius y tantum, cum fiat $dV = P dx + x dP + dY$, erit $Q = \frac{x dP + dY}{dy}$, seu ob $\frac{dP}{dy} = (\frac{ddV}{dx dy})$, fiet $Q = x(\frac{ddV}{dx dy}) + \frac{dY}{dy}$.

Coroll. 2.

24. Quoties igitur fuerit $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ functio ipsius y tantum, toties necesse est, vt sit $\left(\frac{dV}{dy}\right) = x\left(\frac{ddV}{dx\,dy} + \frac{dY}{dy}\right.$, vbi $\frac{dY}{dy}$ denotare potest functionem quamcunque ipsius y tantum. Vnde vicissim colligere licet, si fuerit $\left(\frac{dV}{dy}\right) = x\left(\frac{ddV}{dx\,dy}\right) + f.y$, fore $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ functionem ipsius y tantum.

Coroll. 3.

25. Simili modo ostendetur, si $Q = \left(\frac{dV}{dy}\right)$ fuerit functio ipsius x tantum, fore $V = Qy + X$, denotante X functionem quamcunque ipsius x tantum: tum vero etiam, si fuerit $\left(\frac{dV}{dx}\right) = y\left(\frac{ddV}{dx\,dy}\right) + f.x$, fore $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ functionem ipsius x tantum.

Problema 5.

26. Existente $dV = P\,dx + Q\,dy$, si fuerit P functio homogenea ipsarum x et y, cuius dimensionum numerus sit $= n$, definire indolem functionis V.

Solutio.

Cum P sit functio homogenea n dimensionum, si pars differentialis $P\,dx$ integretur, spectata y vt constante, integrale erit functio homogenea $n+1$ dimensionum, sit Z talis functio homogenea quaecunque, eritque $V = Z + Y$, denotante Y functionem quamcunque ipsius y tantum, in quo consistit indoles quaesita functionis V.

Coroll.

Coroll.

27. Simili ergo modo oſtendetur, ſi fuerit Q functio homogenea n dimenſionum, fore $V = Z + X$, denotante, vt ante, Z functionem homogeneam quamcunque $n + 1$ dimenſionum, et X ipſius x tantum.

Problema 6.

28. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, ſi fuerit $Q = nP$, definire indolem functionis V.

Solutio.

Cum ſit $Q = nP$, erit $dV = P(dx + ndy)$: quare, poſito $x + ny = s$, fiet $dV = Pds$. Ex V valorem certum habere nequit, niſi ſit P functio ipſius s, ex qua etiam V erit functio ipſius s. Conſequenter ſi fuerit $Q = nP$, indoles quantitatis V in hoc conſiſtet, vt ſit V functio quaecunque formulae $x + ny$; ſeu ſi character Φ adhibeatur ad functionem quamcunque quantitatis, cui praefigitur, deſignandam, erit $V = \Phi : (x + ny)$.

Problema 7.

29. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, ſi fuerit $Py + Qx = 0$, inuenire indolem functionis V.

Solutio.

Cum ſit $Py + Qx = 0$, erit $Q = -\frac{Py}{x}$, atque hinc $dV = Pdx - \frac{Pydy}{dx} = \frac{P}{x}(xdx - ydy)$ Poſito ergo $xx - yy = s$, ob $xdx - ydy = \frac{1}{2}ds$, fit $dV = \frac{P}{2x}ds$. Quae formu-

formula cum per hypothesin sit integrabilis, necesse est, vt sit $\frac{P}{2x}$ functio ipsius s, vnde etiam V prodibit functio ipsius $s = xx - yy$. Quocirca indoles quaesita in hoc consistet, vt V sit functio quaecunque quantitatis $xx - yy$.

Problema 8.

30. Existente $dV = Pdx + Qdy$, si fuerit $Q = Pp$, dum p exprimit functionem quamcunque datam ipsarum x et y, definire indolem functionis V.

Solutio.

Habebimus ergo $dV = Pdx + Ppdy = P(dx + pdy)$. Iam consideretur formula $dx + pdy$, quae si non fuerit per se integrabilis, dabitur multiplicator q, qui eam reddat integrabilem. Sit ergo $qdx + pqdy = ds$, eritque s functio quoque data ipsarum x et y, et ob $dx + pdy = \frac{ds}{q}$, habebitur $dV = \frac{P}{q}ds$. Necesse igitur est, vt haec formula sit integrabilis, ideoque indoles quaesita in hoc consistet, vt sit V functio quaecunque quantitatis s, quae quomodo ex x et y sit composita, ex conditione quantitatis datae p colligi debet.

Coroll. 1.

31. Problema hoc satis late patet, cum in eo ratio quaecunque inter quantitates P et Q, seu $(\frac{dV}{dx})$ et $(\frac{dV}{dy})$ proponatur. Si enim sit $P : Q = 1 : p$, quaecunque functio ipsarum x et y pro p fuerit data, qualis futura sit functio V, definiri potest.

Coroll.

Coroll. 2.

32. Quanquam autem ſemper multiplicator q exiſtit, qui formulam $dx+pdy$ integrabilem reddit, tamen ſaepe euenire poteſt, vt ob defectum analyſeos hic multiplicator aſſignari nequeat. Atque his caſibus ſolutio problematis impeditur.

Coroll. 3.

33. Alio autem loco oſtendi, huiusmodi multiplicatores ſemper exhiberi poſſe, ſi aequatio $dx+pdy=0$ reſolui queat. Quare niſi p eiusmodi fuerit functio ipſarum x et y, vt aequatio $dx+pdy$ reſolui poſſit, huic analyſeos defectui tribui debet, ſi problema reſolui nequeat.

Problema 9.

34. Si ſint X et Y functiones datae, illa ipſius x tantum, haec vero ipſius y tantum, tum vero p ſit functio etiam data ipſarum x et y: definire indolem functionis V, vt poſito $dV=Pdx+Qdy$, ſit $Q=(P+X)p+Y$.

Solutio.

Cum igitur ſit $Q=(P+X)p+Y$, erit aequatio differentialis $dV=Pdx+Ppdy+Xpdy+Ydy$, quae ad hanc reducitur formam:

$$dV=(P+X)(dx+pdy)-Xdx+Ydy$$

vbi partes Xdx et Ydy per ſe ſunt integrabiles. Quaeratur ergo iterum multiplicator q formulam $dx+pdy$

 inte-

integrabilem reddens; fitque $q(dx+pdy)=ds$, atque erit:

$$dV=\frac{P+X}{q}ds-Xdx+Ydy$$

quae forma cum per hypothefin fit integrabilis, necesse eft, vt $\frac{P+X}{q}$ fit functio ipfius s tantum, quae fi ponatur $=S$, prodibit $V=\int S ds-\int X dx+\int Y dy$; quae eft indoles defideratae functionis V.

Coroll. 1.

35. Cum igitur ex data functione p definiatur functio s, fi pro Σ capiatur functio quaecunque huius quantitatis s, functio quaefita V ita debet effe comparata, vt fit

$$V=\Sigma-\int X dx+\int Y dy.$$

Coroll. 2.

36. Haec igitur adiectio functionum X et Y folutionem problematis non reddidit difficiliorem; dummodo X fit functio ipfius x tantum, et Y ipfius y tantum. Verum folutio, vt ante, pendet a refolutione aequationis differentialis $dx+pdy=0$, quae fi vires noftras fuperet, etiam problema refoluere non valemus.

Coroll. 3.

37. Poffunt etiam loco X et Y aliae functiones binarum variabilium x et y, puta M et N, affumi, dummodo formula $Mdx+Ndy$ integrationem admittat. Si enim haec conditio proponatur, vt fit $Q-N=(P-M)p$, functio quaefita V ita prodibit expreffa:

$$V=\Sigma+\int(Mdx+Ndy).$$

Problema

Problema 10.

38. Exiſtente $dV = P\,dx + Q\,dy$, inuenire, qualis ſit V functio ipſarum x et y, vt fiat $Q = \frac{Py}{x} + nx$.

Solutio.

Cum ſit $Q = \frac{Py}{x} + nx$, erit $dV = \frac{P}{x}(xdx + ydy) + nxdy$. Statuatur $xx + yy = ss$, vt ſit $x = \surd(ss - yy)$, ac fiet

$$dV = \frac{Ps}{x}ds + nxdy = \frac{Ps}{x}ds + ndy\surd(ss - yy)$$

vnde patet, V eſſe functionem ipſarum y et s, et quidem talem, vt poſita s conſtante ea differentiata praebeat $ndy\surd(ss - yy)$. Quare viciſſim functio V reperietur, ſi formula $ndy\surd(ss - yy)$, ſpectato s vt conſtante, integretur, et inſuper functio quaecunque ipſius s adiiciatur. Cum igitur ſit $\int ndy\surd(ss - yy) = \frac{1}{2}ny\surd(ss - yy) + \frac{1}{2}nss\,\text{A ſin.}\,\frac{y}{s}$, erit Φ pro ſigno functionis cuiuscunque aſſumendo:

$$V = \tfrac{1}{2}nxy + \tfrac{1}{2}n(xx + yy)\,\text{A tang.}\,\frac{y}{x} + \Phi:(xx + yy)$$

in qua forma functio quaeſita V ſemper debet contineri.

Scholion.

39. Hoc exemplum, vtut valde particulare, tamen non continetur in problemate praecedente, neque in eius amplificatione ipſi in coroll. poſtremo illata, quoniam in formula reducta membrum $nxdy = ndy\surd(ss - yy)$ non eſt integrabile. Quare probe notetur artificium, quo hic ſum vſus, et quod in hoc

consistit, quod valorem differentialis dV ad duas alias variabiles s et y, scilicet $dV = R ds + T dy$, reuocaui, cuius alterum membrum $T dy$ absolute datur, vnde problema ad primum genus pertinet, in quo binarum quantitatum P et Q alterutra est cognita. Huiusque artificii ope problema sequens multo latius patens resolui poterit.

Problema II.

40. Si sint p et t functiones datae quaecunque binarum variabilium x et y, definire indolem functionis V, vt posito $dV = P dx + Q dy$ sit $Q = Pp + t$.

Solutio.

Habebitur ergo, substituto pro Q isto valore:

$$dV = P(dx + p dy) + t dy$$

vbi pro formula differentiali $dx + p dy$ iterum idoneus multiplicator q quaeratur, qui eam integrabilem reddat. Sit ergo $q(dx + p dy) = ds$, et iam quantitas s tanquam noua variabilis introducatur, per quam et y altera variabilis x definiatur. Hoc modo x aequabitur cuipiam functioni datae ipsarum s et y, quae in t vbique loco x scribatur, sicque fiet t functio quoque data ipsarum s et y. Cum ergo ob $dx + p dy = \frac{ds}{q}$ sit $dV = \frac{P}{q} ds + t dy$, erit V eiusmodi functio ipsarum s et y, quae spectata s vt constante differentiata praebeat $t dy$, quare viciffim pro functione V inuenienda integretur formula differentialis $t dy$, spectata s vt constante, sit integrale hoc modo proueniens $\int t dy = T$, quod igitur etiam datur, tum quia quantitas P non datur,

datur, erit $V = T + \Phi . s$. Denique hic pro s et in T restituatur valor ipsius s vi x et y, atque patebit, quomodo functio V ex x et y sit composita.

Exemplum.

41. *Quaeratur indoles functionis* V, *vt posita* $\surd V = Pdx + Qdy$, *sit* $Px + Qy = n(xx + yy)$

Cum ergo sit $Q = -\frac{Px}{y} + \frac{n(xx+yy)}{y}$, erit $p = -\frac{x}{y}$ et $t = \frac{n(xx+yy)}{y}$, vnde $dx + pdy = dx - \frac{xdy}{y}$. Capiatur $q = \frac{1}{y}$, erit $ds = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$ et $s = \frac{x}{y}$; hincque $x = sy$ et $t = ny(ss+1)$. Quare spectata s vt constante, habebitur $\int tdy = \frac{1}{2}nyy(ss+1) = \frac{1}{2}n(xx+yy) = T$; sicque tandem prodit:

$$V = \tfrac{1}{2}n(xx+yy) + \Phi . \frac{x}{y}$$

vbi notandum est, $\Phi : \frac{x}{y}$ exprimere functionem quamcunque nullius dimensionis binarum variabilium x et y.

Scholion.

42. Feliciter igitur expediuimus casum, quo relatio inter P et Q per aequationem quamcunque primi gradus exprimitur, in qua scilicet quantitates P et Q non vltra primam dimensionem assurgunt Ex tali enim aequatione Q semper ita definietur, vt sit $Q = Pp + t$, existentibus p et t functionibus quibuscunque datis ipsarum x et y. Verum hic iterum aqua haeret, quoties aequationem $dx + pdy = o$ resoluere non licet, quia tum quantitas s inueniri nequit. Tum vero etiamsi haec quantitas s sit inuenta, cum fuerit imprimis transcen-

 dens,

dens, ex ea plerumque difficillimum erit, variabilem x definire, ita vt tantum binae s et y in calculo superſint. Poterunt quidem ſubſidia excogitari, quibus tametſi ex functione data t variabilis x non eliminetur, tamen formulae tdy id integrale T erui queat, quod prodire debet, ſpectata quantitate s vt conſtante. Verum quantaecunque ſint iſtae difficultates, eae non huic methodo, quam adumbrare coepi, ſunt imputandae. Videamus ergo quousque nobis progredi liceat, ſi relatio inter P et Q per aequationem vel ſecundi, vel ſuperiorum graduum detur.

Problema 12.

43 Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $PQ = \alpha$.

Solutio.

Cum ſit $Q = \frac{\alpha}{P}$, erit $dV = Pdx + \frac{\alpha dy}{P}$, quaeriturque, qualis functio debeat eſſe P, vt iſta formula differentialis $Pdx + \frac{\alpha dy}{P}$ fiat integrabilis. Adhibeamus hic transformationem integralium obuiam, qua eſt $\int z\,du = zu - \int u\,dz$, ac reperietur:

$$V = Px + \frac{\alpha y}{P} - \int x\,dP + \int \frac{\alpha y\,dP}{PP}.$$

Quare neceſſe eſt, vt haec formula differentialis $dP(\frac{\alpha y}{PP} - x)$ integrabilis exiſtat; id quod fieri nequit, niſi $\frac{\alpha y}{PP} - x$ ſit functio ipſius P; quo caſu etiam integrale $\int dP(\frac{\alpha y}{PP} - x)$ fiet functio ipſius P. Denotet ergo Π functionem quamcunque ipſius P, ac ponatur $\frac{\alpha y}{PP} - x = \Pi$, ex cuius

ius aequationis resolutione quantitas P per x et y definiri intelligitur. Inuenta autem hac functione P habebimus:

$$V = Px + \frac{\alpha y}{P} + \int \Pi \, dP.$$

Coroll. 1.

44. Casus ergo simplicissimus, quo huic problemati satisfit, est si $\Pi = 0$, quo fit $P = \sqrt{\frac{\alpha y}{x}}$, et $\int \Pi \, dP =$ const. Habebimus ergo

$$V = 2\sqrt{\alpha x y} + \text{Const.}$$

nam ob $dV = \frac{dx\sqrt{\alpha y}}{\sqrt{x}} + \frac{dy\sqrt{\alpha x}}{\sqrt{y}}$ erit vtique $PQ = \alpha$.

Coroll. 2.

45. Tum sumto $\Pi = \beta$, erit $P = \frac{\alpha y}{x+\beta}$ et $\int \Pi \, dP = \beta P$. Hoc ergo casu consequemur sequentem functionem satisfacientem:

$$V = x\sqrt{\frac{\alpha y}{x+\beta}} + \sqrt{\alpha y(x+\beta)} + \beta\sqrt{\frac{\alpha y}{x+\beta}} = 2\sqrt{\alpha y(x+\beta)}$$

et generalius satisfacere manifestum est

$$V = 2\sqrt{\alpha(x+\beta)(y+\gamma)}.$$

Coroll. 3.

46. Si velimus functiones magis compositas, quae tamen exhiberi queant, sit $\Pi = \beta PP$, ideoque $\int \Pi \, dP = \frac{1}{3}\beta P^3$. At cum habeamus:

$\frac{\alpha y}{PP} - x = \beta PP$ seu $P^4 = \frac{-xPP + \alpha y}{\beta}$, fiet

$PP = \frac{-x + \sqrt{(xx + 4\alpha\beta y)}}{2\beta}$, vnde ob

$$V = \frac{PPx + \alpha y + \frac{1}{3}\beta P^4}{P} = \frac{2PPx + 4\alpha y}{3P}$$

et

et ſubſtitutione abſoluta:

$$V = \sqrt{\tfrac{2}{9\beta}}((xx + 4\alpha\beta y)^{\frac{3}{2}} + x(12\alpha\beta y - x^2)).$$

Scholion 1.

47. Eodem modo reſolui poſſe patet problema, ſi Q debeat eſſe functio quaecunque ipſius P. Ponatur enim $dQ = R\,dP$, et fiet $V = Px + Qy - \int(x + Ry)\,dP$. Oportet ergo eſſe $x + Ry$ functionem ipſius P, cuius etiam R eſt functio data. Quare ſi ponatur, vt ante, $x + Ry = \Pi$, ex hac aequatione P per x et y definietur; quo valore deinceps in Q, R et Π ſubſtituto obtinebitur functio $V = Px + Qy - \int \Pi\,dP$ per ſolas binas variabiles x et y expreſſa.

Exemplum.

48. Quaeratur functio V, vt poſito $dV = P\,dx + Q\,dy$, ſit $PP + QQ = aa$, ſeu $Q = \sqrt{(aa - PP)}$: hincque $R = \frac{-P}{\sqrt{(aa - PP)}}$, et $x - \frac{Py}{\sqrt{(aa - PP)}} = \Pi$, vnde P debet definiri. Sumatur autem $\Pi = 0$, fiet $P = \frac{ax}{\sqrt{(xx + yy)}}$, et $Q = \frac{ay}{\sqrt{(xx + yy)}}$, et $V = a\sqrt{(xx + yy)}$.

Scholion 2.

49. At ſi Q non ſolum per P detur, ſed etiam variabiles x et y vtcunque in eius determinationem ingrediantur, tum hoc modo negotium non expedire licet. Verum his caſibus perpendendum eſt, quemadmodum P et Q vt functiones ipſarum x et y conſiderantur, ita quaternarum P, Q, x et y binas quasque

vt

vt functiones binarum reliquarum considerari posse. Quare quouis casu oblato non ad hanc formulam $Pdx+Qdy$ sumus adstricti, quam integrabilem reddi oporteat, sed negotium pariter conficiemus, si vel hanc $-xdP+Qdy$, vel hanc $Pdx-ydQ$, vel hanc $-xdP-ydQ$ integrabilem reddamus; quin etiam per substitutiones nouae variabiles introduci possunt, quo pacto methodus soluendi vehementer amplificabitur; cuius rei aliquot specimina attulisse iuuabit.

Problema 13.

50. Existente $dV=Pdx+Qdy$, si Q detur vtcunque per x et P, inuenire indolem functionis V.

Solutio.

Cum Q ponatur dari per x et P, habebitur aequatio inter ternas quantitates x, P et Q, ex quo etiam P definiri poterit per x et Q, ita vt P aequetur certae cuipiam functioni ipsarum x et Q. Sumantur ergo x et Q pro binis variabilibus, ex quibus reliqua omnia sint determinanda, et cum sit:

$$V=Qy+\int(Pdx-ydQ)$$

necesse est, vt formula differentialis $Pdx-ydQ$ sit integrabilis, cuius integrale spectetur tanquam functio ipsarum x et Q. Cum igitur P per x et Q detur, quarta autem variabilis y indefinita relinquatur, hoc integrale $\int(Pdx-ydQ)$ inuenietur, si spectata Q vt constante formula Pdx integretur, et ad integrale functio quaecunque ipsius Q adiiciatur. Sit igitur integrale hoc modo ſumtum $\int P\,dx = R$, eritque R functio data ipſarum x et Q, vnde fiat $dR = P\,dx + S\,dQ$, vtraque ſcilicet quantitate x et Q pro variabili ſumta. Quo poſito habebimus $\int (P\,dx - y\,dQ) = R + \Phi.\,Q$, et $V = Qy + R + \Phi.\,Q$. Deſignetur iam differentiale ipſius $\Phi : Q$ per $dQ.\,\Phi' : Q$, eritque

$$P\,dx - y\,dQ = P\,dx + S\,dQ + dQ.\,\Phi' : Q$$

vnde fit $y = -S - \Phi' : Q$. Denique ex hac aequatione $y = -S - \Phi' : Q$ vna cum relatione, quae inter Q, P et x intercedit, definiantur per binas variabiles x et y alterae binae P et Q, earumque valores reſtituti oſtendent, qualis functio V debeat eſſe ipſarum x et y; in quo id ipſum, quod quaeritur, conſiſtit.

Coroll. 1.

51. Simili modo, ſi Q detur per y et P, ita, vt x non ingrediatur in hanc relationem, vtendum erit hac forma $V = Px + \int (Q\,dy - x\,dP)$, quae, cum Q conſiderari debeat tanquam functio data ipſarum x et P, paribus operationibus ad integrabilitatem perducetur.

Coroll. 2.

52. Quodſi autem, vel P, vel Q, per x et y determinantur, quaeſtio nihil habet difficultatis. Si enim ſit P functio data ipſarum x et y, quaeratur integrale $\int P\,dx$, ſpectata y vt conſtante, poſitoque $\int P\,dx = R$, erit $V = R + \Phi : y$.

Coroll. 3.

53. Quoties ergo relatio inter quantitates P, Q, x et y per huiusmodi aequationem datur, in quam tantum ternae harum quantitatum ingrediantur, indoles functionis V per problemata iam tractata definiri poteſt.

Scholion.

54. Ex hoc ergo genere ſuperſunt caſus, quibus relatio data omnes quatuor litteras P, Q, x et y continet. At pro hoc iam eum caſum euoluimus, quo erat $Q = Pp + t$, exiſtentibus p et t functionibus quibuscunque ipſarum x et y, cuius ſolutio in Probl. 11 eſt exhibita. Quia vero loco binarum variabilium x et y, ſequentia paria ſimili modo tractari poſſunt:

I. Si ſit $Q = xM + N$,

exiſtentibus M et N functionibus quibuscunque ipſarum P et y.

II. Si ſit $P = yM + N$,

exiſtentibus M et N functionibus quibuscunque ipſarum Q et x.

III. Si ſit $y = xM + N$,

exiſtentibus M et N functionibus quibuscunque ipſarum P et Q. His ſcilicet quoque caſibus ſolutio per praecepta §. 40 tradita inueniri poterit.

Exemplum.

55. *Exiſtente* $dV = Pdx + Qdy$, *oporteat definire functionem* V, *vt ſit* $xyPQ = \alpha$.

Bb 2 Cum

Cum ergo ſit $Q = \frac{\alpha}{Pxy}$, erit

$$dV = Pdx + \frac{\alpha dy}{Pxy}$$

qui caſus in nullo tractatorum continetur. Verum poſito $ly = u$, cum ſit $dV = Pdx + \frac{\alpha du}{Px}$, ſi u loco y ſpectemus, hancque formam cum $Pdx + Qdy$ comparemus, erit iſtud $Q = \frac{\alpha}{Px}$, ideoque per x et P tantum datur; ita vt hoc exemplum reductum ſit ad praeſens problema. Ne igitur hoc Q cum principali confundatur, cum ſit $P = \frac{\alpha}{Qx}$, habebimus ſcribendo u loco y:

$$V = Qy + \int \left(\frac{\alpha dx}{Qx} - y dQ\right)$$

ſumta ergo Q conſtante, erit $\int \frac{\alpha dx}{Qx} = R = \frac{\alpha}{Q} lx$, hincque $S = \frac{-\alpha lx}{QQ}$: vnde fit $u = ly = \frac{\alpha lx}{QQ} - \Phi' : Q$, et

$$V = Qly + \frac{\alpha lx}{Q} + \Phi : Q$$

exiſtente $\Phi : Q = \int dQ \Phi' : Q$, vbi pro $\Phi' : Q$ ſumi poteſt functio quaecunque ipſius Q.

Sit ergo pro caſu ſimpliciſſimo $\Phi' : Q = 0$, eritque $Q = \sqrt{\frac{\alpha lx}{ly}}$, et $V = 2\sqrt{\alpha lx . ly}$ + Conſt.

Ac ſi ſumatur $\Phi' : Q = n - \frac{\alpha m}{QQ}$, fiet $\Phi : Q = nQ + \frac{\alpha m}{Q} + C$ et $ly + n = \frac{\alpha(lx + m)}{QQ}$, hincque $Q = \sqrt{\alpha \frac{lx + m}{ly + n}}$, et

$$V = 2\sqrt{\alpha(lx + m)(ly + n)} + \text{Conſt.}$$

Problema 14.

56. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $PP + QQ = xx + yy$.

Solu-

Solutio.

Hoc problema in nullo caſuum hactenus tractatorum continetur; verumtamen idonea transformatione ad caſum facillimum reduci poteſt. Ponatur enim $PP + QQ = xx + yy = tt$, ſitque angulis duobus indefinitis Φ et θ introducendis:

$P = t\,\text{ſin.}\,\Phi$; $Q = t\,\text{coſ.}\,\Phi$; $x = t\,\text{ſin.}\,\theta$ et $y = t\,\text{coſ.}\,\theta$ ob $dx = dt\,\text{ſin.}\,\theta + td\theta\,\text{coſ.}\,\theta$, et $dy = dt\,\text{coſ.}\,\theta - td\theta\,\text{ſin.}\,\theta$, erit:

$dV - tdt(\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\theta + \text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\theta) - ttd\theta(\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\theta - \text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\theta)$

ſeu $dV = tdt\,\text{coſ.}\,(\theta - \Phi) - ttd\theta\,\text{ſin.}\,(\theta - \Phi)$.

At eſt $\int tdt\,\text{coſ.}\,(\theta - \Phi) = \frac{1}{2}tt\,\text{coſ.}\,(\theta - \Phi) + \frac{1}{2}\int tt\,(d - \theta\Phi)\,\text{ſin.}\,(\theta - \Phi)$ vnde fit:

$$V = \tfrac{1}{2}tt\,\text{coſ}\,(\theta - \Phi) - \tfrac{1}{2}\int tt\,(d\theta + d\Phi)\,\text{ſin.}\,(\theta - \Phi).$$

Cum igitur haec formula integrabilis eſſe debeat, neceſſe eſt, vt ſit $tt\,\text{ſin.}\,(\theta - \Phi) = \text{funct.}\,(\theta + \Phi)$.

Quare cum ſit $tt = xx + yy$ et $\text{tang.}\,\theta = \frac{x}{y}$, hinc angulus Φ per x et y determinabitur, cuius valor ſubſtitutus dabit functionem V, per x et y expreſſam.

Sit, vt functiones algebraicas ſimpliciores eliciamus, $tt\,\text{ſin.}\,(\theta - \Phi) = \alpha\,\text{ſin.}\,(\theta + \Phi) + \beta\,\text{coſ.}\,(\theta + \Phi)$, eritque

$$V = \tfrac{1}{2}tt\,\text{coſ}\,(\theta - \Phi) + \tfrac{1}{2}\alpha\,\text{coſ.}\,(\theta + \Phi) - \tfrac{1}{2}\beta\,\text{ſin.}\,(\theta + \Phi)$$

vnde, ſi eliminetur tt, prodit:

$$2V\,\text{ſin.}\,(\theta - \Phi) = \alpha\,\text{ſin.}\,2\theta + \beta\,\text{coſ.}\,2\theta = \frac{2\alpha xy - \beta(xx - yy}{xx + yy}.$$

At euolutis illis angulis, fit:

$tt\,x\,\text{coſ.}\,\Phi - tty\,\text{ſin.}\,\Phi = \alpha x\,\text{coſ.}\,\Phi + \alpha y\,\text{ſin.}\,\Phi + \beta y\,\text{coſ.}\,\Phi - \beta x\,\text{ſin.}\,\Phi$

ideoque $\text{tang.}\,\Phi = \frac{ttx - \alpha x - \beta y}{tty + \alpha y - \beta x}$ et

sec. $\Phi = \frac{\sqrt{(t^6 - 2\alpha tt(xx-yy) - 4\beta ttxy + \alpha\alpha tt + \beta\beta tt)}}{tty + \alpha y - \beta x}$
sit $T = t\sqrt{(t^4 - 2\alpha(xx-yy) - 4\beta xy + \alpha\alpha + \beta\beta)}$
erit si $\Phi = \frac{ttx - \alpha x - \beta y}{T}$ et cos. $\Phi = \frac{tty + \alpha y - \beta x}{T}$
hincque sin. $(\theta - \Phi) = \frac{2\alpha xy - \beta(xx-yy)}{Tt}$, quo valore substituto, orietur $V = \frac{T}{2t}$ ideoque

$$V = \tfrac{1}{2}\sqrt{((xx+yy)^2 - 2\alpha(xx-yy) - 4\beta xy + \alpha\alpha + \beta\beta)}$$

quae functio etiam hoc modo repraesentari potest:

$$V = \tfrac{1}{2}\sqrt{((\alpha - xx + yy)^2 + (\beta - 2xy)^2)}.$$

Casus simplicissimus prodit sumendo $\alpha = 0$, et $\beta = 0$, quo fit $V = \frac{1}{2}(xx + yy)$, et $dV = xdx + ydy$.

Scholion.

57. Ex hoc problemate intelligitur, quomodo huiusmodi quaestiones, quae dum omnes quatuor litterae in relationem praescriptam ingrediuntur, solutu difficillimae videntur, idonea tamen substitutione interdum ad casus iam tractatos reduci queant. Neque vero adhuc modum perspicio, quo in genere, vtcunque relatio inter quatuor quantitates P, Q, x et y fuerit comparata, solutio obtineri possit; plurima autem alia huiusmodi exempla afferre possem, in quibus reductio ad casus iam tractatos perfici queat; sed quia hoc argumentum minime exhaurire confido, ad sequentia capita progredior, quando relatio praescripta praeter quantitates P, Q, x et y etiam ipsam functionem quaesitam V complectitur: vbi quidem per se est perspicuum, si relatio inter V, x et y tantum proponeretur, ne quaestionem quidem fore, cum functio V immedia-

mediate per x et y daretur. Quare ab eiusmodi problematibus exordiar, vbi relatio praescripta praeter functionem V alterutram quantitatum P et Q vel etiam ambas implicat; dum variabiles x et y ipsae vel simul ingrediuntur, vel secus. Facile autem intelligitur, haec problemata multo esse difficiliora praecedentibus.

Problema 15.

58. Existente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $P = nV$.

Solutio.

Cum sit $P = nV$, erit $dV = nVdx + Qdy$, seu $dV - nVdx = Qdy$. Multiplicetur prius membrum per e^{-nx}, vt fiat integrabile, eiusque integrale $e^{-nx}V = \int e^{-nx}Qdy$ aequari debebit functioni cuicunque ipsius y, quae sit $= Y$. Vnde functio quaesita erit $V = e^{nx}Y$.

Aliter.

Cum V debeat esse eiusmodi functio ipsarum x et y, vt eius differentiale sit $dV = nVdx + Qdy$; perspicuum est, si functio V differentietur posita y constante, proditurum esse $dV = nVdx$. Quare vicissim ex integratione formulae $dV = nVdx$ functio V inuenietur, si y vt constans spectetur; tum vero constans per integrationem ingressa quantitatem y vtcunque inuoluere poterit. At aequatio $dV = nVdx$ integrata praebet $lV = nx + lY$, seu $V = e^{nx}Y$ vt ante.

Coroll.

Coroll. 1.

59. Eodem modo reſolui poterit quaeſtio latius patens, ſi P debeat eſſe functio quaecunque ipſius V. Conſideretur enim, ſpectata y vt conſtante, haec aequatio differentialis $dV = Pdx$, quae cum duas tantum variabiles contineat V et x integretur, conſtanti autem ingreſſa quantitas y vtcunque inuoluatur.

Coroll. 2.

60. Quia binae variabiles x et y ſunt inter ſe permutabiles, eodem modo reſoluitur problema, ſi Q debeat eſſe functio quaecunque ipſius V.

Problema 16.

61. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt P fiat functio quaecunque ipſarum V et x.

Solutio.

Cum igitur P detur per V et x, ſi y vt conſtantem ſpectemus, habebimus hanc aequationem $dV = Pdx$ inter duas variabiles x et V. Integretur itaque ea, et loco conſtantis in aequationem integralem introducatur functio quaecunque ipſius y; hoc modo obtinebitur aequatio inter V, x et y, qua indoles functionis V per x et y definietur.

Coroll. 1.

62. Quaecunque igitur relatio inter ternas quantitates V, P et x proponatur, ſiue ex ea V per x et

et P, ſiue P per V et x, ſiue x per V et P definiatur, ſolutio problematis ſemper erit in promtu.

Coroll. 2.

63. Ob permutabilitatem variabilium x et y, eodem modo problema ſoluetur, ſi relatio quaecunque inter Q, V et y proponatur: neque opus eſt, vt hunc caſum ſeorſim euoluamus.

Exemplum 1.

64. *Poſito* $dV = Pdx + Qdy$ *oporteat eſſe* $P = \frac{mV}{x} + nx$; ſpectata ergo y vt conſtante, erit $dV = \frac{mVdx}{x} + nxdx$ ſeu $dV - \frac{mVdx}{x} = nxdx$, cuius integralis eſt

$$\frac{V}{x^m} = \frac{nx^{2-m}}{2-m} + Y$$

exiſtente Y functione quacunque ipſius y. Quare erit

$$V = x^m Y + \frac{n}{2-m} xx$$

ſi eſſet $m = 2$, foret $V = xxY + nxxlx$

Exemplum 2.

65. *Poſito* $dV = Pdx + Qdy$ *oporteat eſſe* $aV = P(aa - xx)$.

Cum ergo ſit $P = \frac{aV}{aa - xx}$ erit, ſumta y conſtante:

$$dV = \frac{aVdx}{aa - xx} \text{ ſeu } \frac{dV}{V} = \frac{adx}{aa - xx},$$

cuius integrale eſt $lV = \frac{1}{2} l \frac{a+x}{a-x} lY$, vnde habebitur $V = Y \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, denotante Y functionem quamcunque ipſius y.

Problema 17.

65 Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, ſi P fiat functio quaecunque data ipſarum x, y et V.

Solutio.

Aſſumo hic, relationem propoſitam contineri aequatione quacunque inter quatuor quantitates x, y, V et P; ex qua idcirco P per x, y et V definire liceat. Spectetur igitur y vt quantitas conſtans, et cum ſit $dV = Pdx$, haec aequatio iam duas tantum variabiles x et V inuoluet. Integretur igitur ea, et loco conſtantis introducatur functio quaecunque ipſius y, hocque modo prodibit aequatio, naturam functionis V oſtendens.

Corollarium.

67. Simili ergo modo problema ſoluetur, ſi proponatur relatio quacunque inter quatuor quantitates x, y, Q et V, quo caſu hoc tantum diſcrimen obſeruetur, vt primum quantitas x tanquam conſtans ſpectetur.

Exemplum.

68. *Poſito* $dV = Pdx + Qdy$, *oporteat eſſe* $V = \frac{Px}{y}$. Cum igitur ſit $P = \frac{Vy}{x}$, erit, ſumta y conſtante:

$$dV = \frac{Vydx}{x}, \text{ ideoque } lV = ylx + lY$$

vnde prodit functio quaeſita $V = x^y Y$.

Scholion.

Scholion.

69. Quodsi ergo in relationem propositam alterutra tantum quantitatum P et Q ingrediatur, problemata sunt solutu facilia. Verum si utraque quantitas P et Q insit, maior difficultas occurrit, quae quandoque tanta est, ut superari nullo modo queat. Quoniam igitur hoc casu solutionem generalem expectare non licet, nonnulla exempla, quae quidem satis late pateant, percurramus.

Problema 18.

70. Existente $dV = Pdx + Qdy$, inuenire indolem functionis V, vt fiat $V = mPx + nQy$.

Solutio.

Cum hinc sit $Q = \frac{V - mPx}{ny}$, erit:

$$dV - \frac{Vdy}{ny} = Pdx - \frac{mPxdy}{ny} = \frac{P}{ny}(nydx - mxdy).$$

Quaeratur multiplicator, qui formulam $nydx - mxdy$ reddat integrabilem, qui cum sit $\frac{1}{xy}$, ideoque

$$dV - \frac{Vdy}{ny} = \frac{Px}{n}\left(\frac{ndx}{x} - \frac{mdy}{y}\right)$$

ponatur $nlx - mly = lz$ seu $z = \frac{x^n}{y^m}$; vnde fit $x = y^{\frac{m}{n}} z^{\frac{1}{n}}$, qui valor loco x substitui concipiatur. Quare cum sit $dV = \frac{Vdy}{ny} + \frac{Pxdz}{nz}$; quantitas V spectari poterit tanquam functio binarum quantitatum y et z: quae igitur talis esse debet, vt sumta z constante fiat $dV = \frac{Vdy}{ny}$. Hinc ergo integrando prodibit:

$$lV = \tfrac{1}{n}ly + lZ \text{ seu } V = y^{\frac{1}{n}}Z$$

sumta pro Z functione quacunque ipsius $z = \frac{x^n}{y^m}$: sicque habebitur $V = y^{\frac{1}{n}} \Phi : \frac{x^n}{y^m}$.

Coroll. 1.

71. Cum sit $\frac{x^{\frac{1}{m}}}{y^{\frac{1}{n}}}$ functio ipsius $\frac{x^n}{y^m}$, erit etiam $V = x^{\frac{1}{m}} \Phi . \frac{x^n}{y^m}$. Tum vero etiam ita exhiberi potest: $V = x^{\frac{1}{m}} \Phi . \frac{x^{\lambda n}}{y^{\lambda m}}$; vel $V = y^{\frac{1}{n}} \Phi : \frac{x^{\lambda n}}{y^{\lambda m}}$, sumto pro n numero quocunque.

Coroll. 2.

72. Si sit $m = n$, casus habebitur functionum homogenearum supra tractatus. Sumto enim $\lambda = \frac{1}{n}$, denotabit $\Phi : \frac{x}{y}$ functionem quamcunque nullius dimensionis ipsarum x et y: et V fiet earundem functio homogenea, cuius dimensionum numerus est $= \frac{1}{n}$.

Coroll. 3.

73. Si ponamus in genere $x^{\frac{1}{m}} = t$ et $y^{\frac{1}{n}} = u$; tum vero capiamus $\lambda = \frac{1}{mn}$, habebimus $V = t \Phi . \frac{t}{u}$, seu V erit functio homogenea vnius dimensionis binarum quantitatum t et u.

Scholion.

74. Si desideretur, vt sit $V = mP + nQ$, solutio aeque parum habebit difficultatis. Nam ob $Q = \frac{V}{n} - \frac{mP}{n}$ erit

erit $dV - \frac{Vdy}{n} = P(dx - \frac{mdy}{n})$. Statuatur $x - \frac{my}{n} = z$, vt ſit $dV = \frac{Vdy}{n} + Pdz$: iam ſpectata z vt conſtante, erit $lV = \frac{y}{n} + \Phi : z$, ideoque

$$V = e^{\frac{y}{n}} \Phi : (nx - my).$$

At ſi debeat eſſe $V = mPy + nQx$, ob $Q = \frac{V - mPy}{nx}$, erit $dV = P(dx - \frac{mydy}{nx}) + \frac{Vdy}{nx}$. Statuatur $nxx - myy = zz$, vt ſit $x = \sqrt{\frac{zz + myy}{n}}$, et cum fiat:

$$dV = \frac{Vdy}{\sqrt{n(zz + myy)}} + \frac{P}{nx} zdz,$$

ſpectetur quantitas z vt conſtans, et ob $\frac{dV}{nV} = \frac{dy}{\sqrt{(nzz + mnyy)}}$ erit $lV = \frac{1}{\sqrt{mn}} l(y\sqrt{mn} + \sqrt{n(zz + myy)}) + lZ$, ideoque ob $\sqrt{n(zz + myy)} = nx$, prodibit:

$$V = (y\sqrt{m} + x\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{mn}}} \Phi : (nxx - myy).$$

Quare ſi eſſe debeat $V = Py + Qx$, erit:

$$V = (x + y)\Phi : (xx - yy).$$

Problema autem ſequens omnes huiusmodi caſus in ſe complectetur.

Problema 19.

75. Si p ſit functio quaecunque data ipſarum x et y, at M functio quaecunque etiam data ipſarum x, y et V, definire indolem functionis V, vt, poſito $dV = Pdx + Qdy$, fiat $Q = Pp + M$.

Solutio.

Subſtituto hoc loco Q valore, habemus:

$$dV = Mdy + P(dx + pdy).$$

 Quae-

Quaeratur multiplicator q, formulam $dx+pdy$ integrabilem reddens, sitque $\int q(dx+pdy)=z$: vnde valor ipsius x definiatur per y et z, isque in M, quatenus x inest, loco x substituatur, quo facto erit:

$$dV=M\,dy+\frac{Pdz}{q}$$

sicque V considerari poterit vt functio ipsarum y et z. Spectetur nunc z vt quantitas constans, et cum sit $dV=M\,dy$, vbi duae tantum variabiles y et V inesse sunt intelligendae, integretur haec aequatio et loco constantis introducatur functio quaecunque ipsius z: in qua si loco z valor in x et y, scilicet: $\int q(dx+pdy)$ restituatur, illa aequatio $dV=M\,dy$ integrata exhibebit naturam functionis V, quemadmodum ea a binis variabilibus x et y pendere debet.

Exemplum.

76. *Posito* $dV=P\,dx+Q\,dy$, *oportet esse* $V=Pyy+Qxx$. Est ergo $Q=-\frac{Pyy}{xx}+\frac{V}{nx}$, vnde fit

$$dV=\frac{V\,dy}{xx}+P\left(dx-\frac{yy\,dy}{xx}\right)$$

Sumatur $q=xx$, erit $\int(xx\,dx-yy\,dy)=z=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}y^3$ seu $x^3=y^3+3z$, ideoque $xx=(y^3+3z)^{\frac{2}{3}}$. Sumto igitur z constante, habetur

$$\frac{dV}{V}=\frac{dy}{(y^3+3z)^{\frac{2}{3}}}$$

Sit itaque S integrale formulae $\frac{dy}{(y^3+3z)^{\frac{2}{3}}}$, dum z constans assumitur, et obtinebitur:

V=

$$V = e^S \phi : z = e^S \Phi : (x^3 - y^3),$$

ſcilicet in S loco z vbique eius valor $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3$ ſubſtitui debet.

Problema 20.

77. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt ſit $V = nPQ$.

Solutio.

Ergo ob $Q = \frac{V}{nP}$ erit

$$dV = Pdx + \frac{Vdy}{nP}.$$

Quo iam V ex poſteriori membro poſſit ſeparari, ponatur $P = R\sqrt{V}$, prodibitque:

$$\frac{dV}{\sqrt{V}} = Rdx + \frac{dy}{nR},$$

vnde conuertendo obtinetur:

$$2\sqrt{V} = Rx + \frac{y}{nR} - \int dR\left(x - \frac{y}{nRR}\right).$$

Quare neceſſe eſt, vt $x - \frac{y}{nRR}$ ſit functio ipſius R tantum; ac tali functione aſſumta definiri poterit R per x et y, vnde etiam functio quaeſita V per x et y expreſſa reperietur.

Aliter.

Cum ſit $V = nPQ$, eliminetur V, vt habeatur haec aequatio:

$$nPdQ + nQdP = Pdx + Qdy$$

ex qua fit $dy = -\frac{Pdx}{Q} + \frac{nPdQ}{Q} + ndP$,

hincque $y = nP + \int \frac{P}{Q}(ndQ - dx)$.

Neceſſe ergo eſt, vt $\frac{P}{Q}$ ſit functio quantitatis $nQ - x$.

Pona-

Ponatur $nQ - x = z$; sitque $\int \frac{P}{Q} dz = \Phi : z$, erit $\frac{P}{Q} = \Phi' : z$ et $y = nP + \Phi \cdot z = nQ\Phi' : z + \Phi : z$. At est $V = nQQ\Phi' : z$, vnde $Q = \sqrt{\frac{V}{n\Phi' : z}}$; sicque habebuntur hae aequationes:

$$\sqrt{\frac{nV}{\Phi' : z}} = x + z \text{ et } y = \Phi z + \sqrt{nV\Phi' : z},$$

ex quibus conficitur $nV = (x + z)(y - \Phi z)$: ac si eliminetur quantitas z, orietur functio V per x et y expressa.

Coroll. 1.

78 Capiatur z constans, seu $ndQ - dx = 0$, fiet $Q = \frac{x + a}{n}$ et $y = nP - b$, seu $P = \frac{y + b}{n}$; vnde oritur $V = \frac{(x + a)(y + b)}{n}$ qui est casus simplicissimus.

Coroll. 2.

79 Si statuatur $\Phi' : z = a$, erit $\Phi z = az + b$, vnde fit:

$\sqrt{\frac{nV}{a}} = x + z$ et $nV = (y - az - b)\sqrt{\frac{nV}{a}}$ seu $\sqrt{naV} = y - b - az$, ex quibus coniunctis nanciscimur: $2\sqrt{naV} = ax + y - b$, hincque $V = \frac{(ax + y - b)^2}{4na}$; qui est alter casus simplicissimus.

Coroll. 3.

80. Sit $\Phi' : z = \frac{1}{(az + b)^2}$; vt sit $\Phi : z = -\frac{1}{a(az + b)} + c$ et fiet:

$(az + b)\sqrt{nV} = x + z$ et $y - c + \frac{1}{a(az + b)} = \frac{\sqrt{nV}}{az + b}$ seu $a(az + b)(y - c) = a\sqrt{nV} - 1$: at inde est $z = \frac{x - b\sqrt{nV}}{a\sqrt{nV} - 1}$, ideoque $az + b = \frac{ax - b}{a\sqrt{nV} - 1}$; hocque valore substituto:

$a(ax-b)(y-c)=(a\sqrt{n}V-1)^2$, quae euolutio praebet:

$$V=\frac{1+a(ax-b)(y-c)+2\sqrt{a(ax-b)(y-c)}}{naa}.$$

Problema 21.

81. Existente $dV=Pdx+Qdy$, si detur V vtcunque per P et Q, definire indolem functionis V, seu quemadmodum V per x et y determinetur.

Solutio.

Cum igitur sit V functio binarum quantitatum P et Q, ponatur eius differentiale $dV=MdP+NdQ$, eruntque etiam M et N functiones datae ipsarum P et Q. Quare cum sit

$MdP+NdQ=Pdx+Qdy$, erit

$dy=-\frac{Pdx}{Q}+\frac{MdP+NdQ}{Q}$, ideoque

$y=-\frac{Px}{Q}+\int(xd.\frac{P}{Q}+\frac{MdP}{Q}+\frac{NdQ}{Q})$.

Ponatur $P=QS$, qui valor in M et N loco P substitui intelligatur, ita vt iam variabiles Q et S considerandae occurrant, fietque:

$$y=-Sx+\int(dS(x+M)+\frac{dQ}{Q}(N+MS)).$$

Cum hic M et N sint functiones datae ipsarum Q et S, sumatur S pro constante, ac ponatur integrale:

$\int\frac{dQ}{Q}(N+MS)=R+\Phi:S$

erit ergo $x+M=(\frac{dR}{dS})+\Phi':S$, existente $\Phi S=\int dS\Phi':S$ et $y=MS-S(\frac{dR}{dS})-S\Phi'S+R+\Phi:S$.

 Quia

Quia nunc R et M dantur per Q et S, et ob $P = QS$ etiam V detur per Q et S. Si haec relatio cum his binis coniungatur:

$$x = -M + \left(\frac{dR}{dS}\right) + \Phi':S, \text{ et } y = -Sx + R + \Phi:S$$

poterunt hinc eliminari binae quantitates S et Q, quo facto prodibit aequatio, qua V determinabitur per x et y.

Exemplum 1.

82. *Existente* $dV = Pdx + Qdy$, *oporteat esse* $V = mPP + nQQ$.

Cum ergo sit $dV - 2mPdP + 2nQdQ$, erit $M = 2mP$, et $N = 2nQ$, seu $M = 2mQS$ ob $P = QS$, ita vt sit $V = QQ(mSS + n)$.

Habebimus ergo $N + MS = 2Q(mSS + n)$, ideoque spectata S vt constante:

$$R = \int \frac{dQ}{Q}(N + MS) = 2Q(mSS + n),$$

ac proinde $\left(\frac{dR}{dS}\right) = 4mQS$,

Vnde has tres aequationes adipiscimur:

I. $V = QQ(mSS + n)$

II $x + 2mQS = 4mQS + \Phi':S$ seu $x = 2mQS + \Phi':S$

III. $y + Sx = 2Q(mSS + n) + \Phi:S$

seu $y = 2nQ + \Phi:S - S\Phi':S$.

Quodsi ex II et III eliminetur Q, erit:

IV. $nx - mSy = (mSS + n)\Phi':S - mS\Phi:S$

ex iisdem vero coniunctis fit $Q = \frac{Sx + y - \Phi:S}{2(mSS + n)}$, quae cum prima dat $\sqrt{}: 2\sqrt{}V(mSS + n) = Sx + y - \Phi:S$.

Quare

Quare superest, vt ex IV et V eliminetur S, sicque prodibit functio V per x et y expressa.

Sit $\Phi':S = a$, erit $\Phi:S = aS + b$, et

$$\text{IV. } nx - mSy = na - mbS$$

$$\text{V. } 2\sqrt{V(mSS + n)} = Sx + y - aS - b.$$

Inde est $S = \frac{n(x-a)}{m(y-b)}$, quo valore substituto, erit:

$$2\sqrt{mnV} = \sqrt{(n(x-a)^2 + m(y-b)^2)}$$

hincque $V = \frac{n(x-a)^2 + m(y-b)^2}{4mn}$.

Exemplum 2.

83. *Existente* $dV = Pdx + Qdy$, *oporteat esse* $V = \frac{P}{Q}$.

Erit ergo $M = \frac{1}{Q}$; $N = -\frac{P}{QQ} = -\frac{S}{Q}$ ob $P = QS$ et $V = S$ atque $N + MS = 0$, vnde fit $R = 0$. Quare prodit:

$$x + \frac{1}{Q} = \Phi':S \text{ et } y + Sx = \Phi:S$$

et quia est $S = V$, ita functio V per x et y determinatur, vt sit $y + Vx = \Phi:V$.

Ponatur $\Phi:V = \frac{\alpha + 2\beta V + \gamma VV}{2\delta + 2\varepsilon V}$, vt fiat:

$$2\delta y + 2\varepsilon Vy + 2\delta Vx + 2\varepsilon VVx = \alpha + 2\beta V + \gamma VV$$

hincque $VV = \frac{2V(\delta x + \varepsilon y - \beta) + 2\delta y - \alpha}{\gamma - 2\varepsilon x}$ et

$$V = \frac{\delta x + \varepsilon y - \beta \pm \sqrt{((\delta x - \varepsilon y)^2 + 2(\alpha\varepsilon - \beta\delta)x + 2(\gamma\delta - \beta\varepsilon)y + \beta\beta - \alpha\gamma)}}{\gamma - 2\varepsilon x}$$

si sit γ et $\varepsilon = 0$, erit $V = \frac{2\delta y - \alpha}{2\beta - 2\delta x}$ seu $V = \frac{y - m}{n - x}$.

Scholion.

84. Plures aliae huiusmodi quaestiones proponi ac resolui possent, sed quia earum solutio iisdem principiis, quibus hactenus sum vsus, innititur, iis multiplicandis non immoror, cum allatae iam sufficere videantur, ad elementa huius nouae methodi condenda. Nonnulla adhuc adiici possent pro casibus, quibus huiusmodi etiam formulae $(\frac{ddV}{dx^2}), (\frac{ddV}{dxdy}), (\frac{ddV}{dy^2})$ in relationem propositam ingrediuntur, item quando functio quaerenda per tres pluresue variabiles definire debet; verum ne haec tractatio nimis fiat longa, ea in aliam occasionem reseruabo.

PHYSICO-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE MOTV VIBRATORIO FILI FLEXILIS, CORPVSCVLIS QVOTCVNQVE ONVSTI,

Auctore

L. EVLERO.

I.

Considero hic filum perfecte flexile, simulque omni inertia destitutum, quod in datis interuallis sit oneratum ponduscu lis quibuscunque A, B, C, D, etc. concipio autem filum hoc in terminis I et O firmiter fixum, et extensum data quadam vi; ita vt in statu naturali situm teneat rectilineum IO, in quo acquiescat. Quodsi autem a causa quacunque de hoc situ deturbetur, ita vt singula ponduscula A, B, C, D etc. ad datas distantias a recto IO depellantur, subitoque dimittantur, totum filum certo quodam motu agitabitur, quem hic inuestigare constitui. Ne autem solutio huius quaestionis vires analyseos penitus superet, tam ponduscula, quam interualla, ad quae a recta IO fuerint depulsa, tanquam infinite parua spectabo, vnde hoc commodum sum assecuturus, vt viae, quas singula ponduscula motu suo percurrent, sint rectae ad IO normales, ac tensio in omnibus fili partibus mansura sit perpetuo eadem. Tab. I. Fig. I.

2.

2. Facta hac hypothesi, interualla ponduſculorum etiam durante motu nullam mutationem recipient, quae cum ſint data et conſtantia vocentur:

$IA = a; AB = b; BC = c; CD = d; DE = e; EF = f$ etc.

eritque etiam

$IP = a; PQ = b; QR = c; RS = d; ST = e; TV = f;$ etc.

maiusculae autem litterae A, B, C, D, etc. ipſas maſſas ſingulorum corpuſculorum exprimant. Deinde ſit vis, qua filum tenditur $= K$; et graecae litterae α, β, γ, δ, etc. denotent interualla, ad quae initio ſingula corpuscula A, B, C, D etc. a linea recta IO fuerint diducta. Quibus poſitis, quaeſtio huc redit, vt elapſo ab iſto initio tempore quocunque, quod ſit ω min. ſec. ſtatus et motus fili determinetur.

3. Ponamus ergo, hoc tempore filum cum corpuſculis in eum ſitum perueniſſe, quem figura oſtendit, et deſignemus iam ſingulorum corpuſculorum ab axe IO diſtantias:

$AP = p; BQ = q; CR = r; DS = s; ET = t;$ etc.

quas prae interuallis a, b, c, d, tanquam minimas ſpectare licebit. Cum igitur tenſio in ſingulis fili partibus ſit eadem $= K$, quodlibet corpuſculum a tanta vi vtrinque ſollicitabitur, et quatenus hae vires ſibi non ſunt e diametro oppoſitae, eatenus inde vis naſcetur, qua vnumquodque corpuſculum recta ad axem pelletur, vel ab eo repelletur. In has ergo ſingulas vires ante omnia erit inquirendum, quoniam ab iis corpuſcula motus ſui determinationem, hoc eſt, ſiue accele-

accelerationem, siue retardationem, nanciscuntur, quandoquidem per hypothesin certum est, singula corpuscula A, B, C, D etc. perpetuo per rectas AP, BQ, CR etc. ad axem normales agitari.

4. Si igitur secundum regulas cognitas has vires colligamus, deprehendemus:

Corpusculum	Vrgeri in directione	Vi
A	AP	$K(\frac{p}{a} + \frac{p-q}{b})$
B	BQ	$K(\frac{q-p}{b} + \frac{q-r}{c})$
C	CR	$K(\frac{r-q}{c} + \frac{r-s}{d})$
D	DS	$K(\frac{s-r}{d} + \frac{s-t}{e})$
E	ET	$K(\frac{t-s}{e} + \frac{t-v}{f})$
F	FV	$K(\frac{v-t}{f} + \frac{v-x}{g})$
G	GX	$K(\frac{v-x}{g} + \frac{x}{h})$.

Hic scilicet posui, corpusculum septimum G esse vltimum; manifestum autem est, quotcunque fuerint ponduscula, quomodo has formulas construi oporteat.

5. Exprimunt autem hae formulae vires motrices, quibus singula corpuscula axem IO versus incitantur; earum ergo quaelibet per massam ponduscuIi diuisa praebebit accelerationem eius. Verum ex distantia cuiusque corpusculi ab axe, quae in genere sit $= z$, cum tempore generatim expresso t collata, oritur quoque per regulas mechanicas acceleratio $= -\frac{2ddz}{dt^2}$, sumto elemento temporis constante. Sed haec formula non est ad mensuram temporis in minutis secundis expri-

mendi, quam hic assumsimus, accommodata; sed petita est ex ea ratione, qua tempus per spatium ad celeritatem applicatum, celeritas autem per radicem quadratam altitudinis debitae, exhiberi solet. Quare si k denotet altitudinem, ex qua graue vno minuto secundo libere descendit, referet expressio $2\sqrt{k}$ vnum minutum secundum, eritque propterea $t:\omega = 2\sqrt{k}:1$, sicque $t = 2\omega\sqrt{k}$ et $dt^2 = 4kd\omega^2$, vnde acceleratio ad nostrum scopum accommodata prodit $= \frac{-ddz}{2kd\omega^2}$.

6. Quodsi iam has singulas accelerationes cum iis, quae ex sollicitationibus sunt erutae, conferamus, obtinebimus sequentes aequationes: siue

$\frac{K}{A}\left(\frac{p}{a} + \frac{p-q}{b}\right) = \frac{-ddp}{2kd\omega^2}$	$\frac{p}{a} + \frac{p-q}{b} + \frac{Addp}{2Kkd\omega^2} = 0$
$\frac{K}{B}\left(\frac{q-p}{b} + \frac{q-r}{c}\right) = \frac{-ddq}{2kd\omega^2}$	$\frac{q-p}{b} + \frac{q-r}{c} + \frac{Bddq}{2Kkd\omega^2} = 0$
$\frac{K}{C}\left(\frac{r-q}{c} + \frac{r-s}{d}\right) = \frac{-ddr}{2kd\omega^2}$	$\frac{r-q}{c} + \frac{r-s}{d} + \frac{Cddr}{2Kkd\omega^2} = 0$
$\frac{K}{D}\left(\frac{s-r}{d} + \frac{s-t}{e}\right) = \frac{-dds}{2kd\omega^2}$	$\frac{s-r}{d} + \frac{s-t}{e} + \frac{Ddds}{2Kkd\omega^2} = 0$
$\frac{K}{E}\left(\frac{t-s}{e} + \frac{t-v}{f}\right) = \frac{-ddt}{2kd\omega^2}$	$\frac{t-s}{e} + \frac{t-v}{f} + \frac{Eddt}{2Kkd\omega^2} = 0$
$\frac{K}{F}\left(\frac{v-t}{f} + \frac{v-x}{g}\right) = \frac{-ddv}{2kd\omega^2}$	$\frac{v-t}{f} + \frac{v-x}{g} + \frac{Fddv}{2Kkd\omega^2} = 0$
$\frac{K}{G}\left(\frac{x-v}{g} + \frac{x}{h}\right) = \frac{-ddx}{2kd\omega^2}$	$\frac{x-v}{g} + \frac{x}{h} + \frac{Gddx}{2Kkd\omega^2} = 0.$

6. Totidem igitur quouis casu impetramus huiusmodi aequationes differentio-differentiales, quod ponduscutis filum intra terminos I et O fuerit oneratum, quarum resolutio, ob variabilium permixtionem, summopere difficilis primo intuitu videatur. Quoniam vero in omnibus his aequationibus variabiles vnicam tantum dimensionem obtinent, manifestum est, singulas istas

aequa-

aequationes per eiusmodi constantes multiplicari posse, vt si omnes in vnam summam colligantur, prodeat huiusmodi aequatio:

$$\mathfrak{A}p+\mathfrak{B}q+\mathfrak{C}r+\mathfrak{D}s+\mathfrak{E}t+\mathfrak{F}v+\mathfrak{G}x+\frac{n}{d\omega^2}(\mathfrak{A}ddp+\mathfrak{B}ddq+\mathfrak{C}ddr+\mathfrak{D}dds+\mathfrak{E}ddt+\mathfrak{F}ddv+\mathfrak{G}ddx)=0,$$

cuius integratio iam nulli amplius difficultati est obnoxia, cum sit:

$$\mathfrak{A}p+\mathfrak{B}q+\mathfrak{C}r+\mathfrak{D}s+\mathfrak{E}t+\mathfrak{F}v+\mathfrak{G}x=\text{Const}\cos.\omega n.$$

8. At si hos multiplicatores, qui ad huiusmodi aequationem integrabilem perducant, inuestigemus, eos non vno modo, sed adeo semper tot modis, quot fuerint corpuscula, definiri deprehendemus; sicque tandem etiam totidem aequationes integrales diuersas adipiscemur. Ex tot autem aequationibus deinceps valores singularum applicatarum p, q, r, s etc. elicere poterimus, quorum quilibet huiusmodi formam sortietur:

$$\mathfrak{A}\cos\mathfrak{a}\omega+\mathfrak{B}\cos\mathfrak{b}\omega+\mathfrak{C}\cos\mathfrak{c}\omega+\mathfrak{D}\cos.\mathfrak{d}\omega+\text{etc.}$$

vbi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. sunt constantes arbitrariae, ex statu fili initiali, quando ponitur tempus $\omega=0$, definiendae, et pro singulis applicatis p, q, r etc. peculiares obtinebunt valores. At vero litterae $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. in omnibus erunt eaedem, ac per totidem radices aequationis cuiuspiam tot dimensionum, quot fuerint ponduscula, exhibebuntur.

9 Hinc aliam eumque multo faciliorem nanciscimur methodum, cunctas superiores aequationes differentia-

rentiales secundi gradus quasi vno actu resoluendi. Cum enim, si omnes coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. praeter vnum in vna forma integrali euanescant, iidem in reliquis omnibus euanescere debeant, statuamus statim mutata harum litterarum significatione:

$$p = \mathfrak{A} \operatorname{cos.} n\omega; \quad q = \mathfrak{B} \operatorname{cos.} n\omega; \quad r = \mathfrak{C} \operatorname{cos.} n\omega; \quad s = \mathfrak{D} \operatorname{cos.} n\omega; \text{ etc.}$$

quibus valoribus substitutis, non solum relatio inter hos coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. determinabitur, sed etiam valor litterae n per aequationem tot dimensionum, quot fuerint corpuscula, definietur, vnde etiam totidem valores diuersos recipiet. His autem inuentis singulae expressiones completae reddentur, et huiusmodi formas induent:

$$p = \mathfrak{A} \operatorname{cos.} n\omega + \mathfrak{A}' \operatorname{cos.} n'\omega + \mathfrak{A}'' \operatorname{cos.} n''\omega + \mathfrak{A}''' \operatorname{cos.} n'''\omega + \text{etc.}$$

$$q = \mathfrak{B} \operatorname{cos.} n\omega + \mathfrak{B}' \operatorname{cos.} n'\omega + \mathfrak{B}'' \operatorname{cos.} n''\omega + \mathfrak{B}''' \operatorname{cos.} n'''\omega + \text{etc.}$$

etc.

10. Pro quouis enim alio valore litterae n, alios quoque valores litterae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. sortientur, qui si debito modo in has aequationes introducantur, obtinebimus valores integrales completos pro singulis applicatis p, q, r, s, etc. qui propterea ad quoduis tempus statum fili praebebunt, ex cuius variatione instantanea simul eius motus innotescet. Praeterea vero totidem adhuc manebunt coefficientes arbitrarii, quot fuerint corpuscula, quos denique ita definire licebit, vt initio $\omega = 0$ distantiae singulorum corpusculorum

florum ab axe ſint, ſtatui filo inducto conſentaneae: tum vero hae formulae iam ita ſunt comparatae, vt initio motus ſingulorum corpuſculorum euaneſcat; ſeu motus tum a quiete incipiat, alioquin enim etiam ſinus angulorum $n\omega$, $n'\omega$ etc. introduci potuiſſent. Expoſita autem methodo ſolutionis in genere, conueniet eam pro quolibet corpuſculorum numero accuratius euolui.

Problema I.

11. Si filum in terminis I et O fixum, et a data vi $=K$ tenſum, vnico corpuſculo A ſit oneratum, determinare eius motum, poſtquam de ſtatu naturali vtcunque fuerit deturbatum. Fig. 2.

Solutio.

Cum igitur ſit $IA = IP = a$; $AO = PO = b$; et elapſo tempore ω min. ſec. ponatur diſtantia $PA = p$, quae initio fuerat $= \alpha$; habebimus hanc vnicam aequationem differentio differentialem:

$$\frac{p}{a} + \frac{p}{b} + \frac{A\,ddp}{2Kk\,d\omega^2} = 0$$

Statuamus ergo $p = \mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,n\omega$, eritque $\frac{ddp}{d\omega^2} = -nn\mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,np$ vnde fit $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{Ann}{2Kk}$, et $n = \sqrt{\frac{2Kk}{A}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}$. Quare aequatio integralis quaeſita habebitur:

$$p = \mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,\omega\sqrt{\frac{2Kk}{A}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

quae vt praebeat $p = \alpha$, poſito $\omega = 0$, poni oportet $\mathfrak{A} = \alpha$, ſicque erit pro caſu propoſito:

$$p = \alpha\,\text{coſ.}\,\omega\sqrt{\frac{2Kk}{A}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

vnde ad quoduis tempus ω min. ſec. ab initio elapſum locus corpuſculi A cognoſcitur.

Coroll. 1.

12. Hinc ſtatim innoteſcit tempus, quo corpusculum A ab initio motus primum in rectam I O perveniet, quod eueniet, quando ſit $p = 0 = \alpha \cos. \frac{1}{2}\pi$, denotante π ſemiperipheriam circuli, cuius radius eſt 1, vt $\frac{1}{2}\pi$ ſit menſura anguli recti: erit ergo hoc tempus:

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{2Kk}{A}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}} \text{ min. ſec.}$$

quod ſimul eſt tempus dimidiae vibrationis fili.

Coroll. 2.

13. Si enim tempus capiatur duplo maius, corpus A perueniet ad parem diſtantiam α ab axe in altera parte, integramque vibrationem confeciſſe eſt cenſendum. Quare tempus ſingularum vibrationum, quae inter ſe erunt iſochronae, erit:

$$\frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{2Kk}{A}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)\right.}} = \frac{\pi\sqrt{Aab}}{\sqrt{2Kk(a+b)}} \text{ min. ſecund.}$$

Coroll. 3.

14. Hoc ergo tempus erit maximum, ſi corpuſculum A medium locum in filo I O tenuerit. Si enim ponamus totam longitudinem $IO = a + b = l$, et $a = \frac{l+u}{2}$; $b = \frac{l-u}{2}$, erit tempus vibrationis $\frac{\pi\sqrt{A(ll-uu)}}{2\sqrt{2Kkl}}$, vnde

vnde patet, quo magis corpusculum a fili puncto medio remoueatur, eo rapidiores fore vibrationes; ipsum autem tempus maximum, quo $u=0$ fit $=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{Al}{2Kk}}$ min. secund.

Problema 2.

15. Si filum in terminis I et O fixum, et data vi K tensum, duobus ponduscubis A et B fuerit oneratum, determinare eius motum, postquam de statu suo naturali recto IO vtcunque fuerit deturbatum. Fig 3.

Solutio.

Hic igitur habemus $IA=a$; $AB=b$; $BO=c$, et si elapso tempore ω min. secund. ponamus distantias $PA=p$, et $QB=q$, quae initio fuerant α et β, sequentes duae aequationes differentio-differentiales resoluendae occurrunt:

$$\frac{p}{a}+\frac{p-q}{b}+\frac{A\,ddp}{2Kk\,d\omega^2}=0$$

$$\frac{q-p}{b}+\frac{q}{c}+\frac{B\,ddq}{2Kk\,d\omega^2}=0$$

Statuamus ergo:

$$p=\mathfrak{A}\,\text{cos}.\,n\omega \quad \text{et} \quad q=\mathfrak{B}\,\text{cos}.\,n\omega\text{, eritque}$$

$$\frac{ddp}{d\omega^2}=-nn\mathfrak{A}\,\text{cos}.\,n\omega \quad \text{et} \quad \frac{ddq}{d\omega^2}=-nn\mathfrak{B}\,\text{cos}.\,n\omega.$$

Hi valores substituti praebent:

$$\frac{\mathfrak{A}}{a}+\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{b}=\frac{nnA\mathfrak{A}}{2Kk} \quad \text{et} \quad \frac{\mathfrak{B}-\mathfrak{A}}{b}+\frac{\mathfrak{B}}{c}=\frac{nnB\mathfrak{B}}{2Kk}$$

ideoque

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}=1+\frac{b}{a}-\frac{nnAb}{2Kk} \quad \text{et} \quad \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}=1+\frac{b}{c}-\frac{nnBb}{2Kk}$$

vnde

vnde per multiplicationem oritur, ponendo $\frac{nn}{2Kk} = z$:

$$1 = (1 + \frac{b}{a} - Abz)(1 + \frac{b}{c} - Bbz) \text{ seu}$$

$$0 = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{b}{ac} - Az)(1 + \frac{b}{c}) - Bz(1 + \frac{b}{a}) + ABbzz,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$zz - \frac{z}{A}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) - \frac{z}{B}(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) + \frac{1}{AB}(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}) = 0,$$

vnde elicitur:

$$z = \frac{1}{2A}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) + \frac{1}{2B}(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})) \pm$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4AA})\frac{1}{a} + \frac{1}{b})^2 + \frac{1}{4BB}(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 + \frac{1}{2AB}(\frac{1}{bb} - \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc})},$$

quo valore inuento, est $n = \sqrt{2Kkz}$. Tum vero habebitur

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{2} + \frac{b}{2a} - \frac{Ab}{2B}(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \mp$$

$$Ab\sqrt{(\frac{1}{4AA}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})^2 + \frac{1}{4BB}(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 - \frac{1}{2Ab}(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} - \frac{1}{bb}))}.$$

Cum igitur hoc modo duo inueniantur valores ipsius n, qui sint n et n', et pro vtroque relatio inter $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ definiatur, vnde prodeant valores $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, obtinebimus hinc sequentes valores completos pro applicatis p et q:

$$p = \mathfrak{A} \operatorname{cos}. n\omega + \mathfrak{A}' \operatorname{cos}. n'\omega$$

$$q = \mathfrak{B} \operatorname{cos}. n\omega + \mathfrak{B}' \operatorname{cos}. n'\omega$$

ob statum autem initialem esse oportet:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' = \alpha, \text{ et } \mathfrak{B} + \mathfrak{B}' = \beta$$

alter autem tam valorum $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, quam $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$, erat indefinitus, vnde ii hinc determinabuntur.

Coroll. 1.

Coroll. 1.

16. Si ponamus breuitatis gratia:

$$\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=P;\ \frac{1}{2B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=Q;\ \frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)=R$$

vt fit $zz-2(P+Q)z+R=0$; et geminus ipfius z valor:

$$z=P+Q\pm\sqrt{((P+Q)^2-R)},$$

erit $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}Ab(2P-z)$ feu $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}Bb(2Q-z)$.

Coroll. 2.

17. Verum cum fit $4PQ=\frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bb}\right)$ $=R+\frac{1}{ABbb}$, ideoque $R=4PQ-\frac{1}{ABbb}$, habebitur:

$$z=P+Q\pm\sqrt{((P-Q)^2+\frac{1}{ABbb})},$$

ex qua forma patet, ambos valores ipfius z femper effe reales, ex priori autem effe pofitiuos; vnde vterque valor ipfius $n=\sqrt{2Kkz}$ erit realis.

Coroll. 3.

18. Ponamus porro ad abbreuiandum $\sqrt{((P-Q)^2+\frac{1}{ABbb})}=S$, ac diftinguendo geminos valores, obtinebimus:

$$z=P+Q+S; \qquad z'=P+Q-S$$
$$n=\sqrt{2Kk(P+Q+S)}; \qquad n'=\sqrt{2Kk(P+Q-S)}$$
$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}Ab(P-Q-S); \qquad \mathfrak{B}'=\mathfrak{A}'Ab(P-Q+S)$$

ac motus fili his duabus aequationibus continebitur:

$$p=\mathfrak{A}\,\text{cof.}\,n\omega+\mathfrak{A}'\,\text{cof.}\,n'\omega$$
$$q=\mathfrak{B}\,\text{cof.}\,n\omega+\mathfrak{B}'\,\text{cof.}\,n'\omega.$$

Coroll. 4.

19. Vt autem motus ad ſtatum initialem datum accommodetur, fieri debet $\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'=\alpha$ et $\alpha Ab(P-Q)$ $+(\mathfrak{A}'-\mathfrak{A})AbS=\beta$, vnde erit $\mathfrak{A}'-\mathfrak{A}=\frac{\beta}{AbS}-\frac{\alpha(P-Q)}{S}$. Quare hinc nanciſcimur vtriusque conſtantis $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ determinationem:

$\mathfrak{A}=\frac{1}{2}\alpha+\frac{\alpha(P-Q)}{2S}-\frac{\beta}{2AbS}$ et $\mathfrak{A}'=\frac{1}{2}\alpha-\frac{\alpha(P-Q)}{2S}+\frac{\beta}{2AbS}$, item $\mathfrak{B}=\frac{1}{2}\beta-\frac{\beta(P-Q)}{2S}-\frac{\alpha}{2BbS}$ et $\mathfrak{B}'=\frac{1}{2}\beta-\frac{\beta(P-Q)}{2S}+\frac{\alpha}{2BbS}$.

Coroll. 5.

20. Si ſtatus initialis ita fuerit comparatus, vt vel $\mathfrak{A}$ vel $\mathfrak{A}'$ fuerit $=0$, tum etiam vel $\mathfrak{B}$ vel $\mathfrak{B}'$ euaneſcet, motusque continebitur

vel in his formulis:	vel in his formulis:
$p=\mathfrak{A}\cos. n\omega$	$p=\mathfrak{A}'\cos. n'\omega$
$q=\mathfrak{B}\cos. n\omega$	$q=\mathfrak{B}'\cos. n'\omega$

vtroque ergo caſu vibrationes orientur regulares oſcillationibus penduli ſimplicis conformes, ac tempus vnius vibrationis erit

Caſu priori $=\frac{\pi}{n}$ min. ſecund.; poſteriori $=\frac{\pi}{n'}$ min. ſec.

Coroll. 6.

21. Sin autem ſtatus initialis fuerit eiusmodi, vt neque $\mathfrak{A}$ neque $\mathfrak{A}'$ euaneſcat, vibrationes orientur irregulares, et quaſi ex vtroque genere ſimplici mixtae; neque filum vnquam ad eundem ſitum reuertetur, niſi numeri n et n' rationem inter ſe teneant rationa-

tionalem. Ponatur huiusmodi ratio $n:n'=\mu:\nu$, ac fiet $\frac{P+Q+S}{P+Q-S}=\frac{\mu\mu}{\nu\nu}$; ſeu $(\mu\mu-\nu\nu)(P+Q)=(\mu\mu+\nu\nu)S$, ideoque $4(\mu^4+\nu^4)PQ-4\mu\mu\nu\nu(PP+QQ)=\frac{(\mu\mu+\nu\nu)^2}{ABbb}$, hincque

$$P=\frac{\mu^4+\nu^4}{2\mu\mu\nu\nu}Q\pm\frac{(\mu\mu+\nu\nu)}{2\mu\mu\nu\nu}\surd\left((\mu\mu-\nu\nu)^2QQ-\frac{\mu\mu\nu\nu}{ABbb}\right).$$

Coroll. 7.

22. Vt ergo vibrationes euadant regulares, ſtatus initialis ita debet eſſe comparatus, vt ſit

$$\text{vel } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{-1}{Ab(S-P+Q)}=-Bb(S+P-Q)$$

$$\text{vel } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{Ab(S+P-Q)}=+Bb(S-P-Q)$$

eſt enim $SS-(P-Q)^2=\frac{1}{ABbb}$, ideoque $S>(P-Q)$.

Coroll. 8.

23. Si omnia interualla corpuſculorum fuerint inter ſe aequalia, ſeu $a=b=c$; erit $P=\frac{1}{Aa}$, $Q=\frac{1}{Ba}$, et $R=\frac{3}{ABaa}$, vnde fit $z=\frac{1}{a}(\frac{1}{A}+\frac{1}{B})\pm\frac{1}{a}\surd(\frac{1}{AA}-\frac{1}{AB}+\frac{1}{BB})$, ſeu $z=\frac{A+B\pm\surd(AA-AB+BB)}{ABa}$, hincque

$$n=\surd\frac{2Kk}{ABa}(A+B+\surd(AA-AB+BB));\ n'=\surd\frac{2Kk}{ABa}(A+B-\surd(AA-AB+BB))$$

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}.\frac{B-A-\surd(AA-AB+BB)}{B};\ \mathfrak{B}'=\mathfrak{A}'.\frac{B-A+\surd(AA-AB+BB)}{B}$$

et pro ſtatu initiali adimplendo:

$$\mathfrak{A}=\tfrac{1}{2}\alpha+\frac{\alpha(B-A)-\beta B}{2\surd(AA-AB+BB)};\ \mathfrak{A}'=\tfrac{1}{2}\alpha-\frac{\alpha(B-A)+\beta B}{2\surd(AA-AB+BB)}$$

$$\mathfrak{B}=\tfrac{1}{2}\beta-\frac{\beta(B-A)-\alpha A}{2\surd(AA-AB+BB)};\ \mathfrak{B}'=\tfrac{1}{2}\beta-\frac{\beta(B-A)+\alpha A}{2\surd(AA-AB+BB)}.$$

 Motus

Motus vero his aequationibus exprimetur:

$$p = \mathfrak{A} \operatorname{cof.} \omega + \mathfrak{A}' \operatorname{cof.} n' \omega$$

$$q = \mathfrak{B} \operatorname{cof.} \omega + \mathfrak{B}' \operatorname{cof.} n' \omega$$

Coroll. 9.

24. Vt fiat hoc cafu $n : n' = \mu : \nu$, oportet effe:

$$\frac{4(\mu^4 + \nu^4)}{AB} - 4\mu\mu\nu\nu\left(\frac{1}{AA} + \frac{1}{BB}\right) = \frac{(\mu\mu + \nu\nu)^2}{AB}, \text{ feu}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{3\mu^4 - 2\mu\mu\nu\nu + 3\nu^4 \pm \sqrt{(9\mu^8 - 12\mu^6\nu\nu - 42\mu^4\nu^4 - 12\mu\mu\nu^6 + 9\nu^8)}}{8\mu\mu\nu\nu}$$

vnde, fi fit $\mu = 2$, et $\nu = 1$, feu $n : n' = 2 : 1$, fiet

$$\frac{B}{A} = \frac{43 \pm \sqrt{825}}{32} = \frac{43 \pm 5\sqrt{33}}{32}.$$

Coroll. 10.

25. Si praeterea ambo corpora A et B fint aequalia, erit $z = \frac{2 \pm 1}{Aa}$, vnde fequentes obtinentur determinationes:

$$n = \sqrt{\frac{6Kk}{Aa}} \quad ; \quad n' = \sqrt{\frac{2Kk}{Aa}}$$

$$\mathfrak{B} = -\mathfrak{A} \quad ; \quad \mathfrak{B}' = +\mathfrak{A}'$$

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad ; \quad \mathfrak{A}' = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) \quad ; \quad \mathfrak{B}' = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

et pro motu:

$$p = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \operatorname{cof.} \omega \sqrt{\frac{6Kk}{Aa}} + \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{cof.} \omega \sqrt{\frac{2Kk}{Aa}}$$

$$q = -\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \operatorname{cof.} \omega \sqrt{\frac{6Kk}{Aa}} + \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{cof.} \omega \sqrt{\frac{2Kk}{Aa}}.$$

Problema 3.

Fig. 4. 26. Si filum in terminis I et O fixum et data vi $= K$ tenfum tribus pondufculis A, B, et C fuerit onera-

oneratum, determinare eius motum, poſtquam de ſtatu ſuo naturali recto IO vtcunque fuerit deturbatum.

Solutio.

Hic igitur habemus $IA = a$; $AB = b$; $BC = c$ et $CO = d$, ac ſi, elapſo tempore ω min. ſec., ponamus diſtantias:

$PA = p$; $QB = q$ et $RC = r$

quae initio fuerant reſpectiue α, β, γ, ſequentes tres reſoluendae ſunt aequationes:

$$\frac{p}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{q}{A}\cdot\frac{1}{b}+\frac{ddp}{2Kkd\omega^2}=0$$

$$\frac{q}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{p}{B}\cdot\frac{1}{b}-\frac{r}{B}\cdot\frac{1}{c}+\frac{ddq}{2Kkd\omega^2}=0$$

$$\frac{r}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-\frac{q}{C}\cdot\frac{1}{c}+\frac{ddr}{2Kkd\omega^2}=0.$$

Quodſi ergo ſtatuamus $p = \mathfrak{A}\cos.n\omega$; $q = \mathfrak{B}\cos.n\omega$; $r = \mathfrak{C}\cos.n\omega$; habebimus, ponendo $\frac{nn}{2Kk} = z$, has aequationes:

$$\frac{\mathfrak{A}}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{\mathfrak{B}}{Ab}=\mathfrak{A}z$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{\mathfrak{A}}{Bb}-\frac{\mathfrak{C}}{Bc}=\mathfrak{B}z$$

$$\frac{\mathfrak{C}}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-\frac{\mathfrak{B}}{Cc}=\mathfrak{C}z$$

vnde eruimus:

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{B}}{b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-Abz};\quad \mathfrak{C}=\frac{\mathfrak{B}}{c\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-Ccz}$$

qui in ſecunda ſubſtituti praebent:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{bb\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-Abbz}-\frac{1}{cc\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-Cccz}=Bz$$

 qua-

qua aequatione ordinata oritur :

$$z^3 \left.\begin{matrix} -\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ -\frac{1}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\ -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \end{matrix}\right\} zz \left.\begin{matrix} +\frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right) \\ +\frac{1}{AC}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \\ +\frac{1}{BC}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}\right) \end{matrix}\right\} z - \frac{1}{ABC}\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{bcd}\right)=0$$

quae aequatio , ſi ponatur breuitatis gratia :

$$\tfrac{1}{A}\left(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}\right)=P;\ \tfrac{1}{B}\left(\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}\right)=Q;\ \tfrac{1}{C}\left(\tfrac{1}{c}+\tfrac{1}{d}\right)=R$$

transmutatur in ſequentem formam :

$$(z-P)(z-Q)(z-R)=\frac{z-R}{ABbb}+\frac{z-P}{BCc}$$

vnde terni eliciuntur valores ipſius z, iique ſemper reales et poſitiui, qui ſint z, z', et z'', ex quibus ſequentes terni valores porro eruuntur :

$$n=\sqrt{2Kkz};\quad n'=\sqrt{2Kkz'}\quad n''=\sqrt{2Kkz''}$$

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{B}}{Ab(P-z)};\quad \mathfrak{A}'=\frac{\mathfrak{B}'}{Ab(P-z')}\quad \mathfrak{A}''=\frac{\mathfrak{B}''}{Ab(P-z'')}$$

$$\mathfrak{C}=\frac{\mathfrak{B}}{Cc(R-z)};\quad \mathfrak{C}'=\frac{\mathfrak{B}'}{Cc(R-z')}\quad \mathfrak{C}''=\frac{\mathfrak{B}''}{Cc(R-z'')}$$

quibus valoribus inuentis, motus his formulis definietur :

$$p=\mathfrak{A}\,\mathrm{cof.}\,n\omega+\mathfrak{A}'\,\mathrm{cof.}\,n'\omega+\mathfrak{A}''\,\mathrm{cof.}\,n''\omega$$

$$q=\mathfrak{B}\,\mathrm{cof.}\,n\omega+\mathfrak{B}'\,\mathrm{cof.}\,n'\omega+\mathfrak{B}''\,\mathrm{cof.}\,n''\omega$$

$$r=\mathfrak{C}\,\mathrm{cof.}\,n\omega+\mathfrak{C}'\,\mathrm{cof.}\,n'\omega+\mathfrak{C}''\,\mathrm{cof}\,n''\omega$$

quae , vt ad ſtatum propoſitum initialem accommodentur , fiat :

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'+\mathfrak{A}''=\alpha;\quad \mathfrak{B}+\mathfrak{B}'+\mathfrak{B}''=\beta \text{ et } \mathfrak{C}+\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}''=\gamma$$

ſicque motus quaeſitus erit determinatus.

Coroll.

Coroll. 1.

27. Tota ergo ſolutio reducitur ad reſolutionem huius aequationis cubicae:

$$z^3 \left.\begin{array}{l} -\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ -\frac{1}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\ -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{l} +\frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right) \\ +\frac{1}{AC}\left(\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bd}\right) \\ +\frac{1}{EC}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}\right) \end{array}\right\} z - \frac{1}{ABC}\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{add}+\frac{1}{bcd}\right) = 0$$

dum caſu problematis praecedentis, vbi filum duobus tantum ponduſculis erat onuſtum, haec aequatio quadratica ſolutionem continebat:

$$zz \left.\begin{array}{l} -\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ -\frac{1}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \end{array}\right\} z + \frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right) = 0.$$

Coroll. 2.

28. Tres ſcilicet huius aequationis cubicae radices, generaliter modo expoſito coniunctae, generalem problematis ſuppeditant ſolutionem, quae ad omnes caſus, quicunque ſtatus filo fuerit inductus initio, pateat. Vnde patet, ſi terni numeri n, n', n'' fuerint incommenſurabiles inter ſe, motum fili admodum fore irregularem, neque certas periodos eſſe habiturum.

Coroll. 3.

29. Tres autem dantur caſus, quibus filum ad vibrationes regulares et iſochronas excitari poteſt, qui conditionibus his locum habebunt:

	Casus I	Casus II	Casus III
si sit	$\alpha = \mathfrak{A}$	$\alpha = \mathfrak{A}'$	$\alpha = \mathfrak{A}''$
	$\beta = \mathfrak{B}$	$\beta = \mathfrak{B}'$	$\beta = \mathfrak{B}''$
	$\gamma = \mathfrak{C}$	$\gamma = \mathfrak{C}'$	$\gamma = \mathfrak{C}''$
tum erit	$p = \mathfrak{A}\,\text{cos.}\,n\omega$	$p = \mathfrak{A}'\,\text{cos}\,n'\omega$	$p = \mathfrak{A}''\,\text{cos.}\,n''\omega$
	$q = \mathfrak{B}\,\text{cos}\,n\omega$	$q = \mathfrak{B}'\,\text{cos.}\,n'\omega$	$q = \mathfrak{B}''\,\text{cos.}\,n''\omega$
	$r = \mathfrak{C}\,\text{cos.}\,n\omega$	$r = \mathfrak{C}'\,\text{cos.}\,n'\omega$	$r = \mathfrak{C}''\,\text{cos.}\,n''\omega$
temp. vibrat.	$= \frac{\pi}{n}$ min. sec.	$= \frac{\pi}{n'}$ min. sec.	$= \frac{\pi}{n''}$ min. sec.

Coroll. 4.

30. Inuentis autem his tribus casibus, quibus vibrationes isochronae euadunt, ex iis omnes reliqui casus motuum irregularium per compositionem definiri poterunt; vbi notari meretur, vtcunque hi motus appareant irregulares, eos tamen ex combinatione vibrationum isochronarum oriri.

Coroll. 5.

31. Quando autem tria corpora A, B, C, tam ratione massae, quam distantiarum, ita fuerint comparata, vt numeri n, n', n'' inde resultent commensurabiles, irregularitas motus eatenus euanescit, quod in motu percipientur periodi, quibus filum in eundem statum restituitur.

Coroll. 6.

32. Si corpusculorum interualla a, b, c, d inter se fuerint aequalia, aequatio cubica resoluenda abibit in hanc formam:

$$z^3 - \left(\frac{2}{A} + \frac{2}{B} + \frac{2}{C}\right)\frac{zz}{a} + \left(\frac{3}{AB} + \frac{4}{AC} + \frac{3}{BC}\right)\frac{z}{aa} - \frac{4}{ABCa^3} = 0$$

quae

quae si corpuscula insuper sint inter se aequalia, fit:

$$z^3 - \frac{6zz}{\mathrm{A}a} + \frac{10z}{\mathrm{A}^2a^2} - \frac{4}{\mathrm{A}^3a^3} = 0$$

cuius tres radices sunt:

$$\text{I. } z = \frac{2}{\mathrm{A}a};\ \text{II. } z' = \frac{2-\sqrt{2}}{\mathrm{A}a};\ \text{III. } z'' = \frac{2+\sqrt{2}}{\mathrm{A}a}.$$

Coroll. 7.

33. In hoc ergo postremo casu, quo $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C}$ et $a = b = c = d$ erit pro motu fili generatim determinando ob $\mathrm{P} = \frac{2}{\mathrm{A}a} = \mathrm{Q} = \mathrm{R}$:

$$n = \sqrt{\frac{4\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}};\quad n' = \sqrt{\frac{2(2-\sqrt{2})\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}};\quad n'' = \sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B}}{0\mathrm{A}a}\qquad \mathfrak{A}' = \frac{\mathfrak{B}'}{\sqrt{2}}\qquad \mathfrak{A}'' = -\frac{\mathfrak{B}''}{\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}}{0\mathrm{A}a}\qquad \mathfrak{C}' = \frac{\mathfrak{B}'}{\sqrt{2}}\qquad \mathfrak{C}'' = -\frac{\mathfrak{B}''}{\sqrt{2}}$$

seu $\mathfrak{B} = 0\qquad \mathfrak{B}' = \mathfrak{A}'\sqrt{2}\qquad \mathfrak{B}'' = -\mathfrak{A}''\sqrt{2}$

et $\mathfrak{C} = -\mathfrak{A}\qquad \mathfrak{C}' = \mathfrak{A}'\qquad \mathfrak{C}'' = \mathfrak{A}''.$

Ac pro statu initiali dato habebitur:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' = \alpha;\quad 0 + \mathfrak{A}'\sqrt{2} - \mathfrak{A}''\sqrt{2} = \beta;\quad -\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' = \gamma$$

vnde obtinetur:

$$\mathfrak{A} = \frac{\alpha-\gamma}{2};\quad \mathfrak{A}' = \frac{\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma}{4};\quad \mathfrak{A}'' = \frac{\alpha-\beta\sqrt{2}+\gamma}{4}$$

$$\mathfrak{B} = 0\quad \mathfrak{B}' = \frac{\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma}{2\sqrt{2}};\quad \mathfrak{B}'' = \frac{-\alpha+\beta\sqrt{2}-\gamma}{2\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{-\alpha+\gamma}{2};\quad \mathfrak{C}' = \frac{\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma}{4};\quad \mathfrak{C}'' = \frac{\alpha-\beta\sqrt{2}+\gamma}{4}$$

Consequenter motus definietur per has formulas:

$$p = \frac{\alpha-\gamma}{2}\operatorname{cos}.\omega\sqrt{\frac{4\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}} + \frac{\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma}{4}\operatorname{cos}.\omega\sqrt{\frac{2(2-\sqrt{2})\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}} + \frac{\alpha-\beta\sqrt{2}+\gamma}{4}\operatorname{cos}\omega\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}}$$

$$q = \qquad + \frac{\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma}{2\sqrt{2}}\operatorname{cos}\omega\sqrt{\frac{2(2-\sqrt{2})\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}} - \frac{\alpha+\beta\sqrt{2}-\gamma}{2\sqrt{2}}\operatorname{cos}\omega\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}}$$

$$r = \frac{-\alpha+\gamma}{2}\operatorname{cos}.\omega\sqrt{\frac{4\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}} + \frac{\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma}{4}\operatorname{cos}.\omega\sqrt{\frac{2(2-\sqrt{2})\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}} + \frac{\alpha-\beta\sqrt{2}+\gamma}{4}\operatorname{cos}.\omega\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}}.$$

Problema 4.

Fig. 5. 34. Si filum, in terminis I et O fixum et data vi $=K$ tenſum, quatuor corpuſculis A, B, C, D fuerit oneratum, determinare eius motum, poſtquam de ſtatu ſuo naturali recto IO vtcunque fuerit depulſum.

Solutio.

Habemus ergo $IA=a$, $AB=b$, $BC=c$, $CD=d$ et $DO=e$, ac ſi elapſo tempore ω min. ſec. ponamus diſtantias

$$PA=p;\; QB=q;\; RC=r \text{ et } SD=s$$

quae initio fuerant reſpectiue α, β, γ, δ, ſequentes quatuor reſolui debent aequationes:

$$\frac{p}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{q}{A}\cdot\frac{1}{b}+\frac{ddp}{2Kkd\omega^2}=0$$

$$\frac{q}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{p}{B}\cdot\frac{1}{b}-\frac{r}{B}\cdot\frac{1}{c}+\frac{ddq}{2Kkd\omega^2}=0$$

$$\frac{r}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-\frac{q}{C}\cdot\frac{1}{c}-\frac{s}{C}\cdot\frac{1}{d}+\frac{ddr}{2Kkd\omega^2}=0$$

$$\frac{s}{D}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)-\frac{r}{D}\cdot\frac{1}{d}+\frac{dds}{2Kkd\omega^2}=0.$$

Quodſi iam ſtatuamus

$$p=\mathfrak{A}\,\text{coſ.}n\omega;\; q=\mathfrak{B}\,\text{coſ.}n\omega;\; r=\mathfrak{C}\,\text{coſ.}n\omega;\; s=\mathfrak{D}\,\text{coſ.}n\omega$$

ac ad abbreuiationem ponamus $\frac{nn}{2Kk}=z$, nec non $\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=P$; $\frac{1}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=Q$; $\frac{1}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=R$ et $\frac{1}{D}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)=S$ orientur ſequentes aequationes:

$$\mathfrak{A}P-\frac{\mathfrak{B}}{Ab}=\mathfrak{A}z$$

$$\mathfrak{B}Q-\frac{\mathfrak{A}}{Bb}-\frac{\mathfrak{C}}{Bc}=\mathfrak{B}z$$

$$\mathfrak{C}R-\frac{\mathfrak{B}}{Cc}-\frac{\mathfrak{D}}{Cd}=\mathfrak{C}z$$

$$\mathfrak{D}S-\frac{\mathfrak{C}}{Dd}=\mathfrak{D}z$$

ex

ex quibus elicitur:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,\mathrm{A}b(\mathrm{P}-z);$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\,\mathrm{AB}bc(\mathrm{P}-z)(\mathrm{Q}-z) - \frac{\mathfrak{A}c}{b}$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\,\mathrm{ABC}bcd(\mathrm{P}-z)(\mathrm{Q}-z)(\mathrm{R}-z) - \frac{\mathfrak{A}\mathrm{C}cd}{b}(\mathrm{R}-z) - \frac{\mathfrak{A}\mathrm{A}bd}{c}(\mathrm{P}-z),$$

qui valores in vltima aequatione ſubſtituti praebent:

$$\mathrm{ABC}bcd(\mathrm{P}-z)(\mathrm{Q}-z)(\mathrm{R}-z)(\mathrm{S}-z) - \frac{\mathrm{C}cd}{b}(\mathrm{R}-z)(\mathrm{S}-z)$$
$$- \frac{\mathrm{A}bd}{c}(\mathrm{P}-z)(\mathrm{S}-z) - \frac{\mathrm{AB}bc}{\mathrm{P}d}(\mathrm{P}-z)(\mathrm{Q}-z) + \frac{c}{\mathrm{D}bd} = 0$$

quae per $\mathrm{ABC}bcd$ diuiſa abit in hanc formam:

$$(\mathrm{P}-z)(\mathrm{Q}-z)(\mathrm{R}-z)(\mathrm{S}-z) - \frac{(\mathrm{R}-z)(\mathrm{S}-z)}{\mathrm{AB}bb} - \frac{(\mathrm{P}-z)(\mathrm{S}-z)}{\mathrm{BC}cc} - \frac{(\mathrm{P}-z)(\mathrm{Q}-z)}{\mathrm{CD}dd}$$
$$+ \frac{1}{\mathrm{ABCD}bbdd} = 0,$$

cuius indoles clarius perſpicietur ex hac forma:

$$1 - \frac{1}{\mathrm{AB}bb(\mathrm{P}-z)(\mathrm{Q}-z)} - \frac{1}{\mathrm{BC}cc(\mathrm{Q}-z)(\mathrm{R}-z)} - \frac{1}{\mathrm{CD}dd(\mathrm{R}-z)(\mathrm{S}-z)}$$
$$+ \frac{1}{\mathrm{ABCD}bbdd(\mathrm{P}-z)(\mathrm{Q}-z)(\mathrm{R}-z)(\mathrm{S}-z)} = 0.$$

Verum ſi illa aequatio, reſtituendis pro P, Q, R, S valoribus, penitus euoluatur, obtinebitur ſequens aequatio biquadratica:

$$z^4 \left.\begin{array}{l} -\frac{1}{\mathrm{A}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ -\frac{1}{\mathrm{B}}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\ -\frac{1}{\mathrm{C}}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \\ -\frac{1}{\mathrm{D}}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \end{array}\right\} z^3 \left.\begin{array}{l} +\frac{1}{\mathrm{AB}}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right) \\ +\frac{1}{\mathrm{AC}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \\ +\frac{1}{\mathrm{AD}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \\ +\frac{1}{\mathrm{BC}}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}\right) \\ +\frac{1}{\mathrm{BD}}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \\ +\frac{1}{\mathrm{CD}}\left(\frac{1}{cd}+\frac{1}{ce}+\frac{1}{de}\right) \end{array}\right\} zz \left.\begin{array}{l} -\frac{1}{\mathrm{ABC}}\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{bcd}\right) \\ -\frac{1}{\mathrm{ABD}}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \\ -\frac{1}{\mathrm{ACD}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{cd}+\frac{1}{ce}+\frac{1}{de}\right) \\ -\frac{1}{\mathrm{BCD}}\left(\frac{1}{bcd}+\frac{1}{bce}+\frac{1}{bde}+\frac{1}{cde}\right) \end{array}\right\} z$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{ABCD}}\left(\frac{1}{abcd}+\frac{1}{abce}+\frac{1}{abde}+\frac{1}{acde}+\frac{1}{bcde}\right) = 0.$$

Inuentis autem huius aequationis quaternis radicibus z, z', z'' et z''', ex illis totidem valores numeri n habebuntur per formulam $n = \sqrt{2Kkz}$; ac sumtis quoque quaternis arbitrariis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$, ex vnoquoque reliqui $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ respondentes reperientur ope formularum:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,\mathrm{A}b(\mathrm{P}-z)$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\,\mathrm{AB}bc\left((\mathrm{P}-z)(\mathrm{Q}-z) - \tfrac{1}{\mathrm{AB}bb}\right)$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\,\mathrm{ABC}bcd\left((\mathrm{P}-z)(\mathrm{Q}-z)(\mathrm{R}-z) - \tfrac{1}{\mathrm{AB}bb}(\mathrm{R}-z) - \tfrac{1}{\mathrm{BC}cc}(\mathrm{P}-z)\right)$$

ac tandem formulae pro motu fili erunt:

$$p = \mathfrak{A}\cos.n\omega + \mathfrak{A}'\cos.n'\omega + \mathfrak{A}''\cos n''\omega + \mathfrak{A}'''\cos n'''\omega$$

$$q = \mathfrak{B}\cos.n\omega + \mathfrak{B}'\cos n'\omega + \mathfrak{B}''\cos.n''\omega + \mathfrak{B}'''\cos.n'''\omega$$

$$r = \mathfrak{C}\cos.n\omega + \mathfrak{C}'\cos.n'\omega + \mathfrak{C}''\cos.n''\omega + \mathfrak{C}'''\cos.u'''\omega$$

$$s = \mathfrak{D}\cos.n\omega + \mathfrak{D}'\cos.n'\omega + \mathfrak{D}''\cos.n''\omega + \mathfrak{D}'''\cos.n'''\omega$$

quatuor autem constantes arbitrariae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$ ex statu initiali ita definiri debent, vt fiat:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' + \mathfrak{A}''' = \alpha$$

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{B}' + \mathfrak{B}'' + \mathfrak{B}''' = \beta$$

$$\mathfrak{C} + \mathfrak{C}' + \mathfrak{C}'' + \mathfrak{C}''' = \gamma$$

$$\mathfrak{D} + \mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'' + \mathfrak{D}''' = \delta.$$

Coroll. 1.

35. Iam igitur quatuor existunt casus, quibus vibrationes erunt isochronae, quarum tempora erunt

$$\frac{\pi}{n}; \quad \frac{\pi}{n'}; \quad \frac{\pi}{n''}; \quad \frac{\pi}{n'''} \quad \text{min. sec.}$$

atque ex his casibus, tanquam motibus simplicibus, reliqui omnes per compositionem oriuntur.

Coroll.

Coroll. 2.

36. Ex his iam lex istarum formularum, si filum pluribus corpusculis fuerit onustum, non difficulter perspicitur. Si enim quinque habeantur corpuscula, adiecto valore $\frac{1}{E}(\frac{1}{e}+\frac{1}{f})=T$, aequatio principalis resoluenda ita se habebit:

$$1-\frac{1}{ABbb(P-z)(Q-z)}-\frac{1}{BCcc(Q-z)(R-z)}-\frac{1}{CDdd(R-z)(S-z)}-\frac{1}{DEee(S-z)(T-z)}$$
$$+\frac{1}{ABCDb^2d^2(P-z)(Q-z)(R-z)(S-z)}+\frac{1}{BCDEccee(Q-z)(R-z)(S-z)(T-z)}=0$$

Ac si sex fuerint corpuscula, posito $\frac{1}{F}(\frac{1}{f}+\frac{1}{g})=V$, erit

$$1-\frac{1:ABbb}{(P-z)(Q-z)}-\frac{1:BCcc}{(Q-z)(R-z)}-\frac{1:CDdd}{(R-z)(S-z)}-\frac{1:DEee}{(S-z)(T-z)}-\frac{1:EFff}{(T-z)(V-z)}$$
$$+\frac{1:ABCDbbdd}{(P-z)(Q-z)(R-z)(S-z)}+\frac{1:BCDEccee}{(Q-z)(R-z)(S-z)(T-z)}+\frac{1:CDEFddff}{(R-z)(S-z)(T-z)(V-z)}$$
$$-\frac{1:ABCDEFbbddff}{(P-z)(Q-z)(R-z)(S-z)(T-z)(V-z)}=0.$$

Coroll. 3.

37. Hae autem formulae in genere nimis sunt complicatae, quam vt quidquam ad cognitionem motus inde concludi queat. Concipiamus ergo interualla a, b, c, d, etc. inter se aequalia, ac pro quouis corpusculorum numero aequationes, ex quibus valores ipsius z elici oportet, ita se habebunt:

Pro vno corpusculo

$$z-\frac{2}{Aa}=0$$

Pro duobus corpusculis

$$zz-\frac{1}{a}(\frac{2}{A}+\frac{2}{B})z+\frac{1}{aa}\cdot\frac{3}{AB}=0$$

Pro tribus corpusculis

$$z^3-\frac{1}{a}(\frac{2}{A}+\frac{2}{B}+\frac{2}{C})zz+\frac{1}{aa}(\frac{3}{AB}+\frac{4}{AC}+\frac{3}{BC})z-\frac{1}{a^3}\cdot\frac{4}{ABC}=0$$

Pro quatuor corpusculis

$$z^4 - \tfrac{1}{a}\left(\tfrac{2}{A} + \tfrac{2}{B} + \tfrac{2}{C} + \tfrac{2}{D}\right) z^3 + \tfrac{1}{aa}\left(\tfrac{3}{AB} + \tfrac{4}{AC} + \tfrac{4}{AD} + \tfrac{3}{BC} + \tfrac{4}{BD} + \tfrac{3}{CD}\right) z^2$$
$$- \tfrac{1}{a^3}\left(\tfrac{4}{ABC} + \tfrac{6}{ABD} + \tfrac{6}{ACD} + \tfrac{4}{BCD}\right) z + \tfrac{1}{a^4} \cdot \tfrac{5}{ABCD} = 0$$

Pro quinque corpusculis

$$z^5 - \tfrac{1}{a}\left(\tfrac{2}{A} + \tfrac{2}{B} + \tfrac{2}{C} + \tfrac{2}{D} + \tfrac{2}{E}\right) z^4$$
$$+ \tfrac{1}{aa}\left(\tfrac{3}{AB} + \tfrac{4}{AC} + \tfrac{4}{AD} + \tfrac{4}{AE} + \tfrac{3}{BC} + \tfrac{4}{BD} + \tfrac{4}{BE} + \tfrac{3}{CD} + \tfrac{4}{CE} + \tfrac{3}{DE}\right) z^3$$
$$- \tfrac{1}{a^3}\left(\tfrac{4}{ABC} + \tfrac{6}{ABD} + \tfrac{6}{ABE} + \tfrac{6}{ACD} + \tfrac{8}{ACE} + \tfrac{6}{ADE} + \tfrac{4}{BCD} + \tfrac{6}{BCE} + \tfrac{6}{BDE} + \tfrac{4}{CDE}\right) z^2$$
$$+ \tfrac{1}{a^4}\left(\tfrac{5}{ABCD} + \tfrac{8}{ABCE} + \tfrac{9}{ABDE} + \tfrac{8}{ACDE} + \tfrac{5}{BCDE}\right) z - \tfrac{1}{a^5} \cdot \tfrac{6}{ABCDE} = 0.$$

Coroll. 4.

38. Si non solum interualla corpusculorum a, b, c, d etc. sed etiam ipsa corpuscula A, B, C, D etc. inter se aequalia assumamus, aequationes sequentes prodibunt:

num. corp.	
I	$z - \frac{2}{Aa} = 0$
II	$z^2 - \frac{4z}{Aa} + \frac{3}{AAaa} = 0$
III	$z^3 - \frac{6zz}{Aa} + \frac{10z}{AAaa} - \frac{4}{A^3a^3} = 0$
IV	$z^4 - \frac{8z^3}{Aa} + \frac{21z^2}{A^2a^2} - \frac{20z}{A^3a^3} + \frac{5}{A^4a^4} = 0$
V	$z^5 - \frac{10z^4}{Aa} + \frac{36z^3}{A^2a^2} - \frac{56z^3}{A^3a^3} + \frac{35z^2}{A^4a^4} - \frac{6}{A^5a^5} = 0$
VI	$z^6 - \frac{12z^5}{Aa} + \frac{55z^4}{A^2a^2} - \frac{120z^3}{A^3a^3} + \frac{126z^2}{A^4a^4} - \frac{56z}{A^5a^5} + \frac{7}{A^6a^6} = 0$

vnde pro corpusculorum numero quocunque m concluditur, fore:

$$z^{2m} - \frac{2m}{1} \cdot \frac{z^{2m-1}}{Aa} + \frac{(2m-1)(2m-2)}{1.\ 2.} \cdot \frac{z^{2m-2}}{A^2 a^2} - \frac{(2m-2)(2m-3)(2m-4)}{1.\ 2.\ 3} \cdot \frac{z^{2m-3}}{A^3 a^3}$$
$$+ \frac{(2m-3)(2m-4)(2m-5)(2m-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \frac{z^{2m-4}}{A^4 a^4} - \frac{(2m-4)(2m-5)(2m-6)(2m-7)(2m-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} \cdot \frac{z^{2m-5}}{A^5 a^5}$$
$$+ \text{etc.} = 0$$

Coroll. 5.

39 Hoc autem casu coefficientes 𝔅, ℭ, 𝔇, etc. ex primo 𝔄 arbitrario pro quouis valore ipsius z ita definientur, vt sit:

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = Aa\left(\tfrac{2}{Aa} - z\right)$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = A^2 a^2 \left(\tfrac{2}{Aa} - z\right)^2 - 1$$
$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} = A^3 a^3 \left(\tfrac{2}{Aa} - z\right)^3 - 2\,Aa\left(\tfrac{2}{Ab} - z\right)$$
$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}} = A^4 a^4 \left(\tfrac{2}{Aa} - z\right)^4 - 3\,A^2 a^2 \left(\tfrac{2}{Aa} - z\right)^2 + 1$$

siue

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = 2 - Aaz$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = 3 - 4Aaz + A^2 a^2 zz$$
$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} = 4 - 10Aaz + 6A^2 a^2 zz - A^3 a^3 z^3$$
$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}} = 5 - 20Aaz + 21A^2 a^2 zz - 8A^3 a^3 z^3 + A^4 a^4 z^4$$

etc.

quarum formularum progressio ex superioribus facillime colligitur.

Coroll. 6.

40. Ponamus pro eodem casu breuitatis gratia $Aaz = y$, ac pro quouis corpusculorum numero aequationes resoluendae ita se habebunt:

Pro

Pro vno corpusculo

$y - 2 = 0$, cuius radix est $y = 2$

Pro duobus corpusculis

$yy - 4y + 3 = 0$, cuius radices sunt $y = 1$; $y' = 3$

Pro tribus corpusculis

$y^3 - 6yy + 10y - 4 = 0$, cuius radices sunt

$y = 2$; $y' = 2 + \sqrt{2}$; $y'' = 2 - \sqrt{2}$

Pro quatuor corpusculis

$y^4 - 8y^3 + 21y^2 - 20y + 5 = 0$, cuius radices sunt

$y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$; $y' = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$; $y'' = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$; $y''' = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$.

Coroll. 7.

41. Si has formulas bene perpendamus, eas per quadrata sinuum, denotante ϱ angulum rectum, sequenti modo exhiberi posse deprehendemus:

Pro vno corpusculo

$y = 4\,(\text{sin.}\,\frac{1}{2}\varrho)^2$

Pro duobus corpusculis

$y = 4(\text{sin.}\,\frac{1}{3}\varrho)^2$; $y' = 4(\text{sin.}\,\frac{2}{3}\varrho)^2$

Pro tribus corpusculis

$y = 4\,(\text{sin.}\,\frac{1}{4}\varrho)^2$; $y' = 4(\text{sin.}\,\frac{2}{4}\varrho)^2$; $y'' = 4(\text{sin.}\,\frac{3}{4}\varrho)^2$

Pro quatuor corpusculis

$y = 4\,(\text{sin.}\,\frac{1}{5}\varrho)^2$; $y' = 4\,(\text{sin.}\,\frac{2}{5}\varrho)^2$; $y'' = 4(\text{sin.}\,\frac{3}{5}\varrho)^2$;
$y''' = 4(\text{sin.}\,\frac{4}{5}\varrho)^2$

quarum formularum progressio per se est manifesta.

Coroll.

Coroll. 8.

42. Inuentis autem pro quouis caſu valoribus ipſius y, ob $z = \frac{y}{Aa}$, erit $n = \sqrt{\frac{2Kk}{Aa}y}$, et pro reliquis coefficientibus:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(2-y)$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(3-4y+yy)$$
$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}(4-10y+6yy-y^3)$$
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A}(5-20y+21yy-8y^3+y^4)$$
$$\mathfrak{F} = \mathfrak{A}(6-35y+56yy-36y^3+10y^4-y^5)$$
etc.

Cum autem y habeat huiusmodi formam $y = 4(\text{ſin.}\,\Phi)^2$, erit:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\cdot 2\,\text{coſ.}\,2\Phi = \mathfrak{A}\cdot\frac{\text{ſin.}\,4\Phi}{\text{ſin.}\,2\Phi}$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\cdot(2\,\text{coſ.}\,4\Phi+1) = \mathfrak{A}\cdot\frac{\text{ſin.}\,6\Phi}{\text{ſin.}\,2\Phi}$$
$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\cdot(2\,\text{coſ.}\,6\Phi+2\,\text{coſ.}\,2\Phi) = \mathfrak{A}\cdot\frac{\text{ſin.}\,8\Phi}{\text{ſin.}\,2\Phi}$$
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A}\cdot(2\,\text{coſ.}\,8\Phi+2\,\text{coſ.}\,4\Phi+1) = \mathfrak{A}\cdot\frac{\text{ſin.}\,10\Phi}{\text{ſin.}\,2\Phi}$$
$$\mathfrak{F} = \mathfrak{A}\cdot(2\,\text{coſ.}\,10\Phi+2\,\text{coſ.}\,6\Phi+2\,\text{coſ.}\,2\Phi) = \mathfrak{A}\cdot\frac{\text{ſin.}\,12\Phi}{\text{ſin.}\,2\Phi}$$
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\cdot(\text{coſ.}\,12\Phi+2\,\text{coſ.}\,8\Phi+2\,\text{coſ.}\,4\Phi+1) = \mathfrak{A}\cdot\frac{\text{ſin.}\,14\Phi}{\text{ſin.}\,2\Phi}$$

vnde ſequens problema poterit in genere reſolui.

Problema 5.

43. Si filum, terminis I et O fixum et data vi K tenſum, onuſtum ſit quotcunque corpuſculis A, B, C etc. aequalibus et paribus interuallis a ſe inuicem diſtinctis, definire motum eius, poſtquam de ſtatu ſuo naturali vtcunque fuerit depulſum.

 Solutio.

Solutio.

Sit numerus corpusculorum $=m$; massa vniuscuiusque $=$ A, et binorum interuallum $=a$, erit totius fili massa $=m$A, et longitudo I O $=(m+1)a$. Reducta sint initio corpuscula A, B, C etc. ad distantias ab axe α, β, γ, etc. elapso autem tempore ω min. secund. peruenerint ad distantias $PA=p$; $QB=q$; $RC=r$, etc. His positis, si angulus rectus denotetur signo ϱ, et i sumatur pro numero quocunque integro positiuo; valor quilibet ipsius y erit $y=A(\sin.\frac{i}{m+1}\varrho)^2$, vnde fit $n=2\sin.\frac{i}{m+1}\varrho, \sqrt{\frac{2Kk}{Aa}}$; et ob $\Phi=\frac{i}{m+1}\varrho$, erit:

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\sin.\frac{4i}{m+1}\varrho:\sin.\frac{2i}{m+1}\varrho$$
$$\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\sin.\frac{6i}{m+1}\varrho:\sin.\frac{2i}{m+1}\varrho$$
$$\mathfrak{D}=\mathfrak{A}\sin.\frac{8i}{m+1}\varrho:\sin.\frac{2i}{m+1}\varrho$$
etc.

Ponatur iam $\mathfrak{A}=\mathfrak{a}\sin.\frac{2i}{m+1}\varrho$, ac pro motu habebuntur hae formulae:

$$p=\mathfrak{a}\sin.\frac{2i}{m+1}\varrho.\cos.(2\omega\sin.\frac{i}{m+1}\varrho.\sqrt{\frac{2Kk}{Aa}})+\text{etc.}$$
$$q=\mathfrak{a}\sin.\frac{4i}{m+1}\varrho.\cos.(2\omega\sin.\frac{i}{m+1}\varrho.\sqrt{\frac{2Kk}{Aa}})+\text{etc.}$$
$$r=\mathfrak{a}\sin.\frac{6i}{m+1}\varrho.\cos.(2\omega\sin.\frac{i}{m+1}\varrho.\sqrt{\frac{2Kk}{Aa}})+\text{etc.}$$
etc.

Scilicet ex quouis valore ipsius i formentur tales expressiones, eaeque coniunctae praebebunt valores generales pro applicatis p, q, r etc. At pro i successiue sumi debent numeri 1, 2, 3, 4 vsque ad m.

Coroll.

Coroll. 1.

44. Si breuitatis gratia ponatur angulus $\frac{1}{m+1}\varrho = \Phi$ et angulus $2\omega\sqrt{\frac{2Kk}{Aa}} = \psi$, habebuntur, substituendo pro i successiue numeros 1, 2, 3, 4 etc. sequentes expressiones pro applicatis:

$$p = \mathfrak{a}\,\text{sin.}\,2\Phi.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\Phi + \mathfrak{b}\,\text{sin.}\,4\Phi.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,2\Phi + \mathfrak{c}\,\text{sin.}\,6\Phi.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,3\Phi + \text{etc.}$$

$$q = \mathfrak{a}\,\text{sin.}\,4\Phi.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\Phi + \mathfrak{b}\,\text{sin.}\,8\Phi.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin}\,2\Phi + \mathfrak{c}\,\text{sin.}\,12\Phi.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,3\Phi + \text{etc.}$$

$$r = \mathfrak{a}\,\text{sin.}\,6\Phi.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\Phi + \mathfrak{b}\,\text{sin.}\,12\Phi.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,2\Phi + \mathfrak{c}\,\text{sin.}\,18\Phi.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,3\Phi + \text{etc.}$$

$$s = \mathfrak{a}\,\text{sin.}\,8\Phi.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\Phi + \mathfrak{b}\,\text{sin}\,16\Phi.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,2\Phi + \mathfrak{c}\,\text{sin.}\,24\Phi.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,3\Phi + \text{etc.}$$

etc.

Coroll. 2.

45. Ratio autem harum formularum clarius apparebit, si eas ad quemuis corpusculorum numerum accommodemus. Maneat ergo breuitatis gratia angulus $2\omega\sqrt{\frac{2Kk}{Aa}} = \psi$, eritque pro casu vnius corpusculi, ob $\Phi = \frac{1}{2}\varrho$,

$$p = \mathfrak{a}\,\text{sin.}\,\varrho.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin}\,\tfrac{1}{2}\varrho.$$

Coroll. 3.

46. Pro casu autem duorum corpusculorum, vbi $\Phi = \frac{1}{3}\varrho$, habebimus:

$$p = \mathfrak{a}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{3}\varrho.\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{3}\varrho + \mathfrak{b}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{3}\varrho.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{3}\varrho$$

$$q = \mathfrak{a}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{3}\varrho.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{3}\varrho - \mathfrak{b}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{3}\varrho.\,\text{cos.}\,\psi\,\text{sin}\,\tfrac{2}{3}\varrho.$$

Coroll. 4.

47. Pro casu trium corpusculorum, ob $\Phi = \frac{1}{4}\varrho$, habebimus:

$$p = \mathfrak{a}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{4}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{4}\varrho + \mathfrak{b}\,\text{sin}\,\tfrac{4}{4}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{4}\varrho$$
$$+ \mathfrak{c}\,\text{sin.}\,\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{3}{4}\varrho$$
$$q = \mathfrak{a}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{4}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{4}\varrho + \mathfrak{b}\,\text{sin}\,\tfrac{3}{4}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin}\,\tfrac{2}{4}\varrho$$
$$- \mathfrak{c}\,\text{sin}\,\tfrac{4}{4}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{3}{4}\varrho$$
$$r = \mathfrak{a}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{4}\varrho\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{4}\varrho - \mathfrak{b}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{4}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{4}\varrho$$
$$+ \mathfrak{c}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{4}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{3}{4}\varrho.$$

Coroll. 5.

48. Pro casu quatuor corpusculorum, ob $\Phi = \frac{1}{5}\varrho$, habebimus:

$$p = \mathfrak{a}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{5}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{5}\varrho + \mathfrak{b}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{5}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin}\,\tfrac{2}{5}\varrho$$
$$+ \mathfrak{c}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{5}\varrho.\ \text{cos}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{3}{5}\varrho + \mathfrak{d}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{5}\varrho.\ \text{cos}\,\psi\,\text{sin}\,\tfrac{4}{5}\varrho$$
$$q = \mathfrak{a}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{5}\varrho.\ \text{cos}\,\psi\,\text{sin}\,\tfrac{1}{5}\varrho + \mathfrak{b}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{5}\varrho\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{5}\varrho$$
$$- \mathfrak{c}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{5}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{3}{5}\varrho - \mathfrak{d}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{5}\varrho\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{5}\varrho$$
$$r = \mathfrak{a}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{5}\varrho.\ \text{cos}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{5}\varrho - \mathfrak{b}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{5}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin}\,\tfrac{2}{5}\varrho$$
$$- \mathfrak{c}\,\text{sin}\,\tfrac{2}{5}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{3}{5}\varrho + \mathfrak{d}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{5}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin}\,\tfrac{4}{3}\varrho$$
$$s = \mathfrak{a}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{5}\varrho\ \text{cos}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{5}\varrho - \mathfrak{b}\,\text{sin}\,\tfrac{4}{5}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{5}\varrho$$
$$+ \mathfrak{c}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{5}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin}\,\tfrac{3}{5}\varrho - \mathfrak{d}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{5}\varrho.\ \text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{5}\varrho.$$

Coroll. 6.

49. Quod si vero numerus corpusculorum fuerit infinite magnus, ob $\text{sin.}\,\Phi = \Phi = \frac{\varrho}{m}$, nanciscemur has formulas:

$$p = \frac{2\mathfrak{a}\varrho}{m}\,\text{cos.}\,\frac{\psi\varrho}{m} + \frac{4\mathfrak{b}\varrho}{m}\,\text{cos.}\,\frac{2\psi\varrho}{m} + \frac{6\mathfrak{c}\varrho}{m}\,\text{cos.}\,\frac{3\psi\varrho}{m} + \text{etc.}$$
$$q = \frac{4\mathfrak{a}\varrho}{m}\,\text{cos.}\,\frac{\psi\varrho}{m} + \frac{8\mathfrak{b}\varrho}{m}\,\text{cos.}\,\frac{2\psi\varrho}{m} + \frac{12\mathfrak{c}\varrho}{m}\,\text{cos.}\,\frac{3\psi\varrho}{m} + \text{etc.}$$
$$r = \frac{6\mathfrak{a}\varrho}{m}\,\text{cos.}\,\frac{\psi\varrho}{m} + \frac{12\mathfrak{b}\varrho}{m}\,\text{cos.}\,\frac{2\psi\varrho}{m} + \frac{18\mathfrak{c}\varrho}{m}\,\text{cos.}\,\frac{3\psi\varrho}{m} + \text{etc.}$$

etc.

Coroll. 7.

50. Verum si huius cordae tota longitudo IO ponatur $= l$, et massa totius cordae $= M$ ob $a = \frac{l}{m}$, et $A = \frac{M}{m}$, erit $\psi = 2m\omega \surd \frac{2Kk}{Ml}$, vnde $\frac{\psi\varrho}{m} = 2\varrho\omega \surd \frac{2Kk}{Ml} = \pi\omega \surd \frac{2Kk}{Ml}$; in coefficientibus autem constantibus vtpote arbitrariis omitti poterunt litterae ϱ et m, ita vt sit:

$$p = \mathfrak{a} \operatorname{cos.} \pi\omega \surd \frac{2Kk}{Ml} + \mathfrak{b} \operatorname{cos.} 2\pi\omega \surd \frac{2Kk}{Ml} + \mathfrak{c} \operatorname{cos.} 3\pi\omega \surd \frac{2Kk}{Ml} + \text{etc.}$$

$$q = 2p;\ r = 3p;\ s = 4p \text{ etc.}$$

quae formula eundem exhibet motum, qui pro corda vniformiter crassa determinari solet.

DE MOTV VIBRATORIO CORDARVM INAEQVALITER CRASSARVM.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Quae primum a *Tayloro* circa casum vibrationum singularem, tum vero generaliter a Cel. *Alemberto* et a me sunt inuestigata, ad cordas per totam longitudinem aequaliter crassas restringuntur, ex quo etiam regulae, pro formatione soni inde petitae, vltra hoc cordarum genus extendi non possunt. Ita regula inuenta, quod tempus cuiusque vibrationis cordae, cuius longitudo $= a$, pondus $= M$, et vis tendens cordam $= F$, sit $= \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ minutorum secundorum, denotante g altitudinem, ex qua graue vno minuto secundo libere delabitur, non nisi pro cordis vniformiter crassis habet locum; quin etiam in his tantum cordis vsu venire potest, vt eadem corda vel duplo, vel triplo, vel quadruplo, plures edat vibrationes, quam haec regula continet. Denique etiam insigne illud phaenomenon, quo eadem corda subinde plures huiusmodi sonos, rationem numerorum 1, 2, 3, 4 etc. sequentes, simul edere obseruatur, cuius causam Vir Celeb. *Daniel Bernoulli* felicissime nuper explicauit, in aliis cordis, nisi quae sint aequabiliter crassae, haud deprehenditur.

2.

2. Quando autem cordae non ſunt aequabiliter craſſae, atque in aliis corporum vibrantium generibus etiamſi ſimili modo vſu venire poteſt, vt idem corpus plures ſonos ſimul edat, hi tamen ſoni vtcunque a ratione numerorum 1, 2, 3, 4 etc. diſcrepare poſſunt. Ex quo intelligere licet, quam infirmo nitatur fundamento principium illud, cui ſummus in arte muſica artifex *de Rameau* vniuerſam harmoniam ſuperſtruendam arbitratur. Ideo ſcilicet diuerſos ſonos ad harmoniam compoſitos eſſe putat, quod iidem ſoni ab eadem corda vibrante ſimul producantur. Verum praeterquam iam pridem firmiſſimis rationibus eſt demonſtratum, principium harmoniae in ſimplicitate rationum, quas numeri vibrationum eodem tempore editarum inter ſe tenent, vnice eſſe quaerendum; haec opinio etiam per cordas inaequaliter craſſas, quae ſonos vtcunque diſſonos ſimul edere poſſunt, funditus euertitur.

3. Ne igitur talibus phaenomenis, quae cordis vniformiter craſſis ſunt propria, nimium tribuatur, haud abs re fore arbitror, ſi cordarum etiam inaequaliter craſſarum motum, quantum quidem Analyſeos fines permittunt, examini ſubiecero, eiusque inueſtigationem latiſſime complexam inſtituero. Maxime autem ardua eſt haec quaeſtio, atque grauiſſimis difficultatibus inuoluta; hancque ob cauſam etiamſi in eius enodatione parum profecero, tamen ampliſſimus nobis aperietur campus, vires noſtras in analyſi exercendi, huiusque ſcientiae limites vlterius dilatandi. Hic igitur non tam ipſius quaeſtionis, quam tractandam ſuſcipio, vtilitas eſt ſpectanda, etiamſi forte non

parum

parum doctrinam de vibrationibus cordarum sit illustratura, quam opportuna occasio nonnulla insignia momenta, per totam Analysin vberrimum fructum pollicentia, accuratius perpendendi. Huiusmodi autem inuestigationibus, quae per se leuis momenti videantur, praeclarissima inuenta, quibus Analysis adhuc est ditata, plerumque debemus.

4. Quo igitur facilius massam seu pondus cordae ratione inaequalis crassitiei in calculum introducere queamus, sumamus cylindri, ex pari materia confecti, cuius basis diameter sit $= b$, et altitudo $= b$, massam seu pondus esse $= M$: hinc enim cuiusque cylindri elementaris in corda concipiendi, cuius diameter est $= z$, et altitudo $= dx$, pondus erit $= \frac{Mzzdx}{bbb}$. Cordam enim tanquam rotundam, seu quasi tornatam, spectare licet, vt sit ex infinitis huiusmodi cylindrulis elementaribus composita. Praeterea vero hic cordam perfecte flexilem pono, omnique rigore, siue elatere, penitus destitutam, vt inflexioni, quam inter vibrandum patitur, nullo modo obluctetur. Denique etiam, vti in cordis aequabilis crassitiei est factum, ipsas vibrationes quasi infinite paruas spectabo, ita vt excursiones vtrinque a situ naturali recedentes prae longitudine cordae pro nihilo haberi queant. Hoc modo longitudo cordae manebit inuariata, calculoque hoc commodi assequemur, vt elementa curuae ab elementis axis non discrepent.

Tab. II. Fig. 1. 5. Sit igitur A B huiusmodi corda inaequabilis crassitiei, in punctis A et C fixa, et tensa a vi quacunque, quam exponamus pondere $= F$. Statuamus totam

totam cordae longitudinem $AB = a$, quae, dum eſt in quiete, vtique ſitum rectilineum APB tenebit; abſciſſa autem a puncto A portione quacunque $AP = x$, ſit diameter craſſitiei eius in puncto $P = z$, et, quia quaeſtionem generatim complectitur, erit z functio quaecunque ipſius x, et quidem functio cognita, ſiquidem variationem craſſitiei tanquam cognitam ſpectemus. Sumto ergo longitudinis elemento $Pp = dx$, erit maſſa ſeu pondus huius elementi cordae $Pp = \frac{Mzzdx}{bbh}$. In genere ergo problema, cuius ſolutionem aggredior, ita ſe habet:

Si haec corda a ſtatu naturali recto APB *in figuram quamcunque fuerit depulſa, ita tamen vt eius elongationes a recta* AB *pro axe aſſumtae ſint quam minimae, atque corda de hoc ſitu violento ſubito dimittatur, definire motum vibratorium, quem eſt receptura:*

Proponitur ergo in hoc problemate figura quaecunque, quae cordae initio fuerit tributa, quaeſtioque huc redit, vt ad quoduis tempus, a momento relaxationis elapſum, ſtatus cordae definiatur.

6. Ponamus ergo, ab iſto momento iam elapſum eſſe tempus $= t$, atque nunc cordam conſecutam eſſe figuram AMB, cuius termini quidem A et B cum ſtatu naturali conueniant, punctum autem P cordae iam in M eſſe translatum, vocemusque hanc applicatam $BM = y$, quae erit quantitas non ſolum ab abſciſſa $AP = x$, ſed inſuper etiam a tempore t pendens, ſeu erit functio quaedam ipſius x et ipſius t ſimul, in cuius functionis inueſtigatione tota problematis

 ſolu-

ſolutio verſabitur. Iam autem quasdam primarias proprietates huius functionis ipſa quaeſtionis natura ſuppeditat, quarum prima eſt, vt, ſi ponatur $x = 0$, iſta functio y ſemper euaneſcat, quicunque valor tempori t tribuatur; deinde vero idem euenire debet in altero puncto fixo B, ſi ponatur $x = AB = a$. Tertio, ſi tempus t ſtatuatur euaneſcens, functio y ita debet eſſe comparata, vt figuram cordae primitus impreſſam referat Quarto vero, etiam poſito $t = 0$, motus cordae omnino euaneſcere debet, quod eueniet, ſi ratio differentialis $\frac{dy}{dt}$, dum abſciſſa x vt conſtans tractatur, in nihilum abeat.

7. Dum enim in his excurſionibus minimis longitudo cordae non mutari aſſumitur, longitudo AM aequalis cenſenda eſt longitudini $AP = x$, vnde durante motu punctum M ſecundum ipſam applicatam MP mouebitur, neque extra eam vsquam diuagabitur. Quare, ſi ponamus $dy = p\,dx + q\,dt$, punctum M tempuſculo dt per ſpatiolum $q\,dx$ feretur, cuius motus propterea celeritas, a recta AB ſecundum directionem PM recedens, erit $= \frac{q\,dt}{dt} = q$. Vtar autem hic ſignandi modo iam aliquoties expoſito, et pro q ſcribam $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, vti ſimiliter haec ſcriptio $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ valorem ipſius p exprimit. Vlterius autem iſtum ſignandi modum hic extendi conueniet, ita vt, quia $p = \left(\frac{dy}{dx}\right)$ et $q = \left(\frac{dy}{dt}\right)$ poſuimus, haec formula $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ idem ſignificet, quod $\left(\frac{dp}{dx}\right)$, et $\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$ idem, quod $\left(\frac{dp}{dt}\right)$; tum vero $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ idem, quod $\left(\frac{dq}{dt}\right)$, et $\left(\frac{ddy}{dt\,dx}\right)$ idem, quod $\left(\frac{dq}{dx}\right)$. Cum autem ex

natura

natura differentiationis ſit $\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{dp}{dt}\right)$, manifeſtum eſt, hoc ſignandi modo fore $\left(\frac{ddy}{dt\,dx}\right) = \left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$, quae ſcriptionis ſimilitudo valoris vtriusque aequalitatem commodisſime declarat.

8. Dum autem corda in ſitu A M B verſatur, ſingula eius elementa in motu ſuo vel accelerabuntur, vel retardabuntur, quae motus mutatio a vi cordam tendente F oritur, indeque eſt definienda. Hanc vero vim, a tenſione reſultantem, ex figura A M B, quam corda nunc tenet, determinari oportet, quo in negotio, quamdiu eandem cordae figuram A M B contemplamur, tempus t tanquam quantitatem conſtantem tractari conueniet, vnde in calculum hic tantum formulae $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ et $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ ingredientur, excluſis reliquis, variabilitatem temporis t inuoluentibus. At quia corda a ſitu naturali quam minime diſtat, tenſio cordae in ſingulis, elementis immutata manebit, eritque adhuc $= E$, vnde punctum M, ſeu potius elementum Mm, tam a portione antecedente M A, quam a ſequente mB, vim $= F$ ſuſtinebit, quarum virium directio tangentium in punctis M et m ducendarum directionem ſequetur.

9. Reſoluantur ergo hae vires more ſolito, atque hinc, ex vi F ſecundum tangentem in M antrorſum vrgente, naſcetur vis ſecundum directionem M P ſollicitans $= F\left(\frac{dy}{dx}\right)$, quia elementum curuae ipſi elemento abſciſſae dx aequale reputatur. Verum ex vi F ſecundum tangentem in m retrorſum vrgente naſcetur vis ſecundum directionem contrariam P M ſollicitans $= F\left(\frac{dy}{dx}\right) + F\,d.\left(\frac{dy}{dx}\right)$, in qua poſtrema differen-

tiatione tempus t adhuc vt constans spectatur: erit ergo $d.\,(\frac{dy}{dx}) = d.\,p = dx(\frac{dp}{dx})$ ideoque $d.\,(\frac{dy}{dx}) = dx(\frac{ddy}{dx^2})$. Ex his ergo duabus viribus resultat vis elementum cordae Mm ab axe AB secundum directionem PM remouens $= F\,dx(\frac{ddy}{dx^2})$, si quidem haec expressio haberet valorem positiuum; quia autem semper valorem negatiuum sortitur, haec vis perpetuo cordam ad situm naturalem AB impellit, vti ex motus natura per se est manifestum. Vi ergo motrice, cuius actioni singula cordae elementa sunt subiecta, inuenta, facile erit ipsam motus mutationem elicere, vnde totus cordae motus subsecuturus sponte innotescet.

10. Inuenta ergo vis motrix $F\,dx(\frac{ddy}{dx^2})$ diuidatur per massam mouendam $\frac{Mzzdx}{bbb}$, vt obtineatur acceleratio $= \frac{Fbbb}{Mzz}(\frac{ddy}{dx^2})$. Cum iam celeritas puncti M sit $= (\frac{dy}{dt})$, inde acceleratio secundum directionem PM quoque definitur per $2(\frac{ddy}{dt^2})$, secundum eas motus leges, quas alias stabiliui, vbi celeritas per altitudinem ipsi debitam, tempus vero per spatium ad celeritatem applicatum mensuratur. Quod si autem tempus potius in minutis secundis exprimere velimus, introducta altitudine g, ex qua graue vno minuto secundo libere descendit, loco litterae t postremam formulam afficientis scribi oportet $2t\sqrt{g}$, ideoque $4g\,dt^2$ loco dt^2, ex quo acceleratio erit $= \frac{1}{2g}(\frac{ddy}{dt^2})$, ac littera t iam numerum absolutum denotat, indicantem, quot minuta secunda a motus initio iam sint praeterlapsa. Gemina ergo accelerationis formula sequentem praebebit aequationem:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fbbb}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) \text{ seu } \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

quae

quae totum motum, quo corda ciebitur, in se complectitur.

11. Hic primum obseruandum est, quantitatem z esse functionem ipsius x tantum, atque ex data cordae crassitie inaequabili definiri; hac ergo functione, tanquam cognita spectata, quaestio mechanica ad hanc quaestionem mere analyticam est reuocata; qua quaeritur, qualis functio binarum variabilium x et t pro y substitui debeat, vt conditiones in hac aequatione $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ contentae adimpleantur; siue vt haec analogia locum habeat:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) : \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = 2Fbbbg : Mzz.$$

Facile autem perspicitur, huic conditioni infinitis modis satisfieri posse, ex quibus deinceps eos eligi oportet, qui simul proprietatibus ante commemoratis sint praediti; scilicet vt semper prodeat $y=0$, siue ponatur $x=0$, siue $x=a$, quemcunque valorem tempus t obtinuerit. Deinde vt, posito tempore $t=0$, aequatio inter x et y eam ipsam curuam sit exhibitura, quae primum cordae fuerit inducta. Tum vero, vt, posito $t=0$, valor quantitatis $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ euanescat pro qualibet abscissa x.

12. Vt igitur solutio has cunctas determinationes suscipere possit, facile intelligitur, aequationem inventam $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ generalissime construi oportere, ita vt pro y expressio generalissima eliciatur, in qua omnes omnino valores, huic aequationi satisfacientes, sint contentae; cuiusmodi solutionem dedi pro casu cordarum aequabiliter crassarum, quo cordae

diameter z erit conſtans $= b$, totusque ideo coefficiens $\frac{2Fbbhg}{Mzz}$ quantitati conſtanti aequalis. Oſtendi enim pro hoc caſu, ſi breuitatis gratia ponatur $\frac{2Fbbhg}{Mzz} = cc$, huic aequationi $(\frac{ddy}{dt^2}) = cc(\frac{ddy}{dx^2})$ generaliſſime ſatisfieri per hanc formam $y = \Phi(x+ct) + \psi(x-ct)$, vbi Φ et ψ ſunt ſigna, functiones quascunque quantitatum $x+ct$ et $x-ct$ indicantia. Pro noſtro ergo caſu cordarum inaequaliter craſſarum ſimilis forma generaliſſima deſideratur, quae pari modo aequationem differentio-differentialem $(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{2Fbbhg}{Mzz}(\frac{ddy}{dx^2})$ exhauriat; huiusmodi autem ſolutionem ob defectum analyſeos vix ſperare licet.

13. Quodſi tantum functionem particularem eruerimus, quae loco y ſubſtituta, aequationi ſatisfaciat $(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{2Fbbhg}{Mzz}(\frac{ddy}{dx^2})$, ea ſpeciem quandam vibrationum, quarum corda erit capax, definiet, ſiquidem ea functio ita fuerit comparata, vt, ſiue ponatur $x = 0$, ſiue $x = a$, valor ipſius y prodeat euaneſcens, quantumcunque tempus t iam fuerit elapſum. Ac ſi haec conditio locum habeat, patebit, cuiusmodi figura cordae primitus tribui debeat, vt ad hunc motum ſit accommodata. Tales igitur ſolutiones particulares vſu non carebunt, cum ſemper certam quandam ſpeciem vibrationum nobis declarent, quae ſub certis conditionibus in motu cordae locum habere queant; etiamſi ſolutio problematis, in genere propoſiti, quo figura cordae initialis eſt praeſcripta, adhuc maneat abſcondita. Ob defectum ergo ſolutionis generalis in huiusmodi ſolutionibus particularibus acquieſcere debebimus, quemadmodum etiam pro

caſu

casu vniformiter crassarum solutio *Taylori*, etsi fuerat particularis, non parum motum huiusmodi cordarum illustrauit, ac tandem etiam ad solutionem generalem perduxit.

14. Multo minus igitur pro casu cordarum inaequaliter vtcunque crassarum, solutionem completam ante expectare poterimus, quam plures solutiones particulares sedulo euoluerimus. Ac primum quidem animaduerto, statim ac duae pluresue solutiones particulares fuerint inuentae, ex iis facillime infinitas alias per compositionem erui posse. Si enim P, Q, R sint eiusmodi functiones quantitatum x et t, quarum quaelibet loco y substituta aequationi inuentae satisfaciat, tum quaeuis harum aequationum $y = P$, $y = Q$, $y = R$ certam quandam speciem vibrationum exprimet, quarum cuique certus quidam sonus conueniet. Iam vero manifestum est, si singulae aequationes istae seorsim quaesito satisfaciant, tum etiam aequationem ex illis vtcunque compositam $y = \alpha P + \beta Q + \gamma R$ quaesito aeque esse satisfacturam; vnde hoc nanciscimur eximium Theorema Physico-Musicum, a Celeb. *Bernoullio* prolatum, quod quos sonos corda seorsim edere valeat, eosdem quoque simul edere possit.

15. Ponamus breuitatis gratia $\frac{2Fbbbg}{Mzz} = ss$, vt ss denotet functionem datam abscissae x, et cardo quaestionis in hac aequatione $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = ss\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ resoluenda versabitur, cuius quidem constructionem generalem, si ss esset quantitas constans, iam nouimus contentam fore in hac formula:

$$y = \Phi(x + st) + \psi(x - st)$$

ve-

verum quia s est quantitas variabilis, haec formula non amplius conditioni praescriptae satisfacit. Operae pretium igitur erit, inuestigare, quibusnam casibus similes formulae generales locum habere queant; hunc in finem fingamus huiusmodi valorem

$$y = v\,\Phi\, u,$$

vbi v et u sint functiones quaecunque ipsarum t et x, etiamsi prior v sine detrimento amplitudinis tanquam functio solius x spectari possit. Vtar autem in differentiatione his signis:

$$d.\,\Phi u = du.\,\Phi' u \text{ et } d.\,\Phi' u = du.\,\Phi'' u.$$

16. Cum igitur differentiando sit

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right)\Phi u + v\left(\frac{du}{dt}\right)\Phi' u \text{ et}$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)\Phi u + v\left(\frac{du}{dx}\right)\Phi' u, \text{ erit}$$
$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dt^2}\right)\Phi u + 2\left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)\Phi' u + v\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)\Phi' u + v\left(\frac{du}{dt}\right)^2\Phi'' u$$
$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dx^2}\right)\Phi u + 2\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\Phi' u + v\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)\Phi' u + v\left(\frac{du}{dx}\right)^2\Phi'' u$$

atque, his valoribus substitutis, in aequatione $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = ss\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ membra, quodlibet functionis genus continentia, seorsim aequentur, vnde sequentes aequationes obtinebuntur:

I. $\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = ss\left(\frac{ddv}{dx^2}\right)$

II. $2\left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\frac{du}{dt}\right) + v\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = 2ss\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) + ssv\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)$

III. $v\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = ssv\left(\frac{du}{dx}\right)^2$

quarum postrema statim praebet $\left(\frac{du}{dt}\right) = \pm s\left(\frac{du}{dx}\right)$, cui satisfit ponendo $u = t \pm \int \frac{dx}{s}$. Satisfaceret quidem etiam functio quaecunque formulae $t \pm \int \frac{dx}{s}$; sed hinc amplitudo formulae assumtae Φu non extenderetur.

17.

17. Ponamus ergo $u = t \pm \int \frac{dx}{s}$, quae formula est determinata ob s functionem ipsius x tantum, eritque $\left(\frac{du}{dt}\right) = 1$, et $\left(\frac{du}{dx}\right) = \pm \frac{1}{s}$, porroque $\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = 0$, et $\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = \mp \frac{ds}{ssdx}$; qui valores in secunda aequatione substituti praebent:

$$2\left(\frac{dv}{dt}\right) = \pm 2s\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{vds}{dx}$$

seu $$\left(\frac{dv}{dt}\right) = \pm s\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{vds}{2dx}$$

Hinc vlterius more nostro differentiando consequimur:

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \pm s\left(\frac{ddv}{dxdt}\right) \mp \frac{ds}{2dx}\left(\frac{dv}{dt}\right) \text{ et}$$

$$\left(\frac{ddv}{dtdx}\right) = \pm \frac{ds}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) \pm s\left(\frac{ddv}{dx^2}\right) \mp \frac{ds}{2dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{vdds}{2dx^2}$$

vnde fiet:

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = + \frac{sds}{2dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + ss\left(\frac{ddv}{dx^2}\right) - \frac{svdds}{2dx^2} - \frac{sds}{2dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{vds^2}{4dx^2},$$

qui valor, cum per primam aequationem aequalis esse debeat ipsi $ss\left(\frac{ddv}{dx^2}\right)$, orietur:

$$-\frac{svdds}{2dx^2} + \frac{vds^2}{4dx^2} = 0, \text{ seu } 2sdds = ds^2,$$

cuius integrale primum est $\frac{\alpha ds^2}{dx^2} = s$, porroque $x = \beta + 2\sqrt{\alpha s}$, sicque obtinebimus $s = \frac{(k+nx)^2}{f}$.

18. En ergo casum eximium, pro quo solutionem generalem exhibere poterimus, qui toties locum habet, quoties diameter crassitiei cordae z ita pendeat ab abscissa x, vt sit $s = \frac{(k+nx)^2}{f}$; seu quando fuerit $\frac{2Fbbhg}{Mzz} = \frac{(k+nx)^4}{ff}$, ideoque ipse diameter crassitiei cordae $z = \frac{bf\sqrt{hg}}{(k+nx)^2}\sqrt{\frac{2F}{M}}$. Cum autem iam sit $s = \frac{(k+nx)^2}{f}$, erit $u = t \mp \frac{f}{n(k+nx)} + m$; et ob $\frac{ds}{dx} = \frac{2n(k+nx)}{f}$, pro valore v habebimus:

$$2\left(\frac{dv}{dt}\right) = \pm \frac{2(k+nx)^2}{f}\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{2n(k+nx)}{f}v$$

 Pona-

Ponamus ergo, v tantum ab x pendere, vt fit $\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$, esseque oportet $(k + nx)dv = uvdx$, seu $v = \alpha(k + nx)$. Quare cum pro u duplicem valorem elicuerimus, et vtriusque functionem quamcunque capere liceat, exinde obtinebitur pro y sequens valor generalis:

$$y = (k + nx)\Phi\left(t + \alpha + \frac{f}{n(k + nx)}\right) + (k + nx)\Psi\left(t + \beta - \frac{f}{n(k + nx)}\right)$$

19. Quo hunc casum facilius applicare queamus, ponamus, diametrum crassitiei cordae in A esse $= b$, in alio autem quocunque loco P esse $z = \frac{b}{\left(1 + \frac{nx}{a}\right)^2}$ $= \frac{aab}{(a + nx)^2}$, ita vt in altero termino B diameter cordae futurus sit $z = \frac{b}{(1 + n)^2}$, vbi n vel numerum positiuum quemcunque, vel fractionem quamcunque vnitate minorem negatiuam assumere licet. Quodsi iam haec forma comparetur cum praecedente $z = \frac{bf\sqrt{bg}}{(k + nx)^2}\sqrt{\frac{2F}{M}}$, habebimus $k = a$ et $f = \frac{aa}{\sqrt{bb}}\sqrt{\frac{M}{2F}} = \frac{a\sqrt{M}}{\sqrt{2Fbg}}$. In Formula autem ante inuenta ponamus $\alpha = -\frac{f}{nk}$, et $\beta = \frac{f}{nk}$, quod sine detrimento vniuersalitatis fieri potest, sicque obtinebimus pro motu cordae determinando sequentem aequationem generalem:

$$y = (a + nx)\Phi\left(t + \frac{ax\sqrt{M}}{(a + nx)\sqrt{2Fbg}}\right) + (a + nx)\Psi\left(t - \frac{ax\sqrt{M}}{(a + nx)\sqrt{2Fbg}}\right)$$

quam etiam hoc modo exprimere licet:

$$y = (a + nx)\Phi\left(\frac{ax}{a + nx} + t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right) + (a + nx)\Psi\left(\frac{ax}{a + nx} - t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right),$$

20. In hac expressione itaque M denotat pondus cordae, aequaliter crassae, longitudinis $= b$, cuius crassities aequalis est ei, quam nostra corda habet in termino A; at F denotat vim, qua corda est tensa; Φ autem

autem et Ψ ſunt ſigna, quibus functiones quaecunque indicantur. Has igitur ita comparatas eſſe oportet, vt, ſiue ponatur $x=0$, ſiue $x=a$, valor ipſius y ſemper euaneſcat; vnde fit:

$$\text{I.}\quad \Phi\left(t\surd\tfrac{2Fbg}{M}\right)+\Psi\left(-t\surd\tfrac{2Fbg}{M}\right)=0$$

$$\text{II.}\quad \Phi\left(\tfrac{a}{1+n}+t\surd\tfrac{2Fbg}{M}\right)+\Psi\left(\tfrac{a}{1+n}-t\surd\tfrac{2Fbg}{M}\right)=0$$

Cum deinde, poſito $t=0$, eſſe debeat $\left(\frac{dy}{dt}\right)=0$, quidquid ſit x, neceſſe eſt, vt ſit:

$$\text{III.}\quad \Phi'\left(\tfrac{ax}{a+nx}\right)-\Psi'\left(\tfrac{ax}{a+nx}\right)=0$$

vnde patet, ſigna Φ' et Ψ', ideoque et Φ et Ψ, ſimiles functiones denotare debere.

21. Cum igitur functio Ψ ſimilis eſſe debeat functioni Φ, haec porro eius naturae eſſe debet, vt ſit tam $\Phi u+\Phi(-u)=0$, quam

$$\Phi\left(\tfrac{a}{1+n}+u\right)+\Phi\left(\tfrac{a}{1+n}-u\right)=0;$$

vnde, cum omnis functio per lineam curuam repraeſentari poſſit, cuius applicatae exhibeant iſtas functiones abſciſſis reſpondentes, manifeſtum eſt, pro noſtro caſu eiusmodi requiri lineam curuam, quae circa initium abſciſſarum habeat ramos alternatim aequales, ita vt, poſita abſciſſa negatiua, applicata quoque prodeat negatiua; tum vero, ſumto in axe interuallo $=\frac{a}{1+n}$, vt circa hoc punctum iterum dentur rami vtrinque alternatim aequales, ita vt, ſi alter ſupra axem extendatur, alter infra axem iaceat. Quoniam igitur huiusmodi puncta, circa quae exiſtunt rami alternatim aequales, centra lineae curuae appellare licet, patet, tam initium abſciſſarum ipſum, quam aliud punctum in axe, inde interuallo $\frac{a}{1+n}$ remotum, centri natura praedita eſſe oportere. Hinc autem ſequitur, infinita alia quoque dari centra in axe ſita, quae a ſe inuicem interuallo $\frac{a}{1+n}$ ſint remota.

Tab. II. Fig. 2. 22. Haec igitur curua, quam determinatricem motus vocabo, ita erit formata, vti in figura 2 repraeſentatur. Erit ſcilicet anguiformis, infinitos habens plexus βa, ab, $b\alpha$ inter ſe ſimiles et aequales, ita vt circa puncta β, a, b, α rami alternatim ſint aequales, atque horum punctorum interualla ſint $ab = \beta a = b\alpha = \frac{a}{1+n}$. Si iam horum punctorum quodpiam a pro abſciſſarum initio aſſumatur, capiaturque abſciſſa quaecunque $aq = u$, erit applicata $qn = \Phi u$, ſeu exhibebit eiusmodi functionem ipſius u, qualis ad motus determinationem requiritur. Quaecunque ergo curua huius formae fuerit deſcripta, ea ſemper ſpeciem quandam motus vibratorii, quem corda ſuſcipere poteſt, definiet, et cum innumerabiles curuae huius formae diuerſae deſcribi queant, innumerabiles quoque motus vibratorii ſpecies inde determinabuntur, quae ratione curuaturae, quam corda ſingulis momentis induet, erunt quidem inter ſe diuerſae; verum ſi ipſe motus vibratorius eiusque periodi ſpectentur, omnes admirabili modo inter ſe conſentient, niſi forte certis caſibus eadem corda eodem tempore, vel duplo, vel triplo, vel quadruplo etc. plures vibrationes ſit editura.

23. Ad certam autem motus ſpeciem conſtituendam non opus eſt, vt iſta curua determinatrix ſecundum

dum legem continuitatis ſit deſcripta, vt eius natura aequatione analytica comprehendi queat; ſed ad hunc vſum aeque erit accommodata, etiamſi vtcunque veluti libero manus tractu fuerit delineata, neque eius partes per legem continuitatis inter ſe connectantur, dummodo figuram habeat praeſcriptam. Ita pro lubitu ſi ſuper axe intra puncta a et b curua quaecunque, ſiue continua, ſiue non continua, fuerit deſcripta, eiusdem curvae deſcriptio vtrinque ad eundem axem infinitum repetatur, ita vt alternis vicibus ſupra et infra axem delineetur, et in ſingulis punctis a, b, α, β pares curuae anb termini inuicem iungantur. Hoc igitur modo ſemper curua ad motum quendam cordae determinandum apta obtinebitur, vbi notandum eſt, etiamſi pro curua anb linea algebraica, veluti arcus circuli, fuerit aſſumta, quae naturalem habeat continuationem, hac tamen penitus reiecta continuationem modo deſcripto inſtitui oportere.

24. Interim tamen quoque huiusmodi curuae determinatrices continuae exhiberi poſſunt, quae ſecundum totam extenſionem vna aequatione comprehendantur. Tales autem curuae, vti per ſe eſt manifeſtum, inter algebraicas non reperiuntur, ſed ex ordine tranſcendentium ſunt petendae, ex quo quidem linea ſinuum, ſeu trochois elongata, inprimis eſt notanda, quae pro noſtro inſtituto, ſi ponamus $aq = u$ et $qn = v$, hanc praebet aequationem $v = \alpha\,\text{ſin.}\,\frac{\pi(1+n)u}{a}$, quin etiam aequatio magis generalis ſequens aeque eſt idonea:

$$v = \alpha\,\text{ſin.}\,\frac{\pi(1+n)u}{a} + \beta\,\text{ſin.}\,\frac{2\pi(1+n)u}{a} + \gamma\,\text{ſin.}\,\frac{3\pi(1+n)u}{a} + \text{etc.}$$

 ſed

ſed hae curuae etiamſi continuae prae non continuis in hoc negotio nullam habent praerogatiuam, atque in hoc vis noſtrae ſolutionis generalis potiſſimum conſiſtit: quod eo magis eſt notatu dignum, quod hoc modo calculum adeo ad curuas non-continuas et per calculum non explicabiles accommodauerim, quod neſcio an vllo alio caſu adhuc ſit praeſtitum.

25. Deſcripta autem huiusmodi curua quacunque, accuratius inueſtigemus, quomodo ex ea motus cordae definiri queat. Totum autem negotium huc redit, vt pro corda AMB ad datum tempus t, cuius expreſſio ad minutum ſecundum tanquam vnitatem refertur, applicata $PM = y$, datae abſciſſae $AP = x$ conueniens, determinetur. Hunc in finem in curua determinatrice capiantur binae abſciſſae

Tab. II. Fig. 1. et 2.

$$ap = \frac{ax}{a+nx} + t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}, \text{ et } aq = \frac{ax}{a+nx} - t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}$$

notatisque applicatis pm et qn, erit

$$y = m(a+nx).pm + m(a+nx).qn$$

vbi coefficiens m tam paruus accipi debet, vt applicata PM fiat quam minima. Hinc enim orietur, vt ante inuenimus,

$$y = m(a+nx)\Phi\left(\frac{ax}{a+nx} + t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right) + m(a+nx)\Phi\left(\frac{ax}{a+nx} - t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right).$$

Cum igitur hinc ad quoduis tempus ſtatus et figura cordae determinetur, eius quoque motus innoteſcet, ſi, poſita x conſtante, tantum tempus t variabile ſtatuatur.

26. Si ponamus tempus $t = 0$, inueniemus cordae figuram initialem, ex qua motus hoc modo determinatus oriatur. Habebimus ergo pro hac figura initiali iſtam aequationem:

$$y = 2m(a+nx)\Phi\frac{ax}{a+nx},$$

vbi

vbi manifeſtum eſt, curuam determinatricem ita aſſumi poſſe, vt data curua initialis obtineatur. Si enim y denotet applicatam curuae initialis cordae tributae, quae abſciſſae x reſpondeat, in curua determinatrice abſciſſae $ao = \frac{ax}{a+nx}$ reſpondebit applicata $ol = \Phi \frac{ax}{a+nx} = \frac{y}{2m(a+nx)}$. Quo hinc conſtructio curuae determinatricis ſimplicior euadat, ponamus $2m = \frac{1}{a}$, vt pro curua initiali cordae habeamus $y = (1 + \frac{nx}{a}) \Phi \frac{ax}{a+nx}$, ac tum pro curua determinatrice, ſumta abſciſſa $ao = \frac{ax}{a+nx}$, applicata reſpondens eſſe debet $ol = \frac{ay}{a+nx}$; vnde, data cordae figura initiali, curua determinatrix facile conſtruetur, ex qua deinceps totus cordae motus expedite definietur.

27. Quoniam igitur hunc caſum cordae inaequaliter craſſae aeque generaliter reſoluere licet, atque caſum cordarum vniformiter craſſarum; hicque adeo caſus in illo tanquam ſpecies contineatur, ex quo quippe oritur, ſi numerus n, qui inaequalitatem craſſitiei continet, euaneſcat: operae certe pretium erit, vt iſtum caſum omni diligentia articulatim exponamus. Primum igitur cordas iſtas inaequaliter craſſas, ad quas hic caſus eſt accommodatus, dilucide deſcribam, vt intelligatur, quomodo cordae inaequaliter craſſae exhiberi queant, quarum motus aeque generaliter definiri poſſit, atque cordarum vniformiter craſſarum. Deinde vero poſtquam huiusmodi corda ad figuram quamcunque fuerit diducta, indeque ſubito dimittatur, motum, quem ſit proſecutura, determinabo. Atque hic quidem ex iam expoſitis perſpicitur, motum fore ſemper ſatis regularem, omninoque ſimilem ei, quo cordae vniformiter craſſae

craſſae agitantur, niſi quod tempora vibrationum aliam rationem longitudinis cordarum ſequantur.

Deſcriptio cordarum, ad hunc caſum aptarum.

28. Ad huiusmodi igitur motum regularem edendum nonniſi certa ſpecies cordarum inaequaliter craſſarum eſt idonea, quam idcirco primum accurate deſcribi conveniet. Cordam ergo primum in directum extenſam Fig. 3. APBO contemplemur, cuius in initio A craſſitiei diameter ſit $Aa = b$, tum vero in alio loco quocunque P, poſito interuallo $AP = x$, diameter craſſitiei ſupra ita eſt determinata, vt ſit $Pp = z = \frac{b}{(1 + \frac{nx}{a})^2}$. Ne autem craſſities a longitudine cordae vibrantis a, quippe quae pro eadem corda vtcunque variari poteſt, pendere videatur, ponamus $\frac{n}{a} = \frac{1}{c}$ ſeu $n = \frac{a}{c}$, vt ſit $Pp = z = \frac{bcc}{(c + x)^2}$ vbi c eſt quantitas conſtans, non a longitudine cordae vibrantis pendens. Sin autem alter terminus conſtituatur in B, vt ſit $AB = a$, altero termino conſtanter in puncto A ſumto, erit diameter craſſitiei ibi $Bb = \frac{bcc}{(c+a)^2}$.

29. Linea ergo curua $apbo$, craſſitiem cordae referens, erit hyperbola ſecundi ordinis, quae autem, ſi variatio craſſitiei fuerit valde parua, a linea recta vix diſcrepabit. Euenit hoc, quando quantitas conſtans c prae longitudine cordae fuerit vehementer magna; tum enim erit proxime $z = b(1 - \frac{2x}{c})$; ſicque huc referri poterunt cordae, quarum craſſities vniformiter decreſcit dummodo

modo decrementum totum fuerit minimum. Sin autem id fit notabile, curuatura lineae *apbo* negligi non poteft. Ponamus enim in B diametrum craffitiei $Bb = d$, erit $1 + \frac{a}{c} = \sqrt{\frac{b}{d}}$, et $\frac{1}{c} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{d}}{a\sqrt{d}}$, vnde pro loco quo cunque P fiet $Pp = z = \frac{aabd}{(a\sqrt{d} + x\sqrt{b} - x\sqrt{d})^2}$; feu $Pp = \frac{AB^2 . Aa . Bb}{(AP . \sqrt{Aa} + BP . \sqrt{Bb})^2}$. Hinc ergo ex data craffitie cordae, in vtroque termino A et B, cognofcitur craffities in quouis loco medio P, vt corda ad praefentem vibrationum cafum fiat accommodata. In hoc enim confiftit indoles eius cordarum inaequaliter craffarum fpeciei, cuius motus ex fuperioribus formulis in genere definiri poteft.

30. Materia vero, ex qua corda fuerit confecta, eius pondus conftituit, quam in calculo ita affumfi, vt cordae, ex eadem materia confectae, vniformiter craffae, cuius craffitiei diameter vtique foret $= Aa = b$, et longitudo $= h$, pondus effet futurum $= M$. Facta hac hypothefi, videamus, quantum futurum fit pondus portionis cuiuscunque noftrae cordae AP. Cum igitur, pofita longitudinae $AP = x$, fit $Pp = z = \frac{bcc}{(c+x)^2}$, erit pondus partis $AP = \frac{M}{bbb}\int zz\,dx = \frac{Mc^4}{b}\int\frac{dx}{(c+x)^4} = \frac{Mc^4}{b}\left(\frac{1}{3c^3} - \frac{1}{3(c+x)^3}\right)$, ita vt hoc pondus fit $= \frac{Mcx(3cc + 3cx + xx)}{3b(c+x)^3}$. Quodfi ergo c prae x fuerit quantitas maxima, erit hoc pondus proxime $= \frac{Mx}{b}\left(1 - \frac{2x}{c}\right)$. Hactenus quidem affumfi, cordam ex materia vniformi effe ductam, fin autem materia non fuerit homogenea, lex craffitiei praefcripta ita debet immutari, vt, quo leuior fuerit materia, ibi craffities ipfa, feu quadratum eius diametri, in eadem ratione vltra legem datam augeatur.

Problema.

Tab. II. Fig. 4. 31. *Si iam talis corda, qualem ratione crassitiei descripsimus, primum in termino* A, *deinde in alio quocunque loco* B *figatur, et a vi quacunque, quae ponderi* F *aequipolleat, tendatur: tum vero de suo situ naturali recto* AB *ad figuram quamcunque* ALB *quam minime a recta* AB *recedentem detorqueatur, subitoque in omnibus punctis remittatur; quaeritur motus, quo haec corda deinceps agitabitur.*

Datur ergo primo longitudo cordae $AB = a$, deinde eius crassities in A, cuius diameter sit $= b$, tertio pro quouis loco intermedio P, existente $AP = x$, crassitiei diameter $z = \frac{bcc}{(c+x)^2}$, seu datur longitudo c. Quarto constat, si corda haberetur vniformiter crassa longitudinis $= b$, cuius diameter crassitiei vbique esset $= b$, eius pondus fore $=$ M. Quinto denique datur linea ALB, ideoque pro quauis abscissa $AP = x$ applicata respondens PL: neque vero opus est, vt haec linea ALB per aequationem detur, sed sufficit, vt sit descripta, quocunque demum modo hoc fuerit factum.

Solutio.

32. Iam ante omnia ex data cordae figura initiali ALB construi debet linea curua determinatrix motus vibratorii, cuius constructio, per praecepta supra (26) tradita, ita est instituenda: Ob $n = \frac{a}{c}$, super axe
Fig. 5. et 4. $ab = \frac{ac}{a+c}$, pro abscissa $AP = x$, capiatur abscissa $ap = \frac{cx}{c+x}$, et in p erigatur applicata $pl = \frac{c.PL}{c+x}$; seu adiun-

adiuncta cordae AB recta $AC = c$, construantur hae proportiones:

$$CP : CA = AP : ap$$

$$\text{et } CP : CA = PL : pl.$$

Cum iam hoc modo fuerit descripta curua alb, eadem vtrinque ad axem ab productum repetatur, alternatim supra et infra axem describenda, vti figura ostendit, ita vt in singulis iuncturis a, b, α, β cognomines curuae alb termini inuicem iungantur. Atque hoc pacto habebitur curua determinatrix, ex qua motus cordae quaesitus definiri poterit.

33. Constructa autem curua determinatrice, ex ea motus cordae ita definitur, vt ad quoduis tempus a momento dimissionis elapsum cordae figura assignetur. Sit enim tempus hoc $= t$ min. sec. et pro puncto M inueniendo, in quo iam punctum L versabitur, abscissae $AP = x$ in curua determinatrice capiatur abscissa respondens $ap = \frac{cx}{c+x}$, et circa punctum p vtrinque capiantur spatia aequalia pq et pr tempori proportionalia, ita vt sit

$$pq = pr = t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}},$$

et cum in punctis q et r applicatae curuae determinatricis sint:

$$qm = \Phi\left(\frac{cx}{c+x} - t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right)$$

$$rn = \Phi\left(\frac{cx}{c+x} + t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right)$$

ob $m = \frac{1}{2a}$ et $n = \frac{a}{c}$ in §. 25, habebitur

$$PM = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{x}{c}\right)(qm + rn).$$

Hocque modo ſitus, quem tota corda poſt tempus t habebit, definietur.

34. Ponamus iam tantum elapſum eſſe tempus t, vt ſit

$$t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}=\frac{ac}{c+a}, \quad \text{ſeu } t=\frac{ac}{c+a}\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$$

atque interualla pq' et pr' vtrinque a puncto p capienda erunt aequalia interuallo ab, ſicque in curuis ſimilibus adiacentibus $\beta m'a$, $bn'\alpha$ abſciſſae $\beta q'$ et br' aequales erunt abſciſſae ap; vnde ob applicatas $q'm'$ et $r'n'$ aequales, locus puncti cordae L nunc cadet infra axem AB ad diſtantiam $=\frac{1}{2}(1+\frac{x}{c})(q'm'+r'n')$ $=(1+\frac{x}{c})q'm'$. Si vlterius tempus infinite paruum dt fluat, applicatae $q'm'$ et $r'n'$ infinite parum vlterius a puncto p remoueri debent; cum igitur, quantum illa diminuitur, haec tantundem augeatur, ob tangentes in punctis m' et n' ad axem aequaliter inclinatas, diſtantia puncti L cordae per hoc momentum ab axe non mutatur, ſicque tota corda ad ſtatum quietis erit redacta, ita vt iam in maxima excurſione infra axem reperiatur. Interea temporis igitur corda vnam vibrationem confeciſſe eſt cenſenda: eritque idcirco tempus vnius vibrationis cordae $t=\frac{ac}{c+a}\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$ min. ſec. vbi g denotat altitudinem fere 15 pedum, per quam graue vno minuto ſecundo libere deſcendit.

35. Sin autem tempus ab initio elapſum t tantum ſtatuamus, vt fiat $t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}=\frac{2ac}{c+a}$ ſeu $t=\frac{2ac}{c+a}\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$, ex conſtructione manifeſto liquet cordae punctum L iterum

rum in locum primitiuum L peruenire, ibique quiete frui momentanea; vnde corda interea duas vibrationes absoluisse est existimanda: deinceps vero motus cordae iterum vti ab initio sequetur, ex quo sufficiet, motum cordae ad hoc vsque momentum determinauisse. Hinc igitur perspicuum est, tempus vniuscuiusque vibrationis esse $= \frac{ac}{c+a} V \frac{M}{2Fbg}$; quod ergo non amplius, vti in cordis vniformiter crassis vsu venit, longitudini cordae a est proportionale, manente scilicet eadem tensione; sed iam rationem sequitur formulae $\frac{ac}{c+a}$. Vnde si tempus vibrationis duplo longius fieri debeat, cordae longitudo a puncto A tanta sumi debebit, vt sit $= \frac{2ac}{c-a}$; ac si tempus vibrationis n vicibus maius esse debeat, cordae longitudinem esse oportet $= \frac{nac}{c-(n-1)a}$. Patet ergo, sonum huiusmodi cordarum non vltra datum gradum deprimi posse, nam si longitudo cordae etiam infinita statuatur, tempus vnius vibrationis etiam nunc erit finitum $= cV \frac{M}{2Fbg}$.

36. Semper autem minuenda cordae AB longitudine effici potest, vt tempus vibrationis ad medietatem reducatur, sonusque vno interuallo diapason eleuetur: eueniet hoc, si corda praeter A etiam in E figatur, vt sit $AE = \frac{ac}{2c+a}$. Sin autem tempus vibrationis ad trientem reduci debeat, longitudo cordae erit $= \frac{ac}{3c+2a}$, sin ad quadrantem, erit $= \frac{ac}{4c+3a}$, et ita porro. Si igitur cordae ab initio talis figura fuerit impressa, vt punctum E in situ naturali relinquatur, indeque curua determinatrix obtineat interualla plexuum

ab, $b\alpha$, $a\beta$, vel duplo, vel triplo, vel quadruplo, minora, tum tota corda toties rapidius contremiſcet. Eo enim tempore, quod generatim vni vibrationi aſſignavimus, iam duas, vel tres, vel quatuor abſoluet vibrationes. Quin etiam euenire poteſt, vt corda ſimul duos pluresue huiusmodi motus recipiat, totidemque ſonos diuerſos edat. Omnino igitur huius generis cordarum motus ſimili modo erit comparatus, quo cordarum vniformiter craſſarum, hoc ſolo excepto, quod pro varia longitudine tempus vibrationis, non longitudinis, rationem ſequatur: hancque ob cauſam iſtud genus cordarum maxime dignum eſt viſum, cuius motus diligentius euolueretur.

37. Veriſimile eſt, praeter cordas vniformiter craſſas, et eas, quas hactenus ſum contemplatus, alias prorſus non dari, quae talis motus regularis ſint capaces, ſimulque ſonos harmonicos edere valeant. Tum etiam, ſi variatio craſſitiei aliam legem ſequatur, nulla patet via ad motum in genere definiendum, ita vt figurae cuicunque, quae cordae initio fuerit tributa, reſpondeat; interim tamen caſus exhiberi poſſunt, quibus, ſi figura initialis certis conditionibus ſit praedita, motum ſecuturum aſſignare liceat. Haec autem inueſtigatio non ſolum tantopere eſt reſtricta, vt nullum vnquam vſum habere videatur, ſed etiam diſquiſitiones ampliſſimas exigit, quae caſus aequationis *Riccatianae* conſtruibiles implicant. Longe autem difficillima videbitur quaeſtio, ſi cordae craſſities nullam legem calculo ſubiectam ſequatur: veluti ſi duae cordae vniformes

qui-

quidem, ſed diuerſae craſſitiei, iungantur. Nihilo vero minus hunc caſum generatim expediri poſſe obſeruaui, qui, cum non parum doctrinam vibrationum illuſtrare videatur, eum data opera pertractabo; quia enim duplici modo a lege continuitatis abhorret, ſcilicet ratione craſſitiei et figurae initio impreſſae, methodus talem quaeſtionem ad calculum reuocandi, imprimis ad fines Analyſeos promouendos, videtur accommodata.

Problema.

38 *Si corda* ACB, *ex duabus partibus* AC *et* BC *conflata, quarum vtraque ſeorſim ſit vniformiter craſſa, ſed craſſitiem habeant diuerſam; haecque corda, in terminis* A *et* B *fixa, a vi quacunque ſit tenſa; tum vero ad figuram quamcunque* ADB *detorqueatur, quam minime a figura naturali rectilinea* ALB *recedentem: quaeritur motus, quo corda, poſtquam repente fuerit dimiſſa, agitabitur.* Tab. II. Fig. 6.

Ponamus partis AC longitudinem $AC = a$, alterius partis longitudinem $BC = b$; diametrum craſſitiei illus partis $AC = \alpha$, huius vero $= \beta$: tum vero ſit cordae AC pondus $= N$, eritque cordae BC pondus $= \frac{Nb\beta\beta}{a\alpha\alpha} = N$. Vis autem, qua tota corda intra ſuos terminos tenſa tenetur, aequiualeat ponderi F. Initio porro huic cordae inducta fuerit curua quaecunque ADB, quae ſiue ſit aequatione quapiam exprimibilis, ſiue ſecus, poſt dimiſſionem motum determinari oportet. Sufficit ergo, ex figura noſſe, quanta applicata PL initio motus cuilibet abſciſſae $AP = x$ reſpondeat,

neque

neque hic adhuc refert, ſiue punctum P ad partem craſſiorem AC pertineat, ſiue ad tenuiorem BC, veluti ſi in Π capiatur.

Solutio.

39. Ponamus ergo, elapſo tempore $= t$ minut. ſecund. cordam iam perueniſſe in ſitum AMEMB, et applicatam abſciſſae $AP = x$ reſpondentem iam eſſe $PM = y$, quae ergo erit, certa quaedam functio temporis t et abſciſſae x. Hic vero imprimis eſt attendendum, vtrum punctum P in parte AC aſſumatur, an in parte BC, hoc eſt: vtrum ſit $x < a$, an vero $x > a$. Ponamus primo, eſſe $x < a$, atque motus puncti M continebitur in hac aequatione: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fag}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, ſin autem ſit $x > a$, ſeu ſi abſciſſa capiatur AΠ, motus puncti M hac aequatione continebitur: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbg}{N}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Quamobrem determinatio motus ad reſolutionem harum duarum aequationum ita reducitur, vt prior tantum locum habeat, ſi ſit $x < a$, poſterior vero, ſi ſit $x > a$, vnde manifeſtum eſt, ſi ſit $x = a$, ambas aequationes conſentire debere.

40. Ponamus breuitatis gratia, $\frac{2Fag}{M} = mm$ et $\frac{2Fbg}{N} = nn$ et quamdiu eſt $x < a$, vt ſatisfaciendum ſit aequationi $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = mm\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, nouimus in genere, fore

$$y = \Phi(x + mt) + \Psi(x - mt).$$

Sin autem ſit $x > a$, vt ſatisfaciendum ſit aequationi $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = nn\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, erit per alias quaſcunque functiones

$$y = \phi(x + nt) + \psi(x - nt).$$

Vel

Vel cum hic abſciſſas a termino B computare liceat, etiam ſi ibi a termino A ſint captae, hae duae aequationes diſtinctius ita exhibebuntur:

$$PM = \Phi(AP + mt) + \Psi(AP - mt)$$
$$\Pi M = \phi(B\Pi + nt) + \psi(B\Pi - nt)$$

vnde ob nexum harum partium in E neceſſe eſt, vt ſit:

$$CE = \Phi(a + mt) + \Psi(a - mt) = \phi(b + nt) + \psi(b - nt)$$

quo iam quaedam relatio inter has functiones definitur.

41. Cum iam tota quaeſtio ad naturam harum quaternarum functionum inueſtigandam ſit traducta, primum perpendendum eſt, applicatas tum in A, quam in B, ſemper euaneſcere debere, vnde eſſe oportet:

$$0 = \Phi(mt) + \Psi(-mt) \text{ et } 0 = \phi(nt) + \psi(-nt).$$

Deinde etiam expendendum eſt, motus initio ſingulorum punctorum celeritatem per $(\frac{dy}{dt})$ expreſſam euaneſcere debere; hinc vero vtraque aequatione colligitur:

$$0 = \Phi'(AP) - \Psi'(AP) \text{ et } 0 = \phi'(B\Pi) - \psi'(B\Pi),$$

vnde concludimus tam $\Psi' = \Phi'$ et $\psi' = \phi'$, quam $\Psi = \Phi$ et $\psi = \phi$; et vtraque functio Φ et ϕ debet eſſe impar, ſeu eiusmodi curuam refert, cuius abſciſſae, ſi negatiuae ſumantur, applicatae quoque in negatiuas abeant, quantitate autem maneant eaedem.

42. Hac igitur functionum Φ et ϕ indole inventa habebimus binas ſequentes aequationes:

$$PM = \Phi(AP + mt) + \Phi(AP - mt)$$
$$\Pi M = \phi(B\Pi + nt) + \phi(B\Pi - nt)$$

praetereaque esse oportet:

$$\Phi(a+mt)+\Phi(a-mt)=\phi(b+nt)+\phi(b-nt).$$

Hinc ergo primum, posito $t=0$, esse debet $\Phi a=\phi b$. Deinde etiam perpendere debemus, si esset $m=n$, qui casus locum haberet, si tota corda esset aequaliter vbique crassa, abscissam $a+mt$, a puncto A sumtam, in idem axis punctum esse casuram, atque abscissam $b-nt$ a termino B computatam, ideoque fore $\Phi(a+mt)=\phi(b-nt)$, similique modo $\Phi(a-mt)=\phi(b+nt)$. At si m et n non sint aequales, alio modo functiones $\Phi(a+mt)$ et $\phi(b+nt)$, quae adhuc sunt incognitae, ex functionibus cognitis $\Phi(a-mt)$ et $\phi(b-nt)$ definientur, atque ab hac determinatione solutio problematis potissimum pendebit. Sunt autem functiones $\Phi(a-mt)$ et $\phi(b-nt)$ ob curuam cordae initialem datam cognitae, cum sit $PL=2\Phi.AP$ et $\Pi\Lambda=2\phi.B\Pi$, qui valores dantur, quoties fuerit $AP<a$ et $B\Pi<b$.

43. Verum ad plenam determinationem non sufficit, vt applicata CE communis sit vtrique cordae parti, motus indoles insuper postulat, vt ambae curvae in iunctura E communem habeant tangentem. Hinc autem nascitur ista aequatio differentialis:

$$\Phi'(a+mt)+\phi'(a-mt)=-\phi'(b+nt)-\phi'(b-nt)$$

quae aequipollet huic integrali:

$$n\Phi(a+mt)-n\Phi(a-mt)=-m\phi(b+nt)+m\phi(b-nt).$$

Cum hac coniungatur ante inuenta:

$$\Phi(a+mt)+\Phi(a-mt)=\phi(b+nt)+\phi(b-nt)$$

hinc-

hincque functiones incognitae ita determinabuntur, vt sit:

$$\Phi(a+mt)=\frac{2m}{m+n}\phi(b-nt)-\frac{m+n}{m+n}\Phi(a-mt)$$

$$\phi(b+nt)=\frac{2n}{m+n}\Phi(a-mt)+\frac{m-n}{m+n}\phi(b-nt)$$

sicque ex functionibus $\Phi(a-mt)$ et $\phi(b-nt)$, quarum valor ex curua cordae initiali datur, functiones incognitae $\Phi(a+mt)$ et $\phi(b+nt)$ inueniuntur, quae autem, quomodo ad vsum sint accommodandae, iam accuratius perpendamus.

44. Reducamus functiones principales ad dimidium, vt sit:

$$PM=\tfrac{1}{2}\Phi(AP+mt)+\tfrac{1}{2}\Phi(AP-mt)$$

$$\Pi M=\tfrac{1}{2}\phi(B\Pi+nt)+\tfrac{1}{2}\phi(B\Pi-nt)$$

sicque ex curua cordae primitus impressa erit:

$$\Phi(AP)=PL \text{ et } \phi(B\Pi)=\Pi\Lambda$$

vnde, dum sint abscissae $AP<a$ et $B\Pi<b$, earum functiones, per signa Φ et ϕ indicatae, ex figura cordae initiali cognoscuntur. Tum vero etiam nouimus, si abscissae negatiuae capiantur, fore

$$\Phi(-z)=-\Phi(+z) \text{ et } \phi(-z)=-\phi(+z).$$

Functiones autem, maioribus abscissis conuenientes, ex minoribus, et generis quidem vtriusque, ita definiuntur, vt sit:

$$\Phi(a+mu)=\frac{2m}{m+n}\phi(b-nu)-\frac{m+n}{m+n}\Phi(a-mu)$$

$$\phi(b+nu)=\frac{2n}{m+n}\Phi(a-mu)+\frac{m-n}{m+n}\phi(b-nu),$$

quarum formularum ope, ex vtra curua ALD et BAD, duae curuae in infinitum extensae construi poterunt, quarum alterius applicatae pro singulis abscissis debitas functiones ϕ, alterius vero functiones Φ exhibeant.

Fig 7. et 8. 45. Constructio autem harum duarum curuarum ita commodissime absoluetur: Ductis duobus axibus XY et xy, super illo describatur figura initialis partis sinistrae cordae ALD, super hoc vero figura initialis partis dextrae BAD, simulque tam illa vltra A infra axem in Ad, haec vero vltra B in Bd transferatur, sicque ex figura cordae initiali illius curuae ramus DAd, huius vero ramus DBd iam descriptus habetur. Pro vtriusque autem continuatione, circa punctum C in vtroque axe abscindantur vtrinque interualla aequalia CG = CQ et Cg = Cq, ita vt illa sint ad haec semper vt m et n, seu sumta quantitate quacunque u, capiatur CG = CQ = mu, et Cg = Cq = nu, atque applicatae in punctis G et g erunt cognitae: in punctis vero Q et q applicatae statuantur

$$QR = \frac{2m.gb + (n-m).GH}{m+n}$$
$$\text{et } qr = \frac{2n.GH - (n-m).gb}{m+n}.$$

Hoc ergo modo vtraque curua ALD et BAD, quousque libuerit, continuari poterit, prouti vero vtraque in vnam plagam continuatur, ita statim ad plagam oppositam situ inuerso transferatur.

Fig. 6. 7, 8. 46. His duabus curuis, praescripto modo constructis, prior inseruiet motui partis cordae ALD determinando, posterior vero partis BAD. Scilicet pro puncto quocunque L, ad partem AD pertinente, si quaeratur punctum M, vbi post tempus t min. sec. sit futurum, vtendum erit curua determinatrice ALDRLV (fig. 7.)

(fig. 7.), in cuius axe capiatur abſciſſa AP, puncto L reſpondens, et circa P vtrinque abſcindantur interualla aequalia $PF = PG = mt$, tum applicatarum FK et GH ſemiſumma dabit loci quaeſiti M diſtantiam PM ab axe. Simili modo, ſi quaeſtio ſit de puncto Λ, in altera parte cordae BC ſumto, vbi ſit futurum poſt tempus t min. ſec. in fig. 8. a puncto B capiatur abſciſſa BΠ, puncto Λ conueniens, et circa Π vtrinque abſcindantur aequalia interualla $\Pi g = \Pi f = nt$; quo facto applicatarum gh et fk ſemiſumma dabit loci quaeſiti M diſtantiam ab axe AB fig. 6. Hoc igitur modo totius cordae propoſitae ADB ſitus ad quoduis tempus determinari, eiusque propterea motus aſſignari poterit. Facile autem perſpicitur, hunc motum maxime fore irregularem, dum neque ſingula eius puncta ſimul ad maximas ab axe elongationes peruenient, neque itus reditusque ſuos temporibus aequalibus abſoluant, ex quo ne quaeſtio quidem de numero vibrationum, dato tempore factarum, neque etiam de ſono, quem huiusmodi corda ſit editura, locum habere poterit.

47. Neque etiam vllus caſus huiusmodi cordarum ex duabus cordis diuerſae craſſitiei compoſitarum exhiberi poteſt, quo vibrationes fiant regulares. Caſus quidem talis oriri videtur, quando fit $m = n$, tum enim ambae curuae determinatrices inter ſe fiunt aequales, interuallaque nodorum AI, AO, toti cordae longitudini aequalia, prorſus vti pro cordis vniformiter craſſis vſu venit. Verum, ob $mm = \frac{2Fag}{M}$, et $nn = \frac{2Fbg}{N}$, pro hoc caſu habebimus $\frac{a}{M} = \frac{b}{N}$, ſeu $\frac{a}{b} = \frac{M}{N}$, at eſt $\frac{M}{N} = \frac{a\alpha\alpha}{b\beta\beta}$;

 vnde

vnde neceſſario fit $\alpha = \beta$, qui eſt caſus cordae per totam ſuam longitudinem eiusdem craſſitiei. Quam ob rem ſolutio huius problematis eo magis eſt notatu digna, quod non ſolum in inueſtigatione a lege continuitatis maxime abhorrente verſatur, ſed etiam vibrationes a lege iſochronismi, cuiusmodi adhuc a Geometris ſolae tractari ſunt ſolitae, nobis cognoſcendas offerat.

48. Caeterum cum conſtructio ac determinatio huiusmodi motus per binas curuas determinatrices perficiatur, quarum deſcriptio et irregularitas potiſſimum a ratione inaequalitatis inter quantitates m et n pendet, notari conueniet, eſſe in genere $mm : nn = \frac{a}{M} : \frac{b}{N} = \beta\beta : \alpha\alpha$, ideoque $m : n = \beta : \alpha$. Tenent ergo quantitates m et n, quatenus ad vtramque partem cordae AC et BC referuntur, rationem reciprocam diametrorum craſſitiei vtriusque partis. Caeterum etiam circa hanc ſolutionem imprimis notetur, quod motum huiusmodi cordarum compoſitarum, vtcunque fuerit irregularis, ſemper definire liceat, quaecunque etiam figura curuae primitus fuerit inducta, ſiue aequatione quapiam includi queat, ſiue ſecus; quae circumſtantia adeo pro cordis vniformiter craſſis nonnullis ſummis Geometris vires Analyſeos tranſcendere eſt viſa. Pari autem methodo vis ſoluendi extendi poterit ad cordas, quae ex tribus pluribusue partibus diuerſae craſſitiei fuerint compoſitae; manifeſtum enim eſt, totidem ſemper curuis determinatricibus opus eſſe, quarum conſtructio ex figura initiali cordae ſimili fere modo abſolui queat.

49.

49. Datur tamen caſus, quo ambae cordae partes A C $= a$ et B C $= b$ certam quandam inter ſe tenent rationem, ſi figura initialis certo modo fuerit comparata, vt motus vibratorius fiat regularis. Obtinetur autem hic caſus, ſi primo ſit $a : b = m : n$, ſeu $a : b = \beta : \alpha$; quo etiam fit $M : N = b : a$; deinde ſi figura initialis ſit huiusmodi, vt ſit $\phi(b-nu) = \Phi(a-mu)$, tum enim obtinebitur

$$\Phi(a+mu) = \Phi(a-mu) \text{ et } \phi(b+nu) = \phi(b-nu).$$

Manifeſtum enim eſt, aequationem $\phi(b-nu) = \Phi(a-mu)$ locum habere non poſſe, niſi ſit $b : a = n : m$, propterea quod eſt, tam $\phi 0 = 0$, quam $\Phi 0 = 0$, ſimul autem quantitates $b - nu$ et $a - mu$ in nihilum abire nequeunt, niſi ſit $a : b = m : n$. Hoc autem caſu vtraque curua determinatrix per ſe determinari poterit, fietque ſimilis illi, quae motui cordae vniformis definiendo inſeruit, ex quo etiam hic motus aeque regularis euadit. Hunc igitur caſum diligentius euoluamus.

Caſus motus regularis in cordis, ex duabus partibus inaequalis craſſitiei compoſitis.

50. Sit igitur ACB corda ex duabus partibus A C Tab. III. Fig. 1.
et BC compoſita, quarum partes A C $= a$ et B C $= b$ rationem teneant reciprocam diametrorum craſſitiei α et β, vt ſit $a : b = \beta : \alpha$, ideoque etiam $m : n = a : b$ et $M : N = b : a$. Haec corda ſit in terminis A et B fixa et tenſa vi, quae aequalis eſt ponderi F. Tum vero in eiusmodi figuram ADB detorquatur, vt figura

BAD

BAD affinis fit figurae ALD, fcilicet vt fumtis vtrinque abfciffis AP et BΠ, ipfis AC et BC proportionalibus, applicatae PL et ΠΛ inter fe fiant aequales. Iam corda dimiffa quaeritur eius motus, feu ftatus ad quoduis tempus t minut. fec. a momento di-
Fig. 2. 3. miffionis elapfum Hunc in finem conftruantur ambae curuae determinatrices $ADada'd'$ (fig. 10) et $BDbdb'$, (fig. 11) quarum portiones primitiuae ALD et BΛD ex figura cordae initiali defumuntur, fequens autem vtriusque portio ita conftruitur, vt fit pro fig. 10. $\Phi(a+mu)=\Phi(a-mu)$ et pro fig. 11. $\phi(b+nu)=\phi(b-nu)$.

51. In axe fcilicet abfcindantur interualla Ca, ac, ca', $a'c'$ etc. aequalia ipfi interuallo AC, iisque applicentur, vti figura indicat, figurae aD, ad $a'd$ $a'd'$ fimiles et aequales figurae ALD. Simili modo pro fig. 11. curuae BΛD fimiles et aequales ftatuantur figurae bD, bd, $b'd$, etc. tum vero etiam ad alteram partem punctorum A et B hae figurae fimili ordine
Fig. 1. repetantur; hocque modo obtinebuntur ambae curuae determinatrices, ex quibus motus cordae promte definietur. Scilicet fi diftantia ab axe AB, ad quam punctum L poft tempus t reperietur, ponatur $=y$, vocata abfciffa $AP=x$, definietur ea ex determinatrice priori, ita vt fit

$$y=\tfrac{1}{2}\Phi(x-mt)+\tfrac{1}{2}\Phi(x+mt):$$

fin autem poft idem tempus t, diftantia puncti Λ ab axe AB defideretur, eaque vocetur $=z$, pofita abfcisfa $B\Pi=u$, erit per alteram curuam determinatricem

$$z=\tfrac{1}{2}\phi(u-nt)+\tfrac{1}{2}\phi(u+nt).$$

52.

52. Si tempus t tantum assumatur, vt sit $mt = a$ seu $nt = b$, ob $\Phi(x-a) = -\Phi(a-x) = -\Phi(x+a)$ et $\phi(u-b) = -\phi(b+u) = -\phi(b+u)$, vtraque distantia euanescit, peruenientque post hoc tempus singula cordae elementa in situm rectum AB, quod est tempus dimidiae vibrationis. Sin autem sumatur $mt = 2a$, seu $nt = 2b$, fiet

$$\Phi(x-2a) = -\Phi(a+(a-x)) = -\phi(a-(a-x)) = -\phi x$$
$$\phi(x+2a) = \phi(a+(a+x)) = \phi(a-(a+x)) = -\phi x$$

ideoque $y = -\phi x$, sicque corda ad alteram axis partem in maxima excursione versabitur, ibique figuram, ipsi initiali omnino aequalem, habebit; vnde post elapsum aequale tempus iterum in figuram initialem reuertetur; atque hoc simili modo locum habet pro altera cordae parte BAD. Motus igitur omnino erit similis motui cordae vniformiter crassae, ac vibrationes peraget isochronas, quarum cuiusque tempus est $= \frac{2a}{m} = \frac{2b}{n}$.

53. Cum igitur sit $mm = \frac{2Fag}{M}$, et $nn = \frac{2Fbg}{N}$, erit vniuscuiusque vibrationis tempus $= 2a\sqrt{\frac{M}{2Fag}} = \sqrt{\frac{2Ma}{Fg}}$ min. sec. sin autem cordae huius compositae pars $AC = a$, cuius pondus $= M$, praeter A in C figeretur, eaque ab eadem vi $= F$ tenderetur, esset tempus vnius vibrationis $= a\sqrt{\frac{M}{2Fag}}$; ideoque superioris dimidium. Vnde, manente tensione F, eadem tota corda composita ACB duplo lentius vibrabit, quam vtraque pars AC, vel BC, seorsim, si in ambobus terminis esset fixa, ideoque sonum vna octaua grauiorem

edet. Definiri etiam poteſt corda vniformis craſſitiei et longitudinis $AB = a + b$, quae ab eadem vi tenſa eundem eſſet editura ſonum; ponatur enim pondus huius cordae $= P$, ac tempus vnius vibrationis erit $= (a+b)\sqrt{\frac{P}{2Fg(a+b)}}$, quod tempori pro noſtra corda compoſita inuento $\sqrt{\frac{2Ma}{Fg}}$ aequale poſitum praebet $P = \frac{4Ma}{a+b} = \frac{4MN}{M+N}$; eiusque diametrum craſſitiei $= \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

Exemplum motus irregularis in cordis, ex duabus partibus diuerſae craſſitiei compoſitis.

54. Cum indoles motuum irregularium, quos ſupra in genere determinaui, luculentius ex exemplo determinato percipi queat, ponamus ambas cordae partes longitudine aequales, ſeu $b = a$, deinde ſit diameter craſſitiei partis AC duplo maior, quam partis BC, ſeu $\alpha = 2\beta$, erit illius partis pondus M huius N quadruplum, vnde fit $m:n = 1:2$, ſeu $n = 2m = 2\sqrt{\frac{2Fag}{M}}$,
Fig. 4. exiſtente F pondere, quo corda haec tenditur. Tribuatur autem huic cordae figura initialis ſimpliciſſima ADB, ſcilicet ſtylo iuncturae C admoto corda in ſitum ADB detrudatur, vt vtraque pars AD et BD lineam rectam referat, ac triangulum iſoſceles ADB exhibeat. Huius igitur cordae, ſi ſubito dimittatur, motus determinetur, ſeu regula inueſtigetur, cuius ope ſitus et figura cordae ad quodcunque tempus aſſignari queat.

55.

55. Construi ergo oportet ambas lineas determinatrices fig. 13 et 14, quarum partes principales ACD et BCD ex ipsa figura cordae initiali sumuntur. Sit Φ character prioris, ϕ vero posterioris, et cum posita applicata $CD = 1$, habeamus ob $b = a$

$\Phi 0 = 0$; $\Phi a = 1$. item $\phi 0 = 0$ et $\phi a = 1$. lineis puncta A, D et B, D iungentibus existentibus rectis, pro maioribus abscissis ob $m:n = 1:2$ consequimur has formulas:

$$\phi(a+u) = \tfrac{2}{3}\phi(a-2u) + \tfrac{1}{3}\phi(a-u)$$
$$\phi(a+2u) = \tfrac{4}{3}\phi(a-u) - \tfrac{1}{3}\phi(a-2u)$$

Statuamus pro u successiue valores $a, 2a, 3a, 4a$, etc. et, quia est $\phi(-c) = -\phi(c)$, et $\Phi(-c) = -\Phi(c)$, nostrae formulae erunt:

$$\phi(a+u) = -\tfrac{2}{3}\phi(2u-a) - \tfrac{1}{3}\phi(u-a)$$
$$\phi(a+2u) = -\tfrac{4}{3}\phi(u-a) + \tfrac{1}{3}\Phi(2u-a),$$

sicque ex praecedentibus vtriusque lineae applicatis sequentes definientur, punctaque hoc modo inuenta lineis rectis iungenda esse manifestum est, vnde applicatis intermediis non erit opus.

56 Facili ergo negotio sequentes applicatae computabuntur:

Pro linea fig. 13	Pro linea fig. 14
$\phi 0 = 0$	$\phi 0 = 0$
$\phi a = 1$	$\phi a = 1$
$\phi 2a = -\frac{2}{3}\phi\, a - \frac{1}{3}\phi\, 0 = -\frac{2}{3}$	$\phi 3a = -\frac{4}{3}\phi\, 0 + \frac{1}{3}\phi\, a = +\frac{5}{3}$
$\phi 3a = -\frac{2}{3}\phi 3a - \frac{1}{3}\phi\, a = -\frac{5}{9}$	$\phi 5a = -\frac{4}{3}\phi\, a + \frac{1}{3}\phi 3a = -\frac{11}{9}$
$\phi 4a = -\frac{2}{3}\phi 5a - \frac{1}{3}\phi 2a = +\frac{28}{27}$	$\phi 7a = -\frac{4}{3}\phi 2a + \frac{1}{3}\phi 5a = -\frac{25}{27}$
$\phi 5a = -\frac{2}{3}\phi 7a - \frac{1}{3}\phi 3a = -\frac{11}{81}$	$\phi 9a = -\frac{4}{3}\phi 3a + \frac{1}{3}\phi 7a = -\frac{73}{81}$
$\phi 6a = -\frac{2}{3}\phi 9a - \frac{1}{3}\phi 4a = -\frac{230}{243}$	$\phi 11a = -\frac{4}{3}\phi 4a + \frac{1}{3}\phi 9a = -\frac{263}{243}$
etc.	etc.

Sum-

Sumtis ergo in vtroque axe interuallis aequalibus ipſi interuallo $AC = BC = a$, applicatae ita ſe habebunt:

CD. 2. II 3. III 4. IV 5. V 6. VI 7. VII

Fig. 13. $0, 1, -\frac{2}{3}; -\frac{5}{9}; +\frac{28}{27}; -\frac{11}{81}; -\frac{230}{243}; +\frac{559}{729}$ etc.

Fig 14. $0, 1, +\frac{2}{3}; +\frac{1}{3}; -\frac{4}{9}; -\frac{11}{9}; -\frac{10}{27}; +\frac{13}{27}$

e quibus valoribus ambae figurae deſcriptae conſpiciuntur.

57. Ex his figuris porro ad quoduis tempus t min. ſec. locus ſingulorum cordae punctorum L et Λ per regulas ſupra datas aſſignari poterit: Sit enim $AP = x$, et puncti L poſt tempus t ab axe AB diſtantia $= y$, tum $B\Pi = v$ et puncti Λ ab axe diſtantia $= z$ erit:

$$y = \tfrac{1}{2}\Phi(x+mt) + \tfrac{1}{2}\Phi(x-mt) = \tfrac{1}{2}\Phi(x+mt) - \tfrac{1}{2}\Phi(mt-x)$$

$$z = \tfrac{1}{2}\Phi(v+2mt) + \tfrac{1}{2}\Phi(v-2mt) = \tfrac{1}{2}\Phi(v+2mt) - \tfrac{1}{2}\Phi(2mt-v).$$

Hinc, poſito $v = a$, puncti cordae medii D tempore t ab axe diſtantia erit $= \frac{1}{2}\Phi(a+2mt) - \frac{1}{2}\Phi(2mt-a)$: vnde ſequentem tabulam conſtruxi:

Poſt tempus	Diſtantia puncti D ab axe:
$t = \frac{a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 2a - \frac{1}{2}\Phi 0 = +\frac{1}{3}$
$t = \frac{2a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 3a - \frac{1}{2}\Phi a = -\frac{1}{3}$
$t = \frac{3a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 4a - \frac{1}{2}\Phi 2a = -\frac{5}{9}$.
$t = \frac{4a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 5a - \frac{1}{2}\Phi 3a = -\frac{7}{9}$
$t = \frac{5a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 6a - \frac{1}{2}\Phi 4a = +\frac{1}{27}$
$t = \frac{6a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 7a - \frac{1}{2}\Phi 5a = +\frac{25}{27}$.
$t = \frac{7a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 8a - \frac{1}{2}\Phi 6a = +\frac{45}{81}$
$t = \frac{8a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 9a - \frac{1}{2}\Phi 7a = +\frac{17}{81}$
$t = \frac{9a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 10a - \frac{1}{2}\Phi 8a = -\frac{95}{243}$
$t = \frac{10a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 11a - \frac{1}{2}\Phi 9a = -\frac{241}{243}$
$t = \frac{11a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 12a - \frac{1}{2}\Phi 10a = -\frac{197}{729}$
$t = \frac{12a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 13a - \frac{1}{2}\Phi 11a = +\frac{329}{729}$.

Iſta

Iſta puncti D agitatio circa punctum quietis C in figura 15 repraeſentatur, vbi puncta numeris 1, 2, 3, 4, 5 etc. loca deſignant, vti id poſt tempus $\frac{a}{2m}$ min. ſec. ſemel, bis, ter, quater, quinquies etc. elapſum ſit futurum. Hinc patet, primam vibrationem tali tempore circiter quadruplo, ſecundam duplo, tertiam quadruplo, quartam fere triplo etc. abſolui, ita vt vibrationes alternatim prodeant lentiores et citiores, neque tamen legem regularem conſtituant, ex quo ſonus erit rudis neque ad harmoniam aptus.

De caſu vibrationum iſochronarum in cordis, ex duabus partibus diuerſae craſſitiei compoſitis.

58. Vti in omni motu vibratorio, ſi quidem eſt minimus, datur caſus, quo iſochroniſmus et ſynchroniſmus locum habet, et pro quo certus ſtatus initialis requiritur; ita etiam noſtro caſu, vtcunque longitudines $AC = a$ et $BC = b$ ratione craſſitiei, cuius diametros poſuimus α et β, fuerint comparatae, ſemper caſus maxime ſpecialis pro iſochroniſmo aſſignari poteſt, qui euenit, ſi acceleratio cuiusuis elementi diſtantiae eius a ſitu naturali fuerit proportionalis. Hinc autem pro motu elementorum vtriusque partis, ſi poſt tempus t min ſec. puncta L et Λ in loca M et M perueniſſe ponamus, vocemusque: Tab. II. Fig 6.

$$AP = x;\ PM = y;\ \text{et}\ B\Pi = v;\ \Pi M = z$$

ad huiusmodi formulas perueniemus:

$$y = \alpha \sin \mu x \cos \lambda t \quad \text{et} \quad z = \beta \sin \nu v \cos \lambda t$$

vbi litterae incognitae ita ſunt definiendae, vt his formulis differentio differentialibus ſatisfiat:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=mm\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) \text{ et } \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=nn\left(\frac{ddz}{dv^2}\right).$$

59 Primo ergo eſſe debet $\alpha\lambda\lambda=\alpha\mu\mu mm$, ideoque $\mu=\frac{\lambda}{m}$, tum vero $\beta\lambda\lambda=\beta\nu\nu nn$, ideoque $\nu=\frac{\lambda}{n}$. Deinde quia, poſito $x=a$ et $v=b$, fieri debet $y=z$, habebimus $\alpha \text{ſin}.\mu a=\beta \text{ſin}.\nu b$; ſtatuamus ergo $\alpha=\frac{e}{\text{ſin}\ \mu a}=\frac{e}{\text{ſin}\ \frac{\lambda a}{m}}$ et $\beta=\frac{e}{\text{ſin}.\ \nu b}=\frac{e}{\text{ſin}.\ \frac{\lambda b}{n}}$ eruntque noſtrae aequationes:

$$y\,\text{ſin}.\frac{\lambda a}{m}=e\,\text{ſin}.\frac{\lambda x}{m}\text{coſ}.\lambda t \text{ et } z\,\text{ſin}.\frac{\lambda b}{n}=e\,\text{ſin}.\frac{\lambda v}{n}\text{coſ}\,\lambda t.$$

Poſtremo ambas curuas in puncto iuncturae E ſemper communem tangentem habere oportet, ſeu eſſe debet $\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dv}\right)=0$, poſito $x=a$ et $v=b$: vnde fit $\frac{\lambda e}{m}\text{cot}.\frac{\lambda a}{m}+\frac{\lambda e}{n}\text{cot}.\frac{\lambda b}{n}=0$ ſiue $m\,\text{tang}.\frac{\lambda a}{m}+n\,\text{tang}.\frac{\lambda b}{n}=0$. Quaeri ergo debet huiusmodi numerus λ, vt huic conditioni ſatisfiat, id quod infinitis modis fieri poteſt, ſicque innumerabiles obtinebuntur vibrationum iſochronarum caſus, qui, deinde inuicem combinati, infinitas ſuppeditabunt vibrationum compoſitarum ſpecies.

60. Cum autem ſit $m=\sqrt{\frac{2Fag}{M}}$ et $n=\sqrt{\frac{2Fbg}{N}}$, denotante M pondus partis AC, et N pondus partis BC, huic formulae erit ſatisfaciendum: $\sqrt{\frac{a}{M}}.\text{tang}\,\lambda\sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}+\sqrt{\frac{b}{N}}\,\text{tang}\,\lambda\sqrt{\frac{Nb}{2Fg}}=0$, quod quidem in genere praeſtare non licet, quouis autem caſu determinato valores idonei pro λ non difficulter eliciuntur. Inuento autem

tem quocunque valore ipſius λ, motus cordae vibratorius ita ſe habebit, vt ſingulae vibrationes abſoluantur tempore t, exiſtente $\lambda t = \pi$, denotante π ſemiperipheriam circuli radii $= 1$, ſeu tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{\lambda}$ min. ſec. Quod autem ad diuerſos valores ipſius λ attinet, niſi ſint inter ſe commenſurabiles, vibrationes, quae ex illarum combinatione oriuntur, nunquam fient regulares, quod ex aequationibus eſt manifeſtum:

$$y = \frac{e \sin. \frac{\lambda x}{m} \cos. \lambda t}{\sin. \frac{\lambda a}{m}} + \frac{e' \sin. \frac{\lambda' x}{m} \cos. \lambda' t}{\sin. \frac{\lambda' a}{m}} + \frac{e'' \sin. \frac{\lambda'' x}{m} \cos. \lambda'' t}{\sin. \frac{\lambda'' a}{m}} \text{ etc.}$$

$$z = \frac{e \sin. \frac{\lambda v}{n} \cos. \lambda t}{\sin. \frac{\lambda b}{n}} + \frac{e' \sin. \frac{\lambda' v}{n} \cos. \lambda' t}{\sin. \frac{\lambda' b}{n}} + \frac{e'' \sin. \frac{\lambda'' v}{n} \cos. \lambda'' t}{\sin. \frac{\lambda'' b}{n}} \text{ etc.}$$

Euolutio exempli ſpecialis.

61. Ponamus eſſe, vti in exemplo ſuperiori, $b = a$, et $N = \frac{1}{4} M$; vnde fit $m = \frac{2 Fag}{M}$ et $n = 2m$: debet ergo reſolui haec aequatio:

$$\text{tang.}\, \lambda \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}} + 2 \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}\lambda \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}} = 0$$

Ponatur breuitatis gratia angulus $\frac{1}{2}\lambda \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}} = \omega$, vt ſit $\lambda = 2\omega \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$; quaerique oportet angulum ω, ita vt ſit

$$\text{tang.}\, 2\omega + 2 \,\text{tang.}\, \omega = 0, \text{ ſeu } \text{tang.}\, 2\omega = -2 \,\text{tang.}\, \omega,$$

cui aequationi primum ſatisfit his valoribus:

$$\omega = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi \text{ etc.}$$

Deinde ob tang $2\omega = \frac{2 \,\text{tang.}\, \omega}{1 - \text{tang.}\, \omega^2}$, prodit tang $\omega = \pm \sqrt{2}$; ſi ergo ſit θ minimus angulus tangentem habens $= \sqrt{2}$, qui

qui eſt $54°, 44', 8'', 12'''$ praeterea quoque hi anguli ſatisfacient:

$$\omega = \theta;\ \pi \pm \theta;\ 2\pi \pm \theta;\ 3\pi \pm \theta;\ 4\pi \pm \theta;\ 5\pi \pm \theta \text{ etc.}$$

62. Sumto ergo horum angulorum pro ω inuentorum quocunque, ob $\lambda = 2\omega \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$, tempus vnius vibrationis cordae erit $= \frac{\pi}{2\omega} \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ min. ſec. ac pro motu cordae eiusque partis vtriusque habebuntur hae aequationes:

$$y = \frac{e}{\sin. 2\omega} \sin. \frac{2\omega x}{a} \cos. 2\omega t \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$$
$$z = \frac{e}{\sin. \omega} \sin. \frac{\omega v}{a} \cos. 2\omega t \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$$

vbi euidens, valores prioris ordinis pro ω inuentos, punctum cordae medium D ſemper in C immotum praebere. Cum enim ſit $\sin. \omega = 0$, et $\sin. 2\omega = 0$, neceſſario capi debet $e = 0$. Quod incommodum quo euitetur, ponamus $e = 2d \sin. \omega$, vt habeatur:

$$y = \frac{d}{\cos. \omega} \sin. \frac{2\omega x}{a} \cos. 2\omega t \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$$
$$z = 2d \sin. \frac{\omega v}{a} \cos. 2\omega t \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}.$$

63 Hic autem patet, quod quidem ſtatim ſuſpicari licuerat, valores prioris ordinis plane eſſe inutiles, neque ad noſtrum inſtitutum accommodatos; cum enim, poſito $x = v = a$, fieri debeat $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dv}\right) = 0$, hinc nanciſcimur:

$$\frac{\cos. 2\omega}{\cos. \omega} + 2\cos. \omega = 0 \text{ ſeu } \cos. \omega = \pm \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

vbi factor ſuperior inutilis tang ω eſt excluſus. Denotante ergo θ angulum $54°, 44', 8'', 12'''$, valores idonei pro ω ſubſtituendi ſunt

$$\omega = \pm \theta;\ \pi \pm \theta;\ 2\pi \pm \theta;\ 3\pi \pm \theta;\ \text{etc.}$$

et

et in genere $\omega = i\pi \pm \theta$, denotante i numerum integrum quemcunque. Quocirca tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{2i\pi \pm 2\theta} \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ min. sec. et posito $t = 0$, pro figura initiali hae obtinentur aequationes:

$$y = \frac{e}{\sin. 2(i\pi \pm \theta)} \sin. \frac{2(i\pi \pm \theta)x}{a} \text{ et } z = \frac{e}{\sin.(i\pi \pm \theta)} \sin. \frac{(i\pi \pm \theta)v}{a}.$$

64. Haec ergo corda infinitis modis ad vibratorium motum isochronum excitari potest; vnde innumerabiles sonos edet. Cum autem soni se habeant reciproce vt tempus vnius vibrationis, ob $\frac{\theta}{\pi} = 0,3040868$, hi soni, ad quos edendos eadem corda est apta, erunt vt numeri:

0,3040868; 0,6959132; 1,3040868; 1,6959132; 2,3040868 etc.

qui cum inter se sint incommensurabiles, soni erunt maxime dissoni, sicque eadem corda simul plures sonos inter se dissonos edere poterit. Dum autem corda illos sonos simplices edit, primo excepto, vnum pluresue nodos inter vibrandum formabit, seu vnum pluraue puncta eius in recta AB immota manebunt; eaque erunt vel in parte AC, vbi sumta $x < a$ fuerit sin $\frac{2\omega x}{a} = 0$; vel in parte BC, vbi, sumta $v < 0$, fuerit sin $\frac{\omega v}{a} = 0$. Sic pro sono secundo in parte AC dabitur vnus nodus circa locum fere $x = \frac{5}{7}$, in parte BC nullus: pro sono tertio dabuntur in parte AC duo nodi $x = \frac{5}{13}$ et $x = \frac{10}{13}$, in parte BC vnus $v = \frac{10}{13}$; pro sono quarto dabuntur in parte AC tres nodi $x = \frac{5}{17}$, $x = \frac{10}{17}$, $x = \frac{15}{17}$, et in parte BC vnus $v = \frac{10}{17}$, et ita porro.

Aliud Exemplum ſpeciale.

65. In praecedente exemplo ſoni ſimplices, quorum eadem corda eſt capax, etſi diſſonantes, tamen alternatim progreſſionem arithmeticam conſtituebant; qui ordo inde veniebat, quod tam quantitates m et n, quam anguli $\frac{\lambda a}{m}$ et $\frac{\lambda b}{n}$, rationem tenebant rationalem. Quando autem hoc non euenit, ne iſte quidem ordo amplius locum habebit, quod exemplo oſtendiſſe iuuabit. Ponamus igitur, eſſe quidem $b = a$, ſed $N = \frac{1}{2}M$, eritque $n = m\sqrt{2}$, exiſtente $m = \sqrt{\frac{2Fag}{m}}$: quaeri ergo oportet numerum λ vt ſit tang $\frac{\lambda a}{m} + \sqrt{2}$. tang $\frac{\lambda a}{m\sqrt{2}} = 0$. Ad quam aequationem reſoluendam ponamus $\frac{\lambda a}{m\sqrt{2}} = \omega$, vt ſit $\lambda = 2\omega\sqrt{\frac{Fg}{Ma}}$; fierique debet $\frac{tang.\,\omega\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \text{tang}\ \omega = 0$; quae aequatio quidem iterum infinitos praebet valores pro angulo ω, qui autem non ita ſunt comparati, vt vno cognito reliqui aſſignari queant.

66. Videamus ergo, quomodo aequatio $\frac{1}{\sqrt{2}}$tang $\omega\sqrt{2}$ + tang. $\omega = 0$ commodiſſime reſolui poſſit, ac tentaminibus quibusdam inſtitutis minimus angulus ω intra limites $72°, 25'$ et $72°, 35'$ cadere reperitur: hos ergo valores pro ω ſubſtituamus, calculumque ſequenti modo inſtituamus:

Hypoth.

	Hypoth. I	Hypoth. II
	$\omega = 72^\circ, 25'$	$72^\circ, 35'$
seu	$\omega = 260700''$	$261300''$
hinc	$l\omega = 5,4161410$	$5,4171394$
adde	$l\sqrt{2} = 0,1505150$	$0,1505150$
	$l\omega\sqrt{2}'' = 5,5666560$	$5,5676544$
	$\omega\sqrt{2} = 1\ 368685\tfrac{1}{2}''$	$369534''$
seu	$\omega\sqrt{2} = 02^\circ, 24', 45\tfrac{1}{2}''$	$102^\circ, 38', 54''$
	$\pi - \omega\sqrt{2} = 77, 35, 14\tfrac{1}{2}$	$77, 21, 6$
	$l\,\mathrm{tang}(\pi - \omega\sqrt{2}) = 10,6573889$	$10,6489532$
adde	$l\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 9,8494850$	$9,8494850$
	$10,5068739$	$10,4984382$
at	$l\,\mathrm{tang}\,\omega = 10,4990797$	$10,5034848$
Error	$+ 77942$	$- 50466$
	50466	
	128408	

$128408 : 10' = 77942 : 6', 4''$

vnde concluditur verus angulus $\omega = 72^\circ, 31', 4''$.

67. Inuento hoc angulo ω, erit $\lambda = 2\omega\sqrt{\frac{Fg}{Ma}}$, et tempus vnius vibrationis cordae $= \frac{\pi}{2\omega}\sqrt{\frac{Ma}{Fg}}$ min. sec. motus autem cordae ex sequentibus aequationibus innotescet; ob $\frac{\lambda}{m} = \frac{\omega\sqrt{2}}{a}$ et $\frac{\lambda}{n} = \frac{\omega}{a}$:

$$y = \frac{e}{\sin.\omega\sqrt{2}} \sin. \frac{\omega x\sqrt{2}}{a} \cos. 2\omega t\sqrt{\frac{Fg}{Ma}}$$

$$z = \frac{e}{\sin.\omega} \sin. \frac{\omega v}{a}. \cos. 2\omega t\sqrt{\frac{Fg}{Ma}}.$$

Verum pro angulo ω infinitos insuper alios valores idoneos inuestigari licet, quo in negotio methodo ante adhibita vti conueniet, vt primum per tentamina limites, intra quos verus quispiam valor continetur, colligantur, iique deinceps arctius constringantur, donec valor verus ex iis satis accurate concludi queat. Cum autem isti valores nullo certo ordine inter se cohaereant, labor vtique non parum erit molestus suscipiendus, si quis plures eruere voluerit.

Inuestigatio vibrationum regularium in cordis crassitiei vtcunque variabilis

68. Reuertamur iam tandem ad problema generale, quo cordae crassities vtcunque variabilis est assumta, ac supra (10) inuenimus omnium motuum, quos quidem corda recipere valeat, inuestigationem ad solutionem huius aequationis differentio-differentialis reuocari: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, vbi z est diameter crassitiei cordae abscissae x respondens, ideoque functio cognita ipsius x. Ponamus ergo ad abbreuiandum $\frac{2Fbbbg}{Mzz} = uu$, vt habeamus $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = uu\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, in qua nunc u erit functio cognita ipsius x: quaeriturque, qualis functio ipsarum x et t, pro y substituta, isti aequationi satisfaciat, atque insuper his conditionibus sit consentanea, vt, siue statuatur $x = 0$, siue $x = a$, prodeat $y = 0$, tum vero vt, posito $t = 0$, fiat $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$. Quartam conditionem, vt, posito $t = 0$, pro y prodeat data functio ipsius x, datae figurae initiali cordae conueniens, hic seponamus, quandoquidem problema isto latissimo sensu resolui nequit.

69. Euoluamus igitur primum casum illum maxime notabilem, quo corda vibrationes omnes synchronas

nas et isochronas producit, pro quo vis acceleratrix, vti constat, ipsi applicatae y esse debet proportionalis. Statuatur ergo ea $= nny$, et obtinebimus istas binas aequationes resoluendas:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -nny \text{ et } uu\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = -nny$$

in quarum illa abscissa x, in hac vero tempus t est constans assumtum. At ex priori aequatione oritur $y = p$ $\cos. nt$, vt fiat $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$, posito $t = 0$, vbi p denotat functionem quamcunque ipsius x, quae ex altera aequatione debet definiri. Obtinetur autem: $uuddp + nnpdx^2 = 0$, vnde valor ipsius p ita debet determinari, vt fiat $p = 0$ siue ponatur $x = 0$, siue $x = a$. Verum alterutra conditio inseruit numero n determinando, ex quo deinceps tempus cuiusque vibrationis innotescet $= \frac{\pi}{n}$ min. sec.

70. Verum haec aequatio, in genere considerata, $uuddp + nnpdx^2 = 0$ iisdem difficultatibus subiecta deprehenditur, quae in formula illa famosa *Riccatiana* occurrunt; posito enim $p = e^{\int q dx}$ seu $\frac{dp}{pdx} = q$, illa aequatio ad hanc formam reducitur: $uudq + uuqqdx + nndx = 0$, cuius integratio ita est instituenda, vt, posito $x = 0$, fiat $\int qdx = -\infty$. Cum igitur habeatur

$$dq + qqdx + \frac{nndx}{uu} = 0$$

ex casibus integrabilitatis formulae *Riccatianae* patet, hanc aequationem ad constructionem perduci posse, si valor ipsius u sit huiusmodi potestas:

$$\frac{(k+mx)^2}{a};\ (k+x)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a};\ \frac{(k+mx)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}};\ (k+mx)^{\frac{4}{5}}\sqrt[5]{a} \text{ etc.}$$

 quorum

quorum casuum primum supra iam in genere expediuimus, quem speciminis loco euoluamus, ita vt haec aequatio resoluenda sit:

$$dq + qq\,dx + \frac{nnaa\,dx}{(k+mx)^4} = 0.$$

71. Huic autem aequationi primum sequens valor imaginarius satisfacere deprehenditur:

$$q = \frac{na\sqrt{-1} + mk + mmx}{(k+mx)^2}$$

vnde fit $\int q\,dx = \frac{-na\sqrt{-1}}{m(k+mx)} + l(k+mx)$ et $p = \alpha(k+mx)\,e^{\frac{-na\sqrt{-1}}{m(k+mx)}}$. Simili vero modo quoque satisfacit $p = \beta(k+mx)\,e^{\frac{+na\sqrt{-1}}{m(k+mx)}}$, quibus valoribus combinandis per formulas reales obtinetur:

$p = A(k+mx)\,\text{sin.}\frac{na}{m(k+mx)} + B(k+mx)\,\text{cos.}\frac{na}{m(k+mx)}$ qui vt euanescat, posito $x = 0$, fiet

$$p = A(k+mx)\,\text{sin.}\frac{nax}{k(k+mx)},$$

et proinde $y = A(k+mx)\,\text{sin.}\frac{nax}{k(k+mx)}\,\text{cos.}\,nt$.
Cum autem hic sit $uu = \frac{(k+mx)^4}{aa}$, erit $zz = \frac{2Faabbbg}{M(k+mx)^4}$ et tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{n}$ min. sec. Verum numerus n ita debet esse comparatus, vt posito $x = a$ sit $\text{sin.}\frac{naa}{k(k+ma)} = 0$, seu $n = \frac{\lambda\pi k(k+ma)}{aa}$, ideoque tempus vibrationis $= \frac{aa}{\lambda k(k+ma)}$ min. sec.

72. Ponamus ergo secundo $u = (k+mx)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a}$, vt habeamus

$$dq + qq\,dx + \frac{nn\,dx}{(k+mx)^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{aa}}$$

cui

cui aequationi particulariter satisfacit

$$q = \cfrac{1}{\cfrac{(k+mx)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a}}{n\sqrt{-1}} + \cfrac{m(k+mx)^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{aa}}{3nn}}$$

Sit $k+mx = s^3$, vt fiat $dx = \frac{3ssds}{m}$, eritque

$$qdx = \cfrac{3sds}{\cfrac{ms\sqrt[3]{a}}{n\sqrt{-1}} + \cfrac{mm\sqrt[3]{aa}}{3nn}} = \frac{3nds\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}} + \cfrac{ds}{s - \cfrac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}}}$$

et $\int qdx = \frac{3ns\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}} + l\left(s - \frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}}\right)$ hincque

$$p = \mathrm{A}\left(s - \frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}}\right)e^{\frac{3ns\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}}} + \mathrm{B}\left(s + \frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}}\right)e^{\frac{-3ns\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}}}$$

quae expressio, ad valores reales reuocata, praebet:

$$p = \alpha s \operatorname{cos}. \frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}} + \beta s \operatorname{sin}. \frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}} - \frac{\alpha m\sqrt[3]{a}}{3n} \operatorname{sin}. \frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}}$$
$$+ \frac{\beta m\sqrt[3]{a}}{3n} \operatorname{cos}. \frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}}$$

vel $p = \mathrm{A}s \operatorname{sin}.\left(\frac{3ns+\delta}{m\sqrt[3]{a}}\right) + \frac{\mathrm{A}m\sqrt[3]{a}}{3n}\operatorname{cos}.\left(\frac{3ns+\delta}{m\sqrt[3]{a}}\right)$.

73. Ponatur iam $x=0$, quo casu fieri debet $p=0$, et ob $s=\sqrt[3]{k}$ erit:

$\sqrt[3]{k}$

$$\sqrt[3]{k}.\,\text{fin.}\frac{3n\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}}+\frac{m\sqrt[3]{a}}{3n}\text{cof.}\frac{3n\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}}=0$$

feu tang. $(\frac{3u\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}})=\frac{-m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt[3]{k}}$; ideoque

$$\text{fin.}\frac{3n\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}}=\frac{-m\sqrt[3]{a}}{\sqrt{(mm\sqrt[3]{aa}+9nn\sqrt[3]{kk})}}$$

Deinde ponatur $x=a$, et ob $s=\sqrt[3]{(k+ma)}$ fiet quoque

$$\text{tang.}\,(\frac{3n\sqrt[3]{(k+ma)}+\delta}{m\sqrt[3]{a}})=-\frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt[3]{(k+ma)}},$$

vnde eliminando angulo δ elicitur

$$\text{tang.}\frac{3n\sqrt[3]{(k+ma)}-3n\sqrt[3]{k}}{m\sqrt[3]{a}}=\frac{3mn\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k})}{mm\sqrt[3]{aa}+9nn\sqrt[3]{k(k+ma)}}$$

ex qua aequatione valor numeri n erui debet, quod quidem infinitis modis fieri posse per se patet. Si enim ponatur $\frac{3n}{m\sqrt[3]{a}}=\frac{\omega}{\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k}}$ quaeri debet angulus ω, vt fit

$$\text{tang.}\,\omega=\frac{\omega(\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k})}{(\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k})^2+\omega\omega\sqrt[3]{k(k+ma)}}$$

vel $\omega=\text{A tang.}\frac{\omega\sqrt[3]{(k+ma)}}{\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k}}-\text{A tang.}\frac{\omega\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k}}$

Tum

Tum inuento angulo ω, quaeratur angulus θ, vt sit

tang. $\theta = \frac{\sqrt[3]{(k+ma)} - \sqrt[3]{k}}{\omega\sqrt[3]{(k+ma)}}$, prodibitque altera constans

$$\frac{\delta}{m\sqrt[3]{a}} = \theta + \frac{\omega\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{(k+ma)} - \sqrt[3]{k}}.$$

74. Attentionem quoque meretur casus quasi infinitesimus, quo $u = k + mx$, seu $z = \frac{b}{k+mx} \sqrt{\frac{2Fbg}{M}}$: statim enim liquet aequationi $(k+mx)^2 ddp + nnpdx^2 = 0$ satisfacere potestatem quandam $p = (k+mx)^\alpha$, facta enim substitutione fit $\alpha(\alpha-1)mm + nn = 0$, huncque $\alpha = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} - \frac{nn}{mm})}$. Sit breuitatis gratia $\sqrt{(\frac{nn}{mm} - \frac{1}{4})} = \lambda$, habebiturque $p = (A(k+mx)^{\lambda\sqrt{-1}} + B(k+mx)^{-\lambda\sqrt{-1}})\sqrt{(k+mp)}$, quae ad realitatem reuocata praebet

$$p = (C\sin.\lambda l(1 + \tfrac{mx}{k}) + D\cos.\lambda l(1 + \tfrac{mx}{k}))\sqrt{(k+mx)}$$

Iam quia, posito $x = 0$, fieri debet $p = 0$, oportet esse $D = 0$, et facto $x = a$, necesse est sit $\lambda l(1 + \frac{ma}{k}) = i\pi$ denotante i numerum integrum quemcunque. Inuento igitur $\lambda = \frac{i\pi}{l(1+\frac{ma}{k})}$, erit $n = m\sqrt{(\frac{1}{4} + \lambda\lambda)}$, vnde tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{n}$, et motus definietur per hanc aequationem:

$$y = A(k+mx)^{\frac{1}{2}} \sin.i\pi \frac{l(1+\frac{mx}{k})}{l(1+\frac{ma}{k})} \cos mt\sqrt{(\tfrac{1}{4} + \frac{ii\pi\pi}{(l(1+\frac{ma}{k}))^2})}.$$

75. Sumendis pro i diuersis numeris, oriuntur diuersae vibrationum isochronarum species, quarum tempora

pora autem plane erunt inter se incommensurabilia. Poterunt autem vibrationes ex pluribus huiusmodi simplicibus componi, in quibus nulla amplius regularitas perspicietur. Si enim breuitatis gratia ponamus $\frac{\pi}{l(1+\frac{ma}{k})}=\mu$, sequens aequatio in infinitum adeo continuata problemati satisfaciet:

$$y=(k+mx)^{\frac{1}{2}}\begin{cases}\alpha\,\text{fin.}\,\mu\,l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{cof.}\,mt\sqrt{(\frac{1}{4}+\mu\mu)}\\ +\beta\,\text{fin.}\,2\mu\,l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{cof.}\,mt\sqrt{(\frac{1}{4}+4\mu\mu)}\\ +\gamma\,\text{fin.}\,3\mu\,l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{cof}\,mt\sqrt{(\frac{1}{4}+9\mu\mu)}\\ +\delta\,\text{fin.}\,4\mu\,l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{cof}\,mt\sqrt{(\frac{1}{4}+16\mu\mu)}\end{cases}$$

etc.

Neque tamen haec expressio, etsi in infinitum producta, eiusmodi solutionem generalem suppeditat, quae se ad omnes casus, quibus cordae initio figura quaecunque fuerit inducta, extendat. Verum consideratio huiusmodi solutionum particularium viam ad solutionem generalem parare debet.

Integratio generalis et completa aequationis differentio - differentialis $x^{2m+2}ddy+ccydx^2=0$.

76. Ad hanc aequationem peruenimus, quoties in nostra aequatione superiori $uuddp+nnpdx^2=0$, functio u fuerit potestas ipsius x, vel ipsius $\alpha+\beta x$, scilicet $u=(\alpha+\beta x)^{m+1}$, quibus igitur casibus haec aequatio integrationem admittit, iisdem motus vibratorius cordae isochronus determinari poterit. Manifestum autem

autem eſt, hanc aequationem a celebri illa *Riccatiana* non differre. Poſito enim $y = e^{\int z dx}$, vt ſit $z = \frac{dy}{y dx}$ prodit haec ipſa forma:

$$dz + zz dx + cc x^{-2m-2} dx = 0$$

quae quibusnam caſibus exponentis m integrabilis euadat, a celeberrimis Geometris olim eſt inueſtigatum. Verum integralia ab illis exhibita non ſolum ſunt particularia, ſed etiam hoc caſu, ob coefficientem $+cc$ neceſſario poſitiuum, fiunt imaginaria, ita vt nobis nullum vſum eſſent praeſtitura.

77. Non mediocriter ergo hoc opus circa vibrationes promouebitur, ſi huius aequationis integrale completum, quod a formulis imaginariis ſit liberum, exhibuero. Hunc in finem coefficientes neceſſarii ſequenti modo definiantur:

$A = \frac{mm-1}{8mc}$; $B = \frac{9mm-1}{16mc} A$; $C = \frac{25mm-1}{24mc} B$; $D = \frac{49mm-1}{32mc} C$
$E = \frac{81mm-1}{40mc} D$; $F = \frac{121mm-1}{48mc} E$; $G = \frac{169mm-1}{56mc} F$ etc.

quibus inuentis erit integrale completum:

$$y = \begin{array}{l} +kx^{\frac{m+1}{2}}(1 - Bx^{2m} + Dx^{4m} - Fx^{6m} + \text{etc.})\sin.(\frac{c}{mx^m} + \theta) \\ -kx^{\frac{m+1}{2}}(Ax^m - Cx^{3m} + Ex^{5m} - Gx^{7m} + \text{etc})\cos.(\frac{c}{mx^m} + \theta) \end{array}$$

vbi angulus θ cum quantitate k ſunt binae illae conſtantes arbitrariae, per duplicem integrationem introductae. Pro noſtro autem caſu vibrationum, cum angulus θ, tum conſtans c, ita definiri debent, vt, ſi abſciſſae x, quae iam non amplius a puncto A compu-

 tatur,

tatur, certi duo valores, veluti $x = d$ et $x = d + a$, tribuantur, applicata y vtroque casu euanescat.

78. In genere quidem haec expressio in infinitum excurrit; sed manifestum est, dari infinitos eiusmodi valores exponentis m, quibus ea fiat finita. Hoc scilicet euenit, si sumta littera i ad numerum imparem quemcunque significandum, fuerit $iimm - 1 = 0$ seu $m = \pm \frac{1}{i}$, quibus casibus fit noster exponens $2m + 2 = 2 \pm \frac{2}{i}$ Quare aequatio nostra $x^{2m+2} ddy + ccydx^2 = 0$ sequentibus casibus integrationem absolutam admittit, si scilicet exponens $2m + 2$ fuerit terminus alterutrius sequentium duarum progressionum:

$$0;\ \tfrac{4}{3};\ \tfrac{8}{5};\ \tfrac{12}{7};\ \tfrac{16}{9};\ \tfrac{20}{11};\ \tfrac{24}{13};\ \text{etc.}$$

$$4;\ \tfrac{8}{3};\ \tfrac{12}{5};\ \tfrac{16}{7};\ \tfrac{20}{9};\ \tfrac{24}{11};\ \tfrac{28}{13};\ \text{etc.}$$

qui numeri negatiue sumti dant notos illos integrabilitatis casus aequationis $dz + zzdx + ccx^{-2m-2}dx = 0$, pro qua est generatim $z = \frac{dy}{ydx}$.

79. Quo haec integralia facilius assignare queamus, ponamus in genere $m = \frac{1}{i}$; eruntque nostri coefficientes:

$$A = \frac{1 - ii}{8ic}$$

$$B = \frac{(1 - ii)(9 - ii)}{8.16\, iicc}$$

$$C = \frac{(1 - ii)(9 - ii)(25 - ii)}{8.16.24\, i^3 c^3}$$

$$D = \frac{(1 - ii)(9 - ii)(25 - ii)(49 - ii)}{8.16.24.32.\, i^4 c^4}$$

$$E = \frac{(1 - ii)(9 - ii)(25 - ii)(49 - ii)(81 - ii)}{8.16.24.32.40.\, i^5 c^5}$$

etc.

Pro

Pro quolibet ergo casu assignato integrale completum vtriusque aequationis $x^{2m+2}ddy + ccydx^2 = 0$ et $dz + zzdx + ccx^{-4m-2}dx = 0$ non difficulter colligetur.

Casus I $(m = -1)$

$$ddy + ccydx^2 = 0 \text{ et } dz + zzdx + ccdx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = k\,\text{sin.}(\theta - cx) \text{ et } z = \frac{dy}{ydx} = \frac{-c\,\text{cos.}(\theta - cx)}{\text{sin.}(\theta - cx)}$$

Casus II $(m = +1)$

$$x^4 ddy + ccydx^2 = 0 \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-4}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = kx\,\text{sin.}\left(\theta + \frac{c}{x}\right), \text{ et } z = \frac{dy}{ydx} = \frac{1}{x} - \frac{c}{xx}\cot\left(\theta + \frac{c}{x}\right)$$

Casus III $(m = -\frac{1}{3})$

$$x^{\frac{4}{3}}ddy + ccydx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{4}{3}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = kx^{\frac{1}{3}}\left(\text{sin.}\left(\theta - 3cx^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{3c}x^{-\frac{1}{3}}\text{cos.}\left(\theta - 3cx^{\frac{1}{3}}\right)\right)$$

seu $y = k\left(x^{\frac{1}{3}}\text{sin.}\left(\theta - 3cx^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{3c}\text{cos.}\left(\theta - 3cx^{\frac{1}{3}}\right)\right)$

Casus IV $(m = +\frac{1}{3})$

$$x^{\frac{8}{3}}ddy + ccydx^2 = 0 \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{8}{3}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = kx^{\frac{2}{3}}\left(\text{sin.}\left(\theta + 3cx^{-\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{3c}x^{\frac{1}{3}}\text{cos.}\left(\theta + 3cx^{-\frac{1}{3}}\right)\right)$$

Casus V $(m = -\frac{1}{5})$

$$x^{\frac{8}{5}}ddy + ccdx^2 = 0 \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{8}{5}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = kx^{\frac{2}{5}}\left(\left(1 - \frac{3}{25cc}x^{-\frac{2}{5}}\right)\text{sin.}\left(\theta - 5cx^{\frac{1}{5}}\right) - \frac{3}{5c}x^{-\frac{1}{5}}\text{cos.}\left(\theta - 5cx^{\frac{1}{5}}\right)\right)$$

Casus VI $(m = + \frac{1}{5})$

$$x^{\frac{12}{5}} ddy + ccy dx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{12}{5}} dx = 0,$$

erit integrale completum

$$y = kx^{\frac{3}{5}}((1 + \tfrac{3}{25cc} x^{\frac{2}{5}}) \sin. (\theta + 5cx^{-\frac{1}{5}} + \tfrac{3}{5c} x^{\frac{1}{5}} \cos. (\theta + 5cx^{-\frac{1}{5}}))$$

Casus VII $(m = - \frac{1}{7})$

$$x^{\frac{12}{7}} ddy + ccy dx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{12}{7}} dx = 0$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} + kx^{\frac{3}{7}} (1 - \frac{3 \cdot 5}{7^2 cc} x^{-\frac{2}{7}}) \sin. (\theta - 7cx^{\frac{1}{7}}) \\ - kx^{\frac{3}{7}} (\frac{2 \cdot 3}{7c} x^{-\frac{1}{7}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{7^3 c^3} x^{-\frac{3}{7}}) \cos. (\theta - 7cx^{\frac{1}{7}}) \end{cases}$$

Casus VIII $(m = + \frac{1}{7})$

$$x^{\frac{16}{7}} ddy + ccy dx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{16}{7}} dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} + kx^{\frac{4}{7}} (1 - \frac{3 \cdot 5}{7^2 c^2} x^{\frac{2}{7}}) \sin. (\theta + 7cx^{-\frac{1}{7}}) \\ + kx^{\frac{4}{7}} (\frac{2 \cdot 3}{7c} x^{\frac{1}{7}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{7^3 c^3} x^{\frac{3}{7}}) \cos. (\theta + 7cx^{-\frac{1}{7}}) \end{cases}$$

Casus IX $(m = - \frac{1}{9})$

$$x^{\frac{16}{9}} ddy + ccy dx^2 = 0 \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{16}{9}} dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} + kx^{\frac{4}{9}} (1 - \frac{9 \cdot 5}{9^2 c^2} x^{-\frac{2}{9}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{9^4 c^4} x^{-\frac{4}{9}}) \sin. (\theta - 9cx^{\frac{1}{9}}) \\ - kx^{\frac{4}{9}} (\frac{10}{9c} x^{-\frac{1}{9}} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{9^3 c^3} x^{-\frac{3}{9}}) \cos. (\theta - 9cx^{\frac{1}{9}}) \end{cases}$$

Casus X $(m = + \frac{1}{9})$

$$x^{\frac{20}{9}} ddy + ccy dx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{20}{9}} dx = 0,$$

erit

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{5}{9}}(1 - \frac{9\cdot 5}{9^2c^2}x^{\frac{2}{9}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{9^4c^4}x^{\frac{4}{9}})\,\text{fin.}(\theta + 9cx^{-\frac{1}{9}}) \\ +kx^{\frac{5}{9}}(\frac{10}{9c}x^{\frac{1}{9}} - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{9^3c^3}x^{\frac{3}{9}})\,\text{cof.}(\theta + 9cx^{-\frac{1}{9}}) \end{cases}$$

Cafus XI $(m = -\frac{1}{11})$

$$x^{\frac{20}{11}}ddy + ccydx^2 = 0;\ \text{et}\ dz + zzdx + ccx^{-\frac{20}{11}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{5}{11}}\ 1 - \frac{21\cdot 5}{11^2c^2}x^{-\frac{2}{11}} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{11^4c^4}x^{-\frac{4}{11}})\,\text{fin.}(\theta - 11cx^{\frac{1}{11}}) \\ -kx^{\frac{5}{11}}(\frac{15}{11c}x^{-\frac{1}{11}} - \frac{4\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{11^3c^3}x^{-\frac{3}{11}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{11^5c^4}x^{-\frac{5}{11}})\,\text{cof.}(\theta - 11cx^{\frac{1}{11}}) \end{cases}$$

Cafus XII $(m = +\frac{1}{11})$

$$x^{\frac{24}{11}}ddy + ccydx^2 = 0;\ \text{et}\ dz + zzdx + ccx^{-\frac{24}{11}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{6}{11}}(1 - \frac{21\cdot 5}{11^2c^2}x^{\frac{2}{11}} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{11^4c^4}x^{\frac{4}{11}})\,\text{fin.}(\theta - 11cx^{-\frac{21}{11}}) \\ +kx^{\frac{6}{11}}(\frac{15}{11c}x^{\frac{1}{11}} - \frac{4\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{11^3c^3}x^{\frac{3}{11}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{11^5c^5}x^{\frac{5}{11}})\,\text{cof.}(\theta + 11cx^{-\frac{1}{11}}) \end{cases}$$

Cafus XIII $(m = -\frac{1}{13})$

$$x^{\frac{24}{13}}ddy + ccydx^2 = 0;\ \text{et}\ dz + zzdx + ccx^{-\frac{24}{13}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{6}{13}}(1 - \frac{6\cdot 5\cdot 7}{13^2c^2}x^{-\frac{2}{13}} + \frac{5\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{13^4c^4}x^{-\frac{4}{13}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{13^5c^5}x^{-\frac{6}{13}})\,\text{fin}\ (\theta - 13cx^{\frac{1}{13}}) \\ -kx^{\frac{6}{13}}(\frac{3\cdot 7}{13c}x^{-\frac{1}{13}} - \frac{4\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{13^3c^3}x^{-\frac{3}{13}} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{13^5c^5}x^{-\frac{5}{13}})\,\text{cof.}(\theta - 13cx^{\frac{1}{13}}) \end{cases}$$

Cafus XIV $(m = +\frac{1}{13})$

$$x^{\frac{28}{13}}ddy + ccydx^2 = 0;\ \text{et}\ dz + zzdx + ccx^{-\frac{28}{13}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{7}{13}}(1 - \frac{6\cdot 5\cdot 7}{13^2c^2}x^{\frac{2}{13}} + \frac{5\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{13^4c^4}x^{\frac{4}{13}} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{13^5c^5}x^{\frac{6}{13}})\,\text{fin.}(\theta + 13cx^{-\frac{1}{13}}) \\ +kx^{\frac{7}{13}}(\frac{3\cdot 7}{13c}x^{\frac{1}{13}} - \frac{4\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{13^3c^3}x^{\frac{3}{13}} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{13^5c^5}x^{\frac{5}{13}})\,\text{cof.}(\theta + 13cx^{-\frac{1}{13}}). \end{cases}$$

Ex

Ex his autem singulis valoribus ipsius y eruitur valor ipsius $z = \frac{dy}{y\,dx}$.

80. Quod ad ordinem coefficientium in his expressionibus attinet, is facillime perspicitur, si numeri impares pro i substituendi distinguantur, prout sint formae vel $4n+1$, vel $4n-1$:

I. Ita si sit $m = \frac{1}{4n+1}$ seu $i = 4n+1$, erit

$$A = \frac{n}{1} \cdot \frac{(2n+1)}{ic}$$

$$B = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{i^2 c^2}$$

$$C = \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^3 c^3}$$

$$D = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^4 c^4}$$

$$E = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{i^5 c^5}$$

etc.

II. Si sit $m = \frac{1}{4n-1}$ seu $i = 4n-1$, erit

$$A = \frac{n}{1} \cdot \frac{(2n-1)}{ic}$$

$$B = \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{i^2 c^2}$$

$$C = \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}{i^3 c^3}$$

$$D = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^4 c^4}$$

$$E = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{(2n-5)(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^5 c^5}$$

etc.

THERMOMETRI METALLICI DESCRIPTIO.

Auctore
I. E. ZEIHERO.

Exſtat in machinarum phyſicarum theſauro Illuſtriſſimi Comitis *de Loeſer*, Saxoniae Mareſchalli haereditarii, artium mechanicarum magni promotoris, thermometrum metallicum, quod ipſe quidem nunquam vidi, cuius autem egregia ſtructura ex amici cuiusdam deſcriptione mihi innotuit: praemittere hanc non incongruum fore iudicaui, priusquam ipſam inuenti mei deſcriptionem aggrediar, quum poſterius inſtrumentum in priori ſit fundatum.

Thermometrum autem Loeſerianum e quatuor parallelepipedis, ſeu prismatibus quadrangularibus, vel e ſtanno puro, vel plumbo mixto, confectis, AB, DE, GH, KL compoſitum eſt, quorum quodlibet longitudine pedem Pariſinum parum ſuperat, ſecundum latitudinem autem et craſſitiem quatuor lineas circiter adaequat. Prisma AB extremitate A fundo XY verticali ſitu eſt affixum, altera autem extremitate B cum extremitate ſuperiore D, alterius prismatis DE, ſitu verticali deſcendentis, vecte mediante aurichalceo BCD ita connectitur, vt motus circa puncta HIK fieri poſſit. Axis C receptaculi parieti eſt affixus. Alterius prismatis extremitas E cum tertii prismatis GH extremitate G, pari modo ope vectis EFG, cuius axis F alteri parieti eſt affixus, con- Tab. IV. Fig. 1.

 iun-

iungitur, aeque ac extremitates HK cum vecte HIK connectuntur Quarti priſmatis KL extremitas L mediante clauo rotundo Z, in furcae ML rimam ſeſe inſinuante, rotam vrget dentatam NOP, quae aliam minorem Q, cui applicita eſt, circummouet; quo fit, vt index poſteriori affixus, diuiſiones in limbo STV factas denotet. E ſtructura huius inſtrumenti elucet, ſenſibilitatem eius a brachiorum vectium inaequalitatis ratione maxime pendere. Ponamus enim, priſma primum a calore vel frigore quantitate q mutari, et rationem inter vectis crura eſſe vt 1 ad 3, tunc cruris maioris extremitas cum priſmate ſecundo connexa, ſpatium percurret $= 3\,q$, per conſequens priſma ſecundum protrudetur $3\,q$, quod, quoniam pari modo a calore vel frigore mutabitur quantitate q, vectem ſecundum, qui ſecundum et tertium priſma coniungit, vrgebit $4\,q$; hic autem tertium priſma $4\,q.\frac{3}{1} = 12\,q$; tertium porro priſma tertium vectem $13\,q\,\frac{3}{1} = 39\,q$: conſequenter ſpatium ab extremitate L priſmatis quarti percurſum, erit $39\,q + q = 40\,q$. Vt autem formulam generaliorem eruamus, rationem inter vtraque crura ſupponere licet, vti m ad n, vbi m cruris maioris, n vero minoris longitudinem denotat: obtinebimus tunc

pro priſm. 1. q

2 $q + \frac{qm}{n} = q\left(\frac{n+m}{n}\right)$

3. $q + \frac{m}{n}\left(\frac{qn+qm}{n}\right) = q\left(\frac{n^2+mn+m^2}{n^2}\right)$

4. $q + \frac{m}{n}\left(\frac{q+qn^2+qmn+qm^2}{n^2}\right) = q\left(\frac{n^3+mn^2+m^2n+m^3}{n^3}\right)$

5. $q\left(\frac{n^4+mn^3+m^2n^2+m^3n+m^4}{n^4}\right)$

6. $q\left(\frac{n^5+mn^4+m^2n^3+m^3n^2+m^4n+m^5}{n^5}\right)$.

Quum

Quum inuentum hoc aptiſſimum mihi viſum ſit ad inſtituenda experimenta, qualia thermometrorum huc vsque vſitatorum auxilio inſtitui plane nequeunt: non dubito, fore vtile, ſi peculiarem et nouam eiusmodi inſtrumenti deſcribam conſtructionem a me excogitatam, cuius imperfectiones, quibus adhuc forſan laborat, reiterata experimenta, cum hoc ipſo inſtituta, in totum tollent. Thermometrum vero hoc metallicum eum in finem componere conatus ſum, vt partim puncta duo conſtantia in eodem determinare, partim caloris gradus, mercurii ebullientis gradum longe ſuperantes, nec non frigus illud, quo fluidum iſtud metallicum ipſum coit, metiri queamus: cui fini ſequens conſtructio ſatisfaciet.

Tab. IV. Fig. 2.

Conficiatur lamina ferrea ABCD, ac prismata quadrangularia E, F, G, H, I, K, ex argento, quorum primum E ad L bis incuruatum, mediante cochlea *a*, firmetur ad laminam modo nominatam ABCD. Ad *xy* exſcindatur crena, cuius vſus inferius patebit; eidem cochlea *a* imponatur. Altera extremitas *b* cum vecte *bc* articuli ope connectatur, pari modo ac prismatum F, G, H, I, K, extremitates cum vectium extremitatibus *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, *l*, *m*. Vectium axes *o*, *o*, *o*... etc. laminae ferreae infigantur vna extremitate, altera autem vectibus inſerantur, ita quidem, vt circa illos commouere ſeſe queant. Vltimi vectis crus maius *on* indicis munere fungitur cuſpidis ope *n*, diuiſiones in limbo A B factas denotantis. Hunc limbum ex aurichalco comparare oportet, vt diuiſiones eo melius ac commodius in eodem designari possint. Ad partem laminae ferreae inferiorem CDPQ operculum RS affigatur mediantibus cochleis, eo modo, vt spatium, in quo prismata vna cum vectibus suis sunt contenta, accurate claudatur, excepto loco PQ, qui apertus remaneat, vt index commoueri queat.

Si quis instrumentum in metallum quoddam liquefactum immergere velit, capsula CDPQ ad crassitiem vnius circiter lineae vsque luto obducatur, non tantum ad metalli liquidi introitum impediendum, verum etiam ad omne, quod capsula alias pati posset, detrimentum auertendum. Lutum hoc, experimentis factis, pro lubitu iterum tollitur. Quodsi vero circa frigus artificiale experimenta sint instituenda, thermometri capsula vernice calida, ex lini oleo et pice confecta, est obducenda, ne metallum ab acida mixtione, in quam immergitur, corrodatur.

Thermometrum Loeserianum prismatibus constat e stanno confectis; quod metallum ad obseruationes meteorologicas instituendas aptissimum est, quia mutationem prae reliquis omnium patitur maximam. Quia vero idem sub leui caloris gradu liquescit, et per consequens experimentis pyrometricis instituendis non convenit, argentum elegi, quod et difficillime liquescit, et ratione mutationis, quam a calore vel frigore patitur, ad stannum seu plumbum proxime accedit; vti ex Cel. *Bougueri* experimentis, Quitoae factis (*), notum

(*) Vid. Memoires de l'Acad. de Sc. ad an. 1743. p. 230. etc. Cum stanno ipso quidem Cel. Vir experimenta non fecit; interim quum Cel. *Muschenbroek* (*vid Tent. Acad del Cimento* P. II. p. 22.) nullum notabile discrimen inter plumbum et stannum deprehenderit, vnum pro altero substituere nullus dubito.

tum eſt. Experimenta enim haec multoties repetita Cel. Virum docuere, hexapedam Pariſinam a niuis frigore ſeu congelatione, ad ebullitionem vsque, in ferro ad $\frac{47}{100}$, in auro $\frac{63}{100}$, in argento $\frac{81}{100}$, in plumbo $\frac{90}{100}$ lin. pedis Pariſ. increſcere.

Quodſi igitur aſſumamus, longitudinem prismatis inter vtrumque articulum eſſe 18 lin. id a congelatione ad ebullitionem vsque ad $\frac{81}{4800}$ lin. extendetur; ponamus porro, rationem inter vectis crura eſſe vti 1 ad 3, habebimus pro ſpatio a vectis *o l* crure percurſo, ſubſtitutis in formula generali $(\frac{mn^4+m^2n^3+m^3n^2+m^4n+m^5}{n^5})q$ valoribus in caſu hoc ſpeciali aſſumtis $\frac{(3+9+27+81+243)}{4800}\times 81 = \frac{29403}{4800}$, ſeu diuiſione peracta, $6\frac{1}{8}$ fere lineas. Spatium hoc quinti vectis *o l* extremitas *l* percurrere deberet, niſi lamina ferrea, cui axes vectium ſunt infixi, ipſa volumine ſuo increſceret. Quum vero hoc incrementum in ferri fruſtulo $1\frac{1}{2}$ poll. longo $\frac{47}{4800}$ lin. efficiat, incrementum relatiuum $\frac{81-47}{4800} = \frac{34}{4800}$ lin. inuenitur; quod pro *q* ſubſtitui debet, ſi ſpatium extremitate *l* vere percurſum quaeramus: calculo autem vti ſupra peracto, $2\frac{1}{2}$ lin. attinget. Ad vltimi prismatis incrementum quod attinet, quum $\frac{1}{288}$ lineae non excedat, negligi poteſt. Denique ſi rationem inter indicis crura ſupponamus vti 12 ad 1, extremitas *n* ſpatium percurret $2\frac{1}{2}$ poll. a congelationis puncto ad gradum vsque ebullitionis aquae: id quod in explorandis inſignibus caloris vel frigoris gradibus abunde ſufficiet; immo in caſibus quibusdam *e.g.* vbi gradus menſurandi, ſpatium, ebullitionis et congelationis punctis inclusum, aliquoties excurrunt, $2\frac{1}{2}$ poll. nimium erunt.

Supposuimus in formula incrementorum superius inuenta, prismata semper vrgeri a vectibus secundum directionem eandem, ac inter se manere parallela; id quod in eo tantum casu locum habet, in quo vectes satis sunt magni, ac per consequens arcus ab iisdem descriptus ratione radii describentis valde exiguus, vti id ipsum in instrumento ad obseruationes meteorologicas adaptato re vera obtinet. Quum autem in instrumento, gradibus permagnis caloris vel frigoris explorandis inseruituro, vectes necessario satis parui euadant, ac vectis vltimi extremitas arcum octauam circuli partem superantem nonnunquam percurrere cogatur, inaequalitates ab hinc ortas fore valde sensibiles, hincque non
Tab. IV. Fig. 3. negligendas esse per se patet. Sit enim AD vectis vltimi crus maius, AK prisma cum indicis crure minori IL coniunctum, sintque, ne res nimis complicetur, AD, AK, KL, inter se aequales; moueatur porro A ad B, et punctum K transferatur ad H, elucebit tunc, arcum AB maiorem esse arcu KH. Cum enim sinus $IH = EG - FG$, EG autem $= CB$, sinus $IH <$ erit sin. CB; quo simul conspicitur, differentias sinuum CB et IH eo magis crescere, quo magis crescit arcus AB. Quodsi itaque spatium, quod punctis congelationis atque ebullitionis aquae includitur, a crure AD percursum, non sit arcus ratione radii AD valde exiguus e. g. circuli pars vigesima, spatia aequalia intermedia, puncto A descripta, tanquam partes aequales

les in ſcala aſſumi haud poſſunt; ſed ſecundum legem, qua decreſcunt, in eadem deſignanda ſunt: id quod methodo ſequenti mechanica optime fieri poſſe arbitror.

Supinetur in niuem, ſeu glaciem contuſam, thermometrum, huicque permaneat immerſum, donec ad congelationis punctum circiter refrixerit; quo facto, mediante cochlea a, per rimam *x y* inſerta, tam priſmata quam vectes collocentur in ſitum, in figura repraeſentatum; affigatur dein operculum laminae C D P Q, omniaque bene claudantur; punctum denique accuratius quaeratur methodo vulgari, nec non punctum aquae ebullientis. Ducantur in charta lineae AD, AK, KL, et quidem ita, vt L K, quae crus indicis repraeſentat minus, aequalis ſit cruri indicis maiori *mn*, reliquae autem ſiut proportionatae eidem quod repraeſentant; nempe L K crus indicis minus *mo*, AK priſma *lm*, et AD vectis crus maius *o l*. Tunc deſcribatur radio LK arcus K H, et arcus K M aequalis fiat arcui *n p*, qui ſpatium inter congelationem et ebullitionem denotat; porro AK transferatur ad M N, ſic A N erit circuli pars, quam A D eodem tempore, quo *n* mouebatur ad *p*, deſcripſit. Arcus A N diuidatur in tot partes aequales, quot cuilibet ſcalae congruunt; ſcilicet in 15, ſi Delisliana iſta ſit: non enim opus eſt, vt mediante hac methodo ſingulatim denotentur gradus; quippe qui poſtea interponi commode queunt. Diuiſione ad A N facta, ſingulis punctis circini crus imponatur, et altero, ſpatio AK a priori diſtante, diſſecetur arcus K M in tot partes, quot diuiſiones ad A N factae Fig. 8.

factae sunt, haeque in scalae arcum transponantur. Arcus autem A N in N B transferatur, ex D resecetur H, ac operatio modo descripta repetatur, et spatium a Zero ad gradum vsque 150 *Delislianum* supra punctum ebullitionis diuisum obtinebitur: sic denuo repeti potest operatio infra et supra puncta consueta, prouti res illud postulant.

Superest, vt disquiramus, an contractionis vel extensionis inaequalitas, quam vtrumque indicis crus pati potest, si thermometri capsula immergitur vsque ad P Q, quum e contrario pars A B P Q relinquitur libera, sit negligenda, nec ne? Ponamus itaque, crus *mo* esse 1 poll. hexapedam vero parisinam ferream a niuis frigore ad aquae ebullitionem vsque $\frac{47}{100}$ lin. increscere, vt ex praecedentibus patet; per consequens pollicis vnius incrementum aequale erit $\frac{47}{7200}$ lin. quod $\frac{1}{1838}$ longitudinis cruris integri *m o* non excedit; differentia itaque exorietur in spatio 150 graduum *Delislianorum* $\frac{1}{1838}$, posito effectu caloris vel frigoris ad *o* penitus euanescente. Quia autem sensu strictiori hoc locum non habet, quoniam effectus in ratione distantiarum duplicata tantum euanescit, variatio inde exoriunda insuper etiam minor erit, et consequenter plane negligi poterit.

Quum taediosum sit, immo interdum impossibile, in obseruandis caloris gradibus permagnis, indicis apicem oculis persequi, summumque denotare gradum, ad *n* clauus exacutus, ac elatere *q* instructus, cochlearum *f*, *f*, ope affigatur, limbusque fuligine obducatur; sic ille, indice sese mouente, semitam describet, cuius punctum

punctum extremum gradum indicabit ſummum. Hoc commodo etiam vti poſſumus abſentes, in obſeruandis ſummis atmoſphaerae noſtrae gradibus, tam caloris, quam frigoris, ſi loco claui chalybei ſtylum e ceruſſa confectum infigamus, limbumque papyro obducamus; qua praerogatiua thermometra vulgaria plane carent: quamuis enim in hunc finem conſtructiones eorum variae ſint excogitatae, idem tamen longe facilius thermometro metallico obtinebitur.

THERMOMETRORVM, PVNCTIS CONSTANTIBVS GAVDENTIVM, EMENDATIO.

Auctore

I. E. ZEIHERO.

Quum taediosum valde sit, tantos labores et sumtus ad perficiendas scalas metallicas, bulbo vitreo fracto, frustra impendisse: non incongruum fore iudicaui, artificium proponere, malo huic auertendo idoneum, sequens:

Elaboretur bulbus ferreus AB, fundo B cochlea
Tab IV. caua instructus, et ad collum A perforatus. Cochleae
Fig. 4. cauae B adaptetur cochlea solida F, bulbo AB non modo claudendo, sed bulbi spatio DE etiam augendo, vel diminuendo, inseruiens. Colli foramini imponatur tubulus vitreus DC, ac lithocolla firmetur, ita, vt prae fornice D non promineat, sed extremitate sua inferiore superficiem fornicis iusto attingat.

E descriptione huius bulbi, seu cylindri, euidenter elucet, eum ita comparatum esse, vt eiusdem ope spatium inter punctum ebullitionis et congelationis, determinatae magnitudinis semper obtineri possit. Ponamus enim, spatium inter duos terminos constantes maius esse spatio dato, statim hoc diminui poterit diminuendo bulbi spatium DE; si nimirum cochlea F fornicem D versus protrudatur, et vice versa.

Quodsi nunc casu fortuito diffractum fuerit thermometrum, cylindro modo descripto ferreo, vel etiam bulbo

bulbo vitreo communi, inſtructum, ac deſideretur pro ſcala relicta, elegantiſſime elaborata, nouum thermometrum, cuius ratio bulbi ad tubulum eadem ſit, ac in priori, cuiusque puncta fixa cum ſcalae punctis coincidant: eligatur tubulus, cuius diameter diametro prioris circiter aequalis ſit; infigatur lithocollae ope in bulbi ferrei collum A, tuncque cylindrus AB ac aliqua tubuli pars repleatur mercurio, et claudatur mediante cochlea F. Notandum autem hic eſt, ſpatium *a* duplicem ob finem annulis chartaceis repleri debere; partim vt, cochlea F fortiſſime conſtricta, penitus mercurio praecludatur exitus; partim vt, annulorum numero pro lubitu aucto, vel diminuto, ſpatium DE vel augeri, vel diminui poſſit.

Thermometro iam repleto, determinetur vtrumque punctum, ebullitionis nempe ac congelationis, et comparetur thermometri noui ſpatium cum ſpatio in ſcala relicta deſignato. Si prius e. g. maius inuenitur poſteriore, cochlea F ſoluta, vnus, vel duo, tresue annuli chartacei demantur; quo facto, cochlea F iterum immittatur, firmiter contorqueatur, denuoque ſcala comparetur, donec vnum cum altero ſpatio coincidat. Si autem ſpatium nouum minus ſit ſpatio in ſcala deſignato, annuli addantur, et ſic porro.

Spatio modo deſcripto priori facto aequali, nihil aliud ſupereſt, quam curare, vt tubulus iuſta mercurii quantitate repleatur, ne puncta fixa, aut nimis altum, aut nimis profundum, in ſcala obtineant ſitum: id quod, vnam vel alteram mercurii guttulam, vel demendo, vel addendo, facillime perficitur.

EMENDATIO
MICROSCOPII SOLARIS.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Qui de microſcopio ſolari, atque laterna magica, repraeſentationi obiectorum non diaphanorum ſeu opacorum apta, cogitauit, primus ſine dubio eſt Ill. *Eulerus*, cuius Diſſertatio, ſub titulo: *Emendatio Laternae magicae et Microſcopii ſolaris*, inſerta *nouorum Commentariorum Academiae noſtrae Tomo III*, incommoda et vitia vtriusque inſtrumenti recenſet, atque commonſtrat, pleraque exinde oriri, quod obiecta, non in ea parte, quae lenti refringenti eſt obuerſa, ſed in altera parte, auerſa nempe, illuminantur, vnde hic praecipue oritur defectus, quod vulgari more conſtructa microſcopia ſolaria, aut laternae magicae, exhibendis obiectis non pellucidis, omnino ſint inepta

Vir ad Opticam excolendam natus, Celeberrimus *Lieberkühn*, ſuam non deſiderari paſſus eſt diligentiam, in perficiendo inſtrumento, cuius inuentor eſt. Poſtquam nempe *Eulerus* laternam magicam, opacis obiectis depingendis idoneam, felici cum ſucceſſu conſtrui fecerat, *Lieberkühnius* etiam microſcopium ſolare imaginatus eſt, atque confecit, quod obiecta non pellucida repraeſentaret. Teſtis ſum huius rei fide dignus, qui non ſolum ex Viri integerrimi ore hoc accepi, ſed ipſum quoque inſtrumentum manibus contrectaui. Mirabungabuntur forte Lectores, meam aut hebetudinem, aut negligentiam, quod nihilominus, ignorare me penitus, qualis fuerit instrumenti constructio, fatear, nilque amplius asserere valeam, nisi, quantum ex adspectu nudo iudicari potuit, non habuisse ipsum aliquid, cum consueti microscopii solaris structura, commune. Ast sciant hi, vidisse me instrumentum paucis ante Viri desideratissimi praematuram mortem septimanis, ingruente nocte, ipso eo momento, quo relinquens *Lieberkühnium*, domum reuerti volebam, atque distulisse me, consulente Ipso Celeberrimo Viro, et effectuum, et structurae instrumenti examen, in aliam diem. Quo minus vero humanissimae *Lieberkühnii* inuitationi morem gerere, meamque satiare potuerim auiditatem, impediuit, in quem protinus incidebat Vir Celeberrimus, morbus, qui fatalis ipsi fuit. Superest proinde sine dubio, in eo, quem reliquit instrumentorum opticorum thesauro, *Lieberkühnius*, et hocce, cuius, cum nulla, quod sciam, descriptio publice hactenus exstet, a Viro autem Celeberrimo, qui nil moliebatur inepte, non nisi egregia speranda sint, rogandi omnino sunt ipsius haeredes, vt erudito orbi descriptionem microscopii huius impertiri velint.

Cum proinde in microscopium solare, obiectis opacis aptum, aequum ius habeant Celeberrimi Viri *Eulerus* et *Lieberkühnius*, ac pro inuentoribus procul dubio habendi sint, quam hic propono, microscopii solaris emendationem, (etsi et haec, ad repraesentanda obiecta pelluciditate carentia, aptum reddat hoc instrumentum) non ea mente trado, quasi microscopii solaris, obiecta opaca depingentis, primam mihi adscribere ideam, velim.

Sunt plures, qui possident microscopia solaria, vulgari more constructa, hisque gratissimum erit sine dubio, si viam ipsis commonstrem, quomodo seruato toto huius instrumenti apparatu, ita adaptare istud facile queant, vt obiectis opacis depingendis idoneum euadat, iungendo solummodo ipsi machinulam, hic a me describendam, paucos exigentem sumtus, ac ita simplicem, vt a rudiori quouis, instrumentis mathematicis parandis modice adsueto opifice, construi facile queat.

Cum non nisi, quae recensui, praestare animus sit, neque *Eulerum*, neque *Lieberkühnium*, neque tandem (quod, ne iniurius sim in Clariss. Collegam, reticere nequeo) Celeb. *Zeiherum*, laedere mihi videor. Etsi nempe quoque postremus hic, iam ex aliquo tempore, de construendo microscopio solari, obiecta opaca depingente, cogitauerit, atque duplicem eiusmodi instrumenti constructionem imaginatus sit, non tamen neque *Ipse*, neque *Lieberkühnius* id sibi propositum habuerunt, quod ego, vt vulgare microscopium solare ad finem huncce adaptarent.

Antequam ipsam instrumenti mei descriptionem aggrediar, generales quasdam, microscopium solare, opaca obiecta depingens, spectantes annotationes afferre mihi liceat. Notabile primum accidit, quod picturae, a microscopio tali formatae, tanta gaudeant venustate, quae verbis exprimi difficulter queat. Obstupui fere ad primum adspectum; non enim picturam, non imaginem

ginem, ſed rem ipſam conſpicere mihi videbar, incantationis quaſi ope in prodigioſam molem adauctam.

Quae perfectionis huius cauſa ſit, non ita difficulter concipitur, ac a duabus potiſſimum circumſtantiis pendere videtur, quarum altera ab Ill. *Eulero* annotata, altera vero neglecta eſt. Eſt poſterior haec, quod microſcopium ſolare, obiecta opaca depingens, depreſſiones ac eleuationes obiecti partium (*bas relief* vocare ſolent *Galli*) exprimat, quod quidem microſcopium, non niſi obiectis diaphanis aptum, praeſtare nunquam poſſe, in oculos facile incurrit. Deinde picturarum pulchritudo, prouti annotauit *Eulerus*, magnam quoque partem pendet exinde, quod a microſcopio obiecta opaca depingente productae imagines, non prouti iſtae, quas efformat vulgari modo conſtructum microſcopium, prismaticis coloribus inquinatae ſint, quod quidem in poſteriori hocce, nullo artificio euitari poſſe, exinde facile patet, quoniam radii ſolis, obiectum tranſparens depingendum permeantes, neceſſario in colores reſoluuntur.

Quamuis autem microſcopium, opacis obiectis depingendis idoneum, imagines multo elegantiores ac vulgare producat, cedit tamen huic, quoad augmentationem, quam imaginibus conciliat. Liquet nempe ſine negotio, in microſcopio, transparentibus obiectis apto, omne fere lumen, quo illuſtratur obiectum, ad lentem obiectiuam pertingere; aſt in microſcopio, opaca obiecta depingente, incidens in obiectum lumen quaqua verſus diſpergitur, neque, niſi minima ipſius pars, in lenticulam incidit. Si ergo ponas, obiectum in in vtroque microſcopio aequaliter illuminari, et imaginem ad aequalem vtrinque gradum amplificari, neceſſario, quae a poſteriori microſcopio efformatur imago, multo obſcurior erit, quam quae a priori producitur. Si itaque ſatis claras, ope microſcopii poſterioris, picturas obtinere voluerimus, neceſſe erit, vt amplificatione multo minori, quam quidem per vulgare microſcopium obtineri poteſt, contenti ſimus.

Videtur quidem facile huic defectui remedium inueniri poſſe; nulla enim alia re opus eſſe videtur, niſi vt maior lucis copia in obiectum coniiciatur, quam in vulgari microſcopio fieri ſolet, quod quidem, ope aut ſpeculorum, aut lentium, efficere, in poteſtate noſtra ſitum eſt: Aſt vereor nihilo minus, ne irriti ſint conatus iſti; vix enim fieri poſſe puto, vt multo maiori luce obiectum colluſtretur, ac in vulgari microſcopio fieri ſolet. Deſumuntur namque obiecta pro microſcopiis pleraque, aut ex vegetabili, aut ex animali regno, eiusmodi vero corpora calorem vehementiorem perpeti nequeunt, absque eo, vt aut comburantur, aut corrumpantur. Liquet autem, ſolis radios, pro intendenda lucis vi, in arctius ſpatium cogi non poſſe, absque eo, vt calor in eadem ratione augeatur, ac lucis energia. Dantur itaque certi limites, a natura praeſcripti, quos, ſi attingere, nunquam tamen tranſcendere, nobis licet.

Ipſum inſtrumentum a me inuentum, cuius ope microſcopium vulgare, depingendis obiectis opacis aptum reddo, ex binis laminis orichalceis circularibus, brachio prae-

praeditis, ac articulatione inter ſe iunctis, conſtat. Exhibet ipſarum primam, Fig. 1. et 2, alteram Fig. 3. et 4. Figura autem 6 ipſas ſiſtit, et inter ſe, et microſcopio debita ratione iunctas.

Partium iſtarum prior AB, Fig 1. et 2, ex anteriori parte afferruminatum gerit cylindrum cauum orichalceum *ab*, lineam circiter altum, cui exterius inciſa eſt cochlea mas, quae quidem cochlea inſeruit, iungendo inſtrumento meo, microſcopio, loco conſuetae lenticulae obiectiuae. Area circularis, ab hoc cylindro comprehenſa, duplici foramine pertuſa eſt; inferius, ſemicirculari *c*, cuius radius, radio areae aequalis; ſuperius, circulari *d*, cuius diameter diametri areae dimidia eſt (*). Poſteriori huic foramini inſeritur lens obiectiua *d*, quae in inſtrumento, quod nuper parari feci, focum habet, 5 aut 6 circiter linearum. Inferius annectitur huic parti articulatio A, cuius ope alteri parti, mox deſcribendae, iungitur, ſuperius vero brachium CB annexum gerit, verſus *e* perforatum, per quod foramen cochlea *fe*, Fig 6 tranſmittitur.

Secunda inſtrumenti pars, AB, Fig. 3. et 4, itidem circularis eſt, ſimilemque, ac prior, articulationem et brachium annexum habet. Anteriori ipſius ſuperficiei afferruminatum eſt ſpeculum planum *ab*, aut metallicum, aut vitreum, nihil enim refert, quale hoc

(*) Pro arcendis radiis, lentem iuſto obliquius permeantibus, conducit, vt a parte poſtica afferruminetur huic foramini tubulus orichalceus, eiusdem diametri cum foramine, $\frac{1}{2}$ aut $\frac{3}{4}$ poll. circiter longus.

hoc ſit. Speculum hoc in ſemicircularem elaboratum eſt figuram, ac tantae eſt magnitudinis, vt foramen ſemicirculare partis prioris, *c*, Fig. 1. et 2. exacte repleat Eo vero in ſitu iunctum eſt ſpeculum *ab*, laminae AC, vt ſpeculi atque laminae ſuperficies ſuperius conuergant parumper, atque inferius diuergant, angulo 15 circiter aut 20 graduum. Supra ſpeculum hoc, foramine elliptico *c*, quantum fieri poteſt magno, pertunditur lamina AC, cuius ellipſeos axis maior verticalis, coniugatus, horizontalis eſt.

Iunguntur hae partes, Fig. 6, AB, AC, ope articuli A, ita vt forcipis inſtar brachia aut iungi, aut ſeparari a ſe inuicem queant. Per foramina nempe *f* et i, tranſit cochlea mas *fe*, parumper incurua, cui aptata eſt cochlea foemina *hg*, alis inſtructa, inter brachia vero DB, EC, interſeritur elater *mn*, vnde, prouti cochlea *hg* aut adducitur, aut relaxatur, pars AB, aut ad alteram AC accedit, aut ab ipſa recedit, ſimul vero inclinatio ſpeculi, parti AB iuncti, pro lubitu variatur.

Qua ratione hoc inſtrumentum microſcopio iungatur, euidenter ſatis ex Fig. 6. intuitu patet. Eo enim loco, cui inſeri ſolet in microſcopio vulgari lenticula obiectiua, iungitur, cochleae *ab*, Fig. 1. 2. ope, ita vt brachia verticaliter ſint erecta. Quo vero, qua ratione in ipſo inſtrumenti vſu procedendum ſit, luculenter pateat, Fig. 7 contemplemur. Diriguntur nempe radii ſolis, a lente collectiua, anteriori microſcopii ſolaris parti inſerta, in conum collecti, ita, vt conus radiorum ſolarium *cdba* incidat in medium ſpeculi

culi *mn*. Laxando tum, aut adducendo, cochleam *gh*, ea concilietur ſpeculo *mn* inclinatio, vt repercuſſi ab ipſo radii, incidant in obiectum, ad *e f* ſitum, atque ita diſponatur microſcopium, vt, quantum fieri poteſt, diſtincta ſolis imago formetur ad *ef*. Ab illuminato hac ratione obiecto redeuntes radii, ac incidentes in lenticulam obiectiuam *k*, tranſeuntes per foramen ellipticum *rs*, in aliquot pedum diſtantia, ſuper tabula alba nitidiſſimam formant obiecti picturam.

Binae ad manus eſſe debent laminae, tales, qualem exhibet Fig. 5. ABCD, quibus affigi poſſunt obiecta, altera nigra, ex ebeno, altera alba, ex ebore conſtans, pro diuerſitate coloris obiecti depingendi. Glutine iungere ſoleo his laminis obiecta, docuit enim me experientia, picturae elegantiam valde turbari, ſi aut lamina vitrea, aut tenui Talci folio, prouti alias fieri ſolet, contegatur; multoque nitidiores haberi imagines, ſi nudum exponatur radiis ſolaribus obiectum. Lamina iſta ABCD ita introducitur inter laminas *pr*, *qs*, Fig. 6. *pqrs* Fig. 5, vt inferius foraminis circularis *abcd* dimidium *abc* apertum relinquatur, radiique ſolares *ab*, *cd*, Fig. 7, libere ad ſpeculum *mn* pertingere queant. Superius vero foraminis *abcd* dimidium *adb*, a lamina ABCD, Fig 5. contegitur, laminaque affixum gerit obiectum ad *m*.

Etſi hoc meo additamento inſignem me elegantiſſimo inſtrumento conciliaſſe perfectionem, aſſerere audeam, omnino tamen mereri videtur, vt pro ipſius perfectione vlterius adhuc ſtrenue laboretur. Ex aliquo tempore eapropter in mentem induxi,

 vniuer-

vniuerſam ipſius theoriam ad Optices principia data opera expendere, quod, an a quoquam hactenus factum ſit, ignoro. Differre autem iam cogor hoc negotium, vsque dum alii quidam, quos prae manibus habeo, labores abſoluti ſint, quod cum factum fuerit, non ſolum theoriae microſcopii ſolaris elaborationem, ſed et artificii cuiusdam, quod, prouti auguror, inſigniter adhuc perficere poteſt inſtrumentum, exactiorem deſcriptionem Academiae polliceor.

Breuem nihilo minus artificii huius expoſitionem adiungere ſtatim placet, quo in anteceſſum, quid, ex Clariſſ. Collegarum iudicio, de ipſo ſperandum ſit, explorem. Adhibemus hactenus microſcopio ſolari, lenticulam vnicam obiectiuam, aſt nonne nouas aliquas huic inſtrumento conciliare poſſumus perfectiones, ſi ad formandam imaginem plures adhibeamus lentes? Aliquam talem ex veſtigio indicare valeo. Notum eſt, lentis vnius ſolitariae campum repraeſentationis nullibi terminari, nullisque limitibus definitis eſſe circumſcriptum. Euenit hinc, vt, quamdiu in microſcopio ſolari non niſi vnicam adhibemus lenticulam, praeter aream, obiectum comprehendentem, ac a ſolaribus radiis illuſtratam, quae directe oppoſita eſt lenticulae obiectiuae, etiam reliqua puncta, quaquauerſus a latere extra aream illuminatam ſita, ſimul depingantur. Sic autem non ſolum multum lucis inutilis in cameram obſcuram intromittitur, ſed etiam inelegans, oculosque ſpectatoris valde offendens, oritur ſpectaculum; puncta enim a latere ſita partim obſcure, cum non ſint ſatis illuminata, partim, ob valde obliquam radiorum

diorum incidentiam, admodum confuſe depinguntur. Si autem duabus vtamur lentibus, tuboque ipſas includenti inſeramus, vbi vtriusque lentis foci concurrunt, annulum circularem debitae magnitudinis, alia longe res eſt, tum enim campus admodum acute terminatur, nullique, niſi qui ad imaginem pingendam requiruntur, radii, cameram intrant. Inſigniter hac ratione iuuari poſſe picturarum, quae a microſcopio ſolari formantur, elegantiam, auguror; hanc enim ſolam ob rationem laternae magicae, duplici lente obiectiua praeditae, longe praeſtantiores inueniuntur iis, in quibus non niſi vnica lens ſola adhibetur. Certus itaque ſum, imaginum a microſcopio ſolari productarum elegantiam augeri inſigniter poſſe, ſi pluribus vtamur lentibus obiectiuis; an vero, quoad diſtinctionem quoque, aliquis exinde ſperari queat fructus, altioris aliquantum eſt indaginis, atque nec aſſerere, nec negare, ſtatim audeo, niſi poſtquam inſtrumenti theoriam penitus explorauero, quod alio loco ac tempore praeſtiturus ſum.

DISSERTATIO
DE EXPERIMENTO QVODAM MAGNETICO CELEBERR. DOMINI *DU FAY*, DESCRIPTO IN COMMENTARIIS ACAD. SCIENT. PARIS. A. MDCCXXX.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Tab, VI. *In recta interminata* DE, *Fig.* 1. *capiantur duo puncta* A, B, *quorum distantia* $AB = a$. *Fingantur haec puncta agere secundum rationem distantiarum inuersam in punctum mobile* C *vtcunque assumtum, ea lege, vt punctum* A *repellat*, B *vero attrahat punctum* C; *sintque intensitates virium punctorum* A *et* B *aequales. Quaeritur vis, qua sollicitatur punctum* C, *in directione rectae* DE *parallela, a* C *versus dextram, aut versus* E.

Demissa perpendiculari CH ex puncto C in rectam DE, dictaque $HC = y$, $AH = x$, erit ex statica virium resolutione, vis, quam punctum A directe in punctum C exercet, ad vim, qua punctum C sollicitatur, in directione, rectae DE parallela, vti AC ad AH. Si ergo actio puncti A in punctum C, exhibeatur per $\frac{b}{AC}$, erit vis, qua pellitur punctum C versus $E = \frac{bx}{AC^2} = \frac{bx}{x^2 + y^2}$. Simili ratione inuenitur vis, qua punctum B sollicitat punctum C, in directione $DE = \frac{b(a-x)}{BC^2} = \frac{b(a-x)}{(a-x)^2 + y^2}$. Binae itaque vires, pun-

punctum C, in directione DE parallela, versus E vrgentes, simul sumtae, erunt $= \frac{bx}{x^2+y^2} + \frac{b(a-x)}{(a-x)^2+y^2}$ $= \frac{a^2bx - abx^2 + aby^2}{(x^2+y^2)((a-x)^2+y^2)}$.

Vt loca inueniantur, in quibus haec vis euanescit, ponendum est $a^2bx - abx^2 + aby^2 = 0$, vnde obtinetur $y^2 = x^2 - ax$. Descripta itaque hyperbola aequilatera, habente axin transuersum, rectam AB, atque vertices, puncta A et B, erit vterque huius hyperbolae ramus, AM, BN, ea proprietate praeditus, vt, si punctum C ponatur versari vbicunque in ipsius perimetro, ducaturque per punctum C recta FG, DE parallela, punctum C in directione rectae FG non magis in vnam, quam in alteram vrgeatur partem.

Euidens porro est, quamdiu punctum C in spatio interminato MABN, a recta AB ramisque hyperbolicis AM, BN comprehenso, reperitur, sollicitari istud perpetuo versus E, quam directionem supra tanquam positiuam assumsimus; quam primum autem punctum C in spatiorum interminatorum DAM, EBN, alterutrum intrat, vim, qua vrgetur, in negatiuam transire, hincque versus D directam esse.

Cogitetur, punctum C percurrere rectam interminatam FG, rectae DE parallelam, atque liquet, interea dum punctum C transit per rectae FG partem QP, inter binos hyperbolae ramos interceptam, vim, qua vrgetur punctum saepius dictum versus E, a *o* increscere, tum vero denuo vsque ad *o* decrescere debere, vnde consequens est, cadere inter puncta P et Q vnum aut plura puncta,

in

in quibus vis corpuſculum C ſollicitans ſit maximum aut minimum quoddam.

Si porro punctum C a puncto P abeat verſus G in infinitum, liquet, dum infinite diſtat a punctis A et B, actionem horum punctorum in punctum C euadere nullam. Vis itaque, qua punctum C ſollicitatur verſus F, interea dum a P in infinitum abit, a o increſcit, et decreſcendo denuo ad o reuertitur, vnde rurſum in rectam indefinitam PG cadere debet vnum aut plura puncta, vbi vis, corpuſculum C ſollicitans, eſt maximum, aut minimum. Omnino ſimile ratiocinium valet pro recta QF.

Vt loca iſtorum maximorum, aut minimorum, inveniantur, conſideretur y tanquam conſtans, et conſueta methodus adhibeatur. Obtinetur ſic differentiale vis punctum C vrgentis capiendo, atque iſtud ponendo $= 0$:

$$\begin{aligned} x^5 - \tfrac{5}{2} a x^4 - 2 y^2 x^3 + 3 a y^2 x^2 - 2 a^2 y^2 x + \tfrac{1}{2} a^3 y^2 &= 0. \\ + 2 a^2 x^3 - \tfrac{1}{2} a^3 x^2 - 3 y^4 x + \tfrac{3}{2} a y^4 & \end{aligned}$$

ex qua aequatione reſoluta dantur x, quae pro quovis y dato, vi maximae, aut minimae, reſpondent.

Si in aequatione iſta y ſumatur variabilis, definit ipſa lineam ea proprietate praeditam, vt, ſi in diſtantia quacunque $CH = y$ agatur recta indefinita FG, rectae AB parallela, recta haec FG ſecet lineam iſtam, iis in punctis, in quibus ſi verſetur punctum C, maximam, aut minimam, ab actione punctorum

ctorum A et B, patiatur ſollicitationem, in directione, rectae AB parallela.

Vt naturam huius lineae perſpiciamus, annotamus primum, aequationem pro ipſa inuentam admittere diuiſorem rationalem $x - \frac{a}{2} = 0$. Linea itaque, quam conſideramus, complexa eſt, ac praeter curuam quandam quarti ordinis, rectam IK, ex puncto medio rectae AB perpendiculariter erectam, comprehendit, quapropter dum punctum C in hac linea IK deprehenditur, perpetuo aut maximam aut minimam patitur ſollicitationem, quod quidem etiam ex ſolo problematis intuitu, absque calculo, perſpici poteſt.

Diuiſa aequatione ſupra ſuppeditata per factorem $x - \frac{1}{2}a = 0$, prodit aequatio quarti ordinis

$$\begin{array}{l} x^4 + 2ax^3 + 2y^2x^2 - 2ay^2x + a^2y^2 = 0. \\ \qquad\qquad\;\; - a^2x^2 \qquad\qquad\qquad\quad + 3y^4 \end{array}$$

quae definit curuam quarti ordinis, vna cum recta IK problemati noſtro ſatisfacientem.

Cum ex intuitu problematis pateat, partem huius curuae a recta IK verſus ſiniſtram ſitam, ſimilem et aequalem eſſe debere parti, quae cadit verſus dextram, facilis et expedita eſt huius aequationis reſolutio. Sequitur nempe hinc, ſi n et m ſint radices huius aequationis, reliquas duas fore $a - n$ et $a - m$. Vnde obtinentur hae quatuor aequationis noſtrae radices:

$$\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{4y^2+a^2}{4}+y\sqrt{4y^2+a^2}}=x^{\circ}$$
$$\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{4y^2+a^2}{4}+y\sqrt{4y^2+a^2}}=x'$$
$$\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{4y^2+a^2}{4}-y\sqrt{4y^2+a^2}}=x''$$
$$\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{4y^2+a^2}{4}-y\sqrt{4y^2+a^2}}=x'''$$

quarum aequationum quaeuis aliquem curuae ramum definit, quatuor vero iſti rami vniuerſam curuam conſtituunt.

Liquet porro, aequationes pro x° et x', et ſimiliter aequationes pro x'' et x''', ſuppeditare ramos perfecte ſimiles et aequales, poſitione ſolummodo differentes, vnde opus non eſt, niſi vt conſideremus aequationes pro x' et x''', quae quippe ſuppeditant dimidium curuae, a recta IK verſus ſiniſtram cadens.

Ramus in aequatione pro x' comprehenſus, ad x negatiua pertinet, et ex puncto A exeundo, ſemperque magis magisque ab axe recedendo, in infinitum abit. Ponendo nempe $y=0$, fit $x'=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}=0$, ac praeterea quantitas $\sqrt{\frac{4y^2+a^2}{4}+y\sqrt{4y^2+a^2}}$ quantitate $\frac{a}{2}$ ſemper maior eſt, creſcenteque y continuo ſimul increſcit.

Alter ramus, ex aequatione pro x''' oriundus, itidem exit ex puncto A, aſt verſus x poſitiua inflectitur, et recedendo ab axe, pertingit ad rectam IK, in qua terminatur in puncto L, tali, vt ſit IL $=\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Ponendo nempe primum $y=0$, fit $x'''=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}=0$. Deinde vero ponendo $y=\frac{a}{2\sqrt{3}}$, erit $x'''=\frac{a}{2}$, augendo

augendo autem y vltra limitem $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, fit x''' imaginarium, vnde ramus hic in puncto L terminatur.

Curua itaque quaesita ductum habet RBLAS, similisque eius pars, qualis deorsum, etiam supra axin sursum cadit, quod monuisse sufficit, cum sub considerationem nostram haec pars non cadat.

Ducta iam recta indefinita FG, axi AC parallela, duplex accidere potest casus: vel enim y, rectae FG respondens, minus est $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, vel hac quantitate maius. Primo casu quinque dantur puncta, in quibus fg curuam RBLAS et rectam IK secat, puncta nempe t, s, v, r, w, vnde si punctum C percurrere ponatur rectam fg a dextra versus sinistram, ad t erit vis, qua sollicitatur versus f, maxima, ad p nulla, ad s maxima versus g, ad v minima, ad r rursum maxima, ad q denuo nulla, tandemque ad w rursus maxima, ast iterum versus f directa.

Si iam vlterius crescere ponatur y, siue si recta fg motu sibi parallelo ab axe remoueatur, puncta intersectionum s, v, r, continuo ad se inuicem magis magisque accedunt, factoque $y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, siue transeunte recta fg per punctum L, inter se et cum puncto L confunduntur. Augendo vero y adhuc vltra limitem $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, puncta intersectionum, r et s, rectae fg, cum parte curuae BLA, fiunt imaginaria. A termino itaque $y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, vsque in infinitum, non cadit in spatium NBAM, nisi vnicum maximum, intersectione rectae FG cum recta IK, in puncto V, determinatum.

Valores maximorum et minimorum, de quibus hactenus locuti sumus, sine difficultate reperiuntur; non enim opus est, nisi vt valores ipsius x, maximis aut minimis respondentes, introducantur in formulam supra repertam,

$$\frac{a^2 b x^2 - a b x^2 + a b y^2}{(x^2 + y^2)((a - x)^2 + y^2)}$$

vim, qua punctum C sollicitatur, exprimentem. Reperitur hac ratione

I. Si $y < \frac{a}{2\sqrt{3}}$

minimum cadens ad $v = + \frac{ab}{\frac{a^2}{4} + y^2}$

maximum cadens ad $r = + \frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2 + a^2} - 2y)}$,

maximum cadens ad $w = - \frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2 + a^2} + 2y)}$

II. Si y vel $=$, vel $> \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

maximum cadens ad $V = + \frac{ab}{\frac{a^2}{4} + y^2}$

maximum cadens ad $W = - \frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2 + a^2} + 2y)}$

Ex harum formularum intuitu sine negotio patet, maximum positiuum, maximo negatiuo ipsi respondente, semper maius esse. Si enim primum consideremus casum, vbi $y < \frac{a}{2\sqrt{3}}$, maximum positiuum cadens ad r superat maximum negatiuum cadens ad w, quantitate $\frac{2b}{a}$. Deinde vero, si fuerit $y > \frac{a}{2\sqrt{3}}$, dico maxi-

maximum poſitiuum cadens ad V, fore itidem ſemper maius, maximo negatiuo cadente ad W. Facili nempe calculo demonſtratur, quantitatem $\frac{ab}{4y^2+a^2}$ quantitate $\frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2+a^2}+2y)}$ maiorem eſſe, modo ſit $y^2 > \frac{a^2(\sqrt{1943}-44)}{28}$, vnde a fortiori, prior quantitas poſteriorem certe ſuperat, ſi fuerit $y^2 > \frac{a^2}{12}$.

Corpuſculum C incluſum fingatur tubo $\alpha\beta$, cuius medium punctum occupet, ſitque punctum C, mobile quidem in tubo $\alpha\beta$, ſed non ſine difficultate quadam, fingaturque haec difficultas ſimilis eſſe frictioni, ita, vt, ſi ponatur difficultas haec $=\alpha$, vis particulam C vrgens effectum ſortiri queat nullum, niſi ipſa maior ſit α. Concipiatur denique, percurrere tubum $\alpha\beta$, cum corpuſculo ſibi incluſo, rectam FG, ea ſeruata lege, vt tubus $\alpha\beta$ perpetuo in ſitu rectae AB parallelo detineatur.

Dico iam 1) duci ſemper poſſe rectam aliquam GF vel gf, rectae DE parallelam, ea proprietate praeditam, vt ſi tubus $\alpha\beta$ vltra hanc rectam remoueatur a DE, actio punctorum A et B in punctum C impar ſit reſiſtentiae α ſuperandae, hincque effectum ſortiatur nullum.

Ponatur nempe maximum poſitiuum cadens ad V, ſiue $\frac{ab}{\frac{a^2}{4}+y^2}=\alpha$, atque erit $y=\sqrt{\frac{ab}{\alpha}-\frac{a^2}{4}}$, vbi α ita aſſumtum fingimus, vt reddat quantitatem y ſiue $\sqrt{\frac{ab}{\alpha}-\frac{a^2}{4}} > \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Fiat IV $=\sqrt{\frac{ab}{\alpha}-\frac{a^2}{4}}$, ac ducta per punctum V recta FG, rectae DE parallela, per se patet, si tubus $\alpha\,\beta$ percurrat rectam quandam, vltra FG a DE distantem, effectum oriri posse nullum, sed corpusculum C, tubo $\alpha\,\beta$ inclusum, ex loco suo non dimoueri. Si vero tubus saepius dictus percurrat aliquam rectarum, rectae DE propinquiorum, ac FG, dari punctorum A et B in corpusculum C aliquam actionem, itidem per se manifestum est.

Si vero calculus commonstret, α eiusmodi habere valorem, vt reddat formulam $\sqrt{\frac{ab}{\alpha} - \frac{a^2}{4}} \lessgtr \frac{a}{2\sqrt{3}}$, ponatur maximum cadens ad r, aut s, siue $\frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2 + a^2} - 2y)} = \alpha$, quae aequatio suppeditat $y = \sqrt{\frac{ab^2}{4\alpha^2 a - 8ab}}$, sumtaque $Iv = \sqrt{\frac{ab^2}{4\alpha^2 a - 8ab}}$, ductaque recta fg per punctum v, rectae DE parallela, pro recta fg iam eadem valebunt, quae in casu praecedente pro recta FG locum habebant.

Sit iam 2.) in Fig. 2. recta FG ea, quae spatium, vbi actio in punctum C nullum habet effectum, separat a spatio, vbi aliquem producere debet effectum, (quae an cis, an vltra, punctum L, Fig. 1. cadat, iam perinde est,) et euidens quidem est, effectum sollicitationis, qua vrgetur corpusculum C, interea dum tubus $\alpha\,\beta$ percurrit cuiusdam rectarum, quae cadunt inter FG et DE, partem, inter binos hyperbolae ramos APM, BQN interceptam, in eo consistere, vt corpusculum C protrudatur versus tubi extremitatem β; in spatio enim isto sollicitatio positiua est, et versus G dire-

directa. Si vero tubus vlterius promoueatur, et tranſeat in ſpatium interminatum DAPF, vbi ſollicitatio ſit negatiua, manifeſtum eſt, duplicem accidere poſſe caſum. Si nempe maximum negatiuum, in quod in ſpatio DAPF incidit corpuſculum C, maius ſit α, prior effectus deſtruitur, et corpuſculum C verſus tubi extremum oppoſitum α retrahitur; contrarium vero accidit, ſi maximum hoc negatiuum fuerit minus α.

Ponamus ea propter maximum negatiuum, in quod incidit corpuſculum C, ſiue $\frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2+a^2}+2y)} = \alpha$, ac erit ex hac formula $y = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{4\alpha^2 a+8\alpha b}}$. Fiat I$v \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{4\alpha^2 a+8\alpha b}}$, quae quantitas ſemper minor eſt IV, ductaque recta fg, rectae DE parallela, per rectas fg, FG, vniverſum ſpatium diſtributum erit in tres partes interminatas DEfg, fgFG, et FGMN, ea lege, vt, ſi tubus $\alpha\beta$ percurrat rectam aliquam, rectae DE parallelam, in quouis modo dictorum ſpatiorum diuerſus producatur effectus. Namque

1) Si tubus $\alpha\beta$ pertranſeat ſpatium DEfg,
   - α) in ſpatio EBqg corpuſculum C propellitur verſus extremitatem α,
   - β) in ſpatio BqpA retrahitur verſus β; denique vero
   - γ) in ſpatio DApf rurſum verſus α retrorſum propellitur.

2) Si tubus $\alpha\beta$ percurrat ſpatium gfFG,
   - α) quamdiu reperitur in ſpatio gqQG corpuſculum C, ex loco ſuo non dimouetur,

β)

β) in ſpatio qpPQ propellitur verſus β,

γ) in ſpatio fpPF actio in punctum C nullum habet effectum, atque corpuſculum C a puncto β, verſus quod in ſpatio qpPQ propulſum erat, non dimouetur.

3) Si tubus tranſeat per ſpatium FGMN, actio punctorum A et B in corpuſculum C nullum habet effectum, vnde tubi medium perpetuo occupat.

Ex conſiderationibus hactenus proſatis, pure analyticis, combinatis cum principiis, ad quae theoriam magneticam deduxi, in *Tentamine* meo *Theoriae Electricitatis et Magnetismi*, profluit ſponte quaſi, explicatio phaenomeni cuiusdam magnetici valde mirabilis, cuius inventor eſt Ill. naturae ſcrutator, Celeb. *du Fay*, quodque propriis ipſius verbis deſcribere mihi liceat. "*Je rapporterai à cette occaſion une Expérience, qui ne ſe trouve dans aucun des Auteurs, qui ſont venus à ma connoiſſance; c'eſt que, ſi l'on gliſſe une aiguille à la diſtance d'environ deux lignes des armures d'une Pierre, ſans toucher à la Pierre, il n'importe pour cet effet qu'on la gliſſe du Nord au Sud, ou du Sud au Nord, ou même qu'on la tienne immobile pendant un inſtant, à quelque diſtance des armures; elle acquiert dans ces trois cas une direction ſemblable à celle, qu'elle auroit, ſi on la poſoit ſimplement ſur les armures de la Pierre, et qu'on la retirât enſuite parallelement à l'axe, et tout oppoſee à celle, qu'elle auroit contractée, ſi on l'avoit gliſſée d'un bout a l'autre ſur les deux armures de* *de la Pierre.* „ Vid. Memoires de l'Academie Roïale des Sciences l'année 1730. pag. 219. Edit. Amſtelod.

Repetens hoc experimentum, non ſolum mirabundus phaenomeni veritatem deprehendi, ſed ſimul quoque obſeruaui circumſtantias aliquas, Ill *du Fay* equidem, vt credere fas eſt, non incognitas, non tamen diſtincte ab ipſo enunciatas, quas adducere operae praetium iudico.

Sit in Fig. 3. ABCD magnes armatus, cuius poli artificiales ſint A et B. Aſſumtis aliquot filis, ex ferro molli conſtantibus, craſſitie, qualis eſt calami anſerini, circiter gaudentibus, longitudinis 4 aut 5 pollicum, quale in figura exhibetur per $\alpha\beta$, bina ſequentia inſtituebam tentamina:

I.) Fili extremo α applicabam polum B, atque magnetem per totam fili longitudinem producebam, ita vt polus B praecederet, A vero ſequeretur, vsque dum polus A ad extremum β perueniſſet; remotoque tum magnete, videbam filum $\alpha\beta$ magneticum factum fuiſſe ea lege, vt extremum α polo A, extremum β polo B homogeneum acquiſiuerit magnetismum.

II. Repetebam idem experimentum, vnica hac intercedente differentia, quod magnetem ab immediato cum filo $\alpha\beta$ contactu, interpoſito parallelipipedo ligneo EF, Fig. 4, arcerem, tumque deprehendebam:

α) Si diſtantia inter magnetem atque filum admodum parua erat, eundem oriri effectum, ac in experimento praecedente, vbi magnes filum actu contingebat. Si vero

β) retentis reliquis experimenti circumſtantiis omnibus, magnetis a filo diſtantiam magis magisque adaugebam, perueniebatur tandem ad locum talem, vbi tentamen omnino contrarium ſortiebatur euentum. Fili nempe extremum α polo B, extremum β polo A homogeneum acquiſiuerat magnetismum.

Diſtantiae, in qua admiranda haec effectus experimenti commutatio contingebat, dimenſionem exactam eapropter non addo, quoniam pro circumſtantiarum varietate, magnis variationibus ipſam ſubiectam eſſe deprehendi.

Diſquiſitiones, antea a me prolatae, ad hocce tentamen ſine negotio adaptantur. Sint in Fig. 1. et 2, puncta A et B magnetis cuiusdam poli, et A quidem poſitiuus, B vero negatiuus ipſius polus. Tubi $\alpha\,\beta$ vices ſuſtineat filum ferreum magnetiſandum. C ſit fluidi magnetici quaedam particula, in filo ferreo $\alpha\,\beta$ reperiunda, quae dum ferri poros tranſit, difficultatem quandam experiatur, quae $= \alpha$, tandemque fingatur, actionem, qua poli A et B ſollicitant magnetici fluidi particulam C, exerceri ea lege, vt ſecundum inuerſam diſtantiarum rationem decreſcat, atque ſtatim patet, ſuperius tradita ratiocinia omnia huc trahi poſſe. Si itaque filum $\alpha\,\beta$ percurrat ſpatium $DEgf$, fluidum magneticum, poſt experimenti inſtitutionem verſus α condenſatum, verſus β rarefactum deprehendi debet. Si vero filum $\alpha\,\beta$, vltra rectam fg, a magnete removeatur, atque tranſeat per ſpatium $fgGF$, prorſus con-

contrarius oriri debet euentus, atque abſoluto experimento fili extremum β, vltra quantitatem naturalem magnetico fluido repletum, extremum vero α infra hanc quantitatem euacuatum, obſeruabitur.

Non offendere poterit lectores, rite rem conſiderantes, quod fictas hypotheſes hic adſumſerim, quales ſunt, quod polorum magnetis, qui tentamini adhibetur, vim in puncta A et B coactam ſuppoſuerim, quodque exerceri magneticam attractionem et repulſionem ſecundum diſtantiarum rationem inuerſam, admiſerim. Satis enim liquet, quomodocunque haec omnia immutentur, prodituras perpetuo concluſiones, iis, quas ex fictis hypotheſibus elicui, quoad principaliores circumſtantias, omnino ſimiles, quod pro ſcopo, quem hic intendimus, abunde ſufficit.

Nouum in hac diſſertatione accipiunt ſpecimen naturae ſcrutatores, quantum theoria mea magnetica, in *Tentamine Theoriae Electricitatis et Magnetiſmi*, expoſita, cum phaenomenis difficilioribus, naturae conſuetudini ad primum intuitum contrariis, atque valde paradoxis, conſentiat. An itaque vanitatis reus agendus ero, ſi fatear, de die in diem me magis magisque perſuaſum euadere, hypotheſin admodum probabilem phaenomenorum magneticorum me orbi erudito propoſuiſſe?

ADDITAMENTVM
AD DISSERTATIONEM DE EXPERIMENTO MAGNETICO, CELEB. DN. *DU FAY*, CONTINENS NOVA EXPERIMENTA MAGNETICA DETECTA ET EXPLICATA.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Hoc praecipue ſingulare habent vis electrica et magnetica, quod perſaepe, phaenomenorum ab ipſis pendentium apparente quadam inconſtantia, naturae ſcrutatorem confundant. Dantur nempe caſus plurimi, vbi idem experimentum, aliquoties repetitum, diuerſos, immo interdum omnino contrarios producit effectus, etſi vel perſpicaciſſimus nullam, in ratione tentamen inſtituendi, detegere valeat circumſtantiarum varietatem, quae tanta eſſet, vt producendae mirabili huic in ſucceſſu varietati, par videri poſſet.

Ex quo methodo *Newtoniana* binas ſupra nominatas vires examinare incepi, ſaepe mihi contigit, vt experimentorum, miranda eiusmodi inconſtantia Philoſophis crucem figentium, enodationem reperirem, circumſtantiasque euoluerem, quae variabilitatis effectuum cauſae exiſtunt; ſique fateri licet, quod ſentio, hoc inter praecipua theoriae meae praeſidia numero, quod plurimis eiusmodi phaenomenis paradoxis tam apte conſentiat, vt, ſi non pro ipſa naturae hypotheſi, pro

tali

tali tamen ſine dubio habenda ſit, quae naturae hypotheſi tuto ſubſtitui poteſt.

Praecedens diſſertatio, cuius haec additamentum eſt, tale exemplum ſiſtere potuit; aſt contigit mihi nuper, adhuc vlterius in disquiſitionibus iſtis progredi, atque theoriae meae magneticae innixa ſyntheſi, talia detegere phaenomena, quae, niſi cauſam ipſorum iam antea cognitam habuiſſem, in ſtuporem coniicere me debuiſſent.

Recordari poterunt lectores ex diſſertatione praecedenti phaenomenorum et ratiociniorum, quorum expoſitionem ipſa continet, vnde absque noua rei explicatione, filum ratiociniorum meorum denuo prehendere, et vlterius progredi licebit.

Sit vniuerſum ſpatium, cis rectam indefinitam ED (Fig. 2. Diſſert. praeced.) ſitum, per rectas fg, FG, ita diſtributum, vti in Diſſertatione praecedente expoſitum eſt, atque liquet, ſi punctorum A et B diſtantia imminuatur, reliquis circumſtantiis omnibus non mutatis, conſequens inde eſſe debere, quod recta fg propius propiusque in indefinitum accedat ad rectam DE, tranſeuntem per puncta A et B. Cum nempe rectae fg diſtantia Iv ab AB ſit $= \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{4\alpha^2 a + 8\alpha b}}$, haec vero quantitas, modo reliquarum literarum valor non mutetur, decreſcat, decreſcente a, de propoſiti veritate facile conſtat. Tab. VII.

Quodſi haec ad magnetem adplicemus, obſeruandum eſt, puncta, in quae magneticorum polorum vis vniuerſa coacta fingitur, non in ipſas polorum extremitates cadere, ſed ipſis ad aliquam profunditatem immerſa eſſe. Quodſi ergo detur magnes M, Fig. 1. cuius poli ſunt valde propinqui, fieri poteſt, vt recta *fg* rectae AB propinquior ſit, quam polorum extremitates *mn*, *pq*. Quodſi ergo filum ferreum $\alpha\beta$ polis vel maxime ad ipſum vsque contactum admoueatur, atque more *du Fayano* ſtringatur, nihilominus is eſſe debet experimenti euentus, vt extremum fili α polo B, extremum vero β polo A, euadat homogeneum, qui effectus *du Fayanis* experimentis omnino aduerſatur.

Anſam praebuere haec ratiocinia experimento ſequenti:

Exper. I.

„Magnetes artificiales, AC, DB, Fig. 2. ae„qualium circiter virium, tabulae impoſui, vt ad C, D, „ſe contingerent, verſus A et B vero aliquantum „diuaricarent, polique A et B eſſent heterogenei. Plura „poſtea fila $\alpha\beta$, eiusdem longitudinis, ſex circiter „pollicum, ex eodem filo ferreo, modice duro, cras„ſitiei, qualis eſt calami anſerini, abſcidi, tumque

1) „diuaricare feci extrema magnetum A, B, tres „circiter pollices, filoque $\alpha\beta$ ad polos admoto, „ſtrictoque more *du Fayano*, eundem ac Dn. *du* „*Fay*, reperi euentum; abſoluta nempe operatione „erat extremum α polo A, β vero polo B homoge„neum.

2)

2) „Tum ſenſim ſenſimque parallelipipedorum di„varicationem imminuebam, et experimentum, qua„vis vice nouum adhibendo filum $\alpha\beta$, repetebam, „ſubque initium effectus idem inde reſultare pergebat, „vt antea. Aſt cum eatenus imminuta eſſet diſtantia, „vt poli A et B non niſi dimidium circiter pollicem „a ſe inuicem diſtarent, euentum omnino contrarium „ſortiebatur tentamen. Iam enim α polo B, β vero „polo A, homogeneum monſtrabat magnetismum.

Quanta, quaeſo, admiratione percelli debuiſſet naturae ſcrutator, qui, per innumera tentamina, de experimenti *du Fayani* veritate conuictus, fortuito in magnetem incidiſſet, qui omnino contrarium dediſſet, euentum?

Pergamus vlterius. Pendet rectae fg ab AB diſtantia (Fig. 2. Diſſert. praeced.) itidem ab α; ſic vt reliquis valoribus non mutatis, cum α decreſcente, diſtantia haec adaugeatur. Cum nempe ſit ipſa $= \mathrm{I}v = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{4\alpha^2 a + 8\alpha b}}$, ex ipſo formulae intuitu de propoſiti veritate conſtat. Quodſi itaque duo diuerſa fila ferrea, alterum mollius, alterum durius adhibeantur, ſic, vt poſteriori maius reſpondeat α, ac priori, fieri poterit, vt pro duriori filo recta fg vltra polorum extremitates mn, pq, Fig. 1. pro molliori vero citra ipſas cadat, tumque mollius filum, polis admotum et more *du Fayano* ſtrictum, euentum *du Fayanum*, durius vero, omnino contrarium monſtrabit, ſic vt idem magnes, ſub iisdem apparenter circumſtantiis, mox hunc, huuc, mox oppofitum praeftet effectum. Etiam haec ratiocinia per experientiam comprobata funt.

Exper. II.

„Aliqua filorum $\alpha\beta$, qualia in experimento „praecedente adhibueram, ignitionis ope, admodum „mollia reddebam. Admotis tum virgarum AC, BD, „extremis AB, Fig. 2. ita propinque ad fe inuicem, „vt in filo duriori, prouti in exper. I. accidebat, „effectum *du Fayano* contrarium producerent, feruata „hac diftantia, filum molle tentamini adhibebam, „tumque euentus, experimento *du Fayano* penitus „confentiens, deprehendebatur.

Simile quid, quale in hoc experimento contingit, alia quoque ratione obtineri poteft, vt nempe idem magnes in bina ferramenta diuerfa prorfus contrarium edat effectum. Commonftrat hoc, fequens experimentum:

Exper. III.

„Filum ferreum molle $\alpha\beta$ (Fig. 2. Differt. „praeced.) ftringatur magnete, more *du Fayano*, eligatur vero talis rectae, quam percurrit $\alpha\beta$, ab AB „diftantia, vt haec recta fita quidem fit in fpatio „gfDE, aft rectae fg fit fatis propinqua, et filum „$\alpha\beta$ iam ea ratione magnetificabitur, vt extremum α „polo A, extremum β polo B euadat homogeneum. „Tum filum, ex duriori conftans ferro, prioris loco „adhibeatur, et percurrat eandem rectam, ac filum

„mol-

„ mollius, et modo rite electa ſit diſtantia, quod vno „alteroque vago tentamine facile obtinetur, euentus „erit omnino contrarius, extremum nempe α durio„ris huius fili erit polo B, et ipſius extremum β „polo A homogeneum.

Cauſa huius phaenomeni per ſe in oculos incurrit, ac in eo ſita eſt, quod antea monſtraui, rectam fg pro α minori magis, pro α maiori minus, diſtare ab AB.

Erat tandem in experimento *du Fayano* perinde, ſiue filum $\alpha\,\beta$ a dextra verſus ſiniſtram, ſiue a ſiniſtra verſus dextram ducebatur. Incidi autem, per exactius theoriae examen, in methodum, qua effici poteſt, vt contrarius exoriatur euentus, ſi filum contrariis promoveatur directionibus. Vniuerſum myſterium huc redit, vt magnetem nobis paremus, cuius alter polus inſigniter fortior ſit, quam alter, quod magnetum artificialium ope efficere facillimum eſt.

Pro diſtinctiore rei comprehenſione aliqua indigemus analyſi. Supponamus puncta A et B, Fig. 3. prius repellere, poſterius attrahere punctum C, viribus, quae ſunt vti diſtantiae AB, BC, inuerſe, aſt intenſitates virium, quas vtrumque punctum exſerit, ſint diuerſae, ita vt prior habeat indicem intenſitatis b, poſterior c. Sit $DA = DB = a$, $Dm = x$, $Cm = m$. Si iam quaeratur vis, qua punctum C vrgetur in directione rectae AB parallela verſus E, ſimili ratiocinio, quo in Diſſertatione praecedente vſus ſum, peruenitur ad formulam

$$\frac{(c-b)\,x^3-(c+b)\,a\,x^2-(c-b)\,(a^2-m^2)\,x+(c+b)(a^3+a\,m^2)}{x^4+2\,(m^2-a^2)\,x^2+(m^4+a^4)}.$$

 Per-

Percurrente puncto C rectam GF, AB parallelam, cum x variato simul variatur haec sollicitatio, et interdum nulla euadit. Vt puncta, vbi hoc contingit, determinentur, fractionis numerator euanescere ponendus est, vnde obtinetur, posito breuitatis causa $\frac{c+b}{c-b} = \mu$, haec aequatio trium dimensionum:

$$x^3 - \mu a x^2 - (a^2 - m^2) x + \mu (a^3 + a m^2)$$

quod indicio est, tria dari posse puncta rectae FG, vbi si constituitur corpusculum D, sollicitatio in directione rectae AB parallela versus E fit nulla.

Vlterius haec aequatio, ex noto Theoremate *Harrioti*, seu *Cartesii*, quamdiu μ est positiuum, i. e. quamdiu c est maius b, binas habet radices positiuas, vnamque negatiuam; sin vero μ sit negatiuum, quod accidit si c fuerit minus b, inuerso ordine binas possidet radices negatiuas, atque vnicam positiuam.

Quicunque horum casuum a nobis examini subiiciatur, perinde est; nam ratiocinia omnia vtrinque penitus similia sunt, quapropter eum enodasse casum, vbi μ est positiuum, sufficit.

Dico iam, cum aequatio, quam consideramus, necessario aliquam habeat radicem realem, esse hanc negatiuam ipsius radicem, quam quippe assero, modo μ sit positiuum, quoscunque de caetero acquirant valores μ, a, et m, nunquam fieri posse imaginariam. Euanescat nempe x, vt punctum C consistat ad Q, atque sollicitatio, quam patitur, erit $= \frac{(c+b)(a^3 + a m^2)}{m^4 + a^4}$, hinc

hinc positiua; fiat vero $x = -\infty$, atque erit sollicitatio $= \frac{(c-b)}{-\infty}$, hinc negatiua. Interea itaque, dum x ab o in $-\infty$ variatur, sollicitatio ex positiuo in negatiuum transit, vnde ad x negatiua necessario aliquando fit o, cum, prouti ex problematis intuitu facile patet, transitus ex positiuo in negatiuum per infinitum, locum hic habeat nullum.

Quod ad binas reliquas radices positiuas, pro varia literarum μ, a, et m determinatione, mox reales sunt, mox vero imaginariae euadunt. Cum nempe pro $x = +\infty$, sollicitatio fiat $= \frac{(c-b)}{+\infty}$, hinc positiua, nihil inde concludere licet, nisi quod interea, dum x a o ad $+\infty$ variatur, sollicitationem aut plane non, aut 2 vicibus euanescere, vnde disiunctiue solum asserere licet, binas radices positiuas, aut vtramque esse realem, aut vtramque imaginariam.

Tres itaque hic distinguendi sunt casus. Sunt nempe hae radices positiuae,

1) aut imaginariae,
2) aut reales et aequales,
3) aut reales et inaequales.

In casu priori liquet, etsi sollicitatio, quam patitur punctum C, versus x negatiua, fiat aliquando negatiua, ita vt dirigatur versus F, non tamen idem contingere versus x positiua, sed ex hac parte ipsam perpetuo in infinitum persistere positiuam. Quodsi itaque A et B sint magnetis cuiusdam poli, atque filum ferreum, per quod fluidum magneticum mouetur difficultate $=\alpha$, percurrat rectam GF, a ſiniſtra verſus x negatiua, ſitque R punctum iſtud vbi ſollicitatio euaneſcit, et in negatiuum tranſit; euidens eſt, quamdiu filum reperitur in parte interminata rectae GF, verſus ſiniſtram puncti R ſita, perpetuo tendere polos magneticos ad magnetiſandum filum ea ratione, vt extremum α polo B, extremum β polo A, fiat homogeneum. Quam primum vero punctum C intrauit in partem interminatam rectae GF, ad dextram puncti R ſitam, penitus contrarium accidit; tendunt nempe tunc poli ad eum producendum ſtatum, vt extremum α polo A, extremum β polo B, fiat homogeneum. Modo itaque difficultas α vtraque ſollicitatione maxima, poſitiua nempe et negatiua, minor ſit, is inde reſultare debet effectus, vt, poſtquam ductum eſt filum a ſiniſtra verſus dextram, ea ratione magnetificetur, vt extremum α polo A, extremum β polo B, fiat homogeneum. Quodſi vero filum contraria directione, a dextra nempe verſus ſiniſtram, incedat per rectam GF, oppoſitum oriri debere effectum, aeque facile patet; tum enim extremum α polo B, extremum β polo A, euadere debet homogeneum.

Prorſus ſimilis eſt ratio caſus ſecundi, vbi binae aequationis radices poſitiuae ſunt reales quidem, aſt aequales. Si nempe ad R cadat radix negatiua, ad S vero binae poſitiuae, etſi ſollicitatio ad S fiat nulla, non tamen in negatiuum tranſit, ſed ſtatim in poſitiuum reuertitur. Cum itaque ad ſiniſtram puncti R in infinitum, ſollicitatio perpetuo ſit poſitiua, (aut vt ex-

exactius loquamur, nunquam ſit negatiua) ad dextram vero puncti R perpetuo ſit negatiua, pro hocce caſu intermedio penitus eadem valent, ac pro caſu antecedente.

Tertius denique caſus, vbi binae aequationis radices poſitiuae ſunt reales et inaequales, peculiarem diſquiſitionem requirit. Sint puncta, ad quae cadunt radices, negatiua ad R, binae vero poſitiuae ad S et T. Iam ergo ſollicitatio ad ſiniſtram puncti R non perpetuo eſt poſitiua, ſed aliquando inter S et T negatiua euadit, vltra punctum T vero in poſitiuum reuertitur.

Hoc iam caſu, dico

1) ſi capiatur x poſitiuum $= Q\gamma$, Fig. 3. cui reſpondet ſollicitatio negatiua, atque tum capiatur ex altera parte x negatiuum, $Q\delta$, poſitiuo $Q\gamma$ aequale, fore ſollicitationem, quae puncto δ reſpondet, et negatiuam, et maiorem ſollicitatione, quae ad punctum γ pertinet.

Fingatur nempe primum intenſitas virium punctorum A et B aequalis eſſe, ſic vt tam puncto A quam B reſpondeat idem intenſitatis index b, atque ſub hac hypotheſi, erit

ſollicitatio

in puncto $\gamma = \frac{b \times Bn}{B\gamma^2} - \frac{b \times An}{A\gamma^2} = M'$

in puncto $\delta = \frac{b \times Ap}{A\delta^2} - \frac{b \times Bp}{B\delta^2}$ ſiue

$$\frac{b \times Bn}{B\gamma^2} - \frac{b \times An}{A\gamma^2} = N'.$$

Quapropter, ſi intenſitatis index vtrobique ſit idem, erunt M' et N' vtrumque negatiuum, et $M' = N'$.

Si vero iam ipſius B index intenſitatis creſcat, et fiat $= c = b + \mu$, erit

ſollicitatio

in puncto $\gamma = \frac{b \times Bn}{B\gamma^2} + \frac{\mu \times Bn}{B\gamma^2} - \frac{b \times An}{A\gamma^2} = M''$.

in puncto $\delta = \frac{b \times Ap}{A\delta^2} - \frac{b \times Bp}{B\delta^2} - \frac{\mu \times Bp}{B\delta^2} = N''$

ex quarum formularum comparatione patet, eſſe M'' minus M', aſt N'' maius N', vnde de aſſerti mei veritate facile conſtat.

Concludo autem hinc,

2) maximam ſollicitationem negatiuam, cadentem ad x poſitiua, neceſſario minorem eſſe, maxima ſollicitatione negatiua, quae cadit ad x negatiua.

Cadat nempe prius maximum ad γ, et facto $Q\delta = Q\gamma$, erit ſollicitatio ad δ maior, maxima ſollicitatione negatiua, quae cadit ad x poſitiua. Vnde id quod demonſtrandum ſumſeram, ſi ad δ cadat maximum, immediate, ſi non ad hoc punctum cadat, a fortiori concluditur.

Sit maximum negatiuum cadens ad $\gamma = P$, id vero, quod cadit ad δ, $= Q$; et cum ſit $P < Q$, rurſus manifeſtum eſt, fieri poſſe, vt α, quod exprimit difficultatem, quacum fluidum magneticum mouetur per filum magnetificandum, cadat inter P et Q, ſitque priori maius, et poſteriori minus. Tum itaque, ſi filum percurrat rectam GF, circa Q quidem ita magnetificabitur, vt extremum α polo B, extremum β polo A, fiat homogeneum; aſt effectus hic deſtruetur, ſi filum incedat a ſiniſtra verſus dextram, et abſoluta operatione erit extremum fili α polo A, prouti

extre-

extremum β polo B, homogeneum. Deſtructio vero eiusmodi, ſi filum percurrat rectam GF a dextra verſus ſiniſtram, locum nullatenus habebit. Subnatum eſt ex hiſce ratiociniis experimentum ſequens, quo veritas ipſorum abunde comprobatur.

Exper. IV.

„Tres magnetes artificiales AB, CD, EH, in „tabula ita diſpoſui, vti monſtrat Fig. 4. ea nempe „ratione, vt virgae CD, EH ſe contingerent per to„tam ſuam longitudinem polis ſuis homologis, tertia „vero virga in contrario ſitu diſpoſita eſſet, ita vt „polus B, polis H et D, eſſet heterogeneus. Diuari„cabant hae virgae ita vt diſtantia polorum B et HD „aliquot eſſet pollicum. Poſtquam per aliquot vaga „tentamina omnes circumſtantias rite adaptaueram, „ducto filo $\alpha\beta$ a ſiniſtra verſus dextram, extremum „α polo B, extremum β polo HD, homogeneum „reddebatur. Contraria vero aſſumta directione, con„trarius oriebatur effectus, et extremum α polo HD, „extremum β polo B, homologum nanciſcebatur ma„gnetismum.

COGI-

COGITATIONES
DE AGGERIBVS CONSTRVENDIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

De hoc argumento, quod amplissimam rerum maritimarum notitiam postulat, commentari nunquam mihi in mentem venisset, nisi nuper mihi quaestio eo spectans cum controuersia coniuncta esset proposita, vt sententiam meam aperirem, quandoquidem totum negotium ad Geometriam et Analysin reuoluebatur. Res autem ita se habebat: In prouincia maritima extra aggerem, quo littora sunt munita, fluctibus tantum terrae erat aggestum, vt nouo aggere includendum videretur. Vetus agger secundum lineam
Tab.VIII. Fig. 1. AGKE erat ductus, et terra extrinsecus adiecta vsque ad lineam ABCDE patebat, secundum quam etiam nouus agger longitudine 1128 perticarum erat extructus: quo pacto totum spatium inter veterem nouumque aggerem interiectum in lucrum cessit. Constitit hoc opus 120000 Thal. et singularum linearum mensurae in perticis in figura sunt adscriptae.

2. Iam iis, qui hunc aggerem extrui curauerant, obiectum est, cum hic agger secundum lineam inflexam ABCDE esset ductus, a puncto A ad E, eum

eum potius ſecundum arcum circularem, qui aequale ſpatium concluderet, duci oportuiſſe, ſubductoque calculo compertum eſt, hunc aggerem 76 perticis breuiorem futurum fuiſſe, ita vt idem commodum minoribus impenſis, quot ſcilicet extructio aggeris 76 perticas longi requirit, obtineri potuiſſe. Cuius obiectionis ratio huic fundamento inniti videbatur, quod linea circularis inter omnes alias tantumdem ſpatii includentes ſit breuiſſima, ac damnum quidem, ex neglectu huius principii natum, ad 9600 Thal. aeſtimabatur. Controuerſia igitur in hoc verſabatur, num ab Architecto, vel iis, qui hunc aggerem extrui curauerunt, reſtitutio huius damni iure exigi queat? Atque hic quiden videndum eſt, vtrum Architectus ob ignorantiam iſtius principii geometrici peccauerit, an ob alias cauſas ab eo recedere ſit coactus?

3. Principium autem hoc Geometricum non ſolum nunc quidem eſt notiſſimum, ſed etiam naturae noſtrae quaſi ingenitum, vt mihi nullo modo perſuadere queam, eius ignorationem in cauſa fuiſſe, cur Architectus aggerem ſecundum lineam inflexam ABCDE duxerit. Si haec circuli proprietas ipſi incognita fuiſſet, cur aggerem non potius iuxta rectam AE duxit? vel ſi maius ſpatium complecti voluit, cur non latera polygoni cuiusdam regularis eſt ſecutus? Mihi quidem extra omne dubium poſitum videtur, ſi in aggere ducendo quicquam Architecti arbitrio eſſet relictum, illum certe neutiquam hunc ductum ſinuoſum ABCDE electurum fuiſſe. Ei quidem, poſtquam ab

A ad B peruenit, non in mentem incidere non potuit, aggerem recta ab B ad E potius, quam per partes intus vergentes BC, CD, DE continuare; quippe quo modo breuiori aggere adeo maius ſpatium incluſiſſet. Quin hoc nouerit Architectus, quantumuis caeterum fuiſſet Geometriae rudis, dubitari nullo modo poteſt.

4. Cauſa igitur ſubeſſe debet, cur potius tractum hunc infractum ABCDE, quam alium quemcunque, in extruendo aggere ſit ſecutus; atque, etſi omnes rationes Architecturae maritimae mihi non ſunt perſpectae, haec tamen cauſa manifeſto in figura terrae fortuito aggeſtae ſita videtur: agger enim conſtitui nequit, niſi vbi terra ſupra fundum maris iam ſatis fuerit eleuata et confirmata. Loca igitur B, C, D ita videntur comparata, vt regio exterior, ob defectum fundi ſufficientis, aggerem recipere non potuerit. Quodſi ergo rectas lineas AB, BC, CD, DE vt limites ſpectemus, vltra quos aggerem remouere non liceat, cauſa manifeſta eſt, ob quam Architectus aggerem iuxta has ipſas lineas conſtituerit; ſimulque perſpicuum eſt, arcum illum circularem, qui aequale ſpatium includeret, hic adhiberi non potuiſſe, propterea quod alicubi vltra hos limites extendi debuiſſet.

5. Si enim vſpiam hos limites transgredi licuiſſet, equidem non in hoc Architectum reprehenderem, quod aggerem non ſecundum arcum circularem, qui aequale ſpatium includeret, duxerit, ſed potius ideo, quod non eiusmodi arcum ſuper corda AE conſtituerit,

rit, qui etiam maius ſpatium eſſet complexus. Etſi enim hoc modo agger maiorem longitudinem eſſet nactus, tamen ſumtuum incrementum maiori terrae ſpatio in vſum conuertendo fortaſſe fuiſſet compenſatum: ad hoc ſcilicet diiudicandum ſumtus in ſingulas perticas, quibus agger longior redditur, impendendi vna cum ſorte pecuniae ad conſeruationem requiſitae cum pretio ſingularum perticarum quadratarum, quibus terra vſui futura augetur, comparari debent, vt pateat, vtrum augmentum impenſae ſuperet lucri augmentum nec ne? Haec disquiſitio ibi erit neceſſaria, vbi ſatis terrae firmae fuerit aggeſtum, vt quousque libuerit aggerem extendere liceat, qui caſus, etſi a propoſito abhorrere videatur, eum tamen accuratius euoluere haud erit incongruum.

Problema I.

Si extra aggerem APQB tantum terrae a fluctibus maris ſit cumulatum, vt a terminis A et B nouum aggerem ADB quousque libuerit, protendere liceat, definire eum aggerem, qui maximum lucrum ſit allaturus. Fig. 2.

Solutio.

6. Primum obſeruo, huic aggeri nouo ab A ad B ducendo figuram arcus circularis tribui oportere: quamcunque enim aliam figuram haberet, ſemper arcus circularis dari poſſet aequale ſpatium includens, qui, cum ſit breuior, minoresque propterea ſumtus poſtulet, illi omnino erit anteferendus. Sit igitur ADB huiusmodi arcus circularis centrum habens in O, ponaturque

que cordae femiffis $AC = BC = c$, et anguli ad O femiffis $AOD = BOD = \omega$; tum vero fit fpatium inter aggerem veterem APQB et rectam AB inclufum $= bb$, quod partem conftituit fpatii extructione noui aggeris acquirendi. Hinc ergo fit radius circuli $OA = \frac{c}{\sin.\omega}$ et $OC = \frac{c \cos.\omega}{\sin.\omega}$; ideoque arcus $ADB = \frac{2c\omega}{\sin.\omega}$, qui dat longitudinem aggeris. Porro erit fector $AOB = \frac{cc\omega}{\sin.\omega^2}$, indeque auferendo triangulum $AOB = \frac{cc\cos.\omega}{\sin.\omega}$, relinquitur area fegmenti $ADBA = \frac{cc(\omega - \sin.\omega \cos.\omega)}{\sin.\omega^2}$, ita vt fpatium terrae aggere ADB acquifitum fit $= \frac{cc(\omega - \sin.\omega\cos.\omega)}{\sin.\omega^2} + bb$.

7. Ponamus, has menfuras in perticis dari, fintque fumtus ad vnam perticam aggeris exftruendam $= m$ Thal. comprehenfis fimul impenfis ad conferuationem, quos cafu expofito vidimus exfurgere ad 100. Thal. Pretium autem vnius perticae quadratae terrae ftatuatur $= n$ Thal. quod vtique ab indole terrae et fructibus inde percipiendis pendet. Hinc lucrum deductis impenfis erit

$$\frac{ncc(\omega - \sin.\omega\cos.\omega)}{\sin.\omega^2} + nbb - \frac{2mc\omega}{\sin.\omega},$$

quod, nifi valorem obtineat pofitiuum, praeftabit res in priftino ftatu relinquere, neque exftructionem noui aggeris fufcipere, quoniam fumtus fuperarent fructus inde fperandos.

8. Incipiamus a cafu, quo agger recta ab A ad B ducitur; et quia terrae fpatium fit $= bb$, et longitudo aggeris $= 2c$, erit lucrum $= nbb - 2mc$. Nifi ergo fit $bb > \frac{2m}{n}c$, feu $c < \frac{nbb}{2m}$, hic nouus agger

dam-

damnum afferret: ex quo duo caſus euoluendi occurrunt; alter, quo $bb < \frac{2m}{n}c$, alter vero quo $bb > \frac{2m}{n}c$; illo caſu non ſine damno agger rectus iuxta cordam AB duceretur, hoc vero lucrum quidem praeberet, ſed videndum eſt, num aggerem ſecundum arcum circularem incuruando non maius lucrum obtineri queat. Priori vero caſu, quo agger rectus cum manifeſto damno eſt coniunctus, inquiri conuenit, an aggeris curuatura damnum non minuatur, ac tandem in lucrum conuerti queat?

9. Sit igitur $bb < \frac{2m}{n}c$, et videamus, ſi angulus $AOB = 2\omega$ minimus capiatur, vtrum detrimentum minuatur nec ne? Ponamus, ſi $\omega = z$, et ob $\omega = z + \frac{1}{6}z^3$ et $\text{coſ.}\,\omega = 1 - \frac{1}{2}zz$, erit $\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega = z - \frac{1}{2}z^3$, vnde aeſtimatio lucri oritur:

$$\tfrac{2}{3}nccz + nbb - 2mc(1 + \tfrac{1}{6}zz)$$

quae ergo maior eſt praecedente $nbb - 2mc$, quoniam $\frac{2}{3}nccz > \frac{2}{6}mczz$ ob z minimum. Certum ergo eſt, incuruatione aggeris damnum diminui; an autem continuo minuatur? differentiatio noſtrae formulae oſtendet, quae praebet:

$$\frac{2nccd\omega(\text{ſin.}\,\omega - \omega\,\text{coſ.}\,\omega)}{\text{ſin.}\,\omega^3} - \frac{2mcd\omega(\text{ſin.}\,\omega - \omega\,\text{coſ.}\,\omega)}{\text{ſin.}\,\omega^2} \text{ ſeu}$$

$$\frac{2cd\omega(\text{ſin.}\,\omega - \omega\,\text{coſ.}\,\omega)}{\text{ſin.}\,\omega^3}(nc - m\,\text{ſin.}\,\omega)$$

Cum igitur ſit $\text{ſin.}\,\omega > \omega\,\text{coſ.}\,\omega$, aeſtimatio lucri aggerem magis incuruando continuo creſcit, quamdiu eſt $nc > m\,\text{ſin.}\,\omega$.

10. Si esset $nc < m$, seu $c < \frac{m}{n}$, lucrum eousque tantum cresceret, quoad fieret sin. $\omega = \frac{nc}{m}$, tum vero, vltra augendo angulum ω, iterum decresceret, neque vero perpetuo. Nam cum anguli ω, postquam vltra rectum, quo casu arcus ADB fit semicirculus, fuerit acutus, sinus iterum decrescat, quando infra valorem $\frac{nc}{m}$ decreuerit, lucri aestimatio iterum crescere incipit, idque deinceps continuo ac tantopere, vt tandem in infinitum augeatur. Quare lucrum dato quouis maius obtineri potest, dummodo angulus ω maxime obtusus capiatur, et arcus ADB segmentum maius maximi circuli constituat. Atque hoc in genere valet, siue fuerit $bb > \frac{2m}{n}c$, siue $bb < \frac{2m}{n}c$, ita vt neutro casu verum maximum locum habeat, sed lucrum continuo maius consequi liceat.

11. Sin autem aliae circumstantiae prohibeant, quo minus segmentum ADB vltra semicirculum augeri possit, tum semper, dummodo fuerit $c > \frac{m}{n}$, aggerem in figuram semicirculi duci conueniet, vt maximum lucrum, vel certe minimum damnum, obtineatur. Tum autem posito π pro semicircumferentia circuli, cuius radius est $= 1$, vt $\frac{1}{2}\pi$ angulum rectum denotet, ob $\omega = \frac{1}{2}\pi$, fiet lucri aestimatio:

$$\tfrac{1}{2}\pi ncc + nbb - \pi mc$$

quae expressio, nisi sit negatiua, aggerem maxime lucrosum indicat, contra autem praestabit, nullum plane aggerem extruere. At si fuerit $c < \frac{m}{n}$, statuatur $c = \frac{m}{n}\text{sin.}\zeta$, ac tum segmentum ADB minus esse oportet semicirculo,

culo, ſumendo angulum $AOD = \zeta$; vt lucrum maximum vel damnum minimum euadat. Poſito autem $\omega = \zeta$ et $c = \frac{m}{n}\,\text{ſin.}\,\zeta$ fit lucri aeſtimatio:

$$\frac{ncc(\zeta - \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta)}{\text{ſin.}\,\zeta^2} + nbb - \frac{2mc\zeta}{\text{ſin.}\,\zeta} = nbb - \frac{mc}{\text{ſin.}\,\zeta}(\zeta + \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta)$$

ſeu $= nbb - \frac{mm}{n}(\zeta + \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta)$.

Niſi ergo ſit $bb > \frac{mm}{nn}(\zeta + \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta)$ nequidem aggerem ſine damno extruere licet: niſi arcus ſemicirculo maiores admittantur.

12. Haec igitur ſunt fere obſeruanda, quando terra aggeſta nullos limites ponit, vltra quos aggerem extendere non liceat, qui caſus, cum nunquam locum habere poſſit, quandoquidem nunquam aggerem quaſi in infinitum extendere conceditur, reuertor ad ipſam quaeſtionem propoſitam, vbi ratio terrae extra veterem aggerem adiectae non permittit, vt agger vsquam vltra limites per lineas AB, BC, CD, DE deſignatos producatur. Atque hoc quidem caſu manifeſtum Tab.VIII. eſt, nouo aggere maiorem terrae quantitatem cingi Fig. 1. non poſſe, quam quae figura eſt repraeſentata; hocque ſpatium aliter in vſum conuerti non poſſe, niſi agger ſecundam ipſos illos limites extruatur; vtcunque enim ab iis recedatur, quoniam non extra eos vagari licet, ſemper minor terrae portio includetur. Quare ſi Architecto propoſitum fuerit, tantum terrae includere, quantum fieri licet, neceſſario aggerem iuxta ipſos limites extruere coactus fuit, neque quicquam in hoc opere ipſi vitio verti poteſt.

13. Hic

13. Hic autem alia quaestio meo quidem iudicio grauissima oritur, an non vtilius fuisset, aliquid de campo includendo remittere, et aggerem intra limites praescriptos ita ducere, vt deductis impensis aggeris a pretio terrae acquisitae lucrum idque maximum obtineretur. Quaeritur scilicet eiusmodi aggeris constructio, qui si breuior sit, quam linea limitum ABCDE, p perticis, spatium autem includat minus quam id, quod intra limites illos contineretur, qq perticis quadratis, vt lucrum ex diminutione aggeris natum, quod valet mp Thal. maxime superet damnum ob diminutionem terrae ortum, quod aestimatur nqq Thal. seu vt $mp-nqq$ fiat maximum. Quem in finem, vt res generaliter ac dilucide pertractetur, sequentia problemata euoluam.

Problema 2.

Fig. 3. Si limites, vltra quos aggerem protendi non liceat, sint rectae AB et BC, in B datum angulum constituentes, determinare rectam PQ, ita vt, si agger iuxta rectas AP, PQ, QC ducatur, quo pacto quidem terrae spatium PBQ perit, maximum tamen lucrum obtineatur.

Solutio.

14. Quodsi loco aggeris ABC aggere APQC vtamur, in eius longitudine tot perticas lucramur, quot excessus laterum $BP+BQ$ iunctim sumtorum supra latus PQ exhibet, quod ergo in expensis lucrum praebet $= m(BP+BQ-PQ)$ Thal. Contra vero in

campo

campo includendo amittimus tot perticas quadratas, quot continet area trianguli PBQ, cuius pretium ad $n.\Delta PBQ$ Thal. eſt conſtituendum. Lineam rectam ergo PQ ita duci oportet, vt haec quantitas $m(BP+BQ-PQ)-n.\Delta PBQ$ maximum valorem adipiſcatur.

15. Ponamus angulum $ABC=\beta$, qui datur, ſintque lineae quaeſitae $BP=x$, et $BQ=y$, erit $PQ=\sqrt{}(xx-2xy\cos.\beta+yy)$ quae breuitatis gratia dicatur $=z$, et area trianguli PBQ fit $=\frac{1}{2}xy\sin.\beta$; vnde his longitudinibus x et y in perticis expreſſis, habetur lucrum ad pecuniam reductum $=m(x+y-z)$ $-\frac{1}{2}nxy\sin.\beta$ Thal. quod maximum eſt reddendum. Vnde, cum ſit

$$dz=\frac{x\,dx-y\,dx\cos.\beta-x\,dy\cos.\beta+y\,dy}{z},$$

prout vel x vel y vt variabilis tractatur, hae duae aequationes eliciuntur:

$$m\left(1-\frac{x+y\cos.\beta}{z}\right)-\frac{1}{2}ny\sin.\beta=0$$
$$m\left(1+\frac{x\cos.\beta-y}{z}\right)-\frac{1}{2}nx\sin.\beta=0.$$

16. Quodſi illa per x, haec vero per y, multiplicetur, differentia ad hanc perducit aequationem:

$$m\left(x-y-\frac{xx+yy}{z}\right)=0=m(x-y)\left(1-\frac{x-y}{z}\right).$$

Cum igitur fieri nequeat $1=\frac{x+y}{z}$, ſeu $z=x+y$, neceſſe eſt, ſit $x=y$, ſeu $BP=BQ$, quam quidem conditionem ipſa quaeſtionis natura ſtatim ſuppeditare potuiſſet, cum nulla ſit ratio, cur linea BP et BQ inaequales capi deberent. Sit ergo $y=x$, et quia tum fit $z = \sqrt{(2xx - 2xx\cos.\beta)} = 2x\sin.\frac{1}{2}\beta$, alterutra illarum aequationum abit in hanc formam:

$$m\left(1 + \frac{\cos.\beta - 1}{2\sin.\frac{1}{2}\beta}\right) - \frac{1}{2}nx\sin.\beta = 0,$$

seu $m(1 - \sin.\frac{1}{2}\beta) = \frac{1}{2}nx\sin.\beta$,

vnde fit $x = \frac{2m(1 - \sin.\frac{1}{2}\beta)}{n\sin.\beta} = \frac{m(1 - \sin.\frac{1}{2}\beta)}{n\sin.\frac{1}{2}\beta\cos.\frac{1}{2}\beta}$,

siue $x = \frac{m}{n\sin.\frac{1}{2}\beta}\sqrt{\frac{1 - \sin.\frac{1}{2}\beta}{1 + \sin.\frac{1}{2}\beta}} = \frac{m\,\mathrm{tang.}(45° - \frac{1}{4}\beta)}{n\sin.\frac{1}{2}\beta}$

17. Problemati ergo ita satisfit, vt capiatur:

$$BP = BQ = \frac{2m(1 - \sin.\frac{1}{2}\beta)}{n\sin.\beta},$$

siquidem lineae BA et BC fuerint maiores, sin autem hae lineae sint minores, tum euidens est, rectarum BP et BQ alteram breuiori aequalem capi oportere, vnde altera per eandem methodum definietur. Atque hoc modo, si limites habeant plures angulos, singuli resecari poterunt, siquidem extus sint versi, qui anguli enim intus vergunt, vt C et D in fig. 1, ii hanc operationem non admittunt, quin etiam deinceps nouos angulos ad P et Q ortos simili modo subtendere licebit, quae operatio si continuetur, tandem agger figuram quasi curuilineam consequetur, quae omnium maximam vtilitatem apportabit. Eam autem circuli arcum fore manifestum est, quem statim sequenti modo determinare poterimus.

Pro-

Problema 3.

18. Si limites, vltra quos aggerem protendi non licet, ſint rectae AB et BC, in B datum angulum facientes, determinare eam aggeris figuram APSQC, qua maximum lucrum obtineatur. Tab. VIII. Fig. 4.

Solutio.

Primo patet, vt ante, partes a limitibus reſciſſas BP et BQ aequales eſſe debere, dummodo ipſae lineae BA et BC ſatis ſint longae, vt huiusmodi partes mox definiendas contineant, quod quidem hic asſumo; ſi enim altera, vel vtraque, breuior fuerit, hic caſus peculiarem euolutionem poſtulat. Tum vero etiam patet, lineam curuam PSQ fore circularem, quam totam intra limites contineri neceſſe eſt; eius ergo centrum erit in recta BO, angulum B biſecante.

Ponamus itaque angulum $ABC = 2\beta$, vt ſit ſemiſſis $ABO = CBO = \beta$; tum vero ſtatuatur $BP = BQ = x$, erit $PR = QR = x\,\text{ſin.}\,\beta$ et $BR = x\,\text{coſ}\,\beta$, vnde conficitur area trianguli $PBQ = xx\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\beta$. Ponatur porro anguli POQ ſemiſſis $BOP = BOQ = \omega$, erit radius circuli $PO = QO = \frac{x\,\text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\omega}$, et $OR = \frac{x\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega}$, hincque ipſe arcus $PSQ = \frac{2x\omega\,\text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\omega}$, et ſector PSQO $= \frac{xx\omega\,\text{ſin.}\,\beta^2}{\text{ſin.}\,\omega^2}$, vnde, cum ſit triangulum $POQ = \frac{xx\,\text{ſin.}\,\beta^2\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega}$, fit area ſegmenti $PSQP = \frac{xx\,\text{ſin.}\,\beta^2}{\text{ſin.}\,\omega^2}(\omega - \text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega)$ et trilinei $BPSQB = xx\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\beta - \frac{xx\,\text{ſin.}\,\beta^2}{\text{ſin.}\,\omega^2}(\omega - \text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ}\,\omega)$.

Quod ſi iam agger non iuxta ipſos limites ABC, ſed lineam mixtam APSQC ducatur, in longitudine

 aggeris

aggeris lucramur $PB + QB - PSQ = 2x - \frac{2x\omega \sin.\beta}{\sin.\omega}$, quod lucrum valet $2mx(1 - \frac{\omega \sin.\beta}{\sin.\omega})$ at in campo perdimus trilineum BPSQB, quod damnum valet $nxx(\sin.\beta \cos.\beta - \frac{\sin.\beta^2}{\sin.\omega^2}(\omega - \sin.\omega \cos.\omega))$. Nunc igitur excessus lucri supra damnum maximus reddi debet, vnde ob binas variabiles x et ω binas sequentes nanciscimur aequationes:

$$\text{I. } m(1 - \frac{\omega \sin\beta}{\sin.\omega}) - nx(\sin.\beta \cos\beta - \frac{\sin.\beta^2}{\sin.\omega^2}(\omega - \sin.\omega \cos.\omega)) = 0$$

$$\text{II. } -\frac{2mx\sin.\beta}{\sin.\omega^2}(\sin.\omega - \omega\cos.\omega) - \frac{2nxx\sin.\beta^2}{\sin.\omega^3}(\omega\cos.\omega - \sin.\omega)) = 0$$

seu $\text{II. } -\frac{2x\sin.\beta}{\sin.\omega^3}(\sin.\omega - \omega\cos.\omega)(m\sin.\omega - nx\sin.\beta) = 0.$

Ex hac posteriori, quia fieri nequit $\sin.\omega - \omega\cos.\omega = 0$, fit $m\sin.\omega = nx\sin.\beta$, seu $x = \frac{m\sin.\omega}{n\sin.\beta}$, qui valor, in priori substitutus, praebet

$$m(1 - \frac{\omega\sin.\beta}{\sin.\omega}) - m(\cos.\beta\sin.\omega - \frac{\sin.\beta}{\sin.\omega}(\omega - \sin.\omega\cos.\omega)) = 0,$$

seu $\sin.\omega - \omega\sin.\beta - \cos.\beta\sin.\omega^2 + \omega\sin.\beta - \sin.\beta\sin.\omega\cos.\omega = 0$, quae, per $\sin.\omega$ diuisa, dat:

$$1 - \cos.\beta\sin.\omega - \sin.\beta\cos.\omega = 0, \text{ seu } 1 \sin.(\beta + \omega)$$

vnde concludimus, fore $\beta + \omega = 90^\circ$, seu $\omega = 90^\circ - \beta$, ita vt angulus BPO sit rectus, ideoque arcus PSQ a limitibus AB et BC tangatur: ex quo totus arcus PSQ intra limites cadit, quemadmodum natura rei postulat.

Cum igitur sit $\omega = 90^\circ - \beta$, erit $BP = BQ = x = \frac{m\cos.\beta}{n\sin.\beta} = \frac{m}{n\,\text{tang}.\beta}$, seu $x\,\text{tang}.\beta = PO = \frac{m}{n}$, ita vt $\frac{m}{n}$ perticae semper dent radium circuli PSQ, iuxta quem aggerem duci oportet, qui arcus cum limites tangere debeat,

beat, tota constructio est facilis. In recta enim BO, angulum ABC bisecante, id punctum O capi debet, e quo perpendiculum in alterum limitem demissum OP fiat $=\frac{m}{n}$, eritque O centrum circuli, et OP eius radius.

Tum autem sumtis $BP = BQ = \frac{m\, cos.\beta}{n\, sin.\beta}$, erit arcus $PSQ = \frac{m}{n}(\pi - 2\beta)$ denotante π semicircumferentiam et 2β arcum circuli, angulum ABC metientis, sinu toto existente $= 1$, vnde, lucrum ex aggeris diminutione ortum, est $= \frac{m\,m}{n}(2\,cot.\beta - \pi + 2\beta)$ Thal. Damnum autem, ob diminutionem spatii inclusi natum, est $= \frac{m\,m}{n}(cot.\beta - \frac{1}{2}\pi + \beta)$, quod lucri semissi aequatur, ita vt totum lucrum sit $= \frac{m\,m}{n}(\beta + cot.\beta - \frac{1}{2}\pi)$ Thal.

Coroll. 1.

19. Quo maior ergo est angulus $ABC = 2\beta$, eo minores fiunt partes rescindendae $BP = BQ$, et plane euanescunt, si ille angulus ad duos rectos excrescat. Hinc quo obtusior fuerit angulus ABC, eo minus hac correctione est opus.

Coroll. 2.

20. At si angulus ABC fuerit acutus, ideoque β semirecto minor, partes rescindendae $BP = BQ$ maiores fiunt, quam $\frac{m}{n}$, hocque casu imprimis necesse erit, aggerem intra limites contrahi; quia alias ingentes sumtus frustra impenderentur.

Coroll. 3.

21. Quo facilius pro quouis angulo ABC constructio aggeris maxime conueniens perſpiciatur, hanc tabellam ſubiungo:

Angulus ABC	Partes reſcindendae $BP = BQ$	Diminutio aggeris	Diminutio terrae incluſae	Lucrum in pecunia
10°	11,430052 $\frac{m}{n}$	19,89304. $\frac{m}{n}$	9,94652. $\frac{m^2}{n^2}$	9,94652. $\frac{mm}{n}$
20	5,671282. $\frac{m}{n}$	8,55004 $\frac{m}{n}$	4,27502. $\frac{mm}{nn}$	4,27502. $\frac{mm}{n}$
30	3,732051. $\frac{m}{n}$	4,84611. $\frac{m}{n}$	2,42305. $\frac{mm}{nn}$	2,42305. $\frac{mm}{n}$
40	2,747477 $\frac{m}{n}$	3,05149 $\frac{m}{n}$	1,52575. $\frac{mm}{nn}$	1,52575. $\frac{mm}{n}$
50	2,144507. $\frac{m}{n}$	2,02008 $\frac{m}{n}$	1,01004 $\frac{mm}{nn}$	1,01004. $\frac{mm}{n}$
60	1,732051. $\frac{m}{n}$	1,36970 $\frac{m}{n}$	0,68485 $\frac{mm}{nn}$	0,68485. $\frac{mm}{n}$
70	1,428148. $\frac{m}{n}$	0,93643. $\frac{m}{n}$	0,46821. $\frac{mm}{nn}$	0,46821. $\frac{mm}{n}$
80	1,191754. $\frac{m}{n}$	0,63817. $\frac{m}{n}$	0,31909. $\frac{mm}{nn}$	0,31909. $\frac{mm}{n}$
90	1,000000. $\frac{m}{n}$	0,42920. $\frac{m}{n}$	0,21460. $\frac{mm}{nn}$	0,21460. $\frac{mm}{n}$
100	0,839099. $\frac{m}{n}$	0,28193 $\frac{m}{n}$	0,14097. $\frac{mm}{nn}$	0,14097. $\frac{mm}{n}$
110	0,700207. $\frac{m}{n}$	0,17868. $\frac{m}{n}$	0,08934. $\frac{mm}{nn}$	0,08934. $\frac{mm}{n}$
120	0,577350. $\frac{m}{n}$	0,10750 $\frac{m}{n}$	0,05375. $\frac{mm}{nn}$	0,05375. $\frac{mm}{n}$
130	0,466308. $\frac{m}{n}$	0,05995. $\frac{m}{n}$	0,02997. $\frac{mm}{nn}$	0,02997. $\frac{mm}{n}$
140	0,363970. $\frac{m}{n}$	0,02981. $\frac{m}{n}$	0,01490. $\frac{mm}{nn}$	0,01490. $\frac{mm}{n}$
150	0,267949. $\frac{m}{n}$	0,01230 $\frac{m}{n}$	0,00615. $\frac{mm}{nn}$	0,00615 $\frac{mm}{n}$
160	0,176327. $\frac{m}{n}$	0,00358. $\frac{m}{n}$	0,00179 $\frac{mm}{nn}$	0,00179. $\frac{mm}{n}$
170	0,087488. $\frac{m}{n}$	0,00044. $\frac{m}{n}$	0,00022. $\frac{mm}{nn}$	0,00022. $\frac{mm}{n}$
180	0,000000. $\frac{m}{n}$	0,00000. $\frac{m}{n}$	0,00000. $\frac{mm}{nn}$	0,00000. $\frac{mm}{n}$

Coroll. 4.

Coroll. 4.

22. Tota haec determinatio pendet a pretio aggeris, vnam perticam longi, quod m Thaleros posuimus, et a pretio vnius perticae quadratae agri, quod n Thal. sumsimus, quae duo pretia prouti variauerint, exstructio aggeris maxime idonea inde determinationem consequitur.

Scholion 1.

23. Casu ergo proposito, quo angulus B est fere angulus rectus, ductum aggeris ita intra hunc angulum statui conueniet, vt rescissis rectis $BP = BQ = \frac{m}{n}$ pertic. a P ad Q arcus circuli ducatur, quem rectae BP et BQ tangunt: haecque constructio tanto vtilior erit, quam si agger secundum ipsos limites duceretur, vt lucrum futurum sit $= \frac{2146}{10000} \cdot \frac{mm}{n}$ Thal. Cum igitur, vti vidimus, vna pertica aggeris constet 100 Thal. si perticam quadratam agri aestimemus ad 1 Thal. vt sit $m = 100$ et $n = 1$, abscindi oportet $BP = BQ = 100$ pert. aggerque a P ad Q per arcum circularem PSQ extruatur; sicque lucrum obtinebitur $= 2146$ Thal. Haec scilicet constructio maxime praeferenda est ei, qua agger secundum ipsos limites PB et QB ad ipsum angulum B vsque produceretur; minor quidem terrae portio hoc modo includitur, deficiens 2146 perticis quadratis, quarum pretium 2146 Thal aestimatur: at agger hoc modo breuior fit $42\frac{92}{100}$ perticis, quae sumtum $= 4292$ Thal. requirent, vnde lucrum obtinetur 2146 Thal. Circa reliquos angulos C et D, quoniam intus vergunt, nulla emendatio locum habet, vtcunque enim agger a Q et E intra hos limites

mites constitueretur, non solum minor campus concluderetur, sed etiam agger longior euaderet. Vnde Architectus ideo tantum est reprehendendus, quod aggerem vsque ad angulum extus vergentem B extenderit, sicque sumtus inutiles 2146 Thal. erogarit, quos euitare licuisset; verum haec solertia ab homine Geometriae sublimioris experte non est exigenda.

Scholion 2.

24. Comparemus etiam casum, quo agger secundum ipsam rectam A E duceretur, cum casu, quo iuxta limites A B C D E est ductus, visuri, vtrum lucrum, an damnum, inde fuisset expectandum. Hoc autem modo agger breuior prodiisset 86 perticis, vnde sumtuum diminutio fuisset 8600 Thal. Periisset autem omnis terra, inter limites ABCDE et rectam AE contenta, quae cum sit 44237 perticarum quadratarum, damnum totidem Thalerorum esset aestimandum, vnde agger iuxta limites ductus praestat aggere secundum rectam AE ducto, discrimine existente 35637 Thal. Verum, vti iam vidimus, magis expedit arcus PSQ a limitibus recedere, quam ipsos limites sequi, lucro existente 2146 Thal. Hoc modo tota aggeris longitudo foret 1085 perticarum, cuius extructio, vti posuimus, postulat 108500 Thal. ac nunc quidem videndum est, an agri sic acquisiti quantitas, quae est spatium inter veterem aggerem AGKE et nouum APSQCDE, superet 108500 perticas quadratas nec ne? si enim minor esset, praestitisset omnino extructione noui aggeris supersedere; eatenus enim tantum hoc

hoc opus ſuſcipere operae pretium fuiſſet, quatenus quantitas terrae acquiſitae ſuperaſſet 108500 perticas quadratas, ſiquidem pretium vnius perticae quadratae ad vnum Thalerum conſtituatur. Praeterea vero etiam perpendendum eſt, extructo nouo aggere, veterem aggerem nullos amplius ſumtus ad conſeruationem requirere; cuius commodi ratio etiam in aeſtimatione lucri eſt habenda: impenſae ſcilicet noui aggeris tanto minores ſunt cenſendae. Cum igitur agger ſecundum ipſos limites ſit extructus, qui ad 1128 perticas porriguntur, dummodo maior terrae quantitas quam 112800 pert. quadratarum fuerit acquiſita, lucrum inde eſt comparatum, quod etſi non fuerit maximum, tamen Architecto vitio verti non poteſt, atque perpetuo extructio nouorum aggerum ſecundum haec principia diiudicanda videtur, poſtquam tam ſumtus in ſingulas aggeris perticas, quam pretium cuiusque perticae quadratae fuerit conſtitutum.

Scholion. 3.

25. Reuertamur ad noſtrum problema, quo limites duabus rectis AB et BC contineri aſſumſimus, ac perpendamus caſum, quo altera harum duarum rectarum, puta BC, minor eſt quam pars abſcindenda, quae ſupra eſt inuenta $= \frac{m}{n}\cot.\beta$, exiſtente altera $BA > BC$. Atque hic facile perſpicitur, arcum circuli per ipſum punctum C tranſire debere; ſecet is ergo alteram in P, ac pariter euidens eſt, rectam PB huius arcus tangentem eſſe debere; ſi enim non tangeret, a puncto quodam

 rectae

rectae BA a B remotiori duci posset ad C arcus rectam BA tangens, aequale spatium ab angulo rescindens, quae cum aggerem breuiorem daret, vtique esset praeferenda. Manente ergo angulo $ABC = 2\beta$, sit recta $BC = b$, et quaesita $BP = x$: Ducta PO ad BP normali, sit O centrum arcus PSC, vnde OR cordam CP bisecans simul angulum COP bisecabit, et ad CP erit normalis. Statuatur angulus $COR = POR = \omega$, erit $CPB = \omega$, et $PCB = 180^\circ - 2\beta - \omega$, vnde colligitur $BP = x = \frac{b\,\sin.(2\beta+\omega)}{\sin.\omega}$ et $CP = \frac{b\,\sin.2\beta}{\sin.\omega}$, vt sit $PR = \frac{b\,\sin.2\beta}{2\,\sin.\omega}$, et $PO = \frac{b\,\sin.2\beta}{2\,\sin.\omega^2}$, atque $OR = \frac{b\,\sin.2\beta\,\cos.\omega}{2\,\sin.\omega^2}$. Hinc prodit arcus $PSC = \frac{b\,\omega\,\sin.2\beta}{\sin.\omega^2}$, et sector $OPSC = \frac{bb\,\omega\,\sin.2\beta^2}{4\,\sin.\omega^4}$, vnde, ablato triangulo $OCP = \frac{bb\,\sin.2\beta^2\cos.\omega}{4\,\sin.\omega^3}$, relinquitur segmentum $CSPC = \frac{bb\,\sin.2\beta^2}{4\,\sin.\omega^4}(\omega - \sin.\omega\cos.\omega)$. Cum iam sit $BC + BP = b(1 + \frac{\sin.(2\beta+\omega)}{\sin.\omega})$, diminutio aggeris est $= b(1 + \frac{\sin.(2\beta+\omega)}{\sin.\omega} - \frac{\omega\,\sin.2\beta}{\sin.\omega^2})$; et ob aream trianguli $CBP = \frac{1}{2} b x \sin.2\beta = \frac{bb\,\sin.2\beta\,\sin.(2\beta+\omega)}{2\,\sin.\omega}$, diminutio campi includendi $= \frac{bb\,\sin.2\beta}{4\,\sin.\omega^4}(2\sin\omega^3\sin.(2\beta+\omega) - \sin.2\beta\,(\omega - \sin.\omega\cos.\omega))$. Quare lucrum erit:

$$mb\left(1 + \frac{\sin.(2\beta+\omega)}{\sin.\omega} - \frac{\omega\,\sin.2\beta}{\sin.\omega^2}\right) - \tfrac{1}{4} nbb \sin.2\beta\left(\frac{2\,\sin.(2\beta+\omega)}{\sin.\omega} - \frac{\sin.2\beta\,(\omega - \sin.\omega\cos.\omega)}{\sin.\omega^4}\right),$$

cuius differentiale nihilo aequatum et per $\phi\cos.\phi - \sin\phi$ diuisum praebet $nb\sin.2\beta = 2m\sin.\omega^2$, vnde fit $PO = \frac{m}{n}$ et

$$\sin.\omega = \sqrt{\frac{nb\,\sin.2\beta}{2m}} = \sqrt{\frac{nb\,\sin.\beta\cos.\beta}{m}}, \text{ et } x = \frac{b\,\sin.(2\beta+\omega)}{\sin.\omega},$$

vbi, cum sit $b < \frac{m\cos.\beta}{n\sin.\beta}$, erit $\sin.\omega < \cos.\beta$ seu $\omega < 90 - \beta$ ideo-

ideoque $BP > BC$. Hinc ſequitur, ſi eſſet $BA < BP$ tum arcum circuli per ambo puncta A et C duci convenire, vt rectam BA tangat; tum ſcilicet magis lucrum obtinere non licet.

Problema 4.

26. Si limites, quos aggerem transgredi non oportet, tribus lineis rectis AB, BC, CD conſtent, definire aggeris conſtructionem maxime lucroſam. Fig. 6.

Solutio.

Sit, vt ante, m pretium aggeris vnam perticam longi, et n pretium vnius perticae quadratae agri, ponatur angulus $ABC = 2\beta$ et angulus $BCD = 2\gamma$, ac ſi fuerit $BC > \frac{m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma)$ ſolutionem praecedens problema ſuppeditat. Primum enim circa B abſcindantur portiones $BP = BQ = \frac{m}{n}\cot.\beta$, et circa C portiones $CR = CS = \frac{m}{n}\cot.\gamma$; deſcribanturque, tam per puncta P et Q, quam per R et S, eodem radio $= \frac{m}{n}$ pert. bini arcus circulares PQ et RS limites tangentes; quo facto aggerem ſecundum lineam mixtam APQRSD duci conueniet. Hoc modo maximum lucrum acquiretur, quod maius erit, quam ſi agger iuxta ipſos limites duceretur, exceſſu exiſtente:

$$\frac{mm}{n}(\beta + \gamma + \cot.\beta + \cot.\gamma - \pi);$$

aggeris enim longitudo diminuetur quantitate:

$$\frac{2m}{n}(\beta + \gamma + \cot.\beta + \cot.\gamma - \pi) \text{ pert.}$$

at agri incluſi ſpatium minuitur quantitate:

$$\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma+\cot.\beta+\cot.\gamma-\pi) \text{ pert. II.}$$

Quodſi lineae BA et CD vel alterutra earum minor fuerit quam portio inde reſcindenda, puncta P et S in A et D capi oportet, et arcus PQ et SR ſemper eodem radio $=\frac{m}{n}$ pert. deſcribendi tantum lineam BC tangent. Hoc caſu non opus eſt, vt ſit $BC>\frac{m}{n}(\cot.\beta+\cot.\gamma)$ ſed ſufficit, ſi BC non fuerit minor quam BQ et CR, quippe quae partes BQ et CR minores erunt quam caſu praecedente. Si alteruter angulorum B et C intus vergat, in eo nulla correctio locum habet, ſed tantum angulus extus vergens arcu erit ſubtendendus.

Si fuerit praeciſe $BC=\frac{m}{n}(\cot.\beta+\cot.\gamma)$, puncta Q et R conuenient, prodibitque vnus arcus continuus PQRS limites tangens, iuxta quem aggerem conſtrui oportet. Sin autem recta BC minor fuerit quam $\frac{m}{n}(\cot.\beta+\cot.\gamma)$ neque rectae BA et CD tam ſint paruae, vt praecedens ſolutio locum habere poſſet, ſequenti modo ſolutio eruetur:

Fig. 7. Cum euidens ſit, aggerem intra rectam BC cadere, is etiam maximi proprietate gaudebit, ſi rectae AV et BV ad concurſum V productae limites conſtituerent. Erit autem angulus $V=2\beta+2\gamma-180°$; vnde poſita recta $BC=b$, vt ſit $b<\frac{m}{n}(\cot.\beta+\cot.\gamma)$ pert. erit $BV=\frac{b\,\sin.2\gamma}{\sin.(2\beta+2\gamma-180°)}=-\frac{b\,\sin.2\gamma}{\sin.(2\beta+2\gamma)}$ et $CV=-\frac{b\,\sin.2\beta}{\sin.(2\beta+2\gamma)}$.

Tum

Tum capiatur $VP=VS=\frac{m}{n}\cot.(\beta+\gamma-90^\circ)=-\frac{m}{n}\tang.(\beta+\gamma)$ et per puncta P et S radio $=\frac{m}{n}$ pert. ducatur arcus circuli PQRS, limites AB et CD in P et S tangens, qui dabit ductum aggeris. Quodsi ponamus $b=\frac{\lambda m}{n}(\cot.\beta+\cot.\gamma)=\frac{\lambda m \sin.(\beta+\gamma)}{n \sin.\beta \sin.\gamma}$ vt sit $\lambda<1$, reperitur:

$$BP=\frac{m}{n}(\lambda \cot.\beta-(1-\lambda)\tang.(\beta+\gamma))$$

$$CS=\frac{m}{n}(\lambda \cot.\gamma-(1-\lambda)\tang.(\beta+\gamma)).$$

Quantum autem lucrum hoc modo obtineatur, ita cognoscetur: Cum sit

$$VP+VS-PQRS=\frac{2m}{n}(\beta+\gamma-\tang.(\beta+\gamma)-\pi) \text{ et}$$

$$VPQRSV=\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma-\tang.(\beta+\gamma)-\pi)$$

tum vero $BV+CV-BC=-\frac{b(\sin.2\beta+\sin.2\gamma\sin.(2\beta+2\gamma))}{\sin.(2\beta+2\gamma)}$

seu $BV+CV-BC=-\frac{2\lambda m}{n}(\cot.\beta+\cot.\gamma+\tang.(\beta+\gamma))$

$$=-\frac{2\lambda m}{n}\cot.\beta\cot.\gamma\tang.(\beta+\gamma)$$

qua expressione inde ablata, prodit aggeris diminutio:

$$PB+BC+CS-PQRS=\frac{2m}{n}(\beta+\gamma+\lambda\cot.\beta+\lambda\cos.\gamma -(1-\lambda)\tang.(\beta+\gamma)-\pi)$$

$$=\frac{2m}{n}(\beta+\gamma-(1-\lambda\cot.\beta\cot.\gamma)\tang.(\beta+\gamma)-\pi)$$

Deinde ob $\triangle BVC=-\frac{bb\sin.2\beta\sin.2\gamma}{2\sin.(2\beta+2\gamma)}=-\frac{\lambda\lambda mm}{nn}\cot.\beta \cos.\gamma\tang.(\beta+\gamma)$

fit campi includendi diminutio: $BPQRSC=$

$$\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma-(1-\lambda\lambda\cot.\beta\cos.\gamma)\tang.(\beta+\gamma)-\pi)=$$

$$\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma+\lambda\lambda\cot.\beta+\lambda\lambda\cot.\gamma-(1-\lambda\lambda)\tang.(\beta+\gamma)-\pi)$$

 vnde

vnde totum lucrum aestimandum erit:

$$\frac{mm}{n}(\beta+\gamma-\text{tang.}(\beta+\gamma)+\lambda(2-\lambda)\cot.\beta\,\text{cos}\!\text{ſ}.\gamma\,\text{tang.}(\beta+\gamma)-\pi)=$$
$$\frac{mm}{n}(\beta+\gamma+\lambda(2-\lambda)(\cot.\beta+\text{coſ}.\gamma)-(1-\lambda)^2\text{tang.}(\beta+\gamma)-\pi).$$

Coroll. 1.

27. Si rectae AB et DC extus conuergant, vti in figura exhibentur, erit $2\beta+2\gamma>180^\circ$, ideoque $\beta+\gamma>90^\circ$, vnde tang. $(\beta+\gamma)$ fit negatiua, hincque $BP>\frac{\lambda m}{n}\cot.\beta$ et $CS>\frac{\lambda m}{n}\cot.\gamma$. Qui etiam poſito $\beta+\gamma=90^\circ+\theta$, vt ſit $V=2\theta$ habebitur $BP=\frac{m}{n}(\cot.\beta+\frac{(1-\lambda)\text{coſ}.\gamma}{\text{ſin}.\beta\,\text{ſin}.\theta})$ et $CS=\frac{m}{n}(\cot.\gamma+\frac{(1-\lambda)\text{coſ}.\beta}{\text{ſin}.\gamma\,\text{ſin}.\theta})$ adeoque $BP>\frac{m}{n}\cot.\beta$ et $CS>\frac{m}{n}\cot.\gamma$.

Coroll. 2.

28. Hoc ergo caſu, quo $\beta+\gamma=90^\circ+\theta$, nihil obſtat, quo minus ſolutio inuenta applicari poſſit, dummodo rectae BA et CD ſuperent valores pro BP et CS inuentos. Sin autem altera vel vtraque fuerit breuior, arcus circuli radio $\frac{m}{n}$ deſcribendi per terminum breuioris ita duci debet, vt longiorem tangat; at ſi ne hoc quidem fieri queat, per vtrumque terminum A et D ita ducatur, vt longiorem tangat.

Coroll. 3.

29. Quodſi autem fuerit $\beta+\gamma=90^\circ+\theta$, et ſolutionem inuentam applicare liceat, erit aggeris diminutio:

$$\frac{2m}{n}(\beta+\gamma+\cot.\beta+\text{coſ}.\gamma-\pi+(1-\lambda)\cot.\beta\cot.\gamma\cot.\theta)$$

Campi

Campi autem includendi decrementum

$$\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma+\cot.\beta+\cot.\gamma-\pi+(1-\lambda\lambda)\cot.\beta\cot.\gamma\cot.\theta)$$

ita vt verum lucrum fit

$$\frac{mm}{n}(\beta+\gamma+\cot.\beta+\cot.\gamma-\pi+(1-\lambda)^2\cot.\beta\,\mathrm{cof.}\gamma\cot\theta).$$

Coroll. 4.

30. At fi rectae BA et CD intus conuergant, quo cafu angulus θ fit negatiuus, partes BP et CS minores euadunt, quam cafu $\lambda = 1$, ideoque arcus circuli vltra rectam BC porrigeretur, quod cum naturae aduerfetur, hoc cafu verum maximum locum non inuenit. Quod etiam inde patet, quod intra rectas BA et CD conuergentes circulum radii $= \frac{m}{n}$, qui vtramque tangat, defcribere non licet.

Scholion 1.

31. Antequam cafum rectarum BA et CD intus conuergentium perpendamus, confideremus cafum, quo funt parallelae, ideoque $\beta+\gamma = 90°$, et $\theta = 0$, atque $BC = b = \frac{\lambda m}{n\,\mathrm{fin}.\beta\,\mathrm{fin}\,\gamma} = \frac{2\lambda m}{n\,\mathrm{fin}.\,2\beta}$, exiftente $\lambda < 1$. Fig. 8.
Sit autem $BA > \frac{m}{n}\cot.\beta$ et $CD > \frac{m}{n}\cot\gamma$; per folutionem iam partes BP et CD capi deberent infinitae; quod cum fieri nequeat, arcum circularem ita per terminum breuiorem D duci conueniet, vt alteram rectam BA tangat, radio $= \frac{m}{n}$, ac fi effet etiam $BA < BP$, alio radio circulus per A et D duci deberet, quia rectam BA in A tangeret. Quantum igitur hinc lucrum oriatur, generalius inueftigemus: Sit $CD = c$, ac demiffo

misso ex D in BA perpendiculo DM, erit $DM = b\,\text{fin.}\,2\beta = \frac{2\lambda m}{n}$, et $BM = c + b\,\text{cof.}\,2\beta$; ponatur radius circuli $DO = MN = z$, erit $DN = b\,\text{fin.}\,2\beta - z$, et $ON = \sqrt{(2bz\,\text{fin.}\,2\beta - bb\,\text{fin.}\,2\beta^2)}$; vocetur autem angulus $DON = \Phi$, erit $\frac{b\,\text{fin.}\,2\beta - z}{z} = \text{fin.}\,\Phi$ et $z = \frac{b\,\text{fin.}\,2\beta}{1+\text{fin.}\,\Phi}$; ideoque $ON = PM = \frac{b\,\text{fin.}\,2\beta\,\text{cof.}\,\Phi}{1+\text{fin.}\,\Phi}$; hinc arcus PQRD $= \frac{(90^\circ + \Phi)\,b\,\text{fin.}\,2\beta}{1+\text{fin.}\,\Phi}$. Quare ob $BP = c + b\,\text{cof.}\,2\beta + \frac{b\,\text{fin.}\,2\beta\,\text{cof.}\,\Phi}{1+\text{fin.}\,\Phi}$, respectu casus, quo agger secundum ipsos limites duceretur, in longitudine aggeris lucraremur $b + 2c + b\,\text{cof.}\,2\beta + \frac{\beta\,\text{fin.}\,2\beta\,\text{cof.}\,\Phi}{1+\text{fin.}\,\Phi} - \frac{(\frac{1}{2}\pi + \Phi)\,b\,\text{fin.}\,2\beta}{1+\text{fin.}\,\Phi}$

Porro est sector $DOP = \frac{(\frac{1}{2}\pi - \Phi)\,bb\,\text{fin.}\,2\beta^2}{2(1+\text{fin.}\,\Phi)^2}$, area autem $BCDOP = bc\,\text{fin.}\,2\beta + \frac{1}{2}bb\,\text{fin.}\,2\beta\,\text{cof.}\,2\beta + \frac{bb\,\text{fin.}\,2\beta^2\,\text{cof.}\,\Phi}{(1+\text{fin.}\,\Phi)^2} + \frac{bb\,\text{fin.}\,2\beta^2\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{2(1+\text{fin.}\,\Phi)^2}$, vnde in magnitudine campi perdimus:

$$bc\,\text{fin.}\,2\beta + \tfrac{1}{2}bb\,\text{fin.}\,2\beta\,\text{cof.}\,2\beta + \frac{bb\,\text{fin.}\,2\beta^2\,\text{cof.}\,\Phi}{(1+\text{fin.}\,\Phi)^2}$$
$$+ \frac{bb\,\text{fin.}\,2\beta^2\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{2(1+\text{fin.}\,\Phi)^2} - \frac{(\frac{1}{2}\pi + \Phi)\,bb\,\text{fin.}\,2\beta^2}{2(1+\text{fin}\,\Phi)^2}.$$

Hinc igitur posito Φ constante statim patet, eo maius fore lucrum, quo maiorem capere liceat lineam $CD = c$; ea enim elemento dc aucta, lucri augmentum erit $dc(2m - nb\,\text{fin.}\,2\beta) = 2(1-\lambda)\,m\,dc$. Cum autem c detur, sumto angulo Φ variabili, lucrum erit maximum, si

$$m b \sin. 2\beta \left(d. \frac{\cos.\Phi}{1+\sin\Phi} - d. \frac{\frac{1}{2}\pi+\Phi}{1+\sin.\Phi^2)}\right) =$$

$$n b b \sin. 2\beta^2 \left(d \frac{\cos.\Phi}{(1+\sin.\Phi)^2} + \tfrac{1}{2} d. \frac{\sin\Phi\cos\Phi}{(1+\sin.\Phi)^2} - \tfrac{1}{2} d. \frac{\frac{1}{2}\pi+\Phi}{(1+\sin.\Phi)^2}\right),$$

quae aequatio euoluta commode ad hanc reducitur:

$$m = \frac{n b \sin. 2\beta}{1+\sin.\Phi} = n z, \text{ ita vt sit } z = \frac{m}{n}$$

vti quidem iam ex superioribus liquet. Erit ergo

$$1 + \sin.\Phi = \frac{n b \sin. 2\beta}{m} = 2\lambda \text{ et } \sin\Phi = 2\lambda - 1.$$

Quia $\lambda < 1$, ponatur $\lambda = \cos.\zeta^2$, erit $\sin.\Phi = 2\cos\zeta^2 - 1 = \cos. 2\zeta$, et $\Phi = 90^\circ - 2\zeta = \frac{1}{2}\pi - 2\zeta$; hinc $\cos.\Phi = \sin 2\zeta$.

Diminutio ergo aggeris secundum longitudinem ob $b = \frac{2 m \cos.\zeta^2}{n \sin. 2\beta}$ erit $= 2c + \frac{2 m \cos.\zeta \cos.(\beta-\zeta)}{n \sin.\beta} - \frac{m}{n}(\pi - 2\zeta)$ et diminutio agri inclusi:

$$\frac{2 m c \cos.\zeta^2}{n} + \frac{m m}{n n}\left(\sin.\zeta\cos.\zeta + \frac{2\cos.\zeta^3\cos.(2\beta-\zeta)}{\sin. 2\beta} - \tfrac{1}{2}(\pi-2\zeta)\right).$$

Scholion 2.

32. Quod si lineae BA et CD intus conuergant, vt sit $\beta+\gamma = 90^\circ - \theta$, et $BC = b < \frac{m \cos.\theta}{n \sin.\beta \sin.\gamma}$, quaestio est magis difficilis, verumtamen ex principiis hactenus stabilitis expediri poterit. Huc imprimis pertinet casus, quo insula quaedam figurae et magnitudinis cuiuscunque aggere esset cingenda, cuius figura si fuerit polygonum, cuius singula latera superent quantitatem $\frac{m}{n}(\cot.\frac{1}{2}p + \cot\frac{1}{2}q)$ existentibus, p et q angulis cuique lateri adiacentibus, quaestio nullam habet diffi-

cultatem, dum ſinguli anguli arcubus circuli, cuius radius eſt $=\frac{m}{n}$ pert. ita ſubtendi debent, vt latera ſiunt tangentes At ſi quaedam latera, vel adeo omnia, ſint minora, peculiari ſolutione eſt opus, cui autem hic non immoror, cum quaeſtio digna videatur, quae omni cura euoluatur, et ad vſum communem accommodetur; quod opus, vel aliis perficiendum relinquo, vel in tempus magis opportunum mihi reſeruo.

PHYSI-

PHYSICA.

AD OBSERVATIONES ET EXPERIMENTA DE MERCVRIO EX MANVSCRIPTIS *HERMANNI BOERHAAVE* SVPPLEMENTVM I.

recenſente

CAROLO FRIDERICO KRVSE.

Anno 1734. obtulit Collegio Philoſophorum in Brittannia obſeruationes et experimenta de argento viuo (*a*), anno vero inſequenti Academiae Regiae Scientiarum in Galliis ſuper eadem re (*b*) exhibuit quaedam ſummus *Hermannus Boerhaaue.*

Ex vtrisque caſti, vere Phyſici obſeruatis conſtitit immutabilis prorſus natura Hydrargyri, dum variata interim ſpecie, in nouas formas mutatus appareret.

Anno 1737. data ad Senatum Sapientum in Brittannia diſſertatione (*c*) recitauit et alios, quos illi vltro explorando labores, incredibili ſumtu et patientia adhibuit. Vnde, detecta eiusdem conſtantia, auri ſimul indoles perſpecta habetur.

(*a*) Philoſophical Transactions No. 430. pag. 145.
(*b*) Memoires de l'Acad Royale des Scienc. 1736. pag. 539. et Philoſoph. Transact. No. 445. pag 343.
(*c*) Philoſoph. Transact. No. 444. pag. 368.

Nacto otio plura promiserat; promissis praeuenere cunctis flebilia bonis fata (*d*). Moriens, tradiderat manuscripta nepotibus, *Hermanno* (*e*) et *Abrahamo* (*f*) *Kaau Boerhaaue*, quibus praematura morte ereptis ad me peruenere scripta manu viri omni laude maioris.

Legens interim, perlegens, fastidiosa, herculei laboris taedia, piaculum duxi, acto labore adeo iucunda vnice in museo seruare. Non pauca enim docent atque prioribus, iam editis, collata, lucem affundunt, dicta firmant, veritatem adserunt.

In prima, ad Illustrem Brittanniae Eruditorum societatem, dissertatione lucide asseruit *Boerhaauius*, per solos motus mechanicos Mercurium ex mitissimo fieri acrem, ex insipidissimo acquirere saporem, ex splendidissimo fieri nigrum, ex fluido consistentem; ex eadem vero constat, sola ignis actione redire iterum in pristi-

(*d*) 1738. Septembr. 23. die.

(*e*) Socero meo, quem 7. Octobr. 1753. fato functum lugeo. Hic Inuictissimae *Elisabethae*, Augustae, Piae, Felicis, Orbis Russici Imperatricis, Consiliarii intimi, Archiatrorum Comitis et supremi, per vniuersum Imperium, rei medicae Directoris munere fungens, felicissimi, quem vnquam Russica tellus aluit, Medici nomen meruit.

(*f*) *Hermanni* frater, iunior, cuius scripta meritaque vel mediocriter in litteris medicis versatis, non latent. Hic, febre acuta cum delirio perpetuo correptus, vndecima morbi die, 6. Iulii 1758. esse desiit. Vita eius paucis, ast verissimis, lineis delineata est in Summario Nouor. Commentar. huius Academiae Tom. IV.

priſtinam formam, ludere perſonas mutatas, laruaque depoſita, alis et talaribus volare mercurium, nec tormentis his mutari.

Ibidem docuit, aetatem qui hermetica in arte conſumpſerat, auctor, neque feces ponere ignis tormentis, neque leuiorem fieri mercurium., cuius ad aquae, aceti ve bullientis calorem ſubortas mutationes eodem in ſcripto recenſet.

Ex iis autem, quae ad Regiam in Galliis florentem Academiam dedit, liquido apparet, nec in igne diutiſſime digerendo, ſiue renouatus oſcillet aer, ſiue repagulis arceatur, tranſire ſolidum in metallum, argentum viuum.

Docuit porro, ibidem, ex plumbo per ſales fixos haud generari mercurium, quidquid clamant Chymicorum nobile par, Pater et filius *Helmontii*: quidquid offert *Becherus* (*g*). Nec illud praeſtare acetum ſtillatitium, vt perhibet ſubtiliſſimus *Iſaacus Hollandus*, primus trium principiorum chemicorum auctor, (*h*) labore fideliore didicit, docuitque caſte, ſuosque

(*g*) Neque obeſſe puto, quae hac de re exhibuit celeberrimus *Groſſe*. Vid. eius Recherches ſur le Plomb. Memoires de l'Acad. Royal. des Scienc. 1735. p. 313. et ſequentibus.

(*h*) „Recentiſſimi, de corporum principiis chemicis tractantes, perhibent: Arabes atque Saracenos ſaeculo XII. et XIII. inueniſſe, „metalla nil aliud eſſe, quam argentum viuum per ſulphur „condenſatum hocque ex Gebri, Auicennae atque Rhaſis mo„numentis patere. Efficta haec per Arabes principia, ab hoc „tempore vsque ad ſaeculi XVI. initium, Chymici interea clari, „absque ſuosque errores expurgantis Chemiae aſſertor *Boerhaave* (i). Poſt reſuſcitantium ſalium impotentiam, per

---

„absque vlla retractione adoptarunt, veluti *Raymundus Lullius*, „*Arnoldus de Villa Noua* et *Ioannes Iſaacus*, *Hollandus* vulgo „dictus. Poſtquam vero verſus dicti ſaeculi initium *Baſilius Va*„*lentinus*, et *Theophraſtus Paracelſus* imprimis, Chemiae operam „dedere, factum eſt, vt iſte, praeter haec duo, ab Arabibus „effićta principia, aliud nouum, quod ſalis nomine inſigniebat, „prioribus adiiciendum exiſtimauerit etc.„

Doleo auctorem, ad quem ſuperius memorata pertinent, accuratius non euoluiſſe *Boerhaauium*, celebre licet illum dicat nomen eſſe, in re tamen neglexiſſe videtur. Maluit nimirum citare diſſertatiunculam, modo hanc, modo illam, vnicum interdum ſui Auctoris fructum, neceſſitatis ſaepe lege, non raro alieno arbore natum, quam ad *Hombergium*, *Boerhaauium*, *Hofmannum*, *Stahlium* ve crebrius prouocare; vtut foetus eiusmodi citati, ingentibus his viris, re propius examinata principium vitale deberent. Captus hic Auctor voluptate enucleandi *Boerhaavii*, aliorumue auctorum grauiſſimorum, fato iam functorum, erroribus, illum vix citat, quin reprehendat. Melius egiſſet, ex puriſſimo fonte huius Viri hauriendo, ſi nobis accuratius, quae ad hermeticae artis hiſtoriam pertinent, exhibuiſſet. *Boerhaavio* enim edoceri potuiſſet, *Gebri* teſtimonium ad VII. potius quam ad XII. ſaeculum pertinere. Syſtema duorum principiorum chemicorum, mercurii et ſulphuris, proinde iam illo tempore celebrabatur. Nihilominus ipſo *Gebro* adhuc edocemur, ante ipſum iam viguiſſe, hanc, antiquiſſimam certe opinionem, dum in principio *ſummae perfectionis metallorum* ſcribit, ſe non niſi libros antiquorum abbreuiaſſe; partem forſan librorum, de hac arte, quos Imperio *Diocletiani* combuſtos perhibet *Suidas*. *Baſilius* vero *Valentinus* quem *Paracelſo* ſaeculo priorem, iure indicat *Boerhaauius*, minus recte ad initium XVI. ſaeculi celebratur. *Paracelſum* vero ex *Baſilio* doctrinam de tribus elementis illo tempore hauſiſſe, atque, preſſo auctoris nomine, ſuam feciſſe per ipſum argentum viuum, ex plumbo dum mercurium educere conatur, eundemque ex ſtanno eodem adminiculo extrahere tentat, fruſtra fuit (*k*).

In tertia denique ad ſapientes Brittannos data diſſertatione, mercurium e venis eductum labe quadam inquinatum, ab ipſa origine illi concreta intimeque inoleſcente, ab alchimiſtis credi, perhibet *Boerhaavius*, qui, ad mentem illorum, defaecationem impuri feliciſſime tum demum obtineri crediderat, quando puriſſimis corporibus, ſuae naturae ſimilibus, miſceretur, atque ope ignis inde iterum ſepareretur. Miſcuit ideoque auro Mercurium, totiesque igne illum inde auocans, conſtan-

feciſſe extra omne dubium poſitum eſt. *Baſilius Valentinus* vero iuuenis vidit Belgium et Angliam. *appendic. ad XII. claues.* artem cereuiſiariam optimam ibi reperit: Hac autem occaſione *Iſaaci Hollandi* opera vidiſſe, atque ex illis doctrinam de tribus principiis retinuiſſe, veroſimile eſt, ait enim in coenobio ſe ex libris didiciſſe, nullum licet auctorem citet; *Hollandum* vero, *Baſilio* antiquiorem, doctrinam de tribus principiis profitentem videre licet, opera ſubtiliſſimi huius auctoris vel fugitiuo oculo perluſtranti. Neque hoc *Paracelſi* temporibus ignorabatur: *Severinus* Danus etenim Epiſtolam ad *Paracelſum* dedit, quae praefixa exſtat operibus *Paracelſi*, ibi citat *Iſaacum Hollandum* pro auctore diſciplinae Paracelſicae et laudat.

(*i*) Meretur ab omnibus legi oratio quam habuit 1718. de Chemia errores ſuos expurgante, illuſtris auctor, antequam ad egregium, prae caeteris, hoc ſtudium animum adiungant tirones.

(*k*) Miror Cl. *Vogel* mercurium, in oleo Vitrioli currentem adhuc ſtatuere, atque exinde pondus inſigne huius acidi deriuare. In inſtit. chemic. §. 413. et 417. pulcherrime alias chemica tractantem.

constantiam et simplicitatem vtrorumque admiratus, spem figendi cum auro argentum vivum, ignis actione, seposuit.

Neque substetisse hic indesessum rerum naturalium scrutatorem, ex sequentibus patebit (*l*). Selegi quippe Experimenta quaedam, ex diario egregii viri, nullis proh dolor! annotationibus diuite, quaeque simpliciter trado, verbis ipsissimis Auctoris, minus licet speciosis, ast magis veris, vtens. Haec, quoad sermonem, operationis atque effectuum ratione, in paragraphos dispescui, vt labores et producta melius a se invicem distingui possint. Caeterum, simplex veri est sigillum. En summi viri verba:

§. 1.

17 $\frac{10}{8}$ 36 Mercurii Amstelodamensis optimi vncias XXXII. destillaui ex retorta vitrea, pura, igne arenae, ita, vt nihil prorsus mercurii fluidi in fundo retortae maneret.

§. 2.

Mercurium egressum, siccatum, effudi semper in retortam eandem, et destillaui modo §. 1.

§. 3.

(*l*) Experimenta illa, quae ad Dissertationes de Mercurio, in actis Londinensibus atque Parisiensibus impressas, spectant, praemittenda censeo, illis quorum nullam neque ipse auctor adhuc mentionem fecit, moneat licet aliquo in loco, superesse ipsi adhuc experimenta, quibus euertatur spes alchymistarum primi ordinis, quam Caesaribus, Regibus, Principibus fastuose depraedicatam, caro vendiderunt.

§. 3.

Singulis deſtillationibus naſcebatur rubri (*a*) quid in retorta.

§. 4.

Labore ſedulo continuaui deſtillationes vsque $17\frac{26}{2}37$, ſemper accurate fluidum totum eleuando.

§. 5.

Exiuerant tunc Mercurii Vnc. XXIV, 511 vicibus iam deſtillati. In fundo retortae erant genitae Vnc. ijß praecipitati rubri, ſcintillantis. In chartulis, quibus ſingulis vicibus mercurius erat exſiccatus, poſt quamque deſtillationem, multum mercurii forma nigra reſtabat. Ita vt perierint 511. deſtillationibus de mercurio Vnc. vß. id cauere non potui omni cura, id et in operatione inchoata $17\frac{10}{9}31$. contigit (*b*), ſic fere $5\frac{1}{6}$ grana perierunt ſingula deſtillatione, ſollicite licet caueretur (*c*).

 §. 6.

(*a*) Vide primae, datae ad Brittannos, de mercurio diſſertationis §. IV. Ibidem enim deſcribit auctor operationem huic ſimillimam, niſi tempore ac laboribus vlterioribus protractis diuerſam cerneres.

(*b*) Operatio $17\frac{10}{9}31$. eadem eſt, quam deſcripſit in prima de mercurio ad Brittannos diſſertatione §. IV. vsque ad XII.

(*c*) Comparari vtique debet proceſſus hic cum 511. deſtillationibus, quae maximam partem primae de mercurio diſſertationis conſtituunt; ibidem enim mercurius 52 vicibus deſtillatus

1) Ex fluido in puluerem rubrum ſplendentem pro $\frac{1}{52}$ ſui ponderis vertebatur.

2) 52 deſtillationibus illis perierunt mercurii drachmae $6\frac{1}{2}$. ergo $7\frac{1}{2}$ grana, ſingula in deſtillatione.

3)

§. 6.

$17\frac{27}{3}37$. Praecipitati rubri (§. 5.) nati Vnc. ijß addito pauco mercurii 511. vicibus destillati, ex chartulis in quibus exsiccabatur collecti, destillaui e retorta luto obducta, igne summo, vt canderet retorta per horam.

§. 7.

Exiit mercurius reuificatus ad Vnc. ij. in fundo vero retortae gr. xviii. pulueris rubri (*d*).

§ 8.

3) Idem mercurius 448. vicibus rursus destillatus de pondere amisit Vnc. iv. dr. ij. gr. xxxviiij. Ergo $4\frac{1}{2}$ grana singula in destillatione perierunt, dum toties destillando igne actus pro $\frac{11}{72}$ sui ponderis in puluerem rubrum vertebatur.

4) In toto vero mercurius 500 vicibus destillatus, pro $\frac{5}{15}$ sui ponderis, illo igne in puluerem rubrum versus est. Mercuril vero fluidi ab operatione superfuere Vnc. ix. dr. v. quae excedunt parum dimidiam adhibiti hydrargyri quantitatem. Perierunt vero Vnc. v. dr. j. gr. xxxxviiij. Ideoque grana v. singula in destillatione.

5) Conueniunt proinde pulcherrime duae, diuersis temporibus peractae, operationes, ex quibus plura meditationi opportuna ab idoneis, vlterius erui possunt.

(*d*) Drachmae tres ac grana quadraginta duo perierunt. Quomodo? Vide quae de insigniore reuificandi ex praecipitato mercurii dispendio monet auctor, in prima de mercurio dissertatione §. VIII corol. 8. Vix enim mihi persuadere possum, errorem autographi esse: primus enim foret, quem in scriptis accuratissimi huius viri reperiissem. Crediderim, multa enucleandae huic quaestioni conferre, experimenta, quae Celeb. *Hombergius* cum metallis in foco *Tschirnhausiano* olim instituit, quaeque in actis scientia et experientia ditissimis academiae Parisinae legi possunt.

§. 8.

Has (*e*) miſcui cum Vnc. XXIV. mercurii 511. vicibus deſtillati (§. 5.).

§. 9.

His (§. 8.) admiſcui Vnc. VIII. dr. ij. mercurii 511. vicibus deſtillati, cui et ſuus mercurius, ex praecipitato regeneratus, iam admiſtus erat (*f*).

§. 10.

Habui ergo mercurii 511. vicibus deſtillati per ſe et reuificati Vnc. XXXIV. et dr. ij.

§. 11.

Has (§. 10.) deſtillaui ſemper accurate modo §. 1. hodie incipiendo $17\frac{8}{3}37$. vsque ad $17\frac{5}{11}37$. 448. vicibus.

§. 12.

Tum habui mercurii mille et nouies per ſe iam deſtillati Vnc. XVII. Et praecipitati rubri in retorta Vnc. j. dr. jß. (*g*).

(*e*) Scilicet Vnc. ij. mercurii ex praecipitato reuificati §. 7.

(*f*) Quas hic iudicat auctor Vnc. VIII. dr. ij. mercurii 511. vicibus deſtillati pars maxima mercurii eſt, quem obtinuit aliquando ab operationibus, quas deſcripſit in prima de mercurio diſſertatione §. 4. 5. 6. 7. 8.

(*g*) Perierunt ergo Vnc: XVI. gr. XXX. praecipitati vero rubri longe minus natum vltimis his 448. deſtillationibus, quam quidem in praecedentibus. Cauſam huius phaenomeni in prima diſſertatione innuit auctor §. 5.

§. 13.

Mercurium (§. 12.) per chartam calidam, puram, ſiccam, colatum, vaſe vitreo, puro, ſicco ſeruaui, titulo mercurii 1009. per ſe deſtillati (*b*).

§. 14.

Praecipitati nati (§. 12.) dr. jß. ſeruaui titulo praecipitati per ſe mercurii 1009 deſtillati; reliquum vero deſtillaui ex retorta loricata, igne aperto.

§. 15.

Obtinui mercurii puri dr. vij. gr. VIII. in fundo retortae ſupererat pulueris rubri fixioris gr. XV. (*i*).

§. 16.

Mercurium illum (§. 12.) ponderaui ope bilancis induſtria clariſſimi *s'Graueſande*, pendebat ad aquam vt 13 $\frac{59}{100}$. ad 1. $17\frac{15}{2}38$.

§. 17.

Mercurius regeneratus ex praecipitato mercurii 1009 per ſe deſtillati erat ad aquam vt 13 $\frac{65}{100}$ ad 1., ponderante eodem celeberr. viro $17\frac{16}{2}38$. (*k*).

Eous-

(*b*) De hoc plura impoſterum, quando ad alia longe operoſiora *Boerhaavii* experimenta peruenero, quibus perficiendis hunc adhibuit.

(*i*) Periere itaque gr. XXXVII. Vide §. 7. huius ſupplementi notam.

(*k*) Quibus iam impreſſas *Boerhaavii* de Mercurio Diſſertationes adeundi occaſio deficit, habent hic tabulam, ſeriem expanſionum varii mercurii complectentem, quas vt plurimum vna cum celeberrimo *s'Graueſandio* abſoluit, illuſtris *Boerhaave*.

☉

Eousque Mercurium, igne torſit, ſolitarium Ill. *Boerhaave*, non contentus primis datis ad Brittannos Diſſertationibus iam indicatis, vt diſceret, quid tandem ignis actione diuturniore eueniret. Conſtans ſimili modo ſe exhibuit mirabile hoc, noſtris temporibus frigore actum, omnino malleabile, metallum. Nulla huic ſupplemento corollaria appoſui: deduxit plura hac in arte ſeuerus quidem, vberrimus tamen auctor, quae in prima eius de mercurio diſſertatione legi poſſunt, nimia ſi huc transferri debuiſſent, adiecto fortaſſis vnico: quod mercurius 448. vicibus, ſimili ac antea igne adhuc actus, idem perſiſteret, varias vario igne luderet perſonas, maiori tamen igne vtcunque in priſtinam formam rediret.

OBSER-

☉ ad ▽ vt $19\frac{119}{500}$. ad 1.
☿ venalis ſemel deſtillatus ad ▽ vt $13\frac{57}{100}$. ad 1.
☿ 511 vicibus per ſe deſtillatus ad ▽ vt $14\frac{11}{100}$. ad 1.
☿ 1009 per ſe deſtillatus ad ▽ vt $13\frac{59}{100}$ ad 1.
☿ reſuſcitatus ex praecipitato mercurii 1009. deſtillati ad △ vt $13\frac{65}{100}$ ad 1.
☿ aliquoties ab ☉ deſtillatus ad ▽ vt $13\frac{55}{100}$. ad 1.
☿ 750. vicibus ab ☉ deſtillatus ad ▽ vt $13\frac{52}{100}$. ad 1.
☿ 877. vicibus ab ☉ deſtillatus ad ▽ vt $13\frac{50}{100}$. ad 1.
☿ aliquoties ab ☽ deſtillatus ad ▽ vt $13.\frac{55}{100}$. ad 1.
☿ 217. vicibus ab ☽. deſtillatus ad ▽ vt $13.\frac{50}{100}$. ad 1.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE POTISSIMVM BAROMETRICAE ET THERMOMETRICAE ANNI 1757. CVM CONSECTARIIS INDE DEDVCTIS.

Auctore

I. A. BRAVN.

Methodus fere eadem in his obſeruationibus eſt adhibita, quae in antecedentibus, hinc ſuperfluum eſſet, pluribus rurſus hic exponere de inſtrumentis et modo, quo ſint confectae. Repraeſentant ſcilicet obſeruationes barometricae maximas et minimas altitudines cuiuslibet menſis per integrum annum cum differentiis, vti thermometricae maximum et minimum caloris gradum cuiuslibet menſis per totum annum cum differentiis. Barometrum idem ſimplex eſt adhibitum, in quo pollices ſunt Pariſienſes notati, qui in centum partes ſunt diviſi. Numerus igitur ante punctum pollices Pariſienſes, poſt punctum eorum partes centeſimas ſignificat. Idem quoque Thermometrum eſt adhibitum, in quo ſcilicet (o) ſignificat calorem aquae bullientis, et 150. aquae in glaciem abeuntis, quod congelationis punctum adpellatur. Haec ſcala thermometrica facile cum aliis comparari poteſt, quae ſunt vſitatae, ſi inſpiciatur comparationis ſcalarum thermometricarum vſitatiorum tabula, quam iam 1755. cum obſeruationibus noſtris ex-

exhibuimus. Inserta est Tom. VII. Comment. Acad. Nihil superest, nisi vt obseruationes ipsas repraesentemus, ita vt primum barometricae adpareant, dein thermometricae et Meteora.

Obseruationum barometricarum anni 1757. altitudines maximae et minimae cum earum differentiis, per singulos menses anni integri.

Menses.	Dies.	Maxima.	Minima.	Differ.
Ian.	24. -	28 60. -	27.47.d.15.h.11.p m.	1.13.
Febr.	1. -	28.43. -	27.05.d 21 - - -	1.38.
Mart.	26. -	28 35. -	27.30 d.9.et 15. - -	1 05.
April.	10. -	28.54. -	27.50.d 27 m. - -	1.04.
Maius	31. -	28 43. -	27.45.d 9.et 12. -	0.98.
Iunius	1. -	28.45. -	27.55.d.13. - - -	0.80.
Iulius	16.et 17	28.35. -	27 90 d.6.28.31. -	0 45.
August.	28. -	28 46. -	27.33 d.3 - - -	1.13.
Sept.	10.et 11.	28.75. -	27.45 d 19 - - -	1.30.
Octob.	2. -	28.55. -	27.05.d 17 - . - -	1.49.
Nou.	20. -	28.63. -	27.45.d.3 - - -	1.18.
Dec.	19.h.11 p.m.	29.12. -	27 85 d.5, - - -	1 27.

Max.29.12.Min.27.05.Differ max.2.7 per integr. annum.

Consectaria.

Si hae obseruationes inter se comparentur, patet primum, maximam altitudinem contigisse Decembris 19. h. 11 p. m. Est haec altitudo 29.12. plane extraordinaria, quae nunquam hic Petroburgi est obseruata. Maximae enim hic obseruatarum ad hoc vsque tempus fuere primum 29.01. siue secundum pollices Londiuenses praecise 30.95, vti ex antecedentibus obseruationibus publicatis iam satis patet. Deinde 29.10. anno 1750. Est igitur nunc spatium variationum barometricarum rursus mutandum; amplificari scilicet debet duabus partibus centesimis, tanto enim haec maior est ea, quae antea huc vsque fuit maxima, scilicet 29.10. Cum igitur huc vsque spatium, intra quod altitudines mercurii in tubo *Torricelliano* variarint, fuerit primum 2.60. ab altitudine nimirum 26.41. ad 29.01: deinde ab anno 1750. 2.69: erit nunc 2.71. ab altitudine scilicet minima 26.41. ad maximam, quae nunc est 29.12. Contigit haec altitudo maxima Decembris 19. h. 11. post meridiem, Thermometro monstrante 180. Dies fuit serenus, vti quoque dies aliquot antecedentes et subsequentes. Ventus ipso die vix fuit sensibilis, vti quoque diebus antecedentibus et subsequentibus debilis, ex oriente vt plurimum spirans. Altitudo minima accidit Februarii 21. et Octobris 17. Febr. 21. ventus fuit N. O. dies nubilus, quem sequuta est nox serena. Dies antecedentes et subsequentes fuere mixti. Octobris autem 17. ventus fuit vehementissimus W., qui iam die praecedente incepit, et nocte sequente continuauit. Dies fuit nubilus cum niue exigua, vti dies aliquot antecedentes quoque fuere nubili et sequentes mixti. Aqua fluuii Neuae ad notabilem altitudinem eodem die adscendit, thermometrum monstrabat 149.

In obseruationibus thermometricis more nostro consueto notauimus maximos minimosque gradus calo-

ris

ris per ſingulos menſes totius anni cum differentiis eorum ; obſeruationes ipſae autem ſequenti modo ſe habent :

Frigus max. ſ.		Calor minimus.	Calor max.	Differentia.
Ianuar. d.	8.	182	152. d. 16. et 17.	30.
Febr.	24.	175	145. d 14.	30.
Martii	3.	173.	135. d. 31. et 18.	38.
Aprilis	9.	148.	120. d. 24.	28.
Maii	3.	148.	99½. d. 24.	48½.
Iunii	13.	134.	103. d. 23.	31.
Iulii	15. et. 16.	124.	97. d. 12.	27.
Auguſt.	6.	138.	107. d. 1. et 21.	31.
Septembris	23.	155.	119. d 2.	36.
Octobris	14.	169.	147. d. 28.	28.
Nouembris	20.	174.	141. d. 11.	33.
Decembris	17.	187.	149. d. 3.	38.

Frigus maximum 187. Calor maximus 97. Diff. max. 90. per integrum annum.

Conſectaria.

Ex comparatione diuerſorum horum caloris graduum manifeſtum eſt, maximum frigus per integrum annum fuiſſe 187. Hic frigoris gradus quum non ſuperet gradum 200, hic 1733 et 1739. obſeruatum: manet hic huc vsque maximus. Incidit maximus huius anni frigoris gradus in Decembris 17. vento vix ſenſibili O, tempeſtate ſerena, barometro adſcendente hoc die a 28.75 ad 28 87. Ventus aliquot diebus antecedentibus et ſequentibus ex oriente debilis fuit, vti quoque tempeſtas vtplurimum ſerena diebus proxime antecedentibus et conſequentibus. Calor maximus fuit 97. Hic gradus nunquam hic Petroburgi eſt obſeruatus, aequalis eſt calori hominis naturali, et ſanguinis hominis ſani. Maximus caloris gradus, qui huc vsque hic fuit obſeruatus, quum fuerit 104, erit igitur gradus caloris huius anni 7 gradibus maior eo, qui adhuc fuit maximus. Differentia et variationum thermometricarum ſpatium maximum quum huc vsque fuerit 96. ſcilicet a gradu 104. ad 200. amplificandum nunc erit 7 gradibus, ita vt nunc ſit 103. ſcilicet a 97 ad 200. Incidit hic calor maximus in Iulii 12 h 4 poſt meridiem. H. 2 erat 99 et h. 10 ante meridiem 104. Ventus debilis fuit SW, qui quoque diebus aliquot antecedentibus et ſequentibus flauit. Eodem die circa h 4 tonitru eſt auditum, ſed tantum debile, bis enim vel ter tantum audiebatur, aliud autem tonitru h 11 p m. ſequutum eſt, quod etiam tantum e longinquo audiebatur. Barometrum deſcendens erat et attigerat 28.02 Die 10 erat 28.15. continuabat deſcendere ad diem 14.

Quodſi non ſolum gradus caloris maximus, qui hoc anno fuit obſeruatus, ſed etiam reliqui caloris gradus obſeruati expendantur; facile conſpicitur hanc aeſtatem omnium, ex quo quidem tempore obſeruationes hic inſtituuntur, fuiſſe calidiſſimam. Quum alias magni caloris gradus diu durare non ſoleant, vti frigoris; e contrario hac aeſtate fere perpetuus calor intolerabilis fuit. Nam poſt medium Maium iam dies cali-

calidiſſimi fuerunt. Monſtrabat enim thermometrum d. 19. 110, d. 20. 116, d. 22. 108, d. 23. 105, in ſole 82. d. 24, 99. d. 25. 100. d. 26, 103. d. 27, 116. Menſe Iunio d. 1. 112, d. 3. 106, d. 28. 109, d. 9. 107, d. 11. 113, d. 22. 104, d. 23. 103, d. 27. 106, d. 28. 107. Menſe Iulio d. 1. 113, d. 2. 110, d. 3. 111, d. 4. 109, d. 5. 101, d. 6. 109, d. 9. 109, d. 10. 101, d. 11. 102, d. 12. 99, d. 13. 106, diebus 14, 15 et 16. 112, d. 17. 108, d. 19. 101, d. 20 et 21. 105, d. 22. 107, d. 24 et 26. 105, d. 28. 103, d. 29. 107, d. 31. 104. Quin ipſo Auguſto multi dies adhuc ſatis calidi fuere. Monſtrabat enim thermometrum d. 1. 107, d. 11. 119, d. 13. 116, d. 15. 111, d. 21. 107, d. 23. 108, d. 26 et 27. 116, d. 31. 113. Hi gradus caloris plerique obſeruati ſunt inter h. 2. et 3. p. m. quo tempore vtplurimum maximus exiſtere calor ſolet caeteris paribus, vt frigoris gradus maximus ſiue minimi caloris gradus circa ortum ſolis vel proxime, veſperi quoque circa h. 11, quibus temporibus ad minimos caloris gradus cognoſcendos obſeruationes a nobis ſunt inſtitutae.

Primum tonitru iam contigit Aprilis 4. cum magna pluuia. Tonuit porro Maii 16. 20. Iunii 18. 27 et 28. Iulii 5. 6. 12. 13. 22. et 28. Auguſti 1 et 24. Per integrum igitur annum decies quater tonuit.

Dies hoc anno ſereni fuerunt Ianuarii 1, 2, 6, 8, 14. Februarii 6, 7, 13, 17, 18, 19, 20, 23, 24,

 25,

25, 28. Martii 1, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 20, 26, 31. Aprilis 1 nocte, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 28 et 30. Maii 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28. Iun. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 14, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30. Iulii 1, 3, 7, 8, 9, 12, 15, 16, 17, 18, 22, 23, 26, 27, 29, 30. Augusti 6, 11, 15, 17, 21, 22, 23, 27, 31. Septembris 1, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 23, 24, 30. Octobris 1 nocte, d. 2, 4, 10, 13, 14, 25. Nouembris 17, 18, 19, 20. Decembris 7, 9, 17, 19, 22, 23, 24‘ 25, 26, 27.

Nemo, opinor, sibi persuadebit, serenitatem perfectam semper hic esse intelligendam, diximus quoque diem serenum qui maiorem partem fuit serenus, licet quoque hinc inde nubes tenues se conspiciendas praebuerint. Forsitan nullo anno plures dies sereni numerati fuerint, quam hoc; serenitas enim quoque dierum hoc anno fuit extraordinaria. Reliqui dies fuerunt vel mixti, vel nubili tantum, vel cum pluuia et niue. Pluuii et niuosi dies cum ventis vehementioribus praecipue fuerunt hi: Ianuario niuosi 4. 6. 9. 10. 13. 15. 27. Februarii 3. 11. 15. Martii 2. 10. 11. 15. 17. d. 21 pluuius vt et 23. 24. d. 25. nebulosus d. 27. et 28. pluuii. Aprilis pluuii 4. 6. et quidem pluuia cum niue mixta, porro pluuius d. 7. 13. et 14. Ventus vehementior W z S cum pluuia magna et quadam aquae Neuensis altitudine solito maiore. D. 25. 26. 27. itidem pluuii. Maii 8. 9. magna procella cum mediocri pluuia

pluuia, quae per interualla toto die continuauit. D. 9. h. 1 grando quoque per aliquot momenta cecidit. Pluuii porro d. 11. 12. 16. vltimo die cum vento vehementiori item d. 20. Iunii pluuius 12. 13. 16. 18. 29. Iulii 14. 20. 22. 28. Augusti 3. 4 et 5 cum vento vehementiore W et altitudine aquae Nevensis sat magna, porro pluuii d. 13. 16. 24. Septembris d. 9. nebulosus d. 14. pluuius d. 15. niuosus et nocte prima glacies, d. 19. pluuius et 28. Octobris 6 niuosus item 11. 12. 16. cum procella ex occidente. D. 17 ventus continuauit, quem comitata est altitudo aquae fluuii Neuae. D 20 pluuius, d. 23 niuosus, d. 24 pluuius, vt et 27. D. 29 ventus W z N vehementior cum quadam altitudine aquae solito maiore. Nouembris pluuii 1. 3. Nix cum pluuia mixta d. 10, 11 et 12. magna pluuia, d. 13. exigua nix, d. 14. niuosus, d. 15. pluuiosus, d 22. 23. 25. 26 niuosi. Decembris niuosi 2. 5. d. 11 nebula densa dein nix d. 12 nebulosus, d. 13 niuosus, d 21 niuosus, thermometro 171. figurae niuis ✻ nitidissimae adparuerunt, vti fere semper, si magno frigoris gradu existente ningat. d. 30 et 31 pauca nix cecidit.

Aurorae boreales nullae insigniores se conspiciendas hoc anno praebuerunt, quamuis nonnunquam vestigia adparuerint, quum aliis annis sat frequentes fuerint, id quod etiam extraordinarium videri potest.

OBSER-

OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM A. MDCCLVIII. PETROBVRGI FACTARVM IOTIORA MOMENTA CVM ANIMADVERSIONIBVS ET CONSECTARIIS.

Auctore

I. A. BRAVN.

Obſeruationes hae Meteorologicae, eodem modo, ac praecedentes, et iisdem inſtrumentis, ſunt confectae. Complectuntur nimirum obſeruationes barometricas, thermometricas, et potiorum meteororum. Barometricae ſimplici barometro in altitudine circiter ſedecim pedum Pariſienſ. ſupra planum maris Baltici ſunt captae vt antecedentes. Numeri ante punctum, vti alias, notant pollices pedis Pariſini; numeri poſt punctum partes centeſimas eiusdem pollicis. Exhibentur hic, vti in antecedentibus, ex altitudinibus barometricis, maximae et minimae cum differentiis cuiuslibet menſis per integrum annum in tabula quadam, vt vno obtutu inſpici queant, et maxima altitudo annua cum maxima differentia, ſiue variatione ponderis atmoſphaerici per integrum annum perſpici poſſit. Additur et hic tempeſtas antecedens, comitans, et conſequens, vt relatio altitudinum barometricarum, minimum ſummarum et infimarum, ad tempeſtates pateſcat.

Ob-

Obſeruationes thermometricae hic notatae variationem caloris per ſingulos menſes totius anni indicant, ſcilicet gradus maximos et minimos caloris cum eorum differentiis, vnde ſummum frigus et maximus calor totius anni cum variatione annua cognoſcitur.

Adnotatur et hic, cum ſummis et infimis caloris gradibus annuis, ſtatus tempeſtatis cum antecedente et conſequente, et cum altitudinibus barometricis, vt et hic relatio obſeruationum thermometricarum ad barometricas et ſtatum tempeſtatis eluceſcat.

Obſeruationes haſce quoque ſecundum ſcalam thermometri Delilianam eſſe factas, vti antecedentes, vix opus eſſe videtur monere. Indicat nimirum cifra nullitatis nota, gradum caloris aquae bullientis, et numerus 150 punctum congelationis, quod iam ſatis notum.

Denique ſequuntur meteora inſigniora, ſcilicet venti vehementiores, nebulae, pluuiae, niues, grandines, tonitrua cum fulminibus, fulgura etc. quae omnia a vaporibus et exhalationibus in atmoſphaeram adſcendentibus et deſcendentibus originem trahere, et diuerſas tempeſtates efficere conſtat. Eiusmodi obſeruationes et Meteorologiae emendandae et perficiendae inſeruire, notius eſt, quam vt moneri debeat.

Progredimur igitur ad ipſas obſeruationes recenſendas.

Ad obſeruationes barometricas huius anni quod attinet, illae ſequentem in modum ſe habent:

Menſes - -	D.	Alt. barom. max.	Min.	D.	Differ.
Ianuarii	17	- - 28.50	- - 27.05.	10	- 1. 45
Februarii	27	- - 28.47	- - 27.60.	4	- 0. 87
Martii	28	- - 28.63	- - 27.15.	23	- 1. 38
Aprilis	3	- - 28.80	- - 27.68.	19	- 1. 12
Maii	2	- - 28.57	- - 27.35.	18	- 1. 22
Iunii	14	- - 28.35	- - 27.62.	25	- 0. 73
Iulii	21	- - 28.32	- - 27.40.	11	- 0. 32
Auguſti	1	- - 28.32	- - 27.63.	18	- 0. 69
Septembris	16 et 23.	28.20	- - 26.63.	26	- 1. 84
Octobris	29	- - 28.50	- - 27.02.	15	- 1. 48
Nouembris	17	- - 28.90	- - 27.13.	30	- 1. 77
Decembris	12	- - 28.85	- - 26.42.	30	- 2. 40

Ergo fuit ſumma altitudo barometrica per integrum hunc annum 28.90, et infima 26.42, adeoque differentia maxima annua 2. 48.

Haec ſumma altitudo barometrica 28. 90, ſiue viginti octo pollices pariſinos, et nonaginta partes eiusdem centeſimas ſeu fere vndecim lineas magna obſeruata mihi eſt Nouembris 17. h. 11. p. m. Antecedens altitudo erat 28. 85. et ſequens die 18. 28.68. Dies praecedentes a die 14, quo barometrum erat 28.20 fuere nubili, vento ex oriente debili vel nullo, ipſo obſeruationis tempore SO 1. Thermometrum variabat inter gradus 149 et 152, quem gradum monſtrabat ipſo obſeruationis tempore. Sequentes dies tres proximi erant fere ſereni, et barometrum deſcendebat ad 28.44, vento vix ſenſibili, frigus vero creſcebat a 153 ad 176. Pondus igitur aeris potius copiae vaporum

et

et exhalationum, quam frigori aerem condenſanti, tribuendum videtur. Caeterum ſi ſumma barometri altitudo huius anni comparetur cum ſumma altitudine anni praecedentis, ſcilicet $29\frac{12}{100}$, ſiue viginti nouem pollicum pariſinorum et vnius et dimidiae fere lineae, quae nunc omnium obſeruatarum adhuc maxima eſt; adparet, altitudinem huius anni ſummam 28.90. minorem eſſe altitudine ſumma anni praecedentis 29.12. partibus centeſimis 22. ſiue amplius $2\frac{1}{2}$ linearum. Ergo manet altitudo anni praecedentis omnium adhuc obſervatarum maxima.

Minima huius anni altitudo barometrica 26.42 mihi obſeruata eſt Decembris 30. h. 9. p. m. Obſeruatio proxime antecedens h. 2. p. m. indicabat altitudinem 26.92. et proxima ſequens diei ſequentis 31. h. 9. a. m. 27.30. Deſcendit a tribus diebus proxime antecedentibus a 27.90 ad hanc notatam altitudinem minimam, et diebus proxime ſequentibus rurſus adſcendit ad 27.90. celerrime, et porro ad 28.00. Ventus obſeruationis tempore fuit vehementiſſimus ex S, qui iam die 28. flare coepit, et ad diem 31 continuauit, licet non ſemper ex eadem ſpirauerit plaga, ſed modo S modo W fuerit. Procul dubio igitur haec exigua altitudo vehementiae venti erit praecipue adſcribenda. Thermometrum gradum caloris indicabat 148 cadente pluuia, quum per diem copioſiſſima nix cecidiſſet. Dies antecedentes et ſequentes erant fere nubili et niuoſi. Variatio caloris erat intra gradus 148 et 173, qui gradus die 27 veſperi mihi notatus eſt, quae igitur temperiei mutatio ſatis ſubita et magna.

Quod si porro haec altitudo huius anni minima comparetur cum altitudine minima omnium adhuc obseruatarum: conspicitur, hanc eidem esse aequalem. Nam omnium minima adhuc est 28.18 pedis Londin. siue 26 et fere $\frac{41}{100}$ pedis Parisini. Haec iam obseruata est 1729. Octobris 12, adeoque ante 29. annos, et quod excurrit. Merito igitur mirandum intra tantum temporis spatium nullam esse obseruatam, nisi hoc anno, quae illi esset aequalis. Caeterum ex obseruationibus antecedentibus constat, altitudinem summam barometricam ab anno 1737 Decemb. 24. ad annum 1750, adeoque tempore 13 annorum, mansisse eandem, scilicet 30.95 pedis Lond. siue fere 29.01 pedis Paris. sed 1750 creuisse ad 29.10, et anno praecedenti ad 29.12.

In spatio igitur variationis altitudinum barometricarum obseruationes huius anni nihil mutant, sed manet adhuc 2.70, vel 71, siue pollicum duorum et linearum $8\frac{1}{2}$, vti altitudo media 27.77, siue pollicum Paris. viginti septem et linearum fere nouem.

Differentiae menstruae altitudinum harum si inspiciantur, patet, eas, vti alias, mensibus mediis, inprimis Iunio, Iulio, Augusto, esse minores, quam mensibus primis et vltimis, quae lex semper obtinet, nisi extraordinaria tempestas faciat exceptionem, vti hic Februarius, quum tempestas solito calidior fuerit. Differentia vero annua 2.48 admodum magna est, et extraordinaria, dum a maxima 2.70 tantum $\frac{22}{100}$ differt, siue minus quam lineas tres, vti menstrua mense Decem-

Decembri 2. 40 plane extraordinaria quoque deprehenditur. Contra minima menſtrua occurrit menſe Iulio $\frac{32}{100}$, ſiue fere quatuor linearum, quae ſatis eſt exigua, et variationem ponderis atmoſphaerici ſatis paruam indicat.

Hactenus de variationibus ponderis atmoſphaerae huius anni, quae per diuerſas altitudines mercurii in tubo torricelliano hic obſeruatas innotuere. Sequuntur variationes caloris per ſingulos huius anni menſes thermometro Deliliano notatae, quae ſunt ſequentes:

Menſes - - -	Frig. max.	Calor max. - - -	Differ.
Ian. 9. h. 11. p. m.	197	- 152. die 22. h. 2. p. m. -	45
Febr. 28. h. 7. a. m.	177	- 145. 8. h. 2. p. m. - -	32
Mart. 12. h. 7. a. m.	177	- 140. 19. h. 2. p. m. -	37
April. 2. h 11. p. m.	164	- 120. 29. h. 5. p. m. - -	44
Maii 17. h. 11. p. m.	146	- 111. 27. h. 3. p. m. - -	35
Iunii 10 et 12 mane	135	- 97. in ſole 88. 24. h. 2. p. m.	38
Iulii 8. h. 11. p. m.	136	- 105. 20. h. 4. p. m. - -	31
Aug. 28. h. 7. a. m.	141	- 107. 13. h. 3. p. m. - -	34
Sept. 15 21. 23.	150	- 127. 3. h. 2. p. m. - -	23
Oct. 29. h. 7. a. m.	160	- 139. die 2, et 26. h. 2. p. m.	21
Nou. 20. h. 8 a. m.	176	- 146. 26. h. 2. p. m. -	30
Dec. 2. h. 11. p. m.	182	- 148. 16 per totum diem.	34

Ex obſeruationibus hiſce thermometricis inter ſe comparatis varia pateſcunt. Primum adparet, hoc anno frigus maximum fuiſſe 197. et maximum calorem 97. adeoque variationem annuam 100. graduum, qualis fere vt plurimum eſſe ſolet. Hic frigoris gradus maximus, ſi comparetur cum maximo 200. vel 201. alias hic obſeruato, 1733. 1739. et 1748, patet, gradum frigoris huius anni maximum proxime ad maximum omnium hic obſervatorum accedere, gradum autem caloris maximum eſſe aequalem maximo omnium hic obſeruatorum, ſcilicet 97, quem, vti ex antecedentibus obſeruationibus patet, notauimus Iulii 12. h. 4. p. m. anni ſuperioris 1757. aeſtate calidiſſima. Quoniam autem frigus maximum huius anni 197. non ſuperat frigus maximum 200: manifeſtum eſt, hunc gradum omnium adhuc hic obſeruatorum manere maximum, et ſpatium variationum caloris anno ſuperiore de nouo ſtabilitum manere 103.

Ex comparatione differentiarum porro conſpicitur, maximam menſtruam obſeruatam eſſe 45. menſe Ianuario, et minimam 21. menſe Octobri, quae ſatis parua eſt, quum haud raro differentiae diurnae non ſolum huic aequales, ſed ea maiores reperiantur, dum ad gradus 28. et 30. tempeſtate variabili et ſubito inſigniter mutata adſcendere ſolent, vti hoc anno maxima diurna fuit 28. Aprilis 12. obſeruata, quamuis contra ea nonnunquam differentia diurna vix ſit etiam ſenſibilis, quod poſterius tamen rarius accidere hic ſolet.

Gradus frigoris maximus huius anni 197. mihi obſeruatus Ianuarii 9. h. 11. p. m. ſub ſequentibus circumſtantiis contigit. Barometri altitudo erat 28.22. quum mane fuerit 28.28. die antecedenti 28.30. et ſequenti mane 28.10. Nox erat ſereniſſima, vti quoque

que dies ipſe, et aliquot antecedentes dies, ſequentes vero erant nubili et niuoſi. Ventus erat nullus, vti quoque per diem, quod inſignioribus frigoris gradibus exiſtentibus fieri vt plurimum ſolet. Diebus duobus antecedentibus ventus leniter ex oriente ſpirabat, ſequentibus vero proximis ex S. et W. Gradus frigoris inter horam 2. et 3. p. m. obſeruatus erat 188, adeoque differentia diurna tantum 9. Conſtat enim, ſi caetera ſint paria, duo potiſſimum interuallo 24. horarum eſſe tempora, quibus calor maximus et minimus contingere ſolet. Scilicet calor minimus, ſeu frigus maximum, regulariter ſub ſolis ortum eſſe ſolet, creſcit dein calor non ſolum ad meridiem vsque, quo ſolis altitudo maxima eſſe, adeoque maxime calefacere ſolet, ſed fere ad h. 3. p. m. quo rurſus decreſcit regulariter, niſi diuerſa tempeſtas obſtet, ad ſolis ortum diei ſequentis. Haec ratio eſt, cur obſeruationes thermometricae noſtrae mane ſint inſtitutae et poſt meridiem inter h. 2. et 3. Quodſi vero mane non ſint factae, nocte h. 11. inſtitui eas, quo tempore plerumque gradus iam obſeruari ſolet, qui gradui ſub ſolis ortum eſt ſaepe aequalis, aut proxime ad eum accedit.

Calor maximus 97. Iunii 24. inter horam ſecundam et tertiam p. m. obſeruatus ſub hiſce circumſtantiis accidit: In ſole thermometrum monſtrabat 88. vt adeo differentia inter thermometrum ſoli expoſitum, et thermometrum in vmbra collocatum fuerit nouem graduum. De hac differentia notandum eſt, eam admodum variari, licet totum coelum aequaliter ſerenum videatur,

videatur, ita vt non nunquam graduum 25. et amplius mihi ſit hic obſeruata. Barometri altitudo erat 27.75, quum mane fuerit 27. 80. et ab 28. 26, quae altitudo die 20. fuit, ad hunc terminum lente deſcenderit, et ſequenti die ad 27. 62. deſcendere perrexerit. Coelum admodum fuit vaporoſum, ita vt ſol tanquam diſcus ruber adparuerit, quod, aere vaporibus, praecipue exhalationibus, copioſis repleto, contingere ſolet. Ventus debilis ex oriente ſpirabat, vti quoque diebus duobus antecedentibus et conſequentibus. Circa h. 4. p. m. tonitru e longinquo eſt auditum, et pluuia parua cecidit, h. 10. autem pluuia ſatis larga, et tonitru, non tamen vehemens, fuit. Quum atmoſphaera inferior vaporibus et exhalationibus fuerit repleta, et barometrum altitudinem inſignem non monſtrauerit, calorque inſignis thermometro fuerit indicatus: mirandum non eſt, fulmineam tempeſtatem hoc die contigiſſe, dum omnes adfuerunt conditiones, ſub quibus tempeſtates fulmineae accidere ſolent. Vltra altitudinem 28.08. ſiue viginti octo pollicum pedis Pariſini et lineae vnius tempeſtas fulminea mihi hic non eſt obſeruata, quae ſcil. propius acceſſit.

Sequuntur meteora inſigniora per ſingulos huius anni menſes, vt venti, ſed tantum vehementiores, ſcilicet gradus tertii et quarti, qui poſteriores procelloſos notant, porro nebulae, nubes, pluuia, grando, nix, tonitrua cum fulminibus, halones circa Solem et Lunam, et aurorae boreales.

Men-

Menſis Ianuarius.

Ventus vehementior nullus eſt obſeruatus, niſi quod die 14. p. m. paullo vehementior ex occidente flauerit, qui vero iam circa veſperam ceſſauit. Conſtat generatim tempeſtate frigidiore ventos vehementes non oriri.

Reſpectu plagarum venti hoc menſe vt plurimum ex oriente et occidente ſpirauere, ſcilicet per 13. dies ex oriente, et per nouem dies ex occidente. Dies ſine vento fuerunt, vel vix ſenſibiles venti d. 2. 4. 9. 12. 13. 17. adeoque dies ſex.

Dies nubili et niuoſi hoc menſe fuerunt 14, reliqui 17. ſereni, licet pauci perfecte ſereni, qui hic ſunt rariores, quum coelum vt plurimum ſit vaporoſum, et nubes hinc inde ſimul deprehendantur.

Februarius.

Et hoc menſe nullus ventus vehementior eſt obſeruatus, niſi quod die 7. ex oriente paullo vehementior ſpirauerit, deſcendente quidem barometro, non tamen inſigniter. Venti debiliores reſpectu plagarum fuere hi; ventus ex oriente fuit per 10. dies, ex occidente 5. et ex meridie quoque per 5. dies, venti nulli die 6. et nocte die 27. Iam adnotatum eſt, et vulgaris experimentia docet, ventos per diem flantes vtplurimum per noctem fieri debiliores et ſaepius quoque nullos. Saepius quoque dies ſine vento ſequi ventos vehementiores, vti hoc menſe diem ſextum tranquillum ſequutus eſt die 7. ventus vehementior. Et contra ventos vehementiores excipere tranquillitas ſolet.

Dies sereni hoc mense tantum fuere 4. scilicet dies 20. 23. 27. et 29, reliqui plerique fuere nubili, pauci niuosi.

Martius.

Hoc mense ventus vehementior graduum 3. et 4. fuit die 17. per diem et noctem, irregularis, fere tamen ex W, barometro adscendente durante vento, neque ante ventum multum descenderat. Subitaneae temperiei mutationi hic ventus adscribendus videtur, dum thermometrum ab 173. ad 151. spatio 24. horarum fuit variatum. Venti debiliores respectu plagarum fere fuere ex occidente. Nam per 21. dies ventus W flauit. Ventus siluit d. 12. 19. 20. 21. 22. 27.

Dies sereni hoc mense fuere fere dimidii, reliqui nubili plerique, pauci niuosi.

Aurora borealis conspecta fuit die 15. placida, barometro 28. 12, thermometro 168. Sequenti die thermometrum monstrabat mane et nocte 174. p. m. autem 152. vento ex occidente 2, qui etiam eiusdem gradus antecessit aliquot diebus.

Aprilis.

Hoc mense ventus vehementior W 3. et 4. die 20. 21. flauit. Die 19. barometrum ab h. 2. ad 10. p. m. descendit a 27.90. ad 27.66, qui descensus celer ventum vehementiorem praenunciabat, durante autem procella d. 21. ad 28.15. rursus adscendit, quod vtplurimum fieri solet. Reliqui venti fue-

fuere debiliores et admodum variabiles, quod hoc menſe fieri ſolet. Scilicet 6. W. 8. O. 6. S. 6. N. 2. ſine vento.

Hic menſis ſatis fuit ſerenus, quum 19 dies fuerint ſereni, reliqui nubili, niuoſi et pluuii Pluuii nempe 10. 20. et 22. Sed quantitas pluuiae exigua fuit. Glacies Neuae die 9. ſoluta eſt, thermometro mane 147. p. m. 126, vento SW. Aprilis 9. fere medius eſt terminus temporis, quo glacies Neuae abire ſolet, maximus enim terminus ad huc eſt Apr. 26. qui bis occurrit ab a. 1718. ad hoc tempus, ſcilicet 1739. et 1742; minimus Mart. 22. qui ſemel occurrit 1723. Ergo differentia eſt 35. dierum et medius inter diem 8. et 9. Aprilis incidit.

Maius.

Venti vehementiores fuere d. 19 20. W. 3. et 4. Die 17. barometrum erat 27.95. et deſcendebat ad diem ſequentem ad 27.35, durante vero vento ad 27.68. rurſus adſcendit. Tempeſtas fuit pluuia cum grandine. Venti lenes W. 21. et O. 4.

Dies ſereni huius menſis fuere viginti, reliqui dies nubili et pluuii, pluuii ſcilicet d. 18. pluuia 4. lineas alta, die 19. 2. lin. d. 20. lin. 2. Tota igitur altitudo pluuiae hoc menſe lapſae fuit tantum 8. linearum, ſiue pollicis dimidii pedis Pariſini et duarum linearum.

Grando pauca d. 12. inter h. 10. et 11. cecidit, itemque d. 20. cum pluuia antea indicata.

Halo circa ſolem coloribus praedita conſpecta mihi fuit die 25. inter h. 11. et 12, coelo tenuiſſimis nubibus, vt alias, obducto.

Iunius.

Hoc menſe ventus vehementior nullus eſt obſeruatus, omnes venti fuere debiles fere W. et O. Scilicet per 13. dies ventus ex occidente, per 10. ex oriente ſpirauit. Dies ſine vento 3. 5. 17. noctes 29. et 30.

Dimidius fere menſis fuit ſerenus, ſiue praeciſe 13. dies, reliqui fuere pluuii cum tempeſtatibus fulmineis. Pluuii fuere dies 6^{tus}, quo ſimul primum tonitru mihi eſt auditum. Altitudo pluuiae 4 linearum fuit. Ventus durante tempeſtate inter h. 7. et 8. p. m. variabilis fuit modo W modo O modo S. Barometrum 27 82. et thermometrum h. 2. p. m. 112, porro dies pluuii fuere 7^{mus}, vbi altitudo pluuiae 6. lin. dies 8. vbi pluuia 2. lin. dies 9. pluuia 4. lin. d. 10. pluuia cum grandine 2. lin. d. 11. pluuia cum grandine piſi magnitudine maioris 3. lin. d. 16. pluuia 6. lin. d. 21. pluuia cum tonitru et exigua grandine 2. lin d. 24. pluuia cum tonitru 1. lin d. 25. tonitru cum pluuia 4. lin. Die 26. magna pluuia 1. pollicis et 7. linearum, cum grandine, tonitru et fulminibus perpetuis. Die 27. tonitru cum pluuia 8. lin. Die 29. pluuia exigua lin. 1. Barometrum diebus pluuiis et turbidis vltra altitudinem 27.95. non adſcendit, plerumque haerebat circa numeros inferiores niſi quod ſemel d. 21. fuit 28.12, quo pluuia cum grandine

dine cecidit et tonitrua cum fulminibus fuere. Thermometrum diebus, quibus tonuit, gradum 23. maiorem non monſtrauit.

Ex hiſce obſeruationibus adparet: 1) dies pluuios hoc menſe fuiſſe 13, et quantitatem pluuiae 5. pollicum pedis Pariſ. et 2. linearum 2) tonitrua cum fulminibus fuiſſe 6. 3) grandinem cecidiſſe quater.

Iulius.

Menſe Iulio ventus vehementior nullus contigit, venti debiles plerique ex oriente flauere, ſcilicet per dies 21, et ex occidente per dies quatuor. Sine vento dies 22. ſolus fuit.

Tonitru nullum toto hoc menſe contigit, quod ſatis inſolitum eſt.

Dies ſereni 14, reliqui nubili, ſed plerique pluuii, et quidem pluuii dies 3. 4. 10. 11. 13. 14. 18. 23. 24. 25. adeoque 10. Quantitas pluuiae fere fuit 4. pollicum Pariſienſium.

Auguſtus.

Neque hoc menſe ventus vllus vehementior obſeruatus eſt. Venti debiles ex oriente et occidente vt plurimum ſpirauere, et quidem per 13 dies ex oriente et per 10 ex occidente. Sine vento d. 1. 16, ſaepius autem noctibus. Tonitru hoc menſe eſt obſeruatum die 17. cum pluuia inter h. 2. et 3. p. m. thermometro 115, barometro 27. 92. Ventus W paullo vehemens durante tempestate, vt solet, fuit.

Nebula conspecta die 30. vento O 1, quam nocte pluuia sequuta est.

Dies sereni fuere 15, reliqui nubili et pluuii, pluuii scilicet 6. dies 8. 17. 18. 21. 23. 30. Quantitas pluuiae $3\frac{1}{2}$. lin.

September.

Venti vehementiores hoc mense flauere tres, die 22. W 3. et 4. d. 25. S. 3. et 4. d. 27. W 3. et 4. Barometro flantibus his ventis insigniter descendente.

Caeterum venti debiliores ex occidente spirarunt die 2. 11 16 22. 28. 30. adeoque per sex dies. Ex oriente diebus 1. 3. 8. 10. 12. 13. 29. adeoque septem. Ex meridie semel die 25. Ex septentrione d. 5. 20. reliqui ex plagis intermediis. Sine vento fuere dies 9. 14. 15. 16. 21. adeoque quinque.

Dies sereni 6. scilicet 2. 8. 10. 21. 23. 28. reliqui nubili et pluuii. Pluuia cecidit die 1. 4. 7. 18. 22. 26. 27. 29. Quantitas pluuiae $3\frac{1}{2}$. poll.

Grando cecidit bis die 22.

Nebulae fuere d. 11. 20.

Pruina die 11. et congelatio prima thermometro 150.

October.

Venti vehementiores hoc mense fuere d. 1, W 3. d. 9. nocte N 3 et 4. d. 12. W 3. et 4. Reliqui venti maiorem partem fuere W scilicet per dies 22.

Sine

Sine vento dies 6. fuere, nimirum 8. 21. 23. 25. 27. 31.

Dies ſereni 12. ſcilicet 5. 6. 10. 11. 13. 16. 17. 19. 20. 21. 28. 29. reliqui nubili, pluuii et niuoſi. Pluuia d. 3. 8. 22. 27 30. et 31. adeoque per ſex dies.

Niues die 9. 12. 14. 16.

Grando d. 3. et 4.

Nebulae die 24. 27. 31.

Nouember

Hoc menſe duo venti vehementiores ſunt numerati, nimirum die 26. et 28. W 3. tantum nocte. Reliqui omnes admodum debiles fuere et quidem W et NW 4. ſcilicet die 6. 26. 27. 29. O et S. O. 10. ſcil 7. 9. 12. 13. 17. 18. 21. 24. 25. 30. N d. 3 et 5. S d. 4. et 22.

Sine vento dies 4. 10. 11. 15. 16. 19. 20. 29. adeoque octo.

Dies ſereni 5. nimirum 4. 5. 19. 21. 29.

Pluuia cum niue d. 1. Niues d. 3 6. 7. 10. Pluuia d. 11. Nix d. 12. 13. 22. Pluuia d. 25. Nix d. 28. et 30.

Nebula craſſior die 20. a m.

Glacies in flumine Neua adparere coepit die 2. nocte, thermometro 166. ſequenti die 3. h. 10. p. m. glacies iam ſtetit, thermometro 164. Saepius, quin perpetuo, obſeruauimus gradu frigoris ad 166. perueniente et aliquot dies durante, glaciem in Neua adparere incipere, et mox ſtare, niſi ſubito tempeſtas mitior incidat. Conſtat iam ex antecedentibus et aliunde terminum maxi-

mum,

mum, quo flumen glacie constrictum est, esse Nouembris 30, qui ter ab 1718. adhuc fuit obseruatus, scilicet 1719. 1727. 1729. et minimum die 23. Octobris, qui semel est notatus 1750. Differentia igitur maxima est 39. dierum, hinc medius numerus est fere Nouembris 20, quo die quoque intra tempus dictum quinquies coiit glacie flumen. Idem huius anni terminus fuit quoque 1748. notatus.

December.

Mense Decembri venti vehementiores obseruati sunt sequentibus diebus 16. et 17. W 4. die 29. 30. et 31. N W. 3. et 4.

Venti reliqui leniores primum ex occidente spirarunt 13. dies. Ex S per sex dies, totidemque dies ex N. et semel ex O. Sine vento nullus fuit dies hoc mense nisi 3. ex parte.

Dies sereni fuerunt quinque scilicet 2. 3. 9. 12. 23. Niuosi vero nouem, reliqui tantum nubili.

Quodsi meteora integri huius anni hactenus recensita considerentur et conferantur, adparet

1) Ventos vehementiores per totum annum fuisse 18, scilicet mense Martio 1. Apr. 3. Maio 2. Sept. 3. Octob. 3. Nou. 2. Dec. 4, eosque vt plurimum W. Vnus enim tantum mense Septembri fuit S, et vnus N. Octob. Dec. duo N W, et sine vento vehementiori fuere Ian. Febr. Iun. Iulius, Augustus.

2)

2.) Ventos potiſſimum ſpiraſſe ex W ſcilicet 134. dies vt Ian. 9. Febr. 5. Martio 21. Apr. 6. Maio 21. Iun. 13. Iul. 4. Aug. 10. Sept. 6. Octobr. 22. Nou. 4. Dec. 13. Praecipue igitur menſibus Martio, Maio, Octobri.

Ventos ex oriente 93. ſcilicet 13. Ian. 10. Febr. 8. Apr. 4. Maio 10. Iun. 21. Iul. 13. Aug. 7. Sept. 10. Nou. 1. Dec. Ergo potiſſimum menſe Ian. Iul. Auguſto.

Ex meridie 18.

Ex Sept. 16. Dies autem ſine vento fuiſſe 44. Hinc intelligitur, ventum ex occidente hoc anno fuiſſe frequentiſſimum, quod et alias fieri ſolet, ventum ex oriente ſatis quoque frequentem, minus autem frequentes ex meridie et ſeptentrione. Per 60 autem dies ex plagis diuerſis intermediis flauit.

3.) Dies ſereni integro hoc anno fuere 144. ergo tertia pars et amplius fuit ſerena.

4.) Dies pluuii menſibus aeſtiuis Maio, Iulio, Auguſto, Septembri fuere 40. ſcilicet Maio 3. Iunio 13. Iulio 10. Auguſto 6. Septembri 8.

Quantitas pluuiae fuit 16 pollicum Pariſinorum et 9 linearum in his diebus: nimirum menſe Maio octo linearum, Iunio 5. pollicum 2. lin. Iulio 4. poll. Auguſto poll. 3. lin. 6. Sept. poll. 3. lin. 5. Hinc aeſtatem ſolito humidiorem fuiſſe conſpicitur, adeoque minus quoque fertilem, dum propter copioſam pluuiam et foenum et frumentum multum corruptum eſt, ſatis laete creuit foenum tamen in locis aridioribus.

5) Grandines per integrum annum cecidere per 9 dies scilicet Maii 12. et 20. Iun. 10. 11. 21. 26. Sept. 22. Octobr. 3. et 4.

6.) Nebulae fuere mihi septem obseruatae, nimirum Augusti 30. Sept. 11. et 20. Octobr. 24. 27. 31. et Nou. 20. quae thermometro 176. monstrante accidit, et admodum spissa adparuit, flumine iam a die 3. huius mensis glacie obducto, quod frequenter non contingit.

7.) Tempestates fulmineae fuere septem, quae, excepta vna, omnes mense Iunio fuere, scilicet die 6. quo primam obseruaui, die 21. 24. 25. 26. 27. Augusti 17. fuit vltima.

8.) Prima pruina et congelatio mature contigit, scilicet Sept. 11, vti vltima hujus anni fuit Aprilis 24. adeoque differentia est 4. mensium 17. dierum, quod tempus $4\frac{1}{2}$ mensium circiter, menses aestiuos, siue aestatem hic fere constituere solet.

9.) Halo vnica eaque circa Solem cum coloribus est obseruata Maii 25, quae alias circa Solem praecipue autem Lunam esse frequentiores solent.

10) Aurora borealis vnica tantum insignis secundum obseruationes meas contigit, nocte inter diem 15. et 16 mensis Martii, licet saepius vestigia lucis borealis adparuerint.

11.) Si quatuor tempestates fixae porro comparentur, adparet, hiemem satis gelidam et constantem fuisse, ver adhuc satis frigidum, contra aestatem et autumnum humidiores, hinc annum in his locis minus fertilem.

Ad-

Ad haec ſequentia addere placet:

Conſtat iam alias, declinationem acus magneticae hic loci parum eſſe variabilem, hinc nullam differentiam inter declinationem huius et anni ſuperioris notare mihi licuit; manet igitur declinatio $4\frac{1}{2}$ graduum fere occidentem verſus.

Fuerunt, qui exiſtimarent maculas ſolares influxum quoque in tempeſtates habere. Quamuis haec ſententia probabilis non videatur, quum effectus eiusmodi obſcurationum Solis per maculas vix ſenſibiles in atmoſphaera noſtra videantur: adnotare tamen hic lubet hoc anno maculas in Sole fuiſſe copioſiſſimas, nullo enim die ſereno Solem tubo 5 pedum contemplatus ſum, quin maculas conſpexerim plures, Decembris 21. duodecim ſimul mihi obſeruare contigit. Quaedam multo maiores adparebant, quam Mercurius ſolet, Solem tranſiens.

Denique quum nullum ſit dubium, quin aer atmoſphaericus, et tempeſtates anni ſuos in corpus humanum, eiusque ſanitatem exſerant effectus; morbos praecipue hoc anno humido graſſatos, addere volui. Fuere autem illi praecipue febres inflammatoriae, peripneumoniae, pleuritides, petechiales, catarrhales, quae vltimae fere omnibus menſibus fuere obſeruatae, variolae, ſcorbutus, febres intermittentes, acutae, peracutae cum deliriis, arthritides, et menſe Octobri quoque anginae. Diarrhoeae ſatis frequentes, vt alias, quoque fuere.

DESCRIPTIONIS
PISCIVM RARIORVM
E MVSEO PETROPOLITANO EXCEPTORVM CONTINVATIO.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

IV.

Cyprinus pinna caudae horizontali, ſubtrifida; dorſuali faſtigata, paruula.

DESCRIPTIO.

Tab. IX. fig. 1. et 2. Colorem huius Cyprini, quem propinqua affinitate cum Chinenſi aurato eſſe coniunctum, pinna caudae horizontalis prodit, olim fuiſſe argenteum, et branchiarum operculi laminae, et ſquamae, hinc et inde argenteo adhuc nitentes ſplendore, probare videntur.

Corpus ab oris extremo rectius primum, notabiliter tamen ſtatim adſcendit, et arcuato dein ſub flexu pinnam dorſi petit; abhinc deſcendit ſub arcu leuiter concauo ad eminentiam quandam vsque, ſubacutam, paruam, a qua denuo vlterius ad caudae pinnam, ſub arcu leuiſſime conuexo, deſcendit.

Idem ab oris extremo, ſub flexu minus arcuato, quam quo ad dorſi pinnam adſcendebat, ad pinnarum pectoralium regionem deſcendit, dein rectiorem ſequitur

tur curſum ad pinnas vsque ventrales, et ab his denique ad caudae pinnam eodem modo ſenſim adſcendit, quo ab oris extremo antea deſcendebat. Differt itaque a vero Chinenſium Cyprino ,, pinna ani gemina, caudae ,, transuerſa triſurca Linn. Syſt. Nat. edit. dec. p. 322. ,, n°. 8. ,, quem pariter ad manus habebam, dum haec ſcriberem, quod huius corpus ab oris extremo verſus dorſum aequali fere ſub arcu adſcendat, quo abdomen verſus deſcendit, et pari quoque modo a dorſi pinna ad caudam deſcendat, quo a pinnis ventralibus ad eandem adſcendit. Sic etiam Cyprini Chinenſis caput multo magis obtuſum eſt, quam noſtratis, quod in illo ab oris extremo ſtatim arcuato ſub flexu ad dorſi initium adſcendit, cum in hoc rectiori ſub ductu idem attingat.

Prona capitis ſuperficies anteriora verſus planiuſcula, poſteriora verſus ſubconuexa eſt. Dorſum ab initio conuexum, ſenſim in ſubacutum marginem pinnam ſuam verſus contrahitur, pone quam, ſi eminentiam iſtam ſubacutam, de qua ſupra dixi, quaeque pinnae ani principio e directo opponitur, excipias, conuexum iterum ambitum ad extremum vsque oſtendit. Abdominis e contrario ſuperficies ab angulo coniunctionis vtriusque membranae branchioſtegae e conuexa ſenſim planior fit, inter pinnas ventrales et anum in ſubacutum contrahitur marginem, et pone pinnae ani finem planitiem denuo acquirit notabilem. Latera capitis infra et ante oculos plana, circa branchiarum opercula ſubconuexa; qualia etiam trunci ſunt latera, ad anteriora tamen magis, ad poſteriora minus.

 Oris

Oris edentuli, leuiter prominentis, labia carnoſa, immo carnoſiora mihi viſa, quam in Cyprino Chinenſi.

Foramina Narium vtrinque duo, in eadem fere cum ſuperiore orbitae margine poſita altitudine, eidemque, quam oris extremo, propiora: anteriori ſubrotundo, minori; poſteriori maiori, ſemilunari, membranula retrorſum ſpectante, velut operculo, obtecto.

Oculi ſatis magni, limbo ſuperiore magis prominentes, quam inferiore, maximam partem intra orbitam recondito.

Opercula branchiarum cum membrana branchioſtega eiusdem plane ſunt conformationis, ac in Cyprino Chinenſium. Membrana, qua illorum margo auctus deprehenditur, non tantum iuxta pinnarum pectoralium principium, id quod manifeſto attingit, ſed etiam ad ipſius cum membrana branchioſtega coniunctionem, latior multo eſt, quam verſus angulum operculorum ſuperiorem.

Squamae cuti arcte inhaerentes, et reſpectu corporis magnae; quaedam ſc. ex maioribus detractae, $1\frac{1}{4}$ lin. latae, et $1\frac{1}{5}$ lin. longae, margine libero rotundatae, altero truncatae et emarginatae erant.

Linea longitudinalis ex angulo operculi branchiarum ſuperiore prodiens, ab initio ſenſim deſcendit ad regionem vsque, principio pinnarum ventralium e directo oppoſitam, ſenſimque ex obliquo in rectum extenſa, immutata directione, excurrit ſupra extremam et horizontaliter expanſam corporis partem lateralem, qua exterior pinnae caudae lobus ſuſtentatur,

et

et iuxta radii eiusdem pinnae medii maiorisque basin finitur, in toto decursu dorso, quam ventri, propior.

Anus leuiter prominens, ante pinnae ani principium situm obtinet. Iuxta pinnae huius finem, in sinistro latere, ex abdominis margine inferiore papilla quaedam dependet, pedunculo crassiusculo suffulta, de qua dubius sum, num ex statu morboso, an naturali, ortum suum duxerit?

Pinnae pectorales radiorum quindecim circiter, a primo ad tertium, qui longissimus est, ex ordine longiorum, et ab hoc ad vltimum ex ordine breviorum.

Pinna dorsi parua, respectu ventralium, paullo anterius sita, radiorum sex: primus horum breuis setaceus, secundo arcte adpressus; secundus omnium fortissimus, simplex, leuiter incuruatus, rigidus, postico margine denticulis oblique deorsum spectantibus instructus, tertio breuior; tertius omnium longissimus, tenuior; reliqui ex ordine breuiores ac tenuiores, vltimo excepto, qui penultimo et antepenultimo fortior est.

Pinnae ventrales radiorum octo, quorum primus secundo paullo breuior, secundus tertio, longissimo, caeteri ex ordine breuiores sunt.

Pinna ani vnica, radiorum septem: primus setaceus, secundo dimidio breuior, eique arcte adpressus; secundus omnium fortissimus, rigidus, simplex, margine postico denticulis, oblique sursum spectantibus, instructus, rectus, tertioque paullo breuior; tertius longissigiſſimus, et ab hoc incluſiue ad vltimum omnes in extremitatibus ramoſi, ac ex ordine breuiores; vltimo bipartito.

Pinna caudae horizontalis, magna, vtrinque leviter deflexa, inaequaliter trifurcata, radiisque circiter triginta ſex compoſita: 1mus, 2dus ac 3tius, ab vtroque latere, radii breuiſſimi, vix conſpicui; 4tus, 5tus et 6tus, omnium longiſſimi; caeteri ex ordine iterum breuiores ad intimum vsque pinnae caudae lobum, quocum vterque lateralium angulum obtuſum efficit; huius denique, intimi nempe, radii, ab extimis ad interiores, ex ordine longiores ſunt, interiorumque vnus reliquis fortior factus eſt, magisque ad baſin ſuam prominulus. Lobus etiam eiusdem pinnae dexter ſiniſtro paullo maior, medius autem lateralibus longe breuior eſt; et, quoniam modo dictae pinnae latera modice deflexa ſunt, baſis eius ſquamata, ſub cauda, concaua ex parte apparet. Deſuper, me caudae pinnam in vero Chinenſium Cyprino paullo aliter formatam deprehendiſſe, quam quidem a Cel. *Linnaeo* in Actis Stockh. 1740. p. 403, T. 1. f. 1—8. verſ. germ. deſcripta exſtat, praetermittere nolui: erat nempe in tres lacinias, aequalis inter ſe longitudinis, diviſa, quarum media partem dimidiam pinnae caudae perpendicularis, qualem in piſcium plurimis ordinarie videmus, eamque ſuperiorem, repraeſentabat, illiusque inſtar radiata quoque erat; radii enim, 1, 2, 3, 4 et 5 omnium minimi et ſimplices, a primo ad quintum ex ordine longiores; ſextus et ſeptimus, omnium longiſſimi ac fortiſſimi; octauus, nonus et decimus prio-

prioribus paullo breuiores ac tenuiores; omnesque, exceptis quinque vel ſex ſuperioribus, in extremitatibus ramoſi erant. Huius laciniae, decem radiis conſtructae, radio infimo intimus vtriusque lateralis ac horizontalis laciniae radius, membranae ope, radios pinnarum ſolito more connectentis, iungebatur. Singula harum lacinia, ſub angulo plus minusue recto cum media, mediante iam dicto radio, connexa, e quindecim conſtabat radiis: extimis quatuor, omnium minimis; quinto, ſexto et ſeptimo, omnium longiſſimis ac fortiſſimis; caeteris, ab octauo ad decimum quintum, qui intimus erat, ex ordine breuioribus; omnibusque, ſi quatuor vel quinque exteriores exceperis, in extremitatibus ramoſis. Baſis huius pinnae ſub cauda erat excauata, prout etiam in *Linnaeana* deſcriptione monetur, medium autem eiusmodi in intermedia pinnae lacinia radium, reliquis fortiorem, ab iisque forma maxime diſtinctum, qualis in icone proſtat, et deſcribitur, non vidi. Ea propter autem deſcriptionem, a Cel. Viro datam, mendo laborare, non contendam, cum in ſupra deſcripto piſce caudae pinnam ei per omnia fere ſimilem eſſe, ipſe viderim, qualem in Cyprino ſuo deprehendit Auctor, fide digniſſimus, ſed exponam potius hanc ſtructurae varietatem, tanquam maxime ſingularem, in dubio haerens, vtrum diuerſam plane ſpeciem, varietatemue tantum, an ſexus diuerſitatem potius indicet, erat autem maſculus, caeterum Chinenſi ſimillimus, ſi excipias, quod dorſi pinna in noſtrate viginti, ventrales octo tantum, radiis fuerint inſtructae.

Menſura.

	Ped. Pariſ.	Poll.
Longitudo tota, ſcil. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum -	2	2
— — — ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - -	1	$9\frac{1}{2}$
Ab oris extremo ad oculi medium - - -	–	$2\frac{1}{2}$
— — — ad angulum operc. br. poſticum -	–	7
— — — — principium pinnarum pectoralium -	–	$6\frac{1}{2}$
— — — — — — pinnae dorſi - - - -	–	10
— — — — — — pinnarum ventralium -	–	$10\frac{1}{2}$
— — — — — — pinnae ani - - - -	1	$3\frac{1}{3}$
— — — — — — — — caudae - - - -	1	7
— — — — ad anum - - - - - - -	1	3
Longitudo pinnarum pectoralium - - - -	–	$4\frac{1}{2}$
— — — pinnae dorſi, ad baſin - - - -	–	$1\frac{1}{4}$
— — — — — — radiorum longiorum - -	–	$3\frac{1}{2}$
— — — pinnarum ventralium - - - -	–	4
— — — pinnae ani, ad baſin - - - -	–	$2\frac{1}{2}$
— — — — — — radiorum longiorum - -	–	3
— — — pinnae caudae, ſcil. a primis radiis, ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices - - - - - - - - - -	–	7
Extremitas corporis ſquamoſa, in caudae pinnam extenſa ad - - - - - - -	–	1
Diameter oculi fere - - - - - - - -	–	2
Diſtantia inter primi pinn. pect. primique pinn. ventr. radii baſin - - - - - -	–	$3\frac{3}{4}$

Diſtan-

	Ped. Parif.	Poll.
Diſtantia inter vltimi pinnae dorſi radii baſin, et primum pinnae caudae radium - -	-	$9\frac{1}{2}$
— — — — vltimi pinnae ani radii baſin, et primum pinnae caudae radium - - -	-	$1\frac{1}{2}$

	Lin.
Latitudo horizontalis per oculorum axes - -	$3\frac{1}{2}$
— — — — — — — — poſticum operc br. marginem - - - - - - - - - - - -	$3\frac{2}{3}$
— — — — — — — — maximam corporis latitudinem, quae in operculum branchiarum cadit - - - - - - - - - - - -	$4\frac{1}{4}$
— — — — — — — — pinnae dorſi principium	$3\frac{2}{3}$
— — — — — — — — — ani principium - -	$1\frac{1}{3}$
— — — — — — — — — caudae principium -	$2\frac{1}{2}$
Latitudo perpendicularis per oris angulum - -	$1\frac{1}{2}$
— — — — — — — — — — oculi medium - -	$4\frac{1}{3}$
— — — — — — — — — — dorſi initium - .	6
— — — — — — — — — — principium pinnarum pectoralium - - - - - - - - - - -	7
— — — — — — — — — — — — ventralium - -	6
— — — — — — — — — — — pinnae ani - - -	$3\frac{1}{4}$
— — — — — — — — pinnae ani finem - - -	$1\frac{2}{3}$
— — — — — — — — principium pinnae caudae -	1

* * *

V.

Gobio pinna ventrali ſubrotunda, acetabuliformi, e duobus pedunculis, octoque radiis, valde ramoſis, compoſita.

DESCRIPTIO.

Tab. IX. fig. 3. et 4.

Color Piſcis, cuius deſcriptionem nunc aggredior, in praeſenti pallide brunus, circa os ſubfuſcus, ſub gula et abdomine cinereus erat.

Corpus forma maxima ex parte, eaque anteriore, ſubteres, poſteriore cathetoplateum, eiusdemque fere vbique latitudinis, craſſitiei autem ab anterioribus poſteriora verſus ſenſim decreſcentis. Idem ab oris extremo ad capitis verticem adſcendit, adſcenſuque ſuo, leuiſſimo quidem, ad pinnae dorſi principium vsque pergit, inde vero ſecundum rectam fere lineam ad extremum vsque vix notabiliter deſcendit. Sic quoque ab maxillae inferioris extremitate acetabulum verſus mediocriter valde adſcendit ab eiusque dein poſtico margine anum verſus leuiter deſcendit ſub ductu parum conuexo, abhinc vero ad extremum vsque, vt ſupra, curſum fere rectilineum obſeruat. Hinc caput ipſo corpore demiſſius; dorſum ab initio, ad pinnam ipſius primam, planiusculum, in medio ſecundum longitudinem ſulco ſuperficiali diſtinctum, qui ad anteriora latior, poſtice anguſtior eſt, in aliquali a pinnae iſtius principio diſtantia plane euaneſcit, colore, quam latera, intenſiore tinctus; reliquum dorſi iuxta pinnas ſubconconuexum, interque posterioris finem et caudae pinnae initium planiusculum est. Inferior corporis superficies ante acetabulum subconuexa, pone illud vsque ad anum in carinam mediocriter elauatam contracta, eiusdemque ad latera sinuata, ab ano vero, tam iuxta pinnam, quam pone eam ad caudae pinnam vsque planiuscula apparet. Latera corporis, a capite pinnae dorsualis secundae regionem versus, conuexa primum, inde, mutata sensim in planitiem conuexitate, ad extremitatem vsque plana sunt.

Caput latius parum, quam altum, hinc quodammodo plagioplateum tam inter oculos, quam infra eosdem, vbi in decliue oblique antrorsum abit, e planiusculo leuiter impressum, est. Os, respectu corporis, amplum; rictus enim diameter transuersa toti capitis latitudini aequalis est. Labium maxillae superioris latum, crassum, liberum, inque oris extremo, leporini labii instar, fissum, oblique parum retrorsum flexum: margine exteriore longiore, magisque prominente, interiore breuiore, denticulis contiguo. Ex huius, interioris nempe, medio, proxime infra labii fissuram, papilla quaedam parua prominet. Labium inferius, quod pari cum superiore fissura notatur, ipsamque maxillam inuestit, prominet, ac ab antico ipsius et subacuto margine oblique sursum introrsumque versus dentes ducitur, vtrinque appendice, qua mediante cum superiori ad oris angulos coniungitur, auctum.

Vnica in maxilla superiore denticulorum, iuxta internum labii superioris marginem conspiciendorum series

ries eſt, qui, quum minutiſſimi ſint, ſetarumque potius breuium, plurimarum, ac denſe compoſitarum formam habeant, numerari vix poſſunt. Dentes in maxillae inferioris ſummo margine vtrinque quatuor tantum, vel quinque, aliquali ſpatio a ſe inuicem diſtantes, breues quidem, aſt e latiori baſi in acumen introrſum incuruatum terminati, immobiles. Lingua lata, palato inferiori vndique adnata, ſuperficieque inaequali praedita. Maxilla inferior, et ore clauſo, ſuperiore notabiliter breuior, extremo ſuo et acuto margine huius denticulorum ſeriem vix attingit

Foraminula, quae a tubulis oblique truncatis, mucum ſecernentibus, vtplurimum formantur, in capite ſeptendecim obſeruaui, tria ſc. inter, quatuor ante oculos, et quinque ex vtroque latere, inter inferiorem oculi marginem ac ſuperiorem operculi branchiarum angulum obuia. Quae inter oculos ſunt, in triangulum diſponuntur, duo nempe anteriora, parallela, et vnicum in medio, poſticum; eorum vero vnum ab altero $1\frac{1}{2}$. lineam diſtat. In dimidiae lineae diſtantia ab oculi margine antico aliud occurrit, patulum, absque tubuli veſtigio, quod ſetam immiſſam in profundum ducit, huicque in vnius ac dimidiae lineae diſtantia directe anteponitur aliud, tubuloſum, e quo ad praecedens haud datur aditus. An haec duo, ante ſingulum oculum collocata, narium vices gerunt? an plenarius harum defectus? diſcernant ii, quibus Piſcem hunc diſſecandi dabitur occaſio. Sequuntur ea, quae pone oculum in vtroque latere occurrunt; vnum horum dimidiam ab oculi inferiore ac poſtico margine lineam remo-

remotum, dein alia tria videbis, in triangulum diſpoſita, et vltimum tandem in vnius ac dimidiae lineae diſtantia a praecedentibus, proxime ſupra operculi branchiarum ſuperiorem angulum ſitum. Praeter haec recenſita foramina et alia adſunt, longe iis minora, de quibus vero nimis prolixum eſſet dicere. Huc etiam ſpectant areolae iſtae ſcrobiculatae, quae infra inferiorem orbitae marginem in conſpectum veniunt, pro muci lacunis forte habendae.

Oculi, trium fere linearum interuallo inter ſe diſtantes, ſitum inter perpendicularem et horizontalem medium obtinent, nec magni ſunt, nec prominentes, vt in prius deſcripta ſpecie ſub n°. III, cute tamen communi pari modo obtecti.

In membrana branchioſtega, abſque ſectione tria tantum detegere potui oſſicula. Haec ipſa ſub operculo libera adſcendit, eiusdemque angulo poſtico, ſuperiori, demum annectitur, limbo ſuo ad poſteriorem operculi marginem prominens. Nec ad branchias vlla patet apertura, quae ab iſto membranae branchioſtegae limbo, pinnarum pectorialium baſin lambente, formatur, quaeque tam ampla eſt, vt latae harum baſi exacte reſpondeat.

Squamae ſubquadratae in circumferentia, a $\frac{1}{3}$ ad 1. lin. longae, pellucidae, ſecundum longitudinem ſtriatae, limbo libero, quin in externo latere ſtria transuerſa ab altero, cuti inhaerente, diſtinguitur, obſcuriores, craſſiores, ſtriisque longitudinalibus, prominulis, quarum extremitates, denticulorum ſub forma,

a

a limbi iſtius margine prominent, inſignitae, hinc ad tactum leuiter aſperae ſunt. Magnitudo ſquamarum ab anteriori verſus poſteriorem corporis partem ſenſim increſcit, diametro longitudinali transuerſam ſuperante. Squamae omnium minimae, quae anteriora corporis occupant, ſubrotundae ac tenuiſſimae ſunt. In capite, operculo branchiarum, dorſi et abdominis initio ſquamarum ne veſtigium quidem apparet.

Linea longitudinalis valde obſcura, vel potius nulla.

Anus oris, quam pinnae caudae extremo propior, poſt ſe gerit papillam latiuſculam, ex ſinu prodeuntem ac retrorſum ſpectantem, extremoque ſuo apice pinnae ani primi radii baſi fere contiguam.

Pinnae pectorales, ad latera corporis, baſi ſua carnoſa aperturae ad branchias patenti oppoſitae, ex ouato - lanceolatae, radiisque ſeptendecim inſtructae: exterioribus ab vtroque margine ad intimum vsque ex ordine longioribus, plurimis ramoſis. Pinnae ventrales inter ſe connatae, orbiculum concauum, ſeu acetabulum, repraeſentant, in aequali cum pinnis pectoralibus ab oris extremo diſtantia ſitum. Eſt autem illud in circumferentia ſubrotundum, diametri $4\frac{1}{2}$. linearum, antice duobus quaſi pedunculis, craſſiuſculis, breuibus, impreſſis, ceu fulcris, vel columellis, firmatum, radiisque praeterea octo, ſub angulo acuto ab abdomine reflexis, parumque dein inflexis, valde ramoſis, compoſitum. Pedunculi iſti, duarum linearum interuallo inter ſe diſtantes, ad baſin anguſtiores, ſuperne latiores, acetabu-

lum

lum verſus impreſſi, et infracti quaſi ſunt, ac, licet ad anticum illius latus formandum ſuam addant ſymbolam, ab ipſo tamen acetabulo et proximis eius radiis prominent; hinc ſinum etiam efformant ſatis profundum, inter ipſorum baſes ac externam acetabuli lateris antici faciem relictum. Idem illud anticum acetabuli latus, quod vtrumque pedunculum connectit, radiis omnino deſtitutum, membranaceum ac pellucidum eſt, limbo tamen excepto, qui craſſior, obſcurior, extrorſum flexus, et pedunculorum propago eſſe videtur. Vtriusque pedunculi lateri, primum atque diſtinctum maiorem radium reſpicienti, arctiſſime iungitur radiolus quidam ſpurius, qui aeque ac ſequentes in ramos finditur, illorum partialibus radiolis tenuiores quidem, arctiorique vinculo inter ſe iunctos, pro pedunculi ipſius parte, ob arctiorem cum eo nexum, facile habendus. Inter ſpurii huius primique baſes interſtitium oblongum, mere membranoſum ac pellucidum eſt, interſtitio, quod inter veros occurrit radios, membranoſo breuius quidem, aſt multo latius. Radices octo inſequentium radiorum, quorum in vtroque corporis latere, ſeu in dimidia acetabuli parte, quatuor collocantur, oſſeae, diſtinctae ab ipſorum radiato flabello, breues ac latiuſculae ſunt, retrorſumque parum inclinatae. Radii ipſi, valde inter ſe contigui, a primo ad quartum, ex ordine, parum quidem, longiores, in ramos ſiue radiolos, ſtatim a radice finduntur tenues, ſimplices, eundoque diuergentes. Primum dextri lateris radium 7, ſecundum 10, tertium 9, quartum pariter 9; primum vero ſiniſtri lateris 7, ſecundum 8, tertium pariter 8,

 quar-

quartum 9, minoribus eiusmodi radiolis inſtructum eſſe obſeruaui; adeoque numeros vnius lateris certas inter ſe non habere rationes, per ſe patet. Licet poſteriores radii $2\frac{1}{2}$. circiter lin. longi, anteriores vero paullo breuiores ſint, ob illorum tamen maiorem verſus anum inclinationem, idem fere vbique habet profundum atque altitudinem acetabulum, ſi anticum eius latus excipias, quod ob ipſius limbum extrorſum deorſumque flexum poſtico parum demiſſius eſt. Latera acetabuli externam ſuperficiem conuexam, internam concauam habent; fundus autem, qui acetabuli partem, corpori adnatam, conſtituit, $2\frac{1}{2}$. lin. latus ac planus eſt, eiusdemque ad marginem, lateribus proximum, radiorum oſſicula radicalia cum interſtitiis ſubconcauis, quae inter ſe relinquunt, in conſpectum veniunt. Notandum etiam eſt, octo iſtorum radiorum, quibus maxima ex parte acetabulum formatur, inferiorem portionem, eamque potiorem, ſubſtantiae eſſe firmioris, rigidioris ac minus pellucidae, quam ſuperiorem, ſiue acetabuli limbum, qui ab iſta diſtinctiſſimus, tenuis, flexilis, pellucidus ac integerrimus eſt.

Pinna dorſi prima, principio ſuo acetabuli lateri poſtico fere e directo oppoſita, ſex radiorum, rigidiusculorum, quorum vltimus a penultimo longius diſſitus eſt, quam caeteri inter ſe inuicem radii, radicibus ſc. eorum $1\frac{1}{2}$. lin. interuallo inter ſe diſtantibus. Quoniam omnes huius pinnae radii, vltimo, $5\frac{1}{2}$. lin. longo, excepto, mutilati fuerant, veram eorum longitudinem indicare non potui. Membrana, a poſteriore imoque vltimi radii margine verſus alterius pinnae initium expanſa, primam ſecundae pinnae contiguam efficiebat.

Pinna

Pinna dorſi ſecunda radiorum 11, primus ſecundo parum breuior, ſimplex; ſequentes ad intermedios vsque ex ordine parum longiores; reliqui eiusdem cum intermediis longitudinis; omnes autem, excepto primo, in extremitatibus ramoſi; vltimus bifidus.

Pinna ani, initio ſuo pinnae dorſualis ſecundae initio e directo oppoſita, radiorum 11, aequalis fere inter ſe longitudinis, minoris tamen, quam pinnae dorſi ſecundae radii. Primus horum ſimplex, et ſecundo parum breuior eſt; a ſecundo ad vltimum omnes ramoſi ſunt; penultimus vltimo proximior, quam caeteri inter ſe inuicem radii.

Pinna caudae radiorum circitee 24, in extremo elliptica, integerrima, et, ſi expanditur, circumſcriptione ad marginem ſubrotunda.

Gobionem nigrum omnium fere Auctorum, qui *Go* vel *Goget* Venetis, *Sea-Gudgeon* vel *Rockfiſh* Anglis dicitur, eiusdem, quam modo deſcripſi, eſſe ſpeciei, vix crediderim, et lectores mihi aſſenſuros perſuaſum habeo, ſi ſequentia iis libuerit perpendere momenta: 1) enim *Willoughbeius* Gobioni ſuo (*a*) duplicem denticulorum in maxillis ordinem tribuit, cum noſter ſimplici tantum fuerit inſtructus. 2) Idem Auctor, et poſt eum alii quoque, in pinna dorſuali ſecunda quatuordecim numerauerunt radios, ego vndecim tantum; ſed hanc minoris eſſe momenti ratio-

 nem,

(*a*) Hiſt. Piſc. Lib. IV. cap. X. pag. 206. Tab. N. 12. fig. 1.

nem, lubens fateor, quod variare non raro in pinnis radiorum numerum certissimum sit. 3) Pinnam ventralem, si extendatur, infudibuli figuram quadantenus imitari, idem asserit, cum in nostrate eadem, cum rigiditate late patens, non tantum se extendi non patiatur, sed infundibulum etiam nullo modo referat. 4) Quantum ex icone, tam a *Rondeletio*, quam a *Willoughbeio* data, potest coniici, maxilla Gobionis nigri inferior superiore longior, in nostrate e contrario breuior est. 5) In illo pinnae pectorales a branchiarum operculo nimium distant, si huius in comparatione habeatur ratio. 6) Pinna illius ventralis in icone *Willoughbeii* non immediate sub pectoralibus, sed paullo posterius sita est, neque, vt in praesenti, adeo singularis structurae specimen, sed verarum potius pinnarum imaginem referre videtur, siue formam, siue eximiam longitudinem consideres, qua pectorales adhuc superat. 7) In eadem icone latera corporis caudam versus tanquam conuexa expressit chalcographus, quae in nostrate cathetoplatea et plana erant; alias vt taceam rationes, quas afferre non dubitarem, si in eruendis characteribus essentialibus, et in dignoscendis a se inuicem speciebus satis essent comprobatae.

Mensura.

Menfura.

	Poll. Parif.	Lin.
Longitudo tota, fc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum -	3	10
- - - - ab oris extremo ad extremitatem corporis fquamofam - - - - - -	3	2
Ab oris extremo ad oculi medium - - -	-	$4\frac{1}{4}$
- - - - - - - - - - angulum operc. br. pofticum - - - - - - - - - -	-	8
- - - - - - - - ad principium pinnarum pectoralium - - - - - - - - - -	-	$8\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - anticum acetabuli marginem	-	$7\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - principium pinnae dorfi -	1	$\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - anum - - - - -	1	$7\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - principium pinnae ani -	1	$8\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - - - - - caudae -	3	
Longitudo pinnarum pectoralium - - - -	-	9
- - - - pinnae dorfi primae, ad bafin -	-	8
- - - - - - - - - - - fecundae, ad bafin -	-	$10\frac{1}{3}$
- - - - - - - ani, ad bafin - - - -	-	$9\frac{1}{3}$
- - - - - - - - radiorum longiorum - -	-	5
- - - - - - - - caudae, fc. a primis radiis feu ab eius principio ad longiorum radiorum apices - - - - - - - - - -	-	10
Extremitas corporis fquamofa in caudae pinnam extenfa, ad - - - - - - -	-	3
Diameter oculi - - - - - - - - - -	-	$1\frac{1}{4}$
- - - - acetabuli - - - - - - - - -	-	$4\frac{1}{2}$
Ab vno oris angulo (ore aperto) ad alterum	-	6

	Poll.	Lin.
Diſtantia inter primi inferioris pinnae pectoralis radii baſin et primum pinnae ani radium - - - - - - - - - - -	1	1
- - - - - - - vltimi pinnae dorſualis primae radii baſin et primum pinn. dorſ. ſecundae radium - - - - - - - -	-	$\frac{1}{5}$
- - - - - - - vltimi pinnae dorſualis ſecundae radii baſin et primum pinnae caudae radium - - - - - - - - - - -	-	$5\frac{1}{2}$
- - - - - - - vltimi pinnae ani radii baſin, et primum pinnae caudae radium - -	-	$5\frac{1}{2}$
Latitudo horizontalis per oculorum axes -	-	$6\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - poſticum operc. br. marginem - - - - - - - - - - -	-	6
- - - - - - - - - - principium pinnae dorſ primae -	-	6
- - - - - - - - - - - - - - - - - ſecundae -	-	$5\frac{1}{?}$
- - - - - - - - - - pinnae dorſi ſecundae finem	-	3
- - - - - - - - - - principium pinnae caudae	-	1 [illegible]
Latitudo perpendicularis per oculi medium	-	5
- - - - - - - - - - - - - principium pinn pect.	-	$6\frac{1}{5}$
- - - - - - - - - - - - - - dorſual. ſecundae -	-	$5\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - - - finem pinn. dorſ ſecundae -	-	$5\frac{1}{3}$
- - - - - - - - - - - principium pinnae caudae -	-	$5\frac{2}{3}$

* * *

VI.

VI.

Gobio pinna dorſuali vnica, longa; pectoralibus latiſſimis, acetabulum planiusculum includentibus. Piſcis Smyrnenſis ad Muſtelas accedens. Catal. Muſ. Petrop. nº. 90.

DESCRIPTIO.

Tab. IX. fig. 5. et 6.

Color corporis vniuerſi mutatus, ſubalbidus eſt, et caudam verſus in dilute brunum vergit.

Corpus ipſum, quo ad Muſtelas quam proxime accedit, antice valde craſſum, ſubteres, ventricoſum, poſtice tenuiſſimum, maxime cathetoplateum, et, ſi pinnarum non habeatur ratio, ſatis etiam anguſtum, ac, pro capitis et ventris mole, ſolito breuius. Quod ad circumferentiam eius attinet, ab oris extremo, ſub conuexo ductu, ſupra narium regionem adſcendit, circa quam, inter oculos, aliquantum imprimitur, ſub initium dorſi denuo ſub ductu, parum conuexo, breui licet, eleuatum; deſcendit enim abhinc modice verſus pinnae dorſualis initium, deſcenſuque ſuo, eoque magis notabili, ad extremitatem vsque pergit. Idem ab maxillae inferioris extremo, ſub ductu parum concauo vsque ad ſternum prominulum, ſub rectiori vero dein verſus anticum acetabuli marginem, deſcendit ſtatim notabiliter; ab huius vero margine poſtico ad pinnae ani principium ductum ſequitur ſubconuexum, vlterio-

remque

remque dein cursum ad extremitatem vsque manifesto sub ascensu absoluit. Pisce erecto, seu abdomini incumbente, etiam apparet, pronam corporis superficiem esse conuexam ante oculos et circa narium regionem, ab vno vero ad alterum oculum leuiter impressam, a dorsi initio ad dorsualem pinnam vsque subconuexam denuo, sulcoque leuiori, per medium dorsum ad pinnae initium excurrente, interstinctam; latera dorsi vero iuxta pinnam angustissima, conuexa primum, sensim, dein sensimque quo propius ad caudae pinnam accedunt, decliuia magis. Inuerso pisce, supinam corporis superficiem, inter maxillae inferioris extremum et acetabulum, conuexam, leuiorique insimul ad mentum impressione, sternique prominentia esse notabilem; eandemque pone acetabulum pinnaeque ani principium, absque sulco sinu ve, pariter conuexam, tandemque ad abdominis latera, iuxta ani pinnam, angustissimam, statim ab huius principio decliuem, et ad extremitatem vsque decliuitate continuo maiori auctam, obseruaui. Latera corporis circa branchiarum operculum satis, circa pinnas pectorales autem modice, conuexa, pone has planiuscula sunt. Ex modo dictis etiam corporis crassities quodammodo intelligitur, quae in vniuersum, in dimidia, eademque antica, eius parte, maxima, in altera, eaque postica, prioris respectu, minima est; speciatim vero mox ab oris extremo magna, ad mediam operculorum branchialium partem maxima, et ad pinnae dorsi principium ventremque turgidulum vix minor, inde contra subito diminuta, vsque ad extremum cum decremento valde notabili, spectatur.

Oris

Oris obtuſi rictus, in ratione ad corporis magnitudinem habita, amplus, ab vno ſc. oris angulo ad alterum ſeptem lineas latus, eiusdem conformationis eſt, qualem in Gadis et Muſtelis alias deprehendimus.

Labia oris, nec craſſa, nec valde prominula, interiorem marginem liberum, dentiumque laminis ſolummodo contiguum habent: ſuperius inferiore craſſius latiusque, ab lamina dentium ſuperiore, ſi os apertum directe adſpicias, parum prominet, eiusdemque partem anticam obtegit; inferius, quod tenuius eſt anguſtiusque, eodem, quo ſuperius, modo inferioris laminae faciei anticae opponitur.

Maxillae fere ſemicirculares: ſuperior inferiore parum longior, vtraque lamina ſolida oſſea, ſemicirculari eſt inſtructa, cuius planiuſcula ſuperficies plurimis eiusmodi ſcrobiculis, quales digitalibus imprimere ſolent artifices, exarata conſpicitur. His ipſis, non ſine concinno ordine diſtributis, et aequali ſemper interuallo inter ſe diſtantibus, ſine dubio efficitur, vt ſub manducatione v. g. cibi in ſcabra et inaequali ſuperficie conterantur, et ad deglutitionem praeparentur; adeoque laminas iſtas dentium molarium munere fungi, ac praeter hoc in capiendis firmiusque retinendis cibis ſuum pariter vſum habere, probabile eſt. Singulae laminae medium ſulco eſt diuiſum. quo duorum crurum, quibus componitur, ſymphyſis dignoſcitur. Iuxta hanc maxima earum latitudo $\frac{3}{4}$ lineas exaequat, oris angulos verſus ſenſim decreſcens.

Vtriusque harum laminarum marginem posticum membrana satis valida, crassa, plusquam dimidiam lineam lata, papillisque planiusculis referta, coronat; pronascitur nempe e postici laminae marginis radice, limbo lateribusque omnino libera; harumque ea, quae ad inferiorem maxillam pertinet, sursum spectat, oreque aperto, statim in oculos cadit, cum altera, quod fauces respicit, minus, quam ista, promineat. Cutis, oris interiora inuestiens, aeque, ac membranae modo dictae, papillis vndique scatet.

Septem ab oris extremo lineas in palato superiori conspiciuntur puluilli duo ossei, scabri, hemisphaerici, pisi magnitudine, paralleli, vaginisque membranaceis, veluti praeputio, cincti, iisdemque in palato inferiori totidem areae planiusculae, eiusdemque indolis, respondent.

Narium prominularum vtrinque duo foramina, margini oculorum superiori et antico propiora, quam oris extremo, ac inter se communicantia: posticum, antico dimidio minus, ab oculi proximo margine 1. lineam distat, et in aequali distantia ante se habet anticum, maius, $1\frac{1}{2}$. lin. a proximo oculi margine, et $3\frac{1}{2}$. lin. ab oris extremo, collocatum. Interstitium vero inter dextri ac sinistri lateris nares $3\frac{1}{2}$. linearum est. Notari etiam merentur orificia ductuum muciferorum octo, in vtroque proni capitis latere conspicienda, quorum primum pone oculum, tubulosum; secundum, tubulo satis prominente instructum, infra eundem; tertium, haud procul ab oris angulo, pariter tubulosum, sed antecedentibus minus; quartum, quintum

tum et ſextum, in extremo capitis limbo, ſuperiori labio contiguo, diſpoſita, aequalis a ſe inuicem diſtantiae, caeteris minora, tubuloque diſtituta; haecque ſex in ſemicirculo ſita ſunt; ſeptimum proxime ſupra ſextum, prominulum; tandem oblique introrſum octauum a priori et narium foramine antico aequaliter fere diſtans, paruulum. In aliquali ab maxillae inferioris limbo diſtantia octo iterum occurrunt foraminula, ratione ſitus, maxillae ductum ſequentia. Praeter haecce tubulorum oſtia, in cute etiam circelli minimi, non tantum in prono capite, praeſertim inter oculos, ſed etiam in dorſo et lateribus vndique ſparſim occurrunt, numero plurimi, inaequali ſpatio inter ſe diſtantes, vtplurimum disiuncti, rarius contigui. Num et ex his liquor mucoſus ſecernatur, mihi non certo conſtat; probare tamen id videtur muci coagulum, quo tota fere corporis ſuperficies erat perfuſa, et ſquamarum in vniverſo corpore defectus, quarum ad vices forſan ſupplendas cutis, alias glaberrima, iis inſtructa eſt. Horum circellorum nullum in ſupino corpore comparuit veſtigium.

Oculi, ratione corporis, haud magni, minime prominentes, cutisque communis propagine obducti, ſitum inter perpendicularem et horizontalem medium habent, et quinque linearum interuallo a ſe inuicem diſtant.

Operculum branchiarum variis muſculis, per cutem translucentibus, eſt inſtructum, quorum vnus, omnium maximus, ac dimidiam fere, eandemque inferiorem, operculi partem occupans, buccae inſtar, valde prominet. Habet autem hic mufculus, ex ouato-oblongus, feu potius amygdalaeformis, ac fecundum corporis longitudinem extenfus, fuum duas lineas ab oris angulo principium, quod latiorem et anticam eius extremitatem conftituit, infertionem vero ad pofticum operculi marginem, ad eleuandum operculum et infimul membranam branchioftegam, fine dubio efformatus.

Membrana branchioftega, ampla valde, a fupremo ac poftico operculi angulo ad fterni prominentiam vsque late extenfa, officulis feptem, fitu ac forma inter fe difcrepantibus, duobusque praeterea Mercurii virgulae non abfimilibus cruribus offeis, ex fupremo ac poftico ipfius angulo prouenientibus, fuftentatur. De his primo dicemus, officulorum, proprie talium, genera, vnum poft alterum, poftea pertractaturi. Prodit nempe e loco modo dicto officulum tenue, ftatim a bafi, verfatili, in duo crura inaequalis longitudinis ac modice recurua diuifum, quorum exterius, longius, in partem membranae branchioftegae triangularem, fpinae inftar, fupra pinnae pectoralis bafin, prominentem, abit, eandemque fulcit; interius, breuius, fub angulo valde acuto, prius deferit, aliudque officulum, extremitate inferiore fecundo membranae branchioftegae officulo laxe incumbens, tanquam acceflorium, fub angulo obtufo recipit, quod vna cum cruribus virgulam Mercurii fat bene referre mihi vifum eft. Quod ad ipfa membranae branchioftegae officula attinet, omnia tenuia, gracilia, et aequalis fere inter fe craffitiei funt: primum, caeteris longius, rectum, et fupra ipfius medietadietatem quasi infractum, partim maxillae inferioris marginem presse comitatur, partim ab eodem et operculo aliquantum recedit, extremitate antica musculi cuiusdam, de quo inferius sermo erit, lateri interno et maxillae limbo, laxo mediante nexu, interpositum, postica ossiculi, quod accessorium supra vocaui, interno margini contiguum; secundum, tertium, quartum et quintum, parallela inter se sursumque recuruata, sub anteriore primi parte suas habent radices, crassiusculas, inter se conuergentes, firmoque satis nexu coniunctas, apicibus vero spinae triangularis parti inferiori, eidemque marginali, inseruntur; sextum ac septimum denique, itidem inter se parallela, et notabili a praecedentibus interuallo distantia, ad sterni prominentiae latus suas figunt radices, ab illorum radicibus longe remotas, sursumque leuiter recuruata, iisdem propius sensim accedunt, tandemque ad pinnae pectoralis basin in apices, praecedentium apicibus satis vicinos, abeunt. Quamuis in describendis partibus externis ad musculos, tanquam ad internas, non respiciatur, singularis tamen in hoc pisce ossiculorum membranae branchiostegae compositio, musculorumque, ad ea mouenda destinatorum, distributio me mouent, vt hac occasione breuissimis eorum iniiciam mentionem. Quatuor autem obseruantur musculi, fasciales: vnus eleuator, tres, qui deprimunt. Primus, quem pro eleuatore habeo, ad summum operculi marginem ortus, oblique descendit, et ossiculi, duobus cruribus instructi, basi inseritur; secundus, praecedenti triplo maior, ad mentum oritur, et, oblique transuerso sub decursu, ossiculorum, quarti et quinti,

 forte

forte et plurimum, radicibus affigitur; tertius, secundo duplo minor, cum eodemque, bino sc. triangulum efformans, sub sterni prominentia conspiciendus, ab vno ad alterum latus transuersim extenditur, anticam, sexti ac septimi, ossiculorum extremitatem subit, ac eadem cum praecedenti, insertione gaudet; quartus, tertio aequalis, ac parallelus, ad pinnarum pectoralium basin, eiusdemque inferiorem partem, proxime ante limbum acetabuli anticum situs, a duobus infimis, modo memoratis, sexto sc. et septimo, vnius lateris assiculis ad ista alterius, arcuato parum sub flexu, in transuersum pariter extenditur, suisque tendinibus, qui tenues valde sunt, iis inseritur. Quamuis membranae branchiostegae late pateat ambitus, aperturam tamen ad branchias exiguam valde, sub late triangulari spina, videmus, quatuor sc. tantum lineas latitudine exaequantem.

Squamae in toto corpore nullae; id quod supra iam monui; neque linea longitudinalis vera, sed spuria tantum, in posteriore corporis parte, cuius per medium recta excurrit, apparet.

Anus oris, quam corporis, extremitati propior, angustus, minimeque prominulus est.

Pinnae omnes radiis simplicibus sunt instructae; id quod alias rarissime obseruabitur.

Pinnae pectorales, magnae, latissimae, obtusae, radiorum 33 circiter, basin habent largam, ab inferiore aperturae angulo ad anticum acetabuli limbum sese extendentem, superne semilunari musculo obfirma-

tam

tam, inferne autem plus quam vltra dimidiam partem fulcro eiusmodi musculoso, certe haud prominente, destitutam. Inferior harum pinnarum portio, si expansa est, maximam acetabuli partem obtegit. Septem aut octo infimorum radiorum extremitates pulposae, vltra pinnae marginem excurrentes, breuium diuersaeque magnitudinis, barbularum sub forma dependent. Quoniam, pinnae huius basis a primo statim radio ad vltimum vsque, sub ipsius descensu, sensim antrorsum flectitur, primus situm multo posteriorem, quam vltimus s. infimus, obtinet. Radiorum longitudo sic sese habet, vt ab infimo ad vigesimum sextum circiter vsque, sensim longiores fiant, ab hoc vero ad primum praecedentibus, longissimis, ex ordine parum breuiores. Crassitiei, quam inter se seruant radii, eadem est ratio. Infimi vtriusque pinnae radii sibi tam proxime adstant, vt exiguum tantum inter se relinquant spatium; immo, si quis obiter hasce pinnas adspiciat, in vnam coalitae ipsi videbuntur.

Acetabulum, quod ab inferiore pinnarum pectoralium portione quasi includitur, scutum refert rotundum, planiusculum, illi, quod in Lumpo Anglorum videmus, simillimum. Diuiditur autem sulcis, in ipsius superficie conspiciendis, in varias variae magnitudinis ac formae partes, quarum omnium maxima ea est, quae, acetabuli medium occupans, eiusdemque limbo situ paullo profundior, sub cordis figura apparet, basi os, apice obtuso anum respicientis. Haec, quam et fundum nuncupare possumus, $2\frac{3}{4}$ lin. diametri, secundum longitudinem stria quadam albicante, veluti ner-

VO

vo, in duas aequales diuiditur portiones, ex eademque, tanquam ex ſterno, vtrinque ſub angulo acuto emittit oblique antrorſum coſtas quinque, inferne tenuiores, ſuperne latiores, quarum ſingula in ſummitate lobo obuerſe ouato, reflexoque inſtruitur. Extremitates horum loborum latiores ipſum cordatae partis marginem terminant, quem inter et acetabuli limbi interiorem portionem ſinus valde anguſtus, aut profundior, quam alibi, ſulcus obtinet. Fundum cingit limbus, planus, latiusculus, dimidio plus ſuae latitudinis liber, interius vero vna cum fundo corpori adnatus, ſubſtantiae parte interiore durioris, rigidae, quaſi cartilagineae, foliaceae, exteriore tenuioris, membranaceae, flexilis ac vniformis. Foliaceam iſtam dixi, quod, praeter ſcutulum ſolitarium, e duodecim foliolis, ſeu lobis, contiguis, ſulcisque circumſcriptis, conſtat.

Illud, ſcutulum nempe, directe fundo cordato praepoſitum, ſubquadrangulum, lateribus exaſciatum, antico margine conuexum, poſtico vero ſterni minoris anticae extremitati continuum eſt, foliolaque magnitudine multum ſuperat. Duo proxima ſcutulo foliola, lateribus eius exaſciatis contigua, ſubrotunda ſunt, coſtisque deſtituta, caetera vero, ſubouata, oblique retrorſum ſpectant, extremitate obtuſiore fundo, acutiore membranaceae limbi parti obuerſa, ſingulumque coſtae lobatae reſpondet. Vtriusque etiam lateris intermedia anterioribus ac poſterioribus perparum maiora ſunt. De membranacea limbi parte vix habeo, quod dicam, niſi, quod ad acetabuli latera paullo latiorem, quam in reliquo tractu, eam deprehenderim.

Pinna

Pinna dorsi vnica, longa, 35 radiorum, ad dimidiam fere altitudinem cute, communis propagine, incrassata, in caudae pinnam vsque excurrit, vltimo sc. ipsius radio cum primo alterius, pari modo, vt caeteri, membrana connexo. Radii, a primo, quem in duobus indiuiduis a secundo distinctum, et spinulae instar prominentem vidi, ad vigesimum quartum circiter, ex ordine longiores magisque surrecti, ab his vero ad vltimum vsque sensim breuiores fiunt, licet primis adhuc multo longiores sint.

Pinna ani longa, radiorum 29, eiusdem, ac prior, formae et substantiae, in caudae pinnam, eodem, vt ista, modo, et quidem paullo longius, excurrit, quia vltimus ipsius radius vltimum dorsualis radium longitudine excedit.

Pinna caudae, ratione corporis, parua, lingulata, radiorum 12. Piscem hunc, non tantum pinnarum pectoralium, sed acetabuli etiam forma ac situ, ad Cyclopterum, *Lump* Anglis dictum, mira similitudine accedere, ex descriptione cuiuis erit clarum; quantum autem corporis potissimum forma, summa cutis laeuitate, dorsuali et ani pinna etc. ab eodem abludat, non minus euidens est. Eum itaque ad Genus referre placuit, cum quo pluribus, quam cum alio, notis conuenit. An in salso mari, an dulcibus in aquis vitam degat, et vbi, quaeritur?

Menſura.

	Poll. Pariſ.	lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum -	4	1
Ab oris extremo ad oculi medium - - -	–	6
— — — ad angulum operc. br. poſticum -	1	
— — — ad ſupremi pinnae pect. radii baſin -	1	
— — — ad infimi eiusdem pinnae radii baſin -	–	9
— — — ad anticum acetabuli marginem - -	–	9
— — — ad dorſi initium - - - - -	–	6
— — — ad pinnae dorſi principium - - -	1	3
— — — ad eiusdem finem - - - - -	3	$7\frac{1}{2}$
— — — ad anum - - - - - - - -	1	6
— — — ad pinnae ani principium - - -	1	11
— — — ad eiusdem pinnae finem - - -	3	9
— — — ad pinnae caudae principium - -	3	7
Longitudo radiorum pinnae pect. longiorum -	–	9
— — — pinnae dorſi, ad baſin - - - -	2	$4\frac{1}{2}$
— — — — — — radiorum longiorum - -	–	$5\frac{1}{2}$
— — — — ani, ad baſin - - - - - -	1	11
— — — — — — radiorum longiorum - -	–	$4\frac{1}{2}$
— — — — caudae - - - - - - - - -	–	6
Diameter oculi - - - - - - - - -	–	$1\frac{2}{3}$
— — — acetabuli - - - - - - - -	–	$5\frac{1}{2}$
Ab vno oris angulo (ore ſc. aperto) ad alterum - - - - - - - - - -	–	7

Diſtantia

	pol.	lin.
Diſtantia inter ſingulum oculum - - -		5
— — — — infimorum vtriusque pinnae pect radiorum baſis - - -	—	$2\frac{1}{4}$
— — — — anticum acetabuli marginem et anum - - - - - - - - - - -	—	$0\frac{1}{4}$
— — — — anum, et primi pinnae ani radii baſin	—	5
Membrana vltimi pinnae dorſi radii in caudae pinnam excurrit ad - - - - - -	—	$1\frac{1}{4}$
— — — — pinnae ani radii in eandem excurrit ad - - - - - - - - - -	—	2
Latitudo horizontalis per oculorum axes - -	—	9
— — — — — — — medium operc. bronch	—	1
— — — — — — — pinnarum pect. baſin	—	$0\frac{1}{2}$
— — — — — — — pinnae dorſi principium	—	$9\frac{1}{2}$
— — — — — — — anum - - - -	—	9
— — — — — — — pinnae ani principium	—	5
— — — — — per eiusdem pinnae medium	—	$1\frac{2}{3}$
— — — — — — — — — — — — — finem	—	$\frac{1}{4}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium - -	—	$9\frac{2}{3}$
— — — — — — — — pinn. pect baſin -	1	
— — — — — — — — — — — extrem. marg	1	
— — — — — — — — ani principium - -	—	$0\frac{1}{2}$
— — — — — — — — — medium - -	—	$5\frac{1}{2}$
— — — — — — — circa pinnae ani finem -	—	2

* * *

VII.

Sparus, duabus vtrinque maculis notatus; primo pinnarum ventralium radio longiſſimo, aſtaci antennam referente.

DESCRIPTIO.

Tab. X. fig. 1. Color Piſcis, in ſpiritu vini aſſeruati, e luteo in ſpadiceum vergit, in prono capite, dorſo, poſterioreque corporis parte intenſior, in capitis lateribus pinnisque dilutior, in operculis branchiarum et regione, pone pinnas pectorales ſita, ac circa ventrales dilutiſſimus et argenteo ſplendore mixtus. Intenſioris e luteo ſpadicei coloris obſcura etiam ſedecim circiter zonarum, per transuerſum corporis ductarum, veſtigia adhuc ſuperſunt; rectae quidem hae ſunt, aſt non item perpendiculares, ſed poſteriora verſus parum inclinatae, ita, vt cuiusuis extremitas ſuperior, dorſalis, reſpectu ad ſitum inferiore, ventrali, ſit poſterior. Dorſi, caudaeque, pinnarum radii colore albicante et ſpadiceo alterno variegati. Duae denique in vtroque corporis latere ſunt obſeruandae maculae, ſubrotundae, e bruno fuſcae, quarum vna in medio fere corpore, diametri trium linearum, proxime infra lineam longitudinalem ac poſteriore ſua parte pinnae dorſalis principio directe ſuppoſita; altera minor, ad extremitatem corporis, ſupra pinnae ani finem, huicque, quam extremo dorſo, propior.

Totum

Totum corpus cathetoplateum, latiusculum, et ab anterioribus posteriora versus crassitie sensim decrescens. A prona capitis parte, conuexa, recta et decliui, dorsum statim modico arcu ascendit vsque ad pinnam dorsalem, mox circa quintum huius radium ad I lineam vsque depressum, in linea fere recta ad caudae pinnae principium vsque descendit, conuexam vbique seruans superficiem.

Inferior corporis margo a maxilla inferiore ad caudae pinnam vsque vnicum modo arcum describit, a principio ad anum vsque conuexus, a pinnae ani initio vero vsque ad eius finem sensim magis magisque attenuatur.

Capitis latera anterioraque corporis leuissime tantum conuexa, posteriora e toto fere plana.

Os directe ante oculos locatum, paruulum, arcuatum. Labia oris carnosa, dentes tegentia. Dentes in vtrisque maxillis conferti, obtusi, minimi, fere aequales.

Foramina narium vtrinque duo, inter superius oris labium et orbitae marginem anteriorem eumque superiorem aequali in distantia disposita: anteriore minimo, membranula, antrorsum spectante, velut operculo, obtecto; posteriore ampliore, retrorsumque patente.

Oculi palpebris destituti, limbo superiore magis prominentes, quam inferiore, maximam partem intra orbitam recepto. Iris ex argenteo in pallide brunum colorem vergens. Pupilla subrotunda.

Opercula branchiarum membrana, marginem inveſtiente, et ſupra pinnae pectoralis baſin in triangularem lobulum exeunte aucta, inferioreque marginis parte ciliis oſſeis exaſperata.

Malae os (quod etiam altera alteri ſuperincumbens operculi lamina poſſet nominari) ad anguli poſtici marginem denticulis eſt inſtructum. Pariter etiam margo laminae iſtius oſſeae, orbitam inter ac oris angulum deflexae, denticulis armatus eſt.

Oſtium, ad branchias patens, longum quidem, aſt anguſtum valde.

Membrana branchioſtega, ſi quae forſan adeſt, in conſpectum non cadit; an ſub denſo iſto, quod inter malae oſſa conſpicitur, ſquamarum ſtrato recondita?

Squamae denſe confertae ac molles, totum non ſolum corpus, ſed et omnes capitis partes, exceptis ſolum labiis oculisque, totam fere ani pinnam, vt et dorſi, caudae, pectoraliumque pinnarum baſin obtegunt; maximae ſuper caput, branchiarum opercula, malae oſſa ac anteriorem corporis partem, poſteriorem verſus autem ſenſim minores, quae in pinnis ſunt, et praeſertim in ani pinna, omnium minimae. Linea longitudinalis ex angulo operculi branchiarum ſuperiore prodiens, modicumque deſcribens arcum, poſticum ac ſupremum maculae, in medio corpore ſitae, marginem petit, inde rectiore via, leuique tamen ſub aſcenſu, per medium corporis decurrit, ſubitoque ad vnius circiter lineae altitudinem ſurſum inflexa, leui ſub deſcenſu, ſu, et, poſtquam recta per ſupremum alterius maculae ad caudam conſpiciendae marginem tranſiit, ad medii pinnae ani caudae radii baſin terminatur.

Anus in foſſulam demerſus.

Pinnae pectorales lineari - lanceolatae, radiorum vndecim; extimis breuiſſimis, ſimplicibus, interioribus ex ordine longioribus, ac bifurcatis.

Pinnae ventrales, iuxta abdominis marginem, reſpectu pectoralium 1½ lin. ſitu anteriores, ſibique valde approximatae, ſetaceae, longiſſimae, aſtacorumque antennis ſimiles, radiorum quatuor, quorum tres inferiores in vtraque pinna tenuiſſimi ac breuiſſimi; infimo ſc. ſeu quarto 1 lin. tertio 2 lin. ſecundo 2½ lin. tantum longo. Primus autem, reſpectu illorum valde craſſus, teres, ſetaceus, flexilis, omniumque longiſſimus; ac baſi ſc. verſus apicem ſenſim attenuatur, innumerisque articulis, magnitudine ſenſim decreſcentibus, aſtaci antennarum inſtar, compoſitus eſt, et, in rectam extenſus lineam, tenuiſſima ſua extremitate pinnae caudae radiorum apices fere attingit.

Pinna dorſalis, in ſquamoſa baſi faſtigata quaſi, citra dorſi medietatem ſita, radiorum tredecim, ex ordine ſenſim longiorum. Priores quinque, ſimplices, rigidi, caeterisque craſſiores, veri ac validi ſunt aculei; ſequentium, a ſexto ad duodecimum, qui longiſſimus eſt, plerique infirmiores, flexiles magis ac ramoſi; vltimus penultimo paulo breuior.

Pinna ani, ab ano ad caudae pinnae initium extenſa, radiorum circiter quadraginta quatuor, maximam

mam partem ſimplicium ; a primo ad trigeſimum ſextum vsque ex ordine ſenſim longiorum , ab hoc ad vltimum vero ex ordine ſenſim breuiorum. Decem vel duodecim priores rigidi , validi et aculeati, ſequentium plurimi molliores ; vltimorum quidam ſubramoſi. Caeterum , ſi de numero et longitudine radiorum certus eſſe velis , pinna , quae denſo ſquamarum ſtrato obtecta eſt, deſquamanda tibi prius erit , vt radii denudati in conſpectum veniant.

Pinna caudae modice bifurca , lobis obtuſis , radiorum octodecim , ramoſorum ; vtriusque lobi intermedii ac exteriores caeteris, quos includunt, longiores.

Menſura.

	Poll. Pariſ.	Lin.
Longitudo tota , ſc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum	4	
- - - - ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - - -	3	1
Ab oris extremo ad oculi medium - - -	-	4
- - - - - - - ad angulum operc. br. poſticum	-	$9\frac{1}{3}$
- - - - - - - - principium pinn. pectoralium	-	$10\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - - - - - - - - ventralium	-	11
- - - - - - - - - - - - - - pinnae dorſi - -	1	10
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - ani - -	1	$1\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - caudae -	3	
- - - - ad anum - - - - - - - -	1	$1\frac{1}{2}$

Longi-

	Poll.	Lin.
Longitudo pinnarum pectoralium - - - -		$10\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - ventralium - - - - -	3	1
- - - - pinnae dorſi, ad baſin - - - -	-	6
- - - - - - - - - - - - radiorum longiorum -	-	11
- - - - - - - - - ani, ad baſin - - - -	2	1
- - - - - - - - - - - - radiorum longiorum -	-	$7\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - caudae, ſc. a primis radiis, ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices - - - - - - - - - -	-	11
Extremitas corporis ſquamoſa in caudae pinnam extenſa, ad - - - - - - -	-	1
Diameter oculi - - - - - - - - - -	-	$2\frac{1}{2}$
Diſtantia inter infimi pinnae pectoralis primique pinnae ventralis radii baſin - -	-	3
- - - - pinnae ventralis baſin et anum, ſeu pinnae ani initium - - - - - - -	-	3
- - - - vltimi pinnae dorſi radii baſin, et primum pinnae caudae radium - - -	-	$9\frac{2}{3}$
- - - - vltimi pinnae ani radii baſin, et primum pinnae caudae radium - - -	-	0
Latitudo horizontalis per oculorum axes -	-	5
- - - - - - - per poſticum operc. br. marginem - - - - - - - - - - -	-	$5\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - pinnae ani principium -	-	5
- - - - - - - - - - - - - - dorſi - - -	-	3
- - - - - - - - - - - - - - caudae - - -	-	$\frac{2}{3}$

	Poll.	Lin.
Latitudo perpendicularis per oculi medium -	–	7
– – – – – – – – – – – – dorsi initium -	–	$10\frac{2}{3}$
– – – – – – – – – – – – principium pinnarum pectoralium - - - - - - - -	1	$1\frac{1}{3}$
– – – – – – – – – – – – principium pinnarum ventralium - - - - - - - -	1	5
– – – – – – – – – – – – principium pinnae dorsi - - - - - - - - - - -	1	5
– – – – – – – – – – – – eiusdem pinn. finem	1	3
– – – – – – – – – – – – principium pinnae caudae - - - - - - - - - - -	–	6

* * *

VIII.

Labrus valde oblongus, taeniis tribus candidis, diuersae longitudinis, insignitus; cauda integra.

DESCRIPTIO.

Tab. X. fig. 2. Piscis in spiritu vini asseruatus ex albido liuidus, taeniisque tribus candidis vtrinque pictus est, quarum *suprema* e media fronte orta, oblique ad orbitae marginem anticum, indeque, ipso interrupta oculo, ab orbitae margine postico ad superiorem operculi branchiarum angulum vsque ducitur, *intermedia* ab angulo oris

oris initium capiens, orbitaeque marginem inferiorem tangens, rectaque via per branchiarum operculum, eique appensam membranam, ducta persistit, suique finem mentitur, ast directe sub hac, in ipso corpore continuata, per lateris medium in caudae pinnam vsque excurrit, *infima* vero sub maxilla inferiore orta, arcuato statim ductu imum operculi marginem petit, abhinc, pariter vt intermedia, in ipso corporis margine, margini operculi branchiarum contiguo, sub angulo cum priore sui tractu obtuso, continuata, pone pinnae pectoralis basin inflectitur, indeque leui sub descensu paralleloque cum intermedia ductu ad extremitatem corporis vsque ducitur. Sic quoque margo corporis inter mentum et angulum vtriusque operculi branchiarum inferiorem candicat, candoremque suum cum infimae vtriusque lateris taeniae principio miscere videtur.

Corpus cathetoplateum, lanceolatum, macrolepidotum, margine superiore paulo magis arcuato, magisque attenuato, quam inferiore; lateribus subconuexis.

Caput cathetoplateum, laeue. Os angustum; denticulorum in vtraque maxilla elliptica et aequali gracilium, oblique antrorsum porrectorum, denseque constipatorum, vnica series, labiis carnosis, clauso ore, obtecta. Lingua angusta, carinata, glabra.

Narium foramina vtrinque duo, minima, in taeniae supremae tractu, qui ante oculum est, disposita, ipsi oculo, quam ori, longe propiora.

Oculi subrotundi, in supremis fere capitis lateribus, oreque altius, siti.

Opercula branchiarum laeuia, alepidota, membranaque terminata, tam ad ſuperiorem, quam ad inferiorem ſinguli operculi angulum, in lobulum ſatis notabilem excreſcente. Membranae branchioſtegae, eiusque oſſiculorum, nulla veſtigia. Hiatus ad branchias peranguſtus, licet praelongus ſit, et ab operculi angulo ſuperiore, oculo altius poſito, ad abdominis marginem vsque, quem inferior occupat, extenſus.

Squamae ſatis amplae, magnitudine inter ſe invicem haud multum diuerſae, flexiles, perbreues, laeves, ad oras integerrimae.

Linea longitudinalis ab angulo operculi branchiarum vtriusque lateris ſuperiore, ductu leuiſſime conuexo, in aequali fere ab extremo dorſi margine et latere corporis medio diſtantia et parallelismo decurrit ad regionem vsque, decimi ſeptimi pinnae dorſi radii baſi ſuppoſitam, ibi, mox in linea recta oblique deorſum ac retrorſum ad lateris medium deflexa, intermediam ſubintrat taeniam, cum eademque dein rectilineo curſu in caudae pinnam vsque procedit. Formatur autem ipſa haec linea longitudinalis potiſſimum a viginti ſex ſeptemve punctis, quae ipſa nihil aliud ſunt, quam canaliculorum muciferorum, ſquamas ad lineam pertinentes perforantium, oſtiola.

Anus in medio fere corpore.

Pinnae in toto piſce ſeptem.

Pinna dorſi vnica, longa, e regione pinn. pect. radii primi baſi orta, radiis inſtructa viginti, ſimplicibus; anterioribus nouem aculeatis, ex ordine ſenſim longi-

longioribus; reliquis inermibus, aculeatorum vltimos perparum longitudine primum ſuperantibus, dein vero finem pinnae verſus iisdem breuioribus ſenſim factis; vltimo, vigeſimo ſc. ad baſin vsque bipartito.

Pinnae pectorales duae; vtrinque vnica, ſtatim poſt operculum, ſubtriangularis, oblique ſurſum flexa, radiisque quindecim circiter inſtructa, quorum longitudo et craſſities, a ſuperioribus ad inferiores, ſenſim decreſcit; horumque plurimi bipartiti.

Pinnae ventrales binae, contiguae, pectoralibus paulo poſteriores ſitu, abdominis margini impoſitae, in aequali fere ab operculorum angulo inferiore et ano diſtantia. Figurae eſt quaelibet lanceolatae, acutae, radiisque ſex ſuffulta, quorum interiores exterioribus, ſimplicibus, longiores et bipartiti.

Pinna ani, mox poſt anum et e regione pinn. dorſ. radii noni baſi orta, vltimique eiusdem pinnae terminata, radiis conſtat tredecim, ſimplicibus, eiusdem fere inter ſe et cum dorſalibus longitudinis; primo, et ſecundo, aculeatis, breuioribus; in ſequentibus iisdem parum longioribus, inermibus; vltimo ad baſin vsque bifido.

Pinna caudae integra, aequalis, circa baſin ſquamis veſtita, radiorum duodecim; extimo vtriusque lateris ſimplici, breuiore; caeteris omnibus ramoſis, quorum intermedii proximis lateralibus perparum longiores.

Menſura.

	Poll.	Lin. Pariſ.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad pinnae caudae radiorum apices - - -	3	5
- - - - ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - - -	3	1
Ab oris extremo ad oculi medium - -	–	5
- - - - - - - - - angulum operc. br. ſuperiorem - - - - - - - - - - -	–	10
- - - - - - - - - principium pinnae dorſi -	1	
- - - - - - - - - - - - - - pinnarum pectoralium - - - - - - - - -	–	11
- - - - - - - - - - - - - - - - - ventralium	1	2
- - - - - - - - - - - - - - pinnae ani, ſeu ad anum - - - - - - - - -	1	9
- caudae -	2	10
Longitudo pinnae dorſi, ad baſin - - -	1	$6\frac{1}{2}$
- - - - - - - - radiorum longiorum	–	$3\frac{1}{2}$
- - - - pinnarum pectoralium - - -	–	7
- - - - - - - ventralium - - -	–	$4\frac{2}{3}$
- - - - pinnae ani, ad baſin - - -	–	$9\frac{1}{2}$
- - - - - - - radiorum longiorum -	–	3
- - - - - - caudae, ſc. a primis radiis, ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices - - - - - - - -	–	7
Extremitas corporis ſquamoſa in caudae pinnam extenſa ad - - - - - - -		$2\frac{1}{2}$
Diameter oculi - - - - - - - - -	–	$1\frac{2}{3}$

Diſtan-

	Poll.	Lin.
Diſtantia inter primi pinn. dorſ. primique pinnae pect. radii baſin - - - - -	–	5
– – – – – – vltimi pinn. dorſ. primique pinnae caudae radii baſin - - - - -	–	4
– – – – – – – infimi pinn. pect. primique pinnae ventralis radii baſin - - - -	–	$5\frac{1}{3}$
– – – inter pinnarum ventralium baſin et anum, ſeu pinnae ani initium - - -	–	7 ad
– – – – – – – vltimi pinnae ani radii baſin et primum pinnae caudae radium - -		$7\frac{1}{2}$
	–	4
Latitudo horizontalis per oculorum axes -	–	$3\frac{1}{2}$
– – – – – – – – – – – – – poſticum operc. br. marginem - - - - - - - - -	–	5
– – – – – – – – – – – – – pinnae ani principium	–	$3\frac{1}{4}$
– – – – – – – – – – – – – – – – – finem -	–	$1\frac{1}{2}$
– – – – – – – – – – – – – – – caudae principium - - - - - - - - -	–	$\frac{2}{3}$
– – – perpendicularis per oculi medium -	–	7
– – – – – – – – – – – – – – dorſi initium -	–	8
– – – – – – – – – – – – – – principium pinnarum pectoralium - - - - - - -	–	$10\frac{1}{3}$
– – – – – – – – – – – – ventralium	–	$10\frac{2}{3}$
– – – – – – – – – – – – pinnae ani	–	$9\frac{2}{3}$
– – – – – – – – – – pinnae ani finem	–	5
– – – – – – – – – – principium pinnae caudae - - - - - - - - -	–	4

* * *

IX.

Scomber dorſi anique pinna continua; aculeis ad vtriusque initium acceſſoriis.

An? *Gaſteroſteus* ſpinis dorſalibus quatuor. *Linn.* *Syſt.* Nat. edit. dec. p. 295. n°. 2. (Ductor.).
Haſſelqu. iter. 366.
Act. *Stockb.* 1755. p. 71.

DESCRIPTIO.

Tab. X. fig. 3. et 4.

Colore hic piſcis, in ſpiritu vini aſſeruatus, adhuc gaudet argenteo, ſplendente in ſemilunari iſta, quae infra et poſt vtrumque oculum ſita eſt, regione muſculari, in vtriusque operculi branchiarum maxima, eaque poſtica dimidiaque, et omni totius corporis, quae infra lineam longitudinalem cadit, parte; ſordide albicante in prono et ſupino capite, ore, maxillis, palpebra, anteriore operculi lamina, pinnisque omnibus; dilute ſpadiceo denique in omni, quae ſupra lineam corporis longitudinalem venit obuiam, regione.

Corpus teretiusculum, rectum, toroſum, microlepidotum et modice cathetoplateum eſt, excepta ipſius extremitate, quae vltimos dorſi, vel ani, et caudae, pinnarum radios interiacet, plagioplatea, et, ſi latus reſpicias, valde contracta, ac in medio vtrinque in aciem carnoſo-membranaceam attenuata. Porro, quod ad conformationem corporis attinet, idem a maxillae ſuperio-

ſuperioris extremitate ſenſim ac leuiter aſcendit ad quartum dorſi aculeum, ſeu primum pinnae dorſalis radium vsque, et ab hoc caudam verſus ſimiliter deſcendit; a maxillae inferioris extremitate vero leui ſub deſcenſu pinnas petit ventrales, ab his rectius progreditur vsque ad anum, et ab hoc caudam verſus ſenſim ac leuiter aſcendit. Margo dorſi ab occipite primum aculeum verſus contractus ac prominulus eſt. Latera corporis ſatis conuexa.

Caput vtrinque compreſſum, ſuperne planiusculum, carina longitudinali, per medium verticem ducta, ſuperficiali notatum, alepidotum, glabrum, occipitis tantum vtriusque lateris angulo et ſpatio iſto ſemilunari, muſculoſo, oculum inter et operculum branchiarum ſito, exceptis, ſquamulis minutiſſimis inſtructis.

Os obtuſiusculum, apertura oblique deorſum ſpectante. Maxillae, ore clauſo, ſatis aequales, aperto autem inferior ſuperiore paulo longior; eaedemque denticellis acutis, minutiſſimis interius exaſperatae.

Narium foramina, oris extremo, quam oculis, paulo propiora, vtrinque duo, ſibi inuicem valde propinqua, elliptica et verticaliter poſita; horum poſterius ſitu paulo altius, quam anterius, eſt.

Oculi magni, in laterum ſuprema parte poſiti, oris extremo, quam angulo operculorum poſtico, propiores, cute, quam orbitae margo omnis ſuper albugineam emittit, ceu palpebra, in ipſorum ambitu inae-

 qualiter

qualiter obtecti, ita, vt luminis, quo palpebra ad oculum patet, diameter perpendicularis horizontalem nonnihil ſuperet.

Opercula branchiarum falcata, ſubtus et in lateribus vtrinque longo hiatu aperta, inermia, alepidota, circa marginem membrana terminata. Margo laminae anterioris, caeteris incluſae, membranaceus et crenulis minutiſſimis inciſus.

Membrana branchioſtega, ſub operculis tota latens, oſſiculis videtur ſex ſuffulta.

Supra pinnarum pectoralium baſin ſcapula oſſea triangularis, poſtico ac ſuperiori operculorum margini contigua, prominet.

Squamulae innumerae, minutiſſimae, cuti arcte inhaerentes, fere vt in Gadis.

Linea longitudinalis, continua, prominula, ab angulo operculorum poſtico ad $4\frac{1}{2}$. lin. recta et oblique ſurſum ducta, hinc ſub angulo valde obtuſo deflexa, leuique et modice arcuato ſub deſcenſu in aciei ſupra memoratae initium incurrit, in eodemque ſuum agnoſcit finem.

Anus in corporis medio, ſc. ab oris extremo aeque ac longiorum pinnae caudae radiorum apicibus, et breui interuallo ab ani pinna, diſtans.

Pinnae

Pinnae in toto corpore ſeptem; ſc. duae pectorales, totidem ventrales, vnica dorſi ani et caudae.

Pinnae pectorales, poſt branchiarum aperturas, ventri, quam dorſo, propiores, oblongae, radiis ſeptendecim circiter conſtructae, leuiter arcuatis et ſubramoſis. Hi, a primo, aut ſecundo potius, ſuperiore, ad infimum vsque, ſenſim gracileſcunt, et, ratione longitudinis, a primo ad quintum vsque, ſenſim increſcunt, ab hoc vero ad infimum notabiliter decreſcunt. Communis omnium horum radiorum baſis, non minus vt ipſi, arcuata.

Pinnae ventrales contiguae, directe ſub inferiorum pinn. pect. radiorum baſi, in imo ventre ſitae, radiisque quinque compoſitae ſatis robuſtis, quorum primus ac ſecundus, ſitu exteriores, ſimplices ac reliquis longiores, tertius, quartus et quintus vero, interiores ſitu, ramoſi, illisque ex ordine breuiores. Intimus pinnarum vterque membrana mediante eidem baſi affixus.

Pinna dorſi, praecedentibus vtriusque generis pinnis ſitu poſterior, longa, plurimam dorſi marginis partem occupans, radiis viginti nouem ſuffulta, et praeterea quatuor, breuibus, aculeis diſtinctis, ad ipſius initium, aucta. Horum anticus et poſticus, minimi, intermedii duo paulo craſſiores ac longiores, omnes autem mobiles, et poſtica ipſorum facie membranula triangulari inſtructi. Illi, ſc. ipſius pinnae radii omnes in vnam pinnam, ſolito more, concreti ac molles; anteriores craſſiores ac longiores, inſequentes tenuiores ac breuiores ſenſim facti, ſimplices, poſteriorum quidam intermedios longitudine parum ſuperantes ac ſubramoſi.

Pinna ani, dorſali breuior longe, radiorum nouendecim, quorum anteriores maiores reliquis, (ſimilibus tamen in dorſali pinna minores) intermedii minores poſteriores mediae magnitudinis, de reliquo autem eiusdem cum dorſalibus conformationis. Accedunt ad initium huius pinnae pariter aculei duo diſtincti, perbreues, dorſalibus iſtis minores; anterior ob paruitatem ſuam vix conſpiciendus, poſterior paulo maior. Caeterum pinnae huius finis paulo longius a pinnae caudae initio diſtat, quam finis pinnae dorſi.

Pinna caudae profunde biſurca, caudae plagioplateae verticaliter inſiſtit, eamque ex parte excipit, radiis circiter triginta quatuor compoſita, quorum exteriores vtriusque lateris omnium breuiſſimi, ex ordine tamen longiores, ſimplices, ſuperantur a proximis ſequentibus, omnium longiſſimis, ſubramoſis, hisque cedunt intermedii, ex ordine, ad medium pinnae vsque, ſenſim breuiores facti, valde ramoſi.

Menſura.

Menſura.

	Poll Pariſ.	Lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad longiorum pinnae caudae radiorum apices -	5	6
— — — ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - - - - -	5	
Ab oris extremo ad oculi medium - -	-	$6\frac{1}{2}$
— — — — — — angulum operc. br. poſticum	-	9
— — — — — — principium pinn. pectoralium	1	5
— — — — — — — — — — — — ventralium	1	7
— — — — — — primum dorſi aculeum -	1	11
— — — — — — principium pinnae dorſi -	2	$2\frac{1}{2}$
— — — — — — anum - - - - - -	2	9
— — — — — — aciei caudae initium -	3	11
— — — — — — primum ani aculeum, ſeu ad pinnae ani principium - - - - -	2	11
— — — — — — principium pinnae caudae	4	5
— — — — — — aciei caudae finem -	4	9
Longitudo pinnarum pectoralium - - -	-	8
— — — — — — — — ventralium - - -	-	9
— — — maiorum dorſi aculeorum - -	-	1
— — — pinnae dorſi, ad baſin - - -	1	11
— — — — — — — — radiorum longiorum -	-	$6\frac{1}{2}$
— — — — — ani, ad baſin - - - -	1	$1\frac{1}{2}$
— — — — — — — radiorum longiorum -	-	$4\frac{1}{2}$
— — — — — caudae, ſc. a primis radiis, ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices	1	2
Extremitas corporis ſquamoſi in caudae pinnam extenſa ad - - - - - - - - -	-	$6\frac{1}{2}$

	Poll.	Lin.
Diameter oculi perpendicularis - - - -	-	$3\frac{2}{3}$
Diſtantia inter infimi pinn. pect. primique pinn. vent. radii baſin - - - - - - -		$3\frac{1}{2}$
— — — — quinti pinn. ventr. radii baſin et anum - - - - - - - - - - -	1	$1\frac{1}{2}$
— — — —anum et primum aculeum - -	-	$1\frac{2}{3}$
— — — — vltimi pinn. dorſ. et primi pinn. caudae radii baſin - - - - -	-	$3\frac{1}{3}$
— — — — vltimi pinn. ani primique pinn. caudae radii baſin - - - - - - -	-	4
— — — — longiorum vtriusque lateris pinn. caudae radiorum apices - - - - -	1	
Latitudo horizontalis per oculorum axes -	-	$7\frac{1}{3}$
— — — — — — — — poſticum operc. br. marginem - - - - - - - - - -	-	9
— — — — — — — — primum dorſi aculeum	-	$7\frac{2}{3}$
— — — — — — — — principium pinn. dorſi	-	$7\frac{1}{2}$
— — — — — — — — — — — aciei caud.	-	5
— — — — — — — — pinnae dorſi finem -	-	$5\frac{1}{3}$
— — — — — — — — — — caud. initium	-	$3\frac{2}{3}$
— — — — — — — — aciei caudae finem -	-	$1\frac{1}{4}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium -	-	$8\frac{1}{4}$
— — — — —poſticum operc. br. marginem - - - - - - - - - - -	-	11
— — — — — principium pinnae dorſi - - - - - - - - - - - - -	1	
— — — — — anum - -	-	11
— — — — — aciei caud. princip.	-	$4\frac{1}{2}$
— — — — — pinnae ani finem	-	$3\frac{1}{3}$
— — — — — pinn. caud. princip.	-	2

ASTRO-

ASTRONOMICA.

OBSER-

OBSERVATIONES ALIQVOT ASTRONOMICAE ET METEOROLOGICAE LIPSIAE HABITAE

a

G. HEINSIO.

Eclipsis Lunae totalis d. 24. Ianuar. anno 1758. temp. ciuil. ſtyl. nou.

Eclipſis haec inſtabat horis matutinis in vicinia horizontis occidui, et calculus momenta tantum ingreſſus Lunae in vmbram terreſtrem viſibilia hic loci promittebat. Nix copioſa, quae die praecedente cecidit, nullam obſeruationis futurae ſpem praebebat, quae tamen veſperi, cum nubes inciperent hiatus agere, nonnihil excitabatur. Et re vera, inſtante Eclipſis initio, coeli facies, nubes plerumque tenues et hiatus ſerenos oſtendens, ſucceſſum nonnullarum ſaltem obſeruationum ſpondebat. Inuigilaui illis ope Tubi Aſtronomici, 6 ped. Pariſ. longi, qui obiecta admodum diſtincte repraeſentat, eaque ſecundum diametrum 24. vicibus auget. Tempus ad horologium oſcillatorium, hoc et ſequentibus diebus per altitudines Solis reſpondentes correctum, numeratum eſt. En obſeruationum circumſtantias:

 Anno

An. 1758. *ſtyl nou.*
d 23. *Ian. temp.*
vero Aſtronomico.

$17^h. 1'. 0''.$	Penumbra iam ad limbum Lunae orientalem in regione inter Cardanum et Seleucum diſtingui potuit, licet Luna per nubes pallida appareret.
— 10. 0.	Penumbra denſa cernebatur in dicta lunaris diſci regione. Luna nonnihil lucidior erat.
— 12. 20.	Initium Eclipſis fieri credidi in media inter Cardanum et Seleucum regione. Forſan initium nonnihil citius contigit: vmbra enim vera cum penvmbra admodum confundebatur. Non multum tamen aberrari puto, ſi momentum notatum pro momento initii habeatur. Luna ſatis lucida per nubes apparuit.
— 12. 45.	Certus eram, initium Eclipſis iam ante contigiſſe, licet terminus fere nullus inter vmbram et penumbram diſtingui poſſet.
— 14. 15.	Credidi appulſum vmbrae ad Grimaldum, termino inter vmbram et penumbram valde incerto.
— 14. 45.	Certus eram de appulſu vmbrae ad Grimaldum; vel potius peripheria vmbrae Grimaldum iam nonnihil intraverat.

verat. Statuere licebit appulſum vmbrae ad Grimaldum $17^h\ 14'\ 30''$.

Nunc vmbra melius terminari incipiebat.

— 15.′23″. Grimaldus videbatur totus in vmbra; ſed incertus adhuc eram.

— 15. 53. Grimaldus certe totus ab vmbra tectus; quod momentum pro totali immerſione Grimaldi retinere licet.

Luna per nubes tenues halone cincta apparuit.

— 20. 54. Vmbra tangit Ariſtarchum.

— 21. 33. Ariſtarchus totus in vmbra.

Paulo poſt coelum faciem nanciſcebatur ſerenam.

— 31. 8. Vmbra tangit Copernicum.

— 32. 7. - - - per medium Copernici.

— 33. 6. - - - totum Copernicum inuoluit.

Has circa Copernicum obſeruationes omnium certiſſimas habeo. Luna erat admodum clara, et terminus inter vmbram et penumbram bene diſtinctus.

— 37. 0. Nubes denuo coelum peruagabantur, et elapſo minuto omnis conſpectus Lunae erat impeditus.

— 47. 0. Luna quidem per nubes denuo translucere incipiebat, aſt maculas lunares ſufficienter diſtinguere non licuit, vt appulſus vmbrae ad iſtas aliqua certitudine notari potuiſſent. Sic quoque

 18^h.

$18^h. 7'. 0''.$ coniectura tantum appulſum vmbrae ad Mare Criſium, quo ſcilicet iſta hoc tangere incepit, animaduertere licuit. Tandem et denſiores nubes et aedificia interpoſita obſeruationum continuationem impediebant.

Cum die 26. Ianuar. poſt meridiem obſeruationes altitudinum Solis pro correctione horologii proſequerer, inſignis effectus refractionis per nubes ſeſe obtulit. Scilicet inueneram ope Quadrantis, cuius mentio facta eſt T. I. Comment. nou. p. 464.

tempore horologii oſcillatorii		altitudinem limbi ſuperioris Solis (pro apparentia Tubi, inferioris) absque vlla correctione	
$2^h. 49'. 59''.$	$6'. 4''.$	$12°. 20'.$	$35'.$
— 56. 3.		11. 45.	

et tempore intermedio Quadrantem quoque diſpoſueram ad altitudinem $12°. 0'.$ vt momentum appulſus limbi Solis (apparenter in Tubo, inferioris) ad filum horizontale annotarem. Accedebat limbus inferior ad filum horizontale aſcendendo ſecundum apparentiam in Tubo; pauca autem ſecunda temporis ante, quam contactus limbi cum filo horizontali futurus eſſet, nubes denſa diſcum Solis intrabat, ita quidem, vt pars eius apparenter ſuperior tota e conſpectu eriperetur, inferior autem in vicinia fili ſufficienter adhuc cerni poſſet. Portio tunc admodum exigua limbi inferioris infra filum horizontale adhuc perſiſtebat, prona ad contactum

cum

cum filo; aſt intra 20. ſecunda temporis nulla ſenſibilis eius portionis imminutio, nullus ſenſibilis acceſſus limbi inferioris ad filum, obſeruari potuit, donec tandem contactus limbi cum filo poſt pauca ſecunda conſequeretur, quem $2^h.53'.44''$. horologii celebratum fuiſſe aeſtimaui, intra 3. vel 4. ſecunda temporis certus, quia nubes nunc limbum quoque inferiorem (apparenter) occuparet. Hoc phaenomenum permanentiae diſci ſolaris in eodem loco inſigne refractionis augmentum per nubem vtique indicat, et retardatio appulſus limbi ad filum horizontale ſub altitudine $12°.0'$. quam ſuperiores obſeruationes docent, idem comprobat. Scilicet ſi variatio altitudinis 35. minut. vniformis ſtatuatur per interuallum temporis $6'\ 4''$; limbus Solis altitudinem $12°.0'$. attingere debuiſſet $2^h.53'.27''$., quam tamen re vera demum $2^h.53'.44''$., ideoque $17''$. ſerius, conſecutus eſt. Animaduertere conuenit, altitudini $12°.0'$. ex diuiſione Quadrantis ob aberrationem lineae fiduciae reſpondere altitudinem re vera $= 11°.40\frac{3}{4}'$.; thermometrum autem mercuriale intra conclaue, in quo obſeruatio peracta eſt, appenſum ad horologium, proxime indicaſſe 160. grad. ex diuiſione *de l'Isle.*

Coronidis loco mentionem iniiciam obſeruationis *Eclipſis Lunae partialis* d. 17. April. ſt. nou. 1753. Lipſiae peractae, quamuis non, niſi vnicum momentum, *Finem* nempe *Eclipſis*, hor. 8. $35\frac{1}{4}$. min. temp. veri aſtron. annotare licuerit. Circumſtantiae quoque omnem rigorem non ſpondent; a veritate tamen momentum notatum non multum aberrare credo. Scilicet Eclipſis haec accidit in vicinia horizontis ortiui, quorſum proſpectus ex meo domicilio non patebat. Idoneum itaque locum petens horologiis tantum portatilibus, tribus quidem, in dimenſione temporis, vti licuit, quorum vnum minuta ſecunda monſtrabat. Iſtorum comparatio facta eſt tum mutua, tum ad horologium oſcillatorium in domicilio meo poſitum, cuius ſtatus, ex obſeruatis Solis altitudinibus innotuit. Probe iſta inter ſe conueniebant in determinatione momenti finis Eclipſis, quem ſolummodo per Tubum Gregorianum ſub apparatu, quo obiecta ſecundum diametrum 52. vicibus ille amplificat, obſeruare potui; pauca enim minuta prima temporis ante finem Eclipſis nubes demum, tenues adſpectum Lunae ſufficientem concedebant. Vmbra terreſtris valde diluta, et confinium vmbrae et penumbrae non ſatis diſtinctum apparuit. Momento $8^h.35\frac{3}{4}'$. ſupra notato finem iudicaui, de certitudine ſub eiusmodi circumſtantiis ſufficiente perſuaſus; et $8^h.37\frac{1}{4}'$. de fine certe iam peracto conuictus eram.

* * *

D. 21. *Iunii ſt. nou. an.* 1757, quinto poſt nouilunium die, veſperi circa occaſum Solis inſtabat *occultatio* ſtellae primae magnitudinis, *Cordis* nempe *Leonis* a *Luna*. Attentus ad iſtam ope Tubi aſtron. 6. ped. ſupra in obſ. Eclipſ. ☽. d 24. Ianuar 1758. deſcripti, quo integer Lunae diſcus oculo ſubiiceretur, immerſionem ſtellae ad marginem Lunae obſcurum obſeruare non licuit, absque dubio nimia luce ante Solis occaſum obſtante; aſt circiter $\frac{2}{3}$. horae poſt Solis

Solis occaſum *emerſionem* ſtellae ad limbum Lunae lucidum probe annotare potui $8^h. 57'. 55''$. *temp. vero aſtron.* quo momento ſtella, figuram diſculi referens, limbo Lunae lucido ita adhaerebat, vt ſecundum apparentiam in Tubo (inuerſam nempe) margo ſtellae occidentalis limbnm Lunae orientalem tangeret. Tempus horologii oſcillatorii per altitudines Solis, ex parte reſpondentes, rite correctum eſt.

D. 10. *Iulii ſt. nou an.* 1757. per Tubum Gregorianum ſub apparatu, quo iſte obiecta 52. vicibus ſecundum diametrum auget, obſeruaui *emerſionem Satellitis ſecundi* ex vmbra *Iouis*, ad diſtantiam a proximo Iouis limbo orientem verſus (ſitu erecto) $= \frac{3}{4}$. diam. Iouis proxime, coelo bene fauente. Contigit autem tempore vero aſtron.

Emerſio 2^{di} *prima*	$9^h. 28'. 45''$.
Emerſio totalis ſeu Satelles lumine pleno fulgebat	— 31. 20.

Altitudines Solis correctionem horologii oſcillatorii ſubminiſtrarunt.

De apparitione Veneris interdiu egi in Tom. III. Nou. Commentar. pag. 437. ſequ. ibique pag. 441. reditum huius phaenomeni circa finem Septembris vel menſe Octobri an. 1756. futurum praedixi. Euentus praedictionem optime confirmauit. Diebus ſerenis, ſpeciatim d. 29. Septembris, d. 3. et 10. Octobr. an. 1756, Venerem per integram horam poſt Solis ortum oculo nudo cernere licuit, et ii, qui oculorum acie pollebant, Venerem per duas tresue horas poſt Solis

lis ortum, diebus aliis per menſem Octobr. ſerenis, proſecuti ſunt.

Obſeruationes meteorologicae.

Caloris aeſtiui maxime extraordinarii, quem nonnunquam hic loci experimur, aliquoties mentionem inieci in Tomis Commentar. praec. Exempla ſequentia addere licebit. Thermometrum mercuriale ex diviſione *de l'Isle* Tom. I. Nou. Commentar. pag. 469. deſcriptum, quod I. vocabo, in loco vmbroſo boream verſus libero aeri expoſitum, rem patefecit.

An. 1755. *ſtyl. nou.*

	Poſt meridiem		Therm. I	
D. 13. Iulii	$1^h. 34'$.	-	101. grad.	
	3. 5.	-	$99\frac{2}{3}$.	Coelo ſereno, ſpirante vento leni ex auſtro.
	— 24.	-	$99\frac{1}{6}$.	
	— 42.	-	$99\frac{1}{3}$.	
	4. 0.	-	100.	

An. 1757. *ſtyl. nou.*

			Therm Z	
D. 14. Iulii	$3^h. 0'$.	- - -	$101\frac{1}{3}$	coelum ſerenum
	5. 15.	- - -	102.	ventus ex auſtro
d. 15. Iulii	3. 0.	- - -	102.	ventus ex occidente, nocte inſequenti tonitrua.
d. 19. Iulii	3. 0.	- - -	103.	ventus SSO. coelum ſerenum
d. 21. Iulii	2. 45.	- - -	$99\frac{3}{4}$.	ventus SW. coelum ſerenum.

Iam ante d. 14. Iulii per plures dies coelo ſereno ingentem experti eramus calorem, isque, licet per vi-

ces

ces plueret, continuauit vsque ad d. 28. Iulii, quo hor. 3 p. m. thermometrum adhuc indicabat 106. grad. Tam diuturni aeſtus, quem nulla fere tonitrua hic loci comitabantur, recordatio non extat. Fertilitas erat ſingularis, et meſſis admodum larga. In his obſeruationibus thermometrum mercuriale a Cel. D *Zeihero* conſtructum ſecundum diuiſionem *de l'Isle* ſub circumſtantiis ſupra notatis adhibui, quod per Z ſignabo.

Anno 1758. *ſtyl. nou. d.* 10. *Iunii.*

Per quatuor abhinc hebdomades tempeſtate plerumque ſerena et ſicca fruiti ſumus, ſpirante vento, maiori ex parte, vel boreali, vel orientali, nec niſi d. 28. Maii pluuia nonnihil copioſa decidit. Cum vero ante aliquot dies ventus ex occidente ſpirare inciperet, calor atmoſphaerae inſignia cepit incrementa, qui hodie pomeridianis horis, coelo ſereno, maxime extraordinarius et ſenſui vix tolerabilis deprehenſus eſt. Thermometris I. et Z. in loco vmbroſo ſupra notato repoſitis ſequentia annotaui.

	Therm. Z		Therm. I
$2^h.58'$.	$98\frac{2}{3}$	- - - -	——
3. 2.	$99\frac{1}{2}$	nubes exiguae per tem-	——
- 8.	99	pus exiguum interdum	$100\frac{1}{2}$
- 14.	99	occultabant Solem	$100\frac{1}{2}$
- 23.	$98\frac{3}{4}$	- - - -	$100\frac{1}{8}$
- 30.	$98\frac{1}{3}$	- - - -	$99\frac{2}{3}$
- 45.	98.	- - - -	$99\frac{1}{6}$
4. 2.	$98\frac{2}{3}$	- - - -	$99\frac{1}{6}$.

Thermometrum Z ob bulbum minorem variationes caloris facilius recipit, quam Thermom. I.

Hor. $4\frac{1}{2}$. nubes fulgure praegnantes ſurgebant, et paulo poſt tonitrua, attamen e longinquo tantum, audiebantur. Die 11. Iunii p. m. coelo ſereno Therm. Z oſtendebat 102. grad. hor. $3\frac{1}{4}$; et d. 12. Iunii veſperi poſt hor. 7. copioſa et vicina fulgura et tonitrua ſequebantur.

Frigoris hic loci *extraordinarii* ſequentia innotuerunt exempla, teſte thermometro in loco vmbroſo boream verſus libero aeri expoſito.

Anno 1755. *ſtyl. nou.*

Temp. ciuil.	ante merid.	Therm. I.	ventus ſignaturae vulgaris et tempeſtas.
d. 9. Februar.	$9^h. 0'$	$179\frac{2}{3}$. grad.	SO. ſerenum.

Anno 1757. *ſtyl. nou.*

Ineunte, frigida quoque tempeſtas ingrediebatur.

d. 5 Ianuar.	$8^h. 9'$.	$169\frac{1}{2}$	——— ——— ———
7. - - -	8. 30.	180	N. ſerenum
8. - - -	8 30.	$176\frac{2}{3}$	N. ſerenum
9. - - -	8 30.	$172\frac{1}{2}$	NO. ſerenum
10. - - -	8. 30.	$171\frac{1}{4}$	ONO plerumque ſer.
11. - - -	8. 30.	$167\frac{1}{2}$	S. ſerenum.

Anno 1758. *ſtyl. nou.*

D 21. Ianuar.	8. 30.	178.	N. ſerenum
22. - - -	9. 0.	$175\frac{1}{3}$.	— — — —

Barometricas obſeruationes per aliquot annos in dies inſtitui, ex quibus eas tantum adducam, quae ſingulis annis maximam minimamue Mercurii altitudinem prodiderunt. Elegans ad hoc negotium adhibui baro-

barometrum phoſporeſcens, a doctiſſimo artifice conſtructum, recuruum in parte inferiori cum bulbo annexo, in quo ſuperficies Mercurii ſtagnat, et conſtantem *terminum a quo* computandi altitudines barometricas ſubminiſtrat, qui tunc conſtitutus fuit, dum ad mediam altitudinem Mercurius in barometro haereret. Diameter luminis bulbi in regione ſuperficiei Mercurii ſtagnantis eſt 10, et tubi barometrici in regione ſcalae variationis $2\frac{1}{2}$. lin. Pariſ. duodecim; vnde ſectionum areae ſunt in ratione 16:1. Scala variationis addita eſt orichalcea cum indice mobili, diuiſionem *Nonii* referente, cuius ope obſeruationes altitudinum Mercurii commode peragi poſſunt, ipſas tamen altitudines, ad diuiſionem ſcalae iſtius quidem conſignatas, in menſura Pariſienſi duodecimali expreſſi, pede 12. digitos, digito 12. lineas, linea autem 24 ſcrupulos capientibus; quem in finem ope menſurae Pariſienſis exactam dimenſionem a termino a quo ſupra notato vsque ad diviſiones ſcalae perfeci. Barometrum hoc ſuſpenſum eſt intra conclaue pro anni tempeſtate calefactum, ne variationes caloris et frigoris, quas aer externus alias ſubit, altitudines barometricas ſenſibiliter turbent; adiectum tamen eſt thermometrum ex diuiſione *de l'Isle*, vt variationes aeris interni etiam innoteſcerent. Locus ipſe, quem bulbus barometri occupat, eleuatus eſt $42\frac{1}{2}$ ped. menſurae Pariſienſis ſuper pauimentum plateae *Heinenſis* in vicinia antliae publicae prope aedificia exſtructae, quorum proſpectus eſt in orientalem coeli plagam. Sub his circumſtantiis ſequens Tabula ſummam obſeruationum exponit.

Temporis annus	ciuilis menſis	ſtyl. nou. dies	hora.	Barometri altitudo in menſura Pariſ. dig.	lin.	ſcrup.	Thermometrum.	Ventus ſignaturae vulgaris	Tempeſtatis conditiones.
1750.	Nouembr	9.	— — —	26.	11.	13.	$126\frac{1}{2}$	S.	nubes interruptae.
	Decembr	26.	— — —	28.	4.	2.	$126\frac{1}{2}$	ONO.	ſerenum
1751.	Mart.	15.	$1\frac{1}{2}^{h}$. p. m.	26.	10.	2.	$118\frac{1}{2}$	SSO.	pluuioſum
	Nouembr	21.	— — —	28.	3.	19.	121.	W.	nubilum
1752.	Mart.	10.	— — —	28.	5.	21.	124.	NNW.	ſerenum
	— — —	11.	— — —	28.	6.	16.	$125\frac{1}{2}$	NO	ſerenum
	— — —	26.	$10\frac{1}{2}^{h}$. veſp.	26.	8.	19.	124.	WSW.	nubilum
	— — —	27	7. a m.	26.	8.	19.	130.	WSW.	nubilum
	Decembr	25.	9. a m.	26.	10.	21.	125.	NW.	nubes ſparſ.
1753.	Ianuar.	25.	— — —	28.	5.	1.	129.	W.	nubilum
	Mart.	8	8. a. m.	28.	4.	17.	$125\frac{1}{2}$	NNO	nubes ſparſ.
	April.	5.	7. a. m.	26.	11.	1.	126.	NO.	nubilum
	Decembr.	27.	— — —	26.	11.	16.	126.	N.	nubilum
1754.	Ianuar.	20.	— — —	28.	4.	6.	126.	N.	nubilum
	Februar.	18.	— — —	28.	4.	6.	$123\frac{1}{2}$	W.	nubilum
	Nouembr	26.	8. a. m.	27.	1.	23.	$124\frac{1}{2}$	WSW	nubes
1755.	Ianuar.	6.	— — —	28.	4.	10.	133.	WNW	ſerenum
	Februar.	11.	$10\frac{1}{2}$. veſp.	26.	10.	17	131.	S.	nubilum
1756.	Ianuar.	30	— — —	28.	6.	16.	$123\frac{1}{2}$	SW.	ſerenum
	Februar.	19	7. a. m.	26.	10.	17.	128.	W.	procella
	Mart.	23.	$5\frac{1}{2}$ p. m.	26.	9.	11.	124.	SSO.	pluuia et procella
1757.	Ianuar.	25.	10. veſp.	26.	9.	11	——	S.	pluuia et procella
1758.	Ianuar.	29	$10\frac{1}{2}$. a. m.	28.	5.	9	——	——	——
	Februar.	17.	$8\frac{1}{2}$. a. m.	26.	9.	19.	——	SW.	pluuia

Vbi hora nulla notatur, meridies intelligi debet.

Sic

Sic erit altitudo omnium	maxima -	$28^{dig.}$	$6^{lin.}$	$16^{scrup.}$
— — — — — — — —	minima -	26.	8.	19.
	variatio -	1.	9.	21.
	altitudo media -	27.	7.	$17\frac{1}{2}$.

Notandum autem eſt, omnes hactenus recenſitas altitudines numeratas eſſe a termino ad bulbum conſtanti ſupra memorato. Quodſi ergo ex ratione arearum in ſectionibus bulbi et tubi (16:1.) ad variationem iſtius termini relationis attendere, et inde altitudines corrigere velis, inuenies variationem termini a maxima ad minimam altitudinem proxime $= 33.$ ſcrup., variationem barometricam $= 1^{dig.}\ 11^{lin.}\ 6^{scrup.}$ altitudinem maximam $= 28^{dig.}\ 7^{lin.}\ 8\frac{1}{2}^{scrup.}$, minimam $= 26^{d.}\ 8^{l.}\ 2\frac{1}{4}^{scr.}$ manente media $= 27^{d.}\ 7^{l.}\ 17\frac{1}{8}^{scr.}$ Alias concluſiones tranſeo.

OBSERVATIO ECLIPSEOS SOLARIS QVAE CONTIGIT Anno 1758. d. $\frac{19}{30}$. Dec. HABITA PETROPOLI

ab

A. N. GRISCHOW.

Altitudines Solis correſpondentes ad Horologium aſtronomicum examinandum captae per Quadrantem bipedalis radii d. $\frac{17}{28}$. Dec.

$\frac{17}{28}$. Dec. Ante merid. T. Hor. Aſtr.	Altit. marg. ⊙ bor.	$\frac{17}{28}$. Dec. Poſt meridiem T. Horol. Aſtr	Alt. marg. ⊙ bor.	Merid. ex obſeruatis altitudinib. deductus T. Horol. Aſtr.
$9^h.54'.10''$	$3^\circ.44'$ -	$1^h.55'.34''$ -	$3^\circ.44'$ -	$11^h.54'.52''$,0
55. $50\frac{1}{3}$ -	3. 49 -	53. 31 -	3. 50 -	- - - - 50, 9
57. 52 -	3. $55\frac{2}{3}$ -	51. 56 -	3. $55\frac{1}{3}$ -	- - - - 50, 5
59. 37 -	4. $0\frac{3}{4}$ -	49 $56\frac{1}{2}$ -	4. 1	- - - - 49, 4
10. 1. $47\frac{1}{2}$ -	4. $6\frac{1}{2}$ -	47. 27 -	4. 8	- - - - 53, 5
3. 50 -	4. $11\frac{2}{3}$ -	45. $15\frac{1}{2}$ -	4. 13	- - - 50, 2

Per medium igitur | $11^h.54'.51''$, 1

Aequat. merid. ſubtr. - - - - - 4, 7

Meridies verus d. $\frac{17}{28}$. Dec. - $11^h.54'.46''\frac{1}{2}$

d. $\frac{17}{28}$. Dec. veſp. $11^h.7'.35''$ Horol. Aſtr. appulſus Sirii ad fil. vert. tubi biped.

d. $\frac{19}{29}$. Dec. veſp. 11. 7. $18\frac{1}{3}$ - - - - - appulſus Sirii ad idem fil. vert.

Erit

Erit igitur reuolutio fixarum $23^h.59'.43''$; Horol. aſtr.

d. $\frac{19}{30}$. Dec. T. Horol. aſtr.	T. verum	
mane $9^h. 4'.32''$	$9^h. 1'.58''$	Ortus appar. marg. ☉ ſuper.
11. 20	8. 45	Ortus appar marg. ☉ inferioris
39. 25	36. 45	Finis Eclipſeos per Teleſcop. Gregor. 2. pedum.
39. 40	37. 0	

Fumus focorum atque vapores ob ventum ex auſtrali plaga vehementiſſimum vndantes impediuerunt, quo minus Eclipſeos huius obſeruatio accuratius inſtitueretur. In Sole variae obſeruabantur macularum numero atque magnitudine inſignium, ſeries.

INSTRV-

INSTRVMENTORVM ASTRONOMICORVM, RETICVLO, AVT MICROMETRO, INSTRVCTORVM, NOVA EMENDATIO.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Obseruationum astronomicarum exactitudo, quantum pendeat a commodo corporis obseruatoris situ, difficulter imaginari poterunt inexperti, omnes autem ii conqueruntur, qui instituendis obseruationibus ipsi se vnquam applicuerunt. In imaginanda itaque instrumentorum astronomicorum constructione, vtramque facere paginam censendum est, vt commoditati obseruatoris, quantum fieri potest, prospiciatur, neque assumere vnquam, aut seruare diu, molestum corporis situm, ipse cogatur.

Laborant eiusmodi imperfectione, reticulo, aut micrometro, instructa instrumenta astronomica fere omnia, quales sunt Quadrantes, aut fixi aut portatiles, Sectores astronomici, immo et simplices tubi, micrometro praediti. Etsi enim horum instrumentorum ope, obseruationes absque magno incommodo peragantur, quamdiu altitudo obiecti, ad quod diriguntur, supra horizontem, 45° non transcendit, tamen si in regionibus coeli eleuatioribus, atque vertici propioribus, aliquid obseruandum occurrit, opus est, vt valde reclinet caput, immo et prope Zenith ipsum, supinum assumat corporis situm, tubum introspiciens obseruator; quod quam molestum

sit,

ſit, et quod maius eſt, quantum obſeruationum fidelitati atque acumini noceat, vno ore conqueruntur, qui ipſi eiusmodi obſeruationibus inſtituendis vacant.

Commodiſſimus ſine dubio obſeruatori, corporis capitisque ſitus, is eſt, qui prae reliquis homini naturalis atque conſuetus eſt, erectus nempe, atque talis, vt tubum ſecundum rectam horizontalem introſpiciat. Qui itaque adaptare poſſet inſtrumenta aſtronomica, vt obſeruator, qualescunque, et in quacunque regione coeli, inſtituat obſeruationes, nunquam alium, niſi modo dictum, aſſumere cogatur corporis ſitum, hic omnino non contemnendam inſtrumentis conciliaſſe perfectionem habendus foret.

Diu eſt, ex quo tale ſe medium mihi obtulit, quod cum, in aduerſaria mea relatum, ac fere oblitum, paucos ante dies fortuito ſe rurſum oculis meis obtulerit, ſatis dignum mihi viſum eſt, cuius in Academia mentionem iniicerem. Etſi enim facile quiuis imaginari iſtud potuerit, a nemine tamen hactenus in vſum vocatum eſt, quod tamen omnino mereri videtur.

Ad ſequentia, hoc quicquid eſt inuenti mei, re ipſa maioris forſan momenti, quam ad primum intuitum videri poteſt, reducitur. Canalis orichalceus ABMP, Fig. 1. inſertum gerens a parte anteriori vitrum obiectiuum AB, aliquot pollices breuior ſit, diſtantia focali lentis AB. A parte poſteriori, ad MP, afferruminetur ipſi ad angulos rectos canalis alter HIGM, eius longitudinis, vt vtriusque canalis longitudo ſimul ſumta, ſummam diſtantiarum focalium lentis obiectiuae AB, et ocularis CD, efficiat. Vbi iun- Tab. XI. Fig. 1.

guntur ſibi inuicem cylindri hactenus deſcripti, inſeratur tubo ſpeculum planum, elliptica figura praeditum MN, quod ita ad axin canalis ABMP inclinatum ſit, vt radios a vitro obiectiuo venientes, in tubum HIGM, verſus vitrum oculare CD, reflectat. Cadat itaque focus lentis obiectiuae AB, ſiue ſuperficies, in quam cadit imago, a lente AB formata, in planum LK, atque ad LK inſeratur tubo, aut reticulum ſimplex, aut reticulum conſuetum micrometri; et euidens erit cuiuis, qui aſtronomicam praxin callet, obſeruationes omnes aeque feliciter peragi poſſe, tubo eiusmodi incuruo, ac ſi tubus omnino rectus adhiberetur. Cum vero in plerisque obſeruationibus, planum Quadrantis, aut Sectoris, eum perpetuo habere ſoleat ſitum, vt verticale ſit, cylinder HGIM horizontalem ſitum ſemper ſeruabit, neque adſtans inſtrumento, aut adſidens, obſeruator, vnquam incommodum aſſumere corporis ſitum coactus erit.

Aliqua addere placet breui huic deſcriptioni, non quod viros Aſtronomiae peritos pluribus indigere putem, quo in vſus haec ſuos conuertere queant, ſed ne ii, qui forſitan in aſtronomica praxi minus exercitati ſunt, aliquid inueniant, quod iure deſiderari poſſe, videri ipſis queat. Moneo ea propter, ſpeculum, non vitreum, ſed metallicum, adhibendum eſſe, cuiusmodi ſpeculorum conſtructionem in poteſtate eſſe, ſatis conſtat, ex quo feliciſſime in Anglia conſtructi ſunt tubi reflectentes *Newtoniani*, ad quorum quippe conſtructionem ſpeculum planum metallicum requiritur. Deinde indicandum mihi eſt, nouum hoc inſtrumentorum adita-

ditamentum, nouae verificationis Aſtronomo imponere neceſſitatem. Spectat, de qua loquor, verificatio, ſpeculi MN ſitum, qui talis eſſe debet, vt planum picturae, a lente obiectiua formatae, cum plano reticuli coincidat. Facile autem, ſi in ſpeculi ſitu peccatum fuerit, et vitium deprehenditur, et corrigitur. Si nempe erroneum habeat ſpeculum ſitum, atque ita adaptetur tubus, vt in campi centro, nulla detur filorum reticuli parallaxis, obſeruabitur, puncta imaginis, aut ſupra et infra, aut ad dextram et ſiniſtram centri, ſita, ſenſibilem habere parallaxin, quod indicio habeandum eſt, correctione indigere ſpeculi ſitum. Facile vero iudicatur, quamnam in partem inclinandum ſit ſpeculum, vt ſitus ipſius emendetur. Secto nempe tubo HGIM, Fig 1. per axem, ſit in Fig. 2. MN ſe- Tab XI.
ctio per ſpeculum; LK, ſectio per planum reticuli; Fig. 2.
RS vero, ſectio per planum imaginis. Punctum iam imaginis Q, poſt planum reticuli, atque punctum P, ante iſtud ſitum, vtrumque ſenſibilem habebit parallaxin, aſt, prouti notiſſimum aſtronomis, prius punctum, dum commouetur oculus, oculi motum ſequi, poſterius in contrarias partes transferri videbitur, quod indicio eſt, pro corrigendo ſpeculi ſitu, verſus N iſtud adducendum, verſus M vero parumper retrahendum eſſe, quod ope trium, a tergo ſpeculi reperiundarum cochlearum, quarum ope in quamuis partem inclinari poteſt, facile efficitur.

Reliquae verificationes inſtrumenti, hic deſcripta ratione conſtructi, a conſuetis nihil differunt.

OBSERVATIO ECLIPSEOS LVNAE

d. 18 Maii ſt. v. 1760. PETROPOLI HABITA

a

NICETA POPOW, ANDREA KRASILNIKOW et NICOLAO KVRGANOW.

Coelo tranquillo et ſereno, tenuiſſimis tamen vaporibus a fluuio Neua ſurgentibus.

	Tempore penduli	Tempore vero
Penumbra adeſſe videtur in diſco Lunae	$10^h.55'$	$10^h.57'.50''$
Penumbra certo adeſt	10. 58	11. 0. 49
Initium Eclipſeos adeſſe creditur	11. 7	11. 9. 48
Eclipſis certe adeſt	11. 16	11. 18. 47
Maxima obſcuratio celebrari viſa eſt	11. 31	11. 32. $45\frac{1}{2}$
Cornu Eclipſeos in Tubo ſuperius in eodem verticali cum Tychone exiſtit - - - - -	11. 45	11. 47. 44
Finis Eclipſeos factus eſſe iudicatur.	12. 2	12. 4. $42\frac{1}{2}$
Finis totalis Eclipſeos exceſſusque penumbrae e diſco Lunae factus eſſe viſus eſt, et Luna priſtino ſplendori ſuo reſtituta putabatur - - -	12. 12	12. 14. $41\frac{1}{2}$

Quan-

Quantitas Eclipſeos ad decimam ſextam circiter partem diametri Lunae extendi aeſtimabatur, ſeu aliquantum maior, quam eſt tertia pars diſtantiae Tychonis a limbo Lunae.

In vmbra terreſtri limbus Lunae per integram Eclipſin ſemper clarior, quam reliqua eiusdem pars obſcurata, eſt viſus.

Finis Eclipſeos bene eſt obſeruatus. Initii tamen et maximae obſcurationis et egreſſus penumbrae e diſco Lunae tempora ſunt dubia intra minutum temporis et amplius.

* * *

Anno 1760. Iunii 2. die mane ſt. v. Petropoli in obſeruatorio obſervata eſt Eclipſis Solis

a

N. POPOW et ANDREA KRASILNIKOW.

Initium Eclipſeos accidit
$9^h.1'.44''$ tempore vero
obſeruatio exacta.
Reliqua nubes interuenientes impediuere.
$11^h.2'$ Eclipſis non amplius iam
apparuit.

ECLIPSIS SOLIS

LIPSIAE VISA HORIS MATVTINIS d. 13. Iunii ſtyl. nou. temp. ciuilis an. 1760.

a

G. HEINSIO.

Coelum mane nubibus refertum vix ſpem Eclipſin obſeruandi relinquere videbatur; hiatus tamen poſtea agebant nubes, vt Solem verſus initium Eclipſis per interualla conſpicere liceret. Hac circumſtantia permotus Tubum minorem praetuli praeſtantiori, qui alias pro obſeruando initio certius adhiberi ſolet, vt, retinendo imaginem Solis in largiori repraeſentationis campo per longius temporis ſpatium, momentum initii tutius exſpectare poſſem. Vſus itaque ſum Tubo terreſtri longo 4. pedes Pariſinos cum digito, qui amplo repraeſentationis campo inſtructus obiecta ſecundum diametrum 13. vicibus augebat. Huius ope caſu felici *initium Eclipſis* annotare mihi licuit mane hor. 7. 25′.34″. temporis veri, tam exacte, vt ingreſſus Lunae in diſcum Solis ad inſtans quaſi in oculos incurreret. Paulo poſt initium ſpiſſae nubes Solem ſubibant, et obſeruationum continuationem per omne reliquum Eclipſis tempus impediebant, licet Sol, per pauca tamen momenta, nonnunquam e nubibus erumperet, et phaſin oculo nudo per nubes tenues oſtenderet. Correctio temporis in duobus horologiis oſcil-

oſcillatoriis facta eſt ope altitudinum Solis reſpondentium diebus ante et poſt diem eclipticum captarum. Hodie circa meridiem altitudo mercurii in barometro erat $27^{dig.} 8^{lin.}$ menſurae Pariſienſis, et thermometrum ex diuiſione de *l'Isle* oſtendebat 120. grad.; quod poſtea d 6. Iulii ſt. n. hor. 3. poſt meridiem, libero aeri in loco vmbroſo verſus orientem expoſitum, calorem inſolitum $97\frac{1}{2}$ grad. eiusdem diuiſionis patefecit. Praeceſſerant plures dies valde calidi.

OBSER-

OBSERVATIO
ECLIPSEOS LVNARIS,
D. $\frac{7}{18}$. MAII 1761. HABITA IN OBSERVATORIO IMPERIALI PETROPOLITANO

a

F. V. T. AEPINO.

Die $\frac{7}{18}$. Maii, An. 1761. tempore vero Petropolitano,

$10^h. 4'.$	Penumbrae aduentum ſatis diſtincte obſeruare poteram.
10. 22. 8″.	Eclipſin incipere iudicabam.
10. 27. 45.	Vmbra ad mare humorum.
10. 36. 23.	ad Bullialdum.
10. 37. 37.	ad Ariſtarchum.
10. 40. 48.	ad Tychonem.
10. 44. 0.	ad Copernicum.
10. 52. 13.	ad Heraclidem.
11. 0. 17.	ad Manilium.
11. 4. 3.	ad Menelaum.
11. 9. 28.	ad Promontorium acutum.
11. 14. 52.	ad Promontorium ſomnii.
11. 20. 15.	ad mare Criſium.
11. 24. 15.	mare Criſium tectum.
11. 30. 0.	Immerſio totalis.
1. 5. 20.	Initium Emerſionis.
1. 13. 19.	Ariſtarchus in limbo vmbrae.

$1^h.19'.11''$.	Vmbra ad mare humorum.
1. 22. 37.	ad montem Helicon.
1. 24. 47.	mare humorum extra vmbram.
1. 27. 55.	Copernicus totus extra vmbram.
1. 43. 7.	Manilius.
1. 46 13.	Menelaus.
1. 49 38.	Poſſidonius.
1. 59. 22.	Vmbra tranſit per apicem Promont. acuti.
2. 1. 59.	mare Nectaris detectum.
2. 3. 25.	Vmbrae margo ad mare Criſium.
2. 8. 20.	mare Criſium totum extra vmbram.
2. 11. 42.	Finis Eclipſeos.

Vmbra telluris admodum denſa erat, ita vt, poſtquam Lunae diſcum intrauerat, ab ea tectum ſegmentum penitus euaneſceret. Cum vero ad Heraclidem circiter progreſſa eſſet vmbra, obſeruabam, a ſuperiori ſua parte, ipſam rariorem eſſe. Parti enim lunaris diſci ab vmbra non tecti, ABC, ab hoc momento, vsque ad immerſionem totalem, adnexa videbatur appendicula ADE, lacteo colore ſplendens, qui ſplendor poſt immerſionem totalem adhuc per 10′ ſenſibilis erat, ac fallere potuiſſet rei ignarum, vt crederet, Lunam nondum totam obſcuratam eſſe. Poſt horam 11. et 42′ aut 43′ penitus euaneſcebat Luna, ita vt fere vsque ad emerſionis initium nullum ipſius veſtigium in coelo supereſſet. Tab. XI. fig 3.

Momenta immerſionis et emerſionis macularum, minus ſecura ſunt, quam momenta principalia, initii et finis Eclipſeos, atque immerſionis totalis, et initii emerſionis Lunae ex vmbra. Luna nempe durante hac obſeruatione partim vaporibus horizontem cingentibus immerſa erat, partim forte crepuſculum, quod hiſce menſibus obſeruationes aſtronomicas apud nos valde turbat, tantum Lunae diſco conciliabat pallorem, vt quamprimum macula quaedam penumbrae inuoluta eſſet, cum reliquo Lunae diſco quaſi confunderetur, ac vix ac ne vix quidem ab ipſo diſtingui poſſet; vnde ipſe ego vel per minutum dimidium, immo vlterius, de vmbrae ad maculam appulſu dubius haeſi.

AD

AD NOVA ACTA
PETROP. ACADEMIAE SCIENT. TOM. III. ADDITAMENTVM EX SINIS,

P. ANTONII GAVBIL. S. I.

7 Maii 1736. in Ilginskoi Oſtrog. h. 14 44′.34″ Imm. 1^{mi} Sat. ſt.v.
Pekini - - - - - - 15.30. 15 differ. 45′. 41″
Septembr. 3. in Olekminskoi Oſtrog. 7^h. 52′. 32″ Emerſ. 1^{mi} Sat. ♃
Pekini ſtylo nouo 21. Sept. 9^h. 36′. 12″ 1^{ma} Emerſ. 1^{mi} Satell. ♃
28. Sept. 11. 32. 26 1^{ma} Emerſ. 1^{mi} Satell. ♃

Ab obſeruatione 21. Sept. ad obſeruationem 28. Sept. ſunt 4. reuolutiones = 7 dies 1^h. 56′. 14″

itaque ad obſeruat. in Olekminskoi adde 7 dies 1^h. 56′. 14″
obſ. fuiſſet in Olekminskoi Em. 1^{ma} 21 Sept. n. ſt. 9^h. 48′. 46″
fuit obſeruata Pekini - - 9^h. 36. 12.

Ergo Pekinum occidentalius Olekminskoi arce 12′. 34″ temp.

Anno 1738. ſt. n. Pekini 11. Sept. 16^h. 0′. 50″ Imm. 1^{mi} Sat. ♃

in vrbe Iakuzk	-	16. 54. 0	diff. 53′. 10″
Pekini	30. Nou.	9. 45. 25	Emerſ. 1^{mi} Satell.
Iakuzk	- - - - -	10. 37. 54	diff. 52.′ 29″
Pekini	9. Dec.	6. 4. 40	Emerſ. 1^{mi} Satell.
Iakuzk	- - - - -	6. 58. 52	diff. 54′ 12″
Pekini	29. Dec.	8. 56. 15	Imm. 3^{tii} Satell.
Iakuzk	- - - - -	9. 49. 43	diff. 53.′ 28″

1738. Pekini 16 Nou. - $5^h.59'.58''$ Emerſ. 1^{mi} Satell.
Iakuzk - - - - - 6. 52. 1 diff. $52'.3''$
Minima differentia 52. 3
Maxima differ. - 54. 12
Media differentia 53. 7. $30'''$. quibus vrbs Iakuzk eſt Pekino orientalior.

Stylo vet. in Kamtſchatka

anno 1741. in portu SS. Petri et Pauli.
12. Febr. $10^h.28'.49''$ Emerſ. 1^{mi} Satell. ♃
Pekini - - - - 7. 40. 45 diff. $2^h.48'.4''$
30 Ian. in portu illo 12. 5. 30 Imm. 3^{tii} Satell.
Pekini - - - - 9. 16. 30 differ. $2.^h49''$
media differ. $2^h.48'.32''$ quibus portus eſt Pekino orientalior.

in Bolſcherezkoi 23. Mart. $10^h.55'.2''$ Emerſ. 2^{di} Satell.
Pekini - - 8. 14. differ. $2.^h41'.2''$

Tubus adhibitus in obſeruationibus Pekinenſibus eſt 14 ped. Pariſin. Obſeruationes ſunt factae in Collegio PP. Gallor. S. I. Pekini

Adiungo duas obſeruationes factas in ſtatione Gallica loci dicti Chandernagor in India orientali a Patre Boudier S.I.

Lat. bor. Chandernagor $22^\circ.51'.26''$ obſeruata.

Anno 1741. ſt. v. in portu Kamtſchatkae SS. Petri et Pauli
23. Ian. $11^h.7'.22''$ Emerſ. 3^{tii} Sat.
in Chandernagor — 6. 25. 40 diff. $4^h\ 41'.42''$

in portu SS. Petr. et Pauli } 25. Ian. 13. 44. 26 Emerſ. 2^{di} Satell.

in Chandernagor — 9. 2. 42 diff. $4.^h41'.44''$.

Ex

Ex altitudinibus meridianis Solis obſeruatis ante et poſt ſolſtitium hybernum anni 1756 et ſolſtitium aeſtiuum anni 1757. vidi altitudinem meridianam veram Centri ⊙ ſolſtitialem hyemalem fuiſſe 26°. 36′. 19″ altitudinem ſolſtitialem aeſtiuam 73°. 32′. 58″. 31‴. inſtrum. 3 ped. ½ micrometro inſtructum. Adhibita eſt refractio notata in tabulis *Halleyi*, et parallaxis notata in Ephemeridibus Pariſienſibus. Diameter ⊙ aſſignata in illis Ephemeridibus imminuta eſt 6″. hinc itaque obliquitas Eclipticae 23°. 28′. 19″. 45‴½; vnde concluditur altitudo Poli in hac noſtra Eccleſia Pekinenſi Gallica 39°. 55′. 21″. 7‴. 30⁗. Haec altitudo Poli parum differt ab ea, quae iam concluſa fuerat ex altitudinibus ſuperioribus et inferioribus meridianis ſtellae polaris et ſtellae antiquae polaris Sinicae. Notaui tertia, et quarta, quia attendi ad diuiſiones partium micrometri.

Anno 1710. PP. ſoc. Ieſu, *Regis* et *Iartoux* Galli, et Pater *Fredeli* Germanus Auſtriacus, in vrbe *Aighoun* ad fluuium *Amour*, 4 Octobr. obſeruarunt altitudinem meridianam limbi ſuperioris Solis 36°. 10′. 26″ quadrante 2 ped. 2 pollic. Exhibebat altitudines maiores quam par eſſet vno minuto primo. PP. concluſerunt loci latit bor. 50° 0′. 50″.

Ex aliis altitudinibus merid. limbi ſuperioris ⊙ in praedicto loco, et aliis vicinis, PP. eandem ferme latitudinem *Aighoun* inuenere. Latitudo illa, quae videtur ſat certa, differt a latitudine notata in nouo Atlante Ruſſico.

Praedicti PP. ex locorum distantiis, ex rhumbis, obseruationibus adhibitis declinationis acus, saepe obseruatis ☉ merid. altitudinibus, in itinere Pekino ad vrbem *Aighoun*, determinarunt vrbem *Aighoun* Pekino orientaliorem 11°. Certior esset illa determinatio si erueretur ex aliqua obseruatione astronomica, vel Eclipseos Solis et Lunae, vel Satellitum Iouialium. Nescio an Geographi Russi determinarint latitudinem et longitudinem *Aighoun* vi obseruationum aliquot astronomicarum, seu prope *Aighoun*, seu in loco, cuius distantia ab *Aighoun* sit cognita.

MERCVRIVS IN SOLE OBSERVATVS *PEKINI* SINARVM ANNO 1756. DIE 7. NOVEMBRIS MANE

a P. *AVGVSTINO HALLERSTEIN* S. I.

$9^{h}.29'.15''$. ☿ primum visus in limbo ortiuo Solis, Telescopio 14. pedum.
30. 30. Ingressus totus
———
1. 15.

I. 9. 41. 7. ☿ in horario
21. ☉lis limbus ortiuus in horario, et tum limbus boreus ☉lis borealior ☿ᶦᵒ $23'.\ 9''.16'''$.
———
14.

II. 9. 49. 14½. ☿
29. ☉ - - 22. 59. 28.
———
14½.

III. 9. 56. 46. ☿
57. 4. ☉ - - 22. 39. 9.
———
18.

IV. 10. 2. 30. ☿
50. ☉ - - 22. 26. 3.
———
20.

V. 10. 5. 48. ☿
6. 9. ☉ - - 22. 18. 2.
———
21.

VI.

VI. $10^h. 8'.51''$. ☿
9.15. ☉ - $22'. 2''.30'''$.
24.

VII. 10.11.56. ☿
12.20. ☉ - 22. 1.11.
24.

VIII. 10,19.21. ☿
48. ☉ - 21. 43. 30.
27.

IX. 10.22.46. ☿
23.14. ☉ - 21. 36. 18.
28.

X. 10.25.55. ☿
26 24. ☉
29.

XI. 10.29.10. ☿
41. ☉ - 21. 19. 17.
31.

XII. $10.32.30\frac{1}{2}$. ☿
$33. 1\frac{1}{2}$. ☉ - 21. 8. 10.
31.

XIII. 10.37.14. ☿
47. ☉ - 20.59.38.
33.

XIV.

XIV.	$10^h.53'.47''$	☿		
	54.26.	☉	-	$20'.13''.49'''$.
	39.			
XV.	10.57.22½.	☿		
	58. 3.	☉	-	20. 5.57.
	40½.			
XVI.	11. 0.28.	☿		
	1.10.	☉	-	19.58. 6.
	42.			
XVII.	11. 5.51.	☿		
	6.35.	☉	-	19.46.58.
	44.			
XVIII.	11. 9.21.	☿		
	10. 6.	☉	-	19.41. 5.
	45.			
XIX.	11.15.11.	☿		
	58½.	☉	-	19.21.26.
	47½.			
XX.	11.18.44.	☿		
	19.33.	☉	-	19.13.35.
	49.			
XXI.	11.22.35.	☿		
	23.25.	☉	-	19. 5.43.
	50.			

XXII. $11^h.29'.19''$. ☿
30. 12. ☉ - $18'.48''.42'''$.

53.

XXIII. 11.32.26. ☿
33.20. ☉ - 18. 42. 9.

54.

XXIV. 11.40. 3. ☿
59. ☉ - 18. 16. 37.

56.

XXV. 11.43. 6. ☿
44. 3. ☉

57.

XXVI. 11.46 40. ☿
47. 39. ☉ - 18. 3. 32.

59.

XXVII. 11.49.43. ☿
50.44. ☉ - 17. 57. 38.

1. 1.

XXVIII. $11.52.45\frac{1}{2}$. ☿
53.47. ☉ - 18. 3. 32.

1. $1\frac{1}{2}$.

$11^h.58'.52''$. ☉lis limb. occ.
12. 0. 3. ☿ in Meridiano.
12. 1. 7. ☉lis limb. ort.

XXIX.

XXIX.	$12^h.18'.50''.$	☿		
	20. 2.	☉	–	$16'.36''.27'''.$
	1. 12.			
XXX.	12. 22. 11.	☿		
	23. 24.	☉	–	16. 29. 54.
	1. 13.			
XXXI.	12. 24. 37.	☿		
	25. 51.	☉	–	16. 27. 17.
	1. 14.			
XXXII.	12. 31. $0\frac{1}{2}$	☿		
	32. $17\frac{1}{2}$	☉	–	16. 6. 20.
	1. 17.			
XXXIII.	12. 34. 52.	☿		
	36. 9.	☉	–	16. 10. 16.
	1. 18.			
XXXIV.	12. 44. 9.	☿		
	45. 30.	☉	–	et limbus auſtralis ☉lis auſtralior ☿^{io} $16'.58''.43'''.$
	1. 21.			
XXXV.	12. 46. 48.	☿		
	48. 9.	☉	–	17. 5. 15.
	1. 21.			
XXXVI.	12. 49. 29.	☿		
	50. 51.	☉	–	17. 10. 30.
	1. 22.			

XXXVII.	$12^h.53'.49''$.	☿	
	55. 13.	☉	− $17^h.20'.20''$
	1. 24.		
XXXVIII.	12. 56. 30.	☿	
	57. 55.	☉	− 17. 27. 31.
	1. 25.		
XXXIX.	1. 1. 36.	☿	
	3. 3.	☉	− 17. 41. 55.
	1. 27.		
XL.	1. 4. 35.	☿	
	6. 3.	☉	− 17. 51. 5.
	1. 28.		
XLI.	1. 23. 16.	☿	
	24. 51.	☉	− 18. 34. 28.
	1. 35.		
XLII.	1. 27. 15.	☿	
	28. 52.	☉	− 18. 48. 42.
	1. 37.		
XLIII.	1. 30. 23.	☿	
	32. 0.	☉	− 18. 52. 38.
	1. 37.		
XLIV.	1. 34. 58.	☿	
	36. 37.	☉	− 19. 5. 43.
	1. 39.		

XLI.

XLV.	$1^h. 38'. 45''.$	☿		
	40. 27.	☉	-	19. 18. 49.
	1. 42.			
XLVI.	1. 48. 50.	☿		
	50. 35.	☉	-	19. 41. 5.
	1. 45.			
XLVII.	1. 52. 1.	☿		
	53. 46.	☉	-	19. 50. 15.
	1. 45.			
XLVIII.	1. 55. 56.	☿		
	57. 44.	☉	-	19. 56. 47.
	1. 48.			
XLIX.	1. 59. 4.	☿		
	2. 0. 53.	☉	-	20. 5. 57.
	1. 49.			
L.	2. 5. 7.	☿		
	6. 58.	☉	-	20. 22. 20.
	1. 51.			
LI.	2. 9. 52.	☿		
	11. 45.	☉	-	20. 32. 48.
	1. 53.			
LII.	2. 13. 30.	☿		
	15. 25.	☉	-	20. 46. 33.
	1. 55.			

LIII.	$2^{h}. 20' 4''.$	☿		
	22. 0.	☉	-	$20'.59''.38'''.$
	1. 56.			
LIV.	2. 23. 38.	☿		
	25. 26	☉	-	21. 11. 25.
	1. 58.			
LV.	2. 26. 46.	☿		
	28. 45.	☉	-	21. 17. 58.
	1. 59.			
LVI.	2. 30. 8.	☿		
	32. 9.	☉	-	21. 25. 40.
	2. 1.			
LVII.	2. 33. 21.	☿		
	35. 22.	☉	-	21. 32. 22.
	2. 1.			
LVIII.	2. 36. 36.	☿		
	38. 39.	☉	-	21. 36. 18.
	2. 3			

2. 54 22. ☿ coepit egredi ex ☉
56. 6. Egreſſus totus
1. 44.

Noto: Ingreſſus ☿rii in Solem, et Egreſſus ex eodem obſeruati ſunt Teleſcopio 14. pedum bono. Tranſitus ☉lis et ☿rii per meridianum obſeruati inſtrumento

mento, quod vocant, Culminatorio, pedum trium. Id nobis ante hos annos obuenit dono Cl. Viri Domini *Antonii Ribeiro Sanchez*, et nos illud diligenter et accurate, firmiter et feliciter, in Meridiano conſtituimus. Reliquae Phaſes obſeruatae ſunt Teleſcopio 8. pedum, cui applicatum Micrometrum Anglicum Grahamianum, tribus filis argenteis inſtructum, vno horario et duobus parallelis, altero mobili, fixo altero, cuius cum horario interſectio orthogona eſt centrum, circa quod tota machina ope cochleae infinitae volui, et ad ſitum Aequatori parallelum conſtitui poteſt.

Tempora Phaſium omnia ſunt vera, reducta ſcilicet ex temporibus penduli, quod geminum habeo opere Gallico, vtrumque optimae notae. Differentiae declinationum reductae ſunt ex reuolutionibus Micrometri, prout et has et illa inter obſeruandum adnotaui, ſine correctione vlla errorum quorundam inter obſeruandum commiſſorum. Malui numeros obſeruationum, vt ſua his fides conſtet, candide et fideliter referre, praeſertim cum cuiuis facile fuerit, eos ex calculo vel typo emendare, ſi in hoc operationum numero opus, aut operae pretium putauerit.

Cum autem totus in eo eſſem, vt quam plurima puncta viae Mercurii determinarem, diametri Solis adeo oblitus fui, vt ne in mentem quidem veniret, eius Micrometro metiendae, vt adeo iſta ex Ephemeridibus vel tabulis Solaribus petenda ſit. Caeterum quantitates reuolutionum Micrometri, alias aliunde determinatae fuerunt, tutius etiam multo, quam ex diametro Solis.

Porro

Porro obſeruatio haec facta eſt in Collegio noſtro, quod vocamus, auſtrali, cuius latitudo recens conſtituta eſt $39^{\circ}\ 54'.\ 0''$. praeciſe, et differentia a Meridiano obſeruatorii Petropolitani $5^{h}.\ 44'.\ 16''$, puto item ſatis praeciſe, quae fuſius videre erit in libro obſeruationum Pekinenſium, qui lucem expectat.

Fig. 1.

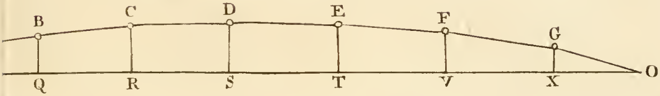


Fig. 2.

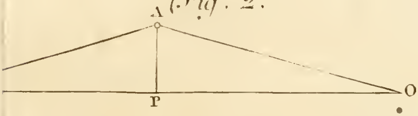


Fig. 3.

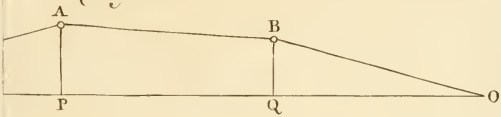


Fig. 4.

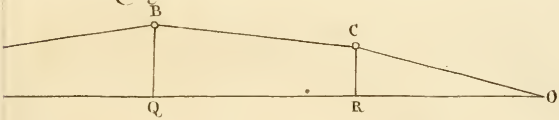


Fig. 5.

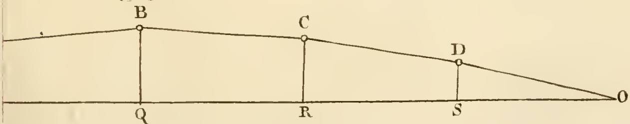


Fig. 1.

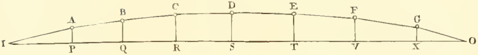


Fig. 2.

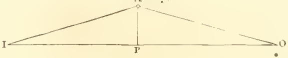


Fig. 3.

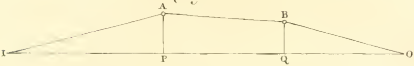


Fig. 4.

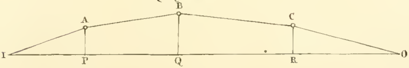


Fig. 5.

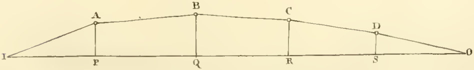
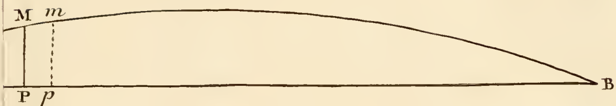


Fig. 1.



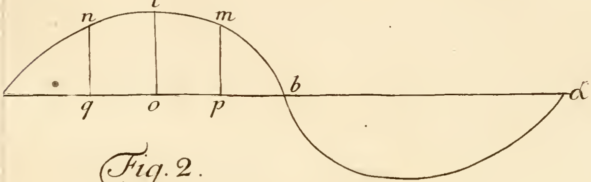


Fig. 2.

Fig. 3.

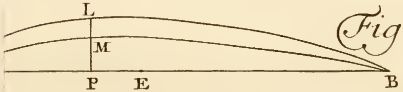


Fig. 4.

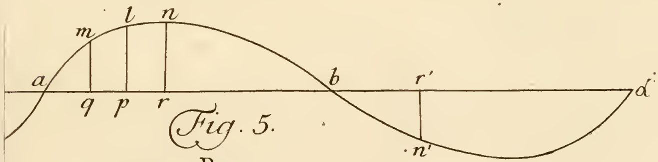


Fig. 5.

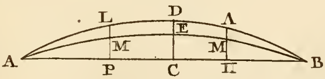


Fig. 6.

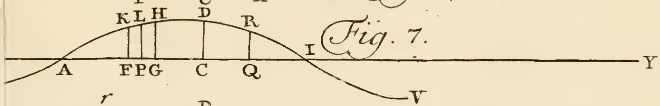


Fig. 7.

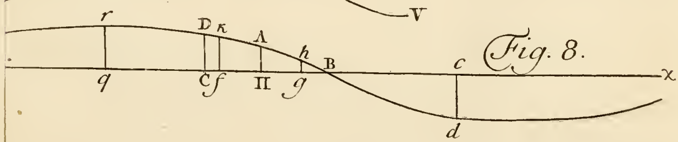
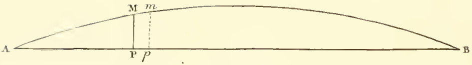


Fig. 8.

Fig. 1



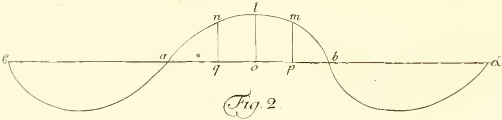


Fig. 2.

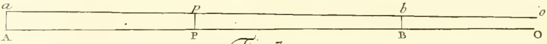


Fig. 3.

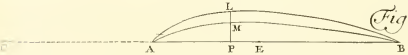


Fig. 4.

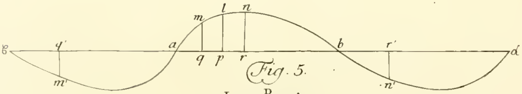


Fig. 5.

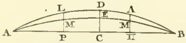


Fig. 6.

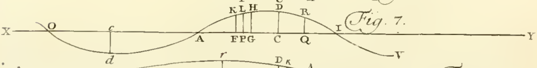


Fig. 7.

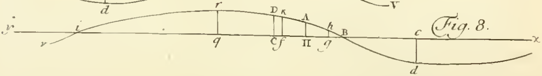


Fig. 8.

Fig 1. (9)

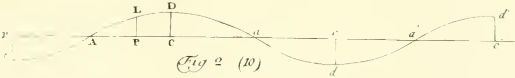


Fig 2 (10)

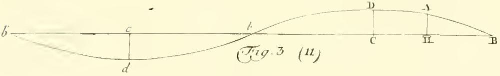


Fig. 3 (11)

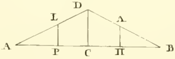


Fig 4 (12)

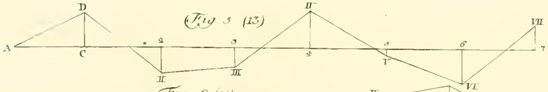


Fig 5 (13)

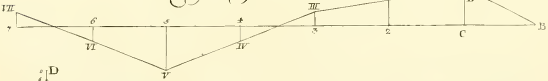


Fig 6. (14)

Fig. 7. (15)

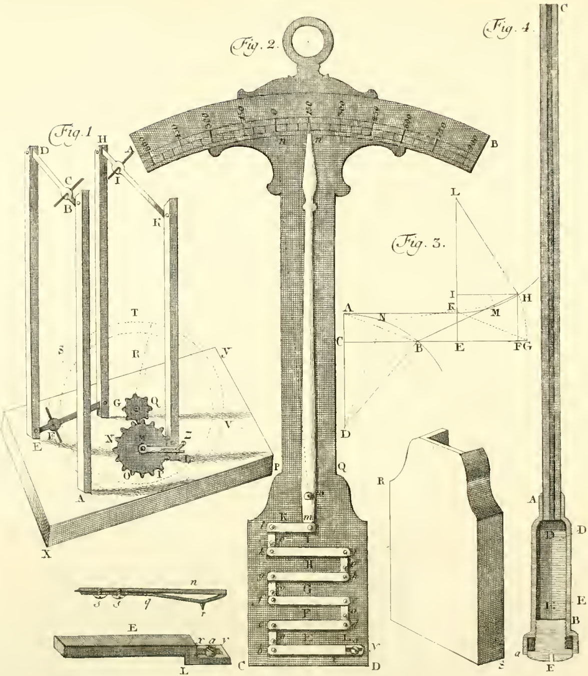


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.

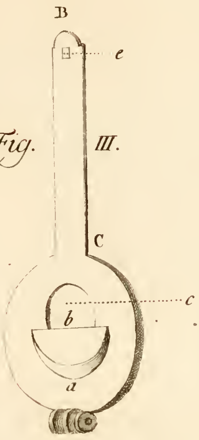


Fig. III.

Fig. IV.

Fig. V.

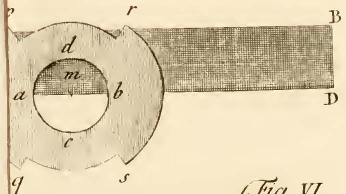


Fig. VI.

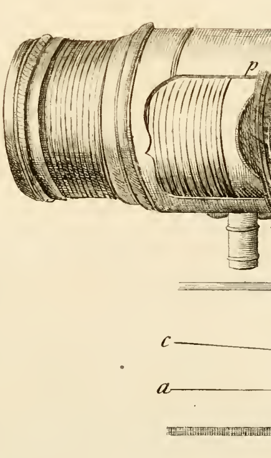
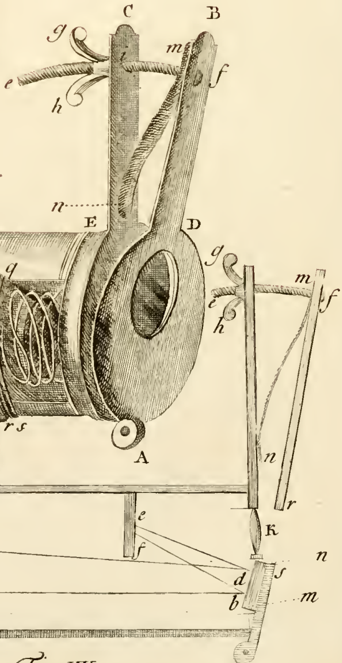



Fig. VII.

Fig. I.

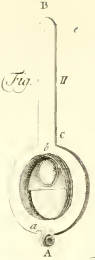


Fig. II

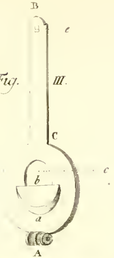
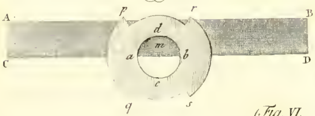


Fig. III.

Fig IV

Fig V.



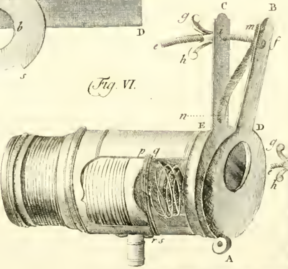


Fig. VI.

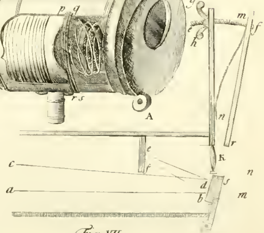


Fig VII

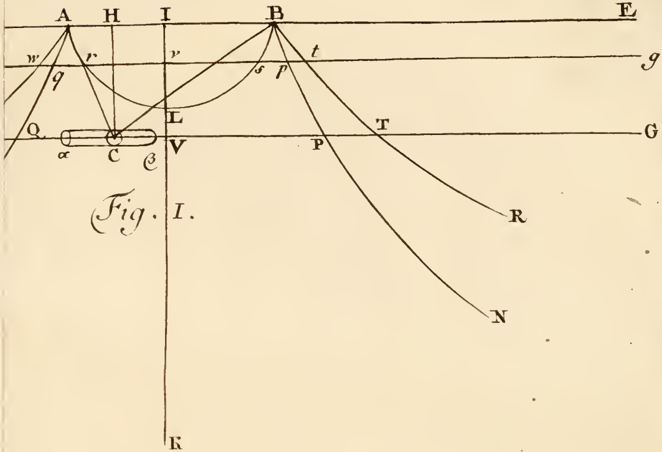


Fig. I.

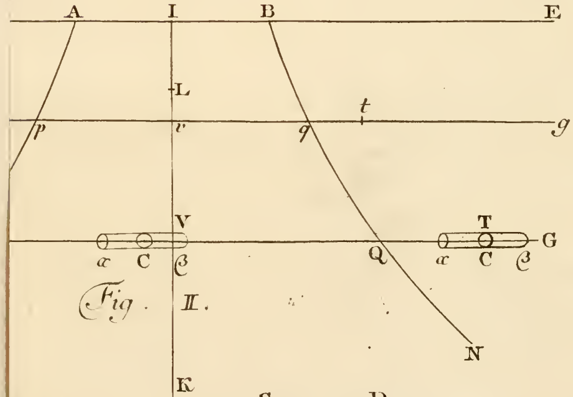


Fig. II.

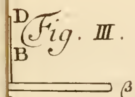


Fig. III.

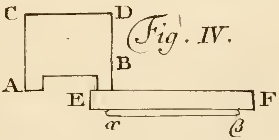


Fig. IV.

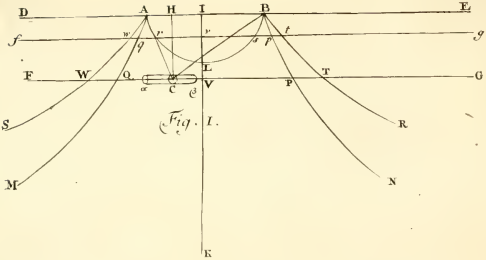


Fig. I.

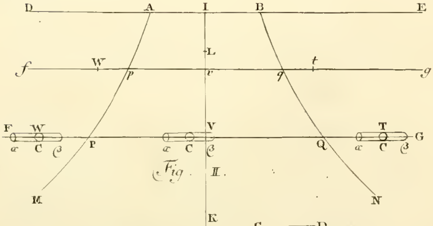


Fig. II.

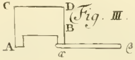


Fig. III.

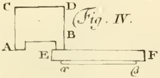
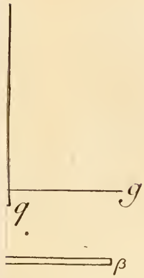


Fig. IV.



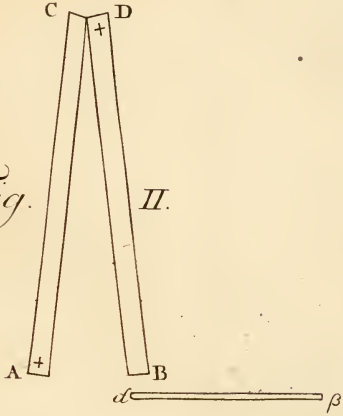
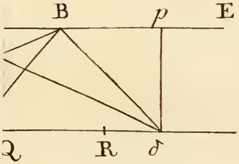


Fig. II.

III.



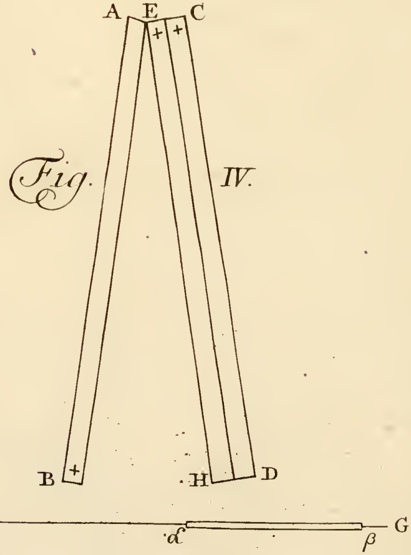
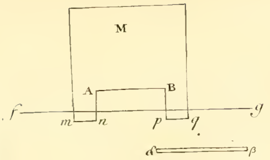


Fig. IV.

Fig. I.



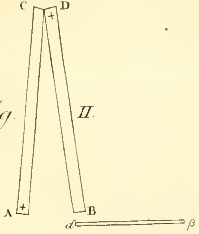
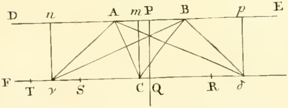


Fig. II.

Fig. III.



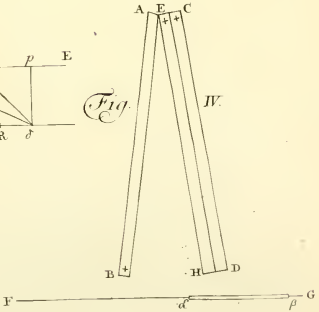
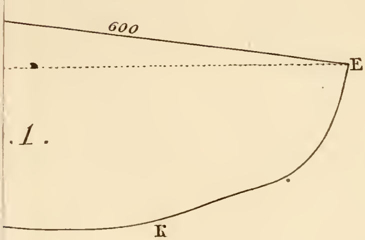


Fig. IV.



.1.

Fig. 2.

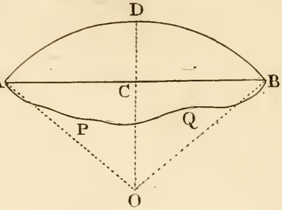
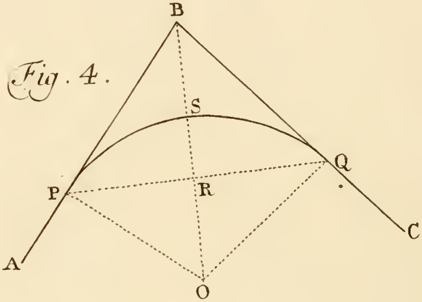


Fig. 4.



.5.

Fig. 6.

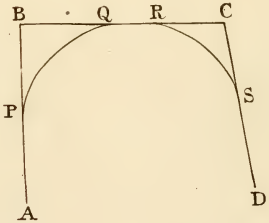


Fig. 7.

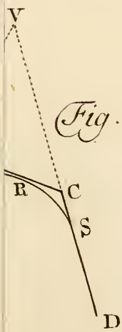
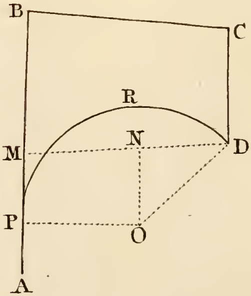


Fig. 8.



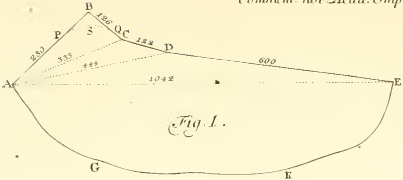
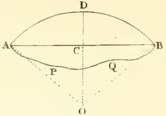


Fig. 1.

Fig. 2.



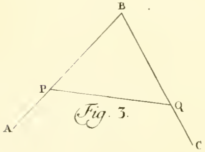
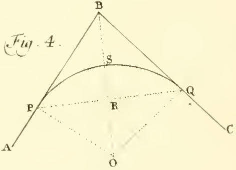


Fig. 3.

Fig. 4.



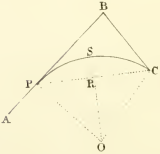
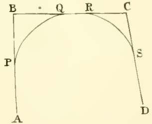


Fig. 5.

Fig. 6.



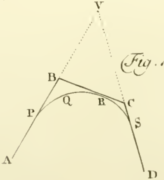
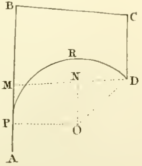


Fig. 7.

Fig. 8.



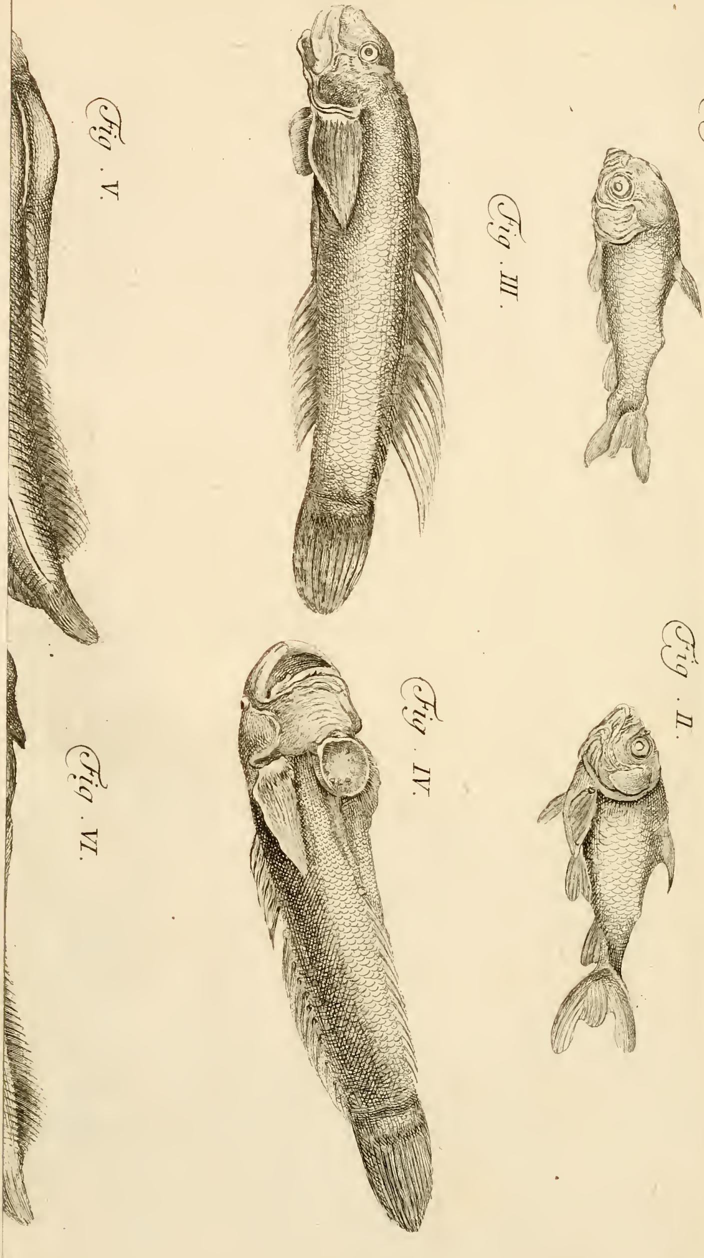


Fig. I.

Fig. II.

Fig. III.

Fig. IV.

Fig. V.

Fig. VI.

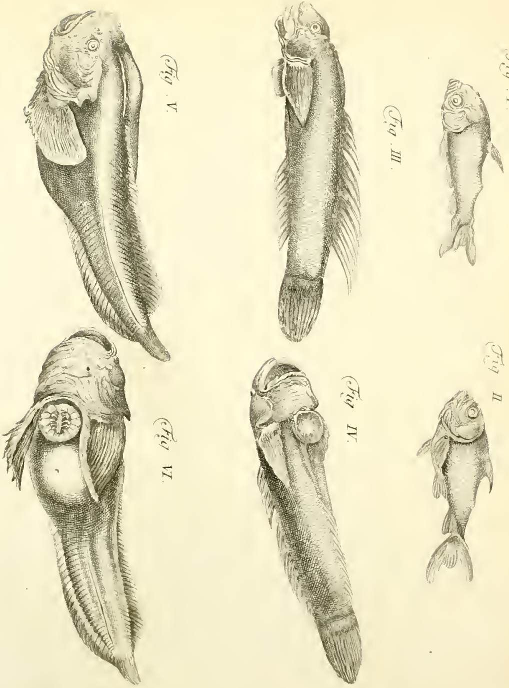


Fig. I.
Fig. II
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.

Fig. I.

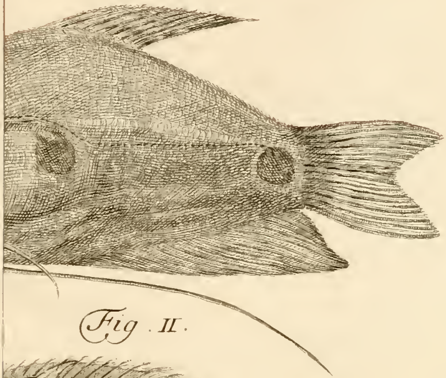


Fig. II.

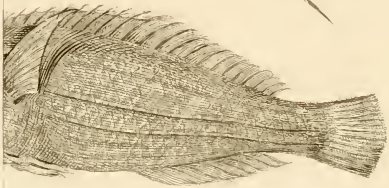


Fig. III.

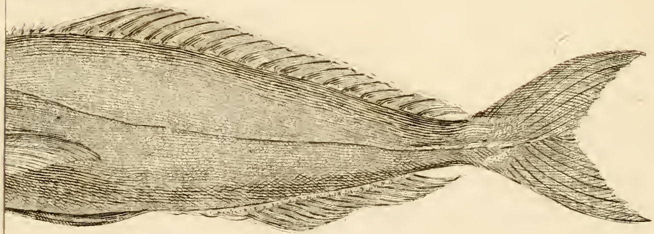


Fig. IV.

Fig I.

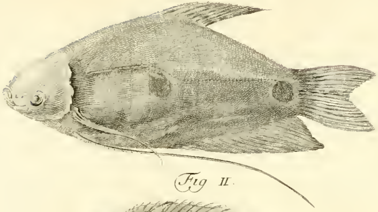


Fig II.

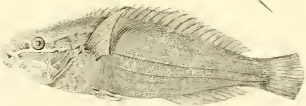


Fig. III.

Fig. IV

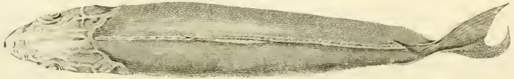


Fig. 1.

Fig. 2.

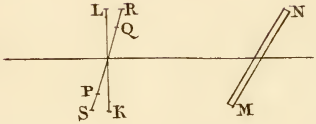


Fig. 3.

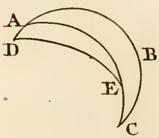


Fig. 1.

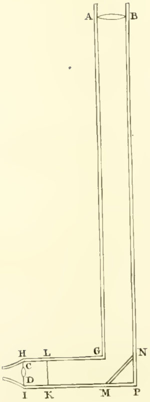


Fig. 2.

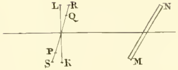


Fig. 3.