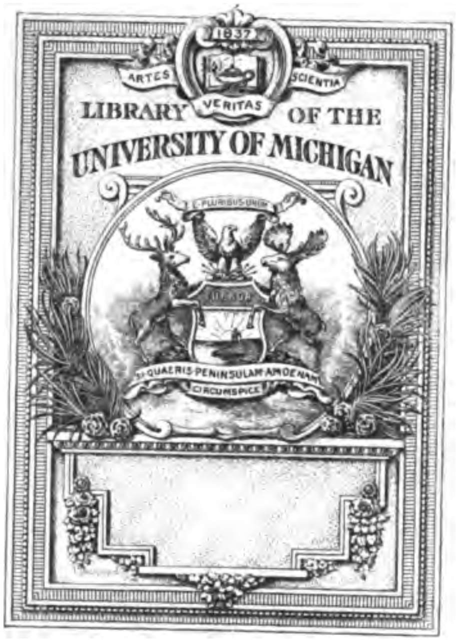

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

# NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE



## TOM. VIII.

pro Annis MDCCLX. et MDCCLXI.


*PETROPOLI*

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXIII.

SVMMARIVM

DISSERTATIONVM

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS VIII.

# MATHEMATICA.

## I.

## De integratione aequationum differentialium.

### Auctore Leon. Eulero pag. 3.

Saeculum mox erit elapsum, ex quo idea Differentialium et Integralium felicissimo successu in Analysin est inuecta, vnde etiam haec scientia tanta subito accepit incrementa, vt, quicquid antea fuerat exploratum, vix comparationem sustineat. Quantumuis autem hoc nouum calculi genus summorum ingeniorum studio et indefesso labore adhuc est excultum, minime tamen id exhaustum est reputandum, et quo vlterius in hac scientia penetrare licet, eo ampliores campos etiam nunc prorsus incultos detegunt Geometrae, qui vires humanas longe superare videntur. Cum igitur labores in hoc studio impensi iam tantum vtilitatis attulerint, eo magis hinc animi Geometrarum inflammari debent, vt omnibus viribus immensum hunc campum perscrutari annitantur. Quorum quidem studia antiquis tantum elementis sunt adstricta, vel qui a Mathematicis disciplinis prorsus abhorrent, eos idea Infiniti, cui sublimiores istae inuestigationes sunt superstructae, non mediocriter offendere solet, et voce perperam intellecta, plerumque sibi persuadent, subtiliorem hanc Analyseos partem tantum in vanis circa Infinite magna et Infinite parua speculationibus consumi, neque inde quicquam vtilitatis ad vera cognitionis nostrae obiecta, quippe quae omnia sint finita, expectari posse. Quae opinio, etsi vtilissimis inuentis, quae sublimiori Analysi accepta referre debemus, iam funditus est euersa, haud tamen abs re erit peruersas illas Infiniti ideas, quibus ea innititur, remouere et emendare. Cum igitur vniuersa Mathesis in omnis generis quantitatum contemplatione et comparatione versetur, nemo ignorat, plerasque quantitates, quas in mundo deprehendimus, continuo variari, et perpetuis mutationibus esse obnoxias. Coelum inspicienti mox patet, solem, lunam et stellas situm suum iugiter mutare, sola illa stella excepta, si quae forte in ipso mundi polo fixa apparet: situm autem per quantitates cognoscimus, dum locum cuiusque stellae, siue respectu nostri Horizontis per Altitudinem et Azimuthum, siue respectu Aequatoris per Ascensionem rectam et Declinationem, siue denique respectu Eclipticae per Longitudinem et Latitudinem definimus; vnde perspicuum est, totam Astronomiam cognitione quantitatum contineri, quarum aliae continuas mutationes patiantur, modo maiores modo minores, aliae vero perpetuo eaedem maneant, veluti Latitudo cuiusque stellae fixae, etiamsi nunc quidem hic leuis variatio sit obseruata. Harum ergo quantitatum, quas natura nobis offert, diuisio in Variabiles et Constantes satis est manifesta, simulque intelligitur, difficillimam nostrae cognitionis partem in accurata quantitatum Variabilium inuestigatione esse constitutam. Scilicet tum demum perfectam cognitionem motuum

motuum coelestium, veluti planetae, seu cometae, sumus adepti, cum pro quouis tempore eius locum in coelo, hoc est, eius Longitudinem et Latitudinem, assignare valuerimus. Ponamus nobis lunae motum hac ratione esse exploratum, quo melius nostras cogitationes figere queamus; quicquid enim de hoc casu dixero, id facile ad omnis generis quantitates variabiles transferetur. Cum igitur ad quoduis tempus, quod pariter quantitate metimur, lunae tum Longitudo, quam Latitudo, assignari queat, vtraque haec quantitas per tempus determinatur, seu si tempus a certa epocha elapsum denotetur littera $t$, tam Longitudo, quam Latitudo, lunae exprimetur certa quadam formula per tempus $t$ vtcunque definita, cuius valorem pro quouis tempore $t$ assignare liceat. Huiusmodi formula generalis, cuius valor determinatus pro quolibet tempore determinato exhiberi potest, vocatur in Analysi Functio quantitatis $t$, sicque nostro casu et Longitudo et Latitudo lunae erit certa quaedam Functio temporis $t$, cuius natura, hoc est, ratio compositionis, si nobis esset perspecta, motus lunae perfectam haberemus cognitionem, quae igitur tota in ratione illarum functionum sita est censenda. Cum igitur inde constet, quantam mutationem lunae Longitudo et Latitudo quouis tempore subeat; variatio etiam, minimo tempore facta, quae vtique et ipsa erit minima, definiri, eiusque relatio ad ipsum tempus minimum assignari poterit; quae cognitio maximi est momenti, cum inde mutatio momentanea innotescat, nihilque hic impedit, quo minus tempusculum istud euanescens seu infinite paruum accipiatur. Atque hic est fons Infinite paruorum, in Analysi receptorum; vbi probe notari conuenit.

venit, non tam ipsorum paruitatem, quam rationem mutuam, quae vtique est finita, considerari: et quemadmodum huiusmodi Infinite parua Differentialia vocantur, ita Calculus, in eorum relatione scrutanda occupatus, Differentialis appellatur: neque hic quicquam de Infinite paruis est metuendum, cum omnis calculus in eorum relatione, quae est finita, absoluatur. Hactenus quidem assumsimus indolem earum formularum, seu Functionum, quae Longitudinem lunae et Latitudinem per tempus exprimunt, esse cognitam; verum si vicissim ipsa mutatio momentanea daretur, quippe quam ex viribus lunam sollicitantibus colligere licet, tum quaestio ad naturam illarum Functionum inuestigandam reducitur, totaque lunae theoria ipsi est superstruenda. Hic igitur ex mutatione momentanea, seu, vt Geometrae loquuntur, ex data relatione Differentialium, indoles ac natura ipsarum functionum determinari debet, in quo Calculus Integralis continetur. Quemadmodum itaque Calculus Differentialis docet Functionum Differentialia, seu potius eorum rationem, inuestigare, ita vicissim Calculus Integralis ex data Differentialium ratione indolem Functionum eruendi methodum tradit. Vtriusque ergo vim ita commodissime describere licet, vt si $v$ fuerit Functio quaecunque quantitatis $t$, ac ponatur Differentialium ratio $\frac{dv}{dt} = p$, Calculus Differentialis methodum exhibeat, ex indole Functionis $v$ hanc Differentialium rationem $p$ definiendi; contra autem Calculi Integralis munus sit, ex data hac ratione $p$, seu eius relatione ad ipsas quantitates $t$ et $v$, indolem Functionis $v$ eruere. Scilicet si inter has quantitates $p$, $t$, et $v$ aequatio quaecunque proponatur, totum

tum negotium eo redit, vt inde natura Functionis $v$, seu quomodo ea per $t$ determinetur, concludatur. Quia vero ex illa aequatione data quantitatem $p = \frac{dv}{dt}$ per $t$ et $v$ definire licet, hinc eiusmodi aequatio $M dt + N dv = 0$ nascetur, Differentialis appellata, in qua litterae $M$ et $N$ vtcunque per $t$ et $v$ determinatae sunt intelligendae, et iam quaeritur, cuiusmodi functio quantitas $v$ sit ipsius $t$, seu, quod eodem redit, aequatio relationem inter $t$ et $v$ exprimens requiritur, vnde pro quouis valore ipsius $t$ valor ipsius $v$ assignari queat.

Hanc igitur quaestionem in latissimo sensu acceptam Cel. *Eulerus* in hac dissertatione contemplatur, et postquam animaduertit, eam tantum paucissimis casibus adhuc resolui posse, atque in hunc finem methodos maxime diuersas à Geometris adhiberi solere, methodum multo simpliciorem magisque naturalem exponit, omnes illos casus expediendi, quae simul viam ad plurimos alios casus patefacere videtur. Quantum hic sit praestitum, ex ipso Auctoris scripto est iudicandum; hic tantum notasse iuuabit, aequationem hanc $M dt + N dv = 0$ etiam in latissimo sensu acceptam, exiguam tantum particulam vniuersae Analyseos infinitorum continere, quia tantum Differentialia primi ordinis complectitur. Quodsi enim $v$ fuerit functio quaecunque ipsius $t$, et Differentialium ratio ponatur $\frac{dv}{dt} = p$, etiam haec quantitas $p$ est variabilis, ex cuius variatione iterum similiter statui potest $\frac{dp}{dt} = q$, quae quantitas $q$ Differentialia secundi ordinis inuoluere dicitur: quae cum pariter a $t$ pendeat, ponaturque $\frac{dq}{dt} = r$ haec littera Differentialia tertii ordinis implicare censetur, et ita porro. Quibus positis Calculus Integralis ita deſcribi poteſt, vt ſit methodus ex data relatione Differentialium cuiusque ordinis indolem Functionis $v$ inueſtigandi, ex qua illa Differentialia naſcantur, ſeu, quod eodem redit, ex data aequatione quacunque inter quantitates $t$, $v$, $p$, $q$, $r$ etc. quemadmodum quantitas $v$ per $t$ determinetur, inueſtigari oportet. Ab hoc autem perfectionis gradu omnia adhuc inuenta Analyſeos artificia multo magis ſunt remota, et quae adhuc ignorantur, immenſum ſuperant exiguam illam particulam, quam etiamnum euoluere licuit.

Verum ne ſic quidem tota vis Analyſis infinitorum exhauritur, quia eiusmodi tantum functiones hic ſumus contemplati, quae per vnicam variabilem determinantur, veluti longitudo vel latitudo lunae ſpectari poterat, tanquam Functio ſolius illius quantitatis, qua tempus exprimitur. Dantur autem vtique caſus, quibus eiusmodi Functiones quaeruntur, quae ſimul per binas, vel ternas, vel adeo plures variabiles determinantur.

Huiusmodi exemplum ſe offert, quando motus fluuii definiri debet, vbi aquae celeritatem pro omnibus punctis, quae in fluuio concipere licet, determinari oportet. Cuiuslibet autem puncti ſitus per ternas coordinatas $x$, $y$ et $z$ definitur, et celeritas in quolibet puncto tanquam Functio ternarum iſtarum variabilium $x$, $y$ et $z$ erit conſideranda: quodſi ergo relatio inter harum et ipſius Functionis quaeſitae differentialia intercedens proponatur, quam forte ex principiis motus colligere licet, quaeſtio huc redit, vt eiusmodi functio $v$ ternarum variabilium $x$, $y$, et $z$ definiatur, cuius

Diffe-

Differentiale $dv$ ad harum Differentialia $dx$, $dy$, $dz$ datam teneat relationem; seu si ponatur $dv = pdx + qdy + rdz$, ex data relatione inter quantitates $v$, $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $r$ aequatione quacunque expressa, quaeritur, quomodo functio $v$ per variabiles $x$, $y$ et $z$ exprimatur. Tum vero, cum etiam $p$, $q$, $r$ futurae sint functiones coordinatarum $x$, $y$ et $z$, earum quoque differentialia, quae secundi ordinis sunt censenda, in computum ingredi possunt, vnde hanc quaestionem, vt latissime pateat, etiam ad relationem differentialium secundi altiorumque ordinum extendi conueniet. Quodsi motus fluminis etiam cum tempore varietur, tum ad eius cognitionem celeritatem nonsolum pro quolibet puncto, quod iam ternis coordinatis definitur, sed etiam ad quoduis tempus assignari debet, ex quo celeritas quaesita, tanquam Functio quatuor variabilium, trium scilicet coordinatarum et temporis, erit spectanda. Quocirca Calculus Integralis generalissime ita definiri poterit, vt dicatur esse methodus talem Functionem quotcunque variabilium inuestigandi, cuius Differentialia cuiusque ordinis propositam teneant relationem. Quicquid autem adhuc in hoc genere est praestitum, ad vnicum fere casum, quo functio vnius variabilis ex data differentialium relatione quaeritur; et parum admodum, quod quidem ad functiones plurium variabilium pertineat, in medium a Geometris est allatum. In quo cum quasi Calculi Integralis pars altera sit constituenda, fateri cogimur, eam etiam nunc fere totam incultam iacere. Interim tamen certum est, vniuersam Theoriam motus fluidorum huic Analyseos parti maximam partem inniti, in eaque vix quicquam solidi ante expectari posse, quam fines Analyseos etiam in hoc genere haud mediocriter fuerint prolati. Fortiori certe incitamento Geometris haud erit opus, vt omnes vires ad hoc quasi nouum Analyseos genus excolendum intendant.

## II.

# Solutio Problematis de inuestigatione trium numerorum, quorum tam summa, quam productum, nec non summa productorum ex binis, sint numeri quadrati.

## Auctore Leon. Eulero pag. 64.

Etsi huius generis problemata plerisque Geometris nimis sterilia videntur, quam vt in iis soluendis operam suam collocare, aequum iudicent, negari tamen nequit, quin inde insignia incrementa Analysis acceperit. Ac certe in genere affirmare licet, quo magis cuiusquam problematis resolutio fuerit abscondita, methodisque adhuc cognitis frustra tentata, eo magis solutionis, si tandem successerit, pretium esse constituendum. Ad hoc autem genus omnino referendum videtur problema hic pertractatum, cuius difficultatem non solum plures conatus irriti, antequam ad solutionem

nem peruenire licet, suscipiendi, sed etiam magnitudo numerorum satisfacientium manifesto declarat. Quam quidem solutionem Cel. Auctor tanquam simplicissimam affert, ea maximis numeris continetur; verum hic non parum intererit obseruasse, ex ipsa Auctoris solutione multo minores numeros quaestioni satisfacientes satis expedite elici posse. Positis enim ternis quaesitis numeris $nx$, $ny$, $nz$, vt tres sequentes numeros

I. $n(x+y+z)$; II. $nn(xy+xz+yz)$; III. $n^3 xyz$ quadratos effici oporteat; prima et tertia conditio impletur sumendo $z = \frac{vv(x+y)}{xy-vv}$ et $n = m^2 xy(x+y)(xy-vv)$. Vt autem secunda impleatur, statuit Auctor:

$xy - vv = uu$; $x = tv$, vt fit $y = \frac{vv+uu}{tv}$ et $z = \frac{vv}{uu}(x+y)$; tum vero deducitur ad hanc aequationem:

$$\frac{vv}{uu} = \frac{tt+1-ss}{2s(tt+1)-2stt-2}$$

cui facillime satisfit sumendo $s = \frac{3}{2}$; siquidem hinc sequitur $\frac{vv}{uu} = tt - \frac{5}{4}$. Capi ergo conuenit $t = \frac{pp+5qq}{4pq}$, vnde fit $\frac{v}{u} = \frac{5qq-pp}{4pq}$, vbi numeros $p$ et $q$ pro lubitu assumere licet, ita vt hinc innumerabiles solutiones obtineantur: inter quas simplicissima videtur, quae oritur sumendo $t = \frac{3}{2}$, vnde fit $v = 1$ et $u = 1$, porro $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{4}{3}$ et $z = \frac{17}{6}$. Iam ob $x+y+z = \frac{17}{3}$, capiatur $n = 6.34$ ex prima conditione, sicque tres numeri satisfacientes minimi erunt:

I. . $9.34 = 306$; II. . $8.34 = 272$; III. . $17.34 = 578$ quorum summa est $= 1156 = 34^2$.

summa productorum ex binis $= 8.9.34^2 + 9.17.34^2 + 8.17.34^2 = 19^2.34^2$

productum omnium $= 8.9.17.34^2. = 8^2.3^2.17^4.$

Hinc pronunciari posse videtur, minimos numeros integros problemati satisfacientes esse 272; 306; 578; fractos autem hos $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{17}$; $\frac{9}{34}$.

Caeterum hic notasse iuuabit, si tres numeri integri $x$, $y$, $z$ desiderentur, vt tantum haec formula $xy + xz + yz$ fiat numerus quadratus, eos in genere ita exhiberi posse, vt sit:

$$x + y = (a-b)^2 + (d-e)^2$$
$$y + z = (b-c)^2 + (e-f)^2$$
$$z + x = (c-a)^2 + (f-d)^2$$

vnde fit $x + y + z = aa + bb + cc - ab - bc - ac + dd + ee + ff - de - ef - df$, ipsique numeri ita se habebunt:

$$x = (a-b)(a-c) + (d-e)(d-f)$$
$$y = (b-c)(b-a) + (e-f)(e-d)$$
$$z = (c-a)(c-b) + (f-d)(f-e)$$

vnde fit:

$$\sqrt{(xy + yz + xz)} = a(e-f) + b(f-d) + c(d-e)$$

Vel simplicius haec solutio ita enunciari potest, vt sit:

$$x = lm + pq;\; y = mn + qr;\; z = nl + rp$$

sumtis his senis numeris $l, m, n$ et $p, q, r$, ita vt sit:

$$l + m + n = 0 \text{ et } p + q + r = 0$$

tum vero erit:

$$\sqrt{(xy + yz + xz)} = lq - mp = mr - nq = np - lr.$$

III.

# III.

# Theoremata Arithmetica, noua methodo demonſtrata.

## Auctore Leon. Eulero pag. 74.

Singulari omnino Auctor hic vtitur methodo, ad plures inſignes numerorum proprietates demonſtrandas, quarum quidem nonnullas iam alio modo demonſtratas dedit, reliquae vero nouae ſunt habendae, atque ad alias maiori adhuc attentione dignas viam parare videntur. Ipſa quidem methodus ita dilucide eſt expoſita, vt nihil ad ampliorem eius illuſtrationem afferri poſſit; at vero praecipuas veritates, quas Auctor feliciter inueſtigauit, hic recenſuiſſe iuuabit. Poſtquam is iam gemina methodo eximium illud Theorema: *quod forma* $a^{p-1}-1$ *ſemper ſit diuiſibilis per numerum* p, *ſiquidem is ſit primus, neque numerus* a *per eum diuidi poſſit*, demonſtraſſet; hic non ſolum tertiam demonſtrationem ex aliis principiis petitam adiicit; verum etiam idem Theorema, quod ad numeros tantum primos erat adſtrictum, ad omnes plane numeros extendit. Propoſito ſcilicet quocunque numero N, definit inde numerum $n$, vt forma $a^n-1$ per illum numerum N certe diuiſionem admittat; vbi quidem numerus $a$ pro lubitu aſſumi poteſt, ſed tamen ita comparatus eſſe debet, vt cum numero N nullum habeat diuiſorem communem, ſeu vt numeri N et $a$ ſint inter ſe primi, quae quidem conditio ſemper eſt ſubintelligenda da, etiamsi verbis non exprimatur. Demonstrat igitur Auctor, exponentem $n$ semper ita pendere a numero proposito N, vt aequalis sit multitudini numerorum ipso N minorum, qui simul ad eum sint primi, id quod exemplo magis perspicuum reddetur. Sit igitur numerus propositus $N = 10$; numeri autem eo minores, ad eumque primi, sunt 1, 3, 7, 9, ideoque quatuor, vnde fit $n = 4$. Sumto iam pro $a$ numero quocunque ad 10 primo, seu qui neque per 2 neque per 5 diuidatur, ac certo pronunciare licet, hanc formam $a^4 - 1$ esse per 10 diuisibilem, hoc est, omnium huiusmodi numerorum biquadrata vnitate minuta diuisionem per 10 admittunt. Veluti si $a = 3$, fit $a^4 - 1 = 80$; si $a = 7$, fit $a^4 - 1 = 2400$ et ita porro. Quaeritur autem hic ante omnia, quomodo pro quouis numero N multitudo numerorum ipso minorum, ad eumque primorum, cui numerus $n$ aequalis est sumendus, commode definiri possit: vbi quidem perspicuum est, si N fuerit numerus primus, fore $n = N - 1$, propterea quod omnes numeri ipso minores, quorum multitudo vtique est $= N - 1$, simul ad eum sunt primi. Sed si numerus N non est primus, eius ratio compositionis ex primis est spectanda; vbi cum existentibus $p, q, r, s$ numeris primis, omnes numeri ad hanc formam $p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ etc. reuocari possint, ab Auctore est demonstratum:

si sit $N = p^\alpha$, fore $n = p^{\alpha-1}(p-1) = N.\frac{p-1}{p}$

si $N = p^\alpha q^\beta$, fore $n = p^{\alpha-1}(p-1).q^{\beta-1}(q-1) = N.\frac{p-1}{p}.\frac{q-1}{q}$

si $N = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, fore $n = p^{\alpha-1}(p-1).q^{\beta-1}(q-1).r^{\gamma-1}(r-1)$

seu $n = N.\frac{p-1}{p}.\frac{q-1}{q}.\frac{r-1}{r}$.

sicque

ſicque porro, ita vt pro dato numero N numerus $n$ inueniri poſſit ex ſolis numeris primis in eum ingredientibus, nullo ad eorum poteſtates habito reſpectu, quod in diſſertatione non eſt animaduerſum. Ita ſi $N = 120$, qui numerus ex primis 2, 3, 5 componitur, vnde fit $n = 120 . \frac{1}{2} . \frac{2}{3} . \frac{4}{5} = 32$; atque forma $a^{32} - 1$ certe erit diuiſibilis per 120, dum $a$ nullum horum numerorum 2, 3, 5 complectatur. Verum hic inſuper obſeruare licet, plerumque minorem poteſtatem eadem proprietate praeditam eſſe. Rationem enim harum demonſtrationum perpendenti mox patebit, ſi fuerit $N = p^{\alpha} q^{\beta} r^{\gamma}$, formam $a^n - 1$ per hunc numerum fore diuiſibilem, non ſolum cum $n$ fuerit productum ex his tribus numeris:

$$p^{\alpha-1}(p-1);\; q^{\beta-1}(q-1);\; r^{\gamma-1}(r-1)$$

ſed ſufficere, ſi pro $n$ minimus communis diuiduus horum numerorum accipiatur, quae obſeruatio haud inelegans in diſſertatione eſt praetermiſſa. Ita ſi ſit $N = 120 = 2^3 . 3 . 5$, terni numeri pro exponente $n$ inueniendo ſunt 4; 2; 4, quorum minimus communis diuiduus eſt 4: ſicque pronunciare licet, hanc formam $a^4 - 1$ ſemper eſſe per 120 diuiſibilem, dummodo $a$ ad 120 fuerit primus.

Simili modo ſi $N = 63 = 3^2 . 7$, hi duo factores dant numeros 6 et 6, quorum minimus communis diuiduus cum ſit 6, haec forma $a^6 - 1$ erit per 63 diuiſibilis, ſi modo $a$ neque ternarium, neque ſeptenarium, contineat.

Sit $N = 32760 = 2^3 . 3^2 . 5 . 7 . 13$, qui factores inter se primi praebent hos numeros:

$$4; 6; 4, 6, 12$$

quorum communis diuiduus est 12, ex quo haec forma $a^{12} - 1$ semper per 32760 diuisionem admittit, modo $a$ nullum horum numerorum primorum, 2, 3, 5, 7, 13 inuoluat: veluti si $a = 11$, est

$$a^{12} - 1 = 3138428376720 = 32760 . 95800622$$

vbi notari conuenit, esse:

$$95800622 = 2 . 37 . 61 . 19 . 1117$$

Saepenumero autem euenire potest, vt pro certo numero $a$ etiam minor potestas satisfaciat, sed talis diminutio ab indole numeri $a$ pendet, neque in genere minor potestas, quam hic est assignata, theoremati tribui potest.

## IV.

## Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum, quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur.

### Auctore Leon. Eulero pag. 105.

Versantur haec Theoremata circa numeros, qui sunt aggregata ex quadrato et triplo alterius quadrati formata, ideoque hac formula generali $pp + 3qq$ contineri tinentur. Scilicet si duae series constituantur, quarum altera constet ex numeris quadratis, altera ex iisdem triplicatis, vti

I. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

II. 3, 12, 27, 48, 75, 108, 147, 192, 243

atque singuli prioris seriei singulis posterioris seriei addantur, oriuntur ii numeri, quorum indoles hic consideratur, et qui secundum ordinem magnitudinis dispositi sunt ad centum vsque

4, 7, 12, 13, 16, 19, 21, 28, 31. 36, 37, 39, 43, 48, 49
52, 57, 61, 63, 64, 67, 73, 76, 79, 84, 91, 93, 97, 100.

Hinc si primo excerpantur numeri, qui sunt primi

7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97

hi omnes vnitate minuti per 6 diuisibiles deprehenduntur, seu in formula $6n+1$ continentur, cuius quidem ratio facile perspicitur, cum ex forma $pp+3qq$ alii numeri primi oriri nequeant, nisi qui per 3 diuisi, vnitatem relinquant. Sed eius inuersum, quod vicissim omnes numeri primi istius formae $6n+1$ simul in illo numerorum genere occurrant, veritas est multo magis ardua, cuius demonstratio maximas ambages postulat. Demonstrari scilicet oportet, semper dari numeros $p$ et $q$, vt sit $6n+1=pp+3qq$, si quidem numerus $6n+1$ fuerit primus, vbi imprimis notari conuenit, nisi $6n+1$ sit primus, hanc proprietatem saepius fallere, vti fit in numeris 55, 85, qui etsi multiplum senarii vnitate superant, tamen neutiquam in forma $pp+3qq$ continentur. At si huiusmodi numerus $6n+1$ fuerit primus, quantumuis sit magnus,

 velut

veluti 20161, certo pronunciare licet, duo dari quadrata $pp$ et $qq$, vt ſit $20161 = pp + 3qq$, reperitur autem $p = 31$ et $q = 80$, neque plus vno modo hoc fieri poteſt. En ergo ſummam Theorematum hic ſingulari prorſus modo demonſtratorum, quod omnis numerus primus formae $6n + 1$ ſemper in hac forma $pp + 3qq$, idque vnico tantum modo, contineatur, ex quo ſequitur, ſi quispiam numerus formae $6n + 1$ vel prorſus non in forma $pp + 3qq$ contineatur, vel plus vno modo, tum eum certe non fore primum. Fundamentum autem harum demonſtrationum in hac propoſitione eſt ſitum, quod ſi numerus formae $pp + 3qq$ non fuerit primus, eum non alios admittere diuiſores, niſi qui ipſi in eadem forma $pp + 3qq$ contineantur. His autem principiis Auctor iam olim erat vſus, cum demonſtraſſet, non dari duos cubos, quorum ſumma, vel differentia, ſit cubus, tum vero etiam nuper, cum noua plane methodo problema de tribus cubis inueniendis, quorum ſumma ſit cubus, ſoluiſſet, quamobrem, vt hic nihil amplius deſiderari poſſet, omnino neceſſe erat, theoremata iſta rigidis demonſtrationibus confirmari. Caeterum ingenue fatetur Auctor, has demonſtrationes ex principiis nimis alienis eſſe petitas, fontesque magis proprios dari eo deducentes, ex quibus *Fermatius* hauſiſſe videtur, cum inde ſe demonſtrauiſſe aſſeueret, hanc aequationem generalem $a^n \pm b^n = c^n$ nunquam locum habere poſſe, ſtatim atque exponens $n$ binarium ſuperet, cum tamen *Eulerus* hanc impoſſibilitatem tantum pro caſibus $n = 3$ et $n = 4$ demonſtrare valeat, ex quo eo magis dolendum eſt Fermatiana inuenta temporum iniuria periiſſe. V.

# V.

# Consideratio formularum, quarum integratio per arcus sectionum conicarum absolui potest.

## Auctore Leon. Eulero pag. 129.

Quando integrationes algebraice perficere non licet, valores integralium per quadraturas linearum curvarum vulgo exhiberi solent, dum scilicet linea curva assignatur, cuius area eundem valorem exprimat, vel saltem eiusmodi quantitatem, ex qua is determinari possit. Inter huiusmodi quantitates, quae dum limites Algebrae communis quasi transcendunt, Transcendentes appellantur, frequentissime occurrunt, quae a quadratura circuli et hyperbolae pendent, quorsum omnes formulas integrales nullam irrationalitatem inuoluentes reduci posse constat, atque hae binae transcendentium species iam ita vsu in Analysin sunt receptae, vt propemodum instar algebraicarum tractentur. Quae nimirum a quadratura circuli pendent, eae nunc quidem per calculum angulorum felicissime expediuntur, quemadmodum eae, quae a quadratura hyperbolae pendent, logarithmis comprehendi solent, quorum calculus nunc fere inter elementa refertur. Quodsi vero quadraturis magis complicatis opus est, euolutio multo maioribus difficultatibus est obnoxia. Etsi enim descriptio linearum curuarum conceditur, tamen in praxi nimis est moleſtum, areas iis incluſas ſatis exacte dimetiri. Quam ob cauſam iam pridem Geometrae in hoc elaborauerunt, vt loco quadraturarum potius rectificationes curuarum in hunc vſum traducerent; quia ſtatim ac linea curua accurate fuerit deſcripta longitudinem cuiusque arcus ſine vllo apparatu ope fili dimetiri licet, in quo negotio olim *Hermannus* immortalem gloriam eſt aſſecutus, dum problema ab aliis pro deſperato habitum ſumma ſagacitate reſoluit, et pro cuiuscunque curuae quadratura lineas curuas adeo algebraicas inuenire docuit, quarum rectificatione idem praeſtari queat. Cum igitur nullum ſit dubium, quin huiusmodi conſtructiones eo ſint elegantiores, quo facilius curuae, quarum rectificatio adhibetur, deſcribi queant; in hoc negotio ſectionibus conicis, Ellipſi ſcilicet et Hyperbolae, merito primae partes ſunt tribuendae; et cum plerumque difficillimum ſit indolem earum formularum integralium perſpicere, quarum valores per arcus, ſiue ellipticos, ſiue hyperbolicos, exprimere liceat, Auctor hic ſingulari methodo praecipuas formulas integrales inueſtigat, quae hoc modo conſtructionem admittunt. Celeb. *Alembertus* quidem hoc idem argumentum iam pridem in actis Acad. Reg. Pruſſicae pertractauit, *Euleri* vero methodus plane noua, qua arcus ſectionum conicarum aliarum curuarum inter ſe comparare docuit, in hac inueſtigatione eximiam praeſtitit vtilitatem, vt hoc negotium multo vberius confeciſſe videatur. Plurimae autem transformationes, quibus Auctor in hac ardua euolutione vtitur, in Analyſi haud ſpernendam vtilitatem habere poſſunt. Interim laudi ac dignitati huiusmodi inueſtigationum nihil de-

detrahetur, si obseruauerimus, nunc quidem in calculi applicatione ad praxin neque curuarum quadraturam, neque rectificationem, magnopere desiderari, cum omnia multo facilius et accuratius per methodos appropinquandi expediri queant.

## VI.

# Constructio aequationis differentio-differentialis etc.

## Auctore Leon. Eulero pag. 150.

Forma aequationis, quam Auctor hic construendam suscepit, ita est comparata, vt latissime pateat, ac per vniuersam Analysin amplissimum habeat vsum; cum in ea omnia, quae olim de celeberrima illa aequatione Riccatiana sunt inuestigata, contineantur. Si hoc negotium per methodos vsitatas tentetur, summae difficultates obstant, quo minus ad finem perduci queat; nouam igitur Auctor ac prorsus singularem methodum exponit huiusmodi aequationes tractandi, cuius quidem iam pridem nonnulla egregia specimina edidit; neque vllum est dubium, quin ista methodus, si diligentius excolatur, insignia incrementa Analysi sit allatura. Casu autem euenit, vt haec tractatio non penitus ad finem sit perducta, siue quaedam capita perierint, siue ab Auctore sint neglecta. Quae autem hic proferuntur, omnino sufficiunt ad vim nouae huius methodi per-

perſpiciendam, atque adeo, quae deſunt, ab attento lectore harum rerum ſtudioſo haud difficulter reſtituentur. Quin etiam ſi ex hac parte attentio excitetur, nullum eſt dubium, quin Analyſis inde multo maiora incrementa ſit conſecutura.

## VII.

# Annotationes in locum quendam Carteſii, ad circuli quadraturam ſpectantem.

## Auctore Leon. Eulero pag. 157.

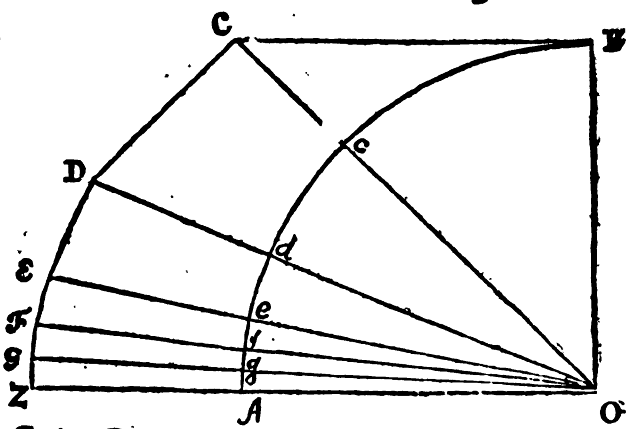
Peripheriam circuli ad diametrum eſſe incommenſurabilem, ſeu nullam dari menſuram, qua tam diametrum, quam peripheriam, ita metiri liceat, vt nihil relinquatur, iam ab antiquiſſimis Geometris eſt obſervatum, etſi hoc etiam nunc aliter demonſtrari non poteſt, niſi quod omnes conatus huiusmodi menſuram inueniendi fuerint irriti. Nullos ſcilicet eiusmodi binos numeros exhibere licet, qui inter ſe eandem praeciſe rationem teneant, quae inter diametrum ac peripheriam intercedit, ex quo in praxi tales numeri vſurpari ſolent, qui tantum proxime ad iſtam rationem accedant, cuiusmodi ſunt Archimedei 7 ad 22 et Metiani 113 ad 355; tum vero ab aliis iſta vera ratio multo accuratius numeris expreſſa, vt etiam in maximorum circulorum computo error omnino ſit con-

contemnendus. Incommenſurabilitas autem in ſe ſpectata non obſtaret, quominus ratio diametri ad peripheriam geometrice aſſignari poſſet, cum quadrati Diagonalis ad latus quoque ſit incommenſurabilis, atque in genere omnes quantitates irrationales, quae ab extractione radicum oriuntur, geometrice conſtrui poſſint. Verum peripheria circuli ad genus Irrationalium longe ſublimius referenda videtur, ad quod demum radicis extractione infinities repetita pertingere liceat; vnde etiam geometrice plus praeſtari non poteſt, quam vt vera peripheriae ad diametrum ratio continuo propius exprimatur. Atque hoc modo Conſtructio *Carteſiana*, quam Cel. Auctor hic perpendit, eſt comparata, vt continua rectangulorum certa lege decreſcentium appoſitione linea tandem eliciatur recta peripheriae circuli aequalis; haecque conſtructio ita ingenioſe eſt excogitata, vt faciliima operatione citiſſime ad veritatem conuergat; in quo eximium monumentum ſummae inuentoris ſagacitatis mirari debemus. *Eulerus* autem, dum hoc inventum obliuioni ſubtrahit, plures egregias formulas et ſeries ad circuli menſuram pertinentes profert, quibus huiusmodi approximationes geometricae multiplicari magisque perfici queant. Veluti cum demonſtrauiſſet, denotante $q$ longitudinem quadrantis circuli, cuius radius $= 1$, eſſe:

$$q = \text{ſec.}\,\tfrac{1}{2}q \cdot \text{ſec.}\,\tfrac{1}{4}q \cdot \text{ſec.}\,\tfrac{1}{8}q \cdot \text{ſec.}\,\tfrac{1}{16}q \cdot \text{ſec.}\,\tfrac{1}{32}q \cdot \text{ etc.}$$

 hinc

hinc sequens constructio satis concinna et elegans concluditur. Constituto Quadrante AOB radio OB iungatur normalis BC rectae OC angulum AOB bisecanti occurrens in C.




Tum huic OC in C normaliter iungatur CD occurrens rectae OD angulum AOC bisecanti in D. Simili modo huic OD normaliter iungatur recta DE occurrens rectae OE angulum AOD bisecanti in E; hincque OE denuo normaliter recta EF occurrens rectae DF angulum AOE bisecanti in F; atque ita porro. Hoc modo tandem peruenietur vsque ad radium OA productum, in cuius puncto Z constructio vltimo cadat; quo facto erit recta OZ longitudini quadrantis B*cdefg*A praecise aequalis.

Plurimas autem alias huiusmodi constructiones ex Formulis Auctoris facile deriuare licet. Notasse hic iuuabit, puncta B, C, D, E, F reperiri in tali linea curua, cuius natura, posito angulo quocunque AOD $= \Phi$ et recta OD $= v$, ita exprimitur, vt sit $v = \frac{q \sin. \Phi}{\Phi}$. Hinc enim sumta quacunque ratione inter angulum $\Phi$ et angulum rectum, cuius mensura est arcus $q$, vt sit $\Phi = \frac{m}{n} q$, erit $v = \frac{n}{m} \sin. \frac{m}{n} q$ ideoque recta $v$ geometrice assignari potest. Cum autem angulo $\Phi$ continuo

immi-

imminuendo ad angulum euanescentem fuerit peruentum, vbi fit $\frac{\sin.\Phi}{\Phi} = 1$, tum recta $v$ manifesto fit Quadranti $q$ aequalis: Similes autem formulas alias quotcunque pro lubitu fingere licet.

## VIII.

# Demonstratio generalis Theorematis Newtoniani de binomio ad potentiam indefinitam eleuando.

## Auctore F. V. T. Aepino pag. 169.

Vt veritates mathematicae, quarum certitudo in aliis disciplinis tanquam exemplum imitandum proponi solet, extra omnem dubitationis aleam collocentur, non sufficit, eas eiusmodi demonstrationibus muniri, quibus animi ad discendum parati atque ingenio satis perspicaci praediti acquiescant, sed etiam omnino est necessarium, vt omnes obiectiones solide refellantur, atque adeo cauillationes Sophistarum explodantur. Ad hoc genus imprimis est referenda demonstratio Euclidea de aequalitate angulorum alternorum in lineis parallelis, quae haud leuibus dubiis est obnoxia, vt etiam summi Geometrae in ea firmius stabilienda studium atque operam collocauerint, in quo autem non parum est dolendum, quod istae emendationes nimis sint prolixae et arduae, quam vt elementis inseri queant. In Analysi etiam pura eiusmodi occurrunt demonstrationes, quas cauillandi studium non mediocriter labefactare est annisum, cum circa quantitates plurimae veritates tanquam generales admitti soleant, etiamsi demonstratio tantum ad numeros integros sit accommodata. Huiusmodi obtrectationes imprimis expertum est Theorema *Newtonianum*, quo potestas binomii $(x+y)^m$ generaliter in hanc seriem euolui statuitur:

$$x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} y + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2} y^2 + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot x^{m-3} y^3 + \text{etc.}$$

cum tamen ista resolutio nonnisi pro iis casibus, quibus exponens $m$ est numerus integer, sit demonstrata. Tantum autem abest, vt pro reliquis casibus, quibus $m$ est vel numerus fractus, vel irrationalis, vel transcendens, vel adeo imaginarius, de eius veritate dubitetur, vt potius huic Theoremati in latissimo sensu accepto vniuersa Analysis infinitorum sit superstructa. Hinc ii, qui eius veritatem in genere, Analysi infinitorum in subsidium vocata, demonstrare sunt conati, manifesto vitiosissimum circulum in ratiocinando commiserunt. Non inutiliter itaque collocauit laborem Auctor, cum demonstrationem fundamentalis huius totius Analyseos principii, idque per sola Algebrae communis elementa, condere aggressus est. Singulari autem omnino artificio, postquam formulam $(x+1)^m$ huic seriei $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + Ex^{m-4} +$ etc. aequalem finxit, ostendit primo quidem semper esse $A = 1$, tum vero a quantitate B reliquas C, D, E etc. ita pendere, vt sit:

$$C = B.\frac{B-1}{2};\ D = C.\frac{B-2}{3};\ E = D.\frac{B-3}{4};\ \text{etc.}$$

verum

verum mirifico prorsus casu hic vsu venit, vt ipsa quantitas B hinc non determinetur. Altera igitur huius demonstrationis pars in hoc versatur, vt aliunde ostendat, semper esse $B = m$, quod quidem tanto rigore praestat, vt nulli plane dubio locus relinquatur.

## IX.

# De functionum algebraicarum integrarum factoribus trinomialibus realibus commentatio.

## Auctore F. V. T. Aepino p. 181.

Spectat haec commentatio ad Theoriam aequationum algebraicarum cuiuscunque ordinis, scilicet:

$$x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} + \text{etc.} \ldots + M x + N = 0$$

quam constat semper resolui posse in totidem factores simplices formae $x + p$, quot maximus exponens $n$ contineat vnitates. Saepe numero autem euenit, vt isti factores simplices euadant imaginarii, ac tum demonstratum est, numerum huiusmodi factorum imaginariorum semper esse parem. Quod autem praeterea in Analysi assumi solet, tales factores imaginarios ita esse comparatos, vt cuique suus conueniat socius, qui per eum multiplicatus productum producat reale; id quidem tantum pro aliquibus casibus firmiter est demonstratum, generalem vero demonstrationem adhuc desi-

 derari,

derari, omnes qui hanc Theoriam accuratius sunt scrutati, confitentur. Quotcunque scilicet aequatio habuerit factores imaginarios, quorum vnus sit $x+p$, ideoque $p$ quantitas imaginaria, demonstrari debet, inter reliquos semper dari vnum illius quasi socium $x+q$, ita vt productum $(x+p)(x+q)=xx+(p+q)x+pq$ euadat reale; ad quod quidem requiri perspicuum est, vt binarum quantitatum imaginariarum $p$ et $q$ tam summa, quam productum, abeat in quantitatem realem. Huius itaque theorematis demonstrationem condere aggressus est Auctor, in quo quidem negotio ita procedit, vt si supponatur, (cuius perfectam demonstrationem, ex analysi infinitorum petitam, sibi vindicat *Alembertus*,) omnes quantitates imaginarias ad formam $A+B\sqrt{-1}$ reducibiles esse, postea singulari quodam artificio, propositionis antea indicatae probationem, inde deducat, quae quidem demonstratio, ita comparata est, vt per se attentionem mereri videatur, etsi conceditur, sub assumta ab Auctore hypothesi, dari forsitan faciliores aliquas ad demonstrationem hanc absoluendam vias.

## X.

## Solutio Problematis cuiusdam ad maxima minimaue pertinentis.

### Auctore Steph. Rumowski pag. 189.

Problema hoc, cuius solutionem Cl. Auctor feliciter perfecit, omni Geometrarum attentione dignum est iudi-

iudicandum. Etsi enim ad famosam illam de Isoperimetricis quaestionem pertinet, circa quam opera ac studio Cel. *Euleri* nihil amplius reperitur, quod desiderari queat, tamen eius solutio in se spectata non solum est pulcerrima, sed etiam tantas implicat difficultates, ad quas superandas insignia Analyseos artificia requiruntur. Clar. quidem Auctor idonea Variabilium electione solutionem ita instruxit, vt commode prima Integratio succederet, et altera quasi sponte separationem Variabilium largiretur. In solutione autem, quam ab *Eulero* filio sibi missam communicat, prima integratio multo maiorem sollertiam requirit, et haud contemnenda calculi artificia complectitur. Caeterum ipsa quaestio, qua pro data Coni altitudine inter omnes bases, quae Cono aequalem soliditatem conciliant, ea quaeritur, vnde coni superficies minima oriatur? neutiquam inutilis est putanda, cum talis minimi cognitio saepius ingentem lucem foenerari queat: quod magis perspicuum redditur, si quaestio eadem aliis verbis ita efferatur, vt inter omnes conos tam eiusdem altitudinis quam eiusdem superficiei is definiatur, qui maxime sit capax? Solutio autem huius problematis tandem ad eiusmodi aequationem perducitur, quae innumerabiles lineas curuas in se complectitur, inter quas circulus etiam tanquam species occurrit. Ingrediuntur enim in aequationem finalem tres nouae constantes arbitrariae, vnde pro earum diuersa determinatione infinitae curuae diuersae obtinentur. Quae infinita multitudo, quomodo cum problematis natura consistere possit, haud facile apparet, ampliorique explicatione indiget. Namque

si

si basis circularis satisfacit, ita vt conus ei superstructus minorem habeat superficiem, quam si alia quaecunque figura eiusdem capacitatis basi tribueretur; omnino mirum videtur, quid reliquae lineae curuae in solutione aeque contentae sibi velint, et quomodo ad problema soluendum accommodari debeant? Ad hoc intelligendum indoles huiusmodi quaestionum accuratius est perpendenda. Primo igitur antequam tota coni superficies vndequaque terminata consideretur, solutio ad quemuis arcum indefinitum baseos ita pertinere est censenda, vt inter omnes curuas iisdem terminis comprehensas, quae simul idem spacium includant, ea definiatur, ex qua minima superficies conica gignatur. Hic ergo tres res tanquam datae sunt spectandae, bina scilicet puncta, per quae curua transire debet, et area, quam ista curua includit. Quam ob rem solutionem completam ita comparatam esse oportet, vt curua quaesita per data duo puncta describi possit, simulque eius area inter haec puncta contenta datam quantitatem nanciscatur. His ergo conditionibus vt satisfieri possit, omnino necesse est, vt aequatio finalis tres quantitates ab arbitrio nostro pendentes inuoluat. Quo obseruato iam perspicuum est, quid aequatio illa maxime generalis inuenta sibi velit, et quomodo ad vsum sit traducenda? Quolibet enim casu oblato duo puncta, per quae curuae est transeundum, tanquam data proponi sunt intelligenda, vna cum area inter ea comprehensa, tum vero aequationis ternae constantes arbitrariae ita determinentur, vt linea curua per ista duo puncta transeat, et area inter ea comprehensa datam illam quantitatem obtineat:

ex

ex quo euidens est, in aequatione problema perfecte soluente necessario tres constantes indefinitas inesse debere. Deinde etiam notari conuenit, quomodocunque istas constantes pro lubitu determinauerimus, vt curua determinata resultet, eam semper problemati ita satisfacere, vt sumtis in ea ad libitum binis punctis, inter omnes alias lineas, quae per eadem puncta ductae aequale spatium includant, quarum multitudo vtique est infinita, ea, quae fuerit reperta, minimam generet superficiem conicam. Atque hoc modo vtique euenire potest, vt curua satisfaciens maxime a circulo discrepet. Statim enim atque bina puncta data non aeque fuerint a centro basis remota, areaque inter ea comprehensa ab area sectoris circularis diuersa, neutiquam fieri potest, vt circulus quaestionem resoluat. Ex quo iam perspicue intelligitur, cur solutio istius problematis infinitam diuersarum linearum curuarum multitudinem complectatur.

# PHYSICO - MATHEMATICA.

## I.

## Dilucidationes de reſiſtentia fluidorum.

### Auctore Leon. Eulero pag. 197.

Quantam reſiſtentiam quaeuis corpora in fluido, veluti aqua, aut aere, mota patiantur, et quantum inde eorum motus debilitetur? quaeſtio eſt in vniuerſa Phyſica maximi momenti, cum nullus motus in hoc mundo exiſtat, qui ab huiusmodi perturbatione ſit immunis. Ex quo iam dudum naturae ſcrutatores, atque imprimis Geometrae, ſummo ſtudio fuerunt occupati, vt leges iſtius reſiſtentiae, quam corpora in fluidis mota ſuſtinent, inueſtigarent, eiusque veram quantitatem quouis caſu aſſignarent. Primum quidem ſolam experientiam conſulentes mox animaduerterunt, quo fluidum fuerit denſius, eo maiorem eſſe reſiſtentiam, idemque corpus ſimili motu in aqua latum tanto maiorem pati reſiſtentiam, quam in aere, quanto aqua aerem denſitate ſuperet. Tum vero etiam facile obſeruarunt, in eodem fluido reſiſtentiam eo eſſe maiorem, quo motus fuerit velocior. Imprimis autem ſenſerunt, reſiſtentiam plurimum a figura corporis pendere, effectumque fluidi eo eſſe minorem, quo obliquius in corporis ſuperficiem allabatur; quod diſcrimen praecipue

in

in nauigatione cernitur, dum aliae naues pro diuersa figura aliis multo aptiores deprehenduntur ad resistentiam superandam, ex quo nata est quaestio plurimum agitata, cuiusmodi figuram naui tribui conueniat, vt minimam resistentiam patiatur. Quae phaenomena vt explicarent, atque accuratius explorarent Geometrae, ad motus principia confugerunt, indeque per calculum definire sunt conati, quanta quouis casu resistentia esse debeat, cum ratione celeritatis, qua corpus in fluido promoueatur, tum vero ratione eius figurae; atque tandem vniuersam resistentiae Theoriam ad duplicem regulam reuocasse sunt arbitrati; quarum altera ad motum directum pertinet, quo superficies plana perpendiculariter in fluidum occurrit, eaque statuitur, resistentiam quadrato celeritatis esse proportionalem, et quouis casu aequiualere ponderi cylindri fluidi, cuius basis aequalis sit superficiei motae, altitudo vero cum illa conueniat, ex qua graue cadendo eam ipsam celeritatem acquirat, qua corpus aduersus fluidum mouetur. Altera regula ad motus obliquos spectat, quando motus directio ad superficiem est obliqua, eaque resistentia quadrato sinus anguli obliquitatis proportionalis statuitur. Hinc quaecunque fuerit corporis figura, eius superficies in innumerabiles particulas infinite secta concipitur, et pro qualibet angulus obliquitatis, sub quo in fluidum incurrit, indeque quantitas resistentiae definitur; atque ex his omnibus resistentiis elementaribus tandem tota resistentia colligi solet, quatenus quidem calculum expedire licet. Celeberr. igitur huius dissertationis Auctor in eo versatur, vt principia, vnde hae regulae sunt deductae, accuratiori examini subiiciat, quae cum hypothesi manifesto falsae innitantur, qua, ad similitudinem collisionis corporum solidorum, particulae fluidi similiter corpus in eo motum percutere assumuntur, eas tanquam omni fundamento destitutas reiicere non dubitat. Plerumque quidem eas tam parum a veritate recedere fatetur, vt error enormis non sit metuendus; veluti euenit, si corpus figura non nimis irregulari praeditum in fluido amplissimo moueatur, neque tamen celeritate adeo magna, vt pone corpus ob fluidum sequi non valens quasi vacuum relinquatur. Sin autem fluidum spatio satis angusto est inclusum, in quo corpus motum partem satis notabilem occupet, manifestum est, illas regulas immaniter fallere debere. Si enim corpus totam cauitatem, qua fluidum includitur, repleret, procedere plane non posset, ac resistentiam quasi infinitam sentiret, nisi quatenus fluidum se comprimi pateretur. Deinde etiam regulae illae memoratae tantum partem corporis anticam respiciunt, in quam fluidum allidit, pars vero postica plane non in censum trahitur, cum tamen experientia teste eius figura multum ad resistentiam, siue augendam, siue minuendam, conferat. His igitur perpensis Auctor luculenter ostendit, in resistentia nullam plane collisionem similem ei, qua corpora solida in conflictu se mutuo percutiunt, admitti posse, quo ipso totum fundamentum illarum regularum corruit. Partes autem fluidi anteriores iam antequam corpus motu suo ad eas pertingit, ad motum concitantur, quo iuxta corpus defluunt, spatium pone corpus relictum occupaturae, ita vt respectu corporis fluidum continuo circa id id refluat, quemadmodum nauigantes vident aquam continuo a prora ad puppim defluere. Hinc perspicuum est, corpus in fluido motum ab eo aliam vim non sustinere, praeter pressionem, quam fluidum praeterlabens in totam eius superficiem circumquaque exerit, et resistentiam nihil aliud esse, nisi effectum ex omnibus his pressionibus natum, motui corporis contrarium. In quo primo tenendum est, si pressio aquae, iuxta corpus praeterfluentis, haud differret ab ea, quam aqua quieta in corpus exereret, quoniam tum omnes pressiones se mutuo essent destructurae, nullum motus impedimentum, nullamque propterea resistentiam, inde esse exorturam. Eatenus ergo resistentia existit, quatenus aqua circa corpus praeterfluens aliam in id exercet pressionem atque aqua stagnans; atque ex hoc fonte vera resistentiae origo est haurienda. Primo igitur motum aquae praeterfluentis, tum vero pressionem, qua inde corpus in singulis punctis sollicitatur, definiri oportet, hincque demum ex omnibus pressionibus inter se collatis vera resistentiae quantitas assignari poterit. Haec autem inuestigatio maxime ardua est censenda, cum perfectam Theoriam motus ac pressionis fluidorum requirat. Etiamsi enim idem Auctor principia huius Theoriae perfecte euoluisset, ex iisque omnia quae tam ad motum, quam pressionem fluidorum pertinent, formulis analyticis esset complexus, tamen Calculi ad eas expediendas necessarii subsidia adhuc desiderantur, vt completam resistentiae Theoriam inde vix sperare liceat. Cum autem ea duplici inuestigatione contineatur, altera ad motum fluidi iuxta corpus defluentis, altera

 vero

vero ad eius pressionem in singulis spectante, eiusmodi nexum Auctor ex Theoria agnouit, vt ex motu cognito pressio, ac vicissim definiri possit. Quodsi ergo vndecunque motus, quo fluidum iuxta corpus praeterfluit, fuerit cognitus, ex eo pressionem, quam corpus in singulis punctis sustinet, indeque porro resistentiam ipsam determinare docet, idque ope regulae satis simplicis, qua euictum est, quo celerius fluidum in quoque corporis puncto praeterfluit, ibidem pressionem eo esse minorem, ita vt maxima pressio ibi in corpus exeratur, vbi fluidi motus fuerit lentissimus. Atque hinc iam intelligitur, partem corporis posticam in determinatione resistentiae minime esse negligendam, vti fit in eius vulgari aestimatione. His expositis Auctor vicissim inquirit, quomodo cognita resistentia, seu pressione, qua corpus circumquaque vrgetur, inde ipse fluidi motus iuxta corpus defluentis definiri, simulque conditiones assignari queant, sub quibus talis motus locum habere possit, vnde Theoria fluidorum haud spernenda incrementa capere videtur. Imprimis autem cum resistentia per vulgares regulas definita saepenumero vix sensibiliter a veritate recedat, eos inuestigat casus, quibus haec determinatio cum veritate prorsus conueniat, inuenitque hoc fieri non posse, nisi corpus habeat figuram conoidis parabolici, simulque secundum directionem axis in fluido promoueatur; quia autem hoc conoides nusquam terminatur, sed in infinitum porrigitur, manifestum est, plane nunquam vulgarem resistentiae determinationem veritati consentaneam esse posse.

II.

## II.

# Principia Theoriae Machinarum.

## Auctore Leon. Eulero p. 230.

Hic non agitur de vulgari Machinarum doctrina, qua constructio earum et compositio ex machinis simplicibus tradi solet, et quae ex solis principiis staticis naturae aequilibrii innixis petitur, ita vt ad ipsum motum, quo tamen totus effectus absoluitur, vix respiciatur. In hac igitur dissertatione ea potissimum, quae ad effectum machinarum determinandum spectant, exponuntur, in quo negotio commode vsu venit, vt quomodocunque machina fuerit composita, nihil aliud inde in computum ingrediatur, praeter solam rationem, quae inter celeritatem vis agentis et celeritatem oneris mouendi intercedit, et ex machinae structura secundum praecepta in staticis tradita facile innotescit. Bina scilicet loca in qualibet machina sunt consideranda, in quorum altero vis mouens, in altero vero vis oneris reluctans, applicatur, motuque machinae impresso videndum est, quam rationem celeritates in his locis inter se sint habiturae. Iam cognita hac ratione certum est, ad onus mouendum tantam requiri vim, quae ad onus teneat eandem rationem inuersam. Hinc Auctor momentum vis agentis appellat productum, quod oritur, si haec vis celeritatem, qua operatur, multiplicetur; et vt ista mensura sit determinata, celeritatem exprimit spatio vno minuto secundo confecto. Simili modo momentum oneris, seu vis reluctantis, vocat productum,

quod

quod oritur, si haec vis reluctans per suam celeritatem seu spatium vno minuto secundo absolutum, multiplicetur. Perspicuum autem est, hoc momento oneris veram mensuram effectus, quam machina producit, contineri, cum sine dubio effectus tanto maior sit aestimandus, quo magis oneri renitatur, et quo celerius promoueatur; at momentum hoc modo expressum simul effectum vno minuto secundo editum accurate metietur. Simili modo prius momentum vis agentis veram mensuram *actionis* largitur, quam certe distinctius mente concipere non licet. In omnibus nunc motibus machinarum ope effectis semper momentum vis agentis aequale est momento vis reluctantis, seu actio aequalis effectui, si quidem a frictione mentem abstrahamus, et motus machinae fuerit aequabilis. Verum frictionis ratio haud difficulter habetur, dum ob eam tantum oneris momentum augetur, ita vt tum hoc momentum ob frictionem auctum momento vis agentis aequale sit statuendum, vnde pro data actione effectus machinae ob frictionem vtique diminuitur. In machinarum ergo constructione imminutio frictionis vtique maximi est momenti, at perfectio machinarum non tam a minuta frictione ipsa, sed ab imminutione eius momenti pendet, quod quomodo obtineri possit, ipsa frictione non minuta, ab Auctore docetur. Quod vero ad motum machinae vniformem attinet, pleraeque quidem, dum sunt in actione, aequabiliter mouentur; verum tamen in earum partibus saepe motus inaequalitas spectatur, dum verbi gratia pistilla alternatim attolluntur et detruduntur, vnde actio machinae quoddam patitur detrimentum, atque

atque Auctori ansam praebet hanc machinarum conditionem accuratius inuestigandi. His autem praemissis tota machinarum perfectio eo reuocatur, vt data vi agente machina ita instruatur, vt inde maximus obtineatur effectus, quae quidem quaestio primo intuitu solutionis non capax videtur, cum semper effectus sit actioni huius vis aequalis, nisi totam perfectionem in sola momenti frictionis imminutione quaerere velimus. Verum Auctor hic imprimis ostendit, etiamsi vires ad machinam mouendam adhibendae sint datae; tamen idcirco earum actionem neutiquam esse datam, sed prouti tardius, vel celerius, operentur, eam modo maiorem, modo minorem, existere posse; ex quo his viribus quouis casu ita vti conuenit, vt earum actio fiat maxima; quia tum etiam effectus machinae maximus efficietur. Hic igitur indoles virium mouentium potissimum est spectanda, vbi primo quidem, si viribus hominum vtamur, notari oportet, quantacunque vi homo, dum est in quiete, operari, hoc est trahere, vel trudere valeat, tamen eius vim, quo celerius idem opus exequi debet, continuo diminui, ac tandem prorsus euanescere. Ita si homo, dum quiescit, onus 100 librarum mouere valeat, idem progrediens eo minus onus post se trahere valebit, quo celerius incedit, ac si maxima qua potest celeritate currit, ne minimum quidem onus protrahere poterit, cum omnes suas vires in proprium motum impendat. Ponamus eius vires consumi, dum singulis minutis secundis spatium 6 pedum percurrit; et cum priori casu, quo quiescit, vis exerta sit 100 libr. celeritas autem nulla, posteriori vero vis nulla, celeritas autem 6 pedum, vtroque casu actio hominis, productum scilicet ex vi in celeritatem, est nulla; dabitur ergo certus celeritatis gradus, quo si homo operetur, tametsi minorem vim quam 100 libr. exerat, actio tamen eius sit maxima, atque adeo machinae applicata maximum effectum producat. Ad hanc definiendam Auctor quidem ad hypothesin confugit, sed ratione non destitutam, atque experientia confirmatam: sumit scilicet, si homo, aliaue potentia agens, in quiete exerere valeat vim $= A$, at vero celeritate $= f$ progrediens nihil amplius praestare possit; tum si idem homo celeritate $= v$ incedat, exerere posse vim $= (1 - \frac{v}{f})^2 A$: vnde cum eius actio sit aestimanda $= v(1 - \frac{v}{f})^2 A$, ea erit maxima, si fuerit $v = \frac{1}{3} f$, et ipsa actio maxima fit $= \frac{4}{27} A f$. Ita si pro homine sumatur $A = 100$ libr. et celeritas extrema $f = 6$ ped. homo efficacissime operabitur, si celeritate 2 ped. vno minuto secundo aget, tum autem vim exeret $= \frac{4}{9} . 100 = 44\frac{4}{9}$ libr. et eius actio erit $= 44\frac{4}{9} . 2 = 89$. Quoties ergo ad machinas mouendas operis hominum vti velimus, efficiendum est, vt hominum motus sit 2 ped. singulis minutis secundis; scilicet si onus mouendum cum frictione resistentiam faciat R libr. id tanta celeritate $u$ moueri poterit, vt sit $R u = \frac{4}{27} A f$, ideoque $u = \frac{4 A f}{27 R}$: vnde cum celeritas vis agentis sit $= \frac{1}{3} f$, machinam ita instrui conueniet, vt sit celeritas vis ad celeritatem oneris vt $1$ ad $\frac{4 A}{9 R}$.

Idem tenendum est de viribus animalium cuiusque generis, quae ad machinas mouendas adhibentur; vbi

vbi imprimis notandum est, ea, quae maximae celeritatis sunt capacia, maximum effectum producere. Ita si equus in quiete tantum anniti queat, quantum tres homines, simul vero triplo maiorem celeritatem sustinere possit, eius actio efficacissima nouies erit maior quam vnius hominis, vnusque equus tantum praestare poterit, quam nouem homines. Eadem regula quoque locum habet in vi fluminis, cuius actio ad rotas circumagendas est maxima, si rota tanta velocitate versetur, vt celeritas aquae allabentis sit pars tertia. Haec igitur sunt vera principia, ex quibus omnis generis machinae ad summum perfectionis gradum euehi poterunt, ad quod vulgarem machinarum doctrinam parum conferre manifestum est.

## III.

# De motu et attritu lentium, dum super catinis poliuntur.

## Auctore Leon. Eulero pag. 254.

Artifices olim in eiusmodi machinis excogitandis fuerunt occupati, quibus spreta figura sphaerica lentibus vitreis figuram, vel parabolicam, vel ellipticam, vel hyperbolicam, aliamue quamcunque inducere possent, nunc autem etsi Dioptricae tam theoria, quam praxis, vberius est exculta, praeclare tamen nobiscum agi arbitramur, si modo lentes exactissime ad sphaericam figuram elaborari possent; hoc enim si praestare liceret, multo perfectioribus certe tam telescopiis, quam microscopiis, vteremur. Duae autem sunt res, quae huic praxi impedimento esse deprehenduntur: altera in ipsius vitri natura flexibili et elastica est sita, qua fit, vt vitrum etiam planum catino concauo fortiter appressum eius figurae apprime se applicet, inde vero remotum in pristinam figuram restituatur. Quamuis ergo lens exactissime catini figuram induisse videatur, plerumque tamen eius figura deinceps multum diuersa reperitur; quod vitium aliter euitare non licet, nisi vt vitrum, dum super catino atteritur, ipsi lenissime apprimatur, quo quidem modo labore multo diuturniore opus est, quem artifices aegerrime suscipiunt. Alterum impedimentum in ipso catino reperitur, cuius figura, dum lens atteritur, non parum vitiatur, vt necesse sit, saepius veram eius figuram restituere, antequam eandem fuerit adepta; attritu enim mutuo non solum a vitro, sed etiam ab ipso catino, plurimae particulae abraduntur. Hoc vitium imprimis se exerit in operis initio, quo lentis figura etiamnum vehementer discrepat a catini figura, ideoque catinus in certis tantum locis atteritur; cui vitio quidem artifices remedium afferre student, dum lentem per totam catini superficiem circumducunt, casui autem hic nimis latus campus relinquitur, quam vt quicquam certi hinc sperare liceat. Quando autem lens iam proxime catini figuram est adepta, vt laeuigatione tantum sit opus, minus illud incommodum metuendum videtur, siquidem vbique tantumdem a catino abraderetur. Hinc Auctor sedulo in attritum, quem catinus a lente patitur, inquirit, vbi quidem mechanisnismum nunc fere vtique vsu receptum contemplatur, quo lens ope stili eius centro applicati ita catino in gyrum acto apprimi solet, vt interea libere circa stilum gyrari possit. Hic igitur primo obseruat, motum gyratorium lentis semper aequalem esse motui gyratorio catini, vt vtrinque eodem tempore totidem reuolutiones peragantur; tum vero ostendit, lentem quidem per totam superficiem aequaliter atteri, attritumque eo esse maiorem, quo longius $1^{mo}$. lentis centrum a centro catini teneatur remotum, $2^{do}$. quo fortius lens ad catinum apprimatur, $3^{tio}$. quo minor fuerit lentis superficies, et $4^{to}$. quo celerius catinus in gyrum agatur, catinum vero demonstrat admodum inaequaliter abradi, siquidem lentis centrum immotum teneatur; vnde cum eius figura mox deprauetur, idem vitium in lentem transferatur necesse est, remedium autem, quo vulgo artifices vti solent, dum centrum lentis per totum catinum deducunt, nimis incertum iudicat; quin potius suadet, centrum lentis perpetuo in eadem a catini centro distantia detineri, atque vt catinus vbique aequalem attritum patiatur, definit figuram frusti cuiusdam vitri, quod in alio loco catino certa vi impressum praecise tantum de catino abradat, vt tota abrasio vbique aequalis reddatur. Tutissimus hic videtur modus, figuram catini ab omni depravatione immunem conseruandi, atque artifices hunc modum facile ad praxin accommodabunt. Consultum quoque foret lentem non vi manus minus inconstante ad catinum apprimi, sed certo quodam pondere ita moderando, ne prius incommodum supra memoratum locum habere possit; tum vero singulari artificio conatum lentis centrifugum coerceri conueniet, vt hoc pacto nihil plane fortunae et arbitrio artificis relinquatur. Frusti autem illius vitrei per se otiosi figura facile determinatur, aeque ac vis, qua id ad catinum apprimi debet, vt desideratus effectus obtineatur. Caeterum hic nouum documentum principii minimae actionis praeter omnem expectationem cernitur, dum enim Auctor motum lentis super catino definiuit, eum ita comparatum esse invenit, vt inde attritus minimus exoriretur, ex quo huius principii vsus amplissimus et foecundissimus per vniversam naturam eo clarius elucet.

IV.

# De noua quadam vectis proprietate Dissertatio.

## Auctore F. V. T. Aepino p. 271.

In hac dissertatione denuo insignis casus, quo principium minimae actionis eminet, profertur, atque adeo ex natura vectis petitus, cuius proprietates nemine contradicente veritatibus aeternis sunt annumerandae. Considerat scilicet Cl. Auctor, vectem aequalium brachiorum, quorum extremitates binae ad bina virium centra infinite remota singulatim viribus quibuscunque sollicitentur, quaeritque situm, quo vectis sit in aequilibrio futurus. Ad hoc vtramque vim resoluit in binas, qua-

quarum altera ad vectem sit normalis, altera vero in ipsam eius directionem incidens; atque demonstrat, aequilibrium in eo situ fore, vbi summa harum posteriorum virium in axis directionem cadentium futura sit maxima. Dolendum autem est, hanc elegantem proprietatem nimis angustis limitibus contineri, dum ea non amplius locum habet, statim ac brachia vectis inaequalis longitudinis assumuntur, seu centra illa virium non fuerint infinite remota; interim tamen non erit difficile hoc Theorema, adiiciendis adhuc quibusdam conditionibus, non quidem sine elegantiae iactura latius extendere, quod autem eo minus necessarium videtur, cum iam firmissimis rationibus sit euictum, principium minimae actionis per vniuersam Staticam, quorsum doctrina vectis est referenda, eminentissime regnare.

V.

## Descriptio instrumenti cuiusdam, nautis Barometri ad instar inseruituri.

### Auctore I. E. Zeihero p. 274.

Cum Barometra vulgaria in nauibus ob continuos motus et successiones nullum vsum praestare queant; iam olim instrumentum peculiare ad vsum marinum ab *Hookio* erat excogitatum. Nunc autem Cl. Auctor aliud instrumentum ex ipsa aeris indole petitum proponit. Cum enim quouis tempore exacta elastisticitatis aeris mensura desideretur, cylindrum cauum aere omnino vacuum in hunc finem commendat. Quia enim aer extremus tota vi elastica sua in basin cylindri agit, easque, si essent mobiles, per cauitatem cylindri ad occursum vsque detruderet, ne hoc eueniat, elastrum inter bases in ipso vacuo constituit, cuius vi eae distendantur, ita vt tensio elastri quouis tempore cum pressione aeris in aequilibrio esse debeat. Aucta ergo aeris elasticitate bases illae mobiles propius ad se inuicem adiguntur; ea vero minuta ab elastro interno bases magis repelluntur, sicque ex earum interuallo semper veram aeris pressionem agnoscere licebit, si modo frictio hunc effectum non impediat.

## VI.

## Duarum Machinarum etc. descriptio. Auctore I. E. Zeihero p. 279.

Cochlearum vsus per vniuersam Mechanicam ita est amplissimus, vt artifices in iis exacte elaborandis merito omne studium et operam impendant; in quo negotio Cl. Auctor felicissimo successu iam dudum fuit occupatus, atque hic ingeniosas inuentiones cum publico communicat, quas ex ipso citato scripto perspicere oportet.

VII.

## VII.

# Acus nauticae noua deſcriptio.

## Auctore I. E. Zeihero pag. 284.

Quemadmodum haec acus, exactiſſime veram declinationem magneticam oſtendens, ſuſpendi atque ad vſum accommodari debeat, Cl. Auctor hic perquam ingenioſe docet; quod inuentum eo magis eſt aeſtimandum, quo ampliorem nunc quidem vtilitatem a magnetis declinatione in diuerſis telluris locis accurate obſeruata expectare licet. Famoſiſſimum enim de inuenienda longitudine maris problema commodius feliciusque expediri nequit, quam ſi lex fuerit inuenta, ſecundum quam declinatio magnetis in omnibus terrae locis ad quoduis tempus mutationibus eſt obnoxia. Omnino autem eſſet optandum, vt ſimul inclinationis ratio haberetur, cuius autem accurata obſeruatio multo maiores ambages et apparatus poſtulat, quam vt a nauigantibus commode inſtitui poſſit.

## VIII.

# De aequilibrio virium corporibus applicatarum commentatio.

## Auctore S. Kotelnikow pag. 286.

Quae de aequilibrio potentiarum in Statica tradi ſolent, huic propoſitioni fundamentali innituntur, quod potentia per diagonalem parallelogrammi expreſſa aequiualeat binis potentiis per eius latera expressis; haecque veritas vulgo ita demonstrari solet, vt motus saltem primo initio impressi ratio habeatur; quod autem minime congruum videtur, cum Staticae principia ante solide demonstrata esse oporteat, quam quicquam de motu explicari possit. In primis quidem Commentariorum nostrorum Tomis egregia occurrit huius veritatis demonstratio, quae ab omni motus consideratione immunis negotium quidem plane conficit, sed tamen tantis ambagibus inuoluitur, vt ipsi inter prima elementa vix locus concedi queat. Interim tamen hinc isti propositioni palmariae tantum firmamentum comparatur, vt non solum ipsa, sed etiam omnia, quae inde circa aequilibrium quotcunque potentiarum proferuntur, veritatibus necessariis accenseri debeant. Ea namque propositione stabilitur cuiusque potentiae resolutio in binas alias, quarum directiones cum ad lubitum accipi queant, quouis casu omnes potentias, quotcunque fuerint propositae, ad binas directiones fixas reuocare licet, ex quarum momentis deinceps status aequilibrii facile determinatur. Cel. *Eulerus* postea eandem hanc propositionem fundamentalem ex principio maximorum ac minimorum singulari modo demonstrauit, dum assumsit, trium potentiarum puncto applicatarum aequilibrium tum dari, cum omnes potentiae iunctim sumtae maximum effectum produxerint, seu singulae punctum, in quod agunt, secundum suam quaeque directionem maxime protraxerint. Hoc igitur eodem principio per omnes scientias foecundissimo hic vtitur Cl. Auctor ad statum aequilibrii, quando plures tribus potentiae puncto sunt appli-

applicatae, definiendum; sumtis scilicet in cuiusque potentiae directione puncto fixo, eum quaerit statum, vbi singulae potentiae, per distantiam quaeque istius puncti a puncto, in quod agunt, multiplicatae, minimum producunt aggregatum. Potentiis ergo, quotcunque fuerint, per litteras A, B, C, D etc. indicatis, et puncti, in quod agunt, distantiis ab illis punctis, in cuiusque directione assumtis per litteras $p$, $q$, $r$, $s$ etc. status aequilibrii ibi datur, vbi quantitas $Ap+Bq+Cr+Ds+$ etc. fuerit minima, seu eius differentiale euanescens, scilicet

$$A dp + B dq + C dr + D ds \text{ etc. } = 0$$

vnde simul patet, perinde esse, vbicunque illa puncta in cuiusque directione accipiantur. Tum vero angulis inter directiones potentiarum per litteras $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc. singulatim notatis, anguloque quodam indefinito $\Phi$ in calculum introducto, Cl. Auctor ex illo principio sequentem deducit aequationem §. 6.

$$\left.\begin{array}{r} A\cos.\Phi + B\cos.\Phi\cos.\alpha + C\cos.\Phi\cos.(\alpha+\beta) \\ + D\cos.\Phi\cos.(\alpha+\beta+\gamma) + \text{etc.} \\ - B\sin.\Phi\sin.\alpha - C\sin.\Phi\sin.(\alpha+\beta) \\ - D\sin.\Phi\sin.(\alpha+\beta+\gamma) - \text{etc.} \end{array}\right\} = 0$$

quae in statu aequibrii semper locum habere debet, quicunque valor angulo $\Phi$ tribuatur. Variis igitur ipsi $\Phi$ valoribus tribuendis, pro quolibet potentiarum numero plures insignes aequilibrii proprietates deriuat, eximio vsu non destitutas. Si autem ipsa aequilibrii determinatio spectetur, duae aequationes, quotcunque etiam potentiae proponantur, sufficiunt, siquidem, binis angulorum $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc. definitis, positio puncti O determinatur.

Cum igitur superior aequatio euanescere debeat, quicunque valor angulo $\phi$ tribuatur, facile perspicitur, hoc euenire, si modo bina membra, quorum altero cosinus anguli $\phi$ afficitur, altero eiusdem sinus, seorsim nihilo aequentur, vnde sequentes binae aequationes obtinentur:

$$A + B \cos. \alpha + C \cos. (\alpha + \beta) + D \cos. (\alpha + \beta + \gamma) + \text{etc.} = 0$$

$$\text{et} \quad B \sin \alpha + C \sin. (\alpha + \beta) + D \sin. (\alpha + \beta + \gamma) + \text{etc.} = 0$$

quae non solum omnes formulas a Cl. Auctore allatas in se complectuntur, sed etiam aeque late patent. Conveniunt autem eae quoque egregie cum regulis ex vulgari theoria petitis, quibus status aequilibrii definiri solet. Si enim per punctum O recta in directionem potentiae A incidens ducta intelligatur, omnesque vires secundum binas directiones, quarum altera cum illa convenit, altera vero eidem est perpendicularis, resoluantur, tum omnium harum virium resolutarum eae, quae in dictam directionem cadunt, simul sumtae se mutuo destruere debent, perinde ac eae, quae ad illam directionem sunt normales. Illud scilicet priori aequatione indicatur, hoc vero posteriori.

## IX.

## De commoda acus declinatoriae suspensione dissertatiuncula.

### Auctore S. Kotelnikow pag. 304.

Quo acus magnetica stilo, super cuius cuspide libere gyretur, imponi queat, vulgo perforari et capitulo

tulo instrui solet; quoniam vero huiusmodi perforatione cursus materiae magneticae non mediocriter interrumpitur, quo fit, vt plerumque acus plures duobus polos recipiat, eorum studium maxime est laudandum, qui sine vlla acus magneticae laesione idoneam suspensionem excogitare conantur, quod quidem acum cum alio corpore, in quo suspensio fiat, firmiter connectendo facile praestari posse videtur. Verum hic obseruandum est, punctum, circa quod acus mobilis reddatur aliquantillum supra commune centrum grauitatis existere, simulque totum pondus minimum effici debere, ne frictione motus impediatur. Cl. Auctor igitur in eo potissimum est occupatus, vt minimo adiuncto corpore peregrino his conditionibus satisfaciat.

---

---

---

# PHYSICA.

## I.

## Plantarum rariorum descriptiones completae.

### Auctore Ioh. Chr. Hebenstreit pag. 315.

Si non noua in regno Naturae reperire occasio datur, quod quidem in vno loco haerentibus rarius occurrit, cognita, at nondum satis descripta, pleniore descriptione notiora reddere operae pretium est. Hanc sibi prouinciam excolendam sumsit, dum nobiscum commoraretur, Cl. *Hebenstreitius*, cuius studium in accurata et completa Plantarum descriptione iam ex praecedentibus Commentariorum nostrorum voluminibus constat. Plantarum hic descriptarum et iconibus ad viuas plantas illustratarum prima est *Messerschmidia*, hoc nomine nuncupata in honorem viri de omni Historia naturali meritissimi *Danielis Gottlieb Messerschmidii*, Medicinae Doctoris, qui iussu PETRI MAGNI per nouem annos totam fere Sibiriam, ea cura, quae intelligentissimum et solertissimum naturae indagatorem decet, perlustrauit, eamque ad fontes *Arguni* fluuii circa lacum *Dalai* reperit. *Messerschmidii* schedis vsus b. *Ammanus* descriptionem huius Plantae edidit, sub *Argusiae* nomine, monuit autem se non refragaturum, si quis ab inuentore *Messerschmidiam* vocare voluerit. Hoc fecit Ill. *Linnaeus*, at deinceps *Tournefortiae* generi

neri accensuit. *Hebenstreitius* omnino sui generis plantam esse docet, quae filamentis, situ antherarum, stilo, fructu, a *Tournefortia* differat. Altera *Aeschynomene*, vel *Hedysarum* Sloani, planta est a V. Ill. *Hans Sloane* in Insula Iamaica primum reperta, cuius vegetationis historiam et reliqua *Hebenstreitius* accurate describit, et iconem suppeditat, isti, quam Sloanius ad siccam, vt videtur, plantam fieri curauerat, meliorem. Tertia *Verbesinae* species, vel *Rudbeckia* Zinnii, vel *Zinnia* Linnaei, ex Galliis originem ducit, Lipsiae primum culta, et abinde Goettingam, Vpsaliam, Petropolin, propagata. Secundum methodum plantarum Cel. *Ludwigii* ad genus *Verbesinae* referendam esse noster existimat. Hic autem characteres quoque, ab Ill. *Linnaeo* in noua editione Syst. Nat. Tom. II. pag. 1377. suppeditatae, conferri merentur. Quarto loco *Brassicae* species occurrit, Sinis indigena, et alias quoque nota, at hic pluribus descripta, vna cum aliis obseruationibus, quas Botanophilis non ingratas futuras esse arbitramur.

## II.

## De gradibus Frigoris ac Caloris summis, quos certa fluida ferre possunt, etc.

### Auctore I. A. Braun p. 339.

Sint phaenomena Congelationis et Ebullitionis diuersorum corporum haud exigui momenti, adeoque atten-

attentione et indagine dignissima Non igitur mirandum est, viros summos indagare eiusmodi phaenomena studuisse, quos inter magnus *Newtonus* primus scalam graduum caloris et frigoris in Actis Societatis Regiae Londinensis mense Aprili 1701. N. 270. publicauit. Facit eiusmodi indagatio ad naturam corporum fluidorum et firmorum detegendam, et ad diuersos, in diuersis corporibus, effectus caloris et ignis cognoscendos, qui saepe sunt mirandi. Corpora modo adparent in forma fluidorum, modo in forma solidorum, qui duplex corporum status solius caloris et ignis est effectus; vti quoque forma vaporum, in quos resolui saepius corpora solent, praecipue in eorum ebullitione, huc est referenda. Hinc sequitur, corpora fluida solo frigore in corpus firmum abeuntia, glaciem quandam, quae pro diuersitate corporum diuersa est, constituere, et statum fluiditatis a certo caloris gradu pendentem, nil nisi glaciem esse fusam, vti est aqua. Quum igitur fluiditas et firmitas constituant tantum diuersum vnius eiusdemque corporis statum, manifestum est, hunc duplicem statum ad essentialia corporis non esse referendum, sed ad extra essentialia et accidentia, seu modos, dum eiusmodi commutatio status soli calori, nempe vel eius augmento, vel decremento, debeatur. Non enim existimandum est, calorem et frigus esse res sua natura diuersas, licet diuersis nominibus, iisque positiuis, ad illa designanda vti consueuerimus. Frigus enim sola priuatio et diminutio caloris est, et quando in thermometris quibusdam terminus inter

calorem

calorem desinentem et Frigus incipiens ponitur, id mere est arbitrarium. Nam gradus frigoris 200, scalae Delilianae, pro gradu caloris insigni haberi potest et debet, respectu gradus 600, qui circiter hydrargyrum congelare solet. Quod si igitur corpus firmum calore fundatur, idem corpus essentialiter maneat necesse est, eiusdem generis. Cera fusa manet cera, aurum, argentum et omnia metalla fusa, manent metalla, et eiusdem generis, scil. aurum, argentum etc., quo ipso patet, duritiem et firmitatem perpetuam pro charactere metallorum essentiali haberi non posse, alias metalla fusa, in statu scilicet fluiditatis, pro metallis non essent reputanda, quod absonum.

Quum hodie constet hydrargyrum solo frigore abire in corpus firmum, quae eiusdem huius dissertationis Auctoris Cl. *Braunii* inuentio est, et calore rursus mutari in corpus fluidum, an dubitari potest, Mercurium aeque ac reliqua metalla, Aurum, Argentum, Plumbum, Stannum etc. si in forma fluidorum adparent, dum fusa sunt, pro metallo vero fuso reputandum esse? Differentia enim nulla alia est, nisi quod Mercurius multo minore caloris gradu fundatur, quam reliqua metalla, et propter hunc minorem gradum, qui semper in Atmosphera regnat, perpetuo quoque in nostro terrarum orbe fluidum seu fusum maneat necesse est, et frigore naturali in metallum firmum et durum, vti reliqua, abire nequeat. Desinat igitur Mercurius locum inter semimetalla occupare; euehatur potius ad dignitatem perfectorum metallo-

 rum,

rum, quod omnino fieri debere luce meridiana clarius eſt, niſi quis manifeſto veritati demonſtratae repugnare velit.

Sunt igitur ſoli gradus caloris diuerſi, qui efficiunt, vt corpora modo ſub ſpecie fluidorum, modo ſub ſpecie firmorum, adpareant. Et hos ipſos gradus caloris diuerſos Cl Auctor in diuerſis corporibus, multis adcuratisque, quantum fieri potuit, experimentis, determinare ſtuduit. Pleraeque determinationes nouae ſunt, quae vero plane noua non ſunt phaenomena experimentis detecta, ita tamen ſunt comparata, vt cognita partim confirmentur, partim vero emendentur. Haec generatim dicta ſufficiant, ad ſpecialia deſcendere non attinet, quae in diſſertatione ipſa lector harum obſeruationum cupidus euoluere non praetermittet.

## III.

## Cautelae circa obſeruationes Meteorogicas adhibendae.

## Auct. Petro van Muſchenbroek p. 367.

Solas obſeruationes et experimenta ſola, veras firmasque eſſe baſes Philoſophiae naturalis, recte Cel. Auctor ſub finem diſſertationis monet, quoniam ſine his vera theoria condi nequit, ſed loco verae et firmae ſcientiae naturae inanes ſpeculationes et hypotheſes fictae, quas delet dies, proferuntur.

Sequitur hinc, inueſtigationes huius generis veritatum ſcrutatoribus naturae praecipue commendandas

eſſe,

esse, ex quibus consectaria ad veram scientiam naturae condendam hauriri et deduci queant. Ad veritates huius generis pertinent quoque obseruationes Meteororum, quae, tantum abest, vt sint negligendae et superficiarie instituendae, vt potius omnem adcurationem mereantur et requirant, quoniam theoria Meteororum, quae tot et tantas generi humano promittit vtilitates, quam longissime adhuc a sua perfectione abest. Vti igitur theoria astronomica, quae insigni perfectione hodie gaudet, non nisi post innumeras obseruationes multorum annorum condi potuit; sic quoque Meteorologia non nisi post multorum annorum obseruationes ad perfectionem quandam poterit perduci. Sunt quidem obseruationes Meteorologicae a multis hinc annis iam factae, sed paucae scopo indicato seruire possunt, quia sunt pleraeque minus accuratae et perfectae. Operae igitur pretium est, defectus et imperfectoines obseruationum meteorologicarum vulgarium, quod b. Auctor in hac dissertatione fecit, indicare, et simul, quomodo accuratae et perfectae sint faciendae, ostendere.

Et quem quis tutiorem viae ductorem desideraverit, quam eum, qui per totum fere vitae suae decursum eam calcauit? Beati *Muschenbroekii* experientia et solertia in obseruationibus et experimentis naturalibus instituendis neminem latet. Hinc nullum dubium est, quin ipsius consilia vtilitatem sint allatura. Hinc quoque Academia non superuacaneum censuit, eadem, etiamsi plura alias quoque in vniuersum nota contineant, inserere Commentariis suis.

## IV.

# Halonum extraordinariarum descriptio.

## Auctore F. V. T. Aepino pag. 392.

Si ingeniosa vnquam in lucem producta est hypothesis, explicando phaenomeno cuidam naturali destinata, ea certe est, quam de Halonum atque Parheliorum caussis proposuit magnus *Christianus Hugenius*. Etsi autem hypothesis ista miro modo phaenomenis consentiat, de veritate ipsius tamen dubitandi, immo penitus ipsam reiiciendi, caussas satis praegnantes inuenerunt recentiores Physici, quarum vnicam hic adduxisse sufficiat.

Constat ex obseruationibus, et ab ipso *Hugenio* ita statuitur, esse diametrum Halonis interioris fere semper 44 ad 45°, atque si plures adsunt, secundae Halonis diametrum constanter duplum huius reperiri, et ad 90° ascendere, quae quidem obseruatio ita constans est, vt ad rarissima phaenomena pertineant Halones, quarum diametri antea assignatis notabiliter aut maiores aut minores reperiuntur. Cum vero Vir summus phaenomena haec ex sphaerulis atque cylindris glacialibus, in aere volitantibus, opaco nucleo praeditis, deriuet, pendere debent diametri Halonum, secundum ipsius hypothesin, a ratione, quae inter diametros globuli glacialis et nuclei opaci intercedit, quam quidem rationem pro halonibus 45° ipse *Hugenius*, 1000 ad 480, ac pro halonibus 90°. 1000 ad 680 statuit.

Ardua

Ardua itaque iam oritur quaestio, vnde fiat, vt natura in producendis globulis glacialibus, modo allegatas corticis diaphani ad nucleum opacum proportiones prae aliis affectet, ac fere nunquam, et inter innumeros, qui ad datae Halonis formationem concurrunt, globulos vix aliquem producat, in quo alia obtineret proportio. Effectus enim naturae determinati a vagis proficisci causis nequeunt, sed determinatas expostulant. Quicquid autem de ortu et formatione globulorum glacialium imaginari velimus, nunquam tamen aliquam mente concipere poterimus causam, quae non ad producendas quasuis corticis et nuclei proportiones quasi indifferens esset, vnde miraculi instar habendum foret, quod inter plures casus, quorum nullus peculiari prae reliquis gaudet priuilegio, vnicus solus fere constanter accidere soleat.

Prouti haec euidenter probant, theoriam atque explicationem Halonum et Parheliorum ad desideranda adhuc pertinere, sic praesens Dissertatio euincit, phaenomenon ipsum, ad hanc vsque diem Physicis non ita cognitum fuisse, vt omnes et praecipuas ipsius circumstantias perspectas habuerint. Producitur namque, nouum genus Halonum, quod Philosophiae naturalis scrutatoribus hucusque ignotum fuit, etsi videatur in septentrionalibus terrae regionibus non ita infrequens esse, vt inter rariora numerandum sit. Vidit nempe Auctor, Haloni consuetae circulari 45°, iunctam Halonem ellipticam, cuius axis minor et verticalis diametrum Halonis circularis aequabat, axis vero maior,

 hori-

horizonti parallelus, ſex circiter diametris ſolaribus axem minorem ſuperabat.

Solerter inquiſiuit Auctor, qui deſcriptum ſe legiſſe phaenomenon non recordabatur, an alicubi mentionem ipſius iniectam inuenire poſſet, aſt fruſtra; vnde pro nouo et incognito hactenus habendum eſſe ſtatuit.

Notiſſimum quidem eſt, hinc inde allegari apud auctores Halones ellipticas, ſed patet ex intuitu, ſermonem nullibi eſſe, niſi de Halonibus, quae in ſe circulares quidem ſunt, et actuali inſtituta dimenſione tales reperiuntur, aſt per fallaciam opticam, ellipticam, ſeu oualem, potius figuram mentiuntur. Eae vero Halones, quas Auctor hic producit, id peculiare habent, quod non ſolum ellipticae videantur, ſed dimenſae actu quoque tales inueniantur, et praeterea axis ipſorum maior horizonti parallelus ſit, qui in prioris generis Halonibus nunquam non horizonti perpendiculariter inſiſtere videtur.

Etſi itaque Auctor nullum inuenerit veſtigium, deſcriptas eſſe alicubi Halones vere ellipticas, non difficile tamen ipſi fuit agnoſcere, apparuiſſe idem hoc phaenomenon quibusdam obſeruatoribus, aſt ita incompletum, vt iuſtam ſibi ipſius exinde formare ideam non potuerint.

Quamuis tandem Auctor, in nuda phaenomeni maxime notabilis deſcriptione hic ſubſiſtat, neque ad eruendam cauſam ipſius ac ſimilium phaenomenorum animum

animum aduertat, iungit tamen cogitationes aliquas suas, huc pertinentes, quaestionum sub forma, in quarum aliqua insinuat, mirabilis phaenomeni Halonum et Parheliorum caussam, sua ex mente, sine dubio in iis quaerendam esse, quae summus *Newtonus* de proprietate luminis, quam accessuum facilis transmissionis et reflexionis nomine insigniuit, detexit, vnde optandum est, vt aliquis Physicorum ad vlterius examinandam hanc doctrinam, quae, nescio quo fato, inde a *Newtoni* tempore fere neglecta ac inculta iacet, animum aduertat.

## V.

## Piscium rariorum e Museo Petropolitano exceptorum descriptiones.

### Auctore I. T. Koelreuter p. 404.

Recte Cl. Auctor celebrat ingentem rerum naturalium thesaurum in Museo Petropolitano asseruatum, et inprimis Collectionem Piscium, quam immortalis memoriae Imperator PETRVS MAGNVS a V. Cel. *Alb.Seba* haud paruo pretio comparauit. Ipse quidem *Seba* res Musei sui rariores describere instituit, et elegantissimis iconibus illustratas duobus tomis euulgauit. Tertium autem, qui pisces exhibere debebat, mors in lucem emittere prohibuit. Hinc operam pro amplificanda Historia naturali non inutiliter collocauit *Koelreuterus*, dum pisces

piſces rariores, quorum vel nomina tantum, vel nimis breues et defectuoſae deſcriptiones apud Auctores Ichthyologos extant, tam pleniore et accuratiore deſcriptione, quam iconibus ſuo ductu confectis, notiores reddere adgreſſus eſt. Sunt autem piſces a *Koelreutero*, dum nobiscum commoraretur, deſcripti in vniuerſum tredecim. Ex his tres hoc loco comparent: Gaſteropelecus *Gronouii*, ſiue Clupea (Sternicla) *Linnaei*, Trutta dentata, *Piabucu* Braſilienſium *Marcgrafii*, et Gobionis ſpecies, a nemine ante indicata. Reliqui ſequentia Commentariorum volumina ornabunt. Rationem, qua Auctor in deſcribendo et omnes piſcium partes menſurando procedit, laudare ſuperfluum foret. Fatebuntur artis periti, nihil, quod notatu dignum ſit, praetermiſſum eſſe, et, ſi omnes Ichthyologi hac via incederent, fore, vt nihil in hac ſcientia dubium aut incertum remaneret. Monemus tantum, in noua Syſtematis Naturae editione anni 1758. Ill. *Linnaeum* nomen vulgare Sterniclae, et denominationem Gaſteropeleci *Gronouii*, non Clupeae pinnis flauis, ventralibus minutiſſimis, ſed Clupeae pinnis ventralibus nullis, adſcripſiſſe.

---

ASTRO-

# ASTRONOMICA.

## I.

## Inueſtigatio poſitionum inſigniorum Ruſſiae locorum.

## Auctore A. N. Griſchow pag. 433.

Atlantem Ruſſicum An. 1745. ab Academia euulgatum multa emendatione indigere, nemini notius eſt, quam ipſi Academiae, quae ideoque, ſtatim poſt primum hoc tentamen abſolutum, de corrigendis eius erroribus ac ſupplendis defectibus ſerio cogitauit. Pluribus opus erat obſeruationibus Aſtronomicis ad poſitiones locorum accurate ſtabiliendas. Nonnullarum quoque prouinciarum nouae delineationes geodaeticae deſiderabantur, prioribus, quae extabant, praeſtantiores, quibus ſine poſitiones locorum ex obſeruationibus aſtronomicis erutae parcam tantum lucem iteratis laboribus affunderent. Rem hanc, propter magnitudinem Imperii Ruſſici, vltimis cogniti orbis limitibus terminatam, lente procedere, mirum nemini videbitur. Delineatae autem ſunt, quantum ex nouis cum Academia communicatis ſubſidiis fieri potuit, tabulae nouae geographicae complures, quae, poſtquam vltimam limam expertae fuerint, teſtabuntur, non inanem fuiſſe eorum operam, qui huc vsque in Atlante Ruſſico emendando verſati ſunt. Cura, b. *Griſchouio* hunc in finem demandata, haec fuit, vt positiones locorum, de quibus obseruationes astronomicae habebantur, ex iisdem obseruationibus ac correspondentibus aliis, inuestigaret, quod quanta accuratione ac sollertia praestitit, lectores in ipso eius scripto non sine voluptate perspicient. Nos tantum Longitudines ac Latitudines locorum, ex eius inuestigatione determinatas, hic apponemus:

| Nomina locorum | Longitudo | Latitudo |
|---|---|---|
| Archangelopolis | 56°. 21′. 15″ | 64°. 33′. 36″ |
| Riga | 41. 18. 45 | 56. 56. 24 |
| Reualia | 41. 57. 30 | 59. 26. 22 |
| Dagher - Ort | 39. 35. 0 | 58. 56. 0 |
| Narua | - - - | 59. 23. 27 |
| Beresow | - - - | 63 56. 14 |
| Samarowskoi jam | - - - | 60. 55. 30 |
| Demianskoi jam | - - - | 59. 30 34 |
| Tobolsk | - - - | 58. 6. 46. |
| Nouo Vsolie | 74. 13. 0 | 59. 23. 54 |
| Weretie | 74 15. 15 | 59. 22. 40 |
| Saigatka | 70. 43. 0 | 56. 43. 15 |
| Sarapul | 70 13. 0 | 56. 26. 40 |
| Vst - Ykskoe | 69. 13. 0 | 51. 51. 50 |
| Swinji gori | 67. 43. 0 | 55. 36. 0 |
| Casan | 66. 28. 0 | 55. 45 vel 47 |
| Nischnei Nowgorod | - - - | 56. 18. 0 |
| Moscua | 55. 12. 45 | 55. 45. 46. |

Non possumus non monere, haberi quoque Latitudinem vrbis Tobolsk, opera V. Cl. *Chappe d'Auteroche*, cum transitum Veneris per discum Solis a. 1761 ibidem obser-

obſeruaret, magno rigore ſtabilitam, ex cuius obſeruationibus etiam patet, Latitudinem vrbis Caſan aliqua correctione indigere. Habet namque Vir accuratiſſimus

| | | | |
|---|---|---|---|
| pro Tobolsk | 58°. 12′. 22″ | } | vid. eius *Memoire* |
| pro Caſan | 55. 43. 58 | } | *du Paſſage de Venus.* |

Quadrantis quidem verificationem, dum Caſani eſſet, non inſtituit: inſtrumentum autem optimum, quo vſus eſt, tantis variationibus, ac iſtud Cel. *Deliſle*, obnoxium eſſe non potuit; vnde de *Chappiana* obſeruatione intra minuti primi interuallum ſecuri ſumus, cum in *Delisleanam* ſuſpicio erroris aliquot minutorum cadat.

Caeterum non ingratum erit lectoribus aſtronomis, declinationes Stellarum *Rigel*, $\gamma$ *Draconis*, *ſtellae polaris* et *Palticii*, ex propriis obſeruationibus b. *Griſchovii* exacte admodum ſtabilitas, hic reperire.

## II.

## Latitudinum ſpecularum aſtronomicarum Tych. Brahei etc. diſquiſitio.

### Auctore A. N. Griſchow pag. 476.

Inter obſeruationes Aſtronomicas ſaeculo XVI. inſtitutas maximam certe merentur attentionem, eae, quas ſummi nominis Aſtronomus Danus *Tycho de Brahe*, Vraniburgi, aliisque in locis magno numero inſtituit. Etſi enim organa, quae adhibuit *Tycho*, perfectione hodiernis

diernis aequari nullo modo queant, magna tamen, Ill. Astronomi ſollertia, ipſaque vetuſtas harum obſeruationum, ſummum ipſis pretium conciliant. Vt vero tantus obſeruationum aſtronomicarum theſaurus et nobis et poſteris in vſum cedere queat, neceſſarium inprimis erat, vt ſitus Obſeruatoriorum, vbi inſtitutae ſunt, quantum fieri poteſt, exacte determinaretur, quod iam ante ſaeculum perſpexit Academia Scientiarum Pariſina, dum celeberr. Aſtronomum *Picardum* in Inſulam Huennam miſit, vt in Vraniburgi arcis Latitudinem atque Longitudinem ſollicite inquireret; aſt minus feliciter ceſſit hic labor, vnde Celeb. *Griſchowio*, nouas circa hanc rem diſquiſitiones inſtituendi, campus relictus fuit.

Procedit in hoc negotio Cl. Vir ea ratione, vt ex propriis ſuis obſeruatis declinationem *α. Leonis* aut *Reguli*, atque *ſtellae polaris* magno rigore determinet, tumque partim ex *Picardi*, partim ex ipſius *Tychonis*, obſeruationibus, circa dictas modo ſtellas inſtitutis, Latitudinem Vraniburgi, ex prioribus $55^{\circ}. 54'. 12''. 3'''$. ex poſterioribus $55^{\circ}. 54'. 17''. 4'''$. calculi ope eruat, ea quidem cum accuratione, vt de Latitudine celebris huius Obſeruatorii intra pauca ſecunda certi eſſe queamus.

Daniam relinquens Ill. *Brahaeus* per aliquot tempus commoratus eſt in arce Wandesburgo, non procul a celebri Germaniae emporio Hamburgo ſita, quae nunc Wandesbeck dicitur, ibique obſeruationes habuit, vtiles futuras, modo de loci huius poſitione conſtet. Aggreditur itaque huius quoque loci Latitudinis deter-

determinationem *Grischowius*, pari felicitate, dum ipsam ex ipsius *Tychonis* obseruationibus 53°. 35′. 12½″. deducit.

Ansam hinc arripit Cl. Auctor corrigendi enormem quendam errorem, quem in collocatione vrbis Hamburgi committere solent, nostro etiam tempore, Geographi atque Astronomi, dum vrbis huius Latitudinem 6, 8. immo ad 20′. vera maiorem exhibent. Invenit nempe ex mensurationibus in agro Hamburgensi institutis *Grischowius*, Wandesburgum, vel Wandesbeck, 1′ 4″½ magis septentrionem versus situm esse, ac vrbis Hamburgi medium, vnde Eleuatio poli Hamburgo tribuenda prodit 53°. 34′. 8″.

Addidit his disquisitionibus Auctor proprias suas obseruationes, quas circa Latitudinem Obseruatoriorum Regiorum, Parisiensis et Berolinensis, summa sollertia et excellentissimo instrumento, Quadrante nempe tripedali Parisiis constructo, qui hodie in Obseruatorio Academiae nostrae asseruatur, instituit, ex quibus prioris Latitudinem 48°. 50′. 12½″. aliquot nempe secundis maiorem ea, quam assumere solent Astronomi Parisienses, posteriorem 52°. 31′. 0″. exacte inuenit.

III.

# III.

## Obſeruationes Lunares correſpondentes in Inſula Oeſilia habitae a. 1752.

## Auctore A. N. Griſchow pag. 515.

Hae ſunt obſeruationes a b. *Griſchouio* ex compacto cum Cel. Abbate *de la Caille* Arensburgi in Inſula Oeſilia, ad Parallaxin Lunae inueſtigandam, inſtitutae, de quibus in Summario Tom. VI. horum Commentariorum pag. 43. dictum eſt, Academiam operam daturam, vt quantocyus lucem publicam adſpiciant. Additae ſunt obſeruationes pro Refractione determinanda, nec non pro Longitudine et Latitudine Obſeruatorii Arensburgenſis, ex quibus prodit

| | |
|---|---|
| Longitudo Arensburgi ab Inſula Ferro | 39°. 56¼′. |
| vel | 39°. 57½′. |
| Aſſumta differentia Meridianorum Pariſios inter atque Ferro inſulam vt in Faſtis aſtronomicis Pariſienſibus pro a. 1763. ſtabilita legitur. | 19°. 54′ |
| Latitudo Arensburgi - - - - | 58°. 15′. 9″½. |
| Latitudo Petropoli in Obſeruatorio - | 59°. 56′. 23½ |
| | vel 24½. |

Adplicatis correctionibus ex deuiatione, praeceſſione et aberratione, et adhibita refractionis tabula Caſſiniana.

INDEX

# INDEX
## COMMENTARIORVM.

### *Mathematica.*



### *Physico - Mathematica.*



*Eiusdem*

## *Physica.*



## *Astronomica.*



* * *

MATHE-

# MATHEMATICA.

# DE
# INTEGRATIONE
## AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Considero hic aequationes differentiales primi gradus, quae duas tantum variabiles inuoluunt, quas propterea sub hac forma generali $M\,dx + N\,dy = 0$, repraesentare licet, si quidem M et N denotent functiones quascunque binarum variabilium $x$ et $y$. Demonstratum autem est, huiusmodi aequationem semper certam relationem inter variabiles $x$ et $y$ exprimere, qua pro quouis valore vnius certi valores pro altera definiantur. Cum autem per integrationem ista relatio finita inter ambas variabiles inueniri debeat, aequatio integralis, si quidem ad omnem amplitudinem extendatur, nouam quantitatem constantem recipiet, quae, dum penitus ab arbitrio nostro pendet, infinitas quasi aequationes integrales complectitur, quae omnes aequationi differentiali aeque conueniant.

2. Proposita igitur huiusmodi aequatione differentiali quacunque $M\,dx + N\,dy = 0$, tota vis Analyseos in hoc consistit, vt aequatio finita inter easdem variabiles

biles $x$ et $y$ eliciatur, quae eandem inter illas relationem exprimat, atque ipsa differentialis, et quidem latissimo sensu, ita vt constantem quampiam arbitrariam, quae in differentiali non inest, contineat. Verum si haec quaestio ita generalissime proponatur, nulla plane adhuc inuenta est via ad eius solutionem perueniendi; atque omnes casus, quos adhuc resoluere licuit, ad numerum perquam exiguum reduci possunt, ita vt in hac Analyseos parte, perinde ac in reliquis, maxima adhuc incrementa desiderentur; neque ob hanc causam vnquam plena omnium huius scientiae arcanorum cognitio expectari queat.

3. Quae quidem adhuc in hoc negotio sunt praestita, ea fere omnia ad hos casus referri possunt, quibus aequatio differentialis $M\,dx + N\,dy = 0$, vel sponte separationem variabilium admittit, vel per idoneas substitutiones ad talem formam reduci potest. Quodsi enim introducendis loco $x$ et $y$ binis nouis variabilibus $v$ et $z$, aequatio differentialis proposita in huiusmodi formam $V\,dv + Z\,dz = 0$ transmutari queat, in qua $V$ sit functio ipsius $v$ tantum, et $Z$ ipsius $z$ tantum, totum negotium erit confectum, dum aequatio integralis completa erit:

$$\int V\,dv + \int Z\,dz = \text{Const.}$$

quae manifesto illam constantem arbitrariam, per generalem integrationem inuectam complectitur. Atque huc fere redeunt omnia artificia, quibus Analystae adhuc in resolutione huiusmodi aequationum sunt vsi.

4. Nisi

4. Nisi igitur aequatio proposita differentialis sponte separationem variabilium admittat, totum negotium in hoc consumi est solitum, vt idoneae substitutiones, quae ad separationem viam parent, inuestigantur, in quo etiam saepius summam sagacitatem, quam Geometrae ad scopum obtinendum adhibuerunt, admirari oportet. Interim tamen cum nulla certa via pateat, huiusmodi substitutiones inuestigandi, haec methodus minus ad rei naturam videtur accommodata, ex quo constitui, aliam methodum non nouam quidem, verum tamen etiamnunc non satis excultam, accuratius perpendere, quae vti substitutionibus non eget, ita etiam naturae aequationum magis consentanea videtur, dum eius ratio indoli differentialium innititur, tum vero etiam priorem methodum, velut partem, in se complectitur.

5. Aequatione differentiali ad hanc formam $M\,dx + N\,dy = 0$ perducta, consideretur formula $M\,dx + N\,dy$ sine respectu habito, quod ea euanescere debeat, et examinetur, vtrum ea sit differentiale cuiuspiam functionis ipsarum $x$ et $y$, nec ne? Quemadmodum hoc examen sit instituendum, iam passim abunde est explicatum; vtramque scilicet functionem M et N differentiari oportet, et cum earum differentialia huiusmodi formam sint habitura:

$$dM = p\,dx + q\,dy \text{ et } dN = r\,dx + s\,dy$$

dispiciatur, vtrum sit $q = r$, nec ne? Quodsi enim fuerit $q = r$, hoc infallibile est criterium, formulam $M\,dx + N\,dy$ esse integrabilem: at si non fuerit $q = r$, aeque certum est, istam formulam ex nullius finitae functionis ipsarum $x$ et $y$ differentiatione esse ortam. Ex quo tota quaestio ad duos casus reducitur, quorum alter locum habet, si fuerit $q = r$, alter vero, si hae quantitates $q$ et $r$ non fuerint inter se aequales.

6. Ad aequalitatem igitur, vel inaequalitatem, quantitatum $q$ et $r$ agnoscendam, ne opus quidem est, vt functiones M et N penitus per differentiationem euoluantur, sed sufficit in functione M, quae cum $dx$ est coniuncta, quantitatem $x$ vt constantem spectare, eamque tantum eius differentialis partem quaerere, quae ex variabilitate ipsius $y$ tantum nascitur, si quidem hoc modo membrum $q\,dy$ obtinetur, valorem autem ipsius $q$ sic erutum hac scriptione $\left(\frac{dM}{dy}\right)$ denotare soleo. Simili modo altera functio N, quae cum $dy$ est coniuncta, ita differentietur, vt $y$ pro constante tractetur, et ex variabilitate solius $x$ impetretur differentialis pars $r\,dx$, vbi valorem ipsius $r$ pariter per $\left(\frac{dN}{dx}\right)$ exprimo. Quodsi ergo formula $M\,dx + N\,dy$ ita fuerit comparata, vt sit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, ea est integrabilis, eiusque integrale sequenti modo inueniri poterit. Quo facto, si hoc criterium non locum habeat, videamus quomodo sit procedendum.

## Problema I.

7. Si aequatio differentialis $M\,dx + N\,dy = 0$ ita fuerit comparata, vt sit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, inuenire eius aequationem integralem.

## Solutio.

Si fuerit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, tunc datur functio finita binarum variabilium $x$ et $y$, quae differentiata praebet

bet $Mdx + Ndy$. Sit V ista functio, et cum sit $dV = Mdx + Ndy$, erit $Mdx$ differentiale ipsius V, si tantum $x$ variabile sumatur, et $Ndy$ eius differentiale, si tantum $y$ variabile capiatur. Hinc ergo vicissim V reperietur, si vel $Mdx$ integretur, spectata $y$ vt constante, vel $Ndy$ integretur, spectata $x$ vt constante: sicque haec operatio reducitur ad integrationem formulae differentialis vnicam variabilem inuoluentis, quae in hoc negotio, siue algebraice succedat, siue quadraturas curuarum requirat, concedi postulatur. Cum autem hac ratione quantitas V duplici modo inueniatur, et altera integratio vice constantis functionem quamcunque ipsius $y$, altera vero ipsius $x$ assumat, ita vt sit

$$\text{et } V = \int Mdx + Y, \text{ et } V = \int Ndy + X,$$

semper has functiones Y ipsius $y$, et X ipsius $x$, ita definire licet, vt fiat $\int Mdx + Y = \int Ndy + X$, id quod quouis casu facile praestatur. Quo facto cum quantitas V sit integrale formulae $Mdx + Ndy$, euidens est, aequationis propositae $Mxd + Ndx = 0$ integralem aequationem fore $V = \text{Const.}$ eamque completam, propterea quod inuoluit constantem quantitatem ab arbitrio nostro pendentem.

## Coroll. 1.

8. In hoc problemate statim continetur casus aequationum separatarum. Si enim fuerit M functio ipsius $x$ tantum, et N functio ipsius $y$ tantum, erit vtique $\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0$ et $\left(\frac{dN}{dx}\right) = 0$, ideoque $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$; qui est ergo casus simplicissimus, quem problema in se complectitur.

Coroll.

## Coroll. 2.

9. Quodsi autem in aequatione differentiali $Mdx + Ndy = 0$ fuerit $M$ functio solius $x$, et $N$ solius $y$, vtraque pars seorsim integrabilis existit, atque aequatio integralis erit:

$$\int M dx + \int N dy = \text{Const.}$$

## Coroll. 3.

10. Praeterea vero nostrum problema resolutionem infinitarum aliarum aequationum differentialium largitur, quarum omnium character communis in hoc consistit, vt sit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, earumque resolutio per integrationem formularum, vnicam variabilem continentium, expediri potest.

## Scholion 1.

11. Quoties ergo in aequatione differentiali $Mdx + Ndy = 0$ fuerit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, eius resolutio nullam habet difficultatem, dummodo integratio formularum vnicam variabilem inuoluentium concedatur; quam quidem iure postulare licet. Interim tamen determinatio functionum illarum $X$ et $Y$, quae loco constantium introduci debent, molestiam quandam creare videri posset, quae autem singulis casibus mox euanescere reperietur. Verum quo magis et haec operatio contrahatur, ne duplici quidem integratione est opus. Postquam enim altera pars $Mdx$, spectata $y$ tanquam constanti, fuerit integrata, quod integrale sit $= Q$, statuatur $V = Q + Y$, posito tantisper $Y$ pro functione inde-

indefinita ipſius $y$, in quam altera variabilis $x$ prorſus non ingrediatur. Tum differentietur denuo haec quantitas $Q+Y$, tractando $x$ tanquam conſtantem, et quia differentiale prodire debet $= N\,dy$, ex hac conditione functio $Y$ facillime definietur, quandoquidem ex rei natura hinc ſponte eliminabitur quantitas $x$. Inuenta autem iſta functione $Y$, aequatio integralis erit $Q+Y=$ Conſt. quam operationem ſequentibus exemplis illuſtrari conueniet.

## Exemplum 1.

12. *Integrare hanc aequationem differentialem:*

$$2axy\,dx + axx\,dy - y^3\,dx - 3xyy\,dy = 0.$$

Comparata hac aequatione cum forma $M\,dx + N\,dy = 0$, erit:

$$M = 2axy - y^3 \text{ et } N = axx - 3xyy.$$

Primum igitur diſpiciendum eſt, vtrum hic caſus in problemate contineatur? quem in finem quaeramus valores:

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = 2ax - 3yy, \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right) = 2ax - 3yy,$$

qui cum ſint aequales, operatio praeſcripta neceſſario ſuccedet. Reperietur autem, ſumta $y$ pro conſtante:

$$\int M\,dx = axxy - y^3x + Y;$$

cuius formae ſi differentiale ſumatur, poſita $x$ conſtante, prodibit:

$$axx\,dy - 3yyx\,dy + dY = N\,dy,$$

et pro $N$ valore ſuo $axx - 3xyy$ reſtituto, fiet $dY = 0$, ex quo naſcitur $Y = 0$, vel $Y =$ conſt. Quare aequatio integralis quaeſita habebitur:

$$axxy - y^3x = \text{Conſt.}$$

## Exemplum 2.

13. *Integrare hanc aequationem differentialem:*

$$\frac{ydy + xdx - 2ydx}{(y-x)^2} = 0$$

Comparata hac aequatione cum forma $Mdx + Ndy = 0$, erit:

$$M = \frac{x-2y}{(y-x)^2} \text{ et } N = \frac{y}{(y-x)^2}$$

Iam vt pateat, num haec aequatio in casu problematis contineatur, quaerantur valores differentiales:

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \frac{2y}{(y-x)^3} \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{2y}{(y-x)^3}$$

qui cum sint aequales, negotium succedet. Quare secundum regulam colligatur, sumto $y$ constante, integrale:

$$\int Mdx = \int \frac{xdx - 2ydx}{(y-x)^2} = -\int \frac{dx}{y-x} - \int \frac{ydx}{(y-x)^2}$$

ac reperietur:

$$\int Mdx = l(y-x) - \frac{y}{y-x} + Y$$

cuius differentiale, sumto $x$ constante, producere debet alteram aequationis propositae partem $Ndy$; vnde habebitur:

$$Ndy = \frac{dy}{y-x} + \frac{xdy}{(y-x)^2} + dY = \frac{ydy}{(y-x)^2} + dY.$$

Cum igitur sit $Ndy = \frac{ydy}{(y-x)^2}$ et $dY = 0$, et $Y = 0$, constantem enim in $Y$ negligere licet, quia iam in aequationem integralem introducitur, quippe quae erit:

$$l(y-x) - \frac{y}{y-x} = \text{Const.}$$

## Exemplum 3.

14. *Integrare hanc aequationem differentialem:*

$$\frac{dx}{x} + \frac{yydx}{x^3} - \frac{ydy}{xx} + \frac{(ydx - xdy)\sqrt{(xx+yy)}}{x^3} = 0$$

Com-

Comparata hac aequatione cum forma $M\,dx + N\,dy = 0$, habebimus:

$$M = \frac{xx + yy + y\sqrt{(xx+yy)}}{x^3} \text{ et } N = \frac{-y - \sqrt{(xx+yy)}}{xx}$$

vnde pro criterio explorando quaeratur:

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \frac{2y}{x^3} + \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{x^3} + \frac{yy}{x^3\sqrt{(xx+yy)}} \text{ et}$$

$$\left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{2y}{x^3} + \frac{2\sqrt{(xx+yy)}}{x^3} - \frac{x}{xx\sqrt{(xx+yy)}}$$

qui valores reducti cum fiant aequales, scilicet

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{2y}{x^3} + \frac{xx + 2yy}{x^3\sqrt{(xx+yy)}}$$

resolutio erit in potestate. Inuestigetur ergo, sumto $y$ constante:

$$\int M\,dx = lx - \frac{yy}{2xx} + y\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{(xx+yy)}.$$

At per regulas integrandi, formulas vnicam variabilem inuoluentes, quia hic $y$ pro constante habetur, reperitur:

$$\int\frac{y\,dx}{x^3}\sqrt{(xx+yy)} = \frac{-y\sqrt{(xx+yy)}}{2xx} + \frac{1}{2}l\frac{\sqrt{(xx+yy)}-y}{y}$$

ita vt sit:

$$\int M\,dx = lx - \frac{yy}{2xx} - \frac{y\sqrt{(xx+yy)}}{2xx} + \frac{1}{2}l\frac{\sqrt{(xx+yy)}-y}{y} + Y$$

At huius quantitatis differentiale, assumto $x$ pro constante, quia praebere debet $N\,dy = -\frac{y\,dy - dy\sqrt{(xx+yy)}}{xx}$, nanciscemur:

$$N\,dy = \frac{-y\,dy}{xx} - \frac{dy\sqrt{(xx+yy)}}{2xx} + \frac{yy\,dy}{2xx\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{dy}{2y} - \frac{dy}{2\sqrt{(xx+yy)}} + dY$$

qua forma cum illa comparata fiet:

$$dY = -\frac{dy\sqrt{(xx+yy)}}{2xx} + \frac{yy\,dy}{2xx\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{dy}{2y} + \frac{dy}{2\sqrt{(xx+yy)}}$$

vbi termini, qui adhuc continent $x$, sponte se destruunt, ita vt sit $dY = \frac{dy}{2y}$ et $Y = \frac{1}{2}ly$. Quo valore pro $Y$ inuento, obtinebitur aequatio integralis quaesita:

$$lx - \frac{yy}{2xx} - \frac{y\sqrt{(xx+yy)}}{2xx} + \frac{1}{2}l(\sqrt{(xx+yy)} - y) = \text{Const.}$$

 Scho-

## Scholion 2.

15. Ex his exemplis ſatis perſpicitur, quemadmodum perpetuo operatio praeſcripta ſit inſtituenda, ita vt hinc nulla amplius difficultas moleſtiam faceſſat, niſi quae ex integratione formularum, vnicam variabilem inuoluentium, quandoque relinquitur, dum integratio neque algebraice abſolui, neque ad circuli hyperbolaeue quadraturam reduci patitur. Verum tum ſuperiores quadraturas ſimili modo tractari oportet, et ſi quae difficultates relinquantur, eae non huic methodo ſunt adſcribendae. Quam ob rem hic aſſumere licet, quoties aequatio differentialis $Mdx + Ndy = 0$ ita fuerit comparata, vt in ea ſit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, toties integrationem eſſe in noſtra poteſtate; vnde ad eas aequationes pergo, in quibus hoc criterium non habet locum.

## Theorema.

16. Si in aequatione differentiali $Mdx + Ndy = 0$ non fuerit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, ſemper datur multiplicator, per quem formula $Mdx + Ndy$ multiplicata fiat integrabilis.

## Demonſtratio.

Cum non ſit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, etiam formula $Mdx + Ndy$ non erit integrabilis, ſeu nulla exiſtit functio ipſarum $x$ et $y$, cuius differentiale ſit $Mdx + Ndy$. Verum hic non tam formulae $Mdx + Ndy$, quam aequationis $Mdx + Ndy = 0$, quaeritur integrale; et cum eadem aequatio ſubſiſtat, ſi per functionem quam-

quamcunque L ipsarum $x$ et $y$ multiplicetur, ita vt sit $L M dx + L N dy = 0$, demonstrandum est, semper eiusmodi dari functionem L, vt formula $LMdx + LNdy$ fiat integrabilis. Quo enim hoc eueniat, necesse est, vt sit:

$$\left(\frac{d.LM}{dy}\right) = \left(\frac{d.LN}{dx}\right)$$

vel si ponatur $dL = Pdx + Qdy$, cum sit $\left(\frac{dL}{dy}\right) = Q$, et $\left(\frac{dL}{dx}\right) = P$, functio L ita debet esse comparata, vt sit:

$$L\left(\frac{dM}{dy}\right) + MQ = L\left(\frac{dN}{dx}\right) + NP.$$

Euidens autem est, hanc conditionem sufficere ad definiendam functionem L, per quam si formula $Mdx + Ndy$ multiplicetur, fiat integrabilis.

## Coroll. 1.

17. Inuento ergo tali multiplicatore L, qui reddat formulam $Mdx + Ndy$ integrabilem, aequatio $Mdx + Ndy = 0$, in formam $LMdx + LNdy = 0$ translata, integrari poterit methodo in problemate praecedente exposita.

## Coroll. 2.

18. Quaeratur scilicet, spectata $y$ tanquam constante, integrale $\int LMdx$, ad quod adiiciatur talis functio Y ipsius $y$, vt si aggregatum $\int LMdx + Y$ denuo differentietur, spectata iam $x$ vt constante, prodeat $LNdy$. Quo facto erit aequatio integralis $\int LMdx + Y = \text{Const.}$

## Coroll. 3.

19. Multiplicator igitur L ita debet esse comparatus, vt posito $dL = Pdx + Qdy$, satisfiat huic aequationi:

$$L\left(\frac{dM}{dy}\right) + MQ = L\left(\frac{dN}{dx}\right) + NP$$

vel huic:

$$\frac{NP - MQ}{L} = \left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)$$

vnde manifestum est, si esset $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, pro L sumi posse vnitatem, vel quantitatem constantem quamcunque, dum sit $P = 0$, et $Q = 0$.

## Scholion.

20. Si ergo hinc in genere multiplicator L inveniri posset, haberetur vniuersalis resolutio omnium aequationum differentialium primi gradus; id quod ne sperare quidem licet. Contentos ergo nos esse oportet, si pro variis casibus, pluribusque aequationum differentialium generibus, huiusmodi factores inuestigare valeamus. Sunt autem duo aequationum genera, pro quibus tales factores commode erui possunt, quorum alterum eas comprehendit aequationes, in quibus altera variabilis nusquam vltra vnam dimensionem exsurgit; alterum vero genus est aequationum homogenearum. Praeter haec vero duo genera plures alii existunt casus, quibus inuentio talis factoris absolui potest, quos diligentius examinasse, vsu non carebit, cum haec sola via patere videatur ad eam Analyseos partem, quae adhuc desideratur, excolendam ac perficiendam. Quam ob

ob rem hic constitui, plura aequationum genera colligere, quae per huiusmodi multiplicatorem ad integrabilitatem perduci possunt.

## Problema 2.

21. Cognito vno multiplicatore $L$, qui formulam $M\,dx + N\,dy$ integrabilem reddit, inuenire infinitos alios multiplicatores, qui idem officium praestent.

## Solutio.

Cum formula $L(M\,dx + N\,dy)$ per hypothesin sit integrabilis, sit eius integrale $= z$, ita vt sit $dz = L(M\,dx + N\,dy)$, existente $z$ quapiam functione ipsarum $x$ et $y$. Denotet iam $Z$ functionem quamcunque ipsius $z$, et quia formula $Z\,dz$ est etiam integrabilis, ob $Z\,dz = LZ(M\,dx + N\,dy)$, manifestum est formulam propositam $M\,dx + N\,dy$ quoque fieri integrabilem, si per $LZ$ multiplicetur. Dato ergo vno multiplicatore $L$, qui formulam $M\,dx + N\,dy$ integrabilem reddat, ex eo innumerabiles alii factores $LZ$ inueniri possunt, qui idem sint praestituri, sumendo pro $Z$ functionem quamcunque integralis $\int L(M\,dx + N\,dy)$.

## Coroll. 1.

22. Proposita igitur formula differentiali quacunque $M\,dx + N\,dy$, non solum vnus, sed etiam infiniti dantur multiplicatores, qui eam integrabilem reddant. Quorum autem vnum inuenisse sufficit, cum reliqui omnes per hunc determinentur.

Coroll.

## Coroll. 2.

23. Si ergo habeatur aequatio differentialis $Mdx + Ndy = 0$, ea infinitis modis ad integrabilitatem perduci poteſt. Siue autem capiatur multiplicator L, ſiue alius quicunque LZ, aequatio integralis inuenta eodem redit; ſiquidem ille factor L praebet $z =$ Conſt. hic vero $\int Z dz =$ Conſt. id quod conuenit cum $\int Z dz$ at ſit functio ipſius $z$.

## Exemplum 1.

24. *Inuenire omnes multiplicatores, qui reddant hanc formulam* $\alpha y dx + \beta x dy$ *integrabilem.*

Vnus multiplicator hoc praeſtans in promtu eſt, ſcilicet $\frac{1}{xy}$. Sit ergo $L = \frac{1}{xy}$, fiatque $dz = \frac{\alpha y dx + \beta x dy}{xy} = \frac{\alpha dx}{x} + \frac{\beta dy}{y}$, vnde integrando prodit $z = \alpha lx + \beta ly = lx^\alpha y^\beta$. Denotet iam Z functionem quamcunque ipſius $z = lx^\alpha y^\beta$, hoc eſt ipſius $x^\alpha y^\beta$, atque omnes multiplicatores quaeſiti in hac forma generali $\frac{1}{xy}$ funct. $x^\alpha y^\beta$ continebuntur.

Simpliciores ergo multiplicatores reperientur, ſi loco functionis poteſtas quaecunque ipſius $x^\alpha y^\beta$ capiatur; ſicque formula $\alpha y dx + \beta x dy$ integrabilis redditur per hunc multiplicatorem latius patentem $x^{\alpha n - 1} y^{\beta n - 1}$. Si magis compoſiti deſiderentur, plures huiusmodi vtcunque inter ſe combinari poterunt, vt habeatur $A x^{\alpha n - 1} y^{\beta n - 1} + B x^{\alpha m - 1} y^{\beta m - 1}$ etc.

Exem-

## Exemplum 2.

25. *Inuenire omnes multiplicatores, qui reddant hanc formulam differentialem* $\alpha x^{\mu-1}y^{\nu}dx+\beta x^{\mu}y^{\nu-1}dy$ *integrabilem.*

Hic iterum statim se offert vnus multiplicator $L=\frac{1}{x^{\mu}y^{\nu}}$, qui praebet $dz=\frac{\alpha dx}{x}+\frac{\beta dy}{y}$, vnde fit $z=\alpha lx-\beta ly$ $=lx^{\alpha}y^{\beta}$ Posito igitur Z pro functione quacunque ipsius $x^{\alpha}y^{\beta}$, omnes multiplicatores continebuntur in hac expressione generali $\frac{Z}{x^{\mu}y^{\nu}}=\frac{1}{x^{\mu}y^{\nu}}$ funct. $x^{\alpha}y^{\beta}$. Si loco istius functionis sumatur potestas quaecunque $x^{\alpha n}y^{\beta n}$, innumeri hinc obtinebuntur multiplicatores, vnico termino constantes $x^{\alpha n-\mu}y^{\beta n-\nu}$, sumendo pro $n$ numeros quoscunque.

## Scholion.

26. Fieri igitur potest, vt duae pluresue huiusmodi formulae differentiales $\alpha x^{\mu-1}y^{\nu}dx+\beta x^{\mu}y^{\nu-1}dy$ communem recipiant multiplicatorem: quod si eueniat aequatio differentialis, ex huiusmodi formulis, tanquam membris, composita, integrabilis reddi poterit, dum multiplicator iste communis adhibetur. Quem casum iam olim tractatum euoluamus.

## Problema 3.

27. Proposita sit ista aequatio differentialis:

$$\alpha y dx+\beta x dy+\gamma x^{\mu-1}y^{\nu}dx+\delta x^{\mu}y^{\nu-1}dy=0$$

cuius integralem inueniri oporteat.

 Solutio.

## Solutio.

Ad multiplicatorem idoneum inueniendum, quo haec aequatio reddatur integrabilis, consideretur vtrumque membrum seorsim. Ac prius quidem membrum $\alpha y dx + \beta x dy$ vidimus integrabile reddi hoc multiplicatore $x^{\alpha n - 1} y^{\beta n - 1}$, posterius vero membrum $\gamma x^{\mu - 1} y^{\nu} dx + \delta x^{\mu} y^{\nu - 1} dy$ hoc $x^{\gamma m - \mu} y^{\delta m - \nu}$. Quia nunc pro $n$ et $m$ numeros quoscunque accipere licet, hi duo factores ad aequalitatem reduci poterunt; vnde fit

$$\alpha n - 1 = \gamma m - \mu \text{ et } \beta n - 1 = \delta m - \nu$$

ideoque $n = \frac{\gamma m - \mu + 1}{\alpha} = \frac{\delta m - \nu + 1}{\beta}$, hincque obtinetur

$$m = \frac{\alpha\nu - \beta\mu - \alpha + \beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \text{ et } n = \frac{\gamma\nu - \delta\mu - \gamma + \delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

His valoribus pro $m$ et $n$ inuentis, iste multiplicator communis dabit hanc aequationem integralem:

$$\frac{1}{n} x^{\alpha n} y^{\beta n} + \frac{1}{m} x^{\gamma m} y^{\delta m} = \text{Const.}$$

## Coroll. 1.

28. Haec ergo aequatio integralis semper est algebraica, siquidem pro $m$ et $n$ valores veri reperiantur. Ii igitur tantum casus singulari reductione indigent, quibus numeri $m$ et $n$ vel in infinitum abeunt, vel euanescunt.

## Coroll. 2.

29. Infiniti autem euadunt ambo numeri $m$ et $n$, si fuerit $\alpha\delta = \beta\gamma$. Verum hoc casu ipsa aequatio differentialis in duos factores resoluitur, hancque formam acquirit

$$(\alpha y dx + \beta x dy)(1 + \tfrac{\gamma}{\alpha} x^{\mu - 1} y^{\nu - 1}) = 0$$

ideoque

ideoque erit vel $\alpha y dx + \beta x dy = 0$, vel $1 + \frac{\gamma}{\alpha} x^{\mu - 1} y^{\nu - 1} = 0$, quarum resolutionum neutra difficultate laborat.

## Coroll. 3.

30. At si fiat $n = 0$, seu $\gamma(\nu - 1) = \delta(\mu - 1)$, consideretur numerus $n$, vt valde paruus, et cum sit per seriem conuergentem

$x^{\alpha n} = 1 + \alpha n l x + \frac{1}{2}\alpha^2 n^2 (lx)^2 + \text{etc. et } y^{\beta n} = 1 + \beta n l y + \frac{1}{2}\beta^2 n^2 (ly)^2 + \text{etc.}$

erit

$$\frac{1}{n} x^{\alpha n} y^{\beta n} = \frac{1}{n} + \alpha l x + \beta l y = l x^\alpha y^\beta$$

prima parte $\frac{1}{n}$ in constantem inuoluta. Hoc ergo casu erit aequatio integralis:

$$l x^\alpha y^\beta + \frac{1}{m} x^{\gamma m} y^{\delta m} = \text{Const.}$$

## Coroll. 4

31. Statuatur ergo pro hoc casu $\mu = \gamma k + 1$ et $\nu = \delta k + 1$, vt habeatur ista aequatio differentialis:

$$\alpha y dx + \beta x dy + \gamma x^{\gamma k} y^{\delta k + 1} dx + \delta x^{\gamma k + 1} y^{\delta k} dy = 0$$

et cum sit $m = \frac{\alpha\delta k - \beta\gamma k}{\alpha\delta - \beta\gamma} = k$, erit aequatio integralis

$$l x^\alpha y^\beta + \frac{1}{k} x^{\gamma k} y^{\delta k} = \text{Const.}$$

## Coroll. 5.

32. Simili modo si fuerit $m = 0$, seu $\alpha(\nu - 1) = \beta(\mu - 1)$ ob $\frac{1}{m} x^{\gamma m} y^{\delta m} = l x^\gamma y^\delta$, si ponatur $\mu = \alpha k + 1$ et $\nu = \beta k + 1$, vnde fit $n = \frac{\gamma\beta k - \delta\alpha k}{\alpha\delta - \beta\gamma} = -k$; erit huius aequationis

$$\alpha y dx + \beta x dy + \gamma x^{\alpha k} y^{\beta k + 1} dx + \delta x^{\alpha k + 1} y^{\beta k} dy = 0$$

 inte-

integralis

$$-\tfrac{1}{k}x^{-\alpha k}y^{-\beta k}+lx^{\gamma}y^{\delta}=\text{Const.}$$

## Scholion.

33. Neque vero huiusmodi resolutio in membra, quae per eundem multiplicatorem reddantur integrabilia, ad omnis generis aequationes patet. Euenire enim vtique potest, vt tota aequatio per quampiam quantitatem multiplicata integrabilis euadat, cum tamen nulla eius pars inde seorsim integrabilis existat, ex quo huic tractationi, qua hic sum vsus, non nimis tribui oportet.

## Problema 4.

34. Si proposita sit aequatio differentialis

$$Pdx+Qydx+Rdy=0$$

vbi P, Q et R denotant functiones quascunque ipsius $x$, ita vt altera variabilis $y$ plus vna dimensione non habeat, inuenire multiplicatorem, qui eam reddat integrabilem.

## Solutio.

Comparata hac aequatione cum forma $Mdx+Ndy=0$ erit $M=P+Qy$ et $N=R$, vnde fiet

$$\left(\frac{dM}{dy}\right)=Q \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right)=\frac{dR}{dx}.$$

Statuatur iam L pro multiplicatore quaesito, sitque $dL=pdx+qdy$, atque huic aequationi satisfieri oportet

$$\frac{Np-Mq}{L}=Q-\frac{dR}{dx}=\frac{Rp-(P+Qy)q}{L}.$$

Cum

Cum iam sit $Q-\frac{dR}{dx}$ functio ipsius $x$ tantum, pro L quoque functio ipsius $x$ tantum accipi poterit, ita vt sit $q=0$, et $dL=pdx$; vnde erit:

$$Q-\frac{dR}{dx}=\frac{Rp}{L}, \text{ seu } Qdx-dR=\frac{RdL}{L}$$

ideoque $\frac{dL}{L}=\frac{Qdx}{R}-\frac{dR}{R}$. Quare integrando habebitur $lL=\int\frac{Qdx}{R}-lR$, et sumto $e$ pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est vnitas, prodit

$$L=\frac{1}{R}e^{\int\frac{Qdx}{R}}$$

Inuento autem hoc multiplicatore erit aequatio integralis:

$$\int\frac{Pdx}{R}e^{\int\frac{Qdx}{R}}+ye^{\int\frac{Qdx}{R}}=\text{Const.}$$

## Coroll. 1.

35. Si aequatio habeat formam propositam, ea, antequam hoc modo tractetur, diuidi poterit per R, vt hanc formam induat $Pdx+Qydx+dy=0$, seu statim assumere licet $R=1$, quo facto multiplicator erit $e^{\int Qdx}$, et aequatio integralis $\int e^{\int Qdx}Pdx+e^{\int Qdx}y=\text{Const.}$

## Coroll. 2.

36. Si ponatur hoc integrale $\int e^{\int Qdx}Pdx+e^{\int Qdx}y=z$, ita vt $z$ sit functio quaepiam ambarum variabilium, tum vero Z denotet functionem quamcunque ipsius $z$; omnes multiplicatores, qui formulam $Pdx+Qydx+dy$ reddunt integrabilem, in hac forma generali $e^{\int Qdx}Z$ continentur.

## Problema 5.

37. Si proposita sit aequatio differentialis:

$$Py^n dx + Qy dx + R dy = 0$$

vbi P, Q et R denotent functiones quascunque ipsius $x$, inuenire multiplicatorem, qui eam reddat integrabilem.

## Solutio.

Erit ergo $M = Py^n + Qy$ et $N = R$, hincque

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = nPy^{n-1} + Q, \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{dR}{dx}$$

Quare posito multiplicatore quaesito L et $dL = pdx + qdy$, erit ex ante inuentis:

$$\frac{Rp - Py^n q - Qyq}{L} = nPy^{n-1} + Q - \frac{dR}{dx}.$$

Fingatur $L = Sy^m$, existente S functione ipsius $x$ tantum, erit $p = \frac{y^m dS}{dx}$, et $q = mSy^{m-1}$, quibus valoribus substitutis, prodibit:

$$\frac{RdS}{Sdx} - mPy^{n-1} - mQ = nPy^{n-1} + Q - \frac{dR}{dx}$$

Quae aequatio vt subsistere possit, sumi debet $m = -n$, ac fiet

$$\frac{RdS}{Sdx} = (1-n)Q - \frac{dR}{dx}, \text{ seu } \frac{dS}{S} = \frac{(1-n)Qdx}{R} - \frac{dR}{R}$$

Vnde cum integrando proueniat $S = \frac{1}{R} e^{(1-n)\int \frac{Qdx}{R}}$, erit, ob $m = -n$, multiplicator quaesitus:

$$L = \frac{y^{-n}}{R} e^{(1-n)\int \frac{Qdx}{R}}$$

et aequatio integralis erit

$$\frac{y^{1-n}}{1-n} e^{(1-n)\int \frac{Qdx}{R}} + \int \frac{Pdx}{R} e^{(1-n)\int \frac{Qdx}{R}} = \text{Const.}$$

Coroll. 1.

## Coroll. 1.

38. Si $n=0$, habemus casum ante tractatum aequationis $Pdx+Qydx+Rdy=0$, quae per multiplicatorem $\frac{1}{R}e^{\int\frac{Qdx}{R}}$ integrabilis redditur; et cuius aequatio integralis est

$$ye^{\int\frac{Qdx}{R}}+\int\frac{Pdx}{R}e^{\int\frac{Qdx}{R}}=\text{Const.}$$

## Coroll. 2.

39. At sit $n=1$, vt aequatio differentialis sit:

$$Pydx+Qydx+Rdy=0$$

multiplicator, ob $1-n=0$, erit $\frac{1}{Ry}$; quo aequatio reducitur ad hanc formam $\frac{Pdx+Qdx}{R}+\frac{dy}{y}=0$, cuius integralis manifesto est $\int\frac{(P+Q)dx}{R}+ly=\text{Const.}$

## Scholion.

40. Caeterum hoc problema ex antecedente facile deducitur. Diuidatur enim aequatio differentialis proposita per $y^n$, et habebitur:

$$Pdx+Qy^{1-n}dx+Ry^{-n}dy=0$$

Ponatur $y^{1-n}=z$, erit $(1-n)y^{-n}dy=dz$, sicque aequatio transit in hanc:

$$Pdx+Qzdx+\frac{1}{1-n}Rdz=0$$

quae cum aequatione problematis praecedentis conuenit. Cum igitur hae duae aequationes referendae sint ad casum, quo altera variabilis nusquam vltra vnam dimensionem ascendit, hunc methodo hac per multiplicatores

res expediuimus. Pergo itaque ad alterum genus aequationum differentialium homogenearum, quas etiam hac methodo tractari posse constat. Ad hoc autem lemma, quo natura functionum homogenearum continetur, praemitti necesse est, si quidem operationem ex primis principiis petere velimus.

## Lemma.

41. Si V fuerit functio homogenea, in qua binae variabiles $x$ et $y$ vbique $n$ dimensiones constituant, eius differentiale $dV = Pdx + Qdy$ ita erit comparatum, vt sit $Px + Qy = nV$.

## Demonstratio.

Ponatur $y = xz$, et functio V induet huiusmodi formam $x^n Z$, existente Z quapiam functione ipsius $z$ tantum. Hinc ergo erit $dV = nx^{n-1} Z dx + x^n dZ$. Ad has duas variabiles $x$ et $z$ etiam differentiale propositum $dV = Pdx + Qdy$ reducatur, et cum sit $dy = zdx + xdz$, erit

$$dV = (P + Qz)dx + Qxdz$$

necesse igitur est, vt sit $nx^{n-1}Z = P + Qz$, et per $x$ vtrinque multiplicando: $nx^n Z = nV = Px + Qxz = Px + Qy$: ita vt sit $Px + Qy = nV$.

## Coroll. 1.

42. Quia ergo habemus duas aequationes:

$$dV = Pdx + Qdy, \text{ et } nV = Px + Qy.$$

hinc

hinc ambae functiones P et Q definiri poterunt; reperietur enim:

$$P = \frac{y\,dV - nV\,dy}{y\,dx - x\,dy} \text{ et } Q = \frac{nV\,dx - x\,dV}{y\,dx - x\,dy}.$$

## Coroll. 2.

43. Quoties ergo V est functio homogenea $n$ dimensionum, toties ob $P = (\frac{dV}{dx})$ et $Q = (\frac{dV}{dy})$ erit

$$(\frac{dV}{dx}) = \frac{y\,dV - nV\,dy}{y\,dx - x\,dy} \text{ et } (\frac{dV}{dy}) = \frac{nV\,dx - x\,dV}{y\,dx - x\,dy}$$

vbi notandum est, in his fractionibus differentialia se mutuo tollere, seu vtrumque numeratorem fore per $y\,dx - x\,dy$ diuisibilem.

## Problema 6.

44. Proposita aequatione differentiali $M\,dx + N\,dy = 0$, in qua M et N sint functiones homogeneae ipsarum $x$ et $y$ eiusdem ambae dimensionum numeri, inuenire multiplicatorem, qui eam aequationem reddat integrabilem.

## Solutio.

Sit $n$ numerus dimensionum, vtrique functioni M et N conueniens, eritque per §. praec.

$$(\frac{dM}{dy}) = \frac{nM\,dx - x\,dM}{y\,dx - x\,dy} \text{ et } (\frac{dN}{dx}) = \frac{y\,dN - nN\,dy}{y\,dx - x\,dy}$$

ideoque

$$(\frac{dM}{dy}) - (\frac{dN}{dx}) = \frac{n(M\,dx + N\,dy) - x\,dM - y\,dN}{y\,dx - x\,dy}.$$

Iam facile colligere licet, dari multiplicatorem, qui etiam sit functio homogenea ipsarum $x$ et $y$. Sit ergo L talis functio homogenea $m$ dimensionum. Quae si in §. 19 ponatur $dL = Pdx + Qdy$, erit (42.)

$$P = \frac{ydL - mLdy}{ydx - xdy}\ \text{et}\ Q = \frac{mLdx - xdL}{ydx - xdy}$$

hincque, cum esse oporteat per §. 19.

$$\frac{NP - MQ}{L} = \left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)$$

obtinebitur vtrinque per $ydx - xdy$ multiplicando:

$$\frac{NydL - mLNdy - mLMdx + MxdL}{L} = n(Mdx + Ndy) - xdM - ydN$$

vnde elicitur:

$$\frac{dL}{L} = \frac{(m+n)(Mdx + Ndy) - xdM - ydN}{Mx + Ny}$$

quae formula manifesto fit integrabilis posito $m + n = -1$, quo facto erit $lL = -l(Mx + Ny)$. Quam ob rem multiplicator quaesitus habebitur $L = \frac{1}{Mx + Ny}$.

## Coroll. 1.

45. Proposita igitur aequatione differentiali homogenea $Mdx + Ndy = 0$, ea facillime ad integrabilitatem reducetur, propterea quod formula $\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny}$ est integrabilis, cuius integrale, per methodum supra traditam inuentum, dabit aequationem integralem quaesitam.

## Coroll. 2.

46. Eo casu tantum incommodum oritur, vbi fit $Mx + Ny = 0$, veluti euenit in aequatione $ydx - xdy = 0$, quae diuidi deberet per $xy - xy = 0xy$. Sed quia huius diuisoris multiplum quodcunque aeque satisfacit, diuisor $xy$ negotium conficiet, quemadmodum per se est perspicuum.

Scholion.

## Scholion.

47. Notissima est methodus, qua sagacissimus *Ioh. Bernoullius* olim omnes aequationes differentiales homogeneas ad separabilitatem variabilium perducere docuit. Proposita scilicet huiusmodi aequatione $M\,dx + N\,dy = 0$, in qua M et N sint functiones homogeneae $n$ dimensionum, ponere iubet $y = ux$, quo facto functiones M et N huiusmodi formas induent, ut sit $M = x^n U$, et $N = x^n V$, existentibus U et V functionibus ipsius $u$ tantum. Aequatio ergo proposita per $x^n$ diuisa abibit in hanc: $U\,dx + V\,dy = 0$. Cum autem sit $dy = u\,dx + x\,du$, habebimus $U\,dx + V\,u\,dx + V\,x\,du = 0$, quae per $x(U + Vu)$ diuisa fit separabilis, seu haec forma

$$\frac{(U + Vu)\,dx + V\,x\,du}{x(U + Vu)} \text{ integrabilis.}$$

At est $(U + Vu)\,dx + V\,x\,du = \frac{1}{x^n}(M\,dx + N\,dy)$.

et $x^n(U + Vu) = M + Nu$. Integrabilis ergo erit haec formula:

$$\frac{M\,dx + N\,dy}{x(M + Nu)} = \frac{M\,dx + N\,dy}{Mx + Ny} \text{ ob } ux = y.$$

Expositis igitur his duobus aequationum generibus, quae per idoneos multiplicatores integrabiles reddi possunt, videamus, ad quaenam alia genera eadem methodus extendi possit: ac primo quidem obseruo, omnes aequationes differentiales, quae aliis methodis integrari possunt, etiam hac methodo per idoneum multiplicatorem tractari posse, id quod in sequente problemate clarius explicabitur.

 Proble-

## Problema 7.

48. Proposita aequatione differentiali $Mdx+Ndy=o$, si inuenta fuerit eius integralis aequatio completa, assignare omnes multiplicationes, qui aequatorem differentialem reddant integrabilem.

## Solutio.

Cum aequatio integralis completa inuoluat quantitatem constantem arbitrariam $C$, quae in aequatione differentiali non inest, vtcunque ea sit implicata, quaeratur eius valor per resolutionem aequationis, qui sit $C=V$, eritque $V$ functio ipsarum $x$ et $y$, quae insuper constantes aequationis differentialis in se complectetur. Tum ista aequatio $C=V$ differentietur, sicque prodibit $o=dV$. Ac iam necesse est, vt $dV$ diuisorem habeat ipsam formulam differentialem propositam. Sit itaque $dV=L(Mdx+Ndy)$, eritque $L$ multiplicator idoneus, qui aequationem differentialem propositam reddit integrabilem. Deinde cum, denotante $Z$ functionem quamcunque ipsius $V$, sit etiam formula $ZdV=LZ(Mdx+Ndy)$ integrabilis, expressio $LZ$ omnes multiplicatores includet, quibus aequatio differentialis proposita $Mdx+Ndy=o$ fit integrabilis.

## Coroll. 1.

49. Quoties ergo aequationis differentialis $Mdx+Ndy=o$ integrale completum assignari potest, toties non solum vnus, sed plane omnes multiplicatores definire licet, quibus ea aequatio integrabilis reddatur.

## Coroll. 2.

50. Cum ergo aliis methodis plurium aequationum differentialium integralia completa sint inuenta, hinc methodus hactenus tradita, quae ad duo tantum aequationum genera adhuc est applicata, non mediocriter amplificari poterit.

## Scholion.

51. Interim tamen, nisi ad specialissima exempla descendere velimus, aequationes differentiales, quarum integralia completa assignare licet, ad exiguum numerum reducuntur. Ac primo quidem occurrunt aequationes differentiales primi gradus in hac forma contentae

$$dx(\alpha+\beta x+\gamma y)+dy(\delta+\varepsilon x+\zeta y)=0$$

quae quia facile ad homogeneas reuocantur, etiam hac methodo per multiplicatores tractari poterunt. Deinde memoratu digna est haec forma $dy+Pydx+Qyydx=Rdx$, cuius si constet vnus valor singularis satisfaciens, ex eo integrale completum elici potest, ex quo his casibus multiplicatores idoneos assignare licebit. Tertio etiam perpendi merentur casus huius aequationis $dy+yydx=ax^n dx$, ab inuentore Riccatiana dictae, quibus ea ad separabilitatem reduci potest. Denique existunt casus huius aequationis $ydy+Pydx=Qdx$, qui cum sint integrabiles, ad multiplicatorum inuestigationem sunt accommodati. Hinc noua patefiet via ex data multiplicatorum forma eas aequationes inueniendi, quae per eos fiant integrabiles, vnde fortasse haud spernenda analyseos incrementa haurire licebit.

## Problema 8.

**52. Propoſita aequatione differentiali primi gradus:**

$$(\alpha+\beta x+\gamma y)dx+(\delta+\varepsilon x+\zeta y)dy=0$$

**inuenire multiplicatores, qui eam reddant integrabilem.**

## Solutio.

Reducatur haec aequatio ad homogeneitatem ponendo:

$x=t+f$ et $y=u+g$, vt prodeat

$$(\alpha+\beta f+\gamma g+\beta t+\gamma u)dt+(\delta+\varepsilon f+\zeta g+\varepsilon t+\zeta u)du=0$$

quae poſito $\alpha+\beta f+\gamma g=0$ et $\delta+\varepsilon f+\zeta g=0$, vnde quantitates $f$ et $g$ determinantur, vtique fit homogenea, ſcilicet

$$(\beta t+\gamma u)dt+(\varepsilon t+\zeta u)du=0;$$

ideoque per multiplicatorem $\frac{1}{\beta tt+(\gamma+\varepsilon)tu+\zeta uu}$ integrabilis redditur. Hinc inuentis litteris $f$ et $g$ aequatio propoſita integrabilis euadet, ſi diuidatur per

$$\beta(x-f)^2+(\gamma+\varepsilon)(x-f)(y-g)+\zeta(y-g)^2,$$

ſeu per

$$\beta xx+(\gamma+\varepsilon)xy+\zeta yy-(2\beta f+\gamma g+\varepsilon g)x$$
$$-(2\zeta g+\gamma f+\varepsilon f)y+\beta ff+(\gamma+\varepsilon)fg+\zeta gg$$

Cum autem ſit $f=\frac{\alpha\zeta-\gamma\delta}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}$, et $g=\frac{\beta\delta-\alpha\varepsilon}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}$, prodibit diuiſor quaeſitus:

$$\beta xx+(\gamma+\varepsilon)xy+\zeta yy+\frac{\alpha\gamma\delta-\alpha\alpha\zeta+\alpha\delta\varepsilon-\beta\delta\delta}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}$$
$$\frac{-2\alpha\beta\zeta+\beta\gamma\delta-\beta\delta\varepsilon+\alpha\gamma\varepsilon+\alpha\varepsilon\varepsilon}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}x$$
$$\frac{-2\beta\delta\zeta+\alpha\varepsilon\zeta-\alpha\gamma\zeta+\gamma\delta\varepsilon+\gamma\gamma\delta}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}y.$$

In-

Inuento autem vno diuisore, seu multiplicatore, ex eo reperientur facile omnes possibiles.

## Coroll. 1.

53. Forma ergo diuisoris, per quam aequatio differentialis

$$(\alpha+\beta x+\gamma y)dx+(\delta+\varepsilon x+\zeta y)dy=0$$

redditur integrabilis, est

$$\beta xx+(\gamma+\varepsilon)xy+\zeta yy+Ax+By+C$$

vbi constantes A, B, C supra sunt definitae.

## Coroll. 2.

54. Cum diuisor inuentus etiam satisfaciat, si per $\gamma\varepsilon-\beta\zeta$ multiplicetur, patet, casu, quo $\beta\zeta=\gamma\varepsilon$, diuisorem fore:

$$(\alpha\varepsilon\varepsilon-\beta\delta\varepsilon+\beta\gamma\delta-\alpha\beta\zeta)x+(\gamma\gamma\delta-\alpha\gamma\zeta$$
$$+\alpha\varepsilon\zeta-\beta\delta\zeta)y+\alpha\gamma\delta-\alpha\alpha\zeta+\alpha\delta\varepsilon-\beta\delta\delta$$

qui posito $\beta=mf$; $\gamma=nf$; $\varepsilon=mg$; $\zeta=ng$, abit in

$$m(\alpha g-\delta f)(mg-nf)x+n(\alpha g-\delta f)(mg-nf)y$$
$$+(\alpha g-\delta f)(\delta m-\alpha n)$$

## Coroll. 3.

55. Quare si aequatio proposita fuerit huiusmodi:

$$(\alpha+f(mx+ny))dx+(\delta+g(mx+ny))dy=0$$

ea redditur integrabilis, si diuidatur per

$$(mg-nf)(mx+ny)+\delta m-\alpha n$$

siue per $mx+ny+\frac{\delta m-\alpha n}{mg-nf}$. At si fuerit $mg-nf=0$, aequatio proposita iam ipsa est integrabilis.

Prob.

## Problema 9.

56. Proposita hac aequatione differentiali:

$$dy + Pydx + Qyydx + Rdx = 0$$

vbi P, Q et R sint functiones ipsius $x$ tantum, si constet, huic aequationi satisfacere $y = v$, existente $v$ functione ipsius $x$, inuenire multiplicatores, qui istam aequationem reddant integrabilem.

## Solutio.

Cum aequationi satisfaciat valor $y = v$, erit

$$dv + Pvdx + Qvvdx + Rdx = 0;$$

si ergo ponatur $y = v + \frac{1}{z}$, habebitur

$$-\frac{dz}{zz} + \frac{Pdx}{z} + \frac{2Qvdx}{z} + \frac{Qdx}{zz} = 0$$

siue:

$$dz - (P + 2Qv)zdx - Qdx = 0$$

quae integrabilis redditur per multiplicatorem

$$e^{-\int (P + 2Qv)dx}.$$

Hic ergo multiplicator per $zz$ multiplicatus conueniet aequationi propositae. Cum ergo sit $z = \frac{1}{y-v}$, multiplicator aequationem propositam integrabilem reddens erit:

$$\frac{1}{(y-v)^2} e^{-\int (P + 2Qv)dx}$$

Sit breuitatis gratia $e^{-\int (P + 2Qv)dx} = S$. Quia aequationis $dz - (P + 2Qv)zdx - Qdx = 0$ integrale est

$$Sz - \int QSdx = \text{Const.}$$

omnes multiplicatores quaesiti continebuntur in hac forma:

$$\frac{S}{(y-v)^2} \text{ funct. } \left(\frac{S}{y-v} - \int QSdx\right)$$

vbi

vbi per hypothesin $v$ est functio cognita ipsius $x$, ideoque etiam $S = e^{-\int(P + 2Qv)dx}$

## Coroll. 1.

57. Multiplicator ergo, qui primum se obtulit, est $\frac{S}{(y-v)^2}$, tum vero etiam multiplicator erit $\frac{S}{S(y-v) - (y-v)^2 \int QS dx}$ qui etsi continet formulam integralem $\int QS dx$, saepe numero illo simplicior euadere potest.

## Coroll. 2.

58. Si enim S est quantitas exponentialis, fieri potest, vt $\int QS dx$ huiusmodi formam S T induat, existente T functione algebraica, quo casu multiplicator erit

$$\frac{1}{y - v - (y-v)^2 T} = \frac{1}{(y-v)(1 - Ty + Tv)}$$

ideoque algebraicus, quod in priori forma fieri nequit.

## Coroll. 3.

59. Cum his duobus casibus multiplicator sit fractio, in cuius solum denominatorem variabilis $y$ ingreditur, ibique vltra quadratum non ascendat, innumerabiles alii huiusmodi multiplicatores exhiberi possunt: Sit enim $\int QS dx = V$, et fractionis $\frac{S}{(y-v)^2}$ denominatorem multiplicare licebit per $A + B(\frac{S}{y-v} - V) + C(\frac{S}{y-v} - V)^2$, sicque erit generalior multiplicatoris forma:

$$\frac{S}{A(y-v)^2 + BS(y-v) - BV(y-v)^2 + CSS - 2CSV(y-v) + CVV(y-v)^2}$$

siue:

$$\frac{S}{(A - BV + CVV)y^2 - (2Av - BS - 2BVv + 2CSV + 2CVVv)y + Avv - BSv - BVvv + CSS + 2CSVv + CV^2v^2}.$$

 Coroll. 4.

## Coroll. 4.

60. Quodsi ergo haec formula $\frac{dy+Pydx+Qyydx+Rdx}{Lyy+My+N}$ fuerit integrabilis, denominator ita debet esse comparatus, vt sit

$$SL = A - BV + CVV,\ SM = S(B-2CV) - 2v(A-BV+CVV)$$

et $SN = CSS - Sv(B-2CV) + vv(A-BV+CVV)$ existente $dv + Pvdx + Qvvdx + Rdx = 0$, $S = e^{-\int(P+2Qv)dx}$ et $V = \int QSdx$.

## Problema 10.

61. Proposita aequatione differentiali praecedente:

$$dy + Pydx + Qyydx + Rdx = 0$$

inuenire functiones L, M et N ipsius $x$, vt ea per formulam $Lyy + My + N$ diuisa fiat integrabilis.

## Solutio.

Cum igitur integrabilis esse debeat haec formula:

$$\frac{dy + dx(Py + Qyy + R)}{Lyy + My + N}$$

per proprietatem generalem esse oportet, postquam per $(Lyy+My+N)^2$ multiplicauerimus:

$$-\frac{yy\,dL}{dx} - \frac{y\,dM}{dx} - \frac{dN}{dx} = \begin{array}{l} +QMyy - 2RLy + NP \\ -PLyy + 2QNy - RM \end{array}$$

Vnde pro determinatione functionum L, M et N has consequimur aequationes:

I. $dL = PLdx - QMdx$
II. $dM = 2RLdx - 2QNdx$
III. $dN = RMdx - PNdx$,

ex-

ex quarum prima deducimus:

$$M = \frac{PL}{Q} - \frac{dL}{Qdx}$$

et ex secunda: $N = \frac{RL}{Q} - \frac{dM}{2Qdx}$,
qui valores pro M et N in tertia substituti, dant:

$$dN = \frac{PdM}{2Q} - \frac{RdL}{Q},$$

Cum autem sit, sumto differentiali $dx$ constante,

$$dM = \frac{PdL + LdP}{Q} - \frac{PLdQ}{QQ} - \frac{ddL}{Qdx} + \frac{dQdL}{QQdx}, \text{ erit}$$

$$N = \frac{RL}{Q} - \frac{PdL}{2QQdx} - \frac{LdP}{2QQdx} + \frac{PLdQ}{2Q^3dx} + \frac{ddL}{2QQdx^2} - \frac{dQdL}{2Q^3dx^2}$$

$$\text{et } dN = \frac{PPdL}{2QQ} + \frac{PLdP}{2QQ} - \frac{PPLdQ}{2Q^3} - \frac{PddL}{2QQdx} + \frac{PdQdL}{2Q^3dx} - \frac{RdL}{Q}$$

quod ergo illius differentiali debet aequari, vnde fit:

$$\begin{aligned}
0 = {} & QQd^3L - 3QdQddL - PPQQdLdx^2 - 2QQdPdLdx \\
& + 3dQ^2dL + 2PQdQdLdx - QdLddQ + 4Q^3RdLdx^2 \\
& + PQQLdPdx^2 + PPQLdQdx^2 - QQLdxddP \\
& \qquad + PQLdxddQ \\
& + 3QLdPdQdx - 3PLdQ^2dx + 2Q^3LdRdx^2 \\
& \qquad - 2Q^2RLdQdx^2
\end{aligned}$$

Haec autem aequatio si per $\frac{L}{Q^4}$ multiplicetur, integrari poterit, eritque eius integralis

$$\begin{aligned}
\text{Const.} = {} & \frac{LddL}{QQ} - \frac{LdLdQ}{Q^3} - \frac{dL^2}{2QQ} - \frac{PPLLdx^2}{2QQ} - \frac{LLdPdx}{QQ} \\
& + \frac{PLLdQdx}{Q^3} + \frac{2RLLdx^2}{Q}
\end{aligned}$$

quae in hanc formam abit:

$$\begin{aligned}
2EQ^3dx^2 = {} & 2QLddL - 2LdLdQ - QdL^2 - PPQLLdx^2 \\
& - 2QLLdPdx + 2PLLdQdx + 4QQRLLdx^2.
\end{aligned}$$

Quodsi ponatur $L = zz$, aequatio induet hanc formam:

$$\begin{aligned}
\frac{2EQ^3dx^2}{z^3} = {} & 4Qddz - 4dQdz - z(PPQdx^2 + 2QdPdx \\
& - 2PdQdx - 4QQRdx^2).
\end{aligned}$$

## Coroll. 1.

62. Quoties ergo per problema praecedens, valor ipsius L assignari potest, toties aequatio differentialis tertii ordinis hic inuenta, et ea secundi ordinis, ad quam illam reduxi, generaliter resolui poterit: quae resolutio, cum alias foret difficillima, probe est notanda.

## Coroll. 2.

63. Scilicet si $v$ fuerit eiusmodi functio ipsius $x$, quae loco $y$ posita, satisfaciat aequationi $dy + Pydx + Qyydx + Rdx = 0$, capiatur $S = e^{-\int (P + 2Qv) dx}$, statuaturque $V = \int QSdx$, quo facto erit pro nostra aequatione differentiali tertii ordinis $L = \frac{A - BV + CVV}{S}$, qui valor cum tres constantes arbitrarias complectatur, adeo erit eius aequationis differentiale completum.

## Coroll. 3.

63. Si sit $P = 0$, $Q = 1$ et R functio quaecunque ipsius $x$, aequatio differentialis tertii gradus hanc accipiet formam:

$$0 = d^3L + 4RdLdx^2 + 2LdRdx^2$$

pro cuius ergo differentiali completo inueniendo, quaeratur primo functio ipsius $x$, quae sit $= v$, quae satisfaciat huic aequationi $dv + vvdx + Rdx = 0$: tum ponatur $V = \int e^{-2\int vdx} dx$, eritque $L = (A - BV + CVV) e^{+2\int vdx}$.

Coroll. 4.

## Coroll. 4.

64. Idem ergo integrale satisfaciet huic aequationi differentiali secundi gradus:

$$E\,dx^2 = 2\,L\,ddL - dL^2 + 4\,R\,L\,L\,dx^2$$

et, posito $L = z\,z$, etiam huic:

$$\frac{E\,dx^2}{z^3} = ddz + R\,z\,dx^2$$

pro qua itaque est $z = e^{+\int v\,dx}\sqrt{(A - BV + CVV)}$.

## Scholion.

65. Omnino animaduerti meretur haec integratio, quippe quae ex aliis principiis vix quidem praestari potest. Hinc autem adipiscimur integrationem completam sequentis aequationis differentio-differentialis satis late patentis:

$$ddz + S\,dx\,dz + T\,z\,dx^2 = \frac{E\,dx^2}{z^3}e^{-2\int S\,dx}$$

Primo nempe quaeratur valor ipsius $v$ ex hac aequatione differentiali primi gradus:

$$dv + v\,v\,dx + S\,v\,dx + T\,dx = 0$$

quo inuento ponatur breuitatis ergo $V = \int e^{-2\int v\,dx - \int S\,dx}\,dx$ eritque

$$z = e^{\int v\,dx}\sqrt{(A + B\,V + C\,V\,V)},$$

si modo constantes arbitrariae $A$, $B$, $C$ ita accipiantur, vt sit $A\,C - \frac{1}{4}B\,B = E$, sicque adhuc duae constantes arbitrio nostro relinquuntur, vti natura integrationis completae postulat.

 Exem-

## Exemplum 1.

66. *Proposita sit haec aequatio differentialis*

$$dy + y\,dx + yy\,dx - \frac{dx}{x} = 0,$$

*cuius multiplicatores, qui eam reddant integrabilem, investigari oporteat.*

Erit ergo, Problema 9. huc transferendo, $P = 1$, $Q = 1$ et $R = -\frac{1}{x}$, et quia aequationi satisfacit valor $y = \frac{1}{x}$, erit $v = \frac{1}{x}$. Quare fiet $S = e^{-\int(1+\frac{2}{x})dx} = \frac{1}{xx}e^{-x}$ et multiplicator, qui primum se offert, habebitur $= e^{-x}\frac{1}{(xy-1)^2}$. Hunc autem porro multiplicare licet per functionem quamcunque huius formae $e^{-x}\frac{1}{x(xy-1)} - \int e^{-x}\frac{dx}{xx}$; cum vero haec forma integrari nequeat, alii multiplicatores idonei assignari nequeunt. Ob primum ergo integrabilis est haec forma:

$$e^{-x}\frac{1}{(xy-1)^2}\left(dy + y\,dx + yy\,dx - \frac{dx}{x}\right)$$

cuius, si $x$ capitur constans, integrale est

$$\frac{-e^{-x}}{x(xy-1)} + X$$

quae differentiata, posito $y$ constante, praebet

$$\frac{e^{-x}dx(xxy + 2xy - x - 1)}{xx(xy-1)^2} + dX$$

quod aequari debet alteri membro $\frac{e^{-x}}{(xy-1)^2}\left(y\,dx + yy\,dx - \frac{dx}{x}\right)$

vnde fit $dX = \frac{e^{-x}dx}{xx(xy-1)^2}(xxyy - 2xy + 1) = e^{-x}\frac{dx}{xx}$;

sicque

ficque integrale completum noftrae aequationis eft:

$$\frac{-e^{-x}}{x(xy-1)}+\int e^{-x}\frac{dx}{xx}=\text{Conft.}$$

## Exemplum 2.

67. Inuenire multiplicatores idoneos, qui reddant hanc aequationem integrabilem:

$$dy+yydx-\frac{a\,dx}{(\alpha+\beta x+\gamma xx)^2}=0.$$

Cafus fingularis huic aequationi fatisfaciens eft

$$y=\frac{k+\gamma x}{\alpha+\beta x+\gamma xx}=v$$

exiftente $k=\frac{1}{2}\beta\pm\surd(\frac{1}{4}\beta\beta-\alpha\gamma+a)$.

Cum nunc fit $P=0$, et $Q=1$, erit

$$S=e^{-\int\frac{2k\,dx+2\gamma x\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}$$

vel pofito breuitatis gratia $\pm\surd(\frac{1}{4}\beta\beta-\alpha\gamma+a)=\frac{1}{2}n$ erit

$$S=\frac{1}{\alpha+\beta x+\gamma xx}e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}$$

et $\int S\,dx=-\frac{1}{n}e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}$

Multiplicator ergo primum inuentus eft

$$e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}\cdot\frac{\alpha+\beta x+\gamma xx}{((\alpha+\beta x+\gamma xx)y-k-\gamma x)^2}$$

qui porro duci poteft in functionem quamcunque huius quantitatis

$$e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}\left(\frac{1}{(\alpha+\beta x+\gamma xx)y-k-\gamma x}+\frac{1}{n}\right).$$

Ducatur ergo in

$$e^{\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}\cdot\frac{(\alpha+\beta x-\gamma xx)y-k-\gamma x}{(\alpha+\beta x+\gamma xx)y+n-k-\gamma x}$$

ac

ac prodibit multiplicator algebraicus:

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma xx}{((\alpha+\beta x+\gamma xx)y-k-\gamma x)((\alpha+\beta x+\gamma xx)y+n-k-\gamma x)}$$

qui reducitur ad hanc formam:

$$\frac{1}{(\alpha+\beta x+\gamma xx)\left(y-\frac{2\gamma x-\beta-\sqrt{(\beta\beta-4\alpha\gamma+4\alpha)}}{2(\alpha+\beta x+\gamma xx)}\right)\left(y-\frac{2\gamma x-\beta+\sqrt{(\beta\beta-4\alpha\gamma+4\alpha)}}{2(\alpha+\beta x+\gamma xx)}\right)}$$

Aequationis autem integrale completum est

$$e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}\cdot\frac{(\alpha+\beta x+\gamma xx)y+n-k-\gamma x}{(\alpha+\beta x+\gamma xx)y-k-\gamma x}=\text{Const.}$$

existente $n=\sqrt{(\beta\beta-4a\gamma+4a)}$ et $k=\frac{\beta+n}{2}$.
Ex quo aequatio integralis completa erit

$$e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}\cdot\frac{2(\alpha+\beta x+\gamma xx)+n-\beta-2\gamma x}{2(\alpha+\beta x+\gamma xx)y-n-\beta-2\gamma x}=\text{Const.}$$

cuius indoles est manifesta, dummodo $n=\sqrt{(\beta\beta-4a\gamma+4a)}$ sit numerus realis.

Quodsi autem valor ipsius $n$ sit imaginarius, puta $n=m\sqrt{-1}$, ob $e^{p\sqrt{-1}}=\text{cos}.p+\sqrt{-1}\,\text{sin}.p$, aequatio integralis ita ad realitatem perduci potest. Sit $-m\int\frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}=p$, et $2(\alpha+\beta x+\gamma xx)y-\beta-2\gamma x=q$, eritque ea:

$$(\text{cos}.p+\sqrt{-1}\,\text{sin}.p)\cdot\frac{q+m\sqrt{-1}}{q-m\sqrt{-1}}=\text{Const.}=A+B\sqrt{-1}$$

hinc fit:

$$q\,\text{cos}.p-m\,\text{sin}.p+(m\,\text{cos}.p+q\,\text{sin}.p)\sqrt{-1}=Aq+Bm+(Bq-Am)\sqrt{-1}$$

aequentur seorsim membra realia et imaginaria:

$$q\,\text{cos}\,p-m\,\text{sin}.p=Aq+Bm;\quad m\,\text{cos}\,p+q\,\text{sin}.p=Bq-Am$$

quae duae aequationes congruunt, si capiatur $AA+BB=1$.

Sit

Sit itaque constans arbitraria $A = \cos.\theta$, vt sit $B = \sin.\theta$ et casu, quo $\sqrt{(\beta\beta - 4\alpha\gamma + 4a)} = m\sqrt{-1}$, aequatio realis erit

$$q\cos.p - m\sin.p = q\cos.\theta + m\sin.\theta \text{ seu } q = \frac{m(\sin.p + \sin.\theta)}{\cos.p - \cos.\theta} = m\cot.\frac{\theta - p}{2}$$

Quare aequationis differentialis

$$dy + yydx + \frac{(mm + \beta\beta - 4\alpha\gamma)dx}{4(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2} = 0$$

posito $p = \int \frac{-m\,dx}{\alpha + \beta x + \gamma xx}$, aequatio integralis completa est

$$2(\alpha + \beta x + \gamma xx)y = \beta + 2\gamma y + m\cot.\frac{\theta - p}{2}$$

seu $y = \dfrac{\frac{1}{2}\beta + \gamma x + \frac{1}{2}m\cot.\frac{\theta - p}{2}}{\alpha + \beta x + \gamma xx}$

Vel sit $\theta = 180° - \zeta$, et habebitur $y = \dfrac{\frac{1}{2}\beta + \gamma x + \frac{1}{2}m\,\mathrm{tang}.\frac{\zeta + p}{2}}{\alpha + \beta x + \gamma xx}$.

Hoc autem casu notandum est, integrale speciale, ex quo haec omnia deduximus, fieri imaginarium, quo tamen non obstante inde integrale completum in forma reali exhibere licuit.

## Exemplum 3.

68. *Proposita aequatione Riccatiana* $dy + yydx - ax^m dx = 0$, *pro casibus exponentis* $m$, *quibus eam separare licet, inuenire multiplicatores idoneos.*

Sit $y = v$ valor aequationi satisfaciens, et cum sit $P = 0$, $Q = 1$, et $R = -ax^m$, erit primus multiplicator, aequationem integrabilem reddens,

$$e^{-2\int v\,dx}\frac{1}{(y - v)^2}$$

per quem si aequatio multiplicetur, cum integrale completum sit

$$e^{-2\int v\,dx}\frac{1}{y-v}-\int e^{-2\int v\,dx}dx = \text{Const.}$$

Quare si Z denotet functionem quamcunque huius quantitatis, omnes multiplicatores continebuntur in hac forma:

$$e^{-2\int v\,dx}\frac{Z}{(y-v)^2}.$$

Hinc si ponatur $\int e^{-2\int v\,dx}dx = V$, omnes multiplicatores in hac forma: $\frac{1}{Lyy+My+N}$ contenti obtinebuntur, si capiatur:

$$L = e^{2\int v\,dx}(A-BV+CVV)$$
$$M = B-2CV-2ve^{2\int v\,dx}(A-BV+CVV)$$
$$N = Ce^{-2\int v\,dx}-v(B-2CV)+vve^{2\int v\,dx}(A-BV+CVV).$$

Verum hic valor ipsius L simul est integrale completum huius aequationis differentialis tertii gradus:

$$0 = d^3L-4ax^m dL\,dx^2-2maLx^{m-1}dx^3$$

hincque etiam huius secundi gradus:

$$E\,dx^2 = 2L\,ddL-dL^2-4aLLx^m dx^2$$

existente $E = 4AC-BB$.

## Scholion.

69. Re attentius perpensa aequationem differentialem tertii ordinis etiam methodo directa resolui, eiusque integrale completum idem, quod hic est assignatum, elici posse deprehendi. Sit enim proposita haec aequatio:

$$d^3L+4R\,dL\,dx^2+2L\,dR\,dx^2 = 0$$

vbi

vbi R sit functio quaecunque ipsius $x$, sumto differentiali $dx$ constante. Iam quaero functionem ipsius $x$, per quam ista aequatio multiplicata euadat integrabilis. Sit S ista functio, et aequationis

$$S d^3 L + 4 SR dL dx^2 + 2 SL dR dx^2 = 0$$

integrale erit

$$S ddL - dS dL + L(ddS + 4 SR dx^2) = 2 C dx^2$$

dummodo sit

$$d^3 S + 2 S dR dx^2 + 4 R dS dx^2 = 0.$$

Sufficit scilicet quemuis valorem particulariter satisfacientem sumsisse. At haec aequatio, per S multiplicata, neglecta constante, dat integrale:

$$S ddS - \tfrac{1}{2} dS^2 + 2 SSR dx^2 = 0.$$

Ponatur $S = e^{2\int v dx}$, eritque

$$2 dv + 2 vv dx + 2 R dx = 0$$

vnde negotium huc redit, vt pro $v$ saltem valor particularis inuestigetur, qui satisfaciat huic aequationi differentiali primi gradus: $dv + vv dx + R dx = 0$, quem igitur tanquam concessum assumo. Hinc nostra aequatio semel integrata erit, ob $S = e^{2\int v dx}$,

$$ddL - 2 v dx dL + L(2 dv dx + 4 vv dx^2 + 4 R dx^2) = 2 C e^{-2\int v dx} dx^2$$

Cum igitur, ob $R dx = -dv - vv dx$, habeamus

$$ddL - 2 v dx dL - 2 L dx dv = 2 C e^{-2\int v dx} dx^2$$

eius integrale manifesto est:

$$dL - 2 L v dx = B dx + 2 C dx \int e^{-2\int v dx} dx$$

et per $e^{-2\int v dx}$, denuo multiplicando integrale, prodibit

$$e^{-2\int v dx} L = A + B \int e^{-2\int v dx} dx + 2 C \int e^{-2\int v dx} dx \int e^{-2\int v dx} dx$$

Quare ſi breuitatis gratia ponatur $\int e^{-2\int v\,dx}dx = V$, habebimus

$$L = e^{2\int v\,dx}(A + BV + CVV)$$

prorſus vti ante inuenimus.

## Problema 2.

70. Propoſita aequatione Riccatiana $dy + yydx = ax^m dx$, inuenire eius integralia particularia, caſibus, quibus ea ſeparabilis exiſtit.

## Solutio.

Ponendo $a = cc$, et $m = -4n$, tribuatur aequationi iſta forma:

$$dy + yydx - ccx^{-4n}dx = 0.$$

Cum enim quaeſtio circa integralia particularia verſetur, nihil intereſt, vtrum ea ſint realia, nec ne. Quo autem facilius, et vna quaſi operatione, hos caſus, quibus $y$ per functionem ipſius $x$ exprimere licet, eliciamus: ſtatuamus $y = cx^{-2n} + \frac{dz}{zdx}$, et ſumto $dx$ conſtante, nanciſcemur hanc aequationem differentialem ſecundi gradus:

$$-2ncx^{-2n-1}dx + \frac{ddz}{zdx} + \frac{2cx^{-2n}dz}{z} = 0, \text{ ſeu}$$

$$\frac{ddz}{dx^2} + \frac{2cdz}{x^{2n}dx} - \frac{2ncz}{x^{2n+1}} = 0$$

cuius valor fingatur:

$$z = Ax^n + Bx^{3n-1} + Cx^{5n-2} + Dx^{7n-3} + Ex^{9n-4} + \text{etc.}$$

quo

quo debite substituto obtinebimus:

$$0 = n(n-1)Ax^{n-2} + (3n-1)(3n-2)Bx^{3n-3} + (5n-2)(5n-3)Cx^{5n-4} + \text{etc.}$$
$$+2ncAx^{-n-1} + 2(3n-1)cB + 2(5n-2)cC + 2(7n-3)cD$$
$$-2ncA - 2ncB - 2ncC - 2ncD$$

vnde coefficientes ficti ita determinantur:

$$2(2n-1)cB + n(n-1)A = 0;\quad B = \frac{-n(n-1)A}{2(2n-1)c}$$
$$2(4n-2)cC + (3n-1)(3n-2)B = 0;\quad C = \frac{-(3n-1)(3n-2)B}{4(2n-1)c}$$
$$2(6n-3)cD + (5n-2)(5n-3)C = 0;\quad D = \frac{-(5n-2)(5n-3)C}{6(2n-1)c}$$

Statim igitur atque vnus coefficiens euanescit, sequentes simul omnes euanescunt, id quod euenit his casibus:

$$n = 0;\quad n = \tfrac{1}{3};\quad n = \tfrac{2}{5};\quad n = \tfrac{3}{7};\quad \text{etc.}$$
$$n = 1;\quad n = \tfrac{2}{3};\quad n = \tfrac{3}{5};\quad n = \tfrac{4}{7};\quad \text{etc.}$$

Denotante igitur $i$ numerum integrum quemcunque, quoties fuerit $n = \frac{i}{2i \pm 1}$, toties resolutio aequationis exhiberi potest. Erit enim $y = cx^{-2n} + \frac{dz}{z\,dx}$, existente

$$z = Ax^n + Bx^{3n-1} + Cx^{5n-2} + Dx^{7n-3} + Ex^{9n-4} + \text{etc.}$$

Proueniet ergo hic valor particularis ipsius $y$:

$$y = cx^{-n2} + \frac{nAx^{n-1} + (3n-1)Bx^{3n-2} + (5n-2)Cx^{5n-3}}{Ax^n + Bx^{3n-1} + Cx^{5n-2}} + \text{etc.}$$

## Coroll. 1.

71. Quodsi ergo iste valor particularis ipsius $y$ vocetur $= v$, erit aequationis propositae multiplicator idoneus $= e^{-2\int v dx}\cdot\frac{1}{(y-v)^2}$. Ac si ponatur $\int e^{-2\int v dx} dx$

 $= V$,

$=V$, sumtis $A=o$, et $C=o$, erit alius factor simplicior

$$\frac{1}{e^{2\int v\,dx}Vyy-(1+2ve^{2\int v\,dx}V)y+v+vve^{2\int v\,dx}V}.$$

## Coroll. 2.

72. At est $\int v\,dx=\frac{-c}{(2n-1)x^{2n-1}}+l(Ax^n+Bx^{3n-2}+Cx^{5n-2}+\text{etc.}$

vnde fit $e^{-2\int v dx}=\frac{2c}{e^{(2n-1)x^{2n-1}}}\cdot\frac{1}{(Ax^n+Bx^{3n-1}+Cx^{5n-2}+\text{etc.})^2}$

ex quo porro inueniri potest valor ipsius $V=\int e^{-2\int v dx}dx$ qui si fuerit huiusmodi $e^{-2\int v\,dx}T$, existente $T$ functione algebraica, erit superior multiplicator algebraicus.

## Coroll. 3.

73. Inuento valore $v$, seu integrali particulari aequationis propositae, inde statim habebitur integrale completum eiusdem, quippe quod erit:

$$\frac{e^{-2\int v\,dx}}{y-v}-\int e^{-2\int v\,dx}dx=\text{Const.}$$

## Casus 1. quo $n=o$.

74. Pro hac ergo aequatione $dy+yydx=ccdx$, ob $B=o$, $C=o$ etc. erit valor particularis $y=c$; Quare

Quare posito $v=c$, erit $e^{-2\int v\,dx}=e^{-2cx}$ et $V=\int e^{-2\int v dx}\,dx=-\frac{1}{2c}e^{-2cx}$; vnde integrale completum est

$$\frac{e^{-2cx}}{y-c}+\frac{1}{2c}e^{-2cx}=\text{Const.}$$

seu

$$\frac{e^{-2cx}(y+c)}{y-c}=\text{Const.}$$

Porro, ob $e^{2\int v\,dx}V=-\frac{1}{2c}$, et $v=c$, erit multiplicator algebraicus $=$

$$\frac{1}{-\frac{1}{2c}yy+\frac{1}{2}c}$$

qui reducitur ad $\frac{1}{yy-cc}$, vti per se est perspicuum.

## Casus 2. quo $n=1$.

75. Pro hac ergo aequatione $dy+yy\,dx=\frac{cc\,dx}{x^4}$ ob $B=0$, $C=0$ etc. erit valor particularis $y=\frac{c}{xx}+\frac{1}{x}$. Quare posito $v=\frac{c}{xx}+\frac{1}{x}$, erit $e^{-2\int v\,dx}=\frac{e^{\frac{2c}{x}}}{xx}$ et $V=-\frac{1}{2c}e^{\frac{2c}{x}}$. Hinc integrale completum est

$$\frac{e^{\frac{2c}{x}}}{xxy-x-c}+\frac{1}{2c}e^{\frac{2c}{x}}=\text{Const.}$$

seu $e^{\frac{2c}{x}}\cdot\frac{xxy-x+c}{xxy-x-c}=\text{Const.}$

Porro, ob $e^{2\int v\,dx}V=-\frac{xx}{2c}$, et $v=\frac{x+c}{xx}$, habebitur multiplicator algebraicus:

$$\frac{1}{xxyy-2xy+1-\frac{cc}{xx}}=\frac{1}{(xy-1)^2-\frac{cc}{xx}}$$

siue

siue aequatio proposita $dy + yydx - \frac{ccdx}{x^4} = 0$ fit integrabilis, si diuidatur per $(xy-1)^2 - \frac{cc}{xx}$.

## Casus 3. quo $n = \frac{1}{3}$.

76. Pro hac ergo aequatione $dy + yydx - ccx^{-\frac{4}{3}}dx = 0$ est $B = -\frac{A}{3c}$, $C = 0$, etc. vnde integrale particulare

$$y = cx^{-\frac{2}{3}} + \frac{cx^{-\frac{2}{3}}}{3cx^{\frac{1}{3}} - 1} = \frac{3ccx^{1-\frac{1}{3}}}{3cx^{\frac{1}{3}} - 1} = v$$

et $e^{-2\int vdx} = e^{-6cx^{\frac{1}{3}}} \frac{\text{Const.}}{(x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3c})^2} = e^{-6cx^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)^2}$

hincque $V = \int e^{-6cx^{\frac{1}{3}}} \frac{dx}{(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)^2} = -e^{-6cx^{\frac{1}{3}}} \frac{3cx^{\frac{1}{3}} + 1}{18c^3(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)}$

Quare integrale completum est

$$\frac{e^{-6cx^{\frac{1}{3}}}}{(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)^2 y - 3ccx^{-\frac{1}{3}}(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)} + \frac{e^{-6cx^{\frac{1}{3}}}(3cx^{\frac{1}{3}} + 1)}{18c^3(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)} = \text{Const.}$$

siue $e^{-6cx^{\frac{1}{3}}} \frac{y(1 + 3cx^{\frac{1}{3}}) + 3ccx^{-\frac{1}{3}}}{y(1 - 3c3^{\frac{1}{3}}) + 3ccx^{-\frac{1}{3}}} = \text{Const.}$

Tum, ob $e^{2\int vdx}V = \frac{1 - 9ccx^{\frac{2}{3}}}{18c^3}$, prodibit diuisor aequationem integrabilem reddens:

$$(y + 3ccx^{-\frac{1}{3}})^2 - 9ccx^{\frac{2}{3}}yy$$

Casus

## Casus 4. quo $n = \frac{2}{3}$.

77. Pro hac ergo aequatione $dy + yydx - ccx^{-\frac{8}{3}}dx = 0$ est $B = +\frac{A}{3c}$, $C = 0$ etc. vnde integrale particulare:

$$y = \frac{cx^{-\frac{4}{3}} + 2cx^{-\frac{1}{3}} + 1}{3cx^{\frac{2}{3}} + x} = \frac{3ccx^{-\frac{2}{3}} + 3cx^{-\frac{1}{3}} + 1}{3cx^{\frac{2}{3}} + x} = v;$$

et $e^{-2\int vdx} = e^{6cx^{-\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{(3cx^{\frac{2}{3}} + x)^2}$: ex quo porro elicitur:

$$V = \int \frac{e^{6cx^{-\frac{1}{3}}}dx}{(3cx^{\frac{2}{3}} + x)^2} = \frac{-e^{6cx^{-\frac{1}{3}}}(3cx^{\frac{2}{3}} - x)}{18c^3(3cx^{\frac{2}{3}} + x)}.$$

Quare integrale completum erit:

$$e^{6cx^{-\frac{1}{3}}} \cdot \frac{(x - 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 + 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}}}{(x + 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 - 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}}} = \text{Const.}$$

Tum ob $e^{2\int vdx}V = \frac{xx - 9ccx^{\frac{4}{3}}}{18c^4}$ prodit diuisor algebraicus aequationem propositam integrabilem reddens:

$$((x + 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 - 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}})((x - 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 + 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}}).$$

## Casus 5. quo $n = \frac{2}{5}$.

78. Pro hac ergo aequatione $dy + yydx - ccx^{-\frac{8}{5}}dx = 0$ erit $B = -\frac{3A}{5c}$; $C = -\frac{B}{5c} = +\frac{3A}{25cc}$; $D = 0$ etc. ideo-

que integrale particulare:

$$y = cx^{-\frac{4}{5}} + \frac{\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} - \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5c}x^{-\frac{4}{5}}}{x^{\frac{2}{5}} - \frac{3}{5c}x^{\frac{1}{5}} + \frac{3}{25cc}} = cx^{-\frac{4}{5}} + \frac{10ccx^{-\frac{3}{5}} - 3cx^{-\frac{4}{5}}}{25ccx^{\frac{2}{5}} - 15cx^{\frac{1}{5}} + 3}$$

seu $y = \dfrac{25c^3x^{-\frac{2}{5}} - 5ccx^{-\frac{3}{5}}}{25ccx^{\frac{2}{5}} - 15cx^{\frac{1}{5}} + 3} = v$. Vnde integrale completum oritur:

$$e^{-10cx^{\frac{1}{5}}}\cdot\frac{(3 + 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{3}{5}} + 25c^3x^{-\frac{2}{5}}}{(3 - 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{3}{5}} - 25c^3x^{-\frac{2}{5}}} = \text{Const.}$$

Et si huius fractionis ponatur

numerator $(3 + 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{3}{5}} + 25c^3x^{-\frac{2}{5}} = P$, et

denominator $(3 - 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{3}{5}} - 25c^3x^{-\frac{2}{5}} = Q$, erit diuisor aequationem propositam integrabilem reddens $= PQ$.

## Casus 6. quo $n = \frac{3}{5}$.

79. Pro hac ergo aequatione $dy + yydx - ccx^{-\frac{12}{5}}dx = 0$, erit $B = \frac{3A}{5c}$; et $C = \frac{B}{5c} = \frac{3A}{25cc}$; $D = 0$ etc. hincque integrale particulare prodit:

$$y = cx^{-\frac{6}{5}} + \frac{15ccx^{-\frac{2}{5}} + 12cx^{-\frac{1}{5}} + 3}{25ccx^{\frac{3}{5}} + 15cx^{\frac{4}{5}} + 3x} \text{ seu}$$

$$y = \frac{25c^3x^{-\frac{3}{5}} + 30ccx^{-\frac{2}{5}} + 15cx^{-\frac{1}{5}} + 3}{25ccx^{\frac{3}{5}} + 15cx^{\frac{4}{5}} + 3x} = v$$

vnde

vnde integrale completum obtinetur:

$$e^{10cx^{-\frac{1}{3}}}\cdot\frac{(3x-15cx^{\frac{4}{3}}+25ccx^{\frac{5}{3}})y-3+15cx^{-\frac{1}{3}}-30ccx^{-\frac{2}{3}}+25c^{3}x^{-\frac{3}{3}}}{(3x+15cx^{\frac{4}{3}}+25ccx^{\frac{5}{3}})y-3-15cx^{-\frac{1}{3}}-30ccx^{-\frac{2}{3}}-25c^{3}x^{-\frac{3}{3}}}=\text{Const.}$$

Ac neglecto factore exponentiali $e^{10cx^{-\frac{1}{3}}}$, productum ex numeratore et denominatore praebebit diuiſorem, per quem aequatio propoſita diuiſa euadit integrabilis.

## Problema 12.

80. Denotante $i$ numerum quemcunque integrum, exhibere reſolutionem huius aequationis:

$$dy+yydx-ccx^{\frac{-4i}{2i+1}}dx=0.$$

## Solutio.

Cum igitur ſit $n=\frac{i}{2i+1}$, reperietur

$$B=-\frac{(i+1)i}{2(2i+1)c}A$$

$$C=+\frac{(i+2)(i+1)i(i-1)}{2.4(2i+1)^{2}c^{2}}A$$

$$D=-\frac{(i+3)(i+2)(i+1)i(i-1)(i-2)}{2.4.6(2i+1)^{3}c^{3}}A$$

$$E=+\frac{(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)(i-1)(i-2)(i-3)}{2.4.6.8(2i+1)^{4}c^{4}}A$$

etc.

tum vero integrale particulare erit:

$$y=cx^{\frac{-2i}{2i+1}}+\frac{\frac{i}{2i+1}Ax^{\frac{-i-1}{2i+1}}+\frac{i-1}{2i+1}Bx^{\frac{-i-2}{2i+1}}+\frac{i-2}{2i+1}Cx^{\frac{-i-3}{2i+1}}+\frac{i-3}{2i+1}Dx^{\frac{-i-4}{2i+1}}+\text{etc.}}{Ax^{\frac{i}{2i+1}}+Bx^{\frac{i-1}{2i+1}}+Cx^{\frac{i-2}{2i+1}}+Dx^{\frac{i-3}{2i+1}}+\text{etc.}}$$

 quod

quod vt ad eundem denominatorem reducatur, ſtatuamus:

$$\mathfrak{A} = c\mathrm{A}$$
$$\mathfrak{B} = -\frac{i(i-1)}{2(2i+1)}\mathrm{A}$$
$$\mathfrak{C} = +\frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{2\cdot 4(2i+1)^2 c}\mathrm{A}$$
$$\mathfrak{D} = -\frac{(i+2)(i+1)i(i-1)(i-2)(i-3)}{2\cdot 4\cdot 6(2i+1)^3 c^2}\mathrm{A}$$

etc.

vnde fiet:

$$y = \frac{\mathfrak{A}x^{\frac{-i}{2i+1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{-i-1}{2i+1}} + \mathfrak{C}x^{\frac{-i-2}{2i+1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{-i-3}{2i+1}} + \text{etc.}}{\mathfrak{A}x^{\frac{i}{2i+1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{i-1}{2i+1}} + \mathfrak{C}x^{\frac{i-2}{2i+1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{i-3}{2i+1}} + \text{etc.}}$$

Ponamus porro breuitatis gratia:

$$\mathrm{A}x^{\frac{i}{2i+1}} + \mathrm{B}x^{\frac{i-1}{2i+1}} + \mathrm{C}x^{\frac{i-2}{2i+1}} + \mathrm{D}x^{\frac{i-3}{2i+1}} + \text{etc.} = \mathrm{P}$$
$$\mathrm{A}x^{\frac{i}{2i+1}} - \mathrm{B}x^{\frac{i-1}{2i+1}} + \mathrm{C}x^{\frac{i-2}{2i+1}} - \mathrm{D}x^{\frac{i-3}{2i+1}} + \text{etc.} = \mathrm{Q}$$
$$\mathfrak{A}x^{\frac{-i}{2i+1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{-i-1}{2i+1}} + \mathfrak{C}x^{\frac{-i-2}{2i+1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{-i-3}{2i+1}} + \text{etc.} = \mathfrak{P}$$
$$-\mathfrak{A}x^{\frac{-i}{2i+1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{-i-1}{2i+1}} - \mathfrak{C}x^{\frac{-i-2}{2i+1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{-i-3}{2i+1}} - \text{etc.} = \mathfrak{Q}$$

atque integrale completum erit:

$$e^{-2(2i+1)cx^{\frac{+1}{2i+1}}}\,\frac{\mathrm{Q}y - \mathfrak{Q}}{\mathrm{P}y - \mathfrak{P}} = \text{Conſt.}$$

Tum vero diuiſor, aequationem propoſitam reddens integrabilem, erit $= (\mathrm{P}y - \mathfrak{P})(\mathrm{Q}y - \mathfrak{Q})$.

## Coroll. 1.

81. Quodſi ergo in aequatione $dy + yydx + ax^{\frac{-4i}{2i+1}}dx = 0$ coefficiens $a$ fuerit quantitas negatiua, vt poſito $a =$

$\alpha = -cc$, sit $c$ quantitas realis, integrale completum hic inuentum formam habet realem, et quouis casu facile exhiberi potest, pariter ac diuisor, qui aequationem integrabilem reddit.

## Coroll. 2.

82. At si $\alpha$ fuerit quantitas positiua, puta $\alpha = aa$, vt habeatur haec aequatio: $dy + yydx + aax^{\frac{-4i}{2i+1}}dx = 0$, erit $c = a\sqrt{-1}$, et coefficientes B, D, F etc. et $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$ etc. fient imaginarii; vnde valores particulares $y = \frac{\mathfrak{P}}{P}$ et $y = \frac{\mathfrak{Q}}{Q}$ prodibunt imaginarii.

## Coroll. 3.

83. Hoc tamen casu, quo $c = a\sqrt{-1}$ et $cc = -aa$, fient $P + Q$ et $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ quantitates reales, at $P - Q$ et $\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}$ imaginariae. Quodsi ergo ponatur

$$P + Q = 2R;\ P - Q = 2S\sqrt{-1};\ \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} = 2\mathfrak{R}$$
$$\text{et } \mathfrak{P} - \mathfrak{Q} = 2\mathfrak{S}\sqrt{-1}$$

erunt R, S, $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ quantitates reales, et ob

$$P = R + S\sqrt{-1};\ Q = R - S\sqrt{-1};\ \mathfrak{P} = \mathfrak{R} + \mathfrak{S}\sqrt{-1};$$
$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{R} - \mathfrak{S}\sqrt{-1}$$

fiet diuisor, reddens aequationem integrabilem,

$$(RR + SS)yy - 2(R\mathfrak{R} + S\mathfrak{S})y + \mathfrak{R}\mathfrak{R} + \mathfrak{S}\mathfrak{S}$$

ideoque realis.

## Coroll. 4.

84. At eodem casu $c = a\sqrt{-1}$, ob $e^{-p\sqrt{-1}} = \text{cof.}\, p - \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, p$, erit $e^{-2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}}\sqrt{-1}} = \text{cof.}\, 2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}} - \sqrt{-1}.\, \text{fin.}\, 2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}}$; vnde pofito breuitatis gratia $2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}} = p$, erit integrale completum:

$$(\text{cof.}\, p - \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, p).\, \frac{(R - S\sqrt{-1})y - \mathfrak{R} + \mathfrak{S}\sqrt{-1}}{(R + S\sqrt{-1})y - \mathfrak{R} - \mathfrak{S}\sqrt{-1}} = \text{Conft.}$$

quae forma eft imaginaria.

## Coroll. 5.

85. Tribuatur autem conftanti talis forma: $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, et aequatione integrali euoluta, erit:

$$(Ry - \mathfrak{R})\,\text{cof.}\, p - (Ry - \mathfrak{R})\,\text{fin.}\, p\sqrt{-1} - (Sy - \mathfrak{S})\,\text{cof}\, p\sqrt{-1} - (Sy - \mathfrak{S})\,\text{fin.}\, p = (Ry - \mathfrak{R})\alpha - (Ry - \mathfrak{R})\beta\sqrt{-1} + (Sy - \mathfrak{S})\alpha\sqrt{-1} + (Sy - \mathfrak{S})\beta.$$

Iam aequentur feorfim partes reales et imaginariae:

$$(Ry - \mathfrak{R})\,\text{cof.}\, p - (Sy - \mathfrak{S})\,\text{fin.}\, p = \alpha(Ry - \mathfrak{R}) + \beta(Sy - \mathfrak{S})$$
$$(Ry - \mathfrak{R})\,\text{fin.}\, p + (Sy - \mathfrak{S})\,\text{cof.}\, p = \beta(Ry - \mathfrak{R}) - \alpha(Sy - \mathfrak{S})$$

quae duae aequationes conueniunt, fi modo fit $\alpha\alpha + \beta\beta = 1$. Sit ergo $\alpha = \text{cof.}\, \zeta$, et $\beta = \text{fin.}\, \zeta$, prodibitque ex vtraque

$$\frac{Ry - \mathfrak{R}}{Sy - \mathfrak{S}} = \frac{\text{fin.}\, p + \text{fin.}\, \zeta}{\text{cof.}\, p - \text{cof.}\, \zeta} = \text{cot.}\, \frac{\zeta - p}{2}.$$

Coroll. 6.

## Coroll. 6.

86. Sumto ergo pro $\zeta$ angulo quocunque, ſi ſit $c = a\sqrt{-1}$, erit integrale completum aequationis propoſitae

$$\frac{\mathrm{R}y - \mathfrak{R}}{\mathrm{S}y - \mathfrak{S}} = \cot.\frac{\zeta - p}{2}$$

ſeu

$$y = \frac{\mathfrak{R}\sin.\frac{\zeta - p}{2} - \mathfrak{S}\cos.\frac{\zeta - p}{2}}{\mathrm{R}\sin.\frac{\zeta - p}{2} - \mathrm{S}\cos.\frac{\zeta - p}{2}}$$

exiſtente $p = 2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}}$.

## Problema 13.

87. Denotante $i$ numerum quemcunque integrum, exhibere reſolutionem huius aequationis:

$$dy + yy\,dx - cc\,x^{\frac{-4i}{2i-1}}dx = 0.$$

## Solutio.

Quia eſt $n = \frac{i}{2i-1}$, haec reſolutio deriuari poteſt ex ſolutione praecedentis problematis, ponendo $-i$ loco $i$. Quare tribuantur litteris B, C, D, etc. ſequentes valores:

$$\mathrm{B} = +\frac{i(i-1)}{2(2i-1)c}\mathrm{A}$$

$$\mathrm{C} = +\frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{2\cdot4(2i-1)^2c^2}\mathrm{A}$$

$$\mathrm{D} = +\frac{(i+2)(i+1)i(i-1)(i-2)(i-3)}{2\cdot4\cdot6(2i-1)^3c^3}\mathrm{A}$$

etc.

Tum

Tum vero alterarum litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. determinatio ita ſe habebit:

$$\mathfrak{A} = c\,A$$

$$\mathfrak{B} = + \frac{(i+1)i}{2(2i-1)}\,A$$

$$\mathfrak{C} = + \frac{(i+2)(i+1)\,i\,(i-1)}{2\cdot 4\,(2i-1)^2\,c}\,A$$

$$\mathfrak{D} = + \frac{(i+3)(i+\ )(i+1)\,i\,(i-1)(i-2)}{2\cdot 4\cdot 6\,(2i-1)^3\,c^2}\,A$$

etc.

Quibus valoribus conſtitutis, ponatur breuitatis gratia:

$$A x^{\frac{+i}{2i-1}} + B x^{\frac{+i+1}{2i-1}} + C x^{\frac{+i+2}{2i-1}} + D x^{\frac{+i+3}{2i-1}} + \text{etc.} = P$$

$$A x^{\frac{+i}{2i-1}} - B x^{\frac{+i+1}{2i-1}} + C x^{\frac{+i+2}{2i-1}} + D x^{\frac{+i+3}{2i-1}} + \text{etc} = Q$$

$$\mathfrak{A} x^{\frac{-i}{2i-1}} + \mathfrak{B} x^{\frac{-i+1}{2i-1}} + \mathfrak{C} x^{\frac{-i+2}{2i-1}} + \mathfrak{D} x^{\frac{-i+3}{2i-1}} + \text{etc.} = \mathfrak{P}$$

$$-\mathfrak{A} x^{\frac{-i}{2i-1}} + \mathfrak{B} x^{\frac{-i-1}{2i-1}} - \mathfrak{C} x^{\frac{-i+2}{2i-1}} + \mathfrak{D} x^{\frac{-i+3}{2i-1}} - \text{etc.} = \mathfrak{Q}$$

atque hinc ſtatim habentur duae integrationes particulares:

$$\text{I. } y = \frac{\mathfrak{P}}{P}, \text{ et II. } y = \frac{\mathfrak{Q}}{Q}.$$

Tum vero aequatio integralis completa erit:

$$e^{2(2i-1)c\,x^{\frac{-1}{2i-1}}}\;\frac{Qy-\mathfrak{Q}}{Py-\mathfrak{P}} = \text{Conſt.}$$

et diuiſor aequationem propoſitam integrabilem reddens, fiet $= (Py-\mathfrak{P})(Qy-\mathfrak{Q})$.

Coroll.

## Coroll. 1.

88. Quodsi autem aequatio proposita fuerit huiusmodi:

$$dy + yydx + aax^{\frac{-4i}{2i-1}}dx = 0$$

vt sit $cc = -aa$, et $c = a\sqrt{-1}$, integrationes particulares exhibitae fient imaginariae, ob B, D, F, etc. item $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$ etc. imaginarias, dum reliquarum litterarum valores sunt reales.

## Coroll. 2.

89. At si ponatur:

$$P + Q = 2R;\; P - Q = 2S\sqrt{-1};\; \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} = 2\mathfrak{R}$$
$$\text{et } \mathfrak{P} - \mathfrak{Q} = 2\mathfrak{S}\sqrt{-1}$$

quantitates R, S, $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ nihilo minus fient, vt ante, reales, et diuisor aequationem reddens integrabilem erit:

$$(RR + SS)yy - 2(R\mathfrak{R} + S\mathfrak{S})y + \mathfrak{R}\mathfrak{R} + \mathfrak{S}\mathfrak{S}.$$

## Coroll. 3.

90. Tum vero, si ponatur breuitatis causa $2(2i-1)ax^{\frac{-1}{2i-1}} = p$, aequatio integralis completa erit:

$$\frac{Ry - \mathfrak{R}}{Sy - \mathfrak{S}} = \cot.\frac{\zeta + p}{2}$$

vnde elicitur:

$$y = \frac{\mathfrak{R}\sin.\frac{\zeta + p}{2} - \mathfrak{S}\cos.\frac{\zeta + p}{2}}{R\sin.\frac{\zeta + p}{2} - S.\cos.\frac{\zeta + p}{2}}$$

vbi angulus $\zeta$ vicem gerit constantis arbitrariae.

 Scholion.

## Scholion.

91. Solutiones horum duorum postremorum problematum non tam per accuratam analysin sunt euolutae, quam per inductionem ex casibus particularibus supra expeditis deriuatae, quandoquidem progressio ab his casibus ad sequentes satis erat manifesta. Fundamentum autem harum solutionum in hoc potissimum est situm, quod solutio particularis, vnde omnia sunt deducta, re vera est geminata, cum quantitas $v$, cuius quadratum tantum in aequatione differentiali occurrit, aeque negatiue, ac positiue, accipi possit. Quoties autem huiusmodi aequationum binae solutiones particulares sunt cognitae, ex iis multo facilius solutio generalis, indeque multiplicatores, eas integrabiles reddentes, erui possunt, id quod operae pretium erit clarius exposuisse.

## Problema 14.

92. Datis duabus solutionibus particularibus huiusmodi aequationis:

$$dy + Pydx + Qyydx + Rdx = 0$$

inuenire eius solutionem generalem, et multiplicatorem, qui eam integrabilem reddat.

## Solutio.

Sint M et N huiusmodi functiones ipsius $x$, quae loco $y$ substitutae, ambae aequationi propositae satisfaciant, ita vt sit:

$$dM + PMdx + QM^2dx + Rdx = 0$$

et $$dN + PNdx + QN^2dx + Rdx = 0.$$

Ponatur

Ponatur $\frac{y-M}{y-N} = z$, seu $y = \frac{M-Nz}{1-z}$, erit

$$dy = \frac{dM - zdM + Mdz - Ndz - zdN + zzdN}{(1-z)^2}$$

quibus valoribus in aequatione proposita substitutis, et tota aequatione per $(1-z)^2$ multiplicata, prodibit:

$$(1-z)dM - z(1-z)dN + (M-N)dz + P(1-z)Mdx - P(1-z)Nzdx$$
$$+ QMMdx - 2QMNzdx + QNNzzdx + R(1-z)^2dx = 0.$$

Iam pro $dM$ et $dN$ substituantur valores ex binis superioribus aequationibus differentialibus oriundi:

$$\begin{aligned}
&- P(1-z)Mdx - Q(1-z)M^2dx - R(1-z)dx \\
&+ Pz(1-z)Ndx + Qz(1-z)N^2dx + Rz(1-z)dx + (M-N)dz = 0 \\
&+ P(1-z)Mdx + QM^2dx \qquad + R(1-z)^2dx \\
&- Pz(1-z)Ndx - 2QMNzdx \\
&\qquad\qquad + QN^2zzdx
\end{aligned}$$

qua aequatione in ordinem redacta, orietur:

$$QzM^2dx + QzN^2dx - 2QMNzdx + (M-N)dz = 0$$

seu $Q(M-N)dx + \frac{dz}{z} = 0$, ita vt sit:

$$z = Ce^{-\int Q(M-N)dx}$$

vnde aequatio integrata generalis erit:

$$e^{\int Q(M-N)dx}\frac{y-M}{y-N} = \text{Const.}$$

Pro multiplicatore autem inueniendo, notetur, aequationem propositam, facta substitutione primum per $(1-z)^2$, esse multiplicatam, tum vero diuisam per $z(M-N)$, euasisse integrabilem. Statim ergo per $\frac{(1-z)^2}{(M-N)z}$ multiplicata fiet integrabilis: ex quo factor erit $\frac{(1-z)^2}{(M-N)z}$, qui ob $z = \frac{y-M}{y-N}$ hanc induet formam:

$$\frac{M-N}{(y-M)(y-N)}.$$

## Problema 15.

93. Proposita aequatione $ydy + Pydx + Qdx = 0$, inuenire conditiones functionum P et Q, vt huiusmodi multiplicator $(y+M)^n$ eam reddat integrabilem.

## Solutio.

Ex natura ergo differentialium esse oportet:

$$\frac{1}{dx} d.\, y(y+M)^n = \frac{1}{dy} d(Py+Q)(y+M)^n$$

vnde cum M sit functio ipsius $x$ tantum, erit

$$ny(y+M)^{n-1}\frac{dM}{dx} = P(y+M)^n + n(Py+Q)(y+M)^{n-1}$$

quae diuisa per $(y+M)^{n-1}$ abit in hanc:

$$\frac{nydM}{dx} = (n+1)Py + PM + nQ$$

vnde necesse est sit:

$$P = \frac{ndM}{(n+1)dx} \quad \text{et} \quad Q = \frac{-PM}{n} = -\frac{MdM}{(n+1)dx}.$$

His igitur valoribus substitutis aequatio

$$ydy + \frac{nydM}{n+1} - \frac{MdM}{n+1} = 0$$

fit integrabilis, si multiplicetur per $(y+M)^n$.

## Coroll. 1.

94. Quia haec aequatio est homogenea, ea quoque fit integrabilis, si diuidatur per $(n+1)yy + nyM - MM = (y+M)((n+1)y-M)$. Neque ergo hinc nouae aequationes methodo hac tractabiles obtinentur.

## Coroll. 2.

95. Quoniam autem habemus duos multiplicatores $(y+M)^n$ et $\frac{1}{(y+M)((n+1)y-M)}$: si alter per alte-

rum

rum diuidatur, quoties constanti arbitrariae aequatur dabit integrale completum. Quare aequatio $ydy + \frac{nydM}{n+1} - \frac{MdM}{n+1} = 0$ generaliter integrata praebet:

$$(y+M)^{n+1}((n+1)y-M) = \text{Const.}$$

## Problema 16.

96. Proposita aequatione $ydy + Pydx + Qdx = 0$, inuenire conditiones functionum P et Q, vt huiusmodi multiplicator $(yy+My+N)^n$ eam reddat integrabilem.

## Solutio.

Ex natura differentialium fit necesse est:

$$\frac{1}{dx} d.y(yy+My+N)^n = \frac{1}{dy} d.(Py+Q)(yy+My+N)^n$$

Cum igitur M, N, P et Q sint per hypothesin functiones ipsius $x$, erit, facta euolutione:

$$ny(yy+My+N)^{n-1}\left(y\frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dx}\right) = P(yy+My+N)^n$$
$$+ n(Py+Q)(2y+M)(yy+My+N)^{n-1}$$

et post diuisionem per $(yy+My+N)^{n-1}$

$$nyy\frac{dM}{dx} + \frac{nydN}{dx} = (2n+1)Pyy + (n+1)PMy + PN$$
$$+ 2nQy \qquad + nQM$$

Hinc fieri oportet:

I. $ndM = (2n+1)Pdx$

II. $ndN = (n+1)PMdx + 2nQdx$

III. $0 = PN + nQM$

Prima dat $P = \frac{ndM}{(2n+1)dx}$, et vltima $Q = \frac{-PN}{nM}$, seu $Q = \frac{-N\,dM}{(2n+1)M\,dx}$, qui valores in media substituti praebent:

$$n\,dN = \frac{n(n+1)M\,dM}{2n+1} - \frac{2nN\,dM}{(2n+1)M} \text{ seu}$$

$$(2n+1)M\,dN + 2N\,dM = (n+1)MM\,dM$$

quae multiplicata per $M^{\frac{-2n+1}{2n+1}}$ et integrata praebet:

$$(2n+1)M^{\frac{2}{2n+1}}N = \text{Const.} + (n+1)\int M^{\frac{3n+2}{2n+1}}dM$$

seu $(2n+1)M^{\frac{2}{2n+1}}N = \text{Const.} + \frac{2n+1}{4}M^{\frac{4n+4}{2n+1}}$

$$\text{unde fit } N = aM^{\frac{-2}{2n+1}} + \tfrac{1}{4}M^2.$$

Cum ergo sit

$$P\,dx = \frac{n\,dM}{2n+1} \text{ et } Q\,dx = -\frac{aM^{\frac{-2n-3}{2n+1}}dM}{2n+1} - \frac{M\,dM}{4(2n+1)}$$

ista aequatio differentialis:

$$y\,dy + \frac{ny\,dM}{2n+1} + \frac{M\,dM}{4(2n+1)} + \frac{a}{2n+1}M^{\frac{-2n-3}{2n+1}}dM = 0$$

integrabilis redditur, si multiplicetur per

$$(yy + My + \tfrac{1}{4}M^2 + aM^{\frac{-2}{2n+1}})^n.$$

## Coroll. 1.

97. Si fuerit $-\frac{2n-3}{2n+1} = 1$, seu $n = -1$; aequatio differentialis est homogenea, et si $-\frac{2n-3}{2n+1} = 0$ seu $n = -\frac{3}{2}$, primi gradus. Vtroque autem casu nulla est difficultas, cum aequatio facile tractari possit.

Coroll.

## Coroll. 2.

98. Magis ergo abstrusi erunt casus, quibus exponens $-\frac{2n-3}{2n+1}$ neque est $0$, neque $1$. Sit ergo $-\frac{2n-3}{2n+1}=m$, vnde fit $2n=-\frac{m-3}{m+1}$ et aequatio differentialis

$$ydy+\tfrac{1}{4}(m+3)ydM+\tfrac{1}{4}(m+1)MdM+\tfrac{1}{2}\alpha(m+1)M^m dM=0$$

integrabilis reddetur per multiplicatorem

$$(yy+My+\tfrac{1}{4}MM+\alpha M^{m+1})^{\frac{-m-3}{2(m+1)}}$$

## Coroll. 3.

99. Quod si iam pro M functiones quaecunque ipsius $x$ substituantur, aequationes tam complicatae formari poterunt, quas quomodo aliis methodis tractari oporteat, vix liquet, cum tamen hac methodo earum resolutio sit in promtu.

## Scholion.

100. Si quis haec vestigia vlterius prosequi voluerit, dubium est nullum, quin haec methodus mox multo maiora sit acceptura incrementa, quibus vniuersa Analysis non mediocriter promoueatur. Specimina etiam hic euoluta ita sunt comparata, vt viam ad inuestigationes profundiores parare videantur, praecipue si insuper alia aequationum differentialium genera simili modo pertractentur. Verum haec, quae hactenus protuli, sufficere videntur, animis Geometrarum ad ampliorem huius methodi enucleationem incitandis, quem scopum mihi equidem potissimum proposueram.

SOLVTIO

# SOLVTIO PROBLEMATIS
## DE INVESTIGATIONE TRIVM NVMERORVM, QVORVM TAM SVMMA, QVAM PRODVCTVM, NEC NON SVMMA PRODVCTORVM EX BINIS, SINT NVMERI QVADRATI.

Auctore

*L. EVLERO.*

1.

Etsi problemata huius generis, quae Diophantea appellari solent, parum vtilitatis afferre videntur: tamen certum est, Analysin Mathematicam, atque adeo etiam eam partem, quae circa infinita versatur, ex methodo problemata Diophantea soluendi, maxima incrementa cepisse. Non solum autem huiusmodi problemata, si sint difficiliora, fines Analyseos plurimum amplificauerunt: sed etiam vim ingenii mirifice acuere solent, vt etiam in aliis problematibus, quomodo solutionem institui oporteat, facilius perspicere valeat. Quam ob rem huius generis problemata, praecipue si modus soluendi magis fuerit reconditus, minime contemnenda esse arbitror. Dum enim singularia artificia ad eorum solutionem requiruntur, ab iisdem quoque egregia subsidia ad vniuersam Analysin vberius excolendam expectare licebit.

2. Ad hoc autem genus potissimum referendum videtur problema propositum, quandoquidem id diu

et

et multum per varia Methodi Diophanteae artificia frustra tractaui, vt fere etiam de eius solutione penitus desperauerim. Tandem vero, quasi inopinato, solutionem sum consecutus, quae eo magis notatu digna videbatur, quod minimi numeri, quos quidem adhuc satisfacientes elicere potui, sunt ita praegrandes, vt mirum non sit, solutionem tantis difficultatibus fuisse inuolutam. Quare cum methodo singulari ad istam solutionem pertigerim, eius ampliorem explicationem vsu non esse carituram arbitror, cum simili fortasse modo aliae quaestiones multo adhuc difficiliores superari queant.

3. Quaeruntur ergo tres numeri, quibus tres sequentes conditiones conueniant:

I. Vt eorum summa sit numerus quadratus.

II. Vt summa productorum ex binis sit numerus quadratus.

III. Vt productum omnium trium sit numerus quadratus.

Quod problema etiam hoc modo enunciari potest, vt quaeratur aequatio cubica $z^3 - pzz + qz - r = 0$, omnes suas radices habens rationales, cuius singuli coefficientes $p$, $q$ et $r$ sint numeri quadrati. Posset adhuc adiici haec conditio, vt isti numeri sint integri, verum per se est perspicuum, quomodo inuentis ternis numeris fractis satisfacientibus, ex iis facile integri, qui etiam satisfaciant, formari queant. Quicunque enim terni numeri satisfacere fuerint inuenti, iidem per numerum quadratum quemcunque multiplicati aeque satisfacient, quo pacto fractiones facillime tollentur.

4. Sint igitur $nx$, $ny$, $nz$ tres huiusmodi numeri quaesiti, ac satisfieri oportebit his conditionibus:

I. Vt sit $n(x+y+z)=$ Quadrato

II. Vt sit $nn(xy+xz+yz)$ seu $xy+xz+yz=$ Quadrato

III. Vt sit $n^3xyz$ seu $nxyz=$ Quadrato.

At primae et tertiae conditioni satisfiet, si reddatur

$$xyz(x+y+z)=\text{Quadrato}.$$

Ponatur ergo:

$$xyz(x+y+z)=vv(x+y+z)^2$$

vnde per $x+y+z$ diuidendo erit

$$xyz=vv(x+y+z),\text{ hincque } z=\frac{vv(x+y)}{xy-vv}.$$

Cum igitur hinc fiat $xyz=\frac{vvxy(x+y)}{xy-vv}$,

vt $nxyz$ prodeat, quadratum capi debet,

$$n=m^2xy(x+y)(xy-vv)$$

Hisque valoribus pro $z$ et $n$ assumtis, satisfactum erit primae et tertiae conditioni.

5. Hinc itaque nostri tres numeri erunt

primus $nx=mmxxy(x+y)(xy-vv)$

secundus $ny=mmxyy(x+y)(xy-vv)$

tertius $nz=mmvvxy(x+y)^2$

vbi per numerum arbitrarium $m$ fractiones, si quae forte occurrent, tolli poterunt. Verum contemplemur iam secundam conditionem, quae ob $z=\frac{vv(x+y)}{xy-vv}$ requirit, vt sit:

$$xy+\frac{vv(x+y)^2}{xy-vv}=\text{Quadrato}.$$

Pone-

Ponamus in hunc finem:

$xy - vv = uu$; vt fit $y = \frac{vv+uu}{x}$ et $z = \frac{vv(x+y)}{uu}$

erit $xy = vv + uu$ et $x + y = \frac{xx+vv+uu}{x}$

efficiendumque eſt, vt fit

$$vv + uu + \frac{vv(xx+vv+uu)^2}{uuxx} = \text{Quadrato.}$$

6 Ponatur $x = tv$; vt fit $y = \frac{vv+uu}{tv}$, effique debet

$$vv + uu + \frac{(vv(tt+1)+uu)^2}{ttuu} = \text{Quadrato},$$

ſeu multiplicando per $ttuu$

$$ttuuvv + ttu^4 + v^4(tt+1)^2 + 2uuvv(tt+1) + u^4 = \text{Quadrato},$$

ſiue $v^4(tt+1)^2 + uuvv(3tt+2) + u^4(tt+1) = \text{Quadrato.}$
Statuatur huius quadrati radix $= vv(tt+1) + suu$, erit

$$vv(3tt+2) + uu(tt+1) = 2svv(tt+1) + ssuu;$$

vnde elicitur

$$\frac{vv}{uu} = \frac{tt+1-ss}{2s(tt+1)-3tt-2} = \text{Quadrato.}$$

Sit porro $s = t - r$, et habebitur:

$$\frac{vv}{uu} = \frac{2rt-rr+1}{2t^3-(2r+3)tt+2t-2(r+1)}$$

Multiplicetur numerator et denominator per $2rt - rr + 1$, vt fiat

$$\frac{vv}{uu} = \frac{(2rt-rr+1)^2}{4rt^4-2(3rr+3r-1)t^3+(2r^3+3rr+2r-3)tt-2(3r-1)(r+1)t+2(r-1)(r+1)^2}$$

7. Tota ergo quaeſtio huc eſt perducta, vt huius fractionis denominator reddatur quadratum: poſito enim

$$4rt^4 - 2(3rr+3r-1)t^3 + (2r^3+3rr+2r-3)tt$$
$$- 2(3r-1)(r+1)t + 2(r-1(r+1)^2 = QQ$$

 erit

## Scholion.

91. Solutiones horum duorum postremorum problematum non tam per accuratam analysin sunt euolutae, quam per inductionem ex casibus particularibus supra expeditis deriuatae, quandoquidem progressio ab his casibus ad sequentes satis erat manifesta. Fundamentum autem harum solutionum in hoc potissimum est situm, quod solutio particularis, vnde omnia sunt deducta, re vera est geminata, cum quantitas $v$, cuius quadratum tantum in aequatione differentiali occurrit, aeque negatiue, ac positiue, accipi possit. Quoties autem huiusmodi aequationum binae solutiones particulares sunt cognitae, ex iis multo facilius solutio generalis, indeque multiplicatores, eas integrabiles reddentes, erui possunt, id quod operae pretium erit clarius exposuisse.

## Problema 14.

92. Datis duabus solutionibus particularibus huiusmodi aequationis:

$$dy + Pydx + Qyydx + Rdx = 0$$

inuenire eius solutionem generalem, et multiplicatorem, qui eam integrabilem reddat.

## Solutio.

Sint M et N huiusmodi functiones ipsius $x$, quae loco $y$ substitutae, ambae aequationi propositae satisfaciant, ita vt sit:

$$dM + PMdx + QM^2dx + Rdx = 0$$

et $dN + PNdx + QN^2dx + Rdx = 0.$

Ponatur

Ponatur $\frac{y-M}{y-N} = z$, seu $y = \frac{M-Nz}{1-z}$, erit

$$dy = \frac{dM - zdM + Mdz - Ndz - zdN + zzdN}{(1-z)^2}$$

quibus valoribus in aequatione proposita substitutis, et tota aequatione per $(1-z)^2$ multiplicata, prodibit:

$$(1-z)dM - z(1-z)dN + (M-N)dz + P(1-z)Mdx - P(1-z)Nzdx$$
$$+ QMMdx - 2QMNzdx + QNNzzdx + R(1-z)^2dx = 0.$$

Iam pro $dM$ et $dN$ substituantur valores ex binis superioribus aequationibus differentialibus oriundi:

$$\begin{array}{l} -P(1-z)Mdx - Q(1-z)M^2dx - R(1-z)dx \\ +Pz(1-z)Ndx + Qz(1-z)N^2dx + Rz(1-z)dx + (M-N)dz = 0 \\ +P(1-z)Mdx + QM^2dx \qquad + R(1-z)^2dx \\ -Pz(1-z)Ndx - 2QMNzdx \\ \qquad + QN^2zzdx \end{array}$$

qua aequatione in ordinem redacta, orietur:

$$QzM^2dx + QzN^2dx - 2QMNzdx + (M-N)dz = 0$$

seu $Q(M-N)dx + \frac{dz}{z} = 0$, ita vt sit:

$$z = Ce^{-\int Q(M-N)dx}$$

vnde aequatio integrata generalis erit:

$$e^{\int Q(M-N)dx}\frac{y-M}{y-N} = \text{Const.}$$

Pro multiplicatore autem inueniendo, notetur, aequationem propositam, facta substitutione primum per $(1-z)^2$, esse multiplicatam, tum vero diuisam per $z(M-N)$, euasisse integrabilem. Statim ergo per $\frac{(1-z)^2}{(M-N)z}$ multiplicata fiet integrabilis: ex quo factor erit $\frac{(1-z)^2}{(M-N)z}$, qui ob $z = \frac{y-M}{y-N}$ hanc induet formam:

$$\frac{M-N}{(y-M)(y-N)}.$$

## Problema 15.

93. Propofita aequatione $ydy + Pydx + Qdx = 0$, inuenire conditiones functionum P et Q, vt huiusmodi multiplicator $(y+M)^n$ eam reddat integrabilem.

## Solutio.

Ex natura ergo differentialium effe oportet:

$$\frac{1}{dx} d. y(y+M)^n = \frac{1}{dy} d(Py+Q)(y+M)^n$$

vnde cum M fit functio ipfius $x$ tantum, erit

$$ny(y+M)^{n-1}\frac{dM}{dx} = P(y+M)^n + n(Py+Q)(y+M)^{n-1}$$

quae diuifa per $(y+M)^{n-1}$ abit in hanc:

$$\frac{nydM}{dx} = (n+1)Py + PM + nQ$$

vnde neceffe eft fit:

$$P = \frac{ndM}{(n+1)dx} \quad \text{et} \quad Q = \frac{-PM}{n} = -\frac{MdM}{(n+1)dx}$$

His igitur valoribus fubftitutis aequatio

$$ydy + \frac{nydM}{n+1} - \frac{MdM}{n+1} = 0$$

fit integrabilis, fi multiplicetur per $(y+M)^n$.

## Coroll. 1.

94. Quia haec aequatio eft homogenea, ea quoque fit integrabilis, fi diuidatur per $(n+1)yy + nyM - MM = (y+M)((n+1)y-M)$. Neque ergo hinc nouae aequationes methodo hac tractabiles obtinentur.

## Coroll. 2.

95. Quoniam autem habemus duos multiplicatores $(y+M)^n$ et $\frac{1}{(y+M)((n+1)y-M)}$: fi alter per alterum

rum diuidatur, quoties constanti arbitrariae aequatus dabit integrale completum. Quare aequatio $y\,dy + \frac{ny\,dM}{n+1} - \frac{M\,dM}{n+1} = 0$ generaliter integrata praebet:

$$(y+M)^{n+1}((n+1)y-M) = \text{Const.}$$

## Problema 16.

96. Proposita aequatione $y\,dy + Py\,dx + Q\,dx = 0$, inuenire conditiones functionum P et Q, vt huiusmodi multiplicator $(yy+My+N)^n$ eam reddat integrabilem.

## Solutio.

Ex natura differentialium fit necesse est:

$$\frac{1}{dx}\,d.y(yy+My+N)^n = \frac{1}{dy}\,d.(Py+Q)(yy+My+N)^n$$

Cum igitur M, N, P et Q sint per hypothesin functiones ipsius $x$, erit, facta euolutione:

$$ny(yy+My+N)^{n-1}\left(y\frac{dM}{dx}+\frac{dN}{dx}\right) = P(yy+My+N)^n$$
$$+\,n(Py+Q)(2y+M)(yy+My+N)^{n-1}$$

et post diuisionem per $(yy+My+N)^{n-1}$

$$nyy\frac{dM}{dx} + \frac{ny\,dN}{dx} = (2n+1)Pyy + (n+1)PMy + PN$$
$$+\,2nQy \qquad\qquad + nQM$$

Hinc fiere oportet:

I. $n\,dM = (2n+1)P\,dx$

II. $n\,dN = (n+1)PM\,dx + 2nQ\,dx$

III. $0 = PN + nQM$

Prima dat $P = \frac{n\,dM}{(2n+1)dx}$, et vltima $Q = \frac{-PN}{nM}$, seu $Q = \frac{-NdM}{(2n+1)Mdx}$, qui valores in media substituti praebent:

$$ndN = \frac{n(n+1)MdM}{2n+1} - \frac{2nNdM}{(2n+1)M} \text{ seu}$$

$$(2n+1)MdN + 2NdM = (n+1)MMdM$$

quae multiplicata per $M^{\frac{-2n+1}{2n+1}}$ et integrata praebet:

$$(2n+1)M^{\frac{2}{2n+1}}N = \text{Const.} + (n+1)\int M^{\frac{2n+3}{2n+1}}dM$$

seu $(2n+1)M^{\frac{2}{2n+1}}N = \text{Const.} + \frac{2n+1}{4} M^{\frac{4n+4}{2n+1}}$

vnde fit $N = \alpha M^{\frac{-2}{2n+1}} + \frac{1}{4}M^2$.

Cum ergo sit

$$Pdx = \frac{ndM}{2n+1} \text{ et } Qdx = -\frac{\alpha M^{\frac{-2n-3}{2n+1}}dM}{2n+1} - \frac{MdM}{4(2n+1)}$$

ista aequatio differentialis:

$$ydy + \frac{nydM}{2n+1} - \frac{MdM}{4(2n+1)} - \frac{\alpha}{2n+1}M^{\frac{-2n-3}{2n+1}}dM = 0$$

integrabilis redditur, si multiplicetur per

$$(yy + My + \tfrac{1}{4}M^2 + \alpha M^{\frac{-2}{2n+1}})^n.$$

## Coroll. 1.

97. Si fuerit $-\frac{2n+3}{2n+1} = 1$, seu $n = -1$; aequatio differentialis est homogenea, et si $-\frac{2n+3}{2n+1} = 0$ seu $n = -\frac{3}{2}$, primi gradus. Vtroque autem casu nulla est difficultas, cum aequatio facile tractari possit.

Coroll.

## Coroll. 2.

98. Magis ergo abstrusi erunt casus, quibus exponens $-\frac{2n-3}{2n+1}$ neque est o, neque 1. Sit ergo $-\frac{2n-3}{2n+1}=m$, vnde fit $2n=-\frac{m-3}{m+1}$ et aequatio differentialis

$$ydy+\tfrac{1}{2}(m+3)ydM+\tfrac{1}{2}(m+1)MdM+\tfrac{1}{2}\alpha(m+1)M^m dM=0$$

integrabilis reddetur per multiplicatorem

$$(yy+My+\tfrac{1}{4}MM+\alpha M^{m+1})^{\frac{-m-3}{2(m+1)}}$$

## Coroll. 3.

99. Quod si iam pro M functiones quaecunque ipsius $x$ substituantur, aequationes tam complicatae formari poterunt, quas quomodo aliis methodis tractari oporteat, vix liquet, cum tamen hac methodo earum resolutio sit in promtu.

## Scholion.

100. Si quis haec vestigia vlterius prosequi voluerit, dubium est nullum, quin haec methodus mox multo maiora sit acceptura incrementa, quibus vniuersa Analysis non mediocriter promoueatur. Specimina etiam hic euoluta ita sunt comparata, vt viam ad inuestigationes profundiores parare videantur, praecipue si insuper alia aequationum differentialium genera simili modo pertractentur. Verum haec, quae hactenus protuli, sufficere videntur, animis Geometrarum ad ampliorem huius methodi enucleationem incitandis, quem scopum mihi equidem potissimum proposueram.

SOLVTIO

# SOLVTIO PROBLEMATIS
## DE INVESTIGATIONE TRIVM NVMERORVM, QVORVM TAM SVMMA, QVAM PRODVCTVM, NEC NON SVMMA PRODVCTORVM EX BINIS, SINT NVMERI QVADRATI.

Auctore

*L. EVLERO.*

1.

Etsi problemata huius generis, quae Diophantea appellari solent, parum vtilitatis afferre videntur: tamen certum est, Analysin Mathematicam, atque adeo etiam eam partem, quae circa infinita versatur, ex methodo problemata Diophantea soluendi, maxima incrementa cepisse. Non solum autem huiusmodi problemata, si sint difficiliora, fines Analyseos plurimum amplificauerunt: sed etiam vim ingenii mirifice acuere solent, vt etiam in aliis problematibus, quomodo solutionem institui oporteat, facilius perspicere valeat. Quam ob rem huius generis problemata, praecipue si modus soluendi magis fuerit reconditus, minime contemnenda esse arbitror. Dum enim singularia artificia ad eorum solutionem requiruntur, ab iisdem quoque egregia subsidia ad vniuersam Analysin vberius excolendam expectare licebit.

2. Ad hoc autem genus potissimum referendum videtur problema propositum, quandoquidem id diu et

et multum per varia Methodi Diophanteae artificia frustra tractaui, vt fere etiam de eius solutione penitus desperauerim. Tandem vero, quasi inopinato, solutionem sum consecutus, quae eo magis notatu digna videbatur, quod minimi numeri, quos quidem adhuc satisfacientes elicere potui, sunt ita praegrandes, vt mirum non sit, solutionem tantis difficultatibus fuisse inuolutam. Quare cum methodo singulari ad istam solutionem pertigerim, eius ampliorem explicationem vsu non esse carituram arbitror, cum simili fortasse modo aliae quaestiones multo adhuc difficiliores superari queant.

3. Quaeruntur ergo tres numeri, quibus tres sequentes conditiones conueniant:

I. Vt eorum summa sit numerus quadratus.

II. Vt summa productorum ex binis sit numerus quadratus.

III. Vt productum omnium trium sit numerus quadratus.

Quod problema etiam hoc modo enunciari potest, vt quaeratur aequatio cubica $z^3 - pzz + qz - r = 0$, omnes suas radices habens rationales, cuius singuli coefficientes $p$, $q$ et $r$ sint numeri quadrati. Posset adhuc adiici haec conditio, vt isti numeri sint integri, verum per se est perspicuum, quomodo inuentis ternis numeris fractis satisfacientibus, ex iis facile integri, qui etiam satisfaciant, formari queant. Quicunque enim terni numeri satisfacere fuerint inuenti, iidem per numerum quadratum quemcunque multiplicati aeque satisfacient, quo pacto fractiones facillime tollentur.

4. Sint igitur $nx$, $ny$, $nz$ tres huiusmodi numeri quaesiti, ac satisfieri oportebit his conditionibus:

I. Vt sit $n(x+y+z)=$ Quadrato

II. Vt sit $nn(xy+xz+yz)$ seu $xy+xz+yz=$ Quadrato

III. Vt sit $n^3xyz$ seu $nxyz=$ Quadrato.

At primae et tertiae conditioni satisfiet, si reddatur

$$xyz(x+y+z)=\text{Quadrato}.$$

Ponatur ergo:

$$xyz(x+y+z)=vv(x+y+z)^2$$

vnde per $x+y+z$ diuidendo erit

$$xyz=vv(x+y+z),\ \text{hincque}\ z=\frac{vv(x+y)}{xy-vv}.$$

Cum igitur hinc fiat $xyz=\frac{vvxy(x+y)}{xy-vv}$, vt $nxyz$ prodeat, quadratum capi debet,

$$n=m^2xy(x+y)(xy-vv)$$

Hisque valoribus pro $z$ et $n$ assumtis, satisfactum erit primae et tertiae conditioni.

5. Hinc itaque nostri tres numeri erunt

primus $nx=mmxxy(x+y)(xy-vv)$

secundus $ny=mmxyy(x+y)(xy-vv)$

tertius $nz=mmvvxy(x+y)^2$

vbi per numerum arbitrarium $m$ fractiones, si quae forte occurrent, tolli poterunt. Verum contemplemur iam secundam conditionem, quae ob $z=\frac{vv(x+y)}{xy-vv}$ requirit, vt sit:

$$xy+\frac{vv(x+y)^2}{xy-vv}=\text{Quadrato}.$$

Pone-

Ponamus in hunc finem:

$xy - vv = uu$; vt sit $y = \frac{vv+uu}{x}$ et $z = \frac{vv(x+y)}{uu}$

erit $xy = vv + uu$ et $x + y = \frac{xx+vv+uu}{x}$

efficiendumque est, vt sit

$$vv + uu + \frac{vv(xx+vv+uu)^2}{uuxx} = \text{Quadrato.}$$

6 Ponatur $x = tv$; vt sit $y = \frac{vv+uu}{tv}$, esseque debet

$$vv + uu + \frac{(vv(tt+1)+uu)^2}{ttuu} = \text{Quadrato},$$

seu multiplicando per $ttuu$

$$ttuuvv + ttu^4 + v^4(tt+1)^2 + 2uuvv(tt+1) + u^4 = \text{Quadrato},$$

siue $v^4(tt+1)^2 + uuvv(3tt+2) + u^4(tt+1) = \text{Quadrato.}$

Statuatur huius quadrati radix $= vv(tt+1) + suu$, erit

$$vv(3tt+2) + uu(tt+1) = 2svv(tt+1) + ssuu;$$

vnde elicitur

$$\frac{vv}{uu} = \frac{tt+1-ss}{2s(tt+1)-3tt-2} = \text{Quadrato.}$$

Sit porro $s = t - r$, et habebitur:

$$\frac{vv}{uu} = \frac{2rt-rr+1}{2t^3-(2r+3)tt+2t-2(r+1)}$$

Multiplicetur numerator et denominator per $2rt - rr + 1$, vt fiat

$$\frac{vv}{uu} = \frac{(2rt-rr+1)^2}{4rt^4-2(3rr+3r-1)t^3+(2r^3+3rr+2r-3)tt-2(3r-1)(r+1)t+2(r-1)(r+1)^2}$$

7. Tota ergo quaestio huc est perducta, vt huius fractionis denominator reddatur quadratum: posito enim

$$4rt^4 - 2(3rr+3r-1)t^3 + (2r^3+3rr+2r-3)tt$$
$$-2(3r-1)(r+1)t + 2(r-1(r+1)^2 = QQ$$

 erit

erit definitis hinc $t$ et $r$

$$\frac{v}{u} = \frac{2rt - rr + 1}{Q}, \text{ tum vero } x = tv \text{ et } y = \frac{vv + uu}{tv}$$

vnde numeri quaesiti definientur. Ante autem, quam ad istam aequationem pertigimus, solutionem iam limitauimus positione $xy - vv = uu$; quae restrictio probe est notanda, quoniam nullum est dubium, quin eiusmodi extent solutiones, in quibus $xy - vv$ non sit numerus quadratus, easque propterea hinc non reperiemus. Verum hanc limitationem ideo facere sum coactus, vt ad istam formulam quadrato aequandam peruenire licuerit, quippe quae ita est comparata, vt per cognita artificia resolui possit. Sicque tota solutionis vis in reductionibus §. praeced. est sita.

8. Pluribus autem casibus haec formula et quidem infinitis modis quadratum effici potest, quorum praecipui, et qui statim se offerunt sunt: 1°). Si coefficiens ipsius $t^4$, scilicet $4r$, seu $r$, fuerit numerus quadratus. 2°) Si terminus vltimus $2(r-1)(r+1)^2$ seu $2(r-1)$ fuerit numerus quadratus: vtroque enim casu per regulas cognitas valores idonei pro $t$ elici, tum vero porro ex quolibet alii noui inueniri possunt. Sin autem simul et $r$ et $2(r-1)$ fuerint quadrata, vna operatione plures valores idoneos pro $t$ eruere licet, neque vero hic, vt plerumque fieri solet, solutio simplicior se offert; etsi enim si $2(r-1) =$ quadrato, satisfacit valor $t = 0$, tamen inde prodit $x = 0$ et $y = \infty$, qui valores pro natura quaestionis plane sunt incongrui. Excluduntur enim solutiones, quibus vnus trium numerorum quaesitorum euanesceret, quia tum quaestio

quaestio esset facillima et circa duos numeros versaretur, quorum tam summa, quam productum, esset quadratum.

## Casus I. quo ponitur $r = 1$.

9. Hic casus simplicissimus videtur, quia vltimus terminus nostrae formae euanescit, primusque fit quadratus. Habemus ergo

$$4t^4 - 10t^3 + 4tt - 8t = QQ \text{ et } \frac{v}{u} = \frac{2t}{Q}.$$

Ad hanc aequationem soluendam statuamus $Q = 2tt - \frac{5}{2}t$ eritque:

$$4tt - 8t = \frac{25}{4}tt;\ \frac{9}{4}t = -8;\ \text{et } t = -\frac{32}{9}.$$

At hinc fiet $\frac{v}{u} = \frac{4}{4t-5} = \frac{-36}{173}$; vnde habebimus

$$v = -36;\ u = 173;\ t = \frac{-32}{9} \text{ et } x = tv = 128$$

indeque porro $y = \frac{36^2 + 173^2}{128} = \frac{31225}{128} = \frac{25 \cdot 1249}{128}$.

Erit ergo $x + y = \frac{47609}{128}$ et $z = \frac{36^2 \cdot 47609}{173^2 \cdot 128}$

ac tres numeri quaesiti erunt, ob $xy - vv = uu$,

$$\text{Primus} = \frac{128^2 \cdot 25 \cdot 1249 \cdot 47609 \cdot 173^2}{128 \cdot 128} mm$$

$$\text{Secundus} = \frac{128 \cdot 25^2 \cdot 1249^2 \cdot 47609 \cdot 173^2}{128^2 \cdot 128} mm$$

$$\text{Tertius} = \frac{36^2 \cdot 128 \cdot 25 \cdot 1249 \cdot 47609^2}{128 \cdot 128^2} mm.$$

10. Ad fractiones tollendas ponamus $m = \frac{128}{5}$, eruntque terni nostri numeri

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Primus} = 128^2 \cdot 173^2 \cdot 1249 \cdot 47609 & = 128^2 \cdot 173^2 \\ \text{Secundus} = 5^2 \cdot 173^2 \cdot 1249^2 \cdot 47609 & = 5^2 \cdot 173^2 \cdot 1249 \\ \text{Tertius} = 36^2 \cdot 1249 \cdot 47609^2 & = 36^2 \cdot 47609 \end{array}\right\} \text{in } 1249 \cdot 47609$$

quibus numeris euolutis erit

Primus $= 490356736 . 59463641$

Secundus $= 934533025 . 59463641$

Tertius $= 61701264 . 59463641$

quorum productum manifesto est quadratum a quippe

$5^2 . 36^2 . 128^2 . 173^4 . 1249^4 . 47609^4$.

Summa autem reperitur

$25 . 59463641^2$

et summa productorum ex binis:

$173^2 . 59463641^2 . 18248924559376$

cuius radix quadrata est $173 . 59463641 . 4271876$

11. Pro eadem aequatione resoluenda poni potest $Q = 2tt - \frac{5}{2}t - \frac{9}{16}$, vt tres primores termini tollantur, ac prodibit

$-8t = +\frac{45}{16}t + \frac{81}{256}$, seu $0 = 173t + \frac{81}{16}$, ergo $t = \frac{-81}{16.173}$.

Hinc $Q = \frac{81^2}{128 . 173^2} + \frac{405}{32 . 173} - \frac{9}{16} = -\frac{9 . 207563}{128 . 173^2}$

et $\frac{v}{u} = \pm \frac{144 . 173}{207563}$. Sumi enim potest valor ipsius Q tam negatiue quam positiue. Statuatur ergo

$v = -144 . 173$; $u = 207563$; erit $x = 9 . 81 = 729$

et $y = \frac{vv + ux}{729}$; vnde iam manifestum est, ad tam enormes perueniri numeros, vt solutio praecedens prae hac multo simplicior sit aestimanda. Superfluum autem foret, huiusmodi solutiones nimis complicatas vlterius euoluere, quia in huius generis quaestionibus solutione simplicissima plerumque contenti esse solemus.

Casus

## Casus 2. quo ponitur $r = \frac{5}{2}$.

12. Hac positione vltimus formulae nostrae terminus fit quadratum, eritque $\frac{v}{u} = \frac{12t-5}{4Q}$, existente

$$QQ = 6t^4 - \tfrac{41}{2}t^3 + \tfrac{27}{2}tt - \tfrac{35}{2}t + \tfrac{25}{4}.$$

Iam, ad tres terminos vltimos tollendos, statuatur

$$Q = \tfrac{5}{2} - \tfrac{7}{2}t + \tfrac{1}{4}tt, \text{ eritque}$$

$$6t^4 - \tfrac{41}{2}t^3 = \tfrac{1}{16}t^4 - \tfrac{7}{4}t^3 \text{ et } t = \tfrac{60}{19}$$

hincque $Q = \frac{4375}{722}$ et $\frac{v}{u} = \frac{19}{14}$, vnde $v = 19$ et $u = 14$. Nunc igitur erit $x = tv = 60$; et $y = \frac{vv+uu}{x} = \frac{557}{60}$ ideoque $x + y = \frac{4157}{60}$ et tres numeri quaesiti:

$$\text{Primus} = \frac{60^2 \cdot 557 \cdot 4157 \cdot 196}{60 \cdot 60} mm = 14^2 \cdot 60^2 \cdot 557 \cdot 4157$$

$$\text{Secundus} = \frac{60 \cdot 557^2 \cdot 4157 \cdot 196}{60 \cdot 60 \cdot 60} mm = 14^2 \cdot 557^2 \cdot 4157$$

$$\text{Tertius} = \frac{361 \cdot 60 \cdot 557 \cdot 4157^2}{60 \cdot 60 \cdot 60} mm = 19^2 \cdot 557 \cdot 4157^2$$

posito $m = 60$: hique numeri iam notabiliter sunt minores quam ii, qui casu primo sunt inuenti.

13. Quoniam ergo hi numeri ob paruitatem attentione digni videntur, ii ita exhibeantur:

Primus $= 705600 \cdot 2315449$
Secundus $= 109172 \cdot 2315449$
Tertius $= 1500677 \cdot 2315449$.

Quorum numerorum summa est $= 2315449^2$, et productum $= 14^4 \cdot 19^2 \cdot 60^2 \cdot 557^4 \cdot 4157^4$, sicque vterque numerus quadratus.
At summa productorum ex binis erit

$$(14^2 \cdot 60^2 \cdot 14^2 \cdot 557 + 14^2 \cdot 60^2 \cdot 19^2 \cdot 4157 + 14^2 \cdot 557 \cdot 19^2 \cdot 4157)\, 2315449^2$$

quae

quae reducitur ad hanc formam:

$$14^2 \cdot 2315449^2 \cdot 6631333489$$

cuius radix quadrata est

$$14 \cdot 2315449 \cdot 81433.$$

Sunt autem hi numeri circiter 15000 vicibus minores, quam primum inuenti.

## Casus 3. quo ponitur $r=3$.

14. Posito $r=3$, fit $\frac{v}{u}=\frac{6t-8}{Q}$, et habebitur haec aequatio resoluenda:

$$QQ=12t^4-70t^3+84tt-64t+64.$$

Iam ad ternos vltimos terminos tollendos statuatur

$$Q=8-4t+\tfrac{17}{4}tt\text{, eritque}$$

$$12t^4-70t^3=\tfrac{289}{16}t^4-34t^3$$

vnde elicitur $t=-\frac{576}{97}$. et $Q=\pm\frac{8 \cdot 213601}{97 \cdot 97}$

Ergo $\frac{v}{u}=-\frac{97 \cdot 529}{213601}=-\frac{97 \cdot 23}{9287}=-\frac{23 \cdot 97}{37 \cdot 251}$.

ideoque $v=-23 \cdot 97$ et $u=37 \cdot 251$: tum $x=tv=23 \cdot 24^2$ et $y=\frac{91225780}{23 \cdot 24^2}$. Verum facile perspicitur, hos numeros in immensum excrescere, vnde iis euoluendis supersedemus. Contemplemur ergo adhuc vnum casum, quo tam primus, quam vltimus terminus formulae $QQ$ fiunt quadrati.

## Casus 4. quo ponitur $r=9$.

15. Posito $r=9$, fit $\frac{v}{u}=\frac{18t-80}{Q}$, existente

$$QQ=36t^4-538t^3+1716tt-520t+1600$$

Tollamus terminos primum et duos vltimos, ponendo

$$Q=40-\tfrac{13}{2}t\pm 6tt\text{, et habebimus}$$

$$-538t^3+1716tt=\mp 78t^3\pm 480tt+\tfrac{169}{4}tt$$

vnde

vnde elicimus pro vtroque ſigno

$$\left.\begin{array}{ll}\text{ſuperiori} & t = \frac{5\cdot 191}{16\cdot 23} \\ \text{inferiori} & t = \frac{5\cdot 1723}{32\cdot 77}\end{array}\right\}\ \text{vtrinque autem prodeunt numeri nimis magni.}$$

Tollamus ergo tres terminos vltimos, ponendo

$$Q = 40 - \tfrac{15}{8}t + \tfrac{1359}{64}tt;$$

hinc autem numeri multo adhuc maiores reſultant. Poſſet porro pro binis terminis primis cum vltimo tollendis poni $Q = 6tt - \frac{269}{6}t \pm 40$, verum hinc multo minus ad numeros ſimpliciores perueniemus.

16. Ex his ſatis tuto concludi poſſe videtur, minimos numeros problemati ſatisfacientes eſſe eos, quos §. 13. elicuimus, qui ergo, ſi penitus per multiplicationem euoluantur, erunt:

Primus $= 1633780814400.$

Secundus $= 252782198228.$

Tertius $= 347474105 8973.$

Sin autem in fractionibus numeri ſatisfacientes ſimpliciſſimi deſiderentur, ii indidem aſſignari poterunt, his per $2315449^2$ diuidendis: ita vt hi numeri futuri ſint:

Primus $= \frac{705600}{2315449}$

Secundus $= \frac{196}{4157}$

Tertius $= \frac{161}{557}.$

quorum tam ſumma, quam ſumma productorum ex binis, et omnium trium productum, ſunt numeri quadrati.

# THEOREMATA ARITHMETICA NOVA METHODO DEMONSTRATA.

Auctore

L. EVLERO.

Praeter varias computandi operationes, quae vulgo in Arithmetica tradi solent, huiusque disciplinae quasi partem practicam constituunt, eiusdem pars Theoretica, quae in indaganda numerorum natura versatur, non minus iam olim tractari est coepta, quemadmodum ex *Euclide* et *Diophanto* intelligere licet, vbi insignes numerorum proprietates erutae reperiuntur ac demonstratae. Quo magis autem deinceps numerorum indolem et affectiones Mathematici sunt scrutati, multo plures eorum proprietates obseruauerunt, vnde pulcherrima Theoremata numerorum naturam illustrantia deriuauere, quae partim demonstrationibus sunt munita, partim etiam nunc iis indigent, siue quod eae ab auctoribus non sint inuentae, siue temporum iniuria deperditae: ex quo genere plurima passim occurrunt huiusmodi Theoremata numerica, quorum demonstrationes adhuc desiderantur, etiamsi eorum veritatem in dubium vocare non liceat. Atque hic insigne discrimen, quod inter Theoremata arithmetica et geometrica intercedit, non parum mirari debemus, quod vix vlla propositio geometrica proferri possit, quam non sit in promtu, siue veram, siue falsam, ostendere,

dum

dum contra multae circa numerorum naturam notae sint propositiones, quarum veritatem nobis agnoscere, neutiquam vero demonstrare liceat. Magna huiusmodi Theorematum copia a *Fermatio* relicta habetur, quorum demonstrationes maximam partem se inuenisse affirmauit, quas cum eius scriptis interiisse in eximium huius scientiae detrimentum non parum est dolendum. Quot autem talium Theorematum demonstrationes vel sunt cognitae, vel restitutae, in iis certe multo maior vis ingenii elucet, quam vix in vllo alio demonstrationum genere deprehendimus; vnde in hoc negotio non tam vtilitas, qua scientia numerorum illustratur, est aestimanda, quam maxima subtilitas, qua huiusmodi demonstrationes prae aliis distinguuntur. Atque ob hanc causam, cum iam saepius, quam plerisque aequum videri queat, in hoc genere laborauerim, operam mihi equidem non perdidisse videor, neque etiam nunc theoremata, quae hic propono, vtilitate caritura confido. Notatu imprimis dignum visum est Theorema illud *Fermatii*, quo omnes numeros in hac formula $a^{p-1}-1$ contentos, semper diuisibiles esse per numerum $p$, siquidem is fuerit primus, neque tamen $a$ per eum diuisionem admittat, affirmauit, cuius Theorematis iam geminam dedi demonstrationem. Nunc autem idem in latiori sensu contemplor, atque in genere, si diuisor non sit numerus primus, sed quicunque N, inuestigo, cuiusmodi exponentem potestati cuicunque tribui oporteat, vt expressio $a^n-1$ semper sit diuisibilis per numerum N, dummodo numerus $a$ cum eo nullum habeat diuisorem communem. Inueni autem hoc semper vsu venire, quoties exponens $n$ aequalis fuerit multitudini numerorum ipso N minorum, qui sint ad N primi. Ad hoc ergo demonstrandum, ante omnia huiusmodi theorematibus est opus, ex quibus, proposito numero quocunque N, cognosci possit, quot inter numeros ipso minores futuri sint ad eum primi, seu qui nullum cum eo habeant communem diuisorem; quae theoremata iam ipsa, multo ampliorem vsum habere, atque ad alias magis abscondita numerorum proprietates aditum parere, videntur. Iis autem praemissis, demonstratio veritatis propositae ita est comparata, vt maiore attentione non indigna videatur.

## Theorema 1.

1. Si per numerum quemcunque $n$ termini progressionis arithmeticae cuiuscunque, cuius differentia sit numerus ad $n$ primus, diuidantur, inter residua occurrent omnes numeri diuisore $n$ minores.

## Demonstratio.

Sit progressionis arithmeticae terminus primus $=a$, et differentia $=d$, quae sit ad $n$ numerus primus, seu quae cum numero $n$ nullum praeter vnitatem habeat diuisorem communem, ita vt progressio arithmetica futura sit:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, \text{ etc.}$$

ac dico: si singuli termini per numerum $n$ diuidantur, inter residua omnes numeros ipso $n$ minores occurrere.

Ad

Ad hoc demonstrandum sufficiet huius progressionis tantum $n$ terminos considerasse, qui sunt:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots a+(n-1)d.$$

Quodsi ergo isti termini singuli per $n$ diuidantur, omnia residua inter se diuersa esse oportet. Si enim duo termini, veluti $a+\mu d$ et $a+\nu d$, existentibus $\mu$ et $\nu$ numeris ipso $n$ minoribus, per $n$ diuisi paria praeberent residua, eorum differentia $(\nu-\mu)d$ vtique per $n$ esset diuisibilis. Cum autem numeri $d$ et $n$ nullum habeant diuisorem communem, necesse esset, vt $\nu-\mu$ diuisionem per $n$ admitteret; id quod esset absurdum, ob $\nu-\mu < n$. Quare cum omnia illa residua sint diuersa, eorumque numerus, vtpote terminorum numero aequalis, sit $=n$, in iis omnes plane numeri ipso $n$ minores occurrent, scilicet:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots (n-1)$$

siquidem differentia progressionis $d$ sit numerus ad diuisorem propositum $n$ primus. Q. E. D.

## Coroll. 1.

2. Inter terminos ergo progressionis arithmeticae cuiuscunque, quorum numerus est $n$, dummodo differentia eius ad $n$ sit numerus primus, certe reperitur vnus, qui per $n$ est diuisibilis: tum vero etiam aderit vnus, qui per $n$ diuisus datum residuum $r$ relinquit.

## Coroll. 2.

3. Si ergo numerus $d$ ad $n$ fuerit primus, semper numerus huius formae $a+\nu d$ exhiberi potest, existente

existente $a$ numero quocunque et $\nu$ minore quam $n$, qui per numerum $n$ fit diuisibilis, atque etiam sub iisdem conditionibus semper talis dabitur numerus $a+\nu b$, qui per $n$ diuisus datum relinquat residuum $r$.

## Coroll. 3.

4. Datis igitur numeris $a$ et $d$, quorum hic $d$ ad $n$ sit primus, semper inuenire licet numeros $\mu$ et $\nu$, vt aequationi huic: $a+\nu d=\mu n$, vel etiam huic: $a+\nu d=\mu n+r$ satisfiat, quicunque numerus minor quam $n$ pro $r$ assumatur.

## Scholion.

5. Quod de progressionis arithmeticae terminorum numero $n$ demonstrauimus, id de tota progressione in infinitum continuata valet: termini enim, qui post illos $n$ terminos sequuntur, eadem ordine reproducunt residua, si per $n$ diuidantur. Ita terminorum post $a+(n-1)d$ sequentium, qui sunt $a+nd$, $a+(n+1)d$; $a+(n+2)d$ etc. per $n$ diuisorum residua, conueniunt cum residuis ex terminis initialibus $a$, $a+d$, $a+2d$, etc. natis. Atque si tota series in infinitas periodos distribuatur, cuique $n$ terminos tribuendo, hoc modo:

$$a, a+b \ldots a+(n-1)b \,|\, a+nb \ldots a+(2n-1)b \,|\, a+2nb \ldots a+(n-1)b \,|$$

termini cuiuslibet periodi eadem praebebunt residua, eodemque ordine disposita; omnium enim periodorum termini cum primi, tum secundi, et tertii etc. constanter paria dabunt residua. Quare si rationem residuorum

duorum cognoscere velimus, sufficit vnicam periodum examinasse.

## Theorema 2.

6. In progressione arithmetica, cuius terminorum numerus est $=n$, totidem termini erunt ad numerum $n$ primi, quot inter numeros ipso $n$ minores dantur ad $n$ primi, dummodo differentia progressionis fuerit ad $n$ numerus primus.

## Demonstratio.

Sit enim $a$ terminus primus, et $d$ differentia progressionis, quae sit ad $n$ numerus primus, ideoque ipsa progressio $n$ continens terminos:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots\ldots\ a+(n-1)d.$$

Quoniam igitur, si hi termini per numerum $n$ diuidantur, inter residua occurrunt omnes plane numeri ipso $n$ minores; ponamus ex termino quocunque $a+\nu d$ resultare residuum $r$, ac manifestum est, si $r$ fuerit numerus ad $n$ primus, illum quoque terminum $a+\nu d$ ad $n$ fore primum, sin autem $r$ cum $n$ habeat quempiam diuisorem communem, idem quoque erit diuisor communis numerorum $n$ et $a+\nu d$. Quare quot inter numeros ipso $n$ minores fuerint numeri ad $n$ primi, totidem quoque inter terminos progressionis arithmeticae propositae habebuntur numeri ad $n$ primi. Q. E. D.

## Coroll. 1.

7. Si $n$ fuerit numerus primus, quia omnes numeri, ipso minores, ad ipsum quoque sunt primi, quorum

quorum numerus ergo est aequalis $= n - 1$; in illa etiam progressione arithmetica omnes termini praeter vnum erunt ad $n$ primi, quippe vnus per $n$ est diuisibilis.

## Coroll. 2.

8. Sin autem $n$ fuerit numerus compositus, inter numeros ipso minores dabuntur quipiam, qui cum eo diuisorem habeant communem; totidemque vero etiam reperientur in progressione arithmetica, quibus iidem communes diuisores cum $n$ conueniant.

## Coroll. 3.

9. Ita si sit $n = 6$, quia inter numeros senario minores sunt duo ad 6 primi, scilicet 1 et 5; in omni progressione arithmetica 6 terminorum:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ a+5d$$

duo tantum erunt ad 6 primi, dummodo differentia $d$ sit ad 6 numerus primus. Ita si capiatur $a = 4$; $d = 5$, horum sex numerorum 4, 9, 14, 19, 24, 29, duo, scilicet 19 et 29, ad 6 sunt primi, vnus 24 per 6 diuisibilis, reliqui vero 4, 9, 14 ad 6 compositi perinde ac 2, 3, 4.

## Scholion.

10. Haec Theoremata in doctrina et contemplatione naturae numerorum insignem habent vsum, hic autem ea solum adhibere visum est ad hanc quaestionem enodandam: *Proposito numero quocunque* n, *quot inter numeros ipso minores futuri sint ad eundem numerum*

rum n *primi*? Statim quidem patet si $n$ sit numerus primus, omnes numeros ipso minores simul ad eum fore primos, eorumque idcirco numerum esse $= n - 1$. Verum si $n$ sit numerus compositus, multitudo numerorum ipso minorum ad eumque primorum est minor, quanta autem sit quouis casu, non tam facile assignari potest. Ita, si sit $n = 12$, inter numeros minores tantum quatuor reperiuntur ad 12 primi, scilicet 1, 5, 7, 11: et si sit $n = 60$, numeri minores ad eum primi sunt:

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59

quorum numerus est 16: vnde reliqui 43 omnes cum 60 diuisores habent communes. Moneri hic conuenit, vnitatem ad omnes plane numeros esse numerum primum, etiamsi omnium sit diuisor; id quod ex definitione est euidens, qua numeri dicuntur esse inter se primi, qui praeter vnitatem alium nullum agnoscunt diuisorem.

## Theorema 3.

11. Si $n$ sit potestas quaecunque numeri primi $p$, seu $n = p^m$, inter numeros ipso minores tot erunt ad eum primi, quot vnitates continentur in $p^m - p^{m-1} = p^{m-1}(p-1)$.

## Demonstratio.

Multitudo omnium numerorum potestate $n = p^m$ minorum est $p^m - 1$, inter hos autem reperiuntur quidam, qui ad $n$ non sunt primi; omnia scilicet ipsius $p$ multipla, minora quam $n$, nullique alii praeterea: ex quo sequentes numeri ad $n$ non erunt primi:

$$p,\ 2p,\ 3p,\ 4p\ \text{--------}\ p^m - p$$

quorum numerus est $p^{m-1}-1$; quo ablato a numero omnium ipso $n = p^m$ minorum, relinquitur multitudo eorum, qui ad $p^m$ sunt primi, quorum numerus itaque est $= p^m - p^{m-1} = p^{m-1}(p-1)$. Q. E. D.

## Coroll. 1.

12. Hinc igitur primo sequitur, id quod per se est manifestum, si sit $n = p$, existente $p$ numero primo, numerum omnium numerorum ipso minorum ad eumque primorum esse $= p - 1$, siquidem omnes numeri ipso minores simul sunt ad eum primi.

## Coroll. 2.

13. At si sit $n = p^2$, inter numeros ipso minores, multitudo eorum, qui ad eum sunt primi, est $= pp - p = p(p-1)$; reliqui, quorum numerus est $p-1$, ad $n = p^2$ erunt compositi, seu per $p$ diuisibiles.

## Coroll. 3.

14. Proposita autem numeri primi potestate quacunque $n = p^m$, inter numeros ipso minores, quorum multitudo est $= p^m - 1$, reperiuntur $p^{m-1} - 1$, qui sunt per $p$ diuisibiles, ideoque ad $p^m$ non primi: reliqui vero omnes, quorum numerus est $= p^m - p^{m-1} = p^{m-1}(p-1)$ ad $p^m$ sunt primi.

## Scholion.

15. Si ergo numerus propositus $n$ fuerit potestas cuiuspiam numeri primi, ope huius regulae assignare pote-

poterimus, quot inter omnes numeros ipſo minores futuri ſint ad eum primi. Quando autem numerus $n$, ex duobus pluribusue numeris primis fuerit conflatus, hinc nondum iſta quaeſtio confici poteſt: praecedentibus autem Theorematibus adhibendis iſtam quaeſtionem latius patentem reſoluere poterimus.

## Theorema 4.

16. Si numerus $n$ ſit productum duorum numerorum primornm $p$ et $q$, ſeu $n = pq$, multitudo omnium numerorum ipſo minorum ad eumque primorum eſt $= (p-1)(q-1)$.

## Demonſtratio.

Cum numerus omnium numerorum ipſo $n = pq$ minorum ſit $pq-1$, hinc primum ii debent excludi, qui per $p$ ſunt diuiſibiles, deinde vero etiam ii, qui per $q$, hisque deletis relinquetur multitudo quaeſita. Notentur ergo ab vnitate vsque ad $pq$ numeri, qui ſunt ad $p$ primi, hoc modo:

$$\begin{array}{cccccc}
1, & 2, & 3, & 4, & \cdots & p-1 \\
p+1, & p+2, & p+3, & p+4 & \cdots & 2p-1 \\
2p+1, & 2p+2, & 2p+3, & 2p+4 & \cdots & 3p-1 \\
3p+1, & 3p+2, & 3p+3, & 3p+4 & \cdots & 4p-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(q-1)p+1; & (q-1)p+2, & (q-1)p+3, & (q-1)p+4 & \cdots & pq-1
\end{array}$$

atque iam ex his ii tantum eligi debent, qui ſimul quoque ad $q$ sunt primi. Considerentur ergo series verticales, quarum numerus est $p-1$; quaelibet autem continet $q$ terminos in arithmetica progressione crescentes, differentia existente $p$, quae est ad $q$ numerus primus. In qualibet ergo serie verticali omnes termini praeter vnum ad $q$ erunt primi (per §. 7.); vnde vnaquaeque series verticalis continet $q-1$ numeros ad $q$ primos. Quare cum numerus serierum verticalium sit $p-1$, in omnibus continentur simul $(p-1)(q-1)$ numeri ad $q$ primi, iidemque igitur etiam ad productum $pq$ erunt primi; consequenter inter omnes numeros ipso $pq$ minores reperientur $(p-1)(q-1)$ numeri ad $pq$ primi. Q. E. D.

## Coroll. 1.

17. Cum multitudo omnium numerorum ipso producto $pq$ minorum sit $pq-1$, inter eos semper sunt $(p-1)(q-1) = pq-p-q+1$ primi ad $pq$, reliqui vero, quorum numerus est $p+q-2$, ad eum sunt compositi, seu cum eo communem habent diuisorem vel $p$, vel $q$.

## Coroll. 2.

18. Hoc etiam inde patet, quod inter numeros ipso producto $pq$ minores sint $q-1$ numeri per $p$ diuisibiles, scilicet:

$$p,\ 2p,\ 3p,\ 4p \ldots\ldots\ldots (q-1)p$$

deinde inter eosdem sunt $p-1$ numeri per $q$ diuisibiles, nempe:

$$q,\ 2q,\ 3q,\ 4q \ldots\ldots\ldots (p-1)q$$

qui cum ab illis omnes sint diuersi, omnino habentur

$(q-1)$

$(q-1)+(p-1)=p+q-2$ numeri, qui ad $pq$ non sunt primi.

## Coroll. 3.

19. Si ergo quaeratur, quot ab 1 vsque ad 15 sint numeri ad 15 primi? ob $p=3$ et $q=5$, regula docet eorum numerum esse $2 \cdot 4 = 8$, quippe qui sunt 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14. Simili modo ab 1 ad 35 ob $p=5$ et $q=7$, multitudo numerorum ad 35 primorum est $4 \cdot 6 = 24$, hique numeri sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 34.

## Scholion.

20. Quoniam hic quaestio est de numeris, qui ad quempiam numerum sint primi, eoque minores, eos commode partes ad istum numerum primas appellare licebit. Ita si numerus propositus fuerit primus $=p$, numerus partium ad eum primarum est $=p-1$: si numerus propositus sit potestas quaecunque numeri primi $=p^n$, numerus partium ad eum primarum erit $=p^n-p^{n-1}=p^{n-1}(p-1)$: at si numerus propositus sit productum duorum numerorum minorum disparium $=pq$, numerus partium ad eum primarum est $=(p-1)(q-1)$, hocque modo ambages in loquendo contrahemus. Simili modo demonstrare possemus, si numerus propositus sit productum ex tribus numeris primis disparibus $=pqr$, numerum partium ad eum primarum fore $=(p-1)(q-1)(r-1)$: hocque adeo ad producta plurium extendere liceret. Verum sequens propositio omnes hos casus in se complectetur.

## Theorema 5.

21. Si ſint A et B numeri inter ſe primi, et numerus partium ad A primarum ſit $=a$, numerus vero partium ad B primarum ſit $=b$; tum numerus partium ad productnm AB primarum erit $=ab$.

## Demonſtratio.

Sint $1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \omega$ numeri illi ipſo A minores ad eumque primi, ſeu partes ad A primae, quarum igitur partium numerus per hypotheſin eſt $=a$. Totidem ergo erunt numeri ad A, itidem primi erunt ab A ad 2A, item a 2A ad 3A, et ita porro. Hoc modo exhiberi poterunt omnes numeri ad A primi ab vnitate vsque ad numerum propoſitum AB, quos ſequens ſchema exhibebit:

$$\begin{array}{lllll}
1, & \alpha, & \beta, & \ldots\ldots & \omega \\
A+1, & A+\alpha, & A+\beta & \ldots\ldots & A+\omega \\
2A+1, & 2A+\alpha, & 2A+\beta & \ldots\ldots & 2A+\omega \\
3A+1, & 3A+\alpha, & 3A+\beta & \ldots\ldots & 3A+\omega \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(B-1)A+1, & (B-1)A+\alpha, & (B-1)A+\beta, & \ldots & (B-1)A+\omega.
\end{array}$$

Hic ſingulae ſeries horizontales continent $a$ terminos, numerusque omnium ſerierum horizontalium eſt $=B$; vnde omnes ſeries iunctim offerunt $a$B terminos, qui iam omnes ad A erunt primi. Inde ergo adhuc excludi debent ii, qui ad B non ſunt primi, vt hoc modo relinquantur, qui non ſolum ad A, ſed etiam ad B, ideoque ad ipſum productum AB, ſint primi, ſeu

ex

ex his ſeriebus ii tantum termini numerari debent, qui etiam ad B ſint primi. Hunc in finem conſideremus ſeries verticaliter; et cum numerus ſerierum verticalium ſit $=a$, quaelibet ſeries verticalis continebit B terminos in arithmetica progreſſione auctos, quorum differentia cum ſit $=$A, ideoque numerus ad B primus, per Theor. II. quaelibet ſeries verticalis tot continebit terminos ad B primos, quot dantur partes ad numerum B primae; eorum ergo numerus eſt per hypotheſin $=b$. Cum igitur ſingulae ſeries verticales contineant $b$ terminos ad B primos, qui propterea etiam erunt ad productum AB primi, numerus omnium terminorum ad AB primorum, hoc eſt partium ad hunc numerum AB primarum erit $=ab$. Q. E. D.

## Coroll. 1.

22. Si inſuper tertius numerus C adiiciatur, qui ſit ad vtrumque praecedentium A et B, ſeu ad eorum productum AB primus, et numerus partium ad C primarum ſit $=c$; tum numerus partium ad productum ABC primarum erit $=abc$. Productum enim AB conſiderari poteſt tanquam vnus numerus, cuius partium ad eum primarum ſit $=ab$; et quia C ad AB eſt primus, Theorema hic habet locum.

## Coroll. 2.

23. Cum igitur vnusquisque numerus N reſolui poſſit in factores inter ſe primos, qui ſinguli ſint vel ipſi numeri primi, vel poteſtates primorum, ope huius regulae multitudo partium ad numerum quemcunque N primarum aſſignari poterit.

Coroll. 3.

## Coroll. 3.

24. Existentibus scilicet $p$, $q$, $r$, $s$, etc. numeris primis, omnis numerus N in huiusmodi forma $N = p^{\lambda} q^{\mu}, r^{\nu}, s^{\xi}$ comprehendetur; vnde numerus partium ad N primarum erit:

$$p^{\lambda-1}(p-1).\ q^{\mu-1}(q-1).\ r^{\nu-1}(r-1).\ s^{\xi-1}(s-1).$$

## Coroll. 4.

25. Pro formis igitur numerorum simplicioribus multitudo partium ad eos primarum ita se habebit:

| numerus propositus | multitudo partium ad eum primarum |
|---|---|
| $p$ | $p-1$ |
| $pp$ | $p(p-1)$ |
| $pq$ | $(p-1)(q-1)$ |
| $p^3$ | $pp(p-1)$ |
| $p^2q$ | $p(p-1)(q-1)$ |
| $pqr$ | $(p-1)(q-1)(r-1)$ |
| $p^4$ | $p^3(p-1)$ |
| $p^3q$ | $p^2(p-1)(q-1)$ |
| $p^2q^2$ | $p(p-1)q(q-1)$ |
| $p^2qr$ | $p(p-1)(q-1)(r-1)$ |
| $pqrs$ | $(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)$ |
| $p^5$ | $p^4(p-1)$ |
| $p^4q$ | $p^3(p-1)(q-1)$ |
| $p^3q^2$ | $p^2(p-1)q(q-1)$ |
| $p^3qr$ | $p^2(p-1)(q-1)(r-1)$ |
| $p^2q^2r$ | $p(p-1)q(q-1)(r-1)$ |
| $p^2qrs$ | $p(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)$ |
| $pqrst$ | $(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)(t-1)$ |

| num. prop. | mult. part. ad eum prim. |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 2 |
| 5 | 4 |
| 6 | 2 |
| 7 | 6 |
| 8 | 4 |
| 9 | 6 |
| 10 | 4 |
| 11 | 10 |
| 12 | 4 |
| 13 | 12 |
| 14 | 6 |
| 15 | 8 |
| 16 | 8 |
| 17 | 16 |
| 18 | 6 |
| 19 | 18 |
| 20 | 8 |
| 21 | 12 |
| 22 | 10 |
| 23 | 22 |
| 24 | 8 |
| 25 | 20 |

Coroll.

## Coroll. 5.

26. Hinc igitur proposito numero quocunque multitudo partium ad eum primarum expedite definietur. Veluti, si proponatur 360, cum sit $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, erit multitudo partium ad 360 primarum $= 4 \cdot 6 \cdot 4 = 96$.

## Scholion.

27. Haec circa multitudinem partium ad numerum quemuis primarum pro praesenti instituto sufficere possunt. Interim tamen circa ipsas partes ad quemuis numerum primas haec notasse iuuabit: si numerus propositus fuerit $N$, atque inter partes ad eum primas occurrat numerus $\alpha$, ibidem quoque occurret numerus $N-\alpha$; quoniam, existente $\alpha$ ad $N$ primo, etiam $N-\alpha$ erit ad $N$ primus. Hinc pro quouis numero partes tantum eius semisse minores inuenisse sufficiet, cum reliquae sint earum complementa ad ipsum numerum $N$. Simili modo, si $N$ sit numerus par, inter partes ad $N$ primas etiam occurret $\frac{1}{2}N-\alpha$, tum etiam $\frac{1}{2}N+\alpha$. Item si $N$ sit diuisibilis per numerum quemcunque $n$, inter partes ad eum primas quoque occurrent hi numeri:

$$\tfrac{1}{n}N \pm \alpha;\ \tfrac{2}{n}N \pm \alpha;\ \tfrac{3}{n}N \pm \alpha \ldots \tfrac{(n-1)}{n}N \pm \alpha; \text{ et } N-\alpha$$

hincque multo facilius ipsae partes istae actu exhiberi poterunt.

## Theorema 6.

28. Si numerus $x$ fuerit primus ad $N$, tum omnes potestates ipsius $x$ per $N$ diuisae relinquent residua, quae erunt ad numerum $N$ prima.

## Demonstratio.

Cum enim $x$ sit numerus ad N primus, omnes eius potestates erunt quoque ad N primae, ideoque si per N diuidantur, residua etiam ad N erunt numeri primi. Q. E. D.

## Coroll. 1.

29. Inter residua ergo potestatum ipsius $x$ per N diuisarum alii numeri non occurrunt, nisi qui sint partes ad N primae; quarum numerus, cum sit pro indole numeri N determinatus, innumerabiles existent potestates ipsius $x$, quae per N diuisae aequalia relinquunt residua.

## Coroll. 2.

30. Inter residua autem ista ex diuisione potestatum ipsius $x$ per numerum N orta semper reperietur vnitas, propterea quod inter potestates ipsius $x$ etiam referri debet $x^0 = 1$. Vtrum autem praeter vnitatem etiam omnes reliquae partes ad N primae inter residua occurrant, nec ne? mox videbimus.

## Coroll. 3.

31. Si pro $x$ capiatur vnitas, omnia residua erunt vnitates, quicunque numerus pro N fuerit assumtus. Deinde si sumatur $x = N - 1$, qui numerus ad N etiam est primus, in residuis, ex diuisione potestatum $(N-1)^0$, $(N-1)^1$, $(N-1)^2$, $(N-1)^3$, etc. ortis, nonnisi duo reperientur diuersa, scilicet 1 et $N-1$, quae continuo se alternatim excipiunt.

Coroll. 4.

## Coroll. 4.

32. Prout igitur numerus $x$ ratione ad N fuerit comparatus, vtique fieri potest, vt inter residua omnium potestatum ipsius $x$ non omnes partes ad diuisorem N primae occurrant.

## Coroll. 5.

33. Si ergo omnes partes ad numerum N primae sint $1, a, b, c, d, e, \ldots\ldots$ quarum numerus sit $= n$, inter residua memorata, vel omnes istae partes occurrent, vel quaedam tantum, inter quas autem semper vnitas reperietur.

## Coroll. 6.

34. Quodsi non omnes illae partes in residuis ex diuisione potestatum ipsius $x$ per numerum N relictis occurrant, illae partes in duas classes distribuentur, quarum altera continebit partes in residuis occurrentes, altera vero partes in residuis non occurrentes.

## Theorema 7.

Si series potestatum $x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5$, etc. per numerum N, qui ad $x$ sit primus, diuidatur, eousque residua prodibunt diuersa, donec perueniatur ad potestatem, quae iterum vnitatem pro residuo praebeat.

## Demonstratio.

Quoniam seriei potestatum $1, x, x^2, x^3, x^4$, etc. in infinitum continuatae, omnia residua diuersa esse nequeunt, necesse est, vt tandem quodpiam ex praecedentibus

 tibus

tibus residuis redeat; ac dico: vnitatem esse id residuum, quod omnium primum sit rediturum. Quod si quis neget, sit $x^{\mu}$ ea potestas, cuius residuum primum in sequentibus ex potestate $x^{\mu+\nu}$ redeat; cum igitur potestates $x^{\mu}$ et $x^{\mu+\nu}$ aequalia praebeant residua, earum differentia $x^{\mu+\nu}-x^{\mu}=x^{\mu}(x^{\nu}-1)$ per numerum N erit diuisibilis. Verum producti $x^{\mu}(x^{\nu}-1)$ factor prior ad N est numerus primus, ergo alter $x^{\nu}-1$ per N diuisibilis sit necesse est. Hinc autem potestas $x^{\nu}$ per N diuisa residuum daret $=1$, sicque vnitas inter sequentia redua citius redibit, quam residuum potestatis $x^{\mu}$, quippe quod per hypothesin demum in potestate altiore $x^{\mu+\nu}$ recurrit. Ex quo euidens, nullum residuum iterum occurrere posse, nisi ante vnitas inter residua redierit. Q. E. D.

## Coroll. 1.

36. Postquam diuisio terminorum seriei $1$, $x$, $x^2$, $x^3$, $x^4$, etc. per numerum N ad $x$ primum ab initio dedit residua diuersa, puta $1$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ etc. tandem iterum occurret primum residuum $1$; quod si oriatur ex potestate $x^{\nu}$, numerus praecedentium residuorum diuersorum erit $=\nu$.

## Coroll. 2.

37. Quando autem potestas $x^{\nu}$ residuum dat $1$, idem quod primus terminus $x^0$, potestas sequens $x^{\nu+1}$ idem dabit residuum quod $x^1$; et sequentium quaecunque $x^{\nu+\mu}$ idem quod potestas $x^{\mu}$. Cum enim differentia

rentia $x^{\nu+\mu} - x^{\mu} = x^{\mu}(x^{\nu} - 1)$ sit diuisibilis per N, necesse est, vt ambo termini $x^{\nu+\mu}$ et $x^{\mu}$ per N diuisi idem praebeant residuum.

## Coroll. 3.

38. Cum post potestatem $x^{\nu}$ eadem residua $1, \alpha, \beta, \gamma$ etc. ordine recurrant, potestas $x^{2\nu}$, similique modo post eam potestates $x^{3\nu}$, $x^{4\nu}$, $x^{5\nu}$ etc. omnes per N diuisae idem residuum 1 relinquent. Quin etiam omnes potestates $x^{\mu}$, $x^{\mu+\nu}$, $x^{\mu+2\nu}$, $x^{\mu+3\nu}$, $x^{\mu+4\nu}$ etc. aequalia residua suppeditabunt.

## Coroll. 4.

39. Si igitur $x^{\nu}$ fuerit infima potestas, quae post $x^0 = 1$ iterum vnitatem pro residuo praebeat, numerus diuersorum residuorum erit $\nu$. Cum ergo numerus partium ad numerum N primarum sit $= n$, fieri certe nequit, vt sit $\nu > n$: erit ergo vel $\nu = n$, vel $\nu < n$.

## Coroll. 5.

40. Si ergo series potestatum $1, x, x^2, x^3$, etc. vsque ad $x^n$ continuetur, inter eas certe vna saltem reperietur praeter primum terminum 1, quae per N diuisa vnitatem relinquat. Plures fortasse huiusmodi potestates aliquando, sed pauciores vna nunquam existent.

## Scholion.

41. Residua proprie semper sunt numeri minores diuisore N, sed nihil impedit, quo minus numeros

etiam maiores tanquam residua spectemus, cuiusmodi relinquuntur, si quotus nimis paruus accipiatur. Ita si in diuisione cuiuspiam numeri per N relinquatur N+α, hoc residuum aequiualens ipsi α censeri debet; hincque, si de residuis sermo sit, omnes hi numeri α, N+α, 2N+α, 3N+α, etc. instar vnius residui α sunt considerandi. Scilicet multipla quaecunque diuisoris N siue adiecta, siue dempta a quopiam residuo α, eius naturam non mutant, atque hoc modo etiam numeri negatiui commode inter residua referuntur; veluti α−N pro eodem residuo est habendum ac α; et residuum −1 aequiualet residuo N−1. Ex his conficitur, omnes numeros, qui per N diuisi idem exhibeant residuum α, pro eodem residuo haberi posse, ex quo enim numero per diuisionem quotum nimis paruum sumendo oritur residuum vel N+α, vel 2N+α, vel 3N+α etc ex eodem, quotum plenum sumendo, nascitur residuum α; tum vero indidem, si quotus capiatur nimis magnus, obtinebuntur residua negatiua α−N, vel α−2N, vel α−3N etc. quae ergo etiam ab α non discrepare sunt censenda.

## Thorema 8.

142. Si dum termini progressionis 1, $x$, $x^2$, $x^3$, $x^4$, etc per numerum N ad $x$ primum diuidantur, residua fuerint 1, $a$, $b$, $c$, etc. in iisdem quoque occurrent tam singulorum omnes potestates, quam producta quaecunque vel binorum, vel ternorum, vel quotlibet in se multiplicatorum.

Demon-

## Demonſtratio.

Naſcantur reſidua $a$, $b$, $c$ etc. ex poteſtatibus $x^\alpha$, $x^\beta$, $x^\gamma$ etc. ac numeros etiam maiores quam N in reſiduis admittendo, ex poteſtatibus $x^{2\alpha}$, $x^{3\alpha}$, $x^{4\alpha}$ etc. orientur reſidua $a^2$, $a^3$, $a^4$ etc. quae igitur etiam in ſerie reſiduorum 1, $a$, $b$, $c$ etc. continebuntur. Tum vero poteſtates $x^{\alpha+\beta}$, $x^{\alpha+\gamma}$, $x^{\alpha+\beta+\gamma}$ etc. relinquent reſidua $ab$, $ac$, $abc$ etc. quae ergo etiam in ſerie reſiduorum inueniri debebunt. Producta igitur, quomodocunque ex reſiduis 1, $a$, $b$, $c$ etc. per multiplicationem formata, omnia in eadem ſerie reſiduorum occurrent; ſi quidem ſingula per ablationem diuiſoris N, quoties id fieri poteſt, ad minimam formam reducantur Q. E. D.

## Coroll. 1.

43. Haec indoles reſiduorum eo clarius elucerct, ſi eorum loco ipſae illae poteſtates ipſius $x$, vnde ſunt orta, ſubſtituantur; tum enim manifeſto non ſolum omnes poteſtates harum poteſtatum, ſed etiam earum producta quaecunque, in reſiduis occurrunt.

## Coroll. 2.

44. Neque tamen ideo numerus reſiduorum indeterminatus euadit; quemadmodum enim iam vidimus, ex innumeris poteſtatibus paria reſidua prouenire, ita, ſi omnia haec reſidua, ex mutua multiplicatione nata, ad formam minimam reducantur, ad multitudinem modicam reuocabuntur.

Coroll.

## Coroll. 3.

45. Ita si minima potestas, quae per N diuisa iterum vnitatem relinquit, fuerit $x^v$, ita vt numerus residuorum 1, $a$, $b$, $c$, etc. sit $= v$, tum in eodem numero omnia producta, ex multiplicatione numerorum $a$, $b$, $c$, etc. nata, continebuntur, si quidem ab iis diuisor N toties, quoties fieri potest, auferatur.

## Scholion.

46. Vnicum exemplum omnibus dubiis, quae forte circa hanc apparentem residuorum multitudinem nasci possunt, soluendis sufficiet. Sit igitur $x = 2$, et pro diuisore sumatur $N = 15$, qui scilicet ad 2 sit primus; iam singulae binarii potestates per 15 diuisae, sequentia relinquent residua

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| pot. | 1; | 2; | $2^2$; | $2^3$; | $2^4$; | $2^5$; | $2^6$; | $2^7$; | $2^8$; | $2^9$; | $2^{10}$; | etc. |
| ref. | 1; | 2; | 4; | 8; | 1; | 2; | 4; | 8; | 1; | 2; | 4; | etc. |

Potestas igitur, quae primum vnitatem reproducit, est $2^4$, a qua residua continuo eodem ordine 1, 2, 4, 8 repetuntur, ita vt tantum quaterna residua diuersa occurrant. Hic iam manifestum est, quomodocunque haec residua in se inuicem multiplicentur, nunquam numeros inde produci, qui non in eodem quaternione includantur; postquam scilicet ablatione diuisoris 15 ad formam minimam fuerint reuocata. In hoc quoque exemplo inter residua non omnes partes ad 15 primae occurrunt, sed inde excluduntur istae partes 7, 14, 13, 14, quae pariter ad 15 sunt primae; vnde distributio

supra

supra facta inter partes ad diuisorem primas, quae in residuis occurrunt, et quae non occurrunt, illustratur, ad quam potissimum in sequentibus probe respiciatur.

## Theorema 9.

47. In residuis ex diuisione potestatum cuiuspiam numeri per diuisorem ad eum primum relictis, vel omnes partes ad diuisorem primae occurrunt, vel numerus partium non occurrentium aequalis erit, vel rationem tenebit multiplam ad numerum partium, quae residua constituunt.

## Demonstratio.

Sit series potestatum $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$ etc. et diuisor N ad $x$ primus, cuius partium ad ipsum primarum numerus sit $= n$. Sit porro $x^\nu$ minima potestas, quae per N diuisa iterum vnitatem relinquit, ita vt numerus omnium diuersorum residuorum sit $= \nu$, quae cum omnia sint ad N numeri primi, eorum numerus erit vel $= n$, vel minor; priorique casu inter residua vtique omnes partes ad N primae occurrunt. Consideremus igitur casum, quo $\nu < n$, sintque $1, a, b, c, d$, etc. omnia residua ex diuisione potestatum

$$1, x, x^2, x^3, x^4 \ldots\ldots x^{\nu-1}$$

per diuisorem N relicta, quorum numerus cum sit $= \nu$, non omnes partes ad N primae ibi occurrent. Sit igitur $\alpha$ huiusmodi pars in residuis non occurrens, ac demonstrari potest, nullum quoque horum numerorum $\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d$ etc. in residuis occurrere. Nam si

$\alpha a$ esset residuum potestati $x^\lambda$ respondens, quia $\alpha$ est quoque residuum ex quapiam potestate, puta $x^\varsigma$, ortum, foret $x^\lambda = AN + \alpha a$, et $x^\varsigma = BN + \alpha$, ideoque $x^\lambda - \alpha x^\varsigma = (A - \alpha B)N$ per N diuisibile. Cum autem $x^\varsigma$ ad N sit numerus primus, et $x^\lambda - \alpha x^\varsigma = (x^{\lambda - \varsigma} - \alpha)$, numerus $x^{\lambda - \varsigma} - \alpha$ esset per N diuisibilis, sicque potestas $x^{\lambda - \varsigma}$ per N diuisa relinqueret residuum $\alpha$, contra hypothesin. Cum igitur $\alpha$, $\alpha a$, $\alpha b$, $\alpha c$, etc. quorum numerus est $= \nu$, sint numeri ad N primi, atque diuisione per N ad partes ad N primas reuocari possint, statim atque vna pars $\alpha$ ad N prima in residuis non reperitur, simul quoque $\nu$ eiusmodi partes assignari possunt in residuis non occurrentes. Numerus ergo partium non occurrentium, nisi sit nullus, ad minimum est $= \nu$, ac si praeterea fuerit pars ad N prima $\beta$ in his non residuis non contenta, denuo habebuntur $\nu$ partes nouae in residuis non occurrentes; sicque porro. Quare si non omnes partes ad diuisorem N primae in residuis occurrant, numerus partium non occurrentium necessario est vel $= \nu$, vel $= 2\nu$, vel $= 3\nu$, vel alii cuipiam multiplo ipsius $\nu$, hoc est numeri diuersorum residuorum. Q. E. D.

## Coroll. 1.

48. Constituto ergo discrimine inter partes ad diuisorem N primas eas quae sunt residua, et eas quae non sunt residua, ex demonstratione patet, productum ex residuo et non residuo in classe non-residuorum semper contineri. Ita si $a$ sit residuum, $\alpha$ non-residuum, productum $\alpha a$ certe non erit residuum.

Coroll.

## Coroll. 2.

49. Contra autem iam supra vidimus productum ex duobus pluribusue residuis in classe residuorum reperiri. Vnde sequitur ex vno non-residuo et quotcunque residuis in classe non-residuorum occurrere debere.

## Scholion.

50. Vis huius demonstrationis isto nititur fundamento, quod si inter residua occurrant partes $1, a, b, c, d$, etc. ad diuisiorem primae, atque $\alpha$ fuerit etiam pars ad diuisiorem prima in his residuis non contenta; tum producta omnia $\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d$, etc. non solum in residuis non occurrere, quod quidem perfecte est demonstratum, sed etiam ea esse partes ad diuisorem N primas, omnesque inter se diuersas; seu si ea per N, actu diuidantur, relinqui residua diuersa. Illud quidem per se est perspicuum; cum enim tam $\alpha$, quam $a, b, c, d$, etc. sint numeri ad N primi, etiam eorum producta ad N prima sint necesse est. Quod autem producta $\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha c$, etc. sint omnia ad N relata inter se diuersa, intelligitur, quod si verbi gratia duo $\alpha a$ et $\alpha b$ per N diuisa paria darent residua, eorum differentia $\alpha b - \alpha a = \alpha(b-a)$ per N esset diuisibilis, ideoque et $b-a$; id quod hypothesi, quod $a$ et $b$ sint diuersae partes ad N primae, repugnat.

## Theorema 10.

51. Exponens minimae potestatis $x^{\nu}$, quae per numerum N ad $x$ primum diuisa vnitatem relinquit,

 vel

vel est aequalis numero partium ad N primarum, vel huius numeri semissis, aliaue eius pars aliquota.

## Demonstratio.

Sit $n$ numerus partium ad N primarum, quarum cum $\nu$ constituant residua, erit numerus non-residuorum $= n - \nu$. Vidimus autem hunc numerum esse vel $= 0$, vel $= \nu$, vel $= 2\nu$, vel alii cuipiam multiplo exponentis $\nu$. Sit ergo $n - \nu = (m - 1)\nu$, ita vt $m$ denotet vel vnitatem, vel alium quemuis numerum integrum, atque hinc obtinebimus $n = m\nu$ et $\nu = \frac{n}{m}$: vnde patet exponentem minimae potestatis ipsius $x$, quae per N diuisa vnitatem relinquit, esse vel $= n$, si $m = 1$, vel $= \frac{n}{2}$, si $m = 2$, vel in genere esse partem quampiam aliquotam numeri $n$, qui exprimit multitudinem partium ad diuisorem N primarum. Q. E. D.

## Coroll. 1.

52. Si $x^\nu$ fuerit minima potestas, quae per numerum N ad $x$ primum diuisa vnitatem relinquit, sequentes potestates idem residuum relinquentes sunt $x^{2\nu}$, $x^{3\nu}$, $x^{4\nu}$, $x^{5\nu}$, etc. neque praeterea vllae aliae dantur, quae per N diuisae vnitatem relinquant.

## Coroll. 2.

53. Exponens ergo huius potestatis minimae semper cum numero partium ad diuisorem N primarum ita connectitur, vt sit vel illi ipsi, vel cuipiam eius parti aliquotae, aequalis.

Scholion.

## Scholion.

54. Quo haec ratio clarius perſpiciatur, iuuabit nonnullos caſus ſimpliciores perpendiſſe. Sit igitur $x=2$, et pro N ſumamus ſucceſſiue numeros impares, vtpote ad $x=2$ primos, atque exhibeamus minimam poteſtatem binarii, quae per quemque numerum imparem diviſa vnitatem relinquat.

| Diuiſor N | num. part. ad eum pr. $n$ | min. pot. $2^{\nu}$ quae per N diuiſ. vnitatem relinquit. | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | $2^{2}$ | ergo | $\nu=n$ |
| 5 | 4 | $2^{4}$ | — | $\nu=n$ |
| 7 | 6 | $2^{3}$ | — | $\nu=\frac{1}{2}n$ |
| 9 | 6 | $2^{6}$ | — | $\nu=n$ |
| 11 | 10 | $2^{10}$ | — | $\nu=n$ |
| 13 | 12 | $2^{12}$ | — | $\nu=n$ |
| 15 | 8 | $2^{4}$ | — | $\nu=\frac{1}{2}n$ |
| 17 | 16 | $2^{8}$ | — | $\nu=\frac{1}{2}n$ |
| 19 | 18 | $2^{18}$ | — | $\nu=n$ |
| 21 | 12 | $2^{6}$ | — | $\nu=\frac{1}{2}n$ |
| 23 | 22 | $2^{11}$ | — | $\nu=\frac{1}{2}n$ |
| 25 | 20 | $2^{20}$ | — | $\nu=n$ |
| 27 | 18 | $2^{18}$ | — | $\nu=n$ |
| 29 | 28 | $2^{28}$ | — | $\nu=n$ |
| 31 | 30 | $2^{5}$ | — | $\nu=\frac{1}{6}n$ |

## Theorema 11.

55. Si fuerit N ad $x$ numerus primus, et $n$ numerus partium ad N primarum, tum potestas $x^n$ vnitate minuta semper per numerum N erit diuisibilis.

## Demonstratio.

Sit enim $x^\nu$ minima potestas, quae per N diuisa vnitatem relinquit, eritque $\nu$ vel aequalis ipsi numero $n$, vel parti eius cuipiam aliquotae $\frac{n}{m}$. Cum igitur $x^\nu - 1$ per N sit diuisibilis, quia forma $x^{\nu m} - 1$ factorem habet $x^\nu - 1$, etiam ista forma $x^{\nu m} - 1$, seu $x^n - 1$, per N erit diuisibilis. Q. E. D.

## Coroll. 1.

56. Si ergo diuisor N sit numerus primus $p$, neque $x$ per $p$ sit diuisibilis, tum semper numerus $x^{p-1} - 1$ per numerum primum $p$ erit diuisibilis, vti quidem dudum demonstraui.

## Coroll. 2.

57. Si praeterea $p$, $q$, $r$, etc. sint numeri primi, $x$ neque vllum eorum implicet, ex hoc theoremate sequitur,

| has formas | fore diuisibiles per |
|---|---|
| $x^{p-1} - 1$ | $p$ |
| $x^{p(p-1)} - 1$ | $pp$ |
| $x^{(p-1)(q-1)} - 1$ | $pq$ |
| $x^{pp(p-1)} - 1$ | $p^3$ |
| $x^{p(p-1)(p-1)} - 1$ | $ppq$ |
| $x^{(p-1)(q-1)(r-1)} - 1$ | $pqr$. |

Coroll.

## Coroll. 3.

58. Si $x$ et $y$ ſint primi ad diuiſorem N, cuius partium ad eum primarum numerus ſit $= n$, quia tam $x^n - 1$, quam $y^n - 1$, eſt diuiſibilis per N, erit etiam $x^n - y^n$ ſemper diuiſibilis per numerum N, quod eſt Theorema generalius.

## Coroll. 4.

59. Propoſito ergo numero quocunque N, cuius partium ad ipſum primarum numerus ſit $= n$, quicunque numerus ad N primus pro $x$ capiatur, formula $x^n - 1$ ſemper erit per numerum N diuiſibilis.

## Coroll. 5.

60. Saepe numero vero etiam euenire poteſt, vt huiusmodi formula ſimplicior, veluti $x^{\frac{1}{2}n} - 1$ vel $x^{\frac{1}{3}n} - 1$, vel $x^{\frac{1}{4}n} - 1$ etc. ſit per numerum N diuiſibilis, quae circumſtantia pendet a certa indole numeri $x$.

## Scholion.

61. En ergo nouam demonſtrationem Theorematis Fermatiani, quod ſi fuerit $p$ numerus primus, omnes numeri in hac forma $a^{p-1} - 1$ contenti ſint per $p$ diuiſibiles, dummodo numerus $a$ non ſit per $p$ diuiſibilis. Duas autem iam dudum huius theorematis dederam demonſtrationes; ſed ea quam hic exhibui, iis praeſtare videtur, quod non ſolum ad numeros pri-

mos

mos adstringitur. Quicunque enim numerus N pro divisore accipiatur, dummodo $a$ ad eum sit primus, hic numerus $a^n - 1$ semper per N erit divisibilis, siquidem $n$ denotet numerum partium ad N primarum, quae propositio multo latius patet, quam Fermatiana. Ex quo eo magis utilitas Theorematum primorum elucet, quibus numerum partium ad quemque numerum primarum definivi, quae sine hac applicatione nimis sterilia videri potuissent.

SVPLE-

# SVPPLEMENTVM
## QVORVNDAM THEOREMATVM ARITHMETICORVM QVAE IN NONNVLLIS DEMONSTRATIONIBVS SVPPONVNTVR.

Auctore
*L. EVLERO.*

Cum nuper demonstrauissem, non dari duos cubos, quorum summa sit cubus, sine sufficiente probatione assumseram, omnes numeros in hac forma contentos $mm+mn+nn$, quae forma facile ad hanc reducitur: $pp+3qq$, nunquam alios admittere diuisores, nisi qui ipsi in eadem forma contineatur. Atque hinc conclusi, si forma $mm+mn+nn$ fuerit cubus, aliaue potestas, eius radicem quoque numerum eiusdem formae esse futuram; cui fundamento etiam tota demonstratio modo memorata innititur. Cum deinceps methodum nouam et maxime generalem exposuissem, tres cubos inueniendi, quorum summa sit cubus, quae simul omnibus adhuc vsitatis facilitate longe praestabat, non solum eandem indolem numerorum, in forma $mm+mn+nn$, seu $pp+3qq$, contentorum, tanquam certam assumsi, sed etiam in euolutione solutionis suppossui, huius generis numeros alios diuisores primos, praeter ternarium, non implicare, nisi qui essent formae $6x+1$. Quin etiam vicissim affirmare licet, omnes numeros primos istius formae $6x+1$, cuiusmodi sunt 7, 13, 19, 31, 37, 43, etc. ita esse comparatos, vt in forma $pp+3qq$ contineantur: veluti

$$7=2^2+3.1^2;\ 13=1^2+3.2^2;\ 19=4^2+3.1^2;\ 31=2^2+3.3^2;\ \text{etc.}$$

Quae Theoremata, etsi iam a Fermatio fuerant prolata, nusquam tamen adhuc demonstrata reperiuntur: ex quo operae pretium me facturum putaui, si has assertiones rigidis demonstrationibus confirmarem, quo simul supra memoratae demonstrationes ad summum certitudinis gradum eueherentur.

His proprietatibus innituntur ratiocinia, quibus sum deductus, ad tres cubos, quorum summa itidem est cubus, hinc autem omissis ratiociniis solutio consueto modo adornari poterit, idoneis formis pro radicibus cuborum assumendis. Quarum ratio etsi non perspiciatur, tamen in hoc Analyseos genere problemata plerumque per huiusmodi formulas feliciter excogitatas resolui solent, in quas saepe numero, vel casu, vel post plurima tentamina, incidimus.

Ita si tres cubi inueniri debeant, quorum summa sit cubus, positis eorum radicibus $x$, $y$, et $z$, statuatur

$$x^3+y^3+z^3=v^3.$$

Tum vero istorum cuborum radicibus sequentes formae tribuantur:

$$x=(m-n)p+qq; \qquad z=pp-(m+n)q.$$
$$y=(m+n)p-qq; \qquad v=pp+(m-n)q$$

et quoniam loco quaternarum quantitatum $x$, $y$, $z$ et $v$, quaternae nouae $m$, $n$, $p$ et $q$ in calculum introducuntur, his positionibus problema non restringi est censendum. Cum igitur vi problematis esse operteat

$$x^3+y^3=v^3-z^3, \text{ siue}$$

$$(x+y)(xx-xy+yy)=(v-z)(vv+vz+zz)$$

per assumtas formas habebitur:

$x+y$

$$x+y=2mp;\ xx-xy+yy=(mm+3nn)pp-6npqq+3q^4$$
$$v-z=2mq;\ vv+vz+zz=3p^4-6nppq+(mm+3nn)qq$$

hisque valoribus substitutis obtinebitur, diuisione vtrinque per $2m$ facta:

$$(mm+3nn)p^3-6nppqq+3pq^4=3p^4q-6nppqq+(mm+3nn)q^3$$

vbi cum termini medii se vtrinque destruant, fiet

$$(mm+3nn)(p^3-q^3)=3p^4q-3pq^4=3pq(p^3-q^3)$$

Hic igitur commodo vsu venit, vt haec aequatio per $p^3-q^3$ diuidi queat, in quo ipso summa vtilitas nostrarum positionum consistit; nanciscimur enim hanc aequationem

$$mm+3nn=3pq$$

vnde assumtis numeris $m$ et $n$ cum altero reliquorum $p$ vel $q$ pro lubitu alter sponte et quidem rationaliter determinatur, quod eximium commodum non locum haberet, nisi postrema aequatio diuisionem per $p^3-q^3$ admisisset. Nisi ergo fractiones euitare velimus, habebimus statim

$$q=\frac{mm+3nn}{3p}.$$

Verum etsi fractiones facile erui possunt, dum aeque multipla quaecunque radicum $x$, $y$, $z$ et $v$ pariter satisfaciunt, tamen ad expressiones simpliciores pertingemus, si numeros $m$ et $n$ statim ita assumamus, vt $mm+3nn$ primo diuisibile euadat per 3, tum vero insuper duos contineat factores, quorum alter pro $p$, alter pro $q$ accipi queat.

Primo igitur statuatur $m=3k$, vt fiat

$$pq=nn+3kk$$

et quia, vt mox demonstrabo, numeri formae $nn+3kk$

 alios

alios non admittunt diuisores, nisi qui ipsi sint eiusdem formae, ponamus:

$$nn + 3kk = (aa + 3bb)(cc + 3dd)$$

vt sit:

$$p = aa + 3bb \text{ et } q = cc + 3dd$$

eritque

vel $n = ac + 3bd$; $k = bc - ad$; $m = 3bc - 3ad$

vel $n = ac - 3bd$; $k = bc + ad$; $m = 3bc + 3ad$

Hanc pluralitatem valorum per ambiguitatem signorum ita exhibere poterimus, vt sit

$$m = \pm 3(bc \pm ad) : n = \pm (ac \mp 3bd)$$

ideoque diuersi valores pro $m$ et $n$, sumtis pro $a, b, c, d$, numeris quibuscunque, erunt

I. $m + n = 3(bc + ad) + (ac - 3bd)$; $m - n = 3(bc + ad) - (ac - 3bd)$

II. $m + n = 3(bc + ad) - (ac + 3bd)$; $m - n = 3(bc + ad) + (ac - 3bd)$

III. $m + n = 3(bc - ad) + (ac + 3bd)$; $m - n = 3(bc - ad) - (ac + 3bd)$

IV. $m + n = 3(bc - ad) - (ac + 3bd)$; $m - n = 3(bc - ad) + (ac + 3bd)$

Hinc autem sequuntur solutiones, quas iam dudum fusius exposui, quare ad propositum reuertor, sequentes propositiones demonstraturus.

## Propositio I.

1. Si numeri $a$ et $b$ non sint numeri inter se primi, tum numerus $aa + 3bb$ non erit primus, sed diuisibilis erit per quadratum maximi communis diuisoris numerorum $a$ et $b$.

Demon-

## Demonstratio.

Sit enim $m$ maximus communis diuisor numerorum $a$ et $b$, ita vt sit $a = mc$ et $b = md$, existentibus iam $c$ et $d$ numeris inter se primis, quia alioquin non esset maximus communis diuisor. Ac numerus $aa + 3bb$ induet hanc formam: $mm(cc + 3dd)$, quae propterea certo diuisorem habet $mm$.

## Coroll. 1.

2. Nisi ergo numeri $a$ et $b$ sint primi inter se, numerus ex iis formatus $aa + 3bb$ primus esse nequit. Neque vero hinc vicissim concludere licet, numerum $aa + 3bb$ semper esse primum, quoties numeri $a$ et $b$ fuerint primi inter se.

## Coroll. 2.

3. Primo autem patet, numerum $aa + 3bb$ diuisibilem esse per ternarium, dum numerus $a$ fuerit multiplum ternarii, etiamsi caeterum $a$ et $b$ fuerint numeri primi inter se. Neque vero vnquam forma $aa + 3bb$ per 9 altiorem ve ternarii potestatem est diuisibilis, nisi ambo numeri $a$ et $b$ communem diuisorem habeant 3.

## Coroll. 3.

4. Deinde etiam patet, formam $aa + 3bb$ numerum parem esse non posse, nisi ambo numeri $a$ et $b$ vel sint pares, vel impares. Vtroque autem casu numerus $aa + 3bb$ non solum per 2, sed etiam per 4 erit diuisibilis.

## Coroll. 4.

5. Non ergo datur numerus formae $aa+3bb$, qui ſit impariter par, ſed ſtatim atque admittit diuiſorem 2, ſimul erit diuiſibilis per 4. Vnde quoties huiusmodi numeri fuerint pares, quaternarium, tanquam eorum factorem ſimplicem, conſiderare licet, etiamſi alias quaternarius, vtpote binarii quadratum, non inter numeros primos referatur.

## Coroll. 5.

6. Si ergo numerus formae $aa+3bb$ ſit primus, non ſolum certo conſtat, ambos numeros $a$ et $b$ eſſe primos inter ſe, ſed etiam vtrumque non eſſe imparem. Neceſſe igitur eſt, vt alter ſit par, alter vero impar.

## Propoſitio II.

7. Si numerus formae $aa+3bb$ per ternarium eſt diuiſibilis, tunc etiam quotus eſt numerus formae eiusdem.

## Demonſtratio.

Si numerus $aa+3bb$ per 3 eſt diuiſibilis, neceſſe eſt, vt radix prioris quadrati $a$ ſit multiplum ternarii. Ponamus ergo $a=3c$, et numerus propoſitus erit $9cc+3bb$, qui per 3 diuiſus dat quotum $3cc+bb$, qui vtique eſt numerus eiusdem formae $aa+3bb$.

## Scholion.

8. Notari hic conuenit ipſum quoque ternarium eſſe numerum formae $aa+3bb$, quippe qui prodit, ſi $a=0$ et $b=1$. Conſideramus autem has duas formas $aa+3bb$ et $mm+mn+nn$ tanquam aequiualentes, quoniam

quoniam posterior in priorem transit, ponendo $m=a+b$, et $n=b-a$; vnde quicquid de altera demonstramus, etiam de altera valet. Posterior autem, casu $m=1$ et $n=1$, manifesto dat 3. Videtur quidem forma $mm+mn+nn$, si numerorum $m$ et $n$ alter fuerit par, alter impar, ad priorem reduci non posse, quia tum in integris esse nequit $m=a+b$, et $n=b-a$; verum dantur adhuc aliae reductiones, scilicet $a=\frac{1}{2}m+n$, et $b=m$, siue $a=m+\frac{1}{2}n$, et $b=n$, quarum ope, si numerorum $m$ et $n$ alter fuerit par, alter impar, forma $mm+mn+nn$ ad $aa+3bb$ reducitur.

## Propositio III.

9. Si numerus formae $aa+3bb$ per quaternarium est diuibilis, tum etiam quotus erit numerus eiusdem formae $aa+3bb$.

## Demonstratio.

Diuisio formae $aa+3bb$ per 4 succedit, si vel vterque numerorum $a$ et $b$ fuerit par, vel impar. Priori casu ponatur $a=2c$, et $b=2d$, fietque $aa+3bb=4cc+12dd$, vnde, diuisione per 4 instituta, prodit quotus $cc+3dd$.

Sin autem vterque numerus $a$ et $b$ fuerit impar, tum eorum, vel summa, vel differentia, certo erit diuisibilis per 4. Namque, cum tam $a+b$, quam $a-b$, sit numerus par, eorumque summa sit $2a$, hoc est numerus impariter par, necesse est, vt alter eorum sit impariter par, alter vero pariter par. Erit ergo, vel

$a+b$

$a+b=4c$, vel $a-b=4c$, ideoque $a=4c\pm b$: quo valore substituto fiet

$$aa+3bb=16cc\pm 8bc+4bb$$

vnde, diuisione per 4 instituta, prodit quotus

$$4cc\pm 2bc+bb=(b\pm c)^2+3cc.$$

## Coroll. 1.

10. Hic pariter notasse iuuabit, ipsum quaternarium etiam esse numerum formae $aa+3bb$, inde resultantem, positis $a=1$, et $b=1$. At ex forma $mm+mn+nn$ quaternarius nascitur, si ponatur $n=0$, et $m=2$.

## Coroll. 2.

11. Cum igitur viderimus, dari numeros formae $aa+3bb$, qui tam per 3, quam per 4, sint diuisibiles: nunc demonstrauimus, quotos ex vtraque diuisione resultantes etiam esse numeros eiusdem formae $aa+3bb$.

## Coroll. 3.

12. Quodsi autem ambo numeri $a$ et $b$ fuerint impares, tum quotus, ex diuisione numeri $aa+3bb$ per 4 nascens, erit numerus impar. Vidimus enim, quotum esse $4cc\pm 2bc+bb$, qui, ob $b$ numerum imparem, certo est impar.

## Scholion.

13. Quod hactenus de diuisione numerorum formae $aa+3bb$ per 3 et 4 demonstrauimus, idem demonstrabimus de diuisione per numerum quemcunque alium

alium primum formae $aa+3bb$; quotum scilicet inde oriundum pariter fore numerum eiusdem formae. Hunc in finem, vt breuitati consulamus, denotabunt litterae P, Q, R, S etc. numeros primos formae $aa+3bb$, inter quos tamen etiam quaternarium referemus, etiamsi non sit primus, propterea quod binarius ab hac forma est excludendus.

## Propositio IV.

14. Si numerus formae $aa+3bb$ est diuisibilis per numerum primum $P=pp+3qq$, tum quotus est etiam numerus eiusdem formae.

## Demonstratio.

Si $aa+3bb$ est diuisibilis per $pp+3qq$, tum etiam $aapp+3bbpp$ per eundem est diuisibilis, itemque $aapp+3aaqq$; quare etiam horum numerorum differentia $3aaqq-3bbpp$, ideoque et $aaqq-bbpp=(aq+bp)(aq-bp)$. Cum igitur $3pp+3qq$ sit numerus primus, necesse est, vt alteruter istorum factorum, scilicet vel $aq+bp$, vel $aq-bp$, sit per $pp+3qq$ diuisibilis. Ponatur ergo pro vtroque casu $aq\pm bp=m(pp+3qq)$; hincque fiet

$$a=\frac{m(pp+3qq)}{q}\mp\frac{bp}{q}=3mq+\frac{p}{q}(mp\mp b).$$

Verum quia $a$ est numerus integer, et $p$ et $q$ numeri inter se primi, necesse est, vt $mp\mp b$ diuisionem per $q$ admittat. Ponatur ergo $mp\mp b=\mp nq$, eritque

$$b=mp\pm nq \quad \text{et} \quad a=3mq\mp np$$

Cum igitur numeri $a$ et $b$ necessario hoc modo exprimantur,

mantur, siquidem numerus $aa+3bb$ per $pp+3qq$ fuerit diuisibilis, hinc obtinebimus

$$aa+3bb=3mmpp+9mmqq+3nnqq+nnpp$$
$$=(pp+3qq)(nn+3mm)$$

vnde patet, hunc numerum, per numerum primum $P=pp+3qq$ diuisum, pro quoto dare $nn+3mm$, hoc est numerum formae $aa+3bb$.

## Coroll. 1.

15. Quoties ergo numerus formae $aa+3bb$ diuisorem primum habet $P=pp+3qq$, quotus est numerus formae $nn+3mm$. Vel, quod eodem redit, si numerus $aa+3bb$ constet duobus factoribus, quorum alter sit primus $P=pp+3qq$, tum etiam alter factor siue sit numerus primus, siue compositus, erit numerus formae $nn+3mm$.

## Coroll. 2.

16. Si igitur numerus $aa+3bb$ duobus constaret factoribus, quorum alter non in forma $nn+3mm$ contineretur, tum alter certe non erit primus formae $pp+3qq$.

## Coroll. 3.

17. Ex demonstratione patet, quomodo innumerabiles numeri $aa+3bb$ exhiberi queant, qui omnes sint diuisibiles per $pp+3qq$; eiusmodi nempe numeri obtinentur capiendo

$$a=3mq\pm np \quad \text{et} \quad b=mp\pm nq$$

neque

neque hic amplius opus est, conditionem adiecisse, vt $pp + 3qq$ sit numerus primus; quoniam his valoribus assumtis in genere fit $aa + 3bb = (pp + 3qq)(nn + 3mm)$.

## Coroll. 4.

18. Hinc igitur viciffim intelligitur, si duo pluresue numeri quicunque formae $aa + 3bb$ in se inuicem multiplicentur, productum semper fore numerum eiusdem formae. Quod enim de producto duorum valet, facile ad productum quotcunque talium numerorum extenditur.

## Scholion.

19. Etiamsi autem verum sit, productum ex duobus numeris formae $aa + 3bb$ itidem esse numerum eiusdem formae, tamen hinc per legitimam consequentiam nondum inferre licet, si numerus formae $aa + 3bb$ diuisorem habeat quemcunque $pp + 3qq$, tum etiam quotum eiusdem formae esse futurum: tametsi enim et hoc verum sit, tamen peculiari indiget demonstratione mox exponenda. Eiusmodi autem conclusionem illicitam esse, vel ex hoc exemplo patebit: cum productum ex duobus numeris paribus sit numerus par, si quis inde concludere vellet, numerum parem per parem diuisum quotum etiam parem esse praebiturum, is certe falleretur. Demonstrationem ergo huius veritatis a diuisore primo formae $pp + 3qq$ sum exorsus, quae conditio eatenus demonstrationem afficit, quod absque ea perperam concluderetur, cum pro-

 ductum

ductum $(aq+bp)(aq-bp)$ sit diuisibile, alterutrum factorem diuisibilem esse debere per $pp+3qq$. Deinde vero etiam ex eo, quod $p$ et $q$ sint numeri inter se primi, deriuauimus producti $p(mp\pm b)$, quod per $q$ est diuisibile, factorem $mp\pm b$ per $q$ diuisibilem esse debere; quae posterior conditio cum priore necessario est connexa.

## Propositio V.

20. Si numerus $aa+3bb$ fuerit diuisibilis per productum ex duobus pluribusue numeris primis formae $pp+3qq$, tum etiam quotus erit numerus eiusdem formae, puta $nn+3mm$.

## Demonstratio.

Sint enim P, Q, R, etc. numeri primi formae $pp+3qq$, numerusque $aa+3bb$ diuisibilis per productum P Q R. Sit M quotus inde resultans, ita vt sit $aa+3bb=MPQR$. Cum igitur sit $\frac{aa+3bb}{P}=MQR$, erit per prop. praec. MQR numerus eiusdem formae. Ponatur itaque $MQR=cc+3dd$, erit $\frac{cc+3dd}{Q}=MR$; ideoque, ob eandem rationem, hic quotus MR numerus eiusdem formae statuatur, itaque $MR=ee+3ff$, et cum sit $\frac{ee+3ff}{R}=M$, erit pariter M numerus formae $nn+3mm$.

## Coroll. 1.

21. Si ergo numerus $aa+3bb$ fuerit productum ex numeris quotcunque primis P, Q, R, S etc. formae

formae $pp+3qq$, et praeterea numero M, ita vt sit $aa+3bb=MPQRS$, certo affirmare poterimus, hunc numerum M esse eiusdem formae seu $M=nn+3mm$.

## Coroll. 2.

22. Quodsi igitur numerus $aa+3bb$ vnum habeat factorem A, qui non sit numerus formae $nn+3mm$, tum alter factor neque erit numerus primus formae $pp+3qq$, neque productum ex duobus pluribusue huiusmodi numeris primis.

## Coroll. 3.

23. Eodem ergo casu si ponamus $aa+3bb=AB$, et A non fuerit numerus formae $nn+3mm$; tum B vnum saltem factorem primum complectetur, qui non erit huius formae. Nam si B est numerus primus, non erit formae $pp+3qq$, sin autem non est primus, quia non ex meris numeris primis formae $pp+3qq$ constabit, vnum ad minimum factorem continebit, qui non sit eiusdem formae.

## Coroll. 4.

24. At si existente $aa+3bb=AB$, factor A non fuerit numerus formae $nn+3mm$, tum vel ipse erit numerus primus, in hac forma non contentus, vel saltem factorem implicabit primum, in hac forma non contentum; si enim A ex meris numeris primis formae $pp+3qq$ esset conflatus, ipse foret numerus eiusdem formae.

## Coroll. 5.

25. Hinc sequitur, si numerus $aa+3bb$ vnum habeat factorem primum in forma $pp+3qq$ non contentum, tum eum insuper certo adhuc alium factorem inuoluere, qui aeque non in hac forma $pp+3qq$ contineatur.

## Coroll. 6.

26. Ita iam ante vidimus, si numerus $aa+3bb$ sit par, seu factorem habeat 2, qui numerus non est formae $pp+3qq$, tum eum insuper eundem factorem 2 complecti, seu non solum per 2, sed etiam per 4, esse diuisibilem.

## Scholion.

27. Exhiberi quidem possunt numeri formae $aa+3bb$, qui per numerum quemcunque N sint divisibiles, etiamsi N non sit numerus formae $pp+3qq$; dum scilicet pro $a$ et $b$ multipla quaecunque huius numeri N accipiuntur: ita posito $a=mN$, et $b=nN$, numerus $aa+3bb=NN(mm+3nn)$, non solum per N, sed adeo per eius quadratum NN, fit diuisibilis; hocque ergo casu vtique duo adsunt factores N et N, quorum neuter in forma $pp+3qq$ continetur, vti § 25. ostendimus. Verum si $a$ et $b$ sint numeri inter se primi, hic casus locum habere nequit, ex quo merito dubitamus, num numerus inde formatus $aa+3bb$ praeter binarium vllum admittat diuisorem, qui non sit formae $pp+3qq$? De binario quidem hoc negari nequit, cum quoties $a$ et $b$ fuerint numeri impares ambo, diuisio per 2 succedat, at vero tum insuper binarius

rius ineſt, qui cum illo coniunctus praebet factorem 4, quaſi ſimplicem ſpectandum. Diligentius igitur examinandum reſtat, vtrum, dum $a$ et $b$ ſunt primi inter ſe, numerus $aa+3bb$ habeat vllum diuiſorem primum, qui non in forma $pp+3qq$ contineatur, nec ne? quod quidem eſſe negandum mox rigide ſum demonſtraturus; in quo negotio autem probe eſt cauendum, ne caſus binarii, quem excipi oportet, in demonſtratione quicquam turbet.

## Propoſitio VI.

28. Si daretur numerus primus A, in forma $pp+3qq$ non contentus, qui eſſet diuiſor cuiuspiam numeri $aa+3bb$, numeris $a$ et $b$ exiſtentibus inter ſe primis, tum exhiberi poſſet alius numerus primus praeter binarium, minor B, in forma $pp+3qq$ pariter non contentus, qui etiam futurus eſſet diuiſor cuiuspiam numeri formae $aa+3bb$, in quo numeri $a$ et $b$ itidem forent inter ſe primi.

## Demonſtratio.

Quia $a$ et $b$ ſunt numeri primi inter ſe, et $aa+3bb$ per A diuiſibilis ponitur, erunt ii quoque primi ad A. Si illi numeri eſſent maiores, quam A, ſtatui poſſet $a=m\mathrm{A}\pm c$, et $b=n\mathrm{A}\pm d$, vt numeri $c$ et $d$, qui pariter tum inter ſe, quam ad A, futuri eſſent primi, forent ſemiſſi ipſius A minores, ſcilicet $c<\frac{1}{2}\mathrm{A}$ et $d<\frac{1}{2}\mathrm{A}$, quia A, vt pote primus, eſt impar, caſum enim quo $\mathrm{A}=2$ hinc excipimus. Prodiret autem hac poſitione

$$aa+3bb=mm\mathrm{AA}\pm 2m\mathrm{A}c+cc+3nn\mathrm{AA}\pm 6n\mathrm{A}d+3dd$$

hincque

hincque obtineretur numerus $cc + 3dd$ minor, quam AA, qui esset per A diuisibilis, et quotus foret minor, quam A. Cum igitur A sit per hypothesin numerus in forma $pp + 3qq$ non contentus, vel ipse quotus, si fuerit primus, non erit numerus formae $pp + 3qq$, vel, si sit compositus, factorem habebit primum in hac forma non contentum. Sit B vel ipse quotus vel iste eius factor, eritque certe $B < A$, ex quo daretur numerus primus B minor, quam A, in forma $pp + 3qq$ non contentus, qui esset diuisor numeri $cc + 3dd$, existentibus numeris $c$ et $d$ inter se primis.

Dico autem hunc numerum primum B a binario fore diuersum. Vel enim quotus $\frac{cc + 3dd}{A}$ foret impar, vel par: et casu priori binarius in eo non contineretur, sicque numerus B non esset 2. Casu autem posteriori quotus binarium quidem, atque adeo quaternarium inuolueret; vnde cum 4 sit numerus formae $pp + 3qq$, necesse esset, vt ille quotus alium insuper factorem primum in forma $pp + 3qq$ non contentum implicaret. Vel si $cc + 3dd$ esset per 4 diuisibilis, quod eueniret, si vterque numerus $c$ et $d$ esset impar, eius quadrans $\frac{1}{4}(cc + 3dd)$ ad formam $ee + 3ff$ reduci posset, quae cum per A etiam nunc foret diuisibilis, multo magis quotus $\frac{ee + 3ff}{A}$ implicaret factorem primum imparem in forma $pp + 3qq$ non contentum.

## Propositio VII.

29. Omnes numeri huius formae $aa + 3bb$, siquidem $a$ et $b$ sint numeri primi inter se, praeter binarium nullos admittunt diuisores primos, nisi qui ipsi in forma $pp + 3qq$ contineantur.

Demon-

## Demonſtratio.

Si enim numerus quispiam formae $aa+3bb$ haberet factorem primum quamtumuis magnum A, qui in forma $pp+3qq$ non contineretur, ex eo inueniri poſſet alius numerus primus B, minor quam A, nec in forma $pp+3qq$ contentus, qui pariter eſſet diuiſor cuiuspiam numeri formae $aa+3bb$, exiſtentibus $a$ et $b$ numeris inter ſe primis; atque ex hoc numero B ſimili modo alii C, D, E continuo minores eiusdem indolis inueniri poſſent, haecque diminutio nunquam terminaretur, neque etiam vnquam ad binarium perueniretur. Cum igitur exhibitio numerorum integrorum continuo minorum inuoluat contradictionem: ſequitur, praeter binarium nullum dari numerum primum in forma $pp+3qq$ non contentum, per quem vllus numerus formae $aa+3bb$ diuidi queat, exiſtentibus $a$ et $b$ numeris inter ſe primis.

## Coroll. 1.

30. Omnes ergo diuiſores primi, qui conueniunt numeris formae $aa+3bb$, ſiquidem $a$ et $b$ ſint numeri inter ſe primi, ipſi in eadem forma $pp+3qq$ continentur; dummodo hinc binarius excludatur.

## Coroll. 2.

31. Si igitur numeri primi in duas claſſes diſtribuantur, quarum prior contineat eos, qui ſunt formae $pp+3qq$; poſterior vero eós, qui ad hanc formam

reduci nequeunt: omnes numeri huius posterioris classis ex serie diuisorum numerorum formae $aa+3bb$ excluduntur.

## Coroll. 3.

32. Nisi ergo numerus $aa+3bb$, existentibus $a$ et $b$ numeris inter se primis, ipse sit primus, erit is productum ex meris numeris primis formae $pp+3qq$; dummodo quaternarius etiam inter hos numeros referatur.

## Scholion.

33. Quod productum ex duobus pluribusue numeris formae $pp+3qq$ iterum in forma $aa+3bb$ contineatur, supra ostendimus; indeque ergo patebat, si P, Q, R, S, etc. denotent numeros primos in forma $pp+3qq$ contentos, productum ex quotcunque huiusmodi numeris P, Q, R, S, etc. semper ad formam $aa+3bb$ reuocari posse. Nunc autem huius propositionis inuersam demonstrauimus, qua patet, numeros formae $aa+3bb$ nullos alios factores admittere, nisi qui ipsi sint numeri formae $pp+3qq$. Hic quidem assumsimus, numeros $a$ et $b$ esse primos inter se: sin autem non essent primi, sed maximum haberent diuisorem communem $m$, vt sit $a=mc$, et $b=md$, tum numerus $aa+3bb=mm(cc+3dd)$ primum habebit factorem quadratum $mm$, cuius radix potest esse numerus quicunque, praeterea vero alios non involuet

voluet factores primos, nisi qui ipsi sint formae $pp + 3qq$.

## Propositio VIII.

34. Omnis numerus primus formae $pp + 3qq$, si per $6$ diuidatur, relinquit vnitatem, seu in forma numerorum $6n + 1$ continetur; excepto ternario, qui etiam in forma $pp + 3qq$ continetur.

## Demonstratio.

Cum $pp + 3qq$ sit numerus primus, quadratum $pp$ per ternarium non est diuisibile, sed per 3 diuisum relinquit 1; quia ergo $3qq$ diuisionem per 3 admittit, summa $pp + 3qq$ per 3 diuisa residuum dabit $= 1$; eritque propterea numerus formae $3m + 1$. Cum autem $pp + 3qq$ simul sit numerus impar per hypothesin, necesse est, vt $m$ sit numerus par; vnde, posito $m = 2n$, formula $6n + 1$ omnes complectetur numeros primos in forma $pp + 3qq$ contentos; excepto scilicet ternario ipso, cuius singularis est ratio.

## Coroll. 1.

35. Quia omnes numeri primi, exceptis 2 et 3, vel in hac formula $6n + 1$, vel in hac $6n - 2$, continentur, euidens est, nullos numeros primos posterioris formae $6n - 1$, in forma $pp + 3qq$ contineri.

## Coroll. 2.

36. Hinc omnes numeri primi formae $6n-1$ qui sunt:

5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, etc.

ex diuisoribus numerorum formae $aa+3bb$ sunt excludendi, seu nullus numerus huius formae $aa+3bb$, dum quidem sint $a$ et $b$ numeri primi inter se, exhiberi potest, qui per vllum numerum primum formae $6n-1$ sit diuisibilis.

## Scholion.

37. Vtrum autem omnes numeri primi alterius formae $6n+1$, qui sunt:

7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97 etc.

sint diuisores numerorum formae $aa+3bb$; seu, quod eodem redit, an omnes in forma $pp+3qq$ contineantur? ex allatis nondum affirmare licet. Inde enim tantum constat, omnes numeros primos formae $pp+3qq$ simul in forma $6n+1$ contineri, et propositio inuersa peculiari indiget demonstratione; quae ita concinnari debet, vt, proposito numero primo formae $6n+1$ quocunque, ostendatur, semper quempiam numerum formae $aa+3bb$, in quo $a$ et $b$ sint numeri primi inter se, exhiberi posse, qui per illum numerum $6n+1$ sit diuisibilis: in quo negotio loco formae $aa+3bb$ etiam haec $ff\pm fg+gg$ illi aequiualens accipi potest. Si enim numerum $f$ et $g$ alteruter, puta $g$, fuerit par, erit

$$ff\pm fg+gg=(f\pm\tfrac{1}{2}g)^2+3(\tfrac{1}{2}g)^2$$

sin

ſin autem vterque ſit impar, erit tam $f+g$, quam $f-g$, numerus par, et

$$ff \pm fg + gg = \frac{(f\mp g)^2}{2} + 3\frac{(f\pm g)^2}{2}.$$

Quodſi ergo exhiberi queat numerus $ff \pm fg + gg$ per numerum primum $6n+1$ diuiſibilis, ita vt $f$ et $g$ ſint primi inter ſe, ſimul conſtabit, numerum $6n+1$ eſſe numerum in forma $pp+3qq$ contentum; id quod in ſequente propoſitione demonſtrabimus.

## Propoſitio IX.

38. Omnis numerus primus formae $6n+1$ ſimul in hac forma $pp+3qq$ continetur.

## Demonſtratio.

Iam dudum demonſtraui, ſi $6n+1$ fuerit numerus primus, per eum diuiſibiles eſſe omnes numeros in hac forma $a^{6n}-b^{6n}$ contentos, dummodo neuter numerorum $a$ et $b$ ſeorſim per $6n+1$ ſit diuiſibilis. Cum igitur in factores reſoluendo ſit

$$a^{6n}-b^{6n} = (a^{2n}-b^{2n})(a^{4n}+a^{2n}b^{2n}+b^{4n})$$

alteruter horum factorum per $6n+1$ ſit diuiſibilis neceſſe eſt. Quodſi ergo dentur caſus, quibus factor $a^{2n}-b^{2n}$ non ſit diuiſibilis per $6n+1$, vt tamen, neque $a$, neque $b$, per eum ſit diuiſibilis, iis caſibus certe alter factor $a^{4n}+a^{2n}b^{2n}+b^{4n}$, hoc eſt numerus formae $ff+fg+gg$, per $6n+1$ erit diuiſibilis, ideoque numerus primus $6n+1$ foret in forma $pp+3qq$ contentus. Demonſtrari igitur debet, dari caſus, quibus forma $a^{2n}-b^{2n}$ non ſit diuiſibilis per $6n+1$. Ad hoc efficiendum ſumo $b=1$, et oſtendam, fieri non poſſe, vt omnes iſti numeri:

$$2^{2n}-1;\ 3^{2n}-1;\ 4^{2n}-1;\ 5^{2n}-1;\ \ldots\ldots (6n)^{2n}-1;$$

ſint per $6n+1$ diuiſibiles, vbi quidem pro $a$ omnes numeros ipſo $6n+1$ minores, ideoque primos ad eum, aſſumi pono. Nam ſi omnes hi numeri per $6n+1$ eſſent diuiſibiles, eorum etiam differentiae, cum primae, tum ſecundae, et ſequentes omnes, per $6n+1$ eſſent diuiſibiles, ideoque etiam differentiae ordinis $2n$, quae ſunt omnes conſtantes, et hoc modo exprimuntur:

$$2^{2n}-\frac{2n}{1}.3^{2n}+\frac{2n(2n-1)}{1.2}4^{2n}-\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}5^{2n}\ldots.(2+2n)^{2n}$$

vbi, cum ſit $2n+2<6n$, nullae poteſtates numerorum per $6n+1$ diuiſibilium ingrediuntur. Aliunde autem conſtat, differentiam ordinis $2n$ eſſe $=1.2.3.4\ldots\ldots 2n$, quae, cum certe non ſit per $6n+1$ diuiſibilis, manifeſto indicat, reperiri adeo inter hos numeros:

$$2^{2n}-1;\ 3^{2n}-1;\ 4^{2n}-1;\ \ldots\ldots (2+2n)^{2n}-1$$

vnum, vel etiam plures, qui non ſint per $6n+1$ diuiſibiles. Dum autem vnicus detur huiusmodi numerus $a^{2n}-1$ per $6n+1$ non diuiſibilis, per eum erit diuiſibilis $a^{4n}+a^{2n}+1$, hoc eſt numerus formae $ff+fg+gg$, in quo neque $f$, neque $g$, ſit per $6n+1$ diuiſibilis. Conſequenter numerus primus $6n+1$ eſt formae $pp+3qq$.

## Scholion.

39. Omnia ergo, quae cum in demonſtratione Theorematis, non dari duos cubos, quorum ſumma ſit cubus,

cubus, tum in solutione problematis de inueniendis tribus cubis, quorum summa sit cubus, assumseram, iam plane rigide sunt demonstrata. Assumseram autem primo, numeros formae $aa + 3bb$, seu $ff \pm fg + gg$, nullos admittere diuisores primos, nisi qui ipsi sint eiusdem formae, deinde omnes numeros primos istius formae simul in formula $6n + 1$ contineri, ac vicissim omnes numeros primos in formula $6n + 1$ contentos, simul esse numeros formae $pp + 3qq$. Quare nunc, tam illa demonstratio, quam solutio, pro perfectis sunt habendae. Interim tamen fateri cogor, in hac de natura numerorum Theoria plurima etiamnum desiderari, atque *Fermatii* demonstrationes deperditas sine dubio multo profundiores speculationes in se esse complexas. Eo enim modo, quo vsus sum ad demonstrandum, summam duorum cuborum nunquam posse esse cubum, non perspicio, quomodo demonstratio ad potestates altiores extendi possit; cum tamen *Fermatius* demonstrationem habuerit, neque summam $a^n + b^n$, neque differentiam $a^n - b^n$, nunquam esse potestatem similis exponentis $c^n$, quando exponens $n$ fuerit binario maior. Demonstrandum ergo esset, hanc aequationem $a^n \pm b^n = c^n$ in rationalibus nunquam locum habere posse, statim atque exponens $n$ binarium superet, nisi vnus numerorum $a$, $b$, $c$ euanescat. Deinde etsi demonstraui, numeros primos omnes formae $6n + 1$ esse in formula $pp + 3qq$ contentos, tamen simili modo demonstrare non licet, numeros primos formae $8n + 3$ semper in forma $pp + 2qq$ contineri, quod tamen aeque est certum, et a *Fermatio* demon-

stratum.

ſtratum. Succeſſit mihi quidem demonſtratio, quod numeri primi formae $4n+1$ ſint omnes duorum quadratorum ſummae, ſimilique modo demonſtrare poſſum, omnes numeros primos formae $8n+1$ ſimul in forma $pp+2qq$ contineri: verum plurima eiusdem generis theoremata proferri poſſunt aeque vera, veluti quod omnes numeri primi vel huius formae $20n+1$, vel $20n+9$, ſimul in formula $pp+5qq$ contineantur, et huiusmodi plura alia, quae tamen nondum video, quomodo demonſtrari queant. Ex quo Theoria numerorum nobis adhuc maximam partem abſcondita eſt cenſenda.

CON-

# CONSIDERATIO FORMVLARVM, QVARVM INTEGRATIO PER ARCVS SECTIONVM CONICARVM ABSOLVI POTEST.

Auctore

L. EVLERO.

## Lemmata.

I. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{fk-gh+gxx}{xx-h}}$

posito $x=\sqrt{(h+kzz)}$

II. $\int\frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}=\frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}}$

$=\frac{1}{k}\int dy\sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$

posito $x=\sqrt{(f+gzz)}$ et $y=\sqrt{(h+kzz)}$

III. $\int\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{h}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}}$

$=\frac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$

posito $x=\frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y=\frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$

IV. $\int\frac{dz\sqrt{(h+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}}$

$=\frac{1}{f}\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$

 posito

$$\text{posito } x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}} \text{ et } y = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$$

$$\text{V. } \int \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}} = \frac{1}{f}\int dx \sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}}$$

$$= \frac{1}{fk-gh}\int dy \sqrt{\frac{k-gyy}{fyy-h}}$$

$$\text{posito } x = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}} \text{ et } y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$$

$$\text{VI. } \int \frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} = \frac{1}{h}\int dx \sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}}$$

$$= \frac{1}{gh-fk}\int dy \sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}}$$

$$\text{posito } x = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}} \text{ et } y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$$

$$\text{VII. } \int \frac{zzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}} = -\frac{1}{g}\int dx \sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}}$$

$$= \frac{1}{fk-gh}\int dy \sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$$

$$\text{posito } x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}} \text{ et } y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$$

$$\text{VIII. } \int \frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} = -\frac{1}{k}\int dx \sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}}$$

$$= \frac{1}{gh-fk}\int dy \sqrt{\frac{hyy-f}{g-kyy}}$$

$$\text{posito } x = \frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}} \text{ et } y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$$

Theore-

# Theoremata.

I. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{fk-gb+gxx}{xx-b}}$

posito $x=\sqrt{(b+kzz)}$

II. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=z\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}-\int dx\sqrt{\frac{bxx-f}{g-kxx}}$

posito $x=\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$

III. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=z\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}+\frac{gb-fk}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-bxx}{g+(fk-gb)xx}}$

posito $x=\frac{1}{\sqrt{(b+kzz)}}$

IV. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=\frac{g}{k}z\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}+\frac{fk-gb}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{b+(fk-gb)xx}}$

posito $x=\frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$

V. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=\frac{g}{k}z\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}+\frac{f}{k}\int dx\sqrt{\frac{k-gxx}{fxx-b}}$

posito $x=\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$

VI. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=\frac{f}{b}\int dz\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}+\frac{gb-fk}{gb}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gb-fk+kxx}}$

posito $x=\sqrt{(f+gzz)}$

VII. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=\frac{f}{b}\int dz\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}+\frac{gb-fk}{bk}\int dx\sqrt{\frac{xx-b}{fk-gb+gxx}}$

posito $x=\sqrt{(b+kzz)}$

VIII. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=z\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}+P+Q$

vbi $P = \frac{gh-fk}{gk}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}} = \frac{fk-gh}{gh}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$

posito $x = \frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$

et $Q = \frac{-f(fk-gh)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}} = \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{kyy-f}}$

posito $x = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$

IX. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{fk}{gh}z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + P + Q$

vbi $P = \frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{gh-fk}{hk}\int dy\sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$

posito $x = \sqrt{(f+gzz)}$ et $y = \sqrt{(h+kzz)}$

atque $Q = \frac{f(gh-fk)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}} = \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}}$

posito $x = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$

X. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{gh-fk}{gh}z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + \frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P$

vbi $P = \frac{gh-fk}{gk}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}} = \frac{fk-gh}{gh}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$

posito $x = \frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$

XI. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{f}{h}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P + Q$

vbi $P = \frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{gh-fk}{hk}\int dy\sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$

posito $x = \sqrt{(f+gzz)}$ et $y = \sqrt{(h+kzz)}$

atque

atque $Q = \frac{f(fk-gh)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}} = \frac{-f}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$

posito $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

XII. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P + Q$

vbi $P = \frac{f(gh-fk)}{ghk}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}} = \frac{fk-gh}{hk}$

$\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$

posito $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{z}{(f+gzz}}$

atque $Q = \frac{f(fk-gh)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}} = \frac{-f}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$

posito $x = \sqrt{\frac{1}{(f+gzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

XIII. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{gh-fk}{hk}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P$

vbi $P = \frac{f(gh-fk)}{gk}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}} = \frac{fk-gh}{hk}\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$

posito $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$.

## Theorema Singulare.

$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{-gxz}{\sqrt{p}} - \int dx\sqrt{\frac{f+gxx}{h+kxx}}$, vbi $p$ denotat constantem arbitrariam, posita inter $x$ et $z$ hac relatione:

$gkxxzz - pxx - pzz - 2xz\sqrt{(p+fk)(p+gh)} + fh = 0$ siue

$$x = \frac{-z\sqrt{(p+fk)(p+gh)} + \sqrt{p(f+gzz)(h+kzz)}}{p-gkzz}$$

## Hypothesis.

Haec scribendi formula $\Pi x\ [a]$ denotet sectionis conicae, cuius semiparameter $=1$, et semiaxis transversus $=a$, arcum a vertice sumtum, cui in axe transverso conueniat abscissa $=x$.

## Corollarium.

Si $a$ sit quantitas positiua, hoc modo designatur arcus ellipsis; sin negatiua, arcus hyperbolae. Si modo $x$ fuerit quantitas positiua et minor quam $2a$.

## Integrationes formulae $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ in 12 casus distributae.

Casus I. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$:

Integrale est immediate:

$$C - \frac{(fk+gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk+gh}\left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk+gh}\right]$$

vel etiam per Theor. I.

$$C + \frac{f}{\sqrt{(fk+gh}}\Pi\frac{fk+gh}{fk}\left(1 - \frac{\sqrt{(h-kzz)}}{\sqrt{k}}\right)\left[\frac{fk+gh}{fk}\right]$$

Casus II. $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$, existente $fk > gh$

Integrale est immediate:

$$C - \frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

vel

vel etiam per Theor. I.

$$C+\frac{f}{\sqrt{(fk-gb}}\Pi\frac{fk-gb}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{(b-kzz)}}{\sqrt{b}}\right)\left[\frac{fk-gb}{fk}\right]$$

Casus III. $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-b+kzz}}$, existente $fk<gb$

Integrale est immediate:

$$C+\frac{gb-fk}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gb-fk}\left(z\sqrt{\frac{k}{b}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb-fk}\right]$$

Casus IV. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$, existente $fk<gb$

Integrale est per Theor. I.

$$C+\frac{f}{\sqrt{(gb-fk}}\Pi\frac{gb-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{(b+kzz)}}{\sqrt{b}}-1\right)\left[\frac{-gb+fk}{fk}\right]$$

Casus V. $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{b+kzz}}$

Integrale est per Theor. III.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{b+kzz}}-\frac{f}{\sqrt{(fk+gb)}}\Pi\frac{fk+gb}{fk}$$
$$\left(1-\frac{\sqrt{(fk+gb)}}{\sqrt{g(b+kzz)}}\right)\left[\frac{fk+gb}{fk}\right]$$

vel etiam per Theor. II.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{b+kzz}}+\frac{fk+gb}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk+gb}\left(1-\frac{\sqrt{k(-f+gzz)}}{\sqrt{g(b+kzz)}}\right)\left[\frac{fk}{fk+bg}\right]$$

Casus VI. $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-b+kzz}}$, existente $fk>gb$

Integrale est per Theor. III.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-k+kzz}}-\frac{f}{\sqrt{(fk-gb)}}\Pi\frac{fk-gb}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{(fk-gb}}{\sqrt{g(-b+kzz}}\right)\left[\frac{fk-gb}{fk}\right]$$

vel

vel etiam per Theor. II.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}+\frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1-\frac{\sqrt{k(-f+gzz)}}{\sqrt{g(-h+kzz)}}\right)\left[\frac{-fk}{fk-gh}\right]$$

Casus VII. $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$, existente $fk<gh$

Integrale est per Theor. III.

$$C+\frac{gz}{k}\sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}}-\frac{(gh-fk)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh-fk}\left(\frac{\sqrt{f(h-kzz)}}{\sqrt{h(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right]$$

Casus VIII. $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}$, existente $fk<gh$

Integrale est per Theor. II.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}-\frac{f}{\sqrt{(gh-fk)}}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{(gh-fk)}}{\sqrt{g(h-kzz)}}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right]$$

vel etiam per Theor. V.

$$C-\frac{gz}{k}\sqrt{\frac{h-kzz}{-f+gzz}}+\frac{f}{\sqrt{(gh-fk)}}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{z\sqrt{(gh-fk)}}{\sqrt{h(-f+gzz)}}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right]$$

Casus IX. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$, existente $fk>gh$

Integrale est per Theor. X.

$$C-\frac{(fk-gh)z}{gh}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}-\frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{z\sqrt{k}}{\sqrt{(h+kzz)}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$
$$+\frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{f}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

vel etiam per Theor. XIII.

$$C-\frac{(fk-gh)z}{hk}\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}+\frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gk}\left(1-\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$
$$+\frac{f}{\sqrt{(fh-gh)}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{\sqrt{h}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

Casus X.

**Casus X.** $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{-b+kzz}}$, existente $fk > gb$

Integrale est per Theor. IX.

$$C+\frac{fkz}{gb}\sqrt{\frac{f-gzz}{-b+kzz}}+\frac{(fk-gb)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gb}\left(1-\frac{\sqrt{k(f-gzz)}}{\sqrt{(fk-gb)}}\right)\left[\frac{fk}{gb}\right]$$
$$-\frac{f}{\sqrt{(fk-gb)}}\Pi\frac{fk-gb}{gb}\left(\frac{z\sqrt{(fk-gb)}}{\sqrt{f(-b+kzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk+gb}{gb}\right]$$

vel etiam per Theor. XI.

$$C-\frac{fz}{b}\sqrt{\frac{-b+kzz}{f-gzz}}+\frac{(fk-gb)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gb}\left(1-\frac{\sqrt{k(f+gzz)}}{\sqrt{(fk-gb)}}\right)\left[\frac{fk}{gb}\right]$$
$$+\frac{f}{\sqrt{(fk-gb)}}\Pi\frac{fk-gb}{gb}\left(\frac{\sqrt{(fk-gb}}{\sqrt{k(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk+gb}{gb}\right]$$

**Casus XI.** $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{-b+kzz}}$

Integrale est per Theor. XI.

$$C-\frac{fz}{b}\sqrt{\frac{-b+kzz}{f+gzz}}+\frac{f}{\sqrt{(fk+gb)}}\Pi\frac{fk+gb}{gb}\left(1-\frac{\sqrt{(fk+gb}}{\sqrt{k(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk+gb}{gb}\right]$$
$$+\frac{(fk+gb)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gb}\left(\frac{\sqrt{k(f+gzz)}}{\sqrt{(fk+gb)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb}\right]$$

vel etiam per Theor. XII.

$$C+\frac{gz}{k}\sqrt{\frac{-b+kzz}{f+gzz}}+\frac{f}{\sqrt{(fk+gb)}}\Pi\frac{fk+gb}{gb}\left(1-\frac{\sqrt{(fk+gb}}{\sqrt{k(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk+gb}{gb}\right]$$
$$+\frac{(fk+gb)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gb}\left(\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(f+gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb}\right]$$

**Casus XII.** $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{b+kzz}}$.

Integrale est per Theor. XIII.

$$C-\frac{(fk+gb)}{bk}\sqrt{\frac{b+kzz}{f-gzz}}+\frac{f}{\sqrt{(fk+gb)}}\Pi\frac{fk+gb}{gb}\left(1-\frac{\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{f}}\right)\left[\frac{fk+gb}{gb}\right]$$
$$+\frac{(fk+gb)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gb}\left(\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb}\right]$$

Omnes ergo casus formulae $\int dz\sqrt{\frac{\alpha+\beta zz}{\gamma+\delta zz}}$, quomodocunque litterae $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ fuerint comparatae, per arcus sectionum conicarum integrari possunt.

Non ſolum igitur formulae initio commemoratae integrationem per arcus ſectionum conicarum admittunt, ſed etiam innumerabiles aliae, quae per ſubſtitutionem ad formam $\int dx\sqrt{\frac{\alpha+\beta xx}{\gamma+\delta xx}}$ ſe reduci patiuntur, cuiusmodi ſunt:

$$1^\circ.\ \int\frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=-\int dx\sqrt{\frac{fxx+g}{bxx+k}}=-\frac{1}{b}\int dy\sqrt{\frac{fyy-fk+gb}{yy-k}}$$

poſito $x=\frac{1}{z}$ et $y=\frac{\sqrt{(b+kzz)}}{z}$

$$2^\circ.\ \int\frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)(b+kzz)}}=-\frac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{xx-g}{bxx+fk-gb}}=\frac{1}{b}\int dy\sqrt{\frac{yy-k}{fyy-fk+gb}}$$

poſito $x=\frac{\sqrt{(f+gzz)}}{z}$ et $y=\frac{\sqrt{(b+kzz)}}{z}$

$$3^\circ\ \int\frac{dz}{\sqrt{(f+gzz)(b+kzz)}}=\frac{k}{fk+gb}\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}-\frac{g}{fk-gb}\int dz\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$$

cuius formulae reductio etiam ita inſtituitur:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(f+gzz)(b+kzz)}}=\frac{f}{fk-gb}\int dx\sqrt{\frac{k-gxx}{fxx-b}}+\frac{g}{fk-gb}\int dx\sqrt{\frac{fxx-b}{k-gxx}}$$

poſito $x=\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$

vel etiam ſic:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(f+gzz)(b+kzz)}}=\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{b+(fk-gb)xx}}-\int dy\sqrt{\frac{1-fyy}{k+(gb-fk)yy}}$$

poſito $x=\frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y=\frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$.

Ponamus $zz=v$ atque obtinebimus ſequentes formulas, quae pariter per arcus ſectionum conicarum conſtrui poterunt:

$1^\circ.\ \int\frac{dv\sqrt{(f+gv)}}{\sqrt{v(b+kv)}}$; $2^\circ.\ \int\frac{dv\sqrt{(f+gv)}}{v\sqrt{v(b+kv)}}$

$3^\circ.\ \int\frac{dv\sqrt{v}}{\sqrt{(f+gv)(b+kv)}}$; $4^\circ.\ \int\frac{dv}{\sqrt{v(f+gv)(b+kv)}}$

5°

$$5^{\circ}. \int \frac{dv\sqrt{(f+gv)}}{(h+kv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}} \quad ; \quad 6^{\circ}. \int \frac{dv}{v\sqrt{v(f+gv)(h+kv)}}$$

$$7^{\circ}. \int \frac{dv}{(f+gv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v(h+kv)}} \quad ; \quad 8^{\circ}. \int \frac{dv\sqrt{v}}{(f+gv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kv)}}$$

hae enim vicissim, posito $v = zz$, ad formas praecedentes reducuntur.

Hinc patet, istam formulam satis late patentem ad arcus sectionum conicarum reduci posse

$$\int \frac{(A+Bu)\,du}{\sqrt{(\alpha+\beta u)(\gamma+\delta u)(\varepsilon+\zeta u)}},$$

quae imprimis notari meretur. Ponatur enim $\alpha+\beta u = v$, vt sit $u = \frac{v-\alpha}{\beta}$, haecque formula transmutabitur in hanc:

$$\int \frac{dv(A\beta - B\alpha + Bv)}{\beta\sqrt{v(\beta\gamma-\alpha\delta+\delta v)(\beta\varepsilon-\alpha\zeta+\zeta v)}},$$

quae ad binas formulas, sub n°. 3 et 4 allatas, reuocatur. Quare, si $\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3$ habeat tres factores reales, haec formula

$$\int \frac{dx(A+Bx)}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3)}}$$

modo exposito integrari poterit: semper autem vnum factorem certe habet realem. Sin autem bini sint imaginarii, formula $\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3$ ita referri potest $y(pp+2npqy+qqyy)$, existente $nn < 1$, vt definiendum sit integrale harum formularum:

$$\int \frac{C\,dy}{\sqrt{y(pp+2npqy+qqyy)}} + \int \frac{D\,dy\sqrt{y}}{\sqrt{(pp+2npqy+qqyy)}}$$

Ponatur $\sqrt{(pp+2npqy+qqyy)} = p+qyz$, fietque $y = \frac{2p(z-n)}{q(1-zz)}$, qua substitutione prior formula abit in $\frac{C\sqrt{2q}}{\sqrt{p}}\int \frac{dz}{\sqrt{(z-n)(1-z)(1+z)}}$ construibilem: posterior vero

 in

in hanc $\frac{2D\sqrt{2p}}{\sqrt{q}}\int\frac{dz\sqrt{(z-n)}}{(1-zz)^{\frac{3}{2}}}$; cum vero ſit $\int\frac{dz\sqrt{(z-n)}}{(1-zz)^{\frac{3}{2}}}$ $=\frac{z\sqrt{(z-n)}}{\sqrt{(1-zz)}}-\frac{1}{2}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{(z-n)(1-z)(1+z)}}$ etiam haec per ſuperiora conſtrui poteſt. Sicque in genere habetur conſtructio huius formulae $\int\frac{dx(A+Bx)}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3)}}$.

## Problema I.

Integrationem huius formulae $\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3+ex^4)}}$ per arcus ſectionum conicarum perficere.

## Solutio.

Quantitatem $a+bx+cxx+dx^3+ex^4$ ſemper in duos factores trinomiales reales reſoluere licet, qui ſint $(\alpha+2\beta x+\gamma xx)$ et $(\delta+2\varepsilon x+\zeta xx)$, ita vt habeatur haec formula integranda: $\int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)(\delta+2\varepsilon x+\zeta xx)}}$ Ponatur $\delta+2\varepsilon x+\zeta xx=(\alpha+2\beta x+\gamma xx)y$, vt formula propoſita fiat $\int\frac{dx}{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)\sqrt{y}}$. At aequatio aſſumta per radicis extractionem praebet

$$\varepsilon+\zeta x-\beta y-\gamma xy\sqrt{(pyy+qy+r)},$$

poſito $p=\beta\beta-\alpha\gamma$; $q=\alpha\zeta-2\beta\varepsilon+\gamma\delta$; et $r=\varepsilon\varepsilon-\beta\zeta$. Tum vero eadem differentiata dat:

$$dx(\varepsilon+\zeta x-\beta y-\gamma xy)=\tfrac{1}{2}dy(\alpha+2\beta x+\gamma xx)$$

ſeu $\frac{dx}{\alpha+2\beta x+\gamma xx}=\frac{\frac{1}{2}dy}{\varepsilon+\zeta x-\beta y-\gamma xy}$

Quare

Quare ſi pro hoc poſtremo denominatore valorem irrationalem modo inuentum ſubſtituamus, formula propoſita abit in hanc:

$$\int \frac{\frac{1}{2} dy}{\sqrt{y(pyy + qy + r)}},$$

cuius integratio per arcus ſectionum conicarum ſupra eſt oſtenſa.

Hic igitur naſcitur quaeſtio, quid tenendum ſit de hac formula:

$$\int \frac{dx(A + Bx + Cxx)}{\sqrt{(a + bx + cyy + dx^3 + ex^4)}}$$

Euidens enim eſt, non neceſſe eſſe, vt numeratori altiores poteſtates ipſius $x$ tribuantur; quam etiam Cel. *d'Alembert* fatetur, ſe in genere ad rectificationem ſectionum conicarum perducere non poſſe. Conſiderat quidem in Vol. IV. Mem. Acad. R. Berol. pag 254 caſum, quo $A = 0$, $C = 0$ et $a = 0$, ita vt formula ſit $\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{b + cx + dx^2 + ex^3)}}$ conaturque oſtendere (pag. 257.) eius integrationem caſu $dd = 4ce$ per arcus ſectionum conicarum abſolui poſſe: verum methodus, qua vtitur, negotium minime conficere videtur, vti rem accuratius perpendenti mox patebit. Transformationes autem, quas deinceps tradit, caſus nonnunquam hoc modo tractabiles ſuppeditant. Quocirca haec inueſtigatio, vti eſt difficillima, merito omni attentione digna eſt cenſenda: vnde etiam mea tentamina ſuper hac quaeſtione propoſuiſſe iuuabit.

## Problema 2.

Inueſtigare conditiones, ſub quibus integrationem huius formulae $\int \frac{dy(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}y+\mathfrak{R}yy)}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4+2\mathfrak{B}y^3+\mathfrak{C}yy+2\mathfrak{D}y+\mathfrak{E})}}$ ad hanc ſimpliciorem $\int \frac{dx(P+Qx+Rxx)}{\sqrt{(Ax^4+Cxx+D)}}$ reducere liceat.

## Solutio.

Statuatur inter variabiles $x$ et $y$ talis relatio:
$\alpha xxyy+2xy(\beta x+\gamma y)+\delta xx+\varepsilon yy+2\zeta xy+2\eta x+2\theta y+\varkappa=0$,
cuius coefficientes ita determinentur, vt ſit

$$\beta\zeta-\alpha\eta-\gamma\delta=0; \qquad \zeta\theta-\gamma\varkappa-\varepsilon\eta=0$$
$$\gamma\gamma-\alpha\varepsilon=\mathfrak{A}; \qquad \gamma\zeta-\alpha\theta-\beta\varepsilon=\mathfrak{B}$$
$$\eta\eta-\delta\varkappa=\mathfrak{E}; \qquad \zeta\eta-\beta\varkappa-\delta\theta=\mathfrak{D}$$

et $\zeta\zeta+2\gamma\eta-\alpha\varkappa-\delta\varepsilon-4\beta\theta=\mathfrak{C}$

hincque erit pro denominatore transformatae:

$$A=\beta\beta-\alpha\delta; \quad E=\theta\theta-\varepsilon\varkappa; \quad \text{et } C=\zeta\zeta+2\beta\theta-\alpha\varkappa-\delta\varepsilon-4\gamma\eta$$

Cum autem nouem habeantur litterae $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \varkappa$, his ſeptem conditionibus praeſcriptis vtique ſatisfieri poterit, relinqueturque adhuc vna arbitrio noſtro determinanda. Si iam breuitatis gratia ponamus:
$\mathfrak{A}y^4+2\mathfrak{B}y^3+\mathfrak{C}y^2+2\mathfrak{D}y+\mathfrak{E}=Y$ et $Ax^4+Cxx+E=X$,
reſolutio aequationis aſſumtae praebet:

$$\alpha xyy+2\beta xy+\delta x+\gamma yy+\zeta y+\eta=\sqrt{Y}$$
$$\alpha xxy+2\gamma xy+\varepsilon y+\beta xx+\zeta x+\theta=\sqrt{X}$$

eius-

eiusque differentiatio ducit ad hanc aequationem:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dx}{\sqrt{X}} = 0.$$ Ponamus ergo:

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}y + \mathfrak{R}yy)}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}} = V - \int \frac{dx(P + Qx + Rxx)}{\sqrt{(Ax^4 + Cx^2 + E)}},$$

ac sit V talis functio algebraica:

$$V = mx + ny + pxy + \tfrac{1}{2}qxx + \tfrac{1}{2}ryy + txyy.$$

Hinc sumtis differentialibus terminisque homogeneis seorsim aequatis, reperientur sequentes determinationes:

$$m = \frac{\beta\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}};\; n = \frac{\gamma\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}};\; p = \frac{\alpha\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}};\; q = 0,\; r = 0 \text{ et } t = 0,$$

praeterea vero haec determinatio accedit, vt sit $\mathfrak{A}\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}\mathfrak{R}$.

Deinde vero fit:

$$P = \mathfrak{P} + \frac{(\beta\theta - \gamma\eta)\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}};\; Q = 0; \text{ et } R = \frac{A\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}.$$

Definitis ergo coefficientibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \varkappa$, quibus constat relatio inter $x$ et $y$, ex iis innotescunt quantitates A, C, E, quibus inuentis; si fuerit $\mathfrak{A}\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}\mathfrak{R}$, erit:

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}y + \mathfrak{R}yy)}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}} = \text{Const.} + \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}(\beta x + \gamma y + \alpha xy)$$
$$- \int \frac{dx\left(\mathfrak{P} + \frac{(\beta\theta + \gamma\eta)\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}} + \frac{A\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}xx\right)}{\sqrt{(Ax^4 + Cx^2 + E)}}$$

Dummodo ergo fuerit $\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}$, formulae propositae integratio reducta est ad hanc simpliciorem: $\int \frac{dx(P + Rxx)}{\sqrt{(Ax^4 + Cx^2 + E)}}$.

## Corollarium I.

Determinatio coefficientium $\alpha, \beta, \gamma$, etc. commodissime hoc modo instituetur: Primo quaeratur valor

lor ipſius $s$ ex hac aequatione:

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B} - \mathfrak{D}\mathfrak{D}ss}{\mathfrak{A} - \mathfrak{E}ss} + \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D} - 2\mathfrak{B}\mathfrak{E}s}{\mathfrak{B} - \mathfrak{D}s},$$

quae, cum ſit cubica, certe valorem realem pro $s$ ſuggerit: quo inuento, ſumtaque ad arbitrium quantitate $t$, ſit breuitatis gratia $\frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{E}ss}{\mathfrak{B} - \mathfrak{D}ss} = u$, tum autem valores omnium 9 coefficientium ita ſe habebunt:

$$\zeta = u\sqrt{\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 3\mathfrak{A}\mathfrak{D}s + 3\mathfrak{B}\mathfrak{E}ss - \mathfrak{D}\mathfrak{E}s^3}{s - uu}}$$

$$\gamma = \frac{\zeta s}{2u}; \qquad \alpha = \frac{u}{2t(s - uu)}$$

$$\eta = \frac{\zeta}{2u}; \qquad \delta = \frac{u}{2st(s - uu)}$$

$$\beta = -\frac{1}{2t(s - uu)}; \quad \theta = \tfrac{1}{2}t\left(2(\mathfrak{A} + \mathfrak{E}ss) - \tfrac{s}{u}(\mathfrak{B} + \mathfrak{D}s)\right)$$

$$\varepsilon = \tfrac{1}{3}t(4\mathfrak{A}u - 3\mathfrak{B}s + \mathfrak{D}ss); \; \varkappa = \tfrac{1}{2}t(4\mathfrak{E}su + \mathfrak{B} - 3\mathfrak{D}s).$$

## Coroll. 2.

Alio adhuc modo idem praeſtari poteſt. Extracto ſcilicet, vt ante, valore $s$ ex hac aequatione:

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B} - \mathfrak{D}\mathfrak{D}ss}{\mathfrak{A} - \mathfrak{E}ss} + \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D} - 2\mathfrak{B}\mathfrak{E}s}{\mathfrak{B} - \mathfrak{D}s},$$

poſitoque breuitatis gratia $\frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{E}ss}{\mathfrak{B} - \mathfrak{D}s} = u$, et, ſumto $t$ pro arbitrio, erit:

$$\alpha = -\frac{1}{4tu}; \; \beta = 0; \; \gamma = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{s(\mathfrak{B} + \mathfrak{D}s)}{u}}; \; \delta = \frac{1}{4tsu}$$

$$\varepsilon = t(4\mathfrak{A}u - \mathfrak{B}s - \mathfrak{D}ss); \; \zeta = \sqrt{\frac{u(\mathfrak{B} + \mathfrak{D}s)}{s}}, \; \eta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{D}s}{us}}$$

$$\theta = 2tu; \; \varkappa = t(\mathfrak{B} + \mathfrak{D}s - 4\mathfrak{E}su).$$

Coroll.

## Coroll. 3.

Si fuerit $\mathfrak{A} : \mathfrak{E} = \mathfrak{B}\mathfrak{B} : \mathfrak{D}\mathfrak{D}$, aequatio cubica valori $s$ definiendo fit inepta. Hoc autem incommodum facile tollitur, transformanda formula differentiali per positionem $y = y \pm a$; qua etiam forma numerationis non turbatur.

## Scholion.

Posito $\mathfrak{R} = n\mathfrak{A}$, et $\mathfrak{Q} = n\mathfrak{B}$, integratio huius formulae:

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + n\mathfrak{B}y + n\mathfrak{A}yy)}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}},$$

semper reduci potest ad integrationem talis:

$$\int \frac{dx(P + Rxx)}{\sqrt{(Ax^4 + Cxx + E)}},$$

quae, si denominator $Ax^4 + Cxx + E$ in huiusmodi duos factores reales $(f + gxx)(b + kxx)$ se resolui patitur, per rectificationem sectionum conicarum conficitur; at, si talis resolutio non succedit, sequenti artificio negotium absolui poterit.

## Problema 3.

Si in formula $\int \frac{dx(P + Rxx)}{\sqrt{(Ax^4 + Cx^2 + E)}}$ quantitas $Ax^4 + Cx^2 + E$ in factores reales huiusmodi $(f + gxx)(b + kxx)$ resolui nequeat, eam in aliam transformare, quae per arcus sectionum conicarum certo integrari queat.

## Solutio.

Inducatur alia variabilis $z$, cuius relatio ad $x$ hac aequatione exprimatur:

$$4Exxz^4 - 4xxzz\sqrt{AE} - 4Ezz + 2\sqrt{AE} - C = 0$$

vbi $\sqrt{AE}$ erit vtique quantitas realis, si quidem $Ax^4 + Cxx + E$ non habeat factores binomios reales. Hinc autem fiet:

$$\int \frac{dx(P + Rxx)}{\sqrt{(Ax^4 + Cxx + E)}} = \text{Const.} + \frac{Rx}{\sqrt{A}} - \frac{2R\sqrt{E}}{A}xzz$$
$$- 2\int \frac{dz\left(P - \frac{R\sqrt{E}}{\sqrt{A}} + \frac{2ER}{A}zz\right)}{\sqrt{\left(4Ez^4 + (C - 6\sqrt{AE})zz + 2A - \frac{C\sqrt{A}}{\sqrt{E}}\right)}}$$

in qua noua formula quantitas, in denominatore contenta, certe in duos factores binomios reales est resolubilis, cum sit $(C - 6\sqrt{AE})^2 > 16E\left(2A - \frac{C\sqrt{A}}{\sqrt{E}}\right)$; propterea quod hinc sequitur $CC + 4C\sqrt{AE} + 4AE = (C + 2\sqrt{AE})^2 > 0$.

## Aliter.

Habeat noua variabilis $z$ ad $x$ talem relationem:

$$2Exxz^4 - Cxxzz + \frac{CC - 4AE}{4E}xx - 2Ezz = 0$$

eritque:

$$\int \frac{dx(P + Rxx)}{\sqrt{(Ax^4 + Cxx + E)}} = \frac{CR}{2A\sqrt{E}}x - \frac{2R\sqrt{E}}{A}xzz$$
$$- 2\int \frac{dz\left(P - \frac{CR}{2A} + \frac{2ER}{A}zz\right)}{\sqrt{\left(4Ez^4 - 2Czz + \frac{CC - 4AE}{4E}\right)}}$$

cuius

cuius denominator pariter certe in factores reales binomios est resolubilis.

## Conclusio.

His demonstratis manifestum est, hanc formulam:

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + n\mathfrak{B}y + n\mathfrak{A}yy)}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}}$$

semper per arcus sectionum conicarum construi posse. Cum igitur denominator semper in duos factores trinomiales reales resolui possit, hac formula ita exhiberi potest:

$$\int \frac{dy(A + n(\alpha\varepsilon + \beta\delta)y + n\alpha\delta yy)}{\sqrt{(\alpha yy + 2\beta y + \gamma)(\delta yy + 2\varepsilon y + \zeta)}},$$

cuius ergo eadem datur constructio. Porro augendo vel diminuendo $y$ quantitate constante, formula nostra etiam ita repraesentari potest:

$$\int \frac{dy(M + Nyy)}{\sqrt{(Ay^4 + Cyy + 2Dy + E)}}.$$

In his autem fere omnes casus, quos quidem per rectificationem sectionum conicarum integrale licet, contineri videntur. Sed in medium afferamus adhuc aliam reductionem.

## Problema IV.

Inuestigare conditiones, sub quibus integrationem huius formulae:

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}y + \mathfrak{R}yy)}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}yy + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}}$$ ad hanc simpliciorem

$$\int \frac{dx(P + Qx + Rxx)}{\sqrt{(2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx)}}$$ perducere liceat:

 Solu-

## Solutio.

Statuatur inter variabiles $x$ et $y$ talis relatio:

$$\alpha xxyy + 2xy(\beta x + \gamma y) + \delta xx + \varepsilon yy + 2\zeta xy + 2\eta x + 2\theta y + \kappa = 0,$$

cuius coefficientes ita determinentur, vt sit:

$$\beta\beta - \alpha\delta = 0;\quad \gamma\gamma - \alpha\varepsilon = \mathfrak{A};\quad \gamma\zeta - \alpha\theta - \beta\varepsilon = \mathfrak{B}$$

$$\theta\theta - \varepsilon\kappa = 0;\quad \eta\eta - \delta\kappa = \mathfrak{E};\quad \zeta\eta - \beta\kappa - \delta\theta = \mathfrak{D}$$

atque $\zeta\zeta + 2\gamma\eta - \alpha\kappa - \delta\varepsilon - 4\beta\theta = \mathfrak{C}$,

quem in finem definiatur primo $p$ ex hac aequatione cubica:

$$p^3 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}pp - (\mathfrak{A}\mathfrak{E} - \mathfrak{B}\mathfrak{D})p + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{E} - \mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{E}) = 0$$

Deinde, pro lubitu sumto numero $m$, definiatur $q$ ex hac aequatione quadratica: $qq - q(\mathfrak{D}m - \mathfrak{B}) + (m\mathfrak{E} - p)(mp - \mathfrak{A}) = 0$, quo facto, si denuo numerus arbitrarius accipiatur $n$, erit:

$$\beta = \frac{n(m\mathfrak{E} - p)}{\sqrt{(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})}};\qquad \theta = \frac{mp - \mathfrak{A}}{n\sqrt{(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})}}$$

$$\alpha = \frac{nq}{\sqrt{(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})}};\qquad \kappa = \frac{q}{n\sqrt{(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})}};$$

$$\delta = \frac{n(m\mathfrak{E} + p)^2}{q\sqrt{(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})}};\qquad \varepsilon = \frac{(mp - \mathfrak{A})^2}{nq\sqrt{(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})}}$$

$$\gamma = \frac{m\sqrt{(pp - \mathfrak{A}\mathfrak{E})}}{\sqrt{(2mp - \mathfrak{A} - \mathfrak{E}mm)}};\qquad \eta = \frac{\sqrt{(pp - \mathfrak{A}\mathfrak{E})}}{\sqrt{(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})}}$$

et $$\zeta = \frac{\mathfrak{D}(mp - \mathfrak{A}) - \mathfrak{B}(m\mathfrak{E} - p)}{\sqrt{(pp - \mathfrak{A}\mathfrak{E})(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})}}.$$

Quibus inuentis erit:

$$B = \beta\zeta - \alpha\eta - \gamma\delta;\quad D = \zeta\theta - \gamma\kappa - \varepsilon\eta$$

et $C = \zeta\zeta + 2\beta\theta - \alpha\kappa - \delta\varepsilon - 4\gamma\eta$.

Pone-

Ponatur iam:

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}y + \mathfrak{R}yy)}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}} = \text{Const.} + mx + ny + pxy$$
$$- \int \frac{dx(P + Qx + Rxx)}{\sqrt{(2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx)}}$$

atque reperitur, vt ante,

$$m = \frac{\beta\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}};\; n = \frac{\gamma\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}};\; \text{et } p = \frac{\alpha\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}$$

deinde $P = \mathfrak{P} + \frac{(\beta\delta - \gamma\eta)\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}$; $\mathfrak{Q} = \frac{B\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}$ et $R = 0$.

Necesse autem est, vt in formula proposita sit $\mathfrak{A}\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}\mathfrak{R}$, neque ergo haec reductio nouos casus suppeditat. At posito $x = zz$, formula transformata abit in hanc:

$$- 2\int \frac{dz(P + Qzz)}{\sqrt{(2Bz^4 + Cz^2 + 2D)}}$$

quae reductio saepe facilius succedit, quam praecedens.

# CONSTRVCTIO
## AEQVATIONIS DIFFERENTIO-DIFFERENTIALIS
## $Aydu^2+(B+Cududy+(D+Eu+Fuu)ddy)=0$,
## sumto elemento $du$ constante.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Aequationem hanc differentio-differentialem latissime patere, ex plurimis formis, in quas eam transmutare licet, facile intelligitur; plerumque autem eiusmodi complectitur casus, qui, cum sint aequationi *Riccatianae* similes, solitis methodis neque ad integrationem, neque ad variabilium separationem reduci possunt. Primo enim, ponendo $y=e^{\int zdu}$, reuocatur ad hanc aequationem differentialem primi gradus:

$$dz+\frac{(B-Cu)zdu}{D+Eu+Fuu}+zzdu+\frac{Adu}{D+Eu+Fuu}=0,$$

quae deinceps ad alias substitutiones amplissimum campum patefacit. Quam ob rem non parum Analysi consultum fore arbitror, si in genere istius aequationis constructionem docuero, id quod per ea, quae olim de aequatione *Riccatiana* proposui, sequentem in modum praestari poterit.

2. Concipio autem $y$ determinari formula quapiam integrali praeter quantitatem $u$ nouam variabilem $x$ inuoluente, ita vt in hac integratione sola $x$, vt variabilis,

riabilis, quantitas $u$ vero vt constans, tractetur. Cum autem integratio, siue analytice, siue per constructionem quadraturarum, fuerit absoluta, quantitati $x$ valor quidam constans datus tribuitur, quo facto integrale repraesentabit functionem quandam ipsius $u$, quae sit ea ipsa, quam aequatio proposita exigit. Totum ergo negotium huc redit, vt formula illa integralis quantitates $u$ et $x$ inuoluens inueniatur, quae hoc modo tractata verum valorem ipsius $y$ exhibeat.

3. Ponamus ergo esse $y = \int P dx (u+x)^n$, in qua formula P denotet functionem quandam ipsius $x$ ab $u$ immunem, quam quidem demum definiri oportet. Quae cum fuerit cognita, integrale saltem per quadraturas concedetur, idque pro quocunque valore ipsius $u$, quae in integratione vt constans spectatur. Tum integrali ita sumto, vt pro quopiam valore ipsi $x$ tributo euanescat, statuatur pro $x$ alius quispiam valor definitus et constans, ab $u$ scilicet non pendens; quo facto aequabitur $y$ functioni cuipiam determinatae ipsius $u$, quae sit ea ipsa, qua aequatio proposita resoluitur.

4. Etsi autem in integratione $\int P dx (u+x)^n$ quantitas $u$ pro constante habetur, tamen eius incrementum assignari potest, quod capit, si pro $u$ statuatur $u + du$, et integratio simili modo absoluatur. Ex principiis autem alibi expositis colligitur hoc incrementum $= n du \int P dx (u+x)^{n-1}$. Quare si haec formula eodem modo tractetur, ipsique $x$ post integrationem valor determinatus tribuatur, cum fuerit $y = \int P dx (u+x)^n$ erit nunc, quatenus variato $u$ simul $y$ variationem subit, $dy = n du \int P dx (u+x)^{n-1}$. Ac si porro simili modo

modo differentiale ex variatione ipsius $u$ ortum colligamus, ob $du$ constans consequemur:

$$ddy = n(n-1)du^2 \int P dx (u+x)^{n-2}.$$

5. Cum igitur his integralibus modo praescripto ita sumtis, vt ipsi $x$ valor quidam determinatus tribuatur, sicque ea in meras functiones ipsius $u$ abeant, habeamus hos valores:

$$y = \int P dx (u+x)^n; \quad \frac{dy}{du} = n \int P dx (u+x)^{n-1}$$

$$\text{et } \frac{ddy}{du^2} = n(n-1) \int P dx (u+x)^{n-2}$$

necesse est, vt vi aequationis propositae sit

$$A \int P dx (u+x)^n + n(B+Cu) \int P dx (u+x)^{n-1}$$
$$+ n(n-1)(D+Eu+Fuu) \int P dx (u+x)^{n-2} = 0$$

in quibus integralibus sola $x$ vt variabilis spectatur, $u$ vero pro constante habetur. Haec autem aequatio tum solum locum habere debet, cum post singulas integrationes quantitati $x$ valor ille determinatus ab $u$ non pendens fuerit tributus.

6. In genere autem, antequam ipsi $x$ iste valor assignatur, ista quantitas non euanescet, sed potius cuipiam quantitati ex $u$ et $x$ compositae aequabitur, quae autem ita comparata esse debet, vt illo casu, quo pro $x$ valor ille determinatus scribatur, euanescat. Sit igitur $R(u+x)^{n-1}$ ea quantitas indefinita, cui superior forma in genere aequetur, vbi R sit eiusmodi functio ipsius $x$, quae tam pro eo valore ipsius $x$, quo integralia singula euanescentia redduntur, quam pro eo, qui ipsi post integrationes tribuitur, in nihilum abeat. Quos valores ex ipsa indole huius functiones R colligi

colligi conuenit, haecque etiam est causa, cur eos non statim determinauerim.

7. Quamdiu ergo $x$ adhuc est variabilis, et $u$ ut constans spectatur, necesse est, vt expressio $R(u+x)^{n-1}$ aequetur huic formulae integrali:

$$\int Pdx(u+x)^{n-2}\left(\begin{array}{lll} +Auu & +2Aux & +Axx \\ +nCuu & +nCux & +nBx \\ & +nBu & +n(n-1)D \\ +n(n-1)Fuu & +n(n-1)Eu & \end{array}\right)$$

cuius propterea differentiale aequari oportet huic:

$$(u+x)^{n-2}\left(\begin{array}{l} u\,dR+x\,dR \\ \quad +(n-1)R\,dx \end{array}\right)$$

Quia autem R ab $u$ pendere non debet, conditiones satisfacientes his aequationibus continentur:

$$A+nC+n(n-1)F=0$$

$$dR=(2A+nC)Px\,dx+n(B+(n-1)E)\,P\,dx$$

$$x\,dR+(n-1)R\,dx=APxx\,dx+nBPx\,dx+n(n-1)DP\,dx.$$

8. Si valor ipsius $dR$ ex secunda in tertia substituatur, habebitur:

$$(n-1)R=-(A+nC)Pxx-n(n-1)EPx+n(n-1)DP$$

et quia ex prima est $-A-nC=n(n-1)F$, prodit

$$R=nP(Fxx-Ex+D).$$

Deinde ob $2A+nC=-2n(n-1)F-nC$, secunda induit hanc formam:

$$dR=nP\,dx(-(C+2(n-1)F)x+B+(n-1)E)$$

quae per illam diuisa dat:

$$\frac{dR}{R}=\frac{-(C+2(n-1)F)x\,dx+(B+(n-1)E)\,dx}{Fxx-Ex+D}$$

vnde, cum R fuerit inuentum, erit

$$P\,dx = \frac{R\,dx}{n(Fxx - Ex + D)},$$

exponens autem $n$ per primam aequationem definitur, vnde fit $n = \frac{F - C \pm \sqrt{((F-C)^2 - 4AF)}}{2F}$.

9. Hic plures casus perpendendi occurrunt, ac primo quidem ratione exponentis $n$, si is prodierit imaginarius, puta $n = \mu + \nu\sqrt{-1}$, notandum est, esse $r^{\sqrt{-1}} = \cos. lr + \sqrt{-1}.\ \sin lr$, ideoque $r^n = r^\mu(\cos. \nu lr + \sqrt{-1}.\ \sin. \nu lr)$, vnde imaginarium exponentis ope sinuum ad imaginaria simplicia reducitur, ex quibus deinceps eorum destructio mutua facilius perficietur. Deinde inuestigatio functionis R huc redigitur, vt sit

$$lR = -(n-1)l(Fxx - Ex + D) - \int \frac{Cx\,dx - B\,dx}{Fxx - Ex + D}$$

quae denuo ad hanc formam perducitur:

$$lR = -\left(n - 1 + \frac{C}{2F}\right)l(Fxx - Ex + D) + \left(B - \frac{CE}{2F}\right)\int \frac{dx}{Fxx - Ex + D}$$

Nisi ergo sit $B - \frac{CE}{2F} = 0$, videndum est, an formulae integrandae denominator $Fxx - Ex + D$ habeat duos factores simplices reales et inaequales, an vero aequales? tum vero an in huiusmodi factores sit irresolubilis? praeterea casus, quo $F = 0$ peculiarem euolutionem postulat, quos diuersos casus seorsim pertractabo.

## I. Casus quo $B = \frac{CE}{2F}$.

10. Aequatio ergo resoluenda erit

$$Ay + \frac{C}{2F}(E + 2Fu)\frac{dy}{du} + (D + Eu + Fuu)\frac{ddy}{du^2} = 0$$

pro qua si sumamus $y = \int P\,dx(u + x)^n$, habemus primo

$$n = \frac{F - C \pm \sqrt{((F-C)^2 - 4AF)}}{2F},$$ tum vero

R =

$$R = (D - Ex + Fxx)^{-n+1-\frac{C}{2F}},$$ hincque

$$P\,dx = \tfrac{1}{n}\,dx\,(D - Ex + Fxx)^{-n-\frac{C}{2F}},$$ ita vt fit

$$y = \tfrac{1}{n}\int \frac{dx\,(u+x)^n}{(D - Ex + Fxx)^{1+n+\frac{C}{2F}}}$$

quod integrale eiusmodi terminis ipsius $x$ comprehendi debet, quibus quantitas $(u+x)^{n+1}(D-Ex+Fxx)^{-n+1-\frac{C}{2F}}$ euanescat.

11. Quoties ergo formula $D - Ex + Fxx$ duos factores habet reales, ea duplici casu euanescit, vnde bini integrationis termini constitui possunt; ad hoc autem necesse est, vt eius exponens $-n+1-\frac{C}{2F}$, qui fit $= \frac{F \mp \sqrt{((F-C)^2 - 4AF)}}{2F}$, sit positiuus, quia alioquin quantitas illa, cui formula proposita aequalis statuitur, non in nihilum abiret. Hoc igitur casu constructio aequationis nullam habebit difficultatem, propterea quod ob signum ambiguum exponenti semper valor positiuus tribui potest. Sit enim exponens ille $= m$, et habebitur

$$4FFmm - 4FFm + 4AF + 2CF - CC = 0$$

quae aequatio si habet radices reales, ob terminum $-4FFm$ negatiuum, altera certe erit positiua. Quem casum diligenter prosequamur.

12. Sit $D = aa$, $E = 0$ et $F = -1$, ita vt haec aequatio sit resoluenda:

$$Ay + \frac{Cu\,dy}{du} + (aa - uu)\frac{ddy}{du^2} = 0,$$

 eritque

eritque $n = \frac{1+C \pm \sqrt{(1+2C+CC+4A)}}{2}$, cuius valor semper est realis, nisi A sit quantitas negatiua maior quam $\frac{1}{4}(1+C)^2$: hinc erit

$$m = -n + 1 + \frac{1}{2}C = \frac{1 \mp \sqrt{(1+2C+CC+4A)}}{2}$$

cuius valore positiuo sumto, erit pro resolutione nostrae aequationis

$$y = \frac{1}{n}\int dx(u+x)^n(aa-xx)^{m-1}$$

quod integrale ita capiatur, vt posito $x = a$ euanescat; tum vero statuatur $x = -a$, et pro $y$ prodibit functio ipsius $u$ aequationi satisfaciens. Prout iam fuerit numerus realis, vel imaginarius, sequentia exempla subiungamus.

17. *Exemplum* 1. Sit $C = 2$, et $A = -2$, vt proposita sit haec aequatio:

$$-2y + \frac{2udy}{du} + \frac{(aa-uu)ddy}{du^2} = 0.$$

erit $n = 1$, et $m = 1$, vnde fit $y = \int dx(u+x)$ et ob

$$-2y + \frac{2udy}{du} + \frac{(aa-uu)ddy}{du^2} = aa-xx$$

integratio ipsius $y$ ita absolui debet, vt pro terminis integralis $aa-xx$ euanescat, hoc est si fuerit $x = a$ et $x = -a$. Fiet ergo $y = ux + \frac{1}{2}xx - au - \frac{1}{2}aa$, et posito iam $x = -a$, erit $y = -2au$, qui valor aequationi vtique satisfacit, et generalius quidem $y = au$, ex quo porro integrale completum eruitur, ponendo $y = uz$, vnde fit

$$2aadudz + (aa-uu)uddz = 0, \text{ seu } \frac{ddz}{dz} + \frac{2aadu}{u(aa-uu)} = 0$$

vel $\frac{ddz}{dz} + \frac{2du}{u} + \frac{2udu}{aa-uu} = 0$, quae integrata dat

$$\frac{uudz}{aa-uu} = \beta du, \text{ porroque } z = \gamma - \beta u - \frac{\beta aa}{u}$$

consequenter $y = \gamma u - \beta uu - \beta aa$.

ANNO-

# ANNOTATIONES
## IN LOCVM QVENDAM CARTESII AD CIRCVLI QVADRATVRAM SPECTANTEM.

Auctore
L. EVLERO.

In excerptis ex Manuscriptis *Cartesii* paucis quidem verbis refertur constructio quaedam geometrica promtissime ad circuli veram dimensionem appropinquans, sed quae siue *Cartesius* ipse eam inuenerit, siue ab alio habuerit communicatam, acutissimum inuentoris ingenium, illo praesertim tempore, luculenter declarat. Qui deinceps hoc idem argumentum pertractarunt, quantum equidem memini, nullam huius eximiae constructionis mentionem faciunt, vt periculum sit, ne tandem penitus obliuione obruatur. Demonstratio quidem, quae non adiuncta reperitur, haud difficulter suppletur; verum non solum elegantia constructionis vberiorem explicationem meretur, sed etiam tam insignes conclusiones inde deduci possunt, quae per se omni attentione dignae videantur. Pulcherrima autem haec constructio ipsis *Cartesii* verbis ita est proposita:

„Ad quadrandum circulum nihil aptius inuenio, Tab. I. Fig. 1.
„quam si dato quadrato *bf* adiungatur rectangulum *cg*
„comprehensum sub lineis *ac* et *bc*, quod sit aequale
„quartae parti quadrati *bf*: item rectangulum *dh* fa-
„ctum ex lineis *da*, *dc*, aequale quartae parti praece-
„dentis;

„dentis; et eodem modo rectangulum $ei$, atque alia „infinita vsque ad $x$: et erit haec linea $ax$ diameter „circuli, cuius circumferentia aequalis est circumferen„tiae quadrati $bf$.

Vis igitur huius constructionis in hoc consistit, vt continua appositione istiusmodi rectangulorum $cg$, $dh$, $ei$, etc. quorum anguli superiores dextri in diagonalem quadrati productam cadunt, tandem ad punctum $x$ perueniatur, quo terminatur diameter circuli $ax$, cuius peripheria aequalis est perimetro quadrati $bf$, seu quadruplo rectae $ab$.

Cum horum rectangulorum quodque aequetur parti quartae praecedentis, iam ipse *Cartesius* obseruat, summam omnium horum rectangulorum aequalem fore parti tertiae quadrati $bf$; quod quidem manifestum est, cum huius seriei $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+$ etc. in infinitum continuatae summa sit $=\frac{1}{3}$.

Praeterea etiam *Cartesius* indicat rationem, cui haec constructio innititur; concipit scilicet polygona regularia 8, 16, 32, 64 etc. laterum, quorum perimetri sint inter se aequales simulque perimetro quadrati $bf$. Iam cum $ab$ sit diameter circuli quadrato inscripti, ita affirmat fore $ac$ diametrum circuli octogono inscripti, tum vero $ad$ diametrum circuli 16gono, $ae$ 32gono inscripti, et ita porro. Vnde liquet $ax$ fore diametrum circuli polygono infinitorum laterum regulari inscripti, ideoque eius peripheriam aequari perimetro quadrati.

Quo facilius demonstrationem huius constructionis adornem, obseruo, quae hic de diametris circulorum dicuntur, etiam valere pro radiis, ita vt $ab$, $ac$, $ad$,

$ae$

ae etc. spectari possint tanquam radii circulorum, quibus si circumscribantur polygona regularia 4, 8, 16, 32 etc. laterum, eorum perimetri futurae sint inter se aequales.

## Problema.

Dato circulo, cui polygonum regulare quodcunque sit circumscriptum, inuenire circulum alium, cui si polygonum regulare duplo plurium laterum circumscribatur, perimeter huius polygoni aequalis sit futura perimetro illius polygoni.

## Solutio.

Sit ENM circulus datus et EP semilatus polygoni ipsi circumscripti, centro existente in C; CF autem sit radius circuli quaesiti, et FQ semilatus polygoni ipsi circumscribendi. Necesse ergo est, vt sit FQ semissis ipsius EP, et angulus FCQ semissis anguli ECP. Quare recta CQ angulum ECP, et recta QO ipsi CE parallela lineam EP bisecabit. Cum nunc Fig. 2.

sit $EV : CE = FQ : CF$

et $EV : CE = EP : CE + CP$

erit $FQ : CF = EP : CE + CP$

sed quia $FQ = \frac{1}{2}EP$, erit etiam $CF = \frac{1}{2}(CE + CP)$. Hinc auferatur CF, et habebitur $EF = \frac{1}{2}(CP - CE)$ ex quo erit rectangulum $CF . EF = \frac{1}{4}(CP^2 - CE^2) = \frac{1}{4}EP^2$ ideoque punctum F ita definiri debet, vt sit rectangulum, sub CF et EF comprehensum, aequale parti quartae quadrati rectae EP, seu ipsi quadrato rectae FQ.

Coroll. 1

## Coroll. 1.

Cum sit $CF.EF = FQ^2$ erit $CF : FQ = FQ : EF$, vnde ducta recta $QE$, fiet triangulum $FQE$ simile triangulo $FCQ$, vel $ECV$, ideoque angulus $FQE$ aequalis angulo $ECV$.

## Coroll. 2.

Cum sit $CE : EV = EO : EF$, punctum $F$ etiam ita definiri poterit: ex $O$ ducatur recta ad $CV$ productam normalis, eaque basi $CE$ in $F$ occurret.

## Coroll. 3.

Si polygonum circulo $ENM$ circumscriptum sit $n$ laterum, erit angulus $ECP = \frac{\pi}{n}$, denotante $\pi$ mensuram duorum angulorum rectorum; et angulus $FCQ = \frac{\pi}{2n}$. Hinc si radius $CE = r$, erit $EP = r\,\text{tang.}\frac{\pi}{n}$ et $FQ = \frac{1}{2}r\,\text{tang.}\frac{\pi}{n}$.

## Coroll. 4.

Iam quia angulus $FQE = \frac{\pi}{2n}$ erit $EF = FQ\,\text{tang.}\frac{\pi}{2n} = \frac{1}{2}r\,\text{tang.}\frac{\pi}{n}\,\text{tang.}\frac{\pi}{2n}$. Verum si vocemus $CF = s$, erit $FQ = s\,\text{tang.}\frac{\pi}{2n}$, vnde ob $FQ = \frac{1}{2}r\,\text{tang.}\frac{\pi}{n}$ fiet $s = \frac{1}{2}r\,\text{tang.}\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi}{2n}$.

## Demonstratio Constructionis Cartesianae.

Fig. 3. Sit iam $CE$ radius circuli quadrato inscripti, $CF$ octogono inscripti, $CG$ polygono regulari 16 laterum, $CH$

CH polygono 32 laterum et ita porro Sit porro EP semilatus quadrati, FQ semilatus octogoni, GR polygoni 16, HS polygoni 32 laterum, etc. et quia haec polygona eiusdem perimetri assumuntur, erit $FQ = \frac{1}{2} EP$; $GR = \frac{1}{2} FQ = \frac{1}{4} EP$; $HS = \frac{1}{2} GR = \frac{1}{4} FQ = \frac{1}{8} EP$, etc. Iam ex problemate praemisso est $CF . EF = \frac{1}{4} EP^2 = FQ^2$; tum vero ex eodem simili modo

$$CG . FG = \frac{1}{4} FQ^2 = \frac{1}{4} CF . EF = GR^2$$

$$CH . GH = \frac{1}{4} GR^2 = \frac{1}{4} CG . FG = HS^2 \text{ etc.}$$

sicque puncta F, G, H etc. eodem plane modo determinantur, vti habet constructio *Cartesiana*; et quia interualla EF, FG, GH etc. continuo fiunt minora, satis prompte ad punctum vltimum $x$ appropinquatur, eritque $Cx$ radius circuli, cuius peripheria aequatur perimetro polygonorum praecedentium, ideoque rectae EP octies sumtae. Q. E. D.

## Coroll. 1.

Si ponatur $CE = a$, $CF = b$, $CG = c$, $CH = d$, etc. progressio harum quantitatum ita est comparata, vt sit ob $EP = a$

$$b(b-a) = \tfrac{1}{4}aa; \quad c(c-b) = \tfrac{1}{4}b(b-a); \quad d(d-c) = \tfrac{1}{4}c(c-b) \text{ etc.}$$

ideoque

$$b = \frac{a + \sqrt{2aa}}{2}; \quad c = \frac{b + \sqrt{(2bb - ab)}}{2}; \quad d = \frac{c + \sqrt{(2cc - bc)}}{2} \text{ etc.}$$

et harum quantitatum infinitesima est radius circuli cuius peripheria est $= 8a$.

## Coroll. 2.

Cum sit angulus ECP semirectus, seu $ECP = \frac{\pi}{4}$, erunt anguli $FCQ = \frac{\pi}{8}$; $GCR = \frac{\pi}{16}$; $HCS = \frac{\pi}{32}$, etc. Quare ob $EP = a$; $FQ = \frac{1}{2}a$; $GR = \frac{1}{4}a$; $HS = \frac{1}{8}a$ etc. erit per cotangentes

$CE = a\cot.\frac{\pi}{4}$; $CF = \frac{1}{2}a\cot\frac{\pi}{8}$; $CG = \frac{1}{4}a\cot.\frac{\pi}{16}$; $CH = \frac{1}{8}a\cot.\frac{\pi}{32}$ etc.

Vnde denotante $n$ numerum infinitum, fit harum linearum vltima $= \frac{1}{n}a\cot.\frac{\pi}{4n}$.

## Coroll. 3.

Sed $\cot.\frac{\pi}{4n} = 1 : \operatorname{tang}.\frac{\pi}{4n}$; et quia angulus $\frac{\pi}{4n}$ est infinite paruus, erit $\operatorname{tang}.\frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{4n}$, ideoque $\cot.\frac{\pi}{4n} = \frac{4n}{\pi}$. Quare linearum illarum vltima fit $= \frac{4a}{\pi}$, quo radio si circulus describatur, erit eius peripheria $= 2\pi.\frac{4a}{\pi} = 8a$.

## Coroll. 4.

Deinde quia ex coroll. 4 praec. probl. est $EF = FQ\operatorname{tang}.FCQ$, erit ob eandem rationem:

$FG = GR.\operatorname{tang}.GCR$; $GH = HS.\operatorname{tang}.HCS$ etc.

vnde haec interualla sequenti modo exprimentur:

$EF = \frac{1}{2}a\operatorname{tang}.\frac{\pi}{8}$; $FG = \frac{1}{4}a\operatorname{tang}.\frac{\pi}{16}$; $GH = \frac{1}{8}a\operatorname{tang}.\frac{\pi}{32}$ etc.

antecedens vero ad analogiam $CE = a\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} = a$.

## Coroll. 5.

His cum praecedentibus collatis nanciscemur:

$CF = a(\operatorname{tang}.\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{tang}.\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}a\cot.\frac{\pi}{8}$

$CG = a(\operatorname{tang}.\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{tang}.\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{tang}.\frac{\pi}{16}) = \frac{1}{4}a\cot.\frac{\pi}{16}$

$CH = a(\operatorname{tang}.\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{tang}.\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{tang}.\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}\operatorname{tang}.\frac{\pi}{32}) = \frac{1}{8}a\cot.\frac{\pi}{32}$

etc.

sicque

ficque omnium huiusmodi progressionum summae expedite assignari possunt.

## Coroll. 6.

In infinitum ergo progrediendo obtinebimus summationem huius seriei:

$$\text{tang}\,\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}\,\text{tang}.\,\tfrac{\pi}{8}+\tfrac{1}{4}\,\text{tang}.\,\tfrac{\pi}{16}+\tfrac{1}{8}\,\text{tang}.\,\tfrac{\pi}{32}+\text{etc.}=\tfrac{4}{\pi}$$

quae ergo per quadraturam circuli determinatur. Hinc occasionem arripio sequens problema soluendi.

## Problema.

Denotante $\Phi$ arcum quemcunque circuli cuius radius $=1$, inuenire summam huius seriei infinitae:

$$\text{tang}.\Phi+\tfrac{1}{2}\text{tang}.\tfrac{1}{2}\Phi+\tfrac{1}{4}\text{tang}.\tfrac{1}{4}\Phi+\tfrac{1}{8}\text{tang}\,\tfrac{1}{8}\Phi+\tfrac{1}{16}\text{tang}.\tfrac{1}{16}\Phi\ \text{etc.}$$

## Solutio.

Si in fig. 2. vti supra est constructa, ponatur angulus $ECP=\Phi$, erit $FCQ=\frac{1}{2}\Phi$: iam posito $FQ=1$ erit $EP=2$, hincque $CE=2\,\text{cot}.\Phi$; $CF=\text{cot}.\frac{1}{2}\Phi$ et $EF=\text{tang}.\frac{1}{2}\Phi$, ex quo habetur: Tab. I. Fig. 2.

$$2\,\text{cot}.\Phi=\text{cot}.\tfrac{1}{2}\Phi-\text{tang}.\tfrac{1}{2}\Phi \quad \text{et} \quad \text{tang}.\tfrac{1}{2}\Phi=\text{cot}.\tfrac{1}{2}\Phi-2\,\text{cot}.\Phi$$

eodemque modo $\text{tang}.\Phi=\text{cot}.\Phi-2\,\text{cot}.\,2\Phi$. Collocentur hi valores tangentium per cotangentes expressi in serie proposita

$$\begin{aligned}
\text{tang}.\Phi&=\text{cot}.\Phi-2\,\text{cot}.\,2\Phi\\
\tfrac{1}{2}\,\text{tang}.\tfrac{1}{2}\Phi&=\tfrac{1}{2}\text{cot}\,\tfrac{1}{2}\Phi-\text{cot}.\Phi\\
\tfrac{1}{4}\,\text{tang}.\tfrac{1}{4}\Phi&=\tfrac{1}{4}\text{cot}\tfrac{1}{4}\Phi-\tfrac{1}{2}\text{cot}.\tfrac{1}{2}\Phi\\
\tfrac{1}{8}\,\text{tang}.\tfrac{1}{8}\Phi&=\tfrac{1}{8}\text{cot}\,\tfrac{1}{8}\Phi-\tfrac{1}{4}\text{cot}\,\tfrac{1}{4}\Phi
\end{aligned}$$

etc.

et colligendo consequemur:

$$\mathrm{tang}\,\Phi = \mathrm{cot.}\,\Phi - 2\,\mathrm{cot.}\,2\Phi$$
$$\mathrm{tang.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\Phi = \tfrac{1}{2}\mathrm{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Phi - 2\,\mathrm{cot.}\,2\Phi$$
$$\mathrm{tang}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{4}\mathrm{tang.}\,\tfrac{1}{4}\Phi = \tfrac{1}{4}\mathrm{cot.}\,\tfrac{1}{4}\Phi - 2\,\mathrm{cot.}\,2\Phi$$
$$\mathrm{tang.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{4}\mathrm{tang.}\,\tfrac{1}{4}\Phi + \tfrac{1}{8}\mathrm{tang.}\,\tfrac{1}{8}\Phi = \tfrac{1}{8}\mathrm{cot.}\,\tfrac{1}{8}\Phi - 2\,\mathrm{cot.}\,2\Phi$$

etc.

vnde in infinitum progrediendo, si $n$ denotet numerum infinitum, quia $\mathrm{tang.}\,\frac{1}{n}\Phi = \frac{\Phi}{n}$, hincque $\mathrm{cot.}\,\frac{1}{n}\Phi = \frac{n}{\Phi}$, erit: $\frac{1}{n}\mathrm{cot.}\,\frac{1}{n}\Phi = \frac{1}{\Phi}$, ideoque summa seriei propositae:

$$\mathrm{tang}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{4}\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{4}\Phi + \tfrac{1}{8}\mathrm{tang.}\,\tfrac{1}{8}\Phi + \mathrm{etc.} = \tfrac{1}{\Phi} - 2\,\mathrm{cot.}\,2\Phi$$

Vnde si $2\Phi$ est angulus rectus, seu $\Phi = \frac{\pi}{4}$, ob $\mathrm{cot}\,\frac{\pi}{2} = 0$ fit seriei summa $= \frac{1}{\Phi} = \frac{4}{\pi}$, qui est casus supra tractatus.

Ex hac serie plures aliae deriuari possunt non minus notatu dignae.

I. Ex eius differentiatione adipiscimur:

$$\frac{1}{\mathrm{cos.}\,\Phi^2} + \frac{1}{4\,\mathrm{cos.}\,\frac{1}{2}\Phi^2} + \frac{1}{4^2\,\mathrm{cos.}\,\frac{1}{4}\Phi^2} + \frac{1}{4^3\,\mathrm{cos.}\,\frac{1}{8}\Phi^2} + \frac{1}{4^4\,\mathrm{cos.}\,\frac{1}{16}\Phi^2} + \mathrm{etc.} = -\frac{1}{\Phi\Phi} + \frac{4}{\mathrm{sin.}\,2\Phi^2}$$

vel cum sit $\frac{1}{\mathrm{cos.}\,\Phi} = \mathrm{sec.}\,\Phi$ erit quoque

$$(\mathrm{sec.}\,\Phi)^2 + \tfrac{1}{4}(\mathrm{sec.}\,\tfrac{1}{2}\Phi)^2 + \tfrac{1}{4^2}(\mathrm{sec}\,\tfrac{1}{4}\Phi)^2 + \tfrac{1}{4^3}(\mathrm{sec.}\,\tfrac{1}{8}\Phi)^2 + \mathrm{etc.} = \frac{1}{\mathrm{sin.}\,\Phi^2\,\mathrm{cos.}\,\Phi^2} - \frac{1}{\Phi\Phi}$$

II. Deinde ob $\mathrm{cos.}\,\Phi^2 = \frac{1+\mathrm{cos.}\,2\Phi}{2}$, et $\mathrm{sin.}\,2\Phi^2 = \frac{1-\mathrm{cos.}\,4\Phi}{2}$ erit vbique per 2 diuidendo:

$$\frac{1}{1+\mathrm{cos.}\,2\Phi} + \frac{1}{4(1+\mathrm{cos.}\,\Phi)} + \frac{1}{4^2(1+\mathrm{cos.}\,\frac{1}{2}\Phi)} + \frac{1}{4^3(1+\mathrm{cos.}\,\frac{1}{4}\Phi)} + \mathrm{etc.} = \frac{2}{1-\mathrm{cos.}\,4\Phi} - \frac{1}{2\Phi\Phi}.$$

seu

seu pro $\Phi$ scribendo $\frac{1}{2}\Phi$

$$\frac{1}{1+\cos.\Phi}+\frac{1}{4(1+\cos.\frac{1}{2}\Phi)}+\frac{1}{4^2(1+\cos.\frac{1}{4}\Phi)}$$
$$+\frac{1}{4^3(1+\cos.\frac{1}{8}\Phi)}+\text{etc.}=\frac{2}{1-\cos.2\Phi}-\frac{2}{\Phi\Phi}.$$

III. Si series inuenta per $d\Phi$ multiplicetur et integretur, ob $\int d\Phi \,\mathrm{tang}.\Phi=\int\frac{d\Phi \sin.\Phi}{\cos.\Phi}=-l\cos.\Phi$, et $\int 2d\Phi \cot.2\Phi=l\sin.2\Phi$, habebitur

$$-l\cos.\Phi-l\cos.\tfrac{1}{2}\Phi-l\cos.\tfrac{1}{4}\Phi-l\cos.\tfrac{1}{8}\Phi-l\cos.\tfrac{1}{16}\Phi-\text{etc.}$$
$$=l\Phi-l\sin.2\Phi+\text{Const.}$$

ad quam constantem definiendam ponamus $\Phi=0$, et quia $l\cos.0=l1=0$, ex priori parte habemus $0$, ex posteriori vero ob $\sin.2\Phi=2\Phi$, habemus $l\Phi-l2\Phi+\text{Const.}=-l2+\text{Const.}$ vnde $\text{Const.}=l2$. Hinc ad numeros progrediendo erit:

$$\frac{1}{\cos.\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi\cos.\frac{1}{4}\Phi\cos.\frac{1}{8}\Phi\cos.\frac{1}{16}\Phi\;\text{etc.}}=\frac{2\Phi}{\sin.2\Phi}$$

IV. Cum sit $\frac{1}{\cos.\Phi}=\sec.\Phi$, habebitur etiam hoc Theorema pro secantibus:

$$\sec.\Phi\sec.\tfrac{1}{2}\Phi\sec.\tfrac{1}{4}\Phi\sec.\tfrac{1}{8}\Phi\sec.\tfrac{1}{16}\Phi\;\text{etc.}=\frac{2\Phi}{\sin.2\Phi}$$

vnde si ratio diametri ad peripheriam ponatur $=1:\pi$ et $q$ denotet angulum rectum, si statuamus $2\Phi=q$, $=\frac{\pi}{2}$ erit:

$$\sec.\tfrac{1}{2}q\sec.\tfrac{1}{4}q\sec.\tfrac{1}{8}q\sec.\tfrac{1}{16}q\sec.\tfrac{1}{32}q\;\text{etc.}=\tfrac{\pi}{2}.$$

## Problema.

Innenire feriem quantitatum: $a, b, c, d, e, f$, etc. cuius haec fit proprietas, vt fit:
$c(c-b)=\frac{1}{4}b(b-a)$; $d(d-c)=\frac{1}{4}c(-b)$; $e(e-d)=\frac{1}{4}d(d-c)$ etc.
feu vt quantitates inde deriuatae

$$b(b-a);\ c(c-b);\ d(d-c);\ e(e-d);\ f(f-e), \text{ etc.}$$

decrefcant fecundum rationem quadruplam.

## Solutio.

Cum fit tang. $\frac{1}{2}\Phi = \cot.\frac{1}{2}\Phi - 2\cot.\Phi$, fi multiplicemus vtrinque per $\cot.\frac{1}{2}\Phi$, ob tang. $\frac{1}{2}\Phi \cot.\frac{1}{2}\Phi = 1$ erit $\cot.\frac{1}{2}\Phi(\cot.\frac{1}{2}\Phi - 2\cot.\Phi) = 1$. Statuatur ergo $a = r\cot.\Phi$; $b = \frac{1}{2}r\cot.\frac{1}{2}\Phi$; $c = \frac{1}{4}r\cot.\frac{1}{4}\Phi$; $d = \frac{1}{8}r\cot.\frac{1}{8}\Phi$, etc. eritque

$$\frac{2b}{r}\left(\frac{2b}{r} - \frac{2a}{r}\right) = 1 \quad \text{hinc } b(b-a) = \frac{rr}{4}$$
$$\frac{4c}{r}\left(\frac{ac}{r} - \frac{4b}{r}\right) = 1 \quad \text{hinc } c(c-b) = \frac{rr}{4^2}$$
$$\frac{8d}{r}\left(\frac{8d}{r} - \frac{8c}{r}\right) = 1 \quad \text{hinc } d(d-c) = \frac{rr}{4^3}$$

etc.

Quare haec feries
$a = r\cot\Phi$; $b = \frac{1}{2}r\cot.\frac{1}{2}\Phi$; $c = \frac{1}{4}r\cot.\frac{1}{4}\Phi$; $d = \frac{1}{8}r\cot.\frac{1}{8}\Phi$; etc.
hanc habet proprietatem, vt quantitates inde formatae

$$b(b-a);\ c(c-b);\ d(d-c);\ e(e-d);\ \text{etc.}$$

in ratione quadrupla decrefcant.

Coroll. 1.

## Coroll. 1.

Datis duobus terminis primis $a$ et $b$ reliqui $c$, $d$, $e$, $f$ inde successiue ita determinantur, vt sit $c = \frac{b + \sqrt{(2bb - ab)}}{2}$; $d = \frac{c + \sqrt{(2cc - bc)}}{2}$; $e = \frac{d + \sqrt{(2dd - cd)}}{2}$ etc. ideoque binis terminis initialibus pro lubitu assumtis, tota series ope harum formularum exhiberi potest.

## Coroll. 2.

Datis autem terminis $a$ et $b$, inde angulus $\Phi$ cum quantitate $r$ ita definitur, vt sit:

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{2\sqrt{(bb-ab)}}{a} \text{ et } r = 2\sqrt{(bb-ab)}$$

vnde inuento angulo $\Phi$ reliqui termini etiam ita exprimuntur, vt sit:

$$c = \tfrac{1}{4} r \cot.\tfrac{1}{4}\Phi; d = \tfrac{1}{8} r \cot.\tfrac{1}{8}\Phi; e = \tfrac{1}{16} r \cot.\tfrac{1}{16}\Phi \text{ etc.}$$

## Coroll. 3.

Hinc istius seriei termini infinitesimi fient $= \frac{r}{\Phi}$, ad quem valorem termini seriei satis cito conuergunt. Quaeratur scilicet in circulo radii $= 1$, arcus cuius tangens $= \frac{2\sqrt{(bb-ab)}}{a}$, qui arcus sit $= \Phi$, et seriei nostrae termini infinitesimi erunt $= \frac{2\sqrt{(bb-ab)}}{\Phi}$.

## Scholion.

Caeterum hic monuisse iuuabit puncta P, Q, R, S, $x$ sita esse in curua quadratrice veterum, propterea quod applicatae EP, FQ, GR, HS eandem inter se rationem tenent, quam anguli ECP, FCQ, Tab. I. Fig. 2.

FCQ, GCR, HCS etc. Et quoniam $x$, vbi haec curua in basin incidit, iam olim circuli quadraturam indicare est inuentum, vnde ei istud nomen est inditum, constructio Cartesii cum hac veterum quadratura egregie quidem conuenit; sed multo commodius et accuratius puncta E, F, G, H etc. successiue praebet, quam a continua bisectione angulorum expectari queat.

---

---

---

DEMON-

# DEMONSTRATIO GENERALIS THEOREMATIS NEWTONIANI DE BINOMIO AD POTENTIAM INDEFINITAM ELEVANDO.

Auctore

*F. V. T. AEPINO.*

1)

Notissimum, ac per vniuersam analysin vtilissimum theorema Newtonianum, cuius ope $(x+1)^m$ per seriem indefinitam potentiarum ipsius $x$ exhibetur, inductione primum erutum, variis postea demonstrationibus a diuersis auctoribus communitum est. Inuenerunt autem, qui exactius rem rimati sunt, plerumque aliquid, quod in probationibus eiusmodi reprehenderent. Solet enim in analysi hoc theorema ad quosuis casus extendi, ac adhiberi, siue $m$ sit numerus integer, vel fractus; siue sit positiuus, vel negatiuus; siue sit rationalis, vel irrationalis, vel transcendens; immo, siue habeat valorem realem, aut imaginarium. Requirere ergo videtur ea, qua praecellunt disciplinae mathematicae, exactitudo, vt et huius theorematis eiusmodi condatur demonstratio, quae ad omnes modo dictos valores ipsius $m$ se aequaliter extendat, nec ad vnum horum casuum solum pertineat.

2) Pleraeque autem, quae hactenus prolatae sunt, huius theorematis demonstrationes, si secundum hanc

normam examinentur, non ſatis generales deprehendi ſolent. Non enim ordinario, niſi pro eo caſu, vbi $m$ eſt numerus integer poſitiuus, valent, nec ſalua veritate ad caeteros extendi poſſunt. Optarunt hac de cauſa iam diu Mathematici, vt vniuerſalis, neque ad vllum valorem ſpecialem ipſius $m$ reſtricta, proſtaret demonſtratio. Contigit mihi nuperrime, eruere probationem, perfectionibus, quae requirebantur, donatam, quam cum Ill. Academia ſcientiarum hic communicare conſtitui.

3) Cum explicari debeat $(x+1)^m$ per ſeriem, ſupponamus:

$$(x+1)^m = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} \text{ - - }$$

vbi A, B, C, D - - potentiarum ipſius $x$ coefficientes indicant. Arbitrarie quidem hic aſſumo, fore hanc formam ſeriei, quae hic quaeritur, aſt nihil inde metuendum eſt. Si enim impoſſibile foret, vt $(x+1)^m$ per ſeriem eius formae, qualem habet expoſita, explicetur, ratiocinia, quibus ſolutionem tentabo, ipſa, hanc impoſſibilitatem detegent. Totum enim negotium huc redit, vt coefficientium valores eruamus, quos ſi imaginarios inuenimus, formam hanc impoſſibilem, ſin minus, poſſibilem ipſam eſſe, rite concludimus.

4) Patet autem hic ſtatim, coefficientium valores ab $m$ pendere, ſeu A B C - - - fore functiones ipſius $m$. Non enim fieri poteſt, vt coefficientes maneant iidem, ſi $m$ varietur; ſequeretur enim inde hoc abſurdum, eſſe $(x+1)^m . x = (x+1)^{m+1}$. Sunt itaque coefficientes iſti, pro dato quidem valore ipſius $m$ conſtantes, aſt non ita pro diuerſis. Sic v. g. ſi loco

$m$ ſuc-

$m$ successiue ponantur $m-1$, $m-2$, $m-3$ - - - coefficientes A, B, C, D - - - diuersos quoque induere debent valores. In posterum valores istos, hac ratione indicabo, vt

$$\begin{array}{llll} m & \text{respondeat } A^m, & B^m, & C^m \; - - - - \\ m-1 & - - - \; A^{m-1}, & B^{m-1}, & C^{m-1} \; - - \\ m-2 & - - - \; A^{m-2}, & B^{m-2}, & C^{m-2} \; - - \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ r & - - - \; A^r, & B^r, & C^r \; - - - - - - \end{array}$$

vnde probe notandum, nisi aliud monuerim, expressiones huiusmodi $A^r$, $B^r$, $C^r$ - - hic mihi non denotare, vt alias solent, potentias istas harum literarum, A, B, C, neque $r$ hic esse exponentem potentiae, sed indicem, ex quo, ad quemnam ipsius $m$ valorem quoduis A, B, C, pertineat, determinatur.

5) Suppositis his, cum sit per hypothesin $(x+1)^m = A^m x^m + B^m x^{m-1} + C^m x^{m-2} + D^m x^{m-3}$ - - - erit $(2(x+1))^m = 2^m A^m x^m + 2^m B^m x^{m-1} + 2^m C^m x^{m-2} + 2^m D^m x^{m-3}$ - - - . Est vero quoque, $(2(x+1))^m = ((2x+1)+1)^m$, vnde necesse est, vt sit $(2(x+1))^m = A^m(2x+1)^m + B^m(2x+1)^{m-1} + C^m(2x+1)^{m-2} + D^m(2x+1)^{m-3}$. - - -

6) Euoluamus seorsim, potentias $(2x+1)^m$, $(2x+1)^{m-1}$, $(2x+1)^{m-2}$ - - - in series, ac erit

$$\begin{array}{l} (2x+1)^m = 2^m A^m x^m + 2^{m-1} B^m x^{m-1} + 2^{m-2} C^m x^{m-2} + 2^{m-3} D^m x^{m-3} - - \\ (2x+1)^{m-1} = - - - + 2^{m-1} A^{m-1} x^{m-1} + 2^{m-2} B^{m-1} x^{m-2} + 2^{m-3} C^{m-1} x^{m-3} - - \\ (2x+1)^{m-2} = - - - - - - - - + 2^{m-2} A^{m-2} x^{m-2} + 2^{m-3} B^{m-2} x^{m-3} - - \\ (2x+1)^{m-3} = - - - - - - - - - - - + 2^{m-3} A^{m-3} x^{m-3} - - \end{array}$$

 Quodsi

Quodſi hos valores in formulam ſupra repertam ſubſtituamus, erit

$$\begin{array}{llll}
(2x+2)^m = 2^m A^m A^m x^m & + 2^{m-1} A^m B^m x^{m-1} & + 2^{m-2} A^m C^m x^{m-2} & + 2^{m-3} A^m D^m x^{m-3} \ldots \\
 & + 2^{m-1} B^m A^{m-1} & + 2^{m-2} B^m B^{m-1} & + 2^{m-3} B^m C^{m-1} \ldots \\
 & & + 2^{m-2} C^m A^{m-2} & + 2^{m-3} C^m B^{m-2} \ldots \\
 & & & + 2^{m-3} D^m A^{m-3} \ldots
\end{array}$$

Obtinuimus itaque 2 diuerſos valores pro $(2x+2)^m$, quos comparando, ſequentes oriuntur aequationes: $2^m A^m = 2^m A^m A^m$, $2^m B^m = 2^{m-1}(A^m B^m + B^m A^{m-1})$, $2^m C^m = 2^{m-2}(A^m C^m + B^m B^{m-1} + C^m A^{m-2})$, $2^m D^m = 2^{m-3}(A^m D^m + B^m C^{m-1} + C^m B^{m-2} + D^m A^{m-3})$. - -

7) Reducta prima harum aequationum pro inueniendo $A^m$, erit $A^m = 1$. Indicium hoc eſt; A generatim non pendere ab $m$, ſed eſſe quantitatem conſtantem. Cum enim $m$ indeterminatum aſſumtum ſit, ac ipſi reſpondens valor A repertus ſit $= 1$, patet, vtcunque variato $m$, A valorem $= 1$ conſtanter retinere, vt proinde $A^m = A^{m-1} = A^{m-2} \ldots = 1$. Secunda aequatio, $2^m B^m = 2^{m-1}(A^m B^m + B^m A^{m-1}) = 2^{m-1}(2B^m) = 2^m B^m$, identica eſt, vnde ex ipſa nihil concludi poteſt. B itaque hac ratione determinari nequit, ſed eius valor peculiari ratiocinio inueſtigandus erit.

8) Seponamus tantiſper hanc diſquiſitionem, ac ad caeteras aequationes progrediamur, et quomodo caeteri coefficientes pendeant a B inueſtigemus. Ex tertia aequatione eſt $2^m C^m = 2^{m-2}(A^m C^m + B^m B^{m-1} C^m A^{m-2})$, qua reducta, adhibendo ſupra repertum valorem ipſius A, erit $C^m = \frac{B^m B^{m-1}}{1.2}$. Antequam nunc ad quartam aequationem tranſeamus, antecedenter notandum erit, cum

cum sit $C^m = \frac{B^m B^{m-1}}{1.\,2}$, fore $C^{m-1} = \frac{B^{m-1} B^{m-2}}{1.\,2}$

$C^{m-2} = \frac{B^{m-2} B^{m-3}}{1.\,2}$. - - - Est enim $C^{m-1}$ aequale C quod prodit, si loco $m$ substituatur $m-1$, facta autem hac substitutione, vtique fieri debet $C^{m-1} = \frac{B^{m-1} B^{m-2}}{1.\,2}$, ac ita porro. Idem etiam in caeteris coefficientibus, si similes occurrant casus, semper tenendum erit. Si iam reducamus aequationem $2^m D^m = 2^{m-1}(A^m D^m + B^m C^{m-1} + C^m B^{m-2} + D^m A^{m-3})$ erit $6\,D^m = \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2}}{1.\,2.} + \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2}}{1.\,2}$, siue $D^m = \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2}}{1.\,2.\,3}$. Simili modo, operationem vlterius continuando, reperitur $E^m = \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2} B^{m-3}}{1.\,2\,3.\,4}$, $F^m = \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2} B^{m-3} B^{m-4}}{1.\,2.\,3\;4.\,5}$ Vnde colligimus fore generatim, si sit T coefficiens termini $r$ti ab initio, non connumerato termino primo, $T^m = \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2} \;.\;.\;.\; B^{m-r+1}}{1.\,2.\,3 \;-\;-\; r}$.

9) Absolutum sic erit negotium, modo valor ipsius B, quem methodo, quam hactenus secuti sumus, non obtinuimus, eruatur. Viam parabunt huic inuestigationi sequentia: Sumatur $m$ recipere valores $r$, $s$, et $r+s$, ac erit $(x+1)^{r+s} = (x+1)^r \,.\, (x+1)^s$. Est autem $(x+1)^r = x^r + B^r x^{r-1} \ldots$, ac $(x+1)^s$ $= x^s + B^s x^{s-1}$ - - - - - - - - - -

hinc $(x+1)^r \,.\, (x+1)^s = x^{r+s} + B^r x^{r+s-1}$ . . . .
$+ B^s x^{r+s-1}$ . . . .

 qua-

quapropter, cum sit quoque $(x+1)^{r+s} = x^{r+s} = x^{r+s} + B^{r+s} x^{r+s-1} - - - -$, erit $B^{r+s} = B^r + B^s$.

10. Cum igitur sit generatim $B^{r+s} = B^r + B^s$, erit quoque $B^{r+s} - B^r = B^s$. Si itaque $m$ increscat quantitate quacunque $s$, erit incrementum, quod inde capit $B^m$, perpetuo constans, qualecunque fuerit $m$. Denotat nempe $B^{r+s} - B^r$ incrementum, quod capit B, si $r$ augeatur quantitate $s$; hoc vero cum sit $= B^s$, patet hoc incrementum solum ab $s$; nullatenus vero ab $r$, pendere, quapropter idem semper reperiri debet, quamdiu $s$ manet idem, vtcunque varietur $r$. Vicissim autem hinc facile patet, si $m$ decrescat quantitate $s$, fore decrementum, quod inde patitur $B^m$, itidem constans, ac aequale $B^s$.

11) Ponendo itaque successiue $m = - - - - - - 3s, -2s, -s, 0, +s, +2s, +3s - - - -$ erunt B respondentia $- - - - -3B^s, -2B^s, -B^s, 0, +B^s, +2B^s, +3B^s - - - - -$, vnde patet, si $m$ sumantur in progressione arithmetica, progrediente secundum denominatorem $s$, fore B respondentia, itidem in eiusmodi progressione, habente denominatorem B. Quoduis itaque B erit ad respondens suum $m$ in ratione constante. Sit $s$ infinite paruum, et progressio $- - - - -3s, -2s, -s, 0, +s, +2s, +3s - - -$ vtrimque in infinitum continuata, transeundo per continuum, comprehendet omnes valores reales ipsius $m$, quapropter generatim affirmari potest, si $m$ fuerit numerus realis quicunque, fore $B^m$ ad $m$ in ratione data.

12) Ex-

12) Exhiberi itaque poteſt generatim $B^m$ per $\lambda m$, poſito $\lambda$ numero conſtanti, vnde nunc res eo reducta eſt, vt ad problematis ſolutionem plenariam, vlterius nil niſi determinatio ipſius $\lambda$ requiratur. Sufficit autem, cum ſit conſtans, vt pro vnico caſu determinetur. Fieri hoc poteſt minimo negotio ſequenti ratione: Cum pro caſu $m = 1$, ſeries $x^m + B^m x^{m-1} + C^m x^{m-2} \cdots = x + B^1 + \frac{C^1}{x} \cdots$ abire debeat in $(x+1)$, erit $B^1 = 1$. Quapropter, cum ſit $B^m = \lambda m$, fiet pro hoc caſu $\lambda = 1$. Conſtat itaque generatim, pro quouis numero reali eſſe $B^m = m$.

13) Notamus hic ſpeciatim, quoniam in ſequentibus aliquis huius propoſitionis erit vſus: eſſe quoque pro caſu $m = 0$, $\lambda = 1$. Patet hoc ſufficienter ex eo, quod o ſit aliquis valorum realium, quos $m$ recipere poteſt. Quodſi vero adhuc quis dubitet de veritate huius aſſerti, facile conuinci de ea re poterit. Cum nempe $s$ ac $B^s$ dari queant, quae tam parum differant ab o ac $B^0$, quantum ipſe volueris, dabuntur $s$ ac $B^s$, quorum ratio a ratione o ad $B^0$ recedit, minus omni quanto dabili. Aſt ratio haec $s$ ad $B^s$ perpetuo manet $= 1 : 1$, quantumuis parua ſint. Ratio itaque o ad $B^0$ ab ratione 1 ad 1 differt minus omni quanto dabili, vnde huic aequalis non eſſe non poteſt. Patet igitur, B eſſe functionem ipſius $m$ talem, vt non ſolum $m$ ac $B^m$ euaneſcant ſimul, ſed euaneſcant etiam cum ratione aequalitatis.

14) Quanquam ratiocinium, quo hic vſus ſum, rem pro valoribus realibus ipſius $m$ prorſus extra dubium

bium ponat, adplicari tamen ad valores imaginarios non poteſt, vt incautius agens ſupponere quis poſſet. Quanquam enim progreſſio $-2s$, $-s$, $0+s+2s$, caſu quo $s$ eſt infinite paruum, tranſeat per continuum, tamen non comprehendit niſi valores reales, neque, vtcunque continuetur, per ipſam tranſitus ad vllam quantitatem imaginariam patet. Immo ne exhiberi quidem poteſt progreſſio arithmetica, tranſiens per continuum, quae omnes valores imaginarios in ſe complecteretur Sic v. g. ponendo $s$ infinite paruum, progreſſio - - - - - - $-2s\sqrt{-1}$, $-s\sqrt{-1}$, $0$, $+s\sqrt{-1}$, $+2s\sqrt{-1}$ - - - -, comprehendet equidem omnes valores impoſſibiles formae $A\sqrt{-1}$, nullos vero formae $B+A\sqrt{-1}$, ac ſimiliter haec progreſſio - - - - - - - $-2(\alpha s+s\sqrt{-1})$, $-(\alpha s+s\sqrt{-1})$, $0$, $+(\alpha s+s\sqrt{-1})$, $+2(\alpha s+s\sqrt{-1})$ - - -, praeter imaginarios formae $\alpha A+A\sqrt{-1}$, nullos formae $\beta A+A\sqrt{-1}$, continebit.

15) Quanquam autem omnes quantitates imaginarias comprehendere in vnica, etiam per continuum tranſeunte, progreſſione non liceat, exhiberi tamen ſemper poteſt eiusmodi progreſſio, datam quamuis imaginariam in ſe comprehendens. Sit enim numerus imaginarius propoſitus $=I$, et capiatur eius pars quaedam aliquota, infinite parua, $\frac{I}{i}$, intellecto $i$ numero infinite magno; ac progreſſio - - - - $-\frac{2I}{i}$, $-\frac{I}{i}$, $0$, $+\frac{I}{i}$, $+\frac{2I}{i}$ - - - proprietate adducta donata erit. Quodſi iam ſupponamus $m$ recipere ſucceſſiue hos valores, erunt B reſpondentia - - - $-2B^{\frac{I}{i}}$, $-B^{\frac{I}{i}}$, $0$, $+B^{\frac{I}{i}}$, $+2B^{\frac{I}{i}}$ -, vnde

vnde et pro hac progressione erunt B semper ad respondentia $m$ in ratione data. Quodsi igitur rursum ponatur $B^m = \lambda m$, erit $\lambda$ constans. Quoniam vero haec lex quadrare quoque debet in $B^0$, (quippe quod est terminus huius seriei, vnde ratiocinia quibus n. 13. vsus sum, etiam hic adplicari possunt) erit o ad $B^0$ in ratione $\lambda$ ad 1. Supra vero ostensum est (n. 13.) esse hanc rationem o ad $B^0$, rationem aequalitatis; quapropter erit quoque $\lambda$ ad 1 in ratione aequalitatis, seu $\lambda = 1$.

16) Constat igitur iam generatim esse $B^m = m$, siue $m$ sit numerus realis, siue imaginarius quicunque. Quodsi autem hunc valorem; in supra repertos valores pro $C^m$, $D^m$, $E^m$ - - - substituamus, erit $(x+1)^m = x^m + mx^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2} x^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} x^{m-3} \ldots$ quod est ipsum theorema a *Newtono* propositum.

17) Quanquam vero hactenus a me proposita demonstratio fini suo abunde satisfaciat, desiderabunt tamen adhuc, qui demonstrationum rigorem amant, vt ab inductionis, cui ex parte innititur, labe, immunis reddatur. Quo hoc obtineri queat, sumamus theorema *Newtonianum* verum esse repertum, pro coefficientibus $r$, primorum terminorum seriei $x^m + B^m x^{m-1} + C^m x^{m-2}$ - -, ac dico, probari tunc semper posse, quod termini proxime sequentis $(r+1)$ti coefficiens, etiam sub eadem lege comprehendatur. Facile autem patet, cum pro coefficientibus primorum seriei terminorum lex ista supra vera deprehensa sit; si propositionem modo propositam hypotheticam rite probauerim, vlterius tunc

 de

de vniuerſali *Newtonianae* legis veritate dubitari non poſſe. Tentemus igitur ipſius demonſtrationem, vt vero ad hanc via aperiatur, quasdam, de potentiarum integrarum poſitiuarum ipſius $(x + 1)$ natura, praemittamus conſiderationes.

18) Quoniam, ſi $m$ fuerit integer poſitiuus, potentia $(x + 1)^m$ per actualem multiplicationem euolui ſemper poteſt, ſupponatur haec facta, ac facile concipitur, $(x + 1)^m$ hac ratione actu euolutum, aſſumere ſemper formam ſequentem,

$$x^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} - - - - + Lx^2 + Nx + 1.$$

vnde ſequitur, numerum terminorum, ex quibus potentia quaeuis integra poſitiua conſtat, ſemper eſſe finitum, ac aequalem $m + 1$, vltimum vero terminum ſemper eſſe aequalem vnitati. Tam facile haec ex repetitae multiplicationis natura concipiuntur, vt demonſtrationem addere omnino non opus ſit.

19) Si igitur de legis *Newtonianae* veritate nondum vniuerſaliter, ſed pro primis ſolum $r$ terminis, conſtet, potentia $(x + 1)^r$, equidem per legem hanc, non niſi vsque ad terminum $r$tum euolui poteſt, aſt cum ipſa ſic euoluta non niſi vnicus terminus deficiat, compleri tamen ſemper poteſt; addendo nempe vnitatem, cui quippe ſemper terminus vltimus aequalis eſſe debet.

20) Si igitur probatum habeamus theorema *Newtonianum* pro primis $r$ terminis, ponendo $x = 1$, erit $(1 + 1)^r = 2^r = 1 + \frac{r}{1.} + \frac{r.\overline{r-1}}{1.2} + \frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}}{1.2.3.} - - - + \frac{r.}{1.} + 1.$

21) Sup-

21) Supponendo iam legis *Newtonianae* veritatem pro primis $r$ terminis, proponatur inueniendus coefficiens termini proxime sequentis $(r+1)$ ti. Ponamus hunc coefficientem $=T$, coefficientes vero terminorum ipsum proxime antecedentium S, R, Q - - -, et ex argumentationis ratione, qua supra vsus sum, manifestum est, pro inueniendo T sequentem reperiri debere aequationem; $2^m T^m = 2^{m-r}(A^m T^m + B^m S^{m-1} + C^m R^{m-2} \ldots + R^m C^{m-r+2} + S^m B^{m-r+1} + T^m A^{m-r})$ siue $(2^r-2)T^m = (B^m S^{m-1} + C^m R^{m-2} \ldots + R^m C^{m-r+2} + S^m B^{m-r+1})$.

22) Quodsi haec facta, $B^m S^{m-1}$, $C^m R^{m-2}$ - - - quorum omnium summae aequatur $(2^r-2)T^m$, exactius considerentur, patet formari ea, hac ratione, vt si vnus factorum sit coefficiens pertinens ad terminum $\alpha$tum a primo, alter tunc pertineat ad $\alpha$tum a termino $(r+1)$ to, posteriorque hic habeat semper indicem $m-\alpha$, prior autem indicem $m$. Si itaque prior horum factorum dicatur M, posterior N, erit sub conditione legis *Newtonianae*, valentis vsque ad terminum $r$tum,

$$M^m = \frac{m.\,m-1.\,m-2 \text{ - - - - - } m-\alpha+1}{1.\,2.\,3 \text{ - - - } \alpha}$$

$$N^m = \frac{m.\,m-1.\,m-2 \text{ - - - - - } m-r+\alpha+1}{1.\,2.\,3 \text{ - - - - } r-\alpha}$$

$$N^{m-\alpha} = \frac{m-\alpha.\,m-\alpha-1 \text{ - - - - - } m-r+1}{1.\,2.\,3 \text{ - - - - } r-\alpha}$$

hinc $M^m N^{m-\alpha} = \dfrac{m.\,m-1 \text{ - - - - - } m-r+1}{(1.\,2.\,3 \text{ - - - } \alpha)\times(1.\,2.\,3 \text{ - - - } r-\alpha)}$.

23) Patet igitur omnia ista facta, $B^m S^{m-1}$, $C^m R^{m-2}$ - - - - habere numeratorem eundem, quippe

 qui

qui ab $\alpha$ non pendet. Vocemus hunc numeratorem breuitatis causa L. Si itaque tribuantur $\alpha$ successiue omnes valores integri ab 1 vsque ad $r-1$, reperietur $(2^r-2)T^m = L\left(\frac{1}{1.2.3 \ldots r-1} + \frac{1}{(1.2)(1.2.3 \ldots r-2)} + \frac{1}{(1.2.3)(1.2.3 \ldots r-3)} \ldots + \frac{1}{(1.2)(1.2.3 \ldots r-2)} + \frac{1}{1.2.3 \ldots r-1}\right)$. Dicatur haec series fractionum $k$, ac ducta ipsa in $1.2.3 \ldots r$ erit $k(1.2.3 \ldots r) = \frac{r}{1.} + \frac{r.r-1}{1.2.} + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3.} \ldots + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3.} + \frac{r.r-1}{1.2.} + \frac{r}{1.}$. Cum vero $\frac{r}{1.} + \frac{r.r-1}{1.2} \ldots + \frac{r.r-1}{1.2} + \frac{r}{1}$, per §. 20, $=$ sit $2^r-2$, erit $k = \frac{2^r-2}{1.2.3 \ldots r}$, hinc $(2^r-2)$ $T^m = \frac{(2^r-2)L}{1.2.3 \ldots r}$ siue $T^m = \frac{m.m-1.m-2 \ldots m-r+1}{1.2.3 \ldots r}$, quae formula, cum ea, quam theorema *Newtonianum* suppeditat, plane coincidit.

24) Cum itaque theorema *Newtonianum* verum sit pro coefficiente termini secundi, idem verum quoque erit pro termino tertio, hinc pro quarto, quinto, sexto, ac quocunque eorum, qui hos sequuntur, in infinitum.

DE

# DE FVNCTIONVM ALGEBRAICARVM INTEGRARVM FACTORIBVS TRINOMIALIBVS REALIBVS COMMENTATIO.

Auctore

*F. V. T. AEPINO.*

1)

Functionem algebraicam integram quamcunque, formae $x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} - - - -$, in factores ſimplices huiusmodi, $x+\alpha$, $x+\beta$, $x+\gamma$, etc. numero $m$ reſolubilem eſſe, conſtat ex elementis, vnde cognitum quoque eſt, dari functiones algebraicas integras eiusmodi, quae in meros factores ſimplices reales reſolui nequeunt, ſed inter quorum factores, imaginarii admittendi ſunt, quorum autem numerum ſemper parem eſſe debere, demonſtratum habetur.

2) Cum $x+\alpha$, $x+\beta$ - - -, ſupponantur eſſe factores functionis $x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} - - -$, quam in poſterum per $\odot$ indicabimus, combinando, prouti libuerit, binos quoscunque ipſorum, v. g. $x+\alpha$, et $x+\gamma$, etiam productum illorum, ſiue $x^2 \begin{matrix}+\alpha\\+\gamma\end{matrix} x + \alpha\gamma$, erit factor functionis $\odot$. Factores eiusmodi compoſitos, ex binis ſimplicibus conflatos, quoniam ex tribus conſtant terminis, *trinomiales* vocare mos eſt, vnde functio quaeuis algebraica integra, in meros factores trino-

trinomiales, numero $\frac{m}{2}$, si $m$ fuerit par, in $\frac{m-1}{2}$ vero trinomiales, atque vnum simplicem, resolui poterit, si $m$ fuerit impar.

3) Pronunciant scriptores analytici, functionis cuiusuis algebraicae integrae, talem semper possibilem esse resolutionem in factores trinomiales, vt, si $m$ sit par, meri factores trinomiales reales, atque si $m$ sit impar, meri prodeant factores trinomiales reales, cum vnico factore simplici, itidem reali. Occurrit ipsum hoc theorema apud Ill. *Eulerum*, in Introductione ad analysin infinitorum. Tentauit quoque demonstrationem ipsius, Vir summus, atque pro functionibus quidem, quae non nisi duos continent factores imaginarios, ex ipsis elementis de rei veritate facile constat, pro iis vero functionibus, quae quatuor eiusmodi continent factores, admodum ingeniosam suppeditauit Vir Illustris demonstrationem. Non extenditur autem demonstratio ista vltra huncce casum, neque ad potestates altiores applicari potest, quapropter et ipse Ill. inuentor, non summo rigore hoc demonstratum esse, fatetur. Cum itaque se mihi demonstratio directa, satis concinna, atque vniuersalis, minimum quoad functiones algebraicas, obtulerit, operae pretium iudicaui, de ipsa ad Illustrissimam Academiam deferre.

4) Cum factores trinomiales spectari queant, quasi ortum traxerint ex combinatione binorum atque binorum factorum simplicium, theorematis veritas, pro functionibus, quae omnes factores simplices habent reales, nulla laborat difficultate. Quomodocunque enim com-

combinentur bini atque bini factores simplices, per se tamen patet, factores trinomiales, qui sunt producta eorum, fore reales, modo simplices omnes sint reales. Tota itaque quaestio non spectat nisi eius generis functiones, inter quorum factores simplices imaginarii occurrunt. Cum porro numerus factorum imaginariorum semper sit par, consequens est, si $m$ fuerit impar, functionem ⊙, vnum minimum admittere factorem realem. Sit iste $x + \zeta$, atque si ponatur ⊙ diuidi per ipsum, prodibit functio gradus $m - 1$, hinc parium dimensionum, quam vocemus ☾. Cum itaque sit ⊙ $=$ ☾ $\times (x + \zeta)$, sufficit pro hoc casu, monstrasse, functionem ☾ in meros factores trinomiales reales, resolubilem esse. Cum autem ☾ sit functio dimensionum parium, non requiritur, nisi vt theorema nostrum demonstretur pro functionibus parium dimensionum, neque opus est, vt ad functiones impares speciatim respiciatur.

5) Occurrant ergo inter functionis ⊙, quam in posterum parium esse dimensionum semper supponimus, factores imaginarii quidam, numero $2n$, atque demonstratum erit theorema nostrum, modo probare queamus, si $x + \delta$ sit factor imaginarius functionis ⊙, dari inter caeteros factores imaginarios semper aliquem, qui in $x + \delta$ ductus, producit factorem trinomialem realem, ad quam itaque propositionem probandam, tota nostra quaestio reducitur.

6) Sit itaque functionis ⊙ factor imaginarius, $x + m + n\sqrt{-1}$, ad quam formam reduci posse omnes

omnes eiusmodi factores imaginarios, constat, sitque $x + v + z\sqrt{-1}$ factor, qui in priorem ductus producere supponitur factum reale. Cum ergo sit factorum istorum productum

$$= x^2 + m \quad x + mv \\ + n\sqrt{-1} \quad + nv\sqrt{-1} \\ + v \quad + mz\sqrt{-1} \\ + z\sqrt{-1} \quad - nz$$

patet, reale hoc esse non posse, nisi talia sint $z$ et $v$, vt coefficientes huius producti fiant reales, id est, nisi quantitates imaginariae, quas coefficientes inuoluunt, se destruant.

7) Talia itaque esse debent $v$ et $z$, vt sit $n\sqrt{-1} + z\sqrt{-1} = 0$, atque $nv\sqrt{-1} + mz\sqrt{-1}$ pariter $= 0$. Obtinemus autem has aequationes reducendo, $z = -n$, atque $v = +m$. Factor itaque imaginarius, qui cum $x + m + n\sqrt{-1}$ combinatus producit factum reale, alius non esse poterit, nisi iste $x + m - n\sqrt{-1}$. Probandum itaque nobis incumbit, si fuerit $x + m + n\sqrt{-1}$ factor functionis $\odot$, necesse tum esse, vt quoque $x + m - n\sqrt{-1}$ huius functionis factor existat.

8) Ponatur $m = \alpha \cos.\Phi$, et $n\sqrt{-1} = \alpha \sin.\Phi\sqrt{-1}$, atque erit $\alpha = \frac{m}{\cos.\Phi} = \frac{n}{\sin.\Phi}$, vnde fit $\frac{m}{n} = \frac{\cos.\Phi}{\sin.\Phi} = \text{tang.}\,\Phi$, siue formulam inuertendo $\Phi = \text{A tang.}\,\frac{m}{n}$, atque

$\alpha = \frac{m}{\cos.\,\text{A tang.}\,\frac{m}{n}}$. Factor itaque $x + m + n\sqrt{-1}$, et ita exprimi potest, vt sit $x + \alpha\cos.\Phi + \alpha\sin.\Phi\sqrt{-1}$ intelligendo sub $\Phi$ arcum, cuius tangens est $= \frac{m}{n}$, posito radio $= 1$, sub $\alpha$ vero quantitatem $\frac{m}{\cos.\,\text{A tang.}\,\frac{m}{n}}$.

9) Si

9) Si iam quantitas $x + \alpha \,\text{cof.}\, \Phi + \alpha \,\text{fin}\, \Phi \sqrt{-1}$, fit factor functionis ⊙, ex elementis conftat, fi quantitas $-\alpha(\text{cof.}\,\Phi + \text{fin.}\,\Phi \sqrt{-1})$ fubftituatur in functione loco $x$; totam tum functionem euanefcere debere. Subftitutio autem ifta admodum facile perficitur. Cum nempe fit $x = -\alpha\,(\text{cof}\,\Phi + \text{fin.}\,\Phi \sqrt{-1})$, erit

$$x^2 = + \alpha^2 (\text{cof.}\, 2\,\Phi + \text{fin.}\, 2\,\Phi \sqrt{-1})$$
$$x^3 = - \alpha^3 (\text{cof.}\, 3\,\Phi + \text{fin.}\, 3\,\Phi \sqrt{-1}), \text{ atque generatim}$$
$$x^m = \pm\, \alpha^m (\text{cof.}\, m\,\Phi + \text{fin}\; m\,\Phi \sqrt{-1})$$

vti demonftratum habetur apud Ill. *Eulerum* in Introd. ad Anal. infin. Tom. I. pag. 98. Si iam fubftitutionem iftam actu perficiamus, obtinebimus:

$$\left.\begin{array}{l} +\alpha^m \text{cof.}\, m\Phi - a\alpha^{m-1}\text{cof.}(m-1)\Phi + b\alpha^{m-2}\text{cof.}(m-2\,\Phi - - - - - - \\ (+\alpha^m \text{fin.}\, m\Phi - a\alpha^{m-1}\text{fin.}(m-1)\Phi + b\alpha^{m-2}\text{fin}\,(m-2)\Phi - -) \times \sqrt{-1} \end{array}\right\} = 0$$

Ponatur $\alpha^m \text{cof.}\, m\Phi - a\alpha^{m-1}\text{cof.}(m-1)\Phi + b\alpha^{m-2}\text{cof.}(m-2)\Phi - - - - = P$

et $\alpha^m \text{fin.}\, m\Phi - a\alpha^{m-1}\text{fin.}(m-1)\Phi + b\alpha^{m-2}\text{fin.}(m-2)\Phi \cdot - - - = Q$

ac erit $P + Q\sqrt{-1} = 0$.

10) Si $P + Q\sqrt{-1}$ fit $= 0$, confequens inde eft, effe $P = 0$, atque $Q = 0$; nifi enim hoc effet, concludendum foret, effe $Q\sqrt{-1} = -P$, id eft quantitatem imaginariam, reali, quod contradictorium effe, per fe patet. Cum ergo fit $P = 0$, et $Q = 0$, erit non folum $P + Q\sqrt{-1} = 0$, fed etiam $P - Q\sqrt{-1} = 0$.

11) Vt iam determinare queamus, an factor fimplex, $x + m - n\sqrt{-1}$, qui adhibendo denominationes §. 8. affumtas, tranfit in $x + \alpha \,\text{cof.}\, \Phi - \alpha \,\text{fin}\, \Phi \sqrt{-1}$, quique folus eft, qui cum priori combinatus

 pro-

productum reale efficere poteſt, ſit quoque factor functionis ⊙, ſubſtituatur quantitas $-\alpha(\text{coſ.}\,\Phi-\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{-1})$, loco $x$, et diſpiciatur, an hic valor functionem ⊙ euaneſcere faciat. Quoniam autem

$$x^2 = +\alpha^2(\text{coſ.}\,2\,\Phi-\text{ſin.}\,2\,\Phi\sqrt{-1})$$
$$x^3 = -\alpha^3(\text{coſ.}\,3\,\Phi-\text{ſin.}\,3\,\Phi\sqrt{-1})$$

et generatim $x^m = \pm\alpha^m(\text{coſ.}\,m\Phi-\text{ſin.}\,m\Phi\sqrt{-1}$, functio ⊙ per ſubſtitutionem iſtam, tranſit in

$$+\alpha^m\text{coſ.}\,m\Phi-a\alpha^{m-1}\text{coſ.}(m-1)\Phi+b\alpha^{m-2}\text{coſ.}(m-2)\Phi\ldots$$
$$(-\alpha^m\text{ſin.}\,m\Phi+a\alpha^{m-1}\text{ſin.}(m-1)\Phi-b\alpha^{m-2}\text{ſin.}(m-2)\Phi\ldots(\times\sqrt{-1}$$

vnde fit, ſi denominationes §. 10. aſſumtas, vſurpemus $P-Q\sqrt{-1}$, quae quantitas, ſi fuerit nulla, indicio hoc erit, quantitatem $x+\alpha\,\text{coſ.}\,\Phi-\alpha\,\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{-1} = x+m-n\sqrt{-1}$, eſſe factorem functionis ⊙. Supra autem §. 10. probatum iam dedimus, fieri non poſſe, vt ſit $x+m+n\sqrt{-1}$ factor functionis ⊙, ſiue vt ſit $P+Q\sqrt{-1}=0$, niſi fuerit quoque $P-Q\sqrt{-1} = 0$, ſiue $x+m-n\sqrt{-1}$ factor eiusdem functionis.

12) Perſpicuum hinc tandem eſt, $x+m+n\sqrt{-1}$; non poſſe eſſe factorem functionis ⊙, niſi $x+m-n\sqrt{-1}$ quoque ipſius factor exiſtat, atque factorem ipſa habeat trinomialem realem, huncce, $x^2+2mx+m^2-n^2$. Negotium itaque nobis propoſitum, abſolutum iam eſt, aſt dubio tamen adhuc occurrere debemus, quod ſubnaſci poſſet, circa caſum, vbi functio ⊙ plures habet factores aequales, vbi nempe factor imaginarius, $x+m+n\sqrt{-1}$, bis aut ter, aut pluribus vicibus functionis huius

huius factor exiſtit. Videri nempe poſſet, demonſtrationem a me prolatam, euincere quidem, ſi $x+m+n\sqrt{-1}$, ſit factor functionis $\odot$, etiam $x+m-n\sqrt{-1}$, inter reliquos factores occurrere debere, aſt non probare ipſam, quod toties occurrere debeat poſterior, quoties prior occurrit, quod tamen, ſi contingat non eſſe, euidens eſt, reſolutionem in meros factores trinomiales reales ſuccedere non poſſe.

13) Leui autem negotio hoc dubium auſertur. Si nempe functio $\odot$ habeat quantitatem $x+m+n\sqrt{-1}$, $n$ vicibus pro factore, patet ex demonſtratione prolata, minimum vna vice $x+m-n\sqrt{-1}$, fore eiusdem functionis factorem. Diuidatur ergo functio $\odot$ per factorem trinomialem $x^2+2mx+\begin{matrix} m^2 \\ -n^2 \end{matrix}$, atque prodeat

$$x^{m-2}+a'x^{m-3}+b'x^{m-4}+c'x^{m-5}\ \ldots\ldots = ☾$$

inter cuius factores $x+m+n\sqrt{-1}$, adhuc $n-1$ vicibus occurrit. Haec itaque functio, vi demonſtrationis noſtrae, denuo minimum vna vice habebit factorem $x+m-n\sqrt{-1}$. Si ergo denuo diuidatur functio ☾, per $x^2+2mx+\begin{matrix} m^2 \\ -n^2 \end{matrix}$, atque prodeat

$$x^{m-4}+a''x^{m-5}+b''x^{m-6}+c''x^{m-7}\ \ldots\ldots = ☿$$

quae functio, $x+m+n\sqrt{-1}$, $n-2$ vicibus pro factore habebit, euidens eſt, et ipſam, minimum vna vice, factorem $x+m-n\sqrt{-1}$ habituram. Perſpicuum autem eſt, continuari poſſe hanc argumentandi methodum, vsquedum poſt $n$ diuiſiones, peruentum ſit ad functionem

$$x^{m-2n}+\alpha x^{m-2n-1}+\beta x^{m-2n-2}\ \ldots\ldots\ ♄,$$

 inter

inter cuius factores, $x+m+n\sqrt{-1}$, vlterius non occurrit. Inter huius autem functionis factores, etiam $x+m-n\sqrt{-1}$ vlterius occurrere nequit. Si enim haec quantitas foret factor ipsius $p$, ex demonstratione nostra abunde patet, etiam inuersim necesse est, vt tum sit quoque $x+m+n\sqrt{-1}$ ipsius factor. Ast locum non habet posterius; quoniam per institutas divisiones numero $n$, hic factor penitus sublatus est. Manifestum ergo est, si $x+m+n\sqrt{-1}$ pluries occurrat inter factores functionis cuiusdam, totidem exacte vicibus etiam occurrere debere alterum, $x+m-n\sqrt{-1}$.

SOLVTIO.

# SOLVTIO PROBLEMATIS CVIVSDAM AD MAXIMA MINIMAVE PERTINENTIS.

Auctore

STEPH. RVMOWSKI.

1)

Cum commercium epistolicum iuniorem *Eulerum* inter et me intercederet, in litteris mense Ianuario anni praeterlapsi ad me datis, significauit, se problema *Data altitudine Coni determinare figuram basis, vt conus inter omnes alios eiusdem superficiei maximam habeat soliditatem* a patre propositum soluisse, voluitque vt ego in soluendo problemate vires meas experiar. Tentaui igitur eiusdem problematis solutionem, et partem ad eum transmisi. Interea autem ipsam solutionem humanissime mecum communicauit, qua accepta animus incessit, vt meam quoque ad finem perducerem. Exhibita igitur mea solutione, *Euleri* ex litteris excerptam sistam, quo appareat diuersitas solutionum.

2) Sit figura basis AMN, quae vtique in se redeat necesse est. Incidat demissum ex vertice V perpendiculum in D, et sit $VD = a$, per punctum D ducatur vtcunque recta AN, quae pro axi seu diametro curuae quaesitae haberi poterit. Ex puncto D ducatur ad curuam recta DM, et alia ei infinite propinqua $Dm$, et dicatur $DM = z$, erit $rm = dz$. Statuatur insuper $ADM = \Phi$, erit $MDm = d\Phi$, $Mr = z d\Phi$ Tab. I. Fig. 4.

et $Mm = \sqrt{(dz^2 + zzd\Phi^2)}$. Ex puncto D ducatur insuper in tangentem MQ perpendiculum DQ, et prodibunt triangula $Mmr$ et DQM similia, quapropter erit $DQ = \frac{zzd\Phi}{\sqrt{(dz^2 + zzd\Phi^2)}}$ et $QM = \frac{zdz}{\sqrt{(dz^2 + zzd\Phi^2)}}$. Hinc $VQ = \sqrt{(VD^2 + DQ^2)} = \sqrt{aa + \frac{z^4 d\Phi^2}{dz^2 + zzd\Phi^2}} = \frac{\sqrt{(aadz^2 + (aa + zz)zzd\Phi^2)}}{\sqrt{(dz^2 + zzd\Phi^2)}}$. Elementum ergo superficiei $VMm$ erit $= \frac{Mm.VQ}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(aadz^2 + (aa+zz)zzd\Phi^2)}$ et superficies arcui AM respondens erit $= \frac{1}{2}\int\sqrt{(aadz^2 + (aa+zz)zzd\Phi^2)}$. Cuius integrale ita capi debet, vt posito $\Phi = 0$, ipsum euanescat. Elementum autem areae baseos $DMm = \frac{1}{2}zzd\Phi$ et hinc area ADM $= \frac{1}{2}\int zzd\Phi$, soliditas autem partis coni arcui AM respondentis erit $= \frac{1}{6}a\int zzd\Phi$. Commune ergo omnibus conis debet esse $\frac{1}{6}a\int zzd\Phi$, et maximum minimumue $\frac{1}{2}\int\sqrt{(aadz^2 + (aa+zz)zzd\Phi^2)}$, quae expressio posito $dz = pd\Phi$ transibit in sequentem $\frac{1}{2}\int d\Phi \sqrt{(aapp + (aa+zz)zz)}$.

3) Comparentur nunc hae expressiones secundum regulas a Celeberrimo *Eulero* datas cum formula $\int Zd\Phi$ in qua Z ponitur functio quaecunque ipsarum $\Phi z$ et $p$ atque ponatur $dZ = Md\Phi + Ndz + Pdp + Qdq$ etc. prior ergo expressio dabit $Z = zz$, quod differentiatum et comparatum cum $dZ$ dat $M = 0$ $N = 2z$, $P = 0$ etc. Posterior autem $Z = \sqrt{(aapp + (aa+zz)zz)}$. Hinc $M = 0$, $N = \frac{(aa+2zz)z}{\sqrt{(aapp+zz(aa+zz))}}$ et $P = \frac{aap}{\sqrt{(aapp+zz(aa+zz))}}$. Per easdem ergo maximorum et minimorum regulas debebit esse

$$\alpha(N - \tfrac{dP}{d\Phi}) = 2\beta z.$$

Ponatur $\frac{\beta}{\alpha} = cc$, et prodibit $N - \frac{dP}{d\Phi} - 2ccz = 0$, quae ducta in $pd\Phi$ dabit $Npd\Phi - pdP - 2c^2zpd\Phi = 0$ seu

$Ndz$

$N dz - p dP - 2cczdz = 0$. Hinc $N dz + p dP - 2cczdz = d.Pp$. Quod integratum dabit

$$\sqrt{(aapp + zz(aa+zz))} - cczz = Pp + \text{Const.}$$

Posita constante $= bb$ et restituto valore ipsius P obtinebimus $\frac{zz(aa+zz)}{\sqrt{(aapp+zz(aa+zz))}} = bb + cczz$, vnde $p$ definietur sequentem in modum $ap = \frac{z\sqrt{(zz(aa+zz)^2 - (aa+zz)(bb+cczz)^2)}}{bb+cczz}$ et ob $p = \frac{dz}{d\Phi}$ nanciscimur aequationem figuram baseos exprimentem

$$d\Phi = \frac{adz(bb+cczz)}{z\sqrt{(zz(aa+zz)^2 - aa+zz)(bb+cczz)^2)}} \text{ et}$$

$$\Phi = \text{Const.} + \int \frac{adz(bb+cczz)}{z\sqrt{(zz(aa+zz)^2 - (aa+zz)(bb+cczz)^2)}},$$

vbi constans post integrationem ita definiri debet, vt posito $\Phi = 0$; $z$ obtineat datum valorem, eum nempe quem habet, si punctum M transferatur in A. Toties ergo curuae problemati satisfacientes prodibunt algebraicae, quoties $\int \frac{adz(bb+cczz)}{z\sqrt{(zz(aa+zz)^2 - (aa+zz)(bb+cczz)^2)}}$ praebet arcum circuli commensurabilem arcui $\Phi$.

4) Haec erant, quae ad *Eulerum* priusquam eius solutionem acceperim transmisi. Cum aequatio inuenta in genere integrationem admittere non videatur, ad casus speciales erit descendendum. Ponatur in aequatione inuenta $\frac{bb}{cc} = aa$, seu $bb = aacc$, et habebimus pro natura curuae quaesitae sequentem aequationem $d\Phi = \frac{accdz}{z\sqrt{(zz - c^4(aa+zz))}}$ quae mutari poterit in sequentem $d\Phi = \frac{acc}{\sqrt{(1-c^4)}} \cdot \frac{dz}{z\sqrt{(zz - \frac{aac^4}{1-c^4})}}$ et posito breuitatis gratia $\frac{acc}{\sqrt{(1-c^4)}} = \frac{1}{f}$, prodibit $d\Phi = \frac{dz}{z\sqrt{(ffzz-1)}}$. Vnde facta reductione prodibit $\frac{zzd\Phi}{\sqrt{(zzd\Phi^2 + dz^2)}} = \frac{1}{f}$. At $\frac{zzd\Phi}{\sqrt{(zzd\Phi^2 + dz^2)}}$ est perpendiculum ex centro D in tangentem demissum, quod quia est constans $= \frac{acc}{\sqrt{(1-c^4)}}$, curua

curua problemati satisfaciens hoc casu erit circulus, radio $\frac{acc}{\sqrt{(1-c^4)}}$ descriptus.

5) Aliae atque aliae curuae problemati satisfacientes obtinebuntur, prouti constantes, quae in aequationem naturam curuae exprimentem ingrediuntur, determinentur. Nunc solutionem *Euleri* eius verbis conceptam tradam. Sit ACB basis coni, altitudo eius

Tab. I. Fig. 5. OC $= a$. Ponatur CP $= x$, PM $= y$, $dy = p\,dx$ et habebitur soliditas coni $= \frac{1}{3} a \int y\,dx$. Superficies autem $= \frac{1}{2} \int dx \sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}$. Quaestio igitur et hoc modo enunciari poterit, vt inter omnes curuas AMB, quibus idem valor formulae $\int y\,dx$ conueniat, seu quae eandem aream includant, definiatur ea, pro qua valor huius formulae fiat minimus Ad quod soluendum, constat, primo vtriusque harum formularum valorem differentialem, seu, vti alio modo vocatur, variationem, inuestigari, tum vero alterum multiplo cuiuscunque alterius aequalem statui oportere. Quodsi ergo hi valores differentiales, seu variationes, praefixione litterae $\delta$ indicentur, aequatio pro figura basis ita exprimetur $4 \delta \int y\,dx = \delta \int dx \sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}$. Cum igitur negotium ad inuestigationem harum variationum perducatur, ex methodo maximorum et minimorum contemplemur hanc formulam $\int Z\,dx$, in qua Z sit functio quaecunque, tam variabilium $x$ et $y$, tam earum differentialium, seu posito $dy = p\,dx$, quantitatis $p$, quandoquidem haec forma binas nostras complectitur. Quia ergo Z est functio quantitatum finitarum $x$, $y$ et $p$, ea differentiata talem praebebit formam $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp +$ etc. et quouis casu quantitates

titates M, N et P innotescent, quibus inuentis dabitur formulae $\int Z dx$ valor differentialis. Pro priori ergo formula $\int y dx$, quia $Z = y$, erit $M = 0$; $N = 1$ et $P = 0$. Vnde eius variatio erit vt 1. Pro altera vero formula $\int dx \sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}$ erit eodem modo $M = \frac{-p(y-px)}{Z}$, $N = \frac{y-px}{Z}$ et $P = \frac{aap-x(y-px)}{Z}$. Vnde litteris breuitatis gratia retentis erit huius alterius formulae valor differentialis vt $N - \frac{dP}{dx}$. Quare pro figura basis coni consequimur hanc aequationem $m = N - \frac{dP}{dx}$ denotante $m$ numerum constantem, euolutis omnibus aequatio abibit in hanc

$$m dx = \frac{2(y-px)}{Z} - \frac{(aa+xx)dp}{Z} + \frac{(aap-x(y-px))^2 dp}{Z^3}$$

Bini postremi termini aequationis hoc modo in vnam summam colligentur $-\frac{aadp}{Z^3}(aa+xx+yy)$ ita vt nostra aequatio hanc formam induat

$$(A)\ m dx = \frac{2(y-px)dx}{Z} - \frac{aa(aa+xx+yy)dp}{Z^3};$$

multiplicata ea per $p$ prodibit (B) $m dy = \frac{2(y-px)dy}{Z} - \frac{aapdp(aa+xx+yy)}{Z^3}$. Fiat combinatio (A) $x+$(B)$y$ ea dabit

$$m(xdx+ydy) = \frac{2(xdx+ydy)(y-px)}{Z} - \frac{adx+py)(aa+xx+yy)}{Z^3}$$

quae integrata posito $\frac{1}{2}m = n$, et adiecta constante $nab$

$$n(xx+yy+ab) = \frac{(aa+xx+yy)(y-px)}{Z}$$

hinc posito $b = a$ circulus elicietur.

6) Cum ex aequatione $n = \frac{y-px}{Z}$ non statim pateat curuam quaesitam esse circulum, et *Eulerus* id non exponat, lubet eius rei hic demonstrationem adiicere. Cum sit $n = \frac{y-px}{Z}$, sumtis quadratis habebimus tandem $\frac{nnaa}{1-nn}(1+pp) = (y-px)^2$. Ponatur $y = u$, $x$ et prodibit

prodibit $dy = udx + xdu = pdx$. Vnde $\frac{du}{p-u} = \frac{dx}{x}$, et aequatio praecedens mutabitur in sequentem $\frac{uxau(1+pp)}{1-nn}$ $= (u-p)^2 xx$, sumendis logarithmis fit $l\frac{nna}{1-nn} + l(1+pp)$ $= 2l(u-p) + 2lx$, et differentialibus $\frac{pdp}{1+pp} = \frac{du-dp}{u-p} + \frac{dx}{x}$. Hinc ob $\frac{du}{p-u} = \frac{dx}{x}$ prodibit $1 + pu = 0$, quod ob $p = \frac{dy}{x}$ et $u = \frac{u}{x}$ post integrationem dat $xx + yy =$ Const. quod manifesto est ad circulum abscissis a centro computatis. Pergit *Eulerus*:

7) Aequatio $n(ab + xx + yy) = \frac{(aa+xx+yy)(y-px)}{Z}$ porro per substitutionem $y - px = u\sqrt{(1+pp)}$ hanc suppeditat aequationem $\frac{n(ab+xx+yy)}{aa+xx+yy} = \frac{u}{\sqrt{(aa+uu)}}$, iam conemur omnia per nouam variabilem determinare, at substitutio assumta dat per differentiationem (C) $x = \frac{du}{dp}$ $\sqrt{(1+pp)} - \frac{pu}{\sqrt{(1+pp)}}$. Vnde oritur ob $y = px + u\sqrt{(1+pp)}$, (D) $y = -\frac{pdu}{dp}\sqrt{(1+pp)} + \frac{u}{\sqrt{(1+pp)}}$. Statuatur porro breuitatis gratia $\frac{u}{\sqrt{(aa+uu)}} = nU$, erit aequatio pro curua $\frac{ab+xx+yy}{aa+xx+yy} = U$, hinc $xx + yy = \frac{aaUU - ab}{1-U} = \frac{du^2}{dp^2}(1+pp) + uu$, ex qua restat, vt $p$ per $u$ vel U determinetur, tunc $x$ et $y$ ex (C) et (D) per solam variabilem expressa habebimus: Cum igitur sit $\frac{du^2}{dp^2}(1+pp) + uu = \frac{aaUU - ab}{1-U}$ erit statim

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{dU\sqrt{(1-U)}}{\sqrt{(aaU - ab - uu(1-U))}}.$$

Si pro $u$ ex antecedentibus valor per U expressus substituatur, aequatio separata integrari poterit per signum summatorium. Hinc $p$ innotescet per U, ideoque etiam per $u$, et problema erit solutum.

PHY-

# PHYSICO-
# MATHEMATICA.

# DILVCIDATIONES DE RESISTENTIA FLVIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Duplici modo quaestio de resistentia, quam corpora solida in fluidis mota patiuntur, tractari solet, altero negotium tantum vero proxime plerumque conficitur, dum quantitas resistentiae per regulam satis concinnam ad calculum reuocatur; altero vero resistentiae doctrinam ex ipsa fluidorum natura et pressione, quam in corpora exerunt, per profundissimas Hydrodynamicae inuestigationes constituere Geometrae sunt conati. Quo posteriori modo si negotium ad finem perducere liceret, omnia, quae ad mensuram resistentiae pertinent, inde accuratissime definiri possent, neque amplius coacti essemus, ad modum priorem confugere, quo prope tantum vera resistentiae magnitudo exhibetur. Verum etiam nunc tam longe ab ista perfecta resistentiae cognitione abesse videmur, vt priori modo, etiamsi eius defectum probe norimus, minime carere queamus; sed eo potius, quoties resistentia indaganda occurrit, vti debeamus.

II. Prior autem modus, quo Newtonus plurimum est vsus, etiamsi eius aberrationem a veritate non ignorasse videatur, hac regula ad calculum inpri-

 mis

mis accommodata continetur, vt resistentia rationem compositam sequi censeatur, ex ratione duplicata celeritatis, qua fluidum impingit, et ratione pariter duplicata sinus anguli, quem directio impulsionis cum superficie percussa constituit. Hinc ergo si pro allisione fluidi perpendiculari, vbi angulus ille sit rectus, resistentiae quantitatem nouerimus, facile erit, eam pro quauis allisione obliqua assignare. At vero si fluidum perpendiculariter superficiem quampiam planam feriat, resistentia aequalis aestimatur ponderi columnae eiusdem fluidi, cuius basis sit ipsa superficies percussa, altitudo vero congruat cum ea, ex qua graue cadendo ipsam fluidi celeritatem esset impetraturum.

III. Haec regula cum ob facilem vsum in calculo, tum vero ideo potissimum commendari meretur, quod a veritate plerumque haud notabiliter abludere deprehendatur. Nam quod ad principia attinet, quibus innititur, nullum plane est dubium, quin ea nimis sint vaga, atque a vero statu, ad quem accommodantur, remota, quam vt conclusio inde deducta pro certa admitti queat. Maximam enim partem haec regula est petita ex collisione corporum, dum fluidum continuo in corpus data celeritate et secundum directionem motus sui impingere, conflictumque exercere concipitur. At vero certum est, fluidum neutiquam in corpus hoc modo impingere, sed antequam ad corpus perueniat, tam suam directionem, quam celeritatem, ita inflectere, vt cum ad corpus peruenerit, secundum ipsam eius superficiem praeterlabatur, nullamque aliam vim in corpus exerat, praeter pressionem, quae ipsi in

singulis

ſingulis contactus punctis conuenit. Quam ob rem concluſio, quae ex ratiocinio tam peruerſo deduci ſolet, minime pro vera haberi poteſt.

IV. Quo hoc clarius perſpiciamus, flumen concipiamus, quod data celeritate ſecundum directionem OV feratur; iam vero in hoc flumine corpus collocari AME, quod quantam vim a flumine ſit ſuſtentaturum, definiri oporteat. Atque per regulam vulgarem haec vis ita inueſtigatur, quaſi in ſingula corporis puncta M vena aquea IM ſecundum directionem fluminis, eaque celeritate, qua flumen progredi aſſumimus, incurreret, ac per conflictum verum corpori vim inferret. Interim tamen ſi actionem fluminis, prouti re vera ſe habet, perpendamus, mox percipiemus, tractus ſeu quaſi riuulos fluminis, qui ſupra corpus in notabili diſtantia celeritatem ſuam cum directione retinuerant, vti $f, f, f, g, g, g,$ etc. cum propius ad corpus acceſſerint, curſum ſuum inflectere, atque tandem iuxta corporis latera defluere, quae deflexio in figura exhibetur. Ex quo manifeſtum eſt, nusquam eiusmodi conflictum fieri, qualis in conſtitutione regulae vulgaris concipi ſolet. Tab. II. Fig. 1.

V. Quin potius hinc manifeſtum eſt, iſtam aquae vim, quae ſub reſtiſtentiae nomine comprehenditur, a preſſione aquae iuxta corpus praeterlabentis proficiſci, quam idcirco preſſionem inueſtigari neceſſe eſt, ſi reſiſtentiam accurate aſſignare velimus. Quare vera ratio reſiſtentiam determinandi, qua alter modus ſupra memoratus continetur, huc redit, vt preſſionem quam

quam corpus in singulis punctis a fluido sustinet, definiamus: at vero haec quaestio altioris est indaginis, quam vt eius enodationem a profectibus, quos adhuc in hydrodynamicis fecimus, expectare queamus. Hic enim singuli riuuli, ex quibus fluuius constat, et quemadmodum cursum suum circa corpus inflectant, considerari, atque omnes illae lineae curuae *ff*, *gg*, *hh*, etc. quasi sub communem aequationem redigi debent; vnde deinceps aquae celeritas in singulis cuiusque riuuli punctis concludi queat. Hac autem demum celeritate cognita, ipsam pressionem, cui hoc negotium innititur, assignare licebit, a tam perfecta autem motus fluidorum cognitione adhuc longe absumus.

VI. Quae Celeb. *Alembertus* de resistentia fluidorum in peculiari Tractatu est commentatus, hanc summam difficultatem, veram resistentiam inuestigandi, magis demonstrant, quam leuant. Cum enim Vir acutissimus omni adhibita sagacitate hanc quaestionem adaequate explicare haud valuerit, vt inde resistentia, quam quaeuis corpora in aqua mota patiuntur, assignari possit: magno hoc nobis est argumento, quaestionem tantopere esse difficilem, vt vires humanas tantum non superare videatur. Quae ego etiam nuper in aliquot dissertationibus de motu fluidorum exposui, nullum subsidium huc afferunt. Etiamsi enim omnia, quae ad motum fluidorum pertinent, ad aequationes analyticas reduxi, tamen ipsa Analysis minime adhuc ita est exculta, vt illis aequationibus resoluendis sufficiat. Quae porro alii de hoc argumento sunt meditati, haud feliciori successu vires suas ingenii sunt experti.

VII. Etsi

VII. Etsi autem determinatio pressionis in genere, hoc est in omnibus punctis fluidi, tam a tractu singulorum riuulorum, quam ab aquae celeritate pendet, tamen inueni, si quaestio ad vnicum riuulum restringatur, tum pressionem in singulis eius locis per solam celeritatem definiri. Quare cum corpus AME ab vnico riuulo $f$, $f$, $f$ contingatur, omnisque resistentia ab eius pressionibus solis oriatur, si modo pressionem huius riuuli in singulis eius punctis cognosceremus, inde facile resistentiam, quam corpus a fluuio sustinet, definire possemus. Tametsi autem ista celeritatis cognitio per riuulum corpori proximum non minoribus difficultatibus sit subiecta, quam determinatio pressionis generatim considerata, tamen hoc inde lucri nanciscimur, vt si nobis licuerit, siue per experientiam, siue vndecunque, celeritatem fluidi iuxta corpus praeterlabentis cognoscere, hoc solum nobis satis sit futurum ad veram resistentiam corporis accurate determinandam.

VIII. Si enim ponamus celeritatem, qua aqua circa elementum corporis M praeterlabitur, debitam esse altitudini $v$, atque assumamus, vt vulgo fieri solet, omnes riuulos in plano horizontali versari, ex iis, quae demonstraui de motu fluidorum in genere, colligitur, pressionem aquae in puncto M exprimi per altitudinem $k-v$, ita vt quantitas $k$ pro toto riuulo $f, f, f, f$, eundem obtineat valorem, ideoque in praesenti negotio pro constanti haberi queat, etiamsi pro diuersis riuulis diuersos sortiatur valores. Hanc autem pressionem $k-v$ ita interpretari oportet, vt corpus in M a pondere columnae aqueae, cuius altitudo sit $=k-v$, ſollicitari ſit cenſendum. Pro baſi ſcilicet huius columnae ſumi debet elementum ſuperficiei corporis in M, quod ab iſta vi normaliter vrgebitur, vti in omnibus preſſionibus euenit, hincque porro more ſolito quantitatem totius reſiſtentiae colligere licebit.

IX. Quanquam autem circa celeritatem aquae apud ſingula puncta M nihil habemus exploratum ex Theoria, tamen ſi experientiam in ſubſidium vocemus, egregias reſiſtentiae proprietates cognoſcemus. Cum enim aucta celeritate in eodem riuulo preſſio diminuatur, contra vero augeatur celeritate imminuta, certo affirmare poterimus, in quibus locis corporis AME aqua velocius praeterlabatur, ibi reſiſtentiam eſſe minorem, quam iis locis, vbi tardius praeterfluit: quae veritas ſi probe perpendatur, plura alia inſignia conſectaria ſuppeditare poterit. Ac merito hoc ingens paradoxon videri debet, quod a maiori celeritate reſiſtentia minor, a minori autem celeritate reſiſtentia maior oriatur; quod primo intuitu regulae vulgari directe adverſari videtur. Sed omnis difficultas euaneſcet, ſi perpendamus, hic diuerſas fluidi celeritates, quibus eodem tempore ſuperficiem corporis ſtringit, inter ſe comparari. Neque minus certum manet, ſi vel fluvius velocius moueatur, vel corpus celerius aduerſus aquam trudatur, reſiſtentiam quoque maiorem eſſe futuram.

X. Viciſſim ergo vbi per experientiam reſiſtentia maior deprehenditur, ibi celeritas fluidi praeterlabentis minor ſit neceſſe eſt; cum igitur nouerimus, in

iis

iis superficiei corporis partibus, ad quas directio fluminis OV propius ad perpendicularem accedit, resistentiam esse maiorem, atque omnium maximam, vbi directio fluuii OV ad corporis superficiem sit normalis; in istis locis quoque celeritas fluidi praeterlabentis minor esse debet. Ad angulum scilicet AMI erit respiciendum, qui quo fuerit maior, seu recto propior, ibi celeritas aquae tanto minor sit necesse est, contra autem eo maior, vbi hic angulus diminuitur. In figura igitur exhibita celeritas aquae praeterlabentis circa A erit minima, circa E vero maxima: atque hoc etiam experientia manifesto declarat, qua constat, aquam circa verticem A plerumque fere penitus stagnare, imprimis si angulus OAM fuerit rectus.

XI. Quoniam igitur nouimus per regulam vulgarem, quantumuis debili nitatur fundamento, resistentiam tamen parum a vero aberrantem obtineri, eius beneficio celeritatem aquae iuxta corpus praeterlabentem vero proxime assignare poterimus; et quoniam in eodem riuulo O in singulis locis $ffff$ E amplitudo reciprocam tenet rationem celeritatis, hinc simul amplitudinem istius riuuli corpus contingentis in singulis locis definire licebit. Tum vero porro primo hoc riuulo constituto simili ratione riuulus sequens $fggf$, seu secundus, ex hocque tertius $ghhg$, indeque sequentes vero proxime designari poterunt. Quae determinationes etsi a veritate aliquantum recedere sunt censendae, tamen in tam ardua inuestigatione insigni vsu non carebunt. Quodsi enim iam vero proxime tractum singulorum riuulorum vna cum aquae celeritate cognouerimus,

mus, nullum eſt dubium, quin deinceps multo facilius ſummas difficultates, quibus haec quaeſtio eſt inuoluta, ſuperare valeamus. Inde ſaltem colligere licebit, quemadmodum aequatio generalis figuram ſingulorum riuulorum complectens debeat eſſe comparata.

XII. Quodſi autem celeritatem fluuii, qua in notabili a corpore diſtantia circa O ſecundum directionem OV mouetur, vel, quod eodem redit, celeritatem, qua ipſum corpus AME in aqua ſtagnante ſecundum directionem AO fertur, debitam eſſe ponamus altitudini $c$, per regulam vulgarem nouimus, vbi corporis ſuperficies ad directionem fluminis ſit perpendicularis, ibi reſiſtentiam exprimi per ipſam altitudinem $c$, ſin autem in loco M angulus incidentiae AMI, ducta recta MI directioni AO parallela, ponatur $= \Phi$, per eandem regulam conſtat, fore reſiſtentiam in $M = c$ ſin. $\Phi^2$. Hinc ergo, comparatione inſtituta, ſi aquae iuxta corpus praeterfluentis celeritas in M debita ſtatuatur altitudini $v$, hanc adipiſcemur aequationem:

$$c \sin. \Phi^2 = k - v, \text{ ideoque } v = k - c \sin. \Phi^2.$$

Quocirca ex hac formula veram aquae celeritatem ad ſingula corporis puncta M aſſignare valebimus.

XIII. Tantum ergo ſupereſt, vt hinc conſtantem quantitatem $k$ definiamus, quae quidem ex caſu, vbi angulus $\Phi$ eſt rectus, facile colligetur. Experientia enim teſtatur, in his locis celeritatem aquae allabentis eſſe nullam, tum vero etiam nulla adeſt ratio, cur aqua, vbi directio fluminis ad ſuperficiem corporis eſt perpendicularis, in hanc potius plagam, quam aliam, dilabelabererur. Ex quo conficitur, si angulus $\Phi$ fuerit rectus, ideoque $\sin.\Phi = 1$, tum esse oportere $v = 0$; vnde manifesto fit $k = c$, seu ista constans $k$ praecise est aequalis altitudini fluminis celeritati debitae. Posita autem $k = c$, habebimus $v = c - c\sin.\Phi^2$, seu $v = c\cos.\Phi^2$, hincque $\sqrt{v} = \cos.\Phi.\sqrt{c}$: vnde hanc insignem proprietatem deriuamus, quod celeritas aquae iuxta corpus ad M praeterlabentis sit ad veram celeritatem fluminis $\sqrt{c}$, vti cosinus anguli AMI ad sinum totum. Atque hinc in E, vbi tangens directioni OA est parallela, seu $\Phi = 0$, erit $v = c$, seu celeritas aquae ibi aequalis resultabit ipsi fluminis celeritati in O.

XIV. Hinc discimus, si celeritatem nauis, qua vehimur, ex velocitate aquae praeterlabentis aestimare velimus, atque nauis secundum directionem OA progrediatur, tum in naui eum locum E esse eligendum, vbi tangens horizontalis directioni AO sit parallela. Atque in hoc loco tuto concludere poterimus, celeritatem nauis aequalem esse velocitati aquae, quae hic praeterlabitur: sin autem in alio loco, vti in M, hoc iudicium instituere vellemus, eo magis erraremus, quo maior fuerit angulus AMI, nauem scilicet nimis paruam reputantes; quoniam celeritas aquae in M praeterlabentis minor est celeritate nauis, et quidem in ratione cosinus anguli AMI ad sinum totum. Interim tamen probe est recordandum, has determinationes non summo rigore esse veras, sed tantum idoneas ad veritatem appropinquationes.

Tab. II. Fig. 2. XV. Ac regula quidem haec certo fallit in corporis parte posteriori ENB; si enim ponamus, vt in parte anteriori, esse $v = c \cos. \Phi^2$, puppis nauis praecise tanta vi propelleretur, quanta prora repellitur; vnde a puncto E retrorsum formula $v = c \cos. \Phi^2$ eo magis a veritate discedet, quo propius ad B perueniamus; tantum ergo in parte anteriori AME, tanquam toleranter vera, admitti potest. Interim tamen hinc coniectando suspicari poterimus, quomodo motus aquae praeterlabentis circa puppim nauis ENB se sit habiturus. Si enim puppis nihil ad resistentiam conferat, certum est, aquam ab E ad B celeritate vniformi defluere, ea scilicet, quae debeatur altitudini $c$, et quam iam in E recuperauit. Sin autem in hac parte lentius decurrat, nauis hinc propulsionem accipiet, qua resistentia diminuetur. Fieri autem nequit, vt vsquam euadat $v > c$, quia tunc pressio prodiret negatiua. Hoc enim casu aqua post nauim vacuum relinqueret, et nauis quasi sulcum traheret; vnde ob deficientem pressionem a tergo resistentia vtique augeretur.

XVI. Si igitur puppi nauis ENB eiusmodi figura tribui posset, vt aqua ab E et B progrediendo retardaretur, atque circa N et B minorem habitura esset celeritatem, quam in E, talis figura constructioni nauium esset aptissima iudicanda, quia hoc modo aqua puppim adeo antrorsum propelleret, resistentiamque prorae diminueret. Verum si experientiam consulamus, talem figuram vix dari colligere licet, quin potius omnis cura eo conferri debere videtur, vt ne alterum incommodum vsu veniat, quo ob vacuum pene navem

vem relictum resistentia adeo augetur. In eo imprimis ergo circa figuram puppis erit elaborandum, vt tale vacuum euitetur, ac puppis ita insensibiliter ad B vsque convergat, vt aqua eam iugiter sequatur, neque riuulus $Ef$ eam vsquam deserat. In hoc etiam insignis illa nauium proprietas versatur, qua puppi talem figuram conciliare student, vt aqua libere ad gubernaculum decurrere queat, quo effectu frustraremur, si aqua circa puppim nauem desereret, neque in gubernaculum allideret.

XVII. Ex celeritate autem aquae iuxta corpus defluentis figuram riuulorum illorum, per quos aqua motum suum inflectit, satis exacte colligere poterimus. Ac primo quidem pro riuulo corpori proximo $fff$ eius amplitudo vbique celeritati reciproce debet esse proportionalis. Cum igitur, posito angulo $AMI = \Phi$, celeritas aquae in M sit $= c \cos \Phi$, in hoc loco amplitudo riuuli $f$ erit vt $\frac{1}{c \cos. \Phi}$; quia autem hunc riuulum angustissimum concipimus, motusque aquae in M secundum curuae tangentem dirigitur, amplitudo $Mq$ ad curuam statuenda est normalis. Quare in normali QM producta capiatur portio $Mq$, quae sit vbique vt $\frac{1}{c \cos. \Phi}$, seu vt sec. $\Phi$, ob $c$ constantem, et punctum $q$ erit in curua proxima $fgqe$ riuulum exhibente. Verum hic $\Phi$ denotabit quoque angulum PMQ, posita applicata PM ad fluminis directionem OA perpendiculari: vnde erit $Mq$ vt $\frac{MQ}{MP}$. Producatur ergo vbique applicata PM in $p$, vt pars producta $Mp$ sit constantis magnitudinis, et ex $p$ axi AO agatur parallela $pq$, normalem QM productum secans in $q$, eritque punctum $q$ in curua quaesita. Tab. II. Fig. 3.

XVIII.

XVIII. Cum ergo curua *fgqe* hac praedita sit proprietate, vt sit interuallum M*p* constantis magnitudinis, in puncto E, vbi tangens curuae est axi AO parallela, ipsa riuuli amplitudo E*e*, quae est applicatae PM parallela, hanc amplitudinem habebit, seu vicissim interuallum M*p* vbique isti amplitudini E*e* aequale est capiendum, vnde patet, quemadmodum ab E per M ad A progrediendo amplitudo riuuli continuo augeatur. Hinc ergo pro vertice corporis A, si recta A*d* fuerit ad curuam normalis, puncti *d* ab axe AO distantia D*d* quoque interuallo E*e* erit aequalis, et quoniam hic riuuli amplitudo per ipsam rectam D*d* aestimari debet, in hoc loco D*d* aquae celeritas aequalis est censenda celeritati in E*e*, hoc est verae fluminis celeritati, ita vt hic fluuius adhuc vero suo motu feratur, neque vllam ob corpus oppositum mutationem subierit. Quin etiam, si corpus in A angulo terminetur, quaelibet alia recta A*g* ad axem AO magis inclinata pariter ad curuam in A normalis est censenda, vnde et hic distantia ab axe G*g* ipsi E*e* et D*d* est aequalis, sicque vltra *d* riuulus includetur recta *dgf*, axi AO parallela.

XIX. En ergo figuram primi riuuli *fgdqe* corpori AME proximi et altera parte cum axe AO tum corpore AME terminati, per cuius partem anteriorem O*f*D*d* aqua motu suo naturali affluit. Cum autem vltra D*d* ad corpus appropinquauerit, ob crescentem amplitudinem riuuli, eius motus partim retardabitur, partim directionem ita inflectet, vt ab *f* ad *q* vsque directionem quidem curuae *fq* sequatur, ex altera

tera vero parte primum ſecundum axem DA, tum vero ſecundum ductum curuae AM progrediatur; atque ad A ob maximam amplitudinem motu minimo feratur. At vero ſingula interualla E$e$, M$q$, D$d$, G$g$ infinite parua ſunt concipienda, quae ſi denuo in duos pluresue riuulos minores ſubdiuidentur, vti in figura biſectio per lineam $f'g'd'q'e'$ repraeſentatur, vnde motus aquae per ſingulos hos riuulos eiusque retardatio et inflexio multo clarius perſpicitur.

XX. Quanquam haec tantum proxime ad veritatem accedere ſunt cenſenda, atque adeo vltra A verſus O lex continuitatis in formula noſtra non amplius obſeruatur, cum vi formulae amplitudo riuuli in $d$ non per rectam D$d$ ſed A$d$ eſſet aeſtimanda, tamen haec ita ad veritatem, quam experientia monſtrare ſolet, accedere videntur, vt ſi non per hanc ipſam conſtructionem, tamen per ſatis ſimilem vera figura ſingulorum riuulorum definiri ſit cenſenda. Per experientiam enim certum eſt, tantum in modica a corpore diſtantia motum demum fluminis perturbari incipere, ita vt, cum retardetur, tum circa corpus inflectatur, omnino vti delineatio riuulorum ſecundum formulam noſtram facta manifeſto declarat. Atque in parte corporis antica AME nullum eſt dubium, quin interualla lateralia M$p$ ſint inter ſe proxime aequalia, pone corpus autem, vt vidimus, haec aequalitas ceſſabit, dum ibi ipſae amplitudines M$q$ potius aequalitatis legem ſequi videntur.

XXI. Vt a ſimplicioribus incipiam, terminetur corporis pars antica duabus lineis rectis AE et EF, Tab. II. Fig. 4.

quarum haec sit directioni fluminis parallela, illa vtcunque inclinata; haec scilicet figura quasi semissis corporis est spectanda, iudiciumque partis vltra rectam AC sitae pari modo absoluetur, dummodo punctum A maxime promineat. Iam ad riuulos designandos ad rectam inclinatam AE ducantur normales A$d$, E$e$, tum in dato interuallo D$d$=F$f$, directioni fluminis OA parallelae agantur $od$, $fe$, iunganturque puncta $d$ et $e$ recta $de$; ac linea composita $odef$ repraesentabit tractum riuuli proximi, simili vero modo si interualla $D'd'$, $F'f'$ maiora capiantur, figura riuuli sequentis $o'd'e'f'$ prodibit. Sic quidem secundum regulam inuentam figura riuulorum exprimetur; reuera autem circa $d$ et $e$ anguli obtundentur, quia aqua non subito, sed successiue, directionem mutabit: vnde quo magis riuuli a corpore distabunt, eo magis eorum tractus ad vniformitatem accedet, quin etiam interualla F$f$ ratione D$d$ ita insensibiliter diminuentur, vt tandem riuuli satis remoti directioni OA plane paralleli restituantur.

XXII. In primo ergo riuulo aqua per totum tractum O$od$D celeritatem suam et directionem retinebit, ac mutatio demum in distantia AD a corpore incipiet, nisi quatenus ob incuruationem ad $d$ hoc interuallum aliquantum augeri est censendum. Cum igitur sit D$d$: AD=AB:BE, erit ista distantia ante corpus, in qua motus aquae perturbari incipit, AD$=\frac{BE}{AB}$.D$d$ =D$d$. tang. BAE. Vnde si angulus BAE fuerit rectus, hoc spatium in infinitum augeri videtur; verum cum ipsa riuuli amplitudo D$d$ pro infinite parua sit

sit habenda, hinc interuallum ad magnitudinem finitam redigetur. Verum si plures positiones lateris EA, vt $E\alpha$, inter se compararemus, quae omnes eadem latitudine AE sint praeditae, ponamusque $BE=a$, $BA=x$, et amplitudinem riuuli $Dd=Ff=f$, locus D, vbi motus aquae primum perturbari incipit, a recta BE distabit interuallo $BD=x+\frac{af}{x}$, quod fit omnium minimum, si $x=\sqrt{af}$, seu $B\alpha=\sqrt{BE.Dd}$, quo casu angulus $B\alpha E$ iam minime a recto distabit. Verisimile autem est, si spatium $B\alpha$ adhuc minus capiatur, atque adeo euanescat, interuallum BD non fieri magis, cum positio BE non in maiori distantia motum aquae perturbare valeat, quam positio $\alpha E$, vnde et pro positione BE haec distantia erit censenda $BD=2\sqrt{af}$.

XXIII. Hinc ergo colligere poterimus, quomodo aqua ad superficiem BE, quae ad directionem fluminis est normalis, alluat. Scilicet riuulus $od$, cuius ab axe OB distantia sit $Dd$, motu inalterato affluet vsque ad $d$, vt sit distantia $BD=2\sqrt{BE.Dd}$, hicque demum motum suum inflectet ad $e$ progrediens, vnde secundum $ef$ lateri EF parallele proferetur, vt sit distantia $Ff=Dd$. Simili modo riuulus remotior viam sequetur $o'd'e'f'$, cursum suum iam in $d'$ inflectens, vt sit interuallum $BD'=2\sqrt{BE.D'd'}$. In spatiis autem $Bd$ et $dd'$, quia ibi amplitudo riuulorum est maxima, motus aquae erit tardissimus, et ad B penitus quiescet, vnde hic resistentia quoque erit maxima, ad E versus F autem, ob riuuli primi amplitudinem decrescentem, continuo diminuetur, neque tamen diminutio tanta esse potest, vt resistentia inde orta a Fig. 5.

regula vulgari notabiliter abhorreat. Haud aliter resistentia comparata fore videtur, si latus EB retro fuerit inclinatum.

Fig. 6. XXIV. Sit iam corporis figura AMF quadrans circuli, atque, ad tractum riuuli proximi inueniendum, ponatur radius circuli $CA = CM = a$, amplitudo riuuli in F, nempe $Ff = f$. Pro puncto quocunque circuli M ponatur abscissa $CP = x$, applicata $PM = y$, vt sit $xx + yy = aa$. Tum producto radio CM in $m$, vt sit applicata curuae quaesitae $pm = y + f$, erit abscissa $Cp = x + \frac{fx}{y}$. Statuantur ergo pro curua $omf$ coordinatae $Cp = X$, $pm = Y$, vt sit $Y = y + f$ et $x = \frac{(y+f)x}{y} = \frac{Yx}{y}$; eritque $y = Y - f$ et $x = \frac{X(Y-f)}{Y}$ vnde ob $xx + yy = aa$ pro curua $omf$ habebitur haec aequatio $(XX + YY)(Y-f)^2 = aaYY$: quae si $f$ vt parameter variabilis spectetur, innumerabiles istiusmodi curuas $omf$ exhibebit, quae omnes secundum axem AO in infinitum extendentur, ab eoque tandem interuallo $= f$ distabunt, vnico casu excepto, quo $f = o$ ipsum circulum AMF referente. Cum enim sit $XX = \frac{aaYY}{(Y-f)^2} - YY$, si X in infinitum abeat, fiet $Y = f$. Neque vero omnes hae curuae riuulos exhibebunt, propterea quod quaeque sequens non eodem modo ex praecedente definitur, vti prima ex ipso circulo est constructa.

XXV. Si curua AMF fuerit alia curua quaecunque, aequatione inter $CP = x$ et $PM = y$ contenta, et pro riuulo proximo $omf$ ponatur $Cp = X$ et $pm = Y$, erit $Y = y + f$ et $X = x - \frac{fdy}{dx}$, siquidem interuallum $f$ fuerit minimum. At quoniam figura sequenquentium riuulorum a praecedentibus simili modo definitur, si interuallum $Ff = f$ statuatur finitum, curuae *omf* figura expressione magis complicata definietur. Ac pro applicata quidem erit $Y = y + f$, verum abscissa X talis erit functio ipsarum $x$ et $f$, vt sit $\frac{dy}{dx} + (\frac{dX}{dx})(\frac{dX}{df}) = 0$, vnde natura functionis X determinatur. Si enim ponatur per seriem $X = x - fP + ffQ - f^3R + f^4S - \text{etc.}$ existentibus P, Q, R, S etc. functionibus ipsius $x$, cuius quoque data est functio $y$, erit

$$dy = (dx - fdP + ffdQ - f^3dR + f^4dS \text{ etc.})(P - 2fQ + 3ffR - 4f^3S + \text{etc})$$

vnde fit:

$$P = \frac{dy}{dx};\ Q = \frac{-PdP}{2dx};\ R = \frac{-PdQ - 2QdP}{3dx};\ S = \frac{-PdR - 2QdQ - 3RdP}{4dx} \text{ etc.}$$

sicque data curua AM omnes riuulorum curuae *om* assignabuntur, ac per seriem quidem infinitam.

XXVI. Quoniam hae formulae tantum vero proxime tractum singulorum riuulorum declarant, superfluum foret, in iis euoluendis operam consumere. Verae tamen formulae ab his non admodum erunt diversae, ac fortasse earum resolutio multo facilior euadet. Praeterea vero notari conuenit, formulas veras non omnino determinatas esse posse, nisi forte extensio fluuii in latitudinem sit infinita; nam vtcunque fluuius circa corpus cursum inflectat, ad ripam tamen eius directionem sequetur. Vnde aequatio inter X et Y ita debet esse comparata, vt posito $f = 0$, praebeat ipsam corporis figuram AM; sin autem ipsi $f$ certus quidam valor tribuatur, vt tum figuram ripae exhibeat. Ita si ripa rectae AO ad distantiam $= b$ fuerit

 paral-

parallela, ac ponatur $CF = a$, aequatio inter X et Y has proprietates habere debet, vt posito $f = 0$, inde ipsa curua AM resultet, seu fiat $X = x$ et $Y = y$, sin autem ponatur $f = b - a$, quo casu punctum $f$ in ripam cadet, vt tum fiat $Y = b$ quicunque valor pro X sit prodituris.

XXVII. Hinc autem satis probabiliter resistentiam definire poterimus, qua corpus AMF in fluido canali OCIH datae amplitudinis $CH = b$ motum patitur, ad quem casum regula vulgaris non est accommodata. Sit igitur celeritas, qua corpus secundum directionem AO promouetur, $= c$, et riuuli axi proximi amplitudo $Oo = e$; amplitudo autem corporis maxima $CF = a$; vt spatium in canali residuum sit $FH = b - a$, per quod cum fluidum omne defluere debeat, assumo enim, id neque supra corpus neque infra defluere posse, amplitudo riuuli in $Ff$ erit $\frac{b-a}{b}e = f$, vbi celeritas debita sit altitudini $k$ vt sit $kff = cee$, seu $k = \frac{cbb}{(b-a)^2}$. Ponatur nunc pro corporis figura $CP = x$; $PM = y$; et pro riuulo $Cp = X$ et $pm = Y$, neque hic erit $Y - y = f$, neque $Y - y = e$, sed medium quendam tenebit valorem, vt sit $Y - y = \frac{b-y}{b}e$. At est $Y - y : Mm = dx : V(dx^2 + dy^2)$, vnde fit $Mm = \frac{b-y}{b} \cdot \frac{eV(dx^2+dy^2)}{dx}$. Si ergo celeritas aquae ad M defluentis debita sit altitudini $v$, erit $\frac{(b-y)^2 ee(dx^2+dy^2)}{bbdx^2}v = cee$, seu $v = \frac{cbbdx^2}{(b-y)^2(dx^2+dy^2)}$.

XXVIII. Iam vero fluidi pressio in M est per resistentiae theoriam veram aequalis altitudini $C - v$. Sed quia in F pressio debet esse nulla, euidens est, fore $C = k = \frac{cbb}{(b-a)^2}$, vnde pressio in M erit $= \frac{cbb}{(b-a)^2}$

—

$-\frac{cbbdx^2}{(b-y)^2(dx^2+dy^2)}$, quae cum ſit normalis ad corporis ſuperficiem, inde naſcetur reſiſtentia ex curuae elemento $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ oriunda $= -\frac{cbbdy}{(b-a)^2} + \frac{cbbdx^2dy}{(b-y)^2(dx^2+dy^2)}$, cuius integrale dabit totam reſiſtentiam. Si amplitudo fluidi $b$ eſſet infinita, foret reſiſtentia $= -cy + c\int\frac{dx^2dy}{dx^2+dy^2}$. Si ergo AMF fuerit linea recta AF, ſitque CA $= b$, exiſtente CF $= a$; erit $a-y : x = a : b$, ſeu $a-y = \frac{ax}{b}$, et $dy = -\frac{adx}{b}$, hincque $dx^2 + dy^2 = \frac{dx^2(aa+bb)}{bb}$. Vnde hoc caſu reſiſtentia erit $= C + \frac{acbbx}{b(b-a)^2} + \frac{bbcbb}{(aa+bb)(b-y)}$ quae per totam rectam AF extenſa fiet:

$$\frac{acbb}{(b-a)^2} + \frac{bbcb}{aa+bb} - \frac{bbcbb}{(aa+bb)(b-a)} = \frac{acbb}{(b-a)^2} - \frac{abbcb}{(aa+bb)(b-a)}$$

quae expreſſio abit in hanc: $\frac{aacb(ab+bb)}{(aa+bb)(b-a)^2}$ At ſi fluidum eſſet infinitum, reſiſtentia foret $= \frac{a^2c}{aa+bb}$; quae ſi ponatur $= R$, illa reſiſtentia erit $= \frac{b(ab+bb)}{a(b-a)^2}R$, ideoque maior, quam R.

XXIX. Experientia quoque hoc ipſum egregie confirmat, qua conſtat corpus in canali anguſtiori promotum, maiorem pati reſiſtentiam, quam in canali ampliori, atque adeo ſi amplitudo corporis CF amplitudini canalis fuerit aequalis, ita vt corpus canalem perfecte expleat, tum reſiſtentiam fieri infinitam. Quia enim fluidum non niſi per ſpatium FH defluere poſſe aſſumitur, hoc ſpatio euaneſcente corpus moueri non poſſet, quin fluidum in minus volumen compingeretur; at fluidum nullius compreſſionis capax aſſumitur. Quod ſi planum ad directionem motus fuerit normale, vti ſi ipſa linea CF $= a$ celeritate $\sqrt{c}$ in directione CO promoueatur, reſiſtentia in fluido infinito foret $= ac = R$,

in

in canali autem amplitudinis $CH = b$, eadem linea resistentiam sustinebit $= \frac{bb}{(b-a)^2} R$, quae ergo erit ad illam vt $CH^2$ ad $FH^2$. Nisi ergo amplitudo $CH$ prae amplitudine corporis $CF$ fuerit praegrandis, augmentum resistentiae erit notabile. Sic si $CH = 2 CF$ erit resistentia $= 4R$, si $CH = 3 CF$, erit ea $= \frac{9}{4} R$; ac si fuerit $CH = 10 CF$, erit resistentia $= \frac{100}{81} R = 1 \frac{19}{81} R$.

XXX. Quanquam autem hinc riuulorum, per quos aqua circa quodque corpus defluit, designatio non adeo difficilis videtur, tamen eorum natura cum principio continuitatis vix conciliari potest. Cum enim riuulorum partem corporis anticam cingentium amplitudo sit cosinui anguli, quem tangens corporis cum directione motus constituit, reciproce vero saltem proxime proportionalis, iuxta partem posticam vero eorum amplitudo sit quasi constans, nulla huius anguli, quem $\Phi$ vocauimus, functio excogitari posse videtur, quae pro parte antica, vbi hic angulus est positiuus, eius cosinum proxime exhibeat, pro parte autem postica, vbi iste angulus fit negatiuus, quasi non amplius ab hoc angulo pendeat, sed constans euadat. Interim hoc certum est, amplitudinem riuuli exacte per $\frac{1}{\cos. \Phi}$ non exprimi, quia tum similis mutatio circa partem posticam locum habere deberet, quod veritati repugnat. Causam quidem ampliationis riuulorum in parte antica agnoscimus, simulque in parte postica absentiam huius causae concedere debemus, sed quomodo haec cum principio continuitatis, cui calculus est superstruendus, cohaereant, nullo modo patet, ex quo summa difficultas,

cultas, qua Theoria motus fluidorum etiam nunc premitur, multo magis perſpicitur, quo propius ad eam pertingere videmur.

XXXI. Quae hactenus tradita ſunt, tantum ad reſiſtentiam plani proprie ſunt referenda, nihilo vero minus reſiſtentia nauis aliusue corporis in aqua moti inde colligi poteſt, dum eius partem ſubmerſam per ſectiones inter ſe parallelas in ſtrata minutiſſima ſectam concipimus. Ita ſi AMENB fuerit ſectio nauis quaecunque horizontalis, eius reſiſtentiam inde quoque aeſtimare licet; ſiquidem aqua reſiſtens in hoc plano permaneat, neque ſurſum vel deorſum iuxta nauem defluat. Quod igitur ad figuram puppis ENB attinet, in genere intelligimus, aquam iuxta eam defluere non poſſe, niſi lineae ENB curuatura ſit vbique valde exigua. Cum enim in E$f$ nulla detur preſſio, nulla inde vis adeſt, quae motum aquae ab E ſecundum directionem axi AB parallelam progreſſurae inflectat, atque hanc inflexionem a ſola grauitate aquae produci debere, quod quidem in ſectionibus profundioribus citius euenit, quam magis eleuatis. Tum vero, quo velocius nauis promouetur, eo difficilius aquae decurſus incuruatur, et niſi inflexio ENB ſit ſatis parua, aqua nauem deferet, et ob deficientem ibi preſſionem aquae, reſiſtentia prorae etiam a pondere aquae proram vrgente augebitur, quod ingens vitium nauium reputatur. Tab. II. Fig. 2.

XXXII. Etiamſi autem aqua iuxta puppem ENB bene defluat, neque iſtud incommodum ſit pertimeſcendum, tamen hoc ad facilem gubernaculi actionem, ad quam non minus nauem inſtructam eſſe oportet, non

 ſuffifufficit. Cum enim aqua fere vsque ad B defluxerit, quia ab altera parte fimili modo fertur, perinde motum continuare debet, quafi fecundum rectam BV obex ipfi obiiceretur, et quia prope B curfum inflectere cogitur, perinde vti in A eft factum, eius motus eo magis retardabitur, quo maior fuerit angulus ABN, quod quidem in maioribus nauibus vfu venire poteft, etiam fi linea ENB fit arcus circuli admodum magni; in aqua autem circa B fere ftagnante gubernaculum vix vllam vim exerere valebit. Quocirca neceffe eft, vt figura ENB non folum lente incuruetur, fed etiam in B cum axe AB angulum fatis acutum conftituat. Interim tamen, ob iftam aquae retardationem circa B, nauis inde maiorem preffionem fuftinebit, qua refiftentia prorae imminuetur, vnde, nifi gubernaculi ratio haberi deberet, angulus fere rectus ad B curfum nauis potius acceleraret, quam retardaret.

XXXIII. Hae autem confiderationes ad commodiorem euolutionem formularum, quibus vniuerfa Theoria motus fluidorum continetur, viam aperire videntur. Cum enim iftae formulae in genere pro quocunque loco tam motum fluidi, quam preffionem, exhibeant, quae fumma generalitas in caufa erat, quod hae formulae minus tractabiles euaferint, ea, quae hactenus funt allata, non exiguam fpem facilioris calculi faciunt, fi non folum riuulos, per quos fingulae aquae particulae deferuntur, contemplemur, fed etiam harum curvarum traiectorias orthogonales in calculum introducamus: quoniam enim hae traiectoriae cuiusque riuuli in quoque loco amplitudinem commodiffime oftendunt,

inde

inde celeritas aquae, quae in quolibet riuulo amplitudini reciproce est proportionalis, aptissime definitur, vnde deinceps pressio per formulam concinniorem exprimi posse videtur. Assumo autem, tam omnem aquam, quam eius motum, in eodem plano esse constitutum, eumque iam ita ad statum permanentem esse perductum, vt riuulorum tractus sint constantes, neque vlli amplius mutationi obnoxiae.

XXXIV. Quo autem haec facilius ad Theoriam resistentiae accommodari queant, omnes determinationes ad figuram corporis AME aquae immissi referri conueniet. Hanc ergo figuram pro fixa habebo, quia in resistentiae inuestigatione perinde est, siue corpus contra aquam stagnantem, siue aqua contra corpus quiescens pari celeritate feratur. Iuxta corpus ergo aqua, quicunque motus ei tribuatur, secundum eius figuram AME praeterfluet, et in maioribus distantiis motus aquae fiet per certas lineas curuas RYS, $rys$, quibus riuuli constituuntur. Talium riuulorum series intra AME et RYS infinita multitudo concipi debet, quae omnes inter se tantum ratione parametri differant. Sit MY$y$ traiectoria orthogonalis quaecunque, quae ex M egressa omnes riuulos normaliter traiiciat, vti etiam in M ad ipsam curuam datam AME est normalis. Hocque modo puncta riuulorum Y et $y$ inprimis cum puncto M connectuntur, vt magis ad hoc punctum, quam ad aliud quoduis pertinere sint censenda. Tab. III. Fig. 1.

XXXV. Ponamus ergo pro isto puncto M abscissam AP $= s$, et applicata P M exprimetur per certam quandam functionem ipsius $s$: pro riuulo autem

RYS parameter fit $=b$, qui pro sequente $rys$ abeat in $b+db$, pro ipsa autem curua AME euanescat. Iam situs puncti Y pendebit partim a puncto M, partim a parametro, vnde eius coordinatae, quae sint $AX=x$, $XY=y$, erunt functiones istarum duarum quantitatum $s$ et $b$; ponamus ergo:

$$dx=Pds+Qdb \text{ et } dy=Rds+Sdb,$$

quae relatio inter $x$ et $y$ ita debet esse comparata, vt, posito $b=o$, ipsam curuam AME praebeat: at si ipsi $b$ certus quidem et constans valor tribuatur, aequatio sit proditura pro curua RYS; pro qua ergo erit $dx=Pds$ et $dy=Rds$. Sin autem punctum M fixum sumatur, variabilitas solius parametri $b$ dabit traiectoriam orthogonalem MY$y$, pro qua ergo ducta applicata proxima $xy$, et Y$z$, axi AX parallela, erit $Xx=Qdb$ et $yz=Sdb$; quia pro punctis in eadem traiectoria sitis quantitas $s$ non variatur.

XXXVI. Cum iam Y$y$ sit ad curuam RYS normalis, erit ex natura traiectoriarum orthogonalium $zy:Yz=dx:-dy=P:-R$ vnde fit $S:Q=P:-R$ ideoque $PQ+RS=o$. Vt huic conditioni satisfaciamus, ponamus statim:

$$Q=RT \text{ et } S=-PT \text{ vt fit}$$

$$dx=Pds+RTdb \text{ et } dy=Rds-PTdb.$$

Porro autem erit riuuli amplitudo $Yy=db\sqrt{(QQ+SS)}$ $=Tdb\sqrt{(PP+RR)}$, cui cum celeritas aquae in Y, quatenus aqua in eodem riuulo comparatur, sit reciproce proportionalis, posita celeritate in $Y=v$, statuamus $v=\frac{B}{T\sqrt{(PP+RR)}}$, vbi B denotat functionem ipsius para-

parametri $b$ tantum. Resoluatur haec celeritas secundum directiones coordinatarum $x$ et $y$, sintque celeritates deriuatae secundum $AX = u$ et secundum $XY = v$; ac reperitur:

$$u = \frac{BP}{T(PP+RR)} \text{ et } v = \frac{BR}{T(PP+RR)}.$$

vnde ob $uu + vv = \upsilon\upsilon$ erit $\upsilon\upsilon = \frac{BB}{TT(PP+RR)}$.

XXXVII. Quia igitur est $\frac{B}{T(PP+RR)} = \frac{T\upsilon\upsilon}{B}$, habebimus:

$$u = \frac{PT\upsilon\upsilon}{B} \text{ et } v = \frac{RT\upsilon\upsilon}{B}.$$

Conueniet autem potius ipsas has celeritates $u$ et $v$ in calculum introduci, quam quantitates P et R ibi relinqui, vnde colligetur:

$$P = \frac{Bu}{T\upsilon\upsilon};\quad R = \frac{Bv}{T\upsilon\upsilon};\quad Q = \frac{Bv}{\upsilon\upsilon};\quad S = \frac{-Bu}{\upsilon\upsilon}$$

et $dx = \frac{B}{T\upsilon\upsilon}(u\,ds + Tv\,db)$ et $dy = \frac{B}{T\upsilon\upsilon}(v\,ds - Tu\,db)$ quas ergo formulas integrabiles esse oportet. Quare quia $\upsilon\upsilon = uu + vv$ et B functio ipsius $b$ tantum, facile colligitur, cuiusmodi functiones esse debeant $u$, $v$ et T, vt his duobus requisitis satisfiat. Siquidem, quod regula vulgaris exigebat, celeritas in quouis riuulo proportionalis esset cosinui anguli, quem curua cum axe facit, seu $\upsilon = \frac{CP}{\sqrt{(PP+RR)}}$, haberemus $Cu = \upsilon\upsilon$, existente C functione ipsius $b$ tantum, ideoque $v = \sqrt{(Cu - uu)}$ seu $u = \frac{\upsilon\upsilon}{C}$ et $v = \frac{\upsilon}{C}\sqrt{(CC - \upsilon\upsilon)}$, ita vt integrabiles esse deberent hae formulae:

$$dx = \frac{B}{CT}ds + \frac{B\,db}{C\upsilon}\sqrt{(CC-\upsilon\upsilon)};\quad dy = \frac{B\,ds}{CT\upsilon}\sqrt{(CC-\upsilon\upsilon)} - \frac{B}{C}db.$$

 XXXVIII.

XXXVIII. Verum iam perpendamus, quid Theoria motus fluidorum requirat. Ostendi autem, si pressio aquae in Y exponatur per altitudinem $p$, et ex viribus acceleratricibus nascatur efficacia $= V$, tum sumtis $x$ et $y$ vtcunque variabilibus, hanc aequationem locum habere debere:

$$p = V - \int \left( u\,dx \left(\frac{du}{dx}\right) + v\,dx \left(\frac{du}{dy}\right) + u\,dy \left(\frac{dv}{dx}\right) + v\,dy \left(\frac{dv}{dy}\right) \right)$$

Totum ergo negotium huc redit, vt ista formula integrationem actu admittat; nisi enim hoc eueniat, talis motus, qualis per quantitates $u$ et $v$ fingitur, omnino subsistere nequit. Si quaestio de pressione restringatur ad vnicum riuulum, ostendi hoc integrale eo reduci, vt fiat $p = V - \frac{1}{2}uu$, vbi $\frac{1}{2}uu$ referat altitudinem celeritati aquae debitam, vti iam supra inueni. Verum pro tota motus extensione necesse est, vt illud differentiale, cuius integrale occurrit, sit completum, vti quidem loquendi mos est.

XXXIX. Quodsi formulas hactenus inuentas huc transferre velimus, habemus quidem valores pro $dx$ et $dy$; verum pro formulis $\left(\frac{du}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ notandum est in differentiatione ita solum $x$ poni variabile, vt $y$ maneat inuariatum; ergo ob $dy = o$ erit $Tudb = vds$ seu $db = \frac{vds}{Tu}$; vnde fit $dx = \frac{Bds}{Tu}$. Quare si ponamus

$$du = K\,ds + L\,db \quad \text{et} \quad dv = M\,ds + N\,db$$

erit in hac hypothesi

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(K\,ds + \frac{Lvds}{Tu}\right) : \frac{Bds}{Tu} = \frac{KTu + Lv}{B}$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \left(M\,ds + \frac{Nvds}{Tu}\right) : \frac{Bds}{Tu} = \frac{MTu + Nv}{B}$$

Simili-

Similiter pro formulis $\left(\frac{du}{dy}\right)$ et $\left(\frac{dv}{dy}\right)$ assumitur $x$ constans, vnde erit $db = \frac{-u\,ds}{Tv}$ et $dy = \frac{B\,ds}{Tv}$, sicque prodibit:

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(K\,ds - \frac{L\,u\,ds}{Tv}\right) : \frac{B\,ds}{Tv} = \frac{KTv - Lu}{B}$$

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \left(M\,ds - \frac{N\,u\,ds}{Tv}\right) : \frac{B\,ds}{Tv} = \frac{MTv - Nv}{B}.$$

XL. Ex his ergo differentiale superius, cuius integrale in formulam pro $p$ datam ingreditur, abibit in formam sequentem:

$$\begin{aligned}
&+ \tfrac{u}{T\mathfrak{v}\mathfrak{v}}(u\,ds + Tv\,db)(KTu + Lv)\\
&+ \tfrac{v}{T\mathfrak{v}\mathfrak{v}}(u\,ds + Tv\,db)(KTv - Lu)\\
&+ \tfrac{u}{T\mathfrak{v}\mathfrak{v}}(v\,ds - Tu\,db)(MTu + Nv)\\
&+ \tfrac{v}{T\mathfrak{v}\mathfrak{v}}(v\,ds - Tu\,db)(MTv - Nu)
\end{aligned}$$

quae quatuor formulae statim ad has duas rediguntur:

$$K(u\,ds + Tv\,db) + M(v\,ds - Tu\,db).$$

Cum iam sit $K = \left(\frac{du}{ds}\right)$ et $M = \left(\frac{dv}{ds}\right)$ pressio quaesita $p$ sequenti definietur aequatione:

$$p = V - \int\left((u\,ds + Tv\,db)\left(\frac{du}{ds}\right) + (v\,ds - Tu\,db)\left(\frac{dv}{ds}\right)\right),$$

seu ob $u\,du + v\,dv = \mathfrak{v}\,d\mathfrak{v}$ habebitur:

$$p = V - \int\left(ds\left(\frac{\mathfrak{v}\,d\mathfrak{v}}{ds}\right) + T\,db\left(\frac{v\,du - u\,dv}{ds}\right)\right).$$

XLI. Haec formula adhuc concinnior reddi potest, introducendo praeter ipsam celeritatem $\mathfrak{v}$, eius quoque directionem. Sit ergo $\Phi$ angulus quem directio motus in Y cum axe A$o$ facit, et quia fit $u = \mathfrak{v}\cos.\Phi$ et $v = \mathfrak{v}\sin.\Phi$, conficitur hinc $v\,du - u\,dv = -\mathfrak{v}\mathfrak{v}\,d\Phi$, sicque pressio $p$ definietur per hanc aequationem:

$$p = V - \int\left(ds\left(\frac{\mathfrak{v}\,d\mathfrak{v}}{ds}\right) - T\mathfrak{v}\mathfrak{v}\,db\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\right)$$

quae

quae non amplius pendet a positione coordinatarum; vtpote arbitraria; et hic quantitates, $uu$ et $\Phi$ considerandae sunt tanquam functiones ipsarum $s$ et $b$. Hic vero euidens est, si $b$ sumatur constans, integrationem nullam habere difficultatem, cum prodeat

$$p = V - \tfrac{1}{2}uu + D$$

denotante D functionem parametri D; quare si et eius variabilitatis ratio habeatur, esse oportet

$$db\left(\frac{udu}{db}\right) + dD = -Tuu\,db\left(\frac{d\Phi}{ds}\right).$$

vnde hoc obtinemus requisitum, vt esse debeat

$\frac{dD}{db} = \left(\frac{udu}{db}\right) + Tuu\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) =$ functioni ipsius $b$ tantum.

XLII. Verum insuper necesse est, vt formulae differentiales pro $dx$ et $dy$ inuentae fiant completae seu integrabiles; valoribus autem pro $u$ et $v$ substitutis habemus:

$$dx = \frac{B}{Tu}(ds \operatorname{cos}.\Phi + T\,db \operatorname{sin}.\Phi)$$

$$dy = \frac{B}{Tu}(ds \operatorname{sin}.\Phi - T\,db \operatorname{cos}.\Phi).$$

Quae formulae vt fiant integrabiles necesse est sit: si breuiatis gratia ponamus $\frac{1}{Tu} = \Theta$;

$$\Theta \operatorname{cos}.\Phi.\frac{dB}{db} - B\Theta \operatorname{sin}.\Phi\left(\frac{d\Phi}{db}\right) + B\operatorname{cos}.\Phi\left(\frac{d\Theta}{db}\right) = \frac{B\operatorname{cos}.\Phi}{u}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) - \frac{B\operatorname{sin}.\Phi}{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)$$

$$\Theta \operatorname{sin}.\Phi.\frac{dB}{db} + B\Theta \operatorname{cos}.\Phi\left(\frac{d\Phi}{db}\right) + B\operatorname{sin}.\Phi\left(\frac{d\Theta}{db}\right) = \frac{B\operatorname{sin}.\Phi}{u}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) + \frac{B\operatorname{cos}.\Phi}{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)$$

quae

quae formulae reducuntur ad has duas:

$$\Theta v v\left(\frac{d\Phi}{db}\right)=\left(\frac{dv}{ds}\right) \text{ et } \frac{dB}{B\,db}=\frac{1}{\Theta v}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)-\frac{1}{\Theta}\left(\frac{d\Theta}{db}\right).$$

Ergo praeterquam quod sit $\left(\frac{dv}{ds}\right)=\Theta v v\left(\frac{d\Phi}{db}\right)$ necesse est, vt binae sequentes quantitates

$$\frac{1}{\Theta v}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)-\frac{1}{\Theta}\left(\frac{d\Theta}{db}\right) \text{ et } v\left(\frac{dv}{db}\right)+\frac{v}{\Theta}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$$

sint functiones solius parametri $b$.

XLIII. Ex his iam poterimus diiudicare, num eiusmodi fluidi status, cuius resistentia perfecte sequatur regulam vulgarem, sit possibilis, et sub quibus conditionibus? id quod inuestigauisse operae erit pretium. Regula autem vulgaris postulat, vt sit $u=\frac{vv}{C}$; cum igitur hic posuerimus $u=v\,\mathrm{cos}.\Phi$, fiet $v=C\,\mathrm{cos}.\Phi$, existente $C$ functione ipsius $b$ tantum: hinc erit

$$\left(\frac{dv}{ds}\right)=-C\,\mathrm{sin}.\Phi\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) \text{ et } \left(\frac{dv}{db}\right)=\frac{dC}{db}\mathrm{cos}.\Phi-C\,\mathrm{sin}.\Phi\left(\frac{d\Phi}{db}\right).$$

Verum esse oportet $\Theta v v\left(\frac{d\Phi}{db}\right)=\left(\frac{dv}{ds}\right)$, vnde fit

$$CC\Theta\,\mathrm{cos}.\Phi^2\left(\frac{d\Phi}{db}\right)=-C\,\mathrm{sin}.\Phi\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$$

ideoque $\Theta=\frac{-\mathrm{sin}.\Phi}{C\,\mathrm{cos}.\Phi^2}\cdot\frac{\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)}{\left(\frac{d\Phi}{db}\right)}$, et $T=\frac{-\mathrm{cos}.\Phi}{\mathrm{sin}.\Phi}\cdot\frac{\left(\frac{d\Phi}{db}\right)}{\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)}$

Cum autem porro esse debeat $\frac{dD}{db}=v\left(\frac{dv}{db}\right)+\frac{v}{\Theta}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$, erit

$$\frac{dD}{db}=\frac{C\,dC}{db}\mathrm{cos}.\Phi^2-CC\,\mathrm{sin}.\Phi\,\mathrm{cos}.\Phi\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)-\frac{CC\,\mathrm{cos}.\Phi^2}{\mathrm{sin}.\Phi}\left(\frac{d\Phi}{db}\right)$$

 siue

siue

$$\frac{dD}{db} = \frac{CdC}{db}\operatorname{cos}.\Phi^2 - \frac{CC\operatorname{cos}.\Phi}{\operatorname{sin}.\Phi}\left(\frac{d\Phi}{db}\right)$$

XLIV. Hinc si tantum $b$ pro variabili habeamus, $s$ vero vt constantem spectemus, habebimus hanc aequationem differentialem:

$$dD = CdC\operatorname{cos}.\Phi^2 - \frac{CCd\Phi\operatorname{cos}.\Phi}{\operatorname{sin}.\Phi},$$

quam si more consueto integremus, et loco constantis functionem ipsius $s$, quae sit $\Sigma$, introducamus, dum E et F pro functionibus ipsius $b$ tantum assumimus, obtinebimus:

$$\operatorname{sin}.\Phi = \sqrt{\frac{E}{F+\Sigma}} \text{ et } \operatorname{cos}.\Phi = \sqrt{\frac{F-E+\Sigma}{F+\Sigma}}$$

existente $lC = \tfrac{1}{2}\int\frac{dF}{E}$ et $D = \tfrac{1}{2}CC - \tfrac{1}{2}\int\frac{CCdE}{E}$.

Hinc ergo eruitur:

$$d\Phi\operatorname{cos}.\Phi = \frac{FdF - EdF + \Sigma dE - Ed\Sigma}{2(F+\Sigma)\sqrt{E(F+\Sigma)}}$$

$$\text{et } d\Phi = \frac{FdE - EdF + \Sigma dE - Ed\Sigma}{2(F+\Sigma)\sqrt{E(F-E+\Sigma)}},$$

ita vt sit:

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{-d\Sigma\sqrt{E}}{2(F+\Sigma)ds\sqrt{(F-E+\Sigma)}} \text{ et}$$

$$\left(\frac{d\Phi}{db}\right) = \frac{FdE - EdF + \Sigma dE}{2(F+\Sigma)db\sqrt{E(F-E+\Sigma)}}.$$

XLV.

XLV. His valoribus substitutis obtinebimus:

$$\varkappa = C\sqrt{\frac{F-E+\Sigma}{F+\Sigma}} \quad \text{et}$$

$$\Theta = \frac{E\sqrt{E(F+\Sigma)}}{C(F-E+\Sigma)} \cdot \frac{db\,d\Sigma}{(F+\Sigma)dE\,ds - E\,dF\,ds}$$

Ponamus breuitatis gratia $\frac{dE}{db} = e$; $\frac{dF}{db} = f$; $\frac{d\Sigma}{ds} = \sigma$

eritque $dC = \frac{C\,dF}{2E} = \frac{Cf\,db}{2E}$; et

$$l\Theta = \tfrac{3}{2}lE + \tfrac{1}{2}l(F+\Sigma) - lC - l(F-E+\Sigma) + l\sigma$$
$$- l(e(F+\Sigma) - fE).$$

Sit porro $de = \varepsilon db$ et $df = \zeta db$, eritque sumto solo $b$ variabili

$$\frac{d\Theta}{\Theta\,db} = \frac{3e}{2E} + \frac{f}{2(F+\Sigma)} - \frac{f}{2E} + \frac{e-f}{F-E+\Sigma} - \frac{\varepsilon(F+\Sigma)+E\zeta}{e(F+\Sigma)-fE}$$

At vero esse debet $\frac{dB}{B\,db} = \frac{1}{\Theta\varkappa}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) - \left(\frac{d\Theta}{\Theta\,db}\right)$;

vnde ob

$$\frac{1}{\Theta\varkappa} = \frac{\sqrt{(F-E+\Sigma)}}{E\sqrt{E}} \cdot \frac{e(F+\Sigma)-fE}{\sigma} \quad \text{fiet}$$

$$\frac{dB}{B\,db} = \frac{-2e}{E} + \frac{f}{2E} + \frac{f-e}{F-E+\Sigma} + \frac{\varepsilon(F+\Sigma)-\zeta E}{e(F+\Sigma)-fE}$$

XLVI. Quia haec formula ab altera variabili $s$ omnino immunis esse debet, transformetur in hanc speciem:

$$\frac{dB}{B\,db} = \frac{-2e}{E} + \frac{f}{2E} + \frac{f-e}{F-E+\Sigma} + \frac{\varepsilon}{e} + \frac{\varepsilon fE - \zeta eE}{ee(F+\Sigma) - efE}$$

 vnde

vnde manifestum est, esse oportere:

$$ee(f-e)(F+\Sigma)-efE(f-e)+(\varepsilon fE-\zeta eE)(F+\Sigma)-EE(\varepsilon f-\zeta e)=0$$

ideoque $ee(f-e)=E(\zeta e-\varepsilon f)$

et $ef(f-e)=E(\zeta e-\varepsilon f)$

sicque necesse est, vt sit $f=e$, vnde sit $\zeta=\varepsilon$; et $F=E$; atque hinc prodit $\frac{dB}{B\,db}=\frac{-3e}{2E}+\frac{\varepsilon}{e}$; ideoque integrando

$lB=le-\frac{3}{2}lE$, seu $B=\frac{e}{E\sqrt{E}}$. Porro vero erit

$$\upsilon=C\sqrt{\frac{\Sigma}{E+\Sigma}} \quad \text{et} \quad \Theta=\frac{E\sigma\sqrt{E(E+\Sigma)}}{Ce\Sigma\Sigma}$$

ac denique $\sin.\Phi=\sqrt{\frac{E}{E+\Sigma}}$ et $\cos.\Phi=\sqrt{\frac{\Sigma}{E+\Sigma}}$.

XLVII. Verum ob $F=E$, sit $lC=\frac{1}{2}lE$ et $C=\sqrt{E}$, vnde sumta pro $E$ functione quacunque ipsius $b$, et pro $\Sigma$ functione quacunque ipsius $s$, statuaturque $dE=edb$ et $d\Sigma=\sigma ds$

erit $\upsilon=c\sqrt{\frac{E\Sigma}{E+\Sigma}}$; et $\Theta=\frac{E\sigma\sqrt{(E+\Sigma)}}{ce\Sigma\Sigma}$

item $D=\frac{1}{2}CC-\frac{1}{2}\int\frac{CC\,dE}{E}=\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}E=0$ vel constans.

Tum vero erit $T=\frac{1}{\Theta\,\upsilon}=\frac{e\Sigma\sqrt{\Sigma}}{E\sigma\sqrt{E}}$, ac denique

ob $\frac{B}{T\upsilon}=B\Theta=\frac{\sigma\sqrt{(E+\Sigma)}}{e\Sigma\Sigma\sqrt{E}}$, obtinebimus

$$dx=\frac{\sigma ds}{\Sigma\sqrt{E\Sigma}}+\frac{edb}{E\sqrt{E\Sigma}} \text{ hincque } x=\frac{-2}{\sqrt{E\Sigma}}$$

$$dy=\frac{\sigma ds}{\Sigma\Sigma}-\frac{edb}{EE} \text{ hincque } y=\frac{1}{E}-\frac{1}{\Sigma}$$

Quare

Quare cum sit $\frac{1}{\Sigma} = \frac{1}{E} - y$, erit $x = -2\sqrt{\left(\frac{1}{EE} - \frac{y}{E}\right)}$ Sit $\frac{1}{E} = a$, et fiet $xx = 4aa - 4ay$. Pressio autem in quouis loco Y erit $p = V - \frac{E\,\Sigma}{2(E+\Sigma)} = V - \frac{2acc}{xx+4aa}$.

XLVIII. Iam ergo audacter pronunciare possumus, regulam resistentiae vulgarem exacte locum habere non posse, nisi quando figura corporis AEB fuerit parabolica, et singuli riuuli *aeb*, *a'e'b'* quoque sint inflexi secundum parabolas, quae cum illa parabola AEB, tam axem EF, quam focum F, habeant communem, vnde et vasis extremam oram $\alpha\varepsilon\beta$ secundum similem parabolam formatam esse oportet. Cum igitur in reliquis casibus omnibus regula vulgaris a veritate aberret, resistentia quoque aliam sequetur legem, neque isti regulae erit consentanea. Quando ergo specie huius regulae nonnulli seducti putauerunt, fieri posse, vt corpus in fluido nullam resistentiam passurum moueatur, propterea quod actio fluidi in partem posticam destruat vim in partem anticam exertam, et in fluidis terrestribus haec destructio a tenacitate prohiberi censeatur; iam manifestum est, hanc conclusionem nullo modo admitti posse. Quia enim corpus parabolicum AEB non vtrinque terminatur, hic casus neutiquam ad resistentiae doctrinam traduci potest.

Tab. III. Fig. 2.

# PRINCIPIA THEORIAE MACHINARVM.

Auctore

*L. EVLERO.*

1.

*Primum omnes machinas in duas classes distribui convenit: quarum prima eas complectitur, quae dum in actione versantur, ita vniformiter mouentur, vt omnes eius partes perpetuo motu vniformi ferantur. Ad alteram vero classem eae pertinent machinae, quarum singulae partes in motu suo modo accelerantur, modo retardantur, etiamsi forte tota machina motum vniformem mentiatur.*

Prioris classis sunt machinae oneribus eleuandis destinatae, item molae frumentariae, quippe quae dum in actione debita versantur, omnes earum partes iugiter motu vniformi agitantur, ita vt nusquam neque acceleratio, neque retardatio motus, adsit. Pistrina vero, aliaeque machinae, quae tundendo opus conficiunt, quoniam pistilla alternatim attolluntur, ac remittuntur, ad classem posteriorem sunt referendae: quorsum etiam pertinent omnis generis horologia, in quibus cum nullum proprie adsit onus superandum, tota actio in alterna partium acceleratione ac retardatione consumitur. Machinae quoque aquis attollendis destinatae huic classi sunt annumerandae, quoniam cum embola non motu vniformi

formi agitantur, tum etiam ipsi aquae, quae primum fuerat in quiete, motus imprimi debet, ad quod necessario acceleratio requiritur. Posterior ergo classis latissime patet, atque adeo saepe machinas, quae ad priorem pertinere debebant, recipit; id quod earum vitio euenit, quando dentes, quibus rotae se mutuo vrgent, non ita fuerint elaborati, vt dum vna motu vniformi gyratur, reliquae pari motu cieantur, sed quasi per succussiones impellantur. Alio autem loco ostendi, cuiusmodi figuram dentibus binarum rotarum se inuicem tradentium tribui oporteat, vt dum altera motu vniformi circumagitur, alterius quoque motus futurus sit vniformis. Quam necessaria autem haec sit machinarum distinctio, ad earum actionem recte perspiciendam, mox clarius exponetur.

2. *In Machinis primae classis, quae in omnibus partibus motu vniformi feruntur, vis ad earum motum conseruandum requisita praecise aequalis est ei, qua opus est ad aequilibrium, seu quae resistentiae tantum non superandae par est.*

Quae igitur vis aequilibrio producendo sufficit, eadem motum quantumuis celerem in machina, dummodo fuerit vniformis, conseruare valet. Hinc si machina ponderi 100 librarum eleuando destinata ita sit instructa, vt pro aequilibrio opus sit vi 10 librarum, eadem vis 10 librarum sufficiet ad idem pondus 100 ℔ celeritate quantumuis magna vniformiter eleuandum. Statim enim ac motus machinae ad vniformitatem est perductus, quia singulae partes ob inertiam ad hunc motum conſeruandum ſunt diſpoſitae, continuatio motus plus non requirit, quam vt reſiſtentia motui aduerſans ſuperetur, quae cum eadem ſit atque in ſtatu quietis, eadem vis, quae machinam in ſtatu quietis conſeruare, eiue motum vel minimum valet, ad motum vniformem conſeruandum ſufficit. Mirum quidem videbitur et experientiae contrarium, quod celerrimus motus maiori vi non indigeat, quam tardiſſimus; cum tamen in machinis, vel aqua, vel animalibus actis, nullum ſit dubium, quin ad motum velociorem producendum maior aquae copia, maiorue animalium numerus requiratur. Verum his caſibus perpendendum eſt, augendo vel aquae copiam, vel animalium numerum, vim inde ortam non augeri, propterea quod, quo velocius machina mouetur, ſiue aquae, ſiue animalium vis in machinam agens minuatur: vnde fit, vt etiamſi pro motu celeriori maior vis non requiratur, tamen maiori ſiue aquae copia, ſiue animalium numero ſit opus: quod idem de reliquis virium generibus, quae ad machinas momouendas adhiberi ſolent, eſt tenendum. Minime igitur noſtra propoſitio, qua motum etiam velociſſimum, dummodo fuerit vniformis, maiorem vim non exigere ſtatuimus, quam tardiſſimum affirmamus, veritati aduerſari eſt cenſenda, quia potius, vti firmiſſimis Theoriae principiis innititur, ita quoque experientiae apprime conformis deprehenditur, dummodo quantitatem virium rite aeſtimare diſcamus.

3. *Hinc euidens eſt, ſi vis machinam ſollicitans vel maior fuerit, vel minor ea, quae ad aequilibrium conſeruandum requiritur, ſeu quae ipſi vel minimum motum* im-

*imprimere valet, tum motum machinae priori casu accel**eratum posteriori vero retardatum iri.*

Vicissim ergo intelligitur, si motus machinae debeat accelerari, maiorem vim requiri, quam quae aequilibrio conseruando sufficiat: hoc enim casu non solum resistentiam, seu vim motui machinae proprie aduersantem, vinci oportet, sed etiam ipsi accelerationi inertia tam oneris, quam singularum ipsius machinae partium, reluctatur. Quamobrem si ex vi data, quae superet eam, qua ad aequilibrium sustinendum opus est, motus machinae acceleratus definiri debeat, praeter vim resistentem simul inertiae ratio est habenda, quae investigatio idcirco proprie ex principiis motus est expedienda, dum consideratio motus vniformis per sola principia statica, seu aequilibrii, perfici potest. Vnde fit, vt si accelerationem cuiuspiam machinae definire velimus, in calculos plerumque admodum molestos prolabamur dum motus vniformis facillime ad calculum reuocatur. Similis est ratio retardationis motus, quae oritur, si vis sollicitans minor fuerit ea, quam aequilibrii conseruatio exigit: tum enim vis resistentiae, motui machinae reluctans, quatenus vim sollicitantem superat, in retardationem motus impenditur; cuius accurata explicatio pariter ex motus principiis est petenda. Quando ergo machina alternatim motu accelerato et retardato agitatur, tuto concludere possumus, vim sollicitantem alternatim maiorem minoremque esse ea, quae ad motum vniformem esset necessaria: difficillimum autem plerumque erit ipsam accelerationem et retardationem assignare. Interim tamen sine dubio pronunciare licet, si omnes

 illae

illae vires modo maiores, modo minores, ad mediam quandam vim reuocentur, hanc minorem non esse futuram ea vi, quae ad motum vniformem requireretur; si modo acceleratio et retardatio vtrinque aeque a motu vniformi discedant.

4. *In machinis prioris classis, quae motu vniformi agitantur, productum ex vi sollicitante in celeritatem, qua incedit, aequale est producto ex vi resistente in celeritatem, qua promouetur.*

Haec propositio sequitur ex principio vniuersali aequilibrii, quo constat tum binas vires contrarias machinae cuicunque applicatas esse in aequilibrio, cum impresso machinae vel minimo motu vires fuerint reciproce vt spatia percursa, seu vti celeritates; hinc enim producta vtriusque vis in suam celeritatem fient inter se aequalia. Ostendimus autem, in motu machinarum vniformi ad resistentiam vincendam maiorem vim non requiri, quam in statu aequilibrii: vnde, cum motus machinae tam vi sollicitanti, quam resistenti, certum celeritatis gradum tribuat, si vtraque vis per suam celeritatem multiplicetur, ambo producta necesse est, vt inter se sint aequalia. Verum celeritas, qua vis quaecunque mouetur, secundum directionem eius propriam aestimari debet, in directione scilicet vis mente concipiatur fixum quodpiam punctum, cum quo conferatur punctum, vbi vis machinae applicatur; et ex mutatione momentanea distantiae horum punctorum celeritatem definiri oportet. Quomodo autem quouis casu haec bina producta, quorum aequalitate actio machinae continetur, recte exprimi conueniat, mox accuratius exponetur.

tur. Quod autem ad machinas motu non vniformi operantes attinet, hinc satis est perspicuum, si productum ex vi sollicitante in suam celeritatem maius fuerit, quam productum ex vi resistente in suam celeritatem, quoniam tum vis sollicitans maior est quam motus vniformitas requirit, motum machinae inde accelerari; contra vero, si illud productum hoc fuerit minus, retardari. Ex quo intelligitur, istorum productorum accuratam cognitionem ad actionem omnis generis machinarum definiendam maxime esse necessariam. Quomodocunque ergo machina fuerit composita, hic non tam ipsa compositionis ratio in computum ingreditur, quam ratio celeritatum, quibus cum potentia tum onus, dum machinae motus imprimi concipitur, promouentur: quandoquidem ex hac ratione statim ratio inter potentiam et onus, quam tam motus vniformis, quam acceleratus et retardatus requirit, innotescit.

5. *Momentum effectus inuenitur, si vis motui machinae reluctans, seu cui mouendae machina destinatur, per viam ab ea dato tempore descriptam multiplicetur. Pro hoc autem tempore hic perpetuo minutum secundum assumemus.*

In hoc momento effectus vera continetur notio effectus a machina quacunque editi. Quo celerius enim onus, seu vis resistens, mouetur, seu, quo maius fuerit spatium, per quod dato tempore promouetur, eo maior aestimatur machinae effectus, et, manente celeritate eadem, quo maior fuerit ipsa resistentia, eo maior quoque effectus censetur. Ad hoc ergo momentum definiendum primo ipsa vis resistens, quatenus motui machinae reluctatur, explorari, eiusque quantitas per pondus aequiualens exprimi debet, tum vero dispiciendum est, per quantum spatium ea dato quodam tempore promoueatur. Hinc momentum effectus ad definitum quodpiam tempus adstringitur, pro quo hic commoditatis gratia minutum secundum assumamus; ita vt hac expressione effectus vno minuto secundo editus indicetur, vnde autem facile ad quoduis aliud tempus, siquidem motus fuerit vniformis, transferri poterit. Ita si onus, cuius pondus $=Q$, sit verticaliter attollendum, idque singulis minutis secundis per altitudinem $a$ eleuetur, erit momentum effectus $=Qa$. Sin autem onus horizontaliter promoueri debeat, eius tantum frictio superanda est, quae si aequiualeat ponderi $Q$; onusque pariter per spatium $a$ singulis minutis secundis protrahatur, momentum effectus pariter erit $=Qa$. At si onus super plano inclinato sursum trahi debeat, vis resistens $Q$ partim pondere oneris, partim frictione exprimenda erit. Quod si in molis momentum effectus sit aestimandum, indagari debet vis ad molam circum agendam requisita, cuius quidem punctum applicationis imprimis est spectandum; quod enim quo magis ab axe motus fuerit remotum, eo minor vis resistentiae superandae par erit Quoniam vero haec vis per spatium vno minuto secundo per cursum multiplicari debet, quod in ratione distantiae ab axe crescit, productum eandem quantitatem retinebit, siue distantia illa maior minorue assumatur, vnde momentum effectus fixum obtinebit valorem. Si machina ad aquam eleuandam fuerit accommodata, ex Theoria fluidorum ostendi potest, momentum effectus inueniri, si copia aquae, eius

eius ſcilicet pondus, quae ſingulis minutis ſecundis eleuatur, per totam altitudinem eleuationis multiplicetur, ſimilique modo pro omnibus omnino caſibus momentum effectus aſſignari poterit.

6. *Momentum impulſus ſimili modo reperitur, ſi vis machinam actu impellens multiplicetur per ſpatium, quod ab ea dato tempore conficitur: vbi iterum pro hoc dato tempore minutum ſecundum aſſumetur.*

Duae ergo res requiruntur ad momentum impulſus conſtituendum; primo ſcilicet ipſa vis impellens, cuius quantitatem pondere metiri licet, deinde ſpatium, quod ea agendo ſingulis minutis ſecundis abſoluit: harumque duarum quantitatum multiplicatione momentum impulſus oritur, quod ergo homogeneum erit cum momento effectus. Circa aeſtimationem ipſius vis impellentis plerumque ad celeritatem, qua in machinam agit, eſt reſpiciendum; niſi enim haec vis a grauitate ponderis deſcendentis petatur, quod, dummodo aequabiliter deſcendat, perpetuo aequali vi vrget, aucta celeritate, qua in machinam agit, ſimul eius quantitas diminui ſolet, idque diuerſimode pro varia virium ſollicitantium natura. Ita ſi machina operis hominum animaliumue impellatur, eorum vis actu exerta maxime ab actionis celeritate pendet: cum enim animal vi indigeat ad ſe ipſum mouendum, atque omni, quo pollet, niſu adhibito ſe vltra certum celeritatis gradum mouere nequeat, quo propius eius actio ad hunc gradum acceſſerit, eo minorem vim exerere valebit, quippe quae cum illum gradum attigerit, penitus euaneſcet. Quare ſi vim impellentem aeſtimare velimus, minime magnitudinem conatus, quo machinam quiescentem sollicitat, tanquam eius mensuram accipere debemus, sed ad hoc iam ipsam celeritatem, qua machina mouetur, spectari oportet, vnde pro natura vis agentis eius vera quantitas definiri queat: atque hanc demum vim per viam minuto secundo percursam multiplicando obtinebimus verum momentum impulsus. Istud vis agentis decrementum a motu iam acquisito ortum clarissime perspicitur in machinis a vi illabentis aquae impulsis: quo celerius enim rota aquaria gyratur, eo minorem vim ab aqua sustinet; dum contra vis aquae in rotam quietam est maxima. Probe igitur cuiusque generis virium, quae ad machinas mouendas adhibentur, natura est exploranda, vt pro quolibet celeritatis gradu vera vis agentis quantitas assignari possit.

7. *Si machina frictione careat, eiusque motus fuerit vniformis, momentum effectus praecise aequale erit momento impulsus; ideoque ex cognito momento impulsus verus effectus eiusue momentum poterit determinari.*

Assumo hic primum, machinam frictione carere, tum vero eius motum esse vniformem, vt conseruatio motus machinae nullam vim requirat, totaque vis impellentis actio in onus promouendum impendatur. Ita enim fiet, vt superatio vis reluctantis maiorem vim non exigat, quam quae aequilibrio continendo sufficeret, propterea quod solum onus motui machinae resistentiam opponit. Cum igitur productum ex vi resistente in suam celeritatem aequale sit vi impellenti per

per ſuam celeritatem multiplicatae, haeque celeritates ſint vt ſpatia eodem tempore confecta, ſi earum loco ſpatia vno minuto ſecundo abſoluta ſubſtituamus, illa producta abeunt in momenta impulſus et effectus, prouti ea modo definiuimus, quae igitur inter ſe aequalia eſſe oportet. Hinc ſi cognita fuerit quantitas vis impellentis vna cum celeritate, qua agit, inde ſimul momentum effectus innoteſcit; ita ſi vis impellens ſit $=P$, ſpatiumque, quod ab ea ſingulis minutis ſecundis conficitur, $=p$, exprimet $Pp$ momentum impulſus, cui cum aequale ſit momentum effectus, ſi $Q$ deſignet reſiſtentiam oneris, et $q$ ſpatium, per quod vno minuto ſecundo promoueatur, erit $Qq=Pp$, hincque $q=\frac{Pp}{Q}$. In hac formula nota illa aequalitas inter cauſam et effectum continetur, quatenus ea quidem rite ad actionem machinarum accommodatur; eique actioni machinarum certus terminus praefigitur, quem nunquam transgredi valeant. Pendet igitur quantitas effectus non ſolum a quantitate vis impellentis, ſed etiam a celeritate, qua agere poteſt, et quoniam vidimus, pleraſque vires, quae ad machinas agitandas adhiberi ſolent, ita eſſe comparatas, vt aucta celeritate ipſae minuantur, de quantitate effectus nihil certi definire licet, niſi exploratum ſit, qua lege quantitas vis impellentis pro ſingulis celeritatis augmentis diminuatur. Atque hinc euenire poteſt, vt manente eadem vi ſollicitante, effectus machinae plurimum variari poſſit, prout ſcilicet ea vis alia atque alia celeritate fuerit praedita, quod tamen neutiquam aequalitatem inter cauſam et effectum euertit, propterea quod in iuſta cauſae aeſtimatione ſimul celeritatis ratio haberi debet.

8.

8. *Frictio vero, quam partes machinae, dum inter se commouentur exerunt, non admodum iudicium machinarum turbat; quoniam enim motui machinae reluctatur, resistentiam oneris tantum augere est censenda, ex quo momentum effectus data quadam quantitate augeri debet, antequam momento impulsus aequale statuatur.*

Hic ex experientia assumitur frictionis quantitatem eandem manere, quantacunque celeritate machina moueatur: vnde machinae cuiusuis propositae frictio explorari potest, si remota oneris resistentia inuestigetur, quanta vi opus sit, ad machinam, dum est in quiete, vel tantillum commouendam; tanta enim vis deinceps quoque in motu, vtcunque fuerit rapidus, perpetuo ad frictionem superandam requiretur. Perinde igitur erit, ac si resistentia oneris certa quadam quantitate sit aucta, sicque commode frictio cum ipso onere coniungetur, ita vt ob frictionem resistentia oneris maior sit aestimanda, quam re vera est. Quoniam enim resistentia oneris perpetuo eadem manet, quacunque celeritate moueatur, frictio congrue ad oneris resistentiam adiicitur. Dum minus congrue propter eam vis impellens quapiam quantitate imminui conciperetur, quia haec cum celeritate motus variatur, etiamsi ratione recte instituta res eodem redeat. Atque hinc frictionis nulla ratione seorsim habita resistentia oneris ob eam aucta statim per experientiam cognosci poterit: quaecunque enim machina cum adiuncta oneris resistentia fuerit proposita, quaeratur vis, quae illi vel tantillum commouendae par sit, atque ex regulis staticis statim colligetur, quanta sit tota vis resistentiae; quae tam ex onere

onere ipſo, quam ex frictione reſultat. Quae ſi fuerit cognita, ac ponatur $=Q$, ea in momentum effectus introduci debet, cui deinceps momentum impulſus erit coaequandum, dummodo motus fuerit vniformis, prorſus vt ante eſt praeceptum. Totum ergo negotium huc redit, vt in computo ob frictionem reſiſtentia oneris data quapiam quantitate augeatur, ac momentum effectus ex hac reſiſtentia aucta determinetur, cui aeque ac ante momentum impulſus aequale ſtatui debebit.

9. *Propoſita machina cum reſiſtentia ſuperanda ante omnia indagari debet quantitas vis impellentis, quae ad eam in motu vniformi conſeruandam requiritur. Haecque inueſtigatio commodiſſime per experimenta inſtituitur, vt ſimul frictio in effectu comprehendatur.*

In hunc finem bina machinae loca praecipue ſunt notanda, vbi tam vis impellens, quam reſiſtentia oneris, applicatur, atque ex ſtructura machinae patebit, quaenam ratio, dum mouetur, inter celeritatem vis impellentis et celeritatem oneris intercedat. Quare ſi quantitas oneris, ſeu vis motui machinae reluctantis, fuerit $=Q$, et ratio celeritatis vis impellentis ad celeritatem vis reluctantis ſit vt $m$ ad $n$, quantitas vis impellentis foret $=\frac{Qn}{m}$, ſi motus machinae ob frictionem non impediretur. Quando ergo frictio adeſt, quae inſuper vinci debet, maior vis impellens requiritur, ad quam inueniendam, cum frictio difficulter a priori definiri queat, commodiſſime ad experimenta confugietur. Machina ſcilicet in quiete conſtituta ei in loco, vbi vis impellens est applicanda, vis adhibeatur, quae primo aequilibrio conseruando par sit, deinde ea sensim augeatur, quoad machinae vel minimum motum imprimere valeat; hocque modo habebitur ea ipsa vis, quae motui machinae quantumuis celeri, dummodo fuerit vniformis, conseruando sufficiet. Ob frictionem autem haec vis maior prodibit, quam $\frac{Q\pi}{m}$, eoque magis hanc quantitatem excedet, quo maior fuerit frictio; seu posita hac vi per experimentum inuenta $= P$, erit $P > \frac{Q\pi}{m}$, ideoque $P = \frac{Q\pi}{m} + F$, existente F eius augmento ad frictionem superandam requisito. Vel si ponatur $F = \frac{G\pi}{m}$, ob $P = \frac{\pi}{m}(Q + G)$, frictio eundem praestabit effectum, ac si loco resistentiae Q maior resistentia $Q + G$ superari deberet. Neque vero opus est, vt in hoc experimento vis explorans P in eo ipso loco, vbi deinceps vis impellens applicari debet, applicetur; si enim in alio loco applicetur, cuius celeritas ad celeritatem in loco vis impellentis sit vt $\mu$ ad $\nu$, eaque vis reperiatur $= \Pi$, hinc facile concludetur vera vis impellentis P quantitas, quippe quae erit $P = \Pi \frac{\mu}{\nu}$: quemadmodum ex principiis staticis est manifestum. Hoc ergo modo plura experimenta institui poterunt, quo certiores de vera quantitate vis P reddamur.

10. *Quantacunque fuerit resistentia superanda, machina semper ita instrui potest, vt data vis impellens, quae simul data celeritate agat, ei vniformiter mouendae sufficiat; vnde itaque momentum effectus sponte innotescet.*

Ex-

Exprimat Q resistentiam superandam, quae simul frictionem rite aestimatam et ad locum resistentiae reductam complectatur: deinde sit P vis impellens, quae singulis minutis secundis spatium $p$ absoluat; quoniam enim vires, quibus machinae agitari solent, ita sunt comparatae, vt aucta actionis celeritate minuantur, de earum quantitate absolute nihil certi pronunciare licet, nisi celeritas, qua agant, simul definiatur. His positis, ex vulgaribus Mechanicae elementis constat, quemadmodum partes machinae instrui ac disponi debeant, vt vis P resistentiam Q in aequilibrio continere valeat. Efficiendum scilicet est, vt dum machina tantillum mouetur, spatia tam a vi impellente P, quam a resistentia Q percursa ipsis viribus sint reciproce proportionalia. Machina igitur ita instructa, motus quicunque vniformis maiorem vim impellentem quam P non requiret; et quia vis impellentis quantitas eatenus est $= P$, quatenus ea praescripta celeritate agit, hoc est singulis minutis secundis spatium $= p$ conficit, etiam in motu machinae vniformi haec celeritas vi impellenti conueniet. Cum igitur momentum impulsus sit $= Pp$, eidem momentum effectus erit aequale, ita si $q$ denotet spatium, per quod resistentia Q singulis minutis secundis promouetur, quia est $Qq = Pp$, erit $q = \frac{Pp}{Q}$, sicque verus machinae effectus innotescit, siquidem motus vniformis sit capax. Quoniam vero in resistentia superanda Q frictionem sumus complexi, euidens est, quo maior fuerit frictio, eo minorem esse futurum verum machinae effectum. Hinc si frictio aequiualeat vi G in loco resistentiae applicatae, atque iam Q denotet

 ipsam

ipſam reſiſtentiam ſuperandam, erit $Pp = (Q+G)q$, ideoque verum momentum effectus $Qq = Pp - Gq$, ſeu ob $q = \frac{Pp}{Q+G}$ erit id $Qq = \frac{PQ}{Q+G}p = \frac{Q}{Q+G} \cdot Pp$; ſcilicet in ratione $Q+G$ ad $Q$, minus erit, quam momentum impulſus $Pp$.

11. *Niſi vis impellens ſit pondus deſcendens, eius quantitas a celeritate, qua agit, pendet, ita vt pro celeritate nulla ſit maxima, tum vero aucta celeritate decreſcat, donec, cum celeritas datum gradum attigerit, penitus euaneſcat; neque vnquam hunc gradum ſuperare queat.*

Iſta vis impellentis diminutio ratione auctae celeritatis clariſſime in impulſu aquae contra obicem mobilem perſpicitur. Ponamus enim obicem eſſe planum, et aquam in eum directe celeritate altitudini $c$ debita illidere, obicisque ſuperficiem eſſe $= aa$, erit vis aquae aequalis ponderi maſſae aquae, cuius volumen eſt $= aac$, quae ſtatuatur $= A$. Iam ſi obex habeat motum, quo impulſui aquae directe cedat, eiusque celeritas debita ſit altitudini $v$, perinde erit, ac ſi aqua tantum celeritate $\sqrt{c} - \sqrt{v}$ illidat, cum ante celeritate $\sqrt{c}$ incurriſſet, vnde nunc vis impulſus aequabitur ponderi maſſae aqueae, cuius volumen eſt $= aa(\sqrt{c} - \sqrt{v})^2$, quae ergo ob $aac = A$ erit $= A(1 - \sqrt{\tfrac{v}{c}})^2$. Cum igitur haec vis euaneſcat, ſi fiat $\sqrt{v} = \sqrt{c}$, eademque ſit $= A$, dum adhuc in quiete verſatur, generalius actionem huiusmodi virium ita deſcribere poterimus, vt dicamus, ſi quantitas talis vis, dum quieſcit, ſit $= A$, dum autem ſingulis minutis ſecundis ſpatium $= f$ percurrit,

percurrit, euanefcat, tum fi ita moueatur, vt fingulis minutis fecundis fpatium $p$, exiftente $p < f$, abfoluat, eius quantitatem fore $= A(1 - \frac{p}{f})^2$. Quae etfi ex natura impulfus aquae funt defumta, tamen latius patere, atque adeo in actione hominum animaliumque locum habere videntur; de quo eo minus dubitare licet, cum huiusmodi vires nonnifi propemodum ad calculum revocari queant. De hominibus ergo atque animalibus, quorum ope machinae agitari folent, ftatuemus, fi hominis animalisue, dum quiefcit, vis fuerit $= A$, ea vero, quando fingulis minutis fecundis fpatium $= f$ percurrit, euanefcat, tum eiusdem vim, dum ita mouetur, vt fingulis minutis fecundis fpatium $= p$ abfoluat, fore $= A(1 - \frac{p}{f})^2$. Quodfi ergo talis vis, dum fingulis minutis fecundis per fpatium $= p$ fertur, ponatur $= P$, erit $P = A(1 - \frac{p}{f})^2$, ac fi infuper conftet vis A, quam eadem vis in quiete exerit, hinc viciffim concludemus maximam eius celeritatem $f$, qua nullam amplius vim exeret: erit enim $1 - \frac{p}{f} = \sqrt{\frac{P}{A}}$, hincque $f = \frac{p\sqrt{A}}{\sqrt{A} - \sqrt{P}}$, vnde natura huiusmodi virium diftincte intelligitur.

12. *Si huiusmodi vis ad machinam mouendam adhibeatur, quae in quiete maior fit, quam refiftentiae aequilibrium requirit, tum machina mox ad motum vniformem perducetur, quo deinceps perpetuo agitabitur, fiquidem ipfa machina motus vniformis fuerit capax.*

Sit igitur haec vis impellens ita comparata, vt in quiete eius quantitas fit $= A$; dum autem fingulis minutis secundis spatium $=f$ absoluit, in nihilum abeat: eiusdem ergo vis impellentis quantitas erit $=A(1-\frac{p}{f})^2$, dum minuto secundo spatium $=p$ conficiet. Sit porro tota resistentia superanda $=Q$, qua simul frictio comprehendatur, ipsaque Machina ita instructa, vt status aequilibrii vim $=\frac{n}{m}Q$ requirat. His positis, quia assumo esse $A > \frac{n}{m}Q$, statim ab initio motus machinae accelerabitur, et quoniam aucto motu vis impellens continuo imminuitur, acceleratio tamdiu durabit, quoad vis impellens quantitatem $\frac{n}{m}Q$ attigerit. Re vera quidem hoc demum tempore elapso infinito eueniet, verum plerumque mox ab initio machinae talis motus imprimetur, qui ab isto vniformitatis gradu vix parte centesima differat, qui igitur in praxi iam pro vniformi haberi poterit. Quod si euenerit, motusque iam pro vniformi haberi possit, necesse est, vt sit $A(1-\frac{p}{f})^2 = \frac{n}{m}Q$ ideoque $1-\frac{p}{f} = \sqrt{\frac{nQ}{mA}}$ et $p = \frac{\sqrt{mA}-\sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}}.f$, quae formula spatium exprimit, quod tum a vi impellente singulis secundis absoluetur; visque resistens ergo eodem tempore per spatium $=\frac{n}{m}p = \frac{n}{m}.\frac{\sqrt{mA}-\sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}}.f$ promovebitur. Vnde momentum effectus habebitur $= \frac{n}{m}.\frac{\sqrt{mA}-\sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}}.fQ = \frac{n}{m}(1-\sqrt{\frac{nQ}{mA}})fQ$, quo simul momentum impulsus definitur. Patet ergo, quo maioris celeritatis vis impellens fuerit capax, antequam actionem amittat, eo maiorem ab ea produci effectum; his autem casibus machina tardius ad motus vniformitatem perducetur. Ac si adeo spatium $f$ fuerit infinitum, quo casu vis impellens constanter eandem quantitatem A retineret,

retineret, tum quidem tandem effectum in infinitum excrescere posse, verum mox tam debilia incrementa acciperet, vt a leuissima resistentia vlterior acceleratio impediri posset. Semper tamen caeteris paribus effectus eo maior obtinebitur, quo maius fuerit spatium $f$, etiamsi is non in eadem ratione augeri sit censendus.

13. *Etiamsi igitur eadem impulsione ad eandem resistentiam superandam vtamur, effectus tamen plurimum a machinae indole pendebit, seu a ratione* m: n, *quae inter celeritates vis impellentis et resistentis statuitur. Haecque adeo ita temperari poterit, vt maximus effectus consequatur.*

Quoniam pro positionibus modo in genere traditis inuenimus momentum effectus $= \frac{n}{m}(1 - \sqrt{\frac{nQ}{mA}}) f Q$, patet eius quantitatem manentibus $A$, $f$ et $Q$ plurimum a ratione $m:n$, quam structura machinae praebet, pendere; si enim fuerit vel $\frac{n}{m} = 0$, vel $\frac{nQ}{mA} = 1$, seu $\frac{n}{m} = \frac{A}{Q}$ vtroque casu effectus penitus euanescit. Vnde inter limites $o$ et $\frac{A}{Q}$ dabitur valor quidam medius pro fractione $\frac{n}{m}$ capiendus, qui cum maximo effectu futurus sit coniunctus; quem ergo potissimum operae pretium erit cognouisse. Ponamus in hunc finem $\frac{n}{m} = zz$, et huic formulae $zz - z^3 \sqrt{\frac{Q}{A}}$ maximum valorem conciliari oportebit; reperietur autem $2z - 3zz\sqrt{\frac{Q}{A}} = 0$, ideoque $z = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{A}{Q}}$, quare habebitur $\frac{n}{m} = \frac{4A}{9Q}$; seu machina ita instrui debet, vt sit celeritas vis impellentis ad celeritatem vis resistentis vt $9Q$ ad $4A$. Quodsi ergo iste

valor

valor $\frac{4A}{9Q}$ pro fractione $\frac{n}{m}$ substituatur, fiet $\sqrt{\frac{nQ}{mA}} = \frac{2}{3}$ et $1 - \sqrt{\frac{nQ}{mA}} = \frac{1}{3}$; hincque maximum momentum effectus obtinebitur

$$\frac{4A}{9Q} \cdot \frac{1}{3} \cdot fQ = \frac{4}{27} Af.$$

Hinc igitur luculenter perspicimus, quantopere effectus ab idonea machinae dispositione pendeat, cum vnico modo iste effectus maximus obtineri queat, scilicet efficiendo, vt sit $m:n = 9Q:4A$, a qua proportione si machina recesserit, semper minorem effectum producet, etiamsi tam vis impellens, quam vis resistens, cum frictione maneant eaedem, quam si haec iusta ratio obseruetur. Interim si vel tantillum ab ea aberretur, detrimentum in effectu vix erit sensibile, quoniam maxima et minima aliquam latitudinem admittunt, id quod commode evenit, quia in praxi hanc rationem summo rigore vix obseruare licet. In eo tamen erit elaborandum, vt machina, quam fieri potest exactissime, ad hanc rationem accommodetur.

14. *Si vis impellens ita sit comparata, vt celeritate* f *omnem actionem amittat, machina semper maximum praestabit effectum, si ita instruatur, vt vis impellentis celeritas fiat pars tertia ipsius* f.

Sumo hic, vt et in sequentibus, spatium vno minuto secundo percursum pro mensura celeritatis; ac huiusmodi vim impellentem contemplor, cuius dum est in quiete quantitas sit $= A$, quae autem celeritate $f$ lata omni actione destituatur. Huius igitur vis, dum celeritate $= p$ procedit, quantitas erit $= (1 - \frac{p}{f})^{2}$. Quodsi

Quodsi iam resistentia ope machinae superanda sit $=Q$, et ratio celeritatis vis impellentis ad celeritatem resistentiae ponatur $= m:n$, quae ratio a structura machinae pendet, vidimus, vt effectus maximus obtineatur, statui oportere $\frac{n}{m} = \frac{4A}{9Q}$. Tum vero pro celeritate vis impellentis nanciscimur $p = \frac{\sqrt{mA} - \sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}} f = (1 - \sqrt{\frac{nQ}{mA}}) f$: erit itaque ob $\sqrt{\frac{nQ}{mA}} = \frac{2}{3}$, $p = \frac{1}{3} f$. Hoc autem immediate ex actione vis impellentis colligi poterit, quippe cuius momentum impulsus maximum reddi debet, vt maximum momentum effectus obtineatur Verum si vis impellens celeritate $p$ agere assumatur, quia tum eius quantitas est $= A(1 - \frac{p}{f})^2$, erit momentum impulsus $= Ap(1 - \frac{p}{f})^2$, quod maximum factum praebet $A(1 - \frac{p}{f})^2 = \frac{2Ap}{f}(1 - \frac{p}{f})$, seu

$$1 - \frac{p}{f} = \frac{2p}{f}, \text{ hincque } 3p = f \text{ et } p = \frac{1}{3} f.$$

Effectus igitur maximus produci nequit, nisi vis impellens ita agat, vt eius celeritas $p$ sit pars tertia celeritatis $f$, qua omni actione priuatur. Posito autem $p = \frac{1}{3} f$, erit quantitas vis impellentis $= A(1 - \frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9} A$; vnde pro data vi resistente machina ita attemperari debet, vt vis $\frac{4}{9} A$ in aequilibrio consistat cum vi resistente frictione simul complexa, seu vt vis $\frac{4}{9} A$ tantum non motum machinae imprimere valeat. Scilicet si tota vis resistens sit $= Q$, celeritas vis impellentis ad celeritatem resistentis statui debet, vt $9Q$ ad $4A$, quo facto momentum effectus, ideoque et momentum impulsus erit $= \frac{4}{27} Af$, quod nullo modo maius effici poterit seu fieri omnino nequit, vt ab eadem vi impellente maior effectus obtineatur.

15. *Cum ratione celeritatis, qua vis impellens agit, machina ad maximum effectum producendum fuerit instructa, frictio quoque spectari debet, quae primo, quantum fieri potest, erit diminuenda, tum vero eius effectus eo minor reddetur, quo longius vis impellens ab axe, circa quem machinam vrget, remouetur.*

Assumo ergo frictionem iam eo vsque esse minutam, vt minor fieri nequeat, et vim impellentem rotae esse applicatam, cuius radius sit $= r$, in eadem autem distantia vi opus esse F ad frictionem superandam. Iam sit $Mf$ momentum impulsus, idque maximum, cuius vis impellens est capax, quae agat celeritate $= p$, et quia vis ad frictionem superandam requisita F, vtpote in eodem loco applicata, eadem celeritate agit, erit eius momentum $= Fp$, ideoque verum momentum effectus detracta frictione erit $= Mf - Fp$, ex quo quantitas effectus ob frictionem minutus aestimari debet. Ponamus iam, rotae illius primariae radium augeri in ratione $1 : \lambda$, ita vt vis impellens eadem nunc applicetur in distantia $\lambda r$ ab eius axe, et in hoc loco vi tantum opus erit $\frac{1}{\lambda}F$ ad frictionem superandam: machina autem paucis mutandis denuo ita instruatur, vt pro motu vniformi vis impellens celeritate $p$, cui maximum momentum impulsus respondeat, incedat, et cum frictio nunc tantum huius momenti partem $\frac{1}{\lambda}Fp$ postulet, verum momentum effectus hoc casu

casu erit $= Mf - \lambda Fp$, ideoque eo maius, quam casu praecedente, quo maior fuerit numerus $\lambda$. Hinc igitur patet fieri posse, vt ab eadem vi impellente, frictione non imminuta, multo maior effectus impetrari possit: hic autem suppono, aucto illius rotae diametro frictionem non augeri, vnde haec regula ita debet limitari, vt quatenus augenda rota hac principali frictio vel non augetur, vel saltem in minore ratione augetur, quam diameter rotae, eatenus semper conueniat hanc rotam maximam fieri. Antequam autem ad hanc regulam confugiamus, maxime interest, vt nostris artificiis frictionem, quantum quidem fieri potest, diminuere conemur; tum vero obseruatio huius regulae nihilominus maximam afferet vtilitatem, propterea quod, etiamsi frictio sit minima, ob eam momentum effectus adhuc notabiliter diminui posset, si scilicet $\lambda$ denotaret fractionem valde paruam.

16. *Denique plurimum ad machinarum perfectionem confert motus vniformitas, ad quam ideo imprimis machinas instrui oportet; si enim motus non fuerit vniformis, sed per interualla modo intendatur, modo remittatur, tum effectus semper erit minor eo, qui secundum regulas praecedentes obtineri posset.*

In motus difformitate enim non solum portio vis impellentis in superanda inertia consumitur, sed etiam nonnisi maxima celeritas aequalis est ei, quam machina esset habitura, si motus foret vniformis. Namque dum motus acceleratur, vis impellens maior eſt vi ad aequilibrium requiſita, eiusque idcirco celeritas minor, quam ea, quae motui vniformi conueniret; etſi autem interdum machinae motus celerior ineſſe queat, quia tamen hoc euenit, quando machina non in totum onus agit, inde nihil omnino in augmentum effectus redundat: vtroque ergo caſu ſemper non parum de vi impellente perit, quando motus non erit vniformis. Quare in hoc potiſſimum eſt incumbendum, vt machinae, quantum fieri poteſt, motus vniformis concilietur. Hunc in finem igitur, primo rotae, quae ſe mutuo mouent, ita ſunt fabricandae, vt dum vna vniformiter mouetur, etiam reliquarum motus prodeat vniformis, id quod dentibus rotarum debita figura inducenda efficietur, quod argumentum antehac pertractaui. Deinde defectus vniformitatis imprimis eſt pertimeſcendus, quando machina piſtillis alternatim attollendis ac demittendis, vel deprimendis, deſtinatur, propterea quod corpori, quod eſt in quiete, non ſubito motus imprimi poteſt. His ergo caſibus machina ad piſtilla ita eſt applicanda, vt motus machinae non ſequatur motum piſtillorum, ſeu vt ille vniformis manere poſſit, etiamſi hic a ſtatu quietis acceleretur iterumque retardetur, qui effectus commodiſſime per brachia incuruata impetrari ſolet; dum enim huiusmodi brachium piſtillum eleuandum primum arripit, motum ſuum continuare poteſt, etiamſi piſtillum parum attollatur; id quod etiam vſu venit, quando piſtillum ad maximam altitudinem fuerit eleuatum. Quoniam autem hoc pacto piſtilla motui machinae non ſemper pari vi vi reluctantur, ea, si plura fuerint, ita disponi oportet, vt machina quouis momento in pistilla plura, quorum alia sint in loco imo, alia in summo, aliaque in medio statu versentur, agat, sic enim reluctantia aequabilis reddetur. Idem obseruandum est in omnibus machinis, quibus motus reciproci produci solent; ac perpetuo, quando his tribus regulis erit satisfactum, certi esse possumus, machinas ad summum perfectionis gradum, cuius sunt capaces, esse euectas.

# DE MOTV ET ATTRITV LENTIVM DVM SVPER CATINIS POLIVNTVR.

Auctore

*L. EVLERO.*

1.

Inter plures modos, quibus lentes ſuper catinis, ſiue immotis, ſiue in gyrum actis, atteri ac poliri ſolent, hic eum tantum ad examen reuocare conſtitui, quo catino vniformiter in gyrum acto, lens ope ſtyli eius centro applicati ad catinum apprimitur, quo fit, vt ipſa lens circa ſtylum libere mobilis a catini motu in gyrum agatur, et quatenus eius motus a motu catini diſcrepat, eidem atteratur, ſicque politura perficiatur. Quoniam hac ratione arbitrio artificis nihil aliud praeter locum, vbi lentem ſuper catino detineat, relinquitur. Hic modus lentes poliendi prae reliquis geometricae inueſtigationis capax videtur, dum contra, vbi totus lentis motus ab arbitrio artificis pendet, vix quidquam definire licet.

Tab. IV. Fig. 1. 2. Sit igitur PQRS catinus ope machinae rotatoriae certa quadam velocitate vniformiter in gyrum agendus, circa eius axem O, quem verticalem aſſumo, vt motus catini in plano horizontali abſoluatur. Lens autem AEBF ope ſtyli eius centro C applicati ita con-

continuo ad catinum apprimatur, vt punctum C immotum seruetur, lens autem circum id libere reuolui queat. Catino iam in gyrum acto, ipsa lens circa stylum in motum abripietur, moxque vniformiter circumagetur, cuius motus celeritatem ante definiri oportet, quam effectus attritus, seu celeritas, qua singula lentis puncta super catino teruntur, assignari queat.

3. Denotet $u$ celeritatem gyratoriam catini, ita ad distantiam quandam fixam a centro O, vnitate indicandam relatam, vt in distantia a centro quacunque $z$ sit celeritas vera $= uz$, cuius quadratum $uuzz$, vt mensuras certas obtineamus, exprimat altitudinem huic celeritati debitam: hac ergo littera $u$ motus catini prorsus determinatur, quippe qua constat, punctum quodcunque catini Z, cuius distantia ab axe O fuerit OZ $= z$, ita moueri, vt eius directio sit recta $Zm$ ad OZ normalis, celeritas vero $= uz$, quae tanta est intelligenda, quanta ex lapsu grauis per altitudinem $uuzz$ acquiri solet; quandoquidem catinus in plagam PQRS circumagitur; si enim in plagam contrariam circumageretur pari celeritate, celeritas quidem puncti Z foret eadem, sed directio $Zm$ contraria esset statuenda.

4. Quod porro ad lentem attinet, primo eius diameter AB in computum est ducendus, cuius semissis sit CA $=$ CB $= a$. Deinde plurimum refert, in quanta distantia eius centrum C a centro catini O ope styli fixum detineatur, quae distantia sit OC $= c$. Tum vero si de effectu attritus iudicare velimus, vis qua

ea

ea ad catinum apprimitur, rationem haberi conuenit, quae vis aequetur ponderi $=P$. Cum autem tanta vi tota facies lentis inferior catino apprimatur, vis qua quaelibet eius portio atque adeo elementum apprimitur, ex eius ratione ad totam faciem erit colligenda; siquidem assumimus, lenti iam catini figuram esse inductam, totumque negotium sola politura esse absoluendum.

5. His quae circa lentem sunt nota constitutis, inuestigandus est eius motus, qui ob centrum C fixum alius esse nequit, nisi gyratorius circa idem centrum, et qui inter quaerenda primum locum obtinet. Statim quidem patet, lentem ob motum catini, quem in plagam PQRS fieri pono, in similem plagam AEBF abreptum iri; sed celeritas huius motus etiam nunc est incognita. Sit ergo simili modo huius motus celeritas gyratoria $=v$, ita ad distantiam fixam $=1$ relata, vt puncti lentis cuiuscunque, Z, cuius distantia ab eius centro C fuerit $CZ=x$, celeritas vera futura sit $=vx$, directione existente $Zn$ ad CZ normali. Tum vero vt punctum C immotum teneatur, quoniam motus catini totam lentem auehere conatur, stylo praeterea vim contranitentem applicatam esse oportet, cuius quantitas pariter erit inuestiganda.

6. Quo nunc felicius haec, quae sunt incognita, definire liceat, ante omnia motum respectiuum cuiusque lentis puncti ratione catini explorari conuenit, in quo motu verus attritus consistit. Ac primo quidem at-

attritus centri lentis C super catino per se est manifestus; cum enim ob distantiam $OC = c$, punctum catini C celeritate $= cu$ in directione $Cc$ ad OC normali feratur, lentis autem punctum C quiescat, haec ipsa $cu$ erit celeritas attritus; quae ergo eo maior est, quo longius centrum lentis $Ca$ centro catini O detineatur. Euidens autem est, effectum politurae ab hac attritus celeritate ita pendere, vt partim illi ipsi, partim pressioni futurus sit proportionalis.

7. Celeritas attritus autem omnium reliquorum lentis punctorum super catino, non solum ab huius, sed etiam a lentis motu pendet, ad quam inuestigationem figuram secundam maiori specie expressam accommodemus. Sit ergo pro puncto lentis quocunque Z distantia $CZ = x$ et angulus $ACZ = \Phi$, ad CZ normaliter iungatur $Zn = vx$ motum verum puncti lentis Z exhibens. Catini autem punctum subiectum Z, posita distantia $OZ = z$, feretur in directione $Zm$ ad OZ normali celeritate $= uz$. Sumta ergo $Zm = uz$, si catino et lenti simul motum imprimi concipiamus secundum directionem $Z\nu$, ipsi $Zn$ oppositam, et celeritate $Z\nu = vx$; tum vero completo parallelogrammo $mZ\nu z$ ducamus diagonalem $Zz$, res eodem redibit, ac si puncto lentis Z quiescente catinus sub eo promoueatur in directione $Zz$ celeritate $= Zz$, quae ergo erit celeritas attritus puncti Z. Tab. IV. Fig. 2.

8. Cum autem sit $OC = c$; $CZ = x$, et angulus $ACZ = \Phi$, erit $OZ = z = \sqrt{(cc + xx + 2cx \operatorname{cos.} \Phi)}$. Deinde posito angulo $COZ = \omega$, erit tang. $\omega = \frac{x \operatorname{sin.} \Phi}{c + x \operatorname{cos.} \Phi}$

 et

et $\sin.\omega = \frac{x \sin.\mathfrak{B}}{z}$: porro ang. $CZO = \Phi - \omega$, et $\tang.(\Phi - \omega) = \frac{c \sin.\Phi}{x + c \cos.\Phi}$, atque $(\Phi - \omega) = \frac{c \sin.\Phi}{z}$. In triangulo autem $Zvz$ est $Zv = vx$; $zv = Zm = uz$ et angulus $Zvz = CZO = \Phi - \omega$; vnde colligitur $Zz = \sqrt{(vvxx + uuzz - 2uvxz \cos.(\Phi - \omega))}$.
Inde vero colligitur $z \cos.(\Phi - \omega) = x + c \cos.\Phi$, quo valore substituto fit

$$Zz = \sqrt{(vvxx + uuzz - 2uvxx - 2cuvx \cos.\Phi)} \text{ seu}$$
$$Zz = \sqrt{(ccuu + 2cu(u-v)x \cos.\Phi + (u-v)^2 xx)}.$$

9. Pro situ deinde huius lineae $Zz$, quae celeritatem attritus puncti lentis $Z$ exprimit, erit primo $CZv$ angulus rectus, turn vero $\cos.vZz$ $= \frac{Zz^2 + Zv^2 - zv^2}{2Zz.Zv} = \frac{-(u-v)x - cu\cos.\Phi}{Zz} = \sin.(CZv + vZz)$

Tab. IV. Fig. 1. at $\sin.vZz = \frac{zv \sin.Zvz}{Zz} = \frac{uz \sin.(\Phi - \omega)}{Zz} = \frac{cu \sin.\Phi}{Zz} = -\cos.(CZv + vZz)$. Si ergo in fig. 1. lineam $Zz$ superne cum $CZ$ angulum constituere assumamus, erit

$$\sin.CZz = \frac{(v-v)x + cu\cos.\Phi}{Zz} \text{ et}$$
$$\cos.CZz = \frac{-cu\sin.\Phi}{Zz} \text{ existente}$$
$$Zz = \sqrt{(ccuu + 2cu(u-v)x \cos.\Phi + (u-v)^2 xx)};$$

vnde patet, si fuerit $ACZ = \Phi = 0$, fore $Zz = cu + (u-v)x$; et angulum $CZz$ rectum, ac si praeterea sit $x = 0$, erit vt ante celeritas attritus centri lentis $C = cu$.

10. Iam quaestio huc redit, quamnam habitura sit rationem celeritas gyratoria lentis $v$ ad celeritatem gyratoriam catini $u$? ad quam resoluendam duae patent viae, altera indirecta ex principio minimae actionis

nis petita, altera directa ex principiis motus negotium conficiens. Secundum priorem nullum est dubium, quia motus lentis ita comparatus sit futurus, vt attritus totus fiat minimus. Quare si in Z elementum superficiei lentis concipiatur, erit id ob variabilitatem tam distantiae $CZ = x$, quam anguli $ACZ = \Phi$, ita expressum $= x\,dx\,d\Phi$, quod per celeritatem attritus $Zz$ multiplicatum, dabit eius attritus quantitatem

$$x\,dx\,d\Phi \sqrt{(ccuu + 2cu(u-v)x\cos.\Phi + (u-v)^2 xx)}$$

cuius integrale per totam lentem extensum minimum esse debet.

11. Producta recta ZC vltra C, concipiatur par elementum superficiei $x\,dx\,d\Phi$ ad alteram partem rectae AB, et quia hic fit vel $x$ vel $\cos.\Phi$ negatiuum, eius quantitas attritus erit

$$x\,dx\,d\Phi \sqrt{(ccuu - 2cu(u-v)x\cos.\Phi + (u-v)^2 xx)}$$

Collectis his ambobus elementis, euidens est, eorum summam fieri minimam, si sumatur $v = u$, id quod vtraque formula irrationali in seriem conuertenda facillime patet, dum additione potestates impares ipsius $x$, ac proinde etiam ipsius $u-v$, se destruant, vnde minimum ratione celeritatis $v$ inuestigando manifesto elicitur $v = u$, quod cum de omnibus elementorum sibi hoc modo oppositorum paribus valeat, sequitur etiam, totius lentis attritum minimum esse futurum, si fuerit $v = u$, ideoque lens aeque celeriter in gyrum agatur atque catinus, ita vt ambo aequalibus temporibus suas reuolutiones absoluant.

12. Verum etiam via directa ad eandem conclusionem manuducet. Cum enim experimentis constet, frictionem a sola pressione pendere, neque celeritatem attritus quicquam, siue ad augendam, siue diminuendam frictionem, conferre, elementum superficiei $xdxd\Phi$ in Z vi quadam ipsi proportionali, ob pressionem vbique aequalem, in directione $Zz$ sollicitabitur; quae vis ergo sit $= \alpha x dx d\Phi$; et quia centrum lentis C immotum tenetur, erit huius respectu momentum illius vis $= \alpha x dx d\Phi .\, CZ \sin. CZz$ $= \frac{\alpha x dx d\Phi .\, x((u-v)x + cu\cos\Phi)}{\sqrt{(ccuu + 2cu((u-v)x\cos.\Phi + (u-v)^2 xx)}}$. Ex elemento autem opposito, vti supra, sumto, orietur momentum $\frac{\alpha x dx \Phi .\, x((u-v)x - cu\cos.\Phi)}{\sqrt{(ccuu - 2cu(u-v)x\cos.\Phi + (u-v)^2 xx)}}$.

13. Nunc autem, quia motus lentis iam ad vniformitatem compositus statuitur, necesse est, vt horum momentorum summa vniuersa ad nihilum redigatur, quod cum fiat in binis elementis oppositis, si capiatur $v = u$, idem pro tota lente valebit. Idem etiam per integrationem solito more elucet, posito enim $v = u$, ex elemento Z oritur momentum $= \alpha xx dx d\Phi \cos.\Phi$, vnde pro sectore elementari CZ colligitur momentum $= \frac{1}{3}\alpha x^3 d\Phi \cos.\Phi$, et pro toto ad marginem vsque extenso $= \frac{1}{3}\alpha a^3 d\Phi \cos.\Phi$, cuius denuo integrale est $= \frac{1}{\alpha} a^3 \sin.\Phi$, quod per totam lentem extensum, donec fiat $\Phi = 360^\circ$, manifesto in nihilum abit, quod non fieret, si non esset $v = u$. Vicissim ergo altera methodus per alteram confirmatur, et cum principium minimi per se sit euidens, patet simul

ſimul alterum, quo frictio a ſola preſſione pendere aſſumitur, veritati omnino eſſe conſentaneum.

14. Definita iam celeritate $v = u$, non difficile erit determinare vim, cui ſtylus centro lentis C applicatus, praeter preſſionem P, reniti debet, ne centrum lentis C a motu catini abripiatur. Cum enim ſit $v = u$, erit $Zz = cu$, ſin $CZz = \cos. \Phi$ et $\cos. CZz = -\sin. \Phi$, ita vt ſit $CZz = 90° + \Phi$, et $zZn = \Phi = ACZ$. Ob frictionem autem vrgetur elementum ſuperficiei lentis $x dx d\Phi$ ſecundum directionem $Zz$ vi conſtante; et quia tota ſuperficies, quae eſt $= \pi aa$, denotante $\pi$ peripheriam circuli, cuius diameter eſt $= 1$, apprimitur vi P, elementum illud apprimetur vi $= \frac{P x dx d\Phi}{\pi aa}$ cuius parti quaſi tertiae frictio aequatur. Scribamus autem generalius $\lambda$ pro parte tertia, ita vt elementum in Z ſecundum $Zz$ ſollicitetur vi $= \frac{\lambda P x dx d\Phi}{\pi aa}$, quae ſecundum directionem CZ praebet vim $= \frac{\lambda P x dx d\Phi \sin. \Phi}{\pi aa}$ et ſecundum directionem ad illam normalem vim $= \frac{\lambda P x dx d\Phi \cos. \Phi}{\pi aa}$.

15. At per ea, quae ſupra oſtendimus, omnes iſtae vires normales ſe deſtruunt, vnde ſtylus ſuſtinere debet alteras illas vires ſecundum CZ agentes, quae ſunt $= \frac{\lambda P x dx d\Phi \sin. \Phi}{\pi aa}$, et quaſi ipſi centro lentis C ſecundum directionem CZ applicatae eſſent, concipi poſſunt. Quaelibet vero huiusmodi vis reſoluatur ſecundum directiones fixas CA et $Cc$, eritque vis ſecundum $CA = \frac{\lambda P x dx d\Phi \sin. \Phi \cos. \Phi}{\pi aa}$, et vis ſecundum $Cc = \frac{\lambda P x dx d\Phi \sin. \Phi^2}{\pi aa}$. Illa primum integrata, poſito

 $x = a$

$x = a$, dat $\frac{\lambda}{2\pi} P\, d\Phi\, \text{sin.}\, \Phi\, \text{cos.}\, \Phi = \frac{\lambda}{4\pi} P\, d\Phi\, \text{sin.}\, 2\Phi$, cuius porro integrale est $= \frac{\lambda}{8\pi} P(1 - \text{cos.}\, 2\Phi)$. Posito nunc pro tota lente $\Phi = 360°$, haec vis secundum CA euanescit. Altera vis secundum $Cc$ semel integrata dat $\frac{\lambda}{2\pi} P\, d\Phi\, \text{sin.}\, \Phi^2 = \frac{\lambda}{4\pi} P\, d\Phi(1 - \text{cos.}\, 2\Phi)$, cuius sequens integrale est $= \frac{\lambda}{4\pi} P(\Phi - \frac{1}{2}\text{sin.}\, 2\Phi)$, et posito $\Phi = 360°$, $= 2\pi$ prodit vis secundum $Cc = \frac{1}{2}\lambda P$.

16. Ob motum ergo catini stylus sustinet vim $= \frac{1}{2}\lambda P$ secundum directionem $Cc$, quam artifex continuo vi contraria et aequali renitendo destruere debet, siquidem centrum lentis immotum tenere velit. Quare si $\lambda = \frac{1}{3}$, haec vis aequatur sextae parti pressionis totius P, qua lens catino apprimitur, cui conclusioni per se verae vnicus casus aduersatur, quo centrum lentis C ipsi centro catini O apprimitur; tum enim, quia lens pari motu cum catino circumagitur, nullusque attritus exercetur, stylus etiam nullam vim sustinet. At huiusmodi exceptio semper, quando de frictione agitur, admitti debet; cum enim in motu tardissimo frictio aeque sit magna atque in celerrimo, motu tamen plane euanescente frictio quasi subito euanescit. Neque ergo hoc incommodum tanquam vitium calculo est imputandum.

17. Cum duplici demonstratione euictum sit, esse $v = u$, idem etiam experientia egregie confirmari deprehendi; in quacunque enim catini loco lens detinebatur, eius reuolutiones semper exactissime cum reuolutionibus catini conueniebant, neque vix vllam inaequali-

qualitatem, ne in motus quidem initio, obseruare licuit. Vnde patet statim ab initio motus reuolutiones lentis se ad eam aequalitatem componere, quam calculus ostendit; quin etiam motu catini modo intenso, modo remisso, lens eandem inaequalitatem sequi obseruata est. Hic ergo insigne cernitur specimen foecundissimi illius principii minimae actionis, quod eo magis omni attentione dignum videtur, quod etiam in motu per frictionem impedito tam felici cum successu adhiberi potuerit, cum hactenus eius vsus tantum in motibus liberis a viribus veri nominis, quibus frictionem vix annumerare licet, perturbatis, sit ostensus.

18. Quoniam igitur ex eo, quod inuenimus $v = u$, sequitur esse celeritatem $Zz = cu$, patet in eodem lentis situ omnia eius puncta aequali celeritate atteri, ideoque pari vi laeuigari ac poliri, quo ipso hic mechanismus non mediocriter reliquis antecellit, cum alias alia lentis puncta fortius, alia debilius, atteri soleant. Praeterea vero hic perspicitur, celeritatem attritus rationem sequi interualli $OC = c$, ita vt si centrum lentis C centro catini O applicetur, nullus plane attritus sit futurus; quo longius autem interuallum OC capiatur, eo maiorem fore attritum, idque in eadem ratione. Quam ob rem omnino necesse est, vt catini magnitudo multum superet magnitudinem lentis, quae regula etiam ab artificibus probe obseruari solet.

19. Hic igitur ingens conspicitur discrimen inter frictionem et attritum, quae duae res vulgo confundi solent.

ſolent. Frictio enim, ſiue motus ſit tardior, ſiue velocior, perpetuo manet eadem. cum attritus eiusque effe-ctus, qui in abraſione eſt conſtituendus, maxime a velocitate pendent, ex quo attritus quantitatem commodiſſime metiemur eius celeritate $Zz$ in preſſionem ducta. Quare ſi in ſuperficie lentis conſideremus elementum $dZ$, quod quia catino apprimitur vi $=\frac{PdZ}{\pi aa}$, teriturque celeritate $=cu$, erit quantitas attritus $=\frac{PcudZ}{\pi aa}$. Hinc ergo lens eo promtius laeuigabitur et polietur, quo maior fuerit quantitas $\frac{Pcu}{\pi aa}$; quae proportionalis eſt 1°, vi P, qua lens catino apprimitur, 2°, celeritati $u$, qua catinus in gyrum agitur, 3°, interuallo $OC=c$ quo centrum lentis diſtat a centro catini, et 4°, denique reciproce ſuperficiei lentis, ita vt quo lens fuerit maior, eo tardius laeuigatio perficiatur.

20. Hic autem non tantum ad lentis attritum eſt reſpiciendum, ſed quia catinus etiam atteritur, eiusque ſuperficies abraditur, niſi vbique aequaliter radatur, mox eius figura alteratur; vnde fit, vt deinceps etiam lenti figura a propoſita aberrans inducatur. Quam ob rem neceſſe eſt, vt etiam attritus ipſius catini accuratius inueſtigetur. Primo autem patet omnia catini puncta ab eius centro aeque remota quauis reuolutione aequaliter atteri. Conſideremus ergo catini punctum quodcunque L a centro catini O diſtans interuallo $OL=y$, quod vna reuolutione tamdiu tantum atteritur, quamdiu per angulum MON profertur. Cum igitur attritus momentaneus ſit $=\frac{Pcu}{\pi aa}$, vna reuolutione integra totus attritus cenſendus erit $=\frac{Pcu}{\pi aa}\cdot\frac{ang.\,MON}{360°}$, ſiquidem puncti

Tab. IV. Fig. 3.

puncti lentis L quantitas attritus vna reuolutione exprimatur per $\frac{Pcu}{\pi aa}$.

21. Cum nunc fit $CM = CA = a$; $OC = c$; $OM = OL = y$, erit cof. $LOM = \frac{cc+yy-aa}{2cy}$, vnde, ob $\pi = 180^\circ$, erit attritus puncti catini L durante vna reuolutione $= \frac{Pcu}{\pi\pi aa}$. A cof. $\frac{cc-aa+yy}{2cy}$, quae expreffio tantum pro iis catini punctis valet, quorum diftantia a centro O intra limites $AO = c + a$ et $BO = c - a$ continetur, quoniam tam in vtroque limite, quam extra eos, attritus euanefcit. Hic autem notandum eft, fi fuerit $c < a$, et $y = a - c$, fore A cof. $\frac{cc-aa+yy}{2cy} = 180^\circ = \pi$, feu haec catini puncta perpetuo atteri, quod multo magis valebit, fi fuerit $y < a - c$, hoc fcilicet cafu fpatium circulare circa centrum catini O, cuius radius eft $= a - c$, perpetuo attritum patietur, et quidem aequalem ei, cui lens eft fubiecta. Cuiusmodi attritu fi totus catinus afficeretur, non effet metuendum, vt eius figura deformaretur.

22. Cum autem folum fpatium annulare catini lenti fe applicans atteratur, quamdiu quidem lens in eodem loco detinetur, eius tantum figura alterationem patitur, eamque non aequabilem, vnde fphaericitas eius tandem vehementer mutabitur, lentique proinde figura a fcopo non mediocriter aberrans imprimetur. Huic incommodo artifices remedium afferre conantur, dum lentem modo propius admouent ad centrum catini, modo ab eo longius remouent, quo pacto quidem cati-

num circa centrum atterunt, ſed circa marginem attritus multo minor manet, ita vt ne hoc quidem modo catinus per totam ſuperficiem aequaliter radatur. Deinde vero etſi hoc modo attritus non tam inaequabilis ſit, quam ſi lens iugiter in eodem loco detineretur, tamen is non certa quadam lege diſtribuitur, vnde fit, vt figura catini a ſphaerica mox notabiliter recedat, ſolique fortunae ſit tribuendum, ſi quandoque bonae indolis lentes hoc modo elaborentur.

23. Ad catini autem attritum aequabilem reddendum optimum remedium videtur, ſi fruſtum quoddam vitri praeter lentem ſuper catino atteratur, cuius figura et preſſio ita ſit comparata, vt ſingula catini puncta, tam a lente, quam ab iſto fruſto, aequabilem attritum patiantur. Quo huius fruſti figura ſimplicior prodeat, ponamus interuallum BO euaneſcere, ſeu eſſe $OC = c = CB = a$, catinique radium OA diametro lentis $2a$ eſſe aequalem, quandoquidem, cum lens perpetuo in eodem loco detineatur, ſuperfluum foret, catinum ampliorem efficere. Sit igitur $EObi$ figura illius fruſti vitrei quaeſita, quod continuo catino in eodem loco applicatum detineatur, eique pondere $= Q$ apprimatur, cuius area ſit $= ee$. Quoniam nihil refert, quo in loco hoc fruſtum applicemus, concipiamus id in ſitu DOHVT.

Tab. V. Fig. 1.

24. Cum igitur catini puncta L a centro O interuallo $OL = y$ diſtantia ob $c = a$ a lente attritum pati-

patiantur, cuius quantitas vna reuolutione est $= \frac{Pu}{\pi\pi a} A \cos. \frac{y}{2a} = \frac{Pu}{\pi\pi a y}. LM$. Tum vero eadem puncta L sub frusto vitri per arcum VR deferuntur celeritate $uy$, et quia pressio in singulis punctis est vt $\frac{Q}{ee}$, erit quantitas attritus in vna reuolutione $= \frac{Quy}{ee}. \frac{KV}{2\pi y} = \frac{Qu}{2\pi ee}. KV$, vbi $2\pi y$ peripheriam totius circuli denotat. Necesse ergo est, vt summa harum expressionum $\frac{Pu}{\pi\pi a y}. LM + \frac{Qu}{2\pi ee}. KV$ sit quantitas constans, quae statuatur $= \frac{Pu}{\pi\pi a}. \frac{\pi}{2}$. At posita recta OD ad AO perpendiculari, ob arcum LMK $= \frac{\pi}{2} y$, erit haec constans $= \frac{Pu}{\pi\pi a y}. LMK$, ita vt habeatur haec aequatio:

$$\frac{Pu}{\pi\pi a y}. LM + \frac{Qu}{2\pi ee}. KV = \frac{Pu}{\pi\pi a y}. LMK$$

quae reducitur ad hanc: $\frac{Q}{2ee}. KV = \frac{P}{\pi a y}. MK$.

25. Erit ergo arcus $KV = \frac{2Pee}{Q\pi a y}. MK$, existente $OK = y$; vnde porro area spatii DOHVI $= ee$ definiri potest. Cum enim sit $MK = y A \sin. \frac{y}{2a}$, habebitur $KV = \frac{2Pee}{Q\pi a} A \sin. \frac{y}{2a}$, hincque areae elementum $KV. dy = \frac{2Pee}{Q\pi a} dy. A \sin. \frac{y}{2a}$, cuius integrale est

$$\frac{2Pee}{Q\pi a}(y A \sin. \frac{y}{2a} + \sqrt{(4aa - yy)} - 2a)$$

quod per totum frustum extensum ponendo $y = 2a$ praebet aream totam

$$ee = \frac{2Pee}{Q\pi a}(2a. \frac{\pi}{2} - 2a) = \frac{2Pee}{Q\pi}(\pi - 2)$$

vnde quidem non area $ee$, sed pondus apprimens Q, ita definitur, vt sit $Q = \frac{2P(\pi - 2)}{\pi}$; vnde siue ponatur $\pi = \frac{22}{7}$

 siue

siue $\pi = \frac{355}{113}$, dat $Q = \frac{8}{11}P$, seu $Q = \frac{258}{355}P$, vnde constat, quanto pondere frustum vitri catino apprimi debeat.

26. Ad figuram autem frusti vitrei inueniendam quia inuenimus $\frac{2Pee}{Q\pi} = \frac{ee}{\pi - 2}$, habebimus hanc aequationem $KV = \frac{ee}{(\pi - 2)ay} \cdot MK$, vbi $ee$. pro lubitu assumere licet. Statuamus ergo $ee = (\pi - 2)aa$, vt area frusti sit ad aream lentis, vt $\pi - 2$ ad $\pi$, seu 4 ad 11, fiatque $KV = \frac{a}{y} \cdot MK$. Ad quam aequationem construendam ducto per centrum lentis C quadrante CHX, quem recta OM secet in T, erit $TX = \frac{a}{y} \cdot MK$, ideoque $KV = XT$. Vbique ergo sumatur arcus KV aequalis arcui XT, et spatium curua OHVI et radio OD inclusum dabit figuram frusti DOHVI, seu in situ lentem non impediente $EObvi$, quod pondere $Q = \frac{8}{11}P$ catino appressum desideratum praestabit effectum, vt figura catini non deformetur.

27. Etsi constructio lineae $Obvi$ est facilis, dum vbique arcus $kv$ arcui $xt$ aequalis est capiendus, constituto semicirculo $OmD$ semissi lentis aequali, tamen conueniet, aequationem huius curuae ad coordinatas orthogonales saltem proxime reduci. Sit igitur $Op = p$ et $pv = q$, existente $Ok = y = \sqrt{(pp + qq)}$ et $Ox = a$, et vocetur angulus $kOm = A\sin.\frac{y}{2a} = \Phi$, vt sit $y = 2a \sin.\Phi$, vnde ob $kv = xt = a\Phi$, hincque angulum $kOv = \frac{a\Phi}{y} = \frac{\Phi}{2\sin.\Phi}$ repetietur:

$$p = 2a\sin.\Phi \cos\frac{\Phi}{2\sin.\Phi} \text{ et } q = 2a\sin.\Phi \sin.\frac{\Phi}{2\sin.\Phi},$$

vnde

vnde approximando colligitur

$$q = 0{,}5463p + 0{,}03513.\frac{p^2}{a a}.$$

Initio ſcilicet circa O haec curua abit in rectam ad OE angulo 28°, 39′, cuius arcus ſemiſſi radii aequatur inclinato; pro puncto extremo autem $i$ fiunt coordinatae $p = q = a\sqrt{2}$.

28. Facillime autem huius fruſti figura in praxi hoc modo delineabitur: Radio OE diametro lentis aequali deſcribatur circulus, in quo primo capiatur arcus E$i$ = 45°, tum vero arcus E$n$ ſemiſſi rectae OE aequalis, qui continebit quaſi 28°, 39′: Deinde centro O radio dimidio O$c$ deſcribatur arcus $cg$ continens 30°, ac ducta recta O$n$ linea quaeſita circa O cum hac recta confundetur, tum vero ab ea paulatim recedens per punctum $g$ tranſibit, indeque proferetur ita in punctum $i$, vt hic circulum E$i$ tangat. Fruſtum ergo vitri terminandum eſt primo recta OE, tum arcu E$i$, ac denique linea curua O$gi$ oſtenſo modo praeſcripta: hocque vitrum catino appreſſum pondere $Q = \frac{4}{11}P$, dum P eſt pondus, quo lens ei apprimitur, impediet catini deprauationem. Tab. V. Fig. 2.

29. Hic modus figuram catini intemeratam conſeruandi in vſum vocari nequit, niſi lens ita detineatur, vt eius ora ad centrum catini vsque pertingat. Si enim a lente centrum catini plane non attereretur, quoniam etiam a fruſto viri, quod catino immotum

 in-

incumbere assumo, nullum attritum pateretur, nihil inde abraderetur, neque ergo deprauatio eius caueri posset. Quae est causa, cur hic lentem vsque ad catini centrum O porrigi assumserim. Caeterum cum tam lentis centrum C ope styli, quam totum vitri frustum perpetuo in eodem loco teneri debeat, artifex strenuus ope simplicis mechanismi haud difficulter hoc exequetur, simulque efficiet, vt cum lens dato pondere P catino apprimatur, frustum vitri debito pondere Q, quod ad illud sit vt 8 ad 11, sit oneratum. Hocque pacto lentibus praescripta figura induci poterit, dum inter operandum figura catini non deprauatur.

DE

# DE NOVA QVADAM VECTIS PROPRIETATE DISSERTATIO.

Auctore

*F. V. T. AEPINO.*

In euoluenda magnetis theoria occupatus, fortuito in notabilem quandam vectis proprietatem incidi, quam, vtpote non inelegantem, et a nemine, quantum fcio, animaduerfam, obliuioni eripiendam effe iudicaui, vnde non incongruum puto, fi ipfius in Commentariis Academiae mentio iniiciatur.

Nouam iftam proprietatem fequens comprehendit theorema: *Vectis BAC, aequalium brachiorum, extremis punctis B et C applicatae cogitentur vires datae magnitudinis, trahentes fecundum directiones, rectis pofitione datis LM et ON, parallelas, fecundum lineas nempe BD et CF. Exhibeatur altera harum virium per rectam BD, altera per EF, et prior refoluta cogitetur in vim vecti parallelam CB, atque normalem ED, pofteriorque fimili modo in vires CG et GF. Dico fore vectem ABC in aequilibrio conftitutum, quando eum adquifiuit fitum, vt fumma virium EB et CG fit maximum.* Tab. V. Fig. 3.

Pro demonftranda propofitionis iftius veritate, cogitetur pofitione data recta tertia RS, fitque angulus

gulus $LPI = \alpha$, $OQH = \beta$, $BKH = \Phi$, recta $BD = A$, $CF$ vero $= B$. Quaeramus iam situm vectis, siue angulum $\Phi$, qui summam rectarum $BE$ atque $CG$ reddit maximam. Quoniam hic angulus $LPI$ siue $BHI = \alpha$, $BKH$ vero $= \Phi$, erit $EBD = \alpha + \Phi$, vnde obtinemus in triangulo rectangulo $EBD$, $EB = A \cos(\alpha + \Phi)$. Similiter est angulus $FCG = \beta - \Phi$, atque $CG = B \cos.(\beta - \Phi)$. Fit itaque $EB + CG = A \cos.(\alpha + \Phi) + B \cos.(\beta - \Phi) = (A \cos.\alpha + B \cos.\beta) \cos\Phi - (A \sin.\alpha - B \sin\beta) \sin.\Phi$, quae quantitas si debeat esse maximum, erit, postquam capta sunt differentialia $-(A \cos.\alpha + B \cos.\beta) \sin.\Phi d\Phi - (A \sin.\alpha - B \sin\beta) \cos.\Phi d\Phi = 0$, vnde deducitur tang $\Phi = \frac{B \sin.\beta - A \sin.\alpha}{B \cos.\beta + A \cos.\alpha}$, ex qua aequatione deductus valor ipsius $\Phi$, quaesito satisfacit.

Ex staticis porro notum est, esse tum vectem $BAC$ in aequilibrio constitutum, quando est $ED = FG$. Cum ergo sit, vti ex supra traditis facile concluditur, $ED = A \sin.(\alpha + \Phi)$, atque $GF = B \sin.(\beta - \Phi)$, erit pro statu aequilibrii $A \sin.(\alpha + \Phi) = B \sin.(\beta - \Phi)$, siue $A \sin.\alpha \cos\Phi + A \cos\alpha \sin.\Phi = B \sin\beta \cos.\Phi - B \cos.\beta \sin.\Phi$, vnde fit $\frac{B \sin\beta - A \sin.\alpha}{B \cos.\beta + A \cos.\alpha} = \text{tang}.\Phi$, qui valor, cum idem sit cum antea reperto, veritas asserti nostri abunde patet.

Dubium autem incidere potest lectoribus, an recte asseruerim, $BE + CG$ esse maximum, conditio enim, quod quantitatis istius differentiale euanescat, pro hacce re probanda non sufficit, cum $BE + CG$ quoque esse possit minimum, immo contingere queat,

vt

vt neque maximum ſit, neque minimum. Aſt dubium facile tolli poteſt. Ponatur breuioris expreſſionis cauſa, $B \sin \beta - A \sin. \alpha = N$, $B \cos. \beta + A \cos. \alpha = M$, atque $BE + CG = z$. Quoniam iam pro caſu $dz = 0$, $\frac{N}{M} = \text{tang.}\, \Phi$, erit $\sin. \Phi = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}}$ atque $\cos. \Phi = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}}$, quos valores ſubſtituendo in formula ſupra reperta, erit pro caſu $dz = 0$, $z = \sqrt{M^2 + N^2}$. Sit porro $\Phi$ iſtud, quod reſpondet $dz = 0$, $= \psi$, atque ſit $\Phi$ reſpondens alii valori ipſius $z = \psi + \gamma$, eritque tum $z = M \cos. (\psi + \gamma) + N \sin. (\psi + \gamma) = M \cos. \psi \cos. \gamma - M \sin. \psi \cos. \gamma + N \sin. \psi \cos. \gamma + N \cos. \psi \sin. \gamma$, quae formula, ob $\sin. \psi = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}}$, et $\cos. \psi = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}}$, tranſit in $\cos. \gamma \sqrt{M^2 + N^2} = z$. Quodſi ergo $z$ reſpondens $dz$ euaneſcenti, quod ſupra repertum eſt $= \sqrt{M^2 + N^2}$, indicetur per $z'$, erit $z' \cos. \gamma = z$.

Cum itaque $\cos. \gamma$, quicunque valor tribuatur angulo $\gamma$, ſit ſemper minor radio, ſiue vnitate, erit generatim $z < z'$, vnde $z'$, omnino, vti aſſerui, eſt maximum.

# DESCRIPTIO INSTRVMENTI CVIVSDAM, NAVTIS BAROMETRI AD INSTAR INSERVITVRI.

## AVCTORE IO. ERN. ZEIHERO.

Praecipuum Barometri marini requisitum in eo consistit, vt aer in eiusmodi agat corpus, quod nauis agitatione nullam patiatur mutationem. Quare iam superiori saeculo Celeb. Dr. *Robertus Hook*, summa eiusmodi instrumenti vtilitate conuictus, Barometrum quoddam, quod concussionibus nauium non alteretur, excogitauit, coniungendo Thermometrum Florentinum cum Drebeliano, et, instituta vtriusque thermometri comparatione, in quorum vnum aeris pondus simul agit, alterum autem nullam ab eodem patitur mutationem, scalam, diuersa aeris pondera indicantem, perficiendo, vti ex Transactionibus Anglicanis notum est. Pari etiam modo Cel. *Amontons* Barometrum vsui huic memorato inseruiens inuenit, idque in Actis Parisinis descripsit. (*)

Vtrumque fortasse inuentum non modo perfectius, sed ad vsum etiam accommodatius reddi posset, si quis rem, de qua agitur, denuo suscipere velit.

Hac occasione, dum omnia quae huc spectant momenta, pensitabam, nouum inuentum subiit, quod, quum

(*) Vid. Mem. de l' Acad. des Sc. de Paris. ann. 1705. p. 62.

quum fortaſſe ad alia inuenta, multiplici vſu praeclara, aditum patefacere poſſit, in publicum proferre non dubitaui.

Si concipiamus mercurii loco in tubo Toricelliano elaterem, euidens eſt, eum vsque dum compreſſum iri, donec aeris preſſioni perfecte reſiſtat. Inde porro ſequitur, elaterem hunc ſub altitudine mercurii in Barometro Toricelliano minore, e. g. 27″, minus comprimi, quam ſi altitudinem 28 vel 29 digitorum attigerit. Hic itaque elater non ſecus ac columna mercurialis, mutato aeris pondere, ſpatium quoddam percurret, et ſi indice inſtrueretur, pari modo, ac mercurius, inde oriundas mutationes indicabit.

Hoc autem ſequenti modo, ego vt arbitror, effici poteſt. Conſtruatur cylindrus metallicus ABCD, quali alias ad euacuandum ſeu comprimendum aerem vtimur, eidemque adaptetur embolus E pertica EF inſtructus, ita, vt minimam, quantum fieri poteſt, patiatur frictionem; ſedulo tamen in conſtructione caveatur, ne aer intra parites cylindri et emboli latera ſeſe inſinuet. Inter hunc E, illiusque operculum AB, adaptetur ſpiralis G, quae altera extremitate embolo E, altera operculo AB ſit affixa. H eſt alter embolus, quo aer in cylindro inter vtrumque embolum contentus euacuatur. IK eſt capus, mediante cochlea K embolo H vel iungendus, vel pro lubitu ab eo ſeparandus. Pyxis, ſeu fundus CD, foramine quadrangulari, emboli partem eiusdem formae 1. 1. commode recipiente, eſt inſtructus. 2. 2. eſt alia emboli H pars ro- Tab. VI.

 tunda,

tunda, inque ſe inciſam habens cochleam, huicque reſpondet altera, femina 3. 3. quae embolum per foramen fundi quadrangulare retractum retinet. 4. 4. eſt annulus coriaceus, inter cylindri annulum 5. 5. et pyxidem CD poſitus, qui impedit, ne aer externus emboli latera ſubeat. Embolo H itaque verſus embolum E protruſo ad ſpiralis omnimodam compreſſionem (dematur autem prius hamulus $\alpha$, vt arcte ad ſe inuicem applicari poſſint emboli) indeque ad fundum vsque retracto, ſpatium inter E et H euacuabitur, et externa embolum premens aeris columna ſpiralem G ad certum gradum extendet, donec aeris preſſioni perfecte reſiſtat. Pronti autem aeris pondus mutatur, ſpiralis etiam plus minusue extendetur, embolusque vna cum ſua pertica FE, a minimo aeris pondere ad maximum vsque, ſpatium certum percurret, et quodlibet perticae EF punctum, ad externam operculi ſuperficiem AB relatum, pondus aeris mutatum indicabit.

Si igitur ad notandas mutationes ponamus, altitudinem mercurii eſſe in Barometro communi 28″, 4‴ ped. Rhenan. vis, qua ſpiralis G trahitur, aequalis erit preſſioni columnae mercurii, ſectionem emboli E transuerſam pro baſi, ac 28″, 4‴, pro altitudine habentis. Adeoque, vt determinetur, quo vsque ſpiralis hoc aeris pondere fuerit extenſa, quaenamque virgae EF pars extra operculum AB promineat, nihil aliud requiritur, quam vt auferatur fundus CD, extrahatur embolus H, hamuloque $\alpha$, embolo infixo, adpendatur pondus columnae mercuriali aequiponderans, idemque

idemque erit, ac ſi aeris columna embolo E incumbens omni ſua preſſione in ſpiralem G ageret, et perticae EF punctum in lineam AB cadens deſignare poterit; hocque modo alia quaeuis puncta a minima mutatione ad maximam vsque inuenientur, ponderis tantum, vel addendo, vel auferendo, quantum Barometri Toricelliani altitudines, a minima mutatione ad maximam vsque, requirunt.

Quum tota viciſſitudo ponderis aeris, vel mercurii, decimam quartam partem circiter attingat, ſpatium, quod punctum quodlibet perticae EF percurrit, non admodum poteſt eſſe magnum. Vt autem iſtae mutationes reddantur notabiliores, efficiatur, vt virga ſub motu ad rotulam $\beta$ patiatur frictionem, huicque acus $\beta\gamma$ affigatur, qua in laminae LMN, cui cylindrus ABCD duorum cingulorum ope annectitur, oppoſito latere diuiſiones in limbo inferiore notatae indicantur. Ne autem pertica vacillet, ſed in motu ſuo rotulam $\beta$ ſecum ſemper circumducat, ad $\delta$ alia rotula, quae elatere $\varepsilon$ inſtructa eſt, perticamque ad $\zeta$ articulo donatam, ad priorem adprimit, affigenda eſt.

Quum interdum fieri poſſit, vt acus caſu de loco ſuo excidat, virgam immotam derelinquens; neceſſe erit, vt certa Barometri altitudo, e. g. media, ſigno quodam in virga notetur, e. g. linea transuerſa, quae ſub medio aeris pondere in ſuperficiem AB iuſto cadat, et acus diuiſionem in laminae limbo MN factam in partes duas aequales diuidat. Haec ſi obſervetur cautela, inftrumentum, perticam vel deprimendo, vel retrahendo, eo vsque, donec linea fuperficiem AB attingat, acumque $\beta\gamma$ ad diuifionis medium dirigendo, denuo femper verificare poteris.

Ad excludendum vero omnem aerem, qui alias emboli E latera fubire facile poffet, olei et feui miftura (germ. Speiſe) fuper embolum ad aliquot linearum altitudinem affundatur. Si autem poft aliquod temporis interuallum effet, cur aerem clandeftino irruptum fufpicemur, tunc denuo euacuare cylindrum, et, fi fpiralem fuae elafticitatis feciffe iacturam foret coniectura, de nouo puncta determinare oportet: id quod facili opera fieri poteft.

---

---

DVARVM

# DVARVM MACHINARVM, VNIVS AD PERFICIENDA QVAEDAM INSTRVMENTA, GERM. Rändeleisen, ALTERIVS AD COCHLEAS INFINITAS EXSCINDENDAS IDONEAE, DESCRIPTIO.

## AVCTORE I. E. ZEIHERO.

Machinarum siue instrumentorum a modernis fabrefactorum capitula rotunda, cochleis adiuncta, et capsulas cylindricas, mediante cochlea connexas, striatis seu crenatis donatas esse marginibus, nonnullarum instar monetarum, notum est; id quod germanice vocant gerändelt. Crenae autem istae non tam ornamenti causa, quam potius magnum ob vsum, quem praestant, conficiuntur: multum enim faciunt, vt modo dictae partes et firmiter apprehendi, et commode moueri queant; cum e contrario in glabro margine non habeant, quo obfirmentur, digiti, ita vt cochleae soluendae saepius nobis non sit potestas.

Instrumentum, quo conficiuntur margines striati, est discus chalybeus Fig. 1. n. 7, 8, 9, 10, circa frontem excauatus, ac crenatus: crenae autem nihil aliud, quam cochlearum typi sunt. CD est furca, qua discus circa axem, altera extremitate capite, altera cochlea instructam, mouetur. G est vncus, quo capulo ligneo insinuatur. Tab. VII.

Opus

Opus autem marginandum torno formatur modo ſequenti: annulis hunc in finem torno iam efformatis, ac politis, inſtrumentum, Rändeleiſen dictum, fulcro imponitur, vti quoduis inſtrumentum tornatorium; porro inſtrumentum inter tornandum contra marginem operis marginandi fortiter premitur, tam diu, donec crenae inſtrumenti annulis perfecte ſint impreſſae: id quod peractis aliquot reuolutionibus factum erit.

Machina autem ipſa, ad iſtiusmodi inſtrumenta perficienda, vt et alia quaedam, cochleis infinitis quibusdam ſingularibus, quibus inſtrumenta hodie inſtructa reperiuntur, exſcindendis adaptata, vno eodemque fundatae ſunt principio, modo ratione ſtructurae parum diuerſae, quantum ſcilicet ſingularum peculiaris requirit vſus.

Cochleas infinitas modo dictas anglicanas omne id, quod in hoc genere adhuc inuentum eſt, ſuperare, nemo inficias iuerit: ideoque non incongruum fore iudicaui, ſi vtramque machinam, qualis in vſum laboratorii Mechanici a me inuenta, elaborata, Illuſtrique Conuentui exhibita eſt, deſcriberem.

Tab. VII. Fig. 1. n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, totam Machinam primo loco nominatam, ſecundum omnes ipſius partes, dimidio minores, quam elaboratae exſiſtunt, repraeſentat.

AB, CD, eſt par laminarum, mediantibus fruſtis *a*, *b*, cochleis iunctum, eo modo, vt, ſi neceſſe fuerit, iterum ſeiungi poſſit. E eſt pars mobilis, germanica voce Läufer dicta, quae cochleae F, partem *b* tranſeuntis ope protrudi et retrudi poteſt.

GH,

GH est cingulum machinam circumdans, mobile, clauo cochleatim striato *cd* fulcimenti instar inseruiens. Hic clauus, seu cochliditypus *cd*, circa extremitatem *d* quadrangularis est, thecae pariter quadrangulari apponendae, ac cochleae seu claui ope firmandae, adaptatus; thecae modo descriptae gyrgillus I K applicatur. Altera extremitas *d* pari modo, aut claui, aut cochleae ope, in loco suo retinetur, quod quilibet pro lubitu suo disponere potest, modo cochliditypus ita sit firmatus, vt circum quidem gyrari possit, non tamen vacillet, sed in situ suo semper retineatur.

Quodsi igitur machinae huius ope discos crenatos (Rändeleisen) performare animus est, primum disci chalybei torno perficiuntur, quorum diameter circiter duplex iconis *n.* 7, crassitiei cochliditypi proportionata est. Singuli disci medium foramine patet, cuius diameter foraminum *e*, *e*, n. 1. diametrum adaequat. Iidem circa frontem excauantur ita, vt ipsorum cauitas conuexitati cochliditypi circiter respondeat.

Quo facto, eorum duo machinae applicantur, vti ad n. 3, *g*, *h*, videre est. Interstitium inter laminas, atque discos chalybeos, bracteis tenuibus, rotundis, orichalceis, perforatis, impletur, et totus apparatus clauis *f*, *f*, traiicitur ita, vt vtramque machinae laminam transeant. Discorum vnus inter immobilem partem vtriusque laminae, alter inter mobilem, cochliditypus autem inter frontes discorum ponitur. Discos ita figere oportet, vt eorum frontes conuexitati cochliditypi respondeant, ne inaequabili modo exscindantur.

His ita dispositis, mediante cochlea F pars mobilis E, vna cum suo disco, contra cochliditypum, hicque contra discum oppositum, protruditur; denique cochliditypus gyrgilli ope circum mouetur, sic cochlidia, ad frontes discorum oppositos sese applicantia, eos secundum directiones oppositas circumagent, ac, parte mobili magis magisque protrusa, sensim sensimque discorum frontibus sese imprimient.

Ast caute faciendum est hoc opus: cochlea F enim paulo nimis intensa, clauus seu cochliditypus, vtpote valde induratus, facile diffringitur; exercitio solo acquiritur sensus quidam, quo, an resistentia nimis magna sit, nec ne, percipitur. Cochleam enim leuiter tantum intendere oportet, vt, discis prima vice reuolutis, vix cochlidiorum tramites sint conspiciendi; postea arctius sensim cogitur cochlea, donec post plures reuolutiones crenae satis profunde sint impressae.

Adhibentur autem non eam potissimum ob caussam duo disci, vt vterque simul exscindatur; sed potius, vt cochliditypus ex vtraque parte sibi inuicem opposita aequalem patiatur resistentiam, nec frangatur: id quod alias, ob illius in chalybem actionem, facile accidere posset. Quodsi vero cochliditypus admodum crassus sit, sine fracturae periculo vnicus etiam discus exscindi potest.

Altera, cochleis infinitis exscindendis inseruiens machina, ratione structurae a priori aliquantulum differt: partim, quod opera diuersae valde diametri hac mediante exscinduntur; partim, quoniam clauus tantum modo

modo in orichalcum, vel ad summum in ferrum agit, nec opus est, vt clauus discos duos sibi oppositos simul exscindat.

Machinam totam, omnesque eius partes, dimidio imminutas, fig. 2 et 3. n. 1, 2; 3, 4, 5, repraesentant. Tab. VII. et VIII.

AB, CD, pariter, vt in machina priore, laminae sunt, cum partibus *a*, *b*, mediantibus cochleis, capitibus quadrangularibus instructis, coniunctae. GH est cingulum vna cum suo cochliditypo *c d*. Cuneus *lm* cingulo GH et cochleae F est interponendus, vt haec illi innitatur, cingulumque GH vna cum suo cochliditypo *cd* ad opus exscindendum apprimat, vti ad fig 2. n 1, punctis notatum videre est. *e e e* etc. sunt foramina, operi firmando inseruientia, quorum vni vel alteri, prouti diameter operis elaborandi illud requirit, vncus *f* inseritur; quem in finem, ne vncus, nisi forte foramen perfecte impleret, vacillet, sed firmiter in suo remaneat situ, quadrangularia ista facta sunt foramina. In eiusmodi enim operibus, prout res postulat, diuersae crassitiei axes obueniunt.

Quum disci integri raro, vtplurimum autem semicirculi vel quadrantes, aut sectores circulorum exscindantur, facile est perspectu, necesse esse, vt cochliditypus reducatur, opereque ab vna ad alteram extremitatem peracto, denuo adigatur.

Reliqua autem momenta, machinae huius vsum concernentia, quum e prioris machinae descriptione pateant, superfluum foret repetere.

# ACVS NAVTICAE NOVAE DESCRIPTIO.

## AVCTORE I. E. ZEIHERO.

Expositis in nouae acus declinatoriae descriptione proprietatibus, quibus effectum est, vt pertica chalybea, tanquam pars acus princeps, vim maximam magneticam, nec, nisi polos duos acceperit: vlterius meditatus sum de inueniendo aliquo modo, vi cuius prisma eiusmodi chalybeum ita possit suspendi, vt libere sese circummouere, ac per consequens pyxidis nauticae vsitatae ad instar inseruire queat; id quod obtinebitur sequenti modo:

Tab. IX. Fig. 1. Elaboretur virga magnetica (A, B) eodem plane modo, quem ad acum declinatoriam perficiendam adhibere oportebat, perforeturque pariter duabus cochleis Fig. 1. et 2. cauis (1 - 2); loco autem apparatus praecedentis, firmetur nunc, ac iungatur cum acu, frustum orichalceum Fig. 2. et 3. (C D E F). Frustum hoc ex lamina (C D) consistit, cuius in medio pyxis (5), achate, cauitate conica vel parabolica (F) instructo, munita, continetur. Eidem laminae circulus (E F) columnellarum ope (3 - 4) est affixus, totusque apparatus mediantibus cochleis (1 - 2) perticae chalybeae annectitur.

Quum circulus ad conseruandum aequilibrium factus sit, e rei natura sequitur, illum tam longe infra virgam esse ponendum, vt centrum grauitatis commune

mune totius apparatus ſub centrum motus cadat, acusque aequilibrium ſemper reſtituatur. Huncque in finem circulus iſte columnellarum (3-4) ope cum acu eſt coniunctus, vt ſitum ſatis profundum obtineat.

Cui Nonio vti libet, circuli arcus (E F), quibus acus extremitates inſtruuntur, diuiſionesque deſignantur, pari modo mediantibus columnellis (3-4) in tanta a ſuperficie acus inferiore diſtantia diſponat, quanta ad conſeruandum acus aequilibrium requiritur, ſic circulo, primo loco deſcripto, non erit opus. Fig. 4.

---

---

# DE AEQVILIBRIO VIRIVM CORPORIBVS ADPLICATARVM COMMENTATIO.

Auctore

S. *KOTELNIKOW.*

I.

Nemo, vt ſpero, dubitat, quin illud, paſſim traditum et demonſtratum in libris mechanicis, theorema de aequilibrio trium corpori adplicatarum virium ſit vtiliſſimum; nullam tamen eius demonſtrationem ita eſſe comparatam, vt nihil obiici poſſit, aut in dubium vocari. Omnes vero iſtae difficultates euaneſcerent, ſi principium minimae actionis, a Celeberr. *Mopertuiſio* detectum, admittere vellemus, de cuius veritate fere amplius dubitare non licet, cum ea a Celeberr. *Eulero* aliisque adplicatione illius principii, tum ad Mechanicam, tum ad Staticam, et inde deductis legitimis conſequentiis, ita euicta eſſe videatur, vt absque dubio inter veritates iam rigide demonſtratas referri poſſit. Ex principio illo non ſolum trium virium in aequilibrio conſtitutarum proprietates, ſed et plurium, eadem facilitate deducuntur. E contrario per methodos adhuc vſitatas, non niſi de tribus tantum viribus, quantum mihi conſtat, facile demonſtrari ſolet, eas eſſe in aequilibrio, ſi quaelibet earum ſit, vt ſinus anguli

anguli a directionibus reliquarum facti. Theorema hoc etiam ex principio minimae actionis, ni fallor, iam saepius demonstratum est, sed methodus haec ad plures, quam tres vires nunquam extensa fuit; egregias tamen praebet et maxime notatu dignas proprietates, si corpori plures vires adplicatae, in aequilibrio constitutae, considerentur.

2. Sint vires puncto alicui adplicatae, A, B, C, D, E, F, G etc. et earum distantiae respectiuae $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, $u$, $x$ etc. Erunt momenta istarum virium $Ap$, $Bq$, $Cr$, $Ds$, $Et$, $Fu$, $Gx$ etc. Et quia actiones harum virium per earum momenta exprimuntur, principium supra memoratum, ad scopum nobis propositum ita enunciabitur, *vt summa actionum omnium virium puncto adplicatarum debeat esse semper minima*, si nempe vires in aequilibro sunt. Ex hoc igitur principio erit

$$Ap + Bq + Cr + Ds + Et + Fu + \text{etc. minimum},$$

Et ex natura minimi debet esse:

$$A\,dp + B\,dq + C\,dr + D\,ds + E\,ds + E\,dt + F\,du + \text{etc.}$$

Hoc est, si situs puncti, cui vires sunt adplicatae, etiamsi infinite parum mutetur, tamen summa actionum debeat esse eadem, et propterea differentia inter summam actionem prioris status et posterioris erit nihilo aequalis, seu nulla.

3. Videamus nunc, quales obtineant valores, ipsae $dp$, $dq$, $dr$, $ds$ etc. si situs puncti, cui potentiae A, B, C, D etc. adplicatae sunt, infinite parum immutetur. Hunc in finem ponamus potentias A, B, C, Tab X. Fig. 1.

D, E,

D, E, F, G etc adplicatas esse puncto O, in distantiis AO, BO, CO, DO, EO, FO, GO etc. hoc est, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, $u$, $x$ etc. easque esse in statu aequilibrii. Vocentur anguli $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, $COD = \gamma$, $DOE = \delta$, $EOF = \epsilon$, $FOG = \zeta$, $GOA = \eta$, etc. Ponamus nunc punctum O translatum esse in o, et transibunt $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, $u$, $x$ etc. in $p + dp$, $q + dq$, $r + dr$, $s + ds$, $t + dt$, $u + du$, $x + dx$ etc. Cum vero summa actionum respectu puncti O sit $Ap + Bq + Cr + Ds + Et + Fu + Gx +$ etc. erit eadem respectu ipsius o $A(p + dp) + B(q + dq) + C(r + dr) + D(s + ds) + E(t + dt) + F(u + du) + G(x + dx) +$ etc. Hinc differentia $A\,dp + B\,dq + C\,dr +$ etc. quae aequalis nihilo esse debet; ideoque

$$A\,dp + B\,dq + C\,dr + D\,ds + F\,dt + E\,du + G\,dx + \text{etc.} = 0.$$

4. Vt iam valores ipsarum $dp$, $dq$, $dr$ etc. determinentur, concipiatur ex o per O ducta recta indefinita oON, et ex A tamquam centro, radio AO descriptus arculus $Oa$, et habebitur, propter $AO = Aa$, $ao = dp$. Ponatur angulus $NOA = \Phi$, et quia $NOA = NoA + OAo = NoA$, propter $OAo$ infinite paruum, erit $dp = Oo.\,\text{cos}.\,\Phi = dm\,\text{cos}.\,\Phi$, posito $Oo = dm$. Eodem modo, facto ex B radio BO arculo $Ob$, habebitur $ob = dq$, et propter $OBo$ infinite paruum $NOB = NOA + AOB = NoB$, hoc est $\Phi + \alpha = NoB$. Hinc $dq = dm\,\text{cos}.\,(\Phi + \alpha)$. Haud dissimili modo determinabitur $dr = dm\,\text{cos}.\,(\Phi + \alpha + \beta)$, $ds = dm\,\text{cos}.\,(\Phi + \alpha + \beta + \gamma)$, $dt = dm\,\text{cos}.\,(\Phi + \alpha + \beta + \gamma + \delta)$, $du = dm\,\text{cos}.\,(\Phi + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon)$, $dx = dm\,\text{cos}.\,(\Phi + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta)$, etc.

5. Ex

5. Ex his valoribus ipsarum $dp$, $dq$, etc. perspicitur simul lex, secundum quam formantur, ita vt si etiam numerus potentiarum sit infinitus, valores incrementorum, distantiarum virium puncto adplicatarum, facile per cosinus angulorum, a directionibus virium factorum, determinantur; quae lex vt melius percipi posset, placet valores illos in ordinem ponere,

$$dp = dm\,\text{cos.}\Phi;\ dq = dm\,\text{cos.}(\Phi+\alpha);\ dr = dm\,\text{cos.}(\Phi+\alpha+\beta);$$
$$ds = dm\,\text{cos.}(\Phi+\alpha+\beta+\gamma);\ dt = dm\,\text{cos.}(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta);$$
$$du = dm\,\text{cos.}(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon);\ dx = dm\,\text{cos.}$$
$$(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta);\ \text{etc.}$$

vbi attente consideranti obuium erit, valores istos ita formari. Si nempe punctum O, cui potentiae A, B, C, etc. adplicatae sunt, concipiatur ex O ad distantiam infinite paruam in $o$ transiisse, et ex $o$ per O ducta recta indefinita $o$ON, quae cadet intra aliquem angulum, a duabus potentiis formatum, vt in nostro casu intra AOG, eumque diuidet in duos alios AON et NOG, tum faciendo initium a potentia G vel A, quod perinde est, determinabitur incrementum distantiae AO per cosinum anguli NOA per O$o$ mutiplicatum; et incrementum distantiae sequentis potentiae B, per cosinum summae angulorum NO Aet AOB, per O$o$ multiplicatum; et incrementum distantiae tertiae potentiae C, per cosinum summae trium angulorum praecedentium NOA, AOB et BOC, per distantiam O$o$ multiplicatum; etc. Ita vt si numerus potentiarum sit $= n$, incrementum distantiae vltimae potentiae erit aequale producto ex cosinu angulorum praecedentium $n-1$ in O$o$. Tab. X. Fig. 1.

6. Valores incrementorum distantiarum virium puncto adplicatarum, hoc modo determinati, in aequatione,

$$A\,dp + B\,dq + C\,dr + D\,ds + \text{etc.} = 0$$

quam canonicam vocare licet, substituantur, et prodibit

$$A\cos.\phi + B\cos.(\phi+\alpha) + C\cos(\phi+\alpha+\beta) + D\cos(\phi+\alpha+\beta+\gamma) + E\cos.(\phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \text{etc.} = 0$$

seu

$$\left.\begin{array}{l} A\cos.\phi + B\cos.\phi\cos.\alpha + C\cos.\phi\cos.(\alpha+\beta) + D\cos.\phi\cos.(\alpha+\beta+\gamma) + E\cos.\phi\cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \text{etc.} \\ - B\sin.\phi\sin.\alpha - C\sin\phi\sin.(\alpha+\beta) - D\sin.\phi\sin.(\alpha+\beta+\gamma) - E\sin.\phi\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \text{etc} \end{array}\right\} = 0$$

Ex hac vltima aequatione ratio potentiarum determinari debet.

7. Cum situs puncti o sit arbitrarius, angulus $\phi$ variae magnitudinis esse potest, ideoque propter diuersos valores sinuum et cosinuum ipsius $\phi$, aequatio generalis plures partiales praebere potest, prouti successiue alii atque alii termini euanescant. Angulus $\phi$, denotante $\pi$ semicirculum, potest esse vel o, vel $\frac{1}{2}\pi$; vel $\pi$; vel $\frac{3}{2}\pi$; vel $2\pi$; vel $\frac{5}{2}\pi$; etc. Erunt eius sinus respectiue

$$0; \quad 1; \quad 0; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \text{ etc.}$$

et cosinus

$$1; \quad 0; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \quad 0; \text{ etc.}$$

Reliquorum valorum ipsius $\phi$ vsque in infinitum, sinus et cosinus coincidunt cum quatuor priorum o, $\frac{1}{2}\pi$, $\pi$, et $\frac{3}{2}\pi$. Vnde patet aequationem generalem, plures duabus praebere non posse, quae prodeunt ponendo $\phi = 0$ et $\phi = \frac{1}{2}\pi$; vel $\phi = \frac{1}{2}\pi$; et $\phi = \pi$; vel $\phi = \pi$; et et $\Phi = \frac{3}{2}\pi$; vel $\Phi = 0$ et $\Phi = \frac{3}{2}\pi$. Nos ſumemus in poſterum ſemper hos duos valores $\Phi = 0$ ſcilicet et $\Phi = \frac{1}{2}\pi$.

8. Vidimus ſupra, quomodo valores incrementorum diſtantiarum, quarumlibet potentiarum, inueniantur, et demonſtrauimus, pro vnico valore cuiusuis incrementi dari duas aequationes, propter duos diuerſos valores ipſius $\Phi$; videamus quoque, quot valores accipere poteſt incrementum diſtantiae cuiusuis potentiae puncto O adplicatae, dum punctum illud ſucceſſiue ex vno loco in aliud transferatur. Primo intuitu adparet, puncti O ſitum poſſe mutari, non ſolum ita, vt cadat in *o*, intra angulum DOE, ſed etiam intra quemlibet alium, a directionibus duarum virium factum; et cum talium angulorum tot ſint, quot numero potentiae, tot etiam dantur varii ſitus puncti O, ita vt quoduis diſtantiae incrementum, alium, pro alio puncti O ſitu, valorem obtineat. Si numerus potentiarum ſit $= n$, quoduis incrementum $dp$, $dq$, $dr$ etc. ſortietur $n$ valores diuerſos. Ideoque, propter ſupra demonſtrata, aequatio generalis canonica praebebit $2n$ aequationes particulares, ex quibus valores potentiarum in aequilibrio conſtitutarum, angulorumque ab iis factorum, determinandi ſunt.

9. Quoniam ex algebra conſtat, tot debere eſſe aequationes, quot ſunt incognitae, dubium hic ſuboriri poteſt, plures dari aequationes, quam neceſſe eſt; nam potentiae per ſinus angulorum, et ſinus per potentias tantum determinari poſſunt, quare non pluribus $n$ ae-

 quatio-

quationibus opus esse videtur. denotante $n$ numerum potentiarum. Sed in posterum patebit, quamlibet potentiam duplici modo determinatum iri, et quaeuis binae determinationes, re vera non nisi vnicam dant tantum aequationem, naturam aequilibrii continentem.

10. Supra demonstrauimus legem, qua valores ipsorum $dp$, $dq$, $ds$ etc. formantur, pro qualibet positione rectae $o$ON, a situ puncti $o$ pendente. Ita pro positione rectae $o$ON, quando ista cadit intra angulum AOG, habuimus $dp = dm \cos. \Phi$, $dq = dm \cos. (\Phi + \alpha)$, $as = dm \cos. (\Phi + \alpha + \beta)$ etc. Si iam recta ON, promoueatur, et successiue intra angulos AOB, BOC, COD etc. cadat, dum iterum ad angulum GOA redeat, valores ipsorum $dp$, $dq$, $dr$ etc. ita se habebunt, pro qualibet positione recta ON.

| | 1. | 2. |
|---|---|---|
| $dp$ | $dm \cos. \Phi$ . . . | $dm \cos. (\Phi+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)$ |
| $dq$ | $dm \cos. (\Phi+\alpha)$ . . | $dm \cos \Phi$ . . . |
| $dr$ | $dm \cos (\Phi+\alpha+\beta)$ . . | $dm \cos. (\Phi+\beta)$ . . |
| $ds$ | $dm \cos. (\Phi+\alpha+\beta+\gamma)$ . | $dm \cos. (\Phi+\beta+\gamma)$ . |
| $dt$ | $dm \cos. (\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ . | $dm \cos. (\Phi+\beta+\gamma+\delta)$ . |
| $du$ | $dm \cos (\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$ | $dm \cos. (\Phi+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$ |
| $dx$ | $dm \cos. (\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$ | $dm \cos. (\Phi+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$ |

3.

| | 3. | 4. |
|---|---|---|
| $dp$ | $dm\cos.(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)$ | $dm\cos.(\Phi+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)$ |
| $dq$ | $dm\cos.(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha)$ | $dm\cos.(\Phi+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha)$ |
| $dr$ | $dm\cos.\Phi$ | $dm\cos.(\Phi+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha+\beta)$ |
| $ds$ | $dm\cos.(\Phi+\gamma)$ | $dm\cos.\Phi$ |
| $dt$ | $dm\cos.(\Phi+\gamma+\delta)$ | $dm\cos.(\Phi+\delta)$ |
| $du$ | $dm\cos.(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon)$ | $dm\cos.(\Phi+\delta+\varepsilon)$ |
| $dx$ | $dm\cos.(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$ | $dm\cos\,(\Phi+\delta+\varepsilon+\zeta)$ |

| | 5. | 6. |
|---|---|---|
| $dp$ | $dm\cos.(\Phi+\varepsilon+\zeta+\eta)$ | $dm\cos.(\Phi+\zeta+\eta)$ |
| $pq$ | $dm\cos.(\Phi+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha)$ | $dm\cos.(\Phi+\zeta+\eta+\alpha)$ |
| $dr$ | $dm\cos.(\Phi+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha+\beta)$ | $dm\cos.(\Phi+\zeta+\eta+\alpha+\beta)$ |
| $ds$ | $dm\cos.(\Phi+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha+\beta+\gamma)$ | $dm\cos.(\Phi+\zeta+\eta+\alpha+\beta+\gamma)$ |
| $dt$ | $dm\cos.\Phi$ | $dm\cos.(\Phi+\zeta+\eta+\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ |
| $du$ | $dm\cos.(\Phi+\varepsilon)$ | $dm\cos\,\Phi$ |
| $dx$ | $dm\cos.(\Phi+\varepsilon+\zeta)$ | $dm\cos.(\Phi+\zeta)$ |

| | 7. |
|---|---|
| $dp$ | $dm\cos.(\Phi+\eta)$ |
| $dq$ | $dm\cos.(\Phi+\eta+\alpha)$ |
| $dr$ | $dm\cos.(\Phi+\eta+\alpha+\beta)$ |
| $ds$ | $dm\cos\,(\Phi+\eta+\alpha+\beta+\gamma)$ |
| $dt$ | $dm\cos.(\Phi+\eta+\alpha+\beta+\gamma+\delta$ |
| $du$ | $dm\cos.(\Phi+\eta+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$ |
| $dx$ | $dm\cos.\Phi$ |

In hac tabula prima columna repraesentat valores ipsorum $dp$, $dq$, $dr$ etc. pro positione rectae $o$ON intra angulum GOA; secunda pro situ eiusdem rectae intra angulum AOB; et tertia pro situ intra angulum BOC et ita porro.

11. Tabulam hanc adornauimus, pro eo casu, vbi septem potentiae puncto O adplicatae sunt, et ob eam rem tantum, vt facilius adpareat, qua ratione, pro quolibet incremento distantiae, tot valores formari possint, quot potentiae sunt. Nam ex inspectione solum huius tabulae lex formationis abunde perspicitur, neque explicationem eius exhibere necesse est. Ad normam huius tabulae, quolibet casu dato, pro quouis potentiarum numero, similis facile componi poterit; quod sequentibus exemplis illustrabitur.

Fig. 2. 12. Sint puncto O tres potentiae A, B et C adplicatae, et vocentur distantiae $AO = p$, $BO = q$, $CO = r$; et anguli $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, $COD = \gamma$; tum erit ex supra demonstratis, retentis denominationibus $dm$ et $\Phi$,

| | | |
|---|---|---|
| $dp = dm\,\text{cos}\,\Phi$ | $dp = dm\,\text{cos}\,(\Phi+\beta+\gamma)$ | $dp = dm\,\text{cos}.(\Phi+\gamma)$ |
| $dq = dm\,\text{cos}\,(\Phi+\alpha)$ | $dq = dm\,\text{cos}\,\Phi$ | $dq = dm\,\text{cos}.(\Phi+\gamma+\alpha)$ |
| $dr = dm\,\text{cos}.(\Phi+\alpha+\beta$ | $dr = dm\,\text{cos}.(\Phi+\beta)$ | $dr = dm\,\text{cos}.\Phi$ |

quibus in aequatione canonica $A\,dp + B\,dq + C\,dr = 0$ substitutis prodibit

$$\text{I.}\quad A\,\text{cos}.\,\Phi + B\,\text{cos}.\,(\Phi+\alpha) + C\,\text{cos}.\,(\Phi+\alpha+\beta) = 0$$

$$\text{II.}\quad B\,\text{cos}.\,\Phi + C\,\text{cos}.\,(\Phi+\beta) + A\,\text{cos}.\,(\Phi+\beta+\gamma) = 0$$

$$\text{III.}\quad C\,\text{cos}.\,\Phi + A\,\text{cos}.(\Phi+\gamma) + B\,\text{cos}.\,(\Phi+\gamma+\alpha) = 0$$

seu

$$\text{I.}\quad \left.\begin{array}{l} A\,\text{cos}.\,\Phi + B\,\text{cos}.\,\Phi\,\text{cos}.\,\alpha + C\,\text{cos}.\,\Phi\,\text{cos}.(\alpha+\beta) \\ \qquad - B\,\text{sin}.\,\Phi\,\text{sin}.\,\alpha - C\,\text{sin}.\,\Phi\,\text{sin}\,(\alpha+\beta) \end{array}\right\} = 0$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{array}{l} B\,\text{cos}.\,\Phi + C\,\text{cos}.\,\Phi\,\text{cos}.\,\beta + A\,\text{cos}.\,\Phi\,\text{cos}.(\beta+\gamma) \\ \qquad - C\,\text{sin}.\,\Phi\,\text{sin}.\,\beta - A\,\text{sin}.\,\Phi\,\text{sin}.(\beta+\gamma) \end{array}\right\} = 0$$

$$\text{III.}\quad \left.\begin{array}{l} C\,\text{cos}.\,\Phi + A\,\text{cos}.\,\Phi\,\text{cos}.\,\gamma + B\,\text{cos}.\,\Phi\,\text{cos}.(\gamma+\alpha) \\ \qquad - A\,\text{sin}.\,\Phi\,\text{sin}.\,\gamma - B\,\text{sin}.\,\Phi\,\text{sin}.(\gamma+\alpha) \end{array}\right\} = 0$$

Pona-

Ponatur $\Phi = 0$, erit $\sin.\Phi = 0$, et $\cos.\Phi = 1$, tunc orientur:

$$\text{I.}\quad A + B\cos.\alpha + C\cos.(\alpha+\beta) = 0$$
$$\text{II.}\quad B + C\cos.\beta + A\cos.(\beta+\gamma) = 0$$
$$\text{III.}\quad C + A\cos.\gamma + B\cos.(\gamma+\alpha) = 0$$

Est vero propter $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$, $\cos.(\alpha+\beta) = \cos\gamma$, $\cos.(\beta+\gamma) = \cos.\alpha$, et $\cos.(\gamma+\alpha) = \cos\beta$, quibus substitutis habebitur:

$$A + B\cos.\alpha + C\cos.\gamma = 0;\ B + C\cos.\beta + A\cos\alpha = 0;$$
$$C + A\cos.\gamma + B\cos.\beta = 0;$$

Eodem modo, posito $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, propter $\sin.\Phi = 1$, et $\cos\Phi = 0$, obtinebitur:

$$B\sin\alpha + C\sin.(\alpha+\beta) = 0;\ (\sin\beta + A\sin.(\beta+\gamma) = 0;$$
$$A\sin.\gamma + B\sin.(\gamma+\alpha) = 0;$$

Ex quibus prodit:

$$B\sin.\alpha = C\sin.\gamma;\ C\sin.\beta = A\sin.\alpha;\ A\sin.\gamma = B\sin.\beta;$$

Ex his aequationibus, valores ipsarum $B$, $C$ et $A$ in prioribus substituantur, et habebitur:

$$\text{I.}\quad A\sin.\alpha + C\sin.\gamma\cos\alpha + C\cos.\gamma\sin\alpha = 0$$
$$\text{II.}\quad B\sin\beta + A\sin.\alpha\cos.\beta + A\cos.\alpha\sin.\beta = 0$$
$$\text{III.}\quad C\sin\gamma + B\sin.\beta\cos.\gamma + B\sin.\gamma\cos.\beta = 0.$$

Ex quibus oritur:

$$A\sin.\alpha = C\sin.\beta;\ B\sin.\beta = A\sin.\gamma;\ C\sin.\gamma = B\sin.\alpha;$$

13. Inuenimus igitur sex aequationes sequentes:

$$A\sin\alpha = C\sin.\beta;\ B\sin.\beta = A\sin.\gamma;\ C\sin.\gamma = B\sin\alpha;$$
$$B\sin.\alpha = C\sin.\gamma;\ C\sin\beta = A\sin.\alpha;\ A\sin.\gamma = B\sin.\beta;$$

quarum, binae inter se conueniunt; sed hoc in aliis casibus,

casibus, vbi plures potentiae considerantur, non fit. Lex, qua istae aequationes formantur, est talis: Numerando potentias ab A versus dextram, hoc ordine A, B, C, priores tres aequationes obtinebis, si primam potentiam multiplices in cosinum anguli adiacentis ad dextram illius potentiae, illudque productum aequabis tertiae potentiae, in cosinum sequentis anguli multiplicatae. Eodem modo formantur tres aequationes, numerando potentias in partem contrariam, secundum ordinem A, C, B. Si harum aequationum I et IV, II et V, III et VIta, combinentur, habebis tres aequationes, aequilibrii naturam continentes:

I. $A(\sin.\alpha + \sin.\gamma) = (B + C)\sin.\beta$

II. $B(\sin.\beta + \sin.\alpha) = (A + C)\sin.\gamma$

III. $C(\sin.\gamma + \sin.\beta) = (A + B)\sin.\alpha$

Fig. 3. 14. Pro quatuor potentiis, vbi $AO = p$, $BO = q$, $CO = r$, $DO = s$, habebitur, existentibus angulis $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, $COD = \gamma$, $DOH = \delta$;

| | |
|---|---|
| $dp = dm\cos.\Phi$ | $dp = dm\cos.(\Phi + \beta + \gamma + \delta)$ |
| $dq = dm\cos.(\Phi + \alpha)$ | $dq = dm\cos.\Phi$ |
| $dr = dm\cos(\Phi + \alpha + \beta)$ | $dr = dm\cos.(\Phi + \beta)$ |
| $ds = dm\cos.(\Phi + \alpha + \beta + \gamma)$ | $ds = dm\cos(\Phi + \beta + \gamma)$ |

| | |
|---|---|
| $dp = dm\cos.(\Phi + \beta + \gamma + \delta$ | $dp = dm\cos.(\Phi + \gamma + \delta)$ |
| $dq = dm\cos.(\Phi + \gamma + \delta + \alpha)$ | $dq = dm\cos.(\Phi + \delta + \alpha)$ |
| $dr = dm\cos.\Phi$ | $dr = dm\cos.(\Phi + \delta + \alpha + \beta)$ |
| $ds = dm\cos.(\Phi + \gamma)$ | $ds = dm\cos.\Phi$ |

quibus valoribus ipsorum $dp$, $dq$, $dr$, $ds$ in aequatione

$$A\,dp + B\,dq + C\,dr + D\,ds = 0$$

substi-

substitutis, elicientur quatuor aequationes sequentes:

$$\text{I. } \left.\begin{array}{l} A\cos.\Phi + B\cos.\Phi\cos.\alpha + C\cos.\Phi\cos.(\alpha+\beta) + D\cos.\Phi\cos.(\alpha+\beta+\gamma) \\ - B\sin.\Phi\sin.\alpha - C\sin.\Phi\sin.(\alpha+\beta) - D\sin.\Phi\sin.(\alpha+\beta+\gamma) \end{array}\right\} = 0$$

$$\text{II. } \left.\begin{array}{l} \cos.\Phi(B + C\cos.\beta + D\cos.(\beta+\gamma) + A\cos.(\beta+\gamma+\delta)) \\ - \sin.\Phi(C\sin.\beta + D\sin.(\beta+\gamma) + A\sin.(\beta+\gamma+\delta)) \end{array}\right\} = 0$$

$$\text{III. } \left.\begin{array}{l} \cos.\Phi(C + D\cos.\gamma + A\cos.(\gamma+\delta) + B\cos.(\gamma+\delta+\alpha)) \\ - \sin.\Phi(D\sin.\gamma + A\sin.(\gamma+\delta) + A\sin.(\gamma+\delta+\alpha)) \end{array}\right\} = 0$$

$$\text{VI. } \left.\begin{array}{l} \cos.\Phi(D + A\cos.\delta + B\cos.(\delta+\alpha) + C\cos.(\delta+\alpha+\beta)) \\ - \sin.\Phi(A\sin.\delta + B\sin.(\delta+\alpha) + C\sin.(\delta+\alpha+\beta)) \end{array}\right\} = 0$$

Sit vti supra fecimus $\Phi = 0$, erit $\sin.\Phi = 0$, $\cos.\Phi = 1$. qui valor ipsius $\Phi$ dabit hos aequationes:

$$\text{I. } A + B\cos.\alpha + C\cos.(\gamma+\delta) + D\cos.\delta = 0$$
$$\text{II. } B + C\cos.\beta + D\cos.(\alpha+\delta) + A\cos.\alpha = 0$$
$$\text{III. } C + D\cos.\gamma + A\cos.(\alpha+\beta) + B\cos.\beta = 0$$
$$\text{IV. } D + A\cos.\delta + B\cos.(\gamma+\beta) + C\cos.\gamma = 0$$

Item, posito $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, prodibunt, propter $\sin.\Phi = 1$ et $\cos.\Phi = 0$, sequentes:

$$\text{I. } B\sin.\alpha = D\sin.\delta + C\sin.(\gamma+\delta)$$
$$\text{II. } C\sin.\beta = A\sin.\alpha + D\sin.(\delta+\alpha)$$
$$\text{III. } D\sin.\gamma = B\sin.\beta + A\sin.(\alpha+\beta)$$
$$\text{IV. } A\sin.\delta = C\sin\gamma + B\sin.(\beta+\gamma)$$

Multiplicentur quatuor priores aequationes respectiue per $\sin.\alpha$, $\sin.\beta$, $\sin.\gamma$, $\sin.\delta$ et posteriores per $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$, $\cos.\gamma$, $\cos.\delta$; tandem in prioribus pro $B\sin.\alpha\cos.\alpha$, $C\sin.\beta\cos.\beta$, $D\sin.\gamma\cos.\gamma$ et $A\sin.\delta\cos.\delta$ substituantur earum valores, ex posterioribus deprompti. Et hic priores quatuor aequationes in sequentes transformabuntur:

$$\text{I. } A\sin.\alpha + C\sin.(\alpha+\gamma+\delta) + D\sin.(\alpha+\delta) = 0$$
$$\text{II. } B\sin.\beta + D\sin.(\beta+\alpha+\delta) + A\sin.(\beta+\alpha) = 0$$
$$\text{III. } C\sin.\gamma + A\sin.(\gamma+\alpha+\beta) + B\sin.(\gamma+\beta) = 0$$
$$\text{IV. } D\sin.\delta + B\sin.(\delta+\gamma+\beta) + C\sin.(\delta+\gamma) = 0$$

 ex

ex quibus, quia fin. $(\alpha+\gamma+\delta)=-$fin. $\beta$, fin. $(\alpha+\delta) =-$fin. $(\beta+\gamma)$ etc., elicientur

$$A \text{ fin. } \alpha = C \text{ fin. } \beta + D \text{ fin. } (\beta+\gamma)$$
$$B \text{ fin. } \beta = D \text{ fin. } \gamma + A \text{ fin. } (\gamma+\delta)$$
$$C \text{ fin. } \gamma = A \text{ fin. } \delta + B \text{ fin. } (\alpha+\delta)$$
$$D \text{ fin. } \delta = B \text{ fin. } \alpha + C \text{ fin. } (\alpha+\beta).$$

15. Inuenimus igitur octo aequationes, quae fimili modo formantur, vt et primum inuentae fex; nempe fi potentiam quamcunque A multiplices per finum anguli, inter eam et proxime fequentem intercepti, hocque productum aequale ponas fummae productorum, ex tertia potentia ab A numerando in finum anguli, inter eam et fecundam intercepti, et ex quarta in finum angulorum inter eam et fecundam iacentium: aequationes, quae hoc modo formantur, et quas iam fupra paragrapho praecedenti elicuimus, funt:

$$\text{I.} \quad A \text{ fin. } \alpha = C \text{ fin. } \beta + D \text{ fin. } (\beta+\gamma)$$
$$\text{II.} \quad B \text{ fin } \beta = D \text{ fin. } \gamma + A \text{ fin. } (\gamma+\delta)$$
$$\text{III.} \quad C \text{ fin. } \gamma = A \text{ fin. } \delta + B \text{ fin. } (\delta+\alpha)$$
$$\text{IV.} \quad D \text{ fin. } \delta = B \text{ fin. } \alpha + C \text{ fin. } (\alpha+\beta)$$
$$\text{V.} \quad A \text{ fin. } \delta = C \text{ fin. } \gamma + B \text{ fin. } (\gamma+\beta)$$
$$\text{VI.} \quad B \text{ fin. } \alpha = D \text{ fin. } \delta + C \text{ fin. } (\delta+\gamma)$$
$$\text{VII.} \quad C \text{ fin } \beta = A \text{ fin. } \alpha + D \text{ fin. } (\alpha+\delta)$$
$$\text{VIII.} \quad D \text{ fin. } \gamma = B \text{ fin. } \beta + A \text{ fin. } (\beta+\alpha)$$

Ex quibus, combinando I cum V, II cum VI, III cum VII, IV cum VIIIva, fiunt quatuor aequationes, aequi-

aequilibrii naturam potentiarum A, B, C et D continentes,

$$A(\sin.\alpha+\sin.\delta)=C(\sin.\beta+\sin.\gamma)+(D+B)\sin.(\beta+\gamma)$$
$$B(\sin.\beta+\sin.\alpha)=D(\sin.\gamma+\sin.\delta)+(A+C)\sin.(\gamma+\delta)$$
$$C(\sin.\gamma+\sin.\beta)=A(\sin.\delta+\sin.\alpha)+(B+D)\sin.(\delta+\alpha)$$
$$D(\sin.\delta+\sin.\gamma)=B(\sin.\alpha+\sin.\beta)+(C+A)\sin.(\alpha+\beta)$$

16. Sint quinque potentiae A, B, C, D, E puncto O adplicatae, quarum distantiae sunt $p$, $q$, $r$, $s$, $t$; et anguli $AOB=\alpha$, $BOC=\beta$, $COD=\gamma$, $DOE=\delta$ et $EOA=\varepsilon$; erit ex supra demonstratis Tab. X. Fig. 4.

$$\begin{array}{l|l}
dp=dm\cos.\Phi & dp=dm\cos.(\Phi+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) \\
dq=dm\cos.(\Phi+\alpha) & dq=dm\cos\Phi \\
dr=dm\cos.(\Phi+\alpha+\beta) & dr=dm\cos.(\Phi+\beta) \\
ds=dm\cos(\Phi+\alpha+\beta+\gamma) & ds=dm\cos(\Phi+\beta+\gamma) \\
dt=dm\cos.(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta) & dt=dm\cos.(\Phi+\beta+\gamma+\delta)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
pq=dm\cos(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon) & dp=dm\cos.(\Phi+\delta+\varepsilon) \\
pq=dm\cos(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon+\alpha) & dq=dm\cos.(\Phi+\delta+\varepsilon+\alpha) \\
dr=dm\cos.\Phi & dr=dm\cos(\Phi+\delta+\varepsilon+\alpha+\beta) \\
ds=dm\cos(\Phi+\gamma) & ds=dm\cos\Phi \\
dt=dm\cos.(\Phi+\gamma+\delta) & dt=dm\cos.(\Phi+\delta)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
dp=dm\cos.(\Phi+\varepsilon) \\
pq=dm\cos.(\Phi+\varepsilon+\alpha) \\
dr=dm\cos(\Phi+\varepsilon+\alpha+\beta) \\
ds=dm\cos(\Phi+\varepsilon+\alpha+\beta+\gamma) \\
dt=dm\cos\Phi
\end{array}$$

Substitutis his valoribus ipsorum $dp$, $dq$, $ds$ etc. successiue in aequatione

$$A\,dp+B\,dq+C\,dr+D\,ds+E\,dt=0$$

 elicien-

elicientur sequentes aequationes:

$$\text{I.}\quad \left.\begin{array}{l} \cos.\Phi(A+B\cos.\alpha+C\cos.(\alpha+\beta)+D\cos.(\alpha+\beta+\gamma)+E\cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)) \\ -\sin.\Phi(B\sin.\alpha+C\sin.(\alpha+\beta)+D\sin.(\alpha+\beta+\gamma)+E\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)) \end{array}\right\}=0$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{array}{l} \cos.\Phi(B+C\cos\beta+D\cos.(\beta+\gamma)+E\cos.(\beta+\gamma+\delta)+A\cos.(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)) \\ -\sin.\Phi(C\sin.\beta+D\sin.(\beta+\gamma)+E\sin.(\beta+\gamma+\delta)+A\sin.(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)) \end{array}\right\}=0$$

$$\text{III.}\quad \left.\begin{array}{l} \cos.\Phi(C+D\cos.\gamma+E\cos.(\gamma+\delta)+A\cos.(\gamma+\delta+\varepsilon)+B\cos.(\gamma+\delta+\varepsilon+\alpha)) \\ -\sin.\Phi(D\sin.\gamma+E\sin.(\gamma-\delta)+A\sin.(\gamma+\delta+\varepsilon)+B\sin.(\gamma+\delta+\varepsilon+\alpha)) \end{array}\right\}=0$$

$$\text{IV.}\quad \left.\begin{array}{l} \cos.\Phi(D+E\cos.\delta+A\cos.(\delta+\varepsilon)+B\cos.(\delta+\varepsilon+\alpha)+C\cos.(\delta+\varepsilon+\alpha+\beta)) \\ -\sin.\Phi(E\sin.\delta+A\sin.(\delta+\varepsilon)+B\sin.(\delta+\varepsilon+\alpha)+C\sin.(\delta+\varepsilon+\alpha+\beta)) \end{array}\right\}=0$$

$$\text{V.}\quad \left.\begin{array}{l} \cos.\Phi(E+A\cos.\varepsilon+B\cos.(\varepsilon+\alpha)+C\cos.(\varepsilon+\alpha+\beta)+D\cos.(\varepsilon+\beta+\alpha+\gamma)) \\ -\sin.\Phi(A\sin.\varepsilon+B\sin.(\varepsilon+\alpha)+C\sin.(\varepsilon+\alpha+\beta)+D\sin.(\varepsilon+\alpha+\beta+\gamma)) \end{array}\right\}=0$$

17. Ponatur nunc $\Phi=0$ vt supra, et erit $\sin.\Phi=0$ et $\cos.\Phi=1$, tumque orientur sequentes aequationes:

$$\text{I.}\quad A+B\cos.\alpha+C\cos.(\gamma+\delta+\varepsilon)+D\cos.(\delta+\varepsilon)$$
$$+E\cos.\varepsilon=0$$

$$\text{II.}\quad B+C\cos.\beta+D\cos.(\delta+\varepsilon+\alpha)+E\cos.(\varepsilon+\alpha)$$
$$+A\cos.\alpha=0$$

$$\text{III.}\quad C+D\cos.\gamma+E\cos.(\varepsilon+\alpha+\beta)+A\cos.(\alpha+\beta)$$
$$+B\cos\beta=0$$

$$\text{IV.}\quad D+E\cos.\delta+A\cos.(\alpha+\beta+\gamma)+B\cos.(\beta+\gamma)$$
$$+C\cos.\gamma=0$$

$$\text{V.}\quad E+A\cos.\varepsilon+B\cos.(\beta+\gamma+\delta)+C\cos(\gamma+\delta)$$
$$+D\cos\delta=0.$$

Item posito $\Phi=\frac{1}{2}\pi$, fiet $\sin.\Phi=1$ et $\cos.\Phi=0$, sicque prouenient istae aequationes:

$$\text{I.}\quad B\sin.\alpha=E\sin.\varepsilon+D\sin.(\delta+\varepsilon)+C\sin.(\gamma+\delta+\varepsilon)$$

$$\text{II.}\quad C\sin.\beta=D\sin.(\alpha+\delta+\varepsilon)+E\sin.(\alpha+\varepsilon)+A\sin.\alpha$$

$$\text{III.}\quad D\sin.\gamma=E\sin.(\alpha+\beta+\varepsilon)+A\sin.(\alpha+\beta)+B\sin\beta$$

$$\text{IV.}\quad E\sin.\delta=A\sin.(\alpha+\beta+\gamma)+B\sin.(\beta+\gamma)+C\sin.\gamma$$

$$\text{V.}\quad A\sin.\varepsilon=B\sin.(\beta+\gamma+\delta)+C\sin(\gamma+\delta)+D\sin.\delta.$$

Multi-

Multiplicentur priores quinque aequationes per $\sin.\alpha$, $\sin.\beta$, $\sin.\gamma$, $\sin.\delta$, $\sin.\varepsilon$, et posteriores per cosinus eorundem angulorum; tandem valores ipsarum $B\sin.\alpha\cos.\alpha$, $C\sin.\beta\cos.\beta$, $D\sin.\gamma\cos.\gamma$, $E\sin.\delta\cos\delta$ et $A\sin.\varepsilon\cos.\varepsilon$, in prioribus substituantur, et transformabuntur istae aequationes in sequentes:

I. $A\sin\alpha = C\sin\beta + D\sin.(\beta+\gamma) + E\sin.(\beta+\gamma+\delta)$

II. $B\sin.\beta = D\sin.\gamma + E\sin.(\gamma+\delta) + A\sin.(\gamma+\delta+\varepsilon)$

III. $C\sin.\gamma = E\sin.\delta + A\sin.(\delta+\varepsilon) + B\sin.(\delta+\varepsilon+\alpha)$

IV. $D\sin.\delta = A\sin.\varepsilon + B\sin.(\varepsilon+\alpha) + C\sin.(\varepsilon+\alpha+\beta)$

V. $E\sin.\varepsilon = B\sin.\alpha + C\sin.(\alpha+\beta) + D\sin.(\alpha+\beta+\gamma)$

quae naturam quinque virium, in aequilibrii statu existentium, exhibent.

18. In hoc casu eadem lex deprehenditur, quam et supra in formatione aequationum obseruauimus; neque opus est, vt plures casus euoluantur, ex his iam tuto concludere licet, aequationes istas sequentem in modum formari: Quaeuis potentia per reliquas ita determinatur, vt multiplicata in sinum anguli, inter eam et proxime sequentem intercepti, aequetur tertiae ab ea potentiae, ductae in sinum anguli inter secundam et tertiam iacentis; plus quarta, ducta in sinum angulorum, inter secundam et tertiam, tertiam et quartam interiacentium; plus quinta potentia, multiplicata per sinum trium angulorum, inter eam et secundum iacentium; et sic porro.

19. Si iam potentiae I et V; II et I; III et II; IV et III; V et IV combinentur, prodibunt sequen-

 tes

tes aequationes, naturam aequilibrii quinque potentiarum continentes:

$$\begin{aligned}
A(\sin.\alpha+\sin.\varepsilon) &= C(\sin.\beta+\sin.(\gamma+\delta))+D(\sin.\delta \\
&\quad +\sin(\beta+\gamma))+(B+E)\sin.(\beta+\gamma+\delta) \\
B(\sin.\beta+\sin.\alpha) &= D(\sin.\gamma+\sin.(\delta+\varepsilon))+E(\sin.\varepsilon \\
&\quad +\sin.(\gamma+\delta))+(A+C)\sin(\gamma+\delta+\varepsilon) \\
C(\sin.\gamma+\sin.\beta) &= A(\sin.\alpha+\sin(\delta+\varepsilon))+E(\sin.\delta \\
&\quad +\sin(\alpha+\varepsilon))+(B+D)\sin.(\delta+\varepsilon+\alpha) \\
D(\sin.\delta+\sin.\gamma) &= B(\sin.\beta+\sin.(\varepsilon+\alpha))+A(\sin\varepsilon \\
&\quad +\sin(\alpha+\beta))+(C+E)\sin.(\varepsilon+\alpha+\beta) \\
E(\sin\varepsilon+\sin.\delta) &= C(\sin.\gamma+\sin.(\alpha+\beta))+B(\sin.\alpha \\
&\quad +\sin.(\beta+\gamma))+(D+A)\sin.(\alpha+\beta+\gamma).
\end{aligned}$$

Fig. 5. 20. Sint itaque sex potentiae A, B, C, D, E F puncto O adplicatae, angulique ab iis comprehensi $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$; erit per regulam supra §. 18. traditam

$$\begin{aligned}
A\sin.\alpha &= C\sin.\beta+D\sin(\beta+\gamma)+E\sin.(\beta+\gamma+\delta) \\
&\quad +F\sin(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) \\
A\sin.\zeta &= E\sin.\varepsilon+D\sin.(\varepsilon+\delta)+C\sin.(\varepsilon+\delta+\gamma) \\
&\quad +B\sin.(\varepsilon+\delta+\gamma+\beta)
\end{aligned}$$

hinc

$$\begin{aligned}
\text{I. } A(\sin.\alpha+\sin.\zeta) &= D(\sin.(\beta+\gamma)+\sin.(\varepsilon+\delta))+C(\sin.\beta+\sin.(\varepsilon+\delta+\gamma)) \\
&\quad +(B+F)\sin.(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)+E(\sin.\varepsilon+\sin.(\beta+\gamma+\delta))
\end{aligned}$$

Eodem modo inueniuntur

$$\begin{aligned}
\text{II. } B(\sin.\beta+\sin.\alpha) &= E(\sin.(\delta+\gamma)+\sin.(\varepsilon+\zeta))+D(\sin.\gamma+\sin.(\delta+\varepsilon+\zeta)) \\
&\quad +(A+C)\sin.(\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)+F(\sin.\zeta+\sin.(\varepsilon+\delta+\gamma)) \\
\text{III. } C(\sin.\gamma+\sin.\beta) &= F(\sin.(\zeta+\alpha)+\sin.(\varepsilon+\delta))+E(\sin.\delta+\sin.(\varepsilon+\zeta+\alpha)) \\
&\quad +(B+D)\sin.(\delta+\varepsilon+\zeta+\alpha)+A(\sin.\alpha+\sin.(\zeta+\varepsilon+\delta)) \\
\text{IV. } D(\sin.\delta+\sin.\gamma) &= A(\sin.(\alpha+\beta)+\sin.(\zeta+\varepsilon))+B(\sin.\beta+\sin.(\alpha+\zeta+\varepsilon)) \\
&\quad +(E+C)\sin.(\varepsilon+\zeta+\alpha+\beta)+F(\sin.\varepsilon+\sin.(\zeta+\alpha+\beta)) \\
\text{V. } E(\sin.\varepsilon+\sin.\delta) &= B(\sin.(\alpha+\zeta)+\sin.(\beta+\gamma))+A(\sin.\zeta+\sin.(\alpha+\beta+\gamma)) \\
&\quad +(F+D)\sin.(\zeta+\alpha+\beta+\gamma)+C(\sin\gamma+\sin.(\beta+\alpha+\zeta)) \\
\text{VI. } F(\sin.\zeta+\sin.\varepsilon) &= C(\sin.(\beta+\alpha)+\sin.(\gamma+\delta))+B(\sin.\alpha+\sin.(\beta+\gamma+\delta)) \\
&\quad +(A+E)\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+D(\sin.\delta+\sin.(\gamma+\beta+\alpha)).
\end{aligned}$$

21.

21. Hae ſex aequationes naturam aequilibrii ſex virium A, B, C, D, E, et F puncto O adplicatarum perfecte determinant. Et quouis dato caſu, pro quolibet numero potentiarum, facile inueniuntur, per regulas ſupra traditas. Veritas vero Theorematum, his aequationibus contentorum, ex eo etiam oſtendi poteſt, quod quaelibet harum aequationum euaneſcere debet, hoc eſt: omnes termini ſe deſtruere debent, ſi potentiae et anguli ab illis facti omnes fuerint inter ſe aequales. Sumamus ad hunc ſcopum, vnam ex ſuperiori paragrapho exhibitis ſex aequationibus, veluti VItam.

$$F(\text{ſin.}\zeta+\text{ſin.}\varepsilon)=C(\text{ſin.}(\beta+\alpha)+\text{ſin.}(\gamma+\delta))+B(\text{ſin.}\alpha+\text{ſin.}(\beta+\gamma+\delta))+(A+E)\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+D(\text{ſin.}\delta+\text{ſin.}(\gamma+\beta+\alpha)).$$

22. Quia $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta=2\pi$, erit $\gamma+\beta+\alpha=2\pi-(\delta+\varepsilon+\zeta)$ et $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi-(\varepsilon+\zeta)$, quare ſin. $(\gamma+\beta+\alpha)=-$ ſin. $(\delta+\varepsilon+\zeta)$ et ſin. $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=-$ ſin. $(\varepsilon+\zeta)$, quibus ſubſtitutis fiet,

$$F(\text{ſin.}\zeta+\text{ſin.}\varepsilon)=C(\text{ſin.}(\beta+\alpha)+\text{ſin.}(\gamma+\delta))+B(\text{ſin.}\alpha+\text{ſin.}(\beta+\gamma+\delta))-(A+E)\text{ſin.}(\varepsilon+\zeta)+D(\text{ſin.}\delta-\text{ſin.}(\delta+\varepsilon+\zeta))$$

Ponatur nunc $A=B=C=D=E=F$ et $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon=\zeta$ et prodibit.

$$2\,\text{ſin.}\,\alpha=2\,\text{ſin.}\,2\alpha+\text{ſin.}\,\alpha+\text{ſin.}\,3\alpha-2\,\text{ſin.}\,2\alpha+\text{ſin.}\,\alpha-\text{ſin.}\,3\alpha$$

vbi omnes termini ſe deſtruunt.

DE

# DE COMMODA ACVS DECLINATORIAE SVSPENSIONE DISSERTATIVNCVLA.

Auctore

*S. KOTELNIKOW.*

## I.

Experientia docuit, acus magneticas non perforatas non solum maiorem vim magneticam accipere, sed et id lucri adferre, vt facilius effici possit, vt acus duos tantum polos magneticos a puncto suspensionis aeque distantes adipiscatur, quod in acubus in puncto suspensionis perforatis difficillime obtinetur. Nam praeter expectationem plures poli exoriuntur: quo fit, vt motus acus declinatoriae perturbetur, et ideo experimentis cum tali acu institutis confidere non licet, quod iam Cl. *Zeiberus* in dissertatione ante tradita annotauit. Verum paucissimae acus hoc defectu carentes fabricantur. Igitur non mediocria in scientiam rerum nauticarum totamque physicam redundabunt emolumenta, si iste defectus commoda acus suspensione euitari possit. Cuius rei in gratiam contigit mihi incidisse in sequens, non sumptuosum et ad praxin aptissimum, acus declinatorias suspendendi artificium, vbi non est necesse, acum pertundere, vti adhuc factum est.

II.

## II.
# Descriptio.

1. Fabrefiat lamina chalybea, parallelopipedi figuram habens, in vtraque extremitate in cuspidem abiens, perque totam longitudinem aequaliter crassa, in qua centrum grauitatis determinetur, et notetur lineola transuersa.

2. Lamina ad acum declinatoriam hoc modo fabrefacta induretur et imbuatur vi magnetica, ope duarum magneticarum laminarum, seu magnetum artificialium, ad laminam ita adplicatorum, vt ad partes contrarias inclinati angulum efficiant, verticem ad laminam habentem. Frictio ad centrum grauitatis lineola transuersa notatum incipiatur, ibidemque finiatur, trahendo magnetes dextrorsum et sinistrorsum ad extremitates vsque laminae. Hoc modo obtinebitur, vt lamina non solum duos tantum polos habeat, sed et centrum eorum commune cum centro grauitatis laminae coincidat.

3. Fiat ex ligno conus truncatus, cuius basis inferior habeat diametrum multo maiorem diametro basis superioris. In basi superiore huius coni fiat incisura transuersa, ad axem coni normalis, et quae ad laminam accuratissime quadret, ita vt lamina in eam imposita cum cono firmiter cohaereat.

4. In basi inferiore coni fiat secundum eius axem cauitas conica, cuius altitudo vix non adaequet altitudinem coni, propterea vt punctum suspensionis, quod est in fundo cauitatis, cadat supra commune centrum grauitatis acus et coni.

5. Lamina imponatur in incisuram, in superiore basi coni factam, ita vt lineola transuersa, centrum grauitatis laminae designans, per axem coni transeat, suspendaturque in pixide, eodem modo, vti acus ordinariae suspenduntur.

## III.

Quodsi acus parum stabilitatis habeat, aut inuertatur, quod indicio est, centrum grauitatis esse supra centrum suspensionis, tum fiat annulus ex graui metallo, et ad inferiorem coni basin adcommodetur. Potest etiam huic incommodo obuiam iri, si conus ita fabrefactus sit, vt ex duabus partibus constet, superior ex ligno, inferior vero ex metallo. Interim notandum est, pondus coni debere esse maius pondere acus. Attamen artifex curare debet, ne pondus coni sit valde magnum respectu ponderis acus; hoc est: ne iusto maius fiat, et superfluo pondere acum segniorem reddat. Vt igitur inter pondus coni et acus desiderata semper proportio obtineatur, sequens problema subiungere placet.

## IV.
# Problema.

Dato pondere acus declinatoriae, determinare dimensiones coni truncati, si illius pondus ad pondus acus habeat rationem datam.

# Solutio.

Sit pondus acus $=p$; et pondus coni $=np$, denotante $n$ numerum integrum. Ponatur pondus vnius digiti cubici chalybis $=b$; erit volumen acus declinatoriae $=\frac{1000p}{b}$ linearum cubicarum.

Sit porro grauitas specifica chalybis ad grauitatem specificam materiae, ex qua conus fabrefactus debet esse, vt $i$ ad $m$; et soliditas coni $=S$,

Erit $S=\frac{1000np}{mb}$

Sed ex geometricis constat, posita diametro basis inferioris coni $=x$; superioris $=y$; altitudine $b$, et ratione diametri ad peripheriam $=1:\pi$, fore $S=\frac{1}{12}\pi b\frac{x^3-y^3}{x-y}=\frac{1}{12}\pi b(xx+yx+yy)$; vnde obtinetur

$$xx+xy+yy=\frac{12000np}{m\pi bb}.$$

Quia ratio diametrorum basium coni truncati est arbitraria, ponatur $x=\lambda y$, denotante $\lambda$ numerum vnitate maiorem, et habebitur

$$yy(\lambda\lambda+\lambda+1)=\frac{12000np}{m\pi bb}$$

vnde $y=\frac{20}{\sqrt{(1+\lambda+\lambda\lambda)}}\sqrt{\frac{30np}{m\pi bb}}$

et $x=\lambda y$.

## V.

Sumta igitnr altitudine coni $b$ pro arbitrio, basium diametri ex traditis in praecedente paragrapho determinabuntur; oportet tantum numerum $\lambda$ definire, vt $\frac{1}{4}b(\frac{\lambda}{\lambda-1} - \frac{3}{\lambda^3-1})$ paruum valorem obtineat. Haec formula exhibet valorem distantiae centri grauitatis coni truncati, ab inferiore eius basi. Sed quum debeat esse $\lambda > 1$, et ternarium non multum excedat, tum enim conus erit deformis; nam si ponas $\lambda = 3$, erit distantia centri ab inferiore basi $> \frac{1}{3}b$. Sumamus ergo $\lambda$ ita, vt distantia centri grauitatis sit praecise $= \frac{1}{3}b$. Quam ob rem erit $\frac{\lambda}{\lambda-1} - \frac{3}{\lambda^3-1} = \frac{4}{3}$; vnde habetur haec aequatio:

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda - 5 = 0$$

cuius radices sunt, $1$; $1$; $1+\sqrt{6}$; $1-\sqrt{6}$

## VI.

Vt igitur distantia centri grauitatis coni cadat ad $\frac{1}{3}b$ ab eius basi inferiore, sumatur $\lambda = 1 + \sqrt{6}$ et erit:

$$y = \frac{20}{\sqrt{(9+2\sqrt{6})}} \sqrt{\frac{30np}{m\pi bb}} \text{ et } x = y(1+\sqrt{6}).$$

Sed quia $\sqrt{6} = 2.44949$, erit $\lambda = 3{,}44949$, quae fractio decimalis dat sequentes fractiones pro $\lambda$:

$$\frac{3}{1};\ \frac{7}{2};\ \frac{31}{9};\ \frac{69}{20};$$

quarum postrema satis accurata est. Si ergo sumatur $x = 1$; $y = 3$ vel $x = 2$; $y = 7$ vel $x = 9$; $y = 31$; vel $x = 20$; $y = 69$;

semper

semper centrum grauitatis coni erit ad $\frac{3}{4}$ eius altitudinis depressum. Hoc tamen notato, quod maiores numeri propius ad veritatem accedunt.

## VII.

Si quis parum curet, vtrum pondus coni datam habeat proportionem ad pondus acus, nec ne; is poterit ex paragrapho praecedenti sumere rationes diametrorum. Id tamen respicere debet, vt pondus coni sit maius pondere acus. Sed propter eos, quibus proportio ponderum, acus et coni, curae est, sunt sequentes absoluti valores diametrorum:

$$y = 15.283\sqrt{\frac{np}{mbb}} \text{ et } x = 52.711\sqrt{\frac{np}{mbb}}.$$

Quum lignum ad hunc vsum aptissimum sit ebenum, propter suam duritiem et grauitatem; est enim illius grauitas specifica ad grauitatem specificam chalybis indurati vt 1.177 ad 7.204: erit $m = 01527777777$ et $\sqrt{m} = 0.39086$; ideoque $y = 39.19\sqrt{\frac{np}{bb}}$; et $x = 135.16\sqrt{\frac{np}{bb}}$; sed ad stabilitatem acus obtinendam sufficit altitudinem coni $= 6'''$ statuisse, tum centrum grauitatis acus erit ad minimum adhuc ad $1'''$ infra punctum suspensionis depressum. Mox vero ostendam, quomodo efficiatur, vt centrum grauitatis profundius cadat. Ponatur ergo $b = 6'''$, et erit

$$y = 16.06\sqrt{\frac{np}{b}} \text{ et } x = 55.4\sqrt{\frac{np}{b}}.$$

## VIII.

Quia pes cubicus aquae ponderat $62\frac{1}{2}$ libras Amstelodamenses, seu 480000 grana, ideoque pollex cubi-

 cus

cus Rhenanus ponderabit 278 grana; est vero grauitas specifica aquae ad grauitatem specificam chalybis vt 1 ad 7.704: erit pondus pollicis cubici chalybis $=2140$ grana, ideoque $b=2140$; quare

$$y=16{,}06\sqrt{\tfrac{np}{5150}} \text{ et } x=55.4\sqrt{\tfrac{np}{5150}}.$$

## IX.

Quum conum ita determinauerimus, vt eius centrum grauitatis cadat ad profunditatem duabus tertiis eius altitudinis aequalem, et si acus adplicetur, tum ascendet, et erit ad vnam tertiam circiter altitudinis tantum depressum: igitur, vt centrum grauitatis acus inferius deprimatur, cono talis figura tribui debet, vt maxima pars eius massae ad inferiores partes colligatur; quod sequenti modo obtinebitur: Fiat conus secundum datas dimensiones, cuius pondus sit aequale ponderi acus, deinde ita torneturm, vt non tacta basi inferiore, ad partes superiores multo gracilior reddatur.
Tab. X. Fig. 6. (vti figura repraesentat) Tum ponderetur, vt ablata pars massae innotescat. Postea obducatur lamina aurichalcea, pondere ablatae massae aequali, tam cauitas conica, quam basis inferior coni. Lamina vero, qua basis obducitur, debet crassior fieri ea, qua cauitas conica obducetur. Ita obtinebitur, vt acus magnam stabilitatem habeat.

## X.

Et quum in tornando difficile est obseruare, vt conus ad datas dimensiones exacte fabricetur, adhibetur

tur

tur cautela: lamina aurichalcea basin coni obducens fiat ponderosior ablata ligni portione. Sed hanc proportionem ponderis et altitudinis coni tantum tum obseruare licet, cum pondus acus sit non infra 500 grana; in minoribus vero altitudo $b$ minor, et pondus maius accipere conueniet, prout necesse erit. Formulae vero ad absolutos diametrorum basium valores determinandos adhibeantur sequentes:

$$\left.\begin{array}{l} y = 39.19\sqrt{\frac{np}{2140\,b}} \\ x = 135.16\sqrt{\frac{np}{2140\,b}} \end{array}\right\}$$ in partibus decimis pollicis Rhenani.

## Exemplum I.

Sit pondus acus $= 2140$ grana; sumatur pondus coni aequale ponderi acus, et altitudo $= 6'''$. Erit $n = 1$; $p = 2140$; $b = 6'''$. Vnde inuenitur $y = 16'''$; $x = 55'''$.

## Exemplum II.

Sit pondus acus $= 535$ grana. Et fiat pondus coni aequale ponderi acus, altitudo vero $= b = 6'''$. Erit $p = 535$; $n = 1$.

Vnde fit diameter basis superioris $= y = 8'''$.
—— —— —— —— inferioris $= x = 27'''$.

## Exemplum III.

Ponatur pondus acus $= 60$ grana; pondus coni duplum ponderis acus; altitudo $b = 4'''$. Erit $n = 2$;

$p = 60$;

$p = 60$; vnde inuenitur $y = 5$; $x = 16$. In hoc casu lamina aurichalcea ad basin accommodare non erit opus, etiamsi a superiore parte coni dimidium eius ponderis auferatur.

## Scholion.

Tab. X. Fig. 7. Si quis sumptibus nolit parcere, iubeat parare ex aurichalco, aut si malit ex argento, campanulam *ced*, quatuor vel quinque lineas altam, ad cuius basin iungatur, cochleae ope, annulus *a b*, aequalis cum acu declinatoria ponderis. Ad verticem vero campanulae adcommodetur lamella *ef* quadrangulari foramine praedita, per quod acus transire et cochlea *g* firmari possit. Parietes vero campanulae verticem versus valde tenues debent esse, sed basin versus crassiores.

PHYSICA

# PHYSICA.

# PLANTARVM

## ALIQVOT RARIORVM DESCRIPTIONES COMPLETAE. ADIECTAE SVNT DELINEATIONES III.

Auctore

*IOH. CHRIST. HEBENSTREIT.*

### I.

MESSERSCHMIDIA. *Linn.* Hort. Vpſ. p. 36.
ARGVSIA. *Amman.* Stirp. Ruth. p. 29.
TOVRNEFORTIA foliis lanceolatis, floribus corymboſis, caule herbaceo. *Linn.* plant. p. 141. n. 7.

Circa initium Maii planta ex terra prouenit, turionibus copioſis forma capitulorum globoſorum, compactis ex foliolis conuolutis, anguſtis et pubeſcentibus. Incrementum cauliculorum et foliorum, primis, poſtquam ex terra prodiit, diebus, eſt admodum lentum et vix animaduertendum: augentur vero cunctae partes multo euidentius, ſi congelationes nocturnae ceſſant, et pluuia ſolum aliquoties irrigauit. Menſtruo ſpatio vtplurimum exacto, ad iuſtam in ea perueniunt ſingulae partes magnitudinem, et planta, omnibus ſuis partibus exornata, diſquiſitioni eſt aptiſſima. De radicis aetate primum quaedam praemittenda erunt, cum ea multum conferre videatur ad ſingularem illius conditionem diiudicandam. Viuacem admodum eſſe, diuque ſuperſtitem, exinde colligo, quia in adſignato ei loco in horto per decennium iam creuit, et quotannis craſſitie, turionibus et pluribus gemmis nodoſis augetur, latiusque ſerpit. Aliquot vero annorum ſpatium requiri, antequam ſufficientem copiam ſuccorum colligat, et caules florentes et fructus perficientes proferat, hoc iam adnotauit *Ammanus* in Stirpium rariorum, in Imperio Rutheno ſponte prouenientium, deſcriptionibus, Petropol. 1739. 4. p. 30. Ill. *Linnaeus* in Hort. Vpſ. p. 36. caules plantae pedales vidit, nullum vero florem vel fructum, exinde etiam hanc ſtirpem genere dubio, *Meſſerſchmidia*, tradere coactus eſt. Eandem denuo in Spec. plantar. p. 141. inter incertas adhuc plantas *Tourneſortiae* generi adſociauit. Mihi itaque ſubnaſcitur ſuſpicio, in horto Vpſalienſi, aetatem iuſtam nondum adſecutam, aeque ac olim hic, flores fructusque ferre recuſare. Fructus, nec apud nos perficit, licet quotannis floreat, et eos promittat. Radix itaque depicta ad exemplar recens, eſt perennis, calami olorini craſſitie, tenax, extus ſpadicea, multis tuberculis ceu tot gemmis in omni ambitu praedita, horizontaliter repens, et copioſis fibrillulis capillaribus ad tubercula, et vbi finitur, inſtructa, intus alba et parum ſuccoſa. Caulis adſcendens eſt firmus, inflexus tamen aliquantum ad terram, inferius rotundus, ſuperius, vbi rami ex alis foliorum exeunt, anguloſus, hiſpidus, foliis copioſis, et ramis ad cacumen vsque, vbi flores collocantur, veſtitus. Folia caulina et ramea ſunt anguſta, lanceolata, integra, tenuibus et copioſis pilis obſita, in auerſa parte ex albido virentia et ſericea quaſi facie, in aduerſa profundius virore perfuſa, neruis

et

et venis aliquot instructa, et breui petiolo cauli alternatim adhaerentia. (Per negligentiam pictoris factum esse moneo, quod in superficie folii superiori multae venae excurrentes, quae tamen absunt, delineatae exhibeantur). Singulare quid obseruaui in incremento foliorum, nempe augmentum horum durare per omnem aestatem, et folia, quae primo vere conspiciuntur, lineari-lanceolata, pubescentia, rigida, etiam confertim posita, si caules perfectos consideras aestate cadente, nunc triplo maiora esse, viridiora, flaccida et rara, dimensione etiam sua vtplurimum conuenientia. Integritatem caules et folia conseruant ad primum gelicidium vsque, quo, si laeduntur tantisper, protinus corrugantur, nigrescunt, non tamen decidunt, sed vna cum caulibus pereunt. Rami plures in superiori caulis parte ad alas foliorum oriuntur, alterni, palmares, quibus dein succrescunt alii in medio et inferiori loco, minores et tenuiores. In summitate plantae et ramorum superiorum, pedunculo communi elongato et subdiuiso in aliquot ramos, pedicellis breuissimis flores tres quatuorue insistunt ita, vt corymbum quasi forment. Calyx est monophyllus, quinquifidus, laciniis lanceolatis, hispidis, conniuentibus, dimidiam tubi partem haud attingentibus. Corolla est monopetala, regularis, infundibuliformis, tubo cylindrico in fundo globoso, limbus quinquifido, segmentis ad horizontem directis, sulco longitudinali excauatis, in ambitu sinuatis, apicibus extremis deorsum flexis. Color corollae in limbo in vtraque superficie penitus est albus, in tubo interius flauus, exterius viridis, et in fundo, vbi calyce tegitur,

 tur,

tur, flauefcit. Stamina adfunt quinque in medio tubi, filamenta breuiffima et antherae fubulatae erectae flauae; piftillum ftaminibus breuius, ftigmate globofo fcabro, quod extremitati globofae tubi clauis inftar infixum eft. Semina adhuc fruftra exfpectaui. Et ne parte primaria deftituta prodeat haecce defcriptio, eam fupplere in animo habebam Clar. *Mefferfchmidii* expofitione, data ab *Ammano* in ftirpibus rarioribus Ruthenicis. Sed mutanda fuit fententia, ideo, quia in nonuullis emendanda eft inuentoris de femine huius plantae enucleatio. Forte fortuna inueni in feminario horti nonnulla huius plantae femina vetufta, et perfpexi clare, ea effe duas capfulas offeas, fubftantia fpongiofa exterius veftitas, fecundum longitudinem leuiter cohaerentes, quarum quaelibet in parte exteriore conuexa, fi transuerfim diffecatur, duos nucleos oblongos, incuruatos, angulatos, in loculamentis feparatis includit. Capfulae totius, ex duobus hemifphaeriis coalitae, figuram, loculamenta, et nucleos, tabula adiecta repraefentat.

Ex characterum genericorum diuerfitate diiudicandas et denominandas effe omnes plantas, fententia tam certa tamque firma eft, vt probatione nulla indigeat. Quodfi itaque perluftramus plantam, et fingularem fructificationis ftructuram ab omnibus adhuc cognitis plane diuerfam deprehendimus, neceffario quoque ei, ad euitandam in difcernendo ab aliis confufionem, nouum imponendum erit nomen genericum. Ad hafce autem plantas, charactere fingulari donatas, referendam effe *Mefferfchmidiam*, omnes iam perfpexerunt, quotquot eam difquifiuerunt, nec reliqui refragabuntur, quibus

bus in posterum occasio dabitur, eam propius contemplandi. De varia denominatione illius pauca tantum addam. B. *Messerschmidius*, primus inuentor, eam in Xenio Isidis Sibiricae, quod in tabulario Academiae adseruatur, a loco natali penes Argunum fluuium, *Arguniam* vocauit. Hoc nomen et descriptionem, in loco natali concinnatam, stirpibus suis Ruthenicis Clar. *Ammanus* inseruit. Sed nescio, cur mutata compellatione illam dixerit *Argusiam*? Optime tamen insimul monet, posse etiam in posterum vocari *Messerschmidiam* ab indagatore. Ill. *Linnaeus* in Hort. Vpsal. 1748 in 8vo emisso, equidem *Messerschmidiae* genus condiderat ex hac noua, de qua sermo est, planta: in speciebus vero plantarum Anno 1753. editis, illam ad *Tournefortiae* genus retulit. Si vero conferimus cum *Messerschmidia* characteres genericos, a *Linnaeo* in generibus plantar. edit. quint. 1754. *Tournefortiae* adscriptos, cognoscimus, in quam plurimis, praesertim in fructificatione, discrimen sane maximum. Praecipuas differentias allegare ideo necessarium erit, quia exinde discrepantia vtriusque generis comprobabitur. Differt itaque *Messerschmidia* ab eo 1) filamentis, quae non sunt longitudine tubi corollae, sed breuissimae; 2) situ antherarum, quae non in fauce corollae, sed profundius, et quidem in medio tubi, haerent; 3) stylo, qui staminibus est breuior; 4) fructu, qui est siccus, omni pulpa destitutus, ex duobus hemisphaeriis coalitus, quorum singulum duo loculamenta distincta habet, semen vnicum includentia, seu nucleos oblongos, angulatos albidosque. Ad memoriam igitur renouandam et conser-

vandam

vandam viri optimi, *Danielis Gottliebii Messerschmidii*, Gedanensis, Med. Doctoris, qui ab anno 1719 ad 1727 omnem diligentiam et studium indefessum impendit, colligendis et describendis naturae thesauris regni Sibiriae, plantam hanc ab ipso denominare minime improbandum erit, cum idem honor et aliis exhibeatur, quorum merita in rem botanicam videntur alicuius momenti. Exspectamus in posterum, adhibita vlteriori cultura, semina matura ab hac planta, quae communicari poterunt cum iis, qui delectantur cultura et propagatione plantarum, nuper detectarum. Vt vero aliquam interea sibi acquirere possint huius vegetabilis ideam, adieci iconem, confectam ad plantam in horto academico florentem, et quam Cel. *Ammanus* olim descriptioni suae, cum tantum plantas iuniores possidebat, addere non potuit. Dum *Ammanianae* descriptionis mentionem iniicio, quae bona et completa est, si fructum excipias, insimul etiam reprehensionibus forte nonnullorum, qui me actum egisse putabunt, data alia descriptione, obuiam ire debeo. Declinare vero has commode potero, rationem adducens non spernendam; quia incongruum mihi videbatur emittere iconem solam sine expositione aliqua, vel et lectores amandare ad librum, quo forte plures carent, si plantam, nunc demum delineatam, inspiciunt.

Tab. XI.

### Explicatio Tabulae I.

A. Planta in naturali magnitudine.
B. Radix repens cum turionibus.
*a*. Calyx cum pistillo.
*b*. Corolla absque calyce.

*c*. Eadem

*c.* Eadem tubo dissecto, vt stamina cum pistillo in conspectum veniant.
*d.* Capsula integra.
*e.* Hemisphaerium fructus ab interiori facie expositum.
*f.* Fructus integer transuersim dissectus, vt quatuor hemisphaeriorum loculamenta appareant.
*g.* Hemisphaerium, substantia exteriori spongiosa orbatum, osseum, cum duobus loculis, vt monstrentur semina, ab interiori facie apertis.
*h.* Semen.

## II.

AESCHYNOMENE caule hispido, foliolis acuminatis, leguminum articulis suborbiculatis. *Royen.* Flor. Leyd. Prodr. p. 384. *Haller.* Hort. Goett. 1753. p. 265. *Linn.* Spec. plant. pag. 713. n. 2.

HEDISARVM caule hirsuto mimosae foliis alatis, pinnis acutis minimis gramineis. *Sloan.* Iourn. to Iamaica Tom. I. p. 186. tab. 118. fig. 3.

Inter semina, ante triennium ex Anglia huc missa, reperi Hedysarum quoddam americanum minus mimosae foliis Sloan. inscriptum, quodque satum, spatio decem dierum elapso proueniebat, et laeto incremento sumto, post duos menses flores exhibuit, quos sequebantur semina matura, siliqua articulata inclusa. Periit tum planta frigore tacta, quae ex structura sua, et celeri omnium partium euolutione, videtur annua. Quae de ea notaui, dum vigebat, breui hac expositione referam, et commemorationem horum angustioribus limitibus circumscribere potero, quia planta, de qua dicturus sum, superiori saeculo iam inuenta et delineata, et ante aliquot annos denuo ab Ill. *Hallero* in Enumeratione horti Regii et agri Goetting. 1753. in 8. edito, quoad partes praecipuas, florem nempe et fructum, descripta est. Deficit vero illius exacta icon: ea enim, quam dedit *Sloaneus* in Hist. Iamaic. Vol. I. pag. 186. tab. 118. fig. 3. minime tolerari potest, et a Cel. *Royenio* Flor. Leyd. Prodr. pag. 384. iure mala adpellatur, hinc meliorem, et ad viuam plantam factam, exhibeo. Vegetationis historiam paucis dilucidabo. Plantulae ex terra prouenientes, persistentibus aliquamdiu cotyledonibus, ex cauliculo, tenui, terete, hispido emittunt folia pinnata, solitaria, alterna. Si planta pedis altitudinem attigit, in inferiore loco ad latera foliorum emittit ramos procumbentes, in superiori adsurgentes. Exporrigitur tum caulis ad pedes duos et vltra, neque tamen multum volumine augetur: crassities enim eius vix ad duas lineas parisinas, vbi maxima est, accedit. Rami numero, quo altior fit planta, augentur ita, vt habitu externo fruticulum quasi, ramis vndique obsitum, repraesentent. Nunc ad singulas partes seorsim describendas, progrediendum est. Radix est vnica, fibrosa, fibrillis albis donata. Caulis adsurgit vnicus, rectus, rufescens, totus hispidus, pilis inferius rutilis paucioribus, superius viridibus et copiosioribus, vestitus, parum lignosus, teres, emittens plures vndique ramos, superiores adsurgentes, inferiores vero terrae horizontaliter incumbentes. Folia pinnata, foliolis alternis dense positis, et ex parte sibi quasi incumbentibus, lanceolatis, acuminatis, in extremitate ciliatis, superficie prona laete viridibus, supina glaucis, 25 - 30 paribus, seu pinnis. Costae adhaerent foliola breuissimo petiolo

tiolo ita, vt pars posterior, oblique quasi dedolata, appressa sit costae, et si decidunt, fouea rotunda in costa, vbi adhaeserunt, conspicitur. Folia perfecta figuram equidem habent lanceolatam, costa tamen semper non nihil arcuata, reclinatum sistit folium. Si tanguntur manu, foliola complicantur ad costam immotam, sed tardius, ac in mimosa sic dicta pudica, neque facile ante aliquot horas iterum explicantur, hinc etiam difficillimus est labor exsiccare ramum, ob celerem collapsum et contractionem partium. Omni vespere, et dum pluuia cadit, folia quoque complicantur et dependent. Duratio et vigor eorum breuis admodum est; hinc caules et rami adultiores foliis fere orbati et denudati apparent, cacumina vero ramorum defluuium, succrescentibus semper aliis, abunde supplent. Stipulae ad finem petioli positae sunt ex duabus partibus constantes, quarum vna, folio contigua, maior est, altera vero, pedunculo communi axillari adstans, minor deprehenditur. Figuram habent lanceolatam et in superficie externa nonnullas rubicundas venas, quae disparent paullatim. Pedunculus florum communis, ad latera foliorum positus, situ parallelo cum iisdem extenditur, his tamen est longior, filiformis, pilosus, irregulariter ramosus, bracteis amplexicaulibus ouato-acuminatis ad singulum pediculum florum positis. Flos vnicus sustinetur pedunculo proprio, vnciali fere, cincto duobus foliolis ouato-lanceolatis oppositis, in ambitu ciliatis, et calyci arcte appressis. Calyx est monophyllus bipartitus, parte altera post vexillum maiore, reflexa, leuiter bifida, in nonnullis speciminibus integerrima obseruata, altera carinam sustentante minore, canaliculata, et in extremitate ciliata: tridentatam prout Ill. *Hallerus* eam esse indicat, non inueni. Flos est papilionaceus: vexillum subcordatum, patens, reflexum, lutescens, (isabellinus est color) venulis rubicundis longitudinalibus et macula aurea rotunda ante vnguem variegatum, alis paullo breuius: alae ex ouato-oblongae, obtusae, rectae, vexillo longiores et limbo laterali exteriori deflexae, lineae purpureae vestigio vix apparente in medio: carina alis breuior, dipetala, foliolis lunulatis exterius purpurascentibus. Stamina decem in duobus distinctis corporibus ad basin vsque fissis, quorum quodlibet in filamentis, altitudine successiue decrescentibus, quinque antheras sustinet, luteas, paruas et rotundas. Stamina cum pistillo et stigmate subulato in carina abscondita latent: succedit legumen inflexum, articulatum, scabrum, articulis post maturitatem solubilibus, numero variantibus: semen reniforme vnicum luteo-fuscum, in quolibet leguminis articulo suborbiculato inclusum. Ex datis huc vsque characteribus quilibet cognoscit, a Cel. *Royenio* suo iure nostram plantam ad genus Aeschynomenes esse relatam, et ab eo in Flor. Leyd. Prodr. pag. 384. denominatam: Aeschynomene caule hispido, foliolis acuminatis, leguminum articulis suborbiculatis, quem et secuti sunt Ill. *Hallerus* et *Linnaeus*, retenta Royeni denominatione; iste in Hort. Goetting. pag. 265, hic vero in Spec. plantar. pag. 713. n. 2. Inuentionis gloria debetur Ill. *Sloaneo*, qui eam in locis meridionalibus insulae Iamaicae sponte crescentem legit, et in catalogo plantarum,

quae

quae in insula Iamaica sponte proueniunt, Lond. 1696. 8. pag. 74. vocat: Hedysarum caule hirsuto mimosae foliis alatis pinnis acutis minimis gramineis. In historia Iamaicae Vol. I. pag. 186. eam vlterius exposuit, et iconem quoque dedit, sine dubio ad exemplar siccum concinnatam, quia folia et flores quoad maximam partem deficiunt; hinc Cl. *Royenii* iudicio omnino mala.

Explicatio Tab. II. Tab. XII.

A. Plantae ramus in naturali magnitudine.
*a.* Flos ab antica facie.
*b.* Idem a postica.
*c.* Idem a latere expositus.
*d.* Staminum fasciculus.
*e.* Ouarium.
*f.* Calyx bilabiatus cum staminibus et legumine foecundo.
*g.* Legumen maturum.
*h. h. h. h.* Leguminis articuli, quorum singulus ab aliis distinctus, vnicum semen continet.
*i.* Semen.

## III.

VERBESINA foliis oppositis ouato-acutis integerrimis, scabris, pedunculorum summitatibus incrassatis et foliosis.

RVDBECKIA foliis oppositis hirsutis, ouato-acutis, calyce imbricato cylindrico, radii petalis pistillatis. *Zinn.* Catal. plant. hort. acad. et agri Goetting. p. 409. c. icon.

Radix huius plantae est fibrosa, vnica, recta. Ex corpore, pollicem longo, in extremitate obtuso et quasi truncato, oriuntur radiculae plures quaqua versum repentes, tenaces, albentes, in radice euulsa paullo post rufescentes, fibrillulis pluribus donatae. Superiores

riores radiculae, ex capite radicis et reliquo eius ambitu prouenientes, inferioribus, paullo ante descriptis, sunt tenuiores et numero pauciores. Caulis est inferius simplex, rectus, duos vel tres pedes altus, inferius glaber et teres, superius molli et tenui lanugine vestitus, calami olorini crassitie, hinc versus supremam partem attenuatus, vbi et folia sibi propius adstant, quodam modo angulatus, vnico flore, inter ramos exorto, terminatus, et sibi relictus, inclinatus. Folia radicalia adsunt nulla, sed tantum caulina et ramea. Haec in parte caulis inferiori, et paullo etiam altiori, semper sunt bina, opposita; minora, pauciora et angustiora superioribus, quae numero terna, volumine maiora et copiosiora, ouato-acuta, sessilia, scabra, pallide viridia, integerrima, in superficie prona venosa, in supina tribus vel quinque neruis prominentibus donata, et ratione situs, semper deflexa apparent. Ex alis foliorum singulis proueniunt rami, foliis eiusdem formae et situs, ac in caule, ornati, oppositi, erecti primum, postea patuli, altitudine inter se discrepantes. Interdum eo in loco, vbi alias ramus exsurgit, petiolus tantum aliquot linearum, duo vel tria folia proferens, oritur, pro imperfecto ramo habendus. Rami per paria in caule a radice ad dimidiam plantae altitudinem crescunt, ex aduerso sibi opposita, numero incerto; in suprema vero parte, vbi tria folia caulem ambiunt, ibi etiam tres rami conspiciuntur, flores citius, ac inferiores rami, exhibentes, quod alias minus sollemne in florescentia, prout etiam illud, quod rami proximi, infra florem, qui caulem terminat, positi, dum

dum increſcunt, hunc altitudine multum ſuperant. Longitudo, ſeu potius altitudo, iſtius partis, quae ex ſquamis rigidis, imbricatis, conſtat, et communiter calyx vocatur, in planta, quam deſcribo, erat nouem lineas pariſinas, licet interdum et in maius volumen excreſcat: figura eius eſt cylindrica, antequam iam nominatae ſquamae a ſe inuicem diſcedunt, et floſculos tubuloſos et lingulatos emittunt; poſtea refert figuram coni inuerſi. Magnitudo earum primum deſcribenda erit, antequam ad ſitum, colorem, ſtructuram, figuram et numerum progrediar. In inferiore parte calycis poſitae ſunt ſquamae duplo minores reliquis, in media et ſuprema parte collocatis; augentur enim volumine ſemper, quo altius adſcendunt; et ſupremarum limbis reclinati flores radiati incumbunt. More imbricum denſe ſibi imponuntur, et quidem ita, vt dimidia pars, imo duae tertiae, vnius ab altera obtegatur. Textura earum fere eſt cartilaginea; nullum enim parenchyma laminas diſtendit, et tantum ſunt membranae laeues, elaſticae et concauae; lineis longitudinalibus nonnullis exaratae. Color, quo nitent, in parte exteriore eſt pallide viridis, punctis nigris quaſi coagmentatis factus, in interiore luteo-viridescens; in apice ſummo, ſubrotundo et molliori, exterius eſt linea fuſca et profunde viridis. Figuram obuerſe ouatam equidem omnes habent: attamen cum inferiores duas lineas, mediae et ſupremae quatuor et ſex lineas, altae ſunt, facie externa diuerſae non nihil apparent. Ab vnguibus anguſtis ſenſim ampliantur, donec in parte paullo ſupra medium latiſſimae factae, denuo anguſtantur; apex vero eſt ſubrotundus,

tundus, membrana molliori, antea indicata, quasi coronatus. Numerum foliolorum calycis insimul adponere, superfluum videri posset nonnullis: attamen ideo omittere nolui, quia constantem illum esse cognovi; in multis enim floribus dissectis eum semper ex 22 et 24 foliolis constare comperi. Postquam calycem exposui, transeo nunc ad flores. Hi duplicis generis sunt: alii in radio sic dicto lingulati et pistillati tantum, alii in disco, tubulosi et hermaphroditi. Radii flosculi in flore, cui nihil ex omnibus suis partibus deest, duodecim semper numerantur, et lingulam sistunt ouatam, in apice crena vna vel altera emarginatam, octo lineas longam, quinque ad sex latam, nitidam, deflexam, duabus luteis venis secundum longitudinem excurrentibus et multis aliis transuersalibus notatam. Colorem luteum flores isti habent, sed ideo prae reliquis huius classis notabiles, quia in flore adultiori et semina maturescente persistunt immarcescibiles, et exiguam alterationem coloris patiuntur. Continuus est flosculus iste lingulatus cum semine triquetro, striato, cinereo, incuruo, nec vnquam ab eo separatur. Ex meditullio flosculi exit pistillum vnicum, diuisum in duas tubas luteas, incuruatas, duas lineas longas. Alterius generis flores, hermaphroditi nempe, positi, sunt in thalamo conico paleaceo, lineam crasso et fungoso, quorum ii, qui centrum disci occupant, citius reliquis efflorescunt; constantes autem ex corolla monopetala tubulosa, tubo breui in fine globoso et quodam modo compresso, limbo in quinque segmenta linearia, extus ferruginea, intus lutea et tomentosa, diuiso.

Stamina quinque in medio tubi, diſtincta habent filamenta breuiſſima et antheras cylindraceas, tubuloſas, parum inter ſe cohaerentes, licet cylindrum forment. Piſtillum per florem deſcendit ad ſemen vsque, et in extremitate altera, ex tubo exporrecta, diuiditur in duas tubas, prout in lingulatis. Semina inuoluuntur paleis lanceolatis, omnem ambitum illorum vaginae inſtar circumdantibus, in apice prominente colore pullo infectis, et ſunt angulata, anguſta, coronata duobus denticulis ſubulatis, altero breuiori, altero longiori, quamquam nonnunquam alter, vel deficiat, vel vix conſpicuus ſit. Abſoluta nunc partium ſingularum expoſitione, progredior ad conſtituendum characterem genericum, ex florum et ſeminis conditione petendum. Secundum methodum a Cel. *Ludwigio* elaboratam, quam ſequor, pertinebit ad claſſem florum compoſitorum mixtorum, et ſi adtendimus ad reliquas notas characteriſticas, pro conſtitutione generum adſumtas, quales ſunt calyx ſquamoſus, thalamus paleaceus et ſemina anguloſa, ad genus Verbeſinae planta iſta, tamquam ſpecies genuina, referenda eſt. Differentiam ſpecificam in foliorum ſitu oppoſito, et pedunculo florum breui ac incraſſato, tribus foliis conſtanter veſtito, facillime inueniri poſſe credo. Reliquis itaque Verbeſinae ſpeciebus adiungatur nomine ſpecifico: Verbeſina foliis oppoſitis ouato-acutis, integerrimis, ſcabris, pedunculorum ſummitatibus incraſſatis et folioſis. Nondum octennium effluxit, ex quo rarior haec planta ex *Gallia* in Germaniam miſſa, non nullis innotuit. Quantum recordor, Cel. *Bernh. de Iuſſieu* eam ex

America meridionali accepit, et nomine Bidentis saponariae folio Lipsiensibus communicauit. In viridario instructissimo Cel. *Ludwigii* ante aliquot annos primum floruit, et ex illo a me 1755 primum semina Petropolin missa: tum vero 1757 cum aliis rarioribus cultam et florentem descripsi et delineandam curaui. Repetii vero sationem hoc anno ideo, vt de vegetatione illius, aetate et perduratione in climate boreali certi quid notare valerem. Dum iam confecta esset delineatio, et descriptio composita, offertur mihi Catalogus plantarum horti academici et agri Goettingensis, conscriptus a Clar. *Zinnio*, Botan. Prof. Goetting. (Goetting. 1757. 8.), in quo haec Verbesina ex seminibus, Lipsia quoque acceptis, ab auctore catalogi *Rudbeckiae*, tamquam noua species, adnumeratur, inscripta: *Rudbeckia* foliis oppositis hirsutis ouato-acutis, calyce imbricato cylindrico, radii petalis pistillatis, et icone illustratur, in qua vnicus flos, vna cum singulis partibus floris et seminis sistitur. Quia vero totus habitus plantae singularem quamdam formam prae se fert, et rami erecto-patuli, caulem ipsum superantes, venustatem speciosam stirpi conciliant; non auocari potui a proposito, quod ceperam, iconem iam confectam, omnem habitum denuo repraesentantem, hic tradere, quod minime displicebit iis, qui plantam nouam, habitu et forma prorsus peculiarem, inspicere cupiunt, vsque dum vulgatior sit, quod proxime futurum, cum quotannis copiam seminum exhibeat, et non adeo magna cura vbique proueniat.

Expli-

Explicatio Tab. III. Tab. XIII.

A. Plantae natiua magnitudine expositae pars superior.

a. Calyx cum disci floribus.

b. b. b. Squamae calycinae variae magnitudinis.

c. Radii flosculus ab interiori facie cum semine triangulo nudo.

d. Disci flosculus cum palea vaginali semen obuoluente.

e. Vagina, seu palea eiusdem flosculi.

f. Semen, disci flosculum sustinens.

g. Disci flosculus cum suo pedicello.

h. Semen disci bidentatum.

## IV.

BRASSICA foliis oualibus, subintegerrimis, floralibus amplexicaulibus, lanceolatis, calycibus vnguibus petalorum longioribus. *Linn.* Cent. I. Plant. Vps. 1755. n. 54.

Radix annua, caulescens, lignosa, emittit vndique radiculas plures albas, succulentas, fibrillis copiosis instructas. Folia radicalia copiosa, quae in capitulum colliguntur, antequam caulis ex radice protruditur, vtplurimum pedem longa, et dimidium lata, oblonga, obuerse ouata, in margine vndulata et dentata, denticulis apice calloso instructis; superficie prona viridia, rugosa, glabra, supina glauca, laeuia. Neruus folii penitus albus, in basi vnciam latus, in aduersa parte laeuis et depressus, in auersa vero exstans et sulcatus, ex quo secedunt etiam vtrimque plures venae albentes, substantiam folii perreptantes. Caulis in planta florente et semina maturante, circa terram duos pollices crassus, canaliculatus, glaucus, quaqua versum plures ramos alternos emittit; superius glaber et quodammodo angulofus, tres quatuorue pedes altus. Folia in caule et ramis funt feffilia, amplexicaulia, cordato-lanceolata, denticulis minoribus et rarioribus inftructa, fuprema vt plurimum integra. Flores in pedunculo communi ante florefcentiam denfius collecti, vmbellam quafi fiftunt; poftea vero diffiti in fpica elongata fucceffiue aperiuntur, prout in reliquis filiquofis ita fieri folet: propius pedicellus fex lineas longus florem fuftinet. Calycis foliola funt quatuor, fublutea: duo exteriora bafi gibba et latiora, duo interiora anguftiora, omnia fubulata, concaua, canaliculata, erecta, poft decidua; fuperant altitudine vngues petalorum, et eminent inter petala, vbi ftamina breuiora pofita funt, hinc etiam petala oppofitum fitum, non cruciatum, habent. Petala funt fubrotunda, concaua, in apice vnica crena emarginata, lutea, terminata vngue breui, lato-lanceolato-albido. Glandulae quatuor virides: ftamina fex filamentis linearibus teretibus, quorum duo breuiora extrorfum flexa, quatuor altiora erecta, columnam tetragonam formant: his infiftunt antherae oblongae, acuminatae, biloculares, extrorfum flexae, feu diftantes, puluerem luteum difpergentes. Stylus vnicus, ftigma capitatum minimum. Siliqua biualuis, linearis, lateribus compreffa, duos pollices longa, nodofa, propter valuulas tenues, per quas femina, in thalamo fungofo haerentia, tuberculorum inftar extus confpiciuntur; feptum valuularum prominens dimidium pollicem longum. Semina matura rotunda, fubfufca, fplendentia, guftu acria. Huius plantae femina, vnde ad nos delata fint, paucis indicare non fuperfluum erit, praefertim

tim hanc etiam ob rationem, quia peregrinator quidam, qui Chinam haud ita pridem visitauit, adseruit, ac si in regno sinensi brassicae et sinapi sua sponte non crescerent. Huius vero opinionis vanitatem non solum indices plantarum antiquiores, qualis est immortalis *Boerhauii*, qui in indice altero II. p. 12. Brassicam sinensem folio lactucae, flore luteo, quae forte nostra est species; et p. 13. Sinapi chinense folio acanthi, inter plantas tunc temporis iam notas, enumerat: sed etiam omnis futura dubitatio plane tolletur, si certiores facio curiosos, aeque in China ac in aliis regionibus, brassicam quamdam esse indigenam. Sciant itaque exteri, commercium litterarum Acad. Scient. Petropolitanam diu iam cum R. P. Societ. Iesu Pekini commorantibus habere, illosque subinde semina varia insimul nobis tranmisisse. Talem collectionem seminum etiam 1756 per mercatores russicos Pekino Academia Scient. impetrauit. Inter ea fasciculi duo erant, alter Brassica sinensis, alter Caules sinici maximi, insigniti. Vtrumque semen satum, et ex terra proueniens, protulit vnius eiusdemque speciei plantas, hanc nempe, quam exposui, brassicam. Nisi me instigasset curiositas et experiendi desiderium, an differrent etiam characteribus specificis ab huc vsque cognitis brassicae speciebus indicatae, omisissem forte horum seminum sationem, quia iam ex commercio litterarum antecessorum meorum cognoueram, plus vice simplici non ea solum semina transmissa esse, quae Sinarum regno indigena sunt, sed et alia, ex aliis prouinciis sensim illata. Simile quid et nunc factum fuisse, intellexi perſpicue: adpoſita enim erant alia braſſicarum ſemina, nullo peculiari titulo inſignita, quae dederunt braſſicam ſic dictam oleraceam eiusque varietates omnibus cognitas; hinc colligo, coli plures ibidem pro vſu oeconomico. Sed redeamus ad noſtram. Plantas iuniores, ſi obiter inſpiciuntur, nemo ad braſſicas referret; exacte enim habitum Lactucae ſatiuuae, romanae dictae, referunt. Menſem circiter adultae folia in capitulum colligunt, molle et oblongum; tum breui interiecto temporis ſpatio caulis protruditur, et rami copioſi et patuli excreſcunt. Altero menſe poſt ſationem, ſi tempeſtas coeli fauet, iam flores profert, et quarto menſe exacto ſemina maturantur. Frigus ſeptemtrionale, quod exeunte menſe Auguſto iam ingruit, minime ob texturam mollem et ſuccoſam perferre valet. Si coniectura non inprobabilis locum inuenire poteſt, braſſica forte noſtra, ea ipſa eſt planta, ex cuius ſemine premitur oleum illud, quod Sinenſes adhibent in cibo et lucerna, prout refert *Anonymus*, * Suecus, in Oeconomia Sinarum Holm. 1757. 8. plantam, ſcribens, ex qua depromuntur ſemina pro conficiendo oleo, raphano eſſe ſimilem, et florem habere luteum. Experimenta tum capi poterunt, cum ſufficiens copia ſeminum collecta fuerit, neque illa irrita fore praeuideo, cum iam alia ſpecies braſſicae radice cauleſcente fuſiformi, ſeu Napus ſilueſtris, oleum ſuppeditet, ad multos vſus familiare. Antequam vero finio diſſertationem, probandum mihi incumbit, genuinam etiam eſſe ſpeciem braſſicae, eique inſimul imponendum nomen ſpecificum, quo ab aliis ſui generis clare diſtingui poſſit.

Super-

Superfluum vero foret denuo hic enumerare notas characteristicas, quas pro stabiliendo genere Brassicae adsumserunt methodorum auctores. Conferantur modo datae a nobis superius descriptiones, et notatae in singulis partibus conuenientiae, cum genere brassicae; comprobabit tum, et similitudo, et aequalis fabrica partium, huic, nec alii generi, adnumerandam esse in posterum. Accedit sententiae nostrae non leue robur etiam exinde, quod Ill. *Linnaeus* in Centur. Plant. I. Vpsal. 1755. n. 54. adsignauit ei etiam iam locum inter brassicas. Attulit enim b. *Osbeck*, redux ex China, semina, hinc vegetantem, florentem et fructus ferentem disquisiuit et denominauit. Retinemus hinc datum ab eo nomen specificum immutatum: Brassica foliis oualibus, subintegerrimis, floralibus amplexicaulibus, lanceolatis, calycibus vnguibus petalorum longioribus. De noua planta vna cum descriptione exhibere iconem, omnibus numeris absolutam, minime superfluum esse reor: attamen, si adumbratio exacta, secundum omnes partes datur, et hic labor omitti potest. Curassem certo confici iconem, nisi me auocasset a proposito diuulgatio iam facta plantae alibi. Obstitit mihi et hoc, cum dubius haerebam, annon icon *Pauli Hermanni*, in Paradiso batauo pag. 250. data, et quae Sinapi indicum maximum, lactucae folio, sistit, aeque nostrae plantae, ac Sinapi, conueniat. Quodsi enim cuiquam volupe est, conferre datam loco indicato descriptionem et iconem cum brassica hac florente, cognoscet statim, calycem, florem et fructum omnimodam conuenientiam inter se habere, nec meliorem et

accu-

accuratiorem, si folia excipias, de nouo fieri posse iconem. Sed qua fiducia tu allegas hanc iconem, obiiciet aliquis? Num te latet, illud Sinapi, quod *Hermannus* descripsit, et delineatum dedit, a *Boerhauio*, *Linnaeo* et aliis omni tempore ad Sinapi relatum esse? Fateor hoc insolens esse, praesertim si descriptionem Ill. *Linnaei* de hoc Sinapi in Hort. Vps. pag. 191. datam, curatius perpendo, et cum planta hac confero; multa enim indicantur ibi signa, quae dissuadent confundere Sinapi illud cum brassica: feci illud tantum, ob florem et fructum, brassicae nostrae simillimum. Quantae difficultates sese obiiciunt ei, qui plantam, quam pro noua habendam esse credit, cum denominationibus incompletis et iusto breuioribus antiquorum conferre studet, ii tantum norunt, qui hunc laborem in se suscepere. Quodsi enim adfirmamus, a nemine huc vsque mentionem factam esse plantae a nobis disquisitae, incumbit nobis insimul probare, ista loca, vnde accepimus semina, a nullo botanico adhuc esse perlustrata, neque etiam illinc vmquam ad exteros missa esse semina. Posterius de Sinarum regno non valet. Cum enim commercium exterorum cum Sinis sat longo abhinc tempore iam institutum sit, pluresque peregrinatores attulerint inde plantas indigenas, nunc vbique cognitas; non improbabile est, et huius plantae semina olim esse exportata. Huius afferti veritatem exinde probari posse contendo, quia *Boerhauius* in indice altero II. pag. 12. recenset Brassicam sinensem lactucae folio, flore luteo. Si nudum illud nomen accipio, prout plantae inditum est, quid impedit, quo minus credam,

credam, esse nostram speciem, cum folia radicalia, prout supra monui, habitum lactucae satiuae exacte referant.

Occasione hac opportuna, dum Sinapi speciei mentionem inieci, non incongruum erit, quaedam hic addere de quadam specie, hactenus dubia. Notum enim est, in indice *Boerhaauii* pag. 12. inter Sinapi species haberi etiam aliquam, quam acanthi folio vocat. Citat hoc synonymum Ill. *Linnaeus* ad spec. 2. Hort. Vpsal. pag. 191; in Speciebus vero iterum omisit, substituendo solum Sinapi indicum lactucae folio *Hermanni*. Cl. *Zinnius* in Catalogo horti et agri Goettingensis vtrumque synonymum simul adducit. In seminario horti academici adseruabatur quoque Sinapi acanthi folio insignitum, quod satum, minime speciem *Linnaei* Spec. plant. n. 4. indicatam dedit, sed eam potius, quam Ill. *Hallerus* Hort. Goett. pag. 250 retento nomine Sinapi orientale maximum rapi folio *Tourn.* I. R. H., quoad florem et fructum descripsit. Folia illud habet pinnata, pinnis tribus irregulariter dentatis, impari maxima; reliqua ex descriptione allegata *Halleri* petenda. Eodem tempore seueram Sinapi, ex China 1756. acceptum, ideo celebratum apud Sinenses, prout in capsula adscriptum legitur, quod „illius radices coctae cum raphani maioris radicibus „crudis commixtae et maceratae per aliquot horas in „vase clauso habeant saporem fortissimum„ collatis vero vtriusque foliis, floribus et siliquis, nempe eius, quod

quod acanthi folio acceperam, et huius ex China accepti, cognoui, minime differre specie, sed nomine tantum. Nemo itaque a me exigere potest vlteriorem de hac specie relationem, quia eam iam Ill. *Hallerus*, et *Linnaeus* Cent. Plant. I. n. 55. nomine specifico Sinapi siliquis retrorsum hispidis, apice subtetragonis compressis, exhibuere.

---

---

---

DE

# DE GRADIBVS FRIGORIS SVMMIS, QVOS CERTA FLVIDORVM GENERA FERRE POSSVNT, ANTEQVAM FIANT SOLIDA, IN GLACIEM ABEVNTIA; ATQVE GRADIBVS SVMMIS CALORIS, QVOS ACCIPERE POSSVNT, DONEC BVLLIRE INCIPIANT, ET IN IPSA BVLLITIONE CONTINVATA, DISSERTATIO EXPERIMENTALIS.

Auctore

*I. A. BRAVN.*

Scalam graduum frigoris et caloris insignes afferre vtilitates, ad naturam fluidorum pariter atque firmorum corporum, adeo quoque ipsius ignis, melius cognoscendam, dubio caret. Publicauit primum, quod sciam, eiusmodi scalam graduum caloris et frigoris magnus *Newtonus* in Actis Societatis Regiae Londinensis mense Aprili 1701. N. 270. Nomen Auctoris hic quidem additum non legitur, tribuitur tamen illi in Opusculis, vbi haec scala opusculum XXI conficit Tomi II.

Scalam graduum frigoris perficiendi occasio proculdubio in locis septentrionalioribus maior est, quam in minus septentrionalibus, in primis hiemibus saeuioribus. Quum igitur hiemem anni 1757 et 1758 vehementiorem hic Petroburgi experti simus, hac oppo-

 portu-

portunitate vtendum censui, variis experimentis instituendis scalam, frigoris potissimum, perficiendi et amplificandi.

Antequam ad ipsa experimenta exponenda progrediar, quaedam de Thermometris praemonenda videntur, quibus in capiendis experimentis vsus sum. Scala Deliliana a me est adhibita, qua etiam in obseruationibus meteorologicis faciendis vtor, vbi scilicet cifra gradum caloris aquae ebullientis, et numerus 150 gradum aquae in glaciem abeuntis, et aquae sub glacie notat, siue niuis regelascere incipientis. Nullam enim differentiam vnquam obseruare potuimus inter gradum niuis regelari incipientis, glaciei recens natae, et aquae sub glacie, quamuis innumera experimenta in hunc finem instituerimus. Hinc quoque non dubitauimus in thermometris nostris saepius Punctum congelationis ope aquae sub glacie determinare, quia minimo tempore haec methodus indiget, quod commodissimum tunc inprimis est, quando thermometri puncta fixa paullum loco mota videntur, quod nonnumquam contingere potest et solet pluribus experimentis institutis.

Non ignoramus quidem quibusdam hanc determinationem puncti congelationis ope aquae sub glacie dubiam videri posse, quia experimenta quaedam probare videntur aquam maiorem frigoris gradum nonnunquam recipere posse, quam niuis regelascere incipientis, vel glaciei recens genitae.

At enim vero nihil tale obseruare potuimus, quamuis omni diligentia adhibita in hunc finem experimenta

rimenta cepérimus atque repetierimus plurima. Teximus vitra cera, et aliis operculis ex vitro et ligno, porro varia olea, lini, cannabinum, oliuarum, nucum et essentialia aquae superfudimus, in omnibus hisce experimentis sub eodem gradu scilicet 150 glacies in aqua oriri coepit. In quolibet vitro thermometrum a me immersum erat. Aqua circa bulbum thermometri congelata retinebat ab initio eundem gradum niuis regelascere incipientis, sed tota aqua in vitro congelata adsumebat paullatim gradum frigoris aeris ambientis, 170 et 180 etc.

Ratione temporis, quo in diuersis vitris aqua gelascere coepit, omnino differentia mihi est notata. Nam primum aqua in vitro aperto est gelata, cum nondum vestigium glaciei, neque in vitris tectis, neque in iis, in quibus oleum aquae innatabat, deprehenderetur, et in his quoque congelatio diuerso tempore contigit, licet omnis aqua, quum aeri frigido exponeretur, eiusdem fuerit temperiei, quod etiam de oleis superfusis est intelligendum. Non igitur valet consequentia, hoc vel illud fluidum minori tempore ad congelationem, quam aliud, indiget, ergo sub minori gradu quoque gelascit, quum conditiones esse queant, tam respectu vasis, quam naturae fluidi aliaeque, quae efficiant, vt fluidum citius, tardius, temperiem aeris adsumat; hinc quoque in omnibus experimentis nostris ad tempus non attendimus, intra quod in quolibet fluido congelatio contigit, sed tantum ad gradum thermometri immersi.

Punctum fixum alterum more consueto aqua bulliente est determinatum, sed sub certa et determinata barometri altitudine scilicet 28 poll. pedis regii parisiensis, quum constet thermometra variari, si sub diuersa barometri altitudine aqua bulliat, cui immerguntur. Ad eandem profunditatem quoque aquae ebullienti sunt immersa, nimirum 6 pollicum paris. Bulbus in omnibus thermometris erat sphaericus, elegimus autem hanc figuram ideo, quod minor portio fluidi explorandi requirebatur, quam si formam cylindraceam, aut aliam bulbus haberet. Hydrargyrum erat idem purum, quo thermometra sunt impleta, et hac ratione thermometra satis concordantia obtinuimus, quibus gradus frigoris et caloris fluidorum adcurate explorare potuimus. Pars inferior tubi thermometrici ad duos pollices nuda plane erat, nulli tabulae adfixa, vt eo commodius et adcuratius immergi potuerint in fluida exploranda.

Vti solemus non minus termino positiuo in adsignando frigore, quam calore ex consuetudine loquendi, quamuis frigus mera sit caloris priuatio et diminutio, ita vt caloris gradus minores respectu caloris graduum maiorum, gradus frigoris dici possint. Ita gradus frigoris 200 scalae nostrae satis magnus est respectu graduum frigoris in regionibus calidioribus, sed paruus respectu maiorum frigoris graduum e. g. 280. 300 etc. quo respectu igitur caloris gradus est et dici potest, vti in terminis et ideis relatiuis, quales et frigoris et caloris sunt, fieri solet. Nullus igitur terminus caloris desinentis, et frigoris incipientis absolute indicari potest; mere arbitrarium est in thermometris frigoris gradus

ab

ab eo caloris gradu numerare incipere, quo aqua in glaciem abire solet, quamuis hoc non inconuenienter fieri potest. Multo minus caloris augmenta et decrementa vltima, seu caloris et frigoris terminos vltimos, adsignari posse, per se patet. Hinc facile intelligitur, terminum materiae frigorificae nihil positiui inuoluere, et inuoluere posse. Sunt enim materiae frigorificae sic dictae nihil aliud nisi materiae calorem aliorum corporum minuentes, vt est spiritus nitri, vitrioli, salis, quin spiritus vini glaciei contusae et niui adfusa. Item salia niui mixta et alia. Neque hae materiae frigefacientes in omnibus corporibus calorem diminuunt, et frigus producunt, vt potius in aliis calorem augeant, et producant, vt idem spiritus nitri et alii spiritus acidi et vinosi, qui respectu niuis sunt frigefacientes, respectu aquae sunt calefacientes. Sed haec hactenus; veniendum ad ipsa experimenta est. Materiae, circa quas experimenta instituimus, fuerunt potissimum 1) Solutiones salium, 2) Vina et spiritus vini, 3) Olea, potissimum expressa, 4) Metalla quaedam.

Ad solutiones salium quod attinet, quarum phaenomena primum proponemus, notandum est, in omnibus solutionibus eandem aquae quantitatem esse adhibitam, scilicet calycem vitreum, ex quo vinum bibi solet, aqua fere plenum.

Calor aquae fere erat gradus 60, quo cera fundi solet. Sales ipsi eundem gradum caloris tenebant. Solutio ad punctum saturationis facta est. Gradus caloris vltimos, quos in statu fluiditatis, et initio fir-

mitatis

mitatis ferre hae ſolutiones potuerunt, notaui, quando ſuperficies aquae ſalſae glacie obduci coepit.

En ipſos frigoris gradus, quos in ſtatu fluiditatis vltimo tulerunt diuerſorum ſalium ſolutiones, ſiue ſub quibus in glaciem abiere.

| | |
|---|---|
| Solutio ſalis communis in glaciem abiit ſub gradu | 182 |
| Solutio ſalis ammoniaci - - - | 181 |
| Solutio ſalis digeſtiui Syluii - - - | 165 |
| Solutio ſacchari - - - - | 161 |
| Solutio cinerum clauellatorum - - - | 161 |
| Solutio ſalis alcali depurati - - - | 160 |
| Solutio ſalis Ebſon. - - - - | 156 |
| Solutio nitri depurati - - - | 155 |
| Solutio ſalis ſedlicenſis - - - | 154 |
| Solutio aluminis - - - - | 153 |
| Solutio vitrioli veneris - - - | 152 |
| Solutio vitrioli communis - - - | 152 |
| Solutio boracis venetae - - - | 152 |
| Solutio ſalis Sibirici - - - - | 152 |
| Vrina - - - - - | 152 |
| Solutio arcani duplicati - - - | 151 |
| Solutio tartari albi - - - - | 151 |

Ex comparatione diuerſorum frigoris graduum, ſub quibus diuerſae hae ſalium ſolutiones in glaciem abire coeperunt, adparet, ſolutiones ſalium communis et ammoniaci omnium maximos frigoris gradus ſuſtinere poſſe, antequam ex ſtatu fluiditatis in ſtatum ſoliditatis vel firmitatis tranſeant.

Hinc

Hinc si interest, tempore hiemis aquam in statu fluiditatis manere, sale communi in aquam iniecto obtineri potissimum potest, quum hic sal maxime congelationem aquae impediat, atque sal ammoniacus.

Verum vero proportio a me indicata inter gradus frigoris solutiones salium congelantes semper obtineat, adfirmare non ausim, quum, si etiam caetera omnia sint paria, eorundum salium diuersa bonitas et puritas esse possit. Non igitur in his et sequentibus quoque experimentis adcuratio geometrica requiri potest, sed et haec et similia cum latitudine intelligenda esse facile conspicitur.

Differentia graduum frigoris procul dubio pendet vel a maiore salis copia, quam diuersae solutiones recipere et continere possunt, vel etiam a diuersa salium natura atque textura.

Nam quum eadem aquae quantitas, quam in experimentis nostris adhibuimus, non eandem salis diuersi copiam soluere soleat, sed admodum diuersam, sequitur, vt in diuersis solutionibus diuersa quoque insit salis quantitas. Quantitatem hanc diuersam salium in diuersis solutionibus determinare multis experimentis non infeliciter studuit *Ellerus* in Commentariis Academiae Berolinensis anni 1750. Iam maior salis copia vtplurimum maius quoque impedimentum congelationi obiicere potest et solet, hinc mirandum non est, aquam maiore salis copia impraegnatam maiorum quoque frigoris graduum esse capacem, magisque congelationi resistere posse. Aqua igitur marina circa littora multo facilius congelatur, quam in locis a littoribus remotiori-

 bus,

bus, quoniam circa littora aqua marina minus salsa esse solet, potissimum ob fluminum influxum; hinc nonnulli statuerunt, vltra viginti milliaria ab ora maritima maria non congelari, quod tamen experientiae repugnat. vid. *Musschenbroekii* Essai de Physique § 925. Maiorem salis copiam in aqua solutam, congelationem quoque magis impedire, illa quoque experimenta demonstrant, quibus diuersi generis sales in eadem aquae quantitate soluuntur; constat enim eandem aquae quantitatem, si vnius generis salem non amplius soluat, soluere tamen alterius generis adhuc posse et solere. Quae in hunc finem experimenta institui, in posterum cum aliis huius generis communicabo. Interim dissimulandum non est, deprehendi tamen solutiones maiorem salis soluti copiam continentes, minus tamen aliis, minorem salis copiam continentibus, congelationi resistere, quod igitur a diuersa salium natura et speciali textura generatim pendere debet, sed specialius hoc disquirere huius loci non est., nec instituti. Caeterum monendum adhuc est, cauendum esse, ne salium praecipitatio fiat in congelationibus solutionum salinarum, quod impediui, dum vehementissimo frigori eas exposui, vt congelatio quam breuissimo tempore contingeret. Hac ratione obtinui glaciem aequaliter salsam, in quantum gustu percipere potui.

Quas salium solutiones frigori exposui, vt congelarentur, easdem igni quoque subieci, vt ebullirent, tam ad initium ebullitionis determinandum, quam ad eos gradus caloris definiendos, quos in continuata bullitione adsumerent.

Constat

Conſtat gradum caloris aquae bullientis eſſe conſtantem. Conſtantes gradus in ſolutionibus noſtris non eſſe, nec facile eſſe poſſe; haud difficulter praeuidi. Sunt enim fluida maxime heterogenea, quae naturam et texturam durante bullitione non poſſunt non mutare. Variationes tabula ſequens indicabit.

Solutio ſalis communis bullire plene coepit circa 5. infra o. continuata vero ebullitione adſcendit ſupra o ad gr. 20 thermometri mercurius.

Solutio ſalis ammoniaci, vti aqua, bullire coepit circa o. continuata ebullitione attigit gr. 15.

Solutio cinerum clauellatorum iam plene bullire coepit circa gr. 15. infra o.
continuata bullitione peruenit ad gr. 20 ſupra o.

Solutionis ſacchari initium plenae ebullitionis infra o. 2 contigit; in continuata ebullitione ſpiſſior facta notauit grad. ſupra o. 25 thermometrum.

Solutionis ſalis alcali depurati initium bullitionis infra o. 5. continuata bullitione ſupra o. 8. adſcendit mercurius.

Solutio ſalis ſedlicenſis plene bullire coepit infra o. 3; dein ſpiſſior facta adſcendit ſupra o. 15 thermometrum.

Solutio vitrioli communis et veneris plene bullire incepit infra o. 3; et in continuata bullitione fere eundem gradum retinuit, ad 1 enim ſupra o tantum adſcendere viſum eſt thermometrum.

Solutio ſalis Sibirici conſtantem fere gradum quoque in ebullitione retinuit, nam ſupra o. 1 tantum adſcendit thermometrum immerſum.

Solutio aluminis ſupra o. 1 bulliit.
Solutio boracis venetae ſupra o. 2.
Arcani duplicati ſolutionis initium o. continuata bullitione, ſupra o. 3. mercurius adſcendit.
Solutio ſalis Ebſon, infra o. 3 coepit, dein ſpiſſior facta ſupra o. 20. thermometrum adſcendit.

Quod ſi hi gradus caloris, quos ſolutiones ſalium indicatae, vel ſub initium ebullitionis, vel in continuata ebullitione, adſumſerunt, inter ſe comparentur; conſpicitur vel circa o, vti aqua ſimplex ſolet, bullire coepiſſe, vel infra cifram, vti pleraeque, adeoque ſub minori gradu, quam aqua ſolet. Et aqua marina ſub multo minore gradu quoque bullire incipere dicitur, ſcilicet ſub 22 infra o. Sed proportio certa et conſtans graduum caloris, quam hae ſolutiones inter ſe ſeruent, ex his ſaltem experimentis erui poſſe non videtur. Videri quidem poſſet ſolutionem, quo plus contineat ſalis, eo ſub minore gradu bullire incipere debere, ſed ex comparatione experimentorum non patet, et diuerſae ſalium naturae ratio hic quoque eſt habenda. Plura igitur hic ſunt experimenta inſtituenda, ad explorandum, vtrum aliqua ratio et proportio forſitan erui poſſit circa initia ſaltim ebullitionis plenae. Caeterum ſolutionem cinerum clauellatorum minimo caloris gradu ad ebullitionem indigere conſpicitur.

Plenae ebullitionis initium poſui, quia aqua quoque conſtantem gradum non nanciſcitur et retinet, niſi omnis aqua plene bulliat.

Ad ebullitionem continuatam quod attinet, facile patet in ea nihil conſtans et perpetuum facile determinari

nari posse. Nam quo longius continuatur ebullitio, eo plures vapores aquei abeant in aera necesse est, eo magis igitur quoque consistentia fluidi mutetur oportet. Continuauimus in nostris experimentis ebullitionem donec manifesto solutio in quibusdam spissior facta est, in aliis vero donec fere dimidia aqua fuerit euaporata. Quae solutiones fere eundem caloris gradum in ebullitione retinuerunt, eas ab aqua communi parum aut nihil omnino hoc respectu differre, manifestum est. Caeterum in eiusmodi experimentis omnia ad punctum determinari non posse, sed cum latitudine quadam esse intelligenda, iam ante monuimus, quum et materiae ratione bonitatis differre queant, et vix sub iisdem circumstantiis semper repeti possint.

Haec hactenus de solutionibus salium, plures in posterum communicabo, sed nunc ad alia experimenta progrediendum est, scilicet ad ea, quae de vinis et spiritibus vini cepimus. Vina varia varios frigoris gradus in vltimo fluiditatis et primo firmitatis statu tulerunt, nimirum sub sequentibus frigoris gradibus in glaciem transiere.

| | |
|---|---|
| Vinum Hisp. et illud, quod Sect dicitur, abiit in glac. sub gr. | 167 |
| Vinum Tinto dictum - - | 167 |
| Madera Maluasier - - - | 167 |
| Vinum Hungaricum vetus - - | 165 |
| Madera vinum - - - | 163 |
| Vinum Burgundicum - - - | 162 |
| Vinum Florentinum - - - | 161 |
| Vinum Roquemor - - - | 161 |
| Vinum Margaux - - - | 161 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Vinum Francicum album vetus | - | - | | 160 |
| Vinum Campanense | - | - | - | 160 |
| Vinum d'Ermitage dictum | - | - | | 160 |
| Vinum Rhenanum | - | - | - | 159 |
| Vinum Hoogbrion | - | - | - | 159 |
| Cereuisia anglicana, Ale dicta | - | - | | 159 |
| Vinum rubrum Francicum | - | - | | 155 |
| Acetum vini optimum | - | - | | 155 |
| Cereuisia ordinaria, vti hic haberi solet | - | | | 152 |

Ad spiritus vini quod attinet, sequentia phaenomena frigori expositi monstrarunt. Spiritus vini rectificatus sub gradu frigoris 197 nullum congelationis vestigium ostendit, multo minus spiritus vini rectificatissimus. Sed spiritus vini gallicus, vti hic vendi solet, iam sub gradu 194 particulas glaciales conspiciendas praebuit. Spiritus vini Russicus optimus sub gradu 192 et vulgaris sub gradu 190 in glaciem abire coepit.

Quod circa solutiones salium monuimus, id hic quoque valet, scilicet haec experimenta adcurationis geometricae non esse capacia, sed cum latitudine quadam esse capienda. Quis enim ignorat, vina eiusdem generis, etiam, quae pro optimis haberi solent, non eundem semper bonitatis gradum habere solere? Nos quae potuimus optima nancisci vina, in experimentis adhibuimus.

Ex comparatione frigoris graduum, quos thermometra in vina immersa monstrarunt, dum in glaciem abire coeperunt, manifestum est, vina dulcia maiores caeteris frigoris gradus sustinere posse, donec congelengelentur, quod patet ex experimentis de vino hispanico, et ficco, vel Sect, vino Tinto, Madera Malussier et vino hungarico, quod vltimum tamen tantum frigoris gradum in statu fluiditatis vltimo perferre non potuit, quantum quatuor priora, illa enim 167, hoc autem 165 tantum sustinuit. Minimum frigoris gradum tulit vinum rubrum ordinarium francicum, quamuis pro optimo sui generis haberetur, quo vsus sum. Vtrum hae proportiones frigoris graduum, quas indicauimus, adcurate semper ita in experimentis se habiturae sint, quaestio est, quam pro certo adfirmari non posse quilibet perspicit, qui tantum considerat eundem bonitatis gradum semper haec vina habere nec solere, nec facile posse.

Vina et spiritus vini, et generatim fluida spirituosa, procul dubio eo magis congelationi resistunt, adeoque eo maiores frigoris gradus, qua fluida, ferre possunt, quo maiorem spiritus copiam pro dato volumine continent. Hinc sequitur, quod eiusmodi experimenta indicia quantitatis spiritus in fluidis eiusmodi contenti praebere queant. Quo insigniores enim frigoris gradus eiusmodi fluida spirituosa, qua fluida, sustinere possunt, eo maiorem spiritus copiam; quo minores, eo minorem spiritus quantitatem continebunt. Salis contenti tamen ratio quoque erit habenda, quem congelationi magis minusque, pro varia eius natura et copia in fluido contenta, resistere, ex superioribus patet, vti quoque ex spiritibus sic dictis acidis elucet, de quorum congelatione in posterum agam. Argumentum igitur semper rite procedet: quo maior spiritus copia in dato fluido continetur, eo magis fluidum congelationi resistet, sed forsitan fitam omni exceptione maius argumentum non erit, si inuertatur: quo magis congelationi fluidum spirituosum resistit, eo maiorem spiritus quantitatem habeat necesse est, nisi ostendi dato casu potest, rationem salis contenti negligi posse.

Porro ex his experimentis intelligi potest, quando fluida spirituosa a congelatione libera futura sint, quando contra conglaciationis periculo exposita, si considerentur frigoris gradus, sub quibus congelari coeperunt. Sed facile conspicitur, hoc tantum valere posse, si in ipso fluido, thermometro immerso, frigoris gradus exploretur. Nam aer ambiens maiorem saepius frigoris gradum diu habere potest et solet, quam fluidum in vase contentum. Aqua ipsa in medio diu fluida manet, quamuis gradus 160 et amplius in aere regnet; quae tamen in media glacie contenta retinet nihilo minus gradum 150, quod et ex superioribus manifestum est, et alias satis constat.

Caeterum cautionis adhuc mentio est facienda, quam in hisce experimentis institutis adhibui, et quae in instituendis est adhibenda. Notum enim est, eiusmodi fluida spirituosa, quum sint heterogenea, in congelatione insignem pati mutationem, et eadem non permanere, dum partes spirituosae in medio fluido congregantur, et hinc maioris frigoris gradus capaces fiant necesse est, quin solo frigore et congelatione ex vino spiritum vini fieri posse constat. Vt igitur euitetur et euaporatio, et mutatio fluidi, quantum fieri potest, haec experimenta tunc demum sunt capienda, quando

in

in aere atmosphaerico multo maius frigus regnat, quam fluidum, vt congelascat, requirit. Sic enim congelatio breuissimo tempore contingit, vti contigit in nostris experimentis, ita vt sensibilem differentiam fluidorum obseruare non potuerimus, quando particulae glaciales conspiciendas se praebere coeperunt in hisce fluidis, et nos punctum congelationis notauimus.

Progredimur ad phaenomena exponenda, quae et vina et spiritus vini, tam sub initium ebullitionis, quam in continuata ebullitione monstrarunt. Nos his tantum initium plenae ebullitionis notauimus, quia facile adparet in progressu ebullitionis fluida eiusmodi spirituosa ob euaporationem perpetuam insigniorem, insigniter quoque mutari, ita vt eo propius ad naturam aquae accedant, quo diutius bullitio continuatur.

Hinc semper maioris quoque caloris gradus capacia fieri solent et debent, donec tandem gradum caloris aquae bullientis attingant ea, quae sunt minus spirituosa, adeoque ab aqua parum aut nihil omnino amplius differant.

Spiritus vini rectificatissimus sub gradu thermometri nostri 32 infra o plene bullire coepit, et hic gradus quoque in progressu ebullitionis constans mansit, vti aquae bullientis.

Spiritus vini gallicus bullire coepit infra o sub gradu 20, sed eundem caloris gradum in progressu non obtinuit, sed calor aliquot gradibus auctus est, idem quoque dicendum est de spiritu vini rectificato, qui sub eodem gradu bullire coepit.

 Vina

Vina ſub initium bullitionis gradus caloris ſequentes monſtrarunt in thermometro immerſo,

Vinum hiſpanicum plene ebullire coepit notante thermometro noſtro immerſo infra o gradus 15

| | |
|---|---|
| Vinum Tinto dictum - - - | 15 |
| Vinum rhenanum - - - - | 15 |
| Vinum d'Ermitage - - - - | 15 |
| Vinum Madera - - - - | 15 |
| Madera Maluaſier - - - - | 12 |
| Vinum vetus hungaricum - - - | 12 |
| Vinum burgundicum - - - - | 12 |
| Vinum campanenſe - - - - | 12 |
| Vinum gallicum vetus optimum - - | 12 |
| Vinum Sect dictum - - - - | 10 |
| Cereuiſia anglicana Ale dicta - - - | 10 |
| Vinum rubrum ordinarium - - - | 8 |
| Acetum vini, vti aqua - - - | 0 |

Quod ſi hi gradus caloris diuerſi, ſub quibus ſpiritus vini et vina ebullire coepere, inter ſe comparentur; adparet primum ſpiritum vini rectificatiſſimum ſub minimo caloris gradu bullire incepiſſe, ſcilicet notante thermometro immerſo 32 infra o. Porro perſpicitur ſolum ſpiritum vini rectificatiſſimum gradum conſtantem in progreſſu ebullitionis retinuiſſe. Ratio huius phaenomeni facile perſpicitur, quum ſpiritus vini rectificatiſſimus fluidum minime heterogeneum omnium, quae tentauimus experimentis, procul dubio ſit, adeoque in ebullitione parum aut nihil omnino mutetur.

Quum

Quum spiritus vini rectificatissimus minimum caloris gradum ad ebullitionem requirat, sequi omnino videtur, fluida eo minori caloris gradu ad ebullitionem indigere, quo propius ad naturam spiritus vini rectificatissimi accedunt, adeoque eo maiorem, quo longius ab ea recedunt. Quo maiorem igitur spiritus puri copiam continet fluidum, eo minori ad ebullitionem gradu opus habet, contra eo maiori egebit calore, quo minor spiritus copia erit in fluido contenti.

Hinc ex gradibus caloris maioribus sub initium bullitionis, et minoribus adcurate notatis, de minore et maiore spiritus in fluido dato contenti copia quoque iudicari posse adparet. Sed non adeo facile est, punctum initii bullitionis adcurate notare, nos initium bullitionis tunc demum statuimus, quum tota fluidi superficies ebullire inciperet, haec ratio est, cur initium plenae ebullitionis adpellauerimus. Initium autem bullitionis primae ab initio plenae ebullitionis esse distinguendum, vel ipsa aqua monstrare potest, quae semper aliquot gradibus a prima et partiali bullitione ad plenam differt, maior vero haec differentia in vinis mihi est obseruata, scilicet 10 graduum et amplius. Quum autem statim post initium ebullitionis calor crescat, difficultas adcurate initium bullitionis obseruandi satis patet. Pondus atmosphaerae non solum in aquam, sed etiam in reliqua fluida bullientia, influere, atque differentiam quandam producere, me non monente quoque facile perspicitur. Nos fluida nostra spirituosa ebullitioni exposuimus, notante barometro 28 pollices pedis regii parisiensis, aut quam proxime.

Denique ex comparatione graduum caloris, quos fluida ſpirituoſa in ebullitione adſumere ſolent, iudicari poteſt, vtrum punctum fixum v. g. per ſpiritum vini vulgarem in thermometris ſpiritu vini impletis determinari poſſit. Satis patet nullum ſpiritum vini calorem aquae bullientis adſumere poſſe, quamuis etiam viliſſimus ſit, et certe ille ſpiritus vini, qui gradum caloris aquae ebullientis adſumere in ebullitione poteſt; parum aut nihil omnino ab aqua differat oportet. Solus ſpiritus vini rectificatiſſimus huic ſcopo ſeruire poteſt, quoniam gradus caloris in ebullitione conſtans eſt.

Sed ſatis pro ſcopo praeſenti de ſpiritibus vinoſis et vinis, ad olea veniendum eſt, quae frigore et calore nobis quoque ſunt explorata.

Olea quum ſucceſſiue frigore ſpiſſiora fiant, donec in maſſam firmam et duram abeant; punctum congelationis eodem modo, ac in praecedentibus fluidis, determinari non potuit. Nam in antecedentibus fluidis congelationis punctum definiuimus, quando fluidum frigori expoſitum, vel glacie obduci incipiebat, vel particulae glaciales adparebant, vt in ſpiritibus vini fieri ſolet; in oleis methodus paullum mutanda erat. Immerſimus ſcilicet thermometrum oleis, vti antecedentibus fluidis, et attendimus ad gradum frigoris thermometri immerſi, quando fluiditatem omnem non ſolum amiſit oleum, ſed ita durum fieri coepit, vt cera, calori non expoſita, eſſe ſolet. Gradus frigoris, ſub quibus in diuerſis oleis hoc factum eſt, fuere ſequentes.

Oleum

Oleum oliuarum in maſſam firmam abiit ſub gradu frigoris, quem thermometrum immerſum notabat, 165.

Oleum nucum ex ſtatu fluiditatis in ſtatum firmitatis tranſiit, thermometro immerſo monſtrante gradum frigoris 171.

Oleum lini in glaciem abiit ſub gradu 197.

Oleum cannabinum ſub eodem gradu 197 corpus firmum ex fluido factum eſt.

Explorauimus praeterea alia adhuc olea, tam expreſſa, quam deſtillata, ſeu eſſentialia, quae alii tempori ſeruamus, pluribus circa ea experimentis inſtitutis.

Ex comparatione diuerſorum frigoris graduum, quibus olea recenſita congelarunt, patet, oleum oliuarum minimum frigoris gradum requirere, vt ex fluido fiat ſolidum et firmum corpus, quum iam ſub gradu 165 durum factum ſit; contra oleum lini, quocum cannabinum conuenit, maximum frigoris gradum, quum demum ſub gradu 197 in glaciem abierit.

Olea frigore firma corpora facta veram et proprie dictam glaciem eſſe, nemo, opinor, dubitabit, qui conſiderat, aquam fieri glaciem, dum ex ſtatu fluiditatis in ſtatum firmitatis ſolo frigore tranſit. Omnia igitur corpora firma, quae ſolo frigore generantur, glaciem veri nominis eſſe et dici proprie poſſe, dubitari non poteſt, vt cera dura, vitrum, quin ipſa metalla, quum aqua nil aliud ſit, quam fuſa glacies.

Oleum lini frigore non indurari, ad hoc vsque tempus, quod ſciam, exiſtimatum eſt. Quum in diuerſis regionibus diuerſi frigoris gradus regnent; mirandum

dum non est, fluida esse in hac vel illa regione incongelabilia, quae tamen in altera, vbi maiores frigoris gradus obseruari solent, congelari solent. Respectiue igitur semper intelligendum esse, respectu scilicet loci et temporis, quando fluida quaedam incongelabilia pronunciata sunt, et pronunciari solent, per se patet. Habent igitur regiones borealiores praerogatiuam insignem in capiendis experimentis ad frigus pertinentibus, prae aliis minus borealibus.

Ex dictis porro intelligitur, quid de thermometris oleo lini repletis sit sentiendum. Nam quum iam sub frigoris gradu 197 in massam duram abire soleat oleum lini; thermometrum oleo lini repletum ad insigniores gradus frigoris obseruandos esse ineptum, facile conspicitur, neque contractio et dilatatio proportionalis in maioribus frigoris gradibus obtinere videtur, dum sensim sensimque spissius fit, quam vt gradus frigoris adcurate indicare posse videatur.

Olea frigori et congelationi magis minusque resistere, non aliunde, nisi a diuersa eorum puritate esse omnino videtur. Constat olea esse corpora mixta et heterogenea, continere particulas terrenas, salinas et portionem aquae maiorem minoremque. Quo igitur oleum erit purius, eo magis quoque congelationi resistere posse censendum erit. Olea igitur destillata, quae et aetherea, et essentialia, adpellari solent, quum ab expressis non nisi puritate et subtilitate differant; frigori et congelationi magis resistere debere, quam expressa, facile generatim iudicari potest. Et spiritus vini quid aliud sunt, quam olea subtiliora et puriora?

Eadem

Eadem haec olea expressa ad ebullitionem perduximus, ad explorandum, sub quo caloris gradu bullire inciperent, et vtrum constantem, an inconstantem caloris gradum in continuata ebullitione thermometrum mercuriale immersum monstraret. Phaenomena nominatim in oleo nucum sequentia obseruauimus. Fumum iam emittere coepit, thermometro immerso monstrante gradum caloris 160, fine calorem aquae bullientis. 2) circa gradum 360 supra o spuma et quaedam partium agitatio circa parietes vasis est conspecta. 3) non ita multo post plena ebullitio coepit. 4) Aliquot minutis secundis post plenam ebullitionem, mercurius in thermometro immerso bullire coepit, et continuo oleum flammam quoque concepit, hinc obseruationes nullae amplius locum habere poterant.

Reliqua quoque olea, vel in initio plenae ebullitionis, vel paullo post, mercurium in thermometro bullientem effecerunt, adeoque obseruationi finem imposuerunt. Sub diuerso quidem caloris gradu ea bullire inceperunt, quam diuersitatem tamen ob fumos spissos emissos adcurate notare non potui.

Caeterum in ebullitione oleorum probe duplex bullitio est distinguenda. Prior ebullitio cum strepitu fit, et procul dubio ab admixta aqua est, posterior genuina placida, fine strepitu, secundum nostras obseruationes contigit. Patebit hoc euidentius ex sequentibus experimentis. Primum butyrum purgatum bulliens effecimus. Prior bullitio cum strepitu coepit iam, thermometro immerso mercuriali 160 supra o, calorem scilicet aquae bullien-

bullientis monſtrante. Sed non diu durauit, ita vt nullum amplius ebullitionis veſtigium mox adpareret.

Dein lente et placide bullire coepit, quo facto mercurius in thermometro ſtatim bullire coepit: butyrum hoc poſt ebullitionem frigefactum in maſſam duriſſimam inſtar lapidis abiit coloris nigricantis.

Ceram praeterea ad ebullitionem coegimus, phaenomena mihi obſeruata huc redeunt.

1) Cera liquefieri coepit circa gradum 60 infra o. 2) Spuma cum ſtrepitu circa gradum 25 infra o eſt orta. 3) Ceſſauit haec ſpuma et ſtrepitus circa gradum 35 circiter ſupra o. mox fumus ſpiſſus ſequutus eſt, et 4) paullo poſt vere bullire coepit, quo facto 5) hydrargyrum in thermometro quoque bullire incepit. Flammam cera non concepit, mercurio bullire incipiente.

Ex hiſce phaenomenis recenſitis circa ebullitionem oleorum expreſſorum et corporum oleoſorum patet primum, gradum caloris mercurii bullientis iis generatim tribui poſſe, quia vel in initio plenae ebullitionis, vel paullo poſt, mercurium in thermometro bullientem effecerunt.

Deinde adparet in ebullitione gradum caloris conſtantem non manere, qui vero thermometro mercuriali in continuata ebullitione explorari nequit, quoniam ipſe mercurius ad bullitionem cogitur. Ratio, cur eiusmodi olea gradum caloris conſtantem non retineant, neque retinere poſſint, vel ex eo facile intelligitur, et praeuideri poteſt, quod ſint corpora admodum heterogenea, quae in bullitione conſiſtentiam ſuam et indolem

dolem mutent oportet, vti experimenta quoque docent. In oleo raparum feruente pyrometro suo *Musschenbroeckius* obseruauit, calorem illius aequalem fuisse 714 gradibus scalae *Fahrenheitiane*.

Quum hic gradus multo maior sit, quam ille, qui mercurio bullienti tribui solet, scilicet 600. scalae *Fahrenheitianae*; operae pretium existimaui, gradum caloris hydrargyri bullientis de nouo, quam adcuratissime fieri potest, explorare, vna cum quibusdam aliis metallis, quatenus sub certo caloris gradu fundi, fluereque incipiunt, atque rursus firma fieri corpora, et in speciem quandam glaciei abire.

In praesenti thermometro mercuriali sequentia corpora metallica explorauimus.

Primum plumbum liquefieri coepit circa gradum 320 supra 0 scalae nostrae, qui conuenit cum gradu 596 scalae *Fahrenheitianae*; alias 550 gradus *Fahr.* initio liquefactionis et fusionis tribui solent.

Stannum purum ex statu firmitatis in statum fluiditatis abire coepit, monstrante thermometro immerso 170 gradus supra 0. qui numerus conuenit cum 416 *Fahr*. Tribui solet gradus caloris 420 *Fahr*. alias stanno fundi incipienti, adeoque differentia parua est, vix vllius momenti, quoniam initium fusionis quam adcuratissime adnotari quoque nequit, in progressu autem calor continuo insigniter crescere incipit.

Bismuthum fundi coepit sub gradu supra 0. 235 = 494. *Fahr*. Attribui bismutho liquefieri incipienti alias 470 *Fahr*. solent.

Zincum quoque thermiometo mercuriali explorare conatus fui, sed conatus fuit irritus.

Nam mercurius in thermometro prius bullire coepit, quam hoc corpus metallicum liquefieri inciperet. Plura circa metalla tentamina, quae firma in statu solito adparent in nostra tellure, simplicia et mixta in posterum communicabo.

Ex hisce tentaminibus igitur adparet diuersitas graduum caloris, sub quibus metallorum mihi in praesenti exploratorum status firmitatis cum statu fluiditatis, et rursus status fluiditatis cum statu firmitatis commutari incipit. Quum enim metalla sub eodem fere gradu caloris solida fieri, quo fundi solent, incipiant; iidem gradus initii fusionis et liquefactionis, erunt quoque gradus initii soliditatis, vel firmitatis. Nam vti aqua in glaciem abire solet sub gradu 150, sic rursus sub eodem fere gradu regelascere et fluidum fieri incipit. Aqua enim et glacies recens genita eundem thermometri gradum habere solent.

Metalla igitur firma pro congelatis reputari debent, et hinc pro glaciei specie, quae autem multo minorem frigoris gradum, quam glacies aquae, requirere solet. Scilicet secundum nostra obseruata quam proxime plumbum 320 gr. supra 0. scalae nostrae; stannum 170 supra 0, bismuthium supra 0. 235, qui gradus omnes alias insigniores caloris esse solent, frigoris tamen respectiue dici possunt, quatenus metalla dicta congelant.

Hydrargyrum perpetuo adhuc in statu fluiditatis adparuit, nunquam in statu firmitatis. Summi frigoris

natu-

naturalis gradus in omnibus regionibus obſeruati e ſtatu fluiditatis in ſtatum firmitatis eum tranſerre non potuerunt.

Habet quidem Academia obſeruationes in Sibiria factas, quae congelationem mercurii indicare videntur, quum tam in thermometris et barometris ſolidus viſus fuerit. Quoniam autem ſub gradibus frigoris multo inſignioribus, in aliis barometris et thermometris mercurius fluidus perſtiterit; non credibile eſt, mercurium fuiſſe tunc temporis congelatum, et forſitan nullus frigoris naturalis gradus illum figere et congelare poterit, forſan frigus artificiale magnum praeſtare hoc poterit. Mercurius igitur fluens aeque ac alia metalla in ſtatu fluiditatis, pro metallo, certo caloris gradu fuſo, habendus videtur, qui vero ſub multo minori caloris gradu, quam reliqua metalla, fundi ſolet, contra maximum frigoris gradum, vt fiat firmus, requirere, caeterum eandem naturam quam reliqua metalla, habere omnino videtur. *

Veniendum tandem eſt ad ebullientis mercurii phaenomena. Monenda hic quaedam prius ſunt de thermometris, quibus gradus caloris mercurii bullientis exploraui et explorari debet. Contingere nimirum ſolet, et ſaepius mihi contigit, vt mercurius in thermometro, creſcente calore, et inſigniores gradus 250 et 300 ſupra 0. adquirente, diuidi ſoleat, et non continuus perſtet, quo ipſo obſeruatio vitioſa fiat neceſſe eſt. Vt hoc caueatur, mercurius, quantum fieri poteſt, ab

 omni

* Confirmata haec vide in Diſſertatione mea: De congelatione mercurii a me detecta, praelecta in ſolemni Academiae conuentu Sept. 6, 1760.

omni aere eſt purgandus, et thermometrum ita implendum, vt nullum aeris veſtigium in bulbo thermometri adpareat.

Quae cepimus circa ebullitionem mercurii experimenta adnotata, omnia ita comparata fuere, vt mercurius in thermometro non diuiſus, ſed continuus permanſerit ad terminum ebullitionis, reliqua, tanquam vitioſa, reiecimus experimenta.

Vſi ſumus in his tentaminibus duplici methodo, ordinaria, qua calor bullientis alicuius fluidi immerſo thermometro explorari ſolet, et alia propria, qua thermometrum carbonibus candentibus impoſui, et ita attendi, donec primum ebullitionis ſignum adpareret. In hac methodo poſteriore cautione et attentione non mediocri opus eſt: Cautione, vt calor carbonum candentium iuſto maior non ſit, alias adſcenſus mercurii regularis non fit, et mercurius quoque ob hanc cauſſam interrumpi incipit. Talis igitur calor eſſe debet, vt adſcendat mercurius non nimis celeriter, adeoque, quantum fieri poteſt, lente.

Attentione magna opus eſt, vt primum ebullitionis ſignum notari poſſit, quod conſiſtit in primo ſubſultu mercurii, adeoque prima commotione irregulari. Hic primus ſubſultus circa eundem thermometri gradum adcurate ſemper factus non eſt, termini ſunt inter numeros 414 et 424 ſupra 0.

Quod ſi igitur medium ſumatur inter hos numeros; initium ebullitionis mercurii figi poſſe videtur circa gradum 419=715 *Fahr*. Plurima experimenta inſtituimus ftituimus in hunc finem hac methodo, et eundem semper euentum obseruauimus.

In altera methodo, qua thermometrum mercuriale mercurio in vase aeneo ad ebullitionem perducto immersimus, differentia quaedam mihi est obseruata. Scilicet hydrargyrum iam bullire in vase coepit, quum thermometrum immersum notaret gradum 395 et 400. Sed in continuata ebullitione in vase, paullo post mercurius in thermometro quoque ebullire coepit, sub gradu 414, 420 et 424. Non igitur priores gradus 395 et 400 pro initio plenae ebullitionis mercurii haberi possunt, sed posteriores, quoniam tunc demum aequalis calor mercurii bullientis in vase, et in thermometro immerso exsistere coepit. Nam quum thermometrum mercuriale vnum pollicem circiter supra bulbum tantum immersum esset; facile intelligitur, calorem omnem mercurii in vase bullientis continuo cum mercurio communicari non potuisse. Satis igitur experimenta vtraque methodo instituta concordant. Caeterum in repetitione horum experimentorum omnia ad punctum consentire non posse, facile concedet, qui considerat differentiam mercurii bonitatis, ponderis atmosphaerae, forsitan quoque vitri thermometrorum, aliarumque circumstantiarum, quando experimenta capiuntur. Nos mercurium purum adhibuimus, non quidem reuiuificatum, qui pro purissimo haberi solet, sed ita tamen purgatum, vt impuritatis omnis nota abesset.

Experimenta ipsa instituimus, monstrante barometro 28 pollices Paris. aut quam proxime. Nam pondus atmosphaerae in calorem mercurii bullientis aeque influere, ac in calorem bullientis aquae, dubium esse nequit.

Vtrum mercurius in ebullitione continuata constantem retineat gradum, thermometro mercuriali decidi posse non videtur, vt ex experimentis nobis captis patet. Nam licet calor mercurii in thermometro sensim creverit, continuata in vase hydrargyri ebullitione, ita vt videri possit, eundem caloris gradum hydrargyrum in vase bullientem non retinuisse; tamen inde euidenter concludere non licet, calorem mercurii in vase bullientis etiam auctum fuisse. Nam fieri potuit, vt idem caloris gradus persisteret, qui tamen non continuo, sed successiue, cum mercurio in thermometro immerso communicari potuit.

Hoc igitur phaenomenon, vtrum calor in mercurio bulliente sit constans, an non, aliis instrumentis ac thermometris mercurialibus explorandum esse facile conspicitur.

Caeterum ebullitio omnino effectus caloris particulas massae in vapores diuidentis, et subito dilatantis potius videtur, quam dilatationis aeris inclusi, aut alterius fluidi elastici in vniuerso exspansi; et vti mercurius ebullitionis est capax, ita reliqua metalla sub certis conditionibus illius quoque esse capacia, cum ratione dubitari nequit. Vid. Leçons de Physique expérimentale par Mr. *Nollet* Tom. IV. pag. 453.

---

CAVTE-

# CAUTELAE CIRCA OBSERVATIONES METEOROLOGICAS ADHIBENDAE.

Auctore

*PETRO van MUSCHENBROEK.*

Meteora obſeruaturi, ſolemus vti Barometro, Thermometro, Hyetometro, Euaporatorio, Notiometro, Anemometro, et ſi quaedam alia ſint inſtrumenta, quibus ſtatum atmoſphaerae praeſentem, praecedentem aut futurum aliquomodo cognoſcere aut explorare licet. Neceſſe igitur eſt, vt eiusmodi inſtrumentis vtamur maxime perfectis, vt obſeruationibus fidere queamus, atque ex iis probas colligere ſequelas. Memorata inſtrumenta ſunt admodum vulgaria, ſaepius deſcripta, ſed raro tam bona ac perfecta, quemadmodum deſiderantur, ideo obſeruationibus cum iis inſtitutis fidere non licet: operae pretium igitur erit, ea deſcribere, vt omnino perfecta a perito et ſolerti ſabrefiant.

Incipiam a Barometro, quo pondus vel preſſum atmoſphaerae aereae inueſtigamus, eiusque augmentum vel decrementum variis temporibus comperimus. Ab experientia edocti ſumus ſimplex Barometrum eſſe praeſtantiſſimum ad obſeruationes certas capiendas et memoriae tradendas. Conſtat id tantum ex tubo vitreo, recto, cylindrico, vltra 30 pollices Rhenolandicos longo, longitudo maior nequaquam nocet, praeſtat tubus

40 pollicum breuiori et tantum 30 poll. Altera huius tubi extremitas in rotundam desinat fornicem, quae hermetice (vt dici solet) clausa sit. Altera extremitas sit aperta, sed oblique instar cunei desinat, vt cum institerit mercurio, ex cauitate tubi facile mercurius effluere, et ex vase in cauum influere possit, nisi tubus a fundo vasis, de quo mox agam, aliquantum distiterit, tum enim tubi extremitas plana esse potest, patulaque est mercurio via. Diameter cauitatis tubi sit ad minimum $\frac{4}{10}$ pollicis Rhenol. maior capacitas non nocet. Crassior hic tubus vulgaribus est; qualiscunque fuerit, mensuranda accurate et memoriae tradenda est: nam in tubo amplo mercurius ad maiorem subit altitudinem, quam in angusto, discrimen interdum est a linearum pollicis. Quoniam huc vsque ratio amplitudinis cauae habita non fuit, nec ab obseruatoribus adnotata, nullis hactenus descriptis obseruationibus barometricis fidere licet. Crassities vitri vix discrimen afferre visum est: notandum etiam est genus vitri, tum in qua regione, et in qua officina vitraria tubus factus sit; vtinam eius vitri ingredientia notare simul possemus! sed artifices haec celant; idque causa est, cur nunquam Philosophus de vera altitudine mercurii in barometro sit certior, vitro vno maiorem vim trahentem et repellentem possidente altero.

Antequam mercurio impleatur tubus, mundanda et polienda est cauitas interna; nam haec in officina vitraria, dum recoquebatur lento refrigerio, contraxit fumum, et sordes a vitrario inflatas: praeterea superficies aliquantum inaequalis et aspera est; nisi omnis asperi-

aſperitas politura tollatur, nunquam accuratiſſime tubus mercurio impleri poteſt: tollitur aſperitas hoc pacto. Capiatur filum ferreum craſſitudinis ac eſt acus textilis, purum, nulla rubigine aut ſordibus infectum, longius tubo, et in capitulum craſſius deſinat vnum extremum; circa extremum hoc conuoluatur puriſſimum cotoneum, idque filo puro albo lineo in duobus locis firme circumligetur, adeo vt medium cotonei, ventris inſtar inflatum, aliquantum difficilius ingrediatur tubi cauitatem; elaſticitas cotonei efficit, vt adimpleat partes anguſtiores et ampliores tubi, et ſuperficies interna abradi polirique poſſit. Tum cotoneum humectetur alcohole vini, et circumſpargatur in rotundum calx ſtanni tenuiſſima, et prius a craſſioribus partibus mundata et lota in aqua; hac calce teratur interna tota tubi capacitas aliquot horis; niſi hoc taedium quis deuorauerit, nunquam opus habebit abſolute perfectum. Peritus in arte videre poteſt a priori vtrum tubus intrinſecus quidem probe laeuigari queat, ſi non, reiiciendus eſt; idem internoſcet, an tubus ſit ſatis laeuigatus et politus. Hoc cognito omnis calx ſtanni eſt ex tubo eluenda; quod tantum ſaepius repetitis fit nouis cotoneis, tandem probe ſicca calce ſtanni, aut alio poliente puluere iniecto, cauitas vlterius ſiccatur et politur; quod ſi aeſtate, coelo ſereno, in ſole nitente tubum calefeceris et políueris memorato modo, certior eris cauitatem eſſe omnino ſiccam. Praeſtat tubum in ſole calefacere, quam prope ignem prunarum, quia hic ſemper fumum eiaculatur, qui aerem inficit. Ideo barometra ſunt aeſtate, coelo ſereno et ſicciſſimo, conficienda, nunquam hyeme, multo minus tempestate humida, aeris humore canum tubi irrepente et superficiei extemplo obhaerescente.

Deinde eligatur mercurius Tyrolensis nouus, mundissimus, qui in phiala chemica longioris colli infusus, stet in vase ferreo cum arena et a subditis ignibus ebulliat, vt orbetur omni humore et aere, ideo continuanda est ebullitio, donec in phiala nullam bullam inter vitri et mercurii superficiem superesse videamus: quo viso committatur refrigescere.

Iam aliquis tubus vitreus amplior intrinsecus et extrinsecus probe mundetur ab omnibus sordibus, tradatur Encausto, qui ex eo in flamma lampadis liquefacto formet infundibulum cum rostro capillaris angustiae, parum longiori tubo barometrico: formetur tubus capillaris vt intrinsecus nihil fumi conceperit, extrinsecus tamen denuo cotoneo et stanni calce est abstergendus, ne quid oleosi fumi aliarumue sordium adhaerescat, inferius tubi orificium sit adeo angustum, vt exigua guttula mercurii lente effluere possit.

In inuersum tubum barometricum immittatur rostrum capillare vsque ad fornicem: ponatur hic apparatus in sole, vt incalescat ad gradum 70 vel 80, mercurius in phiala paris caloris sit; qui tum effundatur in infundibulum, lente ex ora inferiori effluxurus. Sollicite curandum, vt infundibulum semper multum mercurii capiat, nec vnquam ante tubi plenitudinem euacuetur: si enim id contigerit, postea que impleretur denuo

denuo infundibulum mercurio, aer, qui in tubum capillarem vacuum ingressus delitescit, deorsum pressus, pelleretur per mercurium, qui aliquousque tubum barometricum iam implet, et hinc inde in eo haerescens corrumperet omnem exantlatum laborem, adeo vt euacuandus tubus, et omnis impletio ab ouo inchoanda foret. Ex Tubo iam impleto lente extrahatur infundibulum cum rostro capillari. Prudentia opus est, ne frangatur. Tum vero in tubo oritur inanitas, quae affuso mercurio facile impletur, praecipue si breuioris rostri tubo capillari vtamur. Sed circumspiciendum est, an ibi loci bulla aerea adhaerescat; haec immisso filo ferreo sursum tolli potest.

Hoc pacto habebitur tubus barometricus perfecte impletus mercurio, et vehementius lucem extrinsecus allabentem reuerberabit, quam vllum speculum vitreum; nec vllibi locorum bullae aereae comparebunt: ne quidem in inuerso postea tubo. Capiatur nunc vas vitreum cylindricum, diametri 6 poll. Rhenol. et $1\frac{1}{2}$ poll. altum, cui infundatur mercurius: eius orae conveniat operculum ligneum, in quodam loco exscissum, vt tubum capiat: seruit hoc obtegendo mercurio adversus sordes in aere natantes: Sublato operculo claudatur extremitas aperta tubi barometrici digito, inuertatur tubus, et extremitas vna cum digito deprimatur sub superficie mercurii in vase, remoto digito effluet mercurius ex parte superiore tubi, donec, quod restet, est in aequilibrio cum pondere vel pressu atmosphaerae.

Vas cylindricum, cui barometrum insistit, tam amplum capiendum est, vt mercurius, qui in tubo varietatem trium pollicum in altitudine ſentit in Belgio, effluens, altitudinem mercurii in vaſe ſenſibiliter non augeat, accuratam obſeruationem turbaturus: poſita igitur diametro cauitatis in tubo $\frac{4}{10}$ poll. et vaſis diametro 6 poll. erit varietas in altitudine mercurii in vaſe tantum $\frac{2}{15}$ lineae, quae propter paruitatem internoſci nequit, adeoque absque vllo ſenſibili errore omittitur, cum in ſummo adſcenſu et deſcenſu mercurii in tubo duntaxat tanta ſit, in omni intermedia altitudine minor, nec vllo modo diſtinguenda.

Totus hic apparatus imponendus aſſeri, ligni probe ſicci, cuius parti inferiori adnexa eſt capſa, quae vas cylindricum concludat; aſſeris pars media excauetur, vt in ea tubus barometricus capiatur vsque ad dimidium craſſitiei; lignum ebenum eſt laudatiſſimum, cum nec calorem, nec frigus, ſentiat, et vix humorem aereum ſorbeat: ſi alio vtamur ligno, neceſſe eſt, vt ab omni parti adlinatur oleum lini aliquoties, a quo pori obturantur. Scala iam affigatur ad latus tubi, et quidem ad vtrumque, in Belgio menſura Rhenolandica vtimur, incipiatque a pollicibus 27 a ſuperficie mercurii in vaſe, et deſinat in 30 pollices. Scalae latitudo loco obſeruatoris reſpondeat; alia enim conuenit locis ſub aequatore, vti regno Peruano; alia locis polaribus.

Oportet, vt quotide aliquoties altitudinem mercurii in barometro obſeruemus; ſufficit id mane, ipſo meridie, et noctu feciſſe, quibusdam ſemel electis pro arbitrio, et deinde ſtatis horis, atque ordine obſeruationes hae ſunt notandae: cum autem atrox coorta eſt tempeſtas, qualibet hora, vel ſemihorio, inſpiciendum eſt barometrum,

trum,

trum, vt minima cognoſcatur mercurii altitudo durante tempeſtate; quae ſi diligenter memoriae ſint tradita, vt et in aliis adiacentibus regionibus, vel et diſtantibus, latitudo tempeſtatis, limites, progreſſus, directio, et quo in loco maxime ſaeuierit, cognoſcetur.

Notentur quoque celeres adſcenſus vel deſcenſus mercurii in tubo, aut diuturna requies.

Menſe elapſo altitudines mercurii omnes obſeruatae in ſummam addantur, quae diuidatur per numemerum dierum multiplicatum prius in 3, quia tres obſeruationes quotidie ſunt factae, quotiens mediam altitudinem mercurii indicabit; haec ſcribatur inter maximam et minimam altitudinem; quo pacto fere omnia intelliguntur, quae obſeruationes barometricas ſpectant in eo loco, vel vrbe et regione, in quibus factae ſunt; et notata altitudo ſoli ſupra maris ſuperficiem.

Quod ſi verum pondus vel preſſum atmoſphaerae obſeruator in ſua ſede ex barometri altitudine eruere cupiat, ratio caloris etiam eſt habenda. Eſt enim tubus barometricus etiam ſpecies thermometri, mercurio a calore rareſcente, a frigore condenſato, ideo aeſtate mercurius eiusdem ponderis eſt altior in tubo, hyeme humilior. Si hyeme, quando aqua in glaciem verti incipit, mercurius ſteterit in tubo ad altitudinem 29 pollicum Rhen. aeſtate regnante aeſtu 90 grad. paris ponderis ſtabit ad altitudinem 29 poll. 4$\frac{4}{10}$ linear. *Amontonſius* in Gallia a maximo frigore ad ſummum aeſtum in coelo regnantem Pariſiis $\frac{1}{113}$ volumine increſcere tradidit in *l'Hiſtoire de l'Acad. Roy. des Sciences An.* 1704, *pag.* 224 *et* 364. Propter aſperitatem ge-

In Petropoli discrimen altitudinis maius erit: scala accurata eum in finem semel est condenda.

Quia pes Rhenolandicus cubicus mercurii est ponderis Tricassini ℔ 859. ℥ 8. ex altitudine mercurii in barometro sciri potest, quo pondere atmosphaera pedis quadrati superficiem corporum premat, quae in solo iacent: lubet hoc in sequenti Tabula exhibere: pollex diuisus est in 12. lineas.

| Altitudo mercurii. | | Pondus. | | Altitudo mercurii. | | Pondus. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Poll. | Lin. | ℔. | Vnc. | Poll. | Lin. | ℔ | Vnc. | |
| 27 | 0 | 1933 | 14. | 28 | 7 | 2047 | 4½ | Altius in |
| | 1 | 1939 | 13½. | | 8 | 2053 | 4. | Belgio |
| | 2 | 1945 | 13. | | 9 | 2059 | 3½ | barome- |
| | 3 | 1951 | 12½ | | 10 | 2065 | 3. | trum non |
| | 4 | 1957 | 12. | | 11 | 2071 | 2½ | est, quam |
| | 5 | 1963 | 11½ | 29 | 0 | 2077 | 2 | 30 poll. |
| | 6 | 1969 | 11. | | 1 | 2083 | 1½ | neque |
| | 7 | 1975 | 10½. | | 2 | 2089 | 1. | infra 27 |
| | 8 | 1981 | 10. | | 3 | 2095 | ½. | pol. Rhe- |
| | 9 | 1987 | 9½. | | 4 | 2101 | 0 | nol. ob- |
| | 10 | 1993 | 9. | | 5 | 2106 | 15½ | seruatum |
| | 11 | 1999 | 8½. | | 6 | 2112 | 15 | huc vs- |
| 28 | 0 | 2005 | 8. | | 7 | 2118 | 14½ | que. |
| | 1 | 2011 | 7½ | | 8 | 2124 | 14 | |
| | 2 | 2017 | 7 | | 9 | 2130 | 13½ | |
| | 3 | 2023 | 6½. | | 10 | 2136 | 13 | |
| | 4 | 2029 | 6 | | 11 | 2142 | 12½ | |
| | 5 | 2035 | 5½ | 30 | 0 | 2148 | 0½. | |
| | 6 | 2041 | 5. | | | | | |

Ali-

Aliqui Philosophi omni industria altitudinem barometri obseruaturi, ex ligno leui, parum lato, scalam fabrefecerunt, cuius inferiori extremo affixerunt orbem planum ex subere, leuem, diametri 2 vel 3 pollicum. Lignea haec scala vix descendit in mercurium, ob leuitatem ei innatans; attamen adscendente mercurio in vase, adscendit scala, descenditque descendente mercurio. Hoc pacto vera altitudo mercurii in tubo videri potest, estque haec satis laudanda methodus, quando inferius vas cum mercurio est angustius. Scala natans appellata fuit.

Alii diuisionem Nonnii applicuerunt, diuidentes pollicem in 10 partes aequales, et applicantes supra hanc laminam mobilem ope cochleae, diuisam in 11 partes aequales, quo pacto conuersione cochleae attollentes vel deprimentes laminam, et attendentes quaenam lineae conuenientes vnam efficiant, pollicis centesimas partes distinguunt.

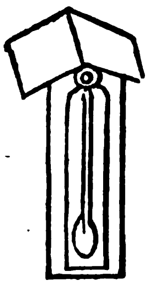
Oportet, vt obseruator attendat ad mercurium in tubo, qui tangit superficiem vitri, siue vbi ora suprema attactus est: haec enim sola pro vltimo limite altitudinis haberi potest, reliqua superficies mercurii in tubo rite distingui nequit. Hoc incertam facit omnem obseruationem: nam quando mercurius in tubo incipit descendere, superficies superior rotunditatem amittit, planior fit, immoto adhuc annulo, qui vitrum attingit; adeoque axis columnae mercurii primum descendit, mox partes, quae ambiunt axin, tum quae successiue maiori interuallo ab axe absunt, iam, superficie suprema fere plana, descendit mercurius, qui superficiem vitri attingebat. Quando mercurius in

tubum

tubum altius adſcendet, axis columnae primum adſcendit, mox partes axi vicinae, eumque in rotundum ambientes; quamuis hae minus in altum ſurgant; ideo ſuprema columnae in tubo ſuperficies fit admodum conuexa, mercurio, qui vitrum attingit, adhuc immoto, nec hic adſcendit, niſi conuexitas columnae magna euaſerit, et ad latera defluxerit; leuis concuſſio id accelerat. Prolixior fui in Barometro deſcribendo, quin hoc inſtrumentum transportari ex regione in regionem nequit, ſed oportet, vt concinnetur in loco obſeruatoris.

Alterum inſtrumentum calori et frigori coeli obſeruandis ſeruiens eſt Thermometrum: laudatiſſimum eſt, quod mercurium continet, et fabrefactum eſt a ſolertiſſimis Fabris, *G. Fahrenheitio*, aut *H. Prinſio*, Amſtelodamenſibus. Quomodo huiusmodi thermometra conſtruenda ſint, olim prolixe deſcripſi. Ad ea maiori peritia, quam ad barometra, opus eſt, tum vt quis in arte encauſtica verſatus ſit. Poſſunt autem facile et tuto tranſportari ex Amſtelodamo ad quascunque regiones: modo iaceant in capſula ferrea, ſint inuoluta adipi refuſae, prius tamen cincta leuiuscule foeno, vt medium in liquefacta adipe teneant locum. Capſulam clauſam ambierit largum ſtramen, atque apparatus thecae ligneae includatur, quae hoc pacto omnes iniurias carrorum toleret; et poſtea ex capſula ferrea, aquae calenti immiſſa, a qua adeps refunditur, integrum tollitur thermometrum. Oportet, vt ſcala *Fahrenheitii* ad latus thermometri vtrumque ſit adſcripta; ſurſum ad gradus 120 ſupra 0, infra 0 ad gradus 60; ſed haec deorſum longior ſit neceſſe foret, ſi in Sibiria frigus aſperrimum

rimum explorandum eſſet, quale expertus eſt 126 grad. ſub o Nobil. *Gmelinus*. Quoniam Thermometrum ſcalae inſidens iniuriis aeris eſt exponendum, oportet, vt ſcala ſit caelata in lamella aenea, quae ab omni parte bene ſit inaurata. Caeteroquin orichalcum ab aereo ſale intra 20 annorum ſpatium eſt eroſum, imo in nonnullis regionibus ocyus.



Suſpendatur ſub dio, obuerſum plagae ſeptentrionali, ne vnquam directe a ſole, aut a radiis repercuſſis illuſtretur, attamen ſit in loco patente et vmbroſo; vmbroſi enim aeris calor tantum eſt notandus, quia eſt conſtantior illo, qui a ſole communicaretur cum Thermometro, multis varietatibus propter aduolantes recedentesque et abactas nubes ſubiectus. Tum ne hyeme a grandine frangatur, vel a niue refrigeretur, pendeat ex aſſerculo viridi, et ſub tecto ampliori, vti in ſchemate videri poteſt. Quotidie ter iisdem horis notetur calor, quibus Barometri altitudo obſeruata fuit.

Finito menſe graduum, calorem indicantium, numeri in ſummam addantur, quae diuidatur per numerum obſeruationum, ita calor medius eius menſis innoteſcit, ex quo, vtrum hoc menſe coelum calidum, an frigidum, an temperatum fuerit, colligitur: inter maximum et minimum calorem menſis ſcribatur medius calor.

Si menſis hyemalis fuerit et gelet, glaciei craſſities qualibet nocte in aqua ſtagnante vel lacu formatae notetur, tum quanta craſſities currente menſe contige-

 rit;

rit; quando inceperit regelari, quo tempore penitus refusa sit glacies; quomodo glacies in flumine fuerit comparata, quo tempore vtramque ripam iunxerit, et reliquerit. Attendatur ad gradum frigoris, quando solum pruina correptum fuerit, quando linteum madescens sub dio suspensum, congelari coeperit: an semper gelet stante mercurio in gradu 32, an semper regelet mercurio maiorem calorem quam 32 gr. indicante? An venti gelu accelerent, minuant, vel retardent, et quinam? An concussio aquae in vase congelationem acceleret? An aqua congelet aeque cito in vasis aequalibus, in eodem loco positis, ex quacunque materia vasa fuerint formata? Sed et ad Lunae phases attendere oportet, et explorare, an vbiuis terrarum idem, quod in Belgio constanter, euenit. Quotiescunque fit nouilunium, prima quadratura, plenilunium, vel vltima quadratura gelante tempore, asperitas gelu aliquantum remittit, et quidem vel ipso die phasium, vel pridie, aut postridie, adeo vt nunquam perstet idem gelu vigor duarum septimanarum decursu, quamvis post vnum alterumue diem recapessat vires, asperiusque quam antea increscat: contingit etiam vt multo modestius pergat, imo fiat regelatio quae totam refundat glaciem. Gelare in Belgio incipit, regnante vento orientali, non cum australi vel occidentali, quamuis in diu durante gelu et hyeme, gelu quidem cum hisce ventis perstet.

Quibus horis memoriae traditur Barometri et Thermometri altitudo, iisdem obseruentur venti: qui si ex vexillo in turri non recte spectari possint, vti

saepe

ſaepe fit, praecipue nocte illuni, aut omnino ſerena et ſine vllis nubibus, tum ſequenti modo notentur: Modo obſeruator in loco patenti, et bene perflabili degat, nec montes, turres, aedes vicinae altiores decurſum ventorum turbauerint, tum excelſiſſima pars tecti eligatur, ex qua emineat vexillum a ventis regendum; affixum ſit firme longae virgae ferreae, qualis ſeruit cortinis, virga tranſeat foramen in tecto, in quo capiatur laxe ab annulo aeneo, qui aperiri claudique ope articuli poſſit, vt in hoc annulo libere ſit verſatilis inſtar axiculi rotae in anſa; inferius virgae extremum fulciatur palo, inſiſtenti pauimento, cui inſidet concauum aeneum excipulum, vnctum oleo, vt lubrica fiat virgae perpendicularis ad ſolum ſitus, verſatio in rotundum; ad arbitrariam diſtantiam ab hoc extremo, ſurſum, ſit affixus tenuis ſtilus, qui index erit, et parallele ad ſolum verſetur circumacta virga; tum ex ligno formetur circulus amplus, per cuius centrum tranſit virga verſatilis, affigaturque tecto vel contabulationi, parum ſupra indicem, ſitque ad ſolum parallelus, vt index circulum percurrendo ventum regnantem deſignet, qui in oculos ſpectatoris, ſurſum tollentis vultum, incurrat. Planities circuli diuidatur in octo partes aequales, quibus nomina octo ventorum inſcribantur; licet eum partiri in plures partes, ſi maiori accuratione ventos notandos iudicaueſimus; oportet circulum ita affigere contignationi, vt Septentrio et Auſter apprime congruat cum linea meridiana terreſtri, ab Aſtronomo in eo loco deſcripta: non autem ex directione acus magneticae, cui fidi nunquam poteſt, quia eſt omni momento temporis irrequieta.

Hoc modo noctu et interdiu ventorum plaga obſeruari poteſt: ſed praeterea notandum eſt, an ventus fuerit nullus, lenis, violentior, an ſaeuiat procella? Interdiu hoc vtcunque detegitur ex motu ramorum in arboribus, aut ex velociori motu alarum, quae in molis a vento agitantur, et vel penitus obteguntur velis a molitore, vel interdum duo vela parum obvoluuntur regnante violentiori vento: vel quatuor vela aliquantum conuoluuntur: vel duae alae non obducuntur velo, aliis duabus obtectis: vel nulla vela ſunt expanſa in alis: vento magis ſaeuiente molitor alas firmat et eas ad aduerſam venti plagam circumuertit, ne a vento laedantur; interdiu ſic ſatis ventorum impetus patet diuidendus in partes 8 notandus 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Si molae, quae a ventis agitantur, ibi loci non ſint, tum poteſt dolium aliquot lapidibus oneratum ex fune 20 pedes longo ſuſpendi ex palo cum longe eminenti brachio, qui ſteterit in loco patenti. Ventus in dolium incurrens, id in oſcillationes agitat, eo maiores, quo vi maiori afflauerit, ex minoribus maioribusue oſcillationibus obſeruator breui ventorum impetus diſtinguere diſcit. Caeteroquin in vſum vocari poteſt Anemometrum quale *Nob. Chr. Wolfius* in Elem. Math. deſcripſit, aut ſimile aliquod *Leutmannus* in Tr. de Meteorog. vel in l'Hiſt. de l'Acad. Roy. des Scienc.

Neceſſe

Necesse est, vt venti velocitas obseruetur, quantum spatii dato tempore percurrat: id huc vsque a nullo Philosopho praestitum est ea accuratione, qua opus est, quamuis multorum problematum solutiones inde pendeant. Ab experientia enim compertum est, omnes modos magnis defectibus esse subiectos, nullisque fidi posse.

Praeterea ope instrumenti explorandum est, an quocunque anno eadem quantitas venti supra eundem flet locum, an discrepet, tum quantum, et an periodus sit copiae ventorum aliquo annorum decursu? Non exiguam in hoc themate nauaui operam, machinam quandam et obseruationes breui in lucem editurus. Interim ex hisce intelligitur, quaenam ad obseruanda meteora adhuc desiderentur; nullus dubito, quin alii solertes Philosophi animum intensuri sint ad omnes defectus supplendos.

Magnae vtilitatis est Hyetometrum, quo copia pluuiae quotidie labentis mensuratur; hoc instrumento itaque detegitur, quantum pluuiae quolibet mense, quolibet anno in ea regione cadere soleat. Ita dies humidissimus anni, eiusque mensis humidissimus notatur, et multos annos secum comparando annus humidissimus, siccissimus, mediique humoris scitur; quod nouisse magni refert, quoniam annorum et mensium fertilitas a pluuia largiori, parciorive, nonnullis mensibus labente, pendet, tum et aquarum in fluminibus intumescentia, et exundationis periculum, aut aggerum fractura praevidetur, cui in tempore succurri potest.

Hyetometrum, Belgicis obſeruationibus idoneum, ſequenti eſt forma: Ex aere fuluo fiat vas quadratum, cuius quodlibet latus ſit vnius pedis Rhenolandici; ſit fundus decliuis tanquam infundibuli, latera quadrata ſint octo pollices alta, vt niuem largius decidaam capiat vas; fundo decliui afferruminatus deorſum ſit tubus aeneus, 8. poll. longus, conicae figurae, vt aliquousque phialae gulam ingrediatur, eamque accurate oppleat, ne illapſa in phialam pluuia euolet ſub vaporis forma.

Capiatur deinde phiala vitrea quadrata, cuius latus planum adamante diuidatur in aliquot partes, quae hoc pacto eruantur: Cognitum eſt pondus pluuiae in pede cubico Rhenolandico ℔ 63. Vnc. 3. drach 7. gran. 9. ponderis Tricaſſini, quo tempore coelum 50 gradibus calet. Hoc pondus diuiſum per 199, dabit quotum, indicantem pondus pluuiae in pede quadrato et altitudine vnius lineae, id proxime eſt 3373 granorum. Vaſculum mundum, in accurata ſtans bilance, capiat hanc quantitatem aquae, quae in phialam infundatur, noteturque in latere altitudo aquae: vel ipſa phiala ſtet in lance, ad lacoma in aequilibrum redacta, infundaturque aqua, donec 3373 granis euaſerit ponderoſior. Infuſio et adnotatio continuetur donec phiala omnino ſit plena: effuſa aqua adamante non ſcindente, ſed radente, ducatur ad quamlibet diuiſionem in vtroque latere factam, linea recta, et numeri albo pigmento lateri inſcribantur: ampliores huiusmodi phialae 30 diuiſiones capiunt, quae omnes deſignant altitudinem lineae pollicis. Hoc pacto manifeſto videri poteſt

poteſt quantitas pluuiae, quae pedis quadrati lineae altitudinem facit: imo peritus facile diſcernet partes lineae, qualis accuratio ſufficit. Si quolibet menſe effundatur pluuia ex phiala, nouo menſe fit noua numeratio; ſi currente menſe plus pluuiae ceciderit, in tempore effundatur pluuia, et in annalibus ſigno notetur, effuſam eſſe pluuiam, denuo delapſa addatur numero praecedenti, et humoris decidui copia hoc menſe cognoſcetur.

Hyetometri pars ſuperior aenea emineat ſtylobata, cui inſiſtit: ſtylobata ſit thecae inſtar caua, lignea, $2\frac{1}{2}$ pedes alta, parte ſuperiori in medio perforata, vt tubus vaſis aenei libere tranſeat, et maxima pars fundi nuda ſit: in cauitate ſtylobatae ponatur phiala, iam diuiſa, quae inſiſtat aſſeri, ſeu potius ſit pauimentum pro altero mobili aſſeri, in priore iacenti, et cui cum inſiſtit phiala, huius gula roſtrum tubi aenei capiat; hoc mobile aſſerculum ſubtus remoueri poteſt, tumque tantundem deſcendit phiala, quantum gulam ingrediebatur tubi roſtrum; deinde phiala depleatur, mox iterum in ventrem ſtylobatae reponenda et aſſerculo fulcienda. Hyeme aqua in phiala congelatur; obſeruato gelu eximatur phiala, et vacua ſeruetur in alio loco aedium, ita tamen, vt quotidie in ea fieri poſſit menſura niuis vel grandinis delapſae et refuſae. Subſtituatur eius loco vaſculum aeneum in ventre ſtylobatae ſub roſtro tubi. Si itaque ningat, vel grandinet, raro tanta niuis labitur copia, quae ſuperat altitudinem 8 poll. qualem pars aenea capit. In ventre ſtylobatae ponatur prope fundum vaſis teſta cum prunis, vt nix re-

fun-

fundatur, refusa excidit ex rostro tubi in vasculum aeneum, liquida funditur et mensuratur in phiala vitrea: si ningere desierit, et euaporationem aquae arcere voluerimus, aeneum operculum imponatur Hyetometro, et prunas iniiciamus operculo, quo modo et a prunis superioribus et infra fundum positis celeris fit niuis aut grandinis refusio; et simul obseruari potest raritas niuis deciduae, quae in magna altitudine parum aquae suppeditat.

Hyetometrum huiusmodi in medio areae patentis, aut ampli horti, vel in excelso loco, sed ad quem facilis est accessus, ponendum est, optima in obseruatorii astronomico sedes est: non enim pluuia semper recta labitur, sed a vento variis agitur directionibus: sistitur a turribus, templis, excelsis aedibus, altis arboribus; ideo si bina accuratissime fabrefacta sint Hyetometra, quae in variis locis eiusdem vrbis ponantur, pluuiae quantitates non semper concordes comperientur.

Si niualis aquae aut pluuiae variis temporibus deciduae grauitatem specificam scire cupiamus, attendendum est ad calorem aquae ope inmissi Thermometri mercurialis, deinde fiat pensio, inmittendo bulbum vitreum solidum, pendulum ex filo equino, et ex accurata bilance hydrostatica, et obseruando quantum de pondere in aqua amittat: Haec enim methodus est omnium accuratissima, nec, quantum scio, defectibus vel vitiis inquinata, estque prolixe descripta a Cl. *s'Gravesandio* in Elem. Physicae.

Exami-

Examini chemico pluuia, diuersis mensibus decidua, subiiciatur, vt partes componentes, salia, olea, terrae etc. innotescant, quae omnia sunt adnotanda: pluuiae enim impuritates multis discrepant modis; nec nisi chemica analysi cognoscuntur.

Diebus humidis ter quotidie pluuiam notasse sufficit, exinde enim quantum labente mense ceciderit, constat. Necesse etiam, vt figurae floccorum niualium et grandinis microscopio spectentur, et delineatae accurate adnotentur.

Notare etiam oportet, quantum aquae quolibet die, mense, et anno, in vaporem versae in auras euolet. Hoc inuestigatur Euaporatorio, siue Exatmoscopio, quod est vas ex aere fuluo, cauum, forma parallelepipedi, sesquipedem altum, cui quodlibet latus orae apertae superius est 6 pollicum; ergo 36 pollicum quadratorum est apertura. Deinde in regula aenea mobilique insculpantur pollices 18, vt fundo vasis insistens apponi interiori lateri possit, et exemta ex vase appareat altitudo aquae in vase. Vasi infundatur aqua ad altitudinem pedis, superius mane relinquitur, vt capiat pluuiam, nec haec exeat: ponatur prope Hyetometrum in patenti area, vel loco medio horti, aut, quod melius est, in obseruatorio astronomico, vt a sole in rotundum illustretur, incalescatque in eo aqua, et a vento perflетur. Ex comparata altitudine pluuiae in Hyetometro, et altitudine aquae in Euaporatorio, supputatur facile, quantum sub forma vaporis in sublime exiuerit. Praeterea fabrefiat craticula ex filis tenuibus aeneis, magnis quae distant interuallis; haec orae vasis imponatur, ne auiculae aduolantes aquam potant, quod caeteroquin contingere solet: haec fila nec euaporatione obsunt, nec illabenti pluuiae. In diario itaque notari potest, quantum aquae nuctemeri spatio in vaporem fuerit conuersum, quantum ventus et solis calor operati fuerint in aquam, ita ventorum siccorum operationes intelliguntur; praecipue mensibus aestiuis. Discrimen obseruabitur, quando vas minoris maiorisue altitudinis fuerit: ex vase enim altiori plus vaporis exspiratur; si vas in loco vmbroso steterit, nec a vento lambatur, multo minus vaporis expellitur. Ideo probe notentur altitudo vasis, locusque in quo steterit. Attamen hyeme in regionibus frigidis hoc vas sub dio relinquendum non est, quia ab aqua in glaciem constricta et se expandente rumperetur. Tum glaciei euaporatio est mensuranda, vt postea quantum vaporis toto anno in altum adscenderit, supputetur. Capiatur ex glacie parallelepipedum, pedem altum, cuius quodlibet latus est 6 pollicum, quod circiter est ℔ 16. Si tanta glaciei moles comparari nequeat, prioris loco substituatur massa quadrata, cuius quodlibet latus 4 pollicum, crassities semipollicis, vel integri pollicis, pro arbitrio et regionis coelique constitutione, tantum diligenter notetur, quantae crassitiei massa fuerit; iniiciatur lanci staterae Romanae, cuius scapus breuior ex fenestra emineat: altera longior, in quo aequipondium vagatur, sit in conclaui, pendeatque statera ex trabe. Omnibus in aequilibrium reductis, notetur pondus, quod quotidie adscribatur: sed si ningere aut grandinare coeperit, statera

tera est sub tecto ponenda; nam flocculi niuales et grandines a ventis appulsae in lancem glaciemque inciderent, nec remedium arcendi hucusque comperi, nisi lanx cum glacie amplo laxoque sacculo, ex serico admodum raro, et sub forma tecti superius expanso, tegeretur, ex quo nix et grando facile excuterentur.

Nunc ordo exigit, vt de Notiometro agerem, cuius beneficio constaret, an aer siccus humidusue sit, quantum humoris sub dato volumine caperet, quando dies humidissimi, quando siccissimi in anni spatio euenerunt: sed ingenue confiteor, me nec vllum Notiometrum, quod recte huic scopo satisfaciat, in vllo auctore inuenisse, nec me aliis hucusque machinis voti compotem factum esse. Quisque suos deperit foetus, encomiisque extollit, vtinam rigidiori facto examine vitia et defectus simul notasset. Quaedam sunt Notiometra, quae noua primis mensibus ab humore aereo bene afficiuntur, sequentibus mensibus minus, peritque semper temporis successu mobilitas, nec durante anno valent amplius.

Indicant autem modo maiorem minoremue aeris humorem, minime quantum humoris aeri sub dato volumine insit. Praeterea Notiometrum vel sub dio ponendum est, vel in conclaui. Hoc plus minusue perflabile erit, aeremque sicciorem capiet clausum, quam apertum; sub dio etiam in loco perflabili ponendum erit, sed tum a radiis solis non parum turbatur. Hae et aliae difficultates tantae sunt, vt quorsum me vertam nescius, potius de Notiometris sileam, quam longo

 sermo-

sermone taedium creem. Scribo haec omnia, quae ab experientia post inanes impensas didici.

Interim alia notanda sunt, quae ad historiam meteororum spectant.

Obseruetur quibus diebus, horis matutinis, vespertinis, nocturnis, labatur ros, et quanta copia collecta sit in corporibus, quibus vsi, in eo capiendo, fuimus; tum in quaenam corpora labatur? An in omnia ex triplici regno, an in quaedam tantum, tum in quae corpora? An ros tantum ex solo et aqua in altum adscendat? An vero et adscendat, et relabatur? Haec enim omnia differre comperi in variis regionibus, adeo vt ros, velati omnia alia meteora sunt suis regionibus propria, discrepet in quolibet loco.

Obseruetur an quoque ros melleus cadat, et quibus temporibus? Solet in Belgio cadere in solum et aquam, pinguitudine afficere vtrumque, cum sit tantum oleum, ex foliis arborum ab aestu expulsum, aliquantum volatile, sed igne orbatum ocyus relabitur in terram. Tantum magno regnante aestu comperitur, plerumque cadit ante meridiem, et notabili copia: hinc, si diuturnus fuerit aestus, folia celeriter orbantur oleo, flauescunt, et aduentante autumno decidunt, quae aliis annis vltra mensem adhuc perstitissent viridia et in arboribus.

Notandi quoque sunt dies nebulosi, quibus horis inceperit aut aduentauerit nebula, quonam tempore clarauerit coelum, quot anni diebus regnauerint nebulae, an rarae, an densae fuerint, vt lucem penitus ademerint, quod bis ipso meridie euenisse vidi; an foeteant, an noxiae, vel innocuae fuerint; qualem humorem praebuerint collectae in speculis vitreis, vel patinis porcellaneis, tum quales excitauerint morbos; nam anno 1732 nebulae ex Polonia ortae, aduentantes in Belgium, atroces excitarunt et periculosas Peripneumonias.

Spectentur saepe nubes in coelo sublimi; notetur, quot ordines diuersarum altitudinum compareant, quaenam insistant, quaenam moueantur, an strictae a solo adscendant, descendant, vel eiusdem altitudinis et distantiae a solo fuerint.

Dies, quibus fulminauerit, et tonuerit, in ea regione notentur; an fulmina noxia, an bruta fuerint? Quaenam intulerint calamitates? Sunt enim regiones, in quibus numquam fulminat, sunt in quibus crebra fulmina, sunt in quibus vehementes sunt fragores, et plerumque damnosi; sunt in quibus rara et fere numquam aerumnosa noxiaque sunt fulmina, nec magnum est locorum interuallum, in quibus tanta fulminum discrimina eueniunt. Quoties igitur toto anno fulminauerit, aut et fulgurauerit, supputetur sub finem anni.

Notetur numerus procellarum, et quibus diebus tempestates furibundae violentaeque fuerint, et quas intulerint rebus humanis iniurias.

Quoties grandinauerit, et quando in granis grandinis aliquid insolens spectatum sit, quas aerumnas attulerint.

Quoties ninxerit, quantum niuis deciderit, quo die maxima copia, an insolentis figurae? Notetur, quot dies humidi, sicci, nubilosi, praenubili, subnubili, sereni, toto anno fuerint; quot noctes serenae, quot nuctemera serena.

Quibus noctibus et quoties aurora borea fulserit, et cum quibus phaenomenis.

Quoties et quando Iris solaris lunarisque apparuerit.

An fulserint coronae circumnectentes Solem, Lunam, Planetas, et quaenam tum coeli constitutio fuerit.

An Bolides, vel alia ardentia meteora in coelo fuerint visa; describatur horum cursus, claritas, magnitudo, fragor, et an calamitatibus affecerint res humanas.

Notandum etiam est quolibet mense vernali, quando arbores, quae sunt vnius speciei, quando aliarum specierum, quando herbae nonnullae, quae singulae suis nominibus sunt appellandae, inceperint protrudere gemmas, emittere folia, flores; quonam tempore folia fuerint perfecta et adoleuerint, quando flores marcescentes petalis orbabantur, an infestati ab insectis, et a quibusnam? Quomodo gramina et fruges creuerint, satae ante hyemem, vel vernali tempore; an aestate fruges bene maturuerint, an copiose collectae, an arborei fructus maturi, saporis grati fuerint, an minus arriserint palato, veluti sunt cerasa, pruna, poma, pyra, amygdalae, mori, vuae etc. an laete creuerint legumina, quibus homines vesci solent, aut quid nocuerit incremento? an boues, oues, capri, sues, laete luxurient

luxurient in pascuis, vt niteant? an morbis infestentur et quibusnam?

Notentur quoque sedulo morbi, qui quolibet mense homines inuaserint, morborum decursus, causa, curatio simul addatur.

Quando haec omnia accurate et ordine memoriae traduntur, historia meteororum multum increscet; ita enim constabit, quaenam hyemes sint modestae, quaenam asperae, earumque periodus; quinam anni fertiles, quinam sint infertiles, et ita appellandi: non quod omnes species frugum, fructuum, leguminum, eodem anno laete et magna copia prouenerint, id enim nunquam eueniisse vidi, sed quod maxima pars frugum ad vitam necessariarum abundanter collecta fuerit.

Nullus dubito, quin posteritas alia meteora sit detectura, quorum potior ratio erit habenda, quod si in his adnotandis diligentes saeculi spatio fuerint Philosophi, magnas vtilitates pro genere humano colligent, et scientiam rerum naturalium multum promouebunt: si autem, hisce, vti rebus inutilibus, neglectis, socordes euaserint, et potius se exercere in inutilibus speculationibus et hypothesibus fingendis voluerint, post multa molimina et herculeos exantlatos labores, comperient, se profecisse nihil: solae enim obseruationes, sola experimenta sunt verae firmaeque bases Philosophiae naturalis.

---

HALO-

# HALONVM EXTRAORDINARIARVM PETROPOLI VISARVM DESCRIPTIO.

Auctore

*F. V. T. AEPINO.*

1)

Admodum frequens eſt apud nos halonum ſolarium apparitio, quod colligere exinde facile poterunt lectores, ſi accipiant, annotaſſe me in aduerſariis, inde a die 23. Aprilis 1758, vſque ad diem 20 Septembris, eiusdem anni, viginti ſex halones a me conſpectas, minimum vero duplo plures hoc interuallo a me viſas eſſe, ob ſummam enim phaenomeni frequentiam negligentius iſta annotaui.

2) Circumſtantiae huius phaenomeni apud nos fere conſtanter eaedem ſunt, quae et alibi comitari iſtud ſolent. Apparent nempe halones iſtae, coelo neque penitus ſereno, neque penitus nubibus obſcurato, ſed tenuibus nebulis obducto, quae hebetant quidem ſolaris lucis vigorem, atque peculiari quodam pallore, ab adſueto facile diſtinguendo, ipſius radios inficiunt, non vero omnem ipſis tranſitum denegant. Vnicus, ſub his circumſtantiis, conſpici ſolet circulus, ſolem tanquam centrum cingens, diametrum habens 45 circiter graduum, et latitudinem diametro ſolari proxime aequalem, intus rubens, exterius vero ex albo coeru-

leſcens,

lescens, areaque a circulo isto comprehensa, reliquo coelo obscurior esse solet.

3) Rarius occurrit Parheliorum phaenomenon, etsi et hoc apud nos frequentius conspiciendum se praebeat, quam in Germania, aliisque terrae regionibus australioribus. Vidi hoc phaenomenon anno superiori 1758 quater, die nempe 23 Aprilis, 13 Maii, 19 Augusti, et mensis Octobris, nisi fallor, d. 15, semel autem d. 19 Aprilis huius anni 1759, atque aliqua obseruavi, quae, vt orbi erudito innotescant, admodum digna videntur, vnde exactam eorum descriptionem Academiae tradere constitui.

4) Die 23 Aprilis, Anni 1758, id, quod Fig. 1. exhibet, conspiciendum se mihi dedit phaenomenon. Solem S, tanquam centrum, cingebant circuli bini. Prior eorum CFED, eiusdem erat diametri et latitudinis, atque similiter coloratus, prouti esse solent halones simplices consuetae, de quibus §. 1. locutus sum, ast id peculiare habebat, quod area elliptica albescente, cuius axis maior horizonti parallelus, CGEH, cinctus esset. Erat nempe, area quidem CFED, a circulo hoc comprehensa, reliquo coelo aliquantum obscurior, ast spatia lunularia CGEFC et CHEDC, arcu elliptico exterius, circulari interius, terminata, viuido albore resplendescebant. Secundi circuli infra Solem non nisi pars quaedam IK, quadrantem non adaequans, videbatur. Erat circuli huius diameter 90 fere graduum, latitudo diametro solari circiter aequalis, atque colores prorsus iidem, qui in circulo Soli Tab. XI. a Fig. 1.

propinquiore. Interius nempe rubicundo, exterius ex albo coerulescente, colore tinctus erat. Tertius tandem circulus, SLMN, completus erat, totus albescebat, perque Solem ipsum transiens, horizontali ductu coelum cingebat, atque itidem latitudinem habebat, solari diametro proxime aequalem.

5) Conspectui porro se dabant parhelii duo in annuli horizontalis SLMN, cum perimetro areae ellipticae, CGEH, intersectione siti, ad G et H. Vividam ipsi spargebant lucem, ast figuram non habebant rotundam, sed irregulariter quadrilateram. Versus Solem rubro colore tincti erant, ex parte vero a Sole auersa, ex coeruleo albescentem colorem exhibebant. Coronae horizontalis arcus G*m*, H*n*, parheliis propinqui, vegetiori lumine quam caeterae annuli huius partes resplendescebant, qui tamen splendor, recedendo a parheliis, magis magisque languidus euadebat, vnde caudarum, horizontaliter exporrectarum, pseudo-soli G atque H annexarum, apparentia oriebatur.

6) Circa halonem intimam, CFED, adhuc sequentia annotabam.

α) Arcus ipsius summus, *pq*, et infimus, *rs*, in verticali AB reperiundi, tantum prae se ferebant fulgorem, quem oculus perferre vix poterat. Pro parheliis tamen fulgentes has areas sumere, oblonga ipsarum figura non permittebat; nullam enim, quoad figuram, cum Solis imagine habebant similitudinem.

β) Loβ) Loca F, D, vbi annulus horizontalis albicans secabat halonem CFED, neque parhelios exhibebant, neque vegetiori lumine, quam caeterae halonis partes, praedita erant.

γ) Videbatur mihi aliquoties, aream totam CGEH, ellipsi, intus rubra, exterius coerulea, cinctam esse, ob summam vero colorum debilitatem, oculis fidem habere pertimescebam.

Plura tum temporis, etsi phaenomenon per aliquot horas duraret, circa istud annotare non potui.

7) Redibat autem d. 13 Maii idem phaenomenon, quoad quasdam quidem circumstantias minus completum, quoad praecipuas vero multo distinctius, quam istud, quod d. 23 Aprilis conspexeram. Sistit eius delineationem Fig. 1, ac prorsus simile erat antea descripto, nisi quod Tab. XII. b Fig. 1.

1.) Circulus horizontalis albus SLMN, admodum debilis esset,

2) Parhelii, ad G et H siti, parum splenderent,

3) Secundae halonis, solem cingentis, arcus quidam IK, ast minor, quam in phaenomeno 23 Aprilis, conspiceretur. Praecipue autem notabile hoc erat, quod

4) Vniuersa area elliptica halone elliptica, CGEH, cincta esset. Erat halonis huius axis maior, siue transuersus, horizonti parallelus, coniugatus vero, siue minor, ad horizontem normalis; priorque axis posteriorem, qui halonis circularis CFED diametro

aequalis, et 45 circiter erat graduum, ſex quaſi gradibus ſuperabat. Caeterum elliptica halo, eandem habebat latitudinem, ac circularis, quam includebat, ſimilique ratione colorata erat, interius nempe rubra, exterius pallide coerulea. Loca $rEs$, $pCq$, vbi halo elliptica circularem contingebat, ac cum ipſa confundebatur, fulgore vix oculis ferendo reſplendeſcebant, aſt, ob oblongiorem tractuum iſtorum figuram, nullam cum parheliis habebant ſimilitudinem.

Vltra horae ſolidae ſpatium perſiſtebat phaenomenon, quod inter elegantiſſima, quae vnquam conſpexi, numero. Poſt horae vero effluxum, diſſipabantur tenues nebulae aerem replentes, vnde languidum primum euadebat phaenomenon, coeloque penitus ſereno facto, omnino tandem euaneſcebat.

8) Idem phaenomenon d. 19 Auguſti, eiusdem anni denuo obſeruabam. Circa horam nempe 11 et ½ ſolem intuens, conſpiciebam, et ſupra et infra ipſum, arcus aliquos coloratos, aſpectum praebentes talem,
Tab. XII. Fig. 2. qualem ſiſtit Fig. 2. Statim ſuſpicabar, videre me partem phaenomeni, d. 23 Aprilis et 13 Maii conſpecti, et arcum PCQ, FEG, ellipticae, arcum vero RCT, HEI, circularis halonis, eſſe partes. Erat hoc momento aer valde ſerenus, ac vix et ne vix quidem tenues quasdam obſeruare licebat nebulas. Advehebat autem ventus NW. continuo plures vapores, atque, prouti hi denſi magis fiebant, completum magis euadebat phaenomenon, et antea deſcriptis ſimilius. Circa horam tandem 12 tale fere ſe ſiſtebat, quale exhi-

exhibet Fig. 2. nisi quod annulus horizontalis SLMN, parheliique G, H, admodum debiles essent. Quoad caeteras circumstantias omnes, dimensiones nempe diametrorum et latitudinum halonum circularium et ellipticae, earumque colores etc. omnino simile erat phaenomenon hoc isti, quod d. 13 Maii conspexeram. Dissipatis versus h. 1. vaporibus, prorsus euanescebat.

9) Die tandem 19 Aprilis, anni currentis 1759 denuo initia huius phaenomeni videbam, ita se sistentia, qualia ipsa exhibentur in Fig. 2. Exspectabam, an denuo se compleret, ast frustra hac vice, sereno enim facto coelo phaenomenon euanescebat. Tab. XII. b Fig. 2.

10) Facile in oculos incurrit, quatuor haec a me recensita phaenomena omnino vnius eiusdemque fuisse generis, neque aliam inter ipsa dari diuersitatem, quam quae est phaenomeni, quod mox magis, mox minus completum, videndum se praebet. Cum igitur vnum hoc idemque phaenomenon quater ad minimum, anni spatio, apparuerit, pro rariori forte non habendum est, neque et hanc ob rationem extraordinarium istud vocaui, sed eam solum ob causam, quoniam Physicis hactenus omnino fere ignotum est.

11) Quos euolui scriptores de parheliis atque halonibus, euolui autem plurimos, silent fere omnes de phaenomeno, quod hic descripsi, neque aliquam areae et halonis ellipticae iniiciunt mentionem. In magno nempe delineationum aut descriptionum huiusmodi phaenomenorum numero, non nisi quatuor inuenire potui, quae huc referenda videntur, ac cum meis obseruatis

aliquam habent similitudinem. Refert primum *Hugenius in Dissertatione de Coronis et Parheliis*, quae occurrit inter ipsius *Opuscula posthuma*, *pag.* 321. 359. *sqq.* obseruationem a *Scheinero* anno 1630 *Romae* institutam, vbi dicitur: Solem, S, ambiuisse duos circulos excentricos ABDC et AEDF, se mutuo in linea verticali GH interfecantes, prouti monstrat Fig 3. Fatetur *Scheinerus*, non satis distinctum apparuisse phaenomenon, vnde inducor, vt suspicer, idem ac ego, ast subobscure, vidisse *Scheinerum*. Ab Ellipseos enim circulum cingentis apparentia, parum abludit, quae producitur ex duorum circulorum intersectione figura. Deinde in *Transactionum Anglicanarum Num* 13 *pag* 219. *sqq.* inuenio, ex *Diario eruditorum* (*Iournal des Sçavans*) *ad annum* 1666 desumtam, quatuor parheliorum delineationem, et descriptionem, sequentibus verbis conceptam: *The 9th of April, of this present Year, - - there appear'd three Circles in the Sky. One of them was very great, a little interrupted, and white every where. - - - It passed through the midst of the Sun's Disk, and was parallel tho the Horizon. - - - The second was much less, and defective in some places, having the Colours of a Rainbow. - - - It had the true Sun for its Center. The third was less, than the first, but greater than the second. It was not entire, but only an Arch, or Portion of a Circle, whose Center was far distant from that of the Sun, and whose Circumference did, by its middle, joyn to that of the least Circle, intersecting the greatest Circle by its two extreams. In this Circle were discerned also the Colours of*

Tab. XII. b Fig. 3.

*of a Rainbow. - - - At the place, where the Circumference of this third Circle did close with that of the second, there was a great brightness of Rainbow Colours, mixt together: And at the two extremities, where this second Circle intersected the first, appear'd two Parhelia's, or Mock suns; - - - This Appearance is look'd upon, as one of the notablest, that can be seen, by reason of the Excentricity of the third Circle, and because, that the Parhelia were not in the Intersection of the second Circle, with the great Circle, but in that of the third Circle.* Quodsi vero descriptio haec cum Figura mea 2 conferatur, luculenter patet, de eodem ipsam loqui phaenomeno, quod ego quater vidi, modo quod in Gallia non integra visa fuerit halo elliptica CGEH, sed inferius solummodo, quasi ipsius dimidium GEH.

12) Tertium, quod huc spectare videtur exemplum, idem, quem supra iam citaui, *Hugenius* suppeditat, *loc. cit pag.* 348. 349. Visa nempe est, *Parisiis* in Bibliotheca regia, d 12. Maii, A. 1667, *Corona circa solem, cuius diameter inuenta est* 44 *graduum, et latitudo limbi eius* ½ *gradus praeterpropter. - - Apparuit praeterea pars quaedam maioris circuli, qui superiorem coronae partem tangebat, et cuius extrema versus inferiora vergebant, - - - quae pars circuli iisdem, quibus corona, coloribus, sed dilutioribus, splendebat.* Quem quidem arcum, coronam tangentem, ellipseos meae fuisse partem coniicio. Tandem recordor, in *Iournal des Sçavans*, *A.* 1683, narrari, vidisse *Cassinum* halonem Solem cingentem, ac extra eam, ab

vtro-

vtroque Solis latere, parhelium, vtrumque aequalem, cum Sole vero, supra horizontem habentem altitudinem, qui vero parhelii, non in halone siti, sed vtrinque, ad aliquot diametrorum solarium interuallum, inde remoti erant, quos parhelios eos fuisse, qui in meo phaenomeno, ab annuli elliptici, cum horizontali circulo, intersectione formantur, magna cum verisimilitudine credi posse, existimo.

13) Non ignoro, *Newtonum* in Opticae libro, a se visae halonis ellipticae, lunam cingentis, mentionem iniicere, ast, si, quam exhibet, eius descriptionem intueamur, liquet, aliud prorsus, quam ego, vidisse ipsum phaenomenon. Sic enim scribit Vir summus, *Opticks, II. Book. Part. IV. Obs. XIII. pag. m* 111. 112. *The like Crowns appear sometimes about the Moon; for in the beginning of the year* 1664, *Febr.* 19*th at nigth, I saw two such Crowns about her. --- At the same time there appeared a Halo about* 22 *degrees*, 35′ *distant from the Center of the Moon. It was elliptical, and its long Diameter was perpendicular to the Horizon, verging below farthest from the Moon.*

14) Ex hactenus prolatis, iure iam concludere mihi posse videor, contigisse mihi primo, iustam acquirere ideam, phaenomeni, quod ante me pauci, nemo autem, quantum scio, completum, ac satis distinctum, conspexit. Obseruaui quoque A. 1758, d. 15. Octobris, si recte recordor, (diem enim annotare oblitus sum) denuo halones et parhelios, quod vero phaenomenon, ab antea descripto, omnino diuersum, aliusque generis fuisse puto. Sistit eius delineationem

tionem Fig. I. atque quoad halonum calores, diametrorumque ac latitudinum dimensiones. equidem simile prorsus erat, phaenomeno superius descripto, ast quoad circumstantias aliquas notabiliter ab ipso diuersum erat. Namque Tab. XIII. Fig. I.

1) Neque areae ellipticae albescentis, neque annuli elliptici, intimam halonem circularem ambientis, vllum hic aderat vestigium.

2) Halonis internae arcus supremus et infimus, non maiorem, prae caeteris annuli partibus, ostendebant splendorem.

3) Parhelii F, D, in halonis internae CFED, cum annulo horizontali SLMN intersectione praecise siti erant.

4) Arcum videbam IHK, crura sursus vertentem, partem nempe circuli, Zenith Z pro centro habentis. Erat hic arcus similiter coloratus, ac halo CFED, eiusdemque latitudinis, vertex vero ipsius H, a Solis centro S, 45 circiter gradus distabat. Eiusmodi arcus inuersi, in antea descripto phaenomeno, ne vestigium quidem vnquam conspexi.

15) Patet, hoc vltimo descriptum phaenomenon, maiorem, cum iis, quae alibi in meridionalioribus Europae regionibus frequenter obseruata fuerunt, habuisse affinitatem, quam reliqua. Non id iam ago, vt theoriam halonum atque parheliorum exquiram; nil enim, nisi distinctam obseruationum mearum descriptionem tradere, propositum habeo. Quo interim et alios Physicos, ad diligentius obseruanda huius generis phaenomena partim, partim ad euoluendam et

 per-

perficiendam eorum theoriam, excitem, quaestionum sub forma, iungere hic placet aliquas cogitationes meas, nondum satis maturas.

*Qu.* 1. Nonne parheliorum atque halonum phaenomena omnia ad duas classes redigi possunt, quarum primam constituunt ea, vbi halo intima ellipsi lucida, annuloque elliptico colorato cincta est, alterum vero genus eorum est, vbi areae ellipticae atque halonis ellipticae nulla adsunt vestigia? Atque, nonne ad bina haec genera ita reuocari possunt omnia, quae hactenus visa sunt huius generis phaenomena, vt ostendi queat, omnem quae inter ipsa obseruari solet diuersitatem, non pendere aliunde, nisi quod idem phaenomenon, mox minus, mox magis, completum appareat?

*Qu.* 2. Nonne prioris generis phaenomenon borealioribus, posterioris generis australioribus terrae regionibus, magis frequens ac commune est? Videor mihi hoc suspicari posse exinde, quoniam vnius anni interuallo quater primum phaenomenon hic Petropoli vidi, quod alibi rarissimum esse, inde concludo, quod, inter ingentem ab aliis conspectorum numerum, paucissima inueniantur, quae, ad primam hanc classem pertinere, censenda sunt.

*Qu.* 3. Coelum, oculo istud intuenti, apparet, prouti fornix compressus, ellipticus. Circulus itaque, solem aut lunam cingens, in ellipticum hunc fornicem proiectus, apparere debet, quasi esset ellipsis, axin maiorem habens horizonti perpendicularem, et inferius a luna, aut sole, longiori interuallo distans, quam superius.

perius. Nonne itaque dubitare licet, an halo a *Newtono* visa (§. 13.) ex fallacia optica potius, quam ex causa physica, elliptica apparuerit? Non enim nos docet Vir summus, an ellipticitatem halonis ex dimensione, an ex nuda oculorum aestimatione, obseruauerit.

*Qv.* 4. Etsi a magno *Hugenio* in *Tractatu de Coronis et Parheliis* proposita, de ortu phaenomenorum huius generis, hypothesis, ingeniosissima sit, tantoque Viro non indigna; nonne nihilo minus vera horum phaenomenorum causa in iis quaerenda est principiis, quae proposuit *Newtonus*, *Opticks*, *II. Book, Part. IV*? Non obstat, quod *Hugeniana* hypothesis, phaenomenis, quae explicanda sibi sumsit, apte satis conueniat. Non enim ingeniosa figmenta, sed veritatem, quaerimus Physici.

*Qv.* 5. Nonne ex iisdem modo allegatis principiis *Newtonianis*, halonis noctu candelam accensam cingentis explicatio, repetenda est? Praesto enim sunt argumenta, quae plane demonstrant, halonem istam, non extra oculum, sed in ipso spectatoris oculo, formari. Sed de his alibi vberius agam.

# PISCIVM RARIORVM
## E MVSEO PETROPOLITANO EXCEPTORVM DESCRIPTIONES.

Auctore
*I. T. KOELREVTER.*

Cum Muſeum Petropolitanum, rebus naturalibus, e toto terrarum orbe congeſtis, omnium facile inſtructiſſimum, praeterita huius anni aeſtate perluſtrarem, plurima mihi ſeſe obtulerunt Naturae Cimelia, quorum mentionem partim nullibi factam eſſe inuenio, partim quorum nomina tantum, vel nimis breues ac defectuoſae apud Auctores, ſaepius ineruditos, paſſim leguntur deſcriptiones, quorumque pleniorem magisque elaboratam omnes mecum optarent Scientiae naturalis cultores hiſtoriam. Locupletiſſimum rerum naturalium theſaurum, a Cel. olim Seba collectum, quem pretio haud paruo ſibi comparauit PETRVS MAGNVS, varia continere, quae omnem merentur attentionem, coniectura ſatis probabili nemo non perſpiciet. Licet enim modo laudatus Seba maximam rariorum rerum partem in libro, qui titulum gerit: *Locupletiſſimi rerum naturalium Theſauri accurata deſcriptio etc.* 1734. in fol. Tom. I et II. deſcripſerit, iconibusque optimis illuſtrauerit, principem tamen Hiſtoriae naturalis partem, Ichthyologiam puta, ſenio, vel morte, ſine dubio praepeditus, non elaborauit, quamuis Piſces Amphibia numero in collectione fere ſuperarent. Hi igitur prae aliis noui quid ſuggerunt Naturae curioſo, quare, ſi in in describendis eorum rarioribus meam impendam operam, eam in amplificanda scientia naturali haud frustra collocasse spero.

*** *** ***

## Gasteropelecus. *Gron.* mus. 2. no. 155. t. 7. f. 5.

## Clupea pinnis flauis: ventralibus minutissimis. *Linn.* Syst. Nat. edit. dec. p. 319. no. 7. (Sternicla).

### I.

### *Descriptio.*

Color corporis, si a capite versus caudam adspicias piscem, sordide flauescens, sin vero e directo aduersus latera eius intendas oculos, splendide argenteus apparet, quo splendore etiam irides, lamellae iuxta oculos, et opercula branchiarum, sub quocunque adspiciantur angulo, praedita sunt, ex eoque, pro varia radiorum reflexione, subinde coerulei parum resplendet, id quod etiam circa dorsum ita contingit. Summo capiti pinnisque pectoralibus viroris diluti aliquid est admixtum; reliquae vero pinnae pallidae omnino, incoloratae ac pellucidae sunt. Nec circa caudam vidi maculam, nisi sub ea intelligatur linea longitudinalis fusca, de qua inferius dicetur. Tab. XIV. Fig. 1. 2. et 3.

Totum corpus valde compressum, latum, et, si latera respicias, ventricosum valde, a margine superiore versus inferiorem crassitie paullatim decrescit, ita, vt abdominis pars anterior in marginem, cultri aciei instar, acutum, et papyro haud crassiorem, terminetur. Eadem quoque anterior corporis pars posteriorem latitudine multum superat.

Caput superne planum, ad latera compressum, et antice, circa os, quasi retusum est; superior enim maxilla capitis vertice situ haud inferior est, eiusdemque margini antico maxillae inferioris medium respondet, quae, clauso ore, situm fere verticalem obtinet, et a superiore aliquantum prominet. Si caput ab anteriore adspicitur parte, apparet inter duo maxillae inferioris crura, seu in mento, sinus satis profundus, quem, nisi de vtriusque maxillae praesentia nullum jam esset dubium, ab inferioris absentia ortum fuisse, facile quis iudicaret. Ex huius sinus imo ab initio statim arcuatum emergit abdomen, quod primo aliquali quidem gaudet crassitie, mox vero, sub vlteriori arcuato decursu, ad anum vsque, valde attenuatur, inque acutum valde abit marginem; haec anterior corporis pars, cuius limites a capite ad pinnarum pectoralium basin fere, et ab hac oblique deorsum, ad anum vsque, excurrunt, nullam fouet cauitatem, neque viscus, sed solidam, ex fibris carneis, radiorum instar, e centro ad marginem excurrentibus, conflatam offert substantiam, licet sub ventricosa facie, qualem ipsius prae se ferunt latera, facile possit imponere, vt pro vero abdomine, viscera continente, a quouis haberetur.

Mem-

Membrana branchiostega, tantum abest, vt, more solito, sub postica aut laterali operculi branchiarum parte collocetur, quamuis huius apertura late pateat, vt ad antica potius, in menti sc. sinu, sit quaerenda, cuius imo vtraque, sub angulo acuto coniuncta, affigitur, postquam ambae ab operculi lateribus, quibus adnascuntur, recessere. Ossiculum in membrana ista vnum alterumue distinguere quidem potui, verum, ob eorum paruitatem, de numero certi quid affirmare vix audeo; sic quoque, ob eandem rationem, branchiarum structuram describere nequeo, modo, earum vtrinque quatuor adesse, moniturus.

Superior aeque ac inferior maxilla denticulis minimis et acutis armata est. Narium foramina, ab vtroque latere duo, inter labii superioris latera et superiorem ac anticum oculi orbitae marginem, conspicienda sunt. Capitis summum, quod, vti supra iam fuit dictum, planum est, marginem habet vtrinque prominentem et acutum, neruoque alio longitudinali, per ipsius medium excurrente, in duas aequales diuiditur partes.

Laminarum istarum argentearum, orbitae plus quam dimidiam partem, inferiorem sc. et lateralem ipsius marginem, cingentium, quatuor sunt, quarum postica reniformis, mediae magnitudinis; inferior eiusdem fere figurae, sed ad vtrumque extremum truncata, maxima; quae hanc sequitur, anticarum vna, triangularis, omnium minima est.

Oper-

Operculum branchiarum, quoad maximam partem, formatur a lamina postica, omnium maxima, quae ex ouato-lanceolata, et sulco quodam, a dorso laminae orbitalis posticae vltra ipsius medium transuersim excurrente, incisa est; secunda operculi lamina, priore longe minor, itidem ouato-lanceolata est, harumque duarum laminarum extremitates acutae se inuicem excipiunt; secundam sequitur tertia, linearis, ad maxillae inferioris partes potius, quam ad branchiarum operculum, referenda. Hisce modo memoratis, tam orbitalibus, quam branchialibus laminis, duo interponuntur arcus ossei, qui sub infima, maxima, orbitalium lamina potissimum in conspectum veniunt. Posterior operculi branchiarum margo cute producta ampliatur, ad aperturam firmius et exactius claudendam.

Dorsum ab initio planiusculum, leuissime ascendit, sensim dehinc conuexum factum, recto fere decursu suam attingit pinnam, cuius ad basin descendit simul, inde vlterius descensu suo, minus tamen decliui, ad pinnae caudae principium vsque, pergit. Ab ano vero corporis margo inferior, ad pinnae ani finem vsque, in linea recta oblique ascendit, ab eodemque sub angulo obtuso infractus, ad caudae pinnam recta procedit.

Si latus corporis obuertatur luci, ob eius tenuitatem pellucent intestina, quae a pinnae pectoralis basi oblique deorsum ad anum ducuntur, superne maiora volumine, inferne tenuia inque rectum terminata mihi visa, et, vbi latissima sunt, duas vix superantia lineas.

Horum

Horum faciei posticae vesica quaedam accumbit, semilunaris figurae, 1½ lin. in medio lata, et, quantum quidem de summa eius pelluciditate suspicari licet, aere forte repleta, cuius cornu superius ac obtusius supra pinnarum pectoralium basin capiti, seu potius branchiarum operculis, contiguum est, inferius et acutius proxime infra anum subsistit; eademque sua conuexitate posticam corporis partem, concauitate intestina respicit. Notandum autem interim est, anum, et, quam ante se gerit, pinnulam ventralem spuriam, collocari inter duas duplicatas squamularum, vltra corporis marginem prominentium, series, quarum vna, 2 lin longa, bis octo, altera, 1 lin longa, bis quatuor, iisque minoribus, componitur squamulis, huiusque posterioris inter duplicaturam aditum satis largum ad istam vesicam patere; setam enim ad eius medium vsque et quaquauersum circumducere potui, profundiorem tamen eius immissionem membrana quaedam, qua intus forte obducta erat cauitas, impediuit. Nec ea propter contendere velim, setam, per ostium intrusam, in ipsum vesicae cauum peruenisse, neque eam ipsam pro vera vesica natatoria, aut ostium illud pro ductus pneumatici ostio, venditare.

Posticae extremitati primae squamarum seriei a latere sinistro adiacet pinnula ventralis spuria, penicilliformis, quae, 5 circiter radiis, ½ tantum aut ⅓ lin. vix longis, nec, quantum quidem distinguere potui, membrana inter se connexis composita, verae pinnae nomen haud meretur. Alterius minorum squamarum seriei extremitati posticae principium pinnae ani contiguum est. Ista, de qua modo dixi, vesica abdominis cauum clauditur, nec vllum praeterea viscus pone eam dispositum esse videtur.

Squamae tenues, subrotundae partim, partim ouales, integerrimae: maximae earum partem corporis anticam, infra et ante pinnas pectorales, et laterum medietatem, supra et infra lineam longitudinalem occupant; mediae magnitudinis dorsum et caudam, minimae inferiorem vesicae regionem, et marginem corporis, pinnae ani contiguum, inuestiunt; maximae omnium lineam latae sunt, vel eam quoque parum excedunt. Duae tres ve squamarum series, tam supra, quam infra lineam longitudinalem, punctis sunt pertusae, lineas quasi efformantibus. Nec in capite, neque in branchiarum operculo, vllum squamarum occurrit vestigium.

Pinnae duae pectorales, proxime infra magnam operculi branchiarum laminam sitae, fortes sunt, et patentes, pro corporis paruitate magnae, radiisque vndecim compositae, primis fortibus valde et arcuatis, omnibus autem a primo ad vltimum ex ordine breuioribus.

Pinna dorsi vnica, caudae proprior, quam corporis medio, pinnaeque ani principio situ adhuc posterior, breuis, octo radiorum, satis tenuium, vltimo bifido, figura quasi rhomboidea.

Pinna ani longa, 32 radiis, eiusdem fere vbique longitudinis, 1 sc. vel 1 $1\frac{1}{4}$ lin. longis, constructa.

Pinna caudae bifurcata, 36 circiter radiorum.

Ex

Ex Insula Zeylan aduectum esse testatur Mus. Petropol. Catalogus serpent. p. 470, in quo sub No. 351 (*a*): „Pisciculus argenteus Zeylanicus, circa caudam maculosus„: vocatur.

Quibus notis a Gronouiano hic differat, quibusque cum eodem conueniat, cum ex ipsa descriptione, tum ex iconibus satis elucet.

## II.

## *Mensura.*

| | Poll. | lin. Paris. |
|---|---|---|
| Longitudo tota, sc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum | 1 | 10 |
| - - - ab oris extremo ad extremitatem corporis squamosam - - - - | 1 | 5 |
| Ab extremo oris ad oculi medium - - - | — | $1\frac{1}{2}$ |
| - - - ad marginem operculi branchiarum posticum - - - - | — | $4\frac{2}{3}$ |
| - - - ad principium pinnarum pectoralium | — | $3\frac{3}{4}$ |
| - - - ad primam prominentiam squamarum abdominalium - - - | — | $9\frac{1}{2}$ |
| - - - ad pinnulam ventralem spuriam et anum - - - - - | — | $10\frac{2}{3}$ |
| - - - ad principium pinnae ani - - - | — | 11 |
| - - - - - - - - - dorsi - - - | — | $11\frac{3}{4}$ |
| Longitudo pinnarum pectoralium - - - - - | — | $7\frac{1}{4}$ |
| - - - pinnae dorsi ad basin - - - - - | — | $1\frac{2}{3}$ |
| - - - - - - - radiorum longiorum - | — | 2 |
| - - - - - - ani ad basin - - - - | — | $5\frac{3}{4}$ |
| - - - - - - caudae; sc. a primis radiis ad longiorum apices - - | — | 5 |

| | Poll. | lin. |
|---|---|---|
| Extremitas corporis squamosa in caudae pinnam extensa ad - - - - - - - | — | 1 |
| Diameter oculi - - - - - - - - - - | — | $1\frac{1}{4}$ |
| Distantia inter primi pinnae pect. radii basin et anum - - - - - - | — | $6\frac{2}{3}$ |
| - - - - inter anum et primi pinnae ani radii basin - - - - - - | — | $\frac{3}{4}$ |
| - - - - inter vltimi pinnae ani radii basin, et primum pinnae caudae radium - | — | $1\frac{1}{2}$ |
| Latitudo horizontalis (*a*) per oculorum axes - | | 2 |
| - - - - - - - ad dorsi initium - - - | | $1\frac{3}{4}$ |
| - - - - - - - - principium pinnae dorsi | — | $\frac{2}{3}$ |
| - - - - - - - - - - - - - caudae | — | $\frac{1}{4}$ |
| - - - - perpendicularis (*b*) per oculi medium | — | $4\frac{2}{3}$ |
| - - - - - per pinnae pectoralis principium | — | $7\frac{1}{3}$ |
| - - - - - per maximam corporis latitudinem, pone pinnam pect. - | — | 8 |
| - - - - per anum - - - - - - - | — | $6\frac{2}{3}$ |
| - - - - per pinnae ani finem - - - | — | $1\frac{1}{2}$ |
| - - - - - - - - - - caudae principium - | — | 2 |

(*a*) Pisce erecto, horizontaliter sumta.

(*b*) Pisce lateri incumbente, horizontaliter sumta.

II.

*** *** ***

II.

Trutta dentata, dorso plano; abdomine acuto, prominente; taenia longitudinali, argentea; pinna ani longissima. *Piabucu* Brasiliens. *Marcgraf. Willoughb.* Hist. Pisc. p. 204. Tab. N. 13. fig. 4.

*Descriptio.*

Color Piscis in S. V. asseruati e pallide testaceo luteus est, qui tamen, eo viuente, vel haud longo post mortem tempore, plane alius esse debuit; Squamas nempe argenteum ostendere splendorem, dorsumque oliuacei esse coloris, viridi hyacinthino permixti, ex *Marcgrafio* allegat *Willoughbeius*. A postico operculi branchiarum angulo taenia argentea, vix splendens, in linea recta ad medium basis caudae pinnae tendit, summo dorso in decursu suo propior, quam imo abdominis margini, ab initio sensim latior facta, duas tertias longitudinis corporis adtingit, vbi latissima, $1\frac{1}{2}$ lineam sc. lata est, abhinc statim decrescens ad finem vsque. Laminae iuxta oculos et branchiarum opercula argentei, haud tamen splendidi, coloris sunt; irides vero, inferne quidem argenteae, maximam tamen par- Tab. XIV. Fig. 4.

tem saturate flauentes; iisdemque alias rubri parum superius esse admixtum, *Marcgrafius* perhibet.

Pupilla oualis est figurae, diametro perpendiculari horizontalem superante.

Quod ad corporis formam attinet, nescio, quam ob caussam et mihi et aliis caput huius piscis inuersum quasi visum sit; interim tamen, si probe aduertas, capitis summi ambitum leuiter depressum, imi vero conuexum, situmque oculorum solito inferiorem, huic fallaciae ansam dedisse, demum perspicies. Ab extremo mandibulae superioris ad decem lineas vsque caput ac dorsi initium ascendit quidem, sed in respectu ad ambitum vtrumque resimum est; abhinc vlterius, sed conuexo ambitu, leuiter ascendit dorsum ad pinnae dorsualis primae principium vsque, inde aliquantum rectum sequitur decursum, sensim tamen circa pinnam adiposam leuissime descendit, moxque iterum versus pinnae caudae principium, breui quidem itinere, leuiter ascendit. Ab extremo mandibulae inferioris conuexo sub ductu eo vsque descendit imi corporis ambitus, quo a posticis pinnae pectoralis radiis linea perpendicularis potest duci, dein noua maiorique sub conuexitate pergit ad angulum pinnarum ventralium internum, a quo leuissime iterum et recta descendit ad pinnae ani principium; abhinc denuo secundum totam huius pinnae basin cursu fere rectilineo, adscendit, tandemque ab vltimo pinnae ani fine ad pinnae caudae principium vsque leuiter iterum descendit.

Exposita ambitus descriptione, me conuerto ad ipsam corporis superficiem, eiusque conformationem.

Ver-

Vertex capitis glaberrimus, pellucidus, conuexus, dorsi initium versus magis fit decliuis, magisque ad latera compressus, processu subulato, glaberrimo in dorsi initium, ad $3\frac{1}{2}$ lineas vsque, excurrens. Ipsum dorsi initium, leuiter conuexum, statim in planitiem abit, quodammodo carinatam, marginibus vtrinque subacutis circumscriptam, et ad pinnam adiposam vsque sese extendentem. Semel quidem ea interrumpitur pinnae dorsalis primae parum eleuata basi, et ab hac pinna ad alteram adiposam vsque non amplius carinatum habet reliquum sui tractum, sed plana omnino est, marginesque vtrinque minus acutos exhibet. Dorsi extremum pone pinnam adiposam ex planiusculo statim in conuexum, et quodammodo acutum, contrahitur. Planities dorsi, modo memorata, ante pinnam primam, vbi latissima est, $2\frac{1}{2}$ lin. latitudinem absoluit.

Abdomen ab initio subacutum, mox infra pinnas pectorales, ad alteram curuaturam, attenuatum valde acutissimumque euadit, ob squamarum ibi prominentium duplicaturam; idem ante anum planiusculum, pone eundem subconuexum, iuxta pinnae ani basin satis compressum; et attenuatum, in extremo tandem cum dorsi extremo conuenit.

Ipsi vero corporis latera compressa, et leuissime tantum conuexa sunt; id quod ex mensura, inferius addenda, clarius patebit.

Oris rotundati rictus mediocris. Extremo vtriusque mandibulae limbo infixi sunt denticuli circiter sedecim, breues, obtusi, subtriangulares, albicantes, quorum orae ciliis brunis, quasi minoribus denticulis, instruun-

inſtruuntur. Pone dentes, intra os, vtriusque maxillae ductum ſequitur membrana, $\frac{1}{2}$ lineam lata, retrorſum expanſa, ſeu margine libero fauces reſpiciens. Conſpicitur etiam in palato anteriori, in diſtantia vnius lineae ab oris limbo, parua quaedam eminentia, duarumque linearum interuallo ab eadem linguae extremitas obtuſa, laeuis ac libera in conſpectum venit. Maxilla ſuperior, ore clauſo, inferiore parum longior, aperto vero, breuior aliquantum eſſe videtur. Narium foramina vtrinque duo, orbitae ſupremo margini altitudine aequalia, ac inter oris extremum et oculum in medio fere diſpoſita: anteriori ſubrotundo, minore; poſteriori ſemilunari, maiori, membranaque eiusdem figurae ad dimidium obtecto. Oculi, comparate ad caput, ſatis magni. Orbitae margo membrana auctus eſt; ſuper corneae partem extenſa, immobili. Angulus operculi branchiarum ſuperior, ſeu poſticus, $7\frac{2}{3}$ lin. ab oris extremo diſtat, inferior autem, ad vtriusque membranae branchioſtegae coalitionem, iſto 1 lin. ſitu anterior eſt.

Operculi branchiarum margo membrana terminatur, qualis in plurimis piſcium occurrit. Caeterum totum caput cum ſuis partibus glaberrimum et ſquamis omnino deſtitutum eſt. Membrana branchioſtega quatuor tantum oſſicula continet, quod in hoc genere ſingulare eſt. Branchiarum numerus vtrinque quaternarius.

Squamae mediocres, denſe congeſtae, tenues, integerrimae, partim ſubrotundae, partim ouales: maximarum diametro $1\frac{1}{3}$ lin. minimarum $\frac{1}{2}$ lin. vix ſuperante.

Linea

Linea longitudinalis ſtatim a principio, quod in taeniae argenteae initium cadit, ad pollicem vsque deſcendit, abhinc cum eadem taenia, pariter ad pollicem vsque, parallelum ſeruat curſum, ab eiusdem margine inferiore ſub hoc ſtatu duas lineas remota, denique ſurſum ſenſim flexa, ipſi taeniae argenteae, in diſtantia vnius pollicis duarumque linearum ab eius extremo, denuo immergitur, in eiusque medio recta ad caudae pinnam excurrit. Vbi incipit linea longitudinalis, a dorſo $2\frac{1}{2}$, a ventre $7\frac{1}{3}$ lin. circa pinnarum ventralium baſin a dorſo $7\frac{1}{2}$, a ventre cultellato 6 lin. circa pinnae ani principium a dorſo $7\frac{1}{3}$, a ventre $5\frac{1}{2}$ lin.; ad ipſius ingreſſum in taeniam argenteam a dorſo 4, a ventre $4\frac{1}{2}$ lin. infra pinnam adipoſam a dorſo 3, a ventre pariter 3 lineas diſtat; ab initio itaque dorſo propior, quam illi, tandem ab vtroque aequaliter diſtans.

Pinnae octo, ſatis rigidae ac fortes: pinnae pectorales radiis tredecim, rectis, et a primo, indiuiſo, ad vltimum ex ordine breuioribus, compoſitae.

Pinnae ventrales, ad baſin appendice ſquamoſa, retrorſum ſpectante, auctae, radiorum octo, a primo, indiuiſo, ad vltimum ex ordine breuiorum.

Pinna dorſi prima, cuius principium principio pinnae ani e directo opponitur, radiorum decem, quorum primus ſecundo dimidio breuior, indiuiſus, ſecundus longiſſimus, indiuiſus, caeteri ex ordine breuiores et ramoſi, vltimus bifidus; omnes ab vtroque latere membrana prominente aucti.

Pinna dorsi secunda, adiposa, principio suo $2\frac{1}{3}$ lin anterior situ, quam pinnae ani finis, basi angustior, in extremo latior et attenuata, margine superiore arcuato, inferiore recto fere praedita.

Pinna ani radiorum quadraginta (*a*) sex, eiusdem fere inter se longitudinis, primis exceptis; 2—9 enim, qui nodo distinguuntur, reliquis paulo longiores sunt; primus, $2\frac{1}{3}$ lin. longus, et secundus simplices, a tertio ad vltimum vsque omnes ramosi. Nodus primus in secundo radio duas a basi pinnae lineas distat, caeteri ex ordine pinnae basi propiores. Pinna caudae, viginti sex circiter radiorum, modice bifurcata.

Exstat hic Piscis in Cat. Pisc. Mus. Petrop. p. 498, No. 307, sub nomine: „Piscis Harengi species, ventre mire intorto.„ Cum vero vel primo sub intuitu vix vllam cum Harengis prodat similitudinem, quin potius ob pinnam, sic dictam, adiposam, quam pro charactere Truttarum essentiali omnes assumunt Systematici, ad truttaceum genus debeat referri, noua id specie multiplicare, ipsa natura iussit. Icon, quam a *Marcgrafio* primum, postea in *Willoughbeii* Ichthyographia, denuo aeri incisam accepimus, rudis valde ac vitiosa est; pinnae enim dorsi primae situm iusto anterio-

(*a*) In alio indiuiduo, quod ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum quatuor pollices, ac vndecim lineas longum erat, pinn. pect. 13, ventrales 8, dorf. 1ma 9, ani 42 radiis componebantur. Anteriores pinnae ani radii nodos, vt in priore, non ostendebant.

teriorem, et secundam, adiposam, magnam nimis, et radiis quasi instructam exhibet, quibus omnino caret. Meliorem itaque, et ad naturalem piscis magnitudinem factam, sisto.

### *Mensura.*

| | Poll. | lin. Paris. |
|---|---|---|
| Longitudo tota, sc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum | 5 | 7 |
| - - - ab oris extremo ad extremitatem corporis squamosam - - - - | 4 | 11 |
| Ab oris extremo ad oculi medium - - - | — | $3\frac{1}{2}$ |
| - - - - - ad marginem operc. branch. posticum - - - - | — | $9\frac{1}{2}$ |
| Ab oris extremo ad principium pinnarum pectoralium - - - - | — | $11\frac{1}{2}$ |
| - - - - - - - - - - - ventralium | 2 | $\frac{1}{2}$ |
| - - - - - - - - - - p. dorf. primae | 2 | 9 |
| - - - - - - - - - - - secundae | 4 | $2\frac{1}{2}$ |
| - - - - - - - - - - ani - - - | 2 | $8\frac{1}{2}$ |
| - - - - ad anum - - - - - - - | 2 | 4 |
| Longitudo pinnarum pectoralium - - - - | 1 | |
| - - - - - - ventralium - - - - | — | $7\frac{1}{3}$ |
| - - - pinnae dorsi primae, ad basin, - | — | 4 |
| - - - - - - - radiorum longiorum - | — | $10\frac{1}{2}$ |
| - - - - - - secundae, ad basin, - - | — | $\frac{2}{3}$ |
| - - - - - - - a basi ad extremum - | — | $2\frac{1}{3}$ |
| - - - - - - ani, ad basin, - - - - | 1 | 10 |
| - - - - - - - radiorum primorum - - | — | 6 |
| - - - - - - - - - posticorum - - | — | 4 |

 Longi-

| | Poll. | lin. Paris. |
|---|---|---|
| Longitudo pinnae caudae, sc. a primis radiis, seu ab eius principio, ad longiorum radiorum apices - - - | — | 10 |
| Extremitas corporis squamosa in caudae pinnam extensa ad - - - - - | — | 2 |
| Diameter oculi horizontalis - - - - - | — | $2\frac{2}{3}$ |
| - - - - - - perpendicularis - - - - - | — | 3 |
| Distantia inter primi pinnae pect. radii basin et primum pinnae ventralis radium - - - - - - - - | 1 | $\frac{2}{3}$ |
| - - inter primi pinnae ventralis primique pinnae ani radii basin - - | — | $8\frac{1}{2}$ |
| - - inter vltimi pinnae ani radii basin, et primum pinnae caudae radium - | — | $3\frac{1}{2}$ |
| - - inter vltimi pinnae dorsi primae radii basin et pinnam secundam, adiposam, - - - - - | 1 | 2 |
| - - inter marginem pinnae adiposae posticum et primum pinnae caudae radium - - - - - - | — | $5\frac{1}{3}$ |
| Latitudo horizontalis, per oculorum axes - - | — | $4\frac{2}{3}$ |
| - - - - per posticum operc. br. marginem | — | $4\frac{1}{3}$ |
| - - - - ad principium pinnae dorsi primae - - - - - - - - | — | $4\frac{1}{3}$ |
| - - - - - - - - - - - secundae - | — | $2\frac{1}{2}$ |
| - - - - - - - - - - - - - caudae - | — | $1\frac{1}{2}$ |
| Latitudo perpendicularis per oculi medium - - | — | $6\frac{1}{2}$ |
| - - - - per principium pinn. pect. - - | — | $11\frac{1}{3}$ |

Lati-

| | Poll. | lin. |
|---|---|---|
| Latitudo perpendicularis 8 lin. pone pinn. pect. | Parif. | |
| principium, vbi maxima latitudo - - | 1 | $2\frac{1}{3}$ |
| - - - - - - per principium pinn. ventr. - | 1 | $1\frac{2}{3}$ |
| - - - - - - - - - - - - ni - | 1 | 1 |
| - - - - - - per pinnae ani finem - - | — | $4\frac{2}{3}$ |
| - - - - - - - - caudae principium | — | $5\frac{1}{3}$ |

*** *** ***

## III.

# Gobio, pinnis pectoralibus flabello insistentibus; pinna dorfi prima radiorum 12, fecunda 13.

### *Defcriptio.*

Colorem pifcis naturalem Spiritus Vini conferuatorius in pallidum et exalbidum mutauit. Tab. XIV. Fig. 5. et 6.

A mandibulae fuperioris extremo caput ad oculos vsque, in fummo vertice difpofitos, ftatim notabiliter adfcendit, quorum ad marginem pofticum dorfi eft initium, in linea fere recta ad fecundam ipfius pinnam, et ab hac fub leuiffima vixque notabili curuatura caudae pinnam verfus excurrentis. A mandibulae inferioris extremo abdomen modice defcendit vsque ad anum, a quo modice adfcendit ad pinnae ani finem, et vlterius abhinc recto fere curfu caudae pinnam attingit. Latitudo corporis horizontalis ab oris extremo ad principii pinnae dorfi primae viciniam vsque fenfim in-

 crefcit,

crescit, dein ad caudam vsque sensim decrescit; latitudo e contrario perpendicularis, quae in vniuersum ad anticam maior est, quam ad posticam corporis partem, ab oris extremo statim haud exiguum capit augmentum iuxta oculum, et adhuc maiorem ad pinnam pectoralem, diminuitur vero sensim ab ano ad corporis extremum.

Frons ante oculos decliuis valde, ac planiuscula est, capitis vero verticem oculi totum occupant. Inter hos et pinnae dorsualis primae initium, dorsum in medio profunde satis carinatum, vtroque tamen margine conuexum, inter vtramque vero pinnam, vt et inter secundae finem, pinnaeque caudae principium, planiusculum; abdomen ante pinnas ventrales planum, inter has et anum subconuexum, inter pinnae ani finem et pinnae caudae principium ei dorsi parti, quae huic e directo opponitur, forma omnino simile est. Latera autem corporis planiuscula, vel leniter tantum conuexa sunt; hinc totum corpus cathetoplateum est.

Superficies corporis glaberrima cutem exhibet, qualem in Gadis et Enchelyopis deprehendimus, squamulis nimirum minutissimis obtectam, desquamatoque pisce, corio illi similem, quod Sagrin vulgo dicitur.

Prona capitis pars, respectu corporis, breuis: limites enim ei orbitarum postici ponunt margines; si vero quis, latera eius respiciens, branchiarum operculum, tanquam partem constituentem, ad illud referre velit,

velit, ei certe, ob late patentem huius ambitum, magnum videbitur.

Os obtusum. Rictus oris patens. Clauso ore, maxilla inferior superiore paullo breuior est; vtraque vnica dentium acutorum serie instruitur, quorum intermedii lateralibus maiores, leuiter incuruati, et, in inferiore inprimis maxilla, prae ceteris antrorsum exporrecti sunt. Duas ab oris extremo lineas, ad palatum superius, fimbria quaedam transuersa, valde eminens, ad palatum inferius linguae corpus valde oblongum conspicitur, cuius apex obtusus, maxillae vndique adnatus, ½ lineam circiter ab huius extremitate distat.

Narium foramen vtrinque vnicum, ab oris angulo 3, a maxillae superioris extremo 1½ lin. distans, oculis, quam oris extremo, propius, minimum, vixque peruium mihi visum.

Oculi in summo vertice positi, grandes, maximam partem prominentes, contigui, cuteque sunt obducti, a communi orta, cumque sclerotica tunica, quae subiacet, et membranacea, nec ita dura est, ac alias esse solet, tela mediante cellulosa cohaerente. Circa marginem orbitae inferiorem oculi protuberantia sinum efficit angustum, satis tamen profundum, cuius in imo cutis ad ipsum oculi inferiorem marginem, sub palpebrae specie, reflexa apparet.

Latera capitis ac branchiarum opercula cute laeui, eiusdemque indolis, ac in toto est corpore, inuestiun-

tur

tur; squamas tamen in ea detegere non potui. Sic operculorum quoque margines eius productione augentur.

Apertura operculi branchiarum angusta valde, vtpote vix 2½ lin. longa, sub postico illius margine quaerenda est. In membrana branchiostega, qua coercetur maxime operculi apertura, ossicula nulla deprehendi.

Squamae dense congestae, subrotundae, planae, tenuissimae, sinapis seminibus vix maiores, deciduae; decidere autem eas facilius ad anteriorem, quam ad posteriorem corporis partem, obseruaui.

Linea longitudinalis obscura, albicans, ad angulum basis superiorem illius pinnae pectoralis flabelli, de quo statim dicam, orta, recta fere ad caudam decurrit, in eamque ab vtroque latere lineolae minores albentes, ab interstitiis musculorum posterioris corporis partis ortae, oblique excurrunt, tam a dorso descendentes, quam ab inferioribus adscendentes.

Anus patulus, quatuor lineas oris extremo propior, quam pinnae caudae extremitati, postico suo margini appensam gerit papillam granditisculam, oblongam, retrorsum spectantem, et, quantum videre potui, imperforatam, sub qua sinus satis profundus in corpore conspicitur, ab ipsa papilla maximam partem obtectus.

Pinnae

Pinnae ventrales duae, pectoralibus situ anteriores, planum efformant ouale, sibique inuicem ita proxime adstant, vt in vnam conflatae esse videantur; intimorum quidem radiorum bases, membranae tenuissimae et angustissimae ope, cohaerent, ipsi vero hi singulae pinnae radii ad apices vsque soluti sunt, neque extimus vnius pinnae radius cum extimo alterius connectitur, quod, si obtineret, pinnae hae non planum, sed infundibulum potius, inter se formarent. Singula earum sex instructa est radiis, ab extimo ad intimum ex ordine longioribus, et, extimo simplici, excepto, omnibus ramosis.

Pinnae pectorales, ad extremum lanceolatae, ad basin latiores, situque ventralibus posteriores, lacerto cuidam, seu brachio, compresso, subtriangulari, insistunt, cuius basis, seu articulus, posticum operculi branchiarum marginem contingit, pinnarum ventralium basi e directo oppositus, eiusdemque, tanquam flabelli, ope ipsae pinnae mouentur. Hae e tredecim construuntur radiis, ab extimo ad medios, ab vtroque latere, ex ordine sensim longioribus, plurimisque simplicibus, si medios excipias, versus extremitates leuiter diuisos.

Pinna dorsi prima, aequali, respectu distantiae ab oris extremo, cum pectoralibus situ gaudens, radiis suffulcitur duodecim, mollibus ac simplicibus, a primo ad vltimum ex ordine breuioribus, et ad 1 lin. vsque apicibus suis vltra membranam connectentem excurrentibus. Si expanditur haec pinna, triangulare efformat planum, tuncque demum etiam quinque istae conspiciuntur maculae ruso-fuscae, quibus in membranae summo, primum inter et secundum, secundum ac tertium, tertium et quartum, quartum et quintum, quintum denique et sextum radium, notatur. Margo vltimi huius pinnae radii posticus membranae ope medio dorso annectitur.

Pinna dorsi secunda, pinnae ani situ respondens, radiis tredecim est constructa; anterioribus breuioribus, posterioribus longioribus, omnibus mollibus ac simplicibus, (vltimo excepto, qui bifidus est,) radiisque alterius pinnae tenerioribus ac breuioribus.

Pinna ani, eiusdem cum priore situs, e radiis componitur decem, a primo ad vltimos ex ordine longioribus, ac omnibus, excepto vltimo bifido, simplicibus.

Pinna caudae collapsa lanceolata, expansa vero ex ouali oblonga est, radiisque circiter triginta composita, a primis ad medios ex ordine longioribus, intermediisque ad extremitates ramosis.

Licet hic Piscis, ob ampliorem oris rictum, grandiores oculos, corpus quodammodo anguillaeforme et squamis minutissimis obtectum, cum Gadis aeque ac cum Gobionibus habeat affinitatem, pinnae tamen ventrales obtusae, sibique adeo proximae, vt in vnicam subrotundam connatae esse videantur, quum in Gadis

alias

alias multo acutiores, magisque a ſe inuicem remotae deprehendantur, Gobionum, horumque ſpuriorum, generi eum potius ſubiungunt. Quid vero de ſpecie iudicem, breuiter dicam. Cum Paganello (*a*) Venetorum et Iozo (*b*) Romanorum quandam quidem ei eſſe ſimilitudinem, ex deſcriptione colligitur; cum Iozo inprimis, quod radiorum pinnae dorſualis primae extremitates ſupra membranam, eos connectentem, emineant, ipſaque huius pinnae membrana in ſummo maculata ſit; verum numero radiorum eiusdem pinnae nimis ab eo differt, quam vt eiusdem cum hoc ſpeciei eum eſſe crederem. Variabilem quidem eſſe radiorum in pinnis numerum, propria obſeruatione dudum cognoui, in tantum autem differre, vt in duplum increſcat, et quidem ſine alius, eiusdem generis, pinnae radiorum numeri incremento, nunquam mihi obuenit. Quum igitur in plurimis, hactenus cognitis, Gobionum ſpeciebus, primam dorſi pinnam conſtanter ſex radiis, ſecundam vero 10, 11, 13, 14, 16, 17 eſſe ſuffultam, recentiores contendant Auctores, (*c*) noſter autem in pinna dorſi prima duodecim, in ſecunda tredecim obti-

Hhh 2

(*a*) *Willoughb.* Hiſt. Piſc. Libr. 4. pag. 207. §. II. Tab. N. 12. 4. *Linn.* Syſt. nat. edit. dec. p. 263. no. 2.

(*b*) *Willoughb.* Hiſt. Piſc. Libr. 4. pag. 207. §. III. *Linn.* Syſt. nat. edit. dec. pag. 263. no. 5.

(*c*) *Linn.* Syſt. Nat. edit. dec. p. 262, 263. No. 1, 2, 3, 4, 5.

obtinuerit radios, pinnarumque ambae consequenter magnitudine inter se fere pares sint, cum ob eandem rationem in caeteris speciebus earum anterior minor, posterior maior enascatur, descriptum a nobis piscem pro noua Gobionum specie habere, conuenit.

Patria eius mihi incognita est, nec plura de eo referre possum, quod in Cat. Mus. Petrop. nullibi eius facta sit mentio.

*Mensura.*

| | Poll. | lin. Paris. |
|---|---|---|
| Longitudo tota, sc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum | 3 | 10 |
| - - - - - ab oris extremo ad extremitatem corporis squamosam - - - | 3 | $2\frac{3}{8}$ |
| - - - - - ab oris extremo ad oculi medium | — | $4\frac{1}{2}$ |
| - - - - - ad angulum operc. br. posticum - - - | — | $10\frac{5}{8}$ |
| - - - - - ad pinnarum ventralium principium - - - | — | $9\frac{1}{2}$ |
| - - - - - ad flabelli pect. basin. (ad marginem inferiorem) | 1 | |
| - - - - - ad pinnarum pectoralium primos radios - - - | 1 | $1\frac{1}{8}$ |
| - - - - - ad principium pinnae dorsi - - - - primae | 1 | 1 |
| - - - - - - - - - - secundae | 1 | $10\frac{3}{8}$ |
| - - - - - - - - ani - | 1 | 11 |
| - - - - - ad anum - - - - - | 1 | 9 |

Longi-

| | Poll. | lin. Parif. |
|---|---|---|
| Longitudo pinnarum ventralium - - - - | — | 6 |
| - - - - - - pectoralium - - - - | — | $7\frac{1}{2}$ |
| - - - pinnae dorfi primae, ad bafin - - | — | 6 |
| - - - - - - - - radiorum longiorum | | 9 |
| - - - - - - - fecundae, ad bafin, - - | — | $7\frac{2}{3}$ |
| - - - - - - - - radiorum longiorum | — | 5 |
| - - - - - ani, ad bafin, - - - - | — | 5 |
| - - - - - - - - radiorum longiorum | — | $3\frac{1}{2}$ |
| - - - - - caudae, fc. a primis radiis, feu ab eius principio, ad longiorum radiorum apices - - | — | 10 |
| Extremitas corporis fquamofa in caudae pinnam extenfa ad - - - - | — | 3 |
| Diameter oculi - - - - - - - - - - - | — | $2\frac{1}{3}$ |
| Diftantia inter primi pinnae ventralis radii bafin et primum pinnae pectoralis radium - | — | 3 |
| - - - inter intimi pinnae ventralis, et primi pinnae ani radii bafin - - - | 1 | |
| - - - inter vltimi pinnae ani radii bafin, et primum pinnae caudae radium - | — | $8\frac{1}{2}$ |
| - - - inter vltimi pinnae dorfi primae, et primi pinnae dorfi fecundae radii bafin - - - - - - - - - | — | 3 |
| - - - inter vltimi pinnae dorf. 2dae radii bafin et primum pinnae caudae radium | — | $5\frac{1}{3}$ |
| Latitudo horizontalis per oculorum axes - - | — | 4 |
| - - - per pofticum operc. br. marginem - | — | $5\frac{1}{2}$ |
| - - - per principium pinnae dorfi primae - | — | 4 |

| | | Poll. lin. Paris. |
|---|---|---|
| Latitudo horizontalis per principium pinnae dorsi | — | |
| — — per secundae | — | $3\frac{1}{2}$ |
| — — dorsi pinnam caudae | — | $1\frac{1}{2}$ |
| Latitudo perpendicularis per oris angulum | — | 4 |
| — — per oculi medium | — | $6\frac{1}{4}$ |
| — — per principium pinnarum ventralium | — | 7 |
| — — pectoralium | — | 7 |
| — — pinnae ani | — | $5\frac{3}{4}$ |
| — — per pinnae ani finem | — | $4\frac{1}{2}$ |
| — — per caudae principium | — | $3\frac{1}{2}$ |

ASTRONO-

# ASTRONOMICA.

INVESTI-

# INVESTIGATIO POSITIONVM

## INSIGNIORVM RVSSIAE LOCORVM SECVNDVM EORVM LONGITVDINEM AC LATITVDINEM OBSERVATIONIBVS ASTRONOMICIS MECVM COMMVNICATIS INNIXA.

Auctore

*A. N. GRISCHOW.*

Cum mihi ex mandato Illuſtriſſimi Praeſidis emendandi Atlantis Ruſſici cura demandata ſit, de locorum inſigniorum Ruſſici Imperii poſitionibus ex aſtronomicis obſeruationibus rite determinandis cogitaui. Hunc in finem Academiam rogaui, vt mecum communicaret obſeruationes aſtronomicas, quotquot ſunt, in Archiuo aſſeruatas. Quo facto, praecipuorum primum locorum longitudines ac latitudines, quantum potero, accuratiſſime ex ſupra memoratis obſeruationibus elicere, et prout eas cognitas habebo, cum Cl. Academicis communicare ſtatui, vt peractis calculis, Catalogus longitudines ac latitudines praecipuorum locorum exhibens conſtrui poſſet. Sequentes, igitur inpraeſentiarum acceptas habeatis locorum determinationes rogo.

# Determinatio differentiae inter Meridianum Petropolitanum et Archangelopolitanum.

Quamuis V. Cl. *De l'Isle de la Croyere* annum fere integrum Archangelopoli sit commoratus, paucas tamen ibi habuit eclipsium Satellitum Iouis obseruationes, quarum praeterea maxima pars debita accuratione carere mihi videtur. Vnica tantum sese mihi obtulit eclipsium Satellitum Iouis obseruatio reliquis praestantior atque accuratior, ex qua Meridianorum differentiam supra dictam eruere sequenti modo conabor:

Emersio primi Satellitis Iouis obseruata Archangelopoli

| | |
|---|---|
| 1728. Mart. 3. | $9^h.56'.25''$ |
| Aequatio meridiei subtrah. | $25$ |
| Tempus verum emersionis | $9^h.56'.\ 0''$ |
| Eadem obseruatio habita est Madriti | $7.\ 6.\ 17$ |
| Different. Merid. inter Archangel. et Madrit. | $2^h.49'.43''$ |
| Different. Merid. Parisios inter et Madritum | $24.\ 18$ subtr. |
| Differentia Merid. Parisios inter et Archangel. | $2^h.25'.25''$ |
| Posita diff. Merid. inter Parisios et Petrop. = | $1.\ 52.\ 0$ |
| erit differ. quaesita Mer. inter Petrop. et Archang. | $0^h.33'.25''$ temp. |
| et Longitudo Meridiani Archangelopol. = | $56^\circ.21'.15''$ |

Haec Meridianorum differentia non facile maior statui potest, habita imprimis circumstantiarum huius obseruationis, de quibus *de la Croyere* mentionem fecit, ratione: Si enim secundum monita Cl. *de la Croyere*

*Croyere* verum emerſionis momentum obſeruatum eiusdem emerſionis tempus praecedat, Meridianorum differentia prodibit minor, quantitate nimirum errorem in obſeruatione haerentem aequante.

Calculus igitur noſter eorum plane conuellere videtur opinionem, qui longitudinem Archangelopolis augendam eſſe contendunt; longitudinem huius vrbis e contrario in mappa Academiae notatam, 10 minimum minutis primis Aequatoris imminuendam eſſe ſtatuo.

Cl. *de l'Isle* quidem in Tom. III. Commentariorum differentiam Meridianorum inter Petropolin et Archangelopolin, dimidio circiter vnius minuti primi temp. maiorem aſſignauit; notandum vero eſt Cl. *de l'Isle* obſeruationes eclipſium ſatellitum Iouis a Cl. *de la Croyere* Archangelopoli habitas, ſine vllo delectu omnes adhibuiſſe, et quod maius eſt, aequationem Meridiei, qua tempus a *de la Croyere* notatum corrigendum erat, prorſus neglexiſſe, vt in Ephemeridibus obſeruationum Archangelopoli habitarum videre eſt.

Ad latitudinem huius vrbis ſcite determinandam, iis praecipue vſus ſum obſeruationibus, quibus ſimul quadrantis error innoteſceret, aequalibus nimirum, ſiue potius fere aequalibus altitudinibus ſiderum borealium auſtrinique verſus, vno eodemque inſtrumento obſeruatis. Paucae quidem eiusmodi reperiuntur in Ephemeridibus Cl. *de la Croyere* obſeruationes, iis tamen adornandis ita ſtudui, vt latitudo exinde deducta accuratior forſitan ſit cenſenda ea, quam Cl. *de la Croyere* ex diuerſis obſeruationibus, poſito errore quadrantis in omnibus

 limbi

limbi eiusdem punctis constante, adhibitisque elementis nostris temporibus accuratius ab astronomis definitis, eruere est conatus. Nonnullas tamen hoc in calculo, vt et in sequentibus, correctiones minores, recens ab astronomis probatas, ex. gr. aberrationem ex successiua luminis propagatione ortam, et propter defectum sufficientis accurationis in obseruationibus ipsis, et propter inopiam Catalogi, vera fixarum loca minoribus illis aequationibus correcta, exhibentis, passim omittere sum coactus.

Obseruationes itaque ad nostrum institutum maxime idoneae, sunt altitudines meridianae marg. ☉ bor. obseruatae 1728. d. 2. 21 et 26 Febr. st. n. quas cum altitudinibus meridianis α Lyrae d. 23 et 26. Febr. eiusdem anni infra Polum captis, sequenti modo comparare consultum visum est.

| | |
|---|---|
| Altit. mer. app α Lyrae infra Polum d. 23 Febr. | = 13°. 15′. 20″ |
| d. 26 Febr. | = 13. 14. 40 |
| Altit. merid. app. α Lyrae media - - | = 13°. 15′. 0″ |
| Refractio | = − 4. 8 |
| Altit. merid. α Lyrae refr. corr. | = 13°. 10′. 52″ |
| Declinatio α Lyrae - - | = 38°. 33′. 13″ bor. |

## Comparatio alt. meridd. α Lyrae infra Polum cum altit. mer. ☉lis d. 2 Febr.

| | |
|---|---|
| Altitud. merid. app. marg ☉ bor. | = 8°. 53′ 50″ |
| Refr. et parall. | = − 6. 0 |
| | 8°. 47′. 50″ |
| ½ Diamet. ☉ = | 16. 17 |

Altitud.

| | | |
|---|---|---|
| Altitud. merid. centri ☉ refr. et Paral. corr. | = | 8°. 31′. 33″ |
| Diſt. mer. centri ☉ a Zenith refr. et Par. corr. | = | 81°. 28′. 27″ |
| Diſt merid. α Lyrae a Zenith refr. corr. | = | 76 49. 8 |
| Summa diſt. merid. obſeruat. a Zenith | = | 158°. 17′. 35″ |
| Poſita obliquit. eclipt. An. 1728. | = | 23°. 28′. 38″ |
| Declinatio centri ☉ erit - - | = | 16°. 58′. 30″ A. |
| Diſt. centri ☉ a Polo Aequat. bor. | = | 106°. 58′. 30″ |
| Diſt. α Lyrae a Polo Aequat. bor. | = | 51. 26. 47 |
| Summa diſt. a Polo aequat. bor. | = | 158°. 25′. 17″ |
| Summa diſt. merid. obſeruat. a Zenith | = | 158. 17. 35 |
| Diſt. | = | 7′. 42″ |
| Error igitur quadrantis ab altit. obſeruatis ſubtrah. | = | 3′. 51″ |
| Altitudo merid. α Lyrae refr. corr. | = | 13°. 10′. 52″ |
| Error quadr. | − | 3. 51 |
| Altit. merid. vera α Lyrae | = | 13° 7′. 1″ |
| Declinatio α Lyrae | = | 38. 33. 13 |
| Altitudo Aequatoris | = | 25°. 26′. 12″ |
| Eleuatio Poli Archangel. | = | 64°. 33′. 48″ |

## Comparatio altit. merid. α Lyrae infra Polum cum altit. merid. ☉ d. 21. Febr.

| | | |
|---|---|---|
| Altitudo merid. app. marg. ☉ bor. | = | 15°. 4′. 45″ |
| Refr. et Parall. - - | = − | 3. 28 |
| | | 15°. 1′. 17″ |
| ½ Diameter ☉ | = | 16. 14 |

| | |
|---|---|
| Alt. merid. centri ⊙ Refr. et Parall. corr. | = 14°.45'. 3'' |
| Dist. mer. centri ⊙ a Zenith refr. et Par. corr. | = 75°. 14'. 57'' |
| Dist. merid. α Lyrae a Zenith refr. corr. | = 76. 49. 8 |
| Summa dist. merid. obseruat. a Zenith | = 152°. 4'. 5'' |
| Declinatio centri ⊙ | = 10°.45'.23''½ A. |
| Dist. centri ⊙ a Polo Aequat. bor. | = 100°.45'.23''½ |
| Dist. α Lyrae a Polo Aequat. bor. - - | = 51. 26. 47 |
| Summa dist. a Polo bor aequat. - - | = 152°.12'.10''½ |
| Summa dist. merid. obseruat. a Zenith | = 152°. 4'. 5'' |
| Different. | = 8'. 5''½ |
| Error igitur quadr. ab altitud. obser. subtr. | = 4'. 3'' |
| Altitud. merid. α Lyrae refr. corr. - | = 13°.10'.52'' |
| Error quadr. - - | = − 4. 3 |
| Altitud. merid. vera α Lyrae - - | = 13°. 6'.49'' |
| Declin. α Lyrae | = 38. 33. 13 bor. |
| Altitud. Aequat. | = 25°.26'.24'' |
| Eleuatio Poli Archangel. | = 64°.33'.36''. |

## Comparatio altitud. merid. α Lyrae infra Polum cum altitud. merid ⊙ d. 26. Febr.

| | |
|---|---|
| Altitudo merid. app. marg. ⊙ bor. - - | = 16°.54'.45'' |
| Refr. et Parall. - - - - | = − 3. 4 |
| | 16. 51. 41. |
| ½ Diam. ⊙ | = − 16. 13. |

Altit.

| | |
|---|---|
| Altit. merid. centri ⊙ Refr. et Parall. corr. | $= 16^\circ\, 35'.28''$ |
| Dist. mer. centri ⊙ a Zenith Refr. et Par. corr. | $= 73^\circ.24'.32''$ |
| Dist. merid. α Lyrae a Zenith Refr. corr. | $= 76.\ 49.\ 8$ |
| Summa dist. merid. obseruat. a Zenith - | $= 150^\circ.13'.40''$ |
| Declinatio centri ⊙ | $= 8^\circ.55'.23''$ A. |
| Dist centri ⊙ a Polo Aequat. bor. - - | $= 98^\circ.55'.23''$ |
| Dist. α Lyrae a Polo Aequat. bor. - - | $= 51.\ 26.\ 47$ |
| Summa dist. a Polo Aequat. bor. - - | $= 150^\circ\, 22'.10''$ |
| Summa dist. merid. obseruat. a Zenith | $= 150^\circ.13.\ 40$ |
| Differ. | $= 8'.30''$ |
| Error igitur quadrantis ab altit. obseru subtr. | $= 4'.15''$ |
| Altitudo merid. α Lyrae Refr. corr. - - | $= 13^\circ.10'.52''$ |
| Error quadr. - - - | $= -\ 4.\ 15.$ |
| Altit. merid. vera α Lyrae - - - | $= 13^\circ.\ 6'.37''$ |
| Declin. α Lyrae - - - | $= 38.\ 33.\ 13$ bor. |
| Altit. Aequat. - - - - | $= 25^\circ.26'.36''$ |
| Eleuatio Poli Archangel. - - - | $= 64^\circ.33'.24''$. |

Ex prima igitur comparatione prodit eleuatio Poli Archangel $= 64^\circ\, 33'.48$; ex secunda $= 64^\circ.33'.36''$; ex tertia $= 64^\circ.33'.24''$.

Hinc media atque proxime ad veram accedens eleuatio Poli Archangel. erit $= 64^\circ.\ 33'.\ 36''$.

In mappa Academiae situs vrbis Archangelopolis minutis aliquot iusto borealior est.

Deter-

# Determinatio longitudinum vrbium Rigae et Reualiae.

Incertae atque ancipites ſemper mihi viſae ſunt in mappa Academiae vrbium Rigae et Reualiae notatae poſitiones, reſpectu praecipue earum longitudinum. Operae igitur quin pretium eſſet non dubitaui, vt ex obſeruationibus, quas Academiae Adiunctus *Kraſſilnikow* hiſce in vrbibus habuit, earum longitudinem atque latitudinem diligentius inueſtigarem. Longitudinum determinatio, cum nullae adſint obſeruationes Satellitum Iouis reſpondentes iis, quas *Kraſſilnikow* habuit, difficillima quidem videtur; artificium vero, in quo elaborando ac perficiendo noſtris temporibus euigilarunt Aſtronomorum curae et cogitationes, eclipſes Satellitum Iouis tabularum ope ſtricte praedicendi, noſtro in negotio difficultates vel maiori ex parte tollere atque ſuperare valet: Tabulae enim motuum Satellitum Iouis, quas Cel. *Wargentin* paucis abhinc annis, ex magno obſeruationum numero, ſollerter concinnauit, adeo arcte cum coelo ſunt connexae, vt calculos eclipſium $1^{mi}$ Satellitis Iouis, ſecundum harum Tabularum numeros inſtitutos, raro integro minuto primo temp. ab obſeruationibus diſſentire ſoleat.

Summo propterea iure, obſeruationibus correſpondentibus calculo noſtro abſentibus, obſeruationes, imprimis eclipſium $I^{mi}$ Satellitis Iouis reliquis accuratiores cum calculo ex ſupra dictis tabulis conferre et longitudinem locorum, de quibus ſermo, exinde ſequenti modo deducere licet.

An. 1750.

| | | |
|---|---|---|
| An. 1750. d. 31. Oct. st. v. | $15^h. 4'. 26''$ | tempore vero obseruata fuit accurate Rigae emersio $I^{mi}$ Satell. Iouis, tubo 16. ped. |
| | 13. 39. 30. | tempore vero emersio haec contigit Parisiis sec. Tab. Cel. *Wargentini*. |
| | $1^h. 24'. 56''$ | Differentia Meridianorum Parisios inter et Rigam. |
| An. 1750. d. 18. Dec. st. v. | $9^h. 44'. 14''$ | tempore vero optime obseruabatur Rigae emersio $I^{mi}$ Satell. Iouis tubo 16 ped. |
| | 8. 18. 37 | tempore vero emersio haec contigit Parisiis sec. Tab. *Wargent*. |
| | $1^h. 25'. 37''$ | Differ. Merid. |

Differentia itaque Meridianorum media, ex binis emersionibus $I^{mi}$ Satellitis Iouis optime obseruatis, deducta, $= 1^h. 25'. 15''$.

Occurrit adhuc in ephemeridibus *Krasilnikowii* emersio $II^{di}$ Satellitis Iouis exacte obseruata Rigae An. 1750.

d. 22. Dec. $6^h.0'.43''$ tempore vero: ſecundum Tabulas *Wargent.* emerſio haec contigit 4. 39. 19 temp. vero Pariſiis; differentia itaque Meridianorum ex hac obſeruatione prodiret $= 1^h.21'.24''$.

Cum vero II^di^ Satellitis numeri non adeo exacte coelo reſpondeant, horumque Meridianorum differentia ſupra ex obſeruationibus I^mi^ Satellitis accuratius deducta, ſit $= 1^h.25'.15''$, hac ſecundi Satellitis obſeruatione, ad inueniendum veram Merid. Pariſini et Reualienſis differentiam, vtar. In ephemeridibus enim obſeruationum *Kraſilnikowii* duae tantum obuiae ſunt II^di^ Satellitis obſeruationes Reualiae habitae; altera ab ipſo *Kraſilnikow* d. 29. Dec. 1750. peracta fuit, altera autem d. 30. Ian. 1751 a diſcipulo *Kurganow* aere impuro ibidem habita eſt. Priori propterea ad noſtrum inſtitutum vti fas eſt. Hunc vero in finem ex ſupra relata emerſione II^di^ Satellitis Iouis d. 22. Dec. 1750. Rigae obſeruata, errorem Tabularum *Wargent.* primum deducamus neceſſe eſt. Si ponamus igitur differentiam Merid. inter Pariſios et Rigam ex emerſionibus primi Satellitis Iouis accurate ſatis eſſe definitam, haud difficile patet, errorem Tabularum *Wargentinii* ſecundi Satellitis Iouis tunc temporis fuiſſe $= 3'.50''$ a tempore ex Tabulis deducto ſubtrahendis, verum vt habeatur emerſionis momentum. Obſeruatio Reualiae habita 7 tantum diebus poſterior eſt altera, ex qua errorem Tabularum determinaui, eaque de cauſa hunc in finem optimo iure adhiberi poteſt. Quo ſtatuto, inueni tempus emerſionis verum ſecundi Satellitis Iouis ſec. Tab. *Wargent.* ſub Merid. Pariſ. d. 29. Dec. 1750 $7^h.14'.57''$; ſubductis $3'.50''$

pro

pro errore Tabularum, habebimus verum emersionis momentum Parisiis $7^{h}. 11'. 7''$, quod Reualiae obseruatum fuit $8^{h}. 38'. 57''$. Differentia itaque Merid. inter Parisios et Reualiam erit $= 1^{h}. 27'. 50''$ temp. et longitudo Reualiae $= 41^{\circ}. 57'. 30''$, longitudo autem vrbis Rigae $= 41^{\circ}. 18'. 45''$, posita longitudine Meridiani Parisini $= 20^{\circ}. 0'$. Secundum Mappam geogr. Academiae longitudo Reualiae est $= 42^{\circ}. 14'$, et longitudo Rigae Paris. $= 42^{\circ}. 17'$, adeo vt error in longitudine Meridiani Reualiensis sit $= 16\frac{1}{2}'$, et Meridiani Rigensis $= 58\frac{1}{4}'$ siue integro fere gradui. Riga itaque in Mappa geogr. Academiae Merid. Petropol. propior quam Reualia, nunc magis occidentem versus est collocanda. Neque vero mihi temperare possum, quo minus fatear, obseruationes, ad definiendam latitudinem aeque ac longitudinem hisce in locis institutas, haud sufficere, siue non adeo esse accuratas, vt earum beneficio supra dictarum vrbium latitudo et praecipue longitudo, intra vnum min. prim. temp. stabiliri possit. Tabularum primi Satellitis Iouis erroris quidem quantitatem accurate definire non possumus, eam vero vnum min. prim. temp. non superare, statuere fas est. De errore in obseruationibus ipsis haerente, aeque quidem incerti sumus; ex obseruationum autem circumstantiis concludere licet, errorem hunc, si quis adest, a tempore emersionum supra notato esse subtrahendum, ita vt longitudo Rigae et Reualiae erroris huiusce quantitate decrescere, error contra vero Mappae geogr. eadem quantitate accrescere debeat.

## Latitudinis vrbis Rigae determinatio.

Latitudo vrbis Rigae vt rite determinaretur, *Krasilnikowius* aequales capere debuisset altitudines fixarum in vtraque Meridiani parte; hoc vero astronomorum artificio neglecto, altitudines Solis in parte Meridiani australi obseruatas, cum altitudinibus fixarum fere aequalibus, in parte Meridiani boreali, siue infra Polum captis, comparare cogimur.

Obseruationes itaque, quae instituto nostro maxime accommodae videntur, sunt altitudo meridiana apparens marginis Solis borealis obseruata d. 8. Oct. 1750. $= 23^\circ.14'.20''$ et altitudo meridiana apparens $\varrho$ Vrsae maioris eodem instrumento infra Polum obseruata d. 12. Octobr. 1750. $= 23^\circ.7'.0''$. Posita obliquitate Eclipticae tempore obseruationum $= 23^\circ.28'.30''$, et differentia Meridianorum inter Parisios et Rigam $= 1^h.25'.15''$, inueni declinationem centri Solis pro meridie d. 8. Oct. $= 10^\circ.1'.16\frac{1}{2}''$ A. Declinatio vero $\varrho$ Vrsae maioris sec. Catal. Cl. *de la Caille* est $= 56^\circ.14'.35''$ bor. Ad arcum igitur Meridiani apparentem, limbo Solis boreali et $\varrho$ Vrsae maioris interceptum, inueniendum, distantiam apparentem limbi Solis borealis et $\varrho$ Vrsae maioris a Polo Aequatoris boreo in vnam summam colligamus necesse est: distantia autem centri Solis vera a Polo Aequatoris boreo est $= 100^\circ.1'.16\frac{1}{2}''$, quocirca erit distantia vera limbi Solis borealis a Polo Aequatoris boreo $= 99^\circ.45'.7\frac{1}{2}''$, eiusdemque distantia apparens $= 99^\circ.43'.0''$, posita nimirum refractione $= 2'.16\frac{1}{2}''$ et Parall. Solis in altitud. $= 9''$. Simili modo

modo prodibit diſtantia vera ϱ Vrſae maioris a Polo Aequatoris boreo $= 33^\circ.45'.25''$ eiusdemque diſtantia apparens, propter refractionem $2'.17''$, $= 33^\circ.43'.8''$; arcus igitur Meridiani apparens inter limbum Solis borealem et ϱ Vrſae maioris $= 133^\circ.26'.8''$. Eundem iam Meridiani arcum ex obſeruationibus ſupra relatis inuenimus $= 133^\circ.38'.40''$, quo cum antecedenti comparato, habebimus duplum erroris quadrantis $= 12'.32''$ ideoque ſimplicem quadrantis errorem circa 23. altitud. gradum $= 6'.16''$ ad altitudines obſeruatas addendum.

Errore quadrantis circa ſupra dictum diuiſionis punctum ſtabilito, facili negotio ex iisdem obſeruationibus veram vrbis Rigae latitudinem ſequenti modo aſſignare poſſumus:

| | |
|---|---|
| Altitudo merid. app. limbi ☉ bor. | $= 23^\circ.14'.20''$ |
| Error quadr. | $= +\ 6.\ 16$ |
| Altit. mer. app. errore quadr. corr. | $= 23^\circ.20'.36''$ |
| Refract. et Paral. | $= -\ 2.\ 7\frac{1}{2}$ |
| Altit. merid. limbi ☉lis bor. vera | $= 23^\circ.18'.28\frac{1}{2}''$ |
| $\frac{1}{2}$ Diameter ☉ | $= -\ 16.\ 9$ |
| Altitud. merid. vera centri ☉lis | $= 23^\circ.\ 2'.19\frac{1}{2}''$ |
| Declinatio centri ☉lis | $= 10.\ 1.\ 16\frac{1}{2}$ A. |
| Altitudo Aequatoris vera | $= 33^\circ.\ 3'.36''$, hinc |
| Eleuatio Poli Rigae | $= 56^\circ.56'.24''$. |

Eodem modo eleuatio Poli ex altera obſeruatione ſtellae ϱ Vrſae maioris deduci poteſt. Multo vero accuratius definiri poſſet eleuatio Poli, ſi *Kraſilnikowius* aequales obſeruaſſet fixarum notabiliorum altitudines meridianas boream auſtrumque verſus. Latitudo vrbis Rigae in Mappa geogr. Acad. eſt $= 56^\circ.51\frac{1}{2}'$ circiter.

## Latitudinis vrbis Reualiae determinatio.

Latitudinem vrbis Reualiae conſimili modo ex obſeruationibus fixarum, a *Kraſilnikowio* ibi habitis, definire conatus ſum. Hunc in finem adhibui altitudinem meridianam apparentem ſtellae Rigel, obſeruatam Reualiae d. 19. Ian. 1751 $= 21^\circ.58'.20''$, itemque altitudinem apparentem meridianam $\gamma$ Draconis d. 21. Ian. 1751. eodem organo inuentam $= 20^\circ.53'.5''$. * Declinatio ſtellae Rigel, ſec. meas obſeruationes Pariſiis habitas, pro tempore obſeruationis eſt $= 8^\circ.30'.33''$ A. ** Declinatio autem $\gamma$ Draconis ſec. obſeruationes Cel. Aſtronomi Anglicani *Beuiſii* mecum communicatas $= 51^\circ.31'.21''$ bor. poſita eleuatione Poli Obſeruatorii Grenowicenſis $= 51^\circ.28'.30''$. Hiſce poſitis, erit diſtantia vera ſtellae Rigel a Polo Aequatoris boreo $= 98^\circ.30'.33''$, eiusdemque diſtantia apparens propter refract. $= 98^\circ.28'.7''$. Eodem modo reperimus diſtantiam veram $\gamma$ Draconis a Polo boreo Aequat. $= 38^\circ.28'.39''$ eiusdemque diſtantiam apparentem a Polo $= 38^\circ.26'.7''$. Arcus itaque Meridiani apparens inter Rigel et $\gamma$ Draconis erit $= 136^\circ.54'.14''$. Secundum obſeruationes ſupra relatas vero eiusdem arcus menſura eſt $= 137^\circ.8'.35''$, ita vt erroris quadrantis duplum ſit $= 14'.21''$ errorque eiusdem inſtrumenti ſimplex $= 7'.10\frac{1}{2}''$ ad altitudines obſeruatas addendus; quo

quo inuento, eleuatio Poli Reualiae sequenti calculo definitur:

| | |
|---|---|
| Altitudo merid. app. Rigel | $=21^{\circ}.58'.20''$ |
| Error quadr. | $= + \quad 7.\ 10\frac{1}{2}$ |
| Altit. mer. corr. | $=22^{\circ}.\ 5'.30\frac{1}{2}''$ |
| Refr. | $= - \quad 2.\ 25$ |
| Altit. merid. vera | $=22^{\circ}.\ 3'.\ 5\frac{1}{2}''$ |
| Declinatio stellae | $= \ 8.\ 30.\ 32\frac{1}{2}$ A |
| Altitudo Aequat. | $=30^{\circ}.33'.38''$ vel |
| Eleuatio Poli Reualiae | $=59^{\circ}.26'.22''$. |

In Mappa geogr. Academiae huius vrbis latitudo est $=59^{\circ}.22'$.

## * Inuestigatio declinationis stellae Rigel ex obseruationibus, quas quadrante 3 ped. radio in Obseruatorio Regio Parisino institui.

| | | |
|---|---|---|
| 1748. st. n. | Ad lumen crepusculi et diei | |
| 4. Mart. | altit merid. app. stellae Rigel | $=32^{\circ}.41'.3''.3$ |
| 7. Mart. | - - - - | 32. 41. 4. 0 |
| 16. Mart. | - - - - | 32. 41. 0. 8 |

Error huius quadrantis, ex vtraque verificatione circa horizontem et verticem instituta deductus, aequatur $30''$ ab altitudinibus obseruatis subtrahendis. Habebimus igitur altitud. merid. stellae Rigel, errore quadrantis et refractione correctam, vt sequitur:

d. 4.

d. 4. Martii $= 32^\circ.39'.3''.3$
7. Mart. - - 32. 39. 4. 0
16. Mart. - - 32. 39. 0. 8.

Aberratio ſtellae Rigel in declinat. d. 4. Mart. eſt $= 10''.2$, d. 7 Mart. $= 10''.3$ et d. 16 Mart. $= 10''.4$ auſtrum verſus. Quantitates has ad altitud. merid. ſupra notatam addendo, inueniemus altit. merid. Rigel errore quadrantis, refractione et aberratione correctam,

d. 4. Mart. $= 32^\circ.39'.13''.5$
7. Mart. - - 32. 39. 14. 3
16. Mart. - - 32. 39. 11. 2, hinc

Media alt. mer. vera Rigel $= 32^\circ.39'.13''$.

Eleuationem Poli Obſeruatorii Reg. Pariſ. eodem inſtrumento accuratiſſime inueni $= 48^\circ.50'.14''$, ſiue altit. Aequat. $= 41^\circ.9'.46''$, ex qua facili negotio fluit declinatio vera ſtellae Rigel ad initium menſ. Mart. 1748. $= 8^\circ.30'.33''$ Auſtr. Correctio declinat. huius ſtellae a nutatione axis telluris producta, aequatur $7''.8$ add. ita vt eius declinat. media ad init. menſ. Mart. ſit $= 8^\circ.30'.40''.8$ A. ſiue declinat. media ſtellae Rigel ad initium An. 1748. $= 8^\circ.30'.41''.6$ A.

Variatio declinationis ſtellae Rigel annua cum ſit $5''$, habebimus declinationem huius ſtellae mediam ad 19. Ian. ſt. v. 1751. reductam $= 8^\circ.30'.26''.2$. A. Aberratio in declinat. tunc temporis erat $= 7''.3$ auſtrum verſus et correctio declinat. ob nutat. axis telluris $= 0''.6$ ſubtr. quocirca erit declinatio ſtellae Rigel apparens ad 19 Ian. ſt. v. 1751. reducta $= 8^\circ.30'.33''$.A.

## ** Inuestigatio declinationis stellae $\gamma$ Draconis ex obseruationibus Cel. Beuisii in Obseruatorio Regio Grenowicensi sectore 8. pedum radio peractis.

1748. Aug. $\frac{6}{17}$. Limbo sectoris Orient. spect. dist. $\gamma$ Drac. a vertice $= 0°. 3'. 5''$ Bor.
Aug. $\frac{16}{27}$. Limbo sect. Occid. spect. $= 0°. 3'. 27''$ vers.

Aberratio declinat. stellae $\gamma$ Drac. d. $\frac{6}{17}$. Aug. aequatur $16''.1$, et d. $\frac{16}{27}$. Aug. $17''.7$ boream versus. Distantia igitur huius stellae a vertice Obseruat. Grenowicensis, aberratione correcta, erit:

d. $\frac{6}{17}$. Aug. $= 0°. 2'. 48''. 9$
d. $\frac{16}{27}$. Aug. $= 0°. 3'. 9''. 3$ hinc

Vera $\gamma$ Draconis a vertice distantia $= 0°. 2'. 59''. 1$

Eleuatio Poli Obseruatorii Grenowicensis ponitur $= 51°. 28'. 30''$, ex qua porro deducimus declinationem veram stellae $\gamma$ Draconis circa tempus supra notatum $= 51°. 31'. 29''. 1$. bor. Correctio praeterea declinationis huius stellae, a nutatione axis telluris producta, tunc temporis erat $= 5''. 7$ add. ideoque declinatio $\gamma$ Draconis media ad initium anni 1748. $= 51°. 31'. 35''. 4$ bor. habita nimirum variationis declinat. huius stellae ob praecessionem aequinoctiorum mediam ratione.

Ad declinationem iam apparentem $\gamma$ Draconis pro tempore obseruationis Reualiensis inueniendum, habemus

bemus variationem declinat. huius stellae mediam, interuallo temporis inter obseruationem Reualiensem et epocham supra notatam respondentem 2''. 5. subtr. Correctionem declinationis huius stellae ob nutationem axis telluris = 1''. 4. add. et aberrationem in declinat. tempori obseruationis conuenientem = 13''. 4. austrum versus, hinc declinat. γ Draconis apparent. ad 21 Ian. st. v. 1751. = 51°. 31'. 21''. 17 bor.

## Determinatio longitudinis loci Dager-Ort ad oram maritimam Insulae Dagho occidentalem siti.

Quia *Krasilnikowius* eodem in itinere nonnullas quoque obseruauit in Insula Dagho, in loco Dager-Ort, primi Satellitis Iouis immersiones, non alienum esse videtur a nostro instituto, ex memoratis obseruationibus loci Dager-Ort longitudinem methodo in determinatione longitudinis vrbis Rigae exposita eruere; praesertim cum immersiones Satellitum ad hocce negotium magis adhuc multo, quam emersiones, sint accommodatae.

An. 1750. d. 31. Iul. st. v. 12h. 45'. 7'' tempore vero accurate obseruata fuit in loco Dager Ort immersio primi Satellitis Iouis tubo 16. ped.

10h.

| | | |
|---|---|---|
| | $10^h.26'.44''$. | temp. vero immersio haec contigit Parisiis sec. Tab. *VVarg*. |
| | $1^h.18'.23''$ | Differentia Mer. Parisios inter et locum Dager-Ort. |
| An. 1750. d. 16. Aug. st. v. | $10^h.4'.23''$ | temp. vero obseruabatur ibidem immersio primi Satellitis Iouis tubo 16. ped. coelo grate sereno, vento autem vehemente. |
| | 8. 46. 16 | temp. vero immersio haec contigit Parisiis sec. Tab. *VVargent.* |
| | $1^h.18'.7''$ | Differentia Mer. |
| An. 1750. d. 6. Sept. st. v. | $15^h.53'.32''$ | temp. vero accuratissime obseruata fuit ibidem immersio primi Satell. Iouis tubo 16. ped. |

$14^h. 35'. 6''$ temp. vero immersio haec contigit Parisiis sec. Tab. *Warg.*

$1^h. 18'. 26''$ Diff. Meridian.

Differentia Meridianorum igitur media inter Parisios et locum Dager-Ort erit $= 1^h. 18' 20''$, et longitudo loci Dager-Ort $= 39° 35'$. Secundum Mappam geogr. Academiae huius loci longitudo est $= 39°. 26'$.

## Determinatio latitudinis loci Dager-Ort.

Eleuationem Poli huius loci, ex aequalibus fixarum altitudinibus meridianis boream atque austrum versus captis, sic determinare adnisus sum:

D. 20. Iul. 1750. *Krasilnikow* quadrante $2\frac{1}{2}$ ped. radio obseru.

| | |
|---|---|
| Altitudinem merid. app. Lucidae Aquilae | $= 39°. 25. 42''$ |
| d. 22. Iulii - - - - - - - | $= 39. 25. 57$ |
| d. 28. Iulii - - - - - - - | $= 39. 26. 7$ |
| Altit. merid. app. media α Aquilae | $= 39°. 25'. 55''$ |

Eodem instrumento sequentes cepit in parte Meridiani boreali altitudines meridianas κ Draconis:

| | |
|---|---|
| d. 21. Iul. 1750. | $= 40°. 14'. 20''$ |
| 3. Aug. - - - | $= 40. 14. 5$ |
| 5. Aug. - - | $= 40. 14. 20$ |
| Altit merid. app. media κ Draconis | $= 40°. 14'. 15''$. |

Decli-

Declinatio α Aquilae tempore obſeruationum ſupra relatarum eſt $= 8°. 13'. 53''$. Bor. Declinatio vero κ Draconis $= 71°. 9'. 55''$. Bor. Diſtantia itaque vera α Aquilae a Polo Aequat. boreo erit $= 81°. 46'. 7''$ eiusdemque diſtantia apparens ab ante dicto Polo $= 81°. 44'. 56''$. Simili modo prodit diſtantia vera κ Draconis a Polo Aequat. boreo $= 18°. 50'. 5''$ eiusdemque diſtantia apparens $= 18°. 48'. 56''$. Arcus igitur Meridiani apparens interiectus $= 100°. 33'. 52''$; cum vero idem arcus ex altitudinum merid. obſeruatarum complemento prodit $= 100°. 19'. 50''$ erroris quadrantis duplum erit $= 14'. 2''$, ſiue error ſimplex ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendus $= 7'. 1''$.

Poli igitur eleuationem ſequenti iam ratione eruere licet:

| | |
|---|---|
| Altitudo meridiana app. α Aquilae | $= 39°. 25'. 55''$ |
| Error quadrantis | $= - \quad 7. \quad 1$ |
| Altit. merid. app. errore quadr. corr. | $= 39°. 18'. 54''$ |
| Refr. | $= - \quad 1. \; 11$ |
| Altitudo merid. vera α Aquilae | $= 39°. 17'. 43''$ |
| Declin. bor. ſtellae | $= \quad 8. \; 13 \; 53$ |
| Altitudo Aequatoris | $= 31°. \; 3'. 50''$ ſiue |
| Eleuatio Poli loci Dager-Ort - - | $= 58°. 56'. 10''$. |

Vt de latitudine huius loci euidentius conſtaret, ſimilem calculum aequales Solis ac fixae α Vrſae maioris altitudines meridianas adhibendo ſequenti modo inſtitui:

D. 10 Sept. 1750. *Krasilnikow* altero instrumento $2\frac{1}{2}$ ped. radio obseruauit in loco Dager-Ort altitudinem apparentem meridianam limbi Solis borealis $= 31^\circ.58'.10''$, eodemque die altit. app. merid. $\alpha$ Vrsae maioris infra Polum $= 31^\circ.58'.0''$.

Declinatio centri Solis pro meridie d. 10. Sept. posita differentia Merid. inter Dager-Ort et Parisios $= 1^h.18'.20''$, et obliquitate Eclipticae $= 23^\circ.28'.30''$, erit $= 0^\circ.41'.54''$ bor. Declinatio vero $\alpha$ Vrsae maioris secundum Catalogum Cel. *de la Caille* $= 63^\circ.5'.52''$. Distantia igitur vera centri Solis a Polo Aequatoris boreo erit $= 89^\circ.18'.6''$ eiusdemque distantia apparens $= 89^\circ.16'.41''$; posita itaque $\frac{1}{2}$ diametro Solis $= 16'.1''$, prodibit distantia app. limbi Solis bor. a Polo Aequat. boreo $= 89^\circ.0'.40''$. Distantia vero apparens $\alpha$ Vrsae maioris ab eodem Polo, habita situs huius stellae infra Polum ratione, est $= 26^\circ.52'.34''$. Arcus propterea apparens Meridiani inter limbum Solis borealem et $\alpha$ Vrsae mai. infra Polum erit $= 115^\circ.53'.14''$, eiusdem vero arcus mensura ex obseruatis altitud. merid. elicitur $= 116^\circ.3'.50''$, vnde duplum erroris quadrantis $= 10'.36''$ siue error quadrantis simplex ad altitudines obseruatas addendus $= 5'.18''$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Altit. mer. app. $\alpha$ Vrsae mai. infra Polum | $= 31^\circ.$ | $58'.$ | $0''$ |
| Error quadr. | $= +$ | $5.$ | $18$ |
| | $32.$ | $3.$ | $18$ |
| Refr. | $= -$ | $1.$ | $34$ |

Alti-

Altitudo merid. vera α Vrsae mai. $= 32°. 1'. 44''$
Declinatio stellae $= 63. 5. 52$

Altitudo Aequatoris $= 31°. 4'. 8''$ siue
Eleuatio Poli $= 58°. 55'. 52''$.

Qua cum supra inuenta comparata, latitudo loci Dager-Ort videtur esse $= 58°. 56'. 0''$. Secundum Mappam geogr. Academiae huius loci latitudo est $= 59°. 1\frac{1}{2}'$.

## Determinatio latitudinis vrbis Naruae.

*Krasilnikowius* in itinere Reualia Petropolin paucas habuit Naruae obseruationes, altitudines nimirum cepit meridianas fixarum nonnullarum quadrante $1\frac{1}{2}$ pedali mdio, ex quibus, quantum potero, accurate huiusce vrbis latitudinem sequenti ratione definire conabor. Ad hoc institutum maxime idoneae videntur altitudines meridianae Sirii et Lucidae in cauda Cygni; Sirii altit. merid. app. obseruata est $= 14°. 14'. 45''$, Lucidae vero in cauda Cygni altitud. app. merid. infra Polum $= 13°. 49'. 20''$. Secundum obseruationes Cel. *Le Monnier* declinatio Sirii ad tempus obseruationis reducta est $= 16°. 23'. 32''$ A. Lucidae autem Cygni declinatio $= 44°. 24'. 2''$ Bor. Hisce admissis, erit distantia vera Sirii a Polo Aequat. boreo $= 106°. 23'. 32''$ eiusdemque stellae distantia apparens, habita altitudinis obseruatae ratione, $= 106°. 19'. 42''$. Simili modo prodibit distantia apparens Lucidae in cauda Cygni a Polo Aequat. boreo $= 45°. 32'. 1''$; harum summa sistet arcum Meridiani apparentem inter Sirium et Lucidam

Cygni

Cygni $=151°.51'.43''$, qui obseruatus fuit $=151°.55'.55''$. Erroris itaque quadrantis duplum erit $=4'.12'$, siue error simplex ad altitudines obseruatas addendus $=2'.6''$.

| | | |
|---|---|---|
| Altit. merid. app. Sirii | = | 14°.14'.45'' |
| Error quadr. | = | + 2. 6 |
| | | 14. 16. 51 |
| Refr. | = | − 3. 50 |
| Altit. merid. vera Sirii | = | 14°.13'. 1'' |
| Declin. Sirii austr. | = | 16. 23. 32 |
| Altitudo Aequatoris | = | 30°.36'.33'' siue |
| Eleuatio Poli Naruae | = | 59°.23'.27''. |

In Mappa geogr. Academiae huius vrbis latitudo est $= 59°.31'$.

## Inuestigatio positionum locorum nonnullorum, per quos iter habuit *Ios. Nic. de l'Isle.*

### *Determinatio latitudinis vrbis Beresow.*

Varias multasque quidem instituit *De l'Islius* Beresouii obseruationes, nullas tamen cepit altitudines siderum aequales Austrum Boreamque versus, ex quibus instrumenti errores accurate definiri possent. Boream versus enim nullam praeter Pollucem obseruauit fixam, cuius igitur altitudines meridianas cum altitudinibus meridianis Arcturi, ad latitudinem huius vrbis determinandam, comparare cogimur. Bis quidem Beresouii investivestigauit *De l'Islius* errorem quadrantis circa horizontem per inuersionem huius organi, nimirum d. 12. Maii 1740, vbi error quadrantis circa horizontem erat $= 6'. 1\frac{1}{3}''$ ad altitudines obseruatas addend. et d. 24. Maii, existente tunc errore organi circa horiz. $= 5'. 2''$ add. Errotem vero quadrantis circa Zenith illo saltem tempore non determinauit. Quam ob causam consultum visum est, instrumenti errorem latitudinemque loci simul sequenti modo eruere.

Altitudo merid. app. Polaris infra Polum

| | | |
|---|---|---|
| 1740. d. | 3. Maii st. n. | $= 61^\circ. 45'. 30''$ |
| d. | 7. Maii - - - | 61. 45. 0 |
| d. | 14. Maii - - - | 61. 45. 0 |

Media igit. alt. mer. app. Pol. ad id tempus $= 61^\circ. 45'. 10''$
Refr. $= -$ 28

Altit. merid. obseruata Polar. refract. corr. $= 61^\circ. 44'. 42''$

Altitudo merid. app. Arcturi

| | | |
|---|---|---|
| 1740. d. | 14. Maii st. n. | $= 46^\circ. 31'. 15''$ |
| | 15. Maii - - - - | 46. 31. 30 |
| | 18. Maii - - - - | 46. 32. 10 |

Media altitudo merid. app. Arcturi $= 46^\circ. 31'. 38''$
Refr. $= -$ 51

Altit. merid. obseruata Arcturi refr. corr. $= 46^\circ. 30'. 47''$.

Hisce positis, declinationem apparentem Polaris ad tempus supra notatum sic definire conatus sum. Ex obseruationibus quas Parisiis habui, deduxi declinationem mediam ſtellae Polaris ad initium An. 1748. $= 87° 57'. 22''$. Motus Polaris annuus in declinat. cum ſit $= 19''. 37'''$, erit declinatio Polaris media, ad tempus obſeruationum Bereſouii habitarum reducta $= 87°. 54' 52\frac{1}{2}''$. Propter nutationem axis telluris ſubtrahenda ſunt $9''$ vt obtineatur declinatio Polaris vera $= 87° 54' 43\frac{1}{2}''$. Aberratio huius ſtellae in declinat. tunc temporis erat $= 13''$ auſtrum verſus, ita vt eius declinatio apparens, ad tempus ſupra memoratum, ſit $= 87°. 54' 30\frac{1}{2}''$ bor. Declinatio Arcturi ad idem tempus ex catalogo Celeb. *le Monnier* prodit $= 20°. 33'. 3\frac{1}{2}''$ bor.

| | |
|---|---|
| Hinc complem. declin. app Arcturi | $= 69°. 26'. 56\frac{1}{2}''$ |
| Compl. declin. app Polaris | $= 2. 5. 29\frac{1}{2}$ |
| Arcus Merid. inter Arcturum et Polarem infra Polum - - | $= 71°. 32'. 26''$ |
| Compl. altit. merid. obſeruatae Polaris infra Polum, refr corr. - | $= 28°. 15\frac{1}{2}'. 18''$ |
| Complem. alt. merid. Arcturi obſeruat. refr. corr. - - | $= 43. 29. 13$ |
| Arcus Merid. obſeruatus inter Arcturum et Polarem infra Polum | $= 71°. 44'. 31''$ |
| | $71. 32. 26$ |
| Erroris quadrantis duplum - - | $= 0°. 12'. 5''$ |
| Siue error ſimplex ad altititudines obſeruatas addendus - - | $= 6'. 2\frac{1}{2}''$ |

Errore quadrantis ſic inuento, latitudo Bereſouii nullo iam fere negotio definitur.

Alti-

Altitudo enim merid. Polaris infra Polum refr. correcta $= 61°.44'.42''$
Error quadrantis $= + \quad 6. \quad 2\frac{1}{2}$

Altit. merid. Polaris vera $= 61°.50'.44\frac{1}{2}''$
Diſtantia app. Polaris a Polo Aequat. $= \quad 2. \quad 5.29\frac{1}{2}$

Eleuatio Poli vera Bereſouii $= 63°.56'.14''$

Huius loci latitudo ſatis accurate in Mappa geogr. Academiae denotata eſt; longitudo vero, quae ex obſervationibus Bereſouii habitis accurate deduci non poteſt, ſecundum Mappam aequatur 83°. 2'.

## Determinatio latitudinis vici Samarowskoy-Yam.

Hoc in vico ſemel tantum in tranſitu obſeruauit *De l'Islius* altitudinem Solis meridianam, ex qua quantum potero accurate latitudinem deducere modo ſequenti conabor.

1740. d. 14. Iun. ſt. n. altitudo merid. appar. marg. Solis bor. $= 52°.34'.30''$
Ponamus errorem quadr. $= + \quad 5. \quad 0$

52. 39. 30
Refr. et Parall. $= - \quad 34$

52. 38. 56
$\frac{1}{2}$ Diameter Solis $= - \; 15. \; 49$

Altit. merid. vera centri Solis $= 52°.23'. \; 7''$

Ponendo longitud. huius loci $= 86\frac{1}{2}°$ et obliquitate

 Eclipti-

Eclipticae $= 23^{\circ}.28'.30''$, inueni declinat. centri Solis $= 23^{\circ}.18'.33''$

Altit. Aequat. $= 29.\ 4.\ 34$ siue
Eleuatio Poli vici Samarowskoy-Yam $= 60^{\circ}\ 55\frac{1}{2}'$.

Secundum Mapp. geogr. Acad. huius loci longitudo est $= 86^{\circ}.\ 39'$ et latitudo $= 60^{\circ}.\ 58'$.

## Determinatio latitudinis vici Demianskoy-Yam.

*De l'Islius* Samarovskoy-Yam profectus, altitudinem marginis Solis borealis maximam in vico Demianskoy-Yam rimari adnixus est, eamque inuenit
D. 26. Iunii st. n. $= 54^{\circ}.\ 4'.\ 0''$
Posito errore quadrantis $= +\ 5.\ 0$ erit

Altit. marg. ☉ bor. max. errore quadr. corr. $= 54^{\circ}.\ 9'.\ 0''$,
Refr. et Parall. $= -\ 33$

$54^{\circ}.\ 8'.27''$
$\frac{1}{2}$ Diameter ☉lis $= -\ 15.48$

Altit. maxima vera centri ☉lis $= 53^{\circ}.52'.39''$
Posita long. huius vici $= 87^{\circ}.25'$, erit
Declinatio centri Solis $= 23.23.13$ ideoque

Altitudo Aequat. $= 30^{\circ}.29'.26''$ siue
Eleuatio Poli vici Demianskoy-Yam $= 59^{\circ}.30'.34''$.
In Mappa geogr. Acad. huius loci longitudo ponitur $= 87^{\circ}.25'$ et latitudo $= 59^{\circ}.38'$.

Deter-

# Determinatio latitudinis vrbis Tobolsk.

Binas hac in vrbe obseruauit *De l'Isleus* marginis Solis borealis altitudines meridianas, alteram d. 5. Iul. st. n. $= 54^\circ.52'.30''$, alteram d. 15. Iul. $= 53^\circ.29'.0''$, hac vero in obseruatione ventus valde erat impedimento, pauloque ante obseruationem obseruator vitrum quadrantis obiectiuum sublatum restituerat; ea de causa priorem obseruationem ad determinandum latitudinem adhibere satius videtur.

1740. d. 5. Iul. st. n. Alt. maxima app.

| | |
|---|---|
| marg. ☉ bor. | $= 54^\circ.52'.30''$ |
| Ponamus, vt antea, errorem quadr. | $= +\ \ 5.\ 0$ |
| | $= 54^\circ.57'.30''$ |
| Refr. et Parall. | $= -\ \ 32$ |
| | 54. 56. 58 |
| ½ Diam. ☉ | $= -\ 15.\ 48$ |
| Altit. merid. vera Centri ☉lis | $= 54.\ 41.\ 10$ |
| Posita longit. huius vrbis $= 85^\circ.56$, erit declin. Centri ☉ | $= 22.\ 47.\ 56$ bor. |
| Altit. Aequat. | $= 31^\circ.53'.14''$ siue |
| Eleuatio Poli vera vrbis Tobolsk | $= 58^\circ.\ 6'.46''$. |

Altera autem obseruatio, quantum a praecedenti differat, in sequenti calculo elucebit.

1740. d. 15. Iul. st. n. Altit. merid.

| | |
|---|---|
| app. marg. ☉ bor. | $= 53^\circ.29'.0''$ |
| Error quadr. | $= + \quad 5.\ 0$ |
| | $53.\ 34.\ 0$ |
| Refr. et Par. | $= - \quad 34$ |
| | $53.\ 33.\ 26$ |
| ½ Diam. ☉ | $= -\ 15.\ 49$ |
| Alt. merid. vera Centri ☉ | $= 53^\circ.17'.37''$ |
| Declin. Centri ☉ | $= 21.\ 31.\ 11$ bor. |
| Alt. Aequat. | $= 31^\circ.46'.26''$ siue |
| Eleuatio Poli vera vrbis Tobolsk | $= 58^\circ.13'.34''$. |

In Mappa geogr. Acad. vrbis Tobolsk longitud. ponitur $= 85^\circ.56'$. eiusdemque latit. $= 58^\circ.7'$.

## Determinatio longitudinis atque latitudinis vici Nowo-Vſolie itemque vici Weretia.

Vnicam tantum hoc in itinere rite obſeruare potuit *De l'Isle* Eclipſin Satell. Iouis, immerſionem nimirum primi Satellitis in vico Nowo-Vſolie viſam, ex qua accurate ſatis huius loci longitudinem modo ſequenti deduxi:

1740. d. 2. Sept. st. n. $15^h.5'.12''$ temp. vero ſatis bene obſeruata fuit in Nowo-Vſolie immerſio primi Sat. Iouis.

Eadem

Eadem immersio secundum Tabulas *VV argent.* contigit Petropoli d 2. Sept. $13^h.19'\ 51''$. Circa id vero tempus calculus ex Tabulis *VVargent.* 30″ circiter citius quam obseruatio incidisse videtur; addendo igitur 30″ ad tempus immersionis supra inuentum, prodibit immersio primi Satellitis Iouis vera Petropoli $13^h\ 20'\ 20''$. Differentia itaque Meridianorum erit secundum hanc obseruationem $= 1^h.44'\ 52''$ siue longitudo vici Nowo-Vsolie $= 74^\circ.13'$ Qua cognita, latitudinem quoque huius loci ex obseruationibus *De l'Islii* eruere iuuat.

Hunc in finem ea vtar altitudine merid. Solis, quam ibi obseruauit *De l'Islius* quadrante nouis filis instructo recensque verificato.

Inuenit enim d. 12. Sept. st. n.

| | |
|---|---|
| Altit. merid app. marg. ☉ bor. | $= 34^\circ.49'.30''$ |
| Error quadr. d. 11. Sept. ex inuersione quadr. circa horiz. inuentus | $= +\ 7.10$ |
| | $34^\circ.56'.40''$ |
| Refr. et Parall. | $= -\ 1.\ 7$ |
| | $34.55.33$ |
| ½ Diam. ☉ | $= -\ 15.59$ |
| Alt. merid. vera centri ☉lis | $= 34^\circ.39'.34''$ |
| Declinatio centri ☉lis | $= 4.\ 3.\ 28$ bor. |
| Alt. Aequatoris | $= 30^\circ.36'.\ 6''$ |
| siue Eleuatio Poli vici Nowo-Vsolie | $= 59^\circ.23'.54''$. |

Vicus

Vicus quidem hic Nowo-Vſolie in Mappa geogr. Academiae non occurrit, de alio autem pago Weretie 3 Verſtis a Nowo-Vſolie auſtrorientem verſus diſtante, cuiusque locum in Mappa inueni denotatum, mentionem fecit *De l'Islius* in verificatione quadrantis circa horizontem occupatus. Ex hac igitur diſtantia et poſitione vici Weretie, reſpectu vici Nowo-Vſolie, facili iam negotio longitudinem atque latitudinem eiusdem aſſignare poſſumus. Peracto enim calculo, inueni differentiam latitudinum vici Weretie et Nowo-Vſolie $= 1'.13''$, differentiam vero longitud. $= 2'.23''$. Latitudo itaque vici Weretie erit $= 59°.22\frac{1}{3}'$ eiusdemque longitudo $= 74°.15'.23''$.

Secundum Mappam geogr. Acad. huius vici latitudo eſt $= 59°.20\frac{1}{2}'$ et longitudo $= 74°.29'$.

## Determinatio longitudinis atque latitudinis vici Saigatka.

*De l'Islius* monet, vicum Saigatka ab vrbe Caſan ſecundum longitudinem diſtare circiter $4°.15'$ ortum verſus: Longitudinem autem vrbis Caſan *de l'Islius* ipſe accuratiſſime determinauit $= 66°.28'$, ita vt longitudo vici Saigatka ſit $= 70°.43'$.

Longitudine hac vici Saigatka admiſſa, eiusdem latitudinem ſequenti calculo definire valemus.

1740.

1740. d. 23. Sept. st. n. Altit. merid.

| | |
|---|---|
| app. marg. ☉ bor. obs. | $= 33°. 14'. 0''$ |
| Error quadr. | $= + \quad 7. 10$ |
| | 33. 21. 10 |
| Refr. et Par. | $= - \quad 1. 13$ |
| | 33. 19. 57 |
| ½ Diam. ☉ | $= - \quad 16. \ 2$ |
| Alt. merid. vera centri ☉ | $= 33. \ 3. 55$ |
| Declin. centri ☉ | $= 0. 12. 50.$ A |
| Alt. Aequatoris | $= 33°. 16'. 45''$ siue |
| Eleuatio Poli vera vici Saigatka | $= 56°. 43'. \frac{1}{4}.$ |

Secundum Mappam geogr. Academiae huius loci longitudo est $= 72°. 31'$, latitudo vero $= 57°. 12'$, ita vt error in longitudine ad 1. Gr. 48. Min. pr. in latitudine autem ad dimidium Grad. assurgat. Hinc quoque positio vici Ossae, totiusque regionis adiacentis, erit corrigenda.

## Determinatio longitudinis et latitudinis vrbis Sarapul.

Distantiam huius loci secundum longitudinem a Saigatka definiuit *De l'Islius* 30' Aequat. occidentem versus, siue eiusdem longitudinem $= 70°. 13'$. Latitudo autem ex sequenti altitudine meridiana Solis accurate obseruata fluit:

1740. d. 24. Sept. Altit. merid. app.

| | | |
|---|---|---|
| marg ☉ bor. | = | 33°. 7'. 0" |
| Error quadr. | = | + 7. 10 |
| | | 33. 14. 10 |
| Refr. et Par. | = | − 1. 13 |
| | | 33. 12. 57 |
| ½ Diam. ☉ | = | − 16. 2 |
| Altit. merid. vera centri ☉ | = | 32. 56. 55 |
| Declin. centri ☉ | = | 0. 36 20 A |
| Altit. Aequatoris | = | 33. 33 15 siue |
| Eleuatio Poli vrbis Sarapul | = | 56°. 26¾'. |

In Mappa geogr. Acad. huius loci longitudo ponitur $=72°.0'$, eiusdemque latitudo $=56°.56\frac{1}{4}'$. Error itaque in longitudine $=1°.47'$, in latitudine vero $=30'$.

## Determinatio longitudinis atque latitudinis vici Vſt-Ykskoi, ad ripam fluminis Kamae, e regione oſtii fluminis Yk ſiti.

Cum differentia Meridianorum inter vrbem Caſan et vicum Vſt-Ykskoi ſecundum *De l'Islium* ſit $=2\frac{1}{4}°$, erit longitudo huius vici $=69°.13'$. Latitudo autem ex ſequenti definitur altitudine meridiana Solis in vici Vſt Ykskoi obſeruata:

1740.

1740. d. 27. Sept. ſt. n. Altit. mer.

| | |
|---|---|
| app. marg. ☉ bor. | $= 32°. 31'. 30''$ |
| Error quadr. ponitur | $= + \quad 7. 10$ |
| | $32. 38. 40$ |
| Refr. et Par. | $= - \quad 1. 14$ |
| | $32. 37. 26$ |
| $\frac{1}{2}$ Diam. ☉ | $= - \quad 16. \ 3$ |
| Altit. merid. vera centri ☉ | $= 32. 21. 23$ |
| Declin. centri ☉ | $= \ 1. 46. 46$ A |
| Altit. Aequatoris | $= 34°. \ 8'. \ 9''$ ſiue |
| Eleuatio Poli vera vici Vſt-Ykskoi | $= 55° \ 51'. 50''$. |

Vicus hic in Mappa geogr. Acad. falſo nomine vocatus Ieko, longitudinem habens $= 70°. 48'$, latitudinem $= 56°. 24'$. Error itaque in longitudine $= 1°. 35'$, in latitudine $= 32'$.

## Determinatio longitudinis atque latitudinis vici Swinji - Gori, ad diſtantiam 2 Verſt. cis oſtium fluminis Vjatkae ſiti.

Differentia Meridianorum inter Vſt - Ykskoi et Swinji-gori aequatur ſecundum Mappam $1°. 30'$; admiſſa igitur longitudine vici Vſt - Ykskoi ſupra inuenta, erit longitudo vici Swinji-gori $= 67°. 43'$ circiter.

Latitudo huius loci ex altitudine meridiana Lucidae Aquilae a *De l'Iſlio* obſeruata modo ſequenti deducitur:

1740. d. 28. Sept. st. n. Altit. mer.

| | |
|---|---|
| app. $\alpha$ Aquilae | $= 42^{\circ}. 30'. 15''$ |
| Error quadrantis | $= 7. 10$ |
| | 42. 37. 25 |
| Refr. | $= -$ 1. 3 |
| Altit. merid. vera $\alpha$ Aquilae | $= 42. 36. 22$ |
| Declin. $\alpha$ Aquilae | $= 8. 12. 28$ bor. |
| Altit. Aequatoris | $= 34. 23. 54$ siue |
| Eleuatio Poli vera vici Swinji-gori | $= 55. 36.$ |

Longitudo huius loci secundum Mappam geogr. Acad. est $= 69^{\circ}. 18'$ et latitudo $= 55^{\circ}. 57'$. Error igitur in longitud. $= 1^{\circ}. 35'$, in latitud. $= 21'$.

## Determinatio latitudinis atque longitudinis vrbis Casan.

Plures instituit *De l'Islius* in vrbe Casan obseruationes, ad determinandum huius loci latitudinem spectantes, ex quibus altitudo meridiana Lucidae Aquilae ibidem obseruata ad nostrum institutum maxime videtur idonea.

1740. d. 8. Oct. st. n. Altit. merid.

| | |
|---|---|
| app. $\alpha$ Aquilae | $= 42^{\circ}. 21'. 20''$ |
| Ponamus error. quadr. | $= + 7. 10$ |
| | 42. 28. 30 |
| Refr. | $= -$ 1. 3 |

Altit.

Altit. merid. vera $\alpha$ Aquilae $= 42.\ 27.\ 27$
Declin. $\alpha$ Aquilae $= 8.\ 12.\ 28$ bor.

Altitudo Aequatoris $= 34.\ 15.$ siue
Eleuatio Poli vrbis Casan $= 55.\ 45.$

Cum vero error quadrantis ante istam obseruationem d. 11. Sept. in Nowo-Vsolie inuentus $= 7'.10''$, non congruat cum errore eiusdem instrumenti postea, nimirum d. 13. Nou. in Nischni-Nowgorod reperto $= 4'.40''$, nihil certi circa veram vrbis Casan latitudinem definire licet. Posito enim errore quadrantis $= 7'.10''$, erit latitudo vrbis Casan $= 55°.45'$, admisso autem altero $4'\ 40''$, prodibit latitudo huius vrbis $= 55°.47\frac{1}{2}'$. *De l'Islius* quidem ipse latitudinem vrbis Casan statuit $= 55°.47'$, dubium autem aliquot min. prim. semper relinquitur, neglecta verificatione quadrantis, quae in vrbe Casan erat peragenda.

Longitudinem huius vrbis accurate diligenterque determinauit *De l'Islius* $= 66°.28'$.

Secundum Mappam geogr. Academiae huius vrbis longitudo aequatur $66°.25'$, latitudo autem $55°.44'$.

## Determinatio latitudinis vrbis Nischni-Nowgorod.

Latitudinem huius loci, cum verificatio quadrantis, paulo post peractas ibidem obseruationes, sit instituta, accurate satis ex sequenti altitudine merid. Lucidae Aquilae definire licet.

 1740.

1740. d. 5. Nou. ſt. n. Altit. Merid.

| | |
|---|---|
| app. α Aquilae | = 41°. 48′. 40″ |
| Error quadrantis | = + 4. 40 |
| | 41. 53. 20 |
| Refr. | = − 1. 5 |
| Altit. merid. vera α Aquilae | = 41. 52. 15 |
| Declinat. α Aquilae | = 8. 12. 28 bor. |
| Altit. Aequat. | = 33. 39. 47 ſiue |
| Eleuatio Poli vera Niſchni-Nowgorod | = 56. 20. 13. |

Huius vrbis longitudo ponitur in Mappa geogr. Acad. = 62°. 19′, latitudo autem = 56°. 18′.

## Determinatio latitudinis vrbis Moſcouiae.

Quamuis menſem integrum Decembr. *De l'Islius* commoratus ſit Moſcouiae, paucas tamen ibi propter tempeſtatem aduerſam inſtituit obſeruationes; ita vt praeter altitudinem merid. Polaris ſtellae bis obſeruatam, et altitudinem meridianam Palilicii ſemel captam, nullae occurrant obſeruationes determinandae latitudini huius loci inſeruientes. Ex memoratis autem altitudinibus meridianis huius vrbis latitudinem modo ſequenti inueſtigare atque definire conatus ſum:

1740. d. 26. Dec. ſt. n. Altit merid app.

| | |
|---|---|
| Polaris ſupra Polum | = 57°. 46′. 40″ |
| 27. Dec. - - - - - - | 57. 47 0 |

Media

Media itaque altit. merid. obſeru.

Polaris ſupra Polum $= 57°.46'.50''$

Refr. $= -$ 40

Alt. mer. obſ. Polaris refr. corr. $= 57. 46. 10$

Eodem circiter tempore, nempe d. 30. Dec. obſeruata fuit Moſcouiae eodem organo altitudo meridiana appar. Palilicii - - - - $= 50°. 8'.30''$ ſiue Alt. merid. obſeru. Palilicii refr. corr. $= 50. 7. 38.$

Ad quadrantis iam errorem definiendum harum fixarum declinationes accuratiſſime ſupputentur, neceſſe eſt. Inueni autem ex obſeruationibus, quas ipſe Pariſiis ſumma cura inſtitui, declinationem apparentem Polaris ad finem Anni 1740.* $= 87°.55'.15''.1.$ bor. Parique modo declinationem apparentem Palilicii ad idem tempus ** $= 15°.57'.45''.4$ bor. Quibus ſtabilitis, erit

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Diſtant. app. Polaris a Polo Aequat. bor. $=$ | 2°. | 4'. | 44''. | 9 |
| Diſt. app. Palilicii a Polo Aequat. bor $=$ | 74. | 2. | 14. | 6 |
| Differ. diſtant. a Polo Aequatoris bor $=$ | 71. | 57. | 29. | 7 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Diſtant. obſeru. vera Polaris a Zenith $=$ | 32°. | 13'. | 50'' |
| Diſtant. obſeru. vera Palil. a Zenith $=$ | 39. | 52. | 22 |
| Summa diſtant. obſeruat. a Zenith $=$ | 72. | 6. | 12 |
| Different. diſtant. a Polo Aequatoris $=$ | 71. | 57. | 30 |
| Erroris quadrantis dupl. $=$ | 0. | 8. | 42. |

ſiue error quadrantis ſimplex ad altitud.

obſeruatas addendus $=$ 4'. 21''.

Hinc

| | | | |
|---|---|---|---|
| Hinc altit. merid. obseru. Polaris refr. corr. | $=57^{\circ}.$ | $46'.$ | $10''$ |
| Error quadr. | $= +$ | 4. | 21 |
| Altit. merid. vera Polaris supra Polum | $=57.$ | 50. | 31 |
| Dist. app. Polaris a Polo | $= 2.$ | 4. | 45 |
| Eleuatio Poli vera Moscouiae | $=55.$ | 45. | 46. |

## * Inuestigatio declinationis apparentis stellae Polaris ad finem anni 1740.

Secundum obseruationes a me Parisiis An. 1748. habitas, declinatio stellae Polaris media ad initium An. 1748. est $=87^{\circ}.57'.22''$.

Motus iam Polaris stellae annuus in declinatione aequatur $19'.37''$, vnde declinatio Polaris media ad finem An. 1740. $=87^{\circ}.55'.4''.2$.

Ob nutationem axis telluris subtrahenda sunt $9''$, vt prodeat stellae Polaris declinatio vera ad finem An. 1740. $=87^{\circ}.54'\ 55''.2$.

Aberratio denique huius stellae in declinatione tunc temporis erat $=19''.9$ boream versus, ita vt declinatio Polaris apparens ad finem An. 1740. sit $=87^{\circ}.55'.15''.1$.

## ** Inuestigatio declinationis apparentis Palilicii ad finem An. 1740.

Antequam declinationem apparentem Palilicii ad tempus propositum assignemus, ex certis accuratisque obseruationibus huius stellae declinatio media, h. e. aberratione et aequatione nutationis axis telluris correcta, est deducenda atque stabilienda. Hunc vero in finem sequen-

ſequentes ſum adhibiturus obſeruationes, quas ipſe quadrante 3 ped. radio, ad lumen crepuſculi et diei, in obſeruatorio Regio Pariſ. ſumma cura inſtitui.

| | | |
|---|---|---|
| 1748. d. $\frac{10}{21}$ Febr. | Alt. mer. app. Aldebaran | = 57°. 9'. 48". 9 |
| $\frac{19 \text{ Febr.}}{1 \text{ Mart.}}$ | - - - - - - - | 57. 9. 50. 8 |
| $\frac{20 \text{ Febr.}}{2 \text{ Mart.}}$ | - - - - - - - | 57 9. 49. 5 |
| $\frac{22 \text{ Febr.}}{4 \text{ Mart.}}$ | - - - - - - - | 57. 9. 48. 3 |
| $\frac{5}{16}$ Mart. | - - - - - - - | 57. 9. 47. 0 |

Error huius quadrantis, ex vtraque verificatione deductus, aequatur 30" ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendus. Quo rite applicato habebimus altitud. merid. Palilicii errore quadrantis et refractione correctam,

| | | |
|---|---|---|
| d. $\frac{10}{21}$ Febr. | - - - | 57°. 8'. 41". 9 |
| $\frac{19 \text{ Febr.}}{1 \text{ Mart.}}$ | - - - | 57. 8. 43. 8 |
| $\frac{20 \text{ Febr.}}{2 \text{ Mart.}}$ | - - - | 57. 8. 42. 5 |
| $\frac{22 \text{ Febr.}}{4 \text{ Mart.}}$ | - - - | 57. 8. 41. 3 |
| $\frac{5}{16}$ Mart. | - - - | 57. 8. 40. 0. |

Aberratio Palilicii in declinatione eſt d. $\frac{10}{21}$ Febr. = 1". 6; d. $\frac{19 \text{ Febr.}}{1 \text{ Mart.}}$ = 2". 1, d. $\frac{20 \text{ Febr.}}{2 \text{ Mart.}}$ = 2". 2; d. $\frac{22 \text{ Febr.}}{4 \text{ Mart.}}$ = 2". 3 et d. $\frac{5}{16}$ Mart. = 2". 8 auſtrum verſus; hinc altitudo merid. Palilicii errore quadrantis, refractione et aberratione correcta:

| | | |
|---|---|---|
| d. $\frac{10}{21}$ Febr. | = 57°. 8'. 43". 5 | Altitudo itaque meridiana me- |
| $\frac{19 \text{ Febr.}}{1 \text{ Mart.}}$ | = 57. 8. 45. 9 | dia Palilicii errore quadrantis, |
| $\frac{20 \text{ Febr.}}{2 \text{ Mart.}}$ | = 57. 8. 44. 7 | refractione et aberratione cor- |
| $\frac{22 \text{ Febr.}}{4 \text{ Mart.}}$ | = 57. 8. 43. 6 | recta, ad initium menſis Mart. |
| $\frac{5}{16}$ Mart. | = 57. 8. 42. 8 | ſt. n. A. 1748. 57°. 8'. 44". 1. |

Eleuationem Poli veram Obſeruatorii R. Pariſ. eodem inſtrumento accuratiſſ. determinaui = 48°. 50'. $12\frac{1}{2}$", qua admissa, erit declinatio Palilicii vera ad init. mens. Mart. st. n. 1748. $= 15^\circ.58'.56''.6$ bor. Correctio declinationis huius stellae ob nutationem axis telluris tunc temporis erat $= 8''.5$ subtrah. et motus Palilicii in declinat. annuus $= 8''.21'''$, ita vt declinatio Palilicii media ad 1. Ian. st. n. 1748. accuratiss. supputata sit $= 15^\circ.58'.46''$, 5 bor.

Facili iam labore inueniemus declinationem Palilicii apparentem ad tempus obseruationum Moscouiae habitarum, id est ad finem A. 1740. Motus enim huius stellae annuus in declinat. cum sit $= 8''.21''$, prodibit declinatio media Aldebaran ad finem A. 1740 $= 15^\circ.57'.48''$, 0 bor. Correctio declinationis propter nutationem axis telluris est $= 4''.4$ subtr. hinc declinatio Aldebaran vera $= 15^\circ.57'.43''$, 6 et declinatio eiusdem apparens ad finem A. 1740, ob aberrationem in declinat. $= 1''.8$ bor. versus, $= 15^\circ.57'.45''4$ bor.

## Adnotationes circa longitudinem vrbis Moscouiae.

Longitudo huius vrbis, cum nullae priscis temporibus ibi habitae sint obseruationes astronomicae, ad determinandum longitudinem idoneae, ab interuallorum aestimatione populari ad nostrum vsque fere aeuum praecipue pependisse videtur. *Ferquarsonus* huius quidem saeculi initio mensuram viae publicae, qua itur Petropoli Moscouiam, agendo, Meridianorum harum vrbium differentiam accuratius definire studuit, eamque inuenisse dicitur $= 7^\circ.29'$, siue $29'.56''$ temp. Non obstante autem hac *Ferquarsoni* mensura Astronomorum bona pars, qua

qua auctoritate nescio, differentiam Meridianorum Petropolin inter et Moscouiam statuit $= 40'$ temp. siue 10 grad. Aequat. ita vt solum obseruationum astronomicarum pondus hoc de discrimine diiudicaturum videatur. Hunc in finem operae pretium duxi, anno 1753 occultationum quarundam fixarum a Luna calculos tradere Academiae cum Adiuncto *Krasilnikow*, tunc Moscouiae commorante, communicandos. Quo facto, obseruauit Moscoviae laudatus *Krasilnikow* vnicam occultationem fixae nimirum ♂ ♉ a Luna, mihi quoque Petropoli visam, ex qua cum plus otii nactus ero, veram Moscouiae longitudinem supputabo. Interim tamen non abs re fore iudicaui, Moscouiae longitudinem ex obseruationibus transitus ☿rii per Solem, Moscouiae et Parisiis habitis, modo sequenti eruere.

D. $\frac{25.\ Apr.}{6.\ Maii}$ obseruante *Krasilnikow*,
Moscouiae limbus ☿. occid. e ☉le
egressus est - - - $0^h.38'.55''$ st. v. P. M.
Limbus autem ☿ orient. egressus est $0.\ 41.\ 25$

Hinc egressus centri ☿rii - - $0.\ 40'.10''$
Correct. ob parallaxin add. $=$ $48$

Egressus centri ☿rii Moscouiae obseruatus ad Merid. Paris. reductus $0^h.40'.58''$
Egressus centri ☿rii Parisiis obser. $10.\ 20.\ 7$

Differentia Merid. inter Paris. et Moscouiam $= 2^h.20'.51''$.

Longitudo itaque Moscouiae $= 55°.12'.45''$, 16 circiter min. pr. minor ea, quae ex operationibus geometricis *Ferquarsoni* prodit.

# LATITVDINVM SPECVLARVM ASTRONOMICARVM *TYCHONIS BRAHEI*, VRANIBVRGENSIS NEMPE ET WANDESBVRGENSIS, NEC NON VRBIS HAMBVRGENSIS ET VTRIVSQVE OBSERVATORII PARISIENSIS SCILICET ET BEROLINENSIS DISQVISITIO.

Auctore

*A. N. GRISCHOVV.*

Cum inuestigatio rerum astronomicarum variis semper superstruatur obseruatis, quae, quamuis in certis ac inconcussis habeantur, nouis tamen correctionibus saepissime egeant; conclusiones exinde deductae inter se saepius videntur abhorrere, quanquam, si fundamenta curatius examinare liceret, dissensus foret nullus, vel exiguus. Eodem modo res sese habet in disquisitionibus astronomicis, quae comparatione antiquarum et recentiorum obseruationum innituntur. Quantum enim vtilitatis eiusmodi disquisitiones excolendae Astronomiae afferre valent, tantum detrimenti nobilis illa scientia ex iis capere potest, praecipue cum conclusiones ex comparatione antiquarum et recentiorum obseruationum haustae, elementis male stabilitis, in varias Astronomos adducunt sententias. Ad hoc probandum maximo est argumento dissensio Astronomorum ex. c. circa decrementum obliquitatis Eclipticae, vt caetera taceam haud minus notatu digna, quae in Astronomia sunt controuersa. Haec vero opinionum dissensio originem praecipue ducit partim

partim ex negligentia Antiquorum in tradendis singulis et obseruationum et instrumentorum circumstantiis, partim ex eo, quod recentiorum Astronomorum nonnulli errores instrumentorum veterum Astronomorum omnibus vestigiis non indagauerint, et ex tenebris eruerint, neque elementa, quibus eorum disquisitiones suffulciuntur, ad lancem exegerint ac determinauerint.

Ex omnibus obseruationibus veterum Astronomorum eas, quas nobilis *Tycho Brahe*, Astronomus saeculi XVI. longe celeberrimus, instituit atque perscripsit, in pretiosissimis habendas et singulis circumstantiis maxime illustratas esse in confesso est. Subtilissimus ille rerum coelestium investigator longa experientia et vsu rerum exercitatus, cum videret, quantum ad Astronomiam perficiendam interesset, vt vetustiores obseruationes cum recentioribus accurate comparari possent, nihil habuit antiquius, quam vt in obseruationum suarum ephemeridibus ipse notaret sedulo omnes illas circumstantias, quibus obseruationes hae praeclarae commendantur posteritati quam maxime. Thesaurum obseruationum clarissimi huius Astronomi perlustranti, non latet cura illa summa atque diligentia, qua adnotauit organa astronomica, quibus in singulis obseruationibus vsus est, constructionem instrumentorum, methodos, quas ad ea examinanda et verificanda adhibuit, et conditionem instrumentorum obseruationum tempore. Insigniuit haud minori studio eas obseruationes, quas prae aliis accuratiores iudicauit; indicauit faciem coeli et tempestatem in plurimis obseruationibus, modumque, quo, ad organa astronomica in plano Meridiani collocanda, vsus est; quae omnia sedulo candideque notarentur

tur necesse erat, vt posteri fructum ex Herculeo *Tychonis* labore percipere, eiusque obseruationes, quas ipsi, quo tempore institutae sunt, summa accuratione supputare non licuit, calculo subiicere possent.

Cum itaque harum obseruationum dotes, ad illorum temporum rationem, tantae sint, tamque praeclarae, dubium nullum est, quin elementa Astronomiae plurima, quae ex comparatione antiquarum et recentiorum obseruationum petenda sunt, ex *Tychonis* obseruatis accuratissime erui atque stabiliri possint. Declarant hoc etiam labores quorundum Astronomorum celeberrimorum, qui non solum in obseruatis *Tychonis* emendandis atque corrigendis, verum etiam in iis cum obseruationibus recentissimis comparandis desudarunt. Neque in posterum in hoc opere et studio cessabunt Astronomi Quanto enim vetustiores fuerint *Tychonis* obseruationes, tanto euadent desideratiores atque vtiliores ad perscrutanda rerum coelestium arcana. Quia vero conclusionum ex *Tychonis* obseruatis hauriendarum et in vsum Astronomiae deriuandarum vtilitas summa ab accuratione harum obseruationum pendet, haud leui momento aestimanda est disquisitio errorum organorum astronomicorum, quibus obseruator ille diligentissimus vsus est, nec non elementorum, quorum cognitio, ad positiones Siderum determinandas, maxime est necessaria, Longitudinis nempe atque Latitudinis locorum, vbi obseruationes habitae sunt, inuestigatio. Haec quidem omnia *Tychoni* ipsi erant definienda; sed praeterquam quod suo modo sedulo annixus sit, vt elementa haecce in apricum proferret, notandum est, motuum coelestium aequatiunculas plures esse nostris tempo-

temporibus deprehensas, quae *Tychonem* omnino latebant, quarumque propterea rationem in digerendis atque supputandis suis obseruationibus habere non poterat. Adde praeterea, quod hypothesis refractionum, solertissimi huius rerum coelestium contemplatoris aeuo, valde esset imperfecta, cum finxerat refractiones pro Sole maiores esse, quam pro Planetis et stellis fixis. Adducebatur insuper, vt putaret, refractiones fixarum circa 20 gradum altitudinis supra horizontem, Solis vero circa 45 gradum altitudinis, prorsus cessare ac euanescere; cum contra iam centum fere abhinc annis inconcussis obseruationibus demonstratum sit, refractiones in aequali supra horizontem altitudine eiusdem esse quantitatis pro quouis sidere, et ad verticem vsque extendi. Multa quidem adhuc de refractionibus essent dicenda, quippe quae et Astronomos huius saeculi celeberrimos occupatos tenent; sed hic de illis in transitu, tanquam de fonte, ex quo deriuati errores in *Tychonis* calculos latitudinum geographicarum atque positionum siderum fluxerunt, mentionem fecisse sat est. Neque minus notandum est denique, methodos nonnullas, quibus *Tycho* ad verificanda organa sua astronomica vsus est, saepius irritas fuisse, quod a certis quibusdam pendebant obseruationibus atque operationibus, quae diligentissimum hunc Astronomum in nescios nonnunquam inducebant errores. Postquam autem cura atque labore Astronomorum nostrae aetatis organa astronomica methodique obseruandi ad illud praecisionis fastigium euecta sunt, in quo nunc cernuntur, facili negotio complura stabilire possumus elementa, quae corrigendis veterum Astronomorum obseruationibus, definiendisque positionibus

1740. d. 28. Sept. st. n. Altit. mer.

| | |
|---|---|
| app. α Aquilae | = 42°. 30′. 15″ |
| Error quadrantis | = 7. 10 |
| | 42. 37. 25 |
| Refr. | = − 1. 3 |
| Altit. merid. vera α Aquilae | = 42. 36. 22 |
| Declin. α Aquilae | = 8. 12. 28 bor. |
| Altit. Aequatoris | = 34. 23. 54 siue |
| Eleuatio Poli vera vici Swinji-gori | = 55. 36. |

Longitudo huius loci secundum Mappam geogr. Acad. est = 69°. 18′ et latitudo = 55°. 57′. Error igitur in longitud. = 1°. 35′, in latitud. = 21′.

## Determinatio latitudinis atque longitudinis vrbis Casan.

Plures instituit *De l'Islius* in vrbe Casan obseruationes, ad determinandum huius loci latitudinem spectantes, ex quibus altitudo meridiana Lucidae Aquilae ibidem obseruata ad nostrum institutum maxime videtur idonea.

1740. d. 8. Oct. st. n. Altit. merid.

| | |
|---|---|
| app. α Aquilae | = 42°. 21′. 20″ |
| Ponamus error. quadr. | = + 7. 10 |
| | 42. 28. 30 |
| Refr. | = − 1. 3 |

Altit.

Altit. merid. vera $\alpha$ Aquilae $= 42. 27. 27$
Declin. $\alpha$ Aquilae $= 8. 12. 28$ bor.

Altitudo Aequatoris $= 34. 15.$ siue
Eleuatio Poli vrbis Casan $= 55. 45.$

Cum vero error quadrantis ante istam obseruationem d. 11. Sept. in Nowo-Vsolie inuentus $= 7'. 10''$, non congruat cum errore eiusdem instrumenti postea, nimirum d. 13. Nou. in Nischni-Nowgorod reperto $= 4'. 40''$, nihil certi circa veram vrbis Casan latitudinem definire licet. Posito enim errore quadrantis $= 7'. 10''$, erit latitudo vrbis Casan $= 55°. 45'$, admisso autem altero $4'. 40''$, prodibit latitudo huius vrbis $= 55°. 47\frac{1}{2}'$. *De l'Islius* quidem ipse latitudinem vrbis Casan statuit $= 55°. 47'$, dubium autem aliquot min. prim. semper relinquitur, neglecta verificatione quadrantis, quae in vrbe Casan erat peragenda.

Longitudinem huius vrbis accurate diligenterque determinauit *De l'Islius* $= 66°. 28'$.

Secundum Mappam geogr. Academiae huius vrbis longitudo aequatur $66°. 25'$, latitudo autem $55°. 44'$.

## Determinatio latitudinis vrbis Nischni-Nowgorod.

Latitudinem huius loci, cum verificatio quadrantis, paulo post peractas ibidem obseruationes, sit instituta, accurate satis ex sequenti altitudine merid. Lucidae Aquilae definire licet.

1740. d. 5. Nou. ſt. n. Altit. Merid.

| | |
|---|---|
| app. α Aquilae | = 41°. 48′. 40″ |
| Error quadrantis | = + 4. 40 |
| | 41. 53. 20 |
| Refr. | = − 1. 5 |
| Altit. merid. vera α Aquilae | = 41. 52. 15 |
| Declinat. α Aquilae | = 8. 12. 28 bor. |
| Altit. Aequat. | = 33. 39. 47 ſiue |
| Eleuatio Poli vera Niſchni-Nowgorod | = 56. 20. 13. |

Huius vrbis longitudo ponitur in Mappa geogr. Acad. = 62°. 19′, latitudo autem = 56°. 18′.

## Determinatio latitudinis vrbis Moſcouiae.

Quamuis menſem integrum Decembr. *De l'Islius* commoratus ſit Moſcouiae, paucas tamen ibi propter tempeſtatem aduerſam inſtituit obſeruationes; ita vt praeter altitudinem merid. Polaris ſtellae bis obſeruatam, et altitudinem meridianam Palilicii ſemel captam, nullae occurrant obſeruationes determinandae latitudini huius loci inſeruientes. Ex memoratis autem altitudinibus meridianis huius vrbis latitudinem modo ſequenti inueſtigare atque definire conatus ſum:

1740. d. 26. Dec. ſt. n. Altit merid app.

| | |
|---|---|
| Polaris ſupra Polum | = 57°. 46′. 40″ |
| 27. Dec. - - - - - - | 57. 47 0 |

Media

Media itaque altit. merid. obſeru.

Polaris ſupra Polum $= 57°. 46'. 50''$

Refr. $= -\quad 40$

Alt. mer. obſ. Polaris refr. corr. $= 57. 46. 10$

Eodem circiter tempore, nempe d. 30. Dec. obſeruata fuit Moſcouiae eodem organo altitudo meridiana appar. Palilicii - - - - - $= 50°. 8'. 30''$ ſiue Alt. merid. obſeru. Palilicii refr. corr. $= 50. 7. 38.$

Ad quadrantis iam errorem definiendum harum fixarum declinationes accuratiſſime ſupputentur, neceſſe eſt. Inueni autem ex obſeruationibus, quas ipſe Pariſiis ſumma cura inſtitui, declinationem apparentem Polaris ad finem Anni 1740.* $= 87°. 55'. 15''. 1.$ bor. Parique modo declinationem apparentem Palilicii ad idem tempus** $= 15°. 57'. 45''. 4$ bor. Quibus ſtabilitis, erit

| | |
|---|---|
| Diſtant. app. Polaris a Polo Aequat. bor. | $= 2°. 4'. 44''. 9$ |
| Diſt. app. Palilicii a Polo Aequat. bor | $= 74. 2. 14. 6$ |
| Differ. diſtant. a Polo Aequatoris bor | $= 71. 57. 29. 7$ |

| | |
|---|---|
| Diſtant. obſeru. vera Polaris a Zenith | $= 32°. 13'. 50''$ |
| Diſtant. obſeru. vera Palil. a Zenith | $= 39. 52. 22$ |
| Summa diſtant. obſeruat. a Zenith | $= 72. 6. 12$ |
| Different. diſtant. a Polo Aequatoris | $= 71. 57. 30$ |
| Erroris quadrantis dupl. | $= 0. 8. 42.$ |

ſiue error quadrantis ſimplex ad altitud.

obſeruatas addendus $= \quad 4'. 21''.$

Hinc

| | |
|---|---|
| Hinc altit. merid. obseru. Polaris refr. corr. | $=57°.46'.10''$ |
| Error quadr. | $=+\ \ 4.\ 21$ |
| Altit. merid. vera Polaris supra Polum | $=57.\ 50.\ 31$ |
| Dist. app. Polaris a Polo | $=\ 2.\ \ 4.\ 45$ |
| Eleuatio Poli vera Moscouiae | $=55.\ 45.\ 46.$ |

## * Inuestigatio declinationis apparentis stellae Polaris ad finem anni 1740.

Secundum obseruationes a me Parisiis An. 1748. habitas, declinatio stellae Polaris media ad initium An. 1748. est $=87°.57'.22''$.

Motus iam Polaris stellae annuus in declinatione aequatur $19'.37''$, vnde declinatio Polaris media ad finem An. 1740. $=87°.55'.4''.2$.

Ob nutationem axis telluris subtrahenda sunt $9''$, vt prodeat stellae Polaris declinatio vera ad finem An. 1740. $=87°.54'\ 55''.2$.

Aberratio denique huius stellae in declinatione tunc temporis erat $=19''.9$ boream versus, ita vt declinatio Polaris apparens ad finem An. 1740. sit $=87°.55'.15''.1$.

## ** Inuestigatio declinationis apparentis Palilicii ad finem An. 1740.

Antequam declinationem apparentem Palilicii ad tempus propositum assignemus, ex certis accuratisque obseruationibus huius stellae declinatio media, h. e. aberratione et aequatione nutationis axis telluris correcta, est deducenda atque stabilienda. Hunc vero in finem sequen-

fequentes fum adhibiturus obferuationes, quas ipfe quadrante 3 ped. radio, ad lumen crepufculi et diei, in obferuatorio Regio Parif. fumma cura inftitui.

| | |
|---|---|
| 1748. d. $\frac{10}{21}$. Febr. Alt. mer. app. Aldebaran | $= 57^\circ.9'.48''.9$ |
| $\frac{19\ \text{Febr.}}{1\ \text{Mart.}}$ - - - - - - - | 57. 9. 50. 8 |
| $\frac{20\ \text{Febr.}}{2\ \text{Mart.}}$ - - - - - - - | 57 9. 49. 5 |
| $\frac{22\ \text{Febr.}}{4\ \text{Mart.}}$ - - - - - - - | 57. 9. 48. 3 |
| $\frac{5}{16}$. Mart. - - - - - - - | 57. 9. 47. 0 |

Error huius quadrantis, ex vtraque verificatione deductus, aequatur $30''$ ab altitudinibus obferuatis fubtrahendus. Quo rite applicato habebimus altitud. merid. Palilicii errore quadrantis et refractione correctam,

| | |
|---|---|
| d. $\frac{10}{21}$. Febr. - - - | $57^\circ.8'.41''.9$ |
| $\frac{19\ \text{Febr.}}{1\ \text{Mart.}}$ - - - | 57. 8. 43. 8 |
| $\frac{20\ \text{Febr.}}{2\ \text{Mart.}}$ - - - | 57. 8. 42. 5 |
| $\frac{22\ \text{Febr.}}{4\ \text{Mart.}}$ - - - | 57. 8. 41. 3 |
| $\frac{5}{16}$. Mart. - - - | 57. 8. 40. 0. |

Aberratio Palilicii in declinatione eft d. $\frac{10}{21}$ Febr. $= 1''.6$; d. $\frac{19.\ \text{Febr.}}{1.\ \text{Mart.}} = 2''.1$, d. $\frac{20.\ \text{Febr.}}{2.\ \text{Mart.}} = 2''.2$; d. $\frac{22.\ \text{Febr.}}{4.\ \text{Mart.}} = 2''.3$ et d. $\frac{5}{16}$ Mart. $= 2''.8$ auftrum verfus; hinc altitudo merid. Palilicii errore quadrantis, refractione et aberratione correcta:

| | |
|---|---|
| d. $\frac{10}{21}$. Febr. | $= 57^\circ.8'.43''.5$ |
| $\frac{19.\ \text{Febr.}}{1.\ \text{Mart.}}$ | $= 57.\ 8.\ 45.\ 9$ |
| $\frac{20.\ \text{Febr.}}{2.\ \text{Mart.}}$ | $= 57.\ 8.\ 44.\ 7$ |
| $\frac{22.\ \text{Febr.}}{4.\ \text{Mart.}}$ | $= 57.\ 8.\ 43.\ 6$ |
| $\frac{5}{16}$. Mart. | $= 57.\ 8.\ 42.\ 8$ |

Altitudo itaque meridiana media Palilicii errore quadrantis, refractione et aberratione correcta, ad initium menfis Mart. ft. n. A. 1748. $57^\circ.8'.44''.1$.

Eleuationem Poli veram Obferuatorii R. Parif. eodem inftrumento accuratiff. determinaui $= 48^\circ.50'.12\frac{1}{2}''$,

 qua

qua admissa, erit declinatio Palilicii vera ad init. mens. Mart. st. n. 1748. $= 15°.58'.56''.6$ bor. Correctio declinationis huius stellae ob nutationem axis telluris tunc temporis erat $= 8''.5$ subtrah. et motus Palilicii in declinat. annuus $= 8''.21'''$, ita vt declinatio Palilicii media ad 1. Ian. st. n. 1748. accuratiss. supputata sit $= 15°.58'.46''$, 5 bor.

Facili iam labore inueniemus declinationem Palilicii apparentem ad tempus obseruationum Moscouiae habitarum, id est ad finem A. 1740. Motus enim huius stellae annuus in declinat. cum sit $= 8''.21'''$, prodibit declinatio media Aldebaran ad finem A. 1740 $= 15°.57'.48''$, 0 bor. Correctio declinationis propter nutationem axis telluris est $= 4''.4$ subtr. hinc declinatio Aldebaran vera $= 15°.57'.43''$, 6 et declinatio eiusdem apparens ad finem A. 1740, ob aberrationem in declinat. $= 1''.8$ bor. versus, $= 15°.57'.45''4$ bor.

## Adnotationes circa longitudinem vrbis Moscouiae.

Longitudo huius vrbis, cum nullae priscis temporibus ibi habitae sint obseruationes astronomicae, ad determinandum longitudinem idoneae, ab interuallorum aestimatione populari ad nostrum vsque fere aeuum praecipue pependisse videtur. *Ferquarsonus* huius quidem saeculi initio mensuram viae publicae, qua itur Petropoli Moscouiam, agendo, Meridianorum harum vrbium differentiam accuratius definire studuit, eamque inuenisse dicitur $= 7°.29'$, siue $29'.56''$ temp. Non obstante autem hac *Ferquarsoni* mensura Astronomorum bona pars, qua

qua auctoritate nescio, differentiam Meridianorum Petropolin inter et Moscouiam statuit $= 40'$ temp. siue 10 grad. Aequat. ita vt solum obseruationum astronomicarum pondus hoc de discrimine diiudicaturum videatur. Hunc in finem operae pretium duxi, anno 1753 occultationum quarundam fixarum a Luna calculos tradere Academiae cum Adiuncto *Krasilnikow*, tunc Moscouiae commorante, communicandos. Quo facto, obseruauit Moscoviae laudatus *Krasilnikow* vnicam occultationem fixae nimirum δ ♉ a Luna, mihi quoque Petropoli visam, ex qua cum plus otii nactus ero, veram Moscouiae longitudinem supputabo. Interim tamen non abs re fore iudicaui, Moscouiae longitudinem ex obseruationibus transitus ☿rii per Solem, Moscouiae et Parisiis habitis, modo sequenti eruere.

D. $\frac{25\ Apr.}{6\ Maii}$ obseruante *Krasilnikow*,

| | |
|---|---|
| Moscouiae limbus ☿. occid. e ☉le egressus est - - | $0^h.38'.55''$ st. v. P. M. |
| Limbus autem ☿ orient. egressus est | 0. 41. 25 |
| Hinc egressus centri ☿rii - - | $0.40'.10''$ |
| Correct. ob parallaxin add. = | 48 |
| Egressus centri ☿rii Moscouiae obseruatus ad Merid. Paris. reductus | $0^h.40'.58''$ |
| Egressus centri ☿rii Parisiis obser. | 10. 20. 7 |
| Differentia Merid. inter Paris. et Moscouiam = | $2^h.20'.51''$. |

Longitudo itaque Moscouiae $= 55°. 12'. 45''$, 16 circiter min. pr. minor ea, quae ex operationibus geometricis *Ferquarsoni* prodit.

qua admissa, erit declinatio Palilicii vera ad init. mens. Mart. st. n. 1748. $= 15^\circ.58'.56''.6$ bor. Correctio declinationis huius stellae ob nutationem axis telluris tunc temporis erat $= 8''.5$ subtrah. et motus Palilicii in declinat. annuus $= 8''.21'''$, ita vt declinatio Palilicii media ad 1. Ian. st. n. 1748. accuratiss. supputata sit $= 15^\circ.58'.46''.5$ bor.

Facili iam labore inueniemus declinationem Palilicii apparentem ad tempus obseruationum Moscouiae habitarum, id est ad finem A. 1740. Motus enim huius stellae annuus in declinat. cum sit $= 8''.21''$, prodibit declinatio media Aldebaran ad finem A. 1740 $= 15^\circ.57'.48''.0$ bor. Correctio declinationis propter nutationem axis telluris est $= 4''.4$ subtr. hinc declinatio Aldebaran vera $= 15^\circ.57'.43''.6$ et declinatio eiusdem apparens ad finem A. 1740, ob aberrationem in declinat. $= 1''.8$ bor. versus, $= 15^\circ.57'.45''4$ bor.

## Adnotationes circa longitudinem vrbis Moscouiae.

Longitudo huius vrbis, cum nullae priscis temporibus ibi habitae sint obseruationes astronomicae, ad determinandum longitudinem idoneae, ab interuallorum aestimatione populari ad nostrum vsque fere aeuum praecipue pependisse videtur. *Ferquarsonus* huius quidem saeculi initio mensuram viae publicae, qua itur Petropoli Moscouiam, agendo, Meridianorum harum vrbium differentiam accuratius definire studuit, eamque inuenisse dicitur $= 7^\circ.29'$, siue $29'.56''$ temp. Non obstante autem hac *Ferquarsoni* mensura Astronomorum bona pars, qua

qua auctoritate nescio, differentiam Meridianorum Petropolin inter et Moscouiam statuit $= 40'$ temp. siue 10 grad. Aequat. ita vt solum obseruationum astronomicarum pondus hoc de discrimine diiudicaturum videatur. Hunc in finem operae pretium duxi, anno 1753 occultationum quarundam fixarum a Luna calculos tradere Academiae cum Adiuncto *Krasilnikow*, tunc Moscouiae commorante, communicandos. Quo facto, obseruauit Moscoviae laudatus *Krasilnikow* vnicam occultationem fixae nimirum δ ♉ a Luna, mihi quoque Petropoli visam, ex qua cum plus otii nactus ero, veram Moscouiae longitudinem supputabo. Interim tamen non abs re fore iudicaui, Moscouiae longitudinem ex obseruationibus transitus ☿rii per Solem, Moscouiae et Parisiis habitis, modo sequenti eruere.

D. $\frac{25.\ \text{Apr.}}{6.\ \text{Maii}}$ obseruante *Krasilnikow*,
Moscouiae limbus ☿. occid. e ☉le
egressus est - - - $0^h.38'.55''$ st. v. P. M.
Limbus autem ☿ orient. egressus est $0.\ 41.\ 25$

Hinc egressus centri ☿rii - - $0.\ 40'.10''$
Correct. ob parallaxin add. $=$ $48$

Egressus centri ☿rii Moscouiae obseruatus ad Merid. Paris. reductus $0^h.40'.58''$
Egressus centri ☿rii Parisiis obser. $10.\ 20.\ 7$

Differentia Merid. inter Paris. et Moscouiam $= 2^h.20'.51''$

Longitudo itaque Moscouiae $= 55°.\ 12'.\ 45''$, 16 circiter min. pr. minor ea, quae ex operationibus geometricis *Ferquarsoni* prodit.

# LATITVDINVM SPECVLARVM ASTRONOMICARVM *TYCHONIS BRAHEI*, VRANIBVRGENSIS NEMPE ET WANDESBVRGENSIS, NEC NON VRBIS HAMBVRGENSIS ET VTRIVSQVE OBSERVATORII PARISIENSIS SCILICET ET BEROLINENSIS DISQVISITIO.

Auctore

*A. N. GRISCHOVV.*

Cum inuestigatio rerum astronomicarum variis semper superstruatur obseruatis, quae, quamuis in certis ac inconcussis habeantur, nouis tamen correctionibus saepissime egeant; conclusiones exinde deductae inter se saepius videntur abhorrere, quanquam, si fundamenta curatius examinare liceret, dissensus foret nullus, vel exiguus. Eodem modo res sese habet in disquisitionibus astronomicis, quae comparatione antiquarum et recentiorum obseruationum innituntur. Quantum enim vtilitatis eiusmodi disquisitiones excolendae Astronomiae afferre valent, tantum detrimenti nobilis illa scientia ex iis capere potest, praecipue cum conclusiones ex comparatione antiquarum et recentiorum obseruationum haustae, elementis male stabilitis, in varias Astronomos adducunt sententias. Ad hoc probandum maximo est argumento dissensio Astronomorum ex. c. circa decrementum obliquitatis Eclipticae, vt caetera taceam haud minus notatu digna, quae in Astronomia sunt controuersa. Haec vero opinionum dissensio originem praecipue ducit partim.

partim ex negligentia Antiquorum in tradendis singulis et obseruationum et instrumentorum circumstantiis, partim ex eo, quod recentiorum Astronomorum nonnulli errores instrumentorum veterum Astronomorum omnibus vestigiis non indagauerint, et ex tenebris eruerint, neque elementa, quibus eorum disquisitiones suffulciuntur, ad lancem exegerint ac determinauerint.

Ex omnibus obseruationibus veterum Astronomorum eas, quas nobilis *Tycho Brahe*, Astronomus saeculi XVI. longe celeberrimus, instituit atque perscripsit, in pretiosissimis habendas et singulis circumstantiis maxime illustratas esse in confesso est. Subtilissimus ille rerum coelestium investigator longa experientia et vsu rerum exercitatus, cum videret, quantum ad Astronomiam perficiendam interesset, vt vetustiores obseruationes cum recentioribus accurate comparari possent, nihil habuit antiquius, quam vt in obseruationum suarum ephemeridibus ipse notaret sedulo omnes illas circumstantias, quibus obseruationes hae praeclarae commendantur posteritati quam maxime. Thesaurum obseruationum clarissimi huius Astronomi perlustranti, non latet cura illa summa atque diligentia, qua adnotauit organa astronomica, quibus in singulis obseruationibus vsus est, constructionem instrumentorum, methodos, quas ad ea examinanda et verificanda adhibuit, et conditionem instrumentorum obseruationum tempore. Insigniuit haud minori studio eas obseruationes, quas prae aliis accuratiores iudicauit; indicauit faciem coeli et tempestatem in plurimis obseruationibus, modumque, quo, ad organa astronomica in plano Meridiani collocanda, vsus est; quae omnia sedulo candideque notarentur



tur

1740. d. 28. Sept. st. n. Altit. mer.

| | |
|---|---|
| app. $\alpha$ Aquilae | $= 42^\circ.30'.15''$ |
| Error quadrantis | $= 7.10$ |
| | $42.37.25$ |
| Refr. | $= -1.3$ |
| Altit. merid. vera $\alpha$ Aquilae | $= 42.36.22$ |
| Declin. $\alpha$ Aquilae | $= 8.12.28$ bor. |
| Altit. Aequatoris | $= 34.23.54$ siue |
| Eleuatio Poli vera vici Swinji-gori | $= 55.36.$ |

Longitudo huius loci secundum Mappam geogr. Acad. est $= 69^\circ.18'$ et latitudo $= 55^\circ.57'$. Error igitur in longitud. $= 1^\circ.35'$, in latitud. $= 21'$.

## Determinatio latitudinis atque longitudinis vrbis Casan.

Plures instituit *De l' Islius* in vrbe Casan obseruationes, ad determinandum huius loci latitudinem spectantes, ex quibus altitudo meridiana Lucidae Aquilae ibidem obseruata ad nostrum institutum maxime videtur idonea.

1740. d. 8. Oct. st. n. Altit. merid.

| | |
|---|---|
| app. $\alpha$ Aquilae | $= 42^\circ.21'.20''$ |
| Ponamus error. quadr. | $= + 7.10$ |
| | $42.28.30$ |
| Refr. | $= - 1.3$ |

Altit.

Altit. merid. vera $\alpha$ Aquilae $= 42.\ 27.\ 27$
Declin. $\alpha$ Aquilae $= 8.\ 12.\ 28$ bor.

Altitudo Aequatoris $= 34.\ 15.$ siue
Eleuatio Poli vrbis Casan $= 55.\ 45.$

Cum vero error quadrantis ante istam obseruationem d. 11. Sept. in Nowo-Vsolie inuentus $= 7'.10''$, non congruat cum errore eiusdem instrumenti postea, nimirum d. 13. Nou. in Nischni-Nowgorod reperto $= 4'.40''$, nihil certi circa veram vrbis Casan latitudinem definire licet. Posito enim errore quadrantis $= 7'.10''$, erit latitudo vrbis Casan $= 55^\circ.45'$, admisso autem altero $4'.40''$, prodibit latitudo huius vrbis $= 55^\circ.47\frac{1}{2}'$. *De l'Islius* quidem ipse latitudinem vrbis Casan statuit $= 55^\circ.47'$, dubium autem aliquot min. prim. semper relinquitur, neglecta verificatione quadrantis, quae in vrbe Casan erat peragenda.

Longitudinem huius vrbis accurate diligenterque determinauit *De l'Islius* $= 66^\circ.28'$.

Secundum Mappam geogr. Academiae huius vrbis longitudo aequatur $66^\circ.25'$, latitudo autem $55^\circ.44'$.

## Determinatio latitudinis vrbis Nischni-Nowgorod.

Latitudinem huius loci, cum verificatio quadrantis, paulo post peractas ibidem obseruationes, sit instituta, accurate satis ex sequenti altitudine merid. Lucidae Aquilae definire licet.

 1740.

1740. d. 5. Nou. st. n. Altit. Merid.

| | |
|---|---|
| app. α Aquilae | = 41°. 48′. 40″ |
| Error quadrantis | = + 4. 40 |
| | 41. 53. 20 |
| Refr. | = − 1. 5 |
| Altit. merid. vera α Aquilae | = 41. 52. 15 |
| Declinat. α Aquilae | = 8. 12. 28 bor. |
| Altit. Aequat. | = 33. 39. 47 siue |
| Eleuatio Poli vera Nischni-Nowgorod | = 56. 20. 13. |

Huius vrbis longitudo ponitur in Mappa geogr. Acad. = 62°. 19′, latitudo autem = 56°. 18′.

## Determinatio latitudinis vrbis Moscouiae.

Quamuis mensem integrum Decembr. *De l'Islius* commoratus sit Moscouiae, paucas tamen ibi propter tempestatem aduersam instituit obseruationes; ita vt praeter altitudinem merid. Polaris stellae bis obseruatam, et altitudinem meridianam Palilicii semel captam, nullae occurrant obseruationes determinandae latitudini huius loci inseruientes. Ex memoratis autem altitudinibus meridianis huius vrbis latitudinem modo sequenti inuestigare atque definire conatus sum:

1740. d. 26. Dec. st. n. Altit merid app.

| | |
|---|---|
| Polaris supra Polum | = 57°. 46′. 40″ |
| 27. Dec. - - - - - - | 57. 47 0 |

Media

Media itaque altit. merid. obſeru.

| | |
|---|---|
| Polaris ſupra Polum | = 57°. 46′. 50″ |
| Refr. | = - 40 |
| Alt. mer. obſ. Polaris refr. corr. | = 57. 46. 10 |

Eodem circiter tempore, nempe d. 30. Dec. obſeruata fuit Moſcouiae eodem organo altitudo meridiana appar. Palilicii - - - - - = 50°. 8′. 30″ ſiue Alt. merid. obſeru. Palilicii refr. corr. = 50. 7. 38.

Ad quadrantis iam errorem definiendum harum fixarum declinationes accuratiſſime ſupputentur, neceſſe eſt. Inueni autem ex obſeruationibus, quas ipſe Pariſiis ſumma cura inſtitui, declinationem apparentem Polaris ad finem Anni 1740.* = 87°. 55′. 15″. 1. bor. Parique modo declinationem apparentem Palilicii ad idem tempus ** = 15°. 57′. 45″. 4 bor. Quibus ſtabilitis, erit

| | |
|---|---|
| Diſtant. app. Polaris a Polo Aequat. bor. | = 2°. 4′. 44″. 9 |
| Diſt. app. Palilicii a Polo Aequat. bor | = 74. 2. 14. 6 |
| Differ. diſtant. a Polo Aequatoris bor | = 71. 57. 29. 7 |

| | |
|---|---|
| Diſtant. obſeru. vera Polaris a Zenith | = 32°. 13′. 50″ |
| Diſtant. obſeru. vera Palil. a Zenith | = 39. 52. 22 |
| Summa diſtant. obſeruat. a Zenith | = 72. 6. 12 |
| Different. diſtant. a Polo Aequatoris | = 71. 57. 30 |
| Erroris quadrantis dupl. | = 0. 8. 42. |

ſiue error quadrantis ſimplex ad altitud. obſeruatas addendus = 4′. 21″.

Hinc

| | |
|---|---|
| Hinc altit. merid. obseru. Polaris refr. corr. | $= 57°. 46'. 10''$ |
| Error quadr. | $= + \quad 4. \ 21$ |
| Altit. merid. vera Polaris supra Polum | $= 57. \ 50. \ 31$ |
| Dist. app. Polaris a Polo | $= \ 2. \ \ 4. \ 45$ |
| Eleuatio Poli vera Moscouiae | $= 55. \ 45. \ 46.$ |

## * Inuestigatio declinationis apparentis stellae Polaris ad finem anni 1740.

Secundum obseruationes a me Parisiis An. 1748. habitas, declinatio stellae Polaris media ad initium An. 1748. est $= 87°. 57'. 22''$.

Motus iam Polaris stellae annuus in declinatione aequatur $19'. 37''$, vnde declinatio Polaris media ad finem An. 1740. $= 87°. 55'. 4''. 2$.

Ob nutationem axis telluris subtrahenda sunt $9''$, vt prodeat stellae Polaris declinatio vera ad finem An. 1740. $= 87°. 54' \ 55''. 2$.

Aberratio denique huius stellae in declinatione tunc temporis erat $= 19''. 9$ boream versus, ita vt declinatio Polaris apparens ad finem An. 1740. sit $= 87°. 55'. 15''. 1$.

## ** Inuestigatio declinationis apparentis Palilicii ad finem An. 1740.

Antequam declinationem apparentem Palilicii ad tempus propositum assignemus, ex certis accuratisque obseruationibus huius stellae declinatio media, h. e. aberratione et aequatione nutationis axis telluris correcta, est deducenda atque stabilienda. Hunc vero in finem sequen-

sequentes sum adhibiturus obseruationes, quas ipse quadrante 3 ped. radio, ad lumen crepusculi et diei, in obseruatorio Regio Paris. summa cura institui.

| | | |
|---|---|---|
| 1748. d. $\frac{10}{21}$. Febr. Alt. mer. app. Aldebaran | | $=57°.9'.48''.9$ |
| $\frac{19\ \text{Febr.}}{1\ \text{Mart.}}$ | - - - - - - - - | 57. 9. 50. 8 |
| $\frac{20\ \text{Febr.}}{2\ \text{Mart.}}$ | - - - - - - - - | 57 9. 49. 5 |
| $\frac{22\ \text{Febr.}}{4\ \text{Mart.}}$ | - - - - - - - - | 57. 9. 48. 3 |
| $\frac{5}{16}$. Mart. | - - - - - - - - | 57. 9. 47. 0 |

Error huius quadrantis, ex vtraque verificatione deductus, aequatur 30'' ab altitudinibus obseruatis subtrahendus. Quo rite applicato habebimus altitud. merid. Palilicii errore quadrantis et refractione correctam,

| | | |
|---|---|---|
| d. $\frac{10}{21}$. Febr. | - - - | $57°.8'.41''.9$ |
| $\frac{19\ \text{Febr.}}{1\ \text{Mart.}}$ | - - - | 57. 8. 43. 8 |
| $\frac{20\ \text{Febr.}}{2\ \text{Mart.}}$ | - - - | 57. 8. 42. 5 |
| $\frac{22\ \text{Febr.}}{4\ \text{Mart.}}$ | - - - | 57. 8. 41. 3 |
| $\frac{5}{16}$. Mart. | - - - | 57. 8. 40. 0. |

Aberratio Palilicii in declinatione est d. $\frac{10}{21}$ Febr. $=1''.6$; d. $\frac{19\ \text{Febr.}}{1\ \text{Mart.}} = 2''.1$, d. $\frac{20\ \text{Febr.}}{2\ \text{Mart.}} = 2''.2$; d. $\frac{22\ \text{Febr.}}{4\ \text{Mart.}} = 2''.3$ et d. $\frac{5}{16}$ Mart. $= 2''.8$ austrum versus; hinc altitudo merid. Palilicii errore quadrantis, refractione et aberratione correcta:

| | |
|---|---|
| d. $\frac{10}{21}$. Febr. $=57°.8'.43''.5$ | Altitudo itaque meridiana me- |
| $\frac{19\ \text{Febr.}}{1\ \text{Mart.}}$ $=57.\ 8.\ 45.\ 9$ | dia Palilicii errore quadrantis, |
| $\frac{20\ \text{Febr.}}{2\ \text{Mart.}}$ $=57.\ 8.\ 44.\ 7$ | refractione et aberratione cor- |
| $\frac{22\ \text{Febr.}}{4\ \text{Mart.}}$ $=57.\ 8.\ 43.\ 6$ | recta, ad initium mensis Mart. |
| $\frac{5}{16}$. Mart. $=57.\ 8.\ 42.\ 8$ | st. n. A. 1748. $57°.8'.44\frac{1}{3}''.1$. |

Eleuationem Poli veram Obseruatorii R. Paris. eodem instrumento accuratiss. determinaui $=48°.50'.12\frac{1}{2}''$, qua admissa, erit declinatio Palilicii vera ad init. mens. Mart. st. n. 1748. $= 15^\circ.58'.56''.6$ bor. Correctio declinationis huius stellae ob nutationem axis telluris tunc temporis erat $= 8''.5$ subtrah. et motus Palilicii in declinat. annuus $= 8''.21'''$, ita vt declinatio Palilicii media ad 1. Ian. st. n. 1748. accuratiss. supputata sit $= 15^\circ.58'.46''.5$ bor.

Facili iam labore inueniemus declinationem Palilicii apparentem ad tempus obseruationum Moscouiae habitarum, id est ad finem A. 1740. Motus enim huius stellae annuus in declinat. cum sit $= 8''.21'''$, prodibit declinatio media Aldebaran ad finem A. 1740 $= 15^\circ.57'.48''.0$ bor. Correctio declinationis propter nutationem axis telluris est $= 4''.4$ subtr. hinc declinatio Aldebaran vera $= 15^\circ.57'.43''.6$ et declinatio eiusdem apparens ad finem A. 1740, ob aberrationem in declinat. $= 1''.8$ bor. versus, $= 15^\circ.57'.45''4$ bor.

## Adnotationes circa longitudinem vrbis Moscouiae.

Longitudo huius vrbis, cum nullae priscis temporibus ibi habitae sint obseruationes astronomicae, ad determinandum longitudinem idoneae, ab interuallorum aestimatione populari ad nostrum vsque fere aeuum praecipue pependisse videtur. *Ferquarsonus* huius quidem saeculi initio mensuram viae publicae, qua itur Petropoli Moscouiam, agendo, Meridianorum harum vrbium differentiam accuratius definire studuit, eamque inuenisse dicitur $= 7^\circ.29'$, siue $29'.56''$ temp. Non obstante autem hac *Ferquarsoni* mensura Astronomorum bona pars,

qua

qua auctoritate neſcio, differentiam Meridianorum Petropolin inter et Moſcouiam ſtatuit $= 40'$ temp. ſiue 10 grad. Aequat. ita vt ſolum obſeruationum aſtronomicarum pondus hoc de diſcrimine diiudicaturum videatur. Hunc in finem operae pretium duxi, anno 1753 occultationum quarundam fixarum a Luna calculos tradere Academiae cum Adiuncto *Kraſilnikow*, tunc Moſcouiae commorante, communicandos. Quo facto, obſeruauit Moſcouiae laudatus *Kraſilnikow* vnicam occultationem fixae nimirum δ ♉ a Luna, mihi quoque Petropoli viſam, ex qua cum plus otii nactus ero, veram Moſcouiae longitudinem ſupputabo. Interim tamen non abs re fore iudicaui, Moſcouiae longitudinem ex obſeruationibus tranſitus ☿rii per Solem, Moſcouiae et Pariſiis habitis, modo ſequenti eruere.

D. $\frac{28}{9}$ $\frac{\text{Apr.}}{\text{Maii}}$ obſeruante *Kraſilnikow*,

| | |
|---|---|
| Moſcouiae limbus ☿. occid. e ☉le egreſſus eſt - - - | $0^h.38'.55''$ ſt. v. P. M. |
| Limbus autem ☿ orient. egreſſus eſt | 0. 41. 25 |
| Hinc egreſſus centri ☿rii - - | $0. 40'.10''$ |
| Correct. ob parallaxin add. = | 48 |
| Egreſſus centri ☿rii Moſcouiae obſeruatus ad Merid. Pariſ. reductus | $0^h.40'.58''$ |
| Egreſſus centri ☿rii Pariſiis obſer. | 10. 20. 7 |
| Differentia Merid. inter Pariſ. et Moſcouiam | $= 2^h.20'.51''$ |

Longitudo itaque Moſcouiae $= 55°. 12'. 45''$, 16 circiter min. pr. minor ea, quae ex operationibus geometricis *Ferquarſoni* prodit.

 LATI-

# LATITVDINVM SPECVLARVM ASTRONOMICARVM *TYCHONIS BRAHEI*, VRANIBVRGENSIS NEMPE ET WANDESBVRGENSIS, NEC NON VRBIS HAMBVRGENSIS ET VTRIVSQVE OBSERVATORII PARISIENSIS SCILICET ET BEROLINENSIS DISQVISITIO.

Auctore

*A. N. GRISCHOVV.*

Cum inuestigatio rerum astronomicarum variis semper superstruatur obseruatis, quae, quamuis in certis ac inconcussis habeantur, nouis tamen correctionibus saepissime egeant; conclusiones exinde deductae inter se saepius videntur abhorrere, quanquam, si fundamenta curatius examinare liceret, dissensus foret nullus, vel exiguus. Eodem modo res sese habet in disquisitionibus astronomicis, quae comparatione antiquarum et recentiorum obseruationum innituntur. Quantum enim vtilitatis eiusmodi disquisitiones excolendae Astronomiae afferre valent, tantum detrimenti nobilis illa scientia ex iis capere potest, praecipue cum conclusiones ex comparatione antiquarum et recentiorum obseruationum haustae, elementis male stabilitis, in varias Astronomos adducunt sententias. Ad hoc probandum maximo est argumento dissensio Astronomorum ex. c. circa decrementum obliquitatis Eclipticae, vt caetera taceam haud minus notatu digna, quae in Astronomia sunt controuersa. Haec vero opinionum dissensio originem praecipue ducit partim

partim ex negligentia Antiquorum in tradendis ſingulis et obſeruationum et inſtrumentorum circumſtantiis, partim ex eo, quod recentiorum Aſtronomorum nonnulli errores inſtrumentorum veterum Aſtronomorum omnibus veſtigiis non indagauerint, et ex tenebris eruerint, neque elementa, quibus eorum diſquiſitiones ſuffulciuntur, ad lancem exegerint ac determinauerint.

Ex omnibus obſeruationibus veterum Aſtronomorum eas, quas nobilis *Tycho Brahe*, Aſtronomus ſaeculi XVI. longe celeberrimus, inſtituit atque perſcripſit, in pretioſiſſimis habendas et ſingulis circumſtantiis maxime illuſtratas eſſe in confeſſo eſt. Subtiliſſimus ille rerum coeleſtium inveſtigator longa experientia et vſu rerum exercitatus, cum videret, quantum ad Aſtronomiam perficiendam intereſſet, vt vetuſtiores obſeruationes cum recentioribus accurate comparari poſſent, nihil habuit antiquius, quam vt in obſeruationum ſuarum ephemeridibus ipſe notaret ſedulo omnes illas circumſtantias, quibus obſeruationes hae praeclarae commendantur poſteritati quam maxime. Theſaurum obſeruationum clariſſimi huius Aſtronomi perluſtranti, non latet cura illa ſumma atque diligentia, qua adnotauit organa aſtronomica, quibus in ſingulis obſeruationibus vſus eſt, conſtructionem inſtrumentorum, methodos, quas ad ea examinanda et verificanda adhibuit, et conditionem inſtrumentorum obſeruationum tempore. Inſigniuit haud minori ſtudio eas obſeruationes, quas prae aliis accuratiores iudicauit; indicauit faciem coeli et tempeſtatem in plurimis obſeruationibus, modumque, quo, ad organa aſtronomica in plano Meridiani collocanda, vſus eſt; quae omnia ſedulo candideque notarentur

tur necesse erat, vt posteri fructum ex Herculeo *Tychonis* labore percipere, eiusque obseruationes, quas ipsi, quo tempore institutae sunt, summa accuratione supputare non licuit, calculo subiicere possent.

Cum itaque harum obseruationum dotes, ad illorum temporum rationem, tantae sint, tamque praeclarae, dubium nullum est, quin elementa Astronomiae plurima, quae ex comparatione antiquarum et recentiorum obseruationum petenda sunt, ex *Tychonis* obseruatis accuratissime erui atque stabiliri possint. Declarant hoc etiam labores quorundam Astronomorum celeberrimorum, qui non solum in obseruatis *Tychonis* emendandis atque corrigendis, verum etiam in iis cum obseruationibus recentissimis comparandis desudarunt. Neque in posterum in hoc opere et studio cessabunt Astronomi. Quanto enim vetustiores fuerint *Tychonis* obseruationes, tanto euadent desideratiores atque vtiliores ad perscrutanda rerum coelestium arcana. Quia vero conclusionum ex *Tychonis* obseruatis hauriendarum et in vsum Astronomiae deriuandarum vtilitas summa ab accuratione harum obseruationum pendet, haud leui momento aestimanda est disquisitio errorum organorum astronomicorum, quibus obseruator ille diligentissimus vsus est, nec non elementorum, quorum cognitio, ad positiones Siderum determinandas, maxime est necessaria, Longitudinis nempe atque Latitudinis locorum, vbi obseruationes habitae sunt, inuestigatio. Haec quidem omnia *Tychoni* ipsi erant definienda; sed praeterquam quod suo modo sedulo annixus sit, vt elementa haecce in apricum proferret, notandum est, motuum coelestium aequatiunculas plures esse nostris

tempo-

temporibus deprehensas, quae *Tychonem* omnino latebant, quarumque propterea rationem in digerendis atque supputandis suis obseruationibus habere non poterat. Adde praeterea, quod hypothesis refractionum, solertissimi huius rerum coelestium contemplatoris aeuo, valde esset imperfecta, cum finxerat refractiones pro Sole maiores esse, quam pro Planetis et stellis fixis. Adducebatur insuper, vt putaret, refractiones fixarum circa 20 gradum altitudinis supra horizontem, Solis vero circa 45 gradum altitudinis, prorsus cessare ac euanescere; cum contra iam centum fere abhinc annis inconcussis obseruationibus demonstratum sit, refractiones in aequali supra horizontem altitudine eiusdem esse quantitatis pro quouis sidere, et ad verticem vsque extendi. Multa quidem adhuc de refractionibus essent dicenda, quippe quae et Astronomos huius saeculi celeberrimos occupatos tenent; sed hic de illis in transitu, tanquam de fonte, ex quo deriuati errores in *Tychonis* calculos latitudinum geographicarum atque positionum siderum fluxerunt, mentionem fecisse sat est. Neque minus notandum est denique, methodos nonnullas, quibus *Tycho* ad verificanda organa sua astronomica vsus est, saepius irritas fuisse, quod a certis quibusdam pendebant obseruationibus atque operationibus, quae diligentissimum hunc Astronomum in nescios nonnunquam inducebant errores. Postquam autem cura atque labore Astronomorum nostrae aetatis organa astronomica methodique obseruandi ad illud praecisionis fastigium euecta sunt, in quo nunc cernuntur, facili negotio complura stabilire possumus elementa, quae corrigendis veterum Astronomorum obseruationibus, definiendisque positioni-

bus

bus, praecipue specularum astronomicarum, ruinis iam pridem oppressarum, inseruiunt.

Hunc in finem Celeberrimus *Picardus* An. 1671. a *Ludouico* XIV. Galliarum Rege, in Insulam Huennam, quae in Danico freto Zelandiam inter et Scaniam sita est, missus fuerat, vt Vraniburgi, h. e. arcis, quam Rex Daniae *Fridericus* II. Astrorum contemplationi ibi exstruendam curauerat, et in qua *Tycho* seriem obseruationum astronomicarum 15 annorum pertexuit, Longitudinem atque Latitudinem accuratissime obseruaret. Magnum hocce consilium in multas magnasque incurrebat difficultates, in relatione huius itineris a *Picardo* enumeratas. Manebant tum nulla fere vestigia famosissimae *Tychonis* speculae astronomicae, et obseruationes, quas ibi ad Latitudinem definiendam *Picardus* habebat, minime cum iis, quae eodem tempore Parisiis ex compacto instituebantur, concinere videbantur; ita vt *Picardus* hancce viam, directe determinandi Latitudinem speculae astronomicae *Tychonis*, ipse desereret. Sub finem Anni 1671. *Picardus* ibi, quadrantis 3 pedum radio conspicillo tubulato muniti beneficio, altitudines meridianas Polaris stellae infra supraque Polum quam diligentissime obseruabat, inueniebatque ex hisce obseruatis distantiam apparentem huius stellae a Polo Aequatoris boreo 2°.27′.25″, et Eleuationem Poli apparentem Vraniburgi 55°.55′.20″. *Richerius* contra eodem tempore Rupellae obseruationibus astronomicis inuigilans, ope sextantis 6. pedum radio, distantiam apparentem stellae Polaris a Polo determinabat 2°.27′ 5″, adeoque 20″ minorem ea, quae *Picardo* in Insula Huenna obseruata feruata fuerat. Parisiis vero, quod maius est, sub idem tempus variatio obseruabatur in stella polari ad 2 fere minuta prima assurgens. Abnormes et inexplicabiles hae differentiae *Picardum* ita perplexum incertumque habuerunt, vt de Latitudine Vraniburgi directe accurateque determinanda desperaret. Quam ob rem, vt demandatum negotium conficeret, de Eleuatione Poli Vraniburgi methodo indirecta, per obseruatam nimirum Parallelorum Parisiensis obseruatorii et speculae astronomicae Vraniburgensis differentiam, definienda cogitauit. Determinauit igitur per medium inter obseruationes accuratiores differentiam Parallelorum Vraniburgi et Parisiensis obseruatorii $7^{\circ}.4'.5''$, et Eleuationem Poli veram Vraniburgi $55^{\circ}.54'.15''$, siue $25''$ circiter minorem ea, quam per alteram inuenerat methodum. Quamuis vero Eleuatio Poli Vraniburgi methodo indirecta conclusa accuratior videatur ea, quam *Picardus* ex methodo directa collegit, nullo tamen modo recte de tanta differentia diiudicare possumus, nisi in errorem quadrantis, quo *Picardus* ad hocce negotium vsus est, accurate inquiramus.

Mihi itaque propositum est, hoc loco, quantum maxime possum, extra omnem dubitationem ponere ea, quae ad Latitudinem Vraniburgi spectant, vt comparatio inter *Tychonica* obseruata et recentiorum Astronomorum obseruationes instituenda eo meliores in posterum habeat exitus. Hunc in finem primo adnitar, errorem quadrantis, quo *Picardus* in Insula Huenna vsus est, ex huius Astronomi obseruatis nonnullis, ad obseruationes, quas egomet Parisiis institui, comparandis, eruere; id quod non ſolum Latitudini Vraniburgenſis obſeruatorii quantum licet accuratiſſime ſtabiliendae, verum etiam aliis obſeruationibus compluribus, quas *Picardus* eiusdem inſtrumenti beneficio in Inſula Huenna habuit, corrigendis, inſeruiet. Deinde calculum Eleuationis Poli Vraniburgi obſeruationibus a *Tychone* ipſo Vraniburgi peractis et a me concinnatis nixum exhibebo. Collatis enim *Tychonicis* obſeruationibus cum iis, quas ipſe Pariſiis habui, errorem quadrantis, quo *Tycho* ad has obſeruationes inſtituendas vſus eſt, patefaciam. *Simili* modo, demonſtrata obſeruationum *Tychonicarum*, ſi praeciſe fuerint correctae, admiranda accuratione, non dubitaui, Eleuationem Poli arcis Ranzouianae Wandesburgi, vbi *Tycho* e Dania diſcedens exceptus, per tempus aliquod obſeruationibus aſtronomicis inuigilauit, ex obſeruatis *Tychonicis* deriuare atque corrigere, ſimulque Vrbis Hamburgenſis Latitudinem ex obſeruationibus et menſuris, quas egomet Hamburgum inter et Wandesburgum An. 1749. cepi, ea qua potui praeciſione definire. Cum vero elementa nonnulla, quibus ad hoſce calculos perficiendos vtor, iis nituntur obſeruationibus, quas in Obſeruatorio Regio Pariſienſi ipſe ſumma diligentia inſtitui, haud alienum hiſce diſquiſitionibus fore iudicaui, et eas adiicere obſeruationes, quas mihi ad Latitudinem Obſeruatorii Pariſienſis definiendam eodem inſtrumento in famoſiſſimo hocce Obſeruatorio habere contigit. Superat quidem Eleuatio Poli Obſeruatorii Pariſienſis, ex meis obſeruationibus deducta, minutis aliquot ſecundis Latitudinem, quam Cl. *Caſſini* aliique Aſtronomi celeberrimi ſpeculae huic aſtronomicae aſſignarunt;

runt; neque tamen desunt obseruationes optimae notae, quae Latitudinem huius Obseruatorii maiorem adhuc arguant. Obseruationes denique, quas circa Latitudinem Berolinensis Obseruatorii instituere mihi licuit, hac occasione simul exponere, calculoque subiicere, iuuat.

## Eleuationis Poli Vraniburgi secundum obseruationes Cel. *Picardi* determinatio.

Cum organa astronomica, quibus Cel. *Picardus* vtebatur, quippe quae telescopiis loco pinnacidiorum instructa erant, longe excellerent prae iis, quorum adhibendorum copia *Tychoni* fuit, Eleuationem Poli Vraniburgi ex *Picardi* obseruationibus primum praecipueque eruere ac definire fas est. Quia autem cardo huius rei vertitur in determinando errore quadrantis, quo *Picardus* vsus est, seligam hunc in finem altitudines meridianas Reguli et Polaris stellae, quarum altera a *Picardo* in Insula Huenna austrum versus, altera in septentrionali plaga fuit obseruata. Harum vero fixarum declinationes praecise cognoscere, methodus haec cum postulet, eas ex meis obseruationibus diligentissime stabilire inprimis adnitar, vt postmodum ad tempus quoduis propositum reduci commode queant.

Ad definiendam itaque declinationem $\alpha$ Leonis, siue Reguli, iis vtar obseruationibus, quas hunc in finem in Obseruatorio Regio Parisiensi quadrantis tripedalis beneficio habui. Ibi enim per plures obseruationes vix 3. 4ue. min. sec. ab inuicem discrepantes, inueni altitu-

dinem meridianam apparentem Reguli ad lumen crepusculare, coelo eximie sereno, initio mensis Maii Anno 1748. captam - - - - 54°.21'.59"
Ex qua si auferatur error quadrantis - - - 30

Altitudo merid. app. Reguli correcta erit 54. 21. 29
Subtrahendo refractionem pro hac altitud. et ad hanc anni tempestatem - - - - 39

Prodibit altit. merid. Reguli errore quadrantis et refractione correcta - - 54. 20. 50
Eleuatio Aequatoris Obseruatorii Paris. eodem instrumento adinuenta est - - - 41. 9. 47½ hinc

Declinatio apparens Reguli ad initium mensis Maii. 1748. erit - - - 13. 11. 2½ bor.

Ad accommodandam nunc huius stellae declinationem ad nostrum vsum, declinatio eius apparens supra determinata in mediam conuertatur necesse est. Dicimus enim mediam positionem eam, quam stella haberet, si nec esset aberratio a propagatione successiua luminis, nec deuiatio ab axis terrae nutatione; apparentem vero positionem eam, quam ex obseruationibus astronomicis directe elicimus, affectam nimirum et aberratione et deuiatione. Apparet igitur positionem stellae mediam, reducendae ac definiendae positioni eius apparenti ad tempus quoduis propositum, commodissime inseruire.

Peracto itaque calculo prodibit deuiatio Reguli in declinationem ad initium mensis Maii 1748. 1". 1 au-

auſtrum verſus, et aberratio eius in declinationem ad idem tempus 1″. 6 auſtrum verſus; vnde emergit declinatio Reguli media ad initium menſis Maii 1748. 13°. 11′. 5″. 2, ſiue, habita praeceſſionis mediae Aequinoctiorum ratione, declinatio Reguli media ad initium anni 1748. 13°. 11′. 10″. 3.

Colligitur porro praeceſſio media Reguli in declinationem a tempore, quo *Picardus* ſtellam hanc Vraniburgi obſeruauit, nempe a fine menſis Aprilis, ſiue ab initio Maii anni 1672. ad noſtram vsque obſeruationem 21′. 36″. 0 auſtrum verſus, adeoque declinatio Reguli media ad initium Maii 1672. 13°. 32′. 41″. 2, ſiue ob deuiationem in declinationem 2″. 9 bor. verſus, et aberrationem 1″. 3 auſtrum verſus, declinatio Reguli apparens ad idem tempus 13°. 32′. 42″. 8.

Reſtat nunc, vt ſimili modo declinatio Polaris ſtellae definiatur; haec enim res eo maioris momenti eſſe videtur, quod inter Aſtronomos Gallos, teſte *Picardo*, tunc de diſtantia ſtellae Polaris a Polo non conueniebat. Ad hocce negotium perficiendum, adhibiturus ſum obſeruationes, quas circa Polarem ſtellam anno 1748. in Obſeruatorio Regio Pariſienſi inſtitui, quarumque ſummam poſtea lucide explicabo. Prodit autem ſecundum memoratas obſeruationes diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo Aequatoris boreo ad 1. Ian. 1748. 2°. 2′. 12″. 2; ſiue ob deuiationem huius ſtellae in declinationem 5″. 7 bor. verſus, et aberrationem 19″. 9 itidem bor. verſus, declinatio Polaris ſtellae media ad idem tempus 87°. 57′. 22″. 2 bor. Cum vero praeceſſio media Polaris ſtellae in declinationem a tempore, quo ſtella haec a *Picardo* Vraniburgi obſeruata fuit, nimirum a fine menſis Aprilis, ſiue ab initio Maii anno 1672, ad initium vsque An. 1748. ſit 24′.59″.0 bor. verſus, habebimus declinationem Polaris ſtellae mediam ad initium Maii Anno 1672. 87°.32′.23″.2, quae aucta 3″.1 pro deuiatione boreali, et imminuta 12″.1 pro aberratione auſtrali, dat declinationem huius ſtellae apparentem ad idem tempus 87°.32′.14″.2.

Conſimili modo habebimus praeceſſionem mediam ſtellae Polaris in declinationem a fine anni 1671. ad finem vsque menſis Aprilis 1672. 6″.1 bor. verſus; deuiationem huius ſtellae in declinationem circa finem Anno 1671. 2″.4 bor. verſus; aberrationem in declinationem ad idem tempus 19″.8 bor. verſus, hincque declinationem borealem apparentem Polaris ſtellae ad finem anni 1671. 87°.32′.39″.3, ſiue diſtantiam eius apparentem a Polo Aequatoris boreo 2°.27′.20″.7. Ablatis denique 4″. pro refractionum differentia, prodibit diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo, quae aequatur dimidiae differentiae inter maximam et minimam altitudinem huius ſtellae circa id tempus Vraniburgi obſeruatam, 2°.27′.16″.7. *Picardus* diſtantiam illam memorato tempore Vraniburgi obſeruauit eſſe 2°.27′.25″, ideoque 8″ maiorem ea, quae noſtris ſtabilita fuit obſeruationibus atque calculis; cum contra ex *Richerii* obſeruatis eadem diſtantia colligitur 12″ minor illa, quae ex noſtris calculis fluit. Ingens atque notabilis ille diſſenſus obſeruationum *Picardi* et *Richerii* multo maxima ex parte erroribus obſeruationum et inſtrumentorum tribuendus eſſe videtur, neutiquam vero, vti

vti *Picardo* visum est, refractionum vicissitudinibus, quippe quae ad tantam altitudinem tantae esse non possunt. Sed in differentiis illis inordinatis, quae *Picardi* obseruationibus cum *Richerii* vel Astronomorum Parisiensium obseruatis intercedunt, discutiendis morari nunc animus non est. Ostendisse sufficiat, *Picardi* obseruationes circa distantiam Polaris stellae a Polo, de quibus in praesentia maxime agitur, cum nostris magis concinere.

Stabilita nunc nostris obseruationibus et Reguli et Polaris stellae declinatione ad tempus, quo *Picardus* harum fixarum altitudines meridianas Vraniburgi obseruauit, facili negotio error quadrantis, quo *Picardus* vsus est, adeoque vera Eleuatio Poli celebratissimi Obseruatorii Vraniburgensis satis accurate definiri potest. Antequam vero calculos hosce ineamus, obseruationum *Picardi* nostro iudicio delectarum rationem reddere fas est. Ad hunc finem altitudinibus Polaris stellae meridianis et supra et infra Polum, a *Picardo* obseruatis examini subiectis, inuicemque comparatis, demonstrare adnitar, quaenam ex illis caeteris sint praeferendae. *Picardus* altitudinem meridianam apparentem stellae Polaris superiorem sub initium mensis Nouembris An. 1671. obseruauit esse 58°. 23′. 0″; et circa finem eiusdem anni 58°. 22′. 45″. Deuiatio stellae Polaris in declinationem circa initium mensis Nouembris An. 1671. aequabat 2″. 0 bor. versus, et aberratio in declinationem 10″. 0. itidem bor. versus. Sub finem anni 1671. deuiatio eiusdem stellae erat 2″. 4 bor. versus et aberratio 19″. 8. bor. versus; praecessio autem media Polaris stellae in declinationem

tionem ad hocce temporis interuallum aequatur 4''.0 bor. versus, ita vt differentia altitudinis meridianae apparentis stellae Polaris supra Polum sub initium mensis Novembris et circa finem An 1671. sit 14''. 2, quibus ablatis ab altitudine meridiana apparenti Polaris stellae sub initio mensis Nouembris 1671. obseruata, prodibit eiusdem stellae altitudo meridiana apparens respondens ad finem anni 1671. = 58°. 22'. 45''. 8, quae cum vix vno minuto secundo ab altitudine illo tempore obseruata differat, indicio esse videtur, altitudines meridianas Polaris stellae *Picardo* supra Polum obseruatas nullis erroribus notatu dignis esse inquinatas. Sed videamus, quomodo altitudines meridianae inferiores huius stellae se habeant. *Picardus* binas refert eiusmodi altitudines, alteram circa finem An. 1671. obseruatam, 53°. 27'. 55'', alteram sub finem mensis Aprilis 1672. captam, 53°.27'.45''. Patet autem ex calculis supra relatis, deuiationem stellae Polaris declinationem eiusdem a fine anni 1671. ad finem vsque mensis Aprilis An. 1672. 0''. 7. augere, dum aberratio eandem 31''. 9 imminuit; praecessio vero Aequinoctiorum media Polaris stellae declinationem eodem temporis spatio 6''. 1 auget, ita vt summatim declinatio stellae Polaris apparens circa finem mensis Aprilis 1672. 25''. 1 minor sit, quam sub finem anni 1671. Quodsi igitur altitudo meridiana stellae Polaris sub finem mensis Aprilis 1672. infra Polum obseruata 53°. 27'. 45'' augetur 25'', prodibit eiusdem stellae altitudo apparens meridiana inferior respondens ad finem anni 1671. 53°. 28'. 10'', quae altitudinem illo tempore obseruatam 15'' superat minimum, cum altitudo meri-

meridiana hiemali tempore obſeruata ob refractionum viciſſitudines minutis aliquot ſecundis maior adhuc ſtatui poſſet. Ex quo colligitur, quod altitudines meridianae ſtellae Polaris infra Polum a *Picardo* obſeruatae, non aeque congruant inter ſe, ac altitudines meridianae ſupra Polum captae. Cum vero in inueſtiganda altitudine meridiana inferiori ſtellae Polaris alteri praeferenda ad noſtrum ſcopum momenta maxima poſita ſint, notandum eſt, iam ſupra eſſe demonſtratum, poſteriorem altitudinem meridianam ſuperiorem Polaris ſtellae priori ad amuſſim conuenire, diſtantiam contra apparentem huius ſtellae a Polo, ex *Picardi* obſeruatis concluſam 8″, iuſto maiorem eſſe: haec autem differentia oritur, eam adhibendo altitudinem meridianam ſtellae Polaris inferiorem, quae circa finem anni 1671 Vraniburgi obſeruata fuit; ex quo inferre licet, altitudinem illam meridianam inferiorem Polaris ſtellae iuſto minorem eſſe, ratione altitudinum meridianarum huius ſtellae ſupra Polum obſeruatarum. Reſtat igitur, vt videamus, quaenam ſit diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo, quae ex altitudine meridiana huius ſtellae ſub finem menſis Aprilis 1672 infra Polum obſeruata fuit. Oſtendimus iam ſupra, altitudinem hancce meridianam apparentem praeciſe ad finem anni 1671. reductam eſſe 53°. 28′. 10″.; qua dempta ab altitudine meridiana apparenti, eodem tempore ſupra Polum obſeruata 58°. 22′. 45″, reſiduum erit 4°. 54′. 35″, adeoque huius dimidium, ſiue diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo 2°. 27′. 17½″. Determinauimus ſupra huius ſtellae diſtantiam apparentem a Polo ex noſtris obſeruationibus ad praefatum tempus

2°. 27′. 16″. 7, fere vt iam ex reductis obseruationibus *Picardi* inuenimus. Admirabili hocce consensu praestantia altitudinis meridianae Polaris stellae circa finem mensis Aprilis 1672 obseruatae, prae altera, quae sub finem anni 1671 fuit obseruata, quam maxime probatur; ita vt, reiecta hac, illam solam ad perficiendum calculum Eleuationis Poli Vraniburgi adhibere non dubitauerim.

Emergit itaque ex nostris obseruationibus declinatio Reguli apparens ad tempus, quo *Picardus* stellam hanc Vraniburgi obseruauit, nempe ad initium Maii 1672, 13°. 32′. 42″. 8, et declinatio apparens Polaris stellae ad idem tempus 87°. 32′. 14″. 2, atque hinc summa complementorum declinationum harum fixarum 78°. 55′. 3′. 0, a qua si subtrahantur 43″. pro refractione ad altitudinem 53°½ et 54″. pro refractione ad altitudinem 47°½, prodibit summa distantiarum apparentium meridianarum Reguli et Polaris stellae a vertice Vraniburgensi 78°. 53′. 26″. Secundum *Picardi* obseruationes altitudo meridiana apparens Reguli erat Vraniburgi initio mensis Maii 1672. 47°. 40′. 0″, et altitudo meridiana apparens stellae Polaris infra Polum 53°. 27′. 45″; vnde consequitur summa distantiarum apparentium meridianarum obseruatarum Reguli et Polaris stellae a vertice Vraniburgensi 78°. 52′. 15″, qua comparata ad earundem distantiarum summam, supra ex nostris obseruationibus deductam, prodibit differentia 1′. 11″, adeoque error quadrantis *Picardi* ab altitudinibus, huius quadrantis beneficio obseruatis, subtrahendus 35″½.

Errore

Errore quadrantis *Picardi* in apricum prolato, Eleuatio Poli Vraniburgi ex Cel. huius Astronomi obseruationibus sequenti modo accurate definitur:

| | |
|---|---|
| Est enim altit. app. minima stellae Polaris ex *Picardi* obseruationibus - - - | 53°.27'.45" |
| Error quadrantis subtrahendus - - - - - | 35.5 |
| Altit. minima Polaris stellae correcta - | 53. 27. 9. 5 |
| Refractio subtrahenda - - - - - - - - - | 43. |
| Altit. minima Pol. stellae errore quadrantis et refract. correcta - - - - | 53. 26. 26. 5 |
| Distantia app. stellae Pol. a Polo ex meis et *Picardi* obseruationibus - - - | 2. 27. 45. 8 |
| Adeoque Eleuatio Poli vera Vraniburgi | 55. 54. 12. 3 |

Nobilis *Tycho Brahe* Eleuationem Poli Vraniburgi statuit esse 55° 54'$\frac{2}{3}$; *Picardus* autem eam ex suis obseruationibus determinauit primum 55°. 54'. 40", deinde vero 55°. 54. 15", ita vt prima *Picardi* determinatio dimidio ferme vnius minuti primi, altera vero paucis tantum minutis secundis a nostro calculo differat. Verum circa illam determinationem *Picardi* Eleuationis Poli Vraniburgi, quae accuratior tutiorque ab erroribus esse videtur, notandum est, eam differentia Parallelorum Parisiensis Obseruatorii et Vraniburgi a *Picardo* obseruata esse innixam, obseruationesque, quas *Picardus* et Astronomi Regii in Obseruatorio Parisiensi hunc in finem compacto instituerunt, nonnunquam re vera 10" ab inuicem discrepare, quamuis *Picardus* persuasum habe-

 ret,

ret, instrumenta ad hocce negotium adhibita perfecte congruere. Accedit etiam, quod Eleuatio Poli Obseruatorii Parisiensis a *Picardo* admissa iusto sit minor; hanc enim ob causam Cl. *le Monnier* in Historia sua coelesti Eleuationem Poli Vraniburgi adauxit ad 55°.54′.20″. Caeterum perspecta atque perpensa ratione, qua Eleuatio Poli Vraniburgi supra definita est, quin praesens determinatio caeteris anteponenda sit, nullus dubito. Cl. *Horrebow*, Daniae Regis Astronomus, Eleuationem Poli *Hafniae* variis modis obseruauit esse 55°.40′.59″, ita vt admissa Parallelorum differentia *Hafniam* inter et Vraniburgum a *Picardo* inuenta 13′.30″, secundum hasce obseruationes Eleuatio Poli Vraniburgi sit 55°.54′.29″, adeoque 17″ maior ea, quae ex nostro colligitur calculo. Cum vero parum vtilitatis Astronomiae promouendae ex disquisitione huius differentiae redire videatur, accuratione nostrae determinationis satis iam, me iudice, probata, melius est simili methodo secundum obseruationes a *Tychone* ipso habitas Eleuationem Poli Vraniburgi diligenter indagare, vt instituta comparatione, et de accuratione instrumentorum nobilissimi huius Astronomi, et de praecisione, quam ad obseruationes habendas adhibuit, eo rectius existimare, eiusque obseruatis eo tutius vti possumus.

## Determinatio Eleuationis Poli Vraniburgi obseruationibus, a nobili *Tychone Braheo* habitis, innixa.

Praesens disquisitio vt bene procedat, obseruationes *Tychonicas* ad hocce negotium maxime idoneas aucupemur,

pemur, necesse est. Quamuis enim *Tycho* permultas instituerit obseruationes definiendae latitudini Vraniburgi inseruientes, non omnes tamen ad accuratam determinationem aeque idoneae censendae sunt. Perpensis igitur atque comparatis omnibus obseruationibus huc spectantibus, illae, quas *Tycho* sub finem mensis Februarii anni 1588. circa Polarem stellam habuit, mihi ad praesentem disquisitionem aptissimae omnium visae sunt: congruunt enim non solum cum obseruationibus mense Decembri subsequenti peractis, verum id quoque accedit, vt eodem fere tempore eodemque instrumento altitudo meridiana Reguli saepius obseruata sit. Vnde facili negotio error quadrantis, quo *Tycho* vsus est, modo praecedenti indagini erroris quadrantis *Picardi* simili, definiri potest.

Habebimus itaque ex obseruationibus *Tychonicis* per quadrantem chalybeum sub finem mensis Februarii anni 1588. Vraniburgi habitis saepiusque iteratis, altitudinem meridianam apparentem Polaris stellae infra Polum - - - - - 52°.59'.20'',

et altitud. merid. appar. Reguli circa idem tempus eodemque organo obseruatam - 48. 2. 30.

Ad errorem quadrantis, quo *Tycho* ad hasce obseruationes instituendas vsus est, eruendum, determinaturus sum, vti in praecedenti calculo, ex meis obseruatis, declinationem Reguli et Polaris stellae ad tempus supra notatum. Admissa igitur declinatione Reguli media ad 1 Ian. 1748, supra ex meis obseruationibus inuenta, 13°. 11'. 10'' 3. bor. prodibit ob praecessionem Reguli mediam in declinationem a tempore obseruationis *Tychonis* ad 1. vsque Ian. 1748, 45'. 7''. 8 austrum versis, declinatio Reguli media ad finem mensis Februarii 1588. 13°.56′.18″.1 bor. Cum vero ad idem tempus deuiatio Reguli in declinationem sit 3″.7 austrum versus, et aberratio 6″.2 itidem austrum versus, erit ad tempus iam notatum declinatio Reguli apparens 13°.56′.8″.2.

*Tycho* quidem ad hocce tempus declinationem Reguli admittit ferme sesquiminuto primo maiorem; huius autem differentiae causa praecipue in falsa *Tychonis* hypothesi refractionum posita esse videtur: hac enim hypothesi effectum est non solum, vt *Tycho* Eleuationem Poli Vraniburgi iusto maiorem inueniret, verum etiam, vt ex duplici hoc errorum fonte, declinationes boreales iusto maiores, australes contra iusto minores prodirent, nulla habita ratione errorum organorum astronomicorum *Tychonicorum*.

Simili modo declinatio Polaris stellae ad tempus obseruationum *Tychonicarum* supra notatum definitur. Habemus nempe ex nostris obseruatis declinationem mediam stellae Polaris ad 1 Ian. 1748 87° 57′. 22″ 2. bor. a qua si auferantur 52′.55″.5 pro praecessione stellae Polaris media in declinationem, prodibit declinatio media huius stellae ad finem mensis Februarii An. 1588. 87°.4′.26″.7, atque hinc ob deuiationem Polaris stellae in declinationem 1″.8 austrum versus, et aberrationem 7″.4 boream versus, declinatio apparens stellae Polaris ad idem tempus 87°.4′ 32″.3, siue distantia eius apparens a Polo Aequat. boreo 2°.55′.27″.7.

Hisce

Hisce stabilitis, habebimus declinationem apparentem Reguli ad finem mensis Februarii 1588. 13° 56′.8″.2 bor. et consequenter eius distantiam apparentem a Polo Aequatoris bor. 76°.3′.51″.8; at cum distantia apparens Polaris stellae a Polo Aequat. boreo ad idem tempus inventa sit 2°.55′.27″.7, erit summa distantiarum appar. Reguli, et Polaris stellae a Polo Aequatoris boreo 78°.59′.19″.5, a qua si auferantur 54″ pro refractione Reguli, et 45″ pro refractione stellae Polaris, remanet summa distantiarum apparentium meridianarum Reguli et Polaris stellae a vertice Vraniburgensi 78°.57′.40″.5. Secundum obseruationes *Tychonicas* autem distantia apparens meridiana stellae Polaris a vertice Vraniburgensi tunc erat 37°.0′.40″, et Reguli distantia apparens meridiana a vertice Vraniburgensi 41°.57′.30″; adeoque summa distantiarum appar. merid. obseruatarum Reguli et Polaris stellae a vertice Vraniburg. 78°.58′.10″. Apparet igitur, summam distantiarum obseruatarum calculum nostrum 29″.5 superare, et errorem quadrantis *Tychonici* hinc esse 14″.7 add. quo inuento elevatio Poli Vraniburgi sequenti modo nullo fere negotio definitur:

*Tycho* sub finem mensis Februarii Anni 1588. stellae Polaris altitudinem apparentem minimam obseruauit

| | |
|---|---|
| esse - - - - - - - - - - - - | 52°.59′.20″. |
| Errore quadrantis addito - - - - - - - | 14. 7 |
| Prodit minima stellae Polaris altit. apparens correcta - - - - - - - - - | 52. 59. 34. 7 |
| Refractione subducta - - - - - - - - - | 45. |

Restat

| | |
|---|---|
| Restat minima Polaris stellae altit. errore quadr. et refract. correcta - - | 52°.58'.49''.7 |
| Cui addendo distantiam apparentem stellae Polaris a Polo - - . - | 2. 55. 27. 7 |
| Vraniburgi latitudo quaesita erit - - | 55. 54. 17. 4 |

Patet igitur Eleuationem Poli Vraniburgi ex obseruationibus *Tychonicis* concinnatis atque correctis deductam 5 tantum min. sec. differre ab ea, quae ex obseruatis *Picardi* eodem modo concinnatis et correctis fluit. Admirabili hocce consensu perpenso, conuincimur, curas et cogitationes nobilis *Tychonis*, in obseruationibus summa diligentia et accuratione instituendis, neque minus in organis astronomicis affabre conficiendis euigilasse: maiorem enim accurationem ab instrumentis pinnacidiis munitis sperare aut exspectare non possumus. Persuasum potius habemus, obseruationes *Tychonicas*, modo vt sedulo concinnentur atque corrigantur, excolendae Astronomiae magis magisque esse inseruituras.

## Latitudinis arcis Wandesburgensis, nec non Hamburgensis vrbis, determinatio.

Ad arcem Wandesburgum, cui hodie nomen est *Wandesbeck*, *Henricus Ranzouius* nobilem *Tychonem*, e Dania discedere coactum, inuitauerat. Quanquam *Tychoni* illic sedem fixam habere mens non esset, varias tamen ibi autumno anni 1597, annoque insequenti, instituit obseruationes, praecipue circa Planetas, quae cum vtili-

vtilitatem haud contemnendam afferre possint, operae pretium fore iudicaui, vt huius arcis, in amoena regione prope Hamburgum sitae, Latitudinem, ex obseruatis *Tychonicis*, quantum possem, accuratissime eruerem. Calculum hunc eo libentius attingo, quod ex positione arcis huius respectu vrbis Hamburgensis mihi obseruata, Latitudinem Hamburgi, de qua recentiores Astronomi et Geographi plus quam 8. min. prim. discrepant, multa cum accuratione stabilire possum. Disquisitionem Latitudinis huius vrbis et in Geographia et in Astronomia vsui esse palam est, cum *Fabricius* et *Iungius*, speculatores coelestium rerum diligentissimi, complures ibi instituerint obseruationes, ad Astronomiam excolendam fortasse aliquando profuturas.

Accuratione obseruationum *Tychonicarum* ex consensu harum obseruationum cum obseruatis *Picardi* circa Latitudinem Vraniburgi praecedentibus calculis satis probata, eandem praecisionem in definienda ex *Tychonicis* obseruationibus Eleuatione Poli Wandesburgi et Hamburgi sperare licet, modo vt harum obseruationum Wandesburgi habitarum rite corrigendarum copia sit. Continet autem Historia coelestis *Tychonis Brahei* obseruationes nonnullas circa Regulum et Polarem stellam Wandesburgi habitas, quae simul ad errorem organi, quo *Tycho* vsus est, detegendum, et ad Latitudinem Wandesburgi definiendam commode adhiberi possunt. Antequam vero ipsum calculum aggrediar, facere non possum, quin moneam, obseruationes, quas *Tycho* Wandesburgi initio anni 1598. habuit, non adeo esse accuratas, vt obseruatis illo tempore altitudinibus Polaris stellae et

Reguli vti tute possimus: Organa enim *Tychonica* tunc erant, *Tychone* ipso teste, aliquantum vitiosa, et meridiana linea nondum satis accurate descripta. Verificatione autem organorum astronomicorum et meridianae lineae peracta, obseruationes melioris notae circa Polarem stellam et Regulum mense Martio eiusdem anni institui coeptae sunt, quas itaque ad sequentem calculum adhibiturus sum, easque praecipue, de quibus *Tycho* ipse bene existimauit.

Obseruata nempe fuit Wandesburgi medio mense Martio anni 1598. altitudo apparens meridiana Reguli 50°. 19′. 10″, eodemque organo per idem tempus altitudo apparens meridiana Polaris stellae infra Polum 50°. 44′. 0″.

Posita igitur ex nostris obseruationibus supra exploratis declinatione Reguli media ad 1. Ian. 1748. 13°. 11′. 10″.3 bor. prodibit ob praecessionem Reguli mediam in declinationem inde a medio Martio 1598. vsque ad 1. Ian. 1748. 42′. 19″.7 austrum versus, declinatio Reguli media ad medium mensem Martium 1598. 13°. 53′. 30″,0. Deuiatio autem Reguli in declinationem cum sit ad istud tempus 2″. 3 boream versus, et aberratio in declinationem 5″. 3 austrum versus, emerget declinatio apparens Reguli ad medium Martium 1598. 13°. 53′. 27″. 0.

Eodem modo declinatio apparens Polaris stellae ad tempus obseruationum *Tychonicarum* circa hanc stellam Wandesburgi habitarum definitur. Declinatio enim media stellae Polaris ad 1. Ian. 1748. supra inuenta est 87°. 57′. 22″. 2 bor. a qua si subtrahantur 49′. 34″. pro prae-

praeceſſione media Polaris ſtellae in declinationem a medio menſe Martio 1598. vsque ad 1. Ian. 1748, reſtat declinatio media Polaris ſtellae ad medium menſem Martium 1598. 87°. 7′. 48″, 2, quae aucta 3″. 4 pro deuiatione ſtellae Polaris in declinationem boream verſus, et 1″. 4 pro aberratione huius ſtellae itidem boream verſus, dat declinationem apparentem Polaris ſtellae ad idem tempus 87°. 7′. 53″, ſiue diſtantiam eius apparentem a Polo Aequatoris boreo 2°. 52′. 7″.

Addendo igitur diſtantiae apparenti Polaris ſtellae a Polo nunc inuentae diſtantiam apparentem Reguli ab eodem Polo 76°. 6′. 33″, prodibit ſumma complementorum declinationum apparentium Reguli et Polaris ſtellae 78°. 58′. 40″; a qua ſi ſubtrahantur 50″ pro refractione ſtellae Polaris, et 51″ pro refractione Reguli, habebimus ſummam diſtantiarum apparentium meridianarum Reguli et Polaris ſtellae a vertice Wandesburgenſi ad medium Martium 1598. 78°. 56′. 59″. Diſtantia autem apparens meridiana Polaris ſtellae a vertice Wandesburgenſi tunc a *Tychone* obſeruata fuit 39°. 16′. 0″, et diſtantia apparens meridiana Reguli ab eodem vertice 39°. 40′. 50″; ita vt ſumma diſtantiarum meridianarum obſeruatarum a vertice Wandesburgenſi ſit 78°. 56′. 50″, adeoque error quadrantis *Tychonici* ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendus 4″½, quo detecto, ad calculum ipſum Eleuationis Poli Wandesburgi progredi poſſumus.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Altitudo meridiana apparens ſtellae Polaris infra Polum a *Tychone* Wandesburgi obſeruabatur | 50°. | 44′. | 0″ | |
| Subductis pro errore quadrantis - - - - - | | | 4. | 5 |
| Remanebit altitudo merid. apparens minima correcta - - - - - - - | 50. | 43. | 55. | 5 |
| Subtrahendo refractionem - - - - - - - | | | 50. | |
| Prodit altitudo merid. minima errore quadr. et refractione corr. - - - | 50. | 43. | 5. | 5 |
| Diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo aequatur - - - - - - - - - - | 2. | 52. | 7. | 0 |
| Hinc Eleuatio Poli vera Wandesburgi - | 53. | 35. | $12\frac{1}{2}$. | |

Latitudine Wandesburgi in apricum prolata, facili iam negotio Latitudinem vrbis Hamburgenſis definire poſſumus. Obſeruaui enim, turrim Wandesburgenſem e templo quodam in media fere vrbe ſito ſpectatam 54°. 30′ a Septentrione Orientem verſus declinare. Diſtantia vero templi huius Hamburgenſis a turri Wandesburgenſi ex menſuris, quas in agro Hamburgenſi cepi, aequatur 1780. hexapedis Pariſ., ita vt ex hiſce datis et ex Latitudine Wandesburgi ſupra inuenta differentia Meridianorum Hamburgum inter et Wandesburgum prodeat 2′. 34″. Aequat. ſiue $10\frac{1}{4}$″ temp. Elevatio Poli vera autem Hamburgi 53°. 34′. 8″.

Si iam Eleuationem Poli Hamburgi ex noſtro calculo deductam ad Latitudinem comparemus, quam Aſtronomi et Geographi vrbi huic aſſignarunt, patet, pleroſque Latitudinem Hamburgenſis vrbis iuſto maiorem feciſſe. Secundum mappas geographicas fere omnes

Latitudo

Latitudo huius vrbis tertia circiter vnius gradus parte praecedentem determinationem ſuperat. *Keplerus* Latitudinem hanc $8\frac{2}{3}$ min. prim., *Caſſini* $7\frac{2}{3}$ min. prim. et *Tycho* $\frac{1}{3}$ min. prim. circiter iuſto maiorem admittunt. Cl. *Iungius*, *Fabricium* adiutorem habens, cum de Latitudine Hamburgenſis vrbis accurate determinanda cogitaret, ſaeculo proxime praeterlapſo negotium hocce binorum organorum aſtronomicorum pinnacidiis munitorum et in Anglia confectorum beneficio peragendum ſuſcepit. Latitudo autem, quam *Iungius* ex ſuis obſervationibus, quarum ſingula non perſcripſit, vrbi huic aſſignat, $6\frac{2}{3}$ min. prim. noſtram determinationem ſuperat: Cl. *Kirchium* vero proxime ad noſtrum calculum accedere, ex eius diſſertatione de hocce argumento conſcripta, et Miſcell. Berol. inſerta, facile demonſtrari poteſt; ſed nihil eſt, quod diutius in hac diſquiſitione moremur; magis intereſſet Longitudines ſpecularum aſtronomicarum *Tychonicarum* nunc eodem praeciſionis gradu, quo Latitudines, inueſtigare atque ſtabilire, ſed hanc diſquiſitionem ad aliud tempus reiicimus. Sufficiat hic tanquam in tranſitu monuiſſe, Cl. *Kirchium* ex obſeruata Eclipſi ſolari differentiam Meridianorum Hamburgum inter et Berolinenſe Obſeruatorium, determinaſſe $12'.45''$. temp. ita vt ex hac obſeruatione et praecedenti calculo differentia Meridianorum Berolinenſis Obſeruatorii et ſpeculae aſtronomicae *Tychonicae* Wandesburgenſis ſit $12'.35''$ temp. ſiue Longitudo Wandesburgi $27°.57\frac{1}{2}'$.

Diſquiſitione Latitudinum ſpecularum aſtronomicarum *Tychonicarum* ad exitum perducta, promiſſo teneor, eas exhibere obſeruationes, quas ad Latitudinem Pariſienſis Obſeruatorii Regii indagandam ſumma diligentia inſtitui. Obſeruationes iſtae non ſolum inſeruient probandis declinationibus fixarum, quas ex obſeruationibus eodem inſtrumento in Pariſienſi Obſeruatorio a me habitis deduxi, quarumque nonnullas ad praecedentes calculos adhibui; verum etiam ad exiles illas differentias, quae in Latitudine famoſiſſimi huius Obſeruatorii obuiae ſunt, diiudicandas atque dirimendas, non inutiles erunt.

## Obſeruationes aſtronomicae ad Latitudinem Obſeruatorii Regii Pariſienſis definiendam habitae Anno 1748. ſt. n.

Sequentes obſeruationes circa Polarem ſtellam exquiſiti quadrantis tripedalis radii ſuper linea meridiana in pauimento turris occidentalis Obſeruatorii Pariſienſis deſcripta collocati beneficio ad lumen crepuſculare et diurnum, nullo lumine peregrino fila teleſcopii colluſtrante, inſtitutae ſunt.

| | | |
|---|---|---|
| d. 11. Ian. obſeruaui altit. merid. appar. Polaris ſtellae ſupra Polum | - | 50°. 53′. 45″. 7 |
| 14. Ian. | - - - - - - - - - | 50. 53. 42. 6 |
| 26. Ian. | - - - - - - - - - | 50. 53. 44. 8 |
| 30. Ian. | - - - - - - - - - | 50. 53. 43. 9. |

Cum obſeruationes hae diuerſis diebus habitae ſunt, conferri inuicem commode nequeunt, niſi omnes ad vnum eundemque diem ſecundum praeceſſionis, deviationis

viationis et aberrationis leges reducantur. Quam ob rem praecessionem, deuiationem et aberrationem Polaris stellae in declinationem ad dies obseruationum supra notatos supputaui, et in sequenti tabula exhibui, vt harum correctionum ope obseruatae altitudines meridianae Polaris stellae ad 1. Ian. 1748. reduci queant.

Praecessio Polaris stellae in declinationem.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a 1. Ian. 1748. vsque ad | 11. Ian. | 0″.5 | Bor. versus |
| | 14. - - - | 0 7 | |
| | 26. - - - | 1. 4 | |
| | 30. - - - | 1. 6 | |

Deuiatio stellae Polaris in declinationem.

| | | |
|---|---|---|
| ad 1. Ian. 1748. | 5″.7 | Bor. versus |
| 11. - - | 5. 8 | |
| 30. - - | 5. 9 | |

Aberratio stellae Polaris in declinationem aequatur

| | | |
|---|---|---|
| d. 1. Ian. 1748. | 19″.9 | Bor. versus |
| 11. - - | 19. 5 | |
| 14. - - - | 19. 3 | |
| 26. - - - | 17. 8 | |
| 30. - - - | 17. 1 | |

Erit igitur altitudo meridiana obseruata Polaris stellae supra Polum deuiatione et aberratione correcta et ad 1. Ian. 1748. reducta

| | |
|---|---|
| Ex 1ma oseruatione - - - | 50°. 54′. 11″.5 |
| 2da - - - - - - - | 50. 54. 8. 4 |
| 3tia - - - - - - - | 50. 54. 9 9 |
| 4ta - - - - - - - | 50. 54. 8. 5 |
| Per medium igitur inter istas obseruationes | 50. 54. 9. 6 |

Eodem quadrante eodemque in loco altitudinem meridianam Polaris stellae infra Polum quantum potui accura-

accuratissime obseruaui, eamque d. 27. Maii 1748. coelo eximie sereno ad lumen crepusculare plus vice simplici inueni 46°. 48′. 55″.

Cum vero praecessio media Polaris stellae in declinationem a d. 1. Ian. 1748. vsque ad 27. Maii sit 7″. 9. boream versus, deuiatio autem huius stellae in declinationem d. 27. Maii 1748. 6″. 3 itidem boream versus, et eius aberratio in declinationem die notato 16″. 9. austrum versus, prodibit altitudo meridiana obseruata stellae Polaris infra Polum deuiatione et aberratione correcta et ad 1. Ian. 1748. reducta 46°.48′.57″.7.

Antequam vero in supputandis hisce obseruationibus vlterius progrediar, de iis dicendum erit obseruationibus, quarum beneficio quadrantis huius verificatio peracta fuit. Quadrante hoc per inuersionem ad Horizontem iam verificato, restabat, vt eius verificatio ad Zenith more consueto institueretur; quae cum sit difficillima, omnia prouidi praecauique, vt negotium hocce bene sub manus succederet, lucidae Persei beneficio proxime ad Zenith Parisiense accedentis.

Plano itaque quadrantis tripedalis radii supra memorati summa cura verticaliter super famosissima meridiana linea marmorea obseruatorii Regii Parisiensis collocato, sequentes altitudines meridianae $\alpha$ Persei ad lumen diurnum mihi et Celeb. *le Monnier* coniunctis obseruatae sunt:

Facie

Facie quadrantis Orientem spectante,

D. 16. Februarii 1748. 90°. + 6′. 59″. 7
17. - - - - - - + 7. 3. 5
20. - - - - - - - + 7. 1. 0

Facie quadrantis Occidentem spectante,

D. 21. Febr. 1748. 90°. − 5′. 59″. 1. accuratiss. coelo grate sereno.

Vt summam seruarem praecisionem in supputandis comparandisque eiusmodi obseruationibus vsitatam, sequentes supputaui correctiones, reducendis altitudinibus meridianis supra notatis inseruientes:

Praecessio media α Persei in declinationem

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ad 1. Ian. 1748. vsque ad 16. Febr. | 1″. 9 | Bor. versus | |
| 17. - | 1. 9 | | |
| 20. - - | 2. 0 | | |
| 21. - - | 2. 0 | | |

| Deuiatio α Persei in declinationem | | | Aberratio α Persei in declinationem | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ad 1. Ian. 1748. | 8″. 3 | Bor. versus | d. 1. Ian. 1748. | 10″. 9 | Bor. versus |
| 21. Febr. - - | 8. 2 | | 16. Febr. - - | 9. 5 | |
| | | | 17. - - - | 9. 4 | |
| | | | 20. - - | 9. 1 | |
| | | | 21. - - - | 9. 0 | |

Adhibitis itaque hisce correctionibus, ad reducendas altitudines meridianas α Persei supra exhibitas, habebimus:

Distantiam meridianam obseruatam α Persei a vertice Obseruatorii Reg. Paris. deuiatione et aberratione correctam et ad 1. Ian. 1748. reductam,

| | | | |
|---|---|---|---|
| ex 1ma obseruatione | 6'.40''1. | bor. versus | Limbo quadrantis ad Orient. obverso. |
| 2da - - - - | 6. 44. 0 | - - | |
| 3tia - - - | 6. 41. 7 | - - | |
| Per medium igitur inter hasce obseruationes - | 6. 41. 9 | bor. versus | |
| ex 4ta obseruatione | 5. 39. 9 | bor. versus. | Limbo quadrantis ad Occid. obverso. |
| Differentia | 1. 2. | | |

Prodibit igitur distantia media merid. $\alpha$ Persei a vertice Obseruatorii Reg. Parisiensis ad 1. Ian. 1748 6'. 10''. 9 boream versus, adeoque error quadrantis circa Zenith ab altitudinibus obseruatis subtrahendus 31''. Cum vero eiusdem quadrantis error, per alteram inuersionem, circa Horizontem institutam, inuentus sit vix duobus minutis secundis minor, assumere possumus 30''. pro errore huius quadrantis ad obseruationes nostras corrigendas constanter adhibendo, modo limbi diuisio huius quadrantis nullo errore sit inquinata.

Restat nunc, vt refractiones, quibus ad corrigendas obseruationes Polaris stellae supra relatas vtendum est, quantum possumus, accuratissime stabiliamus. Ad hoc efficiendum notandum est, altitudinem Mercurii in Barometro diebus illis, quibus Polarem stellam mense Ianuario supra Polum obseruaui, eandem ferme fuisse, quae d. 27 Maii, quo altitudinem Polaris stellae minimam cepi, obseruabatur, vtroque nimirum tempore fere summam; temperiem contra aëris maxime diuersam, existente differentia 40. fere grad. Thermometri *De l'Islinni*; quae

quae temperiei aeris differentia ſecundum noſtras obſeruationes Petropoli et in Inſula Oſilia habitas, in refractione pro altitudine Polari Pariſienſi differentiam 3″. minimum procreare valet. Poſita igitur refractione pro altitudine Polaris ſtellae maxima Ianuario menſe in Obſeruatorio Reg. Pariſienſi obſeruata 49″, refractio, quae altitudini ſtellae Polaris minimae menſe Maio Pariſiis obſeruatae conuenit, 53″. ſuperare non poteſt. Hiſce admiſſis, calculus Eleuationis Poli Obſeruatorii Regii Pariſienſis ſequenti modo perficitur:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Altit merid. obſeruata ſtellae Polaris deuiatione et aberratione correcta ad 1. Ian. 1748. eſt - - - - | ſupra Polum | 50°. | 54′. | 9″. | 6 |
| | infra Polum | 46. | 48. | 57. | 7 |
| Error quadrantis - - - - - - - - | | —0. | 0. | 30 | - |
| Refractio - - - - - | pro alt. max. | — 0. | 0. | 49 | - |
| | pro alt. min. | — 0. | 0. | 53 | - |
| Altit. merid. med. ſtellae Polaris correcta - - | ſupra Polum | 50. | 52. | 50. | 6 |
| | infra Polum | 46. | 47. | 34. | 7 |
| Differentia - - - - - - - - - - - | | 4. | 5. | 15. | 9 |
| Diſtantia media ſtellae Polaris a Polo - | | 2. | 2. | 37. | 9 |
| Altit. merid. med. ſtellae Polaris infra Polum | | 46. | 47. | 34. | 7 |
| Eleuatio Poli vera Obſeruatorii Regii Pariſ. | | 48. | 50. | 12½. | |

## Latitudinis Obſeruatorii Regii Berolinenſis determinatio.

Obſeruationes, quas ad Latitudinem Berolinenſis Obſeruatorii ſtabiliendam, in loco quodam, ab Obſeruatorio ipſo 1″. boream verſus remoto, peregi, quadrantis tri-

 peda-

pedalis radii summa diligentia meo ductu Parisiis confecti, et duplici limbi diuisione instructi, beneficio, institutae sunt. Perspecta nempe huiusce quadrantis praestantia atque praecisione, praesertim in limbi eius diuisione, examinatoque axis tubuli ad quadrantem hunc applicati parallelismo, planum huiusce organi super linea meridiana accurate descripta verticaliter collocaui, et sequentes altitudines et Polaris stellae, et oculi Draconis, Latitudinis Berolinensis Obseruatorii definiendae et quadrantis verificandi gratia, summa qua potui accuratione obseruaui.

Altitudines stellae Polaris meridianae infra Polum ad Lumen crepusculare et diurnum An. 1750 Berolini obseruatae.

| | | |
|---|---|---|
| D. 24. Maii st. n. | 50° 30′. 27″. 4 | Coelo eximie sereno atque placido. |
| 25. - - - | 50. 30. 25. 2 | |
| 30. - - - | 50. 30. 23. 6 | |
| 1. Iunii - - | 50. 30. 27. 4 | |

Vt harum obseruationum comparatio accuratius commodiusque institui possit, obseruationes hasce omnes ad primum diem Ianuarii An. 1750 st. n. reducere iuuat. Correctiones autem ad istam reductionem adhibendae sequentes sunt:

Praecessio media Polaris stellae in declinationem

| | | |
|---|---|---|
| Ad 1 Ian. 1750 vsque ad d. 24. Maii | 7″. 2 | Bor. versus |
| 25. - - | 7. 3 | |
| 30. - - | 7. 5 | |
| 1. Iun. | 7. 6 | |

Deuiatio stellae Polaris in declinationem

| | | |
|---|---|---|
| Ad 1. Ian. 1750 - - | 6″. 9 | Bor. versus |
| 1. Iunii - - - - | 6. 7 | |

Aber-

Aberratio Polaris stellae in declinationem

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ad 1. Ian. 1750. - - | 19″. 8 | Bor. versus | |
| 24. Maii - - - - | 16. 1 | Austrum versus. | |
| 25. - - - - - - - | 16. 3 | | |
| 30 - - - - - - - | 17. 2 | | |
| 1 Iunii - - - - | 17. 5 | | |

Reductione facta habebimus altitudinem meridianam obseruatam Polaris stellae infra Polum deuiatione et aberratione correctam et ad 1 Ian. 1750. reductam,

| | |
|---|---|
| ex 1ma obseruatione - - | 50°.30′.29″.6 |
| 2da - - - - - - - | 50 30. 27. 5 |
| 3tia - - - - - - - | 50. 30. 26. 6 |
| 4ta - - - - - - - | 50. 30. 30. 6 |
| Per medium igitur inter istas obseruationes | 50 30. 28. 6 |

Ad errorem quadrantis, cuius beneficio praecedentes obseruationes habitae sunt, explorandum, sequentem institui verificationem, per inuersionem huius instrumenti circa Zenith, summa cura Berolini peractam; obseruaui nempe

Facie quadrantis Occidentem spectante,
An. 1750 d. 23 Iul. st. n. Altitud. merid.

| | |
|---|---|
| appar. β Draconis - | 90°+122″.0 |
| 26. - - - - - - - - - | +120. 7 |
| 27. - - - - - - - - - | +118. 2 |
| 28. - - - - - - - - - | +120. 1 |

Facie quadrantis in Orientem conuersa,
An. 1750 d. 10. Aug. st. n. Altit. merid.

| | |
|---|---|
| appar. β Draconis - - | 90°−32″.5 |
| 13. Aug. - - - - - - - | −30. 3 |

Concinnandis comparandisque hisce altitudinibus β Draconis obseruatis, inseruient sequentes correctiones declinationis huius stellae:

| Praecessio media β Drac. annua in declinationem 3″. 1. austrum versus | Deuiatio β Draconis in declinationem pro tempore obseruationum praecedentium, 1″. 3 austr. versus. |
|---|---|

Aberratio β Draconis in declinationem

| | | | |
|---|---|---|---|
| ad d. 23. Iulii 1750. | - - - - | 11″. 7 | Boream versus |
| 26. | - - - - - - - - | 12. 5 | |
| 27. | - - - - - - - - | 12. 8 | |
| 28. | - - - - - - - - | 13. 0 | |
| 10. Aug. | - - - - - - | 15. 7 | |
| 13. Aug. | - - - - - - | 16. 2 | |

Ratione harum correctionum habita, prodibit altitudo meridiana obseruata β Draconis aberratione et deuiatione correcta, et ad 1 Ian. 1750. reducta,

Limbo quadrantis ad Occident. conuerso:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ex obseruat. d. 23. Iul. | - - - - | $90° + 130''. 7$ | |
| | 26. | - - - - - - | $+ 130. 1$ |
| | 27. | - - - - - - | $+ 127. 9$ |
| | 28. | - - - - - - | $+ 130. 0$ |
| Per medium igitur | - - - - - | $90° + 129''. 7$ | |

Limbo quadrantis in Orientem conuerso:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ex obseruatione d. 10. Aug. | - - - - | $90° - 45''. 0$ | |
| | 13. | - - - - - - - | $- 43. 3$ |
| Per medium itaque | - - - - - - | $90° - 44. 1.$ | |

Hinc

Hinc distantia med. mer. β Draconis
a Vertice Berol. in primo situ quadr. 2′. 9″. 7 Austr. vers.
- - - in altero situ quadrantis 0. 44. 1 Austr. vers.

Differentia, siue duplus quadrantis error
circa Zenith - - - - - - 1. 25. 6
Error quadrantis simplex ab altitudi-
nibus obseruatis subtrahendus - - 42. 8, et
Distantia media meridiana β Draconis
a Vertice Berolinensi - - -
ad 1. Ian. 1750. st. n. - - - 1′. 26″. 9 Austr. vers.

Eiusdem quadrantis verificatione more solito per inuersionem circa Horizontem Berolini caute peracta, inueni Altitudines circa Horizontem captas per hunc quadrantem 41″. 6 iusto maiores exhiberi, ita vt tuto statuere possimus arcum huiusce quadrantis 90 graduum iustae esse amplitudinis, totumque errorem huius organi ab altitudinibus obseruatis subtrahendum constanter aequari 42″.

Hisce praemissis Eleuatio Poli Obseruatorii Berolinensis sequenti ratione ex nostris obseruationibus definitur:

Alt. mer. Polar. stellae infra Polum obseru.
deuiatione et aberrat. corr. et ad obseru.
Ber. et 1 Ian. 1750 reducta est - - 50°. 30′. 27″. 6
A qua si subtrahatur error quadrantis - - - - - 42

Restat altit. merid. med. Pol. stellae infra
Pol. correcta et ad 1 Ian. 1750 reducta 50. 29. 45. 6
Dempta refractione aestiua - - - - - 46.

Rema-

Remanet altit. mer. med. Pol. ſtéllae infra
Polum errore quadr. et refractione cor-
recta ad 1 Ian. 1750. - - - - - 50. 28. 59. 6
Cui ſi addatur diſtantia med. Polaris ſtellae
a Polo ex obſeruationibus noſtris Pariſ.
ad 1 Ian. 1750. reducta - - - - - 2. 1. 58. 5

Prodibit Eleuatio Poli vera Obſeruatorii
Regii Berolinenſis - - - - - - 52. 30. 58.

Eleuationem Poli Berolinenſis Obſeruatorii hac occaſione alia methodo demonſtrare atque comprobare, a praeſenti diſquiſitione alienum fore non exiſtimo. Methodus autem, qua nunc vtar, nititur aequalibus fere altitudinibus meridianis Polaris ſtellae et Reguli Berolini vno eodemque quadrante obſeruatis. Obſeruaui nempe Berolini in loco ſupra iam deſcripto An. 1750. d. 15. Maii ſt. n. ſole lucente, altitudinem meridianam apparentem Reguli quam potui accuratiſſime 50°.40′.48″.1. Cum vero praeceſſio media Reguli in declinationem a d. 1 Ian. 1750. ad d. 15 Maii ſit 6″.0 auſtrum verſus, deuiatio Reguli in declinationem d. 1 Ian. 1750. 4″.9, et d. 15 Maii 5″.5 auſtrum verſus, et aberratio huius ſtellae in declinationem d. 1 Ian. 1750. 4″.9, et d. 15 Maii 0″.1 itidem auſtrum verſus, prodibit altitudo meridiana apparens Reguli ad d. 1 Ian. 1750 reducta 50°.40′.49″.9.

Altitudo meridiana apparens Polaris ſtellae infra Polum ad idem tempus, ſecundum obſeruationes Berolinenſes ſupra exhibitas, aequatur 50°. 30′. 55″. 3; ita vt ſubtractis ab vtraque altitudine 46″. pro refractione, ſumma

ſumma diſtantiarum meridian. obſeruatarum Reguli et Polaris ſtellae a vertice Berolinenſi ad 1 Ian. 1750. ſit 78°. 49′. 45″. 8.

Declinatio Reguli media ex noſtris obſeruationibus in Obſeruatorio Reg. Pariſ. habitis ad d. 1 Ian. 1748. ſupra inuenta eſt 13°. 11′. 10″. 3 bor. Habita itaque praeceſſionis, deuiationis et aberrationis ratione, habebimus declinationem Reguli apparentem ad 1. Ian. 1750. 13°. 10′ 26″. 2, ſiue eius complementum 76°. 49′. 33″. 8.. Diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo ad idem tempus ex memoratis obſeruationibus colligitur 2°. 1′. 31″. 8, ita vt ſumma diſtantiarum merid. apparentium Polaris ſtellae et Reguli a vertice Berolinenſi ad 1 Ian. 1750. ſit 78°. 51′. 5″. 6, quae comparata cum ſumma diſtantiarum merid. obſeruatarum Reguli et Polaris ſtellae a vertice Berolinenſi ad d. 1 Ian. 1750. 78°. 49′. 46″. 8, dat errorem quadrantis ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendum 39″. 4. Quare ſic abſoluetur calculus:

| | |
|---|---|
| Altit. merid. Reguli interdiu Berolini obſeruata et ad Obſeruatorium Berolinenſe et 1 Ian. 1750 reducta eſt | 50°. 40′. 50″. 9 |
| Error quadrantis ſubtrahendus - - - - - | 39. 4 |
| Altit. merid. appar. Reguli ad 1 Ian. 1750 errore quadr. correcto - | 50. 40. 11. 5 |
| Refractio aeſtiua ſubtrahenda - - - - | 46. |
| Altit. merid. Reguli errore quadrantis et refractione correcta - - - | 50. 39. 25. 5 |

Declinatio apparens Reguli ex obſervationibus noſtris Pariſ. collecta et ad d. 1 Ian. 1750 reducta - - - 13° 10'.26".2

Eleuatio Aequatoris vera Obſeruatorii Regii Berolinenſis - - - - 37. 28. 59. ſiue
Eleuatio Poli vera - - - - - - 52. 31. 1.

Egregius hicce conſenſus praeſentis calcu i cum praecedenti Eleuationis Poli Berolinenſis Obſeruatorii determinatione noſtrarum obſeruationum in hac diſſertatione relatarum, et concluſionum exinde deductarum accurationem mirifice comprobat, eoque rem adducit, vt certiſſime ſtabilire poſſimus Eleuationem Poli Obſervatorii Berolinenſis 52°.31'.0".

OBSER-

# OBSERVATIONES LVNARES CORRESPONDENTES IN INSVLA OSILIA HABITAE ANNO 1752.

Auctore

A. N. GRISCHOW.

| | | |
|---|---|---|
| | Temp. Pend. Astr. | |
| d. $\frac{14}{25}$ Oct. | $0^h. 9'. 26''$ | App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox. |
| | $5. 45. 29\frac{1}{2}$ | App. α Aquilae ad fil. vert. Merid. prox. |
| Per nubes vento SSW vehemente. | $11. 45. 29\frac{1}{2}$ | Alt. β ♈ = $51°.20' + \frac{1}{3}$ fil. + $0^R.71^P$. |
| | $11. 47. 1$ | App. dubius β ♈ ad fil. vert. Mer. prox. per nubes |
| | $48. 26$ | Alt. β ♈ = $51°.20' + \frac{1}{3}$ fil. + $0^R.68^P$. |
| Per nubes post culminationem centri Lunae. | $14^h. 52'. 37\frac{1}{2}''$ | Alt. marg. ☽ae bor. = $51°.26 + \frac{1}{3}$ fil. + $0^R.70^P$. |
| | $52. 59$ | - - - - - - - - - 0. 70 |
| | $15^h. 28'. 21''$ | App. ρ ♉ ad fil. vert. Mer. prox. |
| Per nubes | $28. 59\frac{1}{2}$ | Altit. ρ ♉ = $52°.40' + 1^R.87\frac{1}{4}^P$. |
| | $29. 51$ | - - - - - - 1. 91 |
| | $30. 22$ | - - - - - - 1. $83\frac{1}{2}$ |
| d. $\frac{15}{26}$ Oct. | $0. 10. 31\frac{1}{2}$ | App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox. intra $\frac{1}{2}''$ dubius |

 Temp.

Temp Pend. Astr.

d. $\frac{26}{5}$ Oct./Nov. $0^{h}.15'.37\frac{3}{4}''$ Merid. verus ex 9 altitudin. ☉ respond.
$0.15.34.6$ App. centri ☉ obseruat. ad fil. vert. Merid. prox.

$0.0.3''$ = diff.

d. $\frac{9}{19}$ Nov. $0^{h}.25'.43''$ Merid. verus ex 6 altudin. ☉ respond.
$0.25.42.$ App. obseruat. centri ☉ ad fil. vert. Merid. prox.

$8^{h}.42'.51''$. Alt. γ Pegasi $= 45^{\circ}.30' + 2^{R}.36\frac{1}{3}^{P}$.
43. 32 - - - - - - - 2. $36\frac{3}{4}$.
Per nubes ten. 44. $9\frac{2}{3}$ App. ad fil. vert. Merid. prox.
45. $17\frac{2}{3}$ Altit. - - - - 2. 35
$10^{h}.53'.38\frac{1}{3}''$ Alt. marg. ☽ae austr. $= 45^{\circ}.0' + \frac{3}{4}$fil. $+ 1^{R}.79^{P}$.
53. 58 - - - - - - - - - - 1. 82
54. $12\frac{2}{3}$ App. 1 limbi ☽ae ad fil. vert. Mer. prox.
54. 48 Altit. - - - - - - - + 1. 84
55. $4\frac{1}{2}$ - - - - - - - - - 1. 87
55. 24 - - - - - - - - - 1. $87\frac{1}{2}$
55. 43 - - - - - - - - - 1. 92
55. $58\frac{1}{2}$ - - - - - - - - - 1. 95
56. $13\frac{1}{2}$ - - - - - - - - - 1. 97
56. 32 - - - - - - - - - 1. 98
56. 47 - - - - - - - - - 2. 2
57. 5 - - - - - - - - - - 2 4
$11^{h}.24'.$ 0 Diam. app. ☽ cornua transf. Micr. Grah. $35^{R}.4^{P}$.
11. 29. 0 - - - - - - - - - 35. $5\frac{1}{2}$
11. 34. 0 - - - - - - - - - 35. 6

d. $\frac{10}{21}$ Nov. $0^{h}.26'.21\frac{1}{2}''$ App. 1 limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox. circiter
Per nubes ten. 28. $41\frac{1}{2}$ App. 2 limbi ☉lis - - - - - prox.

Temp.

Temp. Pend. Astr.

d. $\frac{11}{21}$ Nov. $13^h.54'.24''$ Alt. marg. ☽ae bor $= 51^{\circ}.20' + \frac{1}{4}$ fil. $5^R.23^P$.
Accurata

56. 11 App. 2di limbi ☽ ad fil. vert. Merid. prox.
intra 1 vel 2'' dub.

Plures altit. ☽ae capere propter nubes non licuit.

Altit. merid. β ♈ cum altit. merid. ☽ae hodierno die obseruata comparanda ex obseruatis d. $\frac{14}{24}$ Oct. colligi potest.

d. $\frac{14}{24}$ Nov. $16^h.54'.22\frac{1}{2}''$ Alt. marg. ☽ae austr. $= 44^{\circ}.20' - 2^R.47^P$.

54. 53 - - - - - 2. 54
55. 9 - - - - - 2. 57
55. 30 - - - - - 60
55 44 - - - - - - $63\frac{1}{2}$
55 $58\frac{1}{2}$ - - - - - - 64
56 15 - - - - - - 64
56. $30\frac{1}{2}$ - - - - - - 64
56. 42 App. 2di limbi ☽ae ad fil. vert. Mer. prox.
57. $4\frac{1}{2}$ Altit. - - - - 2. $69\frac{1}{2}$
57. 24 - - - - - 2. 72

$17^h.35'.$ 0'' Diam. ☽ae app. cornua transf. Micr. Grah. $= 35^R.31\frac{1}{2}^P$.

39. 0 - - - - - 32
43. 0 - - - - - $32\frac{1}{2}$

$18^h.17'.21''$ Altit. α ♌ $= 45^{\circ}.0' - 1^R.96\frac{1}{2}^P$.

17. 34 App. α ♌ ad fil. vert. Merid. prox.
17. $58\frac{1}{2}$ - - - 1. 95.
18. 20 - - - 1. 94
18. 57 - - - $1.94\frac{1}{2}$.

Temp Pend. Astr.

d. $\frac{15}{26}$ Nov. $3^{h}.59'.43''$ App. $\alpha$ Aquilae ad fil. vert. Merid. prox.
Per nubes 4. 0. 9 Altit. $\alpha$ Aquilae $=40^{\circ}.0'+0^{R}.40^{P}$.
tenues 0. 40 - - - - 41
1. 5 - - - - 42
1. 30 - - - - 42
$15^{h}.31'.46''$ Alt. $\beta$ can. min. $=40^{\circ}.30'-\frac{1}{3}$fil. $+1^{R}.12^{P}\frac{1}{2}$.
32. 43 - - - - - 1. 14
33. $9\frac{1}{2}$ App. $\beta$ can. min. ad fil. vert. Merid. prox.
33. 48 Altit. - - - - 1. 12
34. 13 - - - - - 1. $11\frac{1}{2}$
34. 45 - - - - - 1. $11\frac{1}{2}$
Per inter- $17^{h}.48'.26''\frac{1}{2}$ Alt. marg. ☽ae austr. $=40^{\circ}.0'-\frac{1}{3}$fil. $-0^{R}.27^{P}\frac{1}{2}$.
valla luci- 50. 33 - - - - - 0. 49
da. 51. $8\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☽ ad fil. vert. Merid. prox. circiter

d. $\frac{16}{27}$ Nov. $0^{h}.31'.50''\frac{2}{3}$ App. $1^{mi}$ limbi ⊙ ad fil. vert. Merid. prox.
34. $11\frac{1}{3}$ App. 2di limbi ⊙ ad fil. vert. Merid. prox.

d. $\frac{24}{5}$ Nov. Dec. $0^{h}.35'.55''\frac{1}{3}$ App. 1mi limbi ⊙ ad fil. vert. Merid. prox.
38. $15\frac{2}{3}$ App. 2di limbi ⊙lis ad idem filum

1753. Indicibus Penduli astron. ad horam aestimatam dispositis.

d. $\frac{8}{19}$ Ian. $11^{h}.49'.23''$ App. 2di limbi ⊙ ad fil. vert. Mer. prox.

d. $\frac{2}{13}$ Febr. $0^{h}.0'.56''\frac{3}{4}$ Meridies verus ex 7 altit. ⊙lis respond.
eod. $8^{h}.0'.23''$ Alt. marg. ☽ae bor. $=51^{\circ}.0'-\frac{5}{12}$fil. $+2^{R}.29^{P}$.
0. $46\frac{1}{2}$ - - - - - 2. $25\frac{1}{2}$

Temp.

Temp. Pend. Astr.

1. 5 App. 1 limbi ☽ ad filum vert. Merid. prox.

Coelo sub sereno

1. 29. Altit. - - +2. 24
2. 1 - - - - 2. 26
2. 28 - - - - 2. 24
2. 51 - - - - 2. 26
3. 24 - - - - 2. 23½
3. 47 - - - - 2. 21½

$16^h. 12'. 56''$ Altit. Arcturi = $52°. 10'$ − ½ fil. + $2^R. 27^P$½.

14. 6 App. Arcturi ad fil. vert. Merid. prox. intra ½'' dubius

15. 21 Altit. - - - - 2. 28
15. 46 - - - - - 2. 28

d. $\frac{4}{15}$ Febr. $0^h$. $1'. 10''$½ App. 1mi limbi ⊙ ad fil vert. Mer. prox.

3. 23½ App. 2di limbi ⊙ ad idem filum.

d. $\frac{9}{20}$ Febr. $11^h$. $1'. 54''$ {1'½ circiter ante culmin} Altitud. α Hydrae = $24°. 10'$ − ½ fil. + $0^R. 73^P$½.

Paulo post culmin. per intervalla serena. {
4 46 - - - - - - 0. 76
5. 2 - - - - - - 0. 74
}

$14^h. 40'. 43''$ Alt. marg. ☽ austr. = $22°. 50'$ − ½ fil. − $5^R. 65^P$.

41. 8 - - - - - 5. 67
41. 31 - - - - - 5. 71
41. 49 - - - - - 5. 73½
42. 10 - - - - - 5. 77½
42. 34 - - - - - 5. 80
42. 54 - - - - - 5. 82½
43. 11 - - - - - 5 84½
43. 24 - - - - - 5. 86

Temp.

Temp. Pend. Astr.

43'. 36''$\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☽ ad fil. vert. Merid prox.

43. 54 Altit. - - - - - 5. 92$\frac{1}{2}$

15$^b$. 4'. 0 Diameter ☽ae app. cornua iungens Micr. Grab. = 34$^R$. 35$^P\frac{1}{2}$

9. 0 - - - - - - - 37

16. 0 - - - - - - - 35$\frac{1}{2}$

27. 0 - - - - - - - 36$\frac{1}{2}$

d. $\frac{10}{21}$ Febr. 0$^b$. 4'. 59''$\frac{1}{2}$ App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

7. 12$\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

eod. 0$^b$. 6'. 4''$\frac{8}{10}$ Merid. verus ex 5 altit. ☉ respond.

d. $\frac{11}{22}$ Febr. 0$^b$. 5'. 35'' App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox. dubius

7. 46$\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☉ ad idem filum

d. $\frac{12}{23}$ Febr. 8$^b$. 8'. 47''$\frac{1}{2}$ App. α Lyrae ad fil. vert. tubi muralis

eod. 16$^b$. 57'. 0'' Diameter ☽ae app. cornua transf. Micr. Grab. = 32$^R$. 36$^P\frac{1}{2}$

59. 0 - - - - - 39$\frac{1}{2}$

17. 0. 0 - - - - - 38$\frac{1}{2}$

2. 0 - - - - - 39

5. 0 - - - - - 39

d. $\frac{13}{24}$ Febr. 0$^b$. 7'. 47''$\frac{1}{2}$ Merid. verus ex 9. altit. ☉ respond.

0. 7. 48$\frac{1}{2}$ App. centri ☉ ad fil. vert. Merid. prox ex obseruatione

6. 42$\frac{1}{2}$ App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

8. 54$\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☉ ad idem filum.

Coelo eximie sereno 17$^b$. 6'. 0'' Diameter ☽ae apparens cornua transf. Micr. Grah. = 32$^R$. 19$^P\frac{1}{2}$.

8. 0 - - - - - 20$\frac{1}{2}$

11. 0 - - - - - 18$\frac{1}{2}$

12. 0 - - - - - 18.

Temp.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Temp. Pend. Astr. | | |
| | $17^h.23'.47''$ | Altit. $\beta$ ♏ $= 12^\circ.50' - \frac{1}{2}$ fil. | $- 2^R.97^P$. |
| sereno | 24. 9 | - - - - - | 2. $96\frac{1}{2}$ |
| | 24. 35 | - - - - - | 2. 96 |
| et | 25. 6 | - - - - - | 2. 97 |
| | 25. 18 | App. $\beta$ ♏ ad fil. vert. Merid. prox. | |
| aere | 26. 36 | - - - - | $3^R.\ 1^P$. |
| | $17^h.48'.25''\frac{1}{2}$ | App. $\alpha$ ♏ ad fil. vert. Merid. prox. | |
| tran- | $18^h.\ 5.\ 1''$ | Altit. marg ☽ae austr. $= 11^\circ.30'$ | $- 2^R.31^P\frac{1}{2}$ |
| | 5. 25 | - - - - - | 2. 34 |
| quillo | 5. 29 | - - - - - | 2. 34 |
| | 6. 12 | - - - - - | 2. 35 |
| | 6. 41 | - - - - - | 2. 34 |
| | 7. 3 | - - - - - | 2. $34\frac{1}{2}$ |
| | 7. 24 | - - - - - | 2. 35 |
| | 7. 40 | - - - - - | 2. $36\frac{1}{2}$ |
| | 7. $43\frac{1}{2}$ | App. 2di limbi ☽ae ad fil. vert. Merid. prox. | |
| | 8. 10 | Altit. - - - - | 2. 35 |
| | 8 28 | - - - - - | 2. 37. |
| d. $\frac{19}{8}$ Febr. Mart. | $7^h.46'.12''\frac{1}{2}$ | App. $\alpha$ Lyrae ad fil. vert. tubi muralis. | |

Error indicis Micrometri quadrantis triped. conſt. inuentus fuit in Inſul. Oſilia $= 5\frac{1}{2}^{Part.} = 7''\frac{1}{2}$, quibus altitud. ſiderum ſupra notatae augendae ſunt. Valor 10. Reuol. cochleae huius Micrometri aequatur $0^\circ.21'.1''\frac{1}{2}$ et latitudo fili penduli $= 9''\frac{1}{2}$. Error quadrantis eſt $40''$ ab altit. obſeruatis ſupraque notatis ſubtrahendus.

Error indicis Micrometri Grahami tubo 8 ped. applicati Arensburgi aequabat 20 partes ad diſtantias vel diametros obſeruatas addendas. Valor autem 30 Reuol.

 coch-

cochleae huius Micrometri, vel 1200 partium = 27'. 28''$\frac{1}{3}$. Diametri hoc Micrometro obseruatae supraque notatae errore indicis 20 partium corrigendae sunt omnes.

## Obseruationes Astronomicae exceptae ex Ephemerid. Astron. pro eruenda longitudine Obseruatorii Arensburg. ex obseruationibus, quas hunc in finem mecum communicauit Cel. *le Monnier*.

Obseruationes Cel. *le Monnier*.

1752. Sept. 24. $23^h. 53'. 18''$ Midi vrai par les hauteurs correspondantes du Soleil:

25 on a trouvé que $23^h. 55'. 42\frac{1}{2}'' = 360$. degrés à la Pendule.

26. $23^h. 56'. 5\frac{2}{3}''$ Pass. du centre du ☉, Midi vrai $23^h. 56'. 12\frac{1}{2}''$

27. 15. 45'. 33$\frac{1}{2}''$ — 2 bord de la Lune.
15. 48. 41$\frac{2}{3}$ — ε du Taureau.
15. 57. 36 — Aldebaran.
23. 55. 25 — Midi vrai.

## Obseruationes praecedentibus respondentes in Obseruat. Arensb. habitae 1752.

d. $\frac{13}{24}$. Sept. Meridies verus ex 5 Altitud. ☉ respond. — $23^h. 56'. 23''$ Pend.

d. $\frac{14}{25}$. Sept. $23^h. 57'. 53\frac{1}{4}''$ Pend. App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox.

dk.

d. $\frac{15}{26}$. Sept. $14^h$. Luna, et $16^h$ Palilicium per quadrant. obseruata fuere

d. $\frac{15}{26}$. Sept. $23^h. 58'. 9''$ Pend. App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox.

d. $\frac{16}{27}$. Sept. $6^h$. Lucida Lyrae in q. Merid. austr. et $13^h$. $\beta$ $\gamma$ per quadr. obseruat. fuere.

eod. $15^h.41'.36''$ Pend. Alt. marg. ☽. bor. $=50^\circ.30'+6^R.\ 4^P$.
42. 11 - - - - - - - - - - 6. 5
42. 39 - - - - - - - - - - 6. 8
43. 47 - - - - - - - - - - 6. 10
44. 1 - - - - - - - - - - 6. 14
15. 44. $12\frac{1}{4}$ App. 2di limbi ☽ae ad fil. vert. Merid. prox.

eod. $15^h\ 50'.39''$ Pend. Altit. ε ♉ $=50^\circ.30'-3^R.46^P$.
51. 28 - - - - - - - 3. 43
$15^h.52'.\ 9\frac{1}{4}''$ App. ε ♉ ad fil. vert. Merid. prox.
52. 44 Altit. - - - - - - - - - - 3. $44\frac{1}{2}$
53. 13 - - - - - - - - - - - 3. $42\frac{1}{2}$
53. 49 - - - - - - - - - - - 3. 44

eod. $16^h.25'$ Diam. ☽ae app. cornua iungens Micr. Grah. $=35^R.\ 14\frac{7}{12}^P$.

eod. $17^h$. ϱ Orion. $18^h$. α Lyrae in q. Merid. bor. obseruabantur.

d. $\frac{16}{27}$. Sept. $23^h.56'.16''$ Pend. App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Merid prox.
58. 25 - - - 2di limbi ☉ ad idem fil.

d. $\frac{17}{28}$. Sept. $23^h.57'.44\frac{1}{4}''$ Pend. Merid. verus d. $\frac{18}{29}$. Sept. ex 3. altit. ☉ respond.

Comparando obseruat. meridiei hodiernam cum obseruatione d. $\frac{15}{26}$. Sept. instituta, patet motum Penduli

Aſtr. ita ſe habere vt diem ſolarem medium 36''. 1. ſuperet, vel quod ad idem redit $23^h.56'40''$.2 Pend. $=360°$. Quia vero eiusdem Penduli, cuius virgae longitudo ſemper eadem eſt, motus Petropoli inuentus ita fuit comparatus, vt $23^h.57'.14''.=360°$. colligitur ex noſtris obſeruationibus Arensburgi inſtitutis longitudinem Penduli Arensburgi multo minorem eſſe longitudine Penduli Petropolitani, quin imo a lege elongationis Penduli ab Aequatore verſus Polos recepta adeo aberrare, vt operae pretium ſit haſce obſeruationes diligentiſſime proſequi. Eandem fere aberrationem confirmat alterum Pendulum virga ferrea munitum.

## Inueſtigatio longitudinis Obſeruatorii Arensburg. ex obſeruatis eclipſibus Satellitum Iouis.

Comparatione inſtituta inter obſeruationes eclipſium Satell. ♃uis Petropoli habitas et calculum ſecundum Tab. *Wargent.* patet, immerſiones 1mi Satellitis ♃. menſe Oct. et Nou. 1752. ex Tab. praedictis ſupputatas 53'' praecedere easdem immerſiones Petropoli obſeruatas; quo poſito longitudo Obſeruatorii Arensburgenſis modo ſequenti colligitur.

d. $\frac{22.\,\text{Oct.}}{2.\,\text{Nou.}}$ 1752. Immerſio 1mi Sat. ♃.

| | |
|---|---|
| Pariſiis ſec. Tab *Warg.* | $=14^h.31'.40''$ |
| Error Tab. add. | 53 |
| Immerſio correcta | 14. 32. 33 |
| Immerſ. Arensb. accur. obſ. | 15. 52. 30 |

Diff.

| | |
|---|---|
| Diff. Merid. inter Obs. Paris. et Arensb. = | $1^h.19'.57''$ |
| d. $\frac{14}{25}$. Nou. Immersio 1mi Satell. ♃. Parisiis sec. Tab. *Warg.* | $14^h.38'.13''$ |
| Error Tab. add. = | 53 |
| Immersio correcta = | 14. 39. 6 |
| Immersio Arensb. obseruat. | 15. 58. 45 |
| Diff. Merid. inter Obs. Paris. et Arensb. | $1^h.19'.39''$ |

Consimili modo colligitur differentia illa Merid. ex obseruata immersione 2di Satell. ♃. puta

| | |
|---|---|
| D. $\frac{31.\ Aug.}{11.\ Sept.}$ Immersio 2di Satell. ♃. Petropoli obseruata | $14^h.30'.21''$ |
| Diff. Merid. | 1. 52. |
| Immersio Parisiis | 12. 38. 21 |
| Immersio Arensb. obseruat. | 13 57. 28 |
| Diff. Merid. inter Obs. Paris. et Arensb. | $1^h.19'. 7''$ |

Cum vero in hac obseruatione coelum Arensburgi admodum esset vaporosum, coniicere possumus, immersionem hanc iusto citius fuisse obseruatam, adeoque differentiam Meridianorum ex illa deductam iusta veraque esse minorem, id quod praecedentes conclusiones egregie confirmare videntur, ita vt differentia Merididianorum inter Obseruatoria Parisiense et Arensburgense, donec accuratius determinetur, statui possit $= 1^h. 19'.45''$ vel $50''$.

## Pro Refractione determinanda in Obseruatorio Arensburgensi.

d. $\frac{26}{27}$. Sept. 1752. $6^h.5'.54''$ Pend. altit. $\alpha$ Lyrae
$=70°.20'+\frac{1}{3}$ fil. $+ 0^R.17^P$.

7. 44 - - - - - - - 0. $16\frac{1}{5}$

7. 54 $\alpha$ Lyrae ad fil. vert. Merid. prox.

8. 52 Altit. - - - - + 0. 18

9. 51 - - - - - - - 0. 19

eod. $18^h.3'.59''$ Alt. $\alpha$ Lyrae infra Pol. $=7°-1^R.25^P$.

4. 50 - - - - - - - - 1. $25\frac{3}{5}$

5. 21 - - - - - - - - 1. 26

Ab h. 18. 6' stella per nubes tenuiss. obseruabatur.

6. 0 App. $\alpha$ Lyrae ad fil. vert. Mer. prox.

7. 13 Altit. - - - - - - 1. 22

8. 17 - - - - - - - - 1. 17

---

d. $\frac{8}{17}$ Oct. 1752. $0^h.5'.24''$ Pend. Merid. verus

eod. $9^h.10'.57''$ Pend. Altit. Fomalhaut
$=1°.10'-\frac{1}{3}$ fil. $+1^R.50^P$.

12. 20 - - - - - - - - 1. 42

Quamuis coelum hac in obseruatione eximie esset serenum, stellam tamen Fomalhaut non nisi per interualla conspicere licuit.

d. $\frac{9}{20}$ Oct. $0^h.4'.46\frac{1}{5}''$ App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

6. $57\frac{3}{4}$ App. 2di limbi ☉ ad idem filum

---

d. $\frac{13}{24}$. Oct. $0^h.7'.48\frac{4}{5}''$ Pend. Centrum ☉ ad fil. vert. Merid. prox.
(mora transf. disci ☉ obs. $=2'.12''$)

eod. $15^h.5'.22''$ Pend. Altit. Capell. $=77°30'+\frac{3}{4}$ fil. $-0^R.73^P$.

Coelo

| | | | |
|---|---|---|---|
| Coelo | $15^h.5'.49''$ | - - - - - - | 0. $73\frac{1}{2}$ |
| | 6. 19 | - - - - - - | 0. 73 |
| eximie | 6. 35 | - - - - - - | 0. 77 |
| | 6 55 | - - - - - - | 0. 76 |
| | 7. 9 | - - - - - - | 0. $77\frac{1}{2}$ |
| sereno | 7. $25\frac{1}{2}$ | App. Capellae ad fil. vert. Merid. prox. | |
| | 8. 56 | Altit. - - - - - | 0. 74 |
| $23^h.56'.41''\frac{1}{2}$ Pend. | 9. 9 | - - - - - - | 0. 75 |
| $= 360°$. | 9. 28 | - - - - - - | 0. 75 |
| | 9. 42 | - - - - - - | 0. 74 |
| | 10. 2 | - - - - - - | 0. $72\frac{1}{2}$ |

d. $\frac{13}{24}$ Febr. 1753. $0^h.\ 7'.47\frac{1}{2}''$ Pend. Merid. verus ex 9. Alt. ☉ resp.

$7.\ 48\frac{1}{2}$ Pend. contri ☉ ad fil. vert. Merid. prox. ($2'.12''$. mora obs. trans. disci ☉)

| | | | |
|---|---|---|---|
| eod. | $18^h.30'.12''$ | Pend. Altit. Capellae infra Polum $= 14°.0'+\frac{1}{2}$ fil. $+ 1^R.44^P$. | |
| | 30. 34 | - - - - | 1. $43\frac{1}{2}$ |
| Coelo eximie | 31. 5 | - - - - | 1. $41\frac{1}{2}$ |
| | 31. 28 | - - - - | 1. 38 |
| sereno | 32. 8 | - - - - | 1. 34 |
| | 32. 26 | App. Capell. ad fil. vert. Mer. prox. | |
| $23^h.56'.46\frac{1}{2}''$ Pend. | 33. 21 | - - - - | 1. 34 |
| $= 360°$. | 33. 43 | - - - - | 1. $37\frac{1}{2}$ |
| | 34. 11 | - - - - | 1. 39 |
| | 34. 40 | - - - - | 1. $40\frac{1}{2}$ |
| | 34. 58 | - - - - | 1. 42 |

---

d. $\frac{22.\ Oct.}{2.\ Nov.}$ Limbo quadrantis in Merid. positi occidentem spectante

$9^h.32'.5\frac{1}{2}''$ Pend. Alt. β Cassiopeiae $= 90°.30'+\frac{1}{4}$ v. $\frac{1}{2}$ fil. $- 0^R.87^P$.

| | | |
|---|---|---|
| 33. 12 | - - - - | 0. $85\frac{1}{2}$ |

Coelo

| | | | |
|---|---|---|---|
| Coelo | $9^h.33'.32''$ | - - - - | $0.83\frac{1}{2}$ |
| grate | 33. 56 | - - - - | 0. 84 |
| fereno | 34. 23 | - - - - | 0. 83 |
| | 34. 41 | - - - - | 0. 82 |
| Sec. calculum β | 35. 17 | - - - - | 0. 81 |
| Caff. per Merid: | 35. 32 | - - - - | 0. 80 |
| hodie tranfiit | 35. 37 | App. β Caff. ad fil. vert. Merid. prox. | |
| $9^h.35'.37\frac{1}{2}''$ temp. | 36. 25 | Altit. - - - | 0. 80 |
| Pend. | 36. 45 | - - - - | $0.80\frac{1}{2}$ |
| | 37. 5 | - - - - | $0.81\frac{1}{2}$ |
| | 37. 31 | - - - - | 0. 82 |
| | 37. 56 | - - - - | $0.84\frac{1}{2}$ |
| | 38. 29 | - - - - | 0. 86 |
| | 38. 55 | - - - - | 0. 88 |

D. $\frac{10}{21}$. Febr. 1753. $0^h.6'.5''$ Pend. Merid. verus ex 5 Altit. ☉ refp.

D. $\frac{12}{23}$. Febr. - 13. 32. 26 Pend. Alt. β Caffiopeiae infra Polum $= 26°.0' + 2^R.52^P$.

| | | |
|---|---|---|
| 32. 59 | - - - - | $2.51\frac{3}{4}$ |
| 33. 24 | - - - - | 2. 49 |
| 33. 47 | - - - - | 2. 49 |
| 33. 55 | App. β Caff. ad fil. vert. Merid. prox. | |
| 34. 34 | Altit. - - | + 2. 50 |
| 34. 56 | - - - - | 2. 51 |
| 35. 23 | - - - - | 2. 52 |
| 35. 50 | - - - - | $2.52\frac{1}{2}$ |
| 36. 15 | - - - - | 2. 53 |

d. $\frac{13}{24}$. Febr. $0^h.7'.47\frac{2}{3}''$ Pend. Mer. verus ex 9 Altit. ☉ refp.

d. $\frac{23.\ Nov.}{4.\ Dec.}$ $0^h.40'.13\frac{5}{6}''$ Pend. Merid. verus ex 6 Alt. ☉ refp.
0. 40. 11 Pend. app. centri ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

$2\frac{5}{6}'' =$ diff.

d.

d. $\frac{24. Nov.}{5. Dec.}$ $0^{h}.41'.9\frac{1}{2}''$ Pend. App. centri ☉ ad fil. vert. Merid. prox.
d. $\frac{26. Nov.}{7. Dec.}$ $0^{h}43'.25\frac{1}{2}''$ Pend. App. centri ☉ ad fil. vert. Merid. prox.
eod. $8^{h}.38'.34''$ Pend. Altitud. β Andromedae supra Polum $= 66°.0' + 2^{R}.\ 9^{P}.$

| | | |
|---|---|---|
| 39. 2 | - - - - - - - | 2. 9 |
| 39. 19 | - - - - - - - | 2. 10 |
| 40. 15$\frac{1}{2}$ App. β Andr. ad fil. vert. Merid. prox. | | |
| 41. 36 Altit. | - - - - - - | 2. 13 |
| 42. 5 | - - - - - - - | 2. 12 |

d. $\frac{1}{12}$. Mart. $0^{h}.15'.39''$ Pend. App. centri ☉ ad fil. vert. Mer. prox.
eod. $13^{h}.38'$ circiter (hora nimirum culmin.) altitudo β Andromedae infra Polum $= 2°.50' + 0^{R}.0^{P}$. exactissime.

Secundum obseruata circa transitus α Lyrae per fil. Tubi muralis d. $\frac{1}{12}$. et $\frac{6}{17}$. Mart. peracta prodit motus Pend. Astron. ita comparatus, vt $23^{h}.56'.46\frac{1}{2}'' = 360°$.

## Pro determinanda refractione ex comparatione obseruationum Oesiliensium circa stellas australiores habitarum cum iis, quas circa easdem in promontorio B. S. habuit Cl. *de la Caille*. It. pro variatione refractionum Alt. Merid. obseruatae in Ins. Oesilia.

d. $\frac{30. Sept.}{11. Oct.}$ 1752. Altit. Merid. app. Rigel $= 23°.20' - 1^{R}.27^{P}$.
eod. - - Altit. Merid. app. Sirii $= 15°.20' - \frac{1}{2}$ fil. $+ 2^{R}.54^{P}$.
d. $\frac{2}{13}$. Oct. - Altit. Merid. app. Sirii $= 15°.20'. + 2^{R}.46\frac{1}{2}^{P}$.
d. $\frac{6}{17}$. Oct. - Altit. Merid. app. Sirii $= 15°.20'. + 2^{R}.48^{P}$.
d. $\frac{13}{24}$. Oct. - Altit. Merid. app. Sirii $= 15\ 20 + 2^{R}\ 49^{P}$.
d. $\frac{9}{20}$. Febr. 1753. Altit. Merid. app. α Hydrae $= 24°.10' - \frac{1}{2}$ fil. $+ 0^{R}.76^{P}$.

eod. - - - Altit. Merid. app. α ♎ $= 16^\circ.56 - 6$[illegible]$.65^P$.
eod. - - - Altit. Merid. app. β ♏ $= 12^\circ.40' + 1^R.56\tfrac{1}{2}^P$.
eod. - - - Altit. Merid. app. α ♏ $= 6^\circ.0' + \tfrac{1}{4}$ fil. $+ 1^R.14^P$.
d. $\frac{12}{23}$. Febr. - - Altit. Merid. app. α ♏ $= 6^\circ.0'. + 1^R.58^P$.
d. $\frac{13}{24}$. Febr 1′. ante culm. Alt. Mer app. Sirii $= 15^\circ.20' + 2^R.50\tfrac{1}{2}^P$.
eod. coelo eximie } Altit. Merid. app. β ♏ $= 12^\circ.50' - \tfrac{1}{4}$ fil $- 2^R.97^P$.
eod. sereno } Altit. Merid app. α ♏ $= 6^\circ.0' + 1^R.60^P$.
d. $\frac{17}{28}$. Maii - - Altit. Merid. app. β ♏ $= 12^\circ.50' - 3^R.18^P$.
eod. - - - Altit. Merid. app. α ♏ $= 6^\circ.0' - \tfrac{1}{4}$ fil $+ 1^R.14\tfrac{1}{2}^P$.
d. $\frac{21}{1}$ $\frac{\text{Maii}}{\text{Iun.}}$ - - - Altitud. Merid. app β ♏ $= 12^\circ.50' - 3^R.24^P$.
d. $\frac{26}{6}$ $\frac{\text{Maii}}{\text{Iun.}}$ - - Altitud. Merid. app. δ ♏ $= 9^\circ.40' + 8^R.6^P$.

## Obseruationes fixarum, quae eandem fere habent Altit, Merid. Arensburgi et in Promont. B. S.

d. $\frac{14}{25}$ Nou. 1752. Altit. Merid. app. α ♌ $= 45^\circ.0' - 1^R.95^P$.
d. $\frac{6}{17}$ Febr. 1753. Altit. Merid. app. Vindemiatr. $= 44^\circ.0' + 1^R.75^P$.

## Obseruationes Oesilienses stellae Polaris pro determinanda Eleuatione Poli Obseruatorii Arensburg.

d. $\frac{20}{31}$ Oct. - - $0^h.11'.43''\tfrac{1}{2}$ Pend. app. cent. ☉ ad fil. vert. Mer. prox.
d. $\frac{21}{1}$ $\frac{\text{Oct.}}{\text{Nov.}}$ 1752. $0^h.12'.19\tfrac{3}{4}$ Pend. app. cent ☉ ad fil. vert. Mer. prox.
d. $\frac{22}{3}$ $\frac{\text{Oct.}}{\text{Nov.}}$ - - $10^h.17'.56''$ Pend. altitud. Polaris supra Polum $= 69'.20' - 1^R.38\tfrac{1}{4}^P$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 18. | 50 | - - - - | 1. 38 |
| 21. | 8 | App. Pol. ad fil. vert. Merid. prox. | |
| 22. | 9 | Altit. - - - | 1. 37$\tfrac{1}{4}$ |
| 23. | 54 | - - - - | 1. 38$\tfrac{1}{2}$ |
| 24 | 45 | - - - - | 1. 38 |
| 25. | 47 | - - - - | 1. 39$\tfrac{1}{4}$ |

31.

31. 43 - - - - - 1. $42\frac{1}{2}$
33. 10 - - - - - 1. $42\frac{1}{2}$
34. 5 - - - - - 1. 44
35. 34 - - - - - 1. 47
36. 58 - - - - - 1. 50

d. $\frac{25}{5}$ Oct. Nov. $0^h.13'.35''$ Pend. Meridies medius ex 6 alt. ☉ respond.
eod. $10^h.15'.51''$ Pend. Alt. Pol. supra Pol. $= 60°.20' + \frac{1}{3}$ fil. - $1^R.41^P$.

16. 20 - - - - - 1. $39\frac{1}{2}$
16. 45 - - - - - 1. $38\frac{1}{2}$
17. 0 - - - - - 1. 39
17. 25 - - - - - 1. $38\frac{1}{2}$
17. 55 App. Pol. ad fil. vert. Merid. prox.
19. 16 Altit. - - - - 1. $38\frac{1}{2}$
20. 48 - - - - - 1. $39\frac{1}{4}$

d. $\frac{23}{4}$ Nov. Dec. $0^h.40'.13''\frac{5}{6}$ Pend. Merid. verus ex 6 altit. ☉ respond.
40. 11 — App. centri ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

$2''\frac{5}{6}$ = diff.

d. $\frac{5}{16}$ Dec. $19^h.59'.15''$ Pend. Altitud. Polaris infra Polum $= 56°.20' + \frac{1}{2}$ v $\frac{1}{3}$ fil. $- 2^R.6^P\frac{1}{2}$.

20. 0. 32 - - - - - 2. 9
1. 59 - - - - - 2. $8\frac{1}{4}$
3. $55\frac{1}{2}$ App. Pol. ad fil. vert. Merid. prox.
5. 24 Altit. - - - - 2. $6\frac{1}{2}$
8. 54 - - - - - 2. $2\frac{3}{4}$

d. $\frac{6}{17}$ Dec. $0^h.55'.37''\frac{2}{3}$ Pend. App. centri ☉ ad fil vert. Mer. prox.
d. $\frac{10}{21}$ Febr. 1753. $0^h$ 6'. 5'' Pend. Meridies verus ex 5. alt. ☉ resp.
d. $\frac{12}{23}$ Febr. $14^h$ 17'.45'' Pendul. Altitud. Pol. infra Pol. $= 56°.20' - 2^R.6^P$.

18. 7 - - - - - 2. 7
18. 30 - - - - - 2. $8\frac{1}{2}$
18. 58 - - - - - 2. $8\frac{1}{2}$

| | | |
|---|---|---|
| 19. 21 | - - - - | 2. 8½ |
| 19. 53 | - - - - | 2. 9½ |
| 20. 20 | - - - - | 2. 11 |
| 20. 51 | - - - - | 2. 9 |
| 21. 14 | - - - - | 2. 9 |
| 21. 31 | - - - - | 2. 8 |
| 21. 49 | - - - - | 2. 10 |
| 22. 25 | - - - - | 2. 9½ |
| 22. 54 | - - - - | 2. 10 |
| 23. 46 | App. Polaris ad fil. vert. Mer. prox. | |
| 25. 15 | Altit. - - - | 2. 10 |
| 26. 4 | - - - - | 2. 8 |
| 27. 6 | - - - - | 2. 6 |
| 28. 4 | - - - - | 2. 7 |
| 28. 30 | - - - - | 2. 7 |
| 30. 5 | - - - - | 2. 6. |

d. 13/24 Febr. $0^h.7'.47''\frac{2}{3}$ Pend. Meridies verus ex 9 alt. ☉ resp.

## Pro definienda differentia Parallelorum Obseruatorii Petropolitani et Arensburgensis.

d. 29/9 Mart./Apr. 1752. Petropoli obseruata fuit $2'.45''$ post culminationem et $0'.46''$ post appulsum ad fil. vert. quadr. altit. apparens Procyonis $= 35^{\circ}.50' + \frac{2}{3}$ fil. $+ 2^R.56^P\frac{1}{2}$.

d. 20/31 Oct. 1752. Arensburgi obseruata fuit altit. Merid. appar. Procyonis $= 37^{\circ}.40' + \frac{2}{3}$ fil. $- 1^R\ 52^P\frac{1}{2}$ Calculo rite peracto, prodit ex hisce obseruatis differentia Parallelorum quaesita $= 1^{\circ}.41'.14''$, vel $15''$.

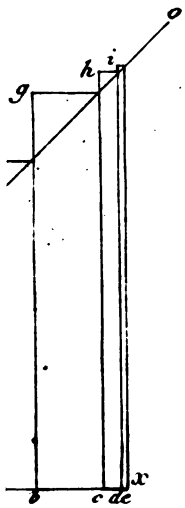
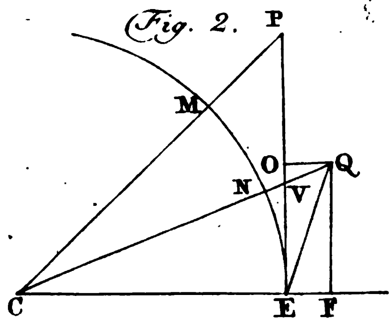



Fig. 2.



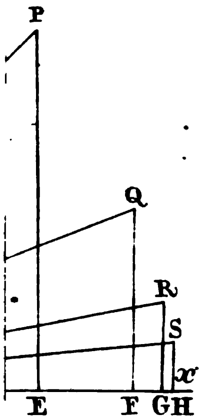




Fig. 4.

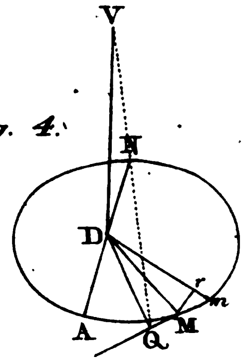



Fig. 5.

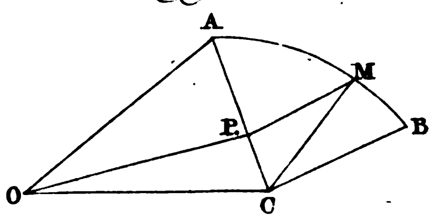


Fig. 1.

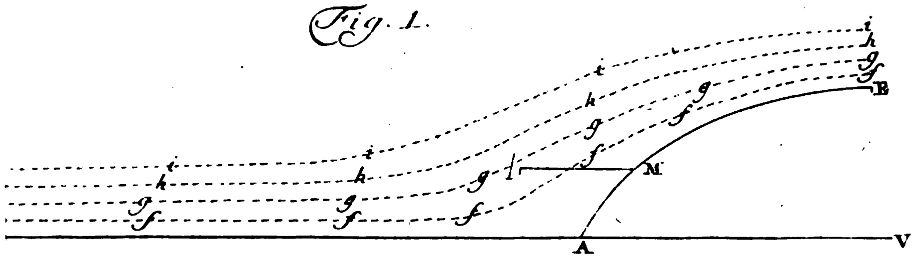



Fig. 2.

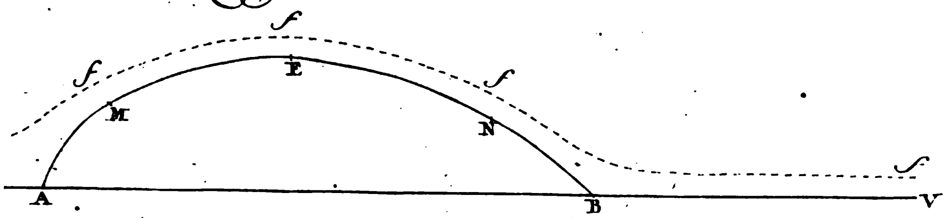



Fig. 3.

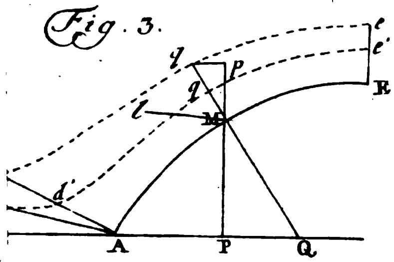
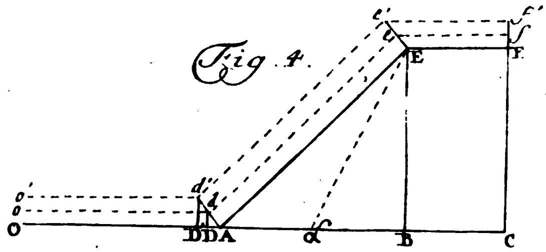



Fig. 4.



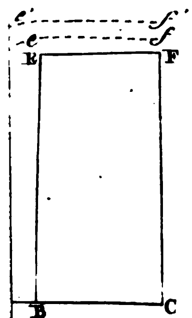




Fig. 6.

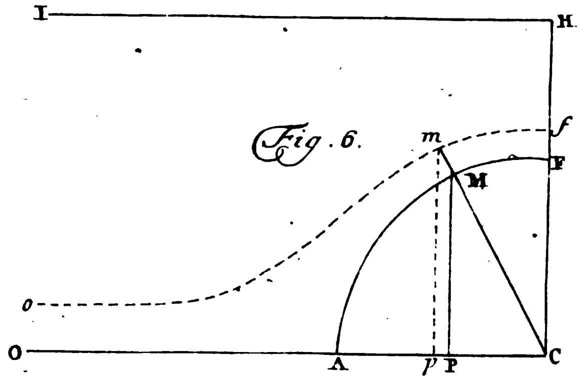


Fig. 1

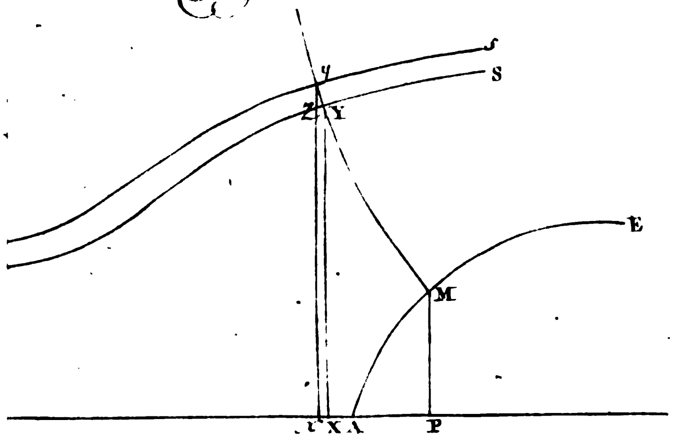
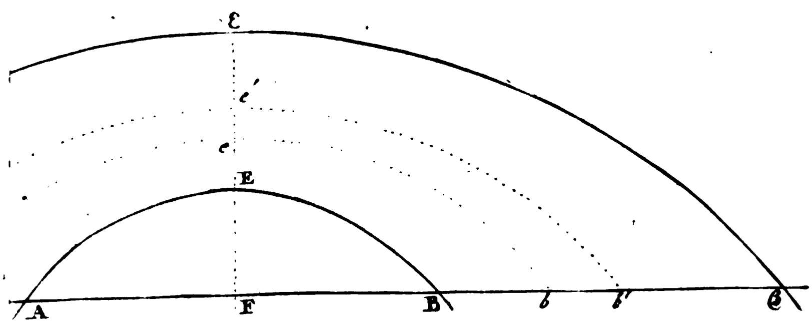



Fig. 2



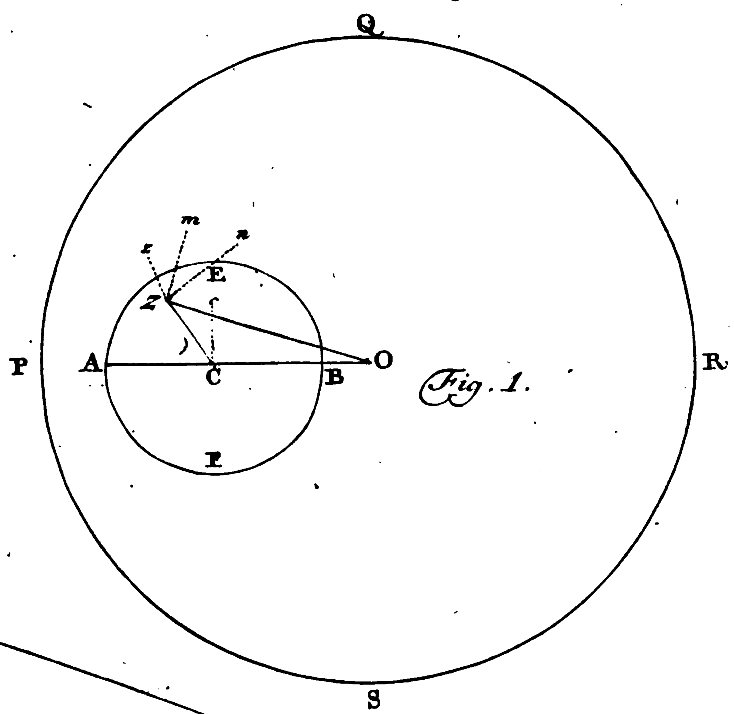



Fig. 1.

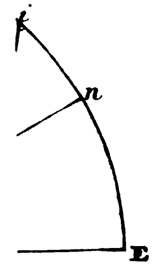



Fig. 2.

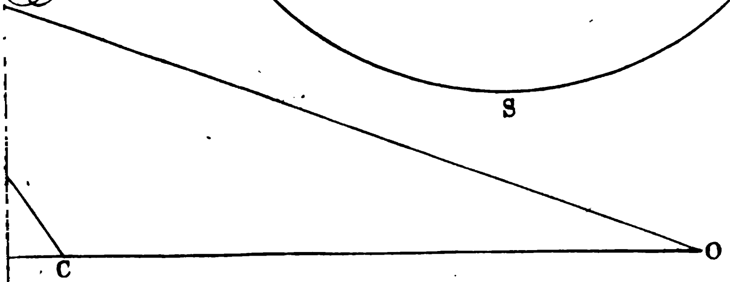
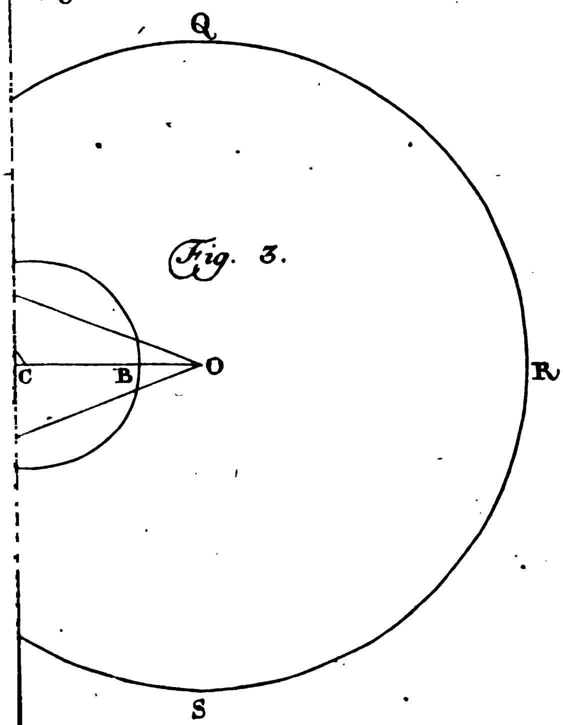
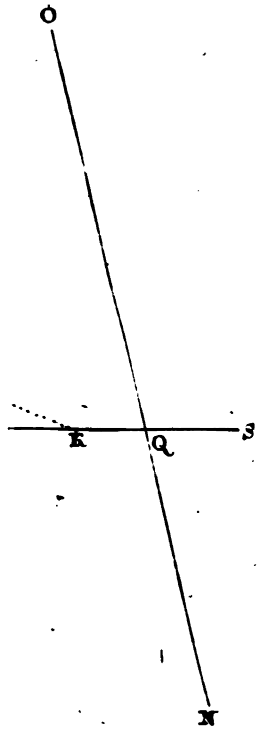
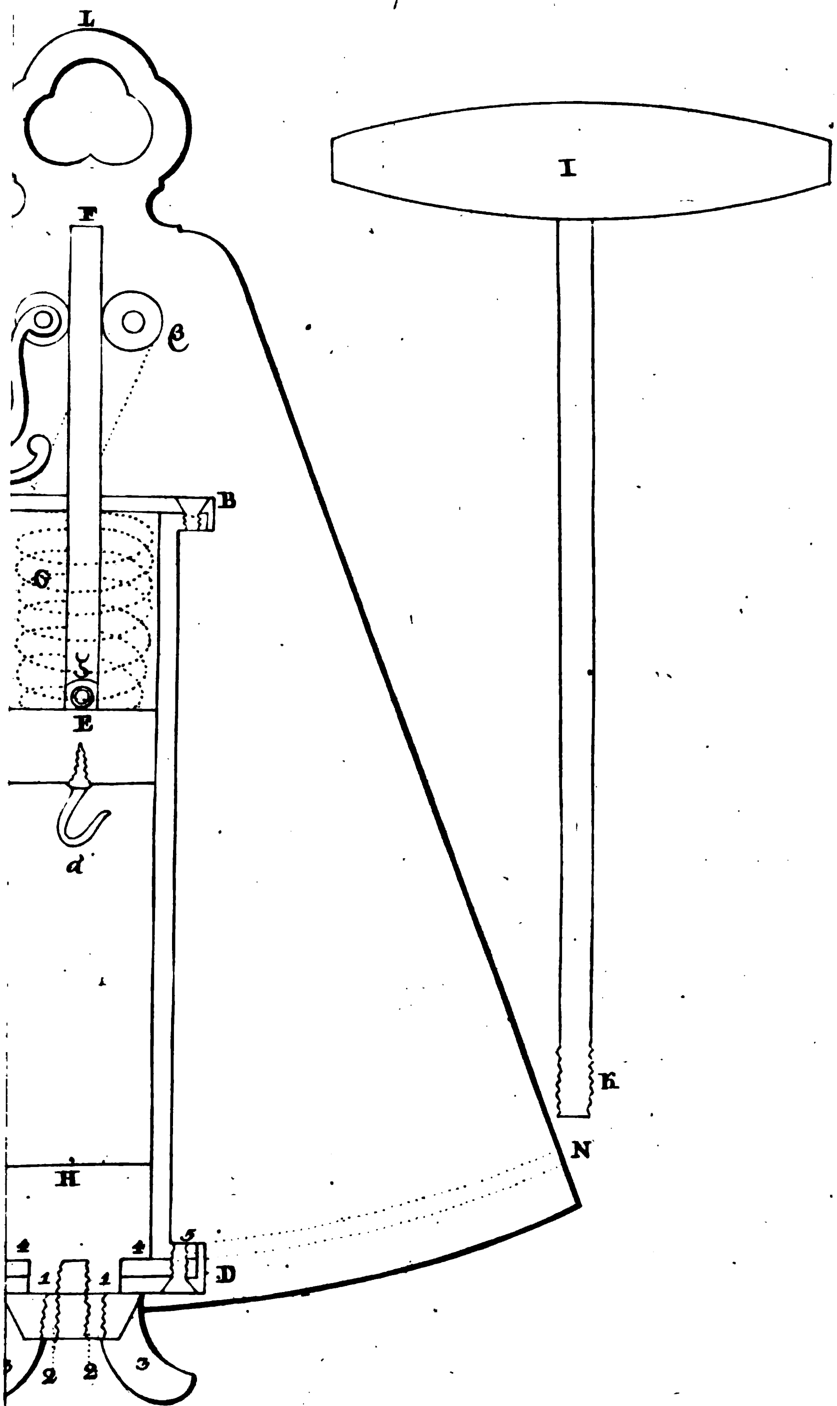



Fig. 3.




L
I
F
β
B
G
ζ
E
d
K
N
H
4
4
1
1
5
D
2
2
3

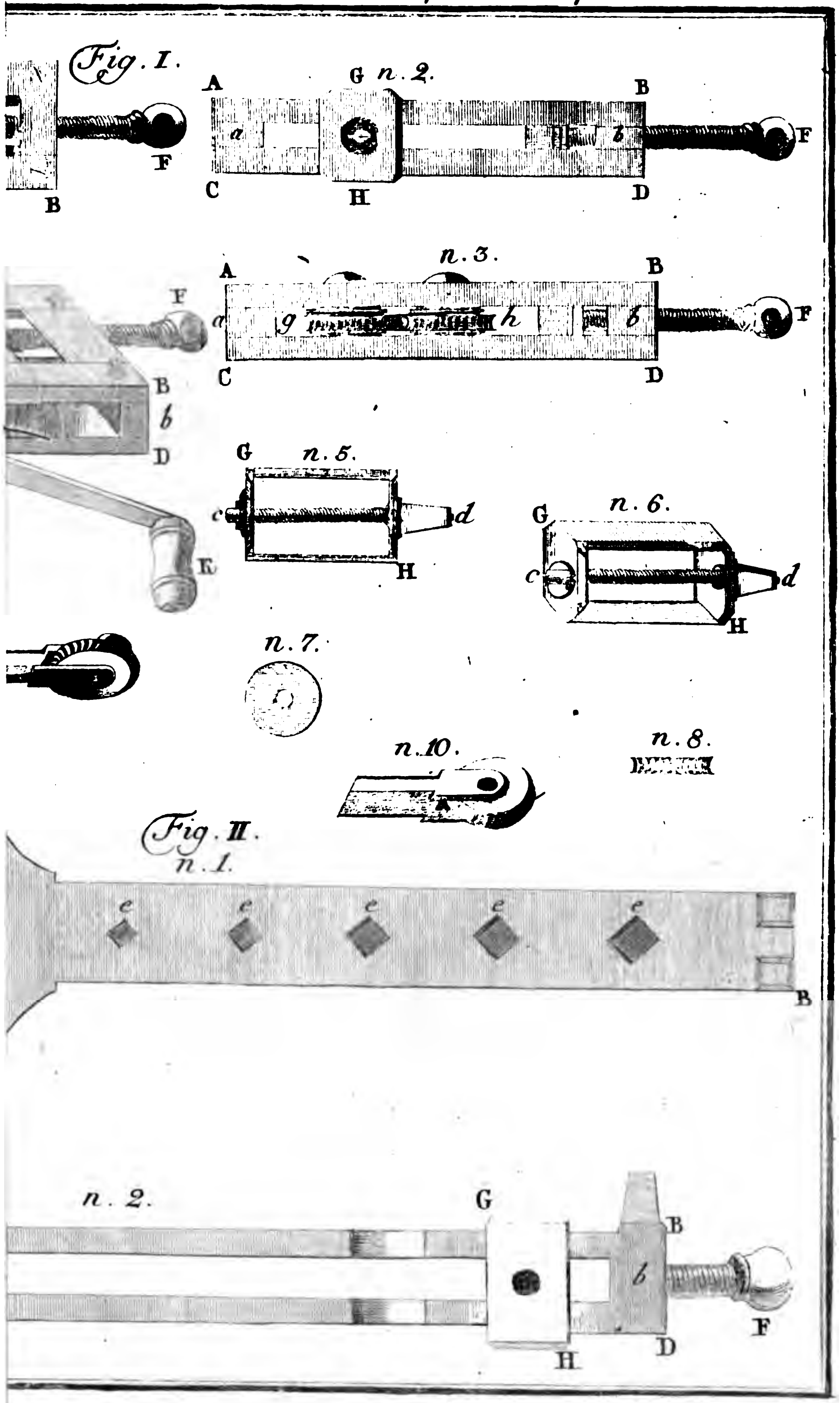


Fig. I.
n. 2.
n. 3.
n. 5.
n. 6.
n. 7.
n. 10.
n. 8.
Fig. II.
n. 1.
n. 2.


B

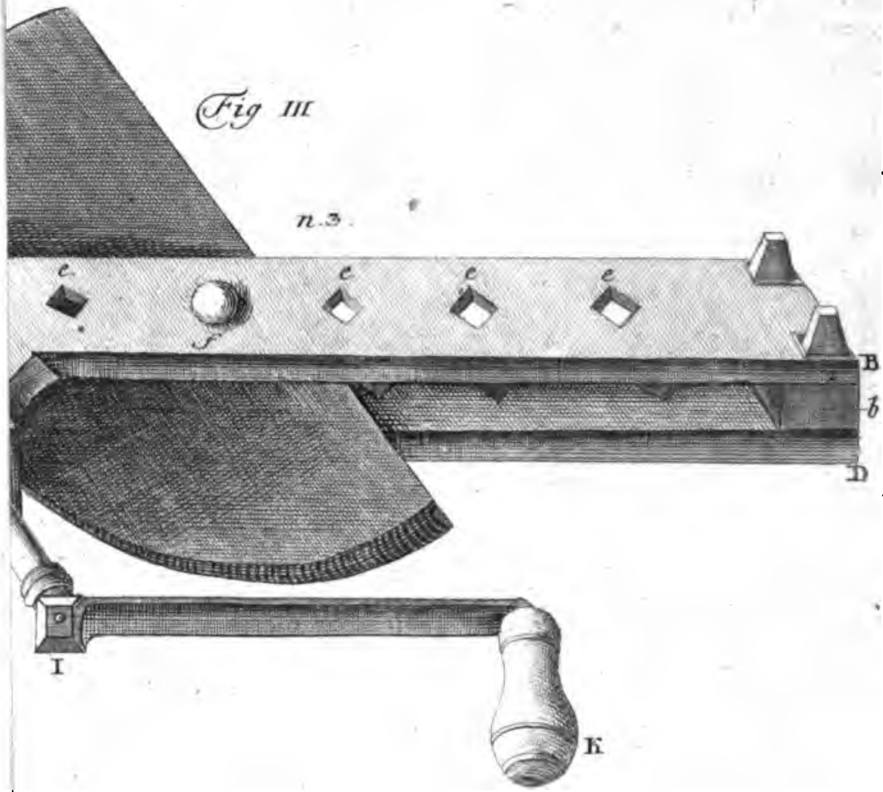
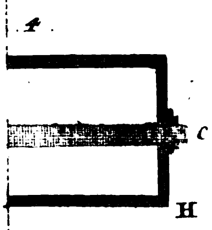
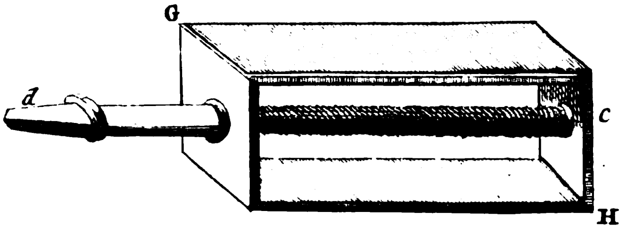


Fig III
n. 3.
e
f
e
e
e
B
b
D
I
K


4.
c
H


n. 5.
G
d
c
H

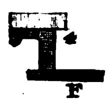

F

Fig. 2.

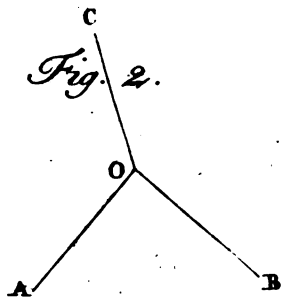



Fig. 3.

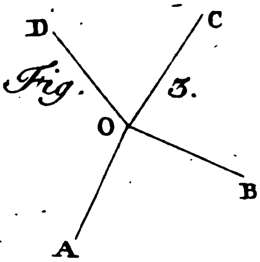
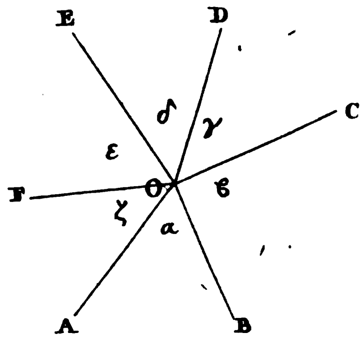



Fig. 5.



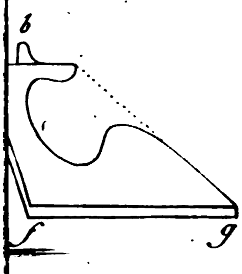
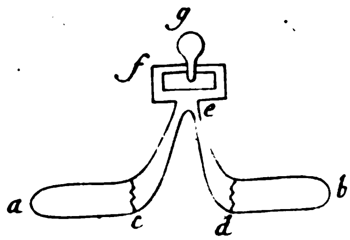




Fig. 7.



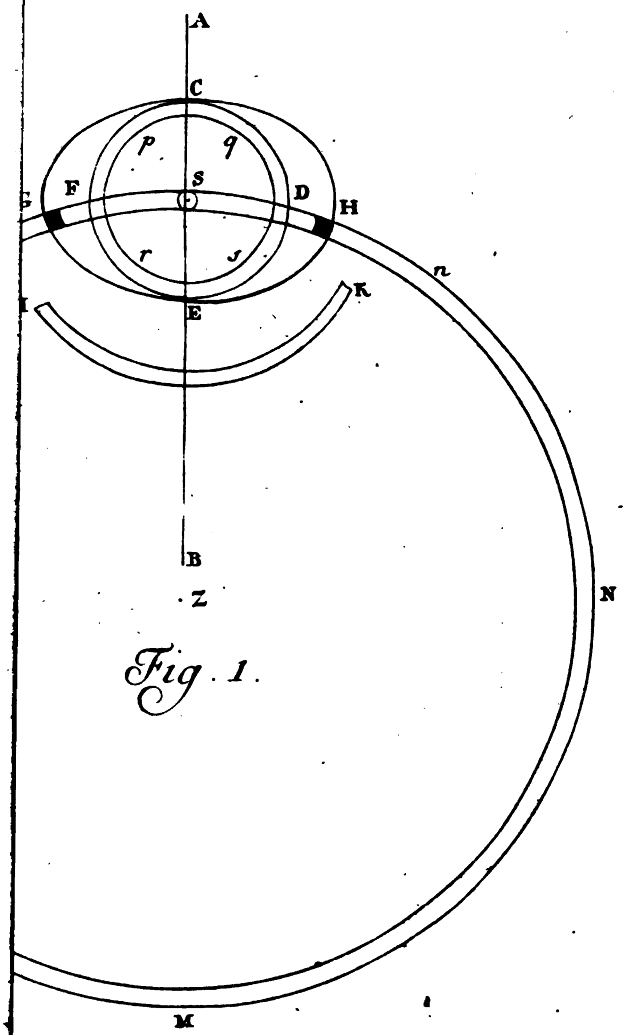



Fig. 1.

Comment. Nov. Ac. Imp. Sc. Petrop. Tom. VIII. Tab. XII.

Aeschinomene

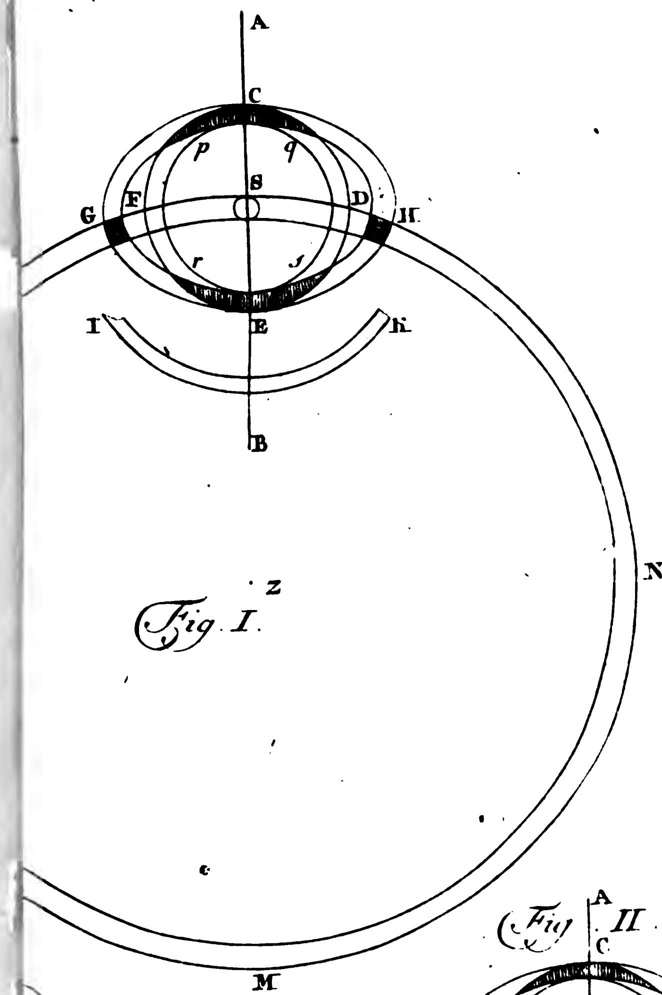
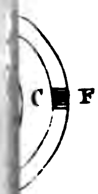



Fig. I.



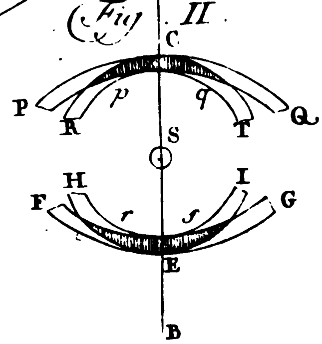




Fig. II.

Comment: Nov. Ac. Imp. Sc. Petrop. Tom. VIII. Tab. XIII. c.

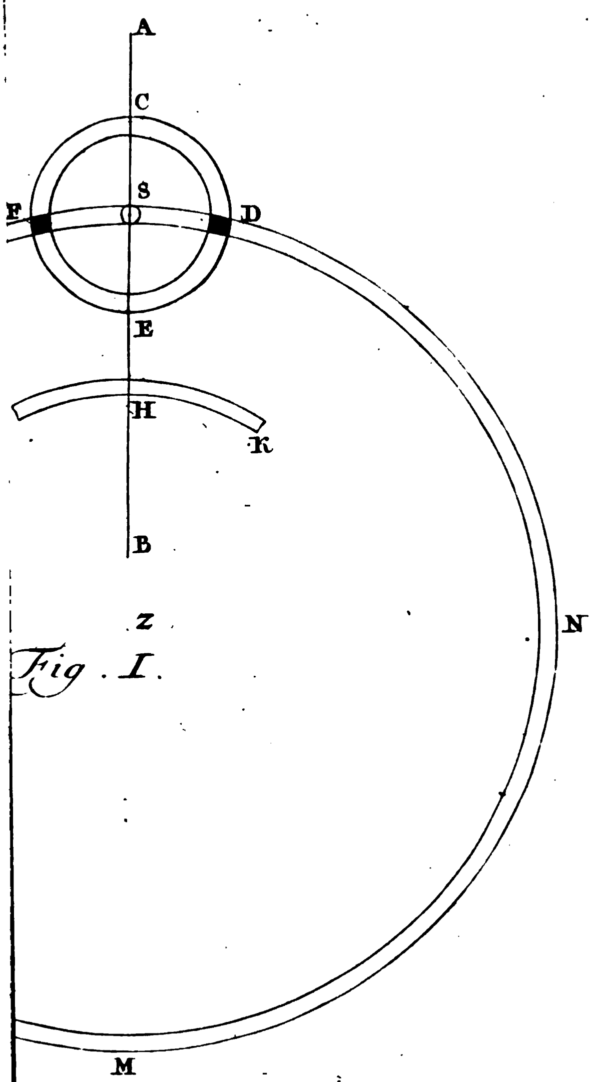
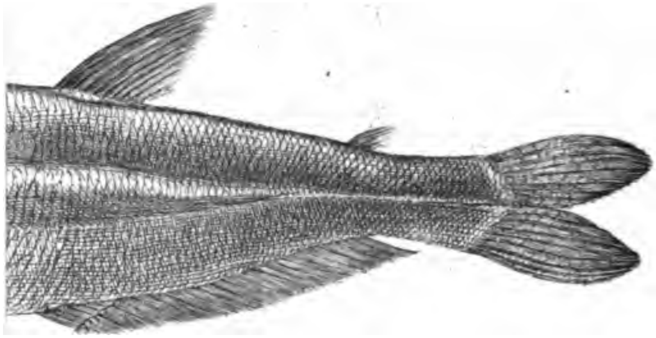



Fig. I.

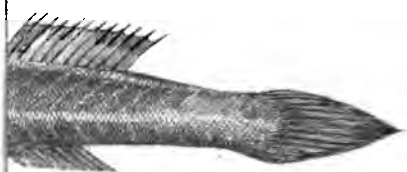
n. Ac. Imp. Sc. Petrop. Tom. VIII. Tab XIV.

Fig. II.

Fig. III.



g. V.



VI.