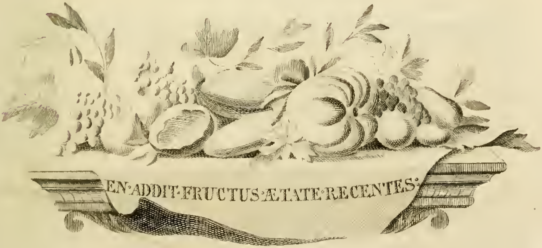
NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. V.

ad Annum MDCCLIV. et MDCCLV.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLX.

SVMMARIVM
DISSERTATIONVM
QVAS CONTINET
NOVORVM COMMENTARIORVM
TOMVS V.

MATHEMATICA.

I.

Demonſtratio Theorematis Fermatiani *omnem numerum primum formae* $4n+1$ *eſſe ſummam duorum quadratorum.*

Auctore Leonh. Eulero. p. 3.

De hoc inſigni Theoremate iam in ſuperiori Tomo a Cel. Auctore egregiae obſeruationes ſunt prolatae, quibus eius veritas tam ſolidis rationibus fuit comprobata, vt nullum dubium relinqui videretur; neque tamen hae rationes vicem firmae demonſtrationis ſuſtinebant. In hoc memorabile cernitur exemplum eiusmodi propoſitionis, de cuius veritate dubitare nefas ſit, etiamſi completa demonſtratione deſtituamur. Talibus autem propoſitionibus nusquam minus, quam in Matheſi, locum relinqui vulgo putatur, vbi omnia firmiſſimis demonſtrationibus munita videntur. Verum hoc etiam tantum in doctrina numerorum vſu venire deprehendimus, in quorum natura ſcrutanda *Fermatius* ita excelluit, vt quam plurimas proprietates detexerit, atque etiam demonſtraſſe ſit profeſſus, quarum plerasque etiam nunc ſine demonſtratione veritati conſentaneas agnoſcere debemus; dum in reliquis Matheſeos partibus, ac multo magis in aliis ſcientiae generibus, quarum propoſitionum veritas non per rigidas demonſtrationes nobis eſt perſpecta, eae merito ſuſpectae videri debent, cum adeo plerumque, quandoquidem eas accuratius intueri licet,

 falſae

falfae deprehenduntur. In eo genere igitur inprimis iftud Theorema Fermatianum, quod omnis numerus primus formae $4n + 1$ fit fumma duorum quadratorum, ftudium Geometrarum fatigauit, atque Cel. *Eulerus* in eius demonftratione inueftiganda multum diuque defudaffe videtur, cum in fuperiori Tomo plura Theoremata huc pertinentia ex profundiffimis numerorum myfteriis elicuiffet, neque tamen fcopum attingere potuiffet. Tam prope autem eo pertigerat, vt hic, quafi reliquo fpatio feliciter confecto, tandem perfectam demonftrationem fit adeptus, quae cum per tot ambages tantasque numerorum difficultates fit deducta, eo magis attentionem et ftudium Geometrarum excitare debebit. Nullum enim dubium eft, quin his argumentis probe perpenfis, via multo breuior et planior eodem perueniendi aperiatur. Talis autem demonftratio breuior ac certe nobis planior aditum ad abfcondita numerorum arcana effet patefactura, quae etiamnum, non nifi quafi per tenebras, contemplari licet.

Verfatur ergo memorabile Theorema circa numeros formae $4n + 1$, feu eos numeros impares, qui vnitate excedunt multipla quaternarii, qui funt. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45. 49. etc. In his diftinguuntur numeri primi 5. 13. 17. 29. 37. 41. a compofitis 9. 21. 25. 33. 45. 49, ac de illis affirmatur fingulos effe aggregata binorum quadratorum, veluti $5 = 1 + 4$; $13 = 4 + 9$; $17 = 1 + 16$; $29 = 4 + 25$; $37 = 1 + 36$; $41 = 16 + 25$. etc. quod eo magis mirum videtur, cum haec quadrata nulla

ra-

ratione procedant. Inter compofitos autem, etfi alii ipfi funt quadrata, vt 9. 25, 49 etc alii vero etiam fummae duorum quadratorum aequantur: vnde propofitio tantum ad numeros primos formae $4n + 1$ reftringitur. Huius ergo veritas nunc demum pro demonftrata eft habenda, fiquidem demonftratio Fermatiana penitus intercidit. In praecedente autem Tomo demonftratio eo erat producta, vt oftenderetur, quoties $4n + 1$ fit numerus primus, femper dari eiusmodi duos numeros a et b, vt $a^{2n} + b^{2n}$ effet per $4n + 1$ diuifibile: hoc ipfum autem tum fine probatione relinquebatur. Nunc igitur negotium ita Auctor abfoluit, vt cum multo ante demonftraffet, hanc formam $a^{4n} - b^{4n}$, feu productum hoc $(a^{2n} - b^{2n})(a^{2n} + b^{2n})$ femper effe per numerum primum $4n + 1$ diuifibile, doceret, femper dari cafus, quibus alter factor $a^{2n} - b^{2n}$ non fit diuifibilis per $4n + 1$, tum enim neceffario fequitur, alterum factorem $a^{2n} + b^{2n}$ hunc diuiforem complecti. Quod reliquum eft, iam ante erat praeftitum: quia enim $a^{2n} + b^{2n}$ eft fumma duorum quadratorum, fimulque firma demonftratione euictum eft, fummam talium binorum quadratorum nullos alios diuifores admittere, nifi qui ipfi fint duorum quadratorum fummae, neceffe eft, numerum $4n + 1$ effe fummam duorum quadratorum. Hinc igitur liquet, quam fubtilia et vndequaque conquifita ratiocinia ad huiusmodi demonftrationes requirantur, et quam longe adhuc a folida numerorum cognitione fimus remoti.

Huic scripto pag. 13 sine peculiari titulo adiungitur noua dissertatio, in qua residua, quae in diuisione numerorum quadratorum per quosuis numeros remanent, examini subiiciuntur, vnde iterum egregiae numerorum proprietates deducuntur, vel omnino nouae, vel iam quidem cognitae, sed nouo modo demonstratae. Nemo ignorat omnes numeros quadratos, qui per 3 dividi nequeunt, in diuisione semper vnitatem relinquere, neque vllum dari numerum quadratum, qui per 3 diuisus duo relinquat. Simili modo nullus datur numerus quadratus, qui per 4 diuisus vel 2, vel 3 relinquat, sed residuum semper est 1, nisi diuisio succedat, quo casu residuum censendum est 0 Deinde nullus datur numerus quadratus, qui per 5 diuisus relinquat 2, vel 3, sed residua semper sunt vel 0, vel 1, vel 4. Atque in genere per quemcunque numerum numeri quadrati diuidantur, a residuis certi numeri excluduntur, quos Cel. Auctor hic imprimis considerat, et *non residua* appellat. Tum pro quocunque diuisore eximias proprietates tam inter residua, quam non residua obseruat, indeque plura egregia Theoremata demonstrat; veluti nunquam euenire posse, vt haec forma $4mn - m - n$, quicunque etiam numeri pro m et n assumantur, fiat numerus quadratus. His speculationibus tantum non deducitur Auctor tandem ad illud elegantissimum Theorema, *quod omnes numeri sint aggregata quatuor vel pauciorum quadratorum*, quod etiam *Fermatius* ex profundissimis numerorum mysteriis demonstrasse affirmat, et cuius demonstrationis iactura aeque est dolenda, ac tot veterum scriptorum, quibus nos temporum iactura priuauit. Etsi enim Auctor in postremo

poſtremo Theoremate demonſtrat, omnem numerum eſſe *ſummam quatuor quadratorum vel pauciorum*, *ſiquidem quadrata fracta non excludantur*, tamen haec adiecta conditio maximum discrimen inter hanc demonſtrationem et eam, quam deſideramus, facit. Supereſt igitur demonſtrandum, *qui numerus in fractis ſit ſumma quatuor quadratorum, eundem quoque in integris quatuor quadratorum ſummae aequari.*

II.

Obſeruatio de ſummis Diuiſorum. Auct. L. Eulero. p. 59.

Diuiſores cuiusque numeri ii vocantur numeri, per quos illum ſine reſiduo diuidere licet; vnde inter diuiſores cuiusque numeri reperitur primo vnitas, tum vero ille ipſe numerus, quandoquidem omnis numerus tam per vnitatem, quam per ſe ipſum diuidi poteſt. Iam conſtat eos numeros, qui praeter vnitatem et ſe ipſos nullos alios diuiſores admittunt, vocari primos, reliquos vero, qui praeterea per alios numeros diuidi ſe ſine reſiduo patiuntur, compoſitos; atque in Arithmetica vulgari traditur methodus, omnes cuiusque numeri diuiſores inueniendi. Auctor igitur in hac diſſertatione ſummam omnium diuiſorum cuiusque numeri contemplatur, non eo conſilio, vti alias in inueſtigatione numerorum perfectorum, vel amicabilium, aliarumue

huius

huiusmodi quaeſtionum fieri ſolet, ſed vt ordinem, et quaſi legem, qua iſtae ſummae diuiſorum ſingulis numeris conuenientes procedant, exploret, qui certe maxime abſconditus videri debet, cum pro numeris primis, ſumma diuiſorum ipſos vnitate ſuperet, pro compoſitis autem eo magis, quo plures factores primos in ſe complectuntur. Quoniam igitur ratio progreſſionis numerorum primorum adhuc ſummum eſt myſterium, in quod ne *Fermatio* quidem penetrare licuit, horum autem ratio manifeſto in ſummas diuiſorum ingreditur, quis dubitaret has quoque nulli lege ſubiectas pronunciare? Eo maiorem igitur haec diſſertatio attentionem meretur, quod ita lex ibi in lucem eſt protracta, etſi nondum ſummo rigore demonſtrata. Auctori autem hic idem vſu euenit, quod ante in Theoremate Fermatiano, vt mox deinceps defectum demonſtrationis ſuppleuerit Quod enim in demonſtratione hic tradita adhuc deſideratur, ſtatim in ſequenti diſſertatione ſupplebitur. Quo haec clarius exponi poſſint, vtitur Auctor ſigno $\int$ ad ſummam diuiſorum cuiusque numeri, cui praefigitur, indicandam. Ita $\int n$ indicat ſummam omnium diuiſorum numeri n, vnde intelligitur fore vt ſequitur:

$\int 1 = 1$	$\int 11 = 1 + 11 = 12$
$\int 2 = 1 + 2 = 3$	$\int 12 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$
$\int 3 = 1 + 3 = 4$	$\int 13 = 1 + 13 = 14$
$\int 4 = 1 + 2 + 4 = 7$	$\int 14 = 1 + 2 + 7 + 14 = 24$
$\int 5 = 1 + 5 = 6$	$\int 15 = 1 + 3 + 5 + 15 = 24$
$\int 6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$	$\int 16 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$
$\int 7 = 1 + 7 = 8$	$\int 17 = 1 + 17 = 18$
$\int 8 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$	$\int 18 = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 = 39$
$\int 9 = 1 + 3 + 9 = 13$	$\int 19 = 1 + 19 = 20$
$\int 10 = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$	$\int 20 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 = 42$

etc.

quae ſummae ex cognito principio, quod ſumma diuiſorum producti $mnpq$, cuius factores m, n, p, q, ſiant inter ſe numeri primi, aequalis ſit producto ex ſummis diuiſorum ſingulorum, ſeu $\int mnpq = \int m.\ \int n.\ \int p.\ \int q$, pro maximis numeris facile definiri poſſunt. Ita eſt $\int 20 = \int 4 \cdot 5 = \int 4.\ \int 5 = 7.\ 6 = 42$, et $\int 360 = \int 8 \cdot 9 \cdot 5 = \int 8.\ \int 9.\ \int 5. = 15 \cdot 13 \cdot 6 = 1170.$ Conſiderat autem Auctor has diuiſorum ſummas, prout ſecundum ordinem numerorum naturalem, quibus reſpondent, progrediuntur hoc modo:

numeri	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
ſummae diu.	1.	3.	4.	7.	6.	12.	8.	15.	13.	18.	12.	28	14.	24.	24.	31. etc.

in qua progreſſione certe nulla lex ſpectatur, cum modo ſint maiores, modo minores, modo pares, modo impares, atque inprimis ordo numerorum primorum ei manifeſto immiſcetur, qui cum ſit inperſcrutabilis, quis in hac ſerie legem ſuſpicaretur? Interim tamen Auctor docet, hos numeros conſtituere ſeriem eius generis, quae recurrentes dici ſolent, ita vt quilibet eius terminus ex aliquot praecedentibus ſecundum certam quandem legem determinetur. Quemadmodum enim $\int n$ denotat ſummam diuiſorum numeri n, ita haec ſcriptura $\int(n-a)$ denotabit ſummam diuiſorum numeri $n-a$, quo obſeruato lex illa ab Auctore inuenta ita ſe habet, vt ſit:

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \int(n-22) - \int(n-26) + \int(n-35) + \int(n-40) - \text{etc.}$$

vbi ratione ſignorum tenendum eſt, ſemper bina + excipi a binis −, numeri autem 1, 2, 5, 7, 12, 15, etc. continuo ab n ſubtrahendi ex differentiis facile cognoſcuntur:

numeri	1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57 etc.
differ.	1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, 6, etc.

dummodo alternatim ſumantur. Commodius igitur illa relatio ita repraeſentabitur:

$$\int n = \begin{cases} + \int(n-1) - \int(n-5) + \int(n-12) - \int(n-22) + \int(n-35) \\ + \int(n-2) - \int(n-7) + \int(n-15) - \int(n-26) + \int(n-40) \end{cases} \text{ etc.}$$

Pro applicatione autem huius formulae ad quosuis numeros, ſciendum eſt, hos terminos eo vsque tantum ſumi debere, quoad numeri poſt ſignum $\int$ ſcripti fiant negatiui, qui omnes ſunt omittendi; tum vero ſi occurrat terminus $\int(n-n)$, ſeu $\int 0$, quia hic per ſe non determinatur, quouis caſu eius loco ipſum numerum n ſcribi oportere. Per hanc ergo legem

erit: $\int 21 = \int 20 + \int 19 - \int 16 - \int 14 + \int 9 + \int 6$

ſeu: $\int 21 = \underline{42 + 20} - \underline{31 - 24} + \underline{13 + 12} = 87 - 55 = 32$

tum: $\int 22 = \int 21 + \int 20 - \int 17 - \int 15 + \int 10 + \int 7 - \int 0$

ſeu: $\int 22 = 32 + 42 - 18 - 24 + 18 + 8 - 22 = 100 - 64 = 36$

Ad hanc mirabilem progreſſionis legem deductus eſt Auctor conſideratione huius producti:

$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)$ etc.

cuius factores in infinitum progredi concipiuntur, quod ſi per actualem multiplicationem euoluatur, obſeruauit prodire hanc ſeriem:

$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} +$ etc.

quousque ſcilicet operationem actu continuare licuit, vnde legem huius ſeriei et exponentum progreſſionem tantum per inductionem concluſit, quod forte pluribus ſufficere videatur. Verum Auctor ingenue fatetur, hanc obſeruatam conuenientiam minime adhuc eſſe demonſtratam, ſed eius demonſtrationem etiamnum deſiderari, quam

autem

autem haud multo post cum Academia communicauit. Concessa autem aequalitate illius producti et seriei euolutae, Theorema memoratum circa ordinem in summis diuisorum perspicue inde demonstratur, vt nullum amplius dubium superesse possit, etiamsi logarithmis et differentiatione sit opus, quae res parum ad naturam diuisorum pertinere videantur. Ex hoc ergo casu intelligere licet, quam arcto et mirifico nexu Analysis infinitorum, non solum cum Analysi vulgari, sed etiam cum doctrina numerorum, quae ab hoc sublimi calculi genere abhorrere videtur, sit coniuncta.

III.

Demonstratio Theorematis circa ordinem in summis diuisorum obseruatum. Auct. L. Eulero.

p. 75.

Hic Cel. Auctor id, quod in praecedente dissertatione adhuc desiderabatur, cumulate praestat, et demonstrationem conuenientiae modo memoratae rigidissimam exponit. Quae etsi vulgaribus principiis innititur, tamen non exiguam sagacitatem prae se ferre videtur. Quod ad ipsum argumentum attinet, id iam supra satis est explicatum.

IV.

De Methodo Diophanteae Analoga in Analysi infinitorum. Auct. L. Eulero. pag. 84.

Methodus Diophantea, ab auctore antiquo Graeco *Diophanto* sic dicta, potissimum ad doctrinam numerorum refertur, atque huiusmodi quaestiones resolvere docet, quibus numeri quaeruntur, qui certa ratione combinati, euadant quadrati, vel cubi, aliusue generis numeri; veluti si quaerantur duo numeri, quorum quadrata addita iterum quadratum producant, cuiusmodi numeri sunt 3 et 4, quorum quadrata 9 et 16 addita summam dant 25 itidem quadratum. In genere igitur si hi numeri ponantur x et y, id requiritur, vt $xx+yy$ fiat quadratum, seu vt $\sqrt{(xx+yy)}$ sit numerus rationalis; atque semper in solutione huiusmodi problematum peruenitur ad tales formulas radicales, siue radix quadrata, siue cubica, siue altioris gradus sit extrahenda, numerosque isti signo implicatos ita determinari oportet, vt radix re vera extrahi possit, omnisque irrationalitas euanescat. Ex quo methodum Diophanteam ita definiri posse patet, vt sit methodus irrationalitatem tollendi. Quod autem in Analysi communi sunt quantitates irrationales, id in Analysi sublimiori sunt quantitates transcendentes, quae oriuntur, si qua formula differentialis integrationem respuat, perinde atque ibi quantitates irrationales nascuntur, quando ex quapiam formula

radicem

radicem extrahere non licet. Methodus igitur in Analysi infinitorum Diophanteae analoga in hoc versatur, vt quantitates formulam quandam differentialem ingredientes ita determinentur, vt integratio succedat, et integrale Algebraice exhiberi possit. Huiusmodi exempla statim occurrunt, quando vel curuae quadrabiles, vel rectificabiles requiruntur, vbi positis coordinatis orthogonalibus x et y, eiusmodi relatio inter eas desideratur, vt priori casu formula $y\,dx$, posteriori vero haec $\int V(dx^2+dy^2)$ integrationem admittat. Problema quidem, quo curuae quadrabiles quaeruntur, est facillimum, atque adeo iam ante inuentam Analysin infinitorum solui potuit, alterum vero de curuis rectificabilibus nonnisi per plures ambages a viris celeberrimis Hermanno et Bernoullio est solutum, vbi nullum vestigium methodi cuiuspiam certae deprehenditur. Hic ergo quasi nouus campus in Analysi infinitorum aperitur antehac prorsus ignotus; methodus scilicet Diophanteae analoga, cuius principia Auctor in hac dissertatione non solum distincte proponit, sed etiam eo vsque prosequitur, vt problemata, quae alias vires Analyseos longe superare viderentur, nunc sine vllo fere labore resolui queant. Interim tamen haec methodus, quousque hic est exculta, plurimum adhuc a perfectione abest, relinquiturque amplissimus campus, in quo Geometrae vires suas exerceant, atque etiam ex hac parte fines Analyseos proferant. Quanquam enim ab Auctore innumerabiles formulae differentiales ad integrabilitatem sunt perductae, tamen plurimae supersunt, quibus artificia hic tradita nondum sufficiunt; veluti si eiusmodi quaeratur relatio inter variabiles x et y, vt haec formula $\int \left(\frac{y\,dx}{x} + \frac{dy}{y}\right)$ integrationem admittat. Auctor fatetur se nullo adhuc modo id praestare potuisse. Verum dantur sine dubio et in hac methodo casus omnem reductionem respuentes, quemadmodum etiam in methodo Diophantea plurimae formulae, quae nullo modo ad quadratum reduci possunt. Plurimum igitur et hic praestitisse censendus erit, qui, cuiusmodi formulae ad reducendum plane sint ineptae, dilucide ostendere potuerit.

V.

De curuis funiculariis et catenariis, vel illis, quae corporibus flexibilibus inducuntur, cum potentiis quibusuis sollicitantur. Auctore G. W. Krafft.

pag. 145.

Celebre *Catenariae* problema, primus quidem aggressus est *Galilaeus*, in catenae flexilis libere suspensae figuram, ast, quod suspicandi plures habemus causas, non geometriae auxilio, sed tentaminum atque experimentorum ope, inquirens. Facile itaque concipitur, qui factum sit, quod vir summus, a scopo aberrans, catenulae curuaturam, parabolae affinem esse, adstruxerit. Dicimus consulto, *parabolae affinem*, incidimus enim in scriptorum *Galilaei* locum quendam, qui luculenter probat, non pro vera parabola habuisse ipsum, cate-

catenariae ductum, quod quidem communiter vitio ipsi verti solet. In libro enim de *Motu locali*, *Dial. IV. p. m.* 257. sequentia inueniuntur verba: *Praeterea tibi dicere volo, ---funem sic tensum, et plus aut minus tractum, in lineas se flectere, quae ad parabolicas accedunt quam proxime, tantamque esse similitudinem, vt si in superficie plana et horizonti recta, lineam describas parabolicam, eamque inuertas - - et extremitatibus baseos appendas catenulam, eam magis aut minus demittendo, se incuruare et adaptare ad eandem videbis parabolam, eoque accuratiorem fore istam adaptationem, quo designata parabola minus fuerit curua, hoc est magis tensa, ita vt in parabolis, quae ad eleuationem* 45 *gradus minorem* (loquitur hic *Galilaeus*, de parabolis, quas describunt corpora grauia proiecta) *descriptae sunt, catenula ad vnguem fere cum parabola congruat* Totum hunc locum inserimus, quo *Galilaei* partim exinde pateat innocentia, partim, vt de via, quam inquirendo catenulae figuram secutus est, constet.

Ex quo infinitesimalis methodi principia innotuerunt, denuo idem problema tentarunt eruditi, atque mox, omnino a parabola diuersam, ac ex transcendentium genere esse curuam, quae quaerebatur, deprehensum est. Non solum autem plene solutum dederunt problema *Leibnitius*, *Bernoullii*, aliique complures, sed similia quoque alia excogitarunt, quales sunt v. g. *velariae*, *funiculariae*, aliaeque huius generis curuae.

Huius

Huius non est loci, amplam methodorum, quarum ope huius generis problematum solutiones assecuti sunt geometrae, instituere recensionem; id tamen monemus, duplicis esse generis, quae hactenus prolatae sunt, solutiones. Alii enim ex Statices praeceptis immediate ipsas deducunt, alii ex principiis aliunde cognitis, v. g. ex centri grauitatis figurae descensu maximo possibili, eas repetunt.

Ad priorem classem pertinent, quas Clariss. scripti huius Auctor adhibuit methodos, qui in negotio, quod expediendum sibi proposuerat, sequenti ratione procedit. Considerat primum filum flexile, cui finitum numerum potentiarum, qualemcunque hae habeant magnitudinem ac directionem, applicatam supponit, et formulam eruit, quae statum aequilibrii eius, quod hinc nascitur, polygoni determinat. Tum generalem hanc aequationem, ad casum, vbi numero infinitae vires in filum agunt, (quo casu non polygonum, sed curua prodit) transfert. Considerat exinde eum primo casum, vbi vires omnes in filum agentes curuaturae ipsius sunt normales, atque postquam supra inuentam formulam generalem casui huic adaptauit, deducit ex ipsa curuaturam, quam assumit filum, in quod agit fluidum elasticum, quaqua versus aequali vi expandere se nitens, siue *Velariam primi casus*, prout ipsam vocat Auctor, atque curuam, cui congruit filum, quod fluidum impulsu suo expandit, seu *Velariam secundi casus*, et denique eam, quae dum filum a fluido, ex solo suo pondere agente, expanditur, oriri solet, quam *Linteariam* appellat.

Abso-

Abſolutis his, ad conſiderandum eum caſum, vbi vires omnes in filum agentes inter ſe parallelae ſunt, Clariſs. Auctor, tranſit, cui poſtquam aptauit formulam generalem, deducit ex ipſa *catenariam vulgarem*, atque *non vulgares*. quorum nominum priori, eam, cui ſe adaptat filum vniformis vbiuis craſſitiei, altero, quam aſſumunt fila diuerſae in diuerſis punctis craſſitiei, denotat.

Affines denique alias quasdam curuas inueſtigat Auctor, *elaſticam* nempe, quam ſub hypotheſi, experimentis comprobata, atque Tom III. Commentariorum Acad. noſtrae pag 71. expoſita, cum *lintearia* eandem eſſe demonſtrat, atque *curuam fornicibus conſtruendis aptam*, quam non ſolum, ſub hypotheſi fornicis infinite tenuis, ſed etiam datae, aſt vniformis vbiuis craſſitiei, cum *Catenaria vulgari*, atque *Velaria ſecundi caſus*, congruere probat.

VI

Subſidium calculi ſinuum. Auctore L. Eulero pag. 164.

Diuerſa genera quantitatum, circa quas Analyſis verſatur, diuerſas etiam ſpecies calculi gignunt, in quo praecepta ad quodcunque quantitatum genus accommodari debent. Ita in Analyſi elementari peculiaris traditur algorithmus, tam pro fractionibus, quam irrationalibus quantitatibus, tractandis. Idem vſu venit in Analyſi ſublimiori, vbi cum logarithmi et quantitates exponentiales, quibus nouum quantitatum genus reuera transcendens constituitur, in computum ingrediuntur, peculiaris species Algorithmi, tam signis, quam praeceptis, distincta, tradi solet, quae ab inuentore Ioh. Bernoullio calculus exponentialis est vocata, siquidem ibi quoque doctrina de Logarithmis eorumque differentiatione et integratione tractatur. Praeter Logarithmos et quantitates exponentiales, aliud in Analysi occurrit amplissimum genus quantitatum transcendentium, angulorum scilicet, eorumque sinuum, cosinuum et tangentium, cuius vsus omnino est freqnentissimus. Pari igitur iure hoc genus meretur, ac potius postulat, vt ei peculiaris calculus tribuatur, cuius inuentionem, quatenus quidem peculiaribus signis et praeceptis continetur, Cel. Auctor huius dissertationis omni iure sibi vindicare potest, cuius insignia specimina in introductione sua in Analysin et in Instit. Calculi differentialis dedit. Multo maxima autem eminent in eius scriptis de motu Lunae et perturbatione motuum Saturni ac Iouis, quod calculi genus deinceps etiam alii in huiusmodi inuestigationibus frequenter sunt secuti, ita vt hic sine isto subsidio vix quicquam praestari posse videatur. Huius igitur noui calculi, quem calculum sinuum vocat, non solum prima fundamenta iecit Eulerus, eiusque summum vsum per varias Matheseos partes plurimis egregiis speciminibus ostendit, sed adhuc pergit eum nouis inuentis locupletare, quod praesens dissertatio luculenter declarat. In hac primum modo prorsus singulari ex primis sinuum ac cosinuum proprietatibus vtilissimam illam resolutionem potestatum sinuum et cosinuum in sinus cosinusue simplices deriuat, quae quidem resolutio

maximis

maximi momenti est in applicatione huius calculi ad Astronomiam, vbi omnes inaequalitates ad sinus cosinusue certorum angulorum reuocari oportet, tum autem in ipsa Analysi, ac potissimum integrationibus, summum affert adiumentum. Deinde easdem inuestigationes transfert ad producta, ex sinus et cosinus potestatibus formata, in quorum resolutione difficillimum est legem, quam sinus cosinusue simplices teneant, perspicere. Denique etiam deducitur ad contemplationem serierum infinitarum, per sinus cosinusue progredientium, quarum summas assignare docet, modo aeque facili ac foecundo, vnde plurima alia insignia subsidia expectare licet.

VII.

De seriebus diuergentibus. Auct. L. Eulero pag. 205.

Argumentum hic sibi Auctor tractandum sumit, quod adhuc summis difficultatibus premebatur, atque opinionem illam, qua vulgo inuestigationes mathematicae ab omni controuersia immunes putantur, haud mediocriter debilitabat. Inesse autem in Mathesi eiusmodi speculationes, circa quas summi geometrae maxime dissenserint, omnino negari nequit, neque hoc tantum in Mathesi adplicata vsu venit, quo pertinet famosum illud circa vires viuas dissidium, sed etiam, quod inprimis mirum videatur, ipsa Mathesis pura et abstracta, eximia litium obiecta suppeditauit, cuiusmodi est illa inter Leibnizium et

Ioannem Bernoullium agitata quaeſtio de logarithmis numerorum negatiuorum; tum etiam ex geometria quaeſtio de cuspide curuarum ſecundi generis, ſeu roſtrum auium referente; quas controuerſias Noſter alio loco ita diremit, vt vtraeque partes, ſi adhuc eſſent ſuperſtites, in eius deciſione acquieſcerent. Similiter omnino comparata eſt quaeſtio de ſeriebus diuergentibus, quam Cel. Auctor hic aeque feliciter compoſuiſſe videtur, vt poſthaç nullae amplius controuerſiae inde ſint pertimescendae. Quare etiamſi Analyſis cauſſis diſſidiorum non deſtituatur, eae tamen a caeteris hoc diſtinguntur, quod, omnibus rationibus probe perpenſis, tandem perfecte conciliari queant.

Conuergentes autem ſeries dicuntur, quarum termini continuo fiunt minores, atque tandem penitus euanescunt. Cuiusmodi eſt haec: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ etc. cuius ſumma quin ſit $=2$, dubitari nequit. Quo plures enim terminos actu addideris, eo propius ad 2 acceſſeris; ita centum terminis additis defectus a binario valde parva erit particula, fractio nempe cuius denominator ex 30 notis conſtat, numeratore exiſtente 1. De huiusmodi ergo ſeriebus nullum eſt dubium, quin habeant ſummam, et quin eae ſummae, quae in Analyſi aſſignantur, ſint iuſtae. Diuergentes autem ſeries dicuntur, quarum termini non ad nihilum tendunt, ſed vel infra certum limitem nunquam decrescunt, vel adeo in infinitum excrescunt. Huiusmodi ſunt $1+1+1+1+1+$ etc. item $1+2+3+4+5+6+$ etc. quarum quo plures termini addantur, eo maior prodit ſumma. Talis ſeries ergo quouis dato numero maior fieri poteſt, ideoque recte

infinita

infinita dicitur, ſiquidem omnes termini in infinitum continuati, colligi in vnam ſummam concipiantur.

At ſi ſigna alternantia ſtatuantur, vt tales habeantur ſeries $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ etc. vel $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 -$ etc. nemini in mentem veniet, earum ſummam infinitam affirmare. Etiamſi enim poſterior, ſi bini termini iunctim capiantur, abeat in $- 1 - 1 - 1 - 1$ etc. cuius ſumma eſt $- \infty$: tamen primo ſeparatim ſumto, ſequentium vero bini coniungantur, prodit $1 + 1 + 1 + 1 +$ etc. cuius ſumma eſt $+ \infty$. Illo ſcilicet caſu numerus terminorum actu collectorum eſt par, hoc vero impar. Cum igitur ſerie in infinitum continuata, terminorum numerus neque pa ſit, neque impar, ſumma etiam neque erit $= - \infty$, neque $= + \infty$, ex quo numero cuipiam finito aequalis cenſeri poterit.

Satis notae quoque ſunt controuerſiae ſuper ſerie $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. cuius ſummam $= \frac{1}{2}$ Leibnizius ſtatuerat, alii autem negauerant. Nemo tamen eius ſummae alium valorem aſſignauit, ex quo controuerſia in hoc verſatur: vtrum huiusmodi ſeries certam habeant ſummam, nec ne? Hic ratio quaeſtionis in vocabulo *ſummae* eſt quaerenda, cuius idea ſi ita concipiatur, vt ſumma cuiusque ſeriei dicatur ea eſſe quantitas, ad quam eo propius perueniatur, quo plures ſeriei termini actu colligantur, in ſolis ſeriebus conuergentibus locum habet, et a diuergentibus hanc ſummae ideam omnino remouere debemus. Quare qui ſummam ita definiunt, iis vitio verti nequit, ſi negant ſerierum ſummas aſſignari poſſe. Cum autem in Analyſi ſeries ex euolutione fractionum,

 ſeu

ſeu quantitatum irrationalium, vel etiam transcendentium, oriantur, in calculo viciſſim licebit loco cuiusque ſeriei eam quantitatem, ex cuius euolutione naſcitur, ſubſtituere. Quocirca ſi definitionem *ſummae* ita inſtruamus, vt cuiusvis ſeriei ſummam dicamus eſſe eam quantitatem, ex cuius euolutione ea ſeries naſcatur, omnia dubia circa ſeries diuergentes euaneſcunt, nullisque controuerſiis amplius locus relinquitur, quandoquidem haec definitio tam ad ſeries conuergentes, quam diuergentes aeque eſt accommodata. Ita Leibnizio quilibet ſine haeſitatione aſſentietur, ſeriei $1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. ſummam eſſe $= \frac{1}{2}$, quia ex evolutione fractionis $\frac{1}{1+1}$ naſcitur; ſeriei autem $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$ etc. ſummam eſſe $= \frac{1}{4}$, quia ex euolutione formulae $\frac{1}{(1+1)^2}$ oritur. Similique modo iudicium de omnibus ſeriebus diuergentibus erit inſtituendum, vt ſemper ea formula finita inveſtigari debeat, ex cuius euolutione quaeque ſeries naſcatur. Saepe numero autem euenire poteſt, vt haec ipſa formula inuentu ſit difficillima, cuius Auctor hic eximium exemplum pertractat, iſtius ſeriei maxime diuergentis

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - 5040 + \text{ etc.}$$

quae eſt ſeries hypergeometrica Wallifii, ſignis alternantibus inſtructa, quae ex quanam formula originem trahat, et quantus eius formulae ſit valor, non niſi per profundiſſimas inueſtigationes, ex Analyſi ſublimiori petitas, definiri poſſe videtur. Re igitur variis modis tentata, Auctor tandem omnino ſingulari modo per fractiones continuas inuenit, huius ſeriei ſummam proxime eſſe $= 0,5963473621 23$, in qua fractione decimali error ne

vltimam

vltimam quidem figuram afficit. Progreditur deinceps ad alias feries latius patentes, eiusdem generis, quarum fummam fimili modo affignare docet, voce *fummae* fcilicet ea fignificatione accepta, quam hic ftabiliuerat, et qua omnes controuerfiae praefcinduntur.

VIII.

Differtatio de problematibus quibusdam calculi integralis. Auctore G. W. Krafft. p. 238.

Septem diuerfa, ac a fe inuicem non pendentia, calculi integralis problemata, in Differtatione hac foluit Clarif. Auctor. Etfi autem problematum iftorum pleraque, olim iam ab aliis tractata fint, a Perill. nempe *Goldbachio*, Celeberrimisque *Hermanno* atque *Bernoulliis*: nouae tamen funt, et ab hactenus cognitis diuerfae folutiones, hic fuppeditatae, quod quidem inftitutum fructu non carere, fatis perfpicuum eft.

Plura addere fuperuacaneum ducimus. Lectores potius ad commentationem Clarifs. Auctoris ipfam ablegandos effe, putamus.

PHYSICO-

PHYSICO - MATHEMATICA.

I.

De Cochlea Archimedis. Auctore L. Eulero. p. 289. p. 2-7

Inter Machinas aquis hauriendis deſtinatas, cochlea Archimedis, cum ob antiquitatem, tum frequentiſſim m vſum, maxime eſt cognita, vt vix vllus rerum hydraulicarum ſcriptor repeiiatur, qui eius mentionem non faciat. Qua autem ratione aqua hauriatur, et quantae vires ad eam agitandam requirantur, vt data aquae copia ad datam altitudinem eleuetur, nemo fere quisquam determinare eſt conatus, ita vt, ſi ad Theoriam ſpectemus, haec machina nobis adhuc omnino incognita ſit cenſenda. Hoc ſcilicet fatum cum plerisque aliis Machinis commune habet, vt multo ante vſu fuerit recepta, quam ratione explorata. Tantum quidem abeſt, vt reliquarum Machinarum hydraulicarum perfectam habeamus cognitionem, vt potius Theoria vix vltra prima elementa ſit exculta: Verum de Cochlea Archimedis fateri cogimur, nos vix quidquam de ratione, cui actio eius innititur, intelligere. Non ita pridem enim demum vera motus fluidorum Theoria coli eſt coepta, cum antehac ne prima quidem eius principia fuiſſent cognita, et quae adhuc in ea ſunt ſummo ſtudio explorata, vix ſimpliciſſimis Machinis hydraulicis ſolide explicandis ſufficiunt. Cochlea autem Archimedis omnino ad intima huius

ſcien-

ſcientiae penetralia eſt referenda, cum aqua non per tubos fixos, vti in reliquis plerisque Machinis fit, ſed per mobiles promoueatur, cuius motus ratio profundiſſimas inueſtigationes poſtulat. Auctor igitur minime huius Machinae Theoriam perfecte explicaſſe gloriatur, ſed operam dedit, vt eam ex craſſiſſimis tenebris, quibus adhuc erat inuoluta, protraheret, eique aliquam ſaltem lucem affunderet. Difficultas quidem praecipua non tam in principiis motus eſt ſita, quam in ipſius Analyſeos ſubſidiis; totam enim Theoriam ſatis feliciter ad calculum reuocare licuit, cuius autem euolutio vires, quas adhuc ſumus adepti, ſuperare videtur. De modo autem, quo Auctor hoc arduum argumentum pertractauit, vix quidquam afferre licet, quod, niſi vniuerſa Analyſis ſimul explicetur, intelligi queat, vnde lectores ad ipſam Diſſertationem remittimus, vbi complura notatu digna, et quae maxime paradoxa videantur, inuenient. Inprimis autem optandum eſt, vt et alii Geometrae hac occaſione excitentur, ad idem argumentum, quisque ſuo more, ſcrutandum, quo tandem pleniorem huius Machinae Theoriam conſequamur, ex qua ipſa praxis perfici queat.

II.

De aptiſſima figura rotarum dentibus tribuenda. Auct. L. Euler.

pag. 299.

De figura, quam dentibus rotarum dari conueniat, varii Auctores, vario conſilio, ſunt commentati,

 quo-

quoniam plures ſunt circumſtantiae, ex quibus iſta figura determinari poteſt. In hac Diſſertatione duplex finis proponitur, alter vt dum dentes duarum rotarum in ſe inuicem agunt, nulla oriatur frictio, ſed dentes ita alter ſuper altero incedant, quemadmodum circulus ſuper plano volui concipitur, dum cycloidem deſcribit. Alter finis autem eo tendit, vt dum altera rota vniformiter circumuoluitur, alteri rotae etiam motus vniformis imprimatur. Quodſi has ambas conditiones ſimul implere liceret, nullum eſt dubium, quin ea dentium figura, quae hoc praeſtaret, eſſet perfectiſſima. Maximi enim eſt momenti attritum in mutua dentium actione euitare, quandoquidem hoc modo Machina diutiſſime in ſtatu ſuo conſeruari poſſet. Haud minoris autem eſt momenti altera conditio, quoniam in omnibus Machinis vniformitas motus multum ad effectum augendum confert. Oſtendit autem Auctor non ſolum vtrique conditioni ſimul ſatisfieri non poſſe, ſed etiam priorem ſolam nullo modo impleri poſſe. Cum igitur dentium attritus eiusmodi ſit incommodum, quod effugere minime licet, Auctor inquiſitionem ſuam ad ſolam alteram conditionem dirigit, ac dentes ita formare docet, vt, dum motus rotae impellentis eſt vniformis, motus etiam propulſae fiat vniformis. Haec autem nimis videntur ſubtilia, quam vt in praxi vſus inde expectari poſſit.

PHYSICA

PHYSICA.

I.

Alkekengi, calyce profunde diuiſo, fructu ſicco.

II.

Thlaſpi, ſiliculis ellipticis, foliis lanceolato-linearibus, integerrimis.

Auct. Io. Chr. Hebenſtreit. p. 319. et 330.

Cum non ſemper et vbique occaſio ſit Botanicis, nouas in medium proferre plantas, illarumque deſcriptione rem herbariam auctiorem reddere: illi quoque officio ſuo ſatis feciſſe cenſendi ſunt, qui plantas ab aliis deſcriptas iterato examini ſubiiciunt, qui, quod in prioribus deſcriptionibus erratum eſt, corrigunt, quod mancum, ſupplent, qui icones ad viua exemplaria emendatiores dare allaborant. Hoc eſt, quod Cl. Auctor, in vtraque Diſſertatione ſupra allegata, praeſtare conatus eſt.

In priori cum *Feuilletio* ipſi res eſt, qui *Alkekengi* plantam, originis Americanae, in obſeruationibus ſuis Phyſico-Mathematico-Botanicis, primus deſcripſit et delineatam dedit. Hunc noſter vbiuis corrigit et ſupplet Supplet etiam, quae Ill. *Linnaeus* in Spec. Plant. 1753 de hac planta dixerat, et *Alkekengi* proprio ſuo

 generi

generi reſtituere mauult, quam cum Ill. *Linnaeo Atropae*, ſeu *Belladonnae*, adiungere.

Alterius plantae integram hiſtoriam *Hebenſtreitius* contexuit, nouamque eius deſcriptionem et iconem ideo potiſſimum ſuppeditauit, quia Ill. *Linnaeus* in Spec. plant. 1753. illam aſteriſco notauerat, vt aſſolet, ſi plantas, a ſe ipſo non ſufficienter exploratas, aliorum vlteriori perſcrutationi commendat. Hinc laborem ab Auctore exantlatum omnibus rei Botanicae ſtudioſis gratum fore confidimus.

III.

Animalium quorundam quadrupedum deſcriptio. Auctore Io. Geo. Gmelin. p. 338.

Pergimus in obſeruationibus Gmelinianis ad Hiſtoriam animalium facientibus cum Hiſtoriae naturalis amatoribus communicandis: et hoc quidem loco nouem animalium deſcriptiones damus, maximam partem Sibiriae propriorum, quarum pleraeque etiam iconibus illuſtratae ſunt, inſpiciente ſemper Auctore, ad viua animalia, maxima cum cura adumbratis.

Muſtela Zibellina.

Vix Sibiriam ingreſſus erat *Gmelinus*, vix Tobolsk vrbem, metropolin regni, primo limine ſalutauerat, cum Guber-

Gubernator toti prouinciae regendae praefectus, vir integerrimus et si quis alius laboribus nostris litterariis fauens, *Alexius Leonis filius Pleschtschcew*, dulce oculis spectaculum exhiberet, duas Martes Zibellinas, viuas, Petropolin in aulam Imperatoriam mittendas. Non neglexit noster tam opportune sibi oblatam occasionem; animalis externam formam descripsit, et depingi curauit, quae de moribus eius narrari audiuit, litteris consignauit. Plura praestasset, nisi destinatio animalium id prohibuisset. Euentus docuit, optime fecisse illum, quod descriptionem non distulerit, donec perueniret in eas regiones,. quae alias Zibellinarum copia celebres laudantur. Nam postmodum, tota licet peragrata Sibiria, nunquam amplius ipsi obtigit, Mustelam Zibellinam viuam, imo ne mortuam quidem, pelles excipio, videre. Quodsi cui mirum videbitur, notare operae pretium est, haec animalia, quae olim omnia triuia occupabant, nunc tam procul habitare, vt non nisi plurium dierum itinere, a quauis, etiam remotissima, Sibiriae vrbe, perueniatur ad ea loca, quae a venatoribus, Zibellinarum capturae intentis, frequentantur. Quid fecisset *Gmelinus*? Aliquem ex nostris eo mittere, minus tutum videbatur; iubere, vt venatores animalia, quae caperent, integra adferrent, nullius vtilitatis fuisset. Namque homines isti, Deum hominumque iram muneribus placare assueti, nihil sanctum habent, nisi quod lucrum illis affert, neque facile a praefectis vrbium ad aliud quid obligantur. Praeterea mira superstitio inter illos regnat, qua piaculo habent, si, detracta pelle, cadauera Zibellinarum ab impuris manibus attrectarentur. Non secus, ac si propinquorum

 cada-

cadauera efferenda essent, illa suffitu colunt, et cum reuerentia terrae mandant. Sperauimus quidem, haec obstacula nos remoturos esse, si aliquando ipsi in itinere comprehensi in loca, vbi Zibellinae caperentur, incideremus. Sed nec nobis tam felicibus esse contigit, nec *Stellero*, nec *Kraschenínikouio*, etiamsi hi in Kamtschatkam vsque penetrarint, vbi et nunc quoque Zibellinarum insignis copia est. Ecce quomodo factum, vt praeter Zibellinas Tobolii visas, nemo nostrum alias propriis oculis lustrauerit. Ecce rationem, cur Cl. *Gmelinus*, id quod alias solet, partes internas animalis non examinauit. Ast inquies, multa alia neglexit ad pleniorem animalis cognitionem facientia, quae deinceps in itinere supplere potuisset. Non neglexisset sane, nisi reliquas de hoc tam raro animante notitias colligere, mihi sumsissem. Has legat, cui volupe est, in Tomo III. *Collectionis notitiarum ad Historiam Russicam pertinentium* vbi diuersitatem Zibellinarum pro diuersis regionibus, in quibus habitant, et quae mercatoriam pellis cognitionem iuuant, descripsi. Ea quae ad venationem Zibellinarum spectant, *Gmelinus* et ego, cum circa Lenam fluuium versaremur, coniunctim explorare studuimus. Notata lingua Russica digessit interpres *Elias Iachontow*, et postmodum in descriptione Kamtschatkae *Stephanus Kraschenínikow* publicauit. Hic liber lingua Russica conscriptus, omnino multa continet Historiam tam politicam, quam naturalem, inprimis autem Geographiam et mores gentium egregiae illustrantia; quare suademus, vt aliquis, cui otium est, illum in aliquam exteris quoque notam linguam transferre allaboret.

Vacca

Vacca grunniens, villosa, cauda equina.

Fera eſt Calmuccicis Tanguticisque terris indigena, quam pariter apud Excell. Gubernatorem Sibiriae, ſupra laudatum *Pleſchtſcheew*, Tobolii videre licuit. Vah! quam indomitum animal, quod neque leui digito attrectari ſe patiebatur. Etiamſi autem deſcriptio ob hanc rationem ex ſolo externo adſpectu confecta ſit: nihil tamen ad plenam de hoc animali cognitionem deeſſe adparet. Addita poſtmodum nonnulla ex lectione *Rubruquiſii* et ex relatione Calmuccorum hauſta. Haec, vt deſcriptionem a *Gmelino* confectam, mirifice illuſtrant, ſic quoque *Rubuquiſii* fides *Gmelini* opera in tuto eſt, etiamſi poſt illum nemo huius ferae meminerit, cui ideoque Zoologi nullum adhuc locum in ſuis ſcriptis tribuerunt. Generatim in hoc paſſu ſaeculi noſtri felicitas depraedicanda eſt, quo plus, quam omnibus retro ſaeculis, in deſcribendis Aſiae remotioribus regionibus, multi egregii viri elaborarunt. Nunc quae *M. Paulus Venetus*, quae *Ioannes de Plano Carpinus*, quae *Guilielmus Rubruquis*, quae *Baco*, quae *Aſcelinus*, quae *Vincentius Bellouacenſis*, quae *Haito Armenus*, ſaeculis iſtis barbaris et inficetis memoriae tradiderunt, non amplius faſtidienda eſſe edocemur, cum potius occaſio frequens ſit, illorum relata illuſtrare, corrigere, et nouis argumentis confirmata denuo orbi erudito exhibere.

Ouis laticauda.

Huius quidem notitiam dudum habent Hſtoriae animalium ſcriptores, at mancam, et ex parte anilibus fabulis con-

conſpurcatam. Fuerunt, qui ſecundum *Herodotum* L. II. et *Aelianum* L. X. C. 4. ſimiles noſtris oues depictas dedere, caudas tricubitales in vehiculis poſt ſe trahentes. An ergo natura animalia producit, propriae ſuae molis ſuſtinendae imparia? Primum, ſi non feras, tamen nullius poſſeſſionis, omnis generis beſtias fuiſſe, in confeſſo eſt. Quis ergo, antequam in proprietatem dominorum cederent, caudas vehiculis alligauit? Aſt errant, qui haec de noſtris ouibus intelligunt. Nam Auctores ſupra excitati, longis caudis praeditas, a laticaudis, clare diſtinguunt. Alius autem erroris rei ſunt illi, qui, iisdem ducibus, Arabiam ſolam pro patria horum pecorum venditarunt. Nunc enim ſatis conſtat, haberi oues laticaudas per omnem Aſiam auſtralem ad Sinas vſque; ſi vero vltra quinquageſimum tertium aut quartum gradum latitudinis transplantantur, degenerare. Cauda vnica fere corporis pars eſt, quae illas ab aliis ouibus diſtinguit. Sed qui cauda? Maſſa potius eſt adipoſa, nullis oſſibus inſtructa, tantum non immobilis, cuius latitudo longitudinem fere aequat. Septo quodam in duas partes ita diuiditur, vt poſt pellem detractam figura ſua nates humanas referre videatur. Hinc quoque Ruſſi non caudam, ſed *Kurduk*, vocant, vocabulo a Tataris mutuato, a quibus hae oues primum in Ruſſiam illatae ſunt. Adeps huius Maſſae duriuſcula eſt, illi, quae ſternum tegit, non abſimilis; communiter in eſcam cedit, ab aliis autem, qui neſcio quid hircini ſaporis ſentire ſe praetendunt, non aeque appetitam. Naturae ſcrutatores explicent, quem haec maſſa informis atque ignaua animali vſum praeſtet? *M. Paulus Venetus* L. 1. c. 22. de regione Camandu: Arietes

illius

illius regionis non minores ſunt aſinis, caudam ferentes tam longam et latam, vt triginta librarum pondus habeant. *Ionſtonus* de Quadrup. L. II. c. 2. Art 3. Cauda aliquando viginti ſex, aliquando quadraginta libras pendit. Haec nimium exaggerata praedicare non dubito. Quae *Gmelinus* de duplici genere ouis laticaudae aſſerit, altero longiori, altero breuiori cauda inſtructo, me neſcire profiteor, niſi forte *Turcomannicas* oues intellexit, quae quandoque, vt Orenburgo amicus ad me perſcripſit, apud Kirgiſicos Caſaccos, poſtquam in praedam illas acceperunt, venum proſtant. Sunt autem Turcomanni gens, Ruſſice *Truchmenzi* dicta, Turcarum veterum progenies, rapinis adſueta, littus orientale Maris Caſpii, ex auſtro lacus *Aral*, inhabitans. Oues iſtae etiam *Bucharicae* adpellantur, veluti per omnem Buchariam reperiundae. Magnitudine Ruſſicas communes oues vix excedunt. Pedes his breuiores habent. Cauda longa, duos digitos lata, minori denſitate. Lana valde mollis eſt et criſpa, in agnis praecipue, quorum itaque pelles, inprimis recens natorum, aut foetuum partui proximorum, caro pretio emuntur.

Sciurus minor virgatus.

Animalculum praeter Sibiriam in Africa quoque et in America ſeptentrionali reperiundum. Non magnitudine tantum et ſtriis in dorſo nigricantibus, ſed moribus etiam, dum ſub terra habitat, a Sciuro vulgari differt. Conferri poſſunt, quae *Catesby* in Hiſt. nat. Carolinae Vol. II. p 75 cui *Sciurus ſtriatus* dicitur, nec non V. Cl. *Petrus Kalm* in Diario itin. Amer. d. 14 Nouembr. 1748.

 verſ.

verſ. germ. Goetting. p. 462. de hoc Sciuro habent. Vtriusque deſcriptio ex hac noſtra Gmeliniana ſuppletur. Icon quoque a *Gmelino* ſuppeditata poſt Catesbianam, quantumuis perelegantem, vt quae hoc animalculum in naturali magnitudine ſiſtit, non ſuperflua videri poteſt. *Gmelinus* adſcripſit nomen *Furunculi Sciuroidis* a *Meſſerſchmidio* mutuatum. Nos ex ſchedis Meſſerſchmidianis etiam reliqua ad hoc animal pertinentia huc transſcribemus: „ *Dſiracka* Mongolis in Dauuria; *Iiraeku* Buraetis; *Kaeryk*, Koſtim Tataris; *Burunduk* Ruſſis, Indis cis Gangem *Kœthó*; Tunguſis *Ulgucki*; *Dencka* Aſtiaccis ad Ieniſeam; *Kôop* Ket-Aſtiaccis; Narim-Aſtiaccis *Scheépek*; Surgut-Aſtiaccis *Kudſcheger*; Furunculus Sciuroides Sibiricus, υπογαιτης, bucca vtrinque moſchatae nucis capace, ſupine ſtriis quinque nigris, totidemque fuſcis, a nucha ad caudam lyratim pictus, cauda debilius variegata, piloſa plane, prone in cinereo pallens, pedibus vbique pentadactylis, miti genio, nudis manibus tractabilis et domeſtico conuictui facile aſſueſcens. Muſtela Africana Clus. Muſtela forſan Libyca Nieremb. Sciurus getulus Ionſt. „ Hactenus *Meſſerſchmidius*. Obſeruabit prudens lector, et hic quoque extare quaedam a citatis auctoribus, imo a *Gmelino* quoque, praetermiſſa. Vnum eſt, in quo *Gmelinus* *Meſſerſchmidio* contradicit. Notandum autem, non omnibus ſcriptis Meſſerſchmidianis *Gmelinum* in itinere inſtructum fuiſſe. Si haec talia legiſſet, certe diſſenſum ſuum a praedeceſſore in re, quae notam characteriſticam animalis conſtituit, digitorum numerum puta, pluribus illuſtraſſet. Iuuat quidem *Meſcherſchmidium*, quod in icone quoque Cates-

Catesbiana pedes vtrinque pentadactyli repraesentantur. At hic error potest esse pictoris. *Catesby* aeque ac *Kalmius* de numero digitorum silent. E contrario pugnat pro *Gmelino*, quod illustris etiam *Linnaeus* in Syst. nat. ed. nov. p. 64. palmas tetradactylas habet, plantas pentadactylas. Praeterea in numero striarum dissensus regnat. *Linnaeus* l. c. et in Museo Serenifs. Regis Sueciae p. 8. non nisi quatuor numerat, *Gmelinus* cum *Messerschmidio*, imo *Kalmius*, quinque. An forsitan stria in medio dorso non in censum venit, veluti aliis quoque animalibus communis ? Denique *Messerschmidio*, mitem animalculi genium laudanti, contradicit *Kalmius* p. 465. Ex hoc nihil aliud consequitur, quam quod mores Sciuri striati Sibirici, a moribus animalculi congeneris Americani sint diuersi.

Ibex imberbis.

De hoc animali iam diximus nonnulla in Summario Tomi IV. Comment. p. 60. correximusque errorem *Stelleri*, qui illud pro *Caprea Monocerote* vendiderat. Nunc, quod ibi promisimus, plenam eius descriptionem damus. Vnicum deesse videtur, quod praetereundum nobis non est. Ibex hic, pascens in campis, nunquam anticipat gradum, sed semper retrogreditur, neque aliter herbas resecare potest, ob prominentiam labii superioris, quae impedimento foret vltra progredienti, at recedenti gramina colligere opitulatur. *Gmelinus* citat *Herbersteinium*. Locus est in Script. rer. Moscou. p 84. et apud *Ionston*. Tom. II. Ed. *Ruyschii* p. 45. Cornua Sinenses

 emunt,

emunt, ſiue ad vſum medicum, vt nonnulli putant, ſiue ad laternas conficiendas, quas quo artificio fabricare ſoleant, haud ita pridem edocti ſumus a R. P. *d'Incarville* in Comm. Academiae Scient. Pariſienſi ab exteris communicatis Tomo II. p. 350. Figura animalis deficit. Accidit enim *Gmelino*, quod in rebus quotidie nobis obviis, vt illas procraſtinemus, fieri ſolet. Delineatio cum de die in diem differretur, nulla facta eſt; neque in reditu fieri potuit, quia tunc regiones magis ad ſeptemtriones ſitae inuiſendae erant, vbi huius animalis nec voli, nec veſtigium. Nam vltra 54 gradum latitudinis non excurrit. Orientem verſus Obium fluuium raro ſuperat.

Caprea campeſtris gutturoſa.

Haec nulla alia eſſe videtur, quam *caprea flaua*, Sinis *Hoang yang* dicta, de qua apud *Du Haldium* Tomo IV. p. 34. 119. 159. 333. Ed. in forma quadripartita, varia leguntur, non inutilia quidem, aſt Hiſtoriae animalium ſcrutatori minus accommodata. Deſcriptio *Gmeliniana* omnia praeſtat, quae iure expectare poſſis. Namque non in externa tantum forma depingenda verſatur, ſed anatomen quoque gutturis ſiſtit, characterem animalis ingredientis. Fatendum autem, hanc pleniorem futuram fuiſſe, niſi itineris ratio et tempus, quo inſtituta eſt, aeſtiuum id impediuiſſent. Adfert *Gmelinus* nomen, quod *Meſſerſchmidius* iconi animalis a ſe factae adſcripſit. Aſt hoc mancum eſt. In codice Manuſcripto Bibliothecae Academicae, qui *Sibiria perluſtrata* inſcribitur, ita *Meſſerſchmidius*: „ Ohna, Dſeren et Schar-

„ choe-

„ choechtſchi Mongulis in Dauuria; Caprea campeſtris „ hydrophobos gutturoſa, cornibus non ramoſis, circellatim vndulatis, ſinu gemino leuiter inflexis, biſulca, „ aigurinos, ruminans, pelle pilisque capreoli, folliculo „ vmbilicali, at fatuo, praedita; an Caprea Bezoardica „ Maioris, Eph. Nat. Cur. Anni VIII. et Lochneri „ Rariora Muſei Besleriani Tab. X. N. 3. et 4. „ Si habitum corporis ſpectes, ab Ibice imberbi non multum differt. Caro etiam vtriusque boni ſaporis eſt, eiusdem fere, quo *Caprea Plinii*, quae rara eſt in regionibus trans Baikalem lacum ſitis, cis Baikalem autem, vbi *Dſeren* non habitat, abundat.

Cuniculus pumilio ſaliens.

Conferri merentur, quae *Haſſelquiſtius* de hoc animalculo, in Aegypto etiam reperiundo, obſeruauit. Acta Acad. Scient. Suec. 1752. Ed. Germ. p. 129. Ill. *Linnaeus*, qui illud in Syſt. nat. Strahlenbergium ſequutus, Leporum familiae adnumerauerat, nunc in vltima editione libri ſui ſecundum *Haſſelquiſtium*, muribus accenſet. Et certe leporem ſolo capite et auribus aemulatur, toto corporis habitu differt, vt longiori, reſpectu molis, ac tenero valde, imprimis autem pedibus et cauda, ſicut tam ex deſcriptione, quam ex icone, liquet. Nomen *Leporis volantis* apud *Strahlenbergium* illis tantum placere poteſt, qui miracula ſectantur, naturae regulis minus contenti. Nullis enim ad volatum organis inſtructum animal eſt. Melius Ruſſi, qui Leporem ſub terra degentem, земляной заецъ, adpellant, quos imitatus *Gmelinus*, *Messerschmidii* exemplo, *Cuniculum* vocauit. Iucundum, si quod aliud, adspectu animal est, quod nos saepe numero non minus agilitate in cuniculis fodiendis, quam in saliendo, in stuporem coniecit. Formauimus aliquando circulum in campo plano, quinquaginta et amplius hominum, presse sibi inuicem adstantium, animalculum in centro reponentes, quod cum post quaedam tentamina inutiliter facta, effugere desperaret, mox ad cuniculum fodiendum se adplicauit, et breui valde temporis interuallo laborem ita promouit, vt in terram prorsus se occultasset, nisi a nobis mora iniecta fuisset. Cum digitorum numerus ab Ill. *Linnaeo* aliter, ac a *Gmelino*, tradatur, non inutile erit obseruare, quod *Hasselquistius* e contra *Gmelino* assentit, eoque ipso accurationem nostri in obseruationibus faciendis et describendis confirmat.

Cuniculus insigniter caudatus.

Animal campis Mongolensibus, qua sub Russorum dominatione sunt, proprium, quod habitu corporis et colore pilorum leporem exacte refert, cauda tantum et moribus ad Cuniculum magis accedentibus differt. Hac similitudine inducti Mongolenses vocabulum *Tolai*, quo leporem vulgarem designant, huic quoque adplicant. Russi autem istarum regionum, ad diuersitatem allegatam respicientes, Mongolicum nomen retinere malunt, quam suum dare. Haec notare sufficiat; reliqua, quae ex ipsa descriptione patescunt, superuacaneum foret huc transscribere.

Isatis

Isatis, Russis Pesez.

Agmen animalium hoc loco exhibitorum claudit *Isatis*, non ignotum quidem Zoologis animal, quia Norvagiam quoque et Lapponiam inhabitat, at a nemine adhuc descriptum. Putarunt forsitan viri docti, dum vulgus illud vulpibus accenset, non opus esse singulari descriptione; sufficere, si colorem pilorum indicent. At errasse illos, *Gmelinus* luculenta expositione eorum, quae de hoc animali obseruauit, aut narrari audiuit, demonstrat. Recte Russi et omnes gentes alienigenae, maris glacialis accolae, nomen ipsi a vulpe diuersum indidere. Russicum *Pesez* ex Slauonico *Pes*, quod *canem* denotat, dignitatem rei minuendo, confectum esse videtur, ob faciem fortassis, caninam magis, quam vulpinam; reliquae enim diuersitates Isatidis a vulpe, a *Gmelino* enumeratae, non ita in sensus cadunt, fatendum potius, externum corporis habitum, imo et latratum, a vulpe dissimilem non esse. Venatores Sibirici Isatides etiam inter se, candidas a cinereis, specie differre asserunt. Sane si certum esset, quod nonnulli volunt, a candidis semper candidas, et a cinereis semper cinereas, nisi vtrarumque mixtio accedat, gigni, nullus dubitationi locus relinqueretur: ast fuere, qui asseuerarunt, numquam omnem prolem vnius matris eiusdem coloris obseruari, hoc vero certum esse, catulos cinereos inter candidos rariores conspici; et haec ratio est, cur *Gmelinus* nihil certi de hac diuersitate statuit, imo magis iis, qui diuersitatem pilorum pro sola varietate habent, fauere videtur. Dum in partes animalis internas auctor inquirit,

de

de vſu folliculorum, fortem odorem ſpirantium, tanquam in tranſcurſu, quaedam diſputat, lectori, vt opinor, non ingrata futura. Apparet illum emendare voluiſſe, quae *Io. Raius* in Synopſi Quadrup. de eadem materia tradidit. Conſtat autem tradidiſſe neminem illo melius. Sicque *Gmelini* opera magni aeſtimanda, ſi vſum folliculorum certius, ac alii, demonſtrauit. Reſtat verbulum dicere de nomine *Iſatidis*, quod ex *Ionſtono* ſe deſumſiſſe *Gmelinus.* ait. Verum quidem, ſi *Ionſtonum* conſulimus, nomen hoc, tamquam vulpis ſpeciem indigitaturum, ibi reperiri: at eodem loco etiam vulpes albae memorantur, in Suecia, Noruagia et circa Nouam Zemlam reperiundae, quae tamen nullae aliae ſunt, quam Iſatides a *Gmelino* deſcriptae. Praeterea non liquet, vnde *Ionſtonus* hoc nomen deſumſit. Hoc certum eſt, ab antiquitate illud abhorrere, quae non niſi plantam ſub hoc nomine cognitam habet. Quod ſi ergo dubitauerint alii, *Gmelinum* in hoc paſſu ſequi, per nos licet. Contra auctoris ſententiam nomen immutare duximus nefas.

IV.

Obſeruationes Meteorologicae Petropoli factae. Auctore I. A. Braun. p. 373.

Non neceſſarium videtur, de his aliquid monere, praeterquam, quod Cl. Auctor proprias ſuas obſeruationes communicet, ex eo tempore, quo Petropolin

polin aduenit inſtitutas, cum in praecedente Tomo Commentariorum non niſi alienas dederit, ex tabulario Academico ſecum communicatas.

Accedunt obſeruationes Barometricae et Thermometricae itemque magneticae a *R. P. Amioto* S. I. Pekini habitae, et cum Petropolitanis, quoad magneticas etiam cum Sibiricis, comparatae.

V. et VI.

Obſeruationes Meteorologicae Tubingenſes annorum 1750. 1751. et 1752. Auct. Geo. Wolffg. Kraft. p. 400. et 407.

Praeter accurationem, qua hae, vt omnes aliae a Cel. Krafftio inſtitutae obſeruationes, ſe commendant, notari merentur vtilitates, quas per octennium ex ſuis laboribus hauſiſſe Auctor profitetur. Namque ex barometricis obſeruationibus inter ſe comparatis patet loci eleuatio ſupra Oceanum, quae, ſi de multis locis aeque exacte conſtaret, viam ſterneret ad figuram telluris particularem ac ad atmoſphaerae naturam melius cognoſcendam. Ex Thermometricis autem calor medius quouis menſe expectandus innoteſcit, tam plantis educandis, quam aliis rebus oeconomicis vtilis.

ASTRONOMICA.

I.

Solutio noui cuiusdam problematis Aſtronomici, in vſum praecipue nauticum propoſiti, in Diſſertatione de progreſſu artis nauticae, in determinanda Maris et Longitudine, et Latitudine. Auctore A. N. Griſchow. p. 417.

Indicauerat Clariſs. Auctor, in ſermone, *de artis nauticae progreſſu, in longitudine et latitudine Maris determinandis*, quem A. 1751. d. 6. Septembris, in publico Academiae Conuentu, praelegit, defectus quosdam, quibus vulgares Methodi, quarum ope vtuntur nautae, ad tempus determinandum, laborant. De ſecuriori itaque Methodo inuenienda ſollicitus, in aliquam incidit, quae erroribus, qui a conſuetis Methodis timendi ſunt, fere immunis eſt. Iubet nempe, vt duae eligantur fixae, eandem circiter habentes altitudinem, altera ortum verſus, altera ad occaſum, a Meridiano diſtans, harumque vno eodemque inſtrumento ſucceſſiue obſeruentur altitudines, notato, quod inter vtramque obſeruationem intercedit, temporis interuallo. Peractis his, detectaque ſic per immediatam obſeruationem, ſtellarum obſeruatarum differentia altitudinum, magna exinde cum ſecuritate, calculi non admodum laborioſi ope, tempus deduci poteſt.

Ia

In ſermone ſupra indicato, mentionem huius Methodi paucis iniecerat Clariſs. Auctor, in praeſenti autem diſſertatione, id iam agit, vt calculi, cuius hic opus eſt, inſtituendi modum data opera exponat, reliquasque, quae obſeruandae ſunt nautae, qui Methodum hanc in vſum vocare cupit, cautelas, explicet.

Recenſentur primum Methodi huius commoda, quae huc fere reducuntur, quod nihil timendum ſit, neque a refractionum diuerſitate ac inconſtantia, neque ab Horizontis ſenſibilis inclinatione, neque tandem ab erroribus, in differentia altitudinum, aut obſeruatoris, aut inſtrumenti vitio, commiſſis. Deinde ipſa calculi inſtituendi ratio luculenter exponitur, cuius, qui ſibi formare voluerint ideam, ad legendam ipſam diſſertationem ablegandi ſunt. Pendet autem hic calculus, atque cognitam ſupponit Poli eleuationem, vnde, cum minus ſecura eſſe poſſit huius determinatio, timendi locus eſſe poteſt, ne in hoc calculi elemento commiſſi errores, magnos in temporis quoque determinatione inde deducta procreent errores. Tollit autem hoc dubium penitus Clar. Auctor, verſus diſſertationis finem, vbi commonſtrat, errores in Poli altitudine tantos, qui euitari facile poſſunt, vix ſenſibilem in tempore inde deducto procreare errorem, modo rite eligantur Stellae, in quibus obſeruatio inſtituatur. Ne itaque quid habeant, quod deſiderent nautae, peculiari disquiſitione, regulas, quas ſequi oportet, in eligendis Stellis, vt temporis determinatio, ex differentia altitudinum eruenda, ab errore in eleuatione Poli admiſſo ſit tutiſſima, conſtituit.

II.

Errorem Tabularum Lunarium ex Eclipſibus Solis — definiendorum disquiſitio Auctore A. N. Griſchow. p. 431.

Magni momenti ſemper viſae ſunt Aſtronomis, Eclipſium tam lunarium, quam ſolarium obſeruationes, atque pro emendanda ſatellitis noſtri Theoria, eruendisque tabularum hactenus conſtructarum erroribus, vtiliſſimae. Praetulerunt autem, pro obtinendo hoc ſcopo, non ſine ſat praegnantibus rationibus, ſolares Eclipſes iis, quas Luna patitur; priorum enim potiora momenta longe exactius, quam poſteriorum, obſeruare in poteſtate eſt.

Praecipuum quod Clar. Auctor exigere ſibi propoſuit negotium, in hac diſſertione eo redit, vt ex Eclipſibus ſolaribus, d. 25. Iulii A. 1748. et d. 8. Ian. ſt. n. 1750. ſolerter a ſe obſeruatis, errores, quibus tabulae Halleianae obnoxiae ſunt, disquirat. Generatim itaque primum, ad quae praecipue attendendum ſit in inſtituendis Eclipſium ſolarium obſeruationibus, vt emendandis tabulis aptae euadant, exponit atque commonſtrat, accuratam initii et finis Eclipſeos obſeruationem, vna cum exacta diametri Lunae apparentis determinatione, vtramque hic facere paginam. Deliquia autem Solis minora, aut ea, vbi minor pars Solis a Luna obtegitur, maioribus pro hoc ſcopo praeferenda eſſe, demonſtrat, cum errores in diametro Lunae, aut Eclipſeos duratione forte commiſſi, in longitudine et latitudine Lunae, ex obſeruatione per computum deducta, minores tum procreet errores.

Ipſum

Ipſum deinde ſibi propoſitum negotium exſequitur, deducendo ex obſeruationibus longitudines atque latitudines Lunae, quas in vtriusque Eclipſeos initio ac fine, vere habuit, hasque cum longitudinibus atque latitudinibus, ad eadem momenta, ex tabulis Halleianis deductis, confert. Deprehendit ſic, omnino ſenſibiliter a coelo aberrare ſaepius dictas tabulas, falſaque ſuppeditare Lunae loca.

Difficile eſt, niſi plures obſeruationes aliae, debita accuratione inſtitutae, in auxilium vocentur, extricare, quae praecipue tabularum Halleii elementa peccent, erroresque iſtos progignant. Solerti interim inſtituta diſquiſitione, eo pertingit tandem auctor, vt oſtendat, pro reducendis tabulis Halleianis, ad exactum cum coelo conſenſum, opus eſſe, vt Parallaxis Lunae horiz. Halleiana aliquantum augeatur, locus vero nodi Lunae medius ex iisdem his tabulis deductus, aliquot minutis promoueatur, quantae vero elementis Halleianis praeciſe adhibendae ſint correctiones, hactenus cum certitudine determinare non audet.

III.

Obſeruationes Aſtronomicae, ſub finem anni Lipſiae 1751. habitae. a. Godofr. Heinſio p. 467.

Obſeruatae autem ſunt Occultatio Iouis partialis a Luna, quae d. 29 Decembris ſt. n. anni ſupradicti accidit, et Eclipſes Satellitum Iouis d. 27 Decembris ſt. n de quibus in compendio quaedam dicere, ſuperuacaneum foret.

IV.

IV.
Obſeruationes Aſtronomicae Pekini habitae a RR. PP. Gallis S. I. p. 473.

Hae potiſſimum debentur R. P. Antonii Gaubil, Academiae noſtrae Socii, induſtriae ac humanitati, quibus continentur

1.) Mercurius in Sole viſus 1753. d. 6. Maii.

2.) Eclipſis Lunae 1754. d. 1. Octobris.

3) Obſeruationes Lyrae 1754. M. Nouembri.

4.) Obſeruationes Capellae 1755. M. Februario.

5) Stellae Polaris 1755. M. Decembri.

6.) Antiquae Polaris Sinicae 1756.

7.) Obſeruationes variae 1756.

8.) Tranſitus Mercurii per Solem 1756. d. 7. Nov.

9.) Apparentes altitudines ſtellarum aliquot 1756.

10.) Satellitum Iouis obſeruationes 1756.

Quo rariores ſunt ex tam longinquis terrae regionibus allatae obſeruationes, eo gratiores has propoſitas Aſtronomiae cultoribus fore putamus; potiſſimum, cum eaedem quoque tam celebritate nominis R. Gaubilii, quam ſua ipſarummet accuratione, ſe commendent.

Denique

Denique hoc monemus, quod, promissi, in Summario Tomi IV. horum Comm. p. 49. facti, memores „ iconem Muris aquatici Moschum redolentis fieri curauimus; quae, quamquam non ad viuum animal, vt nobis mens erat, sed ad exuuias infarctas, Orenburgo ad nos missas, expressa sit: satis tamen recte se habet, et, quod spondere audemus, figuram animalis externam, magnitudinemque eius naturalem, exacte refert. Haec aeri incisa reliquis iconibus atque figuris huius Tomi subiungitur, iconi Sarrazinianae in Comment. Acad. Scient. Parif. 1725. exhibitae, quae omnino has secundas curas postulare videbatur, „ substituenda. Tab. XIII.

Monendus quoque est lector, imo bibliopegus, ne sub initium Classis Astronomicae, dum *custodem*, vt aiunt typothetae „ INVE - obseruabit, et subsequitur SOLVTIO, aliquid deesse putet. Primum constitutum erat, dissertationem Cl. *Grischouii*, quae inscribitur: Inuestigatio Parallaxeos Lunae, eo loco exhibere, quam deinde rogatu Auctoris sequenti Tomo reseruauimus. Ordo in numeris paginarum nullam iacturam factam esse confirmat.

MATHEMATICA.

DEMONSTRATIO
THEOREMATIS FERMATIANI
OMNEM NVMERVM PRIMVM FORMAE $4n+1$ ESSE SVMMAM DVORVM QVADRATORVM.

AVCTORE *LEONARDO EVLERO*

§. 1.

Cum nuper eos essem contemplatus numeros, qui ex additione duorum quadratorum oriuntur, plures demonstraui proprietates, quibus tales numeri sunt praediti: neque tamen meas meditationes eo vsque perducere licuit, vt huius theorematis, quod Fermatius olim Geometris demonstrandum proposuit, veritatem solide ostendere potuissem. Tentamen tamen demonstrationis tum exposui, vnde certitudo huius theorematis multo luculentius elucet, etiamsi criteriis rigidae demonstrationis destituatur: neque dubitaui, quin iisdem vestigiis insistendo tandem demonstratio desiderata facilius obtineri possit; quod quidem ex eo tempore mihi ipsi vsu venit, ita, vt tentamen illud, si alia quaedam leuis consideratio accedat, in rigidam demonstrationem abeat. Nihil quidem noui in hac re me praestitisse gloriari possum, cum ipse Fermatius iam demonstrationem huius theorematis elicuisse se profiteatur; verum, quod eam nusquam publici iuris fecit, eius iactura perinde ac plurimorum aliorum egregiorum huius viri inuentorum efficit, vt, quae nunc demum de his deperditis rebus quasi recuperamus, ea non immerito pro nouis inuentis habeantur. Cum enim nemo vnquam tam feliciter in arcana numerorum penetrauerit, quam Fermatius, omnis opera in hac fcientia vlterius excolenda fruftra impendi videtur, nifi ante, quae ab hoc excellenti Viro iam fuerunt inueftigata, quafi de nouo in lucem protrahantur. Etfi enim poft eum plures Viri docti in hoc ftudiorum genere vires fuas exercuerunt, nihil tamen plerumque funt confecuti, quod cum ingenio huius Viri comparari poffet.

§. 2. Vt autem demonftrationem theorematis, quod hic confidero, inftituam, duas propofitiones in fubfidium vocari oportet, quarum demonftrationem iam alibi dedi. Altera eft, quod omnes numeri, qui funt diuifores fummae duorum quadratorum inter fe primorum, ipfi fint fummae duorum quadratorum; fic fi a et b fint numeri inter fe primi, atque numeri ex iis formati $aa + bb$ diuifor fit d, erit quoque d fumma duorum quadratorum: huius theorematis demonftrationem dedi in fcripto ante memorato, quo numeros, qui funt duorum quadratorum fummae, fum contemplatus. Altera propofitio, qua demonftratio fequens indiget, ita fe habet: fi p fit numerus primus, atque a et b numeri quicunque per p non diuifibiles, erit femper $a^{p-1} - b^{p-1}$ per numerum primum p diuifibilis: demonftrationem huius rei iam dudum in Comment. Acad. Petrop. Tom. VIII dedi.

§. 3. Quodfi iam $4n + 1$ fit numerus primus, per eum omnes numeri in hac forma $a^{4n} - b^{4n}$ contenti erunt diuifibiles, fiquidem neuter numerorum a et b feorfim per $4n + 1$ fuerit diuifibilis. Quare fi a et b fint numeri minores, quam $4n + 1$, (cyphra

tamen

tamen excepta), numerus inde formatus $a^{4n} - b^{4n}$ fine vlla limitatione per numerum primum propofitum $4n + 1$ erit diuifibilis. Cum autem $a^{4n} + b^{4n}$ fit productum horum factorum $a^{2n} + b^{2n}$ et $a^{2n} - b^{2n}$, neceffe eft, vt alteruter horum factorum fit per $4n + 1$ diuifibilis; fieri enim nequit, vt vel neuter, vel vterque fimul diuiforem habeat $4n + 1$. Quodfi iam demonftrari poffet, dari cafus, quibus forma $a^{2n} + b^{2n}$ fit diuifibilis per $4n + 1$, quoniam $a^{2n} + b^{2n}$, ob exponentem $2n$ parem, eft fumma duorum quadratorum, quorum neutrum feorfim per $4n + 1$ diuifibile exiftit, inde fequeretur, hunc numerum $4n + 1$ effe fummam duorum quadratorum.

§. 4. Verum fumma $a^{2n} + b^{2n}$ toties erit per $4n + 1$ diuifibilis, quoties differentia $a^{2n} - b^{2n}$ per eundem numerum non eft diuifibilis. Quare qui negauerit, numerum primum $4n + 1$ effe fummam duorum quadratorum, is negare cogitur, vllum numerum huius formae $a^{2n} + b^{2n}$ per $4n + 1$ effe diuifibilem: eundem propterea affirmare oportet, omnes numeros in hac forma $a^{2n} - b^{2n}$ contentos per $4n + 1$ effe diuifibiles; fiquidem neque a, neque b per $4n + 1$ fit diuifibile. Quamobrem mihi hic demonftrandum eft, non omnes numeros in forma $a^{2n} - b^{2n}$ contentos per $4n + 1$ effe diuifibiles; hoc enim fi praeftitero, certum erit, dari cafus, feu numeros pro a et b fubftituendos, quibus forma $a^{2n} - b^{2n}$ non fit per $4n + 1$ diuifibilis; illis ergo cafibus altera forma $a^{2n} + b^{2n}$ neceffario per $4n + 1$ erit diuifibilis: vnde cum a^{2n} et b^{2n} fint numeri quadrati, conficietur id, quod proponitur,

A 3 fcilicet

ſcilicet numerum $4n+1$ eſſe ſummam duorum quadratorum.

§. 5. Vt igitur demonſtrem, non omnes numeros in hac forma $a^{2n}-b^{2n}$ contentos, ſeu non omnes differentias inter binas poteſtates dignitatis $2n$ eſſe per $4n+1$ diuiſibiles, conſiderabo ſeriem harum poteſtatum ab vnitate vſque ad eam, quae a radice $4n$ formatur.

$$1,\ 2^{2n},\ 3^{2n},\ 4^{2n},\ 5^{2n},\ 6^{2n}.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4n)^{2n}$$

ac iam dico, non omnes differentias inter binos terminos huius ſeriei eſſe per $4n+1$ diuiſibiles. Si enim ſingulae differentiae primae

$$2^{2n}-1;\ 3^{2n}-2^{2n};\ 4^{2n}-3^{2n};\ 5^{2n}-4^{2n};\ .\ .\ (4n)^{2n}-(4n-1)^{2n}$$

per $4n+1$ eſſent diuiſibiles, etiam differentiae huius progreſſionis, quae ſunt differentiae ſecundae illius ſeriei per $4n+1$ eſſent diuiſibiles: atque ob eandem rationem differentiae tertiae, quartae, quintae etc. omnes forent per $4n+1$ diuiſibiles; ac denique etiam differentiae ordinis $2n$, quae ſunt, vt conſtat, omnes inter ſe aequales. Differentiae autem ordinis $2n$ ſunt $= 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 2n$, quae ergo per numerum primum $4n+1$ non ſunt diuiſibiles, ex quo viciſſim ſequitur, ne omnes quidem differentias primas per $4n+1$ eſſe diuiſibiles.

§. 6. Quo vis huius demonſtrationis melius perſpiciatur, notandum eſt, differentiam ordinis $2n$ produci ex $2n+1$ terminis ſeriei propoſitae, qui ſi ab initio capiantur, omnes ita ſunt comparati, vt binorum quorumuis differentiae per $4n+1$ diuiſibiles eſſe debeant, ſi theorematis veritas negetur. Sin autem plures

plures termini ad hanc differentiam vltimam constituendam concurrerent, iique vltra terminum $(4n)^{2n}$ progrederentur, quoniam differentiae a termino sequente $(4n+1)^{2n}$ ortae ad enunciata theorematis non pertinent, demonstratio nullam vim retineret. Hinc autem, quod differentia vltima, quam sumus contemplati, tantum ab $2n+1$ terminis pendet, conclusio, quam inde deduximus, omnino est legitima; indeque sequitur, dari differentias primas, veluti $a^{2n}-(a-1)^{2n}$, quae non sint per $4n+1$ diuisibiles, atque ita quidem, vt a non sit maior, quam $2n+1$. Hinc autem porro recte infertur, summam $a^{2n}+(a-1)^{2n}$, ideoque summam duorum quadratorum per $4n+1$ necessario esse diuisibilem: ideoque numerum primum $4n+1$ summam esse duorum quadratorum.

§. 7. Quoniam differentia ordinis $2n$ ab $2n+1$ terminis seriei potestatum pendet, totidem tantum ab initio captos consideremus

$$1;\ 2^{2n};\ 3^{2n};\ 4^{2n};\ 5^{2n};\ 6^{2n} \ldots (2n)^{2n};\ (2n+1)^{2n}$$

vnde differentiae primae erunt: $2^{2n}-1$; $3^{2n}-2^{2n}$; $4^{2n}-3^{2n}$; $5^{2n}-4^{2n}$; $\ldots\ldots (2n+1)^{2n}-(2n)^{2n}$ cuius progressionis terminorum numerus est $=2n$. Ex demonstratione itaque praecedente patet, non omnes terminos huius progressionis differentiarum esse per numerum primum $4n+1$ diuisibiles; neque tamen hinc intelligimus, quot et quinam sint illi termini, per $4n+1$ non diuisibiles. Ad demonstrationem enim sufficit, si vel vnicus terminus, quisquis ille sit, per $4n+1$ non sit diuisibilis. Quodsi autem casus speciales euoluamus, quibus $4n+1$ est numerus

primus,

primus, ex differentiis istis, quarum numerus est $= 2n$, reperiemus, semper semissem esse per $4n+1$ diuisibilem, alterum vero semissem non diuisibilem: quae obseruatio etsi ad vim demonstrationis non spectat, tamen ad eam illustrandam non parum confert, quare aliquot casus speciales ad examen reuocasse iuuabit.

§. 8. Minimus numerus primus formae $4n+1$ est $= 5$, qui oritur, si $n = 1$; vnde duae habebuntur differentiae 2^2-1 et 3^2-2^2, quarum prior non est diuisibilis per 5, altera vero est diuisibilis. Pro reliquis casibus vtamur signo d ad eas differentias indicandas, quae sunt diuisibiles, at signo o eas notemus, quae non sunt diuisibiles, quae signa differentiis pro quouis casu, subscribamus

$4n+1$	Differentiae							
13	2^6-1;	3^6-2^6;	4^6-3^6;	5^6-4^6;	6^6-5^6;	7^6-6^6:		
	o	o	d	o	d	d		
17	2^8-1;	3^8-2^8;	4^8-3^8;	5^8-4^8;	6^8-5^8;	7^8-6^8;	8^8-7^8;	9^8-8^8
	d	o	o	o	d	d	o	d
29	$2^{14}-1$;	$3^{14}-2^{14}$;	$4^{14}-3^{14}$;	$5^{14}-4^{14}$;	$6^{14}-5^{14}$;	$7^{14}-6^{14}$;	$8^{14}-7^{14}$;	$9^{14}-8^{14}$;
	o	d	o	d	d	d	o	o
	$10^{14}-9^{14}$;	$11^{14}-10^{14}$;	$12^{14}-11^{14}$;	$13^{14}-12^{14}$;	$14^{14}-13^{14}$;	$15^{14}-14^{14}$		
	o	d	d	o	o	d		

Hinc patet, terminos diuisibiles et non diuisibiles nulla certa lege contineri, etiamsi vtrique sint multitudine pares: tamen per se est perspicuum, vltimum terminum $(2n+1)^{2n} - 2n^{2n}$ semper per $4n+1$ esse diuisibilem, quia factorem habet $(2n+1)^2 - 4nn = 4n+1$: at de reliquis nihil certi statui potest.

§. 9.

§. 9. Porro quoque ad vim demonſtrationis penitius perſpiciendam notari oportet, demonſtrationem tum ſolum locum habere, ſi numerus $4n+1$ ſit primus; prorſus vti natura theorematis poſtulat. Nam ſi $4n+1$ non eſſet numerus primus, neque de eo affirmari poſſet, quod ſit ſumma duorum quadratorum, neque forma $a^{4n}-b^{4n}$ per eum eſſet neceſſario diuiſibilis. Quin etiam vltima concluſio foret falſa, qua pronunciauimus, differentias illas ordinis $2n$, quae ſunt $= 1. 2. 3. 4. \ldots\ldots 2n$, non eſſe per $4n+1$ diuiſibiles. Si enim $4n+1$ non eſſet numerus primus, ſed factores haberet, qui eſſent minores, quam $2n$, tum vtique productum $1. 2. 3. 4. \ldots\ldots 2n$ hos factores contineret, foretque idcirco per $4n+1$ diuiſibile. At ſi $4n+1$ eſt numerus primus, tum demum affirmare licet, productum $1. 2. 3. 4. \ldots\ldots 2n$ plane non eſſe per $4n+1$ diuiſibile: quia hoc productum per nullos alios numeros diuidi poteſt, niſi qui tanquam factores in illud ingrediuntur.

§. 10. Cum denique demonſtratio tradita hoc nitatur fundamento, quod ſeriei poteſtatum $1, 2^{2n}, 3^{2n}, 4^{2n}$, etc. differentiae ordinis $2n$ ſint conſtantes, omnesque $= 1. 2. 3. 4. \ldots\ldots 2n$, hoc vberius explicandum videtur, etſi paſſim in libris analyticorum ſolide expoſitum reperitur. Primum igitur notandum eſt, ſi ſeriei cuiuscunque terminus generalis, ſeu is qui exponenti indefinito x reſpondet, ſit $= Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + Ex^{m-4} +$ etc. hanc ſeriem ad gradum m referri, quia m eſt exponens maximae poteſtatis ipſius x. Deinde ſi hic terminus generalis a ſequente $A(x+1)^m + B(x+1)^{m-1} + C(x+1)^{m-2} +$

etc. ſubtrahatur, prodibit terminus generalis ſeriei differentiarum, in quo exponens ſummae poteſtatis ipſius x erit $= m - 1$, ideoque ſeries differentiarum ad gradum inferiorem $m - 1$ pertinebit. Pari modo ex termino generali ſeriei differentiarum primarum colligetur terminus generalis ſeriei differentiarum ſecundarum, qui igitur denuo ad gradum depreſſiorem $m - 2$ pertinebit.

§. 11. Ita ſi ſeries propoſita ad gradum m referatur, ſeries differentiarum primarum, ad gradum $m - 1$ referetur; ſeries porro differentiarum ſecundarum ad gradum $m - 2$; ſeries differentiarum tertiarum ad gradum $m - 3$; ſeries differentiarum quartarum ad gradum $m - 4$; et in genere ſeries differentiarum ordinis n ad gradum $m - n$ pertinebit. Vnde ſeries differentiarum ordinis m ad gradum $m - m = o$ perueniet, eiusque ergo terminus generalis, quia ſumma ipſius x poteſtas eſt $= x^o = 1$, erit quantitas conſtans, ideoque omnes differentiae ordinis m inter ſe erunt aequales. Hinc ſerierum primi gradus, quarum terminus generalis eſt $= Ax + B$, iam differentiae primae ſunt inter ſe aequales: ſerierum autem ſecundi gradus, quae hoc termino generali $Ax^2 + Bx + C$ continentur, differentiae ſecundae ſunt aequales, et ita porro.

§. 12. Quodſi ergo ſeriem quamcunque poteſtatum conſideremus

$$1, 2^m, 3^m, 4^m, 5^m, 6^m, 7^m, 8^m, \text{etc.}$$

cuius terminus generalis eſt $= x^m$, ſeu is, qui indici x reſpondet, ſeries differentiarum ordinis m ex terminis inter ſe aequalibus conſtabit. At ſeriei differentiarum primarum terminus generalis erit $= (x+1)^m - x^m$; qui a ſequente

sequente $(x+2)^m-(x+1)^m$ subtractus dabit terminum generalem seriei differentiarum secundarum, qui erit $=(x+2)^m-2(x+1)^m+x^m$. Hinc porro seriei differentiarum tertiarum erit terminus generalis $=(x+3)^m-3(x+2)^m+3(x+1)^m-x^m$; ac tandem seriei differentiarum ordinis m concluditur terminus generalis $=(x+m)^m-m(x+m-1)^m+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}(x+m-2)^m-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}(x+m-3)^m+$ etc. qui cum sit quantitas constans, idem erit quicunque numerus pro x substituatur, erit ergo

vel $=m^m-m(m-1)^m+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}(m-2)^m-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}(m-3)^m$ + etc.

vel $=(m+1)^m-m.\ m^m+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}(m-1)^m-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}(m-2)^m$ + etc.

vbi in forma priori posuimus $x=0$, in posteriori $x=1$.

§. 13. Euoluamus iam casus huius seriei speciales et a potestatibus minimis ad altiores ascendamus: ac posito primo $m=1$, seriei $1, 2, 3, 4, 5, 6$, etc. terminus generalis differentiarum primarum erit $=1^1-1.0^1=1$; vel $=2^1-1.1^1=1$. Si $m=2$, seriei $1; 2^2; 3^2; 4^2; 5^2$; etc. differentiae secundae sunt vel $2^2-2.1^2$, vel $3^2-2.2^2+1.1^2$; at est $2^2-2.1^2=2(2^1-1.1^1)$, vnde hae differentiae secundae sunt $=2.1$. Sit $m=3$, et seriei $1, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3$, etc. differentiae tertiae erunt vel $=3^3-3.2^3+3.1^3$, vel $4^3-3.3^3+3.2^3-1.1^3$; at $3^3-3.2^3+3.1^3=3(3^2-2.2^2+1.1^2)=3.2.1$, quia ex casu praecedente est $3^2-2.2^2+1.1^2=2.1$. Simili modo si $m=4$ seriei $1, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4$,

 etc.

etc. differentiae quartae erunt vel $4^4 - 4.3^4 + 6.2^4 - 4.1^4$; vel $5^4 - 4.4^4 + 6.3^4 - 4.2^4 + 1.1^4$. At eſt $4^4 - 4.3^4 + 6.2^4 - 4.1^4 = 4(4^3 - 3.3^3 + 3.2^3 - 1.1^3) = 4.3.2.1$.

§. 14. Quo hic progreſſus melius perſpiciatur, ſint ſeriei $1, 2^m, 3^m, 4^m, 5^m$ etc. differentiae ordinis $m = P$; ſeriei $1; 2^{m+1}; 3^{m+1}; 4^{m+1}; 5^{m+1}$ etc. differentiae ordinis $m+1 = Q$. erit $P = (m+1)^m - m.m^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-1)^m - \frac{m(m-2)(m-1)}{1.2.3}(m-2)^m +$ etc. $Q = (m+1)^{m+1} - (m+1)m^{m+1} + \frac{(m+1)m}{1.2}(m-1)^{m+1} - \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}(m-1)^{m+1} +$ etc. Vbi P ex forma poſteriori, at Q ex forma priori expreſſimus. Hic primo patet, in vtraque expreſſione parem eſſe terminorum numerum, et ſingulos terminos expreſſionis P eſſe ad ſingulos terminos expreſſionis Q, vti 1 ad $m+1$. Namque eſt

$$(m+1)^m : (m+1)^{m+1} = 1 : m+1;$$
$$m.m^m : (m+1)m^{m+1} = 1 : m+1;$$
$$\frac{m(m-1)}{1.2}(m-1)^m : \frac{(m+1)m}{1.2}(m-1)^{m+1} = 1 : m+1;$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(m-2)^m : \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}(m-2)^{m+1} = 1 : m+1;$$

etc.

Hanc ob rem erit $P : Q = 1 : m+1$, ideoque $Q = (m+1)P$.

§. 15. Hinc ergo patet fore

ſeriei	Differentias
$1; 2; 3; 4; 5;$ etc.	primas $= 1$
$1; 2^2; 3^2; 4^2; 5^2;$ etc.	ſecundas $= 1.2$

$1; 2^3;$

$1;\ 2^3;\ 3^3;\ 4^3;\ 5^3;$ etc. tertias $= 1.\ 2.\ 3$
$1:\ 2^4;\ 3^4;\ 4^4;\ 5^4;$ etc. quartas $= 1.\ 2.\ 3.\ 4$

$1;\ 2^m;\ 3^m;\ 4^m;\ 5^m;$ etc. ordinis $m = 1.\ 2.\ 3\ \ldots\ m,$
ergo
$1;\ 2^{2n};\ 3^{2n};\ 4^{2n}\ 5^{2n};$ etc. ordinis $2n = 1.\ 2.\ 3\ldots\ 2n.$
Atque ita quoque demonſtrauimus, ſeriei poteſtatum $1;\ 2^{2n};\ 3^{2n};\ 4^{2n};\ 5^{2n}$ etc. differentias ordinis $2n$ non ſolum eſſe conſtantes, ſed etiam aequari producto $1.\ 2.\ 3\ \ldots\ .\ 2n,$ vti in demonſtratione theorematis propoſiti aſſumſimus.

THEOREMA 1.

1. Ex ſerie quadratorum 1, 4, 9, 16, 25, etc. nulli numeri per numerum primum p ſunt diuiſibiles, niſi quorum radices ſunt per eundem numerum p diuiſibiles.

DEMONSTRATIO.

Si enim quispiam numerus quadratus aa fuerit per numerum primum p diuiſibilis, quia ex factoribus a et a conſtat, neceſſe eſt, vt alteruter factor per p ſit diuiſibilis, quare numerus quadratus aa per numerum primum p diuiſibilis eſſe nequit, niſi eius radix a ſit diuiſibilis per p.

COROLL. 1.

2. Numeri ergo quadrati per numerum primum p diuiſibiles naſcuntur ex radicibus p, $2p$, $3p$, $4p$ etc. ſuntque ergo pp, $4pp$, $9pp$, $16pp$, etc. et reliqui numeri quadrati omnes per numerum primum p non erunt diuiſibiles.

COROLL. 2.

3. Si ergo numeri quadrati, quorum radices in hac progreſſione arithmetica p, $2p$, $3p$, $4p$, etc. non continentur, per numerum primum p diuidantur, in diuiſione ſemper reſiduum remanebit, quod erit minus, quam numerus p.

SCHOLION.

4. Cuiusmodi ſint haec reſidua, quae ex diuiſione ſingulorum quadratorum per numerum primum quemcunque p naſcuntur, in hac diſſertatione diligentius inueſtigare conſtitui. Plurima enim hic inſignia phaenomena occurrent, quorum conſideratione natura numerorum non mediocriter illuſtratur. Tam eximia autem in doctrina numerorum adhuc latent myſteria, in quibus euoluendis opera non fruſtra impendi videtur.

THEOREMA. 2.

5. *Si* ſeries quadratorum in infinitum continuata in membra diſpeſcatur, quorum ſingula ex p terminis conſtent, hoc modo

$$1, 4, \ldots pp \,|\, (p+1)^2 \ldots 4pp \,|\, (2p+1)^2 \ldots 9pp \,|\, (3p+1)^2 \ldots 16pp \,|\, \text{etc.}$$

tum ſi vniuscuiusque membri termini ſinguli per numerum primum p diuidantur, eadem reſidua eodemque ordine recurrent.

DEMONSTRATIO.

Singulorum enim membrorum termini primi 1, $(p+1)^2$, $(2p+1)^2$, $(3p+1)^2$; etc. ſi per p diuidantur,

dantur, idem dabunt residuum $= 1$. Similique modo termini secundi 4, $(p+2)^2$, $(2p+2)^2$, $(3p+2)^2$ etc. per p diuisi aequalia producent residua $= 4$, si quidem sit $p > 4$. Eodemque modo patet, terminos tertios aequalia praebere residua, itemque quartos et quintos etc. Atque in genere, si primi membri terminus quotuscunque sit nn, reliquorum membrorum termini analogi erunt $(p+n)^2$, $(2p+n)^2$, $(3p+n)^2$ etc. qui omnes per p diuisi idem relinquunt residuum, quod terminus nn. In singulis ergo membris eadem redeunt residua eodemque ordine.

COROLL. 1.

6. Si igitur nouerimus residua, quae ex terminis primi membri nascuntur, simul habebimus residua, quae ex diuisione omnium reliquorum membrorum per numerum p facta oriuntur.

COROLL. 2.

7. Quia postremus cuiusque membri terminus per numerum p diuisibilis existit, residuum erit $= 0$; quemadmodum primi cuiusque membri termini residuum est $= 1$. Secundorum vero terminorum cuiusque membri residuum erit $= 4$, et tertiorum $= 9$, quartorum $= 16$ etc. si quidem sit $p > 4$, et $p > 9$, et $p > 16$ etc.

COROLL. 3.

8. Quamdiu enim numeri quadrati $1, 4, 9, 16$, etc. minores sunt, quam numerus p, illi ipsi residua constituent.

tuent. Ex ſequentibus vero quadratis numero p maioribus reſidua emergent alia ipſo numero p minora.

SCHOLION.

9. Ex diuiſionis natura conſtat, reſidua ſemper eſſe minora diuiſore p, ac ſi forte per inaduertentiam reſiduum relinquatur maius, quam diuiſor p, id ſubtrahendo p, quoties fieri poteſt, ad numerum ipſo p minorem reducetur. Sic reſiduum $p + a$, et in genere $np + a$, quod forte ex diuiſione per p prodierit, aequivalebit reſiduo a; atque cum de reſiduis, quae ex diuiſione numerorum per p naſcuntur, agitur, omnia haec reſidua a, $p + a$, $2p + a$, et $np + a$ pro aequivalentibus haberi poſſunt; omnia ſcilicet redeunt ad minimum a, quae reductio cum ſit in promtu, eam tuto negligere poterimus, vel tanquam iam factam aſſumere. Ita ſi numeri quadrati 1, 4, 9, 16 25 etc. per numerum p diuidantur, nihil obſtabit, quominus dicamus reſidua inde oriunda eſſe 1, 4, 9, 16, 25 etc. etiamſi hic numeri occurrant ipſo diuiſore p maiores. De cetero notandum eſt, hoc theorema vim ſuam retinere, ſiue diuiſor p ſit numerus primus, ſiue ſecus.

COROLL. 4.

10. Cum terminus vltimus pp primi membri nullum praebeat reſiduum, omnia reſidua, quae quidem ex tota ſerie quadratorum oriri poſſunt, naſcentur ex his terminis $1, 4, 9, 16 \ldots (p-1)^2$; quorum numerus eſt $= p - 1$.

COROLL.

COROLL. 5.

11. Plura ergo diuerſa reſidua oriri nequeunt, quam $p-1$: quod quidem per ſe eſt manifeſtum. Cum enim omnia reſidua ſint ipſo diuiſore p minora, omnium autem numerorum ipſo p minorum numerus ſit $=p-1$, etiam numerus reſiduorum diuerſorum numerus maior eſſe nequit.

THEOREMA. 3.

12. Si omnes termini ſeriei quadratorum $1, 4, 9, 16$, etc. per numerum quemcunque p diuidantur, ac reſidua notentur, inter haec reſidua non omnes numeri minores, quam p, occurrent.

DEMONSTRATIO.

Omnia enim reſidua, quae quidem ex diuiſione omnium quadratorum per numerum p oriuntur, ex his terminis reſultant:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16\ \ldots\ (p-4)^2, (p-3)^2, (p-2)^2, (p-1)^2,$$

quorum terminorum numerus eſt $=p-1$: ideoque inde totidem reſidua proueniunt. Verum haec reſidua non omnia inter ſe ſunt diuerſa: nam terminus vltimus $(p-1)^2 = pp-2p+1$ per p diuiſus reſiduum relinquit $=1$ idem ſcilicet, quod primus terminus 1. Simili modo terminus penultimus $(p-2)^2 = pp-4p+4$ idem praebet reſiduum, quod terminus ſecundus 4; et terminus antepenultimus $(p-3)^2$ idem dat reſiduum, quod terminus tertius 9. Atque

 in

in genere terminus ordine n, qui eſt nn, idem dat reſiduum, quod terminus ordine $p-n$, qui eſt $(p-n)^2$. Cum igitur omnia reſidua, quae ex his terminus $1, 4, 9 \ldots\ldots (p-1)^2$ oriuntur, et quorum numerus eſt $= p-1$, non ſint inter ſe diuerſa, in iis non omnes numeri ipſo p minores, quorum numerus eſt $= p-1$, occurrere poſſunt.

COROLL. 1.

13. Cum igitur bina reſidua ſemper ſint aequalia, numerus diuerſorum reſiduorum ad ſemiſſem $\frac{p-1}{2}$ redigitur, ſiquidem ſit $p-1$ numerus par; at ſi $p-1$ ſit numerus impar, ſeu p par, tum numerus diuerſorum reſiduorum erit $= \frac{p}{2}$: hoc enim caſu dabitur reſiduum medium, quod ſui aequale non habet.

COROLL. 2.

14. Cum igitur omnium numerorum ipſo p minorum numerus ſit $= p-1$, patet ſemiſſem horum numerorum in reſiduis, locum habere: dabunturque ergo numeri, qui ex diuiſione numerorum quadratorum per numerum p nunquam relinquentur, ſolo excepto caſu, quo $p = 2$; quia $p-1 = \frac{p}{2} = 1$.

COROLL. 3.

15. Quicunque ergo praeterea ſit numerus p, per quem numeri quadrati diuidantur, ex numeris ipſo p minoribus, ſemper erunt ad minimum $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$ numeri, qui inter reſidua non reperiuntur. Prior caſus valet, ſi p eſt numerus impar, poſterior ſi par.

COROLL.

C O R O L L. 4.

16. Hinc igitur numeri ipſo diuiſore p minores, quorum multitudo eſt $= p - 1$, ſponte ſe in duas claſſes diſcriminant, quarum altera continet numeros in reſiduis locum habentes; altera vero eos, qui in claſſe reſiduorum non occurrunt. Hos numeros non-reſidua hic appellabo.

S C H O L I O N.

17. Quo haec clarius percipiantur, iuuabit nonnulla exempla, in quibus reſidua et non-reſidua diſtinguuntur, inſpexiſſe.

Sit	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$
	1, 4	1, 4, 9	1, 4, 9, 16	1, 4, 9, 16, 25
reſidua	1, 1	1, 0, 1	1, 4, 4, 1	1, 4, 3, 4, 1
non-reſid.	2	2, 3	2, 3	2, 5

Sit	$p = 7$	$p = 8$
	1, 4, 9, 16, 25, 36	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49
Reſidua	1, 4, 2, 2, 4, 1	1, 4, 1, 0, 1, 4, 1
non-reſidua..	3, 5, 6	2, 3, 5, 6, 7

Sit - - -	$p = 9$	$p = 10$
	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64,	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81
Reſidua	1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1	1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1
non-reſidua	2, 3, 5, 6, 8	2, 3, 7, 8

Sit - - -	$p = 11$
	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100
Reſidua	1, 4, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 4, 1
non-reſidua	2, 6, 7, 8, 10,

Sit - - -	$p = 12$
	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121
Reſidua	1, 4, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 4, 1
non-reſidua .	2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11

 Hinc

Hinc perſpicitur, numerum non-reſiduorum interdum eſſe, vel $\frac{p-1}{2}$; vel $\frac{p-2}{2}$, prout p fuerit numerus vel par, vel impar; interdum eſſe etiam maiorem, nunquam vero eſſe minorem, omnino vti demonſtratio theorematis poſtulat.

THEOREMA. 4.

18. Vt omnia reſidua, quae ex diuiſione quadratorum per numerum quemcunque p reſultare poſſunt, inueniantur, tantum opus eſt quadrata ab vnitate vsque ad terminum $(\frac{p-1}{2})^2$, vel $(\frac{p}{2})^2$, prout p fuerit vel numerus impar, vel par, per p diuidere.

DEMONSTRATIO.

Ante iam demonſtrauimus, omnia reſidua prouenire ex diuiſione horum terminorum:

$$1, 4, 9, 16, \ldots\ldots (p-1)^2$$

deinde vero vidimus, ſeriem reſiduorum hinc natorum eſſe reciprocam, ſeu ordine retrogrado ſcriptam eandem manere. Quare reſidua omnia, quatenus inter ſe ſunt diuerſa, reperientur, ſi huius ſeriei termini tantum ad medietatem vsque capiantur, vnde ſi p ſit numerus impar, ideoque $p-1$ par, omnes numeri, qui inter reſidua occurrunt, prodibunt ex his terminis:

$$1, 4, 9, 16 \ldots\ldots (\frac{p-1}{2})^2$$

Sin autem p ſit numerus par, quia ſuperior progreſſio, habet terminum medium, qui retrogrediendo ſibi ipſe reſpondet, reſidua omnia ex his terminis orientur

$$1, 4, 9, 16 \ldots\ldots (\frac{p}{2})^2.$$

COROLL.

COROLL. 1.

19. Si igitur p ſit numerus impar, puta $p = 2q + 1$, omnia reſidua ex his tantum quadratis

$$1,\ 4,\ 9,\ 16 \ldots\ldots qq$$

cognoſcentur. At ſi p ſit numerus par, puta $p = 2q$, haec quadrata $1, 4, 9, 16 \ldots\ldots qq$ omnia producent reſidua.

COROLL. 2.

20. Si haec reſidua omnia inter ſe fuerint inaequalia, cum eorum numerus ſit $= q$, caſu priori, quo $p = 2q + 1$, et $p - 1 = 2q$, numerus non-reſiduorum erit $= q$. Caſu poſteriori, quo $= p = 2q$, et $p - 1 = 2q - 1$, omnium non-reſiduorum numerus erit $= q - 1$.

COROLL. 3.

21. Si a ſit numerus quicunque non maior, quam $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$, atque reſiduum conſtet, quod ex diuiſione quadrati aa per numerum p reſultat, omnia quadrata in hac forma generali $(np \pm a)^2$ contenta idem praebebunt reſiduum. At numeri omnes omnino in forma $np \pm a$ includuntur, ita vt a non excedat vel $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$.

SCHOLION.

22. Quo indolem numerorum, qui ſunt reſidua, facilius explorare liceat, ſeriem reſiduorum repraeſentemus his litteris $1.\ \alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \delta.\ \varepsilon.\ \zeta.$ etc. pro diuiſore

p,

p, ita vt numerus horum terminorum ſit vel $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$, prout p ſit vel numerus impar, vel par. Primo igitur patet, in hac ſerie $1. \alpha. \beta. \gamma. \delta. \varepsilon.$ etc. occurrere ordine omnes numeros quadratos 1, 4, 9, 16 etc. qui quidem ſint ipſo numero p minores: reliquos autem eſſe reſidua, quae in diuiſione maiorum quadratorum per eundem numerum p relinquuntur. Reliquas proprietates reſiduorum in ſequentibus theorematis indagabimus.

THEOREMA. 5.

23. Si in ſerie reſiduorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. occurrat numerus quicunque r, ibidem quoque reperientur omnes poteſtates ipſius r^2, r^3, r^4, r^5, etc, ſeu reſidua, quae ex harum poteſtatum diuiſione per numerum propoſitum p, naſcuntur.

DEMONSTRATIO.

Emergat reſiduum r ex quadrato $a\,a$, ita vt ſit $a\,a = mp + r$; et quadratum $a^4 = (mp + r)^2$ per p diuiſum idem dabit reſiduum, quod oritur ex $r\,r$; atque ex quadrato $a^6 = (mp + r)^3$ idem oritur reſiduum, quod ex r^3; ſimilique modo reſidua quadratorum a^8, a^{10}, a^{12}, etc. conuenient cum reſiduis terminorum r^4, r^5, r^6, etc. At reſidua ex omnibus quadratis quantumuis magnis oriunda iam proueniunt ex quadratis minimis $1, 4, 9, 16 \ldots\ldots (\frac{p-1}{2})^2$, vel $(\frac{p}{2})^2$, ideoque continentur in ſerie reſiduorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. Ergo ſi in hac ſerie occurrit numerus r, ibidem quoque occurrent termini r^2, r^3, r^4, r^5, etc. ſeu reſidua, quae ex eorum diuiſione per diuiſorem propoſitum p relinquuntur.

COROLL.

COROLL. 1.

24. Quae igitur poteſtatum r^2, r^3, r^4, r^5, etc. fuerint minores, quam p, eae ipſae in ſerie reſiduorum 1, α, β, γ, δ, etc. reperientur. At altiores poteſtates ſua reſidua, quae diuiſae per p relinquunt, ibidem introducent.

COROLL. 2.

25. Si ſit $r = 1$, quia omnes eius poteſtates ſunt $= 1$, ex iis nonniſi vnicus terminus 1 in ſerie reſiduorum 1, α, β, γ, δ, etc. naſcitur. Neque ergo ex hoc caſu nouus terminus in ſerie reſiduorum cognoſcitur.

COROLL. 3.

26. Quia in ſerie reſiduorum plures termini non occurrunt, quam vel $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$, plura quoque reſidua diuerſa ex poteſtatibus r^2, r^3, r^4, r^5, etc. etiamſi in infinitum continuentur, prodire non poſſunt. Vnde infinitae harum poteſtatum per p diuiſae aequalia praebebunt reſidua.

COROLL. 4.

27. Praebeant ergo hae poteſtates r^m et r^n idem reſiduum atque earum differentia $r^m - r^n$ per numerum p erit diuiſibilis, ſeu $r^n(r^{m-n}-1)$. Vnde ſi factor r^n ſit ad p primus, quod euenit ſi reſiduum r fuerit ad p primum, alter factor $r^{m-n}-1$ per p erit diuiſibilis, ideoque poteſtas r^{m-n} per p diuiſa vnitatem relinquet.

COROLL.

COROLL. 5.

28. Dabitur ergo poteſtas r^λ, quae per p diuiſa vnitatem relinquit, quae vtique in ſerie reſiduorum continetur, ſiquidem r ſit numerus ad p primus. Tum autem poteſtas $r^{\lambda+1}$ dabit reſiduum r, poteſtas $r^{\lambda+2}$ reſiduum r^2, et $r^{\lambda+3}$ reſiduum r^3 etc. ſicque hae poteſtates altiores eadem reſidua reproducunt, quae poteſtates inferiores r, r^2, r^3, etc.

COROLL. 6.

29. Cum igitur plura reſidua diuerſa prouenire nequeant, quam vel $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$, patet, dari numerum λ, non maiorem, quam $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$, ita vt poteſtas r^λ per p diuiſa vnitatem relinquat.

SCHOLION.

30. Hinc ergo intelligitur, quomodo fieri poſſit, vt etiamſi poteſtates r^2, r^3, r^4, r^5 etc. in infinitum progrediantur, tamen ex iis reſidua numero finita oriantur, ſi per diuiſorem p diuidantur. Demonſtraui quidem in diſſertatione ſuperiori, ſi r ſit numerus ad p primus, dari ſemper eiusmodi poteſtatem r^λ, quae per p diuiſa vnitatem relinquat, ita vt ſit $\lambda < p$. Nunc autem videmus, ſi r iam in ſerie reſiduorum ex quadratis natorum contineatur, tum exponentem λ etiam minorem fieri, quam $\frac{p}{2}$.

THEOREMA. 6.

31. Si in ſerie reſiduorum 1, α, β, γ, δ, etc. quae ex diuiſione numerorum quadratorum per numerum

rum p oriuntur, occurrant numeri r et s, ibidem quoque occurret horum numerorum productum rs, vel residuum quod ex eius diuisione per numerum p enascitur.

DEMONSTRATIO.

Proueniet residuum r ex quadrato aa, et residuum s ex quadrato bb, erit $aa = mp + r$, et $bb = np + s$; hinc fiet quadratum $aabb = mnpp + msp + nrp + rs$, quod ergo per p diuisum residuum relinquet rs, vel si $rs > p$, idem relinquet residuum, quod oritur ex rs. Quare cum residuum ex quadrato $aabb$ natum in serie residuorum contineatur, ibi quoque rs, seu residuum inde ortum reperietur.

COROLL. 1.

32. In serie ergo residuorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. si occurrant duo numeri r et s, ibidem quoque occurrent nonsolum potestates r, r^2, r^3, r^4 etc. et $s, s^2, s^3. s^4$, etc. sed etiam producta ex binis terminis quibuscunque $rs, r^2s, rs^2, r^3s, r^2s^2, rs^3$ etc.

COROLL. 2.

33. Hinc igitur patet, si formula $\frac{1}{(1-r)(1-s)}$ in seriem resoluatur. $1 + r + s + rr + rs + ss + r^3 + r^2s + rss + s^3 +$ etc. singulos terminos huius seriei in serie residuorum occurrere, vel etiam residua ex his terminis diuisione per p orta.

COROLL. 3.

34. Etiamsi autem horum terminorum numerus sit infinitus, tamen constat, plura ex iis residua diuersa produci non posse, quam vel $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$, prout p fuerit numerus vel impar, vel par.

SCHOLION.

35. Quo clarius appareat, quomodo ex his terminis numero infinitis, tamen residuorum diuersorum numerus finitus et quidem non maior, quam $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$ oriatur, euoluamus exemplum aliquod, sitque $p = 19$, erit $\frac{p-1}{2} = 9$, vnde

ex his quadratis	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81
orientur residua	1,	4,	9,	16,	6,	17,	11,	7,	5

Ex hac serie residuorum contemplemur hos duos numeros 5 et 6, ex quibus formemus primo series potestatum

5, 25, 125, 625, 3125, 15625, 78125, etc.
6, 36, 216, 1296, 7776, 46656, 279936, etc.

Ex illa serie per $p = 19$ diuisa prodeunt residua:

5, 6, 11, 17, 9, 7, 16, 4, 1,

sequens scilicet residuum semper inuenitur, si praecedens per 5 multiplicetur, et productum, si sit > 19, infra 19 deprimatur. Simili modo ex potestatibus numeri 6 haec prodibunt residua:

6, 17, 7, 4, 5, 11, 9, 16, 1

Porro

Porro si haec singula residua per singula superiora multiplicentur, et producta infra 19 deprimantur, iidem prodeunt numeri; multiplicetur enim inferior series primo per 5, tum per 6, et 11, 17, etc. vt sequitur:

per 5:	11,	9,	16,	1,	6,	17,	7,	4,	5,
per 6:	17,	7,	4,	5,	11,	9,	16,	1,	6,
per 11:	9,	16,	1,	6,	17,	7,	4,	5,	11,
per 17:	7,	4,	5,	11,	9,	16,	1,	6,	17,
per 9:	16,	1,	6,	17,	7,	4,	5,	11,	9,
per 7:	4,	5,	11,	9,	16,	1,	6,	17,	7,
per 16:	1,	6,	17,	7,	4,	5,	11,	9,	16,
per 4:	5	11,	9,	16,	1,	6,	17,	7,	4,

Perspicitur igitur, quomodocunque hi numeri, 1, 4, 9. 16, 6, 17, 11, 7, 5 seriem residuorum constituentes, inter se per multiplicationem combinentur, siquidem diuisione per 19 facta infra 19 deprimantur, eosdem semper numeros recurrere, neque vnquam vllum numerum eorum, qui non sunt residua, nempe 2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18 prodire.

COROLL. 4.

36. Si ergo sit 1, α, β, γ, δ, etc. series residuorum omnium, quae ex diuisione quadratorum per numerum p resultant, in eadem serie quoque occurrent omnia producta ex binis pluribusue numerorum α, β γ, δ, etc. Ergo si haec expressio $\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)etc.}$ in seriem euoluatur, omnes eius termini in serie residuorum occurrent.

THEOREMA. 7.

37. Si in ſerie reſiduorum 1, α, β, γ, δ, etc. quae ex diuiſione quadratorum per numerum p prodeunt, reperiantur numeri r et rs, qui ſint ad p primi, quorum ille huius eſt factor, tunc in eadem reſiduorum ſerie etiam numerus s continebitur.

DEMONSTRATIO.

Proueniat reſiduum r ex quadrato aa et rs ex bb, erit $aa = mp + r$, et $bb = np + ss$: vnde fit $bb - aas = np - mps$, ſicque $bb - aas$ erit per p diuiſibile. At cum r et rs ſint numeri ad p primi, erunt quoque quadrata aa et bb ad p prima, vnde ſi haec quadrata aa et bb inter ſe non ſint prima, per communem diuiſorem quadratum ad prima reduci poterunt, ita vt $bb - aas$ maneat per p diviſibile. Sint ergo b et a numeri inter ſe primi, atque cum etiam haec forma $(mp + b)^2 - aas$ ſit per p diuiſibilis, ſemper pro m eiusmodi numerus aſſignari poteſt, vt fiat $mp + b$ multiplum ipſius a. Sit ergo $mp + b = ac$, erit $aacc - aas$ per p diuiſibile, quod cum ſit $= aa(cc - s)$, alterque factor aa ſit ad p primus, neceſſe eſt, vt alter factor $cc - s$ per p ſit diuiſibilis, vnde quadratum cc per p diuiſum relinquet s, ex quo numerus s in ſerie reſiduorum 1, α, β, γ, δ, etc. reperietur, ſiquidem ibi numeri r et rs occurrant, iique ſint ad p primi.

COROLL.

COROLL. 1.

38. Vt igitur veritas theorematis conſiſtat, neceſſe eſt, vt numeri r et rs, ſeu r et s ſint ad diuiſorem p primi. Supra enim vidimus, ſi ſit $p = 12$, in reſiduis reperiri numeros 4 et 0, ſeu 4 et 12, hinc autem, poſito $r = 4$ et $rs = 12$, non ſequitur numerum $s = 3$ in reſiduis reperiri: quia r et s non ſunt numeri ad p primi: ac reuera etiam numerus s inter non-reſidua continetur.

COROLL. 2.

39. Sin autem diuiſor p ſit numerus primus, quia tum omnia reſidua α, β, γ, δ, etc. ad eum ſunt prima, ſi in iis occurrant numeri r et rs, tum etiam certo in iis occurret numerus s.

COROLL. 3.

40. Si inter reſidua occurrant numeri r et s primi ad p, quia reſiduo r aequiualentia cenſenda ſunt reſidua $p + r$; $2p + r$, et in genere $np + r$, ſi fuerit $np + r = ts$, tum etiam numerus t inter reſidua reperietur.

SCHOLION.

41. Ne ad huius modi exceptiones, quando reſidua non ſunt numeri ad p primi, reſpicere obligemur, in ſequentibus ponamus diuiſorem p ſemper eſſe numerum primum; et cum reſidua ex binario orta ſint obuia,

 ſit

ſit diuiſor p ſimul numerus impar, ſeu $p = 2q + 1$, tum ergo ſeries reſiduorum formabitur ex his terminis:

$$1, 4, 9, 16, \text{- - - - - -} qq$$

ita vt eorum numerus, quatenus inter ſe ſunt diuerſa, maior eſſe nequeat, quam q. Si igitur reſidua ex hoc diuiſore primo $p = 2q + 1$ ſint 1, α, β, γ, δ, etc. in hac ſerie non ſolum producta ex binis pluribusue terminorum α, β, γ, δ, etc. occurrent, ſed quia omnia haec reſidua ad p ſunt prima, ſi inter ea occurrant r et rs, ita vt vnum per aliud ſit diuiſibile, tum etiam quotus inde natus s in eadem ſerie reſiduorum continebitur.

THEOREMA. 8.

42. Si ex diuiſore primo $p = 2q + 1$, per quem omnes numeri quadrati diuidantur, naſcatur ſeries reſiduorum 1, α, β, γ, δ, ε, etc. quorum numerus eſt $= q$, omnia haec reſidua inter ſe erunt inaequalia.

DEMONSTRATIO.

Primo patet, nullum reſiduum in hac ſerie eſſe poſſe $= 0$, cum enim naſcantur ex quadratis ipſo qq non maioribus, nullum horum quadratorum per numerum primum $p = 2q + 1$ eſt diuiſibile; igitur cyphra inter reſidua multo minus bis occurrere poterit. Ponamus autem duo reſidua, quae ex quadratis aa et bb oriuntur, eſſe aequalia, eritque differentia horum quadratorum $aa - bb$ per diuiſorem $p = 2q + 1$ diuiſibilis. At cum omnia haec reſidua 1, α, β, γ, δ, etc. ex quadratis minimis,

quae

quae qq non excedunt, oriantur, quadrata illa aa et bb non ſuperabunt qq, eritque propterea neque $a > q$, neque $b > q$, neque idcirco $a + b > 2q$; vnde certo erit, $a + b < p$. Cum igitur differentia quadratorum $aa - bb$ eſſet per p diuiſibilis, ſiquidem reſidua inde nata eſſent aequalia, et p ſit numerus primus, vel ſumma $a + b$, vel differentia $a - b$ foret per p diuiſibilis; vtrumque autem, ob tam $a - b < p$, quam $a + b < p$, fieri nequit. Ergo omnia reſidua, quae ex diuiſione quadratorum $1, 4, 9, 16, \ldots qq$ per numerum primum $p = 2q + 1$ reſultant, inter ſe ſunt inaequalia.

COROLL. 1.

43. Numerus igitur omnium reſiduorum diuerſorum, quae ex diuiſione quadratorum per numerum primum $p = 2q + 1$ oriuntur, certo eſt $= q$; ante enim oſtenſum eſt, eum non eſſe maiorem, quam q; hic autem euicimus, eum non eſſe minorem, quam q.

COROLL. 2.

44. Cum numerus omnium numerorum ipſo diviſore $p = 2q + 1$ minorum ſit $= p - 1 = 2q$, patet, horum numerorum ſemiſſem tantum in ſerie reſiduorum $1, \alpha, \beta, \gamma$, etc. occurrere eamque conſtituere, alterum vero ſemiſſem, conſtituere ſeriem non-reſiduorum: ideoque ſi p ſit numerus primus, ſeriem non-reſiduorum, etiam ex q numeris conſtare.

COROLL.

COROLL. 3.

45. Si ergo x ſit numerus quicunque ex ſerie non-reſiduorum diuiſori p reſpondentium, certo affirmare poſſumus, quicquid ſit n, nullum numerum in hac forma $np + x$ eſſe poſſe quadratum.

SCHOLION.

46. Quia nunc inueſtigationes noſtras tantum ad diuiſores primos dirigimus, expediet tam reſidua, quam non-reſidua, quae minoribus numeris primis reſpondent, hic exhibere. In genere ſcilicet ſi diuiſor ſit p, ſeriem reſiduorum per 1, α, β, γ, δ, etc. et ſeriem non-reſiduorum per a, b, c, d, e etc. repreſentamus; et quo facilius coniunctim tam reſidua, quam non-reſidua, referantur, hoc modo exponemus:

$$p \begin{Bmatrix} 1, & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta & \text{etc.} \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & \text{etc.} \end{Bmatrix}$$

duas nimirum ſeries numerorum quouis caſu ſcribemus, quarum ſuperior reſidua, inferior non-reſidua continet, et vtrique diuiſorem p, ad quem pertinent, praefigemus. Hoc modo reſidua et non-reſidua, quae ex diuiſoribus primis ſimplicioribus reſultant, ita indicabuntur:

$$3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}; \quad 5 \begin{Bmatrix} 1, & 4 \\ 2, & 3 \end{Bmatrix}; \quad 7 \begin{Bmatrix} 1, & 4, & 2 \\ 3, & 5, & 6 \end{Bmatrix}; \quad 11 \begin{Bmatrix} 1, & 4, & 9, & 5, & 3 \\ 2, & 6, & 7, & 8, & 10 \end{Bmatrix};$$

$$13 \begin{Bmatrix} 1, & 4, & 9, & 3, & 12, & 10 \\ 2, & 5, & 6, & 7, & 8, & 11 \end{Bmatrix}; \quad 17 \begin{Bmatrix} 1, & 4, & 9, & 16, & 8, & 2, & 15, & 13 \\ 3, & 5, & 6, & 7, & 10, & 11, & 12, & 14 \end{Bmatrix};$$

$$19 \begin{Bmatrix} 1, & 4, & 9, & 16, & 6, & 17, & 11, & 7, & 5 \\ 2, & 3, & 8, & 10, & 12, & 13, & 14, & 15, & 18 \end{Bmatrix}; \quad 23 \begin{Bmatrix} 1, & 4, & 9, & 16, & 2, & 13, & 3, & 18, & 12, & 8, & 6 \\ 5, & 7, & 10, & 11, & 14, & 15, & 17, & 19, & 20, & 21, & 22, \end{Bmatrix};$$

$$29 \begin{Bmatrix} 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 7, & 20, & 6, & 23, & 13, & 5, & 28, & 24, & 22 \\ 2, & 3, & 8, & 10, & 11, & 12, & 14. & 15, & 17, & 18, & 19, & 21, & 26, & 27 \end{Bmatrix};$$

Reſidua

Refidua hic eo ordine, quo ex quadratis nafcuntur, funt pofita, non-refidua autem, quia nullo ordine connectuntur, a minimis ad maiora progrediendo collocauimus. Exempla haec quoque in eum finem feruire poterunt, vt in iis proprietates refiduorum ante demonftratae examinentur.

THEOREMA 9.

47. Si ex diuifione quadratorum per numerum primum $p = 2q + 1$ nascatur haec feries refiduorum, $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. haecque feries non-refiduorum a, b, c, d, e, etc. atque in hac ferie non-refiduorum occurrat numerus r, in eadem quoque occurrent omnes hi numeri $\alpha r, \beta r, \gamma r, \delta r$, etc. vel eorum refidua diuifione per p relicta.

DEMONSTRATIO.

Quicunque enim horum numerorum, vt αr, vel in ferie refiduorum continetur, vel in ferie non-refiduorum. At cum α in ferie refiduorum contineatur, fi αr ibidem contineretur, neceffario quoque r in ferie refiduorum exifteret. Quare cum per hypothefin r fit numerus ex ferie non-refiduorum, numerus αr non erit in ferie refiduorum, habebit ergo αr locum in ferie non-refiduorum, quod idem de numeris $\beta r, \gamma r, \delta r$, etc. valet: Quod autem demonftrauimus de his productis $\beta r, \gamma r, \delta r$, etc. fi fint maiora, quam p, id intelligendum eft de refiduis, quae haec producta per p diuifa relinquunt.

COROLL. 1.

48. Quia omnes numeri 1, α, β, γ, δ, etc. quorum numerus eſt $= q$, ſunt inter ſe diuerſi ; ſequitur quoque, omnes hos numeros r, αr, βr, γr, δr, etc. eſſe inter ſe diuerſos : vnde, ſi omnia reſidua habeantur, ex vnico non - reſiduo cognito reliqua omnia non-reſidua definiuntur.

COROLL. 2.

49. Dabit ergo ſeries r, αr, βr, γr, δr, etc. omnia plane non-reſidua ; continet enim q numeros diverſos, totidemque et non plura exiſtunt non-reſidua, ſiquidem diuiſor p eſt numerus primus.

COROLL. 3.

50. Si ergo ex ſerie non-reſiduorum quilibet alius numerus s capiatur, eius producta αs, βs, γs, etc. alios numeros pro reſiduis non praebent, niſi qui ex quouis alio r hoc modo ſunt reperti.

THEOREMA 10.

51. Producta ex binis numeris ſeriei non-reſiduorum continentur in ſerie reſiduorum, ſiquidem haec reſidua naſcantur ex diuiſione numerorum quadratorum per quempiam numerum primum.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Sit enim $p = 2q + 1$ diuiſor primus, atque ſeries reſiduorum ſit 1, α, β, γ, δ, etc ſeries autem non-reſiduorum ſit a, b, c, d, e, etc. Vidimus autem, ſi r ſit non-reſiduum quodcunque, ſeriem non-reſiduorum hoc modo quoque exhiberi: r, αr, βr, γr, δr, etc. Iam productum ex duobus quibuscunque horum terminorum $\alpha \beta r^2$, conſtat ex duobus factoribus $\alpha \beta$ et rr, quorum vterque in ſerie reſiduorum continetur, quia omnia quadrata, ac propterea etiam rr ibi occurrunt; vnde perſpicuum eſt, productum ex binis quibusque non-reſiduis in ſerie reſiduorum contineri.

COROLL. 1.

52. Vt igitur productum ex duobus reſiduis dat reſiduum, ita quoque productum ex duobus non reſiduis dabit reſiduum. Sed productum ex reſiduo et non-reſiduo ſemper producit non-reſiduum.

COROLL. 2.

53. Hinc etiam ſequitur, vti reſiduum per reſiduum diuiſum dat reſiduum, ita quoque non-reſiduum per non reſiduum diuiſum dare reſiduum. Verum reſiduum per non-reſiduum, vel viciſſim non-reſiduum per reſiduum diuiſum praebet non-reſiduum.

COROLL. 3.

54. Quemadmodum bina non-reſidua inuicem multiplicata reſiduum producunt; ita terna non-reſidua

inuicem multiplicata praebebunt non-residuum: quaterna vero non-residua iterum residuum producunt, at quina non-residuum, et sic deinceps.

DEFINITIO.

55. Complementum residui est eius defectus a diuisore, ex quo est ortum: sic si diuisor sit $= p$ et residuum $= r$, erit complementum residui $= p - r$.

COROLL. 1.

56. Quia ratione residuorum omnes hi numeri $r, p + r, 2p + r$, et in genere $np + r$ pro iisdem habentur, quicunque numerus pro n sumatur, erit eorum complementum $= p - np - r$, vnde si sumatur $n = 1$, complementum residui r erit $= - r$.

COROLL. 2.

57. Si n sumatur $= - 1$, residuum r etiam per $r - p$ exprimi potest, ita vt sit negatiuum. In diuisione enim, si quotus nimis magnus accipitur, ad residua negatiua peruenitur. Sic residuum affirmatiuum r aequiualebit residuo negatiuo $r - p$.

COROLL. 3.

58. Si sit $r > \frac{1}{2}p$, tum hoc residuum negatiue exprimi poterit per $r - p$, quod erit minus, quam $\frac{1}{2}p$. Ita si expressiones negatiuae in vsum vocentur, omnia residua per numeros exhiberi poterunt, semisse diuisoris

$\frac{1}{2}p$

$\frac{1}{2}p$ non maiores. Sic pro diuiſore $p = 23$ habebuntur haec reſidua per numeros non maiores, quam $\frac{23}{2}$ expreſſa: 1, 4, 9, −7, 2, −10, 3, −5, −11, 8, 6.

COROLL. 4.

59. Similique modo non-reſidua etiam per numeros ipſo $\frac{1}{2}p$ non maiores exhiberi poterunt, eruntque pro diuiſore $p = 23$ haec non-reſidua: 5, 7, 10, 11, −9, −8, −6, −4, −3, −2, −1. Vnde ſi $p = 2q + 1$, numerus tam reſiduorum, quam non-reſiduorum, erit $= q$, neque in vtraque ſerie occurrunt numeri maiores, quam q.

COROLL. 5.

60. Si hoc modo reſidua exprimantur, ſtatim patet, vtrum cuiuspiam reſidui complementum in eadem ſerie reſiduorum contineatur, nec ne. Nempe ſi r ſit reſiduum, erit $-r$ eius complementum, et viciſſim ſi $-r$ ſit reſiduum, erit $+r$ eius complementum. Quare niſi in ſerie reſiduorum idem numerus bis occurrat, affirmatiue ſcilicet et negatiue, eius complementum in ſerie reſiduorum non continetur.

THEOREMA 11.

61. Si in ſerie reſiduorum 1, α, β, γ, δ, etc. quae ex diuiſione quadratorum per numerum primum $p = 2q + 1$ generantur, vnius termini occurrat complementum, tum ſimul omnium terminorum complementa in eadem ſerie occurrent.

 SOLUTIO.

SOLUTIO.

Sit r id residuum, cuius complementum $-r$ quoque in serie $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. occurrat. Cum igitur $-r$ per r diuisum det -1, in eadem serie quoque numerus -1 occurret; seu valor cuiuspiam litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. erit $= -1$. Quoniam ergo in eadem serie producta ex binis terminis simul reperiuntur, ibidem occurrent termini $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$, etc. Cuiusvis ergo residui complementum simul in serie residuorum reperietur, siquidem vnici termini complementum in ea occurrat.

COROLL. 1.

62. Si ergo vnici termini r complementum $-r$ in serie residuorum contineatur, tum quilibet numerus huius seriei bis occurret, primo scilicet affirmatiue, tum vero etiam negatiue. In serie nempe residuorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. etiam continebuntur termini $-1, -\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$, etc.

COROLL. 2.

63. Cum igitur hoc casu in serie residuorum quilibet terminus bis occurrat, numerus omnium terminorum necessario erit par. At numerus omnium terminorum est $= q$, ergo nisi sit q numerus par, fieri nequit, vt complementa residuorum simul in serie residuorum contineantur.

COROLL.

COROLL. 3.

64. Si igitur q eſt numerus impar, puta $q = 2n + 1$, ita vt ſit $p = 4n + 3$, in ſerie reſiduorum nullus plane occurrit numerus, cuius complementum ſimul in ea ſerie contineatur. Omnia ergo complementa hoc caſu in ſeriem non reſiduorum ingredientur, eritque vtrinque terminorum numerus impar $= q = 2n + 1$.

SCHOLION.

65. Hinc ergo ſummum diſcrimen agnoſcitur, quod inter numeros primos $p = 2q + 1$ intercedit, prout q fuerit numerus par, vel impar: cum poſteriori caſu certo ſciamus, nullius reſidui complementum in reſiduorum ſerie contineri. Quodſi ergo priori caſu ponamus $q = 2n$, poſteriori $q = 2n - 1$, illo caſu erit numerus primus $p = 4n + 1$, hoc vero $p = 4n - 1$; vnde patet, omnes numeros primos, binario excepto, vel vnitate ſuperare multiplum quaternarii, vel vnitate ab eo deficere; ſicque duas obtinemus numerorum claſſes, quarum altera in forma $4n + 1$, altera in forma $4n - 1$, continetur. Prioris claſſis $4n + 1$ ſunt ergo numeri primi: 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, etc. poſterioris vero claſſis $4n - 1$ hi: 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83. De numeris primis claſſis prioris Fermatius olim pronunciauit, ſingulos eſſe aggregata duorum quadratorum, cuius theorematis veritatem nuper tandem poſt plures conatus demonſtraui. De numeris autem poſterioris claſſis facile oſtenditur, nullum eorum eſſe ſummam duorum quadratorum; quin etiam

etiam mox demonſtrabo, ne quidem ſummam duorum quadratorum $aa + bb$ exhiberi poſſe, quae ſit per eiusmodi numerum primum $p = 4n - 1$ diuiſibilis, niſi vtrumque quadratum aa et bb ſeorſim per eum diuiſibile exiſtat. De his tamen numeris Fermatius affirmauit, ſingulos vel eſſe trium, vel quatuor quadratorum aggregata; ita videmus eſſe $3 = 1 + 1 + 1$; $7 = 1 + 1 + 1 + 4$; $11 = 1 + 1 + 9$; $19 = 1 + 9 + 9$; $23 = 1 + 4 + 9 + 9$; $31 = 4 + 9 + 9 + 9 = 1 + 1 + 4 + 25$; etc. Verum nullum exiſtere huiusmodi numerum, qui non ad minimum in quatuor quadrata reſolui poſſit, etſi Fermatius eius demonſtrationem ſe inueniſſe ſit profeſſus, tamen nusquam eam publicauit, ita vt cum ipſo penitus interiiſſe videatur, neque deinceps quisquam inuentus eſt, qui hanc demonſtrationem, quae in analyſi Diophantaea et vniuerſa numerorum ſcientia maximi eſt momenti, reperire potuerit. Equidem hic demonſtrabo, quocunque propoſito numero primo formae $4n - 1$, ſemper ſummam quatuor quadratorum, quin etiam trium, exhiberi poſſe, quae per eum ſit diuiſibilis. Cum igitur etiam demonſtrari queat, productum ex duobus numeris, quorum vterque eſt ſumma quadratorum, etiam eſſe quatuor quadratorum aggregata, non procul a demonſtratione deſiderata abeſſe videmur. Tantum enim ſupereſt, vt demonſtretur, ſi ſumma quatuor quadratorum fuerit diuiſibilis per numerum, qui etiam ſit ſumma quatuor quadratorum, quotum quoque certo fore ſummam quatuor quadratorum.

THEORE-

THEOREMA 12.

67. Si omnia quadrata per numerum primum $= 4n - 1$ diuidantur, indeque oriatur ſeries reſiduorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. nullius reſidui complementum ſimul in hac ſerie reſiduorum continebitur.

DEMONSTRATIO.

Omnia reſidua reſultant ex diuiſione horum quadratorum:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots\ldots\ (2n-1)^2$$

reſidua: $1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots\ldots\ \nu$

numerus ergo horum reſiduorum eſt $= 2n - 1$ ideoque impar. At ſi vnius reſidui α complementum $p - \alpha$ ſeu $-\alpha$ in eadem ſerie extaret, tum ſimul omnium reſiduorum complementa ibidem occurrere deberent, ſicque cum vnumquodque reſiduum bis, nempe cum ſigno $+$ et cum ſigno $-$ adeſſet, numerus reſiduorum eſſet par. Quare cum ſit impar, fieri nequit, vt vel vnici reſidui complementum ſimul in eadem reſiduorum ſerie contineatur.

COROLL. 1.

67. Si vltimus ſeriei reſiduorum terminus ponatur $= \nu$, quia oritur ex quadrato $(2n-1)^2 = 4nn - 4n + 1$ per $4n - 1$ diuiſo, erit reſiduum $\nu = -3n + 1 = n$, ſumto quoto $n - 1$. Ergo eius complementum $-n$ ſeu $3n - 1$ in ſerie reſiduorum non reperitur.

Numerus

Numerus ergo $-n$ ſeu $3n-1$ certo erit in ſerie non-reſiduorum.

COROLL. 2.

68. Cum $mp-n$ ſeu $m(4n-1)-n$ omnes numeros complectatur, qui per $4n-1$ diuiſi reſiduum dant $-n$, patet nullum horum numerorum $m(4n-1)-n$ ſeu $4mn-m-n$ vnquam eſſe poſſe quadratum.

COROLL. 3.

69. Cum in ſerie reſiduorum occurrant numeri quadrati $1, 4, 9, 16$, etc. in eadem certe non occurrent eorum complementa $-1, -4, -9, -16$, etc. Numeri ergo quadrati ſigno $-$ affecti in ſeriem non-reſiduorum ingredientur.

THEOREMA 13.

70. Non datur ſumma duorum quadratorum, quae ſit diuiſibilis per numerum primum formae $4n-1$, niſi vtrumque quadratum ſeorſim per eundem ſit diuiſibile: ſeu non datur ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum per numerum primum $4n-1$ diuiſibilis.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim ſummam duorum quadratorum $aa+bb$ eſſe per numerum primum $4n-1$ diuiſibilem, neque tamen vel aa vel bb ſeorſim eſſe per $4n-1$ diuiſibile. Sit ergo r reſiduum, quod in diui-

ſione

ſione quadrati aa per $4n-1$, relinquitur et s reſiduum ex diuiſione quadrati bb ortum; atque tam r quam s in ſerie reſiduorum 1, α, β, γ, δ, etc. occurret. Iam ſumma quadratorum $aa+bb$ per $4n-1$ diuiſa relinquet reſiduum $r+s$, quod cum per hypotheſin eſſe debeat $=$ diuiſori $4n-1$, erit $s=4n-1-r$, ſeu $s=-r$, ideoque s erit complementum reſidui r. Quare ſi r in ſerie reſiduorum contineatur, eius complementum s in ea certe non occurret: vnde ſumto quadrato quocunque aa nullum datur aliud quadratum bb eiusmodi, vt ſumma $aa+bb$ fiat per numerum primum $4n-1$ diuiſibilis: niſi ipſum quadratum aa per ſe ſit diuiſibile per $4n-1$, quo caſu etiam bb per $4n-1$ diuiſibile eſſe debet. Nulla ergo datur ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum, quae ſit per numerum primum $4n-1$ diuiſibilis.

COROLL. 1.

71. Non ergo datur huiusmodi formae $aa+1$ numerus, qui ſit per numerum primum $4n-1$ diuiſibilis. Ad hoc enim opus eſſet, vt reſiduum ex quadrato aa ortum eſſet $=-1$, quod autem in ſerie reſiduorum non exiſtit.

COROLL. 2.

72. Cum ſumma duorum quadratorum $aa+bb$ per nullum numerum primum formae $4n-1$ ſit diviſibilis, etiam per nullum numerum compoſitum p, qui factorem primum habet formae $4n-1$, erit diui-

 ſibilis,

fibilis, fi enim per hunc numerum p effet diuifibilis, etiam per eius factorem $4n-1$ diuifibilis foret.

THEOREMA 14.

73. Siue numerus $4n-1$ fit primus, fiue compofitus, nulla datur fumma duorum quadratorum, inter fe primorum per eum numerum $4n-1$ diuifibilis.

DEMONSTRATIO.

Si enim numerus $4n-1$ fit primus, iam demonftrata eft veritas theorematis. At fi $4n-1$ non fit numerus primus, erit productum ex aliquot numeris primis, et quidem imparibus, cum ipfe numerus $4n-1$ fit impar. Omnes autem numeri primi funt vel formae $4m+1$, vel $4m-1$: fed omnes factores numeri $4n-1$ effe nequeunt formae $4m+1$, quotcunque enim numeri huius formae $4m+1$ in fe inuicem multiplicentur, productum femper erit numerus formae $4n+1$, feu vnitate excedet multiplum quaternarii. Quare neceffe eft, vt numerus $4n-1$ vnum ad minimum habeat factorem primum formae $4m-1$, et quia per talem numerum primum nulla fumma duorum quadratorum inter fe primorum eft diuifibilis, nulla etiam datur, quae per numerum compofitum $4n-1$ effet diuifibilis.

COROLL. 1.

74. Cum nulla detur fumma duorum quadratorum inter fe primorum per numerum $4n-1$, fiue fit primus

primus, ſiue compoſitus, diuiſibilis, multo minus numeees $4n-1$ ipſe erit ſumma duorum quadratorum. Si ianm eſſet $4n-1 = aa + bb$, vtrumque quadratum roqnet bb ſeorſim per $4n-1$ diuiſibile eſſe deberet, uu d, cum vtrumque ſit minus quam $4n-1$, fieri aquit.

SCHOLION.

75. Nullum numerum formae $4n-1$ eſſe poſſe ſummam duorum quadratorum, etiam facillime hoc modo oſtenditur. Si enim numerus $4n-1$ eſſet ſumma duorum quadratorum alterum eſſe deberet par, alterum impar. At omnia quadrata paria ſunt numeri huius formae $4f$, et omnia quadrata imparia numeri huius formae $4g+1$. Summa ergo duorum quadratorum, quorum alterum eſt par, alterum impar, erit numerus formae $4f+4g+1$, ſeu $4n+1$; ergo numerus formae $4n-1$ non poteſt eſſe ſumma duorum quadratorum.

COROLL. 2.

76. Nullus etiam numerus, qui factorem habet formae $4n-1$, poteſt eſſe diuiſor ſummae duorum quadratorum inter ſe primorum: ſi enim eſſet diuiſor, etiam eius factor $4n-1$, foret diuiſor, quod fieri nequit.

COROLL. 3.

77. Multo ergo minus huiusmodi numerus, qui factorem habet $4n-1$, eſſe poteſt ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum. Ita impoſſibile eſt, vt

F 3 ſit

ſit $m(4n-1)=aa+bb$, ſi quidem a et b ſint numeri inter ſe primi.

THEOREMA 15.

78. Nullus numerus in hac forma $4mn-m-n$ contentus, quicunque numeri pro m et n capiantur, vnquam eſſe poteſt quadratum.

DEMONSTRATIO.

Cum nullus numerus, qui factorem habet $4n-1$, eſſe queat ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum, ſeu quae praeter vnitatem nullum habeant communem diuiſorem, ſequitur fieri non poſſe, vt ſit $(4m-1)(4n-1)=1+aa$. Ergo non erit $16mn-4m-4n=aa$: vnde ne eius quadrans quidem $4mn-m-n$ vnquam quadratum eſſe poteſt.

THEOREMA 16.

79. Si in ſerie reſiduorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. quae ex diuiſione quadratorum per numerum quemcunque p reſultant, cuiuspiam reſidui complementum in eadem ſerie reſiduorum occurrat, tum duo quadrata exhiberi poterunt, quorum ſumma ſit per eundem numerum p diuiſibilis, etiamſi neutrum ſeorſim per p ſit diuiſibile.

DEMONSTRATIO.

Praebeat quadratum aa reſiduum $=r$, quadratum autem bb reſiduum $=-r$ ſeu $p-r$, quod illius eſt comple-

complementum, ita vt r ſit id reſiduum, cuius complementum ſimul in ſerie reſiduorum contineatur. Iam manifeſtum eſt, ſummam horum quadratorum $aa + bb$ fore per numerum p diuiſibilem.

COROLL. 1.

80. Si p ſit numerus primus, ſtatim atque vnius reſidui complementum in ſerie reſiduorum occurrit, etiam ſingulorum reſiduorum complementa ibidem inerunt. Sumto ergo quadrato quocunque aa, cuius reſiduum ſit $= r$, dabitur aliud xx, cuius reſiduum erit $= -r$, ita vt x ſit non maius, quam $\frac{p}{2}$, atque ſumma $aa + xx$ erit per p diuiſibilis.

COROLL. 2.

81. Si igitur detur ſumma duorum quadratorum $aa + bb$ per numerum primum p diuiſibilis, quia reſiduorum ex aa et bb ortorum alterum alterius eſt complementum; reſidui ex quocunque alio quadrato cc orti complementum in ſerie reſiduorum quoque reperietur. Dabitur ergo ſumma duorum quadratorum $cc + xx$ per numerum p diuiſibilis.

COROLL. 3.

82. Ex praecedentibus autem patet, hunc caſum locum obtinere non poſſe, neque ſi p ſit numerus formae $4n - 1$, neque ſi p ſaltem habeat factorem huius formae. quia neutro caſu datur ſumma duorum quadratorum

torum per p diuiſibilis, quae quidem quadrata ſint inter ſe prima.

COROLL. 4.

83. Nulli ergo alii numeri primi relinquuntur, ad quos theorema hoc accommodari queat, niſi qui contineantur in hac forma $4n+1$.

SCHOLION.

84. An autem omnes numeri primi formae $4n+1$ hanc habeant proprietatem, vt in ſeriebus reſiduorum inde ortis cuiusque termini complementum ſimul ibidem reperiatur, hic nondum eſt demonſtratum, neque deſperandum videtur, quin ex his iisdem principiis demonſtratio elici queat, etſi nondum mihi quidem eo pertingere licuit. Series autem reſiduorum ex ſimplicioribus numeris primis huius formae ortae ſequenti modo ſe habent, vbi quidem reſidua ſemiſſe cuiusque numeri maiora per numeros negatiuos exhibere viſum eſt, quo facilius, quaenam ſint aliorum complementa, appareat:

$5\ \{1,-1\}$; $13\ \{1,4,-4,3,-1,-3\}$; $17\ \{1,4,-8,-1,8,2,-2,-4\}$

$29\ \{1,4,9,-13,-4,7,-9,6,-6,13,5,-1,-5,-7\}$

$37\ \{1,4,9,16,-12,-1,12,-10,7,-11,10,-4,-16,11,3,-3,-7,-9\}$

In his igitur ſeriebus perſpicuum eſt, cuiusque termini complementum ſimul in iis occurrere. Quod autem hoc neceſſario eueniat, ſi diuiſor ſit numerus primus formae $4n+1$, demonſtratio directa adhuc deſideratur, quae hoc modo inſtitui debere videtur. Prodeat ex numero primo $4n+1$ haec ſeries reſiduorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc.

etc. quorum terminorum numerus eſt $2n$, iam ſi quis neget horum terminorum complementa ſimul in eadem ſerie contineri, is dicere debet, omnia complementa $-1, -\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$, etc. ſeriem non-reſiduorum conſtituere; quorum terminorum numerus cum ſit $= 2n$, ſequeretur, nulla alia praeterea dari non-reſidua, quare, ſi aſſignari poſſet quispiam numerus, in ſerie non-reſiduorum contentus, qui non eſſet complementum cuiuspiam termini in ſerie reſiduorum contentus, ſimul ſequeretur nullum plane complementum ſeriei reſiduorum in ſerie non-reſiduorum occurrere. Hoc ergo ſi demonſtrari poſſet, haberetur demonſtratio deſiderata, et quidem directa. Nam demonſtratio indirecta iam inde datur, quod demonſtraui, omnem numerum primum formae $4n+1$ eſſe ſummam duorum quadratorum: quare ſi ſit $4n+1 = aa + bb$, reſiduorum ex his quadratis aa et bb ortorum alterum alterius erit complementum, hincque porro recte concluditur, cuiusque reſidui complementum ſimul in ſerie reſiduorum contineri.

THEOREMA 17.

85. *Si in ſerie reſiduorum* $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, *etc. quae ex diuiſione quadratorum per numerum quemcunque* p *oriuntur, occurrat terminus, qui ſit complementum ſummae duorum aliorum terminorum, tum ſumma trium quadratorum exhiberi poteſt per numerum* p *diviſibilis, ita vt nullius quadrati radix maior ſit quam* $\frac{p}{2}$.

DEMONSTRATIO.

Sint r et s reſidua ex duobus quadratis aa et bb oriunda, quorum ſumma $= r + s$, eiusque ergo complementum $= p - r - s$, ſeu $- r - s$. Iam ſi hoc complementum in ſerie reſiduorum 1, α, β, γ, δ, etc. reperiatur, dabitur quadratum $cc < \frac{1}{4}pp$, quod per p diuiſum relinquet $- r - s$; ſicque manifeſtum erit, ſummam horum trium quadratorum $aa + bb + cc$ fore per numerum p diuiſibilem; neque horum quadratorum vllum maius eſſe, quam $\frac{1}{4}pp$.

COROLL. 1.

86. Si igitur in ſerie reſiduorum 1, α, β, γ, δ, etc. occurrat aliquis ex his numeris: -2; $-1-\alpha$; -2α; $-1-\beta$; $-\alpha-\beta$; -2β; $-1-\gamma$; $-\alpha-\gamma$; $-\beta-\gamma$; -2γ; $-1-\delta$, $-\alpha-\delta$, etc. ſemper ſumma trium quadratorum exhiberi poteſt per numerum p diuiſibilis.

COROLL. 2.

87. Atque ſi p ſit numerus primus, ſingulorum horum quadratorum radices a, b, c, cum ſint minores, quam $\frac{p}{2}$, erunt numeri ad p primi, ideoque etiam ipſa quadrata, ac niſi ipſa haec tria quadrata fuerint prima inter ſe, ſed communem habeant diuiſorem quadratum, quia hic neceſſario eſt ad p primus, per eum quadrata illa reducentur ad minora et prima inter ſe, quorum ſumma pariter per p erit diuiſibilis.

COROLL. 3.

88. Si in ſerie reſiduorum ſingulorum terminorum complementa ſimul inſint, tum etiam ſumma duorum quadra-

quadratorum assignari potest per numerum p diuisibilis. Quando autem duorum quadratorum summa datur, multo magis dabitur summa trium quadratorum, cum forma $aa + bb$ contineatur in forma $aa + bb + cc$.

SCHOLION.

89. Simili modo demonstratur, si in serie residuorum occurrat numerus, qui sit complementum summae trium residuorum, tum summam quatuor quadratorum exhiberi posse, quae sit per numerum p diuisibilis. Verum si summae binorum vel ternorum residuorum capiantur, tot prodeunt numeri diuersi, vt satis manifestum videatur, eorum omnium complementa in serie non residuorum contineri non posse.

THEOREMA 18.

90. Proposito quocunque numero primo p, si non duorum quadratorum inter se primorum summa per eum diuisibilis exhiberi potest, certo semper summa trium quadratorum per eum diuisibilis assignari potest, ita vt non singula seorsim per p sint diuisibilia.

DEMONSTRATIO.

Sit $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, etc. series residuorum ex diuisione quadratorum per numerum propositum primum p orta. Iam in hac serie vel occurrit -1, vel non occurrit. Si -1 ibi occurrit, singulorum residuorum complementa simul ibi occurrunt, ideoque pluribus modis summa duorum quadratorum per p diuisibilis datur.

 Sin

Sin autem -1 non in ſerie reſiduorum contineatur, in ſerie non-reſiduorum reperietur, vbi ſimul complementa omnium reſiduorum occurrent: hoc ergo caſu nulla dabitur ſumma duorum quadratorum per numerum p diuiſibilis; niſi vtrumque ſeorſim diuiſorem admittat. Dari autem his caſibus ſummam trium quadratorum per numerum primum p diuiſibilem ita oſtendo. Primo notetur, ſi quis numerus r in ſerie reſiduorum occurrat, eius complementum $-r$ certo in ſerie non reſiduorum eſſe, et viciſſim ſi r ſit non reſiduum, certo fore $-r$ reſiduum. Ponamus iam negari, vllam dari ſummam trium quadratorum per p diuiſibilem; et quia in ſerie reſiduorum primo adeſt numerus 1, numerus -2 ibidem non occurret, (alias enim daretur ſumma trium quadratorum per p diuiſibilis, contra hyp.) Occurret igitur -2 in ſerie non-reſiduorum, ac propterea numerus $+2$ in ſerie reſiduorum. Iam cum in ſerie reſiduorum habeantur numeri 1 et 2, ſummae eorum complementum -3, erit non-reſiduum, ideoque $+3$ reſiduum. Eodem modo ex reſiduis 1 et 3 concluditur fore -4 non-reſiduum ac proinde $+4$ reſiduum. Atque in genere ſi reſiduum quodcunque ſit r, debebit $-r-1$ eſſe non-reſiduum, hincque $1+r$ foret reſiduum. Ex hac ergo hypotheſi ſequitur, omnes plane numeros $1, 2, 3, 4, 5, 6$, etc. in ſerie reſiduorum contineri, ſicque nullos plane numeros pro ſerie non-reſiduorum relinqui; quod cum ſit abſurdum, concludere debemus dari vtique trium quadratorum ſummam per numerum primum p diuiſibilem, quorum quidem nullum ſeorſim ſit per p diuiſibile. Quae ſi forte non fuerint prima inter ſe, per

eorum

eorum maximum communem diuiſorem ad prima deprimi poterunt, quia maximus communis diuiſor quadratorum certo eſt quadratus.

C O R O L L. 1.

91. Simili ratiocinio euincitur, multo magis repugnare, ſi quis negaret, dari quatuor quadratorum ſummam per numerum primum diuiſibilem. Ergo propoſito numero quocunque primo p ſemper dabitur ſumma quatuor quadratorum per eum diuiſibilis.

C O R O L L. 2.

92. Si numerus primus p non ſit diuiſor vllius ſummae duorum quadratorum, tria illa quadrata aa, bb, cc, quorum ſumma $aa + bb + cc$ eſt per p diuiſibilis, ſingula erunt minora, quam $\frac{1}{4}pp$. Hinc ergo erit $aa + bb + cc < \frac{3}{4}pp$, vnde quotus, qui ex diuiſione huius aggregati $aa + bb + cc$ per p oritur, erit $< \frac{3}{4}p$.

T H E O R E M A 19.

93. Si ſumma quatuor quadratorum per ſummam quatuor quadratorum diuidatur, quotus erit quoque ſumma quatuor quadratorum ſaltem in fractis.

D E M O N S T R A T I O.

Sit $aa + bb + cc + dd$ ſumma quatuor quadratorum, quae diuidenda ſit per hanc ſummam quatuor quadratorum $pp + qq + rr + ss$, erit quotus $= \frac{aa + bb + cc + dd}{pp + qq + rr + ss}$, qui ſiue ſit numerus integer, ſiue fractus,

 ſemper

ſemper in quatuor quadrata ſaltem in fractis reſolui poteſt. Multiplicemus enim numeratorem et denominatorem per $pp + qq + rr + ss$, vt denominator fiat quadratus, erit quotus iſte $= \frac{(aa+bb+cc+dd)(pp+qq+rr+ss)}{(pp+qq+rr+ss)^2}$; quod ſi iam numerator in quatuor quadrata reſolui queat, ipſa fractio aequabitur aggregato quatuor quadratorum. At numerator pluribus modis in quatuor quadrata reſolui poteſt; ſi enim ponatur $(aa + bb + cc + dd)(pp + qq + rr + ss) = xx + yy + zz + vv$, erit

$$\left.\begin{aligned} x &= ap + bq + cr + ds \\ y &= aq - bp \pm cs \mp dr \\ z &= ar \mp bs - cp \pm dq \\ v &= as \pm br \mp cq - dp \end{aligned}\right\}$$

qui quatuor numeri, ſi ſinguli diuidantur per communem denominatorem $pp + qq + rr + ss$, dabunt radices quatuor quadratorum, quorum ſumma aequatur quoto propoſito.

Niſi igitur hi numeri x, y, z, et v ſint diuiſibiles per $pp + qq + rr + ss$, ſaltem in fractis aſſignari poſſunt quatuor quadrata, quorum ſumma aequalis eſt quoto $\frac{aa+bb+cc+dd}{pp+qq+rr+ss}$.

COROLL. 1.

94. Quae hic de quatuor quadratorum ſummis ſunt demonſtrata, etiam ad ſummas trium, vel etiam duorum patent, cum nihil impediat, quominus vnus, vel duo ex numeris a, b, c, d, et p, q, r, s ſint aequales nihilo.

COROLL. 2.

94. Si igitur ſumma trium quadratorum per ſummam quatuor, vel etiam trium quadratorum diuidatur, quotus certe erit ſumma quatuor quadratorum.

COROL.

COROLL. 3.

95. Quia productum ex duabus ſummis quatuor quadratorum eſt quoque ſumma quatuor quadratorum, patet, ſi omnes numeri primi ſint ſummae quatuor quadratorum, vel etiam pauciorum, tum etiam omnes omnino numeros eſſe ſummas quatuor quadratorum, vel etiam pauciorum.

SCHOLION.

96. Si ſumma quatuor quadratorum $aa + bb + cc + dd$ fuerit diuiſibilis per ſummam quatuor quadratorum $pp + qq + rr + ss$, tum quotum non ſolum in fractis, ſed etiam in integris, eſſe ſummam quatuor quadratorum, eſt theorema elegantiſſimum Fermatii, cuius demonſtratio cum ipſo nobis eſt erepta. Fateor, me adhuc hanc demonſtrationem inuenire non potuiſſe, verumtamen hinc via aperitur ad theorema ſequens demonſtrandum, quo quilibet numerus ſumma quatuor quadratorum, vel pauciorum aſſeritur; caſu ſcilicet, quo quadrata fracta non excluduntur: etſi enim hoc theorema in integris quoque ſemper verum ſit, tamen non parum mihi praeſtitiſſe videor, quod id ſemota quadratorum integrorum ratione demonſtrauerim. Cum enim demonſtratio adhuc poſt Fermatium ſit fruſtra indagata, me proxime ad hunc ſcopum pertigiſſe arbitror.

THEOREMA 20.

97. Omnis numerus eſt ſumma quatuor quadratorum, vel etiam pauciorum, ſiquidem quadrata fracta non excludantur.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Theorema hoc quidem verum eſt, etiamſi quadrata fracta excludantur; Fermatius enim affirmat, omnem numerum integrum eſſe aggregatum ex quatuor quadratis integris, vel etiam paucioribus, ego autem fateor, me hanc demonſtrationem nondum inuenire potuiſſe, dabo ergo demonſtrationem pro caſu, quo quadrata fracta non excluduntur. Iam notaui hanc demonſtrationem tantum ad numeros primos reduci, de quibus ergo ſufficit theorema demonſtraſſe. Quoniam igitur nouimus, numeros primos minores vt 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc. omnes in quatuor, vel pauciora quadrata reſolui poſſe, ſi quis id de ſequentibus neget, ei dicendum eſt, dari aliquem numerum primum minimum, qui non ſit ſumma quatuor pauciorumue quadratorum. Sit p iſte numerus primus, ita vt omnes numeri primi ipſo minores, hincque etiam omnes compoſiti certo ſint ſummae quatuor pauciorumue quadratorum. Iam per theorema praecedens datur ſumma trium quadratorum, quae ſit $aa + bb + cc$ diuiſibilis per numerum iſtum p, ita vt ſingula haec quadrata ſint minora quam $\frac{1}{4}pp$; vnde erit $aa + bb + cc < \frac{3}{4}pp$. Quotus ergo $\frac{aa + bb + cc}{p}$ erit minor, quam $\frac{3}{4}p$, qui cum idcirco minor ſit, quam p, certe erit ſumma quatuor pauciorumve quadratorum; ſit $xx + yy + zz + vv$ iſte quotus, erit $p = \frac{aa + bb + cc}{xx + yy + zz + vv}$, ideoque ipſe numerus p erit ſumma quatuor pauciorumue quadratorum, quae in fractionibus etiam aſſignari poſſunt. Cum igitur inter numeros primos non detur minimus, qui in quatuor

quatuor vel pauciora quadrata dispertiri nequeat, nullus prorsus datur numerus primus, qui non esset aggregatum quatuor pauciorumue quadratorum, quod cum certum sit de numeris primis, etiam valebit de omnibus numeris compositis, ideoque de omnibus omnino numeris, ita vt nullus omnino detur numerus, qui non sit summa quatuor pauciorumue quadratorum.

COROLL. 1.

98. Cum omnis numerus integer sit summa quatuor pauciorumue quadratorum, eadem proprietas etiam ad omnes numeros fractos patet. Sit enim proposita fractio quaecunque $\frac{m}{n}$, quae transformetur in $\frac{mn}{nn}$. Iam sit $mn = \frac{aa}{pp} + \frac{bb}{qq} + \frac{cc}{rr} + \frac{dd}{ss}$, eritque $\frac{mn}{nn} = \frac{m}{n} = \frac{aa}{npp} + \frac{bb}{nnqq} + \frac{cc}{nnrr} + \frac{dd}{nnss}$; ideoque omnis numerus fractus erit summa quatuor pauciorumue quadratorum.

COROLL. 2.

99. Quoniam, si de resolutione numerorum fractorum in quadrata, sermo est, conditio illa quadratorum integrorum sponte euanescit, theorema in latiori sensu ita acceptum, vt omnes plane numeros, siue integros, siue fractos, in quatuor vel pauciora quadrata resolubiles dicamus, sine vlla restrictione rigide demonstraui.

SCHOLION.

100. Cum igitur Fermatius affirmasset, omnem numerum integrum esse summam vel quatuor vel pau-

ciorum quadratorum integrorum: nunc quidem hoc est demonstratum de quadratis in genere spectatis, fractis non exclusis. Quare vt Fermatio satisfiat, superest vt demonstremus, qui numerus integer in quatuor quadrata fracta resolui queat, eundem quoque in quatuor vel pauciora quadrata integra resolui posse. In analysi quidem Diophantaea pro certo assumi solet, nullum numerum integrum in quatuor quadrata fracta dispertiri posse, nisi eius resolutio in quatuor quadrata integra vel pauciora constet: quod ergo si demonstratione esset confirmatum, nihil foret amplius desiderandum. Verum nusquam adhuc eiusmodi demonstrationem inueni. Quod autem ad theorema latissime patens attinet, his verbis conceptum:

Omnem numerum siue integrum siue fractum esse summam quatuor paucioruмue quadratorum.

eius demonstrationem hic tradidi ita rigorosam, vt in ea nihil plane desiderari queat: hocque ipso non contemnendam partem demonstrationum Fermatianarum deperditarum mihi equidem videor restituisse.

OBSER-

OBSERVATIO
DE SVMMIS DIVISORVM.

Auctore L. EVLERO.

§. 1.

Proposito quocunque numero n denotet haec formula $\int n$ summam omnium diuisorum numeri n. Ita cum vnitas praeter se ipsam alium non habeat diuisorem, erit $\int 1 = 1$; atque cum numerus primus duos tantum habeat diuisores, vnitatem et se ipsum, si n fuerit numerus primus, erit $\int n = 1 + n$. Deinde cum numerus perfectus aequalis sit summae suarum partium aliquotarum, partes aliquotae autem sint diuisores eius praeter ipsum numerum, manifestum est numeri perfecti summam diuisorum se ipso esse duplo maiorem, hinc si n sit numerus perfectus, erit $\int n = 2n$. Porro quoniam numerus redundans appellari solet is, cuius summa partium aliquotarum ipso est maior, si n sit numerus redundans, erit $\int n > 2n$; ac si n sit numerus deficiens, seu talis, cuius summa partium aliquotarum ipso est minor, erit $\int n < 2n$.

§. 2 Hoc igitur modo indoles numerorum, quatenus summa partium aliquotarum, vel diuisorum, continetur, facile signis exprimitur. Si enim fuerit $\int n = 1 + n$, erit n numerus primus, si sit $\int n = 2n$ erit n numerus perfectus, ac si sit vel $\int n > 2n$, vel $\int n < 2n$, numerus n erit vel redundans, vel deficiens. Huc etiam referri potest quaestio de numeris, qui amicabiles vocari folent, quorum alter fummae partium aliquotarum alterius aequatur. Si enim fint m et n numeri amicabiles, cum numeri m fit fumma partium aliquotarum $= \int m - m$, et numeri $n = \int n - n$, erit ex natura horum numerorum $n = \int m - m$ et $m = \int n - n$: ficque habebitur $\int m = \int n = m + n$. Duo ergo numeri amicabiles eandem diuiforum fummam habent, quae fimul fummae amborum numerorum eft aequalis.

§. 3. Quo fumma diuiforum cuiusque numeri propofiti facilius inueniri poffit, id commodiffime fiet hunc numerum in duos factores, qui inter fe fint primi, refoluendo. Si enim fint p et q numeri inter fe primi, feu qui praeter vnitatem nullum habeant diuiforem communem, tum fumma diuiforum producti pq, aequale erit producto ex fummis diuiforum vtriusque feu erit $\int pq = \int p . \int q$. Hinc inuentis fummis diuiforum numerorum minorum, inuentio fummae diuiforum non difficulter ad numeros maiores extenditur.

§. 4. Si fint a, b, c, d, etc. numeri primi, omnis numerus, quantuscunque fuerit, femper ad huiusmodi formam $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ etc. reducitur: qua forma inventa erit huius numeri fumma diuiforum feu

$\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ etc. $= \int a^\alpha . \int b^\beta . \int c^\gamma . \int d^\delta$. etc.

At ob $a, b, c, d,$ etc. numeros primos erit

$$\int a^\alpha = 1 + a + a^2 + \dots + a^\alpha = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}, \text{ ideoque}$$

$$\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \text{etc.} = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} . \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} . \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} . \frac{d^{\delta+1} - 1}{d - 1} . \text{etc.}$$

Sufficiet ergo fingularum poteftatum numerorum primorum tantum fummas diuiforum inueniffe. §. 5.

§. 5. Hanc autem indagationem vlterius non persequor, sed, vt ad id, quod hic tractare institui, propius accedam, numerorum secundum ordinem naturalem progredientium summas diuisorum hic conspectui exponam.

∫ 1 = 1	∫ 26 = 42	∫ 51 = 72	∫ 76 = 140
∫ 2 = 3	∫ 27 = 40	∫ 52 = 98	∫ 77 = 96
∫ 3 = 4	∫ 28 = 56	∫ 53 = 54	∫ 78 = 168
∫ 4 = 7	∫ 29 = 30	∫ 54 = 120	∫ 79 = 80
∫ 5 = 6	∫ 30 = 72	∫ 55 = 72	∫ 80 = 186
∫ 6 = 12	∫ 31 = 32	∫ 56 = 120	∫ 81 = 121
∫ 7 = 8	∫ 32 = 63	∫ 57 = 80	∫ 82 = 126
∫ 8 = 15	∫ 33 = 48	∫ 58 = 90	∫ 83 = 84
∫ 9 = 13	∫ 34 = 54	∫ 59 = 60	∫ 84 = 224
∫ 10 = 18	∫ 35 = 48	∫ 60 = 168	∫ 85 = 108
∫ 11 = 12	∫ 36 = 91	∫ 61 = 62	∫ 86 = 132
∫ 12 = 28	∫ 37 = 38	∫ 62 = 96	∫ 87 = 120
∫ 13 = 14	∫ 38 = 60	∫ 63 = 104	∫ 88 = 180
∫ 14 = 24	∫ 39 = 56	∫ 64 = 127	∫ 89 = 90
∫ 15 = 24	∫ 40 = 90	∫ 65 = 84	∫ 90 = 234
∫ 16 = 31	∫ 41 = 42	∫ 66 = 144	∫ 91 = 112
∫ 17 = 18	∫ 42 = 96	∫ 67 = 68	∫ 92 = 168
∫ 18 = 39	∫ 43 = 44	∫ 68 = 126	∫ 93 = 128
∫ 19 = 20	∫ 44 = 84	∫ 69 = 96	∫ 94 = 144
∫ 20 = 42	∫ 45 = 78	∫ 70 = 144	∫ 95 = 120
∫ 21 = 32	∫ 46 = 72	∫ 71 = 72	∫ 96 = 252
∫ 22 = 36	∫ 47 = 48	∫ 72 = 195	∫ 97 = 98
∫ 23 = 24	∫ 48 = 124	∫ 73 = 74	∫ 98 = 171
∫ 24 = 60	∫ 49 = 57	∫ 74 = 114	∫ 99 = 156
∫ 25 = 31	∫ 50 = 93	∫ 75 = 124	∫ 100 = 217

§. 6.

§. 6. Si iam contemplemur feriem horum numerorum 1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12, 28 etc. quam fummae diuiforum numeris naturali ordine procedentibus refpondentes conftituunt, non folum nulla lex progreffionis patet, fed ordo horum numerorum tantopere eft perturbatus, vt nulli prorfus legi adftrictus videatur. Quin etiam haec feries ordinem numerorum primorum manifefto implicat, cum terminus indicis n feu $\int n$ toties fit $= n + 1$, quoties n eft numerus primus; conftat autem, numeros primos nullo adhuc modo ad certam quandam progreffionis legem reuocari potuiffe. Cum autem noftra feries non folum numerorum primorum, fed etiam omnium reliquorum numerorum, quatenus ex primis funt compofiti, rationem complectatur, eius lex multo etiam difficilior inuentu videtur, quam ipfius feriei numerorum primorum.

§. 7. Quae cum ita fint, non parum equidem mihi fcientiam numerorum promouiffe videor, dum certam atque conftantem legem detexi, fecundum quam termini feriei propofitae 1, 3, 4, 7, 6, etc. progrediantur, ita vt per hanc legem quilibet iftius feriei terminus ex praecedentibus definiri poffit, inueni enim, quod magis mirum videatur, hanc feriem ad id genus progreffionum pertinere, quae recurrentes vocari folent; et quarum natura ita eft comparata, vt quilibet terminus ex praecedentibus fecundum certam quandam relationis rationem determinetur. Quis autem vnquam crediderit hanc feriem tantopore perturbatam, et quae cum feriebus recurrentibus nihil plane commune habere videtur,

videtur, nihilominus in hoc ferierum genere contineri eiusque fcalam relationis affignari poffe?

§. 8. Cum huius feriei terminus indici n refpondens, qui indicat fummam diuiforum numeri n fit $= \int n$, eius termini antecedentes ordine retrogrado erunt $\int(n-1)$, $\int(n-2)$, $\int(n-3)$, $\int(n-4)$, $\int(n-5)$ etc. Quilibet autem terminus iftius feriei fcilicet $\int n$ ita ex aliquot antecedentium conflatur, vt fit:

$$\begin{aligned} \int n = & \int(n-1)+\int(n-2)-\int(n-5)-\int(n-7)+\int(n-12)+\int(n-15) \\ & -\int(n-22)-\int(n-26)+\int(n-35)+\int(n-40)-\int(n-51)-\int(n-57) \\ & +\int(n-70)+\int(n-77)-\int(n-92)-\int(n-100)+\int(n-117)+\int(n-126)-\text{etc.} \end{aligned}$$

Vel cum figna $+$ et $-$ alternatim binos terminos afficiant, haec feries commode in duas diuellitur, hoc modo:

$$\int n = \begin{cases} \int(n-1)-\int(n-5)+\int(n-12)-\int(n-22)+\int(n-35)-\int(n-51)+\text{etc.} \\ \int(n-2)-\int(n-7)+\int(n-15)-\int(n-26)+\int(n-40)-\int(n-57)+\text{etc.} \end{cases}$$

§. 9 Ex hac pofteriori forma ordo numerorum, qui in vtraque ferie fucceffiue a numero n fubtrahuntur, facile perfpicitur, vtraque enim feries eft fecundi ordinis, differentias fecundas habens conftantes. Namque prioris feriei numeri cum fuis differentiis tam primis, quam fecundis, funt:

	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117,	etc.
diff. 1.		4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	etc.
diff. 2.			3,	3,	3,	3,	3,	3,	3,	etc.

Vnde illius feriei terminus generalis eft $= \frac{3xx-x}{2}$, continetque adeo omnes numeros pentagonales. Altera feries eft

2, 7,

2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126, etc.
diff. 1: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 etc.
diff. 2: 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, etc.

ideoque terminum generalem habet $\frac{3xx+x}{2}$, ac feriem numerorum pentagonalium retro continuatam continet.

§. 10. Omnino hic notatu eft dignum, feriem numerorum pentagonalium tam ipfam, quam retro continuatam, ad ordinem feriei fummarum diuiforum potisfimum adhiberi, cum fane nullum nexum inter numeros pentagonales et fummas diuiforum ne fufpicari quidem liceat. Si enim feries numerorum pentagonalium tam antrorfum, quam retrorfum, continuata exponatur hoc modo:

etc. 77, 57, 40, 26, 15, 7, 2, 0, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, etc.

formula noftra ordinem fummarum diuiforum complectens fignis alternantibus hoc modo ordinata exhibere poterit:

$$\text{etc.} - \int(n-15) + \int(n-7) - \int(n-2) + \int(n-0) - \int(n-1) + \int(n-5) - \int(n-12) + \int(n-22) - \text{etc.} = 0$$

quae feries vtrinque quidem in infinitum excurrit, fed quouis cafu, fiquidem ad vfum noftrum rite adhibeatur, determinato terminorum numero conftat.

§. 11. Si enim ope formulae noftrae primum exhibitae

$$\begin{aligned}\int n = &\int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) \\ &- \int(n-22) - \int(n-26) + \int(n-35) + \int(n-40) - \int(n-51) - \int(n-57) \\ &+ \int(n-70) + \int(n-77) - \int(n-92) - \int(n-100) + \text{etc.}\end{aligned}$$

Summam diuiforum numeri n inuenire velimus ex cognitis diuiforum fummis numerorum minorum, plures termi-

terminos huius formulae accipere non oportet, quam quoad ad fummas diuiforum numerorum negatiuorum perueniatur. Omnes fcilicet termini, qui poft fignum $\int$ numeros negatiuos continent, funt reiiciendi; vnde patet fi n fit numerus exiguus, pauciffimos terminos fufficere, quo maior autem fuerit numerus n, eo plures terminos ex formula noftra generali ad vfum adhiberi debere.

§. 12. Summa igitur diuiforum numeri propofiti n ex fummis diuiforum aliquot numerorum minorum, quas cognitas effe affumo, conflatur; quoniam quouis cafu fummae numerorum negatiuorum reiiciuntur. Quae cautio cum eo fit facilior, quod numerorum negatiuorum fumma diuiforum ne concipi quidem poffit, infuper moneri oportet, quomodo operatio fit dirigenda iis cafibus, quibus formula noftra praebet terminum $\int(n-n)$ feu $\int 0$, qui cum cyphra per omnes numeros fit diuifibilis, vel infinitus vel indeterminatus videtur. Cafus hic autem toties occurrit, quoties n eft numerus ex ferie numerorum pentagonalium vel ipfa, vel retro continuata; his igitur cafibus tenendum eft, femper pro termino $\int(n-n)$ feu $\int 0$ ipfum illum numerum n, qui proponitur, effe fcribendum, et quidem cum eo figno, quo terminus $(n-n)$ in formula noftra afficitur.

§. 13. His expofitis praeceptis, quae ad vfum formulae noftrae obferuari debent, exempla a numeris minimis inchoando apponam, quo facilius vis formulae noftrae perfpiciatur, fimulque eius veritas agnofcatur.

$\int 1$

$$\int 1 = \int 0 \quad \text{seu}$$
$$\int 1 = 1 = 1$$

$$\int 2 = \int 1 + \int 0 \quad \text{seu}$$
$$\int 2 = 1 + 2 = 3$$

$$\int 3 = \int 2 + \int 1 \quad \text{seu}$$
$$\int 3 = 3 + 1 = 4$$

$$\int 4 = \int 3 + \int 2 \quad \text{seu}$$
$$\int 4 = 4 + 3 = 7$$

$$\int 5 = \int 4 + \int 3 - \int 0 \quad \text{seu}$$
$$\int 5 = 7 + 4 - 5 = 6$$

$$\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1 \quad \text{seu}$$
$$\int 6 = 6 + 7 - 1 = 12$$

$$\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - \int 0 \quad \text{seu}$$
$$\int 7 = 12 + 6 - 3 - 7 = 8$$

$$\int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1 \quad \text{seu}$$
$$\int 8 = 8 + 12 - 4 - 1 = 15$$

$$\int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2 \quad \text{seu}$$
$$\int 9 = 15 + 8 - 7 - 3 = 13$$

$$\int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3 \quad \text{seu}$$
$$\int 10 = 13 + 15 - 6 - 4 = 18$$

$$\int 11 = \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4 \quad \text{seu}$$
$$\int 11 = 18 + 13 - 12 - 7 = 12$$

$$\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0 \quad \text{seu}$$
$$\int 12 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28$$

§. 14. Exempla haec attentius inſpicienti, atque etiam ad numeros maiores progredienti, non ſine admiratione patebit, quemadmodum ſemper quaſi praeter expecta-

expectationem ad veram diuiſorum ſummam numeri propoſiti perueniatur; et quo hic conſenſus facilius deprehendatur, ſupra iam omnium numerorum centenario non maiorum ſummas diuiſorum exhibui; vnde veritas noſtrae formulae in numeris maioribus explorari poterit. Imprimis autem non ſine delectatione reperiemus, quoties numerus propoſitus fuerit primus, ex formula noſtra pro eius diuiſorum ſumma inueniri numerum vnitate maiorem. Euoluamus in hunc finem exemplum, quo numerus propoſitus $n = 101$, quaſi ignorantes exploraturi, vtrum hic numerus ſit primus nec ne? atque operatio ita conſtabit:

$$
\begin{array}{l}
\int 101 = \int 100 + \int 99 - \int 96 - \int 94 + \int 89 + \int 86 - \int 79 - \int 75 \\
\qquad\qquad 217 + 156 - 252 - 144 + 90 + 132 - 80 - 124 \\
\qquad + \int 66 + \int 61 - \int 50 - \int 44 + \int 31 + \int 24 - \int 9 - \int 1 \\
\qquad + 144 + 62 - 93 - 84 + 32 + 60 - 13 - 1
\end{array}
$$

Colligendis ergo binis terminis erit

$$
\begin{array}{rl}
\int 101 = & + 373 - 396 \\
& + 222 - 204 \\
& + 206 - 177 \\
& + 92 - 14 \\
\hline
\text{ſeu } \int 101 = & + 893 - 791 = 102
\end{array}
$$

Reperitur ergo ſumma diuiſorum numeri 101 vnitae maior ſcilicet 102, vnde, etiamſi id aliunde non conſtaret, ſequitur manifeſto, numerum 101 eſſe primum. Hoc autem merito eo mirabilius videtur, cum nulla operatio ſit inſtituta, quae ad rationem diuiſorum vllo modo referri queat; quin etiam diuiſores, quorum ſumma

 per

per hanc regulam reperitur, ipsi manent incogniti, etiamsi saepe ex consideratione ipsius summae concludi possint.

§. 15. Insignis haec proprietas, qua summae diuisorum sunt praeditae, non minus foret memorabilis, etiamsi eius demonstratio esset obuia et quasi in aprico posita. Sin autem demonstratio admodum esset abstrusa, atque numerorum proprietatibus maxime reconditis inniteretur, inde non mediocriter certe pretium huius legis progressionis repertae augeretur, siquidem earum veritatum inuestigatio eo magis est laudanda, quo magis eae fuerint absconditae. Verum dum fateri cogor, me non solum nullam huius veritatis demonstrationem proferre posse, sed etiam propemodum pro desperato habere, nescio an non ob hanc ipsam caussam cognitio talis veritatis multo magis sit aestimanda, cuius demonstratio nobis est imperscrutabilis. Atque hanc ob rem istam veritatem pluribus exemplis confirmare visum est, quod mihi quidem eius demonstrationem exhibere non liceat.

§. 16. Eximium igitur hic eiusmodi propositionum habemus exemplum, de quarum veritate nullo modo dubitare possumus, etiamsi eas demonstrare non valeamus, quod plerisque eo magis mirum videbitur, quod in mathesi vulgo nullae aliae propositiones admitti putantur, nisi quarum veritas ex indubitatis principiis euinci queat. Interim tamen non fortuito et quasi diuinando ad cognitionem huius veritatis perueni; cui enim in mentem venire potuisset, ordinem, qui forte in summis diuisorum locum habuerit, ex natura serierum

recur-

recurrentium ac numerorum pentagonalium per solam coniecturam elicere velle? Hanc ob rem non abs re fore arbitror, si modum, quo ad cognitionem huius ordinis pertigerim, dilucide exposuero, praesertim cum is admodum sit reconditus ac longe multasque per ambages conquisitus.

§. 17 Deductus autem sum ad hanc obseruationem per considerationem istius formulae infinitae

$s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)$ etc.

cuius valorem, si multiplicatione singulorum factorum actu instituta euoluatur, ac secundum potestates ipsius x disponatur, deprehendi in sequentem seriem conuerti:

$s = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-$ etc.

vbi in exponentibus ipsius x iidem numeri occurrunt quos supra descripsi, numeri scilicet pentagonales cum ipsi, tum retro continuati. Vnde, quo ordo facilius perspiciatur, haec series ita exhiberi poterit, vt vtrinque in infinitum excurrat:

$s =$ etc. $+x^{26}-x^{15}+x^7-x^2+x^0-x^1+x^5-x^{12}+x^{22}-x^{35}+x^{51}-$ etc.

§. 18. Aequalitas harum duarum formularum pro s exhibitarum iam est id ipsum, quod solida demonstratione confirmare non possum; verum tamen, qui opus euolutionis formulae prioris $s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ etc. in se suscipere, hosque factores successiue in se multiplicare voluerit, statim ad terminos primores alterius seriei $s = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+$ etc. perueniet, neque difficulter perspiciet, bina signa $+$ et $-$ geminata se inuicem excipere, et exponentes potestatum ipsius x eam legem sequi, quam iam satis exposui.

 Con-

Concessa autem hac aequalitate inter binas istas formulas infinitas proprietas summarum diuisorum, quam ante indicaui, rigide inde demonstrari potest; atque vicissim si haec proprietas pro vera agnoscatur, ex ea veritas consensus duarum harum formularum euincetur.

§. 19. Quodsi enim pro demonstrato assumamus, posito $s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ etc. fore $s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} -$ etc. erit logarithmis sumendis

$$ls = l(1-x) + l(1-x^2) + l(1-x^3) + l(1-x^4) + l(1-x^5) + \text{etc.}$$

$$\text{et } ls = l(1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.})$$

Sumantur vtriusque formae differentialia, eritque

$$\frac{ds}{s} = \frac{-dx}{1-x} - \frac{2xdx}{1-xx} - \frac{3xxdx}{1-x^3} - \frac{4x^3dx}{1-x^4} - \frac{5x^4dx}{1-x^5} \text{ etc.}$$

$$\text{et } \frac{ds}{s} = \frac{-dx - 2xdx + 5x^4dx + 7x^6dx - 12x^{11}dx - 15x^{14}dx + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}}$$

Multiplicetur vtraque per $\frac{-x}{dx}$, vt habeatur

$$\text{I. } -\frac{xds}{sdx} = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-xx} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \text{etc.}$$

$$\text{II. } -\frac{xds}{sdx} = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - 26x^{26} + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} - x^{16} + \text{etc.}}$$

§. 20. Harum expressionum inter se aequalium contemplemur primo priorem, ac singulos terminos more consueto in progressiones geometricas conuertamus; quo facto prodibit, infinitas has progressiones geometricas secundum potestates ipsius x disponendo:

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
-\frac{xds}{sdx}= & x^1 & +x^2 & +x^3 & +x^4 & +x^5 & +x^6 & +x^7 & +x^8 & +x^9 & +x^{10} & +x^{11} & +x^{12}\ \text{etc.} \\
 & & +2 & . & +2 & . & +2 & . & +2 & . & +2 & . & +2 \\
 & & & +3 & . & . & +3 & . & . & +3 & . & . & +3 \\
 & & & & +4 & . & . & . & +4 & . & . & . & +4 \\
 & & & & & +5 & . & . & . & . & +5 & . & . \\
 & & & & & & +6 & . & . & . & . & . & +6 \\
 & & & & & & & +7 & . & . & . & . & . \\
 & & & & & & & & +8 & . & . & . & . \\
 & & & & & & & & & +9 & . & . & . \\
 & & & & & & & & & & +10 & . & . \\
 & & & & & & & & & & & +11 & . \\
 & & & & & & & & & & & & +12
\end{array}
$$

§. 21. Si iam fingularum poteftatum ipfius x coefficientes colligantur, habebitur:

$$-\frac{xds}{sdx} = x^1 + x^2(1+2) + x^3(1+3) + x^4(1+2+4) + x^5(1+5) + x^6(1+2+3+6)\ \text{etc.}$$

vbi manifeftum eft, cuiusque poteftatis ipfius x coefficientem effe aggregatum omnium numerorum, per quos exponens illius poteftatis eft diuifibilis. Scilicet poteftatis x^n coefficiens erit fumma omnium diuiforum numeri n, erit ergo is fecundum modum fignandi fupra receptum $= \int n$. Hinc itaque feriei ipfi $-\frac{xds}{sdx}$ aequalis inuenta ita exhibebitur, vt fit

$$-\frac{xds}{sdx} = x\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + x^7\int 7 + \text{etc.}$$

ficque pofito $x=1$ prodit progreffio fummarum diuiforum, qui fingulis numeris ordine naturali progredientibus conueniunt.

§. 22.

§. 22. Designemus iam hanc seriem per t vt sit
$$t = x^1\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + x^7\int 7 + \text{etc.}$$
et ob $t = -\frac{x\,ds}{s\,dx}$ erit quoque
$$t = \frac{x^1 + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - 26x^{26} + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}}$$
Necesse igitur est, vt ex euolutione huius fractionis pro t series obtineatur aequalis illi, quam prior forma suppeditauit: vnde manifestum est, seriem illam pro t inuentam esse recurrentem, cuius singuli termini per praecedentes determinentur, secundum scalam relationis, quam denominator $1 - x - x^2 + x^5 + x^7$ etc. indicat.

§. 23. Quo nunc facilius indoles huius seriei recurrentis cognoscatur, binos istos valores pro t inuentos inter se coaequemus, atque ad fractionem tollendam vterque per denominatorem $1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.}$ multiplicetur, quo facto orietur terminis secundum potestates ipsius x disponendis:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
x^1\int 1 & +x^2\int 2 & +x^3\int 3 & +x^4\int 4 & +x^5\int 5 & +x^6\int 6 & +x^7\int 7 & +x^8\int 8 & +x^9\int 9 & +x^{10}\int 10 & +x^{11}\int 11 & +x^{12}\int 12 \ \text{etc.} \\
 & -\int 1 & -\int 2 & -\int 3 & -\int 4 & -\int 5 & -\int 6 & -\int 7 & -\int 8 & -\int 9 & -\int 10 & -\int 11 \\
 & & -\int 1 & -\int 2 & -\int 3 & -\int 4 & -\int 5 & -\int 6 & -\int 7 & -\int 8 & -\int 9 & -\int 10 \\
 & & & & & +\int 1 & +\int 2 & +\int 3 & +\int 4 & +\int 5 & +\int 6 & +\int 7 \\
 & & & & & & & +\int 1 & +\int 2 & +\int 3 & +\int 4 & +\int 5 \\
 & & & & & & \text{aequale} & & & & & \\
x^1 & +2x^2 & * & * & -5x^5 & * & -7x^7 & * & * & * & * & +12x^{12} \ \text{etc.}
\end{array}$$

§. 24. Cum iam singularum potestatum ipsius x coefficientes se mutuo destruere debeant, hinc sequentes eliciemus aequalitates:

$$\int 1 = 1$$

$$
\begin{array}{ll}
\int 1 = 1 & \int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - 7 \\
\int 2 = \int 1 + 2 & \int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1 \\
\int 3 = \int 2 + \int 1 & \int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2 \\
\int 4 = \int 3 + \int 2 & \int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3 \\
\int 5 = \int 4 + \int 3 - 5 & \int 11 = \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4 \\
\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1 & \int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + 12
\end{array}
$$

etc.

quae manifesto redeunt ad istas:

$$
\begin{array}{ll}
\int 1 = 1 & \int 7 = \int(7-1) + \int(7-2) - \int(7-5) - 7 \\
\int 2 = \int(2-1) + 2 & \int 8 = \int(8-1) + \int(8-2) - \int(8-5) - \int(8-7) \\
\int 3 = \int(3-1) + \int(3-2) & \int 9 = \int(9-1) + \int(9-2) - \int(9-5) - \int(9-7) \\
\int 4 = \int(4-1) + \int(4-2) & \int 10 = \int(10-1) + \int(10-2) - \int(10-5) - \int(10-7) \\
\int 5 = \int(5-1) + \int(5-2) - 5 & \int 11 = \int(11-1) + \int(11-2) - \int(11-5) - \int(11-7) \\
\int 6 = \int(6-1) + \int(6-2) - \int(6-5) & \int 12 = \int(12-1) + \int(12-2) - \int(12-5) - \int(12-7) + 12
\end{array}
$$

§. 25. Hic perspicuum est, numeros, qui continuo a numero proposito, cuius diuisorum summa quaeritur, subtrahi debent, esse ipsos numeros seriei 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, etc. ex quibus tot quouis casu sunt sumendi, quoad numerum propositum non excedant: atque etiam signa eam tenere rationem, quae supra est descripta. Hinc ergo proposito numero quocunque n manifestum est, fore

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \text{etc.}$$

hos terminos eousque continuando, donec numeri signum $\int$ praefixum habentes, fiant negatiui. Simul ergo ex origine seriei huius recurrentis ratio patet, cur ista progressio quouis casu vlterius continuari non debeat.

§. 26. Quod porro ad numeros absolutos attinet, qui in formularum inuentarum aliquibus sub finem annectuntur, manifestum est, eos ex numeratore fractionis, qua valor ipsius t expressus est inuentus (§. 22) oriri, atque iis tantum casibus legem continuitatis interrumpere, quibus numerus n est terminus huius seriei 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26 etc. quanquam ne hoc

 quidem

quidem caſu lex ſignorum perturbatur. His autem caſibus numerus abſolutus inſuper cum ſigno ſuo adiiciendus ipſi numero propoſito eſt aequalis; atque ſi legem ante deſcriptam conſideremus, hunc numerum vtique deprehendemus reſpondere termino $\int(n-n)$: vnde ratio patet, cur quoties in applicatione formae

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \text{etc.}$$

peruenitur ad terminum $\int(n-n)$, is non omitti, ſed pro eius valore ipſe numerus n ſcribi debeat. Hinc igitur regula ſupra expoſita in omnibus partibus confirmatur.

DEMON-

DEMONSTRATIO

THEOREMATIS CIRCA ORDINEM IN SVMMIS DIVISORVM OBSERVATVM.

AVCT. *L. EVLERO.*

Iam ab aliquo tempore incidi in theorema, quo natura numerorum non mediocriter illuſtrari eſt viſa, cum in eo ordo contineatur, quem ſummae diuiſorum, ex numeris ſerie naturali procedentibus ortae, inter ſe tenent. Oſtendi enim, ſi ſingulorum numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc. omnes diuiſores in vnam ſummam colligantur, haeque diuiſorum ſummae in ſeriem diſponantur, quae erit

1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12, 28, 14, 24, 24, 31, 18 etc.

hanc ſeriem eſſe recurrentem, eiusque ſingulos terminos ex praecedentibus ſecundum quandam ſcalam relationis determinari. Atque hic ordo non ſolum ideo maxime notatu dignus eſt viſus, quod vix quisquam ſuſpicatus fuerit, hanc ſeriem certae cuipiam legi eſſe adſtrictam, ſed etiam, quod iſtius ordinis nullam demonſtrationem firmam mihi quidem tum temporis reperire licuerit, etiamſi pluribus modis rem tentauerim. Perductus quidem ſui ad huius ordinis obſeruationem, dum ſequentem formulam in infinitum productam ſum contemplatus:

$$s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

ex cuius euolutione per inductionem concluſi, fore

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \text{ etc.}$$

vbi exponentium ipſius x ordo eorum differentiis ſumendis fit manifeſtus; erit enim ſeries differentiarum

$1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, 6, 13, 7, 15, 8,$ etc.

Excerptis enim terminis alternis patet, hanc ſeriem eſſe permixtam ex ſerie numerorum imparium, et ex ſerie numerorum omnium integrorum. Verum quod ſit ſecundum hanc legem: $s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} +$ etc. ſiquidem fuerit $s = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ etc. per inductionem tantum collegi, neque aequalitatem harum duarum formularum ſolida demonſtratione euincere potui. Quam ob cauſam etiam ordinem illum, quem in ſummis diuiſorum hinc elicui, firmiter demonſtrare non valui; ſed eius demonſtrationem iam tum inniti declaraui demonſtrationi aequalitatis inter binas illas formulas infinitas modo exhibitas. Cum igitur nunc iſtam demonſtrationem ſim adeptus, ordinem quoque illum in ſummis diuiſorum detectum non amplius illis veritatibus, quae agnoſcuntur, neque tamen demonſtrari poſſunt, accenſeri conueniet, quemadmodum tum temporis ſum arbitratus, ſed iam merito ipſi locus inter veritates rigide demonſtratas aſſignari poterit. Cuius rei ne vllum dubium relinquatur, ſingulas propoſitiones, quibus demonſtratio huius veritatis innititur, hic ordine apponam atque demonſtrabo:

PROPOSITIO I.

Si ſit $s = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\epsilon)(1+\zeta)(1+\eta)$ etc. productum hoc, ex infinitis factoribus conſtans, in ſeriem ſequentem conuertitur:

$$s = (1+\alpha) + \beta(1+\alpha) + \gamma(1+\alpha)(1+\beta) + \delta(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) + \epsilon(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta) + \zeta(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\epsilon) + \text{etc.}$$

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Cum enim ſeriei primus terminus ſit $(1+\alpha)$ et ſecundus $= \beta(1+\alpha)$, erit ſumma primi et ſecundi $= (1+\alpha)(1+\beta)$: ſi iam addatur tertius terminus $\gamma(1+\alpha)(1+\beta)$, prodibit $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$: addatur inſuper terminus quartus, qui eſt $\delta(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$, erit ſumma $= (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)$. Atque ſic in infinitum procedendo, ſumma totius ſeriei, ſeu omnium eius terminorum, perducetur ad hoc productum: $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\varepsilon)(1+\zeta)$ etc. Vnde manifeſtum eſt, ſi fuerit

$$s = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\varepsilon)(1+\zeta) \text{ etc.}$$

fore viciſſim:

$$s = (1+\alpha) + \beta(1+\alpha) + \gamma(1+\alpha)(1+\beta) + \delta(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) + \text{etc.}$$

PROPOSITIO II.

Si fuerit $s = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$ etc. productum hoc, ex infinitis factoribus conſtans, reducetur ad hanc ſeriem:

$$s = 1 - x - xx(1-x) - x^3(1-x)(1-x^2) - x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \text{ etc.}$$

DEMONSTRATIO.

Si haec forma $s = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ etc. cum forma praecedente $s = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\varepsilon)$ etc. comparetur, manifeſtum eſt fore: $\alpha = -x$; $\beta = -x^2$; $\gamma = -x^3$; $\delta = -x^4$; $\varepsilon = -x^5$; etc. His igitur valoribus in ſerie ibi data, quae producto s aequalis eſt inuenta, rite ſubſtitutis, patebit propoſitionis veritas, ſcilicet eſſe:

$$s = 1 - x - xx(1-x) - x^3(1-x)(1-x^2) - x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) - \text{etc.}$$

PROPOSITIO III.

Si fuerit $s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ $(1-x^6)(1-x^7)$ etc. erit hoc productum infinitum per multiplicationem euoluendo, terminosque secundum potestates ipsius x disponendo:

$$s = 1-x^1-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-etc.$$

cuius seriei ratio est ea ipsa, quae supra est exposita.

DEMONSTRATIO.

Cum sit $s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ $(1-x^6)(1-x^7)$ etc. erit $s = 1-x-xx(1-x)-x^3(1-x)(1-x^2)$ $-x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) +$ etc.

Ponatur $s = 1-x-Axx$, erit:

$$A = 1-x+x(1-x)(1-xx)+x^2(1-x)(1-x^2)(1-x^3)+etc.$$

Euoluantur singuli termini tantum secundum factorem $1-x$, ac sequenti modo disponantur:

$$A = \begin{array}{l} \quad\;\; -x \qquad\qquad\;\; -x^2(1-xx) \qquad\qquad -x^3(1-x^2))1-x^3) \qquad\qquad -etc. \\ +1+x(1-xx)+x^2(1-x^2)(1-x^3)+x^3(1-x^2)(1-x^3)(1+x^4)+etc. \end{array}$$

eritque terminis subscriptis colligendis:

$$A = 1-x^3-x^5(1-x^2)-x^7(1-x^2)(1-x^3)-x^9(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)-etc.$$

Ponatur $A = 1-x^3-Bx^5$, erit

$$B = 1-x^2+x^2(1-x^2)(1-x^3)+x^4(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)+etc.$$

in quibus terminis subscriptis $1-x^2$ tantum euoluatur, ac fiet

$$B = \begin{array}{l} \quad -x^2 \qquad\qquad -x^4(1-x^3) \qquad\qquad\quad -x^6(1-x^3)(1-x^4) \\ 1+x^2(1-x^3)+x^4(1-x^3)(1-x^4)+x^6(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \end{array}$$

denuoque terminis subscriptis colligendis habebitur:

$$B = 1-x^5-x^8(1-x^3)-x^{11}(1-x^3)(1-x^4)-x^{14}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)-etc$$

Ponatur $B = 1-x^5-Cx^8$, erit

$$C = 1-x^3+x^3(1-x^3)(1-x^4)+x^6(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)+etc.$$

vbi in singulis terminis factor $1-x^3$ euoluatur, vt fiat scribendo vt supra:

(=

$$C = \begin{array}{l} \quad\; - x^3 \qquad\quad - x^6(1-x^4) \qquad\qquad - x^9(1-x^4)(1-x^5) \qquad\qquad\quad - \text{etc.} \\ 1 + x^3(1+x^4) + x^6(1-x^4)(1-x^5) + x^9(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) + \text{etc.} \end{array}$$

vnde colligetur:

$$C = 1 - x^7 - x^{11}(1-x^4) - x^{15}(1-x^4)(1-x^5) - x^{19}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) - \text{etc.}$$

Ponatur $C = 1 - x^7 - D\,x^{11}$, erit

$$D = 1 - x^4 + x^4(1-x^4)(1-x^5) + x^8(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) + \text{etc.}$$

quae abit in hanc formam:

$$D = \begin{array}{l} \quad\; - x^4 \qquad\quad - x^8(1-x^5) \qquad\qquad - x^{12}(1-x^5)(1-x^6) \qquad\qquad - \text{etc.} \\ 1 + x^4(1+x^5) + x^8(1-x^5)(1-x^6) + x^{12}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) + \text{etc.} \end{array}$$

ſicque erit

$$D = 1 - x^9 - x^{14}(1-x^5) - x^{19}(1-x^5)(1-x^6) - x^{24}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) - \text{etc.}$$

Quodſi porro ponatur $D = 1 - x^9 - Ex^{14}$, reperietur ſimili modo:

$E = 1 - x^{11} - Fx^{17}$; hincque vltra:

$F = 1 - x^{17} - Gx^{20}$; $G = 1 - x^{15} - Hx^{23}$; $H = 1 - x^{17} - Ix^{26}$;
etc.

Reſtituamus iam ſucceſſiue hos valores, eritque:

$$\begin{aligned} s &= 1 - x - Axx \\ Ax^2 &= x^2(1-x^3) - Bx^7 \\ Bx^7 &= x^7(1-x^5) - Cx^{15} \\ Cx^{15} &= x^{15}(1-x^7) - Dx^{26} \\ Dx^{26} &= x^{26}(1-x^9) - Ex^{40} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Quamobrem habebimus:

$$s = 1 - x - x^2(1-x^3) + x^7(1-x^5) - x^{15}(1-x^7) + x^{26}(1-x^9) - x^{40}(1-x^{11}) + \text{etc.}$$

ſiue id ipſum, quod demonſtrari oportet:

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + \text{etc.}$$

vnde ſimul lex exponentium ſupra indicata per differentias luculente perſpicitur.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SEV

THEOREMA PRINCIPALE DEMONSTRANDVM.

Si haec ſcribendi formula $\int n$ denotet ſummam omnium diuiſorum numeri n, ſimilique modo numerorum minorum, veluti $n-\alpha$, deſignentur per $\int(n-\alpha)$, ſumma diuiſorum numeri n, ſeu $\int n$, ita pendebit a ſummis diuiſorum numerorum minorum, vt ſit

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15)$$
$$- \int(n-22) - \int(n-26) + \int(n-35) + \int(n-40) - \int(n-51) - \int(n-57) \text{ etc.}$$

Vbi ſequentia ſunt notanda:

1°. Signa + et − geminata terminos huius progreſſionis alternatim afficere.

2°. Legem numerorum 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, etc. ex eorum differentiis, quae ſunt 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, etc. fieri manifeſtam; vnde colligitur hos numeros omnes in formula hac generali $\frac{3zz \pm z}{2}$ contineri.

3°. Quouis caſu iſtius progreſſionis eos tantum terminos ab initio eſſe accipiendos, qui poſt ſignum $\int$ numeros affirmatiuos retineant; reliquos vero omnes, quibus ſignum $\int$ numeris negatiuis praefigitur, eſſe omittendos; ita ſi ſit $n = 10$, erit $\int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3 = 13 + 15 - 6 - 4 = 18$.

4°. Quibus caſibus occurrit terminus $\int(n-n)$, quod euenit, ſi n fuerit numerus huius ſeriei 1, 2, 5, 7, 12, 15 etc. iis caſibus pro valore huius termini $\int(n-n)$, ſeu $\int 0$ aſſumi oportere ipſum numerum propoſitum n; ſic ſi

ſit

fit $n = 7$, erit $\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - \int 0 = 12 + 6 - 3 - 7 = 8$, et fi fit $n = 12$, erit $\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28$.

DEMONSTRATIO.

Formetur feries $z = x\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 +$ etc. vbi quaelibet poteftas ipfius x multiplicata fit per fummam diuiforum exponentis eius poteftatis. Quodfi iam fingulae diuiforum fummae refolvantur, manifeftum eft, hanc feriem transformari in hanc formam

$$\begin{aligned} z = {} & 1(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + etc.) + 2(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + etc.) \\ & + 3(x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15} + etc.) + 4(x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20} + etc). \\ & + 5(x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + x^{25} + etc. + 6(x^6 + x^{12} + x^{18} + x^{24} + x^{30} + etc.) \end{aligned}$$

etc.

quibus feriebus geometricis fummatis fiet:

$$z = \frac{1x}{1-x} + \frac{2xx}{1-xx} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \frac{6x^6}{1-x^6} + \text{etc.}$$

Multiplicetur haec forma per $-\frac{dx}{x}$, ac producti integrale erit

$$-\int\frac{zdx}{x} = l(1-x) + l(1-xx) + l(1-x^3) + l(1-x^4) + l(1-x^5) + \text{etc.}$$

feu $-\int\frac{zdx}{x} = l(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$ etc. quae expreffio poft fignum logarithmicum, cum fit eadem, quae in propofitione praecedente vocata eft $= s$, erit $-\int\frac{zdx}{x} = l\,s$, ideoque alterum valorem pro s fumendo, erit quoque:

$$-\int\frac{zdx}{x} = l(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.})$$

 cuius

cuius differentiale per $\frac{-dx}{x}$ diuiſum, dabit alium valorem pro z, nempe

$$z = \frac{1x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - etc.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + etc.}$$

qui valor ſi aequalis ponatur aſſumto, et vtrinque per denominatorem $1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12}$ etc. multiplicetur, reperietur terminis ſecundum poteſtates ipſius x diſponendis, omnibusque ad eandem partem collocandis:

$$\begin{array}{lcccccccccc}
0 = & x\int 1 & + x^2\int 2 & + x^3\int 3 & + x^4\int 4 & + x^5\int 5 & + x^6\int 6 & + x^7\int 7 & + x^8\int 8 & + x^9\int 9 & + x^{10}\int 10 \text{ etc.} \\
 & \cdot & - \int 1 & - \int 2 & - \int 3 & - \int 4 & - \int 5 & - \int 6 & - \int 7 & - \int 8 & - \int 9 \\
 & \cdot & \cdot & - \int 1 & - \int 2 & - \int 3 & - \int 4 & - \int 5 & - \int 6 & - \int 7 & - \int 8 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + \int 1 & + \int 2 & + \int 3 & + \int 4 & + \int 5 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + \int 1 & + \int 2 & + \int 3 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & -1 & -2 & * & * & +5 & * & +7 & * & * & *
\end{array}$$

vnde ſingularum poteſtatum ipſius x coefficientibus nihilo aequatis, ſequitur fore

$$\begin{array}{ll}
\int 1 = 1 & \int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1 \\
\int 2 = \int 1 + 2 & \int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - 7 \\
\int 3 = \int 2 + \int 1 & \int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1 \\
\int 4 = \int 3 + \int 2 & \int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2 \\
\int 5 = \int 4 + \int 3 - 5 & \int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3
\end{array}$$

atque indolem illius aequationis vel leuiter attendenti patebit, eſſe generatim:

$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15)$ etc. hac progreſſione quouis caſu eousque continuata, donec perueniatur ad ſummas numerorum negatiuorum. Deinde per ſe eſt perſpicuum, numeros abſolutos 1, 2, 5, 7, etc.

etc. qui in illis formulis conſpiciuntur, vicem tenere termini $\int o$; vnde concluditur, in caſibus quibus pro $\int n$ in progreſſione illa reperta occurrit terminus $\int (n - n)$, ſeu $\int o$, valorem eius ſemper ipſi numero propoſito n aequalem eſſe capiendum: ſicque habetur plena ac perfecta demonſtratio theorematis propoſiti, quae, cum praeter tractationem ſerierum infinitarum, per logarithmos et differentialia procedat, minus quidem naturalis, ſed ob hoc ipſum multo magis notabilis eſt aeſtimanda.

DE METHODO DIOPHANTEAE ANALOGA IN ANALYSI INFINITORVM

AVCT. *L. EVLERO.*

Quanta affinitas inter analyſin finitorum et infinitorum intercedat, cum vtraque ex iisdem principiis ſit nata, atque ſimilibus operationibus contineatur, nemo ignorat, qui in vtroque calculi genere vel leuiter fuerit verſatus. Multo latius autem hanc affinitatem patere deprehendi, quam vulgo putari ſolet, et quemadmodum in analyſi finitorum ea methodus, quae Diophanto accepta refertur, inſignem occupat locum, ita etiam in analyſi infinitorum eiusmodi dari calculi genus obſeruaui, qui methodo Diophanteae penitus ſit ſimilis, ſimilibusque operationibus abſoluatur. Quanquam autem huius methodi in analyſi infinitorum nonnulla iam paſſim occurrunt ſpecimina, quorum deinceps mentionem ſum facturus, tamen in iis nulla certa ſolutionis via cernitur, ſed ſolutiones caſu potius ac diuinatione inuentae videntur, ita vt in hoc calculo certa ac tuta methodus adhuc deſideretur. Quamobrem mihi quidem nouum calculi genus in medium proferre videor, qui omnino dignus ſit, in quo vberius excolendo Geometrae vires ſuas exerceant. Mihi quidem tantum contigit prima eius fundamenta eruere, quae autem iam ad plurima ſatis illuſtria ac non parum recondita problemata ſoluen-

da

da sufficiunt; eaque hic quantum potero, breuiter et dilucide exponam, quo aliorum, qui in hoc genere elaborare voluerint, opera promoueatur ac subleuetur.

Vt igitur primum indolem et naturam huius nouae methodi definiam, ea ex similitudine methodi diophanteae commodissime petetur. Quemadmodum enim methodus Diophantea ad problemata indeterminata est accommodata, atque ex infinita solutionum multitudine eas elicere docet, quae quantitatibus rationalibus contineantur: ita noua nostra methodus quoque nonnisi indeterminata problemata complectitur; et cum discrimini, quod in analysi finitorum inter quantitates rationales et surdas statui solet, in analysi infinitorum discrimen inter quantitates algebraicas ac transcendentes respondeat, nouae nostrae methodi vis in hoc erit posita, vt ex infinita cuiusque problematis solutionum copia, eae secernantur, quae quantitatibus algebraicis contineantur. Huiusmodi igitur problemata indeterminata methodo nostrae sunt propria, quorum solutio in genere concepta formulas transcendentes, seu integrales inuoluit, ex quibus deinceps eos casus elici oportet, quibus quantitates illae transcendentes in algebraicas abeunt, seu, quod eodem redit, formulae illae integrales integrationem admittant.

Per exemplum tam natura huius nouae methodi, quam eius affinitas cum methodo diophantea clarius elucescet. Vti enim in methodo diophantea quaeri solet, quomodo quantitates x et y inter se debeant esse comparatae, vt haec formula $\sqrt{(xx+yy)}$ fiat rationalis, ita in noua nostra methodo huic similis erit ista quaestio, qua inter quantitates variabiles x et y ea quae-

 ritur

ritur conditio, vt formula specie transcendens $\int V(dx^2 + dy^2)$ fiat algebraica, seu vt huius formulae valor algebraice exhiberi queat. Manifestum est, hoc problemate, quod instar exempli attulimus, quaeri curvas algebraicas, quae sint rectificabiles; relatio enim inter x et y, quae coordinatas curuae denotabunt, requiritur algebraica, vnde quaestio circa curuas algebraicas versatur, et cum huius curuae arcus indefinite per $\int V(dx^2 + dy^2)$ exprimatur, quoties ista formula algebraica reddetur, toties ipsa curua erit rectificabilis.

Simili modo si omnes eae curuae algebraicae desiderentur, quae sint quadrabiles, perspicuum est, quaestionem huc redire, vt eae relationes inter quantitates variabiles x et y assignentur, quibus haec formula integralis $\int y\,dx$ integrationem admittat, atque ad valorem algebraicum perducatur.

Etsi autem hic potissimum quantitates algebraicae sunt propositae, perinde atque in methodo Diophantea quantitates rationales spectari solent; tamen eo quoque referendae sunt eiusmodi quaestiones, quibus formulae quaepiam integrales non algebraice exprimi, sed propositam quandam transcendentium quantitatum speciem implicare debent; veluti si quaerantur eiusmodi curuae algebraicae, quarum rectificatio non algebraice perfici queat, sed a quadratura circuli pendeat. Variae enim transcendentium quantitatum species commodissime per quadraturas cognitarum curuarum designantur. Facile autem intelligitur, eandem methodum, quae curuas rectificabiles inuenire docet, quoque ad eas curuas, quarum rectifi-

rectificatio a data quadratura pendeat, inueniendas aptam fore, id quod ex ſequentibus clarius perſpicietur.

Huiusmodi problema iam ante complures annos a Celeb. *Hermanno* extat propoſitum, quo eiusmodi curuam algebraicam quaeſiuerat, quae non eſſet rectificabilis, ſed cuius rectificatio a quadratura datae curuae penderet, quae tamen nihilo minus tot, quot lubuerit, arcus abſolute rectificabiles haberet. Propoſitione huius problematis tum temporis ſummus Analyſeos promotor *Ioh. Bernoullius* b. m. adeo obſtupuit, vt non ſolum hoc problema ab *Hermanno* ſolutum eſſe non crediderit, ſed etiam ſagacitatem humanam longe ſuperare pronunciauerit; quod quidem nemini mirum videri debet, cum illo tempore nulla plane vllius methodi veſtigia patuiſſent, cuius ope huiusmodi problemata tractari poſſent. *Hermannus* etiam eius ſolutionem per longas ambages ex quadam linearum curuarum contemplatione hauſerat, vnde primo intuitu nihil plane emolumenti ad propoſitum expectare licuerat, ita vt inopinato ad ſolutionem ante perueniſſet, quam de ipſo problemate cogitaſſet. Viſa autem iſta *Hermanni* ſolutione, *Bernoullius* etiam aliam publicauit ſolutionem ex ſola analyſi petitam: ſed cuius fundamentum tantopere eſt abſconditum, vt diuinatione potius, quam vlla certa via, formulas ſuas ſolutionem continentes eruiſſe videatur.

Cum hoc problema non ſolum ob ſummam, qua implicabatur, difficultatem, ſed etiam ob eximium vſum, qui inde in analyſin redundare videbatur, omnium tum temporis Geometrarum admirationem excitaſſet, nemo tamen quantum conſtat, in certam atque ad huius iusmodi problemata accommodatam methodum inquisiuit, qua nouus omnino analyseos infinitorum quasi campus aperiretur. Ego igitur longo post interuallo fortasse primus de principiis nouae huius methodi cogitare coepi, quorum beneficio memorati illius problematis solutio directe sine ambagibus ac diuinatione obtineri posset. Detexi quoque regulas quasdam non contemnendas, quae ad nouae istius methodi fundamenta iacienda idonea sunt visa, earumque ope non solum plures problematis illius, quod erat agitatum, solutiones sum adeptus, sed etiam nonnulla alia eiusdem generis problemata dedi soluta, cuiusmodi est illud, cuius solutionem exhibui in Dissertatione de duabus curuis algebraicis ad communem axem relatis inueniendis, quae non sint rectificabiles, sed quarum rectificatio a data quadratura pendeat, ita tamen vt amborum arcuum eidem abscissae respondentium summa algebraice exprimi possit. Fontem solutionis, quam ibi dedi, de industria celaui, cum mihi esset propositum prima quasi huius methodi elementa seorsim explicare, quo eorum vsus amplissimus clarius perspiciatur, neque ea ad hoc vnicum problema adstricta videantur. Fateri quidem statim cogor, me leuem adhuc partem tantum huius nouae methodi, quam hic propono, enucleasse; verum his principiis stabilitis, non dubito, quin ea mox maiora incrementa sit acceptura.

Diuisio huius methodi in partes secundum naturam formularum integralium, quarum valores algebraici sunt efficiendi, commodissime instituetur. Cum enim semper relatio inter duas quantitates variabiles x et y quaeratur

quaeratur, vt vna pluresue mulae integrales, quae has variabiles vna cum ſ ifferentialibus inuoluant, algebraicos obtineant ores, huiusmodi formulas in ſequentes ordines di oui conueniet:

Ordo primus continebit huiusmodi formulas $\int Z\,dx$, vbi Z eſt unctio quaecunque algebraica ambarum quantitatum x et y.

A ordinem ſecundum refero eas formulas $\int Z\,dx$, in quibu poſito $dy = p\,dx$, littera Z eſt functio non ſolum ip rum x et y, ſed etiam ipſius p. Vbi notandum eſt non ſolum formulam $\int Z\,dx$, ſed etiam hanc $\int p\,dx = y$ algebraicos habere debere valores. Huc reducunt eae formulae integrales, in quibus ambo differentialia dx et dy occurrunt, veluti $\int V(dx^2 + dy^2)$, quae poſito $dy = p\,dx$ ad hanc formam $\int dx\, V(1 + pp)$ reuocatur.

Ordo porro tertius eiusmodi comprehendet formulas integrales in quibus etiam differentialia ſecundi gradus inſunt, quae autem, ponendo $dy = p\,dx$ et $dp = q\,dx$, ad hanc formam $\int Z\,dx$ perducentur, vbi littera Z erit functio quantitatum x, y, p, et q. His igitur caſibus non ſolum formulae $\int Z\,dx$, ſed etiam harum formularum $\int p\,dx$ et $\int q\,dx$ valores algebraici effici debebunt.

Ordo quartus comp ectetur eas formulas integrales, quae quantitatum x et y differentialia etiam tertii gradus inuoluunt; haeque ad fo mam $\int Z\,dx$ reducentur, ponendo $dy = p\,dx$; $dp = q\,dx$ et $dq = r\,dx$, vbi quantitas Z continebit praeter quantitates x et y etiam has p, q, et r. Hinc simul ratio sequentium ordinum intelligitur.

Praeter hos ordines peculiarem classem constituunt eiusmodi formulae $\int Z\,dx$, inquibus non solum quantitates algebraicas x, y, p, q, etc. vti in his ordinibus, continet, sed etiam formulas integrales complectitur, veluti si fuerit $Z = x\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, vel $Z = x\int dx\sqrt{(1+pp)}$, ita vt haec quantitas $\int x\,dx\int dx\sqrt{(1+pp)}$ efficienda sit algebraica, pro quo relatio inter quantitates x et p definiri debeat. In hoc exemplo primum patet, cum sit $dy = p\,dx$, valorem huius formulae $\int p\,dx$ esse debere algebraicum. Deinde etiam valorem huius $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ esse oportebit algebraicum, qui si ponatur $= s$, tandem haec formula $\int x s\,dx$ ad valorem algebraicum erit perducenda, ita vt vnica haec formula $\int x\,dx\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ reductionem harum trium formularum

I. $\int p\,dx = y$; II $\int dx\sqrt{(1+pp)} = s$; III $\int x s\,dx$

ad valores algebraicos requirat. Ex quo intelligitur, etiam huiusmodi formulas ad ordines ante enumeratos reuocari posse.

Totum igitur negotium nouae huius methodi, quam examini Analystarum propono, in hoc consistit, vt eiusmodi relatio inter binas variabiles x et y inuestigetur, quae vnam pluresue formulas integrales, cuiusmodi in ordinibus supra descriptis sum complexus, algebraicas reddat. Hic autem non solum problemata occurrunt difficillima, a quorum solutione equidem adhuc longe sum remotus, sed etiam fortasse eiusmodi excogitari

gitari possunt, quae nullam plane solutionem admittunt; omnino vti vsu venire solet in problematibus ad methodum Diophanteam pertinentibus. Vnde etiam sine dubio haec similitudo locum inueniet, vt alia problemata solutionem generalem, alia vero tantum solutiones speciales permittunt.

Huiusmodi igitur problemata hic tantum proferam, quorum solutionem inueni, vt hoc modo specimen ac prima quasi elementa nouae methodi, quam vlterius excolendam propono, exhibeam, quae etsi exiguam tantum partem huius methodi constituere videntur, tamen viam, qua vlterius progredi liceat, patefacient. Certa autem inde earum operationum ratio perspicietur, quae directe nihilque diuinationi tribuendo ad solutiones eorum problematum, quae ante commemoraui, perducant.

LEMMA.

1. *Formula* $\int y\,dx$ *erit algebraica, si haec* $\int x\,dy$ *fuerit talis, et generatim, a qua quadratura pendebit integratio alterius formulae* $\int y\,dx$, *ab eadem quoque alterius* $\int x\,dy$ *integratio pendebit.*

Demonstratio est manifesta, cum sit $\int y\,dx = xy - \int x\,dy$, vnde patet, si formula $\int x\,dy$ fuerit vel algebraica, vel datam quadraturam implicans, eandem quoque naturam habere alteram formulam $\int y\,dx$.

COROLLARIVM.

2. Simili modo integratio huius formulae $\int yx\,dx$, vel huius $\int yx^n\,dx$ pendebit ab integratione huius

$\int xx\,dy$, vel huius $\int x^{n+1}\,dy$, ob $\int yx\,dx = \frac{1}{2}yxx - \frac{1}{2}\int xx\,dy$, vel ob $\int yx^n\,dx = \frac{1}{n+1}yx^{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\,dy$: vnde perſpicitur hoc lemma latiſſime patere, eiusque ope formulas omnis generis, quae integrabiles ſint reddendae, in alias transformari poſſe.

SCHOLION.

3. Lemma hoc, quantumuis leue ac triuiale videatur, tamen praecipuum continet fundamentum nouae illius methodi, quam ſum adumbraturus. Si enim propoſita formula integrali quacunque $\int Y\,dX$ alia detur $\int V\,dZ$; vt ſit $A\int Y\,dX + B\int V\,dZ$ quantitas algebraica, manifeſtum eſt, harum duarum formularum $\int Y\,dX$ et $\int V\,dZ$ rationem ita eſſe comparatam, vt ſi altera fuerit integrabilis, etiam alteram fore integrabilem, et a quanam quadratura alterius integratio pendeat, ab eadem quadratura etiam alterius integrationem pendere. Reſolutio autem praecipuorum problematum ad hanc methodum pertinentium abſoluetur idonea formularum integralium, ad quas peruenitur, transformatione.

PROBLEMA 1.

4. Inuenire omnes curuas algebraicas, quae ſint quadrabiles; ſeu eam inter variabiles x et y relationem in genere definire, vt formula $\int y\,dx$ fiat integrabilis.

SOLVTIO.

Si curuae abſciſſa ponatur $= x$ et applicata orthogonalis $= y$, erit huius curuae area $= \int y\,dx$, cuius valorem

valorem algebraicum esse oportet: quod quidem facillime impetratur. Denotet enim X functionem quamcunque algebraicam ipsius x, huicque functioni X aequalis ponatur area $\int y\,dx$, vt sit $\int y\,dx = X$, erit, differentialibus sumendis, $y\,dx = dX$, vnde fit $y = \frac{dX}{dx}$; sicque applicata y aequabitur functioni algebraicae ipsius x, ex quo curua erit algebraica, eiusque area $\int y\,dx$, cum sit $= X$, algebraice quoque exprimetur.

ALITER.

Cum sit area $\int y\,dx = yx - \int x\,dy$, ponatur $\int x\,dy$ functioni cuicunque ipsius y, quae sit $= Y$, aequalis, seu sit $\int x\,dy = Y$, vnde fit $x = \frac{dY}{dy}$, ita vt iam abscissa x functioni algebraicae ipsius y aequetur, curuaque fiat algebraica. Posita autem $x = \frac{dY}{dy}$, erit curuae area $\int y\,dx = yx - Y = \frac{y\,dY}{dy} - Y$, ideoque etiam algebraica.

COROLL. 1.

5. Si X in priori solutione, vel Y in posteriori, non fuerit functio algebraica ipsius x, vel y, sed transscendens, ita tamen vt $\frac{dX}{dx}$, vel $\frac{dY}{dy}$, fiat functio algebraica, curua quidem erit algebraica, sed eius quadratura quantitate transcendente exprimetur.

COROLL. 2.

6. Scilicet si in priori solutione sit $X = P + \int Q\,dx$, existentibus P et Q functionibus algebraicis ipsius x, ita tamen, vt $\int Q\,dx$ sit quantitas transcendens, aequatio pro curua $y = \frac{dP}{dx} + Q$ erit quidem algebraica,

ſed eius area $\int y\,dx = P + \int Q\,dx$ a quantitate transcendente $\int Q\,dx$ pendebit.

COROLL. 3.

7. Simili modo in altera ſolutione ſi ponatur $Y = P + \int Q\,dy$, exiſtentibus P et Q functionibus algebraicis ipſius y, ita tamen vt $\int Q\,dy$ ſit quantitas transcendens, aequatio pro curua $x = \frac{dP}{dy} + Q$ erit algebraica, ſed area, quae erit $\int y\,dx = \frac{y\,dP}{dy} + yQ - P - \int Q\,dy$ a quantitate transcendente $\int Q\,dy$ pendebit.

SCHOLION.

8. Vti huius problematis ſolutio eſt facillima nulloque artificio indiget, ſequens problema, quod quidem alius eſt naturae, adiungam, cuius vero ſolutio in aliis problematibus, quae ad hanc methodum referri ſolent, inſignem vſum praeſtabit. Veluti ſi quaerantur curuae algebraicae generatim non rectificabiles, quae tamen, quot lubuerit, habeant arcus rectificabiles; aliaeue huius generis quaeſtiones proponantur, principium ſolutionis ex ſequente problemate erit petendum.

PROBLEMA. 2.

9. Inuenire curuas algebraicas in genere non quadrabiles, ſed quarum quadratura generalis datam quantitatem transcendentem inuoluat, in quibus tamen, quot lubuerit, areas abſolute quadrabiles aſſignare liceat.

SOLVTIO.

Ex ſolutione praecedentis problematis liquet, hanc quaeſtionem huc redire, vt eiusmodi formula transcendens

dens $\int Q\,dx$ inuestigetur, cuius valor certis casibus, veluti si ponatur $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. euanescat, his enim casibus quantitas $X = P + \int Q\,dx$, quae in genere est transcendens, quippe formulam $\int Q\,dx$ inuoluens, fiet algebraica, nempe $= P$. Hoc vt efficiatur, statuatur, $\int Q\,dx = \int u\,dx - \int v\,dz$, vbi v talis sit functio ipsius z, qualis u est ipsius x, ita vt formulae $\int u\,dx$ et $\int v\,dz$ similem quantitatem transcendentem exhibeant, qua $\int Q\,dx$ contineri debet. Sit autem z eiusmodi functio ipsius x, ita vt casibus propositis $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. quot lubuerit, fiat $z = x$, ideoque et $v = u$, atque perspicuum est, his iisdem casibus fore $\int v\,dz = \int u\,dx$, hincque $\int Q\,dx = o$. Hunc in finem formetur ista functio ipsius x.

$$x^n - (a+b+c+\text{etc.})x^{n-1} + (ab+ac+bc+\text{etc.})x^{n-2} - (abc+\text{etc.})x^{n-3} + \text{etc.}$$

quae breuitatis gratia vocetur $= S$, ita vt aequatio $S = o$ praebeat radices $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. eos scilicet ipsos valores abscissae x, quibus area absolute quadrabilis respondere debet. Tum vero statuatur $z - x = S$, atque manifestum est, iisdem casibus $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. fieri $z = x$, omnino vti requiri ad nostrum propositum ostendimus. Huic autem requisito generalius satisfiet, si ponamus $z - x = ST$, dummodo $ST = o$ alias non praebeat radices reales, nisi quae sunt propositae, scilicet $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. Hanc ob rem si S denotet eiusmodi functionem ipsius x, vt aequatio $S = o$ alias non habeat radices reales, nisi quae sunt propositae, scilicet $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. quod semper infinitis modis fieri potest, tum sumatur $z - x = S$, seu $z = x + S$.

Quo

Quo facto, si $\int u dx$ eam quantitatem transcendentem exprimat, a qua curuae quadratura in genere pendere debet, pro v substituatur talis functio ipsius z, qualis u est ipsius x; atque in formulis superioribus loco $\int Q dx$ scribatur $\int u dx - \int v dz$, ita vt sit $Q = u - \frac{v dz}{dx}$. Tum enim si construatur curua algebraica, cuius abscissae $= x$ respondeat applicata $y = \frac{dP}{dx} + u - \frac{v dz}{dx}$, eius area in genere erit $\int y dx = P + \int u dx - \int v dz$, pendebit scilicet a quantitate transcendente $\int u dx$, cui altera $\int v dz$ est similis, nihilo vero minus casibus $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. eius area algebraice exprimetur, fietque $\int y dx = P$. Hoc ergo modo effici potest, vt curua praecise tot, quot quis voluerit, obtineat àreas quadrabiles, neque plures, neque pauciores.

COROLL. 1.

10. Cum v talis sit functio ipsius z, qualis u est ipsins x, ita vt v obtineatur ex u, si loco x scribatur z, sequitur etiam v talem esse functionem ipsius u, qualis z est ipsius x. Quare cum sit $z = x + S$, sequitur v obtineri ex a, si loco x scribatur $x + S$.

COROLL. 2.

11. Quoniam igitur quantitas v resultat ex functione u, si loco x scribatnr $x + S$, ex proprietate functionum alias demonstrata sequitur fore

$$v = u + \frac{S du}{dx} + \frac{S^2 ddu}{1.2 dx^2} + \frac{S^3 d^3 u}{1.2.3 dx^3} + \frac{S^4 d^4 u}{1.2.3.4 dx^4} + \text{etc.}$$

posito elemento dx constante, sed cum haec expressio in infinitum sit continuanda, praestat valorem ipsius v actuali substitutione definire.

EXEM-

EXEMPLVM.

12. *Inuenire curuam algebraicam, cuius quadratura indefinita pendeat a quadratura circuli, cuius vero area abſciſſae $x = a$ reſpondens algebraice exhibeatur.*

Vt quadratura curuae indefinita a quadratura circuli pendeat, ponatur $u = \sqrt{(2fx - xx)}$, et vt poſito $x = a$ fiat $z = x$, fiat $S = n(a - x)$, vt ſit $z = x + na - nx = na - \overline{n-1})x$. Ergo ob $v = \sqrt{(2fz - zz}$ erit $v = \sqrt{(2naf - 2(n-1)fx - nnaa + 2n(n-1)ax - (n-1)^2 xx)}$ Ponatur, vt haec formula ſimplicior euadat, $2f = na$, eritque $v = \sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2 xx)}$, et ob $dz = -(n-1)\,dx$ habebitur $Q = \sqrt{(nax - xx)} + (n-1)\sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2 xx)}$ ac pro curua erit

$$y = \frac{dP}{dx} + \sqrt{(nax - xx)} + (n-1)\sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2 xx)},$$

area vero erit

$$\int y dx = P + \int dx \sqrt{(nax - xx)} + (n-1)\int dx \sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2 xx)}.$$

Verum hic notandum eſt, quemadmodum integrale $\int u dx$ ita capi ponitur, vt euaneſcat poſito $x = o$, ita quoque integrale $\int v dz$ ita capi debere, vt euaneſcat poſito $z = o$: Quamobrem vt tota area euaneſcat poſito $x = o$, neceſſe eſt, vt quoque fiat $z = o$ hoc caſu; alioquin enim expreſſio areae $\int y dx$ complecteretur quantitatem conſtantem portionem areae circularis denotantem, quae caſu $x = a$ deſtrueretur. Huic autem incommodo occurretur, ſi pro S eiusmodi ſumatur functio, quae poſito $x = o$ euaneſcat. Sit ergo $S = \frac{nx}{a}(a - x)$, et $z = x + \frac{nx}{a}(a - x)$, et $v = \sqrt{(2fz - zz)}$, atque quaeſito ſatisfiet modo ſolito. Ponatur, vt expreſſio fiat ſimpliciſſima $n = -1$, vt ſit

$z = \frac{xx}{a}$ et $v = \sqrt{\left(\frac{2fxx}{a} - \frac{x^4}{aa}\right)} = \frac{x}{a}\sqrt{(2af - xx)}$ eritque applicata $y = \frac{dP}{dx} + \sqrt{(2fx - xx)} - \frac{2xx}{aa}\sqrt{(2af - xx)}$ ob $dz = \frac{2xdx}{a}$: atque area fiet

$$\int y\,dx = P + \int dx\sqrt{(2fx - xx)} - 2\int \frac{xxdx}{aa}\sqrt{(2af - xx)}$$

quae qualiscunque P fuerit functio ipsius x, in genere semper a quadratura circuli pendebit, casu autem $x = a$ area fiet algebraica $= P$.

SCHOLION.

13. Circumstantia haec ratione constantis ad areae expressionem adiiciendae, ne ea ipsa sit transcendens, in omnibus exemplis probe est obseruanda. Hunc in finem functio S non solum ita accipi debebit, vt casibus propositis $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. euanescat, sed etiam casu $x = o$ euanescere debebit. Quod quidem per se est perspicuum: nam quia omnis curuae aream abscissae euanescenti $x = o$ respondentem nihilo aequalem assumimus, ideoque a transcendentibus quantitatibus vacuam, euidens est, quotcunque casus propositi sint, quibus area fiat algebraica, iis semper superaddendum esse casum $x = o$, sicque functio S ita comparata esse debebit, vt non solum casibus $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. qui sunt propositi, sed etiam casu $x = o$ fiat $S = o$.

PROBLEMA 3.

14. Si Z sit functio quaecunque algebraica binarum variabilium x et y, definire relationem algebraicam inter x et y, vt formula integralis $\int Z\,dx$ algebraicum obtineat valorem.

SOLV-

SOLVTIO.

Etſi problema hoc multo latius patere videtur, quam primum, tamen eius ſolutio non eſt difficilior. Ponatur enim $\int Z\,dx$ functioni cuicunque algebraicae ipſius x, quae ſit $= X$ aequale, eritque $Z\,dx = dX$ et $Z = \frac{dX}{dx}$, vbi cum $\frac{dX}{dx}$ ſit quoque functio algebraica pſius x, habebitur aequatio algebraica inter x et y, qua earum relatio algebraice definietur: indeque erit per hypotheſin $\int Z\,dx = X$.

COROLL. 1.

15. Si X non ſit functio algebraica ipſius x, ſed eius quampiam inuoluat functionem transcendentem, veluti ſi ſit $X = P + \int Q\,dx$, ita vt $\frac{dX}{dx} = \frac{dP}{dx} + Q$, ſit nihilominus functio algebraica ipſius x; tum orietur curva algebraica hac aequatione $Z = \frac{dP}{dx} + Q$ expreſſa, ſed valor integralis inde oriundus $\int Z\,dx$ non erit algebraicus, verum functionem transcendentem $\int Q\,dx$ inuoluet.

COROLL. 2.

16. Si pro Q eiusmodi quantitatem ſubſtituamus, qualem in problemate praecedente deſcripſimus, tum valor quidem indefinitus formulae $\int Z\,dx$ non erit algebraicus, ſed a quadratura quapiam data pendebit. Hoc tamen non obſtante effici poteſt, vt eius valor tot caſibus, quot lubuerit, et quidem datis veluti $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. fiat algebraicus. Vbi quidem notandum eſt, in calculo his caſibus ſuperaddendum eſſe ſemper caſum $x = o$.

SCHOLION.

17. Si igitur vnica proponatur formula integralis ad valorem algebraicum reducenda, eaque pertineat ad ordinem primum, tum quaestio nulla laborat difficultate. Atque simul pari opera effici potest, vt illius formulae integratio a data quadratura pendeat, atque insuper vt tot, quot quis voluerit, casibus algebraicum obtineat valorem. Antequam igitur ad formulas sequentium ordinum progrediar, eiusmodi problemata proponam, quibus duae pluresue formulae ordinis primi simul ad valores algebraicos sint reducendae; ita vt existentibus V et Z functionibus ipsarum x et y, valores harum duarum formularum $\int V\,dx$ et $\int Z\,dx$ vel plurium huiusmodi algebraici sint efficiendi. Hic quidem ante omnia animaduerto, haec problemata in genere concepta mihi quidem non solubilia videri, sed nonnisi sub certis conditionibus, quibus functiones V et Z sint praeditae, solutionem admittere. Quibus igitur casibus mihi quidem ad solutionem peruenire licuerit, hic exponam.

PROBLEMA 4.

18. Si P et Q sint functiones quaecunque ipsius x, inuenire relationem ideoneam inter variabiles x et y, vt ambae hae formulae $\int y\,P\,dx$ et $\int y\,Q\,dx$ valores algebraicos adipiscantur.

SOLVTIO.

Ponatur vtraque formula seorsim aequalis quantitati cuicunque algebraicae, scilicet

$$\int y\,P\,dx = L \text{ et } \int y\,Q\,dx = M.$$

Hinc

Hinc ergo fiet $y = \frac{dL}{P\,dx}$ et $y = \frac{dM}{Q\,dx}$ ideoque $\frac{P}{Q} = \frac{dL}{dM}$, vbi ſint L et M functiones nouae cuiuspiam variabilis z, ita vt $\frac{dL}{dM}$ ſit functio algebraica huius variabilis z. Ope aequationis ergo inuentae $\frac{P}{Q} = \frac{dL}{dM}$ valor ipſius x, cuius functio eſt $\frac{P}{Q}$, per z expreſſus reperietur, ita vt inde proditurum ſit $x =$ functioni cuipiam ipſius z. Qua inuenta obtinebitur quoque valor ipſius y per functionem quampiam ipſius z expreſſus, ope formulae $y = \frac{dL}{P\,dx}$ vel $y = \frac{dM}{Q\,dx}$, ſicque vtraque variabilis x et y per nouam variabilem z determinabitur, idque algebraice; vnde relatio inter x et y quaeſita innoteſcet. Ex his autem valoribus erit, vti aſſumſimus, $\int y\,P\,dx = L$ et $\int y\,Q\,dx = M$, vtraque ſcilicet functioni algebraicae ipſius z aequalis.

ALIA SOLVTIO.

Ponatur vt ante altera formula $\int y\,P\,dx$ quantitati cuipiam algebraicae L aequalis, ſeu $\int y\,P\,dx = L$ eritque hinc $y = \frac{dL}{P\,dx}$, qui valor in altera formula ſubſtitutus dabit $\int y\,Q\,dx = \int \frac{Q}{P}\,dL$, quae algebraica reddenda reſtat. Iam vero per lemma praemiſſum eſt $\int \frac{Q}{P}\,dL = \frac{LQ}{P} - \int L\,d.\,\frac{Q}{P}$.

Sicque formula $\int L\,d.\,\frac{Q}{P}$ ad algebraicum valorem reduci debet; vbi notandum $d.\,\frac{Q}{P}$ huiusmodi formam $X\,dx$ eſſe habiturum, vbi ſit X functio ipſius x cognita. Ponatur ergo $\int L\,d.\,\frac{Q}{P}$ functioni cuicunque ipſius x, quae ſit V aequalis, erit $L = \frac{dV}{d(Q:P)}$ functioni ſcilicet ipſius x. Inuento autem valore ipſius L erit porro $\int y\,P\,dx$

 $= L$;

$= L$; $\int y\,Q\,dx = \frac{LQ}{P} - V$ atque variabilis y ita definietur per x, vt ſit $y = \frac{dL}{P\,dx}$, exiſtente vti inuenimus $L = dV . d.\frac{Q}{P}$: hoc ergo modo immediate, nulla alia noua variabili in ſubſidium vocata, variabilem y per x dedimus determinatam.

COROLL. 1.

19. Cum in priori ſolutione altera variabilis x definiri debeat ex aequatione $\frac{P}{Q} = \frac{dL}{dM}$, altera vero ſit $y = \frac{dL}{P\,dx}$, ſicque vtraque per nouam variabilem z cuius L et M ſunt functiones algebraicae, exprimatur, ambae formulae integrales propoſitae valores obtinebunt algebraicos ſcilicet

$$\int y\,P\,dx = L \text{ et } \int y\,Q\,dx = M$$

COROLL. 2.

20. Per eandem ergò ſolutionem ſumendis pro L et M functionibus transcendentibus ipſius z, ita tamen vt $\frac{dL}{dz}$ et $\frac{dM}{dz}$ ſint functiones algebraicae, effici poterit, vt integratio vtriusque formulae propoſitae $\int y\,P\,dx$ et $\int y\,Q\,dx$ a data quadratura pendeat; vel vt altera ſit algebraica, altera vero datam quadraturam inuoluat.

COROLL. 3.

21. Si ambae hae formulae debeant eſſe algebraicae, ſolutio poſterior eundem praeſtat vſum; ſumta enim pro V functione quacunque algebraica ipſius x, erit $L = dV: d.\frac{Q}{P}$ quoque functio algebraica ipſius x;

x; tum vero si statuatur altera variabilis $y = \frac{dL}{P\,dx}$, erit

$$\int y P\,dx = L \text{ et } \int y Q\,dx = \frac{LQ}{P} - V \text{ seu}$$
$$\int y P\,dx = \frac{dV}{d.\frac{Q}{P}} \text{ et } \int y Q\,dx = \frac{Q\,dV}{P\,d.\frac{Q}{P}} - V$$

COROLL. 4.

22. Sin autem in hac solutione pro V capiatur functio transcendens ipsius x, ita tamen vt $\frac{dV}{dx}$ sit functio algebraica, ob $\frac{d(Q:P)}{dx}$ etiam functionem algebraicam, fiet quoque $L = dV : d\frac{Q}{P}$, ideoque etiam y functio algebraica ipsius x; vnde prioris formulae $\int yPdx = L$ valor fiet algebraicus, atque altera tantum $\int y Q\,dx$ a praescripta quadratura V pendebit.

COROLL. 5.

23. Per hanc igitur alteram solutionem effici non potest, vt vtraque formula integralis proposita datam quadraturam inuoluat, dum alterius valor semper reperitur algebraicus. Quare si vtraque debeat habere valorem transcendentem, solutione priore erit vtendum.

EXEMPLVM.

24. *Inuenire curuas algebraicas, in quibus non solum area $\int y\,dx$, sed etiam areae momentum $\int y\,x\,dx$ algebraice exhiberi possit.*

Per priorem solutionem ponatur:

$\int y\,dx = L$ et $\int y\,x\,dx = M$

erit $y = \frac{dL}{dx} = \frac{dM}{x\,dx}$ vnde fit $x = \frac{dM}{dL}$ et

$y =$

$y = dL : d(\frac{dM}{dL})$, vbi pro L et M functiones quaecunque algebraicae nouae variabilis z accipi possunt. Nihil ergo impedit quo minus statuatur $L = z$, et pro M sumatur functio quaecunque ipsius z, quae sit $= Z$, quo facto erit $x = \frac{dZ}{dz}$ et sumto elemento dz constante $y = \frac{dz^2}{ddZ}$.

Per alteram solutionem ponatur $\int y dx = L$, vt sit $y = \frac{dL}{dx}$, erit $\int y x dx = \int x dL = xL - \int L dx$. Statuatur iam $\int L dx = V$ functioni cuicunque ipsius x, erit $L = \frac{dV}{dx}$, ideoque $\int y dx = \frac{dV}{dx}$ et $\int y x dx = \frac{x dV}{dx} - V$, vnde posito elemento dx constante applicata y ita per abscissam x definietur, vt sit $y = \frac{ddV}{dx^2}$.

SCHOLION.

25. Me non monente intelligitur, simili modo huiusmodi formulas $\int Y P dx$ et $\int Y Q dx$ ad valores algebraicos reduci posse, si Y functionem quamcunque alterius variabilis y designet, dummodo P et Q sint functiones ipsius x; determinationes enim ante pro y inuentae nunc ipsi Y sunt tribuendae. Quin etiam, si Y denotet functionem quampiam ipsarum x et y, solutio pari modo absoluetur: ita reductio harum formularum $\int P dx \sqrt{(xx + yy)}$ et $\int Q dx \sqrt{(xx + yy)}$ ad valores algebraicos nullam habebit difficultatem, quoniam hae formulae similes euadent propositis, si pro $\sqrt{(xx + yy)}$ scribatur vnica littera veluti v. Vnde colligitur ope huius problematis semper binas huiusmodi formulas $\int V dx$ et $\int Z dx$ ad valores algebraicos perduci posse, quaecunque V et Z fuerint functiones ipsarum x et y, dummo-

dummodo $\frac{V}{Z}$ ſit functio ipſius x tantum. Si enim x ſit iſta functio, ſeu $\frac{V}{Z} = x$, loco alterius variabilis y introducatur noua v, vt ſit $v = \frac{V}{X}$ ſeu $v = Z$, atque formulae reducendae erunt $\int v X dx$ et $\int v dx$, quarum reſolutio iam erit in promtu. Inueſtigemus vero etiam alia formularum integralium paria, quae ſimili modo ad valores algebraicos reduci queant, quod eueniet ſi quapiam transformatione ad huiusmodi formas reuocari potuerint.

PROBLEMA 5.

26. Si P et Q fuerint functiones quaecunque ipſius x, inuenire relationem idoneam inter variabiles x et y, vt ambae hae formulae $\int P dy$ et $\int Q dy$ valores algebraicos adipiſcantur.

SOLVTIO.

Cum per lemma praemiſſum ſit $\int P dy = Py - \int y dP$ et $\int Q dy = Qy - \int y dQ$, quaeſtio huc redit, vt hae duae formulae integrales $\int y dP$ et $\int y dQ$ valores algebraicos conſequantur, quod per problema praecedens duplici modo efficietur.

I. Statuatur enim $\int y dP = L$ et $\int y dQ = M$ erit $y = \frac{dL}{dP} = \frac{dM}{dQ}$, vnde fit $\frac{dP}{dQ} = \frac{dL}{dM}$: vbi cum $\frac{dP}{dQ}$ ſit functio ipſius x, ſi pro L et M functiones quaecunque nouae cuiusdam variabilis z aſſumantur, vt $\frac{dL}{dM}$ fiat functio huius variabilis z, ex aequatione $\frac{dP}{dQ} = \frac{dL}{dM}$ quantitas x per z determinabitur, ita vt x aequalis reperiatur functioni cuidam ipſius z. Dehinc aequatio $y = \frac{dL}{dP}$ definiet alteram variabilem y per eandem z: quo facto habebitur:

$$\int P\,dy = \frac{P\,dL}{dP} - L \text{ et } \int Q\,dy = \frac{Q\,dM}{dQ} - M.$$

II. Pro altera solutione fiat $\int y\,dP = L$, vt sit $y = \frac{dL}{dP}$, eritque altera formula $\int y\,dQ = \int \frac{dQ}{dP}\,dL = L.\frac{dQ}{dP} - \int L\,d.\frac{dQ}{dP}$; vbi cum $\frac{dQ}{dP}$ sit functio ipsius x, ponatur $\int L\,d.\frac{dQ}{dP} = V$ functioni cuicunque ipsius x, orietur hinc $L = \frac{dV}{d(dQ:dP)}$. Inuenta ergo hac quantitate $L = \frac{dV}{d(dQ:dP)}$, quae erit functio ipsius x, habebitur altera variabilis $y = \frac{dL}{dP}$ indeque valores algebraici binarum formularum integralium propositarum erunt:

$$\int P\,dy = Py - L \text{ et}$$
$$\int Q\,dy = Qy - \frac{L\,dQ}{dP} + V.$$

COROLL. 1.

27. Si hae formulae non debeant esse algebraicae, sed datas quadraturas inuoluentes, eadem valebunt quae ad problema praecedens annotaui. Scilicet si vtraque debeat esse transcendens, hoc nonnisi per solutionem priorem praestari poterit, sin autem altera tantum quantitatem transcendentem implicare debeat, per vtramque solutionem satisfieri poterit.

COROLL. 2.

28. Hinc etiam patet si formulae propositae fuerint huiusmodi $\int y P\,dx$ et $\int Q\,dy$, reductionem ad valores algebraicos pari modo perfici posse. Cum enim sit $\int Q\,dy = Qy - \int y\,dQ$, has duas formulas reduci opor-

oportebit $\int y\,P\,dx$ et $\int y\,dQ$, quae non differunt ab iis, quae in praecedente problemate ſunt tractatae.

COROLL. 3.

29. Intelligitur etiam, ſi Y denotet functionem quandam ipſius y, ſimili modo huiusmodi binas formulas $\int PY\,dy$ et $\int QY\,dy$ ad valores algebraicos reduci poſſe, dummodo $\int Y\,dy$ integrationem admittat. Poſito enim $\int Y\,dy = v$, formulae reducendae erunt $\int P\,dv$ et $\int Q\,dv$, quae hic propoſitis ſunt ſimiles. At ſi $\int Y\,dy$ ſit functio transcendens ipſius y reductio modo hic expoſito non ſuccedit.

PROBLEMA. 6.

30. Inuenire relationem algebraicam inter variabiles x et y, vt hae duae formulae integrales $\int y^m x^{n-1}\,dx$ et $\int y^\mu x^{\nu-1}\,dx$ valores algebraicos cötineant.

SOLVTIO.

Coaequatis his formulis inter ſe fit $y^m x^n = y^\mu x^\nu$ vnde oritur $y = x^{\frac{\nu-n}{m-\mu}}$. Ponatur ergo:

$y = x^{\frac{\nu-n}{m-\mu}} z$, vt ſit $y^m = x^{\frac{m\nu-mn}{m-\mu}} z^m$ et $y^\mu = x^{\frac{\mu\nu-\mu n}{m-\mu}} z^\mu$

atque formulae propoſitae abibunt in has:

$\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1} z^m\,dx$ et $\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1} z^\mu\,dx$

Iam vero eſt:

$$\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1} z^m\,dx = \frac{m-\mu}{m\nu-\mu n}\,x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} z^m - \frac{m(m-\mu)}{m\nu-\mu n}\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} z^{m-1}\,dz$$

$$\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1} z^{\mu} dx = \frac{m-\mu}{m\nu-\mu n} x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} z^{\mu} - \frac{\mu(m-\mu)}{m\nu-\mu n} \int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} z^{\mu-1} dz$$

Nisi ergo sit $m\nu = \mu n$, quo casu haec reductio locum non habet, si ponatur $x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} = v$, quaestio perducetur ad has formulas:

$$\int v z^{m-1} dz \text{ et } \int v z^{\mu-1} dz$$

quae per problema superius sine difficultate resoluuntur.

ALITER.

Si neque n neque ν fuerit $= o$, alia solutio simili modo adhiberi potest. Scilicet cum sit

$$\int y^m x^{n-1} dx = \frac{1}{n} y x - \frac{m}{n} \int x^n y^{m-1} dy \text{ et}$$

$$\int y^{\mu} x^{\nu-1} dx = \frac{1}{\nu} y^{\mu} x^{\nu} - \frac{\mu}{\nu} \int x^{\nu} y^{\mu-1} dy$$

quaestio redit ad has duas formulas:

$$\int x^n y^{m-1} dy \text{ et } \int x^{\nu} y^{\mu-1} dy$$

quae posito $x = y^{\frac{\mu-m}{n-\nu}} z$ perinde atque ante tractantur.

COROLL. 1.

31. Si sit vel $m = \mu$ vel $n = \nu$, formulae propositae statim per superius problema reduci possunt, sine vlla praeuia praeparatione. Casu tamen posteriori quo $n = \nu$ excipiendus est casus quo $n = \nu = o$; quia reductio supra praescripta hic non succedit.

COROLL. 2.

32. Per praecepta ergo adhuc tradita huiusmodi binae formulae $\int \frac{y^m dx}{x}$ et $\int \frac{y^{\mu} dx}{x}$ ad valores algebraicos reduci nequeunt.

COROL.

COROLL. 3.

33. Praeterea vero etiam excipiuntur casus, quibus $m\nu = \mu n$, seu $m : n = \mu : \nu$, qui ob eandem rationem reductionem non permittunt. Qui casus quo facilius cognoscantur, sit $m = \alpha\mu$, et $n = \alpha\nu$, erunt formumulae hoc pacto irreductibiles:

$$\int y^{\alpha\mu} x^{\alpha\nu - 1} dx \text{ et } \int y^{\mu} x^{\nu - 1} dx.$$

COROLL. 4.

34. Sit breuitatis gratia $y^{\mu} = z$ et $x^{\nu} = v$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{dv}{\nu v}$, vnde formulae hae irreductibiles sunt.

$$\tfrac{1}{\nu}\int z^{\alpha} v^{\alpha - 1} dv \text{ et } \tfrac{1}{\nu}\int z\, dv.$$

Ac si vlterius ponatur $z = \frac{u}{v}$, hae formulae abibunt in $\frac{1}{\nu}\int \frac{u^{\alpha} dv}{v}$ et $\frac{1}{\nu}\int \frac{u\, dv}{v}$, quae iam in formulis Coroll. 2. exclusis continentur.

COROLL. 5.

35. Reliquis igitur casibus omnibus, qui in his exceptionibus locum non habent, reductio ad valores algebraicos semper absolui poterit, idque duplici modo pro vtraque solutione hic tradita, atque vtroque modo gemina resolutio valebit secundum binas problematis superioris solutiones.

PROBLEMA 7.

36. Si P et Q fuerint functiones ipsius x, inuenire relationem algebraicam inter x et y, vt ambae

hae formulae $\int y^m P\,dx$ et $\int y^n Q\,dx$ valores algebraicos obtineant.

SOLVTIO.

Ponatur $y = (\frac{Q}{P})^{\frac{1}{m-n}} z$ seu $y = Q^{\frac{1}{m-n}} P^{\frac{-1}{m-n}} z$ ex hacque substitutione assequemur:

$$\int y^m P\,dx = \int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} z^m dx,$$

$$\int y^n Q\,dx = \int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} z^n dx$$

Iam notandum est reductionem, quam intendimus, esse successuram, si haec formula:

$$\int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} dx \text{ integrationem admittat.}$$

Nisi enim haec conditio locum habeat, fateor me solutionem exhibere non posse. Sit igitur

$$\int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} dz = X$$

ideoque X functio algebraica ipsius x, formulaeque reducendae erunt:

$$\int z^m dX \text{ et } \int z^n dX, \text{ vnde resultat}$$

$$\int z^m dX = X z^m - m\int X z^{m-1} dz$$

$$\int z^n dX = X z^n - n\int X z^{n-1} dz$$

Harum autem formularum reductio supra iam idque duplici modo, est ostensa.

COROLL.

37. Si esset $m = n$, problema congrueret cum problemate quarto, ita vt incommoda, quae in hac solutione inde oritura videntur, nihil plane noceant. Conditio

ditio igitur, ſub qua reductio propoſitarum formularum ſuccedit, poſtulat, vt formula differentialis $P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} dx$ integrationem admittat.

PROBLEMA 8.

38. Si V et Z ſint functiones ipſarum x et y homogeneae, atque V functio m dimenſionum, Z vero functio n dimenſionum, inuenire relationem algebraicam inter x et y, qua duae hae formulae:

$\int V\,dx$ et $\int Z\,dx$ reddantur integrabiles.

SOLVTIO.

Quia V et Z ſunt functiones homogeneae, ita vt ambae variabiles x et y vbique eundem dimenſionum numerum compleant, ibi nempe dimenſionum numerum m, hic vero n: ponatur $y = t\,x$, atque functio V abibit in $x^m P$, et Z in $x^n Q$, vbi P et Q erunt functiones quantitatis t. Ita cum per hanc ſubſtitutionem fiat

$$V = x^m P \text{ et } Z = x^n Q,$$

formulae ad reducendum propoſitae erunt

$$\int P\,x^m dx \text{ et } \int Q\,x^n dx,$$

vbi P et Q ſunt functiones alterius variabilis t, cuius ad x relationem inueſtigare oportet. Iam hae duae formulae ex duabus variabilibus t et x conſtantes reducuntur ad

$$\int P\,x^m d\,x = \tfrac{1}{m+1} P\,x^{m+1} - \tfrac{1}{m+1} \int x^{m+1} d\,P$$

$$\int Q\,x^n d\,x = \tfrac{1}{n+1} Q\,x^{n+1} - \tfrac{1}{n+1} \int x^{n+1} d\,Q$$

dummo-

dummodo neque m neque n fuerit $= -1$. Quare cum reductio ad has formulas $\int x^{m+1} dP$ et $\int x^{n+1} dQ$ reuocatur, ponatur $x = \left(\frac{dQ}{dP}\right)^{\frac{1}{m-n}} z = z\, dP^{\frac{1}{n-m}} dQ^{\frac{1}{m-n}}$ formulaeque reducendae erunt

$$\int z^{m+1} dP^{\frac{n+1}{n-m}} dQ^{\frac{m+1}{m-n}} \text{ et } \int z^{n+1} dP^{\frac{n+1}{n-m}} dQ^{\frac{m+1}{m-n}}$$

quibus valores algebraicos conciliare licebit, si formula differentialis $dP^{\frac{n+1}{n-m}} dQ^{\frac{m+1}{m-n}} = \left(\frac{dP}{dQ}\right)^{\frac{n+1}{n-m}} dQ$ absolute fuerit integrabilis; reliquis enim casibus haec reductio non succedit. Ponamus ergo hanc formulam esse integrabilem, et cum eius integrale futurum sit functio algebraica ipsius t, quae sit T, ita vt habeatur

$$\int dP^{\frac{n+1}{n-m}} dQ^{\frac{m+1}{m-n}} = T$$

atque formulae reducendae fient:

$$\int z^{m+1} dT = z^{m+1} T - (m+1) \int T z^m dz$$
$$\int z^{n+1} dT = z^{n+1} T - (n+1) \int T z^n dz$$

Hinc cum hae formulae $\int T z^m dz$ et $\int T z^n dz$ valores algebraicos obtinere debeant, hoc per problema quartum duplici modo efficietur.

COROLL. 1.

39. Patet ergo primo si fuerit vel $m = -1$ vel $n = -1$, reductionem per methodum propositam perfici non posse. Praeterea vero eam quoque locum non habere, nisi formula differentialis $dP^{\frac{n+1}{n-m}} dQ^{\frac{m+1}{m-n}}$ absolute fuerit integrabilis.

COROL.

COROLL. 2.

40. Quodsi fuerit $m = n$, dummodo vtriusque litterae valor non sit $= -1$, posteriori transformatione non erit opus, sed formulae $\int x^{n+1} d\mathrm{P}$ et $\int x^{n+1} d\mathrm{Q}$ immediate ope problematis quarti reduci poterunt.

EXEMPLVM.

41. *Quaeratur relatio algebraica inter x et y, vt hae formulae $\int \frac{y^3 dx}{xx}$ et $\int \frac{dx}{x^5} (xx+yy)^{\frac{5}{2}}$ valores algebraicos obtineant.*

Cum hic sit $\mathrm{V} = \frac{y^3}{xx}$ et $\mathrm{Z} = \frac{1}{x^5} (xx+yy)^{\frac{5}{2}}$, vtraque ergo functio V et Z homogenea, illiusque dimensionum numerus $m = 1$, huius vero $n = 0$, si ponatur $y = tx$, fiet $\mathrm{V} = x t^3$ et $\mathrm{Z} = (1+tt)^{\frac{5}{2}}$, et formulae reducendae erunt

$$\int t^3 x\, dx \quad \text{et} \int dx\, (1+tt)^{\frac{3}{2}}$$

vnde fit

$$\int t^3 x\, dx = \tfrac{1}{2} t^3 xx - \tfrac{3}{2} \int x^2 tt\, dt$$

$$\int dx\, (1+tt)^{\frac{3}{2}} = x(1+tt)^{\frac{3}{2}} - 3 \int x t\, dt \sqrt{(1+tt)}$$

Ponatur iam $x = \frac{z}{t} \sqrt{(1+tt)}$, fietque

$$\int x^2 tt\, dt = \int zz\, dt (1+tt) = zz(t + \tfrac{1}{3} t^3) - 2 \int (t + \tfrac{1}{3} t^3) z\, dz$$

$$\int x t\, dt \sqrt{(1+tt)} = \int z\, dt (1+tt) = z(t + \tfrac{1}{3} t^3) - \int (t + \tfrac{1}{3} t^3) dz$$

Sit breuitatis gratia $t + \frac{1}{3} t^3 = u$, et cum formulae reducendae sint $\int u z\, dz$ et $\int u\, dz$, ponatur

$$\int u z\, dz = \mathrm{L} \quad \text{et} \int u\, dz = \mathrm{M}$$

fiet $u = \frac{d\mathrm{L}}{z\, dz} = \frac{d\mathrm{M}}{dz}$, ideoque $z = \frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{M}}$.

 Si

Si igitur L et M fuerint functiones quaecunque nouae cuiusdam variabilis s, aequatio $z = \frac{dL}{dM}$ dabit functionem ipsius s pro z, vnde etiam $u = t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{dM}{dz}$ dabitur per s; ac propterea pro t reperitur hinc valor in s expressus. Hincque porro dabitur per s variabilis $x = \frac{z}{z} \surd (1 + tt)$ et $y = t\,x$, vnde relatio inter x et y definiri poterit.

Altera solutio posito $\int u\,dz = \mathrm{L}$ dabit $\int u\,z\,dz = \int z\,d\mathrm{L} = z\mathrm{L} - \int \mathrm{L}\,dz$. Sit $\int \mathrm{L}\,dz = \mathrm{S}$ existente S functione quacunque ipsius z, fiet $\mathrm{L} = \frac{ds}{dz}$; porroque $u = \frac{dL}{dz} = t + \frac{1}{3}t^3$; $x = \frac{z}{1}\surd(1 + tt)$ et $y = t\,x$, vnde denuo relatio inter x et y reperitur. Nam ob $t = \frac{y}{x}$ et $z = \frac{xy}{\surd(xx + yy)}$ hi valores in aequatione $\frac{dL}{dz} = \frac{dds}{dz^2} = \frac{3xxy + y^3}{3x^3}$ substituti dabunt aequationem inter x et y.

PROBLEMA 9.

42. Si V et Z fuerint vt ante functiones homogeneae ipsarum x et y, illa quidem m, haec vero n dimensionum, inuenire relationem algebraicam inter x et y, vt hae duae formulae $\int \mathrm{V}\,dx$ et $\int \mathrm{Z}\,dy$ fiant integrabiles.

SOLVTIO.

Ponatur vt ante $y = t\,x$, fietque $\mathrm{V} = x^m \mathrm{P}$ et $\mathrm{Z} = x^n \mathrm{Q}$ existentibus P et Q functionibus nouae variabilis t, et ob $dy = t\,dx + x\,dt$ formulae reducendae erunt:

$$\int \mathrm{P}\,x^m\,dx = \frac{1}{m+1}\int x^{m+1} - \frac{1}{n+1}\int x^{m+1}d\,\mathrm{P}$$

$\int Q\,x$

$$\int Q x^n dy = \int Q x^n t\, dx + \int Q x^{n+1} dt \quad \text{at}$$
$$\int Q t x^n dx = \tfrac{1}{n+1} Q t x^{n+1} - \tfrac{1}{n+1} \int x^{n+1}(Q dt + t dQ)$$

vnde habebimus:

$$\int Q x^n dy = \tfrac{1}{n+1} Q t x^{n+1} - \tfrac{1}{n+1} \int x^{n+1}(t dQ - n Q dt)$$

Atque adeo formulae ad valores gebraicos perducendae erunt $\int x^{m+1} dP$ et $\int x^{n+1}(t\, dQ - n Q dt)$, quae ponendo $x = \left(\frac{t dQ - n Q dt}{dP}\right)^{\frac{1}{m-n}} z$ reducentur vti in problemate praecedente, dum haec formula differentialis

$$\left(\frac{t\, dQ - n Q dt}{dP}\right)^{\frac{m+1}{m-n}} dP \text{ fuerit integrabilis.}$$

Vbi quidem iterum excludendi ſunt caſus, quibus vel $m = -1$ vel $n = -1$; Praeterea vero notandum eſt ſi ſit $m = n$, tum vltima transformatione ne opus quidem eſſe, quia formulae $\int x^{m+1} dP$ et $\int x^{n+1}(t dQ - n Q dt)$ ſtatim per problema quartum reduci poſſunt.

SCHOLION.

43. Atque hi ſunt fere caſus, quibus duae formulae integrales ordinis primi ad valores algebraicos methodo quidem adhuc expoſita reduci poſſunt. Nullum autem eſt dubium, quin haec methodus ad maiorem perfectionis gradum euehi poſſit, vt etiam formulae hic excluſae ad valores algebraicos reduci queant, quod negotium aliis vberius excolendum relinquo. Conſideretur autem potiſſimum caſus harum formularum $\int \frac{y\,dx}{x}$ et $\int \frac{yy\,dx}{x}$, quas generatim quidem nullo adhuc modo ad integrabilitatem reducere potui, etſi non eſt

 difficile

difficile innumeras relationes inter x et y exhibere, quae propoſito ſatisfaciant. His igitur regulis pro duabus formulis primi ordinis traditis contentus, ad tres pluresve formulas eiusdem ordinis progredior, eos inueſtigaturus caſus, quibus omnes ſimul methodo hactenus expoſita ad valores algebraicos reduci queant, quod quidem ea methodo, qua in ſolutione ſecunda problematis 4 ſum vſus, praeſtari debere animaduerto.

PROBLEMA 10.

44. *S*i P, Q, R ſint functiones quaecunque algebraicae ipſius x, inuenire relationem algebraicam inter variabiles x et y, vt tres hae formulae integrales

$$\int y P dx;\ \int y Q dx;\ \int y R dx$$

valores algebraicos obtineant.

SOLVTIO.

Ponatur $\int y P dx = L$ eritque $y = \frac{dL}{P dx}$, atque duae reliquae formulae reducendae fient:

$$\int y Q dx = \int \frac{Q}{P} dL = \frac{LQ}{P} - \int L d. \frac{Q}{P}$$

$$\int y R dx = \int \frac{R}{P} dL = \frac{LR}{P} - \int L d. \frac{R}{P}$$

Iam vero hae duae formulae $\int L d. \frac{Q}{P}$ et $\int L d. \frac{R}{P}$ per problema quartum facile reſoluuntur, idque duplici modo.

I. Priori modo poni oportet:

$\int L d. \frac{Q}{P} = M$ et $\int L d. \frac{R}{P} = N$, hincque erit:

$L = dM : d. \frac{Q}{P} = dN : \frac{R}{P}$. Vnde elicitur aequatio $\frac{d(Q:P)}{d(R:P)} = \frac{dM}{dN}$, cuius primum membrum cum ſit functio ipſius ipfius x, pro M et N capiantur functiones nouae variabilis z, atque per hanc aequationem x definietur in z expreffum, vnde porro per z dabitur

$$L = \frac{dM}{d(Q:P)} \text{ et } y = \frac{dL}{P\,dx}$$

II. Pofteriori refolutione vtentes ponamus $\int L\, d.\frac{Q}{P} = M$ vt fit $L = \frac{dM}{d(Q:P)}$, qui valor in tertia formula fubftitutus producet $\int L\, d\cdot\frac{R}{P} = \int dM.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)} = M\frac{d(R.P)}{d(Q:P)} - \int M\, d.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)}$

Ponatur ergo $\int M\, d.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)} = N$ exiftente N functione quacunque ipfius x, eritque $M = \frac{dN}{d.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)}}$, vnde pro M inuenitur functio ipfius x, qua inuenta erit $L = \frac{dM}{d(Q:P)}$ ac denique $y = \frac{dL}{P\,dx}$. Tum vero valores algebraici trium formularum propofitarum erunt.

$$\int y\,P\,dx = L$$

$$\int y\,Q\,dx = \frac{LQ}{P} - M$$

$$\int y\,R\,dx = \frac{LR}{P} - M\frac{d(R:P)}{dQ:P)} - N$$

COROLL. 1.

45. Cum in priori folutione pro litteris M et N functiones quaecunque ipfius z accipi queant, fi iis valores transcendentes tribuantur, ita tamen vt $\frac{dM}{dz}$ et $\frac{dN}{dz}$ fiant functiones algebraicae, effici poterit vt trium formularum integralium propofitarum duae $\int y\,Q\,dx$ et $\int y\,R\,dx$ a datis quadraturis pendeant. Quod etiam per probl. 2 ita expediri poterit, vt vtraque tot quot lubuerit cafibus nihilominus valores algebraicos adipifcatur.

COROLL. 2.

46. Sin autem ſolutionem poſteriorem adhibeamus, quoniam vnica littera N arbitrio noſtro relinquitur, ſi pro ea functio tranſcendens ipſius x accipiatur, vnius tantum formulae propoſitae integratio datam quadraturam inuoluet, reliquae vero duae neceſſario valores algebraicos obtinebunt.

COROLL. 3.

47. Patet etiam ſi Y fuerit functio quaecunque ipſius y, ſimili modo has tres formulas:

$$\int \mathrm{Y}\,\mathrm{P}\,dx;\ \int \mathrm{Y}\,\mathrm{Q}\,dx;\ \int \mathrm{Y}\,\mathrm{R}\,dx$$

ad valores algebraicos reduci. Quin etiam eadem reductio locum habebit, ſi Y ſit functio quaecunque ambarum variabilium x et y.

PROBLEMA 11.

48. Si P, Q, R fuerint functiones quaecunque algebraicae variabilis x, inuenire relationem algebraicam inter x et y, vt hae tres formulae integrales:

$$\int \mathrm{P}\,dy;\ \int \mathrm{Q}\,dy;\ \int \mathrm{R}\,dy$$

valores algebraicos obtineant.

SOLVTIO.

Formulae iſtae per lemma praemiſſum transformantur in ſequentes.

$$\int \mathrm{P}\,dy = \mathrm{P}y - \int y\,d\mathrm{P}$$
$$\int \mathrm{Q}\,dy = \mathrm{Q}y - \int y\,d\mathrm{Q}$$
$$\int \mathrm{R}\,dy = \mathrm{R}y - \int y\,d\mathrm{R}$$

Quaeſtio

Quaeſtio ergo redit ad has tres formulas:

$\int y\,dP$; $\int y\,dQ$; $\int y\,dR$

algebraicas efficiendas, quae cum ſimiles ſint iis, quae in probl. praec. ſunt tractatae, reſolutio nullam habebit difficultatem, atque adeo duplici modo abſolui poterit.

COROLL. 1.

49. Quin etiam ſi ordo inter has formulas immutetur, quoniam perinde eſt a quanam earum operatio incipiatur, nouem omnino ſolutiones exhiberi posſunt. Incipiendo enim a prima ponendo $\int y\,dP = L$, ſolutio prior ante tradita vnam praebet ſolutionem, poſterior vero duas, prout duae reliquae formulae ſumuntur, vel $\int y\,dQ$ et $\int y\,dR$, vel ordine inuerſo $\int y\,dR$ et $\int y\,dQ$, ſicque hinc tres ſolutiones impetrantur. Atque cum operatio a qualibet harum formularum inchoari queat, omnino nouem ſolutiones exhiberi poterunt.

COROLL. 2.

50. In hac ergo methodo perinde eſt, ſiue formula quaepiam propoſita ſit $\int yP\,dx$ ſiue $\int P\,dy$, quia poſterior $\int P\,dy$ facile ad formam prioris $\int y\,dP$ reducitur. Hincque inpoſterum nullum amplius diſcrimen inter duas huiusmodi formulas conſtituam, ne praeter neceſſitatem hanc tractationem prolixiorem reddam.

COROLL. 3.

51. Perinde ergo problema reſoluetur, ſi ad valores algebraicos reduci debeant huiusmodi formulae ternae

vel

vel $\int y\,P\,dx$; $\int y\,Q\,dx$; $\int R\,dy$

vel $\int y\,P\,dx$; $\int Q\,dy$; $\int R\,dy$

Superfluum ergo foret diuersa hinc problemata constituere.

PROBLEMA 12.

52. Ad valores algebraicos reducere quatuor huiusmodi formulas integrales:

$$\int y\,P\,dx;\quad \int y\,Q\,dx;\quad \int y\,R\,dx;\quad \int y\,S\,dx$$

in quibus litterae P, Q, R, S denotent functiones quascunque algebraicas ipsius x.

SOLVTIO.

Incipiatur operatio a quacunque harum quatuor formularum propositarum, ponendo $\int y\,P\,dx = L$, vt sit $y = \frac{dL}{P\,dx}$, atque tres reliquae formulae transformabuntur sequenti modo:

$$\int y\,Q\,dx = \int \tfrac{Q}{P}\,dL = \tfrac{LQ}{P} - \int L\,d.\tfrac{Q}{P}$$
$$\int y\,R\,dx = \int \tfrac{R}{P}\,dL = \tfrac{LR}{P} - \int L\,d\,\tfrac{R}{P}$$
$$\int y\,S\,dx = \int \tfrac{S}{P}\,dL = \tfrac{LS}{P} - \int L\,d.\tfrac{S}{P}$$

Cum igitur nunc ad valores algebraicos reducendae sint hae tres formulae:

$$\int L\,d\,\tfrac{Q}{P};\quad \int L\,d.\tfrac{R}{P};\quad \int L\,d.\tfrac{S}{P}$$

haeque congruant cum iis, quae in prob'. 10mo sunt pertractatae, resolutio erit in promtu; et quoniam hic nouem diuersae solutiones suppeditantur, totidemque reperiantur, a quanam alia quatuor formularum propositarum initium capiatur, omnino huius problematis quater, nouem, seu 36 solutiones exhiberi poterunt.

COROL.

COROLL. 1.

53. Si vna quaedam formularum propositarum, veluti $\int y S d x$, a data quadratura pendere debeat, ea in operatione ad finem vsque est reseruanda, id quod 12 modis diuersis fieri potest. Sin autem duae formulae datae, veluti $\int y R d x$ et $\int y S d x$, a datis quadraturis pendere debeant, hoc nonnisi duobus modis diuersis praestabitur.

COROLL. 2.

54. Hinc etiam patet, eundem soluendi modum ad quinque, pluresque, quotquot proponantur, similes formulas extendi, dummodo quaelibet formula habeat speciem $\int y P d x$ vel $\int P d y$, existente P functione ipsius x, ita vt in singulis formulis altera variabilis y nonnisi vnicam obtineat dimensionem.

COROLL. 3.

55. Quemadmodum in casu duarum huiusmodi formularum propositarum reperiri possunt 3 solutiones et in casu trium formularum 9 solutiones; sic in casu 4 formularum inueniuntur $4.\ 9 = 36$ solutiones. Atque porro in casu 5 formularum $5.\ 36 = 180$ solutiones, in casu 6 formularum $6.\ 180 = 1080$ solutiones, et ita porro.

PROBLEMA 13.

56. Si propositae fuerint quotcunque huiusmodi formulae integrales $\int Z d x$ vel $\int Z d y$, in quibus omnibus Z sit functio homogenea ipsarum x et y, et

in singulis idem dimensionum numerus n deprehendatur; inuenire relationem algebraicam inter x et y, vt singularum harum formularum valores prodeant algebraici.

SOLVTIO.

Cum Z sit functio homogenea n dimensionum ipsarum x et y, si ponatur $y = t x$, ea transibit in huiusmodi expressionem $x^n T$, existente T functione quapiam ipsius t tantum; ideoque quaelibet formula huius generis $\int Z\, d x$ reducitur sequenti modo:

$$\int Z\, d x = \int T\, x^n d x = \frac{1}{n+1} T\, x^{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1}\, d T$$

Deinde ob $d y = t\, d x + x\, d t$ formulae huius generis $\int Z\, d y$ simili modo transformabuntur:

$$\int Z\, dy = \int T\, x^n\, (t dx + x dt) = \int x^{n+1} T\, dt + \int T\, t\, x^n dx$$

at $\int T\, t\, x^n dx = \frac{1}{n+1} T\, t\, x^{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} (T\, dt + t\, dT)$

vnde fiet

$$\int Z\, d y = \frac{1}{n+1} T\, t\, x^{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} (t\, d\, T - n\, T\, d\, t)$$

Quare quotcunque proponantur formulae integrales, vel huius $\int Z\, d x$, vel huius $\int Z\, d y$ speciei, quaestio reuocabitur ad totidem formulas istius speciei $\int x^{n+1} \Theta\, d\, t$, existente Θ functione ipsius t, quae posito $x^{n+1} = u$ abeunt in $\int u\, \Theta\, d\, t$. Quotcunque autem huiusmodi formulae $\int u\, \Theta\, d\, t$ fuerint propositae, eae omnes per praecepta hactenus tradita ad valores algebraicos reduci poterunt.

COROL.

COROLL. 1.

57. Excipi tamen debent ii casus, quibus functionum Z numerus dimensionum n est $= - 1$, seu $n + 1 = 0$, quoniam his casibus reductiones hic adhibitae non succedunt.

COROLL. 2.

58. Patet etiam, quaecunque et quotcunque fuerint formulae propositae, dummodo eae omnes per substitutionem aut transformationem quampiam ad huiusmodi formas $\int u \, \Theta \, d t$ reduci queant, eas omnes semper integrabiles reddi posse.

SCHOLION.

59. Vis igitur methodi hactenus expositae in hoc consistit, vt quotquot proponantur formulae integrales duas variabiles x et y inuoluentes, dummodo in singulis altera variabilis y vnicam obtineat dimensionem eiusue differentiale dy, reductio ad valores algebraicos semper perfici queat; hoc ergo euenit, si singulae formulae fuerint vel huius generis $\int y \mathrm{X} dx$, vel huius $\int \mathrm{X} dy$, propterea quod huius integratio reuocatur ad hanc $\int y d\mathrm{X}$, siquidem X sit functio quaecunque ipsius x. Atque hi sunt casus, quibus duas pluresue formulas integrales primi ordinis mihi quidem adhuc ad valores algebraicos reducere contigit. Dantur vero etiam formulae secundi superiorumque ordinum, quas facile ad formulas primi ordinis formae $\int y \mathrm{X} d x$ reducere licet, ex quo, si eiusmodi formulae integrales superiorum ordinum occurrant, resolutio problematum hactenus allatorum perinde succedet.

cedet. Eas igitur formulas superiorum ordinum, quae huiusmodi reductionem admittunt, hic indicari conueniet.

PROBLEMA. 14.

60. Si P sit functio quaecunque ipsius x, elementumque dx sumatur constans, reducere integrationem huiusmodi formularum integralium $\int\frac{Pddy}{dx}$, $\int\frac{Pd^3y}{dx^2}$, $\int\frac{Pd^4y}{dx^3}$ et ingenere huius $\int\frac{Pd^ny}{dx^{n-1}}$ ad integrationem formulae primi ordinis huiusmodi $\int yQdx$, existente Q functione ipsius x.

SOLVTIO.

Consideretur formula prima, eaque per lemma ita reducetur:

$$\int\frac{Pddy}{dx^2} = \frac{Pdy}{dx} - \int dy.\frac{dP}{dx} \text{ at } \int dy.\frac{dP}{dx} = \frac{ydP}{dx} - \int\frac{yddP}{dx};$$

sicque erit:

$$\int\frac{Pddy}{dx} = \frac{Pdy}{dx} - \frac{ydP}{dx} + \int\frac{yddP}{dx}.$$

At $\frac{ddP}{dx}$ est expressio differentialis formae Qdx, ideoque formula $\int\frac{Pddy}{dx}$ reducta est ad formulam $\int yQdx$.

Simili modo formula secunda reducitur:

$$\int\frac{Pd^3y}{dx} = \frac{Pddy}{dx^2} - \int\frac{dPddy}{dx^2}; \text{ at}$$

$$\int\frac{dPddy}{dx^2} = \frac{dPdy}{dx^2} - \frac{yddP}{dx^2} + \int\frac{yd^3P}{dx^2}, \text{ ideoque}$$

$$\int\frac{Pd^3y}{dx^2} = \frac{Pddy - dPdy + yddP}{dx^2} - \int\frac{yd^3P}{dx^2},$$

vbi $\int\frac{yd^3P}{dx^2}$ est iterum formae $\int yQdx$.

Pro tertia formula proposita erit:

$\int\frac{Pd^4y}{}$

$\int \frac{P d^4 y}{d x^3} = \frac{P d^3 y}{d x^3} - \int \frac{dP d^3 y}{d x^3}$; at per reduct: praeced.

$\int \frac{dP d^3 y}{d x^3} = \frac{dP dd y - dy ddP + y d^3 P}{d x^3} - \int \frac{y d^4 P}{d x^3}$; ergo

$\int \frac{P d^4 y}{d x^3} = \frac{P d^3 y - dP dd y + dy dd P - y d^3 P}{d x^3} + \int \frac{y d^4 P}{d x^3}$.

vbi iterum $\int \frac{y d^4 P}{d x^3}$ eſt formae $\int y \, Q \, d x$.

Hinc colligitur fore vlterius progrediendo:

$\int \frac{P d^5 y}{d x^4} = \frac{P d^4 y - dP d^3 y + ddP dd y - dy d^3 P + y d^4 P}{d x^4} - \int \frac{y d^5 P}{d x^4}$

vnde etiam generatim patet, hac ratione iſtius formulae $\int \frac{P d^n y}{d x^{n-1}}$ integrationem reduci ad integrationem huius formulae $\int \frac{y d^n P}{d x^{n-1}}$, foreque ſemper hanc expreſſionem huius formae $\int y \, Q \, d x$, eſt enim $\frac{d^n P}{d x^n}$ functio algebraica ipſius x, eiusque loco ſi ponatur Q erit $\frac{d^n P}{d x^{n-1}} = Q d x$.

COROLL. 1.

61. Omnes ergo reductiones, quae ſupra circa formulas huiusmodi $\int y \, Q \, d x$ ſunt exhibitae, eodem ſuccedunt modo, ſi huiusmodi formulae $\left(\int \frac{P d^n y}{d x^{n-1}}\right)$ proponantur; vnde opus non eſt problemata praecedentia pro huiusmodi formulis altiorum ordinum reſoluere.

COROLL. 2.

62. Si expreſſio $\frac{d^n P}{d x^n}$ euaneſcat, id erit indicio, formulam $\int \frac{P d^n y}{d x^n}$ eſſe abſolute integrabilem; ea ergo

his casibus in nostris problematibus locum non habebit. Hoc autem euenit, si P fuerit ipsius x huiusmodi functio $P = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots + \mu x^{n-1}$ tum enim $\int \frac{P\, d^n y}{d x^n}$ integrationem absolute admittet.

COROLL. 3.

63. Formulae ergo integrabiles cum suis integralibus erunt pro variis ipsius n valoribus sequentes:

$$\int \alpha\, dy = \alpha y$$

$$\int \frac{(\alpha + \beta x)\, ddy}{dx} = (\alpha + \beta x) \frac{dy}{dx} - \beta y$$

$$\int \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, d^3 y}{d x^2} = (\alpha + \beta x + \gamma x^2) \frac{ddy}{dx^2} - (\beta + 2\gamma x) \frac{dy}{dx} + 2\gamma y$$

$$\int \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)\, d^4 y}{dx^3} = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3) \frac{d^3 y}{dx^3} - (\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2) \frac{ddy}{dx^2}$$
$$+ (2\gamma + 6\delta x) \frac{dy}{dx} - 6\delta y$$

SCHOLION.

64. Progrediamur ergo ad formulas ordinis secundi, cum reductioni earum, quae sunt primi ordinis, iam tantum simus immorati, quantum quidem profectus in hac methodo facti adhuc permiserunt. Quoniam vero ad ordinem secundum eas retulimus formulas, in quibus vtriusque variabilis x et y differentialia dx et dy insunt, eae sine dubio sunt simplicissimae, in quibus haec bina differentialia plus vna dimensione non obtinent, cuiusmodi in genere est haec formula $\int (V\, dx + Z\, dy)$, vbi V et Z sint functiones quaecunque ipsarum x et y. Nam si vnicum adsit differentiale dy, quanquam inde posito $dy = p\, dx$, littera p in functionem ingreditur, tamen manifestum est, binas variabiles x et y esse commuta-

mutabiles, atque formulas $\int Z\,dy$ perinde tractari posse, ac $\int Z\,dx$. Quibus ergo casibus huiusmodi formulis $\int(V\,dx + Z\,dy)$ valores algebraicos conciliare potuerim, explicabo.

PROBLEMA 15.

65. Si V et Z denotent functiones ipsarum x et y, inuenire relationem algebraicam inter x et y, vt haec formula $\int(V\,dx + Z\,dy)$ algebraicum obtineat valorem.

SOLVTIO.

I. Dispiciatur primo, vtrum altera pars $\int V\,dx$, vel $\int Z\,dy$, per lemma reduci possit, vt fiat
vel $\int V\,dx = P - \int Q\,dy$,
vel $\int Z\,dy = R - \int S\,dx$.
Si alterum enim succedit, solutio erit facilis: priori enim casu habebitur.
$\int(V\,dx + Z\,dy) = P + \int(Z - Q)\,dy$, posteriori vero
$\int(V\,dx + Z\,dy) = R + \int(V - S)\,dx$;
Vtrauis autem haec formula nullam habet difficultatem per problema 3.

II. Si hoc modo reductio inueniri nequeat, indagetur functio algebraica ipsarum x et y, quae sit $= P$, vt $\frac{V\,dx + Z\,dy}{P}$ fiat differentiale functionis cuiuspiam algebraicae Q ipsarum x et y, hoc enim casu fiet $\int(V\,dx + Z\,dy) = \int P\,dQ$, quae formula nulla difficultate ad integrabilitatem perducitur per problema 3.

III. Saepe etiam huiusmodi functio algebraica ipsarum x et y puta T inueniri potest, cuius differentiali existente $= P\,dx + Q\,dy$, si ponatur

$\int(V\,dx$

$\int(V\,dx + Z\,dy) = T + \int(V - P)\,dx + (Z - Q)\,dy)$ vt haec formula modo vel primo, vel ſecundo, reductionem admittat.

IV. Interdum quoque iuuabit, in locum vnius vel ambarum variabilium x et y vnam duasue nouas t et q introducere, ponendis x et y aequalibus functionibus quibuspiam harum duarum nouarum variabilium t et u, ita vt facta ſubſtitutione formula huiusmodi obtineatur: $\int(V\,dz + Z\,dy) = \int(P\,dt + Q\,du)$, vbi iam P et Q ſunt functiones ipſarum t et u, quae aliquo expoſitorum modorum reductionem admittat.

V. Caſus adhuc ſingularis eſt memorandus, quo V et Z ſunt functiones homogeneae ipſarum x et y eiusdem ambae numeri dimenſionum, qui ſit $= n$. Poſito enim $y = tx$ fiet $V = Px^m$ et $Z = Qx^n$, exiſtentibus P et Q functionibus ipſius t. Tum ob $dy = t\,dx + x\,dt$; formula propoſita transibit in hanc

$$\int(Px^n dx + Qtx^n dx + Qx^{n+1}dt)$$

at $\int(P + Qt)\,x^n dx = \frac{1}{n+1}(P+Qt)\,x^{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1} d(P+Qt)$ vnde reductio reuocatur ad huiusmodi formam $\int x^{n+1} S\,dt$, niſi ſit $n = -1$, exiſtente S functione ipſius t.

SCHOLION.

66. Sufficiat has operationes in genere explicaſſe, quoniam exempla, quae vſum quempiam memorabilem habere videantur, non ſuccurrunt. Interim tamen notandum eſt, plurima exempla proponi poſſe, quae vel difficulter, vel plane non, per vllam harum operationum reduci queant. Cuiusmodi eſt, ſi relatio inter x et y quaerenda ſit, vt haec formula integralis $\int(\frac{y\,dx}{x} + \frac{dy}{y})$ valorem

valorem algebraicum obtineat, neque enim video, quomodo huic quaeſtioni ſatisfaciendum ſit. Quamobrem multo minus talia attingo problemata, in quibus duae pluresue huiusmodi formulae ad integrabilitatem perduci debeant. Neque etiam formulas ſuperiorum ordinum generaliter pertractare licebit, praeter caſum in ſequenti problemate contentum.

PROBEMA 16.

67. Si Z ſit functio nullius dimenſionis ipſarum dx et dy, ita vt ipſae quantitates finitae x et y in eam non ingrediantur, ad integrabilitatem reducere hanc formulam $\int Z dx$.

SOLVTIO.

Cum formula differentialis $Z dx$ ita ſit comparata, vt praeter quantitates conſtantes nonniſi differentialia dx et dy contineat, quae propterea vnam dimenſionem adimplebunt, cuiusmodi ſunt hae formulae: $\frac{dy^2}{dx}$; $\sqrt{(a dx^2 + b dx dy + c dy^2)}$; $\frac{a dx^2 + b dy^2}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ etc. ponatur $dy = p dx$, atque formula propoſita $\int Z dx$ induet hanc ſpeciem $\int P dx$, ita vt P fiat functio quantitatis p tantum, neque x neque y inuoluens. Efficiendum ergo erit, vt non ſolum haec formula $\int P dx$, ſed etiam ob $dy = p dx$ haec $\int p dx$, algebraicum nanciſcatur valorem, quod per problema 4. ita duplici modo praeſtabitur. Cum enim ſit

$$\int Z dx = \int P dx = Px - \int x dP$$

$$y = \int p dx = px - \int x dp$$

 Fiat

Fiat primo:

$$\int x\,dP = M \text{ et } \int x\,dp = N,$$

eritque $x = \frac{dM}{dP} = \frac{dN}{dp}$, vnde fit $\frac{dP}{dp} = \frac{dM}{dN}$, et quia $\frac{dP}{dp}$ eſt functio ipſius p, inde valor ipſius p erui debet, quo inuento habebitur $x = \frac{dM}{dP}$, ſeu $x = \frac{dN}{dp}$, ac deinceps $y = px - N$: qui valores praebebunt $\int Z\,dx = Px - M$. Pro altera ſolutione ponatur:

$\int x\,dP = M$, vt ſit $x = \frac{dM}{dP}$, et $\int x\,dp = \int \frac{dp}{dP}.\, dM = M.\frac{dp}{dP} - \int M d.\frac{dp}{dP}$. Iam ponatur $\int M d.\frac{dp}{dP} = R$ functioni ipſius p cuicunque, ac reperietur $M = dR : d.\frac{dp}{dP}$, quo valore ipſius M inuento, prodibit porro:

$$x = \frac{dM}{dP};\ y = px - \frac{M\,dp}{dP} + R,$$

vnde fit $\int Z\,dx = Px - M$.

Vel ponatur $\int x\,dp = N$, et ob $x = \frac{dN}{dp}$, fiet $\int x\,dP = \int dN.\frac{dP}{dp} = N.\frac{dP}{dp} - \int N\,d.\frac{dP}{dp}$. Sit $\int N\,d.\frac{dP}{dp} = S$ erit $N = dS : d.\frac{dP}{dp}$; hincque $x = \frac{dN}{dp}$ et $y = px - N$ ex quibus efficitur $\int Z\,dx = Px - \frac{N\,dP}{dp} + S$.

COROLLARIVM.

68. Simili modo ſolutio exhiberi poterit, ſi duae pluresue huiusmodi formulae $\int Z\,dx$ proponantur, quibus valores algebraici conciliari debeant. Poſito enim $dy = p\,dx$, praeter hanc formulam $\int p\,dx$, duae pluresue huiusmodi $\int P\,dx$, $\int Q\,dx$, etc. vbi P et Q etc. ſint functiones ipſius p, integrabiles erunt efficiendae, quod per methodos ſupra traditas facile praeſtatur.

SCHO-

SCHOLION.

69. Vt igitur finem huic disquiſitioni imponam, eximium eius vſum in ſoluendis praecipuis huius generis problematibus, quae quidem adhuc ſunt agitata, oſtendam. Verſantur autem haec problemata potiſſimum circa curuas rectificabiles algebraicas, quamobrem ex methodis hactenus traditis plures deriuabo regulas, quarum ope tot, quot lubuerit, curuas algebraicas rectificabiles reperire liceat, vnde ſimul patebit, quomodo eiusmodi curuae algebraicae ſint inueniendae, quarum integratio a data pendeat quadratura, ita vt omnia problemata, quae ope cuiuspiam quadraturae ſint constructa, facile per rectificationem curuae algebraicae expediri poſſint. Tum vero non magis erit difficile eiusmodi curvas algebraicas exhibere, quarum rectificatio indefinita a data quadratura pendeat, quae tamen nihilo minus vnum pluresue imo praeciſe tot, quot lubuerit, habeant arcus definitos algebraice aſſignabiles. Denique ſolutionem mei illius problematis de duabus curuis, in quibus arcuum communi abſciſſae reſpondentium ſumma fiat algebraica, ex his principiis deducam.

PROBLEMA 17.

70. Inuenire curuas algebraicas rectificabiles, ſeu quarum omnes arcus algebraice exhiberi queant.

SOLVTIO.

Sint curuae coordinatae orthogonales x et y, arcusque his coordinatis reſpondens $= z$. Primo igitur

 quae-

quaeritur aequatio algebraica inter x et y, deinde valor ipsius z inde emergens debet esse algebraicus. Cum igitur sit $z = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, haec formula integrabilis erit reddenda; quod sequentibus modis praestabitur.

I.

Ponatur $dy = p\,dx$, atque hae duae formulae

$$y = \int p\,dx \text{ et } z = \int dx \sqrt{(1 + pp)}$$

algebraicae sunt reddendae. Cum igitur sit

$$y = px - \int x\,dp$$

$$z = x\sqrt{(1+pp)} - \int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

sumantur nouae cuiusdam variabilis u functiones quaecunque algebraicae P et Q, ponaturque

$$\int x\,dp = P \text{ et } \int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = Q$$

erit $x = \frac{dP}{dp} = \frac{dQ\sqrt{(1+pp)}}{p\,dp}$, vnde fit

$$p\,dP = dQ\sqrt{(1+pp)}, \text{ ideoque } p = \frac{dQ}{\sqrt{(dP^2 - dQ^2)}}$$

Dabitur ergo p per functionem quandam ipsius u, quae ob $\frac{dP}{du}$ et $\frac{dQ}{du}$ ideoque $\frac{dP}{dQ}$ quantitates algebraicas, ipsa erit algebraica $p = \frac{dQ}{\sqrt{(dP^2 - dQ^2)}}$, ex qua habebitur porro:

$x = \frac{dP}{dp}$; $y = px - P$; et $z = x\sqrt{(1+pp)} - Q$.

Seu sit $Q = u$ et $P = V$, et quia posito du constante est $dp = \frac{-du\,dV\,ddV}{(dV^2 - du^2)^{\frac{3}{2}}}$ ob $p = \frac{du}{\sqrt{(dV^2 - du^2)}}$ habebitur:

$$x = \frac{-(dV^2 - du^2)^{\frac{3}{2}}}{du\,ddV}$$

$$y = \frac{-(dV^2 - du^2)}{ddV} - V$$

et

et $z = \frac{-dV(dV^2 - du^2)}{duddV} - u.$

Posito autem contra $P = u$ et $Q = V$, vt V fit functio quaecunque ipsius u, ob $p = \frac{dV}{\surd(du^2 - dV^2)}$ et $dp = \frac{du^2 ddV}{(du^2 - dV^2)^{\frac{3}{2}}}$ posito du constante, erit

$$x = \frac{(du^2 - dV^2)^{\frac{3}{2}}}{duddV}$$

$$y = \frac{dV(du^2 - dV^2)}{duddV} - u$$

$$z = \frac{du^2 - dV^2}{ddV} - V$$

II.

Posito vt ante $dy = p\,dx$, fit $\int x\,dp = M$, ideoque $x = \frac{dM}{dp}$, vnde fit

$$\int \frac{xpdp}{\surd(1+pp)} = \int \frac{pdM}{\surd(1+pp)} = \frac{pM}{\surd(1+pp)} - \int \frac{Mdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

Ponatur $\int \frac{M\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = P$ functioni cuicunque ipsius p, fietque $M = \frac{dP}{dp}(1+pp)^{\frac{3}{2}}$, vnde erit porro

$$x = \frac{dM}{dp};\ y = px - M;$$

$$\text{et } z = x\surd(1+pp) = \frac{Mp}{\surd(1+pp)} + P.$$

 Seu

Seu posito dp constante ob $dM = \frac{ddP}{dp}(1+pp)^{\frac{3}{2}} + 3\,pdP\,\sqrt{(1+pp)}$ erit:

$$x = \frac{ddP}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} + \frac{3\,pdP}{dp}\sqrt{(1+pp)}$$

$$y = \frac{p\,ddP}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} + \frac{(2pp-1)dP}{dp}\sqrt{(1+pp)}$$

$$z = \frac{ddP}{dp^2}(1+pp)^2 + \frac{2p(1+pp)dP}{dp} + P.$$

III.

Sit $\int\frac{x\,p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = N$, erit $x = \frac{dN\sqrt{(1+pp)}}{p\,dp}$, ideoque $\int x\,dp = \int\frac{dN}{p}\sqrt{(1+pp)} = \frac{N}{p}\sqrt{(1+pp)} + (\int\frac{N\,dp}{pp\sqrt{(1+pp)}})$ Ponatur $\int\frac{N\,dp}{pp\sqrt{(1+pp)}} = P$ functioni ipsius p, eritque $N = (\frac{pp\,dP\sqrt{(1+pp)}}{dp})$, ex quo valore erit porro: $x = \frac{dN\sqrt{(1+pp)}}{p\,dp}$; $y = px - \frac{N}{p}\sqrt{(1+pp)} - P$ et $z = x\sqrt{(1+pp)} - N$ Posito autem dp constante ob $dN - \frac{pp\,ddP}{dp}\sqrt{(1+pp)} + (\frac{p\,dP(2+3pp)}{\sqrt{(1+pp)}})$ erit:

$$x = \frac{p\,ddP(1+pp)}{dp^2} + \frac{dP(2+3pp)}{dp}$$

$$y = \frac{pp\,ddP(1+pp)}{dp^2} + \frac{p\,dP(1+2pp)}{dp} - P$$

$$z = \frac{p\,ddP(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{2\,dP(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$$

IV.

IV.

Ponatur $dy = \frac{dx(qq-1)}{2q}$, erit $dz = \frac{dx(qq+1)}{2q}$; Hinc fit $z+y = \int q\,dx$ et $z-y = \int \frac{dx}{q}$; duae ergo hae formulae integrabiles sunt reddendae. Ponatur

$$\int q\,dx = qx - \int x\,dq = qx - M$$

$$\int \frac{dx}{q} = \frac{x}{q} + \int \frac{x\,dq}{qq} = \frac{x}{q} + N$$

vt sit $x = \frac{dM}{dq} = \frac{qq\,dN}{dq}$; ergo $q = \sqrt{\frac{dM}{dN}}$

Sint iam M et N functiones quaecunque ipsius u, et ob $dq = \frac{dN\,ddM - dM\,ddN}{2dN\sqrt{dM\,dN}}$ erit:

$$x = \frac{2dM\,dN\sqrt{dM\,dN}}{dN\,ddM - dM\,ddN}$$

$$z+y = \frac{2dM^2\,dN}{dN\,ddM - dM\,ddN} - M$$

$$z-y = \frac{2dM\,dN^2}{dN\,ddM - dM\,ddN} + N$$

$$\text{ergo } y = \frac{dM\,dN(dM-dN)}{dN\,ddM - dM\,ddN} - \frac{M-N}{2}$$

$$\text{et } z = \frac{dM\,dN(dM+dN)}{dN\,ddM - dM\,ddN} - \frac{M+N}{2}$$

V.

Iisdem positis fiat $\int x\,dq = M$, vt sit $\int q\,dx = qx - M$, erit $x = \frac{dM}{dq}$, et $\int \frac{dx}{q} = \frac{x}{q} + \int \frac{dM}{qq} = \frac{x}{q} + \frac{M}{qq} + 2\int \frac{M\,dq}{q^3}$. Iam fit $\int \frac{M\,dq}{q^3} = Q$, ideoque $M = \frac{q^3\,dQ}{dq}$, quo valore per q inuento, cum Q sit functio ipsius q, erit $x = \frac{dM}{dq}$; $z+y = qx - M$ et $z-y = \frac{x}{q} + \frac{M}{qq} + 2Q$, seu ob $dM = \frac{q^3\,ddQ}{dq} + 3qq\,dQ$, erit

$$x = \frac{q^3\,ddQ}{dq^2} + \frac{3qq\,dQ}{dq}$$

$$z+y = \frac{q^4\,ddQ}{dq^2} + \frac{2q^3\,dQ}{dq}$$

$$z-y = \frac{qq\,ddQ}{dq^2} + \frac{4q\,dQ}{dq} + 2Q$$

hinc-

hincque propterea

$$y = \frac{qq(qq-1)ddQ}{2dq^2} + \frac{q(qq+2)dQ}{dq} - Q$$
$$z = \frac{qq(qq+1)ddQ}{2dq^2} + \frac{q(qq+2)dQ}{dq} + Q$$

VI.

Vel fiat $\int \frac{xdq}{qq} = N$, vt habeatur $x = \frac{qqdN}{dq}$ et $\int xdq = \int qqdN = qqN - 2\int Nqdq$. Iam ponatur $\int Nqdq = Q$ existente Q functione quacunque ipsius q, atque erit $N = \frac{dQ}{qdq}$, $dN = \frac{ddQ}{qdq} - \frac{dQ}{qq}$
ergo $x = \frac{qddQ}{dq^2} - \frac{dQ}{dq}$; et $\int xdq = \frac{qdQ}{dq} - 2Q$
vnde fiet $z + y = \frac{qqdQ}{dq^2} - \frac{2qdQ}{dq} + 2Q$
et $z - y = \frac{ddQ}{dq^2}$

Quamobrem nanciscemur has formulas:

$$x = \frac{qddQ}{dq^2} - \frac{dQ}{dq}$$
$$y = \frac{(qq-1)ddQ}{2dq^2} - \frac{qdQ}{dq} + Q$$
$$z = \frac{(qq+1)ddQ}{2dq^2} - \frac{qdQ}{dq} + Q$$

VII.

Ad alias formulas inueniendas ponamus:

$$dx = 2pdu;\ dy = du(pp-1) \text{ et } dz = du(pp+1)$$

eritque:

$$x = 2\int pdu;\ y+z = 2\int ppdu;\ z-y = 2u$$

ergo quaestio ad has duas formulas reducitur:

$$\int pdu = pu - \int udp;\ \int ppdu = ppu - 2\int updp.$$

Sit nunc $\int udp = M$, et $\int updp = N$, erit:
$u = \frac{dM}{dp} = \frac{dN}{pdp}$, ideoque $p = \frac{dN}{dM}$ et $dp = \frac{dMddN - dNddM}{dM^2}$
vnde $u = \frac{dM^3}{dMddN - dNddM} = \frac{z-y}{2}$

Porro

Porro eſt $\int p\,du = \frac{x}{2} = \frac{dM^2 dN}{dM\,ddN - dN\,ddM} - M$, et

$\int pp\,du = \frac{z+y}{2} = \frac{dM\,dN^2}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2N$; ergo

$x = \frac{2dM^2 dN}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2M$; $y = \frac{dM(dN^2 - dM^2)}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2N$

atque $z = \frac{dM(dN^2 + dM^2)}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2N$.

Si elementum dM ſumatur conſtans, erit

$$x = \frac{2\,dM\,dN}{ddN} - 2M$$
$$y = \frac{dN^2 - dM^2}{ddN} - 2N$$
$$z = \frac{dN^2 + dM^2}{ddN} - 2N$$

VIII.

In praecedente ſolutione ponatur, vt ante, $\int u\,dp = M$ ſeu $u = \frac{dM}{dp}$, fiet $\int up\,dp = \int p\,dM = pM - \int M\,dp$. Iam ſit $\int M\,dp = P$, erit $M = \frac{dP}{dp}$; et $dM = \frac{ddP}{dp}$ vnde fit $u = \frac{ddP}{dp^2}$, atque porro:

$\frac{1}{2}x = \frac{p\,ddP}{dp^2} - \frac{dP}{dp}$; $\frac{z-y}{2} = \frac{ddP}{dp^2}$

et $\frac{z+y}{2} = \frac{pp\,ddP}{dp^2} - \frac{2p\,dP}{dp} + 2P$

hincque eliciuntur iſtae formulae:

$$x = \frac{2p\,ddP}{dp^2} - \frac{2dP}{dp}$$
$$y = \frac{(pp-1)\,ddP}{dp^2} - \frac{2p\,dP}{dp} + 2P$$
$$z = \frac{(pp+1)\,ddP}{dp^2} - \frac{2p\,dP}{dp} + 2P$$

IX.

Loco praecedentis operationis fiat $\int up\,dp = N$, ſeu $u = \frac{dN}{p\,dp}$, eritque $\int u\,dp = \int \frac{dN}{p} = \frac{N}{p} + \int \frac{N\,dp}{pp}$. Iam ſit $\int \frac{N\,dp}{pp} = P$, fietque $N = \frac{pp\,dP}{dp}$ et $dN = \frac{pp\,ddP}{dp} + 2p\,dP$, vnde $u = \frac{p\,ddP}{dp^2} + \frac{2\,dP}{dp} = \frac{z-y}{2}$; at erit $\frac{z+y}{2} = \frac{p^3\,ddP}{dp^2} +$ et $\frac{1}{2}x = \frac{pp\,ddP}{dp^2} + \frac{p\,dP}{dp} - P$;

Ergo

$$x = \frac{2ppddP}{dp^2} + \frac{2pdP}{dp} - 2P.$$
$$y = \frac{p(pp-1)ddP}{dp^2} - \frac{2dP}{dp}$$
$$z = \frac{p(pp+1)ddP}{dp^2} + \frac{2dP}{dp}.$$

COROLL. 1.

71. Si rectificatio curuae non debeat esse algebraica, sed a data quadratura pendere, hoc ope regulae primae ac secundae facile praestabitur. In prima enim regula pro V eiusmodi capiatur functio transcendens ipsius u, quae datam quadraturam puta $\int U\,du$ inuoluat, ita tamen vt $\frac{dV}{du}$ fiat quantitas algebraica, si secunda regula vti velimus, pro P eiusmodi functio transcendens ipsius p accipi debet.

COROLL. 2.

72. Vtrauis autem regula adhibeatur, id facile expediri poterit ope probl. 2. vt curuae rectificatio indefinita non solum a data quadratura pendeat, sed vt in eadem curua tot, quot lubuerit, extent arcus, quorum longitudo algebraice exprimi queant.

SCHOLION.

73. En ergo nouem formulas specie quidem diuersas quibus curuae algebraicae, rectificabiles, continentur; verumtamen quaelibet earum tam late patet, vt omnes omnino curuas algebraicas, quae sint rectificabiles, complectatur. Interim tamen quaedam in iis reperiuntur, quae ope leuis substitutionis ad se inuicem reducuntur

cuntur. Ita solutio quarta ad primam reducitur ponendo $M = u + V$ et $N = u - V$. Deinde si in sexta ponatur $Q = Qqq$, ea redigitur ad quintam. De his autem solutionibus notandum est, ex singulis relationem finitam seu finitis quantitatibus expressam inter tres quantitates x, y et z reperiri posse, cum differentialia inde eliminari queant, pro singulis igitur solutionibus hae relationes finitae ita se habebunt:

Solutio I. dat $(z + V)^2 = x^2 + (y + u)^2$
Solutio II. dat $z\sqrt{(1 + pp)} = x + py + P\sqrt{(1 + pp)}$
Solutio III. dat $z\sqrt{(1 + pp)} = x + py + Pp$
Solutio IV. dat $(z + y + M)(z - y - N) = xx$
Solutio V. dat $z(1 + qq) = 2qx + (qq - 1)y + 2Qqq$
Solutio VI. dat $z(1 + qq) = 2qx + (qq - 1)y + 2Q$
Solutio VII. dat $(z + y + 4N)(z - y) = (x + 2M)^2$
Solutio VIII. dat $(pp + 1)z = 2px + (pp - 1)y + 4P$
Solutio IX. dat $(pp + 1)z = 2px + (pp - 1)y + 4Pp$

Hinc patet solutiones II et III in vnam coalescere si in secunda ponatur $P = \frac{R}{\sqrt{(1 + pp)}}$, vel in tertia $P = \frac{R}{p}$; inde enim prodit haec solutio simplicior:

$$x = \frac{(1 + pp)ddR}{dp^2} + \frac{pdR}{dp} - R$$
$$y = \frac{p(1 + pp)ddR}{dp^2} - \frac{dR}{dp}$$
$$z = \frac{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}ddR}{dp^2}$$

Deinde ſolutiones V, VI, VIII et IX manifeſto inter ſe conueniunt, et ad VI, quae eſt ſimpliciſſima, redeunt. Denique ſolutio IV ad primam eſt reducta ita vt tantum remaneant 4 ſolutiones quae pro diuerſis haberi queant:

(I, IV); (II, III); (V, VI, VIII, IX) et (VII).

Quatuor igitur has ſolutiones, principales h. c. conſpectui exponere conueniet, formis earum ita parumper immutatis, vt in ſingulis ſit P functio quaecunque ipſius p.

SOLVTIO I.

$$x = \frac{(dp^2 - dP^2)^{\frac{1}{2}}}{dpddP}$$

$$y = \frac{dP(dp^2 - dP^2)}{dpddP} - p$$

$$z = \frac{dp^2 - dP^2}{ddP} - P$$

$$(z+P)^2 = x^2 + (y+p)^2$$

SOLVTIO II.

$$x = \frac{dpdP}{ddP} - p$$

$$y = \frac{dP^2 - dp^2}{2ddP} - P$$

$$z = \frac{dP^2 + dp^2}{2ddP} - P$$

$$(z+P)^2 = (x+p)^2 + (y+P)^2$$

SOLV-

SOLVTIO III.

$$x = \frac{(1+pp)ddP}{dp^2} + \frac{pdP}{dp} - P$$

$$y = \frac{p(1+pp)ddP}{dp^2} - \frac{dP}{dp}$$

$$z = \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}ddP}{dp^2}$$

$$z\sqrt{(1+pp)} = x + py + P$$

SOLVTIO IV.

$$x = \frac{pddP}{dp^2} - \frac{dP}{dp}$$

$$y = \frac{(pp-1)ddP}{2dp^2} - \frac{pdP}{dp} + P$$

$$z = \frac{(pp+1)ddP}{2dp^2} - \frac{pdP}{dp} + P$$

$$(pp+1)z = 2px + (pp-1)y + 2P$$

Hinc igitur, si pro P functiones simpliciores ipsius p substituantur, curuae algebraicae simpliciores, quae sunt rectificabiles, obtinebuntur, ac parabolicas quidem ex III erui obseruo, si ponatur $P = A + Bp^2 + Cp^4 + Dp^6 + \text{etc.}$ et coefficientes debite determinentur.

PROBLEMA 18.

74. Inuenire duas curuas algebraicas ad eundem axem relatas, quarum vtriusque rectificatio a data quadratura pendeat, ita tamen vtriusque arcuum eidem abscissae respondentium summa algebraice exhiberi queat.

SOLVTIO.

Sit abſciſſa communis $= x$, et vnius curuae applicata $= y$, arcus $= z$; pro altera curua ſit applicata $= u$, et arcus $= w$; Ponatur $dy = p\,dx$, et $du = q\,dx$, eritque

pro curua I	pro curua II
$y = px - \int x\,dp$	$u = qx - \int x\,dq$
$z = x\sqrt{(1+pp)} - \frac{\int xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$	$w = x\sqrt{(1+qq)} - \frac{\int xq\,dq}{\sqrt{(1+qq)}}$

Neceſſe eſt ergo primo, vt formulae $\int x\,dp$ et $\int x\,dq$ valores nanciſcantur algebraicos, deinde vt ſumma arcuum $z + w$ ſit pariter algebraica, tertio vt vterque arcus ſeorſim ſumtus, vel, quod eodem redit, arcuum differentia $z - w$ a data quadratura pendeat.

Ponatur breuitatis gratia

$$\sqrt{(1+pp)} + \sqrt{(1+qq)} = r$$
$$\sqrt{(1+pp)} - \sqrt{(1+qq)} = s$$

vt ſit

$$y = px - \int x\,dp;\quad u = qx - \int x\,dq$$
$$z = \tfrac{x(r+s)}{2} - \tfrac{1}{2}\int x(dr + ds);\quad w = \tfrac{x(r-s)}{2} - \tfrac{1}{2}\int x(dr - ds)$$
$$z + w = xr - \int x\,dr$$
$$z - w = xs - \int x\,ds$$

Efficiendum ergo eſt, vt hae tres formulae:

$\int x\,dp$; $\int x\,dq$ et $\int x\,dr$ fiant algebraicae,

ſimulque vt formula $\int x\,ds$ a data quadratura pendeat. Ad hoc ponatur $\int x\,dp = L$, erit $x = \frac{dL}{dp}$, et

$\int x\,dq$

$$\int x\,dq = \int d\mathrm{L}.\frac{dq}{dp} = \frac{\mathrm{L}\,dq}{dp} - \int \mathrm{L}\,d.\frac{dq}{dp}$$
$$\int x\,dr = \int d\mathrm{L}.\frac{dr}{dp} = \frac{\mathrm{L}\,dr}{dp} - \int \mathrm{L}\,d.\frac{dr}{dp}$$
$$\int x\,ds = \int d\mathrm{L}.\frac{ds}{dp} = \frac{\mathrm{L}\,ds}{dp} - \int \mathrm{L}\,d.\frac{ds}{dp}$$

Iam ponatur $\int \mathrm{L}\,d.\frac{dq}{dp} = \mathrm{M}$, seu $\mathrm{L} = \frac{d\mathrm{M}}{d.\frac{dq}{dp}}$ erit $\int \mathrm{L}\,d.\frac{dr}{dp}$

$$= \int d\mathrm{M}\,\frac{d.\frac{dr}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} = \mathrm{M}\,\frac{d.\frac{dr}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} - \int \mathrm{M}\,d.\frac{d\frac{dr}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} \text{ et } \int \mathrm{L}d.\frac{ds}{dp} = \int d\mathrm{M}\,\frac{d.\frac{ds}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}}$$
$$= \mathrm{M}\,\frac{d.\frac{ds}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} - \int \mathrm{M}\,d.\frac{d.\frac{ds}{dp}}{d\,\frac{dq}{dp}}$$

Quod si iam ad abbreuiandum scribatur:

$$\frac{d.\frac{dr}{dp}}{d\,\frac{dq}{dp}} = \mu \text{ et } \frac{d\,\frac{ds}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}} = \nu$$

vt sit

$$\int \mathrm{L}\,d.\frac{dr}{dp} = \mathrm{M}\mu - \int \mathrm{M}\,d\mu$$
$$\int \mathrm{L}\,d.\frac{ds}{dp} = \mathrm{M}\nu - \int \mathrm{M}\,d\nu$$

Superest, vt formula $\int \mathrm{M}\,d\mu$ reddatur algebraica, altera vero $\int \mathrm{M}\,d\nu$ a data quadratura pendeat. Sit ergo $\int \mathrm{M}\,d\mu = \mathrm{N}$ seu $\mathrm{M} = \frac{d\mathrm{N}}{d\mu}$, erit

$$\int \mathrm{M}\,d\nu = \int d\mathrm{N}\,\frac{d\nu}{d\mu} = \mathrm{N}\,\frac{d\nu}{d\mu} - \int \mathrm{N}\,d\,\frac{d\nu}{d\mu}$$

Sit iam P eiusmodi functio transcendens, quae datam quadraturam inuoluat, ac ponatur:

$$\int \mathrm{N}\,d.\frac{d\nu}{d\mu} = \mathrm{P} \text{ vt sit } \mathrm{N} = \frac{d\mathrm{P}}{d.\frac{d\nu}{d\mu}}$$

quo valore in praecedentibus formulis substituto, reperientur binae curuae algebraicae quaesito satisfacientes. Su-

matur

matur ſcilicet pro q functio quaecunque ipſius p, ita vt r et s fiant functiones ipſius p, eruntque etiam μ et ν functiones ipſius p; quare pro P capi debebit functio transcendens ipſius p, quae quidem propoſitam quadraturam inuoluat, hocque modo N dabitur per P, vnde deinceps vtraque curua definietur. Hinc autem cum $\frac{d\mu}{d\nu}$ ſit functio ipſius p, alia ſolutio exhiberi poterit.

Scilicet ponatur: $\int M\, d\mu = R$ et $\int M\, d\nu = S$, ita vt R ſit functio algebraica, S vero datam quadraturam includat, eritque $M = \frac{dR}{d\mu} = \frac{dS}{d\nu}$, vnde fit $\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{dR}{dS}$, ex qua aequatione quantitas p definietur per nouam variabilem ν, ſiquidem pro R et S capiantur functiones ipſius ν, vnde denuo determinationes pro vtraque curua inuenientur.

SCOLION.

75. Haec iam ſufficere videntur, ad oſtendendum quousque mihi quidem in cultura huius nouae methodi adhuc pertingere licuit; neque dubito, quin haec ſpecimina aliis anſam ſint praebitura, vires ſuas ad hanc methodum vlterius promouendam intendendi. Si enim methodus, quae Diophantea appellari ſolet, quondam ab excellentiſſimis ingeniis omni ſtudio eſt exculta, haec certe noua methodus, quae in quaeſtionibus longe ſublimioribus verſatur, minore attentione digna non eſt aeſtimanda.

DE CVRVIS FVNICVLARIIS ET CATENARIIS, VEL ILLIS, QVAE CORPORIBVS FLEXIBILIBVS INDVCVNTVR, CVM A POTENTIIS QVIBVSVIS SOLICITANTVR.

Auctore G. W. KRAFFT.

§. 1.

Vti principii compositionis et resolutionis potentiarum ingens vsus est in tota Mechanica theoretica: ita idem vtilissime etiam ad curuas varias, *funicularias* dictas, applicari potest, adeo vt ex legibus pure mechanicis illae deriuentur; quod praesenti scripto exponere constitui. Concipio igitur filum tenuissimum aliquod ABCDEFGH, perfecte flexile, suspensum in duobus punctis fixis A et H, in quod agunt potentiae BP, CP, DP, EP, FP, GP, pro lubitu variae, ratione tam intensitatis, quam directionis, quae vero ope clauorum in A et H omnes sese teneant in aequilibrio. Has potentias singulas resoluo in suas laterales BQ et BR, CS et CT, DV et DW, EX et EY, FZ et FM, GN et GO, per parallelogramma QR, ST, VW, XY, ZM, et NO, ex productis rectis AB, BC, CD etc. hinc et inde, exorta.

Tab. I. Fig. 1.

§. 2. Atque primo quidem obseruo: ob aequilibrium praesens necesse esse, vt duae quaelibet vires sibi directe oppositae, quales sunt BQ et CT, CS et DW, DV et EY, EX et FM, FZ et GO, inter se sint aequales; vires autem BR ac GN, immediate agant in clauos firmos A et H. Producantur deinde etiam singulae directiones potentiarum versus interiora fili; vnde in qualibet orientur duo anguli, quos breuitatis caussa per litteras m et n, in figura adscriptas, o et p, q et r, s et t, u et w, x et y designabo.

§ 3. His ita praemissis, video in triangulo BPQ, expressis iterum compendii gratia sinibus angulorum ABC, BCD, CDE, DEF, EFG, FGH, per $\int B$, $\int C$, $\int D$, $\int E$, $\int F$, $\int G$, respectiue, esse $\int Q$ ($= \int RBC = \int ABC = \int B$): BP $= \int QPB$ ($= \int PBR = \int m$): BQ; vnde $BQ = \frac{BP . \int m}{\int B}$. In triangulo autem BPR est, simili analogia, $\int R$ ($= \int B$): BP $= \int BPR$ ($= \int QBP = \int n$): BR, hinc $BR = \frac{BP . \int n}{\int B}$. Sunt igitur tres potentiae BQ, BP, BR, inter se respectiue, vti $\frac{BP . \int m}{\int B}$, BP, et $\frac{BP . \int n}{\int B}$; vel diuidendo per $\frac{BP}{\int B}$, vti $\int m$, $\int B$. $\int n$.

§. 4. Ex hac igitur detecta proprietate, erunt etiam in secundo parallelogrammo ST, potentiae CS, CP, CT, proportionales ipsis $\int o$, $\int C$, $\int p$; vnde deducuntur hi duo valores $CT = \frac{CP . \int p}{\int C}$, nec non $CS = \frac{CP . \int o}{\int C}$; Est vero per praecedentia (§. 2.) $CT = BQ = \frac{BP . \int m}{\int B}$ (§. 3.) hinc habemus $\frac{CP . p}{\int C} = \frac{BP . \int m}{\int B}$, aut vero BP : CP $= \frac{\int p}{\int C} : \frac{\int m}{\int B}$. Porro statuitur ex pari ratione, esse DV, DP, DW

DW proportionales ipsius $\int q$, $\int D$, $\int r$; ex quo iterum conficitur $DW = \frac{DP.\int r}{\int D}$, ac $DV = \frac{DP.\int q}{\int D}$, sed ob CS=DW oritur nunc etiam $\frac{CP.\int o}{\int C} = \frac{DP.\int r}{\int D}$ aut $CP : DP = \frac{\int r}{\int D} \cdot \frac{\int o}{\int C}$, modo ante autem est $BP : CP = \frac{\int p}{\int C} : \frac{\int m}{\int B}$, adeoque multiplicando has duas proportiones, diuidendo tum, multiplicandoque per aequalia CP et $\int C$, exsurgit $BP : DP = \frac{\int r.\int p}{\int D} : \frac{\int o.\int m}{\int B}$. Denique tertio sunt etiam EX, EP, EY proportionales ipsis $\int s$, $\int E$, $\int t$; hinc deriuatur $EY = \frac{EP.\int t}{\int E}$; deinde ob $EY = DV$, prodit haec aequalitas $\frac{EP.\int t}{\int E} = \frac{DP.\int q}{\int D}$, aut talis analogia, $DP : EP = \frac{\int t}{\int E} : \frac{\int q}{\int D}$, erat vero antea $BP : DP = \frac{\int r.\int p}{\int D} : \frac{\int o.\int m}{\int B}$, hinc iterum multiplicando omnes hos terminos in se, ac per eandem DP diuidendo, per $\int D$ vtrinque multiplicando enascitur haec proportio, $BP : EP = \frac{\int t.\int r.\int p}{\int E} : \frac{\int q.\int o.\int m}{\int B}$, ex quo iam ratio quarumcunque aliarum talium potentiarum est manifesta.

§. 5. Fluit ex hac generali consideratione, vt si eiusmodi potentiae infinite multae, in singulis quippe fili perfecte flexilis punctis vna, fuerint applicatae: polygonum ABCDEFGH futurum esse infinite multorum laterum infinite paruorum, hoc est orituram esse ex hac actione potentiarum, in aequilibrio consistentium, lineam curuam, quae filo repraesentabitur. Et si quidem ponamus, potentias hasce quaslibet tali curuae applicatas esse normaliter, vti B P et E P, habebimus ex priori regula generali $BP : EP = \frac{\int t.\int r.\int p}{\int E} : \frac{\int q.\int o.\int m}{\int B}$; quoniam Fig. 2.

autem

autem, ob omnes potentias curuae normales, anguli in-
Fig. 1. termedii r, q, p, o, ſunt aequales, vtpote biſecti aequalium angulorum: erunt etiam eorum ſinus aequales, aut $\int r = \int q$; $\int p = \int o$; adeoque in hoc caſu erit, facta di-
Fig. 2. viſione per aequalia, $BP : EP = \frac{\int t}{\int E} : \frac{\int m}{\int B}$.

§. 6. Ponamus porro curuae huius duo elementa quaeuis Bb, Ee; atque duo alia his contigua $B\beta$, $E\varepsilon$; producantur ſingula in tangentes βBT, BbR, nec non εEt, Eer, quae conſtituent angulos infinite paruos TBR et tEr; ſintque praeterea elementorum horum radii oſculi BO, EQ, et infinite vicini bO, eQ. Atque erit ſic, $BP : EP = \frac{\int t}{\int E} : \frac{\int m}{\int B}$ (§. 5.) $= \int B : \int E$, ob t et m rectos, $= \int RBT : \int rEt$, $= \int BOb : \int EQe = \frac{Bb}{BO} : \frac{Ee}{EQ}$ poſito ſinu toto $= 1$; quod idem eſt, ac duas potentias quasuis BP et EP eſſe in ratione compoſita, directa quidem elementorum, ac inuerſa radiorum oſculi; aut ſi vocare velimus elementum curuae $Bb = ds$ radium oſculi $BO = r$, erit potentia BP vti $\frac{ds}{r}$; quod eſt *Theorema Varignonii in Nouuelle Mechanique* P. I. p. 204.

§. 7. Solui poſſunt ex his praemiſſis quaeſtiones omnes de genere curuarum aut *funiculariarum*, aut *catenariarum*, quas ita vocat *Ioh. Bernoullius* in *Operum Tom. III.* *p.* 491. Dicitur enim curua *funicularia*, quam aſſumit funis perfecte flexilis, non grauis, ſed fluido, quo extenditur, ad certam quandam figuram redactus; curua *catena-*

catenaria vero, quam recipit ſua ſponte funis, etiam perfecte flexilis, ſed, quacunque placuerit, grauitate donatus, et ſolus. Ibi potentia agit ex legibus *Hydroſtaticae*, in ſingula elementa curuae normaliter; hic autem ex praeſcriptis *Staticae*, in eadem ſingula elementa verticaliter.

§. 8. Cum itaque ad mutandam figuram, recte extenſam, fili perfecte flexilis, non grauis, accidere debeat cauſſa aut *extrinſeca*, fluidum nempe; aut *intrinſeca*, pondus ſcilicet proprium; agemus de illo prius. In talem autem rectam, fili inſtar conſideratam, fluidum extrinſecum poteſt agere vel *elaſticitate*, vel *impulſu*, vel *pondere*. Sin igitur in hac diuiſione cauſſae extrinſecae et intrinſecae, vti hucusque factum fuit, acquieſcere velimus: conſideremus *primo*, fluidum ſua *elaſticitate* agens. Haec in ſingula curuae elementa, in aequilibrio conſiſtentis, vbique aequaliter aget, conſequenter erit vti ds in ſenſu Phyſico. Sed eadem in ſenſu Statico debet eſſe ad aequilibrium conſeruandum, vti $\frac{ds}{r}$ (§. 6.) quare habebimus $ds = \frac{ds}{r}$, aut $r = 1$. Efficitur hinc curua talis, cuius radius oſculi eſt conſtans, quae nulla alia eſt quam Circulus. Vocatur haec *Velaria primi caſus*, quoniam nempe applicari poteſt ad velum, quod non ventus quidem incurrens, ſed aër adiacens elaſticus, expandit; veluti idem accidit in veſica aëre inflata, et poſtmodum obligata, quae certe ab hoc aëre incluſo, magis elaſtico expanditur ad figuram circulariter rotundam; ſimiliter hoc fit in bullis ſaponaceis, quae ſimul ac flatum fortius intendas, a figura rotunda abeunt, et longiorem adſciſcunt, quia ſcilicet ſic ſtatim pertinent ad *Velariam ſecundi caſus*, quam nunc videbimus. Alium modum, curuam hanc ſine calculo determinandi, affert *Ioh. Bernoullius* l. c. pag. 511. quoniam, ſi curua vbique aequaliter ſecundum perpendiculares ad curuam extrorſum trahitur: nulla adeſt ratio, cur vnum curuae punctum magis aut minus a centro diſtare debeat, quam alterum.

Fig. 3. §. 9. Cum igitur fluidum in filum ſimile cum impetu irruit, atque illud *impulſu ſuo* expandit, vti hoc fit in velo, quod a vento inflatur: tum alius exoritur calculus. Sit nempe curuatura fili hoc modo producta CAH, axis curuae ſit AB, cui parallelum irruat fluidum KM in elementum curuae Mm; ducta perpendiculari ad axem MP, ponatur $Ap = x$, $PM = y$, arcus $AM = s$, ſinus anguli incidentiae, id eſt, anguli $mME = m$, aſſumto ſinu toto $= 1$. Statuamus fluidi impetum abſolutum exprimi, in recta KM continuata, per $MD = p$. Reſoluendus hic erit in duos collaterales, vnum normalem ad curuam MF, qui ſolus in curuam agit, et alterum tangentialem MG, qui curuam praeterlabitur; ope parallelogrammi MFDG. Impetus nunc fluidi in curuam agens aeſtimandus erit ex (mE. MF); vbi mE exponit numerum punctorum, in quae ſingula impetus p operatur; MF autem quantitatis abſolutae partem illam, quae in curuàm agit. Erit igitur in triangulo MFD, ſin. F (1): MD $(p) =$ ſin. FDM (m) : MF (pm); in triangulo infinite paruo mEM pariter ſin. E (1): Mm $(ds) =$ ſin. M (m) : mE (mds). Impetus ergo fluidi Phyſice

Phyſice ſpectatus erit mE. MF $= pm^2 ds$; vel aſſumto ds, quod perpetuo faciemus, conſtanti; et quia p per ſe conſtans ſupponitur, vti m^2, ſiue vti quadratum ſinus incidentiae. Idem ergo hic impetus fluidi, Phyſice ſpectatus, erit ob $m = \frac{dy}{ds}$ vti $\frac{dy^2}{ds^2}$, vel in ratione ipſius dy^2 ob ds conſtans.

§. 10. At vero impetus hic, Mechanice conſideratus, debet eſſe vti $\frac{ds}{r}$ (§. 6.) vel vti $\frac{1}{r}$, ob ds conſtans. Habebimus ergo pro hac curua, quam quaerimus, iſtam aequationem $dy^2 = \frac{1}{r}$. Demonſtrauit autem *Jac. Bernoullius Oper. Tom. I. p.* 578, poſitis ds aequalibus, eſſe $r = \frac{dyds}{ddx}$ vel vti $\frac{dy}{ddx}$; erit itaque curuae quaeſitae aequatio haec $dy^2 = \frac{ddx}{dy}$, vel, ad homogeneitatem conſeruandam, talis: $\frac{dy^2}{ads} = \frac{ddx}{dy}$, in qua nimirum a conſtantem denotat, ac ds per ſe eſt conſtans. Haec aequatio vt ad differentialia prima reducatur, et quantum fieri poteſt, integretur: multiplicetur primo per ads^2dy, vt emergat $dsdy^3 = ads^2ddx$; pro ds^2 ſubſtituatur valor $dx^2 + dy^2$ erit nunc: $dsdy^3 = adx^2ddx + ady^2ddx$. Demonſtrauit autem *Jac. Bernoullius* in loco modo citato, poſitis curuae elementis aequalibus eſſe ſemper $dxddx = -dyddy$. Eſt enim ſic $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$ conſtanti, et ſumtis differentialibus $\frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 0$, hoc eſt, $dxddx = -dyddy$; hinc pro adx^2ddx ſubſtituatur $-adxdyddy$ et per dy^3 diuidatur, prodibit ſic: $ds = \frac{ady\,ddx - adxddy}{dy^2}$,

quae

quae integrata praebet $s\,dy = a\,dx$; et haec eſt aequatio huius *Velariae ſecundi caſus*, generatae nimirum per fluidi alicuius impulſum; indicans hanc curuae huius proprietatem, vt in ea ſit arcus quilibet AM ad conſtantem aliquam a, vti dx ad dy.

§. 11. Sed vt curuae huius Velariae naturam rectius agnoſcamus, atque ex aequatione ipſius s eliminemus; reſumamus aequationem ſuperiorem (§. 10.) hanc, $\frac{dy^2}{ads} = \frac{ddx}{dy}$; hanc multiplicemus per crucem, vt obtineamus $dy^3 = adsddx$; pro ddx ſubſtituamus valorem $-\frac{dyddy}{dx}$ (§. 10.) et producetur $dx = -\frac{adsddy}{dy^2}$, cuius integralis eſt $x = C + \frac{ads}{dy}$, adiecta conſtante arbitraria C, mox determinanda. Hinc ergo eruitur $\frac{dy}{ds} = \frac{a}{x-C}$; eſt autem $\frac{dy}{ds}$ ſinus anguli incidentiae, quem ſupra vocauimus m (§. 9.) ac euidens eſt, ſi ponatur $x = o$, fieri angulum incidentiae ad A rectum, ac proinde poſito $x = o$, eſſe $\frac{dy}{ds} = 1$; ſubſtituantur haec, orietur $1 = \frac{a}{-C}$ vel $C = -a$; ergo pro C poſito $-a$, eſt aequatio completa curuae talis: $x = -a + \frac{ads}{dy}$, aut $x + a = \frac{ads}{dy}$. Quadrentur membra, multiplicentur per dy^2, pro ds^2 ſubſtituatur $dx^2 + dy^2$, abiectis abiiciendis prodibit tandem aequatio legitima, in qua origo abſciſſarum eſt in ipſo vertice A, talis pro *Velaria ſecundi caſus*: $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(x^2 + 2ax)}}$.

§. 12. Patet ex hac aequatione, eſſe $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{x\,dx + a\,dx}{\sqrt{(x^2 + 2ax)}}$, quae expreſſio poteſt integrari, vt ſit $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(x^2 + 2ax)}$, adeoque rectificabilis eſt

eſt haec curua; quod ipſum etiam ex antecedente aequatione $s\,dy = a\,dx$ manifeſtum eſt, ſi valor ipſius dy iam acquiſitus ſubrogetur; et per ſe etiam apertum eſt, dum tale filum longitudinem ſuam initialem horizontalem ſemper retinet. Cum itaque ſit $s = \surd(x^2 + 2ax)$; poterimus exinde facile determinare quantitatem conſtantis arbitrariae aſſumtae a. Sit enim integra fili longitudo CAH $= l$, et AB $= b$; atque euidens eſt, ſi x abeat in b: mutari s in $\frac{1}{2}l$; erit ergo $\frac{1}{2}l = \surd(b^2 + 2ab)$, aut vero $a = \frac{\frac{1}{4}l^2 - b^2}{2b}$. Porro eſt tangens anguli mME $= \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\surd(x^2 + 2ax)}$; quae fit infinita apud A, vbi nempe $x = o$, adeoque curua haec cum axe apud A facit angulum rectum. Sed apud C eadem tangens fit $\frac{\frac{1}{4}l^2 - b^2}{lb}$, exſiſtente nimirum $x = b$; quae tangens non eſt $= o$, niſi fuerit $\frac{1}{2}l = b$, aut CMA $=$ AB, quod fieri nequit. Euidens hinc eſt, angulum apud C, quem curua facit cum horizontali CB, nunquam eſſe rectum, ſed acutum ſemper.

§. 13. Si nunc tertio ponamus, fluidum agere in filum *ſuo pondere*, ſit filum incuruatum verticaliter poſitum CAH, repletum fluido vsque ad horizontalem CH. vt altitudo maxima fluidi ſit AB $= a$. Conſtat ex Hydroſtaticis, fluidum premere in elementum quodvis Mm normaliter, et pertinere etiam hunc caſum particularem ad ſuperiorem vniuerſalem (§. 6.). Notum porro eſt, poſita denſitate fluidi conſtante, preſſionem eius in Mm eſſe Mm. MK $= ds.\,\overline{a-x}$, vel ob ds

 conſtans,

conſtans, vti $a - x$ Phyſice conſideratam. Sed eadem, Statice conſiderata, pro aequilibrio debet eſſe vti $\frac{ds}{r}$ (§. 6.) vel vti $\frac{1}{r}$, hoc eſt, vti $\frac{ddx}{dy}$; (§. 10.) exſurgit hinc pro hac curua aequatio haec, ad homogeneitatem redacta, $\frac{ddx}{dy} = \frac{\overline{a-x}.\,ds}{a^2}$; quae vero commodior efficitur, ſi pro axe aſſumatur ſuperficies fluidi ſtagnantis CH, vbi ſit $CK = t$, $KM = u$, $BC = b$; erit enim hac ratione $x = a - u$, $y = b - t$, $ds = \sqrt{(du^2 + dt^2)}$, et aquatio prior primaria mutatur in hanc $\frac{ddu}{dt} = \frac{uds}{a^2}$; eſt autem, ob $ds = \sqrt{(dt^2 + du^2)}$ conſtans, $\frac{ddu}{dt} = -\frac{ddt}{du}$, vnde progignitur ſubſtituendo $-a^2ddt = ududs$, et integrando, adiiciendoque nouam conſtantem C, $Cds - a^2dt = \frac{1}{2}u^2ds$. Vt vero haec conſtans determinetur: deducitur ex hac aequatione $\frac{C - \frac{1}{2}u^2}{a^2} = \frac{dt}{ds} =$ ſinui anguli mME; qui angulus, ſi ſtatuatur $u = a$, abit in rectum; hinc poſito $u = a$, erit $\frac{dt}{ds} = 1$, et mutatur aequatio prior in hanc, $\frac{C - \frac{1}{2}a^2}{a^2} = 1$, aut $C = \frac{3a^2}{2}$; igitur aequatio completa curuae quaeſitae erit haec: $3a^2ds - u^2ds = 2a^2dt$, aut quadratis membris, et ſubſtituto valore ipſius ds, qui eſt $\sqrt{(dt^2 + du^2)}$, talis $\frac{(3a^2 - u^2)du}{\sqrt{(6u^2u^2 - u^4 - 5a^4)}} = dt$, in qua aequatione eſt abſciſſa $CK = t$, et applicata $KM = u$. Haec igitur natura eſt curuae, quae *Lintearia* vocatur.

§. 14. Accedamus iam ad alterum genus harum curuarum, in quo nempe curuatura fili producitur a cauſa *intrinſeca*, (§. 8.) videlicet grauitate. Quamuis autem directiones grauitatis omnes tendant in centrum terrae,

terrae, adeoque sint conuergentes, non parallelae: in locis tamen, et corporibus illis, quae sub experimenta nostra cadunt, illae directiones tuto assumi possunt parallelae, quod etiam ordinarie supponitur in hac tractatione. Cum igitur vidimus in genere esse (§. 4.) BP: EP $= \frac{\int t . \int r . \int p}{\int E} : \frac{\int q . \int o . \int m}{\int B}$, obtinebimus in parallelismo omnium harum potentiarum $\int p = \int q$. Sunt enim p et q duo anguli interni inter parallelas CP, DP; hinc simul sumti adaequant duos rectos, adeoque habent eundem sinum. Praeterea ob eandem hanc caussam est etiam $\int r = \int s$, nec non $\int o = \int n$; quibus substitutis, et diuisione facta per aequales $\int p$ et $\int q$, prodit BP : EP $= \frac{\int t . \int s}{\int E} : \frac{\int m . \int n}{\int B} = \frac{\int B}{\int m . \int n} : \frac{\int E}{\int t . \int s}$; aut vero potentia quaevis BP est vti $\frac{\int B}{\int m . \int n}$. Fig. 1.

§. 15. Iam porro simili ratiocinio, quale supra (§. 6.) allatum fuit, erit $\int B = \int b B \beta = \int TBR$, quia B et TBR faciunt duos rectos; est autem $TBR = BOb$, hinc $\int B = \int BOb = \frac{Bb}{BO}$, posito sinu toto $= 1$. Efficiunt quoque anguli m et n duos rectos, deficiente angulo infinite paruo TBR, qui plane nullus est, neque adeo in computum venit, nisi vbi in rationem ingreditur; vnde erit etiam $\int n = \int m$. Est hinc, positis denuo $Bb = ds$, BO radio osculi $= r$, potentia quaeuis, cum reliquis omnibus in aequilibrio sita, vti $\frac{ds}{r . \int m . \int m}$; hoc est, in ratione composita directa elementi, et inuersa simplici radii osculi, duplicataque sinus anguli m. Quamobrem si fuerint denuo $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, et positis ds constantibus, $r = \frac{dy\, ds}{ddx}$, $\int m = \frac{dy}{ds}$, habebitur Fig. 2. Fig. 3.

V 2 tur

tur potentia MD $= \frac{ddx\,ds^2}{dy^3}$; aut ob ds conſtans, erit illa vti $\frac{ddx}{dy^3}$

§. 16. Exinde iam facile determinatur curua illa, quam format pondere proprio ſuo, ex grauitatis actione, filum, funis, vel catenula, perfecte flexilis in omnibus ſuis punctis, ſed inextenſibilis, ab vtroque extremo ſuo quomodocunque ſuſpenſa, in medio autem libere pendula, et praeterea vbique aequaliter craſſa Nam in tali catenula vis, qua elementum quoduis verticaliter deſcendere nititur, eſt vt pondus ipſius elementi, quae longitudini eius eſt proportionalis, aut ds. Statice vero conſiderata haec vis, ad producendum aequilibrium, debet eſſe vti $\frac{ddx}{dy^3}$ (§. 15.). Habemus igitur $ds = \frac{ddx}{dy^3}$, aut $1 = \frac{ddx}{ds\,dy^3}$; hoc eſt $\frac{ddx}{ds\,dy^3}$ debet eſſe quantitas conſtans. Quod vt efficiatur, ponamus hanc conſtantem quantitatem $= \frac{1}{a\,ds^2}$, ad homogeneitatem reſtituendam; erit ſic $\frac{ddx}{ds\,dy^3} = \frac{1}{a\,ds^2}$, aut vero, reducendo paulliſper hanc aequationem, obtinebitur haec $\frac{dy^2}{a\,ds} = \frac{ddx}{dy}$, quae eſt eadem cum illa, quam ſupra inuenimus pro *Velaria ſecundi caſus* (§. 10.). Haec autem curua, tali reſpectu conſiderata, vocatur *Catenaria vulgaris*, quia formatur a filo aequaliter craſſo, ſeu in omnibus punctis ſuis aequaliter grauato; quae adeoque eadem eſt cum Velaria ſecundi caſus, et primum inuentorem agnoſcit *Galilaeum* in *Mechanica*, *Dialogo II. pag.* 131; qui eam falſo pro Parabola Apolloniana habuit; quem errorem animaduertit quidem *Joach. Jungius*, veram tamen curuam non aſſignauit, quod factum demum eſt a *Leibnitio* et *Bernoulliis* in *Act. Erud. Lipſ.* 1691.

§. 17.

§. 17. *Catenaria* autem *non vulgaris*, quae nimirum formatur a filo inaequaliter crasso, quod in omnibus suis punctis inaequaliter est grauatum, secundum progressionem applicatarum curuae alicuius datae, non difficilius inuenitur. Quoniam nempe aequationem Catenariae $\frac{dy^2}{ads} = \frac{ddx}{dy}$, praeter quantitatem per se constantem a, tres adhuc variabiles x, y, et s ingrediuntur: assumatur quantitas quaedam variabilis M, vtcunque ex constantibus, ac ipsis x, y, s, composita, et statuatur Catenariae huius non vulgaris elementum quodlibet habere pondus, seu grauimen, $= dM$. Habebitur nunc $dM = \frac{ddx}{dy^3}$, aut $1 = \frac{ddx}{dMdy^3}$, hoc est $\frac{ddx}{dMdy^3}$ aequatur constanti alicui quantitati homogeneae. Sit haec $\frac{1}{ads^2}$, atque statuendum erit $\frac{ddx}{dMdy^3} = \frac{1}{ads^2}$, ex quo producitur $\frac{ads^2 ddx}{dy^3} = dM$. Substituendo $dx^2 + dy^2$ loco ipsius ds^2, emergit $\frac{adx^2 ddx + ady^2 ddx}{dy^3} = dM$; et quoniam hic etiam, ob ds constans, est $dxddx = -dyddy$ (§. 10.) aut $dx^2 ddx = -dxdyddy$: orietur, hoc valore subrogato, aequatio sequens: $\frac{-adxddy + adyddx}{dy^2} = dM$, quae aequatio potest integrari, et praebet, assumta constante arbitraria C, hanc $C + \frac{adx}{dy} = M$. Hinc primo ex data talis curuae Catenariae aquatione cognosci poterit, quale pondus elemento cuilibet tribui debeat, pro tali curua obtinenda, et quaenam lex aut progressio sit crassitudinis in fune aut catena.

§. 18. Deinde etiam secundo ex eadem hac aequatione vltima indicare valebimus, qualis curua sub hac vel alia ponderis et grauaminis lege Catenaria non vulgaris ſit futura. Accipimus enim ita aequationem inter x, y et s, et conſtantes, pro ratione ipſius M aſſumtae. Ita ſi ſtatuamus, pondus cuiusque elementi curvae, ſeu dM eſſe ds; obtinebimus ſtatim aequationem ad *Catenariam vulgarem.* Si determinemus $dM = dy$, aut $M = y$, erit pro Catenaria in hac diſpoſitione aequatio haec $C dy + a dx = y dy$, aut integrata $Cy + ax = \frac{1}{2}y^2$ quae eſt ad Parabolam ordinariam. Imo qualiscunque curua deſideretur pro hac Catenaria: poterit ſemper dari lex grauitatis neceſſaria ad hanc Catenariam. Requiro ex. gr. vt catenaria aſſumat naturam Circuli, cuius aequatio ſit $y = \surd(2ax - x^2)$; quaero iam, quid ſit $\frac{adx}{dy}$ in Circulo, et hoc inuenio $\frac{a\surd(2ax - x^2)}{a - x}$, quod igitur $= M$.

Fig. 4. §. 19. Sit lamina elaſtica, non grauis, ac elaſticitate vbiuis eadem praedita AMB, firmata in A, et pondere P, ſuper trochleam D transeuntis fili ope, in hunc ſitum, et ad aequilibrium redacta: vocatur curua haec, quam lamina aſſumit, *Elaſtica*, et quaeritur eius natura. Ducantur AC verticalis, et ad hanc ex puncto quocunque M perpendiculares MP, mp, et verticalis itidem MQ, poſita BCD horizontali. Concipiantur duo curuae elementa μM et Mm, quae producta in T et t, conſtituant angulum infinite paruum T Mt, et ſint elementi Mm radii oſculi MO, mo. Sint praetera, vis elaſtica, vbique conſtans $= e$, $AP = x$, $PM = y$, $AC = a$, $AM = s$; et quoniam elementum $MO = Mm$ circa hypomochlium M torquetur a potentia quadam, quam pono $= p$; erit eius potentiae momentum $p \times Mm = e \times$ ang. TMt; quae hypotheſis quidem eſt, ſed pro angulo

TMt

T Mt infinite paruo, experimentis Phyficis confirmata. Vid. *Comment. Acad. Scient. Imperial. Petropol. Tom. III. p.* 71. Retro nititur fcilicet elafticitatis intenfitas in elemento Mm, quae eft e, abfoluendi angulum T Mt, adeoque haec vis mortua eft productum ex magnitudine potentiae in celeritatem initialem aut potentialem, hoc eft $e \times \mathrm{TM}t$. Huic vi mortuae autem, ob aequilibrium praefens, aequalis eft actio potentiae, ductae in diftantiam fuam a fulcro, aut vero p. Mm, vnde dicta aequalitas vtriusque huius momenti apparet, atque inde deducitur $p = \frac{e \times \mathrm{TM}t}{\mathrm{M}m}$. Producit autem hunc effectum inflexionis pondus appenfum P, cuius momentum eft magnitudo ipfius P, ducta in diftantiam ipfius ab hypomochlio M Q, aut vero eft hinc $p = \mathrm{P} + \mathrm{MQ}$. Aequato autem vtroque hoc valore ipfius p, eruitur haec aequatio $\frac{e \times \mathrm{TM}t}{\mathrm{M}m} = \mathrm{P} \times \mathrm{QM}$, aut vero ob P, e, Mm, conftantes, erit T Mt in ratione ipfius Q M. Sed eft $\mathrm{TM}t = \mathrm{MO}m$; et cum quilibet angulus fit vt arcus ipfius diuifus per radium fuum, erit $\mathrm{TM}t = \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{MO}}$, vel ob M$m$ conftans, vti $\frac{1}{\mathrm{MO}}$; habetur idcirco $\frac{1}{\mathrm{MO}} = \mathrm{MQ}$. Pofitis vero M$m$ conftantibus eft $\mathrm{MO} = \frac{dy\,ds}{ddx}$, vel vti $\frac{dy}{ddx}$, et MQ eft $a-x$, vnde conficitur pro hac curua Elaftica talis proprietas, vt Q M fit in ratione reciproca radii ofculi M O, aut $\frac{ddx}{dy} = a-x$, feu ad conciliandam huic aequationi homogeneitatem, $\frac{ddx}{dy} = \frac{\overline{a-x}.\,ds}{a^2}$, quae eft eadem plane aequatio, quam fupra inuenimus (§. 13.) pro *Lintearia*, ex quo patet, vtramque hanc curuam, *Lintleariam* ac *Elafticam*, effe vnam eandemque.

§. 20.

§. 20. Pari facilitate ex iisdem principiis folui poteft problema de *curuatura fornicis, cuius partes fe mutuo proprio pondere fuffulciunt, fine opere caementi*; quod *Iacob. Bernoullius* foluit alia methodo, in *Oper. Tom. II. pag.* 1119; fed emendationem fubtilis alicuius paralogifmi requirente, quae ibidem adiecta eft. Notari autem debet, agi hic de fornice aequaliter vbique craffo, adeoque per lineam folam reprefentando, fine latitudine, cuius partes aequales vbique idem habeant pondus. Quomodo autem fornix inaequaliter craffus fumma firmitate, fub quauis expreffa curua, fit conftruendus, alio
Fig. 5. loco oftendimus. Sit itaque talis fornix aequaliter vbique craffus CAD, et ipfe fua fe compage fuftinens, fine auxilio calcis aut caementi, dum nempe ex antecedentibus, vires ad ipfum conuellendum a proprio pondere impenfae, mutuo fe deftruunt. Sint eius axis AE, in quo abfciffa $AP = x$, applicata $TM = y$, et arcus $AM = s$; adeoque pondus arculi infinite parui $Mm = ds$. Exponatur hoc ponduſculum lineola recta verticali MP, quod ad profternendum elementum Mm circa hypomochlium m, lucratur momentum ex diftantia mN, quae adeo energia, fi pars fuperior MA abeffet, erit $m M. mN = ds dy$, vel ob ds conftans, vti dy. Refoluatur haec vis grauitatis abfoluta in tangentialem Mm et normalem MB; eritque analoga haec: fin. MmP (1): MP $(dy) =$ fin. mMP $(\frac{dy}{ds})$: mP $(= MB) = \frac{dy^2}{ds}$; vt hinc vis normalis MB, Phyfice fpectata, ex natura ponderis MP, debeat effe vti dy^2. Sed eadem vis Statice confiderata debet effe vti $\frac{1}{r}$ (§. 6.); habemus ergo pro curua fornicis defiderata aequationem hanc, $dy^2 = \frac{1}{r}$, vel ob

ob r vti $\frac{dy}{ddx}$ (§. 10.) ſequenter: $dy^2 = \frac{ddx}{dy}$, quae eſt eadem cum Velariae aequatione (§. 10.) ſecundi caſus, aut cum Catenaria vulgari (§. 16.) Vnde patet, quod *Iac. Bernoullius* l. c. et *Dauid. Gregorius* primus in *A. E. 1698. pag.* 309, indicarunt, curuaturam fornicis memorati, aequaliter denſi, eandem eſſe cum curuatura Catenariae vulgaris. Cum itaque iam ex principio pure mechanico aequationes et naturae harum curuarum erutae ſint: de vlterioribus harum curuarum proprietatibus, pulcherrimis ſane et ſingularibus, ab aliis iam enumeratis et expoſitis, nihil amplius addimus.

§. 21. Sed de eadem hac Catenaria ſciendum eſt, eandem tanquam lineam latitudine carentem, inverſam, et verticaliter erectam, in aequilibrio manere minime poſſe, niſi concipiatur grauitatis actio ſurſum verſa, et extrorſum directa. Quod vero cum ad fornices applicari nequeat: videbimus alia etiam methodo, nempe *Bernoulliana*, ſed correcta, et paralogismo *l. c.* libera, quomodo curuatura fornicis, cuius partes ſe mutuo proprio pondere ſuffulciunt, ſine opere caementi, ſit indaganda. Sit igitur linea curua quaeſita interior AMD, ſiue concauitas fornicis, eidemque ſub latitudine quauis parallela alia CBE, ſiue conuexitas fornicis. Fig 6.
Aſſumatur cuneus quilibet infinite paruus, fornicem conſtituens BM*mb*, contentus intra duos radios oſculi proximos MO, *m*O, extrorſum protenſos in B et *b*, ſitque Mβ parallela ipſi *mb*, ita vt Bβ ſit differentia lateris interioris M*m*, et exterioris B*b*, ponaturque more ſolito AP $= x$, PM $= y$, AM $= s$, eritque pondus huius cunei, ob altitudinem, et latitudinem, denſitatem-

que eius, conſtantes, vti ds. Sed hoc poſitum eſt in plano inclinato mO, vnde erit pondus abſolutum (ds): pondus reſpectiv. $= mO : mS = Mm : mQ$, ob triangula ſimilia mSO et $mQM = ds : dy$, vnde elicitur pondus reſpectiuum cunei, quo delabi conatur, in plano ſuo inclinato $= dy$; ac quidem tali potentia attollet partem fornicis ſuperiorem CAMB, ſi delabatur, et parte ſua latiori Bb intra angulum Bob intrudatur. Haec autem ipſa fornicis pars ſuperior ſoluta CAMB pondere ſuo deprimit, et reſiſtit hinc eleuationi perpendiculariter in BM; et cum eius pondus ſit vti s, verticaliter deorſum nitens, poterit illud exprimi per MQ, quia in tempuſculo infinite paruo punctum s per tantundem ſpatii verticaliter deorſum promouetur, ac centrum grauitatis in CAMB. Sit igitur $MQ = s$, et reſoluatur in laterales MR et Mm, illam horizonti parallelam, et hanc in latus BM perpendicularem, ac aſſumto ſinu toto $= 1$, erit ſinus MmQ $(\frac{dx}{ds})$: MQ (s) $=$ ſin. tot. (1) : Mm, hoc eſt ad vim prementem perpendicularem ad MB, quae adeoque erit $= \frac{s\,ds}{dx}$. Cum igitur cuneus delabatur per integram ſuam latitudinem βM, habebit preſſionem, quae aequalis eſt potentiae ipſi multiplicatae in ſuam viam percurſam tempore infinite paruo, vel in ſuam celeritatem elementarem, hoc eſt, $(dy \times \beta M.)$ Interea vero eleuabit fornicis partem ſuperiorem ſpatiolo βB, quae ex ſimili ratione perpendiculariter in BM deorſum premit quantitate hac, $(\frac{sds}{dx} \times \beta B.)$ Quod ſi nunc hae duae preſſiones, directe ſibi contrariae, ponantur aequales: orietur aequilibrium, vt neque cuneus delabi, neque pars ſuperior fornicis attolli, poſſit.

Erit

Erit itaque $dy . \beta M = \frac{sds}{dx} . \beta B$. Sed ob fectores fimiles OmM, et $M\beta B$ oritur Om (r): mM (ds) $= \beta M : \beta B$, hinc $\beta B, = \frac{ds . \beta M}{r}$, quod in aequatione praecedente fubftitutum efficit $dy . \beta M = \frac{s\,ds^2}{r\,dx} \times \beta M$, aut vero $dy = \frac{s\,ds^2}{r\,dx}$. Ponamus iam cum *Bernoullio*, dy effe conftans, ex quo radius ofculi r eruitur $= \frac{ds^3}{dy\,ddx}$, qui valor fubrogatus efficit $1 = \frac{s\,ddx}{ds\,dx}$ aut $s\,ddx - ds\,dx = 0$, vel integrando $\frac{dx}{s} = \frac{dy}{a}$, ob dy conftans, et accepta noua conftante a, vt aequatio homogenea reddatur. Ex hac igitur aequatione oritur haec: $s\,dy = a\,dx$, quam fupra vidimus effe ad Velariam fecundi cafus, (§. 10.) aut vero ad Catenariam vulgarem; (§. 16.) vnde conftat, quaefitam hanc curvam interiorem fornicis AMD effe Catenariam inuerfam. Quia vero planum inclinatum bmO fupponitur perfecte politum: hinc cuneus non poterit in eo defcendere rotando, neque adeo opus eft, vt hic cafus confideretur, (vid. *Comment. Acad. Scient. Imper. Petrop. Tomo XII, pag.* 266,) vti in folutione Bernoulliana factum fuit.

SVBSIDIVM
CALCVLI SINVVM.

Auctore L. EVLERO.

Ex quo calculus finuum in analyfin eft receptus, ita vt finus, cofinus ac tangentes angulorum legibus calculi aeque fint fubiecti, ac logarithmi atque adeo ipfae quantitates algebraicae, maxima fine dubio incrementa Analyfis cepiffe eft cenfenda. Logarithmi quidem ftatim a primis fere Analyfeos fublimioris initiis inter quantitates analyticas referri funt coepti, iisque imprimis calculus exponentialium cuius inuentionem Cel. *Ioh. Bernoulli b. m.* iure fibi vindicauerat, acceptus eft ferendus: cuius beneficio, vt nunc quidem vel tyronibus conftat, plurimae praeclarae inuentiones in medium funt prolatae. Quae calculi acceffio in hoc potiffimum conftabat, vt logarithmi non folum idoneis characteribus in calculum effent inducti, fed etiam certae regulae ftabilitae, fecundum quas omnes analyfeos operationes aeque in logarithmis expedire liceat, atque in quantitatibus algebraicis. Simili autem modo mihi equidem angulorum finus tangentesque primus in calculum ita transtuliffe videor, vt inftar reliquarum quantitatum tractari, cunctaeque operationes fine vllo impedimento peragi poffent. Etfi autem haec res haud magni momenti fortaffe videatur, dum maximam partem in characteribus eft fita, quibus in calculo ad eas quantitates defignandas vti foleo; quandoquidem regulae eas tam per differentiationem, quam integrationem, euoluendi iam

pridem

pridem ſunt erutae: tamen haec ipſa notandi ratio poſtmodum vniuerſae analyſi tanta attulit adiumenta, vt nouum fere campum pateſeciſſe videatur, in quo Geometrae non ſine notabili elaborauerint fructu. Ac ſi quidem ipſius Analyſis praeſtantiam ſpectamus, eam praecipue ſoli idoneo quantitates ſignis denotandi modo tribuendam eſſe deprehendimus, quo minus erit mirandum, ſi commoda ſinuum in algorithmum introductio tantum lucri attulerit. Neque vero hoc ſubſidio ſolum calculi, qui ſaepenumero fierent maxime prolixi et intricati, mirum in modum contrahuntur, quod quidem iam eſſet eximium commodum: ſed etiam huius calculi ſinuum ope problemata alioquin difficillima ſatis expedite reſolui poſſunt; cuius quidem rei iam complura ſpecimina extant, non ſolum a me, ſed etiam ab aliis, exhibita. Vtilitas autem huius calculi imprimis in problematis mechanicis cernitur, multo maxime autem in Aſtronomia Theoretica, vbi totum negotium ad computum angulorum reducitur, ita vt ſine huius calculi ſubſidio vix quicquam ſit expectandum. Quae nunc certe de Lunae motu anomalo, ac planetarum perturbationibus ab mutua eorum actione oriundis ſunt eruta, huic calculo potiſſimum accepta ſunt ferenda, neque ex hac parte Aſtronomia maiora incrementa ante conſequi poſſe videtur, quam hic ipſe calculus ad maiorem perfectionis gradum fuerit euectus. Minime ergo erunt contemnenda, quae in iſthoc calculo elaborando vlteriusque excolendo verſantur; atque cum reſolutio poteſtatum tam ſinuum, quam coſinuum, in ſinus coſinusue ſimplices maximi ſit momenti, et in Aſtronomicis inveſtivestigationibus absolute necessaria, etiamsi iam hinc inde nonnulla huc spectantia protulerim, tamen haud abs re fore arbitror, si hoc egregium argumentum studiosius pertractauero.

LEMMA.

I. Valor huius formulae imaginariae $(\text{cos.}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,\Phi)^n$ est $\text{cos.}\,n\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,n\Phi$, huius autem formulae imaginariae $(\text{cos.}\,\Phi - \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,\Phi)^n$ valor est $\text{cos.}\,n\Phi - \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,n\Phi$.

DEMONSTRATIO.

*S*i enim habeantur duo anguli Φ et α, erit harum duarum formularum productum $(\text{cos.}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,\Phi)$ $(\text{cos.}\,\alpha + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,\alpha) = \text{cos.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\alpha - \text{sin.}\,\Phi\,\text{sin.}\,\alpha$ $+ (\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\alpha + \text{cos.}\,\Phi\,\text{sin.}\,\alpha)\sqrt{-1}.$ Constat autem esse $\text{cos.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\alpha - \text{sin.}\,\Phi\,\text{sin.}\,\alpha = \text{cos.}\,(\Phi + \alpha)$ et $\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\alpha + \text{cos.}\,\Phi\,\text{sin.}\,\alpha = \text{sin.}\,(\Phi + \alpha)$, vnde illud productum erit $= \text{cos.}\,(\Phi + \alpha) + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,(\Phi + \alpha)$. Sit iam $\alpha = \Phi$ eritque

$$(\text{cos.}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,\Phi)^2 = \text{cos.}\,2\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,2\Phi.$$

Haec formula denuo per $\text{cos.}\,\alpha + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,\alpha$ multiplicata dabit $\text{cos.}\,(2\Phi + \alpha) + \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,(2\Phi + \alpha)$, ac posito $\alpha = \Phi$

$$(\text{cos.}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,\Phi)^3 = \text{cos.}\,3\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,3\Phi$$

Quae si denuo per $\text{cos.}\,\alpha + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,\alpha$ multiplicetur, ac ponatur $\alpha = \Phi$, dabit

$$(\text{cos.}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,\Phi)^4 = \text{cos.}\,4\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,4\Phi$$

hocque modo generatim colligitur fore

(cos.

$$(\text{cof.}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{fin.}\,\Phi)^n = \text{cof.}\,n\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{fin}\,n\,\Phi.$$

Cum autem expreſſio $\sqrt{-1}$ natura ſua ſigni ambiguitatem inuoluat, erit ob eandem rationem

$$(\text{cof.}\,\Phi - \sqrt{-1}.\,\text{fin.}\,\Phi)^n = \text{cof.}\,n\Phi - \sqrt{-1}.\,\text{fin.}\,n\Phi$$

COROLL.

2. Si ergo breuitatis gratia ponatur:

$$\text{cof.}\,\Phi + \sqrt{-1}.\text{fin.}\,\Phi = u \text{ et } \text{cof.}\,\Phi - \sqrt{-1}.\,\text{fin.}\,\Phi = v$$

cum ſit $u^n = \text{cof.}\,n\Phi + \sqrt{-1}.\text{fin.}\,n\Phi$ et $v^n = \text{cof.}\,n\Phi - \sqrt{-1}.\text{fin.}\,n\Phi$ erit $u^n + v^n = 2\,\text{cof.}\,n\,\Phi$ et $u^n - v^n = 2\sqrt{-1}.\text{fin.}\,n\,\Phi$. Conſtat autem eſſe $uv = 1$.

PROBLEMA 1.

3. Poteſtatem quamcunque coſinus cuiuspiam anguli in coſinus ſimplices conuertere, ita vt nuſquam duo pluresue occurrant coſinus in ſe inuicem multiplicati.

SOLVTIO.

Sit $(\text{cof.}\,\Phi)^n$ ſeu $\text{cof.}\,\Phi^n$ (has enim deſignationes pro ſynonimis habeo) poteſtas propoſita ad modum praeſcriptum conuertenda. Ponatur vt ante

$$\text{cof.}\,\Phi + \sqrt{-1}.\ \text{fin.}\,\Phi = u \text{ et } \text{cof.}\,\Phi - \sqrt{-1}.\,\text{fin.}\,\Phi = v,$$

eritque $\text{cof.}\,\Phi = \frac{1}{2}(u+v)$,

ideoque $\text{cof.}\,\Phi^n = \dfrac{(u+v)^n}{2^n}$ ſeu $2^n\,\text{cof.}\,\Phi^n = (u+v)^n$

Quae poteſtas binomialis ſolito modo euoluatur, vt prodeat:

$$2^n\,\text{cof.}\,\Phi^n = u^n + n\,u^{n-1}v + \tfrac{n(n-1)}{1.\,2}u^{n-2}v^2 + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}u^{n-3}v^3 + \text{etc.}$$

ſimilisque expreſſio prodit, ſi litterae u et v permutentur. Additis ergo his duabus expreſſionibus prodit

$$2^{n+1}\text{cof.}\,\Phi^n = u^n + v^n + \tfrac{n}{1}(u^{n-2} + v^{n-2})uv + \tfrac{n(n-1)}{1.\,2.}(u^{n-4} + v^{n-4})u^2v^2 + \text{etc.}$$

et

et ob $uv = 1$ habebitur diuidendo per 2

$$2^n \operatorname{cof.} \Phi^n = \tfrac{1}{2}(u^n + v^n) + \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{1}{2}(u^{n-2} + v^{n-2}) + \tfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \tfrac{1}{2}(u^{n-4} + v^{n-4}) + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \tfrac{1}{2}(u^{n-6} + v^{n-6}) + \text{etc.}$$

Verum cum ſit $u^n + v^n = 2 \operatorname{cof.} n\Phi$, perſpicuum eſt fore:

$$2^n \operatorname{cof.} \Phi^n = \operatorname{cof.} n\Phi + \tfrac{n}{1} \operatorname{cof.}(n-2)\Phi + \tfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \operatorname{cof.}(n-4)\Phi + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \operatorname{cof.}(n-6)\Phi + \text{etc.}$$

In qua ſerie cum ad coſinus angulorum negatiuorum peruenitur notandum eſt eos conuenire cum coſinibus eorundem angulorum affirmatiue ſumtorum, ſeu eſſe $\operatorname{cof.}(n-m)\Phi = \operatorname{cof.}(m-n)\Phi$. Q. E. I.

COROLL. 1.

4. Si ſit $n = 1$. erit $2 \operatorname{cof.} \Phi = \operatorname{cof.} \Phi + \operatorname{cof.} \Phi = 2 \operatorname{cof.} \Phi$; at ſi $n = 2$ habetur $2^2 \operatorname{cof.} \Phi^2 = \operatorname{cof.} 2\Phi + 2 \operatorname{cof.} 0\Phi + \operatorname{cof.} 2\Phi = 2 \operatorname{cof.} 2\Phi + 2$. Sit $n = 3$, eritque $2^3 \operatorname{cof.} \Phi^3 = \operatorname{cof.} 3\Phi + 3 \operatorname{cof.} \Phi + 3 \operatorname{cof.} \Phi + \operatorname{cof.} 3\Phi = 2 \operatorname{cof.} 3\Phi + 6 \operatorname{cof.} \Phi$. Sit $n = 4$ erit $2^4 \operatorname{cof.} \Phi^4 = \operatorname{cof.} 4\Phi + 4 \operatorname{cof.} 2\Phi + 6 \operatorname{cof.} 0\Phi + 4 \operatorname{cof.} 2\Phi + \operatorname{cof.} 4\Phi$, ideoque cum ſinguli termini praeter medium bis occurrant, ob $\operatorname{cof} 0\Phi = 1$ erit:

$$2^4 \operatorname{cof.} \Phi^4 = 2 \operatorname{cof.} 4\Phi + 8 \operatorname{cof.} 2\Phi + 6.$$

COROLL. 2.

5. Idem hoc ſemper vſu venit, quoties n eſt numerus integer affirmatiuus, vt ſeries a fine ſcripta eadem prodeat, ideoque ſinguli termini praeter medium bis occurrant. Medius autem terminus adeſt quoties n eſt numerus par, coſinusque hoc termino contentus abit in vnitatem.

COROL.

COROLL. 3.

6. Quodſi ergo termini aequales ab initio et fine coniungantur, et tota ſeries per 2 diuidatur, iidem habebuntur coefficientes qui ante, niſi quod termini conſtantis, ſi quis adeſt, coefficiens in ſui ſemiſſem ſit transmutandus. Vnde hae transformationes, quoties n fuerit numerus integer poſitiuus, ita ſe habebunt:

$$1\ \text{coſ.}\ \Phi = \text{coſ.}\ \Phi$$
$$2\ \text{coſ.}\ \Phi^2 = \text{coſ.}\ 2\Phi + \tfrac{1}{2}.\ 2$$
$$4\ \text{coſ.}\ \Phi^3 = \text{coſ.}\ 3\Phi + 3\ \text{coſ.}\ \Phi$$
$$8\ \text{coſ.}\ \Phi^4 = \text{coſ.}\ 4\Phi + 4\ \text{coſ.}\ 2\Phi + \tfrac{1}{2}.\ 6$$
$$16\ \text{coſ.}\ \Phi^5 = \text{coſ.}\ 5\Phi + 5\ \text{coſ.}\ 3\Phi + 10\ \text{coſ.}\ \Phi$$
$$32\ \text{coſ.}\ \Phi^6 = \text{coſ.}\ 6\Phi + 6\ \text{coſ.}\ 4\Phi + 15\ \text{coſ.}\ 2\Phi + \tfrac{1}{2}.20$$
$$64\ \text{coſ.}\ \Phi^7 = \text{coſ.}\ 7\Phi + 7\ \text{coſ.}\ 5\Phi + 21\ \text{coſ.}\ 3\Phi + 35\ \text{coſ.}\ \Phi$$
$$182\ \text{coſ.}\ \Phi^8 = \text{coſ.}\ 8\Phi + 8\ \text{coſ.}\ 6\Phi + 28\ \text{coſ.}\ 4\Phi + 56\ \text{coſ.}\ 2\Phi + \tfrac{1}{2}70$$

etc.

COROLL. 4.

7. Si exponens n ſit numerus negatiuus, expreſſio inuenta in ſeriem abit infinitam, ſicque fiet:

$$\frac{1}{2\ \text{coſ.}\ \Phi} = \text{coſ.}\ \Phi - \text{coſ.}\ 3\Phi + \text{coſ.}\ 5\Phi - \text{coſ.}\ 7\Phi + \text{coſ.}\ 9\Phi - \text{etc.}$$
$$\frac{1}{4\ \text{coſ.}\ \Phi^2} = \text{coſ.}\ 2\Phi - 2\ \text{coſ.}\ 4\Phi + 3\ \text{coſ.}\ 6\Phi - 4\ \text{coſ.}\ 8\Phi + 5\ \text{coſ.}\ 10\Phi - 6\ \text{coſ.}\ 12\Phi + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{8\ \text{coſ.}\ \Phi^3} = \text{coſ.}\ 3\Phi - 3\ \text{coſ.}\ 5\Phi + 6\ \text{coſ}\ 7\Phi - 10\ \text{coſ.}\ 9\Phi + 15\ \text{coſ.}\ 11\Phi - 21\ \text{coſ.}\ 13\Phi + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{16\ \text{coſ.}\ \Phi^4} = \text{coſ.}\ 4\Phi - 4\ \text{coſ.}\ 6\Phi + 10\ \text{coſ.}\ 8\Phi - 20\ \text{coſ.}\ 10\Phi + 35\ \text{coſ.}\ 12\Phi - 56\ \text{coſ.}\ 14\Phi + \text{etc.}$$

etc.

COROLL. 5.

8. Quin etiam si n fuerit numerus fractus, series notatu dignae prodeunt.

$$\sqrt{2\cos.\Phi} = \cos.\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{2}\cos.\tfrac{3}{2}\Phi - \tfrac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cos.\tfrac{7}{2}\Phi + \tfrac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cos.\tfrac{11}{2}\Phi - \tfrac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cos.\tfrac{15}{2}\Phi + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\cos.\Phi}} = \cos.\tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{2}\cos.\tfrac{5}{2}\Phi + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos.\tfrac{9}{2}\Phi - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cos.\tfrac{13}{2} + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cos.\tfrac{17}{2} - \text{etc.}$$

vbi coefficientes plane sunt iidem, qui in extractione radicis ex binomio more consueto erui solent.

SCHOLION.

9. Plerumque commodius est, formulas in coroll. 3 traditas, si n est numerus integer positiuus, ordine inverso exhibere. Tum autem conueniet eas in duas classes distribui, prout exponens n fuerit numerus par, vel impar. Casu quidem, quo n est numerus par, eae ita se habebunt.

$$2\cos.\Phi^2 = 1 + \cos.2\Phi$$
$$8\cos.\Phi^4 = 3 + 4\cos.2\Phi + \cos.4\Phi$$
$$32\cos.\Phi^6 = 10 + 15\cos.2\Phi + 6\cos.4\Phi + \cos.6\Phi$$
$$128\cos.\Phi^8 = 35 + 56\cos.2\Phi + 28\cos.4\Phi + 8\cos.6\Phi + \cos.8\Phi$$
$$512\cos.\Phi^{10} = 126 + 210\cos.2\Phi + 120\cos.4\Phi + 45\cos.6\Phi + 10\cos.8\Phi + \cos.10\Phi$$
$$2048\cos.\Phi^{12} = 462 + 792\cos.2\Phi + 495\cos.4\Phi + 220\cos.6\Phi + 66\cos.8\Phi + 12\cos.10\Phi + \cos.12\Phi$$

etc.

In genere autem si fuerit $n = 2\nu$ erit

$$2^{2\nu-1}\cos.\Phi^{2\nu} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+1)}{1\cdot\;2\cdot\;3\;\ldots\;\nu} + \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+2)}{1\cdot\;2\cdot\;3\;\ldots(\nu-1)}\cos.2\Phi$$
$$+ \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+3)}{1\cdot\;2\cdot\;3\;\ldots(\nu-2)}\cos.4\Phi + \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+4)}{1\cdot\;2\cdot\;3\;\ldots(\nu-3)}\cos.6\Phi$$
$$+ \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+5)}{1\cdot\;2\cdot\;3\;\ldots(\nu-4)}\cos.8\Phi + \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+6)}{1\cdot\;2\cdot\;3\;\ldots(\nu-5)}\cos.10\Phi$$

etc.

Altero deinde casu, quo est n numerus impar, erit

1 cos.

$$1\,\mathrm{cof.}\,\phi = \mathrm{cof.}\,\phi$$
$$4\,\mathrm{cof.}\,\phi^3 = 3\,\mathrm{cof.}\,\phi + \mathrm{cof.}\,3\phi$$
$$16\,\mathrm{cof.}\,\phi^5 = 10\,\mathrm{cof.}\,\phi + 5\,\mathrm{cof.}\,3\phi + \mathrm{cof.}\,5\phi$$
$$64\,\mathrm{cof.}\,\phi^7 = 35\,\mathrm{cof.}\,\phi + 21\,\mathrm{cof.}\,3\phi + 7\,\mathrm{cof.}\,5\phi + \mathrm{cof.}\,7\phi$$
$$256\,\mathrm{cof.}\,\phi^9 = 126\,\mathrm{cof.}\,\phi + 84\,\mathrm{cof.}\,3\phi + 36\,\mathrm{cof.}\,5\phi + 9\,\mathrm{cof.}\,7\phi + \mathrm{cof.}\,9\phi$$
$$1024\,\mathrm{cof.}\,\phi^{11} = 462\,\mathrm{cof.}\,\phi + 330\,\mathrm{cof.}\,3\phi + 165\,\mathrm{cof.}\,5\phi + 55\,\mathrm{cof.}\,7\phi + 11\,\mathrm{cof.}\,9\phi + \mathrm{cof.}\,11\phi$$

etc.

in genere autem si sit $n = 2\nu - 1$ erit

$$2^{2\nu-2}\,\mathrm{cof.}\,\phi^{2\nu-1} = \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots(\nu-1)}\,\mathrm{cof.}\,\phi + \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+2)}{1\cdot 2\ldots\ldots(\nu-2)}\,\mathrm{cof.}\,3\phi$$
$$+ \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+3)}{1\cdot 2\ldots\ldots(\nu-3)}\,\mathrm{cof.}\,5\phi + \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+4)}{1\cdot 2\ldots\ldots(\nu-4)}\,\mathrm{cof.}\,7\phi$$
$$+ \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+5)}{1\cdot 2\ldots\ldots(\nu-5)}\,\mathrm{cof.}\,9\phi + \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+6)}{1\cdot 2\ldots\ldots(\nu-6)}\,\mathrm{cof.}\,11\phi$$

etc.

PROBLEMA II.

10. Poteſtatem quamcunque ſinus cuiuspiam anguli in ſinus coſinusue ſimplices conuertere, ita vt nusquam duo ſinus vel coſinus occurrant in ſe inuicem multiplicati.

SOLVTIO.

Hoc problema ex praecedenti facile ſoluitur. Poſito enim $\phi = 90° - \psi$, fit cof. $\phi =$ ſin. ψ, ideoque expreſſio pro poteſtate cof. ϕ^n inuenta iam pro poteſtate ſin. ψ^n valebit. Tum autem erit:

$$\mathrm{cof.}\,2\phi = -\mathrm{cof.}\,2\psi\;;\quad \mathrm{cof.}\,3\phi = -\mathrm{ſin.}\,3\psi$$
$$\mathrm{cof.}\,4\phi = +\mathrm{cof.}\,4\psi\;;\quad \mathrm{cof.}\,5\phi = +\mathrm{ſin.}\,5\psi$$
$$\mathrm{cof.}\,6\phi = -\mathrm{cof.}\,6\psi\;;\quad \mathrm{cof.}\,7\phi = -\mathrm{ſin.}\,7\psi \text{ etc.}$$

Quoties ergo n eſt numerus integer, pro fractis enim haec reductio minus commode inſtitui poteſt, ſequentes obtinebuntur reductiones:

$$1\,\text{ſin.}\,\psi = \text{ſin.}\,\psi$$
$$2\,\text{ſin.}\,\psi^2 = -\text{coſ.}\,2\psi + \tfrac{1}{2}.\,2$$
$$4\,\text{ſin.}\,\psi^3 = -\text{ſin.}\,3\psi + 3\,\text{ſin.}\,\psi$$
$$8\,\text{ſin.}\,\psi^4 = +\text{coſ.}\,4\psi - 4\,\text{coſ.}\,2\psi + \tfrac{1}{2}.\,6$$
$$16\,\text{ſin.}\,\psi^5 = +\text{ſin.}\,5\psi - 5\,\text{ſin.}\,3\psi + 10\,\text{ſin.}\,\psi$$
$$32\,\text{ſin.}\,\psi^6 = -\text{coſ.}\,6\psi + 6\,\text{coſ.}\,4\psi - 15\,\text{coſ.}\,2\psi + \tfrac{1}{2}.\,20$$
$$64\,\text{ſin.}\,\psi^7 = -\text{ſin.}\,7\psi + 7\,\text{ſin.}\,5\psi - 21\,\text{ſin.}\,3\psi + 35\,\text{ſin.}\,\Phi$$
$$128\,\text{ſin.}\,\psi^8 = +\text{coſ.}\,8\psi - 8\,\text{coſ.}\,6\psi + 28\,\text{coſ.}\,4\psi - 56\,\text{coſ.}\,2\psi + \tfrac{1}{2}.\,70$$

etc.

Pro valoribus autem negatiuis ipſius n habebitur:

$$\frac{1}{2\,\text{ſin.}\,\psi} = +\text{ſin.}\,\psi + \text{ſin.}\,3\psi + \text{ſin.}\,5\psi + \text{ſin.}\,7\psi + \text{ſin.}\,9\psi + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{4\,\text{ſin.}\,\psi^2} = -\text{coſ.}\,2\psi - 2\,\text{coſ.}\,4\psi - 3\,\text{coſ.}\,6\psi - 4\,\text{coſ.}\,8\psi - 5\,\text{coſ.}\,10\psi - \text{etc.}$$
$$\frac{1}{\text{ſin.}\,\psi^3} = -\text{ſin.}\,3\psi - 3\,\text{ſin.}\,5\psi - 6\,\text{ſin.}\,7\psi - 10\,\text{ſin.}\,9\psi - 15\,\text{ſin.}\,11\psi - \text{etc.}$$
$$\frac{1}{16\,\text{ſin.}\,\psi^4} = +\text{coſ.}\,4\psi + 4\,\text{coſ.}\,6\psi + 10\,\text{coſ.}\,8\psi + 20\,\text{coſ.}\,10\psi + 53\,\text{coſ.}\,12\psi + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{32\,\text{ſin.}\,\psi^5} = +\text{ſin.}\,5\psi + 5\,\text{ſin.}\,7\psi + 15\,\text{ſin.}\,9\psi + 35\,\text{ſin.}\,11\psi + 70\,\text{ſin.}\,13\psi + \text{etc.}$$

etc.

Hinc ergo quadruplices formulae generales eliciuntur, prout n fuerit numerus formae vel $4m$, vel $4m-1$, vel $4m-2$, vel $4m-3$, eaeque erunt:

$$2^{4m-1}\,\text{ſin.}\,\psi^{4m} = \text{coſ.}\,4m\psi - 4m\,\text{coſ.}\,(4m-2)\psi + \frac{4m(4m-1)}{1.\;2.}\,\text{coſ.}\,(4m-4)\psi$$
$$-\frac{4m(4m-1)(4m-2)}{1.\;2.\;3.}\,\text{coſ.}\,(4m-6)\psi\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+\tfrac{1}{2}.\;\frac{4m(4m-1)(4m-2)\ldots\ldots\ldots(2m+1)}{1.\;2.\;3\;\ldots\ldots\ldots\;2m}$$

$$2^{4m-2}$$

$$2^{4m-2}\sin.\psi^{4m-1} = -\sin.(4m-1)\psi + (4m-1)\sin.(4m-3)\psi \; \frac{(4m-1)(4m-2)}{1\cdot 2}\sin.(4m-5)\psi$$
$$+\frac{(4m-1)(4m-2)(4m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin.(4m-7)\psi \ldots$$
$$+\frac{(4m-1)(4m-2)(4m-3)\ldots\ldots(2m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(2m-1)}\sin.\psi$$

$$2^{4m-3}\sin.\psi^{4m-2} = -\cos.(4m-2)\psi + (4m-2)\cos.(4m-4)\psi$$
$$-\frac{(4m-2)(4m-3)}{1\cdot 2}\cos.(4m-6)\psi + \frac{(4m-2)(4m-3)(4m-4)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos.(4m-8)\psi \ldots$$
$$+\frac{1}{2}\frac{(4m-2)(4m-3)(4m-4)\ldots\ldots(2m)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(2m-1)}$$

$$2^{4m-4}\sin.\psi^{4m-3} = +\sin.(4m-3)\psi - (4m-3)\sin.(4m-5)\psi$$
$$+\frac{(4m-3)(4m-4)}{1\cdot 2}\sin.(4m-7)\psi - \frac{(4m-3)(4m-4)(4m-5)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin.(4m-9)\psi \ldots$$
$$+\frac{(4m-3)(4m-4)(4m-5)\ldots\ldots(2m)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(2m-2)}\sin.\psi$$

Simili modo ſi n ſit numerus negatiuus integer quaternas habebimus formulas generales:

$$\frac{1}{2^{4m}\sin.\psi^{4m}} = +\cos.4m\psi + 4m\cos.(4m+2)\psi + \frac{4m(4m+1)}{1\cdot 2}\cos.(4m+4)\psi$$
$$+\frac{4m(4m+1)(4m+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos.(4m+6)\psi + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2^{4m+1}\sin\psi^{4m+1}} = +\sin.(4m+1)\psi + (4m+1)\sin.(4m+3)\psi$$
$$+\frac{(4m+1)(4m+2)}{1\cdot 2}\sin.(4m+5)\psi + \frac{(4m+1)(4m+2)(4m+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin.(4m+7)\psi + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2^{4m+2}\sin\psi^{4m+2}} = -\cos.(4m+2)\psi - (4m+2)\cos.(4m+4)\psi$$
$$-\frac{(4m+2)(4m+3)}{1\cdot 2}\cos.(4m+6)\psi - \frac{(4m+2)(4m+3)(4m+4)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos.(4m+8)\psi - \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2^{4m+3}\sin\psi^{4m+3}} = -\sin.(4m+3)\psi - (4m+3)\sin.(4m+5)\psi$$
$$-\frac{(4m+3)(4m+4)}{1\cdot 2}\sin.(4m+7)\psi - \frac{(4m+3)(4m+4)(4m+5)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin.(4m+9)\psi - \text{etc.}$$

Sicque quoties n eſt numerus integer, ſiue poſitiuus, ſiue negatiuus, poteſtas ſinus $\sin.\psi^n$ deſiderato modo reſoluitur. Q. E. F.

 COROL.

COROLL. 1.

11. Quoties ergo n est numerus par, siue positiuus, siue negatiuus, potestas sin. ψ^n resoluitur in cosinus simplices angulorum multiplorum ipsius ψ. Sin autem n fuerit numerus impar, potestas sin. ψ^n resoluitur in sinus simplices angulorum multiplorum ipsius ψ.

COROLL. 2.

12. Quodsi n fuerit numerus integer positiuus, atque expressiones inuentae retro disponantur, quaternae formulae supra datae in binas incidunt. Pro paribus enim exponentibus erit:

$$2\,\text{fin.}\psi^2 = 1 - \text{cof.}2\psi$$
$$8\,\text{fin.}\psi^4 = 3 - 4\,\text{cof.}2\psi + \text{cof.}4\psi$$
$$32\,\text{fin.}\psi^6 = 10 - 15\,\text{cof.}2\psi + 6\,\text{cof.}4\psi - \text{cof.}6\psi$$
$$128\,\text{fin.}\psi^8 = 35 - 56\,\text{cof.}2\psi + 28\,\text{cof.}4\psi - 8\,\text{cof.}6\psi + \text{cof.}8\psi$$
$$512\,\text{fin.}\psi^{10} = 126 - 210\,\text{cof.}2\psi + 120\,\text{cof.}4\psi - 45\,\text{cof.}6\psi + 10\,\text{cof.}8\psi - \text{cof.}10\psi$$
$$2048\,\text{fin.}\psi^{12} = 462 - 792\,\text{cof.}2\psi + 495\,\text{cof.}4\psi - 220\,\text{cof.}6\psi + 66\,\text{cof.}8\psi - 12\,\text{cof.}10\psi + \text{cof.}12\psi$$

etc.

atque generatim erit:

$$2^{2\nu-1}\,\text{fin.}\psi^{2\nu} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\nu} - \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+2)}{1.\ 2.\ 3\ldots(\nu-1)}\,\text{cof.}2\psi$$
$$+ \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+3)}{1.\ 2.\ 3\ldots(\nu-2)}\,\text{cof.}4\psi - \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+4)}{1.\ 2.\ 3\ldots(\nu-3)}\,\text{cof.}6\psi$$
$$+ \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+5)}{1.\ 2.\ 3\ldots(\nu-4)}\,\text{cof.}8\psi - \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+6)}{1.\ 2.\ 3\ldots(\nu-5)}\,\text{cof.}10\psi$$

etc.

COROL.

COROLL. 3.

13. Pro imparibus autem exponentibus habebitur:

$$1\sin.\psi = \sin.\psi$$

$$4\sin.\psi^3 = 3\sin.\psi - \sin.3\psi$$

$$16\sin.\psi^5 = 10\sin.\psi - 5\sin.3\psi + \sin.5\psi$$

$$64\sin.\psi^7 = 35\sin.\psi - 21\sin.3\psi + 7\sin.5\psi - \sin 7\psi.$$

$$256\sin.\psi^9 = 126\sin.\psi - 84\sin.3\psi + 36\sin.5\psi - 9\sin 7\psi + \sin.9\psi$$

$$1024\sin.\psi^{11} = 462\sin.\psi - 330\sin.3\psi + 165\sin.5\psi - 55\sin.7\psi + 11\sin.9\psi - \sin.11\psi$$

etc.

pro quibus formula generalis est

$$2^{2\nu-2}\sin.\psi^{2\nu-1} = \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+1)}{1.\;2.\;\ldots(\nu-1)}\sin.\psi - \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+2)}{1.\;2.\;\ldots(\nu-2)}\sin.3\psi$$
$$+ \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+3)}{1.\;2.\;\ldots(\nu-3)}\sin.5\psi - \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+4)}{1.\;2.\;\ldots(\nu-4)}\sin.7\psi$$
$$+ \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+5)}{1.\;2\;\ldots(\nu-5)}\sin.9\psi - \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+6)}{1.\;2\;\ldots(\nu-6)}\sin.11\psi$$

etc.

SCHOLION.

14. Patet ergo, si potestas sinus cuiuspiam anguli velut $\sin.\Phi^n$ occurrat, resolutionem commode institui non posse, nisi n sit numerus integer, siue sit positiuus, siue negatiuus: hoc autem casu quadruplices prodire formulas, prout exponens n fuerit numerus formae vel 4α, vel $4\alpha+1$, vel $4\alpha+2$, vel $4\alpha+3$; quae distinctio non est necessaria, si quaestio est de potestate cosinus cuiuspiam. Interim tamen si n est numerus fractus, formulae pro resolutione potestatum cosinus huc non difficulter traducuntur, cum sinus in cosinum

num transmutari poſſit. Poſito enim $\phi = 90^\circ - \phi$ erit

$$\sqrt{2}\,\text{ſin.}\,\phi = \text{coſ.}\tfrac{1}{2}\phi + \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\tfrac{3}{2}\phi - \tfrac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\text{coſ.}\tfrac{7}{2}\phi + \tfrac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\text{coſ.}\tfrac{11}{2}\phi - \text{etc.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\text{ſin.}\,\psi}} = \text{coſ.}\tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\tfrac{5}{2}\phi + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\text{coſ.}\tfrac{9}{2}\phi - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\text{coſ.}\tfrac{13}{2}\phi + \text{etc.}$$

Verum ſi productum proponatur huiusmodi ſin. ϕ^m. coſ. ϕ^n, quod in ſimplices ſinus coſinusue ſit reſoluendum, hoc commode fieri nequit, niſi exponens m ſit numerus integer, ſiue poſitiuus, ſiue negatiuus, tumque quatuor conſtituendi ſunt caſus, prout m fuerit numerus formae, vel 4α, vel $4\alpha + 1$, vel $4\alpha + 2$, vel $4\alpha + 3$. Secundum hos ergo quaternos caſus reſolutionem formulae ſin. ϕ^m, coſ. ϕ^n eruam, vbi quidem notandum eſt, exponentem n nulli reſtrictioni eſſe ſubiectum, ita vt nonſolum numeros integros, ſed etiam fractos, atque adeo irrationales, denotare poſſit.

PROBLEMA 3.

15. Huiusmodi productum ſin. ϕ^m. coſ. ϕ^n, in quo exponens m eſt numerus integer formae 4α, in ſinus coſinusue ſimplices reſoluere.

SOLVTIO.

Ponatur coſ. $\phi + \sqrt{-1}$. ſin. $\phi = u$ et coſ. $\phi - \sqrt{-1}$. ſin. $\phi = v$, erit:

$$\text{coſ.}\ \phi = \frac{u + v}{2} \text{ et ſin. } \phi = \frac{u - v}{2\sqrt{-1}}$$

$$\text{et coſ.}\,\nu\phi = \frac{u^\nu + v^\nu}{2} \text{ et ſin.}\,\nu\phi = \frac{u^\nu - v}{2\sqrt{-1}}$$

propter-

propterea quod per lemma habemus:

$\cos.\, \nu\Phi + \sqrt{-1}.\, \sin.\, \nu\Phi = u^\nu$ et $\cos.\, \nu\Phi - \sqrt{-1}.\, \sin.\, \nu\Phi = v^\nu$

Formula ergo propofita $\sin.\, \Phi^m \cos.\, \Phi^n$ abit in $\frac{(u-v)^m}{2^m(\sqrt{-1})^m} \cdot \frac{(u+v)^n}{2^n}$

et quia m eft numerus integer formae 4α erit $(\sqrt{-1})^m = +1$; ideoque habebitur:

$$\sin.\, \Phi^m \cos.\, \Phi^n = \frac{(u-v)^m(u+v)^n}{2^{m+n}} \text{ fiue}$$

$$2^{m+n} \sin.\, \Phi^m \cos.\, \Phi^n = (u-v)^m(u+v)^n = u^{m+n}\left(1-\frac{v}{u}\right)^m\left(1+\frac{v}{u}\right)^n$$

Sit breuitatis gratia $\frac{v}{u} = z$, atque in feriem conuerti oportet hanc expreffionem $(1-z)^m(1+z)^n$, quae vocetur $= S$, eritque

$lS = ml(1-z) + nl(1+z)$ et differeutiando

$\frac{dS}{S} = -\frac{m\,dz}{1-z} + \frac{n\,dz}{1+z} = \frac{(n-m)dz - (m+n)z\,dz}{1-zz}$

Ponatur $n-m = f$ et $m+n = g$, vt fit

$(1-zz)\frac{dS}{dz} - fS + gSz = 0$

Iam ftatuatur

$S = 1 + Az + Bzz + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 + Gz^7 + \text{etc.}$

ac facta fubftitutione prodibit:

$$\left.\begin{array}{llllllll} A & +2Bz & +3Cz^2 & +4Dz^3 & +5Ez^4 & +6Fz^5 & +7Gz^6 & +\text{etc.} \\ & -A & -2B & -3C & -4D & -5E & & -\text{etc.} \\ -f & -fA & -fB & -fC & -fD & -fE & -fF & -\text{etc.} \\ & +g & +gA & +gB & +gC & +gD & +gE & +\text{etc.} \end{array}\right\} = 0$$

Coefficientes ergo affumti A, B, C, etc. ita determinabuntur, vt fit

 $A = f$

$$\begin{aligned}
A &= f \\
2B &= fA - g \\
3C &= fB - (g-1)A \\
4D &= fC - (g-2)B \\
5E &= fD - (g-3)C \\
6F &= fE - (g-4)D \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

hisque valoribus inuentis erit: $2^{m+n}\text{fin.}\,\Phi^m\text{cof.}\,\Phi^n = u^g + Au^{g-1}v + Bu^{g-2}v^2 + Cu^{g-3}v^3 + Du^{g-4}v^4 +$ etc. Cum autem ob m numerum parem fit $2^{m+n}\text{fin.}\,\Phi^m\text{cof.}\,\Phi = (v-u)^m\,(v+u)^n$ erit fimili modo $2^{m+n}\text{fin.}\,\Phi^n\ \text{cof.}\,\Phi = v^g + Av^{g-1}u + Bv^{g-2}u^2 + Cv^{g-3}v^3 + Dv^{g-4}u^4 +$ etc.

His igitur formulis addendis erit ob $vu = 1$;

$$2.\ 2^{m+n}\text{fin.}\,\Phi^m\ \text{cof.}\,\Phi^n = u^g + v^g + A(u^{g-2} + v^{g-2}) + B(u^{g-4} + v^{g-4}) + C(u^{g-6} + v^{g-6}) + D(u^{g-8} + v^{g-8})\ \text{etc.}$$

et cum in genere fit $u^\nu + v^\nu = 2\,\text{cof.}\,\nu\Phi$ erit:

$$2^{m+n}\text{fin.}\,\Phi^m\text{cof.}\,\Phi^n = \text{cof.}\,g\Phi + A\,\text{cof.}\,(g-2)\Phi + B\,\text{cof.}\,(g-4)\Phi + C\,\text{cof.}\,(g-6)\,\Phi + \text{etc.}$$

pofito breuitatis gratia $m+n=g$ et $n-m=f$, fubftitutisque in locum coefficientium A, B, C, D, etc. valoribus ante indicatis.

Q. E. F.

PROBLEMA. IV.

16. *Si* exponens m fuerit numerus huius formae $4\alpha+2$ feu impariter par, productum fin. Φ^m cof. Φ^n in finus cofinusue fimplices refoluere.

SOLV-

SOLVTIO.

Posito vt ante $\operatorname{cos}.\Phi + \sqrt{-1}.\operatorname{sin}.\Phi = u$ et $\operatorname{cos}.\Phi - \sqrt{-1}.\operatorname{sin}.\Phi = v$, prodibit

$$\operatorname{sin}.\Phi^m \operatorname{cos}.\Phi^n = \frac{(u-v)^m}{2^r(\sqrt{-1})^m}\cdot\frac{(u+v)^n}{2^n}$$

Quia autem m est numerus impariter par, erit $(\sqrt{-1})^m = -1$ erit $-2^{m+n}\operatorname{sin}.\Phi^m\operatorname{cos}.\Phi^n = (u-v)^m(u+v)^n$

et ob m numerum parem erit quoque

$$-2^{m+n}\operatorname{sin}.\Phi^m\operatorname{cos}.\Phi^n = (v-u)^m(v+u)^n$$

quarum formularum vtraque vt ante resoluatur; scilicet posito $n-m=f$ et $m+n=g$, et coefficientibus A, B, C etc. ita assumtis, vt sit

$$A = f \qquad 2B = fA - g$$
$$3C = fB-(g-1)A \qquad 4D = fC-(g-2)B$$
$$5E = fD-(g-3)C \qquad 6F = fE-(g-4)D$$

etc.

summa illarum formularum praebebit:

$$-2.\,2^{m+n}\operatorname{sin}.\Phi^m\operatorname{cos}.\Phi^n = u^g + v^g + A(u^{g-2}+v^{g-2}) + B(u^{g-4}+v^{g-4}) + \text{etc.}$$

quae progressio vt ante ad cosinus simplices angulorum multiplorum ipsius Φ reducitur, ita vt sit:

$$2^{m+n}\operatorname{sin}.\Phi^m\operatorname{cos}.\Phi^n = -\operatorname{cos}.g\Phi - A\operatorname{cos}.(g-2)\Phi - B\operatorname{cos}.(g-4)\Phi - C\operatorname{cos}.(g-6)\Phi - \text{etc.}$$

Q. E. F.

PROBLEMA V.

17. Si exponens m fuerit numerus impar formae $4\alpha+1$, productum $\sin.\Phi^m \cos.\Phi^n$ in sinus cosinusue simplices resoluere.

SOLVTIO.

Posito iterum $\cos.\Phi+\sqrt{-1}.\sin.\Phi=u$ et $\cos.\Phi-\sqrt{-1}.\sin.\Phi=v$, vt fiat

$$\sin.\Phi^m \cos.\Phi^n=\frac{(u-v)^m}{2^m(\sqrt{-1})^m}.\frac{(u+v)^n}{2^n}$$

ob m numerum formae $4\alpha+1$ erit $(\sqrt{-1})^m=\sqrt{-1}$, ideoque habebitur:

$$2^{m+n}\sqrt{-1}.\sin.\Phi^m \cos.\Phi^n=(u-v)^m(u+v)^n.$$

At ob m numerum imparem erit $(u-v)^m=-(v-u)^m$ hincque

$$2^{m+n}\sqrt{-1}.\sin.\Phi^m \cos.\Phi^n=-(v-u)^m(v+u)^n$$

Hanc ob rem his formulis addendis et per $2\sqrt{-1}$ diuidendis, fiet

$$2^{m+n}\sin.\Phi^m \cos.\Phi^n=\frac{(u-v)^m(u+v)^n-(v-u)^m(v+u)^n}{2\sqrt{-1}}$$

positoque $m+n=g$ et $n-m=f$, sumtisque

$$A=f \qquad 2B=fA-g$$
$$3C=fB-(g-1)A \qquad 4D=fC-(g-2)B$$
$$5E=fD-(g-3)C \qquad 6F=fE-(g-4)D$$
etc.

obtinebitur:

$$2^{m+n}\sin.\Phi^m \cos.\Phi^n=\frac{u^g-v^g}{2\sqrt{-1}}+\frac{A(u^{g-2}-v^{g-2})}{2\sqrt{-1}}+\frac{B(u^{g-4}-v^{g-4})}{2\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

Verum

Verum ex lemmate eſt $\frac{u^{\nu}-v^{\nu}}{2\sqrt{-1}} = \text{ſin.}\,\nu\,\Phi$, vnde oritur

$$2^{m+n}\text{ſin.}\,\Phi^m \text{coſ.}\,\Phi^n = \text{ſin.}\,g\,\Phi + A\,\text{ſin.}\,(g-2)\Phi + B\,\text{ſin.}\,(g-4)\Phi + C\,\text{ſin.}\,(g-6)\,\Phi + \text{etc.}$$

Q. E. F.

PROBLEMA VI.

18. Si exponens m ſit numerus impar formae $4\alpha-1$, reſoluere hoc productum ſin. Φ^m coſ. Φ^n in ſinus coſinusue ſimplices.

SOLVTIO.

Poſito denuo coſ. $\Phi + \sqrt{-1}$. ſin. $\Phi = u$ et coſ. $\Phi - \sqrt{-1}$. ſin. $\Phi = v$, vt ſit

$$\text{ſin.}\,\Phi^m \text{coſ.}\,\Phi^n = \frac{(u-v)^m}{2^m(\sqrt{-1})^m} \cdot \frac{(u+v)^n}{2^n}$$

ob m numerum formae $4\alpha-1$ erit $(\sqrt{-1})^m = -\sqrt{-1}$, ideoque

$$2^{m+n}\text{ſin.}\,\Phi^m \text{coſ.}\,\Phi^n = -\frac{(u-v)^m\,(u+v)^n}{\sqrt{-1}}$$

At ob m numerum imparem erit $(u-v)^m = -(v-u)^m$; ergo

$$2^{m+n}\text{ſin.}\,\Phi^m \text{coſ.}\,\Phi^n = +\frac{(v-u)^m(v+u)^n}{\sqrt{-1}}$$

quarum expreſſionum ſemiſumma eſt:

$$2^{m+n}\text{ſin.}\,\Phi^m \text{coſ.}^n = -\frac{(u-v)^m\,(u+v)^n + (v-u)^m\,(v+u)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Si iam ponatur $n-m=f$, $m+n=g$, coefficientesque A, B, C etc. per ſequentes formulas determinentur

$$A = f \qquad 2B = fA - g$$
$$3C = fB - (g-1)A \qquad 4D = fC - (g-2)B$$
$$5E = fD - (g-3)C \qquad 6F = fE - (g-4)D$$
etc.

reperietur:

$$2^{m+n} \text{fin.}\, \Phi^m \text{cof.}\, \Phi^n = \frac{-(u^g - v^g)}{2\sqrt{-1}} - \frac{A(u^{g-2} - v^{g-2})}{2\sqrt{-1}} - \frac{B(u^{g-4} - v^{g-4})}{2\sqrt{-1}} - \text{etc.}$$

atque ob $\frac{u^\nu - v^\nu}{2\sqrt{-1}} = \text{fin.}\, \nu\Phi$ obtinebitur tandem

$$2^{m+n} \text{fin.}\, \Phi^m \text{cof.}\, \Phi^n = - \text{fin.}\, g\Phi - A\,\text{fin.}\,(g-2)\Phi - B\,\text{fin.}\,(g-4)\Phi$$
$$- C\,\text{fin.}\,(g-6)\Phi - \text{etc.}$$

Q. E. F.

COROLL. 1.

19. Productum ergo fin. Φ^m cof. Φ^n in cofinus fimplices refoluitur, fi exponens m fuerit numerus par: in finus autem fimplices, fi exponens m fuerit numerus impar. Atque fi exponens m fit vel 4α, vel $4\alpha + 1$, finguli termini erunt pofitiui, fin autem m fit vel $4\alpha + 2$ vel $4\alpha - 1$, feu $4\alpha + 3$, termini figno negatiuo funt affecti.

COROLL. 2.

20. His regulis tam ratione fignorum, quam vtrum finus, an cofinus, accipi debeant, obferuatis, refolutio horum quaternorum cafuum requirit eandem coefficientium A, B, C etc. determinationem, quae ita fe habet, vt pofito $n - m = f$ et $m + n = g$ effe debeat:

$A = f$

$$\begin{aligned}
A &= f\\
2B &= fA - g\\
3C &= fB - (g-1)A\\
4D &= fC - (g-2)B\\
5E &= fD - (g-3)C\\
6F &= fE - (g-4)D\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

COROLL. 3.

21. Vel hos coefficientes ita definiri oportet, vt fit $(1-z)^m(1+z)^n = 1 + Az + Bzz + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 + \text{etc.}$ ex qua refolutione hi coefficientes faepe facilius eruentur.

COROLL. 4

22. Quoniam hi coefficientes in genere in fractiones abeunt, fi hoc incommodum vitare velimus, ftatim ponatur

$$(1-z)^m(1+z)^n = 1 + \frac{\alpha}{1}z + \frac{\beta}{1\cdot 2}z^2 + \frac{\gamma}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \frac{\delta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}z^4 + \text{etc.}$$

vt fit

$$A = \frac{\alpha}{1};\quad B = \frac{\beta}{1\cdot 2};\quad C = \frac{\gamma}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$D = \frac{\delta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};\quad E = \frac{\varepsilon}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5};\quad E = \frac{\zeta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

tum autem erit:

$$\begin{aligned}
\alpha &= f\\
\beta &= f\alpha - g\\
\gamma &= f\beta - 2(g-1)\alpha\\
\delta &= f\gamma - 3(g-2)\beta\\
\varepsilon &= f\delta - 4(g-3)\gamma\\
\zeta &= f\varepsilon - 5(g-4)\delta\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

COROL.

COROLL. 5.

23. Si hi valores euoluuntur, reperietur

$$\alpha = f$$
$$\beta = ff - g$$
$$\gamma = f^3 - (3g-2)f$$
$$\delta = f^4 - (6g-8)ff + 3g(g-2)$$
$$\varepsilon = f^5 - (10g-20)f^3 + (15gg-50g+24)f$$
$$\zeta = f^6 - (15g-40)f^4 + (45gg-210g+184)ff - 15g(g-2)(g-4)$$
etc.

Verum difficile eſt harum formularum progreſſionem perſpicere eamque continuare, niſi determinationes ante indicatae in ſubſidium vocentur.

COROLL. 6.

24. Valores coefficientum A, B, C, D, etc. etiam ita ex omnibus praecedentibus definiri poſſunt, vt ſit.

$$A = f$$
$$2B = fA - g$$
$$3C = fB - gA + f$$
$$4D = fC - gB + fA - g$$
$$5E = fD - gC + fB - gA + f$$
$$6F = fE - gD + fC - gB + fA - g$$
etc.

COROL.

COROLL. 7.

25. Hinc ſtatim patet, ſi ſit $g = f$ ſeu $m = 0$, et $g = n$, fore $A = f$; $2B = (f-1)A$; $3C = (f-2)B$; $4D = (f-3)C$; etc.

ideoque:

$$A = n;\ B = \frac{n(n-1)}{1.2};\ C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3};\ D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.$$

At ſi ſit $g = -f$, ſeu $n = 0$, et $g = m$, erit

$A = f$; $2B = (f+1)A$; $3C = (f+2)B$; $4D = (f+3)C$, etc.

ideoque

$$A = -m;\ B = \frac{m(m-1)}{1.\ 2};\ C = -\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3};\ D = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4};$$

Hi autem ſunt caſus iam ante euoluti.

SCHOLION I.

26. Quodſi pro exponentibus m et n ſucceſſiue numeri integri affirmatiui capiantur, ſequentes prodibunt reſolutiones;

$1 \operatorname{cof.} \Phi = \operatorname{cof.} \Phi$

$1 \operatorname{fin.} \Phi = \operatorname{fin.} \Phi$

$2 \operatorname{cof.} \Phi^2 = + \operatorname{cof.} 2\Phi + 1$

$2 \operatorname{fin.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi = + \operatorname{fin.} 2\Phi$

$2 \operatorname{fin.} \Phi^2 = - \operatorname{cof.} 2\Phi + 1$

$4 \operatorname{cof.} \Phi^3 = + \operatorname{cof.} 3\Phi + 3 \operatorname{cof.} \Phi$

$4 \operatorname{fin.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi^2 = + \operatorname{fin.} 3\Phi + \operatorname{fin.} \Phi$

$4 \operatorname{fin.} \Phi^2 \operatorname{cof.} \Phi = - \operatorname{cof.} 3\Phi + \operatorname{cof.} \Phi$

$4 \operatorname{fin.} \Phi^3 = - \operatorname{fin.} 3\Phi + 3 \operatorname{fin.} \Phi$

$8\cos.\Phi^4 = +\cos.4\Phi + 4\cos.2\Phi + 3$
$8\sin.\Phi\cos.\Phi^3 = +\sin.4\Phi + 2\sin.2\Phi$
$8\sin.\Phi^2\cos.\Phi^2 = -\cos.4\Phi \quad * \quad +1$
$8\sin.\Phi^3\cos.\Phi = -\sin.4\Phi + 2\sin.2\Phi$
$8\sin.\Phi^4 = +\cos.4\Phi - 4\cos.2\Phi + 3$

$16\cos.\Phi^5 = +\cos.5\Phi + 5\cos.3\Phi + 10\cos.\Phi$
$16\sin.\Phi\cos.\Phi^4 = +\sin.5\Phi + 3\sin.3\Phi + 2\sin.\Phi$
$16\sin.\Phi^2\cos.\Phi^3 = -\cos.5\Phi - \cos.3\Phi + 2\cos.\Phi$
$16\sin.\Phi^3\cos.\Phi^2 = -\sin.5\Phi + \sin.3\Phi + 2\sin.\Phi$
$16\sin.\Phi^4\cos.\Phi = +\cos.5\Phi - 3\cos.3\Phi + 2\cos.\Phi$
$16\sin.\Phi^5 = +\sin.5\Phi - 5\sin.3\Phi + 10\sin.\Phi$

$32\cos.\Phi^6 = +\cos.6\Phi + 6\cos.4\Phi + 15\cos.2\Phi + 10$
$32\sin.\Phi\cos.\Phi^5 = +\sin.6\Phi + 4\sin.5\Phi + 5\sin.2\Phi$
$32\sin.\Phi^2\cos.\Phi^4 = -\cos.6\Phi - 2\cos.4\Phi + \cos.2\Phi + 2$
$32\sin.\Phi^3\cos.\Phi^3 = -\sin.6\Phi \quad * \quad +3\sin.2\Phi$
$32\sin.\Phi^4\cos.\Phi^2 = +\cos.6\Phi - 2\cos.4\Phi - \cos.2\Phi + 2$
$32\sin.\Phi^5\cos.\Phi = +\sin.6\Phi - 4\sin.4\Phi + 5\sin.2\Phi$
$32\sin.\Phi^6 = -\cos.6\Phi + 6\cos.4\Phi - 15\cos.2\Phi + 10$

$64\cos.\Phi^7 = +\cos.7\Phi + 7\cos.5\Phi + 21\cos.3\Phi + 35\cos.\Phi$
$64\sin.\Phi\cos.\Phi^6 = +\sin.7\Phi + 5\sin.5\Phi + 9\sin.3\Phi + 5\sin.\Phi$
$64\sin.\Phi^2\cos.\Phi^5 = -\cos.7\Phi - 3\cos.5\Phi - \cos.3\Phi + 5\cos.\Phi$
$64\sin.\Phi^3\cos.\Phi^4 = -\sin.7\Phi - \sin.5\Phi + 3\sin.3\Phi + 3\sin.\Phi$
$64\sin.\Phi^4\cos.\Phi^3 = +\cos.7\Phi - \cos.5\Phi - 3\cos.3\Phi + 3\cos.\Phi$
$64\sin.\Phi^5\cos.\Phi^2 = +\sin.7\Phi - 3\sin.5\Phi + \sin.3\Phi + 5\sin.\Phi$
$64\sin.\Phi^5\cos.\Phi = -\cos.7\Phi + 5\cos.5\Phi - 9\cos.3\Phi + 5\cos.\Phi$
$64\sin.\Phi^7 = -\sin.7\Phi + 7\sin.5\Phi - 21\sin.3\Phi + 35\sin.\Phi$

Que-

Quemadmodum autem formulas has commodius eruere liceat, deinceps docebo, inde quod cuiusque ordinis prima series ex praecedentibus est cognita.

SCHOLION 2.

27. Sin autem alter exponentium m et n sit numerus negatiuus, expressio inuenta seriem exhibebit infinitam, cuius formam in aliquot casibus inuestigare operae erit pretium. In hunc finem sequentia exempla adiungere visum est.

EXEMPLVM 1.

28. *Tangentem cuiusque anguli* Φ, *seu hanc expressionem* $\frac{\text{sin.}\,\Phi}{\text{cos.}\,\Phi}$, *in seriem conuertere, quae secundum sinus simplices procedat*

Forma hac comparata cum generali $\text{sin.}\,\Phi^m \text{cos.}\,\Phi^n$ erit $m=1$ et $n=-1$, vnde fit $f=-2$, et $g=0$, hincque elicientur valores sequentes:

$A=-2$	$A=-2$
$2B=+4$	$B=+2$
$3C=-4-2=-6$	$C=-2$
$4D=+4+4=+8$	$D=+2$
$5E=-4-6=-10$	$E=-2$
$6F=+4+8=+12$	$F=+2$
etc.	

Cum nunc sit $m=1$; casus ad probl. V pertinet, eritque

$$\frac{2^0\,\text{sin.}\,\Phi}{\text{cos.}\,\Phi}=\text{sin.}\,0\Phi-2\,\text{sin.}(-2\Phi)+2\,\text{sin.}(-4\Phi)-2\,\text{sin.}(-6\Phi)+\text{etc.}$$

vnde concluditur fore:

$$\frac{\text{fin.}\,\Phi}{\text{cof.}\,\Phi} = 2\,\text{fin.}\,2\Phi - 2\,\text{fin.}\,4\Phi + 2\,\text{fin.}\,6\Phi - 2\,\text{fin.}\,8\Phi + 2\,\text{fin.}\,10\Phi - \text{etc.}$$

EXEMPLVM 2.

29. *Cotangentem cuiusuis anguli Φ, feu hanc expreffionem $\frac{\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi}$, in feriem conuertere, quae fecundum finus fimplices procedat.*

Pro hoc cafu erit $m = -1$ et $n = 1$, vnde $f = 2$, et $g = 0$; ideoque obtinebitur

$$\begin{array}{ll}
A = 2 & A = 2 \\
2B = 4 - 0; & B = 2 \\
3C = 4 + 2 = 6 & C = 2 \\
4D = 4 + 4 = 8 & D = 2 \\
5E = 4 + 6 = 10 & E = 2
\end{array}$$
etc.

At ob $m = -1$ hic cafus ad Probl. VI. pertinet, eritque

$$\frac{2^{\circ}\,\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi} = -\text{fin.}\,0\Phi - 2\,\text{fin.}(-2\Phi) - 2\,\text{fin.}(-4\Phi) - 2\,\text{fin.}(-6\Phi) - \text{etc.}$$

quae reducitur ad

$$\frac{\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi} = 2\,\text{fin.}\,2\Phi + 2\,\text{fin.}\,4\Phi + 2\,\text{fin.}\,6\Phi + 2\,\text{fin.}\,8\Phi + 2\,\text{fin.}\,6\Phi + \text{etc.}$$

EXEMPLVM 3.

30. *Hanc expreffionem $\frac{\text{fin.}\,\Phi}{\text{cof.}\,\Phi^2}$ in feriem conuertere.*

Ob $m = 1$ et $n = -2$ erit $f = -3$ et $g = -1$, vnde

$A = -3$

$A = -3$	$A = -3$
$2B = +9 + 1 = 10$	$B = +5$
$3C = -15 - 6 = -21$	$C = -7$
$4D = +21 + 15 = 36$	$D = +9$
$5E = -27 - 28 = -55$	$E = -11$
etc.	

Ergo ob $m = 1$ ex Probl. V. habebitur:

$$\frac{\sin.\Phi}{2\cos.\Phi^2} = \sin.(-\Phi) - 3\sin.(-3\Phi) + 5\sin.(-5\Phi) - 7\sin.(-7\Phi) + \text{etc.}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\frac{\sin.\Phi}{\cos.\Phi^2} = -2\sin\Phi + 6\sin.3\Phi - 10\sin 5.\Phi + 14\sin 7\Phi - 18\sin.9\Phi + \text{etc.}$$

cuius progreſſionis lex ſponte patet.

SCHOLION 3.

31. Quoniam in his ſeriebus coefficientes A, B, C, D, etc. progreſſionem, vel terminorum aequalium, vel arithmeticam, conſtituere ſunt inuenti, in genere obſeruo, primo hos coefficientes ſecundum terminos aequales progredi, quoties fuerit $2 - f + g = 0$, ſeu $g - f = -2$, hoc eſt: ſi ſit $m = -1$, hocque caſu omnes terminos eodem ſigno fore affectos. Sin autem ſit $n = -1$, terminos quidem fore aequales, ſed ſignis alternis praeditos. Deinde noto, ſi ſit vel $m = -2$, vel $n = -2$, ſeriem coefficientium A, B, C, etc. fore arithmeticam, priorique caſu omnes terminos paribus, poſteriori vero alternantibus ſignis affectos. Sin autem ſit vel $m = -3$, vel $n = -3$, ſeriem prodire ſecundi ordinis, vel eodem, vel alternantibus, ſignis progredientem, et ita porro. Verum hic eſt animaduertendum, vt huiusmodi ſeries, quales

 dixi,

dixi, proueniant, si pro m, vel n, numerus negatiuus integer accipiatur, alterum numerum oportere esse affirmatiuum integrum illo non maiorem.

PROBLEMA VII.

32. Si fuerit $S = A + B\cos.2\Phi + C\cos.4\Phi + D\cos.6\Phi +$ etc. inuenire seriem ipsi $\frac{S\,\sin.\Phi}{\cos.\Phi}$ aequalem.

SOLVTIO.

Ponatur $\frac{S\,\sin.\Phi}{\cos.\Phi} = \beta\sin.2\Phi + \gamma\sin.4\Phi + \delta\sin.6\Phi + \varepsilon\sin.8\Phi +$ etc. eritque per $2\cos.\Phi$ multiplicando:

$$2S\sin.\Phi = \beta\sin.\Phi + \begin{matrix}\beta \\ +\gamma\end{matrix}\sin.3\Phi + \begin{matrix}\gamma \\ +\delta\end{matrix}\sin.5\Phi + \begin{matrix}\delta \\ +\varepsilon\end{matrix}\sin.7\Phi \text{ etc.}$$

Quodsi autem ipsa series proposita per $2\sin.\Phi$ multiplicetur prodibit:

$$2S\sin.\Phi = 2A\sin.\Phi + \begin{matrix}B \\ -B\end{matrix}\sin.3\Phi + \begin{matrix}C \\ -C\end{matrix}\sin.5\Phi + \begin{matrix}D \\ -D\end{matrix}\sin.7\Phi \begin{matrix} \\ -E\end{matrix} \text{ etc.}$$

Similibus ergo terminis inter se aequandis obtinebitur

$$\begin{aligned}
\beta &= 2A - B \\
\gamma &= B - C - \beta = -C + 2B - 2A \\
\delta &= C - D - \gamma = -D + 2C - 2B + 2A \\
\varepsilon &= D - E - \delta = -E + 2D - 2C + 2B - 2A \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

vnde valores coefficientium β, γ, δ, etc. facile definiuntur. Q. E. F.

COROLL. 1.

33. Si series S finito terminorum numero constet, altera series S tang. Φ vel in infinitum excurret, vel

vel alicubi terminabitur, quod posterius eueniet, si fuerit $A - B + C - D + \text{etc.} = 0$.

COROLL. 2.

34. At $A - B + C - D + \text{etc.}$ est valor seriei propositae S casu quo angulus Φ fit rectus; series ergo $S \,\text{tang.}\, \Phi$ non abrumpitur, nisi series S ita sit comparata, vt casu $\Phi =$ angulo recto in nihilum abeat.

PROBLEMA VIII.

35. Si proposita fuerit haec series:

$$S = B \,\text{sin.}\, 2\Phi + C \,\text{sin.}\, 4\Phi + D \,\text{sin.}\, 6\Phi + E \,\text{sin.}\, 8\Phi + \text{etc.}$$

inuenire seriem, quae exprimat valorem formulae $\frac{S \,\text{sin.}\, \Phi}{\text{cos.}\, \Phi}$.

SOLVTIO.

Ponatur series quaesita:

$$\frac{S \,\text{sin.}\, \Phi}{\text{cos.}\, \Phi} = \alpha + \beta \,\text{cos.}\, 2\Phi + \gamma \,\text{cos.}\, 4\Phi + \delta \,\text{cos.}\, 6\Phi + \varepsilon \,\text{cos.}\, 8\Phi + \text{etc.}$$

quae per $2 \,\text{cos.}\, \Phi$ multiplicata dat:

$$\begin{aligned} 2S \,\text{sin.}\, \Phi = 2\alpha \,\text{cos.}\, \Phi &+ \beta \,\text{cos.}\, 3\Phi + \gamma \,\text{cos.}\, 5\Phi + \delta \,\text{cos.}\, 7\Phi + \varepsilon \,\text{cos.}\, 9\Phi + \text{etc.} \\ +\beta \quad &+\gamma \qquad\quad +\delta \qquad\quad +\varepsilon \qquad\quad +\zeta \end{aligned}$$

vnde terminis similibus aequandis elicitur:

$$\begin{aligned} \beta &= B - 2\alpha \\ \gamma &= C - B - \beta = C - 2B + 2\alpha \\ \delta &= D - C - \gamma = D - 2C + 2B - 2\alpha \\ \varepsilon &= E - D - \delta = E - 2D + 2C - 2B + 2\alpha \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Coefficiens ergo α manet indeterminatus, pro eoque pro lubitu valor assumi potest. Q. E. F.

COROLL. 1.

36. Si ergo in ſerie propoſita ponatur $B=o$; $C=o$; $D=o$; etc. ita vt quoque ſit $S=o$, fiet $\beta=-2\alpha$; $\gamma=+2\alpha$; $\delta=-2\alpha$; $\varepsilon=+2\alpha$; etc. in infinitum: vnde prodibit:

$$o=\alpha-2\alpha\operatorname{cof}.2\Phi+2\alpha\operatorname{cof}.4\Phi-2\alpha\operatorname{cof}.6\Phi+2\alpha\operatorname{cof}8\Phi-\text{etc.}$$

Huiusmodi ergo ſeries, ſeriei cuicunque addita, eius ſummam non mutat, vnde ratio patet, cur valor ipſius α non determinetur.

COROLL. 2.

37. Si ſeries S non in infinitum excurrat, tum ſemper pro α eiusmodi valor accipi poterit, vt etiam ſeries pro $\frac{S\,\text{ſin}.\,\Phi}{\text{coſ}.\,\Phi}$ non in infinitum excurrat. Scilicet ſi ſeriei S omnes termini euaneſcant, vt ſit $S=o$, tum capiatur $\alpha=o$, fietque etiam $\frac{S\,\text{ſin}.\,\Phi}{\text{coſ}.\,\Phi}=o$

COROLL. 3.

38. Si ſeries S vnico termino conſtet, ſeu ſit $S=B\,\text{ſin}.\,2\,\Phi$, fiat $\alpha=B$, vt ſit $\beta=-B$, reperienturque $\gamma=o$, $\delta=o$, $\varepsilon=o$, etc. ſicque prodibit $S\,\text{tang}.\,\Phi$ $=B-B\,\text{coſ}.\,2\,\Phi$.

COROLL. 4.

39. Si ſeries S duos tantum habeat terminos, vt ſit

$$S=B\,\text{ſin}.\,2\,\Phi+C\,\text{ſin}.\,4\,\Phi$$

capiatur $\alpha=B-C$, fientque coefficientes δ, ε, ζ, etc. nihilo aequales, ita vt ſit

S tang.

$S \text{ tang.} \Phi = \alpha + \beta \cos. 2\Phi + \gamma \cos. 4\Phi$

COROLL. 5.

40. Hinc igitur patet, si series S finito terminorum numero constet, vt etiam series $S \text{ tang. } \Phi = \frac{S \sin. \Phi}{\cos. \Phi}$ fiat finita, tum valorem ipsius α ita capi oportere, vt sit

$\alpha = B - C + D - E + F - G \text{ etc.}$

quo assumto reliqui coefficientes facile reperientur.

PROBLEMA. IX.

41. Si proposita sit haec series

$S = A \cos. \Phi + B \cos. 3\Phi + C \cos. 5\Phi + D \cos. 7\Phi + E \cos. 9\Phi + \text{etc.}$

inuenire seriem, quae exprimat valorem formulae $\frac{S \sin \Phi}{\cos. \Phi}$.

SOLVTIO.

Ponatur series quaesita

$\frac{S \sin. \Phi}{\cos. \Phi} = \alpha \sin \Phi + \beta \sin. 3\Phi + \gamma \sin. 5\Phi + \delta \sin. 7\Phi + \varepsilon \sin. 9\Phi + \text{etc.}$

quae per $2 \cos. \Phi$ multiplicata dat:

$$\begin{array}{llllll} 2S \sin. \Phi = \alpha \sin. 2\Phi & + \beta \sin. 4\Phi & + \gamma \sin. 6\Phi & + \delta \sin. 8\Phi & + \varepsilon \sin. 10\Phi & \text{etc.} \\ \quad + \beta & + \gamma & + \delta & + \varepsilon & + \zeta & \end{array}$$

At ipsa series proposita per $2 \sin. \Phi$ multiplicata dat:

$$\begin{array}{llllll} 2S \sin. \Phi = A \sin. 2\Phi & + B \sin. 4\Phi & + C \sin 6\Phi & + D \sin. 8\Phi & + E \sin. 10\Phi & \text{etc.} \\ \quad - B & - C & - D & - E & - F & \end{array}$$

vnde sequentes prodeunt determinationes

$\beta = A - B - \alpha$

$\gamma = B - C - \beta = - C + 2B - A + \alpha$

$\delta = C - D - \gamma = - D + 2C - 2B + A - \alpha$

$\varepsilon = D - E - \delta = - E + 2D - 2C + 2B - A + \alpha$

$\zeta = E - F - \varepsilon = - F + 2E - 2D + 2C - 2B + A - \alpha$

etc.

vbi iterum coefficiens α non determinatur, ſed arbitrio noſtro relinquitur. Q. E. I.

COROLL. 1.

42. Si omnes coeffi ientes A, B, C, etc. euaneſcant, vt ſit $S = 0$, fiet $\beta = -\alpha$; $\gamma = +\alpha$; $\delta = -\alpha$; $\varepsilon = +\alpha$; etc. ideoque erit

$$0 = \alpha \sin.\Phi - \alpha \sin.3\Phi + \alpha \sin.5\Phi - \alpha \sin.7\Phi + \alpha \sin.9\Phi - \text{etc.}$$

ſeu $\sin.\Phi - \sin.3\Phi + \sin.5\Phi - \sin.7\Phi + \sin.9\Phi - \text{etc.} = 0$

Supra autem inuenimus (34) eſſe

$$\cos.2\Phi - \cos.4\Phi + \cos.6\Phi - \cos.8\Phi + \cos.10\Phi - \text{etc.} = \tfrac{1}{2}$$

COROLL. 2.

43. Si ergo ſeries propoſita S finito terminorum numero conſtet, pro α eiusmodi valor accipi poteſt, vt etiam ſerie $S \tang.\Phi$ finito terminorum numero conſtet. Capi ſcilicet debet:

$$\alpha = A - 2B + 2C - 2D + 2E - \text{etc.}$$

PROBLEMA X.

44. Si propoſita ſit haec ſeries

$$S = A\sin.\Phi + B\sin.3\Phi + C\sin.5\Phi + D\sin.7\Phi + E\sin.9.\Phi + \text{etc.}$$

inuenire ſeriem, quae exprimat valorem formulae $\frac{S\sin.\Phi}{\cos.\Phi}$

SOLVTIO.

Ponatur ſeries quaeſita:

$$\frac{S\sin.\Phi}{\cos.\Phi} = \alpha\cos.\Phi + \beta\cos.3\Phi + \gamma\cos.5\Phi + \delta\cos.7\Phi + \varepsilon\cos.9\Phi + \text{etc.}$$

quae per $2\cos.\Phi$ multiplicata dat:

2S

$$2S\,\text{fin.}\Phi = \alpha + \alpha\cos.2\Phi + \beta\cos.4\Phi + \gamma\cos.6\Phi + \delta\cos.8\Phi + \varepsilon\cos.10\Phi \text{ etc.}$$
$$\qquad\quad +\beta \qquad\quad +\gamma \qquad\quad +\delta \qquad\quad +\varepsilon \qquad\quad +\zeta$$

Si autem ipsa series proposita per $2\,\text{fin.}\Phi$ multiplicetur habebitur.

$$2S\,\text{fin}\,\Phi = A - A\cos.2\Phi - B\cos.4\Phi - C\cos.6\Phi - D\cos.8\Phi - E\cos.10\Phi \text{ etc.}$$
$$\qquad\quad +B \qquad\quad +C \qquad\quad +D \qquad\quad +E \qquad\quad +F$$

vnde sequentes eliciuntur coefficientium quaesitorum determinationes.

$\alpha = A$

$\beta = B - A - \alpha = B - 2A$

$\gamma = C - B - \beta = C - 2B + 2A$

$\delta = D - C - \gamma = D - 2C + 2B - 2A$

$\varepsilon = E - D - \delta = E - 2D + 2C - 2B + 2A$

$\zeta = F - E - \varepsilon = F - 2E + 2D - 2C + 2B - 2A$

etc.

Hoc igitur casu omnes coefficientes quaesiti determinantur, nullusque eorum arbitrio nostro relinquitur. Q. E. I.

COROLL. 1.

45. Si series proposita S finito terminorum numerorum constet, fieri potest, vt series $\frac{S\,\text{fin.}\Phi}{\text{cof.}\Phi}$ vel quoque sit finita, vel in infinitum excurrat. Prius eueniet, si coefficientes A, B, C, etc. ita fuerint comparati, vt sit

$$A - B + C - D + F - \text{etc.} = 0$$

COROLL. 2

46. Series autem proposita S abit in $A-B+C-D+$ etc. si angulus Φ statuatur rectus; quare si valor seriei S

Bb 2 euanescat,

euanescat posito $\Phi = 90^\circ$, tum series $\frac{S\,\text{fin.}\,\Phi}{\text{cof.}\,\Phi}$ finito constabit terminorum numero, siquidem series S fuerit talis:

SCHOLION. 1.

47. Quatuor haec problemata methodum suppeditant, formulas supra (26) exhibitas facilius inueniendi: atque haec problemata ita adornaui, vt has formulas ordine retrogrado scriptas praeberent. Cum enim valor expressionis 2^{n-1} cos. Φ^n iam supra per progressionem cosinuum simplicium sit erutus, inde horum problematum ope istae formulae:

$2^{n-1}\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^{n-1}$; $2^{n-1}\text{fin.}\,\Phi^2\text{cof.}\,\Phi^{n-2}$; $2^{n-1}\text{fin.}\,\Phi^3\text{cof.}\,\Phi^{n-3}$; etc.
in similes progressiones conuerti poterunt: ac si quidem exponens n fuerit numerus par, negotium per bina problemata priora conficietur, si autem n sit numerus impar, per bina posteriora. Quoniam has formulas iam ad potestatem septimam exhibuimus; sumamus potestatem octauam ex §. 9.

$$128\,\text{cof.}\,\Phi^8 = 35 + 56\,\text{cof.}\,2\Phi + 28\,\text{cof.}\,4\Phi + 8\,\text{cof.}\,6\Phi + \text{cof.}\,8\Phi$$

et in problemate VII. sit $S = 128\,\text{cof.}\,\Phi^8$, erit

$$A = 35;\ B = 56,\ C = 28,\ D = 8,\ E = 1$$

vnde eruitur:

$$\begin{aligned} \beta &= 70 - 56 &&= 14 \\ \gamma &= 56 - 28 - 14 &&= 14 \\ \delta &= 28 - 8 - 14 &&= 6 \\ \varepsilon &= 8 - 1 - 6 &&= 1 \end{aligned}$$

sicque erit:

$$128\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^7 = 14\,\text{fin.}\,2\Phi + 14\,\text{fin.}\,4\Phi + 6\,\text{fin.}\,6\Phi + \text{fin.}\,8\Phi$$

Sit

Sit nunc in problemate VIII. $S = 128\,\sin.\Phi\cos.\Phi^7$ ideoque

$$B = 14;\; C = 14;\; D = 6;\; E = 1;$$

et capiatur $\alpha = B - C + D - E = 5$ (§. 40.) erit

$$\begin{array}{ll} \beta = 14 - 10 & = 4 \\ \gamma = 14 - 14 - 4 & = -4 \\ \delta = 6 - 14 + 4 & = -4 \\ \varepsilon = 1 + 6 + 4 & = -1 \end{array}$$

et hanc ob rem:

$$128\,\sin.\Phi^2\cos.\Phi^6 = 5 + 4\cos.2\Phi - 4\cos.4\Phi - 4\cos.6\Phi - \cos 8\Phi$$

sit denuo in problemate VII. $S = 128\,\sin.\Phi^2\cos.\Phi^6$ et

$$A = 5;\; B = 4;\; C = -4;\; D = -4;\; E = -1$$

reperieturque:

$$\begin{array}{ll} \beta = 10 - 4 & = 6 \\ \gamma = 4 + 4 - 6 & = 2 \\ \delta = -4 + 4 - 2 & = -2 \\ \varepsilon = -4 + 1 + 2 & = -1 \end{array}$$

Ergo

$$128\,\sin.\Phi^3\cos.\Phi^5 = 6\sin.2\Phi + 2\sin.4\Phi - 2\sin.6\Phi - \sin.8\Phi$$

Nunc in problemate VIII. sit $S = 128\,\sin.\Phi^3\cos.\Phi^5$ atque

$$B = 6;\; C = 2;\; D = -2;\; E = -1$$

et capiatur $\alpha = B - C + D - E = 3$

$$\begin{array}{ll} \beta = 6 - 6 & = 0 \\ \gamma = 2 - 6 - 0 & = -4 \\ \delta = -2 - 2 + 4 & = 0 \\ \varepsilon = -1 + 2 - 0 & = 1 \end{array}$$: ergo

$$128\,\text{fin.}\,\Phi^4\,\text{cof.}\,\Phi^4 = 3 * - 4\,\text{cof.}\,4\Phi * + 1\,\text{cof.}\,8\Phi.$$

Sit nunc in problemate VII. $S = 128\,\text{fin.}\,\Phi^4\,\text{cof.}\,\Phi^4$ et

$$A = 3;\ B = 0;\ C = -4;\ D = 0;\ E = 1,$$

sumaturque

$$\begin{aligned}
\beta &= 6 - 0 &&= 6\\
\gamma &= 0 + 4 - 6 &&= -2\\
\delta &= -4 - 0 + 2 &&= -2\\
\varepsilon &= 0 - 1 + 2 &&= +1 \text{ ergo}
\end{aligned}$$

$$128\,\text{fin.}\,\Phi^5\,\text{cof.}\,\Phi^3 = 6\,\text{fin.}\,2\Phi \quad 2\,\text{fin.}\,4\Phi - 2\,\text{fin.}\,6\Phi + \text{fin.}\,8\Phi$$

Sicque vlterius progrediendo obtinebimus in supplementum §. 26. has formulas inuertendo.

$$\begin{aligned}
128\,\text{cof.}\,\Phi^8 &= +\text{cof.}\,8\Phi + 8\,\text{cof.}\,6\Phi + 28\,\text{cof.}\,4\Phi + 56\,\text{cof.}\,2\Phi + 35\\
128\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^7 &= +\text{fin.}\,8\Phi + 6\,\text{fin.}\,6\Phi + 14\,\text{fin.}\,4\Phi + 14\,\text{fin.}\,2\Phi\\
128\,\text{fin.}\,\Phi^2\,\text{cof.}\,\Phi^6 &= -\text{cof.}\,8\Phi - 4\,\text{cof.}\,6\Phi - 4\,\text{cof.}\,4\Phi + 4\,\text{cof.}\,2\Phi + 5\\
128\,\text{fin.}\,\Phi^3\,\text{cof.}\,\Phi^5 &= -\text{fin.}\,8\Phi - 2\,\text{fin.}\,6\Phi + 2\,\text{fin.}\,4\Phi + 6\,\text{fin.}\,2\Phi\\
128\,\text{fin.}\,\Phi^4\,\text{cof.}\,\Phi^4 &= +\text{cof.}\,8\Phi \quad * \quad - 4\,\text{cof.}\,4\Phi \quad * \quad + 3\\
128\,\text{fin.}\,\Phi^5\,\text{cof.}\,\Phi^3 &= +\text{fin.}\,8\Phi - 2\,\text{fin.}\,6\Phi - 2\,\text{fin.}\,4\Phi + 6\,\text{fin.}\,2\Phi\\
128\,\text{fin.}\,\Phi^6\,\text{cof.}\,\Phi^2 &= -\text{cof.}\,8\Phi + 4\,\text{cof.}\,6\Phi - 4\,\text{cof.}\,4\Phi - 4\,\text{cof.}\,2\Phi + 5\\
128\,\text{fin.}\,\Phi^7\,\text{cof.}\,\Phi &= -\text{fin.}\,8\Phi + 6\,\text{fin.}\,6\Phi - 14\,\text{fin.}\,4\Phi + 14\,\text{fin.}\,2\Phi\\
128\,\text{fin.}\,\Phi^8 &= +\text{cof.}\,8\Phi - 8\,\text{cof.}\,6\Phi + 28\,\text{cof.}\,4\Phi - 36\,\text{cof.}\,2\Phi + 35
\end{aligned}$$

SCHOLION. 2.

48. Simili modo, pro vsu probl. IX. et X. ostendendo, fit

$$256\,\text{cof.}\,\Phi^9 = 126\,\text{cof.}\,\Phi + 84\,\text{cof.}\,3\Phi + 36\,\text{cof.}\,5\Phi + 9\,\text{cof.}\,7\Phi + \text{cof.}\,9\Phi$$

Sitque in probl. IX. $S = 256\,\text{cof.}\,\Phi^9$, atque

A =

$A = 126;\ B = 84,\ C = 36,\ D = 9;\ E = 1$

capiatur $\alpha = A - 2B + 2C - 2D + 2E = 14$

$$\begin{aligned}
\beta &= 126 - 84 - 14 = 28\\
\gamma &= 84 - 36 - 28 = 20\\
\delta &= 36 - 9 - 20 = 7\\
\varepsilon &= 9 - 1 - 7 = 1 \text{ ergo}
\end{aligned}$$

$$256 \sin.\Phi \cos.\Phi^8 = 14 \sin.\Phi + 28 \sin.3\Phi + 20 \sin.5\Phi + 7 \sin.7\Phi + \sin.9\Phi$$

In probl. X. fit $S = 256 \sin.\Phi \cos.\Phi^8$ et

$A = 14;\ B = 28,\ C = 20,\ D = 7;\ E = 1$

$$\begin{aligned}
\alpha &= 14\\
\beta &= 28 - 14 - 14 = 0\\
\gamma &= 20 - 28 - 0 = -8\\
\delta &= 7 - 20 + 8 = -5\\
\varepsilon &= 1 - 7 + 5 = -1 \text{ ergo}
\end{aligned}$$

$$256 \sin.\Phi^2 \cos.\Phi^7 = 14 \cos.\Phi * - 8 \cos.5\Phi - 5 \cos.7\Phi - \cos.9\Phi$$

In probl. IX. fit. $S = 256 \sin, \Phi^2 \cos, \Phi^7$ et

$A = 14;\ B = 0;\ C = -8,\ D = -5,\ E = -1$

capiatur $\alpha = 14 - 0 - 16 + 10 - 2 = +6$

$$\begin{aligned}
\beta &= 14 - 0 - 6 = +8\\
\gamma &= 0 + 8 - 8 = 0\\
\delta &= -8 + 5 - 0 = -3\\
\varepsilon &= -5 + 1 + 3 = -1 \text{ ergo}
\end{aligned}$$

$$256 \sin.\Phi^3 \cos.\Phi^6 = 6 \sin.\Phi + 8 \sin.3\Phi * - 3 \sin.7\Phi - \sin.9\Phi$$

In

In probl. X. fit $S = 256$ fin. Φ^3 cof. Φ^6, et

$A = 6$; $B = 8$; $C = 0$; $D = -3$; $E = -1$

fiet $\alpha = \quad 6$

$\beta = \quad 8 - 6 - 6 = -4$

$\gamma = \quad 0 - 8 + 4 = -4$

$\delta = -3 - 0 + 4 = +1$

$\varepsilon = -1 + 3 - 1 = -1$ ergo

$$256 \text{fin.}\Phi^4 \text{cof.}\Phi^5 = 6\text{cof.}\Phi \; 4\text{cof.}3\Phi - 4\text{cof.}5\Phi + \text{cof.}7\Phi + \text{cof.}9\Phi$$

vnde in fupplementum §. 26. habebitur

$$256 \;\text{cof.}\; \Phi^9 = + \text{cof.}\,9\Phi + 9\,\text{cof.}\,7\Phi + 36\,\text{cof.}\,5\Phi + 84\,\text{cof.}\,3\Phi + 126\,\text{cof.}\,\Phi$$
$$256\,\text{fin.}\,\Phi\;\text{cof.}\,\Phi^8 = + \text{fin.}\,9\Phi + 7\,\text{fin.}\,7\Phi + 20\,\text{fin.}\,5\Phi + 28\,\text{fin.}\,3\Phi + 14\,\text{fin.}\,\Phi$$
$$256\,\text{fin.}\,\Phi^2\;\text{cof.}\,\Phi^7 = - \text{cof.}\,9\Phi - 5\,\text{cof.}\,7\Phi - 8\,\text{cof.}\,5\Phi \quad * \quad + 14\,\text{cof.}\,\Phi$$
$$256\,\text{fin.}\,\Phi^3\;\text{cof.}\,\Phi^6 = - \text{fin.}\,9\Phi + 3\,\text{fin.}\,7\Phi \quad * \quad + 8\,\text{fin.}\,3\Phi + 6\,\text{fin.}\,\Phi$$
$$256\,\text{fin.}\,\Phi^4\;\text{cof.}\,\Phi^5 = + \text{cof.}\,9\Phi - \text{cof.}\,7\Phi - 4\,\text{cof.}\,5\Phi - 4\,\text{cof.}\,3\Phi + 6\,\text{cof.}\,\Phi$$
$$256\,\text{fin.}\,\Phi^5\;\text{cof.}\,\Phi^4 = + \text{fin.}\,9\Phi - \text{fin.}\,7\Phi - 4\,\text{fin.}\,5\Phi + 4\,\text{fin.}\,3\Phi + 6\,\text{fin.}\,\Phi$$
$$256\,\text{fin.}\,\Phi^6\;\text{cof.}\,\Phi^3 = - \text{cof.}\,9\Phi + 3\,\text{cof.}\,7\Phi \quad * \quad - 8\,\text{cof.}\,3\Phi + 6\,\text{cof.}\,\Phi$$
$$256\,\text{fin.}\,\Phi^7\;\text{cof.}\,\Phi^2 = - \text{fin.}\,9\Phi + 5\,\text{fin.}\,7\Phi - 8\,\text{fin.}\,5\Phi \quad * \quad + 14\,\text{fin.}\,\Phi$$
$$256\,\text{fin.}\,\Phi^8\;\text{cof.}\,\Phi = + \text{cof.}\,9\Phi - 7\,\text{cof.}\,7\Phi + 20\,\text{cof.}\,5\Phi - 28\,\text{cof.}\,3\Phi + 14\,\text{cof.}\,\Phi$$
$$256 \;\text{fin.}\; \Phi^9 = + \text{fin.}\,9\Phi - 9\,\text{fin.}\,7\Phi + 36\,\text{fin.}\,5\Phi - 84\,\text{fin.}\,3\Phi + 126\,\text{fin.}\,\Phi$$

Hoc igitur modo iftas formulas, quo vsque libuerit, continuare licet.

THEOREMA.

49. Si affignari queat fumma huius feriei

$$Az^m + Bz^{m+n} + Cz^{m+2n} + Dz^{m+3n} Ez^{m+4n} + \text{etc.} = Z$$

femper quoque exhiberi poterunt fummae harum feriерum:

$$A\,\text{cof.}\,m\Phi + B\,\text{cof.}(m+n)\Phi + C\,\text{cof.}(m+2n)\Phi + D\,\text{cof.}(m+3n)\Phi + \text{etc.}$$

$$A\,\text{fin.}\,m\Phi + B\,\text{fin.}(m+n)\Phi + C\,\text{fin.}(m+2n)\Phi + D\,\text{fin.}(m+3n)\Phi + \text{etc.}$$

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Ponantur summae harum serierum:

$$A\cos. m\Phi + B\cos.(m+n)\Phi + C\cos.(m+2n)\Phi + D\cos.(m+3n)\Phi + \text{etc.} = S$$

$$A\sin. m\Phi + B\sin.(m+n)\Phi + C\sin(m+2n)\Phi + D\sin.(m+3n)\Phi + \text{etc.} = T$$

sitque vt supra

$$\cos.\Phi + \sqrt{-1}.\sin.\Phi = u \text{ et } \cos.\Phi - \sqrt{-1}.\sin.\Phi = v$$

erit $\cos.\nu\Phi + \sqrt{-1}.\sin.\nu\Phi = u^\nu$ et $\cos.\nu\Phi - \sqrt{-1}.\sin.\nu\Phi = v^\nu$

Hinc ergo erit

$$S + T\sqrt{-1} = Au^m + Bu^{m+n} + Cu^{m+2n} + Du^{m+3n} + \text{etc.} = U$$

$$S - T\sqrt{-1} = Av^m + Bv^{m+n} + Cv^{m+2n} + Dv^{m+3n} + \text{etc.} = V$$

Summae scilicet harum serierum U et V per hypothesin dantur, cum U et V tales sint functiones ipsarum u et v, qualis functio Z est ipsius z. Hinc itaque elicitur $S = \frac{U+V}{2}$ et $T = \frac{U-V}{2\sqrt{-1}}$; ideoque summae propositarum serierum S et T innotescunt. Q. E. D.

COROLL. 1.

50. Cum sit $z^m + az^{m+n} + a^2z^{m+2n} + a^3z^{m+3n} + \text{etc.}$

$$= \frac{z^m}{1 - az^n}$$

erit $U = \frac{u^m}{1-au^n}$ et $V = \frac{v^m}{1-av^n}$;

Hinc $U + V = \frac{u^m + v^m - a(u^{m-n} + v^{m-n})u^n v^n}{1 - a(u^n + v^n) + a a u^n v^n}$

$U - V = \frac{u^m - v^m - a(u^{m-n} - v^{m-n})u^n v^n}{1 - a(v^n + v^n) + a a u^n v^n}$

At est $uv = 1, u^\nu + v^\nu = 2 \cos. \nu\Phi$; $u^\nu - v^\nu = 2\sqrt{-1}. \sin. \nu\Phi$, vnde fit

$$\frac{+}{U} = \frac{\cos. m\Phi - a\cos(m-n)\Phi}{1 + aa - 2a\cos. n\Phi} = S \quad \text{et}$$

$$\frac{U - V}{2\sqrt{-1}} = \frac{\sin. m\Phi - a\sin.(m-n)\Phi}{1 + aa - 2a\cos. n\Phi} = T$$

Ex quo sequentes habentur summationes:

$\cos. m\Phi + a\cos.(m+n)\Phi + a^2\cos.(m+2n)\Phi + a^3\cos.(m+3n)\Phi$

$+ \text{etc.} = \frac{\cos m\Phi - a\cos.(m-n)\Phi}{1 + aa - 2a\cos. n\Phi}$

$\sin. m\Phi + a\sin.(m+n)\Phi + a^2\sin.(m+2n)\Phi + a^3\sin(m+3n)\Phi$

$+ \text{etc.} = \frac{\sin. m\Phi - a\sin.(m-n)\Phi}{1 + aa - 2a\cos. n\Phi}$

COROLL. 2.

51. Sit $m = 1$ et $n = 1$ erit

$\cos.\Phi + a\cos. 2\Phi + a^2\cos. 3\Phi + a^3\cos. 4\Phi + \text{etc.} = \frac{\cos.\Phi - a}{1 + aa - 2a\cos.\Phi}$

$\sin\Phi + a\sin. 2\Phi + a^2\sin. 3\Phi + a^3\sin. 4\Phi + \text{etc.} = \frac{\sin.\Phi}{1 + aa - 2a\cos.\Phi}$

Si insuper sit $a = 1$ erit

$\cos.\Phi + \cos. 2\Phi + \cos. 3\Phi + \cos. 4\Phi + \text{etc.} = \frac{\cos.\Phi - 1}{2 - 2\cos.\Phi} = -\frac{1}{2}$

$\sin.\Phi + \sin. 2\Phi + \sin. 3\Phi + \sin. 4\Phi + \text{etc.} = \frac{\sin.\Phi}{2 - 2\cos.\Phi} = \frac{1}{2\,\text{tang.}\frac{1}{2}\Phi}$

Sin autem sit $a = -1$ erit

$\cos.\Phi - \cos. 2\Phi + \cos. 3\Phi - \cos. 4\Phi + \text{etc.} \frac{\cos.\Phi + 1}{2 + 2\cos.\Phi} = \frac{1}{2}$

$\sin.\Phi - \sin. 2\Phi + \sin. 3\Phi - \sin. 4\Phi + \text{etc.} = \frac{\sin.\Phi}{2 + 2\cos.\Phi} = \frac{1}{2}\text{tang}\frac{1}{2}\Phi$

COROL.

COROLL. 3.

52. Sit $m = 1$, et $n = 2$, erit

$$\cos.\Phi + a\cos.3\Phi + a^2\cos.5\Phi + a^3\cos.7\Phi + \text{etc.} = \frac{\cos.\Phi - a\cos.\Phi}{1 + aa - 2a\cos.2\Phi}$$

$$\sin.\Phi + a\sin.3\Phi + a^2\sin.5\Phi + a^3\sin.7\Phi + \text{etc.} = \frac{\sin.\Phi + a\sin.\Phi}{1 + aa - 2a\cos.2\Phi}$$

Quodsi ergo sit $a = 1$, erit

$$\cos.\Phi + \cos.3\Phi + \cos.5\Phi + \cos.7\Phi + \text{etc.} = 0$$

$$\sin.\Phi + \sin.3\Phi + \sin.5\Phi + \sin.7\Phi + \text{etc.} = \frac{\sin.\Phi}{1 - \cos.2\Phi} = \frac{1}{2\sin.\Phi}$$

Sin autem sit $a = -1$, erit

$$\cos.\Phi - \cos.3\Phi + \cos.5\Phi - \cos.7\Phi + \text{etc.} = \frac{2\cos.\Phi}{2 + 2\cos.2\Phi} = \frac{1}{2\cos.\Phi}$$

$$\sin.\Phi - \sin.3\Phi + \sin.5\Phi - \sin.7\Phi + \text{etc.} = 0.$$

SCHOLION.

53. Ope huius theorematis ergo, cuius vsus latissime patet, innumerabiles exhiberi possunt series secundum, vel sinus, vel cosinus, multiplorum cuiuspiam anguli progredientes, quarum summa constat. Casum hic quidem tantum euolui, quo coefficientes A, B, C, D etc. in geometrica progressione progrediuntur, verum pari modo calculus ad alias series accommodatur. Praeterea autem hic notasse sufficiat, ex seriebus iam inuentis, innumerabiles alias, tam per differentiationem, quam integrationem, elici posse. Veluti cum sit

$$\cos.\Phi - \cos.2\Phi + \cos.3\Phi - \cos.4\Phi + \cos.5\Phi - \text{etc.} = \tfrac{1}{2}$$

erit differentiando:

$$\sin.\Phi - 2\sin.2\Phi + 3\sin.3\Phi - 4\sin.4\Phi + 5\sin.5\Phi - \text{etc.} = 0$$

denuoque differentiando

$\cos.\Phi - 4\cos.2\Phi + 9\cos.3\Phi - 16\cos.4\Phi + 25\cos.5\Phi - \text{etc.} = 0$
et ita porro.

Illa autem ſeries per $d\Phi$ multiplicata et integrata dat:
$\sin.\Phi - \frac{1}{2}\sin.2\Phi + \frac{1}{3}\sin.3\Phi - \frac{1}{4}\sin.4\Phi + \frac{1}{5}\sin.5\Phi - \text{etc.} = \frac{\Phi}{2}$
vbi additione conſtantis non eſt opus, cum poſito $\Phi = 0$ ſumma ſponte euaneſcat. Si haec per $-d\Phi$ multiplicata denuo integretur, prodibit

$$\cos.\Phi - \tfrac{1}{4}\cos.2\Phi + \tfrac{1}{9}\cos.3\Phi - \tfrac{1}{16}\cos.4\Phi + \text{etc.} = \alpha - \frac{\Phi\Phi}{4}$$

ideoque poſito $\Phi = 0$

$$1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{16} + \text{etc.} = \alpha = \frac{\pi\pi}{12} \text{ vt aliunde conſtat.}$$

Quare ſi ſit $\Phi = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 103^{\circ}, 55^{\mathrm{I}}, 22^{\mathrm{II}}, 58^{\mathrm{III}}, 27^{\mathrm{IV}}$, ſumma iſtius ſeriei euaneſcit. Plurimas alias autem inſignes huiusmodi ſerierum affectiones, ne nimis ſim longus, hic praetermitto.

DE

DE SERIEBVS DIVERGENTIBVS.

Auctore LEON. EVLERO.

§. 1.

Cum ſeries conuergentes ita definiantur, vt conſtent terminis continuo decreſcentibus, qui tandem, ſi ſeries in infinitum proceſſerit penitus euaneſcant; facile intelligitur, quarum ſerierum termini infiniteſimi non in nihilum abeant, ſed vel finiti maneant, vel in infinitum excreſcant, eas, quia non ſunt conuergentes, ad claſſem ſerierum diuergentium referri oportere. Prout igitur termini ſeriei vltimi, ad quos progreſſione in infinitum continuata peruenitur, fuerint vel magnitudinis finitae, vel infinitae, duo habebuntur ſerierum diuergentium genera, quorum vtrumque porro in duas ſpecies ſubdiuiditur, prout vel omnes termini eodem ſint affecti ſigno, vel ſigna + et − alternatim ſe excipiant. Omnino ergo habebimus quatuor ſerierum diuergentium ſpecies, ex quibus maioris perſpicuitatis gratia aliquot exempla ſubiungam.

I. . . . $1+1+1+1+1+1+$ etc.
$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+$ etc.

II. . . . $1-1+1-1+1-1+$ etc.
$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+$ etc.

III. . . . $1+2+3+4+5+6+$ etc.
$1+2+4+8+16+32+$ etc.

IV. . . . $1-2+3-4+5-6+$ etc.
$1-2+4-8+16-32+$ etc.

§. 2. De summis huiusmodi serierum divergentium magnus est dissensus inter Mathematicos, dum alii negant, alii affirmant, eas in vna summa comprehendi posse. Ac primo quidem perspicuum est, serierum, quas ad speciem primam retuli, summas reuera esse infinite magnas, cum terminis actu colligendis ad summam dato quouis numero maiorem perueniatur: vnde nullum quidem est dubium, quin harum serierum summae per huiusmodi expressiones $\frac{a}{0}$ exhiberi queant. Circa reliquas igitur species potissimum versatur controuersia inter Geometras; atque argumenta, quae vtrinque ad sententiam tuendam afferuntur, tanta vi ad persuadendum sunt praedita, vt neutra pars adhuc alteri assensum praebere cogi potuerit.

§. 3. Ex specie secunda Leibnitius primus hanc contemplatus est seriem:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$$

cuius summam valere $= \frac{1}{2}$ statuerat, his satis firmis rationibus innixus: Primum enim haec series prodit, si fractio haec $\frac{1}{1+a}$ per diuisionem continuam more solito in hanc seriem $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 +$ etc. resoluatur, et valor litterae a vnitati aequalis sumatur. Tum vero etiam ad hoc magis confirmandum, iisque, qui calculo non sunt assueti, persuadendum, sequenti vsus est ratiocinio: Si series alicubi terminetur, terminorumque numerus fuerit par, tum valor eius erit $= 0$, sin autem terminorum numerus sit impar, valor seriei erit $= 1$: quodsi ergo series in infinitum progrediatur, numerusque terminorum, neque par, neque impar, censeri queat, summam neque $= 0$, neque $= 1$, esse posse concludit, sed

medium

medium quendam valorem, ab vtroque aeque diuersum, tenere debere, qui fit $= \frac{1}{2}$.

§. 4. Contra haec argumenta ab aduersariis obiici solet; primo fractionem $\frac{1}{1+a}$ non esse aequalem seriei infinitae:

$$1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - \text{ etc.}$$

nisi a sit fractio vnitate minor. Si enim diuisio vspiam abrumpatur, et quoto ex residuo portio debita adiiciatur, fontem paralogismi fore manifestum; fieri namque

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots\ldots \pm a^n \mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$$

et quamuis numerus n statuatur infinitus, tamen fractionem adiectam $\mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$ omitti non licere, nisi re vera euanescat, quod iis tantum casibus, quibus $a < 1$, vsu venit, seriesque euadit conuergens. Reliquis autem casibus semper huius mantissae $\mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$ rationem haberi oportere, et quamuis signo dubio $\mp$, prout n fuerit numerus vel par, vel impar, sit affecta, tamen si n sit infinitus, ideo negligi non posse, quod numerus infinitus neque sit par, neque impar, nullaque propterea habeatur causa, vtrum signum potius sit adhibendum? absurdum enim esse putare, quemquam dari numerum integrum, ne infinitum quidem, qui neque par sit, neque impar.

§. 5. Verum in hac obiectione ab illis, qui seriebus diuergentibus determinatas summas tribuunt, iure reprehendi solet, quod numerus infinitus tanquam numerus determinatus concipiatur, atque adeo vel par, vel

impar

impar ſtatuatur, cum tamen ſit indeterminatus. Statim enim atque ſeries dicatur in infinitum progredi, huic ideae contrarium eſſe, ſi eiusdem ſeriei terminus quidam vltimus etſi infiniteſimus concipiatur: ideoque obiectionem ante memoratam de mantiſſa vltimo termino addenda, vel ſubtrahenda, ſponte euaneſcere. Cum igitur in ſerie infinita nunquam ad finem perueniatur, nunquam etiam ad eiusmodi locum perueniri, vbi neceſſe eſſet mantiſſam illam adiungere; adeoque hanc ipſam mantiſſam nonſolum negligi poſſe, ſed etiam debere, quod nuſquam ei locus relinquitur. Atque haec argumenta, quae ad ſummas ſerierum diuergentium vel aſſerendas, vel refellendas, afferuntur, quoque ad quartam ſpeciem ſpectant, quae nullis praeterea dubiis ipſi propriis vexari ſolet.

§. 6. Sed ii, qui contra ſummas ſerierum diuergentium diſputant, in ſpecie tertia firmiſſimum praeſidium inuenire arbitrantur. Quanquam enim harum ſerierum termini continuo creſcunt, ideoque terminis actu colligendis ad ſummam quouis aſſignabili numero maiores perueniri poteſt, quae eſt definitio infiniti; tamen patroni ſummarum in hac ſpecie eiusmodi ſeries admittere coguntur, quarum ſummae ſint finitae, atque adeo negatiuae, ſeu nihilo minores. Cum enim fractio $\frac{1}{1-a}$ per diuiſionem in ſeriem euoluta det: $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 +$ etc. deberet eſſe:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{etc.}$$
$$-\tfrac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \text{etc.}$$

quod aduerſariis non immerito abſurdiſſimum videtur cum per additionem numerorum affirmatiuorum nunquam

nunquam ad summam negatiuam perueniri queat. Hincque eo magis necessitatem mantissae addendae ante memoratae vrgent, cum ea adiecta perspicuum sit, fore

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 \ldots\ldots + 2^n + \frac{2^{n+1}}{1-2}$$

etiamsi n sit numerus infinitus.

§. 7. Defensores igitur summarum serierum diuergentium ad hoc insigne paradoxon conciliandum, subtile magis, quam verum, discrimen inter quantitates negatiuas statuunt; dum alias nihilo minores, alias vero infinito maiores, seu plusquam infinitas esse arguunt. Alium scilicet valorem ipsius -1 agnosci debere, quando ex subtractione numeri maioris $a+1$, a minori a oriri concipitur, alium vero, quando seriei illi $1+2+4+8+16+$ etc. aequalis reperitur, atque ex diuisione numeri $+1$ per -1 nascitur; illo quippe casu esse numerum nihilo minorem, hoc vero infinito maiorem. Maioris confirmationis gratia afferunt hoc exemplum fractionum:

$$\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{1}{0},\ \tfrac{1}{-1},\ \tfrac{1}{-2},\ \tfrac{1}{-3},\ \text{etc.}$$

quae cum prioribus terminis crescens perspiciatur, etiam continuo crescere sit censenda; vnde concludunt fore $\frac{1}{-1} > \frac{1}{0}$ et $\frac{1}{-2} > \frac{1}{-1}$, sicque porro: ideoque quatenus $\frac{1}{-1}$ per -1 et $\frac{1}{0}$ per infinitum ∞ exprimitur, esse $-1 > \infty$, multoque magis $\frac{-1}{2} > \infty$: quo pacto absurditatem apparentem illam satis ingeniose a se propellunt.

§. 8. Quamuis autem haec distinctio ingeniose excogitata videatur, tamen aduersariis parum satisfacit, atque adeo certitudini analyseos vim afferre videtur. Si enim bini illi valores ipsius -1, quatenus est vel $= 1-2$, vel $= \frac{1}{-1}$, inter se re vera discrepent, vt eos confundere non liceat, certitudo atque vsus regularum, quas in calculis sequimur, penitus tolleretur, quod certe magis foret absurdum, quam id, cuius gratia haec distinctio est excogitata; sin autem sit $1-2 = \frac{1}{-1}$, vti praecepta algebrae postulant, negotium minime conficitur, cum ea ipsa quantitas -1, quae seriei $1+2+4+8+$ etc. aequalis statuitur, sit nihilo minor; ideoque eadem difficultas permaneat. Interim tamen veritati consentaneum videtur, si dicamus easdem quantitates, quae sint nihilo minores, simul infinito maiores censeri posse. Non solum enim ex algebra, sed etiam ex geometria discimus, duplicem dari saltum a quantitatibus positiuis ad negatiuas, alterum per cyphram, seu nihilum, alterum per infinitum: atque adeo quantitates a cyphra, tam crescendo, quam decrescendo, in se redire, et ad eundem terminum 0 reuerti; ita vt quantitates infinito maiores eaedem perinde sint nihilo minores, ac quantitates infinito minores conueniunt cum quantitatibus nihilo maioribus.

§. 9. Qui autem negant has summas serierum divergentium, quae assignari solent, esse iustas, iidem non solum non alias proferunt, sed etiam statuunt omnino pugnare, summam seriei diuergentis tantum imaginari. Conuergentium enim serierum, veluti huius $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+$ etc. ideo tantum summam $=2$ admitti posse, quod quo plures istius seriei terminos actu addamus, eo propius nos ad binarium peruenire: in seriebus vero diuergentibus rem longe secus se habere; quo plures enim terminos addamus, eo magis summas,

quae

quae prodeunt, inter se discrepare, neque ad certum ac determinatum quemdam valorem accedere. Vnde concludunt, ne ideam quidem summae ad series diuergentes transferri posse, eorumque operam, quae in summis serierum diuergentium inuestigandis consumatur, plane esse inutilem, verisque analyseos principiis contrariam.

§ 10. Quantumuis autem iste dissensus realis videatur, tamen neutra pars ab altera vllius erroris argui potest, quoties in analysi huiusmodi serierum vsus occurrit: quod graui argumento esse debet, neutram partem in errore versari, sed totum dissidium in solis verbis esse positum. *Si* enim in calculo peruenio ad hanc seriem $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. eiusque loco substituo $\frac{1}{2}$; nemo certe mihi iure errorem imputabit; qui tamen nemini non in oculos incurreret, si alium quemuis numerum eius seriei loco posuissem; vnde nullum dubium superesse potest, quin series $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. et fractio $\frac{1}{2}$ sint quantitates aequiualentes, alteramque alterius loco semper sine errore substitui licere. Tota igitur quaestio huc tantum redire videtur, an fractionem $\frac{1}{2}$ recte summam seriei $1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. vocemus? quod, qui pertinaciter negant, cum tamen aequiualentiam negare non audeant, vehementer verendum est, ne in logomachiam delabantur.

§. 11. Puto autem, totam hanc litem facile compositum iri, si ad sequentia sedulo attendere velimus. Quoties in analysi ad expressionem vel fractam, vel transcendentem, pertingimus; toties eam in idoneam seriem conuertere solemus, ad quam sequens calculus commodius applicari queat. Eatenus ergo tantum series

 infini-

infinitae in analyſi locum inueniunt, quatenus ex euolutione cuiuspiam expreſſionis finitae ſunt ortae; et hanc ob rem in calculo ſemper loco cuiusque ſeriei infinitae eam formulam, ex cuius evolutione eſt nata, ſubſtituere licet. Hinc quemadmodum ſummo cum fructu regulae tradi ſolent, expreſſiones finitas, ſed forma minus idonea praeditas, in ſeries infinitas conuertendi, ita viciſſim vtiliſſimae ſunt cenſendae regulae, quarum ope, ſi propoſita fuerit ſeries infinita quaecunque, ea expreſſio finita inueſtigari queat, ex qua ea reſultet; et cum haec expreſſio, ſemper ſine errore loco ſeriei infinitae ſubſtitui poſſit, neceſſe eſt, vt vtriusque idem ſit valor; ex quo efficitur, nullam dari ſeriem infinitam, quin ſimul expreſſio finita illi aequiualens concipi queat.

§. 12. Si igitur receptam ſummae notionem ita tantum immutemus, vt dicamus, cuiusque ſeriei ſummam eſſe expreſſionem finitam, ex cuius euolutione illa ipſa ſeries naſcatur; omnes difficultates, quae ab vtraque parte ſunt commotae, ſponte euaneſcent. Primo enim ea expreſſio, ex cuius euolutione naſcitur ſeries conuergens, eius ſimul ſummam, voce hac vulgari ſenſu accepta, exhibet, neque ſi ſeries fuerit diuergens, quaeſtio amplius abſurda reputari poterit, ſi eam indagemus expreſſionem finitam, quae ſecundum regulas analyticas euoluta, illam ipſam ſeriem producat. Et quoniam iſtam expreſſionem in calculo loco eius ſeriei ſubſtituere licet, quin eidem ſit aequalis, dubitare non poterimus. Quo euicto, ne a recepto quidem loquendi vſu recedimus, ſi eam expreſſionem, quae cuipiam ſeriei aequalis eſt, eius quoque ſummam vocemus: dummodo pro

ſeriebus

feriebus diuergentibus, non eam notionem cum idea fummae coniungamus, quod, quo plures termini actu colligantur, eo propius ad valorem fummae accedi debeat.

§. 13. His praemiffis neminem fore arbitror, qui me reprehendendum putet, quod in fummam fequentis feriei diligentius inquifiuerim:

$$1-1+2-6+24-120+720-5040+40320-\text{etc.}$$

quae eft feries a Wallifio hypergeometrica dicta, fignis alternantibus inftructa. Haec feries autem eo magis notatu digna videtur, quod plures fummandi methodos, quae mihi alias in huiusmodi negotio ingentem vfum praeftiterunt, hic fruftra tentauerim. Primo quidem dubitare licet, vtrum haec feries fummam habeat finitam, nec ne? quia multo magis diuergit, quam vlla feries geometrica; fummam autem geometricarum effe finitam, extra dubium eft pofitum. Veruntamen cum in geometricis diuergentia non obftet, quominus fint fummabiles, ita verifimile videtur, et hanc feriem hypergeometricam fummam habere finitam. Quaeritur ergo in numeris, proxime faltem, valor eius expreffionis finitae, ex cuius euolutione ipfa feries propofita nafcitur.

§. 14. Primo autem vfus fum methodo, quae hoc nititur fundamento: fi propofita fit huiusmodi feries:

$$s=a-b+c-d+e-f+g-h+\text{etc.}$$

atque neglectis fignis terminorum a, b, c, d, e, f, etc. fumantur differentiae: $b-a$, $c-b$, $d-c$, $e-d$, etc. harumque porro differentiae: $c-2b+a$; $d-2c+b$;

$e - 2d + c$, etc. quae dicuntur differentiae secundae; similique lege quaerantur differentiae tertiae, quartae, quintae, etc. tum si harum differentiarum primarum, secundarum, tertiarum, quartarum etc. termini primi sint α, β, γ, δ, etc. dico fore eiusdem seriei propositae summam

$$s = \frac{a}{2} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} - \frac{\gamma}{16} + \frac{\delta}{32} - \text{etc.}$$

quae nisi iam sit conuergens, tamen certo multo magis conuerget, quam proposita; vnde si huic posteriori seriei denuo eadem methodus applicetur, valor, seu summa quaesita s, expressa reperietur per seriem adhuc magis conuergentem.

§. 15. Methodus haec maximam habet vtilitatem in summandis seriebus diuergentibus secundae et quartae speciei, siue tandem ad differentias constantes perueniatur, siue secus, dummodo diuergentia non sit nimis magna. Sic si sit $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.}$

ob $a = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ etc. erit $s = \frac{1}{2}$.

Si sit $s = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{etc.}$

diff. 1 1, 1, 1, 1, 1. etc.

erit $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; vti aliunde satis constat:

si sit $s = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \text{etc.}$

Diff. I . . 3 5 7 9 11

diff. II . . . 2, 2, 2 2

erit $s = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = 0$, vti quoque notum est:

sit sit $s = 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \text{etc.}$

Diff.

Diff. 1 . . . 2, 6, 18, 54, 162
diff. 2 . . . 4, 12, 36, 108
diff. 3 . . . . 8, 24, 72
diff. 4 . . . . . . 16, 48
etc.

eritque $s = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{4}{8} - \frac{8}{16} + \text{etc.} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \text{etc.} = \frac{1}{4}$

§. 16. Adhibeatur iam haec methodus ad feriem propofitam

$A = 1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - 5040 + 40320 - \text{etc.}$

quae ob $1 - 1 = 0$, fi per 2 diuidatur, abit in hanc:

$\frac{A}{2} = 1 - 3 + 12 - 60 + 360 - 2520 + 20160 - 181440 + \text{etc.}$

2, 9, 48, 300, 2160, 17640, 161280
7, 39, 252, 1860, 15480, 143640
32, 213, 1608, 13620, 128160
181, 1395, 12012, 114540
1214, 10617, 102528
9407, 91911
82504

Hinc ergo fequitur fore:

$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{7}{8} - \frac{32}{16} + \frac{181}{32} - \frac{1214}{64} + \frac{9407}{128} - \frac{82504}{255} + \text{etc.}$

feu $A = \frac{7}{4} - \frac{32}{8} + \frac{181}{16} - \frac{1214}{32} + \frac{9407}{64} - \frac{82504}{128} + \text{etc.}$:

$\frac{18}{8}$, $\frac{117}{16}$; $\frac{852}{32}$, $\frac{6979}{64}$, $\frac{63690}{128}$
$\frac{81}{15}$; $\frac{618}{32}$, $\frac{5275}{64}$, $\frac{49732}{128}$
$\frac{456}{32}$, $\frac{4039}{54}$, $\frac{39182}{128}$
$\frac{3127}{64}$; $\frac{31104}{128}$
$\frac{24850}{128}$

Ergo

Ergo $A = \frac{7}{8} - \frac{18}{32} + \frac{81}{128} - \frac{456}{512} + \frac{3127}{2048} - \frac{24850}{8192} +$ ect.

ſeu $A - \frac{5}{16} = \frac{81}{128} - \frac{456}{512} + \frac{3127}{2048} - \frac{24850}{8192} +$ etc.

$$\frac{132}{512};\quad \frac{1303}{2048},\quad \frac{12342}{8192}$$

$$\frac{775}{2048};\quad \frac{7130}{8192}$$

$$\frac{4030}{8192}$$

Ergo $A - \frac{5}{16} = \frac{81}{256} - \frac{132}{2048} + \frac{775}{16384} - \frac{4030}{131072}$

ſeu $A = \frac{5}{16} + \frac{516}{2048} + \frac{2170}{131072}$ etc. $= \frac{38077}{65536} = 0,581$.
Apparet ergo ſummam iſtius ſeriei propemodum eſſe $= 0,581$: ob terminos autem neglectos aliquanto erit maior: quod egregie conuenit cum infra demonſtrandis, vbi huius ſeriei ſumma oſtendetur eſſe $= 0,59634739$: ſimul vero patet, hanc methodum non ſatis eſſe aptam, ad ſummam tam exacte definiendam.

§. 17. Deinde alio modo rem ſic tentaui: ſit propoſita haec ſeries:

$$\begin{array}{lcccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \quad n \quad\; n+1 \\ B \ldots & 1, & 2, & 5, & 16, & 65, & 326, & 1957, & \ldots\; P,\; nP+1 \end{array}$$

differentiae 1, 3, 11, 49, 261, 1631
2, 8, 38, 212, 1370
6, 30, 174, 1158
24, 144, 984
120, 840
720

cuius differentiarum continuarum termini primi ſint 1, 2, 6, 24, 120, 720, etc. erit terminus exponenti n reſpondens

P =

$$P = 1 + (n-1) + (n-1)(n-2) + (n-1)(n-2)(n-3) \\ + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + \text{etc.}$$

Hinc ſi fiat $n=o$, erit terminus exponenti o reſpondens, ſeu primum praecedens $= 1-1+2-6+24-120 +720-\text{etc.} = A$; ita vt ſi huius ſeriei terminus exponenti o reſpondens inueniri poſſet, idem ſimul futurus eſſet valor, ſeu ſumma ſeriei propoſitae

$$A = 1-1+2-6+24-120+720-\text{etc.}$$

Quodſi ergo illa ſeries B inuertatnr, vt habeatur ſeries

$$\begin{array}{llllllll} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ C \ldots\ldots & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{16}, & \frac{1}{65}, & \frac{1}{326}, & \frac{1}{1957}, \text{ etc.} \end{array}$$

erit huius ſeriei terminus exponenti o reſpondens $= \frac{1}{A}$, vnde ex eo quoque valor ipſius A cognoſci poterit. Inchoent huius ſeriei ſingulae differentiae terminis α, β, γ, δ, ε, etc. differentiis ſcilicet hic ita capiendis, vt quiuis terminus a praecedente ſubſtrahatur, erit terminus exponenti n reſpondens:

$$\frac{1}{P} = 1 - (n-1)\alpha + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2}\beta - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3}\gamma + \text{etc.}$$

Ideoque poſito $n=o$, erit per ſeriem certo conuergentem:

$$\frac{1}{A} = 1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$

Eſt vero, has fractiones in decimales conuertendo:

	diff. 1	diff. 2	diff. 3	diff. 4	diff. 5
$\frac{1}{1} = 1,0000000$					
$\frac{1}{2} = 0,5000000$	5000000				
		2000000			
$\frac{1}{5} = 0,2000000$	3000000	1625000	375000	−346154	
$\frac{1}{16} = 0,0625000$	1375000	903846	721154	+165291	−511445
$\frac{1}{65} = 0,0153846$	471154	347983	555863	+305486	−140195
$\frac{1}{325} = 0,0030675$	123171	97606	250377	+173956	+131530
$\frac{1}{1957} = 0,0005110$	25565	21185	76421	+ 58977	+114979
0,0000730	4380	3741	17444	+ 14261	+ 44716
0,0000091	639	558	3183	+ 2697	+ 11564
0,0000010	81	72	486	+ 422	+ 2275
0,0000001	9	8	64	+ 57	+ 365
	1	1	7	+ 6	+ 51
			1		

Ex his ergo differentiis foret $\frac{1}{A} = 1,6517401$, et $A = 0,6$; qui ſatis bene cum ante inuento conuenit: ſed tamen ob differentias quartas, quintas, et aliquot ſequentium negatiuas, haec methodus non ſatis eſt certa.

§. 18. Sumamus ſeriei B ſingulorum terminorum logarithmos, vt habeatur haec noua ſeries

$$\begin{array}{llllllllll} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\ D \ldots & l1, & l2, & l5, & l16, & l65, & l326, & l1957, & l13700, & \text{etc.} \end{array}$$

in cuius differentiis continuis more ſolito ſumtis ſint termini primi α, β, γ, δ, ε, etc. eritque huius ſeriei terminus exponenti o reſpondens $= o - \alpha + \beta - \gamma + \delta - \varepsilon +$ etc. qui igitur erit logarithmus ſummae quaeſitae $= A$. Sunt vero hi logarithmi cum differentiis continuis ſequentes:

diff.

	diff. 1	diff. 2	diff. 3	diff. 4	diff. 5	diff. 6	diff. 7	diff. 8
0,0000000	0,3010300							
0,3010300	0,3979400	969100						
0,6989700	0,5051500	1072100	103000					
1,2041200	0,6087934	1036434	− 35666	− 138666				
1,8129134	0,7203042	915108	− 121326	− 85660	+ 53006	+ 19562		
2,5132176	0,778373	789690	− 134418	− 12092	+ 72568	− 38182	− 57744	+ 65446
3,2915908	0,8451298	667566	− 113124	+ 21294	+ 34386	− 30480	+ 7702	
4,1397206	0,9030940	579642	− 87924	+ 25200	+ 3906			
5,0398146								

ergo erit:

	diff. 1	diff. 2	diff. 3	diff. 4	diff. 5	diff. 6
$lA =$ − 0,3010300 +						
+ 0,0969100 +	+ 2041200	+ 1175100				
− 0,0103000 +	+ 866100	+ 1624434	+ 550666			
− 0,0138666 −	+ 241666	+ 433338	+ 191096	+ 359570	+ 826928	
− 0,0053006 +	− 191672	− 225116	+ 658454	− 467358	− 1307066	+ 2133994
+ 0,0019562 +	+ 33444	− 43862	− 181254	+ 839708	+ 776604	− 2083670
+ 0,0057744 −	+ 77306	+ 200496	− 244358	+ 63104		
+ 0,0065446 +	− 123190					

vnde per methodum ante expositam erit

$$l\frac{1}{A} = \frac{0,3010300}{2} + \frac{2041200}{4} + \frac{1175100}{8} + \frac{550666}{16} + \frac{359570}{32} + \frac{826928}{64} + \text{etc.}$$

seu $l\frac{A}{1} = 0,\ 7779088$ hincque $A = 0,\ 59966$, quem numerum adhuc vero maiorem esse, facile colligere licet. Interim tamen et hoc modo neque satis tuto, neque satis commode, ad cognitionem valoris A perueniri potest, etsi haec methodus infinitas suppeditat vias hunc valorem inuestigandi; quarum quidem aliae aliis ad hunc scopum multo aptiores videntur.

 §. 19.

§. 19. Inveſtigemus nunc etiam analytice huius ſeriei valorem, eam vero in latiori ſenſu accipiamus: ſit igitur

$$s = x - 1x^2 + 2x^3 - 6x^4 + 24x^5 - 120x^6 + \text{etc.}$$

quae differentiata dabit:

$$\frac{ds}{dx} = 1 - 2x + 6xx - 24x^3 + 120x^4 - \text{etc.} = \frac{x-s}{xx}$$

vnde fit $ds + \frac{s\,dx}{xx} = \frac{dx}{x}$, cuius aequationis, ſi e ſumatur pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $=1$, integrale erit $e^{-1:x}s = \int \frac{e^{-1:x}dx}{x}$ et $s = e^{1:x}\int \frac{e^{-1:x}dx}{x}$. Caſu ergo quo $x=1$ erit $1-1+2-6+24-120+$ etc. $= e\int \frac{e^{-1:x}dx}{x}$. Exprimit ergo haec ſeries aream lineae curuae, cuius natura inter abſciſſam x et y hac continetur aequatione $y = \frac{e.e^{-1:x}}{x}$, ſi abſciſſa x ponatur $=1$: ſeu erit $y = \frac{e}{e^{1:x}x}$. Haec autem curua ita eſt comparata, vt poſito $x=0$ fiat $y=0$; ſin autem ſit $x=1$, erit $y=1$: medii vero applicatae valores ita ſe habebunt, vt

ſi ſit

si sit	fiat	si sit	fiat
$x = \frac{0}{10}$	$y = 0$	$x = \frac{5}{10}$	$y = \frac{10}{5e^{5:5}} = \frac{2}{e}$
$x = \frac{1}{10}$	$y = \frac{10}{e^{9:1}}$	$x = \frac{6}{10}$	$y = \frac{10}{6e^{4:6}}$
$x = \frac{2}{10}$	$y = \frac{10}{2e^{8:2}}$	$x = \frac{7}{10}$	$y = \frac{10}{7e^{3:7}}$
$x = \frac{3}{10}$	$y = \frac{10}{3e^{7:3}}$	$x = \frac{8}{10}$	$y = \frac{10}{8e^{2:8}}$
$x = \frac{4}{10}$	$y = \frac{10}{4e^{6:4}}$	$x = \frac{9}{10}$	$y = \frac{10}{9e^{1:9}}$

Hac igitur curva constructa, statim patebit, eius aream abscissae $x = 1$ respondentem, non solum esse finitam, sed etiam minorem esse quadrato lateris $= 1$, maiorem vero eius semissi $\frac{1}{2}$. Quodsi vero basis $x = 1$ in decem partes aequales diuidatur, et portiones areae tanquam trapezia spectentur, et areae inuestigentur, obtinebitur seriei $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. $= A$ valor vero proximus:

$$A = 0 + \frac{1}{e^{9:1}} + \frac{1}{2e^{8:2}} + \frac{1}{3e^{7:3}} + \frac{1}{4e^{6:4}} + \frac{1}{5e^{5:5}} + \frac{1}{6e^{4:6}}$$
$$+ \frac{1}{7e^{3:7}} + \frac{1}{8e^{2:8}} + \frac{1}{9e^{1:9}} + \frac{1}{20}$$

Qui termini, cum sit $e = 2,718281828$, induent sequentes valores:

$$\frac{1}{e^{9:1}} = 0,00012340$$

$$\frac{1}{2e^{8:2}} = 0,00915782$$

$$\frac{1}{3e^{7:3}} = 0,03232324$$

$$\frac{1}{4e^{6:4}} = 0,05578253$$

$$\frac{1}{5e^{5:5}} = 0,07357587$$

$$\frac{1}{6e^{4:6}} = 0,08556950$$

$$\frac{1}{7e^{3:7}} = 0,09306270$$

$$\frac{1}{8e^{2:8}} = 0,09735002$$

$$\frac{1}{9e^{1:9}} = 0,09942656$$

$$\frac{1}{20} = 0,05000000$$

hinc $\mathrm{A} = 0,59637164$

qui valor a vero iam vix ſenſibiliter differt. Si autem abſciſſa in plures partes fuiſſet diuiſa, tum iſte valor accuratius eſſet inuentus.

§. 20. Cum inuenta ſit ſumma $\mathrm{A} = \int \frac{e^{1-1:x}dx}{x}$, ponatur $v = e^{1-1:x}$, ita vt poſito $x = 0$ fiat et $v = 0$, ac ac posito $x = 1$, $v = 1$, erit $1 - \frac{1}{x} = lv$, et $x = \frac{1}{1-lv}$, atque $lx = -l(1-lv)$, vnde fit $\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(1-lv)}$. Quia ergo est $A = \int \frac{v\,dx}{x}$ posito $x = 1$, vel $v = 1$, erit quoque $A = \int \frac{dv}{1-lv}$ posito post integrationem $v = 1$. Erit autem integratione per seriem infinitam peracta $A = \int \frac{dv}{1-lv}$ $= \frac{v}{1-lv} - \frac{1v}{(1-lv)^2} + \frac{1 \cdot 2v}{(1-lv)^3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3v}{(1-lv)^4} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4v}{(1-lv)^5} - \text{etc.}$ et posito $v = 1$ ob $lv = 0$, erit, vti assumsimus,

$$A = 1 - 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \text{etc.}$$

Erit ergo A iterum area curuae, cuius natura inter abscissam v et applicatam y hac exprimitur aequatione $y = \frac{1}{1-lv}$, si quidem ponatur abscissa $v = 1$, quo casu quoque fit $y = 1$. Notari autem hic oportet lv denotare logarithmum hyperbolicum ipsius v. Abscissa ergo $v = 1$ denuo in decem partes diuisa, applicatae in singulis diuisionum punctis se habebunt hoc modo:

si fit	erit	si fit	erit
$v = \frac{0}{10}$	$y = 0$	$v = \frac{5}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l5}$
$v = \frac{1}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l1}$	$v = \frac{6}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l6}$
$v = \frac{2}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l2}$	$v = \frac{7}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l7}$
$v = \frac{3}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l3}$	$v = \frac{8}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l8}$
$v = \frac{4}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l4}$	$v = \frac{9}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l9}$
$v = \frac{5}{10}$	$y = \frac{1}{1 + l10 - l5}$	$v = \frac{10}{10}$	$y = 1$

Hincque iterum per appropinquationem areae valor litterae A satis accurate obtinebitur.

§. 21.

§. 21. Datur vero alius modus in ſummam huius ſeriei inquirendi ex natura fractionum continuarum petitus, qui multo facilius et promtius negotium conficit: ſit enim formulam generalius exprimendo:

$$A = 1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.} = \frac{1}{1+B}$$

$$\text{erit } B = \frac{1x - 2x^2 + 6x^3 - 24x^4 + 120x^5 - 720x^6 + 5040x^7 - \text{etc.}}{1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}} = \frac{x}{1+C}$$

$$\text{et } 1+C = \frac{1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}}{1 - 2x + 6x^2 - 24x^3 + 120x^4 - 720x^5 + 5040x^6 - \text{etc.}}$$

$$\text{Ergo } C = \frac{x - 4x^2 + 18x^3 - 96x^4 + 600x^5 - 4320x^6 + \text{etc.}}{1 - 2x + 6x^2 - 24x^3 + 120x^4 - 720x^5 + \text{etc.}} = \frac{x}{1+D}$$

$$\text{vnde } D = \frac{2x - 12x^2 + 72x^3 - 480x^4 + 3600x^5 - \text{etc.}}{1 - 4x + 18x^2 - 96x^3 + 600x^4 - \text{etc.}} = \frac{2x}{1+E}$$

$$\text{porro } E = \frac{2x - 18x^2 + 144x^3 - 1200x^4 + \text{etc.}}{1 - 6x + 36x^2 - 240x^3 + \text{etc.}} = \frac{2x}{1+F}$$

$$\text{Atque } F = \frac{3x - 36x^2 + 360x^3 - \text{etc.}}{1 - 9x + 72x^2 - 600x^3 + \text{etc.}} = \frac{3x}{1+G}$$

$$\text{Erit } G = \frac{3x - 48x^2 + \text{etc.}}{1 - 12x + 120x^2} = \frac{3x}{1+H}$$

$$\text{Sic } H = \frac{4x - \text{etc.}}{1 - 16x} = \frac{4x}{1+I}$$

Sicque porro patebit fore $I = \frac{4x}{1+K}$, $K = \frac{1x}{5+L}$; $L = \frac{5x}{1+M}$ etc. in infinitum, ita vt harum formularum ordo facile perſpiciatur. His autem valoribus ſucceſſive ſubſtitutis, erit

$$1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.} =$$

A =

$$A = \cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{5x}{1+\cfrac{5x}{1+\cfrac{6x}{1+\cfrac{6x}{1+\cfrac{7x}{\text{etc.}}}}}}}}}}}}}}$$

§. 22. Quemadmodum autem huiusmodi fractionum continuarum valor ſit inveſtigandus, alibi oſtendi: Scilicet cum ſingulorum denominatorum partes integrae ſint vnitates, ſoli numeratores in computum veniunt; ſit ergo $x = 1$, atque inveſtigatio ſummae A ſequenti modo inſtituetur:

$$A = \tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{4}{7},\ \tfrac{8}{13},\ \tfrac{20}{34},\ \tfrac{44}{73},\ \tfrac{124}{209},\ \tfrac{300}{501},\ \text{etc.}$$

num. 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, etc:

Fractiones nimirum hic exhibitae continuo propius ad verum valorem ipſius A accedunt, et quidem alternatim eo ſunt maiores et minores; ita vt ſit:

$A > \frac{0}{1}$; $A > \frac{1}{2}$; $A > \frac{4}{7}$; $A > \frac{20}{34}$; $A > \frac{124}{209}$; etc.
$A < \frac{1}{1}$; $A < \frac{2}{3}$; $A < \frac{8}{13}$; $A < \frac{44}{73}$; $A < \frac{300}{051}$; etc.

Hinc in fractionibus decimalibus erunt ipſius A valores

nimis parui	nimis magni
0,0000000000	1,0000000000
0,5000000000	0,6666666666
0,5714285714	0,6153846153
0,5882352941	0,6027397290
0,5933014354	0,5988023952

Si iam inter terminos nimis magnos et nimis paruos proximos, capiantur media arithmetica, denuo prodibunt valores alternatim nimis magni et nimis parui, qui erunt ſequentes :

Valores nimis parui	nimis magni ipſius A
0,5000000000	0,7500000000
0,5833333333	0,6190476190
0,5934065933	0,6018099546
0,5954875100	0,5980205807
0,5960519153	

ſicque iam ſatis prope ad verum valorem ipſius A pertigimus.

§. 23. Poterimus autem valorem iſtius fractionis infinitae per partes inueſtigare hunc in modum :

ſit A

$$\text{sit } A = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{7}{1+\cfrac{7}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{10}{1+\cfrac{10}{1+p}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}$$

$$\text{et } p = \cfrac{11}{1+\cfrac{11}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{13}{1+\cfrac{13}{1+\cfrac{14}{1+\cfrac{14}{1+\cfrac{15}{1+\cfrac{15}{1+9}}}}}}}}}}$$

$$\text{et } q = \cfrac{16}{1+\cfrac{16}{1+\cfrac{17}{1+\cfrac{17}{1+\cfrac{18}{1+\cfrac{18}{1+\cfrac{19}{1+\cfrac{19}{1+\cfrac{20}{1+\cfrac{20}{1+r}}}}}}}}}}$$

$$\text{erit } r = \cfrac{21}{1+\cfrac{21}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{23}{1+\text{ etc. in infinitum.}}}}}}}$$

 Quibus

Quibus valoribus euolutis reperietur:

$$\text{primo } A = \frac{491459820 + 1399316 20p}{824073141 + 2346622 31p}$$

$$\text{Deinde } p = \frac{2381951 + 649286q}{887640 + 186440q}$$

$$\text{et } q = \frac{11437136 + 2924816r}{3697925 + 643025r}$$

Supereſt igitur, vt valor ipſius r definiatur, quod quidem aeque difficile, ac ipſius A: ſed ſufficit hic valorem ipſius r proxime tantum noſſe; error enim quidam in valore ipſius r commiſſus, multo minorem errorem in valore ipſius q efficit, hincque denuo longe minor error in valorem ipſius p irrepit: ex quo tandem error valorem ipſius A inquinans omnino erit imperceptibilis.

§. 24. Deinde quia numeratores 21, 21, 22, 22, 23, etc. qui in fractionem continuam ipſius r ingrediuntur, iam propius ad aequalitatis rationem accedunt, ſaltem ab initio: hinc ſubſidium peti poteſt, ad eius valorem propius cognoſcendum. Si enim hi numeratores omnes eſſent aequales, vt eſſet

$$r = \cfrac{21}{1 + \cfrac{21}{1 + \cfrac{21}{1 + \cfrac{21}{1 + \text{etc.}}}}}$$

foret $r = \frac{21}{1+r}$

ideoque $rr + r = 21$, et $r = \frac{\sqrt{85} - 1}{2}$

Cum

C m autem hi denominatores crescant, hic valor iusto erit minor: Interim tamen concludere licet, si tres sequentes fractiones continuae constituantur:

$$r = \cfrac{21}{1+\cfrac{21}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{23}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad s = \cfrac{22}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{24}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad t = \cfrac{23}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{24}{1+\cfrac{24}{1+\cfrac{25}{1+\text{etc.}}}}}}$$

valores quantitatum r, s, t, in arithmetica progressione esse processuros, foreque $r + t = 2s$; vnde valor ipsius r satis accurate colligetur. Quo autem haec inuestigatio latius pateat, pro numeris 21, 22, 23, hos indefinitos accipiamus $a-1$, a et $a+1$, vt sit

$$r = \cfrac{a-1}{1+\cfrac{a-1}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a+1}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad s = \cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+2}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad t = \cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+2}{1+\cfrac{a+2}{1+\cfrac{a+3}{1+\text{etc.}}}}}}$$

eritque:

$$r = \cfrac{a-1}{1+\cfrac{a-1}{1+s}} \qquad s = \cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+t}};$$ vnde efficitur:

$$r = \frac{(a-1)s+a-1}{s+a} \text{ et } s = \frac{at+a}{t+a+1} \text{ seu } t = \frac{(a+1)s-a}{a-s}$$

vnde fit $r+t=\frac{2ss+(2aa-2a+1)s-a}{aa-ss}=2s$: ideoque erit $2s^3+2ss-(2a-1)s-a=0$, ex qua aequatione valorem ipſius s hincque porro valorem ipſius r determinare licet.

§. 25. Sit nunc $a=22$, atque habebimus hanc aequationem cubicam reſoluendam.

$$2s^3+2ss-43s-22=0$$

cuius radix ſtatim intra limites 4 et 5 conſtituta deprehenditur. Sit igitur $s=4+u$, eritque

$$34=69u+26uu+2u^3$$

Sit porro $u=0,4+v$ erit $u^2=0,16+0,8u+vv$ atque $u^3=0,064+0,48v+1,2v^2+v^3$, ideoque.

$$2,112=90,76v+28,4v^2+2v^3$$

vnde erit, proxime $v=0,023$, et $s=4,423$. Cum igitur ſit

$$r=\frac{21s+21}{s+22} \text{ fiet } r=\frac{113,883}{26,423}=4,31,$$

hincque porro

$$q=\frac{24043093}{6469363}=3,71645446: \text{ vnde obtinetur}$$

$$p=\frac{4794992,85}{1584252,22}=3,0266600163: \text{ hincque tandem}$$

$$A=\frac{9149852 59,24}{1534315932,90}=0,5963473621237$$

qui

qui valor in fractionem continuam conuerſus dat

$$A = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+\text{etc.}}}}}}}}}}}$$

vnde ſequentes inueniuntur fractiones valorem ipſius A proxime exhibentes:

$$\begin{array}{lcccccccccc} & 1 & 1 & 2 & 10 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 7 \\ A = & \frac{0}{1}, & \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{3}{5}, & \frac{31}{52}, & \frac{34}{57}, & \frac{65}{109}, & \frac{294}{493}, & \frac{653}{1095}, & \frac{1600}{2683} \end{array}$$

Hae autem fractiones alternatim ſunt maiores et minores quam valor ipſius A, ac vltima quidem $\frac{1600}{2683}$ nimis eſt magna, exceſſus tamen minor eſt quam $\frac{1}{2683 \cdot 19876}$; vnde cum ſit

$\frac{1}{A} = \frac{2683}{1600}$ erit proxime $\frac{1}{A} = 1,676875$

§. 26. Methodus, qua ſupra in §. 21. ſum vſus ad ſeriem hanc

$$1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 770x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}$$

in

in fractionem continuam conuertendam, latius patet, atque simili modo ad hanc seriem multo generaliorem applicari potest.

$$z = 1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4 - \text{etc.}$$

reperietur enim iisdem operationibus institutis:

$$z = \cfrac{1}{1+\cfrac{mx}{1+\cfrac{nx}{1+\cfrac{(m+n)x}{1+\cfrac{2nx}{1+\cfrac{(m+2n)x}{1+\cfrac{3nx}{1+\cfrac{(m+3n)x}{1+\cfrac{4nx}{1+\cfrac{(m+4n)x}{1+\cfrac{5nx}{1+\text{etc.}}}}}}}}}}}$$

Eadem vero expressio, aliaeque similes facile erui possunt ope theorematum, quae in dissertationibus meis de fractionibus continuis in Comment. Acad. Petropol. demonstraui. Ostendi enim huic aequationi:

$$ax^{m-1}dx = dz + ex^{2-m-1}zdx + bx^{n-1}zdx$$

satis-

satisfacere hunc valorem

$$z = \cfrac{ax^m}{m + \cfrac{(ac+mb)x^n}{m+n + \cfrac{(ac-nb)x^n}{m+2n + \cfrac{(ac+(m+n)b)x^n}{m+3n + \cfrac{(ac-2nb)x^n}{m+4n + \cfrac{(ac+(m+2n)b)x^n}{m+5n + \cfrac{(ac-3nb)x^n}{m+6n+\text{etc.}}}}}}}}$$

Si igitur sit $c = 0$ erit $dz + bx^{n-1}zdx = ax^{m-1}dx$, et $e^{bx^n:n}z = a\int e^{bx^n:n}x^{m-1}dx$ et $z = ae^{-bx^n:n}\int e^{bx^n:n}x^{m-1}\,dx$, et per seriem

$$z = \frac{ax^m}{m} - \frac{abx^{m+n}}{m(m+n)} + \frac{ab^2x^{m+2n}}{m(m+n)(m+2n)} - \frac{ab^3x^{m+3n}}{m(m+n)(m+2n)(m+3n)} + \text{etc.}$$

In hac autem forma nostra, quam tractamus, non continetur.

§. 27. Inueni autem porro, si habeatur haec aequatio:

$$fx^{m+n}dx = x^{m+1}dz + ax^mzdx + bx^nzdx + czzdx$$

valorem ipsius z per huiusmodi fractionem infinitam exprimi:

$$z = \cfrac{fx^m}{b + \cfrac{(mb+ab+cf)x^{m-n}}{b + \cfrac{(mb+nb+cf)x^{m-n}}{b + \cfrac{(2mb-nb+ab+cf)x^{m-n}}{b + \cfrac{(2mb-2nb+cf)x^{m-n}}{b + \cfrac{(3mb-2nb+ab+cf)x^{m-n}}{b + \cfrac{(3mb-3nb+cf)x^{m-n}}{b+\text{etc.}}}}}}}}$$

Quo igitur eundem valorem z commode per feriem ordinariam exprimere queamus, fit $c = o$, vt habeatur haec aequatio:

$$f x^{m+n} dx = x^{m+1} dz + a x^m z dx + b x^n z dx.$$

eritque per fractionem continuam:

$$z = \cfrac{f x^m}{b + \cfrac{b(m+a) x^{m-n}}{b + \cfrac{b(m-n) x^{m-n}}{b + \cfrac{b(2m-n+a) x^{m-n}}{b + \cfrac{b(2m-2n) x^{m-n}}{b + \cfrac{b(3m-2n+a) x^{m-n}}{b + \cfrac{b(3m-3n) x^{m-n}}{b + \text{etc.}}}}}}}}$$

Integrando vero erit $x^a e^{bx^{n-m}:(n-m)} z = f\int e^{bx^{n-m}:(m-n)} x^{a+n-1} dx$ feu fit $m-n=k$ erit $z = f e^{b:kx^k} x^{-a} \int e^{-b:kx^k} x^{a+n-1} dx$, fi quidem integratio ita inftituatur, vt z euanefcat, pofito $x = o$. Per feriem autem infinitam erit:

$$z = \frac{f}{b} x^m - \frac{(m+a)f}{b^2} x^{2m-n} + \frac{(m+a)(2m-n+a)f}{b^3} x^{3m-2n}$$
$$- \frac{(m+a)(2m-n+a)(3m-2n+a)f}{b^4} x^{4m-3n}$$
$$+ \frac{(m+a)(2m-n+a)(3m-2n+a)(4m-3n+a)f}{b^5} x^{5m-4n} - \text{etc.}$$

§. 28. Quo hae expreffiones fiant fimplices, neque tamen earum extenfioni vis inferatur, ponatur $b = 1$;

$b = 1$; $f = 1$; $m + a = p$; $m - n = q$; vt fit $a = p - m$; et $n = m - q$; habebiturque haec aequatio differentialis:

$$x^m dx = x^{q+1} dz + (p-m) x^q z\, dx + z\, dx$$

cuius primo integrale eſt: $z = e^{1:qx^q} x^{m-p} \int e^{-1:qx^q} x^{p-q-1} dx$
Idem porro valor quantitatis z per ſequentem ſeriem infinitam exprimetur:

$$z = x^m - p x^{m+q} + p(p+q) x^{m+2q} - p(p+q)(p+2q) x^{m+3q} + \text{etc.}$$

Denique huic ſeriei aequiualebit iſta fractio continua:

$$z = \cfrac{x^m}{1 + \cfrac{p x^q}{1 + \cfrac{q x^q}{1 + \cfrac{(p+q) x^q}{1 + \cfrac{2 q x^q}{1 + \cfrac{(p+2q) x^q}{1 + \cfrac{3 q x^q}{1 + \cfrac{(p+3q) x^q}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}$$

quae expreſſio plane congruit cum ea, quam ante §. 26 ſumus adepti, et quoniam de modo, quo illam eruimus, adhuc dubitari poſſet, vtrum numeratores ſecundum legem obſeruatam in infinitum progrediantur nec ne? hoc dubium iam penitus erit ſublatum. Suppeditat ergo haec conſideratio methodum certam innumerabiles ſeries divergentes ſummandi, ſeu valores ipſis aequiualentes inveniendi: inter quas ea, quam tractauimus eſt caſus particularis.

§. 29. Videtur autem porro casus memoratu dignus, quo est $p = 1$, et $q = 2$, atque $m = 1$; erit enim $z = e^{1:2xx} \int e^{-1:2xx} dx : xx$

atque series infinita ita se habebit:

$$z = x - 1x^3 + 1.3x^5 - 1.3.5x^7 + 1.3.5.7x^9 - \text{etc.}$$

quae aequalis est huic fractioni continuae:

$$z = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1xx}{1 + \cfrac{2xx}{1 + \cfrac{3xx}{1 + \cfrac{4xx}{1 + \cfrac{5xx}{1 + \cfrac{6xx}{1 + \text{etc.}}}}}}}}$$

Si itaque ponatur $x = 1$, vt fiat:

$$z = 1 - 1 + 1.3 - 1.3.5 + 1.3.5.7 - 1.3.5.7.9 + \text{etc.}$$

quae est series maxime diuergens: eius tamen valor exprimi potest per hanc fractionem continuam conuergentem:

$$z = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{5}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

quae

quae ſequentes ſuppeditat fractiones, vero ipſius z valori proxime aequales:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
z = & \frac{0}{1}; & \frac{1}{1}; & \frac{1}{2}; & \frac{3}{4}; & \frac{6}{10}; & \frac{18}{26}; & \frac{48}{76}; & \frac{156}{232}; & \frac{492}{764};
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
10 & 11 & 12 \\
\frac{1740}{2620}; & \frac{6168}{9496}, & \frac{23568}{35696}
\end{array}
$$

ſi igitur ſit: $z = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{7}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{10}{1+p}}}}}}}}}}}$

erit $z = \frac{23568 + 6168p}{35696 + 9496p}$

ſeu $z = \frac{2946 + 771p}{4462 + 1187p}$ et $p = \cfrac{11}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{13}{1+\cfrac{14}{1+\cfrac{15}{1+\text{etc.}}}}}}$

ſit $p = \frac{11}{1+q}$ et $q = \frac{12}{1+r}$: erit $r = \frac{12-q}{q}$

atque cum p, q, r vniformiter creſcant, erit $2q \frac{12+22q-qq}{q+14}$ et $2q^3+3qq-22q-12=0$, vbi proxime $q=3,06$; $p=2,709$; et $z = \frac{5034,630}{7677,583} = 0,655758$.

DISSERTATIO
DE
PROPLEMATIBVS QVIBVSDAM CALCVLI INTEGRALIS.

Auctore G. W. KRAFFT.

§. 1.

Problema I.

Inuenire quibusnam in casibus haec curuarum familia, sequenti aequatione generali, trinomiali, contenta, possit quadrari;

$$A x^\alpha + B y^\beta = C x^\delta y^\varepsilon;$$

in qua sunt x et y indeterminatae, A, B, C, etc. exponentes, constantes.

Quamuis variae iam cognitae sint methodi, quibus quadraturae curuarum, per aequationes trium terminorum expressarum, reperiri possunt; sequens tamen a casu particulari, quem explicat *Ioh. Bernoullius, Operum tomo III, p.* 403, ad summam vniuersalitatem est redacta. Ponamus $y = \frac{x^\lambda}{u}$, introducta noua indeterminata u, qui valor in aequatione proposita substituatur, atque dabit $A x^\alpha + \frac{B x^{\beta\lambda}}{u^\beta} = \frac{C x^{\delta+\varepsilon\lambda}}{u^\varepsilon}$, quae diuisa per x^α et multiplicata per u^β, dabit hanc, $B x^{\beta\lambda-\alpha} = C x^{\delta+\varepsilon\lambda-\alpha} u^{\beta-\varepsilon} - A u^\beta$. Vt ex vna parte sola superstes maneat variabilis

riabilis u, ponatur $\delta + \varepsilon\lambda - \alpha = 0$, orietur $Bx^{\beta\lambda - \alpha} = Cu^{\beta-\varepsilon} - Au^{\beta}$, et hac differentiata fequens, $(\beta\lambda - \alpha) Bx^{\beta\lambda-\alpha-1}dx = (\beta - \varepsilon)\ Cu^{\beta-\varepsilon-1}du - \beta A u^{\beta-1}du$. Multiplicetur illud membrum per $\frac{y}{x^{\lambda}}$, hoc autem per $\frac{1}{u}$, quae duae quantitates, vi factae pofitionis fuperioris, funt aequales; atque fic obtinebitur $(\beta\lambda-\alpha)Bx^{\beta\lambda-\alpha-\lambda-1}y\,dx = (\beta-\varepsilon)\ Cu^{\beta-\varepsilon-2}du - \beta A u^{\beta-2}du$. Ponatur nunc denuo exponens $\beta\lambda - \alpha - \lambda - 1 = 0$, vt x ibi abeat in vnitatem, ex quo tandem prodibit haec aequatio: $(\beta\lambda - \alpha) By\,dx = (\beta-\varepsilon)\ Cu^{\beta-\varepsilon-2}du - \beta A u^{\beta-2}du$, atque integralia fumendo, talis $(\beta\lambda-\alpha)B\int y\,dx = \frac{\overline{\beta-\varepsilon}.C}{\beta-\varepsilon-1}u^{\beta-\varepsilon-1} - \frac{\beta A}{\beta-1}u^{\beta-1}$ + Conftante. Requiruntur ergo duae conditiones ad cafum quadrabilitatis huius curuae generalis, *prima*, vt fit $\delta + \varepsilon\lambda - \alpha = 0$, hoc eft, $\delta = \alpha - \varepsilon\lambda \ldots$ (M); *altera*, vt fit etiam $\beta\lambda - \alpha - \lambda - 1 = 0$, aut $\lambda = \frac{\alpha+1}{\beta-1}$; qui valor in aequatione (M) fubrogatus, praebet $\delta = \alpha - \frac{\overline{\alpha+1}.\varepsilon}{\beta-1}$.

§. 2. Confequitur exinde, curuam hac generali aequatione definitam,

$$Ax^{\alpha} + By^{\beta} = Cx^{\alpha - \frac{\overline{\alpha+1}.\varepsilon}{\beta-1}}\,y^{\varepsilon}$$

effe quadrabilem, ac ipfius quadraturam, methodo modo explicata, inueniri poffe, fi fubftituatur $y = \frac{x^{\frac{\alpha+1}{\beta-1}}}{u}$, vel fi fuerit $u = \frac{x^{\frac{\alpha+1}{\beta-1}}}{y}$; et quadraturam ipfius, fiue $\int y dx$, aequalem effe huic expreffioni generali:

$\beta-\lambda$

$$\frac{\overline{\beta-\varepsilon}\cdot\overline{\beta-1}\cdot C x^{\frac{\overline{\alpha+1}\cdot\overline{\beta-\varepsilon-1}}{\beta-1}}}{\overline{\alpha+\beta}\cdot\overline{\beta-\varepsilon-1}\cdot B y^{\beta-\varepsilon-1}} - \frac{\beta A x^{\alpha+1}}{\overline{\alpha+\beta}\cdot B y^{\beta-1}}$$

$+$ Conſtante.

§. 3. Non iam occupabor in hac quadraturae huius expreſſione breuiori reddenda, quod in applicatione aliqua particulari multo melius effici poteſt; ſed potius exemplis quibusdam eandem illuſtrabo. Sit ex. gr. quadranda curua haec, $ax = y^2$, aut Parabola *Apollonii*, cuius quadratura ab *Archimede* iam cognita eſt. Poni poterit *primo* $A = a$, $\alpha = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $\varepsilon = 2$, $\beta = 5$; ſed hac ratione $\int y dx$ euaderet differentia duarum magnitudinum infinitarum, ob $B = 0$ in nominatore haerentem, vnde nihil elici poteſt. Inuertatur ergo ſtilus, et ponatur $A = 0$, $B = 1$, $\beta = 2$, $C = a$, $\varepsilon = 0$, $\alpha = 1$, ex quo eruetur $\int y dx = \frac{2ax^2}{3y} = \frac{2ax \cdot x}{3y} = \frac{2xy}{3}$, ſubſtituto y^2 pro ax, quae eſt legitima et iuſta Parabolae quadratura.

§. 4. Aequatio circuli, poſita diametro $= a$, abſciſſis a vertice computatis $= x$, et ſemiapplicatis $= y$, eſt $x^2 + y^2 = ax$. Quodſi tentemus applicare hanc aequationem particularem noſtrae generali, tum poni debet $A = 1$, $\alpha = 2$, $B = 1$, $\beta = 2$, $C = a$, $\varepsilon = 0$, $\alpha = 1$, ob $\varepsilon = 0$; requiritur vero antea iam $\alpha = 2$; adeoque haec aequatio circuli ſub generali noſtra non continetur. Neque etiam res ſuccedit, ſi abſciſſis a centro computatis $= x$, et vocato radio $= a$, aſſumatur aequatio $x^2 + y^2 = a^2$.

§. 5. Sit aequatio curuae data haec, $x^3 + y^3 = axy$, quae eſt curua folii arborei dicta, vid. *Opp. Ioh. Bernoul-*

Bernoullii Tom. III, pag. 40?, *probl. VII.* Quam vt ad noſtram accommodemus, ponendum erit $A=1$, $c=3$, $B=1$, $\beta=3$. $C=a$, $\varepsilon=1$, vnde eruetur $\int y\,dx = \frac{2ax^3}{3y} - \frac{x^4}{2y^2}$, veluti eadem quadratura inuenta quoque eſt in *l. c.* tam, quam etiam a *Iac. Hermanno*, in *Comment. Acad. Scient. Imper. Petropol. Tomo VI, p.* 192. *ſect. V*, ſed alia methodo.

PROBLEMA II.

§. 6. Docet *Iohann Bernoullius*, in *Lectionibus Mathem. Hoſpitalianis*, *Operum Tomo III pag.* 397, omnia illa ſpatia; quorum differentiale exprimitur per quantitatem rationalem multiplicatam, vel diuiſam, per applicatam Circuli vel Hyperbolae, id eſt, per $\sqrt{ax-xx}$, vel per $\sqrt{aa-xx}$, vel per $\sqrt{ax+xx}$, vel per $\sqrt{aa+xx}$ vel per $\sqrt{xx-aa}$, etc. omnia, inquam, iſta ſpatia aut quadrare, aut ad quadraturam Circuli vel Hyperbolae reducere. Methodus eſt ingenioſa et peracuta quidem, ſed valde difficilis mihi viſa, quoniam coniecturis tantum abſoluitur, quae non niſi exercitatiſſimis in hoc calculi genere in promptu eſſe poſſunt. Alia itaque via idem praeſtare conabor ſequentem in modum. Quia requiruntur differentialia rationalia, veluti $\frac{a^2x\,dx + x^3dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$, et quaelibet applicata ſectionis conicae repraeſentari poteſt per $\sqrt{(ax^2+bx+c)}$: conſtabit talis quaelibet formula ex aliquot eiusmodi membris indicandis per $\frac{ex^m dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}$; aut vero per $ex^m dx\sqrt{(ax^2+bx+c)}$; vbi m eſt rationalis numerus integer quicunque.

§ 7. Incipiamus a priori membro $\frac{e x^m dx}{\sqrt{(ax^2+bx+e)}}$, in quo ponamus $2ax+b=u$, et mutabitur expreſſio in hanc ſequentem $\frac{e.\overline{(u-b)}^m du}{2^m u^{m+\frac{1}{2}} \sqrt{(u^2+4ac-b^2)}}$, aut ſtatuendo $b^2-4ac=p^2$, et $\frac{e}{2^m a^{m+\frac{1}{2}}}=q$, in hanc $\frac{q\,du(u-b)^m}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$. Si iam fuerit $u-b$ eleuatum ad dignitatem numeri integri m: aderunt plurima membra integranda, quorum quodlibet tenebit hanc formam: $\frac{r u^n du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$.

§. 8. Hoc autem differentiale omnium commodiſſime aut integratur, aut ad quadraturam Hyperbolae reuocatur, per ingenioſam illam methodum, quam tradidit *Jacobus Hermannus*, in *Commentar. Acad. Scient. Imper. Tomo I, pag.* 151, ponendo nempe $\frac{dz}{r}=\frac{u^n du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$ et, ex appellatione ibi adhibita, $dK=u^n du$, $R=u^2-p^2$, $dR=2u\,du$, $\lambda=-\frac{1}{2}$. Erit enim ſic *aequatio canonica prima*, $u^n du=Mu\,du+R\,dM$, ex qua oritur $M=Au^{n-1}+N$, et $A=\frac{1}{n}$, *ſecunda*, $\overline{n-1}.Ap^2u^{n-2}du=Nu\,du+R\,dN$, ex qua fit $N=Bu^{n-3}+O$, et $B=\frac{\overline{n-1}.Ap^2}{n-2}$; *tertia*, $\overline{n-3}.Bp^2u^{n-4}=Ou\,du+R\,dO$, vnde deducitur $O=Cu^{n-5}+P$, et $C=\frac{\overline{n-3}.Bp^2}{n-4}$; *quarta* haec $\overline{n-5}.Cp^2u^{n-6}du=Pu\,du+R\,dP$, ex qua progignitur $P=Du^{n-7}+Q$, et $D=\frac{\overline{n-5}.Cp^2}{n-6}$; *quinta*, $\overline{n-7}.Dp^2u^{n-8}du=Qu\,du+R\,dQ$; atque ſic porro, quoniam lex progreſſionis iam abunde apparet.

apparet. Subsistamus nunc in hac aequatione canonica quinta, ex qua, substituto $\frac{1}{2}dR$ pro udu, eruitur $\overline{n-7}$. $Dp^2u^{n-8}du = \frac{1}{2}QdR + RdQ$, et diuidendo vtrinque per $\sqrt{R} = \sqrt{(u^2-p^2)}$ exsurgit $\frac{\overline{n-7}.Dp^2u^{n-8}du}{\sqrt{(u^2-p^2)}} = \frac{\frac{1}{2}QdR+RdQ}{\sqrt{R}}$ ex qua aequatione integrata nascitur,

$$\frac{\overline{n-7}.Dp^2}{\sqrt{R}}\int\frac{u^{n-8}du}{\sqrt{(u^2-p^2)}} = Q;$$

ac euolutis porro valoribus,

$$A = \tfrac{1}{n}, \qquad C = \frac{\overline{n-1}.\overline{n-3}.p^4}{n.\overline{n-2}.\overline{n-4}},$$

$$B = \frac{\overline{n-1}.p^2}{n.\overline{n-2}}, \qquad D = \frac{\overline{n-1}.\overline{n-3}.\overline{n-5}.p^6}{n.\overline{n-2}.\overline{n-4}.\overline{n-6}}$$

etc.

Erit denique integrale quaesitum,

$$\tfrac{z}{r} = MR^{\lambda+1} = [Au^{n-1} + Bu^{n-3} + Cu^{n-5} + Du^{n-7} + \text{etc.} + Q]\sqrt{(u^2-p^2)}.$$

§. 9. Sit nunc n numerus quilibet integer, sed impar, ex. gr. $= 7$; peruenio ad aequationem canonicam quartam, in qua est $P = Du^{n-7} + Q$, hoc est, $P = D + Q$. Est autem ob $n = 7$, $Q = 0$, ex valore ipsius Q modo ante definito; erit ergo integralis formulae propositae haec, $\frac{z}{r} = (Au^6 + Bu^4 + Cu^2 + D)\sqrt{(u^2-p^2)}$, neque terminorum subsequentium quisquam valebit amplius, quia in aequatione canonica nihil vltra comparandum restat, atque E cum omnibus succedentibus coefficientibus ipsum $n-7$, id est o, semper in se retinent Quod, cum de omnibus reliquis numeris imparibus pariter valeat, efficit, differentiale $\frac{r u^n du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$ absolute integrabile semper esse, si modo n sit numerus integer impar.

§. 10. Sit vero iam n numerus quilibet integer, sed par, veluti 8; atque erit (§. 8.) $Q = \frac{Dp^2}{\sqrt{\ }} \int \frac{du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$, vnde quaesitum integrale dabitur hoc $\frac{z}{r} = [A u^7 + B u^5 + C u^3 + D u] \sqrt{(u^2-p^2)} + D p^2 \int \frac{du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$. Ex quo euidens est, si n fuerit numerus integer par: tum differentiale $\frac{r u^n du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$ dependere a quadratura vel integratione elementi huius $\frac{du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$. Hoc autem sequenti ratione construitur. Sit ramus alteruter Hyperbolae aequilaterae A M m, cuius axis transuersus A B $= 2p$, centrum $=$ C, abscissa $\overline{CP} = u$, erit ex natura huius curuae $PM^2 = AP \times BP = \overline{u-p}.\overline{u+p} = u^2 - p^2$; hinc ducta CM, et infinite vicina Cm, area trianguli rectanguli CMP $= \frac{CP \times PM}{2} = \frac{u\sqrt{(u^2-p^2)}}{2}$, cuius differentiale est $= \frac{\frac{1}{2}u^2 du}{\sqrt{(u^2-p^2)}} + \frac{1}{2} du \sqrt{(u^2-p^2)} = CMm + MPpm = CMm + PM \times Pp = CMm + du\sqrt{(u^2-p^2)}$, vnde efficitur $CMm = \frac{\frac{1}{2}u^2 du}{\sqrt{(u^2-p^2)}} + \frac{1}{2} du \sqrt{(u^2-p^2)} - du\sqrt{(u^2-p^2)} = \frac{\frac{1}{2}p^2 du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$; ex quo erit $\frac{du}{\sqrt{(u^2-p^2)}} = \frac{2}{p^2}$ sectoris Hyperbolici C M m. Quod idem alio etiam modo demonstratur. Sit m M T tangens puncti M; atque erit area trianguli CmT $= \frac{1}{2}$ CT $\times pm$; area trianguli CMT $= \frac{1}{2}$ CT $\times$ PM, ergo, subtrahendo hanc

Tab. III. Fig. 1.

ab illa, erit area sectoris $CMm = \frac{1}{2}CT \times (pm - PM) = \frac{1}{2}CT \times Nm$ $= \frac{1}{2}CT \times \frac{udu}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$. Est autem per *Apollonii Conica, prop.* 37. *lib. I*, $CP(u) : CA(p) = CA(p) CT(\frac{p^2}{u})$; vnde area sectoris Hyperbolici infinite parui CMm est iterum $\frac{\frac{1}{2}p^2}{u} \times \frac{udu}{\sqrt{(u^2-p^2)}} = \frac{\frac{1}{2}p^2 du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$. Habebitur itaque integrando $\int \frac{du}{\sqrt{(u^2-p^2)}} = \frac{2}{p^2}$ sectoris Hyperbolici CMA. Ex quibus manifestum est, differentiale $\frac{ru^n du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$ absolute integrari posse, quotiescunque n sit numerus integer *impar*; sed idem dependere a quadratura Hyperbolae, quotiescunque n sit numerus integer *par*.

§ 11. Consideremus nunc alterum membrum superius (§. 6.) indicatum hoc sequens, $ex^m dx \sqrt{(ax^2+bx+c)}$, quod substituendo pariter, $2ax+b=u$, $b^2-4ac=p^2$, et $\frac{e}{2^{m+2}a^{m+\frac{3}{2}}}=q$, mutabitur in hoc sequens, $qdu.\overline{u-b}^m \sqrt{(u^2-p^2)}$. Si iam iterum fuerit $u-b$ elevatum ad dignitatem numeri integri m: aderunt denuo plurima membra integranda, quorum quodlibet tenebit hanc formam, $ru^n du \sqrt{(u^2-p^2)}$. Ponendo nunc iterum, ex methodo *Hermanniana*, $\frac{dz}{r} = u^n du \sqrt{(u^2-p^2)}$, ac porro $dK = u^n du$, $R = u^2-p^2$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $dR = 2udu$, erit *aequatio canonica prima*, $u^n du = 3Mudu + RdM$, ex qua eruitur $M = Au^{n-1} + N$, et $A = \frac{1}{n+2}$; *secunda*, $\overline{n-1}.Ap^2u^{n-2}du = 3Nudu + RdN$, ex qua nascitur $N = Bu^{n-3} + O$, et $B = \frac{\overline{n-1}.Ap^2}{n}$; *tertia*, $\overline{n-3}.Bp^2u^{n-4}du = 3Oudu + RdO$, ex qua prodit $O = Cu^{n-5} + P$, et $C = \frac{\overline{n-3}.Bp^2}{n-2}$;

quarta, $\overline{n-5}.Cp^2u^{n-6}du = 3Pudu + RdP$, vnde provenit $P = Du^{n-7} + Q$, ac $D = \frac{\overline{n-5}.Cp^2}{n-4}$; *quinta*, $\overline{n-7}.Dp^2u^{n-8}du = 3Qudu + RdQ$; atque sic porro, cum lex progressionis etiam hic abunde sit manifesta. Subsistamus nunc in hac aequatione canonica quinta, ex qua, substituto $\frac{1}{2}dR$ pro udu, et multiplicando per $\sqrt{R}\sqrt{(u^2-p^2)}$, deducitur $\overline{n-7}.Dp^2u^{n-8}du\sqrt{(u^2-p^2)} = (\frac{3}{2}QdR + RdQ)\sqrt{R}$, ex qua integrata progignitur, $\frac{\overline{n-7}.Dp^2}{R^{\frac{3}{2}}}\int u^{n-8}du\sqrt{(u^2-p^2)} = Q$, ac euolutis valoribus

$$A = \frac{1}{n+2} \qquad C = \frac{\overline{n-3}.\overline{n-1}.p^4}{n.\overline{n+2}.\overline{n-2}},$$

$$B = \frac{\overline{n-1}.p^2}{n.\overline{n+2}} \qquad D = \frac{\overline{n-5}.\overline{n-3}.\overline{n-1}.p^6}{n.\overline{n+2}.\overline{n-2}.\overline{n-4}},$$

etc.

Erit denique integrale quaesitum $\frac{z}{r} = MR^{\lambda+1} = [Au^{n-1} + Bu^{n-3} + Cu^{n-5} + Du^{n-7} + \text{etc.} + Q](u^2-p^2)^{\frac{3}{2}}$.

§. 12. Sit nunc denuo n numerus quilibet integer, sed impar, ex. gr. 7; peruenio ad aequationem canonicam quartam, in qua est, $P = Du^{7-7} + Q = D + Q$, aequatio autem canonica sequens quinta dabit, $0 = 3Qudu + RdQ$, vnde $Q = 0$, quod etiam ex valore ipsius Q, modo inuento, patet; et $P = D$; ex quo apparet, in hoc etiam casu quantitatem propositam esse absolute integrabilem, quoties fuerit n numerus impar. Si vero idem n sit numerus par, ex. gr. 4, inuenio in aequatione canonica secunda, $N = Bu + O$, et ex subsequente tertia, $Bp^2du = 3Oudu + RdO = \frac{3OdR}{2} + RdO$, quae multiplicata per $\sqrt{(u^2-p^2)} = \sqrt{R}$, abit in hanc, $Bp^2du\sqrt{(u^2-p^2)} = (\frac{3}{2}OdR + RdO)\sqrt{R}$; sed haec est integra-

integrabilis in altero membro, et praebet $Bp^2 \int du \surd(u^2 - p^2) = OR^{\frac{3}{2}}$; vnde valor desiderati adhuc O definitur, dependens nempe a quadratura superioris Hyperbolae. (§ 10. Patet itaque simul hoc, quantitatem propositam $u^n du \surd(u^2 - p^2)$ requirere quadraturam Hyperbolae, quoties n fuerit numerus par.

§. 13. Commodius porro etiam sequenti instituto, passim cognito, hae hucusque pertractatae, et aliae plures innumerae, quantitates ad sua integralia reuocari poterunt, si assumantur quantitates finitae pro lubitu, eae differentientur, ac denique differentialis quaedam oblata cum hac indeterminata differentiale comparetur. Quod exemplis, vsus saltim gratia, statim illustrabo. Quantitatis huius sequentis, $(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4) \surd(\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon)$ differentiale est tale:

$$\left\{ \left.\begin{matrix} \frac{1}{2} A\delta \\ B\varepsilon \end{matrix}\right\} dx + \left.\begin{matrix} A\gamma \\ \frac{3}{2} B\delta \\ 2C\varepsilon \end{matrix}\right\} x\,dx + \left.\begin{matrix} \frac{3}{2} A\beta \\ 2B\gamma \\ \frac{5}{2} C\delta \\ 3D\varepsilon \end{matrix}\right\} x^2 dx + \right.$$

$$\left.\begin{matrix} 2A\alpha \\ \frac{5}{2} B\beta \\ 3C\gamma \\ \frac{7}{2} D\delta \\ 4E\varepsilon \end{matrix}\right\} x^3 dx + \left.\begin{matrix} 3B\alpha \\ \frac{7}{2} C\beta \\ 4D\gamma \\ \frac{9}{2} E\delta \end{matrix}\right\} x^4 dx + \left.\begin{matrix} 4C\alpha \\ \frac{9}{2} D\beta \\ 5E\gamma \end{matrix}\right\} x^5 dx$$

$$\left. + \left.\begin{matrix} 5D\alpha \\ \frac{11}{2} E\beta \end{matrix}\right\} x^6 dx + 6E\alpha x^7 dx \right\} : \surd(\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon),$$

quod adeo superius integrale habet perfectum. Si nunc integranda veniat haec quantitas, $\frac{a^2 dx + x^3 dx}{\surd(x^2 - a^2)}$, facile

eruentur

eruentur quantitates ſequentes, incipiendo comparationem a nominatore differentialis, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, $\varepsilon = -a^2$, $B = 0$, $D = 0$, $E = 0$, $C = \frac{1}{3}$, $A = \frac{5a^2}{3}$, vnde erit quaeſita integralis $\frac{(a^2 + x^2)\sqrt{(x^2 - a^2)}}{3}$.

§. 14. Simili modo differentiale quantitatibus huius, $\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}{\sqrt{(\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon)}}$, eſt hoc:

$$\left.\begin{array}{l} +B\varepsilon \\ -\frac{1}{2}A\delta \end{array}\right\} dx + \left.\begin{array}{l} +\frac{1}{2}B\delta \\ +2C\varepsilon \\ -A\gamma \end{array}\right\} x\,dx + \left.\begin{array}{l} +\frac{3}{2}C\delta \\ +3D\varepsilon \\ -\frac{3}{2}A\beta \end{array}\right\} x^2dx + \left.\begin{array}{l} +\frac{5}{2}D\delta \\ +C\gamma \\ +4E\varepsilon \\ -2A\alpha \\ -\frac{1}{2}B\beta \end{array}\right\} x^3dx$$

$$+ \left.\begin{array}{l} +\frac{3}{2}C\beta \\ +2D\gamma \\ +\frac{7}{2}E\delta \\ -B\alpha \end{array}\right\} x^4dx + \left.\begin{array}{l} +3E\gamma \\ +\frac{5}{2}D\beta \end{array}\right\} x^5dx + \left.\begin{array}{l} +D\alpha \\ +\frac{5}{2}E\beta \end{array}\right\} x^6dx +$$

$$\left. 2E\alpha x^7dx \right\} : (\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}.$$

Vt ſi quaeratur integrale ipſius $\frac{-2a\,dx - ax\,dx + 42x^4dx + 9x^5dx}{(4x + x^2)^{\frac{3}{2}}}$, facta comparatione, incipiendo rurſus a nominatore, eruetur $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 0$, $A = a$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 3$, et quaeſitum integrale ipſum $\frac{a + 3x^4}{\sqrt{(x^2 + 4x)}}$.

§. 15. Haud alia ratione tractari poſſunt etiam illa differentialia, quae aliquam inuoluunt quadraturam ſectionis conicae. Cum itaque $\sqrt{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}$ exprimat generaliter applicatam talis alicuius ſectionis, aſſumam ad imitationem priorum hanc formulam generalem: $(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)\sqrt{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)} + F\int dx$

$+ F \int dx \sqrt{} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ quae a tali quadratura dependebit, et differentiata subministrat hanc:

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} A\beta \\ + B\gamma \\ F\gamma \end{matrix} \right\} dx + \left\{ \begin{matrix} A\alpha \\ \frac{3}{2} B\beta \\ 2C\gamma \\ F\beta \end{matrix} \right\} x\,dx + \left\{ \begin{matrix} 2B\alpha \\ \frac{5}{2} B\beta \\ 3D\gamma \\ F\alpha \end{matrix} \right\} x^2 dx + \left\{ \begin{matrix} 3C\alpha \\ \frac{7}{2} D\beta \\ 4E\gamma \end{matrix} \right\} x^3 dx$$

$$\left. + \left\{ \begin{matrix} 4D\alpha \\ \frac{9}{2} E\beta \end{matrix} \right\} x^4 dx + 5E\alpha x^5 dx \right\} : \sqrt{} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma).$$

Sit nunc ad quadraturam circuli reuocandum hoc differentiale, $\frac{4a^2x^2dx - 4ax^3dx + x_4dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$; prodibit ex comparatione terminorum homologorum, $\alpha = -1$, $\beta = 2a$, $\gamma = 0$, $A = 0$, $B = -\frac{1}{2}a^2$, $E = 0$, $D = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{5}{4}a$, $F = \frac{3}{4}a^2$; et desideratum integrale erit sequens: $(-\frac{1}{2}a^2x + \frac{5}{4}ax^2 - \frac{1}{4}x^3) \sqrt{(2ax - x^2)} + \frac{3}{4}a^2 \int dx \sqrt{(2ax - x^2)}$.

§. 16. *Problema III.* Propositum sit rectificare curuam, in qua, sumtis x et y coordinatis orthogonalibus, m constante, ds elemento curuae, et r = radio osculi, obtineat haec proprietas, $\frac{x\,dy - y\,dx}{r} = (m^2 - 1)ds$. Statuatur elementum curuae ds constans; quo facto, erit $r = \frac{dy\,ds}{ddx}$; vid. *Iacobi Bernoulli Opera*, *tomo I. pag.* 578. Vnde habebitur $\frac{(x\,dy - y\,dx)\,ddx}{dy\,ds} = (m^2 - 1)ds$, aut vero $\frac{x\,dy\,ddx - y\,dx\,ddx}{dy\,ds} = (m^2 - 1)ds$. Est autem, ob ds constans, $dx\,ddx = -dy\,ddy$, ex *loco modo citato*, et quod facile cernitur ponendo differentiale ipsius

 ds,

ds, aut ipſius $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, nihilo aequale propter eius conſtantiam; qui valor pro $dx\,ddx$ ſubſtitutus, facta diuiſione per dy, dabit $x\,ddx + y\,ddy = (m^2 - 1)\,ds^2$, quae aequatio integrata praebet $x\,dx + y\,dy - \int(dx^2 + dy^2) = (m^2 - 1)\,s\,ds$, hoc eſt, $x\,dx + y\,dy - \int ds^2 = (m^2 - 1)\,s\,ds$, vel $x\,dx + y\,dy - s\,ds = (m^2 - 1)\,s\,ds$, aut, addito vtrinque $s\,ds$, ſequentem $x\,dx + y\,dy = m^2 s\,ds$; ex qua denuo integrata prodit $x^2 + y^2 = m^2 s^2$, aut $\sqrt{(x^2 + y^2)} = ms$. Tenet igitur haec curua arcum ſuum quemlibet ad ſubnexam chordam in ratione conſtante $1 : m$, ſiue arcus ſinguli ſunt inter ſe in ratione ſuarum chordarum.

§. 17. *Problema IV.* Aequatio $x^m dx + y\,dx = dy$, in qua eſt m numerus quilibet integer affirmatiuus; vel generalior iſta $x^m dx + N\,dx = dN$, in qua eſt N functio quaelibet ipſius y et conſtantium, praeter alias quasdam, ſequenti etiam methodo ad Logarithmos poteſt reduci. Ponatur $x^m + y = u$, obtinetur hac ſubſtitutione $u\,dx + m x^{m-1} dx = du$; ſtatuatur $u + m x^{m-1} = t$, eruitur hac ſubrogatione $t\,dx + m.\overline{m-1}.\,x^{m-2} dx = dt$; ſumatur $t + \overline{m.\,m-1}\;x^{m-2} = z$, deducitur ex hoc valore $z\,dx + m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\,x^{m-3} dx = dz$; igitur, ex conditione ipſius m, abibit calculus tandem, continuata ſimili ſubſtitutione, ad aequationem talem, $Z\,dx + n\,dx = dZ$, vbi $n = m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}.\overline{m-4}$ etc. quia exponens ipſius x, qui hic eſt $m-3$, alicubi debet euaneſcere.

nescere. Ex hac vltima aequatione vero deriuatur $dx = \frac{dZ}{Z+n}$, quae integrata haec est, $x = l(Z + n)$, vel, posito $le = 1$, erit $xle = l(Z + n)$, aut vero $e^x = Z + n$.

§. 18. Ex hoc artificio aperitur campus varias aequationes, difficiles alias apparituras, ad logarithmos reducendi, quem vnico exemplo commonstrabo: sit $dx + dy = (bdx + 2cxdx + 3ex^2dx + gdy + 2hydy + 3ky^2dy) : (a + bx + cx^2 + ex^3 + f + gy + hy^2 + ky^3)$, quod est differentiale Logarithmicus, cuius nempe numerator est differentiale nominatoris in hac fractione, ita vt integrale huius aequationis sit $x + y = \log. (a + bx + cx^2 + ex^3 + f + gy + hy^2 + ky^3)$; multiplicetur $dx + dy$ per nominatorem fractionis, resultabit exinde sequens aequatio, ad logarithmos reducenda: $(a + f - b)\,dx + (b - 2c)\,xdx + (c - 3e)\,x^2dx + ex^3dx + gydx + hy^2dx + ky^3dx + (a + f - g)\,dy + bxdy + cx^2dy + ex^3dy + (g - 2h)\,ydy + (h - 3k)\,y^2dy + ky^3dy = o$, quod paradigma ipsum iam ad casus plurimos integrandos, sine praeuia indeterminatorum separatione inseruire potest. Sit ex. gr. hoc modo integrandum $3ydx - 5y^3dx - 3dy + 3ydy + 15y^2dy - 5y^3dy = o$. Obseruabitur ex comparatione terminorum homogeneorum, esse $g = 3$, $k = -5$, $f = -a$, $h = o$, $b = o$, $c = o$, $e = o$, [illegible] integrale erit hoc, $x + y = \log (3y - 5y$ [illegible]

§. 19. *Problema V*. Integrare aequationem hanc: $adx + bdy + cxdx + eydy + fydx + gxdy = 0$. Factum hoc quidem iam est aliquot modis a *Iac. Hermanno*, in *Commentar. Acad. ſcient. Petrop. Tomo II. pag.* 1; ſed idem hoc problema breuiori via ſequentem in modum ſolui poſſe exiſtimo. Ponantur termini per dx multiplicati $a + cx + fy = u$, nec non termini per dy multiplicati $b + ey + gx = t$; obtinebitur ibi $y = \frac{u - cx - a}{f}$, atque hic $y = \frac{t - gx - b}{e}$; tum aequando hos duos valores, et breuitatis cauſſa ponendo,

$$\frac{f}{fg - ce} = \alpha \qquad \frac{1 + c\beta}{f} = \varepsilon = \frac{g}{fg - ce}$$

$$\frac{e}{fg - ce} = \beta \qquad \frac{c\alpha}{f} = \eta = \frac{c}{fg - ce}$$

$$\frac{ae - bf}{fg - ec} = \delta \qquad \frac{c\delta + a}{f} = \theta = \frac{ag - cb}{fg - ce}$$

deriuabitur $x = \alpha t - \beta u + \delta$; $y = - \eta t + \varepsilon u - \theta$, et aequatio propoſita mutabitur in hanc:

$$\alpha u dt - \beta u du - \eta t dt + \varepsilon t du = 0;$$

eſt enim ob $a + cx + fy = u$, et $b + ey + gx = t$, aequatio propoſita *primo* talis, $udx + tdy = 0$; et *ſecundo*, $dx = \alpha dt - \beta du$; $dy = - \eta dt + \varepsilon du$, quibus differentialibus ſubſtitutis in priori aequatione emergit propoſita. Haec autem eſt homogenea, adeoque artificio

artificio *Ioh. Bernoullii*, vid. *Commentar. Acad. ſcient. Imp. Petrop. tomo I, p.* 169, variabiles, hic inter ſe permixtas, tenet ſeparabiles; quam methodum magis adhuc vniuerſalem reddidit *Illuſtr. Dom. Goldbach, l. c. p.* 207. Quod cum primo intuitu non appareret, tentaui ab initio $a + cx + fy = u^m$, $b + ey + gx = t^n u^r$, et deprehendi tum demum, homogeneitatem aequationi propoſitae conciliari poſſe, ſi fiant $m = 1$, $n = 1$, $r = 0$. In hac itaque aequatione homogenea ſubſtituatur ζu pro t; et facta diuiſione per u obtinebitur,

$$\text{(A)} \quad \frac{du}{u} = \frac{\eta\zeta d\zeta - \alpha d\zeta}{-\eta\zeta^2 + \overline{\alpha + \varepsilon}\,\zeta - \beta}.$$

Ponantur porro $\eta\zeta - \alpha = \upsilon$, $\varepsilon - \alpha = \lambda$, $= \frac{g-f}{fg-ce}$; $\alpha\varepsilon - \beta\eta = \mu = \frac{1}{fg-ce}$; et habebitur $\frac{du}{u} = \frac{\upsilon d\upsilon}{\mu + \lambda\upsilon - \upsilon^2}$. Vt iam demum appareat, quomodo poſterius hoc membrum a logarithmis dependeat, ponatur $\frac{\upsilon d\upsilon}{\mu + \lambda\upsilon - \upsilon^2} = \frac{C d\upsilon}{A + \upsilon} + \frac{E d\upsilon}{B - \upsilon}$, eruentur ſic, ex debita comparatione, $A = \pm \surd(\frac{1}{4}\lambda^2 + \mu) - \frac{1}{2}\lambda$; $B = \frac{\mu}{A}$; $C = \frac{-A}{A+B}$; $E = \frac{B}{A+B}$; atque erit ſic integrando, $lu = Cl(A + \upsilon) - El(B - u)$, et horum log-morum ſumendo quantitates abſolutas, denique

$$u = \frac{\overline{A + \upsilon}^C}{\overline{B - \upsilon}^E};$$

omiſſa adhuc adiicienda conſtante indeterminata.

 §. 20.

§. 20. Debeat ex. gr. integrari $dx + 2y\,dy + 3y\,dx - 4x\,dy = 0$; atque erit, in applicatione ad priora generalia, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $e = 2$, $f = 3$, $g = -4$, $fg - ce = -12$, ac proinde $\alpha = -\frac{1}{4}$, $\beta = -\frac{1}{6}$, $\delta = -\frac{1}{6}$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $\eta = 0$, $\theta = \frac{1}{3}$, $\alpha + \varepsilon = \frac{1}{12}$. Iam vero ſi occurrat $\eta = 0$, erit per aequationem ſuperiorem (A), ſine vlteriori reductione, ſtatim $\frac{du}{u} = -\frac{-\alpha\,d\zeta}{\alpha + \varepsilon . \zeta - \beta}$, adeoque $u = \frac{D}{\left(\zeta - \frac{\beta}{\alpha + \varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha + \varepsilon}}}$, poſita conſtante aliqua arbitraria $= D$. In hoc itaque exemplo habebitur $u = D(\zeta + 2)^3$, et ſubſtitutis valoribus legitimis orietur aequatio integrata ſequens, $\overline{1 + 3y}^4 = D(8y - 4x + 2)^3$; quae logarithmice differentiata commodiſſime reſtituet differentiale propoſitum.

§. 21. Aequationes differentio-differentiales et differentiales commode aliquando aut integrantur, aut reducuntur ad differentiales, methodis duabus ſequentibus. *Prima* mihi vocatur *ſuppoſitio ſe confirmans*, cum nempe aequationem finitam aliquam ſuppono, atque hanc cum data aequatione integranda combino, et legitimis deductionibus eandem ſuppoſitam iterum eruo, ſeſe ita confirmantem. Huius calculi exemplum aliquod hoc eſto. Sit aequatio ſequens, $\overline{m - 1}.\,my^2dx^2 = nx^2y\,ddy + \overline{n - 1}.\,nx^2dy^2$, in qua dx conſtans; et ſupponatur aequatio finita haec, $ax^m = by^n$, per quam prior multiplicetur,

...etur, vt oriatur talis, $\overline{m-1}.\,ma.y^2x^m dx^2 = (nx^2y\,ddy + \overline{n-1}.\,nx^2dy^2)\,by^n$ quae facta diuisione per x^2y^2, in hanc mutabitur, $\overline{m-1}.\,max^{m-2}dx^2 = nby^{n-1}ddy + \overline{n-1}.\,nby^{n-2}dy^2$, cuius integralis est $max^{m-1}dx = nby^{n-1}dy$; quae denuo integrata reddit $ax^m = by^n$, hoc est, ante assumtam confirmat. Proposita aequatio reducitur quidem ad hanc, $\frac{\overline{m-1}.\,m}{n}\frac{dx^2}{x^2} = \frac{yddy + \overline{n-1}.\,dy^2}{y^2} = \frac{yddy - dy^2}{y^2} + \frac{ndy^2}{y^2}$ aut vero, facta integratione, ad istam, $-\frac{\overline{m-1}.\,m}{x}dx = \frac{dy}{y} + n\int\frac{dy^2}{y^2}$, quod vltimum membrum autem quomodo integrari possit, non perspicio. In casu aliquo particulari sit integranda aequatio differentio-differentialis $aydx^2 = x^2ddy$; patet, statui debere $n = 1$, quo facto eruetur $\overline{m-1}.\,my^2dx^2 = x^2y\,ddy$ aut facta iam diuisione per y, $\overline{m-1}.\,mydx^2 = x^2ddy$; statuatur ergo vlterius $\overline{m-1}.\,m = a$, aut vero $m = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(a + \frac{1}{4})}$, vt aequatio generalis perfecte ad hanc specialem determinetur, atque erit integralis quaesita $ax^{\frac{1}{2} \pm \sqrt{(a + \frac{1}{4})}} = by$.

§. 22. *Secunda* methodus consistit in eo, vt proposita aequatio differentialis aliquando denuo differentietur, atque tum differentiale secundi gradus per diuisionem

nem aequatione expellatur. Hoc modo facillime integratur $ydx - xdy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; ſi enim haec aequatio differentietur, poſito dx conſtanti, oritur $dxdy - xddy - dxdy = \frac{a\,dy\,ddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$, vel, abiectis aequalibus $dxdy$, et facta diuiſione per ddy, talis, $-x\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = a\,dy$, quo deinde facile reducitur, et integratur, vt prodeat,

$$C - \sqrt{(a^2 - x^2)} = y.$$

PHYSICO

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE
COCHLEA ARCHIMEDIS.

AVCTORE
LEON. EVLERO.

Cochlea Archimedis cum ob inuentionis antiquitatem, tum ob eius frequentiſſimum vſum in aquis hauriendis, tantopere celebrata, atque in vulgus cognita, vt vix vllus Hydraulicarum Machinarum ſcriptor reperiatur, qui eius conſtructionem atque vtilitatem non abunde explicuerit. Quodſi vero ad cauſam ſpectemus, cur haec machina ad aquam eleuandam ſit apta, et quomodo eius actio ſecundum mechanica principia abſoluatur, apud vetuſtiores quidem auctores nihil plane inuenimus, quod rationem ſaltem probabilem in ſe contineat, recentiores vero hanc inueſtigationem vel prorſus praeterierunt, vel leuiter ſaltem ac minus accurate ſunt perſecuti. Ita quamuis haec machina ſit notiſſima, eiusque praxis frequentiſſima, tamen fateri cogimur, eius Theoriam maxime adhuc eſſe abſconditam, atque tam modum, quo aqua per eam eleuatur, quam vires ad eius actionem requiſitas etiam nunc fere penitus latere. Atque hoc eo magis mirum videri debet, cum non ſolum ceterae Machinae ab antiquitate ad nos transmiſſae, felici cum ſucceſſu ad leges mechanicas ſint reuocatae, ſed etiam ipſa ſcientia mechanica eousque exculta ſit, vt ad omnis generis machinas explicandas ſufficiens videatur. Quin etiam a plerisque omne ſtudium, quod a Geometris ope Analyſeos ſublimioris in Mechanica vlterius excolenda conſumitur, ſubtile magis, quam vtile cenſeri ſolet.

Verum ſi rationem cochleae Archimedis diligentius contemplemur, vulgaria mechanicae principia ei explicandae minime ſufficientia deprehendemus: propterea quod ea manifeſte ad Theoriam motus aquae per tubos mobiles pertineat quod argumentum a nemine fere adhuc eſt tractatum. Quod enim ad motum aquae in genere attinet, non dudum admodum eſt, ex quo is ſtudioſius inueſtigari atque ad principia mechanica inueſtigari eſt coeptus, de motu autem aquae per tubos mobiles vix quisquam reperitur, qui aliquid in medium attulerit, vel tantum cogitauerit. Quam obrem cum nunc quidem principia, quibus omnis aquae motus innititur, ſatis ſint euoluta, operam dabo, vt ea quoque ad motum aquae, quo per cochleam hanc Archimedis fertur, accommodem, indeque omnia phaenomena, quae in hoc motu conſideranda occurrant, clare ac diſtincte explanem. Quae igitur hac de re ſum meditatus, ſequentibus propoſitionibus ſum complexurus; et quoniam cochleae Archimedeae duplicis generis conſtrui ſolent, quarum alterae helices ſuas circa cylindrum, alterae vero circa conum habent circumvolutas, a cochlea cylindrica exordiar; eiusque Theoria ſtabilita ad cochleas quoque conicas perſcrutandas non difficulter progredi licebit.

PRO-

PROBLEMA. I.

1. Dato motu, quo cylindrus circumagitur, et aquae celeritate per cochleam ſeu helicem cylindro circumductam, determinare verum cuiusque aquae particulae motum, hoc eſt eum motum, qui ex motu gyratorio cylindri et motu aquae progreſſiuo per helicem componitur.

SOLVTIO.

Sit circulus ACB baſis cylindri, cuius ſuperficiei helix eſt circumducta, recta CD ad baſin in centro C perpendicularis axis cylindri, circa quem cylindrus cum helice in gyrum agitur. Ponatur baſis ſemidiameter $CA = CB = a$, et ſit EZ portio helicis in ſuperficie cylindri, quae cum peripheria baſis faciat angulum $ZEY = \zeta$; et a puncto helicis quocunque Z ad baſin ducatur axi parallela ZY; voceturque arcus $EY = s$, eſt $YZ = s \,\mathrm{tang.}\, \zeta$, quae cum helice faciet angulum $EZY = 90° - \zeta$; et longitudo helicis erit $EZ = \frac{s}{\mathrm{coſ.}\,\zeta}$.

Iam aquae per helicem transfluentis celeritas ſit debita altitudini v; helicem enim EZ vbique eiusdem amplitudinis aſſumo, ita vt eodem temporis inſtanti omnis aquae in helice contentae eadem ſit celeritas $= \sqrt{v}$. Deinde quia tota helix circa axem CD gyratur, ſit puncti E celeritas gyratoria circa punctum C debita altitudini u. Recta autem AB ſit fixa, quae ſcilicet non cum cylindro moueatur: atque initio quidem punctum E fuerit in A, inde autem tempore elapſo $= t$ motu angulari peruenerit in E, ſitque arcus $AE = p$, erit ob motum angularem $dp = dt\sqrt{u}$.

 Nunc

Nunc consideretur primo motus aquae per helicem quasi quiescentem, ac celeritas particulae aquae in Z erit $= \sqrt{v}$ eiusque directio erit Zz, qui motus resoluatur in duos, quorum alterius directio sit secundum YZ, alterius secundum Zv seu Yy, atque celeritas secundum YZ erit $= \sqrt{v}$, sin ζ celeritas vero secundum Zv seu Yy erit $= \sqrt{v}. \operatorname{cos}. \zeta$.

Ad hunc posteriorem motum adiungi nunc debet motus gyratorius, quippe qui in eandem directionem tendit, ex quo prodit tota celeritas puncti Z secundum directionem $Yy = \sqrt{u} + \sqrt{v}. \operatorname{cos}. \zeta$.

Quoniam vero directio Yy est variabilis, reducatur ea ad directiones constantes; quem infinem ex Y ad rectam fixam AB ducatur perpendicularis YX, ac vocentur tres coordinatae locum puncti Z determinantes $CX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, erit primo $z = s$ tang. ζ; tum vero ob arcum $AY = p + s$, et angulum $A = CY \frac{p+s}{a}$, erit $CX = x = a. \operatorname{cos}. \frac{p+s}{a}$ et $XY = y = a$ sin $\frac{p+s}{a}$. Tum ducta Yu rectae AB parallela erit angulus $Yyu = \frac{p+s}{a}$. Hinc motus secundum Yy resoluetur in binos alios, alterum secundum Yu seu AC cuius celeritas $= (\sqrt{u} + \sqrt{v} \operatorname{cos}. \zeta)$ sin. $\frac{p+s}{a}$, alterum vero secundum XY cuius celeritas $= (\sqrt{u} + \sqrt{v} \operatorname{cos}. \zeta) \operatorname{cos}. \frac{p+s}{a}$; celeritate secundum YZ existente $= \sqrt{v}. \operatorname{sin}. \zeta$.

Quare loco puncti Z ad ternas coordinatas fixas reducto, quae sunt:

$CX = x = a \operatorname{cos}. \frac{p+s}{a}$, $XY = y = a \operatorname{sin}. \frac{p+s}{a}$, et $YZ = s \operatorname{tang}. \zeta$

verus

verus particulae in Z versantis motus pariter secundum has ternas directiones fixas resoluetur, eritque

Celeritas motus secundum $CX = -(\sqrt{u} + \sqrt{v}\cos.\zeta)\sin.\frac{p+s}{a}$

Celeritas motus secundum $XY = +(\sqrt{u} + \sqrt{v}\cos.\zeta)\cos.\frac{p+s}{a}$

Celeritas motus secundum $YZ = \sqrt{v}.\ \sin.\zeta.$

COROLL. 1.

2. Hinc iam facile reperitur vera celeritas particulae aquae in Z versantis, cum enim hae ternae directiones sint inter se normales, erit vera celeritas aequalis radici quadratae ex summa quadratorum harum trium celeritatum, ex quo vera celeritas erit $= \sqrt{(u + v + 2\sqrt{uv}.\cos.\zeta)}$.

COROLL. 2.

3. Cum particula aquae in Z tempusculo dt perueniat in helicis punctum z, existente $Zz = \frac{ds}{\cos.\zeta}$, et $Yy\ Zv = ds$, celeritas autem in helice sit $= \sqrt{v}$, erit $Zz\ \frac{ds}{\cos.\zeta} = dt\sqrt{v}$, vnde fit $ds = dt\sqrt{v}.\cos.\zeta$; praeterea vero iam vidimus esse $dp = dt\sqrt{u}$.

COROLL. 3.

4. Celeritates quoque particulae aquae Z secundum ternas directiones fixas exprimentur per differentialia coordinatarum x, y, z ad elementum temporis dt applicatas.

Erit scilicet ex natura resolutionis motus:

Celeritas secundum $CX = \frac{dx}{dt} = -(\sqrt{u} + \sqrt{v}.\cos.\zeta)\sin.\frac{p+s}{a}$

Celeritas secundum $XY = \frac{dy}{dt} = (\sqrt{u} + \sqrt{v}.\cos.\zeta)\cos.\frac{p+s}{a}$

Celeritas secundum $YZ = \frac{dz}{dt} = \sqrt{v}.\quad \sin.\zeta.$

Qua-

Quarum formularum identitas intelligitur ex valoribus differentialibus $dp = dt\sqrt{u}$ et $ds = dt\sqrt{v}.\cos.\zeta$.

PROBLEMA. 2.

5. Datis tam celeritate, qua aqua per helicem promouetur, quam celeritate, qua cylindrus cum helice circa axem CD in gyrum agitur, inuenire vires, quibus quamque aquae particulam Z follicitari oportet, vt hunc motum profequi queat.

SOLVTIO.

Sit celeritas qua aqua praefenti temporis momento per helicem EZ promouetur $= \sqrt{v}$, celeritas autem gyratoria cylindri $= \sqrt{u}$. Tum initium helicis iam fit in E vt fit $AE = p$, et particula aquae, quam confideramus, in Z, vt ducta ZY axi CD parallela, fit arcus $EY = s$, exiftente angulo helicis $YEZ = \zeta$. Porro locus puncti Z reducatur ad ternas coordinatas fixas $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$; erit vti vidimus:

$$x = a\cos.\tfrac{p+s}{a};\ y = a\sin.\tfrac{p+s}{a} \text{ et } z = s \operatorname{tang}\zeta$$

denotante a femidiametrum $CA = CB$ bafis cylindri. Pofito vero elemento temporis $= dt$, vt fit $dp = dt\sqrt{u}$ et $ds = dt\sqrt{v}.\cos.\zeta$, fumtoque hoc differentiali dt conftanti, ex principiis mechanicis conftat, particulam aquae in Z a tribus viribus acceleratricibus vrgeri debere, quae fint:

fecundum directionem $CX = \frac{2ddx}{dt^2}$

fecundum directionem $XY = \frac{2ddy}{dt^2}$

fecundum directionem $YZ = \frac{2ddz}{dt^2}$

Verum

Verum cum ex supra ostensis sit

$\frac{dx}{dt} = -(\sqrt{u} + \sqrt{v}\ \text{cos.}\ \zeta)\ \text{sin.}\ \frac{p+s}{a}$

$\frac{dy}{dt} = (\sqrt{u} + \sqrt{v}\ \text{cos.}\ \zeta)\ \text{cos.}\ \frac{(p+s)}{a}$

et $-\frac{dz}{dt} = \sqrt{v}\ \text{sin.}\ \zeta$

erit denuo differentiando

$\frac{ddx}{dt^2} = -(\frac{du}{2dt\sqrt{u}} + \frac{dv\,\text{cos.}\,\zeta}{2dt\sqrt{v}})\ \text{sin.}\ \frac{p+s}{a} - \frac{1}{a}(\sqrt{u} + \sqrt{v}\,\text{cos.}\ \zeta)^2 \text{cos.}\ \frac{p+s}{a}$

$\frac{ddy}{dt^2} = (\frac{du}{2dt\sqrt{u}} + \frac{dv\,\text{cos.}\,\zeta}{2dt\sqrt{v}})\ \text{cos.}\ \frac{p+s}{a} - \frac{1}{a}(\sqrt{u} + \sqrt{v}\,\text{cos.}\ \zeta)^2\ \text{sin.}\ \frac{p+s}{a}$

$\frac{ddz}{dt_2} = \frac{dv}{2dt\sqrt{v}}\ \text{sin.}\ \zeta$

Tres ergo vires acceleratrices quaesitae sunt

I. sec. CX $= -\frac{1}{dt}(\frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{dv\,\text{cos}\,\zeta}{\sqrt{v}})\ \text{sin.}\ \frac{p+s}{a} - \frac{2}{a}(\sqrt{u} + \sqrt{v}\,\text{cos}\ \zeta)^2 \text{cos.}\ \frac{p+s}{a}$

II. sec. XY $= +\frac{1}{dt}(\frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{dv\,\text{cos.}\,\zeta}{\sqrt{v}})\ \text{cos.}\ \frac{p+s}{a} - \frac{2}{a}(\sqrt{u} + \sqrt{v}\,\text{cos.}\ \zeta)^2 \text{sin.}\ \frac{p+s}{a}$

III sec. YZ $= \frac{dv}{dt\sqrt{u}}\ \text{sin.}\ \zeta.$

COROLL. I.

6. Transferantur duae priores vires primum in punctum Y, ita vt hoc punctum a duabus viribus acceleratricibus vrgeatur, secundum directiones YM et YN, qae sunt Tab. II. Fig. 2.

Vis sec. YM $= -\frac{1}{dt}(\frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{dv\,\text{cos.}\,\zeta}{\sqrt{v}})\ \text{sin.}\ \frac{p+s}{a} - \frac{2}{a}(\sqrt{u} + \sqrt{v}\,\text{cos.}\,\zeta)^2 \text{cos.}\ \frac{p+s}{a}$

Vis sec. YN $= +\frac{1}{dt}(\frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{dv\,\text{cos.}\,\zeta}{\sqrt{v}})\ \text{cos.}\ \frac{p+s}{a} - \frac{2}{a}(\sqrt{u} + \sqrt{v}\,\text{cos}\ \zeta)^2 \text{sin.}\ \frac{p+s}{a}$

COROLL. 2.

7. Nunc hae duae vires in duas alias transformari poterunt, quae agant secundum directiones Yy, et YO, quarum haec sit ad superficiem cylindri normalis: atque ob angulum MYO ACY $= \frac{p+s}{a}$, ex his duabus viribus resultabit

I Vis secundum $Yy =$ Vis YN cos. $\frac{p+s}{a}$ − Vis YM sin. $\frac{p+s}{a}$
II Vis secundum $YO =$ Vis YN sin. $\frac{p+s}{a}$ + Vis YM cos. $\frac{p+s}{a}$

COROLL. 3.

8. Hinc ergo loco duarum virium, quae sollicitabant secundum directiones CX et XY, vel YM et YN, in calculum introducentur duae hae aliae secundum directiones Yy et YO, quae erunt

Vis secundum $Yy = + \frac{1}{dt} \left(\frac{du}{\sqrt{v}} + \frac{dv \cos\zeta}{\sqrt{v}}\right)$

Vis secundum $YO = - \frac{2}{a} (\sqrt{u} + \sqrt{v} \cos\zeta)^2$

sicque angulus $p+s$ non amplius in calculo reperitur.

PROBLEMA. 3.

9. Tres vires ante inuentas ad tres alias reducere, quarum vna sit secundum directionem helicis Zz directa, duae reliquae vero sint ad ipsam helicem normales.

SOLUTIO.

Tab II. Fig. 3. Sit Zz elementum helicis, vbi nunc particula aquae, quae vires inuentas sustinet, versatur: sitque Zo non solum ad helicem Zz, sed etiam ad ipsius cylindri superficiem in Z normalis, deinde sit recta Zr in ipsa superficie cylindri sita, atque ad Zz normalis. Tres igitur vires inuentae ad tres alias reduci debent, quae particulam aquae sollicitent secundum directiones Zz, Zo et Zr. Ac primo quidem vis inuenta secundum YZ agens $= \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ sin ζ, ob angulum helicis $YEZ = \zeta$, dabit

I vim

I vim ſecundum $Zr = -\frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ ſin. ζ coſ. ζ

II vim ſecundum $Zz = +\frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ ſin. ζ ſin. ζ

Deinde vis, quae ſecundum directionem Yy ſeu Zv agere inuenta eſt $= \frac{1}{dt}\left(\frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{dv\,\text{coſ.}\zeta}{\sqrt{v}}\right)$, dabit vires

I ſecundum $Zz = \frac{du}{dt\sqrt{u}}$ coſ. $\zeta + \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ coſ. ζ^2

II ſecundum $Zr = \frac{du}{dt\sqrt{u}}$ ſin. $\zeta + \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ ſin. ζ coſ ζ

Tertio vis, quae ſecundum directionem YO agere eſt inuenta, dabit nunc ſola

vim ſecundum $Zo = -\frac{2}{a}(\sqrt{u} + \sqrt{v}.\,\text{coſ.}\,\zeta)^2$

Quare tres vires acceleratrices, quibus particula aquae in Z ſollicitari debet, vt motum propoſitum perſequatur, erunt:

I ſecundum directionem $Zz = \frac{du}{dt\sqrt{u}}$ coſ. $\zeta + \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$,

II ſecundum directionem $Zr = \frac{du}{dt\sqrt{u}}$ ſin. ζ

III ſecundum directionem $Zo = -\frac{2}{a}(\sqrt{u} + \sqrt{v}\,\text{coſ.}\,\zeta)^2$

SCHOLION.

10. Habemus ergo vires, quibus ſingulae aquae particulae ſollicitatae eſſe debent, vt motus, quem aſſumſimus, ſubſiſtere poſſit. Iſtas autem vires hic ideo ad tres directiones Zz, Zr, et Zo reuocaui, quo facilius cum viribus, quibus aqua in tubo actu ſollicitatur, comparari poſſint; vt enim quantitates v et u verum aquae et cylindri motum exhibeant, neceſſe eſt, vt tres illae vires inuentae conueniant cum viribus, quibus aqua reuera vrgetur. Hae autem vires ſunt primo ſtatus compreſſionis aquae in tubo, deinde appreſſio aquae ad

latera tubi, quae ſecundum ambas directiones Zr et $Z\sigma$ ad directionem tubi normales exhiberi ſolet. Tertio vero grauitas, qua ſingulae aquae particulae deorſum nituntur, imprimis examini eſt ſubiicienda, quod ſequenti problemate inſtituemus.

PROBLEMA 4.

11. Si cylindrus fuerit vtcunque ad horizontem inclinatus, definire vires ſecundum ternas praedictas directiones, quibus ſingulae aquae particulae Z in helice ob grauitatem ſollicitantur.

SOLUTIO.

Tab. II. Fig. 4. Exprimat angulus θ inclinationem baſis cylindri ad horizontem, ſitque in plano baſis punctum fixum A ſummum, punctum B vero imum, ita vt recta AB cum axe cylindri CD in plano verticali ſit conſtituta. In hoc plano per centrum baſis C ducatur horizontalis CH, eritque angulus $ACH = \theta$, ſeu ſi ex puncto B erigatur recta verticalis BG axem in G interſecans, erit quoque angulus $BGC = \theta$, atque ob grauitatem ſingulae aquae particulae ſollicitabuntur deorſum ſecundum directiones ipſi GB parallelas, et vis acceleratrix haec vbique erit $= 1$. Fig. 1. Iam in prima figura ducatur quoque recta BG cum axe CD conſtituens angulum $BGC = \theta$, ac particula aquae in Z vrgebitur vi acceleratrice $= 1$ ſecundum directionem rectae BG parallelam. Reſoluatur haec vis ſecundum directiones GC et CB, prodibitque

Vis

Vis ſecundum $GC = 1 \cos.\theta$, et vis ſecundum $CB = 1$ $\sin.\theta$. Ex priori habebimus pro particula aquae Z vim ſecundum $ZY = \cos.\theta$, ex poſteriori vero vim ſecundum $YM = -\sin.\theta$, vnde ob angulum $MYO = \frac{p+s}{a}$, oritur vis ſecundum $YO = -\sin.\theta \cos.\frac{p+s}{a}$ et vim ſecundum $Yy = +\sin.\theta \sin.\frac{p+s}{a}$. Hinc ergo punctum Z ſollicitabitur ab his tribus viribus acceleratricibus: Tab. II. Fig. 2. Fig. 3.

I ſecundum directionem ZY vi $= \cos.\theta$

II ſecundum directionem Zo vi $= -\sin.\theta \cos.\frac{p+s}{a}$

III ſecundum directionem Zv vi $= +\sin.\theta \sin.\frac{p+s}{a}$

Ex his porro ob angulum $zZv = \zeta$ orientur:

Primo vis ſecundum $Zz =$ vi $Zv \cos.\zeta -$ vi $ZY \sin.\zeta$

Tum vis ſecundum $Zr =$ vi $Zv \sin.\zeta +$ vi $ZY \cos.\zeta$

Quare pro tribus directionibus Zz, Zr et Zo obtinebimus ſequentes vires acceleratrices ex grauitate oriundas:

I Vim ſecundum $Zz = \cos.\zeta \sin.\theta \sin.\frac{p+s}{a} - \sin\zeta \cos.\theta$

II Vim ſecundum $Zr = \sin.\zeta \sin.\theta \sin.\frac{p+s}{a} + \cos.\zeta \cos.\theta$

III Vim ſecundum $Zo = -\sin.\theta \cos.\frac{p+s}{a}$.

PROBLEMA 5.

12. Dato, vt hactenus, tam cylindri, quam aquae per helicem motu, definire ſtatum compreſſionis aquae in ſingulis helicis punctis. Fig. 3.

SOLVTIO.

Praesenti temporis instanti, quo initium helicis est in E, existente arcu $AE = p$, consideremus helicis punctum Z, vt sit $EY = s$, et $YZ = s \tang \zeta$ existente helicis angulo $YEZ = \zeta$, sitque status compressionis aquae in puncto $Z = q$, seu denotet q profunditatem, ad quam aqua quiescens in pari statu compressionis existat, eritque pro hoc momento q functio quaepiam ipsius s, et in puncto proximo z, existente $Yy = ds$, status compressionis erit $= q + dq$. Sit iam amplitudo helicis $= bb$, erit particula aquae in portiuncula Zz contenta $= \frac{bb\,ds}{\cos.\zeta}$; quae ergo in Z propelletur vi motrice $= bbq$, in z vero repelletur vi $= bb(q + dq)$; vnde existit vis motrix repellens, seu secundum zZ vrgens $= bb\,dq$, quae praebet vim acceleratricem $= \frac{dq \cos.\zeta}{ds}$. Quare ob statum compressionis particula aquae in elemento helicis Zz contenta secundum directionem Zz sollicitabitur vi acceleratrice $= -\frac{dq \cos.\zeta}{ds}$. Praeterea vero ob grauitatem eadem particula, vti vidimus, sollicitatur secundum Zz vi acceleratrice $= \cos.\zeta \sin.\theta \sin.\frac{p+s}{a} - \sin.\zeta \cos.\theta$, vnde coniunctim tam ob gravitatem, quam ob statum compressionis aquae, particula aquae in helicis puncto Z contenta vrgebitur secundum directionem Zz vi acceleratrice, quae erit

$$\cos.\zeta \sin.\theta \sin.\frac{p+s}{a} - \sin.\zeta \cos.\theta - \frac{dq \cos.\zeta}{ds}$$

haec-

haecque eſt vis, qua iſta particula actu vrgetur, ſecundum directionem Zz; ex quo neceſſe eſt, vt ea aequalis ſit illi vi, qua ſupra punctum Z ad motus conſeruationem ſollicitari debere inuenimus, ſecundum eandem directionem Zz. Quae cum ſit inuenta $= \frac{du}{dt\sqrt{u}}$ $\cos. \zeta + \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ habebimus hanc aequationem:

$dq \cos. \zeta = ds \cos. \zeta \sin \theta \sin. \frac{p+s}{a} - ds \sin. \zeta \cos. \theta - \frac{du}{dt\sqrt{u}} ds \cos. \zeta$ $- \frac{dv}{dt\sqrt{u}} ds$, vbi, quoniam ad praeſens tantum temporis momentum reſpicimus, quantitates a tempore t pendentes, quae ſunt p, u, v, itemque $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$, tanquam conſtantes ſunt ſpectandae, ex quo integratione inſtituta habebimus $q \cos. \zeta = C - a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \frac{p+s}{c} - s \sin. \zeta \cos. \theta - \frac{s du \cos. \zeta}{dt\sqrt{v}} - \frac{s dv}{ds\sqrt{v}}$ vnde ſtatus compreſſionis aquae in ſingulis helicis punctis pro praeſenti temporis momento innoteſcit.

PROBLEMA 6.

13. Si data aquae portio in helice reperiatur, atque cylindrus datam ad horizontem inclinationem tenens motu quocunque in gyrum agatur, inuenire motum quo iſta aquae portio per helicem promouebitur.

SOLVTIO.

Sit baſis cylindri ſemidiameter $CA = CB = a$, et angulus, quem helix EF cum baſi cylindri conſtituit $BEF = \zeta$. Axis autem cylindri PQ cum recta verticali QR conſtituat angulum $PQR = \theta$, quo eodem angulo Tab. II Fig. 5

gulo baſis cylindri ad horizontem erit inclinata. In baſi autem ſit A punctum ſummum et B infimum. Praeſenti autem temporis momento ſit initium helicis in E, exiſtente eius a puncto ſummo internallo ſeu arcu $AE = p$: et, cylindrus in plagam AEB gyretur, ita vt puncti E celeritas ſit $= \sqrt{u}$, erit $dp = dt\sqrt{u}$. Occupet nunc portio aquae in helice contenta ſpatium MN, cuius longitudo ſit $MN = f$, ac ductis axi parallelis MS et NT ſit aquae ab initio helicis diſtantia $EM = x$, erit $EN = x + f$, et $ES = x \operatorname{coſ} \zeta$, atque $ET = (x + f) \operatorname{coſ.} \zeta$; celeritas vero, qua haec aquae portio praeſenti momento per helicem promouetur, ſit $= \sqrt{v}$. His poſitis, ſi in portione aquae MN punctum quodpiam medium Z conſideretur, et arcus EY ponatur $= s$, erit ſtatus compr ſſionis aquae in Z, qui per altitudinem q exprimatur, vti in problemate praecedente eſt erutus:

$$q \operatorname{coſ.} \zeta = C - a \operatorname{coſ.} \zeta \operatorname{ſin} \theta \operatorname{coſ.} \frac{t+s}{a} - s \operatorname{ſin} \zeta \operatorname{coſ.} \theta - \frac{s\, du \operatorname{coſ.} \zeta}{dt\sqrt{u}} - \frac{s\, dv}{dt\sqrt{v}}$$

Iam vero conſtat in vtroque termino M et N ſtatum compreſſionis euaneſcere debere; ſiue ergo ponatur $s = x \operatorname{coſ.} \zeta$ ſiue $s = (x + f) \operatorname{coſ.} \zeta$, fieri debet $q = 0$: vnde duplex naſcitur aequatio

$$0 = C - a \operatorname{coſ.} \zeta \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{coſ.} \frac{t + x \operatorname{coſ.} \zeta}{a} - x \operatorname{ſin.} \zeta \operatorname{coſ.} \zeta \operatorname{coſ.} \theta$$
$$- x \operatorname{coſ.} \zeta \left(\frac{du \operatorname{coſ.} \zeta}{dt\sqrt{u}} + \frac{dv}{dt\sqrt{u}}\right)$$

$$0 = C - a \operatorname{coſ.} \zeta \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{coſ.} \frac{t + (x+f) \operatorname{coſ.} \zeta}{a} - (x+f) \operatorname{coſ.} \zeta \left(\operatorname{ſin.} \zeta \operatorname{coſ.} \theta \right.$$
$$\left. + \frac{du \operatorname{coſ.} \zeta}{dt\sqrt{u}} + \frac{dv}{dt\sqrt{v}}\right)$$

vnde, conſtantem C eliminando, obtinebitur, diuidendo per coſ. ζ, haec aequatio.

a ſin.

$$a\sin.\theta\cos.\tfrac{p+x\cos.\zeta}{a}=a\sin.\theta\cos.\tfrac{p+(x+f)\cos.\zeta}{a}+f\sin.\zeta\cos.\theta$$
$$+\tfrac{f\,du\cos.\zeta}{dt\sqrt{u}}+\tfrac{f\,dv}{dt\sqrt{v}}$$

vnde motus aquae per helicem definiri debet, vti enim est $dp=dt\sqrt{u}$, ita erit $dx=dt\sqrt{v}$.

Multiplicetur ergo haec aequatio per $dp+dx\cos.\zeta$ $=dt\sqrt{u}+dt\cos.\zeta.\sqrt{v}$, eritque integrando

$$a^2\sin\theta\sin.\tfrac{p+x\cos.\zeta}{a}=a^2\sin.\theta\sin.\tfrac{p+(x+f)\cos.\zeta}{a}+f(p+x\cos.\zeta)\sin.\zeta\cos\theta$$
$$+f\int\left(\tfrac{du\cos.\zeta}{\sqrt{u}}+\tfrac{dv}{\sqrt{v}}\right)(\sqrt{u}+\cos.\zeta.\sqrt{v})$$

COROLL. 1.

14. Si igitur motus gyrationis cylindri fuerit vniformis, seu u constans, ponatur $u=k$, ob $du=0$ erit

$$a^2\sin.\theta\sin.\tfrac{p+x\cos.\zeta}{a}=a^2\sin.\theta\sin.\tfrac{p+(x+f)\cos.\zeta}{a}+f(p+x\cos.\zeta)\sin.\zeta\cos.\theta$$
$$+2f\sqrt{kv}+fv\cos.\zeta+\text{Const.}$$

Vbi est $p=t\sqrt{k}$, ita vt haec aequatio ob $\sqrt{v}=\frac{dx}{dt}$ duas tantum variabiles t et x inuoluat. Constans autem ex statu initiali debet definiri.

COROLL. 2.

15. Si portio aquae in tubo MN fuerit infinite parua seu $f=0$, erit $\sin.\frac{p+(x+f)\cos.\zeta}{a}=\sin.\frac{p+x\cos.\zeta}{a}$
$+\frac{f\cos.\zeta}{a}\cos.\frac{p+x\cos.\zeta}{a}$

hoc ergo casu motus definietur hac aequatione:
Const. $=a\cos.\zeta\sin.\theta\cos.\frac{p+x\cos.\zeta}{a}+(p+x\cos.\zeta)\sin.\zeta\cos.\theta$ $+2\sqrt{kv}+v\cos.\zeta$. Quodsi ergo haec particula initio quieuerit in E, punctumque E fuerit in A, ita vt posito $x=0$, fit $p=0$ et $v=0$ erit $a\cos.\zeta\sin.\theta\left(1-\cos.\frac{p+x\cos.\zeta}{a}\right)$ $=(p+x\cos.\zeta)\sin.\zeta\cos.\theta+2\sqrt{kv}+v\cos.\zeta.$

COROLL. 3.

16. Si in casu corollarii praecedentis ponatur angulus $\frac{p+x\,\mathrm{cos}.\zeta}{a}=\Phi$, vt sit $dt=\frac{a\,d\Phi}{\sqrt{k}+\mathrm{cos}.\zeta\sqrt{v}}$, ob $dp=dt\sqrt{k}$ et $dx=dt\sqrt{v}$, relatio inter Φ et v hac exprimetur aequatione:

$$a\,\mathrm{cos}.\zeta\,\mathrm{sin}.\theta(1-\mathrm{cos}.\Phi)=a\Phi\,\mathrm{sin}.\zeta\,\mathrm{cos}.\theta+2\sqrt{kv}+v\,\mathrm{cos}.\zeta$$

ex qua fit $\sqrt{k}+\mathrm{cos}.\zeta\sqrt{v}=\sqrt{(k-a\Phi\,\mathrm{sin}.\zeta\,\mathrm{cos}.\zeta\,\mathrm{cos}.\theta+a\,\mathrm{cos}\,\zeta^2\,\mathrm{sin}\,\theta(1-\mathrm{cos}\,\Phi))}$

ideoque $dt=\frac{a\,d\Phi}{\sqrt{(k-a\Phi\,\mathrm{sin}.\zeta\,\mathrm{cos}.\zeta\,\mathrm{cos}.\theta+a\,\mathrm{cos}.\zeta^2\,\mathrm{sin}.\theta(1-\mathrm{cos}.\Phi))}}$

COROLL. 4.

17. Simili modo si generaliter, posito tamen motu gyratorio constante, seu $u=k$, ponatur $\frac{p+x\,\mathrm{cos}.\zeta}{a}=\Phi$ et $\frac{f\,\mathrm{cos}.\zeta}{a}=\gamma$, erit quoque $dt=\frac{a\,d\Phi}{\sqrt{k}+\mathrm{cos}.\zeta.\sqrt{v}}$ et $\frac{a\,\mathrm{cos}.\zeta\,\mathrm{sin}.\theta}{\gamma}\,\mathrm{sin}.\Phi=\frac{a\,\mathrm{cos}\,\zeta\,\mathrm{sin}\,\theta}{\gamma}\,\mathrm{sin}.(\gamma+\Phi)+a\Phi\,\mathrm{sin}.\zeta\,\mathrm{cos}.\theta+2\sqrt{kv}+v\,\mathrm{cos}\,\zeta\pm C.$ ideoque

$$\sqrt{k}+\mathrm{cos}.\zeta\sqrt{v}=\sqrt{(C+\tfrac{a}{\gamma}\mathrm{cos}.\zeta^2\,\mathrm{sin}.\theta(\mathrm{sin}.\Phi-\mathrm{sin}(\gamma+\Phi))-a\Phi\,\mathrm{sin}.\zeta\,\mathrm{cos}.\zeta\,\mathrm{cos}.\theta)}$$

vnde fit

$$dt=\frac{a\,d\Phi}{\sqrt{(C+\frac{a}{\gamma}\mathrm{cos}.\zeta^2\,\mathrm{sin}.\theta(\mathrm{sin}.\Phi-\mathrm{sin}.(\gamma+\Phi))-a\Phi\,\mathrm{sin}\,\zeta\,\mathrm{cos}.\zeta\,\mathrm{cos}.\theta)}}$$

vbi Φ denotat angulum ACS, et γ angulum SCT, qui est constans.

COROLL. 5.

18. Si cylindrus in partem contrariam celeritate $=\sqrt{k}$ circumagatur, pro $\sqrt{k}$ scribi debet $-\sqrt{k}$, arcusque p negatiue erit accipiendus, ita vt sit $\Phi=\frac{x\,\mathrm{cos}.\zeta-p}{a}$. Quare

Quare cum sit $p > \frac{x\,\text{cof.}\zeta}{a}$, etiam angulus Φ negatiue accipiatur, habebimus ergo pro hoc motu: $\Phi = \frac{t - x\,\text{cof.}\zeta}{a}$; et $dt = \frac{a\,d\Phi}{\sqrt{k} - \text{cof.}\zeta.\sqrt{v}}$ atque $\sqrt{k} - \text{cof.}\,\zeta, \sqrt{v}$ $= \sqrt{(C - \frac{a}{\gamma}\,\text{cof.}\,\zeta^2\,\text{fin.}\,\theta\,(\text{fin.}\Phi - \text{fin.}(\Phi - \gamma)) + a\,\Phi\,\text{fin.}\zeta\,\text{cof.}\zeta\,\text{cof}\,\theta)}$.

COROLL. 6.

19. Si hoc cafu initio $t = 0$, quo erat $p = 0$, et $\sqrt{v} = 0$, fuerit $x = EM = g$; ideoque $\Phi = -\frac{g\,\text{cof.}\zeta}{a}$; ponamus hunc angulum initialem $ECS = \varepsilon$, vt fuerit initio $\Phi = -\varepsilon$, erit $\sqrt{k} - \text{cof.}\zeta.\ \sqrt{v} = \sqrt{(k + \frac{a}{\gamma}\,\text{cof}\,\zeta^2\,\text{fin.}\theta}$ $(\text{fin.}(\varepsilon + \gamma) - \text{fin}\,\varepsilon - \text{fin.}\Phi + \text{fin.}(\Phi - \gamma) + a(\varepsilon + \Phi)\,\text{fin.}\zeta\,\text{cof.}\zeta\,\text{cof.}\theta)$.

PROBLEMA 7.

20. Si, dum cylindrus data celeritate vniformiter in plagam BEA gyratur, helici in C particula aquae seu globulus inferatur, qui deinde a motu cylindri abripiatur, determinare motum globuli per helicem. Tab II. Fig. 5.

SOLVTIO.

Sit $\sqrt{k}$ celeritas, qua punctum cylindri E in gyrum agitur, in fenfum EA; fueritque eo momento, quo globulus in orificium helicis E immittitur, angulus $ACE = \alpha$, et $t = 0$. Fieri autem nequit, vt celeritas globuli initialis fit $= 0$; fi enim celeritas eius refpectu tubi fecundum EM ponatur $= \sqrt{v}$, eius celeritas vera erit $= \sqrt{(k + v - 2\,\text{cof.}\zeta.\sqrt{kv})}$, quae non poteft euanefcere. Ponamus ergo hanc celeritatem initio fuiffe minimam, ac reperimus $\sqrt{v} = \text{cof}\,\zeta\,\sqrt{k}$, ita vt celeritas vera fuerit $= \text{fin.}\zeta.\sqrt{k}$, cuius directio ad

EM erat normalis. Iam elapso tempore t, sit vt supra $AE = p$; globulus vero reperiatur in M existente $EM = x$, cuius celeritas relatiue in tubo secundum MN sit $= \sqrt{v}$, erit $dp = -dt\sqrt{k}$ et $dx = dt\sqrt{v}$: et per §. 15. motus definietur hac aequatione, sumta scilicet celeritate $\sqrt{k}$ negatiua.

$$\text{Const} = a \cos.\zeta \sin.\theta \cos.\frac{p + x\cos.\zeta}{a} + (p + x\cos.\zeta)\sin.\zeta \cos\theta - 2\sqrt{kv} + v\cos.\zeta.$$

Constans autem ita est definienda, vt posito $t = 0$, seu $\frac{p}{a} = \alpha$, fiat $x = 0$ et $\sqrt{v} = \cos.\zeta.\sqrt{k}$; sicque erit

$$\text{Const.} = a\cos.\zeta \sin.\theta \cos.\alpha + \alpha . a \sin.\zeta \cos\theta - 2k\cos.\zeta + k\cos.\zeta^3$$

Ponatur angulus $ACS = \Phi$, erit $\Phi = \frac{p + x\cos.\zeta}{a}$ et $d\Phi = -\frac{dt\sqrt{k} + dt\cos.\zeta.\sqrt{v}}{a}$. Confecerit autem cylindrus motu angulari tempore t angulum $= \omega$, in plagam BEA, erit $d\omega = \frac{dt\sqrt{k}}{a}$, et $\omega = \frac{t\sqrt{k}}{a}$, quem angulum loco temporis, tamquam eius mensuram in calculum introducamus, erit $\frac{p}{a} = \alpha - \omega$, $\Phi = \alpha - \omega + \frac{x\cos.\zeta}{a}$; et ob $dx = dt\sqrt{v} = \frac{a\,d\omega\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$ habebimus $d\Phi = -d\omega + \frac{d\omega\cos.\zeta.\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$ seu $d\omega = \frac{d\Phi\sqrt{k}}{-\sqrt{k} + \cos.\zeta.\sqrt{v}}$. Nostra autem aequatio erit

$$a\cos.\zeta \sin.\theta \cos.\alpha + \alpha a \sin.\zeta \cos.\theta - 2k\cos.\zeta + k\cos\zeta^3 = a\cos.\zeta \sin.\theta \cos.\Phi + a\Phi \sin.\zeta \cos.\theta - 2\sqrt{kv} + v\cos.\zeta$$

ex qua obtinemus:

$$\cos.\zeta\sqrt{v} - \sqrt{k} = -\sqrt{(k\sin.\zeta^4 + a\cos.\zeta^2 \sin.\theta(\cos.\alpha - \cos.\Phi) + a(\alpha - \Phi)\sin.\zeta \cos.\zeta \cos\theta)}$$

vnde ad datum valorem ipsius Φ elicimus valorem ipsius $\sqrt{v}$, quo inuento erit

$$d\omega = \frac{-d\Phi\sqrt{k}}{\sqrt{(k\sin.\zeta^4 + a\cos.\zeta^2 \sin.\theta(\cos.\alpha - \cos.\Phi) + a(\alpha - \Phi)\sin.\zeta \cos.\zeta \cos.\theta)}}$$

cuius integrale ita debet capi, vt posito $\omega = 0$, fiat $\Phi = \alpha$.

$\Phi = \alpha$. Ex hac ergo aequatione integrali viciſſim ad datum tempus angulo ω expreſſum, reperitur angulus Φ, ex eoque porro locus globuli in helice, ſeu portio $EM = x = \frac{a(\Phi - \alpha + \omega)}{cof.\ \zeta}$, eiusque inſuper celeritas relatiua in helice $\sqrt{v}$ ſcilicet

$$\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k}}{cof.\ \zeta} - \sqrt{(k\ \text{ſin.}\ \zeta^2 \text{tang.}\ \zeta^2 + a\ \text{ſin.}\ \theta(\text{coſ.}\ \alpha - \text{coſ.}\ \Phi) + a(\alpha - \Phi)\ \text{tang.}\ \zeta\ \text{coſ.}\ \theta)}$$

COROLL. 1.

21. Expreſſio coſ. $\zeta\ \sqrt{v} - \sqrt{k}$ deſignat celeritatem veram puncti S in baſi, quod globulo in M reſpondet. Cum enim globulus velocitate $\sqrt{v}$ in helice ſecundum MN progredi ponatur, erit eius celeritas angularis circa axem $=$ coſ $\zeta.\ \sqrt{v}$, reſpectu helicis; quia autem helix ipſa in plagam oppoſitam conuertitur celeritate $= \sqrt{k}$, erit vera globuli celeritas rotatoria, ſeu motus quo punctum S a ſummitate A recedit $=$ coſ. $\zeta\ \sqrt{v} - \sqrt{k}$.

COROLL. 2.

22. Ipſo autem motus initio, quo $\sqrt{v} = \text{coſ.}\ \zeta \sqrt{k}$; haec celeritas erat negatiua, ſcilicet $= (\text{coſ.}\ \zeta^2 - 1) \sqrt{k} = -\text{ſin.}\ \zeta^2 \sqrt{k}$, ſtatim ergo ab initio etiam nunc erit negatiua; ſeu angulus $ACS = \Phi$ diminuetur, quae eſt ratio, cur calculus pro coſ. $\zeta\ \sqrt{v} - \sqrt{k}$ valorem praebuerit negatiuum

$$\text{coſ.}\ \zeta \sqrt{v} - \sqrt{k} = -\sqrt{(k\ \text{ſin.}\ \zeta^4 + a\ \text{coſ.}\ \zeta^2\ \text{ſin.}\ \theta(\text{coſ.}\ \alpha - \text{coſ.}\ \Phi) + a(\alpha - \Phi)\ \text{ſin.}\ \zeta\ \text{coſ}\ \zeta\ \text{coſ.}\ \theta)}$$

Hic ergo valor in affirmatiuum abire, ſeu angulus $ACS = \Phi$ augmenta capere nequit, niſi poſtquam fuerit quantitas illa radicalis $= 0$. Poſtquam autem hoc euenerit, tum ſigni illius radicalis valor affirmatiue erit accipiendus.

COROLL 3.

23. Quoniam autem ab initio angulus Φ decreſcit tam diu, donec valor quantitatis illius radicalis euaneſcit, eousque Φ vltra α diminuetur, ſeu erit $\Phi < \alpha$: Ponatur ergo $\Phi = \alpha - \psi$, vt ſit

$$\text{coſ.}\,\zeta\sqrt{v} - \sqrt{k} = -\sqrt{(k\,\text{ſin.}\,\zeta^4 + a\,\text{coſ.}\,\zeta^2\theta(\text{coſ}\,\alpha - \text{coſ.}(\alpha-\psi)) + a\psi\,\text{ſin}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta)}$$

ſicque quamdiu augendo valorem ipſius ψ, iſta quantitas radicalis realem retinet valorem, tamdiu globulus a motu cylindri in plagam BεA abripietur; neque prius in plagam contrariam motum ſuum vertet, quam vbi ψ eousque increuerit, vt ſit

$$k\,\text{ſin.}\,\zeta^4 + a\,\text{coſ}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta(\text{coſ.}\,\alpha - \text{coſ.}(\alpha-\psi)) + a\psi\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ}\,\theta = 0$$

COROLL 4.

24. Quia autem augendo ψ extremus terminus continuo creſcit, medius vero qui eſt negatiuus $-a\,\text{coſ.}\,\zeta^2$ ſin. $\theta\,(\text{coſ.}(\alpha-\psi) - \text{coſ.}\,\alpha)$ tamdiu tantum creſcit, quoad fiat $\psi = \alpha$, ſeu $\Phi = 0$, manifeſtum eſt, niſi formula illa in nihilum abeat, antequam fiat $\psi = \alpha$, eam nunquam eſſe euanituram; globulumque continuo celerius ſecundum motum cylindri gyratorium abreptum iri. Hoc ergo caſu punctum S continuo celerius in plagam BEA conuertetur.

COROLL 5.

25. Si ergo quantitas iſta radicalis ponatur $=$ V, vt ſit $\text{coſ.}\,\zeta\sqrt{v} - \sqrt{k} = -\text{V}$, ſeu $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - \text{V}}{\text{coſ.}\,\zeta}$, ob valorem ipſius V hoc caſu continuo creſcentem, celeritas

ritas globuli progreſſiua in helice ſecundum directionem eius EMN tandem euaneſcet, poſteaque adeo fiet negatiua, quod vbi acciderit, globulus per helicem reuertetur, ac per orificium E iterum erumpet; ſiquidem cylindrus fuerit longus, vt globulus in ſuperiori helicis termino K non erumpat, antequam reuertatur.

SCHOLION.

26. Cum poſito $\Phi = \alpha - \psi$, et

$$V = \sqrt{}(k\,\text{ſin.}\,\zeta^4 - a\,\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta\,(\text{coſ.}\,(\alpha - \psi) - \text{coſ.}\,\alpha) + a\,\psi\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta)$$

quantitas V tamdiu negatiue ſit accipienda, ſeu habeatur coſ. $\zeta \sqrt{}v - \sqrt{}k = -$ V, quamdiu augendo angulum ψ quantitas V realem obtinet valorem; ſtatim autem atque haec quantitas V euaſerit $= o$, inde angulus ψ iterum decreſcat, ſignumque contrarium ipſi V tribui debeat, vt ſit coſ. $\zeta \sqrt{}v - \sqrt{}k = +$ V; duos habebimus caſus principales euoluendos, quorum altero vspiam augendo ψ ab initio fit V $= o$, altero vero hoc nunquam euenit. Statim autem ab initio fiet V $= o$, ſi ſit vel $k = o$ vel $\zeta = o$: tum aliquo tempore poſt initium hoc euenire ponamus, denique vero nunquam; vnde ſequentes caſus diligentius euoluamus.

CASVS I.

27. Ponamus ergo primo motum cylindri rotatorium penitus euaneſcere, ſeu eſſe $k = o$. Cum igitur in ipſo initio fiat V $= o$, ſtatim ab initio ipſi V contrarium ſigno tribui debet, vt ſit coſ. $\zeta \sqrt{}v = +$ V, ſeu $\sqrt{}v = \frac{V}{\text{coſ.}\,\zeta}$, atque angulus ψ inde iam erit negatiuus, ſeu angulus Φ continuo creſcet, vt ſit

V $= \sqrt{}$

$V = \sqrt{(a \operatorname{cof.} \zeta^2 \operatorname{fin.} \theta (\operatorname{cof.} \alpha - \operatorname{cof.} \Phi) + a(\alpha - \Phi) \operatorname{fin.} \zeta \operatorname{cof.} \zeta \operatorname{cof.} \theta)}$
et $dt = \frac{a\,d\omega}{\sqrt{k}} = \frac{a\,d\Phi}{V}$, atque $EM = x = \frac{a(\Phi - \alpha)}{\operatorname{cof.} \zeta}$.
Quia ergo initio erat $\Phi = \alpha$, et $\sqrt{v} = 0$, ponamus tempore elapſo t, eſſe $\Phi = \alpha + \psi$, vt ſit
$V = \sqrt{(a \operatorname{cof.} \zeta^2 \operatorname{fin.} \theta (\operatorname{cof} \alpha - \operatorname{cof.} (\alpha + \psi)) - a \psi \operatorname{fin.} \zeta \operatorname{cof.} \zeta \operatorname{cof.} \theta)}$
et $x = \frac{a\psi}{\operatorname{cof.} \zeta}$ atque $dt = \frac{a\,d\psi}{V}$.

Hic iam perſpicuum eſt, fieri omnino non poſſe, vt angulus ψ continuo creſcat, niſi ſit $\operatorname{ſin} \zeta \operatorname{cof.} \zeta \operatorname{cof.} \theta = 0$, quem caſum ſeorſim euoluere conueniet. Quodſi vero ψ creſcere ceſſet, quo eueniet, vbi $V = 0$, ibi globulus ad ſtatum quietis redigetur, ac in helice regredi incipiet, a quo ergo momento valor ipſius V negatiue capi debebit, angulusque ψ iterum decreſcet, donec fiat $\psi = 0$. et tum corpus rurſus in E, ſicuti initio, haerebit; vnde eundem motum denuo inchoabit.

At euenire poteſt, vt haec globuli reuerſio in ipſum quaſi initium motus incidat, atque angulus ψ ne mininum quidem augeri queat, quin angulus Φ maneat nullus, vel adeo fiat negatiuus.

Prior caſus locum habebit, ſi poſito ψ infinite paruo, valor ipſius V nihilominus maneat $= 0$; id quod vſu veniet $\operatorname{ſin.} a \operatorname{cof.} \zeta^2 \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{ſin.} \alpha = a \operatorname{ſin.} \zeta \operatorname{cof.} \zeta \operatorname{cof} \theta$ ſeu $\operatorname{ſin.} \alpha = \frac{\operatorname{tang} \zeta}{\operatorname{tang} \theta}$ ac tum corpus perpetuo in puncto E quieſcet; hic enim directio helicis erit horizontalis.

Poſterior caſus autem locum habebit, ſi $\operatorname{ſin.} \alpha < \frac{\operatorname{tang} \zeta}{\operatorname{tang} \theta}$ quo globulus ne in helicem quidem ingredietur, ſed ſtatim inde delabetur; vel ſi cylindrus deorſum eſſet continuatus, mutata directione globulus per helicis partem interiorem deſcenſurus eſſet; ita vt angulus ψ tum fieret negatiuus perinde ac valor ipſius x, et V.

Hi

Hi autem caſus locum non inueniunt, niſi ſit $\theta > \zeta$, ſeu inclinatio baſis cylindri ad horizontem maior, quam angulus BEF, quem helix cum baſi cylindri conſtituit. Hunc autem motum in helice quieſcente ſuſius non perſequor, cum nihil habeat difficultatis.

CASVS II.

28. Ponamus motum gyratorium cylindri ita eſſe comparatum, vt motus gyratorius globuli circa axem, qui angulo ψ indicatur, et initio cum motu gyratorio cylindri in eandem plagam fuerat directus, poſt aliquod tempus in plagam oppoſitam reflectatur.

Angulus ergo ψ eo vsque augeri poterit, vt fiat

$$k\,\text{ſin.}\,\zeta^4 = a\,\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta(\text{coſ.}(\alpha-\psi)-\text{coſ.}\,\alpha) - a\psi\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta$$

ſeu $V = o$; hoc autem fieri nequit, niſi ſit

$$\text{coſ.}\,(\alpha-\psi) - \text{coſ.}\,\alpha > \tfrac{\text{tang.}\,\zeta}{\text{tang.}\,\theta}.\,\psi.$$

cum igitur ab initio fuiſſet $\psi = o$, neceſſe eſt, vt poſito ψ euaneſcente, ſit ſin. $\alpha > \frac{\text{tang}\,\zeta}{\text{tang.}\,\theta}$. Deinde valor ipſius coſ. $(\alpha-\psi)$ − coſ. $\alpha - \frac{\text{tang}\,\zeta}{\text{tang.}\,\theta}\,\psi$ erit maximus, ſi

$$\text{ſin.}\,(\alpha-\psi) = \tfrac{\text{tang.}\,\zeta}{\text{tang.}\,\theta}.$$

Concipiamus hoc pro ψ valore ſubſtituto fieri

$$\text{coſ.}\,(\alpha-\psi) - \text{coſ.}\,\alpha - \tfrac{\text{tang.}\,\zeta}{\text{tang.}\,\theta} : \psi = M$$

atque vt valor ipſius V augendo ψ tandem euaneſcere queat, neceſſe eſt, vt ſit k ſin. $\zeta^4 < a$ M coſ. ζ^2 ſin. θ. Quare, vt hic caſus locum habere poſſit, ſequentes tres conditiones requiruntur.

I. vt ſit tang. $\theta >$ tang. ζ ſeu $\theta > \zeta$; ita vt fractio $\frac{\text{tang.}\,\zeta}{\text{tang.}\,\theta}$ vnitatem non excedat.

II. vt ſit ſin. $\alpha > \frac{\text{tang.}\,\zeta}{\text{tang.}\,\theta}$: ac denique

III. vt ſit $k < a\,M\,\frac{\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\zeta^4}$.

 Quo-

Quoties ergo hae tres conditiones locum inueniunt, globulus in helice in sensum BEA circa axem cylindri circumferetur, donec descripserit angulum ψ, vt fiat

$$V = \sqrt{(k \sin. \zeta^4 - a \cos. \zeta^2 \sin. \theta (\cos. (\alpha - \psi) - \cos. \alpha)} \\ \overline{+ a \psi \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \theta)} = o,$$

tumque erit $\cos. \zeta \sqrt{v} - \sqrt{k} = o$, seu globuli celeritas relatiua per helicem $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k}}{\cos. \zeta}$; cum antequam ad hunc locum perueniat, sit $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - V}{\cos. \zeta}$; existente $x = \frac{a\omega - a\psi}{\cos. \zeta}$ et $d\omega = \frac{dt \sqrt{k}}{a} = \frac{d\psi \sqrt{k}}{V}$. Postquam autem hunc locum attigerit, angulus ψ continuo decrescet, seu motus angularis globuli fiet contrarius motui cylindri, et tribuendo ipsi V signum contrarium, habebitur $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} + V}{\cos. \zeta}$, et quando fiet $\psi = o$, erit $V = \sin. \zeta^2 \sqrt{k}$, hincque $\sqrt{v} = \frac{(1 + \sin. \zeta^2)}{\cos. \zeta} \sqrt{k}$ et $x = \frac{a\omega}{\cos. \zeta}$. Inde fiet ψ negatiuum, et distantia x adhuc magis crescet, dum posito ψ negatiuo fiet $x = \frac{a\omega + a\psi}{\cos. \zeta}$, donec fiat

$$V = \sqrt{(k \sin. \zeta^4 + a \cos. \zeta^2 \sin. \theta (\cos. \alpha - \cos. (\alpha + \psi))} \\ \overline{- a \psi \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \theta)} = o$$

et eo vsque erit $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} + V}{\cos. \zeta}$: vbi autem fuerit $V = o$, euadet $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k}}{\cos. \zeta}$; qui ergo valor ante hoc tempus maximus fuit, vbi erat $\sin. (\alpha + \psi) = \frac{\tang. \zeta}{\tang. \theta}$. Postquam autem fuerit $V = o$, angulus ψ iterum decrescet, indeque etiam distantia x minora capiet incrementa, eritque $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - V}{\cos. \zeta}$, donec euadat $\psi = o$, tumque erit $V = \sin. \zeta^2 \sqrt{k}$ et $\sqrt{v} = \cos. \zeta \sqrt{k}$, atque $x = \frac{a\omega}{\cos. \zeta}$. Hoc ergo tempore celeritas $\sqrt{v}$ eadem erit, quae erat initio, indeque motus simili modo propagabitur.

Motus

Motus ergo per helicem continuo erit progressiuus, si perpetuo fuerit $V < \sqrt{k}$: sin autem inter eas motus partes, vbi $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - V}{\cos. \zeta}$, eueniat, vt fiat $V > \sqrt{k}$, tum globulus ibi per helicem regredietur, donec $\sqrt{v}$ iterum fiat affirmatiuum. Valores autem affirmatiui praeualebunt; vidimus enim post primam periodum, qua celeritas ad initialem redit, globulum spatium absoluisse in helice $x = \frac{a\omega}{\cos. \zeta}$, et post n huiusmodi periodos promouebitur per spatium helicis $x = \frac{n a \omega}{\cos. \zeta}$, sicque continuo altius eleuabitur, donec tandem per superius orificium K eiiciatur.

CASVS III.

29. Ponamus motum ita esse comparatum, vt postquam ab initio angulus $\psi = \alpha - \Phi$ increscere coepit, nunquam euadat

$$V = \sqrt{(k \sin. \zeta^4 - a \cos. \zeta^2 \sin. \theta (\cos. (\alpha - \psi) - \cos. \alpha) + a \psi \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \theta)} = 0$$

vnde hic angulus ψ continuo magis augebitur, valorque ipsius V increscet. Tum autem prodibit $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - V}{\cos. \zeta}$, ex quo sequitur, celeritatem $\sqrt{v}$ tandem euanescere, globulumque inde ad inferiorem cylindri partem reuerti, donec in E iterum elabatur. Hoc etiam intelligitur ex formula $x = \frac{a(\omega - \psi)}{\cos. \zeta}$; distantia enim x diminuetur, si fuerit $d\omega < d\psi$ seu, $\frac{d\psi \sqrt{k}}{V} < d\psi$, quod vtique euenit, quando $\sqrt{k} < V$ seu $\sqrt{v}$ negatiuum.

Hic ergo casus, quo globulum non vltra datum terminum in helice promouere licet, in sequentibus casibus locum habet:

1° Si tang. $\theta <$ tang ζ seu angulus PQR $<$ BEF, quomodocunque reliquae quantitates se habeant.

2° Si fuerit sin. $\alpha < \frac{tang.\zeta}{tang.\theta}$, ita vt etiamsi sit $\zeta < \theta$ tamen hoc casu globulus reuertatur in helice.

3° Etiamsi sit $\zeta < \theta$ et sin. $\alpha > \frac{tang.\zeta}{tang.\theta}$, tamen casus tertius locum inuenit, si fuerit $k > \frac{a\, cos.\zeta^2\, sin.\theta}{sin.\zeta^4}$. M denotante M maximum valorem, quem expressio cos. $(\alpha - \psi) -$ cos. $\alpha - \frac{tang.\zeta}{tang.\theta}$. ψ induere valet.

Hinc ergo patet, gyrationis motum nimis celerem non esse aptum ad globulum ad datam quamuis altitudinem eleuandum, cum motus tardior hunc effectum praestare valeat. Fieri ergo potest, vt ob gyrationem nimium velocem effectu frustremur, quem tamen tardiore motu consequi possemus.

EXEMPLUM.

30. Sit $\frac{tang.\zeta}{tang.\theta} = \frac{1}{2}$ et angulus initialis ACE rectus, seu $\alpha = 90°$, atque $\psi = 90° - \Phi$, sicque ψ denotabit angulum, quo globulus circa axem versus punctum summum A ab E est translatum tempore t, quo cylindrus per angulum $= \omega$ est conuersus, ita vt sit $d\omega = \frac{dt\sqrt{k}}{a}$. Habebimus ergo
$V = \sqrt{(k\,\text{sin.}\,\zeta^4 - a\,\text{cos.}\,\zeta^2\,\text{sin.}\,\theta\,(\text{sin.}\,\psi - \frac{1}{2}\psi))}$, et $d\omega = \frac{d\psi\sqrt{k}}{V}$ atque $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - V}{cos.\zeta}$; nec non $x = \frac{a(\omega - \psi)}{cos.\zeta}$. Quamdiu ergo motus gyratorius globuli in sensum BEA dirigitur, valor ipsius V in his formulis affirmatiue accipi debet, contra vero negatiue.

Ab initio ergo crescente ψ, decrescit valor ipsius V ob sin. $\psi > \frac{1}{2}\psi$: quamdiu manet $k\,\text{sin.}\,\zeta^4 > a\,\text{cos.}\,\zeta^2$ sin.

$\sin.\theta(\sin.\psi - \frac{1}{2}\psi)$. Cum igitur ipſius $\sin.\psi - \frac{1}{2}\psi$ valor maximus ſit, $\sin.\psi = 60° = \frac{1}{3}\pi$, denotante π angulum duobus rectis aequalem, fiatque hic valor maximus $= \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi = 0,3424267$. Quod ſi ergo fuerit $k\sin.\zeta^4 < 0,3424267\, a \cos.\zeta^2 \sin.\theta$, caſus ſecundus locum habebit, caſus vero tertius ſi $k \sin.\zeta^4 > 0,3424267\, a \cos.\zeta^2 \sin.\theta$. Illo ſcilicet globulus motu angulari tandem reuertetur, hoc vero nunquam. Sit breuitatis ergo $\frac{\cos.\zeta^2 \sin.\theta}{\sin.\zeta^4} = n$, vt ſit

$$V = \sin.\zeta^2 \sqrt{(k - na(\sin.\psi - \tfrac{1}{2}\psi))}.$$

I. Ac ponamus primo eſſe $k > 0,3424267\, na$; atque angulus ψ continuo creſcet, valor autem ipſius V initio decreſcet, donec fiat $\psi = 60°$, vbi valor ipſius V erit minimus, ſcilicet $= \sin\zeta^2 \sqrt{(k - 0,3424267\, na)}$, ideoque celeritas globuli progreſſiua per helicem maxima. Inde vero valor ipſius V iterum augebitur, tandemque quando $\sin.\psi = \frac{1}{2}\psi$, quod euenit ſi $\psi = 108°, 36^{I}\, 13^{II}, 56^{III}, 22^{IV}$ fiet $V = \sin.\zeta^2.\sqrt{k}$ et $\sqrt{v} = \cos.\zeta.\sqrt{k}$, quae celeritati initiali eſt aequalis. Poſtea vero creſcente vlterius angulo ψ, valor ipſius V magis augebitur, fietque tandem $V = \sqrt{k}$, ſeu $k(1 - \sin.\zeta^4) = a\cos.\zeta^2 \sin.\theta (\frac{1}{2}\psi - \sin.\psi)$ ſeu $\frac{1}{2}\psi - \sin.\psi = \frac{k(1 + \sin.\zeta^2)}{a \sin.\theta}$; hicque celeritas globuli in helice euaneſcet, ex quo ω reuerti incipiet, et quidem motu accelerato, quoniam, creſcente ψ vltra hunc terminum, quantitas V eo maiora capit augmenta. Definito autem ψ ex aequatione $\frac{1}{2}\psi - \sin.\psi = \frac{k(1 + \sin.\zeta^2)}{a\sin.\theta}$, quantitas $x = \frac{a(\omega - \psi)}{\cos.\zeta}$ dabit ſpatium in helice, ad quod globulus penetrauerit, et vnde deinceps reuertitur. Tempus autem, quo huc vsque pertin-

 git,

git, seu angulus ω, a cylindro interea motu gyratorio confectus. definitur hac aequatione:

$$\omega = \int \frac{d\psi \sqrt{k}}{\text{sin.}\,\zeta^2 \sqrt{(k - na\,\text{sin.}\,\psi + \frac{1}{2} na\,\psi)}}$$

quo inuento simul vera via x in helice percursa innotescit.

II. Ponamus esse $k < 0,3424267\,na$, angulusque ψ eo vsque crescet, donec fiat $k = na\,(\text{sin.}\,\psi - \frac{1}{2}\psi)$, quod euenit antequam euadet $\psi = 60°$; tumque erit $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k}}{\text{cos.}\,\zeta}$ ob $V = o$, hactenus ergo celeritas $\sqrt{v}$ augendo increuit; hicque constituamus primam partem motus globuli per helicem.

2^{do}. Ab hoc autem momento angulus ψ iterum diminuetur, et valor $V = \text{sin.}\,\zeta^2 \sqrt{(k - na\,(\text{sin.}\,\psi - \frac{1}{2}\psi))}$ negatiue capi debet, vt fit $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} + V}{\text{cos.}\,\zeta}$, sicque labente tempore valor ipsius V iterum increscet, donec euadente $\psi = o$, fiat $V = \text{sin.}\,\zeta^2 \sqrt{k}$ et $\sqrt{v} = \frac{(1 + \text{sin.}\,\zeta^2)\sqrt{k}}{\text{cos.}\,\zeta}$: hicque secundam motus partem terminemus, in cuius fine $\psi = o$, et celeritas globuli $\sqrt{v}$, maior existit, quam adhuc fuit.

$3°$. Nunc igitur angulus ψ negatiuus esse incipit; posito ergo $-\psi$ loco ψ, habebimus $V = \text{sin.}\,\zeta^2 \sqrt{(k + na\,(\text{sin.}\,\psi - \frac{1}{2}\psi))}$, manente $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} + V}{\text{cos.}\,\zeta}$: et quia sin. $\psi - \frac{1}{2}\psi$ crescit, quamdiu ψ est $< 60°$, ad hunc vsque terminum $\psi = 60°$, valor ipsius V, hincque celeritas $\sqrt{v}$ augebitur; et facto $\psi = 60°$, celeritas globuli in helice progressiua erit maxima, scilicet

$$\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} + \text{sin.}\,\zeta^2 \sqrt{(k + 0,3424267\,na)}}{\text{cos.}\,\zeta}.$$

4°.

4^{to}. Deinde vlterius crefcente hoc angulo ψ, qui nunc eft $= \Phi - \alpha$, valor ipfius V iterum decrefcet, et quando fit $\psi = 108^{\circ}, 36^{I}, 13^{II}, 56^{III}, 22^{IV}$, erit $V = \sin.\zeta^2 \sqrt{k}$ et $\sqrt{v} = \frac{(1+\sin.\zeta^2)\sqrt{k}}{\cos.\zeta}$.

5^{to}. Angulus autem ψ vltra hunc terminum crefcere perget, et quia tum $\frac{1}{2}\psi > \sin \zeta$, erit $V = \sin.\zeta^2 \sqrt{(k - na(\frac{1}{2}\psi - \sin.\psi))}$ et $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} + V}{\cos.\zeta}$. Valor ergo ipfius V continuo fiet minor, indeque etiam celeritas $\sqrt{v}$, donec fiat $\frac{1}{2}\psi - \sin.\psi = \frac{k}{na}$, quo cafu erit $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k}}{\cos.\zeta}$.

6^{to}. Tum autem hic angulus ψ, qui maior eft quam $108^{\circ}, 36^{I}$, iterum decrefcet, fietque $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - V}{\cos.\zeta}$ exiftente $V = \sin.\zeta^2 \sqrt{(k - na(\frac{1}{2}\psi - \sin.\psi))}$; ficque celeritas $\sqrt{v}$ decrefcet, et quando fit $\psi = 108^{\circ}\ 36^{I}$, prodibit $V = \sin.\zeta^2 \sqrt{k}$ et $\sqrt{v} = \cos.\zeta \sqrt{k}$, quae aequalis eft celeritati initiali.

7^{mo}. Porro angulus ψ infra hunc terminum decrefcet, et ob $\sin.\psi > \frac{1}{2}\psi$, erit $V = \sin.\zeta^2 \sqrt{(k + na(\sin.\psi - \frac{1}{2}\psi))}$ et $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - V}{\cos.\zeta}$: et quando fit $\psi = 60$, quo cafu valor ipfius V erit maximus $= \sin.\zeta^2 \sqrt{(k + 0,3424267\, na)}$, et celeritas globuli minima $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - \sin.\zeta^2 \sqrt{(k + 0,3424267\, na)}}{\cos.\zeta}$; Nifi ergo fit $\sqrt{k} > \sin.\zeta^2 \sqrt{(k + 0,3424267\, na)}$ feu $k > \frac{0,3424267\, a \sin.\theta}{1 + \sin.\zeta^2}$, cum fit $k < \frac{0,3424267\, a \cos.\zeta^2 \sin.\theta}{\sin.\zeta^4}$; globulus antequam ad hunc terminum peruenit, regredietur in helice, propterea quod eius celeritas $\sqrt{v}$ fit negatiua. Reuertitur ergo globulus, fi fit $k < \frac{0,3424267\, a \sin.\theta}{1 + \sin.\zeta^2}$, non autem reuertetur, fed perpetuo per cochleam progredi perget, fi fit $k > \frac{0,3424267\, a \sin.\theta}{1 + \sin.\zeta^2}$. Quia autem effe debet $k < \frac{0,3424267\, a \cos.\zeta^2 \sin.\theta}{\sin.\zeta^4}$, manifeftum eft, hunc

cafum

casum locum obtinere non posse, nisi sit $1 > 2\,\text{sin.}\,\zeta^4$, seu $\text{sin.}\,\zeta < \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}$; hoc est: nisi angulus helicis ζ minor sit quam $57^\circ, 14^I$.

8^{vo}. Postquam autem angulus ψ vltra 60° fuerit diminutus, etiam vlterius decrescet, eritque adhuc

$$V = \text{sin.}\,\zeta^2 \sqrt{(k + na(\text{sin.}\,\psi - \tfrac{1}{2}\psi))} \text{ et } \sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - V}{\text{cos.}\,\zeta}$$

valorque ipsius V continuo fiet maior, vt et celeritas $\sqrt{v}$, quae mox affirmatiua reddetur, et facto $\psi = 0$ redibit ea, vti erat initio, $\sqrt{v} = \text{cos.}\,\zeta . \sqrt{k}$,

Cum globulus huc peruenerit, angulus ψ iterum negatiuus euadet, seu motus angularis globuli motum cylindri sequetur, seu erit iam $\Phi < \alpha$, seu $\Phi < 90^\circ$; vel globulus in superiorem cylindri medietatem eleuabitur, cum a Nro. 3^{tio} in inferiore esset versatus: atque nunc pari modo motum suum prosequetur, atque ab initio fecerat; ita vt iam eaedem motus partes, quas descripsimus, sint rediturae.

Quod vero ad tempora attinet, quibus quaeque motus huius pars absoluitur, ea nonnisi per quadraturas definiri poterunt ope formulae $d\omega = \frac{d\psi\sqrt{k}}{V}$; quippe cuius integratio exhiberi nequit.

PROBLEMA 8.

31. Si vna integra helicis circumuolutio EFGe aqua fuerit repleta, atque cylindrus subito in gyrum agi incipiat celeritate vniformi, quae in puncto E sit $= \sqrt{k}$, idque in sensum helici contrarium BEA, inuenire motum, quo ista aquae portio per helicem promouebitur.

SOLV-

SOLVTIO.

Positis basis cylindri radio $CA = a$, angulo helicis $BEF = \zeta$, angulo, quem axis cylindri PQ cum verticali constituit, $PQR = \theta$; sit ipso motus initio angulus $ACE = \alpha$; quo tempore aqua in helice spatium $EFGe = f$ occupet, quod cum vni integrae reuolutioni sit aequale, posito $\frac{f \cos.\zeta}{a} = \gamma$, erit γ angulus quatuor rectis aequalis, seu denotante $1 : \pi$ rationem radii ad semicircumferentiam, erit $\gamma = 2\pi$ et $f = \frac{2\pi a}{\cos.\zeta}$, et ipsa aquae copia $= -\frac{2\pi a bb}{\cos.\zeta}$, siquidem bb designet amplitudinem helicis.

Iam elapso tempore t, quo ipse cylindrus circa axem conuersus erit angulo $= \omega$, vt sit $d\omega = \frac{dt\sqrt{k}}{a}$, seu $\omega = \frac{t\sqrt{k}}{a}$, ideoque $t = \frac{a\omega}{\sqrt{k}}$, peruenerit aqua in helice in situm $MFGem$; ponatur ergo spatium $EM = x$ et celeritas, qua aqua per helicem promouetur $= \sqrt{v}$; vt sit $dx = dt\sqrt{v} = \frac{a\,d\omega\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Ponatur angulus $ACS = \Phi$, et ob angulum $ECS = \frac{x\cos.\zeta}{a}$, quia punctum E angulo ω ad A accessit, erit $\Phi = \alpha - \omega + \frac{x\cos.\zeta}{a}$, ideoque $\frac{x\cos.\zeta}{a} = \omega + \Phi - \alpha$: et hinc $\frac{dx\cos.\zeta}{a} = \frac{d\omega\cos.\zeta.\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = d\omega + d\Phi$, ita vt sit $d\omega = \frac{d\Phi\sqrt{k}}{\cos.\zeta.\sqrt{v} - \sqrt{k}}$. At ex §. 17 habebitur haec aequatio ob $\gamma = 2\pi$ et $\sin.(\gamma + \Phi) = \sin.\Phi$:

$$\cos.\zeta.\sqrt{v} - \sqrt{k} = \sqrt{(C - a\Phi \sin.\zeta \cos.\zeta \cos.\theta)}.$$

Ipso autem motus initio aquae in tubo helicis eiusmodi motus imprimitur, vt sit $\sqrt{v} = \cos.\zeta.\sqrt{k}$, quo casu cum sit $\Phi = \alpha$, erit

$$\cos.\zeta.\sqrt{v} - \sqrt{k} = -\sqrt{(k \sin.\zeta^2 + a(\alpha - \Phi)\sin.\zeta\cos.\zeta\cos.\theta)}.$$

 Ab

Ab initio ergo angulus Φ, qui ipso initio erat $= \alpha$, decrescit, seu terminus aquae M propius ad lineam supremam Aa eleuatur, quam fuerat initio. Ponamus tempore t hanc apptopinquationem factam esse per angulum ψ, vt sit $\Phi = \alpha - \psi$, erit $\frac{x \cos.\zeta}{a} = \omega - \psi$ et $x = \frac{a(\omega - \psi)}{\cos.\zeta}$ tum vero $\cos.\zeta \sqrt{v} - \sqrt{k} = -\sqrt{(k \sin.\zeta^4 + a\psi \sin.\zeta \cos.\zeta \cos.\theta)}$ seu $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{(k \sin.\zeta^4 + a\psi \sin.\zeta \cos.\zeta \cos.\theta)}}{\cos.\zeta}$ eritque $d\omega = \frac{d\psi \sqrt{k}}{\sqrt{(k \sin.\zeta^4 + a\psi \sin.\zeta \cos.\zeta \cos.\theta)}}$

Hinc cum initio quo $\omega = 0$, sit quoque $\psi = 0$, erit integrando:

$$\frac{a\omega \sin.\zeta \cos.\zeta \cos.\theta}{2\sqrt{k}} = \sqrt{(k \sin.\zeta^4 + a\psi \sin.\zeta \cos.\zeta \cos.\theta)} - \sin.\zeta^2 \sqrt{k}$$

hincque porro $\psi = \omega \sin.\zeta^2 + \frac{a\omega\omega}{4k} \sin \zeta \cos.\zeta \cos.\theta$

Ex quo obtinemus pro tempore per angulum ω indicato:

$$\sqrt{v} = \cos\zeta . \sqrt{k} - \frac{a\omega \sin.\zeta \cos.\theta}{2\sqrt{k}}$$

et $x = a\omega \cos.\zeta - \frac{aa\omega\omega}{4k} \sin.\zeta \cos.\theta$

elapso autem tempore t est $\omega = \frac{t\sqrt{k}}{a}$; ita vt sit

$$\sqrt{v} = \cos\zeta \sqrt{k} - \tfrac{1}{2} t \sin.\zeta \cos.\theta$$

et $x = t \cos.\zeta . \sqrt{k} - \frac{1}{4} tt \sin.\zeta \cos.\theta$

spatium ergo SM, per quod aqua iam secundum directionem axis cylindri erit promota, erit

$$x \sin.\zeta = t \sin.\zeta \cos\zeta \sqrt{k} - \tfrac{1}{4} tt \sin.\zeta^2 \cos.\theta$$

vnde spatium, per quod verticaliter iam erit eleuata aqua concluditur

$$x \sin.\zeta \cos.\theta = t \sin.\zeta \cos.\zeta \cos.\theta \sqrt{k} - \tfrac{1}{4} tt \sin.\zeta\theta^2 \cos.\theta^2$$

COROLL. 1.

32. Si cylindrus plane non in gyrum ageretur, sed in quiete relinqueretur, vt esset $k = 0$, tunc elapso

tempore

tempore t esset $\sqrt{v} = -\frac{1}{2}t \sin.\zeta \cos.\theta$ et $x = -\frac{1}{4}tt \sin.\zeta \cos.\theta$. Aqua ergo, siquidem cochlea deorsum vltra E esset continuata, motu vniformiter accelerato, per cylindrum descenderet, eiusque motus similis foret descensui corporis super plano inclinato, cuius anguli inclinationis ad horizontem sinus esset $= \sin.\zeta^2 \cos.\theta$

COROLL. 2.

33. Cylindro autem in gyrum acto in sensum BEA celeritate $= \sqrt{k}$, aqua quidem ab initio motus secundum cylindrum ascendet, quamdiu fuerit $k > \frac{1}{2}a\omega$ $\tang\zeta \cos.\theta$ seu $\sqrt{k} > \frac{1}{2}t \tang\zeta \cos.\theta$: Elapso autem tempore $t = \frac{2\sqrt{k}}{\tang\zeta \cos.\theta}$, motus ascensus cessabit, posteaque aqua per cylindrum descendere incipiet.

COROLL. 3.

34. Posito ergo $t = \frac{2\sqrt{k}}{\tang\zeta \cos.\theta}$, maximum spatium x per quod aqua in cochlea fuerit promota, erit $x = \frac{k \cos.\zeta^2}{\sin.\zeta \cos.\theta}$; ideoque secundum longitudinem cylindri confecit spatium $x \sin.\zeta = \frac{k \cos.\zeta^2}{\cos.\theta}$; et perpendiculariter reperietur eleuata ad altitudinem $x \sin.\zeta \cos.\theta = k \cos.\zeta^2$.

COROLL. 4.

35. Portio ergo aquae, quae integram spiralis reuolutionem implet, ope cochleae archimedeae ad maiorem altitudinem eleuari nequit, quam quae sit $= k \cos\zeta^2$. Quo celerius ergo cylindrus in gyrum agitur, eo altius haec aquae portio eleuari poterit, et haec quidem altitudo proportionalis erit quadrato celeritatis gyrationis.

COROLL. 5.

36. Sit altitudo, ad quam aqua ope cochleae Archimedis eleuari debeat, $= c$; praeſtabiturque hoc tempore t vt fit

$$c = t\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta\,\sqrt{k} - \tfrac{1}{4}tt\,\text{ſin.}\,\zeta^2\,\text{coſ.}\,\theta^2$$

$$\text{ſeu } t = \frac{2\,\text{coſ.}\,\zeta\,\sqrt{k} - 2\sqrt{(k\,\text{coſ}\,\zeta^2 - c)}}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta}.$$

Vt iam hoc tempus ſit omnium minimum, angulus ζ ita eſſe debet comparatus, vt ſit $\text{tang}\,\zeta^4 = 1 - \frac{c}{k}$ ſeu $\text{tang}\,\zeta = \sqrt[4]{(1 - \frac{c}{k})}$.

COROLL. 6.

37. Poſito autem $\text{tang}\,\zeta = \sqrt[4]{(1 - \frac{c}{k})}$, erit tempus illud minimum, quo aqua per altitudinem c eleuatur:

$$t = \frac{2\sqrt{k}}{\text{coſ.}\,\theta}(\text{coſ.}\,\zeta - \text{tang.}\,\zeta) = \frac{2\sqrt{k} - 2\sqrt{(k-c)}}{\text{coſ.}\,\theta\,\sqrt[4]{(1 - \frac{c}{k})}}$$

quod fit infinitum ſi $k = c$, at vero nullum ſi $k = \infty$. Quo maior ergo capiatur celeritas gyratoria $\sqrt{k}$, et quo minor ſimul ſtatuatur angulus $PQR = \theta$, eo breuiori tempore aqua ad altitudinem c eleuabitur.

COROLL. 7.

38. Patet ergo etiamſi cochlea Archimedis ſitum obtineat verticalem, eius tamen ope aquam ad quamvis altitudinem eleuari poſſe, dummodo cochlea ſatis celeriter in gyrum agatur. Hoc autem caſu ob $\theta = 0$, perinde eſt ſiue aqua integram helicis reuolutionem impleat, ſiue ſecus. Ac tempus quidem eleuationis hoc

caſu

caſu minus erit, quam ſi cylindrus ad horizontem eſſet inclinatus.

SCHOLION.

39. Patet ergo inſignem eſſe differentiam inter eleuationem aquae per cochleam Archimedis, prout aqua eleuanda vel integram ſpirae reuolutionem impleat, vel tantum minimam eius portionem occupet, ſi enim aqua integram ſpiram adimplet, ea non vltra certam altitudinem eleuari poteſt, quantumuis celeriter cochlea in gyrum agatur; contra autem vidimus, ſi minima aquae portio tantum cochleae immittatur, fieri poſſe, vt ea ad quamuis altitudinem eleuetur, atque hoc quidem motu gyrationis non admodum celeri: nam ex praecedentibus perſpicitur, motum nimis celerem aſcenſui adverſari, et aquam iterum deorſum ferre, quae tamen a motu tardiore continuo aſcendere perrexiſſet. Vt enim particula aquae cochleae in E initio immiſſa continuo aſcendere pergat, primum requiritur vt ſit $\theta > \zeta$ ſeu ang. PQR $>$ ang. BEF. Deinde vt ſit ſin. α ſeu ſin. ACE $> \frac{tang\,\zeta}{tang\,\theta}$: tertio autem requiritur, vt, denotante M maximum valorem poſitiuum, quem expreſſio $coſ.(\alpha - \psi) - coſ.\,\alpha - \frac{tang\,\zeta}{tang\,\theta}\cdot\psi$ recipere valet, quod euenit caſu $ſin.(\alpha - \psi) = \frac{tang\,\zeta}{tang\,\theta}$, ſit $k > a M. \frac{coſ.\zeta^2 ſin.\theta}{ſin.\zeta^4}$. Si ergo altitudo celeritati gyrationis debita k ſuperaret hanc quantitatem, aqua, poſtquam ad certam altitudinem perueniſſet, iterum delaberetur. Verum neuter horum caſuum in praxi communi, vbi cochlea Archimedis ad aquas eleuandas adhibetur, locum habet: quodſi enim tota cylindri baſis inferior AB aquae eſt ſubmerſa, tota

helix ſemper eſt aqua repleta, vnde quaeſtio, quanta celeritate et ad quantam altitudinem cochlea in gyrum acta aquam ſit eleuatura, ab his binis, quas tractauimus, penitus eſt diuerſa, propterea quod aqua in E continuo influit, in K vero iterum egeritur. Hanc igitur quaeſtionem difficillimam in ſequente problemate enodare conabor.

PROBLEMA 9.

40. Si tota baſis cylindri aquae ſit ſubmerſa, isque motu vniformi in gyrum agatur, definire motum aquae per cochleam.

SOLVTIO.

Poſitis, vt hactenus, radio baſis $CA = a$, angulo helicis $BEF = \zeta$, et inclinationis $PQR = \theta$: ſit altitudo aquae ſupra centrum baſis $C = c$, longitudo totius cylindri $Aa = Bb = b$, et $EFGHIK$ repraeſentet totam helicem, cuius propterea longitudo eſt $= \frac{b}{\sin.\zeta}$; ac ſi eius amplitudo dicatur $= hh$, erit quantitas aquae in helice contentae $= \frac{bhh}{\sin.\zeta}$; tum vero ſumma ſpirarum ad baſin relatarum praebebit in eius peripheria arcum $= \frac{b\cos.\zeta}{\sin.\zeta}$. Scilicet ſi a puncto helicis quocunque Z ad baſin ducatur recta axi parallela ZY, arcusque EY ponatur $= s$, poſito $s = o$, habebitur terminus helicis inferior E, at poſito $s = \frac{a\cos.\zeta}{\sin.\zeta}$ prodibit terminus helicis ſuperior K. Gyretur nunc cylindrus in ſenſum BEA, ita vt celeritas puncti E ſit $= \sqrt{k}$: poſitoque arcu $EA = p$, elapſo tempuſculo dt erit $dp = -dt\sqrt{k}$. Praeſenti autem temporis momento ſit aquae per helicem

cem ascendentis celeritas $= \sqrt{v}$: quod si iam status compressionis aquae in helicis loco quocunque Z ponatur $= q$, existente arcu $EY = s$, hanc supra inuenimus aequationem

$$q \cos. \zeta = C - a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \frac{p+s}{a} - s \sin. \zeta \cos. \theta - \frac{s\, dv}{dt \sqrt{v}}.$$

Quando autem aqua in K libere effluit, posito $s = \frac{b \cos. \zeta}{\sin. \zeta}$, status compressionis in K euanescere debet, erit ergo $C = a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \frac{p \sin. \zeta + b \cos. \zeta}{a \sin. \zeta} + b \cos. \zeta \cos. \theta + \frac{b\, dv \cos. \zeta}{dt \sin. \zeta \sqrt{v}}$. Exprimat g statum compressionis in altero termino E, vbi $s = o$ erit

$$g \cos. \zeta = a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \frac{p \sin. \zeta + b \cos. \zeta}{a \sin. \zeta} + b \cos. \zeta \cos. \theta + \frac{b\, dv \cos. \zeta}{dt \sin. \zeta \sqrt{v}} - a \cos. \zeta \sin. \theta \cos. \frac{p}{a}$$

siue per cos. ζ diuidendo:

$$g = a \sin. \theta \cos. \frac{p \sin. \zeta + b \cos. \zeta}{a \sin. \zeta} - a \sin. \theta \cos. \frac{p}{a} + b \cos. \theta + \frac{b\, dv}{dt \sin. \zeta \sqrt{v}}$$

Totum ergo negotium huc redit, vt status compressionis aquae in termino E definiatur, qui cum a profunditate orificii; E, sub aqua pendeat, reperitur puncti E altitudo super centro $C = a \cos. \frac{p}{a} \sin. \theta$, ideoque profunditas orificii E sub aqua erit $= c - a \sin. \theta \cos. \frac{p}{a}$. Cum igitur celeritas aquae in helicem influentis sit debita altitudini v, status compressionis aquae in E aestimari debet per altitudinem $c - a \sin. \theta \cos. \frac{p}{a} - v$, vnde habemus:

$$c = a \sin. \theta \cos. \frac{p \sin. \zeta + b \cos. \zeta}{a \sin. \zeta} + b \cos. \theta + \frac{b\, dv}{dt \sin. \zeta \sqrt{v}} + v$$

Ponatur angulus $ACE = \Phi$, vt sit $p = a\Phi$ et $dt = \frac{-a\, d\Phi}{\sqrt{k}}$ tum vero sit angulus $\frac{b \cos. \zeta}{a \sin. \zeta} = \gamma$, seu $b = a \gamma \operatorname{tang.} \zeta$, erit $c = a \sin. \theta \cos. (\Phi + \gamma) + a \gamma \operatorname{tang.} \zeta \cos. \theta - \frac{\gamma\, dv \sqrt{k}}{d\Phi \cos. \zeta \sqrt{v}} + v$

Ponamus $2\sqrt{kv} = z$ vt sit $v = \frac{zz}{4k}$, habemus:

$-\gamma dz$

$$-\gamma dz + \frac{zzd\Phi \operatorname{cof.}\zeta}{4k} + a d\Phi \operatorname{cof.}\zeta \operatorname{fin.}\theta \operatorname{cof.}(\Phi+\gamma) = d\Phi(c \operatorname{cof}\zeta - a\gamma \operatorname{fin.}\zeta \operatorname{cof.}\theta)$$

Ex qua aequatione valor ipfius z definiri debet.

Quod autem ad preffionem aquae ad latera tubi attinet, quatenus inde motui gyrationis refiftitur, fupra vidimus a grauitate aquae oriri vim fecundum $Zr = \operatorname{fin.}\zeta \operatorname{fin.}\theta \operatorname{fin.}$
Tab. II. Fig. 3. $\frac{p+s}{a} + \operatorname{cof.}\zeta \operatorname{cof.}\theta$, vnde oritur vis fecundum $Zv = \operatorname{fin.}\zeta^2 \operatorname{fin.}\theta \operatorname{fin.}\frac{p+c}{a} + \operatorname{fin.}\zeta \operatorname{cof.}\zeta \operatorname{cof.}\theta$, quae per elementum aquae $= \frac{bbds}{\operatorname{cof.}\zeta}$ et radium a multiplicata dat momentum elementare motui refiftens, vnde totum momentum erit

$$abb\left(b \operatorname{cof.}\zeta \operatorname{cof.}\theta + \frac{a \operatorname{fin.}\zeta^2 \operatorname{fin.}\theta}{\operatorname{cof.}\zeta}(\operatorname{cof.}\Phi - \operatorname{cof.}(\Phi+\gamma))\right)$$

tantum ergo momentum a vi gyrante fuperari debet.

COROLL. 1.

41. Pendet ergo determinatio motus aquae per cochleam Archimedis a refolutione huius aequationis differentialis:

$$-\gamma dz + \frac{zzd\Phi \operatorname{cof.}\zeta}{4k} + a d\Phi \operatorname{cof.}\zeta \operatorname{fin.}\theta \operatorname{cof.}(\Phi+\gamma) = d\Phi(\operatorname{cof.}\zeta - a\gamma \operatorname{fin.}\zeta \operatorname{col.}\theta)$$

vel ob $\gamma = \frac{b \operatorname{cof.}\zeta}{a \operatorname{fin.}\zeta}$ iftius aequationis

$$-\frac{bdz}{a \operatorname{fin.}\zeta} + \frac{zzd\Phi}{4k} + a d\Phi \operatorname{fin.}\theta \operatorname{cof.}(\Phi+\gamma) = d\Phi(c - b \operatorname{cof.}\theta)$$

quae cum pluribus difficultatibus fit obnoxia, patet theoriam Cochleae Archimedis maxime effe arduam.

COR.

COROLL. 2.

42. Si cochlea in quiete relinquitur, vt ſit $k=o$, loco elementi $d\Phi$ expedit in calculo relinqui elementum temporis dt et ob angulum Φ conſtantem habebitur:

$$\frac{b\,dv}{dt\,\text{ſin.}\zeta\sqrt{v}}+v=c-b\,\text{coſ.}\,\theta-a\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}(\Phi+\gamma)$$

vnde mox naſcetur motus vniformis, $v=c-b\,\text{coſ.}\,\theta-a\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}(\Phi+\gamma)$ quo aqua per cochleam fluet, ſiquidem ſit $c>b\,\text{coſ.}\,\theta+a\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}(\Phi+\gamma)$

COROLL. 3.

43. Si cylindrus in ſitu verticali ſit poſitus ob $\theta=o$ erit $-\frac{b\,dz}{a\,\text{ſin.}\zeta}+\frac{zz\,d\Phi}{4k}=d\Phi(c-b)$; vnde fit $d\Phi=\frac{4bk\,dz}{(4k(b-c)+zz)a\,\text{ſin.}\zeta}$ et integrando $\frac{a\Phi\,\text{ſin.}\zeta}{4bk}\sqrt{4k(b-c)}=\text{A tang.}\frac{z}{\sqrt{4k(b-c)}}$, vbi eſt $\sqrt{v}=\frac{z}{\sqrt{4k}}$. Cum autem, ſi initio fuerit $\Phi=o$ et $z=o$, labente tempore angulus Φ euadat negatiuus, perſpicuum eſt, valorem quoque ipſius z prodire negatiuum; ideoque hoc caſu aqua non aſcendet, ſed deſcendet, quod quidem per ſe eſt euidens.

COROLL. 4.

44. In caſu autem coroll. praec. quo $b>c$, eiusmodi conſtantem addi oportet, vt poſito $\Phi=o$ fiat $\sqrt{v}=\frac{z}{\sqrt{4k}}=\text{coſ.}\zeta\sqrt{k}$, ſicque erit $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{(b-c)}}=\text{tang.}\left(\frac{\text{coſ.}\zeta\sqrt{k}}{\sqrt{(b-c)}}+\frac{a\Phi\,\text{ſin.}\zeta}{2b}\sqrt{\frac{b-c}{k}}\right)$; progreſſu autem temporis fit Φ negatiuum, ideoque aſcenſus penitus ceſſat, cum fit $-\Phi=\frac{2bk\,\text{coſ.}\zeta}{a(b-c)\,\text{ſin.}\zeta}$.

SCHOLION.

45. Aſſumſi in huius caſus integratione, cochleam initio fuiſſe aqua repletam, ſubitoque rotari incepiſſe; ſic

ſic enim vtique celeritas initialis aquae progreſſiua per cochleam fit $= \text{coſ.}\, \zeta \sqrt{k}$ Sin autem ſtatus initialis ita concipiatur, vt obturato inferiori orificio cochlea in gyrum agatur, tum vero ſubito orificium iterum aperiri, aqua hoc momento ſeſe iam ad motum tubi accommodauerit neceſſe eſt, ita vt tum pro motus initio futurum ſit $v = 0$. Hanc ergo ob rem aqua ſtatim deſcendere incipiet, neque vlla eius gutta ſupra eiicietur, ſiquidem ſit $b > c$. Quanquam autem hunc caſum quo $\theta = 0$ feliciter expedire licuit, tamen pro ſitu cochleae inclinato, nihil admodum ex aequatione inuenta elicere licet, ſed natura motus aquae his caſibus nobis abſcondita manet, propterea quod haec aequatio ad formulam Riccatianam referenda commode tractari nequit. Ex quo inſigne Analyſeos defectus exemplum agnoſcimus, quod machinae frequentiſſimo vſu maxime peruulgatae effectus pendeat a reſolutione huiusmodi aequationis, cui artificia in Analyſi adhuc detecta non ſufficiant, qui caſus mihi adeo mirabilis eſt viſus, vt etiamſi in hac inueſtigatione ſcopum, quem mihi propoſueram, non attigerim, tamen hoc argumentum digniſſimum exiſtimauerim, quo Geometrarum vires ad id penitus expediendum incitarem, quo labore non ſolum maxima commoda in Mechanicam redundabunt, ſed etiam Analyſeos limites haud mediocriter promouebuntur.

DE

DE APTISSIMA FIGVRA ROTARVM DENTIBVS TRIBVENDA.

AVCTORE

L. EVLERO.

Quando in machinis vna rota ab alia ope dentium mouetur duae res requiri ſolent, quibus ſatisfieri oportet:

Primo, vt, dum vna rota motu vniformi gyratur, alterius rotae motus pariter fiat vniformis.

Ac deinde, vt in mutua dentium actione nullus attritus oriatur.

Quibus conditionibus vt ſatisfiat, ſint A et B centra rotarum, quarum altera alteram ad motum concitet, ſintque EM et FM dentes, qui nunc in ſe mutuo agunt, puncto contactus exiſtente M. Tab. III. Fig. 2.

Ductis ad apices vtriusque dentis rectis AE et BF vocetur $AB = a$, angulus $BAE = \Phi$, et angulus $ABF = \psi$. Iam dum rota A vnam facit reuolutionem, altera rota B abſoluat n reuolutiones, et ob vtriusque motus vniformitatem debet eſſe $d\psi = nd\Phi$.

Porro ex puncto contactus M ducantur ad axes ordinatae MP et MQ, itemque tangens communis SMRT, ac vocentur:

$AP = x$; $PM = y$; $BQ = t$; et $QM = u$.

tum demisso ex M ad AB perpendiculo MV erit

$$AV = x\,\text{cos.}\,\Phi - y\,\text{sin}\,\Phi\,;\quad MV = x\,\text{sin.}\,\Phi + y\,\text{cos.}\,\Phi$$

$$BV = t\,\text{cos.}\,\psi + u\,\text{sin.}\,\Phi\,;\quad MV = t\,\text{sin.}\,\psi - u\,\text{cos.}\,\psi$$

vnde obtinemus:

$$t\,\text{cos.}\,\psi + u\,\text{sin.}\,\psi = a - x\,\text{cos.}\,\Phi + y\,\text{sin.}\,\Phi$$

$$t\,\text{sin.}\,\psi - u\,\text{cos.}\,\psi = \quad x\,\text{sin.}\,\Phi + y\,\text{cos.}\,\Phi$$

ex quibus aequationibus elicimus:

$$t = a\,\text{cos.}\,\psi - x\,\text{cos.}\,(\Phi + \psi) + y\,\text{sin.}\,(\Phi + \psi)$$

$$u = a\,\text{sin.}\,\psi - x\,\text{sin.}\,(\Phi + \psi) - y\,\text{cos}\,(\Phi + \psi)$$

Deinde ob communem tangentem erit

$PR = \frac{-y\,dx}{dy}$ et $QS = \frac{-u\,dt}{du}$ indeque tang. $ARM = \frac{-dy}{dx}$ et tang. $BSM = \frac{-du}{dt}$

At cum sit $ATM = ARM - \Phi = BSM + \psi$, erit tang. $(ARM - BSM) =$ tang. $(\Phi + \psi)$ ideoque

$$\text{tang.}\,(\Phi + \psi) = \left(-\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dt}\right) : \left(1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dt}\right)$$

Denique ne vllus fiat attritus, necesse est vt sit arcuum summa $EM + FM =$ const. seu $\surd(dx^2 + dy^2) + \surd(dt^2 + du^2) = o$, ideoque $dx^2 + dy^2 = dt^2 + du^2$. Hanc ob rem habebimus $\text{sin.}\,(\Phi + \psi) = \frac{dy\,dt - dx\,du}{dx^2 + dy^2}$ et $\text{cos.}\,(\Phi + \psi) = \frac{-dx\,dt - dy\,du}{dx^2 + dy^2}$

At vero est

$$dt = -n\,a\,d\Phi\,\text{sin.}\,\psi + (n + 1)\,x\,d\Phi\,\text{sin.}\,(\Phi + \psi) + (n+1)\,y\,d\Phi\,\text{cos.}\,(\Phi + \psi - dx\,\text{cos}\,(\Phi + \psi) + dy\,\text{sin.}\,(\Phi + \psi)$$

$$du = nad\Phi\,\text{cos.}\,\psi - (n+1)\,xd\Phi\,\text{cos.}\,(\Phi + \psi) + (n+1)\,yd\Phi\,\text{sin.}\,(\Phi + \psi) - dx\,\text{sin.}\,(\Phi + \psi) - dy\,\text{cos.}\,(\Phi + \psi)$$

Ergo

Ergo illae aequationes praebent

$$(dx^2+dy^2)\sin.(\Phi+\psi)=-nad\Phi(dy\sin.\psi+dx\cos.\psi)$$
$$+(n+1)d\Phi(xdy-ydx)\sin.(\Phi+\psi)+(dx^2+dy^2)\sin.(\Phi+\psi)$$
$$+(n+1)d\Phi(xdx+ydx)\cos(\Phi+\psi)$$
$$(dx^2+dy^2)\cos.(\Phi+\psi)=nad\Phi(dx\sin.\psi-dy\cos.\psi)$$
$$-(n+1)d\Phi(xdx+ydy)\sin(\Phi+\psi)+(dx^2+dy^2)\cos.(\Phi+\psi)$$
$$+(n+1)d\Phi(xdy-ydx)\cos.(\Phi+\psi)$$

ſicque per $d\Phi$ diuidendo obtinemus has duas aequationes

$$\tfrac{na}{n+1}(dy\sin.\psi+dx\cos.\psi)=(xdy-ydx)\sin.(\Phi+\psi)$$
$$+(xdx+ydy)\cos.(\Phi+\psi)$$
$$\tfrac{na}{n+1}(dy\cos.\psi-dx\sin.\psi)=(xdy-ydx)\cos.(\Phi+\psi)$$
$$-(xdx+ydy)\sin.(\Phi+\psi)$$

vnde porro elicimus iſtas:

$$xdy-ydx=\tfrac{na}{n+1}(dy\cos.\Phi+dx\sin.\Phi)$$
$$xdx+ydy=\tfrac{na}{n+1}(dx\cos.\Phi-dy\sin.\Phi)$$

Hinc autem prodit

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(n+1)y+na\sin.\Phi}{(n+1)x-na\cos.\Phi}=\frac{na\cos.\Phi-(n+1)x}{(n+1)y+na\sin.\Phi}$$

ideoque $((n+1)y+na\sin.\Phi)^2+((n+1)x-na\cos.\Phi)^2=0$, cui aequationi aliter ſatisfieri nequit, niſi ponendo

$$y=-\tfrac{na}{n+1}\sin.\Phi \text{ et } x=\tfrac{na}{n+1}\cos.\Phi$$

vnde fit

$$u=\tfrac{a}{n+1}\sin\psi \quad\text{et}\quad t=\tfrac{a}{n+1}\cos.\psi$$

ſicque prodirent duae rotae dentibus deſtitutae: ac propter ea fieri nequit, vt vtrique conditioni praeſcriptae ſatisfiat.

Quodsi ergo alteram conditionem attritus negligamus perueniemus ad hanc aequationem vnicam:

$$\left.\begin{array}{l} -nad\Phi(dy\,\text{sin.}\,\psi+dx\,\text{cos.}\,\psi)\,\text{cos.}(\Phi+\psi)+(n+1)d\Phi(xdy-ydx) \\ \text{sin.}(\Phi+\psi)\,\text{cos.}(\Phi+\psi)+(n+1)d\Phi(xdx+ydy)\,\text{cos.}(\Phi+\psi)^2 \\ -nad\Phi(dx\,\text{sin.}\,\psi-dy\,\text{cos.}\,\psi)\,\text{sin.}(\Phi+\psi)-(n+1)d\Phi(xdy-ydx) \\ \text{sin.}(\Phi+\psi)\,\text{cos.}(\Phi+\psi)+(n+1)d\Phi(xdx+ydy)\,\text{sin.}(\Phi+\psi)^2 \end{array}\right\}=0$$

$$\text{seu}\quad \frac{na}{n+1}(dx\,\text{cos.}\,\Phi-dy\,\text{sin.}\,\Phi)=xdx+ydy$$

Data ergo pro lubitu aequatione inter x et y, hinc tam x quam y per angulum Φ exprimi poterit, indeque determinabitur simul altera curua inter t et u.

Quoniam autem fieri nequit, vt motus vtriusque rotae reddatur vniformis, simulque attritus in contactu dentium mutuo euitetur, videndum est, vtri harum duarum conditionum potius satisfieri conueniat, altera neglecta. Ac primo quidem, quod ad attritum attinet, dubium est nullum, quin omnis generis machinae, quae rotis impelluntur, insigne perfectionis augmentum essent accepturae, si dentes ita efformarentur, vt sine vlla frictione se mutuo impellerent, sicque motus hinc nullum impedimentum pateretur. Praeterea vero ipsi rotarum dentes attritu mutuo sublato, multo diutius salui manerent, suamque figuram conseruarent; cum contra si attritus adsit, continuo aliquantillum a dentibus abraditur, vnde eorum figura tandem immutabitur, ita vt si dentes initio ad alterum requisitum fuerint accommodati, ii tandem ne huic quidem amplius sint satisfacturi, sicque machina omnibus commodis ex hac conditione oriundis priuetur.

Dein-

Deinde tamen eiusmodi dantur machinae, in quibus vniformitas motus multo maioris est momenti, quam frictionis sublatio. Quae enim machinae ad insigne quoddam opus perficiendum sunt destinatae, plurimum interest, eas ita instruxisse, vt tota vis, qua impelluntur, ad hoc opus absoluendum impendatur, nullaque eius vis portio in motu machinae conseruando consumatur. Quodsi autem omnes machinae partes, dum opus propositum exequitur, motu vniformi feruntur, huius motus conseruatio nulla vi indiget, sicque tota vis effectui proposito integra relinquitur, quamobrem istius modi machinas ita instrui conueniet, vt omnes partes, quibus sunt compositae, motu vniformi commoueantur.

Hinc quando rotae aliae ab aliis ope dentium ad motum impelluntur, necesse est, vt dum rotae primae motus est vniformis, cuiusque reliquarum, quae ab illa cientur, motus pariter vniformis euadat. Si enim qua rota modo celerius, modo tardius gyretur, semper vis quaedam ad hunc motum siue accelerandum, siue retardandum requiritur, cuius iactura effectus, ad quem machina est accommodata, diminuitur: atque haec diminutio plerumque multum superare solet eam, quae forte ab attritu dentium oriri posset. Quare his casibus, cum dentibus eiusmodi figura tribui nequeat, vt simul motus vniformitas obtineatur, et frictio tollatur, omnino expedit leuem dentium attritum admitti, dummodo omnium rotarum motus aequabilis efficiatur; siquidem illud incommodum hoc commodo largiter compensatur.

Quae autem machinae ita sunt comparatae, vt non ad onus quodpiam eleuandum, aliudue opus exe-

quen-

quendum fint deſtinatae, ſed potius ſui motus aequabilitate ſcopo intento ſatisfaciant, cuiusmodi ſunt omnis generis horologia, quae motus ſui aequabilitate temporis menſuras continere ſolent, in his, quoniam nulla reſiſtentia ſuperanda proponitur, ratio modo memorata penitus ceſſat. Quin etiam motus aequabilis, ſi omnibus partibus conciliaretur, potius ſcopo propoſito aduerſaretur, quam faueret. Cum enim in his machinis nullum onus ſuperandum adſit, in quo actio vis motricis conſumatur, ab ea ipſe machinae motus continuo augeretur, motusque iam impreſſus a continua vis impellentis ſollicitatione perpetuo accelararetur, ſiquidem ſingularum partium motus quouis momento eſſet aequabilis; cum nihil obſtaret, quo minus is a noua potentiae impulſione celerior redderetur.

Hanc ob rem horologiorum ſtructura data opera ita attemperari ſolet, vt quouis momento motus, quem quaeuis pars iam conceperat, iterum intereat, ſingulisque momentis machina, quaſi de nouo, ad motum concitari debeat. Ita fit vt dummodo machinae ſingulis momentis par motus imprimitur, motus totalis, qui inde reſultat, aequabilis videatur, ſiquidem illa momenta ſatis fuerint exigua, vt inaequalitas, quae in vnoquoque exiſtit, percipi nequeat. Ita motus ad aequabilitatem totalem obtinendam moderatio, vel ope penduli, vel alius motus reciproci effici ſolet, dum quauis oſcillatione vnus dens rotae dentatae propellitur; hocque pacto cum oſcillationes ſint iſochronae, aequalibus temporibus aequalis dentium numerus propellitur, vnde in rotis lentioribus motus quaſi vniformis exoritur; qui tamen re vera ita eſt com-

comparatus, vt ſingulis oſcillationibus ex ſtatu quietis de nouo producatur. Cum igitur in horologiis nullius rotae motus ſit continuus et vniformis, nulla quoque ratio vrget, dentes rotarum ita efficere, vt motus angularis rotae impulſae ad motum angularem rotae impellentis, quouis inſtanti, datam teneat rationem, ſed ſufficit, dum vnusquisque dens rotae impellentis vnum dentem rotae impulſae promoueat. Quocirca his rotis omnis perfectionis gradus, cuius ſunt capaces, conciliabitur, ſi dentes ita efformentur, vt eorum actio mutua nullam patiatur frictionem: ſic enim dentes diutiſſime debitam figuram ſuam conſeruabunt, in quo eximia horologiorum virtus continetur.

Hinc ergo duplicis generis rotas dentatas obtinemus: alterum, quo rotae ſe mutuo ſine frictione ad motum impellunt, alterum vero, quo, ſi rotae impellentis motus fuerit vniformis, ſimul rotae impulſae motus efficitur vniformis. Quemadmodum ergo dentes in vtroque rotarum genere efformatos eſſe oporteat, ex formulis ante exhibitis indagabo.

I.

DE ROTIS, QVAE SE MVTVO SINE DENTIVM FRICTIONE IMPELLVNT.

1. Cum igitur in his rotis vniformitas motus locum non habeat, ſeu motus angularis vnius, ad motum angularem alterius, rationem non teneat conſtantem, quantitas $\frac{d\psi}{d\phi} = n$ non erit conſtans, ſeu n quantitatem variabilem denotabit. Hoc autem non obſtante eaſdem,

quas supra, obtinebimus formulas, scilicet $y = \frac{-na}{n+1}$ sin Φ; et $x = \frac{na}{n+1}$ cos. Φ itemque $u = \frac{a}{n+1}$ sin. ψ et $t = \frac{a}{n+1}$ cos. ψ, hoc tantum discrimine, quod hic n non denotet numerum constantem, sed eius loco scribi debeat fractio variabilis $\frac{d\psi}{d\Phi}$, ita vt sit

pro curua dentis EM	pro curua dentis FM
$x = \frac{ad\psi}{d\Phi + d\psi}$ cos Φ	$t = \frac{ad\Phi}{d\Phi + d\psi}$ cos. ψ
$y = \frac{-ad\psi}{d\Phi + d\psi}$ sin. Φ	$u = \frac{ad\Phi}{d\Phi + d\psi}$ sin. ψ

2. Cuiusmodi autem ex his formulis vtriusque dentis EM et FM debeat esse figura, sequenti modo colligo. Primo obseruo, ductis ad commune punctum contactus M rectis AM et BM, fore

$$AM = \frac{ad\psi}{d\Phi + d\psi} \text{ et } BM = \frac{ad\Phi}{d\Phi + d\psi}$$

Hinc ergo erit $AM + BM = a = AB$, vnde patet punctum contactus M semper in recta AB centra rotarum iungente reperiri, et ob hanc rationem angulos AMT et BMT esse deinceps positos. Praeterea ob incessum dentium sine frictione, quantum arcus EM crescit, tantum dens arcus FM decrescere debet.

Tab III. Fig. 3. 3. Ponamus ergo rotae circa A mobilis dentium figuram esse C M m, rotae vero alterius circa B mobilis C N n, atque contactus iam erit in ipso puncto C. Capiantur vtrinque arcus aequales $CM = CN = s$, et cum motu angulari prioris rotae punctum M peruenit in rectam AB, simul alterius rotae punctum N peruenire debet in eandem rectam AB, ita vt dum illa rota motu suo conficit angulum CAM, haec rota moueatur per angulum CBN. Ponatur ergo angulus

CAM

$CAM = \Phi$ et angulus $CBN = \psi$, Tum vero, quia puncta M et N in contactum peruenient in recta AB, oportet, vt sit tam $AM + BN = AB = a$, quam summa angulorum $AMC + BNC =$ duobus rectis.

4. Ad hoc ponatur $AM = v$ et $BN = z$, eritque primo $v + z = a$: deinde ob aequalitatem arcuum $CM = CN$, erit $\int \sqrt{(dv^2 + vv\,d\Phi^2)} = \int \sqrt{(dz^2 + zz\,d\psi^2)}$, ideoque ob $dz = -dv$, fiet $v\,d\Phi = z\,d\psi = (a-v)\,d\psi$. Porro est tang. $AMC = \frac{v\,d\Phi}{dv}$, et tang. $BNC = \frac{z\,d\psi}{dz}$: vnde ob $AMC + BNC = 2$ rectis, necesse est, vt sit $\frac{v\,d\Phi}{dv} = -\frac{z\,d\psi}{dz}$, quae aequatio, ob $dz = -dv$, redit ad superiorem $v\,d\Phi = z\,d\psi$. Ita data curua CM per aequationem inter $CAM = \Phi$ et $AM = v$, pro altera curua CN haec habebitur aequatio inter $CBN = \psi$ et $BN = z$, vt sit $z = a - v$ et $d\psi = \frac{v\,d\Phi}{a-v}$ seu $\psi = \int \frac{v\,d\Phi}{a-v}$, vnde haud difficulter constructio idonea eruitur.

5. Verum hic ingens incommodum occurrit, quo huiusmodi dentes ad praxin plane inutiles redduntur, cum enim altera rota, puta A, ab altera B moueri debeat, manifestum est, hoc fieri non posse, nisi vbi angulus AMC est obtusus; tum enim contactu existente in MN, rotae A punctum M, à rotae puncto N deprimetur; sin autem angulus AMC esset vel rectus, vel adeo acutus, rota B nullam plane vim exereret in rotam A, illaque motum aliquantillum prosequi posset, cum tamen haec non sequatur. Cum igitur dentium natura non permittat, vt angulus AMC vbique sit obtusus, euidens est, fieri non posse, vt hoc modo rota alia ab alia ad motum incitetur. Quin etiam cum mu-

tuus contactus necessario in recta AB contingere debeat, per nouum contactum, quo dentes alibi in se mutuo agere inciperent, motus rotae A conseruari nequit: quam ob caussam huius generis dentes ad praxin plane sunt inepti. Cum igitur istius modi dentes ad horologia accommodati sint visi, manifestum est, ne hic quidem frictionem in dentium actione mutua tolli posse, ita vt et in huius generis machinis consultum sit dentes adhibere, quae altero commodo gaudeant, et motum rotae impulsae quoque vniformen reddant, siquidem motus rotae impellentis fuerit vniformis.

II.

DE ROTIS QVAE MOTV VNIFORMI SE MVTVO PROPELLVNT.

6. Pro hoc ergo casu cum $d\Phi$ ad $d\psi$ semper eandem rationem tenere debeat, si ponatur $d\psi = n d\Phi$, angulus Φ ita a figura dentis EM pendet, vt sit

$$\frac{na}{n+1}(dx \operatorname{cof.} \Phi - dy \operatorname{fin} \Phi) = x dx + y dy$$

quo inuento, figura dentis alterius rotae ita definietur, vt sit:

$$t = a \operatorname{cof.} \psi - x \operatorname{cof.} (\Phi + \psi) + y \operatorname{fin} (\Phi + \psi)$$

$$u = a \operatorname{fin.} \psi - x \operatorname{fin.} (\Phi + \psi) - y \operatorname{cof.} (\Phi + \psi)$$

vnde simili modo fit

$$\frac{a}{n+1}(dt \operatorname{cof.} \psi + du \operatorname{fin.} \psi) = t dt + u du$$

Data ergo figura dentium rotae A, inde angulus Φ per x et y definiri debet, tum posito $\psi = \alpha + n\Phi$, simul aequatio obtinebitur pro figura dentium alterius rotae B.

Quo-

7. Quoniam in dente FM rectam BF, ad quam, tanquam axem, figuram dentis referimus, pro lubitu accipere licet, vnde angulus ABF data quantitate vel augetur, vel diminuitur, hanc rectam BF ita ductam concipiamus, vt α euanescat, sitque perpetuo $\psi = n\Phi$. Deinde sit $\frac{na}{n+1} = b$ et $\frac{a}{n+1} = c$, vt habeatur $a = b + c$. His positis erit

$$b(dx \operatorname{cos}. \Phi - dy \operatorname{sin}. \Phi) = x\,dx + y\,dy$$

$$t = a \operatorname{cos}. n\Phi - x \operatorname{cos}. (n+1)\Phi + y \operatorname{sin}. (n+1)\Phi$$

$$u = a \operatorname{sin}. n\Phi - x \operatorname{sin}. (n+1)\Phi - y \operatorname{cos}. (n+1)\Phi$$

vnde conficitur

$$c(dt \operatorname{cos}. n\Phi + du \operatorname{sin}. n\Phi) = t\,dt + u\,du.$$

8. Ponamus $dy = -dx \operatorname{tang}. \theta$, seu $\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{sin}. \theta}{\operatorname{cos}. \theta}$, fietque $b(\operatorname{cos}. \theta \operatorname{cos}. \Phi + \operatorname{sin}. \theta \operatorname{sin}. \Phi) = x \operatorname{cos}. \theta - y \operatorname{sin}. \theta = b \operatorname{cos}. (\theta - \Phi)$ et differentiando aequationem $y = \frac{x \operatorname{cos}. \theta}{\operatorname{sin}. \theta} - \frac{b \operatorname{cos}. (\theta - \Phi)}{\operatorname{sin}. \theta} - \frac{dx \operatorname{sin}. \theta}{\operatorname{cos}. \theta}$ $= \frac{dx \operatorname{cos}. \theta}{\operatorname{sin}. \theta} - \frac{x\,d\theta}{\operatorname{sin}. \theta^2} + \frac{b(d\theta - d\Phi) \operatorname{sin}. (\theta - \Phi)}{\operatorname{sin}. \theta} + \frac{b\,d\theta \operatorname{cos}. (\theta - \Phi) \operatorname{cos}. \theta}{\operatorname{sin}. \theta^2}$ quae reducitur ad hanc

$$0 = dx - \frac{x\,d\theta \operatorname{cos}. \theta}{\operatorname{sin}. \theta} + \frac{b\,d\theta \operatorname{cos}. \theta \operatorname{cos}. \Phi}{\operatorname{sin}. \theta} - b\,d\Phi \operatorname{cos}. \theta \operatorname{sin}. (\theta - \Phi)$$

Diuidatur per $\operatorname{sin}. \theta$, et integretur: sicque prodibit

$$0 = \frac{x}{\operatorname{sin}. \theta} + b\int \frac{d\theta \operatorname{cos}. \theta \operatorname{cos}. \Phi}{\operatorname{sin}. \theta^2} - b\int \frac{d\Phi \operatorname{cos}. \theta \operatorname{sin}. (\theta - \Phi)}{\operatorname{sin}. \theta} \text{ seu}$$

$$0 = \frac{x - b \operatorname{cos}. \Phi}{\operatorname{sin}. \theta} - b\int d\Phi \operatorname{cos} (\theta - \Phi) \text{ ita vt sit}$$

$$x = b \operatorname{cos}. \Phi + b \operatorname{sin}. \theta \int d\Phi \operatorname{cos}. (\theta - \Phi) \text{: atque hinc oritur}$$

$$y = -b \operatorname{sin}. \Phi + b \operatorname{cos} \theta \int d\Phi \operatorname{cos} (\theta - \Phi)$$

Sumto ergo angulo θ pro lubitu ratione anguli Φ, innumerabiles figurae pro dente EM obtinebuntur.

9. Assumta autem quapiam figura pro dente EM, quae ex certa quadam relatione angulorum θ et Φ ori-

tur, conueniens figura pro dente FM alterius rotae B ita definietur, vt sit

$$t = a\,\text{cof.}\,n\Phi - b\,\text{cof.}\,n\Phi + b\,\text{fin.}((n+1)\Phi - \theta)\int d\Phi\,\text{cof.}(\theta - \Phi)$$
$$u = a\,\text{fin}\,n\Phi - b\,\text{fin.}\,n\Phi - b\,\text{cof.}((n+1)\Phi - \theta)\int d\Phi\,\text{cof.}(\theta - \Phi)$$

fiue ob $a = b + c$

$$t = c\,\text{cof.}\,n\Phi + b\,\text{fin.}((n+1)\Phi - \theta)\int d\Phi\,\text{cof.}(\theta - \Phi)$$
$$u = c\,\text{fin.}\,n\Phi - b\,\text{cof.}((n+1)\Phi - \theta)\int d\Phi\,\text{cof.}(\theta - \Phi)$$

Hinc ergo aliquot exempla percurramus.

EXEMPLVM. I.

10. Sit angulus $\theta = 0$; erit $\text{fin.}\,\theta = 0$; $\text{cof.}\,\theta = 1$; et $\text{cof.}(\theta - \Phi) = \text{cof.}\,\Phi$; vnde fit $\int d\Phi\,\text{cof.}(\theta - \Phi) = \int d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi = \text{fin.}\,\Phi + \mu$; denotante μ numerum quempiam conftantem. Hinc pro figura dentis EM rotae A sequentes prodibunt formulae:

$$x = b\,\text{cof.}\,\Phi \quad \text{et } y = \mu b$$

Pro alterius autem rotae B dente FM habebitur

$$t = c\,\text{cof}\,n\Phi + b\,\text{fin.}(n+1)\Phi\,\text{fin.}\,\Phi + \mu b\,\text{fin.}(n+1)\Phi$$
$$u = c\,\text{fin.}\,n\Phi - b\,\text{cof.}(n+1)\Phi\,\text{fin.}\,\Phi - \mu b\,\text{cof.}(n+1)\Phi$$

exiftente $b = \frac{na}{n+1}$ et $c = \frac{a}{n+1}$; ideoque $b = nc$.

11. Quoniam vero dum iidem dentes in fe mutuo agunt, angulus Φ non multum variatur, ideoque minimus manet, erit pro dente EM; $x = b - \frac{1}{2}b\Phi\Phi$ et $y = \mu b$, pro dente autem FM habebimus:

$$t = c(1 + \mu n(n+1)\Phi + \tfrac{1}{2}n(n+2)\Phi\Phi)$$
$$u = c(-\mu n + \tfrac{1}{2}\mu n(n+1)^2\Phi\Phi + \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)\Phi^3)$$

$$\text{vel } u = -c(\mu n - \tfrac{1}{2}\mu n(n+1)^2\Phi\Phi - \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)\Phi^3).$$

12. Vel

12. Vel ponatur latitudo $\mu b = \mu n c = e$, erit primo $x = b - \frac{1}{2} b \Phi \Phi$ et $y = e$ tum vero

$$t = c + (n+1)\, e\Phi + \tfrac{1}{2} n(n+2) c \Phi\Phi$$

$$u = -e + \tfrac{1}{2}(n+1)^2 e\Phi\Phi + \tfrac{1}{3} n(n+1)(n+2) c \Phi^3$$

vnde patet si $\Phi = 0$ fore $x = b$; $y = e$ et $t = c$, $u = -e$. Vbi cum valor ipsius u prodeat negatiuus, cognoscimus applicatam u super axe BF capi debere, quae proinde erit

$$u = e - \tfrac{1}{2}(n+1)^2 e\Phi\Phi - \tfrac{1}{3} n(n+1)(n+2) c \Phi^3$$

13. Vt autem longitudo dentium in vtraque rota determinetur, maximus angulus Φ spectari debet, ad quem si radius AC ad rectam AB inclinetur, dentes EM et FM se adhuc contingant. Notandum vero est, rotas ita instructas esse debere, vt antequam bini dentes se mutuo deserant, sequentes se mutuo arripiant, cui requisito commodissime satisfit, si dum bini dentes in medio existente $\Phi = 0$ in se inuicem agunt, bini proximi sese arripere incipiant. Quodsi ergo in rota A distantia dentium angulo $= \alpha$ designetur, ita vt in rota B dentes angulo $= n\alpha$ distent, posito $\Phi = \alpha$, dentium magnitudo vtrinque determinabitur. Interim tamen iuuabit, incisiones aliquantum profundiores fieri, ne motus ex hac parte obstaculum offendat.

14. Capiatur ergo in recta $AB = a$ centra rotarum iungente $AC = b = \frac{na}{n+1}$ et $BC = c = \frac{a}{n+1}$; et ex vtroque centro describantur circuli CR et CS. Tum pro rota A ducatur mp ipsi AC parallela ad distantiam $Cm = Gp = e$, erit mp facies vnius dentis. Ad alteram vero rotam describatur curua af ex valoribus datis t et u, quae versus mp erit conuexa. Porro pro dentium distantia in vtraque peripheria CR et CS Tab. III. Fig. 4.

aequa-

aequales abſcindantur arcus $C\mu$, $\mu\nu$, etc. et $C\xi$, $\xi\gamma$ etc. $= b\alpha = nc\alpha$, ſimiliterque deſcribantur facies dentium nq et bg; or et cb etc. Quo facto altitudo dentium in rota B ita determinabitur, vt ſecundus dens bg tantum non dentem nq apprehendat, ſic dabitur magnitudo dentis bg, cui aequalis eſſe debet af, atque hinc in rota A profunditas dentis mp innoteſcet, quae aliquantillum ſuperare debet altitudinem af, ne in fundo f contactus fiat, ſicque motus impediatur.

15. Quo autem rotae ſe mutuo quoque in alteram partem impellere queant, alterae dentium facies ſimili modo efformari debebunt, quae pro rota A erunt CG, $\mu\Phi$, $\nu\varrho$ etc. pro rota vero B, αf, βg, γb etc. quarum iſtas pari curuatura praeditas eſſe oportet, atque alteras. Verum ne motus obſtaculum offendat, craſſitiem dentium rotae B ſcilicet $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, etc. aliquanto minorem eſſe oportet, quam amplitudinem interuallorum inter dentes alterius rotae Gp, Φq, ϱr etc. Denique euidens eſt, in rota B dentes quoque aliquanto profundius exſcindi oportere: tum vero quoque conueniet dentes alterius rotae A aliquanto longiores fieri, ne vnquam contactus in ipſo eorum angulo a eueniat.

EXEMPLVM 2.

16. Ponamus eſſe $\theta = \Phi$ erit $\text{coſ.}(\theta - \Phi) = 1$ et $\int d\Phi \,\text{coſ.}(\theta - \Phi) = \Phi + \gamma$: ſicque erit

$$x = b\,\text{coſ}\,\Phi + \gamma b\,\text{ſin.}\,\Phi + b\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$$
$$y = -b\,\text{ſin.}\,\Phi + \gamma b\,\text{coſ.}\,\Phi + b\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$$

tum vero porro ob $b = nc$

$$t = c\,\text{coſ.}\,n\Phi + n\gamma c\,\text{ſin.}\,n\Phi + nc\Phi\,\text{ſin.}\,n\Phi$$
$$u = c\,\text{ſin.}\,n\Phi - n\gamma c\,\text{coſ.}\,n\Phi - nc\Phi\,\text{coſ.}\,n\Phi$$

qui

qui caſus ideo videtur notatu dignus, quia pro vtraque rota ſimilis dentium prodit figura.

17. Ponatur $\gamma b = n\gamma c = e$, quae eſt quantitas arbitraria, et cum angulus Φ ſemper ſit minimus, erit pro figura dentium rotae A:

$$x = b(1 + \tfrac{1}{2}\Phi\Phi) + e\Phi(1 - \tfrac{1}{6}\Phi\Phi)$$
$$y = e(1 - \tfrac{1}{2}\Phi\Phi) - \tfrac{1}{2}b\Phi^3$$

Pro figura dentium autem rotae B habebitur:

$$t = c(1 + \tfrac{1}{2}nn\Phi\Phi) + ne\Phi(1 - \tfrac{1}{6}nn\Phi\Phi)$$
$$u = -e(1 - \tfrac{1}{2}nn\Phi\Phi) + \tfrac{1}{3}n^3c\Phi^3$$

Quemadmodum ergo coordinatae x et y ab angulo Φ et radio b pendent, ita ſimiliter coordinatae t et u ab angulo $n\Phi$ et radio c pendent.

18. Si conſtans e eſſet $= o$, vterque dens deſineret in cuſpidem inuerſam, acumine ſcilicet centrum rotae vtriusque reſpiciente; quae figura cum ſit inepta ad praxin, conſtans e nihilo aequalis ſtatui nequit. Tantus ergo valor ipſi e tribui debet, vt vtraque curua a cuſpide liberetur, ideoque quando angulus Φ maximum obtinet valorem α, vt e ad αb ſeu $n\alpha e$ certam quampiam teneat rationem. Ne autem, angulum Φ tam affirmatiue, quam negatiue capiendo, vnquam idem valor ſiue pro x, ſiue pro t recurrat, oportet, vt ſit $e > \alpha b$. Si enim idem valor recurreret, tum eidem abſciſſae gemina applicata conueniet, ideoque dentis curua ibi duplicem haberet ramum, quod praxi aduerſaretur.

19. Curuae autem his formulis contentae propius cognofcentur ex ea conditione quod $\theta = \Phi$: ideoque tang. $\Phi = \frac{-dy}{dx}$: vnde patet tangentem in puncto contactus SMT rectae AB effe parallelum, feu angulum ATS $= o$, ex quo fit BST$= -n\Phi$, ideoque tang. $n\Phi$

Tab. III. $= \frac{du}{dt}$. Hinc aequatio $b(dx \operatorname{cof.} \Phi - dy \operatorname{fin.} \Phi) = xdx + ydy$

Fig. 2. abit in $\frac{b(dx^2 + dy^2)}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = b\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = xdx + ydy$: quae indicat curuam EM ex euolutione circuli radio BE $= b$ defcripti enafci, fimilique modo figura FM eft curua ex euolutione circuli radio BF $= c$ defcripti nata.

Fig. 5. 20. Quodfi ergo centris A et B defcribantur circuli CE et CF, ille radio AC $= b$, hic vero radio BC $= c$; fumtisque arcubus aequalibus CE $=$ CF, circulus CE euoluatur in EMe, circulus CF autem in FMf, hae duae quidem curuae fe mutuo in M tangent, verum hoc punctum contactus fimul erit punctum interfectionis, ita vt ambo dentes fe mutuo penetrare deberent. Hoc autem incommodum potiffimum obftat, cum ambae rotae fere funt aquales: at fi altera rota AC fit maxima, illa interfectio euanefcit, puncto contactus M in ipfum punctum E abeunte.

Fig. 6. 21. Si ergo altera rota A praegrandis fuerit prae altera B, huius dentes CD, cd commode per euolutionem circuli Cc defcribi poterunt, dum dentes rotae magnae planae conftituuntur, qui quidem ratione contactus ad minimum fpatium Ml fe extendent, recta Ml exiftente ad rotae peripheriam normali. Ex diftantia porro dentium minoris rotae Cc, quae ex eorum

eorum numero determinatur, eorum magnitudo *cm* inde definietur, vt cum contactus dentium M eueniat in recta AB, dentes proximi *cd* tantum non dentes *m* arripiant, ne vnquam tres dentes simul agant. Tum vero magnitudine dentium CD et *cd* definita, tantae cauitates in maiori rota exscindi debent, veluti MNOP, *mnop*, vt dentes rotae minoris capere valeant; atque etiam hos dentes profundius exscindi oportebit, vt prominentiae dentium maioris rotae M*l* excipi queant. Hinc denique crassities dentium CE, *ce* determinabitur, vt in cauitatibus maioris rotae locum inueniant, alterisque faciebus ED, *ed* similis figura tribuetur, vt rotarum motus pari modo in plagam oppositam conuerti queat.

22. Quando autem vsus postulat, vt ambae rotae non multum a ratione aequalitatis recedant, tum ob rationem allegatam figura dentium non per euolutionem circulorum describere licet, sed tum potius conueniet dentibus eiusmodi tribui figuras, quales in exemplo primo determinauimus, vbi facies dentium alterius rotae erant rectae. Simul autem hic notari conuenit, si rotae admodum fuerint inaequales, atque dentibus maioris rotae, secundum exemplum primum, tribuatur figura plana, tum quoque figuram dentium minoris rotae ita fore comparatam, vt earum euoluta sit circulus radio $BC = e$ descriptus, ita vt hoc casu ambo exempla exhibita conueniant.

23. Cum igitur exemplum primum ad omnes casus sit accommodatum, ne in eo quicquam incongrui

 eue-

eueniat, conſtantem e ita definiri oportet, vt dum angulus Φ per omnes valores, tam affirmatiuos, quam negatiuos, variatur, quamdiu iidem dentes in ſe mutuo agunt, punctum contactus continuo immutetur; quod vt eueniat, ſi α denotet maximum angulum, qui pro Φ ſtatui queat, neceſſe eſt, vt ſit $e > \frac{n(n+2)c\alpha}{n+1}$, $= \frac{n+2}{n+1} b\alpha$:
Tab. III. Ita ſi ſit $AC = b$; $BC = c$, capiaturque $CD = e$,
Fig. 7. recta DH ipſi AC parallela exhibebit faciem dentis rotae A, quae vltra D non porrigitur ob $x = b$ coſ. Φ et $y = e$. Pro figura autem dentis FDG alterius rotae B, poſitis $BQ = t$ et $QN = u$, erit

$$t = c + (n+1)e\Phi + \tfrac{1}{2}n(n+2)c\Phi\Phi$$
$$u = e - \tfrac{1}{2}(n+1)^2 e\Phi\Phi - \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)c\Phi^3$$

vnde poſito $\Phi = \alpha$ terminus dentis F, poſito autem $\Phi = -\alpha$ alter terminus G reperitur; hincque quouis caſu figura dentium facile delineabitur.

PHY-

PHYSICA.

ALKEKENGI CALYCE PROFVNDE DIVISO, FRVCTV SICCO.

Auctore

IO. CHRISTIANO HEBENSTREIT.

Quam rei herbariae cultoribus exhibeo plantae rarioris delineationem, omniumque partium, quibus exornatur, descriptionem, inter incognitas plane referendam non esse, sub initium huius expositionis moneo. Attamen cum a nemine, quantum quidem mihi constat, perfecta et omnibus numeris absoluta, prostet, vel data sit huius icon: non dubitaui curare sedulo, quo vigens et florens planta, secundum omnes suas partes, naturali in magnitudine iustoque numero depingeretur, quas nunc breui commentatiuncula exponere et illustrare constitui.

De historia eius, pauca haec addere, necessarium mihi videtur. Ludouicus Feuillée, Sacerdos, Mathematicus et Botanicus Regis Galliarum, Acad. Reg. Scient. Paris. Correspondens, in itinere suo, ab anno huius saeculi septimo ad duodecimum ex mandato Regis in Americam meridionalem, et praecipue prouincias Chily et Peru suscepto, primus eam inuenit, et in Ephemeridibus obseruationum physicarum, mathematicarum et botanicarum, *Iournal des obseruations physiques, mathematiques et botaniques*, in sectione libri, quae inscribitur: *Histoi-*

re

re des plantes medicinales, qui font le plus en vsage aux Royaumes de l'Amerique meridionale du Perou et du Chily, quae Parisiis MDCCXIV. 4. prodierunt, Tom. II. p. 724. tab. 16. delineatam sistit, additis, fructuum viribus, quibus pollent in mouenda vrina et reliquarum eius partium descriptione. Vocat eam *Alkekengi amplo flore violaceo.* Cuilibet vero obiter tantum inspicienti istam figuram, quam citauimus, offertur ab auctore nostro planta exigua et cuius partes omnes, ea magnitudine, quam penes nos sata si fuerit, consequitur, multo minores sunt, neque natiua sua forma, quam habet, cum his conueniunt. Quid? quod, etiamsi hanc differentiam loci natalis, in quo planta inuenta et descripta est, diuersitati forte adiudicare quis velit, neque flos, neque fructus, secundum omnes partes suas rite adumbrati, ibi sistuntur. Negandum equidem non est, Cl. auctorem nostrum, prolixa descriptione et copiosa partium dimensione, supplendi ea, quae iconi desunt, omnem operam adhibuisse: sed superfluum esse eiusmodi studium, quo partes plantarum, quae tot modis vbique variant, operoso labore in mala icone describuntur, quilibet cognoscit, praesertim, cum quotidiana experientia constet, culturam et alia accidentia, minutias linearum saepissime permutare insigniter, cum in his nihil perpetuum sit. Audiamus nunc inuentoris huius plantae verba ipsa, et relationem, quam de ea litterarum monumentis consignauit nobisque reliquit, et quam in latinum conuersa sermonem, hic adducere non superfluum fore credidi.

„Plan-

„Plantam, refert, habere radicem albicantem, recta „descendentem, quinque vncias longam et septem „lineas crassam. Eo in loco, vbi caulis radici in„nascitur, plerumque ea bifida adparet, multis fibris ibi „prodeuntibus, quarum diameter varia magnitudine va„riat. Ad tres quatuorue pedes excrescit caulis rectus, „exterius quinquesulcatus, laeuis et laete viridis, qui „interius vero cauus est. Foliorum petioli ex ipsis „caulium oriuntur sulcis, tres vncias et dimidiam longi, „ad insertionem plani, tres lineas lati et duas crassi, „colore purpurascentes. Folia ipsa mediae magnitudinis „excrescunt ad octo fere vncias in longum, et vncias „quinque in latum. Color eorum est laete viridis, et „caule glabritie sunt inferiora, in ambitu dentata et „apice acuminata, costa totum folium percurrit intense „viridis, ex qua multae aliae laterales exeunt ad „apices vsque extremos excurrentes. Ex ipso caule, „ac ex alis foliorum, excrescunt rami aliquot exigui, „minoribus longe foliolis ac in caule sunt. In cacu„mine horum prouenit pedunculus fere vncialis, florem „vnicum ferens. Iste flos dilute caeruleus, maior est „reliquis speciebus huius generis, in ambitu aequaliter „diuisus et vndulato plicatus. In medio ipsius est stella „alba radiata, quatuor punctis violaceis exornata. Fi„lamentis quinque insistunt antherae flauae. Cingitur „flos calyce hypocrateriformi, ex cuius fundo exsurgit „pistillum, corollam perforatam transiens. Post deflo„rescentiam pistillum mutatur in fructum mollem, viri„descentem, splendentem, multis seminibus rotundis

 et

„et compreſſis refertum. Semina lineam longa et dimidiam lata ſunt, et includuntur veſica membranacea, „orta ex calyce expanſo.„ Hactenus Feuillée. Cum vero in hac, quam adduxi, vegetabilis deſcriptione, nonnulla deſiderentur quam maxime neceſſaria; copioſiorem, clariorem et vberiorem illius expoſitionem Illuſtris Linnaeus in Speciebus plantarum Holm. 1753. 8. pag 181. cum orbe erudito communicauit. Contulimus vtramque, et Feuillei, et Linnaei, partium huius plantae definitionem et dimenſionem inuicem, et quae in planta florente notauimus momenta, illis adiicere neceſſarium eſſe putamus, neque ideo reprehendendus erit noſter conatus, praeſertim cum genus, ad quod noſtra planta amandanda eſt, ex pleniore et accuratiore partium omnium enumeratione conſtitui debeat. Ex Speciebus Linnaei huc transſcribere expoſitionem vereor, cum ſine dubio copia iſtius libri penes omnes ſit. En nunc ſuccinctam et plenam omnium partium commemorationem, quam ſuperiore aeſtate ad perfectiſſimam plantam compoſui. Planta eſt annua et fulcitur radice vnica fibroſo-tuberoſa, ad palmae altitudinem deſcendente, albida, vel potius luteſcente, cuius diameter digiti craſſitiem habet. Quem protrudit caulem erectum, is omnino ad tres quatuorque pedes et vltra excreſcit, praeſertim, ſi plantae nouellae, in areis, feneſtris obtectae, progerminatae, mature in bene ſtercoratam terram transferuntur, in quo cito conualeſcunt. Prima aeſtate laete viget et bimeſtri ſpatio, poſtquam ſata eſt planta, floret; frigus vero

noctur-

nocturnum aduenientis autumni ferre non poteſt, quod, et eius incrementum, et fructuum maturationem valde cohibet. In iuniore planta folia adhaerent cauli quadrangulo, quatuor ſulcis extus conſpicuo, intus, poſtquam marceſcere incipit, ſuccorum motu intercepto, non quidem plenarie cauo, diſtantibus tamen medullae exſuccae lamellis ornato, alterna, in vtraque ſuperficie laeuia, oblonga, in circumferentia irregulariter dentata et ſinuata: apex folii eſt acuminatus, et pars inferior in petiolo aliquantum decurrit. Petioli coſta parte auerſa eminet, et viridi colore inſignitur, prona depresſior, laeuis et purpuraſcens in foliis adultis eſt. Rami ipſi ad angulos acutos exſurgentes, recta equidem adſcendunt, poſtmodum brachiati quaquauerſum diſperguntur. Contendit Feuillée, extremitati ramuſculorum inſiſtere pedunculum vniflorum: ſed is potius lateraliter et paullo altius, ac ramulus et petiolus folii, ex ipſo caule euaſcitur, vnicum florem ſuſtinens. Circumueſtit florem calyx monophyllus, turgidus, quinquangularis et inferius quinque acuminibus, tanquam productionibus ſagittatis, conniuens, et qui ad fundum vsque quinquifidus eſt, cuius ſegmenta ſunt foliola cordato-oblonga, angulis compreſſis cohaerentia. Corolla eſt monopetala campanulata tubo breui, fere rotato, extus colore violaceo, intus albo, qui color in quinque maculas caeruleſcentes, flammulae inſtar ad tertiam corollae partem adſcendentes, continuatur. Macula quaelibet ſuperius in duo cornua deſinit, quorum quodque extremum, cum oppoſitae maculae cornu confluens, interius quinque ma-

 culas

culas profunde caeruleas et acuminatas effingit. Limbus corollae caerulescens est expansus, leuiter in ambitu quinquifidus, laciniis emarginatis. Filamenta quinque staminum inferius crassa introrsum flexa et pilosa contegunt ouarium, tenuiora adscendunt longitudine styli, breuiora corolla. Antherae sunt erectae et acuminatae, ante florescentiam caeruleae, post flauae, bilamellatae. Stylus longitudine staminum stigmate crasso, capitato. Fructus ab initio purpureo-violaceus, qui color cum incremento fructus minuitur, et in prouecta aetate fructus plane abest. Maturatur in calyce straminei coloris, clauso et dependente, fructus globosus et siccus, tribus, quatuor et quinque loculis, vt plurimum tamen quatuor distinctus, tenui cortice tectus, fragili, nec regulariter dehiscente ad loculos. Semina numerosissima, plana et compressa, adhaerent thalamo scabro, pro loculamentorum numero vario.

Quae hactenus expositae sunt fructificationis partes, cum ab Alkekengi generis proprietatibus et proportionibus aliquantum deflectant; dubios nos relinqunt, vtrum hanc plantam ad hoc idem genus, an ad aliud referamus? Celeberrimus ipse Linnaeus, in Speciebus suis supra adlegatis p. 182, equidem nostram plantam adiunxit Atropae seu Belladonnae aliorum: fatetur tamen, mediam esse inter Atropam et Physalidem, et differentias, quibus ab Alkekengi separanda sit, ibidem exponit. Quae tertia est Atropae species apud Linnaeum, ab omnibus Botanicis hucusque adnumerata est Alkekengi generi, cum habitus totius plantae, flos et fructus

fructus cum eodem penitus conueniant. Rationem vero, cur separauerit ab Alkekengi Linnaeus, eam esse scribit, quia solus calyx inter genera Atropae et Physalidis limites certos constituat, hancque speciem illud certo euincere autumat. Consideranda itaque est definitio generis Atropae, quam dedit in editione Generum quinta Holm. 1754. 8. n. 222. cuius calycem monophyllum quinquepartitum, gibbum, laciniis acutis persistentem, esse adfirmat, cum antea in editione Generum secunda Lugd. Bat. 1742. no. 197, semiquinquifidum, gibbum, laciniis ouato-acutis, persistentem, illum esse docuerat. Ex hisce notis calycis, prout antea ex eo retuli, in planta conspicuis, prae reliquis aliis ab eo pensitatis, Alkekengi numero exemit. Sunt tamen notae istae calycis Atropae Linnaei non tam determinatae eique solum propriae, quin non conueniant etiam Physalidis speciebus nonnullis. Accedit et hoc, quod definitio calycis Physalidis, quam loco citato in Generibus no. 223. dedit, fere omnes istos characteres habeat, ac sunt in nostra, quam consideramus, planta. Sed pergendum est ad alia, ne in vnica tantum nota haereamus, cum plura signa inueniantur adhuc, attentione nostra et consideratione dignissima. Flos proceritati plantae conformis et forma sua spectabili iucundus, corolla campaniformi, limbo magno in quinque lacinias aequales, haud profundas, diuiso, quodammodo etiam plicato et vndulato, et tubo suo breui et recto, notas floris Alkekengi plures refert. In Belladonna flos semper irregulariter quinquifidus et tubo floris longiore, quodam modo incuruato, confpicitur. Si conftans etiam iftud fignum foret, ftamina nempe in flore noftro fuperius diftantia, et eam ab Alkekengi genere ex parte abludentem efficeret, piftillum tamen breue et ftigma fubrotundum, cum hoc iterum commune habet. Sed reftat praecipua vegetabilis noftri pars, fructus nempe, qui eft bacca fubglobofa et calyce inflato contenta. Calyx ifte, quem iam fuperius defcripfi, vna cum acino fuo, quem inuoluit, excrefcit, quam diu planta viget, et laciniis fuis profundis, quae complanantur inferius, quinquangularem veficam refert, fuperius dehifcentem, includentem fructum fubrotundum, fragili et exfucco cortice tectum, quadrilocularem vt plurimum, tribus et quinque etiam loculis faepius praefentibus, quibus in thalamo exafperato, tot columnis, quot funt loculi, adhaerent femina plana et fubrotunda, fpadicei coloris, copiofiffima. Quodfi nunc eas, quas hactenus expofui, plantae partes, comparamus cum partibus Alkekengi Tourn. in quam plurimis notis cum iis conueniunt: neque repugnat calyx, vel vefica membranacea, nullo confpicuo colore fuperbiens, et quae ad fundum vfque quinquifida eft, neque magnitudo floris in hac fpecie fingularis, neque ftamina diftantia, neque fructus exfuccus et aridus et faepius ex pluribus, quam binis, loculis conftructus, cum in aliis generibus fructus loculamentis et partibus aliis faepius varient. Si comprobandus eft praeftantiffimorum Botanicorum aufus, fecundum quem varia genera, communibus fructificationis partibus inftructa, licet in nonnullis accidentalibus differant

rant

rant, ad idem genus naturale reducere ſtudent: quid impedit, quo minus coniungamus genus Belladonnae cum Alkekengi, cum in poſteriore genere nonnullae ſpecies illud expoſtulare videntur, notante illud Cl. Linnaeo in Speciebus. Sed relinquimus cuique pro arbitrio ſuo liberum, ad quodnam genus referre velit hanc noſtram plantam: an ad Atropam Linnaei, an ad Alkekengi Tournefortii? Si tandem, quid nos de dubia hac planta ſtatuamus, ſententiam ferre iubemur, illam antiquo generi Alkekengi adnumerandam eſſe adſerimus, cum quo quam proxime, calyce, flore et fructu conuenit, quo in poſterum caueatur luxurians noua genera fingendi licentia, quae botanicam reddit difficillimam. Nominabimus itaque in poſterum:

Alkekengi calyce profunde diuiſo, fructu ſicco.

Si in plantis, quae alias non male conueniunt, communis vſus medicus vel oeconomicus valeret multum pro comprobando genere botanico: firmum etiam argumentum mutuare poſſemus ex Feuilleo, pertinere eam ad Alkekengi, cum deſcriptionem ſuam, quam ſupra adduximus, exorditur exponendo primum vires medicas, propter quas ab incolis Americae magni aeſtimatur et colitur. „Qui adficiuntur, inquit, doloribus„ calculi ſabuli, vel et iſchuria, mirum in modum leuan„ tur ab iſtis malis, dum ad hanc plantam confugiunt.„ Fructus quatuor, vel quinque, digitis compreſſi, immit-„ tuntur in aquam communem, vel vinum album, et ex „ hibito tali hauſtu, mirum eſt, quantum reficiantur ab„ eo aegroti, ſubmotis ſubito omnibus doloribus. Tali„ „modo

„modo in vſus ſuos conuertere norunt Indi hancce plan-„tam indigenam.„ Eamdem virtutem fructus Alkekengi foliis geminis, exercere in noſtris regionibus, crebra experientia comprobauit, et omnibus conſtat, hos, dum recentes et maturi, ſoli, vel ſaccharo conſperſi, comeduntur, in ſuppreſſa vrina multum iuuare aegrotos.„

* * *

Appendicis loco relationem litterariam, quae huc pertinet, adponere non dubito. Prodeunt nempe iterum Norimbergae lingua germanica deſcriptiones plantarum medicinalium, quas in America collegit Feuillée et commentariolis illuſtrauit in libro a me ſuperius adducto. Cum per faſciculos emittatur liber, dum haec ſcribo, XVI tabulae proſtant et tres plagulae commentariorum, et tabula XVI, in qua ſaepius indicata planta noſtra delineatur, euulgata quoque eſt. Figurae omnes immutatae, prout apud auctorem Feuilleum reperiuntur, exhibentur eruditis; hinc Alkekengi iſtud, omnibus ſuis partibus, quale auctoris ſui erat, conſpicitur ibidem denuo.

Fxplicatio Figurarum.

Tab. IV. Fig. 1.

Ramum Alkekengi ſiſtit, in quo caulis ſulcati figuram, foliorum formam, pedunculorum exortum, florum euolutorum ſitus calycumque inapertorum facies poſſunt diſtingui.

Figura

Figura 2.

A. Florem integrum, et corollam, ab anteriori parte conſpiciendam exhibet.

a. a. a. a. a. Corollae margo quinquifidus, qualibet lacinia medio emarginata.

b. Filamenta, corolla breuiora, cum ſuis antheris.

c. c. Maculae profunde caeruleae circa fundum corollae.

B. Corolla ſecundum longitudinem cum calyce diſſecta, vt interna melius cognoſcantur.

d. Fundus corollae, qui principium fructus, transuerſim diſſecti, recondit.

e. Calycis foliola.

f. Stamina.

g. Limbus corollae.

C. Fructus maturus in calyce reconditus.

h h. h. h. h. Calycis foliola paullum a ſe reclinata, vt fructus intus contentus manifeſtior appareat.

i. Ipſe fructus, baccam imitans, lineis etiam, loculos indicantibus, diſtinctus.

D. Fructus per medium diſſectus transuerſim.

l. l. l. l Quatuor thalami, ſcabri et ſpongioſi,

m. m. Semina ſuſtinentes.

Reliqua ex deſcriptione patent.

THLASPI SILICVLIS ELLIPTICIS, FOLIIS LANCEOLATO LINEARIBVS INTEGERRIMIS.

Auctore

IO. CHRISTIANO HEBENSTREIT.

Complures plantae, haud vbique obuiae, ſuperiori ſaeculo ab rei herbariae cultoribus deſcriptae, iconibus quoque illuſtratae, ſi noſtris temporibus accuratius conſiderantur, et quae de iis proſtant relationes, ſi comparantur cum plantis ipſis, multa praeter ea oſtendunt nobis ſingularia illisque propria momenta, quae habitum, formam et figuram diuerſarum earum partium clarius demonſtrant, quae vero ab eius inuentoribus, vel neglecta, vel non ſatis diſtincte indicata ſunt. Abſit vero quam longiſſime a nobis, dum haec adſerimus, vt inde indefeſſos labores, quos ſuſceperunt in ſe ampliſſimae ſcientiae plantarum promotores, taxare, vel deſpicere vellemus, forte tantum ideo, quia horum plantarum deſcriptiones, non ad eam normam iſtasque leges, quas ſanxit recentiorum Botanicorum auctoritas, vel arbitrium, compoſitae et confictae ſunt. Noſtrum potius erit, addere ea omnia, quae iure quodam, quo perfectior et clarior exiſtat plantae cognitio, deſiderari queunt ab rei herbariae amatoribus. His igitur rationibus impulſus, plantam quandam, a variis auctoribus in ſcriptis ſuis indiîndicatam, et de qua etiam nonnullae imperfectae icones iam proſtant, denuo ad plantam viuam exacte delineatam, breui et concinna expoſitione declarandam mihi ſumſi. Prima illius notitia occurrit apud Fabium Columnam in Ecphraſi prima minus cognitarûm noſtro coelo orientium ſtirpium, Romae 1606. 4. p. 279. tab. 277. fig. 2. nomine: Lithothlaſpi quartum carnoſo rotundo folio, vbi deſcriptio incompleta, neque omnes fructificationis partes indicans, et figura plantae minus bona, nec ad omnem eius habitum facta, exſtat. Poſt Columnam in Pinace ſuo eam adducit Caſparus Bauhinus, et p. 107: Thlaſpi paruum ſaxatile flore ſuaue rubente vocat. Indefeſſus plantarum ſua aetate detectarum collector, Iohannes Parkinſon, in Theatro botanico, quod Londini 1640. in folio edidit, Thlaſpi noſtrum bis expoſuiſſe videtur. Alterum, quod p. 843. ſine icone cum nomine C. Bauhini, iam adducto, recenſet, idem eſt, ac alterum, quod eadem pagina ſub titulo: Thlaſpi montanum carnoſo rotundo folio, cum icone, ex Columna depromta, habet. Moriſonus, qui poſt Bauhinorum tempora, omnes, quae modo inuentae erant plantae, ſummo ſtudio iu vniuerſale corpus cogere ſtuduit, et noſtram quoque plantam in Hiſtoria plantarum vniuerſali Oxonienſi Part. II. Sect. III. tab. 18. fig. 29. habet, recepto Bauhini nomine et adpoſita Columnae deſcriptione, in paucis mutata, prout etiam icon plantae non multum a Columnae figura recedit. Hunc excipit ordine alter celebris quoque Anglus, et cui multum debet ſcientia plantarum, quam ſcriptis ſuis egregie illuſtrauit, Ioannes Raius, qui aeque ac reliqui, quos hactenus adduximus auctores, in hiſtoria plantarum Tom. I. p. 833. n. 14. plantulam ſaepius nominatam, Caſp. Bauhini denominatione adducit, in Anglia quoque ſponte naſcentem, et exacta omnium partium deſcriptione exponit. Cum vero Thlaſpi illud in Gallia et Italia quoque variis in montibus creſcat, fieri aliter non potuit, quam vt Botanici, qui collegerunt horum regnorum plantas indigenas, illius quoque mentionem iniicerent, et cum aliis ſpeciebus huius generis enumerarent. Sic enim Iacobus Barrelier in opere poſthumo, quod inſcribitur: Plantae per Hiſpaniam Italiam et Galliam obſeruatae Pariſiis 1714. fol. p 38 n. 362. ic. 845: Thlaſpi montanum pingui folio, carneo flore, plana et cordata ſiliqua illud vocat. Creſcit vero, prout ſcribit, circa Monſpelium. Adpoſita eſt nomini icon admodum parua, quae neutiquam plantam ſaepius memoratam repraeſentat, cum ipſius caules numeroſi ſint ſpicati, floribus oppoſitis, et ſiliqua, ſeparatim adpicta, ſit oris integris, in ſummo emarginata et ferme triangularis. Plures equidem Thlaſpi ſpecies habentur in iſto libro, etiam vmbellatae, et quae certe propius accedunt ad noſtram ſpeciem: ſed ſynonymum C. Bauhini allegatum, et ſtructura foliorum, quae cum noſtra conuenit, non permittit nos dubitare, auctorem forte aliam, ac noſtram, prae manibus habuiſſe ſpeciem, ad quam facta ſit eius figura. Celeberrimus Tilli in cata-

catalogo Horti Pisani, Florent. 1723. fol. p. 164. Thlaspi illud quoque enumerat, retentis nominibus antiquorum. Et Io. Franciscus Seguerius in plantis Veronensibus, Veronae 1745, 8 editis, Vol. I. p. 37. Thlaspi illud breuissimis sic enumerat inter plantas patriae. „Summorum, inquit, montium rupes incolit, „e quibus inter petrarum rimas se promit cauliculus, in „plures ramos diuaricatus, cui sunt in summitate flores „suaue rubentes vmbellatim positi. Crescit in Baldo „monte„ Nimis copiosum foret, si longa serie omnes auctores, qui huius plantae in scriptis suis mentionem faciunt, adducerem: attamen necessarium omnino esse iudico, etiam indicare ea, quae reperiuntur in Indice locupletissimo magni Boerhaauii de nostro vegetabili adnotata. Dum enim ibidem Part. II. p. 7. plures ex ordine proponit Thlaspi species, n. 6. illud quoque sistit: statuit autem insimul, videri sibi, ac si vix differat sufficienter ab alia specie huius generis, a Ioanne Bauhino descripta in Historia plantarum II. 927, et a Morisono, in opere superius adducto, denuo proposita. Tandem tenor, quem hactenus seruauimus in enumerandis variis auctoribus, nos deducit ad recentissimum botanices scriptorem, illustrem Linnaeum, qui in Speciebus plantarum, Holm. 1753. 8. euulgatis Tom. II. p 646. n. 4. nostram plantam nomine: Thlaspi siliculis ellipticis, foliis lanceolato-linearibus integerrimis, ex Sauvagesii Flora Monspeliensi Hag. Com. 1751. 8. adducit, addito signo crucis, sibi fa-

 miliari

miliari, ſi plantas a ſe ipſo non ſufficienter diſquiſitas, vel ex imperfecto exemplari perluſtratas, aliorum perſcrutationi et diſquiſitioni commendat. Patet ergo, non fruſtraneum eſſe noſtrum ſtudium, ſi, quae nobis de hac planta cognouimus, vna cum icone exacta et ad viuam plantam facta, nunc exhibeamus botanophilis.

Ex ſemine exiguo, coloris punicei, progerminat in hortis noſtris et in terra ſabuloſa plantula, radice vnica ſuffulta, albida, fibrillis ex omni ambitu paucioribus prodeuntibus, et quae emittit cauliculos tenues, numero incertos, quatuor, quinque, plures, recta adſcendentes, ad ſpithamae altitudinem excreſcentes, interdum ſubrubellos, praeſertim tempore verno, quibus vtrimque adhaerent folia lanceolata, carnoſa, integerrima, alterna, breuiſſime petiolata, petiolis albicantibus, ſuperficie folii vtraque glauca, inferiora ſuperioribus ſunt maiora et craſſiora, et denſo numero plantam omnem inveſtiunt. In ſummitate caulis coaceruantur flosculi plurimi, vmbellam quaſi formantes antequam florent, qui comprehendunt in calyce tetraphyllo, in inferiore parte ſua gibbo, et deciduo, florem tetrapetalum regularem, colore ex albo et lineis rubris variegatum: color petalorum ad vnguem eſt roſeus, limbo expanſo albidiore et integro. Dum petala marceſcunt roſeus color ſenſim perit, et loco eiusdem lineae tantum rubrae conſpiciuntur. Filamenta ſunt ſex, cum antheris luteis, altitudine ſua inaequalia, duo ſcilicet breuiora peta-

petalorum interſtitiis interſerta; ſtylus eſt breuis, capitatus, craſſiusculus: quibus emarcidis, ſuccreſcit fructus, ſilicula nempe fere cordata et margine foliaceo ac crenato cincta, quae ſepto intermedio valuas non ſuperat longitudine; et partes ſiliculae maturae dehiſcentes, valuae nempe, ſunt nauiculares, pauca ſemina continentes. Hae notae characteriſticae, in planta noſtra praeſentes, effecerunt, vt ab omnibus auctoribus ad Thlaſpi genus relata fuerit, neque vllus mihi cognitus eſt, qui eamdem ab eo ſeparaſſet. Maior vero ambiguitas apud ſcriptores, dum ſpecies ſuas ordinant, reperitur, ſiquidem idem habitus creſcendi omnibus fere communis eſt, et in ſola capſularum figura et foliorum forma quaerendae ſunt differentiae conſtantes. Sed vt illud exacte fiat, omnes, vel certe plurimae ſpecies praeſentes diſquirendae ſunt, quo varietatum accidentales characteres inſimul pateſcant. Cum vero non facile omnes vna in horto quodam vigeant vel floreant: hinc ſingularium ſpecierum tantum conficiendae ſunt deſcriptiones, omnibus numeris abſolutae. Non dubitamus, fore tunc multas varietates, quae adhuc pro genuinis ſpeciebus habitae ſunt: nam coniecturam noſtram celeberrimi Boerhaauii confirmat adſertum quam euidentiſſime, dum ſtatuit, loco a nobis ſupra adlegato, noſtram ſpeciem vix differre multum ab ea, quae a Io. Bauhino Hiſt. II. p. 927. vocatur: Thlaſpi capſula cordata, peregrinum, et quae eſt primum Thlaſpi in Speciebus Linnaei p. 645, forte et hic non ſufficienter, datis chara-

racte-

racteribus ſpecificis, ab noſtro diſtinctum. Interea retinendum eſt nomen ſpecificum Linnaei in hac noſtra ſpecie, et ſi in poſterum copia nobis dabitur alterius ſpeciei, illam conferemus cum noſtra praeſente, notaturi omnes differentias, quas euidentes et certas in vtrisque ſpeciebus eſſe exiſtimamus. Nomen Columnae ſupra citatum, et quod noſtrae plantae adſcripſimus, tribuit Illuſt. Hallerus Hort. Goett. 1753. 8. p. 245. Lepidio foliis pulpoſis ſubrotundis antheris lateralibus. Sed cum in noſtra planta folia omnia ſint lanceolata et antherae filamentis impoſitae, neque tuba longa et craſſeſcens inueniatur, dubitatio ſuboritur, num eadem ſit, quam deſcripſimus.

* * *

*S*uperiori anno a Cel. Ludwigio Lipſia mihi nuntiabatur, prodiiſſe Londini 1756 4 librum inſcriptum: The natural hiſtory of Aleppo and parts adiacents by Alexander Ruſſell, in quo delineatum eſſe Tab. I. p. 33. plantam quam expoſuimus, et compellari: Thlaſpi orientale ſaxatile, flore rubente, foliis polygalae, petalis florum aequalibus. Tourn. Coroll. 15. Impoſſibile fuit adhuc impetrare hunc librum ex Anglia, hinc de figura et deſcriptione, ſi quae adpoſita eſt, iudicare minime valeo: attamen neceſſarium eſſe putaui, etiam allegare ſcriptorem recentiſſimum, qui huius plantae mentionem iniecit.

EXPLI-

EXPLICATIO FIGVRARVM.

Tab. V.

Fig. I. Integrae plantae habitum deſignat: adumbrauimus autem minorem tantum, ſatis accurate eum exprimentem, licet in horto in fruticulum ſoleat excreſcere, per aliquot annos perdurantem.

Fig. II. *a.* Florem integrum, prout cauli inſidere ſolet, in quo inferius calyx et expanſus petalorum limbus cognoſcitur.

b. idem a latere viſus, quo calycis foliola melius dignoſcantur.

c. remotis petalis ſtaminum ſitus, fructus rudimentum complectentium obſeruatur.

d. flos ab anteriore parte, naturali magnitudine aucta et anterioribus petalis reclinatis, in corollae medio ſtamina eminere docens.

e. ſilicula in margine crenata, ſuperius emarginata, ab anteriore facie.

f. eadem ab auerſa.

ANIMALIVM QVORVMDAM QVADRVPEDVM DESCRIPTIO

Auctore
IO. GEORG. GMELIN.

I.

MVSTELA ZIBELLINA.

Excellentiſſimus Sibiriae Gubernator, *Alexius Leonis filius Pleſchtſcheew*, duo huius generis animalia viva per integrum prope annum in vrbe Tobolsk domi ſuae aluit, quorum alterum ex Tomskienſibus, alterum Tab. VI. ex Bereſowienſibus terris allatum. Forma et habitu corporis martem, dentibus muſtelam referunt. Inferior maxilla dentibus primoribus ſex, ſatis longis et paululum incuruis, caninis duobus praelongis, pariter aduncis, molaribus vero duobus tantum, quantum diſcernere licuit, tricuspidibus, donatur. Superior maxilla dentibus minutiſſimis aſpera eſt, quorum numerum determinare nequiui. Rictus latera ſetis longis exornantur. Pedes lati ſinguli, tam anteriores, quam poſteriores, in quinque digitos diuiſi, vnguiculis albentibus, parum aduncis, muniti. Sternum prominens, acutum.

Bereſowienſis, exceptis mento et auriculis, colore ex cinereo nigricante vbique gaudet. In mento fere cinereus eſt, circa auriculas luteſcens. Dimidiam vlnam Ruſſicam longitudine aequat.

Alter

Alter minor eſt, coloris per omnia ex luteo fuſci, in mento et auriculis aliquantum pallidior.

Reliqua patent ex figura adiecta, quam optime ad viuum expreſſam de Bereſowienſi fieri curaui. Hieme, qua figura expreſſa eſt, omnia ita ſe habebant, vti modo dixi. Appropinquante vere pili iis defluxerunt, et color plane alius inductus. Bereſowienſis ex nigro luteo-fuſcus, Tomskienſis ex luteo-fuſco pallide luteus factus eſt.

Miratus ſum agilitatem horum animalium, nam f rociam appellare non auſim. Cum catus in conſpectum eorum venit, pedibus poſterioribus inſiſtunt, quaſi pugnae ſe praeparare vellent. Per noctem plurimam partem inquiete viuunt. Die ſaepius, inprimis poſt paſtum, per dimidiam, quandoque per integram, horam dormiunt. Eo vero tempore pungi, ex loco in locum proiici, os illis aperiri, et quomodocunque tractari poſſunt, nec ſenſu de hiſce vllo gaudent. Caro quaecunque ipſis in nutrimentum cedit. Excrementa peſſime olent.

II.

VACCA GRVNNIENS, VILLOSA, CAVDA EQVINA.

Per integrum iam annum hanc vaccam alit Excell. Gubernator, ad quem e Calmuccicis regionibus allata fuit. Longitudinis eſt $2\frac{1}{2}$ vln. Ruſſ. ex quo reliquae dimenſiones, quarum proportiones delineator ſatis exacte notauit, intelligi poſſunt. Corpus vaccinum. Tab. VII.

Cornua introrſum torta. Caput et corpus nigra, excepto fronte et ſpina dorſi, quae alba ſunt. Collum iubatum, totumque corpus hirci inſtar villoſum, pilis longiſſimis, ad genua vsque dependentibus, vt pedes eminus contemplanti perbreues eſſe videantur. Dorſum in gibbum aſſurgit. Cauda equina, prolixa, alba. Pedes bouini, anteriores nigri, poſteriores albi. Ad talos poſteriorum pedum vtrinque pilorum inſignis cirrus. Ad anteriores vnus tantum in ſingulis pedibus, in poſtica parte ſitus. Excrementa vaccinis paulo ſolidiora. Mingens corpus retro trahit. Non mugit, ſed ſuis inſtar grunnit.

Fera eſt, appropinquantique, praeter eum, qui pabulum porrigit, bellum indicit, dum capri inſtar ad praelium ſe accingit, capite feriens. Vaccas domeſticas aegre fert. Cum in eius conſpectum aliqua venit, grunnit, quod rariſſime alio tempore facit.

ADDITAMENTVM AD PRAECEDENTEM DESCRIPTIONEM.

Rubruquis in itinere ſuo per Tatariam et Baco in obſeruationibus ſuis bouis robuſtum et ferum genus Tangutis ad aedes ſuas portatiles vehendas inſeruiens, deſcribunt, quod caudam equinam, pilos in ventre et dorſo, pedes vulgari boum genere minores, et cornua acuta habeat, et horrore a rubro colore inſigni praeditum ſit. Vaccas huius generis taurum non ferre, niſi cantilenam, durante actu, aliquis canat, Rubruquis addit;

dit; Baco vero ſine cantilena eas mulctum non permittere perhibet.

Id boum genus a nominatis auctoribus intelligi, quod ego ſub Vaccae grunientis titulo deſcripſi, facile patet. Pedes vero apparenter tantum minores ſunt: Pili enim longi tota fere crura tegunt, vt ſolus tantum pes conſpiciatur. Cornua ego deprehendi, vulgarium boum analoga, quae ſaepiſſime ſatis acuta eſſe audiui. Horror a rubro colore mihi non obſeruatus fuit. Cum in vrbe Tomſk occaſionem nactus eſſem, de iisdem et reliquis, quae dicti Auctores tradunt, Calmucci cuiusdam gentilis relationes audiendi, quae ab illo comperi, omnino digna cenſeo, vt hic inſerantur.

Duo genera vaccarum Calmucci alunt, quae cum deſcriptis conueniunt; Sarluk vnum, Chainuk alterum vocant. Sarluk illud eſt, quod ego deſcripſi, et cuius Auctores dicti mentionem faciunt; Chainuk, magnitudine capitis et cornuum, et cauda ab initio quidem equina, ſed inſtar vaccinae terminata, a priori differt. Vtrumque eiusdem indolis eſſe Calmuccus aſſeruit, de cantilena durante coitu, ſiue mulcta, aut de horrore a rubro colore, nihil illi notum eſt, in hiſce ſuas ſe habere vaccas, vti noſtras, affirmanti. Aliud eſſe ſylueſtre boum genus indicauit, Bucha, quod Sarluk boue maius, et plane non domandum ſit, tantaeque feritatis, vt ſi tela in talem bouem proiiciantur, quae non confeſtim lethale vulnus infligant, ille venatorem perſequatur, et cornubus ſuis ſublatum in altum proiiciat, in terram lapſum denuo ſuſpendat, et proiiciat, huncque luſum tam diu continuet,

 donec

donec hoftem fuum vita priuauerit. Imo traditionem effe Calmuccus perhibet, id boum genus non raro venatorem cornubus tam diu fufpenfum tenere, donec in ipfis cornubus exarefcat, et tanquam puluis a vento diffletur, quod vero nec ipfe, tamquam rem extra omnem dubitationis aleam pofitam, affeuerat. Hoc fylveftre boum genus Calmuccis non indigenum eft, fed potius regno Tangut, fiue Tibet, proprium, in cuius montofis ad fluuium Tulum Chofo, a limitibus regni Koton Karia, Bucharorum fedis, duorum dierum fpatio diftantis, copiofe occurrit. Ita me Cofaccus, olim apud Calmuccos in captiuitate detentus, Kufneziae iam degens, certiorem reddidit. Exiftimat autem ille homo, effe Sarluk Calmuccorum, ferum boum Tangutorum, cicurem factum, quod veritatis quandam fpeciem habere videtur; fiquidem Tangutico boui nominatorum Auctorum, cum Sarluk Calmuccorum, vti iam annotaui, conuenit. Qua ratione horror a rubro colore in Tangutico boue explicari poffit, equidem fatis haereo; Ea enim feritate praeditus eft Tanguticus ferus bos, vt non tantum a rubro colore, fed a quacunque alia re fenfus fuos vel minimum afficiente, in rabiem agatur. Manfuetus vero nec rubrum colorem, nec alia metuit. Magis paradoxa eft traditio de cantilena, durante coitu et mulctu, neceffaria. Difficile eft caufam fallaciae in eiusmodi rebus inuenire. Forte Auctores ifti linguae illius, in qua portenta de hoc boum genere fibi explicata funt, non fatis periti fuerunt, cuius vel hoc fufpicionem mouet, quod unus durante mulctu, alter durante coitu, cantile-

nam

nam requirat. Attamen verosimile est, eadem ipsis relata fuisse.

III.
OVIS LATICAVDA RAJ. SYN. QVADRVP.
RVSS. Калмыцкой баранъ.

Cognoui iam, duorum generum oues esse laticaudas: vnum cauda lata longa, alterum cauda lata breui. Prius genus ipse non vidi, a variis vero, qui illud in Casaccicae Hordae terris abunde viderunt, describi audiui. Alterum in fortalitiis Septem palatiorum et Vst- Tab. VIII. Kamenogorensi iam indigenum, olim e Calmuccicis regionibus allatum fuit, cuius figuram et descriptionem exhibeo.

Ouem vulgarem habitu refert. Cornua plerumque gerit, antrorsum in semicirculum incuruata. Aetate prouectis, postquam cornua in semicirculum excreuerunt, non raro extrorsum adhuc incuruantur, vti e figura videre est. Aries, quem descripsi, capite et mento erat nigro, pedibus et ventre fuscis. Dorsum sordide luteum erat, fuscis et albis maculis interstinctum. De caetero color, vt in domesticis nostris, varie ludit. Cauda plus $\frac{1}{2}$ pede longa, vnum pedem lata, quadrata fere, in duo hemisphaeria per lineam, medium eius transeuntem, diuiditur. Quo cauda magis increscit, eo haec linea magis obscuratur. Vidi hoedos huius generis, quibus initium tantum caudae latum erat, reliqua parte angustissima, sensim vero sensimque eam ad prioris latitudinem expandi incolae retulerunt. Cauda vero illa

ex

ex pura puta pinguedine conſtat. Aries, quem figura ſiſtit, ab exortu cornuum ad initium caudae $3\frac{1}{2}$ poll. (*) longus erat.

IV.

SCIVRVS MINOR VIRGATVS. FVRVNCVLVS SCIVROIDES MESSERSCHMID. AN SCIVRVS GETVLVS CAII. APVD GESN. RAII SYN. QVADR. RVSS. Бурундукъ.

Sciurum minorem habitu corporis et cauda refert. Tab. IX. E iunioribus eſt, quem figura ſiſtit, naturali magnitudine pictum, attamen adultiores non multo maiores fiunt. A roſtro extremo ad poſteriorem auricularum partem diſtantia prope duorum pollicum, inde ad initium caudae vsque $3\frac{1}{2}$. Roſtrum inferius ſuperiori multo productius eſt. Duobus praelongis dentibus in vtraque maxilla gaudet, quorum ii, qui in maxilla ſuperiori ſunt, clauſo ore, inferioribus prominent. Rictus latera et ſupercilia ſetis nigris, ad rictum quidem longioribus, ornata. Frons ad roſtrum vsque luteſcens, raris, obſcure fuſcis, pilis intermixtis. Oculos tam ſuperne, quam inferne, linea fuſca ambit, ipſae vero palpebrae albentes ſunt. Malae luteſcentes. Dorſum luteſcens, quinque faſciis nigris ſecundum longitudinem ornatum, anterius ad caput, media excepta, quae ad anteriorem vsque auricularum partem pergit, poſterius ad caudam terminatis. Cauda 5 fere poll. longa, albis, nigris et flaueſcentibus pilis, non admodum longis, varia, extremo apice albo, ab animali viuo

ſupra

(*) Hic mendum ſubeſſe manifeſtum eſt. Forſitan $3\frac{1}{2}$ ped.

ſupra dorſum reflectitur. In anterioribus pedibus quatuor digiti, vnguiculis tenuiſſimis, ſatis aduncis, albentibus, inſtructi. Poſteriores pedes 5 digitis ornantur. Supina pars tibiarum calua fere, prona, tam anteriorum, quam poſteriorum, pedum pilis luteſcentibus veſtita. Per vniverſam Sibiriam copioſe verſatur.

V.

IBEX IMBERBIS. RVSS. Caŭra.

Capite eſt ouillo, niſi quod anterior eius pars, naſus inprimis, magis emineat. Reliquo corporis habitu ceruum refert. Mas in hoc genere Марачъ (Margatſch) dicitur. Capreae Plinii altitudinem numquam attingit. Is quem deſcripſi, ab extremo capite ad pedum extremum tres pedes altus, et ab extremo capite ad initium caudae totidem longus erat. Aures erectae, latiusculae, in mucronem obtuſum definentes, vltra 2 poll. longae. Vnum poll. ante aures, ſupra oculi orbitam vtrinque cornu prodit, quod in hoc indiuiduo, quadrimeſtri, nigrum erat, rectum et vix 2 poll. longum. In adultioribus cornua ad pedis longitudinem non numquam excreſcunt, inferius circulis quibusdam notata et albicantia, ſuperius laeuia, extremitate ſubnigra. Curioſius inſpicienti ſtriae etiam longitudinales apparent. Ex cornubus, vti recte Nobilis Herberſteinius, manubria cultellorum transparentia fiunt. In inferiore maxilla quatuor inciſores, et quatuor canini, cum quinque molaribus, quorum ſingulis binae radices ſunt. Superior maxilla eodem inciſorum et caninorum numero gaudens quatuor tantum molaribus, triplici radice nixis, armata eſt. Collum longiusculum. Armi ſpithamam longitudine non excedunt. Inferiora crura vltra pedem longa, in extremitate biſulca. A ſulco ſinus ſurgit, inter cutem et os verſus ſuperiorem pedis partem ſe vltra pollicem extendens. Papillae vtrinque duae. Teſticuli $3\frac{1}{2}$ poll pene inferius ſiti. Cauda tenuis tres poll. longa. Pili ceruini Color ſupinae partis e fuſco luteſcens, pronae albus.

Foemina huius generis mole corporis minor eſt, nec cornua geſtat.

Velociſſimi curſus ſunt. Quando venatores eos non proſequuntur, inceſſus admodum peculiaris ipſis eſt. Equum curſu tolutario incedentem imitantur, et per breuia interualla toto corpore in altum ſaliunt.

Inter cutem et panniculum carnoſum in viuis etiam huius generis animalibus vermes latent, $\frac{1}{2}$ poll. longi, craſſi, extremitatibus rotundiuſculis, albi et diaphani fere. Caro incolis ad Irtiſch fl. omnium vulgatisſima eſt, quae ipſis in eſcam cedit. Coitum animalia lupulo matureſcente celebrant, vere parturiunt, foetumque vnum, vel alterum, ſimul edunt. Graminibus paſcuntur. Autumno admodum pingueſcunt.

In deſertis a Tara vrbe ad Septem palatiorum arcem vtrinque ad Irtiſch fluuium copioſe morantur aeſtatis tempore. Hieme montoſa magis loca appetunt, nutrimento ſuo magis apta. Teſte Herberſteinio deſertos etiam campos circa Boryſthenem, Tanaim et Volgam incolunt.

VI. CA-

VI.

CAPREA CAMPESTRIS GVTTVROSA, CORNIBVS NEC RAMOSIS, NEC DECIDVIS.

AN GAZELLA AFRICANA RAI. SYN. QVADR. 79?

Capream Plinii toto habitu refert, magnitudine etiam, colore et inceſſus modo, et victu ex herbis, adeo convenit, vt qui Plinii capream vidit, huius etiam exactam ideam ſibi formare poſſit. Figura animal ſiſtit maſculini generis, ad viuum delineatum, cuius dimenſiones hae erant: Tab. IX.

	Ped.	Poll.
Longitudo capitis ab extremo roſtro ad initium colli — — — — —		$9\frac{1}{2}$
— — — auricularum — — — — — —		5
— — — colli — — — — — — — —		7
— — — dorſi ad initium vsque caudae — —	2.	
— — — caudae — — — — — — —	4.	
— — — crurum anteriorum ab initio radii ad extremum pedem —	1	6
— — — crurum poſteriorum ab initio tibiae ad extremum pedem —	1	8
Diſtantia oculorum ab extremo roſtro — — —		$5\frac{1}{2}$
— — — inter ſe — — — — — —		$3\frac{1}{4}$
Diſtantia cornuum ab extremo roſtro — — —		$6\frac{3}{4}$
— — — inter ſe — — — — — —		$\frac{3}{4}$
Diſtantia cornuum ab auribus — — — — —		$1\frac{3}{4}$
— — — teſticulorum a pene — — — —		$4\frac{1}{2}$
— — — papillarum a teſticulis — — —		1

Xx 2 Ani-

Animal ſolo inſiſtens a ſummo capite ad terram vſque tres pedes et vnum pollicem, a ſupremo dorſo ad extremum poſteriorum pedum duos pedes et quatuor pollices cum dimidio altum erat.

In ſuperiori maxilla ſex vtrinque dentes molares erant, in inferiori totidem molares, et quatuor vtrinque inciſores.

Maſculus a foemella duabus inſignibus notis differt, quarum prima eſt, quod cornua gerat, quae ſatis quidem erecta ſunt, attamen capiti non perpendiculariter inſiſtentia, et mox ſupra oculos, inter hos et auriculas, egrediuntur, oculisque propiora ſunt, ac auribus. Origine ſua plus quam pollicem lata ſunt, non tamen plane rotunda, ſed paululum compreſſa, eademque craſſitie et diſtantia inter ſe eadem ad tres admodum pollices perpendiculari propemodum via in altum ſurgunt, dimidium altitudinis integrae attingentia. Inde notabiliter extrorſum et paulo retrorſum vergunt, non procul vero ab extremitate introrſum rurſus incuruantur, et in apicem ſingula acutum deſinunt, quorum vnus ab altero quatuor fere pollices et dimidium diſtat.

Inſigniter cornua iſta rugoſa ſunt a radice ad eam vſque partem, vbi introrſum curuari incipiunt, ibi enim laeuiſſima ſunt, et ad apicem extremum vſque hunc laeuorem conſeruant. Coloris ſunt e cinereo nigricantis, apice excepto, qui nigerrimus eſt. Adde, non eſſe decidua, et ſubſtantiae, vti cornua Capreae Plinii, ſoliddiſſimae.

Secun-

Secunda nota, quae masculo a foemella distinguendo inseruit, est guttur, quod in masculo sine vlla dissectione insigni protuberantia se manifestat, et longitudine quinque, latitudine tres, pollices aequat; Protuberantia tamen ista in iunioribus animalibus magnitudine multum ab allegata deficit, quin in animali anniculo vix notabilis est: Pro ratione enim aetatis, aut pro ratione incrementi cornuum, guttur etiam crescit.

In internis partibus nihil insoliti inueni, quod in Rupicapra cornibus arietinis non obseruassem. Larynx vero pelle denudata causam protuberantiae supradictae clarissime manifestabat. Cartilago thyroidea (a aa 1) tres pollices longa et totidem lata erat, et septem processibus conspicua, (1. 2 3. 4. 5. 6. 7.) ipsum vero tracheae (bb) initium diametro duos facile poll. capiebat. Cartilago cricoidea (α α α α) circa summitatem duos pollices cum dimidio, ad basin duos pollices et tres eius quartas partes, lata, duosque pollices longa, erat. Cartilagines arytaenoideae (β β β β) simul sumptae tam in summitate, quam in basi duos pollices latae et totidem longae erant. Epiglottis deficiebat. Figurae adiectae ab exemplo siccato delineatae sunt: Circumstantiae enim itineris, largioribus etiam obseruationibus infestae, impedimento fuerunt, ne ex recenti fieri id potuerit. Fig. I. laryngem ab anteriori parte atque a latere spectatam sistit, quae causa est, vt processus 2 et 4 in figura non videri queant. Fig. II. eandem a posteriori parte sistit. Numeri et literae, in hac figura praeter indicatas adiectae, eundem habent valorem ac in Figura I.

Tab. X. Fig. 1.

Fig. 2.

Ex his, quae attuli, non difficile eſt, marem a foemina diſcernere. A Caprea Plinii cornibus non ramoſis differt. Sed terminos diſtinctionis inter foemellas vtriusque animalis, niſi a loco eorum natali campeſtri et ſyluoſo deſumantur, me ignorare fateor. Ab Ibice imberbi, licet cornuum rectitudine et abſentia ramorum in cornibus conueniat, naſo tamen non difficulter diſtinguitur, qui in Ibice, tanquam in oue, fiſſus et latiusculus eſt, cum in Caprea, quam deſcribo, vti in Caprea Plinii, integer et acutus.

Frequens eſt hoc Capreae genus in omnibus campis trans-baikalenſibus vaſtis et apertis, et Mongolice Dſeren dicitur, quo nomine etiam a Ruſſis earum regiorum ſalutatur. Ona eſt nomen foemellae, iisdem Mongolis vſitatum. Caro huius animalis incolis in victum, pellis in amictum cedit. Cornua denique magna in aeſtimatione apud Sinas ſunt, qui non exiguo ea pretio redimunt.

Cl. Meſſerſchmidius huius animalis figuram dedit, ſed male expreſſam; cornua inprimis, habita ratione ad reliquum corpus, nimis longa repraeſentantur. Figurae haec adſcripſit verba: Caprea Ona Dſheren et Scharchoechtſchi Dauurica, campeſtris, gutturoſa, potamophobos etc. Quid vir Cl. per potamophobos intelligat, reſcire non potui. Amnes enim hoc animal frequentat, aliorum inſtar animalium: vere tantum et autumno, cum ſolo vbique humente, a graminibus recentibus, vel pluuia irriguis, abunde hu-

midi

midi capit, amnes non multum frequentare, eos tamen, vel quando venatorum insidias effugere vult, vel propriae necessitatis causa, non raro transire, Tungusi retulerunt. Non parum etiam contra hunc horrorem a fluuiis facit, quod in vrbe Selenginsk Brigadirus, Ioannes Demetrii filius Bucholz, de caprea huius speciei domi suae educata et omnino cicurata retulit, eam amore famuli, pabulum porrigentis, ita captam esse, vt quando ille necessitatis cuiusdam domesticae causa Selengam fluuium in lintre transeat, illa non raro famulum, fluuium transnatando, sequatur, quod certe, si instinctu quodam a fluuiis abhorreret, non facile praestaret.

VII.

CVNICVLVS PVMILIO SALIENS, CAVDA LONGISSIMA.

Agillimum hoc, mansuetum et aspectu iucundum animalculum in campis Tschikoiensibus, Argunensibus et Ononensibus sedem sibi fixit. Generaliter quidem ad leporinum genus spectat, sed penitius consideratum sui generis est, nec cum vllo cognitorum animalium, quoad notas genericas, comparandum. Cuniculo minus est, et corpore breuiore. Auriculae longae, leporinae, pellucidae, glabrae, et vasis sanguineis pulcherrime pictae, per totam longitudinem aeque latae, nisi extremitatem versus, vbi paululum acuminantur. Maxilla superior inferiore, vti in Talpa, multum longior, obtusa tamen, et turgidula extremitate terminata. Rictus latera setae Tab. XI. Fig. 1.

lon-

longiſſimae ornant. Labium ſuperius, vti in cuniculo, verſus nares hiulcum eſt. Dentes murinis ſimiles, duo in vtraque maxilla praelongi. Oculi grandes, iridibus fuſcis palpebrisque, ſetis breuioribus cinctis, donati. Corpus anterius tenue, poſterius ampliſſimum, fere rotundum, in caudam deſinit longiſſimam, digitum minorem craſſitie non aequantem, plus quam duas tertias longitudinis partes pilis durioribus et ita breuibus veſtitam, vt anguloſitas oſſiculorum caudae externe per pilos dignoſci poſſit, ab hinc vero ad extremitatem vſque pili ſunt longiores et in extremitate ipſa longiſſimi et, vti in cauda Erminii, aut Sciuri, ſparſi, tactu delicatiſſimi. Crura anteriora breuiſſima, quinque digitis iuxta ſe poſitis inſtructa, poſteriora longiſſima, quatuor digitis munita, quorum tres anterius ſiti ſunt, quartus pollicis fere diſtantia ab anterioribus locatur. Omnes digiti vnguiculis albentibus, vix incuruatis, anteriorum quidem pedum breuioribus, poſteriorum paulo longioribus donantur. Pilis animalculum veſtitur mollibus, ſatis longis. Supinum corpus et externa pedum pars luteſcente colore, cui cinereus obſcure permixtus eſt, gaudet, ad exortum vero pedum poſteriorum et caudae virgae candidi coloris apparent, prona pars corporis, vt et interna pedum, candidae. Cauda, quoad durioribus pilis veſtitur, luteſcens, tum vnciam circiter candida, in extremitate denique nigerrima, apice interdum albo adhuc ornata. Dimenſiones ſequentes ſunt;

Lon-

	Poll.
Longitudo ab extremo rostro ad initium caudae —	6
— — — — — ad oculos — — — —	1
— — — auricularum — — — — —	$1\frac{1}{2}$
— — — caudae — — — — — —	$8\frac{1}{2}$
Longitudo pedum anteriorum ab humero ad extremos vsque digitos — — — — — —	$1\frac{1}{2}$
— — pedum posteriorum a suffraginibus ad initium vsque calcanei — — — — —	3
— — — a calcaneo ad exortum digiti posterioris	1
— — — ab exortu digiti posterioris ad extremos vngues — — — — — — —	2
Latitudo corporis anterioris — — — — —	$1\frac{1}{2}$
— — — — posterioris — — — — —	3
— — — auricularum — — — — — —	$\frac{1}{2}$

Status, quem animalculum, terrae quiete insistens tenet, figura, optime ad viuum facta, exprimitur. Eo in statu pedibus anterioribus os et caput saepe scalpit, vti cuniculi solent, et canis sagacis instar continuo fere vestigat et odoratur, corpusque subinde in gibbum contrahit. Ad incessum velocem se accingens et femur et tibias extendit, hac ratione, vt angulum cum corpore recto maiorem efficiant, corpus tum eleuando in altum salit, terramque attingens eosdem repetit motus, donec ad locum desideratum peruenerit. Dum saltus hos perficit, in aëre quasi volare videtur, et ipsemet oculis meis vsurpaui, quod vno saltu dimidiam

 orgy-

orgyiam non raro absoluerit. Dicunt vero incolae eorum locorum, quando se aliqua re pressum sentiat, equum facile transilire, et vno saltu trium orgyiarum spatio promoueri.

Cuniculos fodit, idque mira agilitate praestat. Pedibus anterioribus terram radit, denticulis radices abscindit, terram solutam et radices abscissas pedibus posterioribus remouet et proiicit. Vidi hac ratione cuniculum ab eo intra aliquot minuta temporis ad vnciam vsque in longitudinem excauatum. Habet hanc consuetudinem timidum animalculum, vt, si venatoribus se pressum, saltibusque suis captiuitatem effugere haud posse sentit, extemplo cuniculos fodiendo, hoc sibi postremo refugio consulere tentet. Mox enim, quando se liberum credit, priorem cuniculum repetit. Sed denuo, antequam cuniculum suum consequi possit, ad incitas redactum, idem opus fossionis inchoat, vidique, cum turba hominum illud vndique insequeretur, ter et quater fossionem repetitam fuisse.

In futuram hiemem miro et sagaci sibi modo prospicit. Foenum eo tempore secat, quando arescere incipit, illudque in aceruos cogit rotundiusculos, quorum singuli pedem latitudine et altitudine aequant, foenum bene siccatum suis importans cuniculis. Cum haec animalcula innumera copia in campis viuant, adeo vt propter insignem cuniculorum, quos effodiunt, copiam, per campos istos proficiscentibus, ratione equorum, continuo titubantium, perpetuas molestias creent, iuxta

has

has moleſtias multa voluptate perfuſus ſum, quando in numeros eiusmodi foeni aceruos, qui plurimam partem Ceratocarpo conſtabant, intueri licuit.

Quod internas animalculi partes concernit, oeſophagus, vti in lepore et cuniculo, medio ventriculo inſeritur. Inteſtinum coecum breue admodum, ſed amplum eſt, in proceſſum vermiformen, duos pollices longum, abiens. Choledochus mox infra pylorum inteſtinum ſubit. Veſica vrinaria citrina aqua plena. Vteri nulla plane diſtinctio. Vagina enim canalis inſtar ſine vllis artificiis in pubem vsque protenſa in duo mox cornua diuiditur, quae, vbi ouariis appropinquant, multas inflexiones faciunt, et in ouariis terminantur. Penem maſculus habet ſatis magnum, cui circa veſicae vrinariae collum veſiculae ſeminales vnciam cum dimidia longae, graciles et extremitatibus intortae adiacent. Foramen aut ſinus quosdam inter anum et penem, aut inter anum et vuluam, nullo modo potui diſcernere, licet quasuis in indagatione iſta cautelas adhibuerim.

Ex hiſce palam eſt, animalculum eſſe plane anomalum. Auriculis enim leporem, roſtro talpam, longitudine caudae murem et more cuniculos fodiendi cuniculum refert. Intetnis autem partibus nihil cum recenſitorum generum animalibus, praeter oeſophagi in medium ventriculum inſertionem, commune eſt. Cuniculi Americani porcelli pilis et voce Margrau. fabrica internarum partium ab hoc non multum abludunt. Sed et haec ſui generis ſunt animalcula. Quae cum ita ſint, parum abfuit, quin Cl. Meſſerſchimidius genericum no-

 men

men Alactacha (Dauurica) huic animalculo imponens, me commoueret, vt et ego inter noua genera ponerem. Sed quoniam idem Vir Cl. in Indice animalium, Sibiriae ſuae illuſtratae ingeſto, idem animal cuniculum vocat, probe ſine dubio gnarus, rigoroſa generum nouorum fabro eſſe ſuſtinenda examina, mente eadem ductus cuniculum voco, liberum cuique relinquens, hoc nominis cum mure, aut talpa, aut lepore commutare. Interim hoc adhuc pro cuniculorum genere facit, quod caro animalculi alba ſit.

Ruſſi harum regionum ob ſimilitudinem cum lepore земляной заецъ vocant, Mongolenſes Alagtaga, quod Cl. Meſſerſchmidius ad ingreſſum inualida interpretatur.

De Figura Cl. Meſſerſchmidii moneo, quod ad animalculum goſſypio infarctum facta eſſe videatur; mirum quantum enim a natura abludit, animalculumque in tali ſtatu exhibet, quem nunquam aſſumit. Cum cautela porro intelligendum eſt praedicatum caudae in ſola extremitate piloſae, quod Vir Cl. nomini generico adiecit; indigitare enim voluit, caudam in extremitate tantum pilis longis veſtitam eſſe; ignorare enim non poterat, nec reliquum caudae pilis carere, licet breuiores ſint.

Huius denique animalculi a Cl. Strahlenbergio factam fuiſſe mentionem video in deſcriptione Borealis et Orientalis Europae et Aſiae partis, vbi Leporem volantem vocat, eumque in vaſtos campos, Volgae fluuio ad orientem ſitos, collocat. Adiecit Cl. Vir deſcri-

ptionem

ptionem, quae veritati satis appropinquat, nisi, quod magnitudinem saltus iusto maiorem facit. Hami etiam alborum caudae pilorum in cerebro illius, qui cum Cl. Viro descriptionem communicauit, nati esse videntur.

VIII.

CVNICVLVS INSIGNITER CAVDATVS, COLORIS LEPORINI.

Camporum trans baikalensium frequens incola est. Cuniculum vulgarem magnitudine paulum superat, ceterum habitu corporis, pilorum consistentia, proprietate cuniculos fodiendi incessus modo, qui saltatorius est, et carne alba omnino cum illo conuenit, si caudam excipias, quae notabiliter longior est. Pedes anteriores, modo consueto, posterioribus dimidio fere breuiores habet, quinque digitis instructos, quibus totidem ungues recti, nigricantes, inter pilos absconditi, satis longi, appenduntur. Posteriorum pedum quatuor tantum sunt digiti et totidem ungues. Mammillae vtrinque duae paruae et nigrae. Color supinae partis leporinus, circa collum et pedes ruffescens, pronae, gula excepta, quae dilute ruffescebat, candidus. Cauda in supina parte nigra, in prona alba erat. Obseruaui, quibus pronum corpus et tota cauda cinerascebant. Pili supinae partis seorsim spectati, in vtraque extremitate albescunt, medio nigri sunt. Omnes hae obseruationes intra Iulium mensem factae sunt.

Tab. XI. Fig. 2.

Circa internas partes haec obſeruaui: Caecum colo paulo anguſtius erat, ſed longius, vtpote octo pollicum longitudinem aequans, prope ilei inſertionem caeruleſcens, digiti medii capax, ſenſimque decreſcens, in extremitate vix calamum ſcriptorium latitudine capit, colore ibidem albente gaudens. Oeſophagus vti in lepore ventriculum medium ſubit.

A Mongolis Tolai dicitur, idemque nomen Ruſſis etiam harum regionum vſitatum eſt. Figuram eius ad viuum animalculum fieri curaui, vt ei, quam Cl. Meſſerſchmidius dedit, rudem admodum, meliorem ſubſtituerem. Nomen Cuniculi caudati Dauurici, a Viro Cl. impoſitum, paululum mutaui, quia etiam vulgares cuniculi cauda non carent.

IX.

ISATIS. RVSS. пессцъ.

Hiſtoriam et deſcriptionem animalis, in regione maris glacialis frequentiſſimi, et vulgo inter vulpis genera recenſeri ſoliti, durante mea in vrbe Iakutzk commoratione, adornare mecum conſtitueram, cum, quae adhuc de iſto animali in ſcriptis hinc inde leguntur, relationibus plurimam partem vagis nitantur, iisque vehementer incompletis. Conſului hanc in rem varios homines fide dignos, qui venationi huius animalis multos annos incubuerunt, impetraui etiam a Praefecto vrbis, vt hieme annos 1736 et 1737 intercedente duo huius generis animalia occiſa, internisque partibus nondum

ſpoliata

ſpoliata, mas et foemella, e Schiganenſibus hibernaculis ad me adferrentur, e quibus demque ſequens deſcriptio enata eſt.

Iſatis animal eſt, caudae prolixitate, eiusque longitudine, magnitudine corporis, reliquoque eius habitu, vulpi perſimile, facie magis canina, quam vulpina, pilis, ac in vulpe, mollioribus, coloris plerumque candidi, interdum et cinerei.

Dimenſiones indiuiduorum, quae prae manibus erant:

	In Maſculo Pol. Par.		In Foemella Poll. Par.
Ab extremo roſtro ad initium caudae –	$22\frac{1}{10}$	–	22
Caudae longitudo — — —	$12\frac{7}{10}$	–	11
Ab extremo roſtro ad medium inter oculos ſpatium — — —	$2\frac{1}{10}$	–	2
Interni oculorum canthi inter ſe diſtant –	$1\frac{7}{01}$	–	$1\ \frac{6\frac{1}{2}}{10}$
Ab externo oculi cantho ad eam auris partem, quae proxima eſt —	$2\frac{1}{10}$	–	2
Aures longae — — —	2	–	2
Aures ad radicem latae — —	$1\frac{7}{10}$	–	$1\ \frac{6}{10}$
Aures a ſe inuicem diſtant — —	$2\frac{1}{2}$	–	$2\ \frac{1}{2}$
Humerus longus — — — —	$4\frac{1}{2}$	–	$3\ \frac{4}{5}$
Ulna longa — — — —	$4\frac{1}{2}$	–	$3\ \frac{3}{5}$
Carpus et metacarpus vna cum digitis — — — — —	$3\frac{4}{5}$	–	$3\ \frac{3}{4}$
Ungues quatuor anteriorum digitorum longi — — — —	$\frac{4}{5}$	—	$\frac{4}{5}$

In

							in Masculo Poll. Par.		In Foemell. Poll. Par.
Femora longa	—	—	—	fere	5	—	$4\frac{1}{3}$
Tibiae longae	—	—	—	fere	5	—	$4\frac{1}{2}$
Extremus pes	—	—	—	—	$4\frac{1}{5}$	—	$4\frac{1}{3}$
Ungues posteriorum digitorum				—	$\frac{4}{5}$	—	$\frac{4}{5}$

Caput, vbi trunco adnascitur, latum, in rostrum satis acutum desinit, ceterum pro ratione reliqui corporis breue est. Aures fere rotundae. In pedibus anterioribus quatuor digiti anterius siti, vnguibusque leuiter aduncis, robustis, versus apicem albentibus, radicem versus nigricantibus, instructi, et quintus, posterius in interna pedis parte situs, a radice proximi quatuor anteriorum vnguis $\frac{17}{23}$ poll. distans, vngue pariter robusto, leuiter nigricante, anteriorum digitorum paulo breuiore, sed magis adunco, instructus. In pedibus posterioribus quatuor tantum digiti anterius siti, totidem vnguibus albentibus, radicem versus leuissime nigricantibus, leuiter aduncis, instructi. Penis crassitie vix calamum anseris, testiculi magnitudine vix amygdalam aequabant, adeoque inter pilos delitescebant, vt vix eorum vestigium deprehendi potuerit. In foemella vulua ab ano distabat $\frac{4}{5}$ poll. Pili per totum corpus spissi, molles, lanae fere specie, non tamen crispi, duos fere pollices longi, in capite tamen breuiores, in pedibus breuissimi. Ad nares porro et in inferiori maxilla pili deficiunt, cutisque nigro ibidem colore tincta est.

Ventriculus omnino, vti in cane. Intestina tenuia in masculo $2\frac{3}{4}$ vlnas, in foemella 2 vlnas $13\frac{1}{2}$ werschok,

ſchok craſſa in vtroque indiuiduo $5\frac{3}{4}$ werſchok aequabant. Caecum anguſtum, duris foecibus repletum et $2\frac{1}{2}$ werſchok longum, adeoque Grewii deſcriptioni vulpinae non admodum conueniens. Hepar in mare in ſex lobos erat diuiſum, quorum quatuor maiores erant, duo minores, et ex his alter lobulum Spigelii conſtituebat. In foemella octo lobos numeraui, tres maximos, vnum mediocrem, et quatuor minores. Duo minorum, in gibba parte conſpicui, cum tertio in ſima parte poſito, lobum quaſi trifidum conſtituebant. Quartus a lobo, cui veſicula fellea adiacet, tegebatur, adeoque ſimam pariter hepatis regionem occupabat. Veſicula fellea pyriformis, pauco felle repleta. Lien $1\frac{3}{4}$ werſchok longus, ſuperius $\frac{1}{4}$ circiter werſchok, inferius $\frac{1}{2}$ latus, tenuis ſubſtantia lienem humanum referebat. Pancreas $1\frac{1}{2}$ werſchok longum, $\frac{1}{2}$ werſchok latum. Choledochi et pancreatici ductuum inſertio in duodenum erat duobus diſtinctis orificiis, diſtantia duorum werſchok cum ſemiſſe a pyloro. Cordis, pulmonum et vaſorum e corde oriundorum, aut ibi terminatorum, eadem omnino diſpoſitio, ac in cane. Vaſorum ſpermaticorum tam in mare, quam foemella, idem omnino ortus, ac in huius generis animalibus eſſe ſolet. Vaſa deferentia in mare recta deſinunt in collum veſicae, non in veſiculas ſeminales, quarum nec veſtigium, licet diligenter inquiſiuerim, deprehendere valui. Penis oſſiculum condebat, vti in canibus. Vagina vteri, vti obtinet in quouis fere pecore, in duo diuiditur cornua, quae ſingula ad ouarium ſui lateris pergunt; ouaria vero vermem in ſe conuolutum referunt, et cum membrana, renes inuoluente, arcte connectuntur. Nec in mare, nec in foemella, folliculorum, ad anum alias sitorum, vestigium quoddam inuenire licuit, cui quidem fauet, quod animal hoc vulpino odore aut careat, aut saltim imbecilli admodum imbutum sit. Diu enim vtrumque in meis aedibus iacens, etiamsi viscera quaedam sanie iam corrupta essent, notabilem foetorem nequaquam sparsit. Verum nolim propterea folliculorum in hoc animali defectum accusare. Dudum enim obseruaui, plurimam animalium, eiusmodi folliculis instructorum, partem, folliculos suos oestri tempore quam maxime prodere, et per quam minutos alio tempore gerere, qui igitur forte etiam visum meum fugere potuerunt. In Sciuro certe vulgari et in Sciuro virgato non tantum folliculos hos, sed et ductus inde in penem vsque protensos et cum eo arcte connexos, non vna vice oestri tempore obseruaui, quae alio tempore frustra quaesiui, vnde et coniectatus sum, vsum, iis folliculis vulgo adscribi solitum, nondum esse certum. Quis enim vidit foramina, quibus hiant in intestinum rectum? Et quare, si succus eorum dilutioni tantum foecum seruit, folliculi non omni tempore aequaliter turgent? Paucis dicam: Explorentur cum cura folliculi moschiferi Cabargae, nam illi propter magnitudinem sensuum fallaciae minus obnoxii sunt, et patebunt etiam vsus folliculorum in reliquis animalibus, quae iis instructa sunt; volatilium enim genere excepto, nullus fere dubito, quin vsus eorum in omnibus idem sit. Quin incertum est, an

non

non et in volatilium genere eiusmodi vſum praeſtent.

Sceleton Iſatidis mihi haud differre videtur a vulpino; vt tamen collatio exacta inſtitui poſſit, maris Sceleton confectum eſt.

Ex relatione denique venatorum addo, latratum Iſatides edere vulpium inſtar, voce magis rauca, ac canes, interdum etiam eiulare.

Duo vulgo recenſentur Iſatidis genera, vnum candidi, alterum cinerei, aut, vti Olaus Magnus vocat, coeleſtini, ſiue aſurini coloris. Et haec diſtinctio in mercatura inprimis in vſu eſt. Quaeuis enim Iſatidis cinereae pellis maiori pretio venit, ac alba, et quo color in Iſatide cinerea nigredini propius accedit, eo pellis habetur pretioſior. Ego plures Iſatides, tam albas, quam cinereas, aſpexi et contemplatus ſum, imo indiuiduorum hic deſcriptorum maſculus candido, foemella cinereo, colore gaudebat. Vti in Iſatide candida pili candidi ſunt per totum corpus, ita in cinerea cinerei, nec vlla alia externe differentia patet. Quae vero in hepatis lobis differentia annotata eſt, id nec a ſexus, nec a ſpeciei diuerſitate repetendum eſſe ſentio, cum tam in hominum, quam brutorum cadaueribus, varietates eiusmodi quotidie obueniant. Multa tamen venatorum pars, Iſatides candidas et cinereas ſpecie differre, pronunciat. Sed exinde mea ſententia nihil decidi poterit. Plerumque enim plebi contingit, vt maior pars ſit errantium, quam rite ſentientium. Duos inueni venatores, vnum Iacutiae, alterum Ieniſeae, quos, poſt multa cum iis per multos dies protracta de variis rebus colloquia, pro veracibus non tantum, ſed et naturae cognitionis amantibus hominibus habere cum voluptate coactus fui. Hi aſſeruerunt, ſe per annos quam plurimos, quibus venationi Iſatidum inhiarunt, non vna vice prolem Iſatidum vidiſſe, matrem ſiue candidam ſiue cineream ſectantem, cuius plurima indiuidua candida erant, vnicum forte cinereum, plures vero eſſe proles, quarum indiuidua, omnia ſint candida, hac circiter ratione, vt inter ſingulas tres Iſatidum proles, quarum ſingulae ad viginti et plus interdum indiuidua continent, vnicum indiuiduum cinerei coloris conſpiciatur, nec vnquam ſe vidiſſe prolem, cuius omnia indiuidua cinerea fuiſſent. Quodſi haec obſeruatio certa eſt, iuſta conſequentia fluit, Iſatidem cineream candidae varietatem eſſe.

Locus natalis Iſatidis eſt ad littus maris glacialis, et ad omnes fluuios amnesque in illud ſe exonerantes, quousque eorum littora ſyluis nuda ſunt, adeoque in regione Kolimae fluuii ad Kolimenſem vsque arcem, a ſitu, quem reſpectu fluuii tenet, inferiorem dictam, in regione Indigircae fluuii ad amnem vsque Oſchoginam, in regione Lenae fluuii ad locum quendam, Cumac-ſsur vocatum, in regione Oleneci ad parem fere a mari diſtantiam, in regione Chatangae ad Lucineam vsque fluuium, in regione Piaſſidae fluuii ad Dudiptam vsque, in regione Ieniſeae ad ſuperiorem vsque Dudinam fluuium. Multo porro ſunt fluuii amnesue, innominatos labentes, quorum littora ab Iſatidibus incoluntur. Sic prae reliquis celebres ſunt inferiores regio-

nes

nes Chetae fluuii et Wolotſchankae amnis, quorum vterque ex occidente, ille quidem Chatangam, hic Chetam ſubit. Etiam Dudipta Piaſſidam ſubiens non exiguam famam habet, et multi alii, quos ſilentio praetereo, ne prolixitatis nimiae crimen incurram. Modo ſint loca ſyluis nuda, et cliuoſa et ſatis frigida, vti ſunt omnia illa, quae recenſui, vtpote quoad ſitum non infra altitudinem 69° conſtituta, ea Iſatis haud auerſabitur, cui quidem apprime conſentaneum eſt, quod Schefferus in Lapponia illuſtrata dicit, hoc animal non in ſyluis, verum nudis montibus verſari, Noruagiam Sueciamque interpoſitis. Loquor de loco Iſatidis natali, non de quouis, quem Iſatis tranſit. Comperi enim, ad Lenam fluuium interdum ad hibernacula vſque Sictacenſia et Schiganenſia, ad Ieniſeam in regionem vſque Turuchanii vrbis aſcendere. Imo Kirengae ad Lenam percepi, ante octo hos annos duas Iſatides ex aduerſo arcis occiſas fuiſſe. Ieniſeenſes in regione vici, qui a Dubtſches fluuio nomen ſortitus eſt, imo in regione ipſius Ieniſeae vrbis, Iſatidas aliquando viſas fuiſſe teſtantur. Verum nullum habetur exemplum, quod in vllo horum locorum Iſatis vnquam cuniculum ſibi foderit et prolem generauerit, adeoque tanquam tranſiens, et quaſi aberrans, in eiusmodi locis cenſenda eſt, quae coniectura etiam exinde roboratur, quod aberrationes eiusmodi nunquam contingant, niſi iis annis, in quibus magna Iſatidum copia in inferioribus fluuiorum regionibus obſeruatur.

Isatides circa festum annunciationis Deiparae (expressione venatorum vtor) generis propagationi inhiant, idque negotii duabus tribusue septimanis absoluunt, quo durante saepe ipsis accidit, quod canibus, vt coitu celebrato disiungi ab inuicem nequeant Quamdiu oestrum durat, sub libero aëre perpetuo versantur, nusquam durant diu, sed oestro absoluto cuniculos petunt. In locis nimirum Isatidis natalibus, et quidem in collibus eorum locorum, multi ab antiquo cuniculi conspiciuntur, ab Isatidibus excauati, ad ostium tantum lati, vt Isatis ingredi possit, quae quidem latitudo tam parua est, vt canem haud admittat. Extensio cuniculorum est secundum glebam conglaciatam ad quatuor et quinque orgyias in longitudinem, adeoque profunditas, computando a superficie collium externa, non vbique eadem. Quidam venatores dicunt, quodlibet Isatidum par peculiarem cuniculum incolere, qui cum nullo alterius cuiusdam paris communicet. Alii vero afferunt, tria et quatuor interdum paria vna habitare. Conueniunt tamen omnes, infra quinque Isatidum paria, separatim viuant, an vna, raro in eodem colle nidulari. Quilibet cuniculus multis exitibus donatus est, sex, octo et decem, qui omnes vel recta, vel et oblique curuoue ductu extensi in vnum centrum, cubile animalis, quod ad dimidiam vlnam latum est, desinunt. Hisce igitur ab antiquo iam existentibus cuniculis vtuntur Isatides, nouos sibi raro struentes. Quem vero sibi eligunt, eum a sordibus prope purgant, et, si alicubi collapsus est, reparant. In cubili vero muscum sibi pro molliori cubitu sternunt. In

In cuniculis poſt oeſtrum abſolutum aliquot dies quiete iacent, ex eo vero tempore victum ſibi quotidie extra quaerunt, eumque non niſi per internalla inhabitant. Vterum nouem circiter ſeptimanas gerunt; Durante enim ieiunio, quod Diuis Apoſtolis, Petro et Paulo, dicatum eſt, atque ſub finem Maii initia ſumit, parere dicuntur. Foetus edunt in ipſo cuniculo, ſex ſeptem, octo ad 25 vsque, prouti anni fertilitas fauet. Foetus Iſatidis albae, quando prodeunt, colore gaudent e luteo in ruffum aliquantum inclinante, cinereae vero nigricante. Vtriusque pili perbreues ſunt. Mater quinque vel ſex ſeptimanas poſt enixos foetus raro cuniculo exit, idque temporis in lactationem impendere creditur; quo elapſo et illa quotidie victus captandi catulisque apportandi cauſſa in campis vagatur. Circa medium denique Auguſti etiam catuli eo vsque excreuerunt, vt cuniculo egredi poſſint, quo tempore cuniculares (Norniki) audiunt. Pilis tunc veſtiuntur, vix dimidium pollicem longis, et albae quidem Iſatides plurimam partem albis, niſi ſecundum mediam dorſi longitudinem, vbi color luteſcens apparet, nigreſcenti permixtus et in cinereum aliquantum vergens. Iſatides cinereae tunc totae nigreſcunt, omnino vti tunc temporis, cum in lucem prodierunt, nec poſtea vel in hiemem vsque vllam aliam mutationem ſubeunt, niſi quod pili euadant longiores et lucidiores. Circa Feſtum exaltationis crucis, ſiue medio Septembri, pili dimidium pollicem longitudine iam ſuperant. In albis omnia tunc alba, praeter dorſum et ſpatium, armis interpoſitum,

quae

quae nigricant, quare tunc cruciatae (Kreſtowiki et Kreſtowatiki) audiunt. Hanc mutationem ineuntes, et illae, et cinereae, in terris turfaceis, quae in locis Iſatidum natalibus frequentes ſunt, non raro pernoctant. Circa initium Octobris pili in pollicem vsque excreuerunt, et nigricans candidarum Iſatidum inter armos ſpatium totum euanuit, ſecundum medium dorſum vero color ex albo et nigro permixtus apparet, quali Lari gaudent, in iis regionibus verſantes, quare tunc Lenenſibus venatoribus Larea (ſit verbo venia, Ruſſ. Tſchaëſchnik) audit. Ieniſeenſes vocabulo ſingulari ad hanc diſtinctionem exprimendam non vtuntur. In fine Octobris, circa diem Demetrii, candidum genus Iſatidum iam totum album eſt, pili vero nondum in tantam longitudinem excreuerunt, quales rigida hieme apparent, quare tunc Iſatis nondum perfecta (Nedopeſez) dicitur. Circa Feſtum denique Nicolai, quod in 6. Decembris incidit, pili in tantam longitudinem excreuerunt, quae nec tota hieme amplius augetur, ex quo igitur tempore Κατ'ἐξοχην Iſatis (пeceцъ), aut Iſatis perfecta (pocлoпeceцъ) vocatur. Vere appropinquante, circa feſtum Nicolai vernum, quod in diem nonum Maii incidit, interdum etiam tardius, omnium maxime vero circa feſtum Imperatori Conſtantino dicatum, quodque 21 Maii celebratur, pili defluere incipiunt, et circa feſtum Eliae Prophetae, in 20 Iul. incidens, omnes iam defluxerunt. Hac mutatione contingente Iſatis verna (Weſchniak) dicitur. In defluxorum pilorum locum alii paulatim ſuccreſcunt breues, qui circa medium Auguſti

Augusti non longiores sunt, nec alio colore praediti, ac cunicularium Isatidum, quas supra nominaui, adeoque ex eo tempore cum catulis suis easdem in hiemem vsque mutationes subeunt, quas paulo ante recensui. Pili Isatidis cunicularis omnium firmissimi sunt, nec non nisi magna vi a pelle auelluntur, Quo vero Isatis adultior euadit, eo pili mollius insident, etiam Isatidibus, quae hibernis quam vernis mensibus propius occisae sunt, pili fortius haerent.

In victum Isatidi praecipue cedit mus quidam campestris Brachyuros, quem perpetuo sectatur. Sed aestate nec anserum anatumue, quarum quouis vere per magna vis in frigidas regiones speciei propagandae causa auolat, capturam negligit. Callidissimum enim, vti omnes venatores vno ore affirmant, animal est, et vulpi nequaquam astutia secundum. Isatides, referunt venatores, cum catulis suis cunicularibus, lacum quendam in vicina situm petere, in cuius insulis magna anatum anserumue vis habeatur; eo autem tempore multos eiusmodi lacus haberi, quia anseres et anates, quotquot sunt, licet et in turfaceis terris nidificatae sint, cum prole exclusa lacus petant, vt nimirum, et ipsae, et proles, parum tunc temporis plumatae, et ad volandum minus aptae, hostes facilius euitare queant; catulos igitur Isatidis, lacum eiusmodi attingentes, circumcirca ad littus inter gramina sese abscondere, matrem vero circumspicere de commodo captandae praedae loco; et vbi talem inuenerit, in lacum se proiicere et verſus proles anatum anſerumue natare; adultas tum anſeres aut anates prolis defendendae cauſſa Iſatidem verſus natare, quae, quaſi huius perſecutionis ignara eſſet, continuo curſu prolem petat; quam primum vero ſufficientem anſerum anatumue copiam ſe inſequi percipiat, protinus verſus eas reuerti, et eo ipſo tempore prolem Iſatidis, inter gramina ante abſconditam, lacum ingredi, anſeresque circumuallare, et vna cum matre ſua quindecim aut viginti anſeres anateſue vna praeda auferre. Hieme Iſatis praeter nominatum murem victum etiam capit ex Lagopo aue, cui, vel viuae, vel retibus irretitae, inſidiatur, et ex leporibus, quos ſine multo labore iugulat. Denique et hoc, fame forte vrgente, accidit, vt in decipulis captas Iſatides eximant et deuorent.

Hoſtes Iſatis propter calliditatem ſuam habet paucos. Inſidiantur tamen ei e quadrupedibus Gulo, e volucribus Aluco maior. Sed raro viuam occidunt, capiunt vero multas mortuas, quas e decipulis, a venatoribus exſtructis, ante aduentum venatorum, eximunt et conſumunt. Idem et coruus facit, iis nempe in locis, vbi ſyluae in vicinia ſunt, nam ad ipſum littus maris glacialis corui non habentur.

Iſatis raro integrum annum in eodem loco degit, idque victus forte ratio exigit. Conſtans enim venatorum aſſertio eſt, quando mus, de quo ſupra, frequens ſit, frequentes etiam eſſe Iſatides, quin aduentum murium, Iſatides breui aduenturas, praenunciare. Igitur, quando mus regionem quandam deſerit, Iſatis pariter eam

eam deferere cogitur. Ordo hac in migratione nullus adhuc obferuatus fuit. Accidit, vt transeant tantum regionem quandam, accidit, vt dimidiam hiemem, vt et integram, in illa viuant, accidit, vt prolem tantum gignant et breui poft difcedant, interdum etiam accidit, vt per integrum annum in eodem loco morentur, et altero adhuc anno prolem ibidem gignant. Tempus, quo maxime migrare amant, illud eft, quando fol fub horizonte occultari incipit, fub initium nempe Decembris. Quam regionem deferuerunt, eam poft tres quatuorue annos repetunt. Non hoc ita intelligendum eft, ac fi interdum regio vna et altera, quas fuperius natales Ifatidis pronunciaui, Ifatide omnino vacua fit: femper enim quaedam fuperfunt, omnino, vti de vulpibus obferuatur, quarum magna pars perpetuo turmatim migrat, remanentibus tamen femper in quauis regione quibusdam indiuiduis. Si quodam in loco magna Ifatidis vis aduenit, latratumque edit, pro figno habetur, eam per aliquod tempus ibi commoraturam effe. Si vixit aliquandiu in quodam loco, editque eiulatum, breui poft eum locum deferit. Quo Ifatis difcedens abeat, venatoribus ignotum eft. Ienifeenfes fufpicantur, e regione Ienifeae fluuii abfcedentem Obi fluuii regionem petere, aduenientem vero exinde venire: Iuraces enim, qui Samoiedarum genus funt, in regione oftii Obi fluuii morari foliti, Ifatidum capiendarum cauffa iis praefertim annis ad fe venire, quibus magna apud fe Ifatidum copia habeatur, quod non facerent, fi vel minima capturae fpes apud illos foret.

Iſatides in regione Ieniſeae et Chatangae fluuiorum morantes propter magnitudinem ſuam prae Lenenſibus, Lenenſes rurſus prae Kolimenſibus celebres ſunt; Et profecto haec differentia ita notabilis eſt, vt facile in ſenſus incurrat. Sed an propterea diuerſas ſpecies conſtituant, in ſuſpenſo adhuc relinquendum eſt. Conſideratione non indignum eſt, quod lepores, vrſi albi, lupique e quadrupedibus, Aluco e volucribus, in regione inferiori Ieniſeae fluuii capti, eorundem generum animalibus, in reliqua Sibiria obuiis, magnitudine praecellant. Certe videtur regio huic magnitudini fauere, quia in pluribus animalium generibus obſeruatur.

Iſatidem cum Ionſtono vocaui, quia a vulpe vulgari ſpecie omnino differt.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE

AB ANNO MDCCXLIX AD ANNVM MDCCLIV PETROPOLI FACTAE, ANIMADVERSIONIBVS ILLVSTRATAE ET CONSECTARIIS.

Auctore

I. A. BRAVN.

Communicamus hic obſeruationes meteorologicas ſex annorum, ab anno ſcilicet 1749 ad anni finem 1754 Petroburgi inſtitutas. Superiores obſeruationes a me communicatae incipiebant ab anno 1744, et pertinebant ad finem anni 1747, erantque adeo quatuor annorum, vbi iam monitum eſt, obſeruationes anni 1748 deficere. Quum fere eadem methodo in his obſeruationibus vſi ſimus, ac in praecedentibus, et iisdem quoque inſtrumentis obſeruationes factae ſint; ſuperfluum eſſet, multa de modo et inſtrumentis hic monere. Sunt ſcilicet ſummae et infimae Mercurii altitudines in Tubo torricelliano per ſingulos anni menſes notatae, cum differentiis, ad cognoſcendam variationem earum cuiuslibet menſis et anni cum altitudine media barometrica. In obſeruationibus thermometricis maximas quoque et minimas caloris diminutiones enotauimus per ſingulos anni menſes cum differentiis ad variationes caloris ſingulorum menſium et totius anni exhibendas. Porro meteora potiora per ſingulos anni menſes propoſuimus, additis ſiepius circumſtantiis, antecedentibus et conſequentibus, ad nexum cum iis, ſi quis eſt, repraeſentandum. Barometrum ſimplex et hic eſt adhibitum, in quo pollices duodecimales pedis regii Pariſini ſunt notati, qui rurſus in partes centeſimas ſunt diuiſi. Indicantur hae numero poſt punctum poſito, vti pollices numero ante punctum. Thermometri gradus ſecundum ſcalam Delislianam et hic ſunt indicati, vbi Cifra, nullitatis nota, gradum caloris aquae bullientis, numerus autem 150 punctum congelationis notat. Comparauimus quasdam obſeruationes meteorologicas ex Sina acceptas cum Petropolitanis, in quibus et magneticae quaedam occurrunt, comparatae cum iis, quae in Sibiria factae ſunt. Sequuntur ipſae obſeruationes ſecundum ordinem temporis collocatae.

Obſeruationes meteorologicae anni 1749 et ſequentium, ad finem anni 1754 potiſſimum barometricae et thermometricae.

A. MDCCXLIX

Barometricae altitudines ſupra planum maris 51 pedum Pariſinorum ſunt obſeruatae.

		Maxima.	Minima.	Differentia
Ianuarii	3.	28. 60 –	27. 20 d. 7 – –	1. 40
Februarii	24.	28. 62 –	27. 20 d. 3 – –	1. 42

Maxima

	Maxima.	Minima.		Differentia
Martii 3.	28. 60	– 27. 05	d. 8	1. 65
Aprilis 24.	28. 41	– 27. 65	d. 14.16.17	– 0. 76
Maii 1.	28. 40	– 27. 40	d. 31 –	– 1 00
Iunii 26.	28. 00	– 27. 30	d. 10 –	– 0. 70
Iul.30 et 31.	28. 25	– 27. 35	d. 7 –	– 0. 90
Augusti 28.	28. 55	– 27. 45	d. 31 –	– 1- 10
Sept. 11.	28, 55	– 27. 20	d. 4.5 –	– 1. 35
Octobris 29.	28. 45	– 27. 20	d. 1 –	– 1. 25
Nou.5.6 et 7.	28. 70	– 26. 90	d. 25 –	– 1. 80
Decemb.20.	28. 70	– 26. 95	d. 6 –	– 1. 75

Maxima igitur altitudo per integrum annum est 28. 70, quae obseruata fuit mensibus Nouembri et Decembri, et quidem Nouembris 6 et 7, Decembris autem 20. Minima vero est 26. 90, quae notata est Nouembris 25. Maxima altitudo mense Nouembri notata sub his circumstantiis contigit. Ventus O d. 5 vix sensibilis erat, sequutus autem dein d. 6 ventus vehemens O, qui ad d. 7 vsque mane continuauit, dein rursus tranquillitas, vento S *g* S flante, sequuta est. Diebus aliquot antecedentibus ventus S*g*O debilis flauit; Thermometrum inter 156 et 150 variatum fuit. Quae Decembris 20 contigit eadem altitudo vesperi h. 7 comitata est vento non sensibili, praecedebat Ventus Ooo, 1 et 2, et sequebatur S*g*O. 1. 2. Thermometrum monstrabat 163. Quia huius anni altitudo maxima 28. 70 non superat altitudinem maximam hic iam alias obseruatam, 29, 01; manet huc vsque haec maxima. Altitudo huius anni minima

minima 26. 90 itidem minor eſt altitudine minima alias hic obſeruata 26. 41. Ergo et haec adhuc omnium hic obſeruatarum manet minima, vti quoque ſpatium variationum barometricarum maximum perſtat inuariatum 2. 60 vel praeciſe 2. $59\frac{10}{18}$. et variationes barometri menſtruae in primis et vltimis anni menſibus maiores, quam in mediis et hic conſpiciuntur.

Conſiderata ponderis atmoſphaerici per hunc annum variatione, variationem quoque caloris conſideremus neceſſe eſt. Fuerunt autem hoc anno caloris gradus minimi et maximi, per ſingulos anni menſes cum differentiis qui ſequuntur.

	Minimi.	Maximi.		Differentia
Ianuarii	6 . 179	-- $150\frac{1}{2}$ d.	17. 18. 19 m.	-- $28\frac{1}{2}$
Februarii	7 . 177	-- $151\frac{1}{2}$ d.	28	-- $25\frac{1}{2}$
Martii	3 . 169	-- 152 d.	24	-- 17
Apr. 2 et 11	. 155	-- 136 d.	29	-- 19
Maii	1 . 139	-- 110 d.	26	-- 29
Iunii	2 . 134	-- 122 d.	28 m.	-- 22
Iulii	12 . $127\frac{1}{2}$	-- $121\frac{1}{2}$ d.	31	-- 6
Auguſti	23 . $136\frac{1}{2}$	-- 111 d.	13	-- 25
Septemb.	27 . $145\frac{1}{2}$	-- $128\frac{1}{2}$ d.	1	-- 17
Octobris	15 . $158\frac{1}{2}$	-- 141 d.	1	-- $17\frac{1}{2}$
Nouemb.	28 . $179\frac{1}{2}$	-- 146 d.	11	-- $33\frac{1}{2}$
Decembris	20 . $174\frac{1}{2}$	-- 143 d.	30	-- $31\frac{1}{2}$

Comparatis inter ſe ſummi et infimi caloris gradibus adparet, ſummum caloris gradum fuiſſe 110 Maii 26, diminutum autem eſſe calorem ad $179\frac{1}{2}$ Nouembris 28 qui hoc anno infimus fuit gradus. Fuit igitur integra variatio caloris graduum $69\frac{1}{2}$, dum a 110 decreuit ad $179\frac{1}{2}$. Maximus

mus calor incidit in Maii 26 h. 7 p. m. flante vento debili S, qui etiam multis diebus poftea continuauit, vti quoque aliquot diebus antecedentibus fpirauit, quo tempore tempeftas fatis calida fuit. Barometrum 27. 55 monftrabat. Quia huius anni calor maximus non fuperat calorem hic alias obferuatum 104; huc vsque hic manet maximus. Maxima caloris diminutio hoc anno fuit Nouembris 28 179½ h. 7. p. m. vento vehementi ex Oriente flante. Praecedebat debilis N, fequebatur O, qui continuabat aliquot diebus pari fere vehementia, quem dein debilis S. excepit. Barometrum erat 28. 00, quod fequentibus diebus donec vehementia venti remifit, et ventus auftrum verfus mutatus erat, continuo ad 27. 35 defcendit, Quodfi calor fummus et infimus huius anni confiderentur, et cum aliorum annorum calore et frigore comparentur: facile confpicitur aeftatem huius anni neque admodum calidam, neque hiemem valde frigidam, adeoque aerem fatis temperatum fuiffe.

Venti vehementiores hoc anno fuerunt Ianuarii 19 O. g. N. 3. Febr. 4. W. 3. d. 9. S. 3. d. 20. S. et. W. 3. Martii 6. et 7. W 3. d. 8. W. 4. d. 27 O 3. Aprilis 10. O 4, qui ad 12 continuauit. O 3. d. 21. 23. 24. 26. Maii S. g O. 3 d. 4., et d. 5. S. g O. 4 d. 9. S g. W 3. d. 28. et 29 O. 4 d. 31. O. 4. Iunii O. g. N 4. d. 6 O. 3 .d. 7 O. g. S 4. d. 13. et 14 O. g. S. 3. d 17. O. 3 d. 20. O. g *S*. 3 item d 21. et 22. d. 23. O. 4. Iulii 10. S. 3. et d. 11, 12. W. 3. item d. 20. 21. 22. Aug. 14. d 15 et 16. S. g. O. 3. d 22. 23. O. 3. d. 24. O. 4. Septembris

 2. 3.

2. 3. 4. W. 3. d. 26. O. 3. d. 27. O. g. N 3. Octobris 2. N 3. d. 27. W. g. S. 4. Nouembris 1. S. g. O. 3. d. 6. O g S. 3. d. 8. W. g. S. 3. d 9. W. g S. 4. d. 10. et 11. W. 3. d. 12. W. g. S. N. 4. d. 25. et. 26. N 4. d. 28 et 29. O. 3. d 30. O. g. N 3. Dec. 1. O. g. N 4. d. 6. S. g. O. 3. d. 14 S g W. 3 itidem d. 15. et 16. d. 24. S. g. O. 4. d. 26. et 27. S. 3

Reliqua praeterimus, quia parum aut nihil notatu dignum occurrit. Progredimur igitur nunc ad anni 1750. obſeruationes.

Obſeruationes meteorologicae, potiſſimum barometricae et thermometricae, A. MDCCL St. V.

Barometri altitudines

	Maximae.		Minimae.		Differentiae.
Ianuarii	.15.	29. 10 –	27. 70	d. 2 –	– 1. 40
Februarii	17.	28. 25 –	26. 90	d. 11 –	– 1. 35
Martii	24.	28. 50 –	27. 30	d. 6 –	– 1. 20
Aprilis	11.	28. 20 –	27. 30	d. 3 –	– 0. 90
Maii	14.	28. 15 –	27. 40	d. 1 –	– 0. 75
Iunii	14.	28. 19 –	27. 55	d. 29 –	– 0. 55
Iulii	66.	28. 05 –	27. 50	d. 24 –	– 0. 55
Auguſti	25.	28. 05 –	27. 30	d. 30 –	– 0. 75
Septembr.	16.	28. 40 –	27. 40	d. 1 et 2	– 1. 00
Octobris	7.	28. 20 –	27. 60	d. 1 et 30	– 0. 60
Nouemb.	21.	28. 15 –	27. 55	d. 5. 6 et 7	– 0. 60
Decembr.	28.	28. 10 –	27. 45	d. 4 –	– 0. 65

Collatis

Collatis hisce inter se obseruationibus patescit summam huius anni mercurii altitudinem in tubo torricelliano fuisse 29 pollicum Parisinorum et decem partium centesimarum eiusdem pollicis. Est haec altitudo maior, omnibus ad hoc tempus obseruatis, superat enim maximam adhuc obseruatam 29. 01 nouem partibus centesimis pollicis Parisini. Ergo nunc spatium variationum barometricarum mutandum, et nouem partibus centesimis est amplificandum. Media quoque altitudo est mutanda, quae nunc est 27. 75½, quum antea fuerit 27. 71. Quum igitur huc vsque spatium variationum fuerit 2. 60: erit nunc 2. 69; scilicet a 26. 41 ad 29. 10. Contigit haec altitudo maxima huius anni Ianuarii 15 h. 7. p. m. Ipso meridie erat 29. 05, et nocte quoque sequenti; diei autem praecedentis vesperi 29.00. Ventus erat non sensibilis, praecedente N et NgO debili diebus aliquot antecedentibus, subseqnebatur O debilis die sequenti, quem excipiebat W vehementior. Thermometrum erat 172. Minima altitudo 26. 90 est notata Februarii 11 ipso meridie, coelo nubilo, vento SgO spirante mediocri. Die antecedenti erat 27. 60 et h 7. p. m. 27. 10. Calor diminutus erat ad 150, punctum scilicet congelationis. Pracedebat vesperi diei antecedentis SgO 3, et sequebatur S debilis. Quum haec altitudo minima 26. 90 non superet altitudinem minimam hic iam obseruatam 26. 41; manet haec huc vsque adhuc minima. Pondus igitur atmosphaerae hoc anno multum variatum fuit, dum spatium huius anni altitudinum mercurii variatarum fuit 2. 20.

Caloris variationes, secundum obseruationes thermometricas, fuerunt sequentes per singulos anni menses.

Calor minimus.			Maximus.		Differentia
Ianuarii 23.	175	-	148½	d. 17. et 29 - -	26½
Februarii 14.	175	-	144½	d. 22 - -	26½
Martii 8.	172½	-	126	d. 30 h. 7. p. m. -	46½
Aprilis 7.	151	-	126½	d. 27 - -	24
Maii 14.	143	-	114	d. 31 - -	29
Iunii 4.	137	-	113½	d. 16 - -	23½
Iulii 15 et 16.	129½	-	111½	d. 22 - -	18
Augusti 31.	124½	-	113	d. 1 et 2 - -	11½
Septembr. 29	154½	-	120	d. 1 - -	34½
Octobris 24.	170	-	145	d. 1 - -	25
Nouemb. 13.	178	-	160½	d. 6 - -	17½
Decemb. 23.	189	-	160½	d. 28 - -	28½

Ex comparatione harum obseruationum thermometricarum conspicitur, summum frigus hoc anno fuisse Dec. 23. vesperi, dum calor ad 189 minutus fuit. Contigit hoc frigus sub sequentibus circumstantiis. Meridie erat thermometrum 188, caelo per totum diem sereno. Ventus debilis 1 ex oriente flauit, qui die quoque praecedenti et subsequenti spirauit; barometrum erat 27. 90. Hic frigoris gradus, dum gradum 200 alias hic obseruatum non attingit, manet hic ad hoc tempus summus Petroburgi obseruatus. Quamuis autem superiores frigoris gradus saepius sint obseruati, potest tamen mensis December frigidissimis mensibus adnumerari. Variatio enim frigoris huius mensis fuit ab 160 ad ad 189, et ſemel tantum ad 160 mercurius adſcendit, reliquis dictus, vt plurimum inter 70 et 80 frigus alternabat. Nam d. 8. 173. d. 9. 10. 11. 175. d. 12. 179. d. 13. 180 d. 14. 178. d. 15. et 16. 182. d. 17. 185. d. 18. 182. d. 19. et 21. 175. d. 22. 188. d. 24. 187. d. 25. 179. d. 26. 174. d. 29. 180 d. 30 et 31. 179. Ventus his frigoris gradibus in aere regnantibus vt plurimum fuit O debilis, vel nullus.

Vlterius ex datis obſeruationibus intelligitur calorem ſummum hoc anno fuiſſe 111½. Obſeruatus hic eſt Iulii 22. h. 7. p. m. Coelum erat ſerenum, ventus auſtralis debilis 1. Idem ventus hunc diem anteceſſit, et ſequutus eſt per aliquot dies. Licet hic caloris gradus non adeo magnus ſit, tamen hic menſis ſatis calidus exiſtimandus eſt, quia vt plurimum inſigniores caloris gradus ſunt notati 112, 113, 114 etc. Inprimis notandus eſt menſis Auguſtus, qui ſolito calidior fuit. Et hoc menſe gradus 113, 114, 115, 116 frequentiſſimi fuerunt, quum contra menſe Iunio dies ſolito frigidiores occurrant, quod tamen non impedit, quo minus aeſtas pro ſatis calida haberi queat. Venti procelloſi fuerunt Martii 15, 19, 21, 28. Aprilis 19. Maii 6. Iulii 16. Reliqua, minus notatu digna, praeterimus

Hactenus pertinent obſeruationes in obſeruatorio inſtitutae ſupra planum maris Baltici 51 pedes Pariſinos alto. Quae nunc ſequuntur ab anno 1751 domi a me ſunt inſtitutae ſupra planum maris 15 pedes circiter.

A. MDCCLI ST. V.

Barometri altitudines

Menses	Dies.	Maxima		Minima			Differentia
Ianuarii	21.	28. 70	- -	27. 50	die	26	- - 1. 20
Februarii	4.	28. 57	- -	27. 35	-	28	- - 1. 22
Martii	24.	28. 42	- -	27 30	-	4	- - 1. 12
Aprilis	6.	28. 32	- -	27. 65	-	19	- - 0. 67
Maii	19.	28. 35	- -	27. 50	-	5	- - 0. 80
Iunii	5.	28. 20	- -	27, 50	-	12	- - 0. 70
Iulii	22.	28. 15	- -	27. 43	-	30	- - 0. 72
Augusti	26.	28. 45	- -	27. 65	-	31	- - 0. 80
Septemb.	23.	28. 60	- -	27. 15	-	2	- - 0. 45
Octobris	2.	28. 75	- -	27. 15	-	28	- - 1. 60
Novemb	28.	28. 65	- -	27. 40	-	6	- - 1. 25
Decemb	20.	28. 60.	- -	27. 20	-	11	- - 1. 40

Collatis his barometri altitudinibus inter se, patet earum maximam fuisse hoc anno mense Octobri 28. 75. Obseruata est die 3 circa meridiem, coelo sereno, thermometro gradum 140 indicante, vento variabili. Nox sequens fuit serena, et lux borealis conspecta est. Minima altitudo huius anni fuit 27. 15 eiusdem mensis die 28, thermometro 149 monstrante, coelo nubilo W leniter flante. Fuit igitur inter altitudinem maximam 28. 75 et minimam 27. 15 differentia huius anni maxima 1. 60, quae quum minor sit ea maxima, quae in antecedentibus obseruationibus 1750 est notata, scilicet 2. 69; manet hoc spatium variationum barometricarum inuariatum, quum altitudo maxima et minima

minima, cum altitudine media, eaedem perſtent anno ſuperiori deprehenſae. Caeterum variationes barometricas menſtruas primis et vltimis anni menſibus et hoc anno fuiſſe maiores, in mediis autem minores, conſpicitur.

Quae hoc anno 1751 variationes caloris ſe conſpiciendas praebuerunt, ex ſequenti tabella adparet.

Menſis.	Dies.	Calor minimus.		Maximus.		Differentia		
Ianuarii	21.	180	-	151	die	25	-	29
Februarii	5. et 6.	192½	-	148	-	24	-	44½
Martii	24.	161	-	134	-	29	-	27
Aprilis	8.	149	-	124	-	24	-	25
Maii	2.	146	-	118	-	31	-	28
Iunii	9.	147	-	111	-	20	-	36
Iulii	11.	132	-	105	-	6	-	27
Auguſti	24.	139	-	106	-	6	-	34
Septembris	27.	141	-	127	-	26	-	14
Octobris	22.	156	-	138	-	5	-	18
Nouembris	25.	165	-	149	-	9	-	16
Decembris	22.	172	-	149	-	5	-	23

Ex comparatione harum obſeruationum igitur adparet maximum frigus hoc anno fuiſſe 192½, obſeruatum Februarii die 5 et 6 h. 8. a. m. monſtrante barometro 28 45, exiſtente nebula quadam, vento N g W leniter ſpirante. Nox ſequens fuit ſerena, vti quoque antecedens cum luce boreali. Calor maximus fuit 105, notatus Iulii die 6to, oſtendente barometro 27 90, coelo ex parte nubibus obducto, vento vix ſenſibili. Fuit igitur diminutio caloris a gradu 105 ad 192½ adeoque ſpatium variationum thermometricarum maximum

mum per totum annum 87½ graduum; ergo minus illo, quod in antecedentibus obſeruationibus eſt notatum, ſcilicet 96. Huc vsque igitur manet gradus 104 caloris maximus, et minimus, ſeu frigus maximum, 200. Caeterum quoque conſpicitur hiemem ſatis frigidam, aeſtatem autem minus calidam fuiſſe. Minima variatio caloris fuit menſe Septembri 14 graduum et maxima 44½ menſe Februario. Quum breuitati hic ſtudendum ſit, reliqua meteora praeterimus, quia nihil, quod praecipue notatu dignum ſit, in illis occurrit. Nihil igitur obſtat, quo minus ſtatim ad enarrandas obſeruationes anni ſequentis 1752. progredi queamus.

A. MDCCLII.

Barometri altitudines.

Ianuarii	29	28. 35	27. 00	Die 2 et 7	1. 35
Februarii	6	28. 73	27. 25	1	0. 88
Martii	23	28. 45	27. 00	10	1. 45
Maii	5 et 10	28. 40	27. 65	29	0. 90
Iunii	19	28. 20	27. 75	7	0. 45
Iulii	16 et 17	28. 22	27 70	4 et 5	0. 52
Auguſti	9 et 10	28. 40	27. 50	23	0. 90
Septembris		28. 63	27. 70	16	0. 93
Octobris	1	28. 60	26. 70	25	1. 90
Novembris	6	28. 47	27. 65	14,17.18	0. 82
Decembris	24	28. 82	26. 95	9	1. 87

Manifeſtum igitur eſt, ex hiſce obſeruationibus inter ſe comparatis, maximam barometri altitudinem fuiſſe 28. 82 notatam Decembris die 24 h. 6 p. m. coelo nubi-

nubibus tecto. Vento S O leniter flante, thermometro 161 monstrante Dies antecedentes fuerunt nubili, sequentes vero tres sereni, continuante eodem vento. Minima altitudo barometri obseruata est mense Octobri de 25. h. 2. p. m. quae est 26. 70 coelo nubilo et pluuio, thermometro $146\frac{1}{2}$ vento S O vehementissime flante. Die sequenti 26 aquae Neuae fluuii ripas excesserunt, vento N W vehementissimo, sequuti sunt deinde dies aliquot sereni. Ergo maxima variatio barometri per totum annum fuit 2. 12 adeoque $\frac{52}{100}$ maior, quam anno praecedentei, quo nempe fuit 1. 60. Spatium variationum barometricarum maximum 2. 69 in antecedentibus stabilitum, huius anni obseruationibus non mutari, per se patet, vti quoque clarum est, variationes menstruas et hoc anno primis et vltimis mensibus fuisse maiores, mediis autem minores. Variatio menstrua maxima hoc anno fuit mense Octobri 1. 90 et minima $\frac{52}{100}$ mense Iulio.

Variationem caloris huius anni MDCCLII monstrant sequentes obseruationes thermometricae.

Caloris diminutiones.

Mensis.	Dies.	Maxima.	Minima.		Differentia.
Ianuarii	13.	187	147	die 16 et 26	40
Februarii	17.	172	146	1	26
Martii	9.	162	133	26	29
Aprilis	1 et 9.	153	114	29 et 30	39
Maii	11.	147	122	28	25
Iunii	9 et 11.	$135\frac{1}{2}$	104	23	$31\frac{1}{2}$
Iulii	22 et 30.	128	$104\frac{1}{2}$	16	$23\frac{1}{2}$
Augusti	12.	135	107	4	28

Septembr. 19 et 21.	147	- 129	- 4	-	- - -	18
Octobris 27.	157	- 132	- 1	-	- - -	25
Nouembris 28	173½	- 142	- 1 et	5	- -	31¼
Decembris 26.	174	- 146	- 9	-	- - -	28.

Patet igitur ex his obferuationibus, calorem diminutum fuiffe ad 187. Hoc frigus maximum incidit in Ianuarii 13. Maximus calor fuit 104 obferuatus Iunii 23. Ergo fuit diminutio maxima a gradu 104 ad 187 per totum annum = 83. Quamuis igitur hic caloris gradus 104 fit aequalis maximo, qui Petropoli faepius iam eft obferuatus, tamen, quia frigoris gradus maximus huius anni minor eft maximo, alias iam hic obferuato fcil. 200; manet differentia et variatio caloris maxima = 96 inuariata. Maxima caloris menftrua variatio fuit 40, obferuata menfe Ianuario, minima autem 18, notata menfe Septembri, quae minor eft, quam faepius vno die obferuari folet. Progredimur ad annum 1753,

A. MDCCLIII.

Barometri altitudines.

Menfes	Dies.	Maxima.	Minima.	D.	Differentia
Ianuarii	26.	28. 98 -	28. 00.	22 - -	0. 98
Februarii	16.	28. 77 -	27. 37.	9 - -	1. 40
Martii	17 et 18.	28. 55 -	27. 48.	11 - -	1. 07
Aprilis	27.	28. 28 -	27. 52.	22 - -	0. 76
Maii	18. et 19.	28. 45 -	27. 75.	2 - -	0. 70
Iunii	17. et 18.	28. 35 -	27. 75.	9 - -	0. 60

Iulii

Iulii	16. et 17.	28. 05	— 27. 63.	2	— —	0. 42
Augusti	23.	28. 40	— 27. 87.	10	— —	1. 47
Septembris	27.	28. 58	— 27. 55.	14	— —	1. 03
Octobris	11.	28. 67	— 27. 35.	25	— —	1. 32
Nouembris	20.	28. 47	— 27. 45.	16	— —	1. 02
Decembris	17.	28. 50	— 27. 40.	20	— —	1. 10

Ergo maxima per integrum annum altitudo fuit 28. 98, minima 27. 35, variatio igitur annua 1. 63. Maxima barometri altitudo notata est Ianuarii 26 circa meridiem. Coelum erat nubilum, et ningebat quoque paullisper, vento O leniter flante, qui paullo post in *SO* mutatus est. Dies antecedentes et consequentes aliquot fuerunt nubili, thermometrum monstrabat gradum 159.

Minima altitudo obseruata est mensis octobris die 25 circa meridiem, coelo nubilo et pluente, Vento W. ostendente thermometro 147. Dies proxime antecedentes fuerunt nubili, sequentes vero duo sereni. Fuit igitur variatio maxima barometrica hoc anno 1. 63, adeo minor $\frac{49}{100}$ quam anno praecedenti, quo fuit 2. 12. Me non monente porro adparet, variationes altitudinum mercurii primis et vltimis mensibus et hoc anno fuisse maiores, minores vero in mediis. Minima variatio menstrua fuit $\frac{42}{100}$ et maxima 1. 47, illa Iulii, haec mense Augusto est obseruata. Ceterum a summa et infima altitudine huius anni, et variatione hac annua spatium variationum barometricarum non mutari, in antecedentibus obseruationibus deprehensum, nemo non videt.

 Progre-

Progredimur ad recenſendas variationes caloris huius anni thermometro indicatas.

Obſeruationes thermometricae A. MDCCLIII.

Menſes.	Dies.	Frigus max.		Calor max.	D.			Differentia.
Ianuarii	1.	177	-	150.	16	-	-	27
Februarii	7.	179	-	142.	22	-	-	37
Martii	26 et 27.	158½	-	136½.	19	-	-	22
Aprilis		152½	-	123½.	20	-	-	29
Maii	3.	124	-	111½.	9	-	-	32½
Iunii	3.	138-	-	107½.	22	-	-	30½
Iulii	3.	132½	-	111½.	10	-	-	21
Auguſti	23.	135½	-	116½.	4 et 9	-	-	19
Septemb.	16.	143	-	121½.	8	-	-	22½
Octobris	31.	159½	-	133.	6	-	-	26½
Nouemb.	21.	163	-	141.	17	-	-	22
Decembr.	18.	165	-	150.	3	-	-	15

Ex collatis hiſce obſeruationibus inter ſe pateſcit, maximum frigus totius anni fuiſſe 179, minimum, ſeu maximum calorem, 107½ adeoque differentiam annuam 71½. Contigit igitur diminutio caloris maxima menſis Februarii die 7. h. 8. a. m, coelo ſereno, Vento N 2. Dies antecedens fuit quoque ſerenus, ſequens autem nubilus et pluuius. Barometri altitudo fuit 28. 05, et circa meridiem 28. 13, dein altitudo haec minui coepit. Minima caloris diminutio, ſiue maximus calor, accidit menſe Iunio, die 22 circa meridiem, coelo ſereno, barometri altitudine exiſtente 28. 15. Dies ſequens ſerenus fuit, ſed cum vento vehementiſſimo N W.

Dies

Dies proxime antecedentes quoque fuerunt fereni. Comparata fumma et infima caloris diminutione confpicitur variationem caloris annuam fuiffe graduum $71\frac{1}{2}$ fcilicet ab $107\frac{1}{2}$ ad 179, adeoque $11\frac{1}{2}$ minorem, quam anno praecedenti. Minima caloris variatio menftrua fuit 15, menfe Decembri, quae admodum exigua eft notata, maxima $32\frac{1}{2}$ menfe Maio obferuata. Fuerunt igitur hoc anno variationes caloris et frigoris menftruae non admodum magnae, et, quum differentia, feu variatio thermometrica annua minor quoque fit differentia et variatione in antecedentibus obferuationibus notata, manet, vti fummus frigoris et caloris gradus idem; fic quoque eadem maxima variatio in antecedentibus obferuationibus deprehenfa. Huius anni hiemem fatis mitem, et aeftatem fatis temperatam fuiffe, ex hifce fatis quoque eft apertum.

A. MDCCLIV.

Quae fuerunt hoc annno 1754 variationes altitudinum mercurii in tubo Torricelliano, adeoque ponderis atmofphaerae hic Petroburgi, fequentes obferuationes oftendunt.

Altitudines barometri fummae et infimae per fingulos anni huius menfes cum differentiis.

Menfis	D.	Maxima.		Minima.	D.		Differentia
Ianuarii	30.	28. 38	-	27. 05.	8	- -	1. 33
Februarii	16.	28. 45	-	27. 07.	12	- -	1. 38
Martii	14.	28. 90	-	27. 20.	4	- -	1. 70
Aprilis	1.	28. 70	-	27. 70.	4	- -	1. 00

Maii	11. 28. 50	-	27. 55. 4	-	- 0. 95
Iunii	7. 28. 15	-	27. 68. 19	-	- 0. 47
Iulii	13. 28. 47	-	27. 65. 4	-	- 0. 82
Augusti	24. 28. 47	-	27. 48. 29	-	- 0. 99
Septembr.	15. 28. 45	-	27. 35. 24	-	- 1. 35
Octobris	8. 28. 40	-	27. 00.	-	- 1. 40
Nouembr.	29. 28. 47	-	27. 23. 25	-	- 1. 24
Decembr.	18. 28. 65.	-	27. 85. 22	-	- 0. 80

Secundum has obſeruationes ſumma mercurii altitudo per totum annum fuit 28. 90, notata menſe Martio die 14 h. 8. a. m. Thermometrum indicabat gradum 150, coelum ſereniſſimum erat, vti quoque dies antecedens, et aliquot ſequentes fuerunt ſereni. V. ONO mediocri. Minima altitudo fuit 27. 00 Octobris 14 h. 7. a. m. obſeruata, coelo nubilo et pluuio, V S. qui paullo poſt in W mutatus eſt. Thermometrum indicabat gradum 139. Dies antecedens et conſequens quoque nubili et pluuii fuerunt. Hinc pateſcit, maximam differentiam toto anno, ſeu variationem annuam mercurii altitudinum, fuiſſe 1. 90 adeoque $\frac{27}{100}$ maiorem, quam anno praecedenti. Quum ſumma huius anni altitudo non ſuperet illam, quae in antecedentibus obſeruationibus ſumma deprehenſa eſt; manet illa inuariata. Minima quoque huius anni altitudo minor eſt minima, iam in antecedentibus obſeruationibus indicata, hinc et illa minima adhuc manet. Idem valet quoque de ſpatio variationum barometricarum maximo, quod idem perſtat, quum hoc ſpatium variationis

nis annuae minus illo deprehendatur, Et hoc anno lex obtinet, variationes barometricas primis et vltimis anni menſibus, quam in mediis, eſſe maiores, licet variatio menſe Decembri ſatis ſit exigua. Maxima variatio menſtrua fuit 1. 70 menſe Martio, et minima $\frac{47}{100}$ menſe Iunio notata. Variationes caloris huius anni ex ſequentibus obſeruationibus thermometricis pateſcunt.

Summi gradus frigoris et caloris per ſingulos menſes A. MDCCLIV thermometro obſeruati.

Menſes.	D. Frig	maximum.		Calor max.	D.	Differentia
Ianuarii	16 et 21.	185	-	151.	11	- - 34
Februarii	7.	$177\frac{1}{2}$	-	144.	12	- - $33\frac{1}{2}$
Martii	5 et 7.	171	-	132.	30	- - 39
Aprilis	23.	148	-	123.	13	- - 25
Maii	5 et 10.	148	-	108.	21	- - 40
Iunii	4.	136	-	$111\frac{1}{2}$.	10	- - 25
Iulii	29.	$132\frac{1}{2}$	-	$105\frac{1}{2}$.	18	- - 27
Auguſti	28.	139	-	120.	5 et 24	- - 19
Septembris	15.	148	-	122.	1	- - 26
Octobris	30.	156	-	$133\frac{1}{2}$.	2	- - $22\frac{1}{2}$
Nouembris	22.	188	-	141.	4	- - $46\frac{1}{2}$
Decembris	25.	$185\frac{1}{2}$	-	148.	13	- - $37\frac{1}{2}$

Comparatis hiſce obſeruationibus inter ſe, apertum eſt, ſummum frigoris gradum hoc anno fuiſſe 188, qui, quum ſit minor illo ſummo, ſcilicet 200, qui iam in antecedentibus obſeruationibus eſt notatus, huc vſque ille ſummus manet. Euenit ſummus frigoris gradus huius

ius anni Nouembris 22 h. 7. a. m, altitudine barometri exiſtente 28. 13, coelo ſereno. Nox praecedens erat quoque ſerenisſima, ſequens autem nubila, et paullisper pluebat. Ventus fuit S g O, qui ſequenti die in SO mutatus eſt. Summus caloris gradus igitur fuit $105\frac{1}{2}$ Iulii 18 h. 3. p. m. obſeruatus, barometro monſtrante 28. 20, V. S. coelo ſereno a. m. ſed p. m. tempeſtas ingens orta eſt cum fulminibus et tonitru vehementiſſimo ac pluuia magna. Eluceſcit hinc variationem caloris annuam fuiſſe graduum $82\frac{1}{2}$ adeoque 11 gradibus maiorem, quam anno praecedenti. Quia hic ſummus caloris gradus minor eſt ſummo alias iam hic obſeruato, ille ſummus adhuc manet, et variatio quoque caloris maxima quoque eadem manet. Variatio caloris menſtrua maxima hoc anno fuit $46\frac{1}{8}$ graduum, notata menſe Nouembri, minima vero die 19 menſis Auguſti. Hic ſubſiſtendum in praeſenti eſt, quod ad communicationem obſeruationum meteorologicarum Petroburgenſium attinet: Priusquam autem finem faciamus, adiungendae ſunt obſeruationes Barometricae et Thermometricae Sinicae, itemque Magneticae, quarum mentionem ſub initium fecimus, et quas ſimul communicare promiſimus.

Accepit nempe Academia a R. P. Miſſionariis Gallicis Pekini verſantibus, obſeruationes quasdam, 1755, inter quas et Barometricae et Thermometricae occurrunt, quae Pekini ab iis factae ſunt, potiſſimum a R. P. Amiot Societatis Ieſu. Exiſtimaui, operae pretium eſſe, inſigniores extrahere, et cum noſtris comparare. Ad barometricas igitur quod attinet, maxima altitudo Pekini

Pekini ad annum vſque 1755 obſeruata, eſt 27 pollicum Pariſinorum et 4 linearum. Haec altitudo maxima non inſignis eſt, non enim attingit mediam Petropolitanam quae fuit 27. 71 ad annum 1750 vſque, et nunc 27 75, quum haec ſit tantum 27. 33$\frac{1}{3}$. Minima autem altitudo Pekini obſeruata, eſt 25 pollicum Pariſini pedis et 10 linearum. Haec altitudo minima, minor eſt minima Petroburgi adhuc notata, quum haec ſit 26. 41, Sinica autem 25. 83, adeoque 58 partibus centeſimis minor Petroburgenſi. Quum tota variatio ſit tantum 1. 50: facile conſpicitur, ſpatium quoque variationis minus eſſe Pekini, quam Petropoli, quod fuit antea ad 1750 2. 60, nunc autem 2. 69.

Thermometricae obſeruationes, quae complectuntur annum 1752, 1753 et 1754 ſunt factae ſecundum thermometrum Reaumurianum ſpiritu vini repletum. Caloris inſignioris 1752 initium notatum eſt Iulii 25, quo gradus caloris 26 ſupra punctum congelationis fuit, Iulii autem 26. 27. 28. 29. 30 et 31 ſpiritus vini adſcendit ſucceſſiue vsque ad 29 ſupra congelationis punctum.

Auguſti 1 erat 29$\frac{1}{2}$ ſupra punctum congelationis.
– – 2 – – 29$\frac{1}{2}$
– – 3 – – 30
– – 4 – – 30$\frac{1}{2}$
– – 5 – – 31. Inter 5^{tum} ad 10^{um} inter 27 et 29 ſubſtitit.

Die 10 rurſus erat 30$\frac{1}{2}$.

D. 11 descendit ad. $26\frac{1}{2}$. quem gradum non amplius hoc anno superauit.

1753.

Iulii 9 primus insignior caloris gradus est obseruatus scilicet $32\frac{1}{2}$ secundum eandem scalam Reaumurianam. Hic gradus maximus per totum annum fuit.

1754.

Hoc anno Iunii. 4to iam magnus calor esse coepit, dum spiritus vini ad 30 supra congelationem adscendit h. 3 et 4. p. m. Die 5 gradus caloris erat 31, qui maximus hoc anno mansit. Frigus summum adhuc Pekini obseruatum est 13 graduum infra punctum congelationis scalae Reaum. Insignores frigoris gradus sunt inter 10 et 13, annis scilicet communibus.

Quodsi in scala Reaumuriana punctum congelationis, quod cifra nullitatis nota indicat, ponatur = 150 nostri thermometri secundum scalam Delislianam, et 80 = 0 punctum caloris aquae bullientis: conspicitur summum frigus Pekini adhuc obseruatum, scilicet 13 infra congelationem, secundum scalam nostram efficere gradus $174\frac{3}{8}$, qui gradus frigoris non adeo magnus hic Petropoli est. Insigniores igitur frigoris gradus inter 168 et 174 variantur, decem enim gradus infra congelationem scalae Reaumurianae aequales sunt $168\frac{6}{8}$ Delislianis.

Comparatis inter se caloris gradibus, patet insigniores caloris gradus variari inter 26 et $32\frac{1}{2}$ supra punctum congelationis scalae Reaumurianae. Quum igitur

tur 26 gradus ſcalae Reaumurianae, ſint aequales $101\frac{1}{4}$, et $32\frac{1}{2}$ conueniant cum thermometri noſtri 89, intelligitur, variationem caloris inſignioris inter 101 et 89 ſubſiſtere. Quamuis haec comparatio ſcalae Reaumurii cum noſtra exacta eſſet, ſi vtraque thermometra mercurio eſſent repleta: tamen pro minus exacta eſt reputanda in thermometris ſpiritu vini repletis Reaumurii, quia exacte concordantia non ſunt, neque eſſe poſſunt, quum ſpiritus vini gradum caloris aquae bullientis recipere nequeat, quod alibi iam fuſius eſt monſtratum, neque ſpiritus vini eiusdem bonitatis facile reperiatur. Inter has obſeruationes Sinicas reperiuntur quoque magneticae, quae licet proprie ad meteorologicas non pertineant, tamen potiores locum hic commode reperiri poſſe exiſtimamus. Primum notatu digniſſimum occurrit, quod declinatio magnetis a triginta et amplius inde annis conſtans reperiatur. Declinat enim 2 gradibus a borea occidentem verſus. Notatu dignior adhuc eſſet obſeruatio ad inclinationem magnetis ſpectans, ſi pro vera haberi poſſet, ſcilicet, quod inclinatio cuſpidis auſtralis, non boreae, vt ſolet, Pekini fieret; quia autem Reuer. Auctor hanc obſeruationem, licet ſaepius repetitam, ipſe dubiam declarauit, quia obſeruationem aliam huic contrariam alia acu magnetica conſpexit, vbi ſcilicet cuſpis auſtralis more ſolito ſupra horizontem attollebatur; certiora ſunt expectanda, quae dare promiſit **. Declinatio acus magneticae hic Petropoli quoque non admodum inconſtans videtur.

Ddd 2 Nam

** Seruauit promiſſum R. P. in litteris ad Academiam 1757 rurſus datis. Ex experimentis vna eademque acu magnetica factis conclu-

Nam quotiescunque declinationem acus magneticae hic Petroburgi obſeruauimus; deprehendimus ſemper cuspidem boream inter gradum quartum, et quartum et dimidium, occidentem verſus ſubſtitiſſe. Declinatio vero 4 graduum occidentem verſus hic eſt obſeruata iam a multis inde annis, aut vti Krafftius eam praeciſe a. 1741 determinare conatus eſt 3° 56′ 1″. V. Commentariorum veterum Tom. XIII. p. 381. Notandum tamen eſt, hanc declinationem ſaepius tempore non adeo diuerſo non ſatis regularem eſſe deprehenſam, licet eadem inſtrumenta fuerint adhibita, in quibus vitium nullum detegi potuit, neque circumſtantiae temporis admodum diuerſae fuerint. Maximam irregularitatem autem monſtrant obſeruationes magneticae in Sibiria factae. Differentia inſignis ſaepius inter obſeruationes declinationis magneticae in eodem loco, diuerſo non adeo tempore, factas, deprehenſa eſt, vti vel ſequentes potiores demonſtrare poſſunt. A. 1735. Ianuarii 24 et 27 declinatio deprehenſa eſt Krasnoiarii 2° occidentem verſus. Die autem 31 erat 1°, et Februarii 10, 1° 45′, Februarii 17, 1° 30′. Eodem anno Martii 21 et 22 Ircuti erat declinatio 1° 15′. Octobris autem 28, 1° 30′, die 31, 30′; Nouembris

4, 1°

dit, diuerſam hanc inclinationem pendere a diuerſo modo acum virtute magnetica imbuendi, ita vt inclinatio fiat auſtralis, ſi polo magnetis boreali vis magnetica in acu excitetur, ita vt initium ductus fiat in extremo, quod meridiem verſus ſe conuertere debeat, borealis autem, ſi contraria ratione fiat polo auſtrali excitatio magnetica. Quum Auctor adfirmet multis experimentis repetitis ſe hanc legem deprehendiſſe, ſupereſt vt inquiratur, vtrum ſit vniuerſalis vbique locorum.

4, 1° 30'; die 19, 1° 45' occidentalis ſemper. Selengiae declinatio Aprilis 3 nulla vel vix ſenſibilis, ſed Aprilis 15 erat 30' et Maii 21 et 22, 2° 45' occidentem verſus.

In oppido Kiachtenſi declinatio erat Aprilis 30, 3° Maii 4. 2° 45' occidentem verſus.

In munimento Ierawnienſi Iunii 1 et 2 declinatio eſt notata 4° occidentalis.

In vrbe Nertſchinsk a 17 ad 28 Iunii ſemper eadem 3° occidentem verſus erat declinatio.

In officinis Argunenſibus intra 14 et 24 Iunii declinatio magnetis ſemper erat 3° occid.

In oppido Zuruchaitu Iulii 30 et 31 declinatio magnetis 3° 15' occidentem verſus eſt deprehenſa.

In oppido Vdinsk inter 24 Aug et 10 Sept. declinatio magnetis perpetuo erat 3° 15' occ. Haec differentia notabilis declinationis magnetis in eodem loco, tempore parum diuerſo notata, non ſolum a Gmelino, ſed etiam a La Croyerio Ircuti eſt deprehenſa, licet ſumma cura vbique fuerit adhibita. Maiorem adhuc irregularitatem monſtrant obſeruationes pro inclinatione magnetis in diuerſis Sibiriae locis captae, vti quoque ſequentes oſtendere poſſunt omni cura et diligentia actae.

In vrbe Krasnoiarsk 1735. Ianuarii 27. h. 12. m. erat inclinatio primum ſecundum meridianum magneticum 30° 15' ſecundum plagas veras N. 30° S. 43°. O. 35° W 35°, Barometro 28. 25, Thermometro 197, Vento 00, coelo ſereno.

Februarii 1. h. 12. m. fecundum merid. magneticum 28° 15'; fecundum plagas veras Septemtriones 29°, Meridiem 14°, Orientem 33° 30', Occidentem 34°, Barometro 28, 06, Thermometro 190, Vento SO, coelo fereno.

Februarii 10. h. 12. m. fec. Mer. magn. 29° N 28°. 45°; S 41°; O 33° 30'; W 34° Barometro 27. 28, Thermometro 171, Vento O S O 1; coelo tenuibus nubibus obducto.

Februarii 17. h. 9. a. m. Mer. magn. 29° N. 28° 45' S 41°. 30'; O 34° W 34°; Barometro 27. 20; Thermometro 161; Vento S W g S. 2; niue pauca cadente.

In vrbe Irkutzk Martii 22. h. 8. a. m. Merid. magn. 27°; N 27°; S 40°; O 32°; W 31° 15'; Vento S W 1; fole per nubes tenues lucente.

In vrbe Selenginsk Aprilis 3. h. 6. p. m. Mer. magn. 21° 45'; N 21° 45'; S 35°; O 27°; W 27°; Barometro 26. 18; Thermometro 135; Vento N 1; coelo fere fereno.

Aprilis 15. h. 6. p. m. Mer. magn. 21° 45'; N 21° 45', S 35°, O 27°, W 27°, Barometro 26. 25, Thermometro 130, Vento N 1, coelo nubilo.

Maii 22. h. 4. p. m. Mer. magn. 21° 30' N 21°; S. 34° 45'; O 27° 30', W 26°; Barometro 26 15, Thermometro 104, Vento N N O 3, coelo occidentem verfus fpiffis nubibus obducto.

In oppido Kiachta Aprilis 30 h. 12. m. Mer. magn. 21° 30'; N 20° 45'; S 35° 30'; O 27° 30'; W 26°; Barometro 25. 38, Thermometro 137, Vento SSO 1 coelo nubilo.

Maii

Maii 4. h. 12. m. Mer. magn 20°, N 20° 30', S 34°, O 26° 25', W 26°, Barometro 25. 52, Thermometro 135, Vento N N W 2, coelo nubibus variegato.

In munimento Ierawnienfi Iunii 1. h. 5. p. m. Mer. magn. 27°, N 26° 30', S 40° 15', O 32° 33', W 32° 39', Thermometro 125, Vento oo, coelo fereno.

In vrbe Nertfchinsk Iunii 24. h. 6. p. m. Mer. magn. 22°, N 22° 30', S 35°, O 27°, W 25°, Barometro 26. 30, Thermometro 114, Ventus inconftans, coelo fereno.

Iunii 28. h. 3. p. m. Mer. magn. 26° 15', N 26° 30', S 40° 45', O 31° 45', W 31° 30'.

Quamuis in his obferuationibus pro inclinatione magnetis captis nihil omiffum fit, quod ad accurationem earum pertinere Auctor Gmelinus exiftimauit; fufpectae tamen ipfi vifae funt, quoniam in eodem loco faepius tantopere diffident. In inftrumento vitium nullum ab eo detegi potuit. Cum igitur haec irregularitas vitiofis obferuationibus tribuenda vix videatur, eritne adfcribenda, vel territorii conftitutioni, particulis ferreis impraegnatae, vel etiam qualitati atmofphaerae, vel ipfi motui fluidi magnetici? quod quidem disquiri hic et nunc non poteft.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE, FACTAE TVBINGAE, ANNIS 1750 ET 1751.

Auctore

GEO. WOLFFG. KRAFFT.

§. 1.

Barometro, atque Thermometro, in situ aptissimo, vti superius indicaui, pendentibus, menstruae altitudines maximae et minimae Barometri sunt sequentes, quas cum differentiis suis hic appono, intelligendo pedis Londinensis pollices duodecimales, eorumque partes centesimas.

Anno.	Mense	max.	min.	diff.
1750.	Ian.	- - 29. 28	- - 28. 62	- - 0. 66
	Febr.	- - 29. 05	- - 28. 19	- - 0. 86
	Mart	- - 29. 22	- - 28. 39	- - 0. 83
	Apr.	- - 28. 86	- - 28. 10	- - 0. 76
	Mai.	- - 28. 84	- - 28. 09	- - 0. 75
	Iun.	- - 28. 93	- - 28. 20	- - 0. 73
	Iul.	- - 28. 88	- - 28. 41	- - 0. 47
	Aug.	- - 28. 88	- - 28. 21	- - 0. 67
	Sept.	- - 28. 98	- - 28. 30	- - 0. 68
	Oct.	- - 29 03	- - 28. 15	- - 0. 88
	Nou.	- - 29. 00	- - 27. 78	- - 1. 22
	Dec.	- - 29. 09	- - 28. 07	- - 1. 02

1751.

1751.	Ian.	29. 03	28. 08	0. 95
	Febr.	29. 10	27. 98	1. 12
	Mart.	28. 85	27. 90	0. 95
	Apr.	28. 97	28. 00	0. 97
	Maio	28. 89	28. 20	0. 69
	Iun.	28. 98	28. 32	0. 66
	Iul.	28. 79	28. 26	0. 53
	Aug.	28. 89	28. 40	0. 49
	Sept.	28. 90	28. 40	0. 50
	Oct.	29. 03	28. 25	0. 78
	Nou.	29. 13	27. 80	1. 33
	Dec.	28. 90	28. 35	0. 55

Ex quibus apparet, manere adhuc maximam altitudinum hic loci obſeruatarum 29. 36, quae anno 1746 obſeruata fuit; et minimam earundem 27. 64, viſam anno 1749; eandemque differentiam maximam 1. 72, adeoque mediam Barometri altitudinem 28. 50, nulla habita inſtrumenti ſupra Nicri fluuii libellam elevati ratione, quae proxime 60 pedes Londinenſes explet.

§. 2. Ex obſeruationibus Thermometri *Farenheitiani* ſequentem exhibeo Tabellam, quae cuiuscunque menſis oſtendit gradum caloris maximum et minimum, cum differentia vtriusque.

Anno	Menſe	max.	min.	diff.
1750.	Ianuar.	39	18	21
	Febr.	58	12	46
	Mart.	62	27	35
	Apr.	65	32	33
	Maio.	66	38	28
	Iun.	78	52	26
	Iul.	83	55	28
	Aug.	79	51	28
	Sept.	74	48	26
	Oct.	65	28	37
	Nou.	46	16	30
	Dec.	48	11	37
1751.	Ian.	38	22	16
	Febr.	41	8	33
	Mart.	62	27	35
	Apr.	59	32	27
	Maio	65	42	23
	Iun.	78	49	27
	Iul.	81	55	39
	Aug.	86	50	31
	Sept.	69	45	24
	Oct.	69	30	39
	Nou.	49	17	32
	Dec.	47	18	29

Vnde apparet, maximum per hos annos caloris gradum fuiſſe 86, qui incidit d. 26 Iulii 1751, in ſerenitate fere perfecta, flante tenui W. Haud vero multo

multo minor calor fuit anno 1750, nempe 83 graduum, qui obſeruatus eſt ſummus illius anni d. 24 Iulii, coelo ſubnubilo, et ſpirante N O, cum inſequentibus veſperi tonitribus, crebrisque fulgurationibus. Triduo poſt, nempe Iulii 27, Goettingae maximus calor illius anni obſeruatus fuit, graduum autem $95\frac{1}{2}$, dimidio tantum adhuc gradu a calore hominis ſani interno differentium. Maximum autem frigus erat 8 grad. quod ſenſimus mane 1751, Febr. 13, flante O tenuiſſimo, in ſerenitate perfecta. Manet igitur adhucdum annus ſuperior 1746 calidiſſimus omnium, graduum ſcilicet 94; frigidiſſimus autem 1745, graduum quippe 13 infra O.

§. 3. De auroris borealibus annotaui ſequentia:

1750, Februarii 3, ab hora ſexta veſpertina fere ad mediam vſque noctem viſa hic fuit lux borea, primo inſigni rubedine, tum vero magna claritate conſpicua, flante tenui O, in ſerenitate aliquot dierum, et frigore ſatis intenſo, ad gradus 12 adhuc ſupra o. Eadem apparuit quoque Hannouerae, et Neapoli, vti ex nouis publicis intellexi.

Maii 1, aderat horis 8 et 9, p. m. lux borealis, lumine, et copioſis virgis, coruſcans in ſerenitate perfecta, ſpirante leni O.

Auguſti 26, hora 10 p. m. in ſerenitate iterum integra, flante leni W, conſpiciebatur lux borealis manifeſta.

Nouembris 9, hora 10 p. m. inter nubes paullo diuiſas, flante forti W, ſuſpicio mihi erat talis lucis.

Decembris 31, circa mediam noctem, inter nubes, flante tenui N, conſpiciebantur radii lucis borealis, aut fulgura, ex relatione aliorum.

1751, Maii 30, inter nubes paullo diuiſas conſpexi lucem borealem magnam, circa horam 11 p. m.

Septembris 3, poſt fortem pluuiam, in aliqua ſerenitate, hora $7\frac{1}{2}$ p. m. aderat lux borealis manifeſta.

Septembris 19, hora 9 p. m. iterum viſa fuit lux borea, diſtincta virgis et lumine inſigni.

Nouembris 30, in ſerenitate fere integra, hora 10 p. m. dubia mihi videbatur talis lux, lucente Luna.

§. 4. Reliquae in vicinia noſtra obſeruatae aurorae boreales a *Clariſſ. Dom. Biſchoffio*, cuius tam induſtria, et attentio ad varia naturae phaenomena, omnem laudem merentur, quam etiam loci, in quo habitat, opportunitas ad haec ipſi fuet, prouti in *Obſeruat. Meteorolog annorum* 1747, *ſequentt.* §. 5. dictum eſt, huc redeunt.

1750, Februarii 3, hora 7 p. m. aurora borealis, totam plagam borealem occupans; plaga NO et NW egregie rubra, in plaga N vero vehementer albicans, ſub variis formis et coloribus ad mediam noctem vſque a me obſeruata, ſed tum nondum finita.

Idem Obſeruator ſedulus, poſtea etiam ſequentes has adhuc annotauit luces boreales. Et quidem 1750, Martii 4; Maii 1; Decembris 28, hora 5 p. m. ſub coelo ſereno, quam extantiorem vocat. Anno 1751 autem Februarii 11, hora 7 p. m. egregie rubram; Octobris 23 debilem.

§. 5. Lumen Zodiacale obſeruatum fuit Anno 1750, Martii 8, hora 6 p. m. eiusdem 26, 28, et 31, eadem circiter hora, coelo ſemper ſereno. Aprilis 2, et 24, in iisdem circumſtantiis. Anno 1751, Aprilis 20, hora 8 p. m.

§. 6. Declinationem acus magneticae, 6 pollices longae, et meridianae lineae nunc conſtanter appoſitae, his annis inueni fuiſſe 14° 30′, Occidentem verſus; eandemque aliquoties iterum modo maiorem, modo minorem, aliquot minutis deprehendi poſt graues tempeſtates, et grandines.

§. 7. In Eclipſi Solis, quae contigit 1750. d. 8 Ianuarii, mihi tantum licuit obſeruare finem, hora 10 min. 52, temporis medii.

§. 8. Reliqua huc ſpectantia comprehendam ſequentibus.

Primo, 1750, Aprilis 11, mane circa horam 1, terrae motus hic exortus eſt, ſed momentaneus et leuis.

Secundo, tonitrua audita fuerunt Anno 1750, Aprilis 23, 26; Maii 4, 24, 29, et 30; Iunii 7, 12; Iulii 5, 17, 24, 28, 31; Auguſti 13, 14, 21, 27, 28; Septembris 2, 4, 14, 15; Anno 1751 autem Maii 1, 6; Iunii 27; Iulii 4, 15, 18, 21; Auguſti 15, 25, 28, Septembris 17; Octobris 7.

Tertio, Grandines ceciderunt Anno 1750, Aprilis 7, 8 et 9, tenues; Iunii 12. Anno 1751, Maii 17, Auguſti 25, quae horrida fuit, deiiciens copioſos globos, qui oui columbini magnitudinem habebant; denique Decembris 27.

OB-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE, FACTAE TVBINGAE ANNO 1752,

A GEORG. WOLFFG. KRAFFT.

§. 1.

Instrumentis rurſus in ſitu aptiſſimo ſeruatis, vti antea indicaui, menſtruae altitudines maximae et minimae barometricae ſunt ſequentes, quas cum differentiis ſuis hic appono, intelligendo pedis Londinenſis pollices duodecimales, eorundemque partes centeſimas.

Menſis	max.	min.	diff.	Menſ.	max.	min.	diff.
Ianuar.	29. 05	27. 80	1. 25	Iul.	28. 82	28. 43	0. 39
Febr.	28. 86	28. 01	0. 85	Aug.	28. 93	28. 35	0. 58
Mart.	29. 13	27. 81	1. 32	Sept.	29. 03	28. 50	0. 53
Apr.	28. 92	28. 14	0. 78	Oct.	29. 23	28. 70	0. 53
Maius	28. 80	28. 23	0. 57	Nou.	29. 18	28. 40	0. 78
Iun.	28. 95	28. 32	0. 63	Dec.	29. 09	27. 80	1. 29

Ex quibus apparet, manere adhucdum maximam altitudinum hic loci obſeruatarum 29, 36, quae anno 1746 obſeruata fuit; et minimam earundem 27. 64, viſam anno 1749; eandemque differentiam maximam 1. 72; adeoque mediam Barometri altitudinem 28. 50, nulla habita ratione inſtrumenti ſupra Nicri fluuii libellam eleuati, quae proxime 60 pedes Londinenſes explet, adeoque $\frac{8}{100}$ pollicis Lond. duodecimalis efficit, ſingulis

gulis altitudinibus Barometri addendas, ſi hae deſiderentur a ripa dicti fluuii.

§. 2. Obſeruationes Therometri *Fahrenheitiani*, in aëre libero, ſed vmbroſo, ſemper conſtituti, ſequentem praebent tabellam, quae cuiusque menſis oſtendit gradum caloris maximum, et minimum, cum differentia vtriusque.

Menſis	max.	min.	diff.	Menſis	max.	min.	diff.
Ian.	47	14	33.	Iul.	72	57	15.
Febr.	44	28	16.	Aug.	72	53	19.
Mart.	53	26	27.	Sept.	78	47	31.
Apr.	60	30	30.	Oct.	61	30	31.
Mai	67	46	21.	Nou.	50	24	26.
Iun.	81	56	25.	Dec.	52	13	39.

Vnde apparet maximum per hunc annum caloris gradum fuiſſe 81, qui incidit die 30 Iunii, flante forti Auſtro, poſt magnam varietatem ventorum, turbines etiam, coelo paucis nubeculis occupato, et ſubſequentibus veſperi leuibus fulgurationibus. Maximum vero huius anni frigus eſt 13 graduum, quod ſenſimus mane Decembris die 4, flante Zephyro tenui in ſerenitate perfecta. Medius igitur totius huius anni caloris gradus eſt 47, adeoque vno gradu infra temperiem moderatam, quae ſtatuitur 48 grad.

§. 3. Auroras boreales hoc anno ſequentes obſeruaui.

Februarii 26 et 29, inter nubes tenues ſuſpicio mihi orta eſt de tali luce, incerta tamen.

Mar-

Martii 36, inter nubes diuiſas, poſt grandinem et vehementem pluuiam, conſpicua erat aurora borealis manifeſta, copioſis ſtriis et radiis.

Maii 13, aderat lux borealis iterum manifeſta, in ſerenitate fere integra, inter ſplendidas fixas boreales conſpicua.

Iulii 16, inter fiſſuras nubium lux borealis mihi viſa fuit, albis, et mutatis ſubinde, virgis, manifeſta.

Iulii 21, in itinere *Stuttgardiae* verſatus, vidi auroram borealem multis, latis, albisque ſtriis eminentem, circa horam 9 p. m.

Iulii 31, lux borealis magna, inter nubes tenues.

Auguſti 1 et 2, in aliqua ſerenitate, poſt pluuias fortes, eandem debiliorem obſeruaui.

Auguſti 23, ſuſpicio mihi talis lucis enata eſt, ex aliquibus phaenomenis.

Nouembris 17, flante forti Euro, aderant veſtigia lucis borealis.

Decembris 14, flante fortiſſimo Zephyro per aliquot dies, hora 6 veſpert. manifeſta aderat lux borealis inter nubes continuas varia et inconſtanti albedine ſe prodens.

Quibus accedunt ſequentes adhuc, ab Amicis mecum communicatae, in vicinia noſtra; nempe

Ianuarii 18, cum lumine Zodiacali manifeſta aurora borealis, coelo ſereno, hora 6 p. m. obſeruata a *Plurim. Reuerendo Dom. Biſchoffio*, in ſuperioribus annis iam laudato.

Maii 6, coelo iterum ſereno.

Maii 17, inſignis, aurora borealis viſa eſt *Stuttgardiae*, a *Clariſſ. Dom. Profeſſore Volzio*, hora 10 p. m.

Auguſti 4, ab vtroque Amico mihi indicata.

Octobris 13, magna lux borealis ſpectata eſt *Stuttgardiae*, teſte *Clariſſ. Volzio*.

§. 4. Declinationum acus magneticae, 6 poll. longae, et lineae meridianae conſtanter appoſitae, maximam inueni hoc anno, occidentem verſus, 14° 45′, minimam autem 14° 30′, vnde in tanta earundem inconſtantia, quae hoc quoque anno poſt grauiores tempeſtates aliquoties, ſe ſpectandam praebuit, media aſſumenda erit 14° 37′.

§. 5. Vtilitates et vſus harum obſeruationum meteorologicarum comprehendere non poſſumus, niſi ex longa annorum ſerie; quod illis naturae indagatoribus percenſendum trado, qui tales quotidianas et oneroſas

colle-

collectiones vilipendere videntur. Ex octennio enim, in quo operam hanc in me fuscepi hic loci, duos ad minimum nactus fum fructus, quibus etiam non fine iucunditate fruor, atque alios quoque lubentiffime in partes huius laetitiae trahere cupio. *Primo* enim fcio per meam experientiam, quam pofteris aliquantum emendandam relicturus ero, mediam Barometri altitudinem effe *Tubingae* 28. 50; (§. 1). Sciunt autem Phyfici ex hac eruere loci eleuationem fupra oceanum proximum. Vti ergo ex ftellis difco loci mei fitum *Geographicum*; ita ex Barometri indefeffa infpectione acquiro tandem eiusdem fitum *Phyficum*; qui, quoufque in pofterum deducat, ad telluris figuram particularem, ad atmofphaerae naturam, ad plures alias veritates, cognofcendas, apertum quidem iam non eft, fed nec omnino occultum. Abfit igitur, vt fpem etiam veri alicuius eruendi deferamus.

§. 6. *Secundo*, ex eodem hoc octennio, propria experientia edoctus, fcio etiam, quem a quolibet menfe totius anni calorem mihi tam, quam plantis educandis, aliisque rebus oeconomicis, promittere poffim. Ita in hoc octennio expertus fum, calorem medium, ex Thermometro *Fahrenheitiano* aeftimatum, effe omnium

Ianuariorum - -	28. Grad.	Iuliorum - - -	68. Grad.
Februariorum -	31.	Augustorum - -	65.
Martiorum - -	36.	Septembrium -	61.
Aprilium - - -	48.	Octobrium - -	47.
Maiorum - -	58.	Nouembrium -	35.
Iuniorum - - -	66.	Decembrium -	33.

adeoque mensem Ianuarium esse ordinarie omnium frigidissimum, Iulium vero calidissimum; ex quibus medius calor totius anni *Tubingae* existit 48 graduum, quem eundem *Petropoli* diuturna obseruatione deprehendi esse 43 graduum; vnde differentia Climatum, caloris respectu, quae in Geographia Physica non exigui momenti est, cognoscitur. Dicant mihi similia, qui in aliis locis degunt, magnopere me delectaturi; faciant idem, qui sperunt hoc hocusque, multum sese emendaturi; immo imitentur haec, quicunque sapiunt, magno suo emolumento in praesenti, et maiori adhuc in posterum, expectando.

§. 7. Reliqua his adhuc accensenda sequentibus complectar. *Primo*, tonitrua audita fuerunt Maii 2, 18. Iunii 6, 7, 8, 11, 17, 30. Iulii 8, 10, 11, 13, 14, 25, 26. Augusti 15, 27. Septembris 6, 14.

Secundo, grando cecidit

Mar-

Martii 16 ſub gradu 40. Therm.	Iunii 7, ſub gradu 65 Therm. nucis auellanae magnitudine, cum graui tempeſtate, vna die poſt ☍ ♄ ♃.
— 26 — — 42.	Iulii 25, in magno calore aëris, cum tempeſtate graui.
Aprilis 5 — — 41.	Decembr. 15 — — 46.
Maii 11 — — 49.	
Iunii 6 — — 70.	

aliquot earum cum procella vehementi, plures autem nullo, aut remiſſiori, vento.

Tertio, Halonem Lunarem magnum et diſtinctum vidimus Aprilis die 21, hora $8\frac{1}{2}$ p. m. in ſerenitate, a centro Lunae vltra cor Leonis extenſum, ex altera parte Procyone exacte terminatum, et per trihorium durantem, quem integra fere ſerenitas aliquot dierum inſequebatur.

Quarto, primas hirundines copioſas vidi Aprilis 12, indicante Thermometro gradus 44. Ranae primum coaxare ceperunt Maii 8, oſtendente Thermometro 53 gradus.

Quinto, Februarii 26, et 27, horarum duodecim ſpatio, Barometrum decidit ex 28. 60 ad 28, 36, ſine vllo vento ſenſibili. Martii autem diebus 24, 25, et 26, ex 28. 61 depressius factum est ad 27. 81, vento Zephyro per integrum quatriduum summe furente, cui grando successit, et aurora borealis.

Sexto, Nebulas insignes experti sumus Ianuarii 18. 23 et 24, continuam, 27, 30, 31. Febr. 1, 4, 7, 9, 10, 11, 24, 28. Martii 6, 15. Iulii 8, 11. Aug. 19, 20, 21, 30, 31. Sept. 1, 4, 8, 16, 18, 27, Octobr. 5, 9, 10, 11, 12, 15, 20, 22, 26, 27. Nouembris per 21, 22 et 23 continuam, per 26, 27, 28 et 29 continuam. Decembris 20.

ASTRONOMICA.

INVE-

SOLVTIO NOVI CVIVSDAM PROBLEMATIS ASTRONOMICI IN VSVM PRAECIPVE NAVTICVM PROPOSITI IN DISSERTATIONE DE PROGRESSV ARTIS NAVTICAE IN DETERMINANDA MARIS ET LONGITVDINE ET LATITVDINE.

Auctore

A. N. GRISCHOW.

Plurimum cum laborauerint in rebus nauticis intelligentes ad inuenienda organa, quorum adminiculo obseruationes astronomicae super mari ad inuestigandam longitudinem aeque ac latitudinem spectantes accurate tuteque institui possent, haud minus dignum atque vtile mihi visum est studium praestantiores excogitandi methodos tempus in alto mari obseruandi accuratissime. Neminem quidem latet, varios iam esse nautis inuestigandi temporis modos, quantis autem quotque errorum fontibus vulgares vsuque receptae scaturiant methodi, nemo equidem, nisi hisce in rebus probe versatus experientiaque edoctus, perspectum habet.

Praecipui autem errores, quibus methodi tempus super mari determinandi scatent, ex vitiose laboratis instrumentis nauticis, circa primum praesertim diuisionis punctum, et ex fallaci Horizonte, originem ducunt. Tempus enim ex altitunibus Solis vel Stellarum refpondentibus, fiue aequalibus, determinare, primum in aperto mari meo quidem iudicio eft difficillimum, faepiffimeque propter coeli varietatem caffus labor; deinde vero negotium complurium fane horarum, quarum fpatio nauis ad ancoras confiftat, neceffe eft, ne temporis computatio nimis implicata vagaque reddatur. Sin autem, vt nonnullis proponere confultum vifum eft, Meridiei determinatio ex altitudinibus Solis aequalibus paulo ante et poft culminationem Solis obferuatis petenda fuerit, Meridiei hac ratione conclufo minime eft fidendum.

Hifce rationum momentis inductus in methodum obferuandi temporis incidi, cuius beneficio, cum differentia tantum altitudinum binarum ftellarum, neutiquam vero altitudines earum abfolutae obferuatae requirantur, errores inftrumenti et Horizontis maiori ex parte vitare, et obferuationes ad tempus determinandum fpectantes aliquot tantum minut. prim. fpatio peragere licet; ita quidem vt nullam conturbationem obferuationibus afferre poffit fiue refractionum inconftantia atque diuerfitas, fiue Horizontis fenfibilis inclinatio. Modus hic eo praeterea gaudet commodo, vt errores in ipfa altitudinum differentia admiffi, fiue diuifioni inftrumenti, fiue obferuatori adfcribendi, nullam notabilem in tempore exinde fupputando producere valeant a vero aberrationem.

Accedit ad haec, vt nauclerus calculis aftronomicis imbutus, vfuque inftrumentorum et methodi huiusce nouae exercitatus, facili negotio, pofito breui calculo, ita

eli-

eligere ſciat ſtellas, atque ita arripere intelligat temporis momenta, vt intra complura min. prim. dubia eleuatio Poli nullum aut exiguum valde errorem afferre poſſit tempori ex obſeruationibus et eleuatione Poli data ſimul colligendo.

Methodi autem noſtrae vſus atque conditiones, vt penitius atque clarius ipſisque nautis doctrina calculi aliquatenus inſtructis intelligerentur, ſequens ſubiunxi exemplum ipſius calculi breuiſſime inſtituendi rationem exhibens.

Problema.

Obſeruatis binarum fixarum, quarum altera Ortum verſus, altera ad Occaſum a Meridiano remota, altitudinibus fere aequalibus: datisque tempore inter obſeruationes praeterlapſo, differentia altitudinum fixarum obſeruatarum, vna cum earundem Declinationibus ac differentia Aſcenſionum rectarum, nec non eleuatione Poli; determinare tempus a culminatione et altitudines fixarum abſolutas.

Solutio exemplo illuſtrata.

Sit HZPR. Meridianus, in quo Z. Zenith, et P. Polus Aequatoris. Obſeruata ſit ſub eleuatione Poli 50° 0′ et longitudine 180 circiter grad. altitudo Arcturi a Meridiano Ortum verſus in *s* verſantis d. 30. Mart. ſt. n. An. 1750. $9^h.55'.0''$ temp. Horol. $= 27°.27'$, eodemque die $9^h.56'.30''$ temp. Horol. altitudo ſtellae Aldebaran ſiue Palilicii a Meridiano Occidentem verſus in S remotae $= 22°.27'$, ita vt altitudinum differentia Tab XII. Fig. A.

 obſer-

obſeruata ſit $=5^\circ.0'$, quae refractionum differentia correcta mutatur in veram $=5^\circ.0'.30''$. Ex Catalogo fixarum deſumitur pro tempore ſupra notato Declinatio Arcturi $=20^\circ.30'$ bor. eiusdemque Aſcenſio recta $=211^\circ.4'$. Declinatio itidem Palilicii pro eodem tempore $=15^\circ.59'$. bor. eiusdemque Aſcenſio recta $=65^\circ.24'$. Differentia itaque Aſcenſionum rectarum Arcturi et Aldebaran erit $=145^\circ.40'$, et tempus inter obſeruationes praeterlapſum in partes Aequatoris conuerſum $=22'.33''$, hinc angulus ad Polum $SPs=146^\circ.2'.33''$.

Ponatur iam angulus horarius $ZPs=\alpha$; ang. horar. $ZPS=\beta$; altitudo Aequatoris $ZP=c$; complementum Declinationis Arcturi $sP=b$; complementum Declinationis Palilicii $SP=a$; diſtantia Arcturi a Zenith $Zs=y$ et diſtantia Aldebaran a Zenith $ZS=y+\delta$, ita vt δ differentiam altitudinum fixarum veram, ſiue obſeruatam, et refractionum differentia correctam denotet. Quocirca habebimus poſito radio $=1$,

$$\text{coſ.}\,\alpha=\frac{\text{coſ.}\,y-\text{coſ.}\,c.\,\text{coſ.}\,b}{\text{ſin.}\,c.\,\text{ſin.}\,b}\quad\text{et}$$

$$\text{coſ.}\,\beta=\frac{\text{coſ.}\,(y+\delta)-\text{coſ.}\,c\,\text{coſ.}\,a}{\text{ſin.}\,c.\,\text{ſin.}\,a}$$

Solutio itaque Problematis eo redit, vt determinetur valor ipſius y ita comparatus, vt $\alpha+\beta=$ ang. ad Polum SPs. Hoc vero vt commodiſſime fiat, ponamus altitudinem veram Arcturi, dum infra accuratiſſime definiatur, $=27^\circ.27'$, quo facto, ad formulas ſupra traditas reſoluendas ſequentes iam habemus literarum valores:

lores: $y = 62^\circ.\,33'$; $\delta = 5^\circ.\,0'.\,30''$; $y + \delta = 67^\circ.\,33'30''$; $a = 74^\circ.\,1'$; $b = 69^\circ.\,30'$; $c = 40^\circ.\,0'$ et $\alpha + \beta = 146^\circ.\,2'.\,33''$, adeoque

$l.\cos.c = 9.8842540$	$9.8842540 = l.\cos c$
$l.\cos.b = 9.5443253$	$9.4398973 = l.\cos a$
$l.\cos.c.\cos.b = 9.4285793$	$9.3241513 = l.\cos.c.\cos.a$
$\cos.c.\cos.b = 0.26827443$	$0.21093629 = \cos.c\ \cos.a$
$\cos.y = 0.46097432$	$0.38174262 = \cos.(y+\delta)$
$\cos.y - \cos c.\cos.b = 0.19269989$	$0.17080633 = \cos.(y+\delta) - \cos.c\ \cos.a$
$l(\cos.y - \cos.c.\cos.b) = 9.2848815$	$9.2325040 = l.(\cos(y+\delta) - \cos.c.\cos.a)$
$l\ \sin.c = 9.8080675$	$9.8080675 = l.\sin.c$
$l\ \sin.b = 9.9715876$	$9.9828778 = l.\sin.a$
$l.\sin c.\sin.b = 9.7796551$	$9.7909453 = l.\sin.c.\sin.a$
$l.\frac{\cos.y-\cos.c.\cos.b}{\sin.c.\sin.b} = l.\cos.\alpha = 9.5052264$	$9.4415587 = l.\frac{\cos.(y+\delta)-\cos.c.\cos.a}{\sin.c.\sin.a} = l.\cos.\beta$
$\alpha = 71^\circ.\,20'.\,1''$	$73^\circ.\,57'.\,13''\tfrac{1}{2} = \beta$

Summa igitur angulorum α et β ex noſtro calculo in hypotheſi $y = 62^\circ.\,33'$ deducta aequatur $145^\circ.\,17'.\,14''\tfrac{1}{2}$. Cum vero $\alpha + \beta$ eſſe debet $= 146^\circ.\,2'.\,33''$, facile intelligitur, valorem ipſius y ſupra aſſumtum eo modo eſſe augendum, vt ipſius incrementum augere valeat ſummam angulorum α et β quantitate data $= 45'.\,18''\tfrac{1}{2} = 2718''.5$, manente valore literarum a, b et c ſemper eodem.

Ad hocce negotium facillimo modo peragendum ex aequationibus supra exhibitis analytice relationem incrementi ipsius y ad incrementum angulorum α et β methodo sequenti eruere conabor:

Est enim $\cos.\alpha = \frac{\cos.y - \cos.c.\cos.b}{\sin.c.\sin.b}$, hinc differentiando

$$-d\alpha \sin.\alpha = -\frac{dy.\sin.y}{\sin.c.\sin.b}, \text{ siue}$$

$$d\alpha = \frac{dy.\sin.y}{\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b}. \quad \text{Simili modo prodibit}$$

$$d\beta = \frac{dy\sin.(y+\delta)}{\sin.\beta.\sin.c.\sin.a} \text{ adeoque}$$

$$d\alpha + d\beta = \left(\frac{\sin.y}{\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b} + \frac{\sin.(y+\delta)}{\sin.\beta.\sin.c.\sin.a}\right) dy, \text{ siue}$$

$$dy = \frac{d\alpha + d\beta}{\frac{\sin.y}{\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b} + \frac{\sin.(y+\delta)}{\sin.\beta.\sin.c.\sin.a}}$$

ex praeced. $l.\sin.c.\sin.b = 9.7796551$	$9.7909453 = l.\sin.c.\sin.a.$ ex praeced.
$l.\sin.\alpha = 9.9765325$	$9.9827409 = l.\sin.\beta$
$l.\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b = 9.7561876$	$9.7736862 = l.\sin.\beta\ \sin.c.\sin.a$
$l.\sin.y = 9.9481260$	$9.9657982 = l.\sin.(y+\delta)$
$l\,\frac{\sin.y}{\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b} = 0.1919384$	$0.1921120 = l.\frac{\sin.(y+\delta)}{\sin.\beta.\sin.c.\sin.a}$
$\frac{\sin.y}{\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b} = 1.55574465$	
$\frac{\sin.(y+\delta)}{\sin.\beta.\sin.c.\sin.b} = 1.55636720$	
$\frac{\sin.y}{\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b} + \frac{\sin.(y+\delta)}{\sin.\beta.\sin.c.\sin.a} = 3.11211185$	
$l.\left(\frac{\sin.y}{\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b} + \frac{\sin.(y+\delta)}{\sin.\beta.\sin.c.\sin.a}\right) = 0.4930552$	
$l.d\alpha + d\beta = l.2718''.5 = 3.4343293$	

$l.dy = 2.9412741$, adeoque $dy = 873''.5 = 14'.33''\tfrac{2}{3}$.

Quan-

Quantitas igitur, qua diſtantia Arcturi vera a Zenith ſiue y ſupra ſuppoſita $= 62°.33'$ eſt augenda, vt verus anguli ad Polum SPs valor prodeat, vi praecedentis calculi eſt $= 14'.33''\frac{1}{2}$, ita vt diſtantia Arcturi vera a Zenith correcta, ſiue y ſit accuratiſſime $= 62°.47'\ 33''\frac{1}{2}$, adeoque $y + \delta = 67°.48'.3''\frac{1}{2}$. Hice ſtabilitis, erit iam

$\cos. y = 0.45721220$	$0.37782500 = \cos.(y+\delta)$
ex praeced. $\cos. c. \cos b = 0.26827443$	$0.21093629 = \cos. c. \cos. a$ ex praeced.
$\cos. y - \cos. c. \cos. b = 0.18893777$	$0.16688871 = \cos.(y+\delta) - \cos. c. \cos. a$
$l.(\cos. y - \cos. c. \cos. b) = 9.2763186$	$9.2224269 = l.(\cos(y+\delta) - \cos. c. \cos. a)$
ex praeced. $l. \sin. c. \sin. b = 9.7796551$	$9.7909453 = l. \sin. c \sin. a$ ex praeced.
$l. \cos. \alpha = 9.4966635$	$9.4314816 = l. \cos. \beta$
$\alpha = 71°.42'.40''$	$74°.19'.53'' = \beta$.

Summa angulorum α et β iam inuentorum angulo ad Polum SPs praeciſe aequalis maximo eſt argumento ad diſtantiam veram Arcturi a Zenith recte determinatam. Propterea nullo iam fere negotio ſtellarum obſeruatarum altitudines abſolutas definire poſſumus. Arcturi enim altitudo abſoluta vera tempore obſeruationis erit $= 27°.12'.26''\frac{1}{2}$, hinc altitudo eius apparens ſupra Horizontem verum $= 27°.14'.20''\frac{1}{2}$, et error quadrantis, inclinatione Horizontis ſenſibilis implicatus atque coniunctus, ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendus $= 12'.40''$. Simili modo, admiſſa altitudinum differentia obſeruata, prodibit altitudo abſoluta vera Palilicii $= 22°.11'.56''\frac{1}{2}$,

eius-

eiusdemque altitudo apparens ſupra Horizontem verum $= 22°.14'.20''\frac{1}{2}$.

Tempus itidem verum ex calculis antecedentibus modo ſequenti fluit: Angulus horarius Palilicii S P Z tempore ſecundae obſeruationis ſecundum calculum ſupra peractum aequatur $74°.19'.53''$, ex quo in tempus verum pro ratione $360°$. ad $23^h.56'.22''$ conuertendo colligitur tempus verum a culminatione Palilicii $= 4^h.56'.35''\frac{1}{2}$. Poſita autem Aſcenſione recta Palilicii vt ſupra $= 65^a.24'$, prodibit eiusdem tempus culminationis A. 1750. d. 30 Mart. ſt. n. ſub longitudine circiter 180. grad. $3^h.47'.7''\frac{3}{4}$. p. m. adeoque tempus ſecundae obſeruationis verum $8^h.43'.43''\frac{1}{4}$ p. m. Horologium itaque tunc $1^h.12'.46''\frac{3}{4}$ ultra tempus verum proceſſit.

Huiusce vero temporis accuratiſſime determinandi methodi praeſtantia vt latius pateat, non inutile fore iudico, ſi paucis inquiram in relationem, quae tempori modo ſupra expoſito ſupputando intercedit cum eleuatione Poli, quae ad problematis ſolutionem neceſſario requiritur. Quamuis enim errores quadrantis ex obſeruandis altitudinibus ſiderum abſolutis oriundi huiusce methodi adminiculo facile declinari poſſint, ſimilis tamen errorum fons in obſeruanda Poli eleuatione reſidere videtur, cuius exhauriendi gratia indagare primum conuenit errorem in angulum horarium, ex eleuatione Poli, declinatione atque altitudine ſideris definiendum, a dato errore eleuationis Poli profectum; deinde autem indicare ſitum ſideris cuiuscunque propoſiti reſpectu

ſpectu Meridiani eo tempore, quo erronea Poli eleuatio minime immutare valet angulum horarium methodo antedicta ſupputandum.

Ponatur itaque, vti ſupra, altitudo Aequatoris $ZP = c$, diſtantia Sideris a Polo Aequatoris $sP = b$, diſtantia eiusdem a Zenith $Zs = y$ et angulus horarius $ZPs = \alpha$, eritque

$$\text{coſ.}\ \alpha = \frac{\text{coſ.}\ y - \text{coſ.}\ c\ \text{coſ.}\ b}{\text{ſin.}\ c.\ \text{ſin.}\ b}$$

Poſitio igitur quod b et y ſint quantitates conſtantes, α et c autem variabiles, emerget differentiando formulam iam exhibitam, iſta aequatio:

$$-\text{ſin.}\ \alpha\, d\alpha = \frac{\text{coſ.}\ b\ \text{ſin.}\ b\ \overline{\text{ſin.}\ c}^2\, dc - (\text{coſ.}\ y - \text{coſ.}\ c\ \text{coſ.}\ b)\ \text{ſin.}\ b\ \text{coſ.}\ c\ dc}{\overline{\text{ſin.}\ c\ \text{ſin.}\ b}^2}$$

hinc $d\alpha = \frac{dc}{\text{ſin.}\alpha} \left(\frac{\text{coſ.}\ y - \text{coſ.}\ c.\ \text{coſ.}\ b}{\text{ſin.}\ b\ \text{ſin.}\ c\ \text{tang.}\ c} - \text{cot.}\ b \right)$ ſiue

$$d\alpha = \frac{dc}{\text{ſin.}\ \alpha} \left(\frac{\text{coſ.}\ y}{\text{ſin.}\ b\ \text{ſin.}\ c\ \text{tang.}\ c} - \frac{\text{cot.}\ b}{\text{tang.}\ c^2} - \text{cot.}\ b \right)$$

Cum vero coſ y ſit $=$ coſ. α ſin. c ſin. b $+$ coſ. c coſ. b, erit variatio minima anguli horarii, ſiue

$$d\alpha = \frac{dc}{\text{ſin.}\ \alpha} \left(\frac{\text{coſ.}\ \alpha}{\text{tang.}\ c} + \frac{\text{cot.}\ b}{\overline{\text{tang.}\ c}^2} - \frac{\text{cot.}\ b}{\overline{\text{tang.}\ c}^2} - \text{cot.}\ b \right) \text{ adeoque}$$

$$d\alpha = \frac{dc}{\text{ſin.}\ \alpha} (\text{coſ.}\ \alpha\ \text{cotang.}\ c - \text{cotang.}\ b)$$

Si ſtella fuerit in Aequatore, erit $d\alpha = dc$ cotang. α. cotang. c. Inde conficitur, errorem in angulo horario hoc in caſu ſemper cotangenti anguli horarii fore proportionalem.

Huius formulae beneficio errorem in angulo horario ex erronea Poli eleuatione ortum ad quemuis angulum horarium datum, et pro quauis Declinatione Sideris ſub data eleuatione Poli aſſignare atque definire licet. Si ponatur ex. gr. in obſeruatione Arcturi ſupra relata error in eleuatione Poli $= 15'$, habebimus $dc = 15' = 900''$; $c = 40^\circ.0'$; $b = 69^\circ.30'$ et $\alpha = 71^\circ.42'.40''$.

$$
\begin{aligned}
\text{hinc } l.\ \text{coſ.}\ \alpha &= 9.4966645 \\
l.\text{cotang.}\, c &= 10\ 0761865 \\
\hline
l.\text{coſ.}\,\alpha.\,\text{cotang}\ c &= 9.5728510 \\
\text{coſ.}\,\alpha.\text{cotang.}\, c &= 0.3739823 \\
\text{cot.}\ b &= 0.3738848 \\
\hline
\text{coſ.}\ \alpha.\,\text{cotang.}\ c - \text{cot.}\, b &= 0.0000975 \\
l.(\text{coſ.}\,\alpha.\,\text{cotang.}\, c - \text{cot.}\, b) &= 5.9890046 \\
l.\,dc = l\ 900'' &= 2.9542425 \\
\hline
l.\,dc(\text{coſ.}\ \alpha.\,\text{cotang.}\, c - \text{cot.}\, b) &= 8.9432471 \\
l.\ \text{ſin.}\ \alpha &= 9.9774887 \\
\hline
l.\,d\alpha &= 8.9657584 \text{ adeoque} \\
d\alpha &= 0'',1
\end{aligned}
$$

Patet igitur noſtro in exemplo errorem 15. min. prim. in eleuatione Poli nihil immutare angulum horarium Arcturi. Conſimili calculo inuenies errorem in angulo horario Palilicii errori $15'$ in eleuatione Poli reſpondentem $= 33''$ ſiue $= 2''\tfrac{1}{5}$ temp. Ex quo abunde de intelligitur tempus methodo noſtra accuratiſſime determinari poſſe, non obſtante errore in eleuatione Poli ſatis magno; modo vt Obſeruator ea arripiat temporis momenta, quibus ſtellae obſeruandae ita reſpectu Meridiani ſitae ſunt, vt erronea Poli eleuatio minime mutare valeat angulum horarium. Ad poſitionem hanc definiendam ponatur

$$d\alpha = \frac{dc}{\text{ſin.}\,\alpha}(\text{coſ.}\,\alpha\,\text{cotang.}\,c - \text{cotang.}\,b) = 0,$$ eritque hoc in caſu coſ. α. cotang c = cotang. b, hinc

$$\text{coſin.}\,\alpha = \frac{\text{cotang.}\,b}{\text{cotang.}\,c}.$$

Data igitur eleuatione Poli prope vera atque Declinatione ſtellae, nullo fere negotio definitur angulus horarius cuius determinatio neutiquam ab accurata eleuationis Poli cognitione pendet. Circa id itaque tempus capiendae ſunt ſucceſſiue altitudines fixarum, vt temporis determinatio ex altitudinum binarum fixarum differentia eruenda ab errore in eleuatione Poli admiſſo ſit tutiſſima, ſimulque reliquis errorum fontibus, ſiue inſtrumento, ſiue Obſeruatori aſſignandis, minime obnoxia.

Cum vero altitudo Sideris alicuius facilior ſit obſeruatu, quam angulus eiusdem horarius, ſatius erit poſitionem Sideris, in qua error in eleuatione Poli minimi eſt momenti ad tempus obſeruandum, per eiusdem

 alti-

altitudinem, eleuationi Poli et Declinationi Sideris respondentem definire.

Quia enim ſin. altitud. ſiue coſ. $y = \text{coſ.}\,\alpha.\ \text{ſin.}\,c.\ \text{ſin.}\,b + \text{coſ.}\,c.\ \text{coſ.}\,b$, erit ſubſtituendo valorem ſupra inuentum coſ. $\alpha = \frac{\text{cot.}\,b}{\text{cot.}\,c}$,

$$\text{coſ.}\,y = \frac{\text{cot.}\,b.\ \text{ſin.}\,c.\ \text{ſin.}\,b}{\text{cot.}\,c} + \text{coſ.}\,c\ \text{coſ.}\,b, \text{ hinc}$$

$$\text{coſ.}\,y = \frac{\text{coſ.}\,b.\ \overline{\text{ſin.}\,c.}^2 + \text{coſ.}\,b.\ \overline{\text{coſ.}\,c.}^2}{\text{coſ.}\,c.}$$

$$\text{coſ.}\,y = \frac{\text{coſ.}\,b}{\text{coſ.}\,c}\left(\overline{\text{ſin.}\,c}^2 + \overline{\text{coſ.}\,c}^2\right) \text{ ſiue}$$

$$\text{coſ.}\,y = \frac{\text{coſ.}\,b}{\text{coſ.}\,c}$$

Definita iam altitudine Sideris cuiuscunque, in qua ſub data eleuatione Poli tempus methodo noſtra obſervare licet, nulla amplius relinquitur difficultas apud Obſeruatorem congruens aptumque ad maximam obtinendam accurationem aucupandi temporis momentum.

Reſtat itaque, vt deprehenſa ſtella ex. gr. Ortum verſus a Meridiano in debita altitudine verſante, Obſervator facili negotio inuenire valeat ſtellam alteram in altitudine debita reſpondenti Occaſum verſus ſitam. Ad negotium hocce expediendum ponamus ſtellas obſeruandas pari quam proxime gaudere Declinatione; quo poſito, ſi Aſcenſionum rectarum differentia inuenienda dicatur z, erit

$$\text{coſin.}\,z = \frac{\overline{\text{cot.}\,b}^2}{\overline{\text{cot.}\,c}^2} - \left(1 - \frac{\overline{\text{cot.}\,b}^2}{\overline{\text{cot.}\,c}^2}\right) \text{ ſiue}$$

$$\text{coſin.}\,z = 2.\ \frac{\overline{\text{cotang.}\,b}^2}{\overline{\text{cotang.}\,c}^2} - 1$$

Cogni-

Cognita itaque Ascensione recta stellae ex. gr. Ortum versus versantis, huius formulae ope facillime assignari poterit stella altera ad obseruandum tempus prae aliis magis maximeue idonea.

Sicuti autem momenta illa temporis ad obseruandas stellarum altitudines aptissima ex angulo horario vel ex altitudine stellarum definire docuimus, ita haud difficilius ex Azimutho ea cognoscere possumus, siquidem stellae omnes in verticali primario et in altitudine circiter aequali versantes ad tempus methodo hac determinandum maxime sint idoneae.

Cum enim in casu de quo agitur cos. $\alpha = \frac{\cot. b}{\cot. c}$, et cos. $y = \frac{\cos. b}{\cos. c}$, erit sin. Azimuthi $= \frac{\sin. b. \sqrt{\left(1 - \frac{\cot. b^2}{\cot. c^2}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\cos. b^2}{\cos. c^2}\right)}} =$

$$\frac{\sin. c \sqrt{(\sin. b. \cot. c^2 - \cos. b^2)}}{\sqrt{(\cos. c^2 - \cos. b^2)}} = \frac{\sqrt{(\sin b. \cos. c^2 - \cos. b. \sin. c^2)}}{\sqrt{(\cos. c^2 - \cos. b^2)}} = 1.$$

Hinc igitur patet, erroneam Poli eleuationem nullum afferre errorem tempori methodo hac inueniendo iis ipsis momentis, quibus stellae obseruandae per circulum verticalem primarium transeunt. Si quando autem stellae extra primarium verticalem obseruatae fuerint, ope aequationis supra exhibitae $d\alpha = \frac{dc}{\sin. \alpha} (\cos. \alpha. \text{cotang.} c - \text{cotang.} b)$ facillime, vt iam osten-

 dimus,

dimus, definitur error in angulis horariis, siue intempore, qui ex errore nascitur eleuationi Poli adscribendo.

Haec vero solutio pro iis tantum valet stellis, quorum Declinatio eleuationem Poli non exsuperat. Si enim Declinatio stellae fuerit maior eleuatione Poli, stella per verticalem primarium transit nunquam, ita vt pro eiusmodi stellis error in angulo ad Polum, siue $d\alpha$ sit $= -\frac{dc}{\sin.\alpha}(\cos.\alpha.\text{cotang}.c - \text{cotang}.b) = \frac{dc}{\sin.\alpha}(\text{cotang}\,b - \cos.\alpha.\text{cotang}.c)$, hinc in casu quo erronea Poli eleuatio minime mutare valet angulum ad Polum,

$$dd\alpha = \frac{dc}{\sin.\alpha^2}(\text{cotang}.\,c - \cos.\,\alpha\ \text{cotang}.\,b)\,d\alpha = 0,$$ adeoque

$\text{cosin}.\,\alpha = \frac{\text{cotang}.\,c}{\text{cotang}\ b}$, $\cos.\,y = \frac{\cos.c}{\cos.b}$, et $d\alpha$ siue incrementum vel decrementum anguli ad Polum, vbi est minimum, $= dc.\sqrt{(\text{cotang}.b^2 - \text{cotang}.c^2)}$. Ex quo haud dubie intelligitur huiusce generis stellas ad tempus methodo nostra determinandum minus esse idoneas.

ERRO-

ERRORVM TABVLARVM LVNARIVM EX ECLIPSIBVS SOLIS, PRAECIPVE IIS, QVAE ANNO 1748. d. 25. IVLII ET ANNO 1750. d. 8. IANVARII ST. N. DILIGENTISSIME SVNT OBSERVATAE, DEFINIENDORVM DISQVISITIO.

Auctore

A. N. GRISCHOW.

Cum Eclipſes Luminarium Phaenomena ſint inter coeleſtia adeo conſpicua, vt Hominibus rerum coeleſtium imperitis antiquitus admirationem mouerint, plerique Spectatores ſola curioſitate adducti ad iſta Phaenomena ſpectanda veniunt; Aſtronomi contra ab incunabulis Aſtronomiae, propter vſum eximium plane atque ſingularem ex accurata Eclipſium obſeruatione percipiendum ad Phaenomena iſta ſumma diligentia contemplanda ſe applicarunt, imo ad ea rite obſeruanda in longinquas Regiones itinera nonnunquam ſuſceperunt. Utilitas vero praecipua, quae ex Eclipſium obſeruationibus hauriri poteſt, ad Theoriam Satellitis Telluris noſtrae condendam, corrigendam atque perficiendam, et ad Longitudines terreſtres determinandas redundat. Quanto enim conatu Aſtronomi et Geometrae ad Theoriam Lunae perficiendam incubuerint, quantumque fructum abſoluta Satellitis noſtri Theoria Nautis in pelago ſine duce ſaepiſſime oberrantibus, adeoque toti huma-

humano generi allatura ſit, quis neſcit? Neque ignoti ſunt progreſſus illi inſignes, quos indefeſſo labore fecere rerum coeleſtium Speculatores in enucleanda Theoria Lunari ad tantum faſtigium noſtris temporibus euecta, vt perfectioni eius nihil deeſſe videatur, praeter magnum accuratiſſimarum obſeruationum numerum in diuerſis Lunae poſitionibus ratione Apogaei, Nodorum et Solis habitarum et ab Aſtronomis petendarum. Quam ob rem Aſtronomi debito inſtrumentorum apparatu muniti nullam praetermittere ſolent eiusmodi obſeruationum inſtituendarum occaſionem, ea etiam adhibentes obſeruata, quae ex Eclipſibus Luminarium colliguntur, quia in Syzigiis bona aequationum Lunarium parte euaneſcente, reliquae eo facilius expediuntur. Eclipſium Luminarium igitur obſeruationes ſcite inſtitutae praecipue Tabularum erroribus Parallaxeos, Longitudinis et Latitudinis Lunae detegendis inſeruiunt: Eclipſes tamen Lunares ad iſtos errores determinandos minus quam Solis Deliquia eſſe accommodatas Aſtronomi iam dudum expertum perſpectumque habent; difficultas enim initium et finem Eclipſeos Lunaris, vel appulſus Vmbrae ad maculas Lunaris corporis aſſueta Aſtronomorum accuratione obſeruandi tanta eſt, vt momenta haec vel pro diuerſa Teleſcopiorum virtute diſcrepent; ſiquidem initium Eclipſeos Lunaris per maiora Conſpicilla aſtronomica tardius, finis contra citius quam per minora Teleſcopia obſeruari ſolent: vt caeteras taceam cauſas et obſeruationum circumſtantias, quibus effici poteſt, vt Deliquii Luna-

Lunaris obſeruationes inſigniter ab inuicem differant. Hiſce rationum momentis adducuntur Aſtronomi recentiores, vt Solaribus Eclipſibus, quarum initium et finis ceteraeque phaſes et momenta accuratiſſime obſeruari poſſunt, praecipue ſi relicta veteri Eclipſes Solares in imagine Solis per Teleſcopium intromiſſa et in aduerſa tabula recepta obſeruandi methodo, Sol directe per Teleſcopium Micrometro munitum riteque adornatum obſeruatur, ad Elementa Tabularum Lunarium ſtabilienda plurima feliciſſimo vtantur cum ſucceſſu.

Ad Tabularum errores Longitudinis et Latitudinis Lunae definiendos accurata initii et finis Eclipſeos Solaris obſeruatio praecipue requiritur, determinata etiam per obſeruationem Diametro Lunae apparente; caetera enim elementa quibus innititur iſtorum errorum calculus, a Tabulis aſtronomicis mutuanda, non adeo aberrare poſſunt, vt concluſiones admodum erroneae exinde naſcantur. Ex. gr. paruulus error Parallaxeos Lunae horizontalis primo ex Tabulis deſumendae nullum errorem ſenſibilem Loco Lunae apparenti ex obſeruatis definiendo afferre valet; ſiquidem in hocce calculo non de Parallaxi abſoluta, ſed de differentia tantum Parallaxium in Longitudinem et Latitudinem ad initium et finem Eclipſeos agitur. Poſtea vero, vbi vera et Longitudo et Latitudo Lunae inueſtigatur, error in Parallaxi Lunae horizontali admiſſus notatu dignior euadit, praecipue in ſupputanda Longitudine vera Lunae longe a Nonageſimo Eclipticae gradu diſtantis, et in definienda Latitudine vera Lunae vbi altitudo Nonageſimi gradus Eclipticae tempore Eclipſeos fuerit parua. Errores autem, quibus apparentis Loci Lunae calculus maxime inquinari poteſt, ab erronea Diametro Lunae et duratione Eclipſeos minus accurate obſeruata proficiſcuntur, quippe qui determinationem Longitudinis, inprimis vero Latitudinis Lunae inſigniter afficere valeant, magis tamen in magnis Eclipſibus quam in minoribus Deliquiis.

Tab. XII. Fig. 1. Vt autem clarius pateſcat, Eclipſes minores reſpectu errorum, qui ſiue obſeruatione ſiue in nonnullis elementis ad calculum adhibendis admitti poſſunt, magnis eſſe praeferendas, vbi de Tabularum erroribus Longitudinis et Latitudinis Lunae ex obſeruata Eclipſi definiendis agitur, ſit in S centrum Solis initio Eclipſeos: Referat PM portionem Eclipticae; Nl lineam Eclipticae parallelam. Fingatur Locus apparens centri Lunae initio Eclipſeos in N, in fine Eclipſis autem reſpectu Solis in L. Ponamus igitur ſummam Semidiametrorum apparentium Lunae et Solis SN (breuitatis cauſa $=$ SL) $= r$: ſemitam apparentem Lunae a Sole ab initio ad finem vſque Eclipſeos per NL exhibitam $= x$: angulum lNL $= e$: Latitudinem viſam centri Lunae initio Eclipſeos, ſiue NP $= y$ et in fine Eclipſis LM $= z$. Erit igitur coſin. SNL $= \frac{x}{2r}$ et ſin. SNL $= \frac{\sqrt{(4r^2 - x^2)}}{2r}$, hinc ſin. SN$l$ $=$ ſin. NSP $= \frac{coſ.e}{2r} \sqrt{(4r^2 - x^2)} - \frac{x\, ſin.e}{2r}$, et $y = \frac{1}{2}$ coſ. $e \sqrt{(4r^2 - x^2)} - \frac{1}{2} x$ ſin. e. Si ponamus nunc errorem exiguum in Semidiametro Lunae apparente ineſſe $= dr$, error Latitudinis Lunae exinde oriundus, ſiue dy ex ex formula ſupra tradita colligitur $= \frac{2.r.\,cof.e.\,dr}{\sqrt{(4r^2 - x^2)}} = \frac{2r.\,\overline{cof.e}^2.\,dr}{2y + x.\,fin.e}$. Cum vero quantitas $x.\text{ſin}.e.$ exprimat motum apparentem Lunae in Latitudinem pro duratione Eclipſeos, prodibit $dy = \frac{2r.\,\overline{cof.e}^2.\,dr}{y+z}$. Ex hac formula intelligitur, errorem de quo nunc agitur, in magnis Eclipſibus, ceteris paribus, maioris eſſe momenti quam in minoribus, propter quantitatem $y + z$ in his maiorem quam in illis. Eadem ratione probatur, errorem in Latitudine Lunae ex erronea Diametro Lunae apparente enaſcentem, ſi eadem Eclipſis in duobus pluribusue locis fuerit obſeruata, quam proxime eſſe in ratione inuerſa ſummae Latitudinum Lunae initio et in fine Eclipſeos in ſingulis locis obſeruatarum: vnde ſequitur, Latitudinem Lunae ab obſeruationibus in loco vbi Eclipſis minor fuerit, habitis deriuatam, hoc quidem reſpectu, ceteris paribus paulo tutiorem eſſe, quam ea eſt quae per obſeruationes eiusdem Eclipſis in loco vbi Eclipſis maior viſa fuerit, inſtitutas definitur.

Ponamus nunc nullum irrepſiſſe errorem in Diametrum Lunae apparentem, Obſeruatorem autem erraſſe in duratione Eclipſeos, a qua pendet ſemita apparens Lunae a Sole, ſiue linea NL, et errorem hunc in motu apparenti Lunari durationi Eclipſeos debito admiſſum aequari dx. Habebimus itaque errorem Latitudinis Lunae ipſi dx reſpondentem, ſiue $dy = \frac{1}{2} dx \left(\frac{x.\,cof.\,e}{\sqrt{(4r^2 - x^2)}} + \text{ſin}.\,e\right) = \frac{1}{2} dx \left(\frac{x.\,\overline{cof.e}^2}{2y + x.\,fin.e} + \text{ſin}.\,e\right) = \frac{1}{2}.dx \left(\frac{x.\,\overline{cof.\,e}^2}{y+z} + \text{ſin}.\,e\right)$. Patet

 igitur

igitur, Latitudinem Lunae determinandam ab errore in duratione Eclipſeos admiſſo minus, quam ab errore qui ex erronea Diametro Lunae apparente ortum ducit, ſi errores illi inter ſe fuerint aequales, affici. Simili modo intelligitur, errorem in Latitudine Lunae definienda ex duratione Eclipſeos minus accurate obſeruata genitum, ceteris paribus, notabiliorem eſſe in magnis Eclipſibus quam in minoribus.

Errores iſti, quorum effectum in Latitudine Lunae ex obſeruationibus Eclipſeos definienda nunc conſiderauimus, multo minus afficiunt Longitudinem Lunae, ſiue diſtantiam eius a Coniunctione apparente cum Sole in Ecliptica ex iisdem obſeruationibus deducendam; etenim dimidium tantum erroris in motu Lunae apparente durationi Eclipſeos reſpondente admiſſi circiter in Longitudinem Lunae, ſiue in diſtantiam eius a Coniunctione apparente cum Sole in Ecliptica determinandam cadit. Simili modo haud difficulter intelligitur, ſi ſemita Lunae apparens ad Eclipticam non fuerit inclinata, Longitudinem Lunae ex obſeruata Eclipſi eruendam, ab errore in Diametro Lunae apparente admiſſo omnino non variari: Cum vero ſemita illa Lunae ad Eclipticam aliquantum ſit inclinata, error in Diametro Lunae apparente admiſſus oppido exiguum producere valet errorem in Longitudine Lunae ex obſeruatis Eclipſeos deducenda, qui tamen paulo maior euadere poteſt in magnis Eclipſibus, quam in minoribus.

Ex hiſce meditationibus colligitur, in accurata apparentis Diametri Lunaris obſeruatione ad Tabularum Luna-

Lunarium errores ex obſeruatis Eclipſibus exacte definiendos maxima eſſe momenta. Haec autem obſeruatio accuratiſſime inſtitui poteſt ope excellentiſſimi Micrometri, cuius beneficio Diameter Lunae apparens commodiſſime dies aliquot ante et poſt Eclipſin obſeruari et Tabularum praeſtantiſſimarum adminiculo ad tempus Eclipſeos reduci poteſt. Alia quidem methodus difiniendae Diametri Lunaris in Eclipſibus obſeruata ſimul in diſco Solari et chorda et quantitate defectus, dataque Diametro Solari innititur; ſed paulo incertior eſſe videtur; quam ob cauſam annulares Eclipſes hoc gaudent commodo, vt apparentis Diametri Lunaris directe exactiſſimeque obſeruandae copiam faciant; quae Diametri Lunaris capiendae opportunitas perſoluendae quaeſtioni, vtrum Diameter Lunae in diſco Solari conſpicuae minor appareat, quam in eadem ab oculo diſtantia extra illum, inſeruire poteſt aptiſſime: quae quidem Diametri Lunaris apparentia obſeruationibus Cel. *le Monnier*, Acad. Reg. Scient. Pariſ. Aſtronomo in Eclipſi Solari An. 1748. habitis probata eſſe non videtur.

Famoſiſſimum illud Deliquium Solis, quod contigit d. 25 Iulii An. 1748. cum propter circumſtantias nonnullas ſingulares atque notatu digniſſimas omnes rerum coeleſtium Speculatores rarioris huius Phaenomeni obſeruandi cupiditate inflammauerit, et nonnullos ad ea loca allexerit, vbi ſpes erat rariores huius Eclipſis obſeruandi circumſtantias: mea etiam circa hanc Eclipſin obſeruata measque meditationes et inquiſitiones in errores Tabularum Lunarium ex obſeruatis huius Eclipſeos ad obſeruationes quas Berolini ſumma diligentia inſtitui circa Eclipſin Solis, quae contigit d. 8. Ian. 1750. comparandis deducendos communicare et in hac diſſertatione explicare conſtitui. Ante vero quam ad calculum aggrediar, ſummam obſeruationum DD. *Mortimer*, *Beuis* et *Stiffens* V. Cl. mihique coniunctim circa Eclipſin Solarem An. 1748. Londini in Aedibus Marlborougheuſibus habitarum referre iuuat. Viri Cl. *Beuis* et *Stiffens* ad Eclipſin hanc diligentiſſime obſervandam Tubo vtebantur aſtronomico 12. pedum ad famoſiſſimum Teleſcopium reflectens 12. pedum applicato . ego autem adhibebam Teleſcopium reflectens 2 pedum ad obſeruandum Solem accommodatum. Hiſce ita adornatis, initium Eclipſeos nobis Coelo eximie ſereno per vtrumque Teleſcopium accuratiſſime obſeruabatur d. $\frac{14}{25}$ Iulii a. m. $9^h.4'.20''$. temp. appar.

Tab. XII. Fig. 2. Diſco Solari variarum macularum congerie in Fig. 2. exhibita conſpicuo, ſequentes obſeruabamus limbi Lunaris ad maculas Solares appulſus:

d. 25 Iulii mane $9^h.39'.42''$. t. app. macula *a* penitus a limbo Lunari tegebatur.

9. 53. 0. - - - Macula maxima *b* penitus obſcurabatur: haec obſeruatio aliquantum propter nubes dubia.

10. 12. 8. - - - Prima macula ex tribus illis quae ad limbum Solis orientalem ſitae erant, media ſecabatur a margine Lunae.

Hi ſce obſeruationibus peractis, Coelum nubibus obtegebatur; quam ob rem finis Eclipſeos obſeruandi copia erat nulla. Limbus Lunae haud perfecte apparebat circu-

circularis, variis inaequalitatibus per Telefcopia fatis notabilibus in illo vifis.

Vt harum obferuationum fructum capiamus, Tabularum errores cum Longitudinis tum Latitudinis Lunae exinde funt definiendi: id quod facillime fieri poffet, fi finis Eclipfeos Londini etiam obferuata fuiffet; huius autem Eclipfeos momenti obferuatione deftitutus, ad obferuationes alio quodam in loco habitas defcendam neceffe eft. Hunc itaque in finem iis vtar obferuationibus, quae de eadem Eclipfi Solari Berolini funt peractae. Ibi enim initium Eclipfis annularis, fiue initium circuli e Solari difco refidui lucidi adnotatum eft d. 25 Iulii a. m. $11^{h}.52'.51''$. t. app. finis autem totius Eclipfeos contigit p. m. $1^{h}.25'.9''$. t. app. Quamuis obferuationes fupra relatae in diuerfis inftitutae fint locis, nihil eft quod eas ad Tabularum errores accuratiffime eruendos non adhibeamus, modo vt Differentia Meridianorum Berolinum inter et Londinum debita praecifione fit determinata: hocce vero negotium alias iam obferuatae Occultationis Palilicii a Luna beneficio perfeci demonftrauique Differentiam Meridianorum inter Obferuatorium Reg. Berolinenfe et Aedes Societatis Regiae Londinenfis effe $54'.1''$ temp. cum vero Aedes Marlboroughenfes ab Aedibus Societatis Reg. Londinenfis $5''$. temp. Occidentem verfus fint remotae, prodibit ex noftro calculo Differentia Meridianorum inter Obferuatorium Reg. Berolinenfe et Aedes Marlboroughenfes, vbi noftra habita fuit obferuatio, $= 54'.6''$. temp.

Obfer-

Obſeruationes ſupra exhibitas conſideranti duae patent ad definiendos Tabularum errores viae: primum enim initium Deliquii huius Solaris Londini obſeruatum ad momentum initii Eclipſis annularis Berolini notatum, deinde autem Eclipſis annularis initium ad finem totius Eclipſeos Berolini viſum comparari poſſe intelligitur; ita vt duplici hacce comparatione peracta, concluſiones eo certiores adepturi ſimus. Initium igitur Deliquii huius Solaris Londini obſeruatum et initium Eclipſeos annularis Berolini notatum primo adhibiturus Locum Solis ex Tabulis Solaribus Cel. *Euleri* ſupputando calculum adoriar. Longitudo ergo media Solis ad Meridiem medium d. 25 Iulii ſub Merid. Berol. erit ſecundum memoratas Tabulas $4^s.3^\circ.29'.58''$. Poſita nunc maxima aequatione centri Solis $= 1^\circ.55'.55''$ et admiſſa Obliquitate Eclipticae $= 23^\circ.28'.35''\frac{1}{2}$ prodibit Aſcenſio recta veri Loci Solis ad idem temporis momentum $= 124^\circ.59'.45''\frac{3}{4}$ atque igitur erit aequatio temporis ad Meridiem medium d. 25. Iulii $= 5'.59''\frac{1}{4}$. add. Sole autem tunc verſante in puncto Eclipticae, vbi aequatio temporis fere eſt maxima, manifeſtum eſt, eam per ſpatium temporis ſatis magnum nulli obnoxiam eſſe variationi ſenſibili; adeo vt eandem tuto aſſumere poſſimus aequationem temporis pro initio et fine Eclipſeos quam ſupra pro Meridie inuenimus.

Hac itaque temporis correctione vſus inueni initium Eclipſeos Londini obſeruatum et ad Meridianum Berolinenſem reductum d. 24. Iulii $22^h.4'.25''\frac{1}{4}$ temp. med.

med. aſtron. ſimiliterque habebimus initium Eclipſeos annularis Berolini notatum d. 24. Iulii $23^h. 58'50''\frac{1}{4}$ temp. med. aſtron. Ad duo illa temporis momenta Locum Solis verum ſecundum Tabulas Cel. *Euleri*, adhibita aequatione maxima centri Solis ſupra notata, Lunae autem Locum verum eiusdemque Diametrum horizontalem apparentem et Parallaxin horizontalem ſecundum numeros Lunares Cel *Halleii* ſupputaui et vna cum Diametro apparente Solis in ſequenti Tabella exhibui.

	Longitudo vera Solis	Longitudo vera Lunae	Latitudo vera Lunae	Diam. ☉lis ap.	Diam. ☽ae ap.	Parall. ☽ae horiz.
Initio Eclipſeos Londini obſ. d. 24 Iul. $21^h.10'.19''\frac{1}{4}$ temp. med.	s ° ′ ″ 4.2.37.48,5	s ° ′ ″ 4.1.39. 6,7	° ′ ″ 0.33.57,5 Bor.	′ ″ 31.41	′ ″ 29.27	′ ″ 53.31,5
Initio Eclipſeos annularis Berolini not. d. 24 Iulii $23^h. 58'. 50''\frac{1}{4}$ temp. med.	4.2.42. 22	4. 2.35.16,5.	0.28.47. Bor.	31.41	29.27,2	53.31,9

Peruenimus nunc ad ſupputandam Parallaxin Lunae tum in Longitudinem cum in Latitudinem, cuius definiendae gratia Nonageſimum Eclipticae gradum eiusque altitudinem et diſtantiam veram centri Lunae a Nonageſimo gradu Eclipticae ad momenta Eclipſeos ſupra notata determinaui et appoſitae Tabellae inſerui. Calculus autem iſte innititur Eleuatione Poli Berolinenſi

 52°.

52°.31′: Eleuatione Poli Londinenſi 51°.32′: Obliquitate Eclipticae 23°.28′.35″ et denique Aſcenſione recta Solis ad Meridiem medium d. 25 Iulii ſub Merid. Berol. 124°.59′.45″$\frac{3}{4}$, ſub Meridiano Londinenſi autem 125°.1′.59″$\frac{1}{4}$.

	Nonageſimus gradus Eclipticae	Altitudo Nonageſimi gradus Eclipticae	Diſtantia vera centri Lunae a Nonageſimo
Ad initium Eclipſeos 21^h.10′19″$\frac{1}{4}$. temp. med.	2^s.24°.42′.43″	61°.48′.17″	36°.56′.24″ Ort. verſus
Ad initium Eclipſeos annularis 23^h.58′.50″$\frac{1}{4}$. temp. med	3. 24. 5. 11.	58. 5. 14	8. 30. 5 Ort. verſus

Ex hiſce elementis et Parallaxi Lunae horizontali ſupra ex Tabulis *Halleianis* inuenta ſequentem deduxi Parallaxin Lunae a Sole et in Longitudinem et in Latitudinem, poſita Parallaxi Solis horizontali = 12″.

	Parallaxis Lunae a Sole in Longitudinem	Parallaxis Lunae a Sole in Latitudinem
Ad initium Eclipſeos Londini obſeruatum	28′.33″ Orient. verſus	25′. 10″
Ad initium Eclipſeos annularis Berolini obſeruatum	6. 46, 8 Orient. verſus	28. 10, 8

Altitu-

Altitudo denique apparens centri Lunae ad initium Eclipſis ſupra Horizontem Londinenſem aequatur $44° \frac{1}{2}$ eiusdemque altitudo apparens ſupra Horizontem Berolinenſem ad initium Eclipſis annularis $57°$; vnde emergit incrementum Diametri Lunae horizontalis ad primum momentum $= 19'', 5$ ad alterum vero $= 23'', 3$. Hiſce correctionibus rite applicatis, prodibit Diameter Lunae apparens ad initium Eclipſeos Londini $= 29'. 46'', 5$ et ad initium Eclipſis annularis Berolini $= 29'. 50'', 5$.

Datis iam elementis omnibus quae ad Tabularum errores definiendos requiruntur, calculum ipſum adminiſtraturi Longitudinem aeque ac Latitudinem Lunae apparentem ex obſeruatis Eclipſeos momentis ſequenti modo determinabimus.

Inuenta eſt ſupra Semidiameter apparens Solis ad diem Eclipſeos $= 15'. 50', 5$; Lunae autem Semidiameter apparens ad initium Eclipſeos Londini fuit $= 14'. 53'', 2$ et ad initium Eclipſeos annularis Berolini $= 14'. 55'', 2$. Ex his colligimus ſummam Semidiametrorum apparentium Solis et Lunae pro initio Eclipſeos Londini obſeruato $= 30'. 43'', 7$ earumque differentiam pro momento initii Eclipſis annularis Berolini notati $= 55'', 3$; quae differentia aequatur diſtantiae apparenti centrorum Solis et Lunae ad praedictum temporis momentum. Inuenimus quoque ex Tabulis Longitudinem Lunae veram ad initium Eclipſeos $= 4^s. 1°. 39'. 6'', 7$ et ad initium Eclipſis annularis

 $= 4^s.$

$= 4^s . 2^\circ . 35' 16'',5$; ita vt motus Lunae verus in Longitudinem pro tempore a primo initio Eclipſeos ad initium Eclipſis annularis praeterlapſo, ſiue pro $1^h . 54' . 25''$ ſit $= 56' 9'',8$. Cum vero Parallaxis in Longitudinem Lunae a Sole initio Eclipſeos fuerit $28' . 33''$ Ortum verſus et initio Eclipſis annularis $6' . 46'',8$ itidem Ortum verſus, prodibit motus apparens Lunae in Longitudinem inde a primo initio Eclipſeos ad initium vsque Eclipſis annularis $= 34' . 23'',6$. Simili modo, cum Latitudo Lunae vera pro initio Eclipſeos inuenta ſit $= 0^\circ . 33' . 57'',5$ et pro initio Eclipſis annularis $= 0^\circ . 28' . 47''$ Bor. Parallaxis autem Lunae a Sole in Latitudinem Lunam in hoc temporis momento $25' . 10''$ et in illo $28' . 10'',8$ Auſtrum verſus depreſſerit, habebitur motus Lunae verus in Latitudinem pro temporis ſpatio quod a primo initio Eclipſis ad initium vsque Eclipſis annularis effluxit, $= 5' . 10'',5$ Auſtrum verſus; motus autem Lunae apparens in Latitudinem ad idem temporis ſpatium erit $= 8' . 11'',3$ itidem Auſtrum verſus. Motus denique verus Solis in Ecliptica ad praedictum temporis interuallum ex Tabulis Solaribus collectus aequatur $4' . 33'',5$.

Tab. XII. Fig. 3. Repraeſentet nunc ESC chordam parui arcus Eclipticae, et in illa ſit S Locus Solis verus tempore primi initii Eclipſeos, *s* autem Locus Solis verus ad tempus initii Eclipſis annularis. Sit porro N Locus Lunae apparens, ſiue viſus, initio Eclipſeos, et L Locus eius apparens ad initium Eclipſis annularis; ita vt EC linea circulis

circulis Latitudinum NE et CL comprehenſa motui Lunae apparenti in Longitudinem interuallo temporis a primo Eclipſeos initio ad initium usque Eclipſis annularis praeterlapſi reſpondenti aequetur. Ducta Eclipticae parallela ML a puncto L ad punctum M circulum Latitudinis NE in M ſecante, linea NM exhibebit motum Lunae apparentem in Latitudinem a primo initio Eclipſeos ad initium vsque Eclipſis annularis. Si iungantur porro centra Solis et Lunae lineis NS et sL manifeſtum eſt, lineam NS aequari ſummae Semidiametrorum apparentium Lunae et Solis in primo initio Eclipſeos, earum autem differentiam initio Eclipſis annularis exhiberi per lineam sL. Fiat denique interuallum LP aequale interuallo Ss, et erit SP $=$ sL, atque hinc MP $=$ motui apparenti Lunae a Sole in Longitudinem pro tempore inter primum initium Eclipſeos et initium Eclipſis annularis intercepto, ita vt, ſi Sol per iſtud temporis interuallum fingatur in S immobilis, Locus Lunae apparens relatiuus tempore initii Eclipſis annularis ſit in P.

Cardo igitur noſtrae diſquiſitionis in eo nunc vertitur, vt calculo ſubducto, differentiam inter Longitudinem apparentem Lunae et Longitudinem veram Solis tum ad primum initium Eclipſeos, cum ad initium Eclipſis annularis, h. e. valores rectarum ES et sC vna cum Latitudinibus Lunae viſis EN et LC determinemus. Ad hocce efficiendum habebimus in Triangulo plano NML, rectangulo ad M, crus ML $= 34'.23'',6$ et alterum crus NM $= 8'.11'',3$; vnde deducuntur

 hypo-

hypotenuſa $NL = 35'.21'',1$ et angulus $NLM = 13^\circ.22'.33''$. In Triangulo porro rectilineo NPL latus NL eſt $= 35'.21'',1$, latus $PL = 4'.33'',5$ et angulus interiectus $NLP = 13^\circ.22'.33''$, proinde per reſolutionem huius Trianguli eruuntur angulus $NPL = 164^\circ.40'.14''\frac{1}{2}$ et latus $NP = 30'.56'',5$. Datis nunc in Triangulo NSP tribus lateribus, nimirum NP modo inuentum, $NS = 30'.43'',7$ et $SP = 55'',3$ obtinebimus angulum $NPS = 76^\circ.10'.17''\frac{1}{2}$ et angulum $NSP = 102^\circ.9'.34''\frac{1}{4}$: cum vero NPM angulus ſit $= 15^\circ.19'.45''\frac{1}{2}$, prodibit angulus $MPS =$ ang. $LsC = 60^\circ.50'.32''$; ſimiliterque ang. NSE erit $= 16^\circ.59'.53''\frac{3}{4}$. Cognitis iam in Triangulo NSE ad E rectangulo hypotenuſa NS et angulo NSE, facili negotio determinabimus NE, ſiue Latitudinem apparentem Lunae ad initium Eclipſeos $= 0^\circ.8'.59'',6$. Bor. itemque diſtantiam apparentem Lunae a Sole in Ecliptica ad idem temporis momentum, ſiue $ES = 29'.23'',2$. Simili modo inuenientur in Triangulo rectangulo SLC Latitudo Lunae apparens ad initium Eclipſis annularis, ſiue $LC = 0^\circ.0'.48'',3$ Bor. et diſtantia apparens Lunae a Sole in Ecliptica per sC expreſſa $= 26'',9$. Hisce itaque inſtructi accurate aſſignare poſſumus Locum Lunae verum obſeruationibus circa hanc Eclipſin inſtitutis innixum. Poſita nimirum Longitudine Solis vera ad primum initium Eclipſeos Londini obſeruatum $= 4^s.2^\circ.37'.48''\frac{1}{3}$ et admiſſa Parallaxi Lunae a Sole cum in Longitudinem tum in Latitudinem ſupra definita, colligitur Locus Lunae verus ſequenti Tabellae vna

cum

cum Loco Lunae vero ex Tabulis *Halleianis* desumto insertus.

	Longit. vera ☽ae sec. Tab. Hallеian	Latit. vera ☽ae sec Tab. Hallеian.	Longit. vera ☽ae ex obseruat deducta.	Latit. vera ☽ae. ex obseruat. deducta.
24. Iulii 22^h. 4$'$. 25$''$. temp. med. sub Merid. Berol.	4^s. 1°. 39$'$. 6$''$, 7	0°. 33$'$. 57$''$, 5 Bor.	4^s. 1°. 39$'$. 52$''$, 2	0°. 34$'$. 9$''$, 6 Bor.
24. Iulii 23^h. 58$'$. 50$\frac{1}{4}''$ t. med. sub Merid. Berol.	4. 2. 35. 16, 5	0. 28. 47 Bor.	4. 2. 36. 2	0. 28. 59, 1 Bor.

Comparatione inter Locum Lunae supputatum et obseruatum instituta, apparet Longitudinem Lunae veram ex obseruationibus huius Eclipseos collectam superare eam quae numeris Lunaribus *Halleianis* innititur, 45 min. sec. Si vero Locus Lunae verus supputetur secundum Tabulas Lunares Cel. *Flamsteedii* quae in *Institutions astronomiques* Cel. *le Monnier* occurrunt, prodibit Longitudo Lunae vera ad initium Eclipseos $4^s. 1^\circ. 40'. 14''$ adeoque $22''$ maior ea quam supra ex obseruata Eclipsi Solari inuenimus. Quod ad Latitudinem Lunae veram attinet, palam est, Tabulas *Halleianas* eam secundum nostrum calculum in hac Eclipsi $12''$ iusto minorem exhibere. Vt autem eo certius de exiguis illis Tabularum erroribus pronunciare possimus, similem instituemus horum errorum calculum obseruatione initii Eclipsis annularis et finis totius Eclipseos Berolini habita suffultum.

Initio

Initio huius diſſertationis iam notauimus, finem huius Eclipſeos Berolini eſſe obſeruatum d. 25. Iulii $1^h.25'.9''$. temp. app. id quod reductione facta, reſpondet d. 25. Iulii $1^h.31'.8''\frac{1}{4}$. temp. med. Ad ordinem huius calculi ſeruandum Loca Lunae et Solis vera tum ad initium Eclipſis annularis cum ad finem totius Eclipſeos ſupputanda ſunt; cum vero elementa omnia quibus ad hunc calculum inſtituendum opus eſt, ad primum Eclipſeos momentum ſupra iam ſint notata, ea ſolum nunc determinabo atque referam, quae ad finem Eclipſis ſpectant. Inueni igitur ad momentum finis Eclipſeos Longitudinem Solis veram $= 4^s.2^\circ.46'.1''\frac{2}{3}$: Longitudinem Lunae veram ſecundum Tabulas *Halleianas* $= 4^s.3^\circ.20'.37''\frac{1}{3}$ eiusque Latitudinem veram $= 0^\circ.24'.36'',5$ Bor. itemque Diametrum Lunae horizontalem $= 29'.27'',4$ et Parallaxin eius horizontalem $= 53'.32'',2$. Poſitis etiam vt in praecedenti calculo, Aſcenſione recta Solis ad Meridiem medium d. 25 Iulii ſub Merid. Berol. $= 124^\circ.59'.45''\frac{3}{4}$; Obliquitate Eclipticae $= 23^\circ.28'.35''$, et Eleuatione Poli Berol. $= 52^\circ.31'$, colligimus Nonageſimum gradum Eclipticae $4^s.10^\circ.1'.56''$ eiusque altitudinem $53^\circ.12'.35''$; vnde deriuatur diſtantia vera Lunae a Nonageſimo gradu Eclipticae $= 6^\circ.41'.19''$ Occidentem verſus. Hiſce admiſſis, prodibit ad finem Eclipſeos Parallaxis Lunae a Sole in Longitudinem $= 5'.2'',2$ Occidentem verſus, et in Latitudinem $= 32'.1'',6$.

Altitudo Lunae apparens ſupra Horizontem Berol. initio Eclipſis annularis fuit 57° et circa finem

Eclipſis

Eclipſis $52°.30'$; quare incrementum Diametri Lunae horizontalis ad primum temporis momentum erit $= 23'',3$ et ad alterum $= 22'',1$ adeoque Diameter Lunae apparens tempore initii Eclipſis annularis $= 29'.50'',5$ et pro fine totius Eclipſeos $= 29'.49'',5$.

Ad calculum errorum Tabularum progreſſus, nunc primo loco diſtantiam apparentem centrorum Solis et Lunae et ad initium Eclipſis annularis et ad finem totius Eclipſeos definiturus ſum; ablata hunc in finem Semidiametro Lunae apparente ad initium Eclipſis annularis $14'.55'',2$ a Semidiametro Solis apparente $15'.50'',5$; reſtabit diſtantia centrorum apparens ad iſtud temporis momentum $0'.53'',3$. Simili modo, addita Semidiametro Solis ad Semidiametrum apparentem Lunae $14'.54'',7$, prodibit diſtantia centrorum pro fine totius Eclipſeos $30'.45'',2$. Cum porro motus apparens Lunae tum in Longitudinem cum in Latitudinem interuallo temporis inter initium Eclipſis annularis et finem totius Eclipſeos reſpondens requiratur, eum nullo fere negotio ex motu eius vero et Parallaxi ſic eruere poſſumus: Motus Lunae verus in Longitudinem praedicto temporis interuallo reſpondens ex Locis Lunae veris ſupra notatis colligitur $= 45'.20'',8$; motus autem eius verus in Latitudinem pro eodem temporis ſpatio aequatur $4'.10'',5$ Auſtrum verſus; ſed quia Parallaxis Lunae a Sole in Longitudinem tempore initii Eclipſis annularis reperta fuit $= 6'.46'',8$ Orientem verſus, et tempore finis totius Eclipſeos

 $= 5'$

$= 5'.2'',2$ Occidentem verſus, habebimus motum apparentem Lunae in Longitudinem ab initio Eclipſis annularis ad finem vsque totius Eclipſeos $= 33'.31'',8$. Eodem modo ob Parallaxin Lunae a Sole in Latitudinem initio Eclipſis annularis $= 28'.10'',8$ et in fine totius Eclipſeos $= 32'.1''.6$, prodibit motus Lunae apparens in Latitudinem eidem temporis ſpatio reſpondens $= 8'.1'',3$ Auſtrum verſus. Motus denique Solis ad iſtud temporis interuallum ex Locis eius ſupra notatis deductus aequatur $3'.39''\frac{2}{3}$.

Tab. XII. Fig. 4. Sit itaque S Locus Solis verus tempore initii Eclipſis annularis, et N Locus Lunae apparens ad idem temporis momentum. In fine autem totius Eclipſeos ſit s Locus Solis verus et L Locus Lunae apparens. Ducta a puncto L linea LM Eclipticae parallela, factoque in illa interuallo $LP = Ss =$ motui Solis vero, qui temporis ſpatio inter initium Eclipſis annularis et finem totius Eclipſeos reſpondet, oppido manifeſtum eſt, ſi Sol pro iſto temporis ſpatio fingatur in S immobilis, Locum Lunae apparentem reſpectu huius Loci Solis fixi in fine Eclipſeos fore in P; ita vt recta $SP = sL$ repraeſentet ſummam Semidiametrorum apparentium Lunae et Solis ad finem Eclipſeos, recta autem SN exhibeat centrorum Lunae et Solis diſtantiam apparentem ad initium Eclipſis annularis. Demiſſis a punctis N et L in Eclipticam perpendicularibus NEM et CL, $EC = ML$ exhibebit motum Lunae apparentem in Longitudinem pro temporis ſpatio inter initium Eclipſis annularis et finem totius

Eclipſeos

Eclipſeos intercepto, lineis NE et CL Latitudinem Lunae apparentem ad duo iſta momenta denotantibus.

Ad valores nunc rectarum NE, CL, SE et Cs definiendos habebimus ex praemiſſis in Triangulo NML ad M rectangulo, $NM = 8'.1'',3$ et $ML = 33'\,31'',8$; vnde deducimus $NL = 34'.\,28'',6$ et angulum $NLM = 13°.\,27'.\,16'',1$. Datis porro in Triangulo NLP latere NL et angulo NLP modo inuentis, et latere $PL = 3'.\,39''\frac{2}{3}$, colligimus latus $NP = 30'.\,55'',6$ et angulum $NPL = 164°.\,58'.\,1'',9$ adeoque angulum $NPM = 15°.\,1'.\,58'',1$. Cognitis autem in Triangulo NSP tribus lateribus, nimirum $NP = 30'.\,55'',6$; $SN = 0'.\,55'',3$ et $SP = 30'.\,45'',2$; inuenientur angulus $NSP = 100°.\,2'.\,8'',1$ et angulus $NPS = 1°.\,40'.\,54''$; quoniam vero angulus NPM prius inuentus eſt $= 15°.\,1'.\,58'',1$ prodibit angulus $SPM = PSC = CsL = 13°.\,21'.\,4'',1$; atque adeo angulus NSE erit $= 86°.\,41'.\,4''$. Dantur igitur in Triangulo NSE ad E rectangulo, hypotenuſa SN et angulus NSE modo inuentus: quare ex reſolutione huius Trianguli colligimus Latitudinem Lunae apparentem ad initium Eclipſis annularis, ſiue $NE = 0°.\,0'.\,55'',2$ Bor. itemque differentiam inter Longitudinem veram Solis et Longitudinem apparentem Lunae pro eodem temporis momento per SE exhibitam $= 3'',2$. Pari modo, cum in Triangulo CsL ad C rectangulo dentur hypotenuſa sL et angulus CsL, proueniet Latitudo apparens Lunae pro fine totius Eclipſeos, $CL = 0°.\,7'.\,6'',1$ Auſtr.

 diſtan-

diſtantia autem apparens in Ecliptica centrorum Solis et Lunae ad idem temporis momentum C*s* erit $= 29'. 55'', 3$.

Si ponamus igitur Longitudinem Solis veram ad initium Eclipſis annularis $= 4^s. 2^\circ. 42'. 22''$, facili negotio inueniemus ex prius inuentis Locum Lunae apparentem ad notata Eclipſeos momenta; cui ſi applicetur Parallaxis Lunae tum in Longitudinem cum in Latitudinem ſupra definita, habebimus Loca Lunae vera obſeruata Locis eius veris ſecundum Tabulas *Halleianas* computatis, vt ſequitur, appoſita.

	Longitudo Lunae computata.	Latitudo Lunae computata.	Longitudo Lunae obſeruata.	Latitudo Lunae obſeruata.
24. Iul. $23^h. 58'. 50''\frac{1}{4}$ t. med. ſub Merid. Berol.	$4^s. 2^\circ. 35'. 16''\frac{1}{2}$	$0^\circ. 28'. 47''$ Bor.	$4^s. 2^\circ. 35. 38''\frac{1}{2}$	$0^\circ. 29'. 6''$ Bor.
25. Iulii $1^h. 31'. 8''\frac{1}{4}$ t. med. ſub Merid. Berol.	4 3. 20. $37\frac{1}{3}$	0. 24. $36\frac{1}{2}$ Bor.	4. 3. 20. $59\frac{1}{3}$	0. 24. 55 Bor.

Si loca haec inter ſe conferantur, ſtatim apparet, Longitudinem Lunae ex obſeruatis deductam 22″ exſuperare Longitudinem ex Tabulis *Halleianis* deſumtam, et 43″ deficere a Longitudine Lunae ſecundum Tabulas *Flamſteedianas* computata; id quod tantillum deflectit ab eo quod per priorem calculum determinauimus; figuram autem inſpicienti latere non poteſt, Triangula ita eſſe conſtituta, vt minimus error ſiue in dura-

duratione Eclipſeos, ſiue in Diametris apparentibus Lunae Solisve admiſſus notabilem ſatis errorem procreare valeat in diſtantia apparente Lunae a Sole in Ecliptica, adeoque in Longitudine Lunae vera exinde eruenda: quam ob rem tutius ſtatuere poſſumus Tabulas *Halleianas* Longitudinem Lunae veram in hac Eclipſi Solari 30. tantum min. ſec. iuſto minorem exhibere; ſiue quod eodem redit, Longitudinem Lunae veram tempore finis totius Eclipſeos Berolini notato d. 25. Iulii $1^h. 31'. 8''\frac{1}{4}$. temp. med. fuiſſe $= 4^s. 3°. 21'. 7''$.

Latitudo Lunae vera quae ex noſtro colligitur computo, $19''$ exſuperat eam quae Tabulis *Halleianis* innititur: in priore autem calculo eam 12 tantum min. ſec. et quod excedit maiorem inuenimus, quam ſecundum Tabulas; ita vt differentia inter binos hoſce calculos in Latitudine Lunae aſſignanda ad 6 tantum 7^{ve} min. ſec. aſſurgat, et vera Latitudo Lunae ad finem totius Eclipſeos Berolini obſeruatum per medium inueniatur $= 0°. 24'. 52''$ Bor. quae quidem Lunae Latitudo reſpondet eiusdem Longitudini verae $4^s. 3°. 21'. 7''$. Si ponamus nunc ad iſtud tempus Longitudinem ☊ Lunae cum Tabulis *Halleianis* $= 10^s. 7°. 46'. 40''$ et Inclinationem Orbitae Lunaris ad Eclipticam $= 5°. 17'. 20''$, prodibit Latitudo Lunae vera eiusdem Longitudini verae ſupra inuentae $4^s. 3°. 21'. 7''$ reſpondens $= 0°. 24'. 34''$; ita vt remaneat differentia $18''$ inter Latitudinem Lunae computatam et obſeruatam; quae differentia ſiue errori Inclinationis Orbitae Lunaris, ſiue erroneo Loco Nodi Lunae, ſiue errori Parallaxeos eius horizontalis, ſiue denique errori cuidam ex exiguis illis erroribus, quibus forte omnia haec elementa inquinata ſunt, compoſito adſcribenda eſſe videtur. Diffitendum quidem non eſt, quaeſtionem hanc ex obſeruatione vnicae Eclipſeos perſolui non poſſe: interim tamen apparet, differentiam illam ab errore Inclinationis Orbitae Lunaris ortum praecipuum ducere non poſſe, eoque minus, quod ad calculum noſtrum ſupra expoſitum adhibuimus Orbitae Lunaris Inclinationem $5^{\circ}.17'.30''$, et conſequenter Inclinationem quam in optimis Tabulis Lunaribus adhuc editis inuenimus maximam. Sin autem differentiam illam $18''$ inter Latitudinem Lunae computatam et obſeruatam ab erroneo Nodi Lunae Loco repetere velimus, neceſſe eſt, vt admiſſa Inclinatione Orbitae Lunaris ad Eclipticam in hac Eclipſi $= 5^{\circ}.17'.20''$, Longitudo ☊ Lunae ſtatuatur $= 10^{s}.7^{\circ}.50'.1''$; quae quidem ☊ Longitudo $3'.20''$ ſuperat Longitudinem ☊ ex Tabulis *Halleianis* deſumtam. Locus ☊ Lunae cum ſecundum Tabulas *Flamſteedii* et elementa Theoriae Lunaris *Newtoni* 1. min. prim. magis ſit promotus quam, iuxta Tabulas *Halleianas*, iſta Longitudo ☊ Lunae a *Flamſteedio* et *Newtono* ſtabilita $2\frac{1}{3}$ tantum min. prim. augenda eſſet, vt cum noſtro calculo concinat. Si denique differentiam illam $18''$ ſupra inuentam errori Parallaxeos Lunae horizontalis tribuere fas eſt, facile intelligitur, Parallaxin Lunae horizontalem Tabulis innixam $\frac{1}{3}$ fere min. prim. eſſe minuendam, vt Tabulae cum obſeruationibus huius Eclipſeos Solaris conſpirent: cum vero Eclipſis Solaris, quae contigit d. 8. Ian. 1750. facta ſit in poſitione Lunae reſpectu Nodorum ſatis

apta

apta ad differentiam illam de qua agitur, ex comparatione harum Eclipſium obſeruatarum magis dilucidandam, ad referendas praedictae Eclipſeos obſeruationes atque concluſiones exinde deriuandas proficiſcimur.

Obſeruatio Eclipſeos Solaris quae accidit An. 1750. Ianuarii die 8. ſt. n. Berolini habita: cui adiungitur calculus eiusdem Eclipſis Tabulis *Halleianis* innixus.

Apparatus ad Eclipſin hanc ſumma diligentia obſeruandam adhibui ad haſce obſeruationes inſtituendas excellentiſſimum Horologium aſtronomicum ſecundum praecepta Cl. *Grahami* affabre elaboratum, cuius vices per altitudines Solis correſpondentes ſedulo pridie et poſtridie Eclipſeos Quadrantis bipedalis radii adminiculo captas exploraui, adeo vt exactitudinem tum motus huius Horologii, cum obſeruationum ipſarum perſuaſam perſpectamque haberem. Miſſam hic facio relationem obſeruationum quae ad motum Horologii examinandum et tempus verum eruendum pertinent, ea tantum relaturus momenta, quae Eclipſin hanc ſpectant mihique Teleſcopii praeſtantiſſimi 8. pedali foco beneficio, Coelo toto Eclipſeos tempore eximie ſereno, praecipue obſeruata ſunt.

Initium

Tab. XII.	Initium Eclipſeos d. 7. Ianuarii ſt. n.	20^h.	$59'$.	$19''\frac{1}{3}$	temp. app.
Fig. 6.	Margo Lunae appellit ad inſigniorem maculam A	21.	32.	$19\frac{1}{4}$	
	Immerſio totalis minoris maculae B - -	21.	35.	8	
	Emerſio totalis inſignioris maculae A - -	22.	7.	29	
	Finis Eclipſeos - - - - - - - - -	23.	20.	$5\frac{1}{4}$,	igitur
	Duratio Eclipſeos - - -	2.	20.	46	

eod. d. $22^h.4'.55''$ temp. app. pars lucida diſci Solaris $= 15'.18''\frac{3}{8}$
$22.21.35$ - - - - - - - - - - - - - $= 16.10$

Quia duratio huius Eclipſeos 5 circiter min. prim. minor fuit, quam calculus ex Tabulis *Flamſteedii* poſtulabat, facile eſt iudicatu, quantitatem etiam Eclipſeos paulo minorem fuiſſe, quam ſecundum memoratas Tabulas. Cum vero hic de erroribus Tabularum accuratius definiendis agitur, horum errorum calculum eo libentius inſtituam, quod duo illa momenta praecipua, initium nempe et finis Eclipſeos, maxima cum praeciſione mihi ſunt obſeruata, errorum Tabularum computum certiſſimum redditura.

Negotium hocce aggreſſurus in aequationem temporis primum inquiſiui, eamque ad initium Eclipſeos inveni $= 7'.19''$ add. pro fine Eclipſeos autem $= 7'.21''\frac{1}{2}$ add. ita, vt initium huius Eclipſis contigerit d. 7. Ian. $21^h.6'.38''\frac{1}{3}$, finis vero $23^h.27'.26''\frac{1}{4}$ temp. med. ſub Merid. Berol. Ad duo iſta temporis momenta definientur Loca Solis ex Tabulis Cel. *Euleri*, Lunae autem Loca vera vna cum Diametris app. horiz. Lunae et Solis Parallaxique Lunae horizontali ſecundum Tabulas *Halleianas* vt ſequitur.

Ad

	Longitudo vera Solis.	Longitudo vera Lunae.	Latitudo vera Lunae.	Diam. ☉lis app.	Diam ☽ae ap horiz.	Parall. ☽ae horiz.
Ad initium Eclipseos h ′ ″ Ian. 21. 6. 28½ t. med.	s ° ′ ″ 9. 18. 3. 7, 7	s ° ′ ″ 9. 17. 16 5, 1	° ′ ″ . 18 58,4 Bor.	′ ″ 3 .43	′ ″ 32.21,9	′ ″ 58.49,5
Ad finem Eclipseos h ′ ″ 7. Ian. 23. 27. 26¾ t. med.	9. 18. 9. 6, 4	9. 18. 39. 23,9	0. 46. 36,6 Bor.	32.43	32.23,7	58 52,8

Cum Ascensio recta Solis ad Meridiem medium d. 8. Ianuarii sub Meridiano Berol. fuerit $= 289^{\circ}. 41'. 36''$, colligimus ex illa et ex Obliquitate Eclipticae $23^{\circ}. 28'\, 30''$ ad Latitudinem Berolinensem $57^{\circ}. 31'$ Nonagesimum gradum Eclipticae eiusque altitudinem et distantiam veram Lunae a Nonagesimo gradu, quae omnia sequenti Tabellae sunt inserta.

	Nonagesimus gradus Eclipticae	Altitudo Nonagesimi gradus	Distantia vera Lunae a Nonagesimo
Ad initium Eclipseos	$7^{s}. 8^{\circ}\; 26'. 27''$	$18^{\circ}. 14'. 40''$	$68^{\circ}.49'.38''$ Or. vers.
Ad finem Eclipseos	9 27. 48. 13	15 7. 5	9. 8. 49 Occ vers.

Ex hisce datis facili negotio eruitur ad notata Eclipsis momenta Parallaxis Lunae a Sole et in Longitudinem et in Latitudinem, posita Parallaxi horizontali Lunae a Sole pro initio Eclipsios $= 58'.37'',5$ et pro fine $= 58'.40''.8$.

	Parallaxis Lunae a Sole	
	in Longitudinem	in Latitudinem
Ad initium Eclipfeos	$17'.8'',9$ Orient. verfus	$55'.42'',6$
Ad Finem Eclipfeos	$2.\ 26,7$ Occid. verfus	$56.\ 41,\ 5$

Deinde ex altitudine apparente centri Lunae tempore initii Eclipfeos $=6^{\circ}\frac{1}{8}$ et pro fine $14^{\circ}\frac{3}{4}$ deducitur incrementum Diametri Lunae horizontalis ad primum Eclipfeos momentum $=3'',6$, et ad alterum $=8'',5$; ita vt Diameter Lunae apparens pro hoc temporis momento fit $=32'.32'',2$ et pro illo $=32'.25'',5$ atque igitur fumma Semidiametrorum apparentium Solis et Lunae initio Eclipfeos $=32'.34'',2$ et in fine $=32'.37'',6$.

Denique definitur ex fupra traditis motus Lunae verus in Longitudinem pro duratione Eclipfeos obfervata $=1^{\circ}.23'.18'',8$; eius autem motus verus in Latitudinem pro eodem temporis fpatio eruitur $=7'.38'',2$ Boream verfus: cum vero Parallaxis Lunae a Sole in Longitudinem tempore initii Eclipfeos fuerit $=17'.8'',9$ Orientem verfus et in fine Eclipfeos $=2'.26'',7$ ad Occidentem, concludimus exinde motum apparentem Lunae in Longitudinem pro duratione Eclipfeos obfervata $=1^{\circ}.3'.43'',2$. Confimili modo ex Parallaxi Lunae a Sole in Latitudinem pro initio et fine Eclipfeos fupra exhibita et ex motu Lunae vero in Latituditudinem modo notato eruitur motus Lunae apparens in Latitudinem pro temporis ſpatio inter initium et finem Eclipſeos interpoſito $= 6'.39'',3$; qua quantitate imminuitur Latitudo apparens Meridionalis quam habet Luna initio Eclipſeos. Quod ad motum verum Solis in Ecliptica, ille pro duratione huius Eclipſeos obſeruata reperitur $= 5'.58'',7$.

Hiſce praemiſſis, ſit S Locus centri Solis verus ad initium Eclipſis, linea EC exhibente chordam parui arcus Eclipticae. Sit porro s Locus Solis verus tempore finis Eclipſeos, ita vt Ss repraeſentet motum Solis verum pro duratione huius Deliquii Solaris obſeruata. Pari modo fingatur Locus centri Lunae apparens initio Eclipſeos in N et in fine in L. Binae igitur illae lineae EN et CL perpendiculariter a punctis N et L in Eclipticam demiſſae referent Latitudinem Lunae apparentem ad duo illa praecipua Eclipſeos momenta; adeo vt ducta Eclipticae parallela ML, motus Lunae apparens in Longitudinem pro duratione Eclipſeos obſeruata determinet valorem huius rectae $ML = EC$; motus autem Lunae apparens in Latitudinem eidem temporis ſpatio reſpondens definiat valorem lineae MN. Facta $PL = Ss$, SP erit $= sL$ et MP aequabitur motui apparenti Lunae a Sole in Ecliptica ad durationem Eclipſeos obſeruatam. Ad deriuandum igitur ex obſeruatis Locum Lunae apparentem habebimus primum in Triangulo MLN ad M rectangulo crus $ML = 1°.3'.43'',2$ itemque alterum crus $MN = 6'.39'',3$; vnde fluunt hypotenuſa $NL = 1°.4'.4''$ Tab. XII. Fig. 5.

 et

et angulus $MLN = 5°.57'.44''\frac{1}{4}$. Datis porro in Triangulo PNL latere NL et angulo PLN modo inuentis, itemque latere $PL = 5'.58'',7$; colligimus $NP = 58'.7'',4$ et angulum $NPL = 173°.25'.31'',4$ consequenter angulum $NPM = 6°.34'.28'',6$. Dantur itaque in Triangulo NSP tria latera, nimirum $NP = 58'.7'',4$: $NS =$ summae Semidiametrorum apparentium Lunae et Solis initio Eclipseos $= 32'.34'',2$ et $SP =$ eidem summae in fine Eclipseos $= 32'\ 37'',6$; quare per resolutionem huius Trianguli obtinebimus sequentes angulos, nempe angulum $SPN = 26°.54'.37'',7$ et angulum $NSP = 126°.7'.42''$ adeoque angulum $ESN = 33°.32'.8'',9$ et angulum $MPS = LsC = 20°.20'.9'',1$. Peruenimus ergo ad Triangulum ENS ad E rectangulum, in quo ex prius inuentis cognoscimus hypotenusam SN et angulum ESN; vnde deducimus Latitudinem Lunae apparentem ad momentum initii Eclipseos, siue $EN = 0°.17'\ 59'',6$ Austr. et differentiam inter Locum Solis et Locum Lunae apparentem in Ecliptica ad idem temporis momentum per ES expressam $= 27'.8'',9$. Similiterque, in Triangulo CsL ad C rectangulo, hypotenusa sL et angulo CsL datis, innotescet et Latitudo Lunae apparens pro fine Eclipseos $CL = 0°.11'.20'',3$ Austr. et distantia apparens Lunae a Sole in Ecliptica pro eodem tempore $Cs = 30'.35'',6$.

Admissa itaque Longitudine Solis vera ad initium Eclipseos supra inuenta $= 8^s.18°.3',8''$ adhibitaque ad Locum Lunae visum Parallaxi Lunae a Sole tum in Longi-

Longitudinem cum in Latitudinem etiam prius definita, prodibit Locus Lunae verus ex obſeruationibus noſtris collectus et cum eius Loco ex Tabulis *Halleianis* computato comparandus vt ſequitur.

	Longitudo Lunae computata.	Latitudo Lunae computata.	Longitudo Lunae obſeruata.	Latitudo Lunae obſeruata.
d. 7. Ian. $21^h.6'.38''\frac{1}{3}$ temp.med. ſub Merid Berol.	$9^s.17^\circ.16.\ 5''$	$0^\circ.38'.58''\frac{2}{5}$ Bor.	$9^s.17^\circ.18'.50''$	$0^\circ.37'.43''$ Bor.
d. 7. Ian. $23^h.27'.26''\frac{3}{4}$ temp.med. ſub Merid. Berol.	9. 18. 39. 24	0. 46. $36\frac{3}{5}$ Bor.	9. 18. 42. $8\frac{2}{3}$	0. 45 $21\frac{1}{5}$ Bor.

Perſpicuum eſt ex hac comparatione, Longitudinem Lunae veram ex obſeruatis deductam $2'.45''$ exſuperare Longitudinem Tabularem; Latitudinem Lunae obſeruatam contra $1'.15''$ deficere a Latitudine eius Tabulari. Quamuis igitur veram originem errorum Tabularum Lunarium ex vna alteraue Eclipſi etſi fauorabilibus ſub circumſtantiis obſeruata deducere lubricum periculoſumque ſit; probabile tamen fere eſt, Tabulas *Halleianas* Longitudinem Lunae mediam iuſto minorem exhibere: id quod non ſolum duae illae Eclipſes Solis, quarum calculum in hac diſſertatione inſtituimus, verum etiam aliae Eclipſes, inprimis Eclipſis Solis quae An. 1727. d. 15 Sept. a Viris Cel. *Caſſini* et *Kirch* obſeruata fuit, probare atque corfirmare videntur.

Quod ad alterum errorem $1'.15''$ in Latitudine Lunae obuium attinet, obſeruandum eſt quod, ſi elementis quibus calculus noſter innititur error quidam notabilis inſit, iſte error neutiquam in duratione Eclipſeos quam accuratiſſime mihi obſeruata, ſed potius in Diametro Lunae apparente ſit quaerendus; et vero Diameter Lunae apparens in hac Eclipſi mihi parte 75. Diametri Solaris viſa eſt minor Diametro Solis. Quia igitur Diameter Solis in hac Eclipſi fuit $32'.43''$, deducitur ex noſtra obſeruatione Diameter Lunae apparens tempore Eclipſeos $= 32'.17''$, adeoque $18''$ fere minor ea quae ex Tabulis *Halleianis* colligitur. Dato autem errore in Diametro Lunae admiſſo, facili negotio eruitur error exinde in Latitudine Lunae naſcens, ea vtendo formula quam initio huius diſſertationis exhibui; cuius beneficio habebimus errorem Latitudinis, ſiue $dy = \frac{2r.\overline{coſ.e}^2.dr}{y+z}$. In praeſenti autem caſu erit $r = 1956''$; $dr = 9''$; $y = 18'.0''$; $z = 11'.20''$ et conſequenter $y+z = 1760''$. Quam ob rem per reſolutionem huius formulae habebitur dy, ſiue error Latitudinis quaeſitus $= 20''$, quibus Latitudo Lunae vera prius inuenta eſt augenda, vt prodeat Latitudo Lunae vera correcta. Hinc patet Latitudinem Lunae veram ex noſtris obſeruatis concluſam nunc $55''\frac{2}{3}$ tantum differre ab ea ex Tabulis *Halleianis* depromta. Ex hiſce meditationibus intelligitur, differentiam illam $18''$ quam in calculo antecedenti Eclipſeos Solaris An. 1748. inter Latitudinem Lunae veram Tabularem et obſeruatam inuenimus, nullo modo erroneae

Paral-

Parallaxi Lunae adſcribendam, neque igitur Parallaxin Lunae horizontalem ea de cauſa minuendam eſſe, vt Tabulae cum Coelo conſentiant. Clarum enim eſt, ſi differentia illa ex erronea Parallaxi Lunae fuerit nata, neceſſe fuiſſe, vt Latitudo Lunae vera ex obſeruationibus Eclipſeos Solaris Anni 1750. collecta, ſi aequationibus Parallaxeos *Halleianis* fidere fas eſt, Latitudinem Lunae veram ex Tabulis ad iſtud tempus computatam etiam exſuperaret: cum contra autem Latitudo Lunae ex noſtris obſeruationibus Eclipſeos An. 1750. deducta Latitudine Lunae Tabulari re vera minor ſit, et quidem quantitate ſatis notabili, exinde concludere poſſumus, Locum Nodi Lunae ex Tabulis *Halleianis* deductum non ſatis eſſe promotum; id quod et aliis Eclipſibus obſeruatis probabile redditur. Ceterum totum hunc errorem in Loco Nodi Lunae obuium in aequationibus Loco Nodi Lunaris medio applicandis, quarum praecipua in Syzigiis exigua euadit, latere vix credibile eſt; niſi nouae eaeque notabiles Nodi aequationes ex Theoria Lunari omnibus numeris abſoluta forte eruantur. Interim tamen dubium nullum eſſe videtur, quin praeter Nodum et aliis Tabularum Lunarium elementis error in Latitudine Lunae modo inuentus ſit adſcribendus: nam ſi totum errorem in Nodum coniicere liceret, Longitudinem Nodi $9\frac{1}{2}$ min. prim. augeri oporteret, vt obſeruata Eclipſis expleretur, ſeruata Inclinatione Orbitae Lunaris ad Eclipticam ab *Halleio* ſtabilita. Manifeſtum etiam eſt, exiguum errorem, ſi quis fortaſſis in Inclinatione Orbitae Lunaris ad Eclipticam adfuerit,

fuerit, fere nullum afferre poſſe errorem Latitudini exinde definiendae. Ea de cauſa aequum eſt, vt ſtatuamus Parallaxi Lunae horizontali Tabulari ineſſe errorem, quo bona pars differentiae nobis inter Latitudinem Lunae obſeruatam et Tabularem detectae producatur; ita quidem, vt ſecundum noſtras obſeruationes Parallaxis Lunae horizontalis ab *Halleio* admiſſa augenda ſit quantitate ex maiori obſeruationum diligentiſſime inſtitutarum numero praeciſe inpoſterum definienda. Interea tamen dum hoc perficiatur, ſi Parallaxin Lunae horizontalem augeamus parte ſui 100^{ma}, prope accederemus ad quantitatem quam olim Parallaxi Lunae horizontali tribuit *Newtonus*. Immutata autem Parallaxi Lunae horizontali, totius calculi ſupra inſtituti ratio leuiter immutabitur. Recognito itaque calculo ſecundum hypotheſin, quod Parallaxis Lunae horizontalis Tabularis augenda ſit parte ſui 100^{mo}, et quod Diameter Lunae apparens in Eclipſi Solari An. 1750. $18''$ minor viſa ſit, quam ſecundum Tabulas; obtinebimus ad momentum initii Eclipſeos An. 1750. d. 7. Ian. $21^h.6'.38''\frac{1}{2}$ temp. med. aſtron. ſub Merid. Berol. Longitudinem Lunae veram $= 9^s.17^\circ.18'.45''$, eiusque Latitudinem veram ad idem temporis momentum $= 0^\circ.38'.30''$. Bor. ita vt remaneat adhuc differentia $\frac{1}{2}$ min. prim. inter Latitudinem Lunae Tabularem et eam, quae ex obſeruationibus ſupra relatis colligitur. Haec autem differentia vt euaneſcat, Locus Nodi Lunae promouendus eſſet 5 fere min. prim. quod quidem, ſi tota iſta correctio in Locum Nodi medium coniici deberet, nimium fere videtur: interim tamen Parallaxis Lunae horizontalis

vix

vix vltra augeri poteſt; etenim, ſi Parallaxis Lunae horizontalis vltra partem ſui 100^{mam} augeretur, ex obſeruationibus Eclipſeos Solaris Anni 1748. maius adhuc incrementum caperet Longitudo Nodi: cum contra, ſi Parallaxis Lunae horizontalis augeatur parte ſui 100ma, Longitudini Nodi Lunaris autem addantur 4. vel 5 minuta prima, Tabulae Lunares *Halleii* cum obſeruationibus Eclipſium Solis Annorum 1727, 1748 et 1750. ſatis conſentiant. Vt autem accurate ac prudenter in re adeo ſubtili atque ſpinoſa agamus, nihil certi in illo negotio ſtabilire audeo, ante quam calculus plurium Eclipſium diligenter obſeruatarum aliarumque obſeruationum ſcite inſtitutarum rem dirimat clariuſque oſtendat: ſtabilire nimirum non audeo, quota ſui parte Parallaxis Lunae horizontalis *Halleiana* praeciſe ſit augenda, neque quantum Locus Nodi Lunae ex Tabulis *Halleianis* deſumtus accurate ſit promouendus. Haec autem explorata perſpectaque habere mihi videor: I^{mo} quod Parallaxis Lunae horizontalis *Halleiana* iuſto minor fuit, tum in Eclipſi Solari An. 1727 obſeruata, cum in ea, quam ipſe An 1750. d. 8 Ian. diligentiſſime obſeruaui: ex quo colligere eſt, Parallaxin Lunae horizontalem Tabularem etiam in Eclipſi Anno 1748. obſeruata iuſto minorem fuiſſe: nam ſi ea in hoc Deliquio Solari minuenda viſa fuerit, in Eclipſi Solari Anno 1750. obſeruata etiam erit imminuenda, cum differentia Parallaxium horizontalium Lunae in binis illis Deliquiis Solaribus ex Tabulis deducta non adeo a vera aberrare facile poſſe videatur, vt in altera

Eclipſi augeri, in altera imminui poſſit Parallaxis ipſa quantitate notabili; quo admiſſo, enormis exinde naſceretur differentia inter Nodi Lunaris Locum ſupputatum et obſeruatum. II^{do}: quod Nodorum Lunarium Loca media ſecundum Tabulas *Halleianas* non ſatis ſunt promota, adeo vt vnum alterumue minutum primum Longitudini Nodi aſcendentis mediae addi poſſit; quo Longitudo media Nodi Lunaris ad eam accederet, quae in *Flamſteedii* Tabulis obuia eſt vno iam minuto primo excedens Longitudinem mediam Nodi aſcendentis Lunae in Tabulis *Halleianis* notatam. Reliquorum Tabularum errorum ſupra inuentorum fontes ex vera atque perfecta Theoria Lunari et aequationum Lunarium argumentis ex illa collectis ſunt diiudicandi.

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE SVB FINEM ANNI 1751. LIPSIAE HABITAE

a

GODOFR. HEINSIO.

Occultatio Iouis partialis a Luna d. 29 Decembr. ſt. nou.

Rarum hoc Phaenomenum, quod partem tantum Diſci Iouis a Luna tranſeunte tectam oſtendebat, coeli facies per totum diem nubila oculis eripuiſſet, niſi poſt horam 9. veſpertinam feliciter nubes ita attenuari incepiſſent, vt per vices adſpectum Lunae et Iouis mediante Teleſcopio concederent. Sic quidem ope Tubi Gregoriani ſub apparatu, quo iſte obiecta ſecundum Diametrum 52 vicibus auget, per temporis interualla, ſubinde valde exigua, varias obſeruationes inſtituere licuit; obſeruationem tamen completam, qua ſitus Iouis reſpectu Lunae diuerſis temporis momentis ope Machinae parallacticae definiri potuiſſet, et illa coeli facies denegauit. Utrumque Sidus, quotiescunque eius adſpectus concedebatur, nube tenui inuolutum comparuit, nec, niſi vna vice et per inſtans, faſcia Iouis et vnicus Satelles conſpici potuerunt. Licet autem ſic ſolo ſenſuum iudicio obſeruatio peracta fuerit, iſta tamen ob ſingularem circumſtantiam ita comparata cenſeri debet, vt in celebri, quod iſto tempore agebatur,

batur, negotio Cl.[mi] *de la Caille* pro definienda Lunae Parallaxi, vſum promittere poſſit; quam ob rem in circumſtantiarum enumeratione paululum prolixus ero. Tab. XII. Fig. B. Figura adiecta, Lunae phaſin tribus ante plenilunium diebus pro linea cuſpidum A B exhibens et ſitu erecto delineata, lucem affundet, quam ipſa quidem apparentia, exactiorem autem ſchema ex Ephemeridibus conſtructum ſuppeditauit. Tempus quoque horologii noto, vt de momentorum certitudine facilius iudicium fieri poſſit, quod ex variis Capellae altitudinibus correctum et in tempus verum Solare transmutatum altera columna exponit.

Obſeru. ordo	Tempus horologii	Tempus verum	
1)	$9^h.46'.0''$.	$9^h.21'.38''$.	Interuallum inter Iouis limbum borealem et terminum phaſeos Lunae proximum circiter erat = $2\frac{1}{4}$ Diam. ♃vis vid. Fig. ad 1.
2)	– 50. 0.	– 25. 38.	Idem interuallum erat = $\frac{1}{2}$ Diam. ♃vis. v. Fig. ad 2.
3)	– 51. 40.	– 27. 18.	Idem interuallum vix = $\frac{1}{4}$ Diam. ♃vis.
4)	– 52. 50.	– 28. 28.	Limbus Iouis borealis terminum phaſeos auſtralem tangere videbatur. v. Fig. ad 4. Nubes deinde interueniebant.

5)

5) $9^h.56'.20''.9^h.31'.58''.$	Tertia fere pars Diametri Iouis a Luna tecta cernebatur; Iupiter autem proxime ad cuſpidem phaſeos A conſtitutus erat, tranſiturus nunc limbum Lunae circulariter terminatum. Ab eo tempore Iupiter limbum Lunae auſtralem ita traiiciebat, vt ad ſenſum ſemper tertia Diametri Iouialis pars a limbo Lunae tecta eſſet (vid. Fig. ad 5.), et quidem tertia pars Diametri minoris ♃vis; ſiquidem Iupiter notabiliter oualis apparebat, exiſtente Diametro maiori ad limbum Lunae proximum fere parallela.
6) - 57. 30. - 33. 8.	Idem adhuc erat adſpectus, quem nubes deinceps eripiebant; aſt
7) 10. 0. 0. - 35. 38.	paululum minus quam $\frac{1}{3}$, plus autem quam $\frac{1}{4}$ Diametri ♃vis a limbo Lunae adhuc tegi credebam.
8) - 3. 20. - 38. 58.	Iupiter limbo ſuo boreali limbum Lunae auſtralem, abſoluta

ſoluta occultatione, tangere videbatur v. Fig. ad 8.

9) $10^h.3'.50''.9^h.39'.28''$. Tactus iſte certe peractus erat. Parum aberrari puto, ſi ad

10) – 3. 30. – 39. 8. Momentum tactus veri ponatur.

11) – 9. 30 – 45. 8. Diſtantia limbi Iouis ad Lunam proximi ab auſtrali Lunae margine erat = vni Diametro ♃vis. vid. Fig. ad 11.

12) – 13. 0. – 48. 38. Iſta diſtantia proxime erat = $2\frac{1}{3}$ Diam. ♃vis. Circa hoc tempus, aſt per inſtans quaſi, Satellitem Iouis videre licuit et faſciam, quae protracta limbum Lunae inferiorem tangere videbatur. v. Fig. ad 12.

Conſiderando circumſtantias obſeruationum facile adducor credere, in aeſtimio occultationis maximae, ſi quantitas eius aequalis tertiae parti Diametri minoris Iovis ſtatuatur, vix errorem 3. vel 4. ſecundorum circuli maximi locum habere poſſe, quae circumſtantia vſum obſeruationis commendat. Praeterea tranſitus Iouis ad Lunam contigit circa culminationem Lunae, quae ſecundum Ephemerides circiter hor. 9. 28'. fieri debuit; ipſaque Luna prope nodum deſcendenten verſabatur.

Si

Si de momento, quo occultatio maxima, vel diſtantia centrorum minima, accidit, quaeras; fateor quidem, omnem rigorem in eius definitione obtineri non poſſe, cum, ex conditione tranſitus, lentus admodum fuerit Iouis ad Lunam acceſſus et ab ea receſſus, vt de momentis contactus Iouis et Lunae, aliarumque Iouis reſpectu Lunae poſitionum ſenſuum iudicio aeſtimatarum, certo ſtatuere non licuerit; attamen periculum huius rei facere non poenitebit. Scilicet

	Temp. vero
Momentum tactus poſt occultationem erat per num. 10 – – –	9^h. $39'$. $8''$
Si igitur momentum num. 4 – –	9. 28. 28
accipiatur pro momento tactus ante occultationem, cum terminus phaſeos Lunae in hoc loco prope conconfunderetur cum limbo Lunae,	
erit momentum occultationis maximae –	9. 33. 48

Si obſeruationum num. 5. et 7. eadem ſtatuatur conditio ante et poſt occultationem, ob momentum num. 7 — — —	9^h.$35'$.$38''$
— — — — num. 5. — — —	9. 31. 58.
erit momentum Occultat. maximae —	9. 33 48.

Tactus poſt occultationem contigit num. 10 –	9. 39. 8.
et per num. 11. diſtabat limbus ♃uis a limbo Lunae proximo interuallo Diametri ♃uis. –	9. 45. 8.
Si igitur intermedium ex his momentum	9. 42. 8.

ponatur

ponatur respondere interuallo ½ Diametri ♃is pro distantia limbi ♃is à limbo Lunae post occultationem,

cum per num. 2. eidem interuallo ante occultationem responderet — — — 9. 25. 38.

erit momentum Occultat. maximae — — 9. 33. 53.

His ita constitutis, non multum aberrabitur, si *Momentum occultationis maximae* ponatur $9^h.33'.50''$. temp. veri.

Eclipses Satellitum Iouis.

Die 27 *Decembr*. st. nou. Emersiones Satellitum, primi et secundi, ope Tubi Gregoriani sub apparatu supra indicato, obseruare licuit. Coelum quidem obseruationi fauebat; ast cum correctio temporis, ad duo licet horologia oscillatoria comparati, ex iis determinationibus peti debuerit, quae in eundem finem die 29. Decembr. adhibitae fuerunt; error aliquot secundorum, paucorum licet, in notatis momentis locum habere potest.

Temp. vero	
$4^h.45'.5''$.	Satelles secundus emergere incipiebat.
46. 40.	Satellitem istum totum emersum credebam.
57. 18.	Satelles primus emergere incipiebat.
59. 0.	Satelles iste totus extra vmbram censebatur.

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE PEKINI HABITAE

a

RR. PP. GALLIS S. I.

Mercurius in Sole viſus.

Tubo 15 pedum. 1753. d. 6 Maii

temp. corr.

mane h. 10. 6′. 10″. aut 12″. Mercurium ad Solis limbum videre mihi videor

h. 10. 9′. 3″. totus Mercurius in Sole

p. m. h. 5. 52′. 55″. Mercurius ad Solis limbum

Deinde nubeculae et puluis et magnus ventus. Nihil certi video.

Non ſine labore et damno oculorum diu expectaui ingreſſum Mercurii in diſcum Solis. Error magnus deprehenſus eſt in Ephemeridibus Pariſienſibus et Bononienſibus et in Tabulis Caſſinianis. Quia volui nimium multa obſeruare, parum certe et exacti obſeruaui.

Eclipſis Lunae 1754. d. 1. Octobr.

	temp. corr.
Recuperatio luminis -	6^h. 47′. 38″.
Extra vmbram totus Grimaldus	- 51. 20
totus Ariſtarchus	- 59. 30
totus Heraclides	7^h 7. 40
totus Tycho	- 12. 30

totus Copernicus	7^h	15.	15
totus Plato	–	18.	20
totus Manilius	–	27.	35
totus Menelaus	–	30.	35
totus Plinius	–	35.	31 dub.
totum Promont. acut.	–	40.	10
totum mare crifium	–	50.	2
dubitatur de fine Eclipfis	–	52′.	2″
Certe nulla Eclipfis	–	53.	0.

Poft finem Eclipfis merid. alt. Lunae fuperioris limbi 22°. 34′.

Diameter Lunae in Microm. 29′ 30″ et aliquot tert.

Eclipfis 6	digitor.	7^h.	21′.	7″.
3	—	—	38.	39.
2	—	—	42.	47.
1	—	—	47.	50.

Obferuationes Lyrae.

Anno 1754..

Menfis,	Dies,	in partibus micrometri	in gradibus	aberratio fixarum	altitudines correctae
Nou.	5.	88°.40′—30.	88°.39′.28″	+13″.36‴.	88°.39′.41″.36‴.
	6.	88. 40 — 28.	88. 39.30.	+13, 20.	88 39. 43. 20.
	9.	88. 40 — 29.	88. 39.29.	+12. 50.	88. 39. 41. 50.
	1.	1. 20 + 52.	1. 20.56.	—14. 13.	1. 20. 41. 27.
	4.	1. 20 + 53.	1. 20.57.	—13. 46.	1. 20. 43. 14.
	8.	1. 20 + 57.	1. 21. 1.	—13. 5.	1. 20. 47 55.
	10.	1. 20 + 54.	1. 20.58.	—12. 35.	1. 20. 45. 25.

Altitu-

Altitudines mediae	88°.39'.42''.15'''.	1.20.44.30.
refractio	1. 27.	1.27.
altitudines correctae a refract.	88. 39. 40. 48.	1.20.45.57.
Summa	0. 0. 26. 45.	
½ excess. altitud. quadr.	13. 22.	13.22.
excessus correctio	88. 39. 27. 26.	1.20.32.35.
declin. Lyrae Nou. an. 1754.	38. 34. 14. 16.	38.34.32.35.
altitud. aequatoris in domo nostra	50. 5. 13. 10.	39.54.46.51.
Nouembris 15. altitudo merid. limbi superioris ☉		31°. 9'.55''.
diameter ☉ in partibus micrometri		1783.

Observationes Capellae.

Ao. 1755.

Februarii	in partibus. micrometri	in gradibus.	aberratio.	altitudines correctae
12.	95°.50'—103.	95°.48'. 8''.	+7''.58'''.	95°.48'.15''.58'''.
13.	95. 50.—104.	95. 48. 7.	+8. 0.	95. 48. 15. 0.
15.	95. 50.—101.	95. 48. 10.	+8. 2.	95. 48. 18. 2.
7.	84. 10. +128.	84. 12. 18.	—7. 52.	84. 12. 10. 8.
14.	84. 10. +133.	84. 12. 23.	—8. 1.	84. 12. 14. 59.
16.	84. 10. +142.	84. 12. 33.	—8. 3.	84. 12. 24. 59.

Altitudines mediae	95.48.12.12.	84 12.16.40.	
refractio	6.34.	6.34.	
altitud. correctae a refract.	95.48.18.46.	84.12.10. 6.	
Summa		0. 0.28.52.	
½ excessus quadr.	14.26.	14.26.	
excessus correctio	95 48. 4.20.	84.11.55.40.	
declin. Capellae Febr. an. 1755.	45.43.21.11.	45.43.21.11.	
altit. aequ. in resid. nostra	50. 4.43. 9.	39.55.16.51.	altit. Poli.

Ooo 2 Cum

Cum altitudo Poli, deducta ex obseruationibus Capellae, maior sit 30''. 1'''. altitudine Poli, deducta ex obseruationibus Lyrae, necesse est, irrepsisse aliquem errorem, quem, quando erit otium, examinabo.

1755. diebus XXI. XXII. XXIV. XXVI. Decembris

Stellae polaris altit. superior	41°.55' 52''.	39°.56'.22''.30'''
inferior	37. 56. 53.	
differentia	3. 58. 59.	
dimidium	1. 59. 30.	
refractio Newton.	1. 4.	
altit. Poli	39°.55'.18''.30'''.	
refractio ex Ephem. Paris.	— 1'.10''.	
altit. Poli	39°.55'.12''.30''.	
medium	39. 55. 15. 30'''.	

Antiqua polaris sinica.

1756. 7. 9. 10. 11. 13.

altitudo superior	45°.12'.10''.	39°.56'.24''.
inferior	34. 40. 38.	
differentia	10. 31. 32.	
dimidium	5. 15, 46.	
refractio Newton.	1. 4.	
altitudo Poli	39. 55. 20.	
refractio ex Ephemer. Paris.	— 1. 10.	
altitudo Poli	39. 55. 14.	
medium	39. 55. 17.	

Con-

Conſtat, ſtellam, quam voco antiquam polarem ſinicam, fuiſſe apud Sinas polarem ab aliquot annis ante Chriſtum, vsque ad tempus, quo praecedenti ſaeculo P. P. miſſionarii Soc. Ieſu fuere admiſſi in tribunal aſtronomiae

Initio anni 1744. Ex catalogo P. Ignatii Koegler Soc. Ieſu
ſtellae aſc. recta 191°. 52′. 7″.
lat. b. – – 57. 2. 51.

Obſeruationes variae Pekini habitae An. 1756. temp. corr.

22. Ianuar B in virgine a Luna fuit occultata $1^h.32'14''$. ad auſtrum Galil. Emers. $2^h.50'$- in recta cum Menelao et Galilaeo.

10. Febr. Luna occultauit Aldebaran $0^h.36'.12$. poſt med. noctem, in recta cum centro criſium et ſpatio inter Plinium et Poſſidonium.

18. Febr. Luna occultauit η in virg. $9^h.52'.10'''$. ⅔ in recta cum Taruntio (forte prom. ſomnii) et Menel. nocte inter 8 et 9 Nouembr. Luna occultauit Aldebaran. Immers. $11^h.10'$. ad auſtrum limbi, qui eſt e regione Grimaldi. Emers. $12^h.28'.9''$. diſtantia a limbo, qui eſt e regione criſium ferme $10'$.

Tranſitus ☿ per Solem.

7. Noubr.	horr. corr.	
Dubium, vtrum ☿ ſit in limbo ☉	$9^h.29'.49''$.	mane tempus ſerenum
Centrum Mercurii in limbo ☉	– 30. 51.	
totus ☿ in ☉ – – –	– 31. 54.	exact. obſeru.

poſt merid.

☿ ad limbum ☉	$2^h.54'.25''$	tempus ſerenum exact. obſeru.
tot. ☿ exiuit e diſco ☉	— $56.\ 28$	

Ex variis obſeruationibus ante et poſt merid. factis tub. 7. ped. cum microm. exiſtimaui chordam ſemitae ☿ fuiſſe $32'.11''$ motum horarium in orbita propria $5'.57''$ in medio Eclipſis centrorum ☉ et ☿ diſtantia $1'.2''$. Per tempus nondum licuit in ordinem diſponere exacte omnes obſeruationes factas in tranſitu Mercurii.

Apparentes altitudines meridianae Stellarum aliquot.

1756.		
1^a Caudae Vrſae maioris	$72°.38'.9''.25'''$.	8 Iun. 1756 altitudo eſt media inter aliquot alias.
2^a Caudae ♑	$73°.40'$ + $168\frac{1}{2}$	part. micrometri 14 Iun. } mediae altitudines inter aliquot alias.
3^a η - -	$79.\ 20.$ + 168	part. 20 Iun.
Capellae -	$84.\ 10$ + 125	part. 22 Mart.
	$95.\ 50$ — 124	part $\frac{1}{2}$ inter 7 et 20 Mart. } mediae altitudines inter alias.
	$84.\ 10.$ + 136	part. 29. 24 Auguſt.
Aurigae humerus 22 Mart.	$85°.1'.57''.23'''$	altitudo haec eſt media, nonnullae aliae fuerunt obſeruatae, parua fuit differentia.
Lyra - -	$88°.38'.49''.26'''$.	8 April } ex aliis obſeruationibus non paucis ſelectae ſunt hae 2 tanquam mediae.
	$91.\ 21.\ 10.\ 30.$	4 April

ſub finem 7^{br}. et initio 8^{br}. plures aliae obſeruationes factae ſunt, ſed non referuntur: fuit aliqua mutatio in inſtrumento.

Algol

Algol - - 89°.55′.34″. 26. 27. 30. Decembr. 1755
90. 4. 25.

90° — 240 part. 19 Aug. } 1756.
90 — 240 part. $\frac{1}{2}$ 22 Aug }

Pes Andromedae ♉ 90°.10′ + 186 part.
88. 50. — 185 vel 184$\frac{3}{4}$ 30 Iul. 4. 8. 9. 10. 13 Aug.
88°.46′.28″.30‴. 30 Decbr. 1755

Perſei lateris lucida. 81°. — 139 part. 26 Aug.
81 — 139 -$\frac{1}{2}$ 25 Aug.
81 — 137. 24 Aug.
media 81° — 138 p.$\frac{1}{2}$

Cygni Cauda 85° 29′. 54″.30‴. 22 Aug.
94. 30. 5. 20. dub.

Caput Draconis ♉ 78°.24′. 9″ 34‴. 30 Mart.
78. 20 + 228 part.
78. 20 + 194
78. 20 + 194 part.$\frac{1}{2}$. 29. 30. Aug.

Lucida Humeri B in Vrſa minori 54°.50′ — 190 part.$\frac{1}{2}$
plures alias 16 Decembr.
17 Decembr.
20 Decembr. 1755
70°.33′1″ aut 2″

Arcturus - 70°.30′. + 168. part. 20 Iul.
70. 33 + 20 Iun.

Aldebaran 66° + 280 part. $\frac{1}{3}$ 28 Febr. nonnullae aliae obſeruationes huic fuere conformes anno 1755 menſis Decembr. 26 Spica. Sirius

Sirius -	$33^{\circ}\ 40'. + 110$ part. 26. Mart. 7. April	
ex alia obſeruatione	$40^{\circ}\ 12'. 57''$	
altitudo	$33^{\circ}. 40' + 114$ part.	
Rigel	$41^{\circ}. 35'. 35''. 54'''. 4$ Mart.	1755. 30 Decembr.
α in Orione	$51^{\circ}. 25'. 40''.$ 4 Mart. dub.	$41^{\circ}. 35'. 42''$

In obſeruatione ſtellarum adhibitum eſt inſtrumentum ped. $3\frac{1}{2}$ micrometro inſtructum, in micrometro vna reuolutio continet 100 partes $= 1'. 49''. 25'''$ pars quaelibet $= 1''. 5'''. 39^{IV}$.

Satellites Iouis

tub. 13 ped. horr. Correct. per altit. ☉ correſp.

mane	10 Ianuar.	$4^{h}. 16'. 43''$ Imm. 1′	in his 2 obſeru. dubium $7''$ aut $8'$
		$6.\ 5.\ 9$ Imm. 3′	
mane	17 Ianuar.	$6^{h}.\ 7'. 54''$ Imm. 1′	melius forte $6^{h}. 7'. 40''.$ dub.
mane	10 Febr.	$2^{h}. 44'. 39''\frac{1}{2}$ Imm. 2′	
mane	22 Febr.	$5^{h}. 47'. 31''$ Imm. 3′	
mane	25 Febr.	$4^{h}\ 28'. 53''$ Imm. 1′	
poſt merid.	26 Febr.	$10^{h}. 57'. 59''\frac{1}{3}$ Imm. 1′	
mane	4 Mart.	$2^{h}. 17'. 54''$ Imm. 2′	
mane	11 Mart.	$4^{h}. 52'. 49''$ Imm. 2′	$9^{h}. 47'. 24''$ Imm. tubo 20 ped.
poſt merid.	21 Mart.	$9^{h}. 46'. 46''$ Imm. 3′	
p. merid.	15 April.	$8^{h}\ 26'. 47''$ Emers 2	
p. merid.	22 April.	$11^{h}.\ 2'. 28''$ Em. 2′	
p. merid.	17 Maii	$7^{h}. 58'. 21''$ Em. 2′	
p. merid.	22 Iun.	$8^{h}. 51'.\ 8''$ Emers. 1′	dub.
p. merid.	25 Iun.	$10^{h}.\ 5'. 55''$ Emers. 2′	
p. merid.	8 Iun.	$7^{h}. 54'.\ 3''$ notaui Emers. 3′ tubo 20 ped. ſed propter diei claritatem dubiam habeo obſeruationem illam.	

Fig. 1.

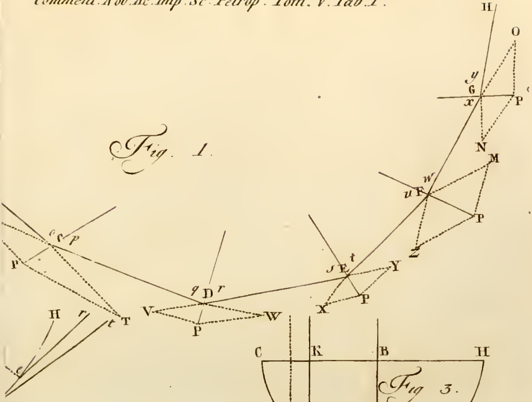


Fig. 3.

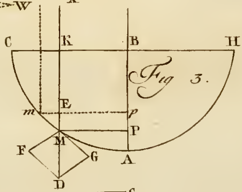


Fig. 4.

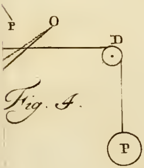
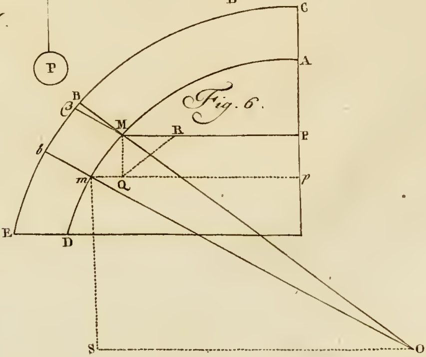


Fig. 6.



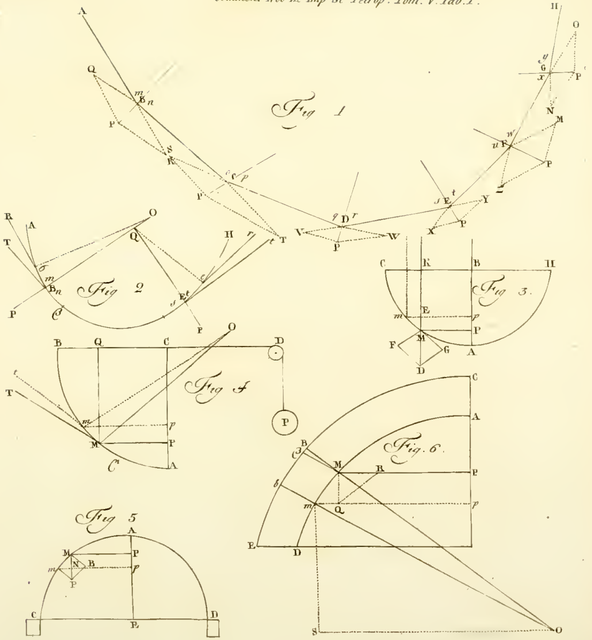


Fig 1
Fig 2
Fig 3.
Fig 4
Fig 5
Fig. 6.

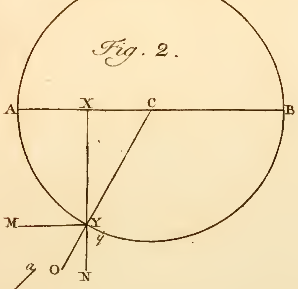


Fig. 2.

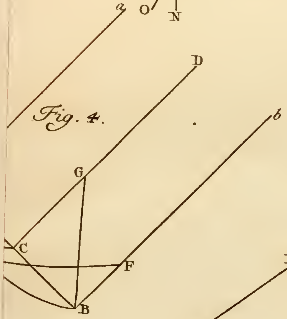


Fig. 4.

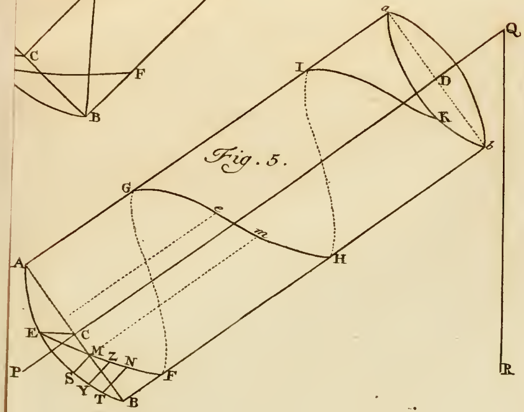


Fig. 5.

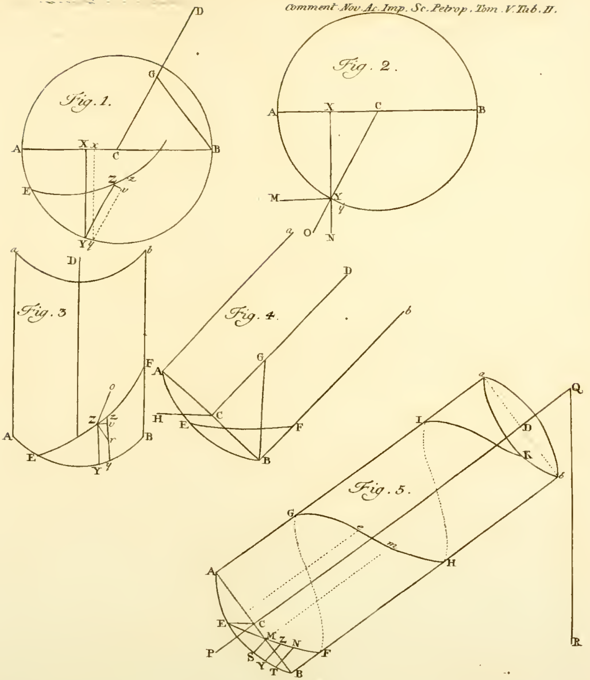


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4.
Fig. 5.

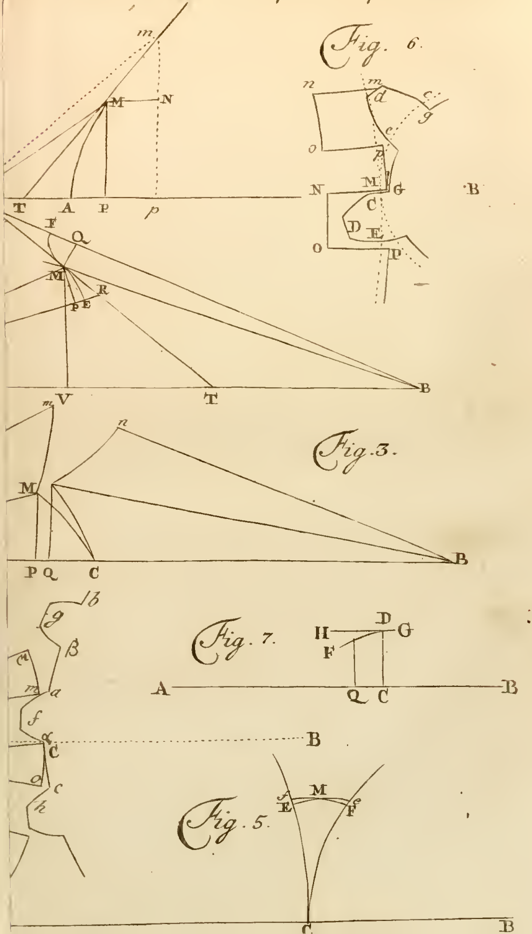


Fig. 6.
Fig. 3.
Fig. 7.
Fig. 5.

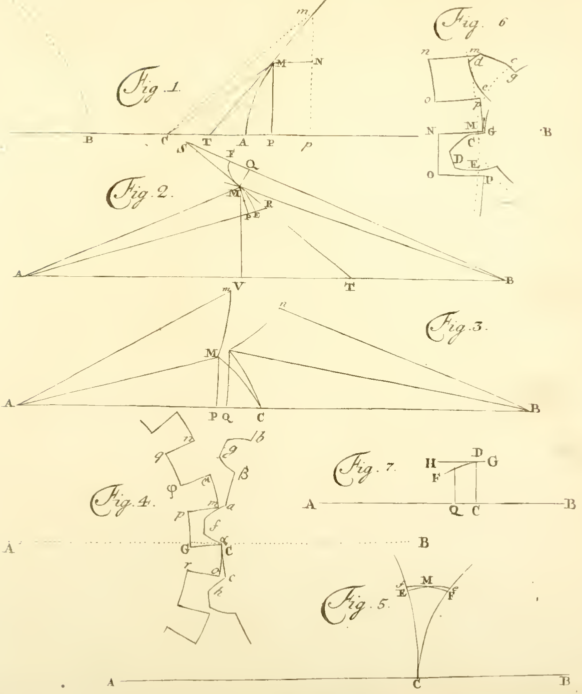


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7.

Fig. 1.

Alkekengi calyce profunde diviso fructu sicco.

Fig. 1.

s elliptiis foliis lanceolato-linearibus integerrimis.

Fig. 2.

Fig. 1.

Thlaspi siliculis ellipticis foliis lanceolato-linearibus integerrimis.

lina

Mustela zibellina

Григ. И. Плотцовъ.

Грид. И. Плотцовъ.

Ouis laticauda


us minor virgatus
mpestris gutturosa

Sciurus minor virgatus

Caprea campestris gutturosa

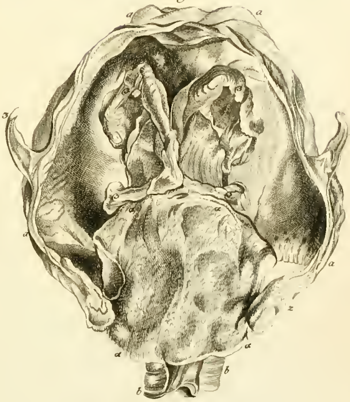
utturosae
eciduis.

Fig. 2.

Larynx Capreae campestris gutturosae cornibus nec ramosis nec deciduis.

Fig. 1.

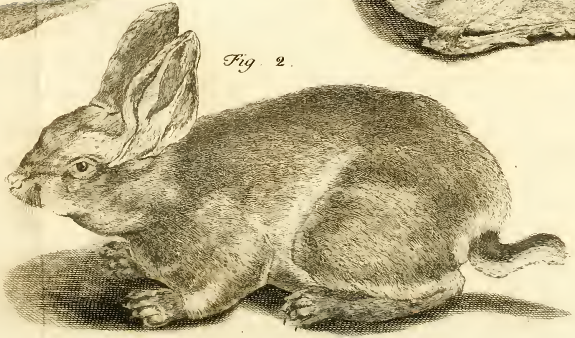
Fig. 2.



Cuniculus pumilio saliens

Fig. 1.

Fig. 2.



Cuniculus insigniter caudatus

Fig. 2.

Fig. 3.

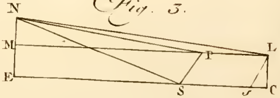


Fig. 5.

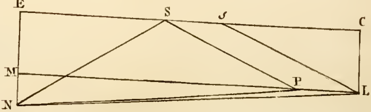


Fig. B.

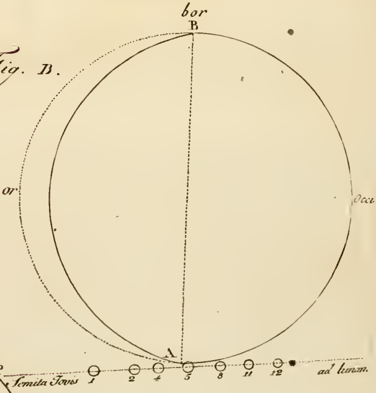


Fig. 1.

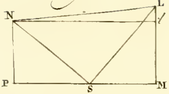


Fig. 2

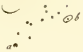


Fig. 3.

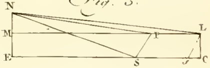


Fig 4.

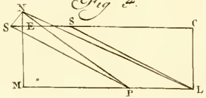


Fig 5

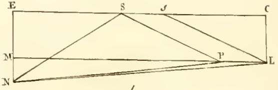


Fig. 6.

Fig. B.

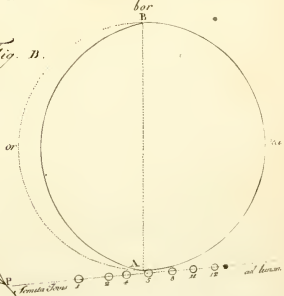
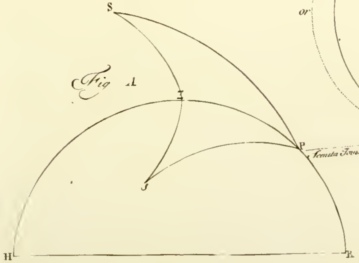


Fig. A.



Mus aquaticus Moschum redolens.