NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. VI.

ad Annum MDCCLVI. et MDCCLVII.

PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXI.

SVMMARIVM DISSERTATIONVM

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS VI.

MATHEMATICA.

I.

Methodus inueniendi infinitas curuas isoperimetricas communi proprietata praeditas.

Auctore Leon. Eulero pag. 3.

Quaestio hic non parum ardua euoluitur, qua intra datos terminos infinitae lineae curuae, vel eiusdem longitudinis, vel alia quadam proprietate communi *praeditae*, *requiruntur*. Occasionem huius inuestigationis suppeditauit famosissimum illud problema Isoperimetricum, quo inter omnes lineas, quas quidem intra datos terminos concipere licet, quae vel sint eiusdem longitudinis, vel alia quadam communi proprietate gaudeant, eam determinari oportet, quae vel maximam aream includat, vel alia quadam maximi minimiue proprietate reliquis antecellat. Hic igitur manifesto assumitur, dari vtique intra propositos terminos infinitos ductus curuilineos, quo omnes sint eiusdem longitudinis, vel aliam quandam proprietatem habeant communem, quod quidem minime est dubium, cum quaestio non solum circa lineas curuas continuas, sed etiam discontinuas, seu quocunque manus ductu describendas, versetur. Veluti si intra datos duos terminos arcus circularis proponatur, non solum innumerabiles aliarum curuarum continuarum arcus intra eosdem terminos aeque longi assignari possunt, sed si etiam tractus curuilinei irregulares admittantur, eorum numerus multo magis in infinitum augetur. In problemate quidem isoperimetrico non opus est hos tractus curuilineos omnes nosse, sed methodus singulari artificio ita est comparata, vt inter eos omnes, etiamsi sint ignoti, is cui maximi minimiue quaedam proprietas conueniat, inuestigari possit: electionem scilicet institue-re licet, etiamsi omnes res, inter quas est eligendum, neutiquam sint cognitae, quod certe insigni nostro commodo accidit; si enim ad hanc electionem requireretur, vt omnes lineae illae eiusdem longitudinis essent perspectae, plurimum adhuc a solutione istius pulcherrimi problematis, quod nomine isoperimetrici innotuit, essemus remoti. Interim tamen haec speculatio, qua intra datos terminos infinitae quaeruntur lineae curuae, quae vel omnes longitudine sint aequales, vel alia quadam communi indole praeditae, maxime est notatu digna, cum ob alios vsus in Geometria sublimiori haud contemnendos, tum vero praecipue, quod haec ipsa inuestigatio maximis difficultatibus est obnoxia. Iam olim enim Geometrae ingenti studio in hoc elaborauere, vt proposita linea curua alias eiusdem longitudinis explorarent; neque tamen ipsis scopum attingere licuit. In hac autem dissertatione Cel. Auctor omnia huiusmodi problemata felicissimo successu resoluit, idque ope methodi omnino singularis, quam quasi methodo Diophanteae analogam, iam pridem in

Analysin

Analysin sublimiorem introduxerat, eiusque iam plurima insignia ediderat specimina.

II.

De integratione aequationis differentialis $\frac{m\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$.

Auctore Leon. Eulero. p. 37.

In hac dissertatione et nonnullis sequentibus, quibus simile argumentum pertractatur, quasi nouus plane campus in Analysi aperitur, integralia diuersarum formularum, quae per se omnem integrationis solertiam respuunt, inter se *comparandi*. Cum enim ope notae *comparationis angulorum* relatis inter binas variabiles x et y huic aequationi differentiali $\frac{m\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{(1-yy)}}$ conueniens algebraice exhiberi queat, et si vtraque formula per se algebraice integrari nequit, sed angulum, seu arcum circularem, exprimit; haec relatio ex eo *tantum* fonte petita videtur, quod angulorum datam et quidem *rationalem* rationem tenentium sinus algebraice inter se comparari possunt. Neque talis comparatio locum habere videtur, nisi ambae formulae, siue per *angulos*, siue per logarithmos, integrari queant. Quoties *quidem* solutio cuiusquam problematis ad huiusmodi *aequationem* differentialem $X\,dx=Y\,dy$, in qua X sit *functio ipsius* x, et Y ipsius y tantum perducitur, ea, quia variabiles sunt a se inuicem separatae, tanquam

quam penitus absoluta spectari solet, cum ope quadraturae duarum curuarum, quarum alterius area per $\int X dx$, alterius per $\int Y dy$ exprimitur, construi posset. Verum si pro dato quouis valore ipsius x, valor ipsius y conveniens assignari debeat, id vtramque quadraturam inuoluere videtur, sine qua relatio inter x et y minime exhiberi queat. Multo magis igitur mirum videbitur, cum talis formulae $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ integrale, neque per angulos, neque per logarithmos, exprimi possit, quae quantitates transcendentes ad comparationem solae idoneae putantur, nihilominus pro aequatione differentiali proposita relationem inter x et y algebraice exhiberi posse; ita vt linea curua, cuius arcus indefinite hac formula integrali $\int\frac{dy}{\sqrt{(1-z^4)}}$ exprimitur, pari proprietate, ac circulus, sit praedita, vt scilicet omnes eius arcus inter se comparari, seu, proposito in eo arcu quocunque, alius arcus, qui ad eam datam teneat rationem, geometrice assignari queat. Vel quod eodem redit, aequatio integralis aequationis differentialis propositae, quae veram relationem inter x et y exprimit, non solum non tale integrale inuoluet, sed adeo erit algebraica.

Atque hoc quidem non tantum pro casu quodam particulari, verum adeo integrale completum, quod quantitatem constantem arbitrariam complectitur, erit algebraicum. Neque vero talis admiranda integratio in ipsa tantum aequatione differentiali locum habet: sed simili omnino modo Cel. Auctor ostendit hanc aequationem differentialem multo latius patentem $\frac{m\,dx}{\sqrt{(A+Bx^2+Cx^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(A+By^2+Cy^4)}}$ per aequationem algebraicam complete inte-

integrari poſſe, ſi modo numeri m et n ſint rationales; quin etiam eandem integrandi methodum ad hanc aequationem multo generaliorem extendit:

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4)}}$$

vbi in denominatoribus radicalibus omnes poteſtates ipſarum x et y ad quartam vsque occurrunt. Hinc ſuſpicari liceret, etiamſi hae poteſtates altius aſcenderent, integrationem tamen algebraicam adhuc locum eſſe habituram: ſed praeterquam quod methodus Auctoris in ipſa poteſtate *quarta* terminatur, facile oſtendi poteſt, in *poteſtate* certe ſexta algebraicam integrationem in genere excludi. Si enim coefficientes ita accipiantur, vt radix quadrata extrahi queat ex hoc ſolo caſu: $\frac{m\,dx}{1+x^3} = \frac{n\,dy}{1+y^3}$ euidens eſt, relationem inter x et y nequaquam *algebraice exprimi* poſſe, cum vtriusque formulae *integrale*, tam angulum, quam logarithmum, inuoluat; anguli autem et logarithmi certe inter ſe algebraice comparari non patiuntur. Interim tamen peculiari modo integratio huius quoque aequationis: $\frac{m\,dx}{\sqrt{(A+Bx^2+Cx^4+Dx^6)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(A+By^2+Cy^4+Dy^6)}}$ algebraice exhibetur, vnde patet, *hanc* diſſertationem multo plures inueſtigationes continere, quam titulus quidem prae ſe ferre videtur.

III.

Obſeruationes de comparatione arcuum curuarum irrectificabilium.

Auctore Leon. Eulero p. 58.

Haec Diſſertatio ex eodem fonte eſt petita atque antecedens. Vtraque enim innititur methodo formulas integrales, quae neque algebraice, neque per angulos, vel logarithmos, expediri queant, algebraice inter ſe comparandi. Methodus autem ipſa, qua totum hoc negotium conficitur, ita eſt comparata, vt non data opera ſit inuenta, ſed potius fortuito quaſi detecta, ex quo, cum ad inuentiones alias abſtractiſſimas perduxerit, maxime digna videtur, vt omni ſtudio vberius excolatur. In ſuperiori quidem differtatione hoc iam eſt praeſtitum, vt omnium curuarum, quarum arcus indefinite huiusmodi formula integrali $\int \frac{a\,dz}{\sqrt{(A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4)}}$ exprimuntur, arcus quicunque inter ſe comparari, ac dato arcu quouis alii arcus ad eum datam rationem tenentes geometrice aſſignari queant, ſimili omnino modo quo arcus circulares inter ſe comparari ſolent. Tali autem proprietate gaudet curua lemniſcata vocari ſolita, cuius arcus indefinite hac formula $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ exprimitur, huiusque arcuum comparatio in hac diſſertatione prolixius explicatur. Praeterea vero Cel. Auctor inueſtigationes ſuas ad arcus ellipticos et hyperbolicos extendit, in quo noua omnino vis illius methodi cernitur, cum rectificatio ellipſis et hyperbolae nullo modo ad formulam integralem ante commemoratam reuocari poſſit. Neque

vero,

vero etiam in his curuis comparatio arcuum, vti in circulo, institui potest: sed, quod iam priorem in arcubus parabolicis est factum, id nunc etiam istius nouae methodi beneficio in ellipsi et hyperbola praestatur. Scilicet dato in altera curua arcu quocunque a puncto etiam dato semper alius arcus in eadem curua abscindi potest, cuius ab illo differentiam geometrice assignare liceat: tum vero etiam negotium ita confici potest, vt non ipsorum arcuum, sed quorumuis eorum multiplorum differentia fiat geometrice assignabilis, idque ita, vt arcus quaesitus a dato puncto incipiat. Omissa autem hac conditione, vt arcus quaesitus in dato puncto terminetur, effici potest, vt differentia vel ipsorum arcuum, vel quorumdam multiplorum eorundem euanescat, sicque arcus assignari queant, qui absolute datam inter se teneant rationem. Atque hinc istud problema maxime notatu dignum resolui potest, quo datus quicunque arcus, siue ellipticus, siue hyperbolicus, ita secari iubetur, vt partium differentia geometrice assignabilis euadat. Sub finem animaduertit Auctor, quam insignia incrementa in Analysi infinitorum hinc expectari queant, cum inde eiusmodi aequationum differentialium, quae nulli alii methodo cedant, intergralia adeo algebraica assignari possint.

IV.

De problematibus indeterminatis, quae videntur plus quam determinata.

Auctore Leon. Eulero p. 85.

Argumentum huius dissertationis omnino est nouum, atque insignem promotionem analyseos indeterminatae, quae vulgo methodus Diophantea appellari solet, polliceri videtur, siquidem summi *Euleri* vestigia premendo omni studio vberius excolatur. Primum autem accuratius hic definitam cernimus indolem problematum indeterminatorum, qualia quidem Diophantus pertractavit, quae vulgo perperam innumerabiles solutiones admittere videntur. Natura scilicet *cuiusque* quaestionis ex sua ipsius indole potius, quam ex solutione, quae initio nondum constant, diiudicari debet. Ita dantur quaestiones nullam plane solutionem admittentes, quae tamen nihilominus ad indeterminatas sunt referendae; veluti si quaerantur duo cubi, quorum summa sit cubus, vel quatuor quadrata, in arithmetica progressione. Postquam enim diu multumque in his soluendis fuerit elaboratum, tum demum agnoscimus, nullam solutionem dari, quod autem non impedit, quo minus istiusmodi quaestiones pro indeterminatis habeantur. Simili modo dantur etiam eiusmodi quaestiones indeterminatae, quae plures vna solutiones non admittunt, veluti si quaeratur cubus, qui vnitate auctus efficiat quadratum. Melius ergo problemata indeterminata ita definiuntur, vt dican-

dicantur circa numeros rationales tantum, ac saepe numero integros tantum versari. Ita si quaeri debeant duo biquadrata, quorum summa faciat quadratum, quaestio omnino est *huius* generis, cum radix quadrata ex summa biquadratorum debeat esse numerus rationalis, etiamsi solutio ipsa sit impossibilis. Saepe numero plures conditiones simul proponi solent, veluti si quaerantur tres eiusmodi numeri, vt binorum productum, si tertio addatur, faciat quadratum, vbi vtique tribus conditionibus est satisfaciendum; hocque adeo infinitis modis praestari potest. Sin autem insuper noua conditio adiiciatur, *sine dubio* numerus solutionum restringetur, atque adeo interdum fit impossibilis. Veluti si quaerantur duo quadrata, quorum summa sit quadratum, id vtique infinitis modis fieri potest; at adiecta insuper hac conditione, *vt etiam eorundem* quadratorum differentia sit quadratum, quaestio subito fit impossibilis. Ita pleraque problemata, quae Diophantus tractauit, ita sunt comparata, vt noua adiecta conditione fiant impossibilia, hocque casu plus quam determinata vocari solent. Nunc igitur Cel. Auctor ostendit, infinita dari huiusmodi problemata, quibus et si adiiciantur non vna, sed plures nouae conditiones, solutionum tamen numerus re vera maneat infinitus. Neque vero putandum est, tales conditiones pro lubitu adiici posse, sed eas certo modo ad ipsam quaestionis indolem adstrictas esse oportet, alioquin certo plus quam determinata essent euasura. Ita in quaestione memorata de tribus numeris, vt binorum productum tertio additum faciat quadratum, insuper hae conditiones adiici possunt, vt binorum pro-

 ductum

ductum summae eorundem binorum additum faciat quadratum, quae tres nouae conditiones adiectae non impediunt, quo minus adhuc innumerabiles solutiones locum habeant. Si praeterea postuletur, vt etiam summa productorum ex bino fiat quadratum, quaestio adhuc infinitas solutiones admittit, neque solutionum numerus minuitur, si insuper summa ipsorum numerorum summae productorum ex binis adiecta quadratum efficere debeat; quin etiam Auctor ostendit, plures adhuc conditiones adiici posse, manente solutionum numero infinito. Tales quaestiones, nisi conditiones certa lege inter se essent connexae, quae connexio autem in ipsa propositione non perspicitur, merito tanquam plus quam determinatae reiiciendae videntur, ac temere quisquam earum solutionem susciperet, antequam probe perspexerit, simul atque aliquibus certo modo satisfecerit, reliquis omnibus sponte satisfieri. In Diophanto adeo iam eiusmodi quaestiones reperiuntur, quarum solutionem ex certis porismatibus deriuauit, quorum vim commentatores minus agnouerunt. Hoc ergo argumentum sollicite hic euoluitur, ac non solum porismata, quibus Diophantus est vsus, dilucide explicantur et ex simplicissimis principiis deducuntur, sed etiam indidem multo abstrusiora eliciuntur, quorum beneficio innumerabiles quaestiones, quae alioquin omnes analyseos vires superare videantur, facili negotio resolui queunt.

V.

V.

De expressione integralium per factores

Auctore Leon. Eulero p. 115.

Quemadmodum omnis generis integralia, quarum integrationem absolute perficere non licet, per series infinitas euolui solent, quae si fuerint conuergentes, ad vsum aeque sunt accommodatae, ac si integratio *in potestate* fuisset, atque adeo saepe numero multo maiorem vsum praestant: ita iam pridem Geometrae agnouerunt, haud minoris vtilitatis fore, si eadem integralia per producta ex infinitis factoribus exprimi possent, *vsumque adeo praestantiorem* esse futurum, si *logarithmis* fuerit vtendum. Verum talis conuersio ad paucissimos casus est adstricta: neque enim in aliis formulis *integralibus* locum habet, nisi quae in altera harum formularum $\int x^m dx (1-x^n)^k$ et $\int \frac{x^m dx}{(1-x^n)^k}$ sint *contentae*, neque etiam in his formulis negotium in *genere* succedit, ita vt pro quouis valore ipsius x valor *integralis* per eiusmodi productum exprimi queat, sed tantum ad eum casum limitatur, quo in priori *formula statuitur* $x = 1$, in posteriori vero $x = \infty$ Hi autem casus *etiam* calculo prae reliquis ita excellunt, vt eorum vsus *sit* amplissimus, et pulcherrima subsidia pro tota *analysi* inde deducantur Hoc igitur argumentum tametsi *Cel*. Auctor iam olim pertractauerit, hic

denuo

denuo resumit, atque ex principiis multo clarioribus formationem illorum productorum in infinitum excurrentium docet. Primum quidem elegantem harum formularum transformationem exponit, indeque casus, quibus eae sunt algebraice, vel absolute, integrabiles, facili negotio expedit. Caeterum hic monendus est lector, ob calculos maxime intricatos nonnullos errores typographicos irrepsisse v. g. p. 124. et seqq. frequenter litteram i cum vnitate 1. itemque litteram graecam $\varkappa$ cum latina x esse permutatam: cum autem hanc dissertationem nemo facile sit lecturus, nisi qui calculum ipse euoluere constituerit, isti errores eius sollertiam non remorabuntur, praecipue cum hinc inde istae litterae recte sint expressae. Ita p. 124. in Coroll. 2 notetur tantum, poni $\frac{m}{n} = k$, seu $m = kn$, et reliqua fient satis perspicua. Deinde Cel. Auctor hoc argumentum inuertit, ac proposito huiusmodi producto:

$$\frac{acf}{beg} \cdot \frac{(a+1)(c+1)(f+1)}{(b+1)(e+1)(g+1)} \cdot \frac{(a+2)(c+2)(f+2)}{(b+2)(e+2)(g+2)} \cdot \text{ etc.}$$

vbi singula membra ex vna, vel duabus, vel tribus fractionibus constant, quorum singulorum tam numeratores, quam denominatores, in sequentibus membris continuo vnitate augentur. Proposito scilicet huiusmodi producto in infinitum excurrente, inquirit in formulam integralem, cuius valor casu $x = 1$ ipsi huic producto sit aequalis, quod cum pluribus modis fieri queat, hinc egregias comparationes huiusmodi formularum integralium adipiscitur. Obseruat autem in genere talis producti valorem infinitum esse non posse, nisi sit $a + c + f = b + e + g$. Deinde cum sinus et cosinus

nus angulorum per eiusmodi producta exprimi queant, eos hinc per formulas integrales exponit, vnde insignia Theoremata per vniuersam Analysin maximi momenti oriuntur.

VI.

Solutio generalis problematum quorundam Diophantaeorum, quae vulgo non nisi solutiones speciales admittere videntur.

Auctore Leon. Eulero pag. 155.

Quanta vtilitas a *methodo*, Diophantaea dicta, si *vberius excolatur*, in vniuersam Analysin sit redundatura, a Cel. Auctore huius dissertationis iam saepius est commemoratum, vnde ipsum in hac Analyseos parte diu multumque desudasse minime poenitet. Hic autem inprimis obseruat, omnia huius generis problemata, prouti adhuc sunt tractata, quasi sponte in duas classes distribui. Vel enim problemata ita sunt comparata, vt omnes omnino solutiones in iisdem formulis generalibus contineantur, sicque tota solutio vna quasi operatione absoluatur, cuiusmodi problemata in vnam classem coniicienda videntur: vel problemata eius sunt *naturae*, vt omnes solutiones non in vna expressione *generali* comprehendi queant, sed tantum ex *solutionibus* iam inuentis continuo nouas alias elicere liceat, inductionem referri solet. Non desunt autem exempla, quibus inductio sola in errores praecipitauerit. Quascunque ergo numerorum proprietates per obseruationes cognouerimus, quae idcirco sola inductione innituntur, probe quidem cauendum est, ne eas pro veris habeamus, sed ex hoc ipso occasionem nanciscimur, eas accuratius explorandi, earumque, vel veritatem, vel falsitatem, ostendendi, quorum vtrumque vtilitate non caret. Tali igitur instituto Cel. *Eulerus* omnes numeros ex quadrato et duplo alius quadrati compositos contemplatur, quibus ad 500 vsque expositis plures insignes earum proprietates obseruat, veluti quod hi numeri, siquidem fuerint compositi, alios diuisores non admittant, nisi qui ipsi sint eiusdem indolis; tum vero, si fuerint primi, eos semper multiplum octonarii, vel vnitate, vel ternario, superare; Hinc autem vicissim concludere licet, omnes numeros primos, vel vnitate, vel ternario, multiplum octonarii superantes, semper esse compositos ex quadrato et duplo quadrato, seu in forma $aa + 2bb$ contineri; quae postrema obseruatio non solum in numeris minoribus ad 500 vsque locum habet, sed, inductionem longe vltra 1000 continuando, nulla exceptio se prodidit. Etiamsi autem reliquas obseruationes omnes Auctori firmis demonstrationibus communire licuerit, in hac postrema tamen aquam ipsi haesisse confitetur, neque tamen minus eam pro vera habet; ex quo harum speculationum studiosis pulcerrima occasio suppeditatur, vires suas in ea demonstranda exercendi. Demonstrationes autem huiusmodi arithmeticae geometricis longe praestant, multoque maius ingenii acumen postu-

postulant; quare cum demonstrationes geometricae ad vim ingenii acuendam tantopere commendari solent, demonstrationes certe arithmeticae isto honore multo magis dignae sint iudicandae; eoque magis eos laudari oportet, qui in hoc genere demonstrationum operam suam collocant.

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

De frictione corporum rotantium.

Auctore Leon. Eulero p. 233.

In corporum motu a frictione impedito nonnulla adhuc phaenomena se offerunt, quorum explicatio nondum perspicitur. Quando enim globus super tabula ita prouoluitur, vt in puncto contactus nullus plane attritus exeratur, cuiusmodi motus prouolutio perfecta vocari solet, ob deficientem attritum nulla etiam frictio adesse est censenda, interim tamen motus corporis mox penitus extinguitur, qui effectus etiam ne resistentiae quidem aeris tribui potest, quippe qua nullus motus vnquam plane ad nihilum redigitur. Omni igitur attentione digna est quaestio: quaenam sit causa, qua globi super plano horizontali prouolutione perfecta ingredientis motus tandem penitus extinguatur? Cel. *Eulerus* igitur primum in hanc causam inquirens, planum panno villoſo obductum conſiderat, atque oſtendit, depreſſione horum villorum motum globi vtique retardari, ac tandem penitus extingui debere. Vbi autem tales villi deſint, nullum corpus tam eſſe durum obſeruat, quod non a pondere incumbente quandam impreſſionem accipiat. Hinc concludit, dum globus ſuper plano, tam politiſſimo, quam duriſſimo, prouoluitur, aliquantillum eum in hoc planum quaſi immergi, ex quo idem effectus atque a villis oriatur neceſſe eſt. Tum vero alia quaeſtio occurrit circa deſcenſum globi ſuper plano inclinato, cuius motus ſi prouolutione perfecta fiat, nullam reſiſtentiam a frictione pati poſſe eſt putandus. Ex hoc principio, quod in prouolutione perfecta nulla detur frictio, Auctor iam olim (Comment. Tom. XIII.) deſcenſum corporum ſuper plano inclinato determinauerat, inueneratque prouolutionem perfectam in hoc motu nunquam locum habere poſſe. Contra vero Cel. *Daniel Bernouilli*, qui idem argumentum ibidem erat proſecutus, in prouolutione perfecta perinde frictionem aſſumens, ac ſi globus rependo ingrederetur, inuenit, globum prouolutione perfecta deſcendere debere, quamdiu plani inclinatio certum terminum non ſuperaret. Et haec quidem determinatio poſtmodum experimentis a Cl. *Krafftio* inſtitutis apprime conformis eſt deprehenſa. Quo circa hic Cel. *Eulerus* errorem in praecedente ſua diſſertatione commiſſum ingenue fatetur, ſimulque cauſam eius ſcrutatur, quam in eo ſitam eſſe deprehendit, quod etiam in prouolutione perfecta effectus frictionis non ſit nullus, niſi motus fuerit vniformis, vel vterque motus, progreſſi-

vus

rus scilicet et rotationis, a viribus sollicitantibus aequaliter acceleretur. Cum igitur in descensu globi super plano inclinato vis grauitatis solum motum progressiuum afficiat, rotatorio vero ab ea nulla mutatio afferatur, statim certe prouolutio perfecta turbaretur, et orto attritu *tota* frictionis vis se exsereret. Huic ergo effectui *ipsi*, antequam eueniat, frictio iam aduersatur, idque *etiam* minori vi, quam in motu reptorio cernitur, siquidem vis minor prouolutioni perfectae conseruandae sufficiat. Probe enim obseruandum est, frictionem non semper *tota* sua vi agere: namque si corpus plano *horizontali* incumbens protrahatur minore vi, quam *foret* frictio, si moueretur, hoc corpus sine dubio in quiete manebit, ex quo haec regula, indolem frictionis haud mediocriter illustrans, deducitur, quod omne corpus *tamdiu in quiete perseueret*, quamdiu vel *ipsa frictio*, *vel etiam minor vis*, motui coercendo sufficit. Atque hoc etiam in prouolutione perfecta vsu venit, vbi *punctum contactus* pariter quiescit: scilicet si vis frictione non maior sufficiat ad reptionem impediendam, vel prouolutionem perfectam conseruandam, tum frictio hanc ipsam vim exeret. Quare cum in descensu globi super plano inclinato grauitas motum progressiuum acceleret, ad conseruationem prouolutionis perfectae requiritur, vt motus gyratorius parem accelerationem accipiat, quodsi a frictione, vel adhuc vi minori, praestari queat, id re vera eueniet, et prouolutio *perfecta* manebit. Statim autem ac maiori vi *opus fuerit* ad eam conseruandam, quam frictio suppeditare valet, tum globus partim rotando, partim rependo,

pendo, descendere incipiet, frictione totum effectum exserente. Prior casus locum habet, quamdiu inclinatio plani certam eleuationem non superat, prorsus vti experimenta declarant. In hac autem dissertatione Auctor istam quaestionem in genere pertractat, ac de omnibus corporibus cuicunque superficiei incumbentibus, si insuper a viribus quibuscunque sollicitentur, omnes casus sollicite distinguit, quibus vel solus motus progressiuus, vel mixtus, atque adeo prouolutio perfecta oriri debet; ac formulae quidem, vnde has conclusiones peti oportet, tam sunt intricatae, vt facile appareat, hanc quaestionem multo esse difficiliorem, quam primo intuitu videatur.

II.

Principia motus fluidorum.

Auctore Leon. Eulero p. 271.

Hic theoriae motus fluidorum elementa in genere traduntur, vbi totum negotium huc reducitur, vt proposita fluidi massa, siue libera, siue vasibus inclusa, cum ei motus quicunque fuerit impressus, eaque deinceps a viribus quibuscunque sollicitetur, motus, quo singulae eius particulae sint progressurae, determinetur, simulque pressio, qua singulae partes, tam in se mutuo, quam in latera vasis agunt, definiatur. Antequam autem Cel. Auctor hunc virium effectum inuestigandum suscipit, in priori istius dissertationis parte omnes

omnes motus possibiles, qui quidem in fluido locum habere possint, diligenter expendit. Etiamsi enim singulae fluidi particulae a se inuicem sint solutae, tamen eiusmodi motus penitus excluduntur, quibus particulae in se mutuo penetrarent, quandoquidem hic de eiusmodi fluidis tantum est sermo, quae nullam compressionem in arctius spatium patiuntur. Ex quo perspicuum est, quamlibet fluidi portiunculam alium motum recipere non posse, nisi quo perpetuo idem volumen conseruet; etiamsi interea figura vtcunque varietur. Sufficeret quidem, dum ne vlla portiuncula vnquam in minus spatium compingeretur, verum quoniam, si in maius spatium expanderetur, continuitas particularum tolleretur, eaeque dispergerentur, neque amplius inter se cohaererent, huiusmodi motus non amplius ad doctrinam de motu fluidorum pertineret, sed singulae guttulae seorsim motus suos absoluerent. Hoc igitur casu excluso, motus fluidorum ista regula est restringendus, vt singulae portiunculae perpetuo eiusdem maneant voluminis; atque ex hoc principio generales motus expressiones pro singulis fluidi elementis limitantur. Considerando scilicet quamcunque fluidi portiunculam, singula eius puncta tali motu ferri debent, vt cum puncto temporis in locum proximum peruenerint, etiamnum volumen priori aequale adimpleant, vnde si cuiusuis puncti motus in ternas celeritates, secundum directiones fixas inter se normales, resoluatur, semper certa quaedam relatio inter has ternas celeritates subsistat necesse est, quam Auctor in prima parte definiuit.

In altera parte (pag. 288.) ad motum fluidi a viribus quibuscunque productum determinandum progreditur Auctor, in quo negotio vniuersa inuestigatio eo redit vt, pressio, qua partes fluidi in singulis punctis in se inuicem agunt, definiatur, quae pressio commodissime, vti in aqua fieri solet, altitudine quadam indicatur, quae ita est intelligenda, vt singula elementa fluidi parem pressionem sustineant, ac si a columna graui eiusdem fluidi, cuius altitudo illi est aequalis, premerentur. In singulis ergo fluidi punctis semper dabitur eiusmodi altitudo statum pressionis referens, quae quatenus non circumquaque est aequalis, motum elementorum perturbabit. Haec autem pressio pendet tam a viribus, quibus singula fluidi elementa immediate sollicitantur, quam ab iis, quae in totam massam agunt, ita vt in his viribus datis pressio in singulis punctis, hincque singulorum elementorum acceleratio, vel retardatio, motus assignari queat, quae determinationes omnes ab Auctore per formulas differentiales exprimuntur. At vero plerumque euolutio harum formularum maximis difficultatibus implicatur. Interim tamen vniuersa haec theoria ad Analysin puram est reducta, et quod in ea perficiendum restat, vnice ab vlteriori Analyseos promotione pendet. Tantum igitur abest, vt speculationes mere analyticae nullum vsum in Mathesi applicata praestent, vt potius adhuc insignia eius incrementa desiderentur.

III.

III.

De motu et reactione aquae per tubos mobiles transfluentis.

Auctore Leon. Eulero p. 312.

Quantumuis difficile sit Theoriam generalem motus fluidorum ad quosuis casus particulares accommodare, tamen si aqua per tubos non nimis amplos fluit, singularis accedit circumstantia, qua motus determinatio multo fit facilior, atque adeo ad conclusiones practicas perduci potest. Hoc commodum inde nascitur, quod per totam quamque tubi sectionem transuersam aqua fere in omnibus punctis pari velocitate defertur, ita vt haec *hypothesis satis tuto* in calculum introduci possit, etiamsi negari nequeat, quin aliquis error calculum inquinet, qui eo maior erit, quo tubi fuerint ampliores, vel saltem quo magis velocitas in singulis cuiusque sectionis punctis ab aequalitate recedat; quare etiam omnes conclusiones ex hac hypothesi deductae pro proxime tantum veris erunt habendae. Huic autem principio fere omnia, quae adhuc de motu fluidorum determinata habentur, innituntur, cum vbique motus tantum per tubos tractari soleat, qui etsi plerumque non admodum angusti assumantur, tamen iis ante memorata *proprietas* tribuitur, qua per totam quamque sectionem quouis tempore in omnibus punctis aqua aequali celeritate moueri ponitur, ex quo determinationes *inde conclusae* modo magis, modo minus, a veritate aberrare

errare deprehenduntur. Nonſolum autem in huiusmodi tubis ipſe motus aquae, ſed etiam preſſio, quam inde ipſe tubus ſuſtinet, definiri ſolet; vnde cognoſcitur, niſi tubus, vel vas, ſatis firmiter retineatur, in eo ipſo ab actione aquae, quae quatenus in latera vaſis agit, reactio appellatur, motum generari debere. Quin etiam talis reactio quoties aqua per foramen effluit, experientia dilucide confirmatur. Namque Cel. *Segnerus* iam pridem de eiusmodi machina cogitauit, quae ſola effluentis aquae reactione ad motum concitaretur: hanc autem machinam ita inſtruxit, vt ipſi tubi aquam deferentes circa axem verticalem fixum in gyrum agerentur. Hinc quaeſtio non minus curioſa, quam difficilis, eſt nata, qua lege aqua per tubos mobiles promoueatur, quod argumentum in hac diſſertatione omni circumſpectione ad tot tamque varias circumſtantias adhibita a Cel. *Eulero* pertractatum videmus. Ac primo quidem principium vniverſaliſſimum, pro omni reactione determinanda luculenter exponit, vnde actio virium non mediocriter illuſtratur: ſcilicet ſi omnes vires aquam in vaſe contentam ſollicitantes littera P indicentur, vires autem ad accelerationem ſingularum particularum impenſae littera Q; tum differentia $P - Q$ perpetuo dabit reactionem; vnde perſpicitur, eatenus tantum reactionem exiſtere, quatenus non omnes vires ſollicitantes ad accelerationem motus impenduntur. Hinc regula illa notiſſima, ſed plerumque perperam intellecta, egregie illuſtratur, quod omnis cauſa effectum ſibi aequalem producat; hic enim P exhibet cauſam, cuius effectus duabus partibus conſtat, altera ad motus productionem, ſeu accelerationem, impenſa

penſa

penſa, quam littera Q indicat, altera vero ipſius vaſis latera vrgente, ſeu reactione, quae ſi ponatur R, erit vtique $P = Q + R$. Huius principii ope ab Auctore motus et reactio aquae per tubos mobiles fluentis ſatis concinne et expedite determinatur, hincque machina illa Segneriana ad ſummum perfectionis ſtatum proue- hitur: quae tum a data copia aquae per datam altitudinem delapſa ad motum impulſa maiorem effectum producere valet, quam pleraeque machinae hydraulicae vſu receptae, ex quo hoc nouum machinarum genus digniſſimum videtur, quod omni cura ad communem vſum transferatur.

IV.

Tentamen Theoriae de frictione fluidorum.

Auctore Leon. Eulero p. 338.

Fluida, dum per canales feruntur, frictionem quandam pati, plurima experimenta teſtantur, atque adeo Phyſiologi non dubitant, calorem animalium frictioni motum ſanguinis afficienti tribuere; quod autem etſi neutiquam ſatis adhuc eſt euictum, tamen certum eſt, ſi aqua per longinquos canales ad fontes ſalientes deriuetur, eius motum ob frictionem non mediocriter retardari, propterea quod altitudo iactus eo magis ab altitudine aquae in caſtello deficit, quo tractus canalium fuerit longior, ipſique canales anguſtiores. Nullum etiam eſt dubium, quin haec frictio ſimiles leges ſequatur, atque frictio corporum solidorum, cum minimae fluidi particulae, ad latera canalium praeterfluentes, tanquam solidae, spectari queant, ex quo frictio semper pressioni proportionalis censenda videtur. Quoniam vero particulae fluidorum maxime sunt lubricae, earum frictio sine dubio multo minor est statuenda, quam in solidis, ad quod etiam hoc discrimen accedit, quod in fluidis extimae tantum particulae latera tuborum tangentes frictionem patiantur, dum interiora iuxta has libere defluere possunt, vnde huius frictionis effectus multo minor euadat, necesse est. Quatenus autem hoc modo euenit, vt in qualibet tubi sectione particulae interiores celerius mouentur, quam quae lateribus sunt contiguae, eatenus hypothesis, cui theoria motus fluidorum per tubos fluentium superstruitur, euertitur, ita vt iam conclusiones ex calculo deductae magis a veritate aberrent. Quae igitur in hac dissertatione circa frictionem aquae per tubos decurrentis a Cel. *Eulero* traduntur, ea ipse Auctor minime tanquam certa et veritati consentanea venditat; sed potius totam tractationem pro tentamine habet, quo naturae scrutatoribus occasionem suppeditare voluit, tam per experimenta quam per calculos accuratiores, in naturam huius frictionis inquirendi. Assumit igitur hypothesin vulgarem, qua in qualibet tubi sectione aqua communi motu proferri ponitur, insuperque frictionem pressioni aquae ad latera tubi proportionalem statuit, quam autem pro eadem pressione ex crassioribus quibusdam experimentis plus millies minorem colligit, quam in solidis. Primum autem obseruat in tubis cylindricis effectum frictionis duplo esse minomindrom, ac in tubis eiusdem amplitudinis, quorum sectiones sunt quadratae. Tum vero diminutionem motus aquae per quosuis tubos, siue verticales, siue ad horizontem inclinatos, determinat, et in omnibus casibus terminos, tam in longitudine tuborum, quam eorum gracilitate, definit, vbi motus aquae ob frictionem penitus coercetur, qui iidem termini, cum per experimenta facile explorari queant, hinc maxime ideoneus modus obtinetur theoriam frictionis fluidorum per experimenta perficiendi.

Hanc porro theoriam etiam adhuc imperfectam (*pag.* 372.) ad cursum fluminum accommodat Auctor, vbi obseruat, nisi pro data fluminis profunditate alvei decliuitas certum terminum superet, aquam esse stagnaturam: ita ea frictionis *mensura* assumta, quam experimenta *nonnulla crassiora* suadere videbantur, sequitur, fluuium cuius profunditas sit 25 pedum, fluere cessare, statim atque aluei decliuitas pro distantia 1000 pedum minor sit quam 9 pollicum: sin autem profunditas sit 15 pedum, ad fluendum sufficit, vt pro distantia 1000 pedum decliuitas semissem pedis superet: hic autem frictionis effectus nimis magnus esse videtur.

Addita est (pag. 379 appendix de fontibus salientibus, eidem huic theoriae accommodata, et, quantum ex *illa* fieri potest, dilucide monstrans, ad quam altitudinem aqua in huiusmodi fontibus, cognita eleuatione *castelli* et amplitudine nec non longitudine canalium, sursum proiicietur. Caeterum hic notatu maxime dignum putamus, effectum huius frictionis etiam a pressione

ſione atmoſphaerae pendere, ita vt aucta atmoſphaerae preſſione effectus frictionis pariter augeatur: quare ſi aqua per canales ad fontes ſalientes deriuatur, ſingulare hoc phaenomenum locum habere debet, vt aqua eo altius proiiciatur, quo humilior ſtet mercurius in barometro.

Denique (pag. 382.) prolixa tabula ſubiungitur ex qua pro data canalium longitudine et amplitudine ad quamuis aquae in caſtello altitudinem facile definiri poteſt altitudo, ad quam aqua ſit aſcenſura, vbi in genere notaſſe iuuabit, quo longiores, ſimulque anguſtiores, fuerint canales, per quos aqua deriuatur, eo maiorem iacturam in altitudine fontium eſſe futuram.

Ad fontes ergo ſalientes inſtruendos plurimum intereſt, vt caſtellum quam proxime conſtituatur, ſimulque tubi quam ampliſſimi adhibeantur. Verum, vt iam eſt monitum, haec Theoria adhuc emendatione indiget, quam vix ante cum ſucceſſu ſuſcipere licebit, quam plurima noua experimenta ſumma cura fuerint inſtituta, quae vlterior inueſtigatio omnino eſt digna, in qua tam Phyſici, quam Geometrae, omni ſtudio vires ſuas exerceant.

V.

V.

Explicatio experimenti paradoxi, de aſcenſu coni duplicis ſpontaneo.

Auctore G. W. Krafft. p. 389.

Etſi aſcenſus apparens rotae, axibus conicis praeditae, aut coni duplicis, duobus planis inclinatis diuergentibus impoſiti, mirum videatur phaenomenon ad primum intuitum, peritioribus tamen et attentius rem conſiderantibus parum negotii creare potuit perſpicere, interea dum conus aut rota eiusmodi verſus partes eleuatiores aſcendere videtur, totius aggregati centrum grauitatis vere deſcendere, et inferiora petere. Aſſerere interim vix dubitamus, mancam fuiſſe phaenomeni, cuius in plerisque Philoſophiam naturalem explicantibus libris iniicitur mentio, explicationem, antequam eam, quam hic orbi erudito ſiſtimus, diſquiſitionem b. Auctor inſtituerat. Iure enim meritoque talis huius phaenomeni explicatio deſiderari poterat, quae non ſolum generatim oſtenderet, fieri debere, quae fieri actu experimur, ſed etiam, cur et quomodo ita fiat, diſtincte explicaret.

Praeſtitit hoc *Krafftius*, et in expediendo hoc negotio ſequenti ratione proceſſit. Supponit plana divergentia, quibus impoſita eſt rota, aut conus, horizontalia, atque tum inquirit in cauſam, cur prouolui iam debeat conus, eam regionem verſus, verſus quam plana diuergunt. Concipit ea propter, tranſire per rectam horizontalem, cui incumbit conus, planum verticale, atque demonstrat, coni, per planum hoc, sectione, produci ellipsin, cuius axis maior horizonti parallelus, cuiusque centrum, puncto contactus ellipseos et rectae horizontalis, cui incumbit conus, verticaliter imminet. Quodsi itaque diameter grauitatis, siue axis coni, per ellipseos centrum transiret, suffultum censendum esset coni centrum grauitatis. Hic autem res aliter se habet. Constat nempe ex geometricis considerationibus in dissertatione prolatis, centrum ellipseos in axin coni, ex quo secatur, non cadere; vnde liquet, eo quem consideramus casu, centrum grauitatis coni non suffultum esse, mirumque non est, quod actu prouoluatur conus, eas partes versus, versus quas centrum grauitatis ipsius a libero descensu non impeditur.

Postquam ita generatim ostensa haec sunt, distinctius experimenti theoriam disquirit Auctor, momentum, quo ad descensum sollicitatur centrum grauitatis, aut conus ad motum rotatorium, inuestigat, lineaeque, per quam durante prouolutione, centrum grauitatis coni descendit, inclinationem ad horizontem determinat. Ex his tandem immediate deducitur, quantum rectae horizontales, quibus incumbit conus, eleuari queant, antequam rotae prouolutio et apparens ascensus sistatur.

Plena sic omnibusque numeris absoluta suppeditatur huius phaenomeni explicatio, quam eo magis luce publica dignam existimauimus, quod aliqui Physicorum, interque eos perspicacissimus *Desaguillierius*, in eodem hoc negotio, infeliciter versati sint, prouti sub dissertationis finem *Krafftius* demonstrat.

VII.

VI.

Sector Catadioptricus.

Auctore

Ioh. Andr. de Segner p. 399.

Ex quo Ill. *Segnerus* Academiae nostrae nomen dedit, merito gratulamur Commentariis nostris, a tanti viri claritate laudes, ab acumine autem eius et in publica commoda peruigili diligentia bonarum artium incrementa. Descriptio Sectoris Catadioptrici, quam hic damus, ordine prima ab ipso cum Academia communicata lucubratio est. Suum quidem non dicit, quod hic describit instrumentum, contractione tamen molis *illud eo redegit*, vt vix commodius aliquod cognitum sit, ad peragendas varias operationes, quae alias non sine labore ac difficultate perficiuntur. Descriptionem instrumenti hic non suscipimus, quia, nisi ad delineationes recurrere velimus, vix intelligibilis foret. Hic solum annotamus, gerere hunc sectorem arcum circuli, non nisi decimae sextae parti totius circuli peripheriae aequalem, quo non obstante omnes anguli eius ope dimetiri possunt. Perutilis erit sector hic Catadioptricus peregrinatoribus eruditis, vt instrumento hoc, quod absque incommoditate secum portare possint, admodum expedite positiones locorum ex longinquo conspicuorum, capiant, sicque geographicam regionis alicuius descriptionem perficiant.

PHYSICA.

I.

Obſeruationes botanicae et vna Iridis multiplicis.

Auctore G. B. Bülffinger p. 407.

Heroicis tantum ingeniis datum eſt, limites cognitionis humanae, certis obiectis alligatos perrumpere, et in pluribus doctrinis, quae nihil inter ſe commune habent, eadem facilitate verſari. Non diffiteor equidem, ſtructuram et vegetationem plantarum multa offerre Philoſopho non indigna, nec miror, ſi naturae ſcrutatorem cupido incedit, ea, quae in corpore animali fieri videt, in plantis quoque experiri. At quot non aliis ſtudiis diſtentus fuit *Bülffingerus*? Profunda Mathematum ſcientia et Phyſices experimentalis amplificatio totum illum, cum hic Petropoli degeret, occupauit. Reuerſus in patriam Theologiam profeſſus eſt, Architecti ſupremi bellici munus per aliquot tempus non ſine laude ſuſtinuit, tandem in conſilium regiminis Ducatus Virtembergici admiſſus, eum ſe geſſit, vt qui tota vita ſua nihil praeter doctrinam politicam exercuiſſet. Hoc non obſtante Vir illuſtris, quo erat ingenio feliciſſimo et nullis limitibus circumſcripto, quandoque, ſi non data opera, ſaltem recreationis cauſa, in amoeniſſimum Florae campum deſcendit,

dit, et vt olim Academicus Petropolitanus de Tracheis plantarum in melone, nec non de radicibus et foliis Cichorii (v. Tom. IV. et V. vet. Comment.) commentatus erat, ita paucis ante obitum mensibus opellam, quam *hic* damus, conscripsit et Academiae nostrae consecrauit. Damus eam hoc fine, tum ne quid immortalis viri laborum intercidat, tum vt ii, qui curiosis obseruationibus delectantur, in nostris quoque Commentariis reperiant, quo animum pascere possint.

Obseruationes botanicae sunt sequentes: 1. *Fructus proliferi et frondosi.* Post collecta ex variis Auctoribus fructuum proliferorum exempla, describuntur quatuor pira, nouis fructibus et frondibus foecunda. 2. *Malus satiua — cum fructu florifero.* Vt ex allegatis piris prodiere frondes, ita hic frondes ex malo ortae procrearunt *flores.* 3. *Flos rosae prolifer et frondosus.* Huius generis plura exempla ex scriptoribus variis allegantur, et discrimen inter singula notatur.

Accedit (p. 420.) obseruatio Iridis multiplicis, cui praemittitur enumeratio exemplorum, ab optimae notae Physicis de hoc Phaenomeno euulgatorum. *Bülffingerus* Iridem vnam quintuplicatam vidit, reliquas tres triplicatas. Notandum autem, Iridum loco ipsi quoque Zonas coloratas venire, quae quandoque Iridi primariae interius contiguae subobscure conspiciuntur, et fere semper adparere debent, dummodo satis clara luce splendentis solis radii, in atram nubem densamque pluuiam incidentes, viridam Iridem efformare possint, cuius sufficiens explicatio, principiis a summo *Newtono* Opt. L. II. P. IV. euolutis, innixa, apud Auctores Physicos passim occurrit; vnde quoque dubitari licet, vtrum recte satis de his Zonis sentiat Ill. Auctor, qui istas pro coronarum aut halonum portionibus haberi posse existimauit.

Recordamur etiam hic Petropoli aestate anni 1757. Iridem triplicem diuerso tempore a Viris Cl. *Zeibero* et *Aepino* interuallo aliquot hebdomadarum conspectam fuisse, vbi tamen tertia Iris reliquis non fuit parallela, sed priores duas oblique intersecauit. Tribuunt autem hoc phaenomenon doctissimi obseruatores cum *Halleio* reflexioni radiorum solis a quieta superficie stagni aut fluuii ortae; sub hac enim conditione vterque illud se vidisse testatur.

II.

Obseruationes Meteorologicae in diuersis Sibiriae locis factae, in ordinem redegit, animaduersionibus illustrauit, et consectaria addidit.

Auctore I. A. Braun p. 425.

Inter fructus itineris Sibirici, a b. *Gmelino* exantlati, non postremus censendus est, quod vbicunque locorum aliquam moram fecit, obseruationes Meteorologicas instituit, et institutas in praecipuis Sibiriae locis per alios obseruatores continuari curauit. Obseruationum ab ipso *Gmelino* consignatarum rationem hoc loco reddidit *Braunius* V. Cl. non quidem omnes, quod

quod nimis longum fuiſſet, repetendo, ſed obſeruatio-nes ſingulorum locorum inter ſe inuicem comparando, et ſub quibus aeris circumſtantiis maximae minimaeue altitudines barometricae, nec non calor ſummus, fri-gusque ſummum, quolibet tempore et loco acciderunt, excerpendo. Notatu hic dignam indicamus confirma-tionem frigoris ſummi ſub initium Anni 1735. a *Gmelino* in vrbe Ieniſeisk obſeruati, quia cum b. Vir in praefatione ad Tomum I. Florae Sibiricae mentio-nem eius iniecisset, increduli nonnulli extiterunt, tan-tum frigoris gradum dari poſſe dubitantes, ideoque ob-ſeruationem vitio laborare ſuſpicati ſunt. His autem nunc reliquis obſeruationibus a Cl. *Braunio* allegatis omnis ſcrupulus eximitur, fidesque *Gmelini* eo quoque confirmatur, quod praeterito anno 1760. ſi non ma-iorem, *ſaltim parem*, frigoris rigorem in Suecia obſer-vatum fuiſſe, noua publica nunciarunt. Deinde notari meretur depreſſus barometri ſtatus, illi, qui in ſummis Alpibus obſeruari ſolet, non abſimilis, quem patentes campi Mongolenſes in vico Kjachta, Ruſſorum cum Sinenſibus mercatura celebri, oſtenderunt. Quod cum hic loci obtineat, quae non erit ſoli eleuatio ad fontes fluuiorum Selengae, Orchonis et Tolae, ſeu in mediis Mongolenſium deſertis, vnde haec flumina profluunt? Hoc certum eſt, rudera diluuii vniuerſalis, aut nulla, aut dubia, ibi obſeruari. Et defectum aeris denſioris omnes, huic adſuetos, mox ſub ingreſſum in iſtas regiones ſen-tire et aegre ferre, *Gmelinus* in deſcriptione itineris Sibirici Tom. I. p. 444. adnotauit. Iactura obſer-uationum thermometricarum inter Kraſnoiarenſes anni

1739

metra et Aſtronomo *Bouguerio*, talem aſſumunt curuaturam, vt meridiani gradus, tranſeundo ab aequatore verſus polos, increſcant ſecundum rationem, quae biquadrata ſinuum latitudinum intercedit, cum in hypotheſi elliptica haec incrementa in duplicata circiter praedictorum ſinuum ratione fiant.

Magnus eſt harum hypotheſium in diſquiſitiones a Clar. Auctore inſtitutas, influxus. Aſſumta enim alia curuaturae meridiani lege, alia prodit ratio rectarum, ex obſeruatoriis ad terrae centrum ductarum, aliaque anguli, quem verticalis linea cum radio terreſtri includit, menſura, vnde neceſſario quoque alia aliaque prodire debet parallaxeos lunaris quantitas.

Vtrique itaque hypotheſi, *Newtonianae* nempe atque *Bouguerianae*, (emendato prius aliquo, qui in calculos analyticos, a Cel. *Bouguero* inſtitutos, irrepſerat, errore.) inueſtigationes ſuas adaptat Clar. Auctor, quod negotium, qua ratione perficiat, qui ſcire cupit, ad ipſam diſſertationem ablegandus eſt. Nos hic ſolummodo monemus ex prolixioribus Clar. Collegae diſquiſitionibus et calculis elucere tandem, ſub parallelo Petropolitano rationem parallaxeos horizontalis Lunae et diametri ipſius vti 270 ad 149 circiter ſtatuendam eſſe; atque parallaxin Lunae horizontalem, ex tabulis *Halleianis* deductam, parte ſui 168 augendam eſſe, vt theoria cum natura ad conſenſum reducatur, quod quidem cum concluſione, quam in Tomo V. Commentariorum Academiae noſtrae, ex conſideratione eclipſium

ſola-

solarium An. 1748 et 1750 deduxerat, apte satis consentit.

Obseruationes Clar. *Grischouii* in Insula *Oesilia* institutas, operam dabit Academia, vt quantocyus lucem publicam adspiciant.

II.

Obseruatio Eclipseos lunaris partialis, quae contigit d. $\frac{16}{27}$ Martii 1755. habita in Insula Oesilia ab A. N. Grischouio. p. 542.

III.

Obseruatio Eclipseos lunaris Petropoli *in Obseruatorio* astronomico d. 17. Martii mane temp. civ. 1755. st. vet. instituta a N. Popowio et A. Krasilnikowio. p. 545.

Etsi obseruationes Eclipsium lunarium ad perficiendam scientiam astronomicam vix aliquem habeant vsum, immo et non nisi rudioribus adminiculis, longitudinem locorum determinandi, annumerandae sint, pro hoc vltimo tamen scopo, vbi summa non quaeritur accuratio, vtiliter aliquando adhiberi possunt. Hac *itaque mente* supra indicatos Eclipseos huius obseruationes *cum* lectoribus communicamus.

IV.

Mercurius in ſole viſus, Lipſiae d. 6. Maii ſt. nov. A. 1753, hor. mat. temp. civ. a Godofredo Heinſio. p. 547.

Verſabatur in eo orbitae ſuae loco, qui nodo deſcendenti propinquus eſt, Mercurius, cum An. 1753 inter ſolem terramque tranſibat, vnde obſeruationes circa hunc tranſitum inſtitutae, ad emendandam planetae huius theoriam apprime vtiles eſſe poſſunt. Quid Clar. Auctor circa hoc phaenomenon obſeruauerit, ex ſcripto ipſo haurire debent lectores, de methodo tamen quam adhibuit, aliqua monere operae pretium iudicamus.

Habet haec methodus inſignem, cum conſueto per tubum, quadranti aſtronomico affixum, phaenomena talia obſeruandi modo, ſimilitudinem, eademque hac gaudet praerogatiua, quod a refractionum effectu immunis ſit. Tota, quae locum habet, differentia, ea eſt, quod 4 fila ſub angulo ſemirecto ad ſe inuicem inclinata, in ocularis vitri foco extendat Clar. Auctor, cum tubi quadrantum ordinarie non niſi 2 fila, normaliter ſe decuſſantia, gerere ſoleant, deinde vero, quod tubus, quem adhibet, quadranti non affixus ſit, ſed ope libellae ipſi appenſae ita dirigatur, vt aliquod filum reticuli, dum obſeruatio inſtituitur, horizonti parallelum ſit, prouti hoc in prius dicta methodo, plano quadrantis ſitum exacte verticalem conciliando, obtinetur. Plura, quia aſtronomis ſcribimus, in medium afferre ſuperuacuum foret.

MATHEMATICA.

METHODVS
INVENIENDI INFINITAS
CVRVAS ISOPERIMETRAS ALIAVE COMMVNI PROPRIETATE PRAEDITAS.

Auctore

L. EVLERO.

In celebri illo problemate isoperimetrico quaeri solet, inter omnes lineas curuas per data duo puncta *transeuntes ac longitudine* aquales, ea quae maximi minimiue cuiusdam proprietate gaudeat. Hoc igitur problema innititur isti hypothesi, quod datis duobus punctis infinitae existant lineae curuae longitudine aequales, quae omnes intra haec puncta tanquam terminos contineantur. Quanquam autem nullum est dubium, quin per data duo puncta innumerabiles duci queant lineae curuae, quae omnes longitudinem eandem habeant, tamen si omnes istae curuae exhiberi debeant, vel aequatio generalis desideretur eas omnes complectens, quaestio non parum ardua videtur. Atque si ad solutionem problematis isoperimetrici id opus fuisset, vt omnes curuae isoperimetrae intra datos terminos contentae exhiberentur, et ad electionem maximi minimive quasi proponerentur, nondum fortasse aditus ad hoc problema patuisset.

Remota autem huius problematis mentione, ipsa quaestio de inueniendis infinitis lineis curuis isoperimetris, quae intra datos terminos sint descriptae, omni attentione digna videtur, et quoniam eius solutio peculiaria calculi artificia postulat, quemadmodum cuique tentanti mox patebit, pro Analysi inde non spernenda incrementa expectare licebit. Praecipue autem multo maiorem fructum hinc percipiemus, si problemati longe ampliorem extensionem tribuamus, ita, vt nonsolum curvas eiusdem longitudinis, sed quae alia quacunque indole communi sint praeditae, definire doceamus, quae intra eosdem terminos sint contentae. Quousque igitur mihi in tractatione huius problematis latiori sensu accepti, pertingere licuerit, hic dilucide explicare constitui, atque vt ordine procedam, a quaestionibus simplicioribus huc pertinentibus exordiar.

Problema I.

1. Inuenire aequationem generalem pro omnibus curuis, quae per data duo puncta transeant.

Solutio.

Referentur omnes hae curuae inueniendae ad eundem axem, easdemque coordinatas orthogonales, sitque abscissa $= x$, applicata $= y$. Bina autem puncta data respondeant his duobus ipsius x valoribus; $x = o$ et $x = a$; ac ac pro illo quidem ſit $y=b$, pro hoc vero $y=c$. Quaeſtio ergo huc redit, vt eiusmodi relatio in genere inter x et y definiatur, quae poſito $x=o$ praebeat $y=b$, poſito autem $x=a$, det $y=c$; ſin autem abſciſſae x alii valores tribuantur, reſpondentes applicatae y valores in infinitum variare debent, propterea quod ſingulae curuae inter ſe debent eſſe diuerſae. Sit X eiusmodi functio ipſius x, quae poſito $x=o$ vel $x=a$ fiat vel $=b$ vel $=c$, atque manifeſtum eſt, aequationem $y=X$ vnam praebere curuam per propoſita ambo puncta transeuntem. Denotet iam P functionem quamcunque ipſius x indefinitam, ac ponatur $y=X+x(a-x)P$, vbi manifeſtum eſt, ſiue ſtatuatur $x=o$, ſiue $x=a$, alterum membrum $x(a-x)P$ in nihilum eſſe abiturum; dummodo P neque per x, neque per $a-x$ ſit diuiſum, ſicque alteruter factorum x et $a-x$ tollatur. Idem eueniet, ſi ponatur $y=X+x^m(a-x)^n P$, dummodo exponentes m et n ſint nihilo maiores, ex quo perſpicuum eſt, omnes curuas hac aequatione $y=X+x^m(a-x)^n P$ contentas ita fore comparatas, vt ſiue ponatur $x=o$, ſiue $x=a$, iidem pro y prodeant valores, quaecunque functio ipſius x loco P ſubſtituatur. Ergo omnes hae curuae per eadem duo puncta abſciſſis $x=o$ et $x=a$ reſpondentia tranſibunt, per quae tranſit curua aequatione $y=X$ contenta: et quoniam aſſumtio functionis P latiſſime patet, perſpicuum eſt, hanc aequationem omnes omnino curuas per ambo propoſita puncta tranſeuntes continere.

 Coroll.

Coroll. 1.

2. Data ergo curua hac aequatione $y = X$ expressa, vel saltem eius portione, quae respondet abscissae $= a$, cuius propterea ambo termini erunt noti, omnes curuae hac aequatione generalissima contentae:

$$y = X + x^m (a-x)^n P$$

per eosdem terminos transibunt, quaecunque pro P substituatur functio ipsius x, dummodo exponentes m et n sint nihilo maiores, neuterque horum factorum x^m et $(a-x)^n$ per diuisionem destruatur. Quippe qui factores sunt necessarii ad hanc proprietatem producendam.

Coroll. 2.

3. Scilicet si curuae hac aequatione $y = X$ expressae punctum abscissae $x = o$ respondens sit A, abscissae vero $x = a$ respondens sit B, quae puncta A et B in figura notata sunt intelligenda, tum omnes curuae hac aequatione $y = X + x^m (a-x)^n P$ contentae per eadem duo puncta A et B transibunt.

Coroll. 3.

4. Si in curua, cuius aequatio $y = X$, notentur tria puncta A, B, C, quae tribus abscissis $x = o$, $x = a$, $x = b$ conueniant, simili modo infinitae aliae curuae exhiberi poterunt, quae per eadem tria puncta A, B, C transibunt, omnes enim hac aequatione generali continebuntur $y = X + x^m (a-x)^n (b-x)^p P$.

Coroll.

Coroll. 4.

5. Simili modo facile erit infinitas curuas inuenire, quae per quatuor pluraue puncta data datae curvae $y=X$ transeant, si enim haec puncta sint A,B,C,D, etc. quae respondeant abscissis;

$$x=o,\ x=a,\ x=b,\ x=c,\ \text{etc.}$$

curuae quaesitae hac comprehendentur aequatione:

$$y=X+x^m(a-x)^n(b-x)^p(c-x)^q\ \text{etc. } P$$

dummodo exponentes m,n,p,q etc. sint nihilo maiores, nullusque factorum per indolem functionis P destruatur.

Coroll. 5.

6. Si ergo curua data sit circulus, in eiusque peripheria puncta quotcunque notentur, aliae infinitae curuae *describi poterunt*, quae per omnia haec puncta *transeant*.

Scholion 1.

7. Si coordinatae curuae datae per functiones quasdam nouae variabilis u dentur, ita, vt sit:

$$x=U \text{ et } y=V$$

huiusque curuae duo puncta A et B reperiantur si ponatur $u=f$ et $u=g$, ita vt posito $u=f$ fiat $x=o$ et posito $u=g$ fiat $x=a$; tum infinitae aliae inuenientur curuae per eadem duo puncta A et B transeuntes, ope harum formularum:

$$x=U+(f-u)^\mu(g-u)^\nu P$$

$$\text{et } y=V+(f-u)^m(g-u)^n Q$$

quae-

quaecunque functiones ipsius u loco P et Q scribantur dummodo factorum nullus destruatur, exponentesque μ, ν, m, n nihilo sint maiores. Perspicuum est enim, siue ponatur $u=f$, siue $u=g$, coordinatas x et y prodire plane easdem, quaecunque functiones litteris P et Q tribuantur. Simili etiam modo solutio adornabitur, si curuae quaesitae per tria pluraue puncta data curuae propositae transire debeant; atque etiam patet hoc modo non solum curuas algebraicas, sed etiam transcendentes cuiusque ordinis exhiberi posse, cum nihil impediat, quominus pro P et Q etiam functiones transcendentes ipsius u accipiantur.

Scholion 2.

8. Cuique patet, functionibus P et Q eiusmodi adiunctos esse factores, qui vtroque casu proposito $u=f$ et $u=g$ euanescant, ita vt his casibus, quibus oriuntur abscissae $x=o$ et $x=a$, posteriora vtriusque formulae membra euanescant, indeque pro coordinatis iidem prodeant valores $x=U$ et $x=V$, qui ipsi curvae propositae conueniunt. Haec ergo conditio vt impleatur, haec istorum factorum forma $(f-u)^m(g-u)^n$ simplicissima et commodissima est visa; interim tamen occurrere possunt casus, quibus haec forma idoneos non suppeditat factores; veluti si alterum curuae punctum obtineatur ponendo $u=\infty$, ita vt sit $g=\infty$; tum enim huius modi factor $(f-u)^m(\infty-u)^n$ calculum maxime perturbaret. Hoc autem casu non erit difficile eiusmodi formas excogitare in terminis finitis, quae tam casu

casu $u=f$, quam casu $u=\infty$ euanescant: scilicet huic conditioni satisfaciet haec forma $\frac{(f-u)^m}{(k+u)^n}$ dummodo sit $n>m$, quo casu $u=\infty$ numerator prae denominatore, etiamsi vterque fiat infinitus, euanescat; k autem ita capi debet, vt numerator et denominator communem non adipiscantur diuisorem. Ita si ambo puncta data prodeant ex valoribus $u=0$ et $u=\infty$, factores idonei erunt:

$$\frac{u}{(k+u)^3} \text{ vel } \frac{u}{k+u^2} \text{ vel } \frac{u^m}{A+Bu^\alpha+Cu^\beta+Du^\gamma \text{ etc.}}$$

dummodo in denominatore altior occurrat potestas ipsius u, quam est numerator u^m.

Problema 2.

9. Infinitas inuenire lineas curuas, quae non solum per data duo puncta transeant, sed etiam in his punctis communi gaudeant tangente.

Solutio.

Sit vt ante $y=X$ aequatio pro vna curua, quae datam habeat proprietatem, atque duo puncta data oriantur ex valoribus abscissae $x=0$ et $x=a$.

Iam vt omnes curuae quaesitae per eadem puncta transeant, videmus eas hac contineri aequatione:

$$y=X+x^m(a-x)^nP$$

existente P functione quacunque ipsius x. Tum vero, vt in his punctis omnes curuae communi tangente gaudeant, necesse est, vt casu vtroque $x=0$ et $x=a$, valor $\frac{dy}{dx}$ idem plane prodeat, qui oritur ex aequatione $y=X$, seu vt is fit $=\frac{dX}{dx}$. Fiet autem inde:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dX}{dx}+mx^{m-1}(a-x)^{n}P-nx^{m}(a-x)^{n-1}P+x^{m}(a-x)^{n}\frac{dP}{dx}$$

vbi manifestum est hunc valorem redigi ad $\frac{dX}{dx}$ casibus $x=0$ et $x=a$, si non solum exponentes m et n, sed etiam $m-1$ et $n-1$ fuerint nihilo maiores. Quamobrem aequatio

$$y=X+x^{m}(a-x)^{n}P$$

etiam in propositis duobus punctis eandem tangentium positionem praebebit, si exponentes m et n non solum nihilo, sed etiam vnitate fuerint maiores.

Simili modo si ambae coordinatae x et y per novam variabilem u dentur, cuius valores $u=f$ et $u=g$ data duo puncta exhibeant, infinitae curuae quaesito satisfacientes in his formulis continebuntur.

$$x=U+(f-u)^{m}(g-u)^{n}P$$

$$\text{et } y=V+(f-u)^{\mu}(g-u)^{\nu}Q$$

quaecunque functiones ipsius u, siue algebraicae, siue transcendentes, pro P et Q substituantur, dummodo, quae cautio semper est tenenda, neutra factorem sibi adiunctum destruat. Insuper vero ad communionem tangentium in his punctis requiritur, vt exponentes m, n, μ, ν singuli sint vnitate maiores. Quoniam enim tum vtroque casu $u=f$ et $u=g$ fit $\frac{dx}{du}=\frac{dU}{du}$ et $\frac{dy}{du}=\frac{dV}{du}$, erit etiam $\frac{dy}{dx}=\frac{dV}{dU}$, qui valor a functionibus P et Q neutiquam pendet.

Coroll.

Coroll. 1.

10. Data ergo curua quacunque intra duo puncta A et B descripta, cuius aequatio inter coordinatas x et y est vel $y=X$, vel his formulis continetur $x=U$ et $y=V$, infinitae aliae curuae exhiberi possunt, quae non solum per eosdem terminos A et B transeant, sed etiam in his punctis communi tangente gaudeant.

Coroll. 2.

11. Quodsi exponentes in formulis inuentis adhibiti non solum vnitate, sed etiam binario, fuerint maiores, tum etiam vtroque casu $x=0$ et $x=a$, vel $u=f$ et $u=g$, hoc est in ambobus terminis, differentialia secundi gradus inter se conuenient. Scilicet in his punctis non solum omnium curuarum inuentarum eadem erit directio, sed etiam eandem curuaturam habebunt.

Scholion.

12. Quemadmodum ergo ante vidimus, si habeatur variabilis cuiusdam u talis functio z, vt sit

$$z=(f-u)^m(g-u)^n P$$

vtroque casu $u=f$ et $u=g$ fieri $z=0$, quaecunque P fuerit functio ipsius u, dummodo exponentes m et n fuerint nihilo maiores: ita nunc porro patet:

II. Si exponentes m et n fuerint vnitate maiores, fore vtroque casu $u=f$ et $u=g$

$$\text{et } z=0 \text{ et } \frac{dz}{du}=0$$

 III. Si

III. Si exponentes m et n fuerint binario maiores, fore vtroque casu $u=f$ et $u=g$

$$\text{et } z=0, \text{ et } \frac{dz}{du}=0 \text{ et } \frac{ddz}{du^2}=0$$

IV. Si exponentes m et n sint ternario maiores, fore vtroque casu $u=f$ et $u=g$

$$\text{et } z=0 \text{ et } \frac{dz}{du}=0 \text{ et } \frac{ddz}{du^2}=0 \text{ et } \frac{d^3z}{du^3}=0 \text{ etc.}$$

Perspicuum est, quae hic de duobus casibus $u=f$ et $u=g$ sunt annotata, etiam ad casus tres, nempe $u=f$, $u=g$, et $u=h$ extendi, si aequatio fuerit huiusmodi:

$$z=(f-u)^m(g-u)^n(h-u)^p$$

Quodsi autem in casu duorum punctorum fuerit $g=\infty$ tum loco factoris $(f-u)^m(g-u)^n$ capi debet factor huius formae $\frac{(f-u)^m}{\alpha+\beta u^\mu+\gamma u^\nu+\text{etc.}}$ ita vt in denominatore summae potestatis exponens sit maior quam m, atque tum ex solo exponente m definietur, ad quemnam vsque ordinem differentialia ipsius z his duobus casibus euanescant.

Problema 3.

13. Per data duo puncta infinitas ducere lineas curuas, quae omnes cum axe et applicatis extremis aequales areas includant.

Solutio.

Respondeant puncta haec data abscissis $x=0$ et $x=a$, ac posita cuiusque curuae applicata $=y$, erit aequa-

aequatio generalis pro omnibus curuis per haec duo puncta transeuntibus:

$$y = X + x^m (a-x)^n P$$

dummodo curua $y = X$ per haec duo puncta transeat. Cum iam area huius curuae sit

$$\int y\,dx = \int X\,dx + \int x^m (a-x)^n P\,dx$$

quia ea euanescere debet posito $x = 0$, posito autem $x = a$ aequalis esse debet $\int X\,dx$, manifestum est, integrale $\int x^m (a-x)^n P\,dx$ euanescere debere vtroque casu $x = 0$ et $x = a$. Sit igitur

$$\int x^m (a-x)^n P\,dx = x^{m+1} (a-x)^{n+1} Q$$

quam formam ideo assumo, vt inde P sine fractionibus determinetur. Hinc ergo fiet

$$P = (m+1)(a-x)Q - (n+1)xQ + x(a-x)\frac{dQ}{dx}, \text{ seu}$$

$$P = ((m+1)a - (m+n+2)x)Q + \frac{x(a-x)dQ}{dx}$$

Quare pro curuis quaesitis aequatio generalis erit

$$y = X + ((m+1)a - (m+n+2)x)x^m (a-x)^n Q + x^{m+1} (a-x)^{n+1} \frac{dQ}{dx}$$

quaecunque enim pro Q assumatur functio ipsius x, dummodo exponentes m et n sint nihilo maiores, omnes curuae per data duo puncta transibunt et cum axe et applicatis extremis, quae scilicet abscissis $x = 0$ et $x = a$ respondent, easdem includent areas, atque curua aequatione $y = X$ contenta.

Aliter

Sit $\int y\,dx = z$ erit $y = \frac{dz}{dx}$. Iam vt quaesito satisfiat, pro z eiusmodi functionem ipsius x quaeri oportet, vt vtroque casu $x = o$ et $x = a$, tam valor ipsius z quam ipsius $\frac{dz}{dx}$ pro omnibus curuis prodeat idem, id quod euenit, si statuatur

$$z = Z + x^m(a-x)^n P$$

dummodo exponentes m et n sint vnitate maiores, quaecunque enim pro P assumatur functio ipsius x, vtroque casu $x = o$ et $x = a$, tam pro z, quam pro y, iidem prodibunt valores. Sit $Z = \int X\,dx$ erit

$$dz = X\,dx + (ma-(m+n)x)x^{m-1}(a-x)^{n-1}P\,dx + x^m(a-x)^n\,dP$$

Pro curuis ergo quaesitis haec habebitur aequatio generalis;

$$y = X + (ma-(m+n)x)\,x^{m-1}(a-x)^{n-1}P + x^m(a-x)^n\frac{dP}{dx}$$

dummodo numeri m et n sint vnitate maiores, quae solutio cum praecedente congruit. Pro numeris enim m et n ibi vsurpatis hic posuimus $m-1$ et $n-1$, atque Q pro P.

Coroll. 1.

14. Data ergo curua quacunque $y = X$ eiusue saltem portione intra abscissas $x = o$ et $x = a$ contenta, aequatio inuenta infinitas alias praebebit curuas, quae non solum per eosdem terminos transibunt, sed etiam intra hos terminos aequales areas complectentur.

Coroll.

Coroll. 2.

15. Si in solutione posteriori exponentes m et n fuerint non solum vnitate, sed etiam binario, maiores, tum omnes hae curuae etiam in vtroque termino communem habebunt tangentem. Quin etiam insuper communem habebunt curuaturam, si exponentes illi m et n quoque ternario erunt maiores.

Coroll. 3.

16. Si curua data $y = X$ fuerit algebraica, non solum infinitae aliae curuae algebraicae eiusdem areae hinc reperientur, sed etiam infinitas curuas transcendentes eiusdem proprietatis exhibere licebit, siquidem pro P *functiones transcendentes* ipsius x assumantur.

Coroll. 4.

17. Si pro P sumatur quantitas constans quaecunque C, hinc iam pro infinitis ipsius C valoribus *infinitae* reperientur curuae, cum data $y = X$, tam eosdem terminos, quam eandem aream habentes, quae in hac aequatione continebuntur:

$$y = X + C(ma - (m+n)x)x^{m-1}(a-x)^{n-1}$$

existentibus numeris m et n vnitate maioribus.

Coroll.

Coroll. 5.

18. Si ambo termini A et B, qui abſciſſis $x=0$, et $x=a$ reſpondent recta AB iungantur, erit haec recta omnium curuarum inuentarum corda communis. Atque etiam areae, quas omnes hae curuae cum iſta corda continent, inter ſe erunt aequales, quatenus quidem ad eandem cordae partem fuerint ſitae; quae enim portiones forte in partem oppoſitam cadent, eae pro negatiuis ſunt habendae.

Exemplum 1.

19. *Propoſito circuli quadrante, inuenire infinitas alias curuas intra eosdem terminos deſcriptas, quae eandem aream includant.*

Sit radius circuli $=a$, eiusque aequatio $y=V(aa-xx)$ prodibunt quadrantis termini ſi ponatur $x=o$, et $x=a$ et poſita $1:\pi$ ratione diametri ad peripheriam erit area quadrantis $=\frac{1}{4}\pi aa$, cui aequales eſſe debent areae omnium curuarum per quadrantis terminos ductarum. Omnes ergo iſtae curuae hac continebuntur aequatione:
$y=V(aa-xx)+(ma-(m+n)x)x^{m-1}(a-x)^{n-1}P+x^m(a-x)^n\frac{dP}{dx}$
vbi m et n debent eſſe numeri vnitate maiores.

Ut hinc curuam quampiam ſimpliciorem eliciamus, ponamus $m=2$; $n=\frac{3}{2}$ et $P=C(a+x)^{\frac{3}{2}}$ erit $dP=\frac{3}{2}Cdx(a+x)^{\frac{1}{2}}$, vnde fiet

$y=$

$$y = \sqrt{(aa - xx)} + C(2a - \tfrac{7}{2}x)x(a + x)\sqrt{(aa - xx)}$$
$$+ \tfrac{3}{2}Cx^2(a - x)\sqrt{(aa - xx)}$$

seu $y = \sqrt{(aa - xx)} + Cx(2aa - xx)\sqrt{(aa - xx)}$

Ad homogeneitatem conseruandam sit $C = \frac{1}{\alpha a^3}$ vt fiat

$$y = \frac{(\alpha a^3 + 2aax - 5x^3)\sqrt{(aa - xx)}}{\alpha a^3}$$

si ponamus $m = 3$, $n = \frac{5}{2}$, $P = C(a + x)^{\frac{5}{2}}$ et $C = \frac{1}{3a^4}$

$$y = \frac{(aa + 3xx)(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}{a^4}$$

Exemplum 2.

20. *Propositus sit semicirculus terminos suos in diametri terminis habens, atque inuenire oportet infinitas alias curuas per terminos diametri transeuntes, quae omnes cum diametro areas semicirculo aequales includant.*

Sit diameter $= a$, erit aequatio $y = \sqrt{(ax - xx)}$, vnde cum fiat $y = o$, posito tam $x = o$, quam $x = a$, idem quoque in omnibus curuis, quae quaeruntur, euenire debet; deinde, quia etiam areae, earum diametro insistentes, ipsi semicirculo aequales esse debent, huic conditioni satisfiet hac aequatione generali:

$$y = \sqrt{(ax - xx)} + (ma - (m + n)x)x^{m-1}(a - x)^{n-1}P + x^m(a - x)^n\frac{dP}{dx}$$

dummodo pro m et n accipiantur numeri vnitate maiores. Quoniam igitur etiam pro P functionem quamcunque ipsius x assumere licet, modo ne inconuenienti aliquoties memorato sit obnoxia, patet omnes omnino curuas quaestioni satisfacientes in hac aequatione contineri debere.

Ut curuam quampiam simpliciorem eruamus, ponamus $m = \frac{1}{2}$ et $n = \frac{1}{2}$, vt sit

$$y = V(ax - xx) + (3(\tfrac{1}{2}a - x)P + x(a-x)\tfrac{dP}{dx})V(ax - xx)$$

Ponatur $P = \frac{2}{3b}$ fietque

$$y = V(ax - xx) + \frac{(a - 2x)}{b} V(ax - xx)$$

sit $b =$ vel $y = \frac{(b + a - 2x)}{b} V(ax - xx)$

pro linea quarti ordinis.

Si iam sit $b = -a$, erit $y = \frac{2x}{a} V(ax - xx)$.

Haec ergo curua, super diametro semicirculi descripta, aream habebit semicirculo aequalem. Eadem curua situ inuerso prodit, si ponatur $b = a$.

Scholion.

21. Prior huius problematis solutio etsi magis naturalis videtur, tamen in problematibus difficilioribus locum non inuenit. Hanc ob caussam adieci alteram solutionem, cuius fundamentum in eo est positum, quod expressionem areae integralem $\int y\,dx$ ante ad expressionem finitam reuocauerim. Haec enim reductio omnino necessaria deprehenditur, si formulae integrales, quae loco arearum sunt considerandae, magis fuerint complicatae. Veluti si omnes curuae per data duo puncta ducendae eiusdem longitudinis esse debeant, ita vt iam non $\int y\,dx$ sed $\int V(dx^2 + dy^2)$ datum valorem inter abscissas $x = o$ et $x = a$ continere debeat; tentanti mox patebit, formam assumtam $y = X + x^m(a-x)^n P$ parum iuuare ad idoneas functiones pro P eruendas. Quanquam enim arcus $\int V(dx^2 + dy^2)$ simili expressione con-

contineri debet, ſcilicet $\int V(dx^2 + dX^2) + x^\mu (a-x)^\nu Q$, ita, vt hoc poſterius membrum pariter vtroque caſu $x = o$ et $x = a$ euaneſcat, tamen inſtituto calculo ad aequationem tantopere implicatam peruenitur, vt inde nullo modo relatio inter functiones P et Q erui poſſe videatur. Hoc ergo incommodum vt euitetur, coordinatae x et y primum ita per alias formulas erunt exprimendae, vt inde arcus per formulam finitam expreſſus prodeat, id quod praeſtari poterit per methodum Diophanteae analogam in analyſi infinitorum, cuius nuper quaedam ſpecimina in medium attuli.

Problema 4.

22. Infinitas inuenire curuas per data duo puncta tranſeuntes, ita *vt omnium* arcus inter haec duo puncta *comprehenſi ſint* inter ſe aequales.

Solutio.

Poſitis coordinatis x et y ſit arcus $\int V(dx^2 + dy^2) = s$; iam vt hae tres quantitates per nouam variabilem *formulis* a ſigno integrali liberis exprimatur, ſit $dy = pdx$ eritque

$$\left.\begin{aligned} y &= \int p\,dx = px - \int x\,dp \\ s &= \int dx\,V(1+pp) = xV(1+pp) - \int \frac{xp\,dp}{V(1+pp)} \end{aligned}\right\} \text{ponatur} \begin{aligned} \int x\,dp &= q \\ \int \frac{xp\,dp}{V(1+pp)} &= r \end{aligned}$$

erit $x = \frac{dq}{dp} = \frac{dr V(1+pp)}{p\,dp}$, vnde fit $dr V(1+pp) = p\,dq$ et $p = \frac{dr}{V(dq^2 - dr^2)}$ vbi r denotet functionem quamcunque ipſius q. Cum igitur, ſumto elemento dq conſtante, ſit $dp = \frac{dq^2\,ddr}{(dq^2 - dr^2)^{\frac{3}{2}}}$;

per

per hanc nouam variabilem q coordinatae x et y cum arcu s ita exprimentur, vt sit

$$x = \frac{(dq^2 - dr^2)^{\frac{3}{2}}}{dq\,ddr}$$
$$y = \frac{dr(dq^2 - dr^2)}{dq\,ddr} - q$$
$$s = \frac{dq^2 - dr^2}{ddr} - r.$$

Sint iam f et g valores ipsius q, qui praebeant pro punctis datis abscissas, nempe $x = 0$ et $x = a$; ac ponatur

$$r = Q + (f-q)^m (g-q)^n Z$$

vbi Q sit functio data ipsius q, Z vero functio quaecunque indefinita, ita vt, hac variabilitate non obstante, haec formula quaestioni aeque satisfaciat, ac si esset $Z = 0$. Nunc manifestum est, si exponentes m et n fuerint binario maiores, tum vtroque casu $q = f$ et $q = g$, non solum pro r, sed etiam pro $\frac{dr}{dq}$ et $\frac{ddr}{dq^2}$ eosdem prodire valores, quaecunque functio ipsius q pro Z substituatur. Hinc vtroque casu $x = 0$ et $x = a$, tam applicata y, quam arcus s, eosdem quoque nanciscentur valores, atque idcirco omnes infinitae curuae, quae ex diuersitate functionis Z nascuntur, non solum per data duo puncta transibunt, sed etiam omnium arcus, inter haec duo puncta intercepti, inter se erunt aequales.

Aliter.

Possunt etiam aliae formulae a signo integrali liberae pro x, y et s inueniri, quae ad solutionem simpliciorem deducent. Ponatur scilicet, vt ante, $\int x\,dp = q$,

vt

vt fit $x = \frac{dq}{dp}$, hicque valor in altera formula integrali substitutus dabit:

$$\int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{p\,dq}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} - \int \frac{q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

Iam ponatur $\frac{\int q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = r$, eritque $q = \frac{dr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$, vbi r significat functionem quamcunque ipsius p. Sumto ergo dp constante, erit $dq = \frac{ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp} + 3p\,dr\sqrt{(1+pp)}$, ideoque $x = \frac{dq}{dp} = \frac{ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3p\,dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$.

Tum vero habebitur $y = px - q = \frac{p\,ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)\,dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$ et $s = \frac{ddr(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{3p\,dr(1+pp)}{dp} - \frac{p\,dr(1+pp)}{dp} + r$. Ergo per hanc nouam variabilem p, cuius r est functio quaecunque, coordinatae x, y cum arcu s ita erunt expressae:

$$x = \frac{ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3p\,dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$y = \frac{p\,ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)\,dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$s = \frac{ddr(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{2p\,dr(1+pp)}{dp} + r.$$

Sint iam f et g valores ipsius p, qui praebent pro datis duobus punctis abscissas $x=0$ et $x=a$, ac ponatur:

$$r = P + (f-p)^m (g-p)^n Z$$

vbi P denotet functionem ipsius p datam, Z vero indefinitam; sintque exponentes m et n binario maiores. Cum igitur quaecunque Z sit functio casibus $x=0$ et $x=a$, tam pro r, quam pro $\frac{dr}{dp}$ et $\frac{ddr}{dp^2}$ iidem prodeant

 valo-

valores, ac si esset $Z = o$ et $r = P$, perspicuum est etiam casibus $p = f$ et $p = g$ pro x, y et s eosdem prodituros esse valores, scilicet pro x valores o et a. Consequenter omnes istae curuae per data duo puncta transibunt, eruntque omnium arcus, inter haec duo puncta intercepti, eiusdem longitudinis.

Coroll. 1.

23. Si in solutione priore Q, in posteriori vero P, sit functio algebraica, atque pro Z etiam functiones algebraicae capiantur, omnes curuae inde oriundae non solum erunt algebraicae, sed etiam rectificabiles. Sin autem pro Z sumantur functiones transcendentes, ipsae curuae fient transcendentes, earumque rectificatio indefinita a quapiam quadratura pendebit.

Coroll. 2.

24. Sin autem in solutione priori pro Q, in posteriori vero pro P, eiusmodi capiantur functiones transcendentes, vt ibi $\frac{dQ}{dq}$, hic vero $\frac{dP}{dp}$, fiant functiones algebraicae, insuperque Z sit functio algebraica, tum curuae quidem erunt algebraicae, sed non rectificabiles.

Coroll. 3.

25. Duo puncta, per quae omnes curuae inueniendae transire debent, reperiuntur ex binis valoribus f et g, si ii in solutione priori pro q, in posteriori vero pro

pro p, substituantur. Vnde patet eandem solutionem locum habere, vbicunque duo illa puncta assignentur.

Coroll. 4.

26. Assumtis autem pro lubitu his valoribus f et g, vicissim duo illa puncta omnibus curuis communia reperientur; atque, quo hoc facilius expediatur, functio Z pro nihilo habeatur, quoniam, quaecunque fuerit haec functio, eadem semper puncta reperiuntur.

Coroll. 5.

27. Si loco membrorum $(f-q)^m(g-q)^n Z$ in priori, vel $(f-p)^m(g-p)^n Z$ in posteriori, adhibeantur huiusmodi $(f-q)^m(g-q)^n(h-q)^\mu Z$ in priori, vel $(f-p)^m(g-p)^n(h-p)^\mu Z$ in posteriori solutione, tum omnes curuae in formulis inuentis contentae, per tria data puncta A, B, C transibunt, atque non solum omnes arcus AB, sed etiam omnes arcus BC, ac proinde etiam AC, erunt inter se longitudine aequales, dummodo exponentes singuli m, n, et μ fuerint binario maiores.

Coroll. 6.

28. Simili modo infinitae curuae inueniri poterunt quae per quatuor pluraue puncta data transibunt, et quarum omnium arcus, inter bina quaeque puncta intercepti, futuri sint inuicem aequales.

Scho-

Scholion.

29. Formulae $(f-q)^m (g-q)^n Z$ ita debent esse comparatae, vt vtroque casu $q=f$ et $q=g$ non solum ipsae in nihilum abeant, sed etiam earum differentialia prima et secunda, quod vtique euenit, si exponentes m et n fuerint binario maiores. Atque si f et g sint quantitates finitae, in assumtione huiusmodi formularum nulla inest difficultas. Verum si alter valor g fiat infinitus, idem remedium erit adhibendum, quod iam supra est indicatum, scilicet tum formula ita debebit instrui:

$$\frac{(f-q)^m}{\alpha+\beta q^\mu+\gamma q^\nu \text{ etc.}} Z$$

vt summae potestatis in denominatore exponens maior sit quam m, hinc vero m binario maiorem esse oportet. Atque vt hoc casu conditiones problematis adimpleantur, vti Z non diuisum esse debet per vllam potestatem ipsius $f-q$, ita etiam in numeratore ipsi q aequalem vel altiorem potestatem inducere non debet, quam in denominatore. Nisi ergo Z sit quantitas constans debet esse eiusmodi fractio, in cuius numeratore variabilis q non ad altiorem potestatem exsurgat, quam in denominatore. Sin autem eueniat, vt ambo valores f et g fiant infiniti, veluti $f=\infty$ et $g=-\infty$, tum manifestum est, pro illo altero membro assumi posse fractionem quamcunque, in cuius denominatore variabilis q altiorem habeat potestatem, quam in numeratore. Huiusmodi enim functio, non solum euanescet posito $q=\infty$, sed etiam eius differentialia omnium graduum.

Proble-

Problema 5.

30. Data curua quacunque inuenire infinitas alias, quae eam in datis duobus punctis interſecent, ita vt omnium arcus, inter haec duo puncta intercepti, aequales ſint arcui curuae datae inter eadem puncta contento.

Solutio.

Pro curua data reſpondeat abſciſſae x applicata $= v$, quae ergo functioni cuipiam ipſius x aequabitur. Pro curuis inueniendis vero ſit applicata abſciſſae x reſpondens $= y$ et arcus $= s$. Quoniam nunc ex praecedentis problematis ſolutione priore ſequentes formulae

$$x = \frac{(dq^2 - dr^2)^{\frac{3}{2}}}{dq\,ddr}.$$

$$y = \frac{dr(dq^2 - dr^2)}{dq\,ddr} - q$$

$$s = \frac{dq^2 - dr^2}{ddr} - r$$

ſi ponatur $r = Q + (f-q)^m (g-q)^n Z$, pro variis functionis Z determinationibus, infinitas praebent curuas per duo puncta transeuntes, arcusque inter haec puncta aequales continentes, quae duo puncta ex valoribus $q = f$ et $q = g$ definiuntur, ſi modo pro m et n numeri accipiantur binario maiores; tantum opus eſt, vt curua data in his formulis generalibus reperiatur. Efficiamus ergo, vt hae formulae caſu $Z = 0$, curuam datam producant, et inueſtigemus, qualis functio ipſius q pro Q ad hoc obtinendum ſubſtitui debeat, ſeu quia hoc caſu eſt $r = Q$, quaeramus qualis functio r ipſius q eſſe debeat. Cum igitur pro curua data sit v applicata respondens abscissae x, erit filum solutionis praecedentis euoluendo $p = \frac{dv}{dx}$ et $q = \int x dp = px - v$, ideoque $q = \frac{x dv}{dx} - v$, ex qua aequatione valor ipsius x per q definitur; deinde est $r = \int \frac{x p dp}{\sqrt{(1+pp)}} = x\sqrt{(1+pp)} - \int dx \sqrt{(1+pp)}$ seu $r = \frac{x\sqrt{(dx^2+dv^2)}}{dx} - \int \sqrt{(dx^2+dv^2)}$, vnde fit, si elementum x constans accipiatur, $dr = \frac{x dv ddv}{dx\sqrt{(dx^2+dv^2)}}$; atque si hic pro x substituatur eius valor per q iam inuentus, apparebit, qualis functio ipsius q sit r, quae deinceps pro Q scribi debet. Ambo autem puncta data in curua proposita reperientur, ponendo $q = f$ et $q = g$, vnde vicissim ex datis punctis valores litterarum f et g elicientur. Quibus definitis si pro Q scribatur ille valor pro r inuentus ac per q expressus, pro Z autem functiones quaecunque ipsius q substituantur, infinitae prodibunt lineae curuae, per eadem duo puncta transeuntes, et inter ea pares cum curua proposita arcus interceptos habentes.

Aliter.

Si alteram solutionem generalem problematis superioris in subsidium vocemus, quae pro curuis quaesitis sequentes suppeditauerat formulas:

$$x = \frac{ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3p dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$y = \frac{pddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$s = \frac{ddr(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{2pdr(1+pp)}{dp} + r$$

ponen-

ponendo $r = P + (f-p)^m (g-p)^n Z$, existentibus m et n numeris binario maioribus: efficiendum est, vt hae formulae casu $Z = 0$ curuam propositam exhibeant. Cum igitur hoc casu sit $p = \frac{dv}{dx}$ hinc valor ipsius x per p definiatur. Deinde ob $q = \int x\,dp = px - v$ erit $q = \frac{x\,dv}{dx} - v$, et $r = \int \frac{q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$: quodsi ergo in q loco x valor eius per p inuentus substituatur, habebitur pro r functio ipsius p, quae curuam propositam producit. Haec iam functio ipsius p pro r inuenta loco P scribatur, ita vt sit $P = \int \frac{q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ et quaecunque functiones litterae Z tribuantur, semper eiusmodi valores habebuntur

$$\text{pro } r = P + (f-p)^m (g-p)^n Z$$

quae *infinitas praebebunt* curuas, datam in duobus punctis fixis intersecantes, et cum data inter haec duo puncta aequales arcus interceptos habentes. Quomodo autem si illa puncta pro lubitu dentur, inde valores debiti pro f et g sint eruendi, ante est expositum.

Coroll. 1.

31. Cum in solutione priore sit $q = \frac{x\,dv}{dx} - v$, erit $dq = \frac{x\,ddv}{dx}$, hinc cum Q aequalis sit valori ipsius r inde orto, erit $Q = \int \frac{dv\,dq}{\sqrt{(dx^2 + dv^2)}}$. At ob $dv = \frac{(q+v)\,dx}{x}$ erit quoque $Q = \int \frac{(q+v)\,dq}{\sqrt{(xx + (q+v)^2)}}$, vbi tantum opus est, vt pro x et v valores ex aequatione $q = \frac{x\,dv}{dx} - v$ per q expressi

expreſſi ſubſtituantur; hocque modo pro Q obtinebitur debita functio ipſius q in formulis ſubſtituenda.

Coroll. 2.

32. Pro ſolutione altera valor ipſius x per p quaeri debet ex hac aequatione $p = \frac{dv}{dx}$; vnde ſimul ob aequationem inter v et x datam, elicitur valor ipſius v itidem per p expreſſus. Tum vero elabitur quoque $q = px - v$ per p, ideoque etiam functio quaeſita:

$$P = \int \frac{q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{(px-v)\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

Coroll. 3.

33. Si linea propoſita eſſet recta, foret in ſolutione priori q, in poſteriori vero p quantitas conſtans, hincque etiam ibi Q, hic vero P, quantitates conſtantes. Quia ergo hoc caſu x, y et s per p definire non licet, manifeſtum eſt, ſolutionem non ſuccedere. Hoc autem per ſe eſt perſpicuum, quia linea recta eſt breuiſſima intra ſuos terminos, neque propterea inter eosdem terminos lineae curuae rectae aequales exhiberi poſſunt.

Exemplum.

34. Sit curua data circulus hac aequatione expreſſus: $v = \sqrt{(aa - xx)}$, erit $\frac{dv}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{(aa-xx)}}$, et pro ſolutione priori $q = \frac{-xx}{\sqrt{(aa-xx)}} - \sqrt{(aa-xx)} = \frac{-aa}{\sqrt{(aa-xx)}}$.

Hinc

Hinc $x = \frac{a\sqrt{(qq-aa)}}{q}$ et $v = \frac{-aa}{q}$. Vnde reperitur, $Q = \int \frac{(qq-aa)dq}{\sqrt{(aa(qq-aa)+(qq-aa)^2)}}$, siue $Q = \int \frac{dq}{q} \sqrt{(qq-aa)}$. Quare si statuatur $r = \int \frac{dq}{q} \sqrt{(qq-aa)} + (f-q)^m (g-q)^n Z$, existentibus m et n numeris binario maioribus, quaecunque functio ipsius q pro Z ponatur, sequentes formulae

$$x = \frac{(dq^2 - dr^2)^{\frac{3}{2}}}{dq\,ddr} \text{ et } y = \frac{dr(dq^2-dr^2)}{dq\,ddr} - q.$$

infinitas exhibebunt lineas curuas, circulum in duobus punctis secantes, quarum omnium arcus inter haec puncta contenti, ipsi arcui circulari futuri sint aequales. Haec autem duo puncta in circulo definientur ex abscissis $x = \frac{a\sqrt{(ff-aa)}}{f}$ et $x = \frac{a\sqrt{(gg-aa)}}{g}$. Vicissim autem si hae abscissae dentur, erit f vel $g = \frac{-aa}{\sqrt{(aa-xx)}}$.

Pro altera solutione erit $p = \frac{-x}{\sqrt{(aa-xx)}}$, ideoque $x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ et $v \frac{-a}{\sqrt{(1+pp)}}$. Vnde fit $q = px - v = a\sqrt{(1+pp)}$, ita vt functio quaesita P hinc prodeat $P = \int \frac{adp}{1+pp}$ atque $r = \int \frac{adp}{1+pp} + (f-p)^m (g-p)^n Z$, et ambo puncta respondebunt abscissis $x = \frac{af}{\sqrt{(1+ff)}}$ et $x = \frac{ag}{\sqrt{(1+gg)}}$; vel ex datis his abscissis litterae f et g elicientur ex aequatione $p = \frac{-x}{\sqrt{(aa-xx)}}$.

Sit breuitatis gratia $(f-p)^m (g-p)^n - Z = V$, vt sit

$r = \int \frac{adp}{1+pp} V$, erit

$\frac{dr}{dp} = \frac{a}{1+pp} + \frac{dV}{dp}$ et

$\frac{ddr}{dp^2} = \frac{-2ap}{(1+pp)^2} + \frac{ddV}{dp^2}$.

 Omne

Omnes ergo curuae quaesitae his formulis continebuntur:

$$x = \frac{-2ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{3ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{ddV(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3pdV\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$y = \frac{-2app}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{a(2pp-1)}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{pddV(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)dV\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$s = -2ap + 2ap + \int\frac{adp}{1+pp} + \frac{ddV(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{2pdV(1+pp)}{dp} + V$$

siue

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{ddV(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3pdV\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$y = \frac{-a}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{pddV(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)dV\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$s = \int\frac{adp}{1+pp} + \frac{ddV(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{2pdV(1+pp)}{dp} + V$$

Scholion.

35. Pro altera hac solutione si valor ipsius p ad alterutrum punctum datum relatus est infinitus, quo casu pro V huiusmodi valorem $\frac{(f-p)^m Z}{\alpha+\beta p^\mu+\gamma p^\nu+\text{etc.}}$ accipi oportere vidimus, vt maxima potestas ipsius p in denominatore maior sit, quam eius maxima potestas in numeratore, sequentem obseruationem adiici conuenit, quae non solum in hoc exemplo, sed in genere etiam est tenenda. Primo quae hactenus de hoc casu sunt tradita huc redeunt, vt pro V assumi debeat huiusmodi fractio, cuius numerator factorem habeat $(f-p)^m$, exponente m excedente binarium. Deinde vero requiritur, vt maxima potestas ipsius p in denominatore superet maximam eius potestatem in nume-

ratore

ratore. Verum etsi hoc modo casu $p = \infty$ non solum ipsa quantitas V, sed etiam $\frac{dV}{dp}$ et $\frac{ddV}{dp^2}$ euanescunt, tamen ad functiones ipsius p, per quas hae quantitates in nostris formulis sunt multiplicatae, spectari debent, ne ob eas haec euanescentia tollatur. Quae circumstantia vt probe obseruetur, ponamus in ea fractione, quae pro V assumitur, μ esse exponentem maximae potestatis ipsius p in numeratore, in denominatore vero esse $\mu + \nu$ exponentem maximae potestatis ipsius p. Iam casu $p = \infty$, quo inferiores ipsius p potestates omnes prae maxima euanescunt, erit valor ipsius $V = \frac{A}{p^\nu}$ ipsius $\frac{dV}{dp} = \frac{B}{p^{\nu+1}}$ et ipsius $\frac{ddV}{dp^2} = \frac{C}{p^{\nu+2}}$, qui vtique hoc casu $p = \infty$ euanescunt. Sed quoniam in nostris formulis $\frac{dV}{dp}$ per $(2pp-1)\sqrt{}(1+pp)$ et per $p(1+pp)$ hoc est casu $p = \infty$ per p^3 reperitur multiplicatum, ac $\frac{ddV}{dp^2}$ per $p(1+pp)^{\frac{3}{2}}$ et $(1+pp)^2$ hoc est per p^4, necesse est, vt posito $p = \infty$ etiam $\frac{p^3 dV}{dp} = \frac{Bp^2}{p^\nu}$ et $\frac{p^4 ddV}{dp^2} = \frac{Cp^2}{p^\nu}$, euanescant. Vnde manifestum est exponentem ν binario maiorem esse debere. Hinc ergo concludimus: si duo puncta data respondeant valoribus $p = f$ et $p = \infty$, pro V assumi debere huiusmodi fractionem, cuius numerator primo factorem habeat $(f-p)^m$, in quo exponens m sit binario maior, deinde maxima

maxima poteſtas ipſius p in denominatore, non ſolum maior eſſe debet quam in numeratore, ſed etiam exceſſus maior eſſe debet, quam quadratum p^2; ita vt ſi μ ſit exponens maximae poteſtatis in numeratore, maximae poteſtatis in denominatore exponens maior eſſe debeat, quam $\mu + 2$. Simili modo ſi ambo puncta data conueniant valoribus $p = +\infty$ et $p = -\infty$, pro V quoque eiusmodi fractio aſſumi debebit, cuius denominator vltra quadratum maiores contineat poteſtates ipſius p quam numerator. His igitur notatis, exempli propoſiti ſequentes euoluamus caſus praecipuos.

Caſus I.

36. *Dato circuli quadrante infinitas aſſignare curvas per eius terminos tranſeuntes, ita vt ſingularum arcus intra hos terminos comprehenſi, aequales ſint arcui quadrantis.*

Poſito radio quadrantis $= a$, vt ſit $v = \sqrt{(aa-xx)}$ termini quadrantis reſpondebunt abſciſſis $x = o$ et $x = a$. Cum iam ſit $p = \frac{-x}{\sqrt{(aa-xx)}}$, valores ipſius p erunt pro illo termino $p = o$, pro hoc vero $p = \infty$, erit ergo $f = o$; ideoque pro V eiusmodi aſſumi debet functio fracta, cuius numerator factorem habeat p, exiſtente exponente m binario maiore, denominatoris vero maxima poteſtas ipſius p ſupra quadratum excedat maximam poteſtatem in numeratore. Quibus praeceptis obſeruatis formulae ante datae omnes curuas quaeſtioni ſatisfacientes exhibebunt.

bunt.

bunt. Ex quibus vt simpliciores eliciamus, ponamus $V = \frac{bp^2}{(1+pp)^3}$, sit enim exponens maximae potestatis, in denominatore ternario superat numeratorem. Erit ergo:

$$\frac{dV}{dp} = \frac{2b(pp - p^4)}{(1+pp)^4} \text{ et } \frac{ddV}{dp^2} = \frac{6b(p - 5p^3 + 2p^5)}{(1+pp)^5}$$

qui valores in formulis nostris substituti dabunt:

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{3bp(2 - 7pp + p^4)}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}}$$

$$y = \frac{-a}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{3bpp(1 - 7pp + 2p^4)}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}}$$

$$s = \int \frac{adp}{1+pp} + \frac{bp(6 - 23pp + 6p^4)}{(1+pp)^3}$$

Aliter.

Obtinetur *etiam* arcus 90°, si termini constituantur $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ et $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, vnde fit $p = -1$ et $p = +1$, ita vt pro his terminis sit $f = -1$ et $g = +1$. Quare V eiusmodi esse debet functio ipsius p, quae factorem habeat $(1+p)^m(1-p)^n$, existentibus exponentibus m et n binario maioribus. Hincque posito

$$V = (1+p)^m (1-p)^n Z$$

formulae superiores omnes praebebunt curuas quaesito satisfacientes. Simpliciores ergo prodibunt ponendo

$$V = b(1-pp)^3 \text{ vel } V = \frac{b(1-pp)^3}{1+pp}$$

Alio praeterea modo, idque generaliter, termini ambo ita *definientur*, vt inter eos arcus 90° contineatur, si ponatur pro altero $\frac{x}{a} = \sin\Phi$, pro altero vero $\frac{x}{a} = -$ cof. Φ. Cum igitur pro illo fit $V(aa - xx) = a$ cof. Φ pro hoc vero $V(aa - xx) = a$ fin. Φ erunt ipfius p valores, alter $p = -$tang. Φ, alter $p = +$cot. Φ, ficque erit $f = -$tang. Φ et $g =$ cot. Φ: vnde valor ipfius V erit

$$V = (\text{tang}\,\Phi + p)^m (\text{cot.}\,\Phi - p)^n Z$$

ac fi $m = n > 2$, pofito cot. $\Phi -$ tang. $\Phi = \alpha$, erit

$$V = (1 + \alpha p - pp)^m Z$$

Cafus 2.

37. *Data femicircumferentia circuli, inuenire infinitas alias curuas illi aequales, atque intra ipfius terminos exiftentes.*

Pofito circuli radio $= a$, vt fit $v = V(aa - xx)$, termini circumferentiae, quia in diametri extremitatibus funt fiti, orientur ex valoribus abfciffae $x = a$ et $x = -a$: hinc autem ipfius p valores prodibunt $f = -\infty$ et $g = \infty$. Hinc, vti ante notauimus, functio V eiusmodi debet effe fractio, in cuius denominatore exponens maximae poteftatis ipfius p plus quam binario fuperet exponentem maximae poteftatis in numeratore, haecque fola conditio fufficiet pro cafu propofito. Cafus ergo fimpliciores prodibunt ponendo

$$V = \frac{b}{p(1 + pp)} \text{ vel } V = \frac{b + cp}{(1 + pp)^2}$$

Notandum autem hic eft, formam $\frac{b}{p(1 + pp)}$ non conuenire, quoniam ex ea coordinatae x et y in infinitum effent essent abiturae casu $p=o$, ita vt curuae intra datos terminos in infinitum excurrent; quare pro V eiusmodi formulas accipi oportet, vt nullo casu, vel ipsa formula V, vel eius differentialia in infinitum abeant. Sit ergo

$$V = \frac{b + cp}{(1+pp)^2} \text{ eritque}$$

$$\frac{dV}{dp} = -\frac{4bp + c(1 - 3pp)}{(1+pp)^3}$$

$$\frac{ddV}{dp^2} = \frac{-b(4 - 20pp) - c(12p - 12p^3)}{(1+pp)^4}$$

hineque pro constructione curuarum sequentes obtinebuntur formulae:

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{4b(1-2pp) - 3cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y = \frac{-a}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{12bp^3 - c(1+7pp-6p^4)}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$$

$$s = \int \frac{adp}{1+pp} - \frac{3b(1-4pp) - 2cp(3-2pp)}{(1+pp)^2}$$

Omnes hae curuae etiam diametro normaliter insistent, atque si sit $b=o$, earum applicatae maximae in centrum circuli cadent, quia posito $p=o$ fit $x=o$; applicata autem maxima erit $=a+c$, atque ad vtramque partem curuae erunt sibi similes. Hae ergo curuae prae ceteris notatu dignae ex his formulis construentur:

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{3cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y = \frac{-a}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{c(1+7pp-6p^4)}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} \text{ vnde erit}$$

$$s = \int \frac{adp}{1+pp} - \frac{3cp(3-2pp)}{(1+pp)^2}$$

 Hinc

Hinc porro intelligitur capi debere $c < \frac{1}{8}a$, si enim esset $c > \frac{1}{8}a$, tum sumto p valde paruo, arcus s prodiret negatiuus, arcusque idcirco alicubi negatiuos valores nanciscerentur, contra naturam quaestionis. Perspicuum enim est, si applicata media et maxima $a+c$ certum terminum transgrediatur, fieri plane non posse, vt curua vno tractu procedens semicircumferentiae circuli esset aequalis. Pro c interim quantitates infinitae, tam affirmatiuae, quam negatiuae, accipi possunt, dummodo satis sint paruae et quidem minores quam $\frac{1}{8}a$.

DE

DE INTEGRATIONE AEQVATIONIS DIFFERENTIALIS.

$$\frac{m\,dx}{\surd(1-x^4)} = \frac{n\,dy}{\surd(1-y^4)}$$

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum primum occasione inuentionum Ill. Comitis Fagnani hanc aequationem essem contemplatus, eiusmodi quidem relationem algebraicam inter variabiles x et y elicui, *quae huic* aequationi satisfaceret; sed ea *relatio non pro* aequatione integrali completa haberi poterat, propterea quod non complecteretur quantitatem constantem arbitrariam, cuiusmodi semper in calculum per integrationem introduci solet. Hinc enim, vti satis notum est, integralia incompleta et particularia *distingui* solent, quorum illa totam vim aequationum *differentialium* exhauriunt, haec vero tantum ita satisfaciunt, vt aliae insuper expressiones aeque satisfacere queant. Criterium autem aequationis integralis completae in hoc consistit, quod ea quantitatem constantem *inuoluere* debeat, quae in aequatione differentiali non apparet.

ſtet, inde reductio integralis ad quantitates algebraicas peti non poterit.

§. 6. Nihilo tamen minus obſeruaui, ſi propoſita fuerit huiusmodi aequatio differentialis

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$$

etiam integrale completum, quod ſcilicet quantitatem conſtantem arbitrariam inuoluat, ſemper algebraice exprimi poſſe, dummodo ratio $m:n$ fuerit rationalis: quod mihi quidem eo magis notatu dignum videtur, quod nulla certa methodo ad hoc integrale ſum perductus, ſed id potius tentando, vel diuinando, elicui. Vnde nullum eſt dubium, quin methodus directa, ad idem hoc integrale perducens, fines analyſeos non mediocriter ſit amplificatura; cuius propterea inueſtigatio Analyſtis omni ſtudio commendanda videtur.

§. 7. Completum autem integrale aequationis iſtius differentialis, quaecunque fuerit ratio rationalis coëfficientium m et n, deriuare mihi licuit ex integratione completa huius aequationis $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$: hac enim conceſſa methodum certam indicabo, ex ea quoque integrale completum huius aequationis multo latius patentis $\frac{m\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$ concludendi. Quae methodus etiam in genere ad huiusmodi aequationum $mX\,dx = nY\,dy$ integralia inuenienda adhiberi queat, ſi modo integrale completum huius $X\,dx = Y\,dy$ fuerit erutum, atque Y talem ſignificet functionem ipſius y, qualis X eſt ipſius x.

§. 8.

§. 8. Exordiar igitur ab hac aequatione

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$$

cui quidem primo intuitu satisfacere perspicuum est aequationem $x=y$, quae propterea eius est integrale particulare. Tum vero eidem aequationi quoque satisfacit iste valor algebraicus $x = -\sqrt{\frac{1-yy}{1+yy}}$, cum enim sit $dx = + \frac{2ydy}{(1+yy)\sqrt{(1-yy)(1+yy)}}$ et $\sqrt{(1-x^4)} = \frac{2y}{1+yy}$ erit $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$. Hinc iste etiam valor, seu aequatio $xxyy + xx + yy - 1 = 0$ est integralis particularis aequationis differentialis propositae. Vnde integrale completum, quod constantem arbitrariam inuoluat, ita comparatum sit necesse est, vt tribuendo huic constanti certum quendam valorem, prodeat $x=y$; sin autem eidem constanti alius quidem valor tribuatur, vt prodeat $x = -\sqrt{\frac{1-yy}{1+yy}}$ seu $xxyy + xx + yy - 1 = 0$.

Theorema.

§. 9. Dico igitur huius aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$$

aequationem integralem completam esse:

$$xx + yy + ccxxyy = cc + 2xy\sqrt{(1-c^4)}$$

Demonstratio.

Posita enim hac aequatione, eius differentiale erit:

$$xdx + ydy + ccxy(xdy + ydx) = (xdy + ydx)\sqrt{(1-c^4)}$$

erit itidem arcus $d\mu$ arcui AM aequalis: sicque in hac curua a dato quouis puncto d vtrinque abscindi potest arcus dm et $d\mu$, qui arcui AM sint aequales.

§. 13. Hinc ergo patet, si arcus ad aequalis capiatur arcui AM, seu $c=u$, fore arcum am duplum arcus AM. Hinc si statuatur $ap=x=\frac{2u\sqrt{(1-u^4)}}{1+u^4}$), prodibit arcus $am=2$ arc. AM. Simili modo si capiatur arcus $ad=2$AM, seu $c=\frac{2u\sqrt{(1-u^4)}}{1+u^4}$, statuaturque $x=\frac{c\sqrt{(1-u^4)}+u\sqrt{(1-c^4)}}{1+ccuu}$ obtinebitur arcus $am=3$ arc. AM. Ac si iste valor ipsius x denuo pro c substituatur, vt sit $ad=3$AM iterumque statuatur $x=\frac{c\sqrt{(1-u^4)}+u\sqrt{(1-c^4)}}{1+ccuu}$, nascetur arcus am quadruplus arcus AM; atque ita porro successiue quaecunque multipla arcus AM geometrice assignari poterunt.

§. 14. Sit arcus $ad=n$. AM et $ab=z$; ita vt sit $\int.\frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}=n\int\frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}}$; atque ex his patet si capiatur $x=\frac{z\sqrt{(1-u^4)}+u\sqrt{(1-z^4)}}{1+uuzz}$ fore $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=(n+1)\int\frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}}$; sin autem ponatur $x=\frac{z\sqrt{(1-u^4)}-u\sqrt{(1-z^4)}}{1+uuzz}$, tum futurum esse $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=(n-1)\int\frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}}$. Si igitur haec aequatio $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}=\frac{ndu}{\sqrt{(1-u^4)}}$ fuerit integrata, debitusque valor pro z inde erutus, etiam integrari poterit haec aequatio $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{(n\pm1)du}{\sqrt{(1-u^4)}}$, quippe cuius integrale erit $x=\frac{z\sqrt{(1-u^4)}\pm u\sqrt{(1-z^4)}}{1+uuzz}$. Ac si pro z assumtus fuerit eius valor completus, qui scilicet constantem arbitrariam inuoluat, etiam pro x prodibit eius valor completus.

§. 15. Hinc igitur perſpicuum eſt, quomodo aequatio integralis completa inueniri debeat, quae conueniat huic aequationi differentiali $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{ndu}{\sqrt{(1-u^4)}}$; quoties n fuerit numerus integer. Simili autem modo aſſignari poterit y, vt ſit $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}} = \frac{mdu}{\sqrt{(1-u^4)}}$, vnde ſi eliminando u, aequatio inter x et y quaeratur, ea erit integralis huius aequationis $\frac{mdx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{ndy}{\sqrt{(1-y^4)}}$, quicunque numeri rationales pro m et n ſubſtituantur: atque vt hoc integrale prodeat completum, ſufficit pro altera tantum variabilium x et y valorem completum per u determinaſſe, cum hinc iam noua conſtans arbitraria in calculum introducatur.

§. 16. Methodus, qua hic in Theorematis demonſtratione ſum vſus, etſi non ex rei natura eſt petita, ſed indirecte ad id, quod propoſitum erat, perduxit, tamen multo latius patet: ſimili enim modo colligitur, huius aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(1+mxx+nx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1+myy+ny^4)}}$$

integrale completum eſſe:

$$0 = cc - xx - yy + nccxxyy + 2xy\sqrt{(1+mcc+nc^4)}$$

Vnde idem, quod ante, ratiocinium adhibendo, integrale quoque completum obtinebitur huius aequationis

$$\frac{\mu dx}{\sqrt{(1+mxx+nx^4)}} = \frac{\nu dy}{\sqrt{(1+myy+ny^4)}}$$

ſiquidem litteris μ et ν numeri integri deſignentur.

§. 17. Inueſtigatio autem huius integrationis ita ſe habet: Fingatur primo pro arbitrio relatio inter variabiles x et y hac aequatione contenta:

$$(1)\quad \alpha xx + \alpha yy = 2\beta xy + \gamma xxyy + \delta$$

quae differentiata dat:

$$\alpha x dx + \alpha y dy = \beta x dy + \beta y dx + \gamma xyy dx + \gamma xxy dy$$

vnde conficitur

$$(2)\quad dx(\alpha x - \beta y - \gamma xyy) + dy(\alpha y - \beta x - \gamma xxy) = 0$$

Deinde ex aequatione (1) eliciantur valores vtriusque variabilis:

$$x = \frac{\beta y + \surd(\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)yy + \alpha\gamma y^4)}{\alpha - \gamma yy}$$

$$y = \frac{\beta x - \surd(\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)xx + \alpha\gamma x^4)}{\alpha - \gamma xx}$$

Atque hinc obtinemus:

$$(3).\quad \alpha x - \beta y - \gamma xyy = \surd(\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)yy + \alpha\gamma y^4)$$

$$(4).\quad \alpha y - \beta x - \gamma xxy = -\surd(\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)xx + \alpha\gamma x^4)$$

qui valores in aequatione (2) substituti praebebunt

$$(5).\quad \frac{dx}{\surd(\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)xx + \alpha\gamma x^4)} = \frac{dy}{\surd(\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)yy + \alpha\gamma y^4)}$$

cuius ergo aequationis integrale est aequatio (1).

§. 18. Quo istas formas simpliciores reddamus, ponamus $\alpha\delta = A$; $\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta = C$; $\alpha\gamma = E$ eritque $\delta = \frac{A}{\alpha}$; $\gamma = \frac{E}{\alpha}$ et $\beta = \surd(C + \alpha\alpha + \frac{AE}{\alpha\alpha})$

Quare huius aequationis differentialis

$$(6)\quad \frac{dx}{\surd(A + Cxx + Ex^4)} = \frac{dy}{\surd(A + Cyy + Ey^4)}$$

aequatio integralis est haec:

$$(7).\quad \alpha(xx + yy) = \frac{A}{\alpha} + \frac{E}{\alpha}xxyy + 2xy\surd(C + \alpha\alpha + \frac{AE}{\alpha\alpha})$$

quae simul est integralis completa:

§. 19. Vel ponamus $A = f\alpha\alpha$: $C = g\alpha\alpha$ et $E = h\alpha\alpha$, vt habeamus hanc aequationem differentialem

$$\frac{dx}{\surd(f + gxx + hx^4)} = \frac{dy}{\surd(f + gyy + hy^4)}$$

cuius

cuius propterea aequatio integralis completa erit:

$$xx + yy = f + bxxyy + 2xy\sqrt{(1 + g + fb)}$$

quae etsi nouam constantem inuoluere non videtur, tamen est completa, cum in differentiali tantum ratio quantitatum f, g, et b spectatur, ita vt pro f, g, et b scribere liceat fcc, gcc et bcc, vnde aequatio integralis manifesto completa prodit:

$$xx + yy = fcc + bccxxyy + 2xy\sqrt{(1 + gcc + fbc^4)}$$

vel $f(xx + yy) = fee + beexxyy + 2xy\sqrt{f(f + gee + be^4)}$ posito $cc = \frac{ee}{f}$.

§. 20. Quodsi ergo proposita sit haec aequatio differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(f + gxx + bx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(f + gyy + by^4)}}$$

valor ipsius y per functionem algebraicam ipsius x exprimi poterit, ita vt sit:

$$y = \frac{x\sqrt{(1 + gcc + fbc^4)} \pm c\sqrt{(f + gxx + bx^4)}}{1 - bccxx}$$

$$\text{vel } y = \frac{x\sqrt{f(f + gee + be^4)} \pm e\sqrt{f(f + gxx + bx^4)}}{f - beexx}$$

Quodsi ergo sit $g = 0$, vt habeatur haec aequatio differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(f + bx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(f + by^4)}}$$

valor integralis completus ipsius y erit

$$y = \frac{x\sqrt{f(f + be^4)} \pm e\sqrt{f(f + bx^4)}}{f - beexx}$$

vnde constantem e pro lubitu determinando, innumeri valores particulares pro y deduci possunt.

§. 21.

§. 21. Methodi autem, qua supra vsus sum, beneficio etiam huius aequationis

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{(f+gxx+hx^4)}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{(f+gyy+hy^4)}}$$

si modo m et n sint numeri rationales, integrale completum, atque id quidem algebraice, exhiberi poterit.

§. 22. Quemadmodum in aequatione supra assumta, variabiles x et y inter se permutabiles sunt constitutae, vt ambae formulae inter se similes euaderent, ita omissa hac limitatione ad formularum differentialium disparium comparationem perueniemus. Ponamus ergo:

(1) $\alpha xx+\beta yy=2\gamma xy+\delta xxyy+\varepsilon$

vnde fit

$$x=\frac{\gamma y+\sqrt{(\alpha\varepsilon+(\gamma\gamma-\delta\varepsilon-\alpha\beta)yy+\beta\delta y^4)}}{\alpha-\delta yy}$$

$$\text{et } y=\frac{\gamma x-\sqrt{(\beta\varepsilon+(\gamma\gamma-\delta\varepsilon-\alpha\beta)xx+\alpha\delta x^4)}}{\beta-\delta xx}$$

hincque

(2) $\alpha x-\gamma y-\delta xyy=\sqrt{(\alpha\varepsilon+(\gamma\gamma-\delta\varepsilon-\alpha\beta)yy+\beta\delta y^4)}$

(3). $\beta y-\gamma x-\delta xxy=-\sqrt{(\beta\varepsilon+(\gamma\gamma-\delta\varepsilon-\alpha\beta)xx+\alpha\delta x^4)}$

at aequatio (1) differentiata dat:

$$dx(\alpha x-\gamma y-\delta xyy)+dy(\beta y-\gamma x-\delta xxy)=0$$

vnde conficitur haec aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(\beta\varepsilon+(\gamma\gamma-\delta\varepsilon-\alpha\beta)xx+\alpha\delta x^4)}}=\frac{dy}{\sqrt{(\alpha\varepsilon+(\gamma\gamma-\delta\varepsilon-\alpha\beta)yy+\beta\delta y^4)}}$$

cuius propterea integralis est aequatio assumta.

§. 23. Verum haec disparitas facile tollitur, loco y ponendo $z\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, cuius rei ratio statim ex aequatione assumta potuisset esse manifesta. Sed alia patet via ad formulas dispares perueniendi, cuius hic exemplum tradidisse sufficiat. Assumatur aequatio: $x^4+2axxyy+2bxx=c$,

$= c$, cuius differentiale est $dx(x^2 + axyy + bx) + axxydy = 0$, seu

$$\frac{dx}{xy} = \frac{-ady}{xx + ayy + b}$$

Iam ex aequatione assumta primo determinetur xy per x sicque fiet $xy = \sqrt{\frac{c - 2bxx - x^4}{2a}}$; tum vero $xx + ayy + b$ per y, at ob $(xx + ayy + b)^2 = c + (ayy + b)^2$, erit

$$xx + ayy + b = \sqrt{(c + (ayy + b)^2)}$$

Quocirca habebitur aequatio differentialis ista

$$\frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{(c - 2bxx - x^4)}} = \frac{a\,dy}{\sqrt{(c + bb + 2abyy + aay^4)}}$$

cuius propterea integralis est assumta seu $y = \frac{\sqrt{(c - 2bxx - x^4)}}{x\sqrt{2a}}$.

§. 24. Etsi hoc integrale non est completum, tamen ex superioribus facile completum reddetur. Ponatur enim:

$$\frac{a\,dy}{\sqrt{(c + bb + 2abyy + aay^4)}} = \frac{a\,dz}{\sqrt{(c + bb + 2abzz + aaz^4)}}$$

ob $f = c + bb$; $g = 2ab$; $h = aa$, erit

$$y = \frac{z\sqrt{(c+bb)(c+bb+2abee+aae^4)} \pm e\sqrt{(c+bb)(c+bb+2abzz+aaz^4)}}{c+bb-aaeezz}$$

hic ergo valor aequalis statuatur ipsi $\frac{\sqrt{(c - 2bxx - x^4)}}{x\sqrt{2a}}$, et aequatio hinc inter x et z resultans integralis erit completa huius aequationi differentialis

$$\frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{(c - 2bxx - x^4)}} = \frac{a\,dz}{\sqrt{(c + bb + 2abzz + aaz^4)}}.$$

Quin etiam ex allatis patet, si haec bina membra insuper per numeros rationales quoscunque multiplicentur, quemadmodum integrale completum inueniri oporteat.

§. 25. Verum missa membrorum disparitate formationem parium membrorum generalius concipiamus, ponatur ergo:

$$(1)\quad o = \alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta xxyy$$

vnde differentiando obtinetur:

$$dx(\beta + \gamma x + \delta y + 2\varepsilon xy + \varepsilon yy + \zeta xyy) + dy(\beta + \gamma y + \delta x + 2\varepsilon xy + \varepsilon xx + \zeta xxy) = o$$

ideoque

$$(2)\quad \frac{dy}{\beta + \gamma x + \delta y + 2\varepsilon xy + \varepsilon yy + \zeta xyy} = \frac{-dx}{\beta + \gamma y + \delta x + 2\varepsilon xy + \varepsilon xx + \zeta xxy}$$

Ex resolutione autem aequationis assumtae elicitur.

$$y = \frac{-\beta - \delta x - \varepsilon xx \pm \surd(\beta\beta - \alpha\gamma + 2(\beta\delta - \alpha\varepsilon - \beta\gamma)x + (\delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta - 2\beta\varepsilon)xx + 2(\delta\varepsilon - \beta\zeta - \gamma\varepsilon)x^3 + (\varepsilon\varepsilon - \gamma\zeta)x^4)}{\gamma + 2\varepsilon x + \zeta xx}$$

Ponatur breuitatis gratia

$$\beta\beta - \alpha\gamma = A;\ \beta\delta - \alpha\varepsilon - \beta\gamma = B;\ \delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta - 2\beta\varepsilon = C$$
$$\varepsilon\varepsilon - \gamma\zeta = E\quad \delta\varepsilon - \beta\zeta - \gamma\varepsilon = D;$$

eritque

$$\beta + \delta x + \varepsilon xx + \gamma y + 2\varepsilon xy + \zeta xxy = \pm \surd(A + 2Bx + Cxx + 2Dx^3 + Ex^4)$$

$$\beta + \delta y + \varepsilon yy + \gamma x + 2\varepsilon xy + \zeta xyy = \mp \surd(A + 2By + Cyy + 2Dy^3 + Ey^4)$$

§. 26. Hinc itaque concludimus huius aequationis differentialis:

$$\frac{dx}{\surd(A + 2Bx + Cxx + 2Dx^3 + Ex^4)} = \frac{dy}{\surd(A + 2By + Cyy + 2Dy^3 + Ey^4)}$$

aequationem integralem eamque completam esse

$$o = \alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta xxyy$$

adhi-

adhibita scilicet superiori horum coëfficientium determinatione. Primum autem definiatur β vel ε ex hac aequatione

$$\frac{BB(\varepsilon\varepsilon-E)-DD(\beta\beta-A)}{A\varepsilon\varepsilon-E\beta\beta}+\frac{2AD\varepsilon-2BE\beta}{B\varepsilon-D\beta}=C$$

tum vero erit:

$$\gamma=\frac{A\varepsilon\varepsilon-E\beta\beta}{B\varepsilon-D\beta};\ \alpha=\frac{\beta\beta-A}{\gamma};\ \zeta=\frac{\varepsilon\varepsilon-E}{\gamma}\ \text{et}$$

$$\delta=\frac{B\beta(\varepsilon\varepsilon-E)-D\varepsilon(\beta\beta-A)}{A\varepsilon\varepsilon-E\beta\beta}+\gamma\ \text{seu}\ \delta=\gamma+\frac{B+\alpha\varepsilon}{\beta}$$

§. 27. Hinc ergo perspicuum est etiam hanc aequationem differentialem:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+2Dx^3)}}=\frac{dy}{\sqrt{(A+2Dy^3)}}$$

integrari posse: nam ob $B=o$, $C=o$ et $E=o$ erit

$$-\frac{DD(\beta\beta-A)}{A\varepsilon\varepsilon}-\frac{2A\varepsilon}{\beta}=o\ \text{seu}\ \varepsilon=\sqrt[3]{\frac{DD}{2AA}\beta(A-\beta\beta)}$$

at hinc valores nimis prodeunt complicati. Facilius negotium absoluetur, resoluendo valores litterarum euanescentium B, C et E; nam $E=o$ dat: $\zeta=\frac{\varepsilon\varepsilon}{\gamma}$; tum $B=o$ dat: $\delta=\gamma+\frac{\alpha\varepsilon}{\beta}$; atque $C=o$ dat $\delta\delta-\gamma\gamma=\alpha\zeta+2\beta\varepsilon=\frac{\alpha\varepsilon\varepsilon}{\gamma}+2\beta\varepsilon=\frac{\alpha^2\varepsilon\varepsilon}{\beta\beta}+\frac{2\alpha\gamma\varepsilon}{\beta}$ cuius factores sunt $\beta\beta=\alpha\gamma$ et $\alpha\varepsilon\varepsilon+2\beta\gamma\varepsilon=o$. At si esset $\beta\beta=\alpha\gamma$ foret $A=o$, sin autem esset $\varepsilon=o$ foret et $\zeta=o$ et $D=o$, contra scopum. Fieri ergo oportet $\alpha\varepsilon=-2\beta\gamma$; vnde fiet $\alpha=-\frac{2\beta\gamma}{\varepsilon}$; $\delta=-\gamma$; et $\zeta=\frac{\varepsilon\varepsilon}{\gamma}$. Denique fieri debet $\beta\beta+\frac{2\beta\gamma\gamma}{\varepsilon}=A$ et $-2\gamma\varepsilon-\frac{\beta\varepsilon\varepsilon}{\gamma}=D$. Inde fit $\varepsilon=\frac{2\beta\gamma\gamma}{A-\beta\beta}$; et ob $\frac{\gamma D}{\varepsilon}=-(2\gamma\gamma+\beta\varepsilon)$ et $2\gamma\gamma+\beta\varepsilon=\frac{A\varepsilon}{\beta}$, erit $\frac{\gamma D}{\varepsilon}=-\frac{A\varepsilon}{\beta}$; ideoque $\varepsilon\varepsilon=-\frac{\beta\gamma D}{A}$. Ergo $\frac{4\beta\gamma^3}{(A-\beta\beta)^2}+\frac{D}{A}=o$.

§. 28. Cum autem tantum ratio litterarum A et D in censum veniat, aequatio vltima valori absoluto ipsius A inueniendo inseruit, quem autem nosse non est opus. Manebunt ergo litterae γ et β indeterminatae. Ponatur ergo $\gamma = -Ac$ et $\beta = Dc$, erit $\varepsilon\varepsilon = DDcc$, seu $\varepsilon = Dc$, hincque $\delta = Ac$; $\zeta = -\frac{DDc}{A}$; et $\alpha = 2Ac$. Quare huius aequationis differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + 2Dx^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + 2Dy^3)}}$$

integrale est.

$$0 = 2A + 2D(x+y) - A(xx+yy) + 2Axy + 2Dxy(x+y) - \frac{DD}{A}xxyy$$

Hoc autem integrale non est completum, tale autem reddetur ponendo $\gamma = -A$ et $\beta = Dcc$, vnde fit $\varepsilon\varepsilon = DDcc$ et $\varepsilon = Dc$; porro erit $\delta = A$; $\zeta = -\frac{DDcc}{A}$; $\alpha = 2Ac$; ita vt integrale completum sit:

$$0 = 2Ac + 2Dcc(x+y) - A(xx+yy) + 2Axy + 2Dcxy(x+y) - \frac{DDcc}{A}xxyy$$

vbi c est constans ab arbitrio pendens, vnde fit

$$y = \frac{Dcc + Ax + Dcxx + \sqrt{c(2A + \frac{DD}{A}c^3)(A + 2Dx^3)}}{A - 2Dcx + \frac{DDcc}{A}xx}$$

§. 29. Hic casus notari meretur, quo $A = 1$ et $D = \frac{1}{2}$, vt habeatur haec aequatio differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1 + y^3)}}$$

vbi ad fractiones tollendas loco c scribatur $2c$ eritque integrale completum:

$$0 = 4c + 4cc(x+y) - xx - yy + 2xy + 2cxy(x+y) - ccxxyy$$

seu $y = \frac{2cc + x + cxx \pm \sqrt{c(1+c^3)(1+x^3)}}{1 - 2cx + ccxx}$

integra-

Integralia ergo particularia erunt

I. fi $c=0$; $y=x$;

II. fi $c=\infty$; $y=\frac{2\pm 2\surd(1+x^3)}{xx}$

III. fi $c=-1$; $y=\frac{2+x-xx}{1+2x+xx}=\frac{2-x}{1+x}$.

§. 30. Ex eodem principio fi in §. 29. loco litterarum A, B, C, D, E, eaedem per quantitatem quampiam p multiplicentur, nihilo minus aequatio differentialis erit

$$\frac{dx}{\surd(A+2Bx+Cxx+2Dx^3+Ex^4)}=\frac{dy}{\surd(A+2By+Cyy+2Dy^3+Ey^4)}$$

inuenieturque

$$p=\frac{BB\varepsilon\varepsilon-DD\beta\beta}{BBE-ADD}+2\frac{(AD\varepsilon-BE\beta)(A\varepsilon\varepsilon-E\beta\beta)}{(B\varepsilon-D\beta)(BBE-ADD)}-\frac{C(A\varepsilon\varepsilon-E\beta\beta)}{BBE-ADD}$$

tum erit $\gamma=\frac{A\varepsilon\varepsilon-E\beta\beta}{B\varepsilon-D\beta}$; $\alpha=\frac{\beta\beta-Ap}{\gamma}$; $\zeta=\frac{\varepsilon\varepsilon-Ep}{\gamma}$ atque $\delta=\gamma+\frac{\alpha\varepsilon+Bp}{\beta}$: ita vt litterae β et ε maneant indeterminatae, fietque propterea aequatio integralis completa:

$$o=\alpha+2\beta(x+y)+\gamma(xx+yy)+2\delta xy+2\varepsilon xy(x+y)+\zeta xxyy$$

vnde fit:

$$y=\frac{-\beta-\delta x-\varepsilon xx+\surd p(A+2Bx+Cxx+2Dx^3+Ex^4)}{\gamma+2\varepsilon x+\zeta xx}$$

§. 31. Notandum denique eft, non folum hanc aequationem differentialem, cuius integrale completum modo exhibui, fed etiam hanc multo latius patentem

$$\frac{m\,dx}{\surd(A+2Bx+Cxx+2Dx^3+Ex^4)}=\frac{n\,dy}{\surd(A+2By+Cyy+2Dy^3+Ey^4)}$$

femper algebraice et quidem complete integrari poffe, dummodo coëfficientium m et n ratio fuerit rationalis: haec enim integratio fimili modo inftituitur, quo fupra vfus fum ad aequationem, quae mihi hic praecipue erat propofita, integrandam. Methodus autem, cuius hic ſpecimina attuli, ita mihi videtur comparata, vt indolem eius diligentius excolendo, ad inſignes vſus ap a reddi queat, vnde haud contemnenda commoda in Analyſin ſint redundatura.

§ 32. Hic autem obſeruo, formulam §. 28 aſſumtam latius extendendo, eiusmodi differentialia inter ſe comparari poſſe, quae ſint diſparia, atque adeo exemplum diſparitatis §. 26. allatum hoc modo obtineri poſſe; ita vt omnia, quae hactenus ſunt tradita, in hac generali inueſtigatione contineantur. Fingatur ſcilicet haec aequatio integralis:

$$(1)\ldots \alpha xxyy + 2\beta xxy + 2\gamma xyy + \delta xx + \varepsilon yy + 2\zeta xy + 2\eta x + 2\theta y + \kappa = 0$$

ex qua fit

$$(2)\ldots y = \frac{-\beta xx - \zeta x - \theta + \sqrt{((\beta xx + \zeta x - \theta)^2 - (\alpha xx + 2\gamma x + \varepsilon)(\delta xx + 2\eta x + \kappa))}}{\alpha xx + 2\gamma x + \varepsilon}$$

$$(3)\ldots x = -\frac{\gamma yy - \zeta y - \eta - \sqrt{((\gamma yy + \zeta y + \eta)^2 - (\alpha yy + 2\beta y + \delta)(\varepsilon yy + 2\theta\eta + \kappa))}}{\alpha yy + 2\beta y + \delta}$$

Ponatur iam breuitatis gratia:

$App = \beta\beta - \alpha\delta$	$\mathfrak{A}qq = \gamma\gamma - \alpha\varepsilon$
$2Bpp = 2\beta\zeta - 2\alpha\eta - 2\gamma\delta$	$2\mathfrak{B}qq = 2\gamma\zeta - 2\alpha\theta - 2\beta\varepsilon$
$Cpp = \zeta\zeta + 2\beta\theta - \alpha\kappa - \delta\varepsilon - 4\gamma\eta$	$\mathfrak{C}qq = \zeta\zeta + 2\gamma\eta - \alpha\kappa - \delta\varepsilon - 4\beta\theta$
$2Dpp = 2\zeta\theta - 2\gamma\kappa - 2\varepsilon\eta$	$2\mathfrak{D}qq = 2\zeta\eta - 2\beta\kappa - 2\delta\theta$
$Epp = \theta\theta - \varepsilon\kappa$	$\mathfrak{E}qq = \eta\eta - \delta\kappa$

eritque:

$$(4)\ldots p\sqrt{(Ax^4 + 2Bx^3 + Cxx + 2Dx + E)} = \alpha xxy + 2\gamma xy + \varepsilon y + \beta xx + \zeta x + \theta$$

$$(5)\ldots -q\sqrt{(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}yy + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})} = \alpha xyy + 2\beta xy + \delta x + \gamma yy + \zeta y + \eta$$

§. 33.

§. 33. At si aequatio integralis assumta differentietur, fiet

$$(6) \ldots dx(\alpha xyy + 2\beta xy + \gamma yy + \delta x + \zeta y + \eta) + dy(\alpha xxy + \beta xx + 2\gamma xy + \varepsilon y + \zeta x + \theta) = 0$$

vnde si istorum factorum valores (4) et (5) reperti substituantur, orietur ista aequatio differentialis:

$$(7) \ldots \frac{q\,dx}{\sqrt{(Ax^4 + 2Bx^3 + Cxx + 2Dx + E)}} = \frac{p\,dy}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}yy + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}}$$

cuius propterea integralis est aequatio assumta (1). Cum autem supra habeantur 10 aequationes, coëfficientium autem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. numerus sit 9, quorum vnus *pro lubitu* assumi potest, octo remanebunt litterae *determinandae*. Porro autem insuper definiendae accedunt binae litterae p et q, ita vt nunc decem quantitates adsint incognitae, ex quo coëfficientes vtriusque formulae A, B, C, D, E et $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ videntur *pro lubitu* assumi posse. Verum perspicuum est, cum alteri iam fuerint ad libitum assumti, alteros non omnino ab arbitrio nostro pendere, alias enim quaeuis formula ad algebraicam reduci posset.

§. 34. Hinc autem aliae datae formulae transmutationes non inelegantes obtineri possunt, si loco y alii valores substituantur. Veluti si ponatur $\mathfrak{C} = 0$, seu $\eta\eta = \delta x$, statuaturque $y = zz$ sequens prodibit aequatio differentialis.

$$(8) \ldots \frac{q\,dx}{\sqrt{(Ax^4 + 2Bx^3 + Cxx + 2Dx + E)}} = \frac{2p\,dz}{\sqrt{(\mathfrak{A}z^6 + 2\mathfrak{B}z^4 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{D})}}$$

cuius propterea integralis est aequatio assumta, si ponatur $y = zz$, statuaturque $\eta\eta = \delta x$, ac reliquae litterae rite deter-

determinentur. Integrale etiam completum nulla difficultate reperietur, nam etiamsi fortasse integrale inuentum nouam non inuoluat constantem, ponatur

$$\frac{q\,dx}{\sqrt{(Ax^4+2Ex^3+Cxx+2Dx+E)}} = \frac{q\,du}{\sqrt{(Au^4+2Bu^3+Cuu+2Du+E)}}$$

et huius aequationis integrale completum ex antecedentibus assignare licebit; atque hinc integrale quoque completum aequationis ex formulis disparibus constantis colligetur.

§. 35. Quemadmodum huius aequationis differentialis, vt a simplicissimis incipiam;

$$\frac{dx}{\sqrt{(f+gx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(f+gy)}}$$

integrale completum est;

$$gg(xx+yy) - 2ggxy - 2ccg(x+y) + c^4 - 4ccf = 0$$

Deinde vero huius aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(f+gxx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(f+gyy)}}$$

integrale completum est:

$$xx + yy - 2xy\sqrt{(1+fgcc)} - ccff = 0$$

Tertio vero huius aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(f+gx^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(f+gy^3)}}$$

integrale completum est

$$f(xx+yy) + \frac{ggcc}{4f}xxyy - gcxy(x+y) - 2fxy - gcc(x+y) - 2fc = 0$$

Quarto porro huius aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(f+gx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(f+gy^4)}}$$

integrale completum repertum est

$$f(xx+yy) - fcc - gccxxyy - 2xy\sqrt{f(f+gc^4)} = 0$$

Ita

Ita etiam integrale completum huius aequationis

$$\frac{dx}{\sqrt{(f+gx^6)}} = \frac{dy}{\sqrt{(f+gy^6)}}$$

reperiri poterit:

§. 36. Determinentur primo in §. 33. valores, ita vt prodeat haec aequatio

$$\frac{dx}{\sqrt{(fx+gx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(fy+gy^4)}}$$

cuius integralis completa reperitur:

$gg(xx$ [illegible]

$$+ffcc = 0$$

Ponatur nunc $x = tt$ et $y = uu$, vt prodeat haec aequatio differentialis

$$\frac{dt}{\sqrt{(f+gt^6)}} = \frac{du}{\sqrt{(f+gu^6)}}$$

cuius propterea integralis completa erit

$$gg(t^4+u^4) - 4ggcct^4u^4 - 4fgcc\,ttuu(tt+uu) - 2gg\,ttuu - 2fg(tt+uu) + ffcc = 0$$

vnde notari meretur casus ex hypothesi $c = \infty$ resultans, qui dat $4g\,ttuu(tt+uu) = f$.

OBSERVATIONES DE COMPARATIONE ARCVVM CVRVARVM IRRECTIFICABILIVM.

Auctore
L. EVLERO.

Speculationes mathematicae, si ad earum vtilitatem respicimus, ad duas classes reduci debere videntur, ad priorem referendae sunt eae, quae cum ad vitam communem, tum ad alias artes, insigne aliquod commodum afferunt, quarum propterea pretium ex magnitudine huius commodi statui solet. Altera autem classis eas complectitur speculationes, quae etsi cum nullo insigni commodo sunt coniunctae, tamen ita sunt comparatae, vt ad fines analyseos promouendos, viresque ingenii nostri acuendas occasionem praebeant. Cum enim plurimas inuestigationes, vnde maxima vtilitas expectari posset, ob solum analyseos defectum deserere cogamur, non minus pretium iis speculationibus statuendum videtur, quae haud contemnenda analyseos incrementa pollicentur. Ad hunc autem scopum imprimis accommodatae videntur eiusmodi obseruationes, quae, cum quasi casu sint factae, et a posteriori detectae, ratio ad easdem a priori, ac per viam directam, perueniendi minus, vel neutiquam, est perspecta. Sic enim cognita iam

iam veritate facilius in eas methodos inquirere licebit, quae ad eam directe ſint perducturae, nouis autem methodis inueſtigandis analyſeos fines non mediocriter promoueri, nullum plane eſt dubium.

Huiusmodi autem obſeruationes, quae nulla certa methodo ſunt factae, quarumque ratio non parum abſcondita videtur, nonnullas deprehendi in opere Ill. *Comitis Fagnani* nuper in lucem edito; quae idcirco omni attentione dignae ſunt cenſendae, neque ſtudium, quod in vlteriori earum inueſtigatione conſumitur, inutiliter collocatum erit iudicandum. Commemorantur autem in hoc libro quaedam eximiae proprietates, quibus curuae *Ellipſis*, *Hyperbola* et *Lemniſcata* ſunt praeditae, harumque curuarum arcus diuerſi inter ſe comparantur: cum igitur ratio harum proprietatum maxime occulta videatur, haud alienum fore arbitror, ſi eas diligentius examinauero, et quae mihi inſuper circa has curuas elicere contigit, cum publico communicauero.

Quod igitur primum ad has curuas attinet, notum eſt, earum rectificationem omnes analyſeos vires tranſcendere, ita vt earum arcus non ſolum non algebraice exprimi, ſed etiam nequidem ad quadraturam circuli, vel hyperbolae, reduci queant. Quare eo magis mirum videri debet, quod Ill. Comes *Fagnani* inuenit, Ellipſi et Hyperbola infinitis modis eiusmodi binos arcus exhiberi poſſe, quorum differentia geometrice aſſignari queat; in curua lemniſcata autem infinitis modis eiusmodi dari arcus binos, qui inter ſe vel ſint aequales, vel alter ad alterum rationem duplam teneat,

 vnde

vnde deinceps modum colligit in hac curua etiam eiusmodi arcus assignandi, qui aliam inter se rationem teneant.

Pro Ellipsi quidem et Hyperbola nihil admodum mihi praeterea scrutari licuit; vnde contentus ero faciliorem constructionem eorum arcuum dedisse, quorum differentia geometrice exhiberi queat. Pro curua autem lemniscata iisdem vestigiis insistens, multo plures, imo infinitas, elicui formulas, quarum beneficio non solum infinitis modis eiusmodi binos acus definire possum, qui inter se vel sint aequales, vel rationem teneant duplam, sed etiam qui sint inter se in ratione quacunque numeri ad numerum.

I. De Ellipsi.

1. Sit quadrans ellipticus ABC, cuius centrum in C, eiusque semiaxes ponantur $CA = 1$, et $CB = c$; sumta ergo abscissa quacunque $CP = x$, erit applicata ei respondens $PM = y = c\sqrt{(1-xx)}$; cuius differentiale cum sit $dy = -\frac{cxdx}{\sqrt{(1-xx)}}$, erit abscissae $CP = x$ arcus ellipticus respondens $BM = \int\frac{dx\sqrt{(1-(1-cc)xx)}}{\sqrt{(1-xx)}}$. Ponatur breuitatis gratia $1 - cc = n$, vt sit arcus $BM = \int dx\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}}$ sumtaque alia quauis abscissa $CQ = u$, erit simili modo arcus ei respondens $BN = \int du\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}$. His positis quaeritur, quomodo hae duae abscissae x et u inter se comparatae esse debeant, vt arcuum summa

$$BM + BN = \int dx\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}} + \int du\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}$$

integrabilis euadat, seu geometrice exhiberi queat.

2. Quae-

2. Quaestio ergo huc redit, vt determinetur, cuiusmodi functio ipsius x loco u substitui debeat, vt formula differentialis $dx\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}}+du\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}$ integrationem admittat. Facile autem perspicitur, si haec quaestio in genere consideretur, eius solutionem vtriusque formulae integratione inniti; ideoque aeque analyseos fines transgredi, atque ipsam ellipseos rectificationem. Cum igitur solutio generalis nullo modo expectari queat, in solutiones particulares erit inquirendum, quae vti nulla certa ratione reperiri possunt, ita etiam plurimum casui et coniecturae erit tribuendum; ex quo earum verum fundamentum etiamsi ipsae sint cognitae.

3. Primum quidem statim occurrit casus $u=-x$, quo formula nostra differentialis in nihilum abit; sed quia hinc duo Ellipseos arcus aequales et similes oriuntur, vti hic casus nimis est obuius, ita etiam quaestioni propositae minime satisfacere est censendus. Cum igitur tentaminibus totum negotium absolui debeat, fingatur $\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}}=\alpha u$, et α ita concipiatur, vt vicissim fiat $\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}=\alpha x$, sic enim habebitur $BM+BN=\alpha\int u\,dx+\alpha\int x\,du=\alpha xu+$ Const. omnino vti postulatur. Pro valore autem ipsius α habebimus tam $1-nxx-\alpha\alpha uu+\alpha\alpha uuxx=0$, quam $1-nuu-\alpha\alpha xx+\alpha\alpha xxuu=0$, vnde patet, statui debere $\alpha\alpha=n$ et $\alpha=\sqrt{n}$, ita vt $u=\sqrt{\frac{1-nxx}{n-nxx}}$ et $BM+BN=xu\sqrt{n}+$ Const.

4. Etsi autem hoc modo quaestioni satisfactum videtur, tamen istae determinationes in Ellipsi locum habere nequeunt. Nam cum sit $n<1$ quia $n=1-ee$

 erit

erit $n - nxx < 1 - nxx$ ideoque $u > 1$, abſciſſa ergo CQ ſemi axem CA ſuperaret, eique propterea arcus imaginarius reſponderet; ita vt hinc nulla concluſio conformis deduci poſſet.

5. Tentemus ergo alias formulas, ſitque tam $\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}} = \frac{\alpha}{u}$, quam $\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}} = \frac{\alpha}{x}$, vnde ob $\alpha\alpha - \alpha\alpha xx - uu + nxxuu = 0$ et $\alpha\alpha - \alpha\alpha uu - xx + nxxuu = 0$ colligimus $\alpha = 1$, ita vt ſit $1 - uu - xx + nxxuu = 0$, ideoque $u = \sqrt{\frac{1-xx}{1-nxx}}$. Hinc autem prodit $BM + BN = \int \frac{dx}{u} + \int \frac{du}{x} = \int \frac{xdx + udu}{xu}$. Verum aequatio $uu + xx = 1 + nxxuu$ differentiata dat:

$$xdx + udu = nxu(xdu + udx) \text{ ſeu } \frac{xdx + udu}{xu} = n(xdu + udx)$$

vnde concludimus $BM + BN = n\int(xdu + udx) = nxu + \text{Conſt.}$

6. Haec ſolutio nullo incommodo laborat, cum enim ſit $n < 1$, erit $1 - nxx > 1 - xx$, ideoque $u < 1$; vti natura rei poſtulat. Sumta ergo abſciſſa quacunque $CP = x$, capiatur altera $CQ = u = \sqrt{\frac{1-xx}{1-nxx}}$; eritque ſumma arcuum $BM + BN = nxu + \text{Conſt.}$ Ad quam conſtantem definiendam ſit $x = 0$, vt fiat $BM = 0$; eritque $u = 1$, et arcus BN abit in quadrantem BMNA; vnde fit $0 + BMNA = 0 + \text{Conſt.}$ ſicque haec conſtans erit $= BMNA$. Quo valore eius loco ſubſtituto habemus $BM + BN = nxu + BMNA$, ideoque

$$BM - AN = nxu = (1-u)xu = BN - AM$$

7. Dato ergo in quadrante elliptico ACB puncto quocunque M, aſſignare valemus alterum punctum

ctum N, ita vt differentia arcuum BM − AN, vel quae huic est aequalis BN − AM geometrice exprimi queat. Quod quo facilius praestari possit, ducamus ad Ellipsin in puncto M normalem MS, erit subnormalis $PS = ccx$, et ob $PM = c\surd(1 - xx)$ ipsa normalis $MS = c\surd(1 - xx + ccxx) = c\surd(1 - nxx)$; ideoque pro altero puncto N abscissa erit $CQ = u = \frac{PM}{MS} \cdot CA$. Vel in normalem MS productam ex C demittatur perpendicularis CR, quae producatur in V, vt sit $CV = CA = 1$. et ob $\frac{CR}{CS} = \frac{PM}{MS}$ erit $CQ = \frac{CR}{CS} \cdot CV$. Quare ex puncto V in axem CA ducatur perpendicularis VQ, quae punctum Q, et producta ipsum punctum N designabit.

8. Cum sit $PS = ccx$, erit $CS = x - ccx = nx$, ideoque $CR = \frac{CQ \cdot CS}{CV} = \frac{u \cdot nx}{1} = nux$. Hoc ergo ipsum perpendiculum *CR* differentiam arcuum BM − AN seu *BN − AM* exhibebit. Arcuum ergo hoc modo designatorum differentia erit $= nx\surd\frac{1 - xx}{1 - nxx}$, quae igitur euanescit tam casu $x = 0$, quam $x = 1$; quibus puncta M et N in ipsa puncta B et A incidunt. Maxima autem haec differentia euadit, si $nx^4 - 2xx + 1 = 0$, hoc est si $x = \frac{1}{\surd(1 + c)}$, quo casu fit $x = u$, et ambo puncta M et N in vnum punctum O coëunt: eritque hoc casu differentia arcuum $BO - AO = nxx = 1 - c$, ideoque ipsi semiaxium differentiae CA − CB fiet aequalis: ita vt sit $CA + AO = CB + BO$.

9. Si punctum M in ipso hoc puncto O capiatur, vt sit $CP = x = \frac{1}{\surd(1 + c)}$ erit $PM = \frac{c\surd c}{\surd(1 + c)}$, et $PS = \frac{cc}{\surd(1 + c)}$

hinc-

hincque $MS = c\sqrt{c}$, vnde variis modis situs puncti O commode definiri poterit. Cum autem sit $CM = CO = \frac{\sqrt{(1+c^3)}}{\sqrt{(1+c)}} = \sqrt{(1-c+cc)} = \sqrt{(1+cc-2c\cos.60^\circ)}$, vnde facilis constructio deducitur: sequentia ergo Theoremata subiungere visum est, quorum demonstratio ex allatis est manifesta.

Theorema 1.

Tab. I. Fig. 4. 10. In quadrante elliptico ACB, si ad punctum quodvis M ducatur tangens HMK, quae cum altero axe CB in H concurrat, eique alteri semiaxi CA aequalis capiatur, vt sit $HK = CA$; tum vero per K axi CB parallela agatur KN ellipsin secans in N; arcuum BM et AN differentia $BM - AN$ geometrice assignari poterit; demisso enim ex Centro C in tangentem perpendiculo CT, erit ista arcuum differentia $BM - AN = MT$.

Fig 3. et 4. Demonstratio ex figura sponte patet, cum tangens HMK sit rectae illi CRV parallela et aequalis, tum vero perspicuum est, esse $MT = CR$.

Theorema 2.

Fig. 5. 11. Si super quadrantis elliptici ACB altero semiaxe CA triangulum aequilaterum CAE constituatur, et in eius latere AE portio capiatur $AF = CB$, iunctaeque CF aequalis applicetur in ellipsi recta CO, punctum O hanc habebit proprietatem, vt sit $CA +$ arcu $AO = CB +$ arcu BO.

Demonstratio ex §. 9. euidens est. Cum enim sit $CA = 1$, $AF = c$ et ang. $CAF = 60^\circ$ erit $CF = \sqrt{(1+cc-2c\cos 60^\circ)}$ ideoque $= CO$.

11. De

II. De Hyperbola.

12. Sit C centrum hyperbolae AMN eiusque semiaxis transuersus $CA = 1$, semiaxis coniugatus $= c$; erit sumta abscissa quacunque $CP = x$, applicata PM $= c\sqrt{(xx-1)}$, eiusque differentiale $= \frac{c x dx}{\sqrt{(xx-1)}}$; vnde fit arcus $AM = \frac{\int dx \sqrt{((1+cc)xx-1)}}{\sqrt{(xx-1)}}$. Ponatur breuitatis gratia $1 + cc = n$; erit $AM = \int dx \sqrt{\frac{nxx-1}{xx-1}}$. Simili ergo modo si capiatur alia quaeuis abscissa $CQ = u$, erit arcus ei respondens $AN = \int du \sqrt{\frac{nuu-1}{uu-1}}$. Tab. I. Fig. 6.

13. *His positis ista nobis proposita sit quaestio, vt dato puncto M alterum N ita definiatur, vt summa arcuum* $AM + AN$, *seu expressio* $\int dx \sqrt{\frac{nxx-1}{xx-1}} + \int du \sqrt{\frac{nuu-1}{uu-1}}$ *absolute integrationem admittat*; quod quidem *euenire casu* $u = -x$ sponte patet; verum hinc *nihil* ad institutum nostrum concludere licet.

14. Ponamus ergo $\sqrt{\frac{nxx-1}{xx-1}} = u\sqrt{n}$, cum hinc vicissim fiat $\sqrt{\frac{nuu-1}{uu-1}} = x\sqrt{n}$, vtrinque enim prodit haec aequatio $nuuxx - n(uu+xx) + 1 = 0$. Facta autem hac hypothesi prodit summa arcuum $AM + AN = \int u dx \sqrt{n} + \int x du \sqrt{n} = ux\sqrt{n} + \text{Const}$. Haec ergo integrabilitas vt locum habeat, oportet sit $u = \sqrt{\frac{nxx-1}{nxx-n}}$ vnde cum ob $n > 1$ prodeat quoque $u > 1$, ex dato puncto M semper alterum punctum N assignari poterit.

15. Ad constantem definiendam patet casum $x = 1$, quo punctum M in verticem A incidit, nihil iuuare, cum inde oriatur $u = \infty$, punctumque N in infinitum

remoueatur. Quocirca vt haec constans debite determinetur, alium casum considerari oportet; potior autem non occurrit, quam is, vbi puncta M et N in vnum coalescunt, seu quo fit $u = x$, et $nx^4 - 2nxx + 1 = 0$. Hinc autem oritur $xx = 1 + \frac{c}{\sqrt{(1+cc)}}$, et $x = \sqrt{(1 + \frac{c}{\sqrt{(1+cc)}})}$.

16. Sit igitur O hoc punctum, in quo ambo puncta M et N coalescunt, ductaque applicata OI erit abscissa $CI = \sqrt{(1 + \frac{c}{\sqrt{(1+cc)}})}$ et $2AO = c + \sqrt{(1+cc)} + \text{Const.}$ Hinc ergo obtinemus constantem quaesitam $= 2AO - c - \sqrt{(1+cc)}$ ob $\sqrt{n} = \sqrt{(1+cc)}$. Quo valore substituto, erit pro quibusuis punctis M et N diuersis, ita sumtis, vt sit $u = \sqrt{\frac{nxx-1}{nxx-n}}$ summa arcuum $AM + AN = ux\sqrt{n} + 2AO - c - \sqrt{(1+cc)}$ seu $ON - OM = ux\sqrt{n} - c - \sqrt{(1+cc)}$. Sic igitur duos arcus nacti sumus ON et OM, quorum differentia $ON - OM$ geometrice assignari potest.

17. Quo autem facilius pateat, quomodo tam punctum O, quam ex puncto M punctum N definiri queat; erigatur in A perpendiculum $AD = c$, eritque recta CD hyperbolae asymtota; tum positis $CP = x$; $PM = y$, ducatur tangens MT, erit ob $y = c\sqrt{(xx-1)}$ et $dy = \frac{cx\,dx}{\sqrt{(xx-1)}}$ subtangens $PT = \frac{y\sqrt{(xx-1)}}{cx} = x - \frac{1}{x}$; et $CT = \frac{1}{x}$; et ipsa tangens $MT = \frac{y\sqrt{(nxx-1)}}{cx}$. Hinc prodit $\sqrt{\frac{xx-1}{nxx-1}} = \frac{PT}{MT}$, ideoque $u = \frac{MT}{PT\sqrt{(1+cc)}} = \frac{CA^2 . MT}{CD . PT} = CQ$.

Fig. 7.

18. Ducatur ex centro C tangenti TM parallela $CR = CD$, demissoque ex R in axem perpendiculo RS, erit $CS = \frac{CD . PT}{MT}$, ideoque $CQ = \frac{CA^2}{CS}$. Quare CQ capienda erit tertia proportionalis ad CS et CA. Com-

modius

modus autem res sequenti modo sine tangentium adminiculo expedietur: nam cum sit $QN = \frac{cc}{\sqrt{n(xx-1)}} = \frac{c^3}{y\sqrt{n}}$ erit $PM.QN = \frac{c^3}{\sqrt{(1+cc)}} = \frac{AD^3}{CD}$ vel demisso ex A in asymtotam perpendiculo AE erit $PM.QN = AD.DE$ ob $DE = \frac{AD^2}{CD}$, vnde sequens Theorema conficitur.

Theorema 3.

19. Existente AOZ hyperbola, C eius centro, A vertice, et CDZ eius asymtota, ad quam ex A axi perpendiculariter ducta sit recta AD, itemque AE ad asymtotam perpendicularis; si applicata constituatur *IO media* proportionalis inter AD et DE, atque vtrinque applicatae PM et QN ita statuantur, vt inter eas sit IO media proportionalis; tum arcuum ON et OM differentia *geometrice* assignari poterit. Erit enim Fig. 8.

$$ON - OM = \frac{CP.CQ - CI:CT}{CE}.$$

Demonstratio ex §. praec. est manifesta. Cum enim punctis M et N in O coeuntibus sit $IO.TO = AD.DE$, erit IO media proportionalis inter AD et DE; hacque inuenta esse oportet $PM.QN = OI\ OT$. Tum vero ex §. 16. intelligitur esse $ON - OM = (CP.CQ - CI.CI)\sqrt{n}$, et ob $\sqrt{n} = CD$, erit homogeneitatem implendo $ON - OM = (CP.CQ - CI.CT)\frac{CD}{CA^2}$. At est $\frac{CA^2}{CD} = CE$, sicque constat theorematis veritas.

III. De Curua Lemniscata.

20. Haec curua ob plurimas, quibus praedita est, insignes proprietates inter Geometras est celebrata,

Tab. II. Fig. 1. imprimis autem quod eius arcus arcubus curuae elasticae sint aequales. Natura autem huius curuae ita est comparata, vt positis coordinatis orthogonalibus $CP = x$, $PM = y$, ista aequatione exprimatur $(xx+yy)^2 = xx-yy$. Vnde patet hanc curuam esse lineam quarti ordinis, quae in C, quod punctum eius centrum dicitur, cum axe CA angulum semirectum constituit, in A autem sumta $CA = 1$, axem normaliter traiicit. Figura autem CMNA quartam partem totius lemniscatae exhibet, cui tres reliquae partes circa centrum C aequales sunt concipiendae; id quod inde liquet, quod siue abscissa x, siue applicata y, siue vtraque, negatiuum valorem induat, aequatio eadem manet.

21. Quod igitur ad expressionem arcus cuiusque CM huius curuae attinet, is commodissime ex corda CM definitur. Si enim hanc cordam ponamus $CM = z$, ob $xx+yy = zz$ habebimus:

$$z^4 = xx-yy = 2xx-zz = zz-2yy$$

vnde elicimus

$$x = z\sqrt{\frac{1+zz}{2}} \text{ et } y = z\sqrt{\frac{1-zz}{2}}$$

et differentiando

$$dz = \frac{dz(1+2zz)}{\sqrt{2(1+zz)}} \text{ et } dy = \frac{dz(1-2zz)}{\sqrt{2(1-zz)}}$$

Hinc ergo elementum arcus CM colligitur

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dz\sqrt{\frac{(1-zz)(1+2zz)^2+(1+zz)(1-2zz)^2}{2(1+zz)(1-zz)}}$$

siue $\sqrt{(dx^2+dy)^2} = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$

22. Si ergo corda quaecunque ex centro C educta ponatur $CM = z$, erit arcus ab ea subtensus

CM =

$CM = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$. Simili ergo modo si alia quaeuis corda CN dicatur $= u$, erit arcus ab ea subtensus $CN = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}}$; cuius complementum ad totum quadrantem est arcus AN. Iam Ill. Comes *Fagnani* docuit, cuiusmodi functio ipsius z capi debeat pro u, vt vel arcus AN aequalis fiat arcui CM, vel vt arcus CN sit duplus arcus CM, vel etiam vt arcus AN sit aequalis duplo arcui CM. Hos ergo casus primo exponam, deinceps autem, quae mihi circa alias huiusmodi arcuum proportiones eruere contigit, in medium sum allaturus.

Theorema 4.

23. In curua lemniscata hactenus descripta, si applicetur corda quaecunque $CM = z$, aliaque insuper applicetur, quae sit $CN = u = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$; erit arcus CM aequalis arcui AN, vel etiam arcus CN aequalis arcui AM.

Demonstratio.

Cum sit corda $CM = z$, erit arcus $CM = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$, et ob cordam $CN = u$ erit arcus $CN = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}}$. At est $u = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$; vnde fit $du = \frac{-2z\,dz}{(1+zz)\sqrt{(1-z^4)}}$. Praeterea vero est $u^4 = \frac{1-2zz+z^4}{1+2zz+z^4}$, ideoque $1-u^4 = \frac{4zz}{(1+zz)^2}$ et $\sqrt{(1-u^4)} = \frac{2z}{1+zz}$. Quibus valoribus substitutis habebitur arcus $CN = -\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}} = -$ arc. CM + Const. ita vt sit arc. CN + arc. CM = Const. Ad hanc constantem definiendam perpendatur casus quo $z = 0$, ideoque et arcus $CM = 0$, hoc autem casu fit corda

 CN =

$CN = u = 1 = CA$; ideoque arcus CN abit in quadrantem CMNA, ex quo habebitur pro hoc casu $CMNA + o = \text{Const.}$ Hoc ergo valore substituto prodibit in genere

$$\text{arc. } CN + \text{arc. } CM = \text{arc. } CMNA$$

hincque arc. $CM =$ arc. AN, et arcum MN vtrinque addendo arc. $CMN =$ arc. ANM. Q. E. D.

Coroll. 1.

24. Dato ergo quocunque arcu CM in centro C terminato, cuius corda est $CM = z$, ei ab altera parte seu vertice A abscindetur arcus aequalis AN, sumendo cordam $CN = u = \sqrt{\frac{1 - zz}{1 + zz}}$, seu $CN = CA \sqrt{\frac{CA^2 - CM^2}{CA^2 + CM^2}}$, homogeneitatem supplendo per axem $CA = 1$.

Coroll. 2.

25. Cum sit $u = \sqrt{\frac{1 - zz}{1 + zz}}$, erit vicissim $z = \sqrt{\frac{1 - uu}{1 + uu}}$, vnde cordas CM et CN inter se permutare licet, ita vt si ambae cordae $CM = z$ et $CN = u$ ita fuerint comparatae, vt sit $uuzz + uu + zz = 1$; etiam puncta M et N inter se permutari queant, indeque prodeat tam arcus $CM =$ arc. AN, quam arc. $CN =$ arc. AM.

Coroll. 3.

26. Cum sit $CN = u = \sqrt{\frac{1 - zz}{1 + zz}}$, erit $\sqrt{\frac{1 + uu}{2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + zz)}}$ et $\sqrt{\frac{1 - uu}{2}} = \frac{z}{\sqrt{(1 + zz)}}$. Vnde cum ex natura curuae lemniscatae pro puncto N coordinatae sint $CQ = u\sqrt{\frac{1 + uu}{2}}$ et $QN = u\sqrt{\frac{1 - uu}{2}}$, erit $CQ = \frac{u}{\sqrt{(1 + zz)}}$

et

et $QN = \frac{uz}{\sqrt{(1+zz)}}$, ideoque $\frac{QN}{CQ} = z$. Quare si in A ad axem CA erigatur normalis AT, donec cordae CN productae occurrat in T, erit $AT = c = CM$.

Coroll. 4.

27. Ex dato ergo puncto M alterum punctum N ita facillime definitur: capiatur tangens AT aequalis cordae CM, ductaque recta CT curuam in puncto quaesito N secabit. Ob eandem autem rationem patet, si corda CM producatur, donec tangenti in A occurrat in *S*, *erit* pariter $AS = CN$.

Coroll. 5.

28. Manifestum etiam est puncta M et N in vnum *punctum O coire* posse, in quo propterea totus quadrans COA in duas partes aequales diuiditur. Inuenietur ergo hoc punctum O, si ponatur $u = z$, vnde fit $z^4 + 2zz = 1$, hincque $zz + 1 = \sqrt{2}$; prodit ergo corda $CO = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)}$, cui simul tangens AI erit aequalis, vnde simul positio huius puncti O facile assignatur.

Coroll. 6.

29. Notato ergo hoc puncto O, quo totus quadrans COA in duas partes aequales CMO et ANO diuiditur, erit quoque punctis M et N per regulam expositam definitis arc. MO = arc. ON: ita vt idem hoc punctum O omnes arcus MN in duas partes aequales dispescat.

Theore-

Theorema. 5.

Tab. II. Fig. 2. 30. In curua lemniscata cuius axis $CA = 1$, si applicata sit corda quaecunque $CM = z$, aliaque insuper chorda applicetur $CM^2 = u = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4}$, erit arcus a corda hac subtensus CM^2 duplo maior quam arcus ab illa corda subtensus CM.

Demonstratio.

Cum sit corda $CM = z$, erit arcus $CM = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ similiterque ob cordam $CM^2 = u$ erit arcus $CM^2 = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}}$. Quia autem est $u = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4}$, erit $uu = \frac{4zz - 4z^6}{1+2z^4+z^8}$ ideoque $\sqrt{(1-uu)} = \frac{1-2zz-z^4}{1+z^4}$ et $\sqrt{(1+uu)} = \frac{1+2zz-z^4}{1+z^4}$ vnde fit $\sqrt{(1-u^4)} = \frac{1-6z^4+z^8}{(1+z^4)^2}$. Tum vero differentiando colligitur $du = \frac{2dz(1-z^8)-4z^4dz(1+z^4)-8z^4dz(1-z^4)}{(1+z^4)^2\sqrt{(1-z^4)}}$ seu $du = \frac{2dz-12zz^4dz+2z^8dz}{(1+z^4)^2\sqrt{(1-z^4)}} = \frac{2dz(1-6z^4+z^8)}{(1+z^4)^2\sqrt{(1-z^4)}}$

Hinc ergo nanciscimur $\frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}} = \frac{2dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ et integrando arc. $CM^2 = 2$ arc. $CM +$ Const. Cum autem posito $z = 0$ fiat etiam $u = 0$, ideoque ambo arcus CM et CM^2 euanescant, constans quoque in nihilum abit. Sicque sumta corda $CM^2 = u = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4}$ erit arcus $CM^2 = 2$ *arc.* CM. Q. E. D.

Coroll. 1.

31. Si capiatur corda $CN = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$, erit arcus $AN =$ arc. CM, hincque etiam arcus CM^2 erit $= 2$ arc. AN. Simili modo si capiatur corda $CN^2 = \sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}}$, erit arcus $AN^2 =$ arc. CM^2, sicque etiam

a vera vertice A erit arc. $AN^2 = 2$ arc. AN. Hoc ergo modo obtinentur quatuor arcus inter se aequales scilicet arc. CM, arc. MM^2, arc. AN, et arc. NN^2.

Coroll. 2.

32. Cum autem sit $u = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4}$; $\sqrt{(1-uu)} = \frac{1-2zz-z^4}{1+z^4}$ et $\sqrt{(1+uu)} = \frac{1+2zz-z^4}{1+z^4}$, hae quatuor cordae ita habebuntur expressae vt sit:
$CM = z$; $CN = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$; $CM^2 = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4}$, $CN^2 = \frac{1-2zz-z^4}{1+2zz-z^4}$

Coroll. 3.

33. Conueniant ambo puncta M^2 et N^2 in curvae puncto medio O, pro quo supra vidimus esse cordam $CO = \sqrt{(\sqrt{2}-1)}$ atque hoc casu tota curua COA in *quatuor partes* aequales dispescetur in punctis M. O *et* N. Hoc *igitur* euenit si sit $CM^2 = CN^2 = \sqrt{(\sqrt{2}-1)}$: *ita* vt posito breuitatis gratia $\sqrt{(\sqrt{2}-1)} = \alpha$, habeamus $1-2zz-z^4 = \alpha + 2\alpha zz - \alpha z^4$ seu $z^4 = \frac{-2(1+\alpha)zz+1-\alpha}{1-\alpha}$ et $zz = \frac{-(1+\alpha)+\sqrt{2(1+\alpha\alpha)}}{1-\alpha}$ vel $zz = \frac{-1-\sqrt{(\sqrt{2}-1)}+\sqrt{2}\sqrt{2}}{1-\sqrt{(\sqrt{2}-1)}}$. Vnde colligimus $CM = z = \sqrt{\frac{-1-\alpha+\sqrt{2(1+\alpha\alpha)}}{1-\alpha}}$ et $CN = \sqrt{\frac{-1+\alpha+\sqrt{2(1+\alpha\alpha)}}{1+\alpha}}$. Tab. II. Fig. 3.

Coroll. 4.

34. Coalescant ambo puncta M^2 et N, et puncta *M* et N^2 pariter coibunt, sicque tota curua CMNA in punctis *M* et N trifariam secabitur. Pro hoc ergo casu habebitur vel $\frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4} = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$ vel $z = \frac{1-2zz-z^4}{1+2zz-z^4}$ quarum posterior dat $1-z-2zz-2z^3-z^4+z^5 = 0$, Fig. 4.

haecque per $1+z$ diuisa $1-2z-2z^3+z^4=0$; cuius concipiantur factores $(1-\mu z+zz)(1-\nu z+zz)=0$, eritque $\mu+\nu=2$ et $\mu\nu=-2$; vnde fit $\mu-\nu=2\sqrt{3}$, hincque $\mu=1+\sqrt{3}$ et $\nu=1-\sqrt{3}$. Erit ergo $z=\frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}=CM$, et ob $zz=\frac{4+4\sqrt{3}\pm 2(1+\sqrt{3})\sqrt{2\sqrt{3}}}{4}$ orietur $CN=\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}=\sqrt{\frac{-2\sqrt{3}\mp(1+\sqrt{3})\sqrt{2\sqrt{3}}}{4+\sqrt{3}\pm(1+\sqrt{3})\sqrt{2\sqrt{3}}}}=\sqrt{\frac{\mp\sqrt{2\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}}$
Est itaque $CM=\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$ et $CN=\sqrt{\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}}$.

Coroll. 5.

Tab. II. Fig. 2. 35. Dato etiam quocunque arcu CM^2, inueniri potest eius semissis CM: si enim arcus illius ponatur corda $CM^2=u$, et arcus quaesiti corda $CM=z$, erit $u=\frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4}$ et $1-\frac{4zz}{uu}+2z^4+\frac{4z^6}{uu}+z^8=0$, cuius factores concipiantur $(1-\mu zz-z^4)(1-\nu zz-z^4)=0$: vnde obtinetur $\mu+\nu=\frac{4}{uu}$ et $\mu\nu=4$; erit ergo $\mu-\nu=4\sqrt{(\frac{1}{u^4}-1)}=\frac{4}{uu}\sqrt{(1-u^4)}$ hincque $\mu=\frac{2+2\sqrt{(1-u^4)}}{uu}$ et $\nu=\frac{2-2\sqrt{(1-u^4)}}{uu}$: ergo $zz=\frac{-1-\sqrt{(1-u^4)}+\sqrt{2}(1+\sqrt{(1-u^4)})}{uu}$: vnde pro z duplex valor realis elicitur:

alter $z=\frac{\sqrt{(-1-\sqrt{(1-u^4)}+\sqrt{2}(1+\sqrt{(1-u^4)}))}}{u}=\frac{\sqrt{(1-\sqrt{(1-uu)})(\sqrt{(1+uu)}-1)}}{u}$

alter $z=\frac{\sqrt{(-1+\sqrt{(1-u^4)}+\sqrt{2}(1-\sqrt{(1-u^4)}))}}{u}=\frac{\sqrt{(1+\sqrt{(1-uu)})(\sqrt{(1+uu)}-1)}}{u}$.

Coroll. 6.

Fig. 5. 36. Duplex hic valor reuera locum obtinet, cum enim eadem corda CM^2 et Cm^2 duos arcus diuersos CM^2 et CM^2m^2 subtendat, alter valor ipsius z praebebit cordam arcus CM, qui est semissis arcus CM^2, alter autem valor ipsius z dat cordam arcus CM, qui est

eſt ſemiſſis arcus CM^2m^2: ac prior quidem valor pro illo caſu, poſterior vero pro hoc locum habet.

Coroll. 7.

37. Hoc modo etiam lemniſcata CA in quinque partes aequales diuidi poteſt. Sit enim corda partis ſimplicis $C1 = z$; corda partis duplicatae $C2 = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4} = u$, erit corda partis quadruplicatae $C4 = \frac{2u\sqrt{(1-u^4)}}{1+u^4} = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$, quia eſt $A4 = C1$; vnde corda z definitur, qua inuenta cum ſit $C2 = A3$, erit corda $C3 = \sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}}$. Fig. 6.

Coroll. 8.

38. Cum hinc poſita corda cuiuſpiam $= z$, reperiri *poſſint cordae* arcuum dupli, quadrupli, octtupli, *ſedecupli*, etc. manifeſtum eſt hoc modo etiam lemniſcatam in tot partes diuidi poſſe, quarum numerus ſit $2^m + 2^n$. In hac autem formula continentur ſequentes numeri

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 17, 18, 20, 24, 32, 33 etc.

Verum hinc non ſemper omnia diuiſionum puncta aſſignare licet.

Scholion.

39. Haec igitur ſunt, quae Ill. Comes *Fagnani* de curua lemniſcata obſeruauit, vel quae ex eius inuentis deriuare licet. Etſi enim tantum propoſito arcu quocunque eius duplum aſſignare docuit, tamen hunc arcum iterum continuo duplicando, etiam cordae arcuum

 quadrupli,

quadrupli, octupli, sedecupli etc. inde colligentur. Namque si corda arcus simpli statuatur $= z$, arcus dupli $= u$, quadrupli $= p$; octupli $= q$, sedecupli $= r$ etc. erit:

$$u = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4}$$

$$p = \frac{2u\sqrt{(1-u^4)}}{1+u^4} = \frac{4z(1+z^4)(1-6z^4+z^8)\sqrt{(1-z^4)}}{(1+z^4)^4+16z^4(1-z^4)^2}$$

$$q = \frac{2p\sqrt{(1-p^4)}}{1+p^4};\quad r = \frac{2q\sqrt{(1-q^4)}}{1+q^4} \text{ etc.}$$

Aliorum autem arcuum multiplorum cordas ex his assignare non licet. Quemadmodum ergo arcuum quorumuis multiplorum cordae exprimantur, hic inuestigabo, vt hoc argumentum, quantum limites analyseos id quidem permittunt, penitus perficiatur. Primum quidem tentando elicui, si arcus simpli corda sit $= z$, tum arcus tripli cordam fore $= \frac{z(3-6z^4-z^8)}{1+6z^4-3z^8}$ verum postea rem sequenti modo generaliter expediri posse intellexi.

Theorema 6.

Fig. 7. 40. Si corda arcus simplicis CM sit $= z$, et corda arcus n cupli $CM^n = u$, erit corda arcus $(n+1)$ cupli

$$CM^{n+1} = \frac{z\sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}} + u\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}}{1 - uz\sqrt{\frac{(1-uu)(1-zz)}{(1+uu)(1+zz)}}}.$$

Demonstratio.

Erit ergo ipse arcus simplex $CM = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$; et arcus n cuplus $CM^n = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}} = n\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$: ideoque habemus $du = \frac{n\,dz\sqrt{(1-u^4)}}{\sqrt{(1-z^4)}}$. Ponamus breuitatis gratia $z\sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}} = P$, et $u\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}} = Q$, vt sit corda pro arcu $(n+1)$

cuplo

cuplo exhibita $CM^{n+1} = \frac{P+Q}{1-PQ}$, quae dicatur $= s$ atque demonstrari oportet, esse arcum huic cordae respondentem $\int \frac{ds}{\sqrt{(1-s^4)}} = (n+1)\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ seu $\frac{ds}{\sqrt{(1-s^4)}} = \frac{(n+1)dz}{\sqrt{(-z^4)}}$.
Cum autem sit $s = \frac{P+Q}{1-PQ}$ erit $ds = \frac{dP(1+QQ)+dQ(1+PP)}{(1-PQ)^2}$:
tum vero reperitur

$$1-s^4 = \frac{(1-PQ)^4-(P+Q)^4}{(1-PQ)^4} = \frac{(1+PP+QQ+PPQQ)(1-PP-QQ-4PQ+PPQQ)}{(1-PQ)^4}$$

ergo $\sqrt{(-s^4)} = \frac{\sqrt{(1+PP)(1+QQ)(1-PP-QQ-4PQ+PPQQ)}}{(1-PQ)^2}$

ex quo elicitur:

$$\frac{ds}{\sqrt{(1-s^4)}} = \frac{dP\sqrt{\frac{1+QQ}{1+PP}}+dQ\sqrt{\frac{1+PP}{1+QQ}}}{\sqrt{(1-PP-QQ-4PQ+PPQQ)}}$$

cuius expressionis ergo valorem investigemus:
Ac primo quidem est $1+PP = \frac{1+uu+zz+uuzz}{1+uu}$ et $1+QQ = \frac{1+uu+zz-uuzz}{1+zz}$, ita ut sit $\frac{1+PP}{1+QQ} = \frac{1+zz}{1+uu}$,

ideoque $$\frac{ds}{\sqrt{(1-s^4)}} = \frac{dP\sqrt{\frac{1+uu}{1+zz}}+dQ\sqrt{\frac{1+zz}{1+uu}}}{\sqrt{(1-PP-QQ+PPQQ-4PQ)}}.$$

Deinde vero ob

$1-PP = \frac{1+uu-zz+uuzz}{1+uu}$ et $1-QQ = \frac{1+zz-uu+uuzz}{1+zz}$

erit

$$(1-PP)(1-QQ) = 1-P^2-Q^2+P^2Q^2 = \frac{1-z^4-u^4+4uuzz+u^4z^4}{(1+zz)(1+uu)}$$

et $4PQ = \frac{4uz\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)}}{(1+zz)(1+uu)}$; hincque concluditur denominator $\sqrt{(1-PP-QQ+PPQQ-4PQ)}$

$$= \frac{\sqrt{(1-z^4-u^4+4uuzz+u^4z^4-4uz\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)})}}{\sqrt{(1+zz)(1+uu)}}$$

$= \frac{\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)}-2uz}{\sqrt{(1+zz)(1+uu)}}$, ex quo obtinebitur

$$\frac{ds}{\sqrt{(1-s^4)}} = \frac{dP(1+uu)+dQ(1+zz)}{\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)}-2uz}.$$

Iam vero differentiando elicimus

$$dP = dz\sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}} - \frac{2zudu}{(1+uu)\sqrt{(1-u^4)}}$$

$$dQ = du\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}} - \frac{2zudz}{(1+zz)\sqrt{(1-z^4)}},$$

 quare

quare ob $du = \frac{n\,dz\sqrt{(1-u^4)}}{\sqrt{(1-z^4)}}$, erit

$$dP = dz\sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}} - \frac{2n\,uz\,dz}{(1+uu)\sqrt{(1-z^4)}}$$

$$dQ = \frac{n\,dz\sqrt{(1-u^4)}}{1+zz} - \frac{2uz\,dz}{(1+zz)\sqrt{(1-z^4)}}$$

vnde conficitur numerator $dP(1+uu)+dQ(1+zz)$ $= dz\sqrt{(1-u^4)} - \frac{2uuz\,dz}{\sqrt{(1-z^4)}} + n\,dz\sqrt{(1-u^4)} - \frac{2uz\,dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ siue

$dP(1+uu)+dQ(1+zz) = (n+1)\,dz\sqrt{(1-u^4)} - \frac{2(n+1)uz\,dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ $= \frac{(n+1)dz}{\sqrt{(1-z^4)}}\left(\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)} - 2uz\right)$

vnde perspicuum est esse

$\frac{ds}{\sqrt{(1-s^4)}} = \frac{(n+1)dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ et arc. $CM^{n+1} = (n+1)$ arc. CM

Q. E. D.

Coroll. 1.

41. Si a vertice A abscindantur arcus Am, Am^n, Am^{n+1} arcubus CM, CM^n, CM^{n+1} respectiue aequales, erit Cm corda complementi arcus CM, Cm^n corda complementi arcus CM^n; Cm^{n+1} corda complementi arcus CM^{n+1}. Erunt autem ob cordas $CM = z$; $CM^n = u$; $CM^{n+1} = s$, complementorum cordae $Cm = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$; $Cm^n = \sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}}$; $Cm^{n+1} = \sqrt{\frac{1-ss}{1+ss}}$.

Cum autem sit $s = \dfrac{z\sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}} + u\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}}{1 - zu\sqrt{\frac{(1-uu)(1-zz)}{(1+uu)(1+zz)}}} = \dfrac{P+Q}{1-PQ}$ erit

$$\sqrt{\frac{1-ss}{1+ss}} = \sqrt{\frac{1-PP-QQ-PQ+PPQQ}{(1+PP)(1+QQ)}} = \frac{\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)}-2uz}{1+uu+zz-uuzz}$$

quae ad hanc formam reducitur

$$\sqrt{\frac{1-ss}{1+ss}} = \frac{\sqrt{\frac{(1-zz)(1-uu)}{(1+zz)(1+uu)}} - uz}{1+uz\sqrt{\frac{(1-zz)(1-uu)}{(1+zz)(1+uu)}}}.$$

COROL.

Coroll. 2.

42. Si igitur ponatur:
corda arcus simplicis $= z$; corda complementi $= Z$.
corda arcus n cupli $= u$; corda complementi $= V$
vt sit $Z = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$ et $V = \sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}}$; erit
corda arcus $(n+1)$ cupli $= \frac{zV+uZ}{1-zuZV}$
corda complementi $= \frac{Z-Vzu}{1-zuZV}$.

Coroll. 3.

43. Inuentio ergo cordarum arcuum quorumuis multiplorum vna cum cordis complementi ita se habebit:

Corda arcus		corda complementi
simpli	$= a$ - - -	simpli $= A$
dupli	$= b = \frac{2aA}{1-aaAA}$ -	dupli $= \frac{AA-aa}{1+aaAA} = B$
tripli	$= c = \frac{aB+bA}{1-abAB}$ -	tripli $= \frac{AB-ab}{1+abAB} = C$
quadrupli	$= d = \frac{aC+cA}{1-acAC}$;	quadrupli $= \frac{AC-ac}{1+acAC} = D$
quintupli	$= e = \frac{aD+dA}{1-adAD}$;	quintupli $= \frac{AD-ad}{1+adAD} = E$

Coroll. 4.

44. Simili modo si corda arcus m cupli sit $= r$, cordi complementi $= R$; et corda arcus n cupli $= s$ eiusque corda complementi $= S$, vt sit $R = \sqrt{\frac{1-rr}{1+rr}}$ et $S = \sqrt{\frac{1-ss}{1+ss}}$, erit corda arcus $(m+n)$ cupli $= \frac{rS+sR}{1-rsRS}$ et corda complementi $= \frac{RS-rs}{1+rsRS}$. Quin etiam sumendo pro n numerum negatiuum, quia tum corda s abit in

in ſui negatiuum, corda differentiae illorum arcuum exhiberi poterit, erit ſcilicet corda arcus $(m-n)$ cupli $= \frac{rS - sR}{1 + rsRS}$ et corda complementi eius $= \frac{RS + rs}{1 - rsRS}$.

Coroll. 5.

45. Sumtis ergo denominationibus, quae in coroll. 3 ſunt adhibitae, erit quoque

$$d = \frac{2bB}{1 - bbBB} \quad \text{et } D = \frac{BB - bb}{1 + bbBB}$$

$$e = \frac{bC + cB}{1 - bcBC} \quad \text{et } E = \frac{BC - bc}{1 + bcBC}$$

Coroll. 6.

46. Ex his colligitur ſi corda arcus ſimplicis ſtatuatur $= z$; valores cordarum in coroll 3 adhibitarum fore

$$a = z; \qquad A = \sqrt{\frac{1 - zz}{1 + zz}}$$

$$b = \frac{2z\sqrt{(1 - z^4)}}{1 + z^4}; \qquad B = \frac{1 - 2zz - z^4}{1 + 2zz - z^4}$$

$$c = \frac{z(3 - 6z^4 - z^8)}{1 + 6z^4 - 3z^8}; \qquad C = \frac{(1 + z^4)^2 - 4zz(1 - zz)^2}{(1 + z^4)^2 + 4zz(1 - zz)^2}\sqrt{\frac{1 - zz}{1 + zz}}$$

$$d = \frac{4z(1 + z^4)(1 - 6z^4 + z^8)\sqrt{(1 - z^4)}}{(1 + z^4)^4 + 16z^4(1 - z^4)^2}; \qquad D = \frac{(1 - 6z^4 + z^8)^2 - 8zz(1 - z^4)(1 + z^4)^2}{(1 - 6z^4 + z^8)^2 + 8zz(1 - z^4)(1 + z^4)^2}$$

Scholion 1.

47. Ratio compoſitionis formularum $\frac{rS + sR}{1 - rsRS}$ et $\frac{RS - rs}{1 + rsRS}$ imprimis ideo notari meretur, quod ſimilis eſt regulae, qua tangens ſummae vel differentiae duorum angulorum definiri ſolet. Si enim ſit $rS = \text{tang.}\,\alpha$, et $sR = \text{tang.}\,\beta$ erit $\frac{rS + sR}{1 - rsRS} = \text{tang.}\,(\alpha + \beta)$, et pro diffe-

differentia in coroll. 4 exhibita $\frac{rS-sR}{1+rsRS}=\text{tang.}(\alpha-\beta)$. Similique modo si ponatur $RS=\text{tang.}\gamma$ et $rs=\text{tang.}\delta$ erit $\frac{RS-rs}{1+rsRS}=\text{tang.}(\gamma-\delta)$ et $\frac{RS+rs}{1-rsRS}=\text{tang.}(\gamma+\delta)$. Commodius autem ista compositionis ratio repraesentabitur, si ponatur

Corda arcus m cupli $r=M\sin\mu$, corda complementi $R=M\cos.\mu$

Corda arcus n cupli $s=N\sin\nu$; corda compl. $S=N\cos.\nu$ tum enim erit

Corda arcus $(m+n)$ cupli $=\frac{MN\sin(\mu+\nu)}{1-M^2N^2\sin\mu\sin\nu\cos\mu\cos\nu}$

Corda eius complementi $=\frac{MN\cos.(\mu+\nu)}{1+M^2N^2\sin\mu\sin\nu\cos\mu\cos\nu}$

Corda arcus $(m-n)$ cupli $=\frac{MN\sin(\mu-\nu)}{1+M^2N^2\sin\mu\sin\nu\cos\mu\cos\nu}$

Corda eius complementi $=\frac{MN\cos.(\mu-\nu)}{1-M^2N^2\sin\mu\sin\nu\cos\mu\cos\nu}$

Cum autem sit $1-rr-RR=rrRR$, erit $1-MM=M^4\sin\mu^2\cos\mu^2$, ideoque $M^2\sin\mu\cos.\mu=\sqrt{(1-MM)}$ et $N^2\sin\nu\cos\nu=\sqrt{(1-NN)}$, vnde istarum formularum denominatores abibunt in

$$1-\sqrt{(1-MM)(1-NN)} \text{ et } 1+\sqrt{(1-M^2)(1-NN)}$$

Praeterea vero ex illa aequatione $1-MM=M^4\sin\mu^2\cos.\mu^2$ fit $\frac{1}{MM}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin 2\mu.\sin 2\mu)}$ ob $\sin 2\mu=2\sin\mu\cos.\mu$. Verum hinc illae formulae non concinniores euadunt.

Scholion 2.

48. Ex his obseruationibus calculus integralis non contemnenda augmenta consequitur, siquidem hinc plu-

rimarum aequationum differentialium integrales particulares exhibere valemus, quarum integratio in genere vix sperari potest. Sic proposita aequatione differentiali

$$\frac{du}{\surd(1-u^4)} = \frac{dz}{\surd(1-z^4)}$$

praeterquam quod casus integralis $u = z$ per se est obvius, nouimus ei quoque satisfacere $u = -\surd\frac{1-zz}{1+zz}$. In genere igitur cum integratio constantem arbitrariam puta C inuoluat, erit u aequalis functioni cuipiam, quantitatum z et C; quae tamen nihilominus ita erit comparata, vt pro certo quodam ipsius C valore fiat $u = z$, itemque pro alio quodam ipsius C valore, $u = -\surd\frac{1-zz}{1+zz}$. Duo ergo dantur valores, quae constanti huic C tributi functionem illam in expressionem algebraicam adeo simplicem conuertunt.

Simili modo proposita hac aequatione

$$\frac{du}{\surd(1-u^4)} = \frac{2dz}{\surd(1-z^4)}$$

duos habemus valores, quos ei satisfacere nouimus:

$$u = \frac{2z\surd(1-z^4)}{1+z^4} \quad \text{et} \quad u = \frac{-1+2zz+z^4}{1+2zz-z^4}$$

pariterque geminos valores exhibere docuimus, qui in genere huic aequationi satisfaciant

$$\frac{mdu}{\surd(1-u^4)} = \frac{ndz}{\surd(1-z^4)}$$

vnde

vnde via ad harum formularum integralia generalia inuenienda non parum praeparata videtur.

Deinde quae supra de ellipsi et hyperbola sunt allata, sequentes aequationum differentialium integrationes speciales suppeditant.

Proposita enim ex §. 3 hac aequatione

$$dx\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}}+du\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}=(xdu+udx)\sqrt{n}$$

nouimus ei satisfacere hanc aequationem integralem

$$1-nxx-nuu+nuuxx=0$$

Isti autem aequationi ex § 5 petitae

$$dx\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}}+du\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}=n(xdu+udx)$$

satisfacere inuenta est haec aequatio

$$1-xx-uu+nuuxx=0$$

Deinde sequenti aequationi ex hyperbola §. 14 petitae

$$dx\sqrt{\frac{nxx-1}{xx-1}}+du\sqrt{\frac{nuu-1}{uu-1}}=(xdu+udx)\sqrt{n}$$

satisfacit quoque $1-nxx-nuu+nuuxx=0$, quae quidem cum priore ex ellipsi petita congruit cum sit

$$\sqrt{\frac{nxx-1}{xx-1}}=\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}}.$$

Hinc autem facile concludere licet, huic aequationi

$$dx\sqrt{\frac{f-gxx}{h-kxx}}+du\sqrt{\frac{f-guu}{h-kuu}}=(xdu+udx)\sqrt{\frac{g}{h}}$$

satisfacere hanc integralem specialem

 $fh-gh$

$$fh - gh(xx + uu) + gkxxuu = 0$$

Isti autem aequationi alteri

$$dx\sqrt{\frac{f - gxx}{h - kxx}} + du\sqrt{\frac{f - guu}{h - kuu}} = (xdu + udx)\frac{g}{\sqrt{fk}}$$

satisfacere hanc integralem specialem

$$fh - fk(xx + uu) + gkxxuu = 0$$

Haec igitur ideo proponenda censui, quod ansam mihi praebere videntur subsidia Analyseos ulterius excolendi.

DE

DE PROBLEMATIBVS INDETERMINATIS QVAE VIDENTVR PLVS QVAM DETERMINATA.

Auctore

L. EVLERO.

Omnia problemata, quae in Analysi Diophantaea proponi solent, esse indeterminata, vel ipsa rei natura declarat; etsi enim plures eiusmodi quaestiones occurrant, quae non nisi vnicam solutionem admittunt, veluti si quaeratur cubus, qui vnitate auctus faciat quadratum, cui quaestioni praeter cubum 8 alius nullus satisfacere reperitur; tamen ne tales quidem quaestiones ad problemata determinata referri conuenit, propterea quod methodus eas resoluendi tota ex ratione problematum indeterminatorum est petita, atque casui potissimum singulari tribuendum videtur, si vnica solutio tantum locum habeat. Quemadmodum etiam non desunt eiusmodi quaestiones, quae plane nullam solutionem admittunt, quae tamen nihilo minus quaestionibus indeterminatis recte annumerantur: ante enim quam certiores fuerimus facti, nullam dari solutionem, id quod operatio visusque methodorum demum declarat, eas pro indeterminatis omnino habere debemus, nostramque inuestigationem perinde adornare, ac si infinita solutionum multitudo daretur. Ita si quaeri debeant tria quadrata,

 drata,

drata, quorum summa faciat septem, nemo dubitabit, quin haec quaestio indeterminatis sit accensenda, etiamsi deinceps inuestigatione peracta impossibilitas solutionis manifesto se prodat. Quando igitur hic de problematibus indeterminatis tractare constitui, quae plusquam determinata videantur; ne quis putet haec inuicem pugnare, fierique non posse, vt quod indeterminatum sit, idem plus quam determinatum videri queat, instituti rationem clarius exponi oportere sentio. Ac primo quidem nullum est dubium, quin cuilibet quaestioni Diophantaeae eiusmodi insuper conditiones adiici queant, quibus ea non tam determinata, quam impossibilis reddatur. Veluti si quaestioni, qua duo quadrata petuntur, quorum summa sit quadratum, insuper haec conditio adiiciatur, vt eorundem quadratorum differentia quoque sit quadratum, quaestio, quae primum erat maxime indeterminata, hac vnica conditione adiuncta fit impossibilis, ideoque merito pro plusquam determinata habetur. Simili modo tria quadrata quaerere in progressione arithmetica problema est indeterminatum et innumerabiles solutiones admittens, statim vero ac quatuor quadrata in arithmetica progressione requiruntur, problema non determinatur, sed prorsus fit impossibile et plus quam determinatum.

Ex his exemplis manifestum est quaestionem indeterminatam per additionem vnicae conditionis reddi posse plus quam determinatam, ideoque impossibilem. E contrario vero dantur eiusmodi quoque quaestiones, quae iam tot conditiones continent, vt vnica noua conditione super addita, pari iure, ac commemoratae, plusquam

quam determinatae fieri debere videantur, quibus tamen nihilo minus non vna, sed plures, saepe conditiones adiungi possunt, ita vt iis non obstantibus infinitae adhuc solutiones exhiberi queant; cuiusmodi casus ex hoc problemate clarissime intelligetur.

Quaerantur tres numeri, vt binorum productum addito tertio fiat quadratum.

Scilicet vocando hos tres numeros x, y, z, requiritur vt sit:

$$xy + z = \text{Quadr.}\ xz + y = \text{Qu.}\ yz + x = \text{Qu.}$$

Haec *quaestio tentanti*, nisi singularia artificia adhibeantur, *iam* solutu tam difficilis apparebit, vt si noua conditio super adderetur, de solutione plane sit desperaturus. Si enim ponat $xy + z = aa$, vt habeat $z = aa - xy$, ambae reliquae formulae quadratum efficiendae erunt:

$$aax - xxy + y \quad \text{et} \quad aay - xyy + x$$

quarum priorem si ponat $= bb$, habebit quidem $y = \frac{aax - bb}{xx - 1}$; at hoc valore in tertia substituto, quadratum reddi debebit haec expressio;

$$x^5 - 2x^3 + aabbxx - (a^4 + b^4 - 1)x + aabb$$

quae certe iam est tam complicata, vt omnem solutoris sollertiam requirat, neque de nouis conditionibus insuper adimplendis sit cogitandum.

Interim tamen huic quaestioni has insuper conditiones adiicere licet, vt binorum numerorum productum cum eorundem summa quoque faciat quadratum, seu vt sit:

$$xy + x + y = \square;\ xz + x + z = \square;\ yz + y + z = \square$$

Quis

Quis igitur non putaret, his tribus conditionibus adiectis, problema propositum iam per se satis difficile fieri plus quam determinatum? Interim tamen certum est, et hoc casu problema adhuc esse indeterminatum, atque adeo in numeris integris infinitas solutiones admittere.

Quin etiam insuper hae conditiones adiici possunt, manente solutionum numero, et quidem in numeris integris, infinito: 1°. vt summa productorum ex binis sit quadratum, 2°. vt eadem summa productorum ex binis vna cum ipsorum numerorum summa fiat quadratum.

Nec vero nunc quidem conditionum multitudo exhausta est censenda; nam postulari insuper potest, vt trium quaesitorum numerorum vel vnus, vel adeo duo, sint ipsi quadrati, et quidem integri. Quodsi autem omnes tres debeant esse quadrati, ne nunc quidem problema sit plus quam determinatum, sed infinitas adhuc solutiones, etsi non in numeris integris, admittit; ac fortasse adhuc plures conditiones addi possent, quibus quoque satisfieri liceret.

En ergo problema, quod merito cuique plus quam determinatum videri debet.

Inuenire tres numeros integros x, y, z, *vt sequentes formulae omnes fiant quadrata:*

$$xy+z=\square;\quad xy+x+y=\square;\quad xy+xz+yz=\square$$
$$xz+y=\square;\quad xz+x+z=\square;\quad xy+xz+yz+x+y+z=\square.$$
$$yz+x=\square;\quad yz+y+z=\square;$$

cuius simplicissima solutio sine dubio est:

$$x=1;\ y=4,\ \text{et}\ z=12$$

tum

tum vero etiam sequentes solutiones in promptu sunt:

$$\begin{array}{llllll} x=1; & x=4; & x=4; & x=1; & x=1; & x=4 \\ y=12; & y=9; & y=12; & y=24; & y=40; & y=33 \\ z=24; & z=28; & z=33; & z=40; & z=60; & z=64 \end{array}$$

Verum si haec conditio insuper sit adiecta, vt ipsi tres numeri quaesiti debeant esse quadrati, in fractis ecce has solutiones:

$$\begin{array}{llll} x=\frac{9}{64}; & x=\frac{49}{64}; & x=\frac{25}{9}; & x=\frac{9}{25} \\ y=\frac{25}{64}; & y=\frac{225}{64}; & y=\frac{64}{9}; & y=\frac{64}{25} \\ z=\frac{49}{16}; & z=\frac{169}{16}; & z=\frac{196}{9}; & z=\frac{196}{25} \end{array}$$

Huiusmodi autem quaestio, inquam, merito pro plusquam determinata habetur, has enim conditiones non pro arbitrio adiecimus, atque in ipsa indagatione huiusmodi conditionum, quas indoles problematis patitur, *praecipua pars artificii* continetur. Namque si quis ad arbitrium conditiones superaddere vellet, admodum probabile esset, problema, vel vnica adiecta, re vera fieri plus quam determinatum; quam ob rem talia problemata, tot conditionibus onerata, recte statim tanquam plus quam determinata spectantur, nisi aliunde constet, conditiones eas ab insigni artifice esse adiectas.

Talia problemata autem iam in ipso Diophanto occurrunt, quae commentatoribus non parum negotii fecerunt, cum quaedam tantum conditiones calculum tantopere occupent, vt reliquarum ratio neutiquam haberi posse videatur. Praemittuntur autem eiusmodi problematibus certae quaedam propositiones, quae ibi Porismata vocantur, in quibus tota solutionis vis continetur. Ostenditur scilicet, si quibusdam conditionibus certo quodam modo satisfiat, tum simul aliis quoque conditionibus quasi sponte satisfieri, ita vt non opus sit calculum seorsim ad eas applicare. Ita pro quaestione exempli loco allegata, qua tres numeri x, y, et z quaeruntur, vt conditiones praescriptae impleantur, porisma praemittendum ita se habet:

Si quaerantur duo numeri x *et* y, *vt* $xy+x+y$ *fiat quadratum, puta* $=uu$, *atque tertius numerus* z *ita capiatur, vt sit* $z=1+x+y\pm 2u$, *tum non solum hae formulae,*

$$xz+x+z \text{ et } yz+y+z \textit{ fient quadrata:}$$

sed etiam hae,

$$xy+z;\ xz+y \text{ et } yz+x$$

vna cum istis

$$xy+xz+yz \text{ et } xy+xz+yz+x+y+z$$

sponte fient quadrata.

Cum igitur huic vnicae conditioni, qua formula $xy+x+y$ quadratum reddi debet, facillime satisfiat, ope huius porismatis quaestio tam multis conditionibus circumscripta, vt plus quam determinata videatur, nullo plane labore infinitis modis resoluitur, et quidem in numeris integris.

Ponatur enim $xy+x+y=uu$, et cum sit

$$xy+x+y+1=(x+1)(y+1)=uu+1$$

pro uu tale sumatur quadratum, quod vnitate auctum habeat factores; sit scilicet $uu+1=mn$, et numeri problemati satisfacientes erunt:

$$x=m-1;\ y=n-1;\ \text{et } z=m+n-1\pm 2u$$

In

In huiusmodi igitur problematibus totum negotium vertitur in inuentione idoneorum illorum porismatum, quibus tota solutio ita contineatur, vt statim atque aliquibus conditionibus satisfecerimus, simul reliquas adimpleuerimus. Cum igitur ratio talium porismatum a nemine adhuc sit explicata, si eam accuratius exposuero, non exiguum incrementum vniuersa Analysis Diophantaea inde accepisse erit existimanda. Tota autem horum porismatum ratio sequenti lemmati per se perspicuo inniti videtur.

Lemma.

I. Si inuenti fuerint valores litterarum z, y, x *etc. quibus aequationi* $W = 0$ *satisfiat, existente* W *functione quacunque illarum litterarum* z, y, x *etc. atque* P, Q, R *etc. eiusmodi fuerint quantitates, vt* $P \pm W, Q \pm W, R \pm W$ *etc. fiant quadrata: tum iisdem valoribus pro* z, y, x *etc. assumtis, fient quoque quantitates* P, Q, R, *etc. quadrata.*

Ratio huius lemmatis est manifesta, quia pro litteris z, y, x etc. tales valores assumi ponuntur, vt fiat $W = o$, ideoque si $P \pm W$, $Q \pm W$, $R \pm W$ sint quadrata, etiam quantitates P, Q, R, ipsae quadrata sint necesse est.

Coroll. 1.

2. Formulae quoque P, Q, R etc. reddentur quadrata, si fuerint $P + \alpha W$; $Q + \beta W$; $R + \gamma W$ etc. quadrata, vel etiam generalius, si istae expressiones:

$$P + \alpha W + \zeta W^2; \quad Q + \beta W + \eta W^2; \quad R + \gamma W + \theta W^2$$

fuerint quadrata.

Coroll. 2.

5. Vicissim ergo etiam si litteris z, y, x etc. tales assignati fuerint valores, vt fiat $W = o$; tum etiam omnes huius generis formulae $PP + \alpha W$; $QQ + \beta W$; $RR + \gamma W$ etc. fient quadrata.

Coroll. 3.

4. Quodsi ergo aequationi $W = o$ infinitis diuersis modis satisfieri queat, tum iisdem modis omnes huius generis formulae $PP + \alpha W$; $QQ + \beta W$; $RR + \gamma W$ etc. quadrata efficientur.

Coroll. 4.

5. Cum igitur numerus huiusmodi formularum in infinitum augeri possit, manifestum est, quomodo etiam infinitae conditiones praescribi possint, quibus omnibus satisfiat, simul atque vnicae conditioni, scilicet aequationi $W = o$, fuerit satisfactum.

Coroll. 5.

6. Simili modo hoc lemma ad cubos aliasue potestates altiores quascunque extendetur. Si enim factum fuerit $W = o$, tum quoque omnes huiusmodi formulae $P^3 + \alpha W$ fient cubi, et hae $P^4 + \alpha W$ biquadrata: et ita porro, quaecunque etiam quantitates pro P accipiantur.

Scholion. 1.

7. Ratio quidem huius lemmatis tam est obuia, vt id nihil in recessu habere videatur: si enim P, Q, R, etc.

etc. cum W fuerint functiones quaecunque litterarum z, y, x etc. harumque valores quaerantur, quibus sequentes formulae:

$$PP + \alpha W;\ QQ + \beta W;\ RR + \gamma W \text{ etc.}$$

fiant quadrata, statim vtique in oculos incurrit, his omnibus conditionibus satisfieri, dum modo haec vna $W = 0$ adimpleatur: verum plerumque ratio talis compositionis in formulis propositis tam est occulta, vt difficillimum sit eam quantitatem W assignare, qua deleta partes residuae formularum sponte fiant quadrata. Quin etiam non adeo foret difficile hanc compositionem ita abscondere, vt eius inuestigatio iam per se arduum problema constitueret. Vicissim autem data aequatione $W = 0$, operam haud inutiliter collocari arbitror, si formulae simpliciores inuestigentur, quae tum in quadrata abibunt; hoc enim modo plurima insignia et concinna reperientur problemata, quorum solutio erit in promtu, cuiusmodi est id, cuius supra mentio est facta. Hunc in finem aequationem $W = 0$ talem assumi conueniet, vt litterae z, y, etc. in eam aequaliter ingrediantur, atque inter se permutari patiantur; tum enim si PP eiusmodi fuerit quadratum, vt sit $PP + \alpha W$ quadratum, permutandis litteris z, y, x etc. in PP, vnde prodeant QQ, RR etc. etiam $QQ + \alpha W$, et $RR + \alpha W$ fient quadrata.

Scholion. 2.

8. Duplex ergo hinc nascitur tractationis nostrae partitio, primam scilicet constituet litterarum z, y, x etc

circa quas quaestio versatur, numerus, prouti duo, vel tres, vel plures quaeruntur numeri, qui datis conditionibus sint praediti. Alteram partitionem suppeditabit dimensionum numerus, ad quem litterae z, y, x etc. in aequatione $W=0$ assurgunt; quae aequatio cum ita debeat esse comparata, vt resolutionem admittat, nullius quantitatum altior potestas quam secunda occurrere debet, quia alioquin resolutio in numeris rationalibus absolui non posset. Quare generalis forma aequationis $W=0$, quam hic tractabimus erit:

$$0=\alpha+\beta(z+y+x+\text{etc.})+\gamma(zy+zx+yx+\text{etc.})$$
$$+\delta(zz+yy+xx+\text{etc.})+\varepsilon(zzy+zyy+zzx$$
$$+zxx+\text{etc.})+\zeta(zyx+\text{etc.})+\eta(zzyy+zzxx$$
$$+yyxx+\text{etc.})+\theta(zzyx+zyyx+\text{etc.})$$
$$\text{etc.}$$

quandoquidem numeri z, y, x, etc. in ea debent esse permutabiles. Secundum hanc duplicem ergo partitionem sequentia problemata contemplemur, ab iis inchoaturi, in quibus duo numeri z et y quaerendi proponuntur.

Problema I.

9. *Proposita hac aequatione resoluenda:*

$$\alpha=\beta(z+y)$$

inuenio formulas simpliciores, quae per eius resolutionem redduntur quadrata.

SOLV-

Solutio.

Cum huic aequationi $\alpha = \beta(z+y)$ fuerit satisfactum, manifestum est, simul hanc formam generalem

$$PP + M(-\alpha + \beta(y+z))$$

fieri quadratum, quaecunque quantitates pro P et M accipiantur. Quia β euanescere nequit, ponamus $\beta = 1$, vt inter y et z haec subsistat relatio $y+z=a$, sitque

$$PP + M(y+z-a) = \text{Quadrato}$$

vnde sequentes casus notatu dignos euoluamus.

I. *Sit* $M = 2$ erit $PP + 2y + 2z - 2a =$ Quadrato.
Capiatur $P = y - 1$ erit

1) $yy + 2z + 1 - 2a = \square$ et permutatione facta

2) $zz + 2y + 1 - 2a = \square$.

Capiatur $P = y + z - 1$ erit

3) $(y+z)^2 + 1 - 2a = \square$.

Capiatur $P = y - z + 1$ erit

4) $(y-z)^2 + 4y + 1 - 2a = \square$.

5) $(y-z)^2 + 4z + 1 - 2a = \square$.

II. Sit $M = -2$ vnde $PP - 2y - 2z + 2a =$ Quadrato.
Capiatur $P = y + 1$ seu $P = z + 1$ erit

6) $yy - 2z + 1 + 2a = \square$.

7) $zz - 2y + 1 + 2a = \square$.

Capiatur $P = y + z + 1$ erit

8) $(y+z)^2 + 1 + 2a = \square$.

Capia

Capiatur $P = y - z + 1$ erit

9) $(y-z)^2 - 4z + 1 + 2a = \square$.

10) $(y-z)^2 - 4y + 1 + 2a = \square$.

III. Sit $M = 2n$, vnde $PP + 2ny + 2nz - 2na =$ Quadrato, atque non solum formulae praecedentes, sed infinitae aliae, orientur.

Capiatur $P = y - n$ et $P = z - n$ erit,

11) $yy + 2nz + nn - 2na = \square$.

12) $zz + 2ny + nn - 2na = \square$.

Capiatur $P = y - 2n$ et $P = z - 2n$ erit

13) $yy - 2ny + 2nz + 4nn - 2na = \square$.

14) $zz - 2nz + 2ny + 4nn - 2na = \square$.

Capiatur $P = y + z - n$ erit

15) $(y+z)^2 + nn - 2na = \square$.

Capiatur $P = y + z - 2n$ erit

16) $(y+z)^2 - 2n(y+z) + 4nn - 2na = \square$.

Capiatur $P = y - z - n$ erit

17) $(y-z)^2 + 4nz + nn - 2na = \square$.

18) $(y-z)^2 + 4ny + nn - 2na = \square$.

IV. Sit $M = -y$ vnde $PP - yy - yz + ay =$ Quadrato.

Capiatur $P = y$ erit

19) $-yz + ay = \square$.

20) $-yz + az = \square$.

Capiatur $P = y - \frac{1}{2}a$ erit

21) $-yz + \frac{1}{4}aa = \square$.

Capia-

Capiatur $P = y + z$, erit

22) $zz + yz + ay = \square$

23) $yy + yz + az = \square$

Capiatur $P = y + z - \frac{1}{4}a$, erit

24) $zz + yz + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}az + \frac{1}{16}aa = \square$

25) $yy + yz + \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}ay + \frac{1}{16}aa = \square$

V. Sit $M = -z - y$, vnde $PP - (y + z)^2 + a(y + z) =$ Quadrato.

Capiatur $P = y + z$, erit

26) $ay + az = \square$

Capiatur $P = y + z - a$, erit

27) $aa - ay - az = \square$

Capiatur $P = y - z$, erit

28) $-4yz + a(y + z) = \square$

Capiatur $P = y - z - \frac{1}{2}a$, erit

29) $-4yz + 2az + \frac{1}{4}aa = \square$

30) $-4yz + 2ay + \frac{1}{4}aa = \square$

Capiatur $P = y - \frac{1}{2}a$, erit

31) $-zz - 2yz + az + \frac{1}{4}aa = \square$

32) $-yy - 2yz + ay + \frac{1}{4}aa = \square$

VI. Sit $M = (y + z + a)$; vnde $PP + (y + z)^2 - aa =$ Quadrato.

Capiatur $P = yz - 1$, erit

33) $yyzz + yy + zz + 1 - aa = \square$

VII. Sit $M = n(y + z + a)$; vnde $PP + n(y + z)^2 - naa =$ Quadrato.

Capiatur $P = yz - n$, erit

34) $yyzz + nyy + nzz + nn - naa = \square$

VIII. Sit $M = (y+z+a)(y-z+a)(z-y+a)$, vnde fit

$PP - y^4 - z^4 - a^4 + 2yyzz + 2aayy + 2aazz =$ Quadrato.

Capiatur $P = yy - zz$, erit

35) $2yy + 2zz - aa = \square$

Capiatur $P = yy + zz + aa$, erit

36) $yyzz + aayy + aazz = \square$

IX. Sit $M = 3(y+z+a)(y-z+a)(z-y+a)$, vnde fit

$PP - 3y^4 - 3z^4 - 3a^4 + 6yyzz + 6aayy + 6aazz =$ Quadrato.

Capiatur $P = 2yy + 2zz + 2aa$, erit

37) $y^4 + z^4 + 14yyzz + 14aayy + 14aazz + a^4 = \square$

Capiatur $P = 2yy + 2zz - 2aa$, erit

38) $y^4 + z^4 + a^4 + 14yyzz - 2aayy - 2aazz = \square$

39) $y^4 + z^4 + a^4 - 2yyzz + 14aayy - 2aazz = \square$

40) $y^4 + z^4 + a^4 - 2yyzz - 2aayy + 14aazz = \square$

X. Sit generalius $M = (nn-1)(y+z+a)(y-z+a)$
$(z-y+a)$, vnde fit

$PP - (nn-1)(y^4 + z^4 + a^4 - 2yyzz - 2aayy - 2aazz) =$ Quadrato.

Capiatur $P = n(yy + zz + aa)$, erit

41) $y^4 + z^4 + a^4 + 2(2nn-1)(yyzz + aayy + aazz) = \square$

Capiatur $P = n(yy + zz - aa)$, erit

42) $y^4 + z^4 + a^4 + 2(2nn-1)yyzz - 2aayy - 2aazz = \square$

43) $y^4 + z^4 + a^4 - 2yyzz + 2(2nn-1)aayy - 2aazz = \square$

44) $y^4 + z^4 + a^4 - 2yyzz - 2aayy + 2(2nn-1)aazz = \square$.

COROL.

Coroll. 1.

10. Ex his satis intelligitur infinitas exhiberi posse formulas, quae omnes per eandem relationem aequatione $y+z=a$ contentam in numeros quadratos abeant. Quotcunque ergo formulae proponantur ad quadrata reducendae, dummodo illae in his erutis contineantur, omnibus simul satisfiet ponendo $y+z=a$.

Coroll. 2.

11. Ita si a sit $=1$: sequentibus formulis omnibus: $yy+4z=\square$; $yy-y+z=\square$; $y+z=\square$; $y-yz=\square$ $zz+4y=\square$; $zz-z+y=\square$; $(y+z)^2-1=\square$; $z-yz=\square$ $yyzz+yy+zz=\square$; $2yy+2zz-1=\square$ satis fit ponendo $y+z=1$ seu $y=1-z$.

Coroll. 3.

12. Imprimis hic notanda est forma $yyzz+yy+zz$, quae in quadratum transit, si capiatur $y=1-z$, vel magis generaliter $y=\pm 1\pm z$. Solutio haec apud Diophantum frequentissime occurrit, cuius fundamentum in porismate quodam constituit, pluraque affert problemata, quae eius beneficio resoluuntur.

Coroll. 4.

13. Simili modo haec forma latius patens $yyzz+aayy+aazz$ redditur quadratum, ponendo $y=\pm a\pm z$. Atque haec eadem positio facit etiam

hanc formam $yyzz + nyy + nzz + nn - naa$ quadratum, quicunque numerus pro n assumatur. Vnde si $a = 1$, haec forma $yyzz + nyy + nzz + nn - n$ siue haec: $(yy + n)(zz + n) - n$, fit quadratum, ponendo $z = y \pm 1$. Quod etiam est insigne porisma Diophanti.

Scholion.

14. Omni attentione vtique dignum est, quod tam leui opera pluribus conditionibus simul satisfieri possit, cum quaelibet conditio peculiarem operationem exigere videatur. Quin etiam hic eiusmodi formulae occurrunt, quae si solae proponerentur, per methodos consuetas non nisi difficulter resolui possent, cuiusmodi est haec:

$$y^4 + z^4 + a^4 + 14yyzz + 14aayy + 14aazz = \text{Quadrato:}$$

cuius solutio si more consueto tentetur, non exiguis difficultatibus implicata deprehenditur: ex quo si praeterea aliae conditiones praescribantur, quibus simul satisfieri oporteat, quaestio non immerito plus quam determinata, ac vires analyseos transcendens videri debet. Continetur ergo in euolutione huius problematis iam porisma amplissimum, quod in Analysi Diophantaea summum habet vsum, quod cum natum sit ex positione simplicissima $z + y = a$, ita formulae magis compositae nos ad profundiora ac magis recondita porismata manuducent.

Problema 2.

15. Proposita hac aequatione resoluenda:

$$yz - a(y + z) + b = 0$$

inue-

inuenire formulas notabiliores, quae per eius resolutionem redduntur quadrata.

Solutio.

Sumta relatione inter numeros y et z ex hac aequatione

$$yz - a(y+z) + b = 0$$

haec forma generalis $PP + M(yz - a(y+z) + b)$ euadet quadratum: cuius ergo species notabiliores euoluamus.

I. Sit $M = 2$, vt habeatur

$$PP + 2yz - 2a(y+z) + 2b = \text{Quadrato.}$$

Capiatur $P = y - z$, eritque

$$1)\ yy + zz - 2a(y+z) + 2b = \square$$

Capiatur $P = y - z + a$, erit

$$2)\ yy + zz - 4az + 2b + aa = \square$$

$$3)\ yy + zz - 4ay + 2b + aa = \square$$

II. Sit $M = -2$, vt habeatur

$$PP - 2yz + 2a(y+z) - 2b = \text{Quadrato.}$$

Capiatur $P = y + z$, erit

$$4)\ yy + zz + 2a(y+z) - 2b = \square$$

Capiatur $P = y + z - a$, erit

$$5)\ yy + zz + aa - 2b = \square$$

III. Sit $M = 2n$, vt habeatur

$$PP + 2nyz - 2na(y+z) + 2nb = \text{Quadrato.}$$

 Capia-

Capiatur $P = yz - n$, erit

$$6)\ yyzz - 2n\,a(y+z) + 2nb + nn = \square$$

Capiatur $P = y + z + na$, erit

$$7)\ yy + zz + 2(n+1)yz + nnaa + 2nb = \square$$

IV. ſit $M = yz + a(y+z) - \mathfrak{b}$, vt habeatur

$$PP + yyzz - aa(y+z)^2 + (b-\mathfrak{b})y + a(b+\mathfrak{b})(y+z) - b\mathfrak{b} = \text{Quadrato}.$$

Capiatur $P = m(y+z) + n$, vt ſit

$$yyzz + (mm-aa)(y+z)^2 + (b-\mathfrak{b})yz + 2mn(y+z) + nn = \text{Quadrato}.$$
$$+ a(b+\mathfrak{b})(y+z) - b\mathfrak{b}$$

Fiat $mn = -\frac{1}{2}a(b+\mathfrak{b})$ et $2(mm-aa) + b - \mathfrak{b} = 0$, ſiue

$n = \frac{a}{m}(aa - mm - b)$ et $\mathfrak{b} = b + 2(mm - aa)$, erit

$$8)\ yyzz + (mm-aa)(yy+zz) + \frac{aa-mm}{mm}(bb + (aa-2b)(aa-mm)) = \square.$$

Coroll. 1.

16. Hinc in aequatione canonica $yz - a(y+z) + b = 0$ litterae a et b ita determinari poſſunt, vt haec forma

$$yyzz + cc(yy+zz) \text{ fiat quadratum.}$$

Capiatur enim $mm = aa + cc$, et fiat $bb + 2bcc - aacc = 0$ ſeu $b = -cc \pm c\sqrt{(aa+cc)}$. Quare pro a eiusmodi ſumatur numerus, vt $aa + cc$ fiat quadratum, tumque erit

$$yz - a(y+z) - cc \pm c\sqrt{(aa+cc)} = 0, \text{ ſiue}$$
$$(y-a)(z-a) = aa + cc \pm c\sqrt{(aa+cc)}$$

At vero hinc conficietur:

$$\sqrt{(yyzz + ccyy + cczz)} = (y+z)\sqrt{(aa+cc)} - ac$$

COROL.

Coroll. 2.

17. Ad formam ergo $yyzz + ccyy + cczz$ quadratum reddendam ſumatur primum numerus a, vt $\sqrt{(aa+cc)}$ fiat rationale, eritque tum

$$z = \frac{ay + cc \pm c\sqrt{(aa+cc)}}{y-a}$$

Haec autem ſolutio ſimul praecedentem eiusdem formae in ſe complectitur, caſu, quo a capitur infinitum, tum enim oritur $z = -y \pm c$, omnino vt ante, ideoque haec ſolutio latius patet quam illa.

Coroll. 3.

18. Si in forma (8) nulla limitatio fiat, ita vt aequatio propoſita $yz - a(y+z) + b = 0$ generatim valeat, ea etiam hoc modo referri poteſt

$$(yy+mm-aa)(zz+mm-aa) - \frac{(mm-aa)}{mm}(mm-aa+b)^2 = \text{Quadrato}.$$

Quare poſito $mm-aa=p$ et $b+p=m=\sqrt{(aa+p)}$, haec aequatio: $(yy+p)(zz+p) = VV+p$ reſoluetur hac determinatione $yz - a(y+z) - p + \sqrt{(aa+p)} = 0$ dummodo pro a talis accipiatur numerus, quo $aa+p$ fiat quadratum.

Coroll. 4.

19. Si ſtatuatur $\frac{b+p}{m}=q$ ſeu $b=-p+q\sqrt{(aa+p)}$, vt ſit

$$yz - a(y+z) - p + q\sqrt{(aa+p)} = 0$$

hac

hac determinatione, si modo $aa+p$ fuerit quadratum, satisfiet huic conditioni

$$(yy+p)(zz+p)=VV+pqq$$

erit autem $V=(y+z)\sqrt{(aa+p)}-aq$

Coroll. 5.

20. Hinc si dato numero p quaerantur numeri y et z vt fiat $(yy+p)(zz+p)=$ Quadrato, posito $q=o$, huic conditioni satisfiet statuendo $yz-a(y+z)-p=o$, existente $aa+p$ numero quadrato. Seu sumatur $(y-a)(z-a)=aa+p$, vnde si $aa+p$ in factores resoluatur, commode ambo numeri y et z definiuntur.

Coroll. 6.

21. Si sit $a=o$, forma (8) fiet:

$$yyzz+mm(yy+zz)-bb-2mmb=\square$$

quae conditio ergo adimplebitur hac aequatione $yz+b=o$. Facto ergo $b=-2mm$, ista formula

$yyzz+mmyy+mmzz$ reddetur quadratum,

sumendo $yz=2mm$, quod quidem per se est manifestum.

Problema 3.

22. Proposita aequatione resoluenda

$$yy+zz-2nyz-a=o$$

Inuenire formulas notabiliores, quae per eam redduntur quadrata

SOLV-

Solutio.

Hinc ergo ista forma generalis erit quadratum
$PP + M(yy + zz - 2nyz - a) = $ Quadrato.

I. Sit $M = -1$ et $P = y \pm z$, erit

1) $2(n+1)yz + a = \square$

2) $2(n-1)yz + a = \square$

II. Sit $M = m$ et $P = yz + mn$, erit

3) $yyzz + myy + mzz - ma + mmnn = \square$

III. Sit $M = 2nyz$ et $P = 2nyz$, erit

4) $2nyz(yy + zz) - 2nayz = \square$

IV. Sit $M = -zz$ et $P = zz + nyz + \frac{1}{2}a$, erit

5) $(nn-1)yyzz + nayz + \frac{1}{4}aa = \square$

Coroll. 1.

23. Si ponamus $a = mnn$, peruenimus ad hanc formam:

$$yyzz + myy + mzz$$

quae ergo redditur quadratum, per hanc aequationem:

$$yy + zz - 2nyz - mnn = 0$$

vnde fit $z = ny \pm \sqrt{((nn-1)yy + mnn)}$

Quare pro y talis numerus assumi debet, vt $(nn-1)yy + mnn$ fiat quadratum.

Coroll. 2.

24. Quoniam hic numerus n arbitrio nostro relinquitur, sumatur talis, vt $nn-1$ prodeat quadratum,

 sic

sic enim commodissime forma $(nn-1)yy+mnn$ ad quadratum reducetur: capiatur scilicet $n=\frac{kk+1}{2k}$.

Scholion.

25. Hisce formulis, quae duas indeterminatas inuoluunt, fusius non immoror, quoniam ex allatis perspicuum est, quomodo huiusmodi formularum inuestigationem in infinitum extendere liceat. Pergo ergo ad tres indeterminatas, vbi plurima egregia porismata occurrunt, quorum praecipua hic explicabo.

Problema 4.

26. Proposita hac aequatione resoluenda:

$$a=x+y+z$$

definire formulas notabiliores, quae per eius resolutionem quadrata redduntur.

Solutio.

Quadratum ergo generatim erit haec forma:

$$PP+M(x+y+z-a)$$

Sit $M=2n$, vt fiat

$$PP+2n(x+y+z)-2na=\square$$

Capiatur $P=x-n$, erit

1) $xx+2n(y+z)+nn-2na=\square$

2) $yy+2n(x+z)+nn-2na=\square$

3) $zz+2n(x+y)+nn-2na=\square$

Capiatur $P=x+y-n$, erit

4) $(x+y)^2+2nz+nn-2na=\square$

5) $(x+z)^2+2ny+nn-2na=\square$

6) $(y+z)^2+2nx+nn-2na=\square$

Sit

Sit $M = 2nxy$ et $P = xy - nx - ny$, erit

7) $xxyy + 2nxyz + nnxx + nnyy + 2nnxy - 2naxy = \Box$

8) $xxzz + 2nxyz + nnxx + nnzz + 2n(n-a)xz = \Box$

9) $yyzz + 2nxyz + nnyy + nnzz + 2n(n-a)yz = \Box$

Sit $M = -(a + x + y + z)$ et $P = x + y - z$, erit

10) $aa - 4xz - 4yz = \Box$

11) $aa - 4xy - 4yz = \Box$

12) $aa - 4xy - 4xz = \Box$

Sit $M = -n(a + x + y + z)$ et $P = xy + xz + yz + n$, erit

13) $(xy + xz + yz)^2 - n(xx + yy + zz) + nn + naa = \Box$.

Coroll. 1.

27. Sit $n = 2a$; et $a = \frac{1}{4}$, atque his conditionibus:

$$xx + y + z = \Box \quad (x + y)^2 + z = \Box$$
$$yy + x + z = \Box \quad (x + z)^2 + y = \Box$$
$$zz + x + y = \Box \quad (y + z)^2 + x = \Box$$

satisfiet ponendo $x + y + z = \frac{1}{4}$.

Coroll. 2.

28. Sit $n = 1 = a$, atque his conditionibus:

$$xxyy + 2xyz + xx + yy = \Box$$
$$xxzz + 2xyz + xx + zz = \Box$$
$$yyzz + 2xyz + yy + zz = \Box$$

satisfiet ponendo $x + y + z = 1$.

Coroll. 3.

29. Sit $a=2$, atque his conditionibus

$$1-xz-yz=\square$$
$$1-xy-yz=\square$$
$$1-xy-xz=\square$$

satisfiet ponendo $x+y+z=2$.

Problema 5.

30. Proposita hac aequatione resoluenda

$$xy+xz+yz=a(n+y+z)+b$$

definire formulas notabiliores, quae per eius resolutionem redduntur quadrata.

Solutio.

Erit ergo in genere haec formula:

$$PP+M(xy+xz+yz)-a(x+y+z)-b)=\text{Quadrato.}$$

Sit $M=2$, vt habeatur:

$$PP+2(xy+xz+yz)-2a(x+y+z)-2b=\text{Quadrato.}$$

Capiatur $P=x+y+z+a$, erit

1) $xx+yy+zz+4(xy+xz+yz)+aa-2b=\text{Quadrato.}$

Capiatur $P=x+y-z+a$, erit

2) $xx+yy+zz+4xy-4az+aa-2b=\square$

3) $xx+yy+zz+4xz-4ay+aa-2b=\square$

4) $xx+yy+zz+4yz-4ax+aa-2b=\square$

Capiatur $P=x-y$, erit

5) $xx+yy+2(x+y)z-2a(x+y+z)-2b=\square$

6) $xx+zz+2(x+z)y-2a(x+y+z)-2b=\square$

7) $yy+zz+2(y+z)x-2a(x+y+z)-2b=\square$

Sit

Sit $M = -2$ et $P = x + y + z - a$, erit

8) $xx + yy + zz + aa + 2b = \square$.

Problema 6.

31. Proposita hac aequatione

$$xx + yy + zz = 2xy + 2xz + 2yz + a$$

definire formulas simpliciores, quae per eius resolutionem quadrata redduntur.

Solutio.

In genere ergo haec formula erit:

$PP + M(xx + yy + zz - 2xy - 2xz - 2yz - a) =$ Quadrato.

Sit $M = -1$, ac ponatur $P = x + y + z$, erit

1) $4xy + 4xz + 4yz + a = \square$

Sit $M = -1$ et $P = x + y - z$, erit

2) $4xy + a = \square$

3) $4xz + a = \square$

4) $4yz + a = \square$

Sit $M = -1$ et $P = x - y$, erit

5) $a + 2(x + y)z - zz = \square$

6) $a + 2(x + z)y - yy = \square$

7) $a + 2(y + z)x - xx = \square$.

Coroll. 1.

32. Posito $a = 4n$, vt sit $xx + yy + zz = 2xy + 2xz + 2yz + 4n$, fient simul sequentes formulae quadrata.

$$xy+n=\square$$
$$xz+n=\square \quad \text{et} \quad xy+xz+yz+n=\square$$
$$yz+n=\square$$

Vnde haec elegans quaestio Diophantea resoluitur

Dato numero quocunque n, inuenire tres numeros, vt producta ex binis singula, illo numero aucta, fiant quadrata, quibus conditionibus adiungi potest haec, vt summa productorum ex binis eodem numero aucta quoque fiat quadratum.

Coroll. 2.

33. Cum enim ex aequatione sit:

$$z=x+y\pm 2\sqrt{(xy+n)}$$

sumantur pro x et y tales numeri, quibus $xy+n$ reddatur quadratum, puta $xy+n=uu$; indeque elicietur duplex valor pro numero z, scilicet $z=x+y\pm 2u$, quorum vterque cum x et y omnibus conditionibus aeque satisfacit,

Coroll. 3.

34. Cum autem sit $\sqrt{(xy+n)}=u$, erunt, sumto tertio numero $z=x+y+2u$, reliquae formulae

$$\sqrt{(xz+n)}=\frac{x+z-y}{2}=x+u$$
$$\sqrt{(yz+n)}=\frac{y+z-x}{2}=y+u$$
$$\sqrt{(xy+xz+yz+n)}=\frac{x+y+z}{2}=x+y+u.$$

Problema 7.

35. Proposita hac aequatione:

$$xx+yyzz=2xy+2yz+2xz+2a(x+y+z)+b$$

definire

definire formulas notabiliores, quae per eius resolutionem redduntur quadrata.

Solutio.

In genere ergo quadratum erit haec forma:

$$PP+M(xx+yy+zz-2xy-2yz-2xz-2a(x+y+z)-b)$$

Sit $M=-1$ et capiatur $P=x+y+z+a$, erit

1) $4xy+4xz+4yz+4a(x+y+z)+aa+b=\square$

Capiatur $P=x+y+z-a$, erit

2) $4xy+4xz+4yz+aa+b=\square$

Capiatur $P=x+y-z+a$, erit

3) $4xy+4a(x+y)+aa+b=\square$

4) $4xz+4a(x+z)+aa+b=\square$

5) $4yz+4a(y+z)+aa+b=\square$

Capiatur $P=x+y-z-a$, erit

6) $4xy+4az+aa+b=\square$

7) $4xz+4ay+aa+b=\square$

8) $4yz+4ax+aa+b=\square$.

Coroll. 1.

36. Ad formulas has facillime soluendas, ponatur tertia $4xy+4a(x+y)+aa+b$, aequalis quadrato cuipiam uu et ob $4(x+a)(y+a)=uu-b+3aa$,

seu $(x+a)(y+a)=\frac{1}{4}(uu-b+3aa)$

Ex factoribus numeri $\frac{1}{4}(uu-b+3aa)$ commodissime definiuntur numeri duo x et y; tertius autem z colligitur

ex

ex formae tertiae radice quadrata $x+y-z+a$, quae ergo eſt $=u$, vnde fit $z=x+y+a\pm u$.

Coroll. 2.

37) Si ſit $b=-aa$, per reſolutionem huius aequationis

$$xx+yy+zz=2xy+2yz+2xz+2a(x+y+z)-aa$$

ſequentes formulae omnes in quadrata abibunt:

$$xy+a(x+y)=\square;\ xy+az=\square$$
$$xz+a(x+z)=\square;\ xz+ay=\square$$
$$yz+a(y+z)=\square;\ yz+ax=\square$$
$$xy+xz+yz=\square$$
$$xy+xz+yz+a(x+y+z)=\square$$

Satisfiet autem ſumendo:

$$z=x+y+a\pm 2\sqrt{(xy+a(x+y))}=x+y+a\pm 2u$$

poſito $(x+a)(y+a)=uu+aa$.

Coroll. 3.

38. In hoc Coroll. continetur illud ipſum Problema, cuius initio feci mentionem; ſi quidem ponatur $a=1$. Atque ex iisdem formulis ſolui quoque poteſt quaeſtio, in qua ipſi numeri x, y, z quadrati eſſe debent, cuius ſolutionem hic ſubiungam.

Quaeſtio.

39. *Inuenire tres numeros quadratos, vt ad productum binorum, ſiue eorumdem ſumma, ſiue reliquus addatur, quadratum prodeat, atque vt inſuper tam ſumma*

summa productorum ex binis ipsa, quam eadem, summa numerorum aucta, fiat quadratum.

Positis ergo xx, yy, zz quadratis, qui quaeruntur, sequentes formulas quadrata reddi oportet.

$$xxyy + xx + yy = \square\,;\quad xxyy + zz = \square$$
$$xxzz + xx + zz = \square\,;\quad xxzz + yy = \square$$
$$yyzz + yy + zz = \square\,;\quad yyzz + xx = \square$$
$$xxyy + xxzz + yyzz = \square$$
$$xxyy + xxzz + yyzz + xx + yy + zz = \square.$$

His autem omnibus satisfit, dummodo statuatur

$$zz = xx + yy + 1 \pm 2\sqrt{(xxyy + xx + yy)}.$$

Supra autem vidimus, formam $xxyy + xx + yy$ quadratum fieri, si ponatur $y = x + 1$. Sit igitur $y = x + 1$, eritque

$$zz = 2xx + 2x + 2 \pm 2\sqrt{(x^4 + 2x^3 + 3xx + 2x + 1)} \text{ seu}$$
$$zz = 4(xx + x + 1).$$

Tantum ergo superest, vt $xx + x + 1$ reddatur quadratum, quod posita radice $-x+t$ praebet

$$x = \frac{tt-1}{2t+1}\,;\ \text{et}\ \sqrt{(xx + x + 1)} = \frac{tt+t+1}{2t+1}$$

vnde fit $z = 2\sqrt{(xx + x + 1)} = \frac{2(tt+t+1)}{2t+1}$.

Quadratorum ergo trium quaesitorum radices sunt:

$$x = \frac{tt-1}{2t+1},\ y = \frac{tt+2t}{2t+1}\,;\ z = \frac{2tt+2t+2}{2t+1}$$

Vel quo facilius pro t fractiones capi queant, statuatur $t = \frac{r-q}{2q}$, eruntque hae radices

$$x = \frac{3qq+2qr-rr}{4qr}\,;\ y = \frac{rr+2qr-3qq}{4qr}\,;\ z = \frac{rr+3qq}{2qr}$$

commode in vſum vocari poſſunt, quando is integralis tantum valor inueſtigatur, cum variabili valor quidem determinatus tribuitur. Neque vero hunc valorem pro lubitu aſſumere licet, ſed potius ita comparatum eſſe oportet, vt iam in formula differentiali ſingulari gaudeat proprietate, dum eam, vel ad nihilum, vel ad infinitum, redigit.

Huiusmodi autem caſus iam prae ceteris notatu inprimis digni, atque in applicatione ad praxin potiſſimum quaeri ſolent, ita vt plerumque quaeſtio verſari ſoleat in valore integralium pro huiusmodi quodam caſu inueniendo. Ita ſi de circuli quadratura agitur, vel huius formulae $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ valor deſideratur, caſu, quo $x = 1$, vel huius formulae $\int \frac{dx}{1+xx}$, caſu, quo $x = \infty$: ibi autem hoc caſu differentiale ipſum euadit infinitum, hic vero euaneſcit.

Quo igitur rem generalius complectar, duplicis generis formulas integrales hic euoluam: quae ſint $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^k$ et $\int \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^n)^k}$, quarum vtramque ita integrari aſſumo, vt euaneſcat poſito $x = 0$. Tum vero prioris integralis $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^k$ eum tantum valorem determinare in animo eſt, quem accipit ſi ponatur $x = 1$: poſterioris vero integralis $\int \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^n)^k}$ illum valorem, quem caſu $x = \infty$ ſortitur, tantum inveſtigabo. Euidens autem eſt hos integralium caſus prae reliquis tali eminenti praerogatiua gaudere, vt inprimis euolui mereantur.

Quan-

Quanquam hic elegantiae consulens coefficientes omisi, tamen perspicuum est, has formulas aeque late patere, ac si tales coefficientes essent adiecti. Formula namque huiusmodi $\int \gamma y^{m-1} dy (\alpha - \beta y^n)^k$, posito $\frac{\beta y^n}{\alpha} = x^n$ manifesto ad allatam $\int x^{m-1} dx (1 - x^n)^k$, reducitur, neque propterea latius patere est censenda, at simili reductione haec formula $\int \frac{\gamma y^{m-1} dy}{(\alpha + \beta y^n)^k}$ in altera $\int \frac{x^{m-1} dx}{(1 + x^n)^k}$ continetur, vnde omnino superfluum esset, loco formularum nostrarum simpliciori specie expressarum, has magis complicatas adhibere velle.

Verum etiam altera formularum sumtarum in altera continetur, ita vt sufficiat alterutram tantummodo, quam sum traditurus, tractasse.

Si enim ponatur $x = \frac{y}{(1 + y^n)^{\frac{1}{n}}}$, erit $1 - x^n = \frac{1}{1 + y^n}$: $x^m = \frac{y^m}{(1 + y^n)^{\frac{m}{n}}}$ et $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y(1 + y^n)}$: quibus valoribus substitutis obtinebitur

$$\int x^{m-1} dx (1 - x^n)^k = \int \frac{y^{m-1} dy}{(1 + y^n)^{k + 1 + \frac{m}{n}}},$$

his integralibus ita sumtis, vt euanescant posito $x = o$ et $y = o$; quae conditio hic semper subintelligi debet. Cum igitur posito $y = \infty$, fiat $x = 1$, habebimus sequens Theorema.

Theorema I.

I. *Valor formulae integralis* $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^k$ *casu* $x=1$, *aequalis est valori huius formulae integralis* $\int \frac{y^{m-1}dy}{(1+y^n)^{k+1+\frac{m}{n}}}$ *casu* $y=\infty$.

Cuius aequalitatis ratio est, quod illa forma actu transmutatur in hanc, si ponatur $x=\frac{y}{(1+y^n)^{\frac{1}{n}}}$

Sequens Theorema, quod per similem reductionem oritur, non parum quoque vtilitatis habebit, quod ideo cum sua demonstratione apponam.

Theorema 2.

2. Valor huius formulae integralis $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^k$ casu $x=1$, aequalis est valori huius formulae integralis $\int y^{nk+n-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}$ etiam casu $y=1$.

Demonstratio.

Ponatur $x=(1-y^n)^{\frac{1}{n}}$, vt sit $1-x^n=y^n$; $x^m=(1-y^n)^{\frac{m}{n}}$ et $\frac{dx}{x}=\frac{-y^{n-1}dy}{1-y^n}$, quibus valoribus substitutis habebitur.

$$x^{m-1}dx(1-x^n)^k=-y^{nk+n-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}$$

Sit $Y=\int y^{nk+n-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}$, integrali ita sumto, vt euanescat posito $y=0$; tum posito $y=1$, abeat Y in A. Iam cum illas formulas ita integrari oporteat, vt euanescant posito $x=0$, quo casu fit $y=1$, erit:

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^k=A-Y.$$

Pona-

Ponatur nunc $x = 1$, quo casu fit $y = 0$ ideoque et $Y = 0$, et formula nostra integralis fiet $= A$: seu integrale $\int x^{m-1} dx\,(1-x^n)^k$ casu $x = 1$ aequale erit integrali $\int y^{nk+n-1} dy\,(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}$ casu $y = 1$. Q. E. D.

Coroll. 1.

3. Cum igitur hae tres formulae:

$$\text{I. } \int x^{m-1}dx(1-x^n)^k;\ \text{II. } \int \frac{y^{m-1}dy}{(1+y^n)^{k+1+\frac{m}{n}}};\ \text{III. } \int z^{nk+n-1}dz$$

$(1-z^n)^{\frac{m-n}{n}}$ ita a se inuicem pendeant, vt prima transeat in secundam posito $x = \frac{y}{(1+y^n)^{\frac{1}{n}}}$, at vero posito $x = (1-z^n)^{\frac{1}{n}}$ ea abeat in tertiam negatiue sumtam, manifestum est, quoties vna harum fuerit absolute integrabilis, toties et binas reliquas fore absolute integrabiles.

Coroll. 2.

4. Prima autem absolute est integrabilis, vti per se est perspicuum, si sit k numerus integer affirmatiuus: quicunque numerus pro m statuatur. Excipiuntur tamen casus, quibus m aequatur cuipiam numero huius progressionis: $0; -n; -2n; -3n; \ldots\ldots -kn$; his enim casibus pars integralis pendebit a logarithmis. Casus ergo hi excipiendi huc redeunt, vt integratio absoluta succedat, existente k numero integro affirmatiuo, nisi $-\frac{m}{n}$ sit numerus integer affirmatiuus, vel minor, quam k, vel ipsi k aequalis. Vel nisi $k + \frac{m}{n}$ sit numerus integer affirmatiuus non maior quam k.

Coroll.

Coroll. 3.

5. Simili modo forma secunda erit integrabilis, si $-k-1-\frac{m}{n}$ fuerit numerus integer affirmatiuus, puta i; casus autem excipiuntur, quibus $-\frac{m}{n}$ pariter est numerus integer affirmatiuus non maior quam i. Vel si denotet ω numerum quemcunque affirmatiuum integrum ex hac serie:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ i,$$

casus excipiuntur, quibus $-\frac{m}{n}=\omega$.

Coroll. 4.

6. Tertia autem formula absolute erit integrabilis, si $\frac{m-n}{n}$ fuerit numerus integer affirmatiuus, puta i; excipiuntur autem casus, quibus $-k-1=\omega$, denotante ω numerum quemcunque integrum affirmatiuum, non maiorem, quam i.

Coroll. 5.

7. His ergo notatis formula $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^k$ absolute erit integrabilis, casibus sequentibus, in quibus i numerum affirmatiuum integrum quemcunque denotat, ω autem quemlibet numerum integrum affirmatiuum ipso i non maiorem.

I. Si $k=i$ neque tamen $-\frac{m}{n}=\omega$.
II. Si $k-1-\frac{m}{n}=i$ neque tamen $-\frac{m}{n}=\omega$ (vel $-k-1=\omega$)
III. Si $\frac{m-1}{n}=i$ neque tamen $-k-1=\omega$.

Coroll. 6.

8. Manifestum autem est, hos eosdem integrabilitatis casus locum esse habituros in formula hac latius paten-

patente $\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{k}$, pro quo demonſtratio pari modo adornatur. Atque ex his tribus conditionibus caſus integrabilitatis omnium huiusmodi formularum diiudicari ſolent.

Quanquam haec ad meum inſtitutum non pertinent, tamen quia tam facile ex binis Theorematibus praemiſſis fluunt, non incongruum eſt viſum, ea his adiicere. Nunc igitur ad verum fundamentum dicendorum progredior, quod reductione integralium ad alias formas nititur. Quam quo diſtinctius exponam, hanc formam algebraicam contemplor: $x^{\alpha}(1-x^{n})^{\gamma}=P$, qua differentiata obtineo:

$$dP=\alpha x^{\alpha-1}dx(1-x^{n})^{\gamma}-\gamma n x^{\alpha+n-1}dx(1-x^{n})^{\gamma-1}$$

quae adhuc aliis modis in duo membra diſpeſci poteſt, veluti:

$$dP=\alpha x^{\alpha-1}dx(1-x^{n})^{\gamma-1}-(\alpha+\gamma n)x^{\alpha+n-1}dx(1-x^{n})^{\gamma-1}$$

Tum vero, ſi in membro poſteriori pro x^{n} ſcribatur $1-(1-x^{n})$, prior forma dabit

$$dP=(\alpha+\gamma n)x^{\alpha-1}dx(1-x^{n})^{\gamma}-\gamma n x^{\alpha-1}dx(1-x^{n})^{\gamma-1}$$

poſterior vero eodem redit. Vnde integrando obtinemus

$$P=\alpha\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{n})^{\gamma}-\gamma n\int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^{n})^{\gamma-1}$$

$$P=\alpha\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{n})^{\gamma-1}-(\alpha+\gamma n)\int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^{n})^{\gamma-1}$$

$$P=(\alpha+\gamma n)\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{n})^{\gamma}-\gamma n\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{n})^{\gamma-1}$$

Quae integralia cum euaneſcere debeant poſito $x=0$, neceſſe eſt, vt eodem caſu $P x^{\alpha}(1-x^{n})^{\gamma}$ euaneſcat, quod quidem ſemper fit, ſi α ſit numerus poſitiuus quicunque. Iam ſi γ quoque fuerit numerus poſitiuus, euidens

dens est posito $x = 1$, et hoc casu fieri $P = 0$: vnde sequentia elicimus Theoremata:

Theorema. 3.

9. *Si* α et γ fuerint numeri positiui, ac post integrationem ponatur $x = 1$, habebuntur sequentes formularum integralium aequalitates.

$$\text{I. } \alpha\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma} = \gamma n\int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$$

$$\text{II. } \alpha\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1} = (\alpha+\gamma n)\int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$$

$$\text{III. } (\alpha+\gamma n)\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma} = \gamma n\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}.$$

Demonstratio.

Cum enim post integrationem ponatur $x = 1$, pro hoc casu in superioribus formulis fit $P = 0$, indeque aperte sequuntur aequationes hic propositae. Q. E. D.

Coroll. 1.

10. Harum trium aequationum quaelibet iam in duabus reliquis continetur, vnde eae in hac forma comprehendentur:

$$\int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1} = \frac{\alpha}{\gamma n}\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma} = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma n}\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$$

seu sequentes tres formulae integrales inter se aequabuntur:

$$\frac{1}{\alpha}\int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1} = \frac{1}{\gamma n}\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma} = \frac{1}{\alpha+\gamma n}\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$$

si quidem α et γ fuerint numeri positiui.

Coroll. 2.

11. Cum sit per Theor. 2. $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^k = \int x^{nk+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$ posito itidem $x = 1$, aequalitas

litas habebitur inter sex sequentes formulas integrales:

I. $\frac{1}{\alpha}\int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$; II. $\frac{1}{\gamma n}\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma}$; III. $\frac{1}{\alpha+\gamma n}\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$

IV. $\frac{1}{\alpha}\int x^{n\gamma-1}dx(1-x^n)^{\frac{\alpha}{n}}$; V. $\frac{1}{\gamma n}\int x^{n\gamma+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{\alpha-n}{n}}$; VI. $\frac{1}{\alpha+\gamma n}\int x^{n\gamma-1}dx(1-x^n)^{\frac{\alpha-n}{n}}$

dummodo exponentes α et γ fuerint affirmatiui.

Coroll. 3.

12. Si α fuerit numerus infinitus,

erit $\int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1} = \int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$

atque ob eandem rationem,

erit $\int x^{\alpha+2n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1} = \int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1} = \int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$

vnde generatim colligitur fore $\int x^{\alpha+\mu-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1} = \int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$

dummodo μ fuerit numerus finitus existente α infinito.

Coroll. 4.

13. Pari modo si γ fuerit numerus infinitus, erit

$$\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma} = \int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$$

eodemque modo erit $\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma+1} = \int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma}$,

vnde generatim colligitur fore:

$$\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma\pm\mu} = \int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma}$$

siquidem μ sit numerus finitus existente γ infinito.

Problema 1.

14. Si m et k sint numeri positiui, atque i denotet numerum integrum affirmatiuum quemcunque, definire rationem formulae $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}$ ad formulam $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+i}$ casu $x=1$.

Solutio.

Cum sit $\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1} = \frac{\alpha+\gamma n}{\gamma n}\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma}$, erit ponendo m et k pro α et γ:

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1} = \frac{m+kn}{kn}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k}$$

si nunc manente $\alpha=m$ ponatur $\gamma=k+1$, erit γ multo magis numerus affirmatiuus, cum k sit talis; ideoque pari modo habebitur

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k} = \frac{m+(k+1)n}{(k+1)n}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+1};$$

ac pari modo progrediendo, erit

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+1} = \frac{m+(k+2)n}{(k+2)n}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+2}.$$

Hinc ergo ingenere concluditur fore, denotante i numerum integrum quemcunque:

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+i}} = \frac{m+kn}{kn}\cdot\frac{m+kn+n}{kn+n}\cdot\frac{m+kn+2n}{kn+2n}\cdot\frac{m+kn+3n}{kn+3n}\cdots\frac{m+kn+in}{kn+in}$$

Q. E. I.

Coroll. 1.

15. Cum sit $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1} = \int x^{nk-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$ ideoque etiam:

$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+i} = \int x^{kn+in+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$, erit quoque:

$$\frac{\int x^{kn-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}}{\int x^{kn+in+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-1}{n}}} = \frac{m+kn}{kn}\cdot\frac{m+kn+n}{kn+n}\cdot\frac{m+kn+2n}{kn+2nn}\cdots\cdots\frac{m+kn+in}{kn+in}$$

Coroll. 2.

16. Si hic ponatur $kn=\mu$; et $\frac{m}{n}=x$, seu $m=xn$, ita vt iam μ et x sint numeri affirmatiui, habebitur haec reductio:

$\int x$

$$\frac{\int x^{\mu-1}dx(1-x^n)^{\varkappa-1}}{\int x^{\mu+in+n-1}dx(1-x^n)^{\varkappa-1}} = \frac{\mu+\varkappa n}{\mu}\cdot\frac{\mu+\varkappa n+n}{\mu+n}\cdot\frac{\mu+\varkappa n+2n}{\mu+2n}\cdots\frac{\mu+\varkappa n+in}{\mu+in}$$

scriptis autem pro μ et $\varkappa$ litteris m et k, erit:

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{m+in+n-1}dx(1-x^n)^{k-1}} = \frac{m+kn}{m}\cdot\frac{m+kn+n}{m+n}\cdot\frac{m+kn+2n}{m+2n}\cdots\frac{m+kn+in}{m+in}.$$

Coroll. 3.

17. Si haec expressio per expressionem in problemate inuentam diuidatur, prodibit:

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+i}}{\int x^{m+in+n-1}dx(1-x^n)^{k-1}} = \frac{kn}{m}\cdot\frac{kn+n}{m+n}\cdot\frac{kn+2n}{m+2n}\cdots\cdots\frac{kn+in}{m+in}$$

in *quibus* factoribus tam numeratores quam denominatores in arithmetica progressione progrediuntur, cuius differentia est $=n$.

Problema 2.

18. Valorem formulae $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}$, quem accipit casu $x=1$, per factores infinitos exprimere, siquidem exponentes m et k sint positiui.

Solutio.

Statuatur in forma praecedentis problematis numerus i infinitus; et habebitur:

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+i}} = \frac{m+kn}{kn}\cdot\frac{m+kn+n}{kn+n}\cdot\frac{m+kn+2n}{kn+2n}\cdot\frac{m+kn+3n}{kn+3n}\text{ etc in infinitum.}$$

Iam manente i eodem numero infinito, loco k alius sumatur numerus finitus λ quicunque; et habebitur simili modo:

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{x-1}}{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{x+i}} = \frac{m+xn}{xn}\cdot\frac{m+xn+n}{xn+n}\cdot\frac{m+xn+2n}{xn+2n}\cdot\frac{m+xn+3n}{xn+3n}\text{ etc.}$$

vbi numerus factorum aequalis est numero factorum praecedentis expressionis, vtrinque scilicet infinitus $= i+1$. At ob i infinitum, est vti §. 13. notauimus $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+i} = \int x^{m-1}dx(1-x^n)^{x+i}$ quare priori forma per posteriorem diuisa orietur:

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{x-1}}{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}} = \frac{x(m+kn)}{k(m+xn)}\cdot\frac{(x+1)(m+kn+n)}{(k+1)(m+xn+n)}\cdot\frac{(x+2)(m+kn+2n)}{(k+2)(m+xn+2n)}\text{ etc.}$$

statuatur iam $x=1$, eritque $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{x-1} = \frac{x^m}{n2} = \frac{1}{m}$ posito $x=1$, vnde fiet

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1} = \frac{1}{m}\cdot\frac{1(m+kn)}{k(m+n)}\cdot\frac{2(m+kn+n)}{(k+1)(m+2n)}\cdot\frac{3(m+kn+2n)}{(k+2)(m+3n)}\cdot\frac{4(m+kn+3n)}{(k+3)(m+4n)}\text{ etc.}$$

Q. E. I.

Aliter.

Tractetur simili modo forma §. 16. inuenta, statuendo i numerum infinitum, eritque:

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{m+in-1}dx(1-x^n)^{k-1}} = \frac{m+kn}{m}\cdot\frac{m+kn+n}{m+n}\cdot\frac{m+kn+2n}{m+2n}\cdot\frac{m+kn+3n}{m+3n}\text{ etc.}$$

Iam posito pro m alio numero finito, μ erit pari modo

$$\frac{\int x^{\mu-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{\mu+in-1}dx(1-x^n)^{k-1}} = \frac{\mu+kn}{\mu}\cdot\frac{\mu+kn+n}{\mu+n}\cdot\frac{\mu+kn+2n}{\mu+2n}\cdot\frac{\mu+kn+3n}{\mu+3n}\text{ etc.}$$

Cum autem sit ob i numerum infinitum:

$\int x^{m+in-1}dx(1-x^n)^{k-1} = \int x^{\mu+in-1}dx(1-x^n)^{k-1} = \int x^{in}dx(1-x^n)^{k-1}$ euanescentibus quantitatibus finitis prae infinitis; et quia vtrinque idem factorum numerus habetur, formam priorem per posteriorem diuidendo orietur:

$\int x^{m-}$

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x)^{k-1}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x)^{k-1}}=\frac{\mu(m+kn)}{m(\mu+kn)}\cdot\frac{(\mu+n)(m+nk+n)}{(m+n)(\mu+kn+n)}\cdot\frac{(\mu+2n)(\mu+kn+2n)}{(m+2n)(\mu+kn+2u)}\text{ etc.}$$

ſtatuatur iam $\mu=n$, fiet $\int x^{n-1}dx(1-x^n)^{k-1}=\frac{1-(1-x^n)^k}{nk}$ integratione ita peracta, vt euaneſcat poſito $x=0$. Poſito nunc $x=1$, iſte valor abit in $\frac{1}{nk}$, vnde obtinebitur:

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}=\frac{1}{nk}\cdot\frac{1(m+kn)}{m(1+k)}\cdot\frac{2(m+kn+n)}{(m+n)(2+k)}\cdot\frac{3(m+kn+2n)}{(m+2n)(3+k)}\text{ etc.}$$

En ergo aliud productum ex infinitis factoribus conſtans, priori non admodum diſſimile, eique adeo aequale, quo valor quaeſitus formulae integralis propoſitae exprimitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

19. *Has autem* duas formas in infinitum excurrentes inter ſe eſſe aequales, per ſe perſpicuum eſt: poſteriori enim per priorem diuiſa, ob ſingulorum membrorum numeratores aequales, prodit:

$$1=\frac{m}{nk}\cdot\frac{k(m+n)}{m(k+1)}\cdot\frac{(k+1)(m+2n)}{(m+n)(k+2)}\cdot\frac{(k+2)(m+3n)}{(m+2n)(k+3)}\text{ etc.}$$

At duo factores primi dant $\frac{m+n}{n(k+1)}$; tres $\frac{m+2n}{n(k+2)}$; quatuor $\frac{m+3n}{n(k+3)}$ et infiniti dant $\frac{m+in}{n(k+i)}=\frac{in+m}{in+kn}=1$.

Coroll. 2.

20. Huiusmodi formae factorum infinitorum innumerabiles formari poſſunt, quarum valor $=1$. Cum enim ſit

$\frac{p+q}{p}$

$$\frac{p}{p+q}\cdot\frac{p+q}{p+2q}\cdot\frac{p+2q}{p+3q}\cdot\frac{p+3q}{p+4q}\cdots=\frac{p}{p+iq}=\frac{p}{iq}$$
$$\frac{r+s}{r}\cdot\frac{r+2s}{r+s}\cdot\frac{r+3s}{r+2s}\cdot\frac{r+4s}{r+3s}\cdots=\frac{r+is}{r}=\frac{is}{r}$$

multiplicando has duas formas habebimus

$$1=\frac{qr}{ps}\cdot\frac{p(r+s)}{r(p+q)}\cdot\frac{(p+q)(r+2s)}{(r+s)(p+2q)}\cdot\frac{(p+2q)(r+3s)}{(r+2s)(p+3q)}\ \text{etc.}$$

Coroll. 3.

21. Si ergo valor formulae integralis inuentus per hanc expressionem $=1$ multiplicetur, prodibit expressio latius patens eidem aequalis, scilicet:

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}=\frac{qr}{knps}\cdot\frac{1(m+kn)p(r+s)}{m(k+1)r(p+q)}\cdot\frac{2(m+kn+n)(p+q)(r+2s)}{(m+n)(k+2)(r+s)(p+2q)}\cdot\frac{3(m+kn+2n)(p+2q)(r+3s)}{(m+2n)(k+3)(r+2s)(p+3q)}\ \text{etc.}$$

vbi pro p, q, r, s numeros quoscunque assumere licet. Pluribus modis ergo ita accipi possunt, vt quilibet factor ad formam simpliciorem redigatur.

Coroll. 4.

22. Sit $p=m$, et $q=n$, eritque:

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}=\frac{r}{mks}\cdot\frac{1(m+kn)(r+s)}{(m+n)(k+1)r}\cdot\frac{2(m+kn+n)(r+2s)}{(m+2n)(k+2)(r+s)}\cdot\frac{3(m+kn+2n)(r+3s)}{(m+3n)(k+3)(r+2s)}\ \text{etc.}$$

si porro ponatur $r=k$, et $s=1$, erit,

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}=\frac{1}{m}\cdot\frac{1(m+kn)}{(m+n)k}\cdot\frac{2(m+kn+n)}{(m+2n)(k+1)}\cdot\frac{3(m+kn+2n)}{(m+3n)(k+2)}\ \text{etc.}$$

quae est expressio primum inuenta. Sin autem sit $r=m+kn$, et $s=n$, erit,

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}=\frac{m+kn}{mkn}\cdot\frac{1(m+kn+n)}{(m+n)(k+1)}\cdot\frac{2(m+kn+2n)}{(m+2n)(k+2)}\cdot\frac{3(m+kn+3n)}{(m+3n)(k+3)}\ \text{etc.}$$

Coroll. 5.

23. Si ponatur $p=k+1$, et $q=1$, erit:

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}=\frac{r}{k(k+1)ns}\cdot\frac{1(m+kn)(r+s)}{mr(k+2)}\cdot\frac{2(m+kn+n)(r+2s)}{(m+n)(r+s)(k+3)}\cdot\frac{3(m+kn+2n)(r+3s)}{(m+2n)(r+2s)(k+4)}$$

fit porro $r = 1$, et $s = 1$, erit:

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1} = \frac{1}{k(k+1)n}\cdot\frac{2(m+kn)}{m(k+2)}\cdot\frac{3(3m+kn+n)}{(m+n)(k+3)}\frac{4(m+kn+2n)}{(m+2n)(k+4)}\text{ etc.}$$

sin auten ponatur $r = m+kn$, et $s = n$, erit:

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1} = \frac{m+kn}{k(k+1)mn}\cdot\frac{1(m+kn+n)}{m(k+2)}\cdot\frac{2(m+kn+2n)}{(m+n)(k+3)}\frac{3(m+kn+3n)}{(m+2n)(k+4)}\text{ etc.}$$

Coroll. 6.

24. Si manente exponente k reliquos exponentes m et n mutemus, habebimus

$$\int x^{\mu-1}dx(1-x^\nu)^{k-1} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1(\mu+k\nu)}{(\mu+\nu)k}\cdot\frac{2(\mu+k\nu+\nu)}{(\mu+2\nu)(k+1)}\cdot\frac{3(\mu+k\nu+2\nu)}{(\mu+3\nu)(k+2)}\text{ etc.}$$

dummodo μ, ν et k sint numeri affirmatiui. Diuisa ergo *illa* forma per hanc obtinebimus:

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x^\nu)^{k-1}} = \frac{\mu}{m}\cdot\frac{(\mu+\nu)(m+kn)}{(m+n)(\mu+k\nu)}\cdot\frac{(\mu+2\nu)(m+kn+n)}{(m+2n)(\mu+k\nu+\nu)}\cdot\frac{(\mu+2\nu)(m+kn+2n)}{(m+3n)(\mu+k\nu+2\nu)}\text{ etc.}$$

Coroll. 7.

25. Sin autem etiam in altera forma k in $\varkappa$ mutetur, habebitur:

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\varkappa-1}} = \frac{\mu}{m}\cdot\frac{\varkappa(\mu+\nu)(m+kn)}{k(m+n)(\mu+\varkappa\nu)}\cdot\frac{(\varkappa+1)(\mu+2\nu)(m+kn+n)}{(k+1)(m+2n)(\mu+\varkappa\nu+\nu)}\cdot\frac{(\varkappa+2)(\mu+3\nu)(m+kn+2n)}{(k+2)(m+3n)(\mu+\varkappa\nu+2\nu)}\text{ etc.}$$

posito post integrationem $x = 1$, et existentibus omnibus exponentibus m, n, k ac $\mu, \nu, \varkappa$ affirmatiuis.

Scholion.

26. His conuersionibus formularum integralium in factores infinitos expositis, videamus vicissim quomodo proposita huiusmodi expressio infinita per factores procedens, ad integrationes formularum casu, quo $x = 1$,

reduci debeat. Hic autem ante omnia ſpectari debent membra, quae illud productum infinitum conſtituunt, ex quot illa factoribus ſint compoſita: quae membra primum ita comparata eſſe debent, vt infiniteſima in vnitatem abeant. In hunc finem erunt fracta, et ex certo, tam numeratorum, quam denominatorum, numero conſtabunt, et vtrique per ſingula membra ſecundum progreſſionem arithmeticam procedent, ita vt in illis eadem habeatur differentia; etiamſi enim variae partes diuerſas obtineant differentias, eae tamen facile ad eandem reducentur. Cum igitur nihil obſtet, quo minus haec differentia vnitati aequalis conſtituatur, pro diuerſo factorum cuiusque membri numero, ſequentes huiusmodi productorum infinitorum ordines habebimus:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{a+2}{b+2}\cdot\frac{a+3}{b+3}\cdot\frac{a+4}{b+4}\cdot\frac{a+5}{b+5}\cdot \text{ etc.}$$

$$\frac{ac}{be}\cdot\frac{(a+1)(c+1)}{(b+1)(e+1)}\cdot\frac{(a+2)(c+2)}{(b+2)(e+2)}\cdot\frac{(a+3)(c+3)}{(b+3)(e+3)}\cdot \text{ etc.}$$

$$\frac{acf}{beg}\cdot\frac{(a+1)(c+1)(f+1)}{(b+1)(e+1)(g+1)}\cdot\frac{(a+2)(c+2)(f+2)}{(b+2)(e+2)(g+2)}\cdot \text{ etc.}$$

$$\frac{acfh}{begk}\cdot\frac{(a+1)(c+1)(f+1)(h+1)}{(b+1)(e+1)(g+1)(k+1)}\cdot\frac{(a+2)(c+2)(f+2)(h+2)}{(b+2)(e+2)(g+2)(k+2)}\cdot \text{ etc.}$$

Quomodo ergo cuiusque horum productorum valor per formulas integrales exprimendus ſit, videamus.

Pro-

Problema 3.

27. Per formulas integrales definire valorem huius producti infiniti ex membris simplicibus constantis:

$$P = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+1}{b+1} \cdot \frac{a+2}{b+2} \cdot \frac{a+3}{b+3} \cdot \frac{a+4}{b+4} \cdot \frac{a+5}{b+5} \cdot \text{etc.}$$

Solutio.

Denotante i numerum infinitum vidimus esse

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{in}dx(1-x^n)^{k-1}} = \frac{m+kn}{m} \cdot \frac{m+kn+n}{m+n} \cdot \frac{m+kn+2n}{m+2n} \cdot \text{etc.}$$

quae forma ad propositam reducetur ponendo $n=1$; $m+k=a$, et $m=b$, vnde fit $k=a-b$. Cum ergo k debeat esse numerus affirmatiuus, si fuerit $a>b$, erit

$$P = \frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{a-b-1}}{\int x^i dx(1-x)^{a-b-1}} = \frac{\int x^{a-b-1}dx(1-x)^{b-1}}{\int x^{a-b-1}dx(1-x)^i}$$

sin autem sit $b>a$, erit inuerse:

$$P = \frac{\int x^i dx(1-x)^{b-a-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{b-a-1}} = \frac{\int x^{b-a-1}dx(1-x)^i}{\int x^{b-a-1}dx(1-x)^{a-1}}. \text{ Q. E. I.}$$

Corollarium.

28. Manifestum autem est, si sit $a>b$, valorem P fore infinitum, sin autem sit $b>a$, fore $P=0$. Casu autem $a=b$ fit $P=1$: qui casus cum ad vtrumque expositorum aeque pertineat, euidens est, esse $\int \frac{x^{a-1}dx}{1-x} = \int \frac{x^i dx}{1-x}$ quae integralia casu $x=1$ vtique fiunt ita infinita, vt rationem aequalitatis obtineant. Est autem in genere $\int \frac{x^{a-1}dx}{1-x} = \int \frac{x^{b-1}dx}{1-x}$.

Problema 4.

29. Per formulas integrales definire valorem huius producti infiniti ex membris duplicatis constantis:

$$P = \frac{ac}{be} \cdot \frac{(a+1)(c+1)}{(b+1)(e+1)} \cdot \frac{(a+2)(c+2)}{(b+2)(e+2)} \cdot \frac{(a+3)(c+3)}{(b+3)(e+3)} \cdot \text{etc.}$$

Solutio.

Cum sit per §. 24. denotantibus m, n, k, μ, ν numeros positiuos

$$\frac{(\mu+\nu)(m+kn)}{(m+n)(\mu+k\nu)} \cdot \frac{(\mu+2\nu)(m+kn+n)}{(m+2n)(\mu+k\nu+\nu)} \text{ etc.} = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\int x^{m-1} dx (1-x^n)^{k-1}}{\int x^{\mu-1} dx (1-x^\nu)^{k-1}}$$

ponatur $n=1$; $\nu=1$; $\mu+1=a$; $m+k=c$, $m+1=b$; $\mu+k=e$; erit $\mu=a-1$; $m=b-1$; et $k=c-b+1$ $=e-a+1$. Quare, quo haec forma ad propositam possit reuocari, necesse est, vt sit $c-b=e-a$; nisi enim haec conditio locum habeat, valor producti propositi P esset vel infinitus, vel euanescens. Quod incommodum ne locum habeat, sit $c-b=e-a$, seu $a+c=b+e$; atque dum sint $a-1$; $b-1$; et $c-b$, vel $e-a$, numeri affirmatiui, erit:

$$P = \frac{b-1}{a-1} \cdot \frac{\int x^{b-2} dx (1-x)^{c-b}}{\int x^{a-2} dx (1-x)^{e-a}}.$$

Vel consideretur haec forma:

$$\frac{\mu(m+kn-n)}{m(\mu+k\nu-\nu)} \cdot \frac{(\mu+\nu)(m+kn)}{(m+n)(\mu+k\nu)} \text{ etc.} = \frac{m+kn-n}{\mu+k\nu-\nu} \cdot \frac{\int x^{m-1} dx (1-x^n)^{k-1}}{\int x^{\mu-1} dx (1-x^n)^{k-1}}$$

quae ex illa luculenter nascitur, ac ponatur $n=1$; $\nu=1$, $\mu=a$; $m=b$; $c=m+k-1$; et $e=\mu+k-1$;

erit.

eritque $k-1=c-b=e-a$; iterum ergo esse debet $a+c=b+e$. Nunc ergo, dummodo sint a, b, et $c-b+1$, vel $e-a+1$, numeri positiui, erit

$$P=\frac{c}{e}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{c-b}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{e-a}}.$$

Quoties ergo fuerit $a+c=b+e$, valor quaesitus P est finitus: ac per has formulas integrales casu $x=1$ innotescit. Q. E. I.

Coroll. 1.

30. Cum sit $a+c=b+e$, si sit $c>b$, erit quoque $e>a$, et a et b in primo membro $\frac{ac}{be}$ denotant factores minores numeratoris et denominatoris. Requiritur autem tantum, vt $c-b+1$ sit numerus positiuus. Quare si etiam $c-e+1$ sit numerus positiuus, *alio insuper modo* valor quaesitus P exprimi poterit: scilicet permutandis b et e hoc modo:

$$P=\frac{c}{b}\cdot\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{c-e}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{b-a}}.$$

Coroll. 2.

31. Atque quaelibet harum formularum locum habebit:

$$P=\frac{c}{b}\cdot\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{c-e}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{b-a}}=\frac{c}{e}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{c-b}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{e-a}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{a-e}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{b-c}}=\frac{a}{e}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{a-b}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{e-c}}$$

Quarum prima locum habet, si $c-e+1=b-a+1$ sit >0, secunda si $c-b+1=e-a+1>1$, tertia si $a-e+1=b-c+1>0$, et quarta, si $a-b+1=e-c+1>0$.

 Coroll.

Coroll. 3.

32. Prima forma et quarta simul valebunt, si differentia inter a et b sit vnitate minor, ideoque et inter c et e. Atque omnes quatuor simul locum habebunt, si insuper differentia inter a et e fuerit vnitate minor.

Coroll. 4.

33. Si ergo ponatur $a = p + m$; $b = p + n$; $c = p - m$ et $e = p - n$, vt sit $a + c = b + e = 2p$, fueritque $m + n < 1$, erit

$$P = \frac{p-m}{p+n} \cdot \frac{\int x^{p-m-1} dx (1-x)^{n-m}}{\int x^{p+n-1} dx (1-x)^{n-m}} = \frac{p+m}{p+n} \cdot \frac{\int x^{p-n-1} dx (1-x)^{n+m}}{\int x^{p-m-1} dx (1-x)^{n+m}}$$

$$P = \frac{p-m}{p-n} \cdot \frac{\int x^{p+n-1} dx (1-x)^{-n-m}}{\int x^{p+m-1} dx (1-x)^{-n-m}} = \frac{p+m}{p-n} \cdot \frac{\int x^{p+n-1} dx (1-x)^{m-n}}{\int x^{p-m-1} dx (1-x)^{m-n}}.$$

Atque hae quatuor formulae inter se erunt aequales.

Problema 5.

34. Per formulas integrales exprimere valorem huius producti infiniti ex membris triplicatis constantes.

$$P = \frac{acf}{beg} \cdot \frac{(a+1)(c+1)(f+1)}{(b+1)(e+1)(g+1)} \cdot \frac{(a+2)(c+2)(f+2)}{(b+2)(e+2)(g+2)} \cdot \text{etc.}$$

Solutio.

I. Cum inuenerimus §. 25.

$$\frac{m(\mu+\nu)(m+kn)}{k(m+n)(\mu+k\nu)} \cdot \frac{(k+1)(\mu+2\nu)(m+kn+n)}{(k+1)(m+2n)(\mu+k\nu+\nu)} \cdot \text{etc.} = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\int x^{m-1} dx (1-x^n)^{k-1}}{\int x^{\mu-1} dx (1-x^\nu)^{k-1}}$$

erit

erit membrum anterius adhuc adiiciendo:

$$\frac{(\varkappa-1)\mu(m+kn-n)}{(k-1)m(\mu+\varkappa\nu-\nu)}\cdot\frac{\varkappa(\mu+\nu)(m+kn)}{k(m+n)(\mu+\varkappa\nu)}\cdot\text{etc.}=\frac{(\varkappa-1)(m+kn-n)}{(k-1)(\mu+\varkappa\nu+\nu)}\cdot\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x^\nu)^{\varkappa-1}}$$

quae forma quo ad propositam reducatur, statuatur:
$\varkappa-1=a$; $k-1=b$; $\mu=c$; $m=e$; $n=1$; $\nu=1$;
ac $m+k-1=e+b+f$; $\mu+\varkappa-1=c+a=g$.
Cum ergo haec reductio non succedat, nisi ista conditione sit $f=b+e$ et $g=a+c$; vt habeatur hoc productum infinitum:

$$P=\frac{ac(b+e)}{be(a+c)}\cdot\frac{(a+1)(c+1)(b+e+1)}{(b+1)(e+1)(a+c+1)}\cdot\frac{(a+2)(c+2)(b+e+2)}{(b+2)(e+2)(a+c+2)}\text{etc.}$$

Quare cum hoc casu sit $m=e$; $k=b+1$; $\mu=c$ et $\varkappa=a+1$, existentibus $n=\nu=1$, erit

$$P=\frac{a(b+e)}{b(a+c)}\cdot\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^b}{\int x^{c-1}dx(1-x)^a}$$

dummodo sint c, e, $b+1$ et $a+1$ numeri positiui Q. E. I.

Coroll. I.

35. Cum per §. 9. sit $\int x^{\alpha-1}dx(1-x)^{\gamma-1}=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}\int x^\alpha dx(1-x)^{\gamma-1}$, erit
$\int x^{e-1}dx(1-x)^b=\frac{b+e+1}{e}\int x^e dx(1-x)^b$, ideoque

$$P=\frac{ac(b+e)(b+e+1)}{be(a+c)(a+c+1)}\cdot\frac{\int x^e dx(1-x)^b}{\int x^c dx(1-x)^a}$$

Et cum sit $\int x^{\alpha-1}dx(1-x)^\gamma=\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\int x^{\alpha-1}dx(1-x)^{\gamma-1}$, erit
$\int x^{e-1}dx(1-x)^b=\frac{b}{b+e}\int x^{e-1}dx(1-x)^{b-1}$, habebitur quoque

$$P=\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{b-1}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{a-1}}$$

Coroll.

Coroll. 2.

36. Formula haec autem locum habet, dummodo a, b, c et e ſint numeri affirmatiui: et quia iam a et c item b et e inter ſe permutari poſſunt, erit quoque $P = \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{c-1}}$: quae conuerſio autem ex Th. 2. per ſe eſt manifeſta.

Scholion I.

37. Problema ergo propoſitum non in genere eſt ſolutum, ſed tantum caſu, quo $f = b + e$; et $g = a + c$; ſicque ſolutio noſtra duplici limitatione reſtringitur. Vnica vero tantum reſtrictione eſt opus, ne valor ipſius P vel fiat infinitus, vel euaneſcens, qua requiritur, vt ſit $a + c + f = b + e + g$. Quo autem problema pro hac vnica limitatione ſoluatur, neceſſe eſt plures formulas integrales in computum ducere, quod hoc modo praeſtari poterit. Poſito igitur $a + c + f = b + e + g$, cum ſit

$$P = \frac{acf}{beg} \cdot \frac{(a+1)(c+1)(f+1)}{(b+1)(e+1)(g+1)} \cdot \frac{(a+2)(c+2)(f+2)}{(b+2)(e+2)(g+2)} \cdot \text{ etc.}$$

ſtatuatur $P = QR$, ſitque

$$Q = \frac{(p+q)(p-q)}{(p+r)(p-r)} \cdot \frac{(p+q+1)(p-q+1)}{(p+r+1)(p+r+1)} \cdot \text{etc.} \frac{p+q}{p+r} \cdot \frac{\int x^{p-r-1} dx (1-x)^{q+r}}{\int x^{p-q-1} dx (1-x)^{q+r}}$$

$$\text{et } R = \frac{\alpha\gamma(\beta+\varepsilon)}{\beta\varepsilon(\alpha+\gamma)} \cdot \frac{(\alpha+1)(\gamma+1)(\beta+\varepsilon+1)}{(\beta+\varepsilon)(\varepsilon+1)(\alpha+\gamma+1)} \text{ etc.} = \frac{\int x^{\beta-1} dx (1-x)^{\varepsilon-1}}{\int x^{\alpha-1} dx (1-x)^{\gamma-1}}$$

Fiat iam primum membrum producti QR aequale primo membro formae propoſitae P, ſcilicet

$\frac{\alpha\gamma}{\beta\varepsilon}$

$\frac{\alpha\gamma(\beta+\varepsilon)(p+q)(p-q)}{\beta\varepsilon(\alpha+\gamma)(p+r)(p-r)}=\frac{acf}{beg}$, quod pluribus modis fieri potest. Primum enim illud pluribus modis ad tres factores potest reduci, ponatur scilicet $\beta+\varepsilon=p+r$ et $\alpha+\gamma=p+q$; vt habeatur $q=\alpha+\gamma-p$; et $r=\beta+\varepsilon-p$; eritque:

$$\frac{\alpha\gamma(2p-\alpha-\gamma)}{\beta\varepsilon(2p-\beta-\varepsilon)}=\frac{acf}{beg}.$$

Quod si ergo statuatur $\alpha=a$; $\beta=b$; $\gamma=c$; $\varepsilon=e$; et $2p=a+c+f=b+e+g$; erit $q=a+c-p$; et $r=b+e-p$. Sicque nulla alia restrictio hic involuitur, nisi vt sit $a+c+f=b+e+g=2p$. Pro hoc ergo casu erit producti infiniti propositi valor

$$P=\frac{a+c}{b+e}\cdot\frac{\int x^{2p-b-e-1}dx(1-x)^{a+b+c+e-2p}}{\int x^{2p-a-c-1}dx(1-x)^{a+b+c+e-2p}}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}$$

vbi iam tam litteras a et c, quam b et e pro lubitu inter se *permutari licet.*

Alio modo statuatur $\gamma=p+r$ et $\varepsilon=p-q$; vt sit

$$\frac{\alpha(\beta+\varepsilon)(p+q)}{\beta(\alpha+\gamma)(p-r)}=\frac{acf}{beg}.$$

Iam sit $\alpha=a$; $\beta=b$; $\varepsilon=c-b$; $\gamma=e-a$; erit $q=p-c+b$ et $r=e-a-p$; hincque $f=2p-c+b$ et $g=2p-e+a$. Sin autem ponatur summa $a+c+f=b+e+g=s$; erit $a+b+2p=s$, et $2p=s-a-b$; sicque $p+q=s-a-c=f$; $p-q=c-b$; $p+r=e-a$; $p-r=s-b-e=g$; et $q+r=b+e-a-c$. Atque hinc oritur:

$$P=\frac{s-a-c}{e-a}\cdot\frac{\int x^{s-b-e-1}dx(1-x)^{b+e-a-c}}{\int x^{c-b-1}dx(1-x)^{b+e-a-c}}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{c-b-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{e-a-1}}$$

Vbi iterum tam litteras a et c, quam b et e inter se permutare licet. Vel erit etiam ob plures valores ipsius Q

$$P = \frac{c-b}{e-a} \cdot \frac{\int x^{g-1} dx (1-x)^{c+e-s}}{\int x^{f-1} dx (1-x)^{c+e-s}} \cdot \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{c-b-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{e-a-1}}$$

At formula prius inuenta, ponendo s pro $2p$, abit in hanc,

$$P = \frac{a+c}{b+e} \cdot \frac{\int x^{g-1} dx (1-x)^{b+e-f}}{\int x^{f-1} dx (1-x)^{b+e-f}} \cdot \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{c-1}}.$$

Scholion 2.

38. Quodsi iam omnes istae permutationes adhibeantur, quae pro formula Q obtinent, atque formula proposita fuerit:

$$P = \frac{acf}{beg} \cdot \frac{(a+1)(c+1)(f+1)}{(b+1)(e+1)(g+1)} \cdot \frac{(a+2)(c+2)(f+2)}{(b+2)(e+2)(g+2)} \cdot \text{ etc.}$$

fueritque $a+c+f = b+e+g$, reperientur sequentes valores pro valore P, scilicet:

$$P = \frac{f}{g} \cdot \frac{\int x^{e-a-1} dx (1-x)^{a+f-e}}{\int x^{c-b-1} dx (1-x)^{a+f-e}} \cdot \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{c-b-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{e-a-1}}$$

$$P = \frac{f}{e-a} \cdot \frac{\int x^{g-1} dx (1-x)^{f-g}}{\int x^{c-b-1} dx (1-x)^{f-g}} \cdot \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{c-b-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{e-a-1}}$$

$$P = \frac{c-b}{g} \cdot \frac{\int x^{e-a-1} dx (1-x)^{g-f}}{\int x^{f-1} dx (1-x)^{g-f}} \cdot \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{c-b-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{e-a-1}}$$

$$P = \frac{c-b}{e-a} \cdot \frac{\int x^{g-1} dx (1-x)^{e-a-f}}{\int x^{f-1} dx (1-x)^{e-a-f}} \cdot \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{c-b-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{e-a-1}}$$

$$P = \frac{f}{g} \cdot \frac{\int x^{b+e-1} dx (1-x)^{f-b-e}}{\int x^{a+c-1} dx (1-x)^{f-b-e}} \cdot \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{e-1}}$$

P =

$$P=\frac{f}{b+e}\cdot\frac{\int x^{g-1}dx(1-x)^{f-g}}{\int x^{a+c-1}dx(1-x)^{f-g}}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}$$

$$P=\frac{a+c}{g}\cdot\frac{\int x^{b+e-1}dx(1-x)^{g-f}}{\int x^{f-1}dx(1-x)^{g-f}}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}$$

$$P=\frac{a+c}{b+e}\cdot\frac{\int x^{g-1}dx(1-x)^{b+e-f}}{\int x^{f-1}dx(1-x)^{b+e-f}}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}$$

Porro antem hic tam ternas litteras a, c, f, quam has b, e, g, pro lubitu inter ſe permutare licet, ex quo maxima copia formularum, quae omnes eidem valori P ſunt aequales, enaſcetur.

Scholion 3.

39. Hinc etiam pro producto ſimpliciori

$$P=\frac{ac}{be}\cdot\frac{(a+1)(c+1)}{(b+1)(e+1)}\cdot\frac{(a+2)(c+2)}{(b+2)(e+2)}\cdot\text{ etc.}$$

ſi fuerit $a+c=b+e$, praeter valores ſupra inuentos plures alii exhiberi poterunt. Primum enim quia $a+c=b+e$ valor in problemate 5 inuentus huc pertinet: $P=\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{b-1}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{a-1}}$. Deinde ſi in ſerie §. praec. vna litterarum a, c, f vni ex b, e, g aequalis ſtatuatur, vel haec eadem expreſſio, vel aliae obtinebuntur, quae cum praecedentibus erunt:

$$P=\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{a-e-1}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{b-c-1}};\quad P=\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{a-b-1}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{e-c-1}}$$

$$P=\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{c-e-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{b-a-1}};\quad P=\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{c-b-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{e-a-1}}$$

$$P=\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}; \quad P=\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-b-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{e-a-1}}$$

vbi eſt $e-a=c-b$ et $c-e=b-a$.

In ſequentibus eſt n numerus arbitrarius:

$$P=\frac{\int x^{e-n-1}dx(1-x)^{n+a-e-1}}{\int x^{c-n-1}dx(1-x)^{n+b-c-1}}\cdot\frac{\int x^{n-1}dx(1-x)^{c-n-1}}{\int x^{n-1}dx(1-x)^{e-n-1}}$$

$$P=\frac{\int x^{n+b-1}dx(1-x)^{c-b-n-1}}{\int x^{n+a-1}dx(1-x)^{c-b-n-1}}\cdot\frac{\int x^{n-1}dx(1-x)^{b-1}}{\int x^{n-1}dx(1-x)^{a-1}}$$

$$P=\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{n+b-e-1}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{n+b-e-1}}\cdot\frac{\int x^{n-1}dx(1-x)^{b-1}}{\int x^{n-1}dx(1-x)^{a-1}}$$

$$P=\frac{\int x^{n-1}dx(1-x)^{a-1}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{a-1}}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{n-1}}=\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{a-1}}$$

quae poſtrema iam in praecedentibus continetur. Hic autem monendum eſt, ſuperfluum eſſe hic rationem exponentium definire, vti ſupra factum eſt. Cum enim valor P certo ſit finitus, ſi $a+c=b+e$; ſi quaepiam formularum integralium habeat exponentes negatiuos infra -1; tum eam ad exponentes maiores reducere licet, ac tum verus valor ipſius P obtinebitur. Formulae autem ſimpliciores continentur in hoc Theoremate:

Theorema 4.

40. Si fuerit $a+c=b+e=s$; tum erit

$$\frac{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}=\frac{\int x^{a-1}dx(1-x)^{s-a-b-1}}{\int x^{b-1}dx(1-x)^{s-a-b-1}}$$

ſi quidem poſt integrationem ſtatuatur $x=1$.

Demon-

Demonstratio.

Est enim ex praecedentibus formulis

$$\frac{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}=\frac{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-b-1}}{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-a-1}}.$$

At ob $a+c=b+e=s$, est $c=s-a$; et $e=s-b$; vnde erit $c-b=e-a=s-a+b$, vnde forma proposita conficitur. Q. E. D.

Coroll. 1.

41. Hic licet tam numeros a et c, quam b et e inter se permutare, vnde quatuor obtinentur formulae primae aequales; scilicet singulae harum formularum:

$$\frac{\int x^{a-1}dx(1-x)^{s-a-b-1}}{\int x^{b-1}dx(1-x)^{s-a-b-1}};\quad \frac{\int x^{a-1}dx(1-x)^{s-a-e-1}}{\int x^{e-1}dx(1-x)^{s-a-e-1}}$$

$$\frac{\int x^{c-1}dx(1-x)^{s-b-e-1}}{\int x^{b-1}dx(1-x)^{s-b-c-1}};\quad \frac{\int x^{c-1}dx(1-x)^{s-c-e-1}}{\int x^{e-1}dx(1-x)^{s-c-e-1}}$$

aequales sunt huic formae $\dfrac{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}$.

Coroll. 2.

42. Valor autem vniuscuiusque harum formularum aequalis est huic producto ex factoribus infinitis constanti:

$$\frac{be}{ac}\cdot\frac{(b+1)(e+1)}{(a+1)(c+1)}\cdot\frac{(b+2)(e+2)}{(a+2)(c+2)}\cdot\text{etc.}$$

Coroll. 3.

43. Si sit $e = 1$; ideoque $b = s - 1$; $a = s - c$; erit, posito

$$P = \frac{1(s-1)}{c(s-c)} \cdot \frac{2s}{(c+1)(s-c+1)} \cdot \frac{3(s+1)}{(c+2)(s-c+2)} \cdot \text{ etc.}$$

ob $\int x^{b-1} dx (1-x)^{e-1} = \int x^{s-2} dx = \frac{1}{s-1}$.

$$P = (s-1) \int x^{s-c-1} dx (1-x)^{c-1}$$

$$P = (c-1) \int x^{s-c-1} dx (1-x)^{c-2} = (s-1)$$

$$P = (s-c-1) \int x^{c-1} dx (1-x)^{s-c-2}$$

$$P = \frac{\int x^{s-c-1} dx (1-x)^{c-s}}{\int x^{s-2} dx (1-x)^{c-s}} = \frac{\int x^{c-1} dx (1-x)^{-c}}{\int x^{s-2} dx (1-x)^{-c}} = (s-1) \int x^{s-c-1} dx (1-x)^{c-1}.$$

Scholion.

44. Quoniam vero huiusmodi formularum integralium comparationes iam plures exposui, hic imprimis nonnullos valores prae reliquis notabiles persequar, et quemadmodum ii per formulas integrales exprimi queant, ostendam. Notatu autem potissimum digna sunt illa producta infinita, quibus sinus et cosinus cuiusque anguli exprimitur. Denotante enim ρ angulum rectum, et Φ angulum quemcunque, constat esse

$$\sin.\Phi = \Phi\left(1 - \frac{\Phi\Phi}{4\rho\rho}\right)\left(1 - \frac{\Phi\Phi}{16\rho\rho}\right)\left(1 - \frac{\Phi\Phi}{36\rho\rho}\right)\left(1 - \frac{\Phi\Phi}{64\rho\rho}\right) \text{ etc.}$$

et $\cos.\Phi = \left(1 - \frac{\Phi\Phi}{\rho\rho}\right)\left(1 - \frac{\Phi\Phi}{9\rho\rho}\right)\left(1 - \frac{\Phi\Phi}{25\rho\rho}\right)\left(1 - \frac{\Phi\Phi}{49\rho\rho}\right)$ etc.

Quodsi iam ponatur $\Phi = \frac{m}{n}\rho$, erit

$$\left(1 - \frac{mm}{4nn}\right)\left(1 - \frac{mm}{16nn}\right)\left(1 - \frac{mm}{36nn}\right) \text{ etc.} = \frac{n}{m\rho} \sin.\frac{m}{n}\rho$$

$$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right)\left(1 - \frac{mm}{9nn}\right)\left(1 - \frac{mm}{25nn}\right) \text{ etc.} = \cos.\frac{m}{n}\rho$$

Vel

Vel si angulus duobus rectis aequalis π introducatur, et ob $\varrho = \frac{1}{2}\pi$ pro m scribatur $2m$, erit factores euoluendo

$$\frac{(n-m)(n+m)}{n \cdot n} \cdot \frac{(2n-m)(2n+m)}{2n \cdot 2n} \cdot \frac{(3n-m)(3n+m)}{3n \cdot 3n} \text{ etc.} = \frac{n}{m\pi} \text{ fin. } \frac{m}{n}\pi$$

$$\frac{(n-2m)(n+2m)}{n \cdot n} \cdot \frac{(3n-2m)(3n+2m)}{3n \cdot 3n} \cdot \frac{(5n-2m)(5n+2m)}{5n \cdot 5n} \text{ etc.} = \text{cof. } \frac{m}{n}\pi.$$

Reducendo autem differentias ad vnitatem, erit

$$\frac{(1-\frac{m}{n})(1+\frac{m}{n})}{1 \cdot 1} \cdot \frac{(2-\frac{m}{n})(2+\frac{m}{n})}{2 \cdot 2} \cdot \frac{(3-\frac{m}{n})(3+\frac{m}{n})}{3 \cdot 3} \text{ etc.} = \frac{n}{m\pi} \text{ fin. } \frac{m}{n}\pi$$

$$\frac{(\frac{1}{2}-\frac{m}{n})(\frac{1}{2}+\frac{m}{n})}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \cdot \frac{(\frac{3}{2}-\frac{m}{n})(\frac{3}{2}+\frac{m}{n})}{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}} \text{ etc.} = \text{cof. } \frac{m}{n}\pi.$$

Problema 6.

45. Inuenire formulam integralem, cuius valor casu $x=1$ praebeat fin. $\frac{m}{n}\pi$.

Solutio.

Cum fit

$$\frac{n}{m\pi} \text{ fin } \frac{m}{n}\pi = \frac{(1-\frac{m}{n})(1+\frac{m}{n})}{1 \cdot 1} \cdot \frac{(2-\frac{m}{n})(2+\frac{m}{n})}{2 \cdot 2} \text{ etc.}$$

comparetur hoc productum infinitum cum forma generali

$$P = \frac{be}{ac} \cdot \frac{(b+1)(e+1)}{(a+1)(c+1)} \cdot \frac{(b+2)(e+2)}{(a+2)(c+2)} \cdot \text{ etc.}$$

cuius valor ante §. 41. pluribus modis in formulis integralibus est exhibitus. Statui ergo oportet $a=1$; $c=1$; $b=1-\frac{m}{n}$; et $e=1+\frac{m}{n}$: eritque $s=a+c=b+e=2$; tum vero

$$s-a-b-1=-1+\frac{m}{n}; \quad s-a-e-1=-1-\frac{m}{n},$$
$$s-b-c-1=-1+\frac{m}{n}; \quad s-c-e-1=-1-\frac{m}{n}.$$

Hinc

Hinc ergo pro P prodit sequens expressio:

$$P = 1 \frac{\int dx(1-x)^0}{\int x^{\frac{-m}{n}} dx(1-x)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\int x^{\frac{-m}{n}} dx(1-x)^{\frac{m}{n}}}.$$

ad quam reliquae omnes facile reducuntur. Haec igitur forma dat

$$\int x^{\frac{-m}{n}} dx(1-x)^{\frac{m}{n}} = \int \frac{x^{\frac{m}{n}} dx}{(1-x)^{\frac{m}{n}}} = \frac{m\pi}{n \sin.\frac{m}{n}\pi}.$$

et posito $x = y^n$, habebitur

$$\int \frac{y^{m+n-1} dy}{(1-y^n)^{\frac{m}{n}}} = \frac{m\pi}{nn \sin.\frac{m}{n}\pi} \text{ seu } \int \frac{y^{m-1} dy}{(1-y^n)^{\frac{m}{n}}} = \frac{\pi}{n \sin.\frac{m}{n}\pi}.$$

Inuenimus ergo $\sin.\frac{m}{n}\pi = \frac{\pi}{n} : \int \frac{y^{m-1} dy}{(1-y^n)^{\frac{m}{n}}}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

46. Per Theorema ergo primum haec forma $\int y^{m-1} dy(1-y^n)^{\frac{-m}{n}}$ ob $k = -\frac{m}{n}$ conuertitur in hanc $\int \frac{y^{m-1} dy}{1+y^n}$ ideoque habebitur

$$\int \frac{y^{m-1} dy}{1+y^n} = \frac{\pi}{n \sin.\frac{m}{n}\pi} \text{ casu } y = \infty,$$

quae forma ob simplicitatem imprimis est notatu digna.

Coroll. 2.

47. Habemus ergo has duas aequalitates admodum notabiles:

$$\frac{m\pi}{n \sin.\frac{m}{n}\pi} = \int \frac{my^{m-1} dy}{(1-y^n)^{\frac{m}{n}}} \text{ posito } y = 1$$

$$\text{et } \frac{m\pi}{n \sin.\frac{m}{n}\pi} = \int \frac{my^{m-1} dy}{1+y^n} \text{ posito } y = \infty$$

quibus

quibus igitur casibus vtriusque formulae integrale satis commode exhiberi potest.

Coroll. 3.

48. Cum ergo posito $x = 1$, et $y = \infty$, sit

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m}{n} \pi} = \int \frac{x^{m-1} dx}{(1 - x^n)^{\frac{m}{n}}} = \int \frac{y^{m-1} dy}{1 + y^n}$$

si pro m scribatur $2in + m$, ob $\sin. \frac{2in+m}{n} \pi = \sin. \frac{m}{n} \pi$, erit quoque

$$\int \frac{x^{2in+m-1} dx}{(1 - x^n)^{\frac{2in+m}{n}}} = \int \frac{x^{m-1} dx}{(1 - x^n)^{\frac{m}{n}}} = \int \frac{\pi}{n \sin. \frac{m}{n} \pi} \text{ et}$$

$$\int \frac{y^{2in+m-1} dy}{1 + y^n} = \int \frac{y^{m-1} dy}{1 + y^n} = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m}{n} \pi}$$

denotante i numerum integrum quemcunque.

Coroll. 4.

49. Quia porro denotante i numerum integrum quemcunque, si pro m scribatur $2in - m$, est $\sin. \frac{2in-m}{n} \pi = - \sin. \frac{m}{n} \pi$, erit

$$\int \frac{x^{2in-m-1} dx}{(1 - x^n)^{\frac{2in-m}{n}}} = -\int \frac{x^{m-1} dx}{(1 - x^n)^{\frac{m}{n}}} = - \frac{\pi}{n \sin. \frac{m}{n} \pi} \text{ et}$$

$$\int \frac{y^{2in-m-1} dy}{1 + y^n} = -\int \frac{y^{m-1} dy}{1 + y^n} = - \frac{\pi}{n \sin. \frac{m}{n} \pi}$$

 Deinde

Deinde si pro m scribatur $(2i-1)n-m$, ob $\sin.\frac{(2i-1)n-m}{n}\pi = \sin.\frac{m}{n}\pi$, erit

$$\int\frac{x^{(2i-1)n-m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{(2i-1)n-m}{n}}} = \int\frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} = \frac{\pi}{n\sin.\frac{m}{n}\pi}$$

$$\int\frac{y^{(2i-1)n-m-1}dy}{1+y^n} = \int\frac{y^{m-1}dy}{1+y^n} = \frac{\pi}{n\sin.\frac{m}{n}\pi}.$$

Denique erit eodem modo

$$\int\frac{x^{(2i-1)n+m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{(2i-1)n+m}{n}}} = -\int\frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} = -\frac{\pi}{n\sin.\frac{m}{n}\pi}$$

$$\int\frac{y^{(2i-1)n+m-1}dy}{1+y^n} = -\int\frac{y^{m-1}dy}{1+y^n} = -\frac{\pi}{n\sin.\frac{m}{n}\pi}.$$

Coroll. 5.

50. Cum formula integralis $\int\frac{y^{m-1}dy}{1+y^n}$ saepius occurrat, operae pretium erit, eius valores pro praecipuis casibus exponere, posito $y=\infty$. Erit ergo

$$\int\frac{dy}{1+yy} = \frac{\pi}{2\sin.\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{ob} \quad \sin.\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\int\frac{dy}{1+y^3} = \frac{\pi}{3\sin.\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \quad \text{ob} \quad \sin.\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\int\frac{y\,dy}{1+y^3} = \frac{\pi}{3\sin.\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \quad \text{ob} \quad \sin.\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$-\int$

$$\int \frac{dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{4 \sin. \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\int \frac{y^2\,dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{4 \sin. \frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\int \frac{dy}{1+y^5} = \int \frac{y^3\,dy}{1+y^5} = \frac{\pi}{5 \sin. \frac{\pi}{5}}$$

$$\int \frac{y\,dy}{1+y^5} = \int \frac{y^2\,dy}{1+y^5} = \frac{\pi}{5 \sin. \frac{2\pi}{5}}$$

$$\int \frac{dy}{1+y^6} = \int \frac{y^4\,dy}{1+y^6} = \frac{\pi}{6 \sin. \frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}$$

et ita porro.

Problema 2.

51. Inuenire formulam integralem, cuius valor casu $x=1$ praebeat $\cos. \frac{m}{n}\pi$.

Solutio.

Cum sit

$$\cos. \frac{m}{n}\pi = \frac{(\frac{1}{2}-\frac{m}{n})(\frac{1}{2}+\frac{m}{n})}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\frac{3}{2}-\frac{m}{n})(\frac{3}{2}+\frac{m}{n})}{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}} \cdot \text{etc.}$$

comparetur cum hoc producto infinito forma generalis

$$P = \frac{b\,e}{a\,c} \cdot \frac{(b+1)(e+1)}{(a+1)(c+1)} \cdot \text{etc.}$$

hincque statuatur $a=\frac{1}{2}$; $c=\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{2}-\frac{m}{n}$; $e=\frac{1}{2}+\frac{m}{n}$ ita, vt sit $s=a+c=b+e=1$, atque

$$s-a-b-1=-1+\frac{m}{n}; \quad s-a-e-1=-1-\frac{m}{n};$$
$$s-b-c-1=-1+\frac{m}{n}; \quad s-c-e-1=-1-\frac{m}{n};$$

Eritque idcirco:

$$P=\frac{\int x^{-\frac{1}{2}}dx(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{\int x^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{n}}dx(1-x)^{-\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}=\frac{\int dx:\sqrt{(x-xx)}}{\int\frac{x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{2}}dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}$$

At est $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}}=\pi$, posito $x=1$.

Vnde fit $P=\operatorname{cos}.\frac{m}{n}\pi=\frac{\pi}{\int\frac{x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{2}}dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}$

Per reliquas vero formulas ipsius P habebitur:

$$P=\operatorname{cos}.\frac{m}{n}\pi=\frac{\int x^{-\frac{1}{2}}dx(1-x)^{-1+\frac{m}{n}}}{\int x^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{n}}dx(1-x)^{-1+\frac{m}{n}}}=\frac{\int x^{-\frac{1}{2}}dx(1-x)^{-1-\frac{m}{n}}}{\int x^{-\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}dx(1-x)^{-1-\frac{m}{n}}}$$

Q. E. I.

Coroll. 1.

52. Ponatur $x=y^2$, et prior forma abit in hanc:

$$\operatorname{cos}.\frac{m}{n}\pi=\frac{\pi}{2\int\frac{y^{\frac{2m}{n}}dy}{(1-yy)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}$$

ita

ita vt sit $\int \frac{x^{\frac{2m}{n}}dx}{(1-xx)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}} = \frac{\pi}{2\cos.\frac{m}{n}\pi}$.

Coroll. 2.

53. Est vero etiam per Theorema primum

$$\int x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{2}}dx(1-x)^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{n}} = \int \frac{y^{\frac{m}{n}-\frac{1}{2}}dy}{1+y}, \text{ posito } y=\infty,$$

Cum igitur sit $\int \frac{y^{\frac{m}{n}-\frac{1}{2}}dy}{1+y} = \frac{\pi}{\cos.\frac{m}{n}\pi}$ ponatur y^n pro y et erit

$$\int \frac{y^{m+\frac{1}{2}n-1}dy}{1+y^n} = \frac{\pi}{n\cos.\frac{m}{n}\pi} = \int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}dy}{1+y^n}.$$

Coroll. 3.

54. Si et reliquae formulae per Theorema primum conuertantur, prodibit:

$$\int x^{-\frac{1}{2}}dx(1-x)^{-1+\frac{m}{n}} = \int \frac{y^{-\frac{1}{2}}dy}{(1+y)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}} = \int \frac{y^{\frac{m}{n}-1}dy}{(1+y)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{n}}dx(1-x)^{-1+\frac{m}{n}} = \int \frac{y^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{n}}dy}{\sqrt{(1+y)}} = \int \frac{y^{\frac{m}{n}-1}dy}{\sqrt{(1+y)}}$$

posito $y = \infty$. Posito ergo y^n pro y, erit

$$\operatorname{cos.}\frac{m\pi}{n} = \frac{\int\frac{y^{m-1}dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}{\int\frac{y^{m-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}} = \frac{\int\frac{y^{\frac{1}{2}n-1}dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}{\int\frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}.$$

Coroll. 4.

54. Si pro m scribatur $\frac{1}{2}n-m$, ob $\operatorname{cos}(\frac{1}{2}n-m)\frac{\pi}{n} = \operatorname{sin.}\frac{m}{n}\pi$, obtinebitur primum $\frac{\pi}{n\operatorname{sin}\frac{m}{n}\pi} = \int\frac{y^{m-1}dy}{1+y^n}$ vt ante; reliquae vero formulae dabunt:

$$\operatorname{sin.}\frac{m}{n}\pi = \frac{\int\frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}dy}{(1+y^n)^{1-\frac{m}{n}}}}{\int\frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}} = \frac{\int\frac{y^{\frac{1}{2}n-1}dy}{(1+y^n)^{1-\frac{m}{n}}}}{\int\frac{y^{m-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}$$

et quia pro cosinu licet m negatiue sumere erit quoque

$$\operatorname{sin.}\frac{m}{n}\pi = \frac{\int\frac{y^{m-\frac{1}{2}n-1}dy}{(1+y^n)^{\frac{m}{n}}}}{\int\frac{y^{m-\frac{1}{2}n-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}} = \frac{\int\frac{y^{\frac{1}{2}n-1}dy}{(1+y^n)^{\frac{m}{n}}}}{\int\frac{y^{n-m-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}$$

Coroll.

Coroll. 5.

55. At vero etiam ex praeced. problemate aliam formulam pro cosinu licet elicere: Cum enim, posito $2m$ pro m, sit

$$\frac{\pi}{n\,\text{fin.}\frac{2m}{n}\pi} = \frac{\pi}{2n\,\text{fin.}\frac{m}{n}\pi.\text{cof.}\frac{m}{n}\pi} = \int\frac{y^{2m-1}dy}{1+y^n}.$$

et $\int\frac{y^{m-1}dy}{1+y^n} = \frac{\pi}{n\,\text{fin.}\frac{m}{n}\pi}$ fi haec forma per illam dividatur, habebimus:

$$2\,\text{cof.}\frac{m}{n}\pi = \frac{\int\frac{y^{m-1}dy}{1+y^n}}{\int\frac{y^{2m-1}dy}{1+y^n}} \text{ feu cof.}\frac{m}{n}\pi = \frac{\frac{1}{2}\int\frac{y^{m-1}dy}{1+y^n}}{\int\frac{y^{2m-1}dy}{1+y^n}}$$

Coroll. 6.

56 En ergo plures formas integrales, quae cafu $y=\infty$ praebent fin. $\frac{m}{n}\pi$

$$\text{I. } \frac{\pi}{n\int\frac{y^{m-1}dy}{1+y^n}}; \qquad \text{II. } \frac{\int\frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}dy}{1+y^n}}{2\int\frac{y^{n-2m-1}dy}{1+y^n}};$$

$$\text{III. } \frac{\int\frac{y^{\frac{1}{2}n-1}dy}{(1+y^n)^{\frac{m}{n}}}}{\int\frac{y^{n-m-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}; \qquad \text{IV. } \frac{\int\frac{y^{m-\frac{1}{2}n-1}dy}{(1+y^n)^{\frac{m}{n}}}}{\int\frac{y^{m-\frac{1}{2}n-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}$$

V.

$$\text{V.}\ \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-1}\,dy}{(1+y^n)^{1-\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{m-1}\,dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}, \qquad \text{VI.}\ \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}\,dy}{(1+y^n)^{1-\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}\,dy}{\sqrt{(1+y^n)}}},$$

vbi notandum eſt, in formis III et IV, item in V et VI, ſeorſim numeratores et denominatores inter ſe eſſe aequales.

Coroll. 7.

57. Simili modo totidem habebimus formulas pro $\cos.\frac{m}{n}\pi$ quae ſunt;

$$\text{I.}\ \frac{\pi}{n\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}\,dy}{1+y^n}}; \qquad \text{II.}\ \frac{\int \frac{y^{m-1}\,dy}{1+y^n}}{2\int \frac{y^{2m-1}\,dy}{1+y^n}}$$

$$\text{III.}\ \frac{\int \frac{y^{m-1}\,dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{m-1}\,dy}{\sqrt{(1+y^n)}}} \qquad \text{IV.}\ \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-1}\,dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}\,dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}$$

$$\text{V.}\ \frac{\int \frac{y^{-m-1}\,dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}-\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{-m-1}\,dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}; \qquad \text{VI.}\ \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-1}\,dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}-\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n+m-1}\,dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}.$$

Scho-

Scholion.

58. Hinc vero etiam plures formulas pro tangente anguli $\frac{m}{n}\pi$ deducere licet, quarum quae sunt simpliciores, hic exhibebo.

$$\text{tang.}\ \frac{m}{n}\pi = \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}\,dy}{1+y^n}}{\int \frac{y^{m-1}\,dy}{1+y^n}};$$

$$\text{tang.}\ \frac{m}{n}\pi = \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-1}\,dy}{(1+y^n)^{1-\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{m-1}\,dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}} = \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}\,dy}{(1+y^n)^{1-\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-1}\,dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}$$

Deinde vero ex combinatione harum formularum insignes proprietates innotescent, veluti si $n=4$ et $m=1$, erit

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\int\frac{dy}{1+y^4}} = \frac{\int\frac{dy}{1+y^4}}{2\int\frac{y\,dy}{1+y^4}} = \frac{\int\frac{y\,dy}{\sqrt{(1+y^4)}}}{\int\frac{yy\,dy}{\sqrt{(1+y^4)}}}$$

$$= \frac{\int \frac{y\,dy}{\sqrt[4]{(1+y^4)^3}}}{\int \frac{dy}{\sqrt{(1+y^4)}}} = \frac{\int \frac{dy}{\sqrt[4]{(1+y^4)^3}}}{\int \frac{dy}{\sqrt{(1+y^4)}}}$$

vnde colligitur fore $\int \frac{y\,dy}{\sqrt[4]{(1+y^4)^3}} = \int \frac{dy}{\sqrt[4]{(1+y^4)^3}}$ casu $y=\infty$, seu esse $\int \frac{(1-y)\,dy}{\sqrt[4]{(1+y^4)^3}} = 0$; talibus autem proprietatibus eruendis hic non immoror.

SOLV-

SOLVTIO GENERALIS QVORVNDAM PROBLEMATVM DIOPHANTAEORVM QVAE VULGO NONNISI SOLVTIONES SPECIALES ADMITTERE VIDENTVR.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Analysis Diophantaea, quae in problematibus indeterminatis per numeros rationales vel etiam integros soluendis versatur, duplicis generis problemata tractare solet; quorum discrimen in ratione solutionis maxime est positum. Alia enim problemata ita sunt comparata, vt solutiones generales exhiberi queant, quae omnes plane numeros satisfacientes in se complectuntur: alia vero nonnisi solutiones particulares admittunt, vel saltem per methodos cognitas nonnisi tales solutiones eruere licet, ita vt praeter numeros, qui forte reperiuntur, infiniti alii problemati satisfacientes existant, qui in solutione inuenta non contineantur. Vbi quidem in genere notari conuenit, prioris ordinis problemata multo facilius resolui, quam ea, quae ad alterum ordinem referuntur, quippe quae plerumque singularem sagacitatem cum eximiis artificiis coniunctam requirunt, in quibus maxima vis huius Analysis cernitur. Quare

Erit ergo $\frac{x}{y} = \frac{pp-qq}{2pq}$, hincque x et y ſunt vel aeque multipla, vel aeque ſubmultipla, numerorum $pp-qq$ et $2pq$. Sumta ergo a pro indice generali ſiue multiplorum, ſiue ſubmultiplorum, nanciſcemur

$$y = 2apq \text{ et } x = a(pp-qq)$$

et ob $z - \frac{q}{p}y = 2aqq$ erit $x+z = \sqrt{(xx+yy)} = a(pp+qq)$.

5. Problematis autem, cuius ſolutio per methodos cognitas generalis exhiberi nequit, exemplum eſto quaeſtio de inueniendis tribus cubis quorum ſumma ſit cubus: ſiue quaerendi ſint tres numeri x, y et z ita, vt ſit $x^3+y^3+z^3 =$ cubo. Quod problema cum ab ipſo Diophanto, tum a recentioribus, pluribus modis extat ſolutum, atque ita quidem, vt infinita multitudo ſolutionum ſit exhibita; neque tamen vlla ſolutio tam late patet, vt omnes plane caſus huic quaeſtioni ſatisfacientes in ſe complectatur. In hoc problemate etiam vel vnus cubus x^3, vel duo x^3+y^3, tanquam dati ſpectari poſſunt, vnde vel duos reliquos cubos, vel vnicum quaeri oportet, vt ſumma fiat cubus: quomodocunque autem ſolutio inſtituatur, tamen maxime particularis euadit.

6. Quod quo clarius perſpiciatur, ſolutiones dari ſolitas hic breuiter commemoremus. Sint igitur primo dati duo cubi a^3 et b^3, tertiumque x^3 inueniri oporteat, vt omnium trium ſumma $a^3+b^3+x^3$ denuo fiat cubus: Manifeſtum iam quidem eſt, radicem huius cubi maiorem fore quam x, ſed etiamſi ſtatuatur $= x+v$, tamen aequatio quadratica pro inueniendo x prodit, ſicque

ficque difficultas non diminuitur. Poni igitur folet $x=p-b$, vt fumma trium cuborum fiat:

$$a^3+3bbp-3bpp+p^3=\text{Cubo}=v^3$$

atque hac quidem pofitione amplitudo folutionis non reftringitur. Porro autem eiusmodi cubus affumi debet, vt incognita p per aequationem fimplicem; ideoque rationaliter exhiberi queat. Manifeftum autem eft hoc duplici modo fieri poffe: primo enim fumto $v=a+p$, fiet

$$a^3+3bbp-3bpp+p^3=a^3+3aap+3app+p^3$$

vbi cum termini a^3 et p^3 fe deftruant, reliquum per $3p$ diuifum dat:

$$bb-bp=aa+ap,\text{ ideoque } p=\frac{bb-aa}{a+b}=b-a$$

vnde fit $x=p-b=-a$, quo cafu vtique fit:

$$a^3+b^3+x^3=a^3+b^3-a^3=b^3=\text{cubo}$$

7. Hanc autem folutionem maxime particularem effe, ex affumtione valoris $v=a+p$ euidens eft, cum vbique fieri poffit, vt quantitas

$a^3+3bbp-3bpp+p^3$, fit cubus, cuius radix non fit $a+p$,

ita vt hac reftrictione folutio maxime fit limitata, vnde factum eft, vt etiam vnicum valorem pro p ac proinde pro x exhibuerit, qui adeo ne folutionem quidem idoneam fuppeditaffe eft cenfendus, propterea quod inuenimus $x=-a$, qui cafus tam eft obuius fua fponte, vt ne pro folutione quidem admitti queat. Pro v igitur alius valor fingi folet, talis tamen, vt inuentio ventio ipsius p ad aequationem simplicem perducat, quod vsu venit ponendo $v = a + \frac{bb}{aa}p$; fiet enim:

$$a^3 + 3bbp - 3bpp + p^3 = a^3 + 3bbp + \frac{3b^4}{a^3}pp + \frac{b^6}{a^6}p^3$$

quae vtrinque deletis terminis $a^3 + 3bbp$ per pp divisa dat:

$$-3b + p = \frac{3b^4}{a^3} + \frac{b^6}{a^6}p \text{ seu } p = \frac{3a^6 + 3a^3b^4}{a^6 - b^6}.$$

8. Cum igitur hinc inuenerimus $p = \frac{3a^3b(a^3+b^3)}{a^6-b^6} = \frac{3a^3b}{a^3-b^3}$, erit $x = p - b = \frac{2a^3b+b^4}{a^3-b^3} = \frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}$, quae est radix tertii cubi ad duos datos $a^3 + b^3$ addendi, vt summa fiat cubus. Erit autem summae radix cubica per hypothesin $= v = a + \frac{bb}{aa}p = a + \frac{3ab^3}{a^3-b^3}$, siue $v = \frac{a^4+2ab^3}{a^3-b^3} = \frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}$. Quicunque ergo numeri pro a et b fuerint assumti, hinc habebuntur tres cubi, quorum summa est cubus. Hi scilicet erunt:

$$a^3 + b^3 + \left(\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}\right)^3 = \left(\frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}\right)^3.$$

Verum et hanc solutionem maxime esse specialem ex ipsa inuestigatione perspicuum est, cum plane pro arbitrio nostro radicem trium cuborum finxerimus $v = a + \frac{bb}{aa}p$, cum sine dubio infinitos quoque alios valores recipere possit.

9. Porro autem datis duobus cubis vnicus reperitur tertius cubus, qui cum iis coniunctus producat cubum; manifestum autem est, infinitos huiusmodi dari cubos. Si enim sit $a = 4$ et $b = 3$, radix tertii cubi hinc prodit

$x = \frac{3(2 \cdot 64 + 27)}{64 - 27} = \frac{465}{37}$, et $v = \frac{472}{37}$, ita vt sit

$$4^3 + 3^3 + \left(\frac{465}{37}\right)^3 = \left(\frac{472}{37}\right)^3.$$

Noui-

Nouimus autem cubum quinarii ad hos cubos 4^3+3^3 additum quoque producere cubum scilicet senarii, seu esse $3^3+4^3+5^3=6^3$, qui tamen casus in hac solutione non continetur. Quare si ad hoc problema soluendum, vt sit $x^3+y^3+z^3=v^3$, quis dicat sumi debere:

$$x=a;\ y=b;\ \text{et}\ z=\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}$$

tumque fore $v=\frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}$, hae formulae quidem satisfaciunt, sed etiamsi, ob duos numeros a et b, arbitrio nostro relictos, infinities infiniti cuborum terniones hinc exhiberi possint, quorum summa faciat cubum, tamen infiniti alii existunt cuborum terniones idem praestantes, qui in istis formulis non sunt contenti; veluti hic casus $x=3$, $y=4$ et $z=5$, pro quo fit $v=6$.

10. Latius quidem patens reperitur solutio, si vnicus tantum trium cuborum quasi datus assumatur, ita vt fieri oporteat

$$a^3+x^3+y^3=v^3.$$

Ponatur hunc in finem $x=pu+r$ et $y=qu-r$, qua quidem positione nulla restrictio inducitur, fietque

$$a^3+3rr(p+q)u+3r(pp-qq)uu+(p^3+q^3)u^3=v^3.$$

Iam vt quantitas u hinc rationaliter definiri queat, fingatur $v=a+\frac{rr}{aa}(p+q)u$, qua positione vtique solutio iam vehementer limitatur: ex ea autem obtinebitur:

$$v^3=a^3+3rr(p+q)u+\frac{3r^4}{a^3}(p+q)^2uu+\frac{r^6}{a^6}(p+q)^3u^3.$$

Deletis ergo vtrinque terminis $a^3+3rr(p+q)u$, et residuo $(p+q)uu$ diuiso, emerget haec aequatio:

$$3r(p-q)+(pp-pq+qq)u=\frac{3r^4}{a^3}(p+q)+\frac{r^6}{a^6}(p+q)^2u$$

ex qua eruitur : $u=\frac{3a^3r^4(p+q)-3a^6r(p-q)}{a^6(pp-pq+qq)-r^6(p+q)^2}$

11. Valore ergo hoc pro u inuento, erit

$$x=pu+r=\frac{3a^3pr^4(p+q)-a^6r(2pp-2pq-qq)-r^7(p+q)^2}{a^6(pp-pq+qq)-r^6(p+q)^2}$$

$$y=qu-r=\frac{3a^3qr^4(p+q)-a^6r(pq+2pq-2qq)+r^7(p+q)^2}{a^6(pp-pq+qq)-r^6(p+q)^2}$$

et $v=a+\frac{rr}{aa}(p+q)u=\frac{a^7(pp-pq+qq)-3a^4r^3(pp-qq)+2ar^6(p+q)^2}{a^6(pp-pq+qq)-r^6(p+q)^2}$.

Cum igitur quatuor litterae a, p, q et r pro arbitrio assumi queant, haec solutio vtique infinities latius patet, quam praecedens, vbi duae tantum litterae arbitrio nostro relinquebantur. Verum tamen notandum est, rationem tantum litterarum p et q in computum ingredi, ita vt hinc litterae arbitrariae ad tres tantum reducantur: nihilo vero minus et haec solutio, ob limitationem circa radicem v adhibitam, pro particulari est habenda, ita vt terniones cuborum existant in his formulis non contenti. Solutio autem antecedens ex hac emergit, sumto $p=0$, ita vt haec infinities illa sit generalior.

12. Adhuc generaliorem autem obtinebimus, si nullum trium cuborum tanquam cognitum assumamus, seu in genere quaeramus x, y et z, vt sit $x^3+y^3+z^3=v^3$: In hunc finem ponatur

$$x=pt+u;\quad y=-pt+qu,\ \text{et}\ z=t-qu$$

quibus positionibus nihil adhuc limitatur: facta autem substitutione, oritur

$$\begin{aligned}t^3+3pp\,ttu+3p\,tuu+u^3&=v^3\\ +3ppq\,ttu-3pqq\,tuu&\\ -3q\,ttu+3qq\,tuu&\end{aligned}$$

Iam

Iam fingatur $v = t + u$, vnde quidem maxima limitatio nafcitur, et aequatione per $3tu$ diuifa, reperietur

$$(pp + ppq - q)t + (p - pqq + qq)u = t + u, \text{ feu}$$

$$\frac{t}{u} = \frac{-1 + p + qq - pqq}{1 + q - pp - ppq} : \text{ capi ergo poterit :}$$

$$t = n(-pqq + qq + p - 1) \text{ et } u = n(-ppq - pp + q + 1)$$

vnde elicitur:

$$x = n(-ppqq + pqq - ppq - p + q + 1)$$

$$y = n(p + q - pp + qq - ppq - pqq)$$

$$z = n(+ppqq - pqq + ppq + p - q - 1)$$

$$av = n(-pqq - ppq - pp + qq + p + q).$$

Hinc autem fit $z = -x$ et $v = y$, qui eft cafus per fe obuius.

13. Sequenti autem modo folutio latius patens eruitur: Ponatur

$x = mt + pu$; $y = nt + qu$ et $z = -nt + ru$, eritque

$$x^3 + y^3 + z_3 = m^3t^3 + \left.\begin{matrix} 3mmp \\ +3nnq \\ +3nnr \end{matrix}\right\} ttu + \left.\begin{matrix} 3mpp \\ +3nqq \\ -3nrr \end{matrix}\right\} tuu + \left.\begin{matrix} p^3 \\ +q^3 \\ +r^3 \end{matrix}\right\} u^3,$$

quae fumma cum debeat effe cubus $= v^3$ ponatur:

$$u = mt + \frac{mmp + nn(q + r)}{mm} u; \text{ eritque diuidendo per } uu$$

$$3t(mpp + n(qq - rr)) + u(p^3 + q^3 + r^3) =$$

$$\frac{3t}{m^3}(mmp + nn(q + r))^2 + \frac{u}{m^6}(mnp + nn(q + r))^3,$$

ficque neglecto communi factore, qui ab arbitrio noftro pendet, erit

$$t = m^6(p^3 + q^3 + r^3) - (mmp + nn(q + r))^3$$

$$u = 3m^3(mmp + nn(q + r))^2 - 3m^6(mpp + n(qq - rr))$$

 quae

quae formae si denuo per communem factorem $q+r$ diuidantur, prodit

$$t = m^6(qq-qr+rr) - 3m^4nnpp - 3mmn^4p(q+r) - n^6(q+r)^2$$
$$u = -3m^6n(q-r) + 6m^5nnp + 3m^3n^4(q+r).$$

14. Hinc iam pro x, y, z, emergunt sequentes expressiones:

$$x = m^7(qq-qr+rr) - 3m^6np(q-r) + 3m^5nnpp - mn^6(q+r)^2$$
$$y = -m^6n(2qq-2qr-rr) + 6m^5nnpq - 3m^4n^3pp + 3m^3n^4q(q+r)$$
$$-3mmn^5p(q+r) - n^7(q+r)$$
$$z = +m^6n(-qq-2qr+2rr) + 6m^5nnpr + 3m^4n^3pp + 3m^3n^4r$$
$$(q+r) + 3mmn^5p(q+r) + n^7(q+r)^2$$

quorum cuborum summa iterum est cubus radicem habens v, vt sit

$$v = m^7(qq-qr+rr) - 3m^6np(q-r) + 3m^5nnpp - 3m^4n^3(qq-rr)$$
$$+ 6m^3n^4p(q+r) + 2mn^6(q+r)^2$$

Hi vero numeri etiam sequenti modo exhiberi possunt:

$$x = +3m^5n^2pp - 3m^6npq + 3m^6npr + \left.\begin{matrix} m^7 \\ -mn^6 \end{matrix}\right\} qq \left.\begin{matrix} -m^7 \\ -2mn^6 \end{matrix}\right\} qr \left.\begin{matrix} +m^7 \\ -mn^6 \end{matrix}\right\} rr$$

$$y = -3m^4n^3pp \left.\begin{matrix} +6m^5n^2 \\ -3m^2n^5 \end{matrix}\right\} pq - 3m^2n^5pr \left.\begin{matrix} -2m^6n \\ +3m^3n^4 \\ -n^7 \end{matrix}\right\} qq \left.\begin{matrix} +2m^6n \\ +3m^3n^4 \\ -2n^7 \end{matrix}\right\} qr \left.\begin{matrix} +m^6n \\ -n^7 \end{matrix}\right\} rr$$

$$z = +3m^4n^3pp + 3m^2n^5pq \left.\begin{matrix} +6m^5n^2 \\ +3m^2n^5 \end{matrix}\right\} pr \left.\begin{matrix} -m^6n \\ +n^7 \end{matrix}\right\} qq \left.\begin{matrix} -2m^6n \\ +3m^3n^4 \\ +2n^7 \end{matrix}\right\} qr \left.\begin{matrix} +2m^6n \\ +3m^3n^4 \\ +n^7 \end{matrix}\right\} rr$$

$$v = 3m^5n^2pp \left.\begin{matrix} -3m^6n \\ +6m^3n^4 \end{matrix}\right\} pq \left.\begin{matrix} +3m^6n \\ +6m^3n^4 \end{matrix}\right\} pr \left.\begin{matrix} +m^7 \\ -3m^4n^3 \\ +2mn^6 \end{matrix}\right\} qq \left.\begin{matrix} -m^7 \\ +4mn^6 \end{matrix}\right\} qr \left.\begin{matrix} +m^7 \\ +3m^4n^3 \\ +2mn^6 \end{matrix}\right\} rr$$

Quibus valoribus substitutis actu fit $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$

15. Si

15. Si singuli hi numeri insuper per coefficientem indefinitum multiplicentur, hae formulae continebunt 6 litteras ab arbitrio nostro pendentes, quae quidem ad quatuor reducentur, vnde eae latissime patere, omnesque omnino casus in se complecti, videntur, verum tamen ex ipsa solutione, qua ipsi v valorem a litteris x, y et z pendentem tribuimus, perspicitur has formulas non nisi pro particularibus haberi posse. Ceterum quoque per alias positiones aliae eruuntur solutiones, quae pro certis casibus magis sint futurae idoneae; tum etiam methodus habetur ex inuenta solutione quacunque particulari alias solutiones particulares eliciendi. His tamen omnibus artificiis, nisi in infinitum reiterentur, nulla solutio, quae pro generali haberi queat, obtineri potest. Quin etiam in vniuersum fere adhuc est creditum, huius generis problemata natura sua ita esse comparata, vt solutionem generalem prorsus non admittant, ex quo sequens istius problematis solutio, quae reuera est generalis, imprimis notatu digna et finibus Analyseos Diophantaeae promouendis apta videtur.

Problema.

16. *Inuenire generatim omnes cuborum terniones, quorum summa sit cubus.*

Solutio.

Sint A, B, C radices ternorum cuborum, et D radix cubica summae eorum; ita vt sit $A^3+B^3+C^3=D^3$,

 cui

cui aequationi haec forma tribuatur : $A^3 + B^3 = D^3 - C^3$. Ponatur iam :

$$A = p + q; \quad B = p - q; \quad C = r - s \text{ et } D = r + s$$

qua positione amplitudo solutionis neutiquam restringitur. Hinc autem fit :

$$A^3 + B^3 = 2p^3 + 6pqq \text{ et } D^3 - C^3 = 2s^3 + 6rrs$$

sicque erit :

$$p(pp + 3qq) = s(ss + 3rr)$$

quae aequatio subsistere nequit, nisi $pp + 3qq$ et $ss + 3rr$ communem habeant diuisorem. Constat autem tales numeros alios non habere diuisores, nisi qui eiusdem sint formae : quod vt obtineatur, loco quatuor litterarum p, q, r et s, aliae sex nouae introducantur, hoc modo:

$$p = ax + 3by \qquad s = 3cy - dx$$
$$q = bx - ay \qquad r = dy + cx$$

vnde multo minus amplitudini solutionis vis infertur. Hinc autem erit :

$$pp + 3qq = (aa + 3bb)(xx + 3yy) \text{ et}$$
$$ss + 3rr = (dd + 3cc)(xx + 3yy)$$

ac nostra aequatio per $xx + 3yy$ diuisa induet sequentem formam :

$$(ax + 3by)(aa + 3bb) = (3cy - dx)(dd + 3cc)$$

qua id iam sumus consequuti, vt litterae x et y vnicam tantum obtineant dimensionem, ideoque rationaliter definiri queant. Cum enim sit :

$$\frac{x}{y} = \frac{-3b(aa + 3bb) + 3c(dd + 3cc)}{a(aa + 3bb) + d(dd + 3cc)}, \text{ ponatur}$$

$$x = -3nb(aa + 3bb) + 3nc(dd + 3cc)$$
$$y = na(aa + 3bb) + nd(dd + 3cc)$$

Ex

Ex quibus valoribus litterae p, q, r, s ita definiuntur, vt sit:

$$p = 3n(ac+bd)(dd+3cc)$$
$$q = n(3bc-ad)(dd+3cc) - n(aa+3bb)^2$$
$$r = n(dd+3cc)^2 - n(3bc-ad)(aa+3bb)$$
$$s = 3n(ac+bd)(aa+3bb)$$

Atque hinc tandem radices cuborum quaesitorum A, B, C, D erunt:

$$A = n(3ac+3bc-ad+3bd)(dd+3cc) - n(aa+3bb)^2$$
$$B = n(3ac-3bc+ad+3bd)(dd+3cc) + n(aa+3bb)^2$$
$$C = n(dd+3cc)^2 - n(3ac+3bc-ad+3bd)(aa+3bb)$$
$$D = n(dd+3cc)^2 + n(3ac-3bc+ad+3bd)(aa+3bb)$$

quibus valoribus obtinetur, vt sit:

$$A^3 + B^3 + C^3 = D^3$$

et cum solutio nulla restrictione sit limitata, vtique latissime patet omnesque cuborum terniones complectitur, quorum summa iterum est cubus.

Coroll. 1.

17. Deriuemus hinc formulas magis speciales, ac primo quidem sit $d=0$; eritque

$$A = 9n(a+b)c^3 - n(aa+3bb)^2$$
$$B = 9n(a-b)c^3 + n(aa+3bb)^2$$
$$C = 9nc^4 - 3nc(a+b)(aa+3bb)$$
$$D = 9nc^4 + 3nc(a-b)(aa+3bb).$$

Si hic

Si hic vlterius ponatur $b = a$, fiet

$A = 18nac^3 - 16na^4$; $B = 16na^4$; $C = 9nc^4 - 24na^3c$
et $D = 9nc^4$;

sin autem fiat $b = -a$, eruetur

$A = -16na^4$; $B = 18nac^3 + 16na^4$; $C = 9nc^4$;
et $D = 9nc^4 + 24na^3c$.

Coroll. 2.

18. Ponamus nunc $c = o$, eritque

$$A = n(3b-a)d^3 - n(aa+3bb)^2$$
$$B = n(3b+a)d^3 + n(aa+3bb)^2$$
$$C = nd^4 - nd(3b-a)(aa+3bb)$$
$$D = nd^4 + nd(3b+a)(aa+3bb)$$

Si vlterius ponatur $b = a$, erit

$A = 2nad^3 - 16na^4$; $B = 4nad^3 + 16na^4$; $C = nd^4 - 8na^3d$;
$D = nd^4 + 16na^3d$

Sin autem fiat $a = -b$, erit

$A = 4nbd^3 - 16nb^4$; $B = 2nbd^3 + 16nb^4$; $C = nd^4 - 16nb^3d$;
$D = nd^4 + 8nb^3d$.

Coroll. 3.

19. Sit nunc $b = o$, formulaeque nostrae fient:

$$A = na(3c-d)(dd+3cc) - na^4$$
$$B = na(3c+d)(dd+3cc) + na^4$$
$$C = n(dd+3cc)^2 - na^3(3c-d)$$
$$D = n(dd+3cc)^2 + na^3(3c+d)$$

Quod

Quod si iam praeterea statuatur $d=c$, erit

$$A=8nac^3-na^4;\ B=16nac^3+na^4;\ C=16nc^4-2na^3c;$$
$$D=16nc^4+4na^3c;$$

sin autem fiat $d=-c$, erit

$$A=16nac^3-na^4,\ B=8nac^3+na^4;\ C=16nc^4-4na^3c$$
$$D=16nc^4+2na^3c.$$

Coroll. 4.

20. Ponatur denique $a=0$, atque obtinebimus:

$$A=3nb(c+d)(dd+3cc)-9nb^4$$
$$B=3nb(d-c)(dd+3cc)+9nb^4$$
$$C=n(dd+3cc)^2-9nb^3(c+d)$$
$$D=n(dd+3cc)^2+9nb^3(d-c)$$

Si vlterius ponatur $d=c$, erit

$$A=24nbc^3-9nb^4,\ B=9nb^4;\ C=16nc^4-18nb^3c;\ D=16nc^4$$

sin autem fit $c=-d$, habebitur

$$A=-9nb^4;\ B=24nbd^3+9nb^4;\ C=16nd^4;$$
$$D=16nd^4+18nb^3d.$$

Coroll. 5.

21. Si numerorum A, B, C vnus fiat negatiuus, quod pro lubitu effici potest, veluti si fiat $A=-E$, erit $B^3+C^3=D^3+E^3$, sicque simul hoc problema generalissime dedimus solutum, quo bina cuborum paria quaeruntur, quorum summae sint inter se aequales. Sin autem duae radices prodeant negatiuae, veluti

$A = -E$ et $B = -F$; erit $C^2 = D^2 + E^2 + F^2$, ficque denuo noftri problematis folutio habebitur.

Scholion 1.

22. Formulae fpecialiffimae, in his corollariis exhibitae, ad binas has reducuntur, fiquidem in Coroll. 3 pro a fcribatur $2a$ et $n = \frac{n}{16}$, et in Coroll. 1, $\frac{1}{2}a$ pro a

$$A = nac^3 - na^4 \qquad A = 9nac^3 - na^4$$
$$B = 2nac^2 + na^4 \qquad B = na^4$$
$$C = nc^4 - na^3c \qquad C = 9nc^4 - 3na^3c$$
$$D = nc^4 + 2na^3c \qquad D = 9nc^4$$

quarum prior conuenit cum fupra §. 8. inuenta, altera autem praebet hunc cafum fimpliciffimum $A = 8$, $B = 1$, $C = 6$ et $D = 9$, ita vt fit $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$.

Scholion 2.

23. Primo intuitu formulae generales in problemate erutae non latius patere videntur, quam formulae fupra §. 14. exhibitae, cum vtrinque quinque infint litterae arbitrariae, atque iftae infuper coëfficientem communem recipere queant, ita vt etiam magis generales videantur. Interim tamen ipfa folutionis ratio declarat, formulas in problemate inuentas effe ampliffimas, dum fuperiores infigni reftrictione funt limitatae. Quae reftrictio quo clarius perfpiciatur, ex §. 13. perpendatur pofitio $v = mt + \frac{mmp + nn(q+r)}{mm}u = mt + pu + \frac{nn}{mm}(q+r)u$. Iam vero eft $mt + pu = x$ et $y + z = (q+r)u$; ita

ita vt positio sit $v = x + \frac{nn}{mm}(y + z)$. Quare, vt fiat $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$, in illa solutione assumitur esse $\frac{v - x}{y + z} = \frac{nn}{mm} =$ quadrato; sicque illa ad alios casus non pateat, nisi in quibus sit $\frac{v - x}{y + z}$ seu $\frac{D - A}{B + C}$ numerus quadratus. Quoties igitur $\frac{D - A}{B + C}$ non fit quadratum, casus in superioribus formulis non continetur: huiusmodi autem casus dari, vel ex exemplo $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$ liquet, in quo neque $\frac{9 - 1}{6 + 8}$, neque $\frac{9 - 6}{1 + 8}$, neque $\frac{9 - 8}{1 + 6}$ fit quadratum. Solutio autem problematis tali restrictione non limitatur; cum sit $\frac{D - C}{A + B} = \frac{s}{p} = \frac{pp + 3qq}{ss + 3rr} = \frac{aa + 3bb}{dd + 3cc}$; vnde ex solutione generali ii tantum casus, quibus $\frac{aa + 3bb}{dd + 3cc}$ est numerus quadratus in formulis superioribus §. 14. continentur; ex quo summa generalitas nostrae solutionis manifesto elucet.

Scholion 3.

24. Natura autem huius problematis numeros integros tantum postulat, et quidem tales, qui sint primi inter se; si enim fuerit $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$, tum problemati quoque satisfacient omnia tam aeque multipla, quam aeque submultipla numerorum A, B, C, D; ideoque sufficiet, eos tantum notasse casus, quibus numeri A, B, C, D fiunt inter se cum integri, tum primi inter se. Hunc in finem sumtis pro a, b, c, d numeris quibuscunque, siue affirmatiuis, siue negatiuis, inde primum formentur

$$x = 3n(c(dd + 3cc) - b(aa + 3bb))$$
$$y = n(d(dd + 3cc) + a(aa + 3bb))$$

 ac

ac pro n talis ſumatur fractio, vt x et y fiant integri et primi inter ſe. Ex his porro formentur:

$p = ax + 3by$; $q = bx - ay$; $r = dy + cx$ et $s = 3cy - dx$ qui denuo per commmunem diuiſorem, ſi quem habent, deprimantur. Hinc denique habebitur $A = p + q$; $B = p - q$; $C = r - s$ et $D = r + s$; ſicque fiet $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$. Atque caſus, quibus vnus horum numerorum fit negatiuus, ſimul omnes ſolutiones praebebunt, quibus ſumma duorum cuborum aequalis eſt ſummae duorum aliorum cuborum. In hoc calculo conueniet copiam numerorum formae $mm + 3nn$ in promtu habere, vnde deinceps formulae $aa + 3bb$ et $dd + 3cc$ deſumi queant.

Tabula numerorum formae $mm + 3nn$

numerus n

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	3	12	27	48	75	108	147	192	243	300	363	432	507	588	675	768	867	972
1	1	4	13	28	49	76	109	148	193	244	301	364	433	508	589	676	769	868	973
2	4	7	16	31	52	79	112	151	196	247	304	367	436	511	592	679	772	871	976
3	9	12	21	36	57	84	117	156	201	252	309	372	441	516	597	684	777	876	981
4	16	19	28	43	64	91	124	163	208	259	316	379	448	523	604	691	784	883	988
5	25	26	37	52	73	100	133	172	217	268	325	388	457	532	613	700	791	892	997
6	36	39	48	63	84	111	144	183	228	279	336	399	468	543	624	711	802	903	
7	49	52	61	76	97	124	157	196	241	292	349	412	481	556	637	724	815	916	
8	64	67	76	91	112	139	172	211	256	307	364	427	496	571	652	739	830	931	
9	81	84	93	108	129	156	189	228	273	324	381	444	513	588	669	756	847	948	
10	100	103	112	127	148	175	208	247	292	343	400	463	553	607	688	775	866	967	
11	121	124	133	148	169	196	229	268	313	364	421	484	553	628	709	796	887	988	
12	144	147	156	171	192	219	252	291	336	387	444	507	576	651	732	819	910		
13	169	172	181	196	217	244	277	316	361	412	469	532	601	676	757	844	935		
14	196	199	208	223	244	271	304	343	388	439	496	559	628	703	784	871	962		
15	225	228	237	252	273	300	333	372	417	468	525	588	657	732	813	900	991		
16	256	259	268	283	304	331	364	403	448	499	556	619	688	763	844	931			
17	289	292	301	316	337	364	397	436	481	532	589	652	721	796	877	964			
18	324	327	336	351	372	399	432	471	516	567	624	687	756	831	912	999			
19	361	364	373	388	409	436	469	508	553	604	661	724	793	868	949				
20	400	403	412	427	448	475	508	547	592	643	700	763	832	907	988				
21	441	444	453	468	489	516	549	588	633	684	741	804	873	948					
22	484	487	496	511	532	559	592	631	676	727	784	847	916	991					
23	529	532	541	556	577	604	637	676	721	772	829	892	961						
24	576	579	588	603	624	651	684	723	768	819	876	939							
25	625	528	537	652	673	700	733	772	817	868	925	988							
26	676	679	688	703	724	751	784	823	868	919	976								
27	729	732	741	756	777	804	837	876	921	972									
28	784	787	796	811	832	859	892	931	976										
29	841	844	853	868	889	916	949	988											
30	900	903	912	927	948	975													
31	961	964	973	988															

Scholion 4.

25. Ex hac tabula iam pro lubitu numeri pro $aa+3bb$ et $dd+3cc$ assumi poterunt, vnde valores litterarum a, b, c, d habebuntur, quos tam affirmatiue, quam negatiue accipere licet. Quodsi vero minores numeri pro A, B, C, D desiderentur, conueniet pro $aa+3bb$ et $3cc+dd$ eiusmodi valores capi, qui communem habeant diuisorem. Statuatur ergo

$$aa+3bb=mk \text{ et } dd+3cc=nk.$$

Tum vero sit $ac+bd=f$ et $3bc-ad=g$, hincque fiet:

$$A=n(3f+g)-mmk$$
$$B=n(3f-g)+mmk$$
$$C=nnk-m(3f+g)$$
$$D=nnk+m(3f-g)$$

vbi notandum est, quicunque valores pro f et g fuerint inuenti, eos tam affirmatiue, quam negatiue, capi posse, ob numeros a, b, c, d ambiguos; vnde pro quouis casu sequentes habebuntur determinationes:

$$\text{vel } \begin{matrix} f=\pm(ac+bd) \\ g=\pm(3bc-ad) \end{matrix} \quad \text{vel } \begin{matrix} f=\pm(ac-bd) \\ g=\pm(3bc+ad) \end{matrix}$$

Patet autem, si manente g capiatur f negatiue, eosdem numeros esse prodituros ordine tantum permutato, vnde sufficit pro f valores tantum affirmatiuos assumsisse. Praeterea manifestum est, si sit $m=n$, seu $aa+3bb=dd+3cc$, tum fore $A=-C$ et $D=B$, vnde et hos casus excludi oportebit. Denique si $f=o$, fit $A=-B$ et $C=-D$; qui propterea casus quoque sunt

sunt omittendi. Saepe numero quoque euenit, vt vel pro a et b, vel pro c et d, vel pro vtrisque plures valores oriantur, ex quibus solutionum numerus eo maior euadit.

Exemplum I.

26. Capiatur $aa + 3bb = 19$, erit $a = 4$ et $b = 1$, tum vero $dd + 3cc = 76$, eritque

$$\text{vel } \begin{matrix} d = 1 \\ c = 5 \end{matrix} \quad \text{vel } \begin{matrix} d = 7 \\ c = 3 \end{matrix} \quad \text{vel } \begin{matrix} d = 8 \\ c = 2 \end{matrix}$$

Tum vero fit $m = 1$; $n = 4$; et $k = 19$. Pro f autem et g sequentes prodibunt valores:

$$\text{I.} \begin{matrix} f = 21; \\ g = \pm 11; \end{matrix} \quad \text{II.} \begin{matrix} f = 19; \\ g = \pm 19; \end{matrix} \quad \text{III.} \begin{matrix} f = 19; \\ g = \pm 19; \end{matrix}$$

$$\text{IV.} \begin{matrix} f = 5; \\ g = \pm 37; \end{matrix} \quad \text{V.} \begin{matrix} f = 16; \\ g = \pm 26; \end{matrix} \quad \text{VI.} \begin{matrix} f = 0; \\ g = \pm 38; \end{matrix}$$

vnde tertius casus et sextus sunt excludendi. Atque hinc erit:

$$A = 12f + 4g - 19$$
$$B = 12f - 4g + 19$$
$$C = 304 - 3f - g$$
$$D = 304 + 3f - g.$$

Hinc ergo reperietur pro valore primo $f = 21$ et $g = \pm 11$

	pro signis sup.	pro signis inf.		
$A = 233 \pm 44$	$A = 277$	$A = 189$		$A = 3$
$B = 271 \mp 44$	$B = 227$	$B = 315$	seu	$B = 5$
$C = 241 \mp 11$	$C = 230$	$C = 252$		$C = 4$
$D = 367 \mp 11$	$D = 356$	$D = 378$		$D = 6$

Casus

Casus autem 2 et 3 diuidendo formulas per 19, ob $f = 1 \cdot 19$ et $g = \pm 1 \cdot 19$, dabunt:

			vel		vel
$A = 11 \pm 4$		$A = 15$		$A = 5$	$A = 7$
$B = 13 \mp 4$	ergo	$B = 9$	seu	$B = 3$	$B = 17$
$C = 13 \mp 1$		$C = 12$		$C = 4$	$C = 14$
$D = 19 \pm 1$		$D = 18$		$D = 6$	$D = 20$

Casus IV quo $f = 5$ et $g = \pm 37$ dat:

		vel	vel		
$A = 41 \pm 148$		$A = 189$	$A = -107$		$A = 63$
$B = 79 \mp 148$	ergo	$B = -69$	$B = 227$	seu	$B = -23$
$C = 289 \pm 37$		$C = 252$	$C = 326$		$C = 84$
$D = 319 \mp 37$		$D = 282$	$D = 256$		$D = 94$

Casus V quo $f = 16$ et $g = \pm 26$ dat:

$A = 173 \pm 104$		$A = 277$	$A = 69$		$A = 23$
$B = 211 \mp 104$	ergo	$B = 107$	$B = 315$	seu	$B = 105$
$C = 256 \mp 26$		$C = 230$	$C = 282$		$C = 94$
$D = 352 \pm 26$		$D = 326$	$D = 378$		$D = 126$

En ergo plures cuborum terniones ex vnica positione inuentos:

$$227^3 + 230^3 + 277^3 = 356^3 \quad | \quad 107^3 + 356^3 = 227^3 + 326^3$$
$$107^3 + 230^3 + 277^3 = 326^3 \quad | \quad 23^3 + 94^3 = 63^3 + 84^3$$
$$23^3 + 94^3 + 105^3 = 126^3$$
$$7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$$
$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

vnde colligitur

$$356^3 - 227^3 = 230^3 + 277^3 = 326^3 - 107^3; \text{ item}$$
$$126^3 - 105^3 = 63^3 + 84^3 = 23^3 + 94^3$$

Exem-

Exemplum 2.

27. Sit $aa + 3bb = 28$, erit vel $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$ vel $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$ vel $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$
cum vero sit:

$dd + 3cc = 84$, erit vel $\begin{cases} d=3 \\ c=5 \end{cases}$ vel $\begin{cases} d=6 \\ c=4 \end{cases}$ vel $\begin{cases} d=9 \\ c=1 \end{cases}$

hincque $k = 28$; $m = 1$ et $n = 3$; tum vero pro f et g sequentes prodibunt valores:

$$\text{I.}\ \begin{matrix} f = 14; \\ g = \pm 42; \end{matrix} \quad \text{II.}\ \begin{matrix} f = 4; \\ g = \pm 48; \end{matrix} \quad \text{III.}\ \begin{matrix} f = 22; \\ g = \pm 30; \end{matrix}$$

$$\text{IV.}\ \begin{matrix} f = 14; \\ g = \pm 42; \end{matrix} \quad \text{V.}\ \begin{matrix} f = 28; \\ g = \pm 0; \end{matrix} \quad \text{VI.}\ \begin{matrix} f = 26; \\ g = \pm 18; \end{matrix}$$

vbi notandum est, hos valores, quorum I et IV conueniunt, oriri ex sola positione $a = 1$ et $b = 3$, et reliquas duas eosdem producere. Hinc ergo habebimus:

$$\begin{array}{l} A = 9f + 3g - 28 \\ B = 9f - 3g + 28 \\ C = 252 - 3f - g \\ \hline D = 252 + 3f - g \end{array}$$

vnde casus primus et quartus dabunt per 14 diuidendo

$$\begin{array}{l} A = 7 \pm 9 \\ B = 11 \mp 9 \\ C = 15 \pm 3 \\ \hline D = 21 \pm 3 \end{array} \text{ ergo I. } \begin{array}{l} A = 16 = 8 \\ B = 2 = 1 \\ C = 12 = 6 \\ \hline D = 18 = 9 \end{array} \text{ II. } \begin{array}{l} A = -2 = -1 \\ B = 20 = 10 \\ C = 18 = 9 \\ \hline D = 24 = 12 \end{array}$$

Casus vero secundus per 4 diuidendo dat:

$$\begin{array}{l} A = 2 \pm 36 \\ B = 16 \mp 36 \\ C = 60 \mp 12 \\ \hline D = 66 \mp 12 \end{array} \text{ ergo I. } \begin{array}{l} A = 38 = 19 \\ B = -20 = -10 \\ C = 48 = 24 \\ \hline D = 54 = 27 \end{array} \text{ II. } \begin{array}{l} A = -34 = -17 \\ B = 52 = 26 \\ C = 72 = 36 \\ \hline D = 78 = 39 \end{array}$$

Casus tertius per 2 diuisus dat:

$$\left.\begin{array}{l} A = 85 \pm 45 \\ B = 113 \mp 45 \\ C = 93 \mp 15 \\ \hline D = 159 \mp 15 \end{array}\right. \text{ ergo I. } \begin{array}{l} A = 130 = 65 \\ B = 68 = 34 \\ C = 78 = 39 \\ \hline D = 144 = 72 \end{array} \text{ II. } \begin{array}{l} A = 40 = 20 \\ B = 158 = 79 \\ C = 108 = 54 \\ \hline D = 174 = 87 \end{array}$$

Casus quintus dat per 28 diuisus:

$$\begin{array}{l} A = 8 = 4 \\ \quad = 10 = 5 \\ \quad = 6 = 3 \\ \hline D = 12 = 6 \end{array}$$

Casus denique sextus per 2 diuisus, dat:

$$\begin{array}{l} A = 103 \pm 27 \\ B = 131 \mp 27 \\ C = 87 \mp 9 \\ \hline D = 165 \mp 9 \end{array} \text{ ergo vel } \begin{array}{l} A = 130 = 65 = 5 \\ B = 104 = 52 = 4 \\ C = 78 = 39 = 3 \\ \hline D = 156 = 78 = 6 \end{array} \text{ II. } \begin{array}{l} A = 76 = 38 \\ B = 158 = 79 \\ C = 96 = 48 \\ \hline D = 174 = 87 \end{array}$$

Ex hoc ergo exemplo sequentes resultant formulae:

$$1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$$

$$34^3 + 39^3 + 65^3 = 72^3 \qquad 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

$$20^3 + 54^3 + 79^3 = 87^3 \text{ et } 10^3 + 27^3 = 19^3 + 24^3$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 \qquad 17^3 + 39^3 = 26^3 + 36^3$$

$$38^3 + 48^3 + 79^3 = 87^3$$

hincque sequitur

$$87^3 - 79^3 = 20^3 + 54^3 = 38^3 + 48^3$$

Patet ergo, ex quouis exemplo assumto plures huiusmodi formulas obtineri, inter quas autem eaedem saepius recurrent; quemadmodum casus $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ in hoc exemplo et praecedente bis occurrit.

28. En

28. En ergo folutionem generalem problematis, quo quaeruntur quatuor numeri rationales A, B, C, D, ita vt fit $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$, feu quod eodem redit, quo quaeruntur quatuor numeri rationales, p, q, r et s, vt fit $p(pp + 3qq) = s(ss + 3rr)$. Quae problemata cum methodis folitis non nifi particulariter refolui queant, manifeftum eft, has methodos folitas adhuc infigni defectu laborare, ideoque notabilem adhuc perfectionem defiderare. Tum vero, quod hic de vnico problemate oftendimus, nullum eft dubium, quin id in infinitis aliis pari fucceffu praeftari poffit. In genere quidem patet, fimili modo huiusmodi aequationem $\alpha p (mpp + nqq) = \beta s (mss + nrr)$, vel etiam hanc latius patentem $(\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \varepsilon)(mpp + nqq) = (ap + bq + cr + ds + e)(mrr + nss)$ rationaliter generaliffime refolui poffe; ponendo:

$$p = nfx + gy \quad \text{et} \quad r = nhx + ky$$
$$q = mfy + gx \qquad\quad s = mhy - kx$$

fiet enim $mpp + nqq = (gg + mnff)(nxx + myy)$ etc.

$$mrr + nss = (kk + mnhh)(nxx + myy)$$

vnde aequatio diuifa per $nxx + myy$ continebit incognitas x et y vnius tantum dimenfionis, ex qua propterea fine vlla reftrictione earum valores rationaliter determinabuntur.

29. Non immerito igitur fufpicari licet, et aliorum problematum Diophantaeorum, quorum adhuc non nifi folutiones particulares funt repertae, folutiones quoque generales dari, neque difcrimen fupra memora-

tum ex solutionum generalitate et particularitate petitum esse essentiale; vnde patet quanta adhuc incrementa in Analysi Diophantaea desiderentur. Ad quae si vnquam penetrare contigerit, nullum est dubium, quin inde vniuersa Analysis, tam finitorum, quam infinitorum, haud contemnenda subsidia sit acceptura. Cum enim in calculo integrali praecipuum artificium in hoc versetur, vt formulae differentiales irrationales in rationales transformentur: hoc artificium ipsum, vti ex Analysi Diophantaea in hunc calculum est translatum, ita etiam indidem maiora auxilia merito expectantur; ex quo studium, quod in ista Analysi, vtcunque sterilis alias in se spectata videatur, amplificanda impenditur, neutiquam inutiliter collocari est censendum.

30. Hic porro alia conditio non minus attentione digna notari meretur, quod saepius in Analysi Diophantaea eiusmodi problemata occurrunt, quae per methodos consuetas solutionem generalem admittere videntur, cum tamen haec solutio tantum sit particularis; quibus casibus peculiaria artificia adhiberi debent, vt restrictio, qua methodus consueta est limitata, tollatur. Veluti si duo cubi in numeris integris quaerantur, quorum summa sit numerus quadratus; solutio nullo modo restricta obtineri videtur, si ista aequatio $x^3+y^3=zz$ ita resoluatur, vt ponatur $x=\frac{pz}{r}$ et $y=\frac{qz}{r}$. Fiet enim $(p^3+q^3)z=r^3$, ideoque $z=\frac{r^3}{p^3+q^3}$, et $x=\frac{prr}{p^3+q^3}$; $y=\frac{qrr}{p^3+q^3}$. Vnde, vt x et y fiant numeri integri, statuatur $r=n(p^3+q^3)$, vt habeatur:

$$x=nnp(p^3+q^3) \text{ et } y=nnq(p^3+q^3)$$

eritque $x^3+y^3=n^6(p^3+q^3)^4=$ quadrato.

31. Etsi

31. Etsi autem ista solutio generalis videtur, tamen nulli alii numeri pro x et y inueniuntur, nisi qui communem habent factorem p^3+q^3, ita vt hinc concludendum videatur, nullos dari numeros inter se primos, qui, pro x et y substituti, quaestioni satisfaciant. Interim, tamen casu, quo $x=1$ et $y=2$, perspicuum est, fore $x^3+y^3=9=$ quadrato. Tametsi autem hic casus ex formulis nostris deriuari potest, ponendo $p=1$, $q=2$, et $n=\frac{1}{9}$, vnde vtique prodit $x=\frac{1}{9}.9=1$ et $y=\frac{2}{9}.9=2$; tamen vt hinc alii huius generis casus eliciantur, necesse est, vt pro p et q eiusmodi numeri accipiantur, quorum cuborum summa sit quadratum, puta $=ss$, vt deinceps poni possit $n=\frac{1}{ss}$: vnde prodibit $x=p$ et $y=q$: quo pacto id ipsum, quod hic quaeritur, iam tanquam cognitum postulatur, vt scilicet duo cubi assignari queant, quorum summa sit quadratum. Quemadmodum ergo huic incommodo sit occurrendum, in sequenti problemate videamus.

Problema.

32. Inuenire duos numeros integros inter se primos, quorum cubi additi faciant quadratum.

Solutio.

Sint x et y numeri quaesiti, ita vt esse debeat $x^3+y^3=$ quadrato. Debet ergo $(x+y)(xx-xy+yy)$ $=$ quadratum. At de his duobus factoribus annoto, eos esse vel primos inter se, vel ternarium pro communi mensura admittere, vnde solutio fiet bipartita,

 qua

qua autem ita in vnam compingetur, vt vterque factor seorsim $x+y$ et $xx-xy+yy$ vel quadratum esse debeat, vel triplum quadratum.

I. Sit primum vterque factor quadratus; ac ponatur $xx-xy+yy=(pp-pq+qq)^2$, eritque vel $x=pp-2pq$ et $y=pp-qq$, vel $x=2pq-pp$ et $y=qq-pp$. Priori casu ergo oportet vt sit $x+y=2pp-2pq-qq$ quadratum. Quae forma cum sit $=3pp-(p+q)^2$, si ponatur $=rr$, oporteret esse $3pp=(p+q)^2+rr=$ summae duorum quadratorum, quod est impossibile. Relinquitur ergo alter casus, quo $x+y=qq+2pq-2pp=(q+p)^2-3pp$ $=$ quadratum, cui satisfit ponendo

$$p=2mn \text{ et } q=3mm-2mn+nn$$
$$x=2pq-pp=4mn(3mm-3mn+nn)$$
$$y=qq-pp=(3mm+nn)(3mm-4mn+nn)$$
$$=(m-n)(3m-n)(3mm+nn)$$

II. Tum vero ponatur $xx-xy+yy=$ triplo quadrato $=3(pp-pq+qq)^2$ eritque, cui triplici modo satisfit:

I. $x=2pp-2pq-qq$, $y=pp+2pq-2qq$ II. $x=2pp-2pq-qq$, $y=pp-4pq+qq$ III. $x=pp+2pq-2qq$, $y=-pp+4pq-qq$

Casu primo fit:

$x+y=3pp-3qq=$ 3plo quadrato, seu $pp-qq=$ quadrato: vnde fit $p=mm+nn$; et $q=2mn$, ideoque

$$x=2(m^4-2m^3n-2mn^3+n^4)$$
$$y=m^4+4m^3n-6mmnn+4mn^3+n^4$$

Casu

Casu secundo fit: $x+y=3pp-6pq=3$plo quadrato; ergo $pp-2pq=$ quadrato, cui satisfit ponendo $p=2mm$ et $q=mm-nn$; vnde oritur

$$x= \quad 3m^4+6mmnn-n^4$$
$$y=-3m^4+6mmnn+n^4$$

Casu denique tertio fit $x+y=6pq-3qq=3\,\square$ et $2pq-qq=\square$ vnde fit: $p=mm+nn$ et $q=2mm$; ideoque

$$\left.\begin{aligned} x&=-3m^4+6mmnn+n^4\\ y&=\quad 3m^4+6mmnn-n^4\end{aligned}\right\}\text{ quae cum illis congruunt.}$$

En ergo ternas solutiones problematis propositi:

$$\text{I. }\begin{cases} x= 4mn(3mm-3mn+nn)\\ y= (m-n)(3m-n)(3mm+nn)\end{cases}$$

$$\text{II. }\begin{cases} x= 2(m^4-2m^3n-2mn^3+n^4)\\ y= m^4+4m^3n-6mmnn+4mn^3+n^4\end{cases}$$

$$\text{III. }\begin{cases} x= 3m^4+6mmnn-n^4\\ y=-3m^4+6mmnn+n^4\end{cases}$$

vbi quidem secunda forma in tertia, quae cum quarta conuenit, contenta deprehenditur, ita vt secunda, vti magis complicata, omitti possit.

Coroll. 1.

53. Si hae formulae, pro x et y inuentae, per numerum quadratum quemcunque multiplicentur, eae quaesito aeque satisfacient, ita scilicet summa cuborum x^3+y^3 fiat numerus quadratus, vnde numeri quotcunque non primi inter se obtinebuntur. Simili autem modo

modo si hae formulae communem habuerint diuisorem quadratum, per eum diuisae quaesito perinde satisfacient, vnde numeri inter se primi pro x et y inueniuntur, quales hic proprie quaeruntur. Geminas ergo pro hoc negotio habebimus formulas:

$$\text{I.}\ \begin{cases} x = 4mn(3mm-3mn+nn) \\ y = (m-n)(3m-n)(3mm+nn) \end{cases} \quad \text{II.}\ \begin{cases} x = 3m^4+6mmnn-n^4 \\ y = -3m^4+6mmnn+n^4 \end{cases}$$

Coroll. 2.

34. Euidens est, dari infinitos casus, quibus altera harum formularum recipit valorem negatiuum: quod in prioribus euenit, si vel m sit negatiuum, vel n; vel n contineatur intra limites m et $3m$: in posterioribus autem, si vel $\frac{nn}{mm}$ sit maius, quam $3(1+\sqrt{2})$, vel $\frac{nn}{mm}$ minus, quam $3(\sqrt{2}-1)$. His ergo casibus duo reperiuntur cubi, quorum differentia est quadratum.

SPECI-

SPECIMEN
DE VSV OBSERVATIONVM IN MATHESI PVRA,

Auctore

L. EVLERO.

Inter tot insignes numerorum proprietates, quae adhuc sunt inuentae ac demonstratae, nullum est dubium, quin *pleraeque* primum ab inuentoribus tantum sunt *obseruatae* et in multiplici numerorum tractatione animaduersae, antequam de iis demonstrandis cogitauerint. Ita de eo numerorum primorum ordine, qui vnitate *superant multiplum* quaternarii, cuiusmodi sunt 5, 13, 17, 29, 37, 41, etc. ante sine dubio est obseruatum, eorum singulos in duo quadrata secari posse, quam in eo elaboratum, vt huius obseruationis veritas per solidam demonstrationem euinceretur. Quod deinde quilibet numerus in quatuor vel pauciora quadrata distribui possit, Diophanto iam notum fuisse videtur, nemo autem ante Fermatium est professus, se huius veritatis demonstrationem habere, quam autem nusquam publice edidit, ita vt mea demonstratio, quam ante aliquod tempus concinnaui, pro prima, quae quidem publice fuerit proposita, sit habenda. Interim tamen fateri cogor, demonstrationem Fermatianam, etiamsi mihi nihil omnino de principiis, quibus innitebatur, suspicari licuerit, mea multo fuisse perfectiorem, ac longe latius patuisse.

Aſſeuerat enim Fermatius, ſe ex eodem fonte aliorum quoque Theorematum demonſtrationes hauſiſſe, cuius generis ſunt, quod omnis numerus integer ſit ſumma trium pauciorumue numerorum trigonalium; item quod omnis numerus integer ſit ſumma quinque vel pauciorum numerorum pentagonalium; item ſex pauciorumue numerorum hexagonalium, et ita porro de reliquis numeris polygonalibus in infinitum. Ego vero etiamſi reſolutionem cuiusque numeri in quatuor paucioraue quadrata demonſtraui, tamen omnem adhuc operam in iſtis reliquis theorematibus demonſtrandis inutiliter conſumſi, neque vllo modo etiam nunc ſaltem reſolutionem in tres paucioresue trigonales oſtendere potui, etiamſi ea ſimplicior videatur, quam reſolutio in quatuor paucioraue quadrata. Verum et has eximias numerorum proprietates Fermatius multo ante per inductionem concluſiſſe eſt putandus, quam eas demonſtrare didicerit. Ex quibus merito colligimus, in numerorum indole ſcrutanda obſeruationi et inductioni, cui omnes has elegantiſſimas proprietates acceptas referre debemus, plurimum eſſe tribuendum; ideoque ne nunc quidem ab hoc negotio vlterius proſequendo eſſe deſiſtendum. Hoc enim modo pertingimus ad huiusmodi proprietatum cognitionem, quae alias nobis perpetuo ignotae manſiſſent; ac tum demum occaſionem nanciſcimur ad inueſtigationem demonſtrationum vires noſtras intendendi; veritates namque pleraeque huius generis ita ſunt comparatae, vt prius agnoſci debeant, quam demonſtrari poſſint. Quamuis autem huiusmodi proprietas per aſſiduam obſeruationem fuerit animaduerſa, quae per ſe menti non

parum

partim est iucunda: tamen nisi demonstratio solida accesserit, de eius veritate non satis certi esse possumus; exempla enim non desunt, quibus sola inductio in errorem praecipitauerit. Tum vero ipsa demonstratio non solum omnia dubia tollit, sed etiam naturae numerorum penetralia non mediocriter recludit, nostramque numerorum cognitionem continuo magis promouet, a cuius certe doctrinae perfectione adhuc longissime sumus remoti. Verum si cui haec forte non magni momenti esse videantur, quod vix vnquam vllum in Mathesi applicata vsum habitura putentur, vsus quem inde *in ratiocinando* adipiscimur, certe non est contemnendus. Sunt enim plerumque huius generis veritates ita reconditae, vt earum demonstrationes tam incredibilem circumspectionem, quam eximiam ingenii vim requirant. Quare cum vulgo ad ratiocinii facultatem comparandam demonstrationes geometricae commendari soleant, quippe quae regularum rationandi vsum maxime contineant, nescio an non ad hunc scopum demonstrationes arithmeticae multo magis sint accommodatae: in his enim multo maiori cura est cauendum, ne a praescriptis Logicorum regulis aberremus, quoniam plerumque nimis est difficile, in errorem non prolabi. Deinde vero huius generis demonstrationes arithmeticae, multo maiorem sollertiam et sagacitatem ingenii postulant, quam geometricae: vnde qui in his fuerit exercitatus, longe facilius errorem in ratiocinando vsu edoctus euitabit, sibique promtum ratiocinii vsum multo certius comparabit. Atque, ob haec tam insignia commoda, perlustrationes naturae numerorum minime relinquendae videantur, in quibus ne inutiliter verſemur, ab obſeruationibus erit exordiendum, hincque ad demonſtrationem proprietatum obſeruatarum progrediendum. Huiusmodi operationem iam ante aliquot annos confeci in contemplatione diuiſorum cuiusque numeri, qui eſt ſumma duorum quadratorum, nunc igitur, vt viam ad alias numerorum proprietates cognoſcendas ſternam, contemplaturus ſum numeros, qui ex quadrato et duplo quadrati ſunt compoſiti, quales in hac forma generali $2aa+bb$ ſunt contenti, atque in diuiſores horum numerorum ſum inquiſiturus. At hic quidem ſtatim notari conuenit, radices horum duorum quadratorum numeros inter ſe primos eſſe oportere, alioquin enim quilibet numerus poſſet eſſe diuiſor, quadratum ſcilicet numeri, qui foret radicum communis diuiſor: quam ob rem numeros a et b, ex quibus forma $2aa+bb$ componitur, inter ſe primos ſtatuam.

CONSIDERATIO CIRCA NVMEROS in hac forma $2aa+bb$ contentos.

Exponantur primo numeri in forma $2+bb$ contenti, tum numeri huius formae $8+bb$, excluſis numeris paribus pro b ſubſtituendis: tertio numeri formae $18+bb$, ſumendo pro b numeros per 3 non diuiſibiles: quarto numeros formae $32+bb$, ſumendo pro b numeros per 2 non diuiſibiles, et ita porro. Sicque obtinebuntur ſequentes numerorum progreſſiones:

$2+bb)$ 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83, 102, 123, 146, 171, 198, 227, 258, 291, 326, 363, 402, 443, 486.

$8+bb)$

8 + *bb*) 9, 17, 33, 57, 89, 129, 177, 233, 297, 349, 449.
18 + *bb*) 19, 22, 34, 43, 67, 82, 118, 139, 187, 214, 274, 307, 379, 418.
32 + *bb*) 33, 41, 57, 81, 113, 153, 201, 257, 321, 393, 473.
50 + *bb*) 51, 54, 59, 66, 86, 99, 114, 131, 171, 194, 219, 246, 306, 339, 374, 411, 491.
72 + *bb*) 73, 97, 121, 193, 241, 361, 433.
98 + *bb*) 99, 102, 107, 114, 123, 134, 162, 179, 198, 219, 242, 267, 323, 354, 387, 422, 459, 498.
128 + *bb*) 129, 137, 153, 177, 209, 249, 297, 353, 417, 489.
162 + *bb*) 162, 166, 178, 187, 211, 226, 262, 283, 331, 358, 418, 451.
200 + *bb*) 201, 209, 249, 281, 321, 369, 489.
242 + *bb*) 243, 246, 251, 258, 267, 278, 291, 306, 323, 342, 386, 411, 438, 467, 498.
288 + *bb*) 289, 313, 337, 409, 457.
338 + *bb*) 339, 342, 347, 354, 363, 374, 387, 402, 419, 438, 459, 482.
392 + *bb*) 393, 401, 417, 473.
450 + *bb*) 451, 454, 466, 499.

Obſeruatio 1.

Excerpamus hinc numeros primos, vt nanciſcamur omnes numeros primos formae $2aa + bb$, qui quidem 500 non ſuperent, quippe ad quem terminum omnes progreſſiones praecedentes produximus, atque iſti numeri primi reperientur eſſe:

 3, 11,

3, 11, 17, 19, 41, 43, 59, 67, 73, 83, 89, 97, 107, 113, 131, 137, 139, 163, 179, 193, 211, 227, 233, 241, 251, 257, 280, 283, 307, 313, 331, 337, 347, 353, 379, 401, 409, 419, 433, 443, 449, 457, 467, 491, 499.

De his ergo obseruo, singulos nonnisi semel in serie numerorum formae $2aa + bb$ occurrere: *ita vt numerus primus, qui fuerit aggregatum ex quadrato et duplo quadrato, sit vnico modo huiusmodi aggregatum.*

Obseruatio 2.

Si ex numeris expositis excerpantur ii, qui sint producta ex binario et numero primo, illi in ordinem digesti erunt:

6, 22, 34, 38, 82, 86, 118, 134, 146, 166, 178, 194, 214, 226, 262, 274, 278, 326, 358, 386, 422, 454, 466, 482.

vbi alii numeri non occurrunt, nisi ipsi numeri primi formae $2aa + bb$ duplicati, ac singuli hi quidem numeri semel tantum reperiuntur.

Qui ergo numerus primus in forma $2aa + bb$ fuerit contentus, eius quoque duplum erit numerus formae $2aa + bb$, idque vnico modo.

Ceterum cum a et b sint numeri inter se primi, ideoque alter eorum certo impar, manifestum est, nullos dari in forma $2aa + bb$ numeros per 4 diuisibiles.

Obser-

Obſeruatio 3.

Cum in numeris expoſitis alii ſint impares, alii pares, et quidem impariter pares, obſeruo porro:

Si quis numerus impar inter illos numeros reperiatur, tum quoque eius duplum certo occurrere; ac viciſſim quicunque numerus par in illis numeris occurrit, eius quoque ſemiſſis ibidem certo reperietur.

Obſeruatio 4.

Quodſi iam reliquos numeros non primos ſpectemus, ſingulosque in ſuos factores primos reſoluemus, vnicuique autem in parentheſi adſcribamus, quot vicibus occurrat, ſequentes nanciſcemur:

$3^2(1)$; $3^3(1)$; $3.11(2)$; $3.17(2)$; $3.19(2)$; $3^4(1)$; $3^2.11(2)$; $11^2(1)$; $3.41(2)$; $3.43(2)$; $3^2 17(2)$; $3^2.19(2)$; $3,59(2)$; $11.17(2)$; $3.67(2)$; $11,19(2)$; $3,73(2)$; $3^5(1)$; $3,83(2)$; $3,89(2)$; $17^2(1)$; $3.97(2)$; $3^3.11(2)$; $3,107(2)$; $17.19(2)$; $3\ 113(2)$; $19^2(1)$; $3,11^2(2)$; $3^2,41(2)$; $3^2,43(2)$; $3,131(2)$; $3,137(2)$; $3.139(2)$; $11.41(2)$; $3^3,17(2)$; $11.43(2)$; $3.163(2)$.

Hic iam obſeruo omnia producta ex numeris primis formae $2aa+bb$ per quamcunque combinationem nata occurrere: *ita vt productum ex quotcunque numeris formae* $2aa+bb$ *ſemper ſit numerus in quadratum et duplum quadratum reſolubilis*: ac plus quidem vno modo, ſi ex diuerſis factoribus fuerit conflatus.

Obſer-

Obſeruatio 5.

Imprimis autem hic animaduerto, in his numeris compoſitis nullos alios factores primos occurrere, niſi qui ipſi ſint formae $2aa+bb$; vnde colligo per inductionem:

Omnes numeros formae $2aa+bb$, *ſi quidem* a *et* b *ſint numeri inter ſe primi, nullos alios diuiſores admittere primos, niſi qui ipſi ſint huius formae* $2aa+bb$.

Binarium quidem vidimus inter diuiſores occurrere poſſe, verum cum $2aa+bb$ caſu $b=0$ et $a=1$ binarium praebeat, etiam ipſum binarium in forma $2aa+bb$ complecti licet.

Obſeruatio 6.

Cum ergo omnis numerus formae $2aa+bb$, exiſtentibus a et b primis inter ſe, alios diuiſores primos non admittat, niſi qui in ſerie numerorum in obſeruatione prima exhibitorum contineantur, ſi ipſis quidem binarius adiungatur: circa iſtos numeros primos obſeruo, intra illos nullos numeros ſiue huius formae $8n-1$, ſiue huius $8n-3$ reperiri.

De numeris ergo primis formae $8n-1$ *et* $8n-3$ *affirmare licet, eos non ſolum non eſſe numeros formae* $2aa+bb$, *ſed etiam ne diuiſores quidem eſſe poſſe vllius numeri formae* $2aa+bb$, *ſiquidem* a *et* b *ſint primi inter ſe.*

Obſeruatio 7.

Numeris ergo primis huius geminae formae $8n-1$ et $8n-3$ excluſis, praeter binarium nulli alii relin-

relinquuntur numeri primi, qui sint diuisores numerorum formae $2aa+bb$, nisi qui in alterutra harum formarum $8n+1$, vel $8n+3$, contineantur; quos duplicis generis numeros primos conspectui exposuisse iuuabit:

$(8n+1)$: 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, 193, 233, 241, 257, 281, 313, 337, 353, 401, 409, 433, 449, 457.

$(8n+3)$: 3, 11, 19, 43, 59, 67, 83, 107, 131, 139, 163, 179, 211, 227, 251, 283, 307, 331, 347, 379, 419, 443, 467, 491, 499.

atque obseruo, hos numeros primos omnes inter numeros primos formae $2aa+bb$ ita occurrere, vt alii praeterea ibi non reperiantur.

Hinc ergo numeri huius formae $2aa+bb$, *dummodo* a *et* b *sint inter se primi, praeter binarium nullos alios habent diuisores primos, nisi qui sint vel huius formae* $8n+1$, *vel huius* $8n+3$.

Cum autem omnes numeri primi in his quatuor formis $8n\pm1$ et $8n\pm3$ contineantur, haec obseruatio cum praecedente conuenit.

Obseruatio 8.

At, quod notatu maxime est dignum, obseruo: *Omnem numerum primum tam huius formae* $4n+1$, *quam huius* $8n+3$, *semper esse aggregatum ex quadrato et duplo quadrato: siue inter numeros primos formae* $2aa+bb$ *omnes plane numeros, siue huius formae* $8n+1$, *siue huius* $8n+3$ *occurrere, ac praeterea nullos alios.*

 Nullus

Nullus ergo assignari poterit numerus primus in harum formularum $8n+1$ et $8n+3$ alterutra contentus, qui non sit summa quadrati et dupli quadrati, et hoc quidem vnico modo, si obseruatio prima huc trahatur.

Nota.

Proprietatum, quas hic circa numeros formae $2aa+bb$ eorumque diuisores obseruauimus, aliae ita sunt comparatae, vt earum veritas facile ostendi possit, aliae autem maiorem demonstrationis apparatum requirunt, aliae vero denique profundissimae indaginis sunt iudicandae, cum summa sollertia ad eas demonstrandas sit opus. Ad primum genus referendae sunt obseruationes prima, secunda, tertia, quarta et pars prior sextae; ad genus secundum autem pertinent obseruationes quinta, pars posterior sextae, et septima, quae eo redit. Profundissimae autem indaginis est obseruatio octaua. Proprietates autem istae similes sunt iis, quas circa summas duorum quadratorum proposui; quarum veritatem cum feliciter eruerim, operam dabo, vt etiam has proprietates obseruatas simili modo demonstrationibus confirmem. Incipiam ergo ab obseruationibus facillimis.

Theorema. 1.

1. Si numerus N fuerit numerus formae $2aa+bb$, tum quoque eius duplum 2N erit numerus eiusdem formae.

Demon-

Demonstratio.

Sit enim $N = 2mm + nn$, erit $2N = 4mm + 2nn$; ponatur $2m = k$, fietque $2N = kk + 2nn$, sicque $2N$ erit quoque numerus formae $2aa + bb$. Q. E. D.

Coroll. 1.

2. Ac si N fuerit pluribus modis numerus formae $2aa + bb$, totidem quoque modis eius duplum $2N$ erit numerus formae $2aa + bb$.

Coroll. 2.

3. Constat ergo veritas obseruationis secundae; simulque ratio perspicitur, cur numerorum, qui inter numeros formae $2aa + bb$ supra expositos bis occurrunt, eorum quoque dupla ibidem bis reperiantur.

Theorema 2.

4. Si numerus par $2N$ fuerit numerus formae $2aa + bb$, tum quoque eius semissis N erit numerus eiusdem formae.

Demonstratio.

Posito $2N = 2mm + nn$, quo $2mm + nn$ sit numerus par, quoniam pars $2mm$ iam est par, necesse est, vt altera pars nn sit quoque numerus par, ideoque et eius radix n. Ponatur ergo $n = 2k$, fietque $2N = 2mm + 4kk$, vnde per 2 diuidendo oritur $N = mm + 2kk$, ita vt quoque semissis N sit in forma $2aa + bb$ contentus. Q. E. D.

Coroll. 1.

5. Hinc etiam euidens est, si numerus propositus par 2N fuerit pluribus modis numerus formae $2aa+bb$, totidem quoque modis eius semissem N fore numerum eiusdem formae.

Coroll. 2.

6. Si ergo numerus N fuerit vnico modo numerus formae $2aa+bb$; tum etiam eius duplum 2N vnico modo erit numerus formae $2aa+bb$; si enim pluribus modis esset huius formae, totidem quoque modis eius semissis N foret eiusdem formae contra hypothesin.

Coroll. 3.

7. Hinc autem porro duplicando numeri 4N, 8N, 16N etc. omnes vnico tantum modo in forma $2aa+bb$ continebuntur, siquidem numerus simplex N vnico modo in ista forma reperiatur.

Coroll. 4.

8. Quod vero hic de vnico modo resolutionis in formam $2aa+bb$ est dictum, patet quoque ad duos pluresue modos. Ex qualibet enim resolutione numeri N in formam $2aa+bb$, sponte nascitur resolutio numeri, siue dupli, siue dimidii, sicque obseruationem tertiam demonstratam dedimus.

Theo-

Theorema 3.

9. Si habeantur duo numeri M et N formae $2aa+bb$, erit quoque eorum productum MN numerus eiusdem formae.

Demonstratio.

Sit enim $M=2aa+bb$, et $N=2cc+dd$, erit eorum productum

$$MN=4aacc+2aadd+2ccbb+bbdd;$$

addatur $o=4acbd-4acbd$, et habebitur

$$MN=4aacc+4acbd+bbdd+2aadd-4acbd+2ccbb$$

quae expressio manifesto est aggregatum ex quadrato et duplo quadrato, scilicet:

$$MN=(2ac+bd)^2+2(ad-cb)^2$$

Vel quod eodem redit, si terminos $+4acbd$ et $-4acbd$ permutemus, vt sit

$$MN=4aacc-4acbd+bbdd+2aadd+4acbd+2ccbb$$

habebimus quoque alio modo

$$MN=(2ac-bd)^2+2(ad+cb)^2$$

Quare si vterque numerus M et N fuerit formae $2aa+bb$, erit quoque productum numerus eiusdem formae. Q. E. D.

Coroll. 1.

10. Ob geminas formulas inuentas productum MN erit duplici modo numerus formae $2aa+bb$. Si enim sit

$$M=2aa+bb \text{ et } N=2cc+dd$$

ac ponatur productum $MN = 2pp + qq$, erit

vel $p = ad - cb$ et $q = 2ac + bd$

vel $p = ad + cb$ et $q = 2ac - bd$.

Coroll. 2.

11. Si fuerit vel $ad - cb$, vel $2ac - bd$ numerus negatiuus, pro p et q eorum valorés affirmatiui assumi poterunt; ex formulis enim quadratis perinde elicere licuisset priori casu $p = cb - ad$, posteriori vero $q = bd - 2ac$. Numeri igitur negatiui hoc modo pro radicibus quadratorum oriundi calculum nihil turbant.

Coroll. 3.

12. Productum ergo duorum numerorum formae $2aa + bb$ duplici modo in eandem formulam resolui poterit, nisi forte vtraque resolutio ad eandem recidat, quod autem non euenit, nisi fuerit vel $cb = 0$ et $bd = 0$, vel $ac = 0$, hoc est $b = 0$, vel $a = 0$, vel $c = 0$, vel etiam $d = 0$, alterque propterea numerorum propositorum, vel quadratus, vel duplum quadrati.

Coroll. 4.

13. Si ergo ambo numeri fuerint primi, eorum productum semper est duplici modo resolubile in formam $2aa + bb$, nisi alter fuerit $= 1$, vel $= 2$. Cum enim tantum excipiantur casus, quibus alter est quadratum, vel duplum quadratum, vterque autem ponatur

tur primus, excipiuntur tantum casus, quibus alter est vel 1, vel 2.

Coroll. 5.

14. Si ambo numeri M et N fuerint aequales, seu $N = M$, vt sit $c = a$ et $d = b$, erit quidem duplici modo quadratum $MM = 2pp + qq$, scilicet vel $p = o$ et $q = 2aa + bb$, vel $p = 2ab$ et $q = 2aa - bb$. Sed prior resolutio $MM = 2.o^2 + (2aa + bb)^2$, minus ad scopum pertinere est censenda, quia alterum quadratum est euanescens. Sin autem esset, vel $a = o$, vel $b = o$, vtraque resolutio adeo ad vnum rediret.

Coroll. 6.

15. Patet hinc etiam productum ex tribus numeris L, M, N formae $2aa + bb$ quadruplici modo in formam eandem resolui posse. Sit enim:

$$L = 2aa + bb;\ M = 2cc + dd;\ N = 2ee + ff$$

ac sit primo $LM = 2pp + qq$, erit vti vidimus:

vel $p = ad + cb$ et $q = 2ac + bd$

vel $p = ad + cb$ et $q = 2ac - bd$

Tum ergo, si ponatur productum $LMN = 2xx + yy$, erit quoque duplici modo

vel $x = pf - eq$ et $y = 2ep + fq$

vel $x = pf + eq$ et $y = 2ep - fq$

Hinc ergo, pro p et q valoribus inuentis substituendis, reperietur

I. vel

I. vel $x = 2ace + bde + bcf - adf$ et $y = 2ade + 2acf - 2bce + bdf$
II. vel $x = 2ace - bde - bcf - adf$ et $y = 2ade + 2acf + 2bce - bdf$
III. vel $x = 2ace + bde - bcf + adf$ et $y = 2ade - 2acf - 2bce - bdf$
VI. vel $x = 2ace - bde + bcf + adf$ et $y = 2ade - 2acf + 2bce + bdf$

Coroll. 7.

16. Simili modo colligitur, productum ex quatuor numeris formae $2aa + bb$ octo diuersis modis in formam eandem resolui posse; casus tamen sunt excipiendi, quibus inter numeros propositos reperiuntur, vel aequales, vel simplicia quadrata, vel quadrata dupla: his enim casibus vidimus resolutiones, quae in genere sunt diuersae, conuenire.

Scholion.

17. Quod autem ad istas resolutiones attinet, earum vis perfecte intelligi nequit, nisi demonstrauerimus, numeros primos plus vno modo in hac forma $2aa + bb$ non contineri. Si enim numeri primi plurimis modis essent resolubiles, de numeris compositis nihil certi definiri posset, nisi quod adhuc pluribus modis huiusmodi resolutiones admittant. Cum igitur prima obseruatio nos docuerit, numeros primos, qui quidem in ordine numerorum formae $2aa + bb$ continentur, nonnisi semel ibidem occurrere, hanc ipsam veritatem demonstrare aggrediar.

Theorema. 4.

18. Qui numerus duplici modo in formam $2aa + bb$ resolui potest, is non est primus.

Demon-

Demonstratio.

Sit numerus N duplici modo in hanc formam resolubilis, ac ponatur

$$N = 2aa + bb \text{ et } N = 2cc + dd$$

ita vt tam numeri a et c, quam b et d, sint diuersi. Multiplicetur prior aequatio per cc, altera per aa, atque illa ab hac subtracta, relinquet:

$$(aa - cc)N = aadd - bbcc = (ad - bc)(cd + bc)$$

Quod si iam numerus N esset primus, is in alterutro factore $ad - bc$, vel $ad + bc$, contineretur, necesse est. Verum cum addendis nostris formulis sit $2N = 2aa + bb + 2cc + dd$, auferatur vtrinque $2ad + 2bc$, vnde habebitur:

$$2N - 2ad - 2bc = 2aa + bb + 2cc + dd - 2ad - 2bc;$$

siue $2N - 2ad - 2bc = aa + (a-d)^2 + cc + (c-b)^2$. At postremum hoc membrum, vtpote summa quatuor quadratorum, certo est nihilo maius, ita vt sit $2N - 2ad - 2bc > 0$; vnde fit:

$$N > ad + bc.$$

Cum ergo N sit maior, quam $ad + bc$, multoque magis quam $ad - bc$, numerus N in neutro factore $ad - bc$, vel $ad + bc$, tanquam pars continetur. Fieri ergo nequit, vt numerus N, qui duplici modo in formam $2aa + bb$ est resolubilis, sit primus. Q. E. D.

Coroll. I.

19. Si ergo N fuerit numerus primus, certe plus vno modo in formam $2aa + bb$ non est resolubilis,

bilis, quoniam, si plus vno modo resolui posset, non esset primus, sicque habetur demonstratio obseruationis primae.

Coroll. 2.

20. Quicunque ergo numerus primus vel plane non ad formam $2aa + bb$ reduci potest, vel vnico tantum modo. Cauendum autem, ne hinc vicissim concludatur, omnem numerum, qui vnico tantum modo sit resolubilis, esse primum; huiusmodi enim conclusio regulis ratiocinandi aduersaretur.

Coroll. 3.

21. Si fuerit idem numerus $N = 2aa + bb$, itemque $N = 2cc + dd$, erit hinc, vt vidimus, $(aa - cc) N = (ad - bc)(ad + bc)$, ideoque:

$$N = \frac{(ad - bc)(ad + bc)}{aa - cc}.$$

Numerator ergo huius fractionis non solum per denominatorem erit diuisibilis, sed reductione ad integrum facta, simul factores numeri N innotescent.

Coroll. 4.

22. Hoc ergo casu numerus N non solum non erit primus, sed etiam eius factores hinc facile colligentur. Sic cum numerus 267 bis inter numeros formae $2aa + bb$ occurrat, scilicet:

$$267 = 2 \cdot 7^2 + 13^2 \text{ et } 267 = 2 \cdot 11^2 + 5^2$$

ob $a = 7$, $b = 13$, $c = 11$ et $d = 5$, habebimus:

267 =

$$267 = \frac{(35-143)(35+143)}{(7-11)(7+11)} = \frac{108.178}{4.18}$$

hincque $267 = \frac{6.178}{4} = 3.89.$

Theorema 5.

23. Si numerus formae $2aa+bb$ fuerit diuisibilis per numerum primum eiusdem formae, tum etiam quotus erit numerus eiusdem formae.

Demonstratio.

Sit numerus propositus $N = 2aa+bb$, eiusque diuisor $P = 2pp+qq$, qui cum sit primus, numeri p et q erunt primi inter se. Denotet Q quotum ex hac diuisione oriundum, ita vt sit

$$Q = \frac{N}{P} = \frac{2aa+bb}{2pp+qq}$$

Cum igitur numerus $N = 2aa+bb$ sit diuisibilis per $P = 2pp+qq$; erit quoque $pp(2aa+bb) = 2aapp + bbpp$ per P diuisibile: at $aaP = 2aapp+aaqq$ etiam manifesto per P est diuisibile, vnde quoque differentia horum numerorum $aaqq-bbpp$, per numerum primum P diuisibilis sit necesse est Quia vero est $aaqq-bbpp = (aq-bp)(aq+bp)$, alter horum duorum factorum $aq \pm bp$, per numerum primum P certo erit diuisibilis. Ponatur ergo

$$aq \pm bp = mP = 2mpp+mqq$$

hincque reperitur:

$$q = \frac{2mpp \mp bp}{q} + mq = \frac{p(2mp \mp b)}{q} + mq.$$

In quarto si fuerit $A = B$, seu si idem numerus duplici modo in forma $2aa + bb$ contineatur, tum non esse $A = \mathfrak{A}$.

Theorema 6.

28. Si numerus formae $2aa + bb$ diuisibilis fuerit per numerum, qui ista forma non contineatur, tum quotus neque erit numerus primus formae $2aa + bb$, neque productum ex meris huiusmodi numeris primis conflatum.

Demonstratio.

Demonstrari ergo debet si numerus A diuisibilis fuerit per numerum B', tum quotum neque fore $= \mathfrak{A}$, neque productum huiusmodi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ etc. Si enim quotus esset $\mathfrak{A}$, seu $\frac{A}{B'} = \mathfrak{A}$, foret $\frac{A}{\mathfrak{A}} = B'$, quod per theorema praecedens fieri nequit. Sin autem quotus esset productum ex quotcunque numeris primis formae $2aa + bb$, scilicet $= \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, vt esset $\frac{A}{B'} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, foret vtique $A = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}B'$, ideoque $\frac{A}{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}B'$. At est $\frac{A}{\mathfrak{A}} = B$, vnde foret $B = \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}B'$, hincque $\frac{B}{\mathfrak{B}} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}B'$: verum simili modo est $\frac{B}{\mathfrak{B}} = C$, ideoque $\frac{C}{\mathfrak{C}} = \mathfrak{D}B'$: at est $\frac{C}{\mathfrak{C}} = D$, et $\frac{D}{\mathfrak{D}} = E$, foret ergo tandem $E = B'$, quod esset absurdum: vnde sequitur, quotum neque fore numerum primum formae $2aa + bb$, neque productum ex meris huiusmodi numeris primis constans. Q. E. D.

Coroll.

Coroll. 1.

29. Cum igitur quotus neque ſit numerus primus formae $2aa+bb$, neque ex meris numeris primis huius formae conflatus, factores habebit, vel ſaltem vnum factorem primum in forma $2aa+bb$ non contentum, ſeu litera $\mathfrak{A}'$ deſignandum.

Coroll. 2.

30 Quoniam ergo factores quoti ſunt quoque factores diuidendi, perſpicuum eſt, ſi numerus formae $2aa+bb$ diuiſorem habeat B', ſeu in forma $2aa+bb$ non contentum, tum eundem numerum inſuper alium ad minimum habiturum eſſe diuiſorem primum, in forma $2aa+bb$ non contentum, ſeu ſi numerus A diuiſorem habeat B', tum certe etiam diuiſorem habebit alium $\mathfrak{B}'$.

Coroll. 3.

31. Quod hic in genere de diuiſoribus formae A' oſtenſum eſt, valet etiam de diuiſoribus formae $\mathfrak{A}'$. Hinc ſi numerus formae $2aa+bb$ diuiſibilis fuerit per numerum primum in eadem forma non contentum, tum etiam quotus eſt diuiſibilis per numerum primum in eadem forma non contentum.

Theorema 7.

32. Si numerus formae $2aa+bb$, quantumuis magnus, diuiſorem habuerit numerum P, neque tamen radices a et b ipſae per P ſint diuiſibiles, tum alius numerus

merus eiusdem formae exhiberi poteſt minor, quam $\frac{3}{4}$ PP, qui per eundem diuiſorem P ſit diuiſibilis.

Demonſtratio.

Poſito numero $2aa+bb$ diuiſibili per P, quantumuis magnae fuerint radices a et b, eae ſemper ita exprimi poſſunt:

$$a = mP \pm c \text{ et } b = nP \pm d$$

vt numeri c et d ſemiſſem ipſius P non excedant, neuterque euaneſcet, cum neque a, neque b, per P ſit diuiſibile. Sit ergo $c < \frac{1}{2}P$ et $d < \frac{1}{2}P$; atque his valoribus ſubſtitutis forma $2aa+bb$ abibit in ſequentem:

$$(2mm+nn)PP \pm 4mcP \pm 2ndP + cc + 2dd$$

quae cum ſit diuiſibilis per P, neceſſe eſt, vt quoque eius pars $2cc+dd$ per P ſit diuiſibilis; quae eſt et numerus formae $2aa+bb$, et minor qnam $\frac{3}{4}PP$. Dato ergo numero formae $2aa+bb$ diuiſibili per numerum quemcunque P, ſemper exhiberi poterit numerus minor, quam $\frac{3}{4}PP$, et eiusdem formae, qui per eundem numerum P futurus ſit diuiſibilis. Q. E. D.

Coroll. I.

33. Exiſtente ergo P diuiſore cuiuspiam numeri A, dabitur numerus $B < \frac{3}{4}PP$ per P diuiſibilis, et quotus inde oriundus propterea erit minor quam $\frac{3}{4}P$: qui cum etiam ſit diuiſor numeri B ſi P ſit diuiſor cuiuspiam numeri formae $2aa+bb$, hinc innoteſcit quoque numerus alius minor quam $\frac{3}{4}P$, qui pariter erit diuiſor cuiusdam numeri formae $2aa+bb$.

Coroll.

Coroll. 2.

34. Proposito porro numero quocunque P, si inter numeros formae $2aa+bb$, minores quam $\frac{3}{4}PP$, nullus datur per P diuisibilis, tum etiam plane nullus existet numerus formae $2aa+bb$ per P diuisibilis.

Theorema 8.

35. Si numerus primus in forma $2aa+bb$ non contentus, fuerit diuisor cuiusquam numeri huius formae, neque radices seorsim per eum sint diuisibiles, tum *alius* quoque numerus primus, priore minor, et in hac forma non contentus, exhiberi poterit, qui etiam futurus sit diuisor cuiuspiam numeri eiusdem formae, neque tamen singulae radices per eum sint diuisibiles.

Demonstratio.

Demonstrandum ergo est, si fuerit numerus primus $\mathfrak{A}'$ diuisor cuiuspiam numeri $A=2aa+bb$, ita vt neque a, neque b per $\mathfrak{A}'$ sit diuisibile, tum quoque dari alium numerum primum $\mathfrak{B}'<\mathfrak{A}'$, qui quoque futurus sit diuisor numeri cuiuspiam $B=2cc+dd$, ita vt neque c, neque d, per illum sit diuisibile. Demonstrauimus autem, exhiberi posse numerum $A<\frac{3}{4}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'$; vnde si ponatur quotus $\frac{A}{\mathfrak{A}'}=Q$, erit $Q<\frac{3}{4}\mathfrak{A}'$, ideoque multo magis $Q<\mathfrak{A}'$. At per §. 31. vel hic ipse quotus Q erit numerus primus $\mathfrak{B}'$, vel saltem diuisorem habebit primum formae $\mathfrak{B}'$. Sit igitur vel ipse quotus Q, vel eius diuisor $=\mathfrak{B}$, qui certe mul-

 to

to minor erit quam $\mathfrak{A}'$. Quare cum quotus Q sit diuisor numeri A, etiam $\mathfrak{B}'$ erit eius diuisor. Manifestum autem est, hunc quotum eiusue diuisorem $\mathfrak{B}'$ vnitatem esse non posse, cum vnitas non solum sit in forma $2aa + bb$ contenta, sed etiam in demonstratione Th. 6. excludatur. Q. E. D.

Coroll. 1.

36. Si ergo numeri cuiuspiam $A = 2aa + bb$ diuisor esset numerus primus $\mathfrak{A}'$ in ista forma non contentus, neque a et b per eum seorsim fuerit diuisibile, tum alius quoque numerus primus illo minor $\mathfrak{B}'$ existeret diuisor numeri cuiuspiam $B = 2cc + dd$.

Coroll. 2.

37. Cum autem A ita capi possit, vt sit $A < \frac{3}{4}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'$, ita etiam pro altero numero $\mathfrak{B}'$ inueniri poterit numerus $B < \frac{3}{4}\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'$ per ea, quae in Theorem. 7. sunt demonstrata.

Coroll. 3.

38. Si numerus $A = 2aa + bb$ fuerit diuisibilis per numerum primum $\mathfrak{A}'$, neque a et b per eum sint diuisibiles, numeri a et b pro primis inter se assumi poterunt: si enim haberent communem factorem, eo sublato nihilominus praeberent numerum $2aa + bb$ per $\mathfrak{A}'$ diuisibilem.

Coroll. 4.

39. At si numerus $A = 2aa + bb$, existentibus a et b inter se primis, diuisorem habeat $\mathfrak{A}'$, tum etiam numerus $B = 2cc + dd$ minor quam $\frac{3}{4}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'$ exhiberi poterit per $\mathfrak{A}'$ diuisibilis, ita vt c et d sint inter se primi. Posito enim $a = m\mathfrak{A}' \pm c$ et $b = n\mathfrak{A}' \pm d$ (32), numeri c et d certe non erunt per $\mathfrak{A}'$ diuisibiles, ac si quem alium habeant communem factorem, puta $c = kp$ et $d = kq$, etiam $2pp + qq$ per $\mathfrak{A}'$ erit diuisibilis, existentibus p et q inter se primis: hocque casu multo magis $2pp + qq$ minus erit quam $\frac{3}{4}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'$.

Coroll. 5.

40. Cum igitur existente $A = 2aa + bb$ diuisibili per $\mathfrak{A}'$, et radicibus a et b inter se primis, exhiberi possit numerus $B = 2cc + dd$ minor quam $\frac{3}{4}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'$, ita vt c et d sint numeri inter se primi, qui sit quoque per $\mathfrak{A}'$ diuisibilis, erit, vt vidimus, hic idem numerus B quoque per alium numerum primum $\mathfrak{B}' < \frac{3}{4}\mathfrak{A}'$ diuisibilis.

Coroll. 6.

41. Atque cum $B = 2cc + dd$, existentibus c et d numeris inter se primis, iam sit diuisibilis per numerum primum $\mathfrak{B}'$ minorem quam $\mathfrak{A}'$, inde nouus numerus $C = 2ee + ff$ per $\mathfrak{B}'$ quoque diuisibilis inueniri poterit, ita vt e et f sint numeri primi inter se, et ipse numerus C minor quam $\frac{3}{4}\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'$.

Theorema. 9.

42. Nullus datur numerus formae $2aa+bb$, existentibus a et b numeris inter se primis, qui diuisibilis sit per vllum numerum primum in ista forma non contentum.

Demonstratio.

Fingamus enim, per numerum primum $\mathfrak{A}'$ diuisibilem esse numerum $A=2aa+bb$, atque a et b esse numeros inter se primos: hicque numerus A, si non minor fuerit quam $\frac{3}{4}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'$, in minorem transformari poterit. Habebit autem tum hic numerus A alium diuisorem primum in forma $2aa+bb$ non contentum, qui sit $=\mathfrak{B}'$, eritque $\mathfrak{B}'<\frac{3}{4}\mathfrak{A}'$, ad si fuerit $A>\frac{3}{4}\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'$ reperietur nouus numerus $B=2cc+dd$ diuisibilis per $\mathfrak{B}'$, ita vt c et d sint numeri inter se primi $B<\frac{3}{4}\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'$. Iam simili modo, cum B habeat diuisorem $\mathfrak{B}'$, alium praeterea habebit diuisorem eiusdem indolis $\mathfrak{C}'<\frac{3}{4}\mathfrak{B}'$, hincque porro nouus numerus $C=2ee+ff$ per $\mathfrak{C}'$ diuisibilis reperietur, vt sit $C<\frac{3}{4}\mathfrak{C}'\mathfrak{C}'$, et e et f, numeri primi inter se. Hoc modo procedendo continuo minores numeri formae $2aa+bb$ obtinerentur, qui diuisibiles essent per numeros in forma $2aa+bb$ non contentos. Quare cum in minoribus numeris formae $2aa+bb$, siquidem a et b sint primi inter se, nullus occurrat, qui habeat diuisorem in forma ista non contentum, ne in maximis quidem huiusmodi numeri existunt, atque idcirco nullus plane datur numerus formae $2aa+bb$, qui sit diui-

diuisibilis per vllum numerum in ea forma non contentum, siquidem a et b sint primi inter se. Q. E. D.

Coroll. 1.

43. Iam ergo euicta est veritas obseruationis quintae, qua animaduertimus, numerum quemcunque formae $2aa + bb$, siquidem a et b sint numeri primi inter se, nullos alios habere diuisores primos, nisi qui sint eiusdem formae.

Coroll. 2.

44. Omnis ergo numerus formae $2aa + bb$, siquidem a et b sint primi inter se, vel ipse est primus, vel est productum ex duobus pluribusue numeris primis, qui omnes in forma $2aa + bb$ contineantur. Huiusmodi itaque numerus nullos alios admittit diuisores, nisi qui sint eiusdem formae $2aa + bb$.

Coroll. 3.

45. Nullus ergo numerus primus in forma $2aa + bb$ non contentus, cuiusmodi sunt 5, 7, 13, 23, 29, 31, 37, 47, 53, etc. vnquam diuisor, vel factor, esse poterit vllius numeri formae $2aa + bb$, siquidem a et b sint numeri primi inter se. Neque vero hac restrictione, quod numeri a et b inter se primi esse debeant, est opus, dummodo vterque non sit per illum numerum primum diuisibilis. Si enim a et b communem habeant diuisorem n, per illum numerum primum non diuisibilem, vt sit $a = nc$ et $b = nd$, tum quia $2cc + dd$ non est diuisibilis, neque etiam $nn(2a + dd)$, seu $2aa + bb$, per illum erit diuisibilis.

 Scho-

Scholion.

46. Notetur probe vis huius demonstrationis, quae omnino est singularis, et in hoc consistit, quod in minoribus numeris nullus reperiatur numerus formae $2aa+bb$, existentibus a et b numeris inter se primis, qui sit diuisibilis per vllum numerum primum in ista forma $2mm+nn$ non contentum. Hinc enim conclusi, etiam ne in maioribus et maximis quidem numeris nullos dari per eiusmodi numeros primos diuisibiles. Demonstraui enim si in maximis tales darentur numeri, tum etiam inter minores, ac tandem minimos, futuros esse numeros eiusdem indolis. Neque vero opus est ad hanc demonstrationem nosse, in numeris minimis nullos dari numeros formae $2aa+bb$, per numerum primum, qui non sit eiusdem formae, diuisibiles; hoc enim ipsum iam per se est absurdum, minores continuo exhiberi posse numeros formae $2aa+bb$, qui per numerum primum non eiusdem formae essent diuisibiles. Namque tandem necessario perueniri oporteret ad numeros primos, qui cum sint formae $2aa+bb$, certe per nullum numerum primum a se diuersum diuidi possent. Quare si de quacunque alia forma $maa+bb$, existentibus a et b numeris inter se primis, demonstrari posset, quod si maiores numeri eius formae dentur per numerum primum non eiusdem formae diuisibiles, tum etiam necessarios minores dari numeros, qui quoque numerum primum non eiusdem formae futuri sint diuisibiles, tum tuto concludere possemus, nullos plane dari numeros formae $maa+bb$, qui per vllum numerum primum in eadem forma non con-

contentum sint diuisibiles. Verum vt similis demonstratio locum habere possit, necesse est, vt $\frac{m+r}{4}$ non sit maius quam 1, alias enim theorema 7 et 8 applicari non posset: vnde huiusmodi demonstratio non valebit, nisi in formis $aa+bb$, $2aa+bb$ et $3aa+bb$. At in hac postrema quidem forma exceptionem facit diuisor 2 in forma $3aa+bb$ non contentus; hoc enim casu fit $a=1$, et $b=1$, seu $3.1+1$ est forma simplicissima per 2 diuisibilis, quae cum non sit minor, quam 2^2, quotus quoque non minor prodit quam 2, ideoque hinc conclusio ad numerum primum minorem in forma $3aa+bb$ non contentum, non succedit.

Theorema 10.

47. Si numerus formae $2aa+bb$ vnico modo in hanc formam fuerit resolubilis, atque a et b fuerint primi inter se, tum ille numerus certo est primus.

Demonstratio.

Si enim non esset primus, duos pluresue haberet factores primos formae $2aa+bb$, ideoque duobus pluribusue modis in formam $2aa+bb$ esset resolubilis, vt in theoremate 3 demonstrauimus; pluralitas enim resolutionum in dubium vocari nequit, si factores illi, quos habent, fuerint inaequales. Verum etiamsi factores fuerint aequales, tamen resolutio plus vno modo succedit: nam si numerus propositus N sit $=(2aa+bb)^2$ erit I. $N=2.0^2+(2aa+bb)^2$ et II. $N=2(2ab)^2+(2aa-bb)^2$ at si sit $N=(2aa+bb)^3$, erit

I. N=

I. $N = 2(2a^3 + abb)^2 + (2aab + b^3)^2$

II. $N = 2(2a^3 - 3abb)^2 + (6aab - b^3)^2$

Porro si sit $N = (2aa + bb)^4$ erit quoque:

I. $N = 2.0^2 + (4a^4 + 4aabb + b^4)^2$

II. $N = 2(4a^3b + 2ab^3)^2 + (4a^4 - b^4)^2$

III. $N = 2(8a^3b - 4ab^3)^2 + (4a^4 - 12aabb + b^4)^2$

Ergo pluralitas resolutionum etiam locum habet, si factores fuerint aequales, dummodo resolutiones, quibus vel altera radix euanescit, vel ambae communem habeant diuisorem, non excludantur. Hinc ergo patet, si numerus $2aa + bb$, existentibus a et b numeris primis inter se, vnico modo fuerit resolubilis in hanc formam, tum eum certo esse primum. Q. E. D.

Coroll. 1.

48. Proposito ergo numero quocunque, quem constat esse in forma $2aa + bb$ contentum, facile erit explorare, vtrum sit primus, nec ne? Considerentur enim numeri a et b, qui si non fuerint primi inter se, statim habetur factor, sin autem sint primi, tum inde successiue omnia quadrata duplicata $2aa$ subtrahentur, et dispiciatur, an vsquam quadratum bb relinquatur, quod si praeter casum cognitum non eueniat, certo pronunciare poterimus, numerum propositum esse primum.

Coroll. 2.

49. Sin autem numerus propositus plus vno modo in quadratum et duplum quadratum fuerit resolubilis,

bilis, tum non solum nouimus eum non esse primum, sed etiam eius factores assignare poterimus, secundum ea, quae §. 21. sunt tradita. Hic autem modus numeros examinandi satis expedite perfici potest, perinde atque ego iam ex natura summae duorum quadratorum similem modum exposui.

Theorema 11.

50. Nullus numerus, qui vel in hac forma $8n-1$, vel in hac $8n-3$ continetur, diuidere potest vllum numerum formae $2aa+bb$, siquidem a et b sint numeri primi inter se.

Demonstratio.

Demonstrasse sufficiet, nullum numerum, vel formae $8n-1$, vel $8n-3$, vnquam esse posse formae $2aa+bb$; cum enim haec forma $2aa+bb$ nullos alios admittat diuisores, nisi qui in hac ipsa forma sint contenti, statim ac demonstrauerimus, nullum numerum, vel formae $8n-1$, vel $8n-3$, in forma $2aa+bb$ contineri, simul certum erit, ne quidem diuisorem huius formae esse posse. Cum autem $8n-1$ et $8n-3$ sint numeri impares, videamus, quibus casibus forma $2aa+bb$ numeros impares producat: manifestum autem est, hoc fieri non posse, nisi b sit numerus impar; quo casu bb fiet numerus formae $8m+1$. Tum vero numerus a vel erit par, vel impar; priori casu erit aa formae $4n$, ideoque $2aa$ formae $8n$, vnde expressio $2aa+bb$ abibit in numerum formae $8m+8n+1$, seu $8n+1$.

Posteriori casu; quo a est numerus impar, erit aa numerus formae $4n+1$, ideoque $2aa$ formae $8n+2$, vnde expressio $2aa+bb$ praebet hoc casu numerum formae $8m+1+8n+2$, seu formae $8n+3$. Forma ergo $2aa+bb$ alios numeros impares non continet, nisi qui fuerint, vel formae $8n+1$, vel formae $8n+3$. Quare nullus numerus impar, vel formae $8n-1$, vel formae $8n-3$, vnquam in forma $2aa+bb$ continetur, nec propterea vllius numeri $2aa+bb$ diuisor existere potest, si quidem a et b sint numeri primi inter se. Q. E. D.

Coroll. 1.

51. Si ergo a et b fuerint numeri primi inter se, numerus $2aa+bb$ nunquam erit diuisibilis, vel per 5, vel per 7, vel per vllum numerum huius seriei 5, 7, 13, 23, 29, 31, 37, 47, 53, 61, 71, 79, etc. neque etiam per vllum numerum non primum, vel in forma $8n-1$, vel in forma $8n-3$, contentum, quales sunt 15, 21, 35, 39, 45, 63, 69, 77, 85, 87, 93, 93, 95 etc.

Coroll. 2.

52. Omnes ergo numeri impares, qui vnquam esse possunt diuisores numerorum formae $2aa+bb$, siquidem a et b sint inter se primi, vel in hac formula $8n+1$, vel hac $8n+3$, continentur. Neque tamen vlli numeri compositi harum formularum, qui factores habent formae $8n-1$, vel $8n-3$, diuisores numeri $2aa+bb$ existere possunt.

Coroll. 3.

53. Etiamsi ergo producta $(8m-1)(8n-1)$, $(8m-1)(8n-3)$, et $(8m-3)(8n-3)$ in formis $8m+1$ vel $8m+3$ contineantur, tamen ea nunquam diuisores vllius numeri formae $2aa+bb$ existere possint, si quidem a et b fuerint numeri primi inter se.

Coroll. 4.

54. Quoties ergo forma $2aa+bb$ fit numerus primus, is semper vel in hac numerorum serie $8n+1$, vel hac $8n+3$, continebitur; vnde in his duabus seriebus etiam omnes diuisores primi, vel saltem impares numerorum in formula $2aa+bb$ contentorum, reperientur.

Scholion 1.

55. Vtrum autem omnes numeri primi, qui in seriebus numerorum $8n+1$ et $8n+3$ occurrunt, viciffim sint numeri formae $2aa+bb$, quaestio est altioris indaginis. Quousque quidem supra numeros primos formae $2aa+bb$ continuauimus, vidimus in illis omnes plane numeros primos, tam huius formae $8n+1$, quam huius $8n+3$, occurrere, vnde omnes quoque numeri primi in his duabus formulis contenti, simul in forma $2aa+bb$ contineri videntur: verum huius veritatis demonstratio maxime est abstrusa. Viam tamen ad eam iam non parum praeparauimus, dum demonstrauimus, omnes diuisores formae $2aa+bb$ simul esse numeros eiusdem formae, siquidem a et b fuerint inter se primi: nam proposito numero primo quocunque

primo P siue formae $8n+1$, siue $8n+3$, si demonstrare potuerimus, dari quempiam numerum $2aa+bb$ per illum diuisibilem, ita vt neque a, neque b, per eum sit diuisibile; simul erit certum, numerum P esse in forma $2mm+nn$ contentum.

Scholion 2.

56. Quod autem omnis numerus primus in alterutra harum formularum $8n+1$ et $8n+3$ necessario sit aggregatum ex quadrato et duplo quadrato, vti id in numeris minoribus 500 non superantibus euenire vidimus, equidem me nondum demonstrare posse, fateor: haecque demonstratio multo magis ardua videtur, quam ea, qua probaui, omnem numerum primum formae $4n+1$ esse summam duorum quadratorum. Cum autem momentum in hoc versetur, vt demonstretur, proposito quocunque numero primo, vel formae $8n+1$, vel formae $8n+3$, semper dari numerum $2aa+bb$ per eum diuisibilem, ita vt radices a et b sint numeri inter se primi, operam is perdiderit, qui valores numerorum a et b per n expressos, inuestigare voluerit, propterea quod hi numeri non tantum ab n pendent, sed etiam ea ratio, quod numerus $8n+1$ vel $8n+3$ sit primus, necessario in computum duci debeat. Nam si numerus $8n+1$, vel $8n+3$, non fuerit primus, euenire adeo potest, vt nullus numerus $2aa+bb$ per eum sit diuisibilis. Iam equidem demonstraui, per numerum $8n+1$, si sit primus, diuisibiles esse omnes numeros formae $p^{4n}-q^{4n}$, et per numerum

metum primum $8n+3$ omnes numeros formae $p^{4n+2} + q^{4n+2}$; tum vero etiam semper eiusmodi dari numeros p et q, vt priori casu forma $p^{4n} + q^{4n}$ per $8n+1$, posteriori vero forma $p^{4n+2} + q^{4n+2}$ per $8n+3$ diuisibilis existat. Demonstrandum igitur esset, in his formis $p^{4n} + q^{4n}$ et $p^{4n+2} + q^{4n+2}$ necessario semper eiusmodi inuolui casus, qui sint aggregata ex quadrato et duplo quadrato; quod autem quo modo demonstrari posset, nondum perspicio. Aeque difficile ergo, ac fortasse difficilius erit, sequentes propositiones demonstrare, quae tamen aeque certae videntur, excepta prima, cuius demonstrationem dedi.

I. Omnis numerus primus formae $4n+1$ in hac forma $aa+bb$ continetur.

II. Omnes numeri primi in his formis $8n+1$ et $8n+3$ contenti, simul in hac forma continentur $2aa+bb$.

III. Omnes numeri primi vel huius formae $12n+1$, vel huius $12n+7$, seu huius vnicae $6n+1$, in hac forma $3aa+bb$ continentur.

IV. Omnes numeri primi in quapiam harum formularum

$16n+1$, $16n+5$, $16n+9$, $16n+13$, vel in hac $4n+1$ contenti, simul sunt numeri formae $4aa+bb$, cuius quidem demonstratio iam in prima comprehenditur.

V. Omnes numeri primi in aliqua harum formularum contenti

$20n+1$; $20n+9$;

simul quoque sunt formae $5aa+bb$.

VI. Omnes numeri primi in aliqua harum formularum contenti,

$24n+1$; $24n+7$;

simul quoque sunt formae $6aa+bb$.

VII. Omnes numeri primi in aliqua harum formularum contenti,

$28n+1$; $28n+9$; $28n+11$; $28n+15$; $28n+23$; $28n+25$,

vel, quod eodem redit, in harum aliqua:

$14n+1$; $14n+9$; $14n+11$;

simul quoque sunt formae $7aa+bb$.

VIII. Omnes numeri primi in alterutra harum formularum contenti,

$24n+5$ et $24n+11$;

simul sunt numeri formae $3aa+2bb$.

Huiusmodi autem theorematum numerus quousque libuerit continuari potest.

Verum tamen in iis formandis probe cauendum est, ne inductioni nimis tribuatur: neque enim si fuerit numerus quispiam primus p in hac forma $faa+gbb$ contentus, inde generatim concludere licet, omnes numeros primos forma $4fgn+p$ fore numeros eiusdem formae $faa+gbb$, etiamsi hoc, si f et g fuerint numeri exigui, verum esse videatur. Etsi enim est $67=5.9+22$.

$+22.1$, ideoque formae $5aa+22bb$, tamen numerus $4.5.22n+67$, casu $n=2$, qui est $=40.22+67=947$ scilicet primus, non in forma $5aa+22bb$ continetur: interim tamen affirmare licet, cum sit $23=5.2^2+3.1$, ideoque in forma $5aa+3bb$ contineatur, omnes numeros primos $60n+23$ in eadem forma contineri. Quodsi igitur, quis methodum inuenerit, huiusmodi theoremata tam inueniendi, quam, in quo caput rei est positum, demonstrandi, is certe in doctrina numerorum plurimum praestitisse erit iudicandus.

Admissa autem hac proprietate numerorum primorum in his formulis $8n+1$ et $8n+3$ contentorum, plura alia hinc deduci poterunt egregia Theoremata, quorum quaedam notasse iuuabit.

Theorema 12.

57. Si numerus quicunque in alterutra harum formularum $8n+1$, vel $8n+3$, contentus, nullo modo in formam $2aa+bb$ resolui possit, tum non erit primus; at si vnico modo in hanc formam possit resolui, tum erit primus: sin autem plus vno modo haec resolutio succedat, tum pariter non erit primus, sed compositus.

Demonstratio.

Pars secunda et tertia ex iam demonstratis sunt manifestae. Si enim numerus propositus vnico modo in forma $2aa+bb$ continetur, tum certe est primus, sin pluribus, compositus. Quod autem ad partem primam nam attinet, ea vi proprietatis nondum demonstratae subsistit; nam si numerus propositus esset primus, in formam $2aa+bb$ resolui posset, quando ergo hanc resolutionem non admittit, tum certo non est primus. Q. E. D.

Corollarium. 1.

58. Hinc igitur patet modus non difficilis propositum numerum, si fuerit, vel formae $8n+3$, vel $8n+1$, explorandi, vtrum sit primus, nec ne? Subtrahantur enim ab eo successiue omnia quadrata duplicata, scilicet:

2, 8, 18, 32, 50, 72, 98 etc.

quorum differentiae constituunt progressionem arithmeticam:

6, 10, 14, 18, 22, 26, etc.

et dispiciatur, vtrum vspiam quadratum relinquatur.

Coroll. 2.

59. Possunt etiam plures operationes simul institui, ac primo successiue subtrahi haec quadrata duplicata:

2, 72, 242, 512, 882 etc. quorum differentiae sunt 70, 170, 270, 370, etc.

secundo vero haec quadrata duplicata:

8, 98, 288, 578, 968 etc. quorum differentiae sunt 90, 190, 290, 390, etc.

tertio

tertio haec:

18, 128, 338, 648, 1058 etc. quorum differentiae sunt
110, 210, 310, 410 etc.

quarto haec:

32, 162, 392, 722, 1152 etc. quorum differentiae sunt
130, 230, 330, 430 etc.

quinto haec:

50, 200, 450, 800, 1250 etc. quorum differentiae sunt
150, 250, 350, 450 etc.

vbi ex figuris finalibus mox patebit, quaenam operationes sint inutiles.

Coroll. 3.

60. A numeris autem formae $8n+1$, quadrata tantum paria duplicata subtrahi debent, vnde exclusis quadratis imparibus duplicatis, sequentes numeri erunt subtrahendi:

I. 8, 288, 968, 2048 etc.	II. 32, 392, 1152, 2312 etc.
280, 680, 1080	360, 760, 1160
400, 400	400, 400
III. 0, 200, 800, 1800 etc.	IV. 72, 512, 1352, 2592 etc.
200, 600, 1000	440, 840, 1240
400, 400	400, 400

V. 128, 648, 1568, 2888 etc.
520, 920, 1320
400, 400

Coroll. 4.

61. Sin autem numerus sit formae $8n+3$, tum tantum quadrata imparia duplicata subtrahi debent, quae sunt:

I. 2, 242, 882, 1922 etc.
240, 640, 1040
400, 400

II. 18, 338, 1058, 2178 etc.
320, 720, 1120
400, 400

III. 50, 450, 1250, 2450 etc.
400, 800, 1200
400, 400

IV. 98, 578, 1458, 2738 etc.
480, 880, 1280
400, 400

V. 162, 722, 1682, 3042 etc.
560, 960, 1360
400, 400

Exemplum 1.

62. Exploretur numerus 67579, vtrum sit primus, nec ne?

Cum hic numerus contineatur in forma $8n+3$, subtrahantur numerorum ordines ex coroll 4, isque tantum secundus, tertius ac quartus, quia primus et quintus darent notam finalem 7, quae quadrato repugnat:

II. 67579	53801	III. 67579	53129	IV. 67579	52441	* 229
18	3520	50	3600	98	3680	
67561	50281	67529	49529	67481	48761	
320	3920	400	4000	480	4080	
67241	46361	67129	45529	67001	44681	
720	4320	800	4400	880	4480	
66521	42041	66329	41129	66121	40201	
1120	4720	1200	4800	1280	4880	
65401	37321	65129	36329	64841	35321	
1520	5120	1600	5200	1680	5280	
63881	32201	63529	31129	63161	30041	
1920	5520	2000	5600	2080	5680	
61961	26681	61529	25529	61081	24361	
2320	5920	2400	6000	2480	6080	
59641	20761	59129	19529	58601	18281	
2720	6320	2800	6400	2880	6480	
56921	14441	56329	13129	55721	11801	
3120	6720	3200	6800	3280	6880	
53801	7721	53129	6329	52441	4921	
	7120					
	601					

Hic vnicum occurrit quadratum $52441 = 229^2$, vt sit $67579 = 2 . 87^2 + 229^2$, ideoque primus.

Exemplum 2.

63. Exploretur numerus 40081, vtrum sit primus, nec ne?

 Cum

Cum hic numerus contineatur in forma $8n+1$, subtrahantur numeri Coroll. 3 eorumque quidem ordines II, III et IV, hoc modo:

II.		III.		IV.	
40081	29129	40081	30281	40081	31369
32	3160	200	3000	72	2840
40049	25969	39881	27281	40009	28529
360	3560	600	3400	440	3240
39689	22409	39281	23881	39569	25289
760	3960	1000	3800	840	3640
38929	18449	38281	20081	38729	21649
1160	4360	1400	4200	1240	4040
37769	14089	36881	15881	37489	17609
1560	4760	1800	4600	1640	4440
36209	9329	35081	11281	35849	13169
1960	5160	2200	5000	2040	4840
34249	4169	32881	6281	33809	8329
2360		2600	5400	2440	5240
31889		30281	881	31369	3089
2760					
29129					

quia igitur hic nusquam quadratum remansit, numerus propositus non est primus, est vero productum $= 149 \cdot 269$.

Theorema 13.

64. Si numerus n nullo modo sit aggregatum ex numero quadrato et trigonali, tum numerus $8n+1$ certe non erit primus.

Demon-

Demonstratio.

Si enim n nullo modo in hac forma $aa+\frac{1}{2}(bb+b)$ continetur, tum $8n+1$ nullo modo in hac forma $8aa+4bb+4b+1$ continetur, non ergo erit numerus formae $2pp+qq$, ideoque non erit primus. Q. E. D.

Corollarium.

65. At si n vnico modo sit aggregatum ex quadrato et trigonali, tum $8n+1$ certe erit numerus primus, sin autem sit pluribus modis, non erit primus, sed compositus.

Theorema 14.

66. Si numerus n nullo modo fuerit aggregatum ex numero trigonali et trigonali duplicato, tum $8n+3$ certe non erit primus.

Demonstratio.

Si enim n nullo modo in hac forma $aa+a+\frac{1}{2}(bb+b)$ contineatur, tum $8n+3$ nullo modo in hac forma $8aa+8a+2+4bb+4b+1$, ideoque nec in hac $2pp+qq$ continebitur, consequenter non erit primus. Q. E. D.

Corollarium.

67. At si n vnico modo fuerit aggregatum ex trigonali et trigonali duplicato, tum $8n+3$ certe erit primus, sin autem fuerit plus vno modo, compositus.

PHY-

PHYSICO-MATHEMATICA.

DE

DE FRICTIONE CORPORVM ROTANTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si corpus super plano ita incedat, vt solo motu progressiuo seu repente feratur, quantam tum a frictione *resistentiam* patiatur, a Physicis iam satis exploratum videtur. Per experimenta enim compertum est, in huiusmodi motibus resistentiam semper esse eiusdem magnitudinis, ita vt nequaquam a celeritate corporis pendeat; proportionalis autem est inuenta pressioni, qua corpus ad planum apprimitur, quippe cuius parti tertiae vel quartae frictio plerumque aequalis deprehenditur. Interim tamen, quo magis superficies plani et corporis fuerit laeuigata, eo magis inde frictionis quantitas diminuitur; vnde fit, vt pro corporibus et planis admodum politis frictio multo minor parte quarta pressionis, pro valde asperis vero maior parte tertia, existere possit. Praeterea vero neque figura corporis, neque basis magnitudo, qua planum contingit, quicquam ad frictionem conferre obseruantur.

2. Prouenit scilicet frictio ab attritu partium mutuo, dum corpus super plano incedit, ex quo principio tam quantitas quam reliqua frictionis phaenomena

ſatis dilucide ſunt explicata. Quando autem corpus non motu repente, ſed rotatorio, ſuper plano incedit, multo difficilior videtur frictionis determinatio. Si enim rotatio corporis ita ad motum progreſſiuum fuerit attemperata, vt nulla partium attritio locum habeat, quemadmodum fit in rotis voluendo ſuper ſolo ingredientibus, tum ob attritus defectum etiam nulla frictio adeſſe cenſetur. Quodſi vero motus corporis rotatorius vel maior fuerit vel minor, quam iſte caſus exigit, difficillimum videtur veram frictionis quantitatem accurate aſſignare, niſi plurima experimenta circa caſus quosque ſumma cura inſtituta in ſubſidium vocentur.

3. Conſidero hic autem tantum corpora rotunda, quorum centrum grauitatis in ipſorum axe eſt ſitum, ita vt quomodocunque rotentur, eorum centrum grauitatis a plano, ſuper quo incedunt, perpetuo eandem ſeruet diſtantiam. Quae conditio vt pro omni motu locum inueniat, corpus motum ſphaericam figuram habere oportet, in cuius centro ipſum grauitatis centrum ſit ſitum. Vtcunque autem hoc corpus moueatur, eius motum ſemper in binos motus reſoluere licet, alterum progreſſiuum, quo centrum grauitatis profertur, alterum vero rotatorium, quo corpus interea circa quempiam axem per centrum grauitatis transeuntem voluitur. Atque hic imprimis poſitio axis rotationis reſpectu motus progreſſiui eſt perpendenda, vt inde verus motus, quo planum a corpore teritur, cognoſci, frictioque inde oriunda aeſtimari poſſit.

Tab. III. Fig. 1. 4. Sit EF planum, ſuper quo corpus mouetur, ad quod certa quadam vi, quae ſit $=P$, apprimatur, quoniam

quoniam ab hac vi appreſſionis frictio praecipue pendet. Iam primum conſideretur motus corporis progreſſiuus, ſeu promotio centri grauitatis O, corpore exiſtente ſphaerico ABCD, in cuius centro O centrum grauitatis verſetur; eritque quouis momento directio huius motus plano EF, ſuper quo fit motus, parallela. Sit igitur praeſenti ſaltem temporis puncto recta OD huius motus directio, eiusque celeritas debita altitudini v, ſeu tanta, quantam graue, ex altitudine v delapſum acquirit. Sit hoc inſtanti A punctum contactus, et per centrum grauitatis O ſecundum directionem motus progreſſiui OD tranſire concipiatur planum AOD ad planum, ſuper quo fit motus, normale, quod planum hic quidem ipſo plano tabulae repraeſentetur.

5. Cum hoc plano conferatur iam motus corporis rotatorius, ſeu axis per centrum grauitatis O tranſiens, circa quem hoc ſaltem momento corpus rotatur. Atque hic caſus imprimis notatu dignus occurrit, ſi axis rotationis ad planum OAD fuerit normalis, quo quidem caſu euidens eſt, axem iſtum plano, ſuper quo fit motus, fore parallelum. Tum vero alii dantur caſus, quibus quidem axis rotationis plano EF eſt parallelus, ſed non ad planum AOD normalis, verum ad id vtcunque inclinatus. Denique habentur caſus, quibus axis rotationis tam ad planum AOD, quam ad planum, ſuper quo fit motus, poſitionem tenet obliquam, atque hae triplices axis rotationis poſitiones probe ſunt notandae, quia ad eos omnes plane motus, quoscunque mente concipere licet, reducuntur.

6. Inter hanc autem infinitam varietatem tres positiones primariae prae reliquis sunt notatu dignae, quarum prima est eadem, quam modo primo loco exposuimus, quando scilicet axis rotationis ad planum AOD est normalis, qui casus in plerisque motibus mixtis locum habere solet. Secunda positio primaria est quando corpus circa axem OD cum directione motus progressiui conspirantem rotatur, quo casu vti in primo axis rotationis plano, super quo fit motus, est parallelus. Tertia positio axis principalis constituatur, quando corpus circa axem CA ad planum EF perpendicularem rotatur. Quanquam autem hae tres positiones inter infinitas sunt electae, tamen si frictionem pro iis tantum assignare potuerimus, nullum est dubium, quin inde pro qualibet axis positione obliqua veram frictionis quantitatem colligere valeamus. Ac prima quidem positio sola iam tantum inuestigationis campum complectitur, vt plurimum is praestitisse videatur, qui omnes casus in eo contentos rite euoluerit.

7. Positioni ergo primae inhaerens, qua globum circa axem ad planum AOD normalem rotari assumo, primum obseruo ad eam non solum globum, sed quaevis corpora rotunda, quae a plano ABCD in duas partes similes et aequales dirimantur, suumque grauitatis centrum in puncto O, quod simul est centrum figurae, habeant positum, esse accommodata, ita vt axis rotationis simul sit eorum axis, circa cuius conuersionem sint nata. Talia ergo corpora praeter globum sunt cylindri
Tab. III. recti, et quaeuis corpora sphaeroidica, quae oriuntur, si
Fig. 2. figura quaecunque GCH diametro OC praedita, circa

axem

axem GH ad CO normalem reuoluatur, dummodo centrum grauitatis in puncto O sit positum. In figura igitur prima circulus ABCD repraesentat huiusmodi corporis sectionem per punctum O ad axem GH normaliter factam. Tab. III. Fig. 1.

8. Si iam progressiuum corporis motum secundum directionem OD fieri concipiamus, celeritate debita altitudini v, corpusque interea circa axem GOH ad planum AOD normalem gyretur, duo casus principales considerandi occurrunt, prout corpus vel in plagam ABCD gyratur, vel in plagam contrariam ADCB. Ille *motus* cum progressiuo conspirare censetur, hic *vero* eidem aduersari; si enim corpus secundum directionem EF protruditur, quasi sponte sua in plagam ABCD prouoluitur, dum motus contrarius non nisi a vi peculiari gignitur. Hinc motus progressiuus cum rotatione in *plagam* ABCD coniunctus prouolutio vocari solet, eaque est perfecta, si celeritas gyratoria puncti A circa axem O ipsi celeritati progressiuae Vv est aequalis. Tum enim ob vtrumque motum aequalem et contrarium punctum A puncto saltem temporis in quiete versatur, et quia super plano EF nullus attritus locum habet, nulla quoque frictio adesse existimatur, ex quo hic casus singularem attentionem meretur.

9. Quo igitur clarius appareat, quomodo huiusmodi diuersas vtriusque motus combinationes tractari conueniat, ponamus praesenti saltem temporis momento motum corporis gyratorium circa axem O ad planum AOD normalem et in plagam ABCD ita fieri, vt

 puncti

puncti A celeritas debita sit altitudini u, quae quidem ad axem O quasi quiesceret, refertur, vnde posito circuli ABCD radio $OA = a$, prodit celeritas angularis $= \frac{\sqrt{u}}{a}$. Tum vero posita motus progressiui secundum AF celeritate $= \sqrt{v}$, erit puncti A celeritas, qua super plano EF secundum directionem AF incedit $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$, quae celeritate attritus corporis super plano EF fieri concipiendus est. Vnde manifestum est, si fuerit $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, hanc celeritatem puncti A, ideoque et attritum euanescere, nullamque propterea frictionem locum habere, qui est casus prouolutionis perfectae.

10. Sin autem sit $\sqrt{u} < \sqrt{v}$, punctum A, quo fit corporis cum plano EF contactus, super hoc plano incedet celeritate $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$, atque ob attritum frictio orietur, qua punctum A in directionem oppositam AE retrahetur. Hac ergo vi motus corporis progressiuus imminuetur, gyratorius autem augebitur: ac si motus gyratorius fuerit nullus, seu $\sqrt{u} = 0$, ab eadem frictione etiam motus gyratorius in plagam ABCD generabitur. Sin autem $\sqrt{u}$ habeat valorem negatiuum, quo casu corpus habet motum gyratorium in plagam contrariam ADCB, multo adhuc maior existet attritus celeritate scilicet $\sqrt{v} + \sqrt{u}$, et a frictione inde oriunda vterque motus, tam progressiuus, quam gyratorius, debilitabitur. At si fuerit $\sqrt{u} > \sqrt{v}$, gyratione in plagam ABCD tendente, motus puncti A super plano EF in regionem AE erit directus, vnde frictio vim gignet in plagam AF directam, qua motus progressiuus accelerabitur, gyratorius vero retardabitur.

11. Quae-

11. Quaecunque iam subsistat ratio inter ambas celeritates Vv et Vu, vim frictionis determinari oportet, vt inde, quantum vterque motus perturbetur, definiri queat. Ac primo quidem, si motus gyratorius fuerit nullus, seu $Vu=o$, casus redit ad cognita frictionis phaenomena, quia corpus solo motu progressiuo super plano EF prorepit. Constat scilicet, frictionis vim fore constantem, atque ad vim, qua corpus ad planum apprimitur, certam tenere rationem, quae neque a figura corporis, neque ab eius celeritate, pendeat. Pressione nimirum corporis ad planum existente $=$ P, frictio erit $=\nu$P, denotante ν certam quampiam fractionem, haecque vis motui corporis ita est contraria, vt si corpus promoueatur secundum directionem OP, seu AF, id a frictione retrahatur in directione AE, quae per ipsum contactum A sit transitura.

12. Neque tamen hoc casu frictio plane nequaquam a corporis motu pendere dici potest; primum enim directio frictionis vtique per motus directionem determinatur, cum ipsi sit contraria. Posita porro corporis celeritate secundum directionem AF celeritate $=Vv$, etsi frictio νP, cuius directio est AE, non a quantitate celeritatis Vv pendet, tamen signum eius maxime frictionem afficit, ita vt si valor Vv fiat negatiuus, etiam frictionis quantitas subito euadat negatiua, ipsa eius quantitate eadem manente, quia tum frictio in plagam contrariam AF motui quippe oppositam dirigitur. Hic saltus eo magis fit notabilis, quod, celeritate Vv euanescente, ipsa quoque frictio euanescat, etiamsi alias semper certum eumque constantem valorem

rem obtineat: qui ſaltus tametſi legibus naturae aduerſari videtur, tamen alio loco eum ita explicaui, vt cum principiis mechanicis, ideoque etiam cum legibus naturae, conſiſtere poſſit. Non mediocrem ergo hinc illuſtrationem cum inſigni limitatione adipiſcitur regula vulgaris, qua nullus in mundo ſaltus ſtatuitur.

13. Interim tamen haec ipſa lex frictionis etiam caſu, quo nullus datur motus gyratorius, exceptioni cuipiam obnoxia videtur. Experimenta enim non obſcure innuere videntur, frictionem in ipſo motus initio aliquanto maiorem eſſe, quam in motus continuatione; ſiue maiorem vim requiri ad vim frictionis primam ſuperandam, quam ad eandem corporis celeritatem conſeruandam. Ita ſi vis primae motus productioni reluctans fuerit $= \nu P$, idem corpus, cum iam motum fuerit conſequutum, minori vi ob frictionem retardari videtur. Dolendum autem eſt, nondum eiusmodi experimenta eſſe inſtituta, ex quibus hoc diſcrimen frictionis, ſi quod datur, in prima motus productione eiusque continuatione accurate definiri queat, cum tamen haec quaeſtio, per experimenta debita ſolertia facta, non difficulter dirimi poſſet.

14. Hoc ergo caſu, quo $Vu = 0$, expedito, quem quaſi cognitum aſſumamus, contemplemur alterum caſum praecipuum, quo $Vu = Vv$, et ob $Vv - Vu = 0$ attritus plane euaneſcit. Hoc igitur caſu, qui prouolutio perfecta dici ſolet, nulla prorſus frictio adeſſe cenſetur, propterea quod attritui nullus relinquitur locus. Quaeſtio autem hic occurrit maximi momenti: an iſto caſu nulla prorſus adſit vis, quae motui

tui corporis opponatur? Experientia enim manifesto indicat, etiamsi corpus prouolutione perfecta feratur, eius tamen motum sensim diminui, atque tandem prorsus ad quietem reduci, qui effectus nulli alii causae, nisi vi cuipiam motui contrariae, adscribi potest. Cum igitur etiam prouolutio perfecta resistentiae sit obnoxia, et quidem tali, qua motus mox penitus extinguatur, vnde haec resistentia oriatur, imprimis inuestigari oportet; tametsi enim ea fortasse a frictione proprie sic dicta sit seiungenda, tamen nullum est dubium, quin etiam in aliis casibus sentiatur, motuique reluctetur.

15. Primum quidem videri posset, hanc motus in *prouolutione* perfecta imminutionem a sola resistentia aeris proficisci, verum, praeter quam quod verisimile sit, huiusmodi retardationem etiam in vacuo locum esse habituram, dummodo calculum consulamus, mox deprehendemus, aeris resistentiam nimis esse paruam, quam vt ab ea motus tam cito consumi possit. Deinde etiam certum est, quamuis a resistentia aeris motus corporum imminuatur, tamen ab ea motum nunquam plane extingui posse. Cum enim resistentia cum celeritate et quidem in eius ratione duplicata decrescat, fieri omnino nequit, vt ab ea motus omnino deleatur: ex quo manifestum est, causam, cur motus in prouolutione perfecta diminuatur, et ad quietem redigatur, in aeris resistentia poni non posse.

16. Cum igitur tota causa huius retardationis non in aeris resistentia sit quaerenda, etiamsi ei pars quaepiam recte tribuatur, nihil aliud relinquitur, nisi ipsa superficies, super qua fit incessus, vnde haec re-

tardatio oriri sit statuenda. Ac si superficies sit panno obducta, obseruamus, globum eo citius motum suum amittere, quo pannus fuerit villosior, vnde recte concludimus, villositatem superficiei motui aduersari, et caussa quidem est manifesta, quod corpus hos villos continuo deprimere debet, id quod sine quadam motus iactura fieri nequit. Reagunt scilicet villi in globum; vti in α cernere licet, cuius vis directio, etsi per centrum globi O secundum αO transit, tamen eo magis motui resistit, quo maior fuerit angulus $AO\alpha$, hoc est, quo profundius globus his villis immergitur. Obiici quidem posset, globum ex altera parte posteriori pari vi vrgeri, quod vtique si corpus quiesceret, esset verum, sed dum corpus modica celeritate versus F promouetur, citius villos posteriores deserit, quam illi se erigere et in corpus cedens pressionem exerere queant; vnde dubitare non licet, quin a parte antica resistentia quaepiam a villositate superficiei oriatur.

17. Quaecunque autem fuerit haec resistentia, ea non solum ad hunc casum, quo $Vv - Vu = 0$, est adstricta, sed ad omnes plane casus prouolutionis ex motu progressiuo et gyratorio vtcunque mixtae aeque patet, propterea quod a solo motu progressiuo, quatenus a depressione villorum efficitur, prouenit; quam ob rem in istam resistentiam, quae a frictione probe est distinguenda, accuratius inquiri conueniet. Neque vero ea tantum a villositate superficiei oriri est censenda, sed cuiuscunque etiam fuerit naturae superficies, ob pressionem corporis quaepiam portio ei quasi immergitur, supremaeque superficiei partes aliquantillum comprimun-

primuntur. Ab hac compressione similis redundat reactio in corpus motum atque a villositate, hincque motui resistentia opponitur; quae pro ratione tam superficiei, quam pressionis, vtcunque variare, nunquam autem plane in nihilum abire potest. Atque haec vera videtur esse causa, cur motus etiam volutorius tandem penitus extinguatur; quem effectum resistentiae aeris tribuere non licet.

18. Promoueatur ergo corpus super plano EF villis vtcunque obsito, cui ad profunditatem $\alpha\beta$ immergatur, ita vt, dum progreditur continuo, villos ad $\beta\gamma$ erectos in spatium $A\alpha\beta$ comprimat, cui compressioni cum villi reluctentur, eam efficient resistentiam, quam hic inuestigare animus est; siue autem ea a veris villis oriatur, siue a quapiam plani mollitie, qua impressionem quampiam patitur, perinde est. Sit igitur naturalis villorum erectio $\alpha\beta = f$, quae simul profunditatem impressionis in vero contactu A factae indicat; et in quolibet puncto M, dum progrediendo villum PM vlterius comprimit, existet quaedam vis reactionis in corporis superficiem normaliter nitens, cuius propterea directio erit MO per centrum grauitatis O transiens, et cuius quantitas aestimari potest proportionalis compressioni iam factae, seu differentiae $\alpha\beta - PM$. Posita ergo $PM = y$, magnitudo huius vis in directione MON agentis erit interuallo $f - y$ proportionalis. Tab. III. Fig. 3.

19 Ponamus rigorem villorum esse tantum, vt a basi $= cc$ vi, seu pondere, $= K$ appressa per spatium $= k$ comprimantur, sicque compressionis effectus cck vi pres-

fionis K tribui debeat. Primum autem corpus, quod mouetur, fit difcus, feu cylindrus, radii $OA = a$, et craffitiei $= b$, et, pofito $AP = x$, compreffio villorum fpatiolo $Pp = dx$ refpondentium valet $(f-y)bdx$, quae ergo requirit vim $= \frac{K}{cck}(f-y)bdx$, cuius directio eft MON. Spatiolum enim PM prae radio difci $OA = a$ tam paruum contemplor, vt angulus AOM fit minimus, et ratio elementorum Pp ad Mm ad aequalitatem accedere cenferi poffit. Hinc erit $xx = 2ay$, et $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{2ay}}$, vnde tota vis furfum vrgens portionem AM erit $\frac{Kb\sqrt{2ay}}{3cck}(3f-y)$, et vis tota eleuans, a fpatio $A\beta$ nata, pofito $y = f$, erit $= \frac{2Kbf\sqrt{2af}}{3cck}$.

20. Huic ergo vi aequalis eft tota vis, qua corpus ad planum apprimitur, quae cum fupra pofita fit $= P$, habebimus hanc aequationem $\frac{2Kbf\sqrt{2af}}{3cck} = P$; vnde colligimus:

$$f\sqrt{f} = \frac{3Pcck}{2Kb\sqrt{2a}} \text{ et } f = \sqrt[3]{\frac{9PPc^4kk}{8KKabb}}$$

Hic fcilicet eos tantum villos in computum duco, qui ante corpus funt fiti, et quos, dum progreditur, comprimere cogitur, eos vero, qui pone corpus iam funt compreffi, vel elateris expertes affumo, vel tales, vt fua reftitutione motum corporis non affequantur, neque idcirco in illud agere valeant. Dum igitur corpus quiefcit, quia tum etiam a parte pofteriori fuftinetur, minorem faciet impreffionem, quatenus ea a preffionis duratione non augetur. Dubitari enim nequit, quin continuata preffione, faltem per aliquod tempus, corpus aliquanto profundius immergatur; at ob hanc ipfam caufam causam in motu actio villorum post corpus recte negligi potest.

21. Etsi autem in hoc calculo angulus AOM minimus est positus, tamen eius rationem haberi oportet, si vim motui resistentem inuestigare velimus. Cum enim huius vis directio MON per centrum grauitatis O transeat, multiplicetur ea per cosinum anguli NOB, seu sinum anguli AOM, qui est $= \frac{x}{a}$, et vis resultans secundum directionem OB motui contrariam erit $= \frac{K}{cck}(f-y)\frac{bxdx}{a}$, ideoque ob $xdx = ady$ erit ea $= \frac{Kb}{cck}(f-y)dy$, cuius integrale est $= \frac{Kb}{cck}(fy - \frac{1}{2}yy)$, vnde tota vis motui repugnans, sumendo $y = f$, prodit $= \frac{Kbff}{2cck}$. Cum igitur sit $ff = \frac{2Pc^3k}{4Kb}\sqrt[3]{\frac{3Pcck}{Kaab}}$, erit ista tota vis $= \frac{3}{8}P\sqrt[3]{\frac{3Pcck}{Kaab}}$, vbi pro eadem superficie quantitas $\frac{cck}{K}$ est constans: ergo si corporis grauitas specifica exprimatur per m, ob P vt $maab$, erit vis istius resistentiae vt $P\sqrt[3]{m}$, ita vt grauitate specifica eadem manente resistentia sit ponderi vel volumini corporis proportionalis.

22. Sin autem corpus sit sphaericum, considerari debet tota eius impressio a parte anteriori facta, quae erit semicirculus $\delta\alpha\delta$ centrum habens in A, cuius radius medius Aα directionem motus repraesentabit. In perimetro ergo huius circuli altitudo villorum ponatur vt ante $= f$; in distantia autem a centro AP $=$ AS $= x$, sit ea $= y$, eritque $xx = 2ay$, denotante a radium corporis sphaerici. Posito angulo quocunque $\alpha A \mu = \Phi$, erit arcus PS $= x\Phi$, eiusque differentiale ET $= xd\Phi$, vnde arcola $Psps = xdxd\Phi$, in qua compressio villorum tota valebit $(f-y)xdxd\Phi$. Hinc ergo cor- Tab. III. Fig. 4.

 pus

pus sursum vrgebitur vi $\frac{K}{cck}(f-y)x\,dx\,d\Phi = \frac{K}{cck}(f-y)a\,dy\,d\Phi$ cuius integrale pro spatio PAS est $= \frac{K}{cck}(fy - \frac{1}{2}yy)a\,d\Phi$, ideoque pro spatio $\alpha A \mu = \frac{Kaff\,d\Phi}{2cck}$: vnde posita diametri ad peripheriam ratione $= 1 : \pi$, vis sursum pellens tota reperitur $= \frac{\pi K aff}{2cck}$, vi pressionis P aequanda, ex quo fit $ff = \frac{2Pcck}{\pi K a}$, vbi f denotat profunditatem, ad quam globus immergitur.

23. Ex vi autem $\frac{K}{cck}(f-y)a\,dy\,d\Phi$, spatiolo $STst$ respondente, resultat vis secundum directionem plani SA vrgens, si ea per $\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{2y}{a}}$ multiplicetur, ita vt vis ista sit $= \frac{K\,d\Phi\sqrt{2a}}{cck}(f-y)dy\sqrt{y}$, quae per cos. Φ multiplicata dabit vim motui contrariam, cuius scilicet directio per centrum grauitatis globi transit, vnde ista vis fit $= \frac{K\,d\Phi \cos.\Phi \sqrt{2a}}{cck}(f-y)dy\sqrt{y}$, qua integrata, et posito $y = f$, reperitur: $\frac{4Kff\,d\Phi \cos.\Phi \sqrt{2af}}{15cck}$ :: Ac si altera integratio pro angulo Φ instituatur, fit resistentia ex spatio $\alpha A \mu$ orta $= \frac{4Kff \sin.\Phi \sqrt{2af}}{15cck}$, cuius duplum posito $\Phi = 90°$ praebebit totam resistentiam $= \frac{8Kff\sqrt{2af}}{15cck} = \frac{16P}{15\pi}\sqrt{\frac{2f}{a}}$, ob $ff = \frac{2Pcck}{\pi K a}$; indidem igitur ista resistentia erit $= \frac{16P}{15\pi}\sqrt[4]{\frac{8Pck}{\pi K a^3}}$, vnde pro eodem plano ea erit, vt $P\sqrt[4]{\frac{P}{a^3}}$. Huius vero vis directio motui est contraria, et per globi centrum transit.

24. Hanc itaque resistentiam, quae a frictione probe est distinguenda, sentiunt omnia corpora, siue solo motu progressiuo, siue insuper cum rotatorio, super plano quocunque ferantur, neque ea, vt vidimus, a motu rotatorio

torio pendet, neque ab ipsa velocitate motus progressiui; quam ob causam ea etiam vulgo cum frictione confusa videtur. Maxime tamen a frictione proprie sic dicta discrepat, propterea quod frictionis directio per ipsum contactum transit, huius autem resistentiae directio per corporis centrum grauitatis, vnde haec vis motum rotatorium aliter non afficit, nisi quatenus motu progressiuo mutato etiam in rotatorium necessario mutatio redundat. Deinde vero frictio plurimum a ratione inter motum rotatorium et progressiuum pendet, quemadmodum vidimus, eam insignem existere, si $Vu = o$, penitus autem euanescere, si $Vu - Vu = o$, dum altera resistentia ab hac diuersitate neutiquam afficitur, sed pro quacunque relatione inter ambas celeritates Vv et u eandem quantitatem constanter retinet.

25. Stabilita ergo hac noua resistentia ab impressione mutua corporis et plani orta, pergamus ad frictionem inuestigandam pro casibus, vbi neque $Vu = o$, neque $Vv - Vu = o$, quorum illo vidimus frictionem tantam esse, quanta vulgo experimentis aestimari solet, siquidem simul illius resistentiae ratio habeatur, hoc vero omnino euanescere. Quaestio igitur hic statim se offert, vtrum frictio, quando est $Vu \lessgtr Vv$, minor sit quam casu $Vu = o$, an vero ei sit aequalis? Non desunt rationes, quae vtrumque suadere videntur; nam cum accedente motu rotatorio in plagam ABCD attritus minuatur, atque tandem euanescat, cum fuerit $Vu = Vv$, attritum minorem etiam minor frictio sequi debere videtur, quoniam attritu euanescente frictio adeo in nihilum abire est inuenta. Deinde etiam nullum Tab. III. Fig. 1.

lum eſt dubium, quin frictio, ſi celeritas rotationis Vu excedat celeritatem progreſſiuam Vv, fiat negatiua, ſeu corpus in plagam contrariam rapiat.

26. Super hac quaeſtione ingens cernitur diſſenſio in Comment. Acad. Petrop Tomo XIII, vbi Celeb. Vir *Daniel Bernoulli* et ego idem argumentum de deſcenſu corporis rotundi ſuper plano inclinato pertractauimus. Aſſumſerat autem Vir Celeb. huiusmodi corpus ſuper plano inclinato deſcendens ſemper eandem pati frictionem, quamcunque rationem tenuerit motus progreſſiuus ad motum rotatorium, atque adeo in prouolutione perfecta, vbi ratio illa ſit aequalitatis, eandem manere frictionis quantitatem, atque hinc concluſit, quamdiu plani eleuatio non certum quemdam gradum excedat, corpus rotundum prouolutione perfecta eſſe deſcenſurum. Quin etiam Celeb. *Krafft* experimentis inſtitutis euentum huic effato eximie reſpondere deprehendit. Ego vero contra, ſecundum ea, quae hic expoſui, aſſumſeram, in prouolutione perfecta nullam prorſus dari frictionem, eamque fore eo minorem, quo propius motus mixtus ad prouolutionem perfectam acceſſerit; vnde ſequebatur, nullo plane caſu globum ſuper plano inclinato prouolutione perfecta deſcendere poſſe, cui concluſioni experientiam contrariam agnoſcere cogor.

27. Quamuis autem Celeb. *Bernouilli* Theoria experientiae ſit conſentanea, tamen non patet, quomodo eius hypotheſis, quod etiam in prouolutione perfecta frictio tanta ſit, quanta in ſolo motu progreſſiuo eſſe ſolet, cum veritate conciliari poſſit. Contemplemur enim caſum, quo globus ſuper plano horizontali per-

perfecte prouoluitur, atque nullum est dubium, si mentem, tam ab aëris resistentia, quam ab ea, quae ante est definita, abstrahamus, quin corpus sine vlla diminutione motum suum sit prosequuturum. Vbi autem nulla motus diminutio deprehenditur, ibi certe nulla frictio statui potest; ex quo etiam in descensu super plano inclinato, quamdiu corpus prouolutione perfecta fertur, nulla frictio admitti posse videtur, contra principium, cui Theoria *Bernoulliana* innitur. Verum si hoc casu, vti ego feci, frictio tollitur, tum prouolutioni perfectae nullus plane locus relinquitur, etiamsi plani inclinati eleuatio quam minima statuatur, quod tamen experientiae aduersari certum est.

28. Quo huius nodi solutionem reperiamus, hos duos casus prouolutionis perfectae super plano horizontali et inclinato accuratius inter se conferamus; et cum super plano horizontali nullam frictionem admittere liceat, super inclinato autem per experimenta frictionis existentia euincatur, manifestum est, hunc casum ad illum reduci, si grauitatis sollicitationem, qua corpus secundum directionem plani acceleratur, euanescere concipiamus. Ex quo hanc conclusionem adipiscimur; si in prouolutione perfecta super plano inclinato nulla adesset vis motum accelerans, tum etiam nullam frictionem esse adfuturam, contra vero cum vi motum accelerante necessario frictionem fore coniunctam. Hic igitur fontem erroris, quo meum ratiocinium premebatur, detego, qui in hoc consistit, quod frictionem ex solo statu motus, quo corpus actu cietur, definiri debere putaueram, cum tamen potius ex viribus accele-

ratricibus determinari debeat: atque hinc frictionis effectus maxime a resistentia fluidorum aliisque resistentiae generibus discrepat, quod hae resistentiae vnice a statu motus corporum pendeant.

29. Quod autem frictio a viribus sollicitantibus potissimum pendeat, ex ipso statu quietis luculenter perspicitur. Si enim corpus plano horizontali incumbat, nullisque viribus ad motum sollicitetur, nullus quoque frictionis cernitur effectus; sin autem hoc corpus protrahatur a vi, quae frictionem superare non valeat, corpus etiam nunc quiescet; vnde hoc casu frictio exerit vim, vi protrahenti aequalem et contrariam, vnde patet, vim a frictione exertam per se non esse determinatam, sed demum per vim protrahentem determinari, siquidem ea fuerit minor, quam tota frictio, quae se motui opponit; ex quo his casibus pars tantum frictionis effectum praestare est censenda. At si vis protrahens frictioni vel fuerit aequalis, vel ea maior, tota frictio se se eius actioni opponit, et illo quidem casu corpus etiam nunc quiescet, hoc vero promouebitur excessu vis sollicitantis supra frictionem totam. Quemadmodum igitur corpus frictione impeditum, a statu quietis ad motum concitetur a viribus quibuscunque sollicitantibus, ante accuratius erit inuestigandum, quam ad eius effectum in motu explorandum progrediamur.

30. Verum si corpus plano incumbens a viribus quibuscunque sollicitetur, quatuor casus existere possunt:

I. Vel enim primo corpus in quiete omnino perseuerat, dum vires sollicitantes neque corpori motum imprimere, neque frictionem superare valent.

II. Vel

II. Vel ſecundo corpus quidem ad motum incitabitur, ſed ita vt punctum contactus, vel eius extremitas, primo ſaltem inſtanti immota maneat, ſicque nullus oriatur attritus; hoc euenit ſcilicet ſi vires frictioni ſuperandae ſunt impares.

III. Vel tertio corpus ſuper plano rependo progredietur, ſine vllo motu gyratorio.

IV. Vel quarto denique corpus cum rependo, tum gyrando, ſimul promouebitur.

Corpore ergo quocunque propoſito, quod plano incumbat, et a viribus quibuscunque ſollicitetur, characteres primum inueſtigemus, ex quibus dignoſci poſſit, quisnam horum quatuor caſuum locum ſit habiturus.

31. Vt igitur hos characteres inueniamus, conſi- Tab. III. Fig. 5. deremus corpus quodcunque baſi ſua GH plano EF incumbens, cuius maſſa ſit $=M$, centrum grauitatis O, et momentum inertiae reſpectu axis per O transeuntis, circa quem fiat motus, ſi quis detur, ſit $=Mkk$. Hic ſcilicet axis concipiatur ad planum tabulae normalis, dum tabula refert ſectionem ad planum EF normalem et per centrum grauitatis O factam. Sollicitetur hoc corpus a viribus quibuscunque, quae primum omnes directionibus ſibi parallelis in centro grauitatis O applicatae concipiantur, eaeque reſoluantur in duas vires ſecundum directiones OA et OD, illam ad planum EF normalem, quae ſit $=P$, hanc vero plano EF parallelam, quae ſit $=Q$. Tum ex iisdem viribus colligatur momentum reſpectu axis O, quod ſit $KL.OK=Vb$, quod conetur corpus in plagam

BCD gyrari; hac quippe duplici consideratione totus virium sollicitantium effectus exhaurietur.

32. Videamus iam, sub quibus conditionibus corpori eiusmodi motus inducatur, qui cum nullo attritu fuerit coniunctus; id quod eueniet, si basis HG extremitas G in quiete permaneat, corpusque gyrando circa G motum incipiat. Quoniam igitur ista basis extremitas G in censum venit, iuncta recta GO vocetur $=g$, atque angulus $HGO=\theta$, vnde fiet recta $OA=g\sin.\theta$ et $AG=g\cos.\theta$. Nunc cum frictio agat secundum directionem GH, videamus quanta vi, quae sit $=Z$ corpus secundum directionem GH vrgeri debeat, vt punctum G immotum conseruetur; quod si enim haec vis Z reperiatur minor frictione tota, vel saltem ei aequalis, ob frictionem hic ipse motus, quem fingimus, efficietur, motusque corpori gyratorius circa punctum G immotum imprimetur; sin autem vis ista Z prodeat maior frictione tota, perspicuum est, a sola frictione punctum G non posse in quiete retineri; ex quo re vera abripietur, motusque ad casum tertium relatus nascetur: hisque rationibus characteres quaesiti innituntur.

33. Quia ergo supponimus, motum primo instanti fieri circa punctum G, centrum grauitatis O feretur per arculum Oo centro G radio $GO=g$ descriptum, interea vero corpus circa axem O per similem angulum in plagam BCD gyrabitur, ita vt celeritas gyratoria puncti G circa O ipsi celeritati puncti O per Oo aequalis sit futura. Dum autem hic motus producitur, totus nisus corporis in planum EF in

puncto

puncto G colligetur, vnde ad superiores vires corpus sollicitantes insuper vis accedit, corpus in puncto G a plano EF perpendiculariter sursum secundum GI vrgens, quae vis aequalis est pressioni corporis contra planum dum motus exoritur. Quae vis quia etiam nunc est incognita, tantisper indicetur littera Y, ita vt duas habeamus vires incognitas, Z secundum GH et Y secundum GI, quae ita sunt determinandae, vt punctum G in quiete conseruetur.

34. Viribus autem his cum datis, quasi essent cognitae assumtae, ex iis primum acceleratio centri grauitatis O definiatur, quod fiet, has vires secundum suas directiones centro grauitatis applicando. Quare a viribus datis centrum grauitatis O, in quo tota corporis massa M collecta est concipienda, sollicitabitur secundum OD vi $= Q$, et secundum OA vi $= P$, a viribus autem incognitis secundum OB vi $= Z$ et secundum OC vi $= Y$. Hinc massa M in O collecta ab vtrisque sollicitabitur secundum directionem OD vi $= Q - Z$, et secundum OC vi $= Y - P$; inde ergo nascetur acceleratio $= \frac{Q-Z}{M}$, hinc vero $= \frac{Y-P}{M}$. Quam ob rem si acceleratio secundum ipsam motus directionem Oo vocetur $= \upsilon$, per resolutionem ob angulum $COo = HGO = \theta$ obtinebitur acceleratio secundum $Ot = \upsilon$ sin. θ, et secundum $Ov = \upsilon$ cos. θ, ex quo obtinebimus has duas aequationes:

$$\upsilon \sin.\theta = \frac{Q-Z}{M} \quad \text{et} \quad \upsilon \cos\theta = \frac{Y-P}{M}$$

vnde fit $(Q-Z)\cos.\theta = (Y-P)\sin.\theta$, hincque

$$Y = P + (Q-Z)\frac{\cos.\theta}{\sin.\theta}.$$

 35. Iam

35. Iam ad accelerationem motus rotatorii corporis circa axem O obtinendam in plagam BCD, quam in distantia $OG = g$ per hypothesin aequalem esse oportet v, momenta virium sollicitantium sunt colligenda. Atque ex datis quidem viribus nasci ponitur momentum $= Vb$ in plagam BCD tendens: tum vero ex vi $GH = Z$ ob $OA = g\,\text{sin.}\,\theta$ in eandem plagam oritur momentum $= Zg\,\text{sin.}\,\theta$, ex vi $GI = Y$ vero in plagam contrariam ob $OI = g\,\text{cos.}\,\theta$ nascitur momentum $= Yg\,\text{cos.}\,\theta$, ita vt momentum totale motum gyratorium producens sit $= \gamma b + Zg\,\text{sin.}\,\theta - Yg\,\text{cos.}\,\theta$, quod per momentum inertiae Mkk diuisum, et per distantiam $OG = g$ multiplicatum suppeditabit accelerationem motus rotatorii in G, quae cum per hypothesin sit $= v$, habebimus hanc aequationem

$$v = \frac{Vgb + gg(Z\,\text{sin.}\,\theta - Y\,\text{cos.}\,\theta)}{Mkk}$$

36. Cum igitur sit $v\,\text{sin.}\,\theta = \frac{Q-Z}{M}$ erit:

$$\frac{Q-Z}{M} = \frac{Vgb\,\text{sin.}\,\theta + gg(Z\,\text{sin.}\,\theta - Y\,\text{cos.}\,\theta)\,\text{sin.}\,\theta}{Mkk}$$

siue:

$$kk(Q-Z) = Vgb\,\text{sin.}\,\theta + ggZ\,\text{sin.}\,\theta^2 - ggY\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\theta$$

Est vero $Y\,\text{sin.}\,\theta = P\,\text{sin.}\,\theta + (Q-Z)\,\text{cos.}\,\theta$

quo valore substituto habebimus:

$$kk(Q-Z) = Vgb\,\text{sin.}\,\theta + ggZ\,\text{sin.}\,\theta^2 - ggP\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\theta - gg(Q-Z)\,\text{cos.}\,\theta^2$$

seu:

$$kkQ = kkZ + Vgb\,\text{sin.}\,\theta + ggZ - ggP\,\text{sin}\,\theta\,\text{cos.}\,\theta - ggQ\,\text{cos.}\,\theta^2$$

vnde

vnde colligitur:

$$Z = \frac{gg P \sin.\theta \cos.\theta + (kk + gg \cos.\theta^2) Q - V g b \sin.\theta}{kk + gg}$$

hincque:

$$Q - Z = \frac{gg Q \sin.\theta^2 - gg P \sin.\theta \cos.\theta + V g b \sin\theta}{kk + gg}$$

$$\text{et } Y = \frac{gg Q \sin.\theta \cos.\theta + (kk + gg \sin.\theta^2) P + V g b \cos.\theta}{kk + gg}$$

37. Inuenta iam vi Z, quae ad punctum G immotum conseruans dum requiritur, quoniam frictio hanc vim suppeditat, necesse est, vt vis Z totam frictionem *non* superet. Frictio autem pendet a vi, qua corpus ad planum apprimitur, ad eamque certam quandam tenet rationem, quae sit vt 1 ad ν. Cum igitur, dum corpus circa extremitatem basis G gyrari incipit, tota pressio in G colligatur, et aequalis sit inuenta Y, tota frictio erit $= \frac{1}{\nu} Y$. Quam ob rem vt corpus circa extremitatem basis G immotam gyretur, et quidem in plagam BCD, necesse est, primo, vt sit $Z < \frac{1}{\nu} Y$, hoc est, vt sit:

$$Pgg \sin.\theta \cos.\theta + Q(kk + gg \cos.\theta^2) - V g b \sin.\theta < \tfrac{1}{\nu}(Q gg \sin.\theta \cos.\theta + P(kk + gg \sin.\theta^2) + V g b \cos\theta)$$

tum vero etiam necesse est, vt acceleratio $\varkappa$ habeat valorem affirmatiuum, vnde cum sit $\varkappa = \frac{Q-Z}{M \sin.\theta}$, siue

$$\varkappa = \frac{g(Q g \sin.\theta - P g \cos.\theta + V b)}{M(kk + gg)}$$

oportet, vt sit praeterea $Q g \sin.\theta + V b > P g \cos.\theta$.

38. Hinc

38. Hinc igitur pro motu casus secundi hanc nanciscimur conclusionem:

si fuerit

$$Pgg \sin.\theta \cos.\theta + Q(kk + gg \cos.\theta^2) - Vgb \sin.\theta < \tfrac{1}{\nu}(Qgg \sin.\theta \cos.\theta + P(kk + gg \sin.\theta^2) + Vgb \cos.\theta)$$

atque insuper $Qg \sin.\theta + Vb > Pg \cos.\theta$

tum corpus circa extremitatem basis G immotam in plagam BCD moueri incipere, foreque accelerationem huius motus gyratorii pro distantia g,

$$\nu = \frac{g(Qg \sin.\theta - Pg \cos.\theta + Vb)}{M(kk + gg)}$$

Si eueniat vt sit $Qg \sin.\theta + Vb < Pg \cos.\theta$, minime concludere licet, motum gyratorium fieri in plagam oppositam circa G; tali enim motui pars reliqua basis GH plano innitens sese opponit. Namque motus contrarius fuerit circa alteram basis extremitatem H, pro quo casu peculiari calculo respondentes vires Z et Y, quarum haec iam in H applicata esset concipienda, definiri oporteret, simili quidem modo quo hic sumus vsi.

39. Si ergo sit $Qg \sin.\theta + Vb = Pg \cos.\theta$ nullus dabitur motus gyratorius; vt autem simul punctum G quiescat, requiri, vt sit $Q < \tfrac{1}{\nu}P$, hocque ergo casu corpus plane quiescet. At si sit $Qg \sin.\theta + Vb > Pg \cos.\theta$, seu acceleratio ν positiuum obtineat valorem, tum corpus motum gyratorium circa G adipiscetur; vt autem punctum G quiescat, oportet sit valore ipsius ν introducto:

$$Q < \tfrac{1}{\nu}P + M\nu(\sin.\theta + \tfrac{1}{\nu}\cos.\theta)$$

Quando

Quando ergo $Qg\,\text{fin.}\,\theta + Vb > Pg\,\text{cof.}\,\theta$, corpus circa G rotari incipiet, punctumque G quiefcet, fi non folum fuerit $Q < \frac{1}{\nu}P$, fed etiam fi fit vel $Q = \frac{1}{\nu}P$, vel $Q > \frac{1}{\nu}P$, dummodo fit

$$Q < \tfrac{1}{\nu}P + M\varkappa(\text{fin.}\,\theta + \tfrac{1}{\nu}\text{cof.}\,\theta)$$

existente $\varkappa = \dfrac{g(Qg\,\text{fin.}\,\theta - Pg\,\text{cof.}\,\theta + Vb)}{M(gg+kk)}$.

At fi fuerit $Q > \frac{1}{\nu}P + M\varkappa(\text{fin.}\,\theta + \frac{1}{\nu}\text{cof.}\,\theta)$, durante motu gyratorio punctum G quoque verfus F abripietur, neque enim frictio ei retinendo par erit.

40. Pro quadruplici ergo corporis ftatu criteria fumus adepti, quibus ftatus corporis vel ad cafum fecundum, vel ad quartum pertinebit: fcilicet pro cafu fecundo hae requiruntur conditiones, vt fit

$$Qg\,\text{fin.}\,\theta + Vb > Pg\,\text{cof.}\,\theta, \qquad \text{et}$$

$$Pgg\,\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta + Q(kk+gg\,\text{cof.}\,\theta^2) - Vgb\,\text{fin.}\,\theta < \tfrac{1}{\nu}(Qgg\,\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta + P(kk+gg\,\text{fin.}\,\theta^2) + Vgb\,\text{cof.}\,\theta)$$

Hoc nempe cafu corpus circa bafis extremitatem G in plagam BCD gyrari incipiet, ipfa bafis extremitate G immota manente.

Cafus autem quartus locum habebit fub his conditionibus, fi fuerit

$$Qg\,\text{fin.}\,\theta + Vb > Pg\,\text{cof.}\,\theta, \qquad \text{et}$$

$$Pgg\,\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta + Q(kk+gg\,\text{cof.}\,\theta^2) - Vgb\,\text{fin.}\,\theta > \tfrac{1}{\nu}(Qgg\,\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta + P(kk+gg\,\text{fin.}\,\theta^2) + Vgb\,\text{cof.}\,\theta)$$

Hoc videlicet cafu corpus quoque circa bafis extremitatem G in plagam BCD gyrari incipiet; fed haec ipsa basis extremitas versus F promouebitur, et cum attritu super plano EF progredietur.

41. Hoc ergo casu quarto, corpus totam frictionem patietur, quae cum sit $=\frac{1}{\nu}Y$, erit $Z=\frac{1}{\nu}Y$; atque etiam accelerationem puncti G super plano EF assignare poterimus. Si enim ponamus hanc accelerationem $=\omega$, manente acceleratione motus gyratorii circa centrum grauitatis $O=\upsilon$, erit pro motu centri grauitatis O acceleratio secundum $OD=\upsilon\,\text{sin.}\,\theta+\omega$, et acceleratio secundum $OC=\upsilon\,\text{cos.}\,\theta$, vnde habemus ob $Z=\frac{1}{\nu}Y$ has aequationes:

$$\upsilon\,\text{sin.}\,\theta+\omega=\frac{Q-\frac{1}{\nu}Y}{M}:\ \upsilon\,\text{cos.}\,\theta=\frac{Y-P}{M}$$

$$\text{et}\quad \upsilon=\frac{Vgh+\frac{1}{\nu}Ygg\,\text{sin.}\,\theta-Ygg\,\text{cos.}\,\theta}{Mkk}=\frac{Y-P}{M\,\text{cos.}\,\theta}$$

hinc ergo fiet:

$$Vgh\,\text{cos}\,\theta+\frac{1}{\nu}Ygg\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\theta-Ygg\,\text{cos.}\,\theta^2=Ykk-Pkk$$

$$\text{ideoque } Y=\frac{Pkk+\gamma gh\,\text{cos.}\,\theta}{kk+gg\,\text{cos.}\,\theta^2-\frac{1}{\nu}gg\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\theta}$$

42. Ex his colligimus:

$$Y-P=\frac{Vgh\,\text{cos.}\,\theta-Pgg\,\text{cos}\,\theta(\text{cos.}\,\theta-\frac{1}{\nu}\text{sin}\,\theta)}{kk+gg\,\text{cos.}\,\theta^2-\frac{1}{\nu}gg\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\theta}$$

vnde concluditur fore:

$$\upsilon=\frac{g(Vh-Pg(\text{cos}\,\theta-\frac{1}{\nu}\text{sin}\,\theta))}{M(kk+gg\,\text{cos.}\,\theta(\text{cos.}\,\theta-\frac{1}{\nu}\text{sin.}\,\theta))}$$

quae est acceleratio motus rotatorii; ex cuius valore eoque, qui pro Y est inuentus, obtinebimus accelerationem progressiui motus puncti G

$\omega=\frac{Q}{M}$

$$\omega = \frac{Q}{M} \frac{\frac{1}{v}Pkk - \frac{1}{v}Vgh\operatorname{cof.}\theta - Vgh\operatorname{fin}\theta + Pgg\operatorname{fin.}\theta(\operatorname{cof.}\theta - \frac{1}{v}\operatorname{fin.}\theta)}{M(kk + gg\operatorname{cof.}\theta(\operatorname{cof.}\theta - \frac{1}{v}\operatorname{fin.}\theta)}$$

fiue:

$$\omega = \frac{Q(kk + gg\operatorname{cof}\theta^2 - \frac{1}{v}gg\operatorname{fin.}\theta\operatorname{cof.}\theta) - P(\frac{1}{v}kk + \frac{1}{v}gg\operatorname{fin.}\theta^2 - gg\operatorname{fin.}\theta\operatorname{cof.}\theta) - Vgh(\operatorname{fin}\theta + \frac{1}{v}\operatorname{cof}\theta)}{M(kk + gg\operatorname{cof.}\theta^2 - \frac{1}{v}gg\operatorname{fin.}\theta.\operatorname{cof.}\theta)}$$

cuius numerator eft vtique affirmatiuus, fi fuerit, vt ante notaueramus,

$$Pgg\operatorname{fin.}\theta\operatorname{cof.}\theta + Q(kk + gg\operatorname{cof.}\theta^2) - Vgh\operatorname{fin.}\theta > \tfrac{1}{v}(Qgg\operatorname{fin.}\theta\operatorname{cof.}\theta + P(kk + gg\operatorname{fin.}\theta^2) + Vgh\operatorname{cof.}\theta)$$

43. Hinc iam rectius conditiones agnofcimus, fub quibus quartus cafus in motu corporis locum habebit: hae enim conditiones funt

$$\tfrac{1}{v}Pg\operatorname{fin.}\theta + Vh > Pg\operatorname{cof.}\theta \quad \text{et}$$

$$Pgg\operatorname{fin.}\theta\operatorname{cof.}\theta + Q(kk + gg\operatorname{cof}\theta^2) - Vgh\operatorname{fin.}\theta > \tfrac{1}{v}(Qgg\operatorname{fin.}\theta\operatorname{cof.}\theta + P(kk + gg\operatorname{fin.}\theta^2) + Vgh\operatorname{cof.}\theta)$$

vbi prior conditio aliquantum difcrepat a fuperiori. Interim tamen nulla eft repugnantia; cum enim ante viderimus cafum quartum poftulare $Q > \frac{1}{v}P + M\,\omega(\operatorname{fin.}\theta + \frac{1}{v}\operatorname{cof}\theta)$ erit vtique $\frac{1}{v}P < Q$, ideoque multo magis prima conditio ibi allata, vt fit

$$Qg\operatorname{fin.}\theta + Vh > Pg\operatorname{cof.}\theta$$

hic locum habebit. Videmus ergo has conditiones latius patere, quam praecedentes, cafumque quartum euenire, dummodo fit

$$\tfrac{1}{v}Pg\operatorname{fin.}\theta + Vh > Pg\operatorname{cof.}\theta$$

adiuncta altera conditione, quae vtrinque eft eadem.

44. Si fuerit $\frac{1}{v}Pg\operatorname{fin.}\theta + Vh = Pg\operatorname{cof.}\theta$ motus gyratorius euanefcet, corpusque folo motu progreffiuo

 et

47. Quae ergo hactenus inuenimus huc redeunt:

CONDITIONES CASVS I.

$$Q < \tfrac{1}{\nu} P \text{ et}$$
$$Vh + Qg \,\text{sin.}\,\theta < Pg \,\text{cos.}\,\theta$$

CONDITIONES CASVS II.

$$Vh + Qg \,\text{sin.}\,\theta > Pg \,\text{cos.}\,\theta \text{ et}$$
$$Pgg \,\text{sin.}\,\theta \,\text{cos.}\,\theta + Q(kk + gg \,\text{cos.}\,\theta^2) - Vgh \,\text{sin.}\,\theta < \tfrac{1}{\nu}$$
$$(Qgg \,\text{sin.}\,\theta \,\text{cos.}\,\theta + P(kk + gg \,\text{sin.}\,\theta^2) + Vgh \,\text{cos.}\,\theta)$$

CONDITIONES CASVS III.

$$Q > \tfrac{1}{\nu} P \text{ et}$$
$$Vh + \tfrac{1}{\nu} Pg \,\text{sin.}\,\theta < Pg \,\text{cos.}\,\theta$$

CONDITIONES CASVS IV.

$$Vh + \tfrac{1}{\nu} Pg \,\text{sin.}\,\theta > Pg \,\text{cos.}\,\theta$$
$$Pgg \,\text{sin.}\,\theta \,\text{cos.}\,\theta + Q(kk + gg \,\text{cos.}\,\theta^2) - Vgh \,\text{sin.}\,\theta > \tfrac{1}{\nu}$$
$$(Qgg \,\text{sin.}\,\theta \,\text{cos.}\,\theta + P(kk + gg \,\text{sin.}\,\theta^2) + Vgh \,\text{cos.}\,\theta)$$

CONDITIONES CASVS V.

$$Vh - \tfrac{1}{\nu} Pg \,\text{sin.}\,\theta > Pg \,\text{cos.}\,\theta$$
$$Vgh \,\text{sin.}\,\theta - Q(kk + gg \,\text{cos.}\,\theta^2) - Pgg \,\text{sin.}\,\theta \,\text{cos.}\,\theta > \tfrac{1}{\nu}$$
$$(\gamma gh \,\text{cos.}\,\theta + P(kk + gg \,\text{sin.}\,\theta^2) + Qgg \,\text{sin.}\,\theta \,\text{cos.}\,\theta).$$

48. Quod si ergo, vti in solidis rotundis vsu venit, angulus θ fuerit rectus, conditiones horum quinque casuum erunt:

CONDITIONES CASVS I.

$$Q > \tfrac{1}{\nu} P \text{ et } Vh + Qg < 0$$

CON.

CONDITIONES CASVS II.

$Vh + Qg > o$ et $Qkk - Vgh < \frac{1}{\nu} P(kk + gg)$

CONDITIONES CASVS III.

$Q > \frac{1}{\nu} P$ et $Vh + \frac{1}{\nu} Pg < o$

CONDITIONES CASVS IV.

$Vk + \frac{1}{\nu} Pg > o$ et $Qkk - Vgh > \frac{1}{\nu} P(kk + gg)$

CONDITIONES CASVS V.

$Vh - \frac{1}{\nu} Pg > o$ et $Vgk - Qkk > \frac{1}{\nu} P(kk + gg)$.

49. In his formulis nullam habuimus rationem illius alterius resistentiae, quae ob plani villositatem ad frictionem accedit, neque vero in genere pro qualibet corporis figura eam commode in calculum inducere licet, propterea quod eius directio, dum ad corporis superficiem in singulis punctis contactus est normalis, non certam positionem ad centrum grauitatis tenet. In corporibus autem rotundis, qualia hic potissimum contemplamur, directionem huius resistentiae per centrum grauitatis transire, motuique contrariam esse vidimus. Cum igitur ea ad pressionem etiam constantem teneat rationem, pressio vero his casibus, quibus θ est angulus rectus, semper sit $= P$, si hanc resistentiam ponamus $= \frac{1}{\mu} P$, in formulis §. praeced. loco vis Q scribi oportet $Q - \frac{1}{\mu} P$. Vnde colligimus tale corpus ob istam resistentiam in quiete esse mansurum, si sit $Q < (\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}) P$ et $Vh + (Q - \frac{1}{\mu} P) g < o$

50. Cum igitur effectus huius resistentiae calculum non turbet, dum eam in ipsa vi sollicitante Q com-

comprehendere licet, ea neglecta videamus, quomodo corpus quodcunque graue plano inclinato incumbens, se habere debeat. Iaceat ergo corpus ABCD super plano inclinato EF, cuius ad horizontem MF inclinatio sit angulus $MFE = \eta$. Sit massa corporis $= M$, centrum grauitatis O, momentumque inertiae $= Mkk$; incumbat primum corpus basi sua GH, a cuius extremitate inferiori G recta ad O ducta, sit $GO = g$. Quia hoc corpus a sola grauitate sollicitari assumitur, momentum ad gyrationem tendens adest nullum, seu $Vb = o$; ex vi autem grauitatis M secundum verticalem OP deorsum vrgente, orietur per resolutionem

Tab. III. Fig. 6.

vis normalis secundum OA seu $P = M \cos. \eta$

vis tangentialis secundum OD seu $Q = M \sin. \eta$

Praeterea notasse iuuabit esse angulum $GON = 90° - \theta - \eta$, vnde si summa angulorum $\theta + \eta$ fuerit recto minor, perpendiculum OP supra basis extremitatem G cadet, contra vero infra.

51. Quoniam ob $V = o$ casus quintus locum habere nequit, nisi sit angulus θ obtusus, status huius corporis ad vnum horum quatuor casuum referetur.

Primo corpus in quiete permanebit, si fuerit

$\sin. \eta < \frac{1}{\nu} \cos. \eta$ et $\sin. \eta \sin. \theta < \cos. \eta \cos \theta$ seu $\eta + \theta < 90°$

vbi quantitas frictionis ad pressionem rationem habere sumitur, vt 1 ad ν, ita vt per experimenta valor ipsius ν sit quasi 3 vel quatuor. Quare vt corpus plani inclinatione non obstante in quiete perseueret, duae conditiones requiruntur; altera vt rectae verticalis OP cum plano inclinato EF intersectio N supra G cadat: altera vero vt sit $\tang. \eta < \frac{1}{\nu}$. Si ergo $\nu = 3$ vi huius conditioditionis angulus MFE minor esse debet, quam $18^\circ, 26'$; in hypothesi autem $\nu = 4$ minor quam $14^\circ, 2'$. Ac nisi hae duae conditiones simul habeant locum, corpus immotum manere nequit.

52. *Secundus casus vero existet, seu corpus circa punctum G volui incipiet, ita vt primo saltem instanti punctum G in quiete perseueret; si fuerit:*

$$\text{sin.}\,\eta\,\text{sin.}\,\theta > \text{cos.}\,\eta\,\text{cos.}\,\theta, \text{ seu } \eta + \theta > 90^\circ, \text{ et}$$

$$gg\,\text{cos.}\,\eta\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\theta + \text{sin.}\,\eta(kk + gg\,\text{cos.}\,\theta^2) < \tfrac{1}{\nu}(gg\,\text{sin.}\,\eta\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\theta + \text{cos.}\,\eta(kk + gg\,\text{sin.}\,\theta^2))$$

ex qua posteriori conditione angulus inclinationis η ita limitatur, vt esse debeat:

$$\text{tang.}\,\eta < \frac{kk + gg\,\text{sin.}\,\theta^2 - \nu gg\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\theta}{\nu(kk + gg\,\text{cos.}\,\theta^2) - gg\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\theta}.$$

Primo ergo punctum N necessario infra G cadere debet; haec vero sola conditio non sufficit, sed necesse est, vt insuper plani inclinatio minor sit limite assignato. Vnde sequitur, quia per conditionem priorem $\text{tang.}\,\eta > \frac{\text{cos.}\,\theta}{\text{sin.}\,\theta}$, illum limitem hoc esse debere maiorem, quod fieri nequit, nisi sit $\text{sin.}\,\theta > \nu\,\text{cos.}\,\theta$

53. *Tertius vero casus existet, seu corpus rependo super plano inclinato descendet sine vllo motu gyratorio, si fuerit:*

$$\text{sin.}\,\eta > \tfrac{1}{\nu}\text{cos.}\,\eta \text{ et } \tfrac{1}{\nu}\text{sin.}\,\theta < \text{cos.}\,\theta, \text{ seu cos.}\,\theta > \tfrac{1}{\nu}\text{sin.}\,\theta$$

quae conditiones eo redeunt, vt sit:

$$\text{tang}\,\eta > \tfrac{1}{\nu} \text{ et cot.}\,\theta > \tfrac{1}{\nu}, \text{ seu tang.}(90^\circ - \theta) > \tfrac{1}{\nu}$$

Si igitur $\nu = 3$, necesse est, vt sit angulus MFE maior, quam $18^\circ, 26'$, et angulus AGO minor, quam $71^\circ, 34$.

Sin autem sit $\nu = 4$, hic casus locum habet, si fuerit angulus MFE maior, quam $14^\circ, 2'$ et angulus AGO minor, quam $75^\circ, 58'$. Neque vero hinc concludere licet, si planum EF sit verticale, statum corporis vel non ad hunc casum pertinere, etiamsi sit $\cos.\theta < \frac{1}{\nu}\sin.\theta$, vel ad casum secundum esse referendum: Cum enim pressio P euanescat, ob $V = 0$ semper fit $\vartheta = 0$, ideoque nullus aderit motus gyratorius, qui casus probe est notandus, dum altera conditio illa $\cos.\theta > \frac{1}{\nu}\sin.\theta$ eatenus tantum valet, quatenus P non est $= 0$; proprie enim requiritur, vt $P(\frac{1}{\nu}\sin.\theta - \cos.\theta)$ non sit nihilo maius.

54. *Quartus denique casus existet, seu corpus tam rependo, quam voluendo simul, super plano inclinato descendet, si fuerit:*

$P(\frac{1}{\nu}\sin.\theta - \cos.\theta) > 0$, seu $\cos.\theta < \frac{1}{\nu}\sin.\theta$ nisi $P = 0$ et

$$gg\cos.\eta\sin.\theta\cos.\theta + \sin.\eta(kk + gg\cos.\theta^2) > \tfrac{1}{\nu}(gg\sin.\eta\sin.\theta\cos.\theta + \cos.\eta(kk + gg\sin.\theta^2))$$

seu $$\text{tang.}\,\eta > \frac{kk + gg\sin.\theta^2 - \nu gg\sin.\theta\cos.\theta}{\nu(kk + gg\cos.\theta^2) - gg\sin.\theta\cos.\theta}$$

Hoc ergo casu dabitur et motus progressiuus puncti G cum acceleratione ω, et motus gyratorius cum acceleratione ϑ, atque vtraque acceleratio erit:

$$\vartheta = \frac{gg(\frac{1}{\nu}\sin\theta - \cos.\theta)\cos.\eta}{kk + gg\cos.\theta(\cos.\theta - \frac{1}{\nu}\sin\theta)}$$

$$\omega = \frac{\sin.\eta(kk + gg\cos.\theta^2 - \frac{1}{\nu}gg\sin.\theta\cos.\theta) - \cos.\eta(\frac{1}{\nu}kk + \frac{1}{\nu}gg\sin.\theta^2 - gg\sin.\theta\cos.\theta)}{kk + gg\cos.\theta^2 - \frac{1}{\nu}gg\sin.\theta\cos.\theta}$$

Statim vero atque motus gyratorius incipit, angulus θ augetur, ideoque hae accelerationes mutantur.

55. Quia

55. Quia igitur pro casu quarto exploratum habemus, quomodo motus sit incepturus, idem pro reliquis casibus videamus. Ac pro primo quidem casu, vbi corpus in quiete permanet, haec quaestio cessat, pro casu autem secundo, vbi solus datur motus gyratorius sine reptorio, eius acceleratio initialis est

$$s = \frac{gg(\sin.\eta \sin.\theta - \cos.\eta \cos.\theta)}{kk+gg} = \frac{-gg \cos.(\eta+\theta)}{kk+gg}$$

Pro casu autem tertio, vbi solus motus reptorius adest, sine vllo gyratorio, eius acceleratio erit super plano inclinato:

$$\omega = \frac{Q - \nu P}{M} = \sin.\eta - \nu \cos.\eta$$

Neque vero sufficit, vt hae accelerationes sint positiuae, sed insuper opus est, vt sit

pro casu secundo:

$$gg \cos.\eta \sin.\theta \cos.\theta + \sin.\eta(kk + gg \cos.\theta^2) < \nu(gg \sin.\eta \sin.\theta \cos.\theta + \cos.\eta(kk + gg \sin.\theta^2))$$

et pro casu tertio:

$$\nu \sin.\theta < \cos.\theta, \text{ seu } \operatorname{tang}.\theta < \nu.$$

56. Hinc ergo, si detur corpus quodcunque plano inclinato incumbens, statim definiri potest casus, ad quem status corporis sit referendus, simulque prima acceleratio, siquidem detur motus. Quae quo clarius perspiciantur, ponamus, primum planum esse horizontale, seu angulum $\eta = 0$, atque corpus in quiete permanebit, dummodo fuerit angulus $AGO = \theta$ recto minor, qui est casus primus. Sin autem hic angulus θ

 fuerit

fuerit obtusus, eiusque cosinus negatiuus, status corporis ad casum secundum pertinebit, quippe pro quo ob $\eta = 0$ conditiones sunt:

$$\theta > 90^\circ \text{ et } gg \sin.\theta \cos.\theta < \tfrac{1}{\nu}(kk + gg \sin.\theta^2)$$

quae ambae ob $\cos.\theta$ negatiuum locum habent. Dabitur ergo motus gyratorius circa punctum G, cuius, in distantia $= g$, acceleratio erit $\upsilon = -\frac{gg\cos.\theta}{kk+gg}$. Tertius autem casus, qui postulat $\sin.\eta > \frac{1}{\nu}\cos.\eta$, hic nunquam existere potest, neque etiam quartus; quia enim hic postulat, vt sit:

$$\cos.\theta < \tfrac{1}{\nu}\sin.\theta \text{ et } gg\sin.\theta\cos.\theta > \tfrac{1}{\nu}(kk + gg\sin.\theta^2)$$

hae duae conditiones inter se manifesto pugnant.

57. Si planum sit verticale, ideoque $\sin.\eta = 1$ et $\cos.\eta = 0$, casus primus nunquam locum habere potest, quia conditio prior $\sin.\eta < \frac{1}{\nu}\cos.\eta$ palam aduersatur. Pro casu autem secundo requiruntur hae conditiones: $\theta > 0$ et $kk + gg\cos.\theta^2 < \frac{1}{\nu} gg\sin.\theta\cos.\theta$, qui ergo locum habere poterit, si fuerit $kk < gg\cos.\theta(\frac{1}{\nu}\sin\theta - \cos.\theta)$. Necesse ergo est, vt sit $\tang.\theta > \nu$, et acceleratio motus gyratorii in distantia g erit $\upsilon = \frac{gg\sin.\theta}{kk+gg}$.
Sin autem fuerit $\tang.\theta < \nu$, casus tertius locum habebit, corpusque solo motu reptorio descendet acceleratione $\omega = 1$, corpus scilicet libere descendet; ad quem casum etiam quartus redibit, cum fiat $\upsilon = 0$ et $\omega = 1$. Qui cum nunquam non locum inueniat, casum secundum plane excludere videtur: verum notandum est, ad casum secundum opus esse, vt punctum G primo saltem instanti detineatur; statim enim ac punctum Q motum

tum gyratorium concipit, in G dabitur pressio, vnde frictio motui reptorio impediendo sufficiens nascetur, si quidem fuerit $kk + gg \cos.\theta^2 < \frac{1}{v} gg \sin.\theta \cos.\theta$, ita vt hoc casu duplex motus sit possibilis.

58. Tribuamus nunc iterum plano EF inclinationem quamcumque η, corpus autem ei incumbens sit rotundum, seu angulus θ rectus; atque manifestum est, casum primum locum habere non posse, nisi quatenus resistentia a villositate plani orta, motui se opponit, cuius autem in superioribus formulis nullam habuimus rationem. Secundus autem casus locum inueniet, corpusque sine attritu prouolutione perfecta descendet, dum sit: $\eta < 0$ et $kk \sin.\eta < \frac{1}{v}(kk + gg)\cos.\eta$, seu $\tang.\eta < \frac{kk+gg}{vkk}$; atque acceleratio motus gyratorii circa centrum grauitatis in distantia $OG = g$, cui acceleratio motus progressiui centri grauitatis est aequalis, erit $\upsilon = \frac{gg \sin.\eta}{gg + kk}$. Casus tertius nunquam vsu venire potest: quartus vero, si sit $\tang.\eta > \frac{kk+gg}{vkk}$; tum vero erit pro vtraque acceleratione:

$$\upsilon = \frac{gg \cos.\eta}{vkk} \text{ et } \omega = \sin.\eta - \frac{(kk+gg)\cos.\eta}{vkk}.$$

Quodsi $\tang.\eta = \frac{kk+gg}{vkk}$, status intermedius resultat, qui autem ob $\omega = 0$ ad secundum adhuc est referendus.

59. Ex his ergo, quae exposuimus, intelligitur, quid vires quaecunque valeant, quae corpus quiescens et plano cuicunque incumbens sollicitent; simulque motus, qui ab iis effi itur, prima acceleratio definiri potest. Quodsi vero corpus iam est in motu, duplex eius status est perpendendus, prouti motus sit sine attritu, vel cum attritu est coniunctus. Si nullus adest

attritus; seu corpus prouolutione perfecta mouetur, vires eundem praestabunt effectum, ac si corpus quiesceret; indeque ergo patebit, an attritus generetur, nec ne? sin autem iam attritus adsit, tum vires sollicitantes plenum exerent effectum, iis autem adiungi oportet totam frictionem ex attritu natam: vbi notandum est, frictionem semper eiusdem fore magnitudinis, siue attritus fuerit maior, siue minor, secus ac putaueram in dissertatione supra memorata.

60. Sic igitur vera principia, secundum quae effectus frictionis in motu corporum plano incumbentium diiudicari debet, mihi equidem tradisse videor; vbi hoc inprimis notatu dignum, et quasi paradoxum, occurrit, quod, nisi iam detur attritus, effectus virium sollicitantium non ex ipsa earum quantitate aestimari debeat, vti in omnibus reliquis motuum generibus fieri oportet, sed quod ipsa frictio effectum virium moderetur: vel quod eodem redit, etiamsi ob deficientem attritum nulla adsit frictio, tamen effectus virium sollicitantium ab ea afficitur, atque eo quidem modo, quem in applicatione frictionis ad quaternos casus ante stabilitos ostendi. Deinde non minus est paradoxon, quod dummodo adfuerit attritus, siue is fuerit maior, siue minor, frictio eundem semper effectum exerat; atque ex his principiis omnia phaenomena motus corporum a frictione oriunda expedire licet.

PRIN-

PRINCIPIA MOTVS FLVIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

PARS PRIOR.

1.

Cum corpora fluida a solidis hoc potissimum differant, quod eorum particulae a se inuicem omnino sint dissolutae, hae etiam diuersissimos motus recipere possunt, neque motus, quo vnaquaeque fluidi particula fertur, a motu reliquarum particularum ita determinatur, vt alio motu progredi non possit. Longe aliter autem res se habet in corporibus solidis, quae, si fuerint inflexibilia, nullamque figurae suae mutationem patiantur, vtcunque moueantur, singulae eorum particulae perpetuo eundem inter se situm ac distantiam seruant; vnde fit, vt, cognito motu duarum triumue tantum particularum, statim alius cuiuscunque particulae motus definiri queat; neque etiam duarum triumue huiusmodi corporum particularum motus ad lubitum fingi potest, sed is ita comparatus esse debet, vt hae particulae eundem perpetuo situm relatiuum inter se obtineant.

2. Quodsi autem corpora solida fuerint flexibilia, singularum particularum motus minus determinatur: cum

cum ob flexuras tam distantia, quam situs relatiuus diversarum particularum, mutationes admittat. Interim tamen ipsa flexurae ratio legem quandam, quam diversae huiusmodi corporum particulae in motu suo sequi debent, constituit: quippe qua caueri oportet, ne partes, quae circa se inuicem tantum inflecti se patiuntur, vel a se penitus diuellantur, vel in se inuicem intrudantur; quod quidem posterius inpenetrabilitas omnibus corporibus communis exigit.

3. In corporibus autem fluidis, quorum particulae nullo nexu inter se vniuntur, motus quoque diversarum particularum multo minus restringitur: neque ex motu quotcunque particularum motus reliquarum determinatur. Si enim vel centum particularum motus, tanquam cognitus assumatur, manifestum est, motus quorum reliquae particulae capaces sint futurae, adhuc in infinitum variari posse. Ex quo concludendum videtur, motum cuiusque particulae fluidi plane non a motu reliquarum pendere, nisi forte his ita fuerit interclusa, vt eas necessario sequi cogatur.

4. Interim tamen fieri non potest, vt motus omnium fluidi particularum nullis omnino legibus adstringatur; neque adeo pro lubitu motum, qui singulis particulis inesse concipitur, fingere licet. Cum enim particulae sint impenetrabiles, statim patet, eiusmodi motum subsistere non posse, quo aliae particulae per alias transirent, sicque se mutuo penetrarent: atque, ob hanc causam, talis motus, ne cogitatione quidem in fluido inesse concipi potest. Quoniam igitur infinitos

motus

motus excludi oportet, quorum pacto reliqui sint comparati, et quanam proprietate ab illis distinguantur operae pretium videtur, accuratius definire.

5. Antequam enim motus, quo fluidum quodpiam actu agitatur, assignari queat, necessarium videtur, vt omnes motus, qui quidem in hoc fluido subsistere possent, dignoscantur: quos motus hic possibiles vocabo, vt a motibus impossibilibus, qui ne locum quidem habere possunt, distinguam. In hunc finem nobis constituendus erit character, motibus possibilibus conueniens, eosque ab impossibilibus segregans; quo facto ex motibus possibilibus quouis casu eum determinari oportebit, qui actu inesse debebit. Tum scilicet ad vires, quibus aqua sollicitatur, erit respiciendum, vt motus, qui illis sit conformis, ex mechanicae principiis definiri possit.

6. In characterem igitur motuum possibilium, quicunque scilicet salua impenetrabilitate in fluido inesse possunt, inquirere hic constitui. Fluidum autem eius indolis assumo, vt neque in arctius spatium compelli se patiatur, neque eius continuitas interrumpi possit: statuo nimirum in medio fluidi durante motu nullum spatium a fluido vacuum relinqui, sed continuitatem in eo iugiter conseruari. Theoria enim ad fluida huius naturae accommodata, non adeo difficile erit, eam ad fluida quoque, quorum densitas est variabilis, et quae ne continuitatem quidem necessario requirunt, extendere.

7. Si igitur in huiusmodi fluido consideretur portio quaecunque, motus, quo singulae eius particulae

feruntur, ita debet esse comparatus, vt omni tempore aequale spatium adimpleat. Hoc enim si in singulis portionibus eueniat, omnis vel expansio in maius spatium, vel coarctatio in minus spatium praepedietur; atque huiusmodi motus, si ad hanc solam indolem respiciamus, qua fluidum neque expansionis, neque condensationis, capax statuitur, omnino pro possibili erit habendus. Quod autem hic de qualibet fluidi portione dictum est, de singulis eius elementis est intelligendum; ita vt cuiusque elementi volumen perpetuo eiusdem quantitatis manere debeat.

8. Quo ergo huic conditioni satisfiat, in singulis fluidi punctis motus quicunque inesse concipiatur; tum sumto quocunque fluidi elemento inuestigetur translatio momentanea singulorum eius terminorum, sicque innotescet spatiolum, in quo hoc elementum elapso tempusculo minimo continebitur. Deinde hoc spatiolum illi, quod ante occupauerat, aequale statuatur, haecque aequatio rationem motus, quatenus erit possibilis, indicabit. Quodsi enim singula elementa singulis tempusculis aequalia spatiola occupent, neque vlla fluidi compressio, neque expansio, orietur; motusque ita erit comparatus, vt pro possibili sit habendus.

9. Cum autem hic non solum celeritas motus, qui singulis fluidi punctis inesse concipitur, spectari debeat, sed etiam eius directio, haec vtraque consideratio commodissime instituetur, si motus cuiusque puncti secundum directiones fixas resoluatur. Haec autem resolutio vel secundum binas, vel ternas directiones fieri

fieri ſolet: priori enim reſolutione vti licet, ſi ſingulorum punctorum motus in eodem plano abſoluatur; ſin autem eorum motus non in eodem plano contineatur, tum motum ſecundum ternos axes fixos reſolui oportet. Quoniam igitur hic poſterior caſus plus difficultatis habet quam prior, inueſtigationem motuum poſſibilium a caſu priori incipi conueniet, qua expedita caſus poſterior facilius expedietur.

10. Primum igitur fluido duas tantum dimenſiones tribuam, ita vt ſingulae eius particulae non ſolum nunc quidem in eodem plano reperiantur, ſed etiam earum motus in eodem plano abſoluatur. Hoc itaque planum plano tabulae repreſentetur, et conſideretur, fluidi quodcunque punctum l, cuius ſitus per coordinatas orthogonales $AL = x$ et $Ll = y$ referatur, tum vero eius motus, quo nunc quidem fertur, ſecundum easdem directiones reſolutus praebeat celeritatem ſecundum axem AL, vel ſecundum $lm = u$, et ſecundum alterum axem AB, vel ſecundum $ln = v$: ita vt vera huius puncti celeritas futura ſit $= \sqrt{(uu + vv)}$, eiusque directio ad axem AL inclinata ſit angulo, cuius tangens $= \frac{v}{u}$. Tab. IV. Fig. 1.

11. Cum ſtatum motus praeſentem tantum, qui ſingulis fluidi punctis conueniat, euoluere ſit propoſitum, celeritates u et v a ſitu puncti l vnice pendebunt, eruntque idcirco tanquam functiones coordinatarum x et y ſpectandae. Ponamus igitur eſſe differentiatione inſtituta:

$$du = L\,dx + l\,dy \quad \text{et} \quad dv = M\,dx + m\,dy$$

quae formulae differentiales, cum sint completae, constat fore $\frac{dL}{dy} = \frac{dl}{dx}$ et $\frac{dM}{dy} = \frac{dm}{dx}$: vbi notandum est, in huiusmodi expressione $\frac{dL}{dy}$; differentiale ipsius L, seu dL, tantum ex variabilitate ipsius y capiendum esse, similique modo in expressione $\frac{dl}{dx}$, pro dl id differentiale ipsius l sumi debet, quod oritur si tantum x pro variabili habeatur.

12. Probe ergo cauendum est, ne in huiusmodi expressionibus fractis $\frac{dL}{dy}$, $\frac{dl}{dx}$, $\frac{dM}{dy}$, et $\frac{dm}{dx}$, numeratores dL, dl, dM et dm differentialia completa functionum L, l, M et m designare putentur; sed perpetuo ea tantum earum differentialia denotant, quae ex variabilitate vnicae coordinatae, eius scilicet, cuius differentiale in denominatore exhibetur, oriuntur; sicque huiusmodi expressiones semper quantitates finitas ac determinatas repraesentabunt. Simili autem modo intelligitur, fore $L = \frac{du}{dx}$, $l = \frac{du}{dy}$; $M = \frac{dv}{dx}$ et $m = \frac{dv}{dy}$; qua notandi ratione primum Clar. *Fontaine* vsus est, et quia non contemnendum calculi compendium largitur, eam hic quoque adhibebo.

13. Cum igitur sit $du = Ldx + ldy$ et $dv = Mdx + mdy$, hinc geminas celeritates cuiusque alius puncti, quod quidem infinite parum a puncto l distat, assignare licebit; si enim talis puncti a puncto l distantia secundum axem AL sit $= dx$, et secundum axem AB $= dy$, tum huius puncti celeritas secundum axem AL erit $= u + Ldx + ldy$; celeritas autem secundum alterum axem AB $= v + Mdx + mdy$. Tempusculo ergo infinite paruo dt hoc punctum proferetur secundum

dum directionem axis AL per spatiolum $= dt(u + L\,dx + l\,dy)$ et secundum directionem alterius axis AB per spatiolum $= dt(v + M\,dx + m\,dy)$.

14. His notatis consideremus elementum aquae triangulare lmn, et quaeramus situm, in quem id ob motum, quem ipsi insitum concipimus, tempusculo dt transferatur. Sit autem huius elementi triangularis lmn latus lm axi AL, latus vero ln axi AB, parallelum: ac ponatur $lm = dx$, et $ln = dy$; seu sint pro puncto m coordinatae $x + dx$ et y; pro puncto n autem sint coordinatae x et $y + dy$. Patet autem, quoniam relationem inter differentialia dx et dy non definimus, eaque tam negatiue, quam affirmatiue, accipi possunt; totam fluidi massam in huiusmodi elementa cogitatione diuidi posse, ita vt, quod de vno in genere definiemus, id aeque ad omnia pateat.

15. Vt igitur pateat, quorum elementum hoc lmn, ob motum insitum, tempusculo dt transferatur, quaeramus puncta p, q et r, in quae eius anguli, seu puncta l, m et n, tempusculo dt transferentur. Cum igitur sit

	puncti l	puncti m	puncti n
Celeritas secundum AL =	u	$u + L\,dx$	$u + l\,dy$
Celeritas secundum AB =	v.	$v + M\,dx$	$v + m\,dy$

punctum l perueniet tempusculo dt in p, vt sit:

$$AP - AL = u\,dt, \text{ et } Pp - Ll = v\,dt.$$

Punctum autem m perueniet in q, vt sit:

$$AQ - AM = (u + L\,dx)\,dt \text{ et } Qq - Mm = (v + M\,dx)\,dt.$$

At punctum n feretur in r, vt sit:

$$AR - AL = (u + l dy)dt \text{ et } Rr - Ln = (v + m dy)dt.$$

16. Cum igitur puncta l, m et n tempusculo dt in puncta p, q et r transferantur, iunctis lineolis rectis pq, pr et qr triangulum lmn, in situm, quem triangulum pqr refert, peruenire censendum est. Quoniam enim triangulum lmn statuitur infinite paruum; eius latera per motum curuaturam recipere nequeunt, ideoque elementum aquae lmn post translationem tempusculo dt factam, etiamnum figuram triangularem pqr, et quidem rectilineam, retinebit. Cum igitur hoc elementum lmn per motum, neque in maius spatium extendi, neque in minus compingi, debeat, motum ita comparatum esse oportet, vt area trianguli pqr aequalis areae trianguli lmn reddatur.

17. Trianguli autem lmn, cum sit ad l rectangulum, area est $= \frac{1}{2} dx dy$, cui propterea area trianguli pqr aequalis est statuenda. Ad hanc autem aream inueniendam considerandae sunt punctorum p, q, r binae coordinatae, quae sunt:

$$AP = x + u dt;\ AQ = x + dx + (u + L dx)dt;\ AR = x + (u + l dy)dt$$
$$Pp = y + v dt;\ Qq = y + (v + M dx)dt,\ Rr = y + dy + (v + m dy)dt$$

Tum vero area trianguli pqr ex areis sequentium trapeziorum ita reperitur, vt sit:

$$pqr = PprR + RrqQ - PpqQ.$$

Cum autem haec trapezia bina latera parallela basique AQ perpendicularia habeant, eorum areae facile assignantur.

18 Erit enim vti ex elementis conſtat:

$PprR = \frac{1}{2}PR(Pp + Rr)$

$RrqQ = \frac{1}{2}RQ(Rr + Qq)$

$PpqQ = \frac{1}{2}PQ(Pp + Qq)$

His igitur colligendis reperietur:

$\Delta pqr = \frac{1}{2}PQ.\,Rr - \frac{1}{2}RQ.\,Pp - \frac{1}{2}PR.\,Qq$

Ponatur breuitatis gratia

$AQ = AP + Q$; $AR = AP + R$; $Qq = Pp + q$ et $Rr = Pp + r$ vt ſit $PQ = Q$; $PR = R$ et $RQ = Q - R$, eritque $\Delta pqr = \frac{1}{2}Q(Pp + r) - \frac{1}{2}(Q - R)Pp - \frac{1}{2}R(Pp + q)$ ſiue $\Delta pqr = \frac{1}{2}Q.r - \frac{1}{2}R.q$.

19. Eſt vero ex valoribus coordinatarum ante exhibitis

$Q = dx + Ldxdt$: $q = Mdxdt$

$R = \quad ldydt$; $r = dy + mdydt$;

quibus valoribus ſubſtitutis, orietur area trianguli

$pqr = \frac{1}{2}dxdy(1 + Ldt)(1 + mdt) - \frac{1}{2}Mldxdydt^2$, ſiue

$pqr = \frac{1}{2}dxdy(1 + Ldt + mdt + Lmdt^2 - Mldt^2)$

quae cum aequalis eſſe debeat areae trianguli lmn, quae eſt $= \frac{1}{2}dxdy$, haec naſcetur aequatio:

$Ldt + mdt + Lmdt^2 - Mldt^2 = 0$ ſiue

$L + m + Lmdt - Mldt = 0$.

20. Cum igitur termini $Lmdt$ et $Mldt$ prae finitis L et m euaneſcant, habebitur haec aequatio $L + m = 0$. Quam ob rem, vt motus ſit poſſibilis, celeritates u et v puncti cuiuscunque l, ita debent eſſe comparatae, vt poſitis earum differentialibus

$du = Ldx + ldy$, et $dv = Mdx + mdy$

ſit

ſit $L + m = 0$. Seu cum ſit $L = \frac{du}{dx}$ et $m = \frac{dv}{dy}$, celeritates u et v, quae puncto l ſecundum directiones axium AL et AB ineſſe concipiuntur, eiusmodi functiones coordinatarum x et y eſſe debent, vt ſit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$, ſicque motuum poſſibilium criterium in hoc conſiſtit, vt ſit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$; niſi enim haec conditio locum habeat, motus fluidi ſubſiſtere nequit.

21. Eodem modo erit procedendum, ſi motus fluidi non abſoluatur in eodem plano. Ponamus igitur, vt quaeſtionem latiſſimo ſenſu acceptam expediamus, ſingulas fluidi particulas motu quocunque inter ſe agitari, hac ſolum lege obſeruata, vt neque condenſatio, neque expanſio partium vsquam eueniat: quaeritur igitur ſimili modo, quaenam hinc determinatio ad celeritates, quas ſingulis punctis ineſſe concipimus, accedat, vt motus poſſibilis reddatur; ſeu quod eodem redit, omnes motus, qui hiſce conditionibus aduerſantur, a poſſibilibus remouere oportet, quo ipſo criterium motuum poſſibilium conſtituetur.

22. Conſideremus igitur punctum fluidi quodcunque λ, ad cuius ſitum repraeſentandum vtamur tribus axibus fixis AL; AB et AC inter ſe normalibus.
Tab. IV. Fig. 2. Sint igitur ternae puncti λ coordinatae his axibus parallelae, $AL = x$, $Ll = y$ et $l\lambda = z$; quae obtinentur, ſi primum a puncto λ ad planum duobus axibus AL et AB determinatum demittatur perpendiculum λl; tum vero ex puncto l ad axem AL perpendicularis lL agatur. Hoc itaque modo ſitus puncti λ per ternas iſtas coordinatas generaliſſime exprimitur, atque ad omnia fluidi puncta accommodari poteſt.

23. Qui-

23. Quicunque porro fit motus puncti λ, is secundum ternas directiones $\lambda\mu$, $\lambda\nu$ et λo axibus AL AB et AC parallelas resolui poterit Sit igitur puncti λ
celeritas secundum directionem $\lambda\mu = u$
celeritas secundum directionem $\lambda\nu = v$
celeritas secundum directionem $\lambda o = w$
et cum hae celeritates pro vario puncti λ situ vtcunque variare possint, erunt eae tanquam functiones ternarum coordinatarum x, y et z considerandae. Iis igitur differentiatis, ponamus prodire:

$$du = L\,dx + l\,dy + \lambda\,dz$$
$$dv = M\,dx + m\,dy + \mu\,dz$$
$$dw = N\,dx + n\,dy + \nu\,dz$$

eruntque porro quantitates L, l, λ, M, m, μ, N, n, ν, functiones coordinatarum x, y et z.

24. Quoniam hae formulae differentiales sunt completae, sequitur, simili modo, vt supra, fore:

$$\frac{dL}{dy} = \frac{dl}{dx};\quad \frac{dL}{dz} = \frac{d\lambda}{dx};\quad \frac{dl}{dz} = \frac{d\lambda}{dy}$$
$$\frac{dM}{dy} = \frac{dm}{dx};\quad \frac{dM}{dz} = \frac{d\mu}{dx};\quad \frac{dm}{dz} = \frac{d\mu}{dy}$$
$$\frac{dN}{dy} = \frac{dn}{dx};\quad \frac{dN}{dz} = \frac{d\nu}{dx};\quad \frac{dn}{dz} = \frac{d\nu}{dy}$$

siquidem in numeratoribus ea tantum coordinatarum, cuius differentiale in denominatore exhibetur, pro variabili assumatur.

25. Triplici ergo motu hoc, quem in puncto X inesse concipimus, hoc punctum λ tempusculo dt ita mouebitur, vt
secundum directionem axis AL per spatiolum $= u\,dt$
secundum directionem axis AB per spatiolum $= v\,dt$
secundum directionem axis AC per spatiolum $= w\,dt$

 pro-

promoueatur. Sit autem puncti λ vera celeritas, quae scilicet ex compositione huius triplicis motus oritur, dicatur $= V$, erit ob normalitatem trium directionum $V = \sqrt{(uu + vv + ww)}$, et spatiolum, quod tempusculo dt motu suo vero conficit, erit $= V\,dt$.

26. Consideremus iam fluidi elementum quodpiam solidum, vt videamus, quorsum id tempusculo dt proferatur; et quoniam perinde est, cuiusmodi figuram isti elemento tribuamus, dummodo ita generatim definiatur, tota fluidi massa, in eiusmodi elementa diuisa, concipi queat; sit, vt calculo consulatur, eius figura pyramis triangularis rectangula, terminata quatuor angulis solidis λ, μ, ν et o, ita vt pro singulis sint ternae coordinatae:

	puncti λ	puncti μ	puncti ν	puncti o
secundum AL	x	$x + dx$	x	x
secundum AB	y	y	$y + dy$	y.
secundum AC	z	z	z	$z + dz$

et cum basis huius pyramidis sit $\lambda\mu\nu = lmn = \frac{1}{2}dx\,dy$, altitudo vero $\lambda o = dz$, erit eius solliditas $= \frac{1}{6}dx\,dy\,dz$.

27. Inuestigemus iam, quorsum singuli isti pyramidis anguli λ, μ, ν et o tempusculo dt transferantur: ad quod eorum ternas celeritates secundum directiones ternorum axium contemplari oportet, quae ex celeritatum u, v, w valoribus differentialibus erunt:

Celeritas secundum	puncti λ	puncti μ	puncti ν	puncti o
directionem AL	u.	$u + L\,dx$	$u + l\,dy$	$u + \lambda\,dz$
directionem AB	v	$v + M\,dx$	$v + m\,dy$	$v + \mu\,dz$
directionem AC	w	$w + N\,dx$	$w + n\,dy$	$w + \nu\,dz$

28. Quodsi ergo puncta λ, μ, ν et o tempusculo dt in puncta π, ϕ, ϱ et σ transferri ponamus,

horum-

horumque punctorum ternas coordinatas axibus parallelas constituamus, erunt translationes momentaneae secundum hos axes:

$AP - AL = u\,dt$	$Pp - Ll = v\,dt$	$p\pi - l\lambda = w\,dt$
$AQ - AM = (u + L\,dx)dt$	$Qq - Mm = (v + M\,dx)dt$	$q\Phi\ m\mu = (w + N\,dx)dt$
$AR - AL = (u + l\,dy)dt$	$Rr - Ln = (v + m\,dy)dt$	$r\varrho - n\nu = (w + n\,dy)dt$
$AS - AL = (u + \lambda\,dz)dt$	$Ss - Ll = (v + \mu\,dz)dt$	$s\sigma - lo = (w + \nu\,dz)dt$

Hinc ergo ternae coordinatae pro his quatuor punctis π, Φ, ϱ et σ erunt:

$AP = x + u\,dt$; $Pp = y + v\,dt$; $p\pi = z + w\,dt$

$RQ = x + dx + (u + L\,dx)dt$; $Qq = y + (v + M\,dx)dt$; $q\Phi = z + (w + N\,dx)dt$

$AR = x + (u + l\,dy)dt$; $Rr = y + dy + (v + m\,dy)dt$; $r\varrho = z + (w + n\,dy)dt$

$AS = x + (u + \lambda\,dz)dt$; $Ss = y + (v + \mu\,dz)dt$; $s\sigma = z + dz + (w + \nu\,dz)dt$

29. Cum igitur elapso tempusculo dt anguli pyramidis λ, μ, ν et o in puncta π, Φ, ϱ et σ sint translati, ipsa pyramis nunc pyramidem pariter triangularem $\pi\Phi\varrho\sigma$ constituet; ideoque ob indolem fluidi efficiendum est, vt soliditas pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ aequalis sit soliditati pyramidis propositae $\lambda\mu\nu o$, seu $= \frac{1}{6}dx\,dy\,dz$. Totum ergo negotium huc redit, vt soliditas pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ determinetur. Perspicuum autem est, hanc pyramidem relinqui, si a solido $prq\pi\Phi\varrho\sigma$ auferatur solidum $pqr\pi\Phi\varrho$; quod posterius solidum est prisma basi triangulari pqr normaliter insistens, et superne sectione obliqua $\pi\varrho\Phi$ truncatum.

30. In huiusmodi autem prismata truncata tria quoque alterum solidum $pqr\pi\Phi\varrho\sigma$ resolui potest, quae sunt:

I. $pqs\pi\Phi\sigma$; II. $prs\pi\varrho\sigma$; III. $qrs\Phi\varrho\sigma$

sicque effici debet, vt sit

$$\tfrac{1}{6}dxdydz = pqs\pi\Phi\sigma + prs\pi\varrho\sigma + qrs\Phi\varrho\sigma - pqr\pi\Phi\varrho.$$

Cum autem huiusmodi prisma basi suae inferiori normaliter insistat, tres autem altitudines habeat inaequales, eius soliditas reperietur, si basis multiplicetur per trientem summae trium istarum altitudinum.

31. Hinc ergo soliditates horum prismatum truncatorum erunt:

$$pqs\pi\Phi\sigma = \tfrac{1}{6}pqs(p\pi + q\Phi + s\sigma)$$
$$prs\pi\varrho\sigma = \tfrac{1}{6}prs(p\pi + r\varrho + s\sigma)$$
$$qrs\Phi\varrho\sigma = \tfrac{1}{6}qrs(q\Phi + r\varrho + s\sigma)$$
$$pqr\pi\Phi\varrho = \tfrac{1}{6}pqr(p\pi + q\Phi + r\varrho).$$

Cum autem sit $pqr = pqs + prs + qrs$, erit summa trium priorum prismatum postremo minuta, siue

$$\tfrac{1}{6}dxdydz = -\tfrac{1}{6}p\pi.qrs - \tfrac{1}{6}q\Phi.prs - \tfrac{1}{6}r\varrho.pqs + \tfrac{1}{6}s\sigma.pqr;$$

siue

$$dxdydz = 2pqr.s\sigma - 2pqs.r\varrho - 2prs.q\Phi - 2qrs.p\pi.$$

32. Superest igitur, vt horum prismatum bases definiantur: verum antequam hoc faciamus, ponamus ad sequentem calculum contrahendum:

$$AQ = AP + Q;\ Qq = Pp + q;\ q\Phi = p\pi + \Phi$$
$$AR = AP + R;\ Rr = Pp + r;\ r\varrho = p\pi + \varrho$$
$$AS = AP + S;\ Ss = Pp + s;\ s\sigma = p\pi + \sigma$$

atque his postremis valoribus substitutis, termini $p\pi$ continentes se mutuo destruent, eritque

$$dxdydz = 2pqr.\sigma - 2pqs.\varrho - 2prs.\Phi$$

sicque

sicque numerus basium inuestigandarum, vnitate est imminutus.

33. Item triangulum pqr reperitur, si a figura $PprqQ$, seu a summa trapeziorum $PprR + RrqQ$ auferatur trapezium $PpqQ$; vnde erit

$$\Delta pqr = \tfrac{1}{2}PR(Pp+Rr) + \tfrac{1}{2}RQ(Rr+Qq) - \tfrac{1}{2}PQ(Pp+Qq);$$

siue ob $PR = R$; $RQ = Q - R$; et $PQ = Q$ erit.

$$\Delta pqr = \tfrac{1}{2}R(Pp-Qq) + \tfrac{1}{2}Q(Rr-Pp) = \tfrac{1}{2}Qr - \tfrac{1}{2}Rq.$$

Simili modo erit:

$$\Delta pqs = \tfrac{1}{2}PS(Pp+Ss) + \tfrac{1}{2}SQ(Ss+Qq) - \tfrac{1}{2}PQ(Pp+Qq), \text{ seu}$$

$$\Delta pqs = \tfrac{1}{2}S(Pp+Ss) + \tfrac{1}{2}(Q-S)(Ss+Qq) - \tfrac{1}{2}Q(Pp+Qq)$$

vnde fit:

$$\Delta pqs = \tfrac{1}{2}S(Pp-Qq) + \tfrac{1}{2}Q(Ss-Pp) = \tfrac{1}{2}Qs - \tfrac{1}{2}Sq.$$

Ac denique

$$\Delta prs = \tfrac{1}{2}PR(Pp+Rr) + \tfrac{1}{2}RS(Rr+Ss) - \tfrac{1}{2}PS(Pp+Ss) \text{ seu}$$

$$\Delta prs = \tfrac{1}{2}R(Pp+Rr) + \tfrac{1}{2}(S-R)(Rr+Ss) - \tfrac{1}{2}S(Pp+Ss)$$

vnde fit:

$$\Delta prs = \tfrac{1}{2}R(Pp-Ss) + \tfrac{1}{2}S(Rr-Pp) = \tfrac{1}{2}Sr - \tfrac{1}{2}Rs.$$

34. His igitur valoribus substitutis, obtinebimus

$$dx\,dy\,dz = (Qr-Rq)\sigma + (Sq-Qs)\varrho + (Rs-Sr)\Phi$$

siue pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ soliditas erit

$$\tfrac{1}{6}(Qr-Rq)\sigma + \tfrac{1}{6}(Sq-Qs)\varrho + \tfrac{1}{6}(Rs-Sr)\Phi$$

Est autem ex coordinatarum valoribus supra §. 28 exhibitis

$$\begin{array}{lll}
Q = dx + L\,dx\,dt & q = M\,dx\,dt & \Phi = N\,dx\,dt \\
R = l\,dy\,dt & r = dy + m\,dy\,dt & \varrho = n\,dy\,dt \\
S = \lambda\,dz\,dt & s = \mu\,dz\,dt & \sigma = dz + \nu\,dz\,dt.
\end{array}$$

35. Cum igitur hinc fiat

$$Qr - Rq = dxdy(1 + Ldt + mdt + Lmdt^2 - Mldt^2)$$
$$Sq - Qs = dxdz(-\mu dt - L\mu dt^2 + M\lambda dt^2)$$
$$Rs - Sr = dydz(-\lambda dt - m\lambda dt^2 + l\mu dt^2)$$

reperietur soliditas pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ ita expressa

$$\tfrac{1}{6}dxdydz\left\{\begin{array}{llll} & +Ldt & +Lmdt^2 & +Lm\nu dt^3 \\ & +mdt & -Mldt^2 & -Ml\nu dt^3 \\ 1 & +\nu dt & +L\nu dt^2 & -Ln\mu dt^3 \\ & & +m\nu dt^2 & +Mn\lambda dt^3 \\ & & -n\mu dt^2 & -Nm\lambda dt^3 \\ & & -N\lambda dt^2 & +Nl\mu dt^3 \end{array}\right\}$$

quae cum debeat esse aequalis pyramidi $\lambda\mu\nu o = \frac{1}{6}dxdydz$ habebitur, diuisione per dt instituta, haec aequatio:

$$0 = L + m + \nu + dt(Lm + L\nu + m\nu - Ml - N\lambda - n\mu)$$
$$+ dt^2(Lm\nu + Mn\lambda + Nl\mu - Ln\mu - Ml\nu - Nl\mu)$$

36. Reiectis igitur terminis infinite paruis habebitur haec aequatio: $L + m + \nu = 0$, qua ratio celeritatum u, v, w determinatur, vt motus fluidi fiat possibilis. Cum igitur sit $L = \frac{du}{dx}$, $m = \frac{dv}{dy}$ et $\nu = \frac{dw}{dz}$: criterium motus possibilis, si puncto fluidi cuicunque λ, cuius situs ternis coordinatis x, y et z definitur, eiusmodi celeritates u, v et w secundum easdem coordinatas directae tribuantur, vt sit:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Hac scilicet conditione id obtinetur, vt nulla fluidi pars in motu, neque in magis, neque in minus spatium, transferatur, ac perpetuo cum fluidi continuitas, tum eadem densitas, conseruetur.

37. Haec autem proprietas ita est interpretanda, vt pro eodem temporis momento ad omnia fluidi puncta extendatur: eodem scilicet momento omnium punctorum ternae celeritates u, v, w tales esse debent functiones ternarum coordinatarum x, y et z, vt sit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$: sicque natura istarum functionum motum singulorum fluidi punctorum ad instans propositum definiet. Alio autem tempore eorundem punctorum motus vtcunque diuersus esse poterit, dummodo pro quouis temporis puncto inuenta proprietas per totum fluidum locum habeat. Tempus scilicet hactenus tanquam quantitatem constantem sum contemplatus.

38. Sin autem tempus quoque variabile spectare velimus, ita vt motus puncti λ, cuius situs ternis coordinatis $AL = x$, $Ll = y$ et $l\lambda = z$ indicatur, elapso tempore t definiri debeat, manifestum est, ternas celeritates u, v et w non solum a coordinatis x, y et z, sed insuper etiam a tempore t pendere, seu functiones fore quatuor harum quantitatum x, y, z et t; ita vt earum differentialia huiusmodi formas sint habitura:

$$du = L\,dx + l\,dy + \lambda\,dz + \mathfrak{L}\,dt; \quad dv = M\,dx + m\,dy + \mu\,dz + \mathfrak{M}\,dt; \quad dw = N\,dx + n\,dy + \nu\,dz + \mathfrak{N}\,dt.$$

Interim tamen semper erit $L + m + \nu = 0$, propterea, quod quouis instanti tempus t pro constanti habetur, seu fit $dt = 0$. Vtcunque igitur functiones u, v, et w cum tempore t mutantur, necesse est, vt pro omni temporis momento sit:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Cum enim hac conditione efficiatur, vt quaeuis fluidi portio tempusculo dt in spatium sibi aequale transferatur,

tur, idem etiam per eandem conditionem in elemento temporis sequenti; omnibus ergo sequentibus temporis elementis euenire debebit.

PARS ALTERA.

39. Expositis ergo iis, quae ad motum tantum possibilem attinent, inuestigemus nunc etiam indolem eius motus, qui re vera in fluido subsistere potest. Hic igitur, praeter fluidi continuitatem, eiusdemque densitatis permanentiam, ratio quoque erit habenda virium, quibus singula fluidi elementa actu sollicitantur. Quando enim cuiusuis elementi motus, vel non est vniformis, vel non in directum porrigitur, motus immutatio viribus hoc elementum sollicitantibus conformis esse debet. Quare cum ex cognitis his viribus motus mutatio innotescat, praecedentes autem formulae etiam hanc motus mutationem contineant, hinc nouae deducentur determinationes, quibus motus hactenus tantum possibilis ad motum actualem restringitur.

40. Instituamus quoque hanc inuestigationem bipartito; ac primo concipiamus totum fluidi motum in eodem plano fieri. Sint ergo, vt ante, coordinatae situm puncti cuiusuis l definientes $AL = x$, $Ll = y$; ac Tab. IV. Fig. 1. nunc quidem elapso tempore t sint puncti l binae celeritates secundum directiones axibus AL et AB parallelas u et v: erunt u et v, quoniam nunc variabilitatis temporis ratio haberi debet, functiones ipsarum x, y et t, quo circa ponatur

$$du = L\,dx + l\,dy + \mathfrak{L}\,dt \quad \text{et} \quad dv = M\,dx + m\,dy + \mathfrak{M}\,dt$$

atque

atque ob priorem conditionem iam supra inuenimus, esse debere $L + m = 0$.

41. Cum igitur elapso tempusculo $= dt$ punctum l transferatur in p; absoluto secundum axem AL spatiolo $= udt$; secundum alterum axem AB autem spatiolo $= vdt$; vt incrementa celeritatum u et v puncti l; quae tempusculo dt ipsi inducuntur, obtineamus, pro dx et dy scribi oportet spatiola udt et vdt, vnde haec vera celeritatum incrementa prodibunt:

$$du = Ludt + lvdt + \mathfrak{L}dt \text{ et } dv = Mudt + mvdt + \mathfrak{M}dt$$

Ex quo vires acceleratrices, quae has accelerationes producere valent, erunt:

Vis accel. secundum $AL = 2(Lu + lv + \mathfrak{L})$

Vis accel. secundum $AB = 2(Mu + mv + \mathfrak{M})$

quibus ergo vires actu in aquae particulam l agentes aequales esse debebunt.

42. Inter vires autem, quae aquae particulas actu sollicitant, primum consideranda venit grauitas; cuius autem effectus, si planum, in quo fit motus, est horizontale, pro nihilo erit habendus. Sin autem fuerit decliue, axisque AL decliuitatem sequatur, altero AB existente horizontali, a grauitate orietur vis acceleratrix secundum AL constans, quae fit $= \alpha$. Deinde non praetermittenda est frictio, qua saepe motus aquae non mediocriter impeditur; quanquam autem eius leges nondum sunt satis exploratae, tamen frictionem corporum solidorum sequentes non multum fortasse a scopo aberrabimus, si frictionem vbique pressioni, qua aquae particulae se inuicem premunt, proportionalem statuerimus.

 43. In-

48. Criterium hoc independens est a praecedente, quod continuitas fluidi eiusque constans densitas vniformis suppeditauit. Quare etiamsi fluidum in motu densitatem suam mutaret, vti in motu fluidorum elasticorum, veluti aëris euenire solet, haec proprietas nihilominus locum habere debet, vt sit $udx+vdy$ differentiale completum. Siue celeritates u et v semper eiusmodi debent esse functiones coordinatarum x et y, praeter tempus t, vt posito tempore constante formula $udx+vdy$ integrationem admittat.

49. Hinc autem porro ipsam pressionem p definire poterimus, id quod absolute est necessarium, ad motum fluidi perfecte determinandum. Cum enim inuenerimus $M=l$, erit

$$dp=adx-2u(Ldx+ldy)-2v(ldx+mdy)-2\mathfrak{L}dx-2\mathfrak{M}dy+\mathfrak{R}dt$$

At est $Ldx+ldy=du-\mathfrak{L}dt$; $ldx+mdy=dv-\mathfrak{M}dt$, vnde fit:

$$dp=adx-2udu-2vdv+2\mathfrak{L}udt+2\mathfrak{M}vdt-2\mathfrak{L}dx-2\mathfrak{M}dy+\mathfrak{R}dt.$$

Quodsi ergo pressionem in singulis fluidi punctis pro tempore praesente definire velimus, nullo respectu ad eius mutationem cum tempore oriundam habito, ista nobis consideranda erit aequatio:

$$dp=adx-2udu-2vdv-2\mathfrak{L}dx-2\mathfrak{M}dy$$

estque nostro designandi modo $\mathfrak{L}=\frac{du}{dt}$ et $\mathfrak{M}=\frac{dv}{dt}$; hincque

$$dp=adx-2udu-2vdv-2\frac{du}{dt}dx-2\frac{dv}{dt}dy$$

in cuius aequationis integratione tempus t pro constanti est habendum.

50. Haec

50. Haec autem aequatio per hypothesin est integrabilis, atque reuera talis deprehenditur, si ad criterium huius motus attendamus, quo vidimus, esse debere $udx + vdy$ differentiale completum, si quidem tempus t constans assumamus. Sit igitur S eius integrale, quod ergo eiusmodi erit functio ipsarum x, y et t, vt posito $dt = o$, prodeat $dS = udx + vdy$: sumto autem quoque tempore t variabili ponamus haberi

$$dS = udx + vdy + U\,dt$$

eritque propterea $\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dx}$ et $\frac{dv}{dt} = \frac{dU}{dy}$. Tum vero est $U = \frac{dS}{dt}$.

51. His valoribus introductis habebitur:

$$\frac{du}{dt} \cdot dx + \frac{dv}{dt} \cdot dy = \frac{dU}{dx} \cdot dx + \frac{dU}{dy} \cdot dy$$

huiusque formulae cum tempus t constans sumatur integrale manifesto est $= U$. Quod quo clarius appareat, ponamus $dU = K\,dx + k\,dy$, erit $\frac{dU}{dx} = K$ et $\frac{dU}{dy} = k$, vnde $\frac{dU}{dx} \cdot dx + \frac{dU}{dy} \cdot dy = K\,dx + k\,dy = dU$. Cum igitur huius integrale sit $= U = \frac{dS}{dt}$: erit

$$dp = a\,dx - 2u\,du - 2v\,dv - 2\,dU$$

vnde integrando prodit:

$$p = \text{Const.} + ax - uu - vv - \frac{2\,dS}{dt}.$$

existente S functione ipsarum x, y et t, cuius differentiale posito $dt = o$, est $udx + vdy$.

52. Quo indoles huius formulae melius intelligatur, consideremus puncti l celeritatem veram, quae sit $= V = \sqrt{(uu + vv)}$. Atque erit pressio: $p = \text{Const.} + ax - VV - \frac{2\,dS}{dt}$: in quo postremo termino dS de-

 notat,

notat differentiale ipſius $S = \int(udx + vdy)$, ſi tantum tempus t vt variabile ſpectetur.

53. Si iam frictionis quoque rationem habere velimus, eamque preſſioni p proportionalem ſtatuamus; dum punctum l elementum ds percurrit, erit vis retardatrix a frictione oriunda $= \frac{p}{f}$; vnde poſito $\frac{ds}{dt} = U$, aequatio noſtra differentialis, poſito t conſtante, erit:

$$dp = \alpha dx - \frac{p}{f} ds - 2 V dV - 2 dU$$

vnde integrando oritur, ſumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$,

$$p = e^{\frac{-s}{f}} \int e^{\frac{s}{f}} (\alpha dx - 2 V dV - 2 dV) \text{ ſiue}$$

$$p = \alpha x - VV - 2U - \frac{1}{f} e^{\frac{-s}{f}} \int e^{\frac{s}{f}} (\alpha x - VV - 2U) ds$$

54. Cum igitur criterium motus, quo fluidum re vera mouetur, in hoc conſiſtat, vt poſito tempore conſtante, differentiale $udx + vdy$ ſit completum: continuitas autem et conſtans vniformis denſitas exigat, vt ſit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$, hinc ſequitur quoque hoc differentiale $udy + vdx$ fore completum. Quare vtrinque coniunctim celeritates u et v eiusmodi debent eſſe functiones coordinatarum x et y cum tempore t, vt hae ambae formulae $udx + vdy$ et $udy + vdx$ ſint differentialia completa.

55. Inſtituamus iam eandem inueſtigationem in genere, poſitisque puncti λ ternis celeritatibus ſecundum axes AL, AB, AC directis u, v, w ſint eae eiusmodi functiones cum coordinatarum x, y, z, tum temporis t, vt differentiatione inſtituta fiat:

$du =$

$$du = L\,dx + l\,dy + \lambda\,dz + \mathfrak{L}\,dt$$
$$dv = M\,dx + m\,dy + \mu\,dz + \mathfrak{M}\,dt$$
$$dw = N\,dx + n\,dy + \nu\,dz + \mathfrak{N}\,dt$$

et quanquam hic quoque tempus t variabile est assumtum, tamen, vt motus sit possibilis, per conditionem praecedentem oportet esse $L + m + \nu = 0$, siue quod eodem redit:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

a qua proprietate quidem praesens examen non pendet.

56. Elapso autem tempusculo dt, punctum λ transfertur in π, et secundum axem AL percurrit spatiolum $= udt$, secundum axem AB spatiolum $= vdt$ et secundum axem AC spatiolum wdt. Quare nunc puncti λ in π existentis ternae celeritates erunt:

$$\text{secund. } AL = u + Ludt + lvdt + \lambda wdt + \mathfrak{L}\,dt$$
$$\text{secund } AB = v + Mudt + mvdt + \mu wdt + \mathfrak{M}\,dt$$
$$\text{secund. } AC = w + Nudt + nvdt + \nu wdt + \mathfrak{N}\,dt$$

hincque accelerationes secundum easdem directiones erunt:

$$\text{sec. } AL = 2(Lu + lv + \lambda w + \mathfrak{L})$$
$$\text{sec. } AB = 2(Mu + mv + \mu w + \mathfrak{M})$$
$$\text{sec. } AC = 2(Nu + nv + \nu w + \mathfrak{N})$$

57. Si axem AC verticalem statuamus, ita vt reliqui bini AL et AB sint horizontales, ob grauitatem vis acceleratrix oritur secundum Axem $AC = -1$. Tum vero posita pressione in $\lambda = p$, eiusque differentiali, sumto tempore constante,

$$dp = R\,dx + r\,dy + \varrho\,dz$$

hinc

hinc orientur ternae vires acceleratrices

sec $AL = -R$; sec. $AB = -r$ et sec. $AC = -\varrho$

quippe quae facile simili modo colliguntur, quo ante §. 44 et 45. sumus vsi, ita vt superfluum foret, idem ratiocinium repetere. Quam ob rem habebimus has aequationes:

$$R = -2(Lu + lv + \lambda w + \mathfrak{L})$$
$$r = -2(Mu + mv + \mu w + \mathfrak{M})$$
$$\varrho = -1 - 2(Nu + nv + \nu w + \mathfrak{N})$$

58. Cum autem formula $dp = R\,dx + r\,dy + \varrho\,dz$ debeat esse differentiale completum, erit

$$\frac{dR}{dy} = \frac{dr}{dx}; \quad \frac{dR}{dz} = \frac{d\varrho}{dx}; \quad \frac{dr}{dz} = \frac{d\varrho}{dy}.$$

at differentiatione peracta obtinebuntur per -2 diuidendo tres sequentes aequationes

$$\text{I}\ \begin{cases} \frac{u\,dL}{dy} + \frac{v\,dl}{dy} + \frac{w\,d\lambda}{dy} + \frac{d\mathfrak{L}}{dy} + Ll + lm + \lambda n = \\ \frac{u\,dM}{dx} + \frac{v\,dm}{dx} + \frac{w\,d\mu}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + ML + mM + \mu N \end{cases}$$

$$\text{II}\ \begin{cases} \frac{u\,dL}{dz} + \frac{v\,dl}{dz} + \frac{w\,d\lambda}{dz} + \frac{d\mathfrak{L}}{dz} + \mathfrak{L}\lambda + l\mu + \lambda\nu = \\ \frac{u\,dN}{dx} + \frac{v\,dn}{dx} + \frac{w\,d\nu}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx} + NL + nM + \nu N \end{cases}$$

$$\text{III}\ \begin{cases} \frac{u\,dM}{dz} + \frac{v\,dm}{dz} + \frac{w\,d\mu}{dz} + \frac{d\mathfrak{M}}{dz} + M\lambda + m\mu + \mu\nu = \\ \frac{v\,dN}{dy} + \frac{v\,dn}{dy} + \frac{w\,d\nu}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dy} + Nl + nm + \nu n \end{cases}$$

59. Est autem ex natura differentialium completorum

$$\frac{dL}{dy} = \frac{dl}{dx}; \quad \frac{dm}{dx} = \frac{dM}{dy}; \quad \frac{d\lambda}{dy} = \frac{dl}{dz}; \quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{dM}{dz}; \quad \frac{d\mathfrak{L}}{dy} = \frac{dl}{dt}; \quad \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = \frac{dM}{dt}$$
$$\frac{dL}{dz} = \frac{d\lambda}{dx}; \quad \frac{dl}{dz} = \frac{d\lambda}{dy}; \quad \frac{dn}{dx} = \frac{dN}{dy}; \quad \frac{d\nu}{dx} = \frac{dN}{dz}; \quad \frac{d\mathfrak{L}}{dz} = \frac{d\lambda}{dt}; \quad \frac{d\mathfrak{N}}{dx} = \frac{dN}{dt}$$
$$\frac{dM}{dz} = \frac{d\mu}{dx}; \quad \frac{dN}{dy} = \frac{dn}{dx}; \quad \frac{dm}{dz} = \frac{d\mu}{dy}; \quad \frac{d\nu}{dy} = \frac{dn}{dz}; \quad \frac{d\mathfrak{M}}{dz} = \frac{d\mu}{dt}; \quad \frac{d\mathfrak{N}}{dy} = \frac{dn}{dt}$$

quibus

quibus valoribus ſubſtitutis tres illae aequationes abibunt in has:

$$\left(\frac{dl-dM}{dt}\right)+u\left(\frac{dl-dM}{dx}\right)+v\left(\frac{dl-dM}{dy}\right)+w\left(\frac{dl-dM}{dz}+(l-M(L+m)+\lambda n-\mu N=0\right.$$

$$\left(\frac{d\lambda-dN}{dt}\right)+u\left(\frac{d\lambda-dN}{dx}\right)+v\left(\frac{d\lambda-dN}{dy}\right)+w\left(\frac{d\lambda-dN}{dz}\right)+(\lambda-N)(L+\nu)+l\mu-nM=0$$

$$\left(\frac{d\mu-dn}{dt}\right)+u\left(\frac{d\mu-dn}{dx}\right)+v\left(\frac{d\mu-dn}{du}\right)+w\left(\frac{d\mu-dn}{dz}\right)+(\mu-n)(m+\nu)+M\lambda-Nl=0$$

60. Manifeſtum iam eſt, his tribus aequationibus ſatisfieri ſequentibus tribus valoribus:

$$l=M;\quad \lambda=N;\quad \mu=n$$

quibus continetur criterium, quod conſideratio ſollicitationum ſuppeditat. Hinc ergo ſequitur fore recepto deſignandi modo

$$\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dx};\quad \frac{du}{dz}=\frac{dw}{dx};\quad \frac{dv}{dz}=\frac{dw}{dy}.$$

hae autem ipſae ſunt illae conditiones, quae requiruntur, vt haec formula $udx+vdy+wdz$ ſit differentiale completum. Ex quo hoc criterium in eo conſiſtit, vt ternae celeritates u, v et w eiusmodi eſſe debeant functiones ipſarum x, y et z vna cum t, vt poſito tempore conſtante formula $udx+vdy+wdz$ integrationem admittat.

61. Cum ergo poſito tempore t conſtante, ſeu $dt=0$, ſit

$$du=L\,dx+M\,dy+N\,dz$$
$$dv=M\,dx+m\,dy+n\,dz$$
$$dw=N\,dx+n\,dy+\nu\,dz$$

valores autem pro R, r et ϱ fiant:

$$R=-2(Lu+Mv+Nw+\mathfrak{L})$$
$$r=-2(Mu+mv+nw+\mathfrak{M})$$
$$\varrho=-1-2(Nu+nv+\nu w+\mathfrak{N})$$

pro

pro statu pressionis p haec habebitur aequatio

$$dp = -dz - 2u(Ldx + Mdy + Ndz) = -dz - 2udu - 2vdv - 2wdw$$
$$-2v(Mdx + mdy + ndz) \qquad -2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy - 2\mathfrak{N}dz$$
$$-2w\,Ndx + ndy + vdz)$$
$$-2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy - 2\mathfrak{N}dz$$

62. Quia vero est $\mathfrak{L} = \frac{du}{dt}$; $\mathfrak{M} = \frac{dv}{dt}$; $\mathfrak{N} = \frac{dw}{dt}$; erit integrando :

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2\int\left(\frac{du}{dt}.dx + \frac{dv}{dt}.dy + \frac{dw}{dt}.dz\right)$$

Cum autem per conditionem inuentam sit $udx + vdy + wdz$ integrabile, ponatur eius integrale $= S$, quod, quoniam etiam tempus t inuoluere potest, sit sumto quoque t variabili :

$$dS = udx + vdy + wdz + Udt$$

eritque $\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dx}$; $\frac{dv}{dt} = \frac{dU}{dy}$; $\frac{dw}{dt} = \frac{dU}{dz}$; Quare cum sit in genere sumto tempore t constante, vti id quidem in superiori integrali assumitur,

$$\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz = dU$$

habebimus :

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2U, \text{ siue}$$
$$p = C - z - uu - vv - ww - 2.\frac{dS}{dt}$$

63. Perspicuum hic est, $uu + vv + ww$ exprimere quadratum verae puncti λ celeritatis ita, vt, si celeritas huius puncti vera dicatur $= V$, habeatur pro pressione ista aequatio:

$$p = C - z - VV - \frac{2dS}{dt}.$$

ad quam ergo inueniendam, primum formulae $udx + vdy + wdz$, quam completam esse oportet, quaeratur integrale S, hocque denuo differentietur, posito solo tempore

pore t variabili, quod differentiale per dt diuisum, dabit valorem formulae $\frac{ds}{dt}$, quae in expressionem pro statu pressionis p inuentam ingreditur.

64. Quodsi iam prius criterium, quo motus saltem possibilis continetur, hic adiungamus, ternae celeritates u, v, w eiusmodi functiones ternarum coordinatarum x, y et z vna cum tempore t esse debent, vt primo sit $udx + vdy + wdz$ differentiale completum; deinde vero, vt sit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$. Hisque duabus conditionibus omnis fluidorum motus, siquidem densitate inuariabili sint praeditae, subiicitur. Praeterea vero, si sumto etiam tempore t, variabili, haec formula $udx + vdy + wdz + Udt$ fuerit differentiale completum, status pressionis in puncto quocunque λ exprimitur, altitudine p, vt sit:

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2U$$

siquidem fluidum grauitate naturali gaudeat, et planum BAL fuerit horizontale.

65. Si grauitati aliam directionem tribuissemus, siue etiam vires vtcunque variabiles assumsissemus, quibus singulae fluidi particulae sollicitarentur, inde tantum discrimen in valorem pressionis p esset ingressum, neque inde lex, quam ternae cuiusque puncti fluidi celeritates sequi debent, vllam mutationem esset passa. Semper ergo, quaecunque fuerint vires sollicitantes, ternae celeritates u, v, et w ita debent esse comparatae, vt formula $udx + vdy + wdz$ fiat differentiale completum, atque vt insuper sit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$. Infinitis igitur modis constitui poterunt ternae celeritates

u, v et w, vt his duabus conditionibus satisfiat; atque tum pressio fluidi in singulis punctis poterit assignari.

66. Multo difficilior autem foret quaestio, si, datis viribus sollicitantibus, vna cum pressione in quibusdam locis, ipse motus fluidi in singulis punctis determinari deberet. Tum enim haberentur aliquot aequationes formae $p = C - z - uu - vv - ww - 2U$, ex quibus, cum constans C, tum vero ratio functionum u, v et w ita definiri deberet, vt non solum his casibus istis aequationibus satisfieret, sed etiam ante allatae regulae obseruarentur, quod opus vtique maximam calculi vim requireret. Conueniet igitur in genere in naturam functionum idonearum inquiri, quae vtrique criterio futurae sint conformes.

67. Commodissime igitur incipiemus ab ipsa quantitate integrali, cuius differentiale esse oportet formulam $udx + vdy + wdz$ posito tempore constante. Sit ergo S hoc integrale, quod erit functio ipsarum x, y et z, tempore t in quantitatibus constantibus inuoluto; atque si haec quantitas S differentietur, coefficientes differentialium dx, dy et dz statim praebebunt celeritates u, v et w; quae quidem praesenti tempore conueniant puncto fluidi λ, cuius coordinatae sunt x, y et z. Quaestio autem huc redit: vt definiatur, quales functiones ipsarum x, y et z, pro S assumi debeant, vt etiam fiat $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$; seu cum sit $u = \frac{dS}{dx}$, $v = \frac{dS}{dy}$ et $w = \frac{dS}{dz}$, vt sit $\frac{ddS}{dx^2} + \frac{ddS}{dy^2} + \frac{ddS}{dz^2} = 0$.

68. Quo-

68. Quoniam non patet, quomodo hoc generaliter praestari possit, casus quosdam generaliores contemplabor. Sit igitur

$$S=(Ax+By+Cz)^n$$

eritque

$\frac{dS}{dx}=nA(Ax+By+Cz)^{n-1}$ et $\frac{ddS}{dx^2}=n(n-1)AA(Ax+By+Cz)^{n-2}$

similesque erunt formae pro $\frac{ddS}{dy^2}$ et $\frac{ddS}{dz^2}$, vnde effici debet, vt sit

$$n(n-1)(Ax+By+Cz)^{n-2}(AA+BB+CC)=0$$

cui primo satisfit, si vel $n=0$, vel $n=1$; ex quo iam duo valores idonei obtinentur, scilicet $S=$ Const. et $S=Ax+By+Cz$, vbi constantes A, B, C etiam tempus vtcunque in se complecti possunt.

69. Sin autem n neque $=0$, neque $=1$, necesse est, vt sit $AA+BB+CC=0$: tumque pro S valor idoneus erit

$$S=(Ax+By+Cz)^n$$

quicunque numerus pro exponente n sumatur, quin etiam ipsum tempus t in n poterit ingredi. Patet etiam aggregatum quotcunque huiusmodi formularum idoneum valorem pro S praebere, ita, vt sit:

$$S=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta z+\varepsilon(Ax+By+Cz)^n+\zeta(A'x+B'y+C'z)^{n'}$$
$$+\eta(A''x+B''y+C''z)^{n''}+\theta(A'''x+B'''y+C'''z)^{n'''}\text{ etc.}$$

dummodo fuerit:

$$AA+BB+CC=0;\ A'A'+B'B'+C'C'=0;\ A''A''+B''B''+C''C''=0\text{ etc.}$$

70. Hinc valores idonei pro S ex inferioribus ordinibus, vbi coordinatae x, y, z, vel vnam, vel

 duas,

duas, vel tres, vel quatuor habent dimenſiones, erunt ſequentes.

I. $S = A$

II. $S = Ax + By + Cz$

III. $S = Axx + Byy + Czz + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$

existente $A + B + C = 0$

IV. $S = Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxxy + 3Fxxz + 3Hyyz + 6Kxyz$
$+ 3Exyy + 3Gxzz + 3Iyzz$

exiſtente $A + E + G = 0$; $B + D + I = 0$; $C + F + H = 0$

V. $S = \begin{cases} + Ax^4 + 6Dxxyy + 4Gx^3y + 4Hxy^3 + 12Nxxyz \\ + By^4 + 6Exxzz + 4Ix^3z + 4Kxz^3 + 12Oxyyz \\ + Cz^4 + 6Fyyzz + 4Ly^3z + 4Myz^3 + 12Pxyzz \end{cases}$

exiſtente $A + D + E = 0$ $G + H + P = 0$
$B + D + F = 0$ $I + K + O = 0$
$C + E + F = 0$ $L + M + N = 0$

71. Hinc perſpicuum eſt, quomodo hae formulae pro quolibet ordine ſe ſint habiturae: ſingulis ſcilicet terminis primo iidem dentur coefficientes numerici, qui iisdem terminis ex lege permutationum conveniunt, ſeu, qui oriuntur, ſi trinomium $x + y + z$ ad poteſtatem eiusdem ordinis eleuetur. Numericis autem coefficientibus adiungantur litterales indefiniti A, B, C, etc. Tum reiectis numericis diſpiciatur, quoties eiusmodi terni termini occurrunt $LZxx + MZyy + NZzz$, qui ſcilicet factorem communem Z ex variabilibus formatum habeant, totiesque ſumma coefficientium litteralium $L + M + N$ ſtatuatur nihilo aequalis. Ita cum pro poteſtate quinta habeatur.

$$S = \begin{cases} + Ax^5 + 5Dx^4y + 5\mathfrak{D}x^4z + 10Gx^3yy + 10\mathfrak{G}x^3zz + 20Kx^3yz + 30Nxyyzz \\ + By^5 + 5Exy^4 + 5\mathfrak{E}y^4z + 10Hx^2y^3 + 10\mathfrak{H}y^3zz + 20Lxy^3z + 30Oxxyzz \\ + Cz^5 + 5Fxz^4 + 5\mathfrak{F}yz^4 + 10Ixxz^3 + 10\mathfrak{J}yyz^3 + 20Mxyz^3 + 30Pxyyz \end{cases}$$

ſequen-

ſequentes habebuntur coefficientium litteralium determinationes:

$A+G+\mathfrak{G}=0$; $D+H+O=0$; $\mathfrak{D}+I+P=0$

$B+H+\mathfrak{H}=0$; $E+G+N=0$; $\mathfrak{E}+\mathfrak{J}+P=0$; $K+L+M=0$

$\mathfrak{C}+I+\mathfrak{J}=0$; $F+\mathfrak{G}+N=0$; $\mathfrak{F}+\mathfrak{H}+O=0$

Simili modo pro ordine ſexto huiusmodi determinationes prodibunt 15, pro ſeptimo 21, pro octauo 28 et ita porro.

72. Iam formula prima $S=A$, quoniam coordinatas x, y et z plane non in ſe complectitur, ternas celeritates u, v, et w nihilo aequales praebebit, ſicque ſtatum fluidi quietum exhibebit. Preſſio tamen in quouis puncto pro variis temporibus vtcunque poterit eſſe variabilis. Cum enim A ſit functio quaecunque temporis, ad datum tempus t preſſio in puncto λ erit $p=C-\frac{2\,dA}{dt}-z$: qua formula eiusmodi fluidi ſtatus indicatur, vbi fluidum quouis momento a viribus quibuscunque ſollicitatur, quae tamen ſe ſemper in aequilibrio teneant, vt ab illis nullus motus in fluido oriri queat: vbi euenit, ſi fluidum vaſi fuerit incluſum, ex quo nusquam erumpere queat, atque in eo a viribus quibuscunque comprimatur.

73. Formula autem ſecunda $S=Ax+By+Cz$ differentiata, has praebebit puncti λ ternas celeritates:

$u=A$; $v=B$ et $w=C$.

Eodem ergo tempore omnia fluidi puncta pari motu feruntur ſecundum eandem directionem. Ex quo totum fluidum, perinde ac corpus ſolidum, mouebitur, quod ſolo motu progreſſiuo fertur. Diuerſo autem tempore

pore huius motus tam celeritas, quam directio, vtcunque variari poterit, prout vires extrinsecus vrgentes exegerint. Pressio ergo in puncto λ ad tempus t, cuius A, B, C sunt functiones, erit $p = C - z - AA - CC - 2x.\frac{dA}{dt} - 2y.\frac{dB}{dt} - z\frac{dC}{dt}$.

74. Formula tertia $S = Axx + Byy + Czz + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$, vbi est $A + B + C = 0$, has praebebit ternas puncti λ celeritates: $u = 2Ax + 2Dy + 2Ez$; $v = 2By + 2Dx + 2Fz$; $w = 2Cz + 2Ex + 2Fy$, seu $w = 2Ex + 2Fy - 2(A + B)z$. Hoc ergo casu etiam eodem temporis momento diuersa fluidi puncta diuerso motu feruntur; successu autem temporis etiam eiusdem puncti motus quomodocunque variabilis existere potest, quia pro A, B, D, E, F functiones quascunque temporis t assumere licet. Multo maior autem varietas locum habebit, si functioni S valores magis compositi tribuantur.

75. Quia casu secundo motus fluidi conueniebat cum motu corporis solidi progressiuo, quo scilicet vnoquoque momento singulae partes motu aequali sibique parallelo feruntur: suspicari liceat, in aliis casibus motum fluidi, quoque cum motu corporis solidi, siue rotatorio, siue vtcunque anomalo conuenire posse. Satis igitur erit ostendisse huiusmodi conuenientiam, praeter
Tab. IV. casum secundum, nunquam locum habere posse. Vt
Fig. 2. enim hoc eueniret, necesse esset, vt pyramis $\pi\phi\varrho\sigma$ non solum aequalis, sed etiam similis fieret pyramidi $\lambda\mu\nu o$; seu vt foret:

$\pi\phi =$

$$\pi\phi = \lambda\mu = dx = \surd(QQ + qq + \phi\phi)$$
$$\pi\varrho = \lambda\nu = dy = \surd(RR + rr + \varrho\varrho)$$
$$\pi\sigma = \lambda o = dz = \surd(SS + ss + \sigma\sigma)$$
$$\phi\varrho = \mu\nu = \surd(dx^2 + dy^2) = \surd((Q-R)^2 + (q-r)^2 + (\phi-\varrho)^2)$$
$$\phi\sigma = \mu o = \surd(dx^2 + dz^2) = \surd((Q-S)^2 + (q-s)^2 + (\phi-\sigma)^2)$$
$$\varrho\sigma = \nu o = \surd(dy^2 + dz^2) = \surd((R-S)^2 + (r-s)^2 + (\varrho-\sigma)^2)$$

adhibitis valoribus in §. 32. vſurpatis.

76. Ternae autem posteriores aequationes, cum prioribus coniunctae, reducentur ad has:

$$QR + qr + \phi\varrho = 0;\ QS + qs + \phi\sigma = 0 \text{ et } RS + rs + \varrho\sigma = 0$$

ternae autem priores, ſi pro litteris Q, R, S, q, r, s, ϕ, ϱ, σ valores in §. 34. aſſignati ſubſtituantur, terminique prae reliquis euaneſcentes praetermittantur, dabunt has aequationes:

$$1 = 1 + 2Ldt;\ l + M = 0$$
$$1 = 1 + 2mdt;\ \lambda + N = 0$$
$$1 = 1 + 2\nu dt;\ \mu + n = 0$$

vnde fit $L = 0$, $m = 0$, et $\nu = 0$, $M = -l$; $N = -\lambda$ et $n = -\mu$.

77. Celeritates ergo ternae cuiusque puncti λ eſſe deberent ita comparatae, vt foret

$$du = l\,dy + \lambda\,dz$$
$$dv = l\,dx + \mu\,dz$$
$$dw = \lambda dx + \mu\,dy$$

Verum ſecunda conditio motus fluidorum poſtulat, vt ſit $l = M$, $\lambda = N$ et $n = \mu$; vnde omnes coefficien-

 tes

tes l, λ et μ euanescent, celeritatesque u, v et w pro eodem tempore in omnibus fluidi punctis eaedem, seu constantes, prodibunt. Patet igitur, non nisi hoc casu fluidi motum cum motu corporis solidi conuenire posse.

78. Vt autem effectus virium, quae extrinsecus in fluidum agunt, definiri possit, primum eae vires determinari debent, quae ad motum, quem fluido inesse assumimus, efficiendum requiruntur: his enim viribus eae, quae actu fluidum sollicitant, aequiualentes statui debent; supra autem §. 56. vidimus, in puncto λ ternas vires acceleratrices requiri, quae ibi sunt relatae. Quare si fluidi elementum ibi concipiatur, cuius volumen, seu massa, sit $= dx\,dy\,dz$, vires motrices ad motum requisitae erunt

$$\text{sec. } AL = 2dxdydz(Lu + lv + \lambda w + \mathfrak{L}) = 2dxdydz\left(u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} + \frac{du}{dt}\right)$$
$$\text{sec. } AB = 2dxdydz(Mu + mv + \mu w + \mathfrak{M}) = 2dxdydz\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz} + \frac{dv}{dt}\right)$$
$$\text{sec. } AC = 2dxdydz(Nu + nv + \nu w + \mathfrak{N}) = 2dxdydz\left(u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dt}\right)$$

vnde per triplicem integrationem, vires totales, quae totam fluidi massam secundum easdem directiones sollicitare debent, colligentur.

79. Cum autem secunda conditio postulet, vt sit $udx + vdy + wdz$ differentiale completum, cuius integrale sit $= S$; ponatur posito quoque tempore variabili, vt ante: $dS = udx + vdy + wdz + \mathfrak{U}dt$, vnde ob $\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$; $\frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx}$; $\frac{du}{dt} = \frac{d\mathfrak{U}}{dx}$ etc. tres illae vires motrices euadent:

$$\text{sec. } AL = 2dxdydz\left(\frac{udu + vdv + wdw + d\mathfrak{U}}{dx}\right)$$
$$\text{sec. } AB = 2dxdydz\left(\frac{udu + vdv + wdw + d\mathfrak{U}}{dy}\right)$$
$$\text{sec. } AC = 2dxdydz\left(\frac{udu + vdv + wdw + d\mathfrak{U}}{dz}\right).$$

80. Po-

80. Ponatur nunc $uu+vv+ww+2U=T$, eritque T functio coordinatarum x, y, z; ponatur ergo posito tempore constante,

$$dT=Kdx+kdy+\kappa dz$$

eruntque tres illae vires motrices elementi $dxdydz$

sec. $AL=Kdxdydz$

sec. $AB=kdxdydz$

sec. $AC=\kappa dxdydz$

triplici ergo integratione hae formulae per totam fluidi massam sunt extendendae, vt inde vires omnibus aequiualentes earumque mediae directiones obtineantur. Verum haec discussio est altioris indaginis, cui hic non immoror.

81. Quantitas autem haec $T=uu+vv+ww+2U$, cuius in hoc calculo ratio est habenda, etiam simpliciorem formulam pro altitudine p pressionem exprimente suppeditat; est enim $p=C-z-T$: siquidem singulae fluidi particulae a sola grauitate vrgeantur Sin autem quaelibet particula λ a ternis viribus acceleratricibus sollicitetur, quae sint Q, q et Φ, secundum directiones axium AF, AB et AC respectiue agentes, et calculo, vt supra, subducto reperietur pressio:

$$p=C+\int(Qdx+qdy+\Phi dz)-T$$

vnde patet differentiale $Qdx+qdy+\Phi dz$ completum esse debere, alioquin status aequilibrii, vel saltem possibilis, non daretur. Hanc autem conditionem in vires sollicitantes Q, q et Φ competere oportere, a Cel. D^no^. *Clairaut* iam praeclare est demonstratum.

 82. En

82. Ex ergo principiis vniuersae doctrinae de motu fluidorum, quae etsi primo intuitu non admodum foecunda videantur, tamen fere omnia, quae adhuc tam in hydrostatica, quam in hydraulica sunt tradita, in se complectuntur, ita vt haec principia latissime patere sint censenda. Quod quo clarius appareat, operae pretium erit ostendere, quomodo cognita hydrostaticae et hydraulicae praecepta ex hactenus traditis principiis plane ac dilucide consequantur.

83. Consideremus igitur primo fluidum in statu quietis, ita vt sit $u=0$; $v=0$ et $w=0$, eritque pressio in quouis fluido puncto λ, ob $V=2U$,

$$p=C+\int(Qdx+qdy+\Phi dz)-2U$$

vbi, cum U sit functio ipsius temporis t, quod constans assumimus, quia pressionem ad datum tempus inuestigamus, haec quantitas U in ipsa constante C comprehendi poterit, ita vt sit:

$$p=C+\int(Qdx+qdy+\Phi dz)$$

vbi Q, q et Φ sunt vires particulam aquae λ secundum axes AL, AB et AC sollicitantes.

84. Quoniam pressio p non nisi a situ puncti λ, hoc est a coordinatis x, y et z, pendere potest, necesse est, vt $\int(Qdx+qdy+\Phi dz)$ sit earum functio determinata, quae ergo integrationem admittat. Vnde primo patet, quod modo innui, fluidum in aequilibrio subsistere non posse, nisi vires, singula fluidi elementa sollicitantes, ita fuerint comparatae, vt formula $Qdx+qdy+\Phi dz$ sit differentiale completum. Cuius ergo integrale si ponatur $=P$, erit pressio in λ, $p=C+P$;

$C+P$: Ita si sola adsit grauitas secundum directionem CA vrgens, erit $p=C-z$, vnde si pressio in vno puncto λ constet, vnde constans C colligi queat, pro eodem tempore inde pressio in omnibus omnino punctis definietur.

85. Interim tamen tempore fluente pressio in eodem loco variari poterit, id quod scilicet eueniet, si vires aquam extrinsecus vrgentes, quarum ratio nondum est habita in iis viribus, quae in singula elementa singulatim agere assumuntur, fuerint variabiles, ita tamen, vt se mutuo in aequilibrio seruent, nullumque motum producant. Quod si autem hae vires nulli mutationi sint obnoxiae, littera C denotabit quantitatem reuera constantem, neque a tempore t pendentem; eodemque in loco λ perpetuo eadem pressio $p=C+P$ reperietur.

86. In huiusmodi ergo fluidi statu permanente eius extrema figura, quae nullis viribus est exposita, determinari poterit. In hac enim extremitate, qua fluidum sibi est relictum, neque a parietibus vasis, cui forte est inclusum, continetur, necesse est, vt pressio sit nulla. Habebitur ergo haec aequatio: $P=\text{const.}$ qua figura extremae superficiei fluidi per relationem inter ternas coordinatas x, y et z, exprimetur. Atque si pro extremitate fuerit $P=E$, ob $C=-E$, in quouis alio loco λ interno erit pressio $p=P-E$. Ita si particulae fluidi a sola grauitate vrgeantur, ob $p=C-z$, pro extremitate superficiei habebitur $z=C$, qua intelligitur, extremam superficiem liberam esse horizontalem.

 87. De-

87. Deinde etiam omnia, quae adhuc de motu fluidi per tubos sunt eruta, ex his principiis facile deducuntur. Tubi autem vel angustissimi considerari solent, vel tales assumuntur, vt per quamlibet sectionem ad tubum normalem fluidum aequali motu transfluat: vnde haec regula nascitur, vt celeritas fluidi in quouis tubi loco sit eius amplitudini reciproce proportionalis. Sit igitur λ punctum quodcunque huiusmodi tubi, cuius figura per geminam aequationem inter ternas coordinatas x, y et z exprimetur, ita vt inde pro quauis abscissa x, ambae reliquae y et z definiri queant.

Tab. IV. Fig. 2.

88. Sit praeterea huius tubi amplitudo in $\lambda = rr$, in alio autem tubi loco fixo, vbi amplitudo sit $= ff$, sit tempore praesente fluidi celeritas $= \mathfrak{v}$, de hinc autem elapso tempusculo dt euadat ea $= \mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$ eritque ergo $\mathfrak{v}$ functio tempus t tantum, pariter ac $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$. Hinc ergo vera fluidi celeritas in λ erit tempore praesenti $V = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr}$. Cum nunc ex figura tubi dentur y et z per x, sit $dy = \eta dx$ et $dz = \theta dx$; vnde ternae puncti fluidi in λ celeritates erunt secundum directiones AL, AB et AC sequentes:

$$u = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 + \eta\eta + \theta\theta)}}; \; v = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{(1 + \eta\eta + \theta\theta)}}; \; w = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr} \cdot \frac{\theta}{\sqrt{(1 + \eta\eta + \theta\theta)}}$$

hincque fit $uu + vv + ww = VV = \frac{f^4 \mathfrak{v}\mathfrak{v}}{r^4}$: estque rr functio ipsius x, indeque pendentium y et z.

89. Cum nunc $udx + vdy + wdz$ debeat esse differentiale completum, cuius integrale posuimus $= S$, erit:

$$dS = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr} \cdot \frac{dx(1 + \eta\eta + \theta\theta)}{\sqrt{(1 + \eta\eta + \theta\theta)}} = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr} \cdot dx\sqrt{(1 + \eta\eta + \theta\theta)}.$$

At $dx\sqrt{(1 + \eta\eta + \theta\theta)}$ exprimit elementum ipsius tubi, hi, quod si ponamus $= ds$, erit $dS = \frac{ffuds}{rr}$: vnde cum hic tempus t constans sit assumtum, cuius functio est u; quantitates autem s et rr non a tempore t, sed tantum a figura tubi, pendeant, erit $S = u\int\frac{ffds}{rr}$.

90. Ad pressionem iam p, quae nunc in tubi puncto λ locum habet, inueniendam, considerari debet quantitas U, quae ex differentiatione quantitatis S oritur, si solum tempus t, vt variabile, tractetur, ita vt sit $U = \frac{dS}{dt}$. Cum igitur formula integralis $\int\frac{ffds}{rr}$ tempus t non inuoluat, erit vtique $\frac{dS}{dt} = U = \frac{du}{dt}\int\frac{ffds}{rr}$; sicque erit ex §. 80:

$$T = \frac{f^4uu}{r^4} + \frac{2du}{dt}\int\frac{ffds}{rr}.$$

Quare positis quibuscunque viribus sollicitantibus Q, q et Φ, erit pressio in λ:

$$p = C + \int(Qdx + qdy + \Phi dz) - \frac{f^4uu}{r^4} - \frac{2du}{dt}\int\frac{ffds}{rr}.$$

quae est ea ipsa formula, quae vulgo pro motu fluidi per tubos erui solet; atque adeo multo latius patens, quia vires quaecunque fluidum sollicitantes hic sunt assumtae, dum vulgo haec formula ad solam grauitatem adstringitur. Interim hic probe est recordandum, ternas vires Q, q, et Φ necessario ita comparatas esse oportere, vt formula: $Qdx + qdy + \Phi dz$ sit differentiale completum, seu integrationem admittat.

DE

DE
MOTV ET REACTIONE AQVAE
PER TVBOS MOBILES TRANSFLVENTIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Tab. V. Fig. 1. Considero hic tubum figurae cuiuscunque ARF, qui circa axem fixum AC motu quocunque in gyrum agatur, eumque aqua plenum, quae ex eius orificio F erumpat. Quaeritur itaque primum motus, quo aqua sit effluxura, tum vero vis reactionis, quam tubus ab aqua transfluente quouis momento sustineat.

2. Binae hae quaestiones ita inter se sunt complicatae, vt altera sine altera resolui nequeat: si enim vim reactionis aquae in tubum definire velimus, motum aquae tanquam cognitum spectari oportet; motus autem determinatio reactionis cognitionem requirit.

3. Primum ergo motum aquae pro cognito assumam; atque vt ex eo cum motu tubi coniuncto vis reactionis determinari queat, duplices vires contemplari oportet: alteras, quibus aqua in tubo actu sollicitatur, vel ob grauitatem, vel ob alias impulsiones, quibus extrinsecus ad motum vrgetur: alteras vero, quae ad motus, quem inesse assumimus, conseruationem, secundum principia mechanica, requiruntur.

4. Si

4. Si enim vires, quibus aqua actu ad motum sollicitatur, littera P complectamur, vires autem ad eius conseruationem requisitas littera Q: vires autem reactionis littera R indicentur: quoniam tubus pari vi in aquam reagit; aqua hinc sollicitabitur vi $= -R$, sicque omnino ad motum, tam extrinsecus, quam ab ipso tubo impelletur vi $= P - R$.

5. Haec ergo vis $P - R$ aequalis sit necesse est ipsi vi Q, quae ad motus insiti conseruationem per principia mechanica requiritur. Vnde cum habeamus $P - R = Q$, obtinebimus $R = P - Q$, sicque vis reactionis aequabitur viribus aquam actu extrinsecus impellentibus, demtis inde viribus ad motus conseruationem requisitis.

6. Principio hoc, cui omnis reactionis vis innititur, stabilito, inuestigationem ordiri conueniet ab indagatione virium Q, quae ad conseruationem eius motus, quem in aqua inesse assumimus, secundum principia mechanica requiruntur: inde scilicet, quod omnis motus mutatio certam virium actionem exigit.

7. Quod igitur primo ad motum tubi attinet, ponamus, elapso iam a motus initio tempore $= t$, celeritatem orificii F, qua circa axem AC gyratur, debitam esse altitudini $= u$, ita vt u sit functio quaecunque temporis iam elapsi t: vnde si distantia orificii ab axe CF ponatur $= b$, exprimet $\frac{\sqrt{u}}{b}$ celeritatem gyratoriam tubi.

8. Deinde sit v altitudo debita celeritati, qua aqua nunc quidem ex orificio F effluit. Hic autem $\sqrt{v}$ non veram aquae celeritatem designat, sed eius

celeritatem relatiuam respectu tubi, qui ipse moueri assumitur; motus enim verus componetur ex motu hoc relatiuo et ipso tubi motu. Erit autem v etiam functio temporis t.

9. Si igitur amplitudo orificii F ponatur $= ff$, quoniam $\surd v$ est celeritas, qua aqua ex orificio effluit, temporis elemento dt aqua effluens ratione tubi conficiet spatiolum $= dt\surd v$; ideoque copia aquae hoc tempusculo ex tubo exeuntis erit $= ff\,dt\surd v$.

10. Consideretur nunc tubi punctum quodcunque R, in quo sit amplitudo tubi $= zz$, quae ergo non a tempore t, sed a loco puncti R in tubo pendebit: atque nunc quidem, vbi aqua ex orificio $F = ff$ effluere ponitur celeritate $= \surd v$, celeritas aquae in R, qua in tubo secundum Rr progreditur, erit $= \frac{ff\surd v}{zz}$; quae cum motu gyratorio puncti R coniuncta, dabit veram celeritatem aquae in puncto R haerentis.

11. Concipiatur planum ad axem tubi AC normale per orificium F transiens, FCB, ad quod ex puncto R demittatur perpendicularis, seu axi motus AC parallela RQ, sitque curua CQF proiectio tubi ARF in hoc plano facta, cuius corda CQ ponatur $= y$, quae cum exprimat distantiam puncti R ab axe AC, erit huius puncti celeritas gyratoria circa axem $= \frac{y\surd u}{b}$.

12. Cum nunc elapso tempore $= t$, tubus situm ARF, eiusque proiectio situm CQF teneat, ponamus initio huius temporis proiectionem in situ CMB fuisse, indeque tempore t per angulum $BCF = \Phi$ circa axem AC esse promotam; orificium ergo F tempusculo dt

proue

prouehetur per spatiolum $bd\Phi$ ob $CB = CF = b$; eritque igitur $bd\Phi = dt\sqrt{u}$: ita vt etiam angulus Φ sit functio ipsius temporis t.

13. Referamus curuam CMB ad rectam CB tanquam axem, sitque M punctum ipsi Q analogum, ideoque $CM = CQ = y$; ac ponatur angulus MCL $= QCP = \theta$, qui erit functio ipsius y, non a tempore t pendens; vnde ducta ML ad CB normali, habebitur $CL = y\,\text{cos}.\,\theta$, et $LM = y\,\text{sin}.\,\theta$

14. Initio ergo temporis t situs puncti R, quod tum puncto M imminebat, his formulis definitur, vnde si eius altitudo supra planum BCF, scilicet perpendiculum RQ, ponatur $= r$, quod perpetuo idem manet, etiam r tanquam functio ipsius y spectari debet, sicque ex natura functionum θ et r figura tubi determinatur.

15. Cum autem elapso tempore t, punctum M ob motum gyratorium translatum sit in Q, erit angulus $MCQ = BCF = \Phi$, ideoque angulus $BCQ = \theta + \Phi$: vnde si ex Q ad rectam fixam CB ducatur penpendicularis QX, erit $CX = y\,\text{cos}\,(\theta + \Phi)$ et $XQ = y\,\text{sin}.\,(\theta + \Phi)$.

16. Situm ergo puncti R ternis coordinatis, rectis fixis CB, CD et CA inter se normalibus, parallelis definitum habemus, quae sint: $CX = y\,\text{cos}.\,(\theta + \Phi) = X$; $XQ = y\,\text{sin}.\,(\theta + \Phi) = Y$ et $QR = r$, quarum illae duae tantum ab angulo Φ cum tempore variabili pendent; dum postrema a sola variabili y pendet.

17. Progrediatur aquae particula nunc in R haerens tempusculo dt per spatiolum Rr in tubo, dum

tubus ipse quoque motu angulari circa axem AC gyratur: situs ergo sequens huius aquae particulae superioribus formulis indicabitur, si tam y, quam Φ, pro variabilibus assumantur, scilicet $X + dX$; $Y + dY$ et $r + dr$ erunt coordinatae pro hoc situ.

18. Denotet m massam particulae nunc in R haerentis, et cum eius motus a variabilitate coordinatarum X, Y et r pendeat, si tam y quam tempus t pro variabili capiatur; tribus opus erit viribus ad motum huius particulae moderandum, quae secundum ternos axes CB, CD et CA erunt directae.

19. Ac secundum principia mechanica quidem, si elementum temporis dt capiatur constans, tres istae vires ita se habebunt.

I. Vis secundum directionem CA agens $= \frac{2 m d d r}{d t^2}$

II. Vis secundum directionem CB agens $= \frac{2 m d d X}{d t^2}$

III. Vis secundum directionem CD agens $= \frac{2 m d d Y}{d t^2}$

20. Motus etiam verus particulae istius aquae secundum easdem directiones resolutus, producet triplicem celeritatem:

I. Celeritatem secundum directionem CA $= \frac{dr}{dt}$

II. Celeritatem secundum directionem CB $= \frac{dX}{dt}$

III. Celeritatem secundum directionem CD $= \frac{dY}{dt}$

21. Ponamus autem elementum tubi $Rr = ds$, quod est spatiolum a particula aquae m tempusculo in tubo percursum; quia ergo celeritas huius particulae in tubo est $= \frac{ff \sqrt{v}}{zz}$, erit $ds = \frac{ff dt \sqrt{v}}{zz}$, seu $zz ds = ff dt \sqrt{v}$. Est vero etiam, vti vidimus, $b d\Phi = dt \sqrt{u}$.

At

At differentiale dr a figura tubi pendet, ideoque per relationem inter y, θ et r definitur.

22. Cum igitur sit $X = y\,\text{cos.}(\theta + \Phi)$ et $Y = y\,\text{sin.}(\theta + \Phi)$, erit differentiando:

$$dX = dy\,\text{cos.}(\theta + \Phi) - y(d\theta + d\Phi)\,\text{sin.}(\theta + \Phi)$$
$$dY = dy\,\text{sin.}(\theta + \Phi) + y(d\theta + d\Phi)\,\text{cos.}(\theta + \Phi)$$

ac denuo differentiando:

$$ddX = ddy\,\text{cos.}(\theta + \Phi) - 2dy(d\theta + d\Phi)\,\text{sin.}(\theta + \Phi) - y(d\theta + d\Phi)^2\,\text{cos.}(\theta + \Phi) - y(dd\theta + dd\Phi)\,\text{sin.}(\theta + \Phi)$$
$$ddY = ddy\,\text{sin.}(\theta + \Phi) + 2dy(d\theta + d\Phi)\,\text{cos.}(d\theta + \Phi) - y(d\theta + d\Phi)^2\,\text{sin.}(\theta + \Phi) + y(dd\theta + dd\Phi)\,\text{cos.}(\theta + \Phi)$$

23. Quodsi ergo hi valores in formulis superioribus substituantur, habebuntur tam celeritates verae particulae aquae m, quam vires ad eius motum secundum ternas directiones CA, CB, et CD requisitae. Quoniam autem hic motus rotatorius spectatur, non tam istas vires ipsas, quam earum momenta respectu axis CA sunt quaerenda, vt inde vis aquae, qua motus tubi gyratorius afficitur, definiatur.

24. Vis igitur secundum directionem CA nullo modo rotationem afficit, ex vi secundum CB autem puncto R applicata nascitur momentum $= \frac{2m\,ddX}{dt^2} \cdot y\,\text{sin}(\theta + \Phi)$, at ex vi secundum CD momentum $= \frac{2m\,ddY}{dt^2} \cdot y\,\text{cos.}(\theta + \Phi)$; quorum illud in plagam FD, hoc vero in plagam oppositam BF tendit, sicque cum motus directione conueniet.

25. Momentum ergo ex his viribus coniunctim ortum, et in plagam BF tendens, erit $= \frac{2my}{dt^2}(ddY\,\text{cos.}$

 $(\theta + \Phi)$

$(\theta + \Phi) - ddX \sin.(\theta + \Phi)$, quod substitutis valoribus superioribus abit in hanc formam:

$$\frac{2my}{dt^2}(2dy(d\theta + d\Phi) + y(dd\theta + dd\Phi))$$

siue $\frac{2m}{dt^2} d.yy(d\theta + d\Phi) = \frac{2m}{dt} d.\frac{yy(d\theta + d\Phi)}{dt}$.

in qua postrema formula nullius differentialis pro constanti assumti ratio habetur.

26. Ponamus iam particulam aquae m totum tubi elementum Rr implere, cuius capacitas est $= zzds$; quo valore pro m substituto, ad elementi Rr motum requiritur vis, cuius momentum in plagam BF tendens fit $= \frac{2zzds}{dt} d.\frac{yy(d\theta + d\Phi)}{dt}$; cum autem sit $zzds = ffdt\sqrt{v}$ et $bd\Phi = dt\sqrt{u}$, erit hoc momentum:

$2ff\sqrt{v}.d.(\frac{ffyyd\theta}{zzds}\sqrt{v} + \frac{yy\sqrt{u}}{b})$ et differentiatione absoluta

$$ffdv.\frac{ffyyd\theta}{zzds} + 2ffv.d.\frac{ffyyd\theta}{zzds} + \frac{ffyydu\sqrt{v}}{b\sqrt{u}} + \frac{4ffydy\sqrt{vu}}{b}.$$

27. Hinc integrando colligi poterit, quantum momentum virium ad motum aquae in tubi portione AR contentae requiratur, quia autem haec integratio praesens temporis punctum spectat, tempus t eiusque functiones tanquam quantitates constantes sunt considerandae, solaeque eae, quae a variabilitate puncti R in tubo pendent, variabilium locum obtinebunt.

28. Quantitates ergo constantes in hac integratione primum erunt v et u, et quia functiones sunt temporis t, eodem quoque pertinebunt earum differentiales $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{du}{dt}$; quodsi ergo hoc modo has quantitates pro constantibus habendas a variabilibus separemus, prodibit momentum illud ita expressum:

$$\frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}.yyd\theta + 2ffv.d.\frac{ffyyd\theta}{zzds} + \frac{du}{dt\sqrt{u}}.\frac{yyzzds}{b} + \frac{4\sqrt{vu}}{b}.ffydy.$$

29. In-

29. Integratione ergo instituta, aqua AR vires requirit ad suum motum, quarum momentum in plagam BF tendens erit:

$$\text{Const.} + \frac{ffdv}{dt\sqrt{u}} \int yyd\theta + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} \int yyzzds + 2f^4v.\frac{yyd\theta}{zzds} + \frac{2\sqrt{vu}}{b}.ffyy$$

vbi constans per integrationem ingressa ex termino aquae altero definiri debet, ita vt, si punctum R in tubo ibi capiatur, vbi aqua incipit, hoc momentum euanescat.

30. Extendatur hoc integrale per totum tubum, fiatque pro toto tubo: $\int yyd\theta = M$, et $\int yyzzds = N$; et quia tum fit $y = b$; $zz = ff$; erit momentum pro omni aqua in tubo contenta requisitum:

$$\text{Const.} + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}.M + \frac{du}{bdt\sqrt{u}}.N + 2ffv.\frac{bbd\theta}{ds} + 2bff\sqrt{vu}$$

vbi valor fractionis $\frac{bd\theta}{ds}$ ex directione orificii F, secundum quam aqua erumpit, respectu arcus BF definiri debet. Exprimit autem $\frac{bd\theta}{ds}$ cosinum anguli, quem vena aquae Ffe tubo exiens cum directione motus puncti F constituit.

31. In genere enim fractio $\frac{yd\theta}{ds}$ exprimit cosinum anguli, quem directio motus aquae in tubi puncto R, seu elemento Rr, cum directione motus ipsius puncti R, quo ob motum gyratorium mouetur, facit. Quare si hic angulus rRS, denotante RS directionem motus puncti R, ponatur $= \omega$, qui in orificio F abeat in α, erit $\frac{yd\theta}{ds} = \text{cos}.\omega$, et pro orificio $\frac{bd\theta}{ds} = \text{cos}.\alpha$.

32. Hinc pro aqua, portionem tubi AR occupante, habebitur momentum virium, in directionem BF, seu RS, tendens, hoc:

$$\text{Const.} + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} \int yds\,\text{cos}.\omega + \frac{du}{bdt\sqrt{u}}.\int yyzzds + 2f^4v.\frac{y\,\text{cos}.\omega}{zz} + \frac{2\sqrt{vu}}{b}.ffyy$$

ac

ac posito pro omni aqua in tubo contenta:

$$\int y\,ds\,\mathrm{cos}.\omega = M \text{ et } \int yyzz\,ds = N$$

erit momentum virium omni aquae conueniens:

$$\mathrm{Const.} + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}.M + \frac{du}{bdt\sqrt{u}}.N + 2bff(v\,\mathrm{cos}.\alpha + \sqrt{vu})$$

33. Si suprema aqua in tubo haereat in E, sitque huius puncti ab axe rotationis AC distantia $= c$, integralia $\int y\,ds\,\mathrm{cos}.\omega$ et $\int yyzz\,ds$ ita capi debent, vt euanescant puncto R in E translato. Ac si amplitudo tubi in E sit $= ee$; ibique angulus ω abeat in ε, fiet constans illa $= -2f^4v.\frac{c\,\mathrm{cos}.\varepsilon}{ee} - \frac{2\sqrt{vu}}{b}.ccff = -2cff(\frac{ffv\,\mathrm{cos}.\varepsilon}{ee} + \frac{c\sqrt{vu}}{b})$ vnde momentum virium, toti aquae conueniens, erit

$$\frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}M + \frac{du}{bdt\sqrt{u}}.N + 2bff(v\,\mathrm{cos}.\alpha + \sqrt{vu}) - 2cff(\frac{ffv\,\mathrm{cos}.\varepsilon}{ee} + \frac{c\sqrt{vu}}{b}).$$

34. Cum igitur hoc momentum ex illis viribus, quas supra sub littera Q sumus complexi, oriatur, sit S momentum ex viribus aquam actu extrinsecus sollicitantibus P natum, et in eandem plagam BF vergens, atque ex reactione aquae resultabit virium momentum, ad motum tubi rotatorium accelerandum tendens,

$$S - \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}M - \frac{du}{bdt\sqrt{u}}.N - 2bff(v\,\mathrm{cos}.\alpha + \sqrt{vu}) + 2cff(\frac{ffv\,\mathrm{cos}.\varepsilon}{ee} + \frac{c\sqrt{vu}}{b})$$

in quo effectus reactionis consumitur.

35. Videmus ergo effectum reactionis non solum ab vtraque celeritate ipsa $\sqrt{v}$ et $\sqrt{u}$ pendere, sed etiam ab vtriusque variabilitate, siue acceleratione, siue retardatione. Tum vero litterae M et N figuram et amplitudinem totius tubi inuoluunt, reliqui termini autem tantum a summitate aquae E et orificio F pendent, vnde si vterque motus fuerit vniformis figura tubi

tubi nihil confert ad vim reactionis, tum enim, ob $dv = o$ et $du = o$, litterae M et N ex calculo euanescunt.

36. Vi ergo reactionis aquae in tubum definita, progrediamur ad ipsum aquae motum per tubum inuestigandum: ac primo quidem vires, quibus quamuis aquae particulam in tubo ob motum, quem inesse assumimus, sollicitari debere inuenimus, accuratius euolui opus est. Posita autem particulae aquae in R haerentis massa $= m$, ternae vires, quibus sollicitatur, sunt: I. Secundum $CB = \frac{2mddX}{dt^2}$; II sec. $CD = \frac{2mddY}{dt^2}$; III. sec. $CA = \frac{2mddr}{dt^2}$. Tab. V. Fig. 2.

37. Binas vires priores resoluamus secundum directiones QS et QT, quarum illa in directum iacet cum CQ, haec vero ad QS est normalis. Iam, ob angulum $BCQ = \theta + \Phi$, erit vis $QS = \frac{2m}{dt^2}(ddX \operatorname{cos}. (\theta + \Phi) + ddY \operatorname{sin}. (\theta + \Phi))$ et vis $QT = \frac{2m}{dt^2}(ddY \operatorname{cos}. \theta + \Phi) - ddX \operatorname{sin}. (\theta + \Phi))$; valoribus ergo pro ddX et ddY inuentis substitutis, hae vires prodibunt:

I. Vis $QS = \frac{2m}{dt^2}(ddy - y(d\theta + d\Phi)^2)$

II. Vis $QT = \frac{2m}{dt^2}(2dy(d\theta + d\Phi) + y(dd\theta + dd\Phi))$.

38. Particula igitur aquae m in R iam cum ab his duabus viribus, tum a tertia secundum $CA = \frac{2mddr}{dt^2}$ sollicitari debet: quas vires porro secundum directionem tubi Rr, aliasque duas directiones ad tubum normales resolui conuenit. Ducta autem Cq, erit $tq = dy$ et $Qt = -yd\theta$, vnde fit $\operatorname{sin}. SQq = \frac{-yd\theta}{Qq}$ et $\operatorname{cos}. SQq = \frac{dy}{Qq}$. Ducatur recta QN in plano BCF ad elementum Qq normalis; erit

Vis $Qq =$ vis $QS.\cos.SQq -$ vis $QT.\sin.SQq$
Vis $QN =$ vis $QS.\sin.SQq +$ vis $QT\cos.SQq$

39. Vires ergo secundum has duas directiones Qq et QN ex viribus superioribus QS et QT ortae erunt:

$$\text{I. Vis } Qq = \frac{2m}{Qq.dt^2}(dyddy - ydy(d\theta + d\Phi)^2 + 2ydyd\theta(d\theta + d\Phi) + yyd\theta(dd\theta + dd\Phi))$$

$$\text{II. Vis } QN = \frac{2m}{Qq.dt^2}(-yd\theta ddy + yyd\theta(d\theta + d\Phi)^2 + 2dy^2(d\theta + d\Phi) + ydy(dd\theta + dd\Phi))$$

ac prior quidem abit in hanc:

$$\text{I. Vis } Qq = \frac{2m}{Qq.dt^2}(dyddy + ydy(d\theta^2 - d\Phi^2) + yyd\theta(dd\theta + dd\Phi))$$

40. Cum vis posterior QN iam sit ad directionem tubi quoque Rr normalis, ea relinquatur; ac ducta Rs elemento proiectionis Qq parallela erit $rs = dr$, et particula aquae in R vlterius vrgetur a viribus Rs $=$ vi Qq et $sr = \frac{2mddr}{dt^2}$. Hinc ducta rv ad Rr in plano Rq normali obtinebitur:

$$\text{Vis } Rr = \frac{2m}{dsdt^2}(dyddy + ydy(d\theta^2 - d\Phi^2) + yyd\theta(dd\theta + dd\Phi)) + \frac{2mdrddr}{dsdt^2}$$

$$\text{Vis } rv = \frac{2mdr}{Qq.dsdt^2}(dyddy + ydy(d\theta^2 - d\Phi^2) + yyd\theta(dd\theta + dd\Phi)) - \frac{2mQq.ddr}{dsdt^2}.$$

41. Est autem $Qq = \sqrt{(dy^2 + yyd\theta^2)}$ et $Rr = ds = \sqrt{(dy^2 + yyd\theta^2 + dr^2)}$;
vnde fit $dr^2 = ds^2 - dy^2 - yyd\theta^2$ et

$$drddr = dsdds - dyddy - ydyd\theta^2 - yyd\theta dd\theta$$

quo valore substituto, habebitur vis secundum directionem tubi:

$$\text{Vis } Rr = \frac{2m}{dsdt^2}(dsdds - ydyd\Phi^2 + yyd\theta dd\Phi)$$

quae,

quae, vt a consideratione differentialis constantis dt liberetur, in hanc formam transit:

$$\text{Vis } Rr = \frac{2m}{dt}\left(d.\frac{ds}{dt} - \frac{ydyd\Phi^2}{dsdt} + \frac{yyd\theta}{ds} d.\frac{d\Phi}{dt}\right)$$

42. Cum vis per massam, in quam agit, diuisa praebeat accelerationem, erit acceleratio aquae in R secundum directionem tubi tempusculo dt producta $= \frac{2}{dt} d.\frac{ds}{dt} - \frac{2ydyd\Phi^2}{dsdt^2} + \frac{2yyd\theta}{dsdt} d.\frac{d\Phi}{dt}$. Haec scilicet acceleratio requiritur ad motum aquae eum producendum, quem ei inesse assumimus, vna cum motu ipsius tubi.

43. Haec igitur acceleratio aequalis esse debet ei, quae aquae in R versanti actu inducitur; ac primo quidem haec aqua sollicitatur a pressione aquae. Ponamus ergo, aquam in R in pari statu compressionis versari, ac si ipsi incumberet columna aquea altitudinis $= p$. in r igitur status compressionis exprimitur altitudine $p + dp$, vnde acceleratio orietur $= \frac{-dp}{ds}$.

44. Praeterea autem aqua in R haerens a propria grauitate vrgetur. Quodsi ergo axem CA horizonti verticaliter insistentem assumamus, a grauitate orietur acceleratio secundum directionem tubi Rr, quae est $= \frac{-dr}{ds}$; vtraque scilicet haec acceleratio absoluitur tempusculo dt, quo elementum $Rr = ds$ confici assumimus.

45. Cum igitur acceleratio ante inuenta aequalis esse debeat accelerationi, quae aquae in R actu inducitur, et quae est $\frac{-dp}{ds} - \frac{dr}{ds}$, vtrinque per ds multiplicando habebimus hanc aequationem:

$$-dp-dr=\frac{2ds}{dt}d\,\frac{ds}{dt}-\frac{2ydyd\Phi^2}{dt^2}+\frac{2yyd\Phi}{dt}d.\frac{d\Phi}{dt};$$

ſiue

$$-dp=dr+d.\frac{ds^2}{dt^2}-\frac{2ydyd\Phi^2}{dt^2}+\frac{2yyd\Phi}{dt}d.\frac{d\Phi}{dt}.$$

46. Eſt autem $\frac{ds}{dt}=\frac{ff\sqrt{v}}{zz}$ et $\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\sqrt{u}}{b}$, vnde, ob $dt=\frac{zzds}{ff\sqrt{v}}$, ſequentem obtinebimus aequationem, qua ſtatus compreſſionis aquae in ſingulis tubi punctis determinatur:

$$-dp=dr+d\,\frac{f^4v}{z^4}-\frac{2uydy}{bb}+\frac{2ffyyd\theta\sqrt{v}}{zzds}d.\frac{\sqrt{u}}{b};$$

ſiue:

$$dp=-dr-d.\frac{f^4v}{z^4}+\frac{2uydy}{bb}-\frac{ffyyd\theta du\sqrt{v}}{bzzds\sqrt{u}}$$

atque differentiali ipſius $\frac{f^4v}{z^4}$ euoluto, erit:

$$dp=-dr-\frac{f^4dv}{z^4}+\frac{4f^4vdz}{z^5}+\frac{2uydy}{bb}-\frac{ffyyd\theta du\sqrt{v}}{bzzds\sqrt{u}}.$$

47. Quodſi iam hinc ſtatum preſſionis, qui nunc in tubo locum habet, determinare velimus, tempus t et quantitates inde pendentes v, u, vna cum $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{du}{dt}$ pro conſtantibus habere debemus: vnde, quantitatibus variabilibus a conſtantibus ſeparatis, habebimus:

$$dp=-dr-\frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}\cdot\frac{ds}{zz}+4f^4v\cdot\frac{dz}{z^5}+\frac{2u}{bb}\cdot ydy-\frac{du}{bdt\sqrt{u}}\cdot yyd\theta.$$

48. Haec iam aequatio integrata dabit ſtatum preſſionis aquae in loco tubi R, qui nunc locum habet:

$$p=C-r-\frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}\int\frac{ds}{zz}-\frac{f^4v}{z^4}+\frac{uyy}{bb}-\frac{du}{bdt\sqrt{u}}\int yyd\theta$$

Tab. V. Fig. 1. Ac ſi, vt ante, w denotet angulum, quem directio motus aquae in tubo R, cum directione motus ipſius puncti R facit, ſeu angulum r R S, ob $yd\theta=ds\,\text{coſ.}\,w$, habebimus:

$$p=C-r-\frac{f^4v}{z^4}+\frac{uyy}{bb}-\frac{ffdv}{dt\sqrt{u}}\cdot\int\frac{ds}{zz}-\frac{du}{bdt\sqrt{u}}\int yds\,\text{coſ.}\,w.$$

49. Cum, integratione per totum tubum, qua aqua eſt repletus, peracta, iam ſupra poſuerimus $\int yds\,\text{coſ.}\,w=M$,

ſit

fit quoque nunc $\int \frac{ds}{zz} = L$, et quia puncto R in F translato fit $r = 0$ $zz = ff$ et $y = b$, erit status pressionis in ipso orificio $= C - v + u - \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} . L - \frac{du}{bdt\sqrt{u}} . M$; qui cum debeat esse nullus, habebimus valorem constantis

$$C = v - u + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} . L + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} . M$$

50. Hinc ergo status compressionis in loco quocunque tubi R erit

$$p = v(1 - \frac{f^4}{z^4}) - u(1 - \frac{yy}{bb}) - r + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}(L - \int \frac{ds}{zz}) + \frac{du}{bdt\sqrt{u}}(M - \int yds \operatorname{cof.} w)$$

Hinc ergo in suprema aquae superficie E, vbi fit $y = c$; $zz = ee$ et integralia $\int \frac{ds}{zz} = 0$; $\int yds \operatorname{cof.} w = 0$; si elevatio puncti E supra basin horizontalem BCF seu supra orificium F ponatur $= a$, erit status pressionis in summitate aquae E $=$

$$v(1 - \frac{f^4}{e^4}) - u(1 - \frac{ee}{bb}) - a + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} . L + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} . M$$

51. Si igitur aqua in E a nulla vi vrgeatur, pressio ibi pariter in nihilum abire debet, vnde habebitur haec aequatio:

$$v(1 - \frac{f^4}{e^4}) - u(1 - \frac{ee}{bb}) - a + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} . L + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} . M = 0$$

ex qua ipse aquae motus in tubo ad quoduis tempus definiri poterit; si quidem motus gyratorius tubi fuerit cognitus. Cum enim L et M sint quantitates constantes, duae tantum variabiles insunt in hac aequatione v et t, quia u est functio ipsius t.

52. Assumimus autem hic tubum constanter ad idem punctum E vsque aqua repletum conseruari, quod continuo nouam aquam affundendo fieri concipiendum est. Verum, vt calculus subsistere possit, necesse est, vt

aqua affusa perpetuo eadem celeritate accedat, qua aqua in E quouis momento iam actu mouetur.

53. Ponamus ipsum tubum motu vniformi circa axem verticalem CA in gyrum agi, ita vt u sit quantitas constans, ac plerumque mox aqua e foramine F motu vniformi erumpet. Quod igitur cum euenit, habebitur haec aequatio:

$$v = \frac{a + u\left(1 - \frac{cc}{bb}\right)}{1 - \frac{f^4}{e^4}}$$

ex qua, quanta celeritate tum aqua e tubo sit eruptura, patet.

54. Hoc autem aquae statu, cum aqua a nullis aliis viribus praeter grauitatem extrinsecus sollicitetur, ex grauitate autem nullum momentum, respectu axis CA oriatur, erit $S = 0$, et momentum, ex reactione aquae, pro tubo in plagam BF conuertendo, natum, erit ob $dv = 0$ et $du = 0$ ex §. 54.

$$-2bff(v\cos.\alpha + \sqrt{vu}) + 2cff\left(\frac{ffv\cos.\varepsilon}{ee} + \frac{c\sqrt{vu}}{b}\right)$$

55. At hoc casu suprema aquae superficies in E horizontalis erit, eiusque prima motus directio verticalis, vnde ε fit angulus rectus; et designante α angulum, quem vena aquae erumpens Ff cum directione motus ipsius orificii F constituit, erit istud momentum reactionis

$$-2bff(v\cos.\alpha + \sqrt{vu}) + \frac{2ccff\sqrt{vu}}{b} = 2bff\left(\left(\frac{cc}{bb} - 1\right)\sqrt{vu} - v\cos\alpha\right)$$

56. Hoc ergo momentum ad tubum in plagam BF circumagendum erit fortissimum, si angulus α fiat $180°$, seu si vena aquae erumpentis Ff directe retror-

sum

ſum vergat ſecundum tangentem circuli FB: hoc itaque caſu ob coſ. $\alpha = -1$, hoc momentum erit $= 2bff(v + (\frac{cc}{bb} - 1)\sqrt{vu})$: eſtque vti vidimus

$$v = \frac{a + u(1 - \frac{cc}{bb})}{1 - \frac{f^4}{e^4}}$$

57. Notandum autem eſt, eſſe debere $ff < ee$, ſeu orificium tubi in F minus eius amplitudine ſuprema in E; alioquin enim motus aquae effluentis nunquam ad vniformitatem redigeretur, ſed motu continuo accelerato exiret, ſi quidem, vti aſſumimus, iugiter ſupra in E ſufficiens aquae copia, et quidem motu conuenienti, affundatur.

58. Sit igitur $ff < ee$, et ponatur $1 - \frac{f^4}{e^4} = \mu$ atque $1 - \frac{cc}{bb} = \nu$, ita vt ſit μ numerus vnitate minor, eritque $v = \frac{a + \nu u}{\mu}$, et momentum ex reactione aquae natum

$$= 2bff\left(\frac{a + \nu u}{\mu} - \nu\sqrt{\frac{u(a + \nu u)}{\mu}}\right)$$

Quodſi ergo ſummitas aquae E in ipſo axe AC reperiatur, vt ſit $c = 0$, erit $\nu = 1$, ac ſi amplitudo in E multis vicibus maior ſit, quam amplitudo foraminis ff, erit ſatis prope $\mu = 1$.

59. Quoniam aqua in E ſubſidit in tubo celeritate $= \frac{ff\sqrt{v}}{ee}$, ſimulque cum tubo circa axem AC in gyrum agitur celeritate $= \frac{c\sqrt{u}}{b}$; eius vera celeritas debita erit altitudini $= \frac{f^4 v}{e^4} + \frac{ccu}{bb} = (1 - \mu)v + (1 - \nu)u$ hoc eſt, pro v ſubſtituto valore $\frac{a + \nu u}{\mu}$, altitudini $= \frac{(1 - \mu)a}{\mu} + \frac{(\mu + \nu - 2\mu\nu)u}{\mu}$. Neceſſe ergo eſt, vt aqua in

in tubum continuo infundenda ex tanta altitudine ſit delapſa.

60. Si g ſit altitudo, ex qua graue vno minuto ſecundo delabitur, erit quantitas aquae, quae ſingulis minutis ſecundis per orificium F effluit, $= 2 ff \sqrt{g v} = 2 ff \sqrt{\frac{g(a+\nu u)}{\mu}}$. Quae quantitas ſi dicatur $= D$, erit $2 ff = \frac{D \sqrt{\mu}}{\sqrt{g(a+\nu u)}}$; ideoque momentum reactionis prodibit:

$$= \frac{D b}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{\frac{a+\nu u}{\mu}} - \nu \sqrt{u} \right).$$

61. Si ponamus tubum EF motu ſuo gyratorio abſoluere circa axem CA, m reuolutiones ſingulis minutis ſecundis, quia punctum F vno minuto ſecundo conficit ſpatium $= 2 \sqrt{g u}$, circulique ab eo deſcripti peripheria eſt $2 \pi b$, erit $m = \frac{\sqrt{g u}}{\pi b}$; ideoque $m b = \frac{\sqrt{g u}}{\pi}$, quo valore loco b ſubſtituto, erit momentum ex reactione aquae ortum:

$$\frac{D}{\pi m} \cdot \left(\sqrt{\frac{u(a+\nu u)}{\mu}} - \nu u \right)$$

62. Hoc ergo momentum valebit reſiſtentiam quandam, quae motui tubi reluctatur, ſuperare. Ponamus ergo, momentum huius reſiſtentiae eſſe $= F k$, eamque ita cum tubo eſſe connexam, vt ſingulis minutis ſecundis circa ſuum peculiarem axem conficiat n reuolutiones, erit $F k$ per n multiplicatum aequale momento reactionis aquae per numerum m multiplicato: ſicque habebitur

$$n F k = \frac{D}{\pi} \left(\sqrt{\frac{u(a+\nu u)}{\mu}} - \nu u \right) \text{ ſiue}$$

$$2 \pi n F k = 2 D \left(\sqrt{\frac{u(a+\nu u)}{\mu}} - \nu u \right)$$

63. Quem-

63. Quemadmodum ex copia aquae ſingulis minutis ſecundis affluentis D, quantitas orificii F ita determinatur, vt ſit:

$ff = \frac{D\sqrt{\mu}}{2\sqrt{g(a+\nu u)}}$; ita ob $\frac{f^4}{e^4} = 1 - \mu$, erit $ee = \frac{D\sqrt{\mu}}{2\sqrt{(1-\mu)g(a+\nu u)}}$
Deinde quia eſt $b = \frac{\sqrt{gu}}{\pi m}$, et $c = b\sqrt{(1-\nu)}$, erit $c = \frac{\sqrt{(1-\nu)gu}}{\pi m}$.

64. Cum deinde aqua, quae ſupra iugiter in tubum affunditur, delapſa eſſe debeat ex altitudine $= \frac{a}{\mu} - a + (1-2\nu)u + \frac{\nu u}{\mu}$; ſuprema aquae ſuperficies, vnde aqua in tubum affluit, ſupra orificium F eleuata erit ad altitudinem $= \frac{a}{\mu} + (1-2\nu)u + \frac{\nu u}{\mu}$: quae altitudo ſi dicatur $= b$ erit $\frac{a}{\mu} = b - (1-2\nu)u - \frac{\nu u}{\mu}$, atque b exprimit lapſum totum aquae, quae ad hoc negotium adhiberi poteſt.

65. Introducta igitur hac tota lapſus altitudine b, habebimus inter reſiſtentiam Fk et reactionem aquae hanc aequationem:

$$2\pi n F k = 2D(\sqrt{u(b-(1-2\nu)u)} - \nu u);$$

vbi $2\pi n F k$ deſignat effectum totum, qui a vi reactionis aquae produci poteſt.

66. Patet ergo, hunc effectum a numero ν ita pendere, vt in certo caſu is fiat maximus, id quod eueniet, ſi capiatur $\nu = 1 - \frac{b}{2u}$, vnde fit $b - (1-2\nu)u = a$; atque maximus effectus prodit:

$$2\pi n F k = 2D(1-\nu)u = Db,$$

ita vt maximus effectus ipſi producto Db ſit aequalis, quod ſcilicet oritur, ſi diſpendium aquae D per totam altitudinem b multiplicetur.

tem inferiorem plures habet tubulos F, F, F, e quibus aqua emittitur perpendiculariter ad respectiua plana verticalia ACF.

74. Supra hoc vas circa axem disponitur vas immobile DDII locum receptaculi tenens, ex quo aqua continuo per tubos inclinatos I*i*, I*i*, in vas inferius influat, vt hoc modo vas inferius mobile iugiter plenum conseruetur. GGG exhibet supremam aquae superficiem in hoc vase immobili, quod pariter circa axem OA spatium vacuum relinquit.

75. Statim ergo atque aqua ex vase inferiori per orificia *f*, *f* effluet, hoc vas ob vim reactionis in gyrum agetur, idque tanta vi, vt resistentiam quandam superare valeat. Quemadmodum igitur haec machina instructa esse debeat, vt maximum effectum praestet, ex ante allatis breuiter repetamus.

76. Sit igitur tota aquae GG supra orificia *f*, *f*, altitudo $HC = b$, altitudo vasis inferioris mobilis $AC = a$, eius basis infimae semidiameter $CF = b$, superioris $AC = c$, vel potius c exprimat distantiam mediam ab axe inter oram limbi EE aquam continentis, exteriorem et interiorem. Huius autem totius limbi amplitudo sit $= ee$, et summa omnium orificiorum inferiorum *f*, *f* aquam eiicientium $= ff$.

77. Praeterea sit D aquae copia, quae ex base superiori singulis minutis secundis in vas inferius effunditur, et g exprimat altitudinem, per quam graue vno minuto secundo delabitur. Tum vero hoc vas quoque minuto secundo circa axem absoluat m reuolutiones. Deinde sit Fk momentum resistentiae, cui machina

china ſuperandae par eſt, quae reſiſtentia circa peculiarem axem mobilis conficiat m reuolutiones, ſingulis minutis ſecundis.

78. Sit $\sqrt{v}$ celeritas, qua aqua ex orificiis f, f, erumpit, et $\sqrt{u}$ celeritas, qua haec ipſa orificia circa axem AC gyrantur. Deinde poſuimus breuitatis gratia $\mu = 1 - \frac{f^4}{e^4}$ et $\nu = 1 - \frac{cc}{bb}$: haeque ſunt quantitates, quae in calculum huius machinae ingrediuntur, quaeque, quemadmodum inter ſe determinentur, videamus.

79. Primum autem machinam in genere ſpectemus, ſepoſito effectu maximo: tunc igitur ſequentes determinationes locum habent:

$ff = ee\sqrt{(1-\mu)}$; $c = b\sqrt{(1-\nu)}$; $u = \frac{\mu b - a}{\mu + \nu - 2\mu\nu}$; $v = \frac{\nu b + a - 2\nu a}{\mu + \nu - 2\mu\nu}$ $b = \frac{\sqrt{g}(\mu b - a)}{\pi m \sqrt{(\mu + \nu - 2\mu\nu)}}$: $ff = \frac{D\sqrt{(\mu + \nu - 2\mu\nu)}}{2\sqrt{g}(\nu b + a - 2\nu a)}$; et effectus machinae per hanc aequationem indicabitur:

$$\pi n F k = D\left(\frac{\sqrt{(\mu b - a)(\nu b + a - 2\nu a)} - \nu(\mu b - a)}{\mu + \nu - 2\mu\nu}\right)$$

80. Denique ſi ſumma omnium orificiorum i, i, per quae aqua ex receptaculo in vas inferius mobile infunditur, ponatur $= ii$, debet eſſe $ii = \frac{D}{2\sqrt{g(b-a)}}$; et tubi I$i$ ita debent eſſe inclinati ad horizontem, vt anguli inclinationis huius tangens ſit $= \sqrt{\frac{(1-\mu)(\nu k + a - 2\nu a)}{(1-\nu)(\mu b - a)}}$. Quo plures autem fuerint huiusmodi tubi Ii, eo melius erit, quin etiam, ſi plane eſſent inter ſe contigui, optimum foret.

81. Vt iam effectus prodeat maximus, ſtatui debet $\nu = \frac{\mu b - 2a}{b - 2a}$, eritque effectus $2\pi n F k = D b$. Tum vero habebitur $ee = \frac{ff}{\sqrt{(1-\mu)}}$; $c = \frac{b\sqrt{(1-\mu)b}}{\sqrt{(b-2a)}}$; $u = \frac{b - 2a}{2(1-\mu)}$;

 $v =$

$b = 10$ pedum, et quantitas aquae ſingulis minutis ſecundis affluens $D = 1$ pes cubicus: erit $a = 3\frac{3}{4}$ ped. $c = 0,26837$ ped. $\gamma = 0,03355$ ped. $ff = \frac{0,01933}{4b}$. Sumatur $b = c$; erit $ff = 0,00483$ ped. quadr. et $u = v = 5$ ped. $m = 10,484$, ſicque motus machinae nimis foret velox.

88. Hoc ergo caſu praeſtat quantitatem c ex numero m definire; cum enim non conſultum ſit, vno minuto ſecundo vna plures reuolutiones admittere, ponatur $m = 1$, hincque habebitur $c = \frac{\sqrt{gb}}{\pi\sqrt{2}} = 2,8135$, $\gamma = 0,3517$ ped. Deinde ob $\pi\sqrt{2} = \frac{\sqrt{gb}}{c}$ erit in genere $\sqrt{(b-2a)} = \frac{D}{4\gamma g\sqrt{b}} =$ hocque caſu $b-2a = 0,000206$ ped. ſeu $a = 4,999807$ ped. Tum vero eſt $\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{(b-2a)}}{\sqrt{b(1-\mu)}}$, et $ff = \frac{Dc}{b\sqrt{2gb}}$, quare ſi ſtatuatur $b = c = 2,8135$, vt ſit $u = v = 5$ ped. erit $ff = 0,0565$ ped. quadr. et $ii = 0,0565$ ped. quadr. et tangens inclinationis tuborum Ii ad horizontem $= \frac{\sqrt{(b-2a)}}{\sqrt{b}} = 0,00455$, ſeu hic angulus $= 0°, 16'$. ac numerus $n = \frac{10}{2\pi Fk}$.

89. Cum in ſtatu maximi effectus ſit $u = v$, celeritas aquae infra ex tubis effluentis, aequalis erit ipſi celeritati, qua orificia circa axem reuoluuntur: ex quo celeritas vera aquae effluentis erit nulla, ideoque verticaliter delabetur motu vniformiter accelerato, quae inſignis proprietas effectus maximi imprimis notari meretur.

90. Quando ergo datur copia aquae D ſingulis minutis ſecundis affluens, vna cum altitudine lapſus b; conſtituatur primo numerus reuolutionum m, quas machina vno minuto ſecundo abſoluere debet; is autem ita

ita capiatur, vt quantitas $\frac{g b \sqrt{2 g b}}{4 \pi m m}$ multis vicibus maior sit quam D. Sic enim proxime fiet $2a = b$, seu $a = \frac{1}{2}b$. Tum sumatur $c = \frac{\sqrt{g b}}{\pi m \sqrt{2}}$, et interuallum b pro lubitu accipiatur; quo facto erit $u = v = \frac{b b}{c c} \cdot \frac{1}{2} b$: et $ff = \frac{D c}{b \sqrt{2 g b}}$ et $ii = \frac{D}{\sqrt{2 g b}}$, ita vt sit $ff : ii = c : b$. Denique tubi Ii aquam tantum non horizontaliter eiicere debebunt.

91. Cum autem aqua per tubos Ii secundum directionem horizontalem in vas inferius deriuare non licet, tubis his inclinationem quandam notabiliorem ad horizontem tribui oportet. Si igitur tangens huius inclinationis ponatur $= \theta$, posito $\gamma = \frac{1}{2} c$, statim reperitur $c = \sqrt{\frac{2 D}{\pi \theta \sqrt{2 g b}}}$; hincque $m = \frac{\sqrt{2 g b}}{2 \pi c}$. Tum vero, interuallo b pro lubitu assumto, erit $u = v = \frac{b b b}{2 c c}$

Porro reperitur $a = \frac{1}{2} b (1 - \theta \theta)$, ac tandem:

$$ff = \frac{D c}{b \sqrt{2 g b}} = \frac{D}{2 \pi m b}, \text{ et } ii = \frac{D}{\sqrt{2 g b (1 + \theta \theta)}} = \frac{D}{2 \pi m c \sqrt{(1 + \theta \theta)}}$$

His autem omnibus definitis habebitur:

$$2 \pi n F k = D b,$$

vnde constructio totius machinae est petenda.

TENTAMEN THEORIAE DE FRICTIONE FLVIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Experientia luculenter testatur, aquam, dum per canales promouetur, non exiguam pati motus sui diminutionem, eamque eo magis esse notabilem, quo longiores fuerint, simulque arctiores, istiusmodi canales. Atque haec motus diminutio inprimis in fontibus salientibus deprehenditur, ad quos aqua per tubos, seu canales, deriuatur; cum enim, per Theoriam motus fluidorum, aqua fere ad eandem altitudinem assurgere deberet, ex qua lapsu ad orificium fontis descenderat, tamen teste experientia hanc altitudinem nunquam attingit, sed eo magis ab ea deficere solet, quo longiorem viam in tubis absoluerit, et quo arctiores fuerint isti tubi.

2. Quanquam ob hanc causam Theoria plerisque practicis non parum suspecta videri solet, tamen cum ea principiis mechanicae certissimis sit innixa, eius veritas ob hunc dissensum minime debilitatur, sed potius causam istius aberrationis in eiusmodi circumstantiis quaeri oportet, quae in Theoria non fuerint debito modo

con-

consideratae. Si enim aqua in motu suo huiusmodi obstacula offendat, quorum in Theoria nulla ratio fuerit habita, mirum non est, si euentus Theoriae parum respondeat.

3. Quodsi autem hanc motus diminutionem, quam aqua in tubis patitur, attentius perpendamus, nullum plane dubium relinquitur, quin ea a frictione, seu attritu aquae ad latera tubi, proficiscatur. Cum enim corpora solida, dum super planis quantumuis politis promouentur, insignem resistentiam ob frictionem offendant; similis effectus in motu fluidorum, quatenus ad latera tuborum, per quos transeunt, atteruntur, oriri debet, vnde fluidi motus retardetur: ex quo etiam statim perspicitur, hanc retardationem eo maiorem esse debere, quo maius spatium aqua in tubis percurrere cogatur, et quo simul arctiores fuerint isti tubi.

4. Etiamsi autem nemo facile negauerit, quin motus fluidorum perinde ac solidorum frictioni sit obnoxius, atque etiam plerique Auctores, qui ante memoratum motus imminutionem animaduerterunt, eam manifesto frictioni tribuant, nullus eorum tamen, quantum mihi quidem constat, leges huius frictionis vel determinauit, vel saltem inuestigare est conatus. Quam ob rem cum haec determinatio maximi sit momenti, si Theoriam ad praxin accommodare velimus, operam dabo, vt hoc argumentum, quantum ob summas quibus inuoluitur difficultates, fieri licet, pro viribus euoluam atque illustrem.

5. Ac primo quidem cum dubium sit nullum, quin minimae fluidorum particulae pro solidis haberi

 queant,

queant, eae, dum secundum tuborum latera incedunt, eaque quasi stringunt, effectum frictionis sentire debent; atque leges huius frictionis similes plane erunt earum, quae in motu corporum solidorum obseruantur, etiamsi quantitas frictionis, ob summam particularum fluidarum lubricitatem, sine dubio multo minor existat.

6. In corporibus autem solidis obseruamus, frictionem, quam in incessu super superficie quacunque patiuntur, semper datam tenere proportionem ad vim, qua ea ad superficiem apprimuntur, ita vt neque corporum figura, neque quantitas basis, qua superficiem attingunt, nihil ad frictionem, siue augendam, siue diminuendam, conferat. Ita experimentis compertum est, si corpora quaeuis super ligneis, seu metallicis, superficiebus incedant, dummodo non satis notabilis asperitas adsit, frictionem quartae ac subinde tertiae parti vis, qua ad has superficies apprimuntur, aequari.

7. Manifestum ergo videtur, in fluidis similem frictionis legem subsistere, ita, vt pro quauis fluidi portione frictio certam quandam teneat rationem, ad vim, qua ea fluidi portio ad latera tubi, per quem fluit, apprimitur: haecque ratio per experimenta erit exploranda, quae fortasse varias subire poterit mutationes, prout tubi ex alia atque alia materia fuerint confecti. In calculo ergo hanc rationem indefinite assumi conueniet, vt ea postmodum ex experimentis, ad quae Theoria applicabitur, definiri possit.

Tab. VI. Fig. 1. 8. Si igitur ponamus massam aquae per tubum ABCD transfluere, tubique parietes internos in elemento

mento $MNmn$ ab aqua tanta vi premi, quanta premeretur, si sub aqua quiescente immersi essent ad altitudinem $= p$, haec altitudo statum compressionis aquae in elemento $MNmn$ exponet. Quodsi ergo u exprimat perimetrum sectionis tubi in MN factae, et ds elementi $MNmn$ altitudinem Mm, erit interna huius elementi superficies $= uds$, ideoque pressio, quam ista superficies sustinet, aequabitur ponderi voluminis aquae $= puds$.

9. Cum iam frictio, quam elementum aquae $MNmn$ in motu suo per tubum patitur, datam teneat rationem ad vim appressionis $puds$, indicetur vis frictionis per $\lambda puds$, vbi facile colligere licet, λ esse fractionem valde paruam, cuius valor per experimenta determinari debet. Hac ergo vi $= \lambda puds$ motui elementi aquae $MNmn$ resistitur, et cum massa elementi, posita tubi amplitudine in $MN = zz$, sit $= zzds$, erit ipsa retardatio a frictione oriunda $= \frac{\lambda pu}{zz}$.

10. Pendet ergo frictio tam a quantitate, quam a figura cauitatis tubi: si enim ponamus sectionem tubi in MN factam, esse rectangularem, altero latere existente $= m$, altero $= n$: erit perimeter eius $u = 2m + 2n$, et area $zz = mn$, vnde hoc casu erit retardatio $= \frac{2\lambda p(m+n)}{mn}$, et si sectio sit quadrata, seu $m = n$, erit retardatio $= \frac{4\lambda p}{n}$. Sin autem sectio sit circularis, diametrum habens $= n$, ob $u = 2\pi n$ et $zz = \pi nn$, erit retardatio $= \frac{2\lambda p}{n}$.

11. Quodsi ergo, vt plerumque fieri solet, sectio tubi sit circularis, eiusque area in MN ponatur $= zz$,

erit eius diameter $n = \frac{z}{\sqrt{\pi}}$, vnde retardatio, a frictione orta, prodit $= \frac{2\lambda p \sqrt{\pi}}{z}$. Cum autem fit $\pi = 3,14159265$, hic numerus, fimul in coefficiente 2λ comprehendi poterit, ita vt retardationem a frictione oriundam exprimere quaeamus per $\frac{\alpha p}{z}$: ac pro experimentis, quae quidem eiusmodi tubis inftituuntur, fufficiet, valorem ipfius α noffe, neque multum refert, inde valorem ipfius $\lambda = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}$ elicere.

12. Ad effectum igitur frictionis, quouis cafu determinandum, preffionem inueftigari oportet, quam aqua vbique in latera exerit: feu ftatus compreffionis aquae in fingulis tubi locis definiri debet. Cum autem ftatus compreffionis a celeritate pendeat, celeritas vero a frictione diminuatur, ideoque fine ea coguofci nequeat, perfpicuum eft, hanc inueftigationem, more apud Analyftas folito, inftitui debere, ita vt quantitates incognitae in calculo tanquam cognitae tractentur.

13. Hanc ergo inueftigationem ex primis mechanicae principiis repetam, quo facilius veritatem conclu-
Tab VI. Fig. 2. fionum inde deductarum perfpicere liceat. Sit igitur vas fuperne in AB perpetuo aqua plenum, fiue quod amplitudo AB fit infinita, fiue quod continuo fufficiens aquae copia affluat. Infra autem hoc vas definat in tubum, vel canalem ABMNCD, tam figurae, quam amplitudinis vtcunque variabilis, per quem aqua defluat, in eiusque orificio CD erumpat.

14. Etiamfi motus aquae, cum primum fluere inceperit, acceleratur, tamen mox ad motum vniformem redigetur, quo deinceps continuo fluere perget.
Hanc

Hanc ob rem assumam, motum aquae iam ad hunc statum vniformitatis peruenisse, ita vt quaestio sit, quanta celeritate aqua ex orificio CD sit eruptura; seu cum demta frictione celeritas aquae altitudini DE, qua orificium infra supremam aquae superficiem AB deprimitur, respondere deberet, quaeritur, quanto iam ob frictionem celeritas minor sit futura.

15. Sit igitur amplitudo orificii $CD = bb$, et celeritas, qua hic aqua in aërem erumpit, debita sit altitudini $= v$, erit ergo v quantitas constans. Sit praeterea profunditas huius orificii CD sub aquae libella ABE, seu altitudo $DE = a$. Tum ducta recta verticali APS, punctum tubi quoduis M referatur ad coordinatas orthogonales $AP = x$, et $PM = y$, in M vero sit amplitudo tubi $MN = zz$, eritque celeritas aquae in hac sectione MN contentae $= \frac{bb\sqrt{v}}{zz}$, seu debita altitudini $= \frac{b^4 v}{z^4}$; propterea quod celeritates aquae sunt reciproce vt tubi altitudines.

16. Ponamus, tempusculo dt quamuis aquae guttam in MN existentem, peruenire in sectionem mn, sitque elementum $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, quod spatiolum, quia tempusculo dt a celeritate $\frac{bb\sqrt{v}}{zz}$ percurritur, erit $ds = \frac{bb\,dt\sqrt{v}}{zz}$, seu $dt = \frac{zz\,ds}{bb\sqrt{v}}$, vbi notandum est, fore s et zz functiones ipsarum coordinatarum x et y, quibus punctum tubi M determinatur. Ponamus porro, elementum Mm ad rectam verticalem inclinari angulo $= \Phi$, erit $dx = ds \cos \Phi$ et $dy = ds \sin. \Phi$.

17 Verum vt aqua hunc motum, quem assumimus, obtinere valeat, necesse est, vt quaeuis gutta aquae

aquae, in sectione MN contenta, vrgeatur a duplici vi acceleratrice, quarum altera est verticalis secundum AP $= \frac{2ddx}{dt^2}$, altera vero horizontalis secundum PM $= \frac{2ddy}{dt^2}$, sumto elemento dt constante. At est $\frac{dx}{dt} = \frac{bb\cos.\Phi.\sqrt{v}}{zz}$ et $\frac{dy}{dt} = \frac{bb\sin.\Phi.\sqrt{v}}{zz}$; vnde fit:

$$\frac{ddx}{dt} = -\frac{bbd\Phi\sin.\Phi.\sqrt{v}}{zz} - \frac{2bbdz\cos.\Phi.\sqrt{v}}{z^3} \text{ et}$$
$$\frac{ddy}{dt} = \frac{bbd\Phi\cos.\Phi.\sqrt{v}}{zz} - \frac{2bbdz\sin.\Phi\sqrt{v}}{z^3}.$$

18. Hae formulae multiplicatae per $\frac{2}{dt} = \frac{2bb\sqrt{v}}{zzds}$, dabunt vires acceleratrices quaesitas:

$$\text{Vis AP} = b^4 v\left(-\frac{2d\Phi\sin.\Phi}{z^4ds} - \frac{4dz\cos.\Phi}{z^5ds}\right)$$
$$\text{Vis PM} = b^4 v\left(\frac{2d\Phi\cos.\Phi}{z^4ds} - \frac{4dz\sin.\Phi}{z^5ds}\right)$$

Vnde porro eliciuntur duae aliae vires secundum directiones Mm et MS, quarum haec ad illam est normalis. Prodit autem

$$\text{Vis M}m = \text{vi AP}\cos.\Phi + \text{vi PM}.\sin.\Phi = -\frac{4b^4vdz}{z^5ds}$$
$$\text{Vis MS} = \text{vi AP}\sin.\Phi - \text{vi PM}.\cos.\Phi = -\frac{2b^4vd\Phi}{z^4ds}.$$

19. In praesenti negotio tantum opus habemus vi priori, qua aqua secundum directionem Mm propellitur: ideoque haec vis acceleratrix aequalis esse debet ei vi, qua aqua reuera in tubo secundum hanc directionem sollicitatur. Primo autem quaelibet guttula aquae, a vi grauitatis deorsum vrgetur, quae cum vnitate exprimatur, nascetur inde vis acceleratrix secundum directionem tubi M$m = \cos.\Phi$.

20. Deinde si status compressionis aquae in MN altitudine p exprimatur, erit ea in $mn = p + dp$: hinc cum aqua elementi MNmn, a vi p antrorsum propellatur, a vi autem $p + dp$ retrorsum repellatur, nasce-

nascetur hinc vis acceleratrix secundum directionem Mm directa $= -\frac{dp}{ds}$, existente p functione ipsius s, seu ipsarum x et y.

21. Tertio ob frictionem motui aquae resistitur vi retardatrice $= \frac{\alpha p}{z}$, vti supra §. 11. est ostensum, vnde vis acceleratrix aquae secundum directionem Mm erit $= -\frac{\alpha p}{z}$. Cum igitur aqua his tribus viribus subiiciatur, necesse est, vt sit:

$$-\frac{4b^4 v dz}{z^6 ds} = \text{cos.}\,\Phi - \frac{dp}{ds} - \frac{\alpha p}{z},$$

seu $dx - dp - \frac{\alpha p ds}{z} + \frac{4b^4 v dz}{z^5} = 0$ ob $ds \,\text{cos.}\,\Phi = dx$.

22. Peruenimus ergo ad hanc aequationem, ex qua primo p status compressionis aquae in loco quocunque tubi MN definiri debet,

$$dp + \frac{\alpha p ds}{z} = dx + \frac{4b^4 v dz}{z^5}$$

quae multiplicata per $e^{\alpha \int \frac{ds}{z}}$ denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, fit integrabilis. Habebitur enim posito breuitatis gratia $\int \frac{ds}{z} = r$:

$$e^{\alpha r} p = C + \int e^{\alpha r} dx + 4b^4 v \int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^5}.$$

23. Valor autem huius integralis $\int \frac{ds}{z} = r$ ita sit acceptus, vt in supremo vasis loco AB, seu vbi $x = 0$, euanescat. Quo posito, cum α sit fractio vehementer parua,

erit $e^{\alpha r} = 1 + \alpha r + \frac{1}{2}\alpha^2 r^2 + \frac{1}{6}\alpha^3 r^3 + \frac{1}{24}\alpha^4 r^4 + \text{etc.}$

erit $e^{\alpha r} p = C + x + \alpha \int r dx + \frac{1}{2}\alpha^2 \int rr dx + \frac{1}{6}\alpha^3 \int r^3 dx$
$-\frac{b^4 v}{z^4} - 4\alpha b^4 v \int \frac{r dz}{z^5} - 2\alpha^2 b^4 v \int \frac{rr dz}{z^5} - \frac{2}{3}\alpha^3 b^4 v \int \frac{r^3 dz}{z^5} - \text{etc.}$

24. Cum sit $dr = \frac{ds}{z}$, integratio etiam hoc modo institui potest:

$$\int e^{\alpha r}dx = e^{\alpha r}x - \alpha\int e^{\alpha r}\frac{x\,ds}{z}$$

$$\int e^{\alpha r}\frac{dz}{z^5} = -\frac{e^{\alpha r}}{4z^4} + \frac{\alpha}{4}\int e^{\alpha r}\frac{ds}{z^5}$$

sicque erit:

$$p = Ce^{-\alpha r} + x - \alpha e^{-\alpha r}\int e^{\alpha r}\frac{x\,ds}{z} - \frac{b^4 v}{z^4} + \alpha b^4 v e^{-\alpha r}\int e^{\alpha r}\frac{ds}{z^5}$$

siue

$$\begin{aligned} p = & + C - \alpha C r + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha C rr - \tfrac{1}{6}\alpha^3 C r^3 \\ & + x - \alpha\int\frac{x\,ds}{z} + \alpha\alpha r\int\frac{x\,ds}{z} - \tfrac{1}{2}\alpha^3 rr\int\frac{x\,ds}{z} \\ & - \frac{b^4 v}{z^4} + \alpha b^4 v\int\frac{ds}{z^5} - \alpha\alpha\int\frac{rx\,ds}{z} + \alpha^3 r\int\frac{rx\,ds}{z} \\ & + \alpha\alpha b^4 v r\int\frac{ds}{z^5} - \tfrac{1}{2}\alpha^3\int\frac{rrx\,ds}{z} \\ & + \alpha\alpha b^4 v\int\frac{r\,ds}{z^5} + \tfrac{1}{2}\alpha^3 b^4 v rr\int\frac{ds}{z^5} \\ & - \alpha^3 b^4 v r\int\frac{r\,ds}{z^5} \\ & + \tfrac{1}{2}\alpha^3 b^4 v\int\frac{rr\,ds}{z^5} \end{aligned}$$

Tab VI. Fig. 3. 25. Expediet autem hinc casus aliquot specialiores euolui, quibus effectus frictionis facilius exhiberi potest. Sit igitur supremum vas cylindricum verticale ABEF, cuius amplitudo sit $=gg$, et altitudo AE $=a$; deinde huic vasi adiunctus sit tubus cylindricus FCD, longitudinis DF $=b$, et amplitudinis $=ff$, qui cum recta verticali angulum faciat $=\zeta$; in basi autem inferiori pertusus sit foramine CD $=hh$, per quod aqua effluat, dum vas superius continuo plenum conseruatur.

26. Sumamus primo punctum indefinitum P in tubo superiori ABEF: vbi est $z=g$, $ds=dx$, et $r=\frac{x}{g}$. Hinc ita integrando, vt integralia in supremo puncto A euanescant, erit:

$\int e^{\alpha r}$

$$\int e^{\alpha r}dx = \int e^{\frac{\alpha x}{g}}dx = \tfrac{g}{\alpha}(e^{\frac{\alpha x}{g}} - 1)$$

$$4\int \frac{e^{\alpha r}dz}{z^5} = \frac{1-e^{\alpha r}}{g^5} + \tfrac{\alpha}{g^5}\int e^{\frac{\alpha x}{g}}dx$$ ideoque

$$4\int \frac{e^{\alpha r}dz}{z^5} = -\tfrac{1}{g^4}(e^{\frac{\alpha x}{g}} - 1) + \tfrac{1}{g^4}(e^{\frac{\alpha x}{g}} - 1) = 0$$

ergo

$$e^{\frac{\alpha x}{g}}p = C + \tfrac{g}{\alpha}(e^{\frac{\alpha x}{g}} - 1)$$

seu $p = Ce^{\frac{-\alpha x}{g}} + \tfrac{g}{\alpha}(1 - e^{\frac{-\alpha x}{g}})$

27. Cum autem in genere sit

$$4\int \frac{e^{\alpha r}dz}{z^5} = \frac{1}{g^4} - \frac{e^{\alpha r}}{z^4} + \alpha\int \frac{e^{\alpha r}ds}{z^5}$$

erit pro extremo vasis puncto E, vbi amplitudo subito fit $= ff$; $4\int \frac{e^{\alpha r}dz}{z^5} = \tfrac{1}{g^4} - \tfrac{1}{f^4}e^{\frac{\alpha x}{g}} + \tfrac{1}{g^4}(e^{\frac{\alpha x}{g}} - 1) = e^{\frac{\alpha x}{g}}(\tfrac{1}{g^4} - \tfrac{1}{f^4})$

vnde fit pressio in $F = Ce^{\frac{-\alpha a}{g}} + \tfrac{g}{\alpha}(1 - e^{\frac{\alpha a}{g}}) + b^4 v(\tfrac{1}{g^4} - \tfrac{1}{f^4})$
At in suprema superficie AB pressio erit $= C$, quae cum aequalis esse debeat pressioni atmosphaerae, quae columnae aqueae altitudinis $= l$ aequatur, erit $C = l$; et pressio in $F = le^{\frac{-\alpha a}{g}} + \tfrac{g}{\alpha}(1 - e^{\frac{\alpha a}{g}}) + b^4 v(\tfrac{1}{g^4} - \tfrac{1}{f^4})$.

28. Inuenta pressione in F, consideremus iam alterum tubum FCD solum, pro quo est $zz = ff$, et $dx = ds\cos\zeta$. Sit autem nunc EP $= x$, et pressio in M $= p$. Iam ob $r = \frac{s}{f}$, erit

$$\int e^{\alpha r}dx = \tfrac{f}{\alpha}(e^{\frac{\alpha s}{f}} - 1)\cos.\zeta$$ et

$$4\int \frac{e^{\alpha r}dz}{z^5} = \tfrac{1}{f^4} - \frac{e^{\frac{\alpha s}{f}}}{z^4} + \tfrac{1}{f^4}(e^{\frac{\alpha s}{f}} - 1)$$

 cuius

cuius valor in quouis puncto medio euanescit, in puncto autem D, vbi subito est $z = b$, et $s = b$, erit

$$4\int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^5} = e^{\frac{\alpha b}{f}} \left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{b^4}\right)$$

29. In quouis ergo puncto intermedio M erit pressio

$$p = Ce^{\frac{-\alpha s}{f}} + \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha s}{f}}\right)\text{cos.}\zeta$$

et quia, posito $s = 0$, pressio in F prodit $= C$, necesse est, vt sit $C = le^{\frac{-\alpha a}{g}} + \frac{g}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha a}{g}}\right) + b^4 v\left(\frac{1}{g^4} - \frac{1}{f^4}\right)$

Quo valore notato orietur pressio in extremo orificio

$$CD = Ce^{\frac{-\alpha b}{f}} + \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right)\text{cos.}\zeta + b^4 v\left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{b^4}\right)$$

30. Quoniam hic vero aqua in aërem erumpit, aliam pressionem non sustinet, praeter pondus atmosphaerae, vnde erit,

$$l = Ce^{\frac{-\alpha b}{f}} + \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right)\text{cos.}\zeta + b^4 v\left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{b^4}\right)$$

et substituto valore ipsius C habebitur

$$l = le^{\frac{-\alpha a}{g} - \frac{\alpha b}{f}} + \frac{g}{\alpha} e^{\frac{-\alpha b}{f}}\left(1 - e^{\frac{-\alpha a}{g}}\right) + e^{\frac{-\alpha b}{f}} b^4 v\left(\frac{1}{g^4} - \frac{1}{f^4}\right)$$
$$+ \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right)\text{cos.}\zeta + b^4 v\left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{b^4}\right).$$

31 Ex hac iam aequatione celeritas eruitur, qua aqua per orificium CD erumpit. Pprodibit enim altihuic celeritati debita

$$v = \frac{l\left(1 - e^{\frac{-\alpha a}{g} - \frac{\alpha b}{b}}\right) - \frac{g}{\alpha} e^{\frac{-\alpha b}{f}}\left(1 - e^{\frac{-\alpha a}{g}}\right) - \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right)\text{cos.}\zeta}{e^{\frac{-\alpha b}{f}} \cdot \frac{b^4}{g^4} + \left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right)\frac{b^4}{f^4} - 1}$$

vel

vel mutatis numeratoris ac denominatoris signis

$$v = \frac{\frac{g}{\alpha} e^{\frac{-\alpha b}{f}} \left(1 - e^{\frac{-\alpha a}{g}}\right) + \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right) \operatorname{cof.} \zeta - l\left(1 - e^{\frac{-\alpha a}{g} - \frac{\alpha b}{f}}\right)}{1 - \left(1 - e^{\frac{\alpha b}{f}}\right)\frac{b^4}{f^4} - e^{\frac{-\alpha b}{f}} \cdot \frac{b^4}{g^4}}$$

Quodsi ergo tubus FD sit verticalis, fiet $\operatorname{cof.} \zeta = 1$; sin autem hic tubus fuerit horizontalis, erit $\operatorname{cof.} \zeta = 0$.

32. Cum sit, ob α valde paruum,

$$e^{\frac{-\alpha a}{g}} = 1 - \frac{\alpha a}{g} + \frac{\alpha^2 a^2}{2 g^2} - \frac{\alpha^3 a^3}{6 g^3} + \text{etc.}$$

$$e^{\frac{-\alpha b}{f}} = 1 - \frac{\alpha b}{f} + \frac{\alpha^2 b^2}{2 f^2} - \frac{\alpha^3 b^3}{6 f^3} + \text{etc.}$$

erit, non vltra poteſtatem ſecundam ipſius α progrediendo:

$$v = \frac{a + b \operatorname{cof.} \zeta - \alpha\left(\frac{aa}{2g} + \frac{ab}{f} + \frac{bb \operatorname{cof.} \zeta}{2f} + \frac{al}{g} + \frac{bl}{f}\right) + \alpha\alpha\left(\frac{a^3}{6gg} + \frac{aab}{2fg} + \frac{abb}{2ff} + \frac{b^3 \operatorname{cof.} \zeta}{6ff} + \frac{1}{2} l \left(\frac{a}{g} + \frac{b}{f}\right)^2\right)}{1 - \frac{b^4}{g^4} - \frac{\alpha b}{f}\left(\frac{b^4}{f^4} - \frac{b^4}{g^4}\right) + \frac{\alpha\alpha bb}{2ff}\left(\frac{b^4}{f^4} - \frac{b^4}{g^4}\right)}$$

vbi $a + b \operatorname{cof.} \zeta$ denotat totam altitudinem AG.

33. Si amplitudo vaſis ſuperioris ABEF ſit quaſi infinita, ſeu $g = \infty$, erit:

$$v = \frac{a + b \operatorname{cof.} \zeta - \frac{\alpha b}{f}\left(a + \frac{1}{2} b \operatorname{cof.} \zeta + l\right) + \frac{\alpha^2 bb}{2ff}\left(a + \frac{1}{3} b \operatorname{cof.} \zeta + l\right)}{1 - \frac{\alpha b b^4}{f^5} + \frac{\alpha \alpha b b b^4}{2 f^6}}$$

vnde patet, celeritatem minorem eſſe ea, quam corpus cadendo ex altitudine AG acquirit; atque diminutionem imprimis etiam a pondere atmoſphaerae l pendere, ita vt in vacuo effectus frictionis multo minor eſſet futurus.

34. Si canalis, per quem aqua defluit, ex pluribus tubis cylindricis vtcunque ad horizontem inclinatis con- Tab. VI. Fig. 4.

ſtet,

ſtet, hinc motus aquae, ſeu celeritas effluxus, cum motus iam ad vniformitatem fuerit reductus, non difficulter colligi poterit.

Ponatur enim pro ſingulis partibus

$AF = a$; amplitudo $AA = ff$; et ang. cum verticali $= 0$
$BC = b$; amplitudo $BB = gg$; et ang. cum verticali $= \zeta$
$CD = c$; amplitudo $CC = hh$, et ang. cum verticali $= \eta$
$DE = d$; amplitudo $DD = ii$; et ang. cum verticali $= \theta$

Denique ſit orificium $EE = kk$, quod hactenus per hh indicauimus.

35. Sit denique v altitudo debita celeritati, qua aqua per orificium $EE = kk$ effluet, ac ponatur ſtatus compreſſionis aquae

in $AA = l$ quae eſt altitudo circiter 30 pedum
in $BB = P$
in $CC = Q$
in $DD = R$
in $EE = l$, cum hic fiat effluxus.

36. Quodſi iam ratiocinium vt ante inſtituamus, reperiemus:

$$P = l e^{\frac{-\alpha a}{f}} + \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha a}{f}}\right) + k^4 v\left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{g^4}\right)$$

$$Q = P e^{\frac{-\alpha b}{g}} + \frac{g}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}}\right)\operatorname{cof.}\zeta + k^4 v\left(\frac{1}{g^4} - \frac{1}{h^4}\right)$$

$$R = Q e^{\frac{-\alpha c}{h}} + \frac{h}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha c}{h}}\right)\operatorname{cof.}\eta + k^4 v\left(\frac{1}{h^4} - \frac{1}{i^4}\right)$$

$$= R e^{\frac{-\alpha d}{i}} + \frac{i}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha d}{i}}\right)\operatorname{cof.}\theta + k^4 v\left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{k^4}\right)$$

hinc-

hincque celeritas quaesita seu altitudo v definitur: ac simul lex constat, qua erit procedendum, si canalis ex pluribus partibus fuerit compositus.

37. Quo has formulas commodius euoluamus, statuamus breuitatis gratia:

$$e^{\frac{-\alpha a}{f}} = 1 - \alpha A; \quad e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 1 - \alpha B$$

$$e^{\frac{-\alpha c}{h}} = 1 - \alpha C; \quad e^{\frac{-\alpha d}{i}} = 1 - \alpha D$$

ita vt sit:

$$A = \frac{a}{f}\left(1 - \frac{\alpha a}{2f} + \frac{\alpha^2 a^2}{6f^2} - \frac{\alpha^3 a^3}{24 f^3} + \text{etc.}\right)$$

$$B = \frac{b}{g}\left(1 - \frac{\alpha b}{2g} + \frac{\alpha^2 b^2}{6g^2} - \frac{\alpha^3 b^3}{24 g^3} + \text{etc.}\right)$$

$$C = \frac{c}{h}\left(1 - \frac{\alpha c}{2h} + \frac{\alpha^2 c^2}{6h^2} - \frac{\alpha^3 c^3}{24 h^3} + \text{etc.}\right)$$

$$D = \frac{d}{i}\left(1 - \frac{\alpha d}{2i} + \frac{\alpha^2 d^2}{6i^2} - \frac{\alpha^3 d^3}{24 i^3} + \text{etc.}\right)$$

38. Cum igitur sit

$$P = (1 - \alpha A) l + A f + k^4 v\left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{g^4}\right) \text{ erit}$$

$$Q = (1 - \alpha A)(1 - \alpha B) l + (1 - \alpha B) A f + (1 - \alpha B) k^4 v\left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{g^4}\right) + B g \operatorname{cos.} \zeta + k^4 v\left(\frac{1}{g^4} - \frac{1}{h^4}\right)$$

siue

$$Q = (1 - \alpha A)(1 - \alpha B) l + (1 - \alpha B) A f + B g \operatorname{cos.} \zeta + (1 - \alpha B)\frac{k^4 v}{f^4} + \alpha B \frac{k^4 v}{g^4} - \frac{k^4 v}{h^4}.$$

Hinc porro fit

$$R = (1 - \alpha A)(1 - \alpha B)(1 - \alpha C) l + A(1 - \alpha B)(1 - \alpha C) f + B(1 - \alpha C) g \operatorname{cos.} \zeta + C h \operatorname{cos.} \eta + (1 - \alpha B)(1 - \alpha C)\frac{k^4 v}{f^4} + \alpha B(1 - \alpha C)\frac{k^4 v}{g^4} + \alpha C.\frac{k^4 v}{h^4} - \frac{k^4 v}{i^4}.$$

vnde tandem colligitur haec aequatio:

$$l - (1 - \alpha A)(1 - \alpha B)(1 - \alpha C)(1 - \alpha D) l =$$
$$A(1 - \alpha B)(1 - \alpha C)(1 - \alpha D) f + B(1 - \alpha C)(1 - \alpha D) g \operatorname{cos.} \zeta$$
$$+ C(1 -$$

$$+C(1-\alpha D)h\cos\eta+Di\cos\theta+(1-\alpha B)(1-\alpha C)(1-\alpha D)\frac{k^4 v}{f^4}$$
$$+\alpha B(1-\alpha C)(1-\alpha D)\frac{k^4 v}{h^4}+\alpha C(1-\alpha D)\frac{k^4 v}{h^4}+\alpha D.\frac{k^4 v}{i^4}-v$$

39. Ponatur porro ad abbreuiandum:

$$e^{\frac{-\alpha a}{f}}=1-\alpha A=\mathfrak{A};\quad e^{\frac{-\alpha b}{g}}=1-\alpha B=\mathfrak{B}$$
$$e^{\frac{-\alpha c}{h}}=1-\alpha C=\mathfrak{C};\quad e^{\frac{-\alpha d}{i}}=1-\alpha D=\mathfrak{D}$$

tum vero:

$$\frac{k^4}{f^4}=\mathfrak{f};\ \frac{k^4}{g^4}=\mathfrak{g};\ \frac{k^4}{h^4}=\mathfrak{h};\ \text{et}\ \frac{k^4}{i^4}=\mathfrak{i}\ \text{erit}$$

$$v=\frac{A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}f+B\mathfrak{C}\mathfrak{D}g\cos.\zeta+C\mathfrak{D}h\cos.\eta+Di\cos\theta-l+\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}l}{1-\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{f}-\alpha B\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{g}-\alpha C\mathfrak{D}\mathfrak{h}-\alpha D\mathfrak{i}}$$

vbi $a+b\cos.\zeta+c\cos.\eta+d\cos.\theta$ eſt altitudo aquae ſupremae AA ſupra orificium EE.

40. Si omnes poteſtates ipſius α praeter primam negligamus, reperiemus:

$$v=\frac{\left\{\begin{array}{ll} a+b\cos\zeta+c\cos\eta+d\cos.\theta & -\alpha a(\frac{a}{2f}+\frac{b}{g}+\frac{c}{h}+\frac{d}{i}) \\ -\alpha l(\frac{a}{f}+\frac{b}{g}+\frac{c}{h}+\frac{d}{i}) & -\alpha b\cos.\zeta(\frac{b}{2g}+\frac{c}{h}+\frac{d}{c}) \\ & -\alpha c\cos.\eta(\frac{c}{2h}+\frac{d}{i}) \\ & -\alpha d\cos.\theta.(\frac{d}{2i} \end{array}\right\}}{1-\mathfrak{f}+\alpha\mathfrak{f}(\frac{b}{g}+\frac{c}{h}+\frac{d}{i})-\alpha\mathfrak{g}.\frac{b}{g}-\alpha\mathfrak{h}.\frac{c}{h}-\alpha\mathfrak{i}\,\frac{d}{i}}$$

et ſi nulla plane eſſet frictio, ſeu $\alpha=0$, foret:

$$v=\frac{a+b\cos.\zeta+c\cos.\eta+d\cos\theta}{1-\mathfrak{f}}$$

vnde poſita tota altitudine $AI=q$, erit $v=\frac{f^4}{f^4-k^4}.q$

41. In tranſitu hic obſeruo, ſi amplitudo vaſis ſupremi ſit maxima prae amplitudine orificii, fore $v=q$, ſeu celeritatem effluxus in EE debitam eſſe altitudini $AI=q$, vti per conſueta principia conſtat. Sin autem ampli-

amplitudo vasis supremi ff non multum excedat amplitudinem orificii kk, tum vtique erit $v > q$, seu aqua maiori celeritate effluerer, quam casu praecedente, quod non parum paradoxon videbitur. Verum ratio huius accelerationis in hypothesi nostra est quaerenda, qua assumsimus, vas supremum semper aqua plenum conseruari, vbi in calculo posuimus, aquam affluentem iam ea celeritate in vas illud affluere, qua aqua in eo subsidit: sicque haec aqua lapsum non a quiete incipit; vnde mirum non est, si ea per orificium maiori celeritate erumpit, quam quae conuenit altitudini $AI = q$.

42. Hinc etiam perspicitur, cur valor ipsius v, casu quo orificium kk aequale est supremae amplitudini ff, adeo fiat infinitus; hinc scilicet innotescit, hoc casu motum aquae continuo accelerari, neque vnquam ad statum vniformitatis pertingere. Quamdiu enim tantundem aquae supra affluit, quantum infra erumpit, et quidem semper tanta velocitate, quanta aqua subsidit, hic motus continuo perinde accelerabitur, atque in lapsu grauium libero euenire solet. Multo minus autem status vniformitatis locum habere potest, si fuerit $kk > ff$, praeter quam quod hoc casu aqua a lateribus tubi separatur.

43. Etiamsi igitur vas supremum aqua continuo plenum conseruetur, nisi simul aqua tanta celeritate in vas infundatur, quanta suprema superficies subsidit, calculus ex Theoria deductus locum habere nequit. Quodsi ergo calculum ad experimenta accommodare velimus, necesse erit, vas supremum amplissimum accipi, vt kk prae ff tuto reiici possit; sic enim aquam lente affun-

 dendo

dendo motus aquae non turbatur, cum ſuprema ſuperficies etiam lentiſſime ſubſidet.

44. Quo autem clarius effectum frictionis cognoſcamus, caſus aliquot ſimpliciores euolui conueniet, qui deinceps cum experimentis comparari queant; vt exinde valor litterae α definiri poſſit. Hoc autem valore ſemel definito, reliqui caſus omnes, quantum vis fuerint complicati, ope formularum datarum non difficulter expedientur, atque diminutio celeritatis a frictione oriunda determinabitur: ſed ob rationem ante allegatam amplitudinem ſupremam ff prae orificio kk vehementer magnam ſtatuemus, ita vt valor literae $\mathfrak{f}$ pro nihilo haberi poſſit. Manifeſtum autem eſt, dummodo ſit $f > 3k$, fore $\mathfrak{f} < \frac{1}{81}$, qui valor ſine notabili errore reiici poterit.

CASVS I.

SI AQVA EX VASE SVPREMO PER TVBVM CYLINDRICVM VERTICALEM EFFLVAT.

Tab. VII. Fig. 2. 45. Sit vaſis ſupremi amplitudo $AA = ff$, eiusque altitudo $AB = a$, quod ſemper aqua plenum conſeruari pono. Huic vaſi verticaliter ſit infixus tubus cylindricus BBCC altitudinis $BC = b$, et amplitudinis $= gg$; cuius tubi baſis ima pertuſa ſit foramine $CC = kk$, per quod aqua effluat. Sit autem $\frac{k^4}{f^4} = \mathfrak{f} = 0$, et poſitis

$$\mathfrak{A} = e^{\frac{-\alpha a}{f}}; \ \mathfrak{B} = e^{\frac{-\alpha b}{g}} \ A = \frac{1 - \mathfrak{A}}{\alpha}, \text{ et } B = \frac{1 - \mathfrak{B}}{\alpha}$$

ob

ob cof. $\zeta = 1$, et $\mathfrak{g} = \frac{k^4}{g^4}$, erit celeritas, qua aqua per orificium CC effluet debita altitudini v, vt fit

$$v = \frac{A\mathfrak{B}f + Bg - l(1 - \mathfrak{A}\mathfrak{B})}{1 - \alpha B g}$$

46. Quodfi ergo valoribus proxime veris vti velimus, habebimus:

$$v\left(1 - \frac{\alpha b k^4}{g^5}\left(1 - \frac{\alpha b}{2g} + \frac{\alpha^2 b^2}{6g^2} - \frac{\alpha^3 b^3}{24 g^3} + \text{etc.}\right)\right) =$$

$$a + b - \alpha a\left(\frac{a}{2f} + \frac{b}{g}\right) + \alpha^2 a\left(\frac{aa}{6ff} + \frac{ab}{2fg} + \frac{bb}{2gg}\right) - \alpha^3 a\left(\frac{a^3}{24f^3} + \frac{a^2 b}{6ffg} + \frac{ab^2}{4fgg} + \frac{b^3}{6g^3}\right) \text{etc.}$$

$$- \frac{\alpha bb}{2g} + \frac{\alpha\alpha b^3}{6gg} - \frac{\alpha^3 b^4}{24 g^4} + \text{etc.}$$

$$- \alpha l\left(\frac{a}{f} + \frac{b}{g}\right) + \tfrac{1}{2}\alpha^2 l\left(\frac{a}{f} + \frac{b}{g}\right)^2 - \tfrac{1}{6}\alpha^3 l\left(\frac{a}{f} + \frac{b}{g}\right)^3 + \text{etc.}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$v\left(1 - \frac{k^4}{g^4}\left(\frac{\alpha b}{g} - \frac{\alpha^2 b^2}{2g^2} + \frac{\alpha^3 b^3}{6g^3} - \text{etc.}\right)\right) =$$

$$a + b - \alpha\left(\frac{aa}{2f} + \frac{ab}{g} + \frac{bb}{2g} + \frac{al}{f} + \frac{bl}{g}\right)$$

$$+ \alpha\alpha\left(\frac{a^3}{6ff} + \frac{aab}{2fg} + \frac{abb}{2gg} + \frac{b^3}{6gg} + \tfrac{1}{2}l\left(\frac{a}{f} + \frac{b}{g}\right)^2\right)$$

$$- \alpha^3\left(\frac{a^4}{24f^3} + \frac{a^3 b}{6ffg} + \frac{aabb}{4fgg} + \frac{ab^3}{6g^3} + \frac{b^4}{24g^3} + \tfrac{1}{6}l\left(\frac{a}{f} + \frac{b}{g}\right)^3\right)$$

etc.

47. Si altitudo vafis fupremi $AB = a$ fuerit valde exigua, amplitudo autem ff multo maior quam amplitudo tubi gg, fimulque longitudo huius tubi $BC = b$ fatis fit ingens, patet fractionem $\frac{b}{g}$ maxime fuperare fractionem $\frac{a}{f}$; hac igitur prae illa neglecta, erit

$$v\left(1 - \frac{k^4}{g^4}\left(\frac{\alpha b}{g} - \frac{\alpha^2 bb}{2gg} + \frac{\alpha^3 b^3}{6g^3} - \text{etc}\right)\right) =$$

$$a + b - \frac{\alpha b}{g}\left(a + \tfrac{1}{2}b + l\right) + \frac{\alpha\alpha bb}{gg}\left(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{6}b + \tfrac{1}{2}l\right)$$

$$- \frac{\alpha^3 b^3}{g^3}\left(\tfrac{1}{6}a + \tfrac{1}{24}b + \tfrac{1}{6}l\right) \text{ etc.}$$

atque haec feries eo magis conuergit, quo minor fuerit fractio $\frac{\alpha b}{g}$.

48. Quantum autem ex craſſis quibusdam experimentis obiter tantum colligere licuit, valor ipſius α prodiit circiter $= \frac{1}{4000}$. Hinc dummodo numerus $\frac{b}{g}$ notabiliter fuerit minor, quam 4000, ſufficiet in primis terminis ſubſtitiſſe, ita vt ſit

$$v\left(1 - \frac{\alpha b}{g} \cdot \frac{k^4}{g^4}\right) = a + b - \frac{\alpha b}{g}\left(a + \tfrac{1}{2}b + l\right), \text{ ſeu}$$

$$v = a + b - \frac{\alpha b}{g}\left(a + \tfrac{1}{2}b + l - \frac{k^4}{g^4}(a + b)\right)$$

49. Si orificium $CC = kk$ fuerit minimum, ita vt $\frac{k^4}{g^4}$ pro nihilo haberi poſſit, erit

$$v = a + b - \frac{\alpha b}{g}\left(a + \tfrac{1}{2}b + l\right)$$

ſin autem tubus infra plane ſit apertus, ſeu $gg = kk$, habebitur

$$v = a + b - \frac{\alpha b}{g}\left(l - \tfrac{1}{2}b\right)$$

Illo ergo caſu celeritas effluxus eſt minima, atque a frictione maxime impeditur; hoc autem caſu videtur fieri poſſe, vt fiat $v = a + b$, perinde ac ſi nulla frictio adeſſet.

50. Hoc ſcilicet euenire deberet, ſi $b = 2l$, ſeu cum ſit l triginta pedum, ſi $b = 60$ pedum: atque adeo, ſi eſſet $b > 60$ pedum, calculus noſter praeberet $v > a + b$. Interim tamen certiſſimum eſt, frictionem in cauſa eſſe non poſſe, vt aqua maiori celeritate exſiliat, quam ſi nulla adeſſet frictio. Dico igitur, huiusmodi caſus ideo locum habere non poſſe, propterea quod aqua tubo non vbique adhaereat; ſed vacuum relinquat, ita, vt calculus ad eos accommodari nequeat.

51. Quod

51. Quod quo clarius perſpiciatur, notandum eſt, aquam eatenus tantum vbique tubi cauitatem explere, quatenus ad eius latera apprimitur: ſin igitur eueniat, vt preſſio aquae intra tubum alicubi vel euaneſcat, vel adeo fiat negatiua, ibi reuera latera tubi deſeret, vacuumque relinquet, ita vt motus aquae longe aliter ſit futurus, ac per calculum eſt definitus. Calculus enim locum habere nequit, niſi ſtatus compreſſionis aquae in tubo vbique ſit affirmatiuus.

52. Ponamus ergo ſtatum compreſſionis aquae in ſectione BB eſſe $= R$, atque ex §. 36. habebimus

$$l = Re^{\frac{-\alpha b}{g}} + \tfrac{g}{\alpha}(1 - e^{\frac{\alpha b}{g}}) + \tfrac{k^4}{g^4}v - v$$

ideoque $R = e^{\frac{-\alpha b}{g}} l - \frac{g}{\alpha}(e^{\frac{\alpha b}{g}} - 1) + v(1 - \frac{k^4}{g^4})e^{\frac{\alpha b}{g}}$

Iam ob $e^{\frac{\alpha b}{g}} = 1 + \frac{\alpha b}{g} + \frac{\alpha^2 b^2}{g^2}$, erit

$$R = l + \tfrac{\alpha b l}{g} - b - \tfrac{\alpha b b}{g} + (1 + \tfrac{\alpha b}{g})v(1 - \tfrac{k^4}{g^4})$$

et ſubſtituto pro v valore ante inuento, habebitur neglectis terminis per α multiplicatis

$$R = l + a - \tfrac{k^4}{g^4}(a + b).$$

53. Niſi ergo ſit $l + a > \frac{k^4}{g^4}(a + b)$, hypotheſis in calculo aſſumta locum habere nequit; ideoque tubi BC longitudo b minor eſſe debet, quam $\frac{g^4}{k^4}(l + a) - a$. Quare ſi tubus BC infra ſit plane apertus, ſeu $gg = kk$, neceſſe eſt, vt ſit $b < l$: vnde hypotheſis euertitur, ſi eſſet $b = 2l$. Caſu $gg = kk$, longitudo tubi $BC = b$ triginta pedes ſuperare nequit, vnde poſito $b = l$, maxima celeritas effluxus, ſeu quae minime a frictione impeditur,

 peditur,

peditur, debita est altitudini $v = a + l - \frac{all}{2g}$: ideoque minor est, quam si nulla adesset frictio.

54. In genere autem, si sit $\frac{a}{f}$ tam paruum, vt prae $\frac{b}{g}$ pro nihilo reputari possit, erit $\mathfrak{A} = 1$, $A = \frac{a}{f}$;

vnde fit $v = \dfrac{a e^{\frac{-\alpha b}{g}} + \frac{g}{\alpha}(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}}) - l(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}})}{1 - \frac{k^4}{g^4}(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}})}$

vnde si tubus BC infra penitus sit apertus, seu $\frac{k^4}{g^4} = 1$ erit $v = a + \frac{g}{\alpha}(e^{\frac{\alpha b}{g}} - 1) - l(e^{\frac{\alpha b}{g}} - 1)$

55. Si ergo tubus BC sit tam gracilis, vt sit $g = \alpha l$, aqua in CC maiori celeritate non effluet, quam tubo remoto in BB efflueret. Atque si tubus BC adhuc sit gracilior, seu $g < \alpha l$, puta $g = \frac{1}{2}\alpha l$, fiet

$$v = a - \tfrac{1}{2} l (e^{\frac{2b}{l}} - 1)$$

et si altitudo b valde sit parua prae l, erit

$$v = a - b - \frac{bb}{l},$$

nisi ergo sit $a > b + \frac{bb}{l}$, aqua plane non effluet, hoc est nisi sit $a > b$.

56. Tubus igitur BC tam gracilis esse potest, vt frictio effluxum aquae per eius orificium CC penitus arceat, atque hinc commodissime valor literae α per experimenta explorari poterit. Infigatur enim vasi satis amplo AB, in quo aqua altitudinem $AB = a$ non nimis magnam occupat, tubus, vt vocari solet, capillaris, cuius amplitudine existente $= gg$, ponatur $g = \frac{1}{n}\alpha l$, et cum sit $v = a - \frac{(n-1)}{n} l (e^{\frac{nb}{l}} - 1) = a - (n-1)b$;

pono

pono hunc tubum initio tam fuiſſe longum, vt nulla aqua effluеret; deinde eius longitudo ſucceſſiue diminuatur, donec aqua effluere incipiat: qua longitudine notata, quae ſit $=b$, cum ſit $a-(n-1)b=0$, erit $n=\frac{a+b}{b}$; ideoque $\alpha=\frac{a+b}{b}\cdot\frac{g}{l}$.

57. Idem experimentum etiam ita inſtitui poteſt, vt longitudo tubi capillaris BC data aſſumatur, quae autem tanta ſit, vt ſi minimum aquae in vas ſuperius infundatur, nihil effluat; tum vero continuo augeatur altitudo aquae in vaſe eousque, donec aqua per tubulum capillarem effluere incipiat. Quod cum euenerit, notetur iſta altitudo $=a$, et quia tam longitudo tubuli b, quam eius amplitudo gg, iam cognita ponitur, elicietur vt ante $\alpha=\frac{a+b}{b}\cdot\frac{g}{l}$.

58. Perſpicuum autem eſt, tubulum, quo vti volumus, tam arctum eſſe debere, vt ſit $g<\alpha l$; ſi enim fuerit $g>\alpha l$, hic caſus numquam vſu veniet, vt effluxus aquae impediatur. Quodſi ergo ſit, vti ſuſpicari licuit, $\alpha=\frac{1}{4000}$, ob $l=30$ ped. deberet eſſe $g>\frac{3}{400}$ ped. ſeu $g<0,0075$ ped. ſicque diameter tubuli minor eſſe deberet, quam $\frac{85}{10000}$ ped. ſeu quam $\frac{1}{118}$ ped. Hinc limes, infra quem diameter tubuli capi deberet, eſſet circiter vnius lineae.

59. Si fuerit $g=\alpha l$, ſeu $g<\alpha l$, et $a=0$, tum ſi eiusmodi tubulus, cuiuscunque fuerit longitudinis, aqua impleatur, nihil ex eo effluet, etiamſi in ſitu verticali detineatur. Hinc cum l ſit longitudo 30 pedum, facile per experimenta valor litterae α explorari poterit. Parentur ſcilicet plures tubuli, quorum amplitudines

nes gg sint diuersae, lique aqua repleantur; tum ex amplioribus quidem aqua effluet, ex arctioribus vero secus; tantum igitur opus est, vt eius tubuli, qui aquam non amplius eiicit, amplitudo gg mensuretur, eritque tum $\alpha = \frac{g}{l}$. Hic autem effluxus verus spectari debet, quo aqua continuo tractu effluit; si enim guttatim tantum decidit, idem erit, ac si aqua non efflueret. Cum enim frictio demum in vero motu cernatur, quamdiu aqua quiescit, ob grauitatem guttae sensim auellentur ac decident, id quod frictio impedire non valet.

60. Patet ergo gracilitatem huiusmodi tubulorum, qui aquam contentam, etiamsi vtrinque sint aperti, non effluere sinunt, a pondere atmosphaerae l pendere, quoniam hoc euenit, si $g < \alpha l$. Hinc videmus, in vacuo, vbi $l = 0$, istos tubulos aquam omnino effundere, nisi quatenus, ob naturam, quae tubulis capillaribus propria est, aqua in iis ad certam altitudinem retineatur, reliqua autem aqua effluet in vacuo, quae in aere guttatim tantum decidebat.

61. Generatim autem intelligitur, ob pressionem atmosphaerae effluxum aquae semper retardari, et quidem frictionem huius retardationis esse causam: vidimus enim (54), quo minor sit pressio atmosphaerae l, eo maiori celeritate aquam exilire. Quodsi ergo a caussa quacunque pressio atmosphaerae imminuatur, aqua velocius ex vase effluet; quam propterea causam esse existimo, quod ab electricitate effluxus aquae accelerari obseruetur.

62. Prae-

62. Praeterire hic nequeo phaenomenon, explicatu alias facillimum, quod scilicet, si vas superius sit infinite angustum, seu eius amplitudo ff plane euanescat, ita vt tubus BC supra omnino sit clausus, aqua per orificium CC non effluat, nisi tubus fuerit vehementer longus. Nam hoc phaenomenum, neglecta frictione, ex theoria non sequitur, cum valor ipsius v non euanescat, etiamsi ponatur $f=0$.

63. Frictione autem in computum ducta, cum, ob $f=0$, fiat $\mathfrak{A}=0$, erit fractionis, quae valorem ipsius v praebet, numerator $= Bg - l = (1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}})\frac{g}{\alpha} - l$, ad denominatorem enim attendi non est opus, qui fractionem $\frac{k^4}{f^4}=f$ inuolueret, quem §. 45. omisimus. Ex numeratore autem intelligitur, quoties fuerit $1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}} < \frac{\alpha l}{g}$, nullum effluxum locum habere posse. Hoc ergo euenit, si $e^{\frac{-\alpha b}{g}} > 1 - \frac{\alpha l}{g}$, seu $1 - \frac{\alpha b}{g} + \frac{\alpha^2 b^2}{2g^2} - \frac{\alpha^3 b^3}{6g^3}$ etc. $< 1 - \frac{\alpha l}{g}$, ideoque, si $l > b - \frac{\alpha bb}{2g} + \frac{\alpha^2 b^3}{6gg}$ etc. Vel aqua non effluet, quoties erit $\frac{\alpha b}{g} < -\log.(1 - \frac{\alpha l}{g})$, seu $b < l + \frac{\alpha ll}{2g} + \frac{\alpha^2 l^3}{3gg} + \frac{\alpha^3 l^4}{4g^3} +$ etc. Nisi ergo longitudo tubi b hoc valore fuerit maior, aqua effluere nequit.

64. Videamus autem pro casu quodam determinato, quantus futurus sit effectus frictionis, posito valore $\alpha = \frac{1}{4000}$, qui a veritate non multum abhorrere videtur. Sit ergo vasis supremi amplissimi altitudo $AB = a = \frac{1}{3}$ ped. longitudo tubi annexi $BC = b = 4$ pedum, eius amplitudo $gg = \frac{1}{2500}$ ped. seu $g = \frac{1}{50}$ ped. et hic tubus infra plane sit apertus, vt fiat $kk = gg$; hinc

ſin autem amplior eſſet, tanquam pars vaſis ſupremi ſpectari poſſet, ſicque pariter ad caſum primum reuocaretur. Quare ſi phaenomena, quae huic caſui ſunt propria, euoluere velimus, tubum medium BC multo arctiorem ſtatui conueniet, quam vel vas ſuperius, vel tubum infimum CD. Experimentis autem conſtat, ob gracilitatem huiusmodi meatus medii BC celeritatem effluxus non mediocriter imminui, vnde huius diminutionis cauſa aperte frictioni eſt tribuenda, cum ſublata frictione amplitudo huius tubi gg celeritatem effluxus non afficeret.

70. At ſi amplitudo tubi BC multo minor eſt, quam ſuperioris et inferioris, euidens eſt, venam aquae, quae ex vaſe ſuperiori in eum intrat, iam ante contrahi, ſimilique modo, cum inde in tubum ampliorem CD egreditur, etiam nunc poſt egreſſum contractiorem manere; ſicque aqua perinde mouebitur, ac ſi per tubum figurae $\beta BBCC\gamma$ transflueret, ita vt tam vas ſuperius, quam tubus inferior, ex aliqua parte coarctari ſit cenſendus. Quae circumſtantia in calculum inducetur, ſi longitudo tubi gracilioris BC aliquanto maior aeſtimetur, quam reuera eſt; atque tantumdem de altitudine tuborum contiguorum dematur.

71. Aſſumam ergo, hanc mutationem in deſignatione altitudinum a,b,c iam eſſe factam, ita vt quantitas b aliquanto maior, a vero et c aliquanto minores ſint, quam re vera deprehenduntur. Hinc ergo altitudo b eo maior eſt cenſenda, quo minor fuerit amplitudo huius tubi, prae amplitudine tam ſuperioris, quam inferioris. Hanc ob rem, ſi tubus BC fuerit arctiſſimus, ſeu

feu gg minimum, etiamfi eius altitudo BC fit minima, tamen litterae b valor notabilis tribui debebit; ac fi BC quafi euanefcat, quod euenit, fi fundus vafis fuperioris foramine exiguo fuerit pertufus, nihilominus in calculo littera b modicum valorem fortietur.

72. Sit igitur amplitudo tubuli BC quafi euanefcens, feu g fere nihilo aequalis, ita vt valor ipfius b mediocrem nancifcatur magnitudinem, etiamfi forte ipfa altitudo BC fit minima; eritque $\frac{b}{g}$ numerus admodum magnus, ex quo valor ipfius $\mathfrak{B} = e^{-\frac{\alpha b}{g}}$ in fractionem abibit vnitate multo minorem, ita vt fi effet $g = 0$, omnino fuerit $\mathfrak{B} = 0$. Praeterea vero euadet $\mathfrak{G} = \frac{k^4}{g^4}$ quantitas maxima. Quoniam vero amplitudines ff et hh non admodum paruae ftatuuntur, erit $\mathfrak{A} = 1 - \frac{\alpha a}{f} + \frac{\alpha \alpha a a}{2ff}$; $\mathfrak{C} = 1 - \frac{\alpha c}{h} + \frac{\alpha^2 cc}{2hh}$ et $A = \frac{a}{f} - \frac{\alpha a a}{2ff}$ et $C = \frac{c}{h} + \frac{\alpha c c}{2hh}$.

73. Antequam autem ipfum effluxum definire queamus, videndum eft, vtrum aqua in hoc vafe continua manere, atque lateribus vafis adhaerere queat; quem in finem quaeramus ftatum compreffionis aquae in CC, qui altitudine R exprimatur, eritque $l = R\mathfrak{C} + Cb + \mathfrak{H}v - v$, vnde reperitur:

$$R = \frac{l - Cb + (1 - \mathfrak{H})v}{\mathfrak{C}}$$

quae quantitas fi fuerit negatiua, aqua continua non manet, ideoque effluxus calculo aduerfabitur.

 74. Cum

74. Cum igitur ſit poſito $\mathfrak{B}$ valde paruo, ideoque $B = \frac{1}{\alpha}$

$$v = \frac{\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \frac{g}{\alpha}\mathfrak{C} + Cb - l}{1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g} - \alpha C\mathfrak{h}} = \frac{\frac{g}{\alpha}\mathfrak{C} + Cb - l}{1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g}}$$

neglectis terminis minimis, erit

$$R = \frac{l - Cb}{\mathfrak{C}} + \frac{(1-\mathfrak{h})\frac{g}{\alpha}}{1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g}} - \frac{(1-\mathfrak{h})(l - Cb)}{\mathfrak{C}(1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g})}, \text{ ſiue}$$

$$R = \frac{(1-\mathfrak{h})\frac{g}{\alpha}}{1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g}} - \frac{(\mathfrak{C}\mathfrak{g} - \mathfrak{h})(l - Cb)}{\mathfrak{C}(1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g})}$$

At cum ſit proxime $\mathfrak{C} = 1$ et $Cb = c$, erit

$$v = \frac{\frac{g}{\alpha} + c - l}{1 - \mathfrak{g}} \text{ et } R = \frac{\frac{g}{\alpha}(1-\mathfrak{h}) - (\mathfrak{g} - \mathfrak{h})(l - c)}{1 - \mathfrak{g}}$$

75. Hinc primo patet, ſi fuerit $\mathfrak{g} = 1$ vel $\mathfrak{g} > 1$, effluxum nunquam ad ſtatum vniformitatis reduci, ideoque motum ex his formulis, quae ad hunc ſtatum ſunt accommodatae, definiri omnino non poſſe; ſtatim ergo ab initio calculus ita adornari debuiſſet, vt altitudo v, tanquam variabilis, eſſet introducta. Quodſi autem fuerit $\mathfrak{g} < 1$, ſeu $kk < gg$, effluxus quidem vniformis euadet, et aqua effluet, ſi fuerit $\frac{g}{\alpha} + c > l$, ſimulque $\frac{g}{\alpha}(1 - \mathfrak{h}) > (\mathfrak{g} - \mathfrak{h})(l - c)$; ſin autem ſit $\frac{g}{\alpha} + c = l$, ſeu $\frac{g}{\alpha} + c < l$, aqua plane non effluet, exiſtente, vti aſſumimus, $kk < gg$. At ſi ſit $\frac{g}{\alpha} + c > l$, puta $\frac{g}{\alpha} + c = l + \gamma$, effluxus ad vniformitatem perueniet, quoties fuerit $c < l$. Caſibus autem, quibus $c > l$, hoc multo magis eueniet, quia, ob $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$, tum valor ipſius R ſemper eſt affirmatiuus.

CASVS

CASVS III.

SI AQVA EX VASE CONSTANTER PLENO PER TVBVM HORIZONTALEM EFFLVIT.

76. Sit vasis amplitudo $AA = ff$, et altitudo $AB = a$, tubi vero horizontaliter infixi longitudo $BC = b$, amplitudo $BB = gg$, et lumen, per quod aqua effluit, $CC = kk$. Ponatur breuitatis ergo $\mathfrak{A} = e^{\frac{-\alpha b}{f}}$; $A = \frac{1-\mathfrak{A}}{\alpha}$; $\mathfrak{B} = e^{\frac{-\alpha b}{g}}$; $B = \frac{1-\mathfrak{B}}{\alpha}$; $\mathfrak{f} = \frac{k^4}{f^4}$; et $\mathfrak{g} = \frac{k^4}{g^4}$; erit altitudo celeritati effluxus debita, ob $\zeta = 90°$, et cos. $\zeta = 0$, denotante l altitudinem 30 pedum, Tab. VII Fig. 3.

$$v = \frac{A\mathfrak{B}f - (1 - \mathfrak{A}\mathfrak{B})l}{1 - \mathfrak{B}\mathfrak{f} - \alpha B\mathfrak{g}}$$

77. Si vas AB fuerit valde amplum, erit $\mathfrak{f} = 0$, $\mathfrak{A} = 1 - \frac{\alpha a}{f}$ et $A = \frac{a}{f} - \frac{\alpha a^2}{2ff}$, vnde celeritas effluxus debita erit altitudini

$$v = \frac{a\mathfrak{B}(1 - \frac{\alpha a}{2f}) - (1 - \mathfrak{B} + \frac{\alpha a}{f}\mathfrak{B})l}{1 - (1 - \mathfrak{B})\mathfrak{g}}$$

vnde cum $\mathfrak{g} = \frac{k^4}{g^4}$ vnitatem superare nequeat, denominator semper erit quantitas affirmatiua $> \mathfrak{B}\mathfrak{g}$: quod indicio est, aquae effluxum certo ad statum vniformitatis peruenire.

78. Vt autem aqua actu effluat, necesse est, vt sit $a\mathfrak{B}(1 - \frac{\alpha a}{2f}) > (1 - \mathfrak{B} + \frac{\alpha a}{f}\mathfrak{B})l$, seu $\mathfrak{B} > \frac{fl}{f(a+l) - \alpha a(\frac{1}{2}a + l)}$; ideoque $e^{\frac{-\alpha b}{g}} < 1 + \frac{a}{l} - \frac{\alpha a a}{2fl}$

$-\frac{\alpha aa}{2fl}-\frac{\alpha a}{f}$; hinc logarithmis sumendis oportet sit $\frac{\alpha b}{g} < \log.(1+\frac{a}{l}) - \frac{\alpha a(a+2f)}{2f(a+l)}$, vbi log. $(1+\frac{a}{l})$ denotat logarithmum hyperbolicum numeri $1+\frac{a}{l}$. Ergo effluxus cessabit si sit $b > \frac{g}{\alpha}\log.(1+\frac{a}{l}) - \frac{ag(a+2f)}{2f(a+l)}$.

79. Quo longior ergo fuerit tubus horizontalis BC, eo lentius aqua effluet, atque eius longitudo eousque excrescere potest, vt aqua per eum plane non effluat; quod scilicet eueniet, si fuerit $b > \frac{g}{\alpha}\log.(1+\frac{a}{l}) - \frac{ag(a+2f)}{2f(a+l)}$. Hoc autem intelligendum est, si foramen CC in parte superiori extremitatis tubi BC fiat. Si enim esset in parte inferiori, ob ipsam aquae grauitatem in tubo horizontali, quam in calculo non sum contemplatus, vtique effluueret.

80. Si altitudo a multo, sit minor, quam l, erit proxime log $(1+\frac{a}{l}) = \frac{a}{l}$. Cum primum ergo longitudo tubi b superauerit hanc quantitatem $\frac{g}{\alpha}\frac{a}{l} - \frac{ag(a+2f)}{2f(a+l)}$, effluxus aquae per orificium CC cessabit. Et quia terminus secundus minimus est respectu primi, aqua non amplius effluet, quando fuerit $b > \frac{g}{\alpha}\frac{a}{l}$; Hinc vt aqua effluat oportet sit $b < \frac{g}{\alpha}\frac{a}{l}$.

81. Si ergo altitudo vasis $AB = a$ fuerit vnius pedis, ob $l = 30$ ped. effluxus aquae coercebitur, si tubi BC longitudo maior sit, quam $\frac{g}{30\alpha}$. Hinc nouus colligitur modus valorem litterae α determinandi: cum enim per experimenta explorata fuerit longitudo tubi horizontalis b, cuius amplitudo gg sit nota, vbi effluxus cessat, erit $\alpha = \frac{g}{b}\frac{a}{l}$.

82. Hu-

82. Huiusmodi ergo experimenta inſtitui poterunt tubis non adeo anguſtis, vti modo ante expoſito, vnde hic modus anteferri videtur. Cum enim tubi arctiſſimi, qui capillares vocari ſolent, ſingularibus proprietatibus ſint praediti, ſemper dubium relinqueretur, vtrum, ob has proprietates, effluxus aquae per huiusmodi tubos non peculiarem patiatur perturbationem, qua valor ipſius α inde collectus incertus redderetur.

83. Vt exemplum huiusmodi experimentorum exhibeam, ponamus eſſe vas AAB ampliſſimum, tubi vero horizontalis BC longitudinem eſſe $b = 2$ pedum, et amplitudinem $gg = \frac{1}{625}$ pedis quadrati, ideoque $g = \frac{1}{25}$ ped. lumen autem eius kk tam eſſe exiguum, vt $\mathfrak{g} = \frac{k^4}{g^4}$ pro nihilo haberi poſſit Hinc ob vas AAB ampliſſimum, negligi poterit fractio $\frac{\alpha a}{f}$, et habebitur $\mathfrak{B} = e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 1 - \frac{1}{80}$, ſumto $\alpha = \frac{1}{4000}$. Atque obtinebitur $v = a - \frac{a-30}{80} = \frac{79a-30}{80}$. Vt igitur aqua hoc caſu actu effluat, neceſſe eſt, vt ſit $a > \frac{30}{79}$ pedis.

84. Si poſuiſſemus $\alpha = \frac{1}{6000}$, prodiiſſet $\mathfrak{B} = 1 - \frac{1}{120}$, et $v = a - \frac{a-30}{120} = \frac{119a-30}{120}$, aqua ergo effluere inciperet ſtatim atque aquae in vaſe AB altitudo a ſuperaret $\frac{30}{119}$ ped. Cum igitur poſito α incognito ſit $\mathfrak{B} = 1 - 50\alpha$, et $v = a(1-50\alpha) - 1500\alpha$, augeatur ſenſim altitudo aquae in vaſe AB, donec aqua per orificium CC effluere incipiat, et notetur tum altitudo $AB = a$ in pedibus, erit $\alpha = \frac{a}{50a+1500}$.

85. Si idem experimentum alio tubo horizontali inſtituatur, cuius tam longitudo b, quam amplitudo gg,

sit quaecunque, verumtamen eiusmodi, vt $\frac{\alpha b}{g}$ maneat fractio admodum parua, sitque satis exacte $\mathfrak{B} = 1 - \frac{\alpha b}{g}$, et $v = a(1 - \frac{\alpha b}{g}) - \frac{\alpha b l}{g}$, atque altitudo aquae in vase AB notetur, vbi aqua per orificium CC primum effluere incipit, inde colligetur $\alpha = \frac{a g}{b(a+l)}$ hicque certissimus videtur modus, verum valorem ipsius α explorandi.

86 Spectemus autem valorem ipsius α, tanquam cognitum, scilicet $\alpha = \frac{1}{4000}$, et videamus in aliquo exemplo, quanta debilitatio in fontibus salientibus ob frictionem oriri debeat. Sit igitur vas AB admodum altum, scilicet $a = 100$ ped. eiusque amplitudo $ff = 1$ pes quadratus, seu $f = 1$. Tum sit amplitudo tubi horizontalis $gg = \frac{1}{100}$, seu $g = \frac{1}{10}$, eiusque longitudo $b = 100$; et lumen $kk = \frac{1}{10000}$: erit $\mathfrak{f} = 0$, et $\mathfrak{g} = \frac{1}{10000}$. tum vero $\mathfrak{A} = 1 - \frac{1}{40} + \frac{1}{2.1600} -$ etc. seu $\mathfrak{A} = 0,97531$, et $\mathfrak{B} = 0,77880$, et $A = 98,760$.

87. His positis valoribus, prodibit altitudo celeritati effluxus debita:

$$v = 69,701 \text{ ped.}$$

Quodsi ergo lumen in dorso tubi circa cc constituatur, vt per id aqua verticaliter erumpat, fons saliens tantum ad altitudinem $69\frac{7}{10}$ pedum assurget, ideoque 30 pedibus deficiet ab altitudine aquae in vase. Verum hic saltus etiam ob resistentiam aëris aliquantum diminuetur, ita vt fons ne quidem ad hanc altitudinem $69\frac{7}{10}$ pedum sit ascensurus.

CASVS

CASVS IV.

SI AQVA EX VASE CONSTANTER PLENO PER TVBVM CYLINDRICVM INCLINATVM DEFLVAT.

88. Sit vasis amplitudo $AA = ff$, eiusque altitudo $AB = a$. Tubi inclinati longitudo $BC = b$, amplitudo $BB = gg$, et angulus, quo ad rectam verticalem inclinatur, $= \zeta$, ita vt $\cos. \zeta$ exprimat sinum inclinationis eius ad horizontem; effluat vero aqua per lumen $CC = kk$, quod prae ff sit minimum, vt sit $\frac{k^4}{f^4} = \mathfrak{f} = 0$. Tab. VII. Fig. 4.

Porro ponatur $\frac{k^4}{g^4} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{A} = e^{\frac{-\alpha a}{f}}$, $A = \frac{1 - \mathfrak{A}}{\alpha}$; $\mathfrak{B} = e^{\frac{-\alpha b}{g}}$, et $B = \frac{1 - \mathfrak{B}}{\alpha}$; quibus positis erit altitudo celeritati, qua aqua per CC effluit, debita

$$v = \frac{A\mathfrak{B}f + Bg\cos.\zeta - (1 - \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,l}{1 - \alpha B \mathfrak{g}}$$

89. Cum altitudo vasis $AB = a$ non sit admodum magna, et eius amplitudo ff ingens erit $Af = a$, et $\mathfrak{A} = 1$, proxime, vnde habebitur

$$v = \frac{a\mathfrak{B} + \frac{1}{\alpha}(1 - \mathfrak{B})g\cos.\zeta - (1 - \mathfrak{B})\,l}{1 - (1 - \mathfrak{B})\,\mathfrak{g}}.$$

vbi, cum $\mathfrak{g}$ vnitatem superare nequeat, et sit $\mathfrak{B} < 1$, denominator erit quantitas positiua; vnde motus ad vniformitatem perueniet. At si numerator fuerit vel $= 0$, vel quantitas negatiua, aqua plane non effluet, sed in quiete perseuerabit.

90. Si altitudo vasis $AB = a$ sit quam minima, patet effluxum non dari, nisi sit $g \cos. \zeta < \alpha l$, seu, nisi sinus decliuitatis tubi maior sit, quam $\frac{\alpha l}{g}$. Quodsi ergo ponatur $g = n\alpha l = 0{,}0075.n$ pedum, vt aqua per tubum BC defluat, necesse est, vt sit $\cos. \zeta > \frac{1}{n}$. Si ergo sit vel $n = 1$, vel $n < 1$, aqua per istiusmodi tubum plane non defluet; quare, vt aqua defluat, necesse est, vt sit $n > 1$, seu $g > \alpha l$, ac tum sinus decliuitatis maior esse debet, quam $\frac{1}{n}$.

91. Hinc pro fluminibus decliuitas aluei assignari potest, vt aqua decurrat, ita vt si decliuitas minor esset, aqua esset stagnatura. Pendet autem haec decliuitas a littera g, qua profunditas fluuii indicatur. Vt igitur hanc decliuitatem pro quauis fluminis profunditate definiamus, sit pro distantia mille pedum altitudo, per quam alueus subsidit, $= z$ ped. eritque $\frac{z}{1000}$, sinus decliuitatis. Quare si fluuii profunditas sit g pedum, ob $g = \frac{3}{400} n$, et $n = \frac{400}{3} g$, fiet $\frac{z}{1000} > \frac{3}{400g}$: vt ergo aqua in alueo defluat, oportet sit $z > \frac{30}{4g}$, seu $z > \frac{1000\alpha l}{g}$.

92. Pro quauis ergo fluminis profunditate g definire poterimus decliuitatem aluei, quae distantiae mille pedum conueniat, vbi aqua primum fluxum consequatur: ita vt, si decliuitas esset minor, aqua esset stagnatura, vti sequens tabella habet.

Pro-

Profunditas fluminis	Decliuitas ad dist. 1000 ped.	Profunditas fluminis	Decliuitas ad dist 1000 ped.
0, 5 ped.	15, 00 ped.	5 ped.	1, 50 ped.
1, 0	7, 50	6	1, 25
1, 5	5, 00	7	1, 07
2, 0	3, 75	8	0, 94
2, 5	3, 00	9	0, 83
3, 0	2, 50	10	0, 75
3, 5	2, 14	11	0, 68
4, 0	1, 87	12	0, 62
4, 5	1, 67	13	0, 58
5, 0	1, 50	14	0, 53½
		15	0, 50

93. Si ergo decliuitas pro data profunditate maior fuerit, quam haec tabula indicat, aqua in alueo decurret; eiusque celeritas proxime innotescet, si ponatur $g = 1$, vnde fiet:

$$v = a + (e^{\frac{\alpha b}{g}} - 1)(\tfrac{1}{\alpha} g \operatorname{cos.} \zeta - l)$$

Patet ergo, manente eadem decliuitate, ita tamen, vt $\operatorname{cos.} \zeta > \frac{\alpha l}{g}$, celeritatem fluminis eo fore maiorem, quo longior fuerit fluuii tractus. Notari etiam conuenit, cursum fluuii eiusdem accelerari, si pondus atmosphaerae diminuatur.

94. Quoniam ante (86, 87) casum euoluimus, quo aqua ex vase, centum pedes alto, ad distantiam centum pedum per tubum horizontalem, cuius amplitudo $gg = \frac{1}{100}$ ped. erat deriuata; ponamus nunc eiusdem vasis altitudinem esse minimam, ex eoque aquam

der tubum, angulo semirecto, ad horizontem inclinatum, ad eundem locum C deduci, esseque vt ante $gg = \frac{1}{100}$, seu $g = \frac{1}{10}$ ped. erit cos. $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = 100\sqrt{2} = 14, 14$ ped.

95. Cum igitur sit $\frac{ab}{g} = 0,3536$, erit $\mathfrak{B} = 0,7021$. Statuamus, vt ibi orificium kk minimum, et ob a quantitatem minimam, erit

$$v = 0,2979\left(\frac{100}{\sqrt{2}} - 30\right) = 75,309 \text{ pedum.}$$

Quae quantitas cum sit maior, quam casu praecedente, $5\frac{2}{3}$ pedibus, sequitur aquam hoc casu ad altitudinem maiorem esse ascensuram, quam casu praecedente.

CASVS V.

SI AQVA EX VASE *AB* VEL PER TVBVM CYLINDRICVM INCLINATVM *BE*, VEL PER INFLEXVM *bcE* DEFLVAT ET INDE PER TVBVM VERTICALEM *CD* ERVMPAT.

96. Sit vasis AB altitudo a minima, amplitudo vero ff maxima: tum, quia hic duos casus euoluere constitui, sit pro vtroque casu amplitudo tubi deferentis $BB = bb = cc = gg$, tubuli verticalis CD altitudo $= c$, et amplitudo $CC = bb$, et lumen in $DD = kk$. Tum pro casu priori sit longitudo tubi $BE = b$, eiusque ad verticalem inclinatio $= \zeta$; erit pro casu altero $bc = b\,\text{cos.}\,\zeta$, et $cE = b\,\text{sin.}\,\zeta$. Ponatur autem $\frac{k^4}{g^4} = \mathfrak{G}$ et $\frac{k^4}{b^4} = \mathfrak{H}$.

97. His pofitis pro primo cafu habebimus:

$\mathfrak{A}=1$; $A=\frac{a}{f}$; $\mathfrak{B}=e^{\frac{-\alpha b}{g}}$, $B=\frac{1-\mathfrak{B}}{\alpha}$; $\mathfrak{C}=e^{\frac{-\alpha c}{b}}$ et $C=\frac{1-\mathfrak{C}}{\alpha}$; vnde celeritas effluxus debita erit altitudinis v, vt fit

$$v=\frac{a\mathfrak{B}\mathfrak{C}+\frac{1}{\alpha}(1-\mathfrak{B})\mathfrak{C}g\cos.\zeta-\frac{1}{\alpha}(1-\mathfrak{C})b-(1-\mathfrak{B}\mathfrak{C})l}{1-(1-\mathfrak{B})\mathfrak{C}g-(1-\mathfrak{C})\mathfrak{h}}$$

feu fubftitutis valoribus affumtis:

$$v=\frac{e^{\frac{-\alpha b}{g}-\frac{\alpha c}{b}}a+\frac{1}{\alpha}(1-e^{\frac{-\alpha b}{g}})e^{\frac{\alpha b}{b}}g\cos.\zeta-\frac{1}{\alpha}(1-e^{\frac{-\alpha c}{b}})b-(1-e^{\frac{-\alpha b}{g}-\frac{c}{b}})l}{1-(1-e^{\frac{-\alpha b}{g}})e^{\frac{-\alpha c}{b}}\mathfrak{g}-(1-e^{\frac{-\alpha c}{b}})\mathfrak{h}}$$

fiue

$$v=\frac{e^{\frac{-\alpha b}{g}-\frac{\alpha c}{b}}(a-\frac{1}{\alpha}g\cos.\zeta+l)+e^{\frac{-\alpha c}{b}}(\frac{1}{\alpha}g\cos.\zeta+\frac{1}{\alpha}b)-\frac{1}{\alpha}b-l}{1-\mathfrak{h}-e^{\frac{-\alpha c}{b}}(\mathfrak{g}-\mathfrak{h})+e^{\frac{-\alpha b}{g}-\frac{\alpha c}{b}}\mathfrak{g}}.$$

98. Pro altero vero cafu, ad §. 39. relato, habebimus:

$\mathfrak{A}=1$; $Af=a$; $\mathfrak{B}=e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta}{g}}$; $\cos\zeta=1$; $g=g$; $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$; et $B=\frac{1-\mathfrak{B}}{\alpha}$

Tum $\mathfrak{C}=e^{\frac{-\alpha b\sin.\zeta}{g}}$; $\cos.\eta=0$; $b=g$; $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$; et $C=\frac{1-\mathfrak{C}}{\alpha}$;

atque $\mathfrak{D}=e^{\frac{-\alpha e}{b}}$; $\cos.\theta=-1$; $i=b$; $\mathfrak{i}=\mathfrak{h}$; et $D=\frac{1-\mathfrak{D}}{\alpha}$; quibus valoribus fubftitutis prodibit altitudo celeritati effluxus debita:

$$v=\frac{(l+a)e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta}{g}-\frac{\alpha b\sin.\zeta}{g}-\frac{\alpha c}{b}}+\frac{1}{\alpha}(1-e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta}{g}})e^{-\frac{\alpha b\sin.\zeta}{g}-\frac{\alpha c}{b}}g-\frac{1}{\alpha}(1-e^{\frac{-\alpha e}{b}})b-l}{1-(1-e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta}{g}})e^{\frac{-\alpha b\sin.\zeta}{g}-\frac{\alpha c}{b}}\mathfrak{g}-(1-e^{\frac{-\alpha b\sin.\zeta}{g}})e^{-\frac{\alpha c}{b}}\mathfrak{g}-(1-e^{\frac{-\alpha c}{b}})\mathfrak{h}}$$

fiue

fiue

$$v=\frac{e^{\frac{-\alpha b\cos\zeta-\alpha b\sin\zeta}{g}-\frac{\alpha c}{b}}(a-\frac{1}{\alpha}g+l)+e^{\frac{-\alpha b\sin\zeta}{g}-\frac{\alpha c}{b}}\frac{1}{\alpha}g+e^{\frac{-\alpha c}{b}}\frac{1}{\alpha}b-\frac{1}{\alpha}h-l}{1-\mathfrak{h}-e^{\frac{-\alpha c}{b}}(\mathfrak{g}-\mathfrak{h})+e^{\frac{-\alpha b\cos\zeta}{g}-\frac{\alpha b\sin\zeta}{g}-\frac{\alpha c}{b}}}$$

99. Notandum autem eft, quantumuis altitudo tubuli $CD=c$ fuerit exigua, tamen eam ob rationes ante expofitas maiorem capi debere, et quo minor fuerit eius amplitudo bb, eo magis altitudo vera c augeri debebit. Etiamfi ergo tubulus CD fuerit breviffimus, feu quafi foraminulum per laminam pertufum, fractio $\frac{\alpha c}{b}$ eo maiorem habebit valorem, quo minus fuerit foraminulum, feu quo minus fuerit b. Cum igitur hoc cafu $e^{\frac{-\alpha c}{b}}$ fiat numerus valde paruus, perfpicuum eft, foraminulum tam paruum fieri poffe, vt aqua per id plane non effluat.

100. Si tubulus DC in DD penitus fit apertus, erit $\mathfrak{h}=1$ et cafu priori habebitur:

$$v=\frac{e^{\frac{-\alpha b}{g}}(a+l-\frac{1}{\alpha}g\operatorname{cof.}\zeta)+\frac{1}{\alpha}(g\operatorname{cof.}\zeta+b)-e^{\frac{\alpha c}{b}}(l+\frac{1}{\alpha}b)}{1+(e^{\frac{-\alpha b}{g}}-1)\mathfrak{g}}$$

Pro cafu autem pofteriori habebitur:

$$v=\frac{e^{\frac{-\alpha b\cos\zeta-\alpha b\sin\zeta}{g}}(a+l-\frac{1}{\alpha}g)+\frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\alpha b\sin\zeta}{g}}g+\frac{1}{\alpha}b-e^{\frac{\alpha c}{b}}(l+\frac{1}{\alpha}b)}{1+(e^{\frac{-\alpha b\cos\zeta-\alpha b\sin\zeta}{g}}-1)\mathfrak{g}}$$

quoties ergo eft $\mathfrak{g}<1$, aquae motus femper ad ftatum vniformitatis pertinget.

101. Ca-

101. Casus prior potissimum inseruit retardationi aquae per aquaeductus a frictione ortae determinandae. Cuius motus, vt exemplum exhibeamus, sit altitudo aquae in receptaculo a valde parua, longitudo aquaeductus $BE = b = 2000$ ped. amplitudo $gg = \frac{16}{25}$, seu $g = \frac{4}{5}$ ped. altitudo bc, seu $b \cos \zeta = 150$ ped. foramen autem kk tam paruum, vt $g = \frac{k^4}{g^4}$ pro nihilo haberi possit. Denique sit tubuli CD altitudo $c = \frac{1}{10}$ ped. et $h = \frac{4}{100}$ ped.

102. His positis sumto $\alpha = \frac{1}{4000}$ erit $\frac{\alpha b}{g} = \frac{5}{8}$, ideoque $e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 0,535255$ et $e^{\frac{\alpha c}{h}} = 1,002503$. Hinc ergo erit

$$v = \frac{5}{8} a + 97,42124 \text{ pedum.}$$

Hoc ergo casu, dummodo fuerit altitudo vasis AB sex pedum, aqua per lumen DD exsiliet ad altitudinem 100 pedum, sicque frictio 50 pedes a iactu absumit.

103. Si reliquis manentibus iisdem, sit $gg = 1$ et $g = 1$, erit $\frac{\alpha b}{g} = \frac{1}{2}$ et $e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 0,606531$, hincque reperitur

$$v = \frac{8}{5} a + 106,24 \text{ pedum,}$$

ita vt aqua ad nouem pedes altius sit ascensura, quam casu praecedente, ob auctam tubi BE amplitudinem. Sin autem amplitudo tubi diminuatur, vt sit $gg = \frac{9}{25}$, seu $g = \frac{3}{5}$ ped ob $\frac{\alpha b}{g} = \frac{5}{6}$ erit $e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 0,43460$, ideoque altitudo celeritati effluxus debita

$$v = \tfrac{1}{3}a + 84,810 \text{ pedum}$$

sicque vltra 12 pedes deficit ab altitudine §. praecedentis. At si sit $gg = \frac{1}{4}$, seu $g = \frac{1}{2}$, vt habeatur $\frac{\alpha b}{g} = 1$, erit $e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 0,36788$; ideoque

$$v = \tfrac{1}{3}a + 75,854 \text{ pedum};$$

altitudo ergo iactus nunc 9 pedibus minor est, quam ante.

104. Patet ergo in fontibus salientibus altitudinem iactus non solum ab altitudine receptaculi, seu castelli, pendere, vt vulgo Auctores hydraulici perhibent, sed etiam potissimum ab amplitudine et longitudine canalium, per quos aqua e castello ad fontes salientes deriuatur. Quo ampliores enim et breuiores fuerint canales, eo propius fons saliens altitudinem castelli attingit, arctioribus autem ac nimis longis canalibus adhibendis fieri adeo potest, vt aqua plane ad nullam altitudinem ascendat. Causa igitur huius debilitationis est frictio, littera α hic contenta, cuius valorem hic posui $\alpha = \frac{1}{4000}$, consultis autem quibusdam experimentis, videtur poni debere $\alpha = \frac{1}{4540}$.

APPEN-

APPENDIX

DE FONTIBVS SALIENTIBVS.

105. Hinc ergo ſatis accurate definiri poterit altitudo, ad quam aqua in fontibus ſalientibus ſurſum proiicietur. Ponatur enim primo altitudo aquae in caſtello, ſeu $AB = a$, tam parua, vt prae ipſius eleuatione ſupra orificium fontis DD pro nihilo reputari poſſit. Tum vero tubulus CD neque nimis longus, neque nimis anguſtus capiatur, ita vt $\frac{\alpha c}{b}$ ſit fractio quam minima; huc enim plerumque redeunt omnes caſus fontium ſalientium. Quibus poſitis erit altitudo debita celeritati, qua aqua per orificium DD exſiliet, Tab. VII Fig. 5.

$$v = \frac{g\cos.\zeta}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}}\right) - l\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}}\right)$$

106. In hac expreſſione denotat l altitudinem columnae aquae preſſioni atmoſphaerae aequiponderantis, eritque ergo propemodum $l = 30$ pedum. Deinde b exprimit longitudinem totius aquaeductus BE, per quem aqua a caſtello vsque ad fontem DG deriuatur; qui ſi ponatur ſecundum lineam rectam diſpoſitus, vti fere fieri ſolet, erit $b\cos.\zeta$ altitudo aquae in caſtello ſupra fontem. Quare ſi haec altitudo CF dicatur $= q$, erit $\cos.\zeta = \frac{q}{b}$: ſicque erit $v = \left(\frac{g\,g}{\alpha\,b} - l\right)\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}}\right)$

107. Aſſumimus porro totum aquaeductum cylindricum, ita vt eius altitudo ſit vbique eadem; $= gg$;

 ſi

si ergo diameter huius aquae ductus sit $= d$, erit $gg = \frac{1}{4}\pi dd$, et $g = \frac{1}{2} d \sqrt{\pi}$. Cum ergo collegerim ex experimentis esse $\alpha = \frac{1}{4540}$, erit $\frac{g}{\alpha} = 2270 d \sqrt{\pi} = 4023 d$. Calculus ergo satis exacte se habebit, si posito canalis diametro $= d$, sumamus $\frac{g}{\alpha} = 4000 d$.

108. Cum igitur sit $v = \frac{g}{\alpha b}(q - \frac{\alpha b l}{g})(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}})$, ob

$$1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}} = \frac{\alpha b}{g} - \frac{\alpha^2 b^2}{2 g^2} + \frac{\alpha^3 b^3}{6 g^3} - \frac{\alpha^4 b^4}{24 g^4} - \text{etc.}$$

habebitur altitudo iactus verticalis:

$$v = (q - \frac{\alpha b l}{g})(1 - \frac{\alpha b}{2 g} + \frac{\alpha^2 b^2}{6 g^2} - \frac{\alpha^3 b^3}{24 g^3} + \text{etc.})$$

vbi est $\frac{\alpha b}{g} = \frac{b}{4000 d}$.

109. En ergo sequentem regulam pro altitudine iactus, in quouis fonte saliente inuenienda: *Diuidatur tota canalis longitudo per diametrum amplitudinis eiusdem canalis, et quotus ponatur $= n$, tum sit*

$$N = 1 - \frac{n}{2 \cdot 4000} + \frac{n^2}{6 \cdot 4000^2} - \frac{n^3}{24 \cdot 4000^3} + \frac{n^4}{120 \cdot 4000^4} - \text{etc.}$$

Tum sit q eleuatio aquae in castello supra fontem, eritque altitudo iactus

$$v = Nq - \frac{1}{400} Nn \text{ pedum.}$$

Vel posito $\frac{1}{400} Nn = M$, erit altitudo iactus in pedibus expressa $v = Nq - M$.

110. Ex dato ergo numero n, qui prodit, si longitudo canalis per eius diametrum diuidatur, colligantur valores litterarum N et M; tum prior numerus N multiplicetur per eleuationem aquae in castello supra fontem, quae altitudo in pedibus sit expressa, et ab hoc pro-

ducto

ducto ſubtrahatur numerus poſterior M, reſiduumque exhibebit altitudinem iactus in pedibus expreſſam.

111. Hoc autem modo prodibit non tam ipſa iactus altitudo, quam altitudo celeritati, qua aqua exſilit, debita; conſtat enim hanc altitudinem ob reſiſtentiam aëris inſuper aliquantum diminui, ita vt, ſi fons verticaliter exſiliat, eius altitudo aliquanto minor ſit futura, quam per regulam datam reperitur. Huius vero diminutionis, quae ex alio fonte originem trahit, hic nullam rationem habebo.

112. Quo igitur, quouis caſu oblato, altitudo iactus ob frictionem ſolam imminuta facilius colligi queat, conueniet tabulam conſtrui, quae pro quouis valore ipſius n, ſeu quoti ex diuiſione longitudinis canalis per eius diametrum orti, exhibeat valores litterarum N et M. His enim inuentis, ſi inſuper altitudo caſtelli ſupra orificium fontis q in calculum trahatur, ſine negotio altitudo iactus v inde colligetur, cum ſit

$$v = Nq - M \text{ pedum.}$$

TABVLA

exhibens valores litterarum N et M pro singulis valoribus litterae *n*.

n	N	M	*n*	N	M
100	0,9876	0,7407	2200	0,7692	12,6912
200	0,9756	1,4634	2300	0,7605	13,1185
300	0,9635	2,1678	2400	0,7519	13,5354
400	0,9516	2,8548	2500	0,7435	13,9419
500	0,9400	3,5250	2600	0,7353	14,3385
600	0,9286	4,1787	2700	0,7271	14,7250
700	0,9174	4,8162	2800	0,7191	15,1020
800	0,9064	5,4281	2900	0,7112	15,4698
900	0,8955	6,0444	3000	0,7035	15,8286
1000	0,8848	6,6357	3100	0,6958	16,1784
1100	0,8743	7,2129	3200	0,6883	16,5198
1200	0,8639	7,7754	3300	0,6809	16,8525
1300	0.8537	8,3239	3400	0,6738	17,1771
1400	0,8437	8,8590	3500	0,6664	17,4936
1500	0,8339	9,3810	3600	0,6593	17,8026
1600	0,8242	9,8901	3700	0,6523	18,1036
1700	0,8146	10,3866	3800	0,6455	18,3975
1800	0,8052	10,8708	3900	0,6387	18,683-
1900	0,7960	11,3431	4000	0,6321	18,9633
2000	0,7869	11,8038	4100	0,6255	19,2356
2100	0,7780	12,2530	4200	0,6191	19,5015

n	N	M	n	N	M
4300	0,6127	19,7605	6700	0,4852	24,3804
4400	0,6065	20,0136	6800	0,4808	24,5192
4500	0,6003	20,2600	6900	0,4765	24,6554
4600	0,5942	20,5005	7000	0,4721	24,7866
4700	0,5882	20,7351	7100	0,4679	24,9151
4800	0,5823	20,9640	7200	0,4638	25,0406
4900	0,5765	21,1869	7300	0,4597	25,1631
5000	0,5708	21,4044	7400	0,4556	25,2829
5100	0,5651	21,6164	7500	0,4515	25,3989
5200	0,5595	21,8234	7600	0,4475	25,5125
5300	0,5540	22,0254	7700	0,4430	25,6234
5400	0,5486	22,2224	7800	0,4398	25,7316
5500	0,5434	2,24145	7900	0,4360	25,8371
5600	0,5382	22,6017	8000	0,4323	25,9398
5700	0,5330	22,7844	8100	0,4286	26,0399
5800	0,5279	22,9627	8200	0,4250	26,1377
5900	0 5229	23,1366	8300	0,4214	26,2331
6000	0,5179	23,3058	8400	0,4179	26,3261
6100	0,5130	23,4709	8500	0,4144	26,4168
6200	0,5082	23,6321	8600	0,4109	26,5052
6300	0,5035	23,7894	8700	0,4075	26,5915
6400	0,4989	23,9428	8800	0,4041	26,6757
6500	0,4942	24,0924	8900	0,4008	26,7578
6600	0,4897	24,2381	9000	0,3976	26,8377

n	N	M	*n*	N	M
9100	0,3944	26,9156	26000	0,1536	29,9547
9200	0,3913	26,9917	27000	0,1479	29,9649
9300	0,3882	27,0660	28000	0,1427	29,9727
9400	0 3850	27,1385	29000	0,1378	29 9787
9500	0,3819	27,2094	30000	0,1332	29,9838
9600	0,3789	27,2782	31000	0,1290	29,9874
9700	0,3760	27,3454	32000	0,1250	29,9901
9800	0,3732	27,4110	33000	0,1212	29,9925
9900	0,3702	27,4750	34000	0,1176	29,9973
10000	0,3672	27,5373	35000	0,1143	29,9952
11000	0,3404	28,0821	36000	1,1111	29,9964
12000	0,3167	28,5063	37000	0,1081	29,9937
13000	0,2958	28,8363	38000	0,1053	29,9979
14000	0,2771	29,0940	39000	0,1025	29,9983
15000	0,2604	29,2944	40000	0,10 0	29,9987
16000	0,2454	29,4404	41000	0,0976	29,9990
17000	0,2319	29,5728	42000	0,0952	29,9992
18000	0,2197	29,6664	43000	0,0930	29,9994
19000	0,2086	29,7405	44000	0,0909	29,9995
20000	0,1986	29,7978	45000	0,0889	29,9996
21000	0,1895	29,8425	50000	0,0800	29,9999
22000	0,1811	29,8773	55000	0,0727	30 0000
23000	0,1734	29,9046	60000	0,0666	30,0000
24000	0,1663	29,9256	65000	0,0615	30,0000
25000	0,1597	29,9421	70000	0,0571	30,0000

n	N	M	*n*	N	M
75000	0,0533	30,0000	140000	0,0286	30
80000	0,0500	30,0000	150000	0,0267	30
85000	0,0470	30,0000	160000	0 0250	30
90000	0,0444	30,0000	170000	0,0235	30
95000	0,0421	30,0000	180000	0,0222	30
100000	0,0400	30,0000	190000	0,0211	30
110000	0,0364	30	200000	0,0200	30
120000	0,0333	30	300000	0,0133	30
130000	0,0308	30			

113. Non opus eſt, vt haec tabula vlterius continuetur; ſi enim fuerit n numerus maior, quam 50000, erit iuſte $N = \frac{4000}{n}$, et $M = 30$ ped. Quaecunque ergo fuerit diſtantia, ſeu longitudo, canalis, eiusque diameter, ex quoto n, qui ex diuiſione longitudinis per diametrum reſultat, ope huius tabulae facile excerpuntur valores N et M, quibus inuentis, ſi eleuatio aquae in caſtello ſupra fontem ponatur $= q$, erit altitudo fontis $v = Nq - M$ ped.

114. Si nulla eſſet frictio, altitudo fontis v aequalis eſſet altitudini caſtelli q, ſeu $v = q$. Vnde patet, ob frictionem hanc altitudinem q duplici modo diminui: primum enim multiplicari debet per N, qui eſt numerus vnitate minor; tum vero inſuper ab hoc producto ſubtrahi debet altitudo M, quae 30 pedes ſuperare nequit, atque haec poſtrema diminutio preſſioni

atmosphaerae debetur, quae si maior minorue esset, numeri M in eadem ratione augeri, vel diminui, deberent.

115. Hinc ergo statim elucet, si altitudo castelli q minor fuerit, quam $\frac{M}{N}$, aquam ex orificio DD non esse egressuram, sed eius motum a frictione penitus compesci. Ita si sit $n = 100000$, saliens fons non dabitur, nisi sit $q > \frac{3000}{4}$, seu $q > 750$ ped. Vicissim autem, si altitudo q detur, vt aqua saltem effluat, debet esse $\frac{M}{N} < q$; cum igitur crescente n valor $\frac{M}{N}$ crescat, hinc innotescet limes, infra quem valor ipsius n subsistere debet.

116. Si locus castelli vna cum loco fontis fit datus, et quaeratur is aquae ductus, quo fons ad maximam altitudinem assiliat; primo canalis a castello quantum fieri potest secundum lineam rectam dirigi debet; deinde vero desiderio potissimum satisfiet, si canali maxima tribuatur amplitudo, quam circumstantiae permittunt. Ex tabula enim apparet, altitudinem iactus inprimis ab amplitudine canalis pendere.

117. Quod quo exemplo perspiciatur, sit altitudo castelli $q = 130$ ped. et distantia eius a fonte $b = 25000$ ped. et pro variis canalis diametris altitudo iactus se ita habebit:

Diam. canalis	$1'$	$\frac{1'}{2}$	$\frac{1'}{3}$	$\frac{1'}{4}$	$\frac{1'}{5}$	$\frac{1'}{6}$
numerus n	2500	5000	7500	10000	12500	15000
N	0,7435	0,5708	0,4515	0,3672	0,3062	0,2604
M	13,941	21.404	25.399	27.537	28 660	29, 294
alt. iactus v	82, 71	52, 80	33, 29	20, 19	11, 19	4, 56

Si

Si ergo diameter canalis minor esset, quam $\frac{1}{[illegible]}$ ped. aqua plane non exsiliret.

118. Patet etiam aquam de loco valde remoto aduehi non posse, nisi iste locus admodum sit eleuatus: propterea quod canales non nimis amplos confici licet. Ita si aqua ex distantia vnius milliaris sit arcessenda, ita vt sit $b = 25000$, et canalium diameter sit $\frac{1}{4}$ pedis, erit $n = 100000$, hoc praestari nequit, nisi receptaculum vltra 750 pedes eleuatum sit supra locum fontis, Ponamus ergo hanc eleuationem esse $q = 1000$ ped. et aqua ex fonte non vltra altitudinem 10 pedum ascendet: sin esset $q = 2000$ ped. altitudo iactus prodiret 50 ped. et pro singulis millenis pedibus, quibus altitudo q augetur, altitudo saltus tantum quadragenis pedibus crescit.

119. Si atmosphaera nullam exerceret pressionem, quantitas M omitti deberet; atque hoc casu aqua per orificium DD erumperet, dummodo aqua in castello magis fuerit eleuata. Foret autem $v = Nq$, seu ob frictionem se haberet CG ad CF, vti numerus N ad vnitatem; at est $N < 1$, nisi $n = 0$, et praecipui valores ipsius N sequentibus valoribus ipsius n respondebunt:

$N =$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
$n =$	0	2400	3500	6300	11300	15700	19860	24000	28000	32000	36000

Hinc si sit $N = \frac{1}{\nu}$ et $\nu > 5$, erit $n = 4000\,\nu$.

120. Ob pressionem autem atmosphaerae altitudo fontis CG adhuc magis diminuitur, et ab altitudine iam imminuta Nq insuper subtrahi debet altitudo M, ita vt prodeat $v = Nq - M$ Ex tabula autem annexa patet, si fuerit quotus $\frac{b}{a} = n$, numerus maior quam 50000, fore $v = \frac{4000\,d}{b} q - 30$ pedum. Cum igitur pressio atmosphaerae sit variabilis, et altitudini mercurii in Barometro proportionalis, sequitur fontes salientes ad eo maiorem altitudinem ascendere debere, quo minus mercurius in Barometro fuerit eleuatus.

EXPLI-

EXPLICATIO EXPERIMENTI PARADOXI DE ASCENSV CONI DVPLICIS IN ALTVM SPONTANEO.

Auctore

G. W. KRAFFT.

§. 1.

Hoc experimentum consistit in his. Conus duplex A, ex duobus conis rectis compositus, quorum vtriusque bases coniunctae sint, si imponatur duobus planis inclinatis et diuergentibus CB, DB, apud B concurrentibus, quod punctum B notabiliter depressius sit basi huius trianguli CD, et deinde sibi relinquatur: mouebitur sua sponte, ascendetque in locum magis eleuatum, cuius puncta maiorem distantiam tenent CD. Referunt hoc experimentum, primus, nisi fallor, *Whiston*, *Course of Experiments*, *pag.* 1; deinde *Grauesandius*, *Phys. Element. Math. Edit. nouiss. Tomo I. pag.* 47; Celeberr. *Musschenbroekius*, *Essai de Physique*, *pag.* 141; *Desaguliers*, *Cours de Physique Experiment. Tomo I. pag.* 58; qui illud vocat, *improuisum phaenomenum*. Potest coniunctio basium conorum cingi adhuc rota, vel disco aliquo maiori, quod *Grauesandius* fecit; vel etiam simpliciter ad vsum adhiberi corpus ex duobus conis compositum, cum *Whistono*, quale etiam hic Tab. VIII. Fig. 1.

repraesentamus. Id vero magis est necessarium, vt asserculorum diuergentium loco, quod in experimento *Grauesandiano* fit, non aperiendorum, ad vsum vocentur duae trabeculae BC, BD, quorum angulus apud B magis aperiri aut claudi queat, et quae in C et D cochleis instructae sint, ad eleuandam aut deprimendam rectam CD pro habitu, vt hoc apparatu dein in varios casus experimenti huius, certe ingeniosi, possit inquiri.

§. 2. Prima quidem fronte hoc experimentum plane paradoxum, et illi regulae generali aduersum, videtur, in omni motu corporis, a grauitate sola orto, centrum ipsius grauitatis debere descendere, hoc est, propius ad horizontem accedere; sed melius inspectum, accuratiusque excussum, praecedentem regulam penitus confirmat, neque destruit. Si enim consideretur centrum grauitatis huius rotae, quae facta per se rotatione superiora petit, apparebit, hoc centrum, ob situm obliquum ab axibus conicis et rectis obliquis, quibus incumbit, oriundum, minime sustentari, adeoque totam rotam re vera descendere, dum non nisi apparenter tantum loca altiora versus ascendisse videtur. Vt vero, quod difficultate non caret, atque a nemine adhuc, quantum scio, factum est, dilucide explanare atque ostendere possim, quam ob rationem ascensus hic oculis spectatorum imponat; quem quidem, vti compertum habeo, aliqui ad *perpetui mobilis* fabricam vsurpare voluerunt: examinabo eandem hanc rotam conicam tali angulo impositam, cuius crura sint horizontalia primum; nam haec positio auget adhuc celeritatem rotae currentis. Intuenti quidem hunc motum statim perspicuum

esse

esse potest, centrum grauitatis inter ascendendum semper descendere, quod etiam demonstrat *Celeberr. Musschenbroekius*, *l. c.* et capta altitudine supra horizontem ab initio motus, et deinde in fine ipsius, manifeste in oculos incurrit: sed quod in quolibet situ nihil adsit, quod centrum grauitatis sustineat, vt adeo rota necessario in omni situ debeat prouolui, impulsa per ipsam vim centri grauitatis, non ita apertum est, vt primo statim intuitu pateat, sed aliquatenus absconditum. Nam cylindrus, simili modo impositus, vbique, ac in omni situ, quiescit.

§. 3. Impositus igitur concipiatur conus hic duplex duabus lineis rectis, horizontalibus, AB et CB, existentibus in lateribus superioribus plani rectanguli in BD complicati et iuncti per rectam verticalem BD. Per medium anguli B ducatur recta BI, in eodem plano horizontali ABC, quae transibit alicubi per basin vtriusque coni communem; nam duplex conus base sua in medio anguli ABC situs esse supponitur; atque erunt hae tres lineae AB, IB, CB, in eodem plano horizontali, ad quod BD est perpendicularis, adeoque verticalis. Patet iam, si conus anterior plano verticali ABD, sursum producto, secari concipiatur: orituram esse exinde *Ellipsin Apollonianam*, quam AB tangit. Cum itaque planum baseos IB, et planum secans AB, faciant angulum ABI, aequalem semiaperturae planorum diuergentium ABC, et communis vtriusque sectio BD sit verticalis, aut perpendicularis ad planum horizontale ABC: ducatur diameter baseos FG, parallela ad IB, adeoque pariter horizontalis, et continuata in H; erit

Tab. VIII. Fig. 2.

H; erit igitur etiam FHD rectus, qualis est IBD, vnde per planum secans AB sectio coni efficietur talis, vt intersectio plani secantis, et diametri productae baseos, constituat cum hac angulum rectum; quo casu oritur Ellipsis, cuius diameter transuersa est eiusdem axis, vti ex Conicis clarum est; vid. meae *Institutiones Geometriae sublimioris*, P. I, §. 46, et 48; atque, vt imaginationi melius consulatur, archetypum aliquod leue ex charta conficiatur.

Tab. VIII. Fig. 3. §. 4. Hinc itaque semiconus, priori figurae exemtus, et chartae perpendiculariter insistens, sit FKGE, in quo est semiapertura planorum ABI, aut αHF, ob parallelas AB et αH, nec non IB et FH. Conus hic est rectus, quia talis supponitur, adeoque FLE angulus est rectus; $\alpha\beta$ est axis transuersus sectionis; sectio ipsa $\alpha\delta\beta$, quam in δ tangit AB; ε est punctum, per quod transit in axe Ellipseos axis Con EL; et quia axis Ellipseos $\alpha\beta$, et tangens AB, sunt parallelae: erit recta, ex puncto contactus δ in illum perpendiculariter demissa, $\delta\gamma$, axis coniugatus, et hinc γ centrum Ellipseos, $\varepsilon\eta$ semiapplicata, quae producta in tangentem est $\varepsilon\eta\zeta$. Incumbit ergo conus puncto δ; et quia AB pro horizontali est assumenda, huic puncto δ superne verticaliter respondet centrum Ellipseos γ, quod simul est eiusdem centrum grauitatis, suffultum itaque, et a lapsu liberum. At vero diameter grauitatis vtriusque coni est recta EL, continuata in verticem alterius coni oppositi, et transiens per centrum L baseos coniunctae, in quo centrum grauitatis iacet totius huius coni compositi; et quia haec diameter grauitatis

uitatis transit per punctum axis Elliptici ε, ex quo perpendicularis ad horizontem demissa est $\varepsilon\zeta$: concipi debet pondus coni actionem suam exercere in hoc puncto ε verticaliter deorsum per $\varepsilon\zeta$. Visibile nunc est, lineam hanc directionis non sustineri a linea AB, sed interuallum dari $\eta\zeta$; quia enim δ est punctum contactus, et δA tangens: recta δA necessario cadit extra Ellipsin. Quamuis itaque in quolibet alio prouolutionis situ Ellipsis oriatur semper minor: similis tamen haec semper erit prioribus, ob sectionem semper sub eodem angulo IBA factam; adeoque in omni situ aderit tale interuallum $\eta\zeta$, quod conorum centrum grauitatis non sustinet; ex quo manifestum iam esse puto, cur coni hi coniuncti nunquam quiescere possint, sed ipsi per se rotationem incipiant, a vi nempe grauitatis, cui hic nihil obstat, adeoque semper labantur, atque sic motum continuent; cum ex altera parte machinae auersa omnia aequaliter se habeant et similiter.

§ 5. Ex omnibus hucusque allatis consequitur iam, adesse in hoc motu rotatorio potentiam, pondus nimirum coni compositi, quod ponamus esse P, agens in directione vertiali $\varepsilon\zeta$; adesse etiam hypomochlium, nempe in δ, et distantiam illius ab hoc $\zeta\delta$, vel $\varepsilon\gamma$; vnde momentum ad motum rotatorium indesinenter sollicitans habebitur $= P \times \varepsilon\gamma$. Quam vero $\varepsilon\gamma$ sequenti modo determinabimus: Sit axis transuersus sectionis $\alpha\beta = 2a$, consequenter $\gamma\beta = \gamma\alpha = a$, $\varepsilon\gamma = z$; sint, posito sinu toto $= 1$, lateris coni, cum diametro baseos, anguli sinus S, cosinus C, tangens T; semiapperturae planorum diuergentium FHα, vel IBA, sinus s,

 cosinus

cosinus c, tangens t; atque ob angulum FEG bisectum per axem coni recti EL, erit in triangulo $E\alpha\beta$ haec analogia, $\beta\varepsilon \cdot \varepsilon\alpha = \beta E : \alpha E =$ sin. $E\alpha\beta$: sin. $E\beta\alpha$; sunt autem $\beta\varepsilon = a + z$; $\varepsilon\alpha = a - z$; sinus $E\alpha\beta =$ sin. duorum internorum oppositorum in triangulo $F\alpha H = Sc + sC$, ex *Commentar. Acad. Scientiar. Tomo II*, §. 4; sin. $E\beta\alpha =$ sin. $E\beta H =$ sin. duorum internorum oppositorum in triangulo βGH, in quo, ob angulum FGH obtusum, pro C scribi debet $-C$; igitur sin. $E\beta\alpha = Sc - sC$; qui valores substituti in analogia superiori efficiunt $a + z : a - z = Sc + sC : Sc - sC$, vnde producitur $z = \varepsilon\gamma = \frac{asC}{Sc} = \frac{a\frac{s}{c}}{\frac{S}{C}} = \frac{at}{T}$, quia est $\frac{s}{c} = t$, et $\frac{S}{C} = T$; et habebitur momentum ad motum rotatorium solicitans $P \times \varepsilon\gamma = \frac{Pat}{T}$.

§. 6. Ex hac igitur determinatione momenti huius rotatorii sequitur *primo*, illud esse variabile, et semper decrescens, quia constantibus ipsis quidem P, t, T, tamen a continuo variatur, semiaxis nempe sectoris $\alpha\gamma$, qui durante motu semper minor successiue redditur, et tandem plane euanescit, vbi rota conica vtroque vertice planis diuergentibus incumbit, et momentum rotatorium euadit $= 0$, adeoque rota quiescit. *Secundo* motus etiam cessat, si fuerit $t = 0$, hoc est, si semiaperturae angulus sit nullus, aut si plana duo non diuergant inter se, sed parallela sint; quo casu sectio eorum in cono fit circulus, in quo duo centra ε et γ coincidunt, vt nullum detur praepondium, aut momentum rotationis. Hoc itaque casu, in quo conus compositus planis parallelis imponitur, nullus plane

motus

motus exoritur. *Tertio* momentum rotationum adhuc nihilum fit, si ponatur $T = \infty$, aut angulus EFG rectus, vel vbi, coni loco, planis diuergentibus incumbit cylindrus, quod experimenta etiam exacte comprobant; quamuis enim in Cylindro sectio obliqua Ellipsin pariter producat, vti in cono: in illa tamen puncta ϵ et γ etiam coincidunt semper, vt nullum existere possit praepondium; quare cylindrus duobus planis diuergentibus impositus non mouebitur ipse per se.

§. 7. Cum itaque euictum sit, in hac rota conica nihil adesse, quod centri grauitatis lapsum impediat, adeoque eam necessario debere circumuolui versus partes planorum diuergentium magis distantes: videamus iam porro, quam viam describat centrum grauitatis in rotae medio, et basium coniunctarum centro, positum, durante hac rotatione. Quod vt obtineamus, sint plana duo diuergentia, sed horizontalia iterum, qualia hucusque adhibuimus, AB, CB, concurrentia in B. Huic puncto concursus B immineat verticaliter centrum grauitatis rotae, aut centrum basium circularium coniunctarum, quod sit D; erit igitur BD radius baseos verticalis, hoc est, perpendicularis ad planum horizontale ABC; et cum BI in eodem hoc plano ducta sit, constituens angulum ABI dimidium aperturae, aut diuergentiae ABC, erit angulus IBD rectus. Ex Fig. praeced. autem elicitur radius baseos ex hac analogia, posito axe coni $= m$; S: m $=$ C: rad. baseos $= \frac{mC}{S} = \frac{m}{\frac{S}{C}} = \frac{m}{T}$; erit igitur in hac Tab. IX. Fig. 1.

Figura radius baseos, vel $BD = \frac{m}{T}$.

§. 8. Veniat rotae axis in situm EM, in quo vertices vtriusque coni combinati incumbunt planis divergentibus; erit sic centrum baseos O in recta horizontali EM positum, et rota quiescet (§. 6) Durante igitur hoc motu centrum grauitatis commune O descripsit lineam DO, inclinatam ad horizontem OB angulo BOD. Eruitur autem OB ex illo, quoniam in triangulo rectangulo BOE est OE $= m$ et anguli ABI, dimidiae diuergentiae, sinus s, cos. c, tang. t; erit itaque in hoc triangulo, $S : m = c : OB = \frac{mc}{s} = \frac{m}{\frac{s}{c}} = \frac{m}{t}$, vnde obtinetur tangens anguli BOD $= \frac{BD}{OB} = \frac{m}{T}$ diuisum per $\frac{m}{t} = \frac{t}{T}$. Igitur ab initio motus ad finem eius vsque centrum conorum grauitatis commune describit lineam DO, cuius punctum D eleuatum est verticaliter supra B quantitate BD radii baseos α, quae ad horizontem OB inclinata est angulo α, inclinatione tali DOB, quae habeat tangentem $= \frac{t}{T}$.

§. 9. Ex hoc iam facile deducitur, quaenam vltima sit inclinatio ad horizontem, in qua rota, vel
Tab. IX. conus duplex, ascendere apparenter cesset. Cum enim
Fig. 2. in situ horizontali vtriusque plani centrum grauitatis D, dum horizontaliter ipsum per se moueri aut ascendere videtur, re vera descendat per planum inclinatum DO, cuius angulus DOB modo est definitus: patet, cessare debere omnem motum, si DO ita apud O eleuetur, vt acquirat situm horizontalem DP, parallelum ipsi BO. Eleuari igitur potest, succedente semper motu, horizonta-

zontalis BO eousque, donec DO cadat in DP, hoc est, eleuari potest angulo ODP=DOB. Quodsi igitur computetur angulus A, cuius tangens sit $\frac{t}{T}$, posito sinu toto =1, ascendere videbitur rota vsque ad altitudinem planorum eam, quae cum horizonte faciat angulum A, in quo situ planorum rota quiescet, et producendo ascensui erit impar; si vero magis eleuentur plana, tum rota retroagetur versus punctum concursus vtriusque plani; quemadmodum experimenta singulas hasce circumstantias pulchre demonstrant.

§. 10. Hisce ita intellectis ad examen reuocare possumus probationem, quam *Celeberr. Desaguliers* affert ad phaenomena hucusque deducta et exposita. Ponit is, *Cours de Physique Experimentale*, *pag*. 81, conum duplicem, cuius axis sit B, sectione verticali repraesentatus, impositum esse plano AC supra horizontem AD eleuato altitudine CD minori, quam est radius baseos coni BA. Sin igitur ducatur recta BC: erit haec infra horizontem BE depressa, adeoque centrum grauitatis coni duplicis B iacebit in plano inclinato BC, in quo necessario, re vera per BC descendere, hoc est, apparenter per AC ascendere debet. Sed cum idem hoc ratiocinium perfecte etiam applicari possit cylindro, planis diuergentibus eodem modo imposito, hic autem non ascendat: (§. 6.) patet, paralogismum latentem adesse debere. Huius autem fons in eo deprehenditur, quod non dici possit generaliter: omne punctum graue, plano inclinato impositum, in Tab. IX. Fig. 3.

 hoc

hoc descendit. Distinctio enim adhibenda hic est, inter tale punctum, cuius directio verticalis est *suffulta*, aut *non suffulta*. Quomodo autem in cono duplici haec directio fit *non suffulta*, in cylindro autem *suffulta*, in praecedentibus dilucide est ostensum, vnde ex his quoque demonstratio horum phaenomenorum est petenda.

SECTOR

SECTOR CATADIOPTRICVS.

AVCTORE

IO. ANDR. DE SEGNER.

Etsi, cum vel agri mensurandi sunt, vel perficiendae ichnographiae regionum, nulla re minus laborare soleamus, quam descriptione multiplicis apparatus ad id necessarii: id tamen, quod hic describam, instrumentum singulare visum est, atque magni vtplurimum compendii. Pede non indiget: ob eamque rem non modo artificem non onerat, verum et, quod per instrumenta, quae operose in pedamentum collocari debent, antequam vsui esse possint, admodum difficulter fit, anguli dati, cuius crura per data duo puncta transeant, expedite prodit verticem. Qua quidem re plurima problemata geodaetica compendio soluuntur absque calculo. Meum dicere non possum, qui nihil ad id contuli, praeter contractionem molis, in qua ideo laboraui, quia speraui, induci ea re posse aliquos iter facientium, ad capiendas positiones locorum, quae vel attingunt, vel cernunt e longinquo, quae res, quantum ad perficiendas chartas geographicas conferre possit, palam est. Deinde plurimos instrumenti vsus alios detexi.

Id sectore constat, cui adfixum est speculum planum metallicum; atque indice, quocum tubus connexus est dioptricus, ex eorum genere, quae obiecta inuertunt. Arcus sectoris est pars peripheriae decima sexta, in dimidios gradus accurate diuisus, qua re par- Tab. X. Fig. 1.

tes

tes accipit 45. Subdiuidi hae possunt pro lubitu ab illo, qui oculorum aestimationi fidere nolit; ego, vbi instrumenti radius pedem vnum non excedit, vt subdiuidantur, non opus esse iudico. Punctis, quibus arcus diuiditur, duplex numerorum series adscripta est, a sinistra versus dextram: prior a 45 incipiens, desinit in 90, altera ab hoc termino 90, ad 135 vsque pergit. Hi numeri gradus notant angulorum, qui capi per instrumentum immediate possunt, cum reliqui, qui vel minores sunt 45 gradibus, vel 135 gradibus maiores, subtractione demum anguli ab angulo, vel anguli ad angulum additione, innotescant.

Circa centrum sectoris index reuoluitur, qui et ipse sector est, sed minori aliquantum radio descriptus, vt arcum prioris apparere sinat, quamuis tegat numeros. In hoc indice duo puncta notata sunt, quae arcum decimae sextae peripheriae parti exacte aequalem intercipiunt, quo fit, si index circa sectoris principalis centrum reuoluatur, donec vnum horum punctorum in initium arcus diuisi cadat, vt alterum incidat in eius extremum. Puncta ista indices sunt graduum, quos continent anguli mensurati. Inter ea intermedius indici adfixus est tubus, filo instructus apud locum imaginum, plano sectorum perpendiculari. Planum per filum istud, atque per centrum lentis obiectiuae, positum, et per centrum sectorum transit, proxime certe; plano autem speculi, quod sectori principali, qui arcum diuisum habet, affigi debere dixi, siquidem puncta indicis cum initio, atque fine arcus diuisi congruunt, grnunt, apud centrum sectorum sub angulo occurrit, qui a dimidio recti tam parum differt, quam id obtineri vlla arte potest. Altitudo speculi ab instrumento ea est, vt dimidiam tantum lentis obiectiuae partem tegat, patente per alteram prospectu: figuram habet rectanguli, cuius minus latus semidiametro aperturae lentis obiectiuae non minus est, maius autem eius semidiametri triplo aequale. Sed aperturam paullo maiorem sumere conuenit, quam ab opticis scriptoribus statuitur, quia media tantum eius pars hic vsui esse potest, altera per speculum tecta, ne lucis penuria laboremus; atque ne id distinctae visioni officiat, ocularis lentis efficaciam imminuere.

Perfecto ita instrumento, anguli capiuntur hunc in modum. Si angulus dimidium recti excedat, sesqui altero autem recti minor sit, collocato centro instrumenti apud anguli apicem, axem tubi dirige versus obiectum, ad quod tendit crus anguli sinistrum, reuolutoque circa centrum indicis, sectore principali, atque speculo cum illo connexo, effice, vt et illud obiectum, ad quod contendit crus anguli dextrum, per tubum appareat. Eo facto si effeceris, vt vtrumque a filo tubi legitime secari videatur, punctorum indicis alterutrum in arcu diuiso gradum notabit, extremum eorum, quibus mensuratur angulus quaesitus. Neque ambiguitas timenda est a duplici indicis puncto; quia vtrumque in arcum diuisum cadere non potest, nisi vbi angulus rectus est. Sinistrum autem punctum, si in arcum diuisum solum cadat, angulus maior est recto, sin dextrum, minor.

Tab. X. Fig. 2. Ratio in eo ſita eſt, quod ſi ex puncto A duo obiecta conſpiciuntur, alterum B radio directo AB; alterum autem C radio apud D per ſpeculum reflexo DA, ducta in plano ADC recta DE, quae eadem radat planum ſpeculi, angulus EDA ſit dimidius anguli BDC. Hinc enim ſequitur, angulum BDC tot gradibus menſurari, quot angulus EDA habet ſemigradus: atque hac re tota inſtrumenti ſtructura nititur.

Si vero angulus menſurandus vel minor ſit dimidio recti, vel eius ſeſquialtero maior, ſumto obiecto quodam tertio, conuenienter in plano anguli poſito, menſurabuntur anguli, quos rectae ad obiecta propoſita ducendae includunt cum recta, quae tendit verſus obiectum aſſumtum. Summa angulorum ita repertorum, vel differentia, erit angulus quaeſitus.

Et haec quidem ſatis expedita ſunt. Verum quia in inſtrumento hoc vſus ineſſe dixi, qui per reliqua difficilius obtinentur, expedit, vt eorum aliquos breuibus declarem.

Primo ergo ita collocato indice, vt eius puncta cum extremis arcus diuiſi punctis coincidant, inſtrumentum omnes vſus praeſtat, in quos comparatur crux geodaeturum, praebetque normam, qua, per punctum datum, recta datae perpendicularis in agro non multo maiori labore ducitur, quam per vulgarem in charta. Atque hoc ſolo integrae ſaepe ichnographiae abſolui poſſunt.

Sit

Sit ABCDE figura, cuius ichnographia quaeritur, fatis plana. Sumto F pro arbitrio, ac ducta FK vtcunque, metire FG, FH, FI, FK, ad quae puncta G, H, I, K cadunt rectae FK perpendiculares ex apicibus angulorum figurae ABCDE. Erige FN ad FK perpendicularem, ac metire FL, FM, FN, reliqua. Tab. X. Fig. 3.

Potest et instrumento ita composito circulus describi, circa diametrum quantumuis magnum. Recede a diametro, donec eam conspicias sub angulo recto; erit centrum instrumenti in peripheria.

Punctis autem indicis in alia arcus puncta translatis, distantia puncti inaccessi A a loco B ita mensurabitur: Fac CB ad AB perpendicularem, sit autem C punctum horizontis, quam capi potest maxime a B remotum. Deinde in recta BC progredere ad D; vbi idem C cum A sub angulo 101°, 18′ appareat. Erit A graduum 11 cum minutis 18; cuius anguli tangens est quinta pars radii. Ergo et AB rectae DB quintupla erit, reperieturque AB, si dimensae DB dimidium decuplicaueris. Ex tabulis tangentium facile reperiuntur anguli alii, assumto maiores, vel minores, qui eidem proposito seruiunt. Fig. 4.

Ichnographia autem figurae ABCD, in data quadam recta EF progrediendo, perficietur hunc in modum: Nota puncta rectae EF, a quibus ad angulos figurae ductae rectae omnes EB, GA, HC, ID, cum assumta EF angulum includunt constantis alicuius Fig. 5.

magnitudinis, vt 60°. Deinde per eadem figurae puncta A, B, C, D rectas alias duc, assumtae EF perpendiculares, vel omnes sub alio quodam angulo ad eam inclinatas. Metire EG, EH, EI, vt et EK, EL, EM, EN; atque ex his datis ichnographiam perfacile in chartam transferes.

Aliqua huic methodo subsunt problemata specialia, quae celeriter admodum per hoc instrumentum expediuntur, cum alias vel calculum exigunt, vel constructionem operosiorem. Vt si inaccessa BC mensuranda sit, sume angulum E talem, vt absque artificioso calculo habere possis NC et LB, secundum dicta. Deinde triangulum rectangulum construe, cuius vnum latus sit LN, alterum illi perpendiculare differentia repertarum NC, LB. Erit latus angulo recto oppositum aequale quaesitae BC.

Tribus etiam peripheriae circuli in agro describendi punctis datis, reperies quartum, capiendo angulum, sub quo duo eorum punctorum apparent ex tertio, sumendoque pro quarto aliquo eorum, ex quibus eadem illa puncta sub eodem angulo apparent.

PHYSICA

PHYSICA.

 OBSER-

OBSERVATIONES BOTANICAE ET VNA IRIDIS MVLTIPLICIS.

Auctore

GEO. BERN. BVLFFINGER.

I.

Fructus proliferi et frondosi.

1.

Limones praegnantes, alium fructum minorem in se continentes, reperiri, iam Clusius refert, ex quo Casparus Bauhinus in pinacem transtulit. *Limon citratus alterum includens* Ferrarii et Hermanni, et *limon citratus, altero foetus* Tournefortii idem denotant. Mihi ex Serenissimi Domini Ducis nostri hortis vere Regiis, qui nec Italicis cedunt, vti I. Bauhinus suo iam tempore agnouit, oblatus est citrei fructus, ex quo ipso illo in loco, vbi stili adhuc vestigium conspicuum erat, eminebat tantillum paruuli cuiusdam fructus, quem altius in medullam matris penetrare coniectatus sum, adeoque sectione transuersa duos fere digitos infra locum eminentiae ad paruulum vsque fructum, si quis esset, facta, denudare allaborabam, et ecce! fructus prodibat (*aaa*) forma fructus citrei, colore etiam eodem insignitus, in carne alba maioris cubans, quem circum circa ambiebant loculi fere rotundi (*bbb*), figuris stelliformibus insigniti, sed seminibus vacui, qualia nostra tellus Tab. XI. Fig. 1.

etiam

etiam in vulgaribus huius generis fructibus raro profert. Sed et hoc a naturali ſtatu abludit, quod hi loculi, quorum nouem fuerunt numero, non cohaeſerint inuicem, nec in axi citrei pomi diſpoſiti fuerint, vti in citreo vulgari, et quod ſtellatae fuerint figurae loculorum ſinguli, ſtellae vero octo tantum radiis conflatae, cum nouem praeditae ſint in vulgari. Adeoque quod ſpectat ad loculos, ſeminibus deſtinatos, nouem fructuum hunc fructum ſiſtere adumbrationem fere iudices, quorum ſingulis loculus vnus, ſingulis vero ſemina deficerent. An ex loculis nouem ſinguli dederunt loculum ad foetum intra ſe concluſum formandum? An etiam ſemina ad illum formandum impenſa fuere? Prius punctum veriſimile forte reddi poſſet, ſi in ſtructuram foetus illius inquiſiuiſſem, quod negotiis aliis diſtractus omittere coactus fui. An huc quadrat corpus ouiforme in albumine oui repertum, vitello prorſus deſtitutum, a Petito Academiae Pariſienſi oblatum, cuius ſimile Winslouius ſe vidiſſe affirmauit? vid. Hiſtor. Acad. Par. 1742. p. 59. 60. Analogia inter regnum vegetabile et animale toties obſeruata coniecturam praeſtat.

2. Illuſtriora exempla fructuum proliferorum, ſimul et frondoſorum ſuggerunt ephemerides Gallicae Erudit, anni 1675. p. 174. 175. vbi pira deſcribuntur, non tantum a naturali conformatione abludentia, verum et alterum frondoſum, alterum et proliferum, et ſimul mire frondoſum. Scilicet frondi alicui duo adhaerebant pedunculi, ſinguli piro onuſti, quorum vnum ſubrotundum minus frondem exiguam et folia

ſundebat,

fundebat, alterum maius, oblongum, e loco, vbi calix disponi solet, foetum minorem protrusit, qui eminet e piro maiori, foliolis variis cinctum; sed foetus rursus et frondem et folia ex vertice promebat. Facta dissectione secundum longitudinem maioris piri et foetus ei conclusi, solidissima caro est deprehensa, seminibus destituta, et fibrae lignosae ex pedunculo recta linea ad locum illum adscendentes, cui olim stilus cohaerebat, hic non tantum ad extremitatem vsque maioris fructus, sed et per foetum producebantur, vt frondem et folia ex illius summitate spargere possent; Ex quo etiam palam est, non tantum fibras mere lignosas, sed etiam quaedam medullae ramenta, libro inuoluta, eousque continuata fuisse, sine quibus nimirum foliorum textura absolui nequit. Paucis interiectis annis, nimirum anno 1688 testantibus Ephem. Nat. Cur. Dec. II. Ann. VIII. Obs. LII. p. 134. Fig. 17. duo exempla pirorum, ex vno latere gibborum, ex altero depressorum, ex ipso calice frondosorum, ad eandem pirum nanam Kiliae nata recenset Ioh. Christoph. Butzmann.

8. Nullum dubium est, quin attento obseruatori eiusmodi res monstrosae saepe occurrere possint. Vt clarus quidam scriptor Gallus existimauerit, propter simplicem vegetabilium structuram rariora illis contingere monstra, quam animalibus: Natura etiam in simplicissimis vel leuissima de causa mira producere valet. Quatuor huius rei exempla paucorum interuallo annorum comperi, quorum vnum hic Stutgardiae anno 1747. coram vidi, reliqua tria in horto quodam Montisbeligardensi anno 1741. obuenerunt, et in eadem arbore

 eodem-

eodemque tempore maturitatem nacta sunt, quorum icones ad viuum pictae ad me transmissae sunt; Primi autem exempli iconem ipse fieri curaui, cuius sequentem exhibeo descriptionem. Pirus quaedam nana primo vere, sole germinationem eximie iuuante, magnam florum copiam protrudebat, qui ingruente sub ipsum florum tempus gelu adusti fuerunt, et spem fructuum subsequentium nullam reliquerunt. Calore autem solis redeunte frondes nouae, iacturam factam quasi reparaturae, prouenerunt, flores denuo protrudentes, et inter
Tab. XI. has vna A, in tres pedunculos BBB desinens. Folium
Fig. 2. vnum petiolatum C frondi, antequam diuideretur, appositum erat. Aliud folium D promebat pedunculus vnus breui, postquam exortus esset. In pedunculo, ex opposita figurae parte collocato, non procul ab extremitate, foliolum sessile (e) adparebat, cuius ala folium E petiolatum fudit. Germinibus rotundis pirorum (d f) terminabantur duo pedunculi, singuli singulis, quorum vni (f) vestigium floris adhuc adhaesit. Sub germina (d) inter illud et pedunculum duo proueniebant folia sessilia FF, et alia duo GG communi petiolo ex eodem loco oriebantur. Tertius pedunculus pirum (a) fulciebat, quod spectat ad figuram, monstrosum, vti icon exhibet, et praeterea semidiaphanum, vt lucis radios transmitteret, e cuius vmbilico, vbi calix esse solet, duo enascebantur foliola, vnum (b) minus, rosei coloris, alterum (c) maius, viride. Inter haec foliola fructus, priori minor, (g) ex ipsa eius carne enatus est, horizonti fere parallelus, infra sulco quodam profundo in duas partes aequales diuisus, vmbilico eique inhaeren-

haerente calice (*i*) notatus, ex quo duae laciniolae angustissimae siue fasciolae (*bb*) rosei coloris dependebant.

4. Montisbeligardensium pirorum primum, (*aa*) pedunculo B innixum, pirum forma sic satis bene referebat, sed ex superiori parte, veluti ex pelui, aliud emergebat (*bb*) matre longius, cylindricum fere, nisi quod superiori extremo paullulum esset ampliatum, in summitate calice hexaphyllo (*f*) multo distinctiore, quam in piro naturali, exornatum. Inter commissuram foetus cum matre, inter foetum et marginem peluis folia eruperunt, ouatum, tria lanceolata, et ex lanceolato ouatum, (*eeeee*) calicis forte vices sustinentia. Sed foetus hic matri etiam nepotem (*cc*) ferebat, ex latere prominentem, vnde abolita ibidem foetus cute labia, e quibus nepos emergit, callosa facta sunt; superior nepotis extremitas cordis forma proxime ad calicem suae matris terminabatur: Sed rursus etiam hic calicis vestigia exhibent foliola lanceolata, (*e* e**) intra labia callosa et nepotem emergentia. Tab. XI. Fig. 3.

5. Secundum Montisbeligardense pirum, pedunculo B fultum, vix in paucam carnem excrescit, minoris retortulae figura, (*cc*) quod sinu profundo, ad marginem foliolo lanceolato reflexo (*d*) praedito, exsculpatur, cui contigua est caro (*aa*) in transuersum ouata, priori multo maior, sinu longitudinali et alio breuiori horizontali, obiter exsculptis conspicua, cute tecta, quam considero tanquam foetum infimi piri. Huius autem sinum ad sinum esse profundum, (*bb*) exinde conicio, quod intra sinum illum exoriantur folia, (*eeee*) quae Fig. 4.

 calicis

calicis vice fungi posse superius conieci. Ex hoc sunt tres emergunt nepotes, (h), kk) prior fere rotundus et exiguus, globuli lusorii magnitudine, alter oblongus, tertius retro hos positus, reliquis maior; Duo posteriores, ab exordio suo sulco profundo diuisi, supra prorsus in vnum corpus connati, vnicam promunt pelvim carnosam, (l) exiguam, margine aequabili praeditam, pronepotem ratione tertiae generationis, pezizam intuitu figurae diceres, ex qua aliquot exigua foliola linearia (ii) in rectum surgunt, et ex medio corpusculum cylindricum (m) carnosum, abnepos, caliculo hexaphyllo insigni (n) conspicuus. Inter commissuras pronepotis cum nepotibus duo folia maiora, ouata (gg) enascuntur.

Tab. XII. Fig. 1. 6. Tertium pirum Montisbeligardense, praedictis speciosius, quod ad magnitudinem attinet, ex pedunculo B priorum simili paullatim in fructum elongatur, ampullae inuersae similem, (aa) e cuius summitate tres simul emergunt foetus (vnus) breuissimus, piriformis, (ccc) productione angusta et obtusa in folium desinente, folio piri simile; alter longior, (ddd) sub priori, figura matri similis, iam recensito foetu longior, tertius cylindricus, (ffff) supra aliquanto arctior, et in angustissimum incuruum collum (g) terminatus. Tres hosce foetus folia cingunt, (kkkk) viridia, lanceolata, inter ipsos et matrem enata. Praeterea foliolum rosae colore, petali structura tenera (l) vni foliorum (k) ab externa parte ita adponitur, vt eius dorso fere incumbat. Inter foetus vero f et d folium lanceolatum (m) enascitur. Tandem foetus (f) ex posteriori parte non

procul

procul ab extremitate foetum, matri nepotem, fundit, piriformem, (*hh*), auunculo (*c*) vix maiorem, cui ab anteriori parte collum incuruum matris incumbit et concretum est, in extremo calice hexaphyllo (*i*) coronatum. Intra nepotem hunc et matrem, vbi inuicem committuntur, folium emergit viride, lanceolatum (*n*).

7. De structura interna horum fructuum nihil, vt verum fatear, mihi constat. Puto tamen ex iis, quae Perraultius in piris supra recensitis Ephemeridum Gallicarum recensuit, immo quae de floribus prolificis in vulgus nota sunt, omnino huc quadrare. Consideratione dignum est, quod eiusmodi phaenomena tum plerumque occurrant, quando flores, fructuum nuncii, qui primo vere eruperunt, casu quodam infausto perierunt, vt destinatus fructibus succus in eos non impensus fuerit. Tum vero arbores, illis succis turgidae, paucas nouas gemmas protrudunt, in quas succus ille abundans prodigitur. An ideo foetus plures simul nascuntur? An copia foetuum impedimento est, ne semina gigni possint, neque locus illis concedi possit? Elegantissima esset conuenientia inter partes, quae sperma secernunt, et quae fructum vere constituunt, vt in floribus et fructibus prolificis fere semper deficeret, vel minueretur, ibi puluis antherarum, hic semen.

II.

Malus satiua, fructu striato, punctis rubentibus conspersa Tourn. I. R. H. 635. Bach-Aepfel *I. B. Hist. font. Boll. L. IV. Cap. II. pag.* 91 *Malum striatum balnei adm. perelegans Ei. Hist. I.* 15. *cum fructu florifero.*

Tab. XII. Fig. 2. 3. 4. 1. Fructus hic oblatus mihi est Stutgardiae, vbi inuenerunt inter alios multos eiusdem generis in cella, more nostris vsitato super stramine in cista lignea humili quadrata, muri superiori parti affixa, repositos. Mira sane res, quum fructus post flores enasci solemne sit, inauditum, flores fructus sequi? Inuestigatione itaque dignissimum iudicaui, naturane hoc ita contigerit, an artibus forte, vel fucis. Fructus erat formosus, vti in hoc genere esse solet, maturus, et, si externum habitum respicias, omnibus suis partibus perfectus. E superiori eius parte, et quidem e medio fere calicis, gemma eminebat, frondi a latere adhaerens, a qua ramulus resectus esse videbatur, vestigio calloso. Ex gemma autem duo mali folia prodibant petiolata, qualia sunt primora folia harum arborum, et praeterea quinque pedunculi duabus vnciis longiores, et in eorum fastigio totidem flores perfectissimi, consueto petalorum, staminum et pistillorum apparatu numeroque instructi, floridissimi, etiam post trium dierum interuallum, quod vna cum fructu in cella illos reponi iussi.

2. Equidem noui, quicquid succorum vel ad fructuum vel ad florum formationem inseruit, id omne per pedunculum in illas partes deriuari. Si quid ergo natura

natura hic molita est, ex pedunculo in fructum ducere debuit succos, non tantum solius fructus, sed et frondis et gemmarum floriferarum procreationi idoneos. Et frondes quidem hac ratione ex ipsis fructibus nonnunquam prodire, in pirorum exemplis supra vidimus. Verum illas frondes praeter folia flores adhuc procreasse, id nec mea, nec aliorum obseruatione constat. Quicquid horum sit, si in nostro exemplo id contigisse verum sit, pedunculi aliqua continuatione in eum vsque locum, vbi frons et gemma visebantur, opus erat. Id vero vt pateret, penitiori inspectione opus erat. Dissectionem itaque institui iuxta frontem gemmiferam, vt illa dispertiret tam pedunculum, quam pomum, in duas prope aequales partes, nec vlla ratione thalamum, siue receptaculum seminum laederet, simulque parceret frondi, si forte pomo profundius se insinuaret. Hac sectione patuit, frondem tantum non in mediam vsque pomi partem penetrasse, et per vnum thalami loculum, semen vnicum effetum condentem, transiisse, ibidemque multis in eius substantiam circum circa immissis radiculis sedem fixisse, circa frondem vero secundum totam longitudinem, quoad in carne pomi delituit, aliquam cauitatem exstitisse, quae et hinc vlterius fronde vacua sub angulo, ad pedunculum, siue productionem eius in carnem, acuto penetrauit, et acuto fine terminata est. Parietes porro huius cauitatis tam vacuae, quam frondem continentis, vetustate veluti callosi erant. Tab XI. Fig. 3. 4.

3. Aderant quinque thalami loculi, et in singulis singula semina, tria optime conformata, duo effeta, ex quorum qualiumcunque praesentia tuto concludere licet,

licet, nihil iis in procudenda fronde tribui posse. Cavitas porro circa frondem, eaque vltra frondem producta, subindicare videtur, eam artificio quodam, nisi forte intrusione, in pomum iam perfectum factam esse, cui sub autumnum recens facta (mea enim obseruatio mense Ianuario facta est) frons mali immissa fuerit, cauitate quidem breuior, gemma tamen florifera in extremitate instructa, quae paullatim in carnem fructus succosam radices egerit, eaque nutrimentum ceperit, vnde tandem folia et flores tepore loci, vbi fructus iacuerat, e gemma euoluti atque protrusi sunt. Certe inspectio quum docuerit, frondem gemmiferam cum pomo nullum nisi per radiculas, frondi continuas, et ex illa productas, commercium habuisse, flores ex gemma frondis repetendi sunt, qui tamen progerminare non potuissent, nisi succus pomi ipsis nutrimentum praebuisset, qui itaque terrae locum sustinuit. Nihil temere hic supponitur; Videmus citriorum, aurantiorum, nyctanthis frondes exiguas gemmis onustas terraeque infixas non difficulter radices agere. Quidni ergo hoc fiat in pomo succi pleno? Experimenta olim capienda veritatem plenius demonstrabunt.

EXPLICATIO FIGVRARVM.

Tab. XII. Fig. 2. Pomum sistit naturali magnitudine, vti sunt omnes icones prius recensitae.

a. Gemma petiolos cum foliis et pedunculos floriferos promens.

b. Vestigium ramuli a fronde infra gemmam resecti.

Fig.

Fig. 3. et 4. Duo sunt hemisphaeria, in quae pomum sectione per eius axin diuisum est.

Fig. 3. Hemisphaerium est, in quo frons gemmifera in situ naturali adumbratur, vbi quidem *a* et *b* easdem partes exprimunt, quas in Fig. 2.

ccc. Frons gemmifera.

d. Locus ad quem vsque in pomum penetrat.

de.) Sinus vacuus, a fine inferiori (*d*) frondis oblique excauatus.

ff.) Radiculae e fronde in carnem pomi pullulantes.

g.) Pomi quaedam pars, quae putredine corrumpi incepit.

h.) Petioli dimidia pars.

Fig. 4. Alterum hemisphaerium, spatium a fronde gemmifera vacuum ostendens.

aa) Reliquiae calicis, quem frons gemmifera transit.

bbb) Spatium, in quo frons gemmifera sedem habebat.

cc) Vacuum spatium cum priori continuum

dd) Loculi receptaculi duo, in quibus

ee) Totidem semina effeta.

f) Petioli dimidiata pars.

III.

Flos rosae prolifer et frondosus.

1. Ramus rosae (A) pro more spinosus ab (*a*) ad (*b*) spinis orbus, quatuor foliis stipatur, ex vno magis rami istius latere positis, breuius petiolatis, ouatis. tribus ex sinuato dentatis, (*ccc*) quarto (*d*) ex vno latere leuiter crenato, ex altero integerrimo, quibus Tab. XII. Fig. 5.

quintum (*e*) ab anteriori latere accedit, reliquis minus, ſed conformatione folio (*d*) ſimili. Scapo (*ab*) ex vtroque latere affixa erant petala roſea variae magnitudinis, colore et odore petala roſarum exacte imitantia, et inter haec quaedam dentata, quaedam varie ſinuoſa, quaedam etiam integra. Anterior ſcapi facies ab (*a*) ad (*f*) prorſus erat nuda et inermis, ab (*f*) ad (*b*) vsque, licet ſpinis carens petalis aliquot ſibi innicem ſuperimpoſitis exornata, quae phylirae inſtar conuoluta erant. Hinc ramus rurſus ſpinoſus poſt breue interuallum folia fiudit permulta, duo infima (*gg*), quae ſtipulis ſimiliora ſunt, margine crenato praedita, reliqua inferiora quinque (*bbbbb*) margine integerrima, omnia ſeſſilia, tum quinque adhuc alia ſuperiora (*iiikk*), quorum duo poſteriora petiolo communi inſtructa baſi connata ſunt, adeo integra, vt vix crenata dici mereantur.

2. Diuerſum eſt hoc exemplum ab illis, quorum in Eph. Gall. 1679. p. 168 et in Comment. Acad. Par. 1707. p. 650 ſqq. mentio fit, et icones adumbrantur, quorum vtrumque roſam ſiſtit duplicato proliferam et denique frondoſam, hac diſtinctione, quod roſae proliferae prioris exempli ſint multo pleniores, quam poſterioris. Noſtra autem ſimpliciter prolifera eſt, ſed foliorum, tam eorum, quae in roſa principe calicis vice funguntur, quam ſuperioris frondis, alia plane in noſtra eſt confirmatio Icon roſae Ephemeridum Gallicarum prorſus coincidit cum illa, quae habetur in Mich. Bern. Valentini Mus. Mus. P. I. App. p. 22.

p. 22. Altenburgi Misniae anno 1657 florens, et ipso illo anno, curante D. Leonardo Vrsino, Prof. Altenburgensi aeri incisa. Nec dubium est, quin Vrsiniana icon in Galliam missa et minori forma in Ephemerides translata fuerit. Conueniunt enim praeter magnitudinem omnia, nisi quod in Vrsiniana icone scapus inter secundam et tertiam rosam sit inermis, et quod fructuum rudimenta compareant, quae Gallicus sculptor in apographo omisit; sed quae etiam, quia neque in Marchantiana, neque in nostra icone obueniunt, Misnicus sculptor ex suo forte adiecit cerebro. Quascunque tamen has differentias ex incuria sculptorum facile deducere licebit.

3. In tribus his exemplis 1. praecipuae rosae, quae infimae locum occupat, folia substernuntur, proliferis nulla; suprema autem semper frondosa est. 2. Quousque petala in scapo extenduntur, licet interiecta spatia exsistant, petalis nuda, spinae desunt, id quod inprimis de Marchantiana et nostra certum est, sed vix etiam dubium de rosa Ephemeridum Gallicarum, cum icon Vrsiniana, magis genuina, a nostris iconibus vix aliena sistat. 3. Nulla veri floris, neque in infima rosa, neque in proliferis apparent vestigia; neque enim stamina, neque pistilla, adparent, nec horum quaedam partes.

4. Omnino sperandum est, si plura eiusmodi exempla colligerentur, ex eorum inuicem collatione

caussas forte singularium eiusmodi productionum erutum iri, quae vero non tantum huc, sed et ad totum vegetationis opus, symbolum suum conferre possent. Tantum serio optandum est, velint ii, qui principiis ad obseruationes physicas necessariis instructi sunt, iis colligendis et exacte describendis operam nauare, cum vnus, qui intelligit, quid obseruandum sit, ex vno exemplo plus addiscere possit, quam centum hisce in rebus non exercitati in centies multiplicatis exemplis.

IV.

Obseruatio Iridis multiplicis.

Varia passim de *modo* et *numero* Iridum phaenomena recensentur ab auctoribus. Eorum aliqua repetemus hoc loco, et subiungemus, quae iteratis vicibus ipsi obseruauimus. *Primariam* atque *secundariam* Iridem vulgus videt frequentissime: originem Eruditi omnes norunt; postquam, praeeunte *Marco Antonio de Dominis*, *Renatus des Cartes* illam et experimentis docuit, et calculis subiecit, *Meteororum cap. VIII.* De modo quidem sequentia memorari possunt: Iridem inuersam vidit *Pardies*, testante *Iourn. des savans* 1667. Iridem parabolicam visam esse dicunt *Acta Erud. Lips. Supplementor. Tomo IV*, *p.* 28. Iridem perpendicularem vidit *Du Rondel* 13 Sept. 1684. conf. *Nouvelles de la Republique des lettres* 1684. *T.* 2. *p.* 173 *et* 292. Duas Irides sese intersecantes inuenimus in

Obser-

Obseruations de Physique, *T.* 3, *p.* 70, ex *Iournal des savans* 1666, *p.* 71, 72 *et* 435; vti etiam Iridem pallidam in niue tenuissima, quam descripsit *Langius*, *Physicae p.* 216.

De numero autem Iridum simul apparentium videas dubitare et dissentire Auctores. Negat tertiam fieri posse *Cardanus*, ex falsa causa, quam *Scaliger* refutat, minus solide tamen, thesin hanc ipsam admittens ex causa quidem adhuc inepta. Vid. *Scaliger de subt. ad Card. Exercit.* 80, *num.* 5. Negat tertiam Iridem conspici posse, ob nimis inualidam impressionem, ab oculis humanis *Ioh. Bernoullius*, *Operum Tom. IV. p.* 198; posse tamen fieri ait, vt illa conspiciatur ab aquila, aut lynce, maiori, quam nos oculorum viuacitate praeditis. *Cartesius Meteoror. cap. VIII, p.* 271, *in eiusdem operibus Philosoph.* 1656 *editis*, ex aliorum narratione tertiam refert Iridem, duas ordinarias cingentem, sed multo pallidiorem, et tantum circiter a secunda remotam, quantum ab illa distat prima. Arbitratur, id vix accidisse, nisi forsan quaedam grandinis grana, maxime rotunda et pellucida, huic pluuiae fuerint immixta; in quibus, cum refractio multo quam in aëre (voluit scribere, *quam in aqua*,) maior fiat: arcus coelestis exterior multo etiam maior in illis esse debuerit, ac ita supra alteram apparere. Alii tertiam Iridem admittunt, sed minus frequentem dicunt, et coloribus languentem. Nemo, quod sciam, annotauit angulum, sub quo videtur haec tertia, vel

 ordi-

ordinem colorum, si qui distinguuntur. Alio, quam primae et secundae Iridi parallelo, situ tertiam *Halleius* vidit, et in *Transactionibus Anglicanis num.* 420., descripsit. In prima et secunda nihil noui. Tertia colores habuit aeque viuidos ac secunda, ordine eo, quem prima demonstrat. Crura fines cum primaria eosdem, altitudinem secundae, habent in schemate. Diciturque apud *Muschenbroekium*, *Essais de Physique*, *p.* 818, ex quo haec transcribo, *Senguerdum* A. 1685 vidisse phaenomenum huic consimile; *Halleium* vero, considerato solis et terrae positu, arbitrari, tertiam hancce Iridem ortam ex reflexione radiorum solis factam a vicino flumine. Cum igitur de tertia hac Iride adeo dissentiant, aut minus determinate loquantur, obseruatores: mirum non est, variare quoque opiniones Auctorum; vt alii eandem Iridem esse putent, alii halonis portionem interpretentur. Conf. *Sturmius* in *Dissert. de Admirandis Iridis*, et Auctores ibi allegati.

Vt igitur ad obseruationes accedam, quae, quo rariores in hoc genere sunt, eo magis aestimari etiam debent: exponam illas, quae a me factae fuerunt.

Anno 1741 die 25 Iunii st. n. hora 7 vespertina, vidimus Dom. *Tasingerus*, Concionator Aulicus, et *ego* Stuttgardiae, e museo meo, Iridem quintuplicem; secundariam, primariam, et intra hanc tres zonas rubras, hoc ordine: 1. vt earum prima proxima ma eſſet Iridi primariae. 2. Poſtea ſequebatur zona ex coeruleo et viridi mixta, quam excipiebat rubra quarta, probe diſtincta; 3. denique zona ſubobſcura, cum quinta rubra ſatis diſtincta. Latitudo Iridis tertiae, quartae, et quintae, aequabat circiter dimidiam primariae.

Anno 1746, die 10 Iunii, hora 8 veſp. *iidem* iterum vidimus Iridem ſecundariam modo ordinario, primariam vero triplicem, et alicubi quadruplicem, vti antea.

Anno 1741, d. 27 Iunii, inter horam 6 et 7 veſpert. vidi Iridem primariam triplicatam.

Eodem anno, d. 7 Iulii, hora 5 veſp. vidi Iridem primariam triplicatam; primam ordinaria forma; ſecundam rubram et obſcuram, tertiam rubram. Duae poſteriores, coniungendo rubrum, obſcurum, et rubrum habebant latitudinem primariae.

Videtur autem obſeruatas zonas coloratas non tam fuiſſe Irides, ex maiori reflexionum numero factas, quam ortas ex diuerſis bullis, quae ellipticam fortaſſe figuram tenerent, ſiue ex alia cauſſa diuerſam refractionem producerent; aut fuiſſe coronas, vel halones; qua eadem ratione tales Irides multiplices explicarunt iam *Verdries* in *Phyſica* 1728 edita, p. 448; et *Sturmius* in *Iridis admirandis*, p. 21, et 87. Si certe calculos generales *Ioh. Bernoullii*, *in Opp. Tomo IV*, p. 197.

p. 197, ad Irides particulares applicemus, tum ſequens enaſcitur tabella:

		Ang. Incid.		Semidiam.	
Iris	I. - - -	59°	23′ - - -	42°	2′
	II. - - -	71	50 - - -	50	58
	III. - - -	76	50 - - -	138	20
	IV. - - -	79	38 - - -	223	56
	V. - - -	81	26 - - -	308	28
	VI. - - -	82	41 - - -	392	40

ex qua apparet, Irides, modo ordinario genitas, primae ſuccedentes, maiorem continuo acquirere ſemidiametrum apparentem; adeoque poſitas ſemper eſſe debere extra Iridem primariam; cuius cum in noſtris et aliis obſeruationibus factum ſit contrarium: non pro Iridibus proprie ſic dictis, ſed pro coronarum, aut halonum portionibus, allegatas zonas habemus.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE

OCTO ANNORVM IN DIVERSIS SIBIRIAE LOCIS AB A. MDCCXXXIV AD A. MDCCXLI FACTAE. IN ORDINEM REDEGIT, ANIMADVERSIONIBVS ILLVSTRAVIT, ET CONSECTARIA ADDIDIT

I. A. BRAVN.

In euulgandis his obseruationibus Sibiricis meteorologicis, quae internallo octo annorum a 1734 ad 1741 in diuersis Sibiriae locis potissimum a V. C. Gmelino sunt institutae, eadem fere methodo vsi sumus, ac in obseruationibus Petropolitanis. Enotauimus videlicet summas et infimas mercurii altitudines in tubo torricelliano mensium et annorum cum differentiis, adeoque variationibus altitudinum barometricarum, ad spatium earum maximum cognoscendum. Vt nexus cum tempestate innotesceret, adiunximus ad quamlibet altitudinem maximam et minimam barometricam, tempestatem, non solum concomitantem eiusdem diei, quo ea est obseruata, sed etiam antecedentem et consequentem. Pari modo versati sumus in obseruationibus thermometricis. Nam et hic summas et infimas caloris diminutiones thermometro obseruatas indicauimus, addidimus diffe-

differentias ad variationes caloris menstruas et annuas cognoscendas. Ob nexum cum tempestate ad quemlibet summum et infimum caloris gradum, altitudines barometricas et tempestatem adiunximus. Denique meteora insigniora notauimus, vbi inter alia emphatica eminent. Obseruationes barometricae factae sunt barometro simplici, in quo pollices Parisini duodecimales sunt intelligendi, qui in centum partes sunt diuisi. Numeri ante punctum pollices, post punctum partes centesimas indicant. Obseruationes thermometricae factae sunt secundum scalam Delilianam, in qua cifra nullitatis nota punctum aquae bullientis, numerus autem 150 aquae in glaciem abeuntis, seu aquae sub glacie, vel niuis et glaciei, quae regelari incipit, denotat. Eundem hunc semper esse gradum, nec vllam differentiam deprehendi, obseruationes innumerae summa adcuratione a me factae, semper docuerunt, qui igitur merito punctum congelationis dicendus est.

Quum hae obseruationes in itinere factae sint, mirandum non est, saepius non nisi fragmenta obseruationum occurrere paucorum mensium, quin etiam nonnunquam paucorum dierum in vno loco. Separatim igitur hae notandae erant.

Quamuis harum obseruationum quaedam maioris momenti iam hinc inde sint publicatae: tamen et eas secundum seriem annorum Commentariis Academiae Scientiarum inserendas nemo, opinor, dubitabit, vt integrae ibi habeantur, et sede propria. Progrediendum nunc erit ad ipsas obseruationes, ea, qua diximus methodo, repraesentandas.

Obser-

Obseruationum meteorologicarum interuallo octo annorum scilicet a. 1734 ad 1741. in diuersis Sibiriae locis factarum potiora momenta sunt, quae sequuntur.

A. MDCCXXXIV.

Obseruationes anni 1734. a mense Augusto demum incipiunt. Sunt hae primum factae in fortalitio septem palatiorum ab Augusti 2 ad 7. Ab Augusto 11 ad 16 in fortalitio Vst-Kameno-Gorensi; a 20 ad 28 in officinis aerariis Kolywanensibus. A. Septembris 14 ad 27 in vrbe Kusnezk. Ab Octobris 9 ad Nouembris 24 in vrbe Tomsk. Altitudines barometricae maximae et minimae his quatuor mensibus erant sequentes:

Mensis.		Maxima	Minima.	Differentia.
Augusti	7. - -	27.53 - -	25.94 d. 24 - -	1.59
Septembris	17 et 22.	27.51 - -	27.07 d. 14 - -	0.44
Octobris	31. - -	28.93 - -	27.15 d. 10 - -	1.78
Nouembris	1. - -	28.94	- 27.05	- - - 1.89

Ergo horum quatuor mensium altitudo maxima 28. 94
et Minima - - - - - 25. 94
et tota variatio - - - 3. 00.

Quum altitudo maxima igitur fuerit 28. 94. satis magna quidem est, non tamen attingit maximam Petropolitanam, quae nunc est ab anno 1757, 29. 12. Notata fuit haec in vrbe Tomsk Nouembris 1, ipso meridie, vento SSO vix sensibili. Praecedebat proxime O, et sequebatur S 2. Dies erat serenus, vti quoque aliquot praecedentes, sequebantur dies nubili primum, dein nix. Erant in aëre scintillae radiantes. Thermometrum

 monstra-

monſtrabat 175½. Minima altitudo 25. 94 obſeruata eſt in officinis aerariis Kolywanenſibus Auguſti 24 h. 6 p. m. H. 12 erat 26. 00 et h. 10. p. m. 26. 12. Ventus erat S. 4 h. 12, qui die praecedente iam coepit, et continuauit vsque ad h. 4 p. m. in pluuiam copioſam cum fulguribus et tonitribus deſinens, mutatus in W 1. Sequens dies ſerenus fuit. Thermometrum erat 113. Haec altitudo minima valde parua eſt, Petropolitana enim 26. 41 hanc multum ſuperat, ſcilicet quadraginta ſeptem partibus centeſimis pollicis Pariſini. Quum igitur variatio tota tres integros pollices conficiat; maior eſt Petropolitana, quae nunc eſt 2. 71, partibus centeſimis 29. Caloris diminutiones maximae et minimae fuerunt, quae ſequuntur.

Menſis.	Minimus.	Calor.	Maximus.	Differentia.
Auguſti	23. 143	- - -	94	d. 5. 49
Septembris	26. 150	- - -	121	- 14. 29
Octobris	29. 180	- - -	139	- 20. 41
Nouembris	1. 180	- - -	149	- 8. 31

Ergo frigus maximum menſibus Octobri et Nouembri aequale fuit, ſcilicet 180, quod non ſingulare eſt, niſi forte quod iam menſe Octobri tantus frigoris gradus ſit obſeruatus. Calor maximus Auguſto obſeruatus 94, ſat magnus eſt, qualis huc vsque Petroburgi nondum eſt notatus. Maximus enim gradus ab anno 1757 nunc eſt 97.

MDCCXXXV.

Anno 1735 obſeruationes factae ſunt primum in vrbe Ieniſeisk a Ianuarii 1.mo ad 9; dein Krasnoiarii [Krasnoiarsk] a Ian. 19 ad Febr. 17. Selengiae [Selenginsk] ab Apr. 1 ad 30, et

30, et Kaehtae simul ab Apr. 25 ad Maii 6. Nertschiae (Nertschinsk) a Iun. 16 ad Iul. 4. In officinis argenti Argunensibus a Iul. 14 ad 21; Ircuti [Irkutsk] ab Octobris 1 ad finem anni.

Obseruationes Ieniseae factae, sunt nouem dierum 4. Ianuarii 1 ad 9 inclusiue. Intra hos nouem dies maxima barometri altitudo erat 28. 25 d. 6 coelo non perfecte sereno, vento SSO 1. Minima autem 27. 45 d. 1 coelo fere sereno, vento W 2. Altitudines igitur barometricae nihil memorabile continent, contra thermometricae eo sunt notabiliores. Nam d. 5. eiusmodi frigoris gradus est notatus, qualis ante hoc tempus, quantum constat, nunquam. Thermometrum scilicet monstrabat gradum 281. d. 5 h. 6. a. m. Hora 5 a. m. erat 262 et h. 10 p. m. diei praecedentis 200, vento SSO 1, qui die quoque praecedenti flauit, et sequenti die ad h. 7. p. m. continuauit. H. 8 a. m. h. 12, et h. 6 p. m. erat 250 et h. 11 p. m. 202. Dirum frigus iam circa finem anni praecedentis Ieniseae grassari coepit, gradus tamen ideo determinari non potuerunt, quia scala breuior fuit, quam vt hi insigniores frigoris gradus notari potuerint, omnis enim mercurius in inferioribus cylindris latebat. Ceterum coelum erat turbidum, et barometrum 28. 10 tempore obseruationis, quae altitudo etiam vespera praecedenti erat. Huius frigoris effectus varii, iique merito mirandi fuerunt. Redeunt autem huc potissimum:

. Aues, passeres, picae hunc frigoris gradum perferre non potuerunt. Ceciderunt enim quasi mortuae in terram, et re vera quoque mortuae sunt, quae non statim post lapsum in locum calidum sunt delatae.

Mensis Iunii obseruationes incipiunt a die 6, et sunt Nertschiae factae. Maxima altitudo barometri erat 26. 38 d. 24, et minima 25. 77 d. 20. Maximus calor hoc mense fuit d. 29. 105, et 108 d. 16, 27. 30. Minimus 120 d. 21.22. Tonitrua fuerunt d. 22.28.29.30.

Obseruationes mensis Iulii a 1 ad 4 Nertschiae adhuc factae sunt; a die 14 autem ad 21 in Officinis argenti Argunensibus. Maxima barometri altitudo 25. 98 Iulii 2, et minima 25. 49 d. 14, quam sequebantur fulgura et tonitrua vehementissima, grandine magnitudinis piso maioris comitata. Ventus erat S 1. et thermometrum 124 D. 20 quoque pluuia copiosa cum fulgure et tonitru, vento ex S O. In munimento Argunensi grando eodem die vitelli oui magnitudine cecidit circa vesperam, qua omne fere frumentum perditum fuit.

Augusti et Septembris mensis obseruationes nullae extant, Octobris autem per singulos mensis dies Ircuti factae. Hoc mense maxima altitudo barometrica fuit 27. 30, obseruata d. 19, thermometro 175, vento S W 3. Hora 9 p. m. halo circa lunam obseruata pallidi coloris est, quae vltra dimidiam horam non durauit. Coelum eo tempore nubilum serenari coepit. Minima altitudo 26. 07 d. 15 fuit obseruata, thermometro 140, Vento N 2, coelo tenuibus nubibus obducto, quod dein serenari coepit.

Calor minimus fuit d. 20 notatus 184, maximus 140 die 8 et 15.

Halo quoque die 20. h. 7. p. m. circa lunam conspecta fuit, similis haloni diei praecedentis, lata tres

lunae

lunae diametros, 18 lunae diametris a luna circiter diſtans. Coelum initio ſatis ſerenum fuit, quod vero haud ita multo poſt nubilum factum; hoc tamen non obſtabat, quo minus halo adhuc conſpici poſſet. Barometrum erat 27. 18, thermometrum 179, vento OSO 2.

Porro d. 23. h. 2. p. m. halo circa ſolem viſa pallidiſſima et breui euaneſcens, a ſole 14 circiter diametros ſolares diſtans, vnam ſolis diametrum lata. Coelum tenuibus nubibus erat tunc temporis obductum, barometrum 26. 85, et thermometrum 169, ventus NNW 1. Die 26 halo rurſus circa lunam h. 4. a. m. quae ad h. 6^{tam} durauit, coelo nubilo, Vento O 1, barometro 26. 94, et thermometro 163. Ceterum notandum, per integrum hunc menſem, nebulam fumi ſpecie continue ab Angara fluuio euehi viſam, tam ſpiſſam, vt in fluuio nauigantes, non vltra diſtantiam trium orgyiarum obiectum aliquod cernere potuerint.

Menſis Nouembris obſeruationes adhuc Ircuti factae ſunt. Maxima barometri altitudo fuit, 27. 37 d. 7, coelo mixto, vento O 2; thermometrum 172, mane 180, erat. Minima 26. 52, thermometrum 175, ventus W 1; nebula mediocris ſpiſſitudinis. Caeterum hic menſis maiorem partem ſerenus fuit. Vehementiores venti erant d. 2. 15. et 24 gr. 4, qui vltimus per vnicam tantum horam ſaeuiit ex NNW.

Secundum thermometricas obſeruationes frigus maximum fuit 185 d. 28, ventus O 1, coelum ſerenum; minimum autem 150 d. 3. coelo ſereno, vento 00, barometrum 27 13. Nebula spissa fuit d. 4. vento 00, h. 7 a. m. quam excepit coelum serenum; porro d. 21 et 23 nebula mediocris spissitudinis. D. 10 Ircutus fluuius glacie coiuit, vento O 1, thermometro 160, barometro 27. 66. Eodem die h. 6 et ½ p. m. halo circa lunam adparuit quadrantem horae durans. Coelum ante et post apparitionem serenum. Nocte ingruente insignis vaporum copia instar nebulae adscendit, sequuta tamen est tempestas serena.

Mensis Decembris observationes Ircutenses hae fuerunt. Maxima barometri altitudo fuit 27. 47 d. 4. ventus NW 1, coelo sereno, aëre tamen spissis vaporibus repleto; thermometrum 200 monstrabat. Minima 26. 25 d. 1, thermometro 163, vento O 2, coelo sereno.

Reliqua notatu digna huc redeunt: Venti vehementiores fuere gradus 4 d. 11, 20 et 21. Nebulae d. 4, 5, 8, 9, 16, 24. Spissa nebula, quae mense antecedenti continue supra fluuium adparuit, etiam hoc mense fuit perpetua. Halo circa lunam d. 9 h. 6 p. m. adparuit, quae circa h. 9 euanuit. Fuit nebula toto hoc die spissa, thermometro 187, barometro 27. 10, coelo nubilo. D. 20 h. 2 a. m. halo circa lunam conspecta, quae ad h. 6 durauit, Vento NNW procelloso, qui eodem tempore oriri coepit. Barometrum 26. 83, et thermometrum 168 erat; dies fuit serenus, et ventus de vehementia sua circa h. 6 p. m. remisit. Phaenomenum porro notatu dignum d. 16 h. 6 p. m. conspectum fuit. Nempe a WNW versus OSO fasciae, nubium sublucidarum specie, quinque erant ex-

tensae

tenfae. Extremitatem orientalem verfus infuper nubeculae quaedam debilem lucem fpargentes confpiciebantur; fafciae illae vtrinque in extremitatibus coibant, et in medio, fiue Zenith, recedebant, h. 10 p. m. vix amplius obferuari potuere, quia coelum nubibus obductum eft. D. 27 h. 5 p. m. nubeculae quaedam peculiarem plane faciem habentes, coloris e fufco cinerei, immixto rubore, hinc inde difperfae, NNW verfus adparuere, quae h. 11 p. m. totum fere coelum occuparunt, quod fubito rurfus ferenum factum eft.

In Angara fluuio d. 4 Decembr. cruftae glaciales minores latae funt. In Balaganenfi munimento iam Nouembris 30 glacie coiuit Angára. Glacies continue per fluuium lata eft, exceptis paucis diebus. Die 29 aquae Angarae multum intumuerunt, et glacies multa in fluuio adparuit, vento O 2, barometro 26. 50 et thermometro 168 Ad orgyiam vsque increuerunt aquae Angarae d. 30, barometrum erat 26. 88, thermometrum 162, ventus NNW,

A. MDCCXXXVI.

Annus 1736 continet fragmenta obferuationum meteorologicarum in diuerfis locis factarum. Incipiunt a Ianuarii 1^mo^ et pertinent ad Iunii 15.

Menfis Ianuarii obferuationes a 1^mo^ ad 20 pertingunt, quae adhuc Ircuti factae funt. Maxima barometri altitudo hoc menfe fuit d. 18. 27. 35, coelo fereno, thermometro 181, vento O 1. Minima 26. 40 d. 10, coelo fereno, quod dein tenuiffi-

nuiffinuissimis nubibus fuit obductum. H. 6 p. m. halo circa lunam adparuit, in vertice; et non procul ab horizonte, non bene terminata, coelum fuit serenum, ventus O 3, thermometrum 175, barometrum 26. 45. Porro d. 13 ab h. 4 ad 5 a. m. halo circa lunam pallida conspecta est, coelo sereno, vento NNW 1, barometro 27. 06. Eodem die rursus halo pallida circa lunam h. 11 p. m. coelo tenuissimis nubibus obducto, niue minutis floccis cadente, vento S 1, thermometro 178, barometro 26. 98. Secundum obseruationes thermometricas calor hoc mense diminutus fuit ad 196 Ian. 5 h. 10 p. m. coelo sereno, vento O 2. Gradus quoque 195 notatus fuit Ian. 5, et 19. Minimum frigus fuit 166, d. 17, vento O 2, coelo fere sereno. Procella fuit d. 18 WNW, barometro 27. 10, quum fuerit praecedenti nocte 26. 72; ceterum venti vehementiores d. 8. 9. 10. 14. 17. Angara fluuius nocte praeterita Ianuarii 1, e regione arcis Ircutensis glacie constitit, quo facto, nebula illa perpetua, huc vsque ex fluuio hoc euecta, cessauit. Thermometrum erat 173, ventus 00. Ianuarii 4 lacus Baical totus iam glacie riguit circa Selengam.

Porro d. 15 h. 7 a. m. halo pallida circa lunam, coelo hinc inde sereno. H. 1½ p. m. d. 16 coelo tenuissimis nubibus obducto segmentum halonis solaris in Zenith conspectum fuit, viuidissimis coloribus ludens, quod breui disparuit. Circa h. 3½ duae halones concentricae et in interiore halone vtrinque parelii, fasciaeque ab illa protensae; viuida pariter

lux

lux in vertice eiusdem halonis, et ſurgentia ex illa cornua, viuidiſſimis coloribus ludentia, conſpiciebantur. Meteorum hoc conuenit cum illo, quod Maraldi in Commentariis Academiae Scientiarum Pariſinae 1720 deſcripſit. Thermometrum 179, barometrum 26. 95 erat, vento O 3. Die praecedenti altitudines mercurii neque in barometro, neque in thermometro notatae fuerunt. Ceterum notari poteſt, barometrum et thermometrum, quae his obſeruationibus inſeruiere, fuiſſe in loco aëri peruio inter N et O, qui a ſuperficie fluuii ad $2\frac{1}{2}$ orgyias circiter eleuatus erat.

Menſis Februarii obſeruationes factae ſunt partim Balaganii, ſcilicet a d. 4 ad 9, partim in munimento Brattienſi a die 15 ad finem menſis. Hoc menſe maxima barometri altitudo fuit 27. 45, d. 28, vento N 1, thermometro 182, coelo ſereno. Minima 26. 45 d. 9, vento OSO 1, coelo nubilo et niuoſo, thermometro 176, quod paullo ante fuit 194. Maximum frigus d. 8 obſeruatum 201 h. 7. a. m. vento ONO 1, barometro 26. 75, coelo ſereno. Minimum 150 d. 16 vento W 4, coelo nubilo, barometro 26. 80, quod h. 7 a. m. ad 26. 70 deſcenderat. Venti procelloſi d. 5. 6. 15. 16, potiſſimum ex S et W ſpirantes.

Meteorum, quod d. 16 Ianuarii Ircuti viſum, d. 11 huius menſis rurſus elegantiſſime adparuit inter h. 10 et 11 a. m. Halo pallida circa ſolem viſa d. 15 h. 2 p. m. coelo tenuiſſimis nubibus obducto, vento S 2, thermometro 160, barometro 27. 00. Hora 7 p. m. halo quoque pallidiſſima circa lunam visa, vento SO 3, thermometro 165, barometro 26. 90. Die 20 rursus halo circa solem, et in illa duo parelii sibi ex opposito siti, lucidissimi coloris, intermixto rubro, viridi et luteo, figura ad sensum rotunda. Coelum erat serenum, ventus OgN 2. Huc pertinet quoque Meteorum Iakutiae circa lunam conspectum d. 15 huius mensis a Beringio nauarcho. Comparere incepit h. circiter 5 p. m. et circa mediam demum noctem sensim euanuit. Praeter halones et Tab. XIII. Fig. 1. parafelenas, quas icon exprimit, externe ad peripheriam maximae halonis, quae veram lunam secabat, meridiem et septentriones versus in vtraque plaga nubes lucida, segmentum fere iridis exprimens conspecta fuit, et illa quidem ex meridie, altera multo lucidior erat, et propter colorum viuidissimam lucem pulchritudine illam multo superauit. Vide fig. 1.

Mensis Martii obseruationes a 1mo ad 20 pertinent, et Ilimii factae sunt Barometricae obseruationes nihil peculiare continent. Maxima enim altitudo reperta 27. 60, d. 3; minima 27. 00 d. 11. Minutus calor ad 192 d. 10, vento O 2, coelo sereno, barometro 27. 30. Maximus autem calor fuit 155 d. 18, W 3, niue copiosa cadente, barometro 27. 05. Halonis segmentum conspectum fuit h. 9 a. m. d. 1 cornibus sursum erectis, iridis coloribus varium. Ventus erat NNW 1, thermometrum 170, barometrum 27. 37. D. 3 h. 7 a. m. idem meteorum obseruatum, quod d. 28 mensis praecedentis, facies tantum erat alia. Vtraque halo vix distingui potuit, de interiore

riore vero circa horizontem duo segmenta erant conspicua, columnarum instar in altum surgentia Haec segmenta iridis coloribus eximie coruscabant, rubro colore id latus occupante, quod soli propius erat. In vtraque extremitate horizonti vicina parelius erat, iridis coloribus conspicuus, et zonam lucidam vtrinque de se emittens. In vertice interioris halonis arcus erat ellipticus, vtrinque vero cornuum instar ampliabatur. Hic quoque iridis coloribus maxime insignis erat, rubro colore concauam partem occupante. Arcus in vertice externae halonis iridis colores luce debili monstrabat. H. $8\frac{1}{2}$ nihil amplius conspici potuit. Supremus arcus primus disparuit, tum et halones omnino, praeter columnas, quae vna cum pareliis, et arcu in vertice interioris halonis sito, ad finem vsque perdurarunt; barometrum 27.60, thermometrum 184, vento O 1 erant. Vid. Fig. 2. Tab XIII. Fig. 2.

Martii 5 inter h. 2 et 3 a. m. NW versus lux quaedam satis fortis erat conspicua, et surgentes ex illa radii decem circiter, columnarum specie, rubro, viridi et luteo colore ludentes, ad 45 vel 50 gradus recta in altum exporrecti erant. Nulla in meteoro mutatio contigit, nisi quod viridus radiorum color breui disparuerit, et quod post $\frac{1}{4}$ h. duo tantum radii superstites fuerint, h. 4 vero nec radiorum, nec lucis aliquid conspici amplius potuit; coelum tota nocte serenum erat.

Die 7 a. m. rursus duo parelii debilem lucem spargentes, cum halone pallidissima eos nectente, adparuere. Per noctem pauca nix ceciderat, ventus O 1, thermometrum

trum 177, barometrum 27. 30, aër tenuissimis vaporibus plenus erat. Die 8 h. 9 p. m. coelo stellis obscure lucido, halo circa lunam iridis coloribus coruscans adparuit, ven o O 1, thermometro 178, barometro 27. 45. D. 20 h. 9 p. m. multae nubes lucidae inter N et W conspicuae non vltra 30 gradus elevatae videbantur. Post quadrantem horae coelum in ea regione admodum obfuscatum fuit, nec serenitas, quae ceterum per totum coelum regnabat, ibidem rediit. Subiungere hic placet altitudinem montium Ilimiensium, ope barometri repertam, 74½ orgyiarum. Differentia per tres dies a fluuio Ilime et summo cacumine montium fuit $\frac{60}{100}$ pollicis Parisini.

Aprilis integri obseruationes in vico Vstilgensi factae sunt. Maxima huius mensis altitudo barometrica fuit, 27. 05, coelo sereno, vento NW 1, thermometro 150. Die 22 glacies fluuii Ilgae rumpi coepit, Campi a niue omni liberi iam erant, et gemmae iulorum salicum copiose prodiere. Minima 25. 85 d. 2, thermometro 140, vento SSO 4, coelo sereno.

Frigus maximum fuit d. 4 h. 6. a. m. 161, barometrum 26. 70, vento W 4, tempestas dubia. Minimum 131 d. 18 h. 6 p. m. Barometrum 26. 38, ventus S 1, coelo tenuibus nubibus obducto.

Venti hoc mense vehementiores d 2 SSO 4, d. 3 W 3, d. 4 W 4, d. 9 NW 4, d. 10 NW 4, d. 12 W 3, d. 14 W 3, d. 24 W 4, d. 28 WgN 4.

Aquae

Aquae Lenae et Ilgae multis in locis a glacie liberi fuerunt iam d. 10. D. 22 glacies Ilgae plane rupta, et d. 23 glacies Lenae variis in locis rumpi coepit. April. 1. Halo pallida circa folem h. 7. a. m. barometrum 26. 35, thermometrum 140, ventus 60, coelum mixtum erant.

Halo circa lunam d. 11 h. 10 p. m. pallida, vento W 1, coelo tenuissimis nubibus obducto. D. 28 circa occasum folis pluuia copiosa cecidit, coelo occidentem versus sereno, quo tempore adparuit iris viridissimis coloribus coruscans, huicque alia exterior concentrica pallidior fuit. Vtraque vtroque extremo horizonti insistere videbatur.

Mensis Maii obseruationes adhuc in vico Vst-Ilgensi continuatae sunt.

Huius mensis altitudo mercurii in tubo torricelliano maxima erat d. 10, 26. 80, vento N 1, thermometro 144. Aquae Lenae 3½ Werschok increuerant, coelo tenuibus nubibus obducto, quae coeli facies aliquot dies ita continuauit. Est autem 1 Werschok pars decima sexta vlnae russicae, hinc 4 Werschok sunt aequales 7 pollicibus Londinensibus.

Minima altitudo 26. 10 d. 20 h. 6. a. m. obseruata est, coelo maiorem partem spissis nubibus obducto, cum nebula, vento N N O 2, thermometro 119.

Calor maximus 119 d. 20 h. 6 a. m. coelo nubilo. Minimus autem 150 d. 7 h 6 a. m vento S 4, barometro 26. 45, coelo nubilo, et niue rara paruis floccis cadente.

Dies pluuii fuerunt 2. 3. 9. 11. 12. 14. 16. 21. Venti vehementiores d. 5 W 3, d. 6 S 4, d. 7, S. 4.

Nebula in regione fluuii et montium, ceterum coelo sereno, d. 15, 17, et 20, perpetua conspecta fuit.

Lenae fluuii glacies omnino soluta est, nocte inter diem 3 et 4^tum. Caeterum aquae Lenae et Ilgae saepius hoc mense increuerunt. Glacies in Ilga fluuio iam d. 1 non nisi ad littora comparuit.

Halo circa solem pallida d. 5 h. 12 adparuit, cuius segmentum ex meridie solis conspiciebatur iridis coloribus obscure ludens, circa solem vero integra halo pallida, quae h. 11. iam adparere coepit: Ventus S 1, thermometrum 140, barometrum 26. 65, erant.

Iunii obseruationes institutae sunt Vst-Kuti. Incipiunt a Iunii 4^to et pertinent ad 16.

Barometri altitudo maxima 27. 16 obseruata est d. 8 h. 6, a. m. vento oo, coelo sereno, thermometro 140. Dies sequentes aliquot fuerunt sereni. Minima 26. 61, d. 9 h. 6, p. m. notata est, coelo hinc inde sereno, vento oo, thermometro 117. Ventus vehementior d. 7 O 3; d. 11. W 3 et 4; d. 12 SSW 4; d. 13 W 3 et 4.

A. MDCCXXXVII.

Anni 1737 obseruationes incipiunt ab Octobris 1^mo et ad finem anni pertingunt. Factae sunt omnes in

Kiren-

Kirengensi munimento. Locus, quo barometrum et thermometrum suspensa erant, duas circiter Orgyias a superficie aquarum Lenae euectus erat.

Octobris 18, h. 6. a. m. barometri maxima altitudo obseruata est 27. 47, vento W 2, thermometro, 172, coelo nubilo. Minima 26. 38. d. 13 h. 2. p. m. vento oo, coelo nubilo, thermometro 146. H. 8. Ventus cum vehementia 4^{ta} saeuiit, qui iam die antecedenti initium ceperat. Thermometrum maximum frigoris gradum monstrabat d. 16 et 28. h. 6. a. m. 190, coelo sereno, barometro 27. 27. vento oo, quae malacia et hoc integro die et sequenti continuauit, quam W g S 4 sequutus est nocte inter 24 et 25. Die 16 quoque ventus oo erat, coelum serenum, barometrum 27. 12. Malaciam et hic sequutus ventus W 3. Minimus frigoris gradus 136 obseruatus d. 10. h. 2. p. m. vento S 3 et 4, quem praecedebat h. 6. a. m ventus oo. Barometrum erat 26. 47. Coelum serenum, quod paullo post nubibus obduci coepit.

Venti vehementiores fuerunt d. 10. S 3 et 4; d. 11 W 3 et 4; d. 14 W 4; d. 16. W 3; d. 20 et 21 W 4, quem sequutus ventus oo vsque ad 24, quo die et 25 W 4; d. 27. S 4; d. 28. W 3; d. 29. S 3 et 4; d. 31. S 4.

Lena fluuius ex aduerso Kirengensis munimenti d. 5. post ortum solis riguit, non ex crustis glacialibus aggregatis, sed solo frigore, id quod quotannis hoc in loco fit propter lentissimum aquarum motum, infra vero et supra hunc locum fluuius nondum rigebat.

Circa h. 10. p. m. diei 5, radii plures lucidi immobiles NO versus conspiciebantur, satis procul ab horizonte surgentes, septentrionem versus summa erat caligo; coelum tamen breui post etiam ibi, vbi radii conspicui erant, totum obfuscabatur. Ventus O 1, thermometrum 155, barometrum 26. 97.

Halo circa lunam conspecta fuit pallida d. 28 circa horam septimam, p. m. quae horam dimidiam durauit Coelum orientem versus in regione lunae subserenum erat. Circa h. 11 arcus lucidus septentrionem versus adparebat ad 30 gradus circiter eleuatus, spatio inter arcum et horizontem obscurissimo.

Nouembris mensis integri obseruationes in Kirengensi, munimento sunt continuatae.

Barometri maxima altitudo fuit notata d. 10. h. 6. a. m. 27.57, thermometro 195, vento 00, coelo sereno. Minima autem 26.62. d. 23 h. 2. p. m. coelo nubilo, niue cadente, thermometro 168, vento *S* 2.

Thermometri gradus frigoris maiores hoc mense notati d. 3. h. 6. a. m. 205, barometro 27.27, vento 00, coelo sereno. D. 25 et 26 gradus 218 obseruatus, barometrum a die 25 ad 27 variabatur a 27. 17 ad 27. 42. Circa meridiem d. 27 frigus ad 270 creuit, h. 2. p. m autem iam erat 195, quem gradum iam post horam dimidiam monstrabat. H. 6. a. m. erat 218. Ventus semper fuit 00, barometrum 27. 32, coelo nubilo.

Trabes

Trabes aedium, et feneſtrae, nocte tota d. 26 ſtrepuerunt. Coelum his diebus vel ſerenum vel nubibus tenuiſſimis obductum erat. Conſuetum intenſi frigoris phaenomenum quoque obſeruabatur, quod e conclaui egredienti pinnulae narium quaſi conſtrictae ſint. Minimum frigus 156. d. 8. h. 3. p. m. vento SW4, barometro 26. 85, coelo nubilo, obſeruatum fuit.

Venti vehementiores hoc menſe Nouembri erant d. 1 W4; d. 4. S3; d. 5 W3 et SW4; d. 6. SW3; d. 7 SW4, d. 8. SW4 et W4; d. 18. W4, antecedente et conſequente malacia; d. 20 W4, rurſus antecedente et ſequente malacia; d. 25 N3 eodem modo antecedebat et ſequebatur ventus 00; d. 28 S3 et 4.

Halo pallida inter h. 10 et 11 p. m. circa lunam adparuit d. 1^mo^, vento W4, thermometro 179, barometro 27. 22, coelo ſubſereno.

Color amoene coeruleus ſeptentrionem verſus adparuit, ſole per nubes tranſlucente, circa occaſum ſolis d. 8. vento SW, h. 7. p. m. in W verſo, ex quo tempore perpetuo ſaeuiit vehementia 4.

Coelum multis nubibus tractibusque quaſi igneis propter colorem conſpicuum erat d. 17. h. $3\frac{1}{2}$ p. m. barometro 27. 17, et thermometro 175, vento 00. Inter h. 10 a. m. et 2 p. m. nubes ſatis ſpiſſae fuerunt.

Halo pallida circa lunam d. 19. h. 12 nocte, quae iam h. 9. p. m. apparere incepit. Inter h. 9 et 10 pruinae quaedam ſpecies admodum humida et roris inſtar madeſaciens ex aëre cecidit, vento 00, thermometro autem 188, barometro 26. 92 monſtrantibus.

Halo lunaris adparuit quoque die ſequenti 20 inter 7^{am} et 8^{am} horam p. m. Pruina humida iugiter per aëra cadebat ab h. 5. p. m. quo tempore niuium lapſus ceſſauerat, thermometro 188, barometro 27. 22, coelo ſubſereno. Die quoque ſequenti 21 halo pallida circa lunam, a 6^{ta} ad 8^{am} horam vsque, adparuit, coelum tunc nubibus ſpiſſis obductum finem meteoro fecit, rediit tamen h. 11. Niues minutiſſimae toto die, pruinae inſtar, per aëra ceciderunt, quae continuarunt, etiam meteoro adparente, ad h. 12 et vlterius, vento SW 1 et 2, thermometro 185, barometro 27. 20.

Halo pallida itidem circa lunam d. 23 inter h. 8 et 9 p. m. coelo nubilo, vento 00, thermometro 167, barometro 26. 70. Die 24 inter h. 7 et 8 p. m. rurſus halo pallida circa lunam, vt et inter h. 10 et 11. H. 4. p. m. tenuiſſimae nubes oriebantur, quum antea niues cecidiſſent. H. 12. p. m. coelum erat ſerenum, vento inconſtanti, anemoſcopio in gyrum circumacto, cum gradu tamen tantum 2^{do}, thermometrum h. 12. p. m. erat 185, et barometrum 27. 04. Halo itidem d. 26 ab h. 8. p. m. ſatis lucida, coelo tenuiſſimis nubibus hinc inde obducto. Die 30 rurſus halo h. 11. p. m. cum exortu lunae viuidiſſima, vento W 1, thermometro 172, barometro 26. 92. Frequentiſſimae igitur hoc menſe halones fuere, vt dubium ſit, an vnquam frequentius vno menſe adparuerint.

Menſis

Mensis Decembris obseruationes in Kirengensi munimento quoque factae sunt, vt monuimus.

Barometri altitudo maxima notata est d. 9. h. 12 nocte 27. 70, vento 00, coelo sereno, thermometro $196\frac{1}{2}$ et sequenti die mane 203, eadem barometri altitudine perseuerante. Minima 26. 27. d. 26. h. 6. a. m. vento W 4, ingenti niuium copia simul cadente, thermometro 165.

Thermometri obseruationes monstrant, maiores frigoris gradus hoc mense incidisse d. 10, 11, 29 et 30. D. 10. h. 8. a. m. et h. 11. p. m. 203, vento 00, barometro 27. 66, coelo sereno. D. 11 h. 8. a. m. 210, vento 00, coelo sereno, barometro 27. 65. Eodem die h. 3. p. m. 252, vento 00, coelo sereno, barometro 27. 62. In hac obseruatione idem accidit, quod d. 27. Nov. scilicet quod breuissimo tempore frigus, obseruatore inspectante, rursus decreuerit, dum intra 13 minuta prima rursus thermometrum 210, vti in antecedenti obseruatione, monstrauit. D. 27. 206. Die 29 autem h. 8. a. m. fuit 213, et h. 4. p. m. 263, vento 00, barometro 27. 62; coelo sereno a duabus horis. In thermometro et barometro minutissimae bullulae adparebant insigniore frigore hoc, quae sua sponte, decrescente frigore, euanuere rursus. Eiusdem diei h. 6. p. m. 217; barometro 26, 92. vento 00, coelo subsereno. Decembr. 30. h. 6. a. m. 206 per integrum diem; barometro quoque inuariato 27. 00 et vento 00, qui frigoris gradus sequenti die 31 h. 8. a. m. quoque notatus est, barometri quoque altitudine non mutata, coelo sereno, h. 6 autem post meridiem

frigus

frigus iam ad 198 decreuerat; barometro nunc variato 26. 98. Ceterum toto die 31 vapor ſpecie nebulae magnam aëris regionem occupabat. Minimum frigus hoc fuit menſe d. 19. h. 7. a. m. et 4. p. m. ſcilicet 155, niue perpetuo cadente, vento S 4; barometro 26. 58, quum in obſeruatione praecedenti fuerit 26. 74.

Venti vehementiores hoc menſe fuerunt d. 1 inter W et N variabilis 3 et 4, quem ſequuta eſt malacia, praecedebat ventus W 1; d. 2, 3 et 4 SW 3 et 4, ſequente malacia ad 7 vsque continue; d. 14 SW 3; d. 15 SW 3 et 4, qui ad ſequentem diem continuauit. D. 17 SW 4; d. 18. W g S 4; d. 19 S 4 et W 3; d. 20 W 4; ſequente d. 21 malacia, ſeu vento 0 0; d. 22 rurſus S 4; d. 23 W 4, qui per ſequentem diem integrum continuauit; d. 25 et 26 W 4 ſequente d. 27, 28, 29 malacia, d. 30 N 3; ſequente rurſus malacia die ſequenti, et tribus ſequentibus.

Halo conſpecta pallidiſſima circa ſolem circa meridiei tempus d. 2, ita vt per nubes tenues transpareret, thermometro 177, barometro 27. 32, niue minuta cadente. D. 5 paullo ante occaſum ſolis, ex vtroque eius latere, in diſtantia 15 circiter diametrorum ſolarium a ſole, columna viſa fuit, iridis coloribus eximie coruſca, rubro colore faciei ſolis obuerſo, plane, vt Ilimii ſub ortum ſolis ſub finem Februarii 1736 viſum fuit. Cum occaſu ſolis diſparuit, et coelum ſerenum factum eſt. Coelum durante hoc phaenomeno tenuibus nubibus, quae et interdum ſolis faciem obſcurarunt, obductum erat.

erat. Poſt occaſum vero ſolis coelum ſerenum factum eſt. Barometrum circa meridiem erat 26. 97 et h. 11 p. m. 26. 92, thermometrum meridie 169, h. 11. p. m. 178, vento oo. Die 6to h. 1. a. m. ad h. 4 vsque adparuit aurora borealis magna lucidiſſima ſub facie arcus lucidi, et radiorum ex eo ſurgentium, rubro colore elegantiſſime ludentium, et tantum non in Zenith vsque euectorum, miraque celeritate euibratorum, totam regionem inter NNO et N N W occupauit. Plaga occidentalis, licet nullis radiis, aut arcu lucido, conſpicua fuerit; luce tamen quadam inconſueta oculos ferire videbatur. Barometrum h. 7. a. m. erat 26. 92, et h. 2. p. m. 26. 98; thermometro iisdem horis 182 et 181, vento oo. Pruina h. 7. a. m. inſtar roris madefaciebat, coelo nubilo, et h. 2. p m. coelo plurimam partem ſereno, particulae glaciales per aëra cadebant. Ab h. 11. a. m. ad meridiem vsque columna ex meridie ſolis, in diſtantia 15 diametrorum ſolarium, 5 et 6 gradus alta, iridis coloribus ludens, conſpecta fuit ſub iisdem circumſtantiis antea iam indicatis. Die 23 inter h. 6. et 9. p. m. halo lucidiſſima circa lunam viſa, barometro 26 92, thermometro 164, vento W4, niue farinae inſtar minuta et copioſe cadente, h. 4. a. m. Decembris 26. h. 11. p. m. halo pallida circa lunam viſa eſt coelo nubilo, vento W3, thermometro 192, barometro 26. 87; mane erat 26. 72. D. 28. h. 10 p. m. itidem halo circa lunam ſatis lucida adparuit, vento oo, coelo nubilo, nebula toto die, et h. inter 2 et 3 p. m. etiam niue cadente, thermometro 202, barometro 26. 70; h. 4. p. m. erat 27. 37. Decembris 29.

h. 11 p. m. halo circa lunam, coelo nubilo, vento W 3, thermometro 201, barometro 26. 92; h. 4. p. m. erat 27. 62. D. 30. h. 6. a. m. halo circa lunam viuidiſſimis coloribus ludens, coelo plurimam partem ſereno, vento N 3, thermometro 206, barometro 27. 00, quod inuariatum ad ſequentem diem perſtitit. D. 31 tota die nebulae ſpecie vapor magnam aëris regionem occupauit, coelo caeterum ſereno, vento 00, thermometro inter 206 et 198 variato, et barometro a 27. 00 ad 26. 98.

A. MDCCXXXVIII.

Menſium huius anni Ianuarii et Februarii obſeruationes adhuc in Kirengenſi munimento ſunt inſtitutae.

Menſe Ianuario ſumma in barometro altitudo fuit 27. 52 d. 4. h. 7. a. m, thermometro 182, vento 00, coelo nubilo. Minima 26. 67 d. 18. h. 11 p. m. coelo nubilo, vento W 1, thermometro 165½. Secundum thermometrum frigus ſummum hoc menſe fuit notatum 275. d. 9 fere circa mediam noctem, coelo ſubſereno, vento N 2, barometro 27. 42; h. 4. p. m. erat 217. Nòtandum eſt, inter mercurium hinc inde aëreas bullulas rurſus adparuiſſe. Ceterum maiores frigoris gradus obſeruati ſunt hoc menſe d. 5. 216. d. 6, 212. d. 7. 8 et 9, 217. d. 11 et 12, 220 et 226.

Minimum frigus 153, coelo nubilo, vento S 3 et 4, barometro 26. 80, quod d. 31. h. 4. p. m. contigit.

Venti vehementiores d. 3. WSW 3; d. 16. SW 4; d. 17 W 4; d. 19 W 3 et 4; d. 20 W 4; d. 24

d. 24 W4; d. 25 S3 et 4; d. 26 W4; d. 31 S3 et 4, reliquis diebus omnibus fere malacia regnauit.

D. 8. magna vaporum copia, aërem inſtar nebulae tenuis obfuſcantium, coelum, quod fuit ſerenum, reddebat ſatis obſcurum, thermometro 217, barometro 27. 42, quod per aliquot dies antecedentes et conſequentes inuariatum fuit, vento 00. Nebula haec circa meridiem diei ſequentis demum diſſipata eſt, et coelum perfecte ſerenum factum.

Halones hoc menſe ſequentes fuere obſeruatae: D. 14 inter h. 7 et 9 p. m. halo pallida circa lunam comparuit, vento 00, thermometro 176, barometro 27. 22, coelo ſereno. D. 17 halo pallida circa lunam, vento SW2 et 3, thermometro 166, barometro 26. 92. h. 12. nocte, coelo nubilo. D. 19 halo pallida circa lunam ab h 9. p. m. per tres horas et amplius adparuit, vento W3 et 4, thermometro 168, barometro 26. 82, coelo nubilo. D. 21 halo pallida circa lunam h. 5. p. m. vento 00, coelo nubilo, niue fere roris inſtar cadente, thermometrum 188, barometrum 27. 14 monſtrabant. H. 7. a. m. erat 27. 22. D. 22 itidem halo circa lunam per longum tempus viſa h. 10. p. m. vento 00, thermometro 192, barometro 26. 98, coelo maiorem partem ſereno. D. 25 halo circa lunam ab eius ortu adparuit, vento 3 et 4 W et S, thermometro 154, barometro 26. 72. D. 27 h. 11. p. m. rurſus halo lunaris, coelo ſereno, thermometro 186, barometro 27. 27; h. 7. a. m. erat 27. 00. vento 00, praecedebat W4.

Menſe Februario altitudo maxima barometrica fuit 27. 50 d. 22. h. 11. p. m. thermometro 203, vento o o, coelo per totum diem ſereno. Minima 26. 27 d. 14; in antecedenti obſeruatione 26. 35, vento W 4, qui ad exiguum tempus tantum durauit, quem excepit malacia h. 11. p. m. barometrum rurſus erat 26. 40, thermometro 164, niuibus per totum diem cadentibus.

Frigus maximum 241 d. 23. h. 7. a. m. vento o o, barometro 27. 12; die praecedenti thermometrum monſtrabat 220, et h. 5. p. m. rurſus 177, et barometrum 27. 22, coelum erat nubilum. Minimum frigus erat 147 d. 5. p. m. barometro 26. 98. vento S 2, coelo nubilo, et niue cadente copioſiſſima.

Venti vehementiores fuere d. 2 S 4 et W 4, ſequente malacia; d. 8 W 4 ſequente malacia; d. 12. W 4, et d. 13. S 4, ſequente malacia breui; d. 14 W 4, ſequente malacia; d. 17 W 4, antecedente et ſequente malacia per omnes ſequentes dies.

D. 7 inter h. 8 et 10^{am} p. m. regio ſeptentrionalis multa luce fulgebat, praecedente inſigni obſcuritate, quae ſegmenti ſpecie adparebat. Nullus lucis motus, nulli radii, nec vlli colores. Ventus erat oo, thermometrum 164, barometrum 27. 00, h. 5. p. m. 26. 94.

Die 8 ſtatim poſt h. 9. p. m. plaga coeli inter NNW, et NO ſita, multis columnis viuida luce praeditis leuiterque rubentibus, et vix ad 45 gradus eleuatis, omni motu deſtitutis, interdum tamen

men viuidius micantibus, occupata erat, idque phaenomenum ad 10^{am} vsque horam conſpectum fuit, tunc omnis lux multo pallidior facta breui poſt plane diſſipata eſt, licet coelum ſerenum manſerit; vento oo, thermometro 195, barometro 27. 30, antea 27. 17, et poſtea 27. 22 erat barometrum.

Halo circa lunam d. 19. h. 11. p. m. coelo hinc inde tenuiſſimis nubibus obducto, vento o o, thermometro 191, barometro 27. 07. Februarii 20 itidem h. 8. p. m. halo adparere coepit, et ad h. 12 et amplius durauit, vento o o, thermometro 187, barometro 26. 97, coelo tenuiſſimis nubibus obducto.

D. 24 inter h. 9. et 10. p. m. radii, ſiue faſciae, perquam lucidae, a ſeptentrionibus in *Zenith*, et ab hinc in meridiem vsque, exporrectae erant, motu omni deſtitutae, micantes tamen aliquantisper. Vix phaenomenum dimidiam horam durauit, quod coelum tenuiſſimis nubibus obductum vlteriorem eius comtemplationem impediuit. Alterum phaenomenum priori mox ſucceſſit, ſcilicet h. 11 halo circa lunam pallida, quae vero ob ſerenitatem coeli ibi regnanten vix conſpicua fuit, vento o o; thermometrum 188, barometrum 27. 42, antea 27. 34 poſtea 27. 32, et thermometrum antea 179 et poſtea 195 monſtrabant.

Hactenus obſeruationes Kirengenſes, reliquae huius anni in vrbe Ieniſea factae ſunt, quae vero a menſe Octobri demum incipiunt.

Menſis Octobris huius anni obſeruationes Ieniſeae inſtitutae, fuerunt ſequentes: Barometri altitudo maxi-

 ma

ma hoc menſe fuit 28. 26. d. 16, thermometro 164, vento 00, coelo albis nubibus obducto; in antecedenti obſeruatione 28. 23. Minima 27. 06 d. 12, thermometro 149, vento S 2, pluuia paruis guttis cadente 27. 33. h. 11. p. m. die praecedenti fuit, et ſequens obſeruatio 27. 13 indicabat.

Thermometrum in ſummo huius menſis frigore monſtrabat gradum 183. d. 28. h. 11. p. m., vento 00, coelo ſereno, barometro 28. 13, qui gradus frigoris durauit ad diem ſequentem, et notatus adhuc h. 8. a. m. coelo nubilo, vento W 3, barometro 28. 20. Minimum frigus 151. d. 5. h. 3. p. m. vento S 2, niue minuta per interualla cadente, barometro 27. 36, in antecedenti obſeruatione 27. 32.

Venti vehementiores gradus 3 et 4 fuerunt d. 2 SW 3 et 4, antecedente et ſequente malacia; d. 4. S 4; d. 5 SSW 4, antecedente et ſequente malacia; d. 11 SO 3; d. 20 WZS 4, antecedente, ſed non ſequente malacia; d. 29 W 3 et 4 per aliquot dies continuans, ſequente malacia, quae quoque antecedebat. D. 1 magna iam glaciei fruſta in fluuio Ieniſea comparuerunt, die antecedenti primae cruſtae glaciales viſae ſunt.

Nouembri menſe obſeruata fuit maxima mercurii in tubo barometrico altitudo 27. 98 d. 15, h. 9. a. m. vento 00, niuibus minutis cadentibus, thermometro 164. Minima 27. 23. d. 20. h. 9. a. m, thermometro 160, vento 00; in antecedenti obſeruatione 27. 68 altitudo fuit. Secundum thermometricas obſeruationes ſum-

summum frigus fuit 203. d. 29. h. 9. a. m. in antecedenti obseruatione 196, barometro 27. 68, vento O 2, coelo sereno cum tenui nebula. Minimum 155 d. 2, coelo nubilo, niue per interualla cadente, vento SW 4, barometro 27. 35, antea 27. 54.

Venti vehementiores d. 1 SW 4, qui continuauit d. 2 et 3 per interualla; d. 13 SSO 4; d. 18 W 3; d. 27 S et N 4; d. 30 SSO 4, semper antecedente et sequente vento vel debili, vel o o.

Nebula tenuis d. 29 antea iam indicata est.

Halo pallida circa lunam d. 11 circa mediam noctem, vento S 1, thermometro 164, barometro 27. 84, coelo tenuissimis nubibus obducto.

Decembris mensis obseruationes in vrbe Ienisea continuatae sunt.

Hoc mense mercurius ad 28. 28 in tubo torricelliano adscendit d. 23, coelo nubilo, vento o o, thermometro 170, antea 28. 13 barometrum erat. Minima 27. 28 d. 2. h. 10. a. m. thermometio 163, SW 3 et 4, coelo sereno. Obseruatio antecedens 27. 58 et consequens 27. 46 indicabat. Secundum thermometrum summum frigus 205 d. 4. h. 9 a. m. Vento o o, sereno coelo, nebula tamen tenuissima, barometro 27. 72, antea 27. 65. Minimum 158. d. 9. 12 13. Venti vehementiores d. 1 et 2 S 3 et 4; d. 5 S 3.

Nebula tenuissima d. 4. h. 9. a. m. antea iam notata est.

A.

A. MDCCXXXIX.

Obſeruationes anni 1739. Ieniſcae continuatae ſunt. Menſe Ianuario ſumma altitudo barometrica 28. 30 d. 4, thermometro 206, vento O 2, coelo ſereno, vapore tamen in aëre tenuiſſimo viſibili; antecedens obſeruatio 28. 20 et conſequens 28. 18 indicabat. Infima altitudo 27. 10 d. 24. h. 9. a. m. in antecedenti obſeruatione 27. 40 et ſequenti 28. 09, thermometro 212, vento o o, coelo ſereno cum tenui tamen nebula.

Maximum frigus hoc menſe 215. d. 17. h. 8. a. m. vento o o, coelo ſereno, tenui tamen nebula. Inſigniores frigoris gradus fuerunt quoque d 1, 208. d. 4, 210, d. 5, 206, d. 16, 213 d. 18, 214, d. 19, 212, d. 23, 214, d. 24, 212.

Minimum frigus 168 d. 11. h. 11. p. m. antecedens obſeruatio 175 et conſequens monſtrabat 169. coelum nubilum, ventus W 3 et 4, barometrum 27. 96, antea 28. 00 erant.

Venti vehementiores d. 1 SgO 3 et 4; d. 7 O 3; d. 12 W 3, reliquo tempore vel malacia, vel ventus debilis regnabat.

Vapor ſpiſſus atmoſphaeram ad notabilem altitudinem occupauit d. 1, coelo tamen ſereno, barometro 28. 28, thermometro 208, vento o 2. Eiusmodi vapor ſpiſſus d. 4 quoque obſeruatus eſt, coelo ſereno, barometro 28. 20, thermometro 210, vento oo; d. 5 vapor in aëre tenuis conſpectus eſt. Nebula ſatis ſpiſſa

d. 16;

d. 16; nebula tenuis d. 17 et 18; tenuiſſima nebula itidem d. 19, 22; item d. 23, 24.

Halo circa lunam d. 7 ab h. 9. p. m. ad 12, et amplius, vento O 3, thermometro 181, barometro 28. 05. h. 12. Porro halo circa lunam pallidiſſima d. 9 inter h. 7 et 8 p. m. Circa mediam noctem multae faſciae lucidae per coelum diſperſae, barometro 28. 02, thermometro 180, vento OSO, coelo nubilo. Die 11 inter h. 8 et 9 p. m. rurſus halo circa lunam, coelo nubilo, vento W 3 et 4, thermometro 168, barometro 27. 96, antea 28. 00.

Menſe Februario ſumma barometri altitudo 28. 10 d. 21. h. 11. p. m. coelo ſereno, vento SSO 1, thermometro 169. Barometrum in priore obſeruatione erat 28. 03, et in ſequenti 28. 00. Minima altitudo 27. 23 d. 12. h. 9. a. m. coelo nubilo, vento SgO 4, thermometro 158. Antecedens obſeruatio barometrica 27. 53, ſequens 27. 48, continuante vento W 4.

Thermometricae obſeruationes monſtrant, frigus ſummum fuiſſe d. 6. h. 8. a. m. 186, vento SO 2, coelo nubilo, barometro 27. 68. Praecedens obſeruatio thermometrica 155, et ſequens 161 indicabat. Frigus minimum erat 133. d. 19. h. 9. a. m. vento S 2, coelo nubilo, niue ſe reſoluere incipiente, barometrum 27. 62 indicabat.

Venti vehementiores d. 1 SO 4, idem die ſequenti; d. 5 S 3; d. 7 W 3; d. 9 W 4; d. 11 S 4; d. 12 W 4; d. 19 S 3; d 23 S 4.

D. 28 h. 12. p. m. a meridie septentrionem versus, in altitudine 15 circiter graduum, zona conspiciebatur perquam lucida, non admodum lata, infra quam coelum obscurissimum adparuit, reliquae coeli regiones stellis egregie lucebant. Catarrhi toto mense epidemice grassati sunt.

Mense Martio notata summa barometri altitudo est 28. 12, d. 31. h. 9. a. m. sequens obseruatio erat 28. 05 et antecedens 28. 00. Coelum serenum, Ventus SO 1, thermometrum 157 erant. Minima altitudo 27. 30. d. 14. h. 8. a. m. Praecedens 27. 47 et sequiens 27. 35. Coelum nubilum vento W 2, thermometro 147.

Secundum thermometrum frigus maximum 170 d. 20. h. 8. a. m. in praecedenti et sequenti obseruatione 160. Barometrum 27. 80, ventus NO 1, coelum serenum, quod toto die durauit. Frigus minimum 147 d. 14. h. 8. a. m. vento W 2, coelo nubilo, barometro 27. 30.

Venti vehementiores d. 6 S.W 3; d. 9 W 4; d. 16 S 4; d. 25 W 4.

Aurora borealis d. 2 inter 7 et 9. horam p. m. conspecta, quae primum sub rubedinis lucidae facie NO versus comparuit, tum paullatim columnas in altum misit, ad septentriones simul propius accedens. Columnae illae omnes, quarum vltra duas simul non visae sunt, exiguae durationis erant, et colore quodam rubro ludebant, vento O 1, thermometro 155, barometro

metro 27. 73. D. 18 inter h. 8. et 9. p. m. rubedo quaedam insolita septentriones et meridiem versus visa est, quae breui disparuit. Prima rubedo eaque fulgentissima meridiem versus erat, orientem haec paulatim petiit, et in septentrionibus desiit. Coelum nubibus varium, vento WSW 1, sequente malacia, thermometro 155, et barometro 27. 53.

D. 19 inter h. 9 et 10. p. m. trabes igneae quinque, sex, septentriones versus conspectae, quae nullo motu agitatae fuerunt, nisi quod interdum vna et altera disparuerit, et rursus comparauerit. Euanuerunt vero paulatim, vento N 2, thermometro 160, barometro 27. 75, coelo fere sereno.

D. 30 inter h. 9 et 11. p. m columnae lucidae exiguae altitudinis, et nullius motus septentriones versus visae sunt, luce interdum satis viuida, interdum perquam debili lucentes, vento O 2, thermometro 158, barometro 28. 05, coelo sereno.

Hae columnae rursus adparuerunt inter h. 2 et 3 a. m. sequentis diei 31, quae vero breui disparuerunt. Caeterum catarrhi cum tusse epidemica hoc mense grassati sunt. Febres quoque ardentes et pleuritides non infrequentes fuerunt. In quibusdam etiam febres ephemerae obseruatae sunt. Sub medium mensem morbilli grassari coeperunt.

Hactenus obseruationes in vrbe Ienisea institutae, sequentes huius anni 1739 partim in vrbe Mangasea factae sunt, quae incipiunt a Iunii 9 et pertinent ad

Mmm 2 Iunii

Iunii 18, reliquae Krasnoiarii ab Octobris 18 ad finem anni.

Hoc mense Iunio a 9 ad 18 summa barometri altitudo obseruata Mangaseae 27. 74 d. 12. h. 7. a. m. coelo sereno, vento O 1, thermometro 148. Praecedens obseruatio barometrica 27. 70, et sequens quoque erat. Hoc die declinatio acus magneticae aliquoties horis post meridiem obseruata, orientem versus 8° monstrauit. Minima 27. 44. d. 9, h. 7. a. m. coelo nubilo, vento WNW 1, thermometro 150. Minimus calor 152½ d. 10, h. 9. a. m. Maximus autem 131 d. 15 et 18. Aquae in plateis stagnantes glacie obductae d. 8. et 9, et nix quoque cecidit d. 9. 10.

Ventus semel 3 gradus fuit WNW d. 10, barometro 27.54, thermometro 151 et 152. Antecedens obseruatio barometrica 27.52; caeterum malacia regnauit, et dies vt plurimum sereni fuerunt.

A mensis Octobris d. 18 ad finem summa altitudo barometri Krasnoiarii erat 28. 33 d. 18. h. 3. p. m. vento NNW 1, antecedens 28. 30, sequens 28. 04, coelo sereno. Minima 27. 07 d. 24. h. 3 p. m. vento W 4, coelo nubilo. Antecedens 27. 20 et sequens 27. 35.

Thermometricae obseruationes hic desunt, ex variis datis autem concludere licet, tempestatem hoc mense iam admodum frigidam fuisse.

Nam

Nam Mana fluuio, quinto iam huius mensis die, glacies profluxit. D. 18 ab h. 9 ad 12 per Ieniseam fluuium multa glacies lata est, quae postea disparuit rursus, et d. 16 crustae glaciales insignis magnitudinis conspicuae erant, quae numero iam ita auctae sunt, vt spissisima fluuium tantum non texerint. D. 19. ingens frigus et glaciales crustae insignis magnitudinis per fluuium latae, et sequentibus quoque diebus donec d. 23 circa meridiem glacie riguerit fluuius. Soluta quidem glacies aliquoties diebus sequentibus fuit per aquas intumescentes, sed semper rursus concreuit.

Nebula d. 19. h. 7. a. m. satis spissa, quae circa h. 9. a. m. dissipata fuit, sequente coelo sereno, et frigore aliquantum remittente.

Venti vehementiores d. 24 W4; d. 25 SW et W4; d. 27 W4.

Mensis Nouembris barometrica altitudo maxima 28. 35. d. 5. h. 5. p. m. antecedens 28. 17, sequens 28. 25, vento 00, coelo sereno, tempestate frigidissima. Trabes domuum noctu strepitum ediderunt. Minima 26. 97 d. 29. Antecedens obseruatio 27. 03, sequens 27. 20. Ventus erat W4, coelum nubilum. Thermometricae obseruationes desunt.

Venti vehementiores d. 1 W4, qui ad sequentem diem continuauit; d. 12 et 13 SW4; d. 14. et 15 SW4; d. 19 et 20 procella inter W et S, barometro 27. 14, antea 27. 40, et postea 27. 63; d. 23 SW4; d. 25 W4; d. 26 SW4; d. 27 W4; d. 29 W4.

 Caete-

Caeterum hoc et praecedente menſe febres ephemerae et ardentes, ſatis tamen benigne, et ſine ſtrage, graſſatae ſunt.

Maxima barometrica altitudo Decembri 28. 14 d. 15 h. 5. p. m. Antecedens obſeruatio 28. 05, et ſequens 27. 95, Vento o o, coelo ſereno, et tempeſtate frigidiſſima. Minima 26. 85 d. 3, h. 7. a. m. antecedens 27. 20, ſeq. 27. 15, V. W 2, coelo ſpiſſis nubibus obducto.

Venti vehementiores d. 7 W 4; d. 11 W 4; d. 18. Nebula admodum ſpiſſa h. 7. a. m. vento o o, barometro 28. 00, coelo ſereno, ſequente frigore intenſo.

MDCCXL.

Obſeruationes huius anni 1740 a Ianuarii 1 ad Septembris 6 adhuc Krasnoiarii factae ſunt, ſed deficiunt adhuc obſeruationes thermometricae; reliquae ab Octobris 1mo ad finem anni inſtitutae Tomii (Tomsk) ſunt.

Menſe Ianuario barometri altitudo maxima 28. 40, d. 17; h. 7, a. m. antecedens obſeruatio 28. 39, et ſequens 28. 33 indicauit. Coelum ad horizontem nubilum, caetera ſerenum. Vento W 3, qui iam a d 15 ſaeviit vehementia 3 et 4, frigore intenſo. Minima 27. 08 d. 10 h. 8. a. m. in praecedenti obſeruatione 27. 30, in ſequente 27. 09, vento W 1, coelo nubilo, tempeſtate tepida.

Venti hoc menſe vehementiores d. 15 W 3; d. 18 SW 3; d. 21 SW 4; d. 22 SW 3; d. 30 W 3

W 3 et 4; diebus fere omnibus intermediis perfecta malacia, et dies fuerunt sereni, et frigus intensissimum.

Nebula tenuis, frigore intenso, coelo fere sereno d. 2 h. 7. a. m.

Nebula spissa, a saeuo gelu, vento W 2, barometro 27. 80 d. 14 h. 7. a. m. praecedente et sequente coelo sereno.

D. 15 rursus nebula spissa, h. 7. a. m. intenso frigore, quae h. 11. a. m. dissipata est, vento oo, sequente vento W 3, et coelo mixto; d. 19 spissa nebula h. 7. a. m. praecedente coelo sereno et sequente vento oo, quem proxime praecedebat SW 2, et sequebatur quoque.

Summa altitudo barometrica mense Februario fuit 28. 16 d. 21 h. 9. a. m. in praecedente obseruatione 28. 02, in sequenti 28. 13, coelo ad horizontem tenuibus nubibus obducto, frigore intenso. Minima 26. 90 d. 27. h. 8. a. m. praecedens 26. 92 sequens 27. 37. Procella inter W et SW, quae iam a secunda hora post mediam noctem regnabat, mox intensius, mox remissius, interdum cum intermissione totali. H. 7. a. m. pluuia minutissimis guttis per quadrantem horae cecidit.

Venti vehementiores d. 23. W 4; d. 25. SW 4; d. 26 et 27 SW 3 et 4. A 1 ad 21 perfecta malacia regnauit, coeli serenitas et frigus intensum.

Mensis Martii barometri altitudo summa 28. 45, d. 13. h. 8. a. m. in antecedenti obseruatione 28. 27, in

27, in sequenti 28. 40 erat. Minima 27. 25, d. 24, in antecedenti 27. 32 et sequenti 27. 30, vento WSW 2, coelo spissis nubibus obducto.

Venti vehementiores d. 2 W 4, sequente malacia, quae quoque proximo incedebat; d. 4 NW4; d. 11 W4; d. 12 inter W et NW4; d. 14 WSW3, d. 16 OSO 3; d. 25 N3.

D. 10 duas horas ante occasum solis duo parelii, et ab iis vtrinque ad latus a sole auersum fascia lucida horizontaliter extensa conspiciebantur. In parreliis illis vtrinque terminabatur columna ab horizonte extensa, et semicirculus supra solum conspicuus, qui vt et parrhelii a sole 15 circiter diametros solares distabant. Supra semicirculum in distantia 12 circiter diametrorum solarium arcus cruribus sursum versis suspensus erat. Omnia iridis coloribus lucebant, rubeo colore in columnis et dimidio circulo soli obuerso; in arcu inuerso in contrariam partem. Haec ad occasum vsque solis durabant, nubibus per interualla impedientibus, ne distincte omnia omni tempore conspici potuerint. Ventus erat oo, barometrum 27. 57.

D. 24 ventus WSW4 h. 9, a. m. grandinem exiguae tantum molis attulit, quam multae niues sequutae. D. 30 h. 10 p. m. circa lunam halo pallida adparuit, quae 5 horas et amplius durauit, vento oo, coelo subsereno, barometro 27. 65.

Mensis

Menſis Aprilis ſumma barometri altitudo 27. 90, d. 26. h. 9. a. m. antecedens obſeruatio 27. 65, et ſequens 27. 84 indicabant, vento NNW 2 et 3, coelo ſereno. Minima 26. 85, d. 18 h. 8. a. m. Antecedens 26. 95, et ſequens 27. 50, vento W 4, coelo nubilo et pluuio. Aquae fluuii ex veſpera heſterni diei 5 Werſchok auctae erant.

Venti vehementiores d. 8. 9. et 10, W 3 et 4; d. 11 W 4; d. 12 WgS 4; d. 13 WNW 4; d. 14 W 3; d. 15 OgS 4; d. 16 W 4; d. 18 W 4; d. 24 N 4.

Aquae fluuii Ieniſeae increuerunt inſigniter d. 14. D. 16, vento W 4, multis in locis glacies in Ieniſea fluuio ſoluta fuit, d. 19, fluuii glacies rupta. Solennis huius rupturae glaciei terminus apud incolas habetur dies Georgii. Caeterum poſt ruptam glaciem fluuii Ieniſeae, cruſtae glaciales admodum multae ad 21 vſque latae ſunt, potiſſimum a glacie ad littora relicta, et ſtatim poſt rupturam aqua valde increuit. Circa d. 8 Pulſatillae florere coeperunt, circa d. 10 anſeres, et d. 13 cygni viſi ſunt. Primum tonitru cum fulgure et larga pluuia d. 29 eſt obſeruatum.

Menſis Maii altitudo barometri ſumma obſeruata fuit 27. 75, d. 15, h. 8 a. m. coelo ſereno, vento 00, in antecedenti obſeruatione barometrum erat 27. 70, et in ſequenti 27. 62. Dies antecedens et ſequens fuerunt ſereni. Minima notata eſt 27. 07 d. 22 h. 8

 a. m.

a. m. vento W 3, coelo maiorem partem nubibus ſpiſſis obducto. Aquae fluuii nocte 2 Werſchok auctae erant. Praecedens obſeruatio 27. 12 et ſequens 27. 26, notabant. Ventus antecedens erat NW 1, et ſequens W 4, quem larga ſequuta eſt pluuia, ſemi horam tantum durans. Poſt hanc ventus ex NW ſumma cum vehementia ſequutus. Quum hic vix flare coepiſſet, mercurius in barometro altius adſcendit, et coelum paullatim ſerenum factum eſt.

Venti vehementiores d. 2 W 3, d. 3 W 3, d. 7 N 3, d. 9 NO 4, d. 11 SW 4, d. 12 SW 4, d. 13 W 4, ſequente vento 00, d. 15 et d. 26 W 4.

Tonitru e longinquo auditum eſt d. 3 circa h. 5 a. m. Inter h. 3 et 4 p. m. tonitru frequens fulgure comitatum, eſt auditum, d. 26 h. 8. p. m. tonitru et fulgura, quae ſequuta eſt larga pluuia per horam durans, d. 30 tonitru cum fulgure et cum pluuia larga.

Niues hoc menſe cecidere adhuc d. 5, vento WNW 2, d. 7 niues per interualla, vento N et NgW 2. Niues pluuiae interdum mixtae, nonnunquam grando, exiguae tamen molis, vento N 2 et 3 et NW 4. D. 8 nocte nix cecidit, et per diem quoque per intervalla. D. 9 rurſus niues, vento NO 4, tranſeunte in SO 4. Grando piſi magnitudine d. 29 cecidit.

Pluuiae cecidere d. 3. 4. 12. 13. 14. 19. 22. 26. 28; d. 24 mane pruina admodum copioſa, vnde de multa vegetabilia, inprimis ea, quae floruerunt, adusta fuere. D. 25 ros largus mane cecidit; d. 29 rursus pluuia, vt et d. 31.

Caeterum fluuii Ieniseae aquae frequenter hoc mense increuerunt,, vti d. 4, et 7, vento NO 2, d. 21. 22, 24, 25, 26, vento W 1, et 3, d. 27. et 28 vento W 2 et 3. Vti aquae fluuii saepius supra altitudinem ordinariam adscenderunt, sic quoque saepius infra illam hoc mense descenderunt.

Iunio mense barometrica altitudo summa fuit 27. 43, d. 10 h. 8 a. m. antecedens 27. 36, sequens, 27. 33, coelo adhuc sereno, dein spissis nubibus obducto, vento SW 2, sequente vento WNW 1, dein vento 00. Minima 26. 87, d. 29 h. 6 a. m. coelo nubilo, cum sole interlucente, vento SSW 2. Proxime antecedens 26. 93, vento SSW 2, pluuia tota die per interualla cadente, sequens 27. 02, vento SW 2, pluuiis et imbribus per interualla cadentibus.

Venti vehementiores d. 3 S 4, quem larga sequuta est pluuia, d. 9 SW 3, d. 14 W 3, d. 20 SW 4, quem modica pluuia sequuta est.

Pluuiae largae d. 1 antecedentibus fulguribus perquam lucidis, et tonitru perquam concussorio. Sequuta est quoque grando pisi magnitudine cum pluuia, quo tempore ventus ex NW spirauit, qui alias maiorem diei partem inter W et SW substitit. Porro pluuiae d. 3 et 4, cum tonitru; pluuia cum tonitru d. 5, et 6; d. 8 circa occasum solis pluuia pauca; d. 9 tonitru cum imbre; d. 13 tonitrua cum larga pluuia, vt et d. 17. 18. 20; d. 24 fulgura et tonitrua horrenda largiſſina pluuia ſubſequente, praecedente vento S 4, barometro 27. 25, in antecedenti obſeruatione 17. 05; d. 25 pluuia, vt et 26. 27, d. 28 pluuia per totum diem cum incremento aquarum, vento SSW 2, et d. 29 cnm incremento aquarum, aëre praeter modum frigido, vento SW 2.

Iulio menſe ſumma barometri altitudo 27. 57 d. 27. h. 8. a. m. vento N 1, praecedente O 2, et ſequente W 1, coelo tenuiſſimis nubibus obducto, ſequente coelo ſereno. Antecedens altitudo 27. 55, ſequens 27. 48, aquis Ieniſeae diebus aliquot antecedentibus et ſubſequentibus admodum auctis. Minima altitudo 26. 95 d. 1, vento inter WSW et SSW vario, ſole per nubes lucente, ſequente h. 3. p. m. inſigni tempeſtate cum lucidiſſimis fulguribus et tonitru perquam concuſſorio. Nocte et mane per interualla larga pluuia cecidit. Antecedens altitudo 26. 90, ſequens 27. 30.

Venti vehementiores d. 16 W 4, barometro 27. 07, antecedens altitudo 27. 00, ſequens 27. 18; d. 23 W 3; d. 25 W g S 4, altitudo barometri 27. 30, antecedens 27. 15 et ſequens 27. 43; d. 30 N 3; d. 31 O 3 et 4.

Pluuiae et tonitrua. D. 1mo longa pluuia, tonitrua et fulgura lucidiſſima; d. 2 imbres et pluuiae; d. 3 tenues pluuiae; d. 4 modica pluuia; d. 5 pluuia modica.

D. 9

D. 9 inter h. 3 et 4. p. m. fulgura admodum lucida ex S et W prodibant cum tonitru intenso, et perquam concussorio, quae pluuia sequuta est largissima in imbrem tandem mutata. Aëre praecedente feruidissimo. Ventus W 1, altitudo barometri 27. 12, antecedens 27. 17, sequens 27. 20 erant. D 11 pluuia largissima; d. 13 pluuia larga; d. 15 pluuia larga. vento paullo ante ex W cum vehementia 3 spirante; d. 18 pluuia larga; d. 19 ingens pluuia, vento ex SO 4. D. 21 magna pluuia, vento ex N cum vehementia tertia et quarta spirante. D. 23, praeeunte vento ex W 4, pluuia largissima, tonitru quoque e longinquo auditum est.

Nebula spissiffima d. 31 ab ortu solis fluuio Ieniseae imminuit, vento OO. Aquae Ieniseae fere perpetuo, modo increuerunt, modo decreuerunt, vix vno alteroque die praeterlabente, quin mutationem passus sit fluuius.

Augusto mense altitudo barometri maxima 27. 87 d. 31. h. 7. a. m. vento OO, coelo sereno, aëre perquam frigido. Antecedens altitudo 27. 66, et sequens 27. 65. Minima 27. 08 d. 28 h. 8 a. m. coelo sereno, interspersis hinc inde tenuibus nubeculis, sequuta est h. 2. p. m. procella ex W cum grandine pisi maioris magnitudine, dein pluuia satis larga, calor interdiu aestiuus in aëre regnauit. Antecedens altitudo 27. 15, sequens 27 24 erat.

Venti vehementiores d 5 O 4, descendente barometro a 27. 50 ad 27. 32; d. 14 NW 3, descendente barometro ab h. 8. a. m. ad h. 6. p. m. a 27. 60 ad 27. 50; d. 15 et 17 OgS3; d. 22 O3; d. 23 ONO3; d. 25 SSW3, d. 26 W4 quem comitata ingens pluuia, barometri altitudo 27. 22 a die 24, sequens autem h. 11. p. m. huius diei 27. 44. D. 28 W3 et 4; d. 29 W3 et. 4, aëre frigidiusculo.

Pluuiae. D. 6 7 et 8. pluuia larga; d. 13 largissima repetitis vicibus; d. 24 pluuia tenuis; d. 25 pauca pluuia; d. 26 ingens pluuia.

Nebulae. D. 9 circa ortum solis spissa nebula, quae post ortum eius mox dissipata est, d. 10 nebula, vt praecedens, circa ortum solis. Caeterum aquae fluuii Ieniseae rarissime nullam mutationem passae sunt, sed modo increuerunt, modo decreuerunt.

Septembris mensis obseruationes barometricae tantum per sex dies habentur, a 1^mo ad 6^tum intra quos barometrum variatum a 27. 57 ad 27. 37. In montosis locis supra vrbem Ieniseam nix satis larga nocte inter d. 4 et 5 cecidit ex relatione inde profectorum.

Hactenus obseruationes Krasnoiarii factae. Has quae excipiunt, in itinere Tomium versus instituto habitae sunt.

Dies nonus Septembris calore et amoenitate aestiuo similis fuit, quem et nox sequebatur clarissima stellarum luce splendens et tepida. Dimidia vero hora ante mediam noctem septentriones versus nubes admodum lucida conspecta fpecta fuit, horizonte in vicinia prae obfcuritate feratro. Caeterum etiam coelum, antea quidem fplendidiffimum, atris nubeculis, quae, ftellis interpofitae, harum lucem quafi illuftriorem reddiderunt, paullatim hinc inde obductum fuit. Nubes lucida in feptentrionibus breui poft igneo fulgore ruboreque corufcabat. Eodem fere tempore orientem verfus tres praelucidae columnae ab horizonte in altum ad 30 circiter gradus extenfae confpiciebantur, mox rurfus difparentes. Nubes illa lucida memorata lucem fuam admodum variabat omni momento, interdum penitus rubra, interdum orientis inter nubes folis inftar tincta, nonnunquam et lunae inftar pallida erat. Quadrantis horae fpatio elapfo eadem nubes orientem verfus amplificabatur, tuncque conftanter pallida fuit. Breui poft totum coelum obfcuratum fuit, et ventus fubito vehementiffimus ex SW, cuius afflatu lux illa feptentrionalis fubito quafi exftincta, aut diffipata fuit. Ventus hic nec faeuire defiit tota nocte, at coelum, poft praeterlapfam dimidiam horam, rurfus aliquantum ferenabatur, partique feptentrionali inprimis tanta claritas inducebatur, quae totam atmofphaeram ita claram reddidit, quafi lunae pleno fplendore illuftraretur. Hocque durabat ad h. $1\frac{1}{2}$ poft mediam noctem, quo tempore coelum fpiffiffimis nubibus obductum eft. Circa diluculum diei fequentis infignis pluuia cecidit, quam procella omnium vehementiffima SW fequuta eft. Ex hoc porro tempore ad 20 vsque venti fere perpetuo faeuiere, copiofaeque pluuiae ceciderunt. D. 18 aliquot leucas infra Kofchuci oftium ad Kiam grauiffima obferuata eft tempeftas, tonitribus fulguriguribusque frequentiſſimis ſtipata, qualis hoc anni tempore in *Sibiria* a nemine adhuc audita. Poſt meridiem nix cecidit, ſaeuiente vento perpetuo. Diebus ſequentibus 19 et 20 perpetua erat procella cum niuibus copioſis, ſed d. 21 coelum ſerenabatur et ad finem vsque menſis dies erant adeo placidi, tepidi ac ſereni, qui cum amoeniſſimis veris diebus certare potuerunt.

Reliquorum menſium huius anni 1740. ſcilicet Octobris, Nouembris, Decembris obſeruationes Tomii inſtitutae ſunt, et thermometricae rurſus incipiunt.

Menſis Octobris maxima barometri altitudo 28. 25 d. 17. h. 11. p. m. vento SO 1, praecedente malacia, et ſequente vento OSO 1. Altitudo antecedens 28. 24, ſequens 28. 18, thermometrum 168, coelum ſerenum erant. Cruſtae glaciales toto hoc die per Tomum fluvium latae ſunt, et aquae Tomi iam a tribus diebus admmodu increuerant. Minima 27. 42 d. 29 h. 8. a. m. Antecedens 27. 64, ſequens 27. 94, thermometrum 156, ventus inconſtans SSW 3, antea SSW 4 qui tantus fuit nocte ad diluculum vsque, vt hinc inde tecta domuum tolleret, ſequente vento S 2 et deinde malacia.

Frigus maximum 178 d. 30, antecedens 169 et ſequens 174, vento SO 1 et ſtatim ſequente malacia, antecedens ventus SSW 3 et 4. Barometrum 28. 00, antecedens altitudo 27. 94 et ſequens 27. 90 erat.

Mini-

Minimum frigus 137 d. 10, h. 10. p. m. antecedens 148, et ſequens 145. Barometrum 27. 52, ventus S 2, coelum ſerenum, tamen hinc inde tenuiſſimis nubibus obductum, ſequente pluuia rara, tenuisſimis guttis roris inſtar cadente.

Venti vehementiores d. 3 et 4 S4, d. 12 SW4, barometro deſcendente a 27. 72 ad 27. 17 ab h. 12 nocte ad h. 9. a. m. h. 5 p. m. rurſus erat 27. 46, ſequente W 2, et malacia; d. 14 SSW 3 et 4; d. 18 S3 et 4; d. 22 SW 3; d. 28 SSW 4, altitudo barometri 27. 64, antecedens 28. 10, et ſequens 27. 42 procella continuante.

Pluuia, nix, grando. D. 3. h. 4. p. m. per interualla mox pluuia, mox grando minuta; praecedenti die h. 3. p. m. aër ſubito totus nebulae cuiusdam ſpecie obſuſcabatur, quae fere dimidiam horam durauit, aduſtae rei odorem ſpirans; d. 4 nix rara, nocte vero niues perpetuae; d. 5 nix continua. D. 6 nix; d. 7 pluuia copioſa vt et d. 8; d. 10 pluuia rara; d. 12 pluuia, nocte vero nix rara magnis tamen floccis per dimidiam horam cecidit; die 13 larga nix; d. 14 niues magnorum floccorum; d. 16 toto niues ceciderunt; d. 19 inter horam 2 et 6tam tanta niuium copia cecidit, vt campos penitus operiret. D. 20 ſpiſſa nebula; d. 22 nix rara; d. 23 nix copioſiſſima minutis floccis; d. 27 niues largae mediocrium floccorum, h. 5 p. m. fulgur quoque ex occidente iactatum eſt inſigne, coloris autem multo pallidioris, quam aeſtate fieri ſolet; d. 30 tenuis nebula.

Tomus fluuius circa meridiem d. 24 glacie coiuit, thermometro 157, postquam iam a d. 15 crustae glaciales per fluuium latae fuerunt per intervalla. Per vices quoque increuit et decreuit.

Mensis Nouembris maxima barometri altitudo 28.35 d. 30. h. 11. p. m. vento 00, coelo sereno, thermometro 187. Antecedens altitudo 28. 00, sequens 191 primo scilicet die mensis sequentis. Minima 26. 82 d. 14, vento S 4, coelo nubilo et copiosas niues fundente, quamuis thermometrum tantum 146 monstraret, niues autem breui post in aquam resolutae. Sequens altitudo barometri 27. 02, procella continuante, antecedens 27. 45.

Frigus maximum 191 d. 10 per totum diem, vento 00, qualis et antecedens et consequens fuit, barometri altitudo 28. 15, antecedens 27. 95, consequens 27. 90. Minimum 146 d. 14, vento S 4, coelo nubilo et niuoso, barometro 26. 82.

Ex vtroque latere solis bina parelia visa fuerunt d. 17 ab h. 11½ a. m. ad h. 1^{am} iridis coloribus ludentia, a quorum vtroque horizontaliter fascia pallida, in imum vero verticaliter ignea quasi columna protendebatur, vento S 1, coelo sereno, thermometro 184, barometro 27 85. Die antecedenti coelum tenuissimis nubibus obductum erat, et minutissimae moleculae glaciales per aëra ciciderunt.

Mensis

Menſis Decembris barometrica altitudo ſumma fuit, 28. 48 d. 27. h. 11. p. m. Antecedens 28. 26, ſubſequens 28. 25, thermometro 173, vento OSO 1, antecedente et ſubſequente malacia. Coelum ſerenum, vti quoque diebus antecedentibus et conſequentibus erat. Minima 27. 30 d. 3 h. 11. p. m. antecedens 27. 60 et ſequens quoque 27. 60, thermometro 155, vento SW 2, praecedente SW 4 et ſequente W 2. Coelum nubilum, et niuoſum, die antecedenti quoque et ſequenti niues cecidere.

Frigus ſummum 191 d. 1 h. 8. a. m. Praecedens 187 et ſequens 180, barometri altitudo 28. 35 ſequens 28. 20. Ventus S 2, ſequente S 4, antecedente malacia. Coelum ſerenum per totum diem, vti quoque diebus antecedentibus aliquot, ſequenti vero die coelum nubilum, et ſequentibus quoque diebus fuit. Frigus minimum hoc menſe incidit in diem 23 h. 9 a. m. quod fuit 151, antecedens 154, et ſequens 157, barometro 27. 60, vento SSW 2, coelo nubilo.

Venti vehementiores d. 1 S 4; d. 2 S 3 et 4; d. 3 S 4; d. 5 S 4; d. 14 S 4; d. 16 SO 4; d. 19 SSO 4; d. 20 SSO 4.

Halo pallida circa lunam adparuit d. 1 h. 11 p. m. coelo tenuiſſimis nubibus obducto, thermometro 176, barometro 28. 00, vento S 2, antecedente et ſequente S 4.

A. MDCCXLI.

Obſeruationes huius anni barometricae et thermometricae Tomii ſunt continuatae, et pertingunt ad Aprilis 22, a Ianuarii 1^mo^ incipientes. Incendio enim hoc die facto inſtrumenta, quae meteorologicis obſeruationibus adhuc inſeruiere, fuerunt perdita.

Menſe Ianuario maxima barometri altitudo 28. 40 d. 4. h. 8. a. m. Antecedens 28. 36, ſequens 28. 38, thermometro 184, vento 00, ſequente OSO 1, dein SSO 2 et 3, praecedente malacia. Coelum ſerenum, vti quoque fuit diebus aliquot antecedentibus, et die ſequenti. Minima altitudo 27. 38 d. 26, antecedens 27. 44 ſequens 27. 74, vento NW 2, coelo nubilo niues largas fundente pulueris inſtar, thermometro 152.

Frigus maximum hoc menſe 205 d. 21 h. 8. a. m. Praecedens 195, ſequens 198. Altitudo barometrica 27. 96, antecedens 28. 05, ſequens 27. 72. Ventus SO 2, antecedens SO 1, ſequens 00, dein S 3. Coelum ſerenum, tenuiſſimae tamen nebulae in aëre. Dies tres antecedentes ſereni, ſequens autem mixtus. Minimum frigus 152 d. 26. h. 8. a. m. praecedens 154 et ſequens 158, barometro 27. 38, vento NW 2, coelo nubilo et niue pulueris inſtar copioſiſſima cadente.

Venti vehementiores d. 6 SSO 3; d. 9 OSO 4; d. 14 SSO 4; d. 18 S 4; d. 30 OSO 4; d. 31 SSO 4.

D. 12

D. 12 inter h. 8 et 9 p. m. coelum inter ſeptentrionem et occidentem ſubito ruberrimo fulgore coruſcabat, cui fulgori mox ex ſeptentrionibus et poſtea ex occidente faſciae eiusdem coloris iungebantur. Sed haec lux inter varias mutationes, et motus vix dimidiam horam durauit, coelo iis in regionibus paullatim tenuibus nubibus obducto. Adparuerunt quidem mox poſtea per obſcuritatem coeli, quaſi emicantes quatuor aut quinque faſciae in altum ſurgentes, et inter illas etiam vna et altera rubro colore inſignis, ſed et illae breui diſparuerunt, coelo adhuc obſcuriore facto. Coelum tenuiſſimis nubibus erat obductum, vento OSO 2, thermometro 180 barometro 27. 80, h. 11. p. m.

Tenuiſſimae nebulae d. 20 et 21 fuerunt.

Februario menſe ſumma barometri altitudo 28. 30 d. 23. h. 8. a. m. antecedens 28. 20, ſequens 28. 25, thermometro 185, vento OSO 1, praecedente malacia, et ſequente SSO 3, coelum ſerenum, vti die antecedenti, ſequenti autem nubilum fuit. Minima 27. 02 d. 20. h 8. a. m. antecedens 27. 40, ſequens 27. 25, thermometro 148, vento S et SSW 4, praecedens S 4, et ſequens W 4. Coelum nubilum, et niues interdum et exigua grando pluuiaque cadebant.

Frigus ſummum 188 d. 24. h. 8. a. m. antecedens 180, ſequens 169, barometri altitudo 28. 16, antecedens 28. 25, ſequens 28. 17, vento SSO 3, antecedente OSO 1, sequentes SW 2, coelo nubilo, antea sereno postea nubilo et niuoso. Minimum frigus 140 d. 12. h 8. a. m. antecedens 155, sequens quoque 155. vento SSW 2, antecedente S 2, et sequente etiam S 2. Coelum nubilum et niues, rarae et minutae, vti quoque antecedenti et consequenti die cecidere.

Venti vehementiores d. 2 W 4 et SSW 4; d. 4 SSO 4 d. 5 SSW 4 et S 4; d. 6 SO 4, durante hoc vento, barometrum a 27. 90 descendit ad 27. 32; d. 7. SSO 3 et 4; d. 8 SO 4. D. 20 SSO 4 et S. 4 D. 21 W 4; d. 26 S 4; d. 28 SO 3 et 4.

Halo circa lunam et per longum satis tempus stella in ipso halonis limbo d. 15 inter h. 8 et 10. p. m. adparuit, coelo plurimam partem sereno, vento S 2, thermometro 172, barometro 28. 10, sequens altitudo 28. 00 erat.

Mensis Martii barometri altitudo summa fuit 28. 28 d. 25 h. 8 a. m. antecedens 28. 17, sequens 28. 20, thermometro 166, vento W 1, antecedente SgO 2, et sequente SgO 2, coelum tenuissimis nubibus obductum erat. Minima 26. 85 d 21 h. 11 p. m. antecedens 27. 17, sequens 26 97, thermometro 152. H. 7 a. m. 171, in sequenti obseruatione 158, vento SO 2, praecedente OSO 3, et sequente SO 4 et W 4. Coelum nubilum, niue ad crepusculum vsque cadente.

Frigus maximum 181, d. 27, antecedens 166, sequens 164, vento OSO 1, praecedente O 1 et sequente SO 4, coelum serenum, sequente nubilo cum niuibus

largis.

largis. Minimum 150, d. 17 h. 11 p. m. vento S2, coelo nubilo, barometri altitudo 27. 58, antecedens 27. 63, et ſequens 27. 47, erat.

Venti vehementiores hoc menſe d. 4 et 11 S3, d. 18 W3; d. 19 S3, d. 20 S4, barometri altitudo 27. 48, antecedens 27. 20; d. 21 OSO3, et SO4; d. 22 W4, barometro 27. 25 antea 26. 97; d. 23 S3; d. 27 SO4, barometro ab 28. 05 ad 27. 75 deſcendente.

Halo circa lunam debili luce d. 16 inter h. 9 et 11 p. m. vento OgS2, thermometro 154, barometro 27. 78, ſequens altitudo 27. 63, coelo ſereno, ſequentibus tenuibus nubibus.

A 1ma ad 22 Aprilis obſeruationes ita ſe habent:

Barometri maxima altitudo his diebus viginti duobus fuit 28. 10 d. 5 h. 7 a. m. coelo ſereno, vento SO2, thermometro 155. Minima 27. 45 d. 8 et 9, thermometro 144 vento SO1, coelo ſubſereno.

Frigus maximum 155 d. 5, vento SO2, barometro 28. 10 coelo ſereno. Calor maximus 127 d. 19. h. 5 p. m. vento O2, coelo ſereno.

Venti vehementiores d. 1 O3 et OSO4; d. 7 O3 et 4; d. 13 S4.

D. 2 anſeres et anates primum viſi ſunt; d. 5 cygni viſi ſunt.

D. 18 Tomus fluuius circa h 1. p. m. glacie reſolutus eſt, et aquae admodum intumuerunt, thermometro 132. Glacies inde ad 25 ſatis large per fluui-

fluuium lata, die ſequenti ceſſavit. Aquae quoque paullatim decreuerunt, et limpidiores euaſerunt, quae durante incremento turbidiſſimae erant.

Quia Aprilis 22, incendio facto, barometra et thermometra amiſſa ſunt, vt iam monuimus, potiora tantum meteora menſibus ſequentibus ſunt notata, ex quibus potiſſima indicabimus.

Maii 8 prima pluuia cecidit; porro d. 16 mane pluuia, circa meridiem autem et veſperam niues ceciderunt, quae quidem breui rurſus ſolutae ſunt, ſed propter gelu mox inſequens, flores iam in campis copioſe comparentes, tantum non omnes periere. Menſe Iunio et Iulio nihil memorabile occurrit; menſis autem Auguſti initium in Tara vrbe memorabile, quia admodum feruidum et ſerenum erat. Praecipue vero ob anni tempus aeſtiuum notabilis eſt aurora borealis, quae ſub initium Auguſti adparuit. Nocte ſcilicet inter 2 et 3 h. 10$\frac{1}{2}$ p. m. circiter in regione NNW, trabes igneae decem aut vndecim ab horizonte ad notabilem altitudinem ſurgebant, nec admodum micantes, nec motu in ſenſus incurrente donati, igneus tantum ſplendor interdum augebatur, interdum imminuebatur. Tandem ſpatium trabibus interceptum atrum paullatim euaſit, qui ater color breui tempore cum ipſis trabibus communicatus eſt, vnde denique tota regio atra euaſit. Sed poſt aliqua momenta totum coelum nubibus obductum eſt, quo tempore et atra antea regio eundem cum reliquo coelo colorem obtinuit, id quod accidit h. 11$\frac{1}{2}$ p. m. Ceterum feruor aëris diebus ſequentibus tantus erat, vt

omnia

omnia vegetabilia ita adparerent circa medium Augustum, vti sero auctumno comparere solent, omnia scilicet exsiccata et quasi combusta. Vix florum quid in campis conspiciebatur, maiorque plantarum pars iam in semima excreuerat.

Septembris 21 in munimento Ialutorowensi cum serena tempestate Boreas fortiter spirauit. Vespera eius diei serenissima erat tempestas, et ventus placatus; h. 10. p. m. aurora borealis tranquilla comparebat. Circa h. 11. NW versus trabes ruberrimo colore donatae conspiciebantur. Circa mediam noctem omnes trabes lucidissimae erant, sine rubore. Breui ante proxime ad horizontem, infra trabes admodum obscura erat regio, quae in serenam mutata fuit ipso eo tempore, quo lux trabibus adeo viuida inducta fuit, quo facto subito coelum meridiem versus et occidentem spissis nubibus obductum fuit, breuique post ventus fortis ex occidente spirare coepit, qui coelo pristinam serenitatem paulatim restituit; pro ratione autem incrementi serenitatis, serenitas lucis borealis decreuit, cuius tamen vestigia ad diluculum vsque comparuerunt, vna vel altera pallida trabe ad illud vsque tempus perpetuo in coelo restante.

Octobri mense nil memorabile contigit, nisi quod circa 16. 17. 18. Irtis, Tobol, Tura, aliique iis vicini fluuii subito glacie riguere. Adnotamus adhuc, quod Aprilis 28 huius anni 1741 in Krasna Sloboda, ex relatione incolarum, grando oui gallinacei minoris magnitudine ceciderit. Grando quoque nucis iuglandis magnitudine

A. MDCCXXXVI

Altitudo Barometri

Menſe.	Maxima.		Minima.		Differentia.
Ianuario	27. 35	- -	26. 40	- -	0. 95
Februario	27. 45	- -	26. 45	- -	1. 00
Martio	27. 60	- -	27. 00	- -	0. 60
Aprili	26. 96	- -	25. 85	- -	1. 11
Maio	26. 80	- -	26. 10	- -	0. 70
Iunio	27. 06	- -	26. 61	- -	0. 45

Ergo Maxima 27. 60. Minima 25. 85. Differ. 1. 75.

MDCCXXXVII.

Barometri altitudo

Menſe.	Maxima.		Minima.		Differentia.
Octobri	27. 47	- -	26. 38	- -	1. 09
Nouembri	27 57	- -	26 62	- -	0 95
Decembri	27 70	- -	26. 27	- -	1. 43

Ergo Maxima 27. 70. Minima 26. 27. Differ. 1. 43.

MDCCXXXVIII.

Barometri altitudo

Menſe.	Maxima.		Minima.		Differentia.
Ianuario	27. 52	- -	26. 67	- -	0. 85
Februario	27. 50	- -	26. 27	- -	1. 23
Octobri	28 26	- -	27. 06	- -	1. 20
Nouembri	27. 98	- -	27. 23	- -	0. 75.

Ergo Maxima 17. 98. Minima 26. 27. Differ. 1. 71.

MDCCXXXIX.

MDCCXXXIX.

Barometri altitudo

Menſe.	Maxima.			Minima.			Differentia.
Ianuario	28. 30	-	-	27. 10	-	-	1. 20
Februario	28. 10	-	-	27. 23	-	-	0. 87
Martio	28. 12	-	-	27. 30	-	-	0. 82
Iunio	27. 47	-	-	27. 44	-	-	0. 03
Octobri	28. 33	-	-	27. 07	-	-	1. 26
Nouembri	28. 35	-	-	26. 27	-	-	2. 08
Decembri	28. 14	-	-	26. 85	-	-	1. 29.

Ergo Maxima 28 35. Minima 26. 27. Differ. 2. 08.

MDCCXL.

Barometri altitudo

Menſe.	Maxima.			Minima.			Differentia.
Ianuario	28. 40	-	-	27. 08	-	-	1. 32
Februario	28. 16	-	-	26. 90	-	-	1. 26
Martio	28. 45	-	-	27. 25	-	-	1. 20
Aprili	27. 90	-	-	26. 85	-	-	1. 05
Maio	27. 75	-	-	27. 07	-	-	0. 68
Iunio	27. 43	-	-	26. 87	-	-	0. 56
Iulio	27. 57	-	-	26. 95	-	-	0. 57
Auguſto	27. 87	-	-	27. 08	-	-	0. 79
Septembri	27. 57	-	-	27. 37	-	-	0. 20
Octobri	28. 25	-	-	27. 42	-	-	0. 83
Nouembri	28 35	-	-	26. 82	-	-	1. 53
Decembri	28. 48	-	-	27. 30	-	-	1. 18

Ergo Maxima 28. 48. Minima 26. 82. Differ. 1. 66.

MDCCXLI.

Barometri altitudo

Menſe.	Maxima.		Minima.		Differentia.
Ianuario	28. 40	- -	27. 38	- -	1. 02
Februario	28. 30	- -	27. 02	- -	1. 28
Martio	28. 28	- -	26. 85	- -	1. 43
Aprili	28. 10	- -	27. 45	- -	0. 65

Ergo Maxima 28. 40. Minima 26 85. Differ. 1. 55.

Hiſce altitudinibus maximis et minimis inter ſe collatis, elucefcit omnium horum annorum fuiſſe maximam 28. 94, et minimam 24. 70, adeoque differentiam maximam 4. 24. Maxima haec altitudo 1734. menſis Nouembris 1^mo^ obſeruata Tomii non attingit maximam Petropolitanam, quae ad annum 1750 vsque fuit 29. 01, ab anno 1750 ad annum 1757, 29. 10; ab anno 1757 autem ad hoc vsque tempus 29. 12. Minima autem altitudo 24. 70 Maii 2^do^ 1735 Kachtae obſeruata, procella ſaeuire incipiente, multo minor eſt minima Petropolitana, quae eſt adhuc 26. 41. Fuit igitur ſpatium variationum ponderis atmoſphaerae per omnes hos annos in Sibiria 4. 24, adeoque maius 1. 53 Petropolitano, quod nunc eſt 2. 71, quum antea ad annum 1750. fuerit 2. 60, et ab hoc anno ad 1757 2. 69. Aliae altitudines inſigniter paruae fuerunt 1734, 25. 94; 1735, 25. 58, 25. 94, 25. 77; 1736, 25. 85 et aliae, vti ex tabellis adparet.

Hactenus de altitudinibus barometricis, ſequitur vt nunc quoque caloris diminutiones maximas et minimas

nimas, cum differentiis menſtruis et annuis, ſiue ſummos frigoris et caloris gradus, veluti in tabella, ſecundum ordinem temporis repraeſentemus, ſecundum ſcalam thermometricam Delilianam.

A. MDCCXXXIV.

Menſe	Frigus ſummum.	Calor maximus.	Differentia.
Auguſto	143	94	49
Septembri	150	121	29
Octobri	180	139	41
Nouembri	180	149	31

Ergo Max. frig. 180 Cal. max. 94. Diff. 86 per hos quat. menſes.

MDCCXXXV.

Frigus.

Menſe.	Maximum.	Minimum.	Differentia.
Ianuario	281	164	117
Februario	194	146	48
Aprili	158	120	38
Maio	142	122	20
Iunio	120	108	12
Iulio	129	$112\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$
Auguſto	deficit.		
Septembri	deficit.		
Octobri	184	140	44
Nouembri	185	150	35
Decembri	208	161	47

Ergo Maximum frigus 281, et cal. maximus 108. Diff. 173.

A.

A. MDCCXXXVI.

Caloris diminutio.

Menſe.	Maxima.	Minima.	Differentia.
Ianuario	196 - -	166 - -	30
Februario	201 - -	150 - -	51
Martio	191 - -	155 - -	36
Aprili	161 - -	131 - -	30
Maio	150 - -	119 - -	31
Iunio	140 - -	113 - -	27.

Ergo Frigus ſummum 201. Calor maximus 113. Differentia 88.

A. MDCCXXXVII.

Frigus.

Menſe.	Maximum.	Minimum.	Differentia.
Octobri	190 - -	136 - -	54
Nouembri	270 - -	156 - -	114
Decembri	257 - -	155 - -	102

Ergo Frigus max. 270. Minimum 136. Differ. 134.

A. MDCCXXXVIII.

Frigus.

Menſe.	Maximum.	Minimum.	Differentia.
Ianuario	275 - -	153 - -	122
Februario	241 - -	147 - -	94
Octobri	183 - -	151 - -	32
Nouembri	203 - -	151 - -	52
Decembri	205 - -	158 - -	47

Ergo Summum frigus 275. Minimum 147. Differentia 128.

A.

A. MDCCXXXIX.

Caloris diminutio

Menſe.	Maxima.		Minima.		Differentia.
Ianuario	215	- -	168	- -	47
Februario	186	- -	147	- -	39
Martio	170	- -	147	- -	23
Iunio	$152\frac{1}{2}$	- -	131	- -	$21\frac{1}{2}$

Ergo Max. frigus 215. Minimum 131. Differ. maxima 84.

A, MDCCIXL.

Frigus

Menſe.	Maximum.		Minimum.		Differentia.
Octobri	178	- -	137	- -	41
Nouembri	191	- -	146	- -	45
Decembri	191	- -	151	- -	40

Ergò ſummus frig. gradus 191, et infim. 137. Differentia 54.

A. MDCCXLI.

Caloris diminutio

Menſe.	Maxima.		Minima.		Differentia
Ianuario	205	- -	152	- -	53
Februario	188	- -	140	- -	48
Martio	181	- -	150	- -	31
Aprili	155	- -	127	- -	28

Ergo Frig. max. 205. Minimum 127 Variatio thermometrica integra per hos menſes 78.

Quodsi hi frigoris et caloris gradus maximi inter se comparentur, patet, omnium horum annorum gradum frigoris summum fuisse 281, qui Ieniseae Ianuarii 5to 1735 est obseruatus, et iam publicatus. Nihil inuenire potuimus, quod hanc obseruationem suspectam reddere potuisset, inprimis quum gradus haud multo inferiores saepius occurrant, vti 279 a. 1737; 275 a. 1738. Alii insigniores frigoris gradus in his obseruationibus sunt 201. 203. 205. 208. 215. 241. 252. vti ex tabula patet. Huc vsque igitur gradus 281 summus est, qui vnquam est obseruatus. Maximus caloris gradus est 94, notatus 1734 mense Augusto vt adeo differentia maxima sit 187 a summo frigore ad summum calorem. Summo calore hoc maiores alibi obseruati gradus sunt plures e. g. in Sina Pekini 85; Astrachani a V. C. Lerchio 93, 1746 Augusti 6to; 92, 1746 Iulii 19, in sole erat 58; 91 1746 Iulii 15, in sole 63; 90, 1746 Iulii 17. In Senegal ab Adansonio 1753 gradus caloris 75, quin 65½, haud dubie maximus adhuc in vmbra obseruatus, si obseruatio recte se habet, fuisse dicitur; alios adhuc in variis terrarum locis obseruatos insignes caloris gradus in praesenti tacemus.

Quum in tabula altitudinum barometricarum et thermometricarum praecipue pro scopo hic habuerimus, summas et infimas altitudines barometricas obseruatas, et maximos frigoris et caloris gradus notatos breuiter repraesentare, vt facile cum aliis comparari possint; huic scopo non obstat, quod in diuersis Sibiriae locis obseruationes sint institutae, vt taceamus alios vsus. Multa praeterea consideratu digna in his obseruationibus occur-

cur-

currunt, vt est halonum frequentia, praecipue lunarium, cum paraselenis et pareliis, quae tam frequentes nullibi forsitan, et tam continuae, quam in dictis Sibiriae locis, vnquam sunt obseruatae. Porro sunt alia phaenomena emphatica et meteora rariora e. g. nebula, cuius mentio in obseruationibus Ieniseae institutis facta est, aurora borealis mense Augusto 1741 obseruata, et alia, quae attentione dignissima esse, nemo non videt, quae vero in praesenti specialius considerare non possumus, spatii et temporis angustia exclusi; vti quoque varia ex his obseruationibus fluentia consectaria specialia praeterire ideo cogimur, quae non solum Meteorologiae, sed etiam Geographiae inseruire possunt, quum constet, ex altitudinibus barometricis locorum, vbi notatae sunt, altitudinem soli supra mare quodammodo inueniri posse. Nam quo altiora sunt loca, eo minores altitudines barometricae mediae esse solent et debent; contra eo maiores, quo loca sunt inferiora.

Haec locorum et terrarum diuersa altitudo super superficiem maris non potest non magnum habere influxum in temperaturam coeli locorum et fertilitatem, et efficere, vt alia plane sit coeli temperies, quam eleuatio poli et loci latitudo requirere videtur. Hinc saepius loca eandem latitudinem habentia diuersissimam coeli temperaturam experiri non solum possunt, et solent, ob diuersam supra aequor altitudinem; sed etiam loca, multo minore latitudine gaudentia, multo frigidiora esse possunt et solent, quam alia sub maiore eleuatione poli sita, si sunt editiora supra

 mare,

mare, et contra ea, ſi ſint minus elata, multo calidiora, quamuis eorum latitudo ſit maior. Exempla luculenta in diuerſis Sibiriae locis occurrunt, vbi inſigne frigus regnare ſolet, ita vt terrae ad exiguam tantum profunditatem tempore aeſtiuo regelentur, et corpora ſepulta putreſcere non ſoleant, quum e contrario alia loca, ſub eadem quin maiore poli altitudine ſita, ſatis ſint temperata et fertilia, minus ſupra mare edita.

Quum praeterea conſtet loca orientaliora dici frigidiora minus orientalibus, experientia quoque ſaepius confirmante: intelligitur pendere hoc frigus ſaepius poſſe a maiore locorum altitudine ſupra ſuperficiem maris, quamuis et aliae cauſae potiſſimum a natura ſoli pendentes concurrere queant. Sed de his et aliis huc pertinentibus conſiderationibus alias.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

 INVES-

INVESTIGATIO PARALLAXEOS LVNAE OBSERVATIONIBVS ALIQVOT ANNO 1752. PETROPOLI ET IN PROMONTORIO BONAE SPEI EX COMPACTO HABITIS INNIXA.

Auctore

A. N. GRISCHOW.

Inter obseruationes Lunares Anno 1752 in obseruatorio Imperiali Petropolitano peractas tres tantum occurrunt respondentes iis, quarum in Promontorio Bonae spei instituendarum coelum Cel. Abbati de la Caille, Academiae Regiae Scientiarum Parisinae membro, copiam fecit; nimirum obseruationes d. $\frac{18}{29}$ Ianuarii, $\frac{28}{8}$ Ianuarii et $\frac{12}{23}$ Februarii habitae, quarum insuper media non omnibus ex numeris est perfecta, quippe quae obseruatione stellarum fixarum, quarum in Parallelo Lunae tunc versabatur, careat. Binae autem reliquae satis sunt completae, vt ex iis vel ipsa differentia Meridianorum Petropolitani obseruatorii et Speculae astronomicae, quam in Promontorio Bonae spei erigi curauit Cel. de la Caille, colligi queat. Principem autem locum inter binas hasce obseruationes tenet ea, quae d. $\frac{12}{23}$ Februarii habita est, Luna tunc temporis Perigaea in limitibus

maxi-

1710

et prope fixam ζ ♉

serenitatem in his obseruationibus ... obseruatio instituta est Luna Petropoli ... Promontorio vndosa; in secunda obserua- ... specula ... praecedenti Luna in Promontorio Bonae spei tremula, ... videbatur vndosa, et Petropoli minus tremula, quam in obseruatione praecedenti, quamuis non omni trepidatione destituta, vt fere fit in nostra regione, praecipue et Decembri et Ianuario. Tertia denique obseruatio d. $\frac{12}{23}$ Februarii appropinquante vere absque vlla agitatione limborum Lunae Petropoli peracta, in Promontorio Bonae spei e contrario sensibili motu Lunae vndoso comitata fuit.

Ab hisce autem circumstantiis abstrahens, ad differentiam Meridianorum Petropolitani obseruatorii et Promontorii Bonae spei definiendam, primo me conferam, eamque ex comparatione differentiae Ascensionum rectarum Lunae et fixarum Parallelo Lunae proximarum Petropoli obseruatae, cum illa, quae ex obseruationibus in Promontorio habitis fluit, deriuare atque stabilire conabor. Eiusmodi enim comparatio inter obseruationes et d. $\frac{19}{30}$ Ian. et d. $\frac{12}{23}$ Febr. in vtraque specula astronomica factas, modo sequenti instituta, Meridianorum distantiam, de qua agitur, accurate satis, vt opinor, pro nostro scopo declarabit.

Obser-

Obſeruationes autem ipſae huc ſpectantes, in Promontorio Bonae ſpei et in obſeruatorio Imperiali Petropolitano habitae, in ſequentibus Tabulis exhibentur.

OBSERVATIONES IN PROMONTORIO BONAE SPEI INSTITVTAE.

Temp. ver. App. ad fil. ver. Tubi ſextantis. H. M. S.	MDCCLII. d. $\frac{18}{29}$ Ianuarii.	Diſt. a Zenith Parallaxi et Refract. affecta. G. M. S.
7.34.38	α ♉ - - - - - - -	49.53.15.6
11. 4.12½	Limbus praecedens ☽ae. Limbus borealis. Limbis Lunae vndoſis.	51.37.18.8
	d. $\frac{19}{30}$ Ianuarii.	
7. 7.29	δ ♉ - - - - - - -	50.50.17.8
11.53. 0	circiter α ♋ - - - - - - - - -	46.42. 2.9
12. 0 27½	Limbi Lunae. Limbus borealis - -	
12. 2.47½		47.26.48.9
Vento impediente, horologium tempore tranſitus α ♋ non audiebatur. Luna quidem parum videbatur vndoſa; ſatius autem fuiſſet limbum eius auſtralem obſeruare.		
	d. $\frac{12}{23}$ Februarii.	
6.53.43	Limbus Lunae praecedens. Limbus auſtralis	55.20.31 0*
6.56.55	ζ ♉ - - - - - - - -	54.51.41.3
8.23 19½	ζ - - - - - - - - -	54.48.14.2
	Limbis Lunae vndantibus	
	* Loco 55°. 20'. 31''. 0, me iudice, legendum eſt 55°. 40'. 31''0.	

OBSERVATIONES IN OBSERVATORIO IMPER. PETROPOLITANO HABITAE.

Dies obseruat.	Temp. ver.	Obseruat. et circumstant.
MDCCLII.		
d. $\frac{18}{29}$ Ian. vesp.	$7^h. 34'. 37''$	Culminatio α ♉ quam proxime.
	35. 9. 1.	$6^h.22'.59''\frac{3}{4}$.t. Pend. Appulf. α ♉ ad fil. vert. quadr. Merid. quam proximum.
		Altitudo α♉ tunc erat $=46°. 10' - \frac{1}{2}$ fil. $-2^R. 75^P.\frac{3}{4}$ micrometri.
		Altitudo itaque Meridiana apparens α ♉ $= 46°. 3'. 28''$.
	11. 2. 44. 8	$9^h.50'.29''$.t. Pend. App. I^mi limbi ☽ae ad fil. vert. quadr Merid. quam proximum.
	3. 24.	Culminatio Centri ☽ae circiter.
	3. 57.	Altit. marg. ☽ae bor $=46°. 10' - \frac{1}{2}$ fil $+6^R. 8^P.\frac{3}{4}$ micr.

Dies

Dies obseruat.	Temp. ver	Obseruat. et circumstant.
MDCCLII.		
		Altit. igitur Merid. appar. marg. ☽ae bor. = 46° 26′. 20″. 5 aere particulis glacialibus repleto, Luna tremula.
		$23^h.55'\ 9''$. Pend = 360°.
d. 18/19 Ian. vesp.	$11^h.58'.58''.8$	$10^h.45'.56''$t. Pend. App I^mi. limbi ☽ae ad fil. vert. quadr Merid. quam proximum.
	59. 36.	Culminatio Centri ☽ae circiter.
	12. 0. 13.	Altit. marg. ☽ae bor. = 42°. 10′ + 1/4 fil. + 4^R. 9^P 3/4 micr.
	1. 18. 4	$10^h.48.15\frac{1}{2}$t. Pend. App. 2^di limbi ☽ae ad fil. vert. quadr. Merid. quam proximum.

Dies obseruat.	Temp. ver.	Obseruat. et circumstant.
MDCCLII.		
d. $\frac{18}{29}$ Ian. vesp.		Altit. itaque Merid. appar marg. ☽ae bor. = 42°. 18′. 6″. 1.
		Diameter ☽ae horizontalis ad tempus culminationis ☽ae ex mora transitus disci lunaris per filum verticale quadrantis deducta = 32′. 52″½.
		Luna ob coelum vaporosum tremula.
		Stellas Parallelo ☽ae proximas, nubibus impeditus obseruare non potui.
		23^h. 55′. 9″ Pend. = 360°.
d. $\frac{16}{27}$ Febr. vesp.	6^h. 18′. 0″.	Diameter ☽ae appar. per tubum 8 ped. micr. Angl. munitum = $36^{R.}$ $8^{P.}$ = 33′. 8″. 8.

Dies.

Dies obseruat.	Temp. ver.	Obseruat. et circumstant.
MDCCLII.		
d. 23 Febr. vesp.	6. 52. 12.	$35^b.14'.1''$. Pend. App. 1mi limbi ☽ae ad fil. vert. quadr. Merid. quam proximum.
	52. 23.	Altit. marginis ☽ae bor. $=50°.50'+4^R.15^P.\frac{1}{4}$.
	53. 11.	Culminatio Centri ☽ae quam proxime.
	53. 26.	Transitus Centri ☽ae per fil. vert. quadrantis, circiter.
		Altit. itaque Merid. appar. marg. ☽ae bor. $=50°.58'.2''.6$.
	6. 57. 12.	Culminatio ζ♉ circiter.
	57. 27.	$55^b.19'.16''.1$. Pend. App. ζ♉ ad fil. vert. quadr. Merid. quam proximum.
		Altit. ζ♉ tunc erat $=50°.50'.+6^R.13^P.\frac{3}{4}$.
		Hinc. Altid. Merid. appar ζ♉ $=51°.2'.14''.1$.
		Coelo eximie sereno $23^b.55'.7''\frac{1}{3}$ Pend. $=360°$

 Cum

Cum ad calculos vtriusque incogniti, Meridianorum nempe differentiae et Parallaxis Lunae horizontalis, instituendos, data nonnulla elementa a Tabulis astronomicis necessario sint mutuanda, ex Tabulis Halleianis ad dies tempusque obseruationum iam memoratarum sequentes accuratissime supputaui positiones Lunae, posita differentia Meridianorum inter Grenouicense obseruatorium et Petropolitanum $= 2^h.1'.10''$.

1752. D. $\frac{1}{12}$ Ian. $11^h\ 3'.\ 0''$ t. v. sub Merid. Petropolitano Longitudo Centri Lunae vera $= 3^s.26°.34'.41''.3$, eiusdemque latitudo vera $= 4°.9'.18''$, Austr. hinc, posita obliquitate Eclipticae $= 23°.28'.30''$, pro eodem temporis momento Ascensio recta Lunae vera $= 117°.46'.55''.9$ et Declinatio Lunae vera $= 16°.47'.22''.7$ bor. Eadem ratione inveni ad $\frac{18}{29}$ Ian. $11^h.53'.0''$, t. v. Petrop. Longitud. Lunae veram $= 3^s.27°.4'.22''.1$; Latitudinem veram $= 4°.10'.46''$. Aust. Ascensionem rectam veram $= 118°.17'.0''.3$ et Declinationem veram $= 16°.40'.23''$. Bor. ita vt motus Lunae verus pro 50 min. pr. temp. in Ascensionem rectam sit $= 30'.4''.4$, secundum Declinationem autem $= 6'.59''.7$. Parallaxis Lunae horizontalis denique, quae ex iisdem Tabulis pro hoc tempore prodit, aequatur $59'.48''$, et diameter Lunae horiozontalis $32'.53''\frac{1}{2}$.

1752. D. $\frac{19}{30}$ Ian. $12^h.0'.0''$ t. v. sub Merid. Petropol. Longitudo Centri Lunae vera $= 4^s.11^\circ.49'.8''.6$; Latitudo vera $= 4^\circ.45'.9''.4$. Austr. Ascensio recta vera $= 132^\circ.56'.1''.9$ et Declinatio vera $= 12^\circ.42'.1''.7$ Bor. Simili modo prodibit ad $12^h.50'.0''$ t. v. Petrop. Longitudo Lunae vera $= 4^s.12^\circ.19'.27''$; Latitudo vera $= 4^\circ.46'.0''.4$ Austr. Ascensio recta vera $= 133^\circ.25'.33''.8$ et Declinatio vera $= 12^\circ.32'.57''$. Bor. Praeterea Parallaxis Lunae horizontalis ad tempus obseruationum lunarium $= 59'.20''\frac{1}{2}$ et diameter Lunae horizontalis $= 32'.38''\frac{1}{4}$.

1752. D. $\frac{12}{23}$ Febr. $6^h.52'.0''$ t. v. Petrop. Longitudo Lunae vera $= 2^s.20^\circ.21'.53''.4$; Latitudo vera $= 1^\circ.53'.4''.4$, Austr. Ascensio recta vera $= 79^\circ.39'.37''.8$ et Declinatio vera $= 21^\circ.14'.41''.2$. Bor. Itemque $7^h.42'.0''$.t.v. Petrop. Longitudo Lunae vera $= 2^s.20^\circ.51'.25''.8$; Latitudo vera $= 1^\circ.55'.28''.8$ Austr. Ascensio recta vera $= 80^\circ.11'.24''.5$ et Declinatio vera $= 21^\circ.14'.20''.7$ Bor. Parallaxis autem Lunae horizontalis $= 58'.54''\frac{1}{3}$ et diameter eius horizontalis $32'.24''$.

Hisce stabilitis, computatio differentiae Meridianorum Petropolin inter et Promontorium Bonae spei sic erit adornanda:

Petro-

Petropoli.

D $\frac{18}{29}$ Ian. $11^h.2'.44''.8$ t. v. vel $9^h.50'.29''$ t Pend. App. 1^{mi} limbi ☽ae ad filum vert. Quadrantis Meridiano quam proximum.

$7.\ 35.\ 9.\ 1$ t. v. vel $6.\ 22.\ 59\frac{3}{4}$ t. Pend App. α ♉ ad idem filum

$3^h.27'.35''.7$ t. v. vel $3^h.27'.29''\frac{1}{4}$ t. Pend. $=$ different. inter transitum α♉ et 1^{mi} limbi ☽ae.

Cum vero $23^h.55'.53''.7$ temp. veri, vel $23^h.55'.9''$ temp. Pend. respondeant $360°$, prodibit differentia Ascensionum rectarum α ♉ et 1^{mi} limbi ☽ae d. $\frac{18}{29}$ Ian. $11^h.2'.45''$ t. vero Petrop. $= 52°.2'.50''$. Ob declinationem autem fili verticalis quadrantis a Meridiano occidentem versus addatur $0''.7$, et propter Parallaxin Lunae in Ascensionem rectam $4''.4$, ita vt vera differentia Ascensionum rectarum α♉ et 1^{mi} limbi Lunae sit $11^h.2'45''$ t. v. Petrop. $= 52°.2'.55''.1$.

Simili

Simili modo in Promontorio Bonae ſpei.

D. $\frac{12}{23}$ Ian. $11^h.4'.12''\frac{1}{2}$ t. v. App. 1^{mi} limbi Lunae ad filum verticale Sextantis Meridiano quam proximum.

$7.34.38.$ t. v. App. α♉ ad idem filum

$3^h.29'.34''\frac{1}{2}$ t. v. = differ. inter tranſitum α♉ et 1^{mi} limbi Lunae, quae in partes Aequatoris conuerſa dat differentiam Aſcenſionum rectarum α♉ et 1^{mi} limbi Lunae $11^h.4'.12''\frac{1}{2}$ t. v. in Promontorio Bonae ſpei $= 52°.32'.36''$, vel $29'.41''$ maiorem ea, quae obſeruata fuit Petropoli $11^h.2'.45''$ t. v. Quia vero motus Lunae verus in Aſcenſionem rectam pro 50 min. prim. temp. ſupra inuentus eſt $= 30'.4''.4$, patet iſta $29'.41''$ reſpondere $49'.21''.1$ temp. Vnde ſequitur, Aſcenſionem rectam Lunae veram in Promontorio Bonae ſpei $10^h.14'.51''$ t. v. eandem fuiſſe quae Petropoli obſeruata eſt $11^h.2'.45''$ t. v. ita vt differentia Meridianorum obſeruatorii Petropolitani et Promontorii Bonae ſpei ex his obſeruationibus collecta, ſit $= 0^h.47'.54''$. quibus obſeruatorium Petropol orientalius eſt, quam Specula aſtronomica Cel. de la Caille in Promontorio Bonae ſpei.

Huius inuentae Meridianorum differentiae magis adhuc conſtabiliendae gratia, conſimili ſupputandi ratione, ex obſeruationibus Petropoli et in Promontorio Bonae ſpei d. $\frac{12}{23}$ Febr. 1752 habitis, differentiam Aſcenſionum rectarum Lunae et fixae ζ♉ ad momenta obſeruationum in ephemeridibus notata eruere atque concinnare

 iuuabit.

iuuabit. Habebimus itaque secundum obseruationum ephemeridem in obseruatorio Petropol. conditam.

1752. D. $\frac{12}{23}$ Febr. $6^h.57'.27''.5$ t. v. siue $5^h.19'.16''$ t. Pend. App. ζ♉ ad fil. vert. quadr. Mer. quam proximum.

$6.\ 52.\ 12.\ 3$ t. v. siue $5.\ 14.\ 1$ t. Pend. App. 1^{mi} limbi ☽ae ad idem filum.

hinc $0^h.5'.15''.2$ t. v. siue $0^h.\ 5'.15''$ t. Pend. = differentiae Ascensionum rectarum ζ♉ et 1^{mi} limbi Lunae $6^h.52'.12''.3$ t. v. Petropoli.

Et quia $23^h.56'.13''.6$ t. veri vel $23^h.55'.7''\frac{2}{3}$ t. Pend. aequantur $360°$ Aequat. erit differentia Ascensionum rectarum ζ♉ et 1^{mi} limbi Lunae d. $\frac{12}{23}$ Febr. $6^h.52'.12''.3$ temp. v. Petrop. $= 1°.19'.1''$. Ob aberrationem fili verticalis quadrantis a Meridiano occasum versus pro differentia altitudinum stellae et Centrii Lunae addendum est $1''.2$, propter Parallaxin autem Lunae in Ascensionem rectam tempore transitus ipsius per filum verticale quadrantis $2''.2$ sunt subtrahenda, ita vt vera differentia Ascensionum rectarum 1^{mi} limbi Lunae et ζ♉ hora supra notata sit $= 1°.19'.0''$.

In Promontorio Bonae Spei.

D. $\frac{12}{23}$ Febr. $6^h.56'.55''$ t. v. App. ζ♉ ad filum verticale Sextantis Merid. quam proximum.

$6.\ 53.\ 43$ App. 1^{mi} limbi Lunae ad idem filum

adeoque $0^h.\ 3'.12''$. = different. temp. inter transitum

situm ζ♉ et 1^{mi} limbi ☽ae, quae ad partes Aequatoris pro ratione $23^h.56'.13''.6$ ad $260°$ reducta, abit in $0°.48'.7''.6$ = verae differentiae Ascensionum rectarum 1^{mi} limbi Lunae et ζ♉ in Promontorio Bonae spei $6^h.53'.43''$. t. vero. Differentia haec Ascensionum rectarum $30'.52''.4$, minor est ea, quae Petropoli obseruata fuit eodem die $6^h.52'.12''.3$; motus autem Lunae verus in Ascensionem rectam ex tabulis Halleianis depromtus tunc temporis 50 min. prim. temp. respondens aequatur $31'.46''.7$. Ex quo colligitur, differentiam illam Ascensionum rectarum Lunae $30'.52''.4$ aequare $0^h.48'.34''.6$, quibus tempori obseruationis lunaris in Promontorio subductis, residuum $6^h.5'.8''.4$, respondebit $6^h.52'.12''.3$, sub Merid. Petropolitano, ita vt differentia horum Meridianorum secundum obseruationes d. $\frac{12}{23}$ Febr. sit $= 0^h.47'.4''$.

Haec Meridianorum differentia, si comparetur cum ea, quae ex obseruationibus d. $\frac{18}{29}$ Ian. habitis fluit, discrimen quidem occurrit insigne, 50 nimirum minut. secund. temp. minus autem singulare, si animaduerteris errorem vnius minuti secundi temporis in obseruationibus admissum differentiae Meridianorum methodo hac conclusae afferre errorem trigesies circiter maiorem, siue 30 minut. sec. temporis. Caeterum autem, vt certi aliquid circa horum Meridianorum differentiam statuere possimus, facile intelligitur, obseruationem d. $\frac{12}{23}$ Febr. institutam, varias ob rationes haud abstrusas, ad praesentem quidem vsum, altera d. $\frac{18}{29}$ Ian. peracta, esse praestabiliorem, praecipue cum interuallum temporis inter transitum Lunae et stellae in obseruatione d. $\frac{12}{23}$ Febr.

quadragesies circiter minus sit, quam in obseruatione praecedenti. Hisce rationum momentis inductus, in vsum sequentis calculi ad Parallaxin Lunae definiendam instituendi, differentiam Meridianorum Petropolitani obseruatorii et Promontorii Bonae spei, statuam $= 0^h. 47'. 10''$.

Ad Parallaxin iam lunarem ex obseruationibus ab Illustriss. Academia Scientiarum Parisina propositis, exactissime hauriendam aggressuris, Meridiani terrestris figura cum nobis sit consideranda, necesse erit primum, ea calculo definiamus elementa, quorum beneficio, pro vtroque obseruationum loco, Parallaxin Lunae horizontalem, obseruatis Lunae a stellis proximis distantiis, consentaneam, assignare valemus. Requiritur autem ad hocce negotium et radiorum terrestrium bina obseruationum loca, cum centro Telluris iungentium magnitudo, siue potius ratio, et anguli, quem constituit in singulis locis verticalis linea cum radio terrestri competenti mensura. Haec vero pro varia Meridiani terrestris curuatura adeo ab inuicem discrepare debent, vt qualis quantusque sit effectus exinde ad Parallaxin Lunae redundans, curiose non inuestigasse nefas foret. Duplici itaque modo in sequentibus figuram Meridiani terrestris considerare, atque elementa supra memorata definire statuimus; primo Telluri tribuendo figuram Sphaeroidis elliptici, in quo gradus Meridiani ab Aequatore Polos versus in ratione quam proxime duplicata sinuum latitudinum accrescunt, cuiusque natura e binorum Meridiani graduum mensura innotescit: deinde autem eam admittendo figuram, quam Cel. Bouguerus, Academiae Reg. Scient. Parisinae membrum, per quatuor graduum terrestrium mensuram Telluri conciliauit, in qua incrementa graduum ctuum Meridiani ab Aequatore sequutus rationem biquadratorum sinuum latitudinum.

Referat in hypothesi Terrae Sphaeroidicae ellipsis ADB Meridianum terrestrem per locum R in superficie Telluris positum transeuntem, Agatur normalis RP. in tangentem ERp loci R ad diametrum Aequatoris in P terminata, itemque perpendicularis Rr in diametrum Aequatoris. Data nunc ratione radii Aequatoris AC ad semiaxem DC, vna cum eleuatione Poli loci propositi, quaeritur loci huius distantia a Centro Terrae RC, et angulus PRC, quem format verticalis linea RP cum radio terrestri RC? Tab. XIV. Fig. 1.

Vocemus rationem radii Aequatoris AC ad semiaxem CD $a:b$, eleuationem Poli loci R, siue angulum RPA l, angulum RCA v, angulum PRC π, et radium RCr, eritque ex natura ellipseos subnormalis Pr $= \frac{b^2}{a^2}$.Cr et Rr $=$ Pr. tang. $l = \frac{b^2}{a^2}$. Cr. tang. l. Cum vero $\frac{Rr}{Cr} =$ tang. v, habebimus tang. $v = \frac{b^2 . Cr . tang. l}{a^2 . Cr}$ $= \frac{b^2}{a^2}$ tang. l. Dato autem angulo v, erit angulus quaesitus $\pi = l - v$, vel tang. $\pi = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}{\frac{1}{tang. l} + b^2 \, tang. \, l}$; hinc sub latitudine, cuius tangens $= \frac{a}{b}$, angulus π erit maximus, eiusque tangens $= \frac{a^2 - b^2}{2ab} = \frac{1}{2}(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}.)$

Ducatur porro ex Centro terrae C ipsi RP parallela Cp in tangentem loci R perpendicularis, quo facto erit in triangulo RCp. $1 : r =$ sin. CR$p =$ cos. π : Cp, siue C$p = r$. cos. π; itemque in triangulo PRC sin. $l : r$ $=$ sin. v : RP, vel RP $= \frac{r . sin. v}{sin. l}$, adeoque RP $\times$ Cp $= \frac{r^2 . sin. v . cos. \pi}{sin. l}$. Quia vero in ellipsi RP$\times$C$p =$ CD$^2 = b^2$,

 pro-

prodibit radius Terrae ad locum R ductus, ſiue $r = b\sqrt{\frac{\text{ſin.}\, l}{\text{ſin.}\, v \cdot \text{coſ.}\, \pi}}$.

Inuentis itaque formulis, commode ſat et angulum π et radium terreſtrem r exhibentibus, vtrumque iam quaeſitum pro quauis differentia axium Terrae Sphaeroidicae data, ad quamlibet latitudinem definire valemus. Si ponatur ex gr. differentia axium $= \frac{1}{215}$, vt fere fluit ex calculo Cel. de la Condamine, Acad. Reg. Scient. Pariſinae membri, comparatione inter primum et $66\frac{1}{3}$ latitud. bor. gradum inſtitura, et quaeratur anguli, quem conſtituit cum radio terreſtri verticalis linea, et radii ipſius menſura ad eleuationem Poli obſeruatorii Petropolitani, (quam interea ponimus $= 59^\circ.56'\frac{2}{3}$) habebitur, poſito $a = 1$, $b = 0.99534884$, et $l = 59^\circ, 56'.40''$, adeoque

$$
\begin{aligned}
lb &= 9.9979753 \\
lb^2 &= 9.9959506 \\
la^2 &= 0.0000000 \\
\hline
l\tfrac{b^2}{a^2} &= 9.9959506 \\
l\,\text{tang.}\, l &= 10.2375887 \\
\hline
\end{aligned}
$$

$l\frac{b^2}{a^2}.\text{tang.}\, l = l\,\text{tang.}\, v = 10.2335393$, hinc

$$
\begin{aligned}
\text{angulus } v &= 59^\circ.42'.44''.\tfrac{2}{5} \\
\text{angulus } l &= 59.\ 56.\ 40 \text{ idcirco} \\
\hline
\end{aligned}
$$

angulus, quem format Petropoli verticalis linea cum radio terreſtri, ſiue $\pi = 0^\circ, 13'.55''\frac{3}{5}$.

Cogni-

Cognitis iam angulis v et π, calculus radii terrestris pro Parallelo Petropolitani obseruatorii sic concinnari potest:

$$l.\ \text{sin.}\ v = 9.9362644$$
$$l.\ \text{cos.}\ \pi = 9.9999964$$

$$l\ \text{sin.}\ v.\text{cos.}\ \pi = 9.9362608$$
$$l.\ \text{sin.}\ l = 9.9372872$$

$$l\ \frac{\text{sin.}\ l}{\text{sin.}\ v.\ \text{cos.}\ \pi} = 0.0010264$$
$$l.\ \sqrt{\frac{\text{sin.}\ l}{\text{sin.}\ v\ \text{cos.}\ \pi}} = 0.0005132$$
$$lb = 9.9979753$$

$$lr = 9.9984885,\ \text{siue}$$
$$r = 0.99652568.$$

Consimili prorsus calculo colligitur, pro latitudine obseruatorii Cel. de la Caille, in Promontorio Bonae spei $33^\circ.55'.12''$, angulus, quem format verticalis linea cum radio ad Centrum Terrae ducto $= 14'.49''$, et radius ipse $= 0.99856302$. Definitis igitur hisce elementis pro Terra ellipsoidali, ad alteram iam accedemus hypothesin a Cel. Bouguero excogitatam, vt secundum hanc quoque innotescat valor anguli π et radii r, pro vtriusque obseruatorii latitudine.

Methodus supputandi distantiam loci cuiuscunque in superficie Terrae dati a Centro Telluris, itemque angulum, quem format radius centrum Terrae et locum propositum iungens cum verticali linea eiusdem loci, secundum theoriam Cel. Bougueri eiusdemque hypothesin, quod incrementa graduum Meridiani ab Aequatore versus polos biquadratis sinuum latitudinum sint proportionalis.

Tab. XIV. Fig. 2. Sit AKB Meridianus terrestris, AC semi diameter Aequatoris, CB semi-axis Terrae, DGE Grauicentrica, vt ab Auctore vocatur, KGZ tangens Grauicentricae, siue verticalis linea loci K. Vocetur arcus Grauicentricae DG u, sinus totus a, sinus latitudinis loci K, siue cosinus anguli KZCS; eritque secundum hypothesin Cel. Bougueri $u = \frac{s^4}{a^3}$, arcus totalis Grauicentricae ED $= a$, EC $= \frac{2}{3}a$, DC $= \frac{8}{15}a$, tang. GZ $= \frac{8a^4 + 4a^2s^2 - 12s^4}{15a^3}$ (*) $= \frac{8}{15}a$

(*) Circa aequationem pro tangente GZ obseruandum est, eam, quam hic exhibuimus, non omnino congruere cum formula in libro Cel. Bougueri p. 289 notata. In formula enim Cel. Bougueri occurrit terminus $\frac{4as^2}{15a^3}$, in nostra autem $\frac{4a^2s^2}{15a^3}$. Praeterea vero Cel. Bouguerus pergendo concludit, tangentes, vt GZ, esse aequales $\frac{8}{15}$ curuae integrae EGD $-\frac{3}{4}$ arcus DG $+ \frac{4s^2}{15a^2}$, adeo vt praeter errorem in termino $\frac{4s^2}{15a}$ alius adhuc obuius sit, nimirum $\frac{3}{4}$ arcus DG loco $\frac{4}{3}$ arcus DG, qui quidem ex formula generali corrigi posset; quia vero eadem menda pag. 313 et 314 est repetita, difficile est iudicatu, vtrum ipsa formula generalis pro tangente GZ, an vero conclusio ex illa deducta, sit erronea. Quamobrem operae pretium erit, vt tangens GZ ex aequatione generali Grauicentricae definiatur.

Hunc

$= \frac{8}{15}a + \frac{4s^2}{15a} - \frac{4s^4}{5a^3} = \frac{8}{15}a + \frac{4s^2}{15a} - \frac{4}{5}u$, et tang. GW $= \frac{4s^4}{5a^3} = \frac{4}{5}u$, adeoque ZW $= \frac{8}{15}a + \frac{4s^2}{15a} =$ DC $+ \frac{4s^2}{15a}$.

Cum porro radii, vt AD, KG etc. ipsis graduum Meridiani amplitudinibus sint proportionales, et vice versa, radios iam dictos ipsis graduum Meridiani mensuris exprimere licet. Sic primi gradus latitudinis radius AD erit $= 56753$ hexaped. Gall. arcus Grauicentr. totalis ED, siue excessus 90^{mi} gradus latitudinis supra primum $= 959$ hexaped. hinc EC $= 767\frac{1}{5}$ hexap. et DC

Hunc in finem producatur ordinata HG ad F, ducaturque ipsi infinite propinqua hg. Vocetur abscissa HDx, ordinata HGy, arcus DGu; eritque, demissa perpendiculari GI in hg, GI $= dx$, I$g = dy$, gG $= du$, et GF $= \frac{8}{15}a - y$; adeoque in triangulis IGg et GZI similibus $dy : du = \frac{8}{15}a - y :$ GZ siue GZ $= \frac{du}{dy}(\frac{8}{15}a - y$. Est autem in Grauicentrica

$x = \frac{4s^5}{5a^4}$, $y = \frac{8}{15}a - (\frac{8}{15a^2} + \frac{4s^2}{5a^4})(a^2 - s^2)^{\frac{3}{2}}$, et $u = \frac{s^4}{a^3}$,

ideoque $du = \frac{4s^3 ds}{a^3}$, et $dy = (\frac{8s}{5a^2} + \frac{12s^3}{5a^4})(a^2 - s^2)^{\frac{1}{2}} ds$

$- \frac{8s}{5a^4}(a^2 - s^2)^{\frac{3}{2}} ds = (\frac{8s}{5a^2} + \frac{12s^3}{5a^4} - \frac{8s}{5a^4}(a^2 - s^2))(a^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}$

$ds = \frac{4s^3 ds}{a^4}\sqrt{(a^2 - s^2)}$; hinc $\frac{du}{dy}(\frac{8}{15}a - y)$ siue GZ

$= \dfrac{al(\frac{8}{15aa} + \frac{4ss}{5a^4})(aa - ss)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(aa - ss)}} = a(\frac{8}{15a^2} + \frac{4s^2}{5a^4})(a^2 - s^2)$

$= \frac{8}{15}a + \frac{4s^2}{15a} - \frac{4s^4}{5a^3} = \frac{8a^4 + 4a^2s^2 - 12s^4}{15a^3}$. Vnde aperta fiunt, quae supra obiter monenda duximus.

DC = 511 $\frac{7}{15}$ hexap. Posito igitur sinu toto a, siue arcu ED = 1, erit AD = 59. 179351, vel lAD = 1.7721702. Radio GK in eisdem partibus expresso addenda est tangentis pars GZ, vt habeatur KZ. Dato nunc in triangulo ZWC angulo CZW altitud. Aequatoris in loco K, vna cum hypothenusa ZW, determinabitur ZC, qua cognita, dantur in triangulo KZC duo latera ZK et ZC, vna cum angulo intercepto KZC, ex quibus facile fluit et angulus ZKC, quem constituit verticalis linea ZK cum radio KC, et distantia loci K a centro Telluris KC, quae vt in hexaped. Gall. exhibeatur, sequenti analogia vtendum est:

AD + DC : 3281013 = KC ad numerum hexapedarum quaesitum. Quia vero, posito $a = 1$, AD = 59. 179351 et DC = 0. 5333333 erit AD + DC = 59. 7126845 hinc ad logar. KC addatur logar. constans 4. 7399413, summa erit logarithmus, cuius numerus distantiam loci propositi a Centro Telluris KC in hexapedis Gall. expressum indicabit.

Quaeritur ex. c. pro nostro scopo angulus, quem format verticalis linea KG cum radio KC sub latitudine Petropol. obseruat. $59°. 56'\frac{2}{3}$, nec non longitudo radii iam dicti KC.

Habe-

Habebimus itaque, posito $a = 1$,

$ls = 9.9372872$, hinc

$ls^2 = 9.8745744$

$l\frac{4}{15a} = 9.4259687$

$l\frac{4s^2}{15a} = 9.3005431$, vel

$\frac{4s^2}{15a} = 0.1997759$

$DC = \frac{8a}{15} = 0.5333333$

$\frac{8a}{15} + \frac{4s^2}{15a} = 0.7331092 = ZW$

Porro $ls^4 = 9.7491488$, vel

$\frac{s^4}{a^3} = u = DG = 0.5912403$, et

$\frac{4s^4}{5a^3} = \frac{4}{5}DG = 0.4729922$

Quia vero $GZ = ZW - GW = ZW - \frac{4}{5}DG$,

erit $GZ = 0.2841170$

In praesenti hypothesi incrementa graduum Meridiani ab Aequatore proportionalia sunt biquadratis sinuum latitudinum. Quocirca, cum excessus vltimi gradus latitudinis supra primum aequatur 959 hexaped.

ad logarithmum s^4 - - - - - $= 9.7491488$

addendus est logarith. 959 hexaped. $= 2.9818186$, vt

prodeat log. excessus 59°.56$\frac{2}{3}$ - - -

gradus latitudinis supra primum $= 2.7309674$, siue

excessus ipse - - - $= 538.23$ hexap. cui addatur

1^{mi} gradus latit. mensura $= 56753\ 00$ hexap. eritque

longitudo gradus Meridiani

sub Parallelo Petropol. $= 57291,23$ hexap. Qua inventa, radius huius gradus KG per sequentem analogiam innotescet:

56753 hexap: AD = 57291.23 hexap: KG, fiue
56753 : 59.179351 = 57291.23 : KG, adeoque

$$KG = 59.740589$$

addatur $GZ = 0.284117$ vt

prodeat $KZ = 60.024706$.

Datis nunc in triangulo rectangulo ZWC hypothenusa $ZW = 0.7331092$ et angulo $ZWC = 59°.56\frac{7}{9}$, argumentari licet

$$1 : ZW = \text{fin.} ZWC : ZC, \text{ hinc}$$

$$lZW = 9.8651686$$

$$l\text{fin.} ZWC = 9.9372872$$

$$lZC = 9.8024558 \text{ vel } ZC = 0.6345353.$$

In triangulo denique KZC datur $KZ = 60.024706$, $ZC = 0.6345353$, et angul. $KZC = 30°.3\frac{1}{3}$, ex quibus deducitur

$$\text{tangens } ZKC = \frac{ZC.\,\text{fin.}\,KZC}{KZ - ZC.\,\text{cof.}\,KZC}, \text{ adeoque}$$

$$l\text{cof.} KZC = 9.9372872$$

$$lZC = 9.8024558$$

$$lZC.\text{cof} KZC = 9.7397430$$

$$ZC.\text{cof.} KZC = 0.549216$$

$$KZ = 60.024706$$

$$KZ - ZC.\text{cof} KZC = 59.475490$$

$$lKZ - ZC.\text{cof} KZC = 1.7743381$$

$$l\text{fin.} KZC = 9.6996986$$

$$7.9253605$$

$$lZC = 9.8024558$$

$$l\text{tang.} ZKC = 7.7278163$$

Angu-

Angulus itaque, quem format verticalis linea KZ cum radio KC, fin. ZKC, aequatur 18′.22″, quo cognito distantia loci K a Centro terrae, siue KC sequenti modo colligitur:

$$l\,\text{fin.}KZC = 9.6996986$$
$$l\,ZC = 9.8024558$$
$$l\,ZC.\text{fin.}KZC = 9.5021544$$
$$l\,\text{tang.}ZKC = 7.7278163$$
$$l\,\frac{ZC.\text{fin.}KZC}{\text{tang.}ZKC} = 1.7743381$$
$$l\,\text{cof.}\,KZC = 9.9999938$$
$$l.\,KC = 1.7743443$$
$$\text{log. conft. add.} = 4.7399413$$
$$l\,KC \text{ in hexaped.} = 6.5142856$$
$$\text{hinc } KC = 3268027. \text{ hexaped. Gall.}$$

Eodem modo in hypothesi hac Bougueriana nactus sum pro Parallelo Obseruatorii Cel. de la Caille in Promontorio Bonae spei angulum, quem verticalis linea cum radio terrestri constituit, $= 16'.27''\frac{2}{3}$, et radium ad centrum Terrae ductum $= 3276132$ hexaped. Datis nunc distantiis locorum a Centro telluris vna cum angulis, quos formant verticales lineae cum radiis terrestribus, ad loca proposita e Centro terrae ductis, Lunae in Meridiano versantis Parallaxis, siue horizontalis, siue altitudini alicui visae cognitae respondens, sequenti methodo facillime determinari poterit:

Repraesentet ÆRQ Meridianum terrestrem per locum in superficie Telluris datum R transeuntem, Tab XIV. Fig. 3.

 ÆCQ

ÆCQ Aequatorem, et C Centrum terrae. Ducantur tangentes RL ad radium terrestrem RC, et Rl ad verticalem lineam SRP loci R, ad orbitam lunarem vsque productae Erit itaque angulus, quem constituit verticalis linea cum radio terrestri, = angulo PRC, siue SRs, qui vocetur Π, posito radio CR = r et distantia Lunae a Centro terrae CL = Cl = d. Quo facto habebimus Parallaxin Lunae horizontalem ad verticalem lineam SP, siue sinum anguli RlC = $\frac{r}{d}$ cos. Π; sinum vero Parallaxeos Lunae horizontalis ad radium terrestrem RC, tanquam omnium maximae, siue sin. ang. RLC = $\frac{r}{d}$. Ponatur iam altitudo Lunae Meridiana visa lRλ = v, eritque

λC : sin. λRC = RC : sin. CλR, vel
d : cos. (v + Π) = r : sin. Parall. altitud. in Meridiano,
adeoque sin. Parallaxeos altitud = $\frac{r}{d}$ cos. (v + Π).

Si nunc dicamus radium terrestrem alius cuiusuis loci in superficie telluris R, angulum, quem format radius iste cum verticali illius loci, π, et altitudinem Lunae meridianam visam V, erit similiter sin. Parall. horiz. maximae = $\frac{R}{d}$, et sin. Parall. altitud. in Meridiano = $\frac{R}{d}$ cos. (V + π). Quodsi itaque e binis locis sub eodem Meridiano sitis distantia Centri Lunae culminantis a stella quadam fixa secundum declinationem obseruata fuerit, locaque illa adeo ab inuicem fuerint dissita, vt distantiarum obseruatarum differentia aequetur summae Parallaxium Lunae in altitudinem; facili negotio Parallaxis Lunae horizontalis ipsa ex obseruationibus definiri poterit. Vocetur enim distantiarum secundum eundum declinationem differentia obseruata A, eritque in hoc casu $\frac{r}{d}$ cos. $(v+\Pi)+\frac{R}{d}$ cos. $(V+\pi)=A$, siue si ponatur $\frac{R}{r}=m$, prodibit $\frac{r}{d}$ cos. $(v+\Pi)+\frac{r}{d}m$ cos. $(V+\pi)=A$, hinc Parallaxis Lunae horizontalis ad radium terrestrem r, siue $\frac{r}{d}=\frac{A}{m\cdot cos.(V+\pi)+cos.(v+\Pi)}$, et Parallaxis horizontalis ad radium terrestrem R, vel $\frac{R}{d}=\frac{A}{cos.(V+\pi)+\frac{cos.(v+\Pi)}{m}}$.

Secundum formulas hasce iam leui negotio Parallaxin Lunae horizontalem ex nostris obseruationibus definire valebimus, statim ac differentia distantiarum Lunae, secundum declinationem a stella quadam fixa Lunae proxima in Promontorio Bonae spei, et in loco sub eodem cum Promontorio Meridiano, in Parallelo Petropolitano sito obseruatorum, et altitudines Lunae Meridianae visae in vtroque loco ex obseruationibus ibidem peractis determinatae fuerint. Ad hoc itaque efficiendum oportet prius, vt altitudines Lunae Meridianae Petropoli obseruatae singulae Tabularum Astronomicarum ope ad Meridianum Promontorii Bonae spei reducantur, deindeque distantia visa centri Lunae culminantis a stella fixa Lunae proxima, secundum declinationem ad momentum culminationis Lunae sub Meridiano Promontorii pro vtroque loco recte definiatur.

Antequam vero calculos hosce pro singulis obseruationibus supra relatis instituam, e re esse videtur, nonnihil circa veram diametri lunaris mensuram monere, eamque ex nostris obseruationibus, quantum fieri poterit, exactissime eruere. Ad hunc finem notandum est, me quidem diametrum Lunae apparentem per tubum

8 pe-

8 pedum, micrometro anglicano exquisitissimo munitum, quo vti soleo, d. $\frac{18}{29}$ et $\frac{19}{30}$ Ian. obseruare non potuisse, eam vero ad culminationis Lunae tempus d. $\frac{19}{30}$ Ian. ex mora transitus disci lunaris per filum verticale quadrantis circa id tempus obseruata deduxisse $= 32'.52''\frac{1}{2}$; quae, cum sit diameter Lunae horizontalis, facili negotio, additis $15''$ pro variatione diametri Lunae horizontalis a d. $\frac{18}{29}$ ad $\frac{19}{30}$. Ian. ex tabulis Halleianis desumta, reducitur ad diametrum Lunae horizontalem tempori obseruationis lunaris d. $\frac{18}{29}$ Ian. respondentem $= 33'.7''\frac{1}{2}$. Porro accurate obseruaui diametrum Lunae apparentem per tubum 8 ped. micrometro angl. instructum d. $\frac{11}{22}$ Febr. 1752 in altitudine Lunae visa $44°.30' = 33'.2''$. eodemque organo d. $\frac{12}{23}$ Febr. in altitudine Lunae visa $50°\frac{1}{2}$ $= 33'.8''$ 8, ita vt diameter Lunae horizontalis ex hisce obseruatis ad tempus culminationis Lunae deducta sit d. $\frac{11}{22}$ Febr. $= 32'.38''\frac{1}{2}$, et d. $\frac{12}{23}$ Febr. $32'.43''$.

Hisce de diametro Lunae Petropoli obseruata dictis, ad inuestigationem iam Parallaxeos Lunae horizontalis methodo supra exposita instituendam reuertor, ex singulis obseruationibus respondentibus ea, quae ad calculum hunc subducendum necessaria iudicantur, sequenti ratione definiturus.

Primum itaque incidimus in obseruationem d $\frac{18}{29}$ Ian. 1752 habitam, in qua Luna comparata fuit cum Palilicio. Obseruata nimirum est

In

In Promontorio Bonae ſpei.

Altit. Merid. appar. limbi ☽ae borealis $11^h. 5'. 22''$. circ. t. v.
= $38°. 22'. 41''. 2$
refractio ſubtrahenda - - = 1. 14.

Altit. Merid. appar. limbi ☽ae borealis
refractione correcta = $38°. 21'. 27''. 2$
Semidiam. Lunae apparens (ſecundum ea quae, ſupra de diam. diximus) = 16. 44. 5

Altit. Merid. apparens Centri ☽ae
refractione correcta = $38°\ 38'. 11''. 7$
Altit. Meridiana apparens Palilicii = $40°. 6'\ 44''. 4$
refractio ſubtrahenda = 1. 9. 5

Alt. Merid. Palilicii refractione correcta = 40. 5. 34 9
Altit. Merid. apparens Centri ☽ae
refractione correcta = 38. 38. 11. 7
Diſtantia apparens Centri ☽ae culminantis a Palilicio ſecundum declinat. = $1°. 27'. 23''. 2$ Bor. verſ.

Simili modo in obſeruatorio Petropolitano.

Altit. Merid. appar. marginis ☽ae borealis $11^h. 3'. 24''$ t. v.
= $46°. 26'. 20''. 5$
refractio ſubtrahenda = 0. 57.

Altit. Merid. appar. marg. ☽ae bor.
refractione correcta = $46°. 25'. 23''. 5$
Semidiameter ☽ae apparens - 16. 46. 4
Altit. Merid. appar. Centri ☽ae
refractione correcta = $46°. 8'. 37''. 1$

Haec autem altitudo Meridiana Lunae Petropoli obseruata, vt ad Meridianum Promontorii Bonae Spei, siue ad tempus culminationis Lunae sub Meridiano Promontorii reducatur, ex Tabulis lunaribus depromtus motus Lunae verus in declinationem sequenti iam modo adhibeatur necesse est:

Tempus culminationis Centri ☽ae in Promontorio Bonae spei	$12^h. 5'. 22''.$ t. v.
Differ. Merid. Pet. inter et Promont.	47. 10
Tempus culminat. Centri ☽ae in Promont. ad Mer. Petrop. reduct.	11. 52. 32
Tempus culminat. Centri ☽ae in obseruatorio Petropolitano	11. 3. 24
differentia	$0^h. 49'. 8''$

Motus Lunae verus in declinationem pro 50 min. prim. temp. ex Tabulis Halleianis supputatus, aequatur $6'. 59''. 7$ austrum versus, hinc motus Lunae verus in declinationem pro $49'. 8''$ temp. erit $= 6'. 52''. 4$, quibus subductis ab altitudine Merid. appar. Centri ☽ae Petropoli obseru. $46°. 8'. 37''. 1$; remanebit altitudo Merid. appar. Centri ☽ae sub Meridiano Promontorii B. S. in Parallelo obseruatorii Petropolitani $= 46°. 1'. 44''. 7$

Propter decrementum declinationis ☽ae borealis pro aucta parallaxi Lunae altitud. subtrahenda sunt	0. 5. 2
Altitudo Merid. apparens Centri ☽ae sub Meridiano Promontorii Bonae spei in Parallelo obseruatorii Petropolitani correcta	$= 46°. 1'. 39''. 5$

Altis-

Altitudo Merid. Palilicii Petropoli obſeruata $= 46^\circ.\ 3'.\ 28''.$

refractio ſubtrahenda $= \quad 0.\ 57.\ 8$

Altit. Merid. Palilicii refractione correcta $= 46.\ 2.\ 30.\ 2$

Altit. Merid. appar. Centri ☽ae ſub Merid. Promontorii B. S. in Parall. obſeruatorii Petrop. correcta $= 46.\ 1.\ 39.\ 5$

Hinc diſtantia apparens Centri ☽ae culminantis a Palilicio ſec. declinat. $= 0^\circ.\ 0'.50''.7$ Auſt. verſus.

Diſtant. apparens Centri ☽ae culminantis a Palilicio ſecundum declinationem eodem tempore in Promontorio obſeruata. $= 1.\ 27.\ 23.\ 2$ Bor. verſus.

Diſtantiarum apparentium itaque differentia, ſiue ſumma Parallaxium. $= 1^\circ.28'.13''.9$

Habebimus igitur ſecundum formulas ſupra traditas $A = 1^\circ.\ 28'.\ 13''.9$; $v = 46^\circ.\ 1'.\ 39''.5$; $V = 38^\circ.38'.11''.7$; et in hypotheſi Terrae ellipſoidalis ſupra admiſſa $r = 0.99652568$; $R = 0.99856302$; $\Pi = 13'.55''.6$; $\pi = 14'.49''$; hinc $m = 1.00204$, ſiue $lm = 0.0008870$; $v + \Pi = 46^\circ.15'.35''$ et $V + \pi = 83^\circ.53'.1''$,

adeoque $l\,\text{coſ.}(V+\pi) = 9.8912155$
$lm = 0.0008870$

$lm\,\text{coſ.}(V+\pi) = 9.8921025$
$m\,\text{coſ.}(V+\pi) = 0.7800142$

$\text{coſ.}(v+\Pi) = 0.6913905$
$m.\text{coſ.}(V+\pi) = 0.7800142$

$m.\text{coſ.}(V+\pi) + \text{coſ.}(v+\Pi) = 1.4714047$
l - - - - - $= 0.1677323$
$l\,A''$ - - - - $= 3.7237757$

$l\,\frac{r}{d}$ - - - - $= 3.5560434$

 Colli-

Colligimus itaque ex praecedenti calculo pro tempore obſeruationis lunaris d. $\frac{18}{29}$ Ian. 1752 in hypotheſi terrae ellipſoidalis Parallaxin Lunae horizontalem ſub Parallelo obſeruatorii Petropolitani, ſiue $\frac{r}{d} = 59'.57''.9$, eodemque modo Parallaxin Lunae horizontalem ſub Parallelo Promontorii Bonae ſpei, ſiue $\frac{R}{d} = 60'.5''.2$, Si admittere placet hypotheſin Cel. Bougueri circa figuram Telluris, erit ex ſupra inuentis $r = 3268027$ hex. $R = 3276132$ hex, hinc $m = 1.00248$, vel $lm = 0.0010758$; $\Pi = 18'.22''$ et $\pi = 16'.27''.4$, adeoque Parallaxis Lunae horizontalis pro tempore obſeruationum lunarium d. $\frac{18}{29}$ Ian. ſub Parallelo obſeruatorii Petropolitani $= 60'\ 0''$, et pro Parallelo obſeruatorii Cel. de la Caille in Promontorio Bonae ſpei $= 60'.9''$. In hac obſeruatione Anomalia Lunae vera erat $= 6^s.29$. Argumentum annuum $= 1^s.23^\circ\frac{3}{4}$, et diſtantia Lunae a Sole $= 5^s.17^\circ\frac{1}{4}$.

Progredior iam ad ſecundam obſeruationem lunarem reſpondentem d. $\frac{19}{30}$ Ian. 1752 habitam. Quamvis enim Petropoli ſtellas Parallelo Lunae proximas iſto die, nubibus impedientibus, obſeruare non licuerit, nec eandem ob cauſam determinatio Parallaxeos ex hac obſeruatione aeque certa videatur, ac illa, quae obſervationibus d. $\frac{18}{29}$ Ian. et $\frac{12}{23}$ Febr. nititur, nolui tamen obſeruationem hanc praeterire, quin eam ad Parallaxin Lunae definiendam vna cum reliquis adhiberem, aut ſaltem experirer; praecipue cum periculum in hac Parallaxeos lunaris computatione ſola hypotheſi, quod errores diuiſionum inſtrumentorum pro maiori interuallo in limbo maiores eſſe poſſent, totum innititur. Huius

vero

vero generis errores in Organo, quo Petropoli vſus ſum, nullos eſſe ſenſibiles, ex certis rationibus, alio loco indicandis, perſuaſum hactenus habeo.

Ad calculum hunc inſtituendum comparanda erit altitudo Meridiana Lunae, die iam notato in vtroque obſeruatorio capta, cum altitudine Meridiana Palilicii, die praecedente et in Promontorio Bonae ſpei et Petropoli obſeruata, quippe quae variationibus, ſiue viciſſitudinibus, refractionum minime ſit obnoxia. Caeterum Luna hac in obſeruatione ad eandem fere altitudinem Meridianam tranſiit Petropoli et in Promontorio Bonae ſpei, ita vt ſumma Parallaxium, ex obſeruationibus huius diei colligenda, omnium ferme ſit maxima.

Colligitur autem ex obſeruatione d. $\frac{19}{30}$ Ian. in Promontorio Bonae ſpei habita:

Altit. Merid. apparens marginis Lunae borealis - - $12^h\ 1'.37''$.t.v.	$= 42°.33'.11''.1$
refractio ſubtrahenda -	1. 3. 8
Altit. Merid. apparens marg. ☽ae boreal. refractione correcta - - -	$= 42.\ 32.\ 7.\ 3$
Semidiameter Lunae apparens	16. 37. 8
Altit. Merid. appar. Centri ☽ae refract. correcta - - - -	$= 42.\ 48.\ 45.\ 1$
Altit. Merid. Palilicii refractione correcta ex obſeruatione d. $\frac{18}{29}$ Ian. - - -	$= 40.\ 5.\ 34\ 9$
Hinc diſtantia apparens Centri Lunae culminantis, ſecund. declinationem a Palilicio in Promont. obſeruata	$= 2°.43'.10''.2$

 Secun-

Secundum obseruationes d. 18 Ian. in obseruatorio Petropolitano institutas

Altitudo Meridiana apparens marginis Lunae borealis $11^h.59'.36''$. t. v. $= 42°.18'\ 6''.1$

refractio subtrahenda - = 1 4. 4

Altitudo Meridiana apparens marg. ☽ae borealis refractione correcta $= 42.\ 17.\ 1.\ 7$

Semidiameter Lunae apparens 16 37. 9

Altit. Mer. app. Centri Lunae refract. corr. $= 42°.\ 0'.23''.9$

Ad altitudinem hanc Lunae Meridianam ad Meridianum Promontorii Bonae spei reducendam, habemus tempus culminationis Centri ☽ae in Promontorio $- 12^h.\ 1'.37''$ t. v.

Meridianorum differentia $-$ 0. 47. 10

Tempus culminat Centri ☽ae in Promontorio ad Merid. Petropol. reduct. $= 12.\ 48.\ 47$

Tempus culminat. Centri ☽ae Petropol. $= 11.\ 59.\ 36$

differentia $= 0^h.49'.11''$

Secundum Tabulas Halleianas motus Lunae verus in declinationem pro 50 min. prim. temp. aequatur $9'.4''\ 7$, Austrum versus; quocirca motus Lunae verus in declinationem pro $49'.11''$. temp. erit $= 8'.55''\ 8$, hinc Altitudo Meridiana appar. Centri Lunae sub Meridiano Promontorii B. S in Parallelo obseruatorii Petropolitani - - - - - - - $= 41°.51'.28''.1$

ob imminutam altitud. Merid ☽ae pro aucta parallaxi ☽ae altitud. subtrahantur = 6. 3

Altit. Merid. appar. Centri ☽ae sub Merid. Promontorii in Parall. Petroburg. correcta $= 41°.51'.21''.8$

Altit.

Altit. Merid. Palilicii Petropol. d. $\frac{18}{29}$ Ian. obseruata et refractione correcta - - - - $= 46.° 2'. 30''. 2$

Distantia apparens Centri ☽ae culminantis a Palilicio secundum declinationem in Parallelo obseruatorii Petropol. sub Meridiano Promontorii Austrum versus $= 4°. 11'. 8''. 4$

Distant. apparens Centri ☽ae culminantis secund. declinationem a Palilicio in Promontorio obseruata Austr. versus $= 2°. 43'. 10''. 2$

Hinc distantiarum apparentium different. siue summa Parallaxium $= 1°. 27'. 58''. 2$

Erit igitur in formulis supra pro parallaxi horizontali exhibitis $A = 1°. 27'. 58''. 2$; $v = 41° 51'. 21''. 8$; $V = 42°. 48'. 45''. 1$; adeoque in hypothesi terrae ellipsoidalis $v + H = 42°. 5'. 17''$; $V + \pi = 43°. 3'. 34''$, et in hypothesi Cel. Bougueri $v + H = 42°. 9'. 44''$; $V + \pi = 43°. 5'. 12''$, valoribus reliquarum quantitatum manentibus iisdem, vt supra.

Calculo secundum hosce valores datos posito, prodibit pro tempore obseruationis lunaris d. $\frac{19}{30}$ Ian. in hypothesi terrae ellipsoidalis parallaxis Lunae horizontalis pro Parallelo Petropolitano $= 59'. 40'' 2$, et pro Parallelo Promontorii Bonae spei $= 59'. 47''. 6$. In hypothesi autem Cel. Bougueri sub Parallelo Petropol. $= 59'. 42''. 4$, et sub Parallelo Promontorii $= 59'. 51''. 3$. Tempore huius obseruationis lunaris Anomalia Lunae vera erat $= 7^s. 14°$. Argumentum annuum $= 1^s. 24° \frac{2}{3}$, et distantia Lunae a Sole $= 6^s. 1° \frac{1}{2}$.

Acce-

Accedimus nunc ad tertiam obſeruationem lunarem reſpondentem d. $\frac{12}{23}$ Febr. 1752. peractam, Luna circa limites maximae declinationis borealis verſante, adeoque exiguo valde motu in declinationem gaudente.

Obſeruauit autem Cel. de la Caille in Promontorio Bonae ſpei die iam dicto

Altit. Merid. appar. marg ☽ae Auſtr. $6'.54'.58''$. t. v. - - - -	$= 34^\circ.19'.29''$
refractio ſubtrahenda - - -	$= \quad 1.\ 26$
Hinc erit Altit. Merid. appar. marg. ☽ae auſtr. refract. correcta - - -	$= 34.\ 18.\ \ 3$
Semidiameter Lunae apparens ex noſtra obſeruatione - - - -	$= \quad 16.\ 31.\ 1$
Altit. Merid. appar. centri Lunae refract. correcta - - - - -	$= 34^\circ.1'.31''.9$
Altit. Meridiana apparens ζ♉ - -	$= 35^\circ.8'.18''.7$
refractio ſubducenda - -	$= \quad 1.\ 23$
Altit. Merid. appar. ζ♉ refractione correcta	$= 35.\ 6.\ 55.\ 7$
Alt. Merid. app. centri Lunae refr. correcta	$= 34.\ 1.\ 31.\ 9$
Diſtantia appar. centri ☽ae culminantis ſecundum declinationem a ζ♉ in Promontorio Bonae ſpei obſeruata -	$= 1^\circ.5'.23''.8$ Bor. verſ.

In

In obſeruatorio Petropolitano eodem die obſeruata fuit

Altitudo Merid. app. marg. ☽ae borealis $6^h.53'.11''$t.v.
$= 50°.58'.2''.6$

Propter exiguam obliquitatem cornuum ☽ae
addenda ſunt - - - - - - 3.

Alt. Merid. app. marg. ☽ae borealis correcta = 50. 58. 5.6
refractio ſubtrahenda - - - - - - 49.

Alt. Mer. app. marg. ☽ae bor. refract. corr. = 50.57.16.6
Semidiameter Lunae apparens - - - 16.34.8

Alt. Merid. app. centri ☽ae refract. correcta = 50. 40. 41 8

Altitudo autem haec Lunae Meridiana Petropoli obſeruata, vt ad Meridianum Promontorii Bonae ſpei reducatur, habemus tempus culminationis centri Lunae in Promontorio - - - - - $6^b.54'.58''$.t.v.
addatur Meridianorum differentia 0. 47. 10

Tempus culminat. Centri ☽ae in Promont.
ad Merid. Petropol. reductum - - 7. 42. 8
Tempus culminat. centri ☽ae Petropoli - 6. 53. 11
differentia $= 0^b.48'.57''$.

Motus Lunae verus in declinationem ſecundum Tabulas Halleianas ſupputatus, pro 50 min. prim. temp. in hac obſeruatione aequat. $20''.\frac{1}{2}$ Auſtrum verſus, adeoque pro $48'.57''$. temp. $20''.1$, quibus ex altitudine Meridiana apparenti Centri Lunae Petropoli obſeruata ablatis, obtinebitur altitudo Meridiana apparens Centri

Lunae sub Meridiano Promontorii in Parallelo obseruatorii Petropolit. - - - $= 50°.40'.21''.7$.
Altit. Merid. appar. ζ♉ Petrop. obseruat. $= 51°.2'.14''.1$
refractio subtrahenda - - - - 49.

Altitudo Merid. ζ♉ refractione correcta $= 51.\ 1.\ 25.\ 1$
Alt. Merid. app Centri ☽ae sub Merid.
Promont in parall. Petropol. - $= 50.\ 40.\ 21.\ 7$.
Distantia appar. Centri ☽ae culm.
secundum declinationem a ζ♉ in
Parallelo obseruatorii Petropol. sub
Meridiano Promontorii - - $= 0°.21'.3''.4$ Aust. vers.
Dist. appar. centri ☽ae culm. sec.
declinat. a ζ♉ in Promont. obseru. $= 1.\ 5.\ 23.\ 8$. Bor. vers.

Dist. app. differ. siue summa Parallaxium $= 1°.26'.27''.2$.

Hinc in nostris formulis pro supputanda Parallaxi horizontali $A = 1°.26'.27''.2$; $v = 50°.40'.21''.7$; $V = 34°.1'.31''.9$ et in hypothesi Terrae ellipsoidalis supra assumta $v + \Pi = 50°.54'.17''$; $V + \pi = 34°.16'.21''$. In hypothesi Bougueriana autem $v + \Pi = 50°.58'.44''$. et $V + \pi = 34°.17'.59''\frac{1}{2}$. Valoribus hisce substitutis, prodibit Parallaxis Lunae horizontalis ad tempus obseruat lunar. d. $\frac{12}{23}$ Febr. in hypothesi Terrae ellipsoidalis, pro Parallelo Obseruatorii Petropolitani $= 59'.16''.1$; pro Parallelo Promontorii Bonae spei $= 59'.23''.4$, In hypothesi Bougueriana autem sub Parallelo Petropolitano $= 59'.18''.3$, et sub Parallelo Promontorii $= 59'.27''.2$. In hac obseruatione lunari Anomalia Lunae vera erat $= 5^s.25°$, Argumentum annuum $= 2^s.16°$, et Distantia Lunae a Sole $= 3^s.16°$.

Quum

Quum obſeruationibus hiſce lunaribus, d. $\frac{12}{23}$ Febr. Petropoli et in Promontorio Bonae ſpei habitis, reſpondens quoque obſeruatio inſtituta ſit in obſeruatorio Regio, quod Berolini eſt, et hanc cum obſeruatione Cel. de la Caille methodo praecedenti conferre iuuabit. Obſervatio autem Berolinenſis in Epiſtola D. de la Lande ad Cel. Kaeſtnerum obuia, ſequentibus verbis continetur: „A. 1752. d. 23 Febr. in obſeruatorio regio Beroli-„nenſi $6^h.54'.39''$. temp. v. limbus Lunae praecedens „Meridianum attigit, et ad $6^h.55'.50''\frac{2}{3}$ centro ipſo „Lunae in Meridiano conſtituto veram differentiam de-„clinationum inter limbum Lunae meridionalem et „ſtellam ζ Tauri obſeruaui $0°.32'.31''$, ſtella ad „ſeptentrionem exiſtente.„

Quamuis in hac obſeruationis Berolinenſis relatione altitudo Meridiana Lunae apparens non ſit notata, leui tamen negotio eam ex altitudine Meridiana ζ♉ Petropoli obſeruata definire poſſumus, modo detur eleuatio Poli obſeruatorii Berolinenſis. Inueni autem ex magno ſat numero obſeruationum circa ſtellam Polarem et β draconem An. 1750. Maio, Iulio et Auguſto menſibus, prope obſeruatorium Berolinenſe ſumma cura habitarum, eleuationem Poli huius obſeruatorii veram $= 52°.30'58''$. Differentia ſimiliter Meridianorum obſeruatorii Cel. de la Caille in Promontorio Bonae ſpei et Berolinenſis facile fluit ex differentia Meridianorum Petropolin inter et Promontorium initio huius diſſertationis inuenta. Quia enim differentiam Meridianorum Berolinenſis et Pariſini obſeruatorii, alias accurate determinaui $0^h.44'.25''$, erit differentia Meridianorum inter Petropolitanum et Berolinenſe obſeruatorium $= 1^h. 7'. 35''$, poſita nimirum diſtantia Petropolitani obſeruatorii a Pariſino ſecundum Aequatorem $= 1^h. 52' 0''$. Hinc admiſſa differentia Meridianorum Petropolitani obſeruatorii et Promontorii Bonae ſpei ſupra inuenta $= 0^h. 47'. 10''$, prodibit diſtantia quaeſita Promontorii Bonae ſpei ab Obſeruatorio Berolinenſi ſecundum Aequatorem $= 0^h. 20'. 25''$ ortum verſus, adeoque $7'\frac{1}{4}$ temp. minor ea, quam olim adhibuit Wagnerus in narratione ſua de ratione ac methodo obſeruationum aſtronomicarum, auſpiciis Nobil. D. de Kroſigk Berolini et ſimul in Capite Bonae ſpei, ad parallaxin Lunae praecipue determinandam, inſtitutarum. Praeterea inueni ſecundum formulas ſupra enucleatas angulum, quem ſub Berolinenſi Parallelo conſtituit verticalis linea cum radio ad centrum terrae ducto, in hypotheſi terrae ellipſoidalis ſupra ſuppoſita $= 15'. 29''. 8$, in hypotheſi Bougueriana autem $= 19'. 33''\frac{1}{8}$; itemque radium ex centro telluris ad Parallelum Berolinenſem ductum in prima hypotheſi $= 0. 99708386$, in altera vero $= 3270386$ hexap.

Hiſce praemiſſis, ſequitur, vt diſtantiam Lunae culminantis apparentem, ſecundum declinationem a ζ♉ ſub Meridiano Promontorii Bonae ſpei, in Parallelo Berolinenſis obſeruatorii, ex obſeruatione ſupra relata, eruamus hoc modo:

Alt.

Alt. Merid. ζ♉ d. $\frac{12}{23}$ Febr. 1752 Petropol.
obseruata et refract. correcta - = 51°. 1′. 25″. 1
Eleuatio Aequatoris Petropol. obseruat. = 30. 3. 20

Declinatio appar. ζ♉ d. $\frac{12}{23}$ Febr. 1752 = 20.58.5.1 bor.
Eleuatio Aequatoris Berol. obseruatorii = 37.29.2

Alt. Mer. ζ♉ in obs. Ber. refract. correcta = 58.27.7.1
Differentia declinat. inter marg. ☽ae austr.
et ζ♉ Berolini obseruata - 0.32.31

Alt. Mer. app. marg. ☽ae austr. refr. corr. = 57.54.36.1
Semidiameter Lunae apparens - = 16.36.1

Alt Mer. app. centri Lunae refract. corr. = 58°. 11′. 12″. 2

Iam ad reducendam hanc altitudinem Lunae Merid. ad Meridianum Promontorii Bonae spei, habemus tempus culminat. centri Lunae in Promont. = 6^h. 54′. 58″. t. v.
Subtrahatur differentia Meridianorum = 0. 20. 25

Temp. culminat. centri ☽ae in Prom.
ad Merid. Berolinen. reductum = 6. 34. 33
Temp. culminat. centri ☽ae Ber. obs. 6. 55. 50$\frac{2}{7}$

differentia = 0^h. 21′. 17″$\frac{2}{7}$.

Motus Lunae verus in declinationem pro hoc temporis interuallo 21′. 17″$\frac{2}{7}$ ex Tabulis Halleianis aequatur 10″. 7, quibus augenda est altitudo Meridiana apparens centri Lunae Berolini obseruata, vt innotescat

Altit. Merid. appar. centri ☽ae sub Merid. Promont. in Parallelo Berol. obseruat - - - - -	$=58^\circ.11'22''.9$
Alt. Merid. ζ♉ sub Parallelo Berol. obseruatorii refractione correcta	$=58.\ 27.\ \ 7.\ \ 1$
Distantia appar. centri ☽ae culminantis sec. declinat. a ζ♉ in Parallelo Berol. obseruator. sub Merid. Promontorii Bonae spei. - - - - - - -	$=0^\circ.15'.44''.2.$ A. v.
Dist. appar. centri ☽ae culminant. sec. declinat. a ζ♉ in Promont. obseruata	$=1.\ \ 5.\ 23.\ \ 8$ B. v.

Differ. dist. appar. siue summa Parall. $=1^\circ.21'.8''$.

Dantur itaque sequentes valores litterarum in formulis pro supputanda Parallaxi Lunae horizontali contentarum: $A=1^\circ.21'.8''$; $v=58^\circ.11'.22''.9$; $V=34^\circ.1'.31''.9$, et in hypothesi terrae ellipsoidalis supra admissa $v+\Pi=58^\circ\ 26'.52''\frac{1}{2}$; $V+\pi=34^\circ.16'.21''$; $r=0.9970886$ et $R=0.99856302$, hinc $m=1\ 0014836$, siue $lm=0.0006439$. In hypothesi autem Bougueriana $v+\Pi=58^\circ.30'.56''\frac{1}{2}$; $V+\pi=34^\circ.17'.59''\frac{1}{2}$; $r=3270386$ hexaped. et $R=3276132$ hexaped. adeoque $m=1.001757$, vel $lm=0.0007624$.

Prodibit igitur ex hisce datis ad tempus obseruat. d. $\frac{12}{23}$ Febr. Parallaxis Lunae horizontalis in hypothesi terrae ellipsoidalis supra assumta, pro Parallelo Berolinensi $=60'.3''.6$, et pro Parallelo Promontorii $=60'.8''.9$; ex altera autem hypothesi figurae telluris sub Parallelo Berolinensi $=60'.6''.4$ et sub Parallelo Promontorii $=60'.12''.7$.

Para-

Parallaxin Lunae horizontalem ex obſeruatione Berolinenſi deductam, comparando cum ea, quae obſeruationibus Petropolitanis innititur, facile apparet, ſiue relationem obſeruationis Berolinenſis circa differentiam declinationum Lunae et ζ♉ eſſe mendoſam, ſiue obſeruationem ipſam erroneam, adeo vt ea, niſi erroris fons prius detectus fuerit, vti nequaquam poſſimus. In praeſenti ſufficit indicare, quod obſeruatio Berolinenſis magis cum obſeruationibus Petropolitanis conſentiret, ſi in relatione obſeruationis Berolinenſis loco $=0°.32'.31''$, legere liceret $0°.31'.32''$.

Ad noſtras itaque obſeruationes reuertendo, ex calculis ſupra inſtitutis, ſequentes colligimus rationes Parallaxeos Lunae horizontalis ex Tabulis Halleianis ſupputatae, ad Parallaxin eius horizontalem, ex obſeruationibus Petropoli et in Promontorio Bonae ſpei ſimul habitis concluſum: Ex obſeruationibus nimirum d. $\frac{18}{29}$ Ian. inſtitutis, Parallaxis Lunae horizontalis tabularia eſt ad Parallaxin horizontalem ex obſeruationibus in hypotheſi figurae telluris Bougueriana pro Parallelo Petropolitano deductam, vt $59'.48''$ ad $60'.0''$, ſiue vt $1.$ ad 1.00334; ex obſeruationibus d. $\frac{19}{30}$ Ian. vt $59'\ 20''\frac{1}{2}$ ad $59'.42''.4$, ſiue vt $1.$ ad 1.00615; ex obſeruationibus denique d. $\frac{11}{22}$ Februarii vt $58'.54''\frac{2}{3}$ ad $59'.18''.3$, ſiue vt $1.$ ad 1.00669. Inueniemus quoque rationem Parallaxeos Lunae horizontalis, ex obſeruationibus pro Parallelo Petropolitano collectae, ad eius diametrum obſeruatam et ad horizontem reductam, vt ſequitur: ſecundum obſeruationes d. $\frac{18}{29}$ Ian. Parallaxis Lunae horizontalis in hypotheſi figurae telluris Bougueriana, pro Parallelo Petropotropolitano, ſupputata eſt ad eius diametrum horizontalem, vt 60 ad 33 125; ex obſeruat. d. $\frac{19}{30}$ Ian. vt 60 ad 33. 037; ex obſeruat. d. $\frac{12}{23}$ Febr. vt 60 ad 33. 100.

Rationibus hiſce inuicem collatis, apparebit, obſeruationes d. $\frac{19}{30}$ Ian. et d. $\frac{12}{23}$ Febr. habitas, ſatis bene congruere, et cum differentia Parallaxium horizontalium ex Tabulis depromta, et cum diametris Lunae obſeruatis; obſeruationem autem d. $\frac{18}{29}$ Ian. inſtitutam contra aliquantulum ab illis aberrare, praeſertim cum decremento diametri lunaris a d. $\frac{18}{29}$ ad d. $\frac{19}{30}$ Ian. accurate ſatis non reſpondeat. An vero error, quo obſeruatio haec contaminata eſſe videtur, ex verificatione diuiſionum, quam ſibi circa ſextantem ſuum inſtituendum propoſuit Cel. de la Caille, corrigi queat, in medio relinquere cogor. Hoc autem ſcio, obſeruationes Petropolitanas d. $\frac{18}{29}$ Ian. et d. $\frac{12}{23}$ Febr. habitas, nulla egere correctione, ex diuiſione quadrantis noſtri oriunda, quod filum quadrantis pendulum in vtraque obſeruatione Lunae et ſtellae, eidem diuiſionis in limbo quadrantis puncto diebus iam notatis accuratiſſime fuit applicatum.

Animaduerto autem, quod in obſeruationibus d. $\frac{18}{29}$ et $\frac{19}{30}$ Ian. vnius eiusdemque marginis Lunae, borealis nimirum, altitudo Meridiana, et Petropoli, et in Promontorio Bonae ſpei ſit obſeruata, ita vt diameter Lunae erronea nullum afferre queat errorem Parallaxi Lunae ex hiſce obſeruationibus ſupputatae; quod vero in obſeruatione d. $\frac{12}{23}$ Febr. habita, Cel. de la Caille auſtralem Lunae limbum tanquam terminatum in Promontorio obſeruauerit, ego contra Petropoli borealis limbi

limbi altitudinem, propter exiguam cornuum Lunae obliquitatem, breui temporis interuallo inter culminationem Lunae et ſtellae ζ♉ coactus ceperim, cum praeterea limbus hic ſtellae ζ♉ eſſet citimus, totaque obſeruatio, absque vlla quadrantis perturbatione, ſolo cochleae micrometri circumactu, peragi poſſet. Ex hiſce itaque ſecundis hoc naſcitur aduerſum, quod Parallaxium Lunae ſumma, ex obſeruationibus d. $\frac{12}{23}$ Febr. concluſa, totius re vera erroris in diametrum Lunae admiſſi, adeoque Parallaxis horizontalis partis alicuius huius erroris particeps eſt. Verum quia diametrum Lunae apparentem ſingulari cura, et die ipſo obſeruationis, et die proxime praecedenti, obſeruauimus, neque minus ad correctionem altitudinis Meridianae Lunae, ex obliquitate cornuum oriundam attendimus, non eſt quod de Parallaxi Lunae horizontali ex obſeruationibus memorato die habitis deducta, aliisque obſeruationibus comprobata, valde diffidamus.

Caeterum, cum in obſeruationibus Cel. de la Caille tempus obſeruatae altitudinis Lunae non eſt notatum, tempus culminationis Lunae, ſiue tranſitus ipſius centri per filum verticale ſextantis, circiter pro tempore, quo altitudo Lunae obſeruata eſt, accipiendum eſſe exiſtimaui. Sin autem in hoc erraſſem, error hic aeque ac ille, qui ex erronea Meridianorum differentia naſcitur, in obſeruationes d. $\frac{12}{23}$ Febr. inſtitutas cadere minime poteſt; ita vt amplius non ſit, quod de Parallaxi Lunae ex obſeruationibus d. $\frac{19}{30}$ Iun. et d. $\frac{12}{23}$ Febr. habitis ſimul concluſa pro accuratiſſima habenda ambigamus.

Quod ad differentiam attinet, quae Parallaxi Lunae horizontali, ex diuersitate figurae telluris nascitur, ex praecedentibus calculis perspicuum est, differentiam inter hypothesin terrae ellipsoidalis, quae mensuris graduum Meridiani circa Aequatorem et circulum Polarem captis innititur, et theoriam, quam circa figuram telluris imaginatus est Cel. Bouguerus, in Parallaxi Lunae horizontali sub Parallelo Petropolitano vix esse notabilem, quippe quae ad 2 tantum minuta secunda assurgat: in Parallaxi autem horizontali Lunae pro Parallelo Promontorii Bonae spei paulo notabiliorem, siquidem differentia ibi sit 4 propemodum minutorum secundorum. Si parallaxes Lunae horizontales Parallelorum propriae ex obseruationibus d. $\frac{12}{23}$ Febr. habitis ad Aequatorem et Polos pro ratione radiorum terrestrium reducantur, prodibit ex hypothesi supra assumta terrae ellipsoidalis Parallaxis horizontalis Lunae sub Aequatore $= 59'.28''.5$, et sub Polis $= 59'.11''.9$, differentia existente $= 16''.6$. Simili modo habebimus in hypothesi figurae telluris Bougueriana Parallaxin Lunae horizontalem ad d. $\frac{12}{23}$ Febr. sub Aequatore $= 59'.32''.5$, sub Polis $= 59'.12''.5$, et differentiam $= 20''.0$. ita vt summatim Parallaxis horizontalis sub Aequatore sit ad Parallaxin horizontalem sub Polis, vt ratio, quae inter axes intercedit, nimirum in hypothesi terrae ellipsoidalis antea adhibita vt 215 ad 214, et in hypothesi Bougueriana vt 179 ad 178.

Si ad aliam adhuc descendamus hypothesin terrae ellipsoidalis particularem, admittendo ex. gr. differentiam axium ex comparatione 1^{mi} gradus latitudinis, cum

cum gradibus diuerfis in Gallia prae aliis fingulari per-fpectoque ftudio dimenfis, deductam quamproxime $= \frac{1}{301}$, prodibit angulus, quem conftituit verticalis linea cum radio ad centrum Telluris ducto fub Parallelo Petropolitani obferuatorii $= 9'. 52''$, et fub Parallelo Promontorii Bonae fpei $= 10'. 31''$: itemque radius ad centrum terrae ductus pro latitudine Petropol. obferuatorii $= 0\ 99753256$, pofito radio fub Aequatore $= 1$, et pro latitudine Promontorii Bonae fpei $= 0.99897932$, adeoque Parallaxis Lunae horizontalis ex obferuationibus d. $\frac{12}{23}$ Febr. fub Parallelo Petropolitano $= 59'. 13''. 4$, et fub Parallelo Promontorii $= 59'. 18''. 5$, quae, fi reducatur ad Aequatorem et Polos, abit fub Aequatore in $59'. 22''. 2$, et fub Polis in $59'\ 10''. 4$. Si terra ponatur Sphaerica, Parallaxis Lunae horizontalis fecundum obferuationes d. $\frac{12}{23}$ Febr. aequatur $59'\ 6''. 7$. Ex quo porro intelligitur, Parallaxin horizontalem, fecundum varias circa figuram Telluris hypothefes, ex fumma Parallaxium altitud. obferuata fupputatam, fub Polis vix vno alteroue minuto fecundo ab inuicem differre, et ad Parallaxin horizontalem, ex figura terrae Sphaericae oriundam, proxime accedere; contra autem, fub Aequatore maximas fubire differentias, adeo, vt Parallaxis Lunae horizontalis fub Aequatore, fecundum hypothefin Bouguerianam, in praefenti cafu $10''. 3$, maior fit ea, quam ex hypothefi terrae ellipfoidalis differentiae axium $= \frac{1}{303}$ innixa conclufimus, et $26''$ fere maior Parallaxi Lunae horizontali terrae Sphaericae debita. Quaenam vero harum hypothefium propius proximeue ad veritatem accedat, hic definire non poffumus, et non

 nifi

nisi difficillime ex obseruationibus Parallaxium lunarium hactenus institutis, definitum iri credimus.

Quamcunque autem hypothesin circa terram Polos versus planescentem adoptamus, Parallaxis Lunae horizontalis sub Parallelo Petropolitano parum exinde immutabitur, adeo vt pro Parallaxi Lunae horizontali vera, sub Parallelo Petropol. d. $\frac{12}{23}$ Febr. 1752 hora circiter 7. pomerid. medium quoddam inter obseruationes d. $\frac{19}{30}$ Ian. et d. $\frac{12}{23}$ Febr. eligendo, assumere possimus $59'.17''$. Parallaxin hanc Lunae horizontalem, si cum Parallaxi respondenti Tabularum Halleianarum comparaueris, inuenies Parallaxin ex memoratis tabulis supputatam parte sui 158^{ua} circiter esse augendam, vt prodeat Parallaxis Lunae horizontalis sub Parallelo Petropolitano praecedentibus obseruationibus conueniens, ita vt, cum in obseruatione d. $\frac{12}{23}$ Febr. Luna haud procul a Perigaeo suo et a 1^{ma} quadratura cum Sole distabat, Parallaxis horizontalis Lunae Perigaeae, in quadraturis cum Sole constitutae, ad minimam orbis lunaris excentricitatem, ex praecedentibus obseruationibus sub Parallelo Petropolitano fit $= 59'.7''\frac{1}{2}$, pro vera habenda, vsque dum ex obseruationibus magis accommodis, in Insula Oesilia accuratius propter eximiam coeli serenitatem habitis, iisque respondentibus, rectius definiatur.

Posita itaque interea Parallaxi Lunae horizontali sub Parallelo Petropolitano d. $\frac{12}{23}$ Febr. hora 7. circiter vespertina $= 59'.17''$, et diametro Lunae horizontali ex obseruatione circa idem tempus instituta deducta $= 32'.43''$, colligitur porro Parallaxin Lunae horizontalem

talem, ſub Parallelo Petropolitano eſſe ad eius diametrum horizontalem in ratione 2-0 ad 149, neglecta correctione illa paruula, quae a luce erratica, qua circumfuſa apparent corpora lucida in fundo opaco poſita, proficiſcitur, et quae in Tubo 8 pedum, quo ad diametrum Lunae dimetiendam vſus ſum, 8 vel 10 min. ſecunda, pro diametro lunari adaequare poſſet, quibus diameter Lunae obſeruata, adeoque et eius diameter horizontalis, erit diminuenda. Dilatationem hanc diametri lunaris verae in tubo quadrantis noſtri 3 pedum radio, cuius beneficio praecedentes obſeruationes peregi, multo maiorem eſſe, ob ſingularem conſpicilli huius tubulati praeſtantiam, quippe quod obiecta diſtincte adeo exhibeat, vt nihil ſupra, valde dubito.

Haec fere habui, quae in praeſenti de Parallaxi terrae noſtrae ſatellitis dicerem, addens quod Parallaxis Lunae horizontalis Halleiana ex hiſce obſeruationibus parte ſui 168^va circiter aucta, egregie ſatis reſpondet meditationibus, quas in peculiari diſſertatione de erroribus Tabularum lunarium, ex Eclipſibus Solis, praecipue iis, quas An. 1748 et 50 obſeruaui, definiendis cum eruditis communicaui, (*) oſtendens, Parallaxin Lunae horizontalem Halleianam, praeter nonnulla alia harum tabularum elementa corrigenda, ex obſeruationibus iam memoratarum Eclipſium, incrementum capere debere parti ſui 100^mae ad ſummum aequale.

OBSER-

(*) Comm. Tom. V. p. 431.

OBSERVATIO
ECLIPSEOS LVNARIS PARTIALIS QVAE CONTIGIT D. $\frac{16}{27}$ MARTII 1755. HABITA IN INSVLA OESILIA

AB A. N. GRISCHOW.

Quamuis vtilitas, quae ex obſeruationibus Eclipſium Lunarium, ſiue in theoriam Lunae corrigendam, ſiue in Tabulas Lunares accuratiores exhibendas redundat, noſtris temporibus permagni non fiat, eiusmodi tamen obſeruationes determinandis longitudinibus terreſtribus, vbi aliae obſeruationes melioris notae deſunt, egregie inſeruire Aſtronomis notum eſt. Hunc itaque in finem huius Eclipſeos obſeruationem, quantum in me poſitum fuit, accuratiſſime in Inſula Oeſilia peragere conſtitueram, praecipue cum coeli fauor per multos dies antecedentes, ad Horologium Aſtronomicum per altitudines Solis reſpondentes corrigendum, adeſſet. Ad obſeruationem autem ipſam inſtituendam adhibui Teleſcopium Gregorianum 2. pedum exquiſitiſſimum, per quod ſequentes obſeruationes, fauente coelo, habere mihi contigit.

Temp.

Temp. Pend.	Temp. appar.	
$11^h.48'.20''$	$12^h.42'.33''$	Initium Eclipseos, siue ingressus Lunae in vmbram Telluris.
58. 3	52. 17	Vmbra ad Grimaldum.
12. 0. 47	55. 1	Grimaldus totus in vmbra.
6. 41	13. 0. 55	Tycho incipit immergi.
8. 18	2. 32	Tycho totus in vmbram immersus.
21. 53	16. 8	Vmbra ad Keplerum.
32. 49	27. 4	Copernicus immergi incipit.
37. 9	31. 24	Copernicus totus in vmbra.

Postea coelum maiori ex parte nubibus turbidis ex Occidente aduectis inuoluebatur.

$13^h.8'.0$	$14^h.2'.18''$	Vmbra vix ad Manilium pertingere, per nubes videbatur.

Coelo rursum sereno.

$13^h.26'.7''$	$14^h.20'.25''$	Grimaldus totus ex vmbra egressus.
14. 4. 55	59. 15	Tycho apparere incipit, momento quasi temporis.
6. 16	15. 0. 36	Tycho totus conspicuus.
27. 5 vel 15	21. 26 vel 36	Finis Eclipseos, siue egressus Lunae ex vmbra terrestri.

Pars disci Lunaris eclipsata per totum Eclipseos tempus nigricantis erat coloris, adeo vt partis eclipsatae vestigium relinqueretur nullum. Vmbrae peripheria visibilis perfecte circularis non erat, sed inaequaliter sinuabatur.

Paulo

Paulo post Eclipseos finem coelum vndique nubibus turbidis obtegebatur.

Cum dies iam aliquot ante hanc Eclipsin instrumenta Astronomica collecta ex obseruatorio Arensburgensi essent sublata, omniaque ad discessum Petropolin parata, obseruationem huius Eclipseos in praedio quodam Insulae Oesiliae, Koeljal dicto, habere coactus fui. Nihil tamen praetermisi, quod ad accurandam huius Eclipsis obseruationem pertineret. Distat autem secundum operationes Geographicas in Insula Oesilia peractas praedium Koeljal ab obseruatorio Arensburgensi in Longitudinem $53''\frac{1}{2}$ temp. Orientem versus, in Latitudinem vero $5'.48''$. ad Boream versus, ita vt obseruatio supra relata nullo negotio ad Meridianum obseruatorii Arensburgensis reduci queat.

OBSER-

OBSERVATIO ECCLIPSEOS LVNARIS PETROPOLI IN OBSERVATORIO ASTRONOMICO MARTII 17. MANE TEMPORE CIVILI ANNO 1755. ST. VET. INSTITVTA

A

N. POPOWIO et A. KRASILNIKOWIO.

	Tempore penduli	Tempore vero.	
Vmbra diluta in margine diſci ☽ae apparet	$1^h\ 1'\ 30''$	$1^h\ 6'\ 49''\frac{1}{2}$	
Vmbra denſior - - -	1 7 0	1 12 $19\frac{1}{2}$	
Initium Eclipſeos adeſſe putauimus	1 8 0	1 13 $19\frac{1}{2}$	
Initium vere factum vidimus - -	1 9 40	1 14 $59\frac{1}{2}$	
Vmbra attingit mare humorum -	1, 15, 33	1 20 $52\frac{1}{2}$	obſ. bona
- - attingit Grimaldum - -	1 16 33	1 21 $52\frac{1}{2}$	ſubdubia
- - tegit Gaſſendum - -	1 19 30	1 24 $49\frac{1}{2}$	dubia
- - attingit Tychonem - -	1 25 40	1 30 59	obſ. bona
Totus Tycho in vmbra - -	1 27 0	1 32 19	ſed immerſio totalis dubia ob nubes tenues
Vmbra attingit Copernicum - -	1 51 30	1 56 48	bona
- tegit Copernicum - -	1 56 45	2 2 3	bona
- - attingit mare nectaris - -	1 57 58	2 3 16	bona
- - tegit Dionyſium - -	2 9 6	2 14 24	bona
Totus Copernicus extra vmbram -	2 40 56	2 46 13	bona

	Tempore penduli	Tempore vero	
Apparere incipit Grimaldus -	$2^h 41' 35''$	$2^h 46' 52''$	bona
Totus Grimaldus extra vmbram	2 45 26	2 50 43	bona
Emerſus eſt totus Dionyſius -	3 0 22	3 5 $38\frac{1}{2}$	bona
Apparere incipit Tycho - -	3 24 0	3 29 $15\frac{1}{2}$	ſubdubia
Tycho totus extra vmbram	3 25 20	3 30 $35\frac{1}{2}$	obſ. bona
Finis Eclipſeos factus eſt - -	3 44 15	3 49 30	bona
Penumbra etiam reliquit Lunam eademque priſtino ſplendori eſt reſtituta - - -	3 49 0	3 54 14.	

Coelum durante Eclipſi tranquillum et maxima ex parte ſerenum erat, licet nubes ſubinde circa Lunam ortae turbarunt interdum obſeruationes, quarum maxime dubias hic omittere potius, quam in ſeriem referre placuit. Tempus in horologio numerabant ſtudioſi per vices. *Obſeruatio facta eſt tubis diuerſis, altero* $6\frac{1}{2}$, *altero* 13 pedum; ſed in momentis obſeruationum bene vterque, ego ſc. et Kraſilnikowius, conuenimus, pleraeque autem obſeruationum inſtitutae ſunt tubis eiusdem longitudinis $6\frac{1}{2}$ pedum ſatis bonae notae. Vmbra Terreſtris bene fuit terminata et denſa, adeo vt nullae maculae, quamuis lucidiſſimae, per eam conſpici potuerint.

MER-

MERCVRIVS IN SOLE VISVS LIPSIAE D. 6. MAII ST. NOV. ANNO 1753 HORIS MATVTINIS TEMPORE CIVILI

A

GODOFREDO HEINSIO.

Congreſſus hic ☿ii cum Sole, quippe circa nodum deſcendentem, intra Solis diſcum haerentem, celebratus, cum circumſtantiarum pondere valde ſe commendet; in eo deſcribendo nonnihil prolixus ero, vt cuique copia relinquatur, obſeruationes denuo ad examen reuocandi, et, ſi e re viſum fuerit conditiones introducendi, quas in hac diſquiſitione forſan contemnendas eſſe putaui. Hunc in finem generaliter primum obſeruationis circumſtantias enumerare, methodum obſeruandi deinde, cum obſeruationibus poſitionem ♀ii in diſco Solis concernentibus, exhibere; et tandem concluſiones inde deductas, aliaque proferre, licebit.

Mercurium in Sole oriente videndi copiam quidem faciebat locus ad obſeruationem hanc rite expediendam electus; aſt coeli facies non aeque annuebat. Circa tempus enim Solis ortus die 6. Maii totum coelum nubibus obductum deprehendebatur, quae quidem interruptae videbantur, exiguam tamen ſpem, Solem in vicinia horizontis conſpiciendi, relinquebant. Spes reſtituta fuit, dum circa hor. 5. nubes diſſipari incipiebant; adſpectus tamen primus Solis non niſi hor. 5. 32′.

ideoque hora integra post Solis ortum, concedebatur. Mercurium tunc per trientem diametri Solis iam intra discum eius progressum diiudicaui. Ab eo tempore obseruationibus pro determinanda ☿ii in disco Solis positione, infra describendis, incubui, quantum quidem copiosae nubes, vento forti boreali agitatae, permittebant, inceptas operationes subinde et praesertim versus tempus egressus ☿ii e Sole interrumpentes. Inde etiam factum est, vt momentum valde desideratum, egressus nempe ☿ii e Sole, obseruari non potuerit. Circa semissem enim horae vndecimae Sol nubibus spissis inuolutus, non nisi hor. 11. 16′. in conspectum rediit; quo autem tempore Mercurius discum Solis iam deseruerat.

Discus ☿ii instar maculae nigerrimae per tubos astronomicos 6, 9, 11 pedum, et ab aliis, et a me, visus est circulariter rotundus, beneque terminatus; vapores tamen, aut nubes tenues, vel agitatio tubi a vento, adspectum hunc subinde turbarunt. Telescopium Gregorianum sub apparatu, quo obiecta secundum diametrum 52 vicibus auget, discum ☿ii plerumque tremulum, nec satis terminatum, repraesentabat, exceptis quibusdam momentis, quibus iste etiam circulariter rotundus, nigerrimus et bene terminatus apparuit. Sed huius Tubi ea est indoles in contemplationibus Solaribus, vt, coelo etiam sudo, maculae solares raro per aliquot momenta distinctae videantur, sed plerumque tremulae, siquidem calor ingens, in foco speculi maioris excitatus, aërem ibi quasi ebullientem et Solis imaginem tremulam efficit. Annulum lucidum circa ☿ii limbum

alias,

alias visum per Tubos memoratos, deprehendere non potui.

Macula haerebat in sole ad *m* (figurae 1. situ erecto declinatae), cuius positionem obseru. 6. manifestavit. Est nempe distantia centri eius a centro Solis in diurno huius C μ orientem versus capta = 205, et distantia centri maculae boream versus a diurno centri Solis seu *m*μ = 60 eiusmodi partibus, quarum diameter Solis continet 531. hor. 7. 40′. cum Sol e nubibus prorumperet, omnes, qui aderant, nouum phaenomenum in vicinia Mercurii ad M tunc existentis, antea non visum, significabant. Macula nempe ad *n* apparebat nigerrima, circulariter et distincte terminata, ad instar ☿ii minoris, cuius diameter dimidiam ipsius Mercurii circiter aequabat diametrum. Mercurii Satellitem vidisse facile sibi quis persuadere potuisset. Positio eius ad *n* respectu ☿ii M et fili horizontalis HR oculorum iudicio aestimata fuit. Cum hor. 8. 42′ Mercurius in *q* haereret, ex situ ipsius *n* respectu *q* et *m* diiudicare licuit, maculam *n* in eodem disci solaris loco perstitisse. Exactiorem huius maculae positionem explorare alia negotia non permiserunt. Caeterum, cur macula ante visa non fuerit, oculis in Mercurium intentis condonare licet; forsan et frequens coeli impuritas adspectum non nisi in vicinia Mercurii ad M positi concessit. Tab. XV. Fig. 1.

Quod ad correctionem temporis horologii oscillatorii attinet, non obstante per tres dies, nempe d. 5. 6. et 7. Maii, tempestatis inconstantia, ex respondentibus Solis altitudinibus die 5. post, et die 6. ante meridiem captis, optime colligere licuit mediam noctem inter d. 5. et 6. Maii $12^b. 4' 24''$. horologii, cui momento si pro obseruationum interuallo 15 horarum et declinatione Solis boreali $16°. 30'$. sub eleuatione Poli Lipsiensi applicetur correctio $= 31''$ additiua, calculo eruta, prodit *media nox vera* $12^b 4'. 55''$. horologii. Ex aliis autem Solis altitudinibus fere respondentibus die 5. ante, et 6. post meridiem captis innotuit, horologium singulis horis per vnum secundum temporis retardasse, respectu temporis veri solaris.

Cum de exacta positionis, quam Mercurius diuerso tempore in disco solis obtinere solet, determinatione praesertim sollicitus essem, tubum astronomicum ita parandum curaui, vt non solum distinctae et amplae Solis repraesentationi locus fieret, verum etiam de euitando in vicinia horizontis refractionis effectu prospiceretur. Vt igitur de hoc instrumento, cuius vsum in futuris etiam obseruationibus eximium praeuideo, atque de methodo obseruandi eo melius constet; e re esse videtur, eius descriptionem tradere, in qua semper mensura Parisina duodecimalis subintelligi debet.

Tubus longitudine paulo superat sex pedes. Distantia lentis obiectiuae a lente oculari $= 5$ ped. 11. dig. 8. lin. vel $= 860$. lin. tunc scilicet, quando Solem ope vitri atro colore tincti distinctissime conspicere licet; cum e contrario haec distantia 1. dig. 2 lin. breuior effici debeat, si Saturnum cum annulo distinctissime contemplari velis. Distantia focalis lentis ocularis pro obiectis longinquis $= 2$. dig. 10. lin. vel $= 34$. lin. Est ergo distantia focalis lentis obiectiuae pro Sole $= 826$. lin. et ratio, secundum quam tubus iste

iſte obiecta quoad diametrum auget $=34:826$, vel $=1:24\frac{1}{3}$ proxime. Diameter aperturae pro lente obiectiua $=9\frac{1}{4}$ lin.; et diameter campi repraeſentationis conficit 54. minuta prima circuli maximi. Tubi pars mobilis AB, quae lentem ocularem gerit, intus continet alium Tubum reticulo inſtructum, qui in cauitate iſtius commode quidem, aſt arcte, vna cum reticulo poteſt circumuolui. Reticulum ex quatuor filis argenteis tenuiſſimis ad angulos ſemirectos verſus ſe inuicem probe inclinatis conſtat. Tubo AB extra ad CD cochleis adſtrictus eſt annulus craſſus ex orichalco cum axe firmo probe tornato, qui vtrinque ad E et F in directum prominet, et ſi intra Tubum productus fingatur, diametrum quaſi reticuli conſtituit. Axi huic libere appendi poteſt libella EGHF, huius conſtructionis: Laminae orichalceae EG, FH, fiſſuris ad I et K in partes ſibi oppoſitas inſtructae, vt aditus axi memorato pateat, tertiae laminae GH ad angulos rectos firmiter inſiſtunt, quae, ſi libella rite ſuper axe diſpoſita ſit, ſitum proxime horizontalem acquirit. Ex lamina GH ad H eminet iunctura, circa quam alia lamina *mn*, capſulam cylindriformem *rs* ſibi affixam gerens, ope cochleae ad G non nihil eleuari, vel deprimi poteſt. Capſulae iſti *rs* incluſus eſt tubulus vitreus ſpiritu vini, more conſueto, vſque ad bullam aëream reſiduam *b* repletus et vtrinque clauſus. Ope libellae ſic paratae ordinationem reticuli d. 5. Maii ſequentem in modum ſuſcepi. Tubi ſuper fulcris firmiter repoſiti axem EF ope libellae, mutato per vices, vt fieri debet, ſuſpenſionis ordine, in ſitum horizontalem

Tab. XV. Fig. 2.

talem

talem non solum redegi, verum etiam ope cochleae ad G effeci, vt in isto axis situ bulla aërea ad *b* quieta medium tubuli vitrei occuparet. Hoc modo in quauis alia libellae appensione e situ bullae ad *b* criterium dabatur situs horizontalis axeos EF. Tigillum dein e longinquo, ope alius libellae, secundum suam longitudinem, in situm horizontalem dispolui, ad quod directo tubo, factoque axe EF horizontali, examen instituti, an filum aliquod reticuli in longitudinem tigilli incideret, et cum ea congrueret. In casu contrario tubum cum reticulo, tubo AB intus insertum, tamdiu conuerti, dum congruentia fili alicuius cum longitudine tigilli acquireretur; quo tandem factum est, vt bulla aërea ad *b* haerente, filum istud semper in situm horizontalem rediret. Hoc filum in sequentibus *horizontale*, quod autem ad illud normale est, *verticale* vocabitur. Hoc per (|), istud per (—); fila autem obliqua per (/ \) pro situ eorum signabo.

Tab. XV. Fig. 3. Sub hoc apparatu die 6. Maii appulsus limbi Solis praecedentis *p* et sequentis *e* ad verticale; superioris *s* et, si fieri potuit, inferioris *i* ad horizontale; centri denique ☿ii ad fila reticuli, singulari tamen attentione ad verticale et horizontale, tubo immoto, annotaui, vt sequuntur. Figurae 3. situs est inuersus pro apparentia tubi astronomici.

Obseru.

Obferuatio 1.

Temp. horologii

$5^h.49'.58''$.	p.	ad	|
50. 9.	☿	ad	—
51. 6½	☿	ad	\
— 41. 5		ad	—
— 45½	☿	ad	|
52. 41½	*c*	ad	|

nubes poftea.

Attentus ad *Solem* e nubibus prorumpentem libellam appendere neglexeram; filum tamen axi EF parallelum, fenfuum iudicio, proxime horizontaliter directum erat. In fequentibus obferuationibus libella femper adhibita et rite difpofita fuit.

Obferu. 2.

$6^h.11'.46''$.	p	ad	|
12. 35½.	☿	ad	—
13. 6½.	☿	ad	\
13. 31.	☿	ad	|
— 56½. 5		ad	—
14 41½.	*c*	ad	|

Obferu. 3.

$6^h.18'.36''$.	*i*	ad	— dub. ad ½''
19. 5.	p	ad	|
20. 36¾.	☿	ad	—
20. 48¼.	☿	ad	|
21. 58½. 5		ad	—
22. 1	*c*	ad	|

Obferu. 4.

$6^h.25'.11''$.	*i*	ad	—
25. 23½.	p.	ad	|
27. 4.	☿.	ad	|
27. 11½.	☿	ad	—
28 19.	*c*	ad	|
28. 33½ 5		ad	—

Obferu. 5.

$7^h.\ 7'.56\tfrac{1}{2}''$.	p.	ad	|
8. 38.	☿.	ad	—
9. 1½.	☿.	ad	\
9. 22½.	☿	ad	|
10. 3½. 5		ad	—
10. 52½.	*c*	ad	|

Obseru. 6.

$7^h.17'.2\frac{1}{2}''$. p ad |
— 24 ☿ ad —
— $44\frac{1}{2}$ m ad —
— $56\frac{3}{4}$ ☿ ad /
18. 25. ☿ ad |
— $50\frac{1}{4}$. 5 ad —
19. 34. m ad |
19. $59\frac{1}{2}$ c ad |

Obseru. 7.

$9^h.1'.38''$. p ad |
2. 8. ☿ ad —
— $15\frac{1}{2}$. ☿ ad \
— 53. ☿ ad \ dub. ad 1''
3. $52\frac{1}{4}$ 5 ad —
4. $22\frac{1}{2}$ c ad |

Positio Tubi non satis firma, finita obseruatione, deprehendebatur.

m est macula supra descripta.

Obseru. 8.

$9^h.40'.41\frac{1}{2}''$ p. ad |
— 53. ☿ ad — dub. ad $\frac{1}{2}''$
41. 3. ☿ ad \
— $9\frac{1}{2}$. ☿ ad |
— 36. ☿ ad / dub. valde
42. 45. 5 ad —
43. 18. c ad |

Obseru. 9.

$9^h.45'.15\frac{1}{2}''$. p. ad |
— 31. ☿ ad —
— $38\frac{1}{4}$ ☿ ad \
— 56. ☿ ad / dub.
47. $25\frac{1}{2}$. 5 ad —
47. $50\frac{1}{2}$. c ad |

nubes deinde copiosae.

In obseru. 7. 8. 9. Mercurius valde oblique incidit in filum /.

Obseru. 10.

$10^h.24'.36''$. p. ad |
— $50\frac{1}{2}$. ☿ ad |
— 58. ☿ ad \
25. $15\frac{1}{2}$. ☿ ad —
27. $2\frac{1}{2}$. c ad |
27. $25\frac{1}{2}$. 5 ad —

Ex

Ex his obseruationibus determinatio positionis centri Mercurii in disco Solis sequentem in modum patet. Referant FB verticale, FG horizontale filum, existente ad F recto; *psρs* discum Solis vtrumque filum ad *p* vel E et *s* vel I tangentem; C centrum eius; CE in E ad FB, CI in I ad FG normalem, GCB diurnum centri Solis. Centrum Mercurii sit in ☿, ex quo versus diurnum GB ducantur ☿V ad FB, ☿H ad FG parallelae. Situs figurae 4. est inuersus pro apparentia Tubi astronomici. His factis patet, radium disci CA, vel CE, exponere semimoram disci Solis per horarium, seu per filum, quod in A ad diurnum GB normale concipi debet; CB exhibere semimoram disci Solis per verticale, CG per horizontale filum; BV repraesentare interuallum inter appulsus limbi praecedentis *p* et ☿ii ad verticale, GH interuallum inter appulsus limbi superioris *s* et ☿ii ad horizontale filum. Si igitur detur CA, vel CE; in quadrato CEFI, dabitur positio centri disci C; et cum habeatur CB ex *p* ad | et *ρ* ad |, dabitur in Δlo CEB ad E rectangulo recta CB, et inde diurnus centri GCB positione. Ex *p* ad | et ☿ ad | habetur BV; GH vero ex *s* ad —, et ☿ ad —; quare actis per V et H respectiue parallelis ad FB, FG, dabitur locus Mercurii in ☿, qui per ☿*d* ad GB normalem ad diurnum centri Solis GB referri potest, ita vt C*d* sit distantia centri ☿ii a centro Solis in isto diurno; ☿*d* autem distantia centri ☿ii ab eodem diurno. Tab XV. Fig. 4.

Peracta sic esset constructio loci ☿ii in disco Solis, dummodo de mora disci Solis per horarium, cuius semissis

missis per CA, CE vel CI exhibetur, constaret. Quamuis autem istam ex Tabulis depromere liceret, consultius tamen erit, ex obseruationibus ipsis eam deducere, quorsum morae Solis per verticale et horizontale filum in obseru. 3. et praesertim 4. notatae faciunt. Scilicet ob sin. tot: sin. EBC = BC: EC et sin. tot : sin. IGC (cos. EBC) = CG : CI (EC);
Tab. XV. fit. sin. EBC × BC = sin. tot. × EC = cos. EBC × CG; quare
Fig. 5. BC : CG = cos. EBC: sin. EBC. Iunctis itaque BC (mora per verticale), CG (mora per horizontale) ad angulum rectum, ductaque BG, prodibit GBC inclinatio diurni ad filum verticale; et si BC in B*c* transferatur, et per *c* ad GC parallela *ce* agatur, repraesentabit *ce* moram disci Solis per horarium, quam hoc modo $= \frac{531}{4}$ secund. temporis, vel $2'.12\frac{3}{4}''$. inueni. Inde et ex declinatione Solis boreali $16°.35'$. datur diameter Solis apparens in partibus circuli maximi $= 31'.48''$.

In constructione loci ☿ii secundum schema figurae 4, diametrum disci Solaris semper in 531 partes aequales diuisam suppono, quae in sequentibus *partes scalae* dicuntur, re vera autem quartas partes secundorum temporis referunt; in quibus partibus deinceps reliquae mensurae exhibentur. Hoc pacto radius CA, CE, vel CI conficit $265\frac{1}{2}$; et $31'.48''$. circuli maximi respondent 531 partibus scalae.

Cum in obseru. 7 et 9 appulsus ☿ ad | immediate non dentur, eos ex cognita diurni positione et reliquis appulsibus collegi, et quidem in obseru. 7. $9^h.2'.20\frac{1}{2}''$, in obseru. 9. $9^h.45'.42''$. In obseru. 10. autem

autem cum Sol iam ad meridianum appropinquaret, et inde error ⅓ secundi temporis in mora Solis per filum verticale, si forsan daretur, eximium errorem in constructione positionis diurni producere valeret, angulum diurni cum verticali ($=65°. 51'$.) et moram istam ($=291$. part. scal.) calculo indagare et adhibere placuit.

Methodus ☿ii positionem definiendi supra tradita supponit, Mercurium durante transitu per fila reticuli locum suum in disco Solis non mutasse, quod cum rigore factum non sit, huius rei rationem habere oportet. Manifestum autem est, quod, si Mercurius eodem instanti, ad vtrumque filum, horizontale scilicet et verticale, appulisset, vel, quod ad idem redit, filorum intersectionem semper traiecisset, nulla correctione ob mutatum ☿ii locum opus sit, sed ad ipsum transitus per filorum intersectionem momentum locus ☿ii referri debeat. Omne igitur discrimen, quod ex mutatione loci emergere potest, recidit in interuallum temporis inter appulsus ☿ii ad horizontale et verticale filum; quod, si exiguum sit, errorem sensibilem efficere nequit. Pone enim interuallum istud aequale vni minuto primo temporis, et Mercurium, numero rotundo, intra 8. horas diametrum Solis, seu 531. partes scalae, peragrare; variatio loci circiter $1\frac{1}{9}$ part. scalae conficiet, seu errorem in obseruatione $=\frac{1}{4}$ secundi temporis producet, qui raro in eius modi obseruationibus euitari potest.

His ita constitutis in obseruationibus memoratis id efficere allaboraui, vt, quantum fieri potuit, inter-

 val-

vallum inter appulsus ☿ ad — et | esset valde exiguum; inde correctionem ob mutatum ☿ii locum negligere, et medium interualli istius momentum pro eo sumere licuit, ad quod locus ☿ii constructus alligetur, *momentum obseruationis* deinceps vocandum. Tabula sequens rem distincte explicabit:

	Interuallum inter appulsus ☿ ad — et ad |	Momentum Obseruationis secundum tempus horologii	Tempore vero Solari.
In obseru.	1. 1′. 36½″.	5^h. 50′. 57″.	5^h. 56′. 8″.
	2. 0. 55½.	6. 13. 3.	6. 8 14.
	3. 0 11½.	6. 20. 42.	6. 15 53.
	4 0. 7½.	6. 27. 8.	6. 22. 19.
	5. 0. 44½.	7. 9. 0.	7. 4 12.
	6. 1. 1.	7. 17. 54.	7. 13. 6.
	7. 0. 12½.	9. 2. 14.	8. 57. 27.
	8. 0. 16½.	9. 41. 1.	9. 36. 16.
	9 0. 10½.	9. 45 36.	9 40. 51.
	10. 0. 25.	10. 25. 3.	10. 20. 18.

Simili ratiocinio id, quod ex differentia parallaxium Solis et Mercurii in computum trahi potuisset, omittendum putaui.

Tab.XVI. Fig. 1. Praesto nunc erat constructio schematis quod discum Solis cum diurno centri DCV et semita ☿ii visa AIE situ erecto exhibet, in qua numeri adscripti loca ☿ii pro obseruationum numeris respondentibus denotant.

Deprehensa autem fuit in partibus scalae.

Distan-

		Diſtantia centri ☿ii a centro ☉lis in diurno centri ☉lis.		Diſtantia centri ☿ii a diurno centri Solis.	
In obſ.	1	98	orientem verſus	9	boream verſus
	2	$73\frac{1}{2}$	- - - -	$5\frac{1}{2}$	auſtrum verſ.
	3	66	- - - -	8	- - - -
	4	61	- - - -	11	- - - -
	5	21	- - - -	$32\frac{1}{4}$	- - - -
	6	$8\frac{1}{2}$	- - - -	37	- - - -
	7	$94\frac{1}{2}$	occidentem verſus	89	- - - -
	8	130	- - - -	$111\frac{1}{2}$	- - - -
	9	$137\frac{1}{2}$	- - - -	114	- - - -
	10	173	- - - -	$133\frac{1}{2}$	- - - -

Sic quidem loca ☿ii referuntur ad diurnum conſtantem, qui tamen reuera ſitum ſuum reſpectu eclipticae durante tranſitu ☿ii per ſolem mutauit. Cum autem variatio inclinationis diurni ad Eclipticam ab obſeru. 1 vsque ad 10 nondum $3\frac{1}{4}$ minuta prima conficiat, quae vtique in ſchemate ſub ſenſus non cadit; praeterea vero error adhuc minuatur, ſi angulus Eclipticae cum diurno pro tempore coniunctionis centri ☉ et ☿ accipiatur, hunc $= 16°. 51\frac{1}{4}'. =$ NÇD, quo ecliptica NC orientem verſus ſuper diurno CD boream verſus eleuatur, adhibere placuit.

Ex conſtructo ſchemate innotuit, ang. VDE vel CDI $= 27°\ 15'$., quem ſemita ☿ii cum diurno centri Solis format, nec non DC, diſtantia verticis huius anguli D a centro diſci C $= 84$. part. ſcalae. Hinc, exiſtente ad N nodo ☿ii deſcendente, in Δlo NCD inuenire licuit *angulum eclipticae cum ſemita ☿ii viſa*

CND

CND = CDI − NCD = 10°. 23$\frac{3}{4}$, et NC *diſtantiam nodi a centro diſci* = 213, 15 part. ſcalae vel = 12′. 46″. circuli maximi. Angulum CND ponunt Tabulae Halleianae = 10°. 24′. 16″. Caſſinianae = 10°. 23′. 44″; NC vero Halleianae = 12′. 58″$\frac{4}{5}$.

E centro diſci C ad eclipticam NC excitata ſit perpendicularis CI, quae locum centri ☿ii in I, tempore coniunctionis centrorum ☉ et ☿ reſpectu eclipticae monſtrat, et latitudinem ☿ii auſtralem in ☌ deſignat. Erit ergo in △lo DCI, ang. DCI (= complemento ipſius NCD ad rectum) = 73°. 8′$\frac{3}{4}$; et inde (ob CDI = 27°. 15′.) DIC = 79° 36′$\frac{1}{4}$. Quapropter ex data DC dabitur *latitudo auſtr*. ☿ *in* ☌ nempe CI = 39, 13. part. ſcalae, vel = 2′. 20″$\frac{1}{2}$ circuli maximi. Hanc Tabulae Halleianae = 2′. 22″$\frac{3}{4}$, Caſſinianae tantum = 0′. 59″. aſſignant.

Ex C in ſemitam ☿ii viſam NE demiſſa ſit perpendicularis CM, vt CM ſit *diſtantia minima centrorum*, et in M locus ☿ii in momento minimae centrorum diſtantiae. In △lo CMI ad M rectangulo ex datis DIC, vel MIC, et IC, dabitur CM = 38,461. part. ſcalae, vel = 2′. 18″$\frac{4}{5}$ circ. maximi; et IM = 7, 0561. part. ſcalae. Diſtantiam centrorum minimam faciunt Tabulae Halleianae = 2′. 20″$\frac{13}{20}$, Caſſinianae = 0′. 57″$\frac{9}{10}$.

Pro inueniendo motu horario ☿ii in ſemita viſa, ex constructo ſchemate diſtantiam cepi locorum ☿ii in obſ. 1 et 10 = 305. part ſcalae, cui interuallum temporis = 4^h. 34′. 10″. reſpondet Inde acquiritur motus horarius = 66$\frac{3}{4}$ part. ſcalae vel = 3′. 59″$\frac{1}{4}$ circuli

culi maximi, quo cum Tabulae Cassini et Halleii optime consentiunt. Scala sic parata fuit, cuius ope in partibus temporis distantiam singulorum ☿ii locorum a loco eius I in ☌ explorare, et, facta comparatione cum momentis obseruationum, *tempus coniunctionis* detegere licuit, vt Tabula docet.

		Distantia loci ☌ ☿ ⊙ in tempore a loco ☿ in		Momentum ☌ centrorum ☿ et ⊙ in Ecliptica tempore vero
Obseruat.	1	- - $1^h.27''.30''$	orientem versus	- - $7^h.13'.38''$.
	2	- - 1. 2. 15		- - - 10. 29
	3	- - 0. 56. 15		- - - 12. 8
	4	- - 0. 50. 20		- - - 12. 39
	5	- - 0. 10. 0		- - - 14. 12
	6	- - 0. 2. 0	occid versus	- - - 11. 6
	7	- - 1. 45. 0		- - - 12. 27
	8	- - 2. 23. 45		- - - 12. 31
	9	- - 2. 30. 30		- - - 10. 21
	10	- - 3. 7. 0		- - - 13. 18
				Medium $7^h.12'.17''$.

Tabulae Cassini tempus ☌ verum ponunt Parisiis $= 2^h.35'.22''$. quod Lipsiae erit $= 3^h.15'.22''$, vnde emergit insignis differentia inter calculum et obseruationem $= 3^h.56'.55''$. enormis autem prodit discrepantia, si calculum secundum Tabulas de la Hire cum obseruatione compares. Iste scilicet Lipsiae Tempus ☌ circiter ponit die 5 Maii post merid. $11^h.30'$, quod $7^h.42'$ tempus ☌ ex obseruatione praecedit.

Si ope horarii recta IM supra inuenta conuertatur in tempus, habetur tempus per $IM = 6'.20''$; et inde *Momentum minimae centrorum distantiae* $= 7^b.5'.57''$. Lipsiae tempore vero.

Tabulae Cassinianae istud assignant, sub Meridiano Parisiensi $= 2^b.32'\ 44''$. temp. vero, Halleianae autem sub Merid. Grenouicensi $= 6^b.47'.12''$. temp. vero, quod Lipsiae erit $= 7^b.36'.32''$. ita vt calculum ex Tab. Halleii obseruatio anticipauerit $0^b\ 30'.35''$.

Tabulae igitur Halleianae nouo exemplo praestantiam suam in motibus ☿ii praedicendis commendant, excepto tempore, in quo limae adhuc sunt subiiciendae. Mirum autem non est, tantas Tabularum aberrationes hic locum habere, cum iis vnica tantum obseruatione Transitus ☿ii circa nodum descendentem, ea scilicet *Heuelii* an. 1661, vti licuerit. Caeterum notandum, calculos secundum Tabulas *Cassini* et *Halleii*, ad quos prouocaui, peractos esse a Cel. *Baermanno*, Mathem. Prof. Wittenbergensi, et quidem pro obseruatore in centro telluris posito.

Tandem ex supra inuenta CM, et radio disci CA in Δlo ACM ad M rectangulo, rectam AM et ope horarii semimoram transitus $= 3^b.56'.8''$. definire licuit, quam Tabulae Halleianae $= 3^b.56'.19''$. Cassinianae $= 3^b.58'.4''$. pronunciant. Hoc modo ex deducto distantiae centrorum minimae momento colligitur Egressus centri ☿ii Lipsiae tempore vero $11^b.2'.5''$.

Peruenerunt ad manus nonnullae huius Transitus ☿ii obseruationes aliis in locis factae, quas transcribere expediet. Scilicet

Temp.

	Temp. vero.		
Londini	$10^{h}. 11'. 52''$.	Exitus centri.	Obseruator Fird.
Neapoli	11. 5. 51.	Contactus interior - - -	Cartani
	— 9. 5.	- - - exterior	
	11. 7. 28.	Exitus centri.	
Laxenburgi	11. 16. —	Exitus centri - - - -	Franz.
Bononiae	10. 54. 41.	Contactus interior	tub. 8. ped.
	— 57. 23.	- - - exterior	
	10. 56. 2.	Exitus centri.	
	10. 54. 45.	Contactus interior	tub. 11. ped.
	— 57. 23.	- - - exterior.	
	10. 56. 4.	Exitus centri.	
Wratislauiae	11. 26. 0.	Contactus interior	
	— 28. 30.	- - - exterior	
	11. 27. 15.	Exitus centri.	
Gottingae	6. 56. 20.	Distant. minima centror. $= 2'. 27''$.	
	7. 3. 20.	Coniunct. in long. cum lat. $= 2'. 30''$.	

Facta comparatione cum respondentibus momentis ex meis deductionibus inuenitur Meridianorum differentia Lipsiensis et:

		respectu Lipsiae:
Londin.	$= 0^{h}. 50'. 13''$.	occidental.
Neapol.	= 0. 5. 23.	oriental.
Laxenb.	= 0. 13. 55.	orient.
Bonon.	= 0. 6. 2.	occid.
Wratislav.	= 0. 25. 10.	orient.
Götting.	= 0. 8. 57.	occid.

Additamentum ad praecedentem dissertationem

A. N. GRISCHOVII.

Egressus Centri ☿ii Parisiis obs.	$10^h.20'.\ 7''$	temp. ver.
Egressus Lipsiae ex obseruat. Cl. Heinsii supput. - -	$11.\ 2.\ 5$	
diff. =	$0^h.41'.58''$	
Propter Parall. add. - - -	14	
Differ. Mer. inter Par. et Lips. =	$0^h.42'.12''$	
Eorundem Meridianor. differ. ex aliis accuratioribus obser- vationibus deducta, et Calend. Astron. Berol. inserta - - =	$0^h.38'.56''$	
error =	$0^h.\ 3'.16''.=49'$	Aequatoris.

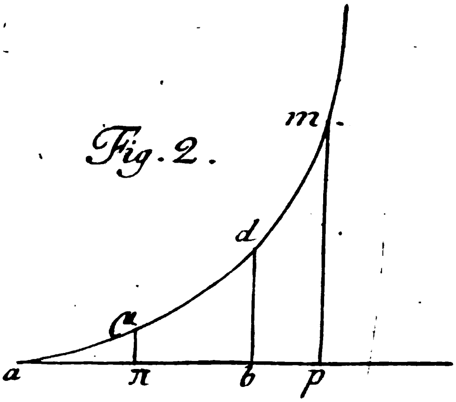


Fig. 2.

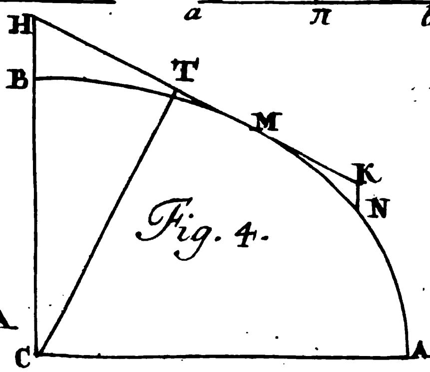


Fig. 4.

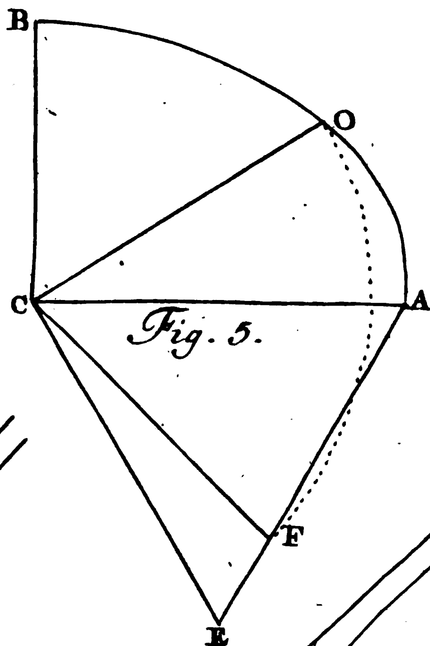


Fig. 5.

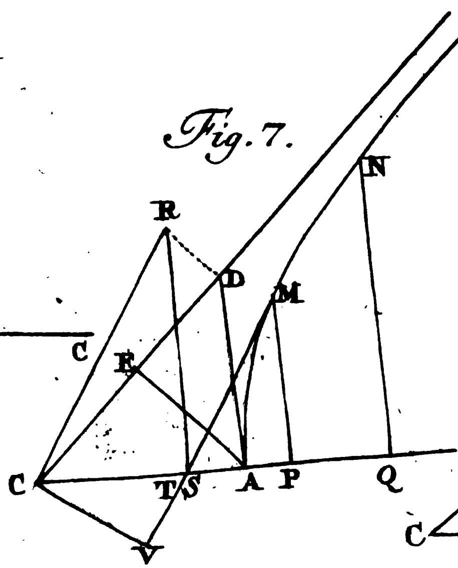


Fig. 7.

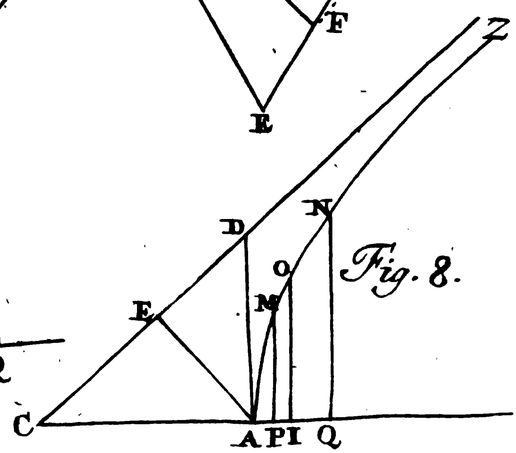
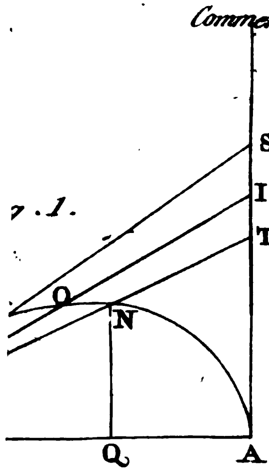


Fig. 8.



g. 1.

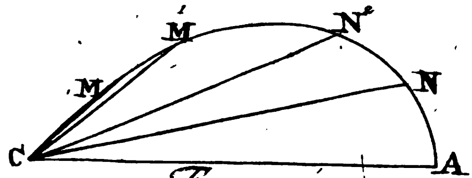


Fig. 2.

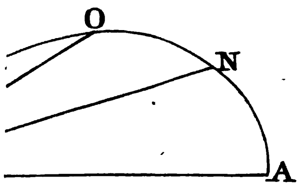


Fig. 3.

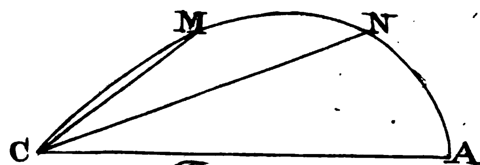
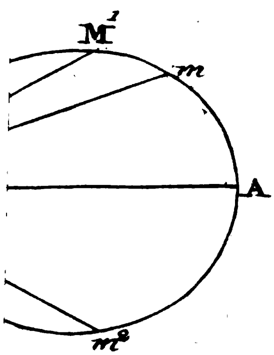


Fig. 4.



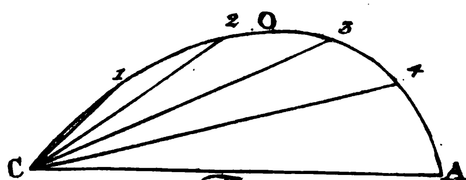


Fig. 6.

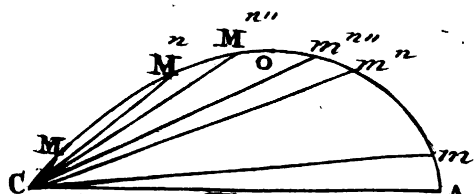
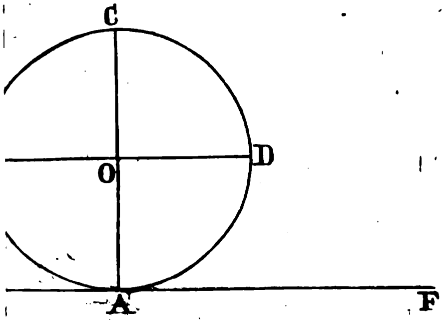


Fig. 7.



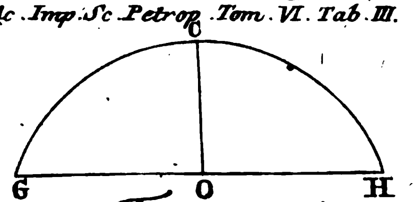


Fig. 2.

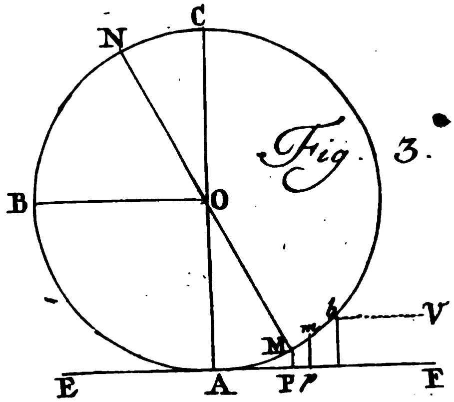


Fig. 3.

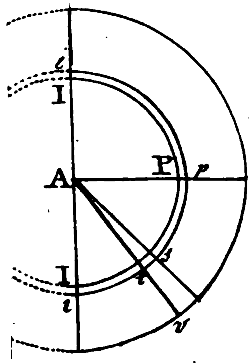
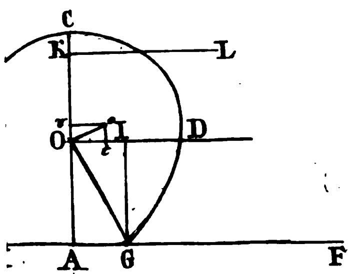


Fig. 4



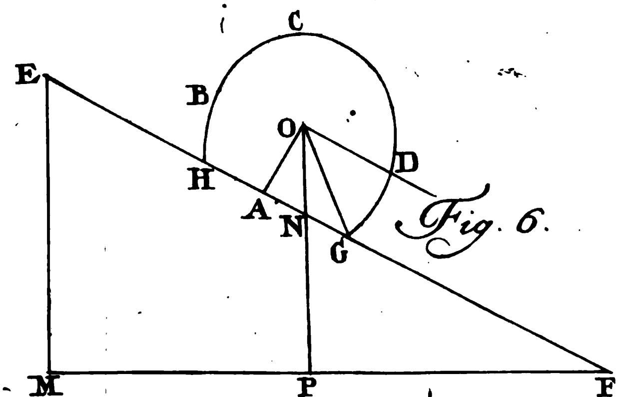


Fig. 6.

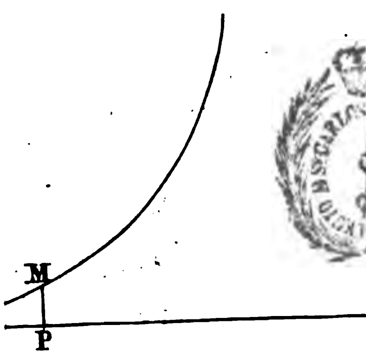
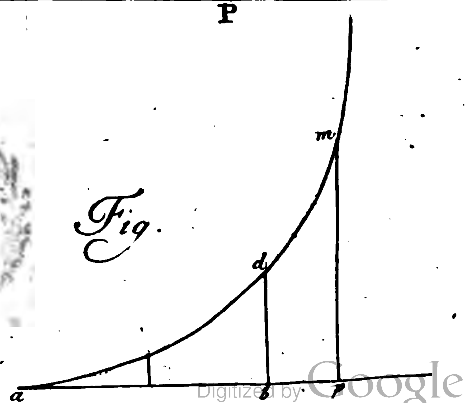


Fig.



1.

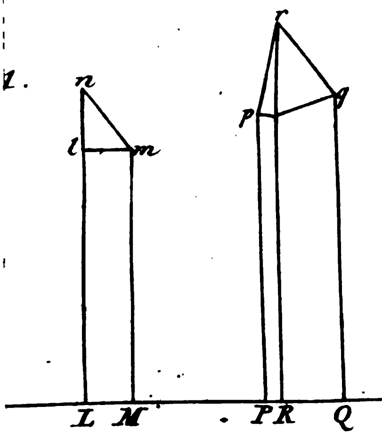


Fig: 3.

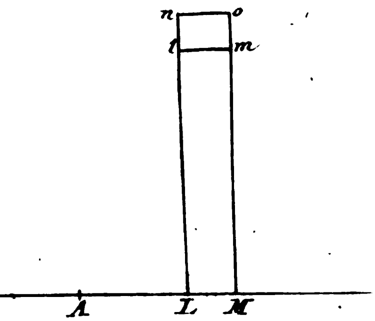
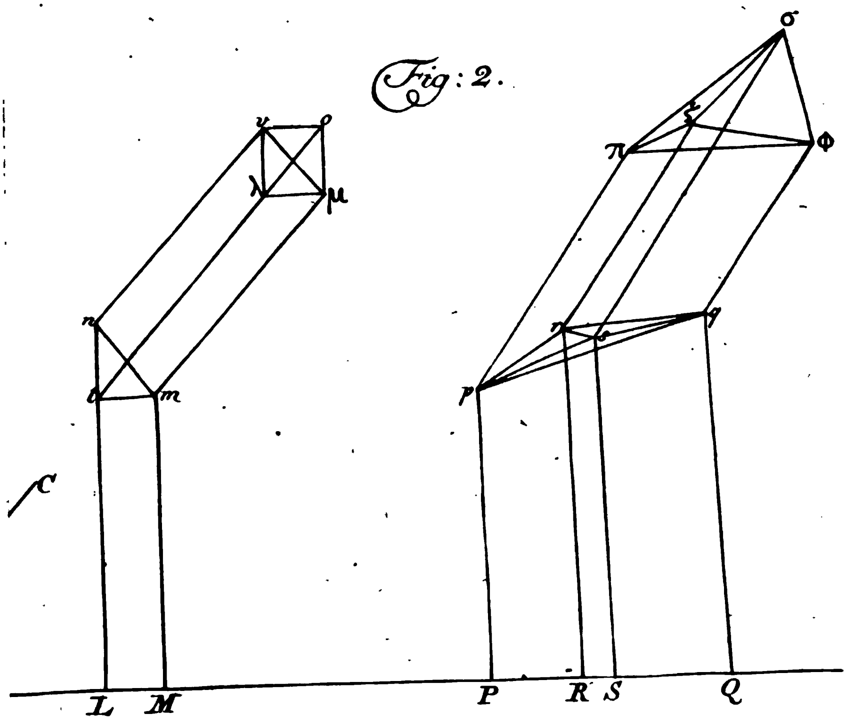
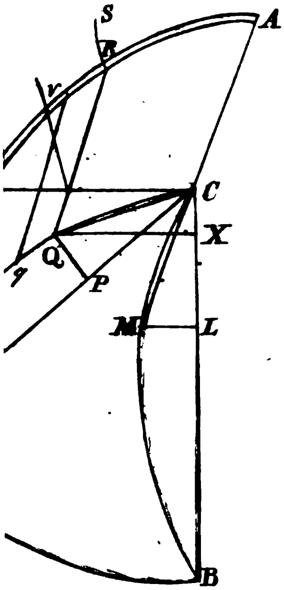


Fig: 2.




S
A
R
r
C
X
Q
q
P
M
L
B

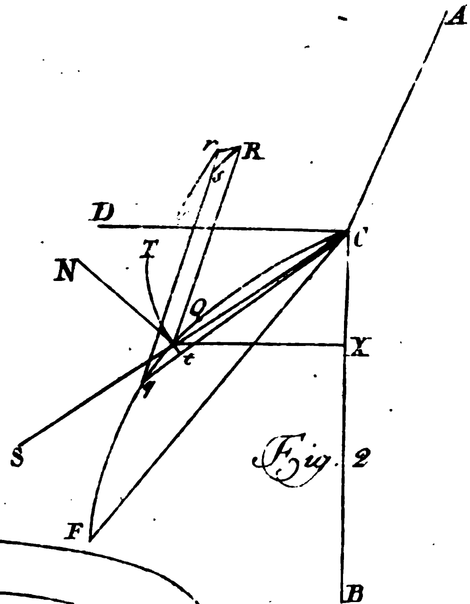
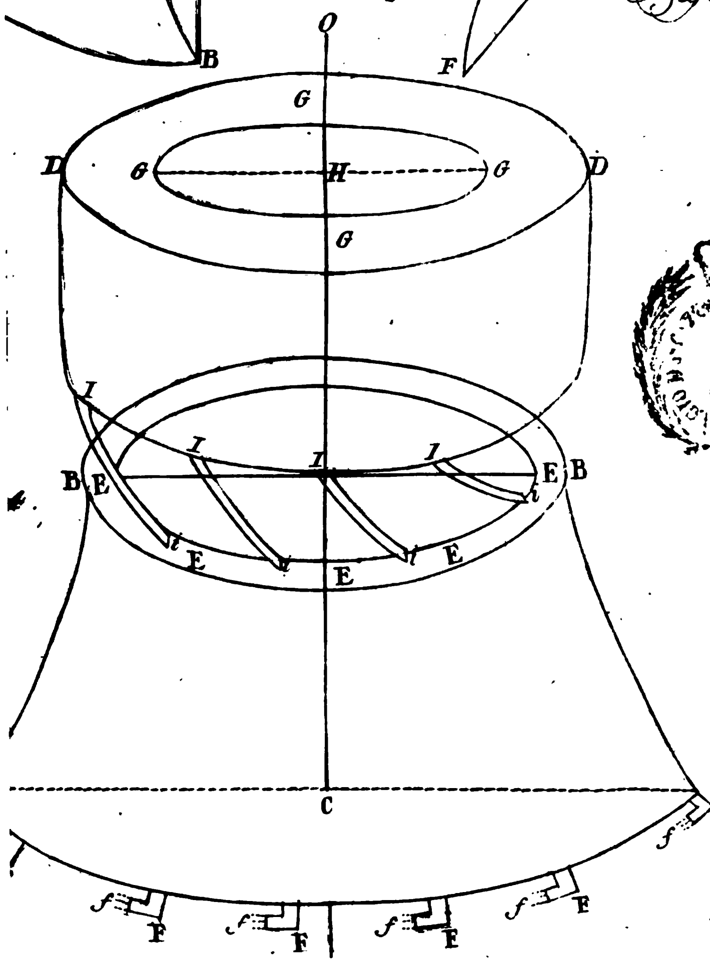
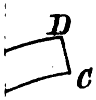

A
r
R
s
D
C
T
N
Q
X
t
q
S
F
B

Fig. 2


O
G
D
G
H
G
D
G
I
I
I
I
B
E
E
B
i
i
i
i
E
E
E
C
F
f
F
F
F
F
f
f
f
f



1.

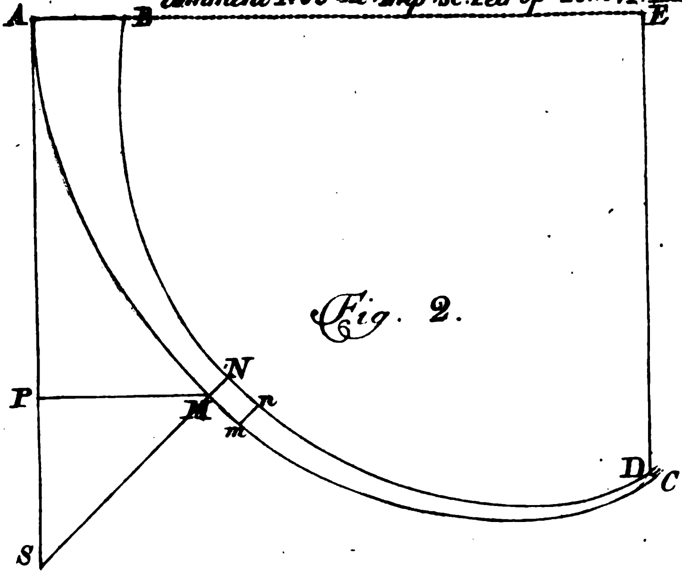


Fig. 2.

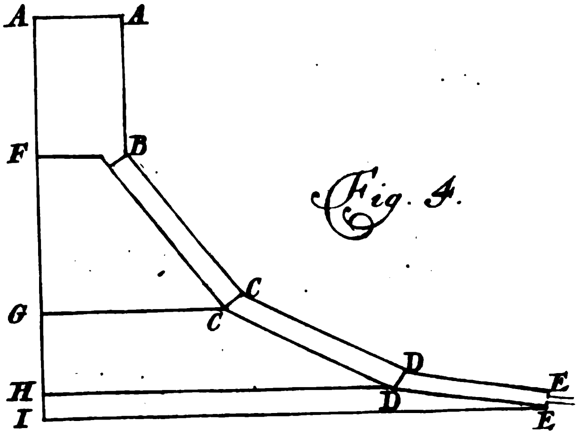
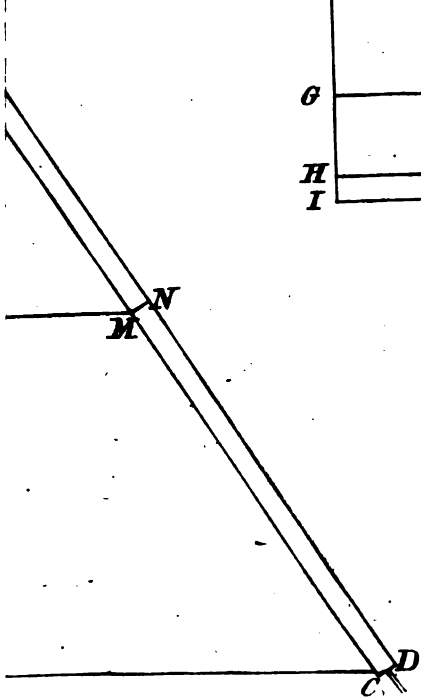


Fig. 4.

Fig. 3.



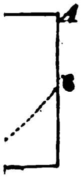


Fig. 2.

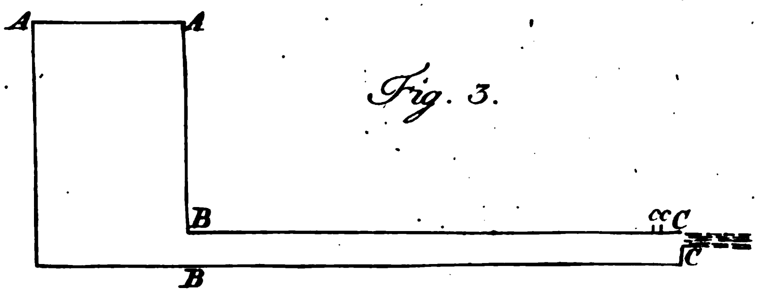


Fig. 3.

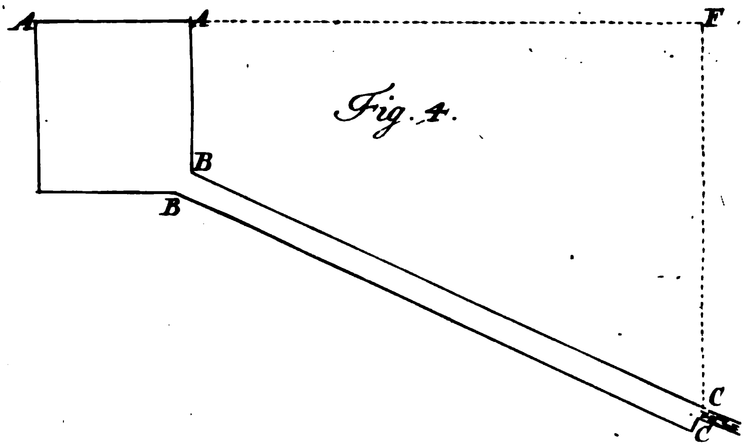


Fig. 4.

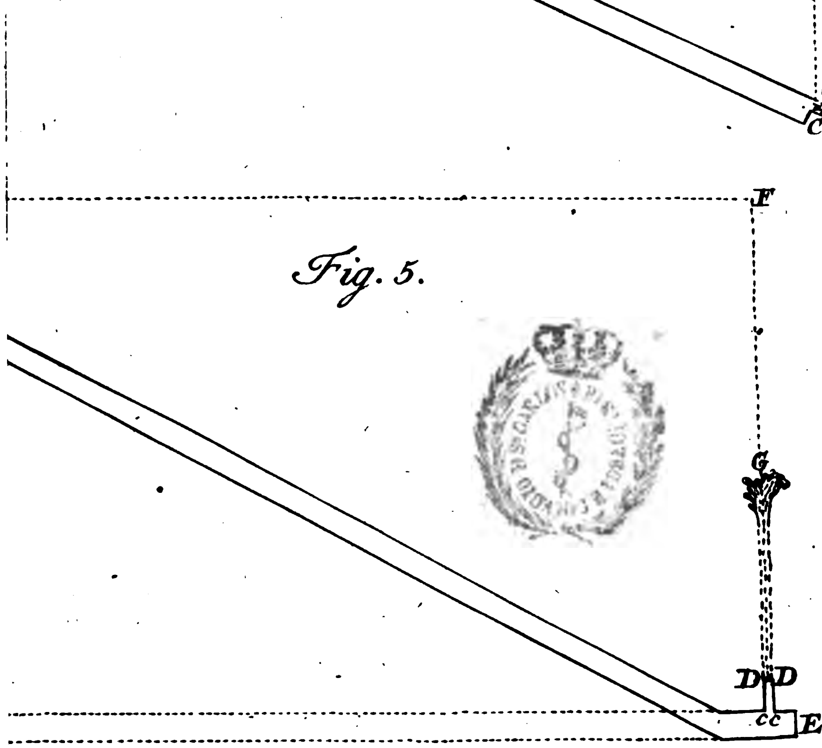
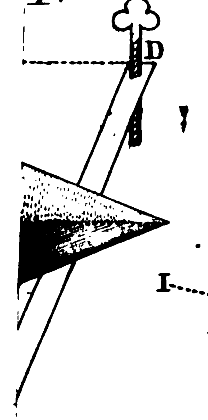


Fig. 5.

1.



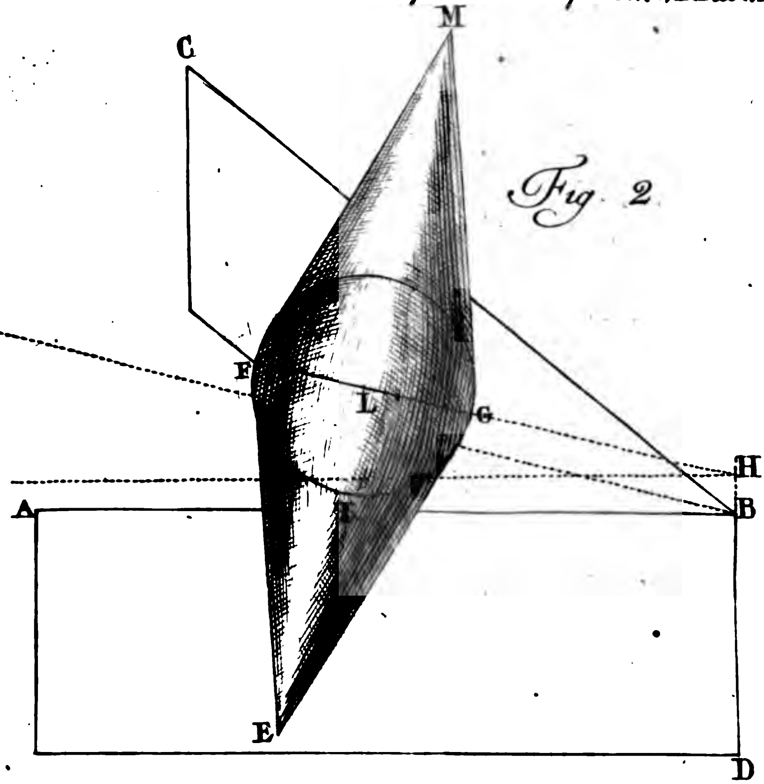


Fig. 2.

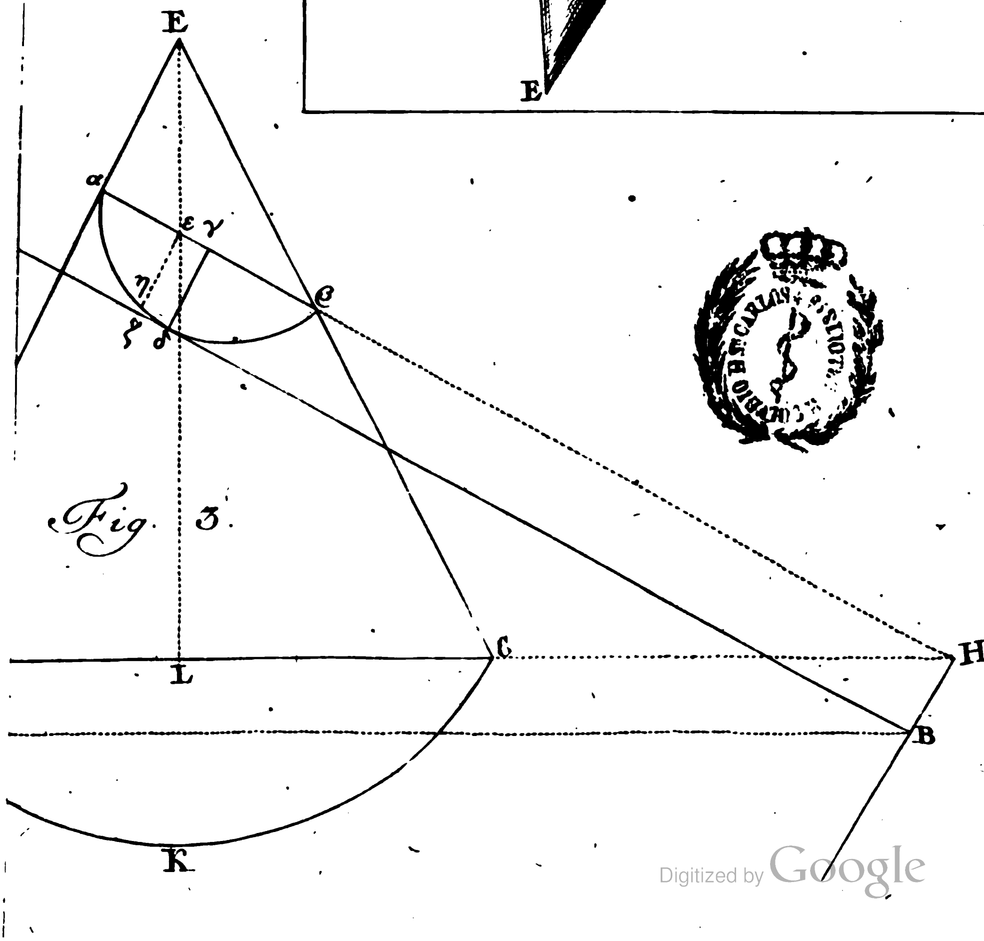


Fig. 3.

Fig. 1.

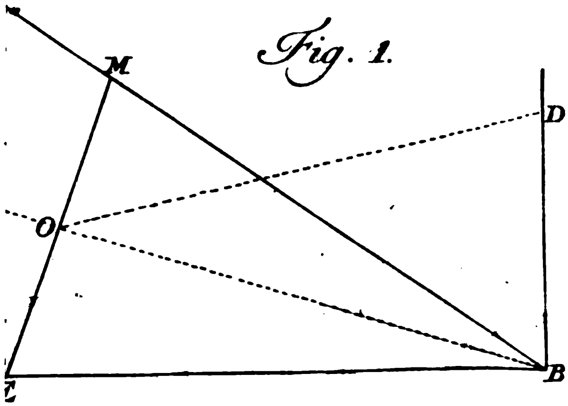


Fig. 3.

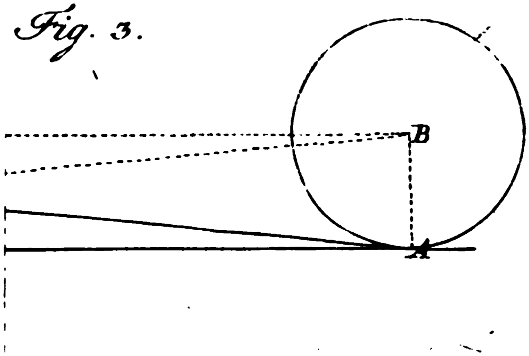
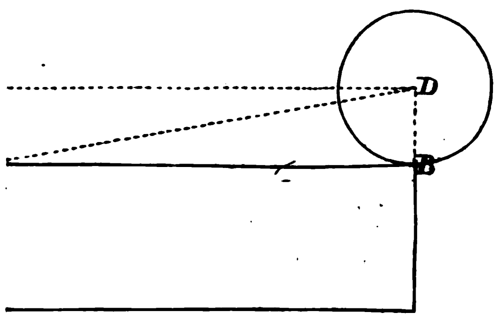


Fig. 2.



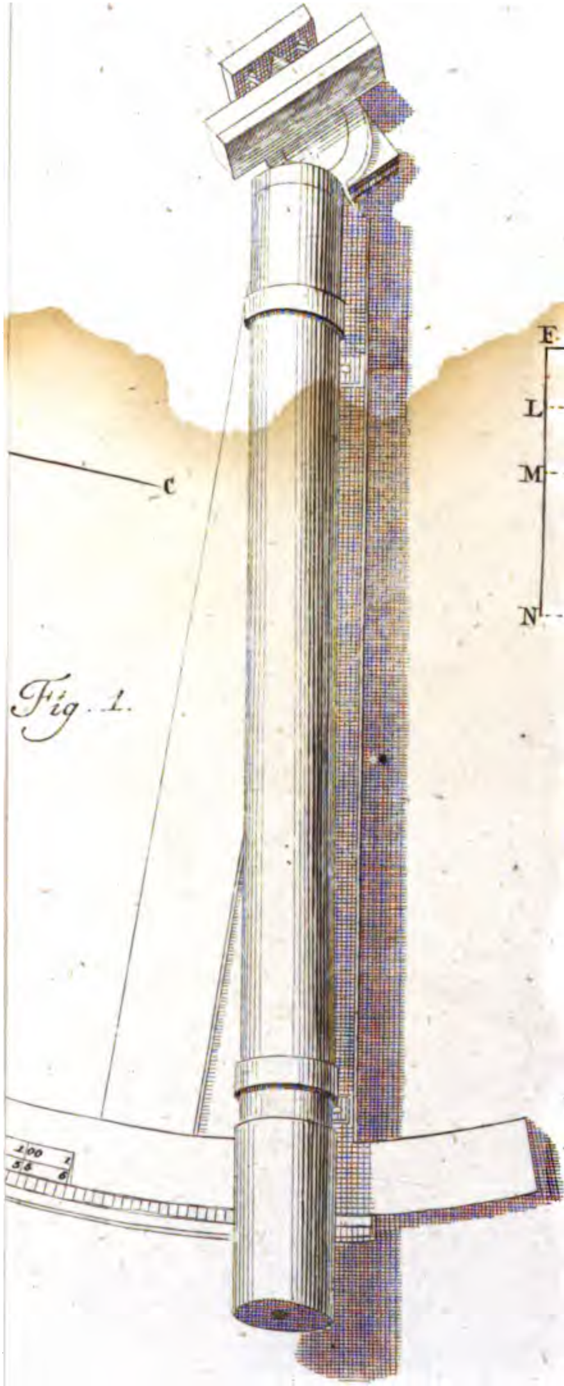


Fig. 1.

Fig. 3.

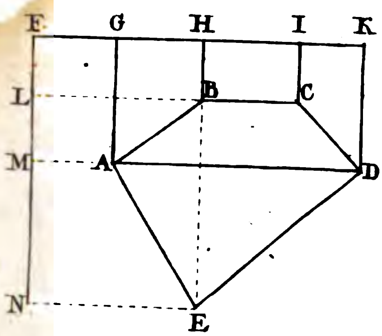


Fig. 5.

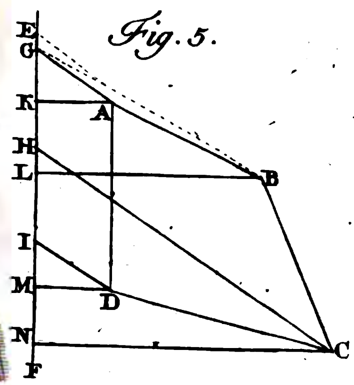



Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 4.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
K
K
B
A

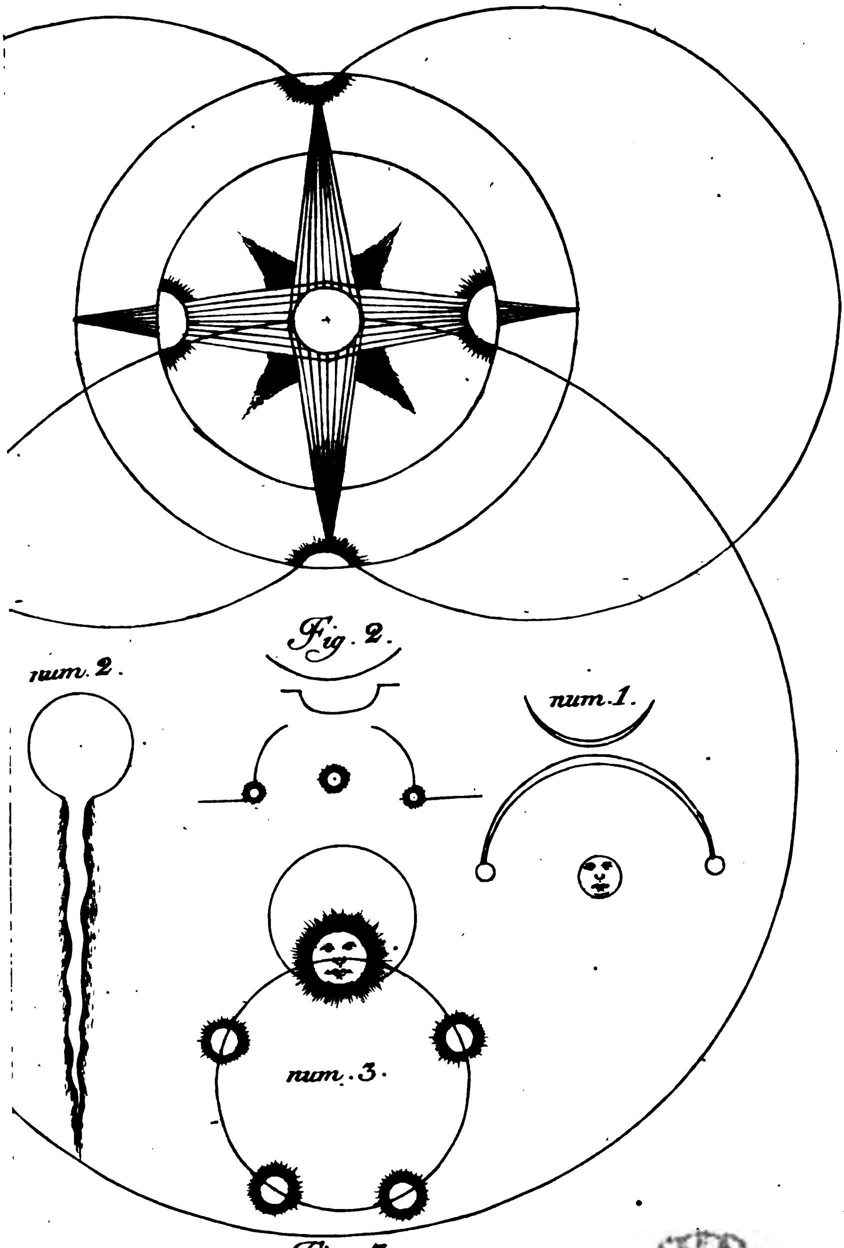
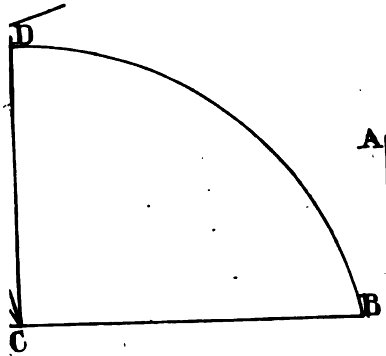


Fig. 2.

Fig 3.



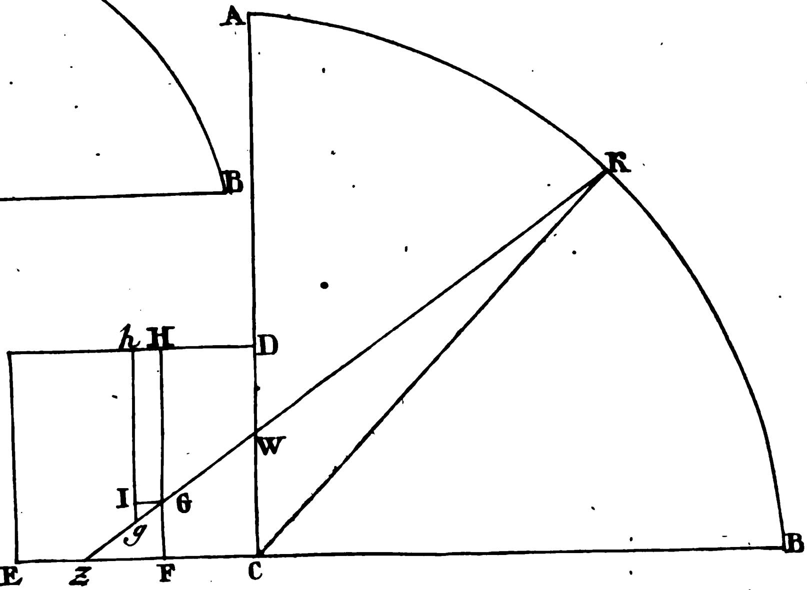


Fig. 2

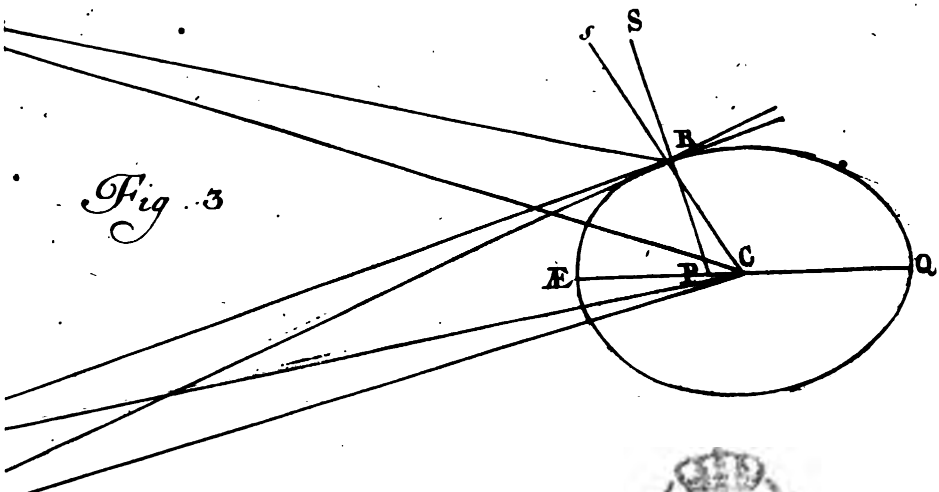
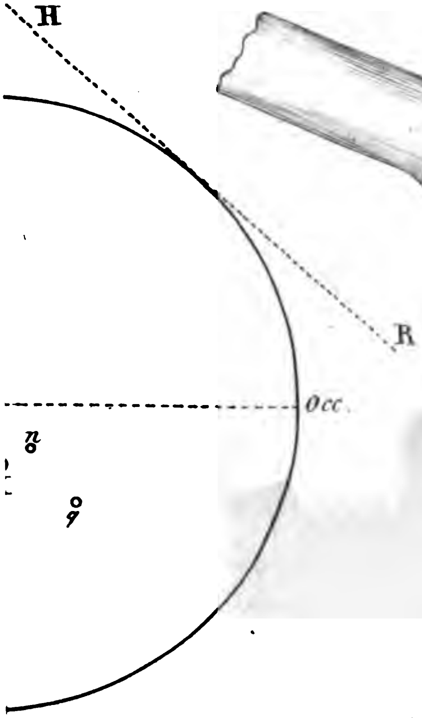


Fig. 3


H
R
Occ.
n
q

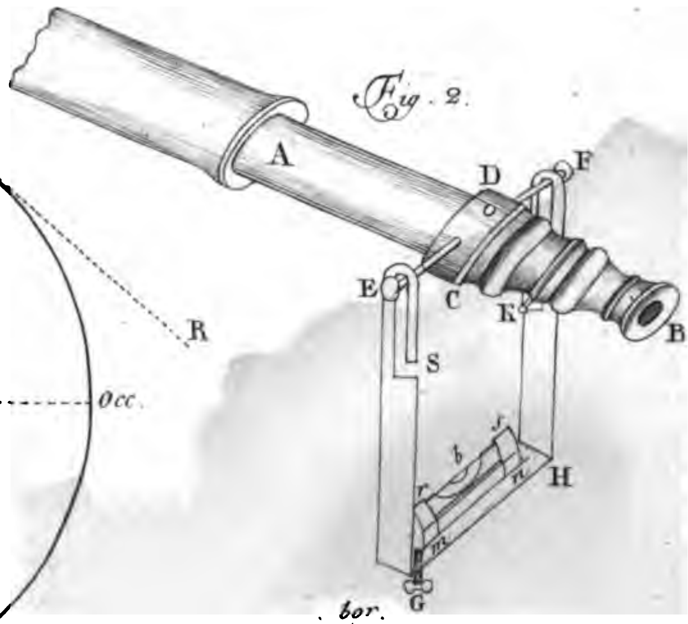


Fig. 2.
A
D
F
E
C
K
B
S
H
G
bor.

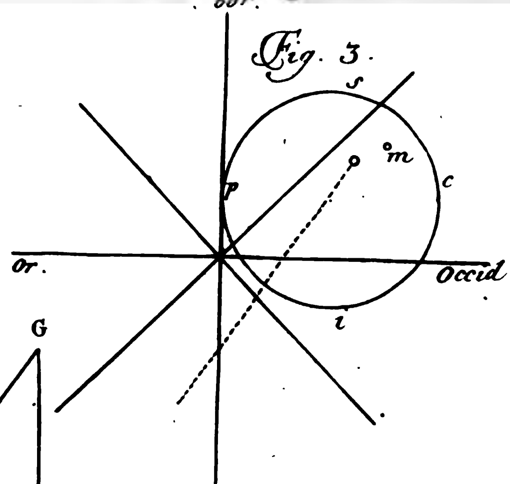


Fig. 3.
s
m
c
p
Or.
Occid.
i

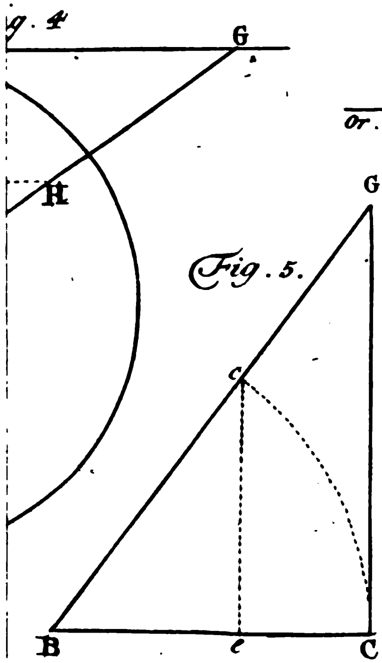

g. 4
G
H
Fig. 5.
G
c
B
e
C

Fig. 1.