NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. VII.

pro Annis MDCCLVIII. et MDCCLIX.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXI.

54

SVMMARIVM DISSERTATIONVM

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS VII.

MATHEMATICA.

I.

Specimen alterum methodi nouae quantitates tranſcendentes inter ſe comparandi de comparatione arcuum Ellipſis.

Auctore Leon. Eulero p. 3.

III.

Specimen nouae methodi curuarum quadraturas et rectificationes aliasque quantitates tranſcendentes inter ſe comparandi.

Auctore Leon. Eulero p. 83.

Principio monendus eſt lector, rogandaque errori typothetarum excuſatio eſt, quod poſterior ordine diſſertatio priori eſt antepoſita. Culpam hanc aliquodam modo reſarcituri, vtramque diſſertationem ſimul conſiderabimus, et conſueta nobis breuitate, quid in iis praeſtitum ſit, dicemus. Verſatur methodus a Cel. Auctore propoſita ſingulari prorſus modo circa quantitates tranſcendentes, ſeu eiusmodi quantitates in lineis curuis occurrentes, quae nullo modo algebraice exprimi possunt. Semper consideratio linearum, vtcunque sterilis in se videatur, tam Geometriam, quam Analysin, pulcerrimis inuentis locupletauit. Cum primum enim Geometrae lineas curuas contemplari coeperunt, statim omnibus viribus eo sunt annisi, vt tam spatia ab iis inclusa, quam ipsam earum longitudinem, dimetirentur, quarum inuestigationum prior circa curuarum quadraturas, altera circa earum rectificationem versari dicebatur. Quoniam vero neutrum in circulo praestari poterat, etsi omnium linearum curuarum est simplicissima, eo maiori studio in eiusmodi lineas curuas inquisiuerunt, quae vel quadraturam, hoc est spatii iis inclusi dimensionem, vel rectificationem, qua linea recta curuae aequalis assignari debet, admitterent. Interim tamen etiam inutiles conatus eorum, qui in quadratura circuli inuestiganda frustra desudarunt, praeter opinionem plurima egregia inuenta sunt consecuti, quibus idem vsu venit, quod Alchimicis, qui toti in lapidis philosophorum praeparatione occupati, etsi voto suo exciderunt, plurima saluberrima remedia in vsum medicinae contulerunt. Post inuentam autem Analysin infinitorum summum studium, quod praecipue in quadrandis et rectificandis lineis curuis est consumtum, vberrimos fructus protulit, quibus plures methodos satis sublimes, quarum vsus per vniuersam Mathesin amplissimus existit, acceptas referre debemus. Quare haud minores fructus ab eorum studio expectare licet, qui in comparatione linearum curuarum, quae per se, vel quadraturam, vel recti-

rectificationem, respuunt, exquirenda laborant, in quo negotio certe profundissima Analyseos arcana sunt adeunda, ita vt, qui hic quicquam praestiterit, is plurimum in hac scientia profecisse sit censendus.

Huc sine dubio referenda est noua methodus a Cel. Auctore excogitata, cuius ope innumerabilium curuarum, quarum rectificatio omnes vires Analyseos transcendit, arcus inter se comparare docet. Pro iis quidem curuis, quarum rectificatio ope circuli, vel logarithmorum, expediri potest, hoc cognitis methodis praestari potest, sed totum negotium multo facilius beneficio huius methodi conficitur, quemadmodum ex specimine posteriore luculenter apparet, vbi comparationem arcuum circularium, aliunde quidem satis cognitam, et arcuum parabolicorum, mira simplicitate exequitur, vt iam hinc summa vtilitas huius methodi abunde eluceat.

In altero autem specimine, quod hic primo loco extat, hanc methodum potissimum ad Ellipsin accommodatam conspicimus, cuius lineae rectificationem, neque ad arcus circulares, neque logarithmos reuocari posse, inter Geometras satis superque constat. Neque etiam in hac curua binos arcus dissimiles, qui inter se sint aequales, abscindere licet, ex quo multo magis mirum videbitur, dato huius curuae arcu quocunque, semper alium arcum, et in dato quidem puncto terminatum, exhiberi posse, qui ab illo differat quantitate geometrice assignabili, cum hoc ne in circulo quidem praestari queat. Si enim differentia inter duos arcus circulares geometrice assignari posset, eo ipso recti-

rectificatio circuli absoluta haberetur. In ellipsi autem haec ratio longe aliter est comparata, cum innumerabilibus modis differentia in binos arcus ellipticos definiri possit. Simili modo, proposito arcu ellipseos quocunque, ab alio quouis puncto arcum abscindere licet, qui ab illius duplo, vel triplo, vel alio quouis multiplo, atque etiam submultiplo, quantitate geometrice assignabili differat. Imo etiam fieri potest, vt haec differentia prorsus euanescat, sicque bini arcus elliptici datam inter se rationem tenentes exhiberi queant, dummodo ratio illa non sit aequalitatis, quippe quo casu bini arcus prodeunt inter se similes, in quo nihil singulare habetur. Cuncta autem haec problemata, quae Cel. Auctor hic pro ellipsi expediuit, simili plane modo etiam pro hyperbola, atque infinitis aliis lineis curuis multo magis complicatis, resolui posse, manifestum est: ex quo haec methodus omni Geometrarum attentione et vberiori euolutione dignissima videtur.

II.

Theoremata circa residua ex diuisione potestatum relicta.

Auctore Leon. Eulero pag. 49.

In numerorum natura plurima adhuc mysteria latere, quae non obstante summo studio, quo tam veteres, quam recentiores Mathematici, in proprietates numerorum inquisiuerunt, adhuc nobis sunt abscondita, iam saepius faepius eft inculcatum, quod merito eo magis mirum videtur, quod prima noftra quantitatum cognitio circa numeros verfari folet. Summa autem difficultas, quam in numerorum indole fcrutanda offendimus, in eo potiffimum confiftit, quod numeri fint quantitates difcretae, et natura fua quafi continuitatis rationi adverfentur. Non enim, vt linea parum a longitudine pedis deficiens, recte dicitur fere pedalis, ita numerus parum a numero, vel pari, vel quadrato, difcrepans, dici poteft, vel fere par, vel fere quadratus; vel minima enim differentia naturam numeri, vel paris, vel quadrati, aeque tollit, ac fi effet maxima. Eodem modo etiam res fe habet in diuifibilitate numerorum, et in refiduis, quae diuifione facta remanent, in quibus nulla ratio continui locum inuenire poteft, quare, cum methodi in Analyfi adhuc inuentae omnes rationi continuitatis innitantur, eas fruftra ad proprietates numerorum inueftigandas adhibemus, fed ad hoc peculiaris analyfeos fpecies requiri videtur, cuius forfitan prima elementa etiamnum nobis funt incognita. In lege igitur, quam refidua ex diuifione poteftatum per diuifores quofcunque relicta fequuntur, Cel. *Eulerus* inprimis eft occupatus, ac plura Theoremata affert, quorum demonftrationes fummo rigore adornat: multo plures autem in hoc genere veritates agnofcere licet, quarum demonftratio fruftra eft quaefita, cuius rei exemplum in quantitatibus, vbi continuum fpectatur, vix reperitur.

IV.

Demonſtratio Theorematis et Solutio Problematis in Actis Erud. Lipſ. propoſitorum.

Auctore Leon. Eulero p. 128.

Cum in Actis Lipſ. Theorema hoc ac problema ſine nomine ſint propoſita, Cel. Auctor hic ſtatim ſe eorum eſſe inuentorem profitetur. Vtrumque eximiam ellipſeos proprietatem complectitur. In Theoremate enim docetur, quomodo dimidia ellipſis, diametro quacunque terminata, ita in duas partes ſecanda ſit, vt partium differentia geometrice aſſignari queat; quae ipſa diuiſio cum partium differentia in eo exponitur, vt a geometris demonſtratio inueſtigaretur. Prodiit quidem nuper in Actis Sociorum Academiae Pariſinae huius Theorematis demonſtratio, quae etſi veritatem enunciatam rite oſtendat, non tamen ex genuinis principiis hauſta videtur. Vnde innumerabilia alia eiusdem generis in ellipſi aliisque lineis curuis inuenire licet. Idemque ex eo vel maxime apparet, quod auctor huius demonſtrationis ſolutionem problematis aggredi non ſit auſus, cum tamen ex iisdem principiis noſtri Auctoris expediri queat. In eo autem quaeritur modus, in quadrante elliptico partem geometrice aſſignandi, quae exacte ſemiſſi quadrantis aequetur. Celeberrimus igitur *Eulerus* in hoc ſcripto non ſolum ſuo more Theorema memoratum demonſtrat, ſed etiam proble-

problema hoc resoluit, idque ope methodi illius nouae, quam iam pridem in hunc finem excogitauit, et cuius bina noua in hoc volumine specimina edidit, quorum occasione de ista methodo iam fusius est expositum, quae hic repetere superfluum foret. Adiungit etiam alia quaedam non minus notatu digna, veluti id, quod circa finem affert, quo in ellipsi arcus assignatur, qui sit totius perimetri ellipticae pars tertia.

V.

De aequationibus differentialibus secundi gradus.

Auctore Leon. Eulero p. 163.

Singularem atque omnino nouam methodum, aequationes differentiales secundi gradus tractandi, Auctor traditurus, statim obseruat, plurima atque adeo infinita capita quorum euolutio etiamnum in Mathesi desiderantur, ad Analysin ac potissimum ad resolutionem aequationum differentialium secundi gradus reduci. Quoties enim quaestio ad partem quampiam Matheseos, vti vocari solet, applicatae suscipitur, eius enodatio duabus operationibus absoluitur, quarum alterius ex principiis isti parti propriis solutio ad aequationes analyticas reuocatur, altera autem in harum aequationum resolutione consumitur. Iam vero principia Mechanicae, seu Scientiae motus, tam solidorum, quam fluidorum, tum etiam Astronomiae theoreticae, ita sunt exculta, vt vix quaestio excogitari possit, cuius solutionem non istorum principiorum beneficio ad aequationes analyticas, easque vtplurimum differentiales secundi gradus, perducere liceat. Ex quo manifestum est, praecipuam Matheseos perfectionem, quam quidem sperare licet, in huiusmodi aequationum resolutione esse quaerendam. Quam ob causam Cel. Auctor, cum iam saepius in hoc negotio vires suas exercuisset, ac varias methodos particulares, quae saepius in vsum vocari queant, in medium attulisset, hic omnino nouam latissimeque patentem viam ingreditur, istas aequationes tractandi, quae in hoc consistit, vt multiplicator inuestigetur, in quem huiusmodi aequatio ducta fiat integrabilis: Quin etiam pronunciare non dubitat, cuiuscunque fuerit ordinis aequatio differentialis, semper eiusmodi multiplicatorem negotium conficientem dari, atque in hac dissertatione nonnulla huiusmodi aequationum genera, quae aliis methodis inaccessa videntur, hac methodo feliciter ad aequationes differentiales primi gradus reduxit, neque vllum est dubium, quin haec methodus, si vberius excolatur, maxima incrementa in Analysin sit allatura.

VI.

VI.

Enumeratio modorum, quibus figurae planae rectilineae per diagonales diuiduntur in triangula.

Auct. I. A. de Segner pag. 203.

Quando in Geometria area figurarum pluribus lateribus inclusarum definiri debet, eae per diagonales in triangula resolui solent, quia tum cuiusque trianguli areae ex cognitis lateribus facile determinantur. Quo pluribus autem lateribus figura est praedita, eo pluribus modis eam hoc modo in triangula resolui posse, vel leuiter attendenti statim est manifestum. Ita cum in quadrilaterum duas diagonales ducere liceat, quadrilaterum duplici modo in bina triangula diuiditur. Pentagonum autem quintuplici modo, diagonalibus ducendis, in triangula resolui posse reperitur, hexagonum vero 14 modis, et heptagonum 42 modis, octogonum 132 modis, enneagonum 429 modis etc. quae omnium modorum possibilium enumeratio, quo magis cum laterum numero eorum multitudo crescit, eo fit difficilior et taediosior. Quare quaestio omnino curiosa, et Geometrarum attentione digna videtur, qua lege isti resolutionum numeri pro laterum multitudine progrediantur, vt inde pro quouis polygono resolutionum numerus rite definiri queat? Hinc Ill. Auctor modo prorsus singulari et ingenioso legem progressionis horum numerorum exponit, ac rigorose demonstrat, dum docet, quomodo pro quouis polygono resolutionum numerus, ex cognita resolutione polygonorum simpliciorum, quae paucioribus constant lateribus, colligi debeat. Hac ratione, si a simplicissimis incipiamus, hanc inuestigationem continuo ad polygona plurium laterum extendere licet, sicque Ill. Auctor sub finem tabellam adiecit, in qua istiusmodi resolutiones ad polygona 20 laterum vsque exhibet. Liceat autem nobis, a summo quodam Geometra, qui eandem hanc tabulam calculo subiecit, admonitis, obseruare, hanc tabulam, ob quendam calculi errorem, tantum vsque ad polygona 15 laterum esse iustam, quippe pro hoc polygono resolutionum numerus non est 751900, vt tabella habet, sed 742900, sequentes quoque numeri, dum forte nouus error irrepsit, primo ad 17 vsque latera nimis sunt magni, deinde vero nimis parui, dum pro 20 lateribus resolutionum numerus est 477638700. Facilius haec apparent, si ex lege primum obseruata, qua quilibet numerus ex omnibus praecedentibus colligitur, alia ad computum facilior eliciatur, cuius ope quilibet numerus ex solo praecedente definiatur. Ita si pro polygono n laterum numerus resolutionum sit P, pro polygono sequente $n+1$ laterum numerus resolutionum erit $\frac{4n-6}{n}$ P. Quin etiam hinc, sine consideratione praecedentium, statim indefinite pro polygono n laterum numerus resolutionum ita per factores exprimitur, vt sit:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{10}{4}\cdot\frac{14}{5}\cdot\frac{18}{6}\cdot\frac{22}{7}\cdot\;\ldots\ldots\ldots\;\frac{4n-10}{n-1}$$

vbi numeratores quaternario, denominatores vero vnitate crescunt. Hinc sequentem nouam tabulam, beneuole vole nobiscum communicatam, adiungere e re visum est, quod Ill. Auctori huius schediasmatis non displiciturum esse speramus.

Num. laterum	numerus resolutionum.	num. laterum	numerus resolutionum.
III	1	XV	742900
IV	2	XVI	2674440
V	5	XVII	9694845
VI	14	XVIII	35357670
VII	42	XIX	129644790
VIII	132	XX	477638700
IX	429	XXI	1767263190
X	1430	XXII	6564120420
XI	4862	XXIII	24466267020
XII	16796	XXIV	91482563640
XIII	58786	XXV	343059613650.
XIV	208012		

VII.

Methodus simplex et vniuersalis omnes omnium aequationum radices detegendi.

Auct. I. A. de Segner pag. 211.

Complures iam a Geometris excogitatae sunt methodi aequationum algebraicarum radices, vel accurate, vel proxime saltem, determinandi: omnes autem fere postulant, vt valores radicum, quae quaeruntur,

runtur, propemodum iam sint cogniti, ad quam cognitionem quomodo sit perueniendum, saepe numero parum perspicitur. Cel. *Bernoulli* iam pridem quidem excellentem methodum tradidit, ope serierum recurrentium hoc praestandi: verum ipse animaduertit, hoc modo tantum, vel ad maximam, vel ad minimam aequationis radicem, appropinquari. Ill. igitur Auctor hic mechanicam methodum perquam ingeniosam exponit, vbi descriptione certarum linearum curuarum limites omnium radicum realium manifesto exhibentur, constructionem autem harum linearum geometricam admodum facilem docet, qua, quouis casu oblato, fere sine labore vti liceat. Quae lineae quo accuratius super Charta delineantur, eo propius veros singularum radicum valores manifestat, quibus cognitis, eo promtius aliarum methodorum beneficio approximatio instituitur.

VIII.

De Problematibus quibusdam Isoperimetricis.

Auct. Paullo Frisio pag. 227.

Iure monet Cl. Auctor in limine dissertationis suae problema Isoperimetricum a celeberrimis saeculi nostri Geometris, *Eulero* potissimum, tanto iam studio pertractatum esse, vt eorum lucubrationibus, vix quidquam amplius adiungi possit. Ita sane Cel. *Eulerus* vniuersam hanc Theoriam, quomodo inter omnes lineas

lineas quotcunque, proprietatibus communibus gaudentes, eam definiri oporteat, cui maximi minimiue proprietas conueniat, vberrime explicauit, methodumque facilem ac planam omnia huius generis problemata resoluendi tradidit. Verum enim vero, cum huiusmodi inuestigationes semper vberiora studia admittant, suosque amatores raro optato fructu, promouendis vltra geometriae pomaeriis, destituant, Cl. quoque *Frisio* non deneganda laus est, quod casus quosdam particulares huc redeuntes ingeniosa perspicacitate magis illustrare, et breuiori calculo exhibere, conatus est. Caeterum dum Cl. Auctor p. 231. calculo suo praerogatiuam quandam prae *Euleriano* tribuit, vnicam Cel. *Euleri* dissertationem, in Tomo VI. Comm. nostrorum extantem, compertam habuisse videtur. Prodiit autem postmodum A. 1744. alia eiusdem de hoc argumento tractatio, Lausannae excusa, quam *Methodum inueniendi lineas curuas maximi minimiue proprietate gaudentes* vocauit, vbi, quae in priori dissertatione desiderari posse videbantur, abunde suppleuit. Denique nouam huius problematis solutionem, qua nihil pulchrius, nihil generalius, nihil magis analyticum, esse potest, ex nouo a se adornato *Calculo variationum* deductam, nobiscum *Eulerus* communicauit, quam indicasse sufficiat, donec in aliquo ex subsequentibus Commentariorum nostrorum voluminibus comparebit.

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

De quibusdam circa lentes causticas et specula vstoria emendatis et nouiter inuentis.

Auctore I. E. Zeihero pag. 237.

Vim solis calefaciendi duplici modo, reflexione scilicet ac refractione, eousque augeri posse, vt effectus etiam intensissimum ignem longe superet, experimenta, speculis vstoriis et lentibus causticis instituta, manifesto declarant. Ad tam stupendum autem effectum producendum haec instrumenta tot labores tantosque sumtus postulant, vt vix quisquam priuatus sibi ea comparare queat, cum tamen in scientiae augmentum maxime esset optandum, vt naturae scrutatores huiusmodi instrumentis, iisque perfectissimis, essent instructi. *Archimedes* quidem apud nonnullos scriptores perhibetur ingenti speculo vstorio naues hostiles ad insignem distantiam combussisse. Apud alios autem, eosque probatiores, de ratione, qua ille in exurendis nauibus versatus est, nihil legitur; quare cum eundem effectum ignibus iniiciendis multo facilius consequi potuisset, de rei veritate merito dubitatur. Interim tamen haec, siue historia, siue fabula, Cel. *Buffonum* in Gallia excitauit, vt de eiusmodi speculo vstorio cogitaret, uaret, quod ex pluribus exiguis speculis planis, secundum superficiem sphaericam dispositis, constaret. Neque fefellit expectationem successus: hoc enim modo insignem vim vstoriam ad ingentem distantiam propagauit.

Antequam hoc inuentum ad notitiam Cl. Auctoris peruenisset, iam ipse de combinandis pluribus speculis planis cogitauerat, quorum lumen reflexum, dum in eundem locum proiiceretur, idem esset praestiturum, quod speculum metallicum concauum maximis sumtibus comparandum; ex quo iure sibi partem quandam gloriae huius inuentionis vindicare potest. Hic autem inprimis egregium artificium excogitauit, specula quotcunque plana facili negotio secundum superficiem sphaericam disponendi, idque ope asserum, qui, vi rite adhibita, sponte quasi ad hanc figuram incuruantur. Neque vero hic inuestigationes suas terminandas putauit, sed etiam artificia quaedam excogitauit, tabulis vitreis planis curuaturam inducendi, qua deinceps, tanquam speculo vstorio, vel binis coniungendis, et cauitatem inter eas aqua implendo, tanquam lente vstoria, vti liceat. Ad hunc finem assequendum, pluribus institutis experimentis, didicit, quomodo tabula vitrea, catino concauo imposita, igni ita sit committenda, vt ea tantum non liquefacta catino perfecte se applicet, eiusque figuram accipiat, quam deinceps refrigerata constanter sit seruatura; hoc certe modo maximis orbibus vitreis figura sphaerica sine tantis ambagibus induci poterit, quales alioquin politura exigeret. Etsi vero etiam sine igne huiusmodi orbes vitrei aliquantillum incuruari possunt; ob elasticitatem enim parumper a viribus idonee applicatis se inflecti patiuntur: attamen ex hoc statu violento, cessante virium actione, mox se in statum naturalem restituturas esse, nemo dubitabit. Clar. Auctor autem modum perquam ingeniosum proponit, istas tabulas hac ratione incuruatas in statu violento retinendi, ita vt si superficies conuexa argento viuo fuerit inducta, altera superficies concaua vicem tanti speculi metallici, maxima opera et sumtibus comparati, eo maiore successu sustinere possit, quo speculum vitreum radios solis multo copiosius reflectit, quam speculum metallicum optime politum. Huc accedit, quod a tali vi externa vitrum non ad figuram sphaericam incuruatur, sed ad aliam propius ad parabolam accedentem, quae propterea radios solis multo magis in vnum focum est collectura. Hinc intelligere licet, quanta incrementa ab huiusmodi machinis vstoriis, intensissimas etiam ignis fusorii vires longe superantibus, tam in Physica, quam Chemia praesertim, expectare queamus.

II.

Phaenomenorum Iridis seu arcus coelestis disquisitio.

Auctore Sim. Kotelnikow. p. 252.

Iridis originem et naturam Cl. Auctor hic explicandam et ex principiis dioptricis perspicue euoluendam sibi sumsit; vbi statim animaduertit, iam veteribus

bus cognitum fuiſſe, hoc phaenomenon in guttis aqueis per aerem delabentibus generari, dum a radiis ſolis ex aduerſo colluſtrantur. Non vno autem modo, ſed pluribus, imo innumeris, Iris produci poteſt, dum radii ſingulas guttas ingreſſi, vel ſemel, vel bis, vel pluries, reflectuntur, antequam inde reuertantur. Etſi enim guttae aqueae inſigni pelluciditatis gradu ſint praeditae, tamen hoc habent cum omnibus corporibus diaphanis commune, quod non omnes radios in ſuam ſuperficiem incidentes transmittant, ſed partem quandam eorum reflectant, vnde fit, vt radii ſolares, in guttas intrantes, iam quandam iacturam ſint paſſi. Radii autem ingreſſi ob eandem rationem non omnes per guttulam transmittuntur, ſed pars quaedam a ſuperficie interiore reflectitur, quae denuo, vbi inde in aerem erumpere deberet, ex parte quadam reflectitur: ita in eadem gutta idem radius plures reflexiones pati poteſt, antequam rurſus in aerem emittatur. Quo plures autem reflexiones in gutta patitur, eo magis debilitatur, ita vt mox omnem vim amittat. Neque vero omnes radii in guttas intrantes, et poſt vnam vel aliquot reflexiones inde emergentes, ad Iridem repraeſentandam ſunt idonei; ſed ii tantum, qui in exitu iterum inter ſe fiunt paralleli, quando quidem neceſſe eſt, vt radii, a ſingulis obiectorum conſpicuorum punctis in oculos noſtros transmiſſi, ſint fere inter ſe paralleli. Hinc pro certo ſolis et ſpectatoris ſitu, certae tantum guttulae aptae ſunt ad Iridem producendam, atque aliae quidem, quae radios ſemel reflexos, aliae, quae bis pluriesue reflexos, ad oculos noſtros transmittunt; et quia

C 2 radii

radii diuerforum colorum diuerfam refractionem patiuntur, aliae guttae nobis radios rubros, aliae violaceos, et reliquorum colorum, reddent; ob quam caufam diuerfi colores in Iride a fe inuicem feparati repraefentantur. Iam Iris principalis ab iis radiis exhibetur, qui in guttis aqueis femel tantum reflectuntur, quae etiam propterea maxime viuida apparet: radii autem bis in guttis reflexi, ideoque multo maiorem diminutionem paffi, Iridem fecundariam multo debiliori lumine fpectandam praebent. Cum ipfum problema, quo vera pofitio omnium cuiusque ordinis Iridum quaeritur, attentione Phyficorum quam maxime dignum cenfendum fit, nulli dubitamus, Lectores cum voluptate folutionem a Cl. Auctore fuppeditatam lecturos effe.

III.

Defcriptio ac explicatio nouorum quorundam experimentorum electricorum.

Auctore F. V. T. Aepino. pag.

Pekini commorantes Reu. Patres Soc. Iefu, pro laudabili fuo in omne doctrinarum genus ftudio, a multis annis nullam occafionem praetermittere folent, qua non Academiam noftram, hoc litterarum commercium debita officiorum reciprocatione colentem, de laboribus fuis Phyficis, Mathematicis, Hiftoricis, Geographicis, certio-

certiorem reddant. Nunc accidit, vt nouo quodam experimento electrico valde singulari instituto, ansam praebuerint ad ipsam Theoriam Electricitatis magis illustrandam, et quantum in re, de qua tot sensus, quot capita, fieri potest, fere euictam praestandam.

Lamina vitrea electrica adplicatur ad pyxidem magneticam vitro tectam, quod dum fit, acus magnetica stilo incumbens cuspide sua confestim sursum rapitur ad vitrum pyxidem tegens, ipsique horas duas, vel tres, quasi adglutinata, constanter adhaeret. Postmodum repentine decidit acus, et ad situm suum consuetum redit. Aufertur lamina a pyxide, ecce paradoxon! acus dicto citius denuo ascendit, operculo pyxidis vitreo iterum se adglutinans, et ad duarum aut trium horarum spatium, non aliter, ac ante factum erat, adhaerens. Admota iterum lamina, acus decidit, et sublata rursus attrahitur. Hoc vel centies repetere licuit Patribus *Iesuitis*. Et haec summa est experimenti *Pekinensis*, in quo nemo non mirabitur, quomodo Electricitas, quae post decursum aliquot horarum penitus extincta videbatur, momento quasi, et sine vlla noua frictione, aut excitatione, per solam laminae remotionem, potuerit resuscitari, admota autem lamina, iterum extingui.

Haec cum ad Cel. Auctoris huius dissertationis notitiam peruenissent, mox in caussam horum tam insolentium phaenomenorum sibi inquirendum esse censuit, et examinare, vtrum ex principiis Theoriae electricae *Francklinianae*, quam, vt ex libro ipsius de *Theoria Electricitatis et Magnetismi* constat, naturae miro modo con-

congruentem expertus est, explicari possint. Conspicere autem sibi visus est consensum prorsus notabilem, de quo vt certior fieret, aliosque, si vera sentiret, convinceret, repetiit primum experimentum *Pekinense*, dein elicuit ex nouis phaenomenis varias conclusiones, nouaque experimenta, ab his conclusionibus sibi suggesta, multo studio instituit. Solitae Auctoris dexteritati tribuimus, quod maximis in hac re cautelis vsus est. Scimus illum valedicturum fuisse principiis Theoriae *Francklinianae*, si experimenta, quae, quid docere debebant, praeuidit, id iussissent. Accidit autem contrarium; quare nunc in sententia sua omnimode se confirmauit.

IV.

Obseruatio Optica de mutabilitate diametri apparentis foraminis angusti oculo propinqui.

Auct. F. V. T. Aepino. pag. 303.

Inter alias stupendas visionis affectiones ex quibus infinita omnipotentis Creatoris sapientia copiosissime elucet, ea quoque proprietas, qua pupilla, pro copia luminis ingredientis, vel dilatatur, vel constringitur, nos in admirationem rapere potest, tantoque magis, quo minus haec mutatio a voluntate nostra pendet, sed sponte quasi ad visionis perfectionem, oculorumque conseruationem, temperatur. Cum pupilla sit foramen illud rotundum

dum in iride conſpicuum, per quod radii ab obiectis emiſſi in oculum intrant, in eoque ſuper retina tanquam in camera obſcura imagines obiectorum depingunt: hinc fit, vt, quo magis pupilla fuerit dilatata, eo maiori radiorum copiae ingreſſus in oculum concedatur, ſicque imago ſuper retina depicta viuidiori lumine exprimatur, ſiquidem lumen externum pari vi fuerit praeditum. Quemadmodum autem ad ſenſationem excitandam certa luminis vis requiritur, ita etiam lux nimis fortis delicatiſſimo huic organo damnum afferre poſſe in propatulo eſt; quod ne eueniat a ſapientiſſimo creatore eſt cautum, vt pupilla a fortiore lumine ſponte ſe contrahat, a debiliori vero ſe dilatet. Experientia hoc luculentiſſime teſtatur, dum in locis tenebricoſis pupillae apertura vehementer augeri, ad inſignem autem lucem ad puncti fere paruitatem imminui conſpicitur. Quae etſi ſunt notiſſima, tamen ſingularis circumſtantia circa mirabilem amborum oculorum conſenſum hic a Cel. Auctore primum obſeruata eſſe videtur, haec nempe, qua, ſi alter tantum oculus fortiori lumini exponitur, pupilla quoque alterius ſe contrahit, etiamſi multo minorem luminis copiam excipiat: ita memorabili Auctoris exemplo edocemur, ſi quis oculo v. gr. ſiniſtro vtens obiecta per exiguum foramen ſpectat, tunc multo maiorem campum viſionis ſe offerre ipſi clauſo oculo dextro, quam eo aperto, cuius phenomeni ratio in eo eſt ſita, quod aperto oculo dextro, eiusque pupilla ob maius lumen coarctata, ſimul oculi ſiniſtri pupilla ob mutuum conſenſum contrahebatur, quae, clauſo oculo dextro, ob minorem luminis copiam, per foramen acceptam, iterum expandebatur; ideo non poterat non maiorem visionis campum complecti.

V.

Acus nouae declinatoriae descriptio.

Auct. I. E. Zeihero. pag. 309.

Optimos saepe latet acuum magneticarum fabros, vnde fiat, quod nulla opera acubus suis eam, quam volunt, virtutem communicare queant. Hoc autem inde fieri docet Cl. Auctor, quoniam acus magneticae vulgares plerumque hoc laborant vitio, quod, ob capitulum suspensioni inseruiens, duabus quasi partibus, a se inuicem discretis, sint compositae, quarum vtraque vicem acus singularis gerat, sicque, ob interruptam magnetismi virtutem, nisus, sese fixam plagam versus dirigendi, minuatur. Vitium hoc in pluribus acubus, more solito fabricatis, per experimenta luculenter comparuit, dum in iis quatuor poli obseruati sunt, prorsus vti eueniret, si binae acus simplices secundum longitudinem iungerentur, ex quo huiusmodi acus vis insigniter minuitur. Hinc Cl. Auctor in nouam rationem acus declinatorias suspendendi inquisiuit, qua continuitas magnetismi, per totam eius longitudinem diffusi, non interrumperetur, hicque ingeniose excogitatum modum proponit, quo acus sine vllo capitulo ita suspendi potest, vt liberrime secundum omnes plagas se conuertere, et et vim fe dirigendi fine vllo impedimento exercere queat. Quod fi ad curfum nauium dirigendum applicari poteft remedium, infignem inde vtilitatem certe expectare licet, cum nauigantes nimis crebro de imbecillitate acuum nauticarum adhuc fint conquefti. Poftquam enim ars eft inuenta etiam duriffimum chalybem fumma vi magnetica imbuendi, nihil amplius ad perfectionem acuum magneticarum, quam idonea fufpenfionis ratio, defiderari videtur.

PHYSICA.

I.

Nitraria planta obſcura explicata.

Auct. Carolo Linnaeo. pag. 315.

Plantam hanc Ruſſiae indigenam in vicinia officinae nitrariae Aſtrachanenſis primus obſeruauit breuiterque deſcripſit *Gottlob Schoberus*, M. D. cuius *Memorabilia Ruſſico-Aſiatica*, ineditum adhuc opus, itineris Aſtrachaniam verſus et ad fluuium Terek vſque inſtituti fructum, beneficio Viri doctiſſimi *Io. Iac. Lerche*, M. D. Conſiliarii aulici et in curia medica Adſeſſoris, ex autographo b. Auctoris quondam transſcriptum, nuper ad manus noſtras peruenit, ideoque deſcriptionem authenticam huius plantae, ſine qua hiſtoria eiusdem manca foret, in gratiam Botanophilorum inde decerpere poſſumus.

„Inter exſpatiandum, ita *Schoberus*, in hac „Nitraria (officina) ſub menſis Iulii initio ob ſolum „aridum et ſalinum pauca quidem vidi vegetabilia et „vix graminum culmos: habet tamen hiſce in terris „Kali ſuam patriam. Vidi enim Kali maius frutico„ſum, Kali lignoſum linariae foliis, Kali incanum bre„vibus foliis, Kali foliis longioribus et anguſtioribus. „Prae hiſce Kali ſpeciebus iucundam me rapuit in ad„mirationem planta nondum viſa, nec ab aliis Bota-

„nicis,

„ nicis, prout recordor, descripta. Est autem fruti-
„ cosa, vnius vlnae brabanticae longa; radix nihil sin-
„ gulare habet; caulis lignosis constat fibris, albissimo-
„ que cortice est obductus; folia habet angusta, in
„ summitate rotundiora, ad formam folii Gnaphalii, si-
„ ve Elychrysi; flores sunt regulares pentapetali, albi
„ coloris, fructus est cylindraceus et conicus, in sum-
„ mitate angustus et acutus, rubicundissimus, bina vt-
„ plurimum semina, subrotunda duraque continens;
„ sapor est fere nullus, sed quodammodo farinaceus.
„ Reducere ad suum genus allaboraui quidem, sed nul-
„ lum inuenire potui; fructus quidem analogiam quan-
„ dam *Berberum* praebet, sed flores harum non con-
„ ueniunt cum nostris, quatenus illi hexapetali sunt re-
„ gulares, hi vero pentapetali, vti dictum est. Ad
„ *Orobum*, germ. *Forlitzen*, quem Botanici inter
„ Sorbi species recensent, nostra planta ex parte ratione
„ fructus accedere videtur, sed melius est, genus pro-
„ prium formare, et in defectu nominis commodioris
„ ad memoriam suae patriae *Nitrariam* adpellare.

Post *Schoberum* similem plantam in Sibiria ad lacum salsum Iamyscham repertam, sub *Casiae fructu nigro* nomine, descripsit *Gmelinus*, quam descriptionem, in Stirp. p. 178 edidit *Ammanus*. Denique *Stellerus* referente *Gmelino* Flor. Sib. II. p. 237. eandem suam Casiam ad lacum salsum deserti *Vrunscinensis* (forte *Orongoensis*, ab *Orongoi* amne Selengam subeuntis cognominati,) obseruauit, et sub generico *Elaeagni* nomine recensuit. Hinc occasionem nactus est *Gmelinus* de hac planta vberius differendi Flor. Sib. l. c. eamque praeeunte Ill. *Linnaeo* Ofiridis nomine falutauit. Aft inaufpicato accidit, vt *Gmelinus* aeque ac *Stellerus*, plantam viderint floribus iam orbam; cumque *Gmelinus* rogauerit *Lerchium*, Aftrachaniae tunc commorantem, vt *Nitrariae Schoberi* exempla ad fe mitteret, inter chartas ficcata, ipfamque plantam viridem defcriberet, neque hic, quod ad flores attinet, voto factus eft compos. Tandem Ill. *Linnaeus* femina ex Ruffia accepta in horto Vpfalienfi ita colere inftituit, vt quaefitos diu flores obtineret; vnde iam notitiam huius plantae ad plenariae perfectionis gradum perductam effe gaudemus. Errores operarum, quibus non femel pro *lacu* falfo, *locus* falfus legitur, facile Lector excufabit.

II.

Polypi marini, Ruffis *Karakatiza* dicti, defcriptio.

Auct. Iof. Theoph. Koelreuter. p. 321.

Merito conqueritur Cl. Auctor de paucitate fcriptorum, qui hiftoriam animalium marinorum data opera illuftrarunt. Caufae in promptu funt: multitudo namque et diuerfitas animalium; dein difficultas illa adipifcendi, quae interdum tanta eft, vt non nifi fortuito cafui tribuendum fit, fi tale animal inciderit in manus viri docti, amatoris inueftigationis naturae, hanc Hiftoriae naturalis partem fuo ftudio amplificare cupien-

cupientis. Plerasque de rebus exoticis notitias peregrinatoribus deberi constat, hominibus vt plurimum minus eruditis, qui, ad quae potissimum attendere debuissent, ignorarunt. Scriptores systematici, *Gesnerus*, *Aldrouandus*, *Ionstonus*, omnia vndecumque corraserunt, minus solliciti de veritate, aut veri specie, eorum, quae dicerent, quam ne quid ab aliis dictum praetermitterent. Hinc tot in Historia animalium, inprimis marinorum, errores, tot defectus, quos haud facile, nisi erudita opera virorum intelligentium, qui ipsi per terrarum mariumque anfractus longinqua itinera huic vsui instituere non graue duxerint, eliminari, aut suppleri, posse patet. At quam difficilis et sumtuum incommodis praepedita haec res est? Cl. *Koelreutero* minori constitit, curiositatem suam explere, cum viri rerum naturalium studiosi sua sponte occasionem ipsi subministrarunt, hanc, quam descripsit, Polypi speciem in pluribus exemplaribus accurate examinandi. Vt enim Polypi, *Karakatizae* dicti, Graecis hominibus, Aegaei Adriaticique maris accolis, in escam cedunt, imo a veteribus, quod pluribus exemplis *Ionstonus* docet, in deliciis habiti sunt; ita ob eandem causam haec animalia, exenterata, sicca, in Russiam quoque importari solent, gratum palato praebituri edulium, tempore ieiunii, inprimis si brachia, siue tentacula, spectes, quae elixa et assa gustu vix a carnibus suillis discernuntur. Exempla Polyporum, in spiritu vini solius curiositatis gratia adseruata, effecerunt, vt descriptioni suae hunc, quem videmus, perfectionis gradum conciliare Auctor potuerit. Denique obseruamus,

vo-

vocabulum *Karakatiza* ex Tatarica lingua in Russicam inuectum esse: *Kara* enim Tataris et Turcis *nigrum* sonat; hunc autem colorem cutis externum, in supina inprimis facie, Polypis competere, Auctoris nostri testimonio confirmatur.

III.

Zoophyti marini, e Coralliorum genere, Historia.

Auctore I. T. Koelreuter. p. 344.

IV.

Descriptio Tubiporae maris Albi accolae.

Auctore eodem. p. 374.

V.

Continuatio Historiae Zoophyti marini e corallorum genere.

Auctore eodem. p. 377.

Aliud rerum marinarum genus hoc loco tractandum sibi sumsit Cl. Auctor, sterilem itidem ac cultura indigentem calcando campum, vnde apud historiae naturalis scriptores vix nuda rerum nomina decerpseris,

ris, tantum abeſt, vt, quod de rebus ipſis ad plenam illarum cognitionem faciat, haurire poſſis. *Zoophyta* ſunt, vt inſcriptio docet, vnum e *Coralliorum* genere, alterum *Tubiporae* ſpecies, ab Auctore deſcripta. De primo disiunctis opellis agit, quoniam duo corpora conſiderat, eiusdem omnino ſpeciei, an patriae eiusdem? non liquet. Alterum Archangelopoli miſſum, ex Gazophylacio Imperatorio alterum depromptum eſt. Vtinam omnes theſauri, tam naturales, quam nummarii, aliique, in locupletiſſimo hoc Gazophylacio latentes, eodem ſtudio atque doctrina in apricum producerentur! *Tubiporae* ſpecies huc vsque ignota etiam Archangelopoli ad Cl. Auctorem perlata eſt, vnde perſpicitur, inexhauſtas vbiuis maris eſſe opes, coelumque frigidum inhibere quidem poſſe perquiſitionem circa illas inſtituendam, naturae autem facultati in producendis infinitis operibus limites non ponere. Non eſt, vt ad ſpecialia deſcendamus. Obſeruamus generatim, tam exteriorem, quam interiorem conditionem atque texturam deſcribi, deinde, cum non conueniat inter hiſtoricos naturales, vtrum Zoophyta animali regno, an vegetabili, ſint adnumeranda? experimenta chemica addi, ex quibus clarum ſit, ab vtroque participare. Hoc nempe gradu a vegetabilibus ad animantia tranſit natura, quam nihil facere *per ſaltum*, vetus dicterium eſt.

VI.

Obſeruationes meteorologicae factae Petropoli annis 1755 et 1756 cum conſectariis.

Auctore I. A. Braun. pag. 388.

De obſeruationibus ipſis, eadem omnino methodo, ac praecedentes, in Tomo V. Comment. expoſitae, quarum continuationem ſuppeditant, inſtitutis ac digeſtis, dicere nihil attinet. Singulare eſt, quod hic ex comparatione inſtituta colligitur, primis Februarii diebus anni 1755 frigus in Germania circa Goettingam magis intenſum regnaſſe, quam quidem hic Petropoli. Deinde inter tonitrua, propter hiſtoriam noſtrae Petropoleos, iſtud memorabile eſt, quo turris templi St. Petri in Caſtello die 30 Aprilis anni 1756 fulmine percuſſa conflagrauit. Caeterum Cl. Auctor in gratiam eorum, qui thermometro Petropolitano, ſeu Delisliano, minus adſueti, illud cum Fahrenheitiano, Reaumuriano, aliisue, comparare voluerint, concinnauit tabulam ſcalarum omnium fere vſitatiorum thermometrorum, ita iuxta ſe inuicem poſitarum, vt comparatio vno intuitu fieri poſſit. Haec inter tabulas aeri inciſas XVIII. locum obtinet.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

I.

De Refractionibus in oris ſeptentrionalibus.

Auctore G. Heinſio. p. 411.

Notum eſt Solis omniumque ſiderum radios, dum puriſſima coeli ſpatia emenſi in noſtram atmoſphaeram intrant, a tramite ſuo rectilineo aliquantillum deflecti, idque eo magis, quo propius ad horizontem adueniunt. Hinc omnia ſidera altius ſupra horizontem eleuata nobis apparent, quam ſi eorum radii recta ad nos peruenirent, atque ob hanc cauſam Sol citius nobis oriri, tardiusque occidere videtur, quam ſine hac radiorum inflexione eſſet euenturum. Differentia iſta, qua altitudo ſiderum ob atmoſphaeram augetur, refractio aſtronomica appellari ſolet, in qua inveſtiganda Aſtronomi ab omni tempore maxime fuerunt occupati, atque tabulas condiderunt, quibus pro quauis altitudine ſideris obſeruata haec refractio aſtronomica deſignatur. Cum autem atmoſphaera noſtra maximis mutationibus ſit obnoxia, facile intelligitur, etiam refractiones haud leuiter pro locorum tempeſtatumque diverſitate variare debere. Hieme certe vbique maiores deprehenduntur, quam aeſtate, quia frigore aer condenſatur, ideoque radios magis refringit, et cum in altiſſimos montes aſcendimus, vbi aer leuior eſt et tenuior, ibi quoque minores refractiones experimur. Deinde etiam sub aequatore Astronomi Galli, graduum terrestrium dimetiendorum causa eo profecti, refractiones minores deprehenderunt, quam Parisiis, quod sine dubio aeri ob insignem calorem multo tenuiori est tribuendum. Hinc vicissim concludi debere videtur, in regionibus borealibus, ob frigus intensissimum, refractiones haud mediocriter augeri debere, quam coniecturam relatio Hollandorum, qui Anno 1597 in Noua Semla hybernare coacti, solis ortum multo ante, quam expectare poterant, sunt experti, mirifice confirmare videtur. Cum autem Cel. *de Maupertuis* in Lapponia refractionem siderum omni cura explorasset, eam praeter expectationem haud maiorem inuenit, quam Parisiis, quod merito tanquam insigne Paradoxum est spectandum. Clariss. igitur huius dissertationis Auctor hanc inuestigationem summa, qua pollet, vi ingenii vlterius prosequitur, et postquam *Ludouici De l'Isle De la Croyere*, ad vltimos fines Sibiriae ablegati, obseruationes, ad ostium fluuii *Olenek* habitas, omni studio ac sollertia examinasset, in hac quoque tam boreali regione, cuius latitudo 73 gradus superat, refractiones Parisinis non maiores fuisse demonstrat, ac frequenter adeo minores ipsi sunt visae, quod inexspectatum Phaenomenon in Astronomia certe maximii est momenti.

II.

II.

Relatio Obſeruationum circa longitudinem Penduli ſimplicis inſtitutarum.

Auctore A. N. Griſchow. pag. 445.

Poſtquam ſolertiſſimus Obſeruator *Griſchovius*, praematura morte nobis ereptus, rationem Obſeruationum ſuarum in Inſula *Oſilia* ad Lunae parallaxin accuratius definiendam inſtitutarum, quem in finem potiſſimum hoc iter ſuſceperat, in praecedenti volumine reddidiſſet, nunc obſeruationes quoque, quas ad grauitatis determinationem ſummo ſtudio et cura in eodem hoc itinere inſtituerat, exponit, ex quibus Theoria Telluris maxima incrementa adeptura videtur. Cum enim ſatis ſuperque fuiſſet exploratum, tam ob motum diurnum telluris, quam ob eius figuram ſphaeroidicam, vim grauitatis ſub aequatore diminui, prope polos autem augeri oportere, ex obſeruationibus adhuc inſtitutis regula eſt ſtabilita, cuius ope ad quamuis latitudinem vera grauitatis quantitas definiri queat. Concluditur autem ea ex numero oſcillationum, quas pendulum datae longitudinis dato temporis interuallo abſoluit. Namque ex principiis mechanicis euictum eſt, quo maior fuerit grauitas, ſeu niſus deorſum, eo frequentiores reddi eiusdem penduli oſcillationes. Quare certiſſima methodus, vim grauitatis explorandi, in hoc consistit, vt oscillationes, a pendulo datae longitudinis certo tempore peractae, accurate numerentur, id quod Cl. Auctor *Reualiae*, *Pernauiae* et in *Osilia* Insula omni adhibita industria et circumspectione praestitit. Saepius autem repetitis, ac diuersimode institutis huiusmodi experimentis, in his locis motum penduli aliquanto tardiorem deprehendit, quam Petropoli, vnde quidem, quod regulae illi egregie est consentaneum, sequitur, in his locis, vtpote magis aequatorem versus sitis, grauitatem esse minorem, quam Petropoli: ipsa autem differentia cum multo maior prodiit, quam ea regula patitur, concludendum inde videtur, non sub omnibus meridianis diminutionem grauitatis aequatorem versus eandem legem sequi, neque in omnibus locis, sub eodem parallelo sitis, grauitatem esse eiusdem magnitudinis; imo etiam fortassis non omnes meridianos eadem figura esse praeditos, neque totius terrae figuram ita esse regularem, vt adhuc est creditum, cuius rei aliae quoque obseruationes Virorum Cl. *Christophori Maire* et *R. I. Boscovich*, in ditione Pontificia ad dimetiendos gradus duos meridiani institutae, non leuem suspicionem praebent. Hic igitur scrutatoribus naturae amplissimus campus aperitur, in veram terrae figuram, tam nouis obseruationibus et experimentis, quam rationibus ex eius interna indole petitis, multo accuratius inquirendi.

SVP-

SVPPLEMENTVM
De Ibice imberbi.

In Volumine V. Nouor. Comm. p. 345 exstat D. *Gmelini* descriptio *Ibicis imberbis*, Russis *Saiga* dicti, vbi inter alia dicitur de dentibus: „esse in „maxilla inferiore quatuor incisores et quatuor caninos, „cum quinque molaribus, quorum singulis binae radi- „ces sint; superiorem autem maxillam eodem inciso- „rum et caninorum numero gaudere, et quatuor tan- „tum molaribus, triplici radice nixis, praeditam esse.„ Haec cum legisset Ill. *Linnaeus*, per litteras, Vpsalia die XIV. Octobris anni 1760. datas, „dubium nobis „mouit de dentibus primoribus in superiore maxilla, „et de caninis in inferiore, tanquam naturae omnium „cognitorum animalium repugnantibus, rogauitque, vt „si hoc animal vnquam Petropolin perferretur, aut si „cranium eius obtineri possit, illud attente inspiceremus, „seque de obseruatis nostris certiorem redderemus.„ Iudicium tanti viri mox in eius partes nos descendere iussit, etiamsi multum mirati simus, *Gmelinum* in re tam clara, nullisque in obseruando difficultatibus obnoxia, deceptum fuisse. Fatendum autem est, quod tota *Ibicis imberbis* descriptio *Gmeliniana* festinationem, qua confecta est, redolet; procul dubio accuratiorem suppeditasset, si in reditu ex Sibiria, per itineris rationes, regionem, in qua hoc animal commoratur, ipsi denuo peragrare licuisset. Tanto igitur magis necessarium erat, animal denuo examinare, eiusque talem dare

dare descriptionem, quae, omne dubium auertendo, nihil non complecteretur, quod ad iustam eius ideam sistendam facere possit. Quod cum exsequendum nobis proponimus, non possumus non laudare Virum Excell. *Gregorium Teplow*, Status Consiliarium actualem et Augustissimi Imperatoris pro Ducatu Slesuico-Holsatico Camerarium, nec non Virum Illustrem *Basilium Adodurow*, Status Consiliarium et Vice-Gubernatorem Orenburgensem, vtrumque Academiae nostrae, cui a iuuenili aetate addicti fuerunt, honoris causa adscriptum, eo quod pro indefesso ardore suo bonas artes promouendi, occasionem nobis subministrarunt, duo cadauera animalis mascula et vnum foemineum, ex Vcrania et Orenburgo huc allata, cultro anatomico subiiciendi. Possidemus quoque foemellam viuam, quam itidem beneuolentiae Excell. *Teplouii* debemus. Descriptio sequens V. C. *Alexium Protassow*, Professionis anatomicae Adiunctum, auctorem agnoscit:

Ibex imberbis, quem hic pro exemplo caeterorum eiusdem speciei animalium describendum sumsimus, erat mas. Quadrupes bisulcum, cornutum, ruminans, et quidem ex genere caprino. Docuit haec inspectio partium eius tam internarum, quam externarum. Characteres in hoc animali priuos definiunt, vti videtur, forma cornuum, nasi, atque defectus barbae. Caput itaque habet quodammodo ouillum, sed naso peramplo, gibbo atque adunco, superne per mediam longitudinem linea tenui, exacte vestigium septi narium indicante, bifariam distincto, extremis naribus, vna cum

la-

labro superiore prae illo inferiore, multum prominentibus et quasi propendentibus. Cornua gerit satis crassa et valida, ouato-rotunda, adulto animali plus quam ad pedis altitudinem producta, perpetua, concaua, totaque quanta albida, et contra solem pellucida; quae mox ab exortu suo extrorsum et aliquantum in priora insigniter arcuata, atque ab imo ad vsque tres quartas partes longitudinis suae crebris orbiculis, siue circulis, inaequalia, perque longitudinem striata, reliqua parte laeuia sunt, multumque ibi arctiora facta, iterum, sed retrorsum leuissime gibba, in extremitates tandem abeunt acutas, versus se inuicem et tantillum in priora conuersas. Nasus, respectu molis totius capitis valde magnus, nihil ferme in se continet cartilaginei, multo minus ossei; excepta parte superiore, qua incipit ab osse frontis, quod ibi in cartilaginem desinit tenuem atque exacutam, minus quam ad quartam partem longitudinis septi narium excurrentem, et parte ima eiusdem septi, qua id surgit a iunctura partium palatinarum ossium maxillarium et a vomere, vbi quoque aliquid adest cartilaginei. Omne vero, quod superest, nasi, constat ex substantia musculosa, densa, et intermixta pinguedine dura, simillima illius linguae, sed compactiore, firmioreque, diuisum septo tenui, pellucido, in duas amplissimas nares, intus subtensas tunica tenuissima, mucosa, laeui quidem, at pilosa, in medio parietum suorum siue laterum, mediocrem digitum transuersum crassas, priora versus et posteriora, item qua cum labro superiore confluunt, tenuiores. Defectus itaque cartilaginum in eiusmodi naribus facit, vt eae in mortuo animali non sustineant se, sed illico collabantur; inde etiam fit, quod in iisdem collapsis orae earum extremae multum ante septum promineant, hoc vero intra nasum magis retractum appareat.

Maxilla inferior anterius instructa est dentibus primoribus octo, quorum bini medii eminent corona latiore in aciem tenuem atque lenissime gibbam terminata; reliqui ad hos adstantes, quo posteriores, eo angustiore et exacutiore corona sunt donati. Singuli caeterum defixi sunt in alueolis suis singularibus et altissimis radicibus. An huic animali id quoque singulare prae aliis est, quod omnes eius dentes primores minus firmiter stent in suis alueolis; sed vel leuissimo impulsi digito in omnem partem facile vacillent? In tribus subiectis diligenter ob id examinati eadem phaenomena constanter ostenderunt. Pone primores, intervallo duorum pollicum disiuncti, sequuntur vtrimque molares quinque. Primi et secundi singulari corona; tertii et quarti, latiores prioribus, duplici, bifariamque quasi diuisi; vltimi quinti, et illis latiores, trifariam distincti, ideoque triplici corona sunt instructi. Superiori maxillae nulli sunt primores, sed molares vtrimque sex; quorum tres priores singulari, sequentes illi tres duplici corona donati, bifariamque ideo distincti sunt. Differunt praeterea superiores molares ab inferioribus, quod illi externum latus habeant concauum, internum connexum. Contrarium vero obtinet in inferioririoribus. Omnes caeterum singulas coronas in summo habent scruposas et asperas, perque longitudinem media alta fissura in duo distinctas. Priores tres infixi sunt alueolis suis nunc binis, nunc ternis, quidam etiam quaternis radicibus; sequentes alii tres binis tantum, eoque crassioribus et altioribus, quo sunt vlteriores; exceptis vltimis inferioribus, qui vti triplici corona, ita etiam ternis radicibus sunt instructi.

Reliquo corporis habitu ceruum, siue potius hinnulum ceruinum, refert quidem huius speciei animalium foemina, non vero mas, qui hirsutior et pilorum colore ab ea totus diuersus, magis accedit ad hircum domesticum, eumque fortiter olet. Pilo tamen vestitur ceruino, aeque crasso ac denso, sed longiore, mollioreque, qui ei in fronte, lateribus capitis atque colli ex cinereo incanus est; in armis, dorso, lateribus eiusdem atque coxis magis in album, sed sordidum colorem vergens. Ad ima vero laterum, ilia atque iugulum promissior idem lanam iam refert; praetereaque in pectore, toto abdomine atque in interioribus vtrorumque crurum candidissimus et resplendens. Superne a prima spina vertebrarum dorsi per medium tergum protenditur stria quaedam fusci coloris, sensim posteriora versus latescens, donec super os sacrum in plagam abeat rhomboideae figurae, extremo suo longitudinali ad vsque anum pertingentem. Inguina ab omni pilo libera, nudaque ibi cutis vnctuoso quodam humore madescit. Pilosissima e contrario prae omnibus aliis pars est huic animali circa iugulum, vbi et multitudinem et longitudinem pili adaugent paullum infra orbitas oculorum vtrimque ab genis demiſſi comarum inſtar faſciculi quidam pilorum alborum, quatuor ferme pollices longi, vnum lati, ſub quorum ſingulo vnicum facile conſpicitur linearis diametri apertum oſculum breuis cuiusdam ductus excretorii, qui ducit in folliculum, capacem maioris nucis auellanae, factum ex introuerſus reducta cute, quae ibi arctatur primum in illum ductum, dein expanditur in ipſum folliculum, eodem ferme modo, vti fit in vrethra et veſica vrinaria. In vtroque, quos hactenus diſſecui eius ſpeciei hircos, folliculos illos inueni totos quantos plenos ſpiſſo quodam et craſſo lateritii coloris quaſi vnguine, ſimili ceruminis aurium. Et, cum ipſi folliculi intus vndique cribri inſtar ſint poroſi, preſſa quamuis leniter circum eos externa cutis, cum ſubiecta ei celluloſa pingui tela, eructabat in cauitatem illorum per poros iſtos ſimile et conſiſtentia et colore craſſamentum.

Longitudo animalis ſumta per medium naſum, frontem, collum dorſumque ab ipſo extremo ſepti narium vsque ad illud ani eſt 4 pedum 9½ pollicum; quod vltra propendet, cauda eſt hirſuta, tres circiter pollices longa. Altitudo ſolo inſiſtentis ab ima vngula cruris anterioris ſecundum idem erectum ad ſummum dorſum 2 ped. 6¼ poll. Eadem ſimiliter ſecundum crus poſterius ad vsque ſummitatem oſſis ſacri ſumta, eſt 2 ped. 7½ poll. Circumferentia trunci tansuerſim pone ſcapulas ducta eſt 2 ped. et 6¾ poll. Eiusdem

menſurae

menfurae est. et illa, quae facta per hypochondria; sed per ilia capta minor est praecedentibus $2\frac{2}{4}$ poll. Hactenus V. Cl. *Protassow*.

Foeminas huius animalis excornes esse, non solum ex duobus exemplis ad nos perlatis, etiamsi iustam nondum aetatem attigisse visae sint, suspicari licet; sed idem quoque relationes Cosaccorum, campos ad Borysthenem inhabitantium, confirmant. Meticulosae sunt, ast non, vt mares, feroces. Si impetuntur a lupis, aut canibus, foeminas intra circulum colligunt mares, quas fronte obuersa fortiter contra hostes defendunt. Sunt qui dicunt, cornua decidua esse, Cosacci negant. Ipsa quoque structura cornuum valde compacta, et fere ossea, contrarium ostendere videtur. Vtrum numerus annulorum in cornibus cum aetate animalis crescat, nemo certo pronunciare ausus est.

Vt clarius figura et corporis habitus animalis nostri patescant, masculum et foemellam, et hanc quidem ad viuum, illum ad cadauer gelu rigidum et in iusto situ collocatum, delineari et aeri incidi curauimus, quae figurae in Tabula XIX. subnectuntur.

Praeterea non praetermittendum esse, censemus, in raro opere *Nicol. Witsenii* de Orientali et Septentrionali Tataria editi adae pag. 790 confundi hoc animal cum animali Moschifero, id quod, a communi vtrique nomine *Saiga* factum esse suspicamur. Loqui autem illum de *Ibice imberbi*, tam ex loco natali, quem viciniam ciuitatis *Vffae* indicat, quam ex figura cornuum, cui apprime cum nostris conuenit, adparet.

Denique addemus descriptionem huius animalis a b. *Iunkero*, Professore in nostra quondam Academia et dein Consiliario redituum aulico, in Vcrania confectam, ex qua adhuc quaedam ad pleniorem animalis cognitionem facientia innotescent. En verba eius ex Germanico versa: „Est singulare genus „animalis Russis in Vcrania *Saigaki* dictum, cuius ca-„ro carni ceruinae (*roth Wildpret*) accensetur. Cri-„nes habet ad instar capreae, cauda digitum longa, „caput ouillum naso adunco, mandibulum superius „prae inferiore ad latitudinem manus prominet, et „est flexile, quia sine osse totum ex cartilagine (me-„lius dixisset: ex musculosa quadam substantia) con-„stat. Balant, vt oues, gressu incedunt tolutario, „(*Pass*) intermixto, si fugantur, saltu, ideoque prae „caprea cursu sunt longe velociores; pascuntur, non „vt alia animalia, sed attollendo mandibulum superius „et retrogradiendo. Tergoris vsus ob mollitiem et „tractabilitatem, si subigitur, caprino non inferior, „ad chirothecas, balteos, cingula, lora, aptissimus. „Oportet autem, vt occidantur mense Septembri, „quia alias tergus multitudine vermium intercutum la-„borat, et vbicunque exesum, nullius vsus est. Mares „cornua gerunt annulata, absque ramis, quotannis deci-

„dua.

„dua. (Si fides auctori, quem tamen hac in re falſo rumore „deceptum eſſe ſuſpicamur.) Stantes gregatim canes non „timent, plerumque occiduntur profundo ſomno oppreſſi. „Caro ob pinguedinem ouillae ſimilis, guſtu ad car„nem damarum accedit, inprimis caro capitis in de„liciis habetur. Omnes campi Boryſthenem inter „et Tanain, nec non Zarizina Aſtrachanum vsque, „hoc pecore abundant. Videbis aliquando ſex ad de„cem mille in vno grege collecta etc.„ Haec excerpſimus ex codice manuſcripto, qui elegantem deſcriptionem geographicam totius Vcraniae, ſeu Paruae Ruſſiae, complectitur.

MATHEMATICA.

SPECIMEN ALTERVM
METHODI NOVAE QVANTITATES TRANSCENDENTES INTER SE COMPARANDI.
DE COMPARATIONE ARCVVM ELLIPSIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Primum huius methodi specimen, quod nuper exhibui, in comparatione arcuum circuli et parabolae conicae versabatur, quae comparatio etsi in se spectata non est noua, cum methodis vulgaribus iam pridem sit expedita, tamen inde exordiendum est visum, quo nouae huius methodi, quam adumbraui, vis melius perspiciatur; quod non solum ad easdem veritates, quae methodis consuetis erui solent, perducat, sed etiam viam longe faciliorem et expeditiorem eadem praestandi patefaciat. Methodus enim consueta integrationes satis taediosas requirit, atque ita est comparata, vt nisi arcus istarum curuarum, qui inter se sunt comparandi, ad quadraturas cognitas circuli ac hyperbolae reuocari potuissent, nullo modo in subsidium vocari potuisset.

 2. Quan-

2. Quantum ergo haec noua methodus praestare valeat, vberius ex comparatione arcuum ellipsis et hyperbolae perspicietur; quarum curuarum rectificatio, cum nullo modo, neque ad circuli quadraturam, neque ad logarithmos reduci queat; methodis consuetis nullus amplius locus relinquitur; neque per eas modus patet, diuersas istarum curuarum arcus inter se conferendi. Quare cum ostendero, nouae huius methodi beneficio comparationem arcuum ellipticorum et hyperbolicorum pari cum successu institui posse, atque arcuum parabolicorum, quoniam methodi vulgares ad id plane sunt ineptae, eo magis summus vsus nouae methodi inde elucebit.

3. Inueni autem huius methodi ope arcus tam ellipticos, quam hyperbolicos, pari modo inter se comparari posse, atque arcus parabolicos; neque id impedimento esse, quod harum curuarum rectificatio vires analyseos penitus transgredi videatur. Quin etiam haec comparatio sub iisdem conditionibus, atque in parabola institui potest, ita vt proposito siue in ellipsi, siue in hyperbola arcu quocunque, ab alio quouis eiusdem curuae puncto arcus abscindi possit, qui ab illo differat quantitate geometrice assignabili. Simili autem modo a puncto quouis arcus exhiberi poterit, qui ab arcu proposito, vel bis, vel ter, vel toties sumto, quoties lubuerit, quantitate geometrica discrepet.

4. Porro autem effici potest, vt haec differentia plane in nihilum abeat, arcusque inuentus ipsi arcui proposito eiusue multiplo adeo fiat aequalis, perinde atque in parabola id fieri posse notum est. Similiter

militer quidem vſu venit, vt bini arcus aequales exhiberi nequeant, qui non ſimul inter ſe ſint ſimiles, verum hoc multo magis notatu erit dignum, quod tam in ellipſi, quam hyperbola, propoſito arcu quocunque, ſemper alius arcus aſſignari queat, qui illius duplo, vel triplo, vel multiplo cuicunque ſit aequalis.

5. Quemadmodum igitur ratione comparationis diuerſorum arcuum, ellipſis et hyperbola indolem parabolae ſequuntur, ita curua lemniſcata ipſi circulo ſimilis deprehenditur. In ea enim curua, aeque ac in circulo, ſi propoſitus fuerit arcus quicunque, a puncto quouis dato arcum abſcindere licet, qui propoſito vel fuerit aequalis, vel duplo maior, vel triplo, vel toties, quoties lubuerit. In hac namque curua, perinde atque in circulo, eiusmodi arcus non dantur, quorum differentia geometrice poſſit aſſignari.

6. Quae autem hic ſum allaturus, multo latius patent, quam ad curuas commemoratas, ellipſin, hyperbolam et lemniſcatam, quippe quae tantum caſus quaſi ſimpliciſſimos conſtituunt formularum, quas haec methodus ſuppeditat. His enim formulis euolutis ſimilem comparationem in infinitis aliis curuarum generibus inſtituere licebit. Quemadmodum autem primum ſpecimen euolutione huius aequationis innitebatur:

$$0 = \alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy;$$

ita hic aequationem latius patentem fundamentii loco aſſumi oportet; ex qua tamen vtraque variabilis, ope extractionis radicis quadratae, definiri queat. Sit igitur propoſita haec

Aequatio canonica.

$$0 = \alpha + \gamma(xx + yy) + 2\delta xy + \zeta xxyy$$

7. Quodsi ex hac aequatione tam valorem ipsius x, quam ipsius y, seorsim extrahamus, obtinebimus:

$$y = \frac{-\delta x + \sqrt{(\delta\delta xx - (\alpha + \gamma xx)(\gamma + \zeta xx))}}{\gamma + \zeta xx}$$

$$x = \frac{-\delta y - \sqrt{(\delta\delta yy - (\alpha + \gamma yy)(\gamma + \zeta yy))}}{\gamma + \zeta yy}$$

vbi signis radicalibus diuersa tribuimus signa, quoniam ab arbitrio nostro pendent: dummodo eorum in sequentibus debita ratio teneatur.

8. Ponamus, vt breuitati consulamus, has formulas surdas:

$$\sqrt{(\delta\delta xx - (\alpha + \gamma xx)(\gamma + \zeta xx))} = X \text{ et}$$

$$\sqrt{(\delta\delta yy - (\alpha + \gamma yy)(\gamma + \zeta yy))} = Y$$

vt habeamus:

$$y = \frac{-\delta x + X}{\gamma + \zeta xx} \text{ seu } X = \gamma y + \delta x + \zeta xxy$$

$$x = \frac{-\delta y - Y}{\gamma + \zeta yy} \text{ seu } -Y = \gamma x + \delta y + \zeta xyy.$$

9. Nunc aequatio canonica etiam differentietur; eritque

$$0 = dx(\gamma x + \delta y + \zeta xyy) + dy(\gamma y + \delta x + \zeta xxy)$$

vnde colligimus fore:

$$0 = -Y dx + X dy, \text{ siue } \frac{dy}{Y} - \frac{dx}{X} = 0$$

Cum igitur X sit functio ipsius x, et Y ipsius y, erit integrando:

$$\int \frac{dy}{Y} - \int \frac{dx}{X} = \text{Const.}$$

10. Vi-

10. Viciffim ergo nouimus, fi huiusmodi aequatio integralis fuerit propofita:

$$\int \frac{dy}{Y} - \int \frac{dx}{X} = \text{Conft.}$$

in qua X et Y ejusmodi functiones irrationales ipfarum x et y defignent, vt fit:

$$X = \sqrt{(\delta\delta xx - (\alpha + \gamma xx)(\gamma + \zeta xx)} \text{ et}$$
$$Y = \sqrt{(\delta\delta yy - (\alpha + \gamma yy)(\gamma + \zeta yy))}$$

tum huic aequationi fatisfacere relationem inter x et y per aequationem canonicam definitam.

11. Quemadmodum autem inuenimus aequationem $\frac{dy}{Y} - \frac{dx}{X} = 0$, ita confideremus nunc aequationem latius patentem

$$\frac{Qdy}{Y} - \frac{Pdx}{X} = dV$$

et inueftigemus cuiusmodi functiones P et Q effe queant ipfarum x et y, vt dV integrationem admittat, ideoque differentia formularum integralium

$$\int \frac{Qdy}{Y} - \int \frac{Pdx}{X} = \text{Conft.} + V$$

algebraice exhiberi queat.

13. Quo haec inueftigatio facilius inftitui queat, ponamus $xy = u$, et ob $xdy + ydx = du$, habebimus $dy = \frac{du}{x} - \frac{ydx}{x}$, qui valor loco dy in aequatione differentiali fubftitutus dabit:

$$0 = dx(\gamma x + \delta y + \zeta xyy) + \frac{du}{x}(\gamma y + \delta x + \zeta xxy) - dx(\frac{\gamma yy}{x} + \delta y + \zeta xyy)$$

feu per x multiplicando:

$$0 = dx(\gamma xx - \gamma yy) + du(\gamma y + \delta x + \zeta xxy)$$

feu $0 = \gamma dx(xx - yy) + X du$

14. Erit

14. Erit ergo $\frac{dx}{X} = \frac{du}{\gamma(yy-xx)}$, et cum sit $\frac{dy}{Y} = \frac{dx}{X}$ erit quoque $\frac{dy}{Y} = \frac{du}{\gamma(yy-xx)}$, vnde habebimus:

$$dV = \frac{(Q-P)du}{\gamma(yy-xx)}.$$

Primo ergo patet, si sit $Q = yy$ et $P = xx$, fore $dV = \frac{du}{\gamma}$ et $V = \frac{u}{\gamma} = \frac{xy}{\gamma}$. Hinc, assumta aequatione canonica, erit

$$\int \frac{yy\,dy}{Y} - \int \frac{xx\,dx}{X} = \text{Const.} + \frac{xy}{\gamma}.$$

15. Similis autem integratio quantitatis V, quoque succedit, si pro P et Q accipiantur potestates quaeuis parium dimensionum ipsarum x et y! Quod vt appareat, ponamus $xx+yy=t$, et, ob $xy=u$, aequatio canonica abit in hanc formam:

$$0 = \alpha + \gamma t + 2\delta u + \zeta uu$$

vnde fit $t = \frac{-\alpha - 2\delta u - \zeta uu}{\gamma}$.

16. Ponamus iam $P = x^4$ et $Q = y^4$, erit $dV = \frac{du}{\gamma}(xx+yy) = \frac{t\,du}{\gamma}$, ideoque $dV = \frac{-du}{\gamma\gamma}(\alpha + 2\delta u + \zeta uu)$; vnde integrando fit:

$$V = \frac{-\alpha u}{\gamma\gamma} - \frac{\delta uu}{\gamma\gamma} - \frac{\zeta u^3}{3\gamma\gamma}$$ siue

$$V = \frac{-xy}{3\gamma\gamma}(3\alpha + 3\delta xy + \zeta xxyy)$$

Vel ob $\zeta xxyy = -\alpha - \gamma(xx+yy) - 2\delta xy$ habebitur

$$V = \frac{-xy}{3\gamma\gamma}(2\alpha - \gamma(xx+yy) + \delta xy)$$

17. Quare nostra aequatio canonica etiam satisfaciet huic aequationi integrali:

$$\int \frac{y^4\,dy}{Y} - \int \frac{x^4\,dx}{X} = \text{Const.} - \frac{xy}{3\gamma\gamma}(3\alpha + 3\delta xy + \zeta xxyy)$$

Atque

Atque his tribus casibus colligendis, aequatio canonica satisfaciet huic aequationi differentiali latius patenti:

$$\int \frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}yy+\mathfrak{C}y^4)}{\sqrt{(\delta\delta yy-(\alpha+\gamma yy)(\gamma+\zeta yy))}} - \int \frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(\delta\delta xx-(\alpha+\gamma xx)(\gamma+\zeta xx))}}$$

$$= \text{Const.} + \frac{\mathfrak{B}xy}{\gamma} - \frac{\mathfrak{C}xy}{3\gamma\gamma}(3\alpha+3\delta xy+\zeta xxyy).$$

18. Si vlterius progredi velimus, ponamus $P=x^6$ et $Q=y^6$, fietque $dV=\frac{du}{\gamma}(y^4+xxyy+x^4)=\frac{du}{\gamma}(tt-uu)$ substituto ergo pro t valore inuento, erit

$$dV=\frac{du}{\gamma^3}(\alpha\alpha+4\alpha\delta u+(4\delta\delta+2\alpha\zeta-\gamma\gamma)uu+4\delta\zeta u^3+\zeta\zeta u^4)$$

ideoque integrando:

$$V=\frac{u}{\gamma^3}(\alpha\alpha+2\alpha\delta u+\tfrac{1}{3}(4\delta\delta+2\alpha\zeta-\gamma\gamma)uu+\delta\zeta u^3+\tfrac{1}{5}\zeta\zeta u^4)$$

Vnde erit per aequationem canonicam: $\int\frac{y^6 dy}{Y}-\int\frac{x^6 dx}{X}$

$$=\text{Const.}+\frac{xy}{15\gamma^3}(15\alpha\alpha+30\alpha\delta xy+5(4\delta\delta+2\alpha\zeta-\gamma\gamma)xxyy$$
$$+15\delta\zeta x^3y^3+3\zeta\zeta x^4y^4).$$

19. Nunc autem formulis nostris irrationalibus X et Y eiusmodi formas inducamus, quae facilius ad quosuis casus accommodari queant: sitque

$$X=\sqrt{p}(A+Cxx+Ex^4) \text{ et } Y=\sqrt{p}(A+Cyy+Ey^4)$$

necesse ergo est fit:

$$Ap=-\alpha\gamma;\quad Ep=-\gamma\zeta-Cp=\delta\delta-\gamma\gamma-\alpha\zeta$$

vnde fit:

$$\alpha=\frac{-Ap}{\gamma};\ \zeta=\frac{-Ep}{\gamma} \text{ et } \delta=\sqrt{(\gamma\gamma+Cp+\frac{AEpp}{\gamma\gamma})}.$$

20. Sit iam $\gamma\gamma=A$; et $p=kk$; sumaturque $\gamma=-\sqrt{A}$; ac fiet:

$$\alpha=kk\sqrt{A};\ \gamma=-\sqrt{A};\ \zeta=\frac{Ekk}{\sqrt{A}} \text{ et } \delta=\sqrt{(A+Ckk+Ek^4)}$$

sicque erit:

$$X=k\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)} \text{ et } Y=k\sqrt{(A+Cyy+Ey^4)}$$

et aequatio canonica prodibit:

$$0 = Akk - A(xx+yy) + 2xy\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} + Ekkxxyy.$$

21. Ex hac autem variabiles x et y ita a se inuicem pendent, vt sit:

$$X = -y\sqrt{A} + x\sqrt{(A+Ckk+Ek^4)} + \frac{Ekk}{\sqrt{A}}xxy$$
$$Y = x\sqrt{A} - y\sqrt{(A+Ckk+Ek^4)} - \frac{Ekk}{\sqrt{A}}xyy$$

vnde fit:

$$y = \frac{x\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} - k\sqrt{A(A+Cxx+Ex^4)}}{A-Ekkxx}$$
$$x = \frac{y\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} + k\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Ekkyy}.$$

22. Hi igitur valores satisfacient huic aequationi integrali latissime patenti: ex §. 17 deductae, dum ea per $-k$ multiplicatur:

$$\int\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}} - \int\frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}yy+\mathfrak{C}y^4)}{(\sqrt{A+Cyy+Ey^4})} = \text{Const.} + \frac{\mathfrak{B}kxy}{\sqrt{A}}$$
$$+ \frac{\mathfrak{C}kxy}{3A\sqrt{A}}(3Akk + 3xy\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} + Ekkxxyy),$$
$$= \text{Const.} + \frac{\mathfrak{B}kxy}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kxy}{6A\sqrt{A}}(3Akk + 3A(xx+yy) - Ekkxxyy).$$

23. Quodsi ergo curua quaepiam ita fuerit comparata, vt abscissae x respondeat arcus $= \int\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}y^4)}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}}$, isque notetur per $\Pi.x$: et arcus alii abscissae y respondens in eadem curua $\int\frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}yy+\mathfrak{C}y^4)}{\sqrt{(A+Cyy+Ey^4)}}$ per $\Pi.y$: inter hos duos arcus ista relatio locum habebit:

$$\Pi.x - \Pi.y = \text{Const.} + \frac{\mathfrak{B}kxy}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kxy}{6A\sqrt{A}}(3Akk + 3A(xx+yy) - Ekkxxyy)$$

siquidem abscissae x et y ita a se inuicem pendeant, vt sit

$$x = \frac{y\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} + k\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Ekkyy} \text{ et}$$
$$y = \frac{x\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} - k\sqrt{A(A+Cxx+Ex^4)}}{A-Ekkxx}.$$

24. Adi

24. Ad iſtam autem conſtantem, quam aequatio integralis continet, determinandam, conſideretur caſu, quo $y = 0$, et quo fit $x = k$; quodſi iam arcus abſciſſae euaneſcenti conueniens quoque euaneſcat, erit pro hoc caſu:

$\Pi.k =$ Conſt. quo valore ſubſtituto habebitur:

$$\Pi.x - \Pi y - \Pi.k = \frac{\mathfrak{B}kxy}{\surd A} + \frac{\mathfrak{C}kxy(kk + xx + yy)}{2\surd A} - \frac{\mathfrak{C}Ek^3x^3y^3}{6A\surd A}.$$

Hoc ergo modo terni arcus in iſta curua dantur, quorum vnus ſummam binorum reliquorum ſuperat quantitate geometrice aſſignabili.

25. Hinc iam in genere patet, ſi curua ita fuerit comparata, vt arcus abſciſſae x reſpondens ſit $\Pi.x = \int \frac{\mathfrak{A}dx}{\surd(A + Cxx + Ex^4)}$, ideoque ſit $\mathfrak{B} = 0$, et $\mathfrak{C} = 0$, tum arcuum illorum differentiam in nihilum abire; hocque ergo caſu in hac curua arcuum comparatio perinde inſtitui poterit, atque in circulo. Sin autem in numeratore adſit terminus $\mathfrak{B}xx$, vel $\mathfrak{C}x^4$, vel vterque, tum arcuum illorum ternorum differentia geometrice aſſignabilis, ideoque arcuum comparatio perinde ſuccedet, atque in parabola. Ipſa autem comparatio eodem modo perficietur, quem in ſpecimine priore pro circulo ac parabola expoſui.

26. Quoniam terni arcus in computum veniunt, quorum abſciſſae ſunt x, y et k, patet, quemadmodum y pendet ab x et k, eodem modo k ab x et y pendere, vnde, datis binis, tertia ex his aequationibus determinabitur:

$$x = \frac{y\surd A(A + Ckk + Ek^4) + k\surd A(A + Cyy + Ey^4)}{A - Ekkyy}$$

$$y = \frac{x\surd A(A + Ckk + Ek^4) - k\surd A(A + Cxx + Ex^4)}{A - Ekkxx}$$

$$k = \frac{x\surd A(A + Cyy + Ey^4) - y\surd A(A + Cxx + Ex^4)}{A - Exxyy}.$$

 27. Si

27. Si hinc aequatio formetur ab irrationalitate omni inmunis, prodibit:

$$EEk^4x^4y^4 = AA(2kkxx + 2kkyy + 2xxyy - k^4 - x^4 - y^4) + 4ACkkxxyy + 2AEkkxxyy(kk + xx + yy).$$

In qua cum ternae absciſſae k, x, y, pari modo ſint immixtae, conſiderari poterunt earum quadrata kk, xx, yy, tanquam radices huiusmodi aequationis cubicae

$$Z^3 - pZZ + qZ - r = 0$$

et cum ſit $p = kk + xx + yy$

$$q = kkxx + kkyy + xxyy$$

$$r = kkxxyy$$

erit $EErr = AA(4q - pp) + 4ACr + 2AEpr$

ſiue $(Ap - Er)^2 = 4AAq + 4ACr.$

28. Hac ergo inter coefficientes p, q, et r relatione conſtituta, ſi pro kk, xx et yy capiantur ternae radices huius aequationis cubicae:

$$Z^3 - pZZ + qZ - r = 0$$

erit pro comparatione arcuum curuae, quam §. 23. ſumus contemplati,

$$\Pi.x - \Pi.y - \Pi.k = \frac{\mathfrak{B}\sqrt{r}}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}p\sqrt{r}}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C}Er\sqrt{r}}{6A\sqrt{A}}.$$

29. Sint ipſae abſciſſae ſuis ſignis affectae $+x$, $-y$, $-k$ radices huius aequationis cubicae:

$$z^3 + szz + tz - u = 0$$

erit $\sqrt{r} = u$, $q = tt + 2su$ et $p = ss - 2t$

atque $(Ass - 2At - Euu)^2 = 4AAtt + 8AAsu4 + ACuu$, ſiue

$$t = \frac{Ass - Euu}{4A} - \frac{2Asu - Cuu}{Ass - Euu}.$$

Radi-

Radices autem huius aequationis ope trisectionis anguli ita reperientur, vt sumto $v = \frac{2}{3}\sqrt{(ss - 3t)}$, et angulo Φ, cuius sit cosinus, scilicet $\cos. \Phi = \frac{81u + 36st - 8s^3}{8(ss - 3t)\sqrt{(ss + 3t)}}$; ipsae radices futurae sint:

$x = v \cos \frac{1}{3}\Phi - \frac{1}{3}s$; $y = v \cos.(60^\circ + \frac{1}{3}\Phi) - \frac{1}{3}s$; $k = v \cos.(60^\circ - \frac{1}{3}\Phi) - \frac{1}{3}s$

30. Sed relictis his, quae ad radices spectant, vsum formulae inuentae accuratius perpendamus, ac primo quidem notatu maxime digna occurrit haec aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}}.$$

quippe cui nouimus conuenire hanc aequationem integralem:

$$x = \frac{y\sqrt{A(A + Ckk + Ek^4)} + k\sqrt{A(A + Cyy + Ey^4)}}{A - Ekkyy}$$

quae cum constantem nouam k inuoluat ab arbitrio nostro pendentem, erit reuera integralis completa.

31. Si pro hoc casu ponamus $\int \frac{dx}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}} = \Pi . x$, quia posito $y = 0$ fit $x = k$, erit $\Pi . x = \Pi . k + \Pi . y$. Hinc si fiat $k = y$, vt sit $x = \frac{2y\sqrt{A(A + Cyy + Ey^4)}}{A - Ey^4}$; erit $\Pi . x = 2\Pi . y$; ideoque iste valor ipsius x satisfacit huic aequationi differentiali:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}} = \frac{2dy}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}}$$

quia autem nouam constantem non complectitur, erit is tantum integrale incompletum.

32. Interim tamen et huius aequationis differentialis facile integrale completum exhiberi poterit. Ponatur enim

$$\frac{dy}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}} = \frac{dz}{\sqrt{(A + Czz + Ez^4)}}$$

eritque $y = \frac{z\sqrt{A(A + Ckk + Ek^4)} + k\sqrt{A(A + Czz + Ez^4)}}{A - Ekkzz}.$

qui valor loco y substituatur in formula $x = \frac{2y\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Ey^4}$. sicque exprimetur x per z et nouam constantem arbitrariam k, qui valor erit integrale completum huius aequationis differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}} = \frac{2dz}{\sqrt{(A+Czz+Ez^4)}}$$

33. Statuamus $\Pi.k = n\Pi y$, ac sumamus valorem ipsius k iam esse inuentum, atque ex praecedentibus colligimus, si capiatur

$$x = \frac{y\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}+k\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Ekkyy}$$

fore $\Pi.x = (n+1)\Pi.y$. Cum igitur casu $n=1$ sit $k=y$, valor hinc pro x inuentus dabit valorem ipsius k pro casu $n=2$, vnde reperitur x, vt sit $\Pi.x = 3\Pi.y$. Qui valor porro pro k sumtus eum praebebit valorem ipsius x, vt fiat $\Pi\ x = 4\Pi.y$, sicque, quousque lubuerit, progredi licet.

34. Inuento autem valore ipsius x, vt sit $\Pi.x = n\Pi.y$, erit is integrale particulare huius aequationis differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}} = \frac{ndy}{\sqrt{(A+Cyy+Ey^4)}}$$

tum vero capiatur

$$z = \frac{x\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}+k\sqrt{A(A+Cxx+Ex^4)}}{A-Ekkxx}$$

sicque obtinebitur valor integralis ipsius z completus pro hac aequatione differentiali:

$$\frac{dz}{\sqrt{(A+Czz+Ez^4)}} = \frac{ndy}{\sqrt{(A+Cyy+Ey^4)}}$$

erit enim $\Pi.z = \Pi.k + \Pi\ x = \Pi.k + n\Pi\ y$

Tab. I. Fig. 1. 35. Contemplemur nunc etiam in genere formulam latius patentem, eamque ad lineam curuam

akfg

$akfgpqrst$ transferamus, cuius haec ſit indoles, vt poſita abſciſſa quacunque $AK = x$, arcus ipſi reſpondens ſit $ak = \int \frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}xx + \mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}}$ quem hoc ſigno $\Pi. x$ indicemus. Manifeſtum autem eſt, quemadmodum haec relatio inter arcum ak et ſuam abſciſſam AK eſt ſtabilita, eandem quoque inter arcum et applicatam, vel cordam aliamue rectam, ad quam arcum referre licet, conſtitui potuiſſe. Quare etſi hic x abſciſſam arcui ak reſpondentem deſignat, tamen quoque aliam quamuis rectam ad arcum pertinentem denotare poterit, dummodo ea euaneſcat, ipſo arcu euaneſcente.

36. Conſideremus nunc ternas abſciſſas, quae ſint: $AK = k$, $AF = f$ et $AG = g$, quae ita a ſe inuicem pendeant, vt ſit

$$g = \frac{f\sqrt{A(A + Ckk + Ek^4)} + k\sqrt{A(A + Cff + Ef^4)}}{A - Ekkff}$$
$$f = \frac{g\sqrt{A(A + Ckk + Ek^4)} - k\sqrt{A(A + Cgg + Eg^4)}}{A - Ekkgg}$$
$$k = \frac{g\sqrt{A(A + Cff + Ef^4)} - f\sqrt{A(A + Cgg + Eg^4)}}{A - Effgg}$$

atque inter arcus $ak = \Pi. k$; $af = \Pi. f$ et $ag = \Pi. g$ haec relatio locum habebit, vt ſit:

$$\Pi g - \Pi. f - \Pi. k = \text{Arc}. ag - \text{Arc}. af - \text{Arc}. ak = \text{Arc}. fg - \text{Arc}. ak$$
$$= \frac{\mathfrak{B}kfg}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kfg(kk + ff + gg)}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C}Ek^3f^3g^3}{6A\sqrt{A}}.$$

37. Dato ergo quocunque arcu ak; a curuae initio a ſumto, a quouis puncto f abſcindi poterit arcus fg, ita vt differentia arcuum fg et ak geometrice aſſignari queat. Ob puncta enim k et f data, dabuntur abſciſſae k et f, ex quibus per formulam primam definitur abſciſſa g. Vel etiam, ſi dentur puncta k et g, a puncto g regrediendo abſcindi poterit arcus gf, qui

qui ab arcu ak quantitate geometrica discrepet. Vel denique dato arcu quocunque fg, a curuae initio a abscindi poterit arcus ak, qui ab illo quantitate geometrica discrepet.

Tab. I. Fig. 2. 38. Casus hic euolui meretur, quo $f=k$; si igitur abscissa $AG=g$ ita accipiatur, vt sit

$$g=\frac{2k\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}}{A-Ek^4}$$ existente $AK=k$, erit

$$\text{Arc.}\,ag-2\,\text{Arc.}\,ak=\frac{\mathfrak{B}kkg}{\sqrt{A}}+\frac{\mathfrak{C}kkg(2kk+gg)}{2\sqrt{A}}-\frac{\mathfrak{C}Ek^6g^8}{6A\sqrt{A}}$$

Quodsi iam fuerit $Ek^4>A$, valor ipsius g prodibit negatiuus, qui ergo retro sumtus sit $AH=h$, ita vt sit $g=-h$ et $\Pi.g=-\Pi.h$, existente

$$h=\frac{2k\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}}{Ek^4-A},$$ eritque mutatis signis:

$$\text{Arc.}\,ah+2\,\text{Arc.}\,ak=\frac{\mathfrak{B}kkh}{\sqrt{A}}+\frac{\mathfrak{C}kkh(2kk+hh)}{2\sqrt{A}}-\frac{\mathfrak{C}Ek^6h^8}{6A\sqrt{A}}.$$

39 Hinc intelligitur abscissam k eiusmodi valorem obtinere posse, vt fiat $h=k$; quare si curua ex puncto a vtrinque per ramos similes et aequales extendatur, fueritque $AH=AK$, erit quoque Arc $ah=$Arc.ak; vnde si sit $h=k$, seu

$$Ek^4-A=2\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}\ \text{vel}$$

$$EEk^8-6AEk^4-4ACkk-3AA=0,\ \text{erit}$$

$$3\,\text{Arc.}\,ak=\frac{\mathfrak{B}k^2}{\sqrt{A}}+\frac{3\mathfrak{C}k^5}{2\sqrt{A}}-\frac{\mathfrak{C}Ek^9}{6A\sqrt{A}}$$

arcus ergo, huic abscissae $AK=k$ respondens, absolute erit rectificabilis, cum sit

$$\text{Arc.}\,ak=\frac{\mathfrak{B}k^2}{3\sqrt{A}}+\frac{\mathfrak{C}k^5}{2\sqrt{A}}-\frac{\mathfrak{C}Ek^9}{18A\sqrt{A}}.$$

40. Aequatio autem illa, etsi est octaui gradus, commode resolui potest; positis enim eius factoribus

$$(k^4+\alpha kk+\beta)(k^4-\alpha kk+\gamma)=0$$

repe-

reperitur $\beta+\gamma=\alpha\alpha-\frac{6A}{E}$; $\beta-\gamma=\frac{4AC}{\alpha EE}$ et $\beta\gamma=-\frac{3AA}{EE}$ vnde oritur $\alpha^4-\frac{12A}{E}\alpha\alpha+\frac{36AA}{EE}-\frac{16AACC}{\alpha\alpha E^4}=-\frac{12AA}{EE}$, hincque $\alpha\alpha=\frac{4A}{E}+\sqrt[3]{\frac{16AACC-64A^3E}{E^4}}$ et ob $\gamma=\frac{\alpha\alpha}{2}-\frac{3A}{E}-\frac{2AC}{\alpha EE}$ erit $kk=\frac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{(\frac{2AC}{\alpha EE}+\frac{3A}{E}-\frac{1}{4}\alpha\alpha)}$, vel etiam

$$kk=-\frac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{(\frac{-2AC}{\alpha EE}+\frac{3A}{E}-\frac{1}{4}\alpha\alpha)}.$$

41. Verum quod abſciſſae negatiuae idem arcus negatiue ſumtus reſpondeat, hoc in iſtis curuis ſemper locum habet. Nam cum ſit $\Pi.x=\int\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}}$, ſi abſciſſa x capiatur negatiua, erit

$$\Pi(-x)=\int\frac{-dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}}=-\Pi.x$$

Videtur ergo, quoties abſciſſae k in §. praec. definitae reſpondet arcus realis, tum eiusdem arcus longitudinem geometrice aſſignari poſſe.

42. Affirmare autem non auſim hoc ratiocinium, quo arcum abſolute rectificabilem elicui, ſemper tuto adhiberi poſſe; videntur enim caſus exiſtere, quibus id locum non ſit habiturum. Si enim ſit $\mathfrak{B}=0$ et $\mathfrak{C}=0$, ideoque $\Pi.x=\int\frac{\mathfrak{A}dx}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}}$ prodiret in §. 39. vtique $3\,\mathrm{Arc}.\alpha k=0$, cum tamen ex aequatione octaui gradus ibi exhibita non fiat abſciſſa $k=0$. Verum recordandum eſt, hanc aequationem natam eſſe ex hac, $k=\frac{2k\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}}{Ek^4-A}$, quae cum ſtatim praebeat radicem $k=0$, haec vnica erit, quae hoc caſu quaeſito ſatisfacit, reliquis exiſtentibus omnibus ineptis.

43. Neque tamen his caſibus ratiocinium omnino fallere cenſendum eſt, etiamſi pro k alia quaecunque

 radix

radix accipiatur, ſed potius eidem abſciſſae plures arcus reſpondere ſunt putandi, quorum vnus tantum isque negatiuus ſatisfaciat: hocque ergo caſu, tametſi in § 38. ſtatuatur $b = k$, tamen inde non ſequitur, eſſe Arc $ab =$ Arc. ak, ideoque Arc. $ab + 2$ Arc. $ak = 3$ Arc. ak, cum eidem abſciſſae $b = k$ etiam alii arcus praeter Arc. ak conueniant, inter quos vnus ſit, qui reddat Arc. $ab + 2$ Arc. $ak = 0$.

44. Quod quo clarius perſpiciatur, ponamus $A = 1$; $C = 2$ et $E = 1$; exiſtente $\mathfrak{B} = 0$ et $\mathfrak{C} = 0$; eritque $\Pi.\, x = \mathfrak{A}$ Arc. tang. x, et Arc. $ak = \mathfrak{A}$ A tang. k, atque Arc. $ab = \mathfrak{A}$ A tang. b; poſito ergo $b = \frac{2k\sqrt{(1+2kk+k^4)}}{k^4-1} = \frac{2k}{kk-1}$, erit $\mathfrak{A}$ A tang. $b + 2\,\mathfrak{A}$ A tang. $k = 0$. Quodſi iam ponatur $b = k$, fiet $kk = x$ et $k = \sqrt{3}$, reperieturque $\mathfrak{A}$(A tang. $\sqrt{3} + 2$ A tang. $\sqrt{3}) = 0$. Etſi autem eſt A tang. $\sqrt{3} =$ Arc. 60°, tamen inde non ſequitur $3\,\mathfrak{A}$ Arc. $60^\circ = 0$, quod vtique eſſet falſum; ſed quoniam tangenti $\sqrt{3}$ conuenit quoque arcus -120°, hic valor, priori loco pro A tang. $\sqrt{3}$ ſcriptus, veritatem praebebit, ſcilicet $\mathfrak{A}(-$Arc. $120^\circ + 2$ Arc. $60^\circ) = 0$.

45. Haec igitur ambiguitas, qua eidem quantitati k, quam hic tanquam abſciſſam aſſumimus, plures valores Arc. ak reſpondere poſſunt, in cauſa eſt, quod etiamſi in §. 38. ponatur $b = k$, non tamen pro Arc. $ab + 2$ Arc. ak ſcribere liceat 3 Arc. ak. Interim tamen nihilominus erit etiam hoc caſu

$$\text{Arc.}\,ab + 2\,\text{Arc.}\,ak = \frac{\mathfrak{B}k^3}{\sqrt{A}} + \frac{3\,\mathfrak{C}k^5}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C}Ek^9}{6A\sqrt{A}}$$

abſciſſae enim b, etſi eſt $= k$, tamen praeter arcum ak alius quoque arcus conueniet, qui loco Arc. ab ſubſti-

ſubſtitutus aequationi ſatisfacit. Hanc ergo ambiguitatem ſedulo diſpici oportet, ne in errorem inducamur.

46. Quoties autem huiusmodi ambiguitas non habet locum, ita vt eidem abſciſſae vnicus arcus reſpondeat, tum ſine haeſitatione poſita abſciſſa $b = k$ etiam pro arc. ab ſcribere licebit arc. ak et 3 Arc. ak pro Arc. ab + 2 Arc. ak, neque hinc vllus error erit extimeſcendus, quaecunque radix aequationis octaui gradus §. 39. inuentae pro k capiatur. Id quod euidens erit in caſu, quo $\mathfrak{A} = A$; $\mathfrak{B} = 2C$ et $\mathfrak{C} = 3E$, quippe quo fit $\Pi . x = x\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}$ ideoque quantitas algebraica, et

$$\Pi . g - \Pi . f - \Pi . k = \frac{2Ckfg}{\sqrt{A}} + \frac{3Ekfg(kk + ff + gg)}{3\sqrt{A}} - \frac{EEk^3f^3g^3}{2A\sqrt{A}}.$$

47. Quodſi iam ponatur $f = k$, erit $g = \frac{2k\sqrt{A(A + Ckk + Ek^4)}}{A - Ek^4}$ et $\sqrt{A(A + Cgg + Eg^4)} = \frac{A(gg - 2kk) + Ek^4 gg}{2kk}$. Sit nunc $g = -k$, ſeu $Ek^4 - A = 2\sqrt{A(A + Ckk + Ek^4)}$, erit $\sqrt{A(A + Cgg + Eg^4)} = -\frac{-A + Ek^4}{2} = \sqrt{A(A + Ckk - Ek^4)}$; vnde $\Pi g = -\Pi . k$ et $-3\Pi\, k = \frac{-2Ck^3}{\sqrt{A}} - \frac{9Ek^5}{2\sqrt{A}} + \frac{EEk^9}{2A\sqrt{A}}$, ſeu

$$3 . \Pi k = \frac{k(4ACkk + 9AEk^4 - EEk^8)}{2A\sqrt{A}}$$

At eſt $EEk^8 = 6AEk^4 + 4ACkk + 3AA$, vnde fit

$$3 . \Pi k = \frac{k(3AEk^4 - 3AA)}{2A\sqrt{A}} = \frac{3k(Ek^4 - A)}{2\sqrt{A}} = 3k\sqrt{(A + Ckk + Ek^4)}$$

quod ob $\Pi k = k\sqrt{(A + Ckk + Ek^4)}$ eſt veritati conſentaneum.

48. Quanquam autem haec curua per ſe eſt rectificabilis, tamen euidenter probat id, quod volumus; ſcilicet contineri in noſtris formulis etiam curuas irrectificabiles, in quibus, modo ante expoſito, arcum abſolute

C 2 recti-

rectificabilem assignari liceat. Inuento autem vno arcu rectificabili velut ak, ex eo statim infiniti alii eiusdem indolis exhiberi poterunt: cum enim a quouis puncto f abscindi queat arcus fg, cuius ab illo differentia est geometrica, etiam hic arcus erit rectificabilis. Praeterea vero ex eodem arcu adhuc alii infiniti pariter rectificabiles reperientur modo sequente, quem in genere exponere conuenit.

49. Quo nostras formulas simpliciores reddamus, ponamus breuitatis gratia:

$$\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}=K;\quad \sqrt{A(A+Cff+Ef^4)}=F;\quad \sqrt{A(A+Cgg+Eg^4)}=G$$

vt sit per §. 36:

$$g=\frac{fK+kF}{A-Ekkff};\quad f=\frac{gK-kG}{A-Ekkgg};\quad k=\frac{gF-fG}{A-Effgg}.$$

Quodsi iam fuerit $\Pi.x=\int\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}}$ erit

$$\Pi.g-\Pi.f-\Pi.k=\text{Arc.}ag-\text{Arc.}af-\text{Arc.}ak=\text{Arc.}fg-\text{Arc.}ak$$
$$=\frac{\mathfrak{B}kfg}{\sqrt{A}}+\frac{\mathfrak{C}kfg(kk+ff+gg)}{2\sqrt{A}}-\frac{\mathfrak{C}Ek^3f^3g^3}{6A\sqrt{A}}.$$

50. Sumantur simili modo praeter abscissam $AK=k$ aliae duae abscissae $AP=p$; $AQ=q$; positoque pariter:

$$\sqrt{A(A+Cpp+Ep^4)}=P \text{ et } \sqrt{A(A+Cqq+Eq^4)}=Q$$

ac relatione hac constituta

$$q=\frac{pK+kP}{A-Ekkpp};\quad p=\frac{qK-kQ}{A-Ekkqq};\quad k=\frac{qP-pQ}{A-Eppqq}$$

erit pro eadem curua:

$$\text{Arc.}pq-\text{Arc.}ak=\frac{\mathfrak{B}kpq}{\sqrt{A}}+\frac{\mathfrak{C}kpq(kk+pp+qq)}{2\sqrt{A}}-\frac{\mathfrak{C}Ek^3p^3q^3}{6A\sqrt{A}}$$

51. Sub-

51. Subtracta ergo illa aequatione ab hac relinquetur:

$$\text{Arc.}\,pq - \text{Arc.}\,fg = \frac{\mathfrak{B}k(pq-fg)}{\sqrt{\Delta}} + \frac{\mathfrak{C}kpq(kk+pp+qq) - \mathfrak{C}kfg(kk+ff+gg)}{2\sqrt{\Delta}} - \frac{\mathfrak{C}Ek^3(p^3q^3-f^3g^3)}{6\Delta\sqrt{\Delta}}$$

vbi abscissae f; g; p; et q ita a se inuicem pendent, vt sit

$$k = \frac{gF - fG}{\Delta - Effgg} = \frac{qP - pQ}{\Delta - Eppqq} \text{ vel } \frac{1}{k} = \frac{gF + fG}{\Delta(gg-ff)} = \frac{qP + pQ}{\Delta(qq-pp)}$$

vnde simul abscissa k eliminari, et relatio inter f, g, p, q definiri poterit.

52. Quo haec eliminatio facilius absoluatur, notandum est, esse quoque

$$K = \frac{\Delta(ff+gg-kk) - Ekkffgg}{2fg} = \frac{\Delta(pp+qq-kk) - Ekkppqq}{2pq}$$

vnde fit

$$kk = \frac{\Delta pq(ff+gg) - \Delta fg(pp+qq)}{(pq-fg)(\Delta - Efgpq)} = \frac{(gF-fG)^2}{(\Delta - Effgg)^2} = \frac{(qP-pQ)^2}{(\Delta - Eppqq)^2}$$

Erit ergo

$$pq(kk+pp+qq) - fg(kk+ff+gg) = pq(pp+qq) - fg(ff+gg) + \frac{\Delta pq(ff+gg) - \Delta fg(pp+qq)}{\Delta - Efgpq}$$

hincque obtinetur:

$$\text{Arc.}\,pq - \text{Arc.}\,fg = \frac{\mathfrak{B}k(pq-fg)}{\sqrt{\Delta}} + \frac{\mathfrak{C}k(pq-fg)(ff+gg+pp+qq)}{2\sqrt{\Delta}} - \frac{\mathfrak{C}Ek(pq-fg)^2(pq(ff+gg) - fg(pp+qq))}{6(\Delta - Efgpq)\sqrt{\Delta}},$$

53. Cum igitur sit $kk = \frac{\Delta(pq(ff+gg) - fg(pp+qq))}{(pq-fg)(\Delta - Efgpq)}$, et quatuor abscissae f, g, p, q, ita a se inuicem pendeant, vt sit:

$$\frac{gF+fG}{gg-ff} = \frac{qP+pQ}{qq-pp}$$

patet proposito arcu quocunque fg in curua assumta, semper ab alio dato puncto p abscindi posse arcum pq, qui ab illo arcu differat quantitate algebraice aſſignabili.

54. Quodſi porro a puncto q vlterius progrediendo capiatur punctum r, ita vt poſita abſciſſa $AR = r$ ſit

$$\frac{gF+fG}{gg-ff} = \frac{rQ+qR}{rr-qq} \text{ ſeu}$$

$$\frac{pq(ff+gg)-fg(pp+qq)}{(pq-fg)(A-Efgpq)} = \frac{qr(ff+gg)-fg(qq+rr)}{(qr-fg)(A-Efgqr)} = \frac{qr(pp+qq)-pq(qq+rr)}{(qr-pq)(A-Epqqr)}$$

erit quoque Arc. qr − Arc. $fg =$ quantitati algebraicae, quae differentia, ad priorem addita, dabit:

$$\text{Arc.}\, pr - 2\, \text{Arc.}\, fg = \text{Quant. algebr.}$$

ſicque a dato puncto p abſcindi poteſt arcus pr, qui duplum arcum propoſitum fg ſuperet quantitati algebraica.

55. Simili modo, ſi vlterius abſciſſae $AS = s$; $AT = t$; etc. ita capiantur, vt ſit

$$\frac{gF+fG}{gg-ff} = \frac{sR+rs}{ss-rr} = \frac{tS+sT}{tt-ss} \text{ etc.}$$

arcus ps triplum arcus fg, arcus pt quadruplum arcus fg etc. ſuperabit quantitate geometrice aſſignabili. Viciſſim autem dato, vel arcu pr, vel ps, vel pt etc. reperiri poterit a dato puncto f arcus fg, qui ab illius ſemiſſi, vel triente, vel quadrante deficiat quantitate geometrice aſſignabili.

56. Euenire etiam poſſet, vt licet quantitates 𝔅 et ℭ non ſint nihilo aequales, tamen differentiae iſtae geometrice aſſignabiles euaneſcant; quin etiam ſemper vna abſciſſarum ita definiri poteſt, vt haec differentia re vera in nihilum abeat. His igitur caſibus in propoſita curua eiusmodi bini arcus aſſignari poterunt,

terunt, qui inter ſe, vel aequales ſint futuri, vel datam rationem numeri ad numerum habituri.

57. Cum haec latiſſime pateant, atque ad omnes curuas accommodari queant, quarum arcus pro abſciſſa, vel alia quacunque recta variabili x ita exprimitur, vt ſit $=\int\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\surd(A+Cxx+Ex^4)}$, conueniet, iſtas affectiones pro nonnullis curuis determinatis euolui, quo vſus huius methodi clarius perſpiciatur. Primum igitur potiſſimum hanc arcuum comparationem in ellipſi exponere viſum eſt.

De Comparatione Arcuum in Ellipſi.

Sit igitur propoſitus quadrans ellipticus ABa, cuius centrum in A; ponatur alter ſemiaxis, ſuper quo abſciſſae capiuntur $AB=a$, alter vero $Aa=na$. Sumta ergo abſciſſa quacunque $AP=x$, erit applicata $PM=n\surd(aa-xx)$, eiusque differentiale $=-\frac{nxdx}{\surd(aa-xx)}$, vnde fit arcus huic abſciſſae reſpondens $aM=\int dx\surd\frac{aa+(nn-1)xx}{aa-xx}$. Statuatur $1-nn=m$, vt ſit $aM=\int dx\surd\frac{aa-mxx}{aa-xx}$. Quia perinde eſt, vter ſemiaxium ſit maior, vel minor, ſumamus AB eſſe maiorem, ideoque $n<1$; et m numerus poſitiuus vnitate minor: et cum focus exiſtat in ſemiaxe AB, erit eius a centro A diſtantia $=\surd(aa-maa)$ $=a\surd m$; vnde valor numeri m facilius intelligitur. Tab. I. Fig. 3.

Quodſi ergo arcus, qui abſciſſae cuicunque $AP=x$ reſpondens, deſignetur $aM=\Pi.x$, erit $\Pi.x=\int dx\surd\frac{aa-mxx}{aa-xx}$: quae expreſſio ad formam noſtram generalem reducta abibit in hanc:

$$\Pi.x=\int\frac{dx(aa-mxx)}{\surd(a^4-(m+1)aaxx+mx^4)}$$

Sicque

Sicque pro hoc casu habebimus istos valores:

$A = a^4$; $C = -(m+1)aa$; $E = m$, $\mathfrak{A} = aa$; $\mathfrak{B} = -m$; et $\mathfrak{C} = 0$,

Sumtis ergo tribus abscissis k; x; y, quibus respondeant arcus $\Pi.k$; $\Pi.x$; $\Pi.y$, ita vt sit:

$$x = \frac{aay\sqrt{(a^4-(m+1)aakk+mk^4)}+aak\sqrt{(a^4-(m+1)aayy+my^4)}}{a^4-mkkyy}$$

$$y = \frac{aax\sqrt{(a^4-(m+1)aakk+mk^4)}-aak\sqrt{(a^4-(m+1)aaxx+mx^4)}}{a^4-mkkxx}$$

$$k = \frac{aax\sqrt{(a^4-(m+1)aayy+my^4)}-aay\sqrt{(a^4-(m+1)aaxx-mx^4)}}{a^4-mxxyy},$$

hi tres arcus a se inuicem ita pendebunt, vt sit:

$$\Pi.x - \Pi.y - \Pi.k = -\frac{mkxy}{aa}$$

His igitur praemissis sequentia problemata resoluamus:

Problema I.

Proposito ellipseos arcu quocunque ak, ab alio quouis puncto f abscindere arcum fg, ita vt differentia arcuum ak et fg geometrice assignari queat.

Solutio.

Ductis ex punctis k, f, g, applicatis kK, fF, gG, vocentur abscissae $AK = k$; $AF = f$; $AG = g$, quarum illae dantur, haec vero quaeritur: eruntque arcus:

$$ak = \Pi.k;\quad af = \Pi.f;\quad ag = \Pi.g$$

Ponatur porro breuitatis gratia secundum §. 49.

$$aa\sqrt{(a^4-(m+1)aakk+mk^4)} = K$$

$$aa\sqrt{(a^4-(m+1)aaff+mf^4)} = F$$

$$aa\sqrt{(a^4-(m+1)aagg+mg^4)} = G$$

ac statuatur inter ternas abscissas ista relatio:

$$g = \frac{fK+kF}{a^4-mkkff},\ \text{vel}\ f = \frac{gK-kG}{a^4-mkkgg},\ \text{vel}\ k = \frac{gF-fG}{a^4-mffgg}$$

quo

quo facto habebitur:

$$\Pi.g - \Pi.f - \Pi.k = \text{Arc}.fg - \text{Arc}.ak = -\frac{mkfg}{aa}$$

Puncto g ergo ita sumto, vt sit $AG = g = \frac{fK + kF}{a^4 - mkkff}$, differentia arcuum ak et fg geometrice poterit assignari. Erit enim

$$\text{Arc}.\ ak - \text{Arc}.fg = \frac{mkfg}{aa}. \qquad \text{Q. E. I.}$$

Coroll. 1.

Eadem solutio locum habebit, si proposito arcu ak detur punctum g, a quo regrediendo versus a abscindi oporteat arcum gf, cuius ab illo differentia debeat esse geometrica, tum enim abscissae k et g erunt datae, ex quibus valor tertiae f reperiri poterit.

Coroll. 2.

Dato etiam arcu quocunque in ellipsi fg a vertice a abscindi poterit arcus ak, ita vt differentia arcuum ak et fg fiat geometrica. Ita cuiusque arcus fg rectificatio pendebit a rectificatione arcus cuiusdam ak in vertice ellipsis a terminato.

Coroll. 3.

Relatio inter ternas abscissas k, f, g etiam ita exhiberi potest, vt sit

$$g = \frac{a^4(-kk+ff)}{fK - kF}, \text{ vel } f = \frac{a^4(-kk+gg)}{gK + kG}, \text{ vel } k = \frac{a^4(gg-ff)}{gF + fG}$$

ex quibus cum praecedentibus comparatis elicitur:

$$K = \frac{a^4(ff+gg-kk) - mkkffgg}{2fg} = aa\surd(aa-kk)(aa-mkk)$$

$$F = \frac{a^4(kk+gg-ff) - mkkffgg}{2kg} = aa\surd(aa-ff)(aa-mff)$$

$$G = -\frac{a^4(kk+ff-gg) + mkkffgg}{2kf} = aa\surd(aa-gg)(aa-mgg)$$

tum vero etiam habebitur: $fg(gg-ff)K - kg(gg-kk)F - kf(ff-kk)G = 0$.

Coroll. 4.

Si differentia inter arcus ak et fg omnino debeat euanescere, patet id fieri non posse, nisi sit, vel $k=0$, vel $f=0$, vel $g=0$. Primo casu ipse arcus ak, ideoque et arcus fg, euanescit, binis reliquis casibus autem alteruter terminus arcus fg in punctum a incidit, fitque arcus fg arcui ak non solum aequalis, sed etiam similis.

Coroll. 5.

Quo ista abscissarum relatio facilius ad praxin transferri queat, notasse iuuabit in genere, si ad punctum M ducatur normalis MN, in eamque ex A perpendiculum demittatur AV, quod parallelum erit tangenti MT: atque ponatur $AP=x$; fore

$PM=n\sqrt{(aa-xx)}$; $PN=nnx$; $AN=mx$; $MN=n\sqrt{(aa-mxx)}$

$AV=\frac{mx\sqrt{(aa-xx)}}{\sqrt{(aa-mxx)}}$; $NV=\frac{mnxx}{\sqrt{(aa-mxx)}}$; $MV=\frac{naa}{\sqrt{(aa-mxx)}}$

$MT=\frac{x\sqrt{(aa-mxx)}}{\sqrt{(aa-xx)}}$; $AT=\frac{naa}{\sqrt{(aa-xx)}}$ et $AV.MT=mxx$.

Coroll. 6.

Posito ergo g pro x isti valores pro puncto g reperiuntur

$$g=\frac{a^2k\sqrt{(aa-ff)(aa-mff)}+aaf\sqrt{(aa-kk)(aa-mkk)}}{a^4-mkkff}$$

$$\sqrt{(aa-gg)}=\frac{a^3\sqrt{(aa-kk)(aa-ff)}-akf\sqrt{(aa-mkk)(aa-mff)}}{a^4-mkkff}$$

$$\sqrt{(aa-mgg)}=\frac{a^3\sqrt{(aa-mkk)(aa-mff)}-makf\sqrt{(aa-kk)(aa-ff)}}{a^4-mkkff}$$

atque

atque $\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}$

$$=\frac{a^4kf(2maa(kk+ff)-(m+1)(a^4+mkkff))+aa(a^4+mkkff)\sqrt{(aa-kk)(aa-mkk)(aa-ff)(aa-mff)}}{(a^4-mkkff)^2}$$

vnde porro elicitur:

$$aa\sqrt{(aa-mgg)}+mkf\sqrt{(aa-gg)}=a\sqrt{(aa-mkk)(aa-mff)}$$

$$aa\sqrt{(aa-gg)}+kf\sqrt{(aa-mgg)}=a\sqrt{(aa-kk)(aa-ff)}$$

Caſus I.

Propoſito ellipſeos arcu ak *in altero vertice* a *terminato, ab altero vertice* B *abſcindere arcum* Bf, *ita vt arcuum* ak *et* Bf *differentia ſit geometrica.* Tab I. Fig. 4.

Problema ergo ad hunc caſum transfertur, ſi punctum g in vertice B ſtatuatur, ſeu fiat $g=a$, et quaeri oportet punctum f, ſeu abſciſſam $AF=f$. Verum ob $g=a$ erit $G=0$, ideoque habebitur $f=\frac{aK}{a^4-maakk}$ $=a\sqrt{\frac{aa-kk}{aa-mkk}}$, vel ducta ad punctum k normali kN, capi debet $AF=f=\frac{AB.Kk}{Nk}$. Hoc autem puncto ita ſumto, erit arcuum differentia

$$\text{Arc.}\,ak-\text{Arc.}\,Bf=\frac{mkf}{a}=mk\sqrt{\frac{aa-kk}{aa-mkk}}=\frac{AN.Kk}{Nk}.$$

Corollarium.

Fieri igitur poteſt, vt puncta k et f in vno puncto e coeant, ſicque quadrans aeB in duas partes diſſecetur, quarum differentia ſit geometrica. Ad hoc ſtatuatur $k=f=AE=e$, eritque $e=a\sqrt{\frac{aa-ee}{aa-mee}}$, ſeu $a^4-2aaee+me^4=0$, vnde fit $ee=\frac{aa\pm aa\sqrt{(1-m)}}{m}$ $=\frac{aa(1\pm n)}{m}$ ob $m=1-nn$. Hinc ergo erit $e=\frac{a}{\sqrt{(1\mp n)}}$. Verum quia eſſe debet $e<a$, erit $e=\frac{a}{\sqrt{(1+n)}}$, ſiue

 AE

$AE = \frac{AB^2}{\sqrt{(AB^2 + AB.Aa)}}$ et $Ee = \frac{n a \sqrt{n}}{\sqrt{(1+n)}}$; ita vt fit $AE : Ee = 1 : n\sqrt{n} = AB\sqrt{AB} : Aa\sqrt{Aa}$. Hocque casu erit:

$$\text{Arc.}ae - \text{Arc.}Be = a(1-n) = AB - Aa$$

Casus II.

Tab. I. Fig. 5. *Proposito arcu* ak *in vertice* a *terminato, ab eius altero termino* k *abscindere arcum* kg, *ita vt arcuum* ak *et* kg *differentia sit rectificabilis.*

Hoc ergo casu punctum f in k incidit, eritque $f = k$, hincque etiam $F = K$; vnde reperitur:

$$AG = g = \frac{2kK}{a^4 - mk^4} = \frac{2aak\sqrt{(aa-kk)(aa-mkk)}}{a^4 - mk^4}$$

Sumta ergo abscissa AG huius valoris erit:

$$\text{Arc.}ak - \text{Arc.}kg = \frac{mkkg}{aa} = \frac{2mk^3\sqrt{(aa-kk)(aa-mkk)}}{a^4 - mk^4}.$$

Corollarium. 1.

Vicissim ergo arcus quicunque ag, in vertice a terminatus, ita in k in duas partes secari poterit, vt partium differentia $ak - kg$ fiat rectificabilis. Ob cognitam enim abscissam $AG = g$, abscissa quaesita $AK = k$ ex hac aequatione definiri debet:

$$gg(a^4 - mk^4)^2 = 4a^4kk(aa-kk)(aa-mkk)$$

quae abit in hanc octaui gradus:

$$mmggk^8 - 4ma^4k^6 - 2ma^4ggk^4 - 4a^8kk + a^8gg = 0$$
$$+ 4(m+1)a^6k^4.$$

Coroll. 2.

At si huius aequationis factores ponantur

$$(mgk^4 - Akk + a^4g)(mgk^4 - Bkk + a^4g) = 0$$

repe-

reperitur:

$$A + B = \frac{4a^4}{g} \text{ et } AB = 4(m+1)a^6 - 4ma^4gg$$

vnde $A - B = \frac{4aa}{g}\sqrt{(a^4 - (m+1)aagg + mg^4)}$

ita vt sit:

$$A = \frac{2a^4 + 2aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}}{g} \text{ et}$$

$$B = \frac{2a^4 - 2aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}}{g} \text{ Consequenter}$$

$$k^4 = \frac{2a^4kk \pm 2aakk\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)} - a^4gg}{mgg} \text{ et}$$

$$kk = \frac{a^4 \pm aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)} + a^3\sqrt{(2aa-(m+1)gg \pm 2\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)})}}{mgg}.$$

Coroll. 3.

Quaternae ergo radices ipsius kk sunt:

I. $kk = \frac{a^4 + aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)} + a^3\sqrt{(aa-gg)} + a^3\sqrt{(aa-mgg)}}{mgg}$

II. $kk = \frac{a^4 + aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)} - a^3\sqrt{(aa-gg)} - a^3\sqrt{(aa-mgg)}}{mgg}$

III. $kk = \frac{a^4 - aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)} + a^3\sqrt{(aa-gg)} - a^3\sqrt{(aa-mgg)}}{mgg}$

IV. $kk = \frac{a^4 - aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)} - a^3\sqrt{(aa-gg)} + a^3\sqrt{(aa-mgg)}}{mgg}$

quae adhibita ambiguitate hoc modo coniunctim repraesentari possunt:

$$kk = \frac{aa}{mgg}(a \pm \sqrt{(aa-gg)})(a \pm \sqrt{(aa-mgg)})$$

Coroll. 4.

Ipsi autem valores ipsius k erunt hinc:

$$k = \pm \frac{a}{g\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{a+g}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-g}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{a+g\sqrt{m}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-g\sqrt{m}}{2}}\right)$$

qui sunt omnino numero octo; quaterni affirmatiui, totidemque negatiui illisque aequales: manifestum autem est, affirmatiuos tantum hic locum habere, ex iisque eos, qui praebent $k < g$. Hic autem est certo:

 $k =$

$$k = \frac{a}{g\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{a+g}{a}} - \sqrt{\frac{a-g}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{a+g\sqrt{m}}{2}} - \sqrt{\frac{a-g\sqrt{m}}{2}}\right)$$

Nam eſt:

$$\sqrt{\frac{a+g}{2}} + \sqrt{\frac{a-g}{2}} > \sqrt{a}; \quad \sqrt{\frac{a+g}{2}} - \sqrt{\frac{a+g}{2}} < \sqrt{g}$$

$$\sqrt{\frac{a+g\sqrt{m}}{2}} + \sqrt{\frac{a-g\sqrt{m}}{2}} > \sqrt{a}; \quad \sqrt{\frac{a+g\sqrt{m}}{2}} - \sqrt{\frac{a-g\sqrt{m}}{2}} < \sqrt{g}\sqrt{m}.$$

Coroll. 5.

Si ponatur $\frac{g}{a} = \text{coſ.}\,\eta$ et $\frac{g\sqrt{m}}{a} = \text{coſ.}\,\theta$, ob $m < 1$ erit $\theta > \eta$; er formula noſtra pro radicibus ipſius k inventa, in hanc abibit formam:

$$k = \pm \frac{a}{\text{coſ.}\,\theta}(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\eta \pm \text{ſin.}\tfrac{1}{2}\eta)(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\theta \pm \text{ſin.}\tfrac{1}{2}\theta)$$

ſeu ob $\text{coſ.}\,\theta = \text{coſ.}\tfrac{1}{2}\theta^2 - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}\theta^2$ habebitur:

$$k = \pm a\frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\eta + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}\eta}{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\theta \pm \text{ſin.}\tfrac{1}{2}\theta}.$$ Vel octoni valores erunt:

$$k = \pm a.\frac{\text{coſ.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\eta)}{\text{coſ.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta)}$$

$$k = \pm a.\frac{\text{ſin.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\eta)}{\text{coſ.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta)}$$

$$k = \pm a.\frac{\text{coſ.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\eta)}{\text{ſin.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta)}$$

$$k = \pm a.\frac{\text{ſin}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\eta)}{\text{ſin.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta)}$$

Coroll. 6.

Ex his valoribus ſecundus ſemper $k = a\frac{\text{ſin.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\eta)}{\text{coſ.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta)}$ $= a\frac{\text{ſin}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\eta)}{\text{ſin.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta)}$ ſatisfacit, fit enim, vti manifeſtum

eſt,

est, non solum $k > a$, sed etiam $k < g$, seu $k < a \operatorname{cos}.\eta$.

Ex primo quidem valore $k = a \frac{\operatorname{sin}.(45^\circ + \frac{1}{2}\eta)}{\operatorname{sin}.(45^\circ + \frac{1}{2}\theta)}$ semper fit $k < a$ ob $\eta < \theta$: verum vt sit $k < g$, oportet esse

$\frac{\operatorname{sin}.(45^\circ + \frac{1}{2}\eta)}{\operatorname{sin}.(45^\circ + \frac{1}{2}\theta)} < \operatorname{cos}.\eta = \operatorname{sin}.(90^\circ - \eta) = 2 \operatorname{sin}.(45^\circ - \frac{1}{2}\eta)$

$\operatorname{sin}.(45^\circ + \frac{1}{2}\eta)$, ideoque

$1 < 2 \operatorname{sin}(45^\circ - \frac{1}{2}\eta) \operatorname{sin}.(45^\circ + \frac{1}{2}\theta)$. seu $1 < \operatorname{cos}.\frac{1}{2}(\theta + \eta) - \operatorname{cos}.$ $(90^\circ + \frac{1}{2}(\theta - \eta))$ seu $1 < \operatorname{cos}.\frac{1}{2}(\theta + \eta) + \operatorname{sin}.\frac{1}{2}(\theta - \eta)$.

Problema 2.

Proposito ellipseos arcu quocunque fg, a dato puncto p abscindere alium arcum pq, ita vt horum arcuum differentia $fg - pq$ fiat geometrica. Tab. I. Fig. 61.

Solutio.

Ductis applicatis fF, gG, pP, qQ sint abscissae $AF = f$ $AG = g$, $AP = p$, et $AQ = q$, tum a vertice a capiatur arcus ak, qui datum arcum fg quantitate geometrica superet; positaque abscissa $AK = k$, ac breuitatis gratia $K = aa\sqrt{(aa - kk)(aa - mkk)}$; $F = aa\sqrt{(aa - ff)(aa - mff)}$; $G = aa\sqrt{(aa - gg)(aa - mgg)}$; $P = aa\sqrt{(aa - pp)(aa - mpp)}$ et $Q = aa\sqrt{(aa - qq)}$ $(aa - mqq)$: erit primo:

$k = \frac{gF - fG}{a^4 - mffgg} = \frac{a^4(gg - ff)}{gF + fG}$; vnde reperitur k; ita vt sit

$$\text{Arc.}\,ak - \text{Arc.}\,fg = \frac{mkfg}{aa}$$

Tum vero abscissa q per problema praec. ita determinetur, vt sit:

$q = \frac{pK + kP}{a^4 - mkkpp} = \frac{a^4(pp - kk)}{pK - kP}$, eritque

Arc.

$$\text{Arc } ak - \text{Arc.} pq = \frac{mkpq}{aa}$$

a qua aequatione illa ſubtrahatur, relinquetur:

$$\text{Arc.} fg - pq = \frac{mk}{aa}(pq - fg). \quad \text{Q. E. I.}$$

Coroll. 1.

Cum k ab abſciſſis p et q pari modo pendeat atque ab f et g, erit:

$$k = \frac{qP - pQ}{a^4 - mppqq} = \frac{a^4(qq - pp)}{qP + pQ}$$

ideoque abſciſſa q ex datis $f\,g$, et p per hanc aequationem debet definiri:

$$\frac{gF - fG}{a^4 - mffqq} = \frac{qP - pQ}{a^4 - mppqq}$$ vel etiam ex hac:

$$\frac{gg - ff}{gF + fG} = \frac{qq - pp}{qP + pQ};$$ atque hinc elicitur:

$$q = \frac{Fgp(pp - gg) + Gfp(pp - ff) - Pfg(gg - ff)}{Ff(pp - gg) + Gg(pp - ff) - Pp(gg - ff)}.$$

Coroll. 2.

Abſciſſae p et q etiam ita ab abſciſſa k pendent, vt ſit:

$$aa\sqrt{(aa - mqq)} + mkp\sqrt{(aa - qq)} = a\sqrt{(aa - mkk)(aa - mpp)}$$
$$aa\sqrt{(aa - qq)} + kp\sqrt{(aa - mqq)} = a\sqrt{(aa - kk)(aa - pp)}$$
$$aa\sqrt{(aa - mpp)} - mkq\sqrt{(aa - pp)} = a\sqrt{(aa - mkk)(aa - mqq)}$$
$$aa\sqrt{(aa - pp)} - kq\sqrt{(aa - mpp)} = a\sqrt{(aa - kk)(aa - qq)}$$
$$aa\sqrt{(aa - mkk)} - mpq\sqrt{(aa - kk)} = a\sqrt{(aa - mpp)(aa - mqq)}$$
$$aa\sqrt{(aa - kk)} - pq\sqrt{(aa - mkk)} = a\sqrt{(aa - pp)(aa - qq)}$$

Coroll. 3.

Si arcuum fg et pq differentia debeat euaneſcere, neceſſe eſt, vt ſit, vel $k = 0$, vel $pq = fg$. At ſi $k = 0$, ob ob $k=\frac{a^4(gg-ff)}{gF+fG}=\frac{a^4(qq-pp)}{qP+pQ}$, tam arcus fg, quam pq, euanescit. Sin autem sit $pq=fg$, ob

$$aa\surd(aa-mkk)-mpq\surd(aa-kk)=a\surd(aa-mpp)(aa-mqq)$$
$$aa\surd(aa-mkk)-mfg\surd(aa-kk)=a\surd(aa-mff)(aa-mgg)$$

erit $(aa-mpp)(aa-mqq)=(aa-mff)(aa-mgg)$ et ob

$$aa\surd(aa-kk)-pq\surd(aa-mkk)=a\surd(aa-pp)(aa-qq)$$
$$aa\surd(aa-kk)-fg\surd(aa-mkk)=a\surd(aa-ff)(aa-gg)$$

erit $(aa-pp)(aa-qq)=(aa-ff)(aa-gg)$

vnde patet esse, vel $q=g$ et $p=f$, vel $q=f$ et $p=g$; vtroque autem casu fit arcus pq non solum aequalis, sed etiam similis, arcui fg.

Coroll. 4.

Si fieri posset, vt arcus pq euanesceret, manente arcu fg finito, hic arcus foret rectificabilis. At euanescente arcu pq, ob $q=p$, oritur $k=0$, ideoque etiam $f=g$; vnde quoque arcus fg euanescit.

Coroll. 5.

Si arcus pq in altero vertice B debeat esse terminatus, vt sit $q=a$, habebimus hanc aequationem:

$$a^3\surd(1-m)=\surd(aa-mkk)(aa-mpp); \text{ siue}$$
$$a^4-aakk-aapp+mkkpp=0 \text{ et } kk=\frac{aa(aa-pp)}{aa-mpp}$$

Qui valor substitutus in hac aequatione

$$aa\surd(aa-kk)-fg\surd(aa-mkk)=a\surd(aa-ff)(aa-gg)$$

praebet:

$$0=a^6+2(1-m)a^3fgp-a^4(ff+gg+pp)+maa(ffgg+ffpp+ggpp)-mffggpp;$$

vnde oritur;

$$p = \frac{(1-m)a^2fg \pm a^2\sqrt{(aa-ff)(aa-gg)(aa-mff)(aa-mgg)}}{a^4 - maaff - maagg + mffgg}$$

qui casus ad casum problematis primi redit, si modo vertices a et B inter se permutentur, et loco abscissarum applicatae introducantur.

Coroll. 6.

Notari quoque meretur casus, quo punctum p in ipso puncto g assumitur, ita vt arcus pq arcui fg fiat contiguus, sitque Arc. fg — Arc. $gq = \frac{mkg}{aa}(q-f)$ ob $p = g$. Cum igitur sit quoque $P = G$, erit $\frac{gF + fG}{gg - ff} = \frac{qG + gQ}{qq - gg}$, vnde abscissa q determinatur. Vel sumta $k = \frac{gF - fG}{a^4 - mffgg} = \frac{a^4(gg-ff)}{gF + fG}$, erit

$q = \frac{gK + kG}{a^4 - mkkgg} = \frac{a^4(gg-kk)}{gK - kG}$. Hinc autem reperitur:

$$q = \frac{gg}{f} - \frac{a^4(gg-ff)^2}{f} \cdot \frac{(a^4 - mg^4)}{2FGfg + a^4(a^4(ff+gg) - 2(m+1)aaffgg - mg^4(gg-3ff))}$$ vel

$$q = \frac{2FGg(a^4-mg^4) - a^4f\sqrt{((a^4+mg^4)^2 - 2(m+1)aagg(a^4+mg^4) + 4ma^4g^4)}}{a^4((a^4-mg^4)^2 - 4mffgg(aa-gg)(aa-mgg))}$$ vel

$$q = \frac{2FGg(a^4-mg^4) - a^4f\sqrt{(mg^4 - 2aagg + a^4)(mg^4 - 2maagg + a^4)}}{a^4(a^4-mg^4)^2 - 4ma^4ffgg(aa-gg)(aa-mgg)}$$

Problema 3.

Proposito ellipsis arcu quocunque fg, a dato puncto p abscindere arcum pqr, qui a duplo illius arcus fg differat quantitate geometrice assignabili

Solutio.

Ex punctorum f et g abscissis $AF = f$; $AG = g$, earumque quantitatibus deriuatiuis F et G, quaeratur primum abscissa $AK = k = \frac{gF - fG}{a^4 - mffgg} = \frac{a^4(gg-ff)}{gF + fG}$; vt habeatur

Arc. ak — Arc. $fg = \frac{mkfg}{aa}$.

Deinde:

Deinde ad puncti p abscissam $AP = p$, quaeratur abscissa $AQ = q$, vt sit $q = \frac{pK + kP}{a^4 - mkkpp} = \frac{a^4(pp - kk)}{pK - kP}$; denotantibus litteris maiusculis K et P semper eiusmodi functiones minuscularum k et p, vt si minuscula fuerit x, valor maiusculae respondentis futurus sit $X = aa \sqrt{(aa - xx)(aa - mxx)}$; eritque

$$\text{Arc. } ak - \text{Arc. } pq = \frac{mkpq}{aa}$$

vnde obtinemus:

$$\text{Arc. } fg - \text{Arc. } pq = \frac{mk}{aa}(pq - fg)$$

Simili modo, si punctum q nunc tanquam datum spectetur, ex eoque quaeratur punctum r, vt sit eius abscissa

$$AR = r = \frac{qK + kQ}{a^4 - mkkqq} = \frac{a^4(qq - kk)}{qK - kQ}$$

habebimus:

$$\text{Arc. } fg - \text{Arc. } qr = \frac{mk}{aa}(qr - fg)$$

Quare his formulis addendis eliciemus:

$$2 \text{ Arc } fg - \text{Arc. } pqr = \frac{mk}{aa}(pq + qr - 2fg)$$

sicque a dato puncto p abscidimus arcum pr, qui a duplo arcus fg discrepat quantitate algebraica. Q. E. I.

Coroll. 1.

Cum sit $k = \frac{a^4(gg - ff)}{gF + fG}$, et $k = \frac{a^4(qq - pp)}{qP + pQ}$, similique modo $k = \frac{a^4(rr - qq)}{rQ + qR}$; habebimus has aequationes:

$$\frac{gF + fG}{gg - ff} = \frac{qP + pQ}{qq - pp} = \frac{rQ + qR}{rr - qq}$$

vnde ex datis abscissis f, g et p, reliquae duae abscissae q et r definiuntur.

Coroll. 2.

Si arcus fg in ipso vertice a incipiat, vt sit $f=0$, erit $k=g$, vnde $q=\frac{pC+gP}{a^4-mggpp}=\frac{a^4(pp-gg)}{pG-gP}$ et $r=\frac{qG+gQ}{a^4-mggqq}=\frac{a^4(qq-gg)}{qG-gQ}$. Ac si praeterea punctum p, in altero vertice A detur, vt sit $p=a$, et $P=0$; erit $q=\frac{G}{a^3-magg}=\frac{a\surd(aa-gg)(aa-mgg)}{aa-mgg}$; hinc $aa-qq=\frac{aagg(1-m)(aa-mgg)}{(aa-mgg)^2}=\frac{(1-m)aagg}{aa-mgg}$ et $aa-mqq=\frac{a^4(1-m)(aa-mgg)}{(aa-mgg)^4}=\frac{(1-m)a^4}{aa-mgg}$, vnde $Q=\frac{-(1-m)a^5g}{aa-mgg}$ quia applicata in partem inferiorem cadere debet: eritque $r=\frac{a(a^4-2aagg+mg^4)}{a^4-2maagg+mg^4}$.

Coroll. 3.

Tab. I. Fig. 7. Hoc ergo casu sumto r in superiore quadrante, vt posita abscissa $AG=g$, sit $AR=r=\frac{a(a^4-2aagg+mg^4)}{a^4-2maagg+mg^4}$ seu $BR=a-r=\frac{2(1-m)a^3gg}{a^4-2maagg+mg^4}$, erit 2 Arc. ag − Arc. Br = quant. algebr. $=\frac{mg}{aa}(aq+rq)=\frac{mgq}{aa}(a+r)$, ideoque 2 Arc. ag − Arc. $Br=\frac{2mg(aa-gg)\surd(aa-gg)(aa-mgg)}{a^4-2maagg+mg^4}$.

Coroll. 4.

Si puncta g et r in vnum debeant coalescere, vt sit $r=g$, valor abscissae communis $AG=AR=g$, ex hac aequatione quinti gradus debet determinari,

$$mg^5-mag^4-2maag^3+2a^3gg+a^4g-a^5=0,$$

Ita si sit $m=\frac{1}{2}$, et $a=1$, habebitur:

$$g^5-g^4-2g^3+4gg+2g-2=0,$$

Si

Si esset $m = \frac{4}{3+\sqrt{2}}$, prodiret $g = \frac{a}{\sqrt{2}}$; foretque
$2\,\text{Arc.}\,ag - \text{Arc.}\,Bg = a\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}}$.

Problema 4.

Proposito arcu ellipseos quocunque fg, inuenire arcum pqr, qui sit praecise duplo maior. Tab. I. Fig. 6.

Solutio.

In solutione ergo praecedentis problematis efficiendum est, vt sit $pq + qr - 2fg = 0$: eritque tum $2\,\text{Arc.}\,fg = \text{Arc.}\,pqr$. Hic autem, ob arcum fg datum, in ellipsi, praeter semiaxes $AB = a$ et $Aa = a\sqrt{(1-m)}$, dantur abscissae $AF = f$ et $AG = g$, cum valoribus deriuatis F et G: vnde quaeratur $k = \frac{a^4(gg-ff)}{gF+fG}$; simulque erit eius valor deriuatus $K = \frac{a^4(ff+gg-kk)-mkkffgg}{2fg}$ (per coroll. 3 probl. 1). Simili autem modo abscissae p et q ab k pendent; vt sit:

$$K = \frac{a^4(pp+qq-kk)-mkkppqq}{2pq}$$

itemque ex abscissis q et r erit:

$$K = \frac{a^4(qq+rr-kk)-mkkqqrr}{2qr}.$$

At ex aequatione $pq + qr = 2fg$ est $q = \frac{2fg}{p+r}$; vnde obtinebimus has duas aequationes:

$$K = \frac{a^4(pp-kk)(p+r)^2+4a^4ffgg-4mffggkkpp}{4fgp(p+r)},$$

$$K = \frac{a^4(rr-kk)(p+r)^2+4a^4ffgg-4mffggkkrr}{4fgr(p+r)},$$

ex quibus ambae abscissae p et r, arcum quaesitum pr determinantes, definiri poterunt. Hinc ergo primum elicimus, eliminando K, ac per $p-r$ diuidendo:

$$a^4pr(p+r)^2 + a^4kk(p+r)^2 - 4a^4ffgg - 4mffggkkpr = 0.$$

 Deinde

Deinde addendo illas aequationes habebimus:

$$2K = \frac{a^4pr(p+r)^3 - a^4kk(p+r)^3 + 4a^4ffgg(p+r) - 4mffggkkpr(p+r)}{4fg.pr(p+r)}$$

Ex illa autem est:

$$a^4(p+r)^2 = \frac{4ffgg(a^4+mkkpr)}{pr+kk}$$

qui valor in hac substitutus praebet:

$$8Kfgpr = \frac{4ffgg(pr-kk)(a^4+mkkpr)}{pr+kk} + 4a^4ffgg - 4mffggkkpr$$

siue: $\frac{2Kpr(pr+kk)}{fg} = 2a^4pr - 2mk^4pr$; vnde elicitur

$$pr = \frac{(a^4-mk^4)fg - Kkk}{K} = \frac{ffgg(2a^4-mk^4) - a^4kk(ff+gg-kk)}{a^4(ff+gg-kk) - mffggkk}$$

et $(p+r)^2 = \frac{4fg}{a^4}(K+mfgkk) = \frac{2a^4(ff+gg-kk)+2mffggkk}{a^4}$

Ergo: $p+r = \frac{\sqrt{2(a^4(ff+gg-kk)+mffggkk)}}{aa}$

Porro $r-p = \frac{\sqrt{2(a^8(gg-ff)^2 - a^8k^4 + 2ma^4ffggk^4 - mmf^4g^4k^4)}}{aa\sqrt{(a^4(ff+gg-kk) - mffggkk)}}$

seu $r-p = \frac{\sqrt{2(a^8(gg-ff)^2 - k^4(a^4-mffgg)^2)}}{aa\sqrt{(a^4(ff+gg-kk) - mffggkk)}}$

Cum autem sit $a^4(gg-ff) = k(gF+fG)$, et $a^4 - mffgg = \frac{gF-fG}{k}$, erit $r-p = \frac{2k}{aa}\sqrt{\frac{FG}{K}}$, vnde ob

$$r+p = \frac{\sqrt{2(a^4(ff+gg-kk)+mffggkk)}}{aa} = \frac{2}{aa}\sqrt{fg(K+mfgkk)}$$

vtraque abscissa p et r innotescit. Q. E. I.

Coroll. I.

Cum sit $k = \frac{gF-fG}{a^4-mffgg}$, et

$$K = \frac{(a^4+mffgg)FG - a^4fg(2maa(ff+gg) - (m+1)(a^4+mffgg))}{(a^4-mffgg)^2}$$

erit

$$r+p = \frac{2}{aa}\sqrt{\frac{fgFG - ma^4ffgg(ff+gg) + (m+1)a^6ffgg}{a^4-mffgg}}$$

$$r-p = \frac{2(gF-fG)}{aa}\sqrt{\frac{FG}{(a^4+mffgg)(FG+(m+1)a^6fg) - 2ma^6fg(ff+gg)}}$$

Coroll.

Coroll. 2.

Si arcus datus fg in vertice a terminetur, vt sit $f=0$ et $F=a^4$; prodit $p+r=0$, et $r-p=2g$; vnde $p=-g$ et $r=g$: arcus ergo duplus vtrinque circa a aequaliter extenditur, vtrumque semissem arcui fg, seu ag similem habens et aequalem. Idem euenit, si arcus datus in altero vertice B terminetur, vt sit $g=a$ et $G=0$, tum enim fit $r-p=0$ et $r+p=2f$, ideoque $r=p=f$.

Coroll. 3.

Quemadmodum his casibus, vbi arcus propositus fg in altero vertice terminatur, eius arcus duplus per se est manifestus, ita, si arcus propositus in neutro vertice terminatur, assignatio arcus dupli maxime est difficilis; quippe qui arcus geometrice ne bisecari quidem potest.

Coroll. 4.

Hinc etiam patet, si detur vicissim arcus pr, inueniri posse arcum fg, qui eius exacte futurus sit semissis: sed hoc non nisi molestissimis calculis praestari poterit: At si arcus duplus pqr quadranti elliptico sit aequalis, seu $p=0$ et $r=a$, non difficulter arcus assignabitur, eius semissi aequalis. Primo enim erit $q=k$; et $k=a\sqrt{\frac{1-\sqrt{(1-m)}}{m}}$, sicque innotescit tam k quam $K=a^4\sqrt{\frac{(1-m)}{m}}(1-\sqrt{(1-m)})$. Porro est $2fg=ak$ et $ff+gg=\frac{Kk}{aa}+kk+\frac{mk^4}{4aa}$. At est $m=\frac{2aakk-a^4}{k^4}$; ideoque $ff+gg=\frac{2kk+3aa}{4}$; vnde

$$g+f=\tfrac{1}{2}\sqrt{(2kk+3aa+4ak)}$$ et
$$g-f=\tfrac{1}{2}\sqrt{(2kk+3aa-4ak)}$$: ideoque
$$f=\tfrac{1}{4}\sqrt{(3aa+4ak+2kk)}-\tfrac{1}{4}\sqrt{(3aa-4ak+2kk)}$$
$$g=\tfrac{1}{4}\sqrt{(3aa+4ak+2kk)}+\tfrac{1}{4}\sqrt{(3aa-4ak+2kk)}$$

Coroll. 5.

Si ponatur alter ſemiaxis A$a=b$, exiſtente altero AB$=a$, vt ſit $m=\frac{aa-bb}{aa}$, erit pro hoc caſu $k=a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$, quo valore ſubſtituto habebitur

$$g\pm f=\tfrac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{5a+3b}{a+b}\pm 4\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right)}$$; vnde fit
$$f=\tfrac{a}{2}\sqrt{\frac{5a+3b-\sqrt{(9aa+14ab+9bb)}}{2(a+b)}}$$
$$g=\tfrac{a}{2}\sqrt{\frac{5a+3b+\sqrt{(9aa+14ab+9bb)}}{2(a+b)}}.$$

ſicque abſciſſae pro vtroque termino arcus fg reperiuntur, qui eſt ſemiſſis totius arcus quadrantis.

Coroll. 6.

Hoc ergo caſu erit

$$ff+gg=\frac{aa(5a+3b)}{4(a+b)}=aa+\frac{aa(a-b)}{4(a+b)}$$
et $fg=\frac{aa}{2}\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ et $2fg=aa\sqrt{\frac{a}{a+b}}$

ſi exempli gratia ſit $a=25$ et $b=119$, reperietur $f=\frac{25}{3\sqrt{2}}$ et $9=\frac{125}{4\sqrt{2}}$.

Scholion.

Hinc ergo ſolutionem nacti ſumus iſtius non inelegantis problematis:

Tab. I. Fig. 8. *Propoſito ellipſis quadrante* BAa *geometrice in eo abſcindere arcum* fg, *qui praeciſe aequalis ſit ſemiſſi totius arcus quadrantis* afgB.

Poſitis

Positis enim semiaxibus $AB = a$ et $Aa = b$; pro punctis quaesitis f et g erunt abscissae:

$$AF = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5a + 3b - \sqrt{(9aa + 14ab + 9bb)}}{2(a+b)}}$$

$$AG = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5a + 3b + \sqrt{(9aa + 14ab + 9bb)}}{2(a+b)}}$$

unde pro iisdem punctis eliciuntur applicatae:

$$Ff = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{3a + 5b + \sqrt{(9aa + 14ab + 9bb)}}{2(a+b)}}$$

$$Gg = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{3a + 5b - \sqrt{(9aa + 14ab + 9bb)}}{2(a+b)}}$$

Problema 5.

Datum ellipseos arcum pr in duas partes secare pq et qr, ita vt differentia harum partium $pq - qr$ sit geometrice assignabilis. Tab. I. Fig. 6.

Solutio.

Positis, vt in problemate praecedente, $AP = p$, $AQ = q$, et $AR = r$; existentibus semiaxibus $AB = a$ et $Aa = a\sqrt{(1-m)}$; quaeratur a vertice a arcus ak, vt posita eius abscissa $AK = k$, sit

$$k = \frac{qP - pQ}{a^4 - mppqq} = \frac{a^4(qq - pp)}{qP + pQ}$$

eritque Arc. ak − Arc. $pq = \frac{mkpq}{aa}$

Tum vero sit etiam

$$k = \frac{rQ - qR}{a^4 - mqqrr} = \frac{a^4(rr - qq)}{rQ + qR}$$

erit quoque Arc. ak − Arc. $qr = \frac{mkqr}{aa}$, ideoque

$$\text{Arc. } pq - \text{Arc. } qr = \frac{mkq}{aa}(r - p)$$

Cum igitur dentur abſciſſae p et r cum ſuis deriuatiuis P et R, abſciſſa puncti quaeſiti q ex hac aequatione definiri debebit:

$$\frac{qP+pQ}{qq-pp}=\frac{rQ+qR}{rr-qq};\text{ ſeu:}$$

$$Pq(rr-qq)-Rq(qq-pp)=Q(p+r)(qq-pr)$$

quae aequatio quadrata ac tum per $(qq-pp)(rr-qq)$ diuiſa dat:

$$a^4((p+r)^2-2qq)-2(m+1)aaprqq+mqq(qq(p+r)^2-2pprr)$$
$$=2qqPR:a^4\text{ ſiue}$$

$$q^4=\frac{2qq(\frac{PR}{a^4}+mpprr+(m+1)aapr+a^4)-a^4(p+r)^2}{m(p+r)^2}$$

ex qua aequatione valor abſciſſae q definiri poterit. Q. E. I.

Coroll. 1.

Si totus quadrans in duas partes, quarum differentia ſit geometrica, diuidi debeat, poni debet $p=0$, et $r=a$; vnde fit $P=a^4$ et $R=0$: indeque

$$q^4=\frac{2aaqq-a^4}{m}\text{ et }qq=\frac{aa(1-\surd(1-m))}{m},\text{ et }q=a\surd\frac{(1-\surd(1-m))}{m}$$

quae eſt eadem determinatio, quam ſupra iam in Coroll. Caſus I. Probl. 1. inuenimus.

Coroll. 2.

Si abſciſſarum p et r altera ſit negatiua, alterique aequalis, ſeu $p+r=0$, habebitur ſtatim

vel $q=0$, vel $Prr-Pqq-Rqq+Rpp=0$; ſeu $qq=\frac{Prr+Rpp}{P+R}$, ideoque $P+R=0$. Manifeſtum autem eſt, ſi vtraque applicata Pp et Rr fuerit affirmatiua, fore $R=P$, atque tum locum habere $q=0$.

Pro-

Problema 6.

Si ellipsis ADBFA per diametrum quamcunque ECF fuerit bisecta, semicircumferentiam EBF ita secare in puncto M, vt partium EM et FM differentia sit geometrice assignabilis. Tab. I. Fig. 9.

Solutio.

Etsi hoc problema in praecedente continetur, tamen solutio inde deduci nequit, propterea quod tam $p+r=0$, quam $P+R=0$; peculiari ergo modo solutio debet inuestigari. Positis ergo semiaxibus $CA=a$; $CD=b=a\surd(1-m)$ sit pro altero termino E arcus propositi abscissa $CP=p$; erit applicata $PE=\frac{b}{a}\surd(aa-pp)$: quae coordinatae negatiue sumtae ad alterum terminum F pertinebunt, quae autem sint r et $\frac{b}{a}\surd(aa-rr)$, ita vt sit $r=-p$ et $\surd(aa-rr)=-\surd(aa-pp)$. Cum nunc sumta quadam noua abscissa k, positaque quaesita $CQ=q$, sit ex Coroll. 2. Probl. II.

$$aa\surd(aa-kk)-pq\surd(aa-mkk)=a\surd(aa-pp)(aa-qq)$$
$$aa\surd(aa-kk)-qr\surd(aa-mkk)=a\surd(aa-qq)(aa-rr)$$

haec vltima aequatio ob $r=-p$ et $\surd(aa-rr)=-\surd(aa-pp)$ abit in hanc:

$$aa\surd(aa-kk)+pq\surd(aa-mkk)=-a\surd(aa-pp)(aa-qq)$$

quae ad primam addita dat:

$$2aa\surd(aa-kk)=0 \text{ ideoque } k=a:$$

qui valor in altera substitutus dat:

$$-pq\surd(1-m)=\surd(aa-pp)(aa-qq)$$

 ideoque

ideoque $\frac{-q}{\sqrt{(aa-qq)}} = \frac{\sqrt{(aa-pp)}}{p\sqrt{(1-m)}}$, consequenter

$$q = -\frac{a\sqrt{(aa-pp)}}{\sqrt{(aa-mpp)}}.$$

Vbi signum negatiuum indicat, q in parte abscissarum negatiua capi oportere. Ducatur ad E normalis in curuam EN, erit $\frac{PE}{EN} = \frac{\sqrt{(aa-pp)}}{\sqrt{(aa-mpp)}}$. Ergo $CQ = \frac{a.PE}{EN}$. Sit porro GH diameter coniugata, cui normalis EN in V occurrat, erit $\frac{PE}{EN} = \frac{CV}{CN} = \frac{CQ}{CI}$ producta CG ad concursum cum applicata QM in I. Quare ob $CQ = \frac{a.CQ}{CI}$ prodit $CI = a = CA$. Vnde haec sequitur constructio facilis: Diameter coniugata GH vltra G in I continuetur, vt fiat $CI = CA$, ex I in axem AB demittatur perpendiculum IQ, quod ellipsin in puncto quaesito M secabit. At ob $K = a$ erit Arc. EM-Arc. $FM = \frac{2mpq}{a} = \frac{2mp.PE}{EN} = \frac{2CN.CV}{CN} = 2CV$ ob $CN = mp$.

Corollarium 1.

Si ex iisdem aequationibus binis, eliminando k, problema praecedens generaliter soluatur, sequens obtinebitur aequatio:

$$mp^4(r\sqrt{(aa-pp)}-p\sqrt{(aa-rr)})^2 - 2aaqq(aa+mpr)(aa-pr - \sqrt{(aa-pp)(aa-rr)}) + a^4(\sqrt{(aa-pp)}-\sqrt{(aa-rr)})^2 = 0$$

vnde per resolutionem adipiscimur:

$$qq = \frac{aa(aa-pr-\sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})(aa+mpr\pm\sqrt{(aa-mpp)(aa-mrr)})}{m(r\sqrt{(aa-pp)}-p\sqrt{(aa-rr)})^2}$$

$$q = \frac{a\left(\sqrt{\frac{(a+r)(a-p)}{2}}-\sqrt{\frac{(a-r)(a+p)}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{(a+p\sqrt{m})(a+r\sqrt{m})}{2m}}-\sqrt{\frac{(a-p\sqrt{m})(a-r\sqrt{m})}{2m}}\right)}{r\sqrt{(aa-pp)}-p\sqrt{(aa-rr)}}.$$

Coroll. 2.

Quanquam haec solutio re a solutione problematis praecedentis non discrepat, tamen statim solutionem praesentis suppeditat. Si enim ponamus $r = -p$ et $\sqrt{(aa-rr)} = -\sqrt{(aa-pp)}$, aequatio prima coroll. praec. transit in hanc formam

$$-2aaqq(aa-mpp).\ 2aa + a^6(2\sqrt{(aa-pp)})^2 = 0$$

seu $qq = \frac{aa(aa-pp)}{aa-mpp}$.

Coroll. 3.

Si ex duabus primis aequationibus eliminemus q, obtinebimus:

$$q = \frac{ac(\sqrt{(aa-pp)} - \sqrt{(aa-rr)})\sqrt{(aa-kk)}}{(r\sqrt{(aa-pp)} - p\sqrt{(aa-rr)})\sqrt{(aa-mkk)}} \text{ et}$$

$$\sqrt{(aa-qq)} = \frac{a(r-p)\sqrt{(aa-kk)}}{r\sqrt{(aa-pp)} - p\sqrt{(aa-rr)}}\text{; vnde fit}$$

$$a^4(aa-kk)(\sqrt{aa-pp)} - \sqrt{(aa-rr)})^2 + a^2(aa-kk)(aa-mkk)(r-p)^2$$
$$= aa(aa-mkk)(r\sqrt{(aa-pp)} - p\sqrt{(aa-rr)})^2$$

siue

$$mk^4(r-p)^2 = 2kk(aa-mpr)(aa-pr-\sqrt{(aa-pp)(aa-rr)}) - aa(aa-pr$$
$$-\sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})^2$$

vnde fit:

$$kk = \frac{(aa-pr-\sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})(aa-mpr-\sqrt{(aa-mpp)(aa-mrr)})}{m(r-p)^2}$$

hincque colligitur:

$$k = \frac{\left(\sqrt{\frac{(a+r)(a-p)}{2}} - \sqrt{\frac{(a-r)(a+p)}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{(a+r\sqrt{m})(a-p\sqrt{m})}{2m}} - \sqrt{\frac{(a-r\sqrt{m})(a+p\sqrt{m})}{2m}}\right)}{r-p}$$

Coroll. 4.

Hinc erit:

$$kq = \frac{ac(aa-pr-\sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})(\sqrt{(aa-mpp)} - \sqrt{(aa-mrr)})}{m(r-p)(r\sqrt{(aa-pp)} - p\sqrt{(aa-rr)})}$$

 Quare

Quare cum arcuum pq et qr differentia sit $= \frac{mkq}{aa}(r-p)$, habebimus generaliter:

$$\text{Arc.}\,pq - \text{Arc.}\,qr = \frac{(aa - pr - \sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})(\sqrt{(aa-mpp)} - \sqrt{(aa-mrr)})}{r\sqrt{(aa-pp)} - p\sqrt{(aa-rr)}}$$

siquidem punctum q ex Coroll. 1. definiatur. Erit ergo

$$\text{Arc.}\,pq - \text{Arc.}\,qr = \frac{(\sqrt{(aa-pp)} - \sqrt{(aa-rr)})(\sqrt{(aa-mpp)} - \sqrt{(aa-mrr)})}{r+p} \text{ et}$$

$$q = \frac{\left(\sqrt{\frac{(a+r)(a+p)}{2}} - \sqrt{\frac{(a-r)(a-p)}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{(a+p\sqrt{m})(a+r\sqrt{m})}{2m}} - \sqrt{\frac{(a-p\sqrt{m})(a-r\sqrt{m})}{2m}}\right)}{p+r}.$$

Problema. 7.

Tab. I. Fig. 6.

Proposito ellipsis arcu quocunque fg, a dato puncto p abscindere arcum $pqrs$, qui ab illius arcus fg triplo, differat quantitate geometrice assignabili.

Solutio.

Sint, vt hactenus, punctorum datorum f, g et p abscissae $AF = f$, $AG = g$, $AP = p$, ac quaeratur primo arcus Ak, cuius abscissa sit $AK = k = \frac{gF - fG}{a^4 - mffgg} = \frac{a^4(gg-ff)}{gF + fG}$ vt sit $\text{Arc.}\,ak - \text{Arc.}\,fg = \frac{mkfg}{aa}$. Tum quaeratur punctum q, vt sit $AQ = q = \frac{pK + kP}{a^4 - mkkpp} = \frac{a^4(pp-kk)}{pK - kP}$; indeque

$$Q = \frac{a^4(qq-pp) - kk(a^4 - mppqq)}{2kp} = \frac{pq(qq-pp)K - kq(qq-kk)P}{kp(pp-kk)}$$

eritque $\text{Arc.}\,fg - \text{Arc.}\,pq = \frac{mk}{aa}(pq - fg)$. Simili modo porro quaeratur punctum r, vt sit:

$$AR = r = \frac{qK + kQ}{aa - mkkqq} = \frac{a^4(qq-kk)}{qK - kQ} \text{ et}$$

$$R = \frac{a^4(rr-qq) - kk(a^4 - mqqrr)}{2kq} = \frac{qr(rr-qq)K - kr(rr-kk)Q}{kq(qq-kk)}$$

et

et cum ſit Arc. fg — Arc. $qr = \frac{mk}{aa}(qr - fg)$, erit

$$2\,\text{Arc.}\,fg - \text{Arc.}\,pqr = \frac{mk}{aa}(pq + qr - 2fg)$$

Hinc pari modo definiamus punctum s, vt ſit Abſciſſa $AS = s = \frac{rK + kR}{a^4 - mkkrr} = \frac{a^4(rr - kk)}{rK - kR}$ et

$$S = \frac{a^4(ss - rr) - kk(a^4 - mrrss)}{2kr} = \frac{rs(ss - rr)K - ks(ss - kk)R}{kr(rr - kk)}$$

et quia erit Arc. fg — Arc. $rs = \frac{mk}{aa}(rs - fg)$, habebitur

$3\,\text{Arc.}\,fg - \text{Arc.}\,pqrs = \frac{mk}{aa}(pq + qr + rs - 3fg)$. Q. E. I.

Coroll. 1.

Simili modo progrediendo, manifeſtum eſt, definiri a dato puncto p poſſe arcum pt, qui a quadruplo arcus dati fg deficiat quantitate algebraica: atque hoc modo operationem continuari poſſe quousque lubuerit.

Coroll. 2.

Si arcus datus fg toti quadranti aequetur, vt ſit $f = 0$ et $g = a$, ideoque $F = a^4$ et $G = 0$, erit $k = a$ et $K = 0$; Hinc reperitur $q = \frac{P}{a(aa - mpp)} = a\sqrt{\frac{aa - pp}{aa - mpp}}$; et $Q = \frac{-q(qq - aa)}{p(pp - aa)}P = \frac{-(aa - qq)PP}{ap(aa - mpp)(aa - pp)} = -\frac{a^3(aa - qq)}{p}$; at eſt $aa - qq = \frac{a(1 - m)pp}{aa - mpp}$ vnde $Q = \frac{-(1 - m)a^5 p}{aa - mpp}$. Porro $r = \frac{Q}{a(aa - mqq)} = -p$; et $R = -aa\sqrt{(aa - pp)(aa - mpp)} = -P$. Denique erit $s = \frac{-P}{a(aa - mpp)} = -a\sqrt{\frac{aa - pp}{aa - mpp}} = -q$ et $S = -Q = \frac{(1 - m)a^5 p}{aa - mpp}$: fietque $3\,\text{Arc.}\,fg - \text{Arc.}\,pqrs = \frac{m}{a}pq = mp\sqrt{\frac{a - pp}{aa - mpp}}$.

Coroll. 3.

Punctum p quoque ita definiri poterit, vt fiat:

$$pq + qr + rs = 3fg$$

quo caſu arcus $pqrs$ exacte aequabitur triplo arcus dati fg. Atque ita porro arcus inueniri poterit, qui ad arcum datum fg aliam quamuis rationem multiplicem teneat.

Scho-

Scholion.

Omnia haec problemata, quae hic pro ellipsi tractaui, simili modo pro hyperbola resolui poterunt; ita etiam, dato quocunque hyperbolae arcu, a proposito quouis eiusdem hyperbolae puncto arcus abscindi poterit, qui discrepet, vel ab illo ipso arcu, vel ab eius duplo, vel triplo, vel ab alio quouis multiplo quantitate geometrice assignabili. Deinde etiam hoc punctum ita assumere licebit, vt differentia plane in nihilum abeat, quo casu dato quocunque hyperbolae arcu alius arcus assignari poterit, qui vel eius duplo, vel triplo, vel alii quouis multiplo exacte sit aequalis. Vnde perspicuum est, si proposito arcu inuentus sit alius arcus, qui ad illum teneat rationem μ ad 1, similique modo alius quaeratur arcus, qui ad eundem teneat rationem $\nu : 1$; tum hoc pacto duos haberi arcus hyperbolicos, qui inter se teneant rationem μ ad ν, sicque infinitis modis bini arcus exhiberi poterunt, qui sint in ratione quacunque numeri ad numerum. Neque vero huiusmodi problemata tantum pro hyperbola resolui poterunt, sed omnino pro aliis curuis quibuscunque, quae ita sint comparata, vt arcus abscissae, vel alii cuicunque lineae rectae variabili x respondens, contineatur in hac formula $\int \frac{d\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}}$, quae etiam per regulas initio datas ita latius extendi potest, vt ad hanc formam reuocetur:

$$\int \frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4+\mathfrak{D}x^6+\mathfrak{E}x^8+\text{ etc.})}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}}$$

sed in praesentiarum neque hyperbolae, neque aliis huius generis curuis, diutius immorandum esse arbitror.

THEO-

THEOREMATA
CIRCA RESIDVA EX DIVISIONE POTESTATVM RELICTA.

Auctore

L. EVLERO.

Theorema. I.

1.

Si p sit numerus primus, et a primus ad p, nullus terminus huius progressionis geometricae $1, a, a^2, a^3$; a^4, a^5, a^6, etc. per numerum p diuisibilis existit.

Demonstratio.

Patet ex Euclidis Libro VII. Prop. 26. vbi demonstratur, si sint duo numeri a et b primi ad p, fore quoque productum ab primum ad p; ideoque cum a sit primus ad p, erit posito $b = a$; quadratum a^2 primus ad p; hincque porro a^3 posito $b = a^2$; item a^4 posito $b = a^3$; etc. Sic igitur nulla potestas ipsius a diuisibilis erit per numerum primum p.

Coroll. 1.

2. Si igitur singuli termini progressionis geometricae

$$1;\ a;\ a^2;\ a^3;\ a^4;\ a^5;\ a^6;\ a^7;\ a^8;\ \text{etc.}$$

 per

per numerum primum p diuidantur, diuiſio nunquam ſine reſiduo ſuccedet, ſed ex ſingulis terminis orientur reſidua.

Scholion.

3. Reſidua haec, quae ex diuiſione ſingulorum terminorum progreſſionis propoſitae geometricae per numerum primum p emergunt, hic diligentius perpendere conſtitui. Ac primo quidem ſingula haec reſidua, vti ex natura diuiſionis apparet, minora erunt numero p; nullum autem reſiduum erit $= 0$, quia nullus terminus per p eſt diuiſibilis. Quodſi forte prodeant reſidua ipſo numero p maiora, ex arithmetica conſtat, quemadmodum ea ad minora reduci oporteat. Sic reſiduum $p + r$ aequiualet reſiduo r, et in genere reſiduum $np + r$ redit ad reſiduum r; ac ſi r ſit maius quam p, hoc reſiduum reuocatur ad $r - p$, vel $r - 2p$, vel $r - 3p$, etc. donec ad numerum ipſo p minorem perueniatur. Itaque omnia haec reſidua $r + np$ pro eodem reſiduo r reputantur. Proprie autem loquendo omnia reſidua ſunt numeri poſitiui ipſo diuiſore p minores. Verum tamen etiam ſaepenumero conuenit et reſidua negatiua contemplari: veluti ſi r ſit reſiduum ex diuiſione cuiuspiam numeri per p relictum, ita vt ſit $r < p$, reſiduum quoque erit $r - p$, numerus ſcilicet negatiuus; ita vt reſiduum poſitiuum r aequiualeat reſiduo negatiuo $r - p$. Hoc modo reſidua ita exhiberi poterunt, vt nunquam ſemiſſem diuiſoris p excedant: nam ſi reſiduum affirmatiuum r maius fuerit quam $\frac{1}{2}p$, eius loco capiatur reſiduum negatiuum $r - p$, quod minus erit, quam ſemiſſis ipſius p.

Coroll.

Coroll. 2.

4. Quoniam omnia residua sunt numeri integri, iique minores quam p; sequitur plura diuersa residua oriri non posse quam $p-1$. Quare cum series geometrica 1; a; a^2; a^3; a^4; a^5; etc, ex terminis numero infinitis constet, necesse est, vt plures termini eadem exhibeant residua.

Coroll. 3.

5. Sint a^μ et a^ν duo eiusmodi termini, qui idem praebeant residuum r; ita vt sit $a^\mu = mp + r$ et $a^\nu = np + r$ erit $a^\mu - a^\nu = (m-n)p$, ideoque differentia horum terminorum $a^\mu - a^\nu$ per p erit diuisibilis. Innumeris ergo modis differentia inter binos terminos progressionis geometricae propositae per numerum p erit diuisibilis.

Coroll. 4.

6. Si potestas a^μ det residuum r, potestas vero a^ν residuum s, fueritque $r + s = p$, quo casu dicimus residuorum r et s alterum alterius esse complementum, hoc casu summa potestatum $a^\mu + a^\nu$ per numerum p erit diuisibilis. Cum enim sit $a^\mu = mp + r$ et $a^\nu = np + s$, erit $a^\mu + a^\nu = (m+n)p + r + s = (m+n+1)p$, ideoque factorem habet p.

Theorema 2.

7. Si potestas a^μ per p diuisa praebeat residuum r, et potestas a^ν residuum s, potestas $a^{\mu+\nu}$ residuum praebebit rs.

Demonstratio.

Sit enim $a^\mu = mp + r$ et $a^\nu = np + s$, erit $a^{\mu+\nu} = mnpp + mps + npr + rs$; ideoque si $a^{\mu+\nu}$ per p diuidatur, residuum erit rs; quod si maius fuerit quam p, subtrahendo p, quoties fieri potest, id ad residuum ipso diuisore p reducetur. Q. E. D.

Coroll. 1.

8. Cum ipsius radicis a per p diuisae residuum exponi queat per a; (si enim sit $a < p$, erit a residuum proprie sic dictum, sin autem $a > p$, nihilominus residuum per a exprimere licet, quia simul $a-p$, vel $a-np$ subintelligitur), si potestatis a^μ per p diuisae residuum sit r, potestatis $a^{\mu+1}$ residuum erit ar, simili modo potestatis $a^{\mu+2}$ residuum erit a^2r

- - - - $a^{\mu+3}$ - - - a^3r

etc.

Coroll. 2.

9. Hinc etiam sequitur, si potestatis a^μ per p diuisae residuum sit $= r$, fore potestatis $a^{2\mu}$ residuum $= rr$, potestatis $a^{3\mu}$ residuum $= r^3$; etc. Ita si potestatis a^μ residuum sit $= 1$, erit omnium harum potestatum $a^{2\mu}$; $a^{3\mu}$; $a^{4\mu}$; $a^{5\mu}$; etc. idem quoque residuum 1.

Coroll. 3.

10. Quodsi potestatis a^μ per p diuisae residuum sit $= p-1$, quod, vt vidimus, per -1 exponi potest: tum potestatis $a^{2\mu}$ residuum erit $= +1$, potestatis $a^{3\mu}$ residuum

residuum $=-1$, at potestatis $a^{4\mu}$ iterum $=+1$. Atque in genere potestatis $a^{n\mu}$ residuum erit, vel $+1$, si n sit numerus par, vel -1, si n sit numerus impar.

Scholion.

11. Hinc colligitur modus, satis expedite residua inueniendi, quae ex diuisione cuiuscunque potestatis per numerum quemcunque relinquuntur. Veluti si residuum inuestigare velimus, quod ex diuisione huius potestatis 7^{160} per numerum 641 oritur

potest.	residua	
		nempe cum potestas prima 7 relinquat 7,
7^1	7	potestas vero $7^2, 7^3, 7^4$ relinquant 49, 343
7^2	49	et, 478, seu -163; huius quadratum 7^8 re-
7^3	343	linquet 163^2 seu 288, et quadratum huius
7^4	478	7^{16} relinquet 288^2 seu 255. Simili modo
7^8	288	potestas 7^{32} relinquet 255^2 seu 284, et
7^{16}	255	potestatis 7^{64} residuum erit -110, et ex 7^{128}
7^{32}	284	oritur 110^2 seu -79, quod residuum per
7^{64}	-110	284 multiplicatum, dabit residuum po-
7^{128}	-79	testatis $7^{128+32} = 7^{160}$, quod erit 640
7^{160}	-1	seu -1.

Nouimus ergo, si potestas 7^{160} per 641 diuidatur, residuum fore 640, seu -1, vnde concludimus potestatis 7^{320} residuum fore $+1$. Ergo in genere potestatis 7^{160n} per 641 diuisae residuum erit, vel $+1$, si n sit numerus par, vel -1, si n sit numerus impar.

Theorema 3.

12. Si numerus a sit primus ad p, formeturque haec progressio geometrica $1; a; a^2; a^3; a^4; a^5; a^6; a^7$; etc.

innumeri in ea occurrent termini, qui per p diuisi relinquunt pro residuo 1, et exponentes horum terminorum progressionem arithmeticam constituent.

Demonstratio.

Quia numerus terminorum est infinitus, plura autem diuersa residua oriri nequeunt, quam $p-1$, necesse est vt plures, immo infiniti, termini idem producant residuum r. Sint a^μ et a^ν duo huiusmodi termini, idem residuum r relinquentes, eritque $a^\mu - a^\nu$ per p diuisibile. At $a^\mu - a^\nu = a^\nu(a^{\mu-\nu} - 1)$, et cum hoc productum sit diuisibile per p, alter autem factor a^ν ad p sit primus, necesse est, alter factor $a^{\mu-\nu}-1$ per p sit diuisibilis; vnde potestas $a^{\mu-\nu}$ per p diuisa residuum habebit $=1$. Sit $\mu-\nu=\lambda$, vt potestatis a^λ residuum sit $=1$, eritque omnium quoque harum potestatum $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$, $a^{4\lambda}$, $a^{5\lambda}$ etc. idem residuum $=1$. Itaque vnitas erit residuum omnium harum potestatum:

$$1;\ a^\lambda,\ a^{2\lambda};\ a^{3\lambda};\ a^{4\lambda};\ a^{5\lambda};\ a^{6\lambda};\ \text{etc.}$$

quarum exponentes in progressione arithmetica progrediuntur.

Coroll. 1.

13. Inuenta ergo vnica potestate a^λ, quae per p diuisa residuum praebet $=1$, infinitae inde aliae potestates exhiberi possunt, quae per p diuisae quoque vnitatem relinquant. Ac infima quidem huius generis potestas est $a^0=1$.

Coroll. 2.

14. Etiamsi autem praeter vnitatem nulla constet potestas ipsius a, quae per p diuisa vnitatem pro residuo relinquat, tamen nouimus infinitas huiusmodi re vera dari potestates.

Coroll. 3.

15. Ex demonstratione porro patet, dari adeo potestatem a^{λ} residuum $= 1$ praebentem, cuius exponens λ sit minor quam p. Si enim progressio geometries tantum vsque ad terminum a^{p-1} continuatur, quia terminorum numerus est $= p$; necesse est, vt saltem duo termini, qui sint a^{μ} et a^{ν} idem habeant residuum; vnde cum potestas $a^{\mu-\nu}$ habitura sit residuum $= 1$, ob $\mu < p$ et $\nu < p$, certe erit $\mu - \nu < p$.

Theorema 4.

16. Si potestas a^{μ} per p diuisa, residuum relinquat $= r$, et potestatis altioris $a^{\mu+\nu}$ residuum sit $= rs$; erit potestatis a^{ν}, qua haec illam superat, residuum $= s$.

Demonstratio.

Praebeat enim potestas a^{ν} aliud residuum, puta $= t$, et cum potestatis a^{μ} residuum sit $= r$, erit potestatis $a^{\mu+\nu}$ residuum $= rt$, quod ipsi rs aequiualere deberet. Foret ergo $rt = rs + np$, siquidem ponamus residua r, t, esse ipso diuisore p minora. Esset ergo $t = s + \frac{np}{r}$: at cum a et p sint numeri inter se primi, omnia residua, quae ex potestatibus ipsius a

per

per p diuisis oriuntur, pariter erunt ad p prima, nisi forte sint $= 1$, ideoque vt $\frac{np}{r}$ fiat numerus integer, necesse est, vt $\frac{n}{r}$ sit numerus integer, puta $= m$, foretque $t = s + mp$, ideoque $t = s$. Quare si potestatis a^{μ} residuum sit $= r$, et potestatis $a^{\mu+\nu}$ residuum $= rs$, hinc sequitur potestatis a^{ν} residuum fore $= s$.

Coroll. 1.

17. Si ergo $s = 1$, seu si duae potestates a^{μ} et $a^{\mu+\nu}$ idem habeant residuum r, sequitur, si maior per minorem diuidatur, quoto a^{ν} respondere residuum $= 1$, quo ipso demonstratio praecedentis theorematis innititur.

Coroll. 2.

18. Si $r = 1$ et $s = 1$, seu si duae potestates a^{μ} et $a^{\mu+\nu}$ idem habeant residuum $= 1$, tum etiam potestas a^{ν}, cuius exponens est differentia illorum exponentum, pariter residuum $= 1$ habebit.

Scholion.

19. Demonstratio huius theorematis etiam hoc modo confici potest. Cum a^{μ} per p diuisum relinquat r, erit $a^{\mu} = mp + r$, similique modo $a^{\mu+\nu} = np + rs$; hinc erit $a^{\mu+\nu} - a^{\mu}s = np - mps = (n - ms)p$; ideoque numerus $a^{\mu+\nu} - a^{\mu}s = a^{\mu}(a^{\nu} - s)$ erit per p diuisibilis: at alter factor a^{μ} per p non est diuisibilis. Ergo alter $a^{\nu} - s$ erit per p diuisibilis, consequenter potestas a^{ν} per p diuisa residuum dabit $= s$.

Theo-

Theorema 5.

20. Si post vnitatem a^λ sit minima potestas, quae per p diuisa vnitatem relinquit, tum nullae aliae potestates idem residuum $= 1$ relinquent, nisi quae in hac progressione geometrica occurrunt.

$1; a^\lambda, a^{2\lambda}; a^{3\lambda}; a^{4\lambda}, a^{5\lambda};$ etc.

Demonstratio.

Ponamus enim, aliam quampiam potestatem a^μ, si per p diuidatur, residuum quoque dare $= 1$, et cum sit $\mu > \lambda$, neque tamen multiplo cuipiam ipsius λ aequetur, hic exponens μ ita exhiberi potest, vt sit $\mu = n\lambda + \delta$, vti sit $\delta < \lambda$: neque erit $\delta = 0$. Cum igitur tam potestas $a^{n\lambda}$, quam $a^\mu = a^{n\lambda+\delta}$, per p diuisa vnitatem relinquat, per §. 18, haec quoque potestas a^δ vnitatem pro residuo habebit, foretque ergo a^λ non minima potestas huius indolis contra hypothesin. Quare si a^λ sit minima potestas residuum $= 1$ praebens, nullae aliae potestates eadem proprietate erunt praeditae, nisi quarum exponentes sunt multipla ipsius λ.

Coroll. 1.

21. Si ergo progressionis geometricae $1, a, a^2, a^3, a^4$, etc. iam secundus terminus a per p diuisus relinquat 1, quod fit, si $a = np + 1$, tum omnes termini idem praebebunt residuum $= 1$: neque ergo in residuis vlli alii numeri praeter 1 occurrent.

Coroll. 2.

22. Si residuum tertii termini a^2 sit $= 1$, quod fit, si $a^2 = np + 1$, tum alterni termini $1, a^2, a^4, a^6$, etc.

 quorum

quorum exponentes sunt pares, omnes residuum habebunt idem $=1$, reliqui vero termini, nisi a^{1} quoque residuum habeat $=1$, omnes alia praebebunt residua.

Coroll. 3.

23. Fieri ergo potest, vt in residuis multo pauciores numeri occurrant, quam numerus $p-1$ continet vnitates: plures autem, quam $p-1$ diuersi numeri occurrere non possunt.

Theorema 6.

24. Si potestas a^{2n}, cuius exponens est numerus par, per numerum primum p diuisa, residuum $=1$ relinquit, tum potestas a^{n} per eundem numerum p diuisa, dabit residuum $=+1$, vel $=-1$.

Demonstratio.

Ponamus enim r esse residuum, quod in diuisione potestatis a^{n} per numerum primum p relinquitur, eritque potestatis a^{2n} residuum $=rr$, quod per hypothesin $=1$. Quare erit $rr=1+mp$, et $rr-1=mp$; vnde cum $rr-1=(r+1)(r-1)$ sit diuisibile per p, alterutrum factorem $r+1$ vel $r-1$ per p diuisibilem esse oportet. Priori casu erit $r+1=\alpha p$, et $r=\alpha p-1$, hincque $r=-1$. Posteriori casu erit $r-1=\alpha p$ et $r=\alpha p+1$, hincque $r=+1$. Ergo si potestas a^{2n} residuum praebeat $=+1$, potestas a^{n} habebit vel residuum $=+1$, vel $=-1$, siquidem p sit numerus primus.

Coroll. 1.

25. Si igitur a^{2n} fuerit minima potestas, quae per numerum primum p diuisa residuum relinquit $=+1$,

$= +1$, tum poteſtas a^n reſiduum dabit $= -1$. Ergo ſi minimae poteſtatis a^λ reſiduum $= 1$ praebentis exponens λ ſit numerus par, tum inter reſidua terminorum progreſſionis geometricae $1, a, a^2, a^3, a^4$, etc. etiam occurret numerus -1.

Coroll. 2.

26. Sin autem minimae poteſtatis a^λ reſiduum 1 praebentis exponens λ ſit numerus impar, tum nulla omnino poteſtas reſiduum relinquet $= -1$. Si enim quaepiam poteſtas, vti a^μ, daret reſiduum $= -1$, tum poteſtas $a^{2\mu}$ daret reſiduum $= +1$, foretque idcirco $2\mu = n\lambda$, et quia λ eſt numerus impar, foret $2\mu = 2m\lambda$, ideoque $\mu = m\lambda$. At poteſtas $a^{m\lambda}$ relinquit reſiduum $= +1$, neque ergo reſiduum -1 vsquam occurrere poteſt.

Theorema 7.

27. Si a^λ fuerit minima poteſtas ipſius a, quae per numerum p diuiſa, reſiduum praebet $= 1$, tum omnia reſidua, quae ex terminis progreſſionis geometricae $1, a, a^2, a^3 \ldots\ldots a^{\lambda-1}$, vsque ad illam poteſtatem a^λ continuatae, reſultant, erunt inter ſe inaequalia.

Demonſtratio.

Si enim duae poteſtates, veluti a^μ et a^ν, quarum exponentes μ et ν ſint minores, quam λ, idem darent reſiduum, tum earum differentia $a^\mu - a^\nu$ foret per p diuiſibilis, ideoque poteſtas $a^{\mu-\nu}$ per p diuiſa reſiduum relinqueret $= +1$, eſſetque idcirco $\mu - \nu < \lambda$, contra hypothesin; vnde patet, omnes potestates, quarum exponentes sint minores, quam λ, diuersa praebere residua.

Theorema. 8.

28. Si a^λ fuerit quaedam potestas ipsius a, quae per numerum p diuisa residuum producat $= 1$, atque progressio geometrica in membra discerpatur, secundum potestates a^λ, $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$, $a^{4\lambda}$ etc. hoc modo:

$1, a, a^2 \ldots a^{\lambda-1} | a^\lambda \ldots a^{2\lambda-1} | a^{2\lambda} \ldots a^{3\lambda-1} | a^{3\lambda} \ldots a^{4\lambda-1} |$ etc.

ita vt quoduis membrum λ terminos contineat, tum in quolibet membro residua prodibunt eadem, atque eodem ordine recurrent.

Demonstratio.

Omnium enim membrorum termini primi 1, a^λ, $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$ etc. idem praebent residuum $= 1$. Termini deinde secundi omnium membrorum a, $a^{\lambda+1}$; $a^{2\lambda+1}$; $a^{3\lambda+1}$; etc. idem pariter dabunt residuum; sit enim r residuum ex termino a^1 ortum, quia $a^{\lambda+1} = a^\lambda . a^1$ erit residuum ex hoc termino ortum $= 1 . r = r$; similique modo patet, terminorum $a^{2\lambda+1}$, $a^{3\lambda+1}$ etc. residua fore $= r$. Ac si in genere sit a^μ terminus quotuscunque primi membri, atque residuum ex eo ortum $= r$, erit quoque termini $a^{n\lambda+\mu}$ residuum $= r$, quia termini $a^{n\lambda}$ residuum est $= 1$: hincque omnium membrorum termini analogi $a^{\lambda+\mu}$; $a^{2\lambda+\mu}$; $a^{3\lambda+\mu}$ etc. idem habebunt residuum.

Coroll.

Coroll. 1.

29. Quodsi ergo tantum terminorum in primo membro contentorum residua fuerint cognita, tum omnium quoque terminorum, qui reliqua membra constituunt, residua erunt cognita.

Coroll. 2.

30. Si enim proponatur terminus a^x, cuius exponens x sit numerus quantumuis magnus, eius residuum facile reperietur. Iste enim exponens x ad hanc formam $n\lambda + \mu$ reduci potest, vt sit $\mu < \lambda$, atque residuum termini a^x idem erit, quod termini a^μ.

Coroll. 3.

31. Hic autem numerus μ minor quam λ inuenitur, si numerus x per λ diuidatur, tum enim residuum, quod in hac diuisione remanet, erit hic ipse numerus μ, qui quaeritur.

Coroll. 4.

32. Semper autem datur potestas a^λ, quae per p diuisa vnitatem relinquit, cuius exponens λ minor sit quam numerus propositus p, sicque ad residua omnium terminorum progressionis geometricae inuenienda, non opus est operationem vltra terminum a^p continuare.

Coroll. 5.

32. Si autem potestas a^λ sit minima earum, quae per numerum p diuisae vnitatem relinquunt; tunc

quia singuli termini minores quam a^{λ} diuersa praebent residua, in residuis omnibus, neque plures, neque pauciores diuersi numeri occurrent quam λ. Igitur si λ sit minus quam $p-1$, non omnes numeri in residuis occurrent: sed quidam numeri plane nunquam in diuisione terminorum progressionis geometricae $1, a, a^2, a^3$ etc. remanere poterunt.

Coroll. 6.

34. Si igitur diuersitas residuorum spectetur, fieri potest, vt ex omnibus potestatibus ipsius a vnicum tantum residuum, vel duo tantum residua diuersa, vel tria etc. prodeant, plura tamen nunquam quam $p-1$ locum habere possunt. Quotquot autem prodierint residua, inter ea semper vnitas reperitur.

Theorema 9.

35. Si p sit numerus primus, et a primus ad p, atque omnes numeri ipso p minores reperiantur inter residua, quae ex diuisione omnium potestatum ipsius a per numerum primum p oriuntur, tum a^{p-1} erit minima potestas, quae per p diuisa vnitatem relinquit.

Demonstratio.

Sit a^{λ} minima potestas, quae per p diuisa relinquat vnitatem, atque ex praecedentibus patet, esse $\lambda < p$ (15). Iam cum numerus omnium residuorum diuersorum sit $=\lambda$, et omnium numerorum ipso p minorum $=p-1$, patet, si esset $\lambda < p-1$, non omnes nume-

numeros minores quam p in residuis occurrere; non igitur erit $\lambda < p-1$, neque vero est $\lambda > p-1$, quia alioquin non foret $\lambda < p$. Vnde relinquitur esse $\lambda = p-1$. Quocirca si omnes numeri ipso p minores in residuis occurrant, potestas a^{p-1} erit minima, quae per p diuisa vnitatem relinquit.

Scholion.

36. Natura huius theorematis postulat, vt p sit numerus primus; nisi enim esset talis, fieri non posset, vt omnes numeri ipso p minores in residuis occurrerent. Quod quo clarius perspiciatur, perpendendum est, si p est numerus compositus, ad quem tamen a sit primus, nullam partem aliquotam ipsius p in residuis locum habere: nam si potestas quaepiam a^{μ} daret residuum r, quod esset pars aliquota ipsius p, ob $a^{\mu} = mp + r$, etiam ipsa potestas a^{μ} diuisorem haberet r, ideoque nec ea, neque radix a esset numerus ad p primus, quod hypothesi aduersatur.

Theorema 10.

37. Si numerus diuersorum residuorum, quae ex diuisione potestatum $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5$, etc. per numerum primum p nascuntur, minor sit quam $p-1$, tum ad minimum totidem erunt numeri, qui non sunt residua, quot sunt residua.

Demonstratio.

Sit a^{λ} potestas minima, quae per p diuisa vnitatem relinquat, ac sit $\lambda < p-1$, erit numerus omnium resi-

residuorum diuersorum $=\lambda$, ideoque minor quam $p-1$. Cum ergo numerus omnium numerorum ipso p minorum, sit $=p-1$, patet dari numeros in casu proposito, qui in residuis non locum obtineant. Dico autem huiusmodi numerorum numerum ad minimum esse $=\lambda$. Quod vt ostendatur, exponamus residua per ipsos terminos, ex quibus oriuntur, eruntque

haec residua $1, a, a^2, a^3, a^4 \ldots\ldots a^{\lambda-1}$

quorum numerus $=\lambda$, atque haec residua, si ad formam consuetam reducantur, omnia erunt minora quam p et inter se diuersa. Cum igitur sit $\lambda < p-1$ per hypothesin, dabitur certe numerus, qui in his residuis non reperitur. Sit talis numerus k; iam dico si k non sit residuum, neque ak, neque a^2k, neque a^3k, etc. neque $a^{\lambda-1}k$ in residuis occurrere. Fac enim $a^\mu k$ esse residuum ex potestate a^α oriundum, foret $a^\alpha = np + a^\mu k$, seu $a^\alpha - a^\mu k = np$, ideoque $a^\alpha - a^\mu k = a^\mu(a^{\alpha-\mu} - k)$ per p diuisibile. At a^μ per p non est diuisibile, esset ergo $a^{\alpha-\mu}-k$ per p diuisibile, seu potestas $a^{\alpha-\mu}$ per p diuisa, residuum relinqueret k, quod hypothesi repugnat. Ex quo patet, omnes hos numeros: k; ak; a^2k; a^3k; etc. $\ldots\ldots a^{\lambda-1}k$, seu numeros inde deriuatos, non esse residua. At hi numeri, quorum multitudo $=\lambda$, omnes sunt diuersi inter se; si enim duo, veluti $a^\mu k$ et $a^\nu k$, conuenirent, ad idemque residuum r reducerentur, foret $a^\mu k = mp + r$ et $a^\nu k = np + r$, ideoque $a^\mu k - a^\nu k = (m-n)p$, seu $(a^\mu - a^\nu)k = (m-n)p$ esset per p diuisibile. Neque vero k per p est diuisibile, siquidem ponimus p numerum primum et $k < p$; esset $a^\mu - a^\nu$ per p diuisibilis, seu $a^{\mu-\nu}$ per p diuisum, vnitatem relinqueret, cum tamen

ob

ob $\mu < \lambda - 1$ et $\nu < \lambda - 1$, esset $\mu - \nu < \lambda$, quod esset absurdum. Ergo omnes illi numeri k, ak, a^2k, a^3k .... $a^{\lambda-1}k$, si reducantur, erunt inter se diuersi, eorumque multitudo est $= \lambda$. Ad minimum ergo dantur λ numeri, qui in residuis locum non inueniunt, siquidem sit $\lambda < p - 1$.

Coroll. 1.

38. Cum igitur habeantur λ diuersi numeri, qui sunt residua, totidemque diuersi numeri, qui non sunt residua, omnesque sint minores quam p, illorum iunctim sumtorum numerus 2λ maior esse nequit, quam $p-1$: quia non plures dantur numeri ipso p minores, quam $p-1$.

Coroll. 2.

39. Si ergo a^λ sit minima potestas, quae per numerum primum p diuisa relinquit vnitatem, fueritque $\lambda < p - 1$, tum certum est, non esse $\lambda > \frac{p-1}{2}$: erit ergo vel $\lambda = \frac{p-1}{2}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{2}$.

Coroll. 3.

40. Ante vidimus exponentem istius potestatis minimae λ esse necessario minorem quam p; Erit ergo vel $\lambda = p - 1$, vel $\lambda < p - 1$; hocque casu si $\lambda < p - 1$, simul nouimus, iam esse vel $\lambda = \frac{p-1}{2}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{2}$. Atque adeo intra limites $p-1$ et $\frac{p-1}{2}$ nullus continetur numerus, qui vnquam esse possit valor ipsius λ.

Theorema 2.

41 Si p ſit numerus primus, atque a^λ minima poteſtas ipſius a, quae per p diuiſa vnitatem relinquit, fueritque $\lambda < \frac{p-1}{2}$; tum fieri nequit, vt iſte exponens λ ſit maior quam $\frac{p-1}{3}$: eritque ergo vel $\lambda = \frac{p-1}{3}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{3}$.

Demonſtratio.

Cum a^λ ſit minima poteſtas, quae per numerum primum p diuiſa, vnitatem relinquit, plures in reſiduis non occurrunt numeri diuerſi, quam λ, qui relinquuntur ex his terminis

$$1;\ a;\ a^2;\ a^3;\ a^4;\ \ldots\ldots\ a^{\lambda-1}$$

ſi ſinguli per p diuidantur; quare cum ſit $\lambda < p-1$ habebuntur $p-1-\lambda$ numeri, qui non ſunt reſidua, quorum ſi vnus aliquis ſit $=r$, vidimus hos omnes numeros

$$r;\ ar;\ a^2r;\ a^3r;\ a^4r\ \ldots\ldots\ a^{\lambda-1}r$$

ſiquidem diuidendo per p ad numeros ipſo p minores reducantur, in reſiduis non contineri. Hinc autem tantum λ numeri ex reſiduis excluduntur; quare cum ſit $\lambda < \frac{p-1}{2}$, erit $\lambda < p-1-\lambda$, ideoque praeter hos numeros alii inſuper dantur, qui in reſiduis non continentur. Sit s huiusmodi numerus, qui neque ſit reſiduum, neque in praecedente ſerie non-reſiduorum contineatur; atque etiam hi omnes numeri

$$s;\ as;\ a^2s;\ a^3s;\ a^4s;\ \ldots\ldots\ a^{\lambda-1}s$$

non erunt reſidua: hique numeri, vti in praecedente demonſtratione oſtendimus, omnes inter ſe erunt diverſi.

versi. Neque vero vllus etiam horum numerorum, veluti $a^\mu s$, iam in praecedente serie non-residuorum continetur, seu non est $a^\mu s = a^\nu s$. Nam si esset $a^\nu r = a^\mu s$, foret $s = a^{\nu-\mu} r$, vel $s = a^{\lambda+\nu-\mu} r$, siquidem esset $\mu > \nu$, vnde s iam in priori serie contineretur contra hypothesin. Quocirca si $\lambda < \frac{p-1}{2}$, dantur ad minimum adhuc λ numeri, qui non sunt residua, sique cum λ habeamus residua, et 2λ non-residua, hique numeri omnes sint ipso p minores, fieri nequit, vt sit eorum summa 3λ maior quam $p-1$, seu non erit $\lambda > \frac{p-1}{3}$. Erit ergo vel $\lambda = \frac{p-1}{3}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{3}$; siquidem sit $\lambda < \frac{p-1}{2}$: et p numerus primus.

Coroll. 1.

42. Si ergo non sit $\lambda < \frac{p-1}{3}$, tum certe erit $\lambda = \frac{p-1}{3}$, siquidem sit $\lambda < \frac{p-1}{2}$. At remota hac conditione, si nouerimus, non esse $\lambda < \frac{p-1}{3}$, tum necessario sequitur, esse vel $\lambda = \frac{p-1}{3}$, vel $\lambda = \frac{p-1}{2}$, vel $\lambda = p-1$.

Coroll. 2.

43. Siue autem sit $\lambda = \frac{p-1}{3}$, siue $\lambda = \frac{p-1}{2}$, potestas a^{p-1} per p diuisa, relinquit vnitatem. Si enim a^λ vnitatem relinquat, etiam $a^{2\lambda}$ et $a^{3\lambda}$ vnitatem pro residuo dabunt.

Theorema 12.

44. Si a^λ sit minima potestas ipsius a, quae per numerum primum p diuisa vnitatem relinquit, fueritque

$\lambda < \frac{p-1}{4}$, tum certe non erit $a > \frac{p-1}{4}$, eritque ergo vel $\lambda = \frac{p-1}{4}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{4}$.

Demonſtratio.

Quia numerus omnium reſiduorum diuerſorum, quae ex diuiſione omnium poteſtatum ipſius a per numerum primum p proueniunt, eſt $=\lambda$, atque ex his terminis naſcuntur: 1; a; a^2; a^3; a^4 . . . . $a^{\lambda-1}$; ob $\lambda < \frac{p-1}{4}$ habebuntur ſtatim bis tot numeri, qui non ſunt reſidua, qui ex his duabus progreſſionibus oriuntur

$$r;\ ar;\ a^2r;\ a^3r;\ a^4r\ .\ .\ .\ .\ .\ a^{\lambda-1}r$$

$$\text{et}\quad s;\ as;\ a^2s;\ a^3s;\ a^4s\ .\ .\ .\ .\ .\ a^{\lambda-1}s$$

horum numerorum, tam reſiduorum, quam non-reſiduorum numerus, eſt $=3\lambda$, ideoque minor quam $p-1$, ſupererunt ergo adhuc numeri, qui non erunt reſidua. Sit t talis numerus, atque vt ante oſtendimus, etiam hi omnes numeri

$$t;\ at;\ a^2t;\ a^3t;\ a^4t\ .\ .\ .\ .\ .\ a^{\lambda-1}t$$

non erunt reſidua, quorum numerus eſt $=\lambda$. At hi numeri non ſolum inter ſe erunt diuerſi, cum p ſit numerus primus, ſed etiam a praecedentibus diſcrepant, ſicque omnium horum numerorum, ſiue reſiduorum, ſiue non-reſiduorum multitudo eſt $=4\lambda$, et cum ſinguli hi numeri ſint minores quam p; impoſſibile eſt, vt ſit $4\lambda > p-1$; eritque ergo vel $\lambda = \frac{p-1}{4}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{4}$: ſiquidem ſit, vt aſſumſimus, $\lambda < \frac{p-1}{4}$ et p numerus primus.

Coroll.

Coroll. 1.

45. Simili modo demonſtrabitur, ſi ſit $\lambda < \frac{p-1}{4}$, tum impoſſibile eſſe, vt ſit $\lambda > \frac{p-1}{5}$, foreque idcirco vel $\lambda = \frac{p-1}{5}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{6}$.

Coroll. 2.

46. In genere etiam ſi conſtet eſſe $\lambda < \frac{p-1}{n}$, eodem modo demonſtrabitur, fieri non poſſe, vt eſſet $\lambda > \frac{p-1}{n+1}$, eritque propterea vel $\lambda = \frac{p-1}{n+1}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{n+1}$.

Coroll. 3.

47. Hinc patet omnium numerorum, qui reſidua eſſe nequeant, numerum eſſe vel $=0$, vel $=\lambda$, vel $=2\lambda$, vel alii cuicunque multiplo ipſius λ: ſi enim plures fuerint iſtiusmodi numeri quam $n\lambda$, tum ob vnicum ſtatim λ noui inſuper accedunt, vt eorum omnium numerus fiat $=(n+1)\lambda$; at ſi hic nondum omnes numeri non-reſidua contineantur, denuo ſubito λ noui accedent.

Theorema 13.

48. Si p ſit numerus primus, et a^λ minima poteſtas ipſius a, quae per p diuiſa vnitatem relinquit, erit exponens λ diuiſor numeri $p-1$.

Demonſtratio.

Numerus ergo omnium reſiduorum diuerſorum eſt $=\lambda$, vnde numerus reliquorum numerorum ipſo p

 mino-

minorum, qui residua esse nequeunt, erit $= p - 1 - \lambda$, at hic numerus (47) est multiplum ipsius λ, puta $n\lambda$, ita vt sit $p - 1 - \lambda = n\lambda$, vnde fit $\lambda = \frac{p-1}{n+1}$. Perspicuum ergo est, exponentem λ esse diuisorem numeri $p - 1$, vnde si non sit $\lambda = p - 1$, certe parti cuidam aliquotae numeri $p - 1$ exponens λ aequalis erit.

Theorema 14.

49. Si p sit numerus primus, et a primus ad p, tum potestas a^{p-1} per p diuisa vnitatem relinquet.

Demonstratio.

Sit a^λ minima potestas ipsius a, quae per p diuisa vnitatem relinquit, erit, vt vidimus, $\lambda < p$, atque insuper demonstrauimus, esse vel $\lambda = p - 1$, vel λ esse partem aliquotam numeri $p - 1$. Priori casu constat propositum, atque potestas a^{p-1} per p diuisa vnitatem relinquet. Posteriori casu, quo λ est pars aliquota numeri $p - 1$, erit $p - 1 = n\lambda$, at cum potestas a^λ per p diuisa vnitatem relinquat, etiam omnes hae potestates $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$, $a^{4\lambda}$ etc. ideoque et $a^{n\lambda}$, seu a^{p-1}, per p diuisae vnitatem relinquent. Semper ergo potestas a^{p-1} per p diuisa vnitatem relinquit.

Coroll. 1.

50. Quia potestas a^{p-1} per numerum primum p diuisa vnitatem relinquit, formula $a^{p-1} - 1$ per numerum primum p erit diuisibilis, siquidem a sit numerus ad p primus, seu si a non sit diuisibilis per p.

Coroll.

Coroll. 2.

51. Si ergo p ſit numerus primus, omnes poteſtates exponentis $p-1$, veluti n^{p-1} per p diuiſae, vel vnitatem relinquent, vel nihil. Illud ſcilicet eueniet, ſi n ſit numerus ad p primus, hoc vero ſi ipſe numerus n per p fuerit diuiſibilis.

Coroll. 3.

52. Si p ſit numerus primus, atque numeri a et b primi ad p, erit differentia poteſtatum $a^{p-1}-b^{p-1}$ per numerum p diuiſibilis. Cum enim tam $a^{p-1}-1$, quam $b^{p-1}-1$, per p ſit diuiſibilis, etiam differentia harum formularum, id eſt $a^{p-1}-b^{p-1}$, per p erit diviſibilis.

Scholion.

53. En ergo nouam demonſtrationem theorematis eximii, a Fermatio quondam prolati, quae maxime diſcrepat ab ea, quam in Comment. Acad. Petropol. Tomo VIII. dedi. Ibi enim euolutionem binomii $(a+b)^n$ in ſeriem modo *Newtoniano* in ſubſidium vocaui, quae conſideratio a propoſito non mediocriter abhorrere videtur; hic vero idem theorema ex ſolis poteſtatum proprietatibus demonſtraui, vnde haec demonſtratio magis naturalis videtur, cum praeterea nobis alias inſignes proprietates circa reſidua poteſtatum, quando per numeros primos diuiduntur, manifeſtet. Patet etiam, ſi p ſit numerus primus, non ſolum formulam $a^{p-1}-1$ per p eſſe diuiſibilem, ſed etiam interdum fieri poſſe, vt etiam forma ſimplicior $a^{\lambda}-1$ per

per p sit diuisibilis, tumque exponentem λ esse partem aliquotam exponentis $p-1$.

Theorema 15.

54. Si q sit numerus primus, atque potestas a^q per numerum primum p diuisa vnitatem relinquat, tum a^q erit minima potestas ipsius a, quae per p diuisa vnitatem relinquit, nisi forte ipse numerus a per p diuisus vnitatem relinquat.

Demonstratio.

Sit enim a^λ minima potestas ipsius a, quae per numerum primum p diuisa vnitatem relinquat, atque nullae aliae potestates hac proprietate erunt praeditae, nisi $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$, $a^{4\lambda}$, etc. Verum nulli harum potestas a^q potest esse aequalis, nisi sit $\lambda = 1$, cum q sit numerus primus, ideoque necesse est, vt sit $q = \lambda$, ideoque a^q minima potestas, quae per p diuisa vnitatem relinquit. Excipitur autem casus, quo $\lambda = 1$, seu quo ipse numerus a per p diuisus vnitatem relinquit: hoc enim casu omnis potestas a^n, siue eius exponens n sit numerus primus, siue compositus, in diuisione per p facienda vnitatem relinquet.

Coroll. 1.

55. Si ergo potestas a^q, cuius exponens est numerus primus, per numerum primum p diuisa vnitatem relinquat, tum q erit pars aliquota numeri $p-1$, hocque casu formula a^q-1 per numerum primum p erit diuisibilis.

Coroll.

Coroll. 2.

56. Cum q sit pars aliquota numeri $p-1$, erit $p-1=nq$, et $p=nq+1$. Quodsi ergo formula a^q-1, in qua q est numerus primus, diuisibilis sit per quempiam numerum primum p, habebit hic diuisor semper huiusmodi formam $p=nq+1$, nisi sit $p=a-1$: nam $a-1$ semper est diuisor formulae a^q-1.

Coroll. 3.

57. Formula ergo a^q-1, existente q numero primo, praeter diuisorem $a-1$ alios diuisores primos non admittit, nisi qui in hac forma $nq+1$ contineantur; et cum q sit numerus primus, ideoque impar, nisi sit $q=2$, pro n nonnisi numeri pares capi possunt, eruntque ergo omnes diuisores, si quos habet, in forma $2nq+1$ contenti.

Coroll. 4.

58. Quia igitur formulae a^q-1 diuisor est

$$a^{q-1}+a^{q-2}+a^{q-3}+a^{q-4}+\ldots\ldots+a^2+a+1$$

haec forma in $2nq+1$ continebitur, eritque ergo haec expressio: $a^{q-1}+a^{q-2}+a^{q-3}+\ldots+a^2+a$ per numerum primum q diuisibilis, quicunque numerus sit a, at si $a=q$, vel $a=mq$, hoc est manifestum per se.

Scholion 1

59. Hoc etiam manifestum est, si a non sit vel q vel mq; tum enim formula inuenta abit in

$$a(a^{q-2}+a^{q-3}+a^{q-4}\ldots\ldots+a+1)$$

cuius factor posterior, qui transit in $\frac{a^{q-1}-1}{a-1}$, per q est diuisibilis: quod quidem per se est euidens; nam cum q sit numerus primus, per eum formula $a^{q-1}-1$ est diuisibilis; eademque etiam per $a-1$ diuisa, manebit per q diuisibilis, nisi $a-1$ diuisorem habeat q, qui casus iam ante est exceptus. Notandum enim est, formam $a^{q-1}+a^{q-2}+a^{q-3} \ldots\ldots + a^2+a+1$ eatenus tantum in forma $2nq+1$ contineri, quatenus illa est vel numerus primus, vel ex numeris primis eiusdem formae $2nq+1$ compositus. At si illa formula ipsa iam habeat factorem $a-1$, per quem forma a^q-1 est diuisibilis, tum ea cum forma $2nq+1$ non conueniet. Sed si $a-1=mq$, vel $a=mq+1$, tum ipsa illa formula per q erit diuisibilis, quia terminorum numerus $=q$, neque ergo illa in forma $2nq+1$ continebitur.

Scholion 2.

60. Plurimum autem interest, nosse diuisores formulae a^q-1, quando q est numerus primus, quoniam ii alias, excepto diuisore $a-1$, qui sponte se prodit, difficillime inuestigantur, fierique adeo potest, vt saepe huiusmodi formula, postquam est per $a-1$ diuisa, fiat numerus primus. At si q non est numerus primus, sed ipse diuisores habeat m, n, tum manifesto erunt hae formulae a^m-1 et a^n-1 diuisores formulae a^q-1. His ergo casibus inuestigatio vlteriorum diuisorum reducitur ad formulas a^m-1 et a^n-1, in quibus exponentes m et n sunt numeri primi. Nouimus igitur, si quis tentando

tando voluerit, diuisores formulae a^q-1 inuestigare, tentamen cum nullis aliis numeris primis, nisi qui in forma $2nq+1$ contineantur, instituendum esse, quo ipso operatio alias difficillima, non mediocriter contrahitur.

Theorema 16.

61. Si potestas a^m, per numerum p diuisa, residuum relinquat $=r$, tum etiam potestas $(a\pm\alpha p)^m$, per p diuisa, idem relinquet residuum r.

Demonstratio.

Si potestas $(a\pm\alpha p)^m$ euoluatur, prodibit

$$a^m \pm m\alpha a^{m-1}p + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\alpha^2 a^{m-2}p^2 \pm \text{etc.}$$

cuius omnes termini, praeter primum, per p sunt diuisibiles: vnde haec quantitas per p diuisa idem relinquet residuum, ac si solus primus terminus a^m per p diuideretur. Ergo cum potestas a^m residuum relinquat $=r$, etiam potestas $(a\pm\alpha p)^m$ residuum relinquet $=r$.

Coroll. 1.

62. Si m sit numerus par, demonstratio etiam valet pro formula $(-a+\alpha p)^m$, hoc ergo casu etiam formula $(\alpha p-a)^m$, per p diuisa, idem relinquit residuum r, quod formula a^m relinquit.

Coroll. 2.

63. At si m sit numerus impar, quia formula $-a^m$ per p diuisa residuum relinquit $=-r$, etiam formula $(\alpha p-a)^m$ residuum relinquet $=-r$.

Theorema 17.

64. Si fuerit $a = c^n \pm \alpha p$, tum formula $a^{\frac{p-1}{n}}$, per numerum primum p diuisa, vnitatem relinquet, siquidem sit n diuisor numeri $p-1$.

Demonstratio.

Cum sit $a = c^n \pm \alpha p$, potestas $a^{\frac{p-1}{n}}$, seu $(c^n \pm \alpha p)^{\frac{p-1}{n}}$ per p diuisa, idem relinquit residuum, ac potestas $c^{n \cdot \frac{p-1}{n}}$ seu c^{p-1}, at ob p numerum primum, potestas c^{p-1} per p diuisa vnitatem relinquit, ergo etiam potestas $a^{\frac{p-1}{n}}$ vnitatem relinquet, siquidem sit $a = c^n \pm \alpha p$, neque tamen a vel c diuisibile fuerit per p.

Coroll. 1.

65. Ex hoc ergo theoremate cognoscuntur casus, quibus potestates numerorum, quarum exponentes sunt minores quam $p-1$, si per numerum primum p diuidantur, vnitatem relinquunt.

Coroll. 2.

66. Si ergo sit $a = cc \pm \alpha p$, existente p numero primo, tum potestas $a^{\frac{p-1}{2}}$ per p diuisa vnitatem relinquet, seu formula $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ per p erit diuisibilis. Cum autem p sit numerus primus, nisi sit $= 2$, semper exponens $\frac{p-1}{2}$ erit numerus integer.

Coroll. 3.

67. Si sit $a = c^3 \pm \alpha p$, tum potestas $a^{\frac{p-1}{3}}$ per p diuisa vnitatem relinquet, seu haec forma $a^{\frac{p-1}{3}} - 1$ per

per p erit diuisibilis. Hic casus locum habet, si numerus primus p ita sit comparatus, vt $p-1$ per 3 sit diuisibile.

Theorema 18.

68. Si sit $ab^n = c^n \pm ap$, et p numerus primus, tum potestas $a^{\frac{p-1}{n}}$ per p diuisa vnitatem relinquet, siquidem $\frac{p-1}{n}$ fuerit numerus integer.

Demonstratio.

Potestas $(c^n \pm ap)^{\frac{p-1}{n}}$, seu $a^{\frac{p-1}{n}} b^{p-1}$, per p diuisa idem relinquit residuum, quod potestas $c^{n.\frac{p-1}{n}} = c^{p-1}$, at haec potestas vnitatem relinquit, ergo et potestas $a^{\frac{p-1}{n}} b^{p-1}$. Huius autem factor b^{p-1} pariter vnitatem relinquit; ergo necesse est, alterum quoque factorem $a^{\frac{p-1}{n}}$, si per p diuidatur, vnitatem relinquere, nisi sit b vel c diuisibile per p.

Coroll. 1.

69. *Si ergo sit* $ab^n = c^n \pm ap$, seu $ab^n - c^n$, siue $c^n - ab^n$, per numerum primum p diuisibile, tum haec quoque formula $a^{\frac{p-1}{n}} - 1$ per p erit diuisibilis.

Coroll. 2.

70. Cum p sit numerus primus, ponatur $p = mn + 1$, atque si fuerit haec formula $ab^n - c^n$, seu $c^n - ab^n$, per p diuisibilis, tum etiam haec formula $a^m - 1$ per numerum primum p erit diuisibilis.

Coroll. 3.

71. Dummodo ergo pro b et c eiusmodi numeri dentur, vt $ab^n - c^n$, seu $c^n - ab^n$ diuisionem per numerum primum $p = mn + 1$ admittat, tum certum est, hanc formulam $a^m - 1$ per eundem numerum primum $p = mn + 1$ esse diuisibilem.

Theorema 19.

72. Si formula $a^m - 1$ fuerit diuisibilis per numerum primum $p = mn + 1$, tum semper dantur numeri x et y eiusmodi, vt $ax^n - y^n$ sit per eundem numerum primum p diuisibilis.

Demonstratio.

Cum enim x^{mn} et y^{mn} per p diuisae vnitatem relinquant, formula $a^m x^{mn} - y^{mn}$ semper erit per p diuisibilis, dummodo neque x, neque y, per p sit diuisibile. Cum iam per factores sit $a^m x^{mn} - y^{mn} = (ax^n - y^n)$ $(a^{m-1} x^{mn-n} + a^{m-2} x^{mn-2n} y^n + a^{m-3} x^{mn-3n} y^{2n} + \ldots + y^{mn-n})$ si quis neget factorem primum $ax^n - y^n$ vnquam esse per p diuisibilem, is affirmare cogitur, alterum factorem semper esse per p diuisibilem, dummodo pro x et y non capiantur numeri per p diuisibiles. Retineat x valorem quemcunque, at pro y ponamus successiue numeros 1, 2, 3, 4, vsque ad $p - 1 = mn$, ne vnquam obtineat valorem per p diuisibilem, sitque breuitatis gratia

A = a

$$A = a^{m-1}x^{mn-n} + a^{m-2}x^{mn-2n} + \quad\quad + 1$$
$$B = a^{m-1}x^{mn-n} + a^{m-2}x^{mn-2n}2^{n} + \;.\;.\;.\;.\; + 2^{mn-n}$$
$$C = a^{m-1}x^{mn-n} + a^{m-2}x^{mn-2n}3^{n} + \;.\;.\;.\;.\; + 3^{mn-n}$$
$$\vdots$$
$$N = a^{m-1}x^{mn-n} + a^{m-2}x^{mn-2n}(mn)^{n} + \;.\;.\;.\; + (mn)^{mn-n}$$

ac forent omnes hae quantitates A, B, C, ... N, quae progressionem algebraicam ordinis $mn-n$ constituunt, per p diuisibiles, hincque etiam earum differentiae primae, secundae, tertiae et ordinis cuiusuis. At huius seriei differentia ordinis $mn-n$, quae tantum per terminos $mn-n+1$ seriei definitur, neque adeo terminum $(mn+1)^{mn-n}$, seu p^{mn-n} inuoluit, quia p non potest esse valor ipsius y, est vti constat:

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (mn-n)$$

quae aperte non est per numerum primum $p = mn+1$ diuisibilis, quia nullos alios habet diuisores primos, nisi qui sint minores quam $mn-n$. Cum igitur haec differentia ordinis $mn-n$ non sit diuisibilis per p, sequitur non omnes terminos seriei A, B, C, D, ... N esse per p diuisibiles. Illo igitur casu, vel illis casibus ipsius y, quibus termini huius seriei non sunt per p divisibiles, necessario alter factor $ax^{n}-y^{n}$ per p erit divisibilis.

Corol-

Corollarium 1.

73. Quicunque ergo numerus pro x sumatur, modo per p non diuisibilis, pro y semper datur valor $< p$, qui reddit formulam $ax^n - y^n$ per p diuisibilem. Similique modo, si pro y numerus pro lubitu assumatur, demonstrari potest, semper pro x eiusmodi numerum $< p$ inueniri posse, quo eadem formula per p diuisibilis euadat.

Coroll. 2.

74. Si ergo $a^m - 1$ fuerit diuisibile per numerum primum $mn + 1 = p$, atque pro x capiatur numerus quicunque b per p non diuisibilis, semper inueniri potest numerus y, vt haec forma $ab^n - y^n$, seu $y^n - ab^n$, fiat per $p = mn + 1$ diuisibilis.

Coroll. 3.

75. Simili modo si forma $a^m - 1$ fuerit diuisibilis per numerum primum $p = mn + 1$, atque pro y capiatur numerus quicunque c per p non diuisibilis, semper inueniri poterit numerus x, vt haec forma $ax^n - c^n$, seu $c^n - ax^n$, fiat per $p = mn + 1$ diuisibilis.

Theorema 20.

76. Si haec forma $ab^n - c^n$, vel $c^n - ab^n$, fuerit diuisibilis per numerum primum $p = mn + 1$, tum sumto numero d pro lubitu, dummodo per p non sit diui-

diuiſibilis, ſemper inueniri poteſt numerus x, vt vel haec forma $ax^n - d^n$, vel haec $ad^n - x^n$, vel $d^n - ax^n$, vel $x^n - ad^n$ fiat per eundem numerum primum $p = mn + 1$ diuiſibilis.

Demonſtratio.

Cum haec forma $ab^n - c^n$, vel $c^n - ab^n$ ſit per numerum primum $p = mn + 1$ diuiſibilis, tum etiam hic numerus $a^m - 1$ per eundem numerum primum $p = mn + 1$ erit diuiſibilis. (71) Verum ſi $a^m - 1$ per p eſt diuiſibilis, ſumto numero quocunque d per p non diuiſibili, dabitur numerus x, vt vel haec forma $ax^n - d^n$, vel etiam haec $ad^n - x^n$, vel $d^n - ax^n$, vel $x^n - ad^n$ fiat quoque per numerum primum $p = mn + 1$ diuiſibilis.

Corollarium.

77. Poſito ergo $d = 1$, ſi formulae $ab^n - c^n$ diuiſor ſit numerus primus $p = mn + 1$, tum dabitur numerus x, vt vel haec forma $ax^n - 1$, vel $a - x^n$, vel $x^n - a$ fiat per eundem numerum primum p diuiſibilis.

Scholion.

78. Theorema vndeuiceſimum, quod inuerſum eſt theorematis duodeuiceſimi, iam alibi propoſueram, ſed ſine demonſtratione, et tametſi tum eius demonſtrationem multis modis tentaui, eam tamen inuenire non potui, donec in methodum hic vſitatam incidi:

 quae

quae igitur eo magis notatu digna videtur, cum dubium sit nullum, quin eadem ad multa alia numerorum arcana viam sit patefactura. Haec quoque methodus, quae in consideratione differentiarum continetur, nuper mihi insigni vsui fuit, dum eius beneficio tandem pulcherrimi theorematis Fermatiani, quo omnis numerus primus formae $4n+1$ aggregatum duorum quadratorum esse affirmatur, demonstrationem sum consecutus; ad quam ante nullo alio modo peruenire potui.

SPECI-

SPECIMEN NOVAE METHODI CVRVARVM QVADRATVRAS ET RECTIFICATIONES ALIASQVE QVANTITATES TRANSCENDENTES INTER SE COMPARANDI.

Auctore

L. EVLERO.

Quae nuper occasione inuentorum Ill. Comitis Fagnani commentatus sum de comparatione arcuum ellipsis hyperbolae et curuae lemniscatae, multo latius mihi quidem patere statim sunt visa. Cum enim methodis adhuc consuetis eiusmodi tantum curuarum arcus inter se comparari possent, quarum rectificatio vel a quadratura circuli, vel a logarithmis penderet, quippe quae quantitates, etsi sunt transcendentes, tamen ita iam in Analysi prae ceteris ius quoddam ciuitatis sunt adeptae, vt perinde atque algebraicae tractari queant: maxima certe attentione erat dignum, quod a Fagnano in hyperbola et ellipsi arcus sint assignati, quorum differentia sit algebraica; in lemniscata autem eiusmodi arcus, qui adeo inter se sint aequales, vel certam teneant rationem, propterea quod harum curuarum rectificatio neque ad quadraturam circuli, neque ad logarithmos reduci queat. Hinc certe Theoriae quantitatum

 transcen-

9

25

transſcendentium insigne lumen accenderetur, si modo via, qua *Fagnanus* eſt vſus, certam methodum ſuppeditaret in huiusmodi inueſtigationibus vlterius progrediendi; ſed quia tota ſubſtitutionibus precario factis et quaſi caſu fortuito adhibitis nititur, parum inde vtilitatis in Analyſin redundat. Deinde iam notaui integrationes, quas operatio Fagnaniana complectitur, tantum eſſe particulares, neque idcirco methodum certam, a qua plura expectari liceat, ſuppeditare. Interim tamen ea ampliſſimum campum aperuiſſe eſt viſa, in quo vlterius excolendo Geometrae vires ſuas ſummo cum fructu exerceant, ad inſigne Analyſeos incrementum.

Res autem huc redit, vt propoſitis duabus formulis integralibus $\int X dx$ et $\int Y dy$, non integrabilibus, vbi X ſit functio quaepiam ipſius x, et Y ipſius y, eiusmodi relatio inter variabiles x et y definiatur, vt illae formulae vel inter ſe fiant aequales, vel datam rationem teneant, vel vt differentiam algebraice aſſignabilem obtineant. Quae inueſtigatio cum latiſſime pateat, tum etiam inſignes in ſe continet caſus iam pridem non ſine maximo Analyſeos incremento euolutos; huc enim referenda ſunt, quae de comparatione arcuum circularium, de lunulis quadrabilibus, de zonis cycloidalibus quadrabilibus; tum vero arcubus parabolicis, qui vel datam inter ſe teneant rationem vel differentiam algebraicam habeant, a geometris ſunt tradita: quin etiam haec inueſtigatio a Cel. *Ioh. Bernoulli* ad parabolas cubicales altiorisque ordinis eſt extenſa, ſed quia ratio, qua vſus eſt, nulla certa methodo nitebatur, vlteriori vſu fere penitus caruit. Huc quoque pertinet, quod

quod multo ante iam acutissimus Hugenius in Horologio oscillatorio exposuerat, vbi proposito sphaeroide elliptico compresso, seu reuolutione circa axem minorem genito, inuenire docuit conoides hyperbolicum, ita vt summa vtriusque superficiei circulo exhiberi posset; cum tamen neutra superficies seorsim cum circulo comparari queat. Quae inuentio iam tum summis geometris maxime memorabilis visa est; atque *Bernoullius* in litteris ad *Leibnizium* datis dolet, hanc inuentionem nulla certa methodo inniti, ex qua plura huius generis inuenta deriuare liceat; interim quia superficies tam illius sphaeroidis elliptici, quam conoidis hyperbolici a logarithmis pendet, reductio vtriusque iunctim sumtae ad circulum, simili modo perfici potest, quo in parabola arcus algebraicam habentes differentiam assignari solent. Inprimis autem hoc loco non est praetereundum, *Tschirnhausium* quondam methodum a se inuentam iactasse, cuius beneficio curuarum quarumcunque non rectificabilium arcus ita inter se comparare posset, vt differentia fiat algebraica, sed praeter quam quod methodum suam nunquam aperuerit, manifestum est, eum paralogismo quodam fuisse deceptum, vt saepius alias, cum certum sit, rem ita generaliter omnino expediri non posse: neque ergo *Tschirnhausius* putandus est quicquam eorum habuisse, quae vel tum circa comparationem curuarum sunt inuenta, vel adhuc forte elicientur.

Specimen igitur quoddam methodi huiusmodi quaestiones soluendi hic exhibere constitui, quod non obscure maiores progressus in hac re promittere videtur;

tur; atque cum non solum difficillimum sit, propositis in genere eiusmodi formulis integralibus, quaesitam inter variabiles relationem eruere, sed etiam hoc saepissime omnino ne fieri quidem possit; ordine inuerso rem ita tentaui, vt assumta binarum variabilium relatione, inde ipsas formulas integrales inuestigarem, quae per hanc relationem inter se comparari possent. Quae methodus, cum facillime procedat, ad multo sublimiora perducere posse videtur, quae aliis methodis plane sint imperuia: hac enim methodo non solum ea, quae habet Fagnanus, facili negotio, ac sine taedioso calculo, sum assecutus, sed etiam multo ampliora atque illustriora reddidi, vt quae ille nimis particulariter definiuerat, ego satis vniuersaliter expediuerim: atque calculus, quo sum vsus, ita comparatus est, vt, quoniam operationes prorsus singulares complectitur, viam ad multo sublimiora sternere videatur.

Tum vero quanquam variabilium mutua relatio per methodos consuetas definiri potest, quoties integratio vtriusque formulae $\int X dx$ et $\int Y dy$, vel a quadratura circuli, vel a logarithmis pendet; tamen et hoc plerumque non sine molesto calculo perficitur, dum partes, vel arcus circulares, vel logarithmos, continentes, se mutuo destruere debent: quemadmodum hoc in comparatione arcuum parabolicorum abunde perspicitur. Per meam autem methodum hae difficultates cunctae penitus euanescunt, ac fere sine vllo negotio istae comparationes, tam in circulo, quam in parabola, absoluuntur: in quo sine dubio non exigua vis huius methodi sita esse censenda est, quod non solum multo facilius ea, quae

quae aliis methodis iam sunt eruta, praebeat; sed etiam ad eiusmodi inuestigationes manuducat, in quibus aliae methodi nihil essent praestiturae. Quam ob rem hoc quidem loco istam methodum tantum ad eos casus applicabo, qui etiam aliis methodis, sed multo operosius, expediri solent, quo cum principia, quibus innititur, hac occasione exposuero, deinceps facilius eius applicationem ad quaestiones sublimiores suscipere possim. Quoniam igitur mihi a relatione inter binas variabiles, quam pro lubitu constituo, ordiendum est, a simplicioribus incipiam, ac primo quidem ab eiusmodi, quae ad similes formulas integrales perducant, seu in quibus X et Y similes sint proditurae functiones ipsarum x et y. Formulae ergo integrales hinc natae ob similitudinem quantitates transcendentes exhibebunt, ad eandem lineam curuam pertinentes, deinceps autem ad formulas quoque dissimiles, quae ad diuersas curuas pertineant, sum progressurus.

RELATIO PRIMA
inter binas variabiles x et y.

$$0 = \alpha + \gamma(xx + yy) + 2\delta xy.$$

1. Si hinc seorsim valores x et y extrahantur, reperietur:

$$y = \frac{-\delta x \pm \sqrt{((\delta\delta - \gamma\gamma)xx - \alpha\gamma)}}{\gamma}$$

$$x = \frac{-\delta y \pm \sqrt{(\delta\delta - \gamma\gamma)yy - \alpha\gamma)}}{\gamma}$$

vbi quouis casu dispiciendum est, vtrum signum quantitati radicali sit praefigendum? Fieri enim potest, vt in vtraque formula, vel signa paria, vel disparia locum habeant,

beant, dum alterutrum arbitrio nostro plane relinquitur: in quo iudicio inprimis natura variabilium x et y, vtrum affirmatiue, an negatiue accipiantur, spectari debet.

2. Ponantur breuitatis gratia membra irrationalia:

$$\pm\surd((\delta\delta-\gamma\gamma)xx-\alpha\gamma)=P, \text{ et } \pm\surd((\delta\delta-\gamma\gamma)yy-\alpha\gamma)=Q$$

vt sit:

$$y=\frac{-\delta x+P}{\gamma}, \text{ et } x=\frac{-\delta y+Q}{\gamma}$$

sicque erit:

$$P=\gamma y+\delta x, \text{ et } Q=\gamma x+\delta y$$

vnde quouis casu facile colligere licet, vtrum quantitates P et Q habiturae sint valores affirmatiuos, an negatiuos.

3. Differentietur iam aequatio assumta, eritque:

$$dx(\gamma x+\delta y)+dy(\gamma y+\delta x)=0$$

atque ob $\gamma x+\delta y=Q$, et $\gamma y+\delta x=P$, habebitur haec aequatio:

$$Q\,dx+P\,dy=0, \text{ siue } \frac{dx}{P}+\frac{dy}{Q}=0.$$

Restitutis ergo pro P et Q valoribus, huic aequationi integrali:

$$\int\frac{dx}{\surd((\delta\delta-\gamma\gamma)xx-\alpha\gamma)}+\int\frac{dy}{\surd((\delta\delta-\gamma\gamma)yy-\alpha\gamma)}=\text{Const.}$$

satisfacit relatio inter variabiles x et y assumta.

4. Euoluamus haec accuratius, et quo facilius applicatio fieri queat, ponamus:

$$-\alpha\gamma=Ap \quad \text{et} \quad \delta\delta-\gamma\gamma=Cp$$

vt sit:

$$\int\frac{dx}{\surd(A+Cxx)}+\int\frac{dy}{\surd(A+Cyy)}=\text{Const.}$$

eritque

eritque $\alpha = -\frac{Ap}{\gamma}$ et $\delta = \sqrt{(Cp + \gamma\gamma)}$;
sicque quantitates p et γ arbitrio nostro relinquuntur.

5. Statuatur ergo $\gamma = A$, et $p = Akk$, ita vt k sit noua quantitas constans, a nostro arbitrio pendens; eritque

$$\alpha = -Akk,\ \gamma = A,\ \text{et}\ \delta = \sqrt{A(A + Ckk)}$$

et aequatio canonica, nostrae aequationi integrali satisfaciens, erit:

$$0 = -Akk + A(xx + yy) + 2xy\sqrt{A(A + Ckk)}$$

seu $y = \frac{-x\sqrt{(A + Ckk)} + k\sqrt{(A + Cxx)}}{\sqrt{A}}$

et $x = \frac{-y\sqrt{(A + Ckk)} + k\sqrt{(A + Cyy)}}{\sqrt{A}}$.

6. Si $\sqrt{(A + Cyy)}$ negatiue capiatur, itemque $\sqrt{A}$, tum huius aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cxx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + Cyy)}}$$

integralis erit:

$$0 = -Akk + A(xx + yy) - 2xy\sqrt{A(A + Ckk)},$$

ideoque

vel $y = \frac{x\sqrt{(A + Ckk)} - k\sqrt{(A + Cxx)}}{\sqrt{A}}$

vel $x = \frac{y\sqrt{(A + Ckk)} + k\sqrt{(A + Cyy)}}{\sqrt{A}}$.

7. Quia ergo aequatio integralis constantem in se complectitur k, quae in differentiali non inest, indicio hoc est, integralem esse completam; sicque differentiali nulla alia satisfacit integralis, nisi quae in forma inuenta comprehendatur. Atque haec est integratio principalis, ad quam relatio inter x et y assumta perducit.

8. Hinc autem deriuari possunt innumerabiles aliae integrationes. Si enim sint X et Y eiusmodi functiones ipsarum x et y, vt vi relationis assumtae sit $X=Y$, eadem relatio satisfaciet quoque huic aequationi differentiali:

$$\frac{X\,dx}{\surd(A+Cxx)}=\frac{Y\,dy}{\surd(A+Cyy)}.$$

Infinitis autem modis huiusmodi functiones aequales exhiberi possunt ex formulis pro x et y inuentis.

9. Quo autem haec inuestigatio latius pateat, et X et Y sint functiones similes, eas non assumo inter se aequales, eiusmodi autem pro iis valores indago, vt sit:

$$\frac{X\,dx}{\surd(A+Cxx)}-\frac{Y\,dy}{\surd(A+Cyy)}=dV$$

atque quantitas V prodeat algebraica, si scilicet relatio §. 6. tradita locum habeat.

10. Cum igitur sit $\frac{dy}{\surd(A+Cyy)}=\frac{dx}{\surd(A+Cxx)}$, erit

$$\frac{(X-Y)\,dx}{\surd(A+Cxx)}=dV$$

et ob $P=k\surd A(A+Cxx)=\gamma y+\delta x=Ay+x\surd A(A+Ckk)$ sumto per §. 6. $\surd A$ negatiuo, erit $\surd(A+Cxx)=\frac{x}{k}\surd(A+Ckk)-\frac{y}{k}\surd A$, vnde fiet:

$$\frac{(X-Y)k\,dx}{x\surd(A+Ckk)-y\surd A}=dV.$$

11. Cum sit porro ex aequatione differentiata

$$dx(Ax-y\surd A(A+Ckk))=dy(x\surd A(A+Ckk)-Ay)$$

ponatur $xy=u$, erit $dy=\frac{du}{x}-\frac{y\,dx}{x}$, quo valore substituto fiet

$$dx\left(Ax-\frac{Ayy}{x}\right)=\frac{du}{x}(x\surd A(A+Cxx)-Ay)$$

seu

feu $\frac{dx}{x\sqrt{(A+Cxx)}-y\sqrt{A}} = \frac{du}{(xx-yy)\sqrt{A}}$;
ficque erit: $dV = \frac{kdu}{\sqrt{A}} \cdot \frac{X-Y}{xx-yy}$.

12. Quoties ergo $\frac{X-Y}{xx+yy}$ eiusmodi functio ipfius u, quae ducta in du fiat integrabilis, toties valor quantitatis V algebraice exhiberi poterit: hoc autem euenit, quoties X et Y fuerint poteftates parium exponentium ipfarum x et y, propterea cum fit ex aequatione affumta

$$xx+yy = kk + \tfrac{2u}{A}\sqrt{A(A+Ckk)}$$

13. Ponatur ergo $X = x^n$ et $Y = y^n$; erit pofito $n=2$; $\frac{X-Y}{xx-yy} = 1$; et $dV = \frac{kdu}{\sqrt{A}}$
ideoque $V = \frac{ku}{\sqrt{A}} + \text{Conft.} = \frac{kxy}{\sqrt{A}} + \text{Conft.}$
Quam ob rem habebitur:

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt{(A+Cxx)}} - \int \frac{yydy}{\sqrt{(A+Cyy)}} = \text{Conft.} + \frac{kxy}{\sqrt{A}}.$$

14. Sit iam $n=4$; eritque $\frac{X-Y}{xx-yy} = xx+yy$
$= kk + \frac{2u}{A}\sqrt{A(A+Ckk)}$
vnde $dV = \frac{kdu}{A}(kk\sqrt{A} + 2u\sqrt{(A+Ckk)})$
ergo $V = \frac{ku}{A}(kk\sqrt{A} + u\sqrt{(A+Ckk)})$.
Hoc igitur cafu erit:

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(A+Cxx)}} - \int \frac{y^4dy}{\sqrt{(A+Cyy)}} = \text{Conft.} + \frac{kxy}{A}(kk\sqrt{A} + xy\sqrt{(A+Ckk)})$$

fimilique modo vlterius progredi licet.

15. His igitur coniungendis fi fuerit

$$xx+yy = kk + 2xy\sqrt{(1+\tfrac{C}{A}kk)},\ \text{fiue}$$

$$y = \frac{x\sqrt{(A+Ckk)} - k\sqrt{(A+Cxx)}}{\sqrt{A}}$$

$$x = \frac{y\sqrt{(A+Ckk)} + k\sqrt{(A+Cyy)}}{\sqrt{A}}$$

 haec

haec relatio inter x et y satisfaciet huic aequationi integrali:

$$\int \frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A+Cxx)}} - \int \frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}yy+\mathfrak{C}y^4)}{\sqrt{(A+Cyy)}} = \text{Const.}$$
$$+\frac{\mathfrak{B}kxy}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kxy}{\sqrt{A}}(kk+xy\sqrt{(1+\tfrac{C}{A}kk)})$$

seu differentia istarum formularum integralium algebraice assignari potest.

RELATIO SECVNDA
inter binas variabiles x et y
$0=\alpha+2\beta(x+y)+\gamma(xx+yy)+2\delta xy$

16. Quoniam, vti in praecedentibus deprehendimus, ambiguitas signorum radicalium ab arbitrio nostro pendet; dummode eius ratio in conclusionibus finalibus debite habeatur, si ad differentiam binarum formularum integralium peruenire velimus, extrahendo radices, habebimus:

$$y=\frac{-\beta-\delta x-\sqrt{(\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)x+(\delta\delta-\gamma\gamma)xx)}}{\gamma}$$
$$x=\frac{-\beta-\delta y+\sqrt{(\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)y+(\delta\delta-\gamma\gamma)yy)}}{\gamma}$$

17. Statuamus breuitatis gratia has formulas irrationales:

$$\sqrt{(\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)x+(\delta\delta-\gamma\gamma)xx)}=P$$
$$\sqrt{(\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)y+(\delta\delta-\gamma\gamma)yy)}=Q$$

eritque

$$-P=\beta+\gamma y+\delta x \text{ et } Q=\beta+\gamma x+\delta y$$

vnde eliciuntur istae relationes

$$P+Q=(\gamma-\delta)(x-y)$$
$$\gamma P+\delta Q=\beta(\delta-\gamma)+(\delta\delta-\gamma\gamma)y$$
$$\delta P+\gamma Q=\beta(\gamma-\delta)-(\delta\delta-\gamma\gamma)x.$$

18. Ae-

18. Aequatio autem propofita differentiata dat:

$$dx(\beta+\gamma x+\delta y)+dy(\beta+\gamma y+\delta x)=0.$$

fiue $Qdx-Pdy=0$,
vnde oritur:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}\ \text{feu}\ \int\frac{dx}{P}-\int\frac{dy}{Q}=\text{Conft.}$$

cui ergo aequationi integrali fatisfacit relatio propofita, indeque valores pro x et y extracti.

19. Vt hinc fimili modo alias integrationes obtineamus, fint iterum X et Y functiones fimiles ipfarum x et y; ac pofito:

$$\frac{X\,dy}{P}-\frac{Y\,dy}{Q}=dV$$

definiantur hae functiones ita, vt V prodeat quantitas algebraica, ficque habeatur

$$\int\frac{X\,dx}{P}-\int\frac{Y\,dy}{Q}=V+\text{Conft.}$$

20. Cum igitur fit $\frac{dy}{Q}=\frac{dx}{P}$, erit $dV=\frac{(X-Y)dx}{P}$, feu $dV=\frac{-dx(X-Y)}{\beta+\gamma y+\delta x}$. Sit iterum $xy=u$, ideoque $dy=\frac{du}{x}-\frac{y\,dx}{x}$, erit pro aequatione differentiali

$$dx(\beta+\gamma x+\delta y)+\frac{du}{x}(\beta+\gamma y+\delta x)-\frac{y\,dx}{x}(\beta+\gamma y+\delta x)=0$$

feu $dx(\beta x-\beta y+\gamma xx-\gamma yy)+du(\beta+\gamma y+\delta x)=0.$

21. Valore hinc pro dx fubftituto habebitur:

$$dV=\frac{du(X-Y)}{(x-y)(\beta+\gamma(x+y))}$$

Ponatur autem vlterius $x+y=t$; erit $xx+yy=tt-2u$ et quia aequatio affumta in hanc formam abibit:

$$0=\alpha+2\beta t+\gamma tt+2(\delta-\gamma)u$$

ex qua differentiando fit $dt(\beta+\gamma t)=(\gamma-\delta)du$, feu $\frac{du}{\beta+\gamma t}=\frac{dt}{\gamma-\delta}$.

22. Hinc igitur ſimpliciori modo obtinetur

$$dV = \frac{dt(X - Y)}{(\gamma - \delta)(x - y)}$$

vnde patet, ſi X et Y fuerint poteſtates ipſarum x et y, tum fractionem $\frac{X-Y}{x-y}$ per t et u, ideoque et per ſolum t, ob $u = \frac{+\alpha + 2\beta t + \gamma tt}{2(\gamma - \delta)}$, commode exprimi poſſe.

23. Sit ergo $X = x^n$, et $Y = y^n$; ac ponatur primo $n = 1$, erit $\frac{X-Y}{x-y} = 1$, et $dV = \frac{dt}{\gamma - \delta}$; vnde fit $V = \frac{t}{\gamma - \delta}$. Quocirca pro hoc caſu erit

$$\int \frac{x\,dx}{P} - \int \frac{y\,dy}{Q} = \text{Conſt.} + \frac{(x+y)}{\gamma - \delta}.$$

cui ergo aequationi integrali ſatisfit per relationem inter x et y aſſumtam.

24. Sit $n = 2$; eritque $\frac{X-Y}{x-y} = x + y = t$; vnde fit

$$dV = \frac{t\,dt}{\gamma - \delta} \text{ et } V = \frac{tt}{2(\gamma - \delta)} = \frac{(x+y)^2}{2(\gamma - \delta)}$$

Hoc ergo caſu habebitur:

$$\int \frac{xx\,dx}{P} - \int \frac{yy\,dy}{Q} = \text{Conſt.} + \frac{(x+y)^2}{2(\gamma - \delta)}.$$

25. Si vlterius progredi lubeat, ponatur $n = 3$, eritque:

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = xx + xy + yy = tt - u = \frac{(\gamma - 2\delta)tt - 2\beta t - \alpha}{2(\gamma - \delta)}$$

et $V = \frac{\frac{1}{3}(\gamma - 2\delta)t^3 - \beta tt - \alpha t}{2(\gamma - \delta)^2}$; ſicque erit

$$\int \frac{x^3\,dx}{P} - \int \frac{y^3\,dy}{Q} = \text{Conſt.} + \frac{(\gamma - 2\delta)(x+y)^3 - 3\beta(x+y)^2 - 3\alpha(x+y)}{6(\gamma - \delta)^2}$$

26. His igitur formulis coniungendis, ſequenti aequationi integrali

$\int dx$

$$\int \frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}xx+\mathfrak{D}x^3)}{\sqrt{(\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)x+(\delta\delta-\gamma\gamma)xx)}} - \int \frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}y+\mathfrak{C}yy+\mathfrak{D}y^3)}{\sqrt{(\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)y+(\delta\delta-\gamma\gamma)yy)}}$$
$$=\text{Const.}+\frac{\mathfrak{B}(x+y)}{\gamma-\delta}+\frac{\mathfrak{B}(x+y)^2}{2(\gamma-\delta)}+\frac{\mathfrak{D}((\gamma-2\delta)(x+y)^3-3\beta(x+y)^2-3\alpha(x+y))}{6(\gamma-\delta)^2}$$

satisfacit relatio assumta

$$0=\alpha+2\beta(x+y)+\gamma(xx+yy)+2\delta xy$$

indeque valores pro x et y initio eruti.

27. Quo applicatio ad casus particulares facilius fieri possit, ponamus $\beta\beta-\alpha\gamma=Ap$; $\beta(\delta-\gamma)=Bp$; et $\delta\delta-\gamma\gamma=Cp$; vt sit $P=\sqrt{p(A+2Bx+Cxx)}$ et $Q=\sqrt{p(A+2By+Cyy)}$ fiatque:

$$\gamma=A+Bk,\ \text{et}\ \delta=\sqrt{A(A+2Bk+Ckk)}$$

erit $p=\frac{(AC-BB)kk}{C}$, et $\beta=\frac{B}{C}(\delta+\gamma)$ atque $\alpha=\frac{2BB}{CC}(\gamma+\delta)-\frac{(AC-BB)^2kk}{CC(A+Bk)}$.

RELATIO TERTIA

inter binas variabiles x et y

$$0=\alpha+mxx+nyy+2\delta xy$$

28. Extrahendo vtramque radicem habebitur

$$y=\frac{-\delta x+\sqrt{((\delta\delta-mn)xx-\alpha n)}}{n}$$
$$x=\frac{-\delta y-\sqrt{((\delta\delta-mn)yy-\alpha m)}}{m}$$

hinc posito:

$$P=\sqrt{((\delta\delta-mn)xx-\alpha n)}\ \text{et}\ Q=\sqrt{((\delta\delta-mn)yy-\alpha m)}$$

erit $P=\delta x+ny$ et $-Q=\delta y+mx$.

29. Per differentiationem vero obtinemus:

$$dx(mx+\delta y)+dy(ny+\delta x)=0$$

seu $-Qdx+Pdy=0$, ideoque $\frac{dy}{Q}=\frac{dx}{P}$

vnde

vnde aequatio assumta huic aequationi integrali

$$\int\frac{dy}{Q}=\int\frac{dx}{P},$$ satisfacit.

30. Sint iam X et Y functiones ipsarum x et y singulatim, ac ponatur

$$\int\frac{X\,dx}{P}-\int\frac{Y\,dy}{Q}=V$$

ita vt fiat V quantitas algebraica: eritque

$$\frac{(X-Y)\,dx}{P}=dV+\frac{(X-Y)\,dx}{\delta x+ny}.$$

31. Posito $xy=u$, vt sit $dy=\frac{du}{x}-\frac{y\,dx}{x}$, erit:

$$dx(mxx-nyy)+du(ny+\delta x)=0$$

vnde, cum fiat $\frac{dx}{\delta x+ny}=\frac{-du}{mxx-nyy}$, erit

$$dV=\frac{-du(X-Y)}{mxx-nyy},$$

hincque non difficulter casus integrabiles eliciuntur.

32. Sit enim primo $X=mxx$, et $Y=nyy$, erit

$$dV=-du, \text{ et } V=-u=-xy$$

Hinc relatio inter x et y assumta satisfacit huic aequationi integrali:

$$\int\frac{mxx\,dx}{P}-\int\frac{nyy\,dy}{Q}=\text{Const.}-xy.$$

33. Sit secundo $X=mmx^4$, et $Y=nny^4$, erit

$$dV=-du(mxx+nyy)=+du(\alpha+2\delta u)$$

vnde fit $V=u(\alpha+\delta u)=xy(\alpha+\delta xy)$

Ergo huic aequationi integrali

$$\int\frac{mmx^4\,dx}{P}-\int\frac{nny^4\,dy}{Q}=\text{Const.}+xy(\alpha+\delta xy)$$

satisfacit relatio assumta inter x et y.

34. His

34. His igitur colligendis relatio inter x et y assumta satisfaciet huic aequationi integrali:

$$\int \frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}mxx+\mathfrak{C}m^2x^4)}{\sqrt{((\delta\delta-mn)xx-\alpha n)}} - \int \frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}myy+\mathfrak{C}m^2y^4)}{\sqrt{((\delta\delta-mn)yy-\alpha m)}}$$

$$= \text{Const.} - \mathfrak{B}xy + \mathfrak{C}xy(\alpha+\delta xy).$$

35. Ponamus ad faciliorem applicationem:

$$\delta\delta - mn = Cp;\quad \alpha n = -Ap \text{ et } \alpha m = -Bp,$$

vt sit $P = \sqrt{p}(A+Cxx)$, et $Q = \sqrt{p}(B+Cyy)$, erit $\frac{m}{n} = \frac{B}{A}$. Sit ergo $m = B$, et $n = A$, erit $\alpha = -p$, et $\delta = \sqrt{(AB+Cp)}$. Sit ergo $p = Ckk$, vt sit $\alpha = -Ckk$, et aequatio relationem inter x et y definiens erit;

$$0 = -Ckk + Bxx + Ayy + 2xy\sqrt{(AB+CCkk)}$$

36. Quam ob rem valores ipsius x et y hinc erunt:

$$y = \frac{-x\sqrt{(AB+CCkk)}+k\sqrt{C(A+Cxx)}}{A}$$

$$x = \frac{-y\sqrt{(AB+CCkk)}-k\sqrt{C(B+Cyy)}}{B}$$

existente:

$$P = k\sqrt{C}(A+Cxx) \text{ et } Q = k\sqrt{C}(B+Cyy).$$

37. Hi igitur valores conueniunt huic aequationi integrali:

$$\int \frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}Bxx+\mathfrak{C}B^2x^4)}{\sqrt{(A+Cxx)}} - \int \frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}Ayy+\mathfrak{C}A^2y^4)}{\sqrt{(B+Cyy)}}$$

$$= \text{Const.} - \mathfrak{B}kxy\sqrt{C} + \mathfrak{C}kxy(-Ckk+xy\sqrt{(AB+C^2kk)})\sqrt{C}.$$

38. Ponatur $B = \frac{CE}{F}$, quae aequatio latius patere videatur, atque, constantibus mutatis, prodibit ista aequatio integralis:

$$\int \frac{dx(\mathfrak{A}+\frac{C}{A}\mathfrak{B}xx+\frac{CC}{AA}\mathfrak{C}x^4)\sqrt{C}}{\sqrt{(A+Cxx)}} - \int \frac{dy(\mathfrak{A}+\frac{F}{E}\mathfrak{B}yy+\frac{FF}{EE}\mathfrak{C}y^4)\sqrt{F}}{\sqrt{(E+Fyy)}}$$

$$= \text{Const.} - \frac{CF}{AE}\mathfrak{B}kxy - \frac{CCFF}{AAEE}\mathfrak{C}k^3xy + \frac{CCFF}{AAEE}\mathfrak{C}kxxyy\sqrt{(\tfrac{AE}{CF}+kk)}$$

 cui

cui ſatisfaciunt iſti valores:

$$\frac{Ay}{C} = k\sqrt{\left(\frac{A}{C}+xx\right)} - x\sqrt{\left(\frac{AE}{CF}+kk\right)}$$

$$\frac{Ex}{F} = -k\sqrt{\left(\frac{E}{F}+yy\right)} - y\sqrt{\left(\frac{AE}{CF}+kk\right)}$$

qui oriuntur ex hac aequatione:

$$kk = \frac{E}{F}xx + \frac{A}{C}yy + 2xy\sqrt{\left(\frac{AE}{CF}+kk\right)}.$$

39. Hae formulae ratione ſignorum vtcunque transmutari poſſunt. Primo enim in formulis integralibus nihil mutando, tam k, quam $\sqrt{\left(\frac{AE}{CF}+kk\right)}$ pro lubitu vel affirmatiue, vel negatiue, accipi poſſunt, dummodo eadem ſigni ratio vbique obſeruetur. Deinde etiam tam $\sqrt{C}$, quam $\sqrt{F}$, negatiue ſumi poteſt; illo autem caſu quoque $\sqrt{\left(\frac{A}{C}+xx\right)}$, quippe $\frac{\sqrt{(A+Cxx)}}{\sqrt{C}}$, hoc vero $\sqrt{\left(\frac{E}{F}+yy\right)}$ negatiue eſt accipiendum.

40. Denique patet, ſi C ſit quantitas poſitiua, tum quoque F quantitatem poſitiuam eſſe oportere, quia alioquin altera formula integralis fieret imaginaria. Sin autem C ſit quantitas negatiua, tum etiam F talis ſit neceſſe eſt; et quo hoc caſu imaginaria ſe deſtruant, pro kk quantitas negatiua accipienda erit; quo k et k^3 fiant quoque imaginariae.

41. Hoc ergo caſu ſequens habebitur aequatio integralis:

$$\int\frac{dx\left(\mathfrak{A}+\frac{C}{A}\mathfrak{B}xx+\frac{CC}{AA}\mathfrak{C}x^4\right)\sqrt{C}}{\sqrt{(A-Cxx)}} - \int\frac{dy\left(\mathfrak{A}+\frac{F}{E}\mathfrak{B}yy+\frac{FF}{EE}\mathfrak{C}y^4\right)\sqrt{F}}{\sqrt{(E-Fyy)}}$$

$$= \text{Conſt.} + \frac{CF}{AE}\mathfrak{B}kxy + \frac{CCFF}{AAEE}\mathfrak{C}k^3xy + \frac{CCFF}{AAEE}\mathfrak{C}kxxyy\sqrt{\left(\frac{AE}{CF}-kk\right)}$$

cui

cui satisfaciunt isti valores:

$$\frac{Ay}{C} = x\sqrt{\left(\frac{AE}{CF} - kk\right)} - k\sqrt{\left(\frac{A}{C} - xx\right)}$$

$$\frac{Ex}{F} = y\sqrt{\left(\frac{AE}{CF} - kk\right)} + k\sqrt{\left(\frac{E}{F} - yy\right)}$$

ex hac aequatione oriundi:

$$kk = \frac{E}{F}xx + \frac{A}{C}yy - 2xy\sqrt{\left(\frac{AE}{CF} - kk\right)}$$

42. Hae formulae etiam eas, quae ex hypothesi prima sunt erutae, in se complectuntur, ponendo scilicet $E = A$, et $F = C$, quin etiam formulae secundae hypothesis his non latius patent Si enim in relatione secundo loco assumta pro $x + \frac{\beta}{\gamma + \delta}$ et $y + \frac{\beta}{\gamma + \delta}$ scribatur x et y, aequatio omnino primae formae oritur, similique modo si hanc relationem constituere velimus:

$$0 = \alpha + 2bx + 2\beta y + \gamma xx + cyy + 2\delta xy$$

ea facile ad relationem tertiam reduceretur, vnde eius euolutionem praetermitto.

43. Perspicuum nunc est, ex his formulis infinitas comparationes institui posse circa quantitates transcendentes, tam ratione spatiorum, quam arcuum, qui quidem vel a quadratura circuli pendent, vel a logarithmis. Etsi autem hae comparationes etiam vulgari calculo institui possunt, tamen non inutile erit ostendere, quemadmodum eaedem multo facilius ex his formulis deriuari queant; quod eo maius notatu dignum videtur, cum hic neque naturae circuli, neque logarithmorum, ratio peculiaris habeatur. Ex quo facilius intelligetur, quemadmodum haec methodus etiam pari

successu ad eiusmodi formulas integrales se extendat, quae neque ad circuli, neque hyperbolae quadraturam reuocari possunt

I.

De comparatione arcuum circularium.

44. Sit radius circuli, seu sinus totus $=1$, ac posito sinu quocunque $=z$, sit arcus ei respondens $=\Pi.z$, sumto Π pro nota eius functionis, qua pendentia arcus a suo sinu denotatur. Erit ergo, vti constat, $\Pi.z=\int\frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$; atque vt formulas integrales §. 41. erutas huc transferamus, poni oportet: $A=E=C=F=1$; $\mathfrak{A}=1$, $\mathfrak{B}=0$, et $\mathfrak{C}=0$.

45. Ex his autem valoribus emerget haec aequatio integralia complectens:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}-\int\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}=\text{Const.}$$

cui satisfacere inuentae sunt hae formulae:

$$y=x\sqrt{(1-kk)}-k\sqrt{(1-xx)}$$
$$x=y\sqrt{(1-kk)}+k\sqrt{(1-yy)}$$

quae oriuntur ex hac aequatione:

$$kk=xx+yy-2xy\sqrt{(1-kk)}.$$

46. Per has igitur determinationes satisfit huic aequationi:

$$\Pi.x-\Pi.y=\text{Const.}$$

in qua constans ita determinabitur: ponatur $y=0$ eritque $x=k$; ex quo casu prodit $\Pi.k-\Pi.0=\text{Const.}$ seu

seu ob $\Pi . 0 = 0$ erit Const. $= \Pi\, k$, seu arcui cuius sinus $= k$. Hinc generatim habebimus:

$$\Pi . x - \Pi . y = \Pi . k.$$

47. Hinc ergo statim arcuum tam additio, quam subtractio colligitur. Si enim duo habeantur arcus $\Pi . k$ et $\Pi . y$, quarum sinus sint k et y, et summae arcuum sinus ponatur $= x$, vt sit $\Pi\, x = \Pi . k + \Pi\, y$, erit $x = y \sqrt{(1 - kk)} + k \sqrt{(1 - yy)}$. Porro si maioris arcus sinus sit $= x$, minoris $= k$, sinusque differentiae ponatur $= y$, vt sit $\Pi . y = \Pi . x - \Pi . k$, erit:

$$y = x \sqrt{(1 - kk)} - k \sqrt{(1 - xx)};$$

vti ex elementis est manifestum.

48. Perspicuum etiam est, quemadmodum hinc arcuum multiplicationem deduci oporteat. Posito enim $y = k$, vt fit $x = 2 k \sqrt{(1 - kk)}$, erit $\Pi\, x = 2 \Pi\, k$. Ac si valor hic pro x inuentus loco y substituatur, in formula $x = y \sqrt{(1 - kk)} + k \sqrt{(1 - yy)}$, ob $\Pi . y = 2 \Pi . k$, prodibit $\Pi . x = 3 \Pi . k$.

49. In genere autem, si sit y sinus arcus $n k$, seu $\Pi . y = n \Pi . k$, et $\sqrt{(1 - yy)}$ sit cosinus arcus $n k$, vti $\sqrt{(1 - kk)}$ denotat cosinum arcus k, atque ponatur

$$x = y \sqrt{(1 - kk)} + k \sqrt{(1 - yy)} \text{ erit } \Pi . x = (n+1) \Pi . k.$$

Ex sinu ergo cuiusuis multipli arcus k reperietur sinus multipli vnitate altioris.

50. Quo autem haec facilius expediri queant, valorem quoque ipsius cosinus $\sqrt{(1 - xx)}$ nosse conueniet; quem in finem cum ex formula prima sit:

$$k \sqrt{(1 - xx)} = x \sqrt{(1 - kk)} - y$$

substituatur hic valor ipsius x ex altera formula erit $k\sqrt{(1-xx)} = y(1-kk) + k\sqrt{(1-kk)(1-yy)} - y$, ideoque

$$\sqrt{(1-xx)} = \sqrt{(1-kk)(1-yy)} - ky$$

similique modo erit:

$$\sqrt{(1-yy)} = \sqrt{(1-kk)(1-xx)} + kx.$$

51 Inuentis ergo valoribus, tam pro x, quam pro $\sqrt{(1-xx)}$, multiplicetur ille per λ et productum ad hunc addatur, eritque

$$\sqrt{(1-xx)} + \lambda x = \sqrt{(1-kk)(1-yy)} - ky + \lambda y\sqrt{(1-kk)} + \lambda k\sqrt{(1-yy)}$$

seu $\sqrt{(1-xx)} + \lambda x = (\sqrt{(1-kk)} + \lambda k)\sqrt{(1-yy)} + y(\lambda\sqrt{(1-kk)} - k)$

Quo igitur hi factores similes reddantur, necesse est, vt sit $\lambda = \sqrt{-1}$, eritque:

$$\sqrt{(1-xx)} + x\sqrt{-1} = (\sqrt{(1-kk)} + k\sqrt{-1})(\sqrt{(1-yy)} + y\sqrt{-1}).$$

52. Hanc ergo formulam loco superioris adhibendo, statim patet, vt sit $\Pi.x = 2\,\Pi.k$, ob $y = k$, esse oportere

$$\sqrt{(1-xx)} + x\sqrt{-1} = (\sqrt{(1-kk)} + k\sqrt{-1})^2$$

Ac si hic valor pro x inuentus loco y substituatur, vt sit

$\Pi.y = 2\,\Pi.k$, prodibit:

$\sqrt{(1-xx)} + x\sqrt{-1} = (\sqrt{(1-kk)} + k\sqrt{-1})^3$ pro $\Pi.x = 3\,\Pi.k$

vnde in genere colligitur, vt sit $\Pi.x = n\,\Pi.k$, debere esse:

$$\sqrt{(1-xx)} + x\sqrt{-1} = (\sqrt{(1-kk)} + k\sqrt{-1})^n.$$

53. Quia porro $\sqrt{-1}$ ob suam naturam tam negatiue, quam affirmatiue accipere licet, erit quoque pro eadem arcus multiplicatione: $\Pi.x = n\,\Pi.k$

$$\sqrt{(1-xx)} - x\sqrt{-1} = (\sqrt{(1-kk)} - k\sqrt{-1})^n$$

ideo-

ideoque vel

$$\sqrt{(1-xx)} = \frac{(\sqrt{(1-kk)}+k\sqrt{-1})^n+(\sqrt{(1-kk)}-k\sqrt{-1})^n}{2}$$

vel $x = \frac{(\sqrt{(1-kk)}+k\sqrt{-1})^n-(\sqrt{(1-kk)}-k\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$

quae formulae quoque valent pro valoribus fractis exponentis n.

II.
De Comparatione arcuum parabolicorum.

54. Sit AB axis et A vertex parabolae, quem tangat recta indefinita AV, super qua capiantur abscissae; posito ergo parabolae latere recto $= 2$, sit abscissa quaeuis $AP = z$, erit applicata $Pp = \frac{1}{2}zz$, ex quo arcus parabolae huic abscissae respondens erit $Ap = \int dz \sqrt{(1+zz)}$: qui cum sit functio ipsius z, denotetur per $\Pi.z$, ita vt $\Pi.z$ significet arcum parabolae abscissae z conuenientem, seu sit Tab II. Fig. 1.

$$\Pi.z = \int dz \sqrt{(1+zz)}.$$

55 Irrationalitate in denominatorem translata erit: $\Pi.z = \int \frac{dz(1+zz)}{\sqrt{(1+zz)}}$. Ad hanc ergo formam vt formulae integrales §. 38. reuocentur, erit $A = E = 1$; $C = F = 1$, $\mathfrak{A} = 1$ et $\mathfrak{B} = 1$ atque $\mathfrak{C} = 0$. Vnde aequatio illa integralis in hanc abit formam:

$$\int \frac{dx(1+xx)}{\sqrt{(1+xx)}} - \int \frac{dy(1+yy)}{\sqrt{(1+yy)}} = \text{Const.} + kxy$$

cui satisfaciunt hi valores:

$$y = -k\sqrt{(1+xx)} + x\sqrt{(1+kk)} \text{ et } x = k\sqrt{(1+yy)} + y\sqrt{(1+kk)}$$

sumtis tam k quam $\sqrt{(1+kk)}$ negatiuis.

56. Hac

56. Hac igitur inter x et y relatione subsistente pro arcubus parabolae erit:

$$\Pi . x - \Pi . y = \text{Const.} + kxy$$

ad quam constantem determinandam ponatur $y = 0$, et quia tum fit $x = k$, erit $\Pi . k = \text{Const.}$ Quocirca habebitur

$$\Pi . x - \Pi . y = \Pi . k + kxy.$$

57. Vt igitur haec aequatio locum habeat, relatio inter ternas abscissas k, x, et y eiusmodi erit:

$$x = k\sqrt{(1+yy)} + y\sqrt{(1+kk)}, \text{ seu } y = x\sqrt{(1+kk)} - k\sqrt{(1+xx)}$$

vnde praeterea eruuntur istae determinationes:

$$\sqrt{(1+xx)} = \sqrt{(1+kk)(1+yy)} + ky \text{ et } \sqrt{(1+yy)} = \sqrt{(1+kk)(1+xx)} - kx$$

ex quibus porro elicitur:

$$x + \sqrt{(1+xx)} = (k + \sqrt{(1+kk)})(y + \sqrt{(1+yy)}).$$

58. Si manente eadem abscissa k, capiantur aliae duae abscissae q et p, vt sit

$$q = k\sqrt{(1+pp)} + p\sqrt{(1+kk)} \text{ et } p = q\sqrt{(1+kk)} - k\sqrt{(1+qq)}$$

seu $q + \sqrt{(1+qq)} = (k + \sqrt{(1+kk)})(p + \sqrt{(1+pp)})$

erit $\Pi . q - \Pi . p = \Pi . k + kpq$.

Ideoque hanc aequationem ab illa subtrahendo habebitur:

$$(\Pi . x - \Pi . y) - (\Pi\, q - \Pi\, p) = k(xy - pq).$$

59. Pro hoc igitur casu erit

$$\frac{x + \sqrt{(1+xx)}}{y + \sqrt{(1+yy)}} = \frac{q + \sqrt{(1+qq)}}{p + \sqrt{(1+pp)}}$$

vnde relatio inter p, q, x et y siue k obtinetur: Erit autem

$$k = x\sqrt{(1+yy)} - y\sqrt{(1+xx)} = q\sqrt{(1+pp)} - p\sqrt{(1+qq)} \text{ et}$$

$$\sqrt{(1+kk)} = \sqrt{(1+xx)(1+yy)} - xy = \sqrt{(1+pp)(1+qq)} - pq$$

60. Iam

60. Iam ob $\frac{1}{p+\sqrt{(1+pp)}} = \sqrt{(1+pp)}-p$ erit:

$$\sqrt{(1+xx)}+x = (\sqrt{(1+yy)}+y)(\sqrt{(1+qq)}+q)(\sqrt{(1+pp)}-p)$$

vnde reperitur:

$$x = y\sqrt{(1+pp)(1+qq)}+q\sqrt{(1+pp)(1+yy)}-p\sqrt{(1+qq)(1+yy)}-pqy$$

Quare erit:

$$(\Pi.x-\Pi.y)-(\Pi.q-\Pi.p) = (q\sqrt{(1+pp)}-p\sqrt{(1+qq)})(y\sqrt{(1+pp)}-p\sqrt{(1+yy)})(q\sqrt{(1+yy)}+y\sqrt{(1+qq)}).$$

Problema 1.

61. Dato arcu parabolae quocunque Ak, in vertice A terminato, ab alio quocunque puncto p arcum abscindere pq, qui arcum illum Ak superet quantitate algebraice assignabili. Tab. II. Fig. 1.

Solutio.

Posita parabolae parametro $=2$, sit k abscissa arcui Ak conueniens, abscissae autem punctis p et q respondentes sint $AP=y$ et $AQ=x$; eritque arc.$pq = \Pi.x-\Pi.y$ et arc.A$k=\Pi.k$; cum igitur data sit abscissa $AP=y$, si capiatur altera

$$AQ = x = y\sqrt{(1+kk)}+k\sqrt{(1+yy)}$$

erit $\Pi.x-\Pi.y = \Pi.k+kxy$, ideoque

$$\text{Arc.}pq = \text{Arc.A}k+kxy.$$

Superabit ergo arcus pq, qui in dato puncto p terminatur, arcum Ak quantitate algebraice assignabili kxy.

Poterit etiam a puncto p antrorsum abscindi arcus pq', qui pariter arcum Ak quantitate geometrica superet; ad hoc ponatur $AP = x$ et $AQ' = y$, sitque $y = x\sqrt{(1+kk)} - k\sqrt{(1+xx)}$; et cum sit Arc. $pq' = \Pi.x - \Pi.y$, erit:

$$\text{Arc.}\,pq' = \text{Arc.}\,Ak + kxy$$

Vtraque igitur solutio ita coniungetur, vt posita abscissa data $AP = p$; capiendum sit:

$AQ = p\sqrt{(1+kk)} + k\sqrt{(1+pp)}$, et $AQ' = p\sqrt{(1+kk)} - k\sqrt{(1+pp)}$ quo facto erit:

$$\text{Arc.}\,pq = \text{Arc.}\,Ak + kp.AQ$$

$$\text{Arc.}\,pq' = \text{Arc.}\,Ak + kp.AQ'$$

sicque duplici modo problemati est satisfactum.

Coroll. 1.

62. Fieri autem nequit, vt excessus kxy, quo arcus pq arcum Ak superat, euanescat, deberet enim esse vel $x = 0$, vel $y = 0$. At casu $x = 0$ fieret $y = -k$, arcusque in ipso vertice A inciperet in altero ramo ipsi arcui Ak similis capiendus; altero autem casu, quo $y = 0$, fieret $x = k$, et arcus pq in arcum Ak abiret: vnde arcui Ak geometrice in parabola abscindi nequit alius arcus ipsi aequalis, qui ipsi non simul futurus sit similis.

Coroll. 2.

63. Vicissim ergo dato arcu quocunque pq in parabola, semper a vertice arcus abscindi poterit Ak, qui ab illo deficiat quantitate geometrica. Cum enim nunc datae sint abscissae $AP = y$ et $AQ = x$. erit $AK = k = x\sqrt{(1+yy)} - y\sqrt{(1+xx)}$, qua inuenta, erit Arc. pq - Arc. $Ak = kxy$.

Coroll.

Coroll. 3.

64. Quin etiam puncto p pro incognito habito, proposito arcu Ak, alius arcus pq assignari poterit, qui illum superet quantitate data, puta $= C$. Habebimus ergo has duas aequationes:

$$kxy = C \text{ et } xx + yy = kk + 2xy\sqrt{(1+kk)}$$

seu $xx + yy = kk + \frac{2C}{k}\sqrt{(1+kk)}$; ergo

$$x + y = \sqrt{\left(kk + \frac{2C}{k} + \frac{2C}{k}\sqrt{(1+kk)}\right)}$$

$$x - y = \sqrt{\left(kk - \frac{2C}{k} + \frac{2C}{k}\sqrt{(1+kk)}\right)}$$

Seu sint x et y binae radices huius aequationis quadraticae $zz - Pz + Q = 0$; erit $Q = \frac{C}{k}$ et $P = \sqrt{\left(kk + \frac{2C}{k} + \frac{2C}{k}\sqrt{(1+kk)}\right)}$ vnde $z = \frac{1}{2}\sqrt{\left(kk + \frac{2C}{k} + \frac{2C}{k}\sqrt{(1+kk)}\right)} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(kk - \frac{2C}{k} + \frac{2C}{k}\sqrt{(1+kk)}\right)}$.

Coroll. 4.

65. Quantacumque sit haec quantitas C, modo sit affirmatiua, semper prodeunt pro x et y valores reales, iique affirmatiui: At si sit $C = 0$, fiet $x = k$, et $y = 0$. Quin etiam poni potest C negatiuum, quo casu y reperitur quoque negatiuum, et arcus quaesitus vtrinque circa verticem A erit dispositus. Verum si sit $C = -D$, necesse est, vt sit $D < \frac{k^2}{2(1+\sqrt{(1+kk)})}$, seu $D < \frac{1}{2}k(\sqrt{(1+kk)} - 1)$; nam si D esset maius, vtraque abscissa fieret imaginaria.

Coroll. 5.

66. Casu autem $D = -C = \frac{1}{2}k(\sqrt{(1+kk)} - 1)$, erit $zz = \frac{D}{k}$; ideoque $x = +\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{(1+kk)} - 1)}$

et $y = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}(\sqrt{(1+kk)}-1)$; hocque casu orietur arcus vtrinque a vertice aeque extensus, cuius defectus ab arcu Ak est minimus omnium, qui quidem geometrice construi possunt.

Problema 2.

Tab. II. Fig. 2. 67. Dato arcu parabolae quocunque ef, a dato eius puncto quocunque p alium abscindere arcum pq, ita vt arcuum ef et pq differentia geometrice possit assignari.

Solutio.

Posito parabolae latere recto $=2$, tanget recta AV parabolam in vertice A, a quo capiantur abscissae, quae sint:

$$AE = e;\ AF = f;\ AP = p \text{ et } AQ = q$$

quarum tres priores e, f, p, sunt datae, haec vera q ita accipiatur, vt sit per §. 59.

$$\frac{q+\sqrt{(1+qq)}}{p+\sqrt{(1+pp)}} = \frac{f+\sqrt{(1+ff)}}{e+\sqrt{(1+ee)}}$$

Tum vero sit $k = f\sqrt{(1+ee)} - e\sqrt{(1+ff)}$, scribendo e et f pro y et x, eritque $(\Pi.q - \Pi.p) - (\Pi.f - \Pi.e) = k(pq - ef)$.

Ideoque habebitur:

$$\text{Arc}.pq - \text{Arc}.ef = k(pq - ef).$$

Hinc etiam apparet, si punctum q fuerit datum, ex formula tradita simili modo punctum p antrorsum procedendo definiri posse, vt arcuum differentia prodeat geometrice assignabilis.

Coroll.

Coroll. 1.

68. Ex reductione §. 60. facta patet esse

$$pq-eff=(p\sqrt{(1+ee)}-e\sqrt{(1+pp)})(p\sqrt{(1+ff)}+f\sqrt{(1+pp)})$$

sicque, sumta abscissa q, ex aequatione $\frac{q+\sqrt{(1+qq)}}{p+\sqrt{(1+pp)}}=\frac{f+\sqrt{(1+ff)}}{e+\sqrt{(1+ee)}}$ erit:

$$\text{Arc.}pq-\text{Arc.}ef=(f\sqrt{(1+ee)}-e\sqrt{(1+ff)})(p\sqrt{(1+ee)}-e\sqrt{(1+pp)})(p\sqrt{(1+ff)}+f\sqrt{(1+pp)}).$$

Coroll. 2.

69. Si velimus punctum p ita accipere, vt arcuum differentia euanescat, seu fiat Arc. pq = Arc ef, oportet esse

vel $p\sqrt{(1+ee)}-e\sqrt{(1+pp)}=0$, vel $p\sqrt{(1+ff)}+f\sqrt{(1+pp)}=0$

Priori casu fit $p=\pm e$; posteriori $p=\mp f$, vtroque autem casu arcus pq vel cum arcu ef congruit, vel eius fit similis in altero parabolae ramo assumtus; ita vt geometrice duo arcus aequales exhiberi nequeant, quae non simul sibi futuri sint similes.

Coroll. 3.

70. Cum sit $k=f\sqrt{(1+ee)}-e\sqrt{(1+ff)}$, erit $\sqrt{(1+kk)}=\sqrt{(1+ee)(1+ff)}-ef$; hinc $k\sqrt{(1+kk)}$ $=f\sqrt{(1+ff)}+2eef\sqrt{(1+ff)}-2eff\sqrt{(1+ee)}$ $-e\sqrt{(1+ff)}$

siue

$$k\sqrt{(1+kk)}=f\sqrt{(1+ff)}-e\sqrt{(1+ee)}-2ef(f\sqrt{(1+ee)}-e\sqrt{(1+ff)})$$

ideoque $k\sqrt{(1+kk)}=f\sqrt{(1+ff)}-e\sqrt{(1+ee)}-2efk.$

Quo circa habebitur:

$$kef = \tfrac{1}{2}f\sqrt{(1+ff)} - \tfrac{1}{2}e\sqrt{(1+ee)} - \tfrac{1}{2}k\sqrt{(1+kk)}.$$

Coroll. 4.

71. Quia igitur k simili quoque modo pendet a p et q, erit etiam

$$kpq = \tfrac{1}{2}q\sqrt{(1+qq)} - \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} - \tfrac{1}{2}k\sqrt{(1+kk)}.$$

Quare cum arcuum differentia sit $= kpq - kef$; si quatuor parabolae puncta e, f, p, q ita a se inuicem pendent, vt sit:

$$\frac{q+\sqrt{(1+qq)}}{p+\sqrt{(1+pp)}} = \frac{f+\sqrt{(1+ff)}}{e+\sqrt{(1+ee)}}$$

erit

$$\text{Arc.}\,pq - \text{Arc.}\,ef = \tfrac{1}{2}q\sqrt{(1+qq)} - \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} - \tfrac{1}{2}f\sqrt{(1+ff)} + \tfrac{1}{2}e\sqrt{(1+ee)}$$

quae expressio, ob functiones quantitatum p, q, e, f a se inuicem separatas, est notatu digna.

Coroll. 5.

72. Relatio inter e, f, p, q etiam ita exprimi potest, vt sit

$$\sqrt{(1+qq)}+q = (\sqrt{(1+ee)}-e)(\sqrt{(1+ff)}+f)(\sqrt{(1+pp)}+p)$$

tum ob $\frac{1}{\sqrt{(1+qq)}+q} = \sqrt{(1+qq)} - q$ erit:

$$\sqrt{(1+qq)}-q = (\sqrt{(1+ee)}+e)(\sqrt{(1+ff)}-f)(\sqrt{(1+pp)}-p)$$

vnde datis e, f, et p, facile valor tam pro q, quam pro p, eruitur.

Coroll. 6.

73. Ex formula Coroll. 1. data apparet, arcum pq semper maiorem fore arcu ef, si punctum p a vertice

vertice parabolae A magis fuerit remotum, quam punctum e; contra autem arcum pq proditurum esse minorem. Ac si quidem sit $p=0$, erit Arc. $ef-$ Arc. pq $=ef(f\surd(1+ee)-e\surd(1+ff))$; minimus autem omnium arcus pq euadet, si capiatur $p=-\surd\frac{1}{2}(\surd(1+ee)(1+ff)-ef-1)$ et $q=+\surd\frac{1}{2}(\surd(1+ee)(1+ff)-ef-1)$ tumque erit:

$$\text{Arc.}\,ef-\text{Arc}\,pq=\tfrac{1}{2}(e+f)(\surd(1+ff)-\surd(1+ee))$$

Arcusque pq vtrinque aeque circa verticem A erit dispositus.

Problema 3.

74. Dato arcu parabolae ef, a puncto dato p abscindere arcum pz, qui superet datum multiplum arcus ef quantitate geometrice assignabili. Tab. II. Fig. 3.

Solutio.

Posito parabolae latere recto $=2$, sint in verticis tangente abscissae datae $AE=e$, $AF=f$, et $AP=p$; tum capiantur abscissae $AQ=q$; $AR=r$; $AS=s$; $AT=t$; et vltima sit $AZ=z$; quae ita determinentur, vt sit:

Primo $\frac{q+\surd(1+qq)}{p+\surd(1+pp)}=\frac{f+\surd(1+ff)}{e+\surd(1+ee)}$

eritque ex §. 71.

$$\text{Arc}\,pq-\text{Arc.}\,ef=\tfrac{1}{2}q\surd(1+qq)-\tfrac{1}{2}p\surd(1+pp)-\tfrac{1}{2}f\surd(1+ff)$$
$$+\tfrac{1}{2}e\surd(1+ee).$$

Deinde ex puncto q simili modo definiatur punctum r, vt sit:

$$\frac{r+\surd(1+rr)}{q+\surd(1+qq)}=\frac{f+\surd(1+ff)}{e+\surd(1+ee)},\ \text{seu}\ \frac{r+\surd(1+rr)}{p+\surd(1+pp)}=\left(\frac{f+\surd(1+ff)}{e+\surd(1+ee)}\right)^2$$

eritque

eritque

$$\text{Arc.}\,qr - \text{Arc.}\,ef = \tfrac{1}{2}r\sqrt{(1+rr)} - \tfrac{1}{2}q\sqrt{(1+qq)} - \tfrac{1}{2}f\sqrt{(1+ff)} + \tfrac{1}{2}e\sqrt{(1+ee)}$$

qua aequatione ad illam addita prodibit:

$$\text{Arc.}\,pr - 2\,\text{Arc.}\,ef = \tfrac{1}{2}r\sqrt{(1+rr)} - \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} - \tfrac{2}{2}f\sqrt{(1+ff)} + \tfrac{2}{2}e\sqrt{(1+ee)}$$

Tertio ex puncto r capiatur punctum s, vt sit:

$$\frac{s+\sqrt{(1+ss)}}{r+\sqrt{(1+rr)}} = \frac{f+\sqrt{(1+ff)}}{e+\sqrt{(1+ee)}}, \text{ seu } \frac{s+\sqrt{(1+ss)}}{p+\sqrt{(1+pp)}} = \left(\frac{f+\sqrt{(1+ff)}}{e+\sqrt{(1+ee)}}\right)^3$$

eritque:

$$\text{Arc.}\,rs - \text{Arc.}\,ef = \tfrac{1}{2}s\sqrt{(1+ss)} - \tfrac{1}{2}r\sqrt{(1+rr)} - \tfrac{1}{2}f\sqrt{(1+ff)} + \tfrac{1}{2}e\sqrt{(1+ee)}$$

quae ad praecedentem addita praebet:

$$\text{Arc.}\,ps - 3\,\text{Arc.}\,ef = \tfrac{1}{2}s\sqrt{(1+ss)} - \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} - \tfrac{3}{2}f\sqrt{(1+ff)} + \tfrac{3}{2}e\sqrt{(1+ee)}.$$

Atque hoc modo si vlterius progrediamur, sitque z punctum post n huiusmodi operationes inuentum, erit:

$$\frac{z+\sqrt{(1+zz)}}{p+\sqrt{(1+pp)}} = \left(\frac{f+\sqrt{(1+ff)}}{e+\sqrt{(1+ee)}}\right)^n$$

vnde immediate punctum z reperietur, ita vt sit:

$$\text{Arc.}\,pz - n\,\text{Arc.}\,ef = \tfrac{1}{2}z\sqrt{(1+zz)} - \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} - \tfrac{n}{2}f\sqrt{(1+ff)} + \tfrac{n}{2}e\sqrt{(1+ee)}$$

sicque arcus pz est inuentus a dato puncto p abscissus, qui arcum ef vicibus n sumtum superat quantitate geometrica.

Coroll. 1.

75. Quodcunque ergo multiplum arcus ef proponatur, cuius multipli exponens sit numerus n, siue is sit integer, siue fractus, a dato puncto p semper abscindi

ſcindi poterit arcus pz, qui hoc multiplum excedat quantitate geometrice aſſignabili; erit enim:

$$\sqrt{(1+zz)}+z=(\sqrt{(1+pp)}+p)(\sqrt{(1+ff)}+f)^n(\sqrt{(1+ee)}-e)^n \text{ et}$$
$$\sqrt{(1+zz)}-z=(\sqrt{(1+pp)}-p)(\sqrt{(1+ff)}-f)^n(\sqrt{(1+ee)}+e)^n.$$

Coroll. 2.

76. Quodſi ergo ad abbreuiandum ponatur:

$$\sqrt{(1+ee)}+e=E;\quad \sqrt{(1+ff)}+f=F;\quad \sqrt{(1+pp)}+p=P$$

erit $\sqrt{(1+zz)}+z=\frac{PF^n}{E^n}$ et $\sqrt{(1+zz)}-z=\frac{E^n}{PF^n}$

vnde oritur:

$$\sqrt{(1+zz)}=\frac{P^2F^{2n}+E^{2n}}{2PE^nF^n} \text{ et } z=\frac{P^2F^{2n}-E^{2n}}{2PE^nF^n}.$$

Coroll. 3.

77. Hinc ergo fiet $\frac{1}{2}z\sqrt{(1+zz)}=\frac{P^4F^{4n}-E^{4n}}{8P^2E^{2n}F^{2n}}$.

Quia tum ſimili modo eſt

$$\tfrac{1}{2}e\sqrt{(1+ee)}=\frac{E^4-1}{8EE};\quad \tfrac{1}{2}f\sqrt{(1+ff)}=\frac{F^4-1}{8FF}$$
$$\text{et } \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)}=\frac{P^4-1}{8PP}$$

erit:

$$\text{Arc.}\,pz-n\,\text{Arc.}\,ef=\frac{P^4F^{4n}-E^{4n}}{8P^2E^{2n}F^{2n}}-\frac{P^4+1}{8PP}-\frac{n(F^4-1)}{8FF}+\frac{n(E^4-1)}{8EE}.$$

Coroll. 4.

78. Si huius expressionis partes binae in vnam congregentur, reperietur ista differentia geometrica:

$$\text{Arc.}pz-n\text{Arc.}ef=\frac{(F^{2n}-E^{2n})(P^4F^{2n}+E^{2n})}{8P^2E^{2n}F^{2n}}-\frac{n(FF-EE)(EEFF+1)}{8EEFF}.$$

Coroll. 5.

79. Quemadmodum hic ex puncto dato p alterum punctum z determinauimus, ita vicissim, si punctum z pro dato accipiatur, antrorsum progrediendo, simili modo punctum p ex eadem aequatione reperietur, ita vt Arc. pz superet arcum ef, n vicibus sumtum quantitate geometrice assignabili.

Problema 4.

80. Dato in parabola arcu quocunque ef, inuenire alium arcum pz, qui se habeat ad illum in data ratione $n:1$, ita vt sit Arc. $pz=n$Arc. ef.

Solutio.

Retentis iisdem denominationibus, quibus in probl. praecedenti eiusque Coroll. 2. vsi sumus; quoniam fieri debet:

$$\text{Arc.}pz-n\text{Arc.}ef=0$$

quantitas illa algebraica, cui haec arcuum differentia aequalis est inuenta, in nihilum abire debet. Habebimus ergo ex Coroll. 4. hanc aequationem:

$$F^{2n}P^4+E^{2n}=\frac{nE^{2n-2}F^{2n-2}(FF-EE)(EEFF+1)}{F^{2n}-E^{2n}}P^2$$

Pona-

Ponamus breuitatis gratia $\frac{F}{E}=C$, eritque

$$C^{2n}P^4+1=\frac{nC^{2n-2}(CC-1)(CCE^4+1)}{(C^{2n}-1)EE}PP$$

vnde fit:

$$C^nP^2=\frac{nC^{n-2}(CC-1)(CCE^4+1)}{2(C^{2n}-1)EE}-\sqrt{\left(\frac{nnC^{2n-4}(CC-1)^2(CCE^4+1)^2}{4(C^{2n}-1)^2E^4}-1\right)}$$

ideoque

$$P=\sqrt{\left(\frac{n(CC-1)(CCE^4+1)}{2(C^{2n}-1)CCEE}-\sqrt{\left(\frac{nn(CC-1)^2(CCE^4+1)^2}{4(C^{2n}-1)^2C^4E^4}-\frac{1}{C^{2n}}\right)}\right)}$$

siue

$$P=\sqrt{\left(\frac{n(CC-1)(CCE^4+1)}{4(C^{2n}-1)CCEE}+\frac{1}{2C^n}\right)}-\sqrt{\left(\frac{n(CC-1)(CCE^4+1)}{4(C^{2n}-1)CCEE}-\frac{1}{2C^n}\right)}$$

Deinde si pari modo ponatur $\sqrt{(1+zz)}+z=Z$, erit $Z=C^nP$. Ex inuentis autem quantitatibus P et Z ita eliciuntur ipsae abscissae p et z, vt sit:

$$p=\frac{PP-1}{2P} \quad \text{et} \quad z=\frac{ZZ-1}{2Z}$$

Restituto autem pro C valore $\frac{F}{E}$, si ponamus:

$$\sqrt{\left(\frac{n(FF-EE)(EEFF+1)}{4EEFF(F^{2n}-E^{2n})}+\frac{1}{2E^nF^n}\right)}=M$$

$$\sqrt{\left(\frac{n(FF-EE)(EEFF+1)}{4EEFF(F^{2n}-E^{2n})}-\frac{1}{2E^nF^n}\right)}=N$$

reperietur:

$$P=E^n(M-N) \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{P}=F^n(M+N)$$
$$Z=F^n(M-N) \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{Z}=E^n(M+N)$$

vnde concluduntur ipsae abscissae

$$p=-\tfrac{1}{2}M(F^n-E^n)-\tfrac{1}{2}N(F^n+E^n)$$
$$z=+\tfrac{1}{2}M(F^n-E^n)-\tfrac{1}{2}N(F^n+E^n)$$

Cum autem M et N tam affirmatiue, quam negatiue accipere liceat, capiatur N negatiuum, vt punctum z in istum parabolae ramum incidat, in quo est arcus ef, eritque

$$p=\tfrac{1}{2}N(F^n+E^n)-\tfrac{1}{2}M(F^n-E^n)$$

$$z=\tfrac{1}{2}N(F^n+E^n)+\tfrac{1}{2}M(F^n-E^n)$$

Ex quibus formulis si definiantur puncta p et z, erit

$$\text{Arc.}\,pz=n\,\text{Arc.}\,ef.$$

Coroll. 1.

81. Ambae ergo abscissae $AP=p$ et $AZ=z$, ita sunt comparatae, vt sit:

$$z+p=N(F^n+E^n) \text{ et } z-p=M(F^n-E^n).$$

Hinc erit valoribus pro M et N restituendis:

$$pz=\frac{nE^nF^n(F^2-E^2)(EEFF+1)}{4EEFF(F^{2n}-E^{2n})}-\frac{F^{2n}-E^{2n}}{4E^nF^n} \text{ et}$$

$$pp+zz=\frac{n(F^2-E^2)(EEFF+1)(F^{2n}+E^{2n})}{4EEFF(F^{2n}-E^{2n})}-1.$$

Coroll. 2.

82. Si sit $n=1$, erit:

$$M=\sqrt{\left(\frac{EEFF+1}{4EEFF}+\frac{1}{2EF}\right)}=\frac{EF+1}{2EF} \text{ et } N=\frac{EF-1}{2EF}$$

vnde fit:

$$z+p=\tfrac{1}{2}F+\tfrac{1}{2}E-\frac{1}{2E}-\frac{1}{2F} \text{ et } z-p=\tfrac{1}{2}F-\tfrac{1}{2}E+\frac{1}{2E}-\frac{1}{2F}$$

ideoque:

$$2p=E-\tfrac{1}{E}, \text{ seu } p=e \text{ et } 2z=F-\tfrac{1}{F}, \text{ seu } z=f$$

puncta scilicet p et z in puncta e et f incidunt.

Coroll.

Coroll. 3.

83. Si arcus pz debeat esse duplus arcus dati ef, seu $n = 2$, erit:

$$M = \sqrt{\left(\frac{EEFF + 1}{2EEFF(FF + EE)} + \frac{1}{2EEFF}\right)} = \sqrt{\frac{(EE+1)(FF+1)}{2EEFF(EE+FF)}}$$

$$\text{et } N = \sqrt{\left(\frac{EEFF + 1}{2EEFF(FF + EE)} - \frac{1}{2EEFF}\right)} = \sqrt{\frac{(EE-1)(FF-1)}{2EEFF(EE+FF)}}$$

vnde si arcus ef in vertice A terminetur, vt sit $e = 0$, et $E = 1$, erit $M = \frac{1}{F}$, et $N = 0$; sicque prodit $z + p = 0$, et $z - p = \frac{FF - 1}{F} = 2f$; ideoque $p = -f$, et $z = +f$. Hoc ergo casu arcus pz medium in verticem A incidit, et vtrinque arcum ipsi ef, seu Af, aequalem complectitur.

Coroll. 4.

84. Si arcus pz debeat esse triplus arcus ef, seu $n = 3$, erit:

$$M = \sqrt{\left(\frac{3(EEFF + 1)}{4EEFF(F^4 + E^2F^2 + E^4)} + \frac{1}{2E^3F^3}\right)}, \text{ siue}$$

$$M = \sqrt{\left(\frac{3E^3F^3 + 3EF + 2F^4 + 2EEFF + 2E^4}{4E^3F^3(F^4 + EEFF + E^4)}\right)} \text{ et}$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{3E^3F^3 + 3EF - 2F^4 - 2EEFF - 2E^4}{4E^3F^3(F^4 + EEFF + E^4)}\right)}.$$

Coroll. 5.

85. Si hoc casu, quo $n = 3$ arcus ef in vertice A incipiat, erit $e = 0$, et $E = 1$, vnde

$$M = \sqrt{\left(\frac{2F^4 + 3F^3 + 2FF + 3F + 2}{4F^3(F^4 + F^2 + 1)}\right)} \text{ siue}$$

$$M = (F + 1)\sqrt{\frac{2FF - F + 2}{4F^3(F^4 + F^2 + 1)}} \text{ et}$$

$$N = (F - 1)\sqrt{\frac{-2FF - F - 2}{4F^3(F^4 + F^2 + 1)}}$$

qui ergo valor est imaginarius.

Coroll. 6.

86. Vt ergo arcus ef triplum exhiberi possit, is non in vertice A terminari potest, seu E debet esse maius quam 1, atque adeo limes dabitur, infra quem accipi nequeat. Ad quem limitem inueniendum, resolui oportet hanc aequationem

$$3E^3F^3+3EF=2F^4+2EEFF+2E^4.$$

In hunc finem ponatur $EF=S$, et $EE+FF=R$, erit:

$$3S^3+3S=2RR-2SS,\ \text{ideoque}\ R=\sqrt{(\tfrac{3}{2}S^3+SS+\tfrac{3}{2}S)}$$

vnde fit:

$$F+E=\sqrt{(2S+\sqrt{(\tfrac{3}{2}S^3+SS+\tfrac{3}{2}S)})}$$
$$F-E=\sqrt{(-2S+\sqrt{(\tfrac{3}{2}S^3+SS+\tfrac{3}{2}S)})}$$

Et cum sit $E>1$, et $F>1$, debet esse $R>2$, et

$$3S^3+2SS+3S>8;\ \text{ideoque}\ S>1.$$

Coroll. 7.

87. Generatim ergo pro casu $n=3$ oportet sit

$$3S^3+3S>2RR-2SS;\ \text{ideoque}\ R<\sqrt{(\tfrac{3}{2}S^3+SS+\tfrac{3}{2}S)}$$

quare si α sit numerus vnitate minor: reperitur

$$F+E=\sqrt{(2S+\alpha\sqrt{(\tfrac{3}{2}S^3+SS+\tfrac{3}{2}S)})}$$
$$F-E=\sqrt{(-2S+\alpha\sqrt{(\tfrac{3}{2}S^3+SS+\tfrac{3}{2}S)})}$$

Debet ergo esse $\alpha\alpha>\frac{8S}{3SS+2S+3}$ et $S>1$.

Coroll. 8.

88. Ponamus $S=2$; erit $\alpha\alpha>\frac{16}{19}$. Capiatur $\alpha=1$, vt sit $EF=2$, et $EE+FF=\sqrt{19}$; erit

$$F+E=\sqrt{(\sqrt{19}+4)};\quad E=\tfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{19}+4)}-\tfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{19}-4)}$$
$$F-E=\sqrt{(\sqrt{19}-4)};\quad F=\tfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{19}+4)}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{19}-4)}$$

ergo

ergo $e = \frac{1}{8}\sqrt{(\sqrt{19}+4)} - \frac{3}{8}\sqrt{(\sqrt{19}-4)}$

et $f = \frac{1}{8}\sqrt{(\sqrt{19}+4)} + \frac{3}{8}\sqrt{(\sqrt{19}-4)}$

Porro reperitur :

$M = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $N = 0$; vnde

$x = -p = \frac{1}{4\sqrt{2}}(2+\sqrt{19})\sqrt{(\sqrt{19}-4)}$

hic ergo arcus triplus vtrinque circa verticem aequaliter extenditur.

III.

De Comparatione ſuperficierum ſphaeroidis elliptici compreſſi et conoidis hyperbolici.

89. Sit igitur primum propoſitum ſphaeroides ellipticum genitum rotatione ellipſis BMA circa axem minorem AC. Ponatur ſemiaxis minor $CA = a$; et ſemiaxis maior $CB = a\sqrt{m}$, exiſtente m numero vnitate maiori. Sumta iam in axe minore a centro C abſciſſa $CP = x$, erit applicata $PM = \sqrt{m(aa-xx)}$, vnde elementum ellipticum $= dx\sqrt{\frac{aa+(m-1)xx}{aa-xx}}$. Tab. II. Fig. 4.

90. Poſita nunc ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$, erit portio ſuperficiei ſphaeroidicae, a reuolutione arcus AM genita, ſeu quae reſpondet abſciſſae $CP = x$, aequalis huic integrali $2\pi\int dx\sqrt{m(aa+(m-1)xx)}$. Indicetur hoc integrale, quod tanquam functio abſciſſae x ſpectetur, hoc modo

$\int dx\sqrt{m(aa+(m-1)xx)} = \Pi . x.$

91. Portio ergo, ſuperficiei ſphaeroidicae ellipticae abſciſſae $CP = x$ reſpondens, erit $= 2\pi . \Pi . x$: vbi functio

functio Πx, vti perspicuum est, a logarithmis, seu rectificatione parabolae pendet, eritque $\Pi x = 0$, si $x = 0$; sin autem ponatur $x = a$, tum $2\pi . \Pi a$ exhibebit semissem totius superficiei sphaeroidis.

92. Sit porro conoides hyperbolicum genitum reuolutione hyperbolae am circa suum axem cap, cuius centrum sit in c. Ponatur eius semiaxis transuersus $ca = c$, semiaxis autem coniugatus $= c\sqrt{n}$. Sumta ergo in axe a centro c abscissa quacunque $cp = y$, quae quidem sit $> c$, erit applicata $pm = \sqrt{n(yy - cc)}$, et elementum hyperbolicum $= \int dy \sqrt{\frac{(n+1)yy - cc}{yy - cc}}$.

93. Hinc erit portio superficiei conoidis istius hyperbolici, ex arcu am genita, seu abscissae $cp = y$ respondens $= 2\pi \int dy \sqrt{n((n+1)yy - cc)}$. Quod integrale cum spectari possit tanquam functio ipsius y, ita indicetur;

$$\int dy \sqrt{n((n+1)yy - cc)} = \Theta y$$

sitque $\Theta y = 0$, si capiatur $y = c$. Erit ergo superficies conoidis hyperbolici abscissae $cp = y$ respondens $= 2\pi . \Theta y$.

94. Comparentur hae binae formulae cum illis, quae supra §. 38. sunt expositae, et cum sit:

$$\Pi . x = \int \frac{dx(aa + (m-1)xx)\sqrt{m}}{\sqrt{(aa + (m-1)xx)}}$$

erit $A = aa$; $C = m - 1$; $\mathfrak{A}\sqrt{(m-1)} = aa\sqrt{m}$; et

$$\frac{m-1}{aa}\mathfrak{B}\sqrt{(m-1)} = (m-1)\sqrt{m};$$

vnde fit $\mathfrak{A} = \frac{aa\sqrt{m}}{\sqrt{(m-1)}}$ et $\mathfrak{B} = \frac{aa\sqrt{m}}{\sqrt{(m-1)}}$.

95. Deinde pro hyperbola cum sit

$$\Theta . y = \int \frac{dy(-cc + (n+1)yy)\sqrt{n}}{\sqrt{(-cc + (n+1)yy)}}$$

fiat

fiat $E = -cc$, et $F = n+1$; eritque ob $\mathfrak{C} = 0$

$$-\int \frac{dy(\mathfrak{A} + \frac{F}{E}\mathfrak{B}yy)\sqrt{F}}{\sqrt{(E+Fyy)}} = \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{\sqrt{(m-1)}} \int \frac{dy(-1+\frac{(n+1)yy}{cc})}{\sqrt{(-cc+(n+1)yy)}}$$

ergo $-\int \frac{dy(\mathfrak{A} + \frac{F}{E}\mathfrak{B}yy)\sqrt{F}}{\sqrt{(E+Fyy)}} = \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}} \cdot \Theta y$.

96. His ergo substitutionibus factis habebimus hanc aequationem:

$$\Pi x + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}\Theta y = \text{Const.} + \frac{(n+1)\sqrt{m(m-1)}}{cc} kxy$$

cui satisfacit haec relatio inter x et y:

$$\frac{aay}{m-1} = k\sqrt{(\frac{aa}{m-1} + xx)} - x\sqrt{(kk - \frac{aacc}{(m-1)(n+1)})} \text{ seu}$$

$$\frac{ccx}{n+1} = k\sqrt{(-\frac{cc}{n+1} + yy)} + y\sqrt{(kk - \frac{aacc}{(m-1)(n+1)})}$$

vbi $\sqrt{(kk - \frac{aacc}{(m-1)(n+1)})}$ negatiue accipi conueniet.

97. Vel ponatur $k = \frac{ae}{\sqrt{(m-1)}}$, et si fuerit

$$y = \frac{e}{a}\sqrt{(aa+(m-1)xx)} + \frac{x\sqrt{(m-1)}}{a\sqrt{(n+1)}}\sqrt{((n+1)ee-ac)}$$

seu $x = \frac{ae\sqrt{(n+1)}}{cc\sqrt{(m-1)}}\sqrt{((n+1)yy-cc)} - \frac{ay\sqrt{(n+1)}}{cc\sqrt{(m-1)}}\sqrt{((n+1)ee-ca)}$

erit

$$\Pi . x + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}\Theta y = \text{Const.} + \frac{(n+1)ae\sqrt{m}}{cc} xy$$

98. Ad constantem autem definiendam ponatur $x = 0$, vt sit $\Pi . x = 0$, eritque $y = e$, vnde prodit: Const. $= \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}\Theta e$; sicque habebitur:

$$\Pi . x + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}(\Theta y - \Theta e) = \frac{(n+1)ae\sqrt{m}}{cc} xy$$

At si in hyperbola capiatur abscissa $cf = e$, erit superficies conoidis ex arcu em nata $= 2\pi . (\Theta y - \Theta e)$.

99. Quoniam igitur y per x determinatur, erit quoque

$$\sqrt{((n+1(yy-cc)} = \frac{e}{a}x\sqrt{(m-1)(n+1)} + \frac{1}{a}\sqrt{(aa+(m-1)xx)((n+1)ee-cc)}$$

vnde fit:

$$y+\delta\sqrt{((n+1)yy-cc)} = \left(\frac{e}{a}+\frac{\delta}{a}\sqrt{((n+1)ee-cc)}\right)\sqrt{(aa+(m-1)xx)}$$
$$+x\left(\frac{\delta e}{a}\sqrt{(m-1)(n+1)}+\frac{\sqrt{(m-1)}}{a\sqrt{(n+1)}}\sqrt{((n+1)ee-cc)}\right)$$

fit $1:\delta\sqrt{(m-1)(n+1)} = \delta : \frac{\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{(n+1)}}$ erit $\delta = \frac{1}{\sqrt{(n+1)}}$ hincque obtinetur:

$$\sqrt{((n+1)yy-cc)}+y\sqrt{(n+1)} =$$
$$\left(\frac{e\sqrt{(n+1)}}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{((n+1)ee-cc)}\right)\left(\sqrt{(aa+(m-1)xx)}+x\sqrt{(m-1)}\right).$$

100. Datis ergo abſciſſis $CP=x$, et $cf=e$, abſciſſa $cp=y$ ita definiri debet, vt ſit

$$\frac{\sqrt{((n+1)yy-cc)}+y\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{((n+1)ee-cc)}+e\sqrt{(n+1)}} = \sqrt{\left(1+\frac{(m-1)xx}{aa}\right)}+\frac{x}{a}\sqrt{(m-1)}$$

Deinde autem eſt

$$exy = \frac{ay\sqrt{((n+1)yy-cc)}}{2\sqrt{(m-1)(n+1)}} - \frac{ae\sqrt{((n+1)ee-cc)}}{2\sqrt{(m-1)(n+1)}} + \frac{ccx\sqrt{(aa+(m-1)xx)}}{2a(n+1)}.$$

Problema Hugenianum.

Dato ſphaeroide elliptico lato ABC, inuenire conoides hyperbolicum apm, ita vt circulus deſcribi poſſit geometrice, cuius area aequalis ſit futura vtrique ſuperficiei ſphaeroidicae et conoidicae iunctim ſumtae.

Solutio prima.

101. Manentibus pro vtroque corpore denominationibus, modo expoſitis, ſtatuatur $\frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}=1$, ſeu

seu $cc = \frac{aa\sqrt{m}(n+1)}{\sqrt{n}(m-1)}$, vnde semiaxis transuersus hyperbolae c determinatur, numero n seu eius specie arbitrio nostro relicta: eritque stabilita superiori relatione inter x et y

$$\Pi . x + (\Theta y - \Theta e) = \frac{(n+1)ae\sqrt{m}}{cc} xy = \frac{exy\sqrt{n(m-1)(n+1)}}{a}.$$

102 Cum nunc sit superficies sphaeroidis ex arcu BM nata, seu Sup. BM $= 2\pi . \Pi x$; et superficies conoidis ex arcu em nata, seu Sup. $em = 2\pi(\Theta y - \Theta e)$; erit

$$\text{Sup. BM} + \text{Sup. } em = \frac{2\pi exy\sqrt{n(m-1)(n+1)}}{a}$$

Vnde si hae duae superficies iunctim sumtae aequentur circulo, cuius radius $= r$, ob eius aream $= \pi rr$ erit

$$rr = \frac{2exy\sqrt{n(m-1)(n+1)}}{a}.$$

103. Hic iam continetur solutio problematis sensu multo latiori accepti. Casu enim Hugeniano, quo integrum sphaeroides assumitur, seu, quod eodem redit, eius semissis, erit $x = a$; tum vero punctum e in vertice a capi oportet, vnde fit $e = c$. Erit ergo hoc casu:

$$y = c\sqrt{m} + \frac{c\sqrt{n(m-1)}}{\sqrt{(n+1)}} = cp,$$

fietque:

$$\text{Sup. BA} + \text{Sup.} am = 2\pi(n+1)aa\left(m + \frac{\sqrt{mn(m-1)}}{\sqrt{(n+1)}}\right).$$

104 Radio ergo circuli vtrique superficiei simul aequalis posito $= r$ erit, $rr = 2aa(m(n+1) + \sqrt{mn(m-1)(n+1)})$

siue $r = a\sqrt{2}(\sqrt{m(n+1)} + \sqrt{n(m-1)})\sqrt{m(n+1)}$

 Atque

Atque erit $cp = y = \frac{c}{\sqrt{(n+1)}}(\sqrt{m(n+1)} + \sqrt{n(m-1)})$ tum vero accipi debet $c = a\sqrt{\frac{m(n+1)}{n(m-1)}}$.
Quae eſt ſolutio ſimpliciſſima Problematis Hugeniani.

Solutio ſecunda.

105. Cum relatio inter x et y ſit ita comparata, vt ſit

$$\frac{\sqrt{((n+1)yy-cc)}+y\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{((n+1)ee-cc)}+e\sqrt{(n+1)}} = \sqrt{(1+\frac{(m-1)xx}{aa})} + \frac{x}{a}\sqrt{(m-1)}$$

ſitque $\Pi.x + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}(\Theta y - \Theta e) = \frac{\sqrt{m(n+1)}}{2cc}$.

$$\left(\frac{aay\sqrt{((n+1)yy-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} - \frac{aae\sqrt{((n+1)ee-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} + \frac{ccx\sqrt{(aa+(m-1)xx)}}{\sqrt{(n+1)}}\right)$$

Capiatur in conoide noua abſciſſa $cq = z$, et pro e iam ſumatur y, vt ſit

$$\frac{\sqrt{((n+1)zz-cc)}+z\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{((n+1)yy-cc)}+y\sqrt{(n+1)}} = \sqrt{(1+\frac{(m-1)xx}{aa})} + \frac{x}{a}\sqrt{(m-1)}$$

erit pariter $\Pi.x + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}(\Theta z - \Theta y) = \frac{\sqrt{m(n+1)}}{2cc} \times$

$$\left(\frac{aaz\sqrt{((n+1)zz-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} - \frac{aay\sqrt{((n+1)yy+cc)}}{\sqrt{(m-1)}} + \frac{ccx\sqrt{(aa+(m-1)xx)}}{\sqrt{(n+1)}}\right).$$

106 Addantur hae formulae inuicem, atque y prorſus eliminabitur; fiet enim

$$\frac{\sqrt{((n+1)zz-cc)}+z\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{((n+1)ee-cc)}+e\sqrt{(n+1)}} = \left(\sqrt{(1+\frac{(m-1)xx}{aa})} + \frac{x}{a}\sqrt{(m-1)}\right)^2$$

eritque: $2\Pi.x + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}(\Theta z - \Theta e) = \frac{\sqrt{m(n+1)}}{2cc} \times$

$$\left(\frac{aaz\sqrt{((n+1)zz-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} - \frac{aae\sqrt{(n+1)ee-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} + \frac{2ccx\sqrt{(aa+(m-1)xx)}}{\sqrt{(n+1)}}\right).$$

107. Statuatur iam $\frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}} = 2$, ſeu $cc = \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{2\sqrt{n(m-1)}}$ erit per $\frac{2\pi}{2}$ multiplicando

$$\text{Sup. BM} + \text{Sup } en = \frac{\pi\sqrt{m(n+1)}}{2cc} \times$$

$$\left(\frac{aaz\sqrt{((n+1)zz-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} - \frac{aae\sqrt{((n+1)ee-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} + \frac{2ccx\sqrt{(aa+(m-1)xx)}}{\sqrt{(n+1)}}\right)$$

vnde

vnde facile radius circuli aequalis definitur.

108. Sit nunc pro casu Hugeniano $x = a$, et $e = c$. erit:

$$\frac{\sqrt{((n+1)zz - cc)} + z\sqrt{(n+1)}}{c(\sqrt{n} + \sqrt{(n+1)})} = (\sqrt{m} + \sqrt{(m-1)})^2$$

Hincque inuento z, existenteque $cc = \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{2\sqrt{n(m-1)}}$, erit

Sup. BA + Sup. $an = \frac{\pi\sqrt{m(n+1)}}{2cc}\left(\frac{aaz\sqrt{((n+1)zz-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} - \frac{aacc\sqrt{n}}{\sqrt{(m-1)}} + \frac{2aacc\sqrt{m}}{\sqrt{(n+1)}}\right)$.

Solutio Generalis.

109. Si hac ratione continuo vlterius progrediamur, vt supra pro parabola est factum, reperietur, si abscissa $cq = z$ existente, $cf = e$ ita capiatur, vt sit

$$\frac{\sqrt{((n+1)zz - cc)} + z\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{((n+1)ee - cc)} + e\sqrt{(n+1)}} = \left(\sqrt{\left(1 + \frac{(m-1)xx}{aa}\right)} + \frac{x}{a}\sqrt{(m-1)}\right)^{\mu}$$

fore $\mu \Pi x + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}(\Theta z - \Theta e) = \frac{\sqrt{m(n+1)}}{2cc} \times$

$$\left(\frac{aaz\sqrt{((n+1)zz - cc)}}{\sqrt{(m-1)}} - \frac{aae\sqrt{((n+1)ee-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} + \frac{\mu ccx\sqrt{(aa+(m-1)xx)}}{\sqrt{(n+1)}}\right)$$

$$= \frac{\mu}{2\pi}\,\text{Sup. BM} + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{2\pi cc\sqrt{n(m-1)}}\,\text{Sup. } en.$$

110. Pro casu ergo Hugenii, posito $x = a$, et $e = c$, fiat $\frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}} = \mu$; et capiatur abscissa $cq = z$, ita vt sit:

$$\frac{\sqrt{((n+1)zz - cc)} + z\sqrt{(n+1)}}{c(\sqrt{n} + \sqrt{(n+1)})} = (\sqrt{m} + \sqrt{(m-1)})^{\mu}$$

eritque

Sup.BA+Sup.$an = \frac{\pi\sqrt{m(n+1)}}{\mu cc}\left(\frac{aaz\sqrt{((n+1)zz-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} - \frac{aacc\sqrt{n}}{\sqrt{(m-1)}} + \frac{\mu aacc\sqrt{m}}{\sqrt{(n+1)}}\right)$

siue

Sup. BA + Sup. $an = \pi(z\sqrt{n((n+1)zz-cc)} - ncc + \frac{\mu cc\sqrt{mn(m-1)}}{\sqrt{(n+1)}})$

$$= \pi(z\sqrt{n((n+1)zz-cc)} - ncc + maa).$$

 111. Quae-

111. Quaecunque ergo fuerit hyperbola, ex qua conoides nascitur, dummodo sit $\frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}=\mu$ numerus rationalis, ab eo semper portio an abscindi poterit, cuius superficies ad superficiem sphaeroidis BMA addita, per circulum exhiberi potest, cuius radius r geometrice est assignabilis: erit enim

$$r=\sqrt{(maa-ncc+z\sqrt{n}((n+1)zz-cc))}.$$

112. Quo autem facilius pateat, quomodo abscissa $cq=z$ reperiri debeat, cum sit

$$\sqrt{\left(\frac{(n+1)zz}{cc}-1\right)}+\frac{z}{c}\sqrt{(n+1)}=(\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{(m-1)})^{\mu}$$

erit

$$\frac{z}{c}\sqrt{(n+1)}-\sqrt{\left(\frac{(n+1)zz}{cc}-1\right)}=(\sqrt{(n+1)}-\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{(m-1)})^{\mu}$$

hinc facile tam z, quam $\sqrt{((n+1)zz-cc)}$ colligentur.

113. Hinc autem porro concluditur, fore

$$z\sqrt{n}((n+1)zz-cc)=\frac{cc\sqrt{n}}{4\sqrt{(n+1)}}(\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n})^{2}(\sqrt{m}+\sqrt{(m-1)})^{2\mu}$$
$$-\frac{cc\sqrt{n}}{4\sqrt{(n+1)}}(\sqrt{(n+1)}-\sqrt{n})^{2}(\sqrt{m}-\sqrt{(m-1)})^{2\mu}$$

At si ponatur breuitatis gratia $\sqrt{(m}+\sqrt{(m-1)}=\mathrm{M}$, et $\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)}=\mathrm{N}$, erit $z=\frac{c}{2\sqrt{(n+1)}}(\mathrm{M}^{\mu}\mathrm{N}-\mathrm{M}^{-\mu}\mathrm{N}^{-1})$, et

$$r=\sqrt{(maa+\frac{cc\sqrt{n}}{4\sqrt{(n+1)}}(\mathrm{M}^{\mu}-\mathrm{M}^{-\mu})(\mathrm{M}^{\mu}\mathrm{N}^{2}+\mathrm{M}^{-\mu}\mathrm{N}^{-2})}$$

sicque problema non difficulter construitur, dummodo exponens μ fuerit rationalis.

114. Haec igitur exempla sufficiant vsum, nouae methodi, quam adumbraui, ostendisse; etsi enim haec eadem exempla methodo consueta iam sint soluta, tamen non solum ad calculos admodum intricatos deueniri

niri ſolet, ſed etiam integratione, qua formulae differentiales, vel ad quadraturam circuli, vel ad logarithmos reducantur, abſolute eſt opus. Huius igitur nouae methodi inſigne commodum in hoc conſiſtit, quod eius beneficio eadem problemata, tam ſine laborioſo calculo, quam ſine vlla integratione reſolui queant; quam ob cauſam inde merito multo maiora ac ſublimiora expectare licet, quae vim omnium conſuetarum methodorum penitus ſuperent.

DE-

DEMONSTRATIO THEOREMATIS ET SOLVTIO PROBLEMATIS IN ACTIS ERVD. LIPSIENSIBVS PROPOSITORVM.

Auctore

L. EVLERO.

Theorema iſtud et Problema verſantur circa arcus ellipticos; illo ſemiſſis ellipſeos quaeque ita ſecatur, vt partium differentia ſit geometrice aſſignabilis, hoc vero conſtructio geometrica arcus poſtulatur, qui ſit ſemiſſis quadrantis elliptici. Tam demonſtratio Theorematis, quam ſolutio Problematis, ſequuntur ex iis, quae iam aliquoties de comparatione linearum curuarum praelegi; et quoniam methodus, qua hoc argumentum pertractaui, non ſolum noua, ſed etiam plurimum recondita videbatur, has propoſitiones ideo publicare conſtitueram, vt alii quoque vires ſuas in iis euoluendis exercerent, nouisque methodis, quibus forte eo pertingerent, fines Analyſeos amplificarent. Cum autem nemo adhuc ſit inuentus, qui hoc negotium cum ſucceſſu ſuſceperit, etiamſi vix dubitare liceat, quin plures id fruſtra tentauerint, merito mihi quidem inde concludere videor, praeter methodum, qua ego ſum vſus, vix vllam aliam viam ad huiusmodi ſpeculationes patere. Quia enim haec methodus perquam indirecte, et quaſi per ambages procedit, neque veriſimile

mile ſit, eam cuiquam, qui huiusmodi problemata ſit aggreſſurus, vnquam in mentem veniſſ, mirum non eſt, has quaeſtiones ab aliis intactas eſſe relictas. Etſi igitur iam aliquot ſpecimina huius methodi ſingularis ediderim, tamen operae pretium fore arbitror, ſi eius explicationem magis illuſtrauero, atque ad enodationem Problematis ac Theorematis propoſiti, accuratius accommodauero, vt ea, ſaepius tractando, magis trita et familiaris reddatur. Cum enim eius ope ad maxime abſconditas proprietates ellipſis aliarumque curuarum, quaſi inopinato ſim deductus, nullum eſt dubium, quin in ea plurima alia profundiſſimae indaginis contineantur, quae non niſi poſt frequentiorem tractionem inde eruere liceat.

Lemma I.

1. Si binae variabiles x et y ita a ſe inuicem pendeant, vt ſit:

$$0 = \alpha + \beta(xx + yy) + 2\gamma xy + \delta xxyy$$

erit ſiue ſumma, ſiue differentia, harum formularum integralium

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(-\alpha\beta + (\gamma\gamma - \alpha\delta - \beta\beta)yy - \beta\delta y^4)}} \pm \int \frac{dx}{\sqrt{(-\alpha\beta + (\gamma\gamma - \alpha\delta - \beta\beta)xx - \beta\delta x^4)}}$$

aequalis quantitati conſtanti.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $0 = \alpha + \beta(xx + yy) + 2\gamma xy + \delta xxyy$, erit inde vtramque radicem extrahendo:

$$y = \frac{-\gamma x \pm \sqrt{(-\alpha\beta + (\gamma\gamma - \alpha\delta - \beta\beta)xx - \beta\delta x^4)}}{\beta + \delta xx}$$

$$x = \frac{-\gamma y \pm \sqrt{(-\alpha\beta + (\gamma\gamma - \alpha\delta - \beta\beta)yy - \beta\delta y^4)}}{\beta + \delta yy}$$

vnde sequitur fore:

$$\beta y+\gamma x+\delta xxy=\pm\sqrt{}(-\alpha\beta+(\gamma\gamma-\alpha\delta-\beta\beta)xx\ \beta\delta x^4)$$

$$\beta x+\gamma y+\delta xyy=\pm\sqrt{}(-\alpha\beta+(\gamma\gamma-\alpha\delta-\beta\beta)yy-\beta\delta y^4)$$

Quodsi vero aequatio proposita differentietur, orietur:

$$o=\beta x dx+\beta y dy+\gamma y dx+\gamma x dy+\delta xyy dx+\delta xxy dy$$

seu $o=dx(\beta x+\gamma y+\delta xyy)+dy(\beta y+\gamma x+\delta xxy)$

quae abit in hanc:

$$\frac{dy}{\beta x+\gamma y+\delta xyy}+\frac{dx}{\beta y+\gamma x+\delta xxy}=o.$$

Substituantur loco denominatorum formulae illae irrationales, vt prodeant duo membra differentialia, in quibus variabiles x et y sint a se inuicem separatae, ac sumendis integralibus obtinebitur:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{}(-\alpha\beta+(\gamma\gamma-\alpha\delta-\beta\beta)yy-\beta\delta y^4)}\pm\int\frac{dx}{\sqrt{}(-\alpha\beta+(\gamma\gamma-\alpha\delta-\beta\beta)xx-\beta\delta x^4)}=\text{Const.}$$

Coroll. 1.

2. Summa harum formularum integralium erit constans, si in vtraque radicis extractione signis radicalibus paria tribuantur signa; sin autem signa statuantur disparia, tum differentia formularum integralium erit constans.

Coroll. 2.

3. Si ponamus:

$$-\alpha\beta=Ak;\quad \gamma\gamma-\alpha\delta-\beta\beta=Bk;\quad -\beta\delta=Ck,$$

vnde fiet:

$$\alpha=\frac{-Ak}{\beta};\quad \delta=\frac{-Ck}{\beta},\quad \text{et } \gamma=\frac{\sqrt{}(ACkk+Bk\beta\beta+\beta^4)}{\beta}$$

Quare si relatio inter x et y hac aequatione exprimatur:

$$o=-Ak+\beta\beta(xx+yy)+2xy\sqrt{}(ACkk+Bk\beta\beta+\beta^4)-Ckxxyy$$

erit

erit

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(A+Byy+Cy^4)}} \pm \int \frac{dx}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}} = \text{Const.}$$

Coroll. 3.

4. Subſtitutis autem loco α, δ, γ his valoribus, erit

$$y = \frac{-x\sqrt{(ACkk+Bk\beta\beta+\beta^4)} \pm \beta\sqrt{k(A+Bxx+Cx^4)}}{\beta\beta - Ckxx}$$

$$x = \frac{-y\sqrt{(ACkk+Bk\beta\beta+\beta^4)} \pm \beta\sqrt{k(A+Byy+Cy^4)}}{\beta\beta - Ckyy)}$$

qui ergo ſunt valores illi aequationi integrali conuenientes, et quia in his formulis ineſt conſtans arbitraria $\frac{\beta\beta}{k}$, eae integrale completum exhibere ſunt cenſendae.

Coroll. 4.

5. Ad has formulas commodiores reddendas, quia poſito $x = 0$ fit $y = \pm \frac{\sqrt{Ak}}{\beta}$, ponatur $\frac{\sqrt{Ak}}{\beta} = f$; et prodibit:

$$y = \frac{x\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)} + f\sqrt{A(A+Bxx+Cx^4)}}{A - Cffxx}$$

$$x = \frac{y\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)} \pm f\sqrt{A(A+Byy+y^4)}}{A - Cffyy}$$

quae ſunt radices huius aequationis:

$$0 = -Aff + A(xx+yy) - 2xy\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)} - Cffxxyy$$

Coroll. 5.

6. Si ergo relatio inter x et y hac aequatione exprimatur:

$$0 = -Aff + A(xx+yy) \pm 2xy\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)} - Cffxxyy$$

tum erit:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(A+Byy+Cy^4)}} \pm \int \frac{dx}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}} = \text{Const.}$$

ſeu $\frac{dy}{\sqrt{(A+Byy+Cy^4)}} \pm \frac{dx}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}} = 0.$

Coroll. 6.

7. Vicissim ergo si habeatur haec aequatio differentialis:

$$\frac{dy}{\sqrt{(A+Byy+Cy^4)}}+\frac{dx}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}}=0$$

relatio inter x et y ita se habebit, vt sit:

$$y=\frac{-x\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}+f\sqrt{A(A+Bxx+Cx^4)}}{A-Cffxx}$$

seu $x=\frac{-y\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}+f\sqrt{A(A+Byy+Cy^4)}}{A-Cffyy}$.

Coroll. 7.

8. Verum proposita hac aequatione differentiali:

$$\frac{dy}{\sqrt{(A+Byy+Cy^4)}}-\frac{dx}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}}=0$$

aequatio integralis completa erit:

$$y=\frac{x\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}+f\sqrt{A(A+Bxx+Cx^4)}}{A-Cffxx},$$

seu $x=\frac{y\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}-f\sqrt{A(A+Byy+Cy^4)}}{A-Cffyy}$.

Scholion.

9. Retinebo determinationes huius postremi casus, quibus efficitur, quod si relatio inter binas variabiles x et y fuerit

$$0=-Aff+A(xx+yy)-2xy\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}-Cffxxyy,$$

siue $y=\frac{x\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}+f\sqrt{A(A+Bxx+Cx^4)}}{A-Cffxx}$

et $x=\frac{y\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}-f\sqrt{A(A+Byy+Cy^4)}}{A-Cffyy}$

tum hanc aequationem differentialem locum habere:

$$\frac{dy}{\sqrt{(A+Byy+Cy^4)}}-\frac{dx}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}}=0,$$

seu sumtis integralibus fore:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(A+Byy+Cy^4)}}-\int\frac{dx}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}}=\text{Const.}$$

Pro

Pro hoc ergo casu erit:

$$\surd(A+Bxx+Cx^4)=\frac{y(A-Cffxx)-x\surd A(A+Bff+Cf^4)}{f\surd A}$$

et $$\surd(A+Byy+Cy^4)=\frac{-x(A-Cffyy)+y\surd A(A+Bff+Cf^4)}{f\surd A}$$

sicque fiet:

$$\frac{f\,dy\surd A}{y\surd A(A+Bff+Cf^4)-x(A-Cffyy)}+\frac{f\,dx\surd A}{x\surd A(A+Bff+Cf^4)-y(A-Cffxx)}=0.$$

Lemma 2.

10. Eadem manente relatione inter binas variabiles x et y, vt sit $0=-Aff+A(xx+yy)-2xy\surd A(A+Bff+Cf^4)-Cffxxyy)$, seu

$$y=\frac{x\surd A(A+Bff+Cf^4)+f\surd A(A+Bxx+Cx^4)}{A-Cffxx}$$

et $$x=\frac{y\surd A(A+Bff+Cf^4)-f\surd A(A+Byy+Cy^4)}{A-Cffyy}$$

erit differentia harum formularum integralium

$$\int\frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}yy)}{\surd(A+Byy+Cy^4)}-\int\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx)}{\surd(A+Bxx+Cx^4)}$$

geometrice assignabilis.

Demonstratio.

Ad hoc ostendendum ponamus hanc differentiam $=V$, vt sit:

$$\frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}yy)}{\surd(A+Byy+Cy^4)}-\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx)}{\surd(A+Bxx+Cx^4)}=dV$$

Quare cum sit $\frac{dy}{\surd(A+Byy+Cy^4)}=\frac{dx}{\surd(A+Bxx+Cx^4)}$. erit

$$dV=\frac{\mathfrak{B}(yy-xx)dx}{\surd(A+Bxx+Cx^4)}=\frac{\mathfrak{B}f(yy-xx)dx\surd A}{y(A-Cffxx)-x\surd A(A+Bff+Cf^4)}.$$

Ponamus iam $xy=u$, vt sit $y=\frac{u}{x}$; et

$$0=-Aff+Axx+\frac{Auu}{xx}-2u\surd A(A+Bff+Cf^4)-Cffuu$$

qua aequatione differentiata fit:

$$0=Axdx-\frac{Auudx}{x^3}+\frac{Audu}{xx}-du\surd A(A+Bff+Cf^4)-Cffudu;$$

vnde, ob $\frac{u}{x} = y$, per x multiplicando oritur:

$$\frac{dx}{y(A - Cffxx) - x\sqrt{A(A + Bff + Cf^4)}} = \frac{du}{A(yy - xx)}$$

quae multiplicata per $\mathfrak{B}f(yy - xx)\sqrt{A}$ praebet:

$$dV = \frac{\mathfrak{B}f\,du}{\sqrt{A}} \text{ et } V = \text{Const.} + \frac{\mathfrak{B}fxy}{\sqrt{A}}.$$

Quam ob rem pro formularum integralium differentia habebimus:

$$\int \frac{dy(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}yy)}{\sqrt{(A + Byy + Cy^4)}} - \int \frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}xx)}{\sqrt{(A + Bxx + Cx^4)}} = \text{Const.} + \frac{\mathfrak{B}fxy}{\sqrt{A}}$$

quae vtique est geometrice assignabilis.

Coroll. 1.

11. Propositis ergo duabus formulis integralibus similibus

$$\int \frac{dy(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}yy)}{\sqrt{(A + Byy + Cy^4)}} \text{ et } \int \frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}xx)}{\sqrt{(A + Bxx + Cx^4)}}$$

eiusmodi relatio inter x et y exhiberi potest, vt harum formularum differentia fiat geometrice assignabilis.

Coroll. 2.

12. Hunc scilicet in finem talis relatio inter variabiles x et y statui debet, vt sit:

$$0 = -Aff + A(xx + yy) - 2xy\sqrt{A(A + Bff + Cf^4)} - Cffxxyy$$

cuius aequationis resolutio cum sit ambigua, capi debet:

$$y = \frac{x\sqrt{A(A + Bff + Cf^4)} + f\sqrt{A(A + Bxx + Cx^4)}}{A - Cffxx}$$

$$\text{et } x = \frac{y\sqrt{A(A + Bff + Cf^4)} - f\sqrt{A(A + Byy + Cy^4)}}{A - Cffyy}.$$

Coroll.

Coroll. 3.

13. Quemadmodum hic y per x et f, atque x per y et f definitur, ita etiam simili modo f per x et y definiri potest. Erit enim

$$f = \frac{y\sqrt{A(A+Bxx+Cx^4)} - x\sqrt{A(A+Byy+Cy^4)}}{A - Cxxyy}$$

vnde patet, si sit $x=0$, fore $y=f$, ex quo casu constans illa, in valorem ipsius V ingrediens, definiri debet.

Scholion.

14. Simili modo demonstrari potest, etiam harum formularum integralium differentiam

$$\int\frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}yy+\mathfrak{C}y^4+\mathfrak{D}y^6)}{\sqrt{(A+Byy+Cy^4)}} - \int\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4+\mathfrak{D}x^6)}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}} = V$$

esse geometrice assignabilem: Posito enim $xy=u$ erit:

$$dV = \frac{f\,du}{(yy-xx)\sqrt{A}}(\mathfrak{B}(yy-xx)+\mathfrak{C}(y^4-x^4)+\mathfrak{D}(y^6-x^6)), \text{ ideoque}$$

$$dV = \frac{f\,du}{\sqrt{A}}(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}(yy+xx)+\mathfrak{D}(y^4+xxyy+x^4))$$

At ex aequatione canonica habemus:

$$xx+yy = \frac{Aff+2u\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}+Cffuu}{A}$$

Ponamus breuitatis gratia $\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}=Fff$, vt sit

$$xx+yy = \frac{ff}{A}(A+2Fu+Cuu),$$

eritque ob $y^4+xxyy+x^4=(xx+yy)^2-uu$

$$dV = \frac{f\,du}{\sqrt{A}}\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{B}+\frac{\mathfrak{C}ff}{A}(A+2Fu+Cuu)\\ +\frac{\mathfrak{D}f^4}{AA}(A+2Fu+Cuu)^2-\mathfrak{D}uu\end{array}\right\}$$

ideoque integrando:

$$V = \frac{f}{\sqrt{A}}\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{B}u+\frac{\mathfrak{C}ff}{A}(Au+Fuu+\frac{1}{3}Cu^3)-\frac{1}{3}\mathfrak{D}u^3\\ +\frac{\mathfrak{D}f^4}{AA}(AAu+2AFuu+\frac{2}{3}(AC+2FF)u^3+CFu^4+\frac{1}{5}CCu^5\end{array}\right\}$$

Verum

Verum pro praesenti instituto, quo ellipsis nobis est proposita, formulae in lemmate exhibitae sufficiunt.

Lemma 3.

Tab. III. Fig. 1. 15. Si C sit centrum ellipseos, eiusque semiaxes $CA = a$, $CB = b$; atque ad verticem A ducatur tangens AD, in qua sumatur portio indefinita $AZ = z$, et ex Z ad AD perpendicularis erigatur ZMV, erit arcus, huic abscissae $AZ = z$ respondens, $AM = \int \frac{dz}{b} \sqrt{\frac{b^4 - (b^2 - aa)zz}{bb - zz}}$.

Demonstratio.

Ponatur $ZM = v$; et ipse arcus $AM = s$; erit ex natura ellipsis:

$$VM = a - v = \frac{a}{b} \sqrt{(bb - zz)}, \text{ hincque}$$

$$v = a - \frac{a}{b} \sqrt{(bb - zz)} \text{ et } dv = \frac{azdz}{b\sqrt{(bb - zz)}}.$$

Quare cum sit $ds = \sqrt{(dz^2 + dv^2)}$, erit

$$ds = dz \sqrt{\left(1 + \frac{aazz}{bb(bb - zz)}\right)} = \frac{dz}{b} \sqrt{\frac{b^4 - (bb - aa)zz}{bb - zz}}.$$

et integrando:

$$s = \text{Arc. } AM = \int \frac{dz}{b} \sqrt{\frac{b^4 - (bb - aa)zz}{bb - zz}}$$

integrali ita accepto, vt euanescat, posito $z = 0$.

Coroll. 1.

16. Ad hanc formulam contrahendam ponamus hic et in sequentibus perpetuo $\frac{bb - aa}{bb} = n$, vt sit $a = b\sqrt{(1 - n)}$, eritque

Arcus abscissae $AZ = z$ respondens $AM = \int dz \sqrt{\frac{bb - nzz}{bb - zz}}$.

Seu

Seu cum sit $AM = \int \frac{dz(bb - nzz)}{\sqrt{(b^4 - (n+1)bbzz + nz^4)}}$, haec expressio ad nostram formam tractatam $\int \frac{dz(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}zz)}{\sqrt{(A + Bzz + Cz^4)}}$ reducetur ponendo:

$\mathfrak{A} = bb$; $\mathfrak{B} = -n$; $A = b^4$; $B = -(n+1)bb$; $C = n$ ita vt sit $\sqrt{(A + Bzz + Cz^4)} = \sqrt{(bb - zz)(bb - nzz)}$.

Coroll. 2.

17. Cum ob $a = b\sqrt{(1-n)}$ sit $dv = \frac{zdz\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{(bb-zz)}}$ et $ds = dz\sqrt{\frac{bb-nzz}{bb-zz}}$, erit anguli AMZ sinus $= \frac{dz}{ds} = \sqrt{\frac{bb-zz}{bb-nzz}}$; cosinus $= \frac{dv}{ds} = \frac{z\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{(bb-nzz)}}$ et tangens $= \frac{dz}{dv} = \frac{\sqrt{(bb-zz)}}{z\sqrt{(1-n)}}$: quas formulas probe notasse iuuabit

sinus $AMZ = \sqrt{\frac{bb-zz}{bb-nzz}}$

cosinus $AMZ = \frac{z\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{(bb-nzz)}}$

tang. $AMZ = \frac{\sqrt{(bb-zz)}}{z\sqrt{(1-n)}}$.

Coroll. 3.

18. Designabo porro arcum AM, qui abscissae cuique $AZ = z$ respondet, hac expressione $\Pi : z$, vt sit $AM = \Pi : z = \int dz\sqrt{\frac{bb-nzz}{bb-zz}}$. Hinc si variae abscissae ponantur

$AF = f$; $AP = p$; $AQ = q$; $AR = r$; $AD = AB = b$

erunt arcus respondentes:

$Af = \Pi : f$; $Ap = \Pi : p$; $Aq = \Pi : q$; $Ar = \Pi : r$; $AMB = \Pi : b$.

Coroll. 4.

19. Hoc modo etiam arcus, qui non in puncto A terminantur, commode exprimi poterunt; sic enim erit:

arcus $fp = \Pi : p - \Pi : f$; arcus $pq = \Pi : q - \Pi : p$

arcus $qr = \Pi : r - \Pi : q$; arcus $pr = \Pi : r - \Pi : p$

item arcus $Bp = \Pi : b - \Pi : p$; arcus $Bq = \Pi : b - \Pi : q$ Denotat enim $\Pi : b$ arcum totius quadrantis AMB; ideoque $4\, \Pi : b$ totam ellipsis peripheriam.

Problema I.

Tab. III. Fig. I. 20. Proposito in ellipsi arcu Af in vertice A terminato, ab alio quouis puncto p arcum abscindere pq, qui ab illo arcu Af discrepet quantitate geometrice assignabili.

Solutio.

Positis abscissis, quae punctis f, p et q respondent, $AF = f$; $AP = p$; et $AQ = q$, ex datis f et p conuenienter determinari oportet q. Cum igitur pro lemmate secundo sit

$$\mathfrak{A} = bb;\ \mathfrak{B} = -n;\ A = b^4;\ B = -(n+1)bb; \text{ et } C = n:$$

capiatur q ita, vt sit:

$$q = \frac{bbp\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} + bbf\sqrt{(bb-pp)(bb-npp)}}{b^4 - nffpp}$$

eritque per lemmatis conclusionem:

$$\int dq \sqrt{\frac{bb-nqq}{bb-qq}} - \int dp \sqrt{\frac{bb-npp}{bb-pp}} = \text{Const.} - \frac{nfpq}{bb}.$$

At est $\int dq \sqrt{\frac{bb-nqq}{bb-qq}} = \Pi : q$ et $\int dp \sqrt{\frac{bb-npp}{bb-pp}} = \Pi : p$, vnde

$$\Pi : q - \Pi : p = \text{Const.} - \frac{nfpq}{bb}$$

vbi tantum superest, vt constans debite definiatur. Verum quia posito $p = 0$, fit $q = f$, ad quem casum

aequa-

aequatione translata fiet: $\Pi : f = \text{Const.}$ quo valore introducto habebimus:

$$\Pi : q - \Pi : p = \Pi : f - \frac{nfpq}{bb}$$

siue $\text{Arc} : pq = \text{Arc} : Af - \frac{nfpq}{bb}$.

Coroll. 1.

21. Quia vero eidem abscissae $AQ = q$, bina in ellipsi puncta q respondent, ad hoc punctum perfecte determinandum, etiam applicatae Qq magnitudo definiri debet: Est vero

$$Qq = a - \frac{a}{b}\sqrt{(bb-qq)} = (b - \sqrt{(bb-qq)})\sqrt{(1-n)}, \text{ et}$$

$$\sqrt{(bb-qq)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-ff)(bb-pp)} - bfp\sqrt{(bb-nff)(bb-npp)}}{b^4 - nffpp}$$

Tum etiam notari meretur

$$\sqrt{(bb-nqq)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-nff)(bb-npp)} - nbf\sqrt{(bb-ff)(bb-pp)}}{b^4 - nffpp}$$

si igitur valor ipsius $\sqrt{(bb-qq)}$ fit negatiuus, punctum q in superiori ellipsis quadrante capi debet.

Coroll. 2.

22. Hic igitur primo relatio notari debet, quae inter tria puncta f, p et q intercedit, quae ita est comparata, vt ex binis datis tertium inueniri possit:

I. Si f et p sint data, erit

$$q = \frac{bbp\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} + bbf\sqrt{(bb-pp)(bb-npp)}}{b^4 - nffpp}$$

$$\sqrt{(bb-qq)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-ff)(bb-pp)} - bfp\sqrt{(bb-nff)(bb-npp)}}{b^4 - nffpp}$$

$$\sqrt{(bb-nqq)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-nff)(bb-npp)} - nbfp\sqrt{(bb-ff)(bb-pp)}}{b^4 - nffpp}.$$

II. Si f et q ſint data, erit:

$$p = \frac{bbq\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} - bbf\sqrt{(bb-qq)(bb-nqq)}}{b^4 - nffqq}$$

$$\sqrt{(bb-pp)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-ff)(bb-qq)} + bfq\sqrt{(bb-nff)(bb-nqq)}}{b^4 - nffqq}$$

$$\sqrt{(bb-npp)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-nff)(bb-nqq)} + nbfq\sqrt{(bb-ff)(bb-qq)}}{b^4 - nffqq}$$

III. Si p et q ſint data, erit:

$$f = \frac{bbq\sqrt{(bb-pp)(bb-npp)} - bbp\sqrt{(bb-qq)(bb-nqq)}}{b^4 - nppqq}$$

$$\sqrt{(bb-ff)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-pp)(bb-qq)} + bpq\sqrt{(bb-npp)(bb-nqq)}}{b^4 - nppqq}$$

$$\sqrt{(bb-nff)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-npp)(bb-nqq)} + nbpq\sqrt{(bb-pp)(bb-qq)}}{b^4 - nppqq}$$

Hae autem formulae omnes ex hac naſcuntur:

$$0 = -b^4ff + b^4pp + b^4qq - 2bbpq\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} - nffppqq$$

quae adeo ad hanc rationalem, in qua f, p, et q aequaliter inſunt, reducitur:

$$0 = b^8(f^4+p^4+q^4) + 4(n+1)b^6ffppqq - 2b^8(ffpp+ffqq + ppqq) - 2nb^4ffppqq(ff+pp+qq) + nnf^4p^4q^4.$$

Coroll. 3.

23. Harum formularum igitur ope, ſi trium punctorum f, p et q data ſint bina quaecunque, tertium inueniri poterit, vt arcuum Af et pq differentia geometrice fiat aſſignabilis: Erit enim

$$\text{Arc. } Af - \text{Arc. } pq = \text{Arc. } Ap - \text{Arc. } fq = \frac{nfpq}{bb}.$$

Coroll. 4.

24. Denotat autem b ſemiaxem ellipſis CB, et poſito altero CA $= a$, fecimus $\frac{bb-aa}{bb} = n$: vnde ſi $n = 0$ ellipſis

ellipsis abit in circulum, et arcuum assignatorum differentia euanescit. Ellipsis autem abibit in parabolam, cuius semiparameter $=c$, si $bb=ac$, et $a=\infty$: Hoc ergo casu fiet $n=\frac{c-a}{c}=-\frac{a}{c}$, et $\frac{n}{bb}=-\frac{1}{cc}$: ideoque $n=-\frac{bb}{cc}$ et $\sqrt{(bb-ff)}=b$; $\sqrt{(bb-nff)}=b\sqrt{(1-\frac{ff}{cc})}$: vnde formulae superiores ad parabolam transferri poterunt.

Coroll. 5.

25. Si easdem formulas ad hyperbolam accommodare velimus, semiaxem b ita imaginarium statui oportet, vt eius quadratum bb fiat quantitas negatiua. Seu, quod eodem redit, in nostris formulis vbique loco bb scribatur $-bb$, et semiaxis a capiatur negatiue, tum vero n erit numerus vnitate maior.

Problema 2.

26. In quadrante elliptico AB, dato puncto quocunque f, inuenire aliud punctum g, vt arcuum Af et Bg differentia sit geometrice assignabilis. Tab. III. Fig. 2.

Solutio.

Ex praecedente problemate hoc facile resoluitur; positis enim semiaxibus $CA=a$, $CB=b$ et $\frac{bb-aa}{bb}=n$; punctum q in praecedente problemate in B vsque promoueri oportet, vt fiat $q=b$; tum sint abscissae super tangente AD vel axe AB sumtae, punctis f et g respondentes, $AF=Cf=f$ et $AG=C\mathfrak{G}=g$, ita vt, quod ante erat p, nunc sit g, atque ex dato puncto f

determinatio puncti g per formulas (§. 22.) ita se habebit, ob $p=g$ et $q=b$.

$$g=\frac{b^3\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)}}{b^4-nbbff}=b\sqrt{\frac{bb-ff}{bb-nff}}:$$

$$\sqrt{(bb-gg)}=\frac{bbf\sqrt{(bb-nff)(bb-nbb)}}{b^4-nbbff}=\frac{bf\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{(bb-nff)}}$$

$$\sqrt{(bb-ngg)}-\frac{b^3\sqrt{(bb-nff)(bb-nbb)}}{b^4-nbbff}=\frac{bb\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{(bb-nff)}}.$$

Vnde si anguli, quos applicatae Ff et Gg cum curua faciunt, in computum ducantur, erit

$$g=b\sin AfF \text{ et } f=b\sin AgG.$$

Atque hinc sequitur ista constructio pro puncto g inueniendo: Ad punctum f ducatur tangens fT, donec axi CA producto occurrat in T, tum in ea, si opus est, producta capiatur $TV=CB=b$, et per V agatur recta $\mathfrak{G}$G axi CA parallela, eritque punctum g quaesitum, ita vt arcuum Af et Bg differentia sit geometrice assignabilis. Verum ex problemate praecedente, ob $p=g$ et $q=b$, erit haec differentia:

$$\text{Arc.}\,Af-\text{Arc.}\,Bg=\frac{nfg}{b}=nf\sqrt{\frac{bb-ff}{bb-nff}}.$$

Ad quam construendam notetur esse:

$$Ff=\frac{AF}{\sin AfF}=f\sqrt{\frac{bb-nff}{bb-ff}}$$

et ex natura ellipsis:

$$CT=\frac{ab}{\sqrt{(bb-ff)}}=\frac{bb\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{(bb-ff)}}.$$

Hinc si ex centro ellipsis C in tangentem Ff demittatur perpendiculum CS, ob ang. CTS = ang. AfF, eiusque sinum $=\sqrt{\frac{bb-ff}{bb-nff}}$ et cosinum $=\frac{f\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{(bb-nff)}}$, erit

$$TS=CT\cos.CTS=\frac{bbf(1-n)}{\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)}} \text{ hincque}$$

$$Sf=Tf-Ts=\frac{bbf-nf^3-bbf+nbbf}{\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)}}=\frac{nf(bb-ff)}{\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)}}=nf\sqrt{\frac{bb-ff}{bb-nff}}.$$

Portio

Portio igitur tangentis fS, inter perpendiculum CS et punctum contactus f contenta, praebebit differentiam arcuum Af et Bg, ita vt sit:

$$\text{Arc. } Af - \text{Arc. } Bg = \text{Arc. } Ag - \text{Arc } Bf = Sf.$$

Coroll. 1.

27. Haec differentia arcuum facilius inueniri potest, si in f ad tangentem ducatur normalis $f\mathfrak{G}$; tum enim ex natura ellipsis statim constat, esse $C\mathfrak{G} = f - \frac{aa}{bb}f = nf$. Quare cum CS ipsi $\mathfrak{G}f$ sit parallela, et angulus $BCS = CTS = TfF$, eiusque ergo sinus $= \sqrt{\frac{bb-ff}{bb-nff}}$, erit

$$Sf = C\mathfrak{G} \sin BCS = nf\sqrt{\frac{bb-ff}{bb-nff}}.$$

Coroll. 2.

28. Simili modo ex puncto g definietur punctum f; si enim ad g ducatur tangens vsque ad axem CA, atque ab interfectione eius cum axe in ea capiatur portio alteri femiaxi CB aequalis, haec praecise in recta Ff terminabitur, ideoque punctum f monstrabit.

Coroll. 3.

29. Constructio ergo puncti g ex dato puncto f ita se habebit: Ad punctum f ducatur tangens, axi CA producto occurrens in T, in eaque a T abscindatur portio TV, semiaxi CB aequalis, et recta $G\mathfrak{G}$ axi CA parallela, per punctum V acta, in ellipsi punctum quaesitum g definiet. Tum enim, si ex centro ellipsis C in illam tangentem perpendiculum CS demittatur, erit

erit Arc. Af − Arc. Bg = Rectae Sf, hincque etiam Arc. Af − Recta fS = Arc. Bg.

Coroll. 4.

Tab. III. Fig. 3. 30. Casus notabilis est, quo bina puncta f et g in vnum colliquescunt, ita vt arcus quadrantis AfB in puncto f ita secari iubeatur, vt partium Af et Bf differentia fiat geometrice assignabilis. Hunc in finem ponatur in solutione $g = f$, vnde fit $f = b\sqrt{\frac{bb-ff}{bb-nff}}$ hincque $2bbff - nf^4 = b^4$, et $\frac{bb}{ff} = 1 + \sqrt{(1-n)} = \frac{a+b}{b}$. Quare pro puncto hoc f capi debet abscissa $AF = f = b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$: atque, ob $\sqrt{\frac{bb-ff}{bb-nff}} = \frac{f}{b}$, erit partium differentia $Af - Bf = \frac{nff}{b} = \frac{nbb}{a+b}$, quae cum sit $n = \frac{bb-aa}{bb}$, abit in $Af - Bf = b - a$, ita vt aequalis euadat differentiae semiaxium. Vnde puncto f hoc modo definito, vt sit $f = b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$, erit etiam

$$AC + Af = BC + Bf$$

seu ducto radio Cf ambo trilinea ACf et BCf pari perimetro includuntur.

Coroll. 5.

31. Quia supra habuimus $CT = \frac{ab}{\sqrt{(bb-ff)}}$, erit pro praesenti casu $CT = \sqrt{(aa+ab)}$ ob $ff = \frac{b^3}{a+b}$; vnde sequens concinna puncti f constructio deducitur. Bisecto semiaxe BC in O, interuallo $OT = OC + AC$, definiatur in CA producta punctum T, vnde interuallo $Tf = BC$ punctum f in ellipsi designetur: eritque f punctum quaesitum, et recta Tf eius tangens.

Proble-

Problema 3.

32. Propoſita ſemiellipſi $AB\alpha$, in eaque ſumto quocunque puncto p, definire punctum q ita, vt arcus pBq differat a quadrante elliptico ApB quantitate geometrice aſſignabili. Tab. III. Fig. 4.

Solutio.

Poſitis, vt hactenus, ſemiaxibus $CA = a$, $CB = b$ et ad abbreuiandum $n = \frac{bb - aa}{bb}$, in ſolutione problematis primi promoueatur punctum f in B vsque, eritque vi eius arcuum AB et pq differentia geometrice aſſignabilis, vti requiritur. Demiſſis ergo ad tangentem AD ex p et q perpendiculis pP et qQ, ſint $AP = p$ et $AQ = q$, atque ob $f = b$ habebimus ex (22)

$$q = \frac{b\sqrt{(bb-pp)(bb-npp)}}{bb-npp} = b\sqrt{\frac{bb-pp}{bb-npp}}$$

$$\sqrt{(bb-qq)} = \frac{-p\sqrt{(bb-nbb)(bb-npp)}}{bb-npp} = \frac{-bp\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{(bb-npp)}}$$

cuius quantitatis ſignum − indicat, vlteriorem interſectionem perpendiculi QK pro puncto q accipi oportere, ſecus atque in problemate praecedente. Cum igitur $\sqrt{\frac{bb-pp}{bb-npp}}$ exprimat ſinum anguli, quem applicata Pp cum curua facit, erit $q = b \sin ApP$. Ad Qq, ſi opus eſt, productam, ex centro C dirigatur recta CK, ſemiaxi $CB = b$ aequalis, vt ſit $CK = b$, eritque $\frac{q}{b} = \frac{CQ}{CK} = \sin ApP$, hincque $\sin CKQ = \sin ApP$ et $CKQ = ApP$. Ex quo patet rectam CK parallelam fore tangenti in puncto p. Quare iuncta Cp, eaque, vt ſemidiametro ſpectata, erit CL eius ſemidiameter coniugata, in qua proinde producta, ſi capiatur $CK = CB$, perpen-

perpendiculum KQ ad CB demissum in ellipsi definiet punctum q. Quo inuento ob $f = b$; et $q = b\sqrt{\frac{bb-pp}{bb-npp}}$ erit arcuum differentia:

$$\text{Arc. } AB - \text{Arc. } pq = \frac{nfpq}{bb} = np\sqrt{\frac{bb-pp}{bb-npp}} = np \sin ApP.$$

Ducatur ad ellipsin in p normalis $p\mathfrak{R}$, erit $C\mathfrak{R} = np$, et producta $p\mathfrak{R}$ in N angulus $C\mathfrak{R}N = \text{ang. } ApP$: quare cum haec pN futura sit normalis in diametrum coniugatam CL, erit $CN = np \sin ApP$; vnde demisso ex p in CL perpendiculo, interuallum CN aequabitur differentiae illorum arcuum, ita vt sit:

$$\text{Arc. } AB - \text{Arc. } pq = CN.$$

Coroll. 1.

33. Cum igitur punctum p pro lubitu assumi possit, infiniti arcus pq exhiberi possunt, qui a quadrante AB differunt quantitate geometrice assignabili. Quare etiam hi arcus inter se different quantitate geometrice assignabili.

Coroll. 2.

34. Ex dato ergo puncto p punctum q ita definitur: Ad ductam Cp iungatur semidiameter coniugata CL in K producenda, vt fiat CK aequalis semiaxi CB, ad quem ex K perpendiculum demittatur KQ, ellipsin secans in q, erit q punctum quaesitum. Atque demisso ex p in CL perpendiculo pN, erit $AB - pq = CN$.

Coroll.

Coroll. 3.

35. Quoties perpendiculum pN intra C et K cadit, arcus pq erit minor quadrante AB, contra autem, si ad alteram partem cadit, maior. Ita si prius punctum in π detur, et rectae $C\pi$ conueniat semidiameter coniugata CL, qua producta in K, vt sit $CK = CB$, et ex K ad CB, demisso perpendiculo KQ secante ellipsin in q, quia hic perpendiculum $\pi\nu$ in CL demissum ad alteram partem cadit, erit arcus πq — arcu $AB = C\nu$. Tab. III. Fig. 5.

Theorema demonstrandum.

36. Si ellipsis $AB\alpha\beta$ diametro quacunque $p\pi$ fuerit bisecta, ad eamque ducatur diameter coniugata $L\lambda$, cuius semissis CL producatur in K, vt fiat CK alteri semiaxi principali CB aequalis, ad quem ex K demittatur perpendiculum KQ, ellipsin secans in q, tum ellipsis semiperimeter $pBL\alpha\pi$ ita secabitur in q, vt partium $\pi\alpha q$ et pBq differentia sit geometrice assignabilis. Ductis enim ex p et π ad diametrum coniugatam $L\lambda$ normalibus pN et $\pi\nu$, interuallum $N\nu$ illi differentiae ita aequabitur, vt sit Arc. $\pi\alpha q$ — Arc. $pBq = N\nu$. Fig. 5.

Demonstratio.

Quia CL est semidiameter coniugata conueniens semidiametro Cp, ex constructione, qua punctum q est definitum, patet per §. 34. fore:

Arc. AB — Arc. pq = CN.

Deinde, quia CL eſt quoque ſemidiameter coniugata conueniens ſemidiametro $C\pi$, ex §. 35. patet eſſe

$$\text{Arc.}\,\pi q - \text{Arc.}\,AB = C\nu.$$

Addantur hae duae aequationes, ac reſultabit

$$\text{Arc.}\,\pi q - \text{Arc.}\,pq = CN + C\nu = N\nu.$$

Coroll.

37. Perinde eſt, vtri ſemiaxi principali ſemidiameter CL producta, eiusue portio, aequalis capiatur, dummodo ex eius termino ad eum ipſum axem perpendiculum demittatur. Ita in CL potuiſſet abſcindi portio Ck ſemiaxi minori $C\alpha$ aequalis; recta enim qkq, per k ad $C\alpha$ normaliter ducta, in ellipſi idem punctum q prodidiſſet.

Scholion.

38. En ergo demonſtrationem completam Theorematis in Actis Erud. Lipſ. propoſiti, quae ita eſt comparata, vt nullo modo ex vulgaribus ellipſis proprietatibus deriuari potuiſſet, neque etiam Analyſis infinitorum multum auxilii attulerit, niſi hoc ipſo modo, quo hic ſum vſus, in ſubſidium vocetur. Ex profundis quidem ſpeculationibus Ill. Comitis Fagnani hanc quoque demonſtrationem deducere liceret; verum inde vix via pateret, ad problema ibidem propoſitum reſoluendum, in cuius ergo gratiam ſequentia ſunt praemittenda.

Problema 4.

Tab. IV. Fig. 1. 39. Arcum ellipticum quemcunque Ag ad alterum axem principalem in A terminatum ita ſecare in f, vt *fg*, vt partium Af et fg differentia fit geometrice assignabilis.

Solutio.

Positis semiaxibus $CA = a$, $CB = b$, et breuitatis gratia $n = \frac{bb - aa}{bb}$, in verticis A tangente AD sumantur abscissae, ac ponatur abscissa toti arcui Ag dato respondens $AG = g$, quaesita autem, quae puncto f respondeat, sit $AF = f$. Cum igitur differentia arcuum Af et fg debeat esse geometrice assignabilis, quaestio continetur in Probl. I. sumendo ibi $p = f$, et ponendo $q = g$, vnde obtinebimus has formulas:

$$g = \frac{2bbf\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)}}{b^4 - nf^4}$$

$$\sqrt{(bb-gg)} = \frac{b^3(bb-ff) - bff(bb-nff)}{b^4 - nf^4} = \frac{b(b^4 - 2bbff + nf^4)}{b^4 - nf^4}$$

$$\sqrt{(bb-ngg)} = \frac{b^3(bb-nff) - nbff(bb-ff)}{b^4 - nf^4} = \frac{b(b^4 - 2nbbff + nf^4)}{b^4 - nf^4}$$

Ex quibus combinatione oritur:

$$\sqrt{(bb-ngg)} - n\sqrt{(bb-gg)} = \frac{(1-n)b(b^4 + nf^4)}{b^4 - nf^4} \quad \text{hincque}$$

$$\frac{nf^4}{b^4} = \frac{\sqrt{(bb-ngg)} - n\sqrt{(bb-gg)} - (1-n)b}{\sqrt{(bb-ngg)} - n\sqrt{(bb-gg)} + (1-n)b}$$

quae formula reducitur ad

$$\frac{nnf^4}{b^4} = \frac{(\sqrt{(bb-ngg)} - n\sqrt{(bb-gg)} - (1-n)b)^2}{2bb - (1+n)gg - 2\sqrt{(bb-gg)(bb-ngg)}},$$

vnde radice quadrata extracta fit:

$$\frac{nff}{bb} = \frac{\sqrt{(bb-ngg)} - n\sqrt{(bb-gg)} - (1-n)b}{\sqrt{(bb-ngg)} - \sqrt{(bb-gg)}} = \frac{(b - \sqrt{(bb-gg)})(b - \sqrt{(bb-ngg)})}{gg}$$

ex qua porro elicimus:

$$\frac{bb - nff}{2b} = \frac{(1-n)(b - \sqrt{(bb-gg)})}{\sqrt{(bb-ngg)} - \sqrt{(bb-gg)}} = \frac{(b - \sqrt{(bb-gg)})(\sqrt{(bb-ngg)} + \sqrt{(bb-gg)})}{gg}$$

$$\frac{n(bb-ff)}{bb} = \frac{(1-n)(b - \sqrt{(bb-ngg)})}{\sqrt{(bb-ngg)} - \sqrt{(bb-gg)}} = \frac{(b - \sqrt{(bb-ngg)})(\sqrt{(bb-ngg)} + \sqrt{(bb-gg)})}{gg}$$

Punctum igitur quaesitum f ita determinabitur, vt sit:

$$f = \frac{b}{g\sqrt{n}}\sqrt{(b-\sqrt{(bb-gg)})(b-\sqrt{(bb-ngg)})}$$

$$\sqrt{(bb-ff)} = \frac{b}{g\sqrt{n}}\sqrt{(b-\sqrt{(bb-ngg)})}(\sqrt{(bb-gg)}+\sqrt{(bbn-gg)})$$

$$\sqrt{(bb-nff)} = \frac{b}{g}\sqrt{(b-\sqrt{(bb-gg)})}(\sqrt{(bb-gg)}+\sqrt{(bb-ngg)})$$

Verum hoc puncto f ita determinato, ob $p=f$ et $q=g$, partium inuentarum differentia erit

$$\text{Arc. } Af - \text{Arc. } fg = \frac{nffg}{bb} = \frac{(b-\sqrt{(bb-gg)})(b-\sqrt{(bb-ngg)})}{g}$$

Coroll. 1.

40. Casum huius problematis iam soluimus (§. 30), quo arcus secundus Ag toti quadranti AB assumitur aequalis. Si enim ponamus $g=b$, reperietur, vt ibi,

$$f = b\sqrt{\frac{1-\sqrt{(1-n)}}{n}} = b\sqrt{\frac{b(b-a)}{bb-aa}} = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}}$$

et partium differentia prodit $= b - b\sqrt{(1-n)} = b-a$.

Coroll. 2.

41. Si arcus dati Ag alter terminus in superiori quadrante existat, eique eadem abscissa $AG=g$ respondeat, eaedem hae formulae valent, nisi quod valor radicalis $\sqrt{(bb-gg)}$ negatiue capi debeat, radicali $\sqrt{(bb-ngg)}$ non mutato.

Coroll. 3.

42. Ita si proponatur tota semiperipheria, erit $g=0$, et $\sqrt{(bb-gg)}=-b$, vnde pro hoc casu obtinebitur:

$$f = \frac{b}{g\sqrt{n}}\sqrt{2b(b-\sqrt{(bb-ngg)})} = b$$

scilicet

scilicet arcus Af abibit in quadrantem ellipsis. Sin autem integra ellipsis peripheria proponeretur, tum esset et $g=0$ et $\sqrt{(bb-gg)}=+b$; sicque valor ipsius f prodiret euanescens, at pro $\sqrt{(bb-ff)}$ capi deberet $-b$.

Problema 5.

43. Proposito in ellipsi arcu Ag altero termino A, in axe principali terminato assignare arcum pq, qui sit praecise semissis arcus dati Ag.

Solutio.

Manentibus superioribus denominationibus, sint abscissae, punctis p et q respondentes, $AP=p$, et $AQ=q$, atque ex puncto p, quasi esset datum, quaeratur q, vt differentia arcuum Af et pq fiat geometrice assignabilis, tum enim quoque differentia arcuum fg et pq geometrice assignari poterit, siquidem secundum problema praecedens arcus datus Ag, pro quo est $AG=g$, ita sectus est in f, vt partium Af et fg differentia sit geometrice assignabilis. Hunc ergo in finem esse debet

$$q=\frac{bbp\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)}+bbf\sqrt{(bb-pp)(bb-npp)}}{b^4-nffpp}$$

seu

$$0=b^4(pp+qq-ff)-2bbpq\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)}-nffppqq.$$

Quo facto erit

$$\text{Arc.}\,Af-\text{Arc.}\,pq=\frac{nfpq}{bb};\ \text{ideoque}$$

$$2\,\text{Arc.}\,Af-2\,\text{Arc.}\,pq=\frac{2nfpq}{bb}.$$

At ex problemate praecedente habemus:

$$\text{Arc.}\,Af-\text{Arc.}\,fg=\frac{nffg}{bb}.$$

qua

qua aequatione ab illa subtracta relinquitur:

$$\text{Arc. } Ag - 2\,\text{Arc.}\, pq = \frac{2nfpq}{bb} - \frac{nffg}{bb}$$

Quae differentia cum in nihilum abire debeat, habebimus:

$$2nfpq = nffg \quad \text{et} \quad 2pq = fg.$$

Pro pq substituatur iste valor $\frac{1}{2}fg$, et obtinebimus

$$b^4(pp+qq) = b^4ff + bbfg\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} + \tfrac{1}{4}nf^4gg$$

existente $g = \frac{2bbf\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)}}{b^4 - nf^4}$, vel potius pro f introducatur valor ante inuentus:

$$f = \frac{b}{g\sqrt{n}}\sqrt{(b-\sqrt{(bb-gg)})(b-\sqrt{(bb-ngg)})}$$

vnde fit:

$$\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} = \frac{bb(\sqrt{(bb-gg)}+\sqrt{(bb-ngg)})}{gg\sqrt{n}}\sqrt{(b-\sqrt{(bb-gg)})(b-\sqrt{(bb-ngg)})}$$

Postea vero ambae abscissae p et q ex hac aequatione duplicata definiri poterunt:

$$pp \pm 2pq + qq = \frac{b^4ff \pm b^4fg + bbfg\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} + \frac{1}{4}nf^4gg}{b^4}$$

vel sublata ista irrationalitate ob $bbfg\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} = \frac{1}{2}gg(b^4 - nf^4)$ habebimus:

$$p+q = \frac{\sqrt{(b^4ff + b^4fg + \frac{1}{2}b^4gg - \frac{1}{4}nf^4gg)}}{bb}$$

$$q-p = \frac{\sqrt{(b^4ff - b^4fg + \frac{1}{2}b^4gg - \frac{1}{4}nf^4gg)}}{bb}$$

vnde vtraque abscissa p et q seorsim facile assignatur.

Coroll. 1.

44. Si quantitatem subsidiariam f penitus eliminemus, perueniemus ad has duas formulas:

$pp+qq$

$$pp+qq=\frac{1}{4ngg}(b-\surd(bb-gg))(b-\surd(bb-ngg)) \text{ in } (5bb+3b\surd(bb-gg)+3b\surd(bb-ngg)+\surd(bb-gg)(bb-ngg))$$

$$2pq=\frac{b}{n\surd}\surd(b-\surd(bb-gg)(b-\surd(bb-ngg)).$$

Coroll. 2.

45. Si arcus propositus Ag sit semiperipheriae aequalis, ideoque $g=0$ et $\surd(bb-gg)=-b$, et $\surd(bb-ngg) = b-\frac{ngg}{2b}$, fiet pro hoc casu:

$$pp+qq=bb \text{ et } 2pq=bg=0$$

ideoque $p=0$ et $q=b$. Arcus scilicet pq abibit in quadrantem AB, vt natura rei postulat.

Problema soluendum.

46. In quadrante elliptico AB, arcum assignare pq, qui praecise sit semissis arcus quadrantis AB. Tab. IV. Fig. 2.

Solutio.

Ponantur ellipsis semiaxes $CA=a$, $CB=b$, sitque breuitatis gratia $\frac{bb-aa}{bb}=n$. Tum ad A ducatur tangens, in eamque ex punctis quaesitis p et q demissa concipiantur perpendicula pP et qQ, vocenturque $AP=p$ et $AQ=q$. Iam manifestum est, hoc problema esse casum praecedentis, quo punctum g in B assumitur, ita vt hoc sit $g=b$. Quo valore inducto formulae (§. 44.) praebebunt

$$pp+qq=\frac{1-\surd(1-n)}{4n}(5bb-3bb\surd(1-n)) \text{ et}$$

$$2pq=bb\surd\frac{1-\surd(1-n)}{n}.$$

Digitized by Google

At ob $n=\frac{bb-aa}{bb}$ eſt $\sqrt{(1-n)}=\frac{a}{b}$ et $\frac{1-\sqrt{(1-n)}}{n}=\frac{b}{b+a}$ vnde fiet :

$$pp+qq=\frac{bb(5b+3a)}{4(a+b)} \text{ et } 2pq=\frac{bb\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}}$$

hincque :

$$q+p=\tfrac{1}{2}b\sqrt{\frac{5b+3a+4\sqrt{b(a+b)}}{a+b}}$$

$$q-p=\tfrac{1}{2}b\sqrt{\frac{5b+3a-4\sqrt{b(a+b)}}{a+b}}$$

ideoque ipſae abſciſſae erunt:

$$AP=\tfrac{1}{4}b\sqrt{\frac{5b+3a+4\sqrt{b(a+b)}}{a+b}}-\tfrac{1}{4}b\sqrt{\frac{5b+3a-4\sqrt{b(a+b)}}{a+b}}$$

$$AQ=\tfrac{1}{4}b\sqrt{\frac{5b+3a+4\sqrt{b(a+b)}}{a+b}}+\tfrac{1}{4}b\sqrt{\frac{5b+3a-4\sqrt{b(a+b)}}{a+b}}$$

qui ambo valores geometrice per circinum et regulam conſtrui poſſunt.

Haecque eſt ſolutio adaequata problematis in Actis Erud. Lipſienſibus propoſiti.

Coroll. 1.

47. Si diſtantiae binorum punctorum p et q a centro ellipſis deſiderentur, notetur poſita $AP=p$ fore $Cp=\sqrt{(aa+npp)}$, atque hinc colligitur fore

$$Cp=\frac{\sqrt{(5aa-2ab+5bb+(a-b)\sqrt{(9aa+14ab+9bb)})}}{2\sqrt{2}}$$

$$Cq=\frac{(5aa-2ab+5bb+(b-a)\sqrt{(9aa+14ab+9bb)})}{2\sqrt{2}}.$$

Coroll. 2.

48. Ambae abſciſſae p et q etiam hoc modo ad conſtructionem fortaſſe aptius exprimi poſſunt, vt ſit:

$$AP=p=\frac{b\sqrt{(5b+3a-\sqrt{(9aa+14ab+9bb)})}}{2\sqrt{2(a+b)}}$$

$$AQ=q=\frac{b\sqrt{(5b+3a+\sqrt{(9aa+14ab+9bb)})}}{2\sqrt{2(a+b)}}.$$

Coroll.

Coroll. 3.

49. Si ad puncta p et q tangentes ducantur ad occursum axis CA, magnitudo harum tangentium commode exprimitur. Reperietur enim

$$Tp = \frac{\sqrt{(9aa+14ab+9bb)}-3a-b}{4}$$

pro puncto autem q erit eadem tangens $= \frac{\sqrt{(9aa+14ab+9bb)}+3a+b}{4}$.

Coroll. 4.

50. Concipiatur tangens Tp ad alterum vsque axem CB continuata, et concursus littera Θ notari, eritque permutatis literis a et b:

$$\Theta p = \frac{\sqrt{(9aa+14ab+9bb)}+a+3b}{4}$$

ideoque $\Theta p - Ap = a + b$.

Coroll. 5.

51. Solutio igitur huius problematis ad hanc quaestionem mere geometricam reducitur:

In quadrante elliptico AB *duo eiusmodi puncta* p *et* q *assignare, ita vt ad ea ductis tangentibus* $Tp\Theta$, $tq\theta$ *quoad axibus productis occurrant, sit pro vtroque* Tab. IV. Fig. 2.

$$\Theta p - Tp = CA + CB \text{ et } tq - \theta q = CA + CB$$

seu vt differentia partium vtriusque tangentis aequalis sit semisummae axium principalium.

Hoc problemate constructo, puncta p et q simul ita sunt comparata, vt arcus interceptus pq ad totum quadrantem AB rationem teneat subduplam.

Scholion.

52. Demonſtrato nunc Theoremate, ſolutoque Problemate, quae in Actis Erud. Lipſ. extant propoſita, antequam huic inueſtigationi finem imponam, problema adhuc multo difficilius pertractabo, quo in ellipſi arcus aſſignari iubetur, qui totius perimetri ellipſeos ſit triens. Quoniam enim facillime arcus aſſignatur, qui totius perimetri ſit ſemiſſis, vel quadrans, vel ope problematis praecedentis etiam octans, haud parum notatu dignus videtur caſus, quo triens poſtulatur, cuius ſolutio, etiamſi ob ſummam facilitatem, qua res de ſemiſſi et quadrante expeditur, non admodum difficilis videatur, tamen ad inueſtigationes perquam prolixas et operoſas deducitur, quas ſuperare tentabo.

Problema 7.

Tab. IV. Fig. 1. 53. Datum ellipſis arcum Ab, ad alterum axem principalem in A terminatum, ita ſecare in duobus punctis f et g, vt trium partium Af, fg et gb binae quaeuis quantitate geometrice aſſignabili diſcrepent.

Solutio.

Ex punctis f, g, b ad rectam AD, quae ellipſin in A tangit, demiſſis perpendiculis vocentur abſciſſae:

$$AF = f;\ AG = g;\ \text{et}\ AH = b$$

quarum haec $AH = b$ datur, illas vero duas f et g determinari oportet. Cum autem arcuum Af et fg differentia geometrica eſſe debeat, erit ex praecedentibus:

$$g = \frac{2bbf\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)}}{b^4-nf^4}$$

$$\text{et}\ Af - fg = \frac{nffg}{bb}.$$

Deinde

Deinde quia arcuum Af et gh differentia debet esse geometrica, erit per formulas superiores:

$$g = \frac{bbb\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} - bbf\sqrt{(bb-hh)(bb-nhh)}}{b^4 - nffbb}$$

et $Af - gh = \frac{nfgh}{bb}$.

Tum igitur quoque tertia differentia erit

$$fg - gh = \frac{nfg}{bb}(h-f).$$

Quodsi iam ambo hi valores ipsius g inter se aequentur, obtinebitur aequatio inter f et h, per quam propterea abscissa f determinabitur, qua inuenta porro abscissa g innotescit.

Coroll. 1.

54. Aequatis autem duobus valoribus ipsius g, eruetur:

$$(b^4h - nf^4h - 2b^4f + 2nf^3hh)\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)}$$
$$= (b^4f - nf^5)\sqrt{(bb-hh)(bb-nhh)}$$

quae, sumtis vtrinque quadratis, ad duodecimum gradum ascendit.

Coroll. 2.

55. Si sit $h=b$, seu arcus Ah in B terminetur, habebitur ista aequatio resoluenda:

$$b^5 - nbf^4 - 2b^4f + 2nbbf^3 = 0$$

seu $\quad nf^4 - 2nbf^3 + 2b^3f - b^4 = 0.$

Problema 8.

56. In ellipsi arcum pq assignare, qui sit tertia pars totius perimetri ellipsis. Tab. IV. Fig. 4.

V 2 Solutio.

Solutio.

Positis semiaxibus $CA = a$, $CB = b$, et breuitatis ergo $n = \frac{bb - aa}{bb}$, diuidatur primo tota peripheria ellipsis ita in punctis f et g, vt partium ABf, $f\alpha g$, $g\beta A$ differentiae sint geometrice assignabiles. Statuantur his punctis f et g abscissae respondentes $AF = f$ et $AG = -g$ quatenus haec in plagam oppositam cadit. Problema igitur praecedens ad hunc casum accommodabitur, si ob punctum b in A incidens ponatur $b = 0$ et $\sqrt{(bb - hh)} = + b$, quo facto habebimus:

$$g = \frac{2bbf\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)}}{b^4 - nf^4} \text{ et } g = -f$$

sicque erit $AG = AF = f$: et ternae partes ellipsis ita different, vt sit:

$$f\alpha g - ABf = \frac{nf^3}{bb} \text{ et } ABf - A\beta g = 0.$$

Cum autem sit $g = -f$ erit:

$$2bbf\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} = -(b^4 - nf^4)f$$

vnde quadratis sumtis elicitur:

$$nnf^8 - 6nb^4f^4 + 4(n+1)b^6ff - 3b^8 = 0.$$

Ad hanc aequationem resoluendam fingantur eius factores:

$$(nf^4 + Pff + Q)(nf^4 - Pff + R) = 0$$

essėque oportet:

$$-6nb^4 = n(Q+R) - PP;\quad 4(n+1)b^6 = P(R-Q);\quad -3b^8 = QR$$

ex quibus fit:

$$R + Q = \frac{PP - 6nb^4}{n};\quad R - Q = \frac{4(n+1)b^6}{P}$$

vnde

vnde valores ipſarum Q et R in poſtrema aequatione ſubſtituta praebent:

$$P^6 - 12nb^4P^4 + 48nnb^8P^2 = 16nn(n+1)^2b^{12}$$

vbi commode euenit, vt ſubtrahendo vtrinque $64n^3b^{12}$ cubus relinquatur, cuius radice extracta fiet:

$$PP - 4nb^4 = 2b^4\sqrt[3]{2nn(1-n)^2}$$

et $P = bb\sqrt{(4n + 2\sqrt[3]{2nn(1-n)^2})}$

Quo valore ſubſtituto, reperietur:

$$R + Q = \frac{-2b^4(n - \sqrt[3]{2nn(1-n)^2})}{n}$$

$$R - Q = \frac{2b^4\sqrt{(4nn - 2n\sqrt[3]{2nn(1-n)^2} + \sqrt[3]{4n^4(1-n)^4})}}{n}$$

Deinde vero ipſa reſolutio ſuppeditat:

$$ff = \frac{-P \pm \sqrt{(PP - 4nQ)}}{2n} \quad \text{et} \quad ff = \frac{+P \pm \sqrt{(PP - 4nR)}}{2n}$$

vnde, ſubſtitutis valoribus inuentis, obtinebitur:

$$\frac{2nff}{bb} = -\sqrt{(4n + 2\sqrt[3]{2nn(1-n)^2})} \pm \sqrt{(8n - 2\sqrt[3]{2nn(1-n)^2}}$$
$$+ 4\sqrt{(4nn - 2n\sqrt[3]{2nn(1-n)^2} + \sqrt[3]{4n^4(1-n)^4}))}$$

$$\frac{2nff}{bb} = +\sqrt{(4n + 2\sqrt[3]{2nn(1-n)^2})} \pm \sqrt{(8n - 2\sqrt[3]{2nn(1-n)^2}}$$
$$- 4\sqrt{(4nn - 2n\sqrt[3]{2nn(1-n)^2} + \sqrt[3]{4n^4(1-n^4)}))}$$

ex his autem quaternis valoribus alii locum habere nequeunt, niſi qui ff praebeant poſitiuum et minus quam bb.

Inuento iam valore idoneo pro f, pro punctis quaeſitis p et q ponantur abſciſſae $AP = p$ et $AQ = q$, ac ſtatuatur:

$$0 = b^4(pp + qq - ff) - 2bbpq\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} - nffppqq$$

eritque

eritque $Af - pq = \frac{nfpq}{bb}$; hincque

$$3Af - 3pq = \frac{3nfpq}{bb}.$$ Supra autem habebamus

$$fg - Af = \frac{nf^3}{bb}$$

$$Ag - Af = 0$$

quae tres aequationes additae dant:

$$Af + fg + gA - 3pq = \frac{3nfpq + nf^3}{bb}.$$

Quare vt arcus pq praecise fit triens totius peripheriae, necesse est, vt fit $3pq = ff$, seu $pq = -\frac{1}{3}ff$, vnde fit:

$$pp + qq = ff - \frac{2ff}{3bb}\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} + \frac{nf^6}{9b^4}$$

hincque porro:

$$qq \pm 2pq + pp = ff + \frac{2}{3}ff - \frac{2ff}{3bb}\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} + \frac{nf^6}{9b^4}$$

Fiet ergo:

$$q - p = \frac{f}{3bb}\sqrt{(15b^4 + nf^4 - 6bb\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)})}$$

$$q + p = \frac{f}{3bb}\sqrt{(3b^4 + nf^4 - 6bb\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)})}.$$

Quia rectangulum $pq = -\frac{1}{3}ff$ est negatiuum, patet binarum abscissarum p et q alteram esse positiuam, alteram negatiuam. Cum autem singulis abscissis bina curvae puncta respondeant, vtrum conueniat ex valoribus $\sqrt{(bb-pp)}$ et $\sqrt{(bb-qq)}$ siue sint positiui, siue negatiui, dignoscitur. Eorum autem signa ita comparata esse oportet, vt satisfiat huic formulae.

$$\sqrt{(bb-qq)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-ff)(bb-pp)} - bfp\sqrt{(bb-nff)(bb-npp)}}{b^4 - nffpp}.$$

Casus $n = \frac{1}{2}$

57. Prae ceteris hic casus $n = \frac{1}{2}$, seu $bb = 2aa$, est notatu dignus, quod hoc solo radicale cubicum rationale

rationale euadit. Erit scilicet $\sqrt[4]{2nn(1-n)^2} = \frac{1}{2}$, et $P = bb\sqrt{3}$; vnde $R + Q = 0$ et $R - Q = 2b^4\sqrt{3}$; ideoque $Q = -b^4\sqrt{3}$, et $R = +b^4\sqrt{3}$. Cum iam sit

$$ff = -P \pm \sqrt{(PP - 2Q)} \quad \text{et} \quad ff = +P \pm \sqrt{(PP - 2R)}$$

erit

$$\frac{ff}{bb} = -\sqrt{3} \pm (3 + 2\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \frac{ff}{bb} = +\sqrt{3} \pm \sqrt{(3 - 2\sqrt{3})}$$

Horum quatuor valorum bini posteriores sunt imaginarii, priorum vero solus positiuus locum habet, ita vt sit:

$$ff = bb(-\sqrt{3} + \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})}), \text{ quia hinc } ff < bb.$$

Cum porro punctum f supra axem ellipsis CB existat, erit

$$\sqrt{(bb - ff)} = -b\sqrt{(1 + \sqrt{3} - \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})})} \text{ et}$$

$$\sqrt{(bb - nff)} = \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{(2 + \sqrt{3} - \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})})} \text{ vnde}$$

$$\sqrt{(bb - ff)(bb - nff)} = \frac{-bb}{\sqrt{2}}\sqrt{(8 + 5\sqrt{3} - (3 + 2\sqrt{3})\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})})}$$

siue

$$\sqrt{(bb - ff)(bb - nff)} = -\tfrac{1}{2}bb(\sqrt{(9 + 6\sqrt{3})} - 2 - \sqrt{3}).$$

Cum nunc sit $ff = bb(\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})} - \sqrt{3})$, erit

$$2pq = -\tfrac{2}{3}bb(\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})} - \sqrt{3}) \text{ et}$$

$$pp + qq = +\tfrac{2}{3}bb(3 - \tfrac{1}{2}\sqrt{(9 + 6\sqrt{3})})$$

ex quibus fit

$$(q + p)^2 = \tfrac{2}{3}bb(+3 + \sqrt{3} - \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(9 + 6\sqrt{3})})$$

$$(q - p)^2 = \tfrac{2}{3}bb(+3 - \sqrt{3} + \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(9 + 6\sqrt{3})})$$

et radicibus extractis

$$q + p = \tfrac{1}{3}b\sqrt{(3 + \sqrt{3})(6 - 2\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})})}$$

$$q - p = \tfrac{1}{3}b\sqrt{(3 - \sqrt{3})(6 + 2\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})})}$$

 Hinc

Hinc in fractionibus decimalibus erit

$$ff = 0,8104990\,bb; \qquad f = 0,9002272\,b$$

$$\sqrt{(bb-ff)} = -0,4354205\,b; \quad \sqrt{(bb-nff)} = +0,7712300\,b$$

$$2pq = -0,5402727\,bb; \quad (q+p)^2 = 0,4811342\,bb$$

$$pp+qq = +1,0214069\,bb; \quad (q-p)^2 = 1,5616796\,bb$$

$$q+p = 0,6936383\,b; \qquad p = 0,9716548\,b$$

$$p-q = 1,2496712\,b; \qquad q = -0,2780165\,b$$

quos valores pro p et q figura propemodum refert: atque ex formula $\sqrt{(bb-pp)}$ et $\sqrt{(bb-qq)}$ inuoluente intelligitur, punctum p infra axem βB, punctum q vero supra eum capi debere.

DE

DE AEQVATIONIBVS DIFFERENTIALIBVS SECVNDI GRADVS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Omnium quaestionum, quae quidem in Mathesi suscipiuntur, solutio duabus constat partibus, quarum altera in eo versatur, vt conditiones, quibus quaestio determinatur, ad aequationes analyticas perducantur, quae solutionem continere dicuntur, altera vero pars in ipsa harum aequationum resolutione occupatur. Si quaestio ad Mathesin mixtam, vel applicatam pertineat, prior pars petenda est ex principiis, quibus ista disciplina Mathematica innititur, huicque scientiae quasi est propria; pars autem posterior semper ad Analysin puram est referenda, cum tota in resolutione aequationum versetur. Ita si quaestio, vel ex Mechanica, vel ex Hydrodynamica, vel ex Astronomia, fuerit desumta, ex principiis cuique harum disciplinarum propriis quaestionem primum ad aequationes reduci oportet, tum vero istarum aequationum resolutio artificiis, quae quidem in Analysi comperta habemus, vnice est relinquenda. Ex quo satis est manifestum, quanti sit momenti Analysis per cunctas Matheseos partes.

 2. Prin-

2. Principia autem fere omnium Matheseos applicatae partium iam ita sunt euoluta, vt nulla propemodum quaestio eo pertinens proferri possit, cuius solutio non aequationibus comprehendi queat. Siue enim quaestio sit de aequilibrio, siue de motu corporum cuiuscunque indolis, tam solidorum, quam fluidorum, cum ab aliis, tum a me, principia certissima sunt stabilita, quorum ope semper ad aequationes peruenire licet: atque si corpora coelestia viribus quibuscunque in se inuicem agere statuantur, omnes perturbationes, quae inde in eorum motibus efficiuntur, non difficulter ad aequationes reuocantur; ita vt si has aequationes resoluere valeremus, nihil amplius superesset, quod in his scientiis desiderari posset. Quocirca omne studium, quod in Mathesin confertur, vtilius impendi nequit, quam si in limitibus Analyseos promouendis elaboremus.

3. Quoties autem problema ad Mathesin applicatam pertinens tractatur, rarissime in aequationes algebraicas incidimus, quarum resolutio, etiamsi nondum vltra quartum gradum sit perducta, tamen ope approximationum ita exacte perfici potest, vt pro perfecta sit habenda. Perpetuo autem fere deuoluimur ad aequationes differentiales, et quidem maximam partem ad differentiales secundi ordinis; principia quippe mechanica statim differentialia secundi gradus implicant: ita vt sine Analyseos infinitorum subsidio, nihil fere in his scientiis praestari liceat. Cum autem in resolutione aequationum differentialium primi gradus non admodum simus profecti, multo minus est mirandum, si aqua nobis

nobis haereat, quando quaestiones ad aequationes differentiales secundi gradus reducuntur. Regulae enim, quae pro huiusmodi aequationum resolutione sunt inventae, et quas mihi equidem vindicare possum, ita sunt limitatae, vt certis tantum casibus, qui non admodum frequenter occurrunt, in vsum vocari queant. Huiusmodi autem regulas plures exposui in Comment. Acad. Petrop. et Vol. VII. Miscell. Berol.

4. Interim tamen iam saepius eiusmodi se mihi obtulerunt casus aequationum differentialium secundi gradus, quas tametsi ope regularum illarum tractare non licuerit, tamen aliunde earum integralia habuerim perspecta; neque vlla via directa patebat, qua haec integralia erui possent. Huiusmodi casus eo magis sunt notatu digni, quod comparatio illarum aequationum cum suis integralibus tutissimam viam patefacere videatur, earum resolutionem per certas methodos perficiendi. In quo negotio, si euentus spem non fefellerit, nullum est dubium, quin methodi hunc in finem detectae, multo latius pateant, ac nostram facultatem, aequationes differentiales secundi gradus tractandi, non mediocriter promoueant. Iis ergo, quos huiusmodi studia iuuant, non ingratum fore arbitror, si casus illos mihi oblatos commemorauero, vt occasionem inde adipiscantur, in hac parte Analysin amplificandi, tum vero ipse methodos exponam, quas horum casuum contemplatio mihi suppeditauit.

5. Primum huiusmodi exemplum mihi occurrit in Mechanicae meae Tom. I. pag. 465. vbi

ad hanc perueni aequationem differentialem secundi gradus:

$$2Bxddx - 4Bdx^2 = x^{n+5}dp^2(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}$$

in qua differentiale dp sumtum est constans. Eius autem integrale aliunde mihi constabat in hac forma contineri:

$$x^{n+6}dp^2(1+pp)^{\frac{n+2}{2}} + Cds^2 = 0$$

existente $ds^2 = (1+pp)dx^2 + 2pxdpdx + xxdp^2$. Poteram etiam notare valorem huius constantis C esse $= -(n+1)B$. Diu tum temporis operam inutiliter perdidi in methodo directa indaganda, cuius ope istam aequationem integralem ex illa differentiali secundi gradus eruere possem, neque vllum artificium cognitum huc deducere est visum. Caeterum notari conuenit, integrale hic exhibitum tantum esse particulare, quia non continet quantitatem constantem ab arbitrio nostro pendentem, quae per integrationem esset introducta, infra autem ostendam ob talem constantem adiici posse huiusmodi terminum Ex^4dp^2.

6. In aliud simile exemplum incidi in opusculorum meorum prima collectione pag. 82, vbi motum corporum in superficiebus mobilibus sum perscrutatus: perueni autem in euolutione certi cuiusdam casus ad hanc aequationem differentialem secundi gradus:

$$\frac{ddr}{r} + \frac{(F+Mkk)^2\theta^2du^2}{(Mkkrr+F+2Gu+Huu)^2} = 0$$

vbi differentiale du sumtum est constans, litterae autem F, G, H, Mkk et θ denotant quantitates constantes quascunque. Nullo modo quoque huius aequationis inte-

integrale eruere poteram, aliunde autem noueram, eius integrale esse:

$$\frac{(F+Mkk)^2\theta^4du^2}{Mkkrr+F+2Gu+Huu}+\frac{dr^2}{r^2}(F+2Gu+Huu)-\frac{2dudr}{r}(G+Hu)$$
$$+Hdu^2=\frac{Hdu^2}{r^2}+\frac{(F+Mkk)\theta^2du^2}{rr}$$

quod quidem etiam est particulare, et quia tantopere est complicatum, multo minus patet, quomodo per integrationem ex illa aequatione erui queat. Deinceps vero monstrabo, hoc integrale completum reddi, si loco termini $\frac{Hdu^2}{rr}$, adiiciatur $\frac{Cdu^2}{rr}$, ita vt C designet quantitatem constantem, a reliquis, quae in aequatione differentiali secundi gradus insunt, plane non pendentem.

7. Deinde etiam alia problemata tractans, perductus fui ad huiusmodi aequationes differentiales secundi gradus, quarum integratio non parum recondita videbatur. Veluti huius aequationis differentialis secundi gradus:

$$rrddr+rdr^2=n^2sds^2$$

sumto elemento ds constante, integrale particulare quidem inueni esse:

$$rdr+nrds+nnsds=0$$

quae quidem aequatio, quia binae variabiles r et s vbique earundem dimensionum, per methodum a me olim exhibitam, tractari posset. Porro quoque se mihi obtulit haec aequatio differentio-differentialis:

$$ds^2(\alpha ss+\beta s+\gamma)=rrdr^2+2r^3ddr$$

sumto elemento ds constante, cuius integrale completum deprehendi esse:

$$C=-\frac{1}{4}\left(\frac{rdr^2}{ds^2}+\frac{\alpha ss+\beta s+\gamma}{r}\right)^2+\frac{2rdr(2\alpha s+\beta)}{ds}-2\alpha rr$$

quod,

quod, quomodo inde elici queat, haud facile patet. Quin etiam ipsa aequatio integralis, etsi est differentialis primi tantum gradus, parum adiumenti afferre videtur, ob insignem variabilium implicationem.

8. Haec quatuor exempla sufficiunt, ad ostendendum, plures adhuc methodos deesse, quibus aequationes differentiales secundi gradus integrari queant, simul autem, quoniam his quidem casibus integralia constant, de earum inuentione non esse desperandum. Equidem post varia tentamina, quibus has aequationes tractaui, comperi, totum negotium eo redire, vt idonea quaeratur quantitas, per quam istae aequationes multiplicatae integrationem admittant; tali autem multiplicatore inuento, integratio nulla amplius laborat difficultate. Quemadmodum enim omnium aequationum differentialium primi gradus integratio eo reduci potest, vt inuestiganda sit functio quaepiam binarum variabilium, per quam aequatio multiplicata euadat integrabilis, ita etiam, pro omnibus aequationibus differentialibus secundi gradus, hanc regulam non dubito tanquam generalem in medium afferre, vt statuam semper eiusmodi functionem variabilium dari, per quam aequatio multiplicata reddatur integrabilis.

9. Loquor autem hic de eiusmodi tantum aequationibus, quae duas solum variabiles inuoluunt, et quae iam eo sint perductae, vt differentialia supremi gradus vnicam dimensionem obtineant. Ponamus x et y esse ambas variabiles, et posito $dy = p\,dx$; $dp = q\,dx$; $dq = r\,dx$, $dr = s\,dx$, etc. omnes aequationes differentiales

tiales cuiusque gradus ad formas sequentes reduci posse constat:

I. Forma generalis aequationum differentialium primi gradus

$p =$ funct. (x et y)

II. Forma generalis aequationum differ. secundi gradus

$q =$ funct. (x, y et p)

III. Forma generalis aequationum differ. tertii gradus

$r =$ funct. (x, y, p et q)

IV. Forma generalis aequationum differ. quarti gradus

$s =$ funct. (x, y, p, q, et r)

et ita porro de sequentibus altiorum graduum.

10. Cum igitur proposita quacunque aequatione differentiali primi gradus $p =$ funct. (x et y), semper detur eiusmodi functio ipsarum x et y, per quam illa aequatio multiplicata reddatur integrabilis, etiamsi saepe numero hanc functionem assignare non valeamus, nullum est dubium, quin etiam pro aequationibus differentialibus secundi gradus $q =$ funct. (x, y et p) eiusmodi multiplicator existat, qui eas reddat integrabiles, ideoque ad differentialia primi gradus reducat. Iam vero hic casus distingui oportet, quibus iste multiplicator vel binarum tantum variabilium x et y functio existat, vel insuper quantitatem p, seu rationem differentialium $\frac{dy}{dx}$ inuoluat: ob hoc enim discrimen ipsa multiplicatoris inuentio modo facilior, modo difficilior

 euadet.

euadet. Casus autem euolutu facillimus habebitur, si multiplicator alterius tantum variabilis solius fuerit functio.

11. Si igitur litterae P, Q, R, S, T sumantur ad designandas quascunque functiones ipsarum variabilium x et y, sequentes ordines simpliciores multiplicatorum pro aequationibus differentialibus secundi gradus constituentur:

Multiplicator ordinis primi .. P

Multiplicator ordinis secundi .. $Pdx+Qdy$

Multiplicator ordinis tertii .. $Pdx^2+Qdxdy+Rdy^2$

Multiplicator ordinis quarti .. $Pdx^3+Qdx^2dy+Rdxdy^2+Sdy^3$

etc.

Hi quidem sunt ordines simpliciores, quibus $p=\frac{dy}{dx}$, vel ad nullam, vel ad vnam, vel duas, vel tres dimensiones assurgit: facile autem colligitur fieri posse, vt littera p vel per fractiones, vel irrationalia, vel adeo transcendentia, multiplicatorem afficiat, cuiusmodi casus ingentem campum nouarum inuestigationum aperiunt. Hic quidem tantum in formis expositis versari constitui, quia eae sufficiunt exemplis allatis expediendis, simulque nos ad aequationes multo generaliores earum ope resolubiles manuducent.

12. Proposita ergo aequatione quacunque differentiali secundi gradus, $q=$ funct. $(x, y$ et $p)$, quae sumto dx constanti ad hanc formam redigetur $ddy=dx^2$ funct. $(x, y$ et $\frac{dy}{dx})$, tentetur primo multiplicator primae formae P, num eius ope integratio succedat? sin minus,

minus, sumatur multiplicator formae secundae $Pdx+Qdy$, qui nisi negotium conficiat, recurratur ad multiplicatorem formae tertiae, tum quartae, etc. mox autem colligere licebit, vtrum per factores harum formarum integratio absolui queat, nec ne? quo posteriori casu, ad formas magis complicatas erit confugiendum, ac dummodo huiusmodi calculo fuerimus assueti, facultatem nobis comparabimus, pro quouis casu oblato idoneam multiplicatoris formam dignoscendi: ad quem scopum euolutio propositorum exemplorum erit accommodata.

Problema 1.

13. Proposita aequatione differentiali secundi gradus:

$$2aydd y-4ady^2-y^{n+5}dx^2(1+xx)^{\frac{n-1}{2}}=0$$

in qua differentiale dx sumtum est constans, eius integrale inuenire.

Solutio.

Factorem primae formae P tentanti mox patebit, negotium non succedere, nisi sit $n=-2$, quo quidem casu foret $P=\frac{1}{y^3}$ et aequationis $\frac{2ayddy-4ady^2}{y^3}$ $-\frac{dx^2}{(1+xx)\sqrt{(1+xx)}}=0$ integrale esset

$$\frac{2ady}{yy}+\frac{xdx}{\sqrt{(1+xx)}}=\alpha dx,$$ denuoque integrando haberetur

$$-\frac{2a}{y}+\sqrt{(1+xx)}=\alpha x+\beta;$$

ita vt hic casus specialis nullam habeat difficultatem. In genere igitur pro valore quocunque exponentis n,

 tentetur

tentetur factor formae secundae $Pdx + Qdy$, et aequatione ad hanc speciem reducta

$$2\,addy - \frac{4ady^2}{y} - y^{n+4}dx^2(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} = 0$$

productum erit:

$$\left.\begin{array}{l} +2aPdxddy - \frac{4aPdxdy^2}{y} - Py^{n+4}dx^3(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} \\ +2aQdyddy - \frac{4aQdy^3}{y} - Qy^{n+4}dx^2dy(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} \end{array}\right\} = 0$$

quam per hypothesin integrabilem esse oportet. Duo autem primi termini, qualescunque P et Q sint functiones ipsarum x et y, nonnisi ex differentiatione horum $2aPdxdy + aQdy^2$ oriri potuerunt; vnde habebimus

Primam partem integralis $2aPdxdy + aQdy^2$.

Huius ergo differentiale subtrahamus a nostra aequatione et ob $dP = dx\left(\frac{dP}{dx}\right) + dy\left(\frac{dP}{dy}\right)$; $dQ = dx\left(\frac{dQ}{dx}\right) + dy\left(\frac{dQ}{dy}\right)$, aequatio ordinata erit:

$$\left.\begin{array}{l} -Py^{n+4}dx^3(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} - Qy^{n+4}dx^2dy(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{4aPdxdy^2}{y} - \frac{4aQdy^3}{y} \\ \qquad -2adx^2dy\left(\frac{dP}{dx}\right) - 2adxdy^2\left(\frac{dP}{dy}\right) - ady^3\left(\frac{dQ}{dy}\right) \\ \qquad -adxdy^2\left(\frac{dQ}{dx}\right) \end{array}\right\} = 0$$

quae ob dx sumtum constans nullo modo integrabilis esse potest, nisi termini per dy^3 et dy^2 affecti seorsim se tollant. Necesse ergo est, sit:

$$\frac{4Q}{y} + \left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0, \text{ seu } 4Qdy + ydy\left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0$$

et $\frac{4P}{y} + 2\left(\frac{dP}{dy}\right) + \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0$

Iam vt ex aequatione priori valorem ipsius Q eruamus, spectemus x vt constans, eritque $dy\left(\frac{dQ}{dy}\right) = dQ$, denotat

notat enim $dy(\frac{dQ}{dy})$ incrementum ipſius Q ex ſolius y variabilitate ortum, vnde cum ſit $4Qdy + ydQ = 0$, obtinebimus integrando

$$Qy^4 = K \text{ functioni ipſius } x \text{ tantum}$$

ita vt ſit $Q = \frac{K}{y^4}$ et $(\frac{dQ}{dx}) = \frac{1}{y^4}(\frac{dK}{dx})$

vbi $(\frac{dK}{dx})$ erit functio ipſius x. Nunc in altera aequatione quoque x ſumatur conſtans, fietque:

$$4Pdy + 2ydP + \frac{dy}{y^3}(\frac{dK}{dx}) = 0$$

quae per y multiplicata et integrata dat:

$$2Pyy - \frac{1}{y}(\frac{dK}{dx}) = 2L, \text{ ideoque}$$

$$P = \frac{L}{yy} + \frac{1}{2y^3}(\frac{dK}{dx})$$

vbi L denotat functionem ipſius x tantum. Deſtructis ergo iſtis membris, ob $(\frac{dP}{dx}) = \frac{1}{yy}(\frac{dL}{dx}) + \frac{1}{2y^3}(\frac{ddK}{dx^2})$ erit

altera pars integralis:

$$-dx^2 \int ((1+xx)^{\frac{n-1}{2}} (Ly^{n+2}dx + \tfrac{1}{2}y^{n+1}dx(\tfrac{dK}{dx}) + Ky^n dy)$$
$$-2a dx^2 \int (\frac{dy}{yy}(\frac{dL}{dx}) + \frac{dy}{2y^3}(\frac{ddK}{dx^2}))$$

quae cum conſtet duobus membris, pro priori eſſe debet $L = 0$, et membri $\int (1+xx)^{\frac{n-1}{2}} (\frac{1}{2}y^{n+1}dx(\frac{dK}{dx}) + Ky^n dy)$ integrale erit $\frac{Ky^{n+1}}{n+1}(1+xx)^{\frac{n-1}{2}}$. Supereſt ergo vt reddatur $\frac{y^{n+1}dK}{n+1}(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{(n-1)Ky^{n+1}xdx}{n+1}(1+xx)^{\frac{n-3}{2}}$ $= \frac{1}{2}y^{n+1}dK(1+xx)^{\frac{n-1}{2}}$, ſeu $2(n-1)Kxdx = (n-1)dK(1+xx)$.

Atque hinc elicitur $K = 1 + xx$; ita vt alterius partis integralis membrum prius fit $-\frac{1}{n+1} y^{n+1} dx^2 (1+xx)^{\frac{n+1}{2}}$: at membrum posterius ob $L = 0$ et $\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) = 2$ fiet

$$-2adx^2 \int \frac{dy}{y^3} = \frac{adx^2}{yy}$$

cuius integratio cum sponte successerit, totum negotium est confectum, et integralis pars altera erit:

$$-\frac{1}{n+1} y^{n+1} dx^2 (1+xx)^{\frac{n+1}{2}} + \frac{adx^2}{yy}.$$

Cum deinde sit $L = 0$ et $K = 1 + xx$, erit $\left(\frac{dK}{dx}\right) = 2x$, hincque fiet: $P = \frac{x}{y^3}$ et $Q = \frac{1+xx}{y^4}$; ex quo integralis pars prima habebitur

$$\frac{2axdxdy}{y^3} + \frac{a(1+xx)dy^2}{y^4}$$

Quocirca aequationis differentio-differentialis propositae adhibito termino constante Cdx^2 integrale completum erit:

$$\frac{adx^2}{yy} + \frac{2axdxdy}{y^3} + \frac{a(1+xx)dy^2}{y^4} - \frac{1}{n+1} y^{n+1} dx^2 (1+xx)^{\frac{n+1}{2}} = Cdx^2;$$

seu per y^4 multiplicando:

$$\frac{1}{n+1} y^{n+5} dx^2 (1+xx)^{\frac{n+1}{2}} = a(yydx^2 + 2xydxdy + (1+xx)dy^2) - Cy^4dx^2$$

quod egregie conuenit cum eo, quod ante per methodum indirectam eram assecutus.

Coroll. I.

14. Aequatio ergo differentio-differentialis

$$2addy - \frac{4ady^2}{y} - y^{n+4} dx^2 (1+xx)^{\frac{n-1}{2}} = 0$$

integrabilis redditur, si multiplicetur per hunc factorem

$$\frac{xdx}{y^3} + \frac{(1+xx)dy}{y^4}$$

qui

qui si aliunde cognosci potuisset, integratio sine vlla difficultate perfecta fuisset.

Coroll. 2.

15. Vicissim ergo si aequatio integralis inuenta

$$\frac{ayydx^2+2axydxdy+a(1+xx)dy^2}{y^4}-\frac{1}{n+1}y^{n+1}dx^2(1+xx)^{\frac{n+1}{2}}=Cdx^2$$

sumto elemento dx constante differentietur, quo pacto constans C ex calculo egreditur, differentiale erit diuisibile per hanc formulam $\frac{xdx}{y^3}+\frac{(1+xx)dy}{y^4}$, seu hanc $xydx+(1+xx)dy$, et diuisione instituta ipsa demum aequatio differentio-differentialis proposita proueniet.

Coroll. 3.

16. Si aequatio proposita per $\frac{\surd(1+xx)}{y^4}$ multiplicetur, vt habeatur

$$2a\left(ddy-\frac{2dy^2}{y}\right)\frac{\surd(1+xx)}{y^4}-y^n dx^2(1+xx)^{\frac{n}{2}}=0$$

multiplicator eam reddens integrabilem erit:

$$\frac{xydx}{\surd(1+xx)}+dy\surd(1+xx)=d.y\surd(1+xx)$$

Quare si ponatur $y\surd(1+xx)=z$, haec obtinebitur aequatio:

$$\frac{2addz(1+xx)^2}{z^4}-\frac{4adz^2(1+xx)^2}{z^5}+\frac{4axdxdz(1+xx)}{z^4}-\frac{2adx^2}{z^3}-z^n dx^2=0$$

quae per dz multiplicata integrationem admittit. Erit enim integrale:

$$\frac{adz^2(1+xx)^2}{z^4}+\frac{adx^2}{zz}-\frac{1}{n+1}z^{n+1}dx^2=Cdx^2.$$

Coroll.

Coroll. 4.

17. Hinc ergo patet, quomodo per idoneam ſubſtitutionem integratio ſubleuari queat; cum enim aequatio propoſita per ſubſtitutionem $y = \frac{z}{\sqrt{(1+xx)}}$ in hanc poſteriorem formam fuerit transmutata, non amplius foret difficile integrationem peragere. Sed praeterquam quod talis ſubſtitutio non facile occurrat, ſi multiplicator fuerit ordinis tertii, vel altioris, huiusmodi reductio ne locum quidem habere poterit.

Scholion.

18. In hac ſolutione vſus ſum ſingulari ſpecie calculi, qua ad plurium litterarum introductionem vitandam differentiale functionis P duarum variabilium x et y expreſſi per

$$dP = dx\left(\frac{dP}{dx}\right) + dy\left(\frac{dP}{dy}\right)$$

vbi more iam ſatis vſitato, $dx\left(\frac{dP}{dx}\right)$ denotat incrementum ipſius P ex ſola variabilitate ipſius x oriundum, et $dy\left(\frac{dP}{dy}\right)$ eius incrementum, quod ex variabilitate ſolius y naſcitur; conſtat autem haec duo incrementa addita praebere completum differentiale ipſius P ex vtra variabili x et y natum. Hinc formulae $\left(\frac{dP}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ denotabunt functiones finitas variabilium x et y, quippe quae per differentiationem omiſſis differentialibus habentur, ita ſi ſit $P = y\sqrt{(1+xx)}$, erit $\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{xy}{\sqrt{(1+xx)}}$ et $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \sqrt{(1+xx)}$. Tum vero cognita altera parte huiusmodi differentialis veluti $dx\left(\frac{dP}{dx}\right)$, ipſa quantitas P inde ex parte cognoſcitur. Spectata enim ſola x vt variabili

variabili erit $P = \int dx\left(\frac{dP}{dx}\right) + Y$, denotante Y functionem ipsius y tantum, atque ex hoc fonte in solutione valores quantitatum P et Q determinaui. Manifestum est quoque, si K fuerit functio ipsius x tantum, tum $dx\left(\frac{dK}{dx}\right)$ eius completum differentiale iam significare, ita vt sit $dx\left(\frac{dK}{dx}\right) = dK$: porro autem haec scriptio $\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$ denotat idem quod $\left(\frac{d.(dK:dx)}{dx}\right)$, seu si ponatur $\left(\frac{dK}{dx}\right) = k$, erit $\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) = \left(\frac{dk}{dx}\right)$. Erit enim pariter k functio ipsius x tantum; ita si sit $K = \sqrt{(1+xx)}$, erit $\left(\frac{dK}{dx}\right) = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$ et $\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) = \frac{1}{(1+xx)\sqrt{(1+xx)}}$: hocque modo vlterius progredi licebit, vt sit $\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right) = \frac{-3x}{(1+xx)^2\sqrt{(1+xx)}}$, atque haec ad intelligentiam tam huius solutionis, quam sequentium annotasse necesse est visum. Caeterum consideratio huius solutionis facile deducit ad sequens Theorema generalius.

Theorema I.

19. Ista aequatio differentialis secundi gradus, posito dx constante,

$$a\,ddy - \frac{m\,a\,dy^2}{y} + y^n dx^2 (\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n-4m+3}{2m-2}} = 0$$

integrabilis redditur, si multiplicetur per hunc factorem:

$$\frac{(\beta + \gamma x)dx}{(m-1)y^{2m-1}} + \frac{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dy}{y^{2m}}$$

atque aequatio integralis erit:

$$\frac{a\gamma y^2 dx^2 + 2(m-1)a(\beta+\gamma x)y\,dx\,dy + (m-1)^2 a(\alpha+2\beta x+\gamma xx)dy^2}{2(m-1)^2 y^{2m}}$$

$$+ \frac{y^{n-2m+1}dx^2}{n-2m+1}(\alpha+2\beta x+\gamma xx)^{\frac{n-2m+1}{2m-2}} = C\,dx^2.$$

Coroll. 1.

20. Si fuerit $n = 1$, prodibit ista aequatio differentialis secundi gradus:

$$a\,ddy - \frac{m\,a\,dy^2}{y} + \frac{y\,dx^2}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^2} = 0$$

quae ergo multiplicata per $\frac{(\beta + \gamma x)dx}{(m-1)y^{2m-1}} + \frac{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dy}{y^{2m}}$

fit integrabilis, eius integrali existente:

$$\frac{a\gamma yy dx^2 + 2(m-1)a(\beta + \gamma x)\,ydxdy + (m-1)^2 a(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dy^2}{2(m-1)^2 y^{2m}}$$

$$- \frac{yy\,dx^2}{2(m-1)y^{2m}(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)} = C\,dx^2.$$

Coroll. 2.

21. Posito $m - 1 = \mu$, si statuamus $y = e^{\int v\,dx}$, aequatio nostra fiet differentialis primi ordinis:

$$a\,dv - \mu\,a\,vv\,dx + \frac{dx}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^2} = 0$$

cuius ergo integralis erit

$$a\gamma yy dx^2 + 2\,\mu\,a(\beta + \gamma x)\,ydx\,dy + \mu^2 a(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)\,dy^2$$
$$- \frac{\mu\,yy\,dx^2}{\alpha + 2\beta x + \gamma xx} = 2\,\mu\,\mu\,C y^{2m} dx^2$$

seu pro y valore suo substituto

$$a\gamma + 2\mu a(\beta + \gamma x)v + \mu^2 a(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)vv - \frac{\mu}{\alpha + 2\beta x + \gamma xx}$$
$$= 2\,\mu\,\mu\,C e^{2\mu\int v dx}.$$

Coroll. 3.

22. Statim ergo aequationis differentialis propositae:

$$a\,dv - \mu\,a\,vv\,dx + \frac{dx}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^2} = 0$$

posito

posito $C=0$, habemus aequationem integralem particularem, quae est:

$$0=a\gamma+2\mu a(\beta+\gamma x)v+\mu^2 a(\alpha+2\beta x+\gamma xx)vv-\frac{\mu}{\alpha+2\beta x+\gamma xx}$$

ex qua per methodum a me alias expositam integrale completum erui potest. Quin etiam, si illa aequatio differentialis per hanc formam integralem diuidatur, integrabilis reddetur.

Problema 2.

23. Proposita aequatione differentiali secundi gradus:

$$\frac{ddy}{y}+\frac{a\,dx^2}{(\alpha+2\beta x+\gamma xx+cyy)^2}=0$$

In qua differentiale dx sumtum est constans, eius integrale inuenire.

Solutio.

Tentetur iterum integratio per factorem $Pdx+Qdy$, ac posito breuitatis gratia $\alpha+2\beta x+\gamma xx+cyy=Z$, conuertatur aequatio in hanc formam:

$$ddy+\frac{ay\,dx^2}{ZZ}=0$$

quae per $P\,dx+Q\,dy$ multiplicata praebet:

$$P\,dx\,ddy+Q\,dy\,ddy+\frac{aPy\,dx^3}{ZZ}+\frac{aQy\,dx^2\,dy}{ZZ}=0.$$

Quae cum integrabilis esse debeat, dabit statim

I. *primam integralis partem* $=P\,dx\,dy+\frac{1}{2}Q\,dy^2$;

superest ergo, vt integrabilis reddatur sequens expressio:

$$-\tfrac{1}{2}dy^3\left(\frac{dQ}{dy}\right)-\tfrac{1}{2}dx\,dy^2\left(\frac{dQ}{dx}\right)+\frac{aQy\,dx^2\,dy}{ZZ}+\frac{aPy\,dx^3}{ZZ}$$
$$-dx\,dy^2\left(\frac{dP}{dy}\right)-dx^2\,dy\left(\frac{dP}{dx}\right).$$

Primum ergo necesse est, vt sit $\left(\frac{dQ}{dy}\right)=0$, vnde fit Q functio ipsius x tantum, quae sit $Q=K$; tum vero etiam termini dy^2 inuoluentes destruendi sunt, ex quibus fit:

$$\left(\frac{dK}{dy}\right)+2\left(\frac{dP}{dx}\right)=0$$

seu sumto solo y pro variabili:

$$dy\left(\frac{dK}{dx}\right)+2dP=0$$

cuius integrale est

$$P=L-\tfrac{1}{2}y\left(\frac{dK}{dx}\right)$$

denotante L quoque functionem ipsis x. Quare ob

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)=\left(\frac{dL}{dx}\right)-\tfrac{1}{2}y\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$

et dx sumtum constans, altera pars integralis erit:

$$dx^2\int\frac{ay}{ZZ}\left(L\,dx-\tfrac{1}{2}y\,dx\left(\frac{dK}{dx}\right)+K\,dy\right)-dx^2\int dy\left(\left(\frac{dL}{dx}\right)-\tfrac{1}{2}y\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)\right)$$

at est $\int\frac{aKydy}{ZZ}=aK\int\frac{ydy}{(\alpha+2\beta x+\gamma xx+cyy)^2}$

vnde pro integrali nascitur

II. pars $=-\frac{a}{2c}\cdot\frac{K\,dx^2}{\alpha+2\beta x+\gamma xx+cyy}$

ideoque debet esse:

$$\frac{ay}{ZZ}\left(L\,dx-\tfrac{1}{2}y\,dK\right)=-\frac{a}{2c}\cdot\frac{(\alpha+2\beta x+\gamma xx+cyy)dK-2Kdx(\beta+\gamma x)}{ZZ}$$

seu

$$acLydx-\tfrac{1}{2}acyydK=aKdx(\beta+\gamma x)-\tfrac{1}{2}adK(\alpha+2\beta x+\gamma xx+cyy)$$

vel $acLydx=aKdx(\beta+\gamma x)-\tfrac{1}{2}adK(\alpha+2\beta x+\gamma xx)$

Perspicuum ergo est, esse debere

$$L=0 \text{ et } K=\alpha+2\beta x+\gamma xx.$$

Quare ob $\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)=2\gamma$ erit

III. vltima pars integralis $=+\tfrac{1}{2}\gamma yydx^2$.

Cum

Cum igitur ſit:

$$P = -y(\beta + \gamma x) \text{ et } Q = \alpha + 2\beta x + \gamma xx$$

erit noſter multiplicator:

$$-ydx(\beta + \gamma x) + dy(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)$$

et integrale quaeſitum habebitur:

$$-ydxdy(\beta+\gamma x)+\tfrac{1}{2}dy^2(\alpha+2\beta x+\gamma xx)-\frac{\alpha(\alpha+2\beta x+\gamma xx)dx^2}{2c(\alpha+2\beta x+\gamma xx+cyy)}$$
$$+\tfrac{1}{2}\gamma yy\,dx^2 = C\,dx^2$$

At ſi ponatur $C = \frac{-\alpha}{2c} + C$, erit hoc integrale:

$$\tfrac{1}{2}\gamma yy\,dx^2 - y\,dx\,dy(\beta + \gamma x) + \tfrac{1}{2}dy^2(\alpha+2\beta x+\gamma xx)$$
$$+\frac{\alpha yy\,dx^2}{2(\alpha+2\beta x+\gamma xx+cyy)} = C\,dx^2.$$

Quae forma conuenit cum ea, quam ſupra exhibui.

Theorema 2.

24. Iſta aequatio differentialis ſecundi gradus poſito dx conſtante

$$ddy + \frac{\alpha y^{n+1}dx^2}{(\alpha+2\beta x+\gamma xx+cyy)^{\frac{n+4}{2}}} = 0$$

integrabilis reddetur per multiplicatorem:

$$-y\,dx(\beta+\gamma x)+dy(\alpha+2\beta x+\gamma xx)$$

et integrale erit:

$$\tfrac{1}{2}\gamma yy\,dx^2 - y\,dx\,dy(\beta+\gamma x)+\tfrac{1}{2}dy^2(\alpha+2\beta x+\gamma xx)$$
$$+\frac{\alpha y^{n+2}dx^2}{(n+2)(\alpha+2\beta x+\gamma xx+cyy)^{\frac{n+2}{2}}} = C\,dx^2.$$

Coroll. 1.

25. Caſus problematis naſcitur ex Theoremate hoc, ſi ponatur $n=0$. Ceterum integrale in Theoremate

mate exhibitum ſimili modo elicitur, quo ſolutionem problematis expediuimus; vnde ſuperfluum foret eius demonſtrationem adiicere.

Coroll. 2.

26. Si ponatur $c=0$, caſus habebitur, quem etiam ex Theoremate primo deriuare licet, ſi ibi ponatur $m=0$. Dum enim pro a ſcribitur $\frac{1}{a}$ et $n+1$ loco n; integrale ibi datum perfecte congruit cum hoc, quod iſtud Theorema ſuppeditat pro caſu $c=0$.

Coroll. 3.

27. Hoc autem Theorema adeo primum in ſe complectitur: aequatio enim primi

$$addy-\frac{mady^2}{y}+y^n dx^2(\alpha+2\beta x+\gamma xx)^{\frac{n-4m+3}{2m-2}}=0$$

ſi ponatur $y=z^{\frac{1}{1-m}}$ abit in hanc:

$$\frac{a}{1-m}z^{\frac{m}{1-m}}ddz+z^{\frac{n}{1-m}}dx^2(\alpha+2\beta x+\gamma xx)^{\frac{n-4m+3}{2m-2}}=0$$

ſeu $\frac{addz}{1-m}+z^{\frac{n-m}{1-m}}dx^2(\alpha+2\beta x+\gamma xx)^{\frac{n-4m+3}{2m-2}}=0$.
Quodſi iam ſtatuatur $\frac{n-m}{1-m}=n+1$, vt fiat $n=1-n(m-1)$ aequatio haec abibit in iſtam formam:

$$\frac{addz}{1-m}+z^{n+1}dx^2(\alpha+2\beta x+\gamma xx)^{\frac{-n-4}{2}}=0$$

quae eſt caſus particularis praeſentis Theorematis, ex quo quippe naſcitur, ponendo $c=0$.

Coroll.

Coroll. 4.

28. Praesens ergo Theorema latissime patet, atque eiusmodi casus difficillimos in se complectitur, qui nullo alio modo resolui posse videntur. Si enim $c = 0$, fortasse reperietur methodus negotium conficiens, propterea quod variabiles non sunt inuicem permixtae: at si c non $= 0$, ob permixtionem variabilium nulla methodus cognita hic cum successu in vsum vocabitur.

Coroll. 5.

29. Casus hic imprimis notatu dignus hic occurrit, si $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = c = 1$, quo habetur haec aequatio:

$$ddy + \frac{ay^{n+1}dx^2}{(xx+yy)^{\frac{n+4}{2}}} = 0$$

cuius ergo integrale est:

$$\tfrac{1}{2}(ydx - xdy)^2 + \frac{ay^{n+2}dx}{(n+2)(xx+yy)^{\frac{n+2}{2}}} = Cdx^2$$

Ponatur $y = ux$, erit $ydx - xdy = -xxdu$, fietque integrale:

$$\tfrac{1}{2}x^4du^2 + \frac{au^{n+2}dx^2}{(n+2)(1+uu)^{\frac{n+2}{2}}} = Cdx^2$$

ideoque $\frac{dx}{xx} = \frac{du(1+uu)^{\frac{n+2}{4}}}{\sqrt{(2C(1+uu)^{\frac{n+2}{2}} - \frac{2a}{n+2}u^{n+2})}}$

quae ob variabiles separatas denuo integrari potest.

Scholion.

Scholion.

30. Hic quoque multiplicatoris forma substitutionem idoneam praebet, cuius ope aequatio differentio-differentialis in aliam tractatu faciliorem transformabitur. Statui scilicet oportet

$$y = z\sqrt{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)}$$

Hanc vero ipsam substitutionem suadet formulae indoles

$$(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy)^{\frac{n+4}{2}}$$

quia hoc pacto vnica variabilis in vinculo relinquitur. At per hanc substitutionem ipsa aequatio multo magis fit perplexa, ita vt, etiamsi per factorem simpliciorem $dz(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{5}{2}}$ ad integrabilitatem reuocetur, id tamen minus pateat. Verum si multiplicator fuerit ordinis tertii, seu altioris, ne huiusmodi quidem substitutio commode inueniri potest, vti in duobus reliquis exemplis vsu venit.

Problema 3.

31. Proposita aequatione differentiali secundi gradus:

$$yyddy + mydy^2 = axdx^2$$

in qua differentiale dx sumtum est constans, eius integrale inuenire.

Solutio.

Quia multiplicator neque primi, neque secundi ordinis succedit, ex ordine tertio desumatur. Perducta ergo aequatione ad hanc formam:

$$ddy + \frac{mdy^2}{y} - \frac{axdx^2}{yy} = 0$$

multi-

multiplicetur ea per $Pdx^2 + 2Qdxdy + 3Rdy^2$, vnde statim habebitur:

I. *prima pars integralis* $Pdx^2dy + Qdxdy^2 + Rdy^3$ et integrando relinquitur haec forma:

$$-\frac{aPxdx^4}{yy} - \frac{2aQxdx^3dy}{yy} - \frac{3aRxdx^2dy^2}{yy}$$
$$+\frac{mPdx^2dy^2}{y} + \frac{2mQdxdy^3}{y} + \frac{3mRdy^4}{y}$$
$$-dx^3dy\left(\frac{dP}{dx}\right) - dx^2dy^2\left(\frac{dP}{dy}\right) - dxdy^3\left(\frac{dQ}{dy}\right) - dy^4\left(\frac{dR}{dy}\right)$$
$$-dx^2dy^2\left(\frac{dQ}{dx}\right) - dxdy^3\left(\frac{dR}{dx}\right).$$

Haec autem forma integrabilis esse nequit, nisi membra, quae dy^2, dy^3 et dy^4 implicant, destruantur. Primum ergo pro dy^4 habebimus:

$$\frac{3mR}{y} - \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0, \text{ seu } 3mRdy = ydR$$

vbi x sumitur pro constante, vnde fit $R = Ky^{3m}$, denotante K functionem ipsius x tantum, sicque erit: $\left(\frac{dR}{dx}\right) = y^{3m}\left(\frac{dK}{dx}\right)$. Iam pro destructione terminorum dy^3 continentium, fiet:

$$\frac{2mQ}{y} - \left(\frac{dQ}{dy}\right) - y^{3m}\left(\frac{dK}{dx}\right) = 0$$

seu sumto x constante:

$$2mQdy - ydQ = y^{3m+1}dy\left(\frac{dK}{dx}\right)$$

quae diuisa per y^{2m+1} et integrata dat:

$$\frac{-Q}{y^{2m}} = \frac{1}{m+1}y^{m+1}\left(\frac{dK}{dx}\right) - L.$$

Sumta denuo L pro functione ipsius x, ita vt sit

$$Q = Ly^{2m} - \frac{1}{m+1}y^{3m+1}\left(\frac{dK}{dx}\right), \text{ ideoque}$$
$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = y^{2m}\left(\frac{dL}{dx}\right) - \frac{1}{m+1}y^{3m+1}\left(\frac{ddK}{dx^2}\right).$$

 Destru-

Destruantur denique etiam termini dy^3 continentes, vnde prodit:

$$-3aKy^{3m-2}x - y^{2m}\left(\frac{dL}{dx}\right) + \frac{1}{m+1}y^{3m+1}\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$
$$+\frac{mP}{y} - \left(\frac{dP}{dy}\right) = 0$$

quae sumta x constante per ydy multiplicata praebet:

$$-3aKxy^{3m-1}dy - y^{2m+1}dy\left(\frac{dL}{dx}\right) + \frac{1}{m+1}y^{3m+2}dy\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$
$$+mP\,dy - y\,dP = 0$$

quae per y^{m+1} diuisa et integrata dat:

$$\frac{-3a}{2m-1}Kxy^{2m-1} - \frac{1}{m+1}y^{m+1}\left(\frac{dL}{dx}\right) + \frac{1}{2(m+1)^2}y^{2m+2}\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$
$$-\frac{P}{y^m} + M = 0$$

denotante M functionem ipsius x tantum. Ergo fit

$$P = My^m - \frac{3a}{2m-1}Kxy^{3m-1} - \frac{1}{m+1}y^{2m+1}\left(\frac{dL}{dx}\right) + \frac{1}{2(m+1)^2}y^{3m+2}\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$

ideoque

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) = y^m\left(\frac{dM}{dx}\right) - \frac{3a}{2m-1}Ky^{3m-1} - \frac{3ax}{2m-1}y^{3m-1}\left(\frac{dK}{dx}\right) - \frac{1}{m+1}y^{2m+1}\left(\frac{ddL}{dx^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2(m+1)^2}y^{3m+2}\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right).$$

Nunc termini $-\frac{2aQx\,dx^2\,dy}{yy} - dx^2\,dy\left(\frac{dP}{dx}\right)$, integrati, x pro constante sumta, suppeditabunt

II. alteram integralis partem:

$$-2ax\,dx^2\left(\frac{1}{2m-1}Ly^{2m-1} - \frac{1}{2m(m+1)}y^{2m}\left(\frac{dK}{dx}\right)\right) - N\,dx^2$$
$$-dx^2\left(\frac{1}{m+1}y^{m+1}\left(\frac{dM}{dx}\right) - \frac{a}{m(2m-1)}Ky^{2m} - \frac{ax}{m(2m-1)}y^{2m}\left(\frac{dK}{dx}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2(m+1)^2}y^{2m+2}\left(\frac{ddL}{dx^2}\right) + \frac{1}{6(m+1)^3}y^{3m+3}\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right)\right);$$

Huius ergo differentiale posito y constante sumtum aequale esse debet residuae parti $\frac{-aPx\,dx^4}{yy}$: vnde per dx^4 diuiso habebimus sequentem aequationem:

aMxy

$$+Mxy^{m-2}-\frac{2aaxx}{2m-1}Ky^{2m-3}-\frac{ax}{m+1}y^{2m-1}\left(\frac{dL}{dx}\right)+\frac{ax}{2(m+1)^2}y^{3m}\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$
$$-\frac{2a}{2m-1}Ly^{2m-1}+\frac{2a}{3m(m+1)}y^{3m}\left(\frac{dK}{dx}\right)-\frac{2ax}{2m-1}y^{2m-1}\left(\frac{dL}{dx}\right)+\frac{2ax}{3m(m+1)}\times$$
$$y^{3m}\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)-\frac{1}{m+1}y^{m+1}\left(\frac{ddM}{dx^2}\right)+\frac{a}{m(2m-1)}y^{3m}\left(\frac{dK}{dx}\right)+\frac{a}{m(2m-1)}y^{3m}\left(\frac{dK}{dx}\right)$$
$$+\frac{ax}{m(2m-1)}y^{3m}\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)+\frac{1}{2(m+1)^2}y^{2m+2}\left(\frac{d^3L}{dx^3}\right)-\frac{1}{6(m+1)}y^{3m+3}$$
$\left(\frac{d^4K}{dx^4}\right)=$ functioni ipsius $x=\left(\frac{dN}{dx}\right)$.

Hic iam singulae diuersae ipsius y potestates seorsim ad nihilum redigantur, et quia y^{m-2} et y^{2m-3} semel occurrunt, nisi sit vel $m=2$, vel $m=1$; habebimus $M=0$, et $K=0$; et supererunt tantum termini per L affecti, inter quos solitarius est y^{2m+2}; vnde esse debet $\left(\frac{d^3L}{dx^3}\right)=0$, ideoque $L=\alpha+2\beta x+\gamma xx$, reliqui per y^{2m-1} affecti dant:

$$-\frac{2ax(\beta+\gamma x)}{m+1}-\frac{2a(\alpha+2\beta x+\gamma xx)}{2m-1}-\frac{4ax(\beta+\gamma x)}{2m-1}=0.$$

Hinc debet esse $\alpha=0$, et $\frac{\beta+\gamma x}{m+1}+\frac{4\beta+3\gamma x}{2m-1}=0$. Quibus conditionibus in genere satisfieri nequit; constituendi ergo sunt casus sequentes:

I. Si $\alpha=0$, et $\gamma=0$, fiet $m=-\frac{1}{2}$, ita vt aequatio proposita sit:

$$yyddy-\tfrac{1}{2}ydy^2=axdx^2$$

seu

$$ddy-\frac{dy^2}{2y}-\frac{axdx^2}{yy}=0.$$

Cum igitur sit $K=0$, $L=x$, $M=0$, erit:

$$R=0;\ Q=\frac{x}{y};\ \text{et}\ P=-2$$

et noster multiplicator erit: $-2dx^2+\frac{2xdxdy}{y}$ ideoque integrale quaesitum:

$$-2dx^2dy+\frac{xdxdy^2}{y}+\frac{axxdx^2}{yy}=Cdx^3,$$

 seu

seu per dx diuidendo

$$axxdx^2 + xydy^2 - 2yy\,dx\,dy = Cyydx^2.$$

II. Sit $\alpha = 0$; $\beta = 0$; erit $m = -\frac{2}{5}$; et aequatio differentio-differentialis proposita:

$$ddy - \frac{2dy^2}{5y} - \frac{axdx^2}{yy} = 0.$$

Cum igitur sit $K = 0$, $L = xx$, et $M = 0$, erit

$$R = 0;\ Q = xxy^{-\frac{4}{5}};\ P = -\tfrac{10}{3}xy^{\frac{1}{5}}$$

vnde noster multiplicator fiet:

$$-\tfrac{10}{3}xy^{\frac{1}{5}}dx^2 + 2xxy^{-\frac{4}{5}}dx\,dy$$

et integrale quaesitum

$$-\tfrac{10}{3}xy^{\frac{1}{5}}dx^2dy + xxy^{-\frac{4}{5}}dxdy^2 + \tfrac{10}{9}ax^3y^{-\frac{9}{5}}dx^3 + \tfrac{25}{9}y^{\frac{6}{5}}dx^3 = Cdx^3$$

seu per dx diuidendo, et $y^{\frac{9}{5}}$ multiplicando,

$$-\tfrac{10}{3}xyydxdy + xxydy^2 + \tfrac{10}{9}ax^3dx^2 + \tfrac{25}{9}y^3dx^2 = Cy^{\frac{9}{5}}dx^2.$$

III. Ante vero iam duos casus commemorauimus, quibus est vel $m = 1$, vel $m = 2$. Sit ergo primo $m = 1$ et aequatio proposita

$$ddy + \frac{dy^2}{y} - \frac{axdx^2}{yy} = 0$$

ac fieri debet

$$\left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{aMx}{y} - 3aaxxK - \tfrac{1}{2}axy\left(\frac{dL}{dx}\right) + \tfrac{1}{6}axy^3\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$
$$-2aLy + \tfrac{5}{3}ay^3\left(\frac{dK}{dx}\right) - 2axy\left(\frac{dL}{dx}\right) + \tfrac{1}{3}axy^3\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}yy\left(\frac{ddM}{dx^2}\right) + 2ay^3\left(\frac{dK}{dx}\right) + axy^3\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) + \tfrac{1}{8}y^4\left(\frac{d^3L}{dx^3}\right) - \tfrac{1}{48}y^6\left(\frac{d^4K}{dx^4}\right)$$

vnde obtinemus $M = 0$; $N = -3aa\int Kxxdx$; et

$$-\tfrac{5}{2}x\left(\frac{dL}{dx}\right) - 2L = 0;\ \tfrac{35}{24}x\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) + \tfrac{7}{2}\left(\frac{dK}{dx}\right) = 0$$
$$\left(\frac{d^3L}{dx^3}\right) = 0;\ \left(\frac{d^4K}{dx^4}\right) = 0.$$

His,

His conditionibus satisfit, si sumatur:

$$L = 0;\ K = 1;\ M = 0;\ \text{et}\ N = -aax^{3}$$

vnde fit: $R = y^{3}$; $Q = 0$; $P = -3axy^{2}$.

Quare noster multiplicator erit:

$$-3axy^{2}dx^{2} + 3y^{3}dy^{2}$$

et integrale quaesitum:

$$-3axy^{2}dx^{2}dy + y^{3}dy^{3} + 2y^{3}dx^{3} + 2aax^{3}dx^{3} = C\,dx^{3}.$$

IV. Sit iam $m = 2$, vt aequatio nostra fiat

$$ddy + \frac{2dy^{2}}{y} - \frac{axdx^{2}}{yy} = 0$$

ac satisfieri debet huic aequationi:

$$\left(\frac{dN}{dx}\right) = aMx - aaKxxy^{3} - \tfrac{3}{2}aLy^{3} - axy^{3}\left(\frac{dL}{dx}\right) - \tfrac{1}{2}y\left(\frac{ddM}{dx^{2}}\right)$$
$$+ \tfrac{4}{9}ay^{6}\left(\frac{dK}{dx}\right) + \tfrac{1}{18}y^{6}\left(\frac{d^{3}L}{dx^{3}}\right) + \tfrac{1}{3}axy^{6}\left(\frac{ddK}{dx^{2}}\right) - \tfrac{1}{162}y^{9}\left(\frac{d^{4}K}{dx^{4}}\right).$$

Erit ergo $N = a\int Mxdx$, ac statui potest $L = 0$; $K = 0$; $M = 1$, vnde fit $N = \tfrac{1}{2}axx$. Hinc vero fit:

$$R = 0;\ Q = 0;\ P = y^{2}.$$

ita vt multiplicator futurus sit $ydxy^{2}$ et integrale:

$$yydx^{2}dy - \tfrac{1}{2}axxdx^{3} = C\,dx^{3},\ \text{seu}$$
$$2yydy - axxdx = C\,dx.$$

Coroll. I.

921. Casus ergo vltimus, quo $m = 2$, est omnium facillimus, cum per multiplicatorem adeo primi ordinis confici possit, quin primo intuitu aequationis

$$yyddy + 2ydy^{2} = axdx^{2}$$

integrale $yydy = \tfrac{1}{2}axxdx + C\,dx$ patet. Casus autem primus et secundus, quibus est $m = -\tfrac{1}{2}$ et $m = -\tfrac{2}{3}$ per multiplicatorem formae secundae, ob $R=0$, resolui potuissent.

Coroll. 2.

33. Solus ergo casus tertius, quo est $m=1$, resolutu est difficillimus, quia requirit multiplicatorem formae tertiae. Quare notetur, sequentem aequationem differentialem secundi gradus

$$yyddy+ydy^2-axdx^2=0$$

integrabilem reddi, si multiplicetur per

$$3ydy^2-3axdx^2$$

et integrale esse:

$$y^3dy^3-3axyydx^2dy+ay^3dx^3+aax^3dx^3=Cdx^3.$$

Coroll. 3.

34. Porro autem notandum est, hanc expressionem in tres factores simplices resolui posse. Si enim ponatur breuitatis gratia $a=c^3$ et $\mu=-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\nu=-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$, aequatio haec integralis ita repraesentari potest:

$$(ydy+cydx+c^2xdx)(ydy+\mu cydx+\nu c^2xdx)(ydy+\nu cydx+\mu c^2xdx)=Cdx^3.$$

Coroll. 4.

35. Hinc si constans C sumatur $=0$, tres statim prodeunt aequationes integrales particulares:

$$ydy+cydx+c^2xdx=0$$

$$ydy+\mu cydx+\nu c^2xdx=0$$

$$ydy+\nu cydx+\mu c^2xdx=0$$

quarum

quarum prima continet casum iam supra (7) indicatum. duae reliquae vero sunt imaginariae.

Scholion.

36. Restat ergo quartum exemplum, quod erat

$$ds^2(\alpha ss + \beta s + \gamma) = rr\,dr^2 + 2r^3\,ddr$$

quod posito

$$r = y^{\frac{2}{3}}, \text{ vt sit } dr = \tfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}dy, \text{ et } ddr = \tfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}ddy - \tfrac{2}{9}y^{-\frac{4}{3}}dy^2$$

abit in hanc formam:

$$\tfrac{4}{3}y^{\frac{5}{3}}ddy = ds^2(\alpha ss + \beta s + \gamma).$$

In genere autem obseruo, si habeatur huiusmodi aequatio:

$$S\,ds^2 = m r^{\mu} dr^2 + n r^{\mu+1} ddr$$

eam per substitutionem $r = y^{\frac{n}{m+n}}$ reduci ad hanc formam simpliciorem:

$$S\,ds^2 = \frac{nn}{m+n}\,y^{\frac{\mu n - m + n}{m+n}}\,ddy.$$

Huiusmodi ergo aequationes omnes complecti licet in hac forma generali: $ddy = y^n X\,dx^2$. Videamus ergo quibusnam casibus tam exponentis n, quam functionis X, haec aequatio integrari queat per nostram methodum.

Problema 4.

37. Casus pro exponente n et naturam functionis X inuenire, quibus haec aequatio differentialis secundi gradus

$$ddy + y^n X\,dx^2 = 0,$$

vbi dx est constans, integrari queat.

Solutio

Solutio I.

Sumatur primo multiplicator primi ordinis P, et integranda erit haec aequatio:

$$Pddy + y^n PX dx^2 = 0$$

ac integralis pars prima erit $= Pdy$, et integranda restat haec expressio:

$$y^n PX dx^2 - dx\, dy \left(\frac{dP}{dx}\right) - dy^2 \left(\frac{dP}{dy}\right)$$

vnde necesse est, sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0$, ideoque P functio ipsius x tantum. Sit ergo $P = K$, et integrari oportet ob dx constans:

$$dx\left(y^n KX dx - dy\left(\frac{dK}{dx}\right)\right),$$

cuius integrale nequit esse, nisi $-y\,dx\left(\frac{dK}{dx}\right) = -y\,dK$. Oportet autem sit $y^n KX dx^2 + y\,ddK = 0$, quod fieri nequit, nisi sub his conditionibus:

$$n = 1 \text{ et } X = -\frac{ddK}{K\,dx^2}$$

ac tum aequatio integralis erit:

$$K\,dy - y\,dK = C\,dx.$$

Solutio II.

Sumto multiplicatore secundae formae $P\,dx + 2Q\,dy$, integrabilis efficienda est haec aequatio:

$$2Q\,dy\,ddy + P\,dx\,ddy + y^n X\,dx^2 (P\,dx + 2Q\,dy) = 0$$

vnde integralis pars prima colligitur $P\,dx\,dy + Q\,dy^2$. Superest ergo, vt integretur:

$$y^n PX dx^3 + 2y^n QX dx^2 dy$$
$$- dx^2 dy \left(\frac{dP}{dx}\right) - dx\,dy^2 \left(\frac{dP}{dy}\right)$$
$$- dx\,dy^2 \left(\frac{dQ}{dx}\right) - dy^3 \left(\frac{dQ}{dy}\right).$$

Hinc

Hinc quo termini tollantur, quibus dy plus vna habet dimensione, oportet esse

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0; \text{ ideoque } Q = K \text{ functioni ipsius } x.$$

Deinde habebimus

$\left(\frac{dP}{dy}\right)$ [illegible] $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ [illegible] $\left(\frac{dK}{dx}\right)$ [illegible]

vnde fit:

$$P = L - y\left(\frac{dK}{dx}\right) \text{ et } \left(\frac{dP}{dx}\right) = \left(\frac{dL}{dx}\right) - y\left(\frac{ddK}{dx^2}\right).$$

Iam altera pars integralis erit:

$$dx^2 \int \left(y^n P X dx + 2y^n Q X dy - dy\left(\frac{dP}{dx}\right)\right) \text{ siue}$$

$$dx^2 \int \left\{ \begin{array}{ll} + y^n L X dx & + 2y^n K X dy \\ - y^{n+1} X dx\left(\frac{dK}{dx}\right) & - dy\left(\frac{dL}{dx}\right) + y\, dy\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) \end{array} \right\}$$

ex variabilitate ipsius y ergo concluditur *altera pars integralis.*

$$\text{II. } dx^2\left(\frac{2}{n+1} y^{n+1} K X - y\left(\frac{dL}{dx}\right) + \frac{1}{2} yy\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) + M\right).$$

Ac variabilitas ipsius x postulat, vt sit:

$$y^n L X - y^{n+1} X\left(\frac{dK}{dx}\right) = \frac{2}{n+1} y^{n+1} K\left(\frac{dX}{dx}\right) + \frac{2}{n+1} y^{n+1} X\left(\frac{dK}{dx}\right) - y\left(\frac{ddL}{dx^2}\right) + \frac{1}{2} yy\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right) + \left(\frac{dM}{dx}\right).$$

Si n velimus indefinitum relinquere; esse debet

$$L = 0;\ \left(\frac{d^3K}{dx^3}\right) = 0 \text{ et } \left(\frac{dM}{dx}\right) = 0; \text{ tum vero}$$

$$\frac{2}{n+1} K\left(\frac{dX}{dx}\right) + \frac{n+3}{n+1} X\left(\frac{dK}{dx}\right) = 0$$

vnde colligitur $K^{\frac{n+3}{2}} X = A$ constanti: at ob $\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right) = 0$ erit $K = \alpha + 2\beta x + \gamma xx$, ideoque $X = \frac{A}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n+3}{2}}}$ et

$Q = \alpha + 2\beta x + \gamma xx$; $P = -2y(\beta + \gamma x)$. Quocirca multiplicator erit:

$$-2y\,dx(\beta + \gamma x) + 2\,dy(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)$$

 et

et huius aequationis differentio-differentialis

$$ddy + \frac{Ay^n dx^2}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n+3}{2}}} = 0$$

integrale erit:

$$-2y\,dx\,dy(\beta + \gamma x) + dy^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) + \frac{2}{n+1} \cdot \frac{Ay^{n+1}}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n+1}{2}}} + \gamma yy\,dx^2 = C\,dx^2.$$

Superfunt autem casus, quibus est vel $n = 1$, vel $n = 2$.

I. Sit $n = 1$; et conditiones praecedentes postulant

$$LX + \left(\frac{ddE}{dx^2}\right) = 0;\ \frac{2}{n+1}K\left(\frac{dX}{dx}\right) + \frac{n+3}{n+1}X\left(\frac{dK}{dx}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right) = 0$$

seu: $LX\,dx^2 + ddL = 0$ et $2K\,dX + 4X\,dK + dx\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right) = 0$.

hinc fit $2KKX + \int\frac{Kd^3K}{dx^3} = \text{Const.}$ ideoque:

$$2KKX\,dx^2 + K\,ddK - \tfrac{1}{2}dK^2 = C\,dx^2$$

$$\text{et } X = \frac{E\,dx^2 + \tfrac{1}{2}dK^2 - K\,ddK}{2KK}$$

pro priori conditione autem ponatur $L = 0$. Quare erit

$$Q = K;\ P = -y\left(\frac{dK}{dx}\right);\ \text{atque huius aequationis}$$

$$ddy + yX\,dx^2 = 0$$

Existente $X = \dfrac{E\,dx^2 + \tfrac{1}{2}dK^2 - K\,ddK}{2KK\,dx^2}$, quaecunque functio ipsius x sumatur pro K, erit integrale:

$$-y\,dx\,dy\left(\frac{dK}{dx}\right) + K\,dy^2 + yyKX\,dx^2 + \tfrac{1}{2}yy\,dx^2\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) = C\,dx^2$$

II. Sit $n = 2$; et conditiones postulant:

$$2K\,dX + 5X\,dK = 0;\ LX = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right);\ \left(\frac{ddL}{dx^2}\right) = 0.$$

Prima

Prima dat $X = AK^{-\frac{5}{2}}$, qui in altera substitutus praebet

$$2ALK^{-\frac{5}{2}}dx^3 = d^3K;$$

verum, ob $\left(\frac{ddL}{dx^2}\right) = 0$, erit $L = \alpha + \beta x$, vnde, posito $K = (\alpha + \beta x)^\mu$, erit $2A(\alpha + \beta x)^{\frac{1-5\mu}{2}} = \mu(\mu - 1)(\mu - 2)$
$(\alpha + \beta x)^{\mu - 3}\beta^3$
et $\mu = \frac{8}{7}$; hincque $2A = -\frac{48}{343}\beta^3$; et $X = \frac{A}{(\alpha+\beta x)^{\frac{20}{7}}} = \frac{-24\beta^3}{343(\alpha+\beta x)^{\frac{20}{7}}}$

Porro $Q = (\alpha + \beta x)^{\frac{8}{7}}$; $P = \alpha + \beta x - \frac{2}{7}\beta y(\alpha + \beta x)^{\frac{1}{7}}$
Consequenter huius aequationis differentio-differentialis

$$ddy + y^2 X dx^2 = 0$$

existente $X = \frac{-24\beta^3}{343(\alpha+\beta x)^{\frac{20}{7}}}$, integrale est

$$dx\,dy\left(\alpha + \beta x - \tfrac{2}{7}\beta y(\alpha + \beta x)^{\frac{1}{7}}\right) + dy^2(\alpha + \beta x)^{\frac{8}{7}} - \frac{16\beta^3 y^3 dx^2}{343(\alpha+\beta x)^{\frac{13}{7}}}$$
$$- \beta y\,dx^2 + \frac{4\beta^2 y^2 dx^2}{49(\alpha+\beta x)^{\frac{6}{7}}} = C\,dx^2$$

II. Si $n = 2$, adhuc casus notari meretur, quo $L = \alpha$, et posito

$K = x^\mu$, erit $2\alpha A x^{-\frac{5\mu}{2}} = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}$, vnde fit $\mu = \frac{6}{7}$ et $2\alpha A = \frac{6.1.8}{343}$; ideoque $\alpha = \frac{24}{343A}$. Quare erit

$$K = x^{\frac{6}{7}};\ L = \frac{24}{343A};\ X = \frac{A}{x^{\frac{15}{7}}};$$ ac porro

$$Q = x^{\frac{6}{7}};\ P = \frac{24}{343A} - \frac{6y}{7x^{\frac{1}{7}}}.$$ Consequenter huius aequationis:

$$ddy + \frac{Ay^2dx^2}{x^{\frac{15}{7}}} = 0$$

 inte-

integrale erit

$$\frac{24\,dxdy}{343\,A} - \frac{6y\,dxdy}{7x^{\frac{1}{7}}} + x^{\frac{6}{7}}dy^2 + \frac{2Ay^2dx^2}{3x^{\frac{9}{7}}} - \frac{3yydx^2}{49x^{\frac{8}{7}}} = C\,dx^2.$$

Solutio III.

Sumto multiplicatore $P\,dx^2 + 2Q\,dx\,dy + 3R\,dy^2$, prima integralis pars existit $P\,dx^2dy + Q\,dx\,dy^2 + R\,dy^3$, et reliqua expressio integranda

$$y^nPX\,dx^4 + 2y^nQX\,dx^3dy + 3y^nRX\,dx^2dy^2$$
$$= dx^3dy\left(\frac{dP}{dx}\right) - dx^2dy^2\left(\frac{dP}{dy}\right)$$
$$- dx^2dy^2\left(\frac{dQ}{dx}\right) - dx\,dy^3\left(\frac{dQ}{dy}\right)$$
$$- dx\,dy^3\left(\frac{dR}{dx}\right) - dy^4\left(\frac{dR}{dy}\right)$$

vnde statim, vt ante conclusimus, $R = K$ functioni ipsius x, tum vero $Q = L - y\left(\frac{dK}{dx}\right)$, ergo $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dL}{dx}\right) - y\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$. Deinde destructio terminorum per dy^2 affectorum praebet:

$$3y^nKX - \left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dL}{dx}\right) + y\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) = 0, \text{ ex quo fit}$$
$$P = M - y\left(\frac{dL}{dx}\right) + \tfrac{1}{2}yy\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) + \frac{3}{n+1}y^{n+1}KX.$$

Cum ergo sit

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) = \left(\frac{dM}{dx}\right) - y\left(\frac{ddL}{dx^2}\right) + \tfrac{1}{2}yy\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right) + \frac{3}{n+1}y^{n+1}\left(\frac{d.KX}{dx}\right)$$

ob $2y^nQX\,dx^3dy = 2X\,dx^3\left(y^nL\,dy - y^{n+1}dy\left(\frac{dK}{dx}\right)\right)$ termini per dy affecti praebent alteram integralis partem

$$dx^3\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{n+1}LXy^{n+1} - \frac{2}{n+2}y^{n+2}X\left(\frac{dK}{dx}\right) - y\left(\frac{dM}{dx}\right) + \frac{1}{2}yy\left(\frac{ddL}{dx^2}\right)\\ \quad - \frac{1}{6}y^3\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right) - \frac{3}{(n+1)(n+2)}y^{n+2}\left(\frac{d.KX}{dx}\right) + N\end{array}\right\}$$

Iam

Iam vero, ob primum terminum $y^n \mathrm{P X} dx^4$, esse oportet:

$$0 = y^n \mathrm{MX} - y^{n+1}\mathrm{X}\left(\frac{d\mathrm{L}}{dx}\right) + \tfrac{1}{2} y^{n+2}\mathrm{X}\left(\frac{dd\mathrm{K}}{dx^2}\right) + \frac{3}{n+1} y^{2n+1}\mathrm{KXX}$$
$$- \frac{2}{n+1} y^{n+1}\left(\frac{d.\mathrm{LX}}{dx}\right) + \frac{2}{n+2} y^{n+2}\mathrm{X}\left(\frac{dd\mathrm{K}}{dx^2}\right) + \frac{2}{n+2} y^{n+2}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right)\left(\frac{d\mathrm{K}}{dx}\right)$$
$$+ y\left(\frac{dd\mathrm{M}}{dx^2}\right) - \tfrac{1}{2} yy\left(\frac{d^3\mathrm{L}}{dx^3}\right) + \tfrac{1}{6} y^3\left(\frac{d^4\mathrm{K}}{dx^4}\right) + \frac{8}{(n+1)(n+2)} y^{n+2}\left(\frac{dd\,\mathrm{KK}}{dx^2}\right) - \frac{d\mathrm{N}}{dx}.$$

Hic autem, si n determinare nolimus, esse debet $\mathrm{L} = 0$, ideoque $\mathrm{R} = 0$, vnde hic casus ad praecedentem deduceretur. Consideremus ergo casus sequentes:

I. Sit $n = 1$; eritque $\mathrm{N} = 0$; $\mathrm{MX} + \left(\frac{dd\mathrm{M}}{dx^2}\right) = 0$; vnde ne X ad primam solutionem reuocetur, fieri debet $\mathrm{M} = 0$; tum vero habebitur:

$$-\mathrm{X}\left(\frac{d\mathrm{L}}{dx}\right) - \left(\frac{d.\mathrm{LX}}{dx}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3\mathrm{L}}{dx^3}\right) = 0 \text{ et}$$
$$\tfrac{1}{2}\mathrm{X}\left(\frac{dd\mathrm{K}}{dx^2}\right) + \tfrac{3}{2}\mathrm{KXX} + \tfrac{2}{3}\mathrm{X}\left(\frac{dd\mathrm{K}}{dx^2}\right) + \tfrac{2}{3}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right)\left(\frac{d\mathrm{K}}{dx}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{6}\left(\frac{d^4\mathrm{K}}{dx^4}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dd.\mathrm{KX}}{dx^2}\right) = 0.$$

Ac ne X ad modum casus praecedentis definiatur, quo erat $n = 1$, ponatur $\mathrm{L} = 0$; vnde X ex hac aequatione definiri debet:

$$\tfrac{3}{2}\mathrm{KXX}dx^4 + \tfrac{5}{3}\mathrm{X}dx^2 dd\mathrm{K} + \tfrac{5}{3}dx^2 d\mathrm{K} d\mathrm{X} + \tfrac{1}{2}\mathrm{K}dx^2 dd\mathrm{X} + \tfrac{1}{6}d^4\mathrm{K} = 0$$

II. Sit $n = \frac{1}{2}$; eritque $2\mathrm{KXX} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3\mathrm{L}}{dx^3}\right) = 0$; $\mathrm{M} = 0$; $\mathrm{N} = 0$:

$$-\mathrm{X}\left(\frac{d\mathrm{L}}{dx}\right) - \tfrac{4}{3}\left(\frac{d.\mathrm{LX}}{dx}\right) = 0; \quad \left(\frac{d^4\mathrm{K}}{dx^4}\right) = 0; \text{ et}$$
$$\tfrac{13}{10}\mathrm{X}\left(\frac{dd\mathrm{K}}{dx^2}\right) + \tfrac{4}{5}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right)\left(\frac{d\mathrm{K}}{dx}\right) + \tfrac{4}{3}\left(\frac{dd.\mathrm{KX}}{dx^2}\right) = 0$$

seu $\tfrac{13}{10}\mathrm{X}dd\mathrm{K} + \tfrac{12}{5}d\mathrm{K}d\mathrm{X} + \tfrac{4}{3}\mathrm{K}dd\mathrm{X} = 0$

sed huiusmodi casibus non immoror.

Solutio IV.

Tentetur etiam factor tertii ordinis

$$Pdx^3 + 2Qdx^2dy + 3Rdxdy^2 + 4Sdy^3$$

vnde nascitur *integralis pars prima* :

$$Pdx^3dy + Qdx^2dy^2 + Rdxdy^3 + Sdy^4.$$

et reliqua expressio integranda erit :

$$y^nPXdx^5 + 2y^nQXdx^4dy + 3y^nRXdx^3dy^2 + 4y^nSXdx^2dy^3$$
$$-dx^4dy\left(\frac{dP}{dx}\right) - dx^3dy^2\left(\frac{dP}{dy}\right)$$
$$-dx^3dy^2\left(\frac{dQ}{dx}\right) - dx^2dy^3\left(\frac{dQ}{dy}\right)$$
$$-dx^2dy^3\left(\frac{dR}{dx}\right) - dxdy^4\left(\frac{dR}{dy}\right)$$
$$-dxdy^4\left(\frac{dS}{dx}\right) - dy^5\left(\frac{dS}{dy}\right).$$

Erit ergo $S = K$; $R = L - y\left(\frac{dK}{dx}\right)$; atque

$$4y^nKXdy - dQ - dy\left(\frac{dL}{dx}\right) + ydy\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) = 0$$

Ne hic in calculos nimis molestos delabamur, ponamus $K = A$; $L = B$; vt sit $S = A$ et $R = B$; iam ob $\left(\frac{dL}{dx}\right) = 0$ et $\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) = 0$, erit $Q = \frac{4A}{n+1}y^{n+1}X$

Tum vero habebimus :

$$3By^nX - \left(\frac{dP}{dy}\right) - \frac{4A}{n+1}y^{n+1}\left(\frac{dX}{dx}\right) = 0$$

ergo $P = \frac{3}{n+1}BXy^{n+1} - \frac{4A}{(n+1)(n+2)}y^{n+2}\left(\frac{dX}{dx}\right)$

et $\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{3B}{n+1}y^{n+1}\left(\frac{dX}{dx}\right) - \frac{4A}{(n+1)(n+2)}y^{n+2}\left(\frac{ddX}{dx^2}\right)$.

Hinc ergo nascitur *altera integralis pars* :

$$dx^4\left(\frac{4A}{(n+1)^2}XXy^{2n+2} - \frac{3B}{(n+1)(n+2)}y^{n+2}\left(\frac{dX}{dx}\right) + \frac{4A}{(n+1)(n+2)(n+3)}y^{n+3}\left(\frac{ddX}{dx^2}\right)\right)$$

esseque debet

$$0 = \frac{3B}{n+1}X^2y^{2n+1} - \frac{4A}{(n+1)(n+2)}Xy^{2n+2}\left(\frac{dX}{dx}\right) - \frac{8A}{(n+1)^2}Xy^{2n+2}\left(\frac{dX}{dx}\right)$$
$$+ \frac{3B}{(n+1)(n+2)}y^{n+2}\left(\frac{ddX}{dx^2}\right) - \frac{4A}{(n+1)(n+2)(n+3)}y^{n+3}\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right).$$

Cui

Cui aequationi vt satisfiat, ponatur $B = 0$; et $\left(\frac{d^3 X}{dx^3}\right) = 0$ seu:

$X = \alpha + 2\beta x + \gamma xx$, fiatque $\frac{4A}{(n+1)(n+2)} + \frac{8A}{(n+1)^2} = 0$ siue $n = -\frac{5}{3}$

vnde erit:

$$S = A;\; R = 0;\; Q = -6Ay^{-\frac{1}{3}}(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) \text{ et}$$

$P = 36Ay^{\frac{1}{3}}(\beta + \gamma x)$. Quare haec aequatio differentio-differentialis:

$$ddy + y^{-\frac{5}{3}}dx^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) = 0$$

fit integrabilis, si multiplicetur per

$$36y^{\frac{1}{3}}(\beta + \gamma x)dx^3 - 12y^{-\frac{2}{3}}(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dx^2 dy + 4dy^3$$

et integrale erit:

$$36y^{\frac{1}{3}}(\beta + \gamma x)dx^3 dy - 6y^{-\frac{2}{3}}(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dx^2 dy^2 + dy^4$$
$$+ 9y^{-\frac{4}{3}}(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^2 dx^4 - 27\gamma y^{\frac{4}{3}}dx^4 = Cdx^4$$

atque in hac solutione continetur exemplum quartum.

Coroll. 1.

38. Quartum ergo exemplum supra allatum aequationem differentialem maxime memorabilem continet, propterea quod ea nonnisi per factorem tertii ordinis ad integrabilitatem perduci potest, vnde eius integratio multo minus ab aliis methodis expectari potest.

Coroll.

Coroll. 2.

39. Si vicissim ergo ponamus $y = f z^{\frac{3}{2}}$; vt sit $y^{\frac{1}{3}} = z^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{f}$ et $y^{\frac{5}{3}} = f z^{\frac{5}{2}} \sqrt[3]{ff}$; erit $dy = \frac{3}{2} f z^{\frac{1}{2}} dz$ et $ddy = \frac{3}{2} f z^{\frac{1}{2}} ddz + \frac{3}{4} f z^{-\frac{1}{2}} dz^2$

et aequatio proposita:

$$\frac{3}{2} f z^{\frac{1}{2}} ddz + \frac{3}{4} f z^{-\frac{1}{2}} dz^2 + \frac{dx^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)}{f z^{\frac{5}{2}} \sqrt[3]{ff}} = 0$$

fit integrabilis, si multiplicetur per

$$36 z^{\frac{1}{2}}(\beta + \gamma x) dx^3 \sqrt[3]{f} - \frac{18(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) dx^2 dz}{z^{\frac{1}{2}}} \sqrt[3]{f} + \frac{27}{2} f^3 z^{\frac{5}{2}} dz^3$$

et integrale erit:

$$54 f z(\beta + \gamma x) dx^3 dz \sqrt[3]{f} - \frac{27}{2} f(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) dx^2 dz^2 \sqrt[3]{f} + \frac{81}{16} f^4 zz dz^4$$
$$+ \frac{9(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^2 dx^4}{f zz \sqrt[3]{f}} - 27\gamma f zz dx^4 \sqrt[3]{f} = C dx^4.$$

Coroll. 3.

40. Ponatur $ff\sqrt[3]{ff} = \frac{4}{9}$, vt habeatur haec aequatio:

$$2z^3 ddz + zz dz^2 + dx^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) = 0$$

haecque fiet integrabilis, si multiplicetur per:

$$\frac{2(\beta + \gamma x) dx^3}{zz} - \frac{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) dx^2 dz}{z^3} + \frac{dz^3}{z}$$

eritque integrale:

$$4z(\beta + \gamma x) dx^3 dz - (\alpha + 2\beta x + \gamma xx) dx^2 dz^2 + \frac{1}{2} zz dz^4$$
$$+ \frac{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^2 dx^4}{2zz} - 2\gamma zz dx^4 = C dx^4$$

quae

quae aequatio etiam hoc modo repraesentari potest:

$$((\alpha+2\beta x+\gamma xx)dx^2-zzdz^2)^2+8z^3(\beta+\gamma x)dx^3dz$$
$$-4\gamma z^4=Ezzdx^4.$$

Coroll. 4.

41. Si sit $\alpha=0$; $\beta=0$; et $\gamma=aa$, seu ista aequatio integranda proponatur:

$$2z^3ddz+zzdz^2+aaxxdx^2=0,$$

ea integrabilis reddetur per hunc multiplicatorem:

$$\frac{2aaxdx^3}{zz}-\frac{2aaxxdx^2dz}{z^3}+\frac{dz^3}{z}$$

et aequatio integralis erit:

$$(aaxxdx^2-zzdz^2)^2+8aaxz^3dx^3dz-4aaz^4dx^4=Ezzdx^4$$

seu $(aaxxdx^2+zzdz^2)^2-4aa(zdx-xdz)^2zzdx^2=Ezzdx^4$.

Coroll. 5.

42. Posita ergo constante $E=0$, pro hoc casu gemina aequatio integralis particularis habebitur:

I. $aaxxdx^2+zzdz^2-2azdx(zdx-xdz)=0$

II. $aaxxdx^2+zzdz^2+2azdx(zdx-xdz)=0$

quarum illa resoluitur in $axdx+zdz=\pm zdx\sqrt{2a}$

haec vero in . . . $axdx-zdz=\pm zdx\sqrt{-2a}$.

Scholion.

43. Euolutio horum exemplorum ita est comparata, vt non parum vtilitatis in resolutione aequationum differentialium secundi gradus afferre videatur; cum enim haec exempla, si nonnullos casus faciliores excipiamus, ope methodorum adhuc vsitatarum expe-

diri nequeant, noua haec methodus, qua negotium per multiplicatores conficitur, non solum optimo cum successu adhibetur; sed etiam nullum est dubium, quin ea, si vberius excolatur, multo maiora commoda sit allatura. Pari autem quoque successu ad aequationes differentiales tertii et altiorum graduum extendi poterit, siquidem certum est, quacunque proposita aequatione differentiali cuiuscunque gradus, inter duas variabiles, semper dari eiusmodi quantitatem, per quam, si aequatio multiplicetur, reddatur integrabilis. Quod cum etiam verum sit in aequationibus differentialibus primi gradus, et harum resolutio per methodum tales factores inuestigandi non mediocriter promoueri poterit; vbi quidem totum negotium eo reducitur, vt quouis casu oblato idoneus multiplicator inueniatur; atque in aequationibus quidem differentialibus primi gradus, hic factor semper erit functio ipsarum x et y tantum, verum ob hoc ipsum quod diuersitas ordinum locum non habet, eius inuestigatio multo difficilior videtur, imprimis quando iste factor est functio transcendens. Cum autem haec ratio integrandi naturae aequationum sit maxime consentanea, non sine eximio fructu studium in ea excolenda collocabitur.

ENV-

ENVMERATIO MODORVM QVIBVS FIGVRAE PLANAE RECTILINEAE PER DIAGONALES DIVIDVNTVR IN TRIANGVLA.

Auctore

IOH. ANDR. DE SEGNER.

Triangulum per diagonalem in alia solui non posse, vtpote quod ex se ipso vno tantum modo componitur, notum est: quadrilaterum autem ita diuidi duplicem in modum posse, mox apparet. Neque difficulter perspicitur, modos, quibus quinque laterum figura per diagonales in triangula soluitur, quinque esse, quorum quilibet discrepat ab altero. Sex autem, vel plurium laterum figurae, quot modis ita soluantur enumerare difficilius est; eoque difficilius, quo plura, sunt figurae latera. Soluitur autem hexagonum in triangula 14 modis diuersis, heptagonum 42, ogdogonum 132, enneagonum 429; quos numeros mecum beneuolus communicauit summus *Eulerus*; modo, quo eos reperit, atque progressionis ordine, celatis. Vtrumque perspiciendi cupido, post tentamina quaedam inania, eos numeros eliciendi methodus occurrit adeo simplex, vt in ea acquiescendum mihi putauerim, quam hic proponam.

Triangulum prima ordine est figurarum planarum rectilinearum; quadrilaterum secunda, et ita deinceps, sic

ſic vt index ordinis cuiuslibet repetatur, a numero laterum figurae vel angulorum duabus vnitatibus ſubtractis. Ex quo ſequitur, quod neminem latet, biangulum, vel lineam rectam figuram non eſſe, vtpote cui index ordinis o reſpondet.

Problema.

Dato indice ordinis figurae planae rectilineae, n, datoque numero modorum, quo quaelibet eius generis figura alia, ordinis, cuius exponens numero n minor eſt, in triangula ſoluitur: repetire numerum modorum, quibus in triangula ſolui poteſt figura illa ordinis n.

Solutio.

Si figura, cuius ordinis index eſt o, in triangula ſolui poſſit modis a, figura autem ordinis 1, modis b, figura ordinis 2, modis c, et ita porro; figura autem ordinis, cuius index eſt $n-1$, modis q, figura ordinis $n-2$, modis p, reliqua; dicaturque numerus modorum quaeſitus, quo figura ordinis proxime ſequentis n in triangula ſoluitur, x: ſcriptis indicibus ab o ad $n-1$, ordine, atque ad quemlibet adſcripto diuiſionum numero, hunc in modum:

o	1	2	.	.	$n-3$	$n-2$	$n-1$
a	b	c	.	.	o	p	q

erit numerus omnium indicum ita ſcriptorum, vel par, vel impar: prius quidem ſi $n-1$ impar fuerit, atque n par, poſterius ſi $n-1$ par fuerit, atque n impar. Si par ſit numerus indicum, fac $x = 2aq + 2bp + 2co$, et ita

ita porro, donec terminus intermedius nullus sit reliquus. Sin autem numerus indicum sit impar, iisdem factis, quia terminum intermedium vnum superesse necesse est, qui sit d, huius quadratum factis adde, vt fiat $x = 2aq + 2bp + 2co +$ etc. $+ dd$.

Ad indicem o est $a = 1$. Si enim linea recta concipiatur vt triangulum; figuram istam aliter atque aliter dissolui non posse manifestum est, quia plures vna rectae inter duo puncta non cadunt. Hoc sumpto, si et numerorum illustris *Euleri* quinque priores veri esse ponuntur, sunt autem veri omnes, reperietur numerus modorum, quibus in triangula soluitur figura ordinis sexti, siue ogdogonum, faciendo secundum schema adiectum:

0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	5	14	42	84
						+ 28
						+ 20
						132

$x = 2 \times 42 + 2 \times 14 + 2 \times 10$. Sique hinc porro pergere velis ad enneagonum, quae figura est ordinis septimi, erit ex schemate producto;

0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	5	14	42	132	264
							+ 84
							+ 56
							+ 25
							429

$x = 2 \times 132 + 2 \times 42 + 2 \times 28 + 5 \times 5$.

Atque ſecundum perpetuam hanc legem, ex ſolo numero modorum ſoluendi 1, qui pertinet ad figuram ordinis 0, numeri eiusdem generis omnes, quorum cuilibet qui reſpondet, ordinis index, vel vnitas eſt, vel numerus vtcunque magnus, ſenſim eliciuntur.

Demonſtratio.

Tab. IV. Fig. 5. Sit in triangula diuidenda figura ACDEFGB. Cum ergo non alia eſſe debeant eorum triangulorum latera, quam quae eadem vel latera ſunt figurae diuidendae, vel diagonales: quodlibet figurae latus, latus fieri vnius triangulorum, debet. Sumatur ergo latus AB, ab eoque diuiſio inchoetur ſic, vt ſupra baſin AB ſtatuatur triangulum, cuius apex vel in C cadat, vel in D, vel in quodcunque huius generis punctorum reliquorum, quorum quidem numerus, cum duabus vnitatibus minor ſit numero angulorum figurae diuidendae, indici ordinis eiusdem figurae n aequalis erit. Quodlibet horum triangulorum vt ADB a figura ACDEFGB reſecebit ſiniſtram ACD, et dextram DEFGB, quarum illa, vel haec linea recta, vel biangulum, erit, ſi apex trianguli eeciderit in puncta aſſumptis A, B vicina, C vel G: ſumma autem indicum, quorum vnus figurae dextrae, alter ſiniſtrae ordinem exponit, ſemper eadem erit, $n-1$; vnde ſi index ordinis figurae ſiniſtrae ſit 0, erit index ordinis figurae dextrae $n-1$, ſi index ordinis figurae ſiniſtrae ſit 1, erit index ordinis figurae dextrae $n-2$, et ita porro.

Si

Si iam a triangulo deſcripto ADB diuiſio figurae ita abſoluatur, vt primo figurarum reſectarum ſiniſtra ACD tot modis in triangula diuidatur, quot modis diuidi poteſt, tum et dextra: earum diuiſionum tot conſtitui poſſunt genera, quot ſuper AB triangula poſſunt conſtitui, id eſt, numero n; cumque diuiſio figurae dextrae nullo modo pendeat, a diuiſione figurae ſiniſtrae, cuiuslibet eorum generum tot ſumi poſſunt ſpecies, quot modis ſecari poteſt figura ſiniſtra, quarum cuilibet tot ſuberunt diuiſiones ſingulares, quot modis figura dextra in triangula ſecatur. Vnde ſequitur in qualibet eiusdem generis ſpecie eundem fore ſectionum ſingularium numerum, atque numerum ſectionum ſingularium cuiuslibet generis prodituruin, numero modorum, quibus in triangula diuidi poteſt figura ſiniſtra, per numerum modorum, quibus dextra poteſt diuidi, multiplicato.

Litteris ergo a, b, c, vt et d, et o, p, q eadem hic notantibus, quae notabant initio, ad primum genus, quo apex trianguli ſuper AB deſcripti, cadit in C, cum ſit index ordinis figurae ſiniſtrae $=0$, et index ordinis figurae dextrae $n-1$; erit aq numerus ſectionum eius generis ſingularium. Ad vltimum autem genus, quo apex trianguli cadit in G, cum index ordinis figurae ſiniſtrae ſit $n-1$, et index ordinis figurae dextrae $=0$, idem prodit numerus ſectionum ſingularium huius generis aq, vt duo haec genera, primum et vltimum, coniuncta, ſectiones ſingulares comprehendant numero $2aq$. Ad alterum diuiſionum genus,

genus, quo trianguli apex in D cadit, est index ordinis figurae sinistrae $=1$, et index ordinis figurae dextrae $n-2$, hinc numerus sectionum singularium huius generis $=bp$. Verum ad penultimum sectionum genus, quo apex trianguli cadit in F, cum sit index ordinis figurae sinistrae $n-2$, et index ordinis figurae dextrae 1, idem sectionum singularium numerus bp et huic generi suberit, atque genus secundum cum penultimo sectiones numero $2bp$ comprehendet. Patetque, eodem modo si pergamus, donec genera, quae ita combinari possint, nulla relinquantur, collectis in summam factis $2aq$, $2bp$, $2co$ ex reliquis, vniuersum sectionum singularium numerum, quae omnibus generibus subsunt, obtineri. Id autem futurum est, si n numerus fuerit par. Si vero impar fuerit hic exponens ordinis n, combinatis ita duobus quibus libet generibus, quae aequaliter ab extremis distant, vnum relinquetur in medio punctum E, ad quod, ductis AE, BE rectis, eiusdem ordinis figura resecabitur vtrinque. Vnde si d sit numerus modorum, quibus vna harum figurarum diuiditur in triangula, idem numerus ad alteram aeque pertinebit, eritque numerus sectionum omnium generis in medio relicti, quadratus dd; quo ad summam priorem $2aq + 2bp + 2co$ etc addito, omnium figurae propositae sectionum singularium numerus prodibit.

Vehementer crescunt modorum, quibus figurae plane rectilineae in triangula diuidi possunt, numeri, sic, vt viginti laterum figura ita secari possit plus quam 469, 469, 000000 modis. Apposui tabellam, quo id declaratur, cuius prima series habet numerum laterum cuiuslibet figurae, altera indicem ordinis, tertia numeros sectionum generis primi et vltimi, coniunctos, quarta, numeros sectionum generis secundi et penultimi, et ita porro, ad quos apud indices impares accedit numerus sectionum generis intermedii. Vltima tandem series numeros istos in summam collectos. atque numeros vniuersorum modorum, sectionum omnis generis earum figurarum, quarum indices illis imminent, complectitur.

II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	VIIII	X	XI	XII
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	4	10	28	84	264	858	2860	9724
.	.	.	1	4	10	28	84	264	858	2860
.	.	.	.	.	4	20	56	168	528	1716
.	.	.	.	.	. .	. .	25	140	420	1320
.	.	.	.	.	. .	. .	. .	. .	196	1176
1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

XIII	XIIII	XV	XVI	XVII
11	12	13	14	15
33592	117572	416024	1503800	5384880
9724	33592	117572	416024	1503800
5720	19448	77184	235144	832048
4290	14300	48620	167960	587860
3696	12012	39040	136136	470288
1764	11088	36036	120120	408408
. . . .	. . . . .	17424	113256	377520
. . . .	. . . . .	. . . . . .	. . . .	184041
58786	208012	751900	2692440	9748845

XVIII	XVIIII	XX
16	17	
19497690	69016140	252827580
5384880	19497690	69016140
3007600	10769760	38995380
2080120	7519000	26924400
1646008	5824336	21053200
1410864	4938024	17473008
1283568	4434144	15519504
197340	4171596	14410968
. . . .	243100	13905320
34508070	126413790	469925590

METHO

METHODVS SIMPLEX ET VNIVERSALIS, OMNES OMNIVM AEQVATIONVM RADICES DETEGENDI.

Auctore

IOH. ANDR. de SEGNER.

Aliquot sunt anni, vt in facilem et generalem curvarum generis parabolici descriptionem incidi; quam ideo quaesiui, atque deinde sensim perfeci, quod per eas curuas omnes omnium aequationum radices quam simplicissime exhiberi posse vidi, et vix minus, quam per vllam reliquarum, accurate. Ea vero in re insigne compendium inest laboris eius, quo arithmetica radices has per numeros decimales detegit, veris quantumuis propinquos. Cum enim omnes methodi ad id comparatae, quae mihi quidem innotuerunt, *Raphsoni*, *Halleyi*, *Newtoni*, a numeris incipiant, qui radices eas exhibent errore non nimio, eumque errorem repetito labore adeo imminuant, vt tandem contemni debeat: multum vtique taedii calculo decedere necesse est, si primus ille numerus, a quo calculus inchoatur, a vero non magis aberret, quam parte sui decima, vel centesima. Solent enim regulae illae errores hos tanto magis imminuere, quo ipsi errores minores sunt. Decimae autem et interdum centesimae partis errorem, in figura non magna mediocri studio descripta, euitare facile est, in plerisque casibus.

 Prodiit

Prodiit ab eo tempore praeſtans liber, *Crameri Analyſis curuarum algebraicarum*; quem vt primum euolui, eadem via ad detegendas aequationum radices inſignem eum Geometram proceſſiſſe, *Cap. IV.* vidi cum magna voluptate: quo loco excuſationem quoque adfert methodi, ab ea, quae maxime trita eſt, non nihil recedentis, et egregia multa de radicum limitibus: ſed curuarum, quibus vna mecum vtitur, conſtructiones tradit eas, quibus ſimpliciores et ipſe optare videtur. Quare ſola mihi relinquitur, quam ita editis tanquam meam addere poſſim, facilis illa atque vniuerſalis curuarum iſtarum conſtructio. Nam et aequationis ſolutionem, qua nititur, in *Newtoni Analyſi per quantitatum ſeries etc.* ſub finem eius loci, quo *aequationum affectarum reſolutio* docetur, adnotatam poſtea reperi Id cum ingens ſcribendi compendium fecerit, addam tamen, quae ad plenam dicendorum comprehenſionem neceſſaria ſunt, ne iis, qui haec lectione digna iudicauerint, onus imponam, operoſe quaerendi, quae ſcribi facile potuere.

Sumo conſtantem m pro arbitrio, quam dico *Parametrum*, et variabilem z, ac facio $\frac{z}{m}$. Deinde aliam conſtantem ſumo A, factoque A $\frac{z}{m}$ nouam conſtantem B iungo. Prodit A $\frac{z}{m}$ + B, functio ſimplex variabilis z. Hanc functionem denuo in $\frac{z}{m}$ duco, atque facto A $\frac{z^2}{m^2}$ + B $\frac{z}{m}$ nouam conſtantem C iungo. Prodit A $\frac{z^2}{m^2}$ + B $\frac{z}{m}$ + C, functio quadratica eiusdem z.

Quadra-

Quadratica hac functione denuo in $\frac{z}{m}$ ducta, atque facto $A\frac{z^3}{m^3} + B\frac{z^2}{m^2} + C\frac{z}{m}$ quantitate constante D adiuncta, cubica eiusdem variabilis z functio oritur ista, $A\frac{z^3}{m^3} + B\frac{z^2}{m^2} + C\frac{z}{m} + D$.

Atque hac via pergendo, functiones cuiuscunque ordinis variabilis assumtae z producentur, quas generaliter exhibet formula ista:

$$\frac{Az^n}{m^n} + \frac{Bz^{n-1}}{m^{n-1}} + \frac{Cz^{n-2}}{m^{n-2}} + \text{etc.} + \frac{Nz^{n-n}}{m^{n-n}};$$

in qua quaelibet litterarum A, B, C . . . N, et nihilum notare potest, et quantitatem negatiuam. Si nihilum notauerit harum litterarum aliqua, terminus, quem afficit, e functione euanescet, qua re saepe functio ad gradum inferiorem deprimitur.

Si ponatur $A\frac{z^n}{m^n} + B\frac{z^{n-1}}{m^{n-1}} + C\frac{z^{n-2}}{m^{n-2}} + D\frac{z^{n-3}}{m^{n-3}}$ $+ \text{etc.} + N\frac{z^{n-n}}{m^{n-n}} = y$; poterit aequatio haec lineam definire A B C D, cuius puncta E ad basin rectilineam F G; per applicatas referuntur inuicem parallelas $EH = y$, quae a basi illa abscindunt partes $IH = z$, quarum omnium idem in eadem F G est initium I. Haec *curua* A B C D dicitur esse *generis Parabolici*. Tab. V. Fig. 1.

Si m sumatur aequalis vnitati, vel si generatim ponatur $\frac{z}{m} = x$, aequatio haec paullo simplicius scribitur ita: $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3}$ $+ \text{etc.} + Nx^{n-n} = y$, vnde mox apparet, huic linearum generi et rectam subesse. Si enim fiat $n = 1$, aequatio fit $A x + B = y$, quae vtique lineam rectam exhibet.

Omnibus autem lineis generis parabolici commune est, quod vna cum basi sua F G, a dato in hac puncto I, vtrinqe in infinitum excurrant, ductu nusquam interrupto, sed tamen simplici. Quaecunque enim sumatur x, aliqua semper, per quamlibet aequationum, quae subsunt generali $A x^{n} + B x^{n-1} + C x^{n-2} + \text{etc.} = y$, reperitur y, sed vna plures nunquam. Quaelibet ergo recta alicui applicatarum E H in plano figurae parallela, curuam secat; sed semel tantum, et in vnico puncto.

Quae autem prodit y, cum et affirmatiua esse possit et negatiua, pro magnitudine atque conditione constantium A, B, C, atque ipsius variabilis x: linea generis parabolici vel ad hanc, vel ad illam baseos suae FG partem cadere poterit, vel partim ad hanc, partim ad oppositam. Posterius si contingat, basis a linea necessario secatur.

Verum, quibus punctis linea basin secat, vel vtcunque cum hac concurrit, ad ea est $y = 0$; et, si ad aliquod baseos punctum sit $y = 0$, basis apud illud punctum vel secatur a linea, vel contingitur. Cum ergo constet, plures in functione quacunque valores quantitatis variabilis, quibus functio conuertitur in nihilum; vel quod eodem redit, plures aequationis $A x^{n} + B x^{n-1} + C x^{n-2} + \text{etc.} + N x^{n-n} = 0$ radices, esse non posse, quam vnitates sunt in exponente altissimae potestatis eius variabilis n: totidem locis, quot vnitates hic exponens n conti-

continet, baſis a linea ſecari poterit, pluribus nunquam ſecabitur, vel contingetur; quamuis ſecari, vel contingi poſſit locis paucioribus.

Hinc ſequitur, harum linearum ſimpliciſſimam, quae exprimitur aequatione $A\frac{z}{m} + B = y$, baſin ſecare non niſi ſemel poſſe, eiusque adeo flexum nullum eſſe, qui ſi foret, poſſet vtique baſin bis minimum ſecare. Ergo hoc quoque indicio linea recta proditur.

Curua autem hac aequatione expreſſa $A\frac{z^2}{m^2} + B\frac{z}{m} + C = y$, cum bis tantum baſin ſecare poſſit, vnum habet flexum, plures vno non habet. Si enim bis terue flexa eſſet, poſſet et baſin ter ſecare, vel quater. Eſt haec curua Apollonii Parabola, quod ex aequatione facile perſpicitur.

Curua $A\frac{z^3}{m^3} + B\frac{z^2}{m^2} + C\frac{z}{m} + D = y$ duos admittit flexus, quia baſin ter ſecare poteſt, non plures. Ea, quam exprimit aequatio $A\frac{z^4}{m^4} + B\frac{z^3}{m^3} + C\frac{z^2}{m^2} + D\frac{z}{m} + E = y$, quatuor locis cum baſin ſecare poſſit, poteſt ter flexa eſſe. Et generatim numerus flexuum, quos admittit curua quaeuis generis parabolici, ſemper vnitate minor eſt exponente ſummae dignitatis, ad quam abſciſſa in eius aequatione adſcendit, id eſt, ſi exponens hic ſit n, eſt numerus flexuum $n - 1$.

Reperitur autem aequatio, per quam puncta flexuum horum exhibentur, facile. Sit curua ABCDE apud puncta B, C, D eo modo flexa, quem hic conſideramus. Punctum ſcilicet, quod lineam ABCDE Fig. 2.

mo-

motu suo describit, apud B, C, D directionem mutet ita, vt cum ante recesserit a basi F G, iam ad eam accedere incipiat, vel ab ea recedere, cum ante accesserit. Manifestum est, dum ita motus mutatur, punctum illud secundum directionem basi parallelam incedere debere, atque rectas, quae curuam apud puncta B, C, D contingunt, basi parallelas fieri. Vnde sequitur, ad haec puncta dy prae dz euanescere. Quare si differentialis sumatur aequationis, quae curvam exponit, deleaturque dy, reliqua autem diuidantur per dx, aequatio quaesita in promptu est.

Sumatur loco aequationis quae curuam A B C D E exprimit, vniuersalis haec: $A\frac{z^n}{m^n}+B\frac{z^{n-1}}{m^{n-1}}+C\frac{z^{n-2}}{m^{n-2}}$

$+ \text{etc.} + M\frac{z}{m}+N=y$, erit aequatio quaesita:

$$\frac{n}{m^n}Az^{n-1}+\frac{n-1}{m^{n-1}}Bz^{n-2}+\frac{n-2}{m^{n-2}}Cz^{n-3}+\text{etc.}+\frac{1}{m}M=o$$

per cuius radices puncta dantur H, I, K, a quibus si applicatae ordinentur H B, I C, K D, curua in punctis flexuum B, C, D secatur.

Fig. 3. Sit iam A B C D E curua, per harum aequationum priorem expressa, ad basin I G, et principium abscissarum I ita sumtum, vt si in ea aequatione y ponatur esse o, radices aequationis

$$A\frac{z^n}{m^n}+B\frac{z^{n-1}}{m^{n-1}}+C\frac{z^{n-2}}{m^{n-2}}+\text{etc.}+M\frac{z}{m}+N=o$$

omnes affirmatiuae fiant, quod efficere semper licet.

Dica-

Dicatur aequatio haec Φ, ea vero, per quam puncta flexus B, C, D exhibentur, posterior scilicet ante hanc positarum, sit Ψ. Erunt radices aequationis Φ hae quatuor I F, I H, I K, I G; aequationis autem Ψ radices erunt tres istae I L, I M, I N. Manifestum autem est, puncta, quibus radices istae finiuntur F, H, K, G, atque L, M, N, alterne in basi I G posita esse. Quare radicibus vnius harum aequationum datis, dantur limites, inter quos continetur quaelibet radicum aequationis alterius. Sic radix I F aequationis Φ continetur inter terminos o et I L, eiusdem aequationis radix I H, maior est quam I L, minor autem quam I M, radix autem eius maxima I G intra terminos I N et ∞ continetur. Contra aequationis Ψ radix minima I L intra terminos I F et I H cadit, media I M intra I H et I K, maxima I N intra I K et I G. Sed haec obiter.

Porro, quaeuis linea generis parabolici, dum ita secundum basin in infinitum excurrit, simul ab hac in infinitum recedit. Nam in aequatione $Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} + \text{etc.} = y$, vbi z in ingentem magnitudinem creuit, siue positiua sit, siue negatiua, inferiores eius dignitates z^{n-1}, z^{n-2} etc. prae summa z^n euanescunt, mutaturque aequatio in istam: $Az^n = y$, quae partes lineae extremas tanto accuratius exhibet, quo maior est z. Atqui in hac aequatione crescente z necessario et y crescit, fitque tandem omni dabili maior.

Ramus autem curuae generis parabolici in infinitum excurrens vterque ad eandem baseos partem cadit, si exponens n par sit: sin exponens hic fuerit impar, alter lineae ramus ad vnam baseos partem in infinitum excurrit, alter ad alteram. Si enim in aequatione pro ramis istis $Az^n = y$, numerus n par sit, est z^n semper quantitas affirmatiua, siue z affirmatiua sit, siue negatiua. Ergo et Az^n vel affirmatiua erit, vel negatiua, prout A affirmatiua, vel negatiua est, ad quamcunque partem a principio suo abscissae protendantur. Hinc et applicatae y ad hos ramos omnes ad eandem baseos partem cadent. Contra si n impar fuerit, z^n affirmatiua erit ad z affirmatiuas, et negatiua ad z negatiuas. Ergo et Az^n, et huic aequalis y, ad ramos in infinitum excurrentes ab vna parte principii affirmatiua erit, ab altera negatiua.

Potest ergo linea generis parabolici in cuius aequatione n numerus par est, basin suam plane non secare, quo casu omnes radices aequationis, quae ex illa deriuatur, posito $y = o$, impossibiles sunt. Impar autem si fuerit exponens iste n, basin semel minimum a linea secari necesse est, atque vnam minimum aequationis, quae per suppositionem $y = o$ oritur, radicem esse realem.

Hae sunt proprietates harum linearum palmariae. Quod ad descriptionem attinet, motum excogitare, quo satis accurate designari possint omnes, admodum difficile iudico, quare id neque tentaui. Verum puncta linearum huius generis reperiuntur facilius, quam quis sperauerit, quorum si sat magnus sit numerus, quae per ea describitur curua, a vero aberrare vix potest.

potest. Estque puncta illa reperiendi methodus vbique fere eadem, quicunque sit ordo, quem exponens n indicat. Est enim in eo solo aliqua diuersitas, quod saepius faciendum est, si n plures vnitates contineat, quod fit minus saepe, si is numerus n minor est.

Declarabo rem exemplo lineae ex genere parabolico cubicae, quae aequatione $A\frac{z^3}{m^3}+B\frac{z^2}{m^2}+C\frac{z}{m}+D=y$ definitur. Abscissas affirmatiuas ab earum principio sumam versus dextram, negatiuas versus sinistram; angulum applicatarum rectum faciam, neque enim vt is obliquus fiat, cum radices quaeruntur, opus est; ipsas autem applicatas affirmatiuas supra basin locabo, negatiuas infra.

Sit basis MN, in eaque principium abscissarum O. Tab. V. Fig. 4. Per hoc punctum rectam PO basi perpendicularem facio, cum generatim angulus PON angulo applicatarum aequalis reddi debeat. Iam si linea aequationis, quam designat D, positiua sit, eam a puncto O in rectam OP pono supra basin in OD; si sit negatiua, eam ab eodem puncto in OP infra basin transfero. Ex puncto D in eandem lineam OP pono lineam aequationis C, pariter versus superiora in DC, si affirmatiua sit, sed versus inferiora, si sit negatiua. Similem in modum a puncto C lineam aequationis B in CB pono, versus superiora, si affirmatiua sit, sed versus inferiora, si ea B sit negatiua. Tandem a puncto B in BA lineam aequationis A pono simili lege: versus superiora scilicet, si affirmatiua sit, et versus inferiora, si sit negatiua. Punctis ita in OP repertis,

 litteras,

litteras, quemadmodum in Figura apparent, ordine adſcribo.

Deinde OQ Parametro m aequalem facio, atque per Q rectum duco QR, initio ductae OP parallelam: atque, his ita praeparatis, accedo ad inueſtigandam y ad datam vel aſſumtam z.

Sit z ea $=$ OS. Duco ST pariter ad OP parallelam, perque A ago baſi parallelam Aa. Connecto Ba et noto punctum b, in quo recta haec Ba productam ST ſecat. Per punctum b iterum parallelam baſi ago pc, et connecto Cc; punctum vero d, in quo recta haec Cc eandem ST ſecat, noto. Per hoc enim punctum d, ſi iterum recta traducatur qe baſi parallela, connectaturque De; erit f punctum, in quo haec De productam ST ſecat in curua conſtruenda, atque Sf erit y ad aſſumtam z.

Ducatur enim et per f recta rf baſi parallela. Erit primo $Aa : pb = AB : pB$, id eſt, per ea, quae aſſumta ſunt, $m : z = A : pB$, ergo $pB = A\frac{z}{m}$, et $pC = pB + BC = A\frac{z}{m} + B$. Porro $cp : dq = pC : qC$, id eſt, $m : z = A\frac{z}{m} + B : qC$, ergo $qC = A\frac{z^2}{m^2} + B\frac{z}{m}$, et hinc $qD = qC + CD = A\frac{z^2}{m^2} + B\frac{z}{m} + C$. Praeterea vero $eq : fr = qD : rD$, ſiue, $m : z = A\frac{z^2}{m^2} + B\frac{z}{m} + C : rD$, ergo $rD = A\frac{z^3}{m^3} + B\frac{z^2}{m^2} + C\frac{z}{m}$, et hinc $fS = rO = rD + DO = A\frac{z^3}{m^3} + B\frac{z^2}{m^2} + C\frac{z}{m} + D$.

Eſt ergo haec fS aequalis y quaeſitae.

Eadem conſtruendi ratio et ad eas abſciſſas obſeruabitur, quae vel negatiuae ſunt, vel parametro

OQ

OQ maiores, ad quas punctum S extra spatium OQ cadit, ad hanc illam ve partem. Sed producendae iam erunt Ba, Cc et reliquae huius generis lineae ad eandem partem, ad quam cadit S, et per id punctum ducta ST. Rectarum autem istarum Ba, Cc, De, tanto plures erunt, quo plura sunt puncta A, B, C, D etc. quae aequatio suppeditat.

Verum quaecunque curuarum, quae aequatione

$$A\frac{z^n}{m^n}+B\frac{z^{n-1}}{m^{n-1}}+C\frac{z^{n-2}}{m^{n-2}}+D\frac{z^{n-3}}{m^{n-3}}+\text{etc.}+N\frac{z^{n-n}}{m^{n-n}}=y$$

continentur, construenda sit, erit numerus punctorum A, B, C semper aequalis numero terminorum, qui in priori eius aequationis membro inesse possunt; siue exponenti summae dignitatis z vnitate aucto, $n+1$. Possunt autem duo, vel plura, horum punctorum in vnum coalescere, quod contingit, si aliqua quantitatum A, B, C, D, etc. vel duarum plurium ve cum signis suis coniunctarum summa fiat nihilum. Verum hoc casu, punctorum, quae ita coaluerunt, non minus ratio habenda est, quam si discreta forent. Qua in re tanto minus erit errandi periculum, si puncto, quod pro duobus aut pluribus est, omnes eae litterae A, B, C, adscribantur, quae punctis adscribenda fuerant, quae ita coaluerunt.

Sit reperiundum punctum curuae

$A\frac{z^5}{m^5}$ * * $+D\frac{z^2}{m^2}$ * $+F=y$, ad abscissam $z=OS$. Fig. 5.
Reliquis ergo, vt dictum est, factis, fiat OF aequalis lineae F aequationis. Deinde, quia terminus, qui vltimum F proxime praecedere debebat in aequatione,

$E\frac{z}{m}$ deficit, eſtque adeo $E=o$, apud punctum F figurae etiam littera E ſcribatur, atque punctum EF habeatur pro duplici. Hinc ab E in ED transferatur linea aequationis D, puncto autem D et litterae C, B adſcribantur, quia termini $B\frac{z^4}{m^4}$, $C\frac{z^3}{m^3}$, qui terminum $D\frac{z^2}{m^2}$ praecedere debebant in aequatione, hic ambo deficiunt, habeaturque punctum DCB pro triplici. Tandem ex B in BA ponatur linea aequationis A.

Si iam ad abſciſſam $z=OS$ reperienda ſit y, ducatur Aa baſi MN parallela, deinde Ba, iterum bc baſi parallela, tum Cc, porro de parallela baſi, deinde De, et fg, hinc Eg, tum hi, tandemque Fi, quae productam ST ſecabit in puncto curuae quaeſito k, ad quod ſcilicet eſt applicata $Sb=y$. Non ſubiungo demonſtrationem, quae facile peti poteſt ex iis, quae generatim ſunt oſtenſa.

In conſtructione hac multitudinem linearum iure quis culpauerit, quibus ſi plura quaerenda ſint curuae
Fig 4. et 5. puncta, totam breui chartam oppleri neceſſe eſt, ingenti cum confuſione. Sed facile eſt rei remedium, de quo cogitandum vtique fuit, ſi non in ſola contemplatione ſubſiſtere, verum propoſitum plane perficere vellem. Et primo quidem recta Ba eadem eſt pro qualibet applicata, quam vbi ſecat, in eum locum cadit punctum b Poteſt ergo recta haec Ba vtrinque in infinitum produci, quo facto, ſimul atque ducta fuerit ST, punctum b praeſto erit. Reliquarum autem rectarum bc, Bc, de, Cc, etc. deſcriptio plane euitabitur hunc in modum:

Cape

Cape tabulam rectangulam, qualem ad manus esse figuras cum cura describturo alioquin opus est, et regulam asserculo instructam transuerso, eum in finem, vt si asserculus hic margine tabulae applicetur, omnes lineae, secundum aciem regulae ductae parallelae fiant: qua quidem regula cum architectonibus passim vti solemus. Praeterea aciculam para, manubrio insertam. Ita instructus, ductis ope regulae illius marginibus tabulae applicatae, rectis MN, PO, QR, atque in OP punctis A, B, C, D etc. legitime dispositis, regula basi MN parallela ad punctum A applicata, colloca acus apicem in *a*, et duc B*a* vtrinque infinitam. Deinde ad assumtum OS duc ST et produc. Habebis *b*. Regula basi parallela ad *b* applicata, acum siste in *c*, applica regulam ad acum *c* et ad punctum C. Deinde acum iuxta regulam transfer in *d*. Applica regulam basi parallelam acui huic, deinde hanc iuxta regulam transfer in *e*. Iterum regulam et acui huic applica et puncto D, atque ita perge vsque ad punctum vltimum. Erit *d* figurae 4. vel *k* figurae 5. punctum curuae quaesitum. Admodum expeditus hic labor est, et errori parum obnoxius.

Caeterum omnis curua generis parabolici transibit per punctum *a*, perque punctorum in rectam OP translatorum illud, quod terminum aequationis constantem finit, qui in figura 4. est D, in figura autem 5, F Vtrumque facile patet, si in aequatione fiat primo quidem $z = m$, deinde vero $z = 0$. Est enim ad applicatam in QR sumtam $z = m$, quo posito applicata haec

haec prodit $= A + B + C + D$ etc. $= OA = Qa$. Ad applicatam autem in OP sumtam cum sit $z = 0$ destructis reliquis, quod in aequatione per z non afficitur, solum relinqui necesse est.

Haec est curuarum istarum constructio, quam qui tenet, radices aequationum facile reperiet. Sit data aequatio haec: $16x^4 - 28x^3 - 8x^2 + 27x - 9 = 0$, cuius quaeruntur radices. Facio ex mensura quacunque convenienti $A = 16$; $B = -28$; $C = -8$; $D = -27$; $E = -9$; a quo labore supersedere potuissem, si loco numerorum ipsae rectae A, B, C, etc. per aequationem datae fuissent. Sumta deinde pro basi infinita FG, et puncto O pro abscissarum atque radicum principio, per O duco rectam basi perpendicularem, in eamque colloco ordine retrogrado, $OE = E = -9$; $ED = D = 27$; $DC = C = -8$; $CB = B = -28$; $BA = A = 16$, Fig. 6.

Deinde Parametrum sumo OQ pro arbitrio, nisi quod aliquod compendium in eo sit, si vel vnius, vel decem, aut centum partium eius mensurae sumatur, e qua lineae A, B, C et reliquae desumtae sunt. Generatim autem paruam potius, quam magnam, sumere conuenit, ne scilicet aliquae radicum extra planum tabulae cadant. Per Q punctum rectam duco QT ad OA parallelam, in eamque transfero $Qa = OA$, ducta per A basi parallela. Erit a punctum curuae, quae eadem transibit per E, vti dictum est. Reliqua curuae puncta vt reperiam, per B et a rectam pono infinitam, atque, ducta quacunque recta ad basin per-

perpendiculari, eius partem inter curuam et basin interceptam reperio, quemadmodum ostensum est. Descripta curua apparent, aequationis $A\frac{z^4}{m^4} + B\frac{z^3}{m^3} + C\frac{z^2}{m^2} + D\frac{z}{m} + E = 0$ radices, $z - OX = 0$; $z - OY = 0$; $z - OZ = 0$; et $z + OV = 0$, quia scilicet curua basin suam apud puncta X, Y, Z et V secat, quorum tria priora ad dextram rectae OA partem cadunt, vltimum ad finistram. Erit ergo $z = OX$; $z = OY$; $z = OZ$, et $z = -OV$.

Iam vero, si in aequatione proposita $16x^5 - 12x^4 + 36x^3 + 19x^2 - 18x - 9 = 0$, ponatur esse $x = \frac{z}{m}$, aequationem illam conuerti in eam, quae per curuam constructam exhibetur, et vltro patet, et initio obseruatum est. Erit ergo quoque $x = \frac{OX}{m}$ prima radix huius aequationis; $x = \frac{OY}{m}$ erit eius radix altera; $x = \frac{OZ}{m}$ tertia, omnes affirmatiuae, tandem $x = \frac{OV}{m}$ radix aequationis quarta erit, sed haec negatiua. Quae quidem radices, si per numeros exhibendae sint, vel diuidendi erunt numeri, quibus radices istae exhibentur, per scalam ab initio vsurpatam, per numerum earundem partium, quem continet Parameter OQ, vel rectae OX, OY, OZ, OV, non ex ea scala, per quam exhibitae sunt OD, OC, sed ex ipso parametro m, siue OQ pro vnitate sumpto, mensurandae.

Est in hac methodo radices reperiundi ea insignis commoditas, quod non opus sit curuam describere integram. Positis legitime punctis A, B, C, D, ac

 reliquis,

reliquis, quemadmodum dictum est, praeparatis, si rectae, per quas puncta curuae determinantur, obiter ducantur in aere, vt earum vestigium nullum relinquatur, facile apparet, an curua in loco quouis dato vehementer distet a basi F G, vel ei propinqua sit. Illis ergo eius partibus, quae a basi remotae sunt, neglectis, hae tantum, quibus eam basin secturam esse sperari potest, cum cura elaborandae erunt. Sic autem repertae radices deinde calculo magis elimabuntur, quantum opus est.

DE

DE PROBLEMATIS QVIBVSDAM ISOPERIMETRICIS.

Auctore

PAVLO FRISIO.

Theoria omnis curuarum eodem ambitu comprehensarum, et proprietates quaslibet maximi, aut minimi prae se ferentium, a Geometris celeberrimis *Bernoullio*, *Tayloro*, *Hermanno*, et potissimum *Mac-Laurino* et *Eulero* in tanta luce nunc temporis videtur posita, vt eorum lucubrationibus vix quidquam amplius adiungi possit. Nihilominus tamen, cum in problematis huius generis resoluendis quaedam mihi compendia sese obtulerint, non sine aliqua calculi et temporis oeconomia, animum subiit, ea breuissime exscribere, quaecunque sint, et Academiae communicare.

Principio si curuae AH, semiordinata CT ponatur $=y$, abscissa PC$=x$, CD$=dx$, CB$=-dx$, et substituatur in aequatione $x+dx$, ac deinde $x-dx$, loco x, prodibit DF$=y+dy+\frac{1}{2}d^2y+\frac{1}{6}d^3y$ etc. et BG$=y-dy+\frac{1}{2}d^2y-\frac{1}{6}d^3y$ etc. quaecunque demum sit ipsa aequatio, et quocumque ex loco supputentur abscissae x. Hoc dato alia non pauca consequentur theoremata. Ex. gr. cum dy fluxionem primam semiordinatae exprimat, quae scilicet ducta tangente definitur, puncta E, et F infra, aut supra tangentem cadent, Tab. VI. Fig. 1.

 et

et curua proposita ATH erit versus axem AE concaua, aut conuexa, prout altera semiordinatae fluxio d^2y aut negatiuum, aut positiuum valorem aliquem prae se feret. Inde etiam fluent vulgares radii, et coradii osculatoris formulae, et ad assequendas alias curuarum cuiuscunque ordinis proprietates amplissimus patebit aditus.

At vero binos casus, qui maxime ad rem nostram faciunt, euoluere, et singillatim considerare opus est. Prima semiordinatae fluxio dy euanescere aliquando, et aliquando infinita esse poterit, exprimi scilicet fractione, cuius numerator ad denominatorem nullam finitam rationem habeat. In primo casu si fluxionum aliarum simili modo euanescentium numerus par fuerit, semiordinatae maximum, aut minimum habebitur: Maximum vtique, si fluxio, post euanescentes omnes superstes, sit negatiua: Minimum, si positiua. In casu altero, euanescet subtangens curuae, congruet semiordinatae tangens, et fiet axi perpendicularis. Erit etiam semiordinata immediate subsequens $= y + \frac{1}{0} + \frac{1}{2} d^2y$ etc. et quae antecedet immediate $= y - \frac{1}{0} + \frac{1}{2} d^2y$ etc. si ambae scilicet ad eumdem ramum curuae ATH pertineant, nec maiores simul, nec simul minores erunt semiordinata intermedia y. In eodem igitur curuae ramo, facta dy infinita, maximum aliquod, aut minimum semiordinatae nunquam haberi poterit.

Poterit tamen semiordinata diuersis ramis eiusdem curuae aliquando interiacere. Ramos diuersos voco eos

eos omnes, in quibus coordinatarum relatio eodem ſpecierum ordine, eademque aequatione exprimitur, ſignis tamen negantibus, aut affirmantibus diſſimili. Ex centro circuli ex. gr. perpendiculari ad diametrum erecta, quae prodit maxima ſemiordinata, in eodem circuli ramo vtrinque producto eſt: vtrinque enim ſemiordinatae valor quantitate vnica exprimitur $\sqrt{(2ax-x^2)}$, aut $\sqrt{(a^2-x^2)}$, quemcunque demum valorem obtineant abſciſſae x. At vero in Parabola cubica GAM, cum facta $CE = a$, et abſciſſis a puncto C ſupputatis prodeat $(y-a)^3 = a^3-2a^2x+ax^2$, ſiue $y = a + a^{1:3}(\pm a \pm x)^{2:3}$, ſuperioribus ſignis ad ramum GA, et inferioribus ad AM pertinentibus, ramos ipſos inter ſe inuicem diſtinguere neceſſe erit. In priori ramo ſemiordinata quaelibet proxime antecedens erit $= a + a^{1:3}(a-x-dx)^{2:3}$ $= a + a^{1:3}(a-x)^{2:3} + \frac{2}{3}a^{1:3}(a-x)^{-1:3}dx$ etc. $= y + dy - \frac{1}{2}d^2y$ etc. In ramo altero ſemiordinata proxime ſubſequens erit $= y + dy - \frac{1}{2}d^2y$ etc. Itaque in rami vtriusque confinio A ſemiordinata EA omnium minima euadet. In aliis curuis vtrinque axi accedentibus, in quibus ſcilicet negatiua eſſet dy, iisdem factis ſuppoſitionibus ſemiordinata maxima haberetur. At quamdiu ad eundem ramum pertineant ſemiordinatae, nunquam fient maximae, aut minimae, vbi euaneſcat denominator illius fractionis, quae primam ſemiordinatae fluxionem exprimit: Id quod generale nobis principium ſuppeditabit, et ad enodanda quaeuis iſoperimetrorum problemata maxime idoneum: Quantitates ſcilicet creſcentes quomodocunque, aut decreſcentes euadere maximas, aut minimas, non poſſe, niſi prima earum-

Tab. VI. Fig. 2.

dem fluxio euanescat. Possunt enim quantitates omnes semiordinata curuae alicuius exprimi.

Tab. VI. Fig. 3. Hoc posito quaeratur curua AHE, quae proprietatem aliquam maximo, aut minimo gradu exhibeat. Sint bina elementa abscissae BC, CD, semiordinatae MG, NT, perimetri GT, TF, productaque CT in P, ex terminis G et F ducantur duo alia alterius curuae elementa GP, FP, prioribus vtcumque proxima. Primo, cum extremorum punctorum locus H, E non detur, proprietas eadem maximi, aut minimi quaesitae curuae conuenire debet, quamcunque exiguam portionem GTF puncta intercipiant. Deinde ex iis, quae modo diximus, consequitur, proprietatem ipsam non posse elementis singulis BGTC, CTFD conuenire, nisi etiam elementis aliis BGPC, CPFD ita conueniat, vt differentia omnis euadat nulla. Denique si radiis FT, GP describantur circulares arcus TO, Po, ob similitudinem triangulorum TNF, POT, et GMT, ToP erit $PO = \frac{NT.TP}{TF}$, et $To = \frac{MG.TP}{GT}$. Datis hisce omnibus, si intelligamus elementa BGTC, CTFD retinere proprietatem suam, dum abeunt in elementa proxima BGPC, CPFD, aequationem huius formae habebimus, $X - X + dX.TP = 0$, et quaesitam eruemus curuae aequationem $dX = 0$, siue, quod eodem recidit, $X = C$.

Antequam vlterius progrediamur, demus exemplum aliquod, atque illud quidem tritissimum, quo curua HTE eius naturae et indolis requiritur, vt ex H ad E vsque corpus minimo tempore descendat. In hoc casu, cum quantitas $\frac{GT}{\sqrt{AB}} + \frac{TF}{\sqrt{AC}}$ vbique minima esse debeat,

debeat, fiet iuxta dicta $\frac{GT}{\sqrt{AB}}+\frac{TP}{\sqrt{AC}}=\frac{GP}{\sqrt{AB}}+\frac{PP}{\sqrt{AC}}$ $=\frac{GT-To}{\sqrt{AB}}+\frac{TP+PO}{\sqrt{AC}}$, et deletis aequalibus, supererit $\frac{PO}{\sqrt{AC}}-\frac{To}{\sqrt{AB}}=\frac{NT.TP}{TF.\sqrt{AC}}-\frac{MG.TP}{GT.\sqrt{AB}}=\frac{d.MG.TP}{GT.\sqrt{AB}}=0$. Id indicabit fluentem ipsam $\frac{MG}{GT.\sqrt{AB}}$ constanti quantitati aequalem esse, et in vulgari cycloide FRG, habebit locum, in qua esse nouimus $Nn:NQ=CM:MR$ $=PM:PR=\sqrt{PC}:PR$, si in plano inclinato corpus a B ad G vsque transire debeat, perinde erit: Quippe adhuc constans manebit vis, qua in plano inclinato corpus ad descensum vrgebitur, atque ad absolutam vim grauitatis erit in constanti ratione altitudinis plani ad eius longitudinem. Tab. VI. Fig. 4. Fig. 3.

Licet autem Cl. *Eulerus* reliqua maximorum, minimorumque et isoperimetrorum problemata, aucto numero conditionum propositarum, difficiliora euadere existimauerit, vt quoniam bina elementa curuae singulis proprietatibus singillatim exhibendis sufficiunt, binis simul componendis, non nisi terna, et plura pluribus essent satis; saepissime animaduerti, ex curuis omnibus, quae proprietates A, B, C, D etc. aeque habeant, eadem methodo, ac pari facilitate eas curuas decerpi posse, quae proprietates alias F, G, H etc. maximo gradu, aut minimo prae se ferant, quaecunque sit proprietatum propositarum complexio, et numerus. Si enim singulae proprietates exhibendae essent singillatim, haberi possent eadem methodo aequationes totidem huius generis $\overline{X-X+dX}.TP=0$, $\overline{Y-Y+dY}.TP=0$, $\overline{Z-Z+dZ}.TP=0$

$TP = 0$, etc. Quoniam igitur proprietates omnes in vna simul curua esse debent, compositis aequationibus, prodibit $dX + dY + dZ$ etc. $= 0$, aut, nisi aequationum termini iam homogenei inter se sint, $dX + a\,dY + b^2\,dZ$ etc. $= 0$, vel denique $X + aY + b^2 Z$ etc. $= C$.

Problematum exempla mutuemur ab ipso *Eulero*, et inquiramus curuam, quae inter omnes isoperimetricas maximam superficiem complectatur. Si sola prior conditio seruanda esset, haberetur $GT + TF = GP + PF = GT - To + TF + PO$, et erueretur inde $\frac{NT.TP}{TF} - \frac{MG.TP}{GT} = \frac{d.MG}{GT}\,TP = 0$. Altera etiam proprietas, si sola esset, exhiberet $AB.MG + AC.NT = AB.\overline{MG - TP} + AC.\overline{NT + TP}$, siue $d.AB.TP = 0$. Itaque proprietatibus compositis, et facta $AB = x$, $BC = dx$, $BG = y$, $MG = -dy$, $HG = s$, $GT = ds$, emerget $\frac{a\,dy}{ds} = x \pm b$, quae est semper aequatio ad circulum. Quod si vero quaeratur curua, quae inter omnes isoperimetricas circa axem AH conuersa generet maximum solidum, noua haec proprietas dabit eodem modo, $d\,AB^2.TP = 0$, et aequationem suppeditabit $a^2\,dy = x^2\,ds \pm b^2\,ds$, quae exprimet naturam curuae elasticae. Si curua ea esse debeat, quae circa axem AH conuersa maximum solidum et minimam superficiem simul gignat, prodibit primo $AB.GT + AC.TF = AB.\overline{GT - To} + AC.\overline{FF + PO}$, ac deinde $\frac{d.AB.MG}{GT}.TP = 0$, et nouae curuae aequatio fiet $ax\,dy = x^2\,ds \pm b^2\,ds$, quae in aequationem ad circulum degenerabit, si sit $b = 0$, ad catenariam vero, si a sit infinita, et $b^2 = ac$. Si denique ex curuis omnibus isoperiperimetricis ea requiratur, quae centrum grauitatis habeat ab axe AH maxime remotum, siue in qua sit maxima quantitas omnis AB. ET, seruatis conditionibus singulis, prodibit $ady + xdy = bds$, quae erit rursus aequatio ad Catenariam.

Transeamus ad superiorem problematum horum classem, atque inquiramus curuam, quae ex omnibus isoperimetricis maximam aream complectatur, et sua circa axem AH reuolutione generet maximum solidum. Illico habebimus $x^2ds + bxds - a^2dy = c^2ds$. Quod si ex curuis omnibus eiusdem longitudinis, eiusdemque areae, ea excerpenda sit, in cuius perimetro graue corpus celerrime descendat, eruetur $xds - ady - \frac{bdy}{\sqrt{x}} = cds$. Pariter si ex curuis omnibus eiusdem areae ea requiratur, quae circa axem AH conuersa generet idem solidum, ac tale insuper, vt motum secundum axis directionem patiatur minimam resistentiam, ad tuendam hanc vltimam conditionem esse oportebit $\frac{AB.BC^3}{ET^2} + \frac{AC.CD^3}{TF^2} - \frac{AB.BC^3}{GT-To^2} + \frac{AC.CD^3}{TF+PO^2}$, adeoque etiam $\frac{d.xdydx^3}{do^4}.TP$, et conditionibus singulis retentis, $ax + x^2 - \frac{bxdydx^3}{ds^4} = c^2$. Si summa omnium AB. ET maior esse debeat, quam in aliis curuis omnibus eiusdem longitudinis, eiusdemque areae, erit $ax + x^2 - \frac{bxdy}{ds} = c^2$. Congruunt aequationes iis omnibus, quas plura elementa curuae considerando, in medium protulit *Eulerus*.

Addamus exemplis hisce alia quaedam. Decrescat vis, qua se attrahunt puncta omnia in ratione duplicata auctarum distantiarum, et requiratur curua QHE, quae maxi- Tab. VI. Fig. 5.

maxime omnium attrahat corpusculum L in axe HB constitutum. Erit attractio elementorum GT, TF secundum directionem axis ipsius exercita $\frac{GT.LR}{GL^3} + \frac{TF.LS}{TL^3} = \frac{\overline{GT - TO}}{EL^3} LR + \frac{\overline{TF + PO}}{TL^3} LS$. Inde eruetur $\frac{d.\overline{LR-MG}}{GL^3.GT}.TP = \frac{d.\overline{ndy+ydy}}{(\overline{n+y}^2+x^2)^{3:2}ds}TP = 0$, facta scilicet $LA = n$. Si vero quaeratur curua, quae non ipsa quidem, sed superficies reuolutione circa axem genita attractionem maximam exerceat, erit $\frac{d.\overline{nxdy+xydy}}{(\overline{n+y}^2+x^2)^{3:2}ds}.TP = 0$. Si denique totum solidum maximam attractionem exercere debeat, quoniam attractio circuli radio RG descripti est $1 - \frac{LR}{LG}$, erunt elementa attractionis maximae $MG - \frac{MG.LR}{LG} + NT - \frac{NT.LS}{LT} = MG - TP - \frac{\overline{MG - TP}}{LG}LR + NT + TP - \frac{\overline{NT + TP}}{LT}LS$, vnde emerget $\frac{d.\overline{n+y}.TP}{\sqrt{(\overline{n+y}^2+x^2)}} = 0$. Poterunt hae proprietates cum singulis superioribus ad libitum componi. Si eius indolis curua esse debeat ex. gr. vt circa axem LH conuersa generet solidum, quod prae aliis aequalibus maxima attractione polleat, aequatio curuae habebitur $\frac{b^2n+b^2y}{\sqrt{(\overline{n+y}^2+x^2)}} = c^2 - x^2$.

PHYSICO-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DISSERTATIO

DE QVIBVSDAM CIRCA LENTES CAVSTICAS ET SPECVLA VSTORIA EMENDATIS ET NOVITER INVENTIS (a)

Auctore *IO. ERN. ZEIHER.*

Effectus radiorum solarium speculis causticis, aut lentibus, coactorum, sine dubio maxime mirandi sunt; simul vero dolendum est, physicorum plurimos hisce organis carere. Specula caustica quidem adhuc, sed non sine magnis impensis, haberi possunt, lentes vero trium, aut quatuor pedum, quales Dom. de *Tschirnhausen* olim confecit, vix a priuato possidentur; dum earum vix quinque aut sex supersunt, quae aut principum aut aliis technophylaciis publicis reposita adseruantur: (*b*) cui accedit, quod furnos et machinas nouis fundendis et poliendis necessarias, nemo priuatus sibi facile comparauerit. Neque ex solo vitro, maio-

(a) In haec cogitata incidi, antequam, quae D. de *Buffon* in his praestitit, didicissem. Optimum ergo duxi, si cogitata mea illo ordine, quo se consequuta sunt, recenserem, Domini de *Buffon* vero inuenta, vbi occasio esset, in notis adducerem.

(b) Vnam possedit *Lehmannus*, olim Physicae Professor Lipsiensis, qui plus fere sumtuum, quam priuati, et non adeo diuites, rationes ferrent, naturae inuestigandae impendit. Illa lens extat adhuc Lipsiae apud *Lehmanni* filium, aequo pretio vendenda.

res aut perfectiores, quam *Tschirnhausius* dedit, elaborari posse videntur.

Interim magnae esset vtilitatis, si inter physici cuiusuis supellectilem lens trium aut quatuor pluriumue pedum reperiretur. Tunc enim alii hac, alii alia occasione experimenta instituendi oblata, lentibus propriis opportunitatem subministrantibus, magnus nouorum inueniendorum aperiretur campus. Haec effecerunt, vt de mediis, speculorum causticorum, inprimis vero lentium, vsum magis communem reddendi cogitarem.

Primo specula, minoribus impensis, quorum effectus tamen pro ratione magnitudinis et impensarum insignis esset, perficienda meditabar. Eo me ducebat *Kircheri* idea, specula talia ex planis componendi, et paruum quoddam tentamen rei sic instituebam: (c)

Pluribus ligni frustis ita coniunctis, vt figuram semel inductam mutare non possent, totam compagem secun-

(c) Fortuito cum D. de *Buffon* in eadem cogitata incidi, etsi ad alium scopum collimant. Ille enim de speculis in longinquum focum proiicientibus cogitauit, Archimedea, quae narrantur, restituturus, aut potius primo exhibiturus; ego autem, quae metallicis speculis ex massa continua elaboratis magna impensa obtinentur, facilius conficere, sicque vsum speculorum causticorum magis communem reddere volui. Inuenta Dom. de *Buffon* v. in Commentariis Acad. Reg. Scient. Paris. 1747. 1748.

ſecundum arcum circuli, cuius radius erat digitorum rhenanorum triginta ſex, torno excauari curabam. Latitudo erat digitorum quindecim, craſſities trium. Superficiei ad craſſitiem circiter lineae inducebam maſſam ex farina, creta, fuligine, aqua mediante commixtis. Hac plane ſiccata, aliud adhibebam lignum, capulo, quo teneri poſſet, inſtructum, latitudine, quae circiter duas tertias latitudinis ligni eius haberet, cui adiungi ſpeculum debebat, conuexitatem vero, concauitati alterius illius ligni, et ſpeculi ipſius, congruentem. Hoc inſtrumento ligneo conuexo ſuperficiem maſſae, cauo inductae, terebam, donec ſuperficies polita ſatis et perfecta erat.

Deinde ex ſpeculis planis ſecari curabam quadrata exigua, quorum latera digitum dimidium rhenanum aequabant, quibus cauitatem illam obducebam, ita ſpeculum cauum ex planis compoſitum obtinens. (*d*)

Cum

(*d*) Reperit Dom. de *Buffon* (Comment. Acad. Scient. Pariſ. 1747. pag. 83. ed. Pariſ.) ſpecula vitrea, mediocri diligentia elaborata, lucem fortius reflectere, ſpeculis metallicis optimis, imo melius compoſitione illa, qua ad Teleſcopia catadioptrica vtuntur. Ad vtendi igitur ſcopum metallicis vitrea praefert. Vt caua ſpecula ex planis vitreis componeret, varia ingenioſiſſime excogitauit. Speculum diſtantiae focalis inſignis quaerens, plana vitrea 168. quodlibet latitudinis digit. 6. altitudinis 8. excedens coniunxit, ſicque lignum ad diſtantiam ped. 168. incendit, ſtannum, plumbum, argentum, ad diſtantias pedum 150, 130, 60, liquauit. Deinde aliud ſpeculum ex 192. planis coniunxit, quorum

Cum hoc speculo varia experimenta institui, idque pro ratione magnitudinis suae egregios effectus edere reperi, licet nec superficies ipsa satis ex voto formata esset, nec specula omnia angulis suis superficiem

quorum 20 effectum satis insignem ad distantiam 120 pedum, 80 ad pedes 240, et 160 ad pedes 360 ediderunt. De sustentaculo hoc tantum monet, quaquauersum verti posse, speculum vero quodlibet seorsim posse moueri. Ego de sustentaculo, cuiuis tali speculo composito apto, cogitaui, quo pondus nimium machinae non daretur, specula vero omnia simul verti possint. Id sic crederem effici posse. Fiat crux lignea quatuor aequalium brachiorum, singulis brachiis ad extrema sua in angulos rectos curuatis; huic asseres duo flexiles, vbique aequalis crassitiei et longitudinis, ita imponantur, vt singula extrema asserum singulis extremis inflexis crucis incumbant. Iungantur vero extremis crucis inflexis retinacula, sub quibus antrorsum et retrorsum duci possint asseres elastici, non tamen decidere. Asseribus elasticis imponantur specula plana, sic vt exacte omnia in plano eodem sita sint. Iam asseres hi ita sibi imponantur, vt se decussent, non vero inseri debet vnum alteri, aut alio modo coniungi, sed simpliciter sibi superimponi. In ea parte, qua sibi mutuo incumbunt, cochlea applicatur, qua magis minusue ad brachia crucis vrgeri possunt. Hac cochlea curuari poterunt asseres, et specula plana ante in directum posita curuedinem efficient pro diuerso cochleae situ maiorem, vel minorem. Illud par extremorum crucis reflexorum, quibus superior asser incumbit, reliquum par excedere debet crassitie asseris inferioris, vt curuedines asserum in superficiebus parallelae sitae sint; nam aequali extremorum illorum inflexorum crucis longitudine inferior asser, siue cruci proprior, exteriore magis curuaretur. Equidem curuatura asserum in rigore circularis non erit, sed ita comparata, vt radius eius osculi circa medium maior sit, quam versus extrema, elasticae scilicet speciei, sed hoc ipsum proficit magis, quam obest. Specula decet laxius asseribus iungi, vt paulisper verti ad hoc vel illud latus possint. His omnibus ita perfectis, cochlea, de qua dixi, magis minusue circumuolviem sphaericam contingerent, hincque radii multum aberrarent, et non satis in vnum focum colligerentur. Quibus non obstantibus, momento temporis flammam in charta candida excitaui, stannum in laminas tenues malleo diductum perforaui, aqua in vasculo vitreo vt ebulliret effeci, laminas aurichalceas candere vidi, et quae reliqua sunt; licet illa speculi aberratione certo certius dimidium radiorum perdatur.

Inuentum etiam quoddam magni *Isaaci Newtoni* ruminaui, qui speculum vstorium compositum Societati Regiae Anglicanae obtulit, *Derhamo* in Astrotheologia L. 7. C. 1. p. 166. vers. germanicae memoratum. Constat machina ex cauis speculis septem, quorum quodlibet habet latitudinem digitorum duodecim, atque ita

cumuolatur, machina soli opponatur, et obseruetur, quantum a se distent superficies lucidae, radios a singulis speculis reflexos continentes. Quae si non omnes sibi congruant, hoc vel illud speculum, a quo reflexi radii a reliquis secedunt, tam diu vertere licet, donec omnes coincidant, in eoque situ specula firmare. Lignum vero, etsi vbique aequaliter crassum, non tamen aequali elasticitate gaudet, igitur si hic defectus obseruetur, auferendo debito loco aliquid crassitiei, mederi illis posset. Si curvedo versus extrema nimis insensibilis sit, possent asseres in medio crassiores fieri, quam versus extrema, sic reperiretur tandem curuedo, in qua disposita specula plana radios singula in quauis distantia ad eundem locum reflecterent, et in machina semel ita coordinata nihil superesset, quam vt cochleae ope distantia focalis mutaretur, quae mutatio ab infinita ad paruos pedes pertingere posset.

ita coordinata sunt, vt radii illorum omnes in vnum idemque punctum reflectantur; insignis proinde effectus.

Ita compositum speculum plus praestare posse simplici certum videtur, si in vtrumque radii solares eodem numero incidunt, aberratio quoque euitatur, insignis futura, si speculo vnico superficies dari debeat septem illis aequalis; (e) denique minus plurium speculorum coniunctorum pondus est, quam vnius simplicis, quod si magnum esse debeat, tenue fieri non potest.

Minora haec specula componi possent ex speculis vitreis planis exiguis, quae singula ad magnitudinem accederent eam, quae est foci speculi maioris totius, si superficies esset continua: sic impensae minuuntur, effectus vero, nisi multum fallor, maior adhuc erit, quam metallici, qualia vulgo fabricantur. Maiora specula vitrea continua efficiendi aliam methodum, eamque faciliorem, indicabo, vbi de lentibus egero.

Venio nunc ad ea, quae circa lentes reperi. *Hertelius* in libro de poliendis vitris, (Anweisung zum Glas-

(e) Praeterea, cum paralleli axi versus centrum solis directo, ii tantum radii incidant, qui ex centro solis exeunt, reliqui angulis diuersis, maximo semidiametro solis apparenti aequali, ad axem inclinentur, horum a latere venientium, alia est reflexio, quam expendunt D. de *Buffon* et *Cassini* Comment. Acad. Paris. 1747. pag. 32. et p. 104. Cel. *Kaestnerus* in Optices Systemate quod germanice edidit (Vollständiger Lehrbegriff der Optic) Catoptricae analyticae cap. 1. Prop. cor. 4. concursum reflexi radii cum axe ex angulo incidentis cum axe definire docuit.

Glasschleiffen) p. 51. massam vitri in furno fluentis annulo ferreo excipi iubet, vt pondere suo in superficiem cauam inflectatur; duas eiusmodi superficies iungi et aquam intromitti. Sed nec magna possunt fieri haec vitra, nec radii desiderati, imo ne quidem sphaerica fient, sed catenariae formam adfectabunt. Ego vero methodum inueni, tabulas politas planas speculares cuiuscunque magnitudinis in meniscos curuedinis sphaericae exactae et desideratae mutandi. (f)

Initio sumebam catinum, quo ad vitra optica polienda vti soleo, radii digitorum sex, chordae circiter quinque digitorum; tunc frustum vitri specularis rotundatum, cuius latitudo dimidio circiter digito minor erat latitudine catini, catino impositum, reponebam sub tegula illa semicylindrica, qua in chymia Metallurgica vtimur, Muffel Germanis dicta; postea igne tegulam circumdedi, et vitrum mollescens ad cauum catini se accommodasse, ex luce, quam superficies sphaerica reflectebat, intellexi. Superiorem tegulae partem carbonibus liberaui, vt paullatim refrigesceret; sed cum alius catinum ex tegula tolleret, antequam satis refriguisset, caussae illi tribui, quod vitrum rimam ageret. Hoc autem vitrum fortuito initio statim debitum calorem erat consequutum, debitumque tempus in

 igne

(f) D. de *Buffon* (Comment. Acad. Scienc. 1748. p. 307.) tabulis vitreis regularem curuedinem se conciliasse scribit, methodum vero, qua id peregerit, non indicat. Eo magis ergo meam hic docendam putaui, inprimis cum rem magni momenti D. de *Buffon* existimet.

igne remanſerat, ſuperficiei catini perfecte ſe applicauerat, puritate, quam habebat, cum infra catinum illud reponerem, nihil imminuta. Equidem catini ipſius figuram, ob expanſionem, quam metalla in igne patiuntur, pauliſper mutatam eſſe, credibile eſt, ſed praeſenti ſcopo id haud officere videtur.

Huius exigui tentaminis ſucceſſu erectus, maius experimentum capere decreui. Catinum cupreum, ſedecim digitos rhenanos latum, ad curuaturam ſphaerae, cuius radius eſſet digitorum triginta duorum, primum malleo, deinde accuratius torno, elaborari iubebam; tunc laminarum duarum, digitos quatuordecim et dimidium latarum, ex vitro ſpeculari Veneto ſectarum, vnam, cum catino, ad digiti dimidii craſſitiem exterius luto tecto, lateribus tribus impoſui. Ita vero lateres ordinaueram, vt ſub catino, in illis requieſcente, carbones incendi poſſent. Aliis lateribus catinum circumdabam, qui digitis duobus altiores erant margine catini, ſed ab eo ipſo margine paululum diſtabant, vt carbones interiici poſſent. Lateribus imponebam tegulam (Muffel) ſphaerice fornicatam, qualis imponi ſolet teſtis, in quibus argentum plumbi vitreſcentis ope depuratur, (Abtreibeſcherben) carbones vero circumponebam. Equidem vitrum molleſcens pondere ſuo curuabatur, calor autem ad latera, praecipue ad foramina tegulae, quae aer perflat, nimius erat, et in medio iuſto minor, carbonibus ſuperius incumbentibus, ob altiorem tegulae fornicem, nimium a vitro remotis. Margo igitur vitri liqueſcebat, medium

vero

vero non exacte ſuperficiei catini ſe applicabat, ſed veſiculis aereis occupabatur. Tunc quidem ignarus horum phaenomenorum, interitum vitri mei portendentium, ignem ſuperius, quantum licebat, augebam, vitrum poſt aliquod tempus debitam formam conſequuturum exiſtimans; perſiſtebant vero veſicae. Deinde carbones paulatim amouens, tantum modo ignis reliqui, vt ne nimis ſubito refrigeſceret. Sed poſtea vitrum catino adcretum, et rimis innumeris diſcerptum reperi, vt, quo a catino ſepararetur, malleo in puluerem eſſet contundendum, catinus vero denuo elaborandus.

Haec eam ob cauſſam retuli, vt intelligatur, quanti interſit, ignem aequali vi applicari, ne vitro circa margines liqueſcente, et ipſum perdatur, et catinus ipſe, quod in magnis catinis non ſine inſigni detrimento fieret, nouo labore in priſtinam formam eſſet reducendus.

Sequentia tentamina, cum vitris minoribus, quibus ad feneſtras vtimur, inſtitui, catinum minorem prius memoratum adhibens, ne enchireſes nimiis ſumtibus addiſcerem.

Loco tegulae argillaceae, tegmem ex lamina ferrea confeci, extremum eius in marginem non nimis altum inflectens, anterius vero apertura conuexa illud inſtruens, vt fieri ſolet in tegulis argillaceis; ſuperiorem partem planam effeci, vt carbones vitro ſatis propinqui eſſent, reliqua, vt ante, peregi, id potiſſimum agens, vt vitro calor aequabilis tribueretur, aut maior potius medio vitri, quam margini.

Sic ſatis bene molleſcens vitrum cauo catini ſe applicabat, ſed, dum refrigeſceret, rimam agebat, idemque fatum plura vitra experta ſunt, dum plura experimenta inſtituebam.

Hoc incommodum euitaturus varia tentaui, quorum illud tantum deſcribam, quod ſemper poſtea ex voto ſucceſſit.

Circa lateres ponebam cineres per cribrum actos, vt ſimul incaleſcerent, et cum vnum vitrorum illorum debitam formam eſſet adſequutum, carbones quantocyus a ſuperiore tegminis ferrei parte remouebam, omnia vero cineribus calidis tegebam, nihil aperti relinquens; ſic vitrum integrum ſeruaui. Haec plus quam decies cum vitris minoribus, felici ſemper euentu, repetii.

Poſt haec ſecurior ad maiora progrediebar. Catinum ferreum, decem circiter digitos latum, quantum fieri poterat, ſecundum arcum circularem malleo elaborabam; omiſſa vero tritura, quia non opus erat rem exactiſſime perfici. Deinde ex vitro, quo ad feneſtras vtimur, fruſta octo digitos lata ſecabam, reliqua, vt ante, peragens, ſicque omnia probe ſucceſſerunt. Eorum bina coniunxi, quorum effectus etiam non contemnendus fuit, etſi propter catinum minus accuratum focus bene terminatus et coactus non eſſet. Tandem priorem catinum maiorem cupreum rurſus adhibui, in eo vitrum Venetum alterum, digitos fere quindecim rhenanos latum, curuabam, cui ſimile periiſſe antea retuli, egregio cum ſucceſſu, quantum exactitudo catini

tini cuprei admittebat. Hoc vitrum, alii plano, etiam Veneto, iungens, lentem digitos quindecim latam obtinui, bonos satis effectus edentem, sed effectibus lentis aequalis ex vitro solido constantis inferiores; cuius rei caussa est, quod catinus, ob tenuitatem laminae cupreae, quae eum constituebat, satis exacte in superficiem sphaericam malleo deduci non poterat, figuram etiam in igne mutauerat. Igitur vitri figura, catini figurae ceterum congruens, accurata tamen non erat, vnde imagines distorquet, focum vero non satis terminat, nec satis cogit.

Huic malo facile mederi possumus catinis ferreis crassioribus, operaque omni adhibita, vt tritura debitam formam et cauitatem consequatur; multitudo vitrorum, qui in tali catino formari possunt, impensas facile restituet.

Expertus sum negotium quoque in catinis argillaceis succedere.

Iam de his dicam, quae vt omnia bene cedant, obseruari debent, prouti pluribus tentaminibus illa didici.

Si vitrum alicuius momenti formari debet, frustulum eius vitri antea igni exponendum est, donec candescat, quod, si polituram et perspicuitatem seruet, operationi idoneum est. Accidit enim mihi, dum vitrum speculi Veneti, quod ea parte, vbi crassities vitri mensurari solet, nigrum erat, formabam, vt illud polituram omnem perderet, superficiem nactum, superficiei vitri ruditer triti similem.

Recepta-

Receptaculi eius, in quo vitrum reponitur, vt tegulae argillaceae, aut tegminis ferrei, superior superficies non nimis a fundo remota esse debet, ita tamen, vt per aperturam anteriorem totum vitrum spectari possit. Hac ratione carbones incumbentes melius agunt in vitrum, illudque citius in medio, quam ad margines calefaciunt. Curandum quoque est, vt vitrum totum aequaliter candescat, rubrum colorem aequalem vbique exhibens. Nam si color eius in medio obscurius rubeat, circa marginem vero albidior sit, in periculo vitrum versatur.

Quam primum vitrum ab igne rubet, sollicite ad curuaturam, quam mollescens consequitur, attendendum est. Illa facile percipitur ex reflexione lucis et imaginum superficiei superioris tegulae, carbonum, etc. a vitro speculi ad instar caui factae.

Magni vero refert, momentum exacte notare, quo vitrum superficiei catini perfecte se applicauit, tuncque statim remoueri ignem omnem supra vitrum, maximam quoque partem ignis ad latera, deinde omnia quantocyus cinere calido contegi, ne vllibi apertura remaneat.

Hoc momentum obseruare, vsu demum addiscimus.

Si nimis diu requiescat vitrum, aliquid scoriae (Zunder) eius, quod a catino candescente secedit, adhaeret, et vitrum turpat; partes etiam vitri ex materia tenaciore constantes, vti nodi etc. calore nimium durante emergunt, exactitudini superficiei obsunt, vnde

vnde patet, quanti intersit, momentum temporis, de quo dixi, accurate obseruare,

Praestat citius, quam serius, vitrum refrigescere; nam posito etiam, istud catinum in medio nondum attigisse, figura tamen sphaerica, etsi minus conuexa, erit praeditum. Si vero medium planius esset marginibus, repeti posset operatio.

Dum aufertur ignis, et vitrum cineribus contegitur, inferius non omnes carbones auferendi sunt, ne vitro subito nimis calor omnis subtrahatur rimasque agat.

Sic igitur duobus vitris formatis, aut vno saltim, si habeatur praeterea planum eiusdem latitudinis, iungantur illa ope picis in aqua non solubilis, addatur epistomium, et includantur annulo ligneo, quo ad vsum aqua repleri possint. (g)

Ad lentes permagnas, v. g. pedes octo, decem, duodecim, latas, formandas, quatuor portiones superficiei sphaericae formari possent, arcubus duobus metallicis se decussantibus in medio iungendae.

Ex

(g) Ex vitris curuatis, cauo medio aqua repleto, lentes vstorias conficere docet D. de *Buffon* (Comment. Acad. Scienc. 1748. p. 308.) Ex vocibus *travaillées regulierement*, quibus vtitur, inferri posse videtur, vitra curuata ab ipso poliri. Suadet etiam, vt salium pluribus generibus, vno post alterum in aqua solutis, densitas eius et refractio augeatur.

Ex vitris hisce in superficie posteriori amalgamate obductis, egregia specula vstoria possent parari (*b*).

(*b*) D. de *Buffon* l. c. p. 307. variis modis cochleae, quam tabubulae in medio perforatae applicat, ope, deinde aeris, sulphure accenso absorbendi, paulisper curuare tabulas vitreas docet, vt ad magnam distantiam radios reflexos colligant, ipse vero enchiresium harum incommoda quaedam indicat, inprimis quod tabulae facile frangantur. Remedia, quibus incommoda haec tollere studet, ingeniose excogitata esse non nego; mihi tamen nimiam operam nimiasque impensas postulare videntur, ne dicam dubitare me, an semper sint successura. Sulphur, vt aerem post speculum absorbeat, accendere vult ipso speculo, medio in lentis conuexae figuram trito, cum, quantum ego video, facilius id applicata lente vstoria minore vulgari effici possit; neque ad curuandas cochlea tabulas non perforatas, aeris auxilium tam operose est aduocandum. Vnum ex mediis facilioribus idem obtinendi, tale mihi esse videtur. Prisma quadrangulare tenue ferreum vtroque extremo incuruetur, in medio vero habeat foramen, cui inducta est cochlea foemina. Huius prismatis extrema inflexa ad annulum, cui speculum incumbit, firmentur sic, vt speculi superficiei anteriori incumbat, foramen vero medio speculi respondeat. Igitur lamina crassiore aurichalcea centro speculi imposita, cochlea vero mare, per foramen adacta, curuari speculum sensim potest. Iactura aliqua fit, sed exigua, lucis, ferro partem speculi tegente; haec iactura, vt quantum fieri potest diminuatur, crassities prismatis ferrei exigua sit, latitudo paulo maior; applicetur vero speculo sic, vt crassities sit speculo parallela, latitudo perpendicularis. Sic foramine per latitudinem transeunte, satis firmitatis chochleae adigendae supererit, radii autem a crassitie pauciores impediantur.

Huius rei experimentum cepi tale: Tabulam ex vitro speculari veneto, diametri dig. rhen. viginti duorum, crassitiei linearum duarum, annulo circumdedi, supposui vero cochleae iis simili, quae ad sigilla cerae imprimenda adhiberi solent, deinde vitrum cochlea medio eius imminente, tantum curuaui, quantum

ferri

ferri posse a vitro credidi; atque ita reperi medium lineas rhenanas duas protrusum. Repetii experimentum, et vitrum ita flexum, dies plures detinui, nullo eius damno. Hanc vitri curvaturam, si, quod in rigore non est, circularem fingamus, pertinebit illa ad radium pedum triginta, datura speculum distantiae focalis quindecim. Haec quidem curuatura, pro ratione magnitudinis tabulae, *Buffoniana* multo maior est. Cum hoc vitro, in parte posteriori non obducto, nulla tentamina instituere potui.

Speculorum vitreorum segmenta longa, sed exiguae latitudinis, insigniter incuruari se patiuntur, et hinc componi possent specula vstoria, sustentaculo adhibito, quale antea, cum de speculis planis ad modum D. de *Buffon* coniungendis agerem, descripsi.

PHAENOMENORVM IRIDIS SEV ARCVS COELESTIS
DISQVISITIO.

Auctore
SIM. KOTELNIKOW.

I.

Quantum studia mathematica et physica, post inventum Calculum differentialem et integralem incrementi ceperint, rerum mathematicarum peritis non ignotum est, praesertim scientia motus, quae est ita difficilis, vt sine his calculis ad plurima problemata nequidem accessus pateat, nunc vero ad tantum perfectionis gradum perducta est, vt alias intricatissima problemata, facili labore resolui possint. Vsus igitur eorum coniunctim per totam mathesin latissime patet, nam per plurima physica problemata ita solui solent, vt vterque in subsidium vocetur. Sed de calculo differentiali iure dici potest, quod, si excipias ea, quae per methodum ordinarium maximorum et minimorum solui solent, paucissima restabunt, quae testificari possent, eum sine integrali etiam aeque facile adplicabilem esse. Neque tamen negari potest, dari, extra methodum maximorum et minimorum, problemata, quae ope eius resolui queant. Ecce tale exemplum in disquisitione proprietatum Iridis, seu arcus

coelestis.

coelestis; vbi traditur methodus facilis, amplitudinem Iridis, positionem, latitudinem, ordinem colorum etc. inuestigandi.

2. Sed antequam aggrediar calculum, principia, quibus ille innititur, paucis explicabo. Vetus opinio est Iridem oriri a pluuia, aut quibuscunque aqueis vaporibus crassioribus, radiis solaribus illuminatis; nam et Lucretius de Rer. natur. L. 6.

Hinc vbi sol radiis tempestatem inter opacam
Aduersa fulsit nimbrorum aspergine contra,
Tum color in nigris existit nubibus arqui.

Radii solares in guttas aqueas incidentes infringuntur, et sic in colores separati ad oculos deiiciuntur, effectum eorum, quem Iridem vocamus, producendo. Ex opticis constat, radios solares recta progredi a sole, et inter se parallelos esse, propter tam magnam eius a terra distantiam, quod etiam in dioptrica perpetuo supponi solet. Simili modo hic radios solis non solum ad guttas aqueas peruenire parallelos, sed et post refractionem ita ad oculum deferri debere, vt eiusdem coloris sint inter se paralleli, hoc est, ea lege progredi, vt rubri cum rubris, caerulei cum coeruleis etc. semper inter se eandem distantiam seruent. Quod et natura rei postulate videtur; nam si illud non esset, radii post refractionem separationemque iterum confunderentur, neque desideratum effectum in oculo producere possent.

3. His principiis stabilitis id lucramur, vt angulus SGO, nempe, quem radii in guttam aqueam incidentes, et isti, qui post quotcunque reflexiones, quae potissimum hic considerari debent, ex gutta iterum Tab. VII. Fig. 1.

 egre-

egrediuntur formant, maneat constans. Quem angulum in posterum vocabo breuitatis gratia *angulum amplitudinis*, nam quo maior est hic angulus, eo amplior Iris videtur, id est, sub maioris circuli arcu. Vt autem clarius percipiatur, quid per angulum amplitudinis intelligam, sit S corpus luminosum, ABC guttula aquea, incidat radius SA in eam in A, qui ibi refractus progrediatur in B, ex B reflectatur in C, ex C in D, ex D in E, ex E in F etc. et post has reflexiones tandem egressus ex guttula perueniat ad oculum O, secundum rectam FO. Producantnr iam rectae OF et SA donec concurrant in G, et prodibit angulus OGS, qui vocatur mihi *angulus amplitudinis*; seu, quod perinde est, si ex centro C ducantur rectae CM et CN, radiis FO et AS parallelae, erit angulus NCM=SGO; angulum NCM vocabo in posterum *angulum amplitudinis*.

Tab. VII. Fig. 2. 4. Consideremus nunc simplicissimum casum, quo radii solis non reflexi in gutta aquea iterum eiiciuntur. Sit C gutta aquae, quam suppono sphaerica esse figura; nam et re vera nullam aliam in aere libero accipere potest. Incidat in eam radius Solis SD in D vtcunque, duc ex centro C radium CDB; erit PDB angulus incidentiae. Radius SD, ingrediendo in guttam in D, refringetur ad perpendiculum CD, et pergendo ad alteram partem guttae in E, formabit cum eo angulum refractionis CDE, vbi egrediendo refringetur a perpendiculo CEA, et perueniet ad oculum, quem statuo in O.

5. Quia

5. Quia guttula aquae est figura sphaerica, erit $CED = CDE$, sed sin. SDB : sin. CDE = sin. OEA : sin. CED, ergo $SDB = OEA$. Ducantur ex C rectae CN et CM, parallelae ipsis DS et EO, erit MCN angulus amplitudinis. Ponatur angulus incidentiae $SDB = \Phi$, ang. refractionis $= \theta$ et angulus amplitudinis $= \zeta$. Cum sinus anguli incidentiae ad sinum anguli refractionis habeat rationem constantem, ponamus eam esse $1 : m$ et erit:

$$\text{sin.}\ \Phi : \text{sin.}\ \theta = 1 : m$$

$$\text{hinc sin.}\ \theta = m\ \text{sin.}\ \Phi.$$

6. Denotet π arcum $180°$, qua littera in posterum semper vtemur; nam ea in determinationem anguli ζ ingreditur. Quia angulus $SDB = OEA = NCD = ACE = \Phi$, et angulus $CDE = CED = \theta$, erit $DCE = \pi - 2\theta$. Ergo angulus amplitudinis ζ erit $= \pi + 2\theta - 2\Phi$. Habemus itaque duas aequationes sin. $\theta = m$ sin. Φ et $\zeta = \pi + 2\theta - 2\Phi$, ex quibus anguli θ, Φ et ζ determinari debent.

7. Quamuis duas aequationes et tres indeterminatas quantitates habeamus, tamen, quia ζ semper a θ et Φ pendet, possumus omnes tres determinare, eliminando ζ per differentiationem; nam supra ostendimus hunc angulum ζ debere esse constantem, ideoque eius differentiale $= 0$.

8. Cum aequationes inuentae sin. $\theta = m$ sin. Φ et $\zeta = \pi + 2\theta - 2\Phi$ sint verae, erunt etiam earum differentiales $d\theta$ cos. $\theta = m\, d\Phi$ cos. Φ et $d\theta = d\Phi$ verae. Ex quibus habetur cos. $\theta = m$ cos. Φ, et hinc tang. θ

$=$ tang.

$=\text{tang.}\,\Phi$ ergo $\theta=\Phi$, qui valor anguli θ si in aequatione $\zeta=\pi+2\theta-2\Phi$ substituatur, prodibit $\zeta=\pi$. Vnde patet rectas CN et CM cum rectis DS et EO coincidere, et radium solis SDEO recta per centrum guttae transire debere. Quod ostendit, nullam hoc casu iridem oriri posse.

9. Hic notari debet, quod quamquam aequatio inter cosinus ex differentiali verae aequationis finitae $\text{sin.}\,\theta=m\,\text{sin.}\,\Phi$ deducatur, tamen prorsus falsa prodiisse videtur. Nam, quia $\Phi>\theta$, debet esse $\text{cos.}\,\theta>\text{cos.}\,\Phi$; hic vero reperitur $\text{cos.}\,\theta<\text{cos.}\,\Phi$. Sed si ad conclusionem respiciamus, patebit, aequationem $\text{cos.}\,\theta=m\,\text{cos.}\,\Phi$ etiam habere locum; nam $\theta=\Phi=0$ repertum est, ideoque tota aequatio $\text{cos.}\,\theta=m\,\text{cos.}\,\Phi$ euanescit. Forte hic alicui dubium oriri potest, quod ab aequalitate tangentium ad aequalitatem angulorum conclusionem fecimus; sed hoc dubium tollitur, si attendamus ad id, quo neque θ neque $\Phi>$ recto esse potest. Pergamus itaque ad alios casus persequendos.

Tab. VII. Fig. 3. 10. Ex Optica constat radios solis SD in guttam C in D incidentes in ingressu refringi ad perpendiculum CB, et ad alteram partem in E delatos non omnes exire, sed partem eorum reflecti in A, ita vt angulus incidentiae DEC sit aequalis angulo reflexionis CEA. Ponamus ergo radios post hanc vnicam reflexionem in E, ex gutta in A exire; radii in exitu iterum refringentur, sed a perpendiculo CAa, quia ex densiori medio in rarius transeunt, et peruenient ad oculum O secundum rectam AO, ita vt angulus OAa sit aequalis SDB, quod ex proprietate circuli et ratione anguli incidentiae et refractionis perspicitur.

11.

11. Quia $\sin. SDB : \sin. EDC = 1 : m$, erit iisdem denominationibus retentis $\sin. \theta = m \sin. \Phi$ vt supra; et hinc $\frac{d\theta}{d\Phi} = \frac{m \cos. \Phi}{\cos. \Phi}$. Hac aequatione in posterum, tamquam canonica, semper vtemur; nam ea exprimit relationem incrementorum, angulorum incidentiae et refractionis. Ducantur porro rectae CN et CM, ipsis SD et AO parallelae, erit MCN angulus amplitudinis, qui inuenietur, vt sequitur. Cum lineae CN, DS et CM, AO sint inter se parallelae, erit angulus $SDB = NCD = MCA = OAa = \Phi$ et $DEA = 2\theta$; nam vertex eius est in peripheria, et insistit arcui DA, quare arcus $DA = 4\theta$, vnde si subtrahatur 2Φ, habebitur angulus amplitudinis $\zeta = 4\theta - 2\Phi = 2(2\theta - \Phi)$.

12. Inuenta modo aequatio $\zeta = 2(2\theta - \Phi)$ differentietur, et prodibit propter quantitatem constantem ζ, quae differentiale non habet, sequens differentialis aequatio, relationem inter $d\theta$ et $d\Phi$ exprimens, $2d\theta = d\Phi$, seu $\frac{d\theta}{d\Phi} = \frac{1}{2}$. At est $\frac{d\theta}{d\Phi} = \frac{m \cos. \Phi}{\cos. \theta}$; vnde obtinetur haec aequatio finita relationem angulorum θ et Φ continens, nempe $\cos. \theta = 2m \cos. \Phi$.

13. Habemus itaque duas aequationes finitas pro duabus variabilibus θ et Φ, quae sunt

$$\sin. \theta = m \sin. \Phi, \text{ et } \cos. \theta = 2m \cos. \Phi.$$

Ex quibus eliminando alterutram, inuenietur tam θ, quam Φ, in numeris absolutis expressae. Sume quadrata vtriusque aequationis, et habebis $\sin. \theta^2 = mm \sin. \Phi^2$ et $\cos. \theta^2 = 4mm \cos. \Phi^2$, quae si addantur, erit $mm \sin. \Phi^2 + 4mm \cos. \Phi^2 = \sin. \theta^2 + \cos. \theta^2 = 1$. Sed est $\cos. \Phi^2 = 1 - \sin. \Phi^2$, quo substituto elicietur sin.

$\Phi = \sqrt{\frac{4mm-1}{3mm}}$ et cos. $\Phi = \sqrt{\frac{1-mm}{3mm}}$, vnde tang. Φ $= \sqrt{\frac{4mm-1}{1-mm}}$, tang. $\theta = \frac{1}{2}$ tang. Φ et $\zeta = 2(2\theta - \Phi)$

14. Vt autem formula $\sqrt{\frac{4mm-1}{1-mm}}$ maneat realis, necesse est, vt sit $4mm > 1$ et $mm < 1$; quod si eueniret, et foret $4mm$ et $mm > 1$, vel tantum $4mm < 1$, tunc formula foret imaginaria, ideoque nullam iridem videremus. Hoc eueniret, si illae guttae, in quas radii solares incidunt, essent ex fluido aere leuiori. Veluti, quando in aqua radii solis incidunt in bullulas aereas, ascendentes, animalia aquatica nullam iridem tunc vident. At si multitudo exiguorum globulorum vitreorum in aqua penderet, tunc simili modo, vt in aere, iris oriretur.

Tab. VII. Fig. 4. 15. Non absimili modo inueniuntur anguli θ et ζ, si radii solis post duas reflexiones ad oculum perueniant. Sit sol in S et guttula aquae in C, in eamque incidat fasciculus radiorum solis SD; et post duas reflexiones E et A, perueniat ad oculum O, ea lege, vti supra commemoraui. Erunt subtensae DE, EA, AB inter se aequales, ergo arcus BEAD $= \pi + 6\theta$; hinc BD $= \pi - 6\theta$. Ducantur ex centro C rectae CM, CN, ipsis BO, DS parallelae, vt habeatur angulus amplitudinis MCN $= \zeta$, cuius mensura est arcus mB + BD + Dn. Sed $m\mathrm{B} = \mathrm{D}n = \Phi$, vnde $\zeta = \pi - 6\theta + 2\Phi = \pi - 2(3\theta - \Phi)$.

16. Sumatur differentiale aequationis inuentae $\zeta = \pi - 6\theta + 2\Phi$, et prodibit $\frac{d\theta}{d\Phi} = \frac{1}{3}$; at §. 11. inuenimus $\frac{d\theta}{d\Phi} = \frac{m \cos. \Phi}{\cos. \theta}$, ex quibus habetur haec aequatio: cos. $\theta = 3\, m$ cos. Φ, et ex natura refractionis ista:

sin. θ

fin. $\theta = m$ fin. Φ. Eliminetur iam alterutra incognitarum, vt fupra fecimus, et elicies fin. $\Phi = \sqrt{\frac{9mm-1}{8mm}}$ et cof. $\Phi = \sqrt{\frac{1-mm}{8mm}}$, vnde tang. $\Phi = \sqrt{\frac{9mm-1}{1-mm}}$ et tang. $\theta = \frac{1}{3}$ tang. Φ, quibus inuentis erit $\zeta = \pi - 2(3\theta - \Phi)$.

17. Expediuimus cafum, vbi radii poft duas reflexiones, perfequemur etiam eum, quo radii poft tres reflexiones E, T, A ad oculum perueniunt. Si haec figura attente confideretur, patebit, arcum DF effe $= BF = 4\theta$, ergo $BFD = 8\theta$. Concipiantur ex centro C rectae CM, CD radiis BO, DS parallelae; erit NCM angulus amplitudinis. Et quia rectae CM et BO, CN et DS funt inter fe parallelae, erit arcus $Bm = Dn = \Phi$. Si ergo hi duo arcus ex arcu BFD afferantur, reftabit arcus mFn, id eft angulus amplitudinis, et habebimus $\zeta = 8\theta - 2\Phi = 2(4\theta - \Phi)$. Tab. VII. Fig. 5.

18. Sumatur differentialis aequationis $\zeta = 8\theta - 2\Phi$, et obtinebit $\frac{d\theta}{d\Phi} = \frac{1}{4} = \frac{m\,cof.\Phi}{cof.\theta}$, vnde cof. $\theta = 4m$ cof Φ, et ex natura refractionis fin. $\theta = m$ fin Φ, vnde tang. $\theta = \frac{1}{4}$ tang Φ. Reftat tantum, vt tang. Φ inueniatur, quod fiet eliminando finum et cofinum anguli θ. Hocque modo inuenietur fin. $\Phi = \sqrt{\frac{16mm-1}{15mm}}$, cof. $\Phi = \sqrt{\frac{1-mm}{15mm}}$. Ergo tang. $\Phi = \sqrt{\frac{16mm-1}{1-mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{4}$ tang. Φ et $\zeta = 8\theta - 2\Phi$, vt iam inuenimus.

19. Examinemus porro cafum, vbi radius poft quatuor demum reflexiones, E, F, G, B, ad oculum O deferatur. Quaeratur primum arcus DA, fic arcus mn, qui eft menfura anguli amplitudinis MCN, facile inuenietur; nam eft $= 2\Phi - AD$. Quia fubtenfae DE, EF, FG, GB, BA ex natura circuli et lege reflexio- Tab. VII. fig. 6.

nis sunt inter se aequales; erunt etiam arcus, quos subtendunt, item DG, EB, FA, atque etiam GE, BF inter se aequales. At est $DG = DE - GE = \pi - 6\theta$, qui cum GB, BA et AD constituit totum circulum; quare habemus $3\pi - 10\theta + AD = 2\pi$, vnde $AD = 10\theta - \pi$. Ergo $\zeta = \pi - 10\theta + 2\Phi = \pi - 26\theta - \Phi$.

20. Inuenta hac aequatione $\zeta = \pi - 10\theta + 2\Phi$, si calculus vt supra instituatur, reperietur tang. $\Phi = \sqrt{\frac{25mm-1}{1-mm}}$; quia sin. $\Phi = \sqrt{\frac{25mm-1}{24mm}}$ et cos. $\Phi = \sqrt{\frac{1-mm}{24mm}}$, tang. $\theta = \frac{1}{5}$ tang. Φ, quibus inuentis erit $\zeta = \pi - 10\theta + 2\Phi = \pi - 2(5\theta - \Phi)$.

Tab. VII. Fig. 6. 21. At si post quinque reflexiones, E, F, G, H, B radius solis ad oculum O perueniat, erit arcus $AD = 12\theta$, et propterea angulus amplitudinis $\zeta = 12\theta - 2\Phi = 2(6\theta - \Phi)$. Vnde reperitur sin. $\Phi = \sqrt{\frac{36m^2-1}{35m^2}}$ cos. $\Phi = \sqrt{\frac{1-mm}{35m^2}}$, quare tang. $\Phi = \sqrt{\frac{36mm-1}{1-mm}}$ et tang. $\theta = \frac{1}{6}$ tang. Φ.

22. Post sex reflexiones E, F, G, H, I, B, erit $\zeta = \pi - 14\theta + 2\Phi = \pi - 2(2\theta - \Phi)$, quia $\zeta = 2\Phi - AD$ et $AD = 14\theta - \pi$; quare tang. $\Phi = \sqrt{\frac{49mm-1}{1-mm}}$, tang. $\theta = \frac{1}{7}$ tang. Φ.

23. Ex huc vsque praemissis satis patet, quomodo ista formularum inuestigatio, pro angulis Φ, θ, et ζ, vlterius continuetur. Hoc tantum notandum est, vt figurae quam fieri potest commodiores delineentur, ne lex formularum turbetur. Nam antequam calculus in numeris absolutis perficiatur, non apparet, quomodo figurae delineari debeant. Quam ob rem quaelibet figura

gura ita accommodanda eſt, vt lex quaedam in progreſſione anguli ζ continuo obſeruetur. Expreſſio iſtius anguli talis eſt, vt ſit $\zeta = p\pi + q\theta + r\Phi$, et lex, quam nos hic obſeruamus, eſt eiusmodi, vt coefficiens p euaneſcat, ſi numerus reflexionum ſit impar, et fiat $= 1$, ſi par. Coefficiens q eſt ſemper numerus par poſitiuus, ſi numerus reflexionum impar, negatiuus, ſi par; at r eſt negatiuus pro numero reflexionum impari, poſitiuus pro pari, et ſemper binario aequalis.

24. Sequens tabula exhibet formulas continentes valores angulorum Φ, θ et ζ, ſecundum numeros reflexionum diſpoſitas, vbi in prima columna numeri reflexionum, in ſecunda tangentes angulorum incidentiae, in tertia tang. ang. refractionis et in quarta valores angulorum amplitudinis praeſentantur.

1; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{4m^2-1}{1-mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{2}$ tang. Φ; $\zeta = 2(2\theta - \Phi)$

2; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{9m^2-1}{1-mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{3}$ tang. Φ; $\zeta = \pi - 2(3\theta - \Phi)$

3; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{16m^2-1}{1-mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{4}$ tang. Φ; $\zeta = 2(4\theta - \Phi)$

4; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{25m^2-1}{1-mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{5}$ tang. Φ; $\zeta = \pi - 2(5\theta - \Phi)$

5; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{36m^2-1}{1-mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{6}$ tang. Φ; $\zeta = 2(6\theta - \Phi)$

6; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{49m^2-1}{1-mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{7}$ tang. Φ; $\zeta = \pi - 2(7\theta - \Phi)$

etc.

25. Si has formulas conſideres, videbis coefficientes ipſius tang. Φ progredi in ſerie harmonica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, etc. vbi tantum primus terminus $= 1$ deeſt. Sed ex analogia patet, poſt o refractiones debere eſſe tang. $\Phi = \sqrt{\frac{m^2-1}{1-mm}}$, tang. $\theta =$ tang. Φ, vbi tang. $\Phi = \sqrt{-1}$ eſt imaginaria. Quod egregie cum

veritate consentire videtur, nam, nullus datur angulus incidentiae, vt post o refractiones iris prodire posset, quare etiam tangens illius anguli debet esse imaginaria. Quod attinet ad angulum ζ ille secundum analogiam debet esse $= \pi - 2(\theta - \Phi)$, quod vel ex hoc verum esse perspicitur, quod calculus ostendit $\theta = \Phi$ ideoque $\zeta = \pi$.

26. Vt autem formulam generalem ex particularibus deducere queamus, inuentas formulas supra, tam pro pari, quam impari numero reflexionum, sigillatim consideremus.

Formulae pro pari reflexionum numero:

0; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{m^2 - 1}{1 - mm}}$; tang. $\theta =$ tang. Φ; $\zeta = \pi - 2(\theta - \Phi)$

2; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{9m^2 - 1}{1 - mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{3}$tang. Φ; $\zeta = \pi - 2(3 \theta - \Phi)$

4; tang $\Phi = \sqrt{\frac{25m^2 - 1}{1 - mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{5}$ tang. Φ; $\zeta = \pi - 2(5\theta - \Phi)$

5; tang. $\Phi \sqrt{\frac{49m^2 - 1}{1 - mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{7}$ tang. Φ; $\zeta = \pi - 2(7\theta - \Phi)$

etc.

Ex contemplatione harum formularum perspicitur, coefficientes ipsius tang. Φ esse eos terminos ex serie harmonica, quorum denominatores sunt numeri impares, coefficientes ipsius θ ipsos hos denominatores, et coefficientes litterae m^2 sub signo radicali eorum quadrata. Quam ob rem, si p denotet numerum quemlibet integrum affirmatiuum, erit $\frac{1}{2p+1}$ coefficiens indeterminatus ipsius tang Φ; hinc tang. $\Phi = \sqrt{\frac{mm(2p+1)^2 - 1}{1 - mm}}$; tang $\theta = \frac{1}{2p+1}$ tang. Φ et $\zeta = \pi - 2(\theta(2p+1) - \Phi)$, denotante $2p$ numerum reflexionum.

Formu-

Formulae pro impari reflexionum numero.

1; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{4m^2-1}{1-mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{2}$ tang. Φ; $\zeta = 2(2\theta - \Phi)$

3; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{16m^2-1}{1-mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{4}$ tang. Φ; $\zeta = 2(4\theta - \Phi)$

5; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{36m^2-1}{1-mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{6}$ tang. Φ; $\zeta = 2(6\theta - \Phi)$

7; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{64m^2-1}{1-mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{8}$ tang. Φ; $\zeta = 2(8\theta - \Phi)$

etc.

Vti ſupra pro pari numero reflexionum coefficientes ipſius tang. Φ erant termini ſeriei harmonicae ex locis imparibus, ſimili modo hic, vbi numeri reflexionum ſunt impares, coefficientes ipſius tang. Φ ſunt termini eiusdem ſeriei ex locis paribus, ita vt ſi ponatur numerus reflexionum indeterminatus $= 2p + 1$, denotante p numerum integrum affirmatiuum, erit tang. $\Phi = \sqrt{\frac{4(p+1)^2 mm - 1}{1 - mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{2(p+1)}$ tang. Φ et $\zeta = 2(2\theta(p+1) - \Phi)$.

27. Cum formulae $2(2\theta - \Phi)$, $2(4\theta - \Phi)$, $2(6\theta - \Phi)$ etc. exhibentes valores anguli ζ, pro numero impari reflexionum, ſint complementa ad duos rectos, poſſumus aſſumere pro iis $\pi - 2(6\theta - \Phi)$ $\pi - 2(4\theta - \Phi)$, $\pi - 2(6\delta - \Phi)$ etc. Propterea, quod calculus ob hanc rem non perturbatur; at lex progreſſionis melius perſpicitur, ita vt ſi ponamus numerum reflexionum $= p$, erit tang. $\Phi = \sqrt{\frac{m^2(p+1)^2 - 1}{1 - m^2}}$ tang. $\theta = \frac{1}{p+1}$ tang. Φ; $\zeta = \pi - 2(\theta(p+1) - \Phi)$, quae formulae pro pari et impari reflexionum numero valent. Iuuat interdum tamen meminiſſe, quod pro ζ eo caſu, quo p eſt impar, eius complementum aſſumſimus.

28. Con-

28. Consideretur nunc formula, qua exprimitur tangens anguli incidentiae, et patebit, crescente numero reflexionum p, crescere tangentem anguli Φ, ideoque etiam ipsum angulum, qui fit maximus, quando $p = \infty$. Ponatur ergo $p = \infty$, erit tang. $\Phi = \infty$, hinc $\Phi = 90°$. Quod ostendit angulum Φ tum fore recto aequalem, quando numerus reflexionum est infinitus; nunquam igitur maiorem recto euadere posse, continuo tamen crescere, crescente p.

29. Quia angulus incidentiae Φ maior recto esse non potest, at vero $(p+1)\theta$, crescente numero p, crescit in infinitum, excessus ergo eius supra Φ tam potest euadere magnus, vt $\pi - 2(\theta(p+1) - \Phi)$ fiat negatiuum et multo maius π. Hoc est, angulus ζ, secundum formulam $\pi - 2(\theta(p+1) - \Phi)$ inuenietur tandem negatiuus et maior π. Sed id nullam difficultatem in applicatione formulae parit; nam si datis angulis Φ et θ numero reflexionum p figura construatur, statim patebit, qualis angulus ζ debeat esse. Vel etiam si angulus ζ reperiatur negatiuus, et maior bis recto, ad eum addantur tot bis recti, quot sufficiunt, ad illum affirmatiuum, et duobus rectis minorem, efficiendum.

30. Si radius solis incidat in guttam aquae in D, et post numerum reflexionum p iterum egrediatur, quaeritur constructio geometrica anguli incidentiae, refractionis et amplitudinis. Quia guttulam aquae supponimus figuram habere sphaericam, concipiatur circulus maximus per punctum D transiens; per hoc punctum et centrum circuli C ducatur recta indefinita aCb; super ea capiatur CB $= \sqrt{(1-mm)}$ et in puncto

puncto B erigatur perpendicularis $B\beta = \sqrt{(mm(p+1)^2-1)}$, in eaque capiatur Bg, quae sit ad totam $B\beta$ vt 1 ad $p+1$. Iungantur puncta C et β, seu ex centro C ducantur per puncta β et g rectae $CF\beta$ et Cgn, quae secabunt circumferentiam in F et n. Capiatur $Ff = EF$ et $nr = nE$, iungantur puncta r et D et ducatur per f et D recta fDS; erit rDE angulus refractionis et aDS incidentiae, sole in S existente.

31. Constructo tali modo angulo incidentiae et angulo refractionis, adplicetur chorda Dr in circulo EDf, vicibus $p+1$, hocque modo determinabitur punctum, vbi radii post numerum reflexionum p ex gutta aquea iterum exeunt; sitque illud punctum A. Ex centro C per A producatur recta CAH arbitrariae longitudinis, et fiat super AH centro A versus regionem rectae DS, angulus $HAO = $ ang. aDS, hoc modo determinabitur locus oculi O. Si porro ex centro C ducantur rectae CM, CN, rectis AO, DS parallelae, erit MCN angulus amplitudinis.

32. Sit guttula aquae quaecunque G, et angulus amplitudinis, quem construximus pro p reflexiones SGO, existente sole in S, patet oculum in recta GO constitui debere, ex quo fit, vt spectator videat punctum coloratum G secundum directionem OG. Concipiatur ex S per oculum O recta SOo indefinita, erit $GOo = OGS + OSG$, sed angulus OSG, propter tantam solis a terra distantiam, ita est paruus, vt prae OGS negligi queat, et propterea erit $oOG = OGS$. Ergo angulus GOo erit angulus amplitudinis; ab eo Tab. VII. Fig. 9.

 enim

enim amplitudo Iridis pendebit. Nam quo maior iste angulus, eo sub maioris circuli arcu Iris apparebit.

33. Cum sit, vt angulus GOo pro quauis specie Iridis maneat constans, spectantes ex O videbunt quaqua versus puncta colorata G, g, g etc. a recta SOo angulo GOo distantia, quae speciem circuli varie colorati efficient. Circulus hic erit basis coni, cuius axis est recta, ex solis centro per oculum spectatoris transiens, et vertex in ipso oculo. Ex quo fit vt nunquam duo spectatores simul eandem, et in eodem loco videre possint; sed quilibet spectantium, quotquot sint, aliam inque alio loco conspicit. Mutato itaque loco spectatoris, locus Iridis mutatur.

34. Falluntur ii, qui dicunt, quo pluuia spectatori proprior est, eo basis coni erit circulus minoris radii, adeoque arcus apparebit minor et vice versa. Quamuis hoc verum sit, quod accedente pluuia, basis fit re vera circulus minoris radii, inde tamen non sequitur arcum minorem adparere debere. Nam adparitio magnitudinis obiecti ab angulo optico pendet, prouti angulus opticus augetur, vel minuitur: Hic vero iste angulus manet idem, ex quo non potest fieri, vt Iris minoris maiorisue circuli arcus, accedente et recedente pluuia, adpareat.

35. Duo casus hic considerandi sunt, alter quando angulus SGo minor recto, alter quando ille rectum excedit. Primo casu Iris ita videbitur, vt sol a tergo spectatoris existat, at secundo medium locum inter solem et spectatorem tenebit. Ducta concipiatur per oculum spectatoris

toris recta horizontalis Hb, et sit angulus $SGO = \delta$. Patet existente sole ad altitudinem δ Iridem videri non posse, at apparere eam incipere, quando solis altitudo fit $< \delta$ et eo sub maiore circuli arcu, quo differentia inter altitudinem solis et δ maior euadit; at euanescente altitudine solis, hoc est, quando sol in horizonte versatur, Iridem semicirculi speciem representare debere. Si vero δ fuerit maior recto, et angulus $GOo = \pi - \delta$, tunc fieri potest, vt totam Iridem videamus, quae speciem circuli repraesentabit.

36. Ex formulis nostris, $\text{tang.}\,\Phi = \sqrt{\frac{mm(p+1)^2 - 1}{1 - mm}}$ et $\text{tang.}\,\theta = \frac{1}{p+1}\,\text{tang.}\,\Phi$, si eas ad casus particulares adplicare velimus, construendi sunt primum geometrice anguli Φ et θ, vt §. 30. et 31. docuimus, ex quo innotescet, ad quam regionem angulus ζ conuergit. Tum demum quaerendi sunt eorum valores in numeris absolutis. Constructioni istorum angulorum tabula sequens inseruiet, vbi in prima columna sunt numeri reflexionum, in secunda valor formulae $\sqrt{(mm(p+1)^2 - 1)}$ $= Q$, in fractionibus decimalibus. Valor vero ipsius $\sqrt{(1 - mm)} = 0.2$;

N. ref.	Q	N. r.	Q	N. r.	Q	N. r.	Q
1	1. 1	4	3. 6	7.	5. 9	10.	8. 2
2	2. 0	5	4. 4	8.	6. 7	11.	9. 0
3	2. 8	6	5. 2	9.	7. 4	12.	9. 7

37. Si iam constructio figurarum ex formulis inuentis modo supra tradito successiue instituatur, patebit eas ita comparatas esse, vt formulae exprimentes valo-

res anguli ζ'; ex quo positio Iridis cognoscitur, sequenti modo determinentur, vt sit:

pro numero reflex. $1, \zeta' = 4\theta - 2\Phi = 2(2\theta - \Phi)$

$2, \zeta' = \pi - 6\theta + 2\Phi = \pi - 2(3\theta - \Phi)$

$3, \zeta' = 2\pi - 8\theta + 2\Phi = 2\pi - 2(4\theta - \Phi)$

$4, \zeta' = 3\pi - 10\theta + 2\Phi = 3\pi - 2(5\theta - \Phi)$

$5, \zeta' = 4\pi - 12\theta + 2\Phi = 4\pi - 2(6\theta - \Phi)$

$6, \zeta' = 5\pi - 14\theta + 2\Phi = 5\pi - 2(7\theta - \Phi)$ etc.

Ex his facile perspicitur, si $\zeta > \frac{1}{2}\pi$, Iridem inter solem et spectatorem adparere debere; at si $\zeta > \frac{3\pi}{2}$, vel $\zeta > 2\pi$, et excessus est minor $\frac{1}{2}\pi$, Iris ita videbitur, vt sol a tergo spectatoris existat, quod ex sequenti tabula clarius patebit, vbi omnes casus in his formulis contenti exponuntur.

Casus, quibus spectator medium locum tenet.	Casus vbi Iris medium locum tenet.
$\zeta > 0\pi$	$\zeta > \frac{1}{2}\pi$
$\zeta > \frac{3}{2}\pi$	$\zeta > \pi$
$\zeta > 2\pi$	$\zeta > \frac{5}{2}\pi$
$\zeta > \frac{7}{2}\pi$	$\zeta > 3\pi$
$\zeta > 4\pi$ etc.	$\zeta > \frac{9}{2}\pi$ etc.

seu quod eodem redit, omittendo $0\pi, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ etc.

Iris in medio $\zeta > \frac{1}{2}\pi$; $\zeta > \frac{5}{2}\pi$; $\zeta > \frac{9}{2}\pi$; $\zeta > \frac{13}{2}\pi$; etc.

Spect. in medio $\zeta > \frac{3}{2}\pi$; $\zeta > \frac{7}{2}\pi$; $\zeta > \frac{11}{2}\pi$; $\zeta > \frac{15}{2}\pi$; etc.

38. Inuenta hoc modo positione Iridis, quantitas anguli amplitudinis ζ ex his formulis determinabitur

Pro

Pro numero reflex. $1, \zeta = 2(2\theta - \Phi)$

$2, \zeta = \pi - 2(3\theta - \Phi)$

$3, \zeta = 2\pi - 2(4\theta - \Phi)$

$4, \zeta = 2(5\theta - \Phi) - \pi$

$5, \zeta = 2(6\theta - \Phi) - 2\pi$

$6, \zeta = 3\pi - 2(7\theta - \Phi)$

$7, \zeta = 4\pi - 2(8\theta - \Phi)$

$8, \zeta = 2(9\theta - \Phi) - 3\pi$

$9, \zeta = 2(10\theta - \Phi) - 4\pi$ etc.

Ex quibus facile patet, quomodo illae vlterius progrediantur.

39. Ex his formulis particularibus iam facile generales deduci possunt. Nam numeris reflexionum $1, 4, 5, 8, 9$ etc. respondent valores anguli ζ respectiue $2(2\theta - \Phi)$, $2(5\theta - \Phi) - \pi$, $2(6\theta - \Phi) - 2\pi$, $2(9\theta - \Phi) - 3\pi$, $2(10\theta - \Phi) - 4\pi$, etc. at numeris reflexionum $2, 3, 6, 7$ etc. respondent sequentes ipsius ζ valores $\pi - 2(3\theta - \Phi)$, $2\pi - 2(4\theta - \Phi)$, $3\pi - 2(7\theta - \Phi)$, $4\pi - 2(8\theta - \Phi)$ etc. Vnde colligitur, si numerus reflexionum quicunque datus, cuius index est n, sit huius formae $1 + \frac{1(n-1)}{1} - \frac{2A(n-2)}{2} + \frac{4B(n-3)}{3} - \frac{8C(n-4)}{4} + \frac{16D(n-5)}{5} -$ etc. vbi $A = \frac{n-1}{1}$, $B = \frac{A(n-2)}{2}$, $C = \frac{B(n-3)}{3}$ etc., quam breuitatis gratia P vocabo, fore $\zeta = 2((1+P)\theta - \Phi) - (n-1)\pi$. Si vero numerus reflexionum datus in hac forma $Q = 2 + \frac{n-1}{1} + \frac{2A(n-2)}{2} - \frac{4B(n-3)}{3} + \frac{8C(n-4)}{4} - \frac{16D(n-5)}{5} +$ etc. vbi $A = \frac{n-1}{1}$, $B = \frac{A(n-2)}{2}$, $C = \frac{B(n-3)}{3}$, etc. sit contentus, et eius index $= n$, erit $\zeta = n\pi - 2((1+Q)\theta - \Phi)$.

40. Vt

40. Vt igitur pro dato numero reflexionum angulus ζ inueniatur, videndum primo eſt, in qua forma datus numerus contineatur, et cui indici reſpondeat, quod facile perficitur, ſubſtituendo pro n numeros integros affirmatiuos 1, 2, 3, 4, 5 etc. Nam inuento tali modo indice et forma numeri reflexionum dati, angulus ζ, ex formulis paragrapho praecedente traditis, facillime reperitur, poſtquam anguli Φ et θ ex formulis tang. $\Phi = \sqrt{\frac{mm(p+1)^2-1}{1-mm}}$ et tang. $\theta = \frac{1}{p+1}$ tang. Φ determinati ſunt.

Exempl.

Sit numerus reflexionum datus $=1$, erit $p=1=P$ et $n=1$, quia numerus datus eſt formae P. Ergo $\zeta=4\theta-2\Phi$. At eſt pro radiis rubris $m=\frac{81}{108}$ et pro violaceis $m=\frac{81}{109}$. Erit pro radiis rubris $\frac{mm(p+1)^2-1}{1-mm}=\frac{14580}{5103}$ et pro violaceis $=\frac{mm(p+1)^2-1}{1-mm}$ $=\frac{14363}{5320}$.

Pro radiis rubris

log. 14580 $=$ 4.1637575	log. tang. $\Phi =$ 10.2279659
log. 5103 $=$ 3.7078256	log. 2 $=$ 0.3010300
log. $\frac{14580}{5103}$ $=$ 0.4559319	log. tang. $\theta =$ 9.9269359
log. tang. $\Phi =$ 10.2279659	Ergo $\theta = 40°.12', 10''$
Ergo $\Phi = 59°.23'.24''$	
Hinc $\zeta = 42°.21'.42''$.	

Pro radiis violaceis

log. 14364 $=$ 4.1572452	log. tang. $\Phi =$ 10.2156668
log. 5320 $=$ 3.7259116	log. 2 $=$ 0.3010300
log. $\frac{14363}{5320}$ $=$ 0.4313336	log. tang. $\theta =$ 9.9146368
log. tang $\Phi =$ 10 2156668	Ergo $\theta = 39°.24'.18''$.
Ergo $\Phi = 58°.40'.52''$.	
Hinc $\zeta = 40°.15'.28''$.	

Exempl.

Exempl.

Sit datus numerus reflexionum $p=2$, erit tang. $\Phi = \sqrt{\frac{9mm-1}{1-mm}}$ et tang. $\theta = \frac{1}{3}$ tang. Φ. Et quia numerus datus reflexionum in forma Q continetur, erit $p=Q=2$ et $n=1$, hinc $\zeta = n\pi - 2((1+Q)\theta - \Phi) = \pi - 2(3\theta - \Phi)$. Est vero pro radiis rubris $m = \frac{81}{108}$ et pro violaceis $m = \frac{81}{109}$ erit pro rubris $\frac{9mm-1}{1-mm} = \frac{47385}{5103}$ et pro violaceis $\frac{9mm-1}{1-mm} = \frac{47168}{5320}$.

Pro radiis rubris.

log. 47385 = 4.6756409	log. tang. Φ = 10.4839026
log. 5103 = 3.7078256	log. ζ = 0.4771213
log. $\frac{47385}{5103}$ = 0.9678153	log. tang. θ = 10.0067813
log. tang. Φ = 10.4839026	Ergo $\theta = 45^\circ.26'.51''$.
Ergo $\Phi = 71^\circ.49'.55''$.	

Hinc $\zeta = 50^\circ.58'.44$

pro violaceis

log. 47168 = 4.6736475	log. tang. Φ = 10.4738679
log. 5320 = 3.7259116	log. 3 = 0.4771213
log. $\frac{47168}{5320}$ = 0.9477359	log. tang. θ = 9.9967466
log. tang. Φ = 10.4738679	Ergo $\theta = 44^\circ.47'.7''$.
Ergo $\Phi = 71^\circ.26'.9''$	

Hinc $\zeta = 54^\circ.9'.36''$.

Tabula,

Tabula, quae exhibet angulos incidentiae, refractionis, amplitudinis, pro datis numeris reflexionum, ab 1 vsque ad 8.

Pro radiis rubris

N. refl.	Φ	θ	ζ
1.	59°.23'.27''	40°.12'.10''	42°.1'.52''
2.	71.49.55	45.26.51	50.58.44
3.	76.50.16	46.54.40	138.35.12
4.	79.37.47	47.32.11	136.6.16
5.	81.25.40	47.52.22	51.37.4
6.	82.41.12	48.3.53	32.28.9
7.	83 37.14	48.11.23	116.12.20
8.	84.20.28	48.16.29	158.7.53

Pro radiis violaceis

N. refl.	Φ	θ	ζ
1.	58°.40'.52''	39°.24'.18''	40°.15'.28''
2.	71.26.9	44.47.7	54.9.36
3.	76.33.20	46.16.57	142.51.4
4.	79.24.30	46.55.29	130.25.50
5.	81.14.42	47 15.39	44.38.24
6.	82.32.55	47.27.39	40.46.44
7.	83.29.9	47 35.19	125 33.14
8.	84.13.19	47.40.3	169.34.16

41. Ex his iam facillime omnia, quae adhuc requiruntur ad Iridem pro dato reflexionum numero distincte cognoscendam, deduci possunt. Nam ex datis angulis Φ et θ inuenitur ζ tam pro rubri, quam violacei coloris radiis, et ex angulis ζ, latitudo Iridis, ordo colorum et eius positio respectu oculi spectatoris,

toris, vti sequentes tabellae repraesentant. In his tabellis litera *r* designat colorem rubrum, *v* violaceum, et $\frac{r}{v}$ denotat, quod in Iride color ruber supremum, violaceus infimum teneat locum et vice versa. S denotat locum solis, O locum oculi spectatoris et I locum Iridis, ita vt S. O. I significet solem a tergo spectatoris esse, seu spectatorem debere inter solem et Iridem stare. At S. I. O denotat, Iridem medium locum inter solem et oculum spectantis tenere.

N. refl.	Latitudines Iridis	N. refl.	Ordo colorum	N. refl.	Ordo colorum
1.	1°.46′ 24″	1.	$\frac{r}{v}$	5.	$\frac{r}{v}$
2.	3. 10. 52				
3.	4 27 52	2.	$\frac{v}{r}$	6.	$\frac{v}{r}$
4.	5 40 26				
5.	6 58 40	3.	$\frac{v}{r}$	7.	$\frac{v}{r}$
6.	8 18 35				
7.	9 20 44	4.	$\frac{r}{v}$	8.	$\frac{v}{r}$
8.	11 26 23				

N. refl	Posit. Irid.	N.r.	P. I.	N.r	P. I.	N.r.	P. I.
1.	S. O. I	3.	S.I.O.	5.	S.O.I	7.	S.I.O
2.	S. O. I	4.	S.I.O	6.	S.O.I	8.	S.I.O

42. Cum amplitudo Iridis sinui anguli ζ sit proportionalis, crescente igitur sinu anguli ζ, crescit amplitudo Iridis et vice versa, hoc est, Iris eo sub maioris circuli arcu adparebit, quo maior erit sinus anguli ζ. Erit ergo amplissima, quando $\zeta = \frac{1}{2}\pi$; nam tum fit sin. ζ maximus. Quo propius igitur angulus ζ

ad duos rectos accedit, eo *minor* euadit amplitudo Iridis. Omnes Irides, quorum angulus amplitudinis ζ maior est recto, in ea regione, in qua sol versatur, conspicientur, eae vero quorum $\zeta < \frac{1}{2}\pi$ in regione opposita apparere debent. Si angulus ζ est $> \frac{1}{2}\pi$, et sol in horizonte versatur, Iris speciem semicirculi, et si ille ad altitudinem ζ ascendat, totius circuli imaginem refert. At existente $\zeta > \frac{1}{2}\pi$, nunquam Iris maior semicirculo videtur, et crescente altitudine solis, diminuitur, prorsus tandem disparet, si sol ad altitudinem ζ ascenderit.

43. Duae igitur tali modo species Iridum statui possent, altera vbi angulus $\zeta < \frac{1}{2}\pi$, altera quando ille $> \frac{1}{2}\pi$. Irides primae speciei ita sunt comparatae, vt crescente altitudine solis arcus ille, sub quo adparent, diminuatur. At secundae speciei tales sunt, vt arcus iste crescente altitudine solis augeatur; illae in regione soli opposita, hae vero in eadem, vbi sol versatur, conspiciuntur. Commode characteres earum a numero reflexionum sumi possunt. Nam omnes reflexionum numeri pro Iride primae speciei in hac forma continentur $1 + \frac{n-1}{1} + \frac{2(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} - \frac{4(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{8(n-1)\ldots(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{16(n-1)\ldots(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{32(n-1)(n-2)\ldots(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \text{etc.}$ At pro Iride secundae speciei in ista $3 + \frac{n-1}{1} + \frac{2(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} - \frac{4(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{8(n-1)\ldots(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{16(n-1)\ldots(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{32(n-1)(n-2)\ldots(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$ etc. Vel si ponatur $1 - \frac{2(n-3)}{1} + \frac{(n-3)(n-4)}{1} - \frac{2(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2} + \frac{2(n-3)\ldots(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{4(n-3)\ldots(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.} = R$,

numeri

numeri reflexionum pro Iride primae speciei in hac forma continebuntur: $n+(n-1)(n-2)R$, et pro Iride secundae speciei in ista: $2+n+(n-1)(n-2)R$. Series ista R ita continuatur: terminus antecedens multiplicatur per 2, ad numerum absolutum vltimi factoris in numeratore additur vnitas, per hunc nouum factorem terminus praecedens multiplicatur et diuiditur per numerum absolutum in nouo isto factore contentum *v. g.* vt inueniatur terminus $\frac{2(n-7)(n-4)(n-5)}{3\cdot 5}$, eius praecedentem $\frac{(n-3)(n-4)}{3}$ multiplico per 2 et habeo $\frac{2(n-3)(n-4)}{3}$, ad numerum absolutum vltimi factoris $n-4$ addo vnitatem, et obtineo nouum factorem $n-5$, per $n-5$ multiplico numeratorem, et per numerum eius absolutum 5 denominatorem, et prodit terminus sequens $\frac{2(n-3)(n-4)(n-5)}{3\cdot 5}$. Ita si velis scire numerum reflexionum pro Iride primaria, pone $n=1$, pro secundaria $n=2$ et ita porro.

44. Iris primaria primae speciei saepe in coelo conspicitur, secundaria vero raro, at de tertiaria dubito, num eam aliquis obseruauerit. Ea oritur post quinque reflexiones et sex refractiones. Celeberrimus *Muschenbroekius* ait, in Lapponia obseruatam fuisse, inter secundariam et primariam sitam, iisque non concentricam. Sed eam obseruationem suspectam esse ex eo patet, quod omnes Irides in eadem regione coeli conspicuae sunt inter se concentricae, nam axes conorum in quibus videntur, per centrum solis et oculum spectatoris transeunt, ita vt omnes isti coni vnum eundemque axem habeant, praeterea Iris haec est fere eptem gradus lata, et angulus amplitudinis eius vno

tantum dimidio gradu angulum amplitudinis secundariae excedit, quam ob rem cum secundaria confundi debet, ita vt secundaria supra tertiariam depingatur. Sed et in eo celeberrimus vir peccare videtur, quod asserit, eam post tres reflexiones oriri debere.

45. Quod attinet ad Irides secundae speciei, eae propter solis splendorem videri non possunt. Haec species Iridum obseruari solet noctu circa lumen candelarum, praesertim in Balneis et aliis locis vaporibus aqueis valde inquinatis. Potest etiam talis Iris ad solis splendorem obseruari, si post eam existat aliquod aedificium non multum luminis reflectens.

DESCRIPTIO

DESCRIPTIO AC EXPLICATIO NOVORVM QVORVNDAM EXPERIMENTORVM ELECTRICORVM.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

§. 1.

Transmiserunt ad Academiam, A. R. S. 1755. Rener. Patres Soc. I. qui *Pekini* commorantur, praeter alia, experimenti quoque cuiusdam electrici, ab ipsis instituti, historiam, cuius summa huc redit:

Lamina ex vitro crystallino constans, supra chartam aliquoties complicatam posita, pelle ouina pilis orbata, tamdiu fricabatur, vsquedum electricitatem sat fortem consecuta esset. Adplicabatur tum haec lamina pyxidi ligneae, vitro tectae, acum magneticam, obseruandae declinationi adaptatam, continenti, ea ratione, vt vitrum, quo capsula cooperta erat, fere contingeret; quo facto sequentia obseruabantur phaenomena:

1) Acus magnetica, libere stilo suo incumbens, ad vitrum pyxidem tegens confestim sursum abrepta, laminae huic quasi agglutinabatur, ac vltra 2 vel 3 horas constanter adhaerebat.

2) Post hocce temporis interuallum acus sponte decidebat, non vero paulatim, sed cum impetu quodam, et post aliquot vibrationes super stilo suo factas, ad quietem situmque consuetum redibat.

 3) Attol-

3) Attollebatur tunc lamina pyxidi imposita, et dicto citius acus denuo sursum rapiebatur, vitroque, quo pyxis tecta erat, denuo agglutinabatur, nec ante 2 vel 3 horarum decursum decidebat. Quodsi vero

4) interea lamina primum commemorata denuo pyxidi imponebatur, statim acus recidebat, confestim vero rursum attrahebatur, denuo sublata lamina. Ita semper eueniebat, quoties lamina pyxidi vel admouebatur, vel attollebatur, ac vel centies repetere hoc experimentum licebat.

Mirandi iure sunt, quos hic recensent Rev. Patres electricitatis effectus. Admodum enim paradoxum videtur, quod electricitas, quae post longioris temporis decursum penitus exstincta videbatur, momento quasi, idque sine vlla noua frictione, aut excitatione, per solam laminae a pyxide remotionem, resuscitata fuerit; quodque iunctis denuo vitris statim rursus exstingui potuerit.

§. 2. Quam primum experimenti huius ad me peruenit notitia, perspexi statim, mirabiles ipsius euentus sponte quasi, ex Theoria Electricitatis *Franckliniana*, (quae, quod nulli hypothesi innitatur, ac vnica sit, quae phaenomenis ex asse satisfacit) mea quidem sententia sola vera existimanda est, profluere, atque ex ipsa tam clare concipi, vt omnes, quae experimentum comitantur, circumstantiae, vel a priori innotescere potuerint. Excitatus proinde fui, ad rem vlterius tam ratiociniis, quam nouis quibusdam, quae imaginatus sum, experimentis, examinandam, qui labores cum memoria

memoria non prorsus indigni videantur, scripto comprehendere ipsos constitui.

§. 3. Recensionem primum experimentorum instituam, quibus obseruationes Rev. Patrum occasionem praebuerunt, quo postea, quae de causa horum phaenomenorum meditatus sum, eo melius explicare queam. Sunt autem, a me instituta experimenta, sequentia:

Exper. I.

Repetendum mihi videbatur experimentum Pekinense, quapropter laminam vitream AB, fulcris ligneis C, D, pollicem circiter altis, imposui, ac aliquid pulueris leuioris infra laminam hinc inde dispersi. Accepta tunc altera lamina, priori simili, attritu panni lanei electricam hanc feci, ac supra priorem posui. Obseruaui tunc Tab. VIII. Fig. 1.

1) per aliquot minuta, puluerem infra laminam dispersum attrahi ab ipsa, atque repelli, vti fieri semper solet, si corpus electrificatum pulueri appropinquatur.

2) Elapso hoc tempore electricitatem penitus extingui, vt nulla vlterius attractio, aut repulsio, sit obseruabilis.

3) Separaui tunc laminam electrificatam a lamina AB, statimque, dum hoc fieret, resuscitabatur electricitas, lamina AB denuo consuetas attractiones ac repulsiones electricas exercente.

4) Cessantibus etiam his phaenomenis, admota denuo lamina electrificata ad laminam AB, totum hacte-

hactenus descriptum experimentum, non accedente noua frictione, aliquoties repeti potuit.

Exper. II.

Ipsam laminam AB electricam factam, posui super fulcra C, D, vbi consueto more in puluerem agebat. Cessante hac actione, quod post aliquot minuta fiebat, laminam digito, aut alio corpore non per se electrico, in superiori superficie contingebam, ac resuscitabatur electricitas, ea in regione, qua tangebatur lamina, sic vt lamina consueta electricitatis ederet phaenomena, puluerem substratum attrahendo et repellendo.

Exper. III.

Tab. VIII. Fig. 2. Regulae orichalcicae AB, vitreis fulcris impositae, iuxta quam pendebat libere filum lineum madefactum CD, admoui tubum vitreum, aut cylindrum ex sulphure fusum, electrificatum, ab extremitate A, ad distantiam 10 aut 12 pollicum, ac

1) obseruaui, filum lineum statim attrahi a regulae extremitate B; per aliquot momenta huic cohaerere, mox vero separari, ac in situm verticalem redire.

2) Si tunc tubum per aliquot pollices propius admouebam, denuo idem eueniebat, sicque experimentum repeti aliquoties poterat, vsquedum tubus, extremitatem regulae fere contingebat.

3) Lente tunc retrahebam tubum per aliquot pollices, ac filum denuo attrahebatur, mox vero ad situm verti-

verticalem redibat. Vlterius remoto tubo idem rursus eueniebat, vnde etiam hoc phaenomenon aliquoties obseruare licebat, vsquedum tubus ad distantiam initialem 10 aut 12 pollicum rursum remotus erat.

Exper. IV.

Loco fili linei, hactenus vsurpati, suspendebam particulam suberis vtcunque sphaericam, magnitudinis lenticularis, ex filo tenuissimo serico, probe exsiccato, ac instituto, vt prius, experimento, admotoque tubo vitreo electrificato ad extremitatem regulae A, in distantia 10 circiter pollicum Tab. VIII. Fig. 3.

1) pendulum CD attrahebatur ab extremitate B, statim vero rursus ab ipsa separabatur, neque. vt filum lineum, ad situm verticalem redibat, sed vltra ipsum repellebatur.

2) Tubo vitreo propius admoto, repulsio constanter augebatur, retracto vero tubo rursum imminuebatur, vsquedum vltra 10 pollices, siue distantiam initialem, remotus esset, tum enim tandem repulsio mutabatur in attractionem, pendulum vero attractum a regula statim rursus separabatur, ac in situm verticalem redibat, vlterius neque attractum, neque repulsum. (*a*)

Exper.

(*a*) Magna in hoc ac sequenti experimento cautio adhibenda est, si rite succedere debeant. Praecipue cauendum est, ne anguli solidi, a planis regulam terminantibus, inclusi, sint admodum acuti, sed si fieri potest aliquantum rotundati. Si hoc non attenda-

Exper. V.

Idem experimentum institui, adhibendo cylindrum sulphureum, loco tubi vitrei, et omnia eueniebant, vt in experimento praecedente.

Exper. VI.

Regulae orichalciceae saepius dictae, prope quam suspensum erat pendulum descriptum, admouebam tubum vitreum electrificatum, ad distantiam 3 vel 4 pollicum, ab extremitate A, simul vero extremitatem B digito contingebam. Retracto tum primum digito

1) Pendulum nec attrahebatur, nec repellebatur. Remoto autem quoque tubo, statim attrahebatur, ac postea repellebatur.

2) Cum tubum rursus admouebam, continuo decrescebat repulsio, vsquedum tubus fere ad distantiam initialem denuo admotus esset. Postea repulsio transibat in attractionem, qua facta pendulum rursus repellebatur.

3) Retrahebam tunc tubum, et successiue repulsio rursus imminuebatur, ac in attractionem mutabatur, qua facta pendulum denuo repellebatur.

4) Sub-

attendatur, postquam facta sunt, quae num. 2. praecepi, non omnis repulsio cessat, sed pendulum, post vltimam attractionem, aliquantum, debiliter tamen, repellitur. Rei huius rationem infra tradam. Optimum esset, adhibere huic experimento, loco regulae, cylindrum laeuigatum metallicum, hemisphaerio, eiusdem cum cylindro baseos, vtrinque terminatum.

4) Subſtituebam tunc cylindrum ſulphureum tubo vitreo, ac obſeruabam, admoto eo, vti in num. 2. cum tubo vitreo factum erat, repulſionem eo magis creſcere, quo magis admotus erat cylinder, decreſcere vero, quo magis remouebatur.

Exper. VII.

Repetito eodem experimento, ſed loco cylindri vitrei, ſulphureo in vſum vocato, euentus quoad num. 1 et 2 prorſus idem manebat. In num. 3 vero tubus vitreus idem praeſtabat, quod cylinder ſulphureus in antecedente.

Exper. VIII.

Dum pendulum in experimento IV a regula repellebatur, repellebatur quoque a tubo vitreo electrificato ipſi admoto, attrahebatur vero a cylindro ſulphureo. Contrarium fiebat in experimento V.

Exper. IX.

In experimento VI, dum pendulum repellebatur a regula, ſub circumſtantiis num. 1. adductis, repellebatur a cylindro ſulphureo, attrahebatur a vitreo. Sub circumſtantiis num. 2. repellebatur a vitreo, attrahebatur a ſulphureo. Sub circumſtantiis num. 3. vero rurſus a ſulphureo repellebatur, a vitreo attrahebatur. In experimento VII ſemper contrarium accidebat.

Exper. X.

Tubum vitreum electrificatum admoui extremitati fili orichalcei, craſſitiei, qualis eſt calami anſerini, quod ex altera parte acuminatum erat, ac cuſpide ſua intrabat in campanam vitream, aere vacuam. Admoto tubo, erumpebant ex cuſpide, larga materiae electricae flumina, lucentia, diuergentia, ac ad diſcum metallicum, cui impoſita erat campana, progredientia. Retracto tunc tubo, cuſpis denuo lucebat, non autem tam larga luce, ſed multo minori, ſcintillam viuidam quaſi referente.

Exper. XI.

Loco tubi vitrei in praecedente experimento, adhibui ſulphureum, qui eadem producebat, aſt ordine inverſo, phaenomena; admoto nempe cylindro ſcintilla, remoto ipſo, larga, de quibus locutus ſum, flumina adparebant.

Exper. XII.

Summo apici barometri lucentis admoui cylindrum vitreum, aut ex ſulphure fuſum, electrificatum, ad diſtantiam 8 circiter pollicum. Obſeruaui tunc

1.) Spatium a mercurio vacuum viuido lumine totum repleri, quod vero mox exſtinguitur.

2.) Promoto vlterius tubo verſus barometrum vno alteroue pollice, denuo ſimile fulgur videri.

3.) Repeti poſſe hoc experimentum, vsquedum cylinder barometro fere contiguus ſit factus.

4.) Retracto tum tubo per aliquot pollices, barometrum denuo lucem edere, idemque fieri repetitis vicibus, vsquedum cylinder ad 7 vel 8 digitos a barometro remotus eſſet.

4.) Ex-

4.) Experimenta haec omnia ex Theoria Electricitatis *Francklinianae* optime explicari possunt, ac tanquam totidem probationes veritatis huius theoriae, cum qua tam apte consentiunt, habenda sunt. Quo hoc commonstrem, opus erit, vt quid euenire debeat secundum hanc theoriam, si duo corpora, quorum vnum est electrificatum, alterum in statu naturali constitutum, sibi inuicem appropinquantur, generatim prius exponam. Supponamus igitur corpori B in statu naturali constituto, nullumque corpus non per se electricum immediate contingenti, appropinquari corpus A, quod itidem non nisi fluidi electrici quantitatem naturalem continet. (*b*) Cum particulae corporeae, quae corpus A constituunt, materiam electricam in B contentam attrahant; particulae vero fluidi electrici in A contenti, aequali vi ipsam repellant, ob vires se mutuo destruentes nullus effectus producitur. Sumatur autem in A fluidi electrici copia vltra naturalem augeri, ac ob auctam repulsionem, quae in B continetur materia electrica, a superficie *ab*, propelli debet, versus superficiem *cd*, ex qua, si nullum adsit impedimentum, libere emanabit; si vero huic effluxui obex ponatur, quod fit, si corpus B vbiuis aere, aut corpore quocunque alio per se electrico, quae quippe admodum difficulter materiam electricam in se recipiunt, contingatur; fluidum electricum versus *cd* Tab. VIII. Fig. 4. Fig. 5.

Nn 3 pro-

(*b*) In figuris, quae huc pertinent, corpus, aut corporis pars, lineis se intersecantibus denigrata, indicat fluidum electricum ibi abundare; punctis notata, deficere; omnino alba, exacte adesse copiam naturalem huius fluidi.

propulsum, ac cedere nescium, comprimetur. Circa *ab* itaque fluidi electrici copia imminui, circa *cd* vero augeri debet, vnde corpus B, eum, quem exhibet Fig. 5. statum assumere debet, i. e. inter *ab* et lineam quandam *ef* fluidum electricum minorem, inter *ef* vero et *cd* maiorem acquirere debet densitatem, quam in statu naturali, vbi aequaliter adhuc per totum corpus distributa erat, habuerat. (*c*)

5) Si iam superficies *cd* a corpore quodam non electrico contingatur, aut quod eodem recidit, aer ipsam contingens remoueatur, vtroque casu, materia electrica in parte *efcd* accumulata, se vel in corpus contingens, vel per vacuum, in proxima corpora non per se

Tab. VIII. Fig. 14.

(*c*) Si rem exactius consideremus, facile concipimus, densitatem fluidi electrici in corpore B contenti fore difformem, ita, vt si recta *bd* crassitiem corporis B repraesentet, ac huic applicentur in quouis puncto *r* ordinatae *rs*, differentiae, quae intercedit inter densitatem, quam habet in eo corporis loco cui punctum *r* respondet, materia electrica, ac densitatem naturalem, proportionales, cadentibus ordinatis negatiuis versus sinistram, positiuis versus dextram; sint puncta omnia *s* in curua quadem *qsfp*, rectam *bd* alicubi vt in *f* intersecante, eaque proprietate donata, vt sit spatium *bqf* aequale spatio *fdp*. Naturam huius curuae hactenus determinare non licet specialius, nec licebit, nisi tam felices sint aliquando naturae scrutatores, vt legem, secundum quam crescunt ac decrescunt repulsiones et attractiones electricae, detegant. Id interim facile patet, quo maior sit intensitas repulsionis, eo magis simul crescere ordinatarum magnitudinem, punctumque intersectionis propius ad *d* accedere. Sed inquisitionibus huiusmodi, cum in hac nostra disquisitione parum praestare queant vtilitatis, immorari, consultum non duco. Sufficit, breuiter haec monuisse, simulque in iis, quae hic, ac in sequentibus protuli, me summam ac geometricam exactitudinem, prouti hic inutilem, non quaesiuisse, lectoribus indicasse.

ſe electrica, diſtribuere debet, vsquedum eiusdem ſit inibi denſitatis, quae eſt in corpore contingente. Tum igitur corpus eum adipiſcitur ſtatum, quem exhibet Fig. 6; pars nempe *abef* minorem, pars vero *efcd* eandem circiter continet fluidi electrici copiam, qualem in ſtatu naturali habuerat. Facile vero patet, ſi capiatur iam ſumma fluidi electrici, in hocce ſtatu in B contenti, minorem eam futuram eſſe, quantitate naturali. Quanquam enim in parte *efcd*, copia naturalis adſit, in altera tamen parte *abef* defectus datur, vnde aggregatum hoc, quantitate naturali minus, non eſſe non poteſt.

6) Si iam ſupponamus remoueri corpus A, ceſſabit omnis repulſio, vnde fluidum electricum libertatem rurſus nanciſcitur, aequaliter ſe per corpus B diſtribuendi. Cum igitur iam fluidi electrici copia naturalis in B ſit imminuta, facta aequali diſtributione, quaeuis pars minorem, quam quantitatem naturalem, continebit, ac corpus totum, in ſtatum Fig. 7. tranſibit, ſeu negatiue electricum euadet.

7) Conſiderauimus hactenus caſum, vbi in corpore A, fluidi electrici copia vltra naturalem aucta erat; ſi vero iam ſupponamus, imminui ipſius copiam, infra naturalem, euentus contrarii erunt priorum. Si nempe primum et corpus A, et corpus B, in ſtatu naturali ſupponuntur, attractionis, quam corpus A in fluidum electricum in B contentum exercet, effectus, a repulſione, qua materia electrica in A contenta, in eam, quae in B continetur, agit, deſtruitur. Sublata autem quantitatis fluidi electrici aliqua parte ex Tab. VIII. Fig. 4.

A, ſeu

A, seu corpore hoc negatiue electrico facto, cessante tunc repulsione, materia electrica attractioni versus superficiem *ab* obtemperare debet. Oritur hinc vero status, quem exhibet Fig. 8.; in spatio nempe *abef* materia electrica condensatur, in spatio *efcd* rarior euadit.

8) Si iam, posteaquam B hunc statum consecutum est, superficies *cd*, aut corpore non per se electrico contingatur, aut aer hanc superficiem ambiens remoueatur, priori casu ex corpore superficiem contingente, posteriori ex corporibus propinquis non per se electricis, per vacuum, materia electrica, in partem *efcd* tamdiu transibit, vsquedum aequilibrium sit restitutum, i. e. vsquedum, vti in Fig. 9, pars *efcd* fluidi electrici copiam rursus naturalem circiter nacta sit. Hoc vero facto corpus B plus materiae electricae continere, quam in statu suo naturali, manifestum est. Remoto itaque corpore A, vbi ob attractionem versus *ab* iam cessantem, aequabilis fluidi electrici distributio per totum corpus facta est, in quauis parte corporis B, vti Fig. 10. exhibet, fluidum electricum abundabit, seu totum corpus positiue electricum euadet.

9) Supra a me exposita phaenomena, ex hactenus explicatis, felicissime deducuntur, nec vllum occurrit inter ipsa, cui caussa sufficiens assignari non posset. Breuis principiorum ad experimenta adplicatio luculenter hoc commonstrabit; antequam vero tradere hanc aggrediar, in mentem hic lectoribus reuocandum erit, quod aliunde iam satis constat, nec cuidam cui experimenta electrica satis sunt familiaria, ignotum erit,

1) Cor-

1) Corpora duo, quorum vtrumque est vel positiue, vel vtrumque negatiue electricum, se inuicem repellere; quae vero heterogeneam habent electricitatem, se mutuo attrahere (*d*)

2) Vi-

(*d*) Quaestio hic oritur, an nunquam homogenee electrica se attrahant? ad quam omnino affirmatiue respondendum est. Propositionem enim meam non intellectam volo, nisi de eo casu, vbi duo ista corpora habent electricitatem aut positiuam, aut negatiuam, in gradu non admodum inaequali. Dari posse, nisi haec conditio adsit, inter homogenee electrica etiam attractionem, tam ex obseruationibus constat, quam sequenti demonstratione euincitur. Sit gradus electricitatis in corpore A $= a$, in B $= b$, et repulsionis inter haec corpora quantitas $= \varphi$. Constat iam per experientiam, si $a = b$, dari repulsionem, si vero a manente constante, b imminuatur vsque ad o, repulsionem mutari in attractionem. Si itaque b ab a ad o vsque decrescat, decrescit interea φ a valore positiuo in sui negatiuum, seu contrarium. Necesse igitur est, vt inter istos 2 valores φ, quorum alter respondet $b = a$, alter $b = o$, fiat φ aliquando $= o$, vnde datur necessario valor quidam ipsius b, cadens inter a et o, cui $\varphi = o$ respondet. Sit hicce valor $= c$, ac pro omnibus valoribus ipsius b, qui cadunt inter c ac o, dabitur attractio. Interim, cum corpora heterogenee electrica se semper attrahant, tutum ex repulsione formatur iudicium, an duo corpora sint homogenee electrica. Vera enim est sine exceptione propositio: quae se repellunt, sunt homogenee electrica; at dantur casus, vbi falsa est eius conuersa: quae homogenee electrica sunt, se repellunt.

Addo iam, dum sub prelo sudat haec dissertatio, me phaenomeni de quo hic loquor, causas, atque vniuersam attractionis et repulsionis electricae theoriam, in secundo capite *Tentaminis mei Theoriae electricitatis et magnetismi* explicasse, ad quem itaque librum lectores ablegandi sunt.

a) Vitrum, (*e*) corporaque huius generis, frictione, positiuam, sulphur vero, caeteraque corpora resinosa; negatiuam adquirere electricitatem.

§. 10. Facile iam concipitur, cur in experimento *Pekini* instituto, dum tabula crystallina frictione electrificata, pyxidi magneticae imponebatur, acus magnetica, sursum rapi debuerit. Manifestum enim est, ex § 4. vitri, quo pyxis cooperta erat, superficiem inferiorem positiue electricam factam fuisse, vnde corporis positiue electrici edere phaenomena, acumque attrahere debuit. Attractionem hanc sequi debuisset repulsio, sed obstitit tam acus magnitudo, quam paruus punctorum, in quibus acus laminam contingebat, numerus, quo minus hoc statim fieret. Ob figuram enim acus, ac praecipue, ob impositum ipsi capitellum, non nisi
Tab. VIII. in duobus punctis *a* et *b*, laminam contingere potuit.
Fig. 9 Transiit itaque in acum primo quidem statim momento, quae circa *a* et *b* haerebat, abundans materia electrica; sed quantitas ista iusto minor erat, quam vt totam acus ponderosae massam, ad repulsionem vsque, electricam reddere potuisset. Constanter itaque acus attrahi debebat, vsquedum sufficientem electricitatis gradum nacta esset, quem vero non nisi admodum lento gradu, consequi potuit. Cum enim materiam electricam non nisi per puncta A et B recipere poterat, necesse erat, vt materia electrica ex caeteris laminae parti-

(*e*) Intelligendum hic est vitrum politum. Attritum nempe, vsque dum polituram ac pelluciditatem amiserit, (mattgeschliffen Glas) vt ex Cantoni experimentis constat, frictione ordinario modo instituta, fit negatiue electricum.

partibus, in viciniam punctorum A et B, inde vero in acum ipsam, transiret. Constat autem, cum vitrum sit corpus per se electricum, fieri hunc transitum materiae electricae, ex vna ipsius parte in alteram, admodum difficulter, lentoque gradu. Mirum itaque non est, sat longum tempus, et vel duas horas, necessarias fuisse, antequam acus ad repulsionem vsque electrica facta fuerit. Postquam autem hunc gradum tandem consecuta esset, cum impetu, vti factum est, repelli debebat; sic enim semper fieri solet, si corpus electricum, alia, quibuscum suam communicauit electricitatem, repellit corpora.

§. 11. Abrepta autem est interea insignis fluidi electrici, ad superficiem vitri pyxidem tegentis inferiorem propulsi, copia, dum partim in acum, partim lente in latera ac fundum pyxidis transiit, vnde, quod ex §. 5. patet, sublata iam lamina pyxidi imposita, vitrum pyxidem tegens negatiue electricum factum est. Attrahebat hinc denuo acum, quae repelli rursus antea non poterat, quam notabilem amisisset fluidi electrici copiam. Fieri autem hoc iterum non poterat, nisi admodum lente, cum transitus materiae electricae ex acu in vitrum per duo solum puncta *a* et *b* fieri posset, ac nunquam materiae electricae per vitrum distributio velox esse queat.

§. 12. Si vero interea lamina electrica pyxidi rursum imponebatur, ob accedentem denuo repulsionem, pyxidem tegens vitrum in statum, quem habuerat, antequam lamina remoueretur, reuerti debebat. Cum igitur in inferiorem ipsius superficiem, materia electrica rurſus condenſaretur, haec electricitatem negatiuam amittebat, acumque vlterius retinere non poterat. Exſtincta hinc videbatur electricitas, facile vero, ſublato vitro electrico, ablataque cum eo repulſione, reſuſcitari quaſi poterat.

§. 13. Coincidit cum hoc experimento, eorum, quae a me inſtituta ſunt, primum; quae enim hic occurrit diuerſitas, non niſi ex eo ortum trahit, quod, loco acus ponderoſae metallicae, puluerem leuiorem vitro ſubſtraueram. Quaeuis nempe pulueris huius particula, ob minimam materiae in ipſo contentam copiam, momento citius, ad primum laminae contactum fluido electrico replebatur, vnde ſtatim repulſa, ad tabulam, ſupra quam experimentum inſtituebatur, reuerti debebat. Diſtributa autem in hancce materia electrica, in pulueris particula abundante, haec ſtatum naturalem mox acquirebat, vnde denuo attrahebatur, vsquedum poſt varios puluiſculi cuiusuis itus atque reditus, tanta materiae electricae, ad inferiorem vitri ſuperficiem propulſi, ablata eſſet copia, vt haec non niſi proxime quantitatem naturalem contineret, quo facto omnia phaenomena ceſſare debuerunt. Praeterea in toto hoc experimento nihil eſt, quod non iam antea ſufficienter ſit explicatum.

§. 14. Omnino rurſus ſimile eſt prioribus experimentorum meorum tertium, vbi loco laminae vitreae, regulam orichalceam, fulcris vitreis impoſitam, vſurpaui. Admonebam huic

1) cylindrum vitreum electrificatum, verſus extremitatem A, ad diſtantiam 10 circiter pollicum; mate-

materia itaque electrica versus extremitatem B propulsa (§. 4) positiue electricam hanc reddebat, quapropter filum lineum attrahebatur. Adhaerebat autem regulae hoc filum, vsquedum per istud, quae in extremitate B abundabat, materia electrica, eo se gradu dissipare ac diffluere poterat, vt ipsa non nisi fluidi electrici quantitatem naturalem vlterius contineret, quo facto omnis ex electricitate actio cessabat, et filum in situm verticalem reuertebatur. Admoto tum

2) vlterius tubo ad distantiam v. c. 8 pollicum, crescente tum repulsione, (crescere enim repulsionem, vt et attractionem electricam, cum decrescente distantia, satis constat, quanquam, secundum quam distantiae functionem fiat hoc incrementum, detectum nondum sit) materia electrica denuo versus B propellebatur; vnde eadem, quae antea, phaenomena oriri debebant, quae toties repeti poterant, quoties, admoto adhuc propius tubo, repulsionis intensitas denuo augebatur. Retracto autem iam

3) tubo per aliquot pollices, quoniam in tota regula electrici fluidi copia infra naturalem imminuta erat, (§ 5) ac ob decrescentem tum repulsionem, materia electrica, in regula contenta, se expandendi libertatem nacta erat, ex parte versus A se distribuere debebat. Cum igitur extremitas B sic aliquid quantitatis naturalis amitteret, negatiue electrica haec facta, filum attrahebat. Tam diu autem regulae hoc cohaerebat, vsquedum per ipsum adfluere tanta materiae electricae copia in laminae extremitatem B rursus poterat, vt haec statum naturalem nancisceretur. Hoc

vero facto, vlterius nulla dabatur ex electricitate in filum actio. Plane idem accidebat toties, quoties tubus vlterius remouebatur, vnde, cur repeti potuerit experimentum, satis patet.

§. 15. In hoc experimento, si loco tubi vitrei, ex sulphure fusum cylindrum adhibebam, euentus inde plane non mutabatur. Ast inde ad explicationis identitatem concludi non potest. Attritus enim cylinder sulphureus, non, prouti vitreus, positiuam, sed negatiuam, adipiscitur electricitatem. Oppositum itaque hic habemus, prioris casum, nec experimenti huius explicatio, ex principiis hactenus vsurpatis, sed ex iis, quae §. 7 et 8 exposita sunt, petenda est. Fit autem hoc tam facile, vt nemini, qui hactenus proposita nota sibi reddiderit, negotium facessere queat, vnde labore hoc me supersedere posse existimo.

§. 16. In experimento IV, vbi loco fili linei, particulam suberis, ex filo serico suspensam, adhibebam, ea solum ex ratione euentus aliquantum diuersus prodibat, quod pendulum ipsum electricitatem assumere, ac assumtam conseruare poterat, id qnod in filo lineo locum non habebat. Postquam itaque per repulsionem a tubo vitreo, regulae admoto, exercitam, extremitas B positiue electrica facta fuerat, pendulum attrahere, statim vero cum ipso electricitatem suam communicare, hinc ipsum repellere debebat. Admoto tum tubo propius, crescebat repulsionis intensitas, atque fluidum electricum tunc vi maiori versus B vrgebatur, vnde magis ibi condensatum, maiori semper vi pendulum repellebat.

pellebat. Retracto vero aliquantum tubo, ac decrescente tum repulsione, fluidum electricum libertatem, se magis aequabiliter distribuendi, rursus nanciscebatur, vnde eius densitas circa B aliquantum decrescebat, simul vero intensitatis vis, quacum pendulum repellebatur, minor fiebat. Remoto autem tubo ad distantiam longiorem, fluidum electricum, plenariam tum libertatem nactum, omnino, aut quam proxime saltem aequabiliter, per totam regulam se rursus distribuebat, vt sic extremitas B omnem fere electricitatem positiuam amitteret. Interea autem, quam semel acquisiuerat, pendulum electricitatem conseruabat, vnde ab extremitate B attrahebatur. Facta autem hac attractione, ac materia electrica abundante ex pendulo in regulam dispersa, omnis electricitas cessabat. (*f*) Si, vti in experimento V. feci, cylinder sulphu-

(*f*) Si anguli solidi regulae iusto acutiores erant; non omnino, vt antea iam indicaui, electricitas cessabat, sed post vltimam attractionem pendulum rursus repellebatur. Causam agnoscit hoc phaenomenon proprietatem cuspidum, de quibus constat, si in corpore materia electrica abundat, sponte ex ipsis fluidum electricum, non obstante aere circumfluo, se dissipare, aut, si deficit, per ipsas intrare. Si itaque anguli solidi regulae acutiores erant, aliquid materiae electricae circa B abundantis per ipsos diffluebat, vnde tunc, retracto tubo, tota regula non in statum naturalem, vti debuisset, reuertebatur, sed negatiue electrica fiebat. Hanc itaque negatiuam electricitatem cum pendulo attracto communicabat, hincque istud repellebat. Vere quoque in hoc casu pendulum, supra allegata ratione examinatum, post vltimam repulsionem, a cylindro sulphureo repellebatur, indicio, omnino, vt dixi, negatiue electricum factum fuisse Facile haec, mutatis, quae mutanda sunt, adplicantur ad sequens experimentum V.

ſulphureus loco vitrei adhibetur, eadem quidem oriuntur phaenomena, aſt non eſt eadem ratio, rurſus ex §. 7 et 8 petenda, vnde vero cuiuis vel primo intuitu patet. (g)

§. 17. Dum in experimento VI. regulae tubum admouebam, condenſabatur quidem materia electrica verſus extremitatem B, aſt contactus digiti anſam ipſi praebe-

---

Tab. VIII. Fig. 10.

(g) Obtulit ſe mihi, dum ſcripto haec comprehendebam, idea noui cuiusdam huc pertinentis experimenti. Supponatur tubus vitreus electrificatus, non regulae, ſed pendulo appropinquari, ac per ſuperius expoſita ſatis patet, ſi *abcd* ſit globus ex filo ſerico ſuſpenſus, propelli debere materiam electricam in ipſo contentam a *d* verſus *b*, vnde pars eius regulae obuerſa *adc* poſitiue electrica euadet. Attrahi itaque debet globulus a regulae extremitate B, quae eodem hoc momento, ob repulſionem, quam tubus electrificatus exercet, negatiue electrica facta eſt. Dum vero globulus attractus regulam contingit, materia electrica, in parte *abc* accumulata, per regulam diſpergitur. Fit itaque tum globulus negatiue electricus, ac fortiter a tubo attrahitur. Inſtituto periculo, euentum theoriae omnino conſentire obſeruaui, modo debita cum cautione inſtituantur experimenta. Neceſſe enim eſt, vt particula ſuberis filo appenſa ſit, quantum fieri poteſt, ſphaericae, aut ſphaeroidicae figurae, nulloſque habeat apices, aut angulos, per quos materia electrica diffluere poſſit. Praeterea in aere ſicco experimentum inſtituendum eſt, aer enim humidus facile aliquam materiae electricae, ex globulo propulſae, partem in ſe recipit. Vtroque caſu pendulum fit negatiue electricum, quamuis regulam non contigerit, vnde ſtatim a tubo attrahitur. Eſt autem tum nunquam non attractio admodum debilis, et longe inferior ea, quae fit, ſi pendulum prius a regula attractum ſit. Si cylinder ſulphureus adhibeatur loco vitrei, idem contingit, aſt contraria de cauſa, phaenomenon.

praebebat, ſe per digitum diſtribuendi, vnde in hac extremitate, non niſi circiter copia materiae electricae naturalis ſupererat. (§. 5) Remoto itaque digito, in pendulum nulla dabatur actio. Aſt remoto tum tubo, fluidoque electrico aequaliter per regulam nunc diſtributo, negatiue electrica haec fiebat, ac hancce electricitatem cum pendulo attracto, ſtatim vero repulſo, communicabat. Si tunc tubum denuo magis magisque regulae admouebam, materia electrica verſus B magis magisque rurſum condenſabatur, vnde negatiua electricitas extremitatis huius decreſcebat, immo tandem in electricitatem poſitiuam tranſibat, quare pendulum initio minus repellebatur, tandem vero attrahebatur, ac poſtquam eam, quam iam habebat extremitas B, electricitatem poſitiuam nactum eſſet, denuo repellebatur. Retracto tandem tubo, ob continuo imminutam repulſionem, contrario ordine, extremitatis B electricitas poſitiua imminuebatur, ac in negatiuam rurſus tranſibat, vnde omnino et penduli repulſio decreſcere, ac in attractionem tandem mutari, debebat.

§. 18. Si vero, poſtquam facta erant, quae in experimento dicto num. 1. praecepi, cylinder ſulphureus, loco vitrei, regulae admouebatur, ob cylindrum hunc negatiue electricum, fluidum electricum continuo magis a B verſus A attrahebatur, quo magis tubum admouebam. Creſcebat itaque in extremitate B electricitas negatiua, ſimulque penduli repulſio, remoto autem tubo, decreſcebat. Euentuum experimenti VII. cauſam concipere iam quiuis facillime poterit; vnde peculiarem eius explicationem, ne taedium moueam lectoribus, non addo.

§. 19. Veritatem explicationis meae insigniter comprobant, ac extra dubium omnino ponunt, experimenta VIII. atque IX. Demonstrant enim, vere tunc pendulum, aut positiue, aut negatiue, electricum fuisse, cum secundum theoriam hactenus propositam, aut hanc, aut illam electricitatem, nancisci debuerat. Est enim optimus modus, examen, quamnam oppositarum electricitatum possideat pendulum, instituendi, 16, quem hic adhibui, vt quoque iam supra §. 9. indicaui. Vlterius circa experimenta ista nihil monendum habeo; quiuis enim lectorum facillime per se comparationem instituere euentuum, cum supra traditis, ac, qui vbiuis se manifestat, detegere consensum poterit.

§. 20. Quam maxime notanda quoque sunt experimenta X, XI, ac XII, quae itidem cum theoria penitus conspirant. Iam diu obseruatum est, quemcunque materiae electricae, ex vno corpore in aliud sensibilem actualem transitum, modo aliquali fiat cum celeritate ac violentia, cum luce semper, secundum circumstantias, magis minusue viuida, combinari. Debemus autem *Francklino* et aliis detectionem legum, secundum quas lucis huius apparentia, prouti materia electrica ex cuspide metallica vel effluit, vel in illam influit, variatur. Constat nempe, fluidum electricum, dum ex cuspide effluit, conum luminosum, dum influit non talem conum, sed scintillulam solum quasi quandam, cuspidi insidentem, sistere. Suppositis his experimentum X. exactius contemplemur.

§. 21.

§. 21. Intrabat in hoc experimento cuſpis in ſpatium aere vacuum, vnde nihil hic aderat, quod liberum materiae electricae ex cuſpide effluxum, aut in ipſam influxum, impedire potuiſſet. Dum igitur extremo fili metallici alteri, extra campanam prominenti, admouebatur tubus vitreus electrificatus, materia electrica, verſus cuſpidem propulſa, ibi non, vt alias, condenſabatur, ſed libere emanabat, ſeque in corpus proximum non per ſe electricum, diſcum nempe metallicum, recipiebat. Imminuebatur autem neceſſario ſic fluidi electrici, in filo contenti, copia, vnde remoto rurſum tubo, fluidoque electrico aequaliter ſtatim diſtributo, filoque iam negatiue electrico facto, rurſus materiam electricam ex diſco metallico attrahebat. Obtemperare huic attractioni poterat fluidum electricum, ob aeris abſentiam, vnde in cuſpidem ſtatim influebat, filumque in ſtatum naturalem rurſus reducebat.

§. 22. Fieri autem non poterat vterque tranſitus, ſine ſatis ſenſibili luce, quae ſecundum ſupra monita, admoto tubo, ad coni luminoſi, (h) remoto autem

 eo

(h) Primo quidem intuitu, vix vlla inter hoc phaenomenon, ac conſuetum conum luminoſum, intercedere videtur ſimilitudo. Loco enim huius coni, conſpiciuntur 3, 4 vsque ad 6, raro pluros, luminis tractus, vacuum percurrentes, quorum quiuis digiti fere habet craſſitiem. Aſt coincidere nihilominus vere hoc phaenomenon, cum ſaepius dicto cono, ſequenti ratione conſtare poteſt. Admoueatur primum tubus filo metallico, antequam aer rarefactus eſt, et videbitur conus immutatus. Exhauriatur tum aliqua, modica tamen, aeris pars, ac denuo admoto tubo videbitur, eo, ad scintillulae similitudinem accedebat. Euidens iam quoque est, cur cylinder sulphureus eadem, ast ordine inuerso, produxerit phaenomena. Fiebat enim, vt facile cuius patet, cuspis vacuum intrans, ordine inuerso, negatiue primum, deinde vero positiue electrica. Pertinet huc quoque experimentum XII. cum barometro lucente institutum, vbi, admoto tubo vitreo, ex tubuli barometrici interna superficie in vacuum propulsa materia electrica in mercurium se recipiebat, remoto autem ipso, rursus ex mercurio in vitrum transibat. Idem hoc euenire debebat, sed ordine inuerso, dum cylindrum ex sulphure fusum, loco vitrei, barometro admouebam.

§. 23. Nihil hactenus ad explicationem experimenti secundi faciens attuli, sed ea propter hoc factum est, quia, praeter principia supra exposita, alia quaedam adhuc praemittenda sunt, priusquam eius rationem reddere queam. Tab.VIII. Fig. 12. Ponamus laminam vitream *abcd* atteri in superficie *ab*, ac cum inde fluidi electrici in hac superficie augeatur copia, repulsionem haec consuetam exercens, ac per vitrum se statim distribuere non valens, materiam electricam in vitro contentam versus *cd* propellet, ac, si cedere illa nequeat, ipsam versus hanc

---

bitur quidem rursus conus luminosus, sed ex paucioribus iam ac crassioribus radiis consistens. Pergendo tunc porro in euacuatione, continuo radiorum ex cuspide diuergentium, conum luminosum constituentium, numerus imminuitur; ac crassities cuiusuis radii augetur, vsquedum tandem in phaenomenon supra descriptum degeneret.

hanc partem condensabit. Tota itaque lamina in statum, quem Fig. 12. exhibet, redigetur. Intra *ab* nempe et *ef* materia electrica condensata, inter *ef* et *gb* rarefacta, inter *gb* vero et *cd* rursus condensata erit. Quodsi iam superficies *cd* a corpore non electrico contingatur, materia electrica, repulsione coacta, in corpus hoc contingens transibit, vsque ad aequilibrii cum corpore contingente restitutionem. Ortum hinc trahet status laminae, quem Fig. 13. exhibet, vbi inter *ab* et *ef* materia electrica condensata, inter *ef* ac *gb* rarefacta, inter *gb* vero ac *cd* in statu circiter naturali constituta est. Idem hic status successiue inducitur laminae, si ipsa puluerem leuiorem attrahat atque repellat.

§. 24. Si nunc lamina in superficie *ab* a corpore non electrico contingatur, pars fluidi, in *abef* condensati, in hoc corpus contingens se distribuet, vnde, ob imminutam repulsionem, hinc materiam electricam in parte laminae *efcd* magis aequabiliter distributam, superficies *cd*, minimum in ea parte, vbi contingitur, negatiue electrica euadens, corpora leuiora ipsi vicina attrahere debet.

§. 25. Qui, quae hactenus proposui, paulo attentius considerare voluerit, eximium theoriae *Francklinianae* cum phaenomenis consensum non mirari non poterit. Phaenomena, quae huc protuli, tam paradoxa atque complicata primo videntur intuitu, vt sperare sufficientem ipsorum explicationem vix liceat. Nihilo minus ex duabus his proprietatibus materiae electricae, quod eius partes se inter se repellant, a reliqua vero materia corporea, in mundo reperiunda, attrahantur, tam clare deducuntur, vt de veritate explicationis dubitare non liceat. Est hoc insigne veritatis priuilegium, quod quae inde per ratiocinia deducuntur, experientiae nunquam non consona inueniantur, quapropter, cum nouum hic dederim specimen, accidere hoc, vt alias semper solet, Theoriae *Francklinianae*, in nouis quoque hic prolatis phaenomenis, iure de veritate ipsius vlterius dubitari non posse, videtur.

OBSER-

OBSERVATIO OPTICA
DE
MVTABILITATE DIAMETRI APPARENTIS FORAMINIS ANGVSTI, OCVLO PROPINQVI.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

1.

Cum nuper in instituendo experimento quodam occupatus, obiectum quoddam, per foramen paruum, in tenui lamina plumbea factum, cuius diameter decima lineae parte vix maior erat, oculo sinistro contemplarer, obseruabam fortuito, foramen istud, si dextrum oculum clauderem, maius, si ipsum aperirem, minus, videri, sic vt alternis vicibus, oculo dextro clauso atque aperto, alternis etiam vicibus foraminis diameter crescere atque decrescere videretur.

2) Insigne paradoxum videbatur, obiecti cuiusdam diametrum apparentem augeri aut minui posse, quanquam vera ipsius diameter non solum, sed et distantia ipsius ab oculo inuariata persisteret. Vlteriori itaque inquisitione dignum videbatur phaenomenon, quapropter aliquoties tentamen repetens, ad omnes circumstantias diligentius attendebam. Obseruabam tum non solum, descriptum modo phaenomenon semper locum habere, sed et simul annotabam

a) camα) campum visionis, quem per foramen saepius dictum conspiciebam, vna cum apparente foraminis diametro minui atque augeri, prouti oculus dexter vel claudebatur, vel aperiebatur.

β) Si oculum dextrum, mediantibus palpebris, clauderem, augebatur quidem tam foraminis, quam campi visionis, diameter, quodsi vero tum manu oculum adhuc obtegebam, vlterius rursum diameter augebatur. Etiamsi quoque palpebram non deprimerem, sed manu solum oculum obtegerem, nihilominus augmentum diametri insequebatur.

γ) Exacte quidem mensurare, quantum sit hoc diametri incrementum, aut decrementum, difficile admodum expertus sum, reperi tamen, cum foramen dimidium circiter pollicem ab oculo remotum erat, tabula vero, quam adspiciebam, tres circiter pedes ab oculo distabat, si diameter circuli, qui per foramen conspiciebatur, dum apertus erat oculus dexter, ponatur $= 1$, esse tum diametrum circuli, qui conspicitur si oculus dexter, mediante solum palpebrae depressione, claudatur, maiorem, quam $1\frac{1}{4}$, si vero manu praeterea oculus adhuc obtegatur, fieri tum diametrum hanc notabiliter adhuc maiorem, ita vt sit fere $= 2$.

3) Quo causam phaenomeni satis iam descripti eruerem, operam dedi, vt, quanta esse debeat campi visionis per foramen rotundum, oculo propinquum, diameter, inuestigarem. Supposui itaque in figura adiecta,

iecta, rectam AG designare oculi axin, BC diametrum pupillae, DF diametrum foraminis, IH vero denotare planum quoddam, ad axem visionis AG perpendiculare. Facile iam patet, si per puncta B et F ducatur recta BF, atque producatur vsque ad planum IH, cui in H occurrit, puncta omnia, inter G et H sita, depingi debere in oculo, quae vero vltra H dissita sunt ab axe visionis, sui imaginem in oculi fundum proicere non posse. Luminis enim radii, a puncto eiusmodi vltra H sito emanantes, ac per foramen DF transeuntes, omnes prope pupillam transeunt, neque ipsam intrant, a reliquis vero punctis inter G et H sitis exeuntes radii, minimum ex parte, a pupilla excipiuntur. Erit itaque recta GH, campi apparentis in plano IH diameter dimidia. Quodsi iam ponatur $AG = a$, $AE = b$, $AB = \omega$, $EF = r$, erit primum $AB + EF : AE = AB : AN$, hinc $AN = \frac{\omega b}{\omega + r}$, ac $GN = AG - AN = \frac{ar + a\omega - b\omega}{\omega + r}$. Quoniam autem porro $AN : AB = GN : GH$, erit $GH = \frac{ar + a\omega - b\omega}{b}$. Tab. VIII. Fig. 16.

4) Inuoluit formula haec quantitatem ω, siue semidiametrum pupillae, vnde patet, pendere diametrum campi visionis, atque foraminis apparentem, ex pupillae apertura. Quoniam autem quantitas haec ω, sola est, earum quae formulam ingrediuntur, in quam, quod in experimento supra descripto mutetur, suspicio cadere potest, certi esse possumus, totum phaenomenon, non nisi a pupillae mutabilitate, pendere. Facile vero patet, generatim aucta pupillae apertura, a g ri

ſimul GH. Quodſi enim ponatur tranſire ω in $\omega + e$, ſubſtituto hoc valore loco ω, euadet GH in $\frac{ar + a\omega + ae - b\omega - be}{b}$ vnde erit augmentum, quo creſcit $GH = \frac{(a-b)e}{b}$, quae quantitas, cum ob $b < a$ ſit ſemper poſitiua, aucto ω, augeri ſimul GH luculenter patet.

5) Concludendum eſt ex his, ſi oculus dexter, aut palpebrarum ope claudatur, aut manu, vel corpore alio opaco obtegatur, in ſiniſtro tum oculo pupillae aperturam inſigniter augeri. Cum vero hoc ſit res, quae an ita ſe habeat, immediata experientia innoteſcere poteſt, ante ſpeculum tentamen inſtitui, atque obſeruaui, omnino verum eſſe, quod modo prolatae me docuerunt argumentationes. Dum enim oculum dextrum clauderem, admodum notabiliter dilatari in ſiniſtro pupillae aperturam, aperto vero rurſus ipſo, contrahi eam, percipere diſtincte potui.

6) Notiſſimum alias eſt, pupillam quantitati luminis in oculum incidentis, proportionaliter minui atque augeri, ita, vt aucto lumine contrahatur, imminuto augeatur; aſt apud omnes, qui mihi innotuere, ſcriptores opticos, propoſitionem hanc de eo ſolum oculo enunciatam, ſaltem intellectam, reperio, in quem lumen immediate incidit, nullibi autem, nexus eius, quem inter vtrumque oculum detexi, mentionem iniectam video, vnde obſeruationem hanc meam nouam haberi poſſe iudico.

7) Anato-

7) Anatomicis atque Physiologis, vnde oriatur consensus is, oculi vtriusque, vt mutatio in vno contingens, alterum quoque afficiat oculum, inuestigandum relinquo. Singularis autem, quae hinc elucet, naturae rerum, seu sapientissimi potius auctoris ipsius, prouidentiae, mentio adhuc iniicienda videtur. Qui sano gaudent vtroque oculo, tentamine instituto obseruabunt, se vno oculo obiecta extra se posita, non minori claritate conspicere, quam si vtrumque adhibeant, saltem de memet ipso, hoc affirmare possum. Quaerenda est rei huius ratio sine dubio in ea, quam exposui, oculorum proprietate. Quodsi enim pupilla oculi alterius non immutata perstaret, clauso altero, dimidia solum quasi claritate conspici tum possent obiecta. Quo minus autem hoc fieret, quod saepius molestum foret, talem dedit natura oculis mechanismum, vt clauso oculorum altero, alterius statim pupilla tantum aperiatur, quo duplam minimum luminis quantitatem oculus recipere, atque sensatio eandem conseruare queat, quam habuerat claritatem.

8) Superest, vt vnius adhuc, quod supra annotaui, phaenomeni rationem reddam. Si, postquam oculus dexter palpebrarum ope clausus est, manu obtegitur, pupillae apertura in oculo sinistro magis adhuc increscit. Ortum hoc trahere inde iudico, quod palpebrae oculo obductae, non sint penitus opacae, sed, vt quaedam adhuc luminis fiat in oculum impressio, permittant. Si igitur manus oculo opponatur, excluso

etiam hoc lumine, dextri oculi pupilla, et per consensum quoque sinistri, magis adhuc augebitur Esse vero palpebras non penitus opacas, facili experimento constare potest. Si enim palpebrae oculis obducantur, ac hi tum lucenti obuertantur soli, tantam transmittere ipsas luminis quantitatem, quae molestam creare potest sensationem experimur. Patet idem quoque exinde, quod, si oculi clausis palpebris obuertantur candelae, tum vero manus oculis opponatur, densiores quasi oriri tenebras obseruemus.

ACVS

ACVS NOVAE DECLINATORIAE DESCRIPTIO

AVCTORE IO. ERN. ZEIHERO.

Quum pridem doctissimus ac amicissimus Collega, Dn. Aepinus, acum magneticam 5 pollices vix longam, eademque forma, quam Fig. 1. repraesentat, Tab. IX. Fig. 1. elaboratam, me praesente, limaturae ope examinaret, polos ista quatuor, centraque tria magnetica ostendebat. (vid fig. 2.) Fig. 2. Acus haec perticarum magneticarum ope de nouo fricabatur, et ita quidem, vt poli perverterentur, priores consequenter euanescerent, acusque nouos, et tantummodo duos, quorum centrum in medio acus esset, acquireret. Obtinebat quidem nouos, prioribus contrarios, sed iterum quatuor polos. Experimento hoc plus decies reiterato, acus nouos quidem, prioribus contrarios, ast quatuor semper polos obtinebat.

Causa huius phaenomeni non alia esse poterat, quam quod hoc modo elaborata acus re vera duo chalybis frusta, tenuis annuli ope inter se coniuncta, repraesentet. Quodsi autem duas perticas chalybeas ope frustuli chalybis, seu ferri, respectu totius perticarum massae parui, inter se iungamus, pari modo quatuor acquirunt polos: quum e contrario, immediate se inter se contingentes, quaelibet vnicum modo habeat polum, ambaeque simul sumtae vnicam modo repraesentant perticam. In acu modo

modo descripta discrimen inter crassitiem ambarum extremitatum, et annuli capitulum gerentis, amboque frusta iungentis, valde erat magnum: nam crura acus capitulum versus, tam secundum latitudinem, quam crassitiem, valde diminuebantur, acusque capitulum adeo excauatum erat, vt annulus relictus crassitie sua crassitiem papyri vix superaret. Hinc apparet, quanti momenti sit, ne acus medium, cui capitulum affigitur, nimis tenue elaboretur.

Experientiae iam enarratae ansam mihi praebuerunt, acum inueniendi, ab omnibus iis defectibus liberam. Experimenta circa magnetismum instituta docent, virgam chalybeam, quadrilateram, multo magis latam, quam crassam, per totam longitudinem crassitie aequabili, nullo loco interruptam, fortissime induratam (germ. Glashart), prae omnibus reliquis ad accipiendum summum magnetismum, eundemque conseruandum, esse aptissimam. Si eiusmodi virga, perticarum magneticarum auxilio, secundum regulas requisitas affricetur, nunquam plures praeter duos polos, nunquam puncta consequentia sic dicta accipiet, licet longitudine acus vulgares multum superet; immo semper est in potestate nostra, centrum eorum ita locare, vt lineam virgae medium transeuntem in duas aequales diuidat partes. Acus itaque, et qualitate et forma ad virgam iam memoratam accedens, omnibus aliis huc vsque cognitis, longe praeferenda erit.

Nunc

Nunc superest, vt dicamus, quomodo acus debeat suspendi, ne eam in medio exscindi sit opus. Ad id vero obtinendum, sequentem in modum peragere oportet. Fig. 3. repraesentat acum nouam, Tab. IX.
prismaticam quadrangularem, latitudine crassitiem suam Fig. 3.
quater seu quinquies circiter superantem. Extremitates sint acuminatae, vt gradus possint indicare, vel et tota acus parallelepipedi formam retinere potest, si cui animus est Nonio eam instruere, quod perinde erit. Fig. 4 et 5. sunt ansae orichalceae, e quibus vna vel altera ad suspendendam acum eligatur. Frustulum bibrachiale AB Fig. 4. duabus mediantibus cochleis tenuissimis, Fig. 4.
crassitie vix sextam latitudinis acus partem attingentibus, ad acus medium affigatur. Paruula ista duo foramina, quibus cochleae 1, 2, inseruntur perticae magneticae, nullum omnino detrimentum afferre possunt. Si quis vero hoc pertimesceret, ansam Fig. 5. praeferre posset. Frustum hoc theca CD est instructum, cui inseritur acus, et cochlea E mediante firmatur. F, f, est cochlea chalybea acumine indurato, cuius ope acus suspenditur. Acum inter atque ansam trabecula traiicitur, Fig. 5.
achatae, aliusue silicis frustulo excauato instructum, cui cochleae acumen imponitur, acusque supra illud mouetur. Ope cochleae F punctum suspensionis plus minusue a centro grauitatis pro necessitate remouetur, vt acus plus minusue ad latera oscillare queat. Fig 6. acum Fig. 6.
vna cum suo apparatu repraesentat, quam Illustri Conuentui Academico nunc elaboratam sisto. Acus haec, cuius longitudo $7\frac{1}{2}$ poll. latitudo 4 lin. crassities 1 lin. pedis

dis anglici est, frictione perticarum magneticarum eximia pollet vi, polosque non nisi duos recte positos, centroque magnetico in acus medium rite cadente, obtinet. Fig. 7. repraesentat limaturae ferri in charta acui imposita dispersae distributionem, e qua situs polorum et numerus apparet.

Tab. IX. Fig. 7.

Reiteratae obseruationes cum acu hacce instituendae, praerogatiuam eius prae reliquis acubus huc vsque visitatis ostendent.

PHYSICA

PHYSICA.

NITRARIA
PLANTA OBSCVRA EXPLICATA

a

CAROLO LINNAEO.

Inter vulgo nota vegetabilia in hunc vsque diem vix alia obſcurior NITRARIA, Imperii Ruthenici planta, quam hic explicare conſtitui. Tab. X.

SYNONYMA.

NITRARIA Schoberi.

Caſia fructu nigro *Amman. Ruthen.* 178 *n.* 256. *Du Hamel. Arb.* 131.

Oſyris foliis obtuſis. *Hort. Vpſ.* 295. *Gmelin Sibir.* 2. *p.* 1237. *t.* 98.

HISTORIA.

AMMANVS in *Stirpibus* rarioribus *Ruthenicis*, huius, quantum noui, mentionem fecit primus, cum deſcriptione a Gmelino miſſa, ſed absque flore.

Ego ante duodecim iam annos, e miſſis, per amicos Rutheni Botanicos ſeminibus, plantam obtinui laete virentem, ſed exſpectata diu efflorеſcentia, genus prodere, adhuc neſciam, dum 1748. hortum ederem Vpſalienſem, fide acquieſcens Ammaniana, ad Caſiam Tournefortii, quae mihi Oſyris dicitur, eam ablegaui.

In *Speciebus Plantarum* non ausus sum plantam, nondum visis floribus, genuinam Osyridis speciem constituere, quam verbo tantum tetigi p. 1022.

GMELINVS in *Flora Sibirica* proponit descriptiones *Stelleri*, *Schoberi*, *Lerchii* destitutas floribus, quos anxie per omnes amicos e loco natali quaesiuit; de genere Osyridis haesitabat, cum obseruaret, fructum non vmbilicatum fuisse vertice triangulo, Osyridi proprio.

DU HAMEL in *Traité des Arbres* 1755. edito, nomina tantum Ammani et Gmelini habet, praeterea nihil

Ne vero diutius, et vltra decennium, sterilem hunc Hortus Vpsaliensis aleret hospitem, operam omnem in id conferebam, vt detracta larua flos prorumperet. Collocaui itaque distinctas huius speciei plantas in diuerso solo: alias in Caldario, in Tepidario, in Frigidario, sub dio aprico, sub vmbroso alias, nec quidquam hisce omnibus aliud profeci, quam quod intelligerem, plantam et ferre clima Indicum Caldarii, et gelidum nostrum sub dio, at vero minus vmbrosum amare. Altero anno alias in gleba posui humosa, alias in arenosa, alias in argillacea, inque sabulo calcareo alias; quas omnes placide ferebat iniurias etiamnum sterilis, sed arenoso prae reliquis delectabatur, humidum humosum in primis respuens. Tertio demum anno cum obseruarem folia succulenta et subsalsa, nec non staturam similem maritimis plantis et salinis, subolesci, eandem desiderare solum salsum: his accedebat, quod *Schoberus* dixerat, plantam Nitrariam a locis vliginosis, nitrosis vulgo salino muriaticis, et et *Stellerus* notauerat, eandemo ccurrere ad locum falſum. Plantae itaque ſub dio naſcentis radicibus primo vere anni praecedentis adiiciebam libram dimidiam ſalis muriatici ſ. culinaris, aliis plantis adeo lethiferi, flocci pendens, vtrum vna ancipiti periret experimento, vel non, cum facile plures depactis taleolis recuperarem: at euentus ita ex voto ſucceſſit, vt inſequente anno 1758. primum proferret anxie quaeſitos et pro determinatione generis ſyſtematici deſideratos Flores, quos hic, vna cum totius Plantae deſcriptione noua, cum Botanico Orbe communicare operae pretium duco, ne planta haec barbaras inter et obſcuras ſeponatur.

DESCRIPTIO.

RADIX lignoſa, fibroſa, patula.

CAVLIS fruticoſus, ſeſqui-ſeu bipedalis, diffuſus, proſtratus, ramoſiſſimus, rimoſus, cinereus. *Rami* alterni, ſubadſcendentes, ramoſi, longitudine caulis, ſubincani, ad folia prominentes dentibus obtuſis, truncatis. Praeteritorum annorum ramuli ſaepe terminati apice arido, qui ſpinam fragilem mentitur.

FOLIA ramea, alterna, erecto-patula, ſeſſilia, *ſaepius* bina *diſtincta in quouis dente ramuli*; raro 3, 4 ſ. 5 ſed floralia et ſuperiora in *fertiliori ſolo* terna ſunt, *tamen ſimplicia, vt in plerisque aliis plantis.*

Foliola sessilia, lanceolato-linearia, subcarnosa, integerrima, obtuso-acuta, auenia, planiuscula, pollicaria, annua, superius a se inuicem magis diuergentia.

Stipulae duae, minimae, acutae, inflexae, obscurae dentibus ramulorum insertae.

PEDVNCVLI saepius duo, solitarii (*altero terminali ad basin vltimi folii exorto; altero ex ala folii penultimi*) adscendentes, teretes, aphylli, ebracteati, laeues, virides, foliis duplo longiores, bifidi: ramulo altero bifido, altero trifido; subracemosi.

Flores subsessiles, e latere superiore ramulorum pedunculi, alterni, saepius quinque, vel sex.

CALYX. *Perianthium* monophyllum, *subcarnosum*, semiquinquefidum, erectum, minimum, acutum, *viride*, persistens.

COROLLA. *Petala* quinque, lineari-lanceolata, canaliculata, apice fornicata inflexoque hamata, acuminata, *alba*, *calyce triplo longiora.*

STAMINA. *Filamenta* quindecim, *tenuius* subulata, erectiuscula, *alba*, longitudine petalorum. *Antherae* subouatae, luteae.

PISTILLVM. *Germen* conicum, *superum*, desinens in *stylum*, breuissimum, a *germine non distinctum*, *staminibus dimidio breuius. Stigma* conicum, scabrum.

PERICARPIVM. *Drupa* ouato-oblonga, monosperma.

SEMEN. *Nux* ouata, acuta, trilocularis.

CON-

CONCLVSIO.

CHARACTER GENERICVS in descriptione fructificationis habetur, exclusis tantum vocabulis, literis minoribus scriptis.

GENVS distinctissimum est, nec cum vllo, in hunc vsque diem cognito, facile confundendum. *Stamina* enim constantes quindecim sunt; quod singulare admodum, et, quantum scio, Pegano tantum commune, quod a Nitraria toto coelo recedit fructu capsulari, triloculari, polyspermo. *Petala* etiam Nitrariae apice hamosa rarissime in aliis occurrunt generibus, vt alia taceam. Nullam ideoque affinitatem habet cum *Osyride*; nec flores sexu distincti sunt, vt *Gmelino* videbantur apud *Ammanum*; neque cum *Elaeagno* quidquam commune habet Nitraria, vt. *Stellerus* putauerat.

SPECIES singularis admodum est, quod Folia sint neque singularia, neque composita, sed semper 3 ad 5 eidem denti s. basi innixa, tamen separata, quod extra Pini genus in Plantis rarissimum.

CLASSES et ORDINES Auctorum nunc facile intrat.

RAII XXX. Arb. Fructu non vmbilicato. 1. *Prunifera.*

HERMANNI XXIV. Arb. fr. non vmbilicato; 2. *Prunifera monopyrena.*

RIVINI. V. Pentapetala regularis; 8. Bacca.

TOVRNEFORTII. XXI. Arbor Rosacea; 2. Pistill. in Baccam.

ROYENI

ROYENI. XVII. Diplosanthera. 3. Stamina erecta.

LINNAEI. XI. Dodecandra. 1. monogyna.

Locus: circa *Iamischam* locum salsum. *Gmelin.*
In *Urunscinensi* deserto ad locum salsum. *Steller.*
Ad Wolgam fluuium. *Schober.*
Prope Astracaniam. *Lerche.*

Solum exposcit arenosum, humo mixtum, duriusculum, apricum, salsum.

Floruit Iulii 8, sub initio Mensis *grossificationis* cum Orobo Sibirico, Crepi Sibirica.

Petala ante explicationem inuoluta, nec incumbentia sunt.

Gemmae imbricato - verrucosae, obscurae.

FIGVRA.

Gmelinus in *Flora Sibirica* 2. *Tab.* 98. vnicam huius reliquit figuram, sed adeo mancam, vt certus sim, quod nullus fructum ab ea dignoscat, cum neque habitum sistat, neque folia distinguat; operi itaque pretium duxi, aliam addere.

Nostra sistit ramulum decumbentem cum ramulis adscendentibus in magnitudine naturali, vbi pleraeque partes in conspectum prodeunt.

POLY-

POLYPI MARINI,

RVSSIS KARAKATIZA, RECENTIORIBVS GRAECIS Ὀκτάπους DICTI DESCRIPTIO.

Auctore

IOSEPHO THEOPHILO KOELREVTER.

Cum animalium marinorum historia, qualem nunc habemus, omnium maxime manca, et multitudo eorum atque diuersitas tanta sit; quanta terrestrium vix esse potest; naturae scrutatores hanc scientiae naturalis partem vlterius et accuratius perficiendi, omnem suam vt impendant operam, necesse est.

Exiguus valde eorum est numerus, quorum internam perspectam habemus structuram, paucorum externa rite est descripta facies, et quamplurimorum huc vsque desideramus notitiam. Multorum quidem exstare descriptiones, fatendum, et suum cuique Auctori tribuere fas est; verum hae ipsae quoad maximam partem tam breues sunt, tamque superficiarie confectae, vt in diversum potius trahant, quam certiores reddant, lectores. Perficiamus igitur ab aliis neglecta, et, quae restant, incognita, omni cura describamus.

Sedula aquatilium disquisitio eo plus delectamenti et vtilitatis nobis afferet, quo maior haec inter et terrestria obtinet dissimilitudo.

Si quis summam formae ac structurae, inter vtrumque animantium genus, diuersitatem in dubium vocare vellet, is certe vel sola proprietatum aquae et aeris consideratione, vel ex ipsa animalium inspectione, huius asserti veritatis conuinceretur.

Natura quidem in procreandis animalibus, si de generalioribus sermo est, easdem semper sequitur leges, certosque sibi constituit fines, verum eos mille modis variaque sub forma exsequi valet, omnibus largiendo vitam, sensum, incrementum, ac generandi facultatem. Hac perfectione fruitur Elephas aeque ac Balaena, eiusdemque Acarus non minus particeps factus est, quam Monoculus. Ast! quanta inter eos tam externarum quam internarum partium diuersitas? Quantum victus, incrementi, propagationis ac vitae termini discrimen, si magna cum paruis comparamus animalia?

Vt inueniamus omnium harum diuersitatum rationem, et structuram corporum potissimum perscrutari, et ad id respicere debemus, quod cuiuslibet structurae necessitatem postulabat. Quo diuersior est vnius structura a structura alterius, eo maior quoque formae et morum erit diuersitas, et, quo minus discrepat, eo maiorem horum deprehendemus similitudinem.

Haec autem, nec in vnica corporis parte, neque in singulari quodam more quaerenda est, sed ex toto potius computanda; quod, si negligimus, fucata similitudine decepti, facillime in errores inducimur, commiscendo corpora plane diuersa, e quibus dein innumeri oriuntur paralogismi, qui ab omni tempore scientiae

scientiae naturalis incrementi summa fuere impedimenta. E contrario scientiae huius peritus, corporum naturalium dispositioni secundum veras ipsorum affinitates concinnandae studens, haud facile hallucinabitur; probe gnarus, seriem hanc concatenatam, saluo rerum ordine naturali, haud dissolui, neque integrum Systema componi posse, priusquam omnia huius seriei membra habentur cognita. Interim certum est, Systema, veris fundatum affinitatibus, siue eiusmodi series, de qua modo dixi, sit imaginaria, siue reuera talis existat, omnibus numeris fore absolutum; id vero sine plenaria omnium corporum cognitione nunquam construi posse, quis non videt? Licet animalia terrestria cum aquaticis comparata, immo et singula inter se collata, magnum nobis exhibeant discrimen, in quibusdam tamen ipsis est conuenientia, eaque eo maior, quo proprior eorum affinitas.

Considerationum, quas modo institui, materiam praebuit species quaedam animalium marinorum, ab Historiae naturalis scriptoribus Polypi nomine insignita, cuius nunc longe vberiorem, quam dederunt nobis Veteres aeque ac Recentiores, externarum partium descriptionem beneuolo lectori tradam, praemissurus antea huius animantium generis, aliorumque quorundam, illis affinitate proximorum, conspectum.

Quae generico nomine Mollusca, vel Mollia, olim vocauit animalia Aristoteles, in specie sunt Polypus, Loligo, Sepia et Lepus marinus. Hisce alia, ego quidem vt arbitror, omni iure annumerari possunt animalia, haud incongrue Zoophyta dicta, sc. Polypus aquarum dulcium, Lernea Linn. Vrtica et Pulmones marini, quibus Caput Medusae, Holothurium, Mentulam marinam adiungere haud longinqua suadet affinitas. Omnia haecce animalia, quod ad formam externam attinet, in eo inter se similia sunt, quod corpus habeant vel oblongum, vel subrotundum, ac perpendiculariter compressum, cuius extremitatis anterioris margini circumponuntur tentacula centralia, in quorum medio os tanquam in centro positum est.

Tentacula ista, quae ab aliis etiam pedes, vel brachia, dicuntur, non solum ad praedam capiendam, eandemque ori admouendam, verum etiam ad natandum et ad ambulandum vtilia esse, iisdemque veluti ancoris inniti, seque contra aestus marinos nauigii modo stabilire (a) animalia, ratione et experientia confirmatum est.

Numerum eorum in diuersis animalibus valde interdum differre, ex sequentibus facile colligitur: Sepia nimirum et Loligo decem, Polypus marinus octo, Lepus marinus Bell. septem, Polypus aquarum dulcium sex, Lernea Linn. quatuor, Vrticae quatuor, vel octo, vel plurima, quorum numerum vero ab Auctoribus indefinitum accepimus; Pulmones marini et Holothuria octo, et fortassis etiam plura, Caput Medusae, quod Stella arborescens Rondeletio dicitur, quinque, per plurimas bifurcationes ramosa habent, ramis octoginta milli-

(a) Arist. de part. Anim.

millium (a) numerum superantibus; Mentulae marinae tentacula indefinita sunt, ipsorum vero acetabulorum numerum quatuor excedere millia, Bellonius testatur.

Iis, quae illustrationis caussa habui dicenda, expositis, transeo ad ipsam Polypi descriptionem: Polypus, ab infimae aetatis Graecis Ο'κτάπυς, Anglis the Pourcontrel, vel Sea-Polype, Gallis Poupe, dictus, ab Loligine et Sepia, quibuscum alias prae ceteris maximam habet similitudinem, primo statim intuitu facillime distingui potest, si ad sequentes attendimus characteres: Primo optimam distinctionis notam prae se ferunt tentacula, siue pedes *, in Polypo octoni, forma inter se similes, eiusdemque fere longitudinis, et ratione abdominis * sat longi, vtpote eodem triplo circiter longiores; in Loligine vero et Sepia decem deprehenduntur pedes, quorum octo, proprie sic dicti, forma quidem inter se similes, eiusdemque fere longitudinis, abdomine vix duplo longiores sunt, reliqui duo autem, a quibusdam improprie promuscides dicti, forma non tantum a ceteris pedibus differunt, verum etiam eosdem longitudine multum superant. Sic quoque cum Polyporum acetabulis comparatum est, quorum duo tantum ordines in singulo pede, ipsaque acetabula vtrorumque ordinum situ inter se alterna et sessilia conspiciuntur *, cum in Loligine et Sepia minus ordinate disposita, numeroque plura, pedunculata, magisque constipata sint.

Tab. XI. *Fig. 1. a.

*Fig. 1. b.

* Fig. 3. a. et b.

Ss 3 Secundo

(a) Transact. Philos. No. LVII.

Secundo Polypus, respectu abdominis facile quoque dignoscitur, quod ouatum et conuexum magis, breuius, tactuque per omnem ipsius ambitum molle est, pinnisque lateralibus destitutum; idem vero oblongum magis et planum, ac prona sua parte, in Loligine quidem, ob substratum cuti gladium cartilagineum, et in Sepia, ob interpositum os, digiti impressioni resistit; praeterquam, quod ipsius margo, vel ex toto, vel ex parte, ala, a producta cute orta, auctus, et quasi pinna, instructus videatur. Caeterum, ad distinguendum Polypum a reliquis huius generis multipedibus, sequens sufficiet nomen specificum:

POLYPUS pedibus octo, similibus, intermediis quatuor crassioribus: acetabulorum alternantium ordine duplici instructis.

Priusquam de MAGNITVDINE horum animalium mentio iniciatur, praemonendum habeo, septem eorundem indiuidua disquirendi occasionem mihi fuisse, quorum quinque in aere leuiter siccata, omnibusque, praeter pulmones, cor, vasaque maiora sanguinea, visceribus erant spoliata; quem in finem sectione longitudinali alueum iis incidunt piscatores, vt, a putredine defensa, ieiunii tempore, gratum praebeant alimentum; reliqua duo vero integra in spiritu vini fuere asseruata.

Ad reddendam illis pristinam, quam explicatione amiserant, mollitiem, flexilitatem et extensionem, ea per octiduum aqua frigida detinui submersa, id quod etiam facile successit; quod vero longitudinem et crassitiem naturalem in totum iterum recuperauerint, contendere non ausim; id enim eundem exsiccationis gradum, et aequabilem, tam totius, quam partium, contractionem ſupponit, quae varia eſſe potuit; exiguum tamen, ſi quod erat, interfuiſſe diſcrimen, ex ſolo adſpectu facile erat indicatu.

Quod ad dimenſionem, et comparationem, inde inſtitutam, attinet, cautus fui, ne vnum v. g. pedem plus, quam alterum, extenderem, ita, vt proportioni, quam conſtituam, fides haberi poſſit; eorum vero, in ſpiritu vini aſſeruatorum, quae aquae haud immiſi, longitudo, et craſſities, paulo maior, quam a me quidem indicabitur, cenſenda erit, quoniam abeſſe haud poteſt, quin omnes fibrae, in iſto liquore contractae, partes, quae iis componuntur, breuiores ſiſtant. Caeterum magnitudinis diſcrimen, et aetas, ſeptem horum indiuiduorum ex alia quadam circumſtantia, de qua poſtea loquar, aeſtimari poterunt.

Longitudo pedis longioris Polypi, inter iſtos ſeptenos maximi, poſt ſufficientem in aqua emollitionem, erat (a) 1′,6″, et a baſi pedum ad extremum vsque corpus 6″, 8‴. Longitudo pedis longioris Polypi * omnium minimi, ex ſpiritu vini exemti, 5″,3‴ aequabat, et a baſi pedum ad extremum vsque corporis 2″,5‴. Reliqui quinque Polypi, partim mediae, inter hos, magnitudinis, partim maximo iſto haud multo erant inferiores. Polypos ſaepe inueniri, quorum pedes bina ſuperant cubita, Ariſtoteles ſcribit, et, in exterioribus Carteiae locis, talenti pondere dari, Strabo refert, quod fidem haud ſuperare videtur.

Tab. XI. * Fig. 1. et 2.

SVB-

(a) ′ ped. ″ poll. ‴ lin. ſignificat.

SVBSTANTIA corporis potiſſimum muſculoſa, hinc mollis tactu, durior tamen, quam aliorum animantium caro. Cutis, carni ſuperinducta, omnino laeuis, nec pilis, neque ſquamis ornata. Nullum quoque in toto corpore verum os deliteſcit, hinc Ariſtoteles, naturam haec animalia, ob eandem rationem Mollusca ab eo dicta, inter carnem et neruum, mediam obtinere, dixit. Caput *, et oris bulbus (ſi hunc ita vocare licet) ratione reliqui corporis, digiti impreſſioni omnium maxime reſiſtunt, illud, ob fornicem cranii cartilagineum, hic vero, ob tunicas cartilagineas et corneas laminas, quibus componitur. Pedes tantam quidem, ac caput et oris bulbus, duritiem non habent, longe tamen firmioris ſunt ſubſtantiae, quam collum et abdomen.

Tab. XI. *Fig. 1. c.

COLOR in prona corporis parte, ſc. in dorſo, capite et pedum facie, acetabulis aduerſa, ex purpureo nigricans, ſaturatus, abdominis latera verſus dilutus, iuxta acetabula, ſeu ad latera pedum profundior, in tota vero ſupina parte pallidiſſimus. Si corporis pronum accuratius adſpicitur, margines apparent plurimi, ſaturatiores, plana, vt plurimum oualia, vel oblonga, pallidiora coercentes, in medio corpore, vbi ſaturatior eſt color, contigui, ad latera vero, medio pallidiora, diſtincti, quibus cutis quaſi ſquamata redditur. Praeter illos, in ambitu ſaepe cernuntur maculae ſubrotundae, obſcuriores, in fundo pallidiori diſpoſitae; puncta deſuper innumera, nigricantia, cuti vndique adſperſa videntur. In iunioribus modo deſcriptus color pallidior eſt, quam in aetate prouectioribus; nec illorum cutis tam relaxata rugoſaque, quam horum, apparet.

Poſtquam

Postquam de eo, quod generatim Polypum concernit, locuti sumus, propius nunc ad eum accedimus, totum ipsius corpus in tres potissimum partes dispertiendo: sc. in PEDES, CAPVT, cui adiungimus collum, et ABDOMEN, seu ventrem.

In PEDIBVS notamus ipsorum *situm*, *formam*, Tab. XII.
proportionem, *magnitudinem*, *acetabula* *, denique *Fig. 3. a. et b.
membranam **, vnum cum altero iuxta basin connectentem. **Fig. 3. c.

Quoniam in sequentibus huius vel illius pedis sigillatim mentio fieri debet, praeueniendae confusionis causa, certi eligendi sunt characteres, quibus vnus ab altero distinguitur.

Ponamus igitur ante nos Polypum * pronum, *Fig. 1.
ita, vt extremitas ipsius ventris nobis sit proxima, pedes vero antrorsum porrecti, erunt horum quatuor tenuiores, dextri et sinistri lateris, quorum duo * *Fig. 1. d.
frontem, duo ** fistulam, ante alueum positam, re- 2. a. b. i
spiciunt; et quatuor crassiores, illis interpositi, quorum 3. d. a.
**Fig. 1. f.
duo * in dextro, duo ** in sinistro latere collocan- g. 2. c. d.
tur, pedibusque tenuioribus, vel superioribus, vel in- 3. f. g.
*Fig. 1. h. i.
ferioribus, contigui sunt. 2. e. f. 3. h. i.

Incipiendo itaque a superioribus, vnum post al- **Fig. 1. l.
terum, ex situ et magnitudine, designabimus, modo m. 2 g h.
sequenti: I) * Pes tenuior, frontem respiciens; dex- 3. l. m.
*Fig. 1.. e.
ter. II) ** Pes tenuior, frontem respiciens, sinister. 2. b. 3. d.
III) * Pes crassior, dexter, pedi tenuiori, frontem **Fig. 1. d.
respicienti, dextro, contiguus. IV) ** Pes crassior, 2. a. 3. e.
*Fig. 1. b.

sinister, 2. f. 3. b.
**Fig. 1. l.
2. h. 3. l.

*Fig. 1. i. 2. e. 3. i. finifter, pedi tenuiori, frontem refpicienti, finiftro, contiguus. V) * Pes craffior, dexter, pedi tenuiori, fiftulam refpicienti, dextro, contiguus. VI) ** Pes craffior, finifter, pedi tenuiori, fiftulam refpicienti, finiftro, contiguus. VII) * Pes tenuior, fiftulam refpiciens, dexter. VIII) ** Pes tenuior, fiftulam refpiciens finifter.

**Fig. 1. m. 2. g. 3. m.

*Fig. 1. g. 2. c. 3. f.

**Fig. 1. f. 2. d. 3. g.

Licet in praecedentibus iam monitum fuerit, Molluſcorum pedes anteriori corporis extremitati, feu capiti potius, fi quod habent, infiftere, alia tamen, refpectu ad fitum habito, nobis fefe in Polypo circumftantia offert, heic loci non praetermittenda: videmus nempe, pedes, fiue fupinus, fiue pronus iaceat Polypus, in aequali a fe inuicem diftantia haud effe difpofitos, quin fuperiores, qui * frontem, ab inferioribus, qui ** fiftulam refpiciunt, magis effe remotos, quam intermedios * vnius lateris ab iis ** alterius, ftatim poffit animaduerti. Vel, concipiamus animo, Polypi proni pedes, antrorfum porrectos, eosque facie interna aequabiliter a fe inuicem diftantes, premi vtrinque horizontaliter, et orietur modo defcriptus fitus; pari modo, fi quis volam vtriusque manus componeret, digitus femper determinati generis vnius manus in eundem alterius verget. Eodem plane modo cum Polypis comparatum eft: pes fc. tenuior, frontem refpiciens, dexter *, in pedem tenuiorem, frontem refpicientem, finiftrum *, inclinat, et fic porro. Situs vero huius neceffitas ex circumftantia quadam, de qua paulo inferius loquar, fatis elucefcet. Praeterea quoque pedes

*Fig. 1. l. d. 2. a. b.

**Fig. 1. g. f. 2. c. d.

*Fig. 1. k. i. 2. e. f.

**Fig. 1. l. m. 2. g. h.

*Fig. 1. e.

*Fig. 1. d.

pedes duo tenuiores, fistulam respicientes, prae aliis extrorsum et deorsum magis flexi, et arcuati sunt.

Forma omnes teretes sunt, vltra dimidiam fere ipsorum longitudinis partem, abhinc vero, ad extremitates vsque, latera magis compressa ostendunt. pacies eorundem interna, ad basin, lateraliter compressa est, duo quasi trianguli latera exhibens, quorum angulo, qui in pedis medium cadit, infima acetabula insistunt. In eodem loco, ad basin scilicet, paulo angustiores * sunt pedes, quam in aliquali ab ea distantia, vbi quinta totius ipsorum longitudinis parte absoluta, maximam *, quae naturaliter ipsis competit, habent crassitiem, abhinc vero, sensim sensimque iterum gracilescentes, in tenuissimos tandem desinunt apices. Ipsorum longitudo in vno eodemque subiecto, variis videtur esse mutationibus obnoxia: facillime enim potest accidere, vt casu quodam apicibus mutilentur, ex quo incrementi non tantum, verum longitudinis etiam, inaequalitas oriatur, necesse est. Pedes interim quatuor crassiores, horumque inprimis inferiores, qui pedibus, fistulam respicientibus, contigui sunt, reliquis, caeteris paribus, vt plurimum longiores esse, e septem indiuiduis coniicere potui; omni tamen exceptione haud carere hanc obseruationem, e duorum, in spiritu vini conseruatorum, mensura, paulo inferius addenda, facile erit iudicatu. Crassitiem pedum in vno eodemque subiecto differre, eandemque intermediis quatuor semper esse maiorem, supra iam expositum est. Diuersitatis huius ratio eadem forte erit, ob quam medii animan-

*Fig. 3. g.

*Fig. 3. ...

tium digiti exterioribus craffiores et longiores facti funt.

*Fig. 3. a. Tandem ordo nos ducit ad Acetabula *, feu orbiculares illas lacunulas, quae per totam internam pedum faciem distribuuntur; hae vafcula quafi referunt conica, fubftantiae duriufculae, vix tamen cartilagineae, fundo * eleuato et conuexo, lateribus ** vero orbicularibus; ftriatis, fundoque mollioribus, praedita, quae, a fundo vix elenata, ftatim introrfum, in ipfius fundi conuexitatem inclinant, finum relinquentia mediocriter tectum, mox vero oblique furfum et extrorfum tendunt, et in marginem tenuem * abeunt, ad cuius fummitatem cutis pedum communis terminatur, eamque nullatenus tranfcendit; vnde interna acetabulorum fuperficies, quae tenui tantum membrana obducitur, pallida valde apparet, cum exterior ipforum ambitus colore purpurafcente, cuti proprio, fplendeat. Caeterum haecce acetabula, quoad maximam partem, fupra pedum fuperficiem eleuata funt.

• Fig. 3. b.

** Fig. 3. a.

*Fig. 3. g.

Quoad formam, omnia inter fe conueniunt, fitu vero et magnitudine differunt; a bafi pedum nempe quatuor * vel quinque, in linea recta fe inuicem fubfequuntur, cetera omnia vero alternatim ** in duplici ferie difpofita funt; et, quod a pedum bafi, ad quintam * fere horum longitudinis partem, fubito increfcant, ab hinc iterum, ad extrema vsque, fenfim fenfimque decrefcant, de magnitudine notandum.

* Fig. 3. n.

** Fig. 3. a et b.

* Fig. 3. u.

In eadem ratione fefe habet eorundem diftantia, quam inter fe inuicem feruant. In aequali a bafi diftan-

tia

tia pedes, frontem respicientes, plura sustinent acetabula, pro ratione minora *, magisque congesta, quam pedes crassiores, in quibus, sub iisdem conditionibus, pauciora, maiora *, magisque a se inuicem remota, solent deprehendi.

* Fig. 2. d. e.
* Fig. 3. h. i. l. m.

Si pedes, fistulam respicientes, praeter acetabulorum magnitudinem et proximitatem, in quibus, cum pedibus frontem respicientibus conueniunt, numero a crassioribus discrepent, exigua erit differentia, cum vno tantum vel altero acetabulo ab illis interdum superentur. Interim de numero acetabulorum, cuilibet pedi a natura constituto, nondum aliquid certi mihi constat; variabilem esse, aeque ac pedum longitudinem, ob easdem, quas supra dedi, rationes, suspicor.

Quod de conuergentia pedum vnius generis antea dictum est, id de ipsorum acetabulis quoque valet, quae sibi mutuo semper respondent; vnde necessitas situs pedum per se patet.

Vt momenta quaedam, quae ad Polypi historiam pertinent, et quae, in hunc vsque diem, nondum, quod sciam, a naturae scrutatoribus extra omnem dubitationis aleam posita sunt, clariori exponam luci, praemittenda erit tabula, ad instituendam, inter duos in spiritu vini conseruatos Polypos, longitudinis pedum numerique acetabulorum comparationem concinnata:

* Fig. 3.
** Fig. 1. et 2.

	Polypus maior. *	Polypus minor. **
Pes ten. front. resp. dexter.	10″. integer. 178 acet.	4″, 3‴ integer. 96 acet.
Pes ten. front. respiciens, finister.	9″, 9‴. integer. 168 acet.	5″, 3‴. integer. 120 acet.
Pes craff. dexter, ped. ten front. resp. finistr. cont.	1′, 1″, 3‴ integer. 201 acet.	2″, 9‴. mutilatus cum noua portione 54 acet.
Pes craff. fin. ped. ten. front. resp. dextro cont.	1′, 9‴. integer. 191 acet	5″ integer, 107 acet.
Pes craff. dexter. ped ten. fist. resp. dextro cont.	11″. integer. 142 acet.	3″, 8‴. integer. 72 acet.
Pes craff. fin. ped. ten fist. resp. finistro cont.	1′, 1″, 9‴ integer. 198 acet.	6″. integer. 107 acet.
Pes ten. fist. respiciens, dexter.	11″, 6‴. integer. 191 acet.	2″, 3‴. truncat. ad 2″ latitudinem. 28 acet.
Pes ten. fist. respiciens, finister.	11″, 9‴. integer. 210 acet.	5″, 3‴. integer. 95 acet.
Summa	1479.	679.

Licet

Licet acetabula organicae valde ſint ſtructurae, cum corporis incremento tamen augeri numero, pedesque, Polypis mutilatos, redintegrari, renatamque partem nouis inſtrui acetabulis, quis crediziſſet? Vtrumque tamen demonſtrant duo haec, inter ſe collata indiuidua. De illo ne cogitarunt quidem Phyſici, huius ſolummodo mentionem fecerunt *Ariſtoteles* et *Plinius* (*a*), num vero propria id affirmauerint experientia, an relatum ipſis fuerit ab aliis, incertum eſt?

Prius ſufficienter probat acetabulorum numerus, in Polypo maiori longe maior, in minore minor. Differentia haec accidentalis eſſe nequit, cum in caeteris, qui hos magnitudine ſuperabant, eo maiorem ſemper acetabulorum numerum deprehenderim, quo quis maior altero erat. Aſt, ne quis extremos pedum apices in minimo Polypo vel mutilatos, vel extima acetabula tam exigua fuiſſe, ſuſpicetur, vt oculorum aciem effugerint, monendum, quod et huius pedes non minus ac maioris integros, et acetabula, ad extremum vsque, aeque ac illius, diſtincte viderim.

Quod ad poſterius attinet, Polypi minimi pes* craſſior, dexter, pedi tenuiori, frontem reſpicienti, dextro contiguus, nobis ſit exemplo, quippe qui truncatus olim, temporis ſucceſſu nouam protruſit portionem *, 9''' longam, quae acetabulis viginti ſeptem fuit inſtructa, et a baſi, 1''' lata, craſſitie paulatim decreſcens, in tenuem valde apicem abiit.

* Fig. 1. *b.* 2. *f.*

* Fig. 1. *a.* 2. *i.*

Eundem

(*a*) Plin. Hiſt. nat. Libr. IX. Cap. XXIX. §. XLVI. p. 319. edit. Pariſ. 4to An. MDC. LXXXV.

Eundem casum in alio, inter duos, modo memoratos, mediae magnitudinis Polypo deprehendi, cuius pedi tenuiori, fistulam respicienti, sinistro, 6'', 6''' longo, ac truncato accreuit noua portio, 1'' longa, ad ipsius basin, quae summitatem truncatam crassiorem tangit, 3''', ad alterum extremum, denuo mutilatum, $1\frac{1}{2}'''$ lata. Summa huius pedis acetabulorum erat 69, quorum 31 in portione renata numeraui. Noua haec portio, trunco crassiori, olim mutilato, insistens, tenuior est, ipsiusque acetabula minora magisque congesta sunt, quam reliqua, in trunco pedis conspicienda.

Pedibus itaque sub incremento sese secundum omnes dimensiones extendendi, non solum, datum est, quod cum toto corpore commune habent, verum etiam praeter hanc alia, eaque propria, gaudent facultate, qua ipsorum extremitates progerminant, nouaque continuo protrudunt acetabula; siue integri fuerint pedes, siue truncati. Illorum vero prouentum nec ad eorum basin, neque in medio succedere, sed ad apices tantum, exinde clarum est, quoniam parua nunquam magnis mixta visa sunt; quod alias, si contrarium obtineret, proportionem, quam inter se semper immutatam et constanter seruant, turbaret necessario.

Duo tantum in hunc vsque diem mirabilis istius facultatis exempla, quae maximam cum praesenti habent analogiam, cognita fuere eruditis, quorum vnum cancri, stellae marinae alterum, suppeditant; illorum enim chelas, pedes, antennas et oris tentacula, vel ex parte tantum, vel ex toto destructa, redintegrari iterum,

rum, vel denuo renasci, Ill. *de Reaumur*, cuius e vita discessum, ob summa eius in Physicam et Historiam naturalem merita, omnes lugent eruditi, satis superque demonstrauit (*a*); horum vero radios, quouis modo mutilatos, reparari, obseruarunt Cel. *Jussieu*, *Guettard*, *Gerard de Villars* (*b*), *Needham* (*c*), aliique. Nec mirum id omne nobis videbitur, si in mentem reuocare velimus phaenomena, in aquarum dulcium Polypis, vermibus varii generis aquaticis, Lumbricis terrestribus, Hirudine-Limace, Millepedibus aquaticis, Vrticis marinis etc. obseruata, quibus omnibus, in duas pluresue partes dissectis, singulae partes in totidem transformantur animalia, primo, quod antea coniuncta efformabant, similia; quae sane eo maiore digna sunt admiratione, quo minus angustis singularis ista propagatio circumscripta est limitibus; experimento tamen, in cancrorum cauda instituto, non respondisse euentum, Ill. *de Reaumur* (*d*) testatur; neque feliciori cum successu in Polypo nostro posse institui, facile crediderim. Sic quo-

(*a*) In Comm. Acad. Scien. Paris. An. 1712. Hist. 45. Mem. 295. edit. Amst.

(*b*) Mem pour servir à l'histoire des Inf. par Mr. de Reaumur, Tom. VI. An. MDCCXLII. 4to Preface pag. 61. 62. et 63.

(*c*) In tractatu, cui titulus est: New Microscopical Discoveries, Lond. 1745. 8vo pag. 5. scribit: „I have by me the Arm of a „Star-fisch repairing its Loss, preserv'd in Spirits, where the „protruded Extremity is distinctly visible, as not having arri„ved to the Diameter of the rest of the Arm.„

(*d*) In Comm. Acad. Scien. Paris. Hist. 45. Mem. 295. edit. Amst. pag. 311.

quoque, ſtellam marinam, in duas pluresue partes transuerſim diuiſam, ſucceſſu temporis in totidem abire animalia integra atque perfecta, valde dubito, cum eius radios tantum, ad corpus reſectos, renaſci, *Gerardum de Villars* (*a*) docuerit experientia; Loliginem tamen atque ſepiam eadem, qua Polypus noſter, gaudere facultate, nullus dubito.

* Fig. 3. c. *Membranae* *, quibus pedum inferiora coniunguntur, validae ſatis ac craſſae, ortum ſuum trahunt ex cutis prolongatione et duplicatura, fibrarum muſculoſarum ſtratum continente. Earum vna, quae inter duos
* Fig. 3. q. pedes, frontem reſpicientes *, expanditur, omnium minimam habet ſuperficiem, inſequentes latiori et al-
* Fig. 3. r. tius excurrente * gaudent, infima ** autem, qua pe-
** Fig. 3. s. des, fiſtulam reſpicientes, connectuntur, ab imo pedum aſſurgens, priores extenſione ſua ſi non ſuperat, certe iisdem aequalis eſt. Omnes vero, poſtquam palmatae eſſe deſierunt, vlteriori ipſorum decurſu pedum latera quaſi alata reddunt.

* Fig. 1. c. 2. l. Deſcriptione pedum abſoluta, tranſeo ad CAPVT * et, quae ad id referri poſſunt, partes. Notamus
* Fig. 3. t. ante omnia oris * aperturam, in pedum centro, ellipticam, exiguam, et in reſpectu ad oculos, horizontaliter diſpoſitos, perpendicularem.

Eundem ſitum ſequutur dentes bini, nigricantes,
* Ibid. quorum extremitates *, prominentes, aduncum Pſittaci
* Ibid. roſtrum quodammodo forma referunt. Oris labia *, iſtam

(*a*) Mem. pour ſervir à l'hiſtoire des Inſ. Tom. VI. Preface pag. 63.

istam aperturam coarctantia, tenuia, plicata, in varios lobos diuisa, et ad oras fimbriis linearibus ornata sunt. Ipsum caput, imae pedum basi, coarctatae, proxime iunctum, mole quidem paruum est, ad verticem leuiter impressum, facie inferiore planiusculum. Oculi * duo, ad latera capitis positi, subrotundi, pro illius paruitate grandes. Longitudo capitis eadem circiter est, quae inter huius frontem, et summum membranae pedum, eam respicientium, marginem mensuratur. Vidi etiam in capite omnium, quos disquisiui, Polyporum, vnico tantum, et minimo quidem, excepto, qui iis caruit, appendiculas tres cutales, angustas, tanquam totidem barbulas, quarum vna ante, altera supra oculum, cantho tamen ipsius postico proprior, quam antico, tertia denique pone eum, erat disposita. Quae supra oculum, caeteris duabus duplo maior erat; absolutam vero omnium longitudinem certo determinare difficile est, quoniam vltra modum se extendi elongarique facile sinunt. * Fig. 1. o. p.

Partem capitis contractiorem * posticam pro collo habere possunt ii, quibus distinctio haec placuerit; id ipsum autem tam breue et ab ipso capite tam parum est distinctum, vt nomen illud vix mereatur. *Fig. 1. q.

Tandem ad ABDOMEN * deuenio, quod ouatum, et perpendiculariter vtrinque compressum est, diametro horizontali verticalem superante, ita tamen, vt superior aeque ac inferior abdominis facies subconuexa permaneat, adeoque latera eius * maximam inde habere conuexitatem, per se patet. *Fig. 1. b. 2. m. *Fig 2. m.

In huius superficie superiore, seu in dorso, non nisi appendiculae cutales sunt considerandae, numero quaternae, quarum prima ad anteriora et medium dorsi conspicitur; in aliquali, ab hac, distantia, binae aliae, ex aduerso sibi oppositae, et in medio fere dorso constitutae, quarta ad posteriora et medium posita. Omnes, a basi latiore in apicem assurgentes, planum formant subtriangulare, lateribus corporis obuersum, eorumque longitudo in maximo, quod vidi, subiecto, duarum erat linearum, nec in eodem multo longiores erant barbulae, circa oculos, excepta media, 5 – 6 lineas longa. In vniuersum itaque decem sunt appendiculae, ab elongata cute ortae, tres sc. in vicinia singuli oculi, et in dorso quatuor, easdemque in omnibus obseruaui Polypis, si duos istos, in spiritu vini seruatos excipiam, quorum maior iis tantum, quae in dorso sunt, minor omnibus plane caruit.

In inferiore abdominis superficie varia occurrunt notanda, inter quae omni attentione digna est ipsius *alui* apertura *, tam larga et patens, vt per eam pulmones facile possint conspici; Saccum nempe musculosum esse abdomen, in quo praeter pulmones, viscera, propriis inuoluta membranis, recondantur, anatome huius animalis docebit vberius.

* Fig. 2. *n.* et *p.*

In summo ventre, supra alueum, *Fistula* * caua exporrigitur antrorsum super capitis faciem inferiorem, quam modo in dextram, modo in sinistram transferre partem, hacque mare transmittere dicuntur Polypi (*a*). Infundibulum ista refert conicum, perpendiculariter compressum et perforatum, cuius lumen supe-

* Fig. 2. *q.*

(*a*) Ex Arist. Plinius. Hist. nat. Libr. IX Cap. XXIX. §. XLVI. p. 318. edit. Paris. in 4to An. MDCLXXXV.

ſuperius * exiguum, inferius * amplum eſt. Summitas ipſius, parum incuruata, extrorſum flectitur, et a capite aliquo diſtat ſpatio. Eadem, ad baſin, vtrinque ſibi habet connexum velum * quoddam conniuens, quod, ſi expanditur, ſinum offert amplum, lumine fiſtulae maiori haud multo inferiorem, fundoque gaudet obtuſo et imperforato. * Fig. 2. o. * Fig. 2. r. * Fig. 2. s. et t.

Fiſtula aeque ac vela e tunicis compoſita ſunt robuſtis, ac tenacibus, quae muſculoſam, qua mouentur, includunt; immo cartilaginea fere, et elaſtica quorundam mihi viſa fuit fiſtula. Si quis ſibi fingat margines fiſtulae, et velorum, cum ſummo aluei margine connatos, fiſtulaeque ſummitatem plane conſtrictam, clauſum omnino habebit abdominis alueum; nec, viuum animal, ſi neceſſitas ita poſtulet, eum ſubinde plus minusue claudere, vero diſſimile mihi videtur.

In ſpatio, inter imum fiſtulae, velorum, et ſummum aluei marginem, relicto, quod in minimo Polypo $5\frac{1}{2}'''$ aequabat, obſeruantur lacerti * duo muſculoſi, ad latera poſiti, qui ab angulo, fiſtulae veloque communi, lato, et, quoad figuram, fere rhomboideo principio procedunt, tunicae muſculoſae * ope inter ſe iuncti, cuius in medio duo apparent oſtia, quorum id *, quod ſuperius, et proxime ſupra alterum ſitum eſt, filum ferreum tenue ad duarum linearum profunditatem admiſit vsque; in alterum * vero, quod inferius, et largum magis eſt, ad 3 vsque lineas idem immittere potui. Decurrunt canales, quibus haec oſtia reſpondent, intra muſculoſam tunicam, ac inferioris * Fig. 2. u. u. * Fig. 2. w. * Fig. 2. x. * Fig. 2. y.

rioris extremitas illam superioris quasi lambere videtur; tunicae vero musculosae medium, statim, vbi ad summum, mediumque aluei marginem * peruenit, hunc versus eleuatur, eique adnatum, septum constituit $3\frac{1}{2}'''$ longum.

*Fig. 2. z.

Quae de septo ostiorumque situ modo dixi, de minimo tantum Polypo dicta velim; longe enim aliter res sese habebat in Polypo maiori, itidem in spiritu vini seruato, in quo, neque ostia circa tunicam musculosam, neque septum offendi, licet digitum vnum alterumve, ad duos vsque pollices, sine vllo impedimento, in ipsum alueum immiserim; duo tamen eiusmodi orificia, in ligamenti cuiusdam lati et musculosi margine, quod lacerti musculosi sinistri pars erat, distincta, sibique proxima vidi; ac, praeter ista, alia duo, semilunaria, ad superiorem arcum cartilaginea, quae forsan abrupti illorum erant fines; saltem interna, ostiisque obuersa abdominis facies canalium reliquias prae se ferebat, quorum vnum esse intestinum rectum, alterum folliculi, liquorem nigricantem continentis, ductum excretorium, ex anatome comperi.

Superest, vt mentionem faciam orificii, quod in Polypo maximo, et quidem in abdominis parte postica, sinistra et laterali, deprehendi: Erat nempe illud, in superficie ipsius externa, subrotundum, patulum, vnius lineae diametri, stilumque immissum, ad quatuor vsque lineas, retrorsum admittebat. Separata cultello cute, sub qua latuit, in oculos incidit canalis, substantiae duriusculae et albicantis, quo dissecto, apparuit, ipsius cauitatem angustari exitum versus, ac, in in vnius lineae ab exitu distantia, eleuari substantiam, et sinum post se relinquendo, valuulam ibi formare spuriam, qua contentis mora iniicitur; stilus enim, in ostium immissus, eam transiit quidem, in canale vero, versus exitum ductus, in eandem facile impegit. Caeterum laeuis erat iste canalis, nilque, praeter plantae cuiusdam marinae fragmenta minora continebat, et, postquam ad quatuor vsque lineas sub cute decurrit, abdominis substantiam perforabat, verum, eodem in loco, abruptus, potioris sui tractus vestigia tantum reliquit, in interna abdominis superficie conspicienda.

ZOOPHY-

ZOOPHYTI MARINI, E CORALLIORVM GENERE, HISTORIA.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Praefatio.

Perlustranti mihi ante aliquot menses varia, in mari albo genita, Naturae corpora, quae Archangelopoli huc Petropolin missa accepit Amicus, cuius erga me beneuolentia factum est, vt eorum, quae prae reliquis attentione digna videbantur, tam descriptionem, quam accuratam delineationem tradere nunc queam, inter alia nonnulla obuenerunt Zoophyta, quorum partim desideranda est vberior, quam, ab aliis traditam, legimus, descriptio, partim quae in hunc vsque diem in fundo maris delituere incognita. Quod in praesenti dissertatione exponam Zoophytum, aliis, in posterum tradendis, ideo anteponendum esse iudicaui, quod ad explorandam non solum eiusmodi corporum structuram et naturam, quam inter animalem et vegetabilem quasi mediam esse pluribus argumentis probare alio tempore constitui, verum etiam ad illustrandam Corallii rubri, cui proxima similitudine accedit, historiam plurimum conferre posse, mihi videretur. Quae autem ad vtrius-

vtriusque inter se comparationem, et speciatim ad Corallii rubri illustrationem, proprie spectant, sub annotationum forma textui subnectam, ne, si huic immisceantur, oboriatur confusio.

* * * * * *
* * *

Synonyma.

CORALLIVM spongiosum, leue; ramis tuberosis, nutantibus; tuberculis aggregatis. Tab. XIII. Fig. 1.

Arbuscula marina coralloides. *Clus. exot. libr.* 6. *c.* 1.

Corallina II. siue Corallinae facie grumoso cortice. *Casp. Baub. et Io. Baub. Hist.* 3. *p.* 805. *Cap. XLII.*

Planta marina coralloides. *Worm. mus.* 230.

Plante appellée par les Mariniers *Main de Larron. Marsilli Hist phys. de la mer. Part.* IV. p. 85. Pl. XV. n. 74, 75. Pl. XXXVIII. Fig. 177. n. 1, 2, 3, et Pl. XXXIX, Fig. 178. n. 1, 2, 3, 4, 5. pag 163. *Pontoppid. Nat. Hist von Norw. Copenhag.* 1753. 1. Th. pag. 273. I. Tab. No. 2. Fig. No. 1; et pag. 274. Tab. No. 12. Fig. No. 4.

Lithoxylon Noruegicum. *Linn. Mus. Tess.* p. 120. *Tab.* X.

Alcyonium stipite arborescente, ramis obtusis. *Eiusd. Syst. Nat. edit. dec.* p. 803. no. 1. (*a*).

Descriptio.

*Tab XIII Fig. 1. a. a. * Fig. 1. b. ** Fig. 1. c. c. c. *Caulis* a postica facie conuexus, ab antica * planiusculus, inferius * autem vtrinque leuiter compressus, nodos, seu *tubera* ** potius, passim protrudit variae magnitudinis, subrotunda, verrucosa, ad posticam faciem numerosiora, ad anticam pauciora.

Haec constantem in situ ordinem haud seruant, vtpote modo opposita sibi inuicem, vel secundum caulis longitudinem vel latitudinem, modo alterna, rarius autem confluentia.

*Fig. 1. d. *Fig. 1. e. **Fig. 1. f. Praeter haec tubera solitariae * etiam vel binae *, interdum et ternae **, pauco quidem numero, verrucae, vel *tubercula* (*b*), occurrunt.

Tota denique caulis superficies *poris* innumeris *Fig. 1. g. est pertusa, in planiore caulis facie * euidentioribus, in conuexa obscurioribus, quorum singuli, si curatius *Tab XIII Fig 9. b. XIV Fig. 1 et XV. Fig. 1. a. a. adspiciuntur, papillae * (*c*) minimae centro obseruantur

(*a*) Tantum distat ab Alcyonio, quantum v. g. Agaricus a Lycoperdo, vtpote forma, substantia atque structura diuersissimum.

(*b*) Haec *Tubules* Marsillio, *tubercoli* vel *prominenze* Vital. Donato dicuntur.

(*c*) *Glandules* Marsil. l. c. pag. 112. „L'entiere superficie de „l'écorce paroit toute grainée en forme de chagrin, par l'amas „des glandules. (Vid. Tab. XXV. Fig. 123. F. F.)

tur insculpti. Hae in antica caulis facie, iisque in locis praesertim, in quibus poros euidentiores * videre licet, vix sensibiles et quasi obliteratae, longiorique interuallo positae sunt, cum e contrario in postica caulis facie, et, tam circa tubercula *, quam super haec ipsa *, inprimis facile in oculos cadant. Omnium autem euidentissimae, proximeque sibi adiacentes, in ramis caulinis, de quibus mox dicam, obseruantur. *Tab. XIII. Fig. 1. g. *Fig. 1. i. *Tab. XIII. Fig. 1. l. Fig. 2. m. XIV. Fig. 1. etc.

Rami * vagi vtplurimum e caulis lateribus, quo ipso parum graciliores sunt, rarius ex antica, vel postica eius facie orti, erecti, tubera non solum, prout caulis, et quidem postica facie potissimum, solitariaque tubercula haud pauca ferunt, sed in summitates etiam tuberosas, verrucosas, ac nutantes * desinunt. *Tab. XIII. Fig. 1. n. n. n. n. *Tab. XIII. Fig. 1. o. o. o.

Rugae * longitudinales, irregulares, quas in ramis copiosiores longe ac profundiores quam in caule videmus, sub Zoophyti exsiccatione demum ortae esse, illorumque prae hoc maiorem succi abundantiam indicare videntur, cuius post euaporationem fieri aliter non potuit, quin mollior ramorum substantia corrugaretur. *Tab. XIII. Fig. 1. p. p.

Papillae innumerae, in medio perforatae, totam, pariter vt in caule, ramorum superficiem occupant, et distinctae melius ac conterminatae, quam in isto, sunt, quamuis subrotundam vel hemisphaericam potius ipsarum figuram, ob distorsionem a contrahente sese substantia passam, cum oblonga * haud raro commutauerint. *Tab. XV. Fig. 1.

Tubera ramorum, si debitam acquisiuere magnitudinem, partialium quasi ramorum * sub forma apparere, testantur ipsorum aliquot, gracili basi ramis insistentia.

*Tab. XIII. Fig. 1. g. *Tab. XIII. Fig 1. d. e. f. **Fig. 1. c. c. r. etc. *** Tab. XIII. Fig. 2. m. etc. XIV. Fig. 1. etc. **** Tab. XIII. Fig. 1. s. s. Fig. 2. t etc. Tab. XIV. Fig. 1. α *ib. et XIV. Fig. 1. β. ** Tab. XIII. G. Tab. XIV. Fig. 9. *** Tab. XIII E. F. Tab. XIV. Fig. 6. 8. **** Tab. XIII. C. XIV. Fig. 4 *Tab. XIII H. et XIV. Fig 7. ** Tab. XIII Fig. 2. et D. Tab. XIV. Fig. 1 et Fig. 5.

Tubercula, siue solitaria *, siue in tuber **, quod inter se formant, aggregata, papillata *** sunt in ambitu (*d*), inque medietate labiis **** octo (*e*), totidem oris aperturas * angustas relinquentibus, instructa.

Eadem, licet magnitudine haud paria sibi sint, insigniter tamen inter se non differunt, si pauca excipias, notabili planitie atque paruitate ** ab aliis facile distinguenda.

Multo magis diuersam vidi labiorum formam atque situm; modo enim repanda ***, infundibulum **** inter se efformantia, patentia *, eaque rariora, modo constricta introrsumque flexa **, quorum pleraque sunt, immo, licet minori numero, adeo abscondita, distorta atque retracta, vt os vel deforme sit, vel simpli-

(*d*) In Corallii rubri tuberculorum ambitu papillas pari modo esse dispositas, patet euidenter ex iconibus Marsil. Tab. XXV. Fig. 113. no. 3. 4. 5. et Fig. 115.

(*e*) Donati Saggio Della Stor. Nat. Marin. Dell' Adriat. Venez. MDCCL. pag. 49. „In più luoghi inoltre della stessa (corticis nempe) s' osservano piccioli tubercoli o prominenze che si danno a divedere all' occhio nudo (Fig. A. f.). Questi tubercoli alle loro basi sono larghetti, e rotondi (Fig. I. n. n.) si ristringono alquanto alla parte superiore (o) e terminano in un labbro grossetto diviso regolarmente in otto parti (I. S S.) (G S. S.), più o meno eguali, dalle quali viene ad esser formata la bocca (I. t. G. t. H. a.) di ciaschedun tubercolo etc.„

simplicem tantum maiorem porum * referre videatur (f). Integra etiam interdum tubercula, quae hemisphaerica ordinarie sunt, parum distorta conspiciuntur, hincque labia etiam magnitudine inter se haud raro inaequalia *.

Haec ipsa vero labia, dum contracta sunt, triangularia apparent, basibusque *, vt ita dicam, extrorsum, apicibus ** vero conniuentibus oris medium respiciunt. Hinc etiam patet, cur os, vel apertura labiorum communis, sit stellata; labiorum enim apices liberi, conniuentes, stellae medium, latera vero contigua ipsos stellae radios effingunt. Posset etiam ipsa labiorum substantia, si cui ita placuerit, stella inuersa nuncupari. Notandum autem hic est, labia ista esse tantum apparenter triangularia, quippe quae altius in oris interiora * descendunt, et, ex toto repanda, vncinata ** et lamellata *** quasi apparent.

Numerus tuberculorum omnis in exemplari, naturali magnitudine * depicto, erat circiter 667, inter quae vnicum tantum, decem (g) labiis **, iisque omnibus

*Tab. XIII. B. XIV. Fig. 3.

*Tab. XIII. D. et Tab. XIV. Fig. 5. 9.

*Tab. XIV. Fig. 1. 7

** Tab. XIV. Fig. 1. 8

*Tab XIV. Fig. 17.

** Tab. XIII. F. XIV. Fig. 8

*** Tab. XIII. E. Tab. XIV. Fig. 6.

*Tab. XIII Fig. 1.

** Tab. XIII. Fig. 4. u. Tab. XIV. Fig. 21. 6.

(f) Marsillius, cum pag. 112. aperturam tuberculorum ordinarie stellatam esse dixerat, paullo inferius addit: „ mais elle (sc. „ aperturae figura) n'est pas toujours de cette sorte, et on trouve „ de ces mêmes trous, spheriques sans rayons, et d'autres de fi„ gure oblongue „

(g) Marsillius semel de sex (l. c. p. 112.) bis de octo (l. c. p. 115. et 171.) nullibi vero de septem labiis seu radiis loquitur; valde itaque suspicor, ex chalcographi phantasia factum esse, vt in Tab. XL. Fig. 180. No. 1. plures Corallii flores sex septemque omnibus numeris absolutis, instructum videre mihi contigit.

Substantia terrea est, cum gelatina et sale marino permixta, valde porosa, spongiosa, rasu atque scissu facilis, digiti tamen impressioni nequaquam cedens. Particula eius dentibus contrita, vel cultro secta, eodem fere modo se habet, ac sic dicti sepiae ossis pars spongiosa, cum quo, quod ad haec attinet, maxime conuenit. Glutinosi etiam et coriacei aliquid prodit masticata. Terreis particulis omnium maxime confertus est cortex, paucioribus medulla, paucissimis parenchyma; salinarum respectu primum tenet locum medulla, alterum cortex, parenchyma tertium; glutinosis vero abundat parenchyma, minus medulla, omnium minimum cortex.

Color ex albido lutescens vndiquaque; longe alium autem vidit olim *Clusius*, et nouissime Cel. *Linnaeus*; ille sc. miniaceum, hic vero rubrum, cuius ne stigma quidem in nostro apparuit. Tantam diuersitatem non mirabuntur ii, quibus plantarum, quas vulgo vocant, marinarum in colore varietas, plurimas ob causas mutabili, est perspecta.

Odor grauis, non insuauis tamen, qualem corium illud album vel flauescens spirat, quod alutarii perficiunt.

Sapor subsalsus, absque amaritie.

Pondus

---

que radiis appareant instructi, quam ipse Auctor fortasse vidit. Numerum radiorum octonarium vtplurimum obseruari in Cel. Donat l. c. legitur; vid. Not. (*e*). Nimiam harum partium paruitatem et inaequalem contractionem aut extensionem in causa esse posse, vt vnum alterumue labium, ni probe aduertas, oculorum aciem facile fugiat, in nostro ipse sum expertus.

Pondus erat unciae vnius cum duabus drachmis, ex quo, si naturalem in Tab. XIII. Fig. 1. magnitudinem spectes, specificam eius grauitatem, cum specifica Coralliorum rubrorum grauitate comparatam, exiguam valde esse, facile erit iudicatu. Erat autem ratio eius ad aquam, vt 600 circiter ad 1000.

Structura composita est ex cortice *, parenchymate ** atque medulla ***, quibus addi debent tubercula stellata, certa procul dubio, eaque connata ac naturalia, polyporum domicilia.

Cortex, (*b*) exterius Zoophyti stratum, idque tenuissimum, papillis plurimis, quarum mentionem supra iam fecimus, in medio poro * simplici, minimo, nudis oculis tamen conspiciendo, perforatis scatet, quibus transuersim dissectis, apparet, poros nihil aliud esse, quam canaliculorum, seu ductuum ** breuium, horizontalium, per corticem *** non tantum, sed per ipsam etiam parenchymatis substantiam * extensorum, et ab exterioribus interiora versus sensim ampliatorum orificia (*i*). Dissectorum horum ductuum lumina subrotunda ** vel oualia *** sunt; de quibus statim plura.

Substantia

(*b*) Et Corallium rubrum cortice gaudet; vid. Marsil. Donat. aliique.

(*i*) Dari eiusmodi poros, iisque respondentes ductus, tam in Corallio rubro, quam in pluribus aliis plantis marinis, ex analogia statim diuinare licet; vidit enim Marsillius, quas improprie satis glandulas vocauit papillas, et ductus, foras patentes poro, quoque vidisset, nisi forte difficultas, eos in molli parenchymate obseruandi, obstitisset. Immo non amplius dubium esse potest, quin existant, si Cel. Peyssonelium * in Transact. Philos. Vol. XLVII. MDCCLIII. Lond. edit. attendere velimus,

*Tab. XIII Fig. 6. x. Tab. XV. Fig. 5. b.
** Tab. XIII Fig. 6. y. Tab. XV. Fig. 5. c.
*** Tab. XIII. Fig. 6. z. XV. Fig. 5. d.
*Tab. XIII Fig 9. et XV. Fig. 1. a. a.
** Tab. XIII. Fig. 6. a. a. Fig. 8. a. a. Tab. XV. Fig. 5. e. XIV. Fig. 24. ς ς
*** Tab. XIII. Fig. 10.
*Tab. XIII Fig. 6. y. Fig. 11. et 12 XV. Fig. 3. 4. 5. 6. e.
** Tab. XIV. Fig 21. η η.
*** Tab. XIV. Fig. 21. ϑ. ϑ. ϑ.

Substantia corticis, vt apparet, homogenea, albida, compacta, rasuique facilior est parenchymate atque medulla, quorum illud ob glutinis exsiccati recrementa, haec, quod coactilis ad instar aliquatenus se habet, cultro minus cedit. Cortex etiam cum parenchymate arcte cohaeret, adeo, vt ne diuturna quidem maceratione nexu suo soluatur.

Parenchyma, (*l*) crassius cortice inuolucrum, flauescens ac spongiosum est; transuersim enim dissectum, praeter maiora ductuum istorum lumina, plurimos vndiquaque poros, vel cellulas minores *, nudo tamen oculo conspiciendas, offert.

Hoc ipsum inuolucrum in lateribus caulis atque ramorum connexis crassius * atque spongiosius est, quam in planioribus eorum faciebus **; et in ramis maior eius crassities atque laxitas, quam in caule, obseruatur. Quod

*Tab. XIII Fig. 12. β. β. Tab. XIV. Fig. 21. ι. ι. *Tab. XIII Fig. 6. γ. Tab. XV. Fig. 5. ε. ** Tab. XIII. Fig. 6. γ. Tab. XV. Fig 5. f.

---

mus, dicentem, pag. 453: „This bark appears pierced with „little holes, and these answer to small cavities upon the sub„stance of the Coral. When you take of a piece of this bark, „you observe an infinite quantity of little tubes, wich con„nect the bark to the plant, and a great number of little „glands adhering to these tubes; but both one and the other „do not distinctly appear, except when they are full of juice. „It is from these tubes and glands that the milky juice of „Coral issues forth „

* Postquam librum manuscriptum, cui Titulus est: Traité du Corail etc. ab Auctore acceperat Societas Regia Scientiarum Londina, summam eius in Vol XLVII. publicauit.

(*l*) Hoc in Corallio rubro a cortice non distinxit, sed pro vno eodemque cum eodem habuit, Marsillius, iure ab eodem separauit Donatus, exterius inuolucrum *corteccia*, interius *Tonaca* vocando.

Quod ad ipſam vero parenchymatis ſubſtantiam attinet, celluloſus eius contextus eo ſpongioſior eſt, quo maior ductuum transuerſorum inter ſe diſtantia, et quo minor eſt horum diameter; hinc in caule *, iisque in locis, in quibus tubercula deficiunt, laxior vt plurimum, quam in ramis ac inter tubercula *, obſeruatur, vbi compactus magis atque compreſſus eſt. Omnium autem maxime conſtipatum vidi eius ſtratum ad tuberculorum cellas *, quarum ambitum proxime cingit.

*Tab. XIII. Fig. 6.
*Tab. XIII. Fig. 4. et 5. Tab. XIV. Fig. 21 et 22.
*Tab. XIII. Fig 5, 8. et Tab. XIV. Fig. 22. x. x.

Eadem omnino ductuum transuerſorum ratio eſt, quorum lumina, pro maiore vel minore ipſorum inter ſe diſtantia, contextusque celluloſi aucta vel imminuta laxitate, vel minora vel maiora ſunt. Propior autem eorum vicinitas, tantaque luminum amplitudo vix ſpectatur alibi, quantam tuberculorum cellas * inter videre licet; plus enim ſpatii, quam ipſe contextus parenchymatis celluloſus, occupare non raro ſolent.

*Tab. XIII. Fig. 4. et Tab. XIV. Fig. 21.

Nec formam luminum omnibus eandem eſſe poſſe, ex hoc ſtatim elucet, quod ad varias, quas papillae patiuntur, contractiones ac diſtorſiones et ipſi ſe componant canaliculi: ſubrotunda ſc. vel oualia, quorum plurima ſunt, in faciebus trunci ramorumue planioribus, elliptica in conuexis eorundem lateribus, immo aliquantum anguloſa * circa tuberculorum cellulas haud rara transuerſa ſectione in conſpectum veniunt. Sic quoque fundi ſeu baſis conformatio non eadem omnibus eſt; modo enim planus, modo plus minusue in medio depreſſus, modo e lato in anguſtum ſubito

*Tab. XIII. Fig. 4 et 5. Tab. XIV. Fig. 21. et 22.

contractus; haec cellularum regionibus, istae caulis ac ramorum faciebus et lateribus, nunc memoratis, propriae sunt varietates.

*Tab. XIV Fig. 21, ι, ι. ** Tab. XIV Fig. 21. η, η. Tam cellularum parenchymatis minimarum *, quam ductuum transuersorum interna superficies ** colore e croceo-flauescente, ipsa vero parenchymatis substantia, simili quidem, ast longe pallidiore, in sulfureum inclinante, tincta est. Excidit etiam e plurimis horum ductuum inter dissecandum molecula e ruso-flauescens, plus minusue rotunda, concretam referens gelatinam. De reliquo parenchyma medullae aeque firmiter, ac ipsi cortex, adhaeret, nec, licet diuturna prius maceratione fuerit emollitum, vllo modo integrum (*m*) ab ea separari poterat; num autem vigens Zoophytum delibrari se patiatur, quaeritur?

Medulla (*n*) maximam pluribus in locis Zoophyti partem, eamque internam, constituens, albida, cortice

(*m*) Idem fieri in Corallio rubro *Peyssonelius* refert, libr. cit. pag. 453. ,, The bark of Coral covers the whole plant from the root to the extremities of the smallest branches. It will peel of; but this is only when just taken out of the water. After it has been exposed for a short time to the air, you cannot detach it from the body of the Coral, without rubbing it to powder.,,

(*n*) Haec Corallii rubri pars *Substance de Corail* Marsillio, Donato *materia del Corallo* audit.

Si explorata omnibus esset veritas, nec mera tantum hypothesis, qua substantiae Corallii lapideae genesin vel ex globulorum lapideorum depositione, vel ex liquore lacteo, e patentibus parenchymatis vasorum extremitatibus effluente, ac successiue lapicortice tenacior, ſpongioſior, raſuque difficilior, in transuerſum diſſecta, poros * exhibet diuerſae magnitudinis, ſc. peripheriam verſus vtplurimum minores, in medio maiores, numero iis, qui in cortice et parenchymate diſſecto ductuum transuerſorum lumina ſunt, haud pauciores, minus tamen concinno diſpoſitos ordine, magisque irregulares. *Tab XIII. Fig. 6. z. Tab. XV. Fig. 5. g. g.

Diſſecta ſecundum longitudinem medulla, conſpiciuntur ſulci *; vel ſtriae cauae, canaliculis iſtis, quos vermes xylophagi rodendo perficiunt, quodammodo ſimiles, modo breuiores, modo longiores, inque longum et flexuoſe parum excurrentes. *Tab.XIII. Fig. 3. ε. ε. Tab. XIV. Fig. 26 λ. λ.

Hi ipſi vero non ab vno ad alterum trunci ramorumue extremum continui, ſed breui vtplurimum itinere interrupti ſunt, porisque ſub transuerſa ſectione conſpiciendis reſpondent, nec niſi canales adaperti ſunt, in medietate ampliores vtplurimum, verſus extremitates anguſtiores. Interna eorundem ſuperficies membrana quaſi ſericea eſt obducta, conſpiciendaque hinc et inde praebet oſtiola *, egredientium ſc. ramorum lumina, in quos ipſi canales diſpertiuntur. *Tab.XIV. Fig. 26. μ. μ.

Medullae etiam ſuperficies * perbreuibus ac inaequalibus ſulcis **, ſericea pariter membrana inueſtitis, exarata *Tab.XIII. Fig 13. et Tab. XV. Fig 6. **Tab.XV. Fig. 6. a.

---

lapideſcente, evincere conati ſunt recentiorum ſummi Naturae ſcrutatores, maximam, quod ad hanc attinet, corallium inter atque Zoophytum noſtrum, quantumlibet quoad reliqua illi ſimile, profiteri diſſimilitudinem, certe forem coactus; verum organicam ſubſtantiae illius eſſe ſtructuram, in peculiari diſſertatione demonſtrabo.

exarata, et quasi exesa est, horumque in sinubus hinc et inde videntur canaliculorum medullarium, peripheriam versus oblique excurrentium, ostiola *, succis medullam et parenchyma interfluentibus peruia. Parenchymate cultello caute resciffo, sulci hi vna cum suis ostiolis facile quidem et vbique denudantur, in maioribus tamen ramis caulibusque, in quibus ampliores, profundiores et distincti magis sunt, quam in tenerioribus ramulis, omnium optime sub oculos cadunt.

* Tab. XV. Fig. 6. b.

Admiranda sane Zoophyti huius structura est, quod medulla, in medio * alias consistens, in frondescentibus ramorum extremitatibus ** de via quasi deflectat, cellisque polyporum contiguis attribuatur tantum locus in latere *, de quo ista deflexit, ne sc. hae vlteriori, quod molitur natura, obstent incremento.

* Tab. XIII. Fig. 6. et 7. Tab. XIV. Fig. 25. Tab. XV. Fig. 5.
** Tab. XIII. Fig. 3.
* Tab. XIII. Fig. 3. ζ

Dantur quidem ramorum extremitates et tubera, e trunci ramorumue lateribus protrusa, quae ab omni ** parte cellas contiguas, tenuibus tantum parietibus a se inuicem seiunctas, offerunt; verum ex his nouos enasci haud posse ramos, quis non videt? Medullae enim pars, quae in eiusmodi tuber abit, cellas nunquam transcendit, sed intra illud, tenui saepe extremitate, prope extremarum cellarum fundum * terminatur. Accedit etiam, quod situ, quem in tuberum horum medio semper conseruat medulla, praecluduntur.

** Tab. XIII. Fig. 7. Tab. XIV. Fig. 25. et Tab. XIII. Fig. 8. η. Tab. XIV. Fig. 24. ν.
* ibid.

Corallio rubro, cuius tubercula in aequaliori inter se inuicem distantia disponuntur, mechanismo isto non erat opus, cum e contrario nostrum, quod in glomera ea congerit, absque eo in tantam, quanta

non

non raro excellit, magnitudinem (o) excrescere non posset.

Satis firmum etiam exinde adferri potest argumentum, quo polyporum, cellarumque, quas habitant, ex ipso Zoophyto ortus probatur, sensu non minus proprio, quam quo Cereorum v. g. flores ex ipsa plantae substantia pronatos, nec parasiticos esse asserimus.

Cellae *, polyporum habitacula, quorum quodvis verrucae, seu tuberculo, in Zoophyti superficie conspiciendo, respondet, vlteriorque ipsorum tuberculorum, et quantum de polyporum exuuiis licuit dignoscere, restat expositio. *Tab. XIII Fig. 8. i. i. Tab. XIV. Fig. 34. g. g

Tenui primum, transuersim per tuberculi * summitatem, resecta lamina, praeter corticis ** substantiam, qua ipsa constant labia, et aperturam, quam inter se formant stellatam, nihil in conspectum prodit. *Tab. XIII L. Tab. XIV. Fig. 11. ** Tab. XIV. Fig. 11. o.

Iterata eodem modo sectione, labia non, vti prius, cum cortice continua, sed sub distinctae stellae * albicantis forma, parenchymate ** exterius, interius sinuoso hiatu *** ab eodem seiuncta apparent. Parenchymatis tum contextus spongioso-cellulosus, quo propior est tuberculi summitati, eo subtilior atque tenerior deprehenditur. *Tab. XIII. M. Tab. XIV. 12. π. ** Tab. XIV. Fig. 12. ρ. *** Tab. XIV. Fig. 12. ς.

Yy 3 Dissecta

(o) Trium enim pedum, immo duarum saepe vlnarum, et quod excedit, altitudinem attingit, cum Corallium rubrum pedem parisinum raro superet.

*Tab. XIV. Fig. 12. π. ** Tab. XIII. N. Tab. XIV. Fig. 13 τ. *** Tab. XIII. N. Tab. XIV. Fig. 13. υ.υ. **** Tab. XIII. N. Tab. XIV. Fig 13. φ.

Dissecta labia, quae iuncta stellam repraesentant, subtriangularia * sunt, angulo acuto ** stellae centrum, duobus obtusioribus leuiterque exstantibus *** parenchyma respicientia; hinc, quod his interponitur latus ****, emarginatum vel simum est.

*Tab. XIII. O. Tab. XIV. Fig. 14. ψ. ** Tab. XIII. O. Tab. XIV. Fig. 14. χ.

Ab angulis omnium labiorum obtusioribus duplicatis, vel, vt distincte magis loquar, ab obtusiore vnius et proximo, simili, alterius angulo *, situ ad cellae fundum perpendiculari, ad internam eiusdem superficiem pansum vtplurimum videre licet septum ** tenuissimum, coloris flauescentis; hinc hiatus supra memoratus in tot, quot septa sunt, octo sc. loculamenta quasi diuiditur.

*Tab. XIV. Fig. 14. ω. *Tab. XIV. Fig. 12, 13, 14, 18 a a a a.

Facta profundius sectione, reflexae labiorum extremitates * in stellae, magnitudinis nunc imminutae, ambitu deteguntur, loculamentis supra dictis respondentes, septisque continuatis, vt prius, a se inuicem disiunctae.

** Tab. XIV. Fig. 12, 13, 14, 18, b. b. b. b. *** Tab. XIV. Fig. 24. c. c. **** Tab. XIII. L. M. N. O. P et Fig. 4, 5. Tab. XIV. Fig. 11, 12, 13, 14, 18, 21 et 22.

Hae ipsae autem pro vario situ, vel sectione, varia etiam sub forma apparent, integrae modo, modo dissectae. Interstitia, a reflexis labiorum extremitatibus relicta, septi loco, semel tantum repleta vidi gelatina. Praeterea corticem * inter atque parenchyma ** ductuum saepius memoratorum lumina, variae diametri, iterum patent.

Ex his facile intelligitur, labia inflexa ***, si dissecentur transuersim ****, tanquam corticis continuationes, eo vsque in ambitu inter se cohaerere, et sub stellae forma fore apparituras, donec loculamenta versus re

flectanflectuntur *; nec improprie infundibuli, octo angulis atque carinis alternantibus, limboque totidem laciniis instructi, inuersique imaginem ** sub hoc statu ferre dicuntur. Reflexa * autem facile omnia in omnibus tuberculis vidi, denuoque inflexa **, ita, vt extremis apicibus *** cellae fundum respicerent. Interdum tamen, licet rarius, vnum vel plura labia recta fundum cellae versus extensa, eiusdemque lateribus quasi agglutinata *, conspexi, cum reliqua solito more reflexa iterumque inflexa ** fuerint. Latiores *** semper et crassiores sub hoc situ, sub isto vero tenuiores, filiformes * ac elongatas ** esse eorum extremitates, cognoui.

Labia, prima vice inflexa, si latera eorum respicias, columnam, seu conum *** potius, repraesentant, octo carinis totidemque exstantibus angulis longitudinalibus exornatum.

Notandum etiam est, labia, quam longe sunt extensa, colore tamen et substantia a cortice non differre, verasque eius esse continuationes; inferiorem autem labiorum inflexorum partem superiore esse albidiorem, constanter vidi (p).

Denique monendum erit, eadem ab ea, qua reflexae fieri incipiunt parte, omnem, ad apices vsque, cellae fundo obuertam faciem glutinis exsiccati specie, seu pellicula **** obscure flauescente, habere obductam eiusdemque attenuata productione ipsorum inter se cohaerere

*Tab. XIV Fig. 14. ω. Fig. 15. 16. d. d. ** Tab. XIII. R. Tab. XIV. Fig. 20. e. *Tab. XIV Fig. 14. ω. Fig. 24. f. ** Tab. XIV. Fig. 24. *** Tab. XIV. Fig. 23. b. Fig. 16. l. Fig. 24. i. *Tab. XIV Fig. 17. m. m. ** Tab. XIV. Fig. 17. n. *** Tab. XIII. Fig. 4. 5. et O, P R, S. Tab. XIV. Fig. 14. 18 19, 20, 21 et 22. *Tab XIV Fig. 17. o. ** Tab. XIV. Fig. 17. m. m. *** Tab. XIII. Q R. Tab. XIV. Fig 20. e. Fig. 23. p.

(p) Quae huc vsque dicta sunt, et amplius dicentur, summam nostri cum Corallio rubro conuenientiam probant sufficienter; prout id ex Auctorum de Corallio scriptis facile colligitur.

**** Tab. XIII. Q. R. S. Tab. XIV. Fig. 23, 20. 19. q. q. q.

haerere extremitates. Hac etiam mediante labia cum
*Tab.XIV. feptis * fupra dictis, cellaeque lateribus funt connexa.
Fig. 14. x. Eadem pellicula tentacula * octo diuergentia,
Fig 23. r. Tab.XIII. fub obliqua ad fundum directione, exporrigit, feptis
Q et S. fuccedentia, fundoque leuiter cohaerentia. Sed et haec
Tab. XIV. variant: non raro enim inflexa atque contracta fub
Fig. 23. f. coni octopartita bafi ftellae lamellatae * faciem prae
Fig. 19. f. *Tab.XIII. fe ferunt.
T. U. V. De fuper interior cellae fuperficies ** membrana,
Tab. XIV. Fig. 15. d. pelliculae illi valde fimili, inueftita eft, pro vera eius
Fig. 16. d. continuatione habenda.
Fig. 25. t. t. Pelliculam hanc, annexasque ipfi propagines, po-
** Tab. XIV. Fig. lypi effe exuuias, dubium non eft: fitus enim eius,
16. a. forma, fubftantia, color (*q*) etc. nihil aliud produnt.
Ita octo polypi tentacula, bafi cohaerentia, extremisque labiorum apicibus adnata (*r*) fub radiatae pellicu-
lae

(*q*) Simili fere poft exficcationem colore infectos effe Corallii rubri flores inter alios *Marfillius* auctor eft, lib. cit. pag. 113. „ Ces concavitez (cellae fc.) font toutes remplies d'un fuc glu- „ tineux, qui dans le tems que la plante eft fraiche, eft de „ couleur de lait, mais qui en fe fechant fe confolide, en for- „ me de croute, et prend une couleur de fafran, qui tire fur „ le rouge. „

(*r*) Polypum e fua demigrare poffe cella, nemo mihi facile per- fuadebit: eorum enim exuuias, quantum quidem in ficco ex- emplari licuit difcernere, labiis arcte femper adhaerentes, nec vnquam feparatas vidi. Hinc, quam Corallii rubri polypis facultatem tribuit *Donatus* in lib. cit. pag. 50. „ qual fino „ a tanto che il medefimo animaletto fia vivo, o non patito, „ fta fempre ripofto dentro la celletta; benchè fia affatto fciolto,
„ e

lae * ſpecie apparent, membranaque, cellam inueſtiens ventrem polypi, nunc inanem, efformat. *Tab. XIV. Fig. 23.

Ex ſitu etiam, quem et poſt mortem ſeruauerant fere omnes, ſequitur, polypos vel protinus, vt ſenſerunt, ſibi inſidias ſtrui, vel ſub vltimo demum nixu tentacula ſua, vna cum annexis labiis, per os in ipſum ventris cauum retraxiſſe; id quod pluribus huius generis polypis cum his commune eſt. Exinde tamen, omnium in praeſenti indiuiduo obuiarum cellarum polypos vno eodemque tempore vixiſſe, et aeque bene valuiſſe omnes, ſtatuere nollem. Procul dubio in eiusmodi Zoophyto, quod debitam acquiſiuit magnitudinem, plura millia cellarum vacua, vel verius polyporum ſepulchra ſunt, longe pauciora vero, viuentibus adhuc incolis inſeruientia. Stemmata enim gentilia plurima referunt Zoophyta, quibus cognationum ordines, a generis auctore ad vltimos pronepotes, ſunt inſculpti.

Priusquam ad ipſarum cellarum deſcriptionem progrediar, id vnicum de tuberculis adhuc dicam, quod eorum vnum alterumue ſimplici tantum, in anguſtum, reſpectu aliorum, et inane cauum ducente, poro perfora-

„, e ſeparato da qualunque parte della medeſima etc. „ in dubium adhuc voco.

Nec comprehenſu facile eſt, ſi ab omni nexu ſolutum ac liberum concedamus, quomodo labia ſua, quae cum eius ſubſtantia comparata dura valde ſunt, pro lubitu vel protrudere vel inuertere valeat polypus.

* Tab. XIII A. et J Tab. XIV. Fig. 2, et 10

foratum * viderim; stella sc. quam labia alias efformant inflexa, penitus deficiente, cortex et parenchyma circa porum, foras patentem, terminabantur.

Quum cellae (s) singulae singulis respondeant tuberculis, ea, quae, in respectu ad horum numerum et

(s) Placet hac occasione varios ex *Marsillii* lib. cit. proferre locos, qui quum emendatione ac enodatione aliqua opus habere mihi viderentur, animaduersionum materiam praebuerunt sequentium: pag. 113. inquit Auctor. „Il y a (sc. in extremitatibus ramorum iam iam induratis) plusieurs Cellules rondes, creusées „dans la même substance qui sont aussi remplies d'un suc „de lait glutineux, lequel en se sechant devient jaune, de „même que celui des tubules de l'écorce.„ Cellae de quibus hic est sermo, quasque in Tab. XXV. Fig. 114. N N. N. depictas sistit Auctor, non aliud sunt, quam foueolae, substantiae lapideae superficiei plus minusue impressae. Suam istae originem ducunt ab opposito cellae increscentis fundo, cui exteriora, eaque, durante cellae incremento, procul dubio nondum indurata vasorum medullarium strata cedunt, quae, futuro particularum calcariarum infarctu petrefacta, impressa olim cellae fundi vestigia retinent, non nisi succedentibus nouis vasorum stratis, lapidescentibus, delenda.

Eaedem foueolae, si lacte, siue recenti, siue exsiccato, sint repletae, facta parenchymatis a medulla separatione, fundum cellae, tenacius huic adhaerentem, vna cum polypi parte fuisse abruptum, indicio est Reapse id accidisse, dum parenchyma a medulla vngue separauerat Auctor, non ex Fig 122. Tab. XXVI. solum, in qua oblongae istae ac albentes lactis guttulae z, z, z, magnitudine et numero, et situ tuberculis in cortice exacte respondentes, cellarum polyporumque partes indicant abruptas, sed ex ipso etiam textu, euidenter patet: pag. 115. „Les lettres z z z, montrent les amas du lait dans les cellu„les, qui parmi le rouge du Corail, semblent, si l'on peut se „servir de cette comparaison, le pus de boutons d'un galeux, „quand et distantiam dicta sunt in praecedentibus, denuo hic exponere non est opus.

Zz 2 De

„quand on leur a ôté la peau.„ Polypi enim, quos sub hoc statu non nisi contractos videre potuit *Marsillius*, et recessus, quos tunc quaerunt, sub aliarum cellarum et lactis specie ei non semel imposuerunt. Inde etiam intelligitur, cur foueolae istae, ramorum truncique basi quo propiores, seu, quod idem est, quo priores ortu, eo planiores magisque etiam obliteratae prae recentioribus deprehendantur; nec minus, cur ramorum difficilius quam trunci perpetretur decorticatio; et cur in illis maius sit parenchymatis cellarumue rupturae, quam in his, periculum. Accuratius longe de foueolis post *Marsillium* locutus est *Donatus* in lib. cit. pag. 49. „ Alla celletta cede il luogo la materia „ del Corallo con picciole cauità: queste per altro non sono molto „ patenti ne' rami vecchi, e grossi, ma bensì ne' giovani, e ne' sottili etc. „

Denique verbis etiam, quae loco ad huius animaduersionis initium a me prolato mox subnexuit *Marsillius*, mea de foueolis sententia valde confirmatur: pag. 113. „ Ces Cellules sont „ toujours en plus grand nombre, plus profondes, et plus lar- „ ges, vers l'extrémité des Branches, que non pas auprès du „ pied. „ Pluribus ac profundioribus, quam inferius, circa ramorum extremitates et nostrum esse instructum, supra dictum est; et eadem gaudere structura Corallium rubrum, tam ex *Marsillii* verbis, quam ex iconibus, euidenter patet: ex illis nempe pag 118. „ La verité de l'existence de ce lait etc „ usque ad pag. 120. ex his vero e Tab. XXVII. Fig. 125. D, 2. E, 3. F, 6. G, 7. — Fig. 126. — Fig. 127. A, E, F, B, C, F, C. Cellas enim hic expositas a polyporum cellis non diuersas, sed easdem plane esse, ex eo statim clarum est, quod tuberculis in superficie conspiciendis directe oppositae, et magnitudine figuraque reliquis sui generis pares sint.

Necessarium omnino erat, haec scribere, ne cellas ab aliis vel diversas vel in medullae substantia penitus reconditas, nec absque praeuia eius

De figura itaque, aliis atque aliis cellis varia admodum, primo dicam: solitariis nimirum ac generatim

---

eius dissectione conspiciendas, circa ramorum extremitates vidisse Auctorem, quis credat.

— pag. 113. „Les lignes P. P. P. (Tab. XXV. Fig. 114.) „montrent les endroits où finit la consistence pierreuse des Bran- „ches, et commencent les pointes molles en sortant de l'eau, „et qui en se sechant deviennent très-faciles à broyer, n'étant „qu'une écorce qui embrasse une grande quantité de Cellules, „lesquelles se remplissent successivement du suc de lait, qui se „fixe à la dureté de la pierre etc. — et pag. 119. La par- „tie ou fragment marqué G. (Tab. XXVII. Fig. 125.) est le „bout de la branche qui pour l'ordinaire est plus gros, et d'une „figure plus irréguliere, que les parties superieures de la bran- „che mieux formée. Cela provient des creux, que forme par „ses divers contours la substance de lait, qui s'étendant en „ordre de couches, se condense à la dureté du Corail, et con- „secutivement ces vuides se resserrent, et font prendre aux Ra- „meaux la figure qui leur convient, et qui est à peu près „ronde „ Licet Corallium rubrum, mollibus suis adhuc instructum extremitatibus, videre mihi nondum contigerit, harum tamen conformationem a Zoophyti nostri conformatione non diversam valde esse ex *Marsillii* verbis partim, partim ex summa, quae inter vtrumque est, analogia facile ausim concludere. Magnus enim cellarum, et lacte quidem repletarum, numerus in praedictis ramorum extremitatibus, harumque, prae parte rami ipsis proxima, maior crassities, magisque irregularis figura, quid aliud portendunt? quam similem cellarum, polypos continentium, congeriem, qualem et in nostro videmus Zoophyto. Adde, quod obseruatione haec confirmentur vlterius, quam in Transf. Philos. loc. cit. pag. 450. ex *Boccono* refert Cl. *Matson* seqq. „Boccone observes farther, that he saw several furrows under „the bark of the Coral, which terminate at the extremities of „the branches, about which one might clearly see several „small tim omnibus iis, quae tubera inter se haud formant, conica * (t) est, fundo sc. planiusculo ** coni basin, summitate apicem obtusum, referente. In tuberibus vero quibuscunque vtplurimum pyriformes ***, aliae ex obverso ouato-oblongae ****, aut acuminatae *, summitate sc. ampliore ac obtusa, fundo autem angustiore, plus minusue acuminato **, vel obtuso etiam cum acumine ***, aliae subouatae, fundo **** leuiter truncato, omnes * autem, habito ad proportionalem vniuscuiuslibet magnitudinem respectu, praecedentibus ** profundiores cellae sunt. Nec rectae omnes sunt: deorsum enim leuiter incuruatae *** in nutantibus ramorum extremitatibus, quae ab altero tantum latere polyporum domiciliis sunt instructa, hinc et inde occurrunt. Earundem transuersim dissectarum lumina plus minusue subrotunda *, vel oblonga **, immo ob distractionem, quam plures passae esse videntur, non raro ex ouali elliptica sunt, diametro longiore Zoophyti longitudini, breuiore latitudini parallela.

* Tab. XIV Fig. 25. x. ** Tab. XIV. Fig. 19. y. *** Tab. XIV. Fig. 25. A. **** Tab. XIV. Fig. 24. B. * Tab. XIV. Fig. 25. C. ** Tab. XIV. Fig. 24. D et 25. C. *** Tab. XIV. Fig. 24. E. **** Tab. XIV. Fig. 25. F. * Tab. XIV Fig 24. ξ ξ. B. D. E. etc. et Fig. 25. A. C. F. etc. et Fig. 26. ** Tab. XIV Fig. 19. y. et Fig 25. x. *** Tab. XIV. Fig. 26. G. G. * Tab. XIV Fig. 22. H. ** Tab. XIV Fig. 21. I.

Zz 5 Neque

„small holes of the form of a star, which he imagines are destined for the production of branches.„ Parua ista atque stellata foraminula tuberculorum ora esse, quis non perspicit?

(t) De Corallii rubri cellis *Donatus* habet seqq. loc. cit. pag. 50. „Il vano della celletta è ristretto come in un cono (F. t.) „otuso all' apice il di cui ventre ha un diametro maggior della „Base.„ Non eandem autem omnibus fore figuram, ex praecedentibus (vid. Not. f.) facilis est coniectura.

Neque vnum eundemque situm (*u*) omnes habent cellae, vtplurimum quidem horizontalem *, siue transversum, ita, vt sub angulo recto cum medullae superficie coëant; in grandioribus autem tuberibus, tuberosisque ramorum extremitatibus, siue ex toto, siue ex dimidia tantum parte, summae perpendiculares *, his proximae erectae, insequentes transuersae **, infimae denique, omniumque rarissimae, reclinatae *** sunt.

*Tab. XIV. Fig. 25. L. A C. x.
*Tab. XIV. Fig. 26. M.
** Tab. XIV. Fig. 26. N.
*** Tab. XIV. Fig. 26. O.

Nexus cum medullae superficie, fundo mediante pariter, ac transuersis ductibus cellulosoque parenchymatis contextui, omnibus est arctissimus.

Parenchymatis terminis etiam circumscriptae semper sunt, nec nisi rarissime medullae quasi immersus * ipsorum fundus obseruatur.

*Tab. XIV. Fig. 25. C. P.

Quum membranae, cellam efformantis, parietes vltra internam labiorum basin haud protensi esse videantur, sacculum (*x*) superius patentem, cella eiusmodi repraesentat.

Eosdem denique parietes poris plurimis, nudo etiam oculo in extremitatum tuberosarum cellis praeprimis visibilibus, esse pertusos, monuisse sufficiat.

ANALYSIS CHEMICA.

Exper. I.

Die XV. Febr. hora decima matutina paruulum huius Zoophyti ramum, pondere vnius drachmae et viginti

(*u*) Vid. *Donat.* loc. cit. pag. 50. „ Il fondo di tal celletta guarda „ il piede del Corallo, e la bocca la parte ramosa, o più rimota „ dal piede. „ De situ vel directione idem plane, quod de figura (vid. Not. (*t*)) sentio.

x) Idem de Corallio rubro affirmat *Donatus* loc. cit. pag. 49.

viginti sex granorum aquae frigidae immissi, cui primum innatabat. Paullo post bullae aereae plurimae in eius superficie conspiciebantur aggregatae. Circa vesperam subsidebat, et altero mane, hora nona, vini albi gallici, aqua permixti, colore, odore Zoophyto proprio, saporeque subsalso, imbuta erat infusio; ipse vero ramus emollitus ita, vt pressioni aliquantum cederet; tumidus autem magis, quam ante ipsius immersionem, tunc mihi non videbatur; nec stellarum labia plus dilatata, quam antea. Immo, ramo per quatuor dies et vltra modo in aqua frigida, modo in calida valde, macerato, signa tumentiae euidentiora, hiatusue osculorum stelliformium insigniores, vix apparuere, certissima quidem haustae aquae tanta copia, vt bilance examinatus drachmas tres, quatuorque grana pondere suo nunc exaequaret. Neque eum in salis communis solutione plus, quam antea, emolliri, sum expertus. Quae sequuntur, experimenta II—VII. cum infusione sunt instituta.

Exper. II.

A syrupo violarum suum cum viridescente commutauit colorem infusio.

Exper. III.

A spiritu salis ammoniaci nullam primum passa est mutationem; post aliquot horarum interuallum tamen parum lactescebat.

Exper. IV.

Ab oleo tartari per deliquium parum turbulenta, cum subsequente copiosa floccorum albentium praecipicipitatione. Praecipitatum hoc saepius edulcoratum terra erat pura, calcaria, in acidis dissolubilis.

Exper. V.

A Spiritu Nitri parum turbulenta, vel lactescens, diaphana tamen. Saturato postea nitri spiritu oleo tart. p. d. nihil praecipitauit, sed limpida mansit solutio, sedimenti tamen e sordide flauescente albicantis parum deposuit, in fornace calefacto reposita.

Exper. VI.

Spiritus salis easdem, quas nitri spiritus, dedit mutationes, sub mixtione ortas. Eodem postea saturato oleo tartari p. d. limpida mansit, et in fornace calefacto aliquot horarum interuallo sedimenti subfusci exiguam quantitatem deposuit.

Exper. VII.

Ab aceti immixtione mutatio nulla.

Exper. VIII.

α) Laminulis ac frustulis quibusdam minoribus ramo, antea per triduum in aqua macerato, abscissis, nitri spiritum affudi, et exorta est subito effervescentia summa, vt omnis liquor in spumam resolui videretur. Peracta efferuescentia, mixtura bruno colore, lamellae ac frustula partim obscure bruno, partim subfusco erant tinctae. Mixtura dein oleo tart. p. d. saturata, turbulenta, lactea, cum flauedinis tinctura, impellucida

ex

ex magna particularum albicantium, actione hac e suo soluente separatarum, copia facta est, quibus ad vitri fundum praecipitatis, liquor supernatans vini gallici albi et limpiditatem et colorem induit.

β) Eodem spiritu frustulo maiori, cortice, parenchymate atque medulla constanti, quod ramo, macerationem nondum passo, resecueram, affuso, similis oriebatur efferuescentia, vt prius; nitri spiritus eundem, quem infusio, parenchyma vero, durante efferuescentia, colorem induit nigricantem, quasi fuisset adustum. Interuallo autem aliquot horarum frustula, in vtroque experimento, α et β adhibita, croceo colore sensim tingebantur. Saturatus dein spiritus oleo tart. p. d. eadem plane, ac in α, dedit phaenomena.

Exper. IX.

Spiritus salis frustulo maiori, cortice, parenchymate atque medulla constanti, et in aqua nondum macerato affusus, efferuescentiam statim concitabat, minus quidem impetuosam, quam in Exper. VIII, ast diutius durantem. Cessante hac, frustuli partes, cohaesionem inter se seruantes, colorem primum, vt in Exp. VIII. haud mutabant, sed horae interuallo demum nigredine inficiebantur, eaque dilutiore cortex, saturatiore parenchyma, pallide fusci tinctura vero medulla. Frustulum, elapsis viginti quatuor horis, aquae iniectum, fundum petiit, cum simile huic (Exper. VIII β) supernataret; vtrumque vero sufficienter edulcoratum, tam colore, quam consistentia, fungi igniarii particulam optime referebat. Mixturae oleo tart. p. d. saturatae idem contigit, ac in Exper. VIII.

Exper. X.

Superfudi vespere frustulis nonnullis acetum vulgare; inceperunt tum statim commutare sensim suum cum fusco colorem, et postero mane carbonum instar nigra erant. Aliquot dierum interuallo post instillaui solutioni nonnullas olei tartari p. d. guttulas, et exorta inde est efferuescentia summa; lactescebat mixtio, et incrassabatur; diluta dein aqua, paullo post sedimentum albicans, sat copiosum, deponebat, vna cum materia quadam rufescente, parciore copia admixta. Hanc aceto propriam licet facile suspicarer, ne dubium tamen vllum superesset, eidem aceto seorsum instillaui aliquot olei tartari p. d. guttulas, et respondisse suspicioni euentum, sum expertus, quum vix inde oriri effervescentiam, certe valde leuem, viderem, materiam vero rufescentem, vt prius, statim apparentem, et paullo post in vitri fundum se praecipitantem, absque sedimenti albicantis depositione, manifesto indicio: acetum vulgare terram Zoophyti calcariam, tardius licet ac placidius, quam caetera acida, soluisse, eandemque post suum cum alcali connubium reddidisse.

Exper. XI.

Frustula, Exper. VIII, IX, X, adhibita, bene eluta atque exsiccata, carbonibusque candentibus iniecta, cornu vel lanae ambustae odorem cum fumo spirabant, oleum

oleum magis magisque empyrevmaticum, fuscum, foetidum eructabant, tandemque in caput mortuum nigrum, spongiosum et friabile conuersa, consumtoque penitus oleo, fortiori igni exposita, in terram albam, in acidis solubilem, fatiscebant.

Exper. XII.

Frustulum, ramo abscissum non macerato, ad candelae lumen dum accendebatur, cum flamma ardebat.

Exper. XIII.

Frustulis, ramo, non macerato partim, partim macerationem passo, abscissis superfudi spiritum vini rectificatissimum alcalisatum; prodibant statim bullae aereae, et vnius horae internallo flauescebat infusio, vini gallici instar. Instillaui tunc ei guttatim aquam, ast nulla subsequebatur praecipitatio. Ab affusis spiritibus acidis parum lactescebat.

Exper. XIV.

Frustulum, non maceratum prius, in vrina aeque ac oleo tartari p. d. immutatum persistebat.

CONCLVSIO.

Euidenter itaque patet, suppeditare Zoophytum nostrum, etiam absque vlla vel ignis vel fortiorum quorumcunque menstruorum adhibita vi, mera tantum in aqua frigida maceratione, 1) *Sal marinum*, sapore suo se statim prodens; 2) *Principium quoddam alcalinum, bituminosum*, quod ab alcalino spiritu (Exper. III.) et ab acidis fortioribus (Exper. V, VI et XIII.) in spissius cogitur, et violarum syrupum (Exper. II.) viridi colore inficit, tam colore et sapore, quam odore suo singulari, quo particulae ipsius volatiles ac subtiliores nares feriunt, cognoscendum; 3) *Terram calcariam*, ab affuso alcali fixo (Exper. IV.) vinculis suis liberatam. Maximam autem huius partem, quam et manducatione sola iam detegimus, spirituum acidorum ope ex ipsa Zoophyti substantia, cui arctius inhaeret, demum elici posse, Exper. VIII, IX et X. optime clarum est; neque minus ex his patet, eo expeditius et impetuosius factam fuisse eius solutionem, quo fortiora adhibita fuere menstrua, vt et, quo magis a particulis bituminosis, quibus quasi inuoluta erat, macerando frustulum in aqua, liberata atque denudata fuerit; inde etiam intelligitur, cur frustulum, Exper. IX. adhibitum, petierit fundum, cum simile, vtpote bituminoso suo iam ex parte maceratione orbatum, hincque leuius factum, supernataret; 4) *Oleum animale volatile*, Exper. XI. ignis ope demum productum, magna satis in copia, cornu vel lanae ambustae odorem spirans. Nec dubito, sub eadem operatione etiam exiguam salis fixi quantitatem fuisse elicitam, quamuis experimento existentiam eius ob nimis parcam, quam suppeditabat frustulum, copiam probare non potuerim. Dum Exper. VIII, IX et X. instituebam, acida in cortice omnium maximam, in medulla minus impetuosam; in parenchymate vero minimam, vel plane nullam

nullam excitasse efferuescentiam, obseruare licuit; id quod cum eo, quod in dissertationis limine iam expositum fuit, exacte conuenit. Quod bituminosi, ab aqua soluti, pars neque ab alcali, neque ab acidis affusis fuerit mutata, sed intacta plerumque relicta, color flauescens, per omnia fere experimenta persistens, probat sufficienter, et quam subtile et immutabile illud sit principium, facile inde colligitur.

Plura quidem, optauerim valde, vt Zoophyti huius experimenta, inprimis destillationis ope, maiore in portione capere potuissem; attamen ex modo recensitis particularum eius constitutiuarum cum particulis Coralliorum constitutiuis, caeterarumque omnium plantarum marinarum, conuenientiam et animalem non minus, ac harum, indolem satis patere arbitror.

Quamuis autem exigua e quantitate, quam experimentis impendere licitum erat, rata singulorum principiorum pars accurate determinari nequeat, pro certo tamen affirmare ausim, terra calcaria Ceratophytis ac Corallinis vesicularibus superius quidem, sale volatili oleoque animali autem inferius esse, istaque e contrario Corallio rubro et Madreporis praestiturum, his ab iisdem superatum iri Zoophytum nostrum.

DESCRIPTIO TVBIPORAE, MARIS ALBI INDIGENAE.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Tab. XVI. Fig. 3. Tubipora *ramosa, interstitiis subrotundis distincta; tubulis ramorum confluentium simplicibus, flexuosis, aggregatis et conglutinatis.*

Descriptio.

Tubipora haec, quum ab ima, eaque angustiore, basi statim ramosa exsurgat, et multiplicatis iugiter ramis in longum et latum se diffundat, acaulos et ex omni parte vniformis est: tota quanta sc. ramis mutuo amplexu sese excipientibus, et ad singulum ipsorum confluxum intercapedines subrotundas, vel ouales, efficientibus constructa.

Ipsi autem rami mera sunt tubulorum innumerorum, gracilium, simplicium, varie flexuosi et incondite paralleli reptatus, e ramo in ramos modico sub diuergio ac obliquo sub ductu ad se inuicem excurrentium, caementoque subtilissimo temere conglutinatorum fasciatim digesta congeries.

Sic sociali instinctu vniti vermes metuendis iniuriis pares sunt, dispersi facile perituri.

Naturalem tubulorum longitudinem definire vix ausim: termini enim, et, quibus circumscribuntur, orificia, scia, hinc et inde tam sparsim, quam gregatim, conspicienda, an a natura fuerint, an casu, facta, non patet; vtriusque esse generis omnium maxime probabile est.

Diameter singulis aeque ac omnibus idem est constanter, et vndiqueuersum octauam vix superans lin. paris. partem.

Testa est e griseo seu sordide albicans exterius, interius candida, substantiae calcariae, tenuissima ac fragilissima.

Pondus ℥iij, ℈ß adeoque magnitudinis respectu valde leuis.

Caeterum Tubiporam hanc in interstitiis suis fouere vnum alterumque perpusillum buccinum, mytilum atque Fucum foliaceum, immo adnatas sibi, tanquam comites indiuiduos, cochleas, serpulas, escharae cornuta rudimenta, milleporaeque prolem circumferre, notandum; id quod ei cum plurimis Zoophytis familiare est.

Denique etiam corpuscula lentiformia, e ruso flauescentia, meram exsiccatam referentia gelatinam eidem satis magna in copia leuiter adhaerere, non omittam, licet dubius sim, vtrum pro polyporum, aut vermium, exuuiis, an pro animalis cuiusdam marini ouulis, ea habere debeam.

* * * * * * * * *

Inter corpora naturalia, quae de intima naturae vegetabilis et animalis vnione testantur, non vltimum tenere locum Tubiporam nostram, quis non perspicit? Ex ramosa enim facie, quae vegetabilis est, eam si quis iudicet plantam, ex tubulorum structura et natura vermium opus pronunciabit. Vtrique sententiae vtique non deest

deest ratio. Posteriorem chemica analysis probat vlterius, analogia illustrat:

1) Spiritus acidi effervescentiam in tubulis excitant, omnem soluendo terram calcariam, quae potior est eorum pars constitutiua. Quod intactum relinquitur, ipse contextus vasorum organicus est, indolis glutinosae, pristinam prae se ferens formam tubulorum. Hic, prunis iniectus, cornu ambusti odorem de se spirat, certum olei animalis volatilis alcalini indicium, et carbonem exhibet, istius carboni simillimum.
Eadem quoque, quae tubulorum contextus, corpusculorum lentiformium, supra memoratorum, natura est.

2) Affinitatem nostrae, in hunc vsque diem incognitae, cum aliis Tubiporarum speciebus, quae apud Auctores passim occurrunt exempla probant sequentia: 1) Corallina tubulosa, ramulis tenerioribus, in lapidem conuersa; *Memorabil. Basileens.* 1748. *Basil. germ. ed. Part.* I. *pag.* 94. Tab I. fig. k. et Part. II. pag. 180. Tab. II. fig. d. 2) *Marsil Hist. phys. de la mer* Tab. IV. Fig. 15. 3) *ibid* Tab. II. Fig. 9. sed Fig. 1–15 deficere descriptiones, dolendum. 4) *ibid.* pag. 153. lin. 9, 10, 11 et pag 154. lin. 1 et 2. Tab. XXXIV. Fig. 168. No 6 et 4. breuissimis verbis descripta. 5) Tubularia purpurea *Tourn. inst* 575. t. 342. 6) *Argenv. Conch.* p. 352. Pl. 29. Fig. B. C. D et E.

CON-

CONTINVATIO HISTORIAE ZOOPHYTI MARINI E CORALLIORVM GENERE.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Plantas sic dictas marinas in stupendum saepius excrescere magnitudinem, qua terrae arbores non raro exaequant, tam historiae naturalis scriptorum, quam peregrinatorum, aperte testantur relationes, fide dignissimae.

Memorabile eiusmodi corporum marinorum exemplum praebet Corallii spongiosi truncus *, e Gazophylacio Petropolitano depromtus. Quamuis autem inferior eius extremitas non circa radicem, quam vocant, abscissa esse videatur, omnesque praeterea rami, quibus ipse olim superbiit, mutilati sint pessime, ex reliquo tamen insignis, ad quam excreuerat Corallium, aestimari poterit magnitudo. Nec haec vnice est, quam mireris; forma non minus et structura, quum ad intimius perspiciendam Corallii huius naturam conferre quaedam possint, admiratione aeque ac inuestigatione sunt dignissimae.

*Tab. XVI. Fig. 1. et 2.

Quum vero praesens hoc exemplar, vtpote omnibus notis essentialibus conueniens, pro vna eademque cum illa specie, cuius amplissimam Illustrissimae Academiae tradidi descriptionem, sit habendum, non nisi accidentales, et, quas proprias habet, notas recensebo, et tanquam appendicem illi subnectam.

* *
*

Truncus * hic, 3 ped. 1 poll. 4 lin. altus, inferius ** 4 poll. latus et 1 poll. 8 lin. tantum crassus, hinc tam ab antica, quam postica facie valde compressus, recta primo ascendit ad 1 ped. 5 poll. vsque, inde subito et maxime inclinatus pedali et arcuato flexu pergit, abhinc in rectum denuo extensus, leuiori tandem proclinatione terminatur. Latitudo * eius et crassities ** ab inferioribus superiora versus sensim decrescunt. Vtraque facies non modo plana, sed hinc et inde etiam in medio plus minusue profunde sinuata ***. Latera ****, respectu facierum, angusta quidem, ast conuexa valde. Ramis haec penitus destituuntur; plana autem vtraque facies viginti septem circiter, variae diametri ac sine ordine spargit, a pennae olorinae ad pollicis immo et sesquipollicis crassitiem, ex parte adhuc superstites, mutilatos *, partim penitus rescissos **. Coaluisse horum vnum, minorem ***, cum alio maiori ****, sub angulo acuto, ita, vt inter se et truncum, e quo vterque prouenit, interstitium relinquant triangulare, notatu dignum: proprietatem enim vegetabilem potius, quam animalem, et huic Zoophyto, vt plurimis aliis, concessam indicat.

*Tab. XVI. Fig. 1 et 2.
**Tab. XV. Fig. 7.
*Tab. XVI Fig. 1.
**Tab. XVI Fig. 2.
***Tab. XV Fig. 8. a. et Tab. XVI. Fig. 1. a.
**** Tab. XV. Fig. 7. b. b. et 8. b. b. Tab. XVI. Fig. 2. a.
*Tab. XVI. Fig. 1. b. b.
** Tab. XVI. Fig. 1. c. c.
*** Tab. XVI. Fig. 2 b.
**** Tab. XVI. Fig. 2. c.

Color ab ima trunci parte versus supremam e sordide luteo sensim sensimque in cinereum abit.

Odor nullus. *Sapor* salis vix quicquam prodit. *Sonum* edit digito pulsatus, qualem vasa fictilia edere solent. *Pondus* 4 ℔, ℥j, ʒij, ℈j.

Cortex

Cortex in parte trunci inferiore rimas * non tantum egit plurimas, a subitanea forsan exsiccatione ortas, sed variis etiam locis rudi contrectatione est detractus. *Tab. XVI. Fig. 1. d.

Papillae per dimidiam trunci partem obliteratae, caeterum non minus copiosae et aggregatae, quam in Tab. XIII. Fig. 1.

Tubercula * stelliformia, polyporum exuuiis foeta, adeo rara, vt vix viginti per totam trunci superficiem dispersa numerauerim. *Tab. XVI. Fig. 1. e. e.

Parenchyma compressum magis, nec adeo laxum, quam in caule, Tab. XIII. Fig. 1. depicto. Durior in vniuersum etiam substantia, ne medullari quidem excepta, hinc scissu etiam paullo difficilior.

Quod in priore dissertatione de medullae canalibus dictum fuit, et de hoc valet trunco, si excipias tantum, maiora ductuum lumina in transuersa basis sectione * non in medio, sed ad latera potius et parenchyma versus hinc et inde esse conspicienda, licet in superiore trunci extremitate, ac in eius ramis transversim dissectis, eodem modo, vt in isto caule, supra descripto, sese habeant. *Tab. XV. Fig. 7.

* *
*

Ramuli nonnulli tuberosi huc quoque spectant, e caulinorum genere, trium quatuorue pollicum longitudinis, tuberculis stelliformibus plurimis praediti, qui caulium huius trunci deperditorum olim fuisse videntur particulae; istis enim in Tab XIII. depictis omnino similes sunt, excepto colore, qui roseus est in cortice labiisque

biisque tuberculorum cum eodem continuis. Obductum ac conſperſum quidem hinc et inde vidi corticis ſuperficiem puluere albicante, ſed ſalinas eſſe particulas, quae ſucceſſu temporis ex ſubſtantia effloruere, nec cortici naturales, guſtu percepi.

Praeter eas igitur, quarum mentio in priore diſſertatione facta eſt, ſequentes in Zoophyto hoc obſeruandae ſunt proprietates:

1) Naſci illud in mari Norwegico (*a*), Albo (vid. Diſſ.) et Mediterraneo (*b*), et quidem ex non mediocri profunditate (*c*).

2) Baſin habere, more aliorum ſui generis, ampliatam et paullatim attenuatam (*d*), lapidibus vel conchis (*e*) affixam.

3) In tantam ſaepius excreſcere magnitudinem (*f*), vt terrae arbores, non infimae proceritatis, facile aequet.

4) Cor-

(*a*) *Worm.* loc. cit. pag. 230. —— *Pontopp.* loc. cit. —— *Linn. Muſ. Teſſ.* pag. 120.

(*b*) *Marſill.* loc. cit.

(*c*) *Marſill.* pag. 163. ait: „Les Pêcheurs l'arrachent ordinairement avec l'hameçon à un fonds de 40 et 50 Braſſes„ et *Linnaeus* de ſuo refert loc. cit. extractum eſſe profunditate 350 pedum.

(*d*) *Worm.* loc. cit. „Caudex infima parte dilatatur, vt manifeſte appareat, ſcopulo eam inhaeſiſſe, non quidem in fibras „radicum diuaricatur, ſed in amplitudinem paullatim attenuatam „extenditur, in ambitu pedem ferme aequantem„.

(*e*) *Marſill.* loc. cit. „elle croît ſur des pierres, et ſur des coquillages.„ Conchae inhaerentem vid. apud eundem. Tab. XXXIX. Fig. 178.

(*f*) Quum *Worm.* loc. cit. alterum et integrum indiuiduum, longitudine quatuor pedum, ad baſin craſſitie tantum brachiali fuerit,

4) Corticis colorem in recens extractis album esse ad basin, paululum supra hanc albo rubroque mixtum, indeque vlterius per caulem, omnesque ramos, non nisi rubrum (*g*); rubrum vero hunc colorem in nonnullis in purpureum, in aliis in coccineum, in pluribus tamen in flauescentem (*h*) vergere, seu auroreum; huncque posteriorem sub exsiccatione Corallii in albido-luteum, seu flauescentem (*i*), qualis Zinziberis est, de-

et Cel. *Linnaei* exemplar, licet pedes $2\frac{1}{2}$ attigerit, caudicem truncatum vix brachii crassitie habuerit, facile liquet, quid de magnitudine nostratis, cuius trunci inferior, eaque rescissa, extremitas 4 pollices lata est, et istius a Cel. *Pontopp.* loc. cit. pag. 273. l. descripti, et Tab. No. 2. Fig. No. 1. delineati indiuidui, cuius truncum septem pollices latum esse legimus, statuendum sit. Hinc, quam modo laudatus Auctor sub descriptionis finem exposuit: „Wie das äusserste der Zweige „beschaffen gewesen, kann ich nicht sagen, weil sie, leider! „alle abgebrochen sind; und wenn dieses nicht wäre, so „müste sonst die ganze Ausbreitung derselben nach Pro„portion so groß seyn, daß man diesen Ast vielleicht nicht „in mein Haus, geschweige in mein Cabinet, würde haben „bringen können„, iusta omnino coniectura est.

(*g*) *Marsill.* loc. cit. „Le pied en est entierement blanc; ce blanc, un peu plus haut, est mêlé de rouge, et cette derniere couleur se répand par tous les rameaux„.

(*b*) Idem loc. cit. „Ce rouge n'est pas semblable en toutes les plantes de cette nature; car en quelques-unes il tire sur le pourpre, en d'autres il est vermeil, et en plusieurs il est jaunâtre„.

(*i*) *Wormii* omnia indiuidua, quae ex Norwegia ad eum sunt delata, colore albicante ad flauedinem tendente, qualis in Zinzibere obseruatur, praedita fuisse, ex loc. cit. patet. Vid. etiam *Pontopp.* loc. cit. pag. 275. No. 4.——et nostr. caulis ramosus, in priore dissertatione descriptus, vt et truncus modo expositus.

generare; attamen et exsiccata inueniri, miniaceo (*l*), saturate rubro (*m*), et roseo (*n*) colore praedita; parenchyma omnibus esse flauescens (*o*), albicantem (*p*) vero medullam.

5) Truncum, vt in Corallio rubro, aliisque, in regione basi proxima, maximam (*q*) habere crassitiem.

6) Trunci ramorumque ipsius principium vtramque faciem esse compressam * (*r*), eandemque communiter ramis praebere ortum ** ac basin, omnes consequenter et singulos ramos in vno eodemque plano constitutos, trunci cauliumque planitiei directe opposito; qua in re Keratophytorum indolis particeps factum est Corallium nostrum.

* Tab. XIII. Fig. 1. *b.* Tab. XVI. Fig. 1. *a. f. f.* et Fig. 2. *d. d.*

** Tab. XVI.

7) Truncum prius, quam in ramorum brachia se spargat, notabile crassitiei capere incrementum, suoque volu-

---

(*l*) *Clusii* loc. cit. Arbuscula cortice tecta erat rubri coloris, vt minio inducta videretur, qui an ascititius fuerit, ipse suo tempore ignorabat. Sed erroneam *Wormii* sententiam loc. cit. „Color rubicundus, qui in *Clusii* planta visebatur, non fuit naturalis, sed ascititius, vt recte suspicatur.„ recentiorum obseruationes satis demonstrant.

(*m*) *Pontopp.* loc. cit. pag. 275. No. 4. et *Linn.* loc. cit.

(*n*) Idem loc. cit. pag. 273. No. 1.

(*o*) *Linn.* loc. cit. „Interior cortex (qui nobis parenchyma dicitur) a substantia lignosa consistentia molliore et *flaua* distinguitur etc.„

(*p*) *Clus.* loc. cit. —— *Pontopp.* loc. cit. pag. 273. No. 1 —— et *Linn.* Mus. Tess. pag. 120.

(*q*) Vid. *Clus. Worm.* et *Marsill.* Tab. XV. Fig. 74, et Tab. XXXIX. Fig. 178. No. 1.

(*r*) *Pontopp.* loc. cit. pag. 273. 1. et *Linn.* loc. cit. „Caudex —— versus inferiora parum compressus.„

volumine paucos istos ramulos, quos ab ineunte adolescentia extendere solet, longe superare; hanc sine dubio ob causam, vt pluribus ferendis par sit, et aetate grandescat.

8) Eundemque ingrauescente aetate, multiplicatis iugiter ramis tuberibusque, paniculam (s) formare in plano amplissimam, ac versus alterum latus nutantem, vt, expletis naturae finibus, proprio tandem sub onere concidat.

9) Corticem a parenchymate, hocque a medulla tam quoad substantiam, quam structuram, esse diuersissimum, et facile a se inuicem distinguendum; hinc vnum in alterum non mutari, sed medullae aeque ac parenchymati suam, a natura concessam, vegetatiuam indolem esse, patet.

10) Corticem parenchymati, parenchyma medullae arctissimo eoque ingenito nexu esse coniunctum.

11) Papillas in nudis trunci * regionibus, quae tuberculis carent, non maiori inter se distare spatio, quam in similibus ramorum tenuium locis; increscente itaque medullae perimetro easdem augeri numero, oportet. *Tab. XVI.

12) Substantiam vniuersam in ramis teneriorem spongiosiorem ac molliorem esse, quam in trunco.

13) Cor-

(s) *Clus.* loc. cit. „Arbuscula —— in multos ramos laterales eosque in anteriorem partem nutantes diuisa„ Idem etiam *Wormius* semel iterumque affirmat loc. cit. et *Linn. Mus. Tess.* „Rami —— superiores —— qui *paniculam* constituunt ——, parum nutant versus anteriora, ac si haec arbor creuisset ad latus rupis submarinae„

13) Corticem vbique fere eiusdem esse crassitiei, compactum vero magis, duriorem, maiorique terrestrium particularum copia infartum in trunco, quam in ramis.

14) Parenchyma in trunco ramisque crassioribus tenue quidem mentiri stratum *, ast compactum et compressum magis esse, quam in ramis tenuioribus, eorumque tuberibus, in quibus spongiosius et laxius est, ac vna cum polyporum cellis plus spatii saepius, quam ipsa medulla, occupat.

*Tab. XV. Fig. 7. a. a. b. b. Fig. 8. a. b. b. Fig. 9. a. a. Tab. XVI. Fig. 1. g. et Fig. 2. c.

15) Truncum * ramosque ** principes puram fere putamque esse medullam, hancque eundo sensim rarescere, et gracilibus in ramulos *** tuberaque **** immissis propaginibus terminari.

*Tab. XV. Fig. 7. et Fig. 8.
** Tab. XIII. Fig. 6. Tab. XV. Fig. 9. Tab. XVI. Fig. 1. b. b. et Fig. 2. f.
*** Tab. XV. Fig. 8. c. Fig. 9. b. b. b.
**** Tab. XIII. Fig. 7. etc.

16) Medullam e substantia constare spongiosa, et canaliculorum congerie longitudinalium, breui vtplurimum itinere interruptorum, et plus minusue flexuose excurrentium; ex his oriri alios angustiores, perbreves, indispositо ac indiscreto ordine oblique in latera superficiemque medullae subreptitantes, eorundemque extremos fines, visum pene effugientes, vesiculoso spongioso medullari contextu intercipi.

17) Ramorum, tam ex trunco, quam e caulibus, prorumpentium, productionem solius vesiculoso-spongiosi medullaris contextus vegetabilis esse attributum.

18) Tuberculorum, polypis foetorum, numerum, respectu ad locum, cum medullae decremento increscere; hinc in trunco ramisque primariis omnium rarissima, in ramis secundariis copiosiora, in extremitatibus ramu-

ramulorum tuberosis ipsisque tuberibus copiosissima; maximumque eorundem prouentum, vt plantarum fructificationem, animaliumque generationem, vltimum Plantanimalis esse finem.

19) Zoophytum hoc, ab initio vegetabilem magis, quam animalem, aetate increscente plus plusque sensitiuam viuere vitam.

20) Labia tuberculorum cum cortice esse continua, polyporumque tentaculis arctissimo et ingenito nexu coniuncta; vt et

21) Polyporum exuuias in omnibus, ne vetustissimis quidem exceptis, tuberculis deprehendi superstites; hinc, vt e cellis suis vnquam demigrare queant polypi, fieri nullo modo posse.

22) Eosdem polypos, in cellis contentos, Zoophyti esse opus; contendere vero velle, Corallium rubrum, vel molle hoc, et Keratophyta ab ipsorum polypis strui, non minus ridiculum, quam arbores a suis exstructas dicere floribus.

23) Denique Corallii nostri, probe licet exsiccati, ramulos teneriores in aere humido rursus emollescere, et flexibiles fieri, monendum.

NB. Tab. XIII. Figurae omnes naturali
Tab. XIV Figurae omnes auctae
Tab. XV. Fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6 auctae
—— 7, 8, 9 et 10 naturali magnitudine expositae.
Tab. XVI. Fig. 1. et 2. ad tertiam partem imminutae.

* *
*

Zoophyto isti, e Coralliorum genere, spongioso, cuius succinctam Illust. Academiae tradidi descriptionem, adiungere liceat ex eodem genere tuber * pyriforme, nutans, quod in Gazophylacio Petropolitano inter Corallii rubri ramulos, leuioris momenti habitos, diu satis delituerat.

* Tab. XV. Fig. 10.

Est autem hoc tuber ratione structurae et substantiae priori simillimum, excepta tuberculorum stelliformium magnitudine, quae paullo minora sunt, colore incarnato, et pyri forma, qua differt.

Carneo autem colore solus est imbutus cortex *, parenchyma ** flauescenti, albicante medulla ***.

* Tab. XV. Fig. 10 a
** ibid. b.
*** ibid. c.

Labia * tuberculorum veram corticis esse continuationem, et in hoc subiecto ex colore satis superque elucet, quippe qui iis cum cortice vnus est idemque; immo vt alterius speciei labia corticem albedine excellunt, ita eadem in hac quoque saturatiore, quam ipse cortex, rubedine tincta sunt. Extra omne itaque ponitur dubium, quod in priore dissertatione de labiis contenderam.

* ibid. d.

De reliquo tuber hoc tubercula stelliformia ex omni parte gerit, inque sui medio consistentem habet medullam.

Ex

Ex forma igitur reliquisque attributis illud Arbusculae, a Cel. *Pontoppidano* in Hist. Norweg. Tab. I. pag. 275. V. descriptae, et Tab. No. 12, Fig. No. 5, delineatae particulam esse, facile iudicauerim, pro certo tamen nemini obtrudam. Specie interim ab antecedente differre, et forma et tuberculorum paruitas videntur innuere; specificum vero nomen ei imponere eo vsque differam, donec maiorem huius Corallii portionem aliquando videre mihi continget.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE FACTAE PETROPOLI, ANNIS MDCCLV. ET MDCCLVI. ST. V. ET CONSECTARIA.

Auctore

I. A. BRAVN.

Obseruationes meteorologicae vltimae, quas in Commentariorum nouorum Tom. V. exhibuimus, pertinent ad annum 1754. In praesenti igitur ordine sequuntur obseruationes annorum 1755 et 1756. Quam methodum in superioribus obseruationibus adhibuimus, ea et hic vsi sumus, eadem quoque instrumenta sunt vsurpata; plura igitur circa methodum et instrumenta monere quum superfluum videatur: statim ad ipsas obseruationes repraesentandas progredi licebit. Sequuntur primum altitudines barometricae summae et infimae mensium singulorum, intelligendo pedis Parisiensis pollices duodecimales, eorumque partes centesimas, per quas variationes ponderis atmosphaerae horum duorum annorum hic Petropoli innotescunt, dein variationes caloris, quas obseruationes thermometricae ostendunt, denique meteora potiora.

Altitudinum Barometricarum

Annorum 1755 et 1756.

		Summa.	Infima.		Differentia.
Ianuarii	10 et 12	28.80	27.47	die 2	1.33
Februarii	5	28.60	27.95	18	0.65
Martii	5	28.53	27.30	28	1.23
Aprilis	29	28.33	27.43	19	0.90
Maii	24	28.45	27.72	12	0.73
Iunii	18	28.23	27.63	13	0.60
Iulii	6	28.25	27.45	19	0.80
Augusti	7	28.50	27.40	1	1.10
Septembris	7.8.9	28.35	27.64	1	0.71
Octobris	18	28.35	26.95	24	1.40
Nouembris	4	28.20	27.15	28	1.05
Decembris	10	28.52	27.30	18	1.22.

Ergo Maxima huius anni 1755. 28. 80. Minima 26. 95. Differentia et Variatio annua 1. 85.

Annus 1756.

Ianuarii	25	28.65	27.05	d. 3	1.60
Februarii	21	28 23	27.30	5	0.93
Martii	2.3	28.35	27.13	14	1.22
Aprilis	2	28.30	27.63	23	0.67
Maii	9	28.33	27.70	17	0.63
Iunii	7	28.30	27.45	22	0.85
Iulii	8	28.43	27.62	23	0.81
Augusti	1	28.35	27.73	22	0.62
Septembris	9	28.62	27.43	24	1.20
Octobris	18	28.62	27.42	25	1.20

Nouembris	22. 28.73	- - 27.25	-	1 - 1.48
Decembris	7. 28.80	- - 27.72	-	10 - 1.08.

Maxima igitur hoc anno est 28. 80. Minima 27. 05. Spatium variationis altitudinis mercurii annuae 1. 75. Est igitur maxima huius anni 1756 altitudo aequalis summae altitudini barometricae anni praecedentis 1755, quum duorum horum annorum altitudo summa sit 28. 80.

Quodsi haec summa altitudo comparetur cum summa altitudine annorum antecedentium, patescit altitudinem summam annorum 1755 et 1756 esse minorem summa alias hic obseruata. Fuit illa ab anno 1750. 29. 10. quae 1750. Ianuarii 15 est obseruata, indicata nobis Commentariorum nouorum Tom. V. p. 378. Ad hunc annum 1750. vsque omnium hic obseruatarum summa fuit 29. 01. pedis regii paris siue 30. 95. pedis Londinensis, vti quoque in laudato Tom. V. Commentariorum nouorum videre licet. Manet igitur altitudo 29. 10 summa adhuc obseruatarum hic loci altitudinum barometricarum, quae igitur $\frac{10}{100}$ siue $3\frac{1}{2}$ lin. Par. maior est summa altitudine 28. 80. annorum 1755 et 1756.

Summa altitudo 1755. Ianuarii 10 et 12 mihi notata, sub sequentibus circumstantiis contigit. Ventus erat d. 10. W N W. 2 et d. 12 idem fere, scilicet W g N 2. Diebus antecedentibus ventus fuit variabilis, sequentibus autem ad d. 16. vsque fere idem perstitit, dein in N mutatus, quocum frigus quoque creuit ad 186. Thermometrum monstrabat d. 10. 163 et d. 12

162½

1621. Diebus antecedentibus et sequentibus proximis minores frigoris gradus fuerant obseruati. Dies 10 et 12^{mus} erant nubili, vti quoque dies proxime antecedentes et consequentes.

Minima barometri altitudo 1755 fuit 26.95 obseruata mihi Octobris 24; anni vero 1756 minima 27.05 notata Ianuarii 3. Et haec et illa altitudo minima maior est altitudine minima alias hic obseruata, scilicet pollicum 26.41 pedis parisiensis, siue 28.18 pedis londinensis. Quum igitur spatium variationis Mercurii 1755 sit 1.85. et anno 1756 1.75; spatium inter adscensus terminos et descensus Mercurii in tubo torricelliano manet idem, vti anno 1750 est determinatum, scilicet 2.69. Manet igitur media quoque altitudo eadem 27.75$\frac{1}{4}$ siue 27 pollices et 9 lin. pedis par. intelligendo medium arithmeticum inter altitudinem summam et infimam, quo sensu *Krafftius* mediam altitudinem sumsit, quum alias satis constet, per mediam altitudinem communiter eam intelligi, quae resultat, si summa altitudinum per numerum obseruationum diuidatur, qua ratione et mediae altitudines menstruae et annuae erui solent, quas, quoniam vtilitate non carent, forsitan in posterum quoque addemus.

Caeterum adnotanda adhuc sunt antecedentia, concomitantia et consequentia, sub quibus horum duorum annorum altitudines minimae contigere. Altitudo minima anno 1755 Octobris 24 obseruata 26.95. contigit vento WSW antecedente et consequente vento vario Thermometrum monstrabat 148, et regelabatur. Nubilum erat mane, sed coelum dein clarius factum nox serenissima est sequuta. Dies antecedentes

dentes a die 15 erant nubili, et dies quoque sequentes 25. 26. 27. et amplius, generatim vltra sex dies hoc mense sereni non fuere, caeteri nubili, pluuiosi et niuosi. Mercurius ab 28.35 d. 18. h. 11. p. m. ad hanc altitudinem minimam descendit.

Infima altitudo 1756 Ianuarii 3 = 27.05 sub sequentibus circumstantiis accidit. Descendit mercurius ab altitudine 28.80 ad hanc a die 1. Ventus erat SW, antecedens S et sequens O, dein N. Thermometrum 150 monstrabat, diebus antecedentibus 147 et 148, diebus aliquot sequentibus ab 148 ad 159 variabatur. Dies 3 fuit nubilus et niuosus, vti quoque proxime antecedentes et consequentes. Quum haec minima altitudo 1756 mense Ianuario contigerit, illa vero 1755 mense Octobri; et ex hisce et aliis multis adparet, minimas altitudines certis mensibus non euenire, vti quoque maximas, sed promiscue quolibet mense et sub diuersis quoque circumstantiis.

Si differentiae et variationes menstruae inspiciantur et considerentur, patet in differentiis et variationibus menstruis anni 1756 legem illam satis adcurate obseruari, qua variationes mensibus primis et vltimis, quam mediis, maiores esse solent: sed variationes menstruae anni 1755 exceptiones mensibus Februario et Augusto facere videntur. Nam mense Februario differentia est tantum $\frac{11}{20}$ sine fere octo lin. parif. adeoque solita minor; contra mense Augusto solita maior deprehenditur, scilicet 1 poll. 1 lin. et quod excurrit, sed harum exceptionum caussa procul dubio tempestati insolitae huius mensis, est adscribenda.

Caete-

Ceterum differentia vel variatio menstrua maxima fuit 1755 = 1. 40 mense Octobri, et minima $\frac{60}{1.0}$ mense Iunio. Anno vero 1756 maxima fuit 1. 60 mense Ianuario, et minima $\frac{62}{100}$ mense Augusto. Differunt igitur hae maximae et minimae differentiae, vti mensibus, quibus sunt notatae, sic quoque quantitate, licet minimarum parua differentia sit. Vt eo minus de adcuratione harum obseruationum quis dubitet, monemus, nos has instituisse, et adhuc instituere solere, secundum tria Barometra simplicia satis exacte concordantia, quorum tubi fere aequales sunt, diametri scil. 2 lin. et quia mutationes in Barometro Hugeniano sunt sensibiliores, ita vt initium descensus et adscensus satis adcurate ab attento obseruari queat, quod in barometris simplicibus fieri non potest, certe non tam facile, adhibuimus simul ad hunc scopum Barometrum Hugenianum, quod. vti constat, alias altitudines sat fideliter non monstrat. Caeterum has altitudines barometricas esse institutas in altitudine supra Neuam fluuium circiter 15 pedum iam monuimus. Haec hactenus de obseruationibus barometricis, sequitur vt ad thermometricas progrediamur. Et hae quoque obseruationes secundum tria et plura thermometra satis exacte concordantia factae sunt, ad quae, quod iam constat, scala Deliliana est adplicata. Composuimus 1755 tabulam comparationis vsitatiorum thermometrorum, comparauimus vsitatiores scalas thermometricas cum nostra, vt vno obtutu gradus scalae nostrae, non adeo alibi vsitatae, cum aliis comparari possint. Sequuti sumus in ea conficienda potissimum George Martine, in *Essays Medical and Philosophi-*

cal pag. 215 *The comparison of different thermometers*, et proprias experientias, quas alio tempore communicabo, quam hic adiicimus.

Obseruationes thermometricae, maximum et minimum caloris gradum cum differentia per singulos menses anni 1755 exhibentes, sunt, quae sequuntur.

Calor

		Minimus.	Maximus.	Differentia.
Ianuarii	23. - - -	192 - -	$148\frac{1}{2}$ d. 8 - -	$43\frac{1}{2}$
Februarii	12. 13. 21.	$183\frac{1}{2}$ - -	$148\frac{1}{2}$ d. 17 - -	35
Martii	8. - - - -	173 - -	137. 29 - -	36.
Aprilis	10 et 13.	160 - -	126. 22. 27. 28. -	34
Maii	16.	142 - -	106. 30 - -	36.
Iunii	11.	135 - -	104. 30 - -	31.
Iulii	30.	131 - -	109. 3 - -	22.
Augusti	18 et 29.	136 - -	118. 7 et 22 - -	18.
Septembris	13. 14.	145 - -	124. 1. - -	21.
Octobris	23.	153 - -	133. 1. 7. - -	20
Nouembris	24.	172 - -	141. 8 - -	31
Decembris	12.	183 - -	148 17. 18. 19 -	35

Ergo frigus maximum 192 et Calor maximus 104. Differentia et variatio caloris annua 88 graduum.

Annus 1756.

Ianuarii	8.	$178\frac{1}{2}$ - -	146. D. 30 - -	$32\frac{1}{2}$.
Februarii	24.	174 - -	142. 11 - -	32.
Martii	1.	170 - -	128. 30 - -	42.
Aprilis	7.	153 - -	116. 29 - -	37.

Maii

Maii	8. 149	- -	105.	25 - -	44.
Iunii	3. 138	- -	105.	30 - -	33.
Iulii 8 et	30. 136	- -	103.	5 - -	33
Augusti	11. 140	- -	121½.	2 - -	18½
Septembris	8. 144	- -	128.	24 - -	16
Octobris	28. 161	- -	140.	14 - -	21
Nouembris	22. 183	- -	144.	4 - -	39
Decembris	25. 188	- -	152½.	14 - -	35½.

Ergo frigus maximum 188, et Calor maximus 103. Differentia vel variatio annua 85.

Minus igitur frigus huius anni 1756 est frigore anni praecedentis 1755 gradibus 4. Differt tamen frigus anni 1755 maximum a maximo alias hic obseruato 9 gradibus. Nam ad hunc vsque annum maior frigoris gradus, quam 201, a *Kraftio* et me obseruatus non est. *Delilius* tamen 1733 Ian. 27 gradum 202½ et 204 se obseruasse testatur, in *Memoires pour servir au progres de l' Astronomie et la Physique.* Annus 1759 hunc maximum frigoris gradum mutauit, dum frigus ad 212 auctum est, vti ex sequentibus obseruationibus anni 1759 patebit.

Insigniores porro frigoris gradus anno 1758 praeter maximos menstruos notatos fuere.

Ianuarii 1. 188. d. 17. 176 et 181; d. 18. 183. 186 et 189; d. 19. 185 et 190; d. 20. 191 et 185; d. 21. 180 et 183; d. 22. 186 et 188; d. 24. 180; d. 25. 181; d. 26. 183; d. 27. 187; d. 28 et 29. 188. Februarii 14. 172; d. 21. 178 et 183; d. 22. 181. Nouembris 24. 170 et

 172;

171; reliqui dies huius mensis mitiores. Decembris 7. 177 et 180; d. 10 et 12. 174 et 183; d. 13. 177; d. 14. 170.

Notandum hic est in quibusdam Germaniae locis tantos frigoris gradus, quantos antea nunquam, hoc anno esse obseruatos. (Vid. Nouellas litterarias Goettingenses No. 59. huius anni.) Nimirum Goettingae Februarii 8. st. n. gradus 19 infra o scalae Fahrenheitianae, conueniens cum nostra 192½. Cattlenburgi, loco a Goettinga circiter duobus milliaribus germanicis sito, Februarii 1. st. n. circa mediam noctem gradus frigoris 30 infra o scalae Fahrenheit. est notatus, conueniens cum nostra 201⅔. Patet igitur hinc primum, frigus Goettingense fuisse aequale maximo frigoris gradui hoc anno Petroburgi obseruato; Cattenburgense autem fere 202 non solum maximum huius anni gradum frigoris multo superasse, sed etiam omnium adhuc hic obseruatorum maximo fuisse aequalem. Non obstantibus insignibus hisce frigoris gradibus in Germania obseruatis, existimamus tamen, hiemem huius anni hic Petroburgi fuisse saeuiorem, quoniam gradus frigoris magni in Germania breuissimum tempus tantum durauerunt, insigniores contra frigoris gradus Petroburgi fuere constantiores et diuturniores. Durationis autem frigoris in diiudicando hiemis gelu esse praecipue rationem habendam, per se facile intelligitur. Caeterum tanti frigoris gradus in Germania eo magis sunt admirandi, quo receptior sit opinio, infra o scalae Fahrenheitii frigus crescere neque solere, neque facile posse. Frigus Cattlenburgense incidit in Febr. 1. st. n. adeoque in Ianuarii 21. st. v. quo die hic Petroburgi frigus mane erat 183, et vesperi

180,

180, die vero antecedenti 20, erat mane 191. vesperi 185½. Frigus Goettingense insigne obseruatum est Febr. 8. st. n. adeoque Ianuarii 28. quo die frigus mane erat 185 et nocte 188. nocte antecedenti 187. Ergo nostrum frigus maximum anni 1755, aequale 192, duobus diebus tardius hic incidit, scilicet Ian. 23, quam frigus Cattlenburgense, et 5 diebus citius, quam frigus Goettingense. Non igitur vniuerse statui posse videtur frigus quasi migrare ex locis septentrionalibus in minus septentrionalia, vti quibusdam visum est, et nonnunquam videri posset. Insigniores frigoris gradus anni 1756, praeter notatos maximos quolibet mense, fuere sequentes. Ian. 16. 177. Satis mite frigus huius mensis fuit et solito minus. Februarii 21. 172. d. 24. 174 et huius mensis frigus solito minus fuit. Nouembris 20. 175 et 176. d. 21. 178 et 183; d. 22. 183; d. 28. 173. Decembris 1. 170; d. 4. 175; d. 5. 178 et 180 d. 6. 180 et 182; d. 7. 179; d. 23. 174 et 175; d. 24. 182; d. 26. 180.

Maximum frigus 192 anni 1755 sub his circumstantiis contigit. Notatum est Ianuarii 23. hora 7. a. m. vento vix sensibili, vti solet in frigore insigniori. Ventus antecedens lenis NNW 1 et sequens NW 1 fuit. Barometrum monstrabat 28.00, ad quam altitudinem a 28. 18 d. 20. obseruata descenderat, sequens altitudo barometrica fuit 28. 03 dein 27. 95. Antecedens obseruatio thermometrica monstrabat 188, et sequens 180. Dies 23. fuit serenus, vti quoque plerumque solet frigore ingenti. Dies antecedens fuit quoque serenus, consequens autem nubilus.

Frigus maximum anni 1756 incidit in Decembris 25. h. 11. p. m. sub sequentibus circumstantiis a mihi notatum. Ventus erat o et lux borealis placida. Ventus antecedens N 1, consequens autem N W 2. Nox erat serenissima, vti quoque ipse dies serenus, et antecedens; sequens autem nubilus et niuosus. Antecedens frigus erat 182 et 183, sequens vero 180 et 161. Barometri altitudo tempore obseruationis erat 28. 42 antecedens 28. 35 et sequens 28. 40. Licet igitur frigus maximum certo mense non oriatur; vti 1755 mense Ianuario et 1756 mense Decembri contigit; solent tamen hi duo menses hic loci fere esse, in quibus frigus maximum totius anni incidere solet.

Quemadmodum in summo frigore altitudines barometricas insignes esse solere et debere constat, sic quoque tranquillum esse solet, et venti raro ex NNO et O, frequentius ex NW et SO spirare solent. Vti tranquillitas quoque regnat in magnis caloribus. Consideraudimus hactenus frigus maximum, siue calorem minimum, sequitur, vt consideremus nunc calorem maximum horum duorum annorum 1755 et 1756. Parum aut nihil inter se differunt hi calores maximi, est enim anni 1755. calor maximus 104, anni vero 1756 = 103. Ad hoc vsque tempus maximi caloris gradus hi fere esse solent; sequenti vero tempore 6 gradibus calor maximus auctus est, vti ex sequentium annorum obseruationibus patebit. Saepius gradus 104 est obseruatus, vti ex antecedentibus obseruationibus communicatis manifestum est. Est igitur differentia et varia-

variatio maxima caloris anni 1755. gr. 88. et anni 1756. graduum 85, quae quoque parum differunt, et fere ordinariae hic esse solent. Maxima caloris variatio menstrua anno 1755. fuit mense Ianuario 43½, minima mense Augusto gr. 18.

Maxima vero anni 1756. menstrua gr. 44. mense Maio, minima autem gr. 16 mense Septembri. Maximae igitur et minimae caloris variationes vel differentiae certis anni mensibus contingere non solent, neque quantitate conuenire, quamuis multum non differant, quantitate horum duorum annorum. Maxima intra nychthemerum = 22, minima = 0, quod saepius quoque fieri solet. Differentia maxima adhuc mihi hic obseruata inter thermometrum soli expositum et in vmbra constitutum est 30 gr. et minima sole per nubes lucente = 4 et 5.

Calor maximus 104 anni 1755, incidit in Iunii 30 p. m. inter 2 et 3 obseruatus sub sequentibus circumstantiis:

Calor diei antecedentis p. m. erat 105 et sequentis 115. Ventus erat S 1, vti quoque die antecedenti, sequenti autem mutatus in W 2 et porro in W 3. Dies ipse erat serenus, vti quoque antecedens et consequens. E longinquo tamen paullum tonuit.

Barometri altitudo 27. 95. eadem quoque die antecedenti integro, sequenti vero 28. 10. fuit.

Calor

Calor maximus anni 1756. Iulii 5. h. 2. p. m. est obseruatus. Ventus erat NO2 vti quoque die antecedenti, sequenti O et ONO2. Altitudo barometrica 28. 22, antecedens 28. 19 et sequens 28. 30. Dies erat serenus et sol rubicundus, vti quoque dies antecedens, quin omnes a Iulii 1mo, itidem consequens et plures sequentes. Maximi calores certo mense quoque non oriuntur, Iunio tamen vel Iulio ordinarie.

Caeterum plures huius anni 1756. dies insignem calorem habuerunt, praecipue huius mensis. Maii 25. 105; Iunii 7 et 12. 110; Iulii 2. 104; d. 6. 105; d. 7. 103½; d. 8. 104; d. 9. 106; d. 11 rursus 104; d. 19. 112; d. 21. 111; ita vt hic mensis partim ob insignes caloris gradus, partim ob continuum fere calorem, fuerit calidissimus.

Anni vero 1755. insignes caloris gradus, praeter menstruos notatos, fuere sequentes: Maii 21. 112; d. 22. 108; d. 28. 109; d. 29. 111; d. 30. 106; Iunii 22. 106; d. 23. 110; d. 24. 112; d. 25. 107; d. 29. 105; d. 30. 104; Iulii 3. 109; d. 4. 110 d. 5. 110; d. 6. 110; d. 16. 112. Fuit igitur et huius anni mensis Iulius omnium calidissimus, licet non tam calidus, quam Iulius anni 1756. Notandum tamen est, mensem Iulium non semper caeteris esse calidiorem hic, sed multas occurrere exceptiones, vt et obseruationes antecedentes testantur.

Circa obseruationes thermometricas monendum adhuc existimamus, antemeridianas non esse certa hora ra quouis die factas, vti plerique solent, sed quantum fieri potuit, sub ortum solis; pomeridianae semper inter h. 2 et 3. quoniam aliter frigus maximum, et calor maximus diei haberi non potest. Nam regulariter calor maximus p. m. h. 2 et 3 esse solet, a quo tempore rursus decrescit ad ortum solis vsque, quo igitur tempore regulariter caeteris paribus minimus esse solet et debet. Superest, vt potiora recenseamus Meteora et Phaenomena.

Primum venti vehementiores anno 1755. fuere sequentes: Ianuarii mense nullus vehementior, caeterum venti ex omnibus quidem plagis spirarunt, potissimum tamen ex N et O, vti quoque mense Februario eandem directionem potissimum retinebant, et inter eos nullus vehementior. Mense Martio solo die 27. fuit S 3, leniores caeteri, potissimum autem fuere ex W et S. Aprilis 5, W 3, caeteri maxime ex W. Maii 9. N 3, reliqui varii ex omnibus plagis fere aequaliter spirarunt. Mense Iunio vehementior nullus, caeteri potissimum ex W et O. Iulii 2. W 3, reliqui potissimum ex W et S. Mense Augusto vehementior nullus, reliqui potissimum ex S dein ex W. Septembri nullus vehementior, caeteri autem potissimum ex W et S, minus tamen frequenter ex S, quam ex W. Mense Octobri maiorem partem W regnauit, nullus vehementior. Nouembri vehementior nullus, regnauit autem potissimum S et W; Decembri vehementior nullus, reliqui variabiles admodum.

Venti vehementiores anni 1756. per singulos menses fuere, qui sequuntur. Ian. 9 S 3; d. 27 W 3; regnauit potissimum S et W. Februarii 12 W 3; d. 29 O 3, regnauit W et S. Martii 12 ONO 4 mercurio ab h. 3. p. m. ad 11. p. m. in barometro descendente a 27. 80 ad 27. 67. et porro d. 14. ad 27. 13, quo die vesperi cessauit ventus, mutatus paullo ante in W 3; d. 26 S 3; et hoc mense S et W regnarunt. Aprili vehementior nullus, reliqui varii, vt solet. Mense Maio itidem vehementior nullus, regnauit W et NW. Iunii 14 et 15 WNW 3 reliqui varii. Iulio vehementior nullus; spirauere potissimum W et S. Augusto vehementior nullus, reliqui ex W et O praecipue flauere. Septembri venti varii, nullus vehementior. Octobri nullus vehementior, regnauit potissimum W. Nouembri nullus vehementior, regnauit SW. Decembri venti varii, inter quos nullus vehementior. Ex hisce ventorum obseruationibus patet primum, duos hos annos a ventis vehementioribus satis fuisse liberos, quum secundum antecedentes obseruationes venti vehementes multo frequentiores esse soleant. Deinde vnica procella Martii 12. 1756. inter ventos vehementiores notatos occurrit, quod etiam rarius accidit, quum non facile annus a procellis hic liber esse soleat. Porro ex comparatione plagarum, vnde venti spirarunt, patescit, per totos hos annos potissimum W deinde S regnasse, id quod vtplurimum fieri hic solet.

Ad

Ad gradus ventorum quod attinet, vel me non monente adparet, me cum multis aliis 4 gradibus esse contentum, vbi 4 scilicet procellam indicat, caeterum constat alios in 8 gradus diuidere vehementiam venti quoque solere.

Tonitrua et fulmina his duobus annis sequentia mihi sunt obseruata. Primum anno 1755 contigit Iunii 7. h. 6. a. m. quod primum alias vtplurimum mense Aprili fieri solet, quin etiam mense Martio, quod rarius. Altitudo barometrica 27. 92, gradus thermometri 123, ventus S erant; d. 12 circa meridiem tonitru cum magna pluuia et grandine, barometri altitudine 27. 75, calore 126, vento W; d. 28 h. 5. p. m. barometrum 27. 95, thermometrum 120 monstrabant, vento S 3; d. 30 *tonitru* e longinquo, altitudo barometri 27. 95 et calor 104. Iulii 8 tonitru cum pluuia, mane vento O, thermometro 123, barometro 28. 00; d. 19 fulgurationes frequentes nocte, sed nullum tonitru. Augusti 12 tonitru, vento SW, barometro 27. 80, thermometro 134.

Anno 1756. Apr. 30 primum tonitru mane, quo turris templi St. Petri in Castello fulmine percussa delapsa est mane post h. 5. a. m, barometro notante 27. 80 et thermometro 115, vento SW. Maii 4 fulgetra, calore 138, pondere atmosphaerae 28. 18 item d. 7 vesperi fulgurationes, calore 139, barometrica altitudine 28. 05. Iunii 21. p. m. tonitru, vento SSO, thermometro 125, barometro 27. 78; d. 23 tonitru cum grandine, vento NW, barometro 27. 83, thermometro 127 notantibus; d. 29 tonitru vehemens ab h. 10. a. m. durauit ad h. 4. p. m. barometro 27. 98, thermometro 125, vento W. Iulii 1 tonitru p. m. thermometro 121, barometro 28. 08; d. 4. p. m. tonitru, thermometro 120, barometro 28. 10; d. 11 et 17 tonitru, barometro 28. 00 thermometro 122; d. 19 tonitru cum pluuia, barometro 27. 85, thermometro 112, quod fuit hoc anno vltimum.

Quod si hae obseruationes tonitruum vtriusque anni inter se comparantur, patescit, primum tonitrua anno 1756. multo frequentiora, quam anno 1755. fuisse et vehementiora. Nam anno 1755. diebus tantum 5 tonitrua, eaque non vehementia fuere, quum contra ea anno 1756. diebus 9 vtplurimum satis vehementis tonitrua acciderint, eaque periculosa. Vti prima et vltima tonitrua vtriusque anni satis differunt, dum primum anni 1755. contigit demum Iunii 7, contra primum anni 1756. April. 30, vltimum anni 1755. Augusti 12, contra vltimum anni 1756. iam Iulii 19: sic differentia multo maior nonnunquam est deprehensa, quum tonitrua iam mense Martio inceperint, vt monuimus, et vltimis Augusti diebus desierint, quod tamen rarius.

Addidimus in recensendis tempestatibus fulmineis ventos, vt pateat ex quibus plagis potissimum eae venire soleant. Scilicet vtroque hoc anno potissimum ex S et SW, id quod aliis quoque annis vtplurimum fieri

solet

folet, quae ex SO, vehementiora vtplurimum esse solent, vti quoque interdum ea ex S. Praeterea adiecimus obseruationes barometricas et thermometricas, quoniam intra certos terminos ponderis aeris et caloris tonitrua fieri videntur praecipue saeuiora. Nam non facile tonitrua inprimis saeua hic obseruantur, si mercurius vltra 28 pollices Parisienses adscenderit, vti ex his et aliis pluribus obseruationibus elucet. Nam illud Iulii 2 et 4, quo tempore altitudo mercurii 28. 08 et 28. 10 notabatur, fuere lenissima et e longinquo. Si porro calores considerantur, omnia tonitrua vtriusque anni mediocri calore orta sunt; pleraque scilicet vehementiora inter caloris gr. 115 et 139, vti quoque vtplurimum aliis annis fieri solet.

Meteora emphatica vtriusque anni huc fere redeunt:

Halo circa solem adparuit 1755 Ianuarii 28. h. 4. p. m. thermometro notante 175, et barometro 27. 80. vento SO 2, sequuta nocte est Lux borealis exigua.

Circa lunam halonem obseruaui Octobris 14. h. 11. p. m. tenuem et pallidam, notante barometro 28. 00, thermometro 142. vento SW 1. Anno 1756 nullum plane halonem neque circa lunam, neque circa solem obseruare mihi contigit. Minus igitur frequentes halones, quam alias, hisce annis fuere, tam circa solem, quam circa lunam, hae illis et hic loci multo frequentiores esse solent ordinarie.

Aurorae boreales anno 1755 et 1756 mihi notatae sequentes sunt. Ianuar. 28. 1755 nocte circa h. 11. lux borealis sine motu et radiis zenith versus eulbratis adparuit, notante barometro 27. 92, et thermometro 188. vento vix sensibili, vt solet. Ventus antecedens et sequens erat SO2. Plures hoc anno obseruare mihi non licuit. Anno 1756 Septembris 11. itidem lux borealis placida conspecta est h. 11. p. m. monstrante barometro 28. 52, et thermometro 141. vento O vix 1, per diem fuit SW2. Porro Decembris 25 h. 11. p. m. lux borealis, sed rursus placida visa est nocte serenissima, vt solet, notante thermometro 188, barometro 28. 42, aere tranquillo. Nulla igitur vtroque hoc anno insignis aurora borealis adparuit, saltim mihi notari potuit, quod satis insolitum adhuc, vti quoque talis exiguus earum numerus est rarior. Has auroras boreales venti vehementiores non praecesserunt, neque frigus sequutum est, vti alias nonnunquam fieri solet, praecipue, si fuerint insigniores.

Obseruationes acus magneticae eo magis nunc adiiciendas putamus, quia interdum motum oscillatorium, procul dubio ab electricitate aeris pendentem, in acu magnetica, nobis detexisse videmur. Potest igitur hac ratione praesentia et defectus, gradus maior et minor electricitatis atmosphaerae ad mutationes tempestatum multum concurrentis, sine omni periculo obseruari. Sed acus debet esse mobilissima. De his obseruationibus in posterum plura; hic tantum monemus, declinationem mediam adhuc fere

re

re $4\frac{1}{2}$ gradibus a borea W versus aequalem, adeoque hic satis esse constantem, quod iam monuimus Commentar. Nou. Tom. V. pag. 359. occasione recensionis declinationis sinicae *Pekini* constantis, videlicet 2 graduum a borea W versus, non variatae a triginta inde annis. Differentia inter declinationem maximam et minimam 10 minuta prima hic non facile excedit, quantum adhuc obseruare potui.

Altitudinem pluuiae adcurate ob impedimenta adnotare non potui, hinc eam hic praeterimus, vti quoque reliqua meteora aquea, rorem, nebulas, grandines niues, quoniam omnia sunt ordinaria. Respectu roris monemus tantum, nos imposuisse plantis quidusdam vitra ampla, vt illum rorem, qui merus sudor plantarum est, rite ab rore decidente distinguere potuerimus, vbi quidem illum aestate fere omni die mane obseruauimus, rarius autem decidentem, id quod et aliis iam obseruatum esse constat.

Hiems anni 1755 satis frigida, continua fuit, et bona hic, praecessit auctumnus bonus, qui vt plurimum prognosticum hiemis qualitatis esse solet. Aestas quoque fat bona, quam hiems bona praesignificare saepe solet, vti quoque ver mature ingruens. Idem valet de anni 1756 hieme mitiore. Ab indole igitur auctumni saepius qualitatem anni futuri probabiliter hic diiudicare licet. Caeterum vltima congelatio 1755 Aprilis 20, et prima rursus Octobris 5. eiusdem mensis; prima nix die 21. Neua flumen glacie obductum Nouembr. 24, et 1756 nocte

nocte inter 11 et 12 mensis Nouembris. Vltima congelatio 1756 Aprilis 17. et rursus prima Octobris 10. Neuae glacies fracta et soluta 1755 April. 3 et 1756. Aprilis 2.

Annus vterque quoque sat fertilis fuit in his regionibus, si potiorum prouentuum ratio habeatur, vniversalis enim fertilitas vix ac ne vix quidem vnquam contingere solet et potest.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DE REFRACTIONIBVS IN ORIS SEPTENTRIONALIBVS

Auctore

G. HEINSIO.

Quo maiori cura refractiones aeuo recentiori indagarunt Astronomi, vt elementum hoc in praxi desideratissimum, omni, qua licet, certitudine elaborarent; eo plures se obtulerunt varietates, in quibus euoluendis studium omne nondum exhaustum est. Locum quoque obseruatoris tum quoad libellam, tum quoad situm respectu Aequatoris hic attendi debere, experimenta suaserunt. Si locum obseruatoris sub omnibus circumstantiis semper eundem ponas, generatim quidem refractiones variari deprehendes pro diuersa sideris super horizonte altitudine, quam quidem variationem dudum cognouerunt Astronomi, et ad leges certas adstringere allaborarunt, vt cuique altitudini visae certam atque determinatam adscribere potuerint refractionem; ast si quaeras, an, manentibus licet omnibus, experientia quoque in eadem altitudine eandem semper refractionis quantitatem doceat, (abstrahamus ab eo discrimine, quod difficultas obseruandi producere solet) discrepantiam saepissime notabilem inuenies. Vt hanc eo melius cognoscere atque distinguere possimus, *refractiones*, quae se in eadem altitudine visa, sub quibuscunque caeterum circumstantiis, offerre solent, breuitatis causa *homologas* vocare licebit. Iam vero antememoratus obseruator in vicinia horizontis refractiones homologas admodum variabiles subinde experitur tum eodem die, in eadem aeris temperie, interiecto tantum tempore exiguo; tum diebus diuersis in eadem licet anni tempestate; tum in diuersis anni tempestatibus pro diuerso caloris et frigoris statu; ita, vt ob hanc refractionum inconstantiam Astronomi quoque obseruationes coelestes in vicinia Horizontis, quantum licet, euitare soleant. In maioribus quidem siderum altitudinibus idem obseruator tantam refractionum homologarum inconstantiam non deprehendit, vt nunc refractionum variationes secundum altitudines certiori modo definire et in tabulam redigere ipsi liceat; aliquam tamen homologarum varietatem adhuc inuenit connexa cum aeris temperie respectu caloris et frigoris, et alligatam quasi ad gradus thermometri, dum maiorem refractionem experitur regnante frigore, minorem calore, eandem thermometro eundem gradum notante, prout id obseruationes consulto institutae DN. LE MONNIER *in Praef. ad Histor. coelestem*, et DN. CASSINI DE THVRY *in Commentar. Acad. Reg. Scient. Paris.* ad an. 1742. et 1743. inculcare videntur.

Sed excedat nunc obseruator e suo loco, quem hactenus immotus tenuit, mutetque eum, non quidem ratione situs geographici respectu circulorum terrestrium, sed quoad eleuationem super termino aliquo relationis, quem libella definire solet. Altius verbi causa ascendat,

sem

seu a terrae centro magis recedat, et obseruatas tunc refractiones comparet cum homologis in pristino loco sub iisdem circumstantiis definitis; minores istas inueniet ac ante. Sic ad libellam superficiei maris maximae, caeteris paribus, prodeunt refractiones homologae; minuuntur deinceps continuo pro maiori obseruatoris eleuatione super isto libellae termino; prout luculenter edicit DN. BOVGVER ex obseruationibus suis in vicinia vrbis *Quito* institutis, (vid. *Commentar. Acad. Reg. Sc. Paris.* ad an. 1739. et 1749.).

Tandem obseruator locum suum geographice quoque mutet respectu Aequatoris terrae, seu mutet latitudinem geographicam, seruatis interim libellae reliquarumque circumstantiarum conditionibus; discrepantia iterum in refractionibus homologis se offeret; minores istae prodire solent in vicinia Aequatoris terrestris, maiores accedendo ad Polos. Hanc refractionum varietatem in praesenti potissimum respicere animus est; quo in negotio pro modulo quasi accipiamus *Tabulam refractionum Cassinianam*, quae pro latitudine Parisiensi Astronomis Gallis vsum semper praestitit insignem; ita quidem, vt refractionum homologarum sub minoribus altitudinibus praecipue habeamus rationem, quae discrimen suppeditare possunt notabile; cum e contrario absolutae refractiones in altitudinibus magnis non satis sensibiles esse soleant.

Obseruationes iam RICHERII in insula *Cayenna* saeculo superiori, et recentiores BOVGVERII in regno

Peruano inſtitutae, rem, pro ſitu obſeruatoris in vicinia aequatoris, extra dubium ponunt. (vid. *Hiſtor. Acad. Reg. Sc. Pariſ.* ad an. 1700. p. 140 ad. Batav. et ad an. 1739. pag. 62.) Refractiones aequatoreae vtique inueniuntur minores refractionibus homologis Pariſienſibus. Aſt ſi obſeruationes conſulas, quae refractionum conditiones patefacere poſſunt in regionibus reſpectu climatis Pariſienſis borealioribus, rem nondum deciſam inuenies. Inſperatus Solis exortus, qui *Hollandis* in *Noua Semla* ſub latitudine boreali 76 graduum hybernantibus contigit die 24. Ianuarii ſtyl. vet. an. 1597, argumentum praebet inſignis refractionis horizontalis in oris ſeptentrionalibus, quam *Ricciolus* in *Geograph. Reform.* pag. 263. ex ſuo calculo 2. grad. 7′. 56″. aſſignat, et quae fere quadrupla eſt homologae in Tabula Caſſiniana. Ex obſeruatione Solis inoccidui, cui *Bilbergius* an. 1695. *Tornouiae*, ſub latitudine boreali 65°. 43′. a ſe definita, inuigilauit, refractio 58. minutorum in altitudine viſa 0°. 23′., ideoque fere dupla homologae Pariſienſis emergit. (Vid. *Comment. Acad. Reg. Scienc. Pariſ.* ad an. 1700.) Et ſic quidem augmentum refractionum homologarum in acceſſu ad Polos ſatis euictum videtur. E contrario recentiores Illuſtris *Maupertuis* obſeruationes itidem *Tornouiae* habitae, totam fere concluſionem euertunt. Ex altitudinibus enim Solis meridianis in vicinia Horizontis inter 1°. 57′. et 2°. 46′. captis ad finem anni 1736 et initium 1737. ideoque hyberna tempeſtate, quae refractiones, caeteris paribus, maiores eſſe deberent, deductae refractiones parum vel nihil diſcrepabant a refractio-fractionibus homologis Parisiensibus in tabula Cassiniana; quam conuenientiam quoque altitudines meridianae Veneris inoccidnae ad finem Aprilis an. 1737, nec non distantiae Stellae polaris et Arcturi a Zenith obseruatae docuerunt; ita, vt ipse Cel. *Maupertuis* concluserit, si refractiones in vicinia aequatoris notabiliter minores inueniantur homologis Parisiensibus, eas progrediendo Parisiis ad circulum polarem sensibiliter non variari. (*Figure de la terre* ed. Bat. 1738. pag. 169.) Nec obseruationes *Bilbergii* sententiae huic refragari luculenter ostendit idem Cel. obseruator, ex eleuatione Poli *Tornouiae* a se definita, quam 8. minut. maiorem inuenit Bilbergiana, imo 11. min. maiorem, si *Bilbergii* obseruationi debita elementa fuissent applicata, id quod maiorem in refractione Bilbergiana errorem vtique arguit. His ita comparatis, cum id, quod Hollandis in Noua Semla contigit, animaduersiones quoque admittat, etsi demus, insolitum quid in refractione horizontali ibi accidisse; quaestio: *an refractiones homologae accedendo ad Polos incrementa capiant*; discussionem vlteriorem non respuit.

Obseruationes ab exercitato obseruatore et instrumentis idoneis consulto institutae, solutionem eiusmodi quaestionis suppeditare debent, quibus eo maius pretium statuendum est, quo rarior iis faciendis conceditur opportunitas, et quo maiora impedimenta et vitae incommoda pro conditione regionis, in qua fieri debent, sub zona nempe frigida positae, et ob coeli inclementiam inhabitabilis, se offerre solent. *Summorum*

Russiae

Rußiae Imperantium gloriosissima munificentia feliciter factum est, vt eiusmodi obseruationes pro circumstantiarum conditionibus vtique rarissimae reuera extent, instar fructus singularis, quam celebratissima *Russorum* in *Kamschatkam* expeditio subministrauit. Scilicet *Ludovicus de l'Isle de la Croyere*, obseruator Astronomiae notissimus, qui in dicta expeditione studium suum in eo posuit, vt situm locorum *Rußiae* et *Sibiriae* geographicum ex obseruationibus coelestibus colligeret, circa finem anni 1737 iter fecerat in extremas, quae respectu *Iakuti*, vrbis Sibiriae, ad decursum fluuii *Lenae* boream versus sitae sunt, regiones. Penetrauerat vsque ad habitationem hybernam ad dextram fluuii *Olenek*, haud procul ab ostio, quo iste in Oceanum septentrionalem se exonerat, extructam, et inde *Hybernaculum Olenek* (*Olenek - Zimow'je*) dictam. Distat istud ab ostiis fluuii *Lenae* in occidentem; et latitudinem habet borealem 73°. 3′. 52″. vt infra patebit. Peruenit in hunc locum noster die 16. Ianuar. stil. vet. an. 1738, a quo tempore vsque ad initium Aprilis eiusdem anni varias ibi instituit, circa altitudines Solis et fixarum meridianas aliaque phaenomena, obseruationes, quae simul cum aliis ab obseruatore nostro in itinere Kamschatkensi postea habitis, post mortem eius *Illustri Academiae Scientiarum Imperiali* fuerunt tradita. Solutis quidem chartulis et nonnunquam inordinatim dispositis, vt ferre solent eiusmodi itineris incommoda, consignatae erant istae obseruationes; hoc tamen non impediuit, quo minus varias, ad praesens institutum optime facientes, certo excerpere licuerit. Quid si hae obseruationes

tiones docerent, refractiones Olenecenses ab homologis Parisiensibus nihil differre, immo potius his paululum minores plerumque prodire? Nonne sententia Illustris *Maupertuis* eximium in modum confirmaretur? Nonne singulare pretium obseruationibus iis statuendum esset, quae in tam propinquo ad Polum accessu, quem nullus Astronomorum vnquam attigit, refractionum homologarum constantiam inculcarent, et quidem sub eiusmodi circumstantiis, quae alias refractiones solito maiores indicare solent, in loco nempe humili, haud procul a littore oceani sito, et in ea anni tempestate, quae rigidissimum gelu in regionibus memoratis procreat?

Sed ad institutum: quod vt rite prosequar, primum obseruationes ipsas transscribam, illustrationem earum deinde addam, et tandem deductiones subiungam. En obseruationes:

Olenezi an. 1738. styl. vet.	*Nomina fixarum*	*Altitudines meridianae obseruatae.*	
d. 23. Februar.	Aldebaran	32°.32′.30″.	versus austr.
	Rigel	8. 8. 0	
	Capella	62.17. 0	
	Capella	28.25. 0	versus bor.
	Lyra	21.18.15	
d. 24. Februar.	Aldebaran	32.32.30.	versus austr.
	Rigel	8. 8.30.	
	Capella	62. 16.40.	
	Capella	28.25.20.	versus bor.
	Lyra	21.18.30.	

Altitudines meridianae limbi superioris Solis (apparenter inferioris) obseruatae versus austrum.

Febr.	4.	4°. 17′. 0″.	dub.	Mart.	1.	13°. 30′. 0″.	
	6	4. 57. 0.	vent.		3	14. 17. 30.	
	7	5. 17. 0.			4	14. 40. 15.	dub.
	8	5. 38. 30.	exact.		8	16. 14. 0.	
	10	6. 20. 0.	dub.		9	16. 37. 30.	
	11	6. 42. 30.	dub.		10	17. 1. 0.	dub.
	13	7. 24. 15.	dub. non nihil		11	17. 25. 0.	
	14	7. 46. 0.	bona		15	18. 58. 45.	
	15.	8. 8. 30.	dub.		18	20. 9. 15.	
	16.	8. 31. 0.			21	21. 19. 15	
	17.	8. 52. 30.			22	21. 41. 45.	
	20.	10. 2. 0.			25	22. 51. 15.	
	22.	10. 47. 15.			27	23. 36. 0	
	25.	11. 56. 0.			30	24. 43. 0	
	27.	12. 42. 0.		April.	1.	25. 28. 30.	

In transitu Lunae per Hyades, qui Olenecii die 15. Februar. styl. vet. an. 1738. contigit, obseruator noster feliciter annotare potuit occultationes a limbo Lunae obscuro duarum fixarum 5^{tae} magnitudinis, sibi valde vicinarum, quas *Bayerus in Vranom.* vnica litera θ signat, Tab. XVII. cui obseruationi schema extemporaneum, vt Fig. 1. situ Fig. 1. inuerso monstrat, euidentiae caussa adpinxerat. Ope tubi astron. 7. ped. stellam A (re vera australiorem), vidit immergentem 6^h. 29′. 41″.; stellam vero B (re vera borealiorem) 6^h. 44′. 23″. tempore vero. Momentum

mentum pro A intra 9. vel 10, pro B intra 5 vel 6. secunda temporis certum pronunciat; obstitit enim ventus.

Hae sunt obseruationes, quas nunc dilucidare conuenit. Instrumentum, quo altitudines Solis et fixarum captae sunt, expresse quidem non nominauit noster; cum autem iste an. 1733 Petroburgo Sibiriam petens eum Quadrantem transportauerit, quo antea vsus fuerat Archangelopoli et in nonnullis Lapponiae locis, Parisiis nempe ab artifice CHAPOTOT confectum, radii 18 digitorum, cuius mentio fit in *Tom. III. Comment. Acad. Imper. Petrop.* p. 433. et 438. nullum est dubium, quin idem instrumentum adhibuerit in obseruationibus Oleneceensibus. Ipsae altitudines transscriptae ita sunt comparatae, prout eas obseruationes immediatae suppeditarunt, nulla praeuia cognitione, an linea fiduciae diuisioni Quadrantis rite respondeat; an vero *error*, vt dici solet, hic se offerat; nec refractionum et respectiue parallaxium vlla habita est ratio. Imo altitudines fixarum meridianae tum versus austrum, tum versus boream, consulto captae sunt, vt inde error quadrantis innotesceret; qua methodo obseruator noster in itinere suo per Sibiriam vbique fere vsus est. Cum hoc momentum, cum quo eleuationis Poli determinatio connectitur, primam postulet disquisitionem, methodum istam, prout eam quidem concipio, in vsum sequentem exponere conducet.

Referat HOR horizontem, HPR meridianum, P Poli locum verum, A punctum, in quo Aequator vere meridianum traiicit, vt sit PR Poli, AH Aequatoris eleuatio vera, ista boream, haec austrum versus. Fingamus euidentiae causa, tum in P, tum in A aliquando fixam existere. Ope quadrantis, cuius error detegi debet, exploretur vtriusque fixae altitudo meridiana, alterius PR versus boream, alterius AH versus austrum, atque, supponendo aliquam refractionis tabulam, v. c. *Cassinianam*, tanquam vniuersalem, (vt veritas saltem approximando cognoscatur, et consideratio refractionis excludatur) propter refractionem corrigatur. Si PR + AH (tanquam summa altitudinum poli et aequatoris) deprehendatur = 90. gradibus, instrumentum nullo laborabit vitio, vt per se patet; sin vero summa altitudinum obseruatarum discrepet a 90. gradibus, dabitur error Quadrantis, eiusque duplum inuenietur capiendo differentiam inter complementum altitudinis stellae aequatoreae ad 90°, et altitudinem meridianam stellae in Polo positae. Ponamus enim instrumentum altitudinem vera maiorem notare. Hoc modo ope istius colligetur stellae aequatoreae altitudo meridiana, seu eleuatio Aequatoris aH (maior vera AH), cui respondebit altitudo Poli πR, tanquam complementum ad 90°, (minor vera PR), deducta scilicet ex obseruatione stellae austrum versus, existente $P\pi = Aa$. Ast, cum instrumentum altitudinem stellae in Polo positae eadem quantitate etiam maiorem vera prodat, ex obseruatione boream versus inuenies loco PR altitudinem pR, existente $Pp (= Aa) = P\pi$ Quadrantis errore, cuius duplum $p\pi$ est differentia inter complementum altitudinis stellae aequatoreae ad 90°, nempe πR, et altitudinem

tudinem meridianam obſeruatam pR ſtellae in Polo poſitae. Similiter, inuerſo tantum ordine, res ſe habet, ſi inſtrumentum altitudinem vera minorem ſiſtat, vt Fig. 3. luculenter exponit. Inde etiam patet, *errorem Quadrantis* Pp eſſe *ſubtractiuum* ab obſeruata altitudine pR (Fig. 2.), ſi altitudo Poli πR ex obſeruatione ſtellae auſtrum verſus definita minor ſit altitudine Poli pR ex obſeruatione ſtellae boream verſus determinata; e contrario *additiuum* ad obſeruatam altitudinem pR (Fig. 3.), ſi altitudo Poli πR ex obſeruatione ſtellae auſtrum verſus deducta maior ſit eleuatione Poli pR ex obſeruatione ſtellae boream verſus inuenta; vt ſcilicet vera prodeat altitudo ſtellae PR. Fig. 3.

Fixae quidem, vt hactenus euidentiae cauſa ſuppoſuimus, neque in Polo, neque in Aequatore exiſtunt, vt methodus praeſcripta immediate ad praxin deduci poſſit; aſt cum ex obſeruatis fixarum altitudinibus meridianis, adhibendo earundem declinationes aliunde cognitas, altitudo Poli eodem modo mediate definiri poſſit, ac ſi immediate ex obſeruatione fixae aequatoreae, vel in Polo poſitae, cognita fuiſſet; praxin ad conſiderationem praecedentem mediate referre licet. Obſeruetur ſcilicet alicuius fixae, quae meridianum in plaga auſtrali tranſit, altitudo meridiana, (quo maior iſta, eo minus erit periculum refractionis) et ope declinationis eius ex Catalogo notae, adhibita propter refractionem correctione, determinetur eleuatio Poli πR errorem Quadrantis adhuc inuoluens. Similiter obſeruetur alicuius fixae in plaga meridiani boreali altitudo meridiana, et ha- Fig. 2. et 3.

habita declinationis et refractionis ratione, exinde inueniatur eleuatio Poli pR itidem Quadrantis errorem comprehendens. Differentia $p\pi$ inter πR et pR dabit duplum Quadrantis errorem, qui an additiuus, an subtractiuus sit, secundum praecedentia diiudicari debet. Ipsa tandem eleuatio Poli vera PR innotescet ex numero medio arithmetice proportionali inter πR et pR. In hoc quidem negotio refractiones primum circiter tantum cognoscuntur, ob ignotum Quadrantis errorem; ast si hic approximando detectus fuerit, tum refractiones, tum ipsum instrumenti errorem, certiori modo concludere licet. Solem quoque loco fixae austrum versus culminantis eligi posse facile patet.

Sic quidem habetur methodus vniuersalis, Astronomo peregrinanti perquam vtilis, tum errorem instrumenti, tum eleuationem Poli promte inuestigandi; ast inter obseruationes supra exhibitas occurrit aliqua circumstantia, quae methodum particularem admittit definiendi eleuationem Poli priori praeferendam, cum ista neque fixarum declinationes, neque instrumenti aberrationem, sed tantummodo refractiones proxime cognitas praesupponat. Scilicet, si vna eademque stella circumpolaris semper conspicua pro conditione situs Poli respectu verticis in reuolutione sua diurna meridianum traiiciat, vna vice versus austrum, altera vice versus boream, prout in obseruationibus superioribus Capella exemplum praebet, praedicta methodus locum habet. Particularem istam voco, quia in regionibus Polis vicinioribus tantum adhiberi potest. Cum enim distan-

distantia stellae a Polo nonnihil excedere debeat distantiam Poli a Zenith, vel eleuationem Aequatoris pro loco aliquo terrestri, vt memorata conditio locum inveniat, necesse est, vt altitudo Poli superet 45 gradus; in casu enim huius altitudinis $=45°$, fit distantia Poli a Zenith $=45°$, et fixa distantiam a Polo $=45°$ habere debet, vt vna vice transeat per Zenith, altera vice horizontem ad partes Poli stringat; quae conditio limites ponit vltimos. Si insuper periculum refractionis in vicinia Horizontis ad partes Poli conspicui euitari debeat, ponendo eum in finem altitudinem fixae minimam $=20°$; requiritur altitudo Poli $=55°$, et distantia istius fixae a Polo $=35°$, vt saltem haec Zenith traiiciat. Quibus ita comparatis methodum istam pro iis terrae locis salutarem tantum pronunciare licet, quorum eleuatio Poli excedit 55 gradus.

Sed ad methodum ipsam: cuius gratia sequentem praemitto propositionem. Sint HZR Meridianus; HOR Horizon; Z Zenith; P Polus; PR Poli eleuatio; SDN diurnus stellae circumpolaris, cuius distantia a Polo PS nonnihil maior sit eleuatione Aequatoris, seu PZ; altitudo stellae meridiana austrum versus SH, boream versus NR; dico esse: Fig.

$$PR=\frac{180°-HS+NR}{2}$$

Est enim arcus $SPN=180°-HS-NR$, $PN\ (=\tfrac{1}{2}SPN)$ $=\frac{180°-HS-NR}{2}$, et $PR\ (=PN+NR)=\frac{180°-HS-NR}{2}$ $+NR=\frac{180°-HS+NR}{2}$.

Cum

Cum tota demonstratio hisce nitatur conditionibus, vt sit HPR semicirculus, et $PS = PN$; si ab S et N respectu Poli P ad eandem plagam capiantur arcus Ss, Nn, inter se aequales, ita tamen, vt adhuc s in australi, n in boreali plaga meridiani existat; ob Ps tunc $= Pn$; itidem erit

$$PR = \frac{180^\circ - Hs + nR}{2}.$$

Ponamus iam, vt et hactenus fecimus, altitudines stellae nostrae veras esse HS, NR, et PR eleuationem Poli veram; instrumentum autem, quo altitudines capiuntur, has iusto maiores prodere, ita, vt loco HS, NR, ex obseruatione acquirantur Hs, nR, existente $Ss = nN$, dum scilicet error instrumenti Ss, vel Nn, idem sit, siue altitudo mensuretur versus austrum, siue versus boream; patet per formulam $PR = \frac{180^\circ - Hs + nR}{2}$ ex altitudinibus obseruatis Hs, nR, Quadrantis errorem adhuc inuoluentibus, itidem altitudinem Poli veram inueniri. Necesse autem est, vt altitudinibus obseruatis ante applicentur debitae refractiones, quas quidem ob incognitum adhuc instrumenti errorem proxime tantum excerpere licet, citra tamen periculum nimii erroris, si error Quadrantis sit exiguus, et altitudo nR non admodum parua.

Inuenta sic Poli eleuatione, adhibendo distantiam stellae obseruatae a Polo ex catalogo, altitudo meridiana eius vera calculo detegi, et ipse Quadrantis error inueniri potest, si ista cum obseruata altitudine comparetur. Quod si error nimius prodiret, altitudines ob-

seruatae

seruatae inde propius corrigi, et refractiones certiores assignari possunt, vt demum, repetita operatione, et eleuatio Poli et error instrumenti rectius colligantur.

Methodum hanc applicemus nunc ad exemplum Capellae. Altitudo eius meridiana media ex obseruatis versus austrum est 62°. 16′. 50″., versus boream 28°. 25′. 10″. Adhibitis ex tabula *Cassiniana* refractionibus conuenientibus, 30″. et 1′. 49″; respectiue, habetur per praec. eleuatio Poli = 73°. 3′. 30″. Ex hac deinde et declinatione Capellae ad datum tempus ex Tab. *Cassini* petita inueni altitudinem meridianam eius veram versus austrum = 62°. 38′. 20″, eamque cum obseruata 62°. 16′. 20″, habita scilicet refractionis ratione comparaui, vt haberetur *Quadrantis error* proxime = 22′. 0″. *additiuus* ad obseruatam altitudinem, quem nunc eum in finem tantisper seruaui, vt refractiones propriores cognosci possent, quae etiam denuo applicatae superiorem Poli eleuationem = 73°. 3′. 32″, producunt,

His peractis ex methodo priori proprius inquisiui in Quadrantis errorem et Poli eleuationem. Quem in finem adhibui altitudines medias obseruatas, sed refractione liberatas

Aldebaran	32°.	31′.	0″.	versus austrum
Capellae	62.	16.	20.	
Lyrae	21.	15.	55.	versus boream
Capellae	28.	23.	23.	

et cum iis contuli declinationes boreales earundem fixarum ad tempus propositum, vt ex obseruationibus, tum versus austrum, tum versus boream factis eleuationem Poli cognoscerem, errorem Quadrantis adhuc inuoluentem.

Cum autem declinationes istas secundum diuersos Auctores nonnihil inter se discrepantes deprehenderem, elegi eas, quas tradiderunt

	Cassinus (*a*)	*Halleius* (*b*)	*le Monnier* (*c*)
pro Aldebaran	15°.56′.49″.	15°.57′. 6″.	15°.57′.18″.
Lyra	38. 32. 55.	38. 33. 28.	38. 33. 45.
Capella	45. 41. 49.	45. 42. 21.	45. 41. 43.

Inde demum factum est, vt prodiret eleuatio Poli errore Quadrantis nondum liberata

ex obseruationibus borealibus

Capellae	72°.41′.34″.	pro declin.	Cassini.
	72. 41. 2.	- - -	Halleii.
	72. 41. 40.	- - -	le Monnier.
Lyrae	72. 43. 0.	- - -	Cassini.
	72. 42. 27.	- - -	Halleii.
	72. 42. 10.	- - -	le Monnier.
Med.	72. 41. 59.		

ex

(*a*) In Tab. Astron. pag. 145.

(*b*) In Catalogo, qui pro vsu Obseruatorii Imper. Petropol. quondam in Mst. elaboratus est.

(*c*) In Tract. La théorie dde Cometes; à Paris 1743. 8vo pag. 115.

ex obseruationibus australibus

Capellae	73. 25. 29	pro declin	Cassini.
	73. 26. 1.	- - -	Halleii.
	73. 25. 23.	- - -	le Monnier.
Aldebaran	73. 25. 49.	- - -	Cassini.
	73. 26. 6.	- - -	Halleii.
	73. 26. 18.	- - -	le Monnier.
Med.	73. 25. 51.		
Med. ex obs. bor.	72. 41. 59. vnde		
Quadrantis error duplus	0. 43. 52.		
simplus	0. 21. 56. atque		
Eleuatio Poli vera	73. 3. 55.		

Si satius ducas, errorem Quadrantis inuentum singulis deductionibus australibus, quippe periculo refractionis minus obnoxiis, applicare, atque numeris, qui tunc eleuationem Poli veram exponunt, adiungere eam, quam ex methodo posteriori, ope solius Capellae, nulla declinationis eius habitâ ratione, cognouimus $= 73°.3'.32''$; sumendo mediam inuenies *Eleuationem Poli veram* $= 73°. 3'. 52''$. quam in vsum sequentem, vna cum *errore Quadrantis* $= 21'. 56''$. *additiuo*, seruare conueniit. Inde erit *Eleuatio Aequatoris vera* $= 16°. 56'. 8''$.

Stabilitis his elementis, prona nunc est inuestigatio refractionum Olenecensium, ex obseruatis fixarum

 altitu-

altitudinibus meridianis. Eiusmodi ſcilicet altitudini addatur Quadrantis error, vt prodeat altitudo ex obſeruatione ſolam adhuc refractionem inuoluens. Ab ea ſubducatur altitudo fixae meridiana vera, quam elevatio Aequatoris vna cum declinatione fixae ex catalogo nota ſuppeditat. Differentia exhibet refractionem altitudini obſeruatae, et propter errorem Quadrantis correctae, competens. Sic pro *Rigel* eſt

Altit. merid. media verſus auſtrum ex obſeru.	8°. 8′. 15″.
Error Quadrantis	21. 56.
Alt. obſ. refractionem ſolam inuoluens	8. 30. 11.
Altit. merid. vera	8. 24. 12.
Refractio ex obſeru.	5. 59.

pro altitudine 8°. 30′. 11″, cui Tabula *Caſſiniana* aſſignat refractionem 6′. 23″, ideoque 24″. maiorem Olenecenſi. Altitudo vera ſic deducta eſt:

		Declinatio auſtr. Rigel ad an. 1738. Menſ. 5. Februar.
ſecundum	Caſſinum	8°. 32′. 20″.
	Halleium	8. 31. 55.
	le Monnier	8. 31. 32.
	Med.	8. 31. 56.
Eleuat. Aequatoris.		16. 56. 8.
Alt. merid. vera		8. 24. 12.

Reli-

Reliquas fixas transeo, quippe quibus alium in finem iam sum vsus. Solis potius obseruationes nunc sunt adhibendae, quae, vt facile patet, similem in modum tractari possunt, modo ad tempus, quo meridies verus Oleneci dato die celebratur, declinatio Solis ex Ephemeridibus vel aliunde constet, id quod cognitam supponit Meridiani Olenecensis positionem. Antequam autem huius inuestigationem instituam, dubio, quod se offert, occurrendum est, quodque prima fronte omne negotium euertere videtur. Scilicet in definitione Poli pariter ac erroris Quadrantis obseruationibus applicui refractiones *Cassinianas*, ideoque tacite cognitas supposui refractiones Olenecenses, easque Parisiensibus aequales. Nonne circulus adesse videtur, cum de refractionibus Olenecensibus quaestio sit? Sic quidem videtur; ast res eum in finem facta est, prout et incidenter iam monui, vt elementa ista approximando innotescant. Si enim refractiones Olenecenses homologis Parisiensibus essent aequales; deductiones fore saluas quisque perspicit. Nec error notabilis eis induceretur, si Olenecenses a Parisiensibus nonnihil discreparent, praesertim si obseruationes extra periculum nimiae refractionis positae, vt factum est, in hoc negotio adhiberentur. Ast si nimis magna locum habitura esse discrepantia, prout facile quisque suspicari posset, tunc vtique de remouendo scrupulo solliciti esse deberemus. Scrupulus iste augetur, si cogitemus, discrepantiam istam errorem producere debere in determinatione tum eleuationis Poli, tum erroris Quadrantis; vtrumque autem concurrere ad efficiendam refractionis definitionem erroneam.

 His

His ita conſtitutis expediet inquirere, quaenam aberratio in determinatione eleuationis Poli pariter ac erroris Quadrantis ſit proditura, ſi in definitione horum elementorum conſideratio refractionum prorſus negligatur; his enim aberrationibus perſpectis iudicare non ſolum licebit, quinam error in ipſarum refractionum inueſtigatione inde reſultare poſſet; verum etiam, quantum hic error minueretur, poſtquam Tabula iam aliqua refractionum adhibita fuerit in determinatione eleuationis Poli et erroris Quadrantis, ſi quando ſuſpicio adeſſet, refractiones quaeſitas a refractionibus homologis Tabulae ſuppoſitae nimium differre poſſe.

Fig. 5. Sit igitur AH Aequatoris, PR Poli eleuatio vera. Euidentiae cauſa, vt ſupra, ponamus fixam aliquam in A, pariter ac in P, vt iſtius, aequatoreae ſcilicet, altitudo meridiana verſus auſtrum ſit AH; huius, polaris nempe, PR boream verſus. Sit error Quadrantis verus ita comparatus, vt obſeruatis altitudinibus addi, ideoque a veris altitudinibus ſubtrahi debeat: hoc enim pacto res ad caſum noſtrae diſquiſitionis accommodatur. Capiatur ſurſum $A\alpha =$ refractioni, quae altitudini verae AH competit; deorſum autem $\alpha a =$ errori Quadrantis vero; et manifeſtum eſt, ſi ope Quadrantis huius exploretur altitudo meridiana fixae aequatoreae, loco AH acquiri altitudinem aH, errorem inſtrumenti et refractionem inuoluentem. Si

ex AH concludatur eleuatio Poli, inuenietur PR
— αH - - - - - - cR
— aH - - - - - - pR

exiſten-

exiſtentibus $Pc = A\alpha$, $pc = \alpha a$; vnde ſub his conditionibus ex obſeruatione fixae verſus auſtrum altitudo Poli pR colligitur. E contrario ex obſeruatione fixae polaris verſus boream, loco PR primum acquiritur bR propter refractionem Pb, quae altitudini verae PR reſpondet, et deinde πR propter errorem Quadrantis $b\pi$, ita vt nunc eleuatio Poli ex obſeruatione concludatur πR, exiſtente $b\pi = pc = \alpha a =$ errori Quadrantis vero. Si iam per methodum ſuperiorem inueniri deberent eleuatio Poli et error Quadrantis, ſumendus eſſet numerus arithmetice proportionalis medius inter pR et πR, quem ponam QR, exiſtente $pQ = Q\pi = \frac{1}{2}p\pi$; et tunc iudicaretur QR eleuatio Poli, $\frac{1}{2}p\pi$ vel pQ autem error Quadrantis; cum e contrario eleuatio Poli vera ſit PR, error Quadrantis verus pc, vel $b\pi$, vel αa. Quo pacto foret ex neglecta refractionum *aberratio eleuationis Poli* $PQ (= PR - QR)$; et *aberratio erroris Quadrantis* $= pc - pQ$. Vtramque definiamus per refractiones neglectas $A\alpha$, Pb.

Eſt nempe $PQ = pQ - pP$

$$= \tfrac{1}{2}p\pi - pc + Pc$$

ob $pQ = \frac{1}{2}p\pi$, et $pP = pc - Pc$. Eſt porro

$$\begin{aligned} p\pi &= pc + c\pi \\ &= pc + b\pi - bc, && \text{ob } c\pi = b\pi - bc \\ &= 2pc - bc, && \text{ob } \pi b = pc \\ &= 2pc - Pb - Pc, && \text{ob } bc = Pb + Pc \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}p\pi = pc - \tfrac{1}{2}Pb - \tfrac{1}{2}Pc;$$

$$\begin{aligned} \text{vnde } PQ &= pc - \tfrac{1}{2}Pb - \tfrac{1}{2}Pc - pc + Pc \\ &= \tfrac{1}{2}Pc - \tfrac{1}{2}Pb \\ &= \tfrac{1}{2}A\alpha - \tfrac{1}{2}Pb, \text{ ob } Pc = A\alpha. \end{aligned}$$

Aber-

Aberratio erroris Quadrantis fiet

$$\begin{aligned} pc - pQ = Q\varsigma \\ = P\varsigma - PQ \\ = A\alpha - \tfrac{1}{2}A\alpha + \tfrac{1}{2}Pb \\ = \tfrac{1}{2}A\alpha + \tfrac{1}{2}Pb. \end{aligned}$$

Hoc modo neglectus refractionum procreat non solum errorem in definitione eleuationis Poli aequalem differentiae refractionum adhibendarum, verum etiam aberrationem erroris Quadrantis, quae summae refractionum adhibendarum aequiualet. Hae refractiones $A\alpha$, Pb, non absolute adstrictae sunt ad altitudines veras, AH, PR, vt euidentiae causa in hac disquisitione supposuimus. Cum enim ex altitudine fixae alicuius meridiana, siue versus austrum, siue boream versus sumta, ope declinationis eius ex Catalogo notae, mediate concludi possit eleuatio Poli, Quadrantis errorem et refractionem comprehendens, eodem modo, ac si immediate id praestitum fuisset ex obseruatione fixae aequatoreae vel polaris; patet, refractionem quaestionis tunc altitudini verae istius fixae extra Aequatorem vel Polum positae respondere. Si igitur in nostro negotio eiusmodi fixae eligantur, quarum altitudines meridianae sint satis magnae; periculum nimiae aberrationis in eleuatione Poli et Quadrantis errore euitari potest. Rem vnico exemplo illustrare conuenit ex superioribus obseruationibus. Supponamus itaque tantisper, refractiones Olenecenses homologis Parisiensibus esse aequales, et eligantur altitudines meridianae, Capellae versus austrum $= 62°. 16'. 50''$, Lyrae versus boream $= 21°. 18. 22''$.

Illi

Illi respondebit refractio $= 31''$. pro $A\alpha$ (fig. 5.) habenda; huic $= 2'.29''$. per Pb explicanda, neglecto scilicet Quadrantis errore; quodsi vero iste circiter cognitus fuerit per methodum superiorem, verbi causa $= 22'$. additiuus; refractio propius haberetur $A\alpha = 30''$, $Pb = 2'.27''$. (Contemnendam hic esse censeo discrepantiam refractionum, quae altitudinibus visis adscribuntur, ab iis, quae veris altitudinibus debentur, quasque postulat theoria) Tunc autem ex neglectu refractionum emergeret aberratio in eleuatione Poli $= \frac{1}{2} A\alpha - \frac{1}{2} Pb$

$$= \frac{0'.30''. - 2'.27''}{2} = -58\tfrac{1}{2}'',$$ vbi signum negatiuum indicat, eleuationem Poli ex conclusione, nempe QR, maiorem esse vera PR quantitate $58\frac{1}{2}''$; et aberratio in errore Quadrantis esset $= \frac{1}{2} A\alpha + \frac{1}{2} Pb = 1'.28\frac{1}{2}''$, qua error verus Quadrantis excederet eum ex conclusione.

Sic quidem pro conditione datorum et hypothesis nostrae sat notabiles inueniuntur aberrationes, quae tamen tantae non sunt, vt omne aestimium circa refractiones, praesertim in vicinia Horizontis, impediant. Videamus ergo, quantus error inde resultaret in refractionibus ipsis, si eas ex falsa Poli vel Aequatoris elevatione, falsoque Quadrantis errore, prout vtrumque Tab. XVII Fig. 6. elementum ex neglectu refractionum acquisiuimus, deriuare velimus. Hunc in finem sint PR Poli, AH Aequatoris eleuatio vera, in S fixa aliqua culminans, HS eius altitudo meridiana vera, AS declinatio australis vera; et habebitur $HS = AH - AS$. Sit istius fixae altitudo meridiana falsa, instrumento scilicet capta, HI;

error autem Quadrantis verus Ii additiuus, vt habeatur altitudo meridiana Hi ex obseruatione solam refractionem inuoluens. Si igitur ab Hi ($= HI + Ii$) subtrahatur HS, dabitur *refractio vera* Si, ita vt sit Si ($= Hi - HS$) $= HI + Ii - AH + AS$.

Fig. 7.

Ponamus nunc eleuationem Poli falsam esse QR, existente PQ aberratione eius a vera (PR), cui aequalis sit Aa, vt prodeat eleuatio Aequatoris falsa aH. Capiatur $as = AS =$ declinationi stellae verae australi, et patet, nunc Hs ($= aH - as$) pro altitudine meridiana vera fixae, sed falso, haberi. Sit, vt ante, altitudo fixae instrumento capta HI, et fiat $S\eta =$ errori Quadrantis falso, qui in nostro casu minor est errore vero Ii quantitate ηi ($= Ii - I\eta$), quae aberrationem in errore Quadrantis exponit. Si iam capiatur $H\eta$ ($= HI + I\eta$), altitudinem meridianam ex obseruatione acquisiuisse, sed falso, credimus solam refractionem comprehendentem; vnde $H\eta - Hs = s\eta$ sistet *refractionem falsam*, ita vt sit $s\eta$ ($= H\eta - Hs$) $= HI + I\eta - aH + as$. Differentia igitur inter refractionem veram Si et falsam $s\eta$ exhibebit errorem in determinatione refractionis commissum. Est autem $Si - s\eta = HI + Ii - AH + AS - HI - I\eta + aH - as = Ii - I\eta - AH + aH$ (ob $AS = as$) $= \eta i - (AH - aH) = \eta i - Aa = \eta i - PQ =$ differentiae inter aberrationem in errore Quadrantis et aberrationem in eleuatione Poli, quae in nostro exemplo conficiet $1' \, 28\tfrac{1}{2}'' - 58\tfrac{1}{2}'' = 30''$, qua quantitate refractio vera falsam excedit. Cum aberratio erroris Quadrantis (in fig. 5) sit $= \tfrac{1}{2}Aa + \tfrac{1}{2}Pb$; aberratio autem in eleuatione Poli, in exemplo nostro negati-

negatiua, $=-\frac{1}{2}A\alpha+\frac{1}{2}Pb$; fiet differentia $=\frac{1}{2}A\alpha+\frac{1}{2}Pb+\frac{1}{2}A\alpha-\frac{1}{2}Pb=A\alpha$, ita vt error, qui in determinatione refractionum committi hic poteſt, tantummodo aequalis ſit refractioni $A\alpha$, quae altitudini fixae auſtrum verſus captae reſpondet.

Ab inſtituto nimis alienum eſſet, ſi alios obſeruationum caſus expendere, vel theoriam adhuc magis promouere vellemus. Sufficit oſtendiſſe, ex neglectu refractionum in determinatione eleuationis Poli et erroris Quadrantis, errorem quidem committi, ſi ipſae refractiones deinde ſint detegendae, ſed exiguum, et conſtantis pro omnibus refractionibus magnitudinis, dummodo ſemel ex obſeruationibus ſtabiliueris eleuationem Poli et Quadrantis errorem, falſo licet, neglectis nempe in definitione horum elementorum refractionibus. Quisque deinde perſpicit, eiusmodi errorem non impedire, quo minus refractiones, praeſertim in vicinia Horizontis, ſatis prope cognoſcantur, quae deinde, ſi lubet, anſam praebere poſſunt, ex iis approximando conſtruendi Tabulam refractionum, et ope eius elementa ante ſtabilita corrigendi, vt demum adhuc propius innoteſcerent refractiones in vicinia Horizontis. Sed eiusmodi proceſſum abbreuiare licet, ſi in determinatione praedictorum elementorum ſtatim adhibeatur Tabula aliqua refractionum iam nota, verbi cauſa *Caſſiniana*, vel Pariſienſis. Sic enim quaeſtio de cognoſcendis refractionibus in alio loco, v. c. Oleneci, nunc huc redit, an refractiones Oleneceuſes aequales ſint homologis Pariſienſibus, an ab his diuerſae, v. c. maiores. Si aequales ſint, nullus metuendus eſt error in inueſtigatione refractionum Olenecenſium; ſin vero diverſae, v. c. notabiliter maiores; error quidem committetur, ſed admodum exiguus, eius nempe magnitudinis in exemplo noſtro, qua refractio Aα (fig. 5.) altitudini Capellae (circiter $62^{\circ}. 39'$ adhibito errore Quadrantis) reſpondens ſub climate Olenecenſi homologam Aα ſub climate Pariſienſi excederet. Fingamus, priorem eſſe duplo maiorem poſteriori, quae ſuppoſitio enormem diſcrepantiam in refractionibus homologis prope Horizontem productura eſſet; exceſſus, ipſi Aα ſub climate Pariſienſi aequalis ($=30''$.), indicaturus eſſet errorem in determinatione refractionum Olenecenſium committendum, qui vtique tantus non eſt, vt diiudicationem morari poſſit, an refractiones Olenecenſes in vicinia Horizontis ab homologis Pariſienſibus multum diſcrepent, nec ne. Et hoc eſt palmarium quaeſtionis noſtrae, cum neutiquam ſolliciti ſimus de refractionibus Olenecenſibus omni rigore determinandis, id quod etiam a Quadrante exiguo, radii ſcilicet $1\frac{1}{2}$. ped. in obſeruationibus ſuperioribus adhibito, expectari nequit.

Remoto nunc dubio, in id incumbendum eſt, vt definiatur poſitio Meridiani Olenecenſis reſpectu Meridiani loci cogniti. Huc faciunt obſeruatae Oleneci occultationes duarum fixarum ſupra deſcriptae. Vtinam reſpondentes earundem occultationum obſeruationes ſub Meridiano cognito habitae extarent! tunc enim Meridianorum differentia ex voto poſſet determinari, quo facto, praeter vſum, quem intendimus, Geographia Sibiriae borealis incrementum inſigne captura foret. Aſt

cum

cum tranſitus Lunae ad iſtas fixas in omnibus Europae regionibus (reliquas tranſeo) interdiu acciderit ; ſpes reſpondentes nanciſcendi obſeruationes eripitur. His ita conſtitutis, ad calculum ex tabulis aſtronomicis confugiendum eſt , vt tempus ſub dato Meridiano , v. c. Bononienſi , numeratum aſſignari poſſit , quo eiusmodi occultatio Oleneci contigit ; hoc enim cum momento eiusdem occultationis ſub meridiano Olenecenſi obſeruato ſi comparetur , differentiam Meridianorum Bononienſis et Olenecenſis exponit. Eo quidem modo , ob frequentem calculi a coelo, in motu praeſertim lunari, aberrationem , omnis rigor in determinatione praedictae Meridianorum differentiae expectari nequit , ea tamen tam prope cognoſcetur , vt error ſenſibilis in negotio noſtro, quo tantum declinationes Solis ad tempus meridiei Oleneci deſideramus , metuendus non ſit. Rem ex tabulis *Caſſini* ſum proſecutus. Ex iis ad Februar. an. 1738. habetur

	Longitudo	Latitudo auſtral.
ſtellae B	4°. 17′. 43″. ♊	5°. 47′. 15″.
– – – A.	4. 18 8. ♊	5. 52. 55.

Cognito iam ex Ephemeridibus *Manfredi* die $\frac{14}{25}$. Febr. 1738 circiter momento coniunctionis centri Lunae et fixae B e centro terrae viſae , ad interuallum duarum horarum ex Tabulis *Caſſini* loca Lunae vera computaui, et ſequentia elementa pro conſtructione ſchematis inveſtigaui :

Tempus verum ☌ verae centri ☽ et * B
sub merid. Bonon. 1738. Febr. 25. st. n. $23^h. 8'.28''$.
Latitudo centri ☽ austral. in ☌. - - - $5°.15'.36''$.
Distantia centri ☽ a * B boream versus
in circulo latitud. - - - - - - - 0. 31. 39.
Horarius ☽ in longitud. - - - - - - 0. 29. 49.
- - - - latitud. decresc. - - - 0. 0. 14.
Parallaxis ☽ horiz. - - - - - - - 0. 54. 45.
Semidiam. ☽ horiz. - - - - - - - 0. 14. 48.
Angulus Meridiani vniuersalis cum circulo latitud. orientem versus - - - - - $10°.19\frac{1}{4}'$.
Declinatio * B boreal. - - - - - 15. 21. 2.
Culminatio * B tempore solari vero sub
Meridiano Bonon. d. 26. Febr. st. n. - $5^h.35'. 4''$.
Eadem sub Meridiano Olenecensi, cognita ante circiter Meridianorum differ. $= 7\frac{1}{2}$. hor. 5. 36. 13.

Tempus verum ☌ verae centri ☽ et * A
sub Meridiano Bonon. - - - Febr. 25. $23^h. 9'.19''$.
Distantia centri ☽ a * A in circulo latitud.
boream versus - - - - - - - $0°.37'.19''$.
Declinatio * A boreal. - - - - - 15. 15. 32.
Culminatio * A tempore Solari vero sub
Meridiano Olenecensi d. 26. Febr. st. n. $5^h.36'.18''$.

Ope horum elementorum more consueto construxi schema, et ex eo cognoui

Tem-

	Tempus verum ad meridianum Bononiensem numeratum d. 25. Febr.	Idem erat ex obseruatione sub Meridiano Olenecensi d. 26. Febr. st. n.	Vnde differentia Meridianorum
Immersionis * A.	$23^h. 7'. 34''$.	$6^h. 29'. 41''$.	$7^h. 22'. 7''$.
- - - * B.	23. 21. 2.	6. 44. 23.	7. 23. 21.
Differ.	13. 28.	14. 42.	1. 14.

Cum interuallum immersionum vtriusque stellae ex schemate non nihil discreparet ab eo ex obseruatione, aberrationem hanc a latitudinibus, vel Lunae, vel stellarum, cum coelo non prorsus consentientibus, pendere iudicaui. Quodsi enim distantia vtriusque stellae a centro Lunae in circulo latitudinis tantummodo imminueretur quarta parte minuti primi; interualla ista tum propius inter se conueniebant, tum Meridianorum differentiae ex vtraque immersione definitae eiusdem fere magnitudinis reperiebantur. En deductiones ex hac hypothesi:

	Tempus verum Bononiae	Tempus obseruat. Olenecci	Differentia Meridianorum
Immersionis * A.	$23^h. 7'. 47''$.	$6^h. 29'. 41''$.	$7^h. 21'. 54''$.
- - - * B.	23. 22. 10.	6. 44. 23.	7. 22. 13.
Differ.	14. 23.	14. 42.	0. 19.

Statuere ergo licebit *Differentiam Meridianorum Bononiensis* et *Olnecensis* $= 7^{hor.} 22'$. qua Oleneccum orientalius est Bononia.

Tandem

Tandem fructus harum disquisitionum sunt reportandi, vt nempe ex obseruationibus Solaribus supra adductis refractiones Olenecenses cognoscamus, et cum homologis Parisiensibus comparemus. Scilicet ex Ephemeridibus MANFREDI pro singulis obseruationum diebus excerpsi loca Solis ad Meridiem medium Bononiae computata, quae ope motus diurni Solis et stabilitae Meridianorum differentiae, nec non aequationis temporis, transtuli ad Meridiem verum Oleneci. Ex his, posita Eclipticae obliquitate $= 23^{\circ}. 28'. 20''$. determinaui declinationes centri et deinde limbi superioris Solis, adhibita nempe semidiametro Solis apparenti ex Tabula *Cassiniana*. Eleuatio tandem Aequatoris Olenecensis patefecit altitudines limbi superioris Solis veras Oleneci. Cum his deinde comparaui altitudines limbi superioris obseruatas, quae supra descriptae sunt, postquam eis addideram Quadrantis errorem et debitam Solis parallaxin. Excessus posteriorum altitudinum super priores docebant refractiones Olenecenses. Tabula autem *Cassiniana* Parisienses homologas subministrabat. Omne negotium Tabula sequens luculenter ob oculos ponit:

Oleneci an. 1738 stil. nou.		Altit. merid. limbi super. ☉ obseru. adhibitis errore Quadrantis et Parallaxi.	Altit. merid. limbi super. ☉ vera.	Refractio Olenecensis.	Refractio Parisiensis.
Februar.	15.	4°.39′. 6″. dub.	4°.27′.40″.	11′.26″.	11′.15″.
	17.	5. 19. 6. vent.	5. 9. 13.	9. 53.	9. 58.
	18.	5. 39. 6.	5. 30. 17.	8. 49.	9. 26.
	19.	6. 0. 36. exact.	5. 51. 32.	9. 4.	8. 54.
	21.	6. 42. 6. dub.	6. 34. 33.	7. 33.	8. 3.
	22.	7. 4. 36. dub.	6. 56. 19.	8. 17.	7. 38.
	24.	7. 46. 21. dub.	7. 40. 15.	6. 6.	7. 0.
	25.	8. 8. 6. bon.	8. 2. 30.	5. 36.	6. 41.
	26.	8. 30. 36. dub.	8. 24. 49.	5. 47.	6. 23.
	27.	8. 53. 6.	8. 47. 15.	5. 51.	6. 8.
	28.	9. 14. 36.	9. 9. 51.	4. 45.	5. 54.
Mart.	3.	10. 24. 6.	10. 18. 18.	5. 48.	5. 10.
	5.	11. 9. 21.	11. 4. 22.	4. 59.	4. 54.
	8.	12. 18. 6.	12. 14. 13.	3. 53.	4. 26.
	10.	13. 4. 6.	13. 1. 3.	3. 3.	4. 11.
	12.	13. 52. 6.	13. 48. 7.	3. 59.	3. 56.
	14.	14. 39. 36.	14. 35. 21.	4. 15.	3. 42.
	15.	15. 2. 21. dub.	14. 58. 59.	3. 22.	3. 37.
	19.	16. 36. 6.	16. 33. 42.	2. 24.	3. 16.
	20.	16. 59. 36.	16. 57. 24.	2. 12.	3. 11.
	21.	17. 23. 6.	17. 21. 6.	2. 0.	3. 7.
	22.	17. 47. 6.	17. 44. 45.	2. 21.	3. 2.
	26.	19. 20. 50.	19. 19. 8.	1. 42.	2. 46.
	29.	20. 31. 20.	20. 29. 27.	1. 53.	2. 35.

April.	1.	21. 41. 20.	21. 39. 15.	2. 5.	2. 27.
	2.	22. 3. 50.	22. 2. 23.	1. 27.	2. 25.
	5.	23. 13. 20.	23. 11. 8.	2. 12.	2. 17.
	7.	23. 58. 5.	23. 56. 30.	1. 35.	2. 12.
	10.	25. 5. 5.	25. 3. 38.	1. 27.	2. 6.
	12.	25. 50. 35.	25. 47. 43.	2. 52.	2. 1.

Sic quidem ope Ephemeridum, vel Tabularum aſtronomicarum, res confecta eſt, quae legitimum de refractionibus Olenecenſibus iudicium ſuppeditare poteſt. Cum autem tempore eodem, quo obſeruationes ſolares Oleneci habitae fuerunt, varias limbi ſuperioris Solis altitudines meridianas Petropoli in obſeruatorio Imperiali ope Sextantis muralis, radii circiter 5. ped., indagauerim; expediet obſeruationes immediatas inter ſe componere, et ex coelo ipſo refractiones Olenecenſes quaſi addiſcere. Altitudines iſtas aliquot correctionibus purgatas, prout deſcriptas eas aſſeruat Archiuum Academiae, cum puncto aliquo Sextantis comparaui, quod ductu obſeruationum ſolſtitialium Aequatori coeleſti vero reſpondebat. Exinde enim adhibitis refractionibus et parallaxi ex Tabula Caſſiniana, immediate concludere licuit declinationes limbi ſuperioris Solis veras. Vt autem iſtae ad meridiem verum Oleneci transferri poſſent, ſumſi differentiam meridianorum Petropolin inter et Olenecum $= 6^h. 6'$, quam ſcilicet differentia meridianorum inter Petropolin et Bononiam ex Eclipſibus Satellitum Iouis cognita $= 1^h. 16'$. et cum ea inter Bononiam et Olenecum $= 7^h. 22'$. comparata docet. In quo negotio vſus ſum motu diurno Solis in declinationem, prout

prout eum ex longitudinibus Solis in Ephemeridibus consignatis, adhibitis declinationum tabulis, in scrupulis etiam secundis deduxi. Inde innotuerunt declinationes limbi superioris Solis verae in meridie Oleneci, et tandem, ope eleuationis Aequatoris istius loci, altitudines meridianae verae limbi superioris Solis, quae cum altitudinibus obseruatis et correctis columnae 2 Tabulae praecedentis comparatae monstrabant refractiones Olenecenses. Summam deductionum in sequentem Tabulam coniicere licet.

Oleneci an. 1738. stil. nou.	*Altit merid. limbi super. ☉ obseru. Oleneci, adhibitis errore Quadrantis et parallaxi.*		*Altit. merid. limbi super. ☉ vera ex obseru. Petropolitanis deducta.*	*Refractio Olenecensis.*	*Refractio Parisiensis.*
Februar. 15.	4°. 39'. 6''.	dub.	4°. 28'. 35''	10'. 31''.	11'. 15''.
* 17.	5 19. 6.	vent	5. 9. 34.	9. 32.	9. 58.
* 22.	7. 4. 36.	dub.	6. 56 48.	7. 48.	7. 38.
24.	7. 46. 21.	dub.	7. 40. 28.	5. 53.	7. 0.
* 25.	8. 8. 6.	bon.	8. 2. 48.	5. 18.	6. 41.
26.	8. 30. 36.	dub.	8. 25. 9.	5. 27.	6. 23.
27.	8. 53. 6.		8. 47. 39.	5. 27.	6. 8.
28	9. 14. 36.		9. 9 48.	4. 48.	5. 54.
Mart. 19	16 36. 6.		16. 33. 36.	2. 30.	3. 16.
21.	17. 23. 6.		17. 20. 48.	2. 18.	3. 7.
22.	17 47. 6.		17. 44 42.	2. 24.	3. 2.
26	19. 20. 50.		19. 18. 50.	2. 0.	2. 46.
29	20. 31. 20.		20. 29. 33.	1. 47.	2. 35.
April. 1.	21. 41. 20.		21. 38. 53.	2. 27.	2. 27.
7	23. 58. 5.		23 56. 6.	1. 59.	2. 12.

 Ob-

Obſeruationes Petropolitanae, ex quibus altitudines meridianas limbi ſuperioris Solis ad meridianum Olenecenſem deduxi, iisdem reſpectiue diebus ſunt inſtitutae, praeter eas, quas ſigno (*) notaui, quippe quae obſeruationem vel proximo die paaecedenti, vel Petropolitanam ſequenti factam, et ope motus diurni Solis in declinationem reductam concernunt.

Si iam ſummatim expendas, quae hactenus tradita fuerunt, facile concedes, vel refractiones Olenecenſes homologis Pariſienſibus nonnihil minores, vel iis aequales eſſe habendas, ita, vt Pariſiis accedendo ad Polum refractiones homologae ſenſibiliter non varientur.

RELA-

RELATIO OBSERVATIONVM ET EXPERIMENTORVM, QVORVM INSTITVENDORVM ITER ANNO MDCCLVII. IN INSVLAM OSILIAM SVSCEPTVM OCCASIONEM PRAEBVIT.

Auctore

A. N. GRISCHOW.

CAPVT I.

Experimenta circa grauitatem beneficio Penduli immutabilis ducta *de la Condamine* Parisiis elaborati et ad Academiam Imperialem transmissi instituta.

I.

Pendulum hocce immutabile Horologio Astronomico simile, machina cultellata, moderatore *Grahamo*, et virga chalybea 26. poll. Paris. fere longa, lenteque ponderosa, cuius diameter $5\frac{2}{3}$ poll. Paris. instructum per dies aliquot motum suum continuans eo praecipue consilio ab Ill. *de la Condamine* est excogitatum, vt differentiae grauitatis, quae per oscillationes Penduli simplicis difficillime obseruantur, huius organi beneficio accuratius commodiusque definiri queant. Hanc ob caussam longitudo virgae huius Penduli variari nequit, propter virgam lenti insertam et agglutinatam, ita vt grauitatis differentia ex differentia numerorum oscillationum eodem temporis interuallo et in eadem temperatura confectarum cognoscatur; comparato nimirum motu Penduli immutabilis siue ad coelum ipsum, siue ad Horologium Astronomicum, cuius vires ad amussim sunt exploratae. Notandum autem est, Pendulum hocce immutabile, loco disci horarii, indice esse munitum, cuius reuolutio integra 100000 oscillationibus Penduli absoluitur, ita vt hic et caeteri duo huius Penduli indices non horas et minuta, sed numerum oscillationum Penduli denotent. Exhibiturus sum itaque non solum praecipuas comparationes, quas inter hocce Pendulum immutabile, et Horologium Astronomicum ab artifice *Thiout* elaboratum, Petropoli, Reualiae, in Insula Osilia, et in nonnullis Liuoniae locis institui, et quae explorandae motus Pendulorum aequabilitati inseruiunt; verum etiam obseruationes Astronomicas exquisitiones, ibidem, ad vtriusque Penduli motum cognoscendum, maxima, qua potui, accuratione habitas ordine, referam. Cum vero grauitatis differentia ex motu Penduli huius immutabilis accurate erui nequeat, nisi experimenta in eadem temperie aeris instituta, vel saltem ad eandem aeris temperiem reducta sint, Thermometri iuxta Pendulum immutabile et Horologium Astronomicum affixi gradus in omnibus et singulis experimentis sedulo adnotaui, et si quis praeterea Barometri statum desideret, illum in obseruationibus meis meteorologicis inueniet notatum.

II. Ob-

II.

Obſeruationes et experimenta circa gravitatem ante abitum in Inſulam Oſiliam, Penduli immutabilis beneficio, Petropoli inſtituta.

1757.	T. Horol. Aſtron.	Ocillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{11}{22}$ Aug. mane	$6^{h}. 45'. 33''.$	- - - -	15° $\frac{1}{2}$ ſupra o	Appulſ. Sirii
d $\frac{12}{23}$ Aug. - -	- - -	- - - -	15 - - -	ad fil. vert.
d. $\frac{13}{24}$ Aug. mane	- - -	- - - -	15 $\frac{1}{2}$ - -	Teleſco-
poſtmerid.	2. 25. 59 $\frac{1}{2}$ v. $\frac{1}{2}$	- - 20000	16 - -	pii fixi bi-
veſp.	7. 32. 24 $\frac{1}{2}$ - -	- 41000	15 - -	pedalis.
d. $\frac{14}{25}$ Aug. mane	6. 50. 54 $\frac{1}{4}$ - -	- - 87500	14 $\frac{3}{4}$ - -	
	9. 54. 1 $\frac{1}{4}$ - -	1^{R}. + 50	15 $\frac{1}{2}$ - -	
poſtmerid.	2 44. 23 $\frac{1}{3}$ -	1^{R}. + 19950	16 - -	
d. $\frac{15}{26}$ Aug. mane	7. 48. 42 - -	1^{R}. + 90150	15 $\frac{1}{2}$ - -	
poſtmerid.	1. 22. 6 $\frac{1}{2}$ - -	2^{R}. + 13000	16 - -	
d. $\frac{16}{27}$ Aug mane	9. 11. 18 $\frac{1}{4}$ -	2^{R}. + 94500	15 - -	
poſtmerid.	0. 57. 28 $\frac{1}{3}$ -	3^{R}. + 10000	16 - -	
	4. 7. 9 $\frac{1}{2}$ - -	3^{R}. + 23000	16 - -	
d. $\frac{17}{28}$ Aug.	0. 10. 54 - -	- - - -	16 $\frac{1}{2}$ - -	Appulſ. 1^{mi}

Alia comparatio.

				limbi Solis ad fil. vert.
d. $\frac{18}{29}$ Aug. mane	8. 59. 59 $\frac{1}{2}$ v. $\frac{1}{2}$	- - 61000	15 $\frac{1}{2}$ - -	Tranſitorii
poſtmerid.	1. 0. 45 $\frac{1}{4}$ -	- - 77500	16 $\frac{1}{2}$ - -	5 ped.
veſp.	9 25. 37 $\frac{1}{4}$	1^{R}. + 12100	15 $\frac{3}{4}$ - -	
d. $\frac{19}{30}$ Aug. mane	8. 21 30 $\frac{2}{3}$ -	1^{R}. + 57050	15 $\frac{1}{2}$ - -	
poſtmerid.	1. 19. 54 $\frac{1}{3}$ -	1^{R}. + 77500	16 $\frac{3}{4}$ - -	

Alia

Alia comparatio.

1757.	T. Horol. Astron.	Oscillationes Pend. immutab	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{20}{31}$ Aug. mane	$8^b.16'\ 33''\frac{1}{2}$	- - 0 - -	$15^\circ\frac{3}{4}$ supra o	
vesp.	9. 32. 31 -	- - 54550	$16\frac{1}{2}$ - -	
d. $\frac{21}{1}\frac{Aug.}{Sep.}$ mane	6. 43. $55\frac{1}{2}$ -	- - - -	$15\frac{1}{2}$ - -	Appulſ. Sirii
mane	9. 12. $10\frac{3}{4}$ -	$1^R. + 2500$	$15\frac{3}{4}$ - -	ad fil. vert. Teleſc. fixi
	9. 24. $47\frac{1}{2}$ -	- - - -	- - - -	Appulſ. 1^{mi}
poſtmerid.	- - - -	- - - -	18 - -	limbi Solis
vesp.	9. 31. 58 -	$1^R + 53200$	$16\frac{1}{2}$ - -	ad fil. vert.
d. $\frac{22}{2}\frac{Aug.}{Sept.}$ antem.	11. 6. 10 -	$2^R. + 9000$	$16\frac{1}{2}$ - -	
vesp.	10. 17. $22\frac{1}{2}$ v. $\frac{1}{3}$	$2^R. + 55000$	16 - -	
d. $\frac{23}{3}\frac{Aug.}{Sept.}$ mane	6. 43. $34\frac{3}{4}$ -	- - - -	- - - -	Appulſus
mane	8. 1. $1\frac{1}{3}$ v. $\frac{1}{2}$	$2^R. + 95000$	15 - -	Sirii ad fil.
	9. 46. 5 -	$3^R. + 2200$	$16\frac{1}{4}$ - -	vert. Teleſcopii fixi.

Motus igitur Horologii Aſtronomici pro die Solari medio

inter d. $\frac{11}{22}$ Aug. et $\frac{21}{1}\frac{Aug.}{Sept.}$ ex obſeruationibus Sirii fuit $24^b\ 3'.46''\frac{3}{4}$

$\frac{19}{30}$ Aug. et $\frac{21}{1}\frac{Aug.}{Sept.}$ ex obſeruationibus Solis - 24 3. $46\frac{1}{2}$

$\frac{21}{1}\frac{Aug.}{Sept.}$ et $\frac{23}{3}\frac{Aug.}{Sept.}$ ex obſeruationibus Sirii - 24. 3. $46\frac{1}{10}$

Confecit itaque Pendulum immutabile ſpatio diei Solaris medii

a d. 13. ad 14 Aug. ſt. v.	98948, 1 Oſcillat.	Therm. Reaum. indicante	15° ſupra o
14. ad 15 Aug.	- 98948, 2 - -		$15\frac{1}{2}$ —
15. ad 16 Aug.	- 98947, 6 - -		$15\frac{1}{2}$ —
18. ad 19 Aug.	- 98946, 1 - -		16 —
20. ad 21 Aug.	- 98946, 4 - -		$16\frac{1}{2}$ —
21. ad 22 Aug.	- 98946, 4 - -		$16\frac{1}{2}$ —
22. ad 23 Aug.	- 98946, 7 - -		$16\frac{1}{2}$ —

Per

Per medium igitur inter ista experimenta motus Penduli immutabilis diei Solari medio respondens in temperie aeris 16°. Therm. Reaumur. supra o. Petropoli erit 98947. Oscillat.

III.

Obseruationes et experimenta circa grauitatem mediante Pendulo immutabili Reualiae instituta.

1757.	T. Horol. Astron.	Oscillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{3}{14}$ Sept. mane	$7^h.51'.27''\frac{1}{2}$	- - 80000	14°. supra o	
postmerid.	4. 22. 55 -	1^R. + 15050	$14\frac{1}{4}$ - .	
	11. 8. $11\frac{2}{3}$	- - - -	- - .	Appulf. α ♉
	11. 20. 59 -	1^R. + 43700	14 - -	ad lamin.
d. $\frac{4}{15}$ Sept. mane	6. 43. $7\frac{1}{2}$ v. $\frac{1}{2}$	1^R. + 74000	14 - -	vert. Transitorii.
	11. 7. 21	- - - -	- - - -	Appulf. α ♉ ad fil. vert. Transitorii.
	11. 8. $2\frac{1}{3}$ -	- - - -	- - - -	Appulf. α ♉
	11. 25. 37 -	2^R. + 42700	$13\frac{1}{2}$ - .	ad laminam
d. $\frac{5}{16}$ Sept. mane	6. 18. $34\frac{3}{4}$ -	2^R. + 71000	$13\frac{1}{2}$ -	verticalem Transit.

Alia comparatio.

mane	9. 43. 52 -	- - 85000	14 - -	
	11. 7. 13 -	- - - -	- - -	Appulf. α ♉ ad fil. vert. Transit.

1757.	T. Horol. Astron.	Oscillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur. supra o	
d. $\frac{5}{16}$ Sept. mane	11^h. 7.54″	- -		App. α ♉ ad
	11. 17. 24	1^R. + 40750	13 $\frac{1}{3}$ - -	lam. vertic.
d. $\frac{6}{17}$ Sept. mane	6. 50. 30	1^R. + 71800	13 - -	Transitor.
	11. 7. 5 $\frac{1}{4}$	- - - -	- - -	App. α ♉ ad fil. vertic. Transit.
	11. 7. 46 $\frac{1}{2}$	- - - -	- - -	Appulf. α ♉
- - - -	11. 15. 30	2^R. + 39300	13 - -	ad lamin.
d. $\frac{7}{18}$ Sept. mane	7. 18. 31	2^R. + 72400	13 - -	verticalem
d. $\frac{8}{19}$ Sept. mane	8. 15. 42 $\frac{1}{4}$	3^R. + 75000	13 - -	Transitor.

Alia comparatio.

d. $\frac{8}{19}$ Sept. post-merid.	3. 19. 11	- 3950	13 $\frac{1}{4}$ -	
d. $\frac{9}{20}$ Sept. mane	7. 32. 30	- 70650	13 - -	
postmerid.	5. 6. 43	1^R. + 10000	13 $\frac{1}{4}$ -	
	11. 6. 40	- -	- - -	Appulf. α ♉ ad fil. vert. Transitor.
	11. 7. 21	- - -	- - -	Appulf. α ♉
	11. 23. 12	1^R. + 35800	12 $\frac{2}{3}$ -	ad laminam
d. $\frac{10}{21}$ Sept. mane	7. 56. 51 $\frac{1}{4}$	1^R. + 71000	12 $\frac{1}{3}$ -	verticalem
postmerid.	0. 32. 39	1^R. + 89900	12 $\frac{1}{3}$ -	Transitorii.

Ex praecedentibus obferuationibus fequens, Horologii Aftronomici motus pro die Solari medio colligitur; nimirum:

Ex obferuationibus d. 3 et 4 Sept. ft. v. habitis $24^h 3' .47'' ,3$

d. 4 et 5 Sept. - - 24 3. 48, 3

d. 5.

d. 5 et 6 Sept.	- -	24. 3. 48, 9
d. 6 et 9 Sept.	- -	24. 3. 48, 1

Per medium igitur inter istas obseruationes motus Horologii Astron. diei Solari medio respondens a d. 3 ad 9 Sept. st. v. erit - - $24^h.3'.38'',1$

Hoc Horologii Astronomici motu admisso, Pendulum immutabile spatio diei Solaris medii in temperie aeris media $13^{\circ}\frac{1}{4}$ Therm. Reaumur. supra o absoluit

a d. 3. ad 4 Sept. st. v.		98943,2	Oscillationes
4. ad 5 Sept.	- -	98942,5	- - -
5. ad 6 Sept.	- -	98940,9	- - -
6. ad 7 Sept.	- -	98940,7	- - -
7. ad 8 Sept.	- -	98941,6	- - -
8. ad 9 Sept.	- -	98941,7	- - -
9. ad 10 Sept.	- -	98941,7	- - -

Per medium itaque inter ista experimenta motus Penduli immutabilis pro die Solari medio in temperie aeris $13^{\circ}\frac{1}{4}$ Therm. Reaumur. supra o. An. 1757. mense Septembri Reualiae fuit 98941,8 Oscillat.

IV.

Obseruationes et experimenta circa grauitatem in Osilia Insula Penduli immutabilis beneficio diuersis anni tempestatibus perfecta.

Propter coelum autumno An. 1757. hiemeque insequente plerumque nubilum, paucas quidem pro temporis ſpatio obſeruationes in Inſula Oſilia peragere licuit; ſequentes tamen obſeruationes ad motum Penduli immutabilis definiendum, et grauitatis differentiam inter Oſiliam Inſulam et Petropolin accuratiſſime dimetiendam ſpectantes, ſumma inſtitui diligentia.

1757.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{15}{26}$. Oct. veſp.	$11^h.18'.34''\frac{3}{7}$.	- - 45150	6°. ſupra ⊙	
d. $\frac{16}{27}$. Oct. mane	8. 18. 29 - -	- - 82150	$6\frac{3}{4}$ —	
circa merid.	- - - -	- - - -	$7\frac{1}{2}$ —	
veſp.	6. 23. 42 - -	- - - -	- - -	Appulſus
				Arcturi ad
				2. fil. vert.
				Tranſitorii
	6. 24. 20 circ.	- - - -	- - -	Appulſus
	6. 29. $10\frac{2}{3}$ -	1^R. + 24000	$6\frac{3}{4}$ —	Arcturi ad
d. $\frac{17}{28}$. Oct. mane	8. 28. $13\frac{1}{3}$ v. $\frac{1}{2}$	1^R. + 81500	5 —	laminam
veſp.	11. 33. $40\frac{2}{3}$ -	2^R. + 43550	$6\frac{3}{4}$ —	vert. Tranſitorii
d. $\frac{18}{29}$. Oct. mane	8. 10. 59 - -	2^R. + 79000	7 —	
poſtmerid.	1. 17. $25\frac{1}{2}$ - -	3^R. - - -	$7\frac{1}{2}$ —	

Alia comparatio.

d. $\frac{18}{29}$. Oct. poſt-merid.	3. 49. $16\frac{1}{2}$ -	- - - - 300	8 —
d. $\frac{19}{30}$. Oct. mane	8. 46. $21\frac{3}{4}$ -	- - - 70000	5 —
poſtmerid.	- - - -	- - - - -	$7\frac{1}{2}$ —

1757.	T. Horol. Astron.	Oscillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{20}{31}$. Oct. mane	- - - -	- - - - -	$5\frac{1}{2}$ - -	
antemerid.	$11^{h}. 11'. 6\frac{1}{3}''$	$1^{R}. + 78600$	$7\frac{1}{4}$ - - -	
vesp.	6. 20. 58 - -	- - - - -	- - - -	Appulsus Arcturi ad 1. fil. vert. Transitorii
	23. $17\frac{1}{2}$	- - - - -	- - -	Appulsus Arcturi ad 2. fil. vert. Transitorii
	23. 55 circ.	- - - - -	- -	Appulsus
	6. 27. $24\frac{2}{3}$ - -	$2^{R}. + 8500$	8 —	Arcturi ad
d. $\frac{21 \text{ Oct.}}{1 \text{ Nou.}}$ mane	10. 18. 6 - -	$2^{R}. + 73650$	8 —	laminam
vesp.	- - - -	- - - -	9 —	verticalem Transitorii

Manifestum est ex istis obseruationibus Arcturi, Horologium Astronomicum a d. 16. ad 20. Oct. motum suum super tempus Solare medium accelerasse $3'. 50'', 4$ pro 24^{h}. Vnde emergit per medium motus Penduli immutabilis ad diem Solarem medium pro isto tempore, et pro temperie aeris media $6^{\circ}\frac{1}{2}$ Therm. Reaumur. supra 0, 98945 Oscillationes.

Alia inquisitio.

d. $\frac{22 \text{ Oct.}}{2 \text{ Nou.}}$ mane	- - - -	- - - -	$6^{\circ}\frac{1}{2}$ supra 0.	
vesp.	- - - -	- - - -	$8\frac{1}{2}$ - -	
d. $\frac{23 \text{ Oct.}}{3 \text{ Nou.}}$ mane	- - - -	- - - -	7 -	
vesp.	- - - -	- - - -	$9\frac{1}{4}$ - -	

1757.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{24\,Oct.}{4\,Nou.}$ mane	- - - -	- - - - -	$7\frac{1}{2}$ ſupra o	
veſp.	- - - -	- - - - -	$8\frac{1}{2}$ - -	
d. $\frac{25\,Oct.}{5\,Nou.}$ mane	- - - -	- - - - -	$6\frac{3}{4}$ - -	
antemerid.	$0.\ 59.\ 11\frac{1}{4}$ V. $\frac{1}{3}$	- - 0 -	7 - -	
veſp.	6. 20. 29 -	- - - - -	- - -	Appulſus Arcturi ad 1. fil. vert. Tranſitorii.
	22. 49. -	- - - - -	- - -	Appulſus Arcturi ad 2. fil. vert. Tranſitorii.
	$11.\ 41.\ 15\frac{1}{4}$ V. $\frac{1}{3}$	- - 44000	8 - - -	
d. $\frac{26\,Oct.}{6\,Nou.}$ antem.	$0.\ 25'.\ 10''$.	- 96350	7 - - -	
veſp.	- - - -	- - - - -	8. - - -	
d. $\frac{27\,Oct.}{7\,Nou.}$ mane	$9.\ 22.\ 17\frac{3}{4}$ -	$1^R. + 82500$	$7\frac{1}{2}$ - - -	
veſp.	- - - -	- - - - -	$8\frac{1}{2}$ - - -	
d. $\frac{28\,Oct.}{8\,Nou.}$ - - -	$0.\ 43.\ 56\frac{1}{4}$ -	$2^R. + 95000$	$8\frac{1}{4}$ - - -	

Ex hiſce obſeruationibus colligitur motus Horologii aſtronomici ad diem Solarem medium $24^h.\ 3'.\ 50''\frac{3}{23}$, adeoque motus Penduli immutabilis pro eodem temporis ſpatio, et ad temperiem aeris mediam $7^\circ\frac{1}{2}$ Therm. Reaum. ſupra o - - - 98945. Oſcillat.

Alia inquiſitio.

d. $\frac{18}{29}$ Nou. mane	- - - -	- - - - -	6. ſupra o	
veſp.	$4.\ 18.\ 32\frac{1}{4}$ -	- - - - -	- - -	Appulſus Arcturi ad 2 fil. vert. Tranſitorii.
	4. 25. 17 -	- - - 650	$6\frac{1}{2}$ - -	

1757.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{18}{29}$ Nou. mane	- - -	- - - - -	5. - - -	
merid.	- - - -	- - - - -	$7\frac{1}{2}$ - - -	
	4. 16. $11\frac{1}{2}$ -	- - - - -	- - -	Appulſus Arcturi ad 1. fil. vert. Tranſitor.
	18. 31 -	- - - - -	- - -	Appulſus
	4. 31. 29 -	- - 99750	$7\frac{1}{2}$ - - -	Arcturi ad 2. fil. vert. Tranſitor.

Habebimus itaque ſecundum iſtas obſeruationes appulſum Arcturi ad 2. fil. Tranſitorii d. $\frac{18}{29}$ Nou. 187,7 Oſcillat. Pend. immutab. et d. $\frac{18}{29}$ Nou. $98861\frac{1}{2}$ Oſcillat. eiusdem Penduli, ita vt motus iſtius Penduli pro die ſidereo ſit 98673, 8 Oſcillat. et pro die Solari medio in temperie aeris $6^{\circ}\frac{1}{4}$ Therm. Reaum. ſupra o - - 98944 Oſcillat.

Alia inquiſitio.

1758.				
d. $\frac{7}{18}$ Ian. veſp.	8. 15. 30 -	- - - - -	$5\frac{1}{2}$ infra o	Appulſus β Orionis ad fil. vertic. Teleſc. fixi
	18. 6 -	- - - - -	- - -	Egreſſus β Orionis.

1758.

1758.	T. Horol. Aftron.	Ofcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur	
d. $\frac{8}{19}$ Ian. mane	$11^h.59'.18''$ -	- - - 3400	6° infra o	
vefp.	8. 22. 44 -	- - 37900	6 ——	
d. $\frac{9}{20}$ Ian. mane	11. 14. $19\frac{1}{3}$ -	- 99000	$6\frac{1}{2}$. ——	
vefp.	7. 14. $16\frac{1}{2}$ -	- - - -	$6\frac{1}{2}$ ——	Appulfus α ♉ ad laminam vert. Tranfitorii.
	8. 15. 47 -	- - - - -	$6\frac{1}{2}$ ——	Appulfus β Orionis ad fil. vertic. Telefcopii fixi.
	18. 14v. $14\frac{1}{2}$	- - - - -	—— ——	Egreffus β Orionis.

Per medium inter iftas obfervationes motus Horologii aftronomici ad diem Solarem medium inter d. 8 et 9 Ian. fuit $24^h. 4'. 0''$, 6, et motus Penduli immutabilis pro eodem temporis fpatio in temperie aeris 6° vel $6°\frac{1}{2}$ Therm. Reaum. infra o - - 98957 Ofcillat.

Alia inquifitio.

d. $\frac{9}{20}$ Ian. vefp.	11. - - -	- - - - -	$4\frac{1}{2}$ infra o
d. $\frac{10}{21}$ Ian.	- - - - -	- - - - -	4 ——
d. $\frac{11}{22}$ Ian.	- - - - -	- - - - -	3 ——
d. $\frac{12}{23}$ Ian. poftm.	3. 36. $2\frac{1}{3}$ -	- - 2700	$2\frac{1}{2}$ ——
d. $\frac{13}{24}$ Ian.	- - - - -	- - - - -	3 ——

1758.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{14}{25}$ Ian. mane	9. 58. 59$\frac{1}{4}$ -	1^{R}. + 75600	infra 0	
d. $\frac{15}{26}$ Ian. mane	11. 31. 8 -	2^{R}. + 80600	2$\frac{1}{2}$ —	

Alia comparatio.

d. $\frac{16}{27}$ Ian. mane	10. 55. 42$\frac{1}{2}$ -	- - 1800	2$\frac{1}{2}$ —	
veſp.	7. 14. 19 -	- - - - -	— —	Appulſ. α ♉ ad laminam verticalem Tranſitorii:
	8. 15. 49 -	- - - - -	3 —	Appulſus β Orionis ad fil. vert. Teleſcopii fixi.
	18. 16$\frac{3}{5}$ -	- - - - -	— —	Egreſſus β Orionis.
d. $\frac{17}{28}$ Ian. mane	9. 6. 29$\frac{1}{4}$ v. $\frac{1}{5}$	- - 93000	3$\frac{1}{4}$ —	
veſp.	5. 44. 29$\frac{5}{8}$ -	1^{R}. + 28500	2$\frac{1}{2}$ —	

Per medium igitur inter iſtas obſeruationes prodibit motus Horologii aſtron. diei Solari medio reſpondens $24^{h}.\ 3'.\ 56''\frac{1}{3}$, et motus Penduli immutabilis pro iſto temporis ſpatio in temperie aeris 3°. Therm. Reaum. infra 0 - - 98955$\frac{1}{2}$ Oſcillat.

1758.	T. Horol. Aftron.	Oscillationes Pend. immutab	Therm. Reaumur.	
	Alia inquisitio.			
d. $\frac{22}{2}$ $\frac{Ian.}{Febr.}$ antem.	$11^h.12'.28''\frac{1}{3}$.	- - 0 - -	$1^{\circ}\frac{1}{4}$ infra 0	
d. $\frac{23}{3}$. $\frac{Ian.}{Febr.}$ -	0. 44. $37\frac{3}{4}$ V. 38	1^R. + 5000 -	$2\frac{1}{2}$ -	
d. $\frac{24}{4}$. $\frac{Ian.}{Febr.}$ antem.	11. 50. $52\frac{1}{2}$ V. $\frac{1}{2}$	2^R. - - -	$2\frac{1}{2}$ -	
vefp.	9. 13. 6 - -	- - -	- - -	Appulfus γ Orionis ad fil. vert. Tel. fixi.
	15. 53 - -	- - -	- - -	Egreffus γ Orionis.
d. $\frac{25}{5}$ $\frac{Ian.}{Febr.}$ antem.	0. 17. 22 - -	3^R. + 500 -	$1^{\circ}\frac{3}{4}$ - -	
	Alia comparatio.			
d. $\frac{26}{6}$. $\frac{Ian.}{Febr.}$ antem.	11. 57. 40 - -	- - - 500	$3\frac{1}{4}$ infra 0	
vefp.	9. 18. 5 - -	- - -	2 - -	Appulfus γ Orionis ad fil. vert. Telefcopii fixi
	15. $52\frac{1}{2}$ -	- - -	- - -	Egreffus γ Orionis.
d. $\frac{27}{7}$. $\frac{Ian.}{Febr.}$ mane	- - - -	- - -	$2\frac{1}{4}$ - -	
vefp.	6. 21. $39\frac{1}{4}$ -	1^R + 25500	3 - -	

Per medium itaque inter iftas obferuationes motus Horologii Aftronomici ad diem fidereum fuit $24^h.3'.56'',1$, et Penduli immutabilis motus pro eodem temporis fpatio in temperie aeris 2°. Therm. Reaumur. infra 0 98954. Ofcillat.

Alia inquiſitio.

In Iſthmo montuoſo Inſulae Oſiliae (vulgo Schworbe) e regione Curlandiae ſito, in praedio Torkenhoff:

	1. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{16}{27}$ Febr. veſp	7^b. - -	3458 - -	9°. ſupra ○	Appulſus
m. n.	12. - -	- -	$8\frac{1}{2}$ - -	Sirii ad fil.
d. $\frac{17}{28}$ Febr. mane	8. - -	- -	$7\frac{1}{2}$ - -	vert. Tran.
poſtm.	3. - -	- -	$8\frac{1}{2}$ - -	ſitorii.
veſp.	7. - -	1^R+2131 circ.	$9\frac{1}{4}$ - -	Appulſ. Sirii ad fil. vert. Tranſitorii.

NB. Sirius minutis ante aliquot ſecundis filum verticale Tranſitorii iam transgreſſus per nubes emicabat; quare Appulſum eius ad iſtud filum hodie accuratiſſime obſeruare non licuit.

Alia inquiſitio.

alio in loco maritimo Arensburgenſi ſpeculae Aſtron. proximo peracta.

d. $\frac{23}{6}$ $\frac{\text{Febr.}}{\text{Mart.}}$ veſp.	9^b. - -	- - 6358 -	5°. infra ○	Appulſus α
	$11\frac{1}{2}$ - -	- - -	$5\frac{1}{2}$ ——	Cygni ad fil.
d. $\frac{24}{7}$ $\frac{\text{Febr.}}{\text{Mart.}}$ mane	9 - -	- - -	6 ——	vert. Tranſitorii.
poſtm.	4 - -	- - -	5 ——	
veſp.	9 - -	1^R. + 5939	$5\frac{1}{2}$ ——	Appulſus α Cygni ad fil. vert. Trantorii.

1758.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
		$1^R. + 5141\frac{1}{3}$	- -	Appulſus α
d. $\frac{25}{8}$ $\frac{Febr.}{Mart.}$ mane	8^h. - - -	- - - -	$5\frac{1}{2}$ ——	Cygni ad
mer.	12. - -	- - - -	5 ——	lamin. vert.
veſp.	9			Tranſitorii.
	- - - -	$2^R. + 3726$ -	$4\frac{5}{6}$ ——	Appulſus α Cygni ad fil. vert. Tranſitorii.
		$2^R. + 3828$ -	- -	Appulſus α Cygni ad lamin. vert. Tranſitorii.

Patet igitur ex iſtis obſeruationibus, Pendulum immutabile in temperie aeris $8^{\circ}\frac{1}{2}$ Therm. Reaum. ſupra ☉ ſpatio diei Solaris medii in praedio Torkenhoff confeciſſe fere 98944 Oſcillationes: In altero autem loco maritimo Arensburgenſi ſpeculae Aſtron. proximo, Pendulum immutabile in temperie aeris $5^{\circ}\frac{1}{2}$ Therm. Reaum. infra ☉ die Solari medio abſoluit $98956\frac{2}{3}$ Oſcillationes; quod cum caeteris obſeruationibus et experimentis media in Inſula Oſilia inſtitutis ſatis bene reſpondeat, argumento eſt, grauitatem in Oſilia Inſula pro locorum differentia nulli obnoxiam eſſe varietati notatu dignae.

Alia

Alia inquisitio.

1758.	T. Horol. Astron.	Oscillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur	
d. $\frac{27}{7}$. $\frac{Mart.}{Apr.}$ vesp	$0^h.23'.47''\frac{1}{5}$ - -	- - 1100 -	$2^\circ\frac{1}{2}$ supra o	
	4. 11. $5\frac{2}{5}$ - -	- - - -	$1\frac{1}{4}$ ——	Appulf. α ♉ ad fil. vert. Transitorii.
d. $\frac{28}{8}$. $\frac{Mart.}{Apr.}$ mane	- - - -	- - - -	$0\frac{3}{4}$ ——	
postmer	- - - -	- - - -	$1\frac{2}{4}$ ——	
vesp.	2. 23. 39 - -	1^R. + 8000 -	$1\frac{1}{2}$ ——	
	4. 11. 2 - -	- - - -	$1\frac{1}{2}$ ——	Appulf. α ♉ ad fil. vert. Transitorii.
d. $\frac{29}{9}$ $\frac{Mart.}{Apr.}$ mane	1. 58. $13\frac{1}{2}$ - -	1^R. + 55600	$1\frac{1}{2}$ ——	

Confecit itaque Horologium Astronomicum secundum istas obseruationes die Solari medio 86632, 8 Oscillationes; Pendulum autem immutabile eodem temporis spatio in temperie aeris $1^\circ\frac{1}{2}$ Therm. Reaumur. supra o, $98951\frac{1}{2}$ Oscillat.

Alia inquisitio.

d. $\frac{19}{17}$ Apr. vesp.	$3^h.58'.54''$	- - -	- -	Appulsus α ♍ ad fil. vert. Telescopii fixi.
	4. 5. $28\frac{3}{4}$	- 4400 -	9° supra o	
	4. 7. $24\frac{1}{2}$	- - -	- -	Appulsus α ♉ ad 1 fil. vert. Transitorii.
	9. 41	- - -	- -	Appulsus α ♉ ad 2 fil. vert.

1758.	T. Horol. Astron.	Oscillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur. supra 0	
	10. 23	- - -	supra 0	Appulf. α ♉
d. $\frac{13}{24}$. Apr. mane	-	- - -	$7\frac{1}{2}$ —	ad laminam
postmerid.	11. 8. 0	- - 82700	$9\frac{1}{2}$ —	verticalem.
vesp.	3. 58. 43	- - -	- - -	Appulsus α ♍ ad fil. vert. Telescopii fixi.
	4. 1. 45	- - -	- - -	Egressus α
	4. 4. 56	1R. + 3050	$9\frac{1}{4}$ —	♍.
	4. 9. $29\frac{1}{2}$	- - -	- - -	Appulf. α ♉ ad 2 fil. vert. Transitorii.
	10. 11	- - -	- - -	Appulf. α ♉ ad laminam
d. $\frac{14}{25}$. Apr. mane	4. 3. 34	1R. + 52300	$8\frac{3}{4}$ —	verticalem.
vesp.	3. 58. $31\frac{1}{2}$	- - -	- - -	Appulsus α ♍ ad fil. vert. Telescopii fixi.
	4. 1. 34	- - -	- - -	Egressus α
	4. 4. 23	2R. + 1700	$9\frac{1}{2}$ —	♍.
	4. 7. $1\frac{1}{2}$	- - -	- - -	Appulf. α ♉ ad 1 fil. vert. Transitorii.
	9. $18\frac{1}{2}$	- - -	- - -	Appulf. α ♉ ad 2 fil. vert.
	10. 0	- - -	- - -	Appulf. α ♉
d. $\frac{15}{26}$. Apr. mane	4. 27. $5\frac{1}{2}$	2R. + 52600	$8\frac{3}{4}$ —	ad laminam
postmerid.	10. 30. $25\frac{3}{4}$	2R. + 77500	9 —	verticalem.

Ex

Ex istis observationibus colligitur motus Horologii Astronomici pro die Solari medio 86625 Oscillationes; Penduli vero immutabilis motus ad idem temporis spatium in temperie aeris 8°½ Therm. Reaum. supra 0, 98944½ Oscillat.

Alia inquisitio.

1758.	T. Horol. Astron.	Oscillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{20}{31}$ Maii vesp.	8h. 12′. 27″ -	- - -	supra 0	Appulsus ζ Serpentarii ad fil. vert. Telescopii fixi.
	14. 58½ -	- - -	- - -	Egressus ζ Serpentarii
	8. 19. 6 -	- - 29350	8°½	
d. $\frac{21}{1}$. $\frac{Maii}{Iunii}$ mane	- - -	- - -	7¼	——
postmerid.	- - -	- - -	8¾	——
vesp	8. 12. 15½ -	- - -	- - -	Appulsus ζ Serpentarii ad fil. vert. Telescopii fixi.
	14. 47½ -	- - -	- - -	Egressus ζ Serpentarii
	8. 21. 29 -	1R. + 28200	8	——
d. $\frac{22}{2}$. $\frac{Maii}{Iunii}$ mane	5. 57. 7½ -	1R. + 67650	7¼	——
postmer.	- - -	- - -	9	——
vesp.	9. 9. 50 -	2R. + 30200	7½	——

Ex hisce observationibus deducitur motus Horologii Astronomici diei Solari medio respondens = 86625 Oscil-

Oscillat. Motus igitur Penduli immutabilis pro die Solari medio in temperie aeris 8°. Therm. Reaum. supra 0 erit 98943½ Oscillat.

Alia inquisitio.

	Oscillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{26}{6}$. $\frac{Iulii}{Aug.}$ vesp.	9024	13° supra 0	App. α Aquilae ad 1 fil. vert. Transit.
	9133½	- - -	- - - ad 2 fil. vert. - -
d. $\frac{27}{7}$. $\frac{Iulii}{Aug.}$ mane 9^b.	- - - -	12½ ——	
vesp. 6^b.	- - - -	14 ——	
vesp.	1^R. + 7689½	13½ ——	App. α Aquilae ad 1 fil. vert. Transit.
	7799½	- - -	- - - ad 2 fil. vert. - -
d. $\frac{30}{10}$. $\frac{Iulii}{Aug.}$ vesp. 5^b.	Penduli immutabilis pondus eleuaui.		
7^b.	- - - -	14⅓ ——	
	12682	13⅔ ——	App. α Aquilae ad 1 fil. vert. Transit.
	12792	- - -	- - - ad 2 fil. vert. - -
d. $\frac{31}{11}$. $\frac{Iulii}{Aug.}$ mane 8^b.	- - - -	13 ——	
vesp. 6^b.	- - - -	14 ——	
	1^R. + 11349	13⅔ ——	App. α Aquilae ad 1 fil. vert. Transit.
	11458½	- - -	- - - ad 2 fil. vert. - -
d. $\frac{1}{12}$. Aug. mane 7^b.	- - - -	13 ——	
vesp. 5^b.	- - - -	14½ ——	
d. $\frac{2}{13}$. Aug. mane 8^b.	- - - -	12⅓ ——	
vesp. 6^b.	- - - -	14⅓ ——	
	3^R. + 8679½	13⅔ ——	App. α Aquilae ad 1 fil. vert. Transit.
	8788⅔	- - -	- - - ad 2 fil. vert. - -

Per

Per medium inter istas obseruationes a d. 26. Iulii ad d. 2. Aug. vsque, summa diligentia institutas, prodibit motus Penduli immutabilis diei Sidereo respondens 98666 Oscillat. adeoque motus eiusdem Penduli pro die Solari medio in temperie aeris 13°½ Therm. Reaum. supra 0, 98936 Oscillat. Caeterum notandum est, in obseruationibus hisce diebus Penduli immutabilis beneficio habitis, ad veram grauitatis differentiam definiendam maximi esse momenti, quod in eadem fere temperie aeris eodemque anni tempore peractae sunt, quo obseruationes huc spectantes An. 1757. Petropoli institui.

Facili nunc negotio breuiter enumerare possumus sequentes numeros Oscillationum, quas Pendulum immutabile An. 1757. et 1758. secundum obseruationes supra relatas in Osilia Insula diuersis anni temporibus, pro varia aeris temperie, spatio diei Solaris medii absoluit.

An. 1757.	mense Octobri	98945. Oscillat.		6°½.	supra o
	mense Octobri	98945.		7½.	—
	mense Nou.	98944.		6½.	—
An. 1758.	mense Ianuar.	98957.		6°.	infra o
	mense Ianuar.	98955½.	Reaum.	3.	—
	mense Ianuar.	98954.	Therm.	2.	—
	mense Febr.	98944. circ.	indicante	8½.	supra o
	mense Febr.	98956⅔.		5½.	infra o
	mense Martio	98951½.		1½.	supra o
	mense Aprili	98944½.		8½.	—
	mense Maio	98943½.		8.	—
mense Iulio et Augusto		98936.		13½.	—

Patet igitur, variationem vnius Oscillationis in motu Penduli immutabilis, pro die Solari medio, respondere generatim variationi temperaturae, vnum gradum Thermometri Reaumuriani exaequanti quam proxime.

V.

Obseruationes circa grauitatem, Penduli immutabilis beneficio, Pernauiae habitae.

1758.	Oscillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{16}{27}$ Aug. vesp $9^{h}\frac{1}{4}$	- - 4416	18°. supra o	Appulsus α Aquilae ad
d. $\frac{17}{28}$. Aug. mane 6^{b}.	- - -	$17\frac{1}{8}$. — —	filum verticale Te-
vesp. 5^{b}.	- - -	18. — —	lescopii fixi.
	1^{R}. + 3082	$17\frac{3}{4}$. — —	Appulsus α Aquilae ad
d. $\frac{18}{29}$, Aug, mane 6^{b}.	- - -	$17\frac{1}{2}$. — —	filum verticale Te-
vesp. $5^{b}\frac{1}{2}$.	- -	$17\frac{3}{4}$ — —	lescopii fixi.
	2^{R}. + 1748.	17. — —	Appulsus α Aquilae ad
d. $\frac{19}{30}$. Aug. mane 5^{b}.	- - -	$16\frac{1}{8}$. — —	filum verticale Te-
vesp. 5^{b}	- - -	18. — —	lescopii fixi.
	3^{R}. + 413	$17\frac{1}{4}$. — —	Appulsus α Aquilae ad filum verticale Telescopii fixi.

Manifestum est per istas obseruationes, motum Penduli immutabilis pro die Solari medio, in temperie aeris $17^{\circ}\frac{1}{8}$, Therm. Reaum. supra o, mense Augusto Pernaviae fuisse 98936. Oscillat.

VI.

VI.

Obseruationes exquisitiores circa grauitatem, mediante Pendulo immutabili, Dorpati institutae.

1758.	T. Horol. Aftron.	Ofcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{6}{17}$ Sept. mane	$8^h.55'.36''$	- - 58700	$14^\circ\frac{4}{5}$ fupra c	
	$0.26.19\frac{2}{5}$	- - - - -	- - - -	Meridies
vefp. 5^h.	- - - -	- - - -	$15\frac{1}{2}$. ——	verus ex
d. $\frac{7}{18}$ Sept. mane	8. 35. 3 -	1^R. + 55970	$13\frac{3}{4}$. ——	10. altitud.
vefp. 5^h.	- - - -	- - - -	14. ——	Solis cor-
d. $\frac{8}{19}$ Sept. antem.	0. 28. 20 -	2^R. + 70635	13. ——	refpond. de-
vefp. 5^h.	- - - -	- - - -	$14\frac{1}{3}$. ——	ductus.
d. $\frac{9}{20}$ Sept. mane	9. 35. 39 -	3^R. + 57480	$13\frac{1}{4}$. ——	
Alia comparatio.				
eod. circ. merid	0. 34. 52 -	- - 69700	$13\frac{1}{4}$. ——	
vefp. 6^h.	- - - -	- - - -	14. ——	
d. $\frac{10}{21}$ Sept. mane	10. 9. 58 -	1^R. + 58450	$12\frac{3}{4}$. ——	
vefp. 6^h.	- - - -	- - - -	$13\frac{1}{2}$. ——	
d. $\frac{11}{22}$ Sept. mane	8. 48. 15 -	2^R. + 51530	$13\frac{1}{3}$. ——	
	$0.48.42\frac{1}{10}$	- - - -	—— ——	Meridies
vefp.	8. 19. 48 -	2^R. + 98920	$14\frac{1}{2}$. ——	verus ex
d. $\frac{12}{23}$ Sept. mane	9. 55. 58 -	3^R. + 54850	14. ——	15. altitud.
				Solis cor-
				refpond. de-
				ductus.

Dies

Dies Solaris medius secundum praecedentes obseruationes aequatur $24^h\ 3'.\ 49''\frac{1}{3}$ Horol. Astron. quare motus Penduli immutabilis pro die Solari medio, in temperie aeris $13^\circ\frac{1}{2}$. Therm. Reaum. supra o, sumpto medio, erit 98941. Oscillat.

Alia inquisitio.

1758.	T. Horol. Astron.	Oscillationes Pend. immutab	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{21}{2}$ Sept. Oct. antem.	$1^h.\ 0'.25''$	- - 720	11°. supra o	
vesp. 5^h.	- - - -	- - - -	12 ——	
vesp.	$8.45.22\frac{1}{2}$. v. $\frac{1}{3}$	- - - - -	—— ——	Ingressus α Aquilae in camp. Telescop fixi.
	$48.\ 18\frac{3}{4}$ -	- - - -	—— ——	Appulsus α Aquilae ad fil. vert. Telescopii fixi.
	$51.\ 13\frac{1}{3}$ -	- - - -	—— ——	Egressus α Aquilae.
vesp. 9^h.	- - - -	- - - - -	11. ——	
d. $\frac{22}{3}$ Sept. Oct. mane	9. 48. 58 -	- 86280	9. ——	
postmer.	2. 14. 20 -	1^R + 5450	$11\frac{1}{2}$ ——	
vesp.	8 51. $6\frac{3}{4}$ -	- - - - -	—— ——	Egressus α Aquilae e campo Telescop. fixi.
	10 33. 32 -	1^R. + 38675	$9\frac{2}{3}$ ——	

1758.

1758.	T. Horol. Astron.	Oscillationes Pend. immutab	Therm. Reaumur.	
d. 23. Sept. / 4. Oct. mane	9. 32. 2 -	1^R. + 83800	$9\frac{1}{2}$. —	
postmer.	2. 15. 8 -	2^R. + 3200	12. —	
vesp. 4^b.	- - - -	- - - - -	$12\frac{1}{2}$. —	
	8. 32. 29 -	2^R. + 29070	$10\frac{3}{4}$. —	
	8. 45. $9\frac{1}{2}$ -	- - - -	— —	Ingressus α Aquilae in camp. Telescop. fixi.
	48. $5\frac{1}{2}$ -	- - - - -	— —	Appulsus α Aquilae ad fil. vert. Telescopii fixi.
	51. 0 -	- - - -	— —	Egressus α Aquilae.
d. 24. Sept. / 5. Oct. mane	10. 9 34 -	2^R. + 85050	9. —	
postmer.	2. 40. 16 -	3^R. + 3600	$11\frac{1}{2}$. —	
vesp	5. 20. 12 -	3^R. + 14560	12. —	

Ex observationibus d. 21. 22. et 23. Sept. habitis, revolutio fixarum fuit $23^b. 59'. 53'',5$ Horol. Astron. adeoque dies Solaris medius $24^b. 3'. 50''$. Per medium igitur motus Penduli immutabilis pro die Solari medio, in temperie aeris $11°$. Therm. Reaum. supra 0, erit 98942, 1 Oscillat.

CAPVT II.
Experimenta exquisitiora circa grauitatem, beneficio Penduli simplicis instituta.

I.

Pendulum simplex, quo ad experimenta in hocce capite referenda vsus sum, simile est illi, cuius descriptionem *Cel. Bouguerus* in libro cui titulus: *la Figure de la Terre determinée par les obseruations de Mrs. Bouguer et de la Condamine*, exhibuit. *Cel. de la Caille* Pendulo illo simplici non solum Parisiis, verum etiam in Promontorio Bonae spei vsus est, idque eo ad me beneuole transmisit consilio, vt eiusdem instrumenti beneficio differentiam grauitatis Petropolin inter et caetera Terrae loca, vbi experimenta mediante hocce Pendulo simplici instituta sunt; adeoque longitudinem Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii oscillantis Petropoli adhuc nunquam inuestigatam, eo accuratius tutiusque exploratam haberemus. Hanc itaque instrumentorum opportunitatem non negligendam esse existimaui; ideoque ad veram grauitatis differentiam Petropolin inter et Osiliam Insulam, quae per experimenta An. 1752. et 53 exquisitissimi Horologii Astronomici beneficio instituta, opinione maior prodibat, accuratissime stabiliendam, hocce Pendulo simplici praecipue vti mihi constitutum erat. Nihil hic dicam de cautionibus, quae ad eiusmodi experimenta rite instituenda, necessario sunt adhibendae, quarumque cogni-

cognitio experimentorum assiduitate paratur. Notare tamen iuuat, me vsum esse filo tenuissimo ex foliis aloës parato, (fil de pite) quod non nisi post longum temporis interuallum a pondere appensi ponduſculi paululum extenditur. Aeris temperaturam, cui virga chalybea Penduli ſimplicis expoſita erat, et ante, et circa experimentorum tempora, ſeduſo obſeruaui, eaque tantum adnotaui experimenta, quae mihi prae aliis exquiſitiora feliciusque peracta viſa ſunt; ita vt exiguae illae differentiae, quae in experimentis infra relatis occurrunt, ſoli fere difficultati, qua Penduli ſimplicis et Horologii Aſtronomici Oſcillationum comparatio premitur, adſcribendae ſint.

II.

Experimenta exquiſitiora, mediante Pendulo ſimplici, circa grauitatem Petropoli diligenter inſtituta.

An. 1757. d. $\frac{20}{31}$. Aug. Pendulo ſimplici rite ſummaque cura ad motum adornato, Oſcillationes huius Penduli ſequenti modo cum Oſcillationibus Horologii Aſtronomici comparaui:

Expe-

Experimentum 1.

T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
$1^h.34'.0''$	- - 0
47. 20	- - 1
2, 0. 40	- - 2
14. 0	- - 3
27. 30	- - 4
40. 55	- - 5
54. 30	- - 6
Sumto medio $13'.22''$	- - 1

Longitudo fili in hocce experimento inuariata, Therm. Reaum. indicante 17°. ſupra o.

DiesSolaris medius ex obſeruationibus ſupra relatis aequatur $24^h.3'.46''\frac{1}{2}$ Horol. Aſtron. ita vt Pendulum ſimplex iſto temporis ſpatio ſecundum hoc experimentum abſoluat 86518,2 Oſcillat.

Experimentum 2.

T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
d. $\frac{20}{31}$. Aug. $9^h.20'.0''$	- - 0
46. 25	- - 2
10. 26. 15	- - 5
39. 52	- - 6
Sumto medio $13'.16''$	- - 1

Longitudo fili inuariata, Therm. Reaumur. 18°. ſupra o.

Secundum hocce experimentum Pendulum ſimplex ſpatio diei Solaris medii conficit 86517,4 Oſcillat.

Experi-

Experimentum 3.

d. $\frac{22}{2}$. Aug. Sept. T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
$2^h.30'.\ 0''$	- - 0
57. 0	- - 2
23. 25	- - 4
49. 20	- - 6
Sumto medio $13'.21''$	- - 1

Longitudo fili accuratiſſ. et toto experimenti tempore inuariata. Therm. Reaumur. 18°. ſupra o. Ex obſeruationibus in praecedenti Capite relatis 86626, 1 Oſcillat. Horol. Aſtron. diem Solarem medium exaequant. Prodibit igitur motus Penduli ſimplicis pro die Solari medio = 86518. Oſcillat.

Experimentum 4.

d. $\frac{22}{2}$. Aug. Sept.	
$10^h.\ 2'.45''$	- - 0
15. 40	- - 1
28. 46	- - 2
41. 48	- - 3
54. 51	- - 4
11. 7 50	- - 5
Sumto medio $13'.\ 0''$	- - 1

Longitudo fili inuariata. Therm. Reaumur. 18°. ſupra o.

Secundum hocce experimentum 86515. Oſcillationes Penduli ſimplicis diei Solari medio reſpondent.

Experimentum 5.

d. 31 Aug. / 1 Sept.	T. Horol. Astron.	Retardatio Pend. simpl. Oscill.	
	$1^h.44'.0''$	- - 0	Longitudo fili accuratiss. et invariata.
	57. 10	- - 1	
	10. 10	- - 2	Therm. Reaumur. 17°. supra o.
	23. 10	- - 3	Quia Horol. Astron. spatio diei Solaris medii conficiebat 86626,1 Oscillationes, Pendulum simplex secundum hoc experimentum eodem temporis spatio absolvet 86516. Oscillationes.
	36. 10	- - 4.	
	49. 30	- - 5	
	2. 3. 0	- - 6	
Sumto medio	$13'.6''$	- - 1	

Experimentum 6.

d. 31 Aug. / 1 Sept.			
	$9^h.3'.0''$	- - 0	Longitudo fili accuratiss. et invariata.
	16. 10	- - 1	
	29. 28	- - 2	Therm. Reaum. 17°½ supra o.
	42. 35	- - 3	
	55. 55	- - 4	Ex hocce experimento concluditur motus Penduli simplicis pro die Solari medio 86517 Oscillat.
	10. 9. 0	- - 5	
	22 25	- - 6	
Sumto medio	$13'.13''$	- - 1	

Ex hisce itaque experimentis exquisitioribus Petropoli institutis, sequentes colligimus numeros Oscillationum Penduli simplicis, spatio diei Solaris medii confectorum:

Ex

Ex 1. Experimento	86518,2 Oscill.	Therm. Reaum.	17°. supra o
2. - - -	86517,4	- - -	18. — —
3. - - -	86518,0	- - -	18. — —
4. - - -	86515,0	- - -	18. — —
5. - - -	86516,0	- - -	17. — —
6. - - -	86517,0	- - -	$17\frac{1}{2}$. — —
Per medium igitur	86517 Oscill.	Therm. Reaum.	$17^{\circ}\frac{1}{2}$. supra o

III.

Experimenta exquisitiora beneficio Penduli simplicis circa grauitatem Reualiae instituta.

Experimentum 1.

An. 1757. d. $\frac{5}{16}$. Sept.	T. Horol. Astron.	Retardatio Pend. simpl. Oscill.
	$7^h\ 56'.\ 0''$	- - 0
	8. 8. 4	- - 1
	20. 9	- - 2
	32. 12	- - 3
	9. 9. 15	- - 6
	21. 15	- - 7
Sumto medio	$12'.\ 7''$	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata.

Therm. Reaum. 13°. supra o.

Ex obseruationibus supra iam exhibitis colligitur motus Horol. Astron. pro die Solari medio $24^h.\ 3'.\ 48'',1$; hinc erit secundum hoc experimentum motus Penduli simplicis ad idem temporis spatium 86508, 9 Oscillat.

 Experi-

Experimentum 2.

d. $\frac{7}{18}$. Sept. T. Horol. Astron.	Retardatio Pend. simpl. Oscill.
$7^h.17'.\ 0''$	- - 0
29. 0	- - 1
41. 30	- - 2
8. 6. 12	- - 4
31. 30	- - 6
Sumto medio $12'.14''\frac{1}{2}$	- - 1

In hoc experimento virga chalybea arcte ad ponduſculum biconicum Penduli ſimpl. applicata; longitudo fili autem toto experimenti tempore inuariata.

Therm. Reaum. $13^{\circ}\frac{1}{4}$ ſupra 0. Horol Aſtron. hiſce diebus ſpatio 24. hor. temporis medii confecit 86628,1 Oſcillationes, ita vt ſecundum hoc experimentum motus Penduli ſimpl. ad idem temporis ſpatium ſit 86510,2 Oſcillat.

Experimentum 3.

d. $\frac{7}{18}$. Sept. $8^h.58'.\ 0''$	- - 0
9. 10. 28	- - 1
22. 45	- - 2
34. 56	- - 3
47. 10	- - 4
10. 11. 35	- - 6
Sumto medio $12'.20''\frac{1}{2}$	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata.

Therm. Reaum. $13^{\circ}\frac{1}{2}$. ſupra 0. Ex hoc experimento concluditur motus Penduli ſimplicis pro die Solari medio 86511,1 Oſcillat.

Experi-

Experimentum 4.

d. $\frac{4}{15}$ Sept.	T. Horol. Astron.	Retardatio Pend. simpl. Oscillat.
	$9^{h}.11'.30''$	- - 0
	36. 29	- - 2
	48. 45	- - 3
	10. 1. 5	- - 4
Sumto medio	$12'.26''$	- - 1

Longitudo fili accurata et invariata: Therm. Reamur. 13°. supra o.

Secundum obseruationes in Cap. I. relatas, Horol. Astron. spatio diei Solaris medii confecit 86628, 1 Oscillat. Pendulum igitur simplex ex hoc experimento eodem temporis spatio absoluet 86512. Osc.

Experimentum 5.

d. $\frac{4}{15}$ Sept.		
	$10^{h}\ 33'.\ 0''$	- - 0
	45. 15	- - 1
	57. 22	- - 2
	11. 9. 24	- - 3
	21. 28	- - 4
	33. 48	- - 5
	58. 45	- - 7
Sumto medio	$12'.11''$	- - 1

Longitudo fili inuariata et accuratiss.

Therm. Reamur. 13°$\frac{1}{4}$ supra o.

Posito, vt supra, motu Horol. Astron. pro die Solari medio = 86628, 1 Oscillat. prodibit ex hoc experimento exquisitissimo motus Penduli simplicis ad idem temporis spatium = 86509, 6 Oscillat.

Experimentum 6.

d. $\frac{8}{19}$ Sept.	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcillat.
	$1^{h}\,46'.\,0''$	- - 0
	2. 10. 18	- - 2
	22. 32	- - 3
	34. 35	- - 4
	46. 46	- - 5
	59. 7	- - 6
	11. 10	- - 7
Sumto medio	$12'.10''$	- - 1

Longitudo fili accuratiſſima, et per totum tempus experimenti huius exquiſitiſſimi inuariata.

Therm. Reaumur. $13^{\circ}\frac{1}{4}$ ſupra o

Admiſſo motu Horologii Aſtron. ſupra inuento, habebimus motum Penduli ſimplicis pro die Solari medio, ſecundum hocce experimentum 86509, 4 Oſcillat.

Experimentum 7.

d. $\frac{9}{20}$ Sept.	$10^{h}.13'.\,0''$	- - 0
	24. 50	- - 1
	37. 0	- - 2
	49. 25	- - 3
	11. 1. 55	- - 4
	14. 30	- - 5
Sumto medio	$12'.\,6''$	- - 1

Longitudo fili accurata et invariata.

Therm. Reaumur. 13°. ſupra o.

Ex hocce experimento deducitur motus Penduli ſimplicis pro 86628, 1 Oſcillationibus Horol. Aſtron. ſiue pro die Solari medio 86508, 8 Oſcillat.

Experi-

Experimentum 8.

d. ♄ Sept.	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
	$11^h.51'.\ 0''$	- - 0
	0. 3. 31	- - 1
	16. 0	- - 2
	28. 24	- - 3
	40. 53	- - 4
	53. 12	- - 5
Sumto medio	$12'.30''$	- - 1

In hoc experimento virga chalybea arcte ad ponduſculum biconicum Penduli ſimpl. applicata, et longitudo fiſi toto experimenti tempore inuariata.

Therm. Reaumur. $13^{\circ}\frac{1}{4}$ ſupra 0.

Secundum hocce experimentum motus Penduli ſimplicis pro die Solari medio erit 86512,6 Oſcill.

Experimentum 9.

d. ♄ Sept.		
	$1^h.50'.\ 0''$	- - 0
	2. 1. 55	- - 1
	14. 13	- - 2
	26. 30	- - 3
	39. 0	- - 4
	51. 36	- - 5
Sumto medio	$12'.\ 9''$	- - 1

Longitudo fili accurata et invariata.

Therm. Reaumur. $13^{\circ}\frac{1}{4}$ ſupra 0.

Ex hoc experimento patet, Pendulum ſimplex ſpatio diei Solaris medii conficere 86509, 3 Oſcillat.

Experi-

Experimentum 10.

d. $\frac{10}{21}$ Sept.	T. Horol. Astron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcillat.	
	8ʰ.20′.40″	- - 0	Longitudo fili accurata et in-
	32. 55.	- - 1	variata.
	45. 25.	- - 2	Therm. Reaumur. 12°$\frac{1}{4}$ ſupra o.
	57. 54.	- - 3	Secundum hocce experimentum
	9. 10. 30.	- - 4	Pendulum ſimplex ſpatio diei So-
	23. 3.	- - 5	laris medii abſoluet 86511, 7
	35. 20.	- - 6	Oſcillat.
Sumto medio	12′.24″	- - 1	

Motus igitur Penduli ſimplicis pro die Solari medio determinationes, ex praecedentibus experimentis, Revaliae ſumma cura inſtitutis, deductae, ſequentes ſunt:

Ex 1.	Experimento 86508, 9	Oſcillat. Therm. Reaumur.	13°. ſupra o
2.	- - - - 86510, 2	- - - - -	13$\frac{1}{4}$ — —
3.	- - - - 86511, 1	- - - - -	13$\frac{1}{2}$. — —
4.	- - - - 86512, 0	- - - - -	13. — —
5.	- - - - 86509, 6	- - - - -	13$\frac{1}{4}$. — —
6.	- - - - 86509, 4	- - - - -	13$\frac{1}{4}$. — —
7.	- - - - 86508, 8	- - - - -	13. — —
8.	- - - - 86512, 6	- - - - -	13$\frac{1}{4}$. — —
9.	- - - - 86509, 3	- - - - -	13$\frac{1}{4}$. — —
10.	- - - - 86511, 7	- - - - -	12$\frac{1}{4}$. — —
Per medium igitur	86510, 4	Oſcillat. Therm. Reaum.	13°. ſupra o

IV.

IV.

Experimenta exquisitiora, beneficio Penduli simplicis, circa grauitatem in Insula Osilia instituta.

Cum inutile foret, omnia ac singula experimenta, quae circa grauitatem, Penduli simplicis beneficio, in Insula Osilia institui, perscribere; in sequentibus inquisitionibus in numerum Oscillationum Penduli simplicis spatio 24. horarum temporis medii confectorum, ea tantum adscripsi experimenta exquisitiora, quae ad medium inter omnia experimenta vno eodemque die successiue et diligentissime capta, proxime accedunt; notato etiam medio, quod ex ceteris experimentis simul captis colligitur, vt denique medium inter omnia experimenta innotescat. Notandum tamen est, differentiam quae diuersis experimentis vno eodemque die diligenter institutis intercessit, in spatio temporis retardationi vnius Oscillation. Penduli simplicis respondente per medium concluso 20 vel 25 Oscillationes Horologii Astron. raro exaequasse, nunquam superasse.

Inquisitio 1.

An. 1757. d. $\frac{16}{17}$. Oct.	T. Horol. Astron.	Retardatio Pend. simpl. Oscill.	
	11^h. 3′. 0″	- - 0	Longitudo fili accuratiss. et toto experimenti tempore inuariata.
	14. 50 -	- - 1	
	27. 5 -	- - 2	
	39. 15 -	- - 3	Therm. Reaum. 7°. sup. o.
	51. 15 -	- - 4	Secundum obseruationes in Cap. I. relatas, motus Horol. Astron. diei Solari medio respondens fuit 86630, 4 Oscillat. Pendulum simplex igitur eodem temporis spatio conficiet 86510, 4 Oscillat.
	3. 40 -	- - 5	
Sumto medio	12′. 2″	- - 1	

Inquisitio 2.

d. $\frac{19}{20}$ Nou.	1^h. 30′. 0″	- - 0	Longitudo fili accurata et inuariata.
	41. 30 -	- - 1	
	52. 50 -	- - 2	Therm Reaum. 7° supra o.
	2. 4. 25	- - 3	Dies Solaris medius ex obseruationibus d. 18 et 19 Nou. habitis, et in Cap. I. relatis, aequatur 86635$\frac{3}{4}$ Oscillat. Horologii Astron. vnde prodibit motus Pend. simplicis pro eodem temporis spatio secundum haec exper. 86509, 3 Oscillat.
	15. 45 -	- - 4	
	27. 0 -	- - 5	
Sumto medio	11′. 26″$\frac{7}{10}$	- - 1	
Per medium inter duo alia exper. hodie inst.	11. 29 -	- - 1	
Per medium igitur inter omnia experimenta hodierna.	11′. 28″	- - 1	

Inqui-

Inquisitio 3.

d. 20 Nov. / 1 Dec.	T. Horol. Astron.	Retardatio Pend. simpl. Oscill.
	2h.50'.50"	- - 0
	3. 2. 10 -	- - 1
	13. 27 -	- - 2
	24. 44 -	- - 3
	36. 14 -	- - 4
	47. 44 -	- - 5
Sumto medio	11'.20"	- - 1
Per medium inter 3. alia exper. hodie instituta.	11. 24 -	- - 1
Per medium igitur inter omnia experimenta hodierna.	11. 23	- - 1

Longitudo fili in hisce exper. accuratiss. et inuariata.
Therm. Reaum. 6° supra 0.
Ex his experimentis colligitur motus Penduli simplicis 86635¼ Oscillationibus Horologii Astron. siue diei Solari medio respondens 86508,4 Oscillat.

Inquisitio 4.

d. 23 Nov. / 4 Dec.	T. Horol. Astron.	Retardatio Pend. simpl. Oscill.
	3h.37'.10"	- - 0
	49. 14 -	- - 1
	4. 0. 53 -	- - 2
	12. 22 -	- - 3
	24. 20 -	- - 4
	36. 20 -	- - 5
Sumto medio	11'.51"	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata.
Therm. Reaum. 6°. supra 0.
Eadem aeris temperatura inter 5. et 7°. Therm. Reaum. supra 0 per hasce dies conseruata, motus Horol. Astron. diei Solari medio respondens erit 86635¼ Oscillat. adeoque motus Penduli simpl. ad idem temporis spatium ex hoc exper. deductus 86513, 4 Oscillat.

Inquisitio 5.

d. 27. Nov. / 1. Dec.	T. Horol. Astron.	Retardatio Pend. simpl. Oscill.
	$3^h 46'. 0''$	- - 0
	57. 14	- - 1
	4. 8. 35	- - 2
	20. 5	- - 3
	31. 15	- - 4
	42. 40	- - 5
Sumto medio	$11'.18''\frac{1}{3}$	- - 1
Per medium inter 2 alia experimenta hodie instituta.	11. 26	- - 1
Per medium igitur inter omnia experimenta hodierna	$11'.23''\frac{1}{3}$	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata.

Therm. Reaumur. 6°. supra o.

Posito, vt supra, motu Horologii Astron. pro die Solari medio 86635,4 Oscill. prodibit motus Penduli simplicis isti temporis spatio respondens 86508,5 Oscillat.

Inquisitio 6.

1758. d. 1/12. Ian.	$1^h.15'. 0''$	- - 0
	26. 47	- - 1
	38. 25	- - 2
	50. 20	- - 3
	2. 2. 10	- - 4
	13. 55	- - 5
Sumto medio	$11'.46''$	- - 1
Per medium inter 3 alia experimenta hodie instituta.	11. 49	- - 1
Per medium igitur inter omnia exper. hodierna.	$11'.48''\frac{1}{4}$	- - 1

Longit. fili in hisce exper. accurata et inuariata.

Therm. Reaum. $1\frac{0}{2}$ inf. o.

Horolog. Astr. secundum obseru. in Cap. I. relatas, spatio diei Solaris medii confecit 86636, 8 Oscillationes: hinc erit motus Penduli simplicis ad idem temporis spatium ex hisce exper. deductus 86514. 5 Oscillat.

Inqui-

Inquisitio 7.

	T. Horol. Astron.	Retardatio Pend. simpl. Oscill.
d. 26/7 Ian./Febr.	$3^h.50'.0''$	- - 0
	4. 2. 0	- - 1
	14. 5	- - 2
	26. 20	- - 3
	38. 20	- - 4
	50. 40	- - 5
Sumto medio	$12'.4''\frac{1}{2}$	- - 1
Per medium inter 2 alia experimenta hodie instituta.	12. 7	- - 1
Per medium igitur inter omnia experimenta hodierna.	$12.6''\frac{1}{2}$	- - 1

Longitudo fili in his experimentis accurata et inuariata.

Therm. Reaum. $2^{\circ}\frac{1}{2}$ inf. o.

Ex obseruationibus supra relatis motus Horologii Astron. pro die Solari medio fuit 86636,1 Oscillat. Habebimus itaque secundum haec experimenta motum Penduli simplicis pro eodem temporis spatio 86516,8 Oscillat.

Inquisitio 8.

d. 29/9 Mart./Apr.	$5^h.5'.0''$	- 0
	17. 10	- 1
	29. 40	- - 2
	41. 55	- 3
	54. 0	- 4
	6. 6. 5	- - 5
Sumto medio	$12'.15''\frac{1}{4}$	- 1
Per medium inter 3 alia experimenta hodie instituta.	12. 12	- 1
Per medium itaque inter omnia exper. hodierna.	$12'.12''\frac{3}{4}$	- - 1

Longitudo fili accuratissima et inuariata.

Therm. Reaum. 2° sup. o.

Horologium Astron. secundum obseruationes in Cap. I. exhibitas, hisce diebus spatio diei Solaris medii 86632,8 Oscillationes absoluit: Pendul. simplex igitur eodem tempor. spatio ex hisce experimentis conficiet 86514,6 Oscillat.

Inquiſitio 9.

	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend ſimpl. Oſcill.
d. $\frac{15}{25}$. Apr.	$1^{h}. 9'. 0''$	- - 0
	21. 20	- - 1
	33. 34	- - 2
	46. 3	- - 3
	58. 42	- - 4
	2. 11. 27	- - 5
Sumto medio	$12'.22''\frac{2}{3}$	- - 1
Per medium inter 4 alia experimenta d. 14 et 15 Apr. inſtituta.	12. 25	- - 1
Per med. igitur inter omnia exper. d. 14 et 15 Apr. capta.	$12'.24''\frac{1}{2}$	- - 1

Longitudo fili in hiſce experimentis accuratiſſima et inuariata. Therm Reaum. 9°. ſupra o. Ex obſeruation. in Cap. I. relatis, deducitur motus Horologii Aſtron. diei Solari medio reſpondens 86625 Oſcillat. Ex quo itaque colligimus motum Penduli ſimplicis ad idem temporis ſpatium ſecundum haec experimenta 86508, 6 Oſcillat.

Inquiſitio 10.

d. $\frac{22}{2}$. Maii Iun.	$3^{h}.12'. 0''$	- - 0
	24. 20	- - 1
	36. 35	- - 2
	48. 50	- - 3
	4. 1. 23	- - 4
	13. 53	- - 5
Sumto medio	$12'.19''\frac{1}{2}$	- - 1
Per medium inter 6 alia experim. d. 21. et 22 Maii inſtituta.	$12'.22\frac{1}{2}$	- - 1
Per medium igitur inter omnia exper. d. 21 et 22 Maii inſtit.	$12'.22''$	- - 1

Longitudo fili in his experimentis accuratiſſima et inuariata. Therm. Reaum. 8°$\frac{1}{2}$ ſup. o. Horologium Aſtron. ſpatio 24 horarum temporis medii abſoluit 86625 Oſcillationes: hinc motus Penduli ſimplicis pro eodem temporis ſpatio ex hiſce experimentis erit 86508, 3 Oſcillat.

So-

Sequentia experimenta, cum ad stabiliendam veram grauitatis differentiam Petropoli inter et Osiliam Insulam maximi sint momenti, tum propter aeris temperaturam, cum ob anni tempestatem, quae maxime congruunt cum circumstantiis experimentorum huiusce generis anno 1757. Petropoli institutorum, omnia prouidi praecauique, vt haecce experimenta maxima cum cura atque diligentia caperentur. Antequam vero experimenta ipsa referam, obseruationes quas ad vices Horologii Astronomici examinandas institui, hic apponere iuuat.

1758.

d. $\frac{4}{15}$. Aug.	mane 6^{h}.	Therm. Reaum. iuxta Horol. Astr. et Pend. simpl. coll.		14^{0}.	supra o
	postmer. 5^{h}.	- - - - - - -		15.	——
	vesp.	$11^{h}.59'.55''$ Horol. Astr. App. α Aquil	ad 1 fil. vert. Transit.	14.	——
		12. 1. 31 - - -	ad 2 fil. vert.	- -	-
d $\frac{5}{16}$. Aug.	mane 7^{h}.	Therm. Reaumur. - - - - -		$14\frac{3}{4}$	——
	postmer. 6^{h}.	- - - - - - - -		$15\frac{1}{4}$	——
	vesp.	$11^{h}.59'.41''\frac{1}{2}$ Horol. Astr. App. α Aquil.	ad 1 fil. vert. Transit.	$14\frac{1}{2}$	——
		12. 1. $17\frac{1}{2}$ - - -	ad 2 fil. vert.	- -	-
d $\frac{6}{17}$ Aug.	mane 7^{h}.	Therm. Reaumur. - - - -		14	——
	postmer. $5^{h}\frac{1}{2}$	- - - - - - - -		$15\frac{1}{2}$	——
	vesp.	$11^{h}.59'.27''\frac{1}{2}$ Horol. Astr. App. α Aquil.	ad 1 fil. vert. Transit.	$14\frac{1}{2}$	——
		12. 1. $3\frac{1}{2}$ v. $\frac{3}{4}$ - -	ad 2 fil. vert.	- -	-

In-

Inquisitio 11.

d. $\frac{4}{15}$. Aug.	T. Horol. Astron.	Retardatio Pend. simpl. Oscill.
	$11^h.43'.0''$	- - 0
	54. 58	- - 1
	0. 6. 53	- - 2
	19. 9	- - 3
	31. 25	- - 4
	43. 30	- - 5
Sumto medio	$12'.2''$	- 1
Per medium inter 5 alia experimenta hodie instituta.	12. $6\frac{1}{3}$	- - 1
Per medium igitur inter omnia experimenta hodierna.	$12'.5''\frac{1}{2}$	- - 1

Longitudo fili in his experimentis accuratissima et inuariata.

Therm Reaum. $14^{\circ}\frac{1}{2}$. sup. o.

Ex obseruationibus supra exhibitis deducitur motus Horologii Astron. diei Solari medio respondens $86622\frac{2}{3}$ Oscillat. Habebimus itaque motum Penduli simplicis ad idem temporis spatium secundum haecce experimenta 86503,3 Oscillat.

Inquisitio 12.

d. $\frac{5}{16}$. Aug.	$0^h.35'.0''$	- 0
	47. 10	- - 1
	59. 30	- - 2
	1. 11 35	- - 3
	23. 55	- - 4
	36. 5	- - 5
Sumto medio	$12'.12''\frac{2}{3}$	- - 1
Per medium inter 4 alia experimenta hodie capta.	12. 15	- - 1
Per medium igitur inter omnia exper. hodierna.	$12'.14''\frac{1}{2}$	. - 1

Longitudo fili in omnibus hisce experimentis accuratiss. et inuariata.

Therm Reaum. $14^{\circ}\frac{1}{2}$ sup. o.

Motus Penduli simplicis diei Solari medio, siue $86622\frac{2}{3}$ Oscillationibus Horol. Astr. respondens, secundum haec experimenta erit 86504,7 Oscillat.

Inqui-

Inquisitio 13.

d. $\frac{6}{17}$. Aug.	T. Horol. Astron.	Retardatio Pend. simpl. Oscill.
	4h.25′. 0″	- - 0
	37. 22	- - 1
	49. 40	- - 2
	5. 1. 55	- - 3
	14. 15	- - 4
	26. 15	- - 5
Sumto medio	12′.19″	- - 1
Per medium inter 4 alia experimenta hodie peracta.	12. 17	- - 1
Per medium igitur inter omnia experiment. hodierna.	12′.17″$\frac{4}{10}$	- - 1

Longitudo fili accuratissima et inuariata.

Therm. Reaum. $14\frac{4}{5}$. supra o.

Ex hisce experimentis deducitur motus Penduli simplicis $86622\frac{5}{7}$ Oscillationibus Horologii Astron. siue diei Solari medio respondens 86505,2 Oscillat.

Praecedentes in grauitatem inquisitiones recognoscendo, sequentes ex adductis experimentis, in Osilia Insula institutis, colliguntur motus Penduli simplicis pro die Solari medio determinationes:

Ex 1. inquisit. 1757. mense Octobri	86510,4 Oscillat.	Therm. Reaum. indicante	7°. supra o
2. - - - mense Nouembri	86509,2 - -		7°. ——
3. - - - mense Nouembri	86508,4 - -		5°. ——
4. - - - mense Nouembri	86513,4 - -		6°. ——
5. - - - mense Nouembri	86508,5 - -		6°. ——

Ex 6. inquisit. 1758.	mense Ianuario	86514,5	Oscillat.	Therm. Reaum. indicante	$1^{\circ}\frac{1}{2}$ infra ⊙
7. - - -	mense Ianuario	86516,8	- -		$3^{\circ}\frac{1}{2}$ ——
8. - - -	mense Martio	86514,6	- -		2°. supra ⊙
9. - - -	mense Aprili	86508,6	- -		9°. ——
10. - - -	mense Maio	86508,3	- -		$8^{\circ}\frac{1}{2}$ ——
11. - - -	mense Augusto	86503,3	- -		$14^{\circ}\frac{1}{2}$ ——
12. - - -	mense Augusto	86504,7	- -		$14^{\circ}\frac{1}{2}$ ——
13. - - -	mense Augusto	86505,2	- -		$14^{\circ}\frac{1}{2}$ ——

Si varias hasce motus Penduli simplicis determinationes inuicem pro variis Thermometri gradibus comparemus, facili negotio cognoscimus; variationem temperaturae trium graduum Thermometri Reaumuriani accurate satis respondere variationi duarum Oscillationum in motu Penduli simplicis pro spatio temporis 24. horarum.

V.

Experimenta circa grauitatem, beneficio Penduli simplicis, Pernauiae instituta.

An. 1758. d. $\frac{20}{31}$. Aug. vesp. $9^{h}.1'.26''$ Horol. Astr. App. α Aquilae ad filum vert. Telescopii fixi bipedalis.

d. $\frac{21}{1}$. $\frac{Aug.}{Sept.}$ vesp. $9^{h}.1'.11''$ Horol. Astr. App. α Aquilae ad idem filum vert.

Experi-

Experimentum 1.

d. $\frac{21}{1}$. $\frac{Aug.}{Sept.}$ mane	T. Horol. Astron.	Retardatio Pend simpl. Oscill.
	$9^h.10'.0''$	- - 0
	22. 18	- - 1
	34. 50	- - 2
	47. 14	- - 3
	59. 42	- - 4
	10. 12. 12	- - 5
Sumto medio	$12'.24''$	- - 1

Longitudo accuratissima et inuariata.
Therm. Reaum. $17^\circ\frac{1}{2}$. supra o.
Ex obseruationibus supra descriptis, motus Horol. Astron. diei Solari medio respondens fuit 86621,5 Oscillat. vnde colligitur motus Penduli simplicis ad idem temporis spatium, secundum hocce experimentum 86505 Oscillat.

Experimentum 2.

d. $\frac{21}{1}$. $\frac{Aug.}{Sept.}$ mane	$14^h.34'.0''$	- - 0
	46. 30	- - 1
	59. 10	- - 2
	11. 11. 32	- - 3
	23. 57	- - 4
	36. 17	- - 5
Sumto medio	$12'.20''\frac{1}{2}$	- - 1

Longitudo fili accuratiss. et inuariata.
Therm. Reaum. $17^\circ\frac{1}{2}$. supra o.
Posito, vt supra, motu Horologii Astron. pro die Solari medio = 86621,5 Oscillat. prodibit ex hoc experimento motus Penduli simplicis ad idem temporis spatium 86506 Oscillat.

Experimentum 3.

Eod. postmerid. T. Horol. Astron.	Retardatio Pend. simpl. Oscillat.
$4^h. 6'. 0''$	- - 0
18. 45	- - 1
31. 35	- - 2
44. 35	- - 3
57. 5	- - 4
5. 10. 0	- - 5
Sumto medio $12'. 47''\frac{1}{2}$	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata. Therm. Reaum. 18°. supra 0. Secundum hocce experimentum Pendulum simplex spatio diei Solaris medii conficiet 86508,6 Oscillationes.

Per medium igitur inter omnia experimenta motus Penduli simplicis, diei Solari medio respondens, in temperatura aeris $17^{\circ}\frac{1}{2}$. Therm. Reaum. supra 0 Pernauiae erit 86506,5 Oscillat.

VI.

Experimenta exquisitiora circa grauitatem, mediante Pendulo simplici Dorpati instituta.

Experimentum 1.

An. 1758 d. 21 Sept./2 Oct. $0^h. 54'. 0''$	- - 0
1. 6. 0	- - 1
18. 11	- - 2
30. 20	- - 3
42. 20	- - 4
54. 25	- - 5
Sumto medio $12'. 4''$	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata. Therm. Reaum. 11°. supra 0. Ex obseruat. in Cap. I. exhibitis, motus Horol. Astron. pro die Solari medio fuit 86630. Oscillat. Pendulum simplex igitur secundum hocce experimentum eodem temporis spatio conficiet 86510, 3 Oscillat.

Experi-

Experimentum 2.

	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
Eodem	2ᵇ.10′.45″	- - 0
	22. 50 -	- - 1
	35. 6 -	- - 2
	47. 15 -	- - 3
	59. 33 -	- - 4
Sumto medio	12′. 9″$\frac{1}{5}$	- - 1

Longitudo fili accurata et invariata.

Therm. Reaum. 11°$\frac{1}{2}$. ſupra o.

Admiſſo motu Horol. Aſtron. ſupra definito, prodibit motus Penduli ſimplicis, diei Solari medio reſpondens, ex hoc experimento — 86511, 2 Oſcillat.

Experimentum 3.

Eodem	5ᵇ. 9′. 0″	- - 0
	21. 25 -	- - 1
	33. 45 -	- - 2
	6. 10. 33 -	- - 5
Sumto medio	12′.22″	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata.

Therm. Reaumur. 12°. ſupra o.

Secundum hocce experimentum Pendulum ſimplex ſpatio die Solaris medii abſoluet 86513, 2 Oſcillat.

Experimentum 4.

d. 22 Sept. / 3 Oct.	1ᵇ.21′. 0″	- - 0
	45. 36 -	- - 2
	57. 45 -	- - 3
	2. 22. 19	- - 5
Sumto medio	12′.16″$\frac{1}{5}$	- - 1

Longitudo fili accuratiſſima et inuariata.

Therm. Reaumur. 11°$\frac{1}{2}$. ſupra o.

Pendulum ſimplex igitur ſecundum hoc experimentum ſpatio 24. horarum temporis medii conficiet 86512, 3 Oſcillationes.

Experimentum 5.

d. $\frac{22\,Sept.}{3\,Oct.}$	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
	$2^h.25'.30''$	- - 0
	50. 4 -	- - 2
	3. 2. 25 -	- - 3
	27. 5	- - 5
Sumto medio	$12'.18''$	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata.
Therm. Reaumur. $11^{\circ}\frac{1}{2}$ ſupra 0.
Ex hoc experimento concluditur motus Penduli ſimplicis diei Solari medio reſpondens 86512, 6 Oſcillat.

Experimentum 6.

d. $\frac{23\,Sept.}{4\,Oct.}$		
	$11^h.26'.\ 0''$	- - 0
	38. 10 -	- - 1
	50. 0 -	- - 2
	0. 2. 7	- - 3
	14. 30	- - 4
	26. 50	- - 5
Sumto medio	$12'.\ 6''$	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata.
Therm. Reaumur. $11^{\circ}\frac{1}{2}$ ſupra 0.
Secundum hoc experimentum Pendulum ſimplex ſpatio diei Solaris medii conficiet 86510, 7 Oſcillat.

Experimentum 7.

Eodem		
	$2^h.11'.50''$	- - 0
	24. 10 -	- - 1
	36. 34 -	- - 2
	49. 0 -	- - 3
	3. 1. 15 -	- - 4
	13. 40 -	- - 5
Sumto medio	$12'.21''\frac{2}{3}$	- - 1

Longitudo fili accuratiſſima et inuariata.
Therm. Reaum. 12°. ſupra 0.
Erit igitur ſecundum hoc experimentum motus Penduli ſimplicis ad diem Solarem medium 86513, 2 Oſcillat.

Colligi-

Colligimus itaque sequentes numeros Oscillationum Penduli simplicis spatio diei Solaris medii Dorpati confectarum:

Ex 1. Experimento	86510,3	Oscillat.	Therm. Reaumur. indicante	11°	supra o
2. - -	86511,2	- -		$11\frac{1}{4}$.	——
3. - -	86513,2	- -		12.	——
4. - -	86512,3	- -		$11\frac{1}{3}$.	——
5. - -	86512,6	- -		$11\frac{1}{3}$.	——
6. - -	86510,7	- -		$11\frac{1}{2}$.	——
7. - -	86513,2	- -		12.	——
Per medium igitur	86512	Oscillat.		$11^\circ\frac{1}{2}$	supra o

CAPVT III.

Retardationes Pendulorum Petropoli Reualiam, Arensburgum, Pernauiam, et Dorpatum.

I.

Cum obseruationes atque experimenta, ad definiendas grauitatis differentias spectantia mihi instituta, in praecedentibus capitibus diligenter sint exposita, facili nunc negotio eas stabilire possumus Pendulorum retardationes, quae ex nostris obseruationibus, siue experimentis, ad eandem aeris temperiem reductis, fluunt, et quae deinde grauitatis differentiis, inter loca supra nominata determinandis, inseruient. Vt autem de rei veritate eo certiores esse possimus, ad conclusiones ex obseruationiſeruationibus Penduli immutabilis beneficio habitis deductas, ſummam experimentorum, mediante Pendulo ſimplici inſtitutorum, adiicere non ab re fore viſum eſt.

II.
Retardatio Pendulorum Petropoli Reualiam.

Demonſtrauimus ſupra (CAP. I. p. 449.) Pendulum immutabile in temperie aeris 16°, Therm. Reaum. ſupra o ſpatio diei Solaris medii Petropoli conficere accuratiſſime 98947. Oſcillationes. Eiusdem Penduli motus 24. horis temporis medii reſpondens Reualiae, in temperie aeris 13°$\frac{1}{4}$. Therm, Reaum. ſupra o repertus fuit per medium (pag. 451.) 98941,8 Oſcillat. Cum vero ſecundum obſeruationes in Oſilia Inſula inſtitutas variatio vnius gradus Thermometri Reaumur. producat variationem vnius Oſcillationis quam proxime in motu Penduli immutabilis diurno (pag. 466.), motus Penduli immutabilis pro die Solari medio in temperatura aeris 16°. Therm. Reaum. ſupra o Reualiae erit 98938,8 Oſcillat. ita vt retardatio Penduli immutabilis Petropoli Reualiam vnius diei Solaris medii intervallo ſit 8,2 Oſcillat.

Simili modo vidimus (pag. 474.) motum Penduli ſimplicis diei Solari medio reſpondentem, in temperie aeris 17°$\frac{1}{2}$. Therm. Reaum. ſupra o Petropoli eſſe 86517. Oſcillat. Reualiae contra in temperatura aeris 13°. Therm. Reaumur. ſupra o, 86510,4 Oſcillat. (pag. 480.). Ratione autem habita variationis diuerſis Thermo-

Thermometri gradibus respondentis supraque determiminatae (pag. 490.), prodibit motus Penduli simplicis, diei Solari medio et temperaturae aeris Petropoli obseruatae respondens, Reualiae 86507,4 Oscillat. vnde concludimus retardationem Penduli simplicis Petropoli Reualiam vnius diei Solaris medii interuallo 9,6 Oscillat.

III.

Retardatio Pendulorum Petropoli Arensburgum in Osilia Insula.

Petropoli obseruaui, Pendulum immutabile in temperie aeris 16°. Therm. Reaum. supra o diei Solaris medii spatio absoluere 98947. Oscillationes (pag. 449.) In Osilia autem Insula huiusce Penduli motum ad diversos Thermometri gradus diligentissime examinaui, eumque supra (pag. 465.) exhibui. Obseruationes atque experimenta, huius Penduli beneficio 1758. Iulio et Augusto mense instituta, proxime quidem pro temperie aeris accedunt ad obseruationes huc spectantes 1757. Augusto mense Petropoli habitas, eamque ob causam ad comparationem inter grauitatem instituendam maxime idonea esse videntur: haud iniucundum tamen fore iudico, omnes ac singulas obseruationes, circa motum Penduli immutabilis in Insula Osilia habitas, secundum legem variationis motus huiusce Penduli supra inventam ad illam aeris temperaturam, in qua experimenta Petropoli sunt instituta, reducere et hic exhibere. Colligitur igitur motus Penduli immutabilis pro die Solari medio in Osilia Insula obseruatus, et ad temperiem aeris 16°, Therm. Reaum. supra o reductus.

Exo seru. An. 1757.	mense Oct.	in temp. aeris $6^{\circ}\frac{1}{2}$.	supra o habitis	98934,8 Osc.
	—— Oct.	- - - - $7^{\circ}\frac{1}{2}$	—— -	- 98935,8
	—— Nou.	- - - - $6^{\circ}\frac{1}{2}$.	—— -	- 98933,8
1758.	—— Ian.	- - - - 6°.	infra o -	- 98933,3
	—— Ian.	- - - - 3°.	—— -	- 98935 0
	—— Ian.	- - - - 2°.	—— -	- 98934,6
	—— Febr.	- - - - $8^{\circ}\frac{1}{2}$	supra o -	- 98936,0 circ.
	—— Febr.	- - - - $5^{\circ}\frac{1}{2}$	infra o -	- 98933,7
	—— Mart.	- - - - $1^{\circ}\frac{1}{2}$.	supra o -	- 98936,0
	—— Aprili	- - - - $8^{\circ}\frac{1}{2}$.	—— -	- 98936,3
	—— Maio	- - - - 8°.	—— -	- 98935 0
	Iulio et Augusto	- - - $13^{\circ}\frac{1}{2}$.	—— -	- 98933,3
			Per medium igitur	98934,7 Osc.

Quum vero obseruationes, mense Iulio et Augusto habitae, ob rationes supra adductas caeteris sint praeferendae, statuere possumus, motum Penduli immutabilis pro die Solari medio ad temperiem aeris 16°. Therm. Reamur. supra o in Insula Osilia esse $98933\frac{1}{2}$. vel 98934. Oscillat. ita vt retardatio Penduli immutabilis quaesita Petropoli Arensburgum vnius diei Solaris medii interuallo sit 13, vel $13\frac{1}{2}$. Oscillat.

Secundum experimenta, mediante Pendulo simplici diligentissime instituta, dies Solaris medius exaequatur accuratissime 86517. Oscillationibus Penduli simplicis Petropoli oscillantis, Thermometro Reaum. indicante $17^{\circ}\frac{1}{2}$. supra o. In Osilia Insula varia, ad variam aeris tempe-

temperaturam, beneficio huius Penduli, institui experimenta, supra iam descripta; ex quibus ea, quae mense Augusto ibi capta sunt, ob adductas rationes, ad grauitatis differentiam Petropolin inter et Osiliam Insulam indagandam, aptissima iudicaui.

Nihilo tamen minus caetera etiam experimenta omnia, in Insula Osilia instituta, et ad temperiem aeris supra notatam 17°½ Therm. Reaumur. supra o secundum regulam (pag. 490.) traditam reducta, in medium afferre vsui esse visum est.

Prodibit igitur motus Penduli simplicis in Insula Osilia, diei Solari medio respondens, et ad temperiem aeris 17°½. Therm. Reaum. supra o reductus:

1.	Inquis. 1757. mense	Oct. in temp. aeris	7°.	supra o peracta	(1. exp.)	86503,4 Oscill.
2.	- - - - - -	Nou. - -	7°.	- - - - -	(3. exp.)	86502,3 - -
3.	- - - - - -	Nou. - -	6°.	- - - - -	(4. exp.)	86500,7 - -
4.	- - - - - -	Nou. - -	6°.	- - - - -	(1. exp.)	86505,7 - -
5.	- - - - - -	Nou. - -	6°.	- - - - -	(3. exp.)	86500,8 - -
6.	- 1758. - -	Ian. - -	1°½.	infra o - -	(4. exp.)	86501,8 - -
7.	- - - - - -	Ian. - -	2°½.	- - - - -	(3. exp.)	86503,5 - -
8.	- - - - - -	Mart. - -	2°.	supra o - -	(4. exp.)	86504,3 - -
9.	- - - - - -	Apr. - -	9°.	- - - - -	(5. exp.)	86502,9 - -
10.	- - - - - -	Maio - -	8°½.	- - - - -	(7. exp.)	86502,3 - -
11.	- - - - - -	Aug. - -	14°½.	- - - - -	(6. exp.)	86501,3 - -
12.	- - - - - -	Aug. - -	14°½.	- - - - -	(5. exp.)	86502,7 - -
13.	- - - - - -	Aug. - -	14°½.	- - - - -	(5. exp.)	86503,2 - -

Per medium igitur inter omnia experimenta 86502,4 Oscill.

Cum itaque motus Penduli simplicis, per medium inter omnia experimenta conclusus, fere nihil discrepet a numero Oscillationum huius Penduli, inter experimenta exquisitissima mense Augusto instituta medio, maxima cum certitudine stabilire possumus motum Penduli simplicis in Osilia Insula ad diem Solarem medium in temperatura aeris $17^{\circ}\frac{1}{2}$. Therm. Reaum. supra $0 = 86502\frac{1}{2}$. Oscillat. adeoque retardationem Penduli simplicis vnius diei Solaris medii interuallo Petropoli Arensburgum in Osilia Insula $14\frac{1}{2}$. Oscillat.

IV.

Retardatio Pendulorum Petropoli Pernauiam.

Cum Pendulum immutabile Petropoli in temperie aeris 16°. Therm. Reaum. supra 0, spatio diei Solaris medii conficiat 98947. Oscillationes, Pernauiae autem eodem temporis interuallo in temperatura aeris $17^{\circ}\frac{1}{2}$. Therm Reaum. supra 0 98936. Oscillationes, (pag. 466.) habebimus motum Penduli immutabilis, diei Solari medio et temperaturae aeris 16°. supra 0 respondentem, Pernauiae 98937, 6 Oscill. adeoque retardationem Penduli immutabilis Petropoli Pernauiam vnius diei Solaris medii interuallo 9, 4 Oscillat.

Penduli simplicis motus pro die Solari medio, in temperie aeris $17^{\circ}\frac{1}{2}$. Therm. Reaum. supra 0 Petropoli aequatur 86517. Oscillationibus; Pernauiae autem in eadem aeris temperatura 86506, 5 Oscill. (pag. 492.)

Vnde

Vnde colligitur retardatio Penduli simplicis vnius diei Solaris medii interuallo Petropoli Pernauiam — 10, 5 Oscillat.

V.

Retardatio Pendulorum Petropoli Dorpatum.

Motus Penduli immutabilis, diem Solarem medium in temperatura aeris 11°. Therm. Reaum. supra o exaequans, Dorpati per medium fuit 98942, 1 (pag. 469.). Reductione autem facta, secundum regulam supra traditam, prodibit huius Penduli motus, diei Solari medio in temperie aeris 16°. Therm. Reaum. supra o Dorpati respondens 98936, 7 Oscillat. et propterea retardatio Penduli immutabilis interuallo vnius diei Solaris medii Petropoli Dorpatum 10, 3 Oscillat.

Inuenimus (pag 495.) per medium inter experimenta, Penduli simplicis beneficio Dorpati instituta, motum Penduli simplicis Dorpati ita fuisse comparatum, vt in temperatura aeris $11\frac{1}{2}^{\circ}$. Therm. Reaum. supra o spatio diei Solaris medii ad 86512. Oscillationes assurgeret; a quo numero, si subtrahantur secundum regulam nostris experimentis probatam 4. Oscillationes pro differentia temperaturae aeris, remanet motus Penduli simplicis, diei Solari medio in temperie aeris $17\frac{1}{2}^{\circ}$. Therm. Reaum. supra o Dorpati respondens, 86508. Oscillat. vnde denique colligitur retardatio Penduli simplicis Petropoli Dorpatum vnius diei Solaris medii interuallo 9. Oscillat.

CAPVT IV.

Meditationes circa decrementa grauitatis, nostris obseruationibus et experimentis probata.

Ex obseruationibus atque experimentis supra descriptis, satis, me iudice, intelligitur, decrementa grauitatis Petropoli Reualiam, Arensburgum, Pernauiam et Dorpatum, quae ex Pendulorum retardationibus, in praecedente capite definitis, cognoscuntur, multo maiora esse iis, quae ex recepta Telluris Theoria colliguntur. Decrementa praecipue grauitatis Petropoli Reualiam et Arensburgum in Osilia Insula, pro parua illa latitudinis differentia, adeo insignia sunt, totque experimentis diuersorum instrumentorum beneficio institutis probata, vt attentione nostra digna sint. Discrimina quidem in decrementis illis grauitatis occurrunt exigua inter Pendulum simplex, et illud, quod vocatur immutabile; (hoc enim paulo minora, illud contra paulo maiora prodit grauitatis decrementa): caussam vero in vitiis instrumentorum potius, quam in erroribus obseruationum, latere palam est, postquam obseruationibus atque experimentis supra descriptis satis superque probaui, quantam cautionem curamque adhibuerim, vt experimenta, vtriusque Penduli beneficio instituenda, ex sententia succederent. Simili modo quin differentia, quae inter experimenta haecce recens capta, et ea, quae 5 vel 6 abhinc annis beneficio exquisitissimi Horologii cuiusdam Astronomici Petro-

Petropoli et in Osilia Insula institui, obuia est, causis quibusdam occultis, siue ignotis, adscribenda sit, nullum dubitandi locum relinqui existimo. Horologium enim, quo tunc ad ista experimenta vsus sum, quam accuratissime affabreque secundum inuenta et praecepta Cel. *Grahami* est elaboratum. Omni cura in hoc incubui, vt Horologium illud Astronomicum, capsis solidissimis inclusum, ita transportaretur, vt virgae longitudo nulli mutationi, praeter illam, quae ex diuersis caloris gradibus oritur, obnoxia esset.

Illud in specula Astronomica Arensburgensi ita ad motum adornaui, vt situm eundem obtinerent omnes Horologii partes, in quo Petropoli positae fuerant; eius motum saepissime per octo fere menses, praesentibus iis, quos ex Academia rerum marinarum adiutores habui, ad coelum exploraui, et obseruato insigni illo grauitatis decremento Petropoli Arensburgum, illud cum Academia Imperiali, neque minus cum Ill. *de la Condamine* communicaui. Postquam Ill. *de la Condamine* humanissime ad me suam hac de re sententiam perscripserat, causasque indicauerat, quas ille detexit, cum simile quid in itinere ipsi in motu Horologii cuiusdam Astronomici obseruatum est, et quae suspicioni locum aperire possunt, eas omnes in meo Horologio diligentissime examinaui, nihilque inueni, quo tale quid effici posset; siquidem motus Horologii per octo illos menses in Osilia insula maximae semper fuit regularis aequabilisque. Horologio nostro eadem via eademque cura atque cautione, quae in transportatione eiusdem Petropoli Arensburgum adhibitae fuerant, mari Arensburgo Petropolin reuecto, et in eodem loco, quem ante abitum

in-

in Osiliam Insulam in specula mea Astronomica Petroburgensi occupauerat, collocato, obseruaui motum Horologii diurnum in eadem aeris temperatura, neglectis minutis aliquot secundis, accuratissime aequari motui illi diurno, quo Horologium nostrum Petropoli anno superiori, ante iter in Osiliam Insulam susceptum, processerat. Nemo igitur dubitabit, quin decrementum illud grauitatis insigne Petropoli Arensburgum memorati Horologii Astronomici beneficio detectum, et per multos menses constanter obseruatum, admirabili hocce Horologii consensu secum ipso confirmetur atque probetur quam maxime. Si quis enim insignem illam differentiam in motu Horologii animaduersam perturbationi ignotae Horologii, siue partium, quibus machina haec componitur, tribuere malit: iure quaero, qui fit, vt perturbatio illa notabilis mirum in modum in Horologio, Arensburgo Petropolin transportato, adeo exacte sit restituta? Ex Tabulis, motum Horologii nostri Astronomici, cum Petropoli, tum in Osilia Insula obseruatum, exhibentibus, quas cum conuentu Academ. saepius communicaui, facillime intelligitur, Horologium nostrum Astronomicum, virga ex ebeno parata instructum, pro variis Thermometri gradibus, varia quidem celeritate procedere, lignumque re vera secundum longitudinem a frigore contrahi, et a colore extendi, sed tamen satis regulariter, ita vt in eadem aeris temperatura Horologium Petropoli constanter multo celerius (30″ circiter intervallo diei siderei) moueatur, quam Arensburgi in Osilia Insula et Reualiae. Praeterea insigne grauitatis decrementum Petropoli Reualiam et Arensburgum illo tempore

pore ex iis colligebatur experimentis, quae instrumenti cuiusdam elatere instructi, et ab artifice quodam Lubecensi ad augmenta vel decrementa grauitatis obseruanda excogitati, et ad *B. Richmannum* transmissi, beneficio Arensburgi et Reualiae institui. *B. Richmannus* enim hocce instrumentum ipse Petropoli examini subiecerat, et ad me, propter difficultatem parandi Penduli simplicis accuratissimi in officina mechanica Petroburgensi, Arensburgum transmiserat. Silentio hic praetereo eas obseruationes, quas eodem tempore alius Horologii Astronomici minus accurati beneficio institui, et ex quibus haud minor grauitatis differentia Petropolin inter et Arensburgum colligitur. Quia igitur hisce rationum momentis memorabile illud grauitatis decrementum Petropoli Reualiam et Arensburgum probabile redditur quam maxime, operae pretium visum est, non solum mihi et Academiae Imperiali, verum etiam iis viris doctis extraneis, quibuscum meas communicaueram obseruationes, vt obseruata ista notatu dignissima nouis experimentis, aliorum instrumentorum ad hunc vsum accommodatorum beneficio instituendis, verificarentur; quod equidem experimenta nostra, supra relata, vtriusque Penduli, simplicis nempe atque immutabilis, beneficio peracta, praestitura esse confido. Discrimina quidem inter noua haecce experimenta et ea occurrunt, quae 5 vel 6 ab hinc annis mediante Horologio Astronomico, secundum praecepta *Grahami* elaborato, institui; sed circumstantiis omnium horum experimentorum satis iam candideque enarratis, iudicium sit penes lectorem,

 vtrum

vtrum grauitatis decrementa insignia Petropoli Reualiam et Arensburgum, ex prioribus nostris experimentis 5 ab hinc annis, Horologii Astronomici exquisitissimi beneficio institutis, deducta, in rei veritate fundentur, an potius, fortassis parte aliqua, ignotis mihi prorsus Horologii vitiis, perturbationibusue, sint adscribenda. Attamen experimenta nostra recens diuersorum instrumentorum beneficio instituta considerando, cognoscimus, decrementa grauitatis exinde conclusa, re ipsa maiora esse, quam, vt cum regularitate figurae Telluris, eiusque texturae internae, componi possent; et in hoc experimenta recens, Penduli immutabilis aeque, ac Penduli simplicis, beneficio, peracta, egregie concinunt cum iis, quae mediante Horologio Astronomico 5 ab hinc annis instituti; excepta quantitate insoliti decrementi grauitatis; quae ex experimentis recentioribus minor prodit. Quod ad exiguam illam quantitatem attinet, de qua in decrementis grauitatis Petropoli Reualiam, Arensburgum et Pernauiam experimenta, mediante Pendulo immutabili instituta, discrepant ab iis, quae beneficio Penduli simplicis capta sunt, cum decrementa illa grauitatis ex his paulo maiora colligantur, quam ex illis, tantillam differentiam obseruationum et experimentorum erroribus tribuere possemus; scire tamen interest, vtrum experimentis, ope Penduli simplicis peractis, an vero experimentis, mediante Pendulo immutabili institutis, magis fidendum sit. Haec quidem, ob accuratiorem et commodiorem modum numerandi Oscillationes Penduli immutabilis, certo temporis spatio respondentes, praeferenda esse videntur;

dentur; illis autem propter instrumenti simplicitatem maior fides haberi potest: dubium enim nullum est, quin motus Penduli immutabilis variis causis magis perturbari, eiusque vicissitudines minus regulares reddi possint, quam Oscillationes Penduli simplicis harumque mutationes. Perpensa denique differentia, quam inter experimenta circa grauitatem recens instituta, et ea inuenimus, quae aliquot ab hinc annis Horologii Astronomici exquisitissimi beneficio peracta sunt, nescio qualis exactitudo in dignoscenda grauitatis differentia ab experimentis, Horologiorum beneficio institutis, speranda sit. Constructio enim Horologii Astronomici, quo 5 abhinc annis ad experimenta instituenda vsus sum, similis est structurae Penduli immutabilis, quod nunc ad ista experimenta adhibui, (vel potius perfectior, ob pondus multo maius, quo Horologium nostrum Astronomicum ad motum cietur) excepta virga, quae in hoc ex chalybe, in illo ex ebeno, est parata. Hisce rationum momentis in hanc fere adductus sum sententiam, vt grauitatis differentiam, ex experimentis Penduli simplicis beneficio institutis, saepiusque repetitis, collectam, caeteris paribus, magis fidam esse crederem. Caeterum, rationibus nostris expositis, de hoc iusti harum rerum aestimatores iudicent Restat nunc, vt decrementa grauitatis, ex nostris experimentis deducta, paucis ad ea comparemus, quae ex recepta Telluris theoria pro diuersa locorum latitudine colliguntur.

I.

Admissis experimentis circa grauitatem, ab Astronomis Academiae Reg. Parif. summa cura institutis, decrementum grauitatis Petropoli Reualiam pro differentia latitudinis dimidii gradus, secundum axioma, quod grauitatis incrementa ab Aequatore Polos versus sequantur quam proxime rationem quadratorum sinuum latitudinis, producit retardationem diurnam 2 Oscillationum Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii oscillantis.

Secundum experimenta, mediante Pendulo immutabili instituta, retardatio diurna Penduli Petropoli Reualiam est 8, 2 Oscillat. Penduli immutabilis (pag. 496.) siue 7, 2 Oscillat. Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii oscillantis.

Ex experimentis Penduli simplicis beneficio captis retardatio Penduli diurna Petropoli Reualiam colligitur 9, 6 Oscillat. Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii oscillantis. (pag. 497.)

II.

Decrementum grauitatis Petropoli Aremburgum in Osilia Insula, differentiae latitudinis $1\frac{2}{3}$ gradi respondens, per Theoriam collectum, efficit retardationem diurnam $5\frac{1}{2}$ vel 6 Oscillationum Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii oscillantis.

Per

Per experimenta, ope Penduli immutabilis peracta, inuenimus retardationem huius Penduli diurnam Petropoli Arensburgum in Osilia Insula $13\frac{1}{2}$ Oscillat. (p. 498.), adeoque retardationem Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii oscillantis 12 Oscillat.

Per experimenta, mediante Pendulo simplici instituta, stabilitur retardatio diurna Petropoli Arensburgum $14\frac{1}{2}$ Oscillat. Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii oscillantis. (pag. 499.)

III.

Decrementum grauitatis Petropoli Pernauiam, differentiae latitudinis $1\frac{1}{2}$ grad. respondens, ex Theoria inuentum, producit retardationem diurnam $5\frac{1}{2}$ Oscillat. Penduli simplicis ad singula min. sec. temporis medii oscillantis.

Secundum experimenta supra exhibita, retardatio Penduli immutabilis diurna Petropoli Pernauiam est 9, 4 Oscillat. (pag. 501.) siue retardatio diurna Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii oscillantis 8, 2 Oscillat.

Experimenta Penduli simplicis beneficio peracta, exhibent retardationem diurnam Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii oscillantis Petropoli Pernauiam 10, 5 Oscillat. (pag. 501.)

IV.

Eodem modo ex decremento denique grauitatis Petropoli Dorpatum, differentiae latitudinis $1\frac{1}{2}$ grad. respondente, per Theoriam collecto, oritur retardatio diurna $5\frac{1}{2}$ Oscillat. Penduli simplicis ad singula min. sec. temporis medii oscillantis.

Retardatio autem Penduli immutabilis diurna Petropoli Dorpatum fuit 10, 8 Oscillat. (pag. 501.) vnde emergit retardatio diurna Penduli simplicis ad singula min. sec. temporis medii oscillantis 9 Oscillat.

Experimenta nostra, mediante Pendulo simplici instituta, ostendunt retardationem diurnam Penduli simplicis ad singula minuta sec. temporis medii oscillantis Petropoli Dorpatum itidem 9 Oscillat.

Hisce comparationibus constat, decrementa grauitatis Petropoli Reualiam, Arensburgum, Pernauiam et Dorpatum nostris experimentis stabilita, notabiliter superare ea, quae ex Theoria deducuntur. Decrementa praesertim grauitatis Petropoli Arensburgum et Reualiam adeo a Theoria deflectunt, vt duplo et triplo, imo quadruplo et quintuplo, maiora sint, quam pro Theoria. Tanta differentia pro tam paruo locorum interuallo, tot experimentis, diuersorum instrumentorum beneficio institutis, notatu quin sit digna, et defectui materiae in illis regionibus maxime tribuenda, nullus dubito; nisi forte grauitas pro diuersa locorum longitudine diuersa sit.

Spero

Spero itaque fore, vt haecce experimenta incitamento sint, grauitatis, etiam in locis sub eodem parallelo sitis et sitis magno longitudinis interuallo ab inuicem remotis, inuestigandae: eiusmodi enim experimentorum maxima cum accuratione institutorum numerus ad huc valde est exiguus, et hanc ob caussam diligenter adaugendus; eo magis, quod hactenus nulla instituta sunt Pendulorum experimenta eo consilio, vt grauitas pro diuersa locorum longitudine examinaretur. Haec vero experimenta, nostris similia, sed longius in Longitudinem extendenda, ad veram Theoriam Telluris condendam maximi esse momenti apertum est omnibus. Neque desunt experimenta, viris doctissimis exercitatissimisque instituta, quae irregularitatem notatu dignissimam in augmentis grauitatis ab Aequatore Polos versus produnt, vel saltem regularitatem maxime suspectam reddunt: ex. gr. Celeberr. *Picardus* asseuerat, in longitudine Penduli ad singula minuta secunda oscillantis Vraniburgi et Parisiis, imo ad australissimam Galliae oram sub latit. 43½. grad. sibi nullam esse obseruatam differentiam sensibilem, quamuis maximam ad experimenta adhibuerit diligentiam accurationemque; cum tamen pro isto latitudinis interuallo, differentia longitudinis Penduli ad singula min. sec. oscillantis, secundum Theoriam sit ⅓. lineae, siue 50. circiter Oscillat. interuallo 24. horarum Penduli ad singula min. sec. oscillantis; quantitatem vero hanc adeo sensibilem experimentorum praecisionem Cel. *Picardi* effugisse vix credibile est. Insolitis itaque grauitatis differentiis probatis, de regularitate curuaturae Meridianorum

rum terrestrium dubitare fas est. Operae igitur pretium erit, vt, praeter Pendulorum experimenta, etiam graduum diuersorum mensurae sub eodem Meridiano capiantur quam diligentissime, neque negligantur graduum parallelorum dimensiones, praesertim iis in locis, vbi grauitatis effectus a Theoria insigniter deflectat: Pendulorum enim experimentis, cum graduum terrestrium mensura coniunctis, tutius indicare possumus, vtrum irregularitates circa Telluris superficiem, an vero in intimis Terrae visceribus, lateant.

CAPVT V.

De Longitudine Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii oscillantis.

I.

In praecedentibus capitibus de differentia tantum grauitatis, quam in superficie Telluris experimur, Petropolin inter et loca nonnulla, ad Estoniae et Liuoniae oras sita, egimus; nunc autem absolutam Penduli simplicis, ad singula minuta secunda temporis medii Oscillantis longitudinem grauitati proportionalem, definire animus est: quod haud ingratum fore eo magis confido, cum circa longitudinem Penduli experimenta in nostris regionibus adhuc nulla sint instituta. Duobus vero modis Penduli longitudinem hic determinare possumus; Pen-

Penduli nimirum immutabilis, et Penduli ſimplicis beneficio, quae eo conſilio a Cel. *de la Caille* huc ſunt transmiſſa, vt comparatione inter motum horum Pendulorum, primo Pariſiis, deinde Petropoli, obſeruatum inſtituta, de vera Penduli ſimplicis longitudine in noſtris regionibus eo certius conſtaret. Vera enim Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis longitudo, quamplurimis et accuratiſſimis experimentis, beneficio Penduli ſimplicis huc transmiſſi inſtitutis, a Cel. *de la Caille* Pariſiis ſtabilita eſt 3. ped. 8 lin. 55: quare ad longitudinem Penduli ſimplicis in noſtris regionibus definiendam non neceſſe eſt, niſi vt longitudo Penduli Pariſina augeatur in ratione quadratorum numerorum Oſcillationum Penduli eodem temporis ſpatio et in eadem aeris temperatura Pariſiis et noſtris in regionibus confectarum.

II.

Longitudo Penduli ſimplicis Arenſburgi, in Oſilia Inſula, ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis.

Cel. *de la Caille* An. 1756. initio Aprilis menſis obſeruauit, Pendulum immutabile in temperie aeris $6^{\circ}\frac{1}{2}$. Therm. Reaum. ſupra o ſpatio diei Solaris medii

Parisiis confecere 98908 Oscillationes; in eadem aeris temperatura Pendulum hoc immutabile in Osilia Insula absoluit 98945 Oscillationes: longitudo itaque Penduli Parisina erit ad longitudinem Penduli in Osilia Insula, vt $(98908)^2$ ad $(98945)^2$. Vnde emergit longitudo Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii in Osilia Insula oscillantis 3. ped. 8, 88. lin.

Simili modo Cel. *de la Caille* An. 1755. d. 9. Maii summa diligentia et accuratione obseruauit, Pendulum simplex in temperie aeris 12°. Therm. Reaum. supra 0 spatio diei Solaris medii Parisiis absoluere 86454 Oscillationes. Secundum nostra experimenta huius Penduli motus temperaturae aeris 12°. Therm. Reaum. supra 0, et diei Solari medio respondens, in Osilia Insula erit 86506 Oscillat. Vnde colligitur longitudo Penduli simplicis ad singula min. sec. temporis medii in Osilia Insula oscillantis 3. ped. 9, 08. lin.

III.

Longitudo Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii Petropoli oscillantis.

Pendulum immutabile, conseruata semper eadem aeris temperatura, in Osilia Insula spatio diei Solaris medii

medii confecit 98933½ vel 98934 Oscillationes, dum Petropoli eodem temporis spatio absoluerat 90947 Oscillationes. Subducto igitur calculo, longitudo Penduli simplicis ad singula min. sec. temporis medii Petropoli oscillantis, secundum experimenta Penduli immutabilis beneficio instituta, erit 3. ped. 9, 00 lin.

Pendulum simplex secundum, experimenta huius Penduli beneficio instituta, in temperie aeris 17°½. Therm. Reaum. supra o spatio diei Solaris medii An. 1757. mense Augusto, Petropoli confecit 86517 Oscillationes: vnde colligimus motum Penduli simplicis pro die Solari medio, et temperie aeris 12°. Therm. Reaum. supra o Petropoli esse 86520, 7 Oscillat. In eadem temperie aeris idem Pendulum simplex Parisiis eodem temporis interuallo absoluit 86454 Oscillationes. Hisce positis, prodibit longitudo Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii Petropoli oscillantis: 3. Ped. 9, 23 lin.

IV.

Longitudines Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii Reualiae, Pernauiae et Dorpati oscillantis.

Eadem ratione emerget ex nostris experimentis, et iis, quae Cel. *de la Caille* Parisiis instituit, longitudo

Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii oscillantis:

Reualiae	Per Pendulum immutabile	3. Ped.	8, 93 Lin.
	Per Pendulum simplex --	3.	9, 13
Pernauiae	Per Pendulum immutabile	3.	8, 92
	Per Pendulum simplex --	3.	9, 12
Dorpati	Per Pendulum immutabile	3.	8, 91
	Per Pendulum simplex --	3.	9, 14

Ex hisce calculis constat, Pendulum simplex maiorem constanter exhibere longitudinem Penduli, quam Pendulum immutabile, existente differentia 20. circiter part. lineae centes. siue ⅕. lin. quod discrimen adeo sane est notabile, vt longitudinem Penduli directe inuestigari operae pretium sit.

V.

Inquisitio in Longitudinem Penduli simplicis ad singula min. sec. temporis medii oscillantis ex nostris experimentis directe eliciendam.

Ad hocce negotium perficiendum iis vti iuuat experimentis, quae Augusto mense An. 1758. in Osilia Insula, Penduli simplicis beneficio, summa diligentia institui et p. 488 et 489 descripsi. Per medium inter ista experimenta Pendulum simplex in temperatura aeris

aeris $14^{\circ}\frac{1}{2}$. Therm. Reaum. ſupra 0 ſpatio diei Solaris medii abſoluit 86504,4 Oſcillationes. Pendulum ſimplex igitur celerius mouebatur, quam pro tempore medio, exiſtente differentia 104,4 Oſcill. pro horis 24. Cel. *de la Caille* experimenta exquiſitiſſima, Penduli ſimplicis beneficio An. 1755. d. 9. Maii, in temperie aeris 12°. Therm. Reaum. ſupra 0 inſtituit, et longitudinem virgae chalybeae inuenit 3. ped. 3. lin. accuratiſſime reſpondere. In noſtris experimentis longitudo virgae, pro differentia temperaturae, paulo maior ſit neceſſe eſt, $\frac{2}{100}$ lin. fere, et haec virgae longitudo mihi ſatis accurata viſa eſt, quantum ego quidem iudicare potui. Diameter ponduſculi biconici mihi viſa eſt aequare 9,92 lin. pedis Pariſ. Hiſce praemiſſis calculum ſequenti modo adornare poſſumus:

	Ped. Lin.
Longitudo virgae ad ponduſculum applicata in temp. aeris $14^{\circ}\frac{1}{2}$ - - - - -	3. 3,02
Semidiameter ponduſculi - - - - -	4,96
Diſtantia centri grauitatis ponduſculi a puncto Oſcillationis - - - - -	3. 7,98
a qua ſi ſubtrahantur - - - - -	0,02
prodibit diſtantia centri Oſcillationis Penduli ſimplicis a puncto ſuſpenſionis, ſiue longitudo Penduli - - - - -	3. 7,96

Cum Pendulum in hoc statu spatio 24. hor. 104,4 Oscillationibus celerius procederet, quam pro tempore medio, ad longitudinem Penduli supra inuentam addatur - - - - - Ped. lin. 1,06

vt prodeat longitudo Penduli simplicis - - 3. 9,02

Additis denique - - - - - - - - 0,05

habebimus veram longitudinem Penduli simplicis ad singula min. sec. temporis Solaris medii in Osilia Insula, in loco aere vacuo oscill. 3. P. 9,07 Lin.

Haec longitudo Penduli simplicis, cum vnica tantum parte lineae centesima ab ea Penduli longitudine discrepet, quam supra ex comparatione numerorum Oscillationum Penduli simplicis Parisiis et in Osilia Insula, in eadem aeris temperatura confectorum, deduximus, argumento est, in numeros atque mensuras a Cel. *de la Caille* ad me perscriptas, nullum irrepsisse errorem. Ex quo porro liquet, differentiam hanc notabilem inter Pendulum immutabile et Pendulum simplex, perturbationi, cui siue Pendulum immutabile, siue Pendulum simplex fuit obnoxium, esse adscribendam. Ex consensu autem satis egregio Penduli immutabilis cum Pendulo simplici, nostris in experimentis horum Pendulorum beneficio captis obuio, patet simul, hanc perturbationem, si qua acciderit, non Pendulis in meam manum traditis, sed potius in via Parisiis Petropolin accidisse; ita vt nihil exinde de accuratoine nostro-

rum

rum experimentorum, mediantibus hisce Pendulis Petropoli, Reualiae, Arensburgi, Pernauiae et Dorpati institutorum, neque de certitudine conclusionum ex illis collectarum detrahatur, sed tota suspicio in grauitatis differentiam Parisios inter et nostras regiones cadat. Caeterum non video equidem, qua ratione Pendulum simplex Parisiis ad nos transportatum perturbari, vel vitiari potuerit, nisi fortasse virga chalybea, ad longitudinem fili Penduli simplicis mensurandam destinata, in via Parisiis Petropolin paululum incuruata, et propterea longitudo Penduli iusto minor reddita sit; id quod experimentis a Cel. *de la Caille* huius Penduli beneficio Parisiis iterum instituendis, aptissime est dilucidandum.

Interim tamen ab argumento nostro non alienum esse videtur, longitudinem Penduli simplicis ex iis indagare obseruationibus, quas Horologii nostri Astronomici exquisitissimi, supra descripti beneficio, in hunc finem et Parisiis et Petropoli summa diligentia institui. Obseruaui nempe An. 1749. in Obseruatorio Ill. *le Monnier* Parisiis, in temperatura aeris 125°. Therm. *de l'Isleani*, reuolutionem fixarum esse accuratissime $23^h.56'.12''$ Horologii Astron. Horologio hocce excellentissimo, maxima cum cura atque cautione Petropolin transportato, conseruata semper longitudine virgae huius Horologii diligentissime eadem, ex magno obseruationum numero inueni reuolutionem fixarum in eadem aeris temperatura 125°. Therm. *de l'Isleani* Petropoli esse $23^h.57'.14''$ eiusdem Horol. Admissa igitur longitudine

dine Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis, a Cel. *de la Caille* Pariſiis inventa 3. ped. 8,55 lin. erit ($23^b.56'.12''$)^2 ad ($23^b.57'.14''$)^2 vt 3. ped. 8, 55 lin. ad longitudinem Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis Petroburgenſem 3. ped. 9, 18 lin. quae vix 5 partibus lineae centeſimis differt ab illa ex noſtris experimentis Penduli ſimplicis beneficio inſtitutis, ſupra collecta. Egregius hicce conſenſus argumento eſſe poſſet, Pendulo ſimplici magis, quam Pendulo immutabili, eſſe fidendum; ita vt longitudinem Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii Petropoli oſcillantis ſtabilire poſſimus 3. ped. 9, 20 lin. menſur. Pariſ.

I.

dine Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii oscillantis, a Cel. *de la Caille* Parisiis inventa 3. ped. 8,55 lin. erit $(23^h.56'.12'')^2$ ad $(23^h.57'.14'')^2$ vt 3. ped. 8, 55 lin. ad longitudinem Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii oscillantis Petroburgensem 3. ped. 9, 18 lin. quae vix 5 partibus lineae centesimis differt ab illa ex nostris experimentis Penduli simplicis beneficio institutis, supra collecta. Egregius hicce consensus argumento esse posset, Pendulo simplici magis, quam Pendulo immutabili, esse fidendum; ita vt longitudinem Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii Petropoli oscillantis stabilire possimus 3. ped. 9, 20 lin. mensur. Paris.

Fig. 2.

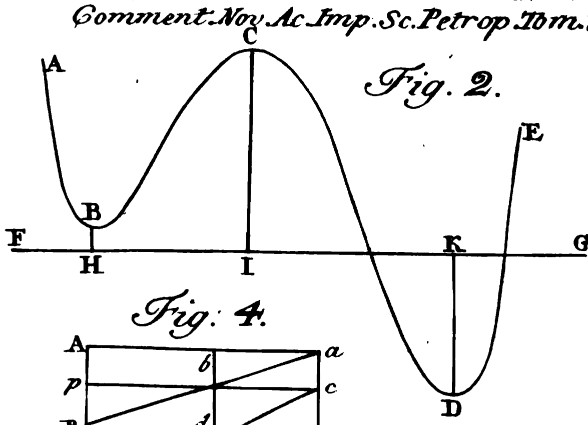
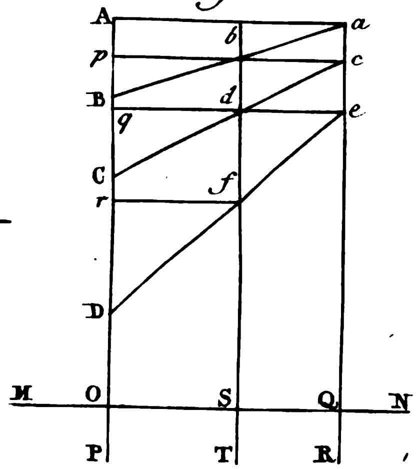


Fig. 4.



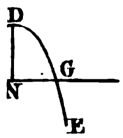


Fig. 5.

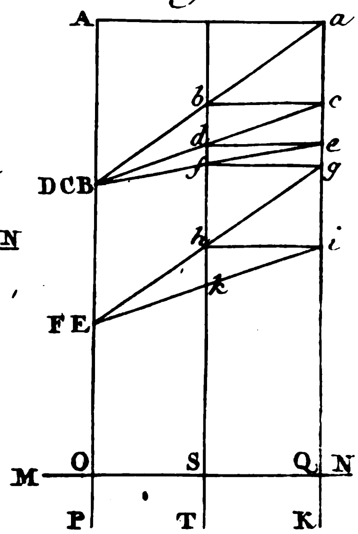
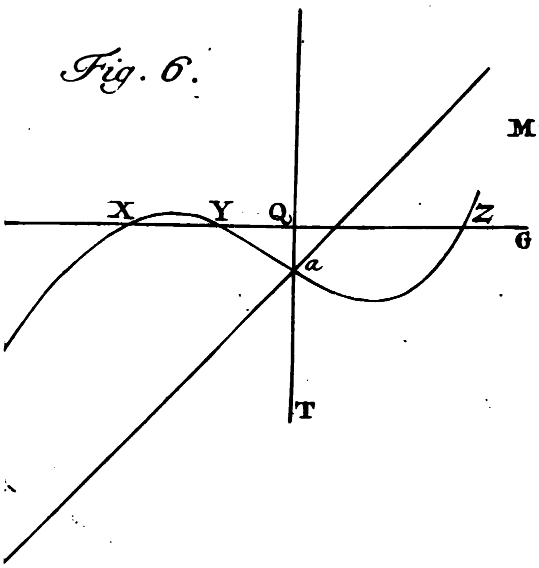


Fig. 6.



dine Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii oscillantis, a Cel. *de la Caille* Parisiis inventa 3. ped. 8,55 lin. erit $(23^h.56'.12'')^2$ ad $(23^h.57'.14'')^2$ vt 3. ped. 8, 55 lin. ad longitudinem Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii oscillantis Petroburgensem 3. ped. 9,18 lin. quae vix 5 partibus lineae centesimis differt ab illa ex nostris experimentis Penduli simplicis beneficio institutis, supra collecta. Egregius hicce consensus argumento esse posset, Pendulo simplici magis, quam Pendulo immutabili, esse fidendum; ita vt longitudinem Penduli simplicis ad singula minuta secunda temporis medii Petropoli oscillantis stabilire possimus 3. ped. 9, 20 lin. mensur. Paris.

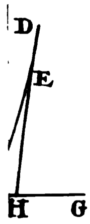


Fig. 2.

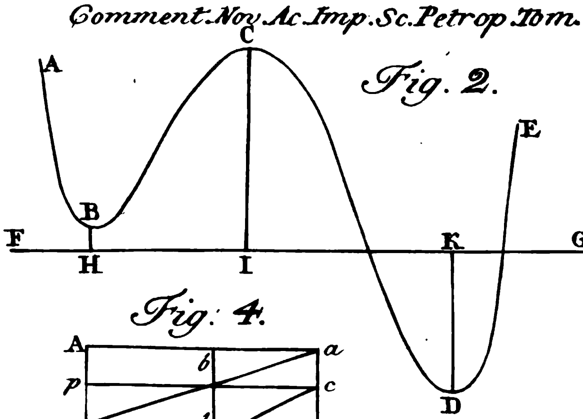
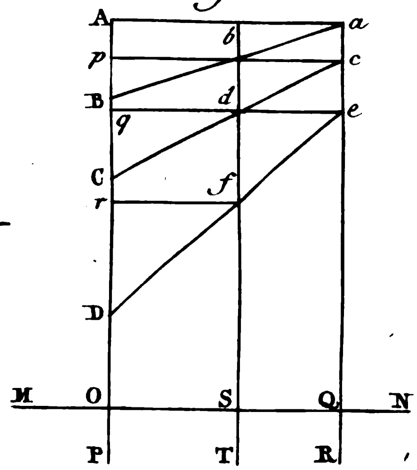


Fig. 4.



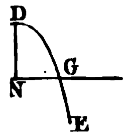


Fig. 5.

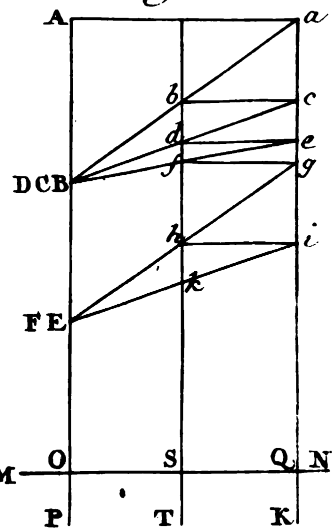
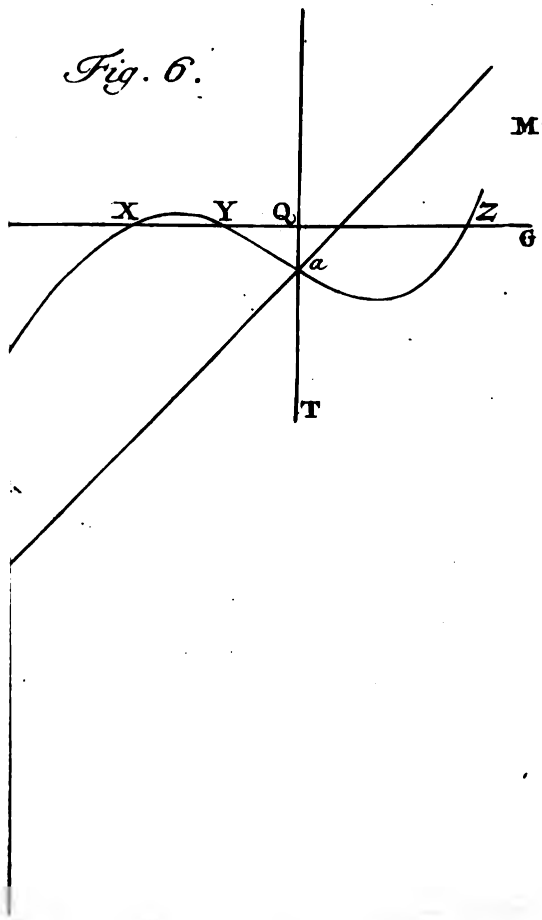


Fig. 6.



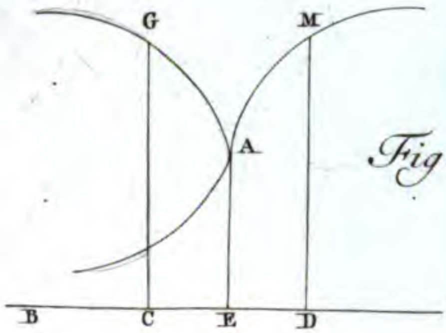


Fig. 2:

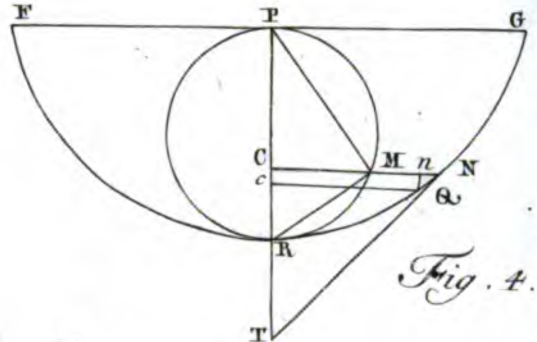
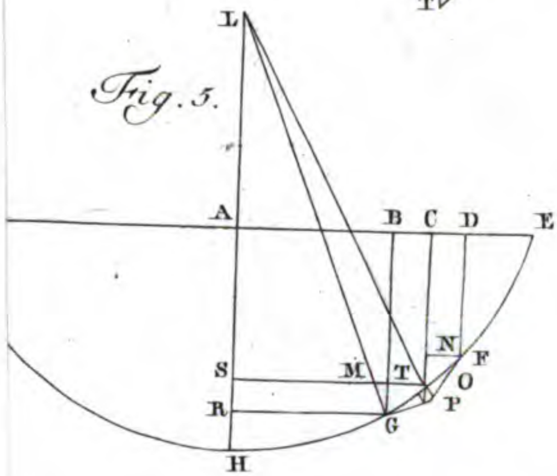


Fig. 4.

Fig. 5.



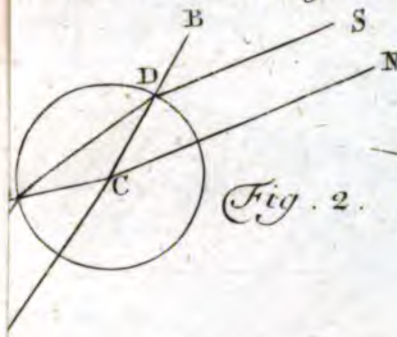


Fig. 2.

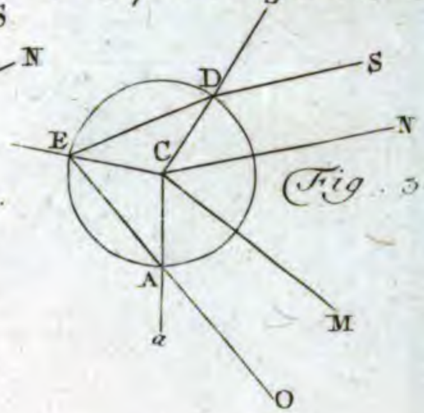


Fig. 3.

Fig. 6.

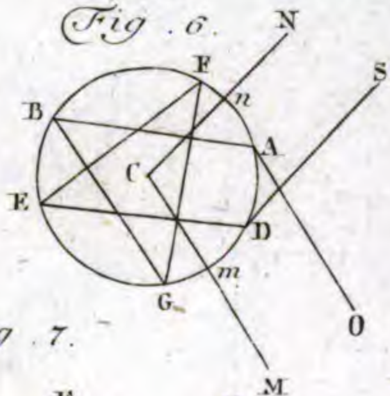
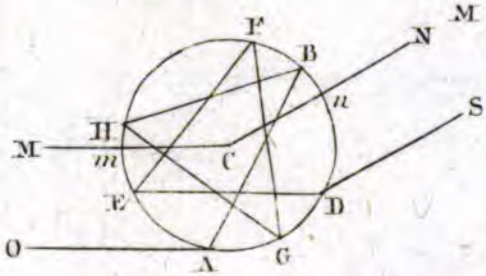


Fig. 7.



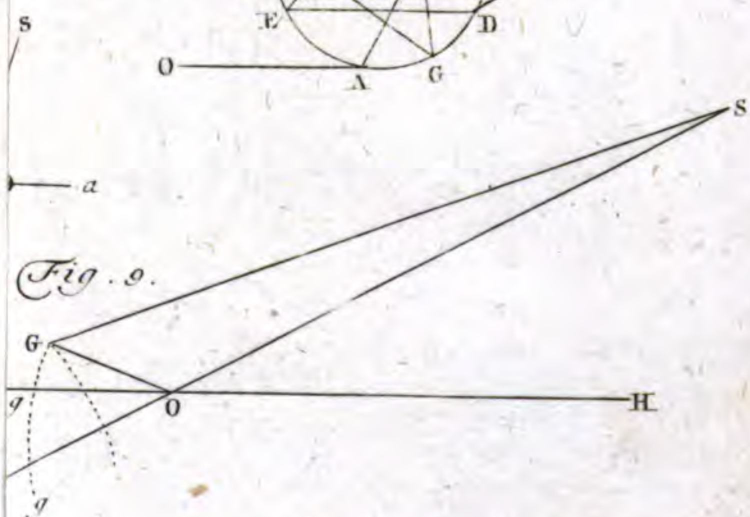


Fig. 9.

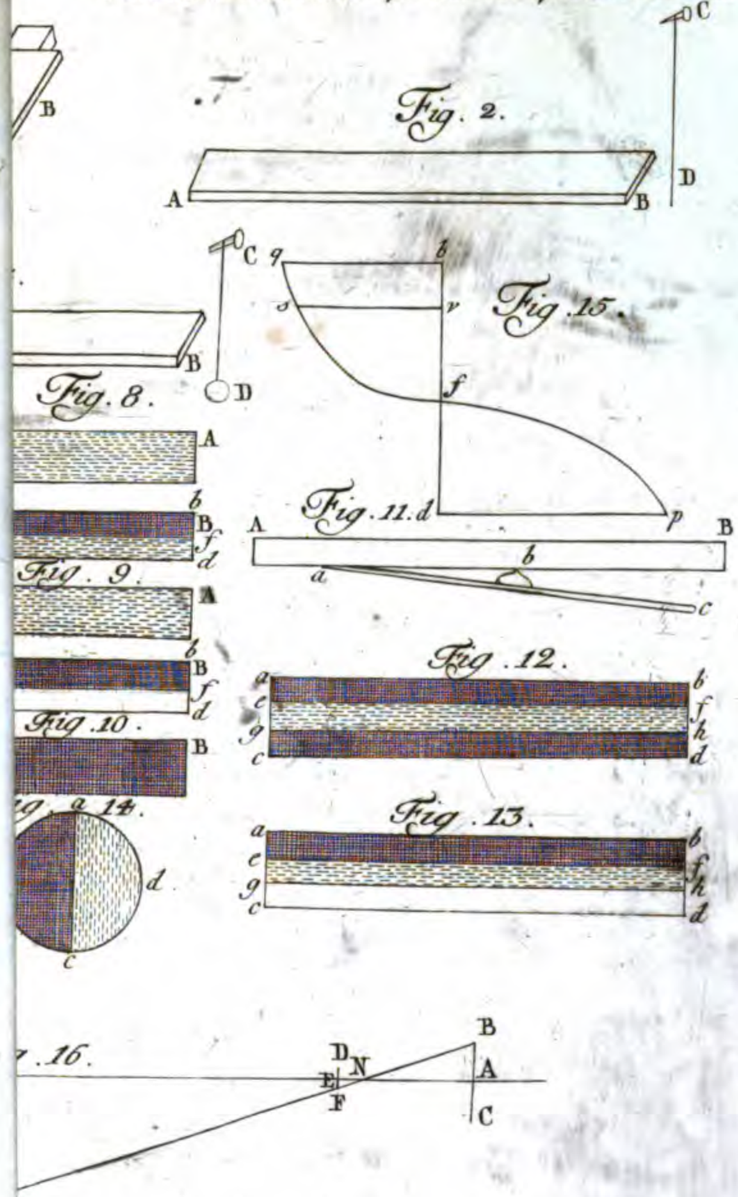


Fig. 2.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
16.

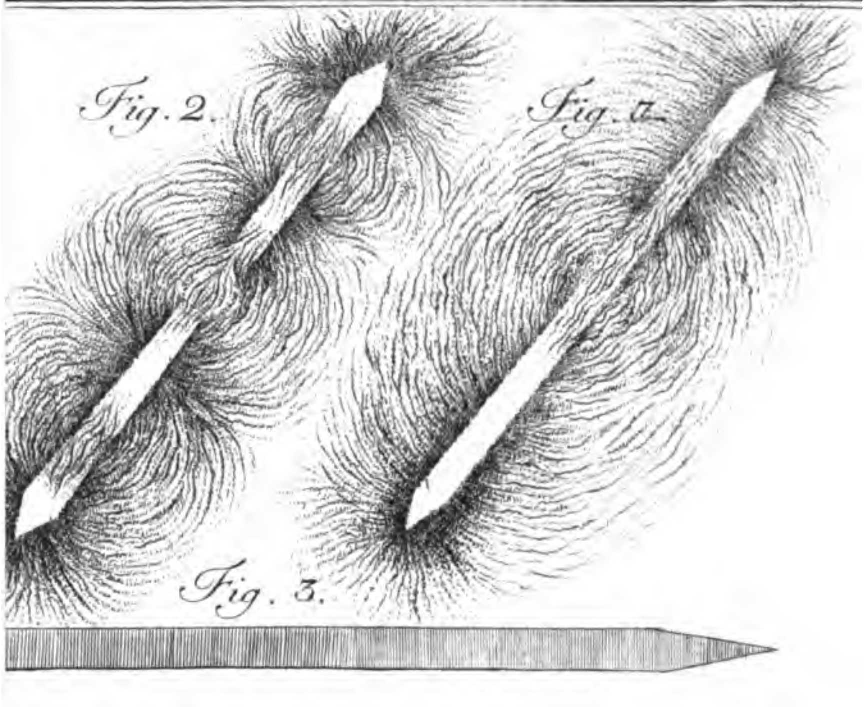


Fig. 2.

Fig. 7.

Fig. 3.

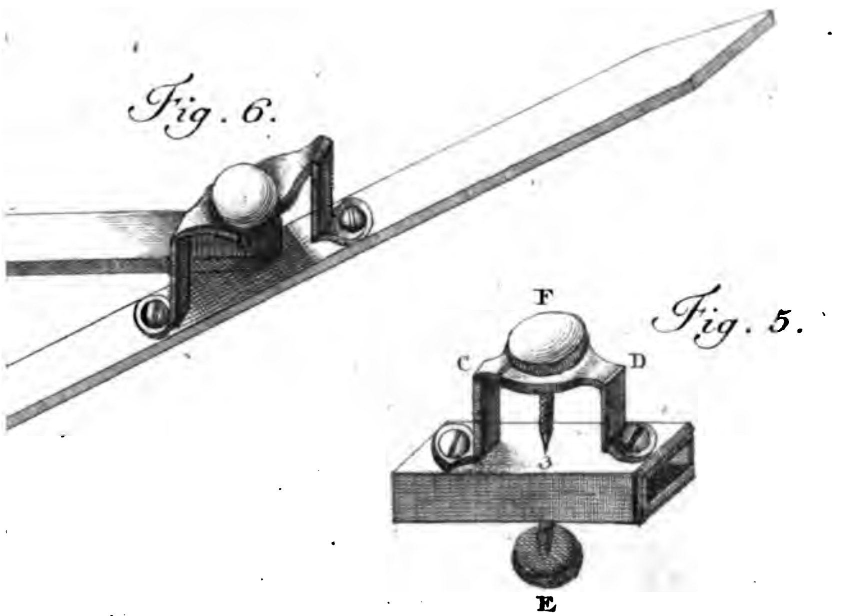


Fig. 6.

Fig. 5.

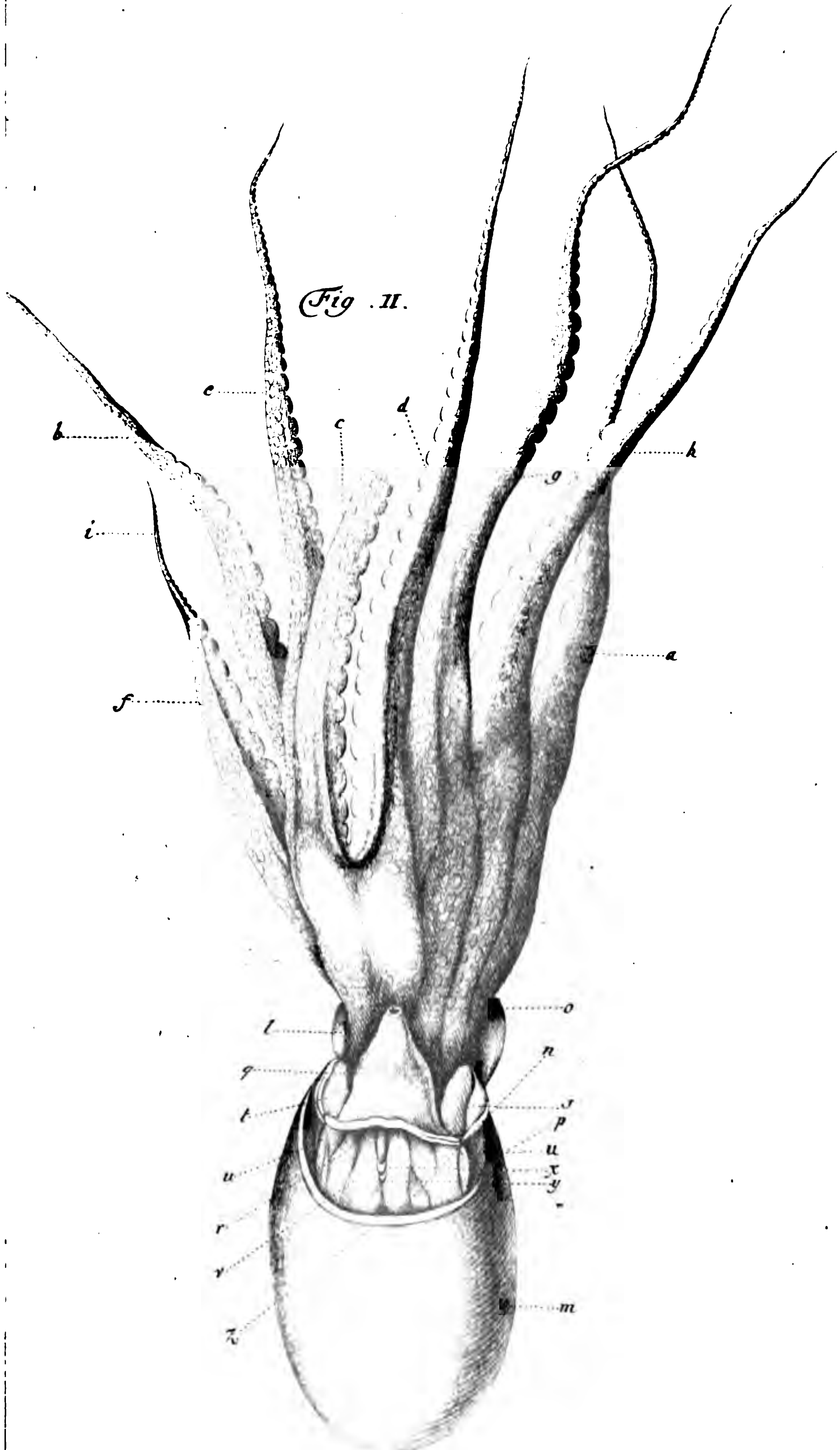


Fig. II.
a
b
c
c
d
f
g
i
k
l
m
n
o
p
q
r
s
t
u
u
v
x
y
z

Fig. III.

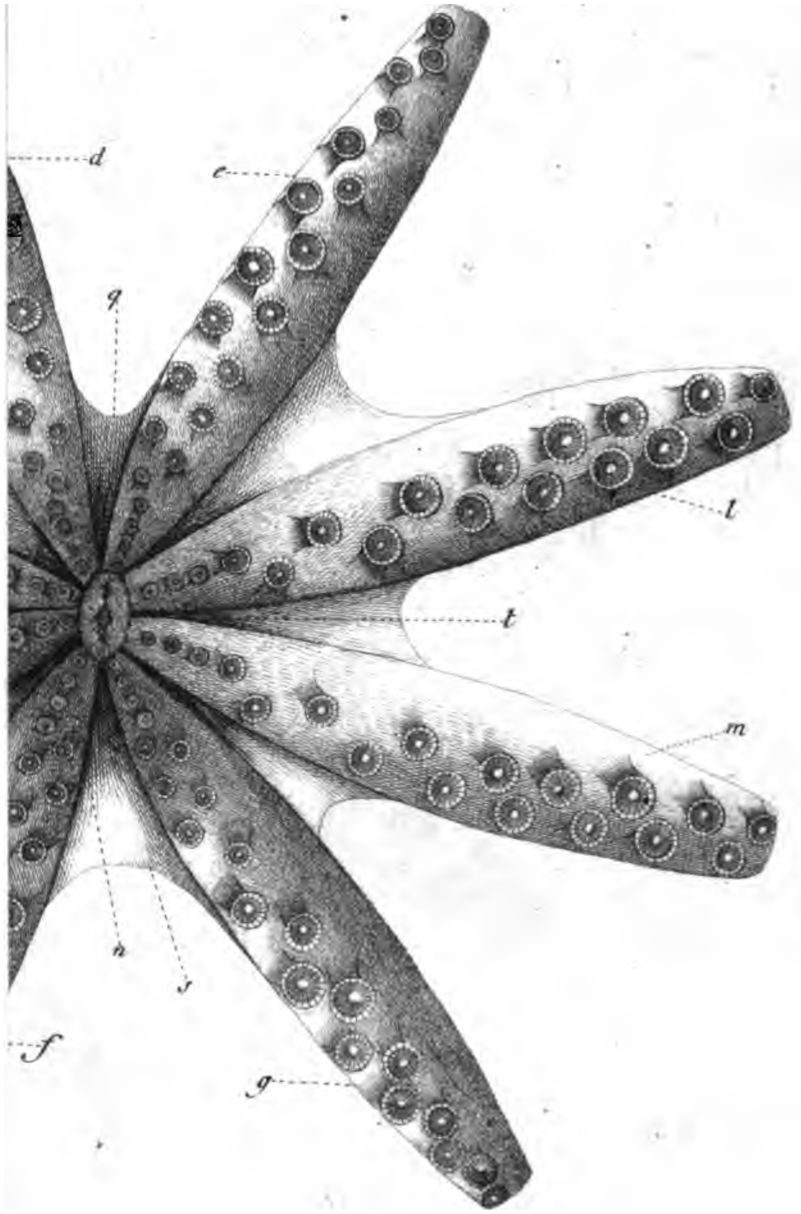


Fig. III.

Fig. II.

Fig. V.

Fig. IV.

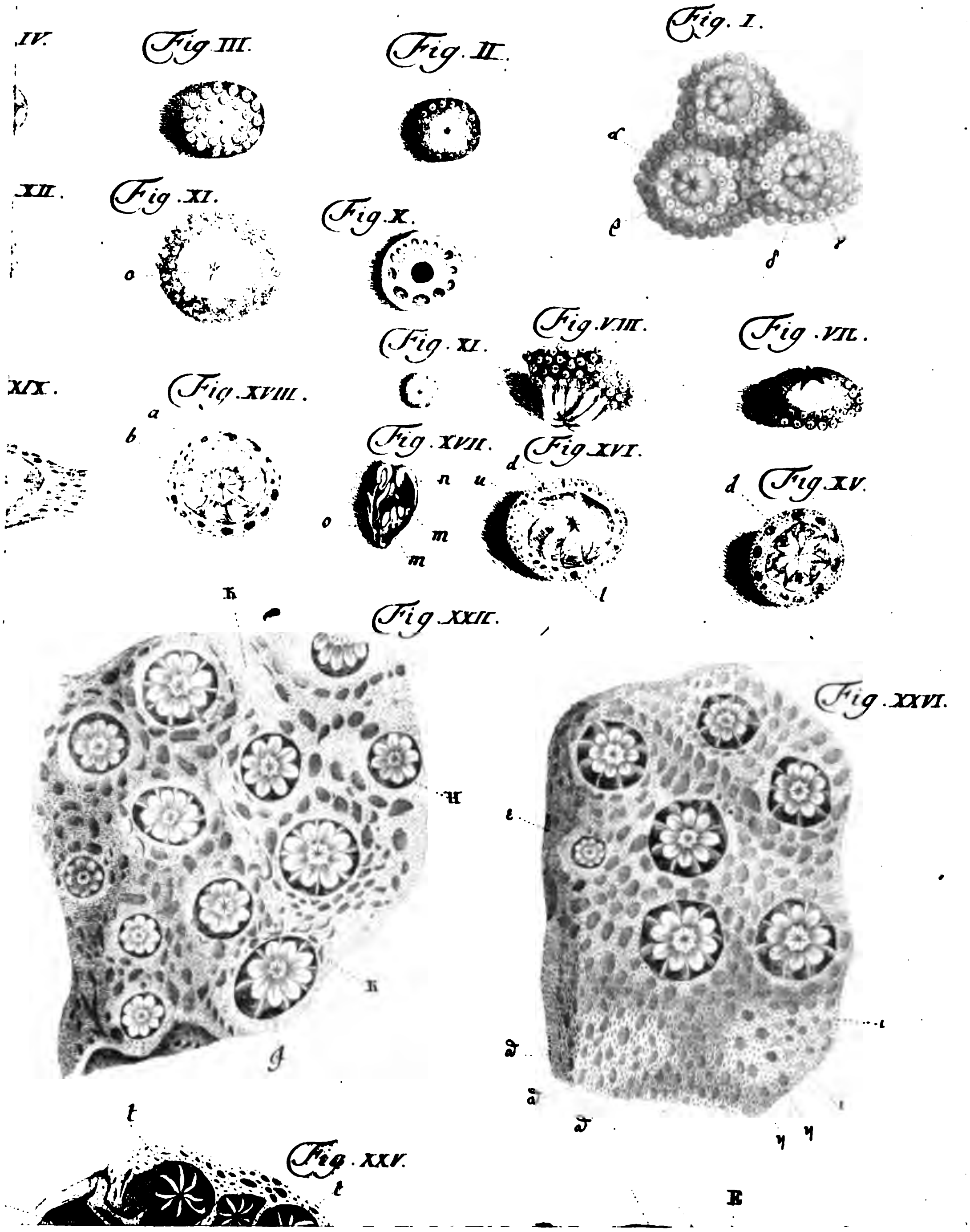

IV.
Fig. III.
Fig. II.
Fig. I.
XII.
Fig. XI.
Fig. X.
Fig. VIII.
Fig. XI.
Fig. VII.
XIX.
Fig. XVIII.
Fig. XVII.
Fig. XVI.
Fig. XV.
Fig. XXII.
Fig. XXVI.
Fig. XXV.

Fig. III

Fig. II

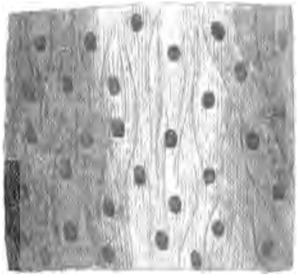


Fig. I

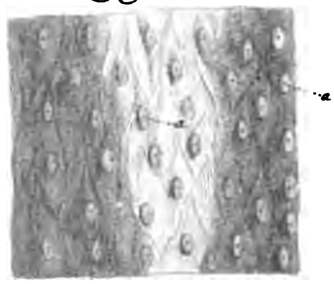


Fig. X

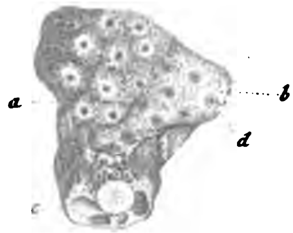


Fig. V

Fig. VII

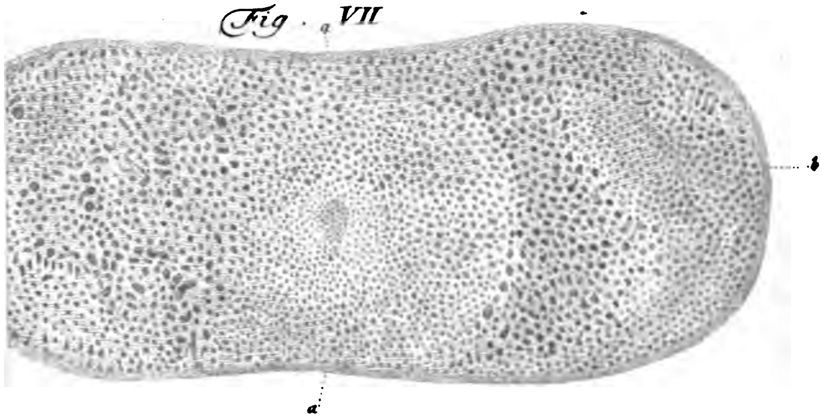


Fig. VII

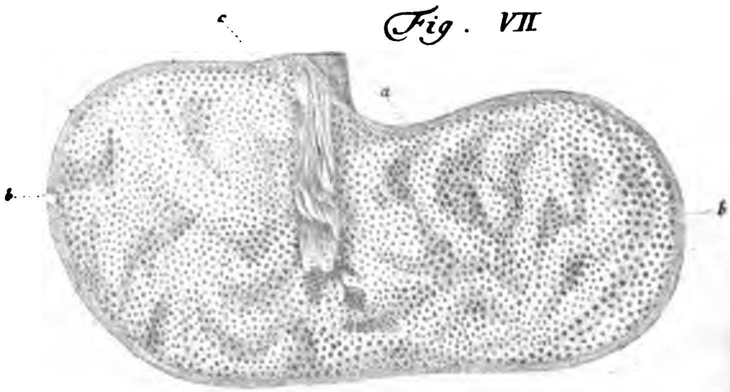
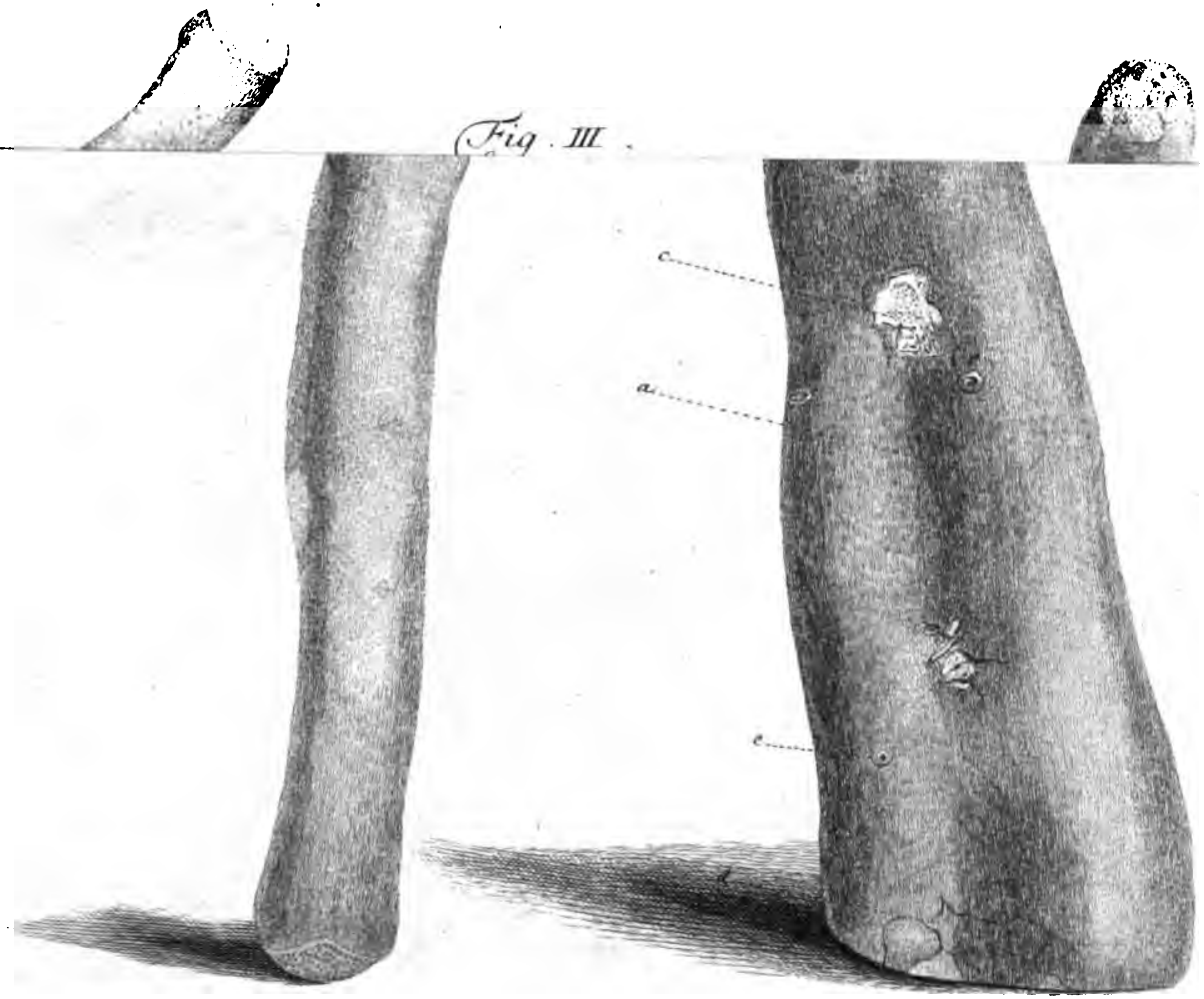


Fig. III.



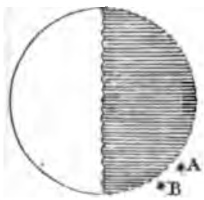


Fig. 1.

Fig. 3.

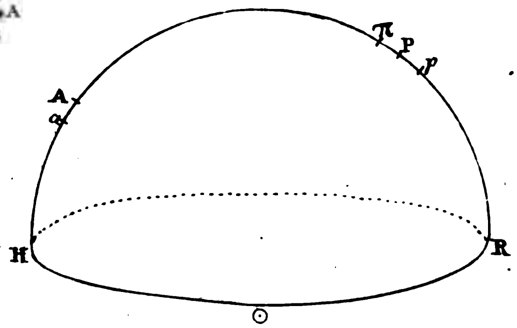
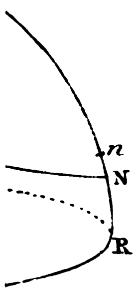


Fig. 5.



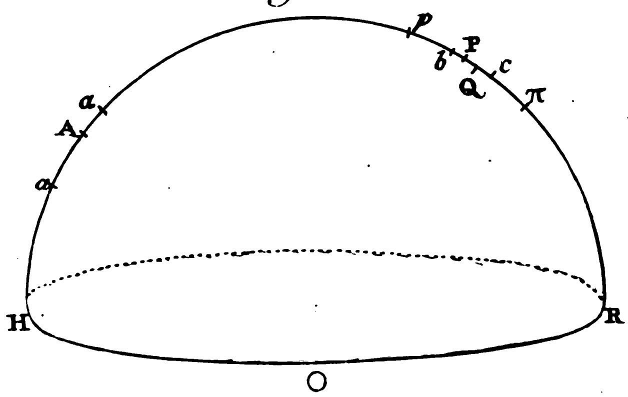
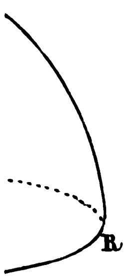
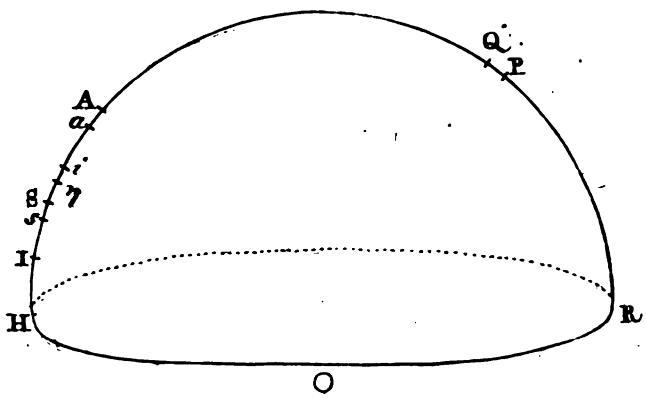
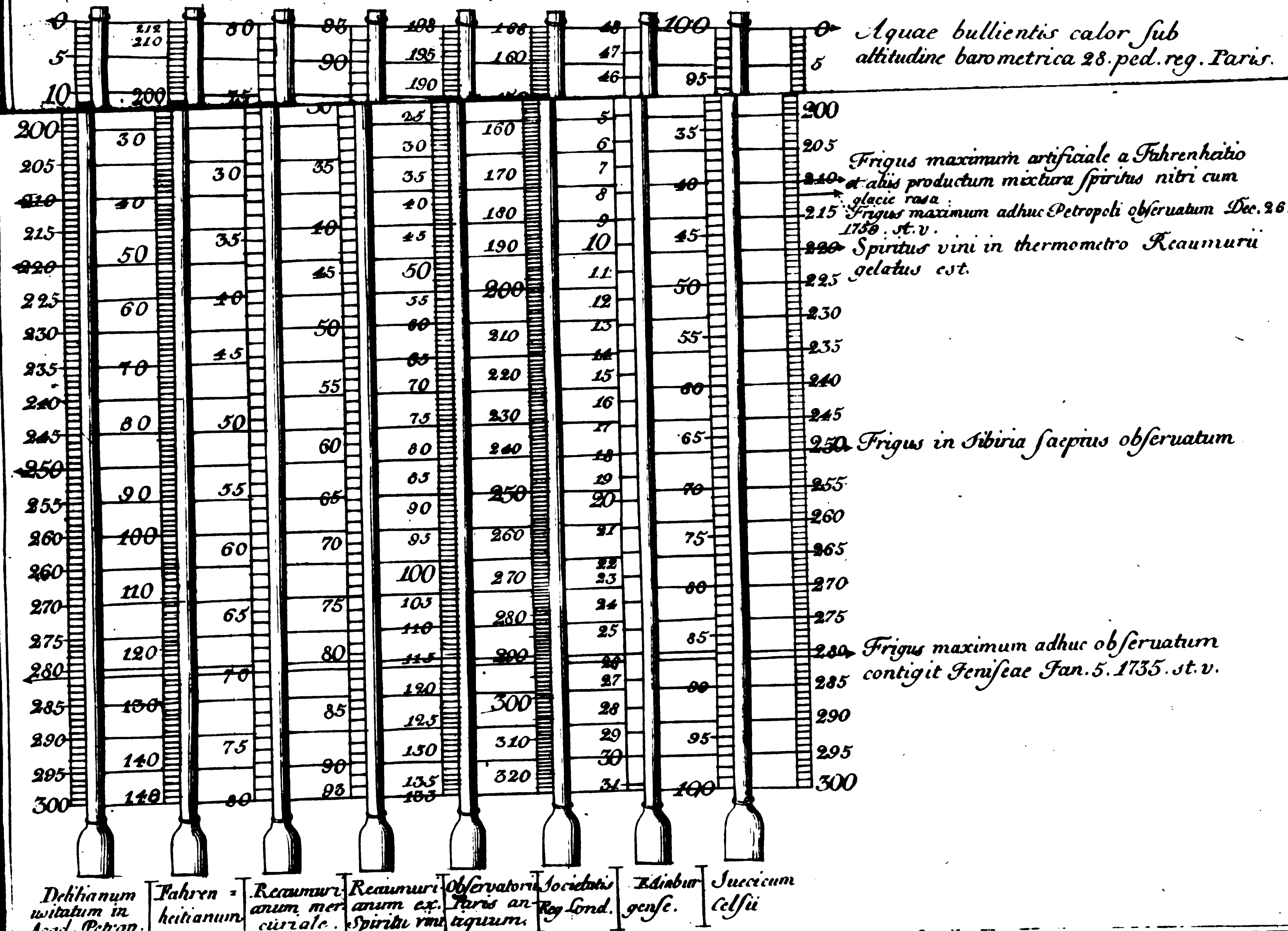


Fig. 7.





Comparatio Thermometrorum Maxime Vsitatorum.



Ibex imberbis