



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>







94-3-39

MED Rev. 5-1

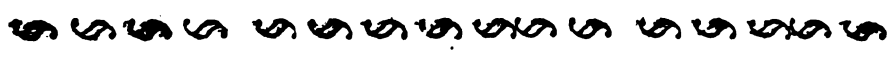
~~61-5-A-1~~

067.1
Ac 15m

NOVI
COMMENTARII
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOMVS IV.

ad Annum MDCCLII. et MDCCLIII.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLVIII.

THE
LIBRARY OF THE
MUSEUM OF MODERN ART
1000 MUSEUM AVENUE
NEW YORK, N. Y. 10028

S
M
R

S V M M A R I V M
DISSERTATIONVM
Q V A S C O N T I N E T
NOVORVM COMMENTARIORVM
T O M V S I V .



Dum quartum hoc *Novorum Com-
mentariorum* volumen tardius, quam
par est, in lucem prodit, nullam qui-
dem indigenis excusationem afferre te-
nemur, ut qui studii nostri in euulgan-
dis utilissimis libris probe gnari, pro-
cul dubio gratias habebunt Academiae,
quod, aliarum gentium morem imitata,
ante omnia Patriae consulere studet,
vernacula potius lingua, quam aliena,
in scriptis publici iuris faciendis utendo:
Exteris autem, si tardam debiti exso-
lutionem aegre ferent, et inprimis dis-

fertationum in hoc volumine contentarum auctoribus, si conquerentur, scripta sua inter manus nostras nouitatis delectamento priuari, nunciamus, editionem eorum, quae hoc excipient, voluminum sine mora processuram esse. Nunc enim, aucto operarum et prelorum numero, Academia vtrique fini prospexit: non deerit ciuibus, non deerit exteris. Sic grata agnoscens **PETRI MAGNI** et **OPTIMAE ELISABETAE** in se beneficia legibus a Conditore et Instauratrice sibi praescriptis, nunquam non satisfacere allaborabit.

MATHE-

MATHEMATICA.

In hac *Leonb. Eulerus* V. Cel. utramque facit paginam.
Dissertationem ordo et conspectus hic est :

F.

De Numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum p. 3.

Non frustra est, quod veteres Mathematici, ut ex scriptis *Euclidis* ac *Diophanti* liquet, summo studio numerorum indolem scrutati, proprietatibus eorum haud mediocriter delectati sunt. Praeterito etiam saeculo primi ordinis Geometrae plurimum studii in exploranda numerorum natura consumserunt, inter quos *Fermatius*, Senator Tolosanus, ita eminuit, ut eius sagacitatem etiam nunc nemo sit affecutus. Mos tunc inualuerat, veritates, quas quisque inaeffigasset, nude potius ad caeterorum ingenia exercenda, proponere, quam demonstrationes, docendi causa, indicare, quo factum est, ut sublimes *Fermatii* meditationes in hoc genere adhuc hodie magis miremur, quam cognoscamus, propterea quod post eius obitum scripta, quibus earum demonstrationes continebantur, temporis iniuria maximo huius scientiae damno interierunt. Praestantissimus itaque auctor huius dissertationis haud inutiliter operam suam collocare censendus est, dum huiusmodi perditas demonstrationes Fermatianas restaurare conatur, etiamsi nostro quidem aevo hoc studium,

a 3.

quod.



quod in numerorum natura inuestiganda consumitur, plane derelictum, atque adeo a plerisque spreum, videatur. Quamquam enim hoc quidem tempore Mathematici in cultura Analyseos sublimioris et partibus Matheseos applicatae, quae veteribus inaccessible fuerunt, potissimum elaborare solent, nulla tamen veritas prorsus sterilis et omni usu destituta videtur. Quin potius numerorum proprietates plerumque multo maiorem sagacitatem et ingenii vim postulant, quod vel ex eo colligere licet, quod in reliquis Matheseos partibus vix vlla cognoscatur veritas, cuius demonstratio non ante iam fuerit perspecta, cum contra plurimae habeantur numerorum proprietates, quarum veritatem adhuc sine demonstratione admittere cogimur, auctoritate potissimum *Fermatii* inducti, qui se eas demonstrasse palam est professus. Ad hoc genus referendae sunt plures insignes proprietates numerorum, qui sunt binorum quadratorum aggregata, quarum demonstrationes Cel. Auctor in hac dissertatione proponit. De his numeris, si quidem bina quadrata eos componentia fuerint inter se prima, seu communem diuisorem non admittant, id prorsus est singulare, quod alios diuisores non agnoscant, nisi qui ipsi eiusdem sint indolis, binorum scilicet quadratorum summae, cuius rei demonstratio haud parum ardua hic suppeditatur. Deinde cum omnes huius generis numeri, si fuerint primi, unitate minuti per quaternarium sint diuisibiles, siue in hac forma $4n + 1$ contineantur, memorabile est, vicissim omnes numeros primos huius formae $4n + 1$ simul esse summas duorum quadratorum, cuius demonstrationis autem se
 nondum

notandum competentem esse factum. Cels. auctor ingenue fatetur, etiam si eius veritatem extra dubium collocauerit, in quo insigne conspicitur specimen, etiam in mathematicis eiusmodi dari veritates, quas sine perfecta demonstratione credere cogimur. In sequenti volumine Commentariorum nostrorum plena eiusdem demonstratio apparebit, quae omnia, quae hinc deriuntur, penitus confirmabuntur. Hic ex ista proprietate egregiam deduxit methodum, eamque satis facilem, explorandi, utrum numerus huius formae $4n + 1$, quantumvis fuerit magnus, primus sit, nec ne? Totum negotium huc redit, ut exploretur, utrum talis numerus propositus in summam duorum quadratorum resolui queat, an minus? ubi tres casus sunt perpendendi. Primo, si numerus propositus nullo prorsus modo in duo quadrata sit resolubilis, certum est, eum non esse primum, sed duos ad minimum factores habere formae $4m - 1$; secundo, si unico modo in duo quadrata fuerit resolubilis, eaque sint prima inter se, hoc certum est indicium numerum propositum esse primum; tertio, si is plus vno modo in duo quadrata discerpi queat, necessario erit compositus, eiusque diuisores inde assignari possunt. Vulgo autem iudicium, utrum numerus propositus sit primus, nec ne? haud parum molestiae creare solet, si is centena millia superet. Ad hunc enim terminum vsque habentur tabulae numerorum primorum passim obviae, atque adeo finicis characteribus exaratae. Pro maioribus autem numeris adhuc alia via non patuit, nisi ut diuisio per omnes numeros primos vsque ad radicem quadratam numeri propositi tentetur.

pondus eadem celeritate attollitur, productum ex pondere in celeritatem, qua eleuatur, iustam exhibebit mensuram effectus cuiusque machinae. Iam vero hoc idem productum in omnibus machinis semper aequale est producto ex vi impellente in celeritatem, qua agit, vnde et hoc productum veram effectus, quem machina praestare valet, quantitatem suppeditat. Ex quo intelligitur, exiguam vim, dummodo satis celeriter agat, quantumuis magnum effectum producere posse. Neque hic obiectio valet, fieri forte posse, vt parua vis magno ponderis eleuando non sufficiat: notum enim est, quemadmodum quamuis machinam disponi conueniat, vt etiam a minima vi maximum onus superari queat; scilicet quo maius fuerit onus, id eo propius centro motus applicari oportet, quo eius motus tanto tardior euadat, quod vt-cunque machina ex simplicibus fuerit composita, semper fieri potest. Hinc ad effectum molae alatae a priori determinandum, singula alarum elementa considerari, et vis-venti ea impellens, quatenus circumactionem promouet, in celeritatem cuiusque elementi multiplicari debet, quo facto omnium horum productorum elementarium summa praebabit totum machinae effectum.

Ex hoc principio Auctor molarum alatarum effectum in genere definit, quaecunque sit alarum figura et dispositio, et quaecunque motus gyratorii celeritas, hincque deinceps methodo maximorum et minimorum cum formam alarum, tum vero potissimum motus gyratorii celeritatem inuestigat, vt effectus prodeat maxi-
mus

ims. Eidem fundamento innititur regula iam satis nota pro molis aquariis aliisque machinis, quae rota a flumine circumacta impelluntur, dum ita instrui solent, ut celeritas palarum sit tertia pars celeritatis fluminis. Verum in molis alatis, ubi actio venti profus est diuersa, praeter expectationem eiusmodi maximum elicitur, quod rationi aequae atque experientiae contrarium videtur. Doct enim calculus maximum effectum comparari, si superficies alarum ad directionem venti plane fuerit normalis, eaque celeritate infinita circumagantur: tum quidem vis venti impellens euanescit, quod tamen non obstat, quia per celeritatem infinitam multiplicata productum finitum praebet, quod ipsum calculus maius ostendit, quam si machina aliter instrueretur. Verum tamen certum est, talem dispositionem in praxi nullo modo locum habere posse, unde causam huius dissensus theoriae ab usu pratico accuratius inuestigari oportet, quae in eo posita reperitur, quod in Theoria quaedam assumuntur, quae in praxi obseruari nequeunt. Quod discrimen, si distincte fuerit perspectum, deinceps non amplius erit difficile, Theoriam ita ad praxin accommodare, ut perfectus consensus obtineatur. Ac primo quidem notandum est, in Theoria nullam frictionis rationem esse habitam, cuius quantum sit momentum in machina aliter instruenda mox videbimus. Deinde etiam, dum alae celerrime circumaguntur, crassitie sua insignem ab aëre resistantiam patiuntur, quae in Theoria penitus est neglecta. Denique in Theoria assumitur, motum machinae statim ab initio ita ad uniformitatem componi, ut vis impellens cum

onere superando in aequilibrium constituatur, quod autem in praxi eo tardius euenit, quo maiori opus fuerit celeritate, quae si adeo sit infinita, machina ad hunc statum, maximum effectum producentem, nunquam perueniet. His notatis ostendendum, si hae conditiones in praxi impleri possent, Theoriam nihil absurdi indicaturam, ita, ut intelligi queat, quo magis alarum inclinatio ad angulum rectum accedat, eaeque simul celerius circumagantur, eo maiorem effectum impetrari posse. Ne idea infiniti obruamur, ponamus, superficiem alarum cum venti directione facere angulum 89° , easque centies singulis minutis secundis circumagi debere: vim, autem totam a vento exceptam tantum ponderi vnus vnciae aequiuale, quae vero per tantam celeritatem multiplicata productum exhibeat, quod sit $= 1000$, cui simul effectus machinae aequabitur. Ad quem obtinendum, si onus superandum aequiualeat ponderi 10000 vnciarum, machina ita est disponenda, ut vis impellens vnus vnciae cum hoc tanto onere in aequilibrio constituatur, quod nihil habet absurdi. Tum machina actioni venti exposita tandem praedictum celeritatis gradum consequetur, atque effectum assignatum producet, etiamsi, antequam ad hanc celeritatem pertingat, effectus futurus sit minor, verum hoc interuallum in calculo pro nihilo reputatur. Hinc intelligere licet, si angulus inclinationis adhuc propius ad 90° augeatur, quo vis impellens magis diminueretur, ulterius aucta celeritate, fieri posse, ut adhuc maior effectus producat, qui adeo vsque ad 90° crescere queat, ubi certam quantitatem, eamque maximam, sit affecutus.

In-

Interim tamen ternae rationes ante allegatae impediunt, quominus haec ad praxin transferri possint. Imprimis autem frictio est impedimento, quae etsi plerumque instar oneris considerari potest, tamen eius resistantiam non uti oneris pro lubitu diminuere licet. Cum enim oneris resistantia diminuatur, dum id propius ad centrum motus applicatur, haec diminutio in frictione locum habere nequit, quae pro structura machinae semper ad certam distantiam a centro motus manet applicata; deinde similis fere ratio est illius resistantiae aeris, a crassitie alarum oriundae. Denique etiamsi hae resistantiae non obstarent, quo minus celeritas infinita efficeret, ut machina demum tempore elapso infinito, hoc est, nunquam, eam adipisceretur, effectumque expectatum produceret. Ob has causas Cel. Auctor praecipue in hoc elaborasse videtur, ut rationem frictionis in calculum induceret, qua cognita, dispositionem machinae ita determinavit, ut superata frictione maximus effectus produceretur, in quo iam nullum amplius incommodum praxi aduersus cernitur, sed potius egregius consensusprehenditur. Obseruat autem, frictionem tantam esse posse, ut ea sola a dato vento ne quidem superari, multo minus vllus effectus obtineri queat; vnde perspicitur, in hoc machinarum genere diminutionem frictionis maximi esse momenti, ita, ut ea parum minuta, multo maior effectus sit proditurus, qui, si frictio parumper esset maior, plane nullus esset futurus. Quare nullum est dubium, quin hinc maxima emolumenta in praxin sint redundatura.

III.

Elementa Doctrinae solidorum p. 109.

itemque

IV.

Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita p. 140.

Quanquam Stereometria inter disciplinas Matheseos elementares referri solet, plurimum tamen abest, quominus ea solide pertractata, atque, veluti Geometria plana, in systema certum redacta sit censenda. Cum enim in Geometria plana, post lineas et angulos, figurae potissimum rectilineae examinentur, earumque proprietates demonstrantur, quibus ob simplicitatem circulus adiungi solet, ita in Stereometria, iactis fundamentis de inclinatione planorum et angulis solidis, corpora hedris planis inclusa tractantur, eorumque proprietates evolui conveniret, ubi imprimis haec corpora in certas classes distribui oporteret, quibus porro ob simplicitatem globus cum cylindro et cono adiungi posset. Verum in elementis stereometricis nihil prorsus de divisione corporum in certas classes secundum hedrarum numerum reperitur: sed quaedam tantum species, veluti prismata, pyramides et corpora regularia dicta, praetermissis reliquis omnibus, sine ulla partitione et connexionione mutua proferuntur. Quod autem in Geometria

metria plana facillimum erat figuras rectilineas secundum
 laterum numerum, quippe cui numerus angulorum semper
 est aequalis, in classes digerere, id in Stereometria,
 si tantum ad corpora hedris planis inclusa attendamus,
 multo magis est arduum, cum numerus hedrarum solus
 ad hoc non sufficiat. Si enim ambitum horum corporum
 spectemus, ea non solum hedris terminantur, sed etiam
 angulis solidis, et binarum hedrarum concursibus, qui a
 Cel. Auctore, ob defectum aptioris et recepti nominis, *acies*
 vocantur; quarum rerum, quae non constanti quadam
 lege inter se connexae videntur, in corporum classibus consti-
 tuendis utique rationem haberi decet: propterea quod in cor-
 poribus, eodem hedrarum numero contentis, ingens diuer-
 sitas, ratione angulorum solidorum et hedrarum, qua indoles
 eorum vehementer variatur, locum habere possit. Ita octae-
 drum, prisma sexangulare, et pyramis super basi heptagona:
 extructa octo hedris includuntur, quis autem haec tam di-
 versa corpora vna eademque classe complecti vellet? Hinc
 Cel. Auctor tres praecipuos characteres ad corpora in
 classes distinguenda constituit, qui sunt 1^o numerus hedra-
 rum, 2^o numerus acierum, ac 3^o numerus angulorum
 solidorum. Qui haec attentius perpenderit, facile agnos-
 cet, ea ad indolem quorumvis corporum perspiciendam
 ita esse necessariam, ut iis neglectis elementa Stereometriae
 nullo modo solide ac scientificae tradi queant, vnde mi-
 rum est, neminem adhuc de hisce principiis Stereometriae
 constituendis cogitasse, hancque disciplinam ultra terminos
 Euclideos vix quidquam esse promotam, cum tan-ten
 omnes Geometrae in hoc studio plurimum fuerint oc-
 cupati.

cupati. Verum evolutio memoratorum characterum multo difficilior est, quam primo intuitu videtur. Deprehenduntur enim, certa quadam lege inter se connecti, cuius ratio ita abscondita videtur, vt Auctor eam primum sine demonstratione, soli inductioni innixus, attulerit, ac postmodum demum post plura tentamina demonstrationis compos sit factus, quam in schediamento subnexo seorsim exposuit. Veritas autem haec, demonstratu tam difficilis, in hoc consistit, vt in omni corpore hedris planis incluso aggregatum ex numero hedrarum et numero angulorum solidorum semper binario excedat numerum acierum, quae propositio analogae est ei, qua in Geometria plana numerus angulorum cuiusque figurae rectilineae numero laterum aequalis pronuntiatur. Atque vt haec fundamentum cognitionis figurarum continet, ita illa in Stereometria prima solidae cognitionis principia complecti est putanda. Statim ergo atque in corpore trium memoratorum characterum bini fuerint cogniti, tertius inde facillime innotescit. Si enim numerus angulorum solidorum fuerit = S , numerus acierum = A , et numerus hedrarum = H , semper habetur $S + H = A + 2$, hincque vel $S = A + 2 - H$, vel $H = A + 2 - S$, vel $A = S + H - 2$, quae relationis simplicitas ob demonstrationis difficultatem magis miranda videtur. Deinde cum figurarum planarum haec sit palmaria proprietas, quod omnes anguli iunctim sumti aequales sint bis tot rebus, quot sunt anguli, demtis quatuor: ita etiam circa solida hedris planis inclusa Auctor quasi similem proprietatem demonstrat, quae circa angulos singularum hedrarum versatur, quorum

corum omnium summa semper aequalis est quater tot angulis rectis, quot in corpore habentur anguli solidi, demtis octo. Plures alias praeterea in medium allatas conspicimus insignes corporum talium proprietates ex numero laterum hedrarum petitas, prout eae vel sunt triangulae, vel quadrilaterae, vel pentagonae, etc. unde Cael. Auctor concludit ex meris hedris hexagonis, vel plurium angulorum, nullum solidum construi posse. Ex his stabilitis principiis fluunt tandem classes et genera solidorum, eorumque praecipuae proprietates, quae campum amplissimum aperiunt, hanc doctrinam vberius excolendi, siquidem hinc completum Stereometriae systema condi posset.

V.

De Motu Corporum Coelestium p. 161.

Quando motus cuiuspiam corporis coelestis dicitur siue regularis, siue irregularis, ante omnia notandum, has voces ad cognitionem nostram ita referri, vt si motus ille opinioni nostrae consentaneus deprehendatur, regularis, contra vero irregularis iudicetur. Ita veteribus fortasse motus corporum coelestium irregulares sunt visi, statim atque animaduerterunt, ea non in circulis ferri, siquidem eorum opinio ad solum motum circularem fuerat adstricta. Hodie autem, postquam *Kepleri* sententia de orbitis ellipticis a *Newtono* firmissimis argumentis mechanicis est munita, regulae Keplerinae ita animos nostros

stros occupauerint, ut, si quae corpora coelestia secundum eas exactissime mouerentur, eorum motus a nobis maxime regularis iudicaretur, neque iam a nobis aliae irregularitates agnoscantur, nisi ubi motus ab illis regulis deuiare obseruatur. Eos scilicet motus in coelo pro regularibus habemus, qui fiunt in sectionibus conicis, ita arcae circa alterum focum descriptae sunt temporibus proportionales, a qua lege quidquid aberrauerit, ad irregularitates referre solemus, quae eo censentur maiores, quo maior fuerit ista aberratio. Primum quidem Planetas principales perfecte secundum hanc legem circa Solem moueri sunt visi, atque adeo *Streetius* in Tabulis Carolinis eorum Aphelia immota statuit; ex quo etiam nunc in eorum motibus alia irregularitas admitti non solet, nisi quatenus a regulis *Kepleri* discedunt. In Luna autem insignis ab his regulis aberratio est obseruata, cuius motus proinde iure ab Astronomis pro maxime irregulari habetur. Deinde vero etiam in motu Saturni haud leues aberrationes sunt animaduersae, nomine irregularitatum satis superque notae. Tandem vero compertum est, nullum plane inter corpora coelestia dari, cuius motus regulis *Kepleri* perfecte sit conformis, quod vel ex motu Apheliorum et nodorum, quae puncta ex sententia *Kepleri* quiescere debebant, in optimis autem Tabulis Astronomicis mobilia statuuntur, manifestum est; Ex quo suspicari licet, Cometae motus, nisi forte prope insignes Planetas praetergrediantur, solos esse regulares. Quando autem omnis irregularitas ita est comparata, ut per motum lineae absidum exacte representari possit, vix ea sentitur,
dura

dum tabulae motum referentes ab illis regulis non recedere videntur: fin autem, vti in Luna fit, excentricitas praeterea variabilis assumi, atque etiam aequatio alijs correctionibus indiget, irregularitas maior adesse censetur. Nisi igitur istae irregularitates admodum fuerint enormes, eae commodissime ita definiuntur, vt motu quodam regulari a vero minime discrepante, tanquam fundamento constituto, aberrationes ad continuam mutationem, tam lineas absidum, quam excentricitatis, ipsiusque orbitae, reuocentur. Hoc ergo institutum Cel. Auctor, postquam iam alio modo motum Lunae, perturbationesque Saturni, inuestigasset, in hac dissertatione omni studio prosequitur, cum id ad calculum Astronomicum maxime accommodatum videatur. Cum autem irregularitates motui sese immisceant, simulac vires sollicitantes non ad punctum fixum diriguntur, neque quadratis distantiarum ab eo fuerint reciproce proportionales, inuestigationem ita instituit, vt praeter talem vim quadrato distantiae reciproce proportionalem, vnde motus omnino regularis esset proditurus, Planetam insuper ab aliis quibuscunque viribus sollicitari concipiat. Ad quarum effectum cognoscendum primo examinat casum, quo planeta hactenus motu regulari latus subito a vi externa ictum reciperet, eoque deinceps aliam orbitam describere adigeretur, quae quantum a pristina cum ratione positionis lineae absidum, tum excentricitatis, tum vero etiam ratione axis, seu parametri, sit discrepatura, sedulo exquirat. Deinde hunc ictum insinuat paruum facit, singulisque momentis reperi vtunque concipit, quandoquidem perturbationes a viribus quibuscunque

que oriundas tanquam ictus momentaneos considerare licet. Hoc modo Planetæ motus ita ad orbitam variabilem reducetur, ut primo situs lineæ absidum, tum excentricitas, ac tertio latus rectum, fiant quantitates variabiles, quas Auctor ex datis viribus perturbantibus sollicitè determinat, indeque ad quoduis tempus anomaliam veram isti variabilitati consentaneam deriuat, unde tandem Planetæ motus perfecte innotescit. Haec autem præcepta generalia tradidisse Auctori sufficit, cum eorum applicatio ad quempiam casum nimis prolixos calculos postulare, sine quibus nullas plane huiusmodi investigationes suscipere licet. Ceterum ex iis, quæ de perturbationibus Saturni, motu Lunæ, et anomaliis motus Terræ, est commentatus, abunde perspicitur, quemadmodum hæc, præcepta per calculum exequi, atque ad usum transferri oporteat.

PHYSICO-MATHEMATICA.

Primo loco occurrunt:

Georgii Wolfgangi Krafftii Resolutiones
 Problematum ad Architecturam ciuilem
 spectantium p. 199.

Quamuis Architectura ciuilis, profundioris Matheseos subsidio vix indigere plurimis videatur, atque huius applicatio ad problemata architecturam spectantia com-

communiter negligatur, falli tamen, qui ita iudicant, re ipsa saepius iam ostensum est. Sunt autem problemata ista Architectonica, a sublimiori Mathesi pendentia, imprimis quidem ea, quae aedificiorum firmitatem concernunt. Non tamen penitus excludenda sunt, quae venustatem spectant, quanquam fateri fas sit, minorem esse Matheseos in posterioribus, quam in prioribus, usum. Vtriusque generis problemata tractat Clariss. Auctor in hac dissertatione, quae et plurimos aliorum errores corrigit, et plura hactenus ab aliis non soluta problemata comprehendit.

Initium ducit Auctor a diligentiori concaemerationum architectonicarum, quas fornices vocant, consideratione. Supponit, vti fecerunt Auctorum architectonicorum optimi quivis, venustatem atque commoditatem dimensionis Geometricae postulare, ut cunei omnes, ex quibus fornix constat, ita parentur, ut lecti eorum singuli, seu rectae, secundum quas sibi incumbunt cunei, ad medium fornices punctum, tanquam ad centrum, convergant. Calculo tum inquit, quanta in fornice, hac ratione constructo, sit vis cuneorum respectiva, quacum quivis eorum in plano, cui incumbit, versus fornices centrum descendere nititur. Quoniam autem, ex mente Auctoris, requirit fornices firmitas, ut nixus hic, quem cuneus quivis exercet, vbius sit aequalis, deducit exinde, dari non posse fornices, debita firmitate praeditum, cuius cunei omnes essent aequales mole, ac idem haberent pondus absolutum, vnde porro concludit, inaequalem

qualem fornicis cuiusuis in diuersis locis crassitiem neces-
 sario admittendam esse, atque, si debita detur cuneis vbi-
 vis longitudo, secundum curuae cuiusuis ductum, fir-
 mum atque stabilem erigere fornicem, in potestate esse.
 Ansum haec praebent Auctori, corrigendi errorem a
Serlio, Durero, Hartmanno commissum, qui quippe solos
 ellipticos arcus fornicibus construendis aptos iudicarunt,
 ad venustatem tamen potius forsitan, quam ad stabilitatem
 fornicis respicientes. Neque minus falli ostendit Clariss.
 Auctor *Gregorium, Coupletum, Polbemiun*, qui secundum
 catenariae ductum contrui posse fornicem, vbiuis aequae
 crassum, et aequalis vbiuis ponderis cuneorum respo-
 ctiui, pronunciarunt. Non tamen negat, constru-
 posse, si catenaria alia circumdetur curua sibi parallela,
 fornicem vbiuis aequae crassum, ac perfecte stabilem,
 quamuis enim in fornice eiusmodi partium grauitas respo-
 ctiua aequalis reddi omnino nequeat, fit tamen firmus
 atque stabilis fornix eiusmodi, quoniam cuneus quiuus su-
 perior tanta vi sursum vrgetur, quanta sibi subiectum
 premit, vt primus rite ostendit *Iac. Bernoullius*. Cum
 itaque secundum quamcunque libuerit curuam construere
 fornicem firmum liceat, liberum erit Architecto, eligere
 eam, quam alio respectu optimam iudicauerit. Praecipue
 igitur ad venustatem respiciendum est. Pendere autem
 videtur haec fornicum pulchritudo a duplici potissimum
 fundamento. Inuenustus namque partim est fornix, cuius
 partes aut inter se, aut cum fulcris, quibus imponitur,
 sensibilem includunt anguluna, siue poplitem, prouti loqui-
 amant Architecturae periti, partim is, cuius partes su-
 bita

bito et multum curvaturam immutant: haec nempe subita curvaturae mutatio animum spectatoris magnopere laedere solet. Reicit hac de causa, Auctor, curvam, quam ut fornicibus aptam commendat, ac delineare docent Architecti, quam post *la Hireum*, concinniori tamen methodo, parabolam esse ostendit. Meliores propterea censet fornicibus construendis arcus, aut semicirculares, aut si erigendi sint fornices depressi, semi-ellipticos: hi enim poplite non solum carent, sed et alteri venustatis requisito omnino satisfaciunt. Effugiunt autem Architecti ellipticorum fornicum exaedificationem, quia harum curvarum descriptionem iusto molestiorem existimant, unde ad arcus circulares confugerè solent, quos ita inter se combinare laborant, ut oculo gratam figuram ellipticas similem, quam ovalem vocant, componant. Desineandi eiusmodi fornices methodos suppeditat varias *Serlius*, optimam *Blondelius*, cuius tamen solutio hoc laborat vitio, quod solam fornicis latitudinem datam supponat, et, si praeterea detur quoque altitudo, ea inutilis evadat. Emendat hunc defectum Auctor, ac modum, ex tribus circuli arcibus componendi ovalem aspectui gratam, ac fornicis, cuius datur, tam latitudo, quam altitudo, aptam, docet, infelicesque *Pitoti* in hoc negotio consumptos labores emendat. Quoniam vero Auctoris solutio necessario requirit, ut arcus circulares, sibi in vicem contigui, ex quibus componitur fornix, diversis describantur radiis, timendumque hinc sit, ne curvaturae subita mutatio, ad spectum laedat, quid observandam sit, ut radiorum simulque curvaturarum differentia fiat minima, quae esse potest, inquirat.

Eadem

Eadem haec principia postea adplicando ad turrium arcuata rotunda fastigia, quomodo eleganter delineari haec queant, ostendit.

Spectant haecenus proposita ad casum, ubi fornix imponendus est pilis verticalibus, atque aequalibus; occurrunt autem in Architectura casus, ubi fornices constituendi sunt obliqui, quos *arcs rampants Galli* vocare solent. Errasse *Blondellum*, qui ad casum istum arcuum circularium combinationem omnino inutilem esse; existimavit, re ipsa ostendit Clariss. Auctor. Postquam nempe primum, quomodo ellipses fornicibus eiusmodi aptae inveniendae sint, docuit, quomodo ex arcu circulari duplici fornix constituitur poplite carens et venustus, ostendit, siue pilae, quibus fornix incumbit, non sint verticales, sed obliquae, siue sint verticales, at inaequales.

Transit tum Auctor ad tectorum rectilinearum considerationem, ac primum ostendit, quod alia iam ratione inuenerat *Coupletus*, siue tectum sit altius, siue depressius, aequaliter premi tectorum cantheria, ab impositis sibi tegulis, maius tamen esse in tectis altioribus fracturae periculum, quoniam, ob vectem longiorem, maiori momento agit haec pressio in iis, quam in depressioribus. Perhibuerat porro *Coupletus*, minorem esse tectorum altiorum impulsum lateralem, ast falli ipsum demonstrat Auctor, probans, tectum altius maiori semper vi premere extrorsum, quam depressius. Pertinet huc quoque quaestio, de tectis, *Mansardicis* dictis, quae

quae ita construere iubent firmitatis regulae , vt ipsa se teneant in aequilibrio , cuius problematis , post *Coupletum* aliam Auctor solutionem exhibet , lectori aequo ac intelligenti , vtra alteri praeferenda sit , diiudicandum relinquens. Plura de hac eleganti et in praxi Architectonica valde vtili dissertatione dicere superuacaneum foret. Notamus errorem operarum , dum tecta Mansardica in dissertatione Krafftiana p. 232. *Marsardica* fuerunt appellata.

Quae sequuntur commentationes sunt *Georgii Guilielmi Richmanni* , V. Cl. quas ipse typis paratas Academiae exhibuit , postumae quidem , sed non tales , in quibus vltima Auctoris lima desideraretur. Sunt autem sequentes :

II.

De virtute Magnetica absque Magnete
communicata Experimenta

p. 235.

Occasionem ad haec experimenta instituenda suppeditavit vir summe reuerendus atque doctissimus *Daniel Dumaresque* , SS. Theol. D. et Ecclesiae Anglicanae , quae Petropoli colligitur , Pastor meritissimus , qui vt Musis , quae et ipsum amant , fauentissimus est , solet subinde libros novos ex Anglia ad se missos , noua inuenta etiam ex Patria ad se perscripta , cum Academicis
d com-

communicare: Hæc humanitate vsus est inter caeteros
b. Richmannus, qui postquam de arte, magnetes artifi-
 ciales conficiendi, atque de experimentis circa hanc rem
 in Anglia institutis, ex scriptis et litteris ad doctissimum
Dumaresquium perlatis, certior fuisset factus, mox occa-
 sionem hanc instituendarum novarum disquisitionum auide
 arripuit. Verum fateor, doctrina hæc post fata viri
 Clarissimi, ab aliis multum iam exulta est, et ad exi-
 mium perfectionis gradum producta; non tamen existi-
 mandum hos aliorum labores, inutilia reddidisse, quae
 Academia hic publicae luci exponit *Richmanni* experi-
 menta. Plurima enim ab aliis non novata in hac dis-
 fertatione occurrunt. Primo statim experimento describit
 modum, quo duplo maiorem, ac *Michelius*, vis magne-
 ticae gradum laminae chalybeae impressit. Habet tum
 aliqua memoratu non indigna, circa destructionem vis
 magneticae, eiusque, postquam destructa fuit, novam
 reproductionem. Tradit methodum a nemine, quantum
 scimus, observatam, magneticam vim insigniter augendi.
 Namque fulcra ferrea adhibet, quibus laminam, magne-
 tica vi imbuendam imponit. Hoc ignorasse Clariss. *Mi-
 chelius* censendus est, quia nullam huius rei mentionem
 iniecit. Finem denique imponit dissertationi experimentis
 quibusdam, circa attractionem laminarum artificiali ma-
 gnetismo imbutarum, et augmentum huius vis indictis
 laminis, quae Physicis non ingrata futura existimamus.

III.

Inquisitio in legem decrementi et incrementi caloris solidorum in aere.

P. 241.

De vi maiori aut minori corporum calorem retinendi, aut ipsum assumendi, per experimenta diligentiora exploranda, vix cogitasse videntur Physici ante Richmannum nostrum, unde mirum non est, accidisse quibusdam, quod raro evitabit, qui sepositis experiētiis, solorum ratiociniorum ope ad naturae mysteria penetrare conatur, ut nempe in erroneas inciderint hypotheses. Differt ista quam loquimur vis omnino ab ea, qua corpora diversa aut maioris, aut minoris, caloris gradus capacia dicuntur. Si enim de posteriori quaestio est, maximi, quos recipere possunt varia corpora, caloris gradus, inter se comparantur, nulla habita temporum quibus acquirere aut perdere possunt hos calores, ratione; at, si de priori sermo est, quaeritur, quodnam corpus similibus circumstantiis suppositis, dato tempore maiorem caloris gradum acquirat, aut perdat altero, aut quodnam corpus eundem caloris gradum maiori, quodnam minori temporis intervallo, vel acquirat, vel perdat. Ostendit alibi Nov. Comm. Tom. III. P. 312. seq. Auctor, falso perhiberi a quibusdam, proprietatem hanc corporum, de qua loquimur, sequi densitatem rationem, ita ut corpus densius, difficilius, rarius, facilius, calore aut priuētur, aut imbuatur. Deprehendit enim Mercurium, fluidum

fluidum omnium densissimum , inter fluida crassiora calori esse obedientissimum , unde et optimo consilio factum est , ut ipsum pro construendis Thermometris eligerint recentiores. Solida iam sub examen vocare sibi proposuit Auctor , atque summa , qua potuit , solertia experimenta , quae huc pertinent , instituit. Non describimus methodum , qua in instituendis ipsis , usus est. Id enim paucis fieri non potest , melioremque , quam hic dare valemus , ex scripti ipsius lectione , ideam polliceri sibi possunt lectores. Conspirant autem omnia a Viro Clarissimo instituta atque descripta experimenta , ad probandum , neque a densitate , neque a cohaerentia absoluta , neque a duritie corporum , pendere hanc proprietatem , qua calorem vel maiori , vel minori pertinacia retinent , aut auiditate assumunt , legem autem , quam hic sequitur natura , penitus adhuc ignotam esse. Indigemus itaque adhuc plurimis in hanc rem institutis experimentis , antequam sufficientem huius Phaenomeni cognitionem sperare queamus. Quanquam autem id solum egerit Clarissimus Collega , ut doceret , ignorare nos adhuc quandam ex praecipuis actionis cao is legibus : nihilominus obstrictos se ipsi fatebuntur naturae scrutatores. Ab erroribus enim se tueri difficillimum est , si cognitum creditur , quod penitus ignoratur.

Continet haec Clariss. *Richmanni* Dissertatio aliam adhuc disquisitionem , ad scopum scriptionis immediate quidem non spectantem , ast dignam , cuius mentionem quoque iniiciamus. Obseruarunt iam ante illum Physicorum aliqui , aquam in phiala contentam , ebullienti aquae immerfam

mersam, valide quidem incallescere, sed perducì eo nunquam posse, ut et ipsa ebulliat. Sponte se hic offerente occasione, exactius hanc rem Auctor rimatus est, atque inuenit, viz ynquam vltra gradum 205 ascendere Thermometrum Fahrenheitianum, si immergatur aquae, vase metallico, quod vndique maiori ebullientis aquae copia cinctum est, contentae; quod tamen Thermometrum, ebullienti aquae immediate immersum nunquam non ad gradum 212 ascendit. Suspiciari quis posset, causam huius Phaenomeni latere forsan in eo, quod aqua non capax quidem sit caloris eius, qui 212 gradui Thermometri Fahrenheitiani respondet, ast quod superfluis ignis, argentum viuum, quod maiorem, quam aqua recipere potest calorem, intret, ut sic Mercurius maiorem obtineat aqua ambiente calorem, atque ad gradum 212 ascendere cogatur. Sed falsam esse hanc hypothesin ostendit Auctor, experimento quo docet, oleum loco aquae vase metallico, ab ebulliente aqua circumdato, infusum, quanquam itidem maioris, quam aqua, caloris capax sit, nunquam tamen vltro gradum 205 incallescere. Neque ratio inde petenda est, quod vas aquam continens, dum experimenta haec instituuntur, non totum in ebulliente aqua submersum esse solet, sed aliqua sui parte ex ipsa prominet. Expertus enim est Clariss. Auctor, etiamsi vas penitus aqua ebulliente vltra horam obiectum fuerit, contentam nihominus vase hoc aquam, nunquam vltra gradum 205 incaluisse, ut itaque concludendum sit, latere etiam hic naturae arcanum quoddam, cuius causam omnino ad huc ignoramus.

Tentamen, solutionem in diuersa temperie ad mensuram reducendi.

p. 270.

Notissimum est, dum salia soluantur ab aqua, velocius hoc fieri, si fluidum soluens maiorem, tardius, si minorem possideat caloris gradum, nondum tamen hactenus peruentum est ad regulam, quam natura hic sequitur, et cuius ope, quantum solutionis increseat celeritas, crescente aquae soluentis calore, determinari potest, quamuis probabile videatur, esse velocitates solutionum, in ratione celeritatum particularum soluentis a calore agitatarum, siue in ipsa calorum ratione. Cum vero a priori, ut vocant, regulae huius veritas neququam cum certitudine probari queat, ad experimenta properandum esse iudicauit Auctor. Confici itaque curauit cubulos ex sale gemmae, quantum fieri potuit, exacte aequales, quorum alterum in temperie 42, alterum in temperie 84 graduum Thermometri Fahrenheitiani solutioni permisit, atque simul, quanta cuiusuis pars dato tempore soluta sit, ope librae mobilissimae, accurate annotauit. Inuenit, esse solutionum celeritates, sub temperiebus 42 et 84 graduum, quam proxime, uti 1 ad 2, quapropter, pro hoc casu, solutionum velocitates exacte fere sunt in ratione graduum Thermometri Fahrenheitiani, qui temperiebus fluidi soluentis, respondent. Quodsi itaque

que, de quo tamen nondum constat, idem obtineret, quod ad caeteros quoque Thermometri huius gradus, omnino scala Thermometri Fahrenheitiani insigni prae reliquis gauderet praerogativa, atque mirandum valde foret, absque consilio Thermometrum hoc ita esse constructum.

V.

Tentamen rationem caloris respectivam lentibus et Thermometris definiendi.

p. 277.

Constat inter Physicos, datam quandam Mercurii, aut fluidi cuiusdam alterius massam, si augeatur ipsius calor, in maius volumen extendi; neque minus certum est, maiorem caloris gradum maius quoque voluminis augmentum producere. Nondum autem hinc elucet, an augmentum hoc voluminis in eadem prorsus ratione procedat, uti caloris augmentum, ut nempe duplum v. g. caloris incrementum, duplum quoque producat expansionis incrementum, an minus. Dubitarunt ergo non sine ratione Physicorum plerique, an Thermometra nostra ipsa caloris incrementa mensurare apta sint. Per se enim patet, exhibere haec instrumenta immediate, non nisi voluminis Mercurii, Thermometro inclusi, incrementa, quae, an caloris incrementis sint proportionalia, iure dubitatur. Dantur nempe argumenta, quae contrarium indicare non obscure videntur. Possident sine dubio Mercurii

curii particulae vim quandam ipsas ad vnionem perpetuo sollicitantem, quam calor, dum extenditur Mercurius, superare debet. Admodum autem probabile aliisque naturae legibus analogum videtur, vim istam, quo magis dilatatur Mercurius, eo reddi minorem, ita vt in Mercurio multum iam dilatato, idem caloris incrementum de nouo accedens, minorem iam inueniens resistantiam, maiorem producere debeat effectum, quam in Mercurio parum expanso operari valet. Tentauit Clariss. Auctor, rem hanc experimentorum ope, quae lapidis instar lydii sunt in Physicis, in lucem collocare, et non solum, an vere dilatationis augmenta in maiori crescant ratione, ac caloris incrementa, determinare, sed et in ipsam regulam, cuius ope ex dilatationis augmento, augmentum caloris, et vice versa, inueniri potest, inquirere. Res haec eo diligentiore perquisitione digna iudicanda est, quo detecta tandem hac regula ex datis Thermometri gradibus, ipsa calorum incrementa, seu potius ratio horum incrementorum, determinari poterunt. Opus erat ad instituenda haec experimenta, methodo, diuersos caloris gradus, cognitae ad se inuicem rationis, producendi, quod feliciter Auctor obtinuit, ope lentium conuexarum, quae cylindros radiorum solarium in conum colligunt, vnde post eas, in diuersis distantiiis calores inuersam quadratorum distantiarum a foco rationem, sequuntur. Exposuit conis istis radios, Thermometra perfecte concordantia et aequaliter mobilia, et quanta fuerint aequalibus temporibus dilatationis Mercurii in vtroque incrementa, diligenter annotauit. Ex his postea obseruationibus

tionibus scopum suum attingere laboravit, ac inuenit quidem, in eo, quod dilatationis incrementa in maiori ratione crescant, quam incrementa caloris, non abludere penitus experientiam a Theoria, ast ad legem eruendam, haec experimenta nondum sufficere. Pollicetur itaque sub finem, se laboraturum, ut nouis experimentis quibus Thermometra amplioris scalae adhibere volebat, legem hanc tandem eruat: sed infelix atque improuisa mors Collegae desideratissimi alius hunc, in quo laborent, campura reliquit.

VI.

De Indice Electricitatis et eius vsu in definiendis artificialis et naturalis Electricitatis Phaenomenis p. 301.

Differtationem hanc sermoni Academico die VI. Septembris 1753 in solemnium Academiae conuentu habendo destinauerat Cel. Auctor: at fato praeuentus, non habuit. Quare cum, quod alias fieri solet, singulariter typis excusa non sit, hic ei locum assignauimus, demittis, quae characterem sermonis constituebant, et huic loco minus apta videbantur. Hoc opusculum coronidem perscrutationibus Physicis Richmannianis imponit. Haec meta stadii ab ipso decursi. Hic exequialis cantus, quo,olorum instar, mortem sibi ipsi praesagire visus est. *Fortitudinem quandam, dixit, (*) et in re ancipiti audaciam*
e. nouis-

(*) p. 335 huius dissertationis.

nouissimis his temporibus Physicis patere. Sed ipsius da. nno p. x. t. u. i. t. Primum de fulmine auertendo cogitabatur. Inde ansam arripuit noster, vt convenientiam inter Electricitatem naturalem et artificialem magis simul indagaret. Apparatus, quo utebatur, in ipsa hac dissertatione descriptus est. Fulmen ita attrahens, non auertens, monebatur quidem a plurimis, vt caute procederet. Sed ille fortitudinem suam Physicam eminenti gradu possidebat, periculum sibi non obuersari ratus, quoad index non maiorem Electricitatis gradum monstraret, quam ipsa machina electrica producere possit. Ast factum est, vt repente terribile fulmen oriretur, antequam noster, qui indici suo adstabat, violentiam eius observare potuisset. Ita periit eheu! infelici suo fato Richmannus, Physicos suo exemplo docens, quanta cautione opus sit in experimentis huius indolis sine periculo capiendis. Iam ad ipsam dissertationem procedimus.

Primus procul dubio Physicorum est Clariss. Richmannus, qui de construendo indice Electrico, sive instrumento, cuius ope quantitatem productae in corpore quodam Electricitatis ad mensuram reuocare, aut saltem aestimare queamus, cogitauit. Non infeliciter rem ipsi cessisse descriptio inuenti, Commentariorum nostrorum Tomo XIV. data, satis indicat. Repetit hanc breui Auctor sub initium dissertationis, statimque, quae ipsi in instrumento hoc adhuc desiderari videntur, ingenue subiungit. Laborare nempe duplici defectu indicem, quod adplicatus corpori cuidam electricato, vt cito pereat Electricitas.

Electricitas, efficere soleat, quodque non satis commode cui-
libet massae aut corpori adplicari queat. Vtrique defectui
remedium quaerens Auctor, in penitus nouam incidit
constructionem eiusmodi indicis, quem delineatum et
exacte descriptum hic sistit. Legant harum rerum auidi
descriptionem ipsam; inferere enim eam hic, a scopo
nostro alienum est.

Absoluit haec noui indicis electrici inuestigatio
aque descriptio primam dissertationis partem, atq; habet
praeterea quoque ipsa haec prior pars egregia plurima ac
notatu digna, quo referimus, quae circa lumen conicum,
ex *angulis solidis* acutis corporum electricorum erumpens,
deque coniuncto cum luminis huius apparentia
insigni atque notabili electricitatis decremento, aliisque,
quae debilitare solent Electricitatem, causis, commentatus
est Vir Clarissimus.

Progreditur tum Auctor ad primarium dissertationis
scopum, qui in eo consistit, ut, quae ope indicis ele-
ctrici prioris sui, (posteriorem namque, quem pauco
ante mortem tempore primum exogitauerat, in usum vocare
nunquam potuit) circa Electricitatis Phaenomena obser-
uare ipsi contigit, notabilia, describat. Plura sunt in
quibus utilem expertus est indicem suum experimenta,
quam ut recensere ea, ac in compendium redigere que-
amus: hoc solum monemus, in duas classes distribui ab
Auctore obseruationes suas; exhiberi primum, quae Ele-
ctricitatem artificialem, ut vocant, dein quae Electrici-
tatem

tatem atmosphaerae aereae spontaneam , siue fulmineam , aut naturalem , concernunt. In utroque genere habet Auctor quae ipsi propria , ac , ut orbi erudito innotescant , digna , putamus.

Natus erat noster Pernaviae in Liuonia die XI. Iulii st. v. c1710. patre Wilhelmo Richmanno , Quaestore eius urbis , sub finem anni 1710 , antequam nasceretur noster , peste defuncto. Bonas litteras Reualiae , Halae et Ienae gnauiter excoluit , totum se Matheseos et Physices studiis consecrauit. Venit Petropolin , filios Comitum Ostermanni litteris imbuturus , quo munere per aliquot annos non sine laude functus est. Anno 1735 in Academia Adiuncti munus obtinuit , anno 1741 ad Professionem Physices extraordinariam , et anno 1745 ad ordinariam , abitu Cel. Krafftii vacuum , ascendit. Diem vitae vltimum vidit XXVI. Iulii 1753 , Orpheo , Aesculapio , Zoroastri , similis , qui etiam fulmine enecti perierant , sed qui magis Ethnicorum fabulis , quam ob hoc ipsum , celebritatem nominis assequuti sunt , cum noster e contrario famam sibi scriptis partam insolito hoc mortis genere quam maxime confirmauerit. Si plures erunt eruditi martyres , qui in ipsa functione muneris sui , et propter eam ipsam , mortem passi sunt , procul dubio Richmannus noster choream ducet. Caeterum lectorem remittimus ad ea , quae de tragico hoc euentu in singulari scripto , Transactionibus Philosophicis Anglicanis pro anno 1753 inserto , commentati sumus.

PHY-

PHYSICA.

Variorum Auctorum lucubrationes hanc classem constituentes sequente se ordine excepiunt :

I.

Abrahami Kaau Boerhaue Dissertatio
de cohaesione solidorum in corpore
animali. p. 343.

Etiam si vir doctissimus nuper apud nos vita defunctus in hac dissertatione cogitata magis sua, quam observata, tradiderit; non dubitamus tamen, fore, ut omnes, qui doctrinam de corporis animalis fabrica excolunt, eodem favore illam, quo priora eius scripta dignati sunt, prosequantur. Reperient enim hic Auctorem in omnibus sibi similem, multa eruditione et iudicii dexteritate argumentum pertractantem, genuinum, ut paucis dicam, Magni Boerhaavi discipulum, qui vestigiis diui praeceptoris et auunculi sui vbiuis presse insistit. Tam ample ante illum nemo de hac materia scripsit, nemo comparisonem inter corpus animale, vegetabile et minerale, quod ad hanc doctrinam attinet, tam belle instituit. Mos erat Auctori, ut diffusa eruditione pollebat, in quoduis, quod tractabat, argumentum copiose redundante, plura in scriptis suis praestare, quam quidem primum intenderat. Ita hic quoque multa cumulavit, quae sub

praefata inscriptione vix quisquam quaerat. Nimirum certe prolixus euaderem, si varia capita ab Auctore noua luce perfusa enumerarem. Perderet suas gratias rudi penicillo adumbrata Veneris imago. Praeterea lectorem cupidum et intelligentem ipso fonte magis, quam riuulis nostris, delectatum iri praeuidemus. Sunt potius, quae de defuncto Auctore, memoriam eius omni aevo dignissimam recolendi gratia, breuibus adiuciam.

Natus est Hagae Comitum die V. Ianuarii 1715 patre *Iacobo Kaau*, Iuris vtriusque atque Medicinae Doctore et Practico Hagensi, ex nobili familia Scotica oriundo, et matre *Margaretha Boerhaauia*, quae Magni *Hermanni Boerhaauii* et *Iacobi Ecclesiastis Leidentis*, quibus noster omnia se debere professus est, soror fuit. A prima iuuentute bonis litteris sedulo innutritus, anno 1733 Academiam Lugduno - Batauam adiit, ibidemque, cum studio Medico se dicasset, potissimum quidem ex auunculi ore pependit, sed non minus quoque viris tota Europa celeberrimis *Bernardo Sigefrido Albino*, *Hermanno Oesterdyk Schachtio*, *Adriano van Royen* et *Hieronymo Dauide Gaubio* praeceptoribus vsus est. In optimo studiorum cursu accidit, vt anno 1736 nocte quadam, dormiens, quo casu nescius, auditu priuaretur. Surgit nihil tale suspicatus, aduocat famulum, exirascitur, quod illum ad iussa sua respondentem non audiret; obseruat autem famulum labia mouentem, pulsat denique tabulam, et, cum neque tunc sonum perciperet, surditatis suae conuincitur. Haec praegrauis ipsi iactura fuit: nam posthac nunquam auditum

tum recepit. Id quoque multum iucunditatis iucundissimae alias cum ipso conuersionis ademit: Oportebat enim cogitatione sua vel in tabula scribere, vel per signa in digitis facta prodere, vel interprete loquelae digitum gnari uti. Ille, ut felicissimo erat ingenio, mira facilitate loquelam digitum addidicerat; ad labiorum quoque motum multa, quae quis loquebatur, intelligebat. Cum ab eo tempore praceptorum viua institutione frui ipsi non liceret, eo plus lectioni optimorum in quavis doctrinae librorum incubuit, natura, ut fieri solet, auditus defectum prompta recordatione rerum lectione perceptarum refarciens. Surdos oratores raro bonos euadere palam est; plerumque vel nimis alta, vel nimis remissa, voce loquuntur, quia, ubi extollitur vox, ubi deprimitur, audire nequeunt. At nostro, qui artem, Quinctiliano *corporis eloquentia* dictam, iam ante didicerat; feliciter res successit. Testatur id declamatio Academica, quam die IV. Septembris 1737 *de Gaudiis Alchemistarum* habuit. In ea si nitorem stili, si eruditam, si iucundam, argumenti tractationem spectes, nihil desideraueris. Actionem autem oratoriam in surdo omnes mirati sunt. Tam egregio eruditionis specimine, multo maiora in posterum promittente, promeruit, ut Amplissimi Curatores Academiae Lugduno-Batauae illum *Nummo aureo*, decem et quod excurrit drachmarum pondere donarent, in cuius altera parte Pallas representatur insignia Statuum Hollandiae et Occidentalis Frisiae vrbisque Leydenfis arbori adpensa respiciens, in altera Epigraphe: ABRAHAMO KAAU IUVENIORNATISS. DECLAMATIONE ACADEMICA GAUDIA ALCHEMISTARUM RECENSENTI HUNC NUMM. CVRAT. ACAD.

ET

ET VRB. LUGD. CONSS. D. D. MDCCLXXXVII. Quae ipse Auctor de hoc sermone, cum eodem anno typis exscriberetur, in praefatione obseruauit, magis ea, quae dixi, illustrant. „Hoc in votis erat, inquit, vt „indicarent auditores, an carenti facultate hauriendi praecpta à sapientibus auri accommodatae instillanda, „vox superesset aliis animi sensa insinuando idonea. „Hoc obtento laetus abiissem. Sed beneuolentia, „nec opinanti, plausus dedit. Imo auditam benigne „orationem velle se et perlegere testati sunt viri, quorum „iussa sequi debeo. „Altero post anno, qui erat 1738, summus in Medicina honores consecutus est, publicato specimine inaugurali de *Scirrbo*, quod si aegrorum salutis ratio est, optimis eius scriptis annumerari meretur. Nam hoc se talem futurum probauit, qualis postmodum reuera exstitit; Medicum nempe theoria non minus, quam praxi, excellentem, experientiam cum ratione prudenter coniungentem, artem quoque Chirurgicam non indignam, quae a Medico addiscatur, reputantem. Nemo credat, specimen hoc publice ex cathedra ventilatum esse. Surditas auctoris, quo minus id fieri potnerit, obstitit. Praeterea mos est in Belgio, vt etiam sine tam praegnanate ratione, colloquia priuata disputationum publicarum vices obtineant. Et quid hic opus erat multis? cum Promotoribus abunde constaret, honores non in indignum collatum iri. Notatu dignum, quod eodem die, qui ventilationi speciminis destinatus erat, die scilicet XXIII. Septembris, *Magnus Boerhauus* ex hac vita emigraret. Hic adhuc saluus, iusserat, vt, quia mascula prole carebat, ipsius ex sorore nepos *Hermannus Kaau*, qui tunc Hagae Comitum Medicinam exercebat, *Boerhaavii* nomen assumeret. Itaque
 noster

noster fratrem suum, dum hoc specimen inaugurale ipsi inscriberet, *Hermannum Kaau Boerhaave* adpellavit. Hoc argumentum opponendum obtrectatoribus, qui dubitarunt, vtrum re vera auunculus nepotem in communionem nominis adoptauerit. Nam vixit adhuc venerandus senex, cum specimen istud inaugurale typis exscriberetur. Num aulus fuisset noster fratri suo *Boerhaavii* nomen, auunculo superstite, tribuere, nisi hic ante obitum suum ita iussisset? *Hermannus* post modum anno 1740 Petropolin nostram euocatus, atque aulae Imperatoriae Medicus constitutus est. Anno 1743 dignitatem Consiliiarii status, 1748 die VI. Decembris Consiliiarii intimi et Archiatrorum Comitum munus obtinuit, in quo, omnibus amicus, nemini iniurus, famam Medici consummatissimi, quem fors raro desereret, post se relinquens, die VII Octobris 1753 Moscuae decessit. Hic cum pariter prole mascula careret, consentiente filia Magni Boerhauii, quae *Thomsono Comiti* nupsit, anno 1744 *Boerhavianum* nomen in fratrem *Abrahamum* transtulit, qui interea temporis, anno nempe 1738, librum de *Perspiratione* emiserat, quo ius suum, *Boerhavianum* nominis celebritate vtendi, demonstrasse videri poterat. Multo sane studio conscriptus est liber, et multiplici eruditione refertus, quae nec Poetas veteris Latii, perpetuas nostri delicias, excludit. Proprie et potissimum *Perspirationem* corporis humani, tam externam, quam internam, anatomice illustrat. Accessit declamatio de *Gaudiis Alchemistarum* sub calcem recusa. Intuitu huius libri Academia nostra auctorem, tunc quidem Hagae Comitum praxin medicam exercentem, anno 1744 die 2. Nouembr. sociis suis exteris annumeravit. Hoc obtento

suffragio, *Boerhaavii*, nomen suo noster adiecit, et quidem prima vice cum 1745 Lugduni Batavorum librum ederet, de eo quod *Impetum faciens dictum Hippocrati, quod per corpus consentiens Philologicæ et Physiologicæ illustratum, observationibus etiam et experimentis passim firmatum* esse, titulus libri declarat. Principium vitæ explicare ardua omnino et subtilissima res est, ad quam auctor, ut in præfatione monet, non nisi crebro hortatu Amicorum se accinxit; ita autem in hoc negotio se gessit, ut aliis vix quidquam addendum reliquisse videatur. Philologicam, quam dicit, argumenti illustrationem omnes fere paginae exhibent. Quid non de Physiologica censendum, quæ caput rei est, et in quam omnia contulit, quæ ratio et experientia boni dictitant, quæ perpeti studio ex tot auctoribus collecta propria sibi facere, et, quod aiunt, in succum et sanguinem conuertere didicerat? Subsequente anno 1746 fratre ita suadente venit Petropolin, acceptis conditionibus pro obeunda Professione Anatomica in Nosocomio marino Petropolitano sibi oblatis. Non autem hic locus erat, ubi haereret diu. Prima occasione in Academia nostra orta, cum post obitum Viri Celeberrimi *Iosiae Weitbrechti* Professio Anatomiae et Physiologiae vacaret, arctius nobis se iunxit, et anno 1747 die VII. Nouembris in locum *Weitbrechti* successus est. Quæ ab hoc tempore egit in scientiis ipsi demandatis magis excolendis, patent tam ex nostris *Commentariis*, quam ex duobus tractatibus *de monstris*, annis 1754 et 1757 singillatim editis. Habuit quoque di VI. Septembris 1750 in Conuentu Academiae solemni sermonem *de iis, quæ Virum Me-*

Medicum perficiunt et exornant, qui etiam tunc typis expressus, et Lugduni Batavorum recusatus est. Plura neque dedit Academiae, neque conscripta post obitum reliquit. Nam inchoata memorare, quae luci publicae exponi nequeunt, quid iuvat? Nec mirum. Nam postremis huiusmodi annis multum valde temporis exercitio artis medicae impendere coactus fuit, quod non potuit non studiis ipsius Academicis impedimento esse. Et quamvis sub initium labentis anni ab omni aegrotorum cura, paucis exceptis, se abdicasset; precibus tamen illorum, qui omnem fiduciam in eum collocabant, victus, pristinam assiduitatem continuavit. Mortuus est die XIV. Iulii huius anni 1758 acutissima febre correptus, quae nullis remediis obtemperans, vegetum, quod a natura habuit, corpus intra XI dierum spatium destruxit. Sic periit ultimus *Boerhavianus* nominis haeres, nulla, cum coelibem vitam duxerit, posteritate relicta. *Hermannus* autem fratris natu maioris filia superest, *Caroli Friderici Kruse*, Mellicinae Doctoris et Legionum Praetorianarum Medici solertissimi, nostrae itidem Academiae socii, lectissima coniux. Ab hoc iam expectabunt Eruditi, quae noster in praefata dissertatione sub calcem promiserat, se *scripta Boerhauiana posthuma*, otium nactus, editurum esse. Non dubitandum multa in scriptis illis latere, quae ad latius promouendos cognitionis humanae limites faciunt, multa in primis chemica, practica multa, posteris insigniter profutura. Tacemus litterarum commercium, quod *Magno* olim *Boerhauio* cum summis totius Europae Viris intercessit. Unum instar omnium fuit, quod cum *Iacobo Kaau*, affine suo, per plus quam xxx annos gessit. Hic medicus medico, affinis affini,

affini, amicus amico, de rebus ad scientias et curam morborum facientibus non minus erudite, quam candide, perscribit. Alter alteri intima cordis penetralia pandit, consilia petit, dat, nihil praetermittit, quo amicum optimum, affinem coniunctissimum, iuuare possit. Series litterarum est, quacum vix vlla inter adhuc editas comparari possit. Tacemus quoque consultationes medicas, vndequaue ad *Magnum Boerhauum* missas. Paucae illae, quae vna cum ipsius consiliis prodierunt, quid non sperare iubent de reliquis, in thesauro hoc inaeestimabili adhuc dum latentibus? Tacemus reliqua. Optamus autem maximum, vt tandem eruditus orbis horum, quae dixi, scriptorum reddatur compos, quo vtilitati non minus publicae, quam gloriae nominis *Boerhauiani*, insigniter prouisum iri, nemo dubitabit.

II.

Mus aquaticus exoticus Clus. Auſtar.
Raii Synopf. Quadrup. Russ. Выхухоль.
Auctore Io. Geo. Gmelin. p. 383.

Quod adhuc cum scriptis *Stelleri* postumis factum, id nunc quoque cum *Gmelinianis* facere Academia instituit. Digniora etenim per partes his Commentariis inferere visum est, illa potissimum, quae ad *Historiam animalium* pertinent, cui Auctor non minorem, quam plantarum descriptioni, operam impendit. Sunt autem, quae hic damus, in itinere Sibirico, maxima quidem accuratione, at sine multo librorum apparatu, conscripta. Vltimam limam non experta sunt. Hoc namque operae illi temporis reseruauerat
Gme-

Gmelinus, quo omnes observationes suas ad *Historiam Naturalem* spectantes, cum nouissimis scriptoribus collatas, et in isto ordine dispositas, singillatim edere per partes posset, eadem ratione, vt *Floram Sibiricam* edere incepit. Quemadmodum autem nec hanc vltra tertium Tomum, pauco ante obitum tempore, produxit: ita nihil est, quod de reliquis eius operibus, nisi ita, vt iam agere *incipimus*, speremus. Putamus quoque, lectorem in his, quas nunc publicae luci damus, observationibus non multa desideraturum esse, si collationem cum recentioribus *Historiae naturalis Scriptoribus* excipias, quam facile quisque suo Marte supplebit.

Mus Aquaticus, de quo hic agitur, *Russiae* indigena est, *Volgae* et *Iaico* fluuiis familiaris. In *Sibiria* nusquam habitat. Opportune itaque *Gmelinus*, in itinere *Sibirico* *Casani* aliquam moram faciens, occasione sibi oblata, animal, vt ab hominibus piscaturae intentis ex fluuio extractum erat, videndi, vsus est, dum illius non externam tantum formam descripsit, sed et partes eius genitales, ortum odoris *Moschici*, quo animal pollet, inuestigandi gratia, cultro anatomico subiecit. Quid in hoc negotio praestiterit, praeconio nostro non indiget. Alias observationes adiacere animus est, quae descriptioni *Gmelinianae* instar supplementi inseruiant.

Recte Auctores *Historiae Naturalis* nouissimi, *Linnaeus* et *Kleinus*, viri celeberrimi, et nostrae *Academiae Socii* dignissimi, *Muris aquatici exotici* nomen, quo *Clusius* et *Raius* vsi sunt, repudiauerunt. Scilicet hoc illis tem-

poribus ortum debet, cum adhuc Russia extra cultioris Europae limites sita crederetur. Verum quidem, in Canada, Americae septentrionalis regione, idem animal, aut aliud simile nostro, reperiri. Ast non id exoticum est, quod in Europa et in aliis mundi partibus simul, sed quod in his solis, nascitur. Cum muri nostro proprium sit, moschum olere, nihil videtur conuenientius, quam quod citati viri doctissimi *Moschati*, vel *Moschiferi*, epitheton adiungunt. Ita namque mox ex nomine cognoscitur, de quo animali sermo sit; quod et Galli, Angli et Germani vulgari sermone loquentes obseruant. Recte etiam *Linnaeus* murem moschatum inter *Castores* retulit. Castoris enim veram speciem esse, tam ex cauda et pedibus palmatis, quam ex moribus concluditur. *Wybuchol* vox Russica, quid sibi velit ignoro. Neque murem, neque castorem, neque odorem exprimit; forte sonum, quem edit animal; forte ex Tatarorum, aut Calmuccorum, lingua Russicae illata est.

Gmelinus ex descriptione celeberrimi *Reaumuri* perspicuus, animal Americanum a nostro in quibusdam corporis partibus, tam externis, quam internis, differre, diuersitates has sedulo notauit. Mihi quoque, quod ad mores animalis spectat, varia a *Sarrazino* tradita non congruere visa sunt. Ne autem in hac re improuide verfarer, scripsi Orenburgum ad Virum Nobilissimum, bonis litteris exornandis natum, *Petrum Ritschkow*, AUGUSTAE Consiliarium et regundae prouinciae praefectum, ipsique maioris confirmationis gratia cogitationes meas, aliquot quaestionibus comprehensas, exposui, ad quas cum Vir hu-

manissimus

manissimus omnino ex mente mea responderit, non dubito, quae ad vltiorem historiam animalis faciunt, ad Volgarn quidem et Iaicum fluuios cuiuis, sed non aequè alibi, comperta, subiicere.

Mus moschiferus fluuios quidem minores et lacus, qui cum fluuiis cohaerent, intrat: nunquam autem reperitur in paludibus, aut stagnis, a fluuiorum commercio remotis. Excipienda stagna, quae tempore verno aquas ex fluuiis extra ripas diffuentes recipiunt, quas subsidentibus vndis reddere nequeunt. In haec quandoque mures moschiferi, cursum aquarum sequentes, transferuntur. Quod dum fit, et dum stagna multum aquae per evaporationem aestiuam, in calidis istis regionibus valde grandem, amittunt, id quod in stagnis aquae restat, odorem moschi a muribus contrahere dicitur. Nunquam procul a ripa exspatiantur. Gressu incedunt lento. Latebras, vt Castores, in riparum praeruptis sibi excauant, quarum ostium infra horizontem depressissimarum aquarum est, et ea interior conditio, vt, dum aquae increscunt, per gradus, quasi per tabulata, loca ab exundatione libera petere possint. In his pariunt, in his pullos educant. Exeunt, quando libet, omni anni tempore, per ostium, quod descripsi, sub aqua latens. Nullum enim aliud istae cauernae habent, et superne nulla illarum indicia adparent. Vescuntur plurimam partem piscibus, raro radicibus herbarum. Calamum aromaticum potiore illorum cibum esse dubitatur. Sunt enim loca, vbi mares moschiferi copiose degunt, vbi tamen calami aromatici nec vola, nec vestigium, obseruatur. Tantum
ab-

abest, ut, quod *Sarrazinus* autumavit, odor moschicus ex hoc victu oriatur. Falsum quoque, illos sub terra, talparum more, cuniculos agere. Neque opus est cuniculis, cum non ex radicibus viuant, sed ex piscibus, quorum capturae vnice dediti sunt, eique omni anni tempore indulgent. Hoc exinde patet, quia vna cum piscibus semper fere in retia piscatorum et in alia instrumenta piscaturae interuentia incidunt; sicut vicissim ipsi a piscibus maioribus deglutiuntur, ut in Siluris et Lucis, ad Silurorum magnitudinem quandoque excrecentibus, saepius obseruatum est. Cum in sicco raro reperiantur, modus alius capiendi illos, praeter piscaturam, non est. Praeter pellem et caudam nihil, quod in usum cedat. Caro neque a Tataris, neque a Calmuccis, omnis generis fercula indistincte caeterum appetentibus, comeditur. Imo Lucius, postquam murem moschiferum deglutiit, abiicitur, ob difficilem odorem, ipsi ab hac esca communicatum. Fragrantissimus odor in cauda residet, quam ideo piscatorum non nulli solam resecant, et pellem ob laborem, illam detrahendi, minus curant. Vtraque, et pelles et cauda, blattas odore suo fugare dicitur. Hinc est, quod cum vestimentis communiter reponuntur in cistis, et a pellionibus aliorum animalium pellibus adpenduntur. Sunt, qui frustula pellis fimbriis vestium intexunt, ut ab aeris pestilentia et a febribus tuti maneant. Orenburgi pelles duabus copecis et caudarum centum 15 aut 20 copecis venduntur.

Hactenus notitiae a *Ritschkovio* V. Ampliff. suppeditatae, ex quibus abunde patet, notabilem esse morum diuersitatem
inter

inter animal Americanum et nostrum, nisi quis suspicari velit, quaedam falsa *Sarrazino* impacta fuisse ab aliis, aut minus recte ab ipso intellecta, quae forsitan nec in ipsa Canada fidem merentur.

Amatores rerum naturalium procul dubio desiderabunt iconem animalis. Quoniam illa sub auspiciis *Gmelini* ad mortui exemplum accurate adumbrari non potuit, curabit Academia, ut in posterum in loco natali ad vivum delineetur. An icon a *Sarrazino* et *Reaumur* exhibita animal, uti vere est, sistat, alii iudicent, qui figuram cum descriptione conferre voluerint.

III.

Rupicapra cornibus arietinis.

Russ. спелной баранъ. Calmuc. Argaki.

Auctore Io. Geo. Gmelin p. 383.

Mandata Imperatoria multoties in Sibiriam missa et annis 1732. et 1733. renouata, de animalibus rarioribus, quae in Russia non habitant, vivis capiendis, et Petropolia transportandis, hanc *Gmelino* occasionem subministrarunt, ut animal, cuius nullum adhuc in auctoribus Historiam naturalem illustrantibus vestigium exstat, *Rupicapram* nempe *cornibus arietinis*, vivum videre, describere, disseccare, et delineationem eius curare, ipsi licuerit. Arx est *Ust-Kamenogorskaia* ad *Irtisch* fluvium eo in loco, ubi hic fluvius ex montium iugo, Tataro-

Tatarorum, Calmuccorum et Mongolensium lingua *Altai* dicto, egreditur, sita. Quo cum *Gmelinus* aestate 1734 proficisceretur, accidit, ut tria huius generis animalia in foueas, pro capiendis ceruis, ibi locorum *Maral* dictis, effossas, paucis ante aduentum eius diebus, isciderint. *Cerui* saepiuscule Petropolin inde viui missi, non quod ab aliis ceruis specie differunt, sed quia in viuario Imperatorio, quod mirifice exornant, commode aluntur. Nam nomen *Maral*, quod Calmuccicum est, nihil aliud, quam Ceruum communem, denotat. Neque etiam cerui, ad Ieniseam fluium *Sin*, et ad lacum *Baical* *Isubr* dicti, alius speciei sunt, etiamsi *Strahlenbergius* (*) *Isubr* pro *Dama* habeat, quod quam falsum sit, exinde patet, quia nemo est, qui dicere possit, se per totum Imperium Russicum, viuariis exceptis, vsquam *Damas* vidisse. Ex Rupicapris in arcem *Ust-Kamenogorensem* allatis vna, aduentante *Gmelino*, cum morte luctabatur. Hanc facili negotio ad dissecandam obtinuit. Reliquas duas ad viuum descripsit et delineati iussit. Vtrum Petropolin perlatae sint dubito. Ferocissimum namque animal est, omnem obedientiam refugiens, et, si cistae vehiculo imponendae includitur, vehementissima agitatione et inedia mortem sibi contrahit. Habitat non modo ad *Irtisch* fluium, sed per vniuersam Sibiriam, qua montibus obsita est. Frequenter in confiniis Sinicis versatur, imo ad littora vsque Oceani Orientalis excurrit. Inaccessas plerumque rupes inhabitare amat, a montium iugis in camporum planities descendit, mox amata sibi

loca

(*) p. 371.

loca repetit. Russica igitur lingua rectius *Kamemnoi*, quam *Stepnoi Baran* dicendum esset, quod etiam in locis, ubi perpetuis solum rupibus scatet, nullique campi montes inter iacent, ad Olecmam, inquam, ad Aldanum, Maiam, Ludomam, Ochotam et Udum fluuios, ita vsu venire audiui, cum posterius nomen non nisi ad Irtsch, Obum et Ieniseiam fluuios obtineat. *Argali*, vel, si mauis, *Archali*, Mongolorum ac Calmuccorum vocabulum est, a Tungusis etiam, qui territorium vrbs *Nertschinsk* incolunt, assumptum. Si dicas *Strahlenbergian* (*) *Argali* ceruis annumerare, hoc nihil est; per *hircum ferum* (*einen wilden Bock*) interpretatur, et in aliis quoque animalibus genus caprinum cum ceruino negligenter confundit. Confusio autem nusquam hoc loco facilior, quia re vera animal tam a ceruo, quam a capra multum participat, vt ex descriptione patet. Non praetermittendum puto, quod et *Messerschmidius* Vir Cl. qui ab anno 1719 ad annum vsque 1727, eodem, quo *Gmelinus*, studio, maximam Sibiriae partem perlustrauit, in schedis suis eiusdem huius animalis sub die XI. Iulii 1724 mentionem facit. Ex Hodegetico eius video, illum tunc in vico *Galkina* ad *Ingodam* fluuium substitisse. Ibi ergo animal vidit, delineauit, et exunias, tam maris, quam foeminae, parauit, quas Petropolia ad Cancellariam Medicam misit. Quid de exuuiis factum sit ignoro. Delineationes supersunt, quibus cum *Gmelinianis* nostris, quod ad habitum corporis attinet, sic satis conuenit, magnitudinem tantum animalis iusto maiorem, et ceruo adulto fere aequalem raepresentare vi-

 (*) l. c.

dentur. Extat quoque in Xenio Iſidis Sibiricae, a *Mefferschmidio* poſt reditum ſuum ex Sibiria Academiae ob-
lato, aliqualis Rupicaprae deſcriptio, quam hic adiungere
non incongruum putamus. „*Arçbali* Maſ, ſiç ille, *Chol-*
„za Mongolis in Dauria, Indis cis Gangem *Dſbaen-*
„gaeli *Bbeda*, *Acriodorcaſ*, *Pygargus rupeſtris*, viſu exi-
„mie pollens, cornibus arietinis mole ſtupendis, habitu
„ſtatura et pelle cerui, clunibus et cauda capri, albidis,
„biſulca, ruminans. An *Pygargus* Plinii, Aldrouandi et
„Ionſtoni? An Ebraeorum *Dyſchon* Deut. XIV. 5? „
Ita *Mefferschmidius*, qui vocem *Arçbali* alio loco et
Argali ſcribit, pronounciationis in Sibiria vulgatae memor,
qua plerumque aſperiores Mongolenſium et Tatarorum
ſoni mitius efferuntur. Ex nomine Indico concluden-
dum, animal etiam in India reperiri. Amavit *Meffers-*
ſchmidius nomina rerum exotica conquirere, eaque,
quantum potuit, vbique ſuis locis adſcripſit. Hunc in
finem conciliauerat ſibi ſacrificulum Indicum, tunc tem-
poris inter Tunguſos Nertſchienſes degentem, vt, quoad
in regionibus trans-baicalenſibus verſaretur, ſecum iret,
rerumque omnium nomina Indica et Tangutica ſibi di-
ceret. Ab hoc quoque ſacrificulo Tangutice et Brahma-
nice ſcribere edoctus eſt, vnde nomina iſta ipſiſmet
earum gentium litteris in Xenio eius ſcripta reperimus.
Nomen *Acriodorcae* ob cornua arietina *Mefferschmidio*
placuiſſe videtur, vt *Pygargi* ob caudae cluniumque co-
lorem, quem tamen *Gmelinus* non albidum, ſed lute-
ſcentem, deſcribit. Tam verum eſt, colorem pilorum,
vt qui multum in feris variat, et pro diuerſis anni
temporibus ſaepius mutatur, niſi variatio totum ani-
mal

mal et constanter , vt in Lepore et Lagopode , occupet , pro nota characteristica habendum non esse. De excellentia visus nihil apud *Gmelinum* , quia forsitan venatores hac de re interrogare oblitus est. Supplenda itaque haec qualitas ex *Messerschmidio*. Caeterum multa egregia *Gmelino* obseruata , de quibus ex consulto tacemus , ne duplicem lectori operam causeremus. Speciminis gratia sit obseruatio de aestu sanguinis in moribundo animali thermometro explorato , et altera de stupenda cornuum mole , qua , respectu ad corpus habitum , vix maiorem dari consistendum est. Vt ille summam animalis agilitatem pernicitatemque cursus , ita haec vires , quibus omnino maximis pollet , comprobare videntur. Gradus in Thermometro Delishiano 80 efficiunt in Fahrenheitiano 178 , in Reaumuriano 37 $\frac{1}{2}$. Ast dubitare licet , vtrum hic tantus calor sanguinis non potius statui animalis morbo adscribi debeat. Res clarior euadet , si plures hanc in rem obseruationes cum animalibus aut tarditate , aut velocitate , eximiis instituentur. De cornibus recte monet *Gmelinus* , dari in adultis animalibus maiora , quam quae icon repraesentat ; addo et magis incuruata. Asseruantur hic Petropoli in Museo Imperatorio , quae pondus 30 librarum aequant , imo superant.

Caeterum reperitur inter obseruationes *Gmelini* manu scriptas additamentum aliquod ad descriptionem Ruplicaprae , quod , cum descriptio typis excuderetur , curam nostram effugit , ideoque illud hoc loco addere placet. Ita ille :

Plinius Hist. Nat. Lib. VIII. Cap. XLIX. haec habet: Est et in Hispania, sed maxime Corsica, non maxime absimile pecori, genus Musmonum, (Musmonium, aut Musimonum) caprino villo, quam pecoris velleri, propius. Infirmisimum pecori caput etc. *Idem* Libro XXVIII. Cap. IX. sub finem: Inuenio apud Auctores Graecos animal ceruo minus, et pilo demum simile, quod Ophion vocatur. Sardiniam id tantum ferre solitam. *Idem* Libr. XXX. Cap. XV. sub finem: In eadem prouincia (Sardinia) est Ophion ceruis tantum pilo similis, nec alibi nascens. *Gesnerus* autem monstrat, Musimon animal cum Ophio idem esse, effigiemque Musimonis a *Theod-Beza* secum communicatam exhibet, quae cum Rupicapra cornibus arietinis, a me descripta, si totam animalis habitum, aut cornuum faciem externam spectes, tantum conuenit, ut dubitare non liceat, quin idem sit animal. Hic quidem *Gesnerianae* effigiei defectus est, ut cornuum situm male exprimat, quae magis ad latera, quam in superiori capitis parte, ex rei natura, collocari debuissent. Verum tota effigies ita comparata est, ut ad naturam haud factam esse suspicari liceat. Adde *Gesneri* tempore opus effigies vel animalium, vel plantarum, e descriptionibus adornandi, impune exerceri potuisse. Alium vero me adhuc casum subolere mihi videor. Effigiei *Gesnerianae* et magnitudine et habitu cum animalium figuris ex aurichalco fuis, quae in tumulis sepulchralibus Saianensis regionis ad Ieniseam fluuium reperta sunt, eximie conuenit. De his vero animalibus dubium non est, quin Rupicapram cornibus arietinis expriment. An non igitur effigies *Gesneriana* ad simile aliquod idolum, ab antiquitate

tate reliquum, delineata esse potuit? Adeoque, dummodo haec effigies Musimonem veterum, aut, quod idem est, Ophion Plinii exprimat, certissimum est, Rupicapram cornibus arietinis esse Musimonem veterum. Expimere autem Musimonem vero est admodum simile, quando quidem *Plinius* patriam Musimonis Sardiniam esse indicat. *Gesnerus* enim a Sardo quodam, viro non illiterato, sibi affirmatum fuisse scribit, Sardiniam alere animal quoddam, quod *Muslonem* vulgo vocent, quod nusquam alibi in Europa reperiatur, pelle et pilis ceruo simile, cornibus Arieti, non longis, sed retro circa aures reflexis, magnitudine mediocris cerui, herbis tantum viuens, in montibus asperioribus degens, cursu velocissimo. Quid distinctius dici potest, si quis animalis descriptionem inter familiares discursus facit? Adeo verum est, quod *Gesnerus* et *Raius*, e cuius Synopsi Quadrupedum ista Gesneriana hausi, nobili in creatorem rerum amore contra *Plinium*, qui L. XXVIII. C. IX. Ophion interiisse arbitratur, propugnarunt, naturam rerum genera et species omnes animalium sedulo semper conseruare. *Tragelaphus Bellonii* multum a Musimone differt, non perparum, uti *Gesnerus* ex effigie tantum sua doctus sentit, quod descriptiones *Bellonii* et meam conferenti patebit. Cum Musimon in montosis Schilcae fluminis, in primis in iugo montium, *Stanowoi Chrebet* dicto, et in montosis superioris Ononis fl. regionis, etiam versetur, quibus in locis tam a Russis, quam a Mongolis et Tungusis Argali nomine salutatur, Cl. *Messerschmidio* illius videndi copia facta est, deditque Vir Cl. tres eius effigies, satis rudes, quarum vna masculum a latere, altera eundem

dem ab anteriori parte spectatum, tertia foemellam exhibet. Nomen effigibus adscriptit: Argali Dauriae Acriodorcas, Pygargus Ionst. rupestris. *Ein Weis. Auf.* Ex *Ionstoni* quidem descriptione Pygargi, cuius illa sit animalis, vel oculatissimum quemque eruere non posse, confido. Verba *Ionstoni* haec sunt: Placet et Pygargi *Aldrouandi* verbis agere. Pygargon, (verba eius sunt) *Plinius*, in praecitatis verbis etc. p. 304. usque ad finem frequenter syluosa et deserta frequentans loca. Ipse igitur *Ionstonus*, plagiator alias pessimus, et alienorum corrafor, Pygargon *Aldrouandi* vocat, alium vero, quod sciam, non describit. Ut ut haec sint, quoniam *Ionstonus* pleraque *Aldrouandi* verba omittit, sola indicatione paginae contentus, e descriptione eius id unicum perspicitur, de animali, loca syluosa et deserta frequentante, sermonem esse. Atqui *Musimon Vett.* aut Argali *Messerschmidii* et Mongolorum, syluosis locis non defectatur. Solo igitur nomine *Vir Cl.* seductus fuisse videtur, quod clunibus albis *Musimonis*, quas forte autumnii tempore conspexerat, apprime conuenire sibi persuadebat. Non debuisset vero *Virum Cl.* latere, non *Musimonem* tantum, sed et *Ceruum*, Animal moschiferum, *Capream Plinii*, *Capream campestrem gutturosam*, *Ibicum imberbem* et alia huius generis animalia hisce in regionibus pilos appropinquante autumno mutare, hacque mutatione album clunibus colorem induci non nisi aestatis tempore euanescentem. Haec *Gmelinus*.

Descriptio Animalis Moschiferi,
 Russicè Kabarga dicti.
 Auctore Io. Geo. Gmelin p. 393.

Quae de Animali moschifero auctoribus historiam naturalem tractantibus innotuerunt, sola fere peregrinantium fide niti in confesso est. Ast horum nemo data opera in id incubuit, ut accuratam et plenioram de hoc animali notitiam acquireret, cum eruditis communicandam. Pro vulgo scripsisse videntur, quosvis incertos rumores in tabulas referentes, indocti plerumque, et ad ea parum attenti, quae potissimum respicere debuissent. Hinc tanta opinionum diuersitas, tam falsa multa prodita, tam manca, tam incerta omnia, ut Oedipopus sit, veritatem diuinare, eaque, nisi ocularis inspectio animalis accedat, ab errorum sordibus repurgatam in lucem producere. Quid ineptius, quam quod alii animal moschiferum magnitudine ceruum, alii leporem, aut catum aemulari fabulati sunt? Hi postremi cum Cato zibethico illud confudisse videntur. Alii cornua illi affixerunt, quae, ut ut falsissima opinio, et a multis aliis reprobata, tam altas egit radices, ut *Kleinus* Vir. Cel. sententias diuersas conciliare cupiens, (*Quadrup. p. 18.*) *Moschorum alios cornutos, alios excornes* esse statuerit. Alii dentes exsertos, qui in superiori maxilla sunt, quasi in hoc illi cum apro conueniret, in inferiorem collocant. Alii lupinam faciem animali tribuerunt, alii rostrum porcinum. Pellem alii candidam, alii nigram descriperunt.

h

Aliis

Aliis bifidum animal est, aliis quadrifidum. Alii maximam velocitatem animali adscribunt, alii valde tardum esse perhibent, et tam stolidum, ut ipsum se venatoribus confodiendum praebet. Et quae non de situ *folliculi moschici* diuersae sententiae? quem alii ad umbilicum, alii testiculorum loco, imo ad genua alii posuerunt. Non memini, vllum peregrinantium de se scripsisse, quod ipse animal moschiferum suis oculis viderit, multo minus, quod prope contemplatus sit, quod dissecauerit. Animal viuum nunquam in Europam allatum, pelles autem quandoque, ad quas descriptiones et figurae animalis efformatae, aut correctae, sunt a cautoribus. At quantum non perdit animal, si figura eius ad pellem exsiccata, ad exuias infarctas, exprimitur? Descriptio nihil continere potest, nisi quod ex pelle cognoscitur. Vtilissimam igitur operam nauasse meritissimus *Gmelinus* censendus est, quod, cum natale solum huius animalis attingeret, mox curauit, ut quaedam animalia occisa, tam mares, quam foeminae, sibi ad describendum et dissecandum exhiberentur. Descriptionem ita adornauit, ac si animal prorsus nouum, pro quo et haberi poterat, sibi obtigisset. Praeterea exuias et skeleton parauit, quae in Museo Imperatorio adhuc conspiciuntur. Laudandus *Tavernerius*, qui folliculum Moschicum propius ad penem, quam ad umbilicum, extare retulit. Sed ex aliorum relatione loquutus est. Inde forsitan factum, quod recentiores historiae animalium scriptores testimonium eius neglexerunt. *Messerschmidius* V. Cl. *Gmelini* in perlustranda Sibiria antecessor, potuisset sane dicere, quid rei sit, si marem moschicum videre et examinare ipsi licuisset.

At

At foeminam tantum vidit, cuius exunias Petropolin misit, ut ex ipsius schedis colligitur. Hinc communi errore abreptus, et nihil aduersi suspicans, folliculum cum vulgo pro umbilicali habuit, et duobus locis *umbilicalem* nominauit. Nemini, nisi *Gmelino*, fortuna fauit, verum sitam folliculi perspicendi et in apricum producendi. Quid hic praestiterit accuratissimus Auctor, quam sedulo partes genitales maris aequae ac foeminae inuestigauerit atque descripserit, ipsa eius descriptio loquitur. Vnum idemque animal esse, quod sub *Moschi*, seu *Moschiferi*, nomine in Sinis et in regno Tangut, in terris *Mongolensibus* et in Sibiria reperitur, nemo dubitet. Differt tantum nostrum a Sinico crassioribus pilis et Moschi odore minus fragrante, sicut vicissim Sinicus Moschus a Tibetico, si auctoribus fides, fragrantiore odore superatur. Huius modi varietas a diuersa qualitate soli et climatis provenire potest. Attamen nec hoc negandum, Sinas Moschum saepius adulterare, a qua fraude gens Tibetica abstinet. Non abs re erit, varia nomina addere, quibus animal moschiferum in Sibiria salutatur. *Kabarga* Russicum est, sed a Tataris desumptum, qui tamen litteram nominis initialem ita efferunt, ut magis T quam K, audire tibi persuadeas. *Isbrandus* animal *Kabarda* et folliculum *Kabardin* adpellauit, utrumque falso. Folliculus *Kair* vocatur Tataris, vnde Russis olim *Kairi Kabarginnie* dicti, pro quo nunc *Kabarginnie struia* obtinet, sicut *Bobrowie struia* Castoreum denotant. Sunt gentes ad *Manam* et *Vpsam* fluuios, Ieniseae vndas miscentes, *Camaschincii* et *Taiginzii* dictae. Illis Moschiferum animal *Südö*, his *Togorgo* audit. Ostiaccis ad Ieniscam est

Böf. Tungufis ad Tungufcam *Tſchanja*, vel *Dſanja*, ad Lenam *Dſeia*, et mas ſeorſum *Möktſchan*, ſeu *Miktſchan*. Iakuti vocant *Daadang*, Mongolentes, *Buracti* et Tunguſi vrbi *Nertſchinsk* ſubiekti *Küderi* et *Kudero*, quam vocem *M. Paulus Venetus* (L. II. C. 38) per *Gadderi*, vel, vt in codice Berolinenſi legitur, per *Gudderi* expreſſit. Tunguſicum *Dſeia* imitantes Ruſſi ad Lenam fluium animal noſtrum *Seiga*, vel *Saiga*, vocant. Eſt autem aliud praeter hoc animal, ſub nomine *Saiga* in citeriori Sibiria ad Irin, Tobolem et Iaicum fluios notum, quod cum ad Tanain quoque et ad *Boryſthenem* habitat; a Coſaccis, mutuato a Tataris Crimenſibus vocabulo, *Subac* dicitur. Hoc obſeruandum, ne fabulae *Stellero* impactae aſſenſum tribuamus, dum *Nouor. Comm. Tomo II. p. 293* animal *Subac* capream *monocerotem* eſſe perhibuit, quod valde rident Coſacci, animalis *Subac* probe gnari, at nullius conſcii *monocerotis*. Monſtraui ipsis cornua *Saigae* ex Sibiria allata, et mox omnes eadem animali *Subac* cornua eſſe profeſſi ſunt. Superſedeo de hoc animali plura dicere, quia deſcriptionem eius a *Gmelino*, qui nomen *Ibiais imberbis* illi indidit, conſectam in poſterum dabimus. Non fruſtra *Gmelinus* in Praef. Florae Sibir. Tom. I. p. XLIII et XLIV. Sibiriam, ob inſignem in prouentibus naturae diuerſitatem, cis et trans Ieniſeam fluium notabilem, in duas partes diſterminauit. Animal moſchiferum non niſi Sibiriam vltiorem inhabitat, cis Ieniſeam fluium nuſquam conſpicitur. Si dixero, reperiri quandoque et ad *Vdum* fluium, Oceanum orientalem intrantem, intelligitur, in iſto terrarum tractu vbicunq; eſſe. Non autem eadem vbique copia eſt, quia non vbique inuenitur pabulum naturae ipſius conueniens.

Veſci-

Vescitur enim musco, siue lichene, vt Tarandus, et in primis illo delectatur, qui abietibus adnascitur, vnde raro exstat in filuis, quae abietibus carent. Dicunt etiam radicibus Lili purpurei, Russis *Sarana* dictis, aliarumque herbarum pasci, quas dentibus suis exsertis e terra effodit. Loca amat, vt valde timidum est, a societate hominum remotiora, filuas, montium iuga et campos desertos, hinc inde filuis distinctos. Habitacula, in quibus per hiemem commoretur, nulla obseruata. Sub diu requiem capiens dormit in niue, nihil virgultorum sibi substernens. Autumno coeunt, vere pariunt, vnicum edunt partum. Recens natorum vocem fistula imitantur venatores, vt matres alliciant, quas tunc globulis traiciunt. Alias etiam retibus animalia capiuntur, imo canibus. Incidunt quoque in foueas, pro alcibus capiendis effossas. Si viua capiuntur, inedia pereunt. Neque hinculi victui ab hominibus dato assuescunt. *Gmelinus* ad Lenam fluuium subsistens omnem lapidem mouit, vt iuniora animalia caperentur, quae mansuefacere sperauit. Capta sunt, sed antequam adportarentur, (procul enim erat) interierunt. De folliculis notandum, illos in iunioribus animalibus vix conspicuos esse. Maturitatem adquirunt, cum animal tertium, aut quartum, aetatis annum attingit, postmodum minuuntur iterum, et in aetate confectis prorsus pereunt. Non nulli auctores tempore plenilunii, aut cum animal coitum appetit, folliculum turgescere perhibent; dicunt ab aestu venereo folliculum rumpi, et effluere liquorem Moschi suauis odore aera replentem; imo animal venere percitum, aut a venatoribus agitatam, liquorem moschicum ad arbores et rupes

exprimere. Haec vel commenta sunt, vel relationibus dubiis adscribenda. In Sibiria nemo est, qui talia se obseruasse dicat. Restat, vt quaedam de iconibus animalis moschiferi, apud auctores, qui de illo egerunt, exstantibus, moneamus. *Gmelinus* in icone Isbrandiana nimiam ventri prominentiam, et quod sine pilis repraesentetur, taxat. E contrario icon *Tauerneri* corpus animalis nimis villosum, pedes nimis nudos sistit, caudam animali tribuit, qua caret, folliculum etiam iusto grandiozem repraesentat. *Renaudotius* in annotationibus ad antiqua de Indis et Sina itinera Arabica p. 217. reprehendit *Tauernerium* et *Tbeuenotium*, eandem iconem reiterantem, quod animal non cornutum, et dentes exsertos non sursum incuruatos, depinxerint. Sed quam hoc frustra fecerit, ex descriptione *Gmeliniana* et ex supradictis adparet. In iconibus à *Neubosio* et *Kirchero* suppeditatis rostrum porcinum et pedes digitati censuram merentur. *Martini Martini* icon in Atl. Sin. Tab. Xensi totum habitum corporis animalis difformat, dum gibbosum sistit, et capite ad terram segniter inclinato, quod capreoli instar, habitu corporis agilitate conspicui, pingi debuisset. *Segeri*, vel potius *Breytii*, icon in Eph. N. C. a. 1675 in eo peccat, quod caput ad instar lupi famelici praedae inhiantis effingit. Icon *Schroeckii* in historia Moschi, cum qua etiam illa *Valentini* in Museo Mus. concordat, collum nimis protensum et pedes respectu corporis iusto longiores sistit, manifesto indicio, quod et a *Schroeckio* non negatur, figuram ad exunias infarctas adumbratam esse. Quid hinc oriri potest aliud, quam vt etiam descriptiones ad tales figuras efformatae peccent, inter quas vnam Cel. *Kleinii*

Kleinii Quadrup. p. 18. diligentissimi alias naturae obseruatoris, memorare lubet, collum protensum, sicut est in icone Schroeckiana, pro naturali animalis qualitate habentis. Taceo icones *Gesneri*, *Caecularii*, *Boymii*, quorum errores iam ab aliis indicati sunt. Ad folliculorum icones quod attinet, minus erratum est, quia ipsi folliculi in Europam haud difficulter transportari potuerunt. Alii tenuissimis pilis obiti, aut fere depiles, alii pilis ~~multis et longioribus tecti~~ ^{recte} cernuntur. Et utrumque ~~inter somnulos~~ ^{recte} eos, ex Tibeto et Sinis provenientes, et illos, qui in Sibiria nascuntur. Hac dignosci possunt, etiam absque tentaminibus, odorem plus minus fragrantem indicantibus.

V.

Observationes quaedam nidos et ova
auium concernentes.

Auctore *Geo. Wilh. Steller*. p. 411.

Si post *Iosephi Prosperis Zinanni* Comitis de ouis et nidis auium commentationem Venetiis 1737. editam haec b. *Stelleri* nostri tractatio cuiquam videbitur superflua: apologiam quidem plenariam pro ea afferre nunc non possumus, quoniam librum *Zinannianum* ipsis videre nobis nondum licuit. At certo conscius, *Stellerum*, dum haec scriberet, omnino nullam auctoris Itali eiusque observationum notitiam habuisse; ut qui in vno mundi angulo scripsit, paulo post quam *Zinanni* liber in altero prodit: confidimus fore, ut aequioris iudicii viri dissertationem

tionem hanc non indignam iudicaturi sint, quae reliquis auctoris scriptis in his Commentariis exstantibus iungatur. Saltem, quae inter vtrumque auctorem ingeniorum paritas, aut disparitas, fuerit, inde liquecet; aut vnius observationes observationibus alterius magis confirmabuntur; et, quod ob locorum distantiam rarasque in terris Kamtschaticis obseruatas aues, probabile est, non nulla reperientur, nostro auctori propria, et historiae auium alicui ornamento futura. Primum auctor in eo versatur, vt sententiam ornithologicam confici posse putauerunt, dein obseruationes generales de nidorum et ouorum diuersitate affert, et tandem ad ipsam rem pertractandam se accingit, qua singula oua diuersarum auium a se visa secundum magnitudinem, colores et maculas ipsis inhaerentes describit, et XXIX. oua in IV Tabulis depicta curioso harum rerum lectori offert. Quod ad tractationem ipsam attinet, monendum ducimus, has obseruationes in itinere confectas esse, ne quis maiora sibi hic reperturum esse, polliceatur, quam re ipsa offendet. Denique obseruatiunculam de nomine incolarum ad *Kamtschatka* et *Bolschaja reka* fluuios habitantium adijciemus, ab hoc loco non prorsus alienam. Quos namque *Kamtschedalos* vulgari nomine salutamus, hos *Stellerus*, tam in hoc scripto, quam in praecedentibus suis, *Itaelmenos* vocare assolet. Quare hoc? Quia Gens ista, terris Kamtschaticis indigena, ipsa semet hoc nomine adpellat. Nullum dubium est, si primi Russi, qui de Kamtschedalis notitiam perhibuerunt, *Itaelmenorum* vocabulo ad eos designandos vsi fuissent, illud, tanquam genti isti propriam, magis quam alienum, promeri-

meritorium fuisse, ut ab omnibus usurparetur. Sed alia quaestio est, num *Kamtschederalorum* nomen, omnibus usu receptum, nulla urgente necessitate, reiiciendum, et ignotum novum addiscendum sit? Pleraque gentes in Sibiria gentilia alia nomina profitentur, quam Russi ipsis tribuere solent. Haec ergo pari modo immutanda essent. Ast quae non inde oriretur confusio? Mittamus ergo *Itaelmenas*, et, ut melius intelligamur, loquamur, si occasio ferat, de *Kamtschederalis*.

VI.

Observationes Meteorologicae annorum
 clccxliv -- clccxlvii cum animadver-
 sionibus et confectariis.

Auctore *Ios. Ad. Braunio* p. 429.

Solemne esse Academiae, observationes meteorologicas instituire, institutas inter se conferre, collatas confectariis illustrare, illustratas luci publicae exponere, ex veteribus Commentariis cuius abunde liquet. Ast ultimae observationes, in Tomo XIV Vet. Comm. typis exscriptae, finiunt exeunte anno 1743, qui ultimus est, quo *Krafftius* V. Cl. hoc labore vacavit, et etiamsi post huius abitum non defuerint, qui observationes continuarent, nemo tamen curam publicationis in se suscepit, antequam *Braunius* V. Cl. qui et ipse ab a. 1751. aeris et tempestatum mutationes sedulo annotavit, huic labori se accingeret. Communicatae cum illo ex tabulario acade-

mico praecedentium annorum observationes in specula Astronomica institutae. Harum quatuor priores annos hic exhibet, sequentes, excepto vno, qui, nescio quo casu, deest, sequenti Commentariorum volumini referuat.

ASTRONOMICA

L

Methodus inuestigandi Parallaxin Lunae
et Planetarum Eclipsibus stellarum fixa-
rum a Luna et Planetis innixa.

Auctore *A. N. Grischow*. p. 451.

Ex quo Academia Scientiarum Parisiensis Virum Cl. *De la Caille*, vt siderum scientiam per Parallaxes corporum coelestium accuratius indagandas perficeret, ad Bonae spei promontorium ablegauit, nostrarque Academia *Grischouium* V. Cl. in Oesiliam Insulam, sub eodem fere meridiano cum Bonae spei promontorio iacentem, ire iussit, vt observationes nis, quas *De la Caille* fecerit, correspondentes institueret, non tantum spartam suam, ob quam missus erat, gnaniter *Grischouius* expleuit, sed etiam doctrinam ipsam de Parallaxi Lunae observanda

nou

nona methodo, Eclipsibus fixarum a Luna innixa, auctiorem reddere studuit. Res in eo versatur: Eclipses fixarum a Luna non nisi ad differentias longitudinum terrestrium definiendas ab Astronomis adhibitae adhuc fuerunt; successu quidem optimo: nam certior longe hanc viam esse, quam qua alii per Eclipses Satellitum Iouis observandas incedunt, quis nescit? at non tota utilitate perpensa, quae ex his observationibus in Astronomiam redundare potest. Monstrat itaque Cl. Auctor, sicut secundum methodum simplicissimam ad determinandas Parallaxes Planetarum duo observatores in duobus locis sub eodem fere meridiano satis longe distitis locati requiruntur: ita eundem finem obtineri posse, si in locis sub eodem fere parallelo iacentibus, satisque longe ab inuicem distantibus, duo observatores, per Eclipses fixarum a Luna, Parallaxeos lunaris quantitatem saepius et in diuersis orbitae lunaris punctis inuestigare allaborent. Et hanc quidem methodum Parallaxin Lunae observandi, ob longam locorum intercapedinem ab occidente in orientem in Imperio Russico comprehensorum, imprimis huic Imperio aptam et conuenientem fore Auctor iudicat, quia, si vnus observator in specula Astronomica Petropolitana, alter in extrema Peninsulae Kamtschatkae ora, constituantur, differentia meridianorum 125 gradus superatura sit, ideoque in Russia sola observationes perfici possint. Respexisse videtur Cl. Auctor ad molestias itineris longinqui et valde difficilis Kamtschatkam versus suscipiendi, dum supellectilem instrumentorum satis modicam, et quae Geographiae Imperii Russici perficiendae simul accommodata sit, proponit. Optamus tantum, vt observator idoneus reperiat, qui in

tantum tempus, quantum ad obseruationes istas requiritur, in Kamtschatka sedem figere non dubitet. Quod nisi fuerit, obseruationes etiam ex vna parte Londini, aut in specula Astronomica Grenuicensi, ex altera in vrbe Nertschinsk, vt pote agricultura et re pecuaria pollente, institui poterunt; quia haec duo loca pariter sub eodem fere parallelo iacent, et non multo minori spatio, quam Kamtschatka a Petropoli, a se inuicem distant. Imo spes est Astronomos Pekinenses ex Iesuitis, sub eodem fere meridiano cum vrbe Nertschinsk collocatos, operam suam huic rei, si rogabuntur, addicere non detrecturos esse. His difficultatibus, quae non nisi externae et accidentales sunt, neglectis, methodus a Cl. Auctore tradita ingeniosa valde est, et pro Parallaxi aliorum quoque Planetarum obseruanda utilis, sicut sub calcem dissertationis ostenditur.

II.

Obseruatio insoliti luminis australis Petropoli habita.

Auctore *A. N. Grischow*. p. 474.

A lumine boreali radios quandoque ultra verticem horizontis austrum versus porrigi, plures de hoc meteorico obseruationes loquuntur. Ast huius a Cl. *Grischouio* obseruati luminis australis alia ratio est. Hoc in ipso horizonte per duas vesperas immotum stetit, sine vlla figurae variatione, tandem, nubecula cinctum, radiatio-

diationes, fulgurationibus haud absumiles, et per totum coelum se diffundentes, emisit, donec coelum undique nubibus tegetur, ex ista, ut adparuit, nubecula prouenientibus. Caeterum nullum iisdem noctibus aurorae borealis vestigium. Obseruata autem, cum lumen radios emitteret, subitanea venti et temperiei aeris mutatio; quare Cl. Auctor tabulam, trium dierum obseruationis meteorologicas continentem, adiecit.

III.

Obseruationes Lipsiae habitae
a G. Heinsio. p. 477.

Quae sub hac epigraphe usque ad calcem huius voluminis occurrunt obseruationes, titulo tantum tenus indicare sufficiat. Sunt autem sequentes:

1) Eclipses Satellitum Iouis diebus 16 Septembr. 10 Octobris et 24 Decembris anni 1749 st. n. obseruatae.

2) Eclipsis Lunae partialis, quae contigit die 23 Decembr. st. n. e. a.

3) Obseruationes meteorologicae, maximum frigus et calorem maximum, quae a. 1749 Lipsiae fuerunt, indicantes, ubi quoque aurora borealis describitur d. 22. Septbr. e. a. Lipsiae et Romae simul visa.

4) Obseruatio Eclipsis Solis a. 1750. die 8. Ianuarii st. n. habita, quae calculum *Manfredi* in Ephemeridibus 19 fere minutis primis anteuertit.

15) Residuum observationum Lipsiensium anni 1750, ubi
 *) Comparatio observationis Eclipsis Lunae totalis a.
 1750. d. 19 Iunii st. n. Lipsiae habitae, et Commen-
 tator. Nouor. Tomo III. insertae, cum aliis eiusdem
 Eclipsis observationibus, Veronae, Cassellis, Berolini. et
 Goettingae institutis, qua simul differentia meridianorum
 inter loca ista Lipsiamque eruitur. b) Observatio occul-
 tationis Fixae in Serpentario a Luna. c) Observationes
 meteorologicae de maximo frigore et calore maximo e.
 a. Lipsiae et Berolini obseruatis. d.) Aurorarum aliquot
 borealium descriptiones. e.) Observatio pro declinatione
 acus magneticae.



MATHE-

MATHEMATICA.

Tom.IV.Nou. Com.

A

DE NV.

DE NUMERIS
QUI SVNT AGGREGATA DVORVM
QVADRATORVM.

AUCT. L. EVLERO.

§. I.

Naturam numerorum pluribus modis scrutari solent Arithmetici, dum eorum originem vel per additionem vel per multiplicationem repræsentant. Prioris generis sine dubio simplicissima est compositio ex unitatibus, qua omnes numeri integri per aggregationem unitatum oriri concipiuntur. Tum numeri quoque ita considerari possunt, prouti ex additione duorum pluriumue aliorum numerorum integrorum nascuntur, quo pertinet problema de partitione numerorum, cuius solutionem aliquot ab hinc annis exposui, in quo quaeritur, quot variis modis quilibet numerus propositus per additionem duorum pluriumue numerorum minorum resultare possit. Hic autem constitui eam numerorum compositionem perpendere, qua per additionem duorum quadratorum procedunt; et cum hoc modo non omnes numeri oriuntur, quoniam ingens est eorum multitudo, qui per additionem duorum quadratorum produci nequeunt, in eorum naturam et proprietates, qui sunt summae duorum quadratorum, hic inquiram. Quarum proprietatum etiam si

A 2 plerae-

$4a + 8b + 1$ seu in hac $4a + 1$ continebitur: unitate ergo excedet multipulum quaternarii.

Vel 3^{to}. Summa duorum quadratorum imparium, eritque idcirco huius formae $8a + 1 + 8b + 1$ seu in hac $8a + 2$ continebitur. Erit scilicet numerus impariter par, et, binario, excedet multipulum octonarii.

Quia ergo omnes numeri impares vel unitate, excedunt multipulum quaternarii seu huius sunt formae $4n + 1$ vel unitate, deficiunt a multiplo quaternarii seu huius sunt formae $4n - 1$; patet nullos numeros impares huius posterioris formae $4n - 1$ esse summas duorum quadratorum, seu ex serie numerorum qui sunt summae duorum quadratorum excluduntur omnes numeri in hac forma contenti $4n - 1$.

Deinde, quia omnes numeri impariter pares vel binario superant multipulum octonarii, ut sint $8n + 2$, vel binario deficiunt a multiplo octonarii ut sint $8n - 2$, patet nullos numeros huius posterioris formae esse summas duorum quadratorum, sicque ex serie numerorum qui sunt summae duorum quadratorum excluduntur numeri huius formae $8n - 2$.

Interim tamen probe obseruandum est neque omnes, numeros in hac forma $4n + 1$, neque in hac $8n + 2$, contentos esse summas duorum quadratorum. Illius enim formae excluduntur numeri: 21, 33, 57, 69, 77, 93, 105, 129, etc. huius vero isti: 42, 66, 114, 138, 154, etc. quorum ratio deinceps inuestigabitur. §. 4.

QVI SVNT AGGREG. DVOR. QVADR. 7

§. 4. Interim, tamen numeri, qui sunt summae duorum quadratorum ita nexu quodam inter se coniunguntur, vt ex vno huius indolis numero infiniti alii eiusdem naturae assignari queant. Quod quo facilius perspicatur, sequentia lemmata, quae quidem vulgo satis sunt nota, adiungam.

I. Si numerus p sit summa duorum quadratorum, erunt quoque numeri $4p$, $9p$, $16p$ et generatim nnp summae duorum quadratorum.

Cum enim sit $p = aa + bb$, erit $4p = 4aa + 4bb$; $9p = 9aa + 9bb$; $16p = 16aa + 16bb$ et $nnp = nnaa + nnbb$, quae formulae sunt pariter summae duorum quadratorum.

II. Si numerus p sit summa duorum quadratorum, erit quoque $2p$, et generatim $2np$ summa duorum quadratorum.

Sit enim $p = aa + bb$ erit $2p = 2aa + 2bb$. Sed est $2aa + 2bb = (a+b)^2 + (a-b)^2$, vnde erit $2p = (a+b)^2 + (a-b)^2$, ac propterea summa duorum quadratorum. Hinc vero porro erit $2np = nn(a+b)^2 + nn(a-b)^2$.

III. Si numerus par $2p$ fuerit summa duorum quadratorum, erit etiam eius semissis p summa duorum quadratorum.

Sit enim $2p = aa + bb$, erit numerorum a et b vterque vel par, vel impar. vnde vtroque casu erit tam $\frac{a+b}{2}$ quam $\frac{a-b}{2}$ numerus integer. Haec vero $aa + bb =$

$$bb = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \text{ quo valore substituto fit}$$

$$p = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Hinc ergo omnes numeri pares, qui sunt summae duorum quadratorum, per continuam bisectionem tandem reuocantur ad numeros impares eiusdem indolis. Quare vicissim si soli numeri impares, qui sunt summae duorum quadratorum cognoscantur, ex iis omnes quoque pares per continuam duplicationem deriuabuntur.

§. 5. Deinde notatu dignum est sequens theorema, quo natura numerorum, qui sunt summae duorum quadratorum non mediocriter illustratur.

THEOR. Si p et q sint duo numeri, quorum uterque est summa duorum quadratorum, erit etiam eorum productum pq summa duorum quadratorum.

DEM. Sit $p = aa + bb$ et $q = cc + dd$ erit $pq = (aa + bb)(cc + dd) = aacc + aadd + bbcc + bbdd$: quae expressio hoc modo representari potest ut sit:

$$pq = aacc + 2abcd + bbdd + aadd - 2abcd - bbcc,$$

ideoque $pq = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$: vnde productum pq erit summa duorum quadratorum. Q. E. D.

Ex hac propositione sequitur, quomocunque plures numeri, qui singuli sint summae duorum quadratorum inuicem multiplicentur, producta semper esse summas duorum quadratorum. Atque ex forma generali tradita patet, productum ex duobus huiusmodi numeris duplici modo
in

in duo quadrata resolui posse : si enim sit $p = aa + bb$, et $q = cc + dd$, erit tam $pq = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$, quam $pq = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$, quae formulae erunt diuersae, nisi sit, vel $a = b$, vel $c = d$. Sic cum sit $5 = 1 + 4$, et $13 = 4 + 9$, productum $5.13 = 65$ duplici modo erit summa duorum quadratorum, scilicet erit $65 = (1.3 + 2.2)^2 + (2.3 - 1.2)^2 = 49 + 16$, et $65 = (2.2 - 1.3)^2 + (2.3 + 1.2)^2 = 1 + 64$. Atque si productum habeatur ex pluribus numeris, qui singuli sint summae duorum quadratorum, id pluribus modis in duo quadrata resolui poterit. Vti si proponatur numerus $1105 = 5.13.17$, eius resolutiones in duo quadrata erunt hae: $1105 = 33^2 + 4^2 = 32^2 + 9^2 = 31^2 + 12^2 = 24^2 + 23^2$. Quatuor scilicet hic resolutiones locum habent.

§. 6. Quanquam autem ita euictum est, si factores p et q sint summae duorum quadratorum, etiam fore productum pq summam duorum quadratorum; tamen huius propositionis conuersa hinc non sequitur, vt, si productum sit duorum quadratorum summa, etiam eius factores sint numeri eiusdem naturae, neque enim hanc conclusionem regulae Logicae, neque ipsa rei natura probarent. Nam numerus $45 = 36 + 9$ est summa duorum quadratorum, interim tamen horum factorum eius 3.15 neuter est summa duorum quadratorum. Magis autem firma videatur haec conclusio: si productum pq , et alteruter eius factor p fuerint duorum quadratorum summae, alterum quoque factorem q fore summam duorum quadratorum. Tametsi autem haec conclusio forte sit vera, regulis tamen ratiocinandi non confirmatur, neque enim

Tom. IV. Nou. Com. B cum

cum demonstratum sit, si producti pq , bini factores p et q , sint duorum quadratorum summae, ipsum pq fore summam duorum quadratorum, hinc legitima consequentia inferri potest; si et productum pq , et alter factor p , sint summae duorum quadratorum, etiam alterum factorem q fore summam duorum quadratorum. Huiusmodi enim consequentiam non esse legitimam, vel hoc exemplum euidenter euincet: certum est si bini factores p et q sint numeri pares, etiam productum pq fore numerum parem, si quis autem hinc concludere velit, si productum pq et alter factor p sint numeri pares, etiam alterum factorem q fore parem, is vehementer falleretur.

§. 7. Quare si verum sit, ut, cum productum pq et alter eius factor p fuerint summae duorum quadratorum, alter quoque factor q sit summa duorum quadratorum; haec propositio non ex ante demonstrata potest inferri, sed peculiari demonstratione muniri debet. Haec autem demonstratio non tam plana est, quam praecedens, et non nisi per plures ambages concinnari potest, ac demonstratio quidem, quam inueni, ita comparata videtur, ut non mediocrem vim ratiocinii requirat. Hanc ob rem propositiones, ex quibus tandem non solum haec veritas conficitur, sed etiam aliae insignes proprietates huiusmodi numerorum, qui sunt summae duorum quadratorum, cognoscuntur, cum suis demonstrationibus hic ordine proponam, operamque dabo, ut nihil quicquam in rigore demonstrandi desiderari queat. Iis autem, quae hactenus de his numeris praemissi, uti sunt triuia et in vulgus nota, ita instar lemmatum in sequentibus demonstrationibus utar.

P R O-

PROPOSITIO I.

§. 8. Si productum pq fit summa duorum quadratorum, et alter factor p fit numerus primus, pariterque duorum quadratorum summa, erit quoque alter factor q summa duorum quadratorum.

DEMONSTRATIO.

Sit $pq = aa + bb$, et $p = cc + dd$; quia p est numerus primus, erunt c et d numeri inter se primi. Erit itaque $q = \frac{aa + bb}{cc + dd}$, et propterea, ob q numerum integrum, numerator $aa + bb$ per denominatorem $cc + dd$ erit diuisibilis. Hinc quoque per $cc + dd$ diuisibilis erit numerus $cc(aa + bb) = aacc + bbcc$; at cum etiam hic numerus $aa(cc + dd) = aacc + aadd$ per $cc + dd$ sit diuisibilis, horum numerorum differentia $aacc + bbcc - aacc - aadd$ seu $bbcc - aadd$ per $cc + dd$ diuisibilis sit necesse est. Cum autem sit $cc + dd$ numerus primus, et $bbcc - aadd$ factores habeat $bc + ad$ et $bc - ad$, alteruter horum factorum, nempe $bc + ad$ per $cc + dd$ erit diuisibilis. Sit itaque $bc + ad = mcc + mdd$: quicumque autem numeri sint a et b , ii ita exprimi possunt, vt sit $b = mc + x$, et $a = md + y$, existentibus x et y numeris integris siue affirmatiuis siue negatiuis. His vero valoribus pro b et a substitutis aequatio $bc + ad = mcc + mdd$ induet hanc formam: $mcc + cx + mdd + dy = mcc + mdd$ seu $cx + dy = 0$. Hinc erit $\frac{x}{y} = -\frac{d}{c}$, et quia d et c sunt numeri primi inter se, necesse est, vt sit $x = nd$ et $y = -nc$, vnde habebitur $a = md - nc$ et $b = mc +$

B 2

mc +

$mc + nd$, huiusmodi scilicet valores habere debent numeri a et b , vt numerus $pq = aa + bb$ sit diuisibilis per numerum primum $p = cc + dd$. Verum istis valoribus pro a et b substitutis fiet :

$pq = mmd - 2mncd + nnc + mmcc + 2mncd + nnd$,
 seu $pq = (mm + nn)(cc + dd)$. Iam ob $p = cc + dd$ erit $q = mm + nn$; ideoque si productum pq fuerit summa duorum quadratorum $aa + bb$, et alter factor p sit numerus primus pariterque duorum quadratorum summa $cc + dd$, necessario sequitur etiam alterum factorem q fore summam duorum quadratorum. Q. E. D.

C O R O L L. 1.

§. 9. Si ergo summa duorum quadratorum diuisibilis sit per numerum primum, qui ipse sit summa duorum quadratorum, etiam quotus ex diuisione resultans erit summa duorum quadratorum. Ita si summa duorum quadratorum fuerit diuisibilis per quempiam ex his numeris primis 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97 etc. quotus semper erit summa duorum quadratorum.

C O R O L L. 2.

§. 10. Si ergo litterae α , β , γ , δ , etc. denotent huiusmodi numeros primos, qui sunt summae duorum quadratorum; hinc patet, si productum $\alpha\gamma$ sit summa duorum quadratorum, fore etiam factorem γ summam duorum quadratorum.

COROLL.

COROLL. 3.

§. 11. Hinc autem porro facile colligitur, si productum $a \text{ e } q$ fuerit summa duorum quadratorum, fore etiam factorem q summam duorum quadratorum. Cum enim sit $a \text{ e } q$ summa duorum quadratorum, per *coroll. praec.* erit quoque $e \text{ q}$ summa duorum quadratorum; et ob eandem rationem erit quoque q summa duorum quadratorum.

COROLL. 4.

§. 12. Simili modo evidens est, si productum $a \text{ e } \gamma \delta \text{ e } q$ fuerit summa duorum quadratorum, tum quoque factorem q esse summam duorum quadratorum; hinc si productum $p \text{ q}$ sit summa duorum quadratorum, eiusque factor p productum ex quocunque numeris primis, quorum singuli sint summae duorum quadratorum, fore etiam alterum factorem q summam duorum quadratorum.

SCHOLIION.

§. 13. Regulae Logicae non permittunt, vt haec propositio ita conuertatur, vt, quoties alter factor q sit summa duorum quadratorum, etiam alter factor p pronunciari possit, vel summa duorum quadratorum, si est primus, vel productum ex numeris primis, qui singuli sint summae duorum quadratorum. De hoc ipso enim nondum constat, vtrum productum ex aliquot numeris primis, qui ipsi non sint summae duorum quadratorum, nequeat esse summa duorum quadratorum: quin potius contrario iam habemus casum, quo produ-

Etum $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ est summa duorum quadratorum, cum tamen eius factores 3 et 3 non sint huius indolis. Verum propositio *coroll. ult.* ita conuerti potest, vt a negatione consequentis recte ad negationem antecedentis concludatur, quam conuersionem vtpote maximi momenti in hac propositione complectar.

P R O P O S I T I O II.

§. 14. *Si productum pq sit summa duorum quadratorum, eius factor autem q non sit summa duorum quadratorum, tum alter factor p , si sit numerus primus, non erit summa duorum quadratorum, sin autem non sit primus, saltem factorem certe habebit primum, qui non sit summa duorum quadratorum.*

D E M O N S T R A T I O.

Cum alter factor p sit, vel numerus primus, vel compositus, vtrumque casum seorsim perpendere conuenit. Sit 1mo p numerus primus; cum igitur si esset summa duorum quadratorum; quoque alter factor q foret summa duorum quadratorum; quod cum hypothese aduersetur, sequitur, factorem p non esse summam duorum quadratorum. Sit 2do p numerus compositus; et ex praec. liquet, si omnes eius factores primi essent summae duorum quadratorum, etiam alterum factorem q eiusdem fore indolis. Quare cum per hypothese q non sit summa duorum quadratorum, sequitur, non omnes factores ipsius p esse summas duorum quadratorum. Q. E. D.

COROLL.

COROLL. 1.

§. 15. Si igitur productum $p q$ sit summa duorum quadratorum, eius tamen alter factor q in duo quadrata sit irresolubilis; alter factor p , vel ipse non erit summa duorum quadratorum, vel saltem factorem habebit primum in duo quadrata irresolubilem. Vti si sit $p q = 45$ et $q = 3$, erit $p = 15$ et factorem habet 3, qui non est summa duorum quadratorum.

COROLL. 2.

§. 16. Hinc autem nondum concludere licet, alterum factorem p plane non esse summam duorum quadratorum, quamvis enim hoc certum sit casu, quo p est numerus primus, tamen id nondum constat casu, quo p est numerus compositus; quia p habere posset factorem in duo quadrata irresolubilem, etiam si ipse numerus p esset summa duorum quadratorum.

COROLL. 3.

§. 17. Hoc autem colligere licet; si p esset summa duorum quadratorum, tum non solum vnum, sed ad minimum duos habere debere factores primos in duo quadrata irresolubiles. Sit enim $p = \alpha \epsilon \gamma \delta$, et δ factor ille in duo quadrata irresolubilis; perspicuum est, si p esset summa duorum quadratorum, deleto factore δ , insuper factorem residuum $\alpha \epsilon \gamma$ factorem in duo quadrata irresolubilem habere debere.

SCHO-

S C H O L I O N .

§. 18. Cum de diuisoribus numerorum , qui sunt summae duorum quadratorum , quaestio instituitur , circa quadratorum summam $aa + bb$, casus hi probe sunt distinguendi , vtrum haec quadrata aa et bb , seu eorum radices a et b sint numeri primi inter se nec ne ? Si enim a et b non sint numeri primi inter se , sed habeant communem diuisorem n , vt sit $a = nc$ et $b = nd$, summa quadratorum erit $nncc + nndd = nn(cc + dd)$, ac propterea diuisorem habebit n , hoc est , numerum quemcunque. Sin autem radices a et b fuerint numeri primi inter se , tum summa quadratorum $aa + bb$ plures numeros pro diuisoribus non admittet : euidens enim est huiusmodi summam duorum quadratorum $aa + bb$ nunquam per 3 esse diuisibilem. Nam quia per hypothesin vtrumque quadratum seorsim non est per 3 diuisibile , cum alioquin non forent prima inter se ; si summa $aa + bb$ esset per 3 diuisibilis , neutrum foret per 3 diuisibile. Vtriusque ergo radices futurae essent , vel huius formae $3m + 1$, vel huius $3m - 1$; sed summa huiusmodi duorum quadratorum , per 3 diuisa , semper residuum 2 relinquit , ideoque per 3 nunquam est diuisibilis. Eodem modo intelligitur , summam duorum quadratorum inter se primorum $aa + bb$ nunquam esse per 7 , vel 11 , vel 19 etc. diuisibilem. Quinam autem sint in genere hi numeri , qui nunquam summae duorum quadratorum inter se primorum diuisores existere queant , hoc modo non facile definitur. Demonstrari igitur conuenit propositionem alias quidem satis notam , summam duorum quadratorum inter se primorum alios diuisores primos

primos non admittere, nisi qui ipsi sint summae duorum quadratorum. Praemitti autem debet sequens propositio.

PROPOSITIO III.

§. 19. Si summa duorum quadratorum inter se primorum $aa + bb$ diuisibilis sit per numerum p , semper exhiberi poterit summa duorum aliorum quadratorum $cc + dd$ diuisibilis per eundem numerum p , ita ut ista summa $cc + dd$ non sit maior quam $\frac{1}{2}pp$.

DEMONSTRATIO.

Sit summa duorum quadratorum inter se primorum $aa + bb$ diuisibilis per numerum p , et a et b numeri quantumuis magni. Quia ergo neque a neque b seorsim per p diuisibilis est, numeri a et b ita exprimi poterunt, ut sit $a = mp + c$ et $b = np + d$, vbi numeros m et n ita determinare licet, ut c et d non excedant semissem ipsius p . Erit ergo $aa + bb = mmp + 2mcp + cc + nnpp + 2ndp + dd$, quae formula cum et tota diuisibilis sit per p (per hyp.) et eius pars $mmp + 2mcp + nnpp + 2ndp$ per se diuisorem habeat p , necesse est, ut altera pars $cc + dd$, quae est summa duorum quadratorum, itidem per p sit diuisibilis. At cum radices c et d non excedant semissem ipsius p , summa quadratorum $cc + dd$ non excedet quadratum $\frac{1}{2}pp$ bis sumtum; ideoque summa duorum quadratorum $cc + dd$ exhiberi potest non maior quam $\frac{1}{2}pp$, quae tamen sit per p diuisibilis. Q. E. D.

C O R O L L. 1.

§. 20. Si igitur non detur summa duorum quadratorum inter se primorum diuisibilis per numerum p , quae non excedat $\frac{1}{2}pp$, nullae omnino dantur summae duorum quadratorum inter se primorum, quae per hunc numerum p essent diuisibiles.

C O R O L L. 2.

§. 21. Sic cum nulla detur summa duorum quadratorum inter se primorum infra $\frac{1}{2} \cdot 3^2$ seu infra $4\frac{1}{2}$, quae sit per 3 diuisibilis, hinc luculenter sequitur, nullam omnino summam duorum quadratorum inter se primorum per 3 esse diuisibilem. Similique modo pro numero 7, cum non detur summa duorum quadratorum infra $\frac{1}{2} \cdot 7^2 = 24\frac{1}{2}$ per 7 diuisibilis, sequitur ne in maximis quidem numeris dari summas duorum quadratorum inter se primorum per 7 diuisibiles.

P R O P O S I T I O IV.

§. 22. *Summa duorum quadratorum inter se primorum diuidi nequit per vllum numerum, qui ipse non sit summa duorum quadratorum.*

D E M O N S T R A T I O.

Ad hoc demonstrandum ponamus summam duorum quadratorum inter se primorum $aa + bb$ diuisibilem esse per numerum p , qui non sit summa duorum quadratorum. Exhiberi ergo posset alia summa duorum qua-

quadratorum inter se primorum $cc + dd$ non maior quam $\frac{1}{2}pp$, quae esset diuisibilis per p . Sit igitur $cc + dd = pq$, et cum p non sit summa duorum quadratorum, vel ipse numerus q non erit eiusmodi summa, vel saltem factorem habebit r , qui non erit summa duorum quadratorum. Quia vero $pq < \frac{1}{2}pp$, erit $q < \frac{1}{2}p$ et multo magis $r < \frac{1}{2}p$. Quare cum $cc + dd$ quoque diuisibilis sit per $r < \frac{1}{2}p$; per *prop. praec.* summa duorum quadratorum $ee + ff$ per eundem numerum r diuisibilis exhiberi posset, quae non excederet $\frac{1}{2}rr$, neque multo magis $\frac{1}{2}pp$. Et cum r non sit summa duorum quadratorum, simili modo procedendo continuo ad minores summas duorum quadratorum deueniretur, quae per numerum non summam duorum quadratorum essent diuisibiles. Quocirca cum in minimis numeris nulla detur summa duorum quadratorum inter se primorum, quae esset diuisibilis per numerum, qui non sit summa duorum quadratorum, ne in maximis quidem numeris eiusmodi erunt summae duorum quadratorum, quae diuisibiles sint per numeros, qui ipsi non essent summae duorum quadratorum. Q. E. D.

C O R O L L. I.

§. 23. Si ergo summa duorum quadratorum inter se primorum non fuerit numerus primus, omnes eius factores primi quoque erunt summae duorum quadratorum. Quemadmodum igitur productum ex quocunque numeris primis, qui ipsi sunt summae duorum quadratorum, pariter est summa duorum quadratorum, ita nunc huius propositionis conuersa est demonstrata, vt sum-

C 2

ma

ma duorum quadratorum (inter se primorum) per multiplicationem oriri nequeat, nisi ex numeris, qui ipsi sint summae duorum quadratorum.

C O R O L L. 2.

§. 24. Omnes ergo numeri, qui sunt summae duorum quadratorum inter se primorum, vel ipsi in hac serie numerorum primorum continentur:

2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109, 113, etc. vel ex duobus pluribusue numeris huius seriei per multiplicationem componuntur. Omnes autem hi numeri primi praeter 2 unitate excedunt multipulum quaternarii seu in hac forma $4n + 1$ continentur.

C O R O L L. 3.

§. 25. Si igitur summa duorum quadratorum $aa + bb$ diuisibilis sit per numerum, qui non fuerit summa duorum quadratorum; hinc intelligetur quadrata illa aa et bb non esse inter se prima, neque adeo eorum radices a et b .

C O R O L L. 4.

§. 26. Cum autem si $a = nc$ et $b = nd$ summa duorum quadratorum $aa + bb = nn(cc + dd)$ per quemuis numerum n , qui non est summa duorum quadratorum, diuidi possit, quoniam non solum per n , sed etiam per nn est diuisibilis, euidentis est, si summa duorum quadratorum diuisibilis sit per quempiam numerum, qui non est summa duorum quadratorum, tum eam quoque per quadratum huius numeri fore diuisibilem. Sic cum $45 = 36 + 9$ sit diuisib. per 3, simul quoque diuisibilis est per 9. COROLL.

C O R O L L. 5.

§. 27. Cum nullus numerorum in hac forma $4n-1$ contentorum sit summa duorum quadratorum, manifestum quoque est, nullam summam quadratorum inter se primorum diuidi posse per vllum numerum primum, in forma $4n-1$ contentum, qui numeri primi sunt :

3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83, 103, 107 etc.

S C H O L I O N.

§. 28. Cum omnes numeri primi, qui sunt summae duorum quadratorum, excepto binario, hanc seriem constituent :

5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109,
113, 137, 149, etc.

qui non solum in hac forma $4n+1$ continentur, sed etiam, quantumuis ea longe continetur, deprehendemus in ea omnes omnino numeros primos huius formae $4n+1$ occurrere: vnde per inductionem satis probabiliter concludere licet, nullum dari numerum primum formae $4n+1$, qui non simul sit summa duorum quadratorum. Interim tamen cum inductio quantumuis ampla vicem demonstrationis sustinere nequeat; hanc veritatem, quod omnis numerus primus formae $4n+1$ simul sit summa duorum quadratorum, etiamsi nemo agnoscere dubitet, tamen adhuc demonstratis matheos veritatibus annumerare non licet. *Fermatius* quidem professus est, se eius demonstrationem inuenisse; quia autem eam nusquam publicauit, asserto quidem huius profundissimi Viri merito fidem adhibemus, istamque numerorum proprietatem

credimus ; haecque cognitio nostra mera fide sine scientia nititur. Quanquam autem ego multum in demonstratione eruenda frustra laboravi , tamen aliud argumentum pro hac veritate adstruenda reperi , quod etiamsi non summum rigorem sustineat , tamen cum inductione coniunctum demonstrationi pene rigorosae aequalere videtur.

P R O P O S I T I O V.

§. 28. *Omnis numerus primus , qui unitate excedit multipulum quaternarii , est summa duorum quadratorum.*

TENTAMEN DEMONSTRATIONIS.

Numeri primi , de quibus hic sermo est , in hac forma $4n + 1$ continentur. Quodsi ergo numerus $4n + 1$ fuerit primus , demonstraui per eum semper diuisibilem esse hanc formam $a^{2n} - b^{2n}$, quicumque numeri pro a et b substituuntur , dummodo neuter seorsim fuerit per $4n + 1$ diuisibilis. Cum autem sit $a^{2n} - b^{2n} = (a^{2n} - b^{2n})(a^{2n} + b^{2n})$, necesse est , vt alteruter factor , nempe vel $a^{2n} - b^{2n}$, vel $a^{2n} + b^{2n}$ sit diuisibilis per numerum primum $4n + 1$. Prout autem pro a et b alii atque alii numeri assumuntur , aliis casibus formula $a^{2n} - b^{2n}$, aliis vero formula $a^{2n} + b^{2n}$ erit per $4n + 1$ diuisibilis : vnde assumere licet , etsi quidem hoc nondum firma demonstratione euincere valeo , semper eiusmodi numeros pro a et b assignari posse , vt formula $a^{2n} - b^{2n}$ non sit per $4n + 1$ diuisibilis : iis ergo casibus altera formula $a^{2n} + b^{2n}$ necessario per $4n + 1$ erit diuisibilis. Sit $a^n = p$ et $b^n = q$, habebitur

biturque summa duorum quadratorum $pp + qq$ per $4n + 1$ diuisibilis, ita vt neutrum quadratum pp vel qq seorsim habeat diuisorem $4n + 1$. Ideoque etiamsi fortasse pp et qq communem habeant diuisorem mm , vt sit $pp + qq = mm(rr + ss)$, quia factor communis mm diuisorem non habet $4n + 1$, necesse est, vt summa duorum quadratorum inter se primorum $rr + ss$ habeat diuisorem $4n + 1$; Consequenter cum huiusmodi summa duorum quadratorum alios non admittat diuisores, nisi qui ipsi sint summae duorum quadratorum, necesse est, vt numerus primus $4n + 1$ sit summa duorum quadratorum.

C O R O L L. 1.

§. 29. Demonstratio haec igitur esset perfecta, si modo demonstrari posset, semper eiusmodi existere valores pro a et b substituendos, quibus formula $a^{2n} - b^{2n}$ non fiat diuisibilis per numerum primum $4n + 1$; iisdem enim casibus formula $a^{2n} + b^{2n}$ necessario est diuisibilis per $4n + 1$.

C O R O L L. 2.

§. 30. Quod si quis autem hanc rem per calculum tentet, non modo semper plures casus, imo infinitos, formulae $a^{2n} - b^{2n}$ reperiet, quibus ea per numerum primum $4n + 1$ non est diuisibilis, sed etiam pro b unitatem ponere licet, ita, vt etiam haec formula simplicior $a^{2n} - 1$ saepe numero per $4n + 1$ non sit diuisibilis.

SCHOLION

S C H O L I O N.

§. 31. Casus seu valores ipsius a , quibus formula $a^{2^n} - 1$ certe fit diuisibilis per numerum primum $4n+1$, facile assignari possunt. Primo enim si sit $a = p p$, formula $a^{2^n} - 1 = p^{2^n} - 1$ semper est diuisibilis per $4n+1$, dummodo p non sit $= 4n+1$ vel eius multiplo. Deinde si $a = p p \pm (4n+1)q$, formula $a^{2^n} - 1$ quoque diuisorem habet $4n+1$, resoluitur enim $a^{2^n} = (p p \pm (4n+1)q)^{2^n}$ in seriem terminorum, quorum primus est p^{2^n} , sequentes vero omnes sponte sunt per $4n+1$ diuisibiles. Vnde patet, valores idoneos pro a esse omnia residua, quae restant, si numeri quadrati p^2 per $4n+1$ diuidantur. Haec autem residua siue pro a ponatur r , siue $4n+1+r$, siue $(4n+1)q+r$ prodeunt eadem, vnde omnia possibilis residua obtinentur, si pro p successive statuantur numeri $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ vsque ad $4n$, at valor $4n$ pro p positus idem dat residuum, quod valor 1 , similique modo valores 2 et $4n-1$, item 3 et $4n-2$, item 4 et $4n-3$ etc. eadem dant residua. Vnde cum bina semper residua, quae ex numeris $1, 2, 3, \dots$ vsque ad $4n$ pro radicibus quadratorum sumtis proueniunt, sint aequalia, numerus diuersorum residuorum resultantium tantum erit $2n$, ideoque totidem dabuntur numeri ipso $4n+1$ minores, qui non esse possunt residua ex diuisione numerorum quadratorum per $4n+1$ emergentia; hique numeri pro a substituti semper formulam $a^{2^n} - 1$ reddent non diuisibilem per $4n+1$. Hoc quidem pariter demonstrari nequit; verumtamen quia periculum faciendo, quotcunque etiam numeri hoc modo explorentur, ne unicus quidem casus occurreret, quo haec regula

gula fallat, eius veritatem agnoscere oportet. Quo haec clarius perspiciantur, exempla aliquot subiungam, sit primo $4n + 1 = 5$, et casus, quibus formula $a^2 - 1$ per 5 erit diuisibilis, habebuntur, si pro a residua ex diuisione quadratorum per 5 oriunda ponantur, quae residua sunt 1, 4. At si pro a ponatur vel 2, vel 3, formula $a^2 - 1$ non erit per 5 diuisibilis; his ergo casibus formula $a^2 + 1$ diuisorem habebit 5. Deinde si sit $4n + 1 = 13$, seu $n = 3$, residua, quae ex diuisione numerorum quadratorum per 13 restant, sunt 1, 4, 9, 3, 12, 10. vnde si quis numerorum reliquorum, 2, 5, 6, 7, 8, 11, pro a substituatur, non formula $a^2 - 1$, sed $a^2 + 1$ per 13 erit diuisibilis. Porro si $4n + 1 = 17$, seu $n = 4$, quia residua quadratorum per 17 diuisorum sunt 1, 4, 9, 16, 8, 2, 15, 13, si pro a statuatur quispiam ex reliquis numeris 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14, non formula $a^2 - 1$, sed haec $a^2 + 1$ erit per 17 diuisibilis. Cum igitur haec lex perpetuo obseruetur, haec inductio vim demonstrationis fere induere censenda erit; hincque propositio tantopere confirmata videtur, vt eius veritatem non amplius in dubium vocare liceat. Interim tamen operae pretium esset eo maius, si quis rigorosam huius propositionis demonstrationem exhibere posset, quo magis de eius veritate sumus certi: nullum enim est dubium, quin eiusmodi demonstratio, tamdiu frustra quaesita, ad plurimas alias insignes numerorum proprietates sit manu ductura. Quamquam autem huius propositionis veritas extra dubium est posita, tamen eas consequentias, quae ipsi inueniuntur, diligenter notabo, ab aliisque, quae rigidis de-

mōstrationibus muniuntur, distinguam : ex hac autem propositione nondum demonstrata sequuntur haec corollaria, quae hoc nomine notata velim.

C O R O L L. 3.

§. 32. Si igitur numerus formae $4n+1$ in duo quadrata nullo modo resolui nequeat, hoc certum erit signum, eum numerum non esse primum : si enim iste numerus $4n+1$ esset primus, certe in duo quadrata resolui posset. Sic cum numeri 21, 33, 57, 69, 77, 93 etc. qui in forma $4n+1$ continentur, non sint summae duorum quadratorum, ex hoc ipso patet, eos non esse primos.

C O R O L L. 4.

§. 33. In serie ergo numerorum, qui sunt summae duorum quadratorum, omnes primo continentur numeri primi huius formae $4n+1$, deinde omnia producta ex duobus pluribusue huiusmodi numeris primis ; tam producta ex singulis hisce numeris in binarium et quosuis numeros quadratos.

C O R O L L. 5.

§. 34. Omnes numeri n , ex quibus formula $4n+1$ euadit numerus primus, sunt summae duorum numerorum trigonalium. Cum enim $4n+1$ sit summa duorum quadratorum, erit eius duplum $8n+2$ summa duorum quadratorum imparium : fit ergo $8n+2 = (2x+1)^2 + (2y+1)^2$, fiet $n = \frac{x^2+x}{2} + \frac{y^2+y}{2}$. Quare si n non sit summa duorum numerorum trigonalium, certe numerus $4n+1$ non erit primus. PRO-

PROPOSITIO VI.

§. 35. Si numerus formae $4n + 1$ unico modo in duo quadrata inter se prima resolui queat, tum certe est numerus primus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim hic numerus est summa duorum quadratorum inter se primorum, si non sit prima, singuli eius factores erunt summae duorum quadratorum. Quare si hic numerus non esset primus, in huiusmodi saltem duos factores resolui posset, ut esset $4n + 1 = (aa + bb)(cc + dd)$, hoc autem casu duplex resolutio in duo quadrata locum habet; scilicet:

$$I. 4n + 1 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$$II. 4n + 1 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$$

Haeque resolutiones semper sunt diversae, nisi sit vel $ac + bd = ad + bc$ vel $ac + bd = ac - bd$. Priori vero casu foret $ac + bd - ad - bc = 0$, seu $(a - b)(c - d) = 0$, ideoque vel $a = b$ vel $c = d$; atque hinc vel $aa + bb$ vel $cc + dd$ numerus par, quorum neutrum esse potest divisor ipsius $4n + 1$ utpote numeri imparis. Posteriori vero casu esset vel $b = 0$ vel $d = 0$, ideoque $4n + 1$ vel $= aa(cc + dd)$ vel $= cc(aa + bb)$; vnde haec duo quadrata non forent prima inter se contra hypothesin. Quibus casibus notatis sequitur, numerum compositum $4n + 1$, si in duo quadrata inter se prima fuerit resolubilis, eundem ad minimum duobus modis in duo quadrata esse resolubilem. Quo circa si tan-

DEMONSTRATIO.

Sit numerus propositus N , qui duplici modo in duo quadrata sit resolubilis; nempe $N = aa + bb = cc + dd$. Quoniam haec quadrata non sunt aequalia, alioquin enim numerus N per se non esset primus, sit $a > b$ et $c > d$, et quia resolutiones hae duae sunt diversae, neque erit $a = c$ neque $b = d$. Sit igitur $a > c$; erit $b < d$; vnde ponatur $a = c + x$ et $d = b + y$. Quare ob $aa + bb = cc + dd$ fiet: $2cx + xx = 2by + yy$. Sit utraque forma $= xyz$, quia altera per x , altera per y est diuisibilis; fiet $x = \frac{yz-x}{2}$; $b = \frac{xz-y}{2}$; $a = \frac{yz+x}{2}$; $d = \frac{xz+y}{2}$ hincque erit $N = aa + bb = \frac{xxzz + yy + yyzz + xx}{4}$ seu $N = \frac{(yy + xx)(1 + zz)}{4}$. Nisi ergo $xx + yy$ per 4 sit diuisibile, erit $xx + yy$ diuisor ipsius N , sin autem $xx + yy$ sit per 4 diuisibile, vel numerus utcumque compositus, eius certe factor quidam erit diuisor ipsius N . Cum igitur sit $x = a - c$ et $y = d - b$, numerus propositus $N = aa + bb = cc + dd$ diuisorem habebit vel ipsum numerum $(a - c)^2 + (d - b)^2$, vel eius semissem quadrantemue, et quia numeros a, b et c, d , inter se utcumque permutare licet, factores ipsius N quoque erunt $(a - d)^2 + (c - b)^2$, vel etiam quia radices a, b, c, d negative assumere licet $(a + c)^2 + (d + b)^2$ vel $(a + d)^2 + (c + b)^2$, seu harum formularum semisses aliaeue partes aliquotae. Quare cum numeri plus vno modo in duo quadrata resolubilis factores adeo assignari possint, ille numerus certe non erit primus, sed compositus. Q. E. D.

COROLL.

COROLL. 1.

§. 41. Cum igitur numerus $N = aa + bb = cc + dd$ fit compositus, erit huiusmodi $N = (pp + qq)(rr + ss)$. Hinc autem vicissim duplex resolutio in duo quadrata resultat, erit nempe:

$$\begin{aligned} a &= pr + qs & \text{et} & & c &= ps + qr \\ b &= ps - qr & & & d &= pr - qs. \end{aligned}$$

Hincque ulterius obtinetur $a - d = 2qs$ et $c - b = 2qr$, unde fit $\frac{r}{s} = \frac{c-b}{a-d}$. Quare si fractio $\frac{c-b}{a-d}$ ad minimos terminos reducat, ut fit $\frac{c-b}{a-d} = \frac{r}{s}$, ex hac fractione $\frac{r}{s}$ oriatur numeri N diuisor $= rr + ss$, nisi sit par, nam si fuerit par, eius dimidium sumi debet.

COROLL. 2.

§. 42. Simili modo cum numeros a, b et c, d inter se permutare atque adeo negativos ponere liceat, si fractionum harum $\frac{a \pm c}{b \pm d}$, vel $\frac{a \pm d}{b \pm c}$ altera ad minimos terminos reducat, ut fiat $= \frac{r}{s}$, erit $rr + ss$ semper diuisor numeri propositi N .

COROLL. 3.

§. 43. Quanquam autem hinc plures duobus diuisores nasci videntur, tamen diuersae formulae ita ad eundem diuisorem deducunt, ut non plures quam duo eliciantur, si quidem numerus propositus duobus tantum modis in duo quadrata fuerit resolubilis. Sit, si $N = 85 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2$; formulae $\frac{9 \pm 2}{7 \pm 6}$; $\frac{9 \pm 6}{7 \pm 2}$ has qua-

quatuor tantum fractiones in minimis terminis suppeditant nempe: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; quarum binae posteriores pro formula $rr + ss$ duplum valorem tantum exhiberit, eius qui ex primis oritur: unde patebit, factores esse binos $2^2 + 1 = 5$ et $4^2 + 1 = 17$. Breuissime ergo hi factores inueniuntur, si tantum radices quadratorum pares et impares seorsim inuicem combinentur, et combinatio parium cum imparibus penitus omittatur, quia hinc fractiones orientur, numeratorem et denominatorem impares habentes.

PROBLEMA.

§. 44. *Proposito numero quocunque formae $4n + 1$ explorare utrum primus sit nec ne?*

SOLVTIO.

Per operationem deinceps explicandam inuestigetur numerus propositus, utrum in duo quadrata resolui possit nec ne? et, si possit, an plus vno modo resolutio succedat? Si enim resolutionem in duo quadrata plane non admittat, id per §. 32 certum erit signum, numerum propositum non esse primum, etiamsi haec conclusio ex *Prop. V.* non satis demonstrata sequatur. Hoc quidem casu de eius diuisoribus nihil constat; interim tamen certo colligimus, eum diuisores primos habere formae $4m - 1$, quia si omnes eius factores essent formae $4m + 1$, is certe in duo quadrata foret resolubilis. At si numerus propositus vnico modo sit in duo quadrata resolubilis, tum infallibiliter pro primo erit habendus. Sin
autem

autem resolutio plus vno modo succedat, tum non solum constabit, eum non esse primum, sed etiam eius diuisiones assignari poterunt per §. 43. His perpensis regulam tradam, cuius ope resolubilitas in duo quadrata non difficulter explorari poterit.

Numerus propositus desinet vel in 1, vel in 3, vel in 7 vel in 9; casum quo in 5 desinet hic omitto, quia diuisor 5 tum est manifestus, et indicat numerum non esse primum. Deinde numeri quadrati incipiendo a maximis ipso numero proposito minoribus successiue ab eo subtrahantur, vt pateat, vtrum vnquam numerus quadratus restet, quoties enim hoc euenit, toties resolutio in duo quadrata succedit.

At cum numeri quadrati in nullum horum numerorum 2, 3, 7, 8, desinere queant, subtractio eorum numerorum quadratorum, qui residua dant in hos numeros desinentia omitti poterit. Hinc tantum opus est vt a numero proposito ea quadrata subtrahantur, quae residua in 0, 1, 4, 5, 6, 9, desinentia praebent; nempe

| Si numerus propositus desinat in | Quadrata subtrahenda desinent in | Et horum quadratorum radices desinent in |
|----------------------------------|----------------------------------|--|
| 1 | 0, 1, 5, 6, | 0, 1, 4, 5, 6, 9 |
| 3 | 4, 9 | 2, 3, 7, 8 |
| 7 | 1, 6 | 1, 4, 6, 9 |
| 9 | 0, 4, 5, 9 | 0, 2, 3, 5, 7, 8 |

Pro quolibet igitur numero proposito $4n + 1 = N$ tot operationes seorsim instituantur, quot radicum idoneae sint terminationes. Sit igitur $p p$ maximum quadratum

Tom. IV. Nou. Com. E huius

huius indolis, quod a numero proposito N subtrahi debet: ac tum successive subtrahantur quadrata $(p - 10)^2$, $(p - 20)^2$, $(p - 30)^2$, $(p - 40)^2$, etc. Verum residua hinc emergentia expedite per continuam additionem inueniri poterunt; Hoc modo

| | |
|---------------------|------------------|
| Numerus propositus; | N |
| a quo subtrahatur | p^2 |
| | $N - p^2$ |
| Addatur | $20p - 100$ |
| | $N - (p - 10)^2$ |
| Addatur | $20p - 300$ |
| | $N - (p - 20)^2$ |
| Addatur | $20p - 500$ |
| | $N - (p - 30)^2$ |

Numeri igitur successive addendi sunt: $20p - 100$, $20p - 300$, $20p - 500$, $20p - 700$, etc., qui decreſcunt in ratione Arithmetica per differ. = 200 . Huiusmodi operatio pro ſingulis numeris p , quorum quadrata numero proposito proxime ſunt minora, et qui deſinunt in aliquem figuratum ſupra indicatum, inſtituitur, neque ulterius continetur, quam donec ad ſemiſſem numeri propositi N perueniatur. Si enim numerus N fuerit ſumma duorum quadratorum, alterum certe ſemiſſi pſius minus ſit neceſſe eſt. Quo obſeruato, quot hac operatione prodibunt quadrata, tot modis numerus propositus in duo quadrata erit reſolubilis. Hanc autem operationem non admodum eſſe moleſtam, omnibusque aliis methodis cum ſeſo primos explorandi longe antepoſendam, ſequentia exempla declarabunt.

Exem-

QVI SVNT AGGREG. DVOR. QVADR. 31

EXEMPLVM I. II. III. AC IV. V.

§. 45. *Explorare utrum hic numerus 82421 primus sit nec ne?*

Operatio per sex columnas sequentes instituetur.

| 82421 | 82421 | 82421 | 82421 | 82421 | 82421 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 625 | 1196 | 1765 | 2346 | 2921 | 3496 |
| 5620 | 5600 | 5580 | 5520 | 5500 | 5480 |
| 6245 | 6796 | 7345 | 7880 | 8421 | 8960 |
| 5120 | 5400 | 5380 | 5320 | 5300 | 5280 |
| 11665 | 12196 | 12725 | 13300 | 13821 | 14340 |
| 5220 | 5200 | 5180 | 5120 | 5100 | 5080 |
| 16885 | 17396 | 17905 | 18420 | 18921 | 19440 |
| 5020 | 5000 | 4980 | 4920 | 4900 | 4880 |
| 21905 | 22396 | 22885 | 23346 | 23821 | 24300 |
| 4820 | 4800 | 4780 | 4720 | 4700 | 4680 |
| 26725 | 27196 | 27665 | 28060 | 28521 | 28980 |
| 4620 | 4600 | 4580 | 4520 | 4500 | 4480 |
| 31345 | 31796 | 32245 | 32580 | 32921 | 33400 |
| 4420 | 4400 | 4380 | 4320 | 4300 | 4280 |
| 35765 | 36196 | 36625 | 37000 | 37321 | 37740 |
| 4220 | 4200 | 4180 | 4120 | 4100 | 4080 |
| 39985 | 40396 | 40805 | 41020 | 41421 | 41820 |

Cum igitur hic vnicum occurrat quadratum 625, ideoque numerus propositus 82421 vnico modo fit in duo quadrata resolubilis nempe $= 25^2 + 286^2$, is erit primus.

SCHOLIION.

§. 46. In hoc computo quatuor columnae, vbi numeri residui deficiunt vel in 5 vel in 0, notabiliter contrahi possunt, omittendis omnibus iis, qui non deficiunt vel in 25 vel in 00. Quare in columnis, in quibus residua deficiunt vel in 5 vel in 0, subtrahatur primo

E 2

mo

mo proximum quadratum, quod residuum praebet vel in 25, vel in 100 definens, hocque quadratum dicatur pp , ut residuum sit $= N - pp$: tum quadrata, unde residua simili modo definentia oriuntur, erunt $(p - 50)^2$, $(p - 100)^2$, $(p - 150)^2$ etc. ideoque haec residua obtinebuntur si ad $N - pp$ continuo addantur hi numeri $100p - 2500$; $100p - 17500$; $100p - 125000$ qui decrescunt arithmetice secundum differentiam constantem 5000; unde hae columnae mox ad finem perducentur, dum eas non ultra semissem numeri propositi continuari opus est. Hoc igitur compendium locum habebit in numeris vel in 1: vel in 9 definentibus, qui propterea, etiamsi sex columnas requirant, dum pro reliquis quatuor sufficiunt, facilius expedientur.

EXEMPLVM 2.

§. 47. Explorare utrum hic numerus 100981 primus sit nec ?

| p | 100981 | p | 100981 | p | 100981 | p | 100981 |
|------|---------|------|--------|------|---------|------|--------|
| 316. | 99856 | 315. | 99225 | 309. | 95481 | 310. | 96100 |
| | 1125 | | 1756 | | 5500 | | 4881 |
| | 29100 | | 6200 | | 28400 | | 6100 |
| | 30225 | | 7956 | | 33900 | | 10981 |
| | 24100 | | 6000 | | 23400 | | 5000 |
| | * 54125 | | 13956 | | * 57300 | | 16881 |
| p | 100981 | | 5800 | | 100981 | | 5700 |
| 284. | 80656 | | 19756 | 291. | 84681 | | 22581 |
| | 20326 | | 5600 | | 16300 | | 5500 |
| | 25900 | | 25356 | | 26600 | | 28081 |
| 215. | 46225 | | 5400 | | 42900 | | 5300 |
| | | | 30756 | | 21600 | | 33381 |
| | | | 5200 | | * 64500 | | 5100 |
| | | | 35956 | | | | 38481 |
| | | | 5000 | | | | 4900 |
| | | | 40956 | | | | 43381 |
| | | | 4800 | | | | 4700 |
| | | | 45756 | | | | 48081 |
| | | | 4600 | | | | |
| | | | 50356 | | | | |

Cum

M E R I S QVI SVNT AGGREG. DVOR. QVADR. 37

od residuum p ergo vnicum occurrat quadratum $46225 = 215^2$
 re quadratum fit $100981 = 215^2 + 234^2$, erit hic numerus
 quadrata, vnicus.

unt $(p-50)$

E X E M P L V M 3.

residua obtine §. 48. Explorare utrum hic numerus 1000009 sit
 numeri 1000009 nec ne ?

o qui decem
 constantem
 luceatur,
 continuan
 bebit in
 propterea,
 is quatuor

1 2.
 numerus

p 100009
 210. 9610
 480
 610
 109
 500
 166
 570
 235
 55
 280
 53
 333
 510
 784
 490
 138
 700
 18

| p | 1000009 | p | 1000009 | p | 1000009 | 1000009 | |
|------|---------|-----|---------|-----|---------|---------|--------|
| 1000 | 1000000 | 978 | 956484 | 997 | 994009 | 995 | 990025 |
| | 19900 | | 43525 | | 6000 | | 9984 |
| | 19909 | | 98100 | | 97200 | | 19800 |
| | 19700 | | 138825 | | 103200 | | 29784 |
| | 19609 | | 90100 | | 98200 | | 19670 |
| | 19500 | | 229125 | | 193400 | | 49374 |
| | 59109 | | 85300 | | 87800 | | 39400 |
| | 19800 | | 314425 | | 882600 | | 69784 |
| | 78409 | | 80300 | | 82200 | | 19200 |
| | 19100 | | 394725 | | 364800 | | 88984 |
| | 97509 | | 75800 | | 97200 | | 19000 |
| | 18900 | | 470025 | | 442000 | | 107984 |
| | 316409 | | 18900 | | 1000009 | | 18800 |
| | 18700 | | 972 | | 908209 | | 126784 |
| | 335109 | | 235 | | 91800 | | 18600 |
| | 18500 | | 55225 | | 92800 | | 145384 |
| | 153609 | | 94700 | | 92800 | | 18400 |
| | 18300 | | 149925 | | 184600 | | 168784 |
| | 171909 | | 89700 | | 87800 | | 18200 |
| | 18100 | | 239625 | | 372400 | | 181984 |
| | 190009 | | 84700 | | 82800 | | 18700 |
| | 17900 | | 324325 | | 853200 | | 199984 |
| | 375909 | | 79700 | | 77800 | | 17800 |
| | 175700 | | 404025 | | 483000 | | 317784 |
| | 225609 | | 74700 | | | | 17600 |
| | 17500 | | 678725 | | | | 355384 |
| | 407109 | | | | | | 17400 |
| | 15800 | | | | | | 252784 |
| | 422409 | | | | | | 17200 |
| | 15100 | | | | | | 269984 |
| | 437509 | | | | | | 17000 |
| | 14900 | | | | | | 886984 |
| | 452409 | | | | | | 16800 |
| | 14700 | | | | | | 803784 |
| | 467109 | | | | | | 16600 |
| | 14500 | | | | | | 820384 |
| | 481609 | | | | | | 16400 |
| | 14300 | | | | | | 386784 |
| | 495909 | | | | | | 16200 |
| | | | | | | | 352984 |
| | | | | | | | 16000 |

E 3

Hic

Hic ergo numerus 100009 duplici modo est in duo quadrata resolvable quippe = 1000² + 3² = 235² + 972² vnde is non erit primus: factores vero eius reperientur ex hac formula $\frac{1000 + 972}{235 + 3} = \frac{1972}{238}$ ad minimos terminos reducta, vnde

$$\text{Oritur: } \frac{1000 + 972}{235 + 3} = \frac{1972}{238} \left| \frac{236}{119} \right| \frac{17}{7} \text{ ergo factor} = 3413$$

$$\frac{1000 + 972}{235 - 3} = \frac{1972}{232} \left| \frac{493}{58} \right| \frac{17}{5} \text{ ergo factor} = 293$$

qui factores facilius inuenientur ex formula $\frac{1000 - 972}{235 - 3} = \frac{28}{232} = \frac{14}{116} = \frac{7}{58}$ et $\frac{28}{232} = \frac{7}{58}$

Nouimus ergo esse 100009 = 293 . 3413, qui factores nulla alia methodo tam facile reperti fuissent.

EXEMPLUM 4.

§. 49 Explorare utrum hic numerus 233033 primus sit nec ne?

| $47^2 = 2209$ | $47^2 = 2209$ | $47^2 = 2209$ | $47^2 = 2209$ |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 233033 | 233083 | 233033 | 233033 |
| 232824 | 227529 | 223779 | 228484 |
| 709 | 5594 | 5304 | 4449 |
| 9540 | 9440 | 9360 | 9460 |
| 10249 | 14944 | 18664 | 14409 |
| 9840 | 9740 | 9160 | 9760 |
| 19589 | 24784 | 27824 | 23269 |
| 9140 | 9040 | 8960 | 9060 |
| 28729 | 33284 | 36784 | 32329 |
| 8940 | 8840 | 8760 | 8860 |
| 37669 | 42064 | 45344 | 41169 |
| 8740 | 8640 | 8560 | 8660 |
| 46409 | 50704 | 54104 | 49849 |
| 8540 | 8440 | 8360 | 8460 |
| 54949 | 59144 | 62464 | 58309 |
| 8340 | 8240 | 8160 | 8260 |
| 63289 | 67384 | 70624 | 66569 |
| 8140 | 8040 | 7960 | 8060 |
| 71429 | 75424 | 78584 | 74629 |
| 7940 | 7840 | 7760 | 7860 |
| 79369 | 83764 | 86744 | 82489 |
| 7740 | 7640 | 7560 | 7660 |
| 87109 | 90904 | 93904 | 90149 |
| 7540 | 7440 | 7360 | 7460 |
| 94649 | 99344 | 101264 | 97609 |
| 7340 | 7240 | 7160 | 7260 |
| 101989 | 105584 | 108424 | 104869 |
| 7140 | 7040 | 6960 | 7060 |
| 109129 | 112624 | 115884 | 111929 |
| 6940 | 6840 | 6760 | 6860 |
| 116069 | 119464 | 122144 | 118789 |

Quia

Quia ergo hic numerus, etfi est formae $4n + 1$, non est summa duorum quadratorum, vi Prop. V. colligimus eum non esse numerum primum. Factores quidem eius hinc assignare non licet, interim tamen concludimus eum saltem duos habere factores formae $4m - 1$: qui, inue-
 stigazione instituta, reperientur 467. 499.

E X E M P L V M 5.

§. 50. Explorare utrum hic numerus 262657 pri-
 mus sit nec ne?

| 522^2 | 262657 | 502^2 | 262657 | 506^2 | 262657 | 504^2 | 262657 |
|---------|----------|------------------|----------|---------|----------|---------|----------|
| 261121 | | 250804 | | 256036 | | 254016 | |
| 1536 | 3376 | 880 | 6621 | | | 8647 | |
| 10120 | 10080 | | 10020 | | | 9980 | |
| 11656 | 13656 | 129 ² | 16641 | | | 18621 | |
| 9920 | 9880 | | 9820 | | | 9780 | |
| 21576 | 23536 | | 26461 | | | 28401 | |
| 9720 | 9680 | | 6620 | | | 6580 | |
| 31296 | 33216 | | 36081 | | | 37981 | |
| 9520 | 9480 | | 6420 | | | 6380 | |
| 40816 | 42896 | | 45501 | | | 47361 | |
| 9320 | 9280 | | 9220 | | | 9180 | |
| 50136 | 51976 | | 54721 | | | 56581 | |
| 9120 | 9080 | | 9020 | | | 8980 | |
| 59336 | 61056 | | 61741 | | | 63521 | |
| 8920 | 8880 | | 8820 | | | 8780 | |
| 68176 | 69936 | | 72361 | | | 74301 | |
| 8720 | 8680 | | 8620 | | | 8580 | |
| 76296 | 78016 | | 81181 | | | 82841 | |
| 8520 | 8480 | | 8420 | | | 8380 | |
| 85416 | 87096 | | 89601 | | | 91261 | |
| 8320 | 8280 | | 8220 | | | 8180 | |
| 93936 | 95376 | | 97321 | | | 99441 | |
| 8120 | 8080 | | 8080 | | | 7980 | |
| 101856 | 103456 | | 105841 | | | 107421 | |
| 7920 | 7880 | | 7820 | | | 7780 | |
| 109776 | 111336 | | 113661 | | | 115201 | |
| 7720 | 7680 | | 7620 | | | 7580 | |
| 117496 | 119016 | | 121281 | | | 122781 | |
| 7520 | 7480 | | 7420 | | | 7380 | |
| 125016 | 126496 | | 128701 | | | 130461 | |
| 7320 | 7280 | | 7220 | | | 7180 | |
| *133336 | *133776 | | *135921 | | | *137341 | |

Cum igitur hic vnicum quadratum occurrat: $16641 = 129^2$
 ita ut sit vnicu modo $262657 = 129^2 + 496^2$, hique
 numeri

numeri 129 et 496 sint inter se primi, certum est numerum 262657 esse primum.

E X E M P L V M 6.

§. 51. *Explorare utrum hic numerus 32129 sit primus nec ne?*

| | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 32129 | 32129 | 32129 | 32129 |
| 162 ² = 26104 | 177 ² = 31329 | 175 ² = 30625 | 170 ² = 28900 |
| 95 ² = 9025 | 800 | 1504 | 3229 |
| 18700 | 15800 | 2400 | 1800 |
| • 31725 | 16000 | 4904 | 6529 |
| ----- | ----- | ----- | ----- |
| 241 ² = 58081 | 172 ² = 29584 | 8104 | 9629 |
| 10225 | 8200 | 3000 | 2900 |
| 12300 | 14800 | 11104 | 12529 |
| • 22525 | • 17000 | 2800 | 2700 |
| ----- | ----- | ----- | ----- |
| | | 13904 | 15229 |
| | | 2600 | 2500 |
| | | * 16504 | * 17729 |

Hic igitur numerus quoque vnico modo est in duo quadrata resolubilis = 95² + 152², sed quia hi numeri 95 et 152 non sunt primi inter se, sed communem diuisionem habent 19, numerus propositus non erit primus, sed factorem habet 19² = 361, estque 32129 = 19² · 89.

S C H O L I O N.

§. 52. Quanquam haec methodus explorandi numeros utrum sint primi nec ne? tantum ad numeros in hac forma 4n + 1 contentos extenditur, tamen saepe numero in diiudicandis numeris magnum subsidium afferre potest. Quantum autem aliis regulis hoc idem praestandi antecellat, quilibet, qui periculum huius rei facere velit, facile experietur. Qui enim numerum millione non minorem via consueta examinare voluerit, eius diuisionem per omnes numeros primos ad millenarium vsque tentare debet, quod opus intra plures horas non absoluet: dum ope huius regulae ipsi vix semihora opus erit.

DE CON-

DE CONSTRUCTIONE APTISSIMA MOLARVM ALATARVM AVCT. L. EVLERO.

Nemo est qui ignoret, alas molarum alatarum venti directioni oblique exposi solere, vt hoc modo vis lateralis excipiat, qua alae in gyrum agantur, id quod non eueniret, si ventus normaliter in alas incidere. Hac de re iam pridem quaestio inter Geometras est agitata, sub quonam angulo alae venti impulsionem recipere debeant, vt vi maxima circumagantur, sicque maximum effectum praestare valeant. Plerique quidem hunc angulum constituerunt 54° , $45'$, qui etiam nunc fere vbique in praxi obseruari solet; verum notandum est ex hoc angulo tum solum maximum oriri effectum, quando alae adhuc sunt in quiete, ac demum ad motum sunt impellendae. Cum vero machina iam in motu versatur quoniam ob motum alarum tam vis quam directio venti immutatur, angulus ille hanc praerogatiuam prorsus amittit, atque experientia iam docuit, maiorem effectum obtineri, si angulus ille maior quam 54° , $45'$ statuat. Pendet ergo determinatio huius anguli quoque a motu alarum, qui quo fuerit velocior non difficulter colligere licet, eo maiorem quoque sumi debere angulum, quem directio venti cum planitie alarum constituat. Verum etiam in ipsa alarum celeritate maximi quaedam proprietates locum habet; satis enim perspicuum est, siue mola nimis celeriter circumagatur, siue nimis tarde, utro-

Tom. IV. Nou. Com. F que

que casu effectum produci debiliorem : ex quo intelligitur , dari certum quendam celeritatis gradum , qua si alae circumagantur , maximus inde effectus proficiscatur. Aestimatur autem quantitas effectus ex momento actionis vis impellentis , quod momentum definitur producto ex vi impellente in celeritatem qua machinam mouet ; hincque etiam gradus ille celeritatis maxime idoneus vicissim ab obliquitate qua ventus in alas incidit , pendet ; vnde duplex nascitur quaestio , qua tam obliquitas alarum ratione directionis venti , quam celeritas motus , quo alae in gyrum aguntur , determinanda proponitur , vt effectus maximus inde obtineatur , seu vt momentum actionis vis impellentis maximum valorem nanciscatur. Quae disquisitio quo latius pateat , eam ita instituem , vt alarum superficiem non planam , sed vtcunq; incuruatam sim consideraturus ; qua feliciter ad finem perducta concludere tandem licebit , quomodo superficies alarum vbique ad venti directionem comparata esse et quanta celeritate alae gyri debent , vt maximum a machinae actione effectum expectare queamus. Vtcunq; autem alarum superficies sit incuruata , minima eius elementa pro planis haberi possunt , ex quo investigationem hanc a superficiebus planis inchoabo.

PROBLEMA I.

1. *Si ventus data celeritate in superficiem planam quiescentem sub quocunq; angulo impingat , definire vim , qua haec superficies a vento sollicitabitur.*

SO

S O L V T I O.

Sit aa area superficiei planae, quae vim venti excipit, et Φ angulus, quem venti directio cum hoc plano facit: tum vero sit k altitudo debita celeritate venti. Iam si ventus perpendiculariter impingeret, foret eius vis aequalis ponderi columnae aereae, cuius basis sit $= aa$ et altitudo $= k$; seu haec vis esset aequalis ponderi massae aereae, cuius volumen $= aak$. Verum propter obliquitatem impulsus haec vis diminui debet in ratione sinus totius ad sinum anguli Φ : posito ergo sinu toto $= 1$, vis venti in superficiem propositam aa celeritate altitudini k debita, et sub angulo $= \Phi$ incidentis aequabitur ponderi massae aereae, cuius volumen $= aak \sin. \Phi^2$, huiusque vis directio perpetuo ad planum propositum est normalis. Q. E. I.

S C H O L I O N.

2. Etsi solutio huius problematis satis superque est nota, tamen ab eo initium ducere est visum, ut mensuras absolutas, quibus in sequentibus utar distinctius explicare liceat. Primum igitur grauitate specifica aeris cognita haec vis ad cognitam ponderum mensuram reducitur; tametsi vero densitas aeris valde est variabilis, ea plerumque octingentes minor aestimatur, quam densitas aquae; vnde si formula $aa k \sin. \Phi^2$ per 800 diuiditur, reperitur volumen aquae, cuius ponderi vis inuenta aequatur; quod si in pedibus cubicis exprimitur, facile ad libras reducitur tribuendo 70 lb singulis pedibus cubicis aquae. Quod deinde ad celeritatem venti attinet, ea per spa-

F. 2

tium

tium definiri solet, quod ventus singulis minutis secundis percurrit, quae mensura, quo facilius ad illam altitudinem k reuocari possit, omnes longitudines per datam mensuram metiri conuenit; pro qua assumam pedem Rhenanum. Si igitur venti celeritas sit $= e$ pedum vno minuto secundo, quoniam graue hoc tempore delabitur per spatium 15,625 pedum et celeritate acquisita spatium duplum 31,25 ped: conficere valet, erit $\sqrt{15,625} : \sqrt{k} = 31,25 : e$ vnde reperitur $e = 2\sqrt{15,625} k = 250\sqrt{\frac{k}{10000}} = 25\sqrt{\frac{1}{100}k}$ et $k = \frac{e^2}{62\frac{1}{2}} = \frac{2e^2}{125}$ sicque celeritates vtroque modo expressae facile inter se conferri possunt.

PROBLEMA II.

TAB. I. 3. Si ventus celeritate data secundum datam directionem in elementum superficiei cuiuscunque quiescentis impingat, inuenirevim, qua hoc elementum sollicitabit.

SOLVTIO.

Fig. I. Referatur elementum superficiei propositum ad planum quoddam fixum, quod plano tabulae repraesentetur, sitque elementum in sublimi vtcunque positum in Z , vnde ad planum tabulae demittatur perpendicularum ZY . Iam cum elementum hoc pro plano haberi possit, sit eius area infinite parua $= dS$; continuetur hoc planum donec planum tabulae interfecet, sit intersectio recta $E-F$, ita vt planum EZF superficiem propositam in puncto Z tangat. Ex Y ad EF ducatur perpendicularis YT

YT, iunctaque ZT in eam normalis ducatur YO, quae simul erit normalis in planum EZF; ipsi OY agatur parallela ZN occurrens ipsi TY productae in N, erit NZ tam ad rectam ZT quam ad planum EZF normalis. His positis angulus ZTY erit mensura inclinationis plani EZF ad planum tabulae, ac ponatur huius anguli complementum seu angulus YZT = Φ ; et rectae YZ = z et YT = t ; erit $t = z$ tangens Φ ; et YO = $z \sin. \Phi$, itemque YN = $\frac{z^2}{t} = z \cos. \Phi$ et ZN = $\frac{z}{\sin. \Phi}$. Exprimat nunc recta ZV directionem venti, cuius celeritas debita sit altitudini k , ita scilicet, ut si ventus per elementum Z penetraret, sit secundum directionem ZV progressurus; ac manifestum est totum negotium huc redire, ut rectae ZV inclinatio ad planum EZF investigetur, posita enim hac inclinatione = ω erit vis venti in elementum Z = $kdS \sin. \omega^2$, quia angulus ω exhibet inclinationem directionis venti ZV ad planum elementi EZF. Verum ad hunc angulum ω inveniendum ex V in planum EZF ducatur perpendicularum VS, iunctaque ZS, erit VZS iste angulus quem vocauimus = ω , ideoque $\sin. \omega = \frac{VS}{ZV}$. Ex V ducatur ad EF normalis VR, eritque triangulum RVS simile triangulo TYO; Hinc si YP ad YT normalis agatur, et ex P ducatur PQ ipsi YO parallela, erit PQ normalis in planum EZF, et ob TP = RV habebitur PQ = VS. Quare si vocetur YV = v et angulus TYV = ζ , quibus positio puncti V continetur, erit PY = $v \cos. \zeta$, ideoque TP = z tangens $\Phi - v \cos. \zeta$ atque PQ = TP $\cos. \Phi = z \sin. \Phi - v \cos. \zeta \cos. \Phi = VS$. Ergo ob ZV = $V(zz + vv)$ erit $\sin. \omega = \frac{z \sin. \Phi - v \cos. \zeta \cos. \Phi}{\sqrt{(zz + vv)}}$,

F 3

vnde

vnde dicitur vis venti in elementum propositum $Z = \frac{k d S (z \sin. \Phi - v \cos. \zeta \cos. \Phi)^2}{z z + v v}$ qua expressione volumen aeris indicatur, cuius pondus vi quaesitae est aequale. Huius autem vis directio est recta ZN normalis ad planum EZF , existente $YN = z \cos. \Phi$. Q. E. I.

COROLL. 1.

4. In hac solutione assumimus elementum Z a vento planum tabulae versus impelli, ita vt inde vis nascatur punctum Z secundum directionem ZN vrgens. Hoc autem non erit nisi sit $z \sin. \Phi > v \cos. \zeta \cos. \Phi$ seu $z \text{ tang. } \Phi - v \cos. \zeta = TP > 0$ nam si fuerit $z \sin. \Phi - v \cos. \zeta \cos. \Phi$ quantitas negatiua etiamsi eius quadratum, quo vis inuenta exprimitur, aequae sit affirmatiuum, tamen vis directio in contrarium mutatur. Quia enim hoc casu $z \text{ tang. } \Phi - v \cos. \zeta$ seu TP valorem sortitur negatiuum manifestum est venti directionem ultra Z productam ZV supra planum EZF prominere, ideoque ventum a regione tabulae in elementum Z incurrere, vnde eius vis in plagam contrariam tendet. Ita quanquam hoc discrimen per formulam inuentam non indicatur, tamen tenendum est expressionem vis venti $\frac{k d S (z \sin. \Phi - v \cos. \zeta \cos. \Phi)^2}{z z + v v}$ valorem habere affirmatiuum si fuerit $z \sin. \Phi > v \cos. \zeta \cos. \Phi$, sin autem sit $z \sin. \Phi < v \cos. \zeta \cos. \Phi$ illam expressionem vis negatiue assumi debere.

COROLL. 2.

5. Si fiat $z \sin. \Phi = v \cos. \zeta \cos. \Phi$, seu $z \text{ tang. } \Phi = v \cos. \zeta$, vis venti omnino euanescit: id quod manifestum

festum est quia tum interuallam P T ideoque et V R in nihilum abit; Cadet ergo punctum V in rectam EF, atque directio venti ZV in ipso plano E Z F erit sita, vnde elementum Z a vento tantum stringetur neutiquam vero impelletur, quia angulus incidentiae V Z S euanesce. Ex quo casu eo clarius perspicitur, si sit $z \text{ tang. } \Phi > v \text{ cos. } \zeta$ elemento Z planitiem superiorem seu eam, quae a plano tabulae est auersa venti impulsione recipere, sin autem $z \text{ tang. } \Phi < v \text{ cos. } \zeta$ planitiem inferiorem quae planum tabulae respicit, a vento impelli, sicque effectum plane contrarium produci debere.

COROLL. 3.

6. Si celeritas venti non per altitudinem ipsi debitam k detur, sed spatium exhibeatur, quod ventus vno minuto secundo percurrat, vis venti aequae facile exprimi poterit. Sit enim spatium a vento vno minuto secundo percursum = e pedum Rhen. atque reliquae quantitates in eadem mensura exprimantur, erit uti vidimus (2), $k = \frac{2}{125} e e$, ita vis qua elementum Z = $d S$ secundum directionem ZN impelletur, aequalis erit ponderi voluminis aeris, quod est = $\frac{2}{125} e e d S \cdot \frac{(z \sin. \Phi - v \cos. \zeta \cos. \Phi)^2}{z z + v v}$ seu posita ratione grauitatis specificae aeris ad aquam ut 1 ad 800, vis haec ponderi voluminis aquae aequabitur, quod est = $\frac{e e d S (z \sin. \Phi - v \cos. \zeta \cos. \Phi)^2}{50000 (z z + v v)}$ ped. cub.

COROLL. 4.

7. Potest etiam ad calculum contrahendum coefficientis iste numericus penitus omitti, atque vis venti in elementum

elementum Z simpliciter hac formula $\frac{eedS(z \sin. \Phi - v \cos. \zeta \cos. \Phi)}{zz + vv}$ exprimi, dummodo meminerimus, quando hanc vim ad mensuram absolutam reducere voluerimus, istam expressionem vel per $\frac{2}{125}$ vel per $\frac{1}{50000}$ multiplicari oportere, apud quantitatem huius vis vel per pondus voluminis aeris vel per pondus voluminis aquae expressam desideremus: Tum vero quantitates, ut iam monui, ex pede Rhen. pro unitate assumta definiri debent.

COROLL. 5.

8. Vis a vento secundum directionem ZN elemento Z impressa $= \frac{eedS(z \sin. \Phi - v \cos. \zeta \cos. \Phi)^2}{zz + vv}$ commodissime resoluitur in binas vires, quarum altera vrgeat secundum directionem ZY ad planum tabulae normalem, altera vero agat secundum directionem ipsi YN parallelam. Nam ob angulum $YNZ = YZT = \Phi$, erit

$$\text{vis secundum } ZY = \frac{eedS(z \sin. \Phi - v \cos. \zeta \cos. \Phi)^2}{zz + vv} \sin. \Phi$$

$$\text{vis secundum } YN = \frac{eedS(z \sin. \Phi - v \cos. \zeta \cos. \Phi)^2}{zz + vv} \cos. \Phi$$

Id quod intelligendum est si fuerit $z \sin. \Phi > v \cos. \zeta \cos. \Phi$; sin autem sit $z \sin. \Phi < v \cos. \zeta \cos. \Phi$, expressiones istae inuentae negatiuae capi debent.

PROBLEMA. III.

9. Si superficies quaecunque circa axem fixum data celeritate gyretur, atque directio venti sit ipsi axi parallela, secundum quam in superficiem data celeritate incurrat, inuenire vim, qua quoduis superficiei elementum a vento impelletur.

SOLV-

SOLVITIO.

Transeat axis per punctum C sitque ad planum tabu-
 lae normalis, ita ut etiam directio venti in planum tabulae
 sit perpendicularis, cuius celeritas debita sit altitudini =
 k , seu singulis minutis secundis spatium e pedum absolvat,
 ita ut sit $k = \frac{2}{125} e e$ pedum. Iam motus gyratorius
 superficiei propositae circa axem C tantus sit, ut eius
 punctum ab axe distans intervallo = f percurrat spatium
 u pedum singulis minutis secundis, ita ut u exprimat
 hanc celeritatem, si celeritas venti exponatur spatio e ,
 quod pariter minuto secundo conficitur. Sit iam elemen-
 tum quodcumque superficiei Z in sublimi positum, cuius
 area sit = dS , unde ad planum tabulae demittatur
 perpendicularum ZY = z : iungatur recta CY = s , quae
 puncti Z distantiam ab axe praebebit, et puncti Z motus
 circa axem conveniet cum motu puncti Y circa eundem
 axem. Cum autem distantiae f ab axe celeritas sit = u ,
 ob motum angularem distantiae CY = s celeritas conveniet
 = $\frac{us}{f}$, quia celeritas motus angularis sunt distantiis ab axe
 proportionales. Habebit ergo punctum Y celeritatem = $\frac{u^2}{f}$
 secundum directionem Yq ad CY in plano tabulae norma-
 lem, eique aequalis erit celeritas puncti Z et secundum dire-
 ctionem ipsi Y y parallelam. Venti autem in Z incurrentis
 directio erit ZY normalis in planum tabulae quippe
 directioni axis C parallela, atque secundum hanc dire-
 ctionem in elementum Z impingeret, si hoc elementum
 quiesceret; verum cum id ipsum sit in motu, tam
 celeritas venti, quam eius directio, qua elementum per-
 cutitur, inde mutabitur. Ad quam mutationem inveniendam

concipiatur tam elemento quam vento insuper motus aequalis et contrarius ei, quo elementum Z mouetur, imprimi, vt hoc modo ipsum elementum ad quietem reducatur, atque venti motus relatiuus in elementum obtineatur. Ducatur ergo Zz ipsi Yy parallela, capiaturque Zz ad ZY in ratione celeritatis $\frac{us}{j}$ ad celeritatem e , vt sit $Zz = \frac{usz}{ef}$, ac repraesentante ZY veram venti celeritatem e , eius motus relatiuus componetur ex motu secundum ZY et motu secundum Zz . Compleatur ergo parallelogrammum $ZYVz$, erit $YV = \frac{usz}{ef}$ et cum Yy in directum iacebit; quo facto diagonalis ZV referet directionem venti relatiuam in elementum Z , atque celeritas relatiua erit ad celeritatem veram e , vt est ZV ad ZY , ita vt celeritas relatiua sit $= \frac{ZV}{ZY} \cdot e$: Quodsi ergo tantisper angulum, quem directio ZV cum planitie elementi constituit, ponamus $= \omega$ erit vis elemento impressa $= \frac{ZV^2}{ZY^2} e e dS \sin. \omega^2$; seu cum sit $ZV^2 = ZY^2 + YV^2 = zz + \frac{uussz^2}{eeff}$ erit haec vis $= (e^2 + \frac{uuss}{jj}) dS \sin. \omega^2$, quae in planitiem elementi est normalis. Ponamus iam hanc planitiem seu planum tangens superficiem in puncto Z plano tabulae occurrere in recta EF , ad quam ex Y perpendicularam ducatur YT , et ex Y in ductam ZT normalis agatur YO , erit haec in ipsam planum perpendicularis, cui si parallela ducatur ZN rectae TY productae occurrens in N , erit haec ZN directio secundum quam elementum Z a vento impelletur. Porro ex V in TY perpendicularum VP demittatur, itemque ex P in ZT perpendicularum PQ , atque vt in solutione praecedentis problematis

vidimus

vidimus, praebebit $\frac{PQ}{ZV}$ finum anguli, quo directio venti Z V in planum E Z F est inclinata, ita ut fit: $\sin. \omega = \frac{PQ}{ZV}$. Hinc vis venti in elementum Z = d S exerta fiet = $\frac{PQ^2}{ZY^2} e e d S = P Q^2 \cdot \frac{e e}{z z} d S$. Iam ad P Q commode exprimendum, ponatur inclinatio elementi seu plani E Z F ad directionem venti veram Z Y, seu angulus Y Z T = Φ , erit Y T = z tang. Φ ; Y N = z cot. Φ ; et Y O = z sin. Φ . Praeter, ea vocetur angulus F E Y = ζ , cui aequalis erit angulus V Y P, unde ob $Y V = \frac{u s z}{e f}$, fiet Y P = $\frac{u s z}{e f} \cos. \zeta$, hincque habebitur T P = z tang. $\Phi - \frac{u s z}{e f} \cos. \zeta$, ex quo tandem elicitur P Q = z sin. $\Phi - \frac{u s z}{e f} \cos. \zeta \cos. \Phi = \frac{z}{e} (e \sin. \Phi - \frac{u s}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi)$. Quam ob rem vis, qua elementum Z = d S a vento sollicitabitur, erit = d S $(e \sin. \Phi - \frac{u s}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi)^2$, cuius vis directio est recta Z N normalis ad superficiem E Z F, existente Y N = z cot. Φ . Q. E. I.

C O R O L L. I.

10. Si ergo haec expressio per fractionem $\frac{2}{113}$ multiplicetur, et pes rhenanus pro communi mensura sumatur, prodibit volumen aeris, cuius ponderi haec vis aequatur. Vel si eadem expressio per $\frac{1}{38000}$ multiplicetur, obtinebitur volumen aquae, cuius pondus huic vi est aequale, si quidem aer octingentes leuior sit quam aqua: Ad hoc autem notandum est, celeritates per spatia vno minuto secundo confecta, haecque spatia pariter in pedibus exprimi debere, quem celeritates exprimendi modum in posterum retinebo.

G 2

COROLL.

COROLL. 2.

11. Hic iterum tenendum est elementum Z non in directione ZN impelli, nisi sit $e \sin. \Phi > \frac{u^s}{f} \cos. \zeta, \cos. \Phi$, vel $e \text{ tangens } \Phi > \frac{u^s}{f} \cos. \zeta$. Si enim fuerit $e \text{ tangens } \Phi < \frac{u^s}{f} \cos. \zeta$, vis euadit negativa, etiam, si id formula inuenta non declaret; atque elementum in plagam oppositam NZ vrgebitur; a parte scilicet tum postica impulsium aeris excipiet. Perinde ac tabula vento velocius secundum eandem plagam mota non solum a vento nullam impulsione accipit, sed etiam ab aere posteriori repellitur.

COROLL. 3.

12. Vis haec elementum Z secundum directionem ZN sollicitam commode resoluitur secundum directiones ZY et YN . Hinc autem orietur vis sollicitans secundum directionem $ZY = dS(e \sin. \Phi - \frac{u^s}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi)^2 \sin. \Phi$ secundum directionem $YN = dS(e \sin. \Phi - \frac{u^s}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi)^2 \cos. \Phi$ Haec autem posterior vis secundum directiones Yy et CY resoluta dabit vim sollicitantem secundum directionem $Yy = dS(e \sin. \Phi - \frac{u^s}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi)^2 \cos. \zeta \cos. \Phi$ secundum directionem $CY = dS(e \sin. \Phi - \frac{u^s}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi)^2 \sin. \zeta \cos. \Phi$ ex quibus effectus vis venti ad motum gyratorium superficiesi perturbandum colligi potest.

COROLL. 4.

13. Perspicuum autem est vires secundum directiones ZY et CY vrgentes nihil ad motum gyratorium conferre, quia vtraque ad directionem motus est normalis;

lis; Prior enim vis elementum Z tantum secundum venti directionem sollicitat, altera vero id ab axe motus C directe reuellere conatur; Sicque sola vis in directione Yy , secundum quam punctum Z re vera mouetur, restat qua motus totius superficiei afficiatur.

COROLL. 5.

14. Momentum huius vis ad motum gyratorium accelerandum ergo inuenietur, si vis per longitudinem vectis CY in quem secundum Yy normaliter agit, multiplicetur. Cum igitur sit $CY = s$ erit momentum vis venti ad motum gyratorium accelerandum quatenus ex elemento $Z = dS$ resultat $s dS (e \sin. \Phi - \frac{us}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi)^2 \cos. \zeta \cos. \Phi$

COROLL. 6.

15. Simili modo momentum actionis huius vis venti definietur. Si vis, quae punctum Z secundum motus sui directionem propellens, quae est ea, quam secundum Yy agere inuenimus, per celeritatem puncti, Z , quae est $= \frac{us}{f}$, multiplicetur. Hanc ob rem vis venti elementum $Z = dS$ impellens praebit hoc momentum actionis

$\frac{us dS}{f} (e \sin. \Phi - \frac{us}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi)^2 \cos. \zeta \cos. \Phi$
 quod ergo reperitur, si momentum illud staticum per $\frac{u}{f}$ multiplicetur.

SCHOLIION.

16. Non opus esse duco id, quod hic momentum actionis appello, etiamsi haec denominatio noua sit,

peculiari definitione declarare; cum vis huius denominationis ex applicatione, quam feci, sponte appareat. Quodsi enim machina quaecunque a vi quacunque in motu conseruetur, spectari debet punctum machinae cui haec vis est applicata, huiusque insuper puncti celeritas et directio secundum quam mouetur, tum nisi directio vis sollicitantis in hanc ipsam directionem incidat, ea per notas resolutionis regulas ad hanc directionem est reducenda, vt obtineatur vis punctum istud machinae secundum motus sui directionem sollicitans, quae etiam tota ad motum machinae accelerandum insumeretur, nisi obstacula accelerationem motus impedirent. Tum ista vis, si per celeritatem puncti, cui est applicata, multiplicetur, productum erit id, quod hic momentum actionis appello. Vfus autem huius momenti actionis amplissimus est in diiudicandis omnis generis machinis, nam si omnium virium, quibus machina quaequam incitatur, hoc modo momenta actionis capiantur, atque in vnam summam coniiciantur, huic summae semper aequalis est effectus, quem machina producere valet, quocunque demum modo machina sit ex machinis simplicibus composita. Quare si machina viriumque applicatio ita instituitur, vt omnium iunctim sumtarum momentum actionis fiat maximum, machina quoque maximum edet effectum, quo maior ab iisdem viribus nullo modo obtineri queat. In praesenti quidem casu momentum actionis venti in elementum Z impingentis, ita est comparatum, vt pluribus modis maximum valorem adipiscatur. Primo enim celeritas u ita defini potest, vt momentum maximum euadat. Deinde tam angulus ζ quam
angulus

angulus Φ , quibus inclinatio elementi respectu venti continetur, certos valores obtinere possunt, ut momentum actionis fiat maximum; atque si litteris u , ζ , et Φ simul valores ex natura maximi eruti tribuantur, momentum actionis erit maximum maximorum. Verum huiusmodi inuestigationem hic, ubi adhuc de viribus elementaribus sermo est, suscipere non conuenit, sed eam differam, donec ad vires finitas finis peruenturi.

PROBLEMA IV.

17. *Si superficies quaepiam circa axem fixum data celeritate gyretur, atque directio venti ad hunc axem sit utcumque inclinata, secundum quam in superficiem data celeritate impingat, inuenire vim, qua quoduis superficiei elementum a vento impelletur.*

SOLVTIO.

Transeat axis per punctum C sitque is ad planum Fig. 3. tabulae normalis, venti autem directio sit vbique rectae HC parallela, ad cuius positionem inueniendam ex eius puncto quopiam H ad planum tabulae demittatur perpendicularum HG, quod axi erit parallelum, et angulus CHG exhibebit inclinationem venti ad axem. Tum ducatur GC in plano tabulae ac directio venti HC determinabitur per angulum CHG et positionem rectae GC super plano tabulae. Vocetur ergo angulus CHG = θ , quo directio venti ad axem inclinatur. Deinde consideretur superficiei elementum quodcumque Z in sublimi positum, cuius area sit = dS , indeque ad planum tabulae demittatur perpendicularum ZY iunctaque CY, cuius respectu positionem rectae GC nosse oportet, vocent-

vocentur $ZY = z$: $CY = s$, et angulus $YCG = \rho$. Porro planum tangens superficiem in Z secet planum tabulae recta EF , sitque angulus $YEF = \zeta$, et inclinatio plani EZF ad rectam ZY sit $= \Phi$ ad quem angulum repraesentandum ducatur vt ante YT normalis ad EF , iunctaque ZT , erit angulus $YZT = \Phi$ ideoque $YT = z \text{ tang. } \Phi$. Tum recta YO ex Y in TZ perpendiculariter ducta erit simul in planum tangens EZF perpendicularis, eritque $YO = z \text{ sin. } \Phi$, ac si ZN pariter ad hoc planum sit normalis, fiet $YN = z \text{ cot. } \Phi$, et angulus $YNZ = YZT = \Phi$. His positis sit ZS directio venti in elementum Z impingentis producta, erit ZS ipsi HC parallela, itemque YS ipsi GC parallela, hinc ergo habentur angulo: $YZS = GHC = \theta$, et $CYS = YCG = \varrho$. Ergo ob angulum ZYS rectum erit $YS = z \text{ tang. } \theta$ et $ZS = \frac{z}{\text{cos. } \theta}$, item ob angulum $EYT = 90^\circ - \zeta$ erit $TYS = \varrho + \zeta - 90^\circ$, unde si ex S ad TY perpendicularis SR ducatur erit $YR = z \text{ tang. } \theta \text{ cos. } (\varrho + \zeta - 90^\circ) = z \text{ tang. } \theta \text{ sin. } (\zeta + \varrho)$ propter angulum $YSR = 180^\circ - \zeta - \varrho$. Inuenta directione venti vera ZS , secundum eandem elementum $Z = dS$ feriretur, si id quiesceret: motum igitur eius gyratorium considerare oportet. Sit igitur u celeritas in distantia $= f$ ab axe, eritque celeritas gyratoria puncti $Z = \frac{us}{f}$, cuius directio erit parallela ipsi Yy ad CY normali: Quare si celeritas venti vera secundum directionem suam ZS ponatur $= e$ atque ipsi Yy ducatur parallela SV tanta vt sit $ZS : SV = e : \frac{us}{f}$, erit $SV = \frac{us}{ef} ZS = \frac{us z}{ef \text{ cos. } \theta}$. Iam recta ZV praebebit directionem relativam,

vam , qua ventus in elementum Z impinget , eiusque celeritas relativa erit $= \frac{ZV}{ZS} e$. Superest igitur , vt inclinatio huius directionis ZV ad planum EZF indagetur ; ad hoc ducatur VP ipsi YT normalis , et quia VS est ad EY normalis , quippe ipsi Yy parallela , erit angulus SVP = EYT = $90^\circ - \zeta$, vnde fiet PR = VS $\cos. \zeta = \frac{us z \cos. \zeta}{e j \cos. \theta}$, et TP = TY - YR - PR dabit

TP = $z \text{ tang. } \Phi - z \text{ tang. } \theta \sin. (\zeta + \varrho) - \frac{us z \cos. \zeta}{e j \cos. \theta}$.
 Ex P ad ZT ducatur perpendicularis PQ ob ang. PTQ = $90 - \Phi$,
 erit PQ = $z \sin. \Phi - z \text{ tang. } \theta \sin. (\zeta + \varrho) \cos. \Phi - \frac{us z \cos. \zeta \cos. \Phi}{e j \cos. \theta}$

At ex praecedentibus patet rationem $\frac{PQ}{ZV}$ dare sinum anguli , quo venti directio ZV ad elementum Z inclinatur , vnde cum celeritas sit $= \frac{ZV}{ZS} e$, erit vis venti in hoc elementum exerta $= dS \cdot \frac{ZV^2}{ZS^2} e e \cdot \frac{PQ^2}{ZV^2} = e e dS \cdot \frac{PQ^2}{ZS^2} = dS \left(\frac{e \cdot PQ \cos. \theta}{z} \right)^2$, ob $ZS = \frac{z}{\cos. \theta}$. Quam ob rem vis quaesita erit $= dS (e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. (\zeta + \varrho) \cos. \Phi - \frac{us}{j} \cos. \zeta \cos. \Phi)^2$ atque directio huius vis est recta ZN ad planum EZF normalis , cuius positionem ita inuenimus determinatam , vt sit YN = $z \cos. \Phi$. Haec autem expressio dat volumen vel aeris vel aquae , cuius pondus isti vi est aequale , prout ea vel per $\frac{1}{117}$ vel per $\frac{1}{10000}$ multiplicetur.
 Q. E. I.

COROLL. I.

18. Hic iterum notandum est , vim , qua elementum Z in directione ZN impelli inuenimus , fieri negativam , ideoque in regionem oppositam impelli ; si fuerit

Tom. IV. Nou. Com. H e col.

$e \cos \theta \sin. \Phi < e \sin. \theta \sin. (\zeta + \rho) \cos. \Phi + \frac{u^2}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi$
 seu $\text{tang. } \Phi < \text{tang. } \theta \sin. (\zeta + \rho) + \frac{u^2}{e f} \frac{\cos. \zeta}{\cos. \theta}$. Quare
 ut vis illa sit affirmatiua, uti in figura repraesentatur,
 atque elementum Z secundum directionem ZN sollici-
 tet, necesse est, ut sit

$e \cos. \theta \sin. \Phi > e \sin. \theta \sin. (\zeta + \rho) \cos. \Phi + \frac{u^2}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi$
 seu $\frac{e f}{u^2} > \frac{\cos. \zeta}{\cos. \theta \text{ tang. } \Phi - \sin. \theta \sin. (\zeta + \rho)}$; ad quod eo
 diligentius est attendendum, quia hoc discrimen per for-
 mulam inuentam non indicatur.

C O R O L L. 2.

19. Resolutio huius vis simili modo instituitur,
 quo in problemate praecedente, oriuntur autem hinc vires

secundum $ZY = dS(e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. (\zeta + \rho) \cos. \Phi - \frac{u^2}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi)^2 \sin. \Phi$

secundum $CY = dS(e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. (\zeta + \rho) \cos. \Phi - \frac{u^2}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi)^2 \sin. \zeta \cos. \Phi$

secundum $Yy = dS(e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. (\zeta + \rho) \cos. \Phi - \frac{u^2}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi)^2 \cos. \zeta \cos. \Phi$

ex quarum vltima obtinetur momentum vis venti ad
 motum gyratorium accelerandum, quod est

$dS(e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. (\zeta + \rho) \cos. \Phi - \frac{u^2}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi)^2 \cos. \zeta \cos. \Phi$
 momentum autem actionis eiusdem vis est.

$\frac{u^2}{f} dS(e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. (\zeta + \rho) \cos. \Phi - \frac{u^2}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi)^2 \cos. \zeta \cos. \Phi.$

C O R O L L. 3.

20. Tribus ergo casibus momentum actionis eua-
 nesceat potest, quorum primus est si $\cos. \zeta = 0$ seu an-
 gulus ζ rectus, ideoque recta EF ad CY normalis.

Secun-

Secundo momentum actionis etiam fit = 0, si $\cos. \Phi = 0$ si $\Phi = 90^\circ$, quod euenit, si planum tangens EZF fuerit ad axem motus normale: Tertio momentum actionis fit nullum, si angulus Φ eiusmodi fuerit ut sit

$$\text{tang. } \Phi = \text{tang. } \theta \sin. (\zeta + \varrho) + \frac{us}{ef} \cdot \frac{\cos. \zeta}{\cos. \theta}.$$

PROBLEMA V.

21. Si ventus data celeritate secundum directionem quamcunque in alam molae alatae, quae velocitate quacunque circa axem gyretur, impingat, atque superficies alae habeat figuram utcunque incuruatam, inuenire vim, quam ventus in alam exerit, eiusque momentum actionis.

SOLVTIO.

Transeat axis molae per punctum C sitque norma-
 Fig. 4
 lis ad planum tabulae, venti autem directio sit vbique
 parallela rectae HC, ex cuius puncto quopiam H in
 planum tabulae normalis demittatur HG, quae cum axi
 sit parallela, erit CHG angulus, quem directio venti
 cum axe constituit: sit ergo ut ante hic angulus CHG
 = θ . Superficies alae quaecunque sit referatur ad
 planum tabulae, in quo sumatur recta CA instar axis,
 ad quem coordinatae accommodentur: quae recta CA
 simul cum ala in gyrum agatur: dum recta GCB a
 venti directione pendens manet immota; sitque angulus
 BCA = η , qui dum ala gyratur, continuo fiat maior,
 vim autem venti indagari oportet, dum ala in loco;
 quem figura exhibet, haeret, sicque quamdiu vim venti
 per totam alae superficiem colligimus, hunc angulum η
 H 2 tan-

tanquam constantem spectabimus, erit ergo ang. $ACG = 180^\circ - \eta$. Sit venti celeritas $= e$, et posita distantia $CA = f$, sit celeritas motus gyratorii in hac distantia, qua punctum A circa C secundum Az progreditur $= u$. Iam ex puncto quocunque superficiei alae Z ad planum tabulae demittatur perpendicularum ZY et ex Y ad rectam CA ducatur normalis YX , ponanturque tres coordinatae orthogonales, quibus locus puncti Z definitur $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$; et quia superficies alae tanquam data spectatur, determinabitur z per x et y , seu erit z functio quaequam ipsarum x et y ; sit igitur differentialibus sumendis $dz = p dx + q dy$. Ducatur recta CY , erit $CY = \sqrt{xx + yy}$, et $\sin. XCY = \frac{y}{\sqrt{xx + yy}}$, $\cos. XCY = \frac{x}{\sqrt{xx + yy}}$. Hinc applicatione ad problema praecedens facta, erit $CY = s = \sqrt{xx + yy}$ et angulus $YCG = \varrho = 180^\circ - \eta - XCY$, vnde $\sin. \varrho = \sin. (\eta + XCY) = \frac{x \sin. \eta + y \cos. \eta}{\sqrt{xx + yy}}$ et $\cos. \varrho = \frac{y \sin. \eta - x \cos. \eta}{\sqrt{xx + yy}}$. Sit DZF planum tangens superficiem alae in puncto Z existente YD rectae CA parallela, et ex natura tangentium erit $YF = \frac{z dx}{dx}$ posito x constante, et $YD = \frac{z dy}{dy}$ posito y constante. Cum igitur priori casu sit $dz = q dy$, et posteriori $dz = p dx$ erit $YF = \frac{z}{q}$ et $YD = \frac{z}{p}$, vnde $DF = \frac{z}{pq} \sqrt{pp + qq}$. Hinc porro erit $\sin. FDY = \frac{p}{\sqrt{pp + qq}}$ et $\cos. FDY = \frac{q}{\sqrt{pp + qq}}$. Iam quia supra posuimus angulum $YEF = \zeta$ erit $\zeta = FDY + XCY$, vnde obtinebimus: $\sin. \zeta = \frac{px + qy}{\sqrt{xx + yy} \sqrt{pp + qq}}$ et $\cos. \zeta = \frac{qx - py}{\sqrt{xx + yy} \sqrt{pp + qq}}$.

Prae-

Praeterea vero erit $\zeta + \varrho = 180 - \eta + F D Y$, vnde colligitur $\sin. (\zeta + \varrho) = \sin. (\eta - F D Y) =$

$$\frac{q \sin. \eta - p \cos. \eta}{\sqrt{(pp + qq)}}, \text{ sicque iam omnes valores sumus consecuti, qui in expressiones virium quaesitarum ingrediuntur, praeter angulum } \Phi, \text{ ad quem inueniendum ex Y ad DF normalis ducatur YT, iunctaque ZT, erit angulus YZT} = \Phi. \text{ At ob DF : FY} = \text{DY : YT erit YT}$$

$= \frac{z}{\sqrt{(pp + qq)}}$, ideoque $\text{tang. } \Phi = \frac{YT}{YZ} = \frac{z}{\sqrt{(pp + qq)}}$, ac propterea $\sin. \Phi = \frac{z}{\sqrt{(1 + pp + qq)}}$ et $\cos. \Phi = \frac{\sqrt{(pp + qq)}}{\sqrt{(1 + pp + qq)}}$

His valoribus substituendis habebimus:

$$e \cos. \theta \sin. \Phi = \frac{e \cos. \theta}{\sqrt{(1 + pp + qq)}}; e \sin. \theta \sin. (\zeta + \varrho) \cos. \Phi = \frac{e \sin. \theta (q \sin. \eta - p \cos. \eta)}{\sqrt{(1 + pp + qq)}} \text{ et } \frac{u^2}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi = \frac{u(qx - py)}{f \sqrt{(1 + pp + qq)}}$$

Ponatur ad abbreviandum $V = e \cos. \theta - e \sin. \theta (q \sin. \eta - p \cos. \eta) - \frac{u}{f} (qx - py)$, eritque $e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. (\zeta + \varrho) \cos. \Phi - \frac{u^2}{f} \cos. \zeta \cos. \Phi = \frac{V}{\sqrt{(1 + pp + qq)}}$.

Si iam areola elementi superficiei in Z, quae posita est $= dS$ in plano tabulae elemento $dx dy$ immineat, erit $dS : dx dy = ZT : YT = 1 : \sin. \Phi$ ideoque $dS = dx dy \sqrt{(1 + pp + qq)}$: vnde vis, qua elementum Z secundum directionem normalem ZN vrgetur, erit

$$= \frac{V \sqrt{ds}}{\sqrt{(1 + pp + qq)}} = \frac{dx dy}{\sqrt{(1 + pp + qq)}} \cdot V V. \text{ Hinc porro orietur vis secundum directionem ZY} = \frac{dx dy}{\sqrt{(1 + pp + qq)}} \cdot V V;$$

et vis secundum directionem CY seu YI

$$= \frac{(px + qy) dx dy}{(1 + pp + qq) \sqrt{(xx + yy)}} \cdot V V; \text{ et vis secundum Yy} = \frac{(qx - py) dx dy}{(1 + pp + qq) \sqrt{(xx + yy)}} \cdot V V. \text{ Ex hac vltima vi oritur momentum potentiale, ad motum alic accelerandum}$$

DE CONSTRUCTIONE

$\Delta m = \frac{(qx - py) dx dy}{1 + pp + qq} \cdot V V$, et momentum actionis
 erit $= \frac{v(ax - by) dx dy}{J(1 + pp + qq)} \cdot V V$, quod reperitur si momen-
 tum potentiale per $\frac{v}{J}$ multiplicatur. Vt autem ex
 viribus his elementaribus eliciantur vires finitae ex tota
 alae superficie oriundae, ponatur primo x constans, et
 quaerantur integralia ex sola variabilitate ipsius y resul-
 tantia, tumque y ad totam alae latitudinem abscissae CX
 respondentem extendatur, quo facto formula denuo in-
 tegratur ex variabilitate ipsius x , tumque x ad totam
 alae longitudinem extendatur, sicque tam vires quam
 earum momenta pro tota alae superficie inuenientur.
Q. E. I.

COROLL. 1.

22 Vires, quae secundum directiones ZY et YI
 alam sollicitant, nihil conferunt ad motum alae vel acce-
 lerandum vel retardandum, sed prior ad alam ab axe ab-
 rumpendam, altera vero ad alam euellendam conatum
 exerit; vnde alam satis firmiter axi infixam esse oportet,
 vt his viribus resistere valeat. In hunc finem suffi-
 cit istas vires proxime saltem nosse, neque operae pre-
 tium foret earum quantitatem nimis studiöse per inte-
 grationes acquirere, nisi calculus facile expediri possit.

COROLL. 2.

23. Totum ergo integrationis opus ad inuentio-
 nem momentorum redit, quae duplicem integrationem
 requirit. Erit nimirum momentum potentiale =
 $\int dx \int \frac{v \sqrt{(qx - py)} dy}{1 + pp + qq}$, quo inuento erit momentum actio-
nis

nis = $\frac{u}{f} \int dx \int \frac{v \sqrt{(qx - py) dy}}{1 + pp + qq}$, ideoque totum negotium duplici hac integratione absolvitur. Perinde autem est ab vtra variabili x et y constanti assumenda prima integratio instituat, quin etiam alias novas variables introducere licet, atque tum in hoc tantum est elaborandum, vt duplex integratio perficiatur, quae nullo discrimine inter variables habito hoc modo indicari potest $\iint \frac{v \sqrt{(qx - py) dx dy}}{1 + pp + qq}$.

C O R O L L. 3.

24. De his viribus et momentis iterum notandum est eorum valores tum tantum esse affirmatiuos et assignatas directiones habere, quando valor ipsius V fuerit affirmatiuus, sin autem V obtineat valorem negatiuum tum etiam ipsas vires earumque momenta in plagam contrariam agere. Quae conditio huc redit, vt quadrato $V V$ idem signum tribuatur, quod conuenit ipsi quantitati V , ita vt si valor ipsius V fiat negatiuus, etiam quadrato $V V$ signum negationis praefigatur.

C O R O L L. 4.

25. Quando igitur quaestio circa figuram alae ita instituat, vt vis venti plurimum conferat ad eius motum promovendum, figuram alae ita comparatam esse oportet, vt nusquam seu pro nullo alae elemento valor ipsius V fiat negatiuus. Si enim pro quapiam parte valor ipsius V fieret negatiuus, ab ea motus alae impediretur, atque expediret illam partem rescindi. Quae cautio eo magis est

est obseruanda, quod calculus nullam huiusmodi diminutionem indicat, etiamsi vsquam V valorem negativum sortiatur.

COROLL. 5.

26. Cum valor ipsius V ita determinetur, vt sit $V = e \cos. \theta - e \sin. \theta (q \sin. \eta - p \cos. \eta) - \frac{u}{f} (qx - py)$; hinc apparet, quomodo iste valor ab obliquitate venti respectu axis C pendet, hoc est tum ab angulo $CHG = \theta$ et ab angulo $ACB = \eta$. Quare si obliquitas ista euanescat, ventusque secundum directionem axis in aliam impingat, erit $\theta = 0$, ideoque $\cos. \theta = x$ et $\sin. \theta = 0$, vnde fiet $V = e - \frac{u}{f} (qx - py)$.

COROLL. 6.

27. Sin autem directio venti sit ad axem C normalis, ideoque plano tabulae parallela, ita vt secundum directionem GCB in alas incurrat, ob angulum θ rectum fiet $V = e (p \cos. \eta - q \sin. \eta) - \frac{u}{f} (qx - py)$.

SCHOLION.

28. Quia iam innui posse, situm cuiusuis elementi Z per alias coordinatas determinari, non abs re erit, hanc determinationem alio modo instituire, qui saepe numero calculum multo faciliorem reddet. Definiatur scilicet intervallum $YZ = z$ ex distantia $CY = s$ et angulo ACY , quem ponam $= \psi$, ita vt iam z sit functio quantitatum s et ψ , ex cuius differentiatione nascatur

scatur $dz = P ds + Q dv$. Iam primo valores praecedentium coordinatarum x et y itemque quantitatum p et q per s, v, P et Q definiri oportet. Erit autem $x = s \cos. v, y = s \sin. v$, ideoque $dx = ds \cos. v - s dv \sin. v$ et $dy = ds \sin. v + s dv \cos. v$ quibus valoribus in forma praecedenti $dz = p dx + q dy$ substitutis fiet

$$dz = p ds \cos. v + q ds \sin. v - p s dv \sin. v + q s dv \cos. v$$

eritque ergo

$$P = p \cos. v + q \sin. v \text{ et } Q = q s \cos. v - p s \sin. v$$

vnde colligitur $P \cos. v - \frac{Q}{s} \sin. v = p$ et $P \sin. v + \frac{Q}{s} \cos. v = q$. Hincque porro fit $q x - p y = Q$ et $1 + p p + q q = 1 + P P + \frac{Q Q}{s s}$. atque $q \sin. \eta - p \cos. \eta = \frac{Q}{s} \sin. (\eta + v) - P \cos. (\eta + v)$: Vnde obtinetur:

$$V = e \cos. \theta + e P \sin. \theta \cos. (\eta + v) - \frac{e Q}{s} \sin. \theta \sin. (\eta + v) - \frac{u Q}{f}$$

ita vt casu $\theta = 0$ fit $V = e - \frac{u Q}{f}$. Iam elementum in plano tabulae elemento $Z = dS$ subiectum est $= s ds dv$ quod loco $dx dy$ scribi debet: vnde colligitur

$$\text{vis secundum } Z Y = \frac{s ds dv}{1 + P P + Q Q : s s} \cdot V V$$

$$\text{vis secundum } Y I = \frac{P s ds dv}{1 + P P + Q Q : s s} \cdot V V$$

$$\text{vis secundum } Y y = \frac{Q s ds dv}{1 + P P + Q Q : s s} \cdot V V$$

hincque erit vis venti momentum potentiale $= \frac{Q s ds dv}{1 + P P + Q Q : s s} \cdot V V$

$V V$, et momentum actionis $= \frac{u V V}{f} \cdot \frac{Q s ds dv}{1 + P P + Q Q : s s}$

ex quibus per duplicem integrationem vires et momenta ex tota alae superficie nata eliciuntur.

PROBLEMA VI.

29. Si superficies alae fuerit figura plana quacumque ad axem utcumque inclinata, quae circa axem motu quocumque gyretur, atque ventus in eam data celeritate secundum directionem quamcumque impingat, inuenire vim eiusque momentum, quo ala a vento sollicitabitur.

SOLVTIO.

Fig. 5. . Infiltrat axis plano tabulae normaliter, transactaque per eius punctum C ; venti autem directio ubique parallela sit rectae HC ex cuius puncto quopiam H in planum tabulae demisso perpendicularo HG axi parallelo, sit $\text{angulus } CHG = \theta$, quo definitur inclinatio axis ad directionem venti, cuius celeritas sit ut hactenus $= e$. Deinde cum alae superficies sit plana, sit recta DEF eius intersectio cum plano tabulae, ad quam ex C ducatur normalis CD , sitque $CD = c$; et ducta CK ipsi DF parallela ponatur $\text{angulus } BCK = \eta$, qui dum ala motu angulari promouetur, continuo crescat; alae autem in distantia f ab axe celeritas sit $= u$. Iam consideretur alae punctum quoduis Z unde in planum tabulae demittatur perpendicularum ZY , et ex Y ad DF ducatur normalis YT , iunctaque ZT , erit $\text{angulus } TZY$ quo planum alae ad axem C inclinatur, qui $\text{angulus supra positus est } = \Phi$. Quodsi ergo quasi coordinatae pro figura alae ponantur, $DT = t$, et $TZ = y$, erit $TY = y \sin. \Phi$, et $ZY = y \cos. \Phi$: elementum autem alae erit $= dt dy$, quod supra per dS indicauimus. Ducatur recta CY , et solutione *Probl: IV.*
hmc

hac translata, erit $YEF = \zeta$, $CY = s$, et $YCG = \varrho$,
 ac $dS = dt dy$. Fiet autem ex praecedentibus
 denominationibus $s = \sqrt{tt + (e + y \sin. \Phi)^2}$, ac
 posito tantisper angulo $ECD = \omega$, ut sit $\sin. \omega = \frac{t}{s}$;
 $\cos. \omega = \frac{e + y \sin. \Phi}{s}$, erit angulus $\zeta = 90^\circ - \omega$, ideoque
 $\sin. \zeta = \frac{e + y \sin. \Phi}{s}$ et $\cos. \zeta = \frac{t}{s}$: deinde vero erit
 $YCG = \varrho = 180^\circ - \eta - \zeta$ ideoque $\zeta + \varrho = 180^\circ - \eta$
 et $\sin. (\zeta + \varrho) = \sin. \eta$, tum vero $s \cos. \zeta = t$.

Hinc prodit vis venti in elementum alae $Z =$
 $\frac{t}{s} dy$ secundum directionem normalem ZN exerta
 $= dt dy (e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. \eta \cos. \Phi - \frac{u^2}{f} \cos. \Phi)^2$
 posito $abum$ in plagam Yy gyrari. Ex quo colligitur
 vis secundum $ZY = dt dy (e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. \eta \cos. \Phi$
 $- \frac{u^2}{f} \cos. \Phi)^2 \sin. \Phi$

vis secundum $CY = \frac{e + y \sin. \Phi}{s} dt dy (e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. \eta \cos. \Phi$
 $- \frac{u^2}{f} \cos. \Phi)^2 \cos. \Phi$

vis secundum $Yy = \frac{t}{s} dt dy (e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. \eta \cos. \Phi$
 $- \frac{u^2}{f} \cos. \Phi)^2 \cos. \Phi$

Hinc ita elicitur momentum potentiale ad motum alae acce-
 lerandum $= t dt dy (e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. \eta \cos. \Phi - \frac{u^2}{f} \cos. \Phi)^2$
 $\cos. \Phi$, quod per $\frac{u}{f}$ multiplicatum dabit momentum actionis.
 Consideretur primo t tanquam constans, atque integrale erit
 $= y t dt (e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. \eta \cos. \Phi - \frac{u^2}{f} \cos. \Phi)^2 \cos. \Phi$
 quo exprimitur momentum ex areola alae $y dt$ ortum.

Repraesentetur iam tota ala in plano tabulae sitque ea,
 $EMFME$, quae a plano ad axem normali secetur re. Fig 6.
 eta DF , ut in figura praecedente, sitque Cc huic alae
 plano oblique insistens, ita ut iam sit angulus $CcD = \Phi$,

I a

et linea CD tam ad axem cC quam ad rectam DF normalis. Sic cum sit $CD = c$, erit $Dc = \frac{c}{\sin. \Phi}$ sicque punctum c in plano alae reperitur, in quo axis hoc planum traiecit. Quod si iam vocetur $DT = t$, et tota ordinata $MPM = v$, posito v pro y , erit momentum vis venti in alae partem MEM impingentis ad motum alae gyratorium accelerandum

$$= \int v t dt (c \cos. \theta \sin. \Phi - c \sin. \theta \sin. \eta \cos. \Phi - \frac{u}{f} \cos. \Phi)^2 \cos. \Phi$$

quod per $\frac{u}{f}$ multiplicatum dabit momentum actionis. Manifestum autem est hoc integrale ita capi oportere; ut id evanescat posito $t = DE$, quo facto si ponatur $t = DF$ prodibit momentum ex tota ala ortum. Integratio autem pendet a natura figurae alae, qua definitur, qualis functio v sit ipsius t , sicque pro quouis casu tam momentum potentiale reperitur, quam momentum actionis, quod habebitur si illud per $\frac{u}{f}$ multiplicetur. Ceterum hic notandum est omnes quantitates quae in hanc formulam ingrediuntur, praeter binas t et v esse constantes, et in integratione pro talibus haberi debere.

Q. E. I.

COROLL. I.

30. Quia linea CD , quam posuimus $= c$, et quae distantiam axis a recta DF designat non in expressionem momenti ingreditur, momentum semper idem manebit, per quodcumque rectae Dc ad DF normalis punctum axis cC transeat, dummodo sibi maneat parallelus. Vel quod eodem redit, nihil refert, per quodnam rectae Dc punctum linea DF ducatur, dummodo fuerit ad Dc perpendicularis et in plano alae sita.

COROLL.

COROLL. 2.

31. Data igitur alae figura EMFME in plano tabulae descripta vbicunque axis Cc hoc planum traiciat, semper eiusmodi planum per axem transiens dabitur, quod simul erit ad planum alae normale, cuius notetur intersectio cD, ita vt planum CcD sit ad planum alae normale, ex quo cognoscetur angulus CcD = Φ , quo axis ad planum alae inclinatur. Tum inuenta recta cD tota alae figura rectis MM, mm isti cD parallelis in elementa MmmM resoluatur, eritque quaeuis ordinata MM = v, eiusque distantia a recta cD, nempe DT = t; atque momentum pendebit ad aequatione, qua relatio inter t et v exprimitur.

COROLL. 3.

32. Cognita aequatione inter t et v, dummodo pro quauis distantia DT = t a recta cD, ordinata MM fuerit = v, vbicunque etiam in recta ipsi cD parallela existat, siue sit in MM, vt figura exhibet, siue magis dextrorsum sinistrorsumve promotae, momentum vis venti semper erit idem. Ideoque vna aequatio inter t et v data ad innumerabiles alae figuras erit accommodata.

COROLL. 4.

33. Si elementum areae alae MmmM ponatur = dS, erit $dS = v dt$, et momentum elementare ex vi venti in areolam MmmM impingentis, erit = $t dS (e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. \eta \cos. \Phi - \frac{u t}{f} \cos. \Phi)^2 \cos. \Phi$
I 3
quod

quod ad motum alae accelerandum confert, nisi eius valor fuerit negatiuus. Quare vt motus alae a vi venti promoueat, primum necesse est vt t habeat valorem affirmatiuum, sicque tota ala ad eadem partes rectae cD sita esse debet. Si enim quaequam alae pars ad alteram partem huius rectae cD extenderetur, a vi venti in eam impingentis oriretur momentum contrarium, quo motus alae retardaretur, sicque machina in motu suo impediretur.

C O R O L L. 5.

34. Praeterea vero ne vis venti motui alae vsquam aduerfetur, necesse est, vt haec quantitas

$$e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. \eta \cos. \Phi - \frac{u}{f} \cos. \Phi$$

vbique valorem obtineat affirmatiuum; seu vt membra eius negatiua semper sint minora quam membrum primum affirmatiuum $e \cos. \theta \sin. \Phi$. Vltimum autem membrum $\frac{u}{f} \cos. \Phi$ semper est negatiuum, fitque maximum, vbi ad alae partem F a recta cD maxime remotam peruenitur. Quod si ergo haec distantia DF ponatur $= f$, ita vt puncti F celeritas gyratoria fit $= u$, oportet vt posito $t = f$, sit haec quantitas $e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \sin. \eta \cos. \Phi - u \cos. \Phi$ affirmatiua, tum enim, si fuerit $t < f$, ea multo magis erit affirmatiua.

C O R O L L. 6.

35. Dum ala gyratur angulus $\eta = BCK$ continuo mutatur, ideoque ne superior formula vnquam negatiuum obtineat valorem tantum efficiendum est, vt quando secundus terminus maximum fortitur valorem negatiuum,

vum, quod fit si angulus η erit rectus, seu $\sin. \eta = 1$, tamen illa formula non fiat negativa. Debebit ergo valor huius formulae

$e \cos. \theta \sin. \Phi - e \sin. \theta \cos. \Phi - u \cos. \Phi$ seu huius $e \sin. (\Phi - \theta) - u \cos. \Phi$ esse affirmativus.

COROLL. 7.

36. Quod si ergo tota ala EMFME ad eandem partem rectae eD fuerit posita, ita ut abscissa t nusquam fiat negativa, insuperque fuerit $e \sin. (\Phi - \theta) - u \cos. \Phi$, seu celeritas alae in distantia ~~Delecta~~ non sit maior quam $\frac{e \sin. (\Phi - \theta)}{\cos. \Phi}$, tum semper et ubique vis venti ad alam promouendam impendetur. Hinc igitur patet, si directio venti cum directione axis, circa quem ala gy- ratur, non conueniat, sed ab ea declinet angulo θ , hunc angulum minorem esse debere angulo Φ , quo axis ad superficiem alae inclinatur.

SCHOLIUM

37. Data ergo figura alae seu saltem relatione inter t et v qua innumeratae alae figurae continentur, determinatio momenti vis venti ab his tribus formulis integralibus $\int vt dt$, $\int vt t dt$, et $\int vt^2 dt$ pendet. Capiantur ergo valores horum integralium per totam alae superficiem, ponaturque

$\int vt dt = A$; $\int vt t dt = B$ et $\int vt^2 dt = C$, erunt $A B C$ quantitates constantes a sola figura alae pendent. Atque momentum potentiale vis venti in
alam

alam totam ad eius motum accelerandum erit :

$Aee(\cos.\theta\sin.\Phi - \sin.\theta\sin.\eta\cos.\Phi)^2\cos.\Phi - \frac{2Bcu}{f}(\cos.\theta\sin.\Phi - \sin.\theta\sin.\eta\cos.\Phi)\cos.\Phi^2 + \frac{Cuu}{ff}\cos.\Phi^2$, hincque momentum actionis vis venti in hanc alam erit

$\frac{Aeeu}{f}(\cos.\theta\sin.\Phi - \sin.\theta\sin.\eta\cos.\Phi)^2\cos.\Phi - \frac{2Bcu}{ff}(\cos.\theta\sin.\Phi - \sin.\theta\sin.\eta\cos.\Phi)\cos.\Phi^2 + \frac{Cuu^2}{f^2}\cos.\Phi^2$. Quare si directio venti fuerit directioni axis parallela, quemadmodum fere semper molae alatae vento opponi solent, erit momentum potentiale venti ad motum accelerandum tendens

$Aee\sin.\Phi^2\cos.\Phi - \frac{2Bcu}{f}\sin.\Phi\cos.\Phi^2 + \frac{Cuu}{ff}\cos.\Phi^2$ et momentum actionis hinc erit

$\frac{Aeeu}{f}\sin.\Phi^2\cos.\Phi - \frac{2Bcu^2}{f^2}\sin.\Phi\cos.\Phi^2 + \frac{Cuu^2}{f^2}\cos.\Phi^2$

Hoc casu statim colligitur, si ala adhuc sit in quiete vel nunc primum moveri incipiat, momentum fore maximum si fuerit $\sin.\Phi^2\cos.\Phi$ maximum, quod evenit si per differentiationem fiat

$$2\sin.\Phi\cos.\Phi^2 = \sin.\Phi^2 \text{ seu } \tan\Phi = \sqrt{2}$$

vnde anguli Φ prodit valor $54^\circ, 45'$, qui angulus plerumque in motis alatis observari solet. Verum hinc iam satis liquet hanc maximi praerogativam in istum angulum non competere, nisi molae ala adhuc sit in quiete, atque pro quovis celeritatis gradu quo movetur, peculiarem prodire valorem anguli Φ , quo momentum vis venti fiat maximum.

PRO-

PROBLEMA VII.

38. Si ala fuerit plana, atque axis, circa quem mouetur, directioni venti directe opponatur, imuenire inclinationem, sub qua ala ad axem constitui debet, atque celeritatem alae gyrationis, qua momentum actionis venti fiat maximum.

SOLVTIO.

Sit $EMFM E$ figura alae data, in plano tabulae **Fig. 6.** exhibita, per cuius punctum quodpiam c axis Cc transeat, cuius inclinatio $CcD = \Phi$ quaeritur. Detur tamen planum CcD , in quo axis constituitur, ad planum alae normale, ideoque intersectio cD , cui parallelae sumantur ordinatae MM, mm in ala, positisque $DT = t$, et $MM = v$; pro tota ala per integrationes quaerantur sequentes valores

$$\int v t dt = A, \int v t t dt = B \text{ et } \int v t^2 dt = C.$$

Deinde sit maxima alae ab axe elongatio $DF = f$, et celeritas, qua punctum F circa axem gyatur $= u$, quae etiam ita definienda est, vt momentum actionis fiat maximum. Iam vero quia directio venti in directionem axis incidere assumitur, erit momentum actionis:

$$\frac{A c c u}{f} \sin. \Phi \cos. \Phi - \frac{2 B c u^2}{f f} \sin. \Phi \cos. \Phi^2 + \frac{C u^2}{f^2} \cos. \Phi^3.$$

Ponamus primo celeritatem u iam esse datam, et quaeramus angulum Φ , quo hoc momentum fiat maximum, atque manifestum est, eodem casu maximum fieri momentum potentiale:

$Aee \sin. \Phi^2 \cos. \Phi - \frac{2B}{f} e^2 u \sin. \Phi \cos. \Phi^2 + \frac{Cuu}{ff} \cos. \Phi^3$,
quod ergo ut fiat maximum, necesse est, ut differentiatione
instituta sit

$$2Aee \sin. \Phi \cos. \Phi^2 - Aee \sin. \Phi^3 - \frac{2Beu}{f} \cos. \Phi^2 + \frac{4Beu}{f} \sin. \Phi^2 \cos. \Phi \\ - \frac{3Cuu}{ff} \sin. \Phi \cos. \Phi^2 = 0,$$

seu diuiso per $\cos. \Phi^2$ ob $\frac{\sin. \Phi}{\cos. \Phi} = \text{tang. } \Phi$, erit

$$Aee \text{tang. } \Phi^3 - \frac{2Beu}{f} \text{tang. } \Phi^2 - 2Aee \text{tang. } \Phi + \frac{2Beu}{f} = 0 \\ + \frac{3Cuu}{ff} \text{tang. } \Phi.$$

Pendet ergo inuentio anguli Φ a resolutione huius aequationis
cubicae, de qua tamen animaduertendum est, valorem inde
erutum non conuenire, nisi sit $e \sin. \Phi > u \cos. \Phi$, seu $\text{tang. } \Phi > \frac{u}{e}$.

Quare si aequatio cubica plures habeat radices, ex iis ea
tantum locum habere potest, quae praebet $\text{tang. } \Phi > \frac{u}{e}$.

At ob A, B, C , quantitates posituas, trium aequationis
radicum duae erunt affirmatiuae, ac tertia negatiua; quae
hinc excluditur: atque si neutra affirmatiuarum fuerit

maior quam $\frac{u}{e}$, indicio id erit, momentum continuo
crescere, crescente angulo Φ , ideoque fore maximum, si
capiatur $\text{tang. } \Phi = \frac{u}{e}$: quo casu momentum actionis

$$\text{erit} = \left(\frac{A}{f} - \frac{2B}{ff} + \frac{C}{f^2} \right) u^3 \cos. \Phi^3$$

$$= \left(\frac{A}{f} - \frac{2B}{ff} + \frac{C}{f^2} \right) \frac{e^3 u^3}{(e + u)(e - u)} \cdot \text{Videntur}$$

ergo est, utrum minor valor pro $\text{tang. } \Phi$ ex aequa-
tione cubica inuentus maior producat momentum actionis.

At contemplemur nunc alteram conditionem, qua quaeritur celeritas u , vt momentum actionis fiat maximum, pro qua angulum Φ tanquam iam cognitum spectemus, atque reperietur.

$$\frac{A e e}{f} \sin.\Phi^2 \cos.\Phi - \frac{B e u}{f f} \sin.\Phi \cos.\Phi^2 + \frac{C u u}{f^2} \cos.\Phi^2 = 0, \text{ siue } A e e \text{ tang. } \Phi^2 - \frac{B e u}{f} \text{ tang. } \Phi + \frac{C u u}{f^2} = 0,$$

atque haec aequatio cum praecedente aequatione cubica coniuncta determinabit vtrumque valorem quaesitum Φ et u . Verum si haec aequatio per $\text{tang. } \Phi$ multiplicata ab illa auferatur, remanebit: $-2 A e e \text{ tang. } \Phi + \frac{2 B e u}{f} = 0$, seu $\text{tang. } \Phi = \frac{B u}{A e f}$. qui ergo valor scopo conueniet, dummodo sit maior quam $\frac{u}{e}$, hoc est, si fuerit $B > A f$. At cum sit $B = \int v t t dt$, et f sit maximus valor ipsius t , erit $B < \int f v t dt$, hoc est. $B < f A$; ideoque valor $\text{tang. } \Phi = \frac{B u}{A e f}$ locum habere nequit, neque ergo vtrique aequationi simul, naturae quaestionis conuenienter, satisfieri potest. Quod vt clarius perspiciatur, ponamus $\text{tang. } \Phi = \frac{n u}{e}$, vbi requiritur, vt sit $n > 1$, eritque $\cos.\Phi = \frac{e}{\sqrt{(e e + n n u u)}}$, et momentum actionis erit

$$\left(\frac{A n n}{f} - \frac{2 B n}{f f} + \frac{C}{f^2} \right) \frac{e^2 u^2}{(e e + n n u u)^{\frac{3}{2}}}$$

vnde primum patet, crescente u , hanc quantitatem continuo crescere, neque maiorem fieri posse, quam si cele-

K 2

ritas

ritas alae u ponatur infinita : ex quo sequitur, hanc celeritatem u tam magnam statui debere, quam circumstantiae id permittant. Hinc autem si celeritas u fuerit determinata, et pro cognita assumatur, angulus Φ ex superiori aequatione definietur, vt momentum actionis fiat maximum. Ad hoc si ponamus breuitatis gratia :

$$B = \epsilon A f, \text{ et } C = \gamma B f = \epsilon \gamma A f f,$$

vti nouimus esse ϵ et γ numeros vnitatis minores, aequatio illa cubica, ex qua angulus Φ definiri debet, hanc formam induet,

$$e e \text{ tang. } \Phi^3 - 4 \epsilon e u \text{ tang. } \Phi^2 - 2 e e + 3 \epsilon \gamma u u \left. \vphantom{\text{tang. } \Phi^2} \right\} \text{ tang. } \Phi + 2 \epsilon e u = 0,$$

ac posito $u = m e$, erit

$$\text{tang. } \Phi^3 - 4 \epsilon m \text{ tang. } \Phi^2 - 2 + 3 \epsilon \gamma m^2 \left. \vphantom{\text{tang. } \Phi^2} \right\} \text{ tang. } \Phi + 2 \epsilon m = 0,$$

vbi notandum est esse debere $\text{tang. } \Phi > m$.

Quodsi autem angulus Φ fuerit datus, celeritas u ita definiri potest, vt momentum actionis fiat maximum, quod fiet per hanc aequationem quadraticam,

$$\frac{3 C u u}{f f} - \frac{4 B e u}{f} \text{ tang. } \Phi + A e e \text{ tang. } \Phi^2 = 0,$$

$$\text{seu } 3 \epsilon \gamma m m - 4 \epsilon m \text{ tang. } \Phi + \text{tang. } \Phi^2 = 0,$$

posito vt ante $u = m e$: vnde valor ipsius m eruitur

$$m = \frac{2 \epsilon \text{ tang. } \Phi + \text{tang. } \Phi \sqrt{4 \epsilon \epsilon - 3 \epsilon \gamma}}{3 \epsilon \gamma}$$

$$\text{seu } m = \frac{2 \epsilon - \sqrt{4 \epsilon \epsilon - 3 \epsilon \gamma}}{3 \epsilon \gamma} \text{ tang. } \Phi. \text{ at debet esse}$$

$m < \text{tang. } \Phi$. Restitutis pro m, ϵ, γ valoribus assumtis,

$$\text{habebitur } \frac{u}{e} = \frac{2 B - \sqrt{4 B B - 3 A C}}{3 C} f \text{ tang. } \Phi,$$

qui

qui valor, si fuerit realis et minor quam tang. Φ , substitutus in expressione momenti actionis:

$\frac{u}{f} (Aee \text{ tang. } \Phi^2 - \frac{2Beu}{f} \text{ tang. } \Phi + \frac{Cu^2}{ff}) \text{ cof. } \Phi^2$
 ipsi conciliabit maximum valorem, qui erit

$$\frac{2e^2 \sin. \Phi^2}{3C} [9ABC - 8B^2 + (4BB - 3AC)^{\frac{2}{3}}].$$

Sin autem valor inuentus ipsius $\frac{u}{e}$ fuerit vel imaginarius, vel maior quam tang. Φ . inde colligitur momentum actionis maius fieri non posse, quam si statuatur $\frac{u}{e} = \text{tang. } \Phi$. quo casu momentum actionis erit $= \frac{e^2 \sin. \Phi^2}{f^2} (A ff - 2Bf + C)$. Vnde ex utroque casu iterum colligitur momentum actionis ratione anguli Φ eo fieri maius, quo maior capiatur angulus Φ . Q. E. I.

COROLL. 1.

39. Si ergo angulus Φ , quo axis ad planum alae est inclinatus, detur, ex eo celeritas alae u definiri potest, qua eius extremitas ab axe interuallo $= f$ distans gyron debet, vt momentum actionis fiat maximum. Statui scilicet debet $\frac{u}{e} = \frac{2B - \sqrt{(4BB - 3AC)}}{3C} f \text{ tang. } \Phi$, siquidem prodeat $\frac{2B - \sqrt{(4BB - 3AC)}}{3C} f < 1$. Sin autem sit ista quantitas vel unitate maior vel adeo imaginaria, tum maxime conueniet ponere $\frac{u}{e} = \text{tang. } \Phi$. Semper igitur esse debet celeritas gyratoria alae tangenti anguli Φ proportionalis.

COROLL. 2.

40. Vt appareat, quomodo valor pro $\frac{u}{e}$ inuentus plerumque sit comparatus, ponamus esse $v = at^{n-1}$,
 K 3 erit-

critique area alae totius $\int v dt = \frac{a}{n} f^n$, quae ponatur $= \Delta$; tum erit

$$A = \int v dt = \frac{a}{n+1} f^{n+1} = \frac{n}{n+1} \Delta f$$

$$B = \int v t dt = \frac{a}{n+2} f^{n+2} = \frac{n}{n+2} \Delta f f$$

$$C = \int v t^2 dt = \frac{a}{n+3} f^{n+3} = \frac{n}{n+3} \Delta f^2,$$

Atque hinc prodibit momentum actionis

$n \Delta u \left(\frac{e e}{n+1} \text{tang. } \Phi^2 - \frac{2 e u}{n+2} \text{tang. } \Phi + \frac{u u}{n+3} \right) \text{cof. } \Phi^2$,
quod maximum euadet, si capiatur

$$\frac{u}{e} = \frac{n+3}{2(n+2)} \left(2 - \sqrt{\frac{n(n+4)}{(n+1)(n+3)}} \right) \text{tang. } \Phi;$$

vnde semper fit $\frac{u}{e} < \text{tang. } \Phi$; hincque maximum momentum erit

$\frac{2}{27} \Delta e^2 \sin. \Phi^3 \cdot \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \cdot (n+4n+12+n(n+4)) \sqrt{\frac{n(n+4)}{(n+1)(n+3)}}$;
si ergo fuerit

$n=1$ erit $\frac{u}{e} = \frac{2-\sqrt{10}}{9} \text{tang. } \Phi$, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^2 \sin. \Phi^2 \cdot 1,5521$

$n=2$ erit $\frac{u}{e} = \frac{5-\sqrt{5}}{6} \text{tang. } \Phi$, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^2 \sin. \Phi^3 \cdot 1,809$

$n=3$ erit $\frac{u}{e} = \frac{2-\sqrt{14}}{10} \text{tang. } \Phi$, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^2 \sin. \Phi^3 \cdot 1,895$

$n=\infty$ erit $\frac{u}{e} = \frac{1}{2} \text{tang. } \Phi$, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^2 \sin. \Phi^3 \cdot 2,000$

C O R O L L. 3.

41. Quo maior igitur est exponens n , eo maius prodit momentum actionis, atque valor $\frac{u}{e}$ eo propius accedet ad $\frac{1}{2} \text{tang. } \Phi$: vnde colligimus, pro data area alae $= \Delta$ eo maius futurum esse momentum actionis, quo magis ala ab axe recedendo dilatetur, seu quo arctior fuerit

fuerit axem versus. Ceterum apparet, quicumque valor tribuatur exponenti n , semper prodire $\frac{u}{e} < \text{tang. } \Phi$, vti conditio quaestionis postulat.

COROLL. 4.

42. Sin autem quaeratur, quisnam angulus Φ sit maxime idoneus ad momentum actionis plurimum augendum, respondere oportet, quo magis hic angulus ad rectum accedat, eo maius prodire momentum actionis. Ideoque conueniet, axem tantum non perpendiculariter ad planum alae constituere, vt sit fere $\Phi = 90^\circ$; tum autem ob $\text{tang. } \Phi = \infty$, alam maxima celeritate circa axem gyron oportebit. Vnde patet, non angulum $54^\circ, 45'$ esse aptissimum, sed potius angulum rectum hac praerogatiua gaudere.

SCHOLIION.

43. Conclusio haec, qua angulum rectum aptissimum inuenimus ad momentum actionis maximum producendum, non solum valde paradoxa videtur, sed etiam experientiae maxime contraria. Quanquam enim experientia testatur, angulum inclinationis axis ad alas, si maior statuatur quam $54^\circ, 45'$, maiorem producere effectum, hique angulus interdum ad 72° auctus optimo cum successu reperitur, tamen dubium est nullum, quin effectus magnopere diminuat, si iste angulus adhuc maior constitueretur; atque adeo manifestum est, si ad 90° vsque augetur, vim venti ad alam conuertendam plane euanescere, ita vt hoc casu machina ne minimo quidem oneri eleuando par esset. Interim si perpendicularis

mus

mus tamen angulo hoc tantum non ad 90° aucto celeritatem gyrationam quoque maximam esse debere, etsi hoc casu vis ipsa mouens eiusque momentum potentiale fere in nihilum abit. Tamen semper machinam ad onus superandum ita applicari posse nouimus, ut vis ista minima onus eleuare valeat, simulque intelligitur, celeritatem oneris ad alae celeritatem rationem quam minimam habere debere; veruntamen quoniam celeritas alarum est quasi infinita, celeritas oneris inde prodire potest satis magna, ac reuera maior erit, quam si angulus Φ minor esset assumtus. Interim tamen fateri conuenit, successum in praxi longe alium deprehensum iri, atque theoria hic innuit, cuius dissensus causa in sola frictione est posita; ita ut certum sit, si machinam ab omni frictione liberare liceret, summum effectum iure expectari posse, si angulus inclinationis axis ad planum alarum propemodum reclusus statuatur. Verum frictio impedit hoc casu, quo minus ab angulo Φ nimis magno effectus per theoriam definitus obtineri queat: si enim vis venti ab ala excepta tam fuerit parua, ut frictionem superare nequeat, tum machina ne ad motum quidem excitari poterit, multoque minus vllum effectum producere valebit. Ex quo manifestum est, frictionis rationem in primis haberi debere, si eam alarum dispositionem ac motum definire velimus, vnde maximus effectus proficiatur, id quod sequente problemate diligentius examinabo.

PROBLEMA VIII.

44. *Data frictione machinae, quae a vi quacunque moueatur, inuenire eam momenti actionis partem, quae*

equae ad effectum, ad quem machina est destinata, producendum vnice impenditur.

S O L V T I O.

Sit M momentum potentiale vis, a qua machina mouetur, quae vis rotae seu vecti applicata concipiatur, cuius celeritas sit $= u$ in distantia $= f$ ab axe motus, eritque $\frac{Mu}{f}$ momentum actionis. Sit porro momentum frictionis $= F$, seu ad frictionem superandam opus sit tanta vi, cuius momentum est $= F$, vbi nota, quando simpliciter de momento loquor, id de momento potenciali esse interpretandum, nulla habita ratione ad celeritatem, quacum vis agit. Denique sit P momentum oneris vel obstaculi, quod superari debet, et cum motus machinae iam ad vniformitatem fuerit perductus, necesse est, vt sit $M - F - P = 0$; nam quamdiu motus machinae acceleratur, acceleratio proportionalis est ipsi $M - F - P$: quare si nulla amplius acceleratio locum habeat, necesse est, vt sit $M - F - P = 0$, seu $P = M - F$. Verum si momentum oneris P per celeritatem angularem $\frac{u}{f}$ multiplicetur, denotabit $\frac{u}{f} P$ momentum actionis oneris, seu onus per motum suum multiplicatum, quo ipso effectus machinae determinatur. Erit ergo effectus machinae $\frac{u}{f} P = \frac{u}{f} (M - F)$, ideoque effectus machinae non producitur a vis mouentis momento actionis toto $\frac{u}{f} M$, sed ab eius parte $\frac{u}{f} (M - F)$. Quare vt effectus edatur maximus, non ipsius $\frac{u}{f} M$ valor, sed ipsius $\frac{u}{f} (M - F)$ maximus existere debet. Q. E. I.

Tom. IV. Nou. Com.

L

COROLL.

COROLL. 1.

45. In casu igitur problematis praecedentis, quo erat momentum potentiale venti in alam ibi definitam impingentis $= (Aee \text{ tang. } \Phi^2 - \frac{2Beu}{f} \text{ tang. } \Phi + \frac{Cuu}{ff}) \text{ cof. } \Phi^2$, si momentum frictionis machinae ponatur $= F$, quantitas effectus machinae erit

$\frac{u}{f} (Aee \text{ tang. } \Phi^2 - \frac{2Beu}{f} \text{ tang. } \Phi + \frac{Cuu}{ff}) \text{ cof. } \Phi^2 - \frac{Fu}{f}$:
vbi ad homogeneitatem conseruandam notari conuenit, si ee , et uu denotent altitudines celeritatibus e , et u debitas, vim frictionis per pondus voluminis aeris exponi debere, ex qua momentum resultans loco F accipi debet.

COROLL. 2.

46. Vt igitur haec machina in motum concitari possit, ante omnia requiritur, vt sit $(Aee \text{ tang. } \Phi^2 - \frac{2Beu}{f} \text{ tang. } \Phi + \frac{Cuu}{ff}) \text{ cof. } \Phi^2 > F$, vnde iam casus maximi effectus ante inuentus sponte excluditur, quoniam illo casu momentum potentiale vis sollicitantis fiebat infinite paruum: simulque intelligitur, ad id vt machina effectum praestare possit, angulum Φ non nimis prope ad angulum rectum accedere posse, quia alioquin $\text{cof. } \Phi$ nimis fieret paruus; neque haec diminutio per augmentationem celeritatis u compensari potest, quia esse debet $\frac{u}{e} < \text{tang. } \Phi$.

COROLL. 3.

47. Quo igitur effectus machinae reddatur maximus, maximum efficere oportet valorem huius formulae:

$\frac{u}{f} (Aee \text{ tang. } \Phi^2 - \frac{2Beu}{f} \text{ tang. } \Phi + \frac{Cuu}{ff}) \text{ cof. } \Phi^2 - \frac{Fu}{f}$
Ponatur $u = efs \text{ tang. } \Phi$, atque *maximum* esse debet $e^2 \text{ sin. } \Phi^2 (Az - 2Bzs + Cz^2) - Fes \text{ tang. } \Phi$.

COROLL.

COROLL. 4.

48. Quaeratur primo valor ipsius z , angulo Φ tanquam cognito spectato, atque peruenietur ad hanc aequationem: $ee \sin. \Phi^2 \cos. \Phi (A - 4Bz + 3Czz) = F$, unde fit $9CCzz = 12BCz - 3AC + \frac{3CF}{ee \sin. \Phi^2 \cos. \Phi}$; et $3Cz = 2B - \sqrt{4BB - 3AC + \frac{3CF}{ee \sin. \Phi^2 \cos. \Phi}}$: ideoque $z = \frac{2B + \sqrt{4BB - 3AC + \frac{3CF}{ee \sin. \Phi^2 \cos. \Phi}}}{3C}$. Substituenti enim hunc valorem in expressione effectus facile patebit, signo radicali negationem tribui debere, quia affirmatio minimum produceret effectum.

COROLL. 5.

49. Si iam valor ipsius z pro cognito habeatur, et angulus Φ quaeratur ad effectum maximum producendum, peruenietur ad hanc aequationem:

$3ee \sin. \Phi^2 \cos. \Phi (A - 2Bz + Czz) = \frac{F}{\cos. \Phi^2}$, quae cum aequatione ante inuenta comparata eliminando F , dabit:

$\cos. \Phi^2 = \frac{A - 4Bz + 3Czz}{3(A - 2Bz + Czz)}$; et $\sin. \Phi^2 = \frac{2(A - Bz)}{3(A - 2Bz + Czz)}$, quibus valoribus substitutis tandem reperietur

$F = \frac{3ee(A - Bz)(A - 4Bz + 3Czz)\sqrt{(A - 4Bz + 3Czz)}}{3(A - 2Bz + Czz)\sqrt{3(A - 2Bz + Czz)}}$, ex qua valor ipsius z erui debet, quod quidem resolutionem aequationis octavi ordinis postulat.

COROLL. 6.

50. Inuento autem hinc valore ipsius z , ex anterioribus formulis colligitur angulus Φ : sicque tam alae ad
 L 2 axem

32. DE CONSTRUCTIONE

axem inclinatio, quam celeritas gyrationis obtinebitur, unde de maximus effectus proficiscatur. Quod si autem illa æquatio octavi ordinis plures valores reales pro z exhibeat, ut ex iis rectè eligatur, notandum est, primo esse debere $\frac{u}{c} < \text{tang. } \Phi$, seu $fz < 1$; præterea vero esse debere $e \cdot c \sin. \Phi^2 \cos. \Phi (A - 2Bz + Cz^2) > F$, ideoque

$$F < \frac{2ec(A - Bz)\sqrt{(A - 2Bz + Cz^2)}}{2\sqrt{(A - 2Bz + Cz^2)}}$$

unde necesse est, substituto pro F valore supra inuento, ut sit

$$\frac{A - 2Bz + Cz^2}{A - 2Bz + Cz^2} < 1, \text{ seu } B > Cz;$$

ergo debet esse tam $z < \frac{B}{C}$, quam $z < \frac{1}{f}$. Cum autem sit $C < Bf$, sufficit, ut sit $z < \frac{1}{f}$, cum inde multo magis fiat $z < \frac{B}{C}$.

COROLL. 7.

51. Quod si angulus Φ tanquam cognitus assumatur, atque celeritas motus gyrotorii ita definatur, ut effectus fiat maximus, erit, uti vidimus:

$$u = \frac{2Bef \text{ tang. } \Phi}{c} - \frac{ef \text{ tang. } \Phi}{c} \sqrt{(4BB - 3AC + \frac{3CF}{e \sin. \Phi^2 \cos. \Phi})}$$

unde patet, ob frictionem F hanc celeritatem minorem esse, quam si frictio esset nulla. Frictio ergo duplicem ob causam effectum machinae diminuit: primum enim ipsum momentum actionis $\frac{u}{f} M$ minus euadit; deinde insuper ab eo terminus $\frac{u}{f} F$ subtrahi debet, ut effectus $\frac{u}{f} (M - F)$ obtineatur.

SCHOLIUM 1.

52. Si iste valor ipse u angulo Φ respondens

in expressione effectus machinae $\frac{u}{f} (M - F)$ substituitur, reperitur iste effectus:

$$\frac{2e^2 \sin^2 \Phi^2}{27 c c} \left[2 A B C - 3 B^2 - \frac{2 B C F}{e e \sin^2 \Phi^2 \cos \Phi} + \left(4 B B' - 3 A C + \frac{2 C F}{e e \sin^2 \Phi^2 \cos \Phi} \right)^{\frac{2}{3}} \right],$$

unde iam manifestum est, angulum Φ non nimis magnum accipi posse, ut iste effectus fiat maximus; quia alioquin effectus fieret minor, atque adeo evanesceret. Primum autem ne valor ipsius u fiat negativus, necesse est,

ut sit $A > \frac{F^2}{e e \sin^2 \Phi^2 \cos \Phi}$, seu $\sin^2 \Phi \cos \Phi > \frac{F^2}{A e e}$. Deinde si brevitatis gratia ponatur $\sqrt{4 B B' - 3 A C + \frac{2 C F}{e e \sin^2 \Phi^2 \cos \Phi}} = Q$, ut sit $u = \frac{e f \tan \Phi}{r c} (2 B - Q)$, erit expressio, quantitatem effectus denotans:

$$\frac{2 e^2 \sin^2 \Phi^2}{27 c c} (2 B - Q)^2 (B + Q),$$

qui primum est = 0, si $\sin \Phi = 0$; deinde iterum evanescit, si $2 B = Q$, seu $\sin^2 \Phi \cos \Phi = \frac{F^2}{A e e}$: vnde pro effectu maximo obtinendo angulus Φ minor esse debet,

quam is, qui ex aequatione $\sin^2 \Phi \cos \Phi = \frac{F^2}{A e e}$ oritur.

Verum hic notandum est, maximum valorem ipsius

$\sin^2 \Phi \cos \Phi$ esse $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, ideoque nisi sit $\frac{F^2}{A e e} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, seu

nisi momentum frictionis F minus fuerit, quam $\frac{2}{3\sqrt{3}} A e e$,

machinam ne quidem moveri posse; vnde celeritas venti

minima e cognoscitur, quae primum machinae motum

imprimere valet, quae debita altitudini $e e = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{F}{A}$.

Quare nisi venti celeritas fuerit maior, machina in quiete persistit. At si celeritas venti satis fuerit magna,

ut sit $e e > \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{F}{A}$, erit quoque $\frac{F^2}{A e e} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$: hincque duo-

bus casibus euenire poterit, vt fiat $\sin. \Phi^2 \cos. \Phi = \frac{F}{\Delta e e}$, quorum altero est $\Phi < 54^\circ, 45'$, altero $\Phi > 54^\circ, 45'$: casu enim $\Phi = 54^\circ, 45'$ fit $\sin. \Phi^2 \cos. \Phi = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Post casum ergo $\Phi = 0$, duo insuper casus dantur, quibus effectus machinae euanescit, qui sint $\Phi = 54^\circ, 45' - \mu$, et $\Phi = 54^\circ, 45' + \nu$. et citra quos limites continetur conditio $\sin. \Phi^2 \cos. \Phi > \frac{F}{\Delta e e}$: ex quo intelligitur, machinam non commoueri posse, nisi angulus Φ intra limites $54^\circ, 45' - \mu$, et $54^\circ, 45' + \nu$ contineatur. Quo circa etiam intra hos limites quaeri debet is angulus Φ , qui maximum effectum producit: manifestum autem est, pro qualibet venti celeritate peculiarem angulum Φ prodire, et quidem pro minimo vento, qui machinae impellendae par est, inuentum iri $\Phi = 54^\circ, 45'$; ex quo sequitur, vt machina etiam a vento maxime debili commoueri queat, hunc angulum esse aptissimum. Quoniam enim pro quouis venti celeritatis gradu angulum Φ immutare non licet, magis expedit, cum ita statuere, vt machina etiam a minimo vento impulsa effectum edat, quam eius effectum pro fortiore vento ita augere, vt tum a vento leniori plane commoueri nequeat. Quod si autem ventum nimis debilem non curemus, machinaeque ita instruenda sit, vt a vento satis forti, qui expressionem $\frac{F}{\Delta e e}$ iam notabiliter minorem praebeat, quam $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, impulsa maximum producat effectum, tum angulum Φ vna cum celeritate u ex aequationibus supra inuentis determinari oportet.

S C H O L I O N. 2

53. Scilicet cum fuerit $\frac{F}{\Delta e e} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, ponatur eius valor

valor $\frac{P}{\Delta e e} = \frac{v^n}{3\sqrt{3}}$, ita vt sit $m < 1$, et quaeratur valor

ipfius z ex hac aequatione $m = \frac{(\Lambda - Bz)(\Lambda - 4Bz + 3Czz)^{\frac{2}{3}}}{\Lambda(\Lambda - 2Bz + Czz)^{\frac{3}{2}}}$

$= \frac{\Lambda - Bz}{\Lambda} \left(\frac{\Lambda - 4Bz + 3Czz}{\Lambda - 2Bz + Czz} \right)^{\frac{2}{3}}$, cuius aequationis resolutio cum sit difficillima, tribuantur ipfi z successiue plures valores, ex quibus statim apparebit, quinam valorem producat ipfi m proxime aequalem; quo cognito facile is valor ipfius z eruetur, qui aequationi huic exactius conveniat. Inuento autem valore hoc z , inclinatio axis ad alam Φ elicitur ex alterutra harum formularum:

$\sin. \Phi^2 = \frac{2(\Lambda - Bz)}{3(\Lambda - 2Bz + Czz)}$; vel $\cos. \Phi^2 = \frac{\Lambda - 4Bz + 3Czz}{3(\Lambda - 2Bz + Czz)}$, eritque tum celeritas $u = efz \text{ tang. } \Phi$. Ad hanc operationem ostendendam ponamus pro alae figura $v = at^{n-1}$, sitque area alae $= \Delta = \frac{\alpha}{n} f^n$, erit:

$A = \frac{n}{n+1} \Delta f$, $B = \frac{n}{n+2} \Delta ff$, et $C = \frac{n}{n+3} \Delta f^2$, ergo $\frac{(n+1)P}{n \Delta e e f} = \frac{2m}{3\sqrt{3}}$. Ponatur autem $z = \frac{x}{f}$, vt sit $u = ex \text{ tang. } \Phi$, et $x < 1$;

erit $\sin. \Phi^2 = \frac{2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+2} \right)}{3 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2x}{n+2} + \frac{xx}{n+3} \right)}$; et $\cos. \Phi^2 = \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{4x}{n+2} + \frac{3xx}{n+3}}{3 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2x}{n+2} + \frac{xx}{n+3} \right)}$;

atque valorem ipfius x erui oportet ex hac aequatione

$$m = \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{\frac{1}{n+1} - \frac{4x}{n+2} + \frac{3xx}{n+3}}{\frac{1}{n+1} - \frac{2x}{n+2} + \frac{2x}{n+3}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Ponamus exempli causa $n=1$, vt figura alae sit rectangularis, vti vulgo fieri solet, cuius area sit $= \Delta$, erit

$m = \frac{2P\sqrt{3}}{\Delta e e f}$; et $m = \frac{2-2x}{3} \left(\frac{6-16x+9xx}{6-4x+3xx} \right)^{\frac{2}{3}}$; porroque $\sin. \Phi^2$

fin. $\Phi^2 = \frac{60 - 16x + 9x^2}{18 - 24x + 9x^2}$; et $\text{cof. } \Phi^2 = \frac{6 - 16x + 9x^2}{18 - 24x + 9x^2}$.

Cum esse debeat $x < 1$, ponatur $x = \frac{y}{5}$, erit

$m = \frac{15 - y}{15} \left(\frac{600 - 160y + 9yy}{600 - 80y + 3yy} \right)^{\frac{3}{2}}$; et $\text{cof. } \Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{600 - 160y + 9yy}{600 - 80y + 3yy}$.

Ponantur iam pro y successive numeri 0, 1, 2, 3 etc. et valores resultantés in sequenti tabula erunt:

| y | $m = \frac{3P\sqrt{3}}{\Delta eef}$ | $\text{cof. } \Phi^2$ | $\text{ang. } \Phi$ | $\text{Celer. ang. } \frac{u}{e}$ |
|-------|-------------------------------------|---|------------------------|-----------------------------------|
| $y=0$ | $m=1,00000$ | $\text{cof. } \Phi^2 = \frac{1}{3}$ | $\Phi = 54^\circ, 45'$ | $\frac{u}{e} = 0,0000$ |
| $y=1$ | $m=0,74242$ | $\text{cof. } \Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{44}{53}$ | $\Phi = 57,40$ | $\frac{u}{e} = 0,1580$ |
| $y=2$ | $m=0,50661$ | $\text{cof. } \Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{23}$ | $\Phi = 61,8$ | $\frac{u}{e} = 0,3628$ |
| $y=3$ | $m=0,29944$ | $\text{cof. } \Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{27}$ | $\Phi = 65,25$ | $\frac{u}{e} = 0,6558$ |
| $y=4$ | $m=0,13093$ | $\text{cof. } \Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{104}{323}$ | $\Phi = 71,2$ | $\frac{u}{e} = 1,1639$ |
| $y=5$ | $m=0,01827$ | $\text{cof. } \Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{27}$ | $\Phi = 79,59$ | $\frac{u}{e} = 2,8308$ |

Si ulterius progrediendo ponatur $y=6$, valor ipsius m fit imaginarius, neque enim valor ipsius x superare potest hunc limitem $\frac{3-\sqrt{10}}{2}$, seu y hunc 5,3752.; quo casu fit $\Phi=90^\circ$, et $\frac{u}{e} = \infty$, atque $m=0$, pro frictione evanescente. Patet ergo, quo minor fiat valor ipsius m , eo magis angulum Φ superare limitem $54^\circ, 45'$, eoque maiorem fore motum gyrationum. Ita si frictio tanta esset, ut valor expressionis $\frac{3P\sqrt{3}}{\Delta eef}$ fieret $= \frac{1}{3}$, tum inclinatio axis ad alam maxime idonea foret $61^\circ, 8'$ et celeritas $u = 0,3628e$, seu propemodum $u = \frac{1}{3}e$. Intelligitur hinc etiam, quo maior fuerit alae superficies Δ , simulque eius longitudo f quia hinc valor ipsius m eo minor prodit, eo maiorem esse debere angulum, quem axis cum alis constituit, eoque etiam velociorem fieri motum

motum gyratorium alarum. Quod si plures alae simul axi sint affixae, singulaeque ad eum aequaliter inclinatae, facile perspicitur ad valorem ipsius m obtinendum, expressionem $\frac{3F\sqrt{s}}{\Delta e e f}$ insuper per numerum alarum, diuidi debere, siquidem alae sint inter se similes. Ita si quatuor alae constituentur, quarum quaelibet sit aequalis illi vni, quam sumus contemplati, valor ipsius m erit $= \frac{3F\sqrt{s}}{4\Delta e e f}$, et ex hoc valore ipsius m tam angulus maxime conueniens Φ , quo singulae alae ad axem sunt inclinandae, tam celeritas motus u in distantia ab axe $= f$, ex eadem tabella cognoscitur.

PROBLEMA IX.

54. Si machina instructa sit quatuor alis planis et aequalibus, atque axis a directione venti declinet angulo dato inuenire momentum actionis a vi venti oriundum.

SOLVTIO.

Sit cuiusque alae longitudo $DF = f$, et extremi-
 tatis F celeritas $= u$; figura autem alae exprimat^{ur} vt
 supra aequatione inter abscissam $DT = t$, et ordinatam
 $MM = v$, vnde fit $\int v t dt = A$; $\int v t t dt = B$; et
 $\int v t^2 dt = C$. Tum sit inclinatio axis ad planum cuius-
 que alae $= \Phi$, et angulus, quem directio venti cum
 axe constituit $= \theta$; celeritas autem venti sit $= e$. In
 situ autem alarum quocunque sit pro ala prima angu-
 lus $BCK = \eta$; erit hic angulus pro ala secunda
 $= \eta + 90^\circ$, pro tertia $= \eta + 180^\circ$, et pro quarta
 Tom. IV. Nou. Com. M $= \eta$

$= \eta + 270^\circ$. Momentum ergo impulsio- nis venti erit :

$$\text{pro ala I.} \quad \underline{=} \Delta e e (\cos \theta \sin \Phi - \sin \theta \sin \eta \cos \Phi)^2 \cos \Phi - \frac{2 B e u}{f} (\cos \theta \sin \Phi - \sin \theta \sin \eta \cos \Phi) \cos \Phi^2 + \frac{C u u}{ff} \cos \Phi^2$$

$$\text{pro ala II.} \quad \underline{=} \Delta e e (\cos \theta \sin \Phi - \sin \theta \cos \eta \cos \Phi)^2 \cos \Phi - \frac{2 B e u}{f} (\cos \theta \sin \Phi - \sin \theta \cos \eta \cos \Phi) \cos \Phi^2 + \frac{C u u}{ff} \cos \Phi^2$$

$$\text{pro ala III.} \quad \underline{=} \Delta e e (\cos \theta \sin \Phi + \sin \theta \sin \eta \cos \Phi)^2 \cos \Phi - \frac{2 B e u}{f} (\cos \theta \sin \Phi + \sin \theta \sin \eta \cos \Phi) \cos \Phi^2 + \frac{C u u}{ff} \cos \Phi^2$$

$$\text{pro ala IV.} \quad \underline{=} \Delta e e (\cos \theta \sin \Phi + \sin \theta \cos \eta \cos \Phi)^2 \cos \Phi - \frac{2 B e u}{f} (\cos \theta \sin \Phi + \sin \theta \cos \eta \cos \Phi) \cos \Phi^2 + \frac{C u u}{ff} \cos \Phi^2$$

Quibus in vnâ summam collectis, erit momentum totale in omnes quatuor alas simul exertum:

$$\Delta e e (4 \cos^2 \theta \sin^2 \Phi + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \Phi) \cos \Phi - \frac{8 B e u}{f} \cos \theta \sin \Phi \cos \Phi^2 + \frac{4 C u u}{ff} \cos \Phi^2$$

quod per $\frac{u}{f}$ multiplicatum dabit momentum actionis.

Verum ne vlla ala vnquam ab aere in parte postica percutiatur, vnde motus impediretur, necesse est, vt sit $e \cos \theta \sin \Phi - e \sin \theta \cos \Phi > u \cos \Phi$, seu $\frac{u}{e} < \cos \theta \times (\text{tang} \Phi - \text{tang} \theta)$; ideoque angulus Φ maior esse debet quam angulus θ . Caeterum notatu hic dignum est, momentum totum non amplius pendere ab angulo η , seu id eundem perpetuo valorem obtinere, in quocunque situ alae respectu directionis venti versentur, quoniam termini angulum η inuoluentes se mutuo sustulunt. Q. E. I.

COROLL.

COROLL. 1.

55. Si angulus θ fuerit valde parvus, erit $\cos. \theta = 1 - \frac{1}{2} \theta \theta$; et $\cos. \theta^2 = 1 - \theta \theta$; $\sin. \theta^2 = \theta \theta$: vnde momentum vis ventierit $4 A e e \sin. \Phi^2 \cos. \Phi - \frac{2 B e u}{f} \sin. \Phi \cos. \Phi^2 + \frac{4 C u u}{f f} \cos. \Phi^2 - 2 A e e \theta \theta (2 \sin. \Phi^2 - \cos. \Phi^2) \cos. \Phi + \frac{4 B e u}{f} \theta \theta \sin. \Phi \cos. \Phi^2$. Ab obliquitate ergo venti respectu axis momentum vis venti augetur quantitate $2 e \theta \theta \cos. \Phi [\frac{2 B u}{f} \sin. \Phi \cos. \Phi - A e (2 \sin. \Phi^2 - \cos. \Phi^2)]$, vnde si fuerit $\frac{u}{e} > \frac{A f (2 \sin. \Phi^2 - \cos. \Phi^2)}{2 B \sin. \Phi \cos. \Phi}$, vis venti ab obliquitate augetur; sin autem fuerit $\frac{u}{e} < \frac{A f (2 \sin. \Phi^2 - \cos. \Phi^2)}{2 B \sin. \Phi \cos. \Phi}$, vis venti ab obliquitate diminuitur.

COROLL. 2.

56. Si vis venti ab obliquitate θ augetur, quod evenit, si $\frac{u}{e} > \frac{A f (2 \sin. \Phi^2 - \cos. \Phi^2)}{2 B \sin. \Phi \cos. \Phi}$, manifestum est, hoc augmentum ad certum tantum terminum extendi, ultra quem si obliquitas θ augeatur, vis non solum iterum decrescat, sed etiam profus evanescat. Dabitur ergo hoc casu eiusmodi obliquitas, vnde momentum vis venti maximum oriatur. Cum autem esse debeat $\frac{u}{e} < \text{tang. } \Phi$, perspicuum est, hunc casum locum habere non posse, nisi sit $\text{tang. } \Phi > \frac{A f (2 \sin. \Phi^2 - \cos. \Phi^2)}{2 B \sin. \Phi \cos. \Phi}$, hoc est, nisi sit $2 B \sin. \Phi^2 > 2 A f \sin. \Phi^2 - A f \cos. \Phi^2$, seu $\text{tang. } \Phi^2 < \frac{A f}{2(A f - B)}$. Conditiones ergo, sub quibus ab obliquitate θ momentum vis venti augetur, sunt: primo si $\text{tang. } \Phi^2 < \frac{A f}{2(A f - B)}$; deinde vt $\frac{u}{e}$ contineatur intra limites $\text{tang. } \Phi$, et $\frac{A f (2 \sin. \Phi^2 - \cos. \Phi^2)}{2 B \sin. \Phi \cos. \Phi}$.

M 2

COROLL.

COROLL. 3.

57. Quod si hae conditiones locum habeant, obliquitas θ , quae maximum vis augmentum producit, determinabitur per hanc aequationem:

$$-8 A e e \sin. \theta \cos. \theta \sin. \Phi^2 \cos. \Phi + 4 A e e \sin. \theta \cos. \theta \cos. \Phi^2 + \frac{2 B e u}{j} \sin. \theta \sin. \Phi \cos. \Phi^2 = 0,$$

$$\text{seu } -2 A e \cos. \theta \sin. \Phi^2 + A e \cos. \theta \cos. \Phi^2 + \frac{2 B u}{j} \sin. \Phi \cos. \Phi = 0,$$

unde elicatur: $\cos. \theta = \frac{2 B u \sin. \Phi \cos. \Phi}{A e j (2 \sin. \Phi^2 - \cos. \Phi^2)}$. Quo valore substituto, prodibit vis venti momentum maximum:

$$2 A e e \cos. \Phi^2 - \frac{2 B B u u \sin. \Phi^2 \cos. \Phi^2}{A j f (2 \sin. \Phi^2 - \cos. \Phi^2)} + \frac{4 C u u}{j f} \cos. \Phi^2.$$

EXEMPLVM.

58. Sint singulae alae rectangulares, et area cuius-
 Fig. 7. que $= \Delta$: tum vero $Cf = f$, et $Ce = g$, et latitudo $mm = nn = b$, erit $\Delta = (f - g)b$; $A = \frac{1}{2}b(ff - gg)$; $B = \frac{1}{2}b(j^2 - g^2)$; et $C = \frac{1}{2}b(f^2 - g^2)$. Conditiones ergo, sub quibus ab obliquitate venti respectu axis θ vis venti

augetur, sunt: Primo $\text{tang } \Phi^2 < \frac{\frac{1}{2}fb(ff - gg)}{jb(ff - gg) - \frac{1}{2}b(j^2 - g^2)}$,

seu $\text{tang } \Phi^2 < \frac{jf(f + g)}{2(j - g)(j + g)}$, tum vero $\frac{u}{e}$ intra hos limites $\text{tang } \Phi$, et $\frac{2jf(f + g)(2 \sin. \Phi^2 - \cos. \Phi^2)}{4(ff + fg + gg) \sin. \Phi \cos. \Phi}$ contineri oportet. Deinde vero obliquitas inuenitur

$$\cos. \theta = \frac{4u(ff + fg + gg) \sin. \Phi \cos. \Phi}{2ef(f + g)(2 \sin. \Phi^2 - \cos. \Phi^2)}.$$

Ipsum autem momentum maximum, quod hinc oritur, est $\Delta \cos.$

$$\Delta \text{cof.} \Phi^2 (ee(f+g) + \frac{uu}{9ff(2\sin.\Phi^2 - \text{cof.}\Phi^2)} [\frac{2(f-g)^2(ff+fg+gg)}{f+g} \sin.\Phi^2 - 9(f+g)(ff+gg)\text{cof.}\Phi^2])$$

quod momentum etiam ita exhiberi potest, vt sit

$$\frac{2ee\text{cof.}\Phi^2}{ff} (Aff + \frac{2Cu u}{ee} - \frac{4BBuu\sin.\Phi^2}{\Delta ee(2\sin.\Phi^2 - \text{cof.}\Phi^2)}).$$

Pro quo iterum angulus Φ ita definiiri potest, vt id fiat maximum, quod eueniet, si Φ definiatur ex hac aequatione :

$$-3\sin.\Phi\text{cof.}\Phi^2 (Aff + \frac{2Cu u}{ee} - \frac{4BBuu\sin.\Phi^2}{\Delta ee(2\sin.\Phi^2 - \text{cof.}\Phi^2)}) + \frac{4BBuu\sin.\Phi\text{cof.}\Phi^4}{\Delta ee(2\sin.\Phi^2 - \text{cof.}\Phi^2)^2} = 0$$

$$\text{seu } 3Aff + \frac{6Cu u}{ee} - \frac{12BBuu\sin.\Phi^2}{\Delta ee(2\sin.\Phi^2 - \text{cof.}\Phi^2)} = \frac{4BBuu\text{cof.}\Phi^3}{\Delta ee(2\sin.\Phi^2 - \text{cof.}\Phi^2)^2}.$$

Ad quam resoluendam ponatur $2\sin.\Phi^2 - \text{cof.}\Phi^2 = z$, erit

$$\sin.\Phi^2 = \frac{1+z}{2}; \text{cof.}\Phi^2 = \frac{2-z}{2}, \text{ et aequatio induet hanc}$$

$$\text{formam : } 3Aff + \frac{6Cu u}{ee} = \frac{4BBuu(1+z)}{\Delta eez} + \frac{4BBuu(2-z)}{3\Delta eez^2},$$

$$\text{seu } 9\frac{\Delta Aeeffzx}{uu} + 18ACzz = 12BBz(1+z) + 8BB(2-z) = 4BB(4+z+3zz),$$

vnde reperitur :

$$\frac{z}{2} = -\frac{B}{2} + \sqrt{(\frac{9\Delta Aeeff}{uu} + 18AC - \frac{47}{4}BB)}$$

$$\text{seu } \frac{z}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{9\Delta Aeeff}{BBuu} + \frac{18AC}{BB} - \frac{47}{4})},$$

que solutio latissime patet, et ad omnes alarum figuras extenditur: pro casu autem huius exempli erit

$$\frac{z}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{91eeff(ff-gg)^2}{4uu(j^2-g^2)^2} + \frac{18(ff-gg)(j^4-g^4)}{4(j^2-g^2)^2} - \frac{47}{4})}, \text{ vel}$$

$$\frac{z}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{[\frac{91eeffff-gg^2}{uu(j^2-g^2)^2} + \frac{(f-g)^2(1j^4+1g^4+2j^2gg+66fg^2+1g^4)}{(j^2-g^2)^2}]}$$

si alae ad axem vsque extendantur, vt sit $g=0$, erit

$$\frac{z}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{91ee}{uu} + 34)}; \text{ et } z = \frac{2}{\sqrt{(\frac{91ee}{uu} + 34)} - 1}$$

$$\text{vnde } \sin.\Phi^2 = \frac{\sqrt{(\frac{91ee}{uu} + 34)} + 7}{3\sqrt{(\frac{91ee}{uu} + 34)} - 3}, \text{ et } \text{cof.}\Phi^2 = \frac{2\sqrt{(\frac{91ee}{uu} + 34)} - 10}{3\sqrt{(\frac{91ee}{uu} + 34)} - 3},$$

M 3

et tang.

et $\text{tang. } \Phi = \frac{\sqrt{\left(\frac{11ee}{uu} + 34\right)} + 7}{2\sqrt{\left(\frac{11ee}{uu} + 34\right)} - 10} < \frac{1}{2}$; Quare ut hic casus

locum habere possit, debet esse

$$\sqrt{\left(\frac{11ee}{uu} + 34\right)} + 7 < 3\sqrt{\left(\frac{11ee}{uu} + 34\right)} - 15, \text{ seu}$$

$$11 < \sqrt{\left(\frac{11ee}{uu} + 34\right)};$$

hincque $87 < \frac{11ee}{uu}$, vel $\frac{u}{e} < \sqrt{\frac{11}{17}}$.

Praeterea vero $\frac{u}{e}$ contineri debet intra hos limites:

$$\text{cof. } \theta (\text{tang. } \Phi - \text{tang. } \theta), \text{ et } \frac{3(2 \sin. \Phi^2 - \text{cof. } \Phi^2)}{4 \sin. \Phi \text{ cof. } \Phi}.$$

Sit $\frac{u}{e} = \sqrt{\frac{11}{17}}$, erit $z = \frac{1}{11}$; $\sin. \Phi = \sqrt{\frac{19}{11}}$; $\text{cof. } \Phi = \sqrt{\frac{11}{11}}$;

$\text{tang. } \Phi = \sqrt{\frac{19}{14}}$. unde ob $\text{cof. } \theta = \frac{uu}{3e}$. $\frac{\sin. \Phi}{2 \sin. \Phi - \text{cof. } \Phi^2}$ erit

$\text{cof. } \theta = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{11}{11}} = \sqrt{\frac{11}{33}}$; $\sin. \theta = \sqrt{\frac{17}{33}}$; et $\text{tang. } \theta = \sqrt{\frac{17}{11}}$.

Iam videamus, an sit $\frac{u}{e} < \text{cof. } \theta (\text{tang. } \Phi - \text{tang. } \theta)$; seu an sit

$$\sqrt{\frac{11}{17}} < \sqrt{\frac{11}{33}} (\sqrt{\frac{19}{14}} - \sqrt{\frac{17}{11}}), \text{ seu } \sqrt{\frac{15}{17}} < \sqrt{\frac{19}{14}} - \sqrt{\frac{17}{11}}$$

quod autem non succedit: neque vero etiam aliis valoribus pro $\frac{u}{e}$ assumendis his conditionibus satisfieri potest.

P R O B L E M A X.

59. *Determinare figuram alarum aptissimam, ut cum ventus secundum directionem axis in eas incidit, maxima ab eo excipiatur vis, seu ut tum momentum actionis fiat maximum.*

S O L V T I O.

Sit Cc axis, secundum cuius directionem ventus impingat celeritate sua $= e$ in alam $CMHHC$, cuius figura non sit plana, quae tamen a plano axi non-

Fig. 8.

normali secetur recta C T F, quam instar diametri alae considerabo; ad quam omnes normales M M, m m sint in superficie alae positae, ita vt singula elementa M M m m sint plana, sed diuersimode ad axem C c inclinata: Quanquam enim hoc modo nulla oritur superficies continua, sed potius infinita multitudo elementorum M M m m inter se non nisi in diametro C F cohaerentium, tamen etiam in extremitatibus m, m tam prope ad se inuicem accedent, vt superficiem continuam mentiantur, atque etiam praectice facillime confici posse videntur. Sit igitur longitudo alae C F = f, et celeritas

generata puncti F = u: tum vogetur abscissa quaecunque C T = t, cui respondens ordinata sit M M = v, eritque elementum alae M m m M = v dt, quod per hypothesein est planum, ad quod axis C c inclinatus sit angulo = Φ, quem ergo variabilem assumo, ac in quouis loco T ita constituo, vt inde maximum momentum resultet. Hinc ex §. 29 ob θ = 0 erit momentum vis venti in hoc alae elementum M m m M = v dt ita expressum = v t dt (e sin. Φ - $\frac{u t}{f}$ cos. Φ)² cos. Φ: quod ergo vt maximum fiat, angulus Φ conuenienter definiri debet, quod hac aequatione praestabitur:

$$\sin. \Phi (e \sin. \Phi - \frac{u t}{f} \cos. \Phi) = 2 \cos. \Phi (e \cos. \Phi + \frac{u t}{f} \sin. \Phi)$$

seu $e(\sin. \Phi^2 - 2 \cos. \Phi^2) = \frac{2 u t}{f} \sin. \Phi \cos. \Phi$, quae praebet

$$\text{tang. } \Phi^2 = \frac{3 u t}{e f} \text{ tang. } \Phi + 2, \text{ et } \text{tang. } \Phi = \frac{3 u t}{2 e f} + \sqrt{\left(\frac{9 u u t t}{4 e e f f} + 2\right)}$$

ergo $\sec. \Phi = \sqrt{\left[3 + \frac{9 u u t t}{2 e e f f} + \frac{3 u t}{e f} \sqrt{\left(\frac{9 u u t t}{4 e e f f} + 2\right)}\right]}$; hincque $\cos. \Phi =$

$$\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{9 u u t t}{2 e e f f} + 3 + \frac{3 u t}{e f} \sqrt{\left(\frac{9 u u t t}{4 e e f f} + 2\right)}\right]}}$$

Hinc ergo

ergo pro quavis ab axe distantia $CT = t$ definitur inclinatio elementi $M m m M$ ad axem, angulus scilicet Φ , sub quo etiam ventus in hoc elementum impinget. Pendet autem determinatio huius anguli Φ praeter abscissam $CT = t$, etiam a celeritate puncti $F = u$, seu potius a ratione huius celeritatis ad celeritatem venti e . Dummodo ergo haec ratio fuerit constans, singulis alae elementis hinc aptissima inclinatio tribui poterit, ut momentum vis venti in totam alam fiat maximum. Erit autem pro distantia ab axe evanescente $t = 0$, angulus $\Phi = 54^\circ, 45'$, cum sit $\text{tang. } \Phi = 2$. at pro extremitate $t = f$, erit $\text{tang. } \Phi = \frac{2}{3} + \sqrt{\left(\frac{2}{3} \frac{u}{e} + 2\right)}$, unde patet, hunc angulum eo magis superare angulum illum $54^\circ, 45'$, quo maior fuerit ratio $\frac{u}{e}$. Verum ad momentum totum per integrationem inveniendum expedit abscissam t per angulum Φ exprimere, quam vicissim: unde fiet $t = \frac{e f}{2 u} \cdot \frac{\sin. \Phi^2 - 2 \cos. \Phi^2}{\sin. \Phi \cos. \Phi}$, et $d t = \frac{e f}{2 u} \cdot \frac{d \Phi (\sin. \Phi^2 + 2 \cos. \Phi^2)}{\sin. \Phi^2 \cos. \Phi^2}$, atque $e \sin. \Phi - \frac{u t}{f} \cos. \Phi = e \sin. \Phi - \frac{e}{2} \cdot \frac{\sin. \Phi^2 - 2 \cos. \Phi^2}{\sin. \Phi} = \frac{2 e}{3 \sin. \Phi}$; sicque erit elementum momenti: $\frac{4 e^2 f f}{31 u u} \cdot \frac{v d \Phi (\sin. \Phi^2 - 4 \cos. \Phi^2)}{\sin. \Phi^2 \cos. \Phi^2}$, quod ita integrari debet, ut posito $t = 0$, seu $\text{tang. } \Phi = 2$, evanescat; tum vero ponatur $t = f$, seu $\text{tang. } \Phi = \frac{2}{3} + \sqrt{\left(\frac{2}{3} \frac{u}{e} + 2\right)}$; sicque momentum pro tota ala prodibit, quod deinde per $\frac{u}{f}$ multiplicatum dabit momentum actionis vis venti. Cum autem v sit functio ipsius t , in ea pro t substitui debet valor $t = \frac{e f}{2 u} \cdot \frac{\sin. \Phi^2 - 2 \cos. \Phi^2}{\sin. \Phi \cos. \Phi}$. Ita si sit $v = A + B t + C t t + D t^2$ etc. erit:

$$v =$$

$$\begin{aligned}
 v &= A + \frac{B \operatorname{cf}}{3 u} \frac{(\sin. \Phi^2 - 2 \operatorname{cf} \Phi^2)}{\sin. \Phi \operatorname{cf} \Phi} + \frac{C e^2 f^2}{5 u^2} \frac{(\sin. \Phi^2 - 2 \operatorname{cf} \Phi^2)^2}{\sin. \Phi^2 \operatorname{cf} \Phi^2} \\
 &+ \frac{D e^2 f^2}{7 u^3} \frac{(\sin. \Phi^2 - 2 \operatorname{cf} \Phi^2)^3}{\sin. \Phi^3 \operatorname{cf} \Phi^3} \text{ etc. Hinc autem } \int \frac{d \Phi (\sin. \Phi^2 - 4 \operatorname{cf} \Phi^2)}{\sin. \Phi^2 \operatorname{cf} \Phi^2} = \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^2} (\operatorname{tang.} \Phi^2 - 4 \operatorname{cot.} \Phi^2) \text{ et} \\
 \frac{d \Phi (\sin. \Phi^2 - 4 \operatorname{cf} \Phi^2)}{\sin. \Phi \operatorname{cf} \Phi} &= \operatorname{tang.} \Phi - 2 \operatorname{cot.} \Phi \text{ erit momentum totale :} \\
 &+ \frac{A e^2 f f}{3^2 u^2} \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^2} (\operatorname{tang.} \Phi^2 - 4 \operatorname{cot.} \Phi^2) \\
 &+ \frac{B e^2 f^2}{5^2 u^3} \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^3} (\operatorname{tang.} \Phi^2 - 4 \operatorname{cot.} \Phi^2) (\operatorname{tang.} \Phi - 2 \operatorname{cot.} \Phi) \\
 &+ \frac{C e^2 f^2}{7^2 u^4} \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^4} (\operatorname{tang.} \Phi^2 - 4 \operatorname{cot.} \Phi^2) (\operatorname{tang.} \Phi - 2 \operatorname{cot.} \Phi)^2 \\
 &+ \frac{D e^2 f^2}{9^2 u^5} \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^5} (\operatorname{tang.} \Phi^2 - 4 \operatorname{cot.} \Phi^2) (\operatorname{tang.} \Phi - 2 \operatorname{cot.} \Phi)^3 \\
 &\text{ etc.}
 \end{aligned}$$

Verum ad has integrationes expediendas notandum est, esse

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^2} \operatorname{tang.} \Phi^n &= \frac{\operatorname{tang.} \Phi^{n-1}}{(n-1) \sin. \Phi^2} - \frac{(n-1)}{n-1} \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^2} \operatorname{tang.} \Phi^{n-2} \\
 \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^2} \operatorname{cot.} \Phi^n &= -\frac{\operatorname{cot.} \Phi^{n-1}}{(n-1) \sin. \Phi^2} - \frac{(n-1)}{n-1} \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^2} \operatorname{cot.} \Phi^{n-2}
 \end{aligned}$$

quarum formularum ope formulae magis compositae continuo ad simpliciores reducuntur. At pro simplicissimis est

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^2} &= -\frac{\operatorname{cf} \Phi}{\sin. \Phi^2} + \frac{1}{2} \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi} \\
 \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^2} \operatorname{tang.} \Phi &= -\frac{1}{\sin. \Phi} + \int \frac{d \Phi}{\operatorname{cf} \Phi} \\
 \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^2} \operatorname{cot.} \Phi &= -\frac{1}{\sin. \Phi^2}
 \end{aligned}$$

Hinc magis compositae prodibunt :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^3} \operatorname{tang.} \Phi^2 &= \frac{\operatorname{tang.} \Phi \operatorname{cf} \Phi}{\sin. \Phi^3} - \frac{\operatorname{cf} \Phi}{\sin. \Phi^2} + \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi} = \frac{1}{\operatorname{cf} \Phi} + \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi} \\
 \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^3} \operatorname{cot.} \Phi^2 &= -\frac{\operatorname{cf} \Phi}{\sin. \Phi^3} + \frac{\operatorname{cf} \Phi}{\sin. \Phi^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi} \\
 \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^3} \operatorname{tang.} \Phi &= \frac{\sin. \Phi}{2 \operatorname{cf} \Phi^2} + \frac{1}{2} \int \frac{d \Phi}{\operatorname{cf} \Phi} \\
 \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^3} \operatorname{cot.} \Phi &= -\frac{\operatorname{cf} \Phi}{5 \sin. \Phi^3} + \frac{1}{15} \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi} \\
 \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^4} \operatorname{tang.} \Phi^2 &= \frac{1}{2 \operatorname{cf} \Phi^2} \\
 \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi^4} \operatorname{cot.} \Phi^2 &= -\frac{\operatorname{cf} \Phi^2}{6 \sin. \Phi^4} + \frac{\operatorname{cf} \Phi}{5 \sin. \Phi^3} - \frac{\operatorname{cf} \Phi}{16 \sin. \Phi^2} + \frac{1}{16} \int \frac{d \Phi}{\sin. \Phi}
 \end{aligned}$$

Integrale ergo erit:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \frac{e^2 f^2}{u^2} \left(\frac{1}{\cos \Phi} (1 + \frac{1}{2} \cot \Phi + \cot \Phi) + \int \frac{d\Phi}{\sin \Phi} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \frac{e^2 f^2}{u^2} \left(\frac{\tan \Phi}{\sin \Phi} (1 + \frac{1}{2} \cot \Phi + \cot \Phi - \cot \Phi) - \int \frac{d\Phi}{\cos \Phi} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \frac{e^2 f^2}{u^2} \left(\frac{\tan \Phi}{\sin \Phi} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cot \Phi - 3 \cot \Phi - \frac{1}{2} \cot \Phi + \frac{1}{2} \cot \Phi) \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad - 7 \int \frac{d\Phi}{\sin \Phi}
 \end{aligned}$$

vbi huius modi constantia adici debet, vtposito $\tan \Phi = \sqrt{2}$; seu $\cot \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\cos \Phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, integrale evanescat. Notandum vero est esse $\int \frac{d\Phi}{\sin \Phi} = \ln \tan \frac{1}{2} \Phi$ et $\int \frac{d\Phi}{\cos \Phi} = -\ln \tan (45^\circ - \frac{1}{2} \Phi) = \ln \tan (45^\circ + \frac{1}{2} \Phi)$.

Q. E. L.

C O R O L L. 1.

Ex quantitate momenti hoc modo inventa insuper definiiri posset ipsa celeritas u , vt momentum actionis fiat maximum, sed quia hoc modo in calculos intricatissimos delaberemur, consultius videtur, rationem quandam inter celeritates u et e assumere, quae experientiae maxime censetur conueniens. Videtur autem ratio $u : e = 1 : 3$ commodissima, ita vt celeritas in alarum extremitate sit minor celeritate venti; quippe quo casu expressiones inventae simplicissimae euadunt.

C O R O L L. 2.

Si. Sit igitur $u = \frac{1}{3} e$, et in quavis ab axe distantia $= r$ pro inclinatione elementi alae ad axem Φ , erit $\tan \Phi = \frac{r + \sqrt{r^2 + \frac{1}{2} f^2}}{\frac{1}{2} f}$; unde in alae extremitate erit inclinatio Φ tanta, vt sit $\tan \Phi = 2$. Cum igitur

igitur prope axem sit $\text{tang. } \Phi = \sqrt{2}$, seu inclinatio $54^\circ, 45'$, circa extremitatem alarum erit inclinatio $63^\circ, 26'$.

COROLL. 3.

62. Sumpta pro alae latitudine v , quae distantiae ab axe convenit, hac aequatione $v = A + Bt + Ct^2$, momentum potentiale vis venti in totam alam calculo secundum formulas inventas quolito sequenti modo expressum reperietur:

$$0,3233; Aeff + 0,2074; B e f^2 + 0,1529; C e e f^2$$

Quae quantitas per $\frac{3}{7}$, seu $\frac{e}{f}$ multiplicata dabit momentum actionis ex tota ala oriundum.

COROLL. 4.

63. Sin autem haec eadem ala esset plana, et ubique ad axem eandem inclinationem Φ teneret, atque etiam ponatur $v = \frac{1}{2} e$, tum ex formulis supra datis colligetur momentum potentiale vis venti in hanc alam

$$+ A e e f f \left(\frac{1}{2} \text{tang. } \Phi^2 - \frac{1}{2} \text{tang. } \Phi + \frac{1}{16} \right) \text{cos. } \Phi^2$$

$$+ B e e f^2 \left(\frac{1}{2} \text{tang. } \Phi^2 - \frac{1}{4} \text{tang. } \Phi + \frac{1}{16} \right) \text{cos. } \Phi^2$$

$$+ C e e f^4 \left(\frac{1}{2} \text{tang. } \Phi^2 - \frac{1}{12} \text{tang. } \Phi + \frac{1}{24} \right) \text{cos. } \Phi^2$$

COROLL. 5.

64. Quare si pro hac ala plana statuatur $\Phi = 54^\circ, 45'$, seu $\text{tang. } \Phi = \sqrt{2}$, erit momentum eius:

$$0,30846; A e e f f + 0,19624; B e e f^2 + 0,14287; C e e f^4$$

sin autem inclinatio ubique statuatur $\Phi = 63^\circ, 26'$, seu $\text{tang. } \Phi = 2$, erit momentum eius:

$$0,31862; A e e f f + 0,20572; B e e f^2 + 0,15130; C e e f^4$$

Vtroque ergo casu momentum est minus, quam si alae inclinatio variabilis tribuatur.

N 2

COROLL.

COROLL. 6.

65. Posteriori tamen casu, quo $\Phi = 63^\circ, 26'$ momentum multo propius accedit ad momentum alae, in qua inclinatio Φ ad extremitates continuo augetur; et defectus vix est sensibilis. Unde nisi alae inclinatio variabilis tribui queat, expediet eius inclinationem ad axem ubique $63^\circ, 26'$ constitui, quam $54^\circ, 45'$, quia hoc modo ad momentum maximum proxime acceditur. Intelligendum autem hoc est, si statuatur $u = \frac{1}{2}c$; nam si celeritas u maior caperetur, tum angulus inclinationis Φ quoque maior euaderet.

PROBLEMA XI.

66. *Alis planis rotam alatam ita instruere, ut a vento non solum vis maxima excipiat, sed etiam effectus machinae, habita frictionis ratione, maximus reddatur.*

SOLVTIO.

TAB. II. Contemplatur axis plano tabulae perpendiculariter insistere in puncto C, circa quem disponantur plures alae triangulares, verticibus suis in puncto C concurrentes, et quae in planum tabulae orthogonaliter proiectae polygonum regulare repraesentent, ita ut nihil vacui inter eas relinquatur. Sint nimirum singula triangula isoscela GCG projectiones alarum, cuiusmodi in figura duodecim exhibentur. Sic enim obtinetur, ut quaecunque fuerit alarum inclinatio, ventus in omnes simul impingere possit, neque vlla ala impulsionem venti in aliam impediat.

Quan-

Quando ergo ventus secundum directionem axis incidit, omnis aeris copia, quae intra capacitatem polygoni advehitur, in alas impingit, ita vt maior venti copia excipi nequeat, quin alae longiores reddantur. Sit ergo HCH vna ala quaecunque, ad axem sub dato angulo $= \Phi$ inclinato, quae triangulum ifosceles GCG fecerit recta CF, ita vt semissium HCF, HCF alter supra planum tabulae cadat, alter infra. Sit iam longitudo huiusmodi alae $CF = f$, basis HH = b , et basis proiectio- nis GG = g , erit ob ang. FHG = Φ , $g = b \sin. \Phi$, et $b = \frac{g}{\sin. \Phi}$; Datur enim GG = g ex altitudine CF = f et numero laterum polygoni, vnde b per g exprimi comenit. Venti celeritas ponatur, vt ante = e , et celeritas rotae huius alatae in puncto F = u : numerus porro alarum sit = n , erit $\frac{1}{2}g$ tangens arcus $\frac{2\pi}{n}$ radio ex- stente = f , seu $\frac{g}{2f} = \text{tang. } \frac{1}{n} \text{ r } 80^\circ$: ideoque $g = 2f \text{ tang. } \frac{1}{n} \text{ r } 80^\circ$. Iam cum ala HCH sit triangularis, posita eius abscissa quaecunque CT = t et ordinata MM = v , erit $v = \frac{b}{f} t$: vnde colligitur pro tota ala:

$$A = \int v t dt = \frac{1}{2} f f b; B = \int v t t dt = \frac{1}{2} f^2 b; C = \int v t^2 dt = \frac{1}{3} f^3 b.$$

Ex quibus conficitur momentum vis venti vnam alam im- pingentis = $ff b (\frac{1}{2} e \sin. \Phi^2 \cos. \Phi - \frac{1}{2} e u \sin. \Phi \cdot \cos. \Phi + \frac{1}{2} u u \cos. \Phi^2)$;

vbi notandum est, esse debere $\frac{u}{e} < \text{tang. } \Phi$. Ponatur ergo $u = e x \text{ tang. } \Phi$, ita vt sit $x < 1$, eritque momentum

$$e e f f b (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} x x) \sin. \Phi^2 \cos. \Phi, \text{ seu ob } b = \frac{g}{\sin. \Phi}$$

$$e e f f g (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} x x) \sin. \Phi \cos. \Phi.$$

Hinc momentum vis venti omnes n alas percutientis erit

$$n e e f f g (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} x x) \sin. \Phi \cos. \Phi.$$

N 3

Sit

Sit nunc momentum frictionis = F; ita ut onus movendum sit a momento $ne^2 f g (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}xx) \sin \Phi \cos \Phi$, quod multiplicatum per $\frac{x}{r} = \frac{e^2}{r}$ tang Φ dabit momentum actionis seu effectum machinae, qui erit

$$ne^2 f g x (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}xx) \sin \Phi^2 - \frac{e^2}{r} F \text{ tang } \Phi.$$

Ponatur $F = \mu ne^2 f g$, quia hoc modo vis frictionis commodissime ad vim moventem comparatur, eritque effectus machinae: $ne^2 f g x [(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}xx) \sin \Phi^2 - \mu \text{ tang } \Phi]$.

Quod ut fiat maximum tam x quam angulus Φ definiti poterat, quod fiet his aequationibus:

$$(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}xx) \sin \Phi^2 = \mu \text{ tang } \Phi, \text{ et } 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}xx) \sin \Phi \cos \Phi = \frac{\mu}{\cos \Phi^2},$$

$$\text{unde elicitur: } x = \frac{2 \sin \Phi^2 - \sqrt{15(4 - \sin \Phi^2)}}{6(1 + 2 \sin \Phi^2)} = \frac{1(2 \sin \Phi^2 - 1)}{15 \sin \Phi^2 + \sqrt{15(4 - \sin \Phi^2)}}$$

tum vero angulus Φ per sequentem aequationem determinatur.

$$x = \frac{\mu}{2 \sin \Phi^2 \cos \Phi^2} [8 + \sin \Phi^2 - \sqrt{15(4 - \sin \Phi^2)}]$$

Vnde si angulus Φ fuerit inventus, erit momentum actionis seu totus machinae effectus:

$$\frac{\mu ne^2 f g x \sin \Phi (2 \sin \Phi^2 - 1)}{2 \cos \Phi^2} = \frac{1}{2} ne^2 f g x \frac{\sin \Phi^2 (2 \sin \Phi^2 - 1)}{1 + \sin \Phi^2 - \sqrt{15(4 - \sin \Phi^2)}}$$

at celeritas motus rotae in F erit $u = e x \text{ tang } \Phi =$

$$\frac{e \mu (2 \sin \Phi^2 - 1) e \text{ tang } \Phi}{15 \sin \Phi^2 + \sqrt{15(4 - \sin \Phi^2)}}. \quad \text{Q. E. I.}$$

C O R O L L. 1.

67. Patet ergo, angulum Φ semper esse debere semi recto maiorem, siquidem machina moveri debeat. Nam si $\Phi = 45^\circ$, vel $\sin \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, erit $x = 0$, $y = 0$, et ipse machinae effectus = 0: qui casus locum obtinet, si $\mu = \frac{1}{6\sqrt{2}}$, hoc est, si fuerit momentum frictionis $F = \frac{e^2 e f f g}{6\sqrt{2}}$. Nisi ergo fuerit frictio minor, machina commoveri non poterit, seu ut motus subsequatur, necesse est, ut sit $\mu < \frac{1}{6\sqrt{2}}$.

COROLL.

COROLL. 2.

68. Quia difficile est, ex data frictione seu valore ipsius μ , angulum Φ inuenire, maxime conducit, pro Φ successiue plures valores intra limites 45° et 90° assumere et inde valores ipsius μ prouenientes notare, ut ex huius modi tabula vicissim pro dato μ valor conueniens anguli Φ colligi possit. Qui calculus, quo ob irrationalitatem minus impediatur: ponatur

$$\sin \Phi = \frac{10pp - 6qq}{sp^2 + 3qq}, \text{ erit } \cos \Phi = \frac{9qq - 5pp}{sp^2 + 3qq}, \text{ et } x = \frac{s(p-q)}{sp - 3q},$$

$$\text{et } \frac{x}{c} = x \tan \Phi; \text{ porro } \frac{1}{\mu} = \frac{s^2(p-q)^2}{10pp - 3qq} \cdot \frac{1}{\cos \Phi}, \text{ atque}$$

$$\text{effectus machinae erit } = \frac{1}{2} n e^2 fg \cdot \frac{x(p+q)}{(sp - 3q)} \cdot \sin \Phi =$$

$$\frac{1}{2} n e^2 fg \cdot \frac{1}{3} x^2 \frac{p+q}{p-q} \sin \Phi^2, \text{ vbi notandum est, } \frac{pp}{qq} \text{ intra}$$

$$\text{limites } 1 \text{ et } \frac{1}{3} \text{ contineri debere.}$$

COROLL. 3.

69. Cum area totius polygoni, in quod rota alata proiicitur, sit $= \frac{1}{2} nfg$, exhibebit $\frac{1}{2} neefg$ vim venti in aream huius polygoni, si celeritate sua $= e$ in eam directe impingeret; quam ergo vim, cognita venti celeritate, facile definire licet: Sit igitur ista vis $= n e e fg = V$, eritque momentum frictionis $F = 2 \mu \cdot V f$. Atque per eandem vim V effectus machinae seu momentum actionis ita definietur, vt sit $= \frac{\mu x \sin \Phi (2 \sin \Phi - 1)}{\cos \Phi^2} \cdot V e$: quo exprimitur onus per celeritatem suam multiplicatum. Cum autem sit $u = e x \tan \Phi$; erit hoc momentum actionis $= \frac{\mu (2 \sin \Phi - 1)}{\cos \Phi^2} \cdot V x$. Vnde si resistentia oneris sit $= Q$, erit oneris celeritas $= \frac{\mu (2 \sin \Phi - 1)}{\cos \Phi^2} \cdot \frac{V u}{Q}$, ex quo modus machinam ad onus applicandi concluditur.

TABVLA.

T A B U L A

pro quavis frictione exhibens angulum inclinationis
alarum ad axem rotæ, celeritatem rotæ
et effectum totum ipsius machinæ

| Momentum Frictionis. | Angul Inclin: | Celeritas rotæ in extremit : | Effectus Machinæ | qui etiam hoc modo expr: |
|-------------------------|------------------|---------------------------------|---------------------|-----------------------------|
| 0, 235702 Vf | 45° | 0, 000000 | 0, 000000 Ve | 0, 000000 Vu |
| 0, 175837 Vf | 50 | 0, 127686 | 0, 004718 Ve | 0, 036950 Vu |
| 0, 122871 Vf | 55 | 0, 281334 | 0, 017968 Ve | 0, 063869 Vu |
| 0, 079653 Vf | 60 | 0, 469882 | 0, 037427 Ve | 0, 079653 Vu |
| 0, 047001 Vf | 65 | 0, 711154 | 0, 060147 Ve | 0, 084576 Vu |
| 0, 024370 Vf | 70 | 1, 042160 | 0, 083159 Ve | 0, 079795 Vu |
| 0, 010362 Vf | 75 | 1, 550395 | 0, 103842 Ve | 0, 066978 Vu |
| 0, 003084 Vf | 80 | 2, 490421 | 0, 120165 Ve | 0, 048053 Vu |
| 0, 000386 Vf | 85 | 5, 208606 | 0, 130454 Ve | 0, 025046 Vu |
| 0, 000000 Vf | 90 | ∞ | 0, 134001 Ve | 0, 000000 Vu |

C O R O L L. 4.

70. Ex hac ergo tabula perspicitur, si momentum frictionis fuerit $= 0, 235702 Vf$, vel etiam maius, tum vim venti non parem esse machinæ ad motum excitandæ, etiamsi nulla oneris resistentia sit superanda. Effectus ergo machinæ hoc casu erit nullus; neque ventus machinam mouere valebit, nisi sit momentum frictionis $F < 0, 235702 Vf$, vel nisi ventus iam tanta moueatur celeritate, vt sit $0, 235702 \cdot neeffg > F$.

C O R O L L. 5.

71. Quo autem minor momentum frictionis fuerit pars quantitatis Vf , eo maior capi debet angulus inclina-

inclinationis Φ , eoque celerior tribuendus erit motus rotæ; atque ipse effectus machinæ eo fiet maior: qui tamen limitem $0,134001 V e$ nunquam superare potest. Vbi notandum est, si momentum frictionis fuerit $\frac{1}{10} V f$, effectum tantum esse semissem, si autem momentum frictionis sit $\frac{1}{4} V f$, effectum tantum fore circiter quadrantem illius summi effectus.

SCHOLIUM.

72. Quando momentum frictionis est pars notabilis quantitatis $V f$, minor tamen quam eius pars quarta, patet, quantum intersit, si frictio adhuc ultra diminuatur: sic si momentum frictionis sit circiter pars sexta ipsius $V f$, effectus machinæ erit propemodum $= \frac{1}{300} V e$: at si frictio eo usque diminuatur, ut eius momentum sit $\frac{1}{4} V f$, quæ est levis diminutio, effectus erit $\frac{1}{17} V e$, ideoque fore quadruplo maior, quam casu præcedente. Data autem frictione, ita ut ultra diminui nequeat, patet, impedimentum inde oriundum eo fore minus, quo maior fuerit area polygoni $G F G F$ etc; et cum etiam aucto radio f diminuatur, manifestum est, coefficientem quantitatis $V f$ in prima columna in ratione triplicata radii f diminui, sicque hoc pacto multo maiorem coefficientem termini $V e$ in quarta columna obtineri, ideoque effectum machinæ iam non mediocriter augeri. Præterea vero ob auctum V hic effectus in ratione duplicata radii f augebitur. Ex quo maxime expediet, ut ala huiusmodi rotata tanta conficiatur, quantam reliquæ circumstantiæ id permittunt. Hoc autem modo

enb: hoc est, ponderi $112\frac{1}{2} e e$ librarum, tribuendo 70
 th vni pedis cubico aquae. Machina ergo moueri non
 poterit, nisi sit momentum frictionis $200 \angle 0, 235702$,
 20 ; $112\frac{1}{2} e e$; hoc est, nisi sit altitudo celeritati venti
 debita $e e > \frac{1}{2}$ ped: qua celeritate singulis minutis secun-
 dis percurruntur $4\frac{1}{2}$ ped. Nisi igitur venti celeritas maior
 sit, quato $4\frac{1}{2}$ pedum, per machinam ne quidem ad mo-
 tum excitari poterit. Disponamus ergo machinam, ita
 ut maximum producat effectum, si ventus conficiat 10
 pedes singulis minutis secundis, ita vt altitudo celeritati
 venti debita sit $e e = 1\frac{1}{2}$ ped: eritque vis $V = 180 \text{ th}$,
 80 th $f = 36000$ vnde erit momentum frictionis 200
 th th $\pi \alpha \frac{1}{2} 203595$ Vis. Quo numero ad primam
 columnam translato, patebit, angulum quo alae ad axem
 rotae inclinari debent, esse oportere circiter, 64° . Por-
 ro reperitur $n = \frac{1}{2} e$, ita vt extremitas alarum hoc ven-
 to flante esse debeat $6\frac{1}{2}$ ped. in minuto secundo, vnde
 rota alata reuolutionem quamlibet absoluere debet tem-
 pore 19 secundorum circiter. Effectus autem machinae
 colligetur $= 0, 054 V e = 9\frac{1}{2} \text{ th}$. 10 ped. Quare si
 oneris resistentia valeat Q libras, eius celeritas erit $=$
 $\frac{97\frac{1}{2}}{Q}$ pedum vno minuto secundo. Si ergo onus per-
 pendiculariter attolli debeat ope huius machinae, hocque
 onus sit 1000 librarum, id singulis horis eleuabitur per
 spatium 351 pedum. Vbi notandum est, vnum homi-
 nem idem onus singulis horis per spatium $= 180$ pe-
 dum attollere posse, si quidem vis hominis, qua minu-
 to secundo per spatium 2 pedum progreditur, statuatur

25 libr. ex quo intelligitur a duobus hominibus plus praestari posse quam ab hac machina, si vento 10 pedes minuto secundo peragrante impellatur. Verum si ventus duplo sit velocior, machina effectum circiter octuplo maiorem edet, ideoque tantum efficiet, quantum 16 homines: Sed hic tenendum est, homines ad hunc effectum producendum nulla frictione impediri; Si enim eadem machinae applicentur, ubi frictionem superare debent, multo minus efficere possent. Vnus enim homo eadem machinae inniteas pondus 1000 lb̄ vnius horae spatio tantum ad altitudinem 108 pedum eleuabit, ideoque ventus 10 pedum reuera tantum praestat, quantum 3 homines; ventus autem duplo celerior plus quam 28 homines efficiet.

ELEMENTA

ELEMENTA

DOCTRINAE SOLIDORVM.

AVCT. L. EVLERO.

Quemadmodum Geometria in contemplatione figurarum planarum versatur, et quae de lineis et angulis in ea traduntur, ad eius prolegomena referenda sunt; ita Stereometria in contemplatione solidorum occupatur, et quae ibi de inclinatione planorum angulisque solidis explicantur, eius quoque tanquam prolegomena sunt spectanda.

§. 2. Solidum est extensum trium dimensionum vndique terminatum, perinde atque superficies definitur per extensum duarum tantum dimensionum. Duae autem solidorum constituendae sunt classes, prout eorum ambitus figuris siue planis, siue concavis concatisque includitur.

§. 3. Hic eam tantum classem solidorum, quae vndique figuris planis includuntur, contemplari constitui; perinde atque Geometria a figuris rectilineis exorditur; et quemadmodum figurarum rectilinearum in genere plures designes proprietates sunt annotatae; ita solidorum huius classis non nullas proprietates generales expere conabor.

§. 4. Quinquam autem Stereometria iam satis diligenter elaborata videtur, in eaque praeter theoriam inclina-

clinationis planorum et angulorum solidorum, formatio plurium solidorum ac potissimum corporum regularium doceri solet; tamen vbique firma huius de solidis doctrinae fundamenta desiderantur, ex quibus huiusmodi solidorum natura in genere intelligi possit.

§. 5. Solidorum igitur contemplatio ad ambitum eorum dirigi debet: cognito enim ambitu, quo solidum undique includitur, ipsum solidum cognoscitur simili modo, quo cuiusque figurae planae indoles ex eius perimetro definiri solet.

§. 6. Ad ambitum autem cuiusque solidi figuris planis inclusi pertinent 1^{mo} ipsae figurae planae eius ambitum constituentes, quae hedrae vocantur; 2^{do} binarum hedrarum secundum latera concursus, quibus termini lineares solidi oriuntur: hos terminos, quoniam apud scriptores Stereometriae nullum nomen proprium reperio, acies vocabo; 3^{to} puncta, in quibus tres pluresue hedrae concurrunt, quae puncta anguli solidi appellantur.

§. 7. Triplicis igitur generis termini in quovis solido sunt considerandi; scilicet 1.) puncta; 2.) lineae; 3.) superficies; vel nominibus ad hoc institutum propriis utendo. 1.) Anguli solidi; 2.) acies; (et 3.) hedrae. Hisque triplicis generis terminis totum solidum determinatur.

Figura autem plana duplicis tantum generis terminos habet, quibus determinatur; 1. scilicet puncta, seu anguli,

2. lineae seu latera.

ni in solidis huiusmodi sequitur ad hunc modum determinatur.

§. 8.

§. 8.

§. 8.

§. 8. In hoc exempli, propositum fit corpus cuneiforme ABCDEF, cuius termini primi generis, seu anguli solidi sunt sex: A, B, C, D, E, F. Termini secundi generis, lineares, seu acies sunt numero nouem: AB, BC, CD, DA, AE, DE, BF, CF, EF. Termini denique tertii generis, seu hedrae sunt quinque, nimirum: ABCD, ABFE, ADE, CDEF, BCF. TAB. II
Fig. 2.

§. 9. Omnis ergo solidorum diuersitas cum ex numero angulorum solidorum, tum ex numero acierum, tum vero ex numero hedrarum nascitur. Vtitatae autem solidorum denominationes ex numero hedrarum peti solent, vnde nota sunt nomina tetraedri, hexaedri, octaedri, dodecaedri et icosaedri, etli ea corporibus tantum regularibus tribui solent. In genere enim nomine polyedri indicatur corpus quodcumque siue regulare, siue irregulare, quod certo hedrarum numero includitur.

§. 10. Simili modo si diuersa solidorum genera ex numero angulorum solidorum definire velimus, eorum nomina erunt tetragonum, pentagonum, hexagonum, heptagonum etc. Atque corpus cuneiforme ante consideratum hoc modo erit hexagonum appellandum, quod secundum hedrarum numerum est pentaedrum.

§. 11. Quoniam vero solida, quae pari hedrarum numero includuntur, ratione numeri angulorum solidorum inter se differre possunt, ad ea inter se diligentius distinguenda, conueniet quinque denominationem tam a numero hedrarum, quam a numero angulorum solidorum petere

petere. Ita solidum cuneiforme ante consideratum vocabitur *pentaedrum hexagonum*; Pyramis triangularis est *tetraedrum tetragonum*; Prisma triangulare *pentaedrum hexagonum*; Parallelepipedum vero *hexaedrum octogonum* et ita porro.

§. 12. Est ergo ad genus figuræ planæ rectilineæ designandum sufficit laterum numerum, quibus includitur, commemorasse, quoniam angulorum numerus semper est æqualis numero laterum; tamen in solidis numerus angulorum solidorum admodum discrepare potest a numero hedrarum, unde utrumque numerum nominare opus est. Sic pyramis quadrangularis æque includitur quinque hedris, ac prisma triangulare, sed illa quinque tantum habet angulos solidos, dum hoc habet sex.

§. 13. Ad solidorum vero genera constituenda superfluum foret præter hedrarum et angulorum solidorum numeros insuper numerum acierum adicere, quoniam uti deinceps monstrabo, acierum numerus semper ex numero hedrarum et angulorum solidorum determinatur, ita ut, si datus fuerit tam numerus hedrarum, quam numerus angulorum solidorum, cuiusque solidi inde simul numerus acierum sit cognitus.

§. 14. Vltiores vero solidorum differentie petendæ sunt cum ex indole hedrarum, seu numeri laterum, quibus quæque hedra includitur; tum vero ex indole angulorum solidorum, quæ probat quibus vel ex tribus, pluribusve angulis planis super formatur. Angulus enim solidus ex præteritis, quæ ex tribus angulis planis constare nequit;

DOCTRINAE SOLIDORVM. 113

nequit; plures autem quotcumque ad angulum solidum constituendum concurrere possunt, dummodo eorum omnium summa fuerit quatuor rectis minor.

§. 15. Datis omnibus hedris, quibus solidum quodpiam includitur, statim cognoscetur numerus omnium laterum cunctas hedras includentium, cui numero aequalis est numerus omnium angulorum planorum, qui in cunctis hedris reperiuntur, quia in qualibet hedra numerus angulorum aequalis est numero laterum.

§. 16. Deinde etiam summa omnium angulorum planorum facile exhiberi potest, propterea quod in quaque hedra summa omnium eius angulorum ex eiusdem numero laterum definitur. Quotcumque enim laterum fuerit hedra quaequam, summa omnium eius angulorum aequatur, uti constat, bis tot angulis rectis, quot sunt latera, demtis quatuor.

§. 17. Ad solidum ergo definiendum, praeter numeros angulorum solidorum, acierum ac hedrarum, quae res proprie ad ambitum solidi pertinent, commodè quoque adhiberi possunt, cum numerus omnium laterum, seu, qui ei est aequalis, numerus omnium angulorum planorum, sum vero etiam summa omnium horum angulorum planorum.

§. 18. Ex collatione harum quinque rerum, quas in quouis solido considerare licet, plures insignes proprietates solidorum generales obtineri possunt, quae similes erunt earum proprietatum, quae de figuris planis recti-

lineis in genere proferri solent. Maior autem istarum rerum, quas in solidis spectamus, numerus plures etiam proprietates generales suppeditabit, quam in figuris planis locum inveniunt.

§. 19. Quas proprietates, cum nemo eorum, qui Stereometriam tractauerunt, fere attigerit, operam dabo, ut si non omnes, tamen praecipuas in medium afferam, atque demonstrationibus confirmem. Quod eo maiorem utilitatem habiturum videtur, cum sine harum proprietatum cognitione doctrina solidorum neutiquam cum successu tractari queat.

§. 20. Eo magis igitur merito mirum videbitur, quod cum prima Geometriae planae elementa iam a tam longo temporis intervallo omni cura sint elaborata, ac perspicue exposita, prima quasi Stereometriae elementa tantis adhuc tenebris sint inuoluta, nemoque fuerit inuentus, qui ea in lucem protrahere sit conatus.

PROPOSITIO I.

§. 21. *In quouis solido numerus omnium acierum est semissis numeri omnium angulorum planorum, qui in cunctis hedris ambitum eius constituentibus reperiuntur.*

DEMONSTRATIO.

Quaelibet acies in ambitu solidi formatur a duobus lateribus duarum hedrarum, et cum inter omnia latera cunctarum hedrarum bina coniuncta singulas acies constituent, uant,

tuant , manifestum est numerum acierum omnium esse semissem numeri omnium laterum. At numerus omnium laterum aequalis est numero omnium angulorum planorum , quia quaecvis hedra tot habet angulos quot latera. Ergo numerus acierum quoque semissis est numeri omnium angulorum planorum , qui in cunctis hedris ambitum solidi constituentibus reperiuntur. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 22. Cum numerus acierum fractus esse nequeat, perspicuum est , numerum omnium laterum vel omnium angulorum planorum semper parem esse debere ; huiusque numeri semissis dabit numerum acierum , quæ. in ambitu solidi deprehenduntur.

COROLL. 2.

§. 23. Si igitur omnes hedrae ambitum solidi cuiuspiam constituentes fuerint triangula , earum numerus necessario erit par ; si enim numerus harum hedrarum esset impar , tum etiam numerus angulorum planorum esset impar ; quod euenire non potest. Idem tenendum est de hedris omnibus , quae sunt polygonia imparium laterum ; scilicet si singulae hedrae fuerint vel triangula , vel pentagona , vel heptagona , vel etc. earum numerus semper debet esse par.

COROLL. 3.

§. 24. Si inter hedras ambitum solidi cuiuspiam constituentes numerus earum , quae sunt vel tetragonae ;
 P 2 vel

vel hexagonae, vel octogonae, vel polygonae quaecun-
que paris laterum numeri, fuerit $= m$, numerus vero
earum, quae sunt vel trigonae, vel pentagonae, vel
heptagonae, vel polygonae quaecun-que imparis laterum
numeri $= n$, ita ut numerus omnium hedrarum sit
 $= m + n$; tum numerus n debet esse par. Quod ve-
ro ad numerum m attinet, perinde est siue sit par
siue impar.

COROLL. 4.

§. 25. Si ergo ambitus totius solidi constet ex a
triangulis, b quadrangulis, c pentagonis, d hexagonis, e
heptagonis etc. erit numerus omnium hedrarum $= a +$
 $b + c + d + e +$ etc. Numerus vero omnium an-
gulorum planorum, seu laterum erit $= 3a + 4b +$
 $5c + 6d + 7e +$ etc. Numerus autem omnium
acierum in ambitu solidi $= \frac{3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \text{etc.}}{2}$.
vnde numerus $a + c + e +$ etc. debet esse par.

PROPOSITIO II.

§. 26. Numerus omnium angulorum planorum vel
aequalis est vel maior numero omnium hedrarum ter
sumto. Vel numerus angulorum planorum nunquam mi-
nor esse potest, quam triplum numeri hedrarum ambitum
solidi cuiusquam constituentium

DEMONSTRATIO.

Omnes hedrae sunt vel triangula vel figurae plurium
laterum; si omnes hedrae sunt triangula, numerus la-
terum

terum seu angulorum planorum erit triplo maior, quam numerus hedrarum; si autem vel omnes vel aliquae hedrae plures tribus habeant angulos, tum etiam numerus angulorum planorum maior erit quam triplum numeri hedrarum. Semper ergo numerus angulorum planorum vel aequalis est vel maior numero hedrarum ter sumpto, ipsoque minor nunquam esse potest. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 27. Si ergo omnes hedrae fuerint triangulares, numerus angulorum planorum aequalis erit triplo numeri hedrarum; si autem non omnes hedrae sint triangulares, sed figurae plurimum laterum, tum numerus angulorum planorum maior erit, quam triplum numeri hedrarum.

COROLL. 2.

§. 28. In solido igitur quocunque, si numerus hedrarum ponatur = H , et numerus acierum = A , quia numerus angulorum planorum est, = $2A$, erit vel $2A = 3H$ vel $2A > 3H$. Impossibile ergo est, ut sit $2A < 3H$.

COROLL. 3.

§. 29. Retentis his denominationibus nullum datur solidum, in quo sit $A < \frac{3}{2}H$ vel $H > \frac{2}{3}A$. Quanquam autem hinc relatio inter numerum hedrarum et numerum acierum non determinatur, tamen plurimae relationes excluduntur, quae nunquam locum habere possunt.

PROPOSITIO. III.

§. 30. Numerus omnium angulorum planorum, qui in ambitu cuiusque solidi existunt vel aequalis est vel maior numero angulorum solidorum ter sumto. Vel numerus angulorum planorum nunquam minor esse potest quam triplum numeri angulorum solidorum.

DEMONSTRATIO.

Quilibet angulus solidus vel a tribus angulis planis formatur vel a pluribus, pauciores enim quam tres anguli plani angulum solidum constituere nequeunt. Hinc si omnes anguli solidi a tribus planis formantur, numerus angulorum planorum triplo maior esse debet quam numerus angulorum solidorum; sin autem ad quosdam angulos solidos constituendos plures anguli plani coniunguntur, numerus angulorum planorum quoque maior erit quam numerus angulorum solidorum, minor autem nunquam esse potest. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 31. Si numerus angulorum solidorum ponatur $= S$, numerus vero acierum $= A$ pro solido quocunque, quia numerus omnium angulorum planorum est $= 2 A$, semper erit vel $2 A = 3 S$ vel $2 A > 3 S$.

COROLL. 2.

§. 32. Fieri ergo nequit, ut vnquam sit $2 A < 3 S$, seu $A < \frac{3}{2} S$, seu $S > \frac{2}{3} A$. Quare si praeterea numerus
hedra-

DOCTRINAE SOLIDORVM. 119

hedrarum ponatur $= H$, neque hic numerus H neque numerus S maior esse potest quam $\frac{2}{3}A$.

PROPOSITIO IV.

§. 33. *In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Scilicet si ponatur ut haecenus :

numerus angulorum solidorum $= S$
 numerus acierum - - - - $= A$
 numerus hedrarum - - - $= H$
 demonstrandum est, esse $S + H = A + 2$.

Fateri equidem cogor, me huius theorematis demonstrationem firmam adhuc eruere non potuisse; interim tamen eius veritas pro omnibus solidorum generibus, ad quae examinabitur, non difficulter agnosceretur, ita ut sequens inductio vicem demonstrationis gerere queat.

1. Consideremus ergo primo pyramidem quamcum-
 que super basi $A B C D E F G$ quocumque laterum co-
 stitutam et in apicem H desinentem. Sit numerus la-
 terum basis $= m$, totidemque triangula a basi ad apicem
 vsque assurgent. Includitur ergo haec pyramis $m + 1$
 hedris, quarum m sunt triangula, vna vero polygonum
 m angulorum seu laterum. Erit itaque numerus hedra-
 rum

rum $H = m + 1$, atque numerus angulorum solidorum pariter est $S = m + 1$. Deinde numerus omnium angulorum planorum est $= 3m + m = 4m$, unde numerus acierum erit $A = 2m$. Cum igitur sit $H + S = 2m + 2$ erit utique hoc casu $H + S = A + 2$.

Fig. 2. 2. Sit solidum cuneiforme a basi quocunque laterum $A B C D$ in aciem $E F$ desinens. Sit basis polygonum m laterum, erit numerus angulorum solidorum binario maior seu $S = m + 2$. Deinde praeter ipsam basin tot aderunt hedrae, quot latera habet basis, unde numerus omnium hedrarum erit $H = m + 1$, ex his hedris vna nempe basis est polygonum m laterum, reliquae erunt triangula duabus exceptis, quae esse debent quadrilatera, suoque concursu aciem $E F$ constituunt; praeter basin ergo m laterum, habentur $m - 2$ triangula et 2 quadrilatera, ex quo numerus omnium laterum seu angulorum planorum erit $= m + 3(m - 2) + 2 \cdot 4 = 4m + 2$, hincque prodit numerus acierum $A = 2m + 1$. Cum ergo sit $H + S = 2m + 3$ erit $H + S = A + 2$.

Fig. 4. 3. Sit solidum arcae seu cistae simile, intra duas bases $A B C D$ et $E F G H$ contentum, vtraque autem basis eundem habeat laterum numerum $= m$, eritque numerus angulorum solidorum $S = 2m$. Deinde praeter has duas bases reliquae hedrae erunt quadrilaterae, earumque numerus $= m$, unde numerus omnium hedrarum erit $H = m + 2$. Angulorum autem planorum numerus ob duas hedras m laterum et m hedras quadrilateras erit $= 2m + 4m = 6m$, hincque acierum numerus conclu-

concluditur $A = 3m$. Quare, cum sit $H + S = 3m + 2$, erit denuo $H + S = A + 2$.

4. Habeat denuo solidum duas bases $A B C D E$, Fig. 5. et $F G H$, quae autem non eodem gaudeant laterum numero. Sit ergo pro altera basi $A B C D E$ numerus laterum maior $= m + n$, pro altera vero basi $F G H$ numerus laterum $= m$, eritque numerus angulorum solidorum $= m + n + m$, seu $S = 2m + n$. Tum praeter duas bases tot erunt hedrae, quot latera habet altera basis, quae maiori laterum numero gaudet, scilicet $m + n$, unde omnium hedrarum numerus est $H = m + n + 2$; quarum cum altera basis habeat latera $m + n$, altera m , inter reliquas vero hedras, quarum numerus est $m + n$, tot esse debeant quadrilaterae, quot basis $F G H$ habet latera, nempe m , ceterae vero, quarum numerus est n , sint triangulares, omnium angulorum planorum numerus est $= m + n + m + 4m + 3n = 6m + 4n$, erit numerus acierum $A = 3m + 2n$. Cum igitur sit $H + S = 3m + 2n + 2$, erit iterum $H + S = A + 2$.

5. Sit corpus denuo in duas bases $A B C D$ et Fig. 6. $L M N$ terminatum, circa medium autem habeat angulos solidos E, F, G, H, I, K . Sit numerus laterum basis $A B C D = m$, basis $L M N = n$, numerus autem angulorum solidorum circa medium sit $= p$, qui sit maior, quam m et quam n . Erit ergo numerus omnium angulorum solidorum $S = m + n + p$. Tum ab angulis solidis mediis ad basin $A B C D$ dirigentur hedrae numero $= p$, quarum m erunt quadrilaterae, reliquae

Tern. IV. Nou. Com. Q $p - m$

$p - m$ triangulares; simili modo ad alteram basin LMN dirigentur hedrae quoque numero $= p$, quarum n erunt quadrilaterae, reliquae vero $p - n$ triangulares, sic cum duabus basibus numerus omnium hedrarum erit $= 2 + p + p$ seu $H = 2p + 2$. Quarum cum vna habeat m latera, alia n latera, et quadrilaterarum numerus sit $= m + n$, trigonalium $= 2p - m - n$, erit omnium angulorum planorum numerus $= m + n + 4(m + n) + 3(2p - m - n) = 6p + 2m + 2n$, ideoque numerus acierum prodit $A = 3p + m + n$. Quare cum sit $H + S = 3p + m + n + 2$, erit denuo $H + S = A + 2$.

6. Positis iisdem atque in casu praecedente, sit $m > p$ et $p > n$, erit vt ante numerus angulorum solidorum $S = m + n + p$. A basi autem $ABCD$ iam m hedrae ad angulos solidos medios dirigentur, quarum erunt p quadrangulares, et $m - p$ triangulares. Ab angulis autem mediis ad alteram basin LMN dirigentur p hedrae, quarum erunt n quadrilaterae, et $p - n$ trigonales. Hinc ergo omnium hedrarum numerus erit $= 2 + m + p$ seu $H = m + p + 2$, quarum hedrarum vna est m laterum, alia n laterum, $p + n$ quadrilaterae, et $m - p + p - n$ seu $m - n$ trilaterae. Hanc ob rem omnium angulorum planorum numerus erit $= m + n + 4(p + n) + 3(m - n) = 4p + 4m + 2n$, hincque acierum numerus $A = 2p + 2m + n$. Vnde cum sit $H + S = 2p + 2m + n$, erit $H + S = A + 2$.

7. Si angulorum solidorum mediorum numerus p minor sit utroque numero m et n , erit quidem vt ante
angu-

angulorum solidorum numerus $S = m + n + p$. Sed iam a basi $ABCD$ ad angulos medios diriguntur hedrae m , ab altera vero basi hedrae n , et vtrinque erunt p quadrangulares, ex illa vero parte $m - p$, ex hac vero $n - p$ triangulares. Vnde numerus omnium hedrarum erit $= 2 + m + n$ seu $H = m + n + 2$: angulorum autem planorum numerus erit $= m + n + 4 \cdot 2p + 3(m + n - 2p) = 2p + 4m + 4n$. Quare acierum numerus prodit $A = p + 2m + 2n$; et cum sit $H + S = 2m + 2n + p + 2$, erit $H + S = A + 2$.

8. Et si haec sufficere possent ad veritatem propositionis euincendam, tamen eam praeterea ex corporibus regularibus confirmare lubet. Pro tetraëdro quidem erit numerus hedrarum $H = 4$; quae cum sint triangulares, erit omnium angulorum planorum numerus $= 12$, ideoque acierum numerus $A = 6$, et quia singuli anguli solidi ex tribus planis formantur, erit eorum numerus $S = \frac{12}{3} = 4$: hinc $H + S = 8 = A + 2$. Pro hexaëdro est $H = 6$, et ob singulas hedras quadrilateras angulorum planorum numerus $= 24$, ideoque acierum numerus $A = 12$: ac dum terni anguli plani vnum solidum constituunt, erit solidorum numerus $S = \frac{24}{3} = 8$, sicque $H + S = 14 = A + 2$. Pro octaëdro est $H = 8$, cuius hedrae cum sint trilatae, erit omnium angulorum planorum numerus $= 24$, ideoque numerus acierum $A = 12$, ac dum quaterni anguli plani vnum solidum formant, erit angulorum solidorum numerus $S = \frac{24}{4} = 6$, sicque $H + S = 14 = A + 2$.

Pro dodecaëdro est $H = 12$, cuius hedrae cum sint pentagonae, erit numerus angulorum planorum $= 5 \cdot 12$

Q 2

= 60

$= 60$, ideoque numerus acierum $A = 30$. Deinde quia terni anguli plani ad solidum concurrunt, erit numerus angulorum solidorum $S = 20$, ergo $H + S = 32 = A + 2$. Pro icosaedro est $H = 20$, cuius hedrae cum sint trigonales, erit angulorum planorum numerus $= 60$, numerusque acierum $A = 30$. Tum vero quia singuli anguli solidi constant quinque planis, erit eorum numerus $S = 12$, ideoque $H + S = 32 = A + 2$.

Cum igitur veritas propositionis in his omnibus casibus sibi constet, dubium est nullum, quin ea in omnibus omnino solidis locum habeat, sicque propositio sufficienter videtur demonstrata.

COROLL. 1.

§. 34. Si ergo in quopiam solido detur numerus angulorum solidorum S cum numero hedrarum H , inde statim cognoscetur numerus acierum A , cum sit $A = H + S - 2$.

COROLL. 2.

§. 35. Datis autem in solido quocunque numero angulorum solidorum S cum numero acierum A , inde facile colligitur numerus hedrarum H , cum sit $H = A - S + 2$.

COROLL. 3.

§. 36. Datis autem in solido quocunque numero hedrarum H una cum numero acierum A , inde facile reperietur numerus angulorum solidorum S , quia est $S = A - H + 2$.

PROPO-

PROPOSITIO V.

§. 37. Nullum existere potest solidum, in quo numerus acierum senario auctus maior esset, quam vel triplum numeri hedrarum, vel triplum numeri angulorum solidorum.

DEMONSTRATIO

Sit numerus acierum = A , numerus hedrarum = H , et numerus angulorum solidorum = S , atque supra vidimus, fieri non posse, ut sit vel $3H > 2A$, vel $3S > 2A$, erunt ergo hae formulae $3H > 2A$, et $3S > 2A$ impossibiles. Nunc autem vidimus, esse $H + S = A + 2$, seu $H = A - S + 2$, et $S = A - H + 2$, qui valores in illis formulis impossibilibus substituti dabunt sequentes formulas impossibiles:

$$3A - 3S + 6 > 2A, \text{ et } 3A - 3H + 6 > 2A,$$

quae abeunt in has

$$A + 6 > 3S, \text{ et } A + 6 > 3H.$$

Vnde manifestum est, fieri non posse, ut numerus acierum senario auctus maior sit, quam vel triplum numeri hedrarum, vel triplum numeri angulorum solidorum
Q. E. D.

COROLL. I.

§. 38. In omni ergo solido vel est $A + 6 = 3H$, vel $A + 6 < 3H$, similique modo est vel $A + 6 = 3S$, vel $A + 6 < 3S$. Siue si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, assumantur
Q 3 mantur

mantur ad numeros positivos, cyphra non excepta, designandos, erit:

$$A + \delta + \alpha = 3H, \text{ et } A + \delta + \epsilon = 3S.$$

COROLL. 2.

§. 39. Tum vero quia semper est vel $A = \frac{2}{3}S$, vel $A > \frac{2}{3}S$; item vel $A = \frac{2}{3}H$, vel $A > \frac{2}{3}H$, erit simili modo

$A = \frac{2}{3}H + \gamma$, et $A = \frac{2}{3}S + \delta$
vbi γ , et δ , vt ante α , et ϵ non possunt esse numeri negativi.

COROLL. 3.

§. 40. His posterioribus valoribus in praecedentibus aequationibus substitutis prodibunt hae aequationes:

$$\frac{2}{3}H + \delta + \alpha + \gamma = 3H, \text{ et } \frac{2}{3}S + \delta + \epsilon + \delta = 3S:$$

seu $4 + \frac{2}{3}(\alpha + \gamma) = H$, et $4 + \frac{2}{3}(\epsilon + \delta) = S$
vnde patet, tam numerum hedrarum, quam numerum angulorum solidorum quaternario minorem esse non posse.

COROLL. 4.

§. 41. Cum sit $H + S = A + 2$, erit hos postremos valores adhibendo, $8 + \frac{2}{3}(\alpha + \epsilon + \gamma + \delta) = A + 2$, vnde colligitur, numerum acierum A senario nunquam minorem esse posse. Est igitur pyramis triangularis omnium solidorum simplicissimum, quia tam numerus hedrarum, quam angulorum solidorum est $= 4$, et numerus acierum $= 6$.

PROPO-

PROPOSITIO VI.

§. 42. Nullum existere potest solidum, in quo vel numerus hedrarum quaternario auctus, maior sit duplo numero angulorum solidorum, vel in quo numerus angulorum solidorum quaternario auctus maior, sit duplo numero hedrarum.

DEMONSTRATIO.

Sit numerus hedrarum $= H$, numerus angulorum solidorum $= S$, et numerus acierum $= A$, et quoniam supra ostendimus fieri non posse, ut sit vel $3H > 2A$ vel $3S > 2A$, hae duae formulae erunt impossibiles:

$$3H > 2A, \text{ et } 3S > 2A.$$

Cum iam sit $A = H + S - 2$, hoc valore pro A substituto sequentes formulae erunt impossibiles:

$$3H > 2H + 2S - 4, \text{ et } 3S > 2H + 2S - 4.$$

quae abeunt in has

$$H + 4 > 2S, \text{ et } S + 4 > 2H.$$

Vnde neque numerus hedrarum quaternario auctus maior esse potest duplo numero angulorum solidorum, neque numerus angulorum solidorum quaternario auctus maior duplo numero hedrarum. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 43. In omni ergo solido vel est $H + 4 = 2S$, vel $H + 4 < 2S$, deinde simili modo est vel $S + 4 = 2H$, vel $S + 4 < 2H$. Si igitur α et β denotent numeros positivos cyphra non excepta, in omni solido
hae

hae aequationes locum habebunt $H + 4 + a = 2S$,
et $S + 4 + e = 2H$.

C O R O L L. 2.

§. 44. Cum sit $S = 2H - 4 - e$, et $S = \frac{1}{2}H + 2 + \frac{1}{2}a$, numerus angulorum solidorum S neque maior esse potest, quam $2H - 4$, neque minor quam $\frac{1}{2}H + 2$. Ergo numerus angulorum solidorum S extra hos limites $2H - 4$, et $\frac{1}{2}H + 2$ cadere nequit.

C O R O L L. 3.

§. 45. Simili modo cum sit $H = 2S - 4 - a$, et $H = \frac{1}{2}S + 2 + \frac{1}{2}e$, numerus hedrarum H neque maior esse potest, quam $2S - 4$, neque minor, quam $\frac{1}{2}S + 2$; unde numerus hedrarum H extra hos limites $2S - 4$, et $\frac{1}{2}S + 2$ cadere nequit.

C O R O L L. 4.

§. 46. Deinde ex superiori propositione intelligitur, numerum acierum A neque extra hos limites $\frac{2}{3}H$, et $3H - 6$, neque extra hos limites $\frac{2}{3}S$, et $3S - 6$ cadere posse; simili modo indidem patet, numerum hedrarum H non extra hos limites $\frac{2}{3}A$, et $\frac{1}{3}A + 2$, nec numerum angulorum solidorum S extra hos eisdem limites $\frac{2}{3}A$, et $\frac{1}{3}A + 2$ cadere posse.

C O R O L L. 5.

§. 47. Dato ergo numero hedrarum, tam pro numero angulorum solidorum, quam pro numero acierum, limi-

DOCTRINAE SOLIDORVM. 129

limites assignari possunt, quos transgredi nequeant, quosque subiecta tabella exhibet:

Limites, quos transgredi nequit

| Numerus hedrarum | numerus angulorum solidorum | numerus acierum |
|---------------------|--------------------------------|----------------------------|
| 4 | 4 - - - - 4 | 6 - - - - 6 |
| 5 | 6 - - - - $4\frac{1}{2}$ | $7\frac{1}{2}$ - - - - 9 |
| 6 | 8 - - - - 5 | 9 - - - - 12 |
| 7 | 10 - - - - $5\frac{1}{2}$ | $10\frac{1}{2}$ - - - - 15 |
| 8 | 12 - - - - 6 | 12 - - - - 18 |
| 9 | 14 - - - - $6\frac{1}{2}$ | $13\frac{1}{2}$ - - - - 21 |
| 10 | 16 - - - - 7 | 15 - - - - 24 |
| 11 | 18 - - - - $7\frac{1}{2}$ | $16\frac{1}{2}$ - - - - 27 |
| 12 | 20 - - - - 8 | 18 - - - - 30 |
| 13 | 22 - - - - $8\frac{1}{2}$ | $19\frac{1}{2}$ - - - - 33 |
| 14 | 24 - - - - 9 | 21 - - - - 36 |
| 15 | 26 - - - - $9\frac{1}{2}$ | $22\frac{1}{2}$ - - - - 39 |
| 16 | 28 - - - - 10 | 24 - - - - 42 |
| 17 | 30 - - - - $10\frac{1}{2}$ | $25\frac{1}{2}$ - - - - 45 |
| 18 | 32 - - - - 11 | 27 - - - - 48 |
| 19 | 34 - - - - $11\frac{1}{2}$ | $28\frac{1}{2}$ - - - - 51 |
| 20 | 36 - - - - 12 | 30 - - - - 54 |
| 21 | 38 - - - - $12\frac{1}{2}$ | $31\frac{1}{2}$ - - - - 57 |
| 22 | 40 - - - - 13 | 33 - - - - 60 |
| 23 | 42 - - - - $13\frac{1}{2}$ | $34\frac{1}{2}$ - - - - 63 |
| 24 | 44 - - - - 14 | 36 - - - - 66 |
| 25 | 46 - - - - $14\frac{1}{2}$ | $37\frac{1}{2}$ - - - - 69 |

Tom. IV. Nou. Com.

R

COROLL.

COROLL. 6.

§. 48. Sin autem numerus angulorum solidorum S est datus, pro numero acierum iidem prodeunt limites, quos tabula exhibet, pro numero vero hedrarum ii reperiuntur limites, qui in tabula pro numero angulorum solidorum sunt exhibiti.

COROLL. 7.

§. 49. Verum si numerus acierum A sit datus, quoniam neque numerus hedrarum, neque numerus angulorum solidorum hos limites $\frac{2}{3}A$, et $\frac{1}{3}A + 2$ excedere potest, sequens tabula limitum constructur:

| Numerus acierum | Limites pro numero H et S | Numerus acierum | Limites pro numeris H et S |
|-----------------|------------------------------------|-----------------|-------------------------------------|
| 6 | 4 --- 4 | 20 | $13\frac{1}{3}$ --- $8\frac{2}{3}$ |
| 7 | $4\frac{2}{3}$ --- $4\frac{1}{3}$ | 21 | 14 --- 9 |
| 8 | $5\frac{1}{3}$ --- $4\frac{2}{3}$ | 22 | $14\frac{2}{3}$ --- $9\frac{1}{3}$ |
| 9 | 6 --- 5 | 23 | $15\frac{1}{3}$ --- $9\frac{2}{3}$ |
| 10 | $6\frac{2}{3}$ --- $5\frac{1}{3}$ | 24 | 16 --- 10 |
| 11 | $7\frac{1}{3}$ --- $5\frac{2}{3}$ | 25 | $16\frac{2}{3}$ --- $10\frac{1}{3}$ |
| 12 | 8 --- 6 | 26 | $17\frac{1}{3}$ --- $10\frac{2}{3}$ |
| 13 | $8\frac{2}{3}$ --- $6\frac{1}{3}$ | 27 | 18 --- 11 |
| 14 | $9\frac{1}{3}$ --- $6\frac{2}{3}$ | 28 | $18\frac{2}{3}$ --- $11\frac{1}{3}$ |
| 15 | 10 --- 7 | 29 | $19\frac{1}{3}$ --- $11\frac{2}{3}$ |
| 16 | $10\frac{2}{3}$ --- $7\frac{1}{3}$ | 30 | 20 --- 12 |
| 17 | $11\frac{1}{3}$ --- $7\frac{2}{3}$ | 31 | $20\frac{2}{3}$ --- $12\frac{1}{3}$ |
| 18 | 12 --- 8 | 32 | $21\frac{1}{3}$ --- $12\frac{2}{3}$ |
| 19 | $12\frac{2}{3}$ --- $8\frac{1}{3}$ | 33 | 22 --- 13 |

Num-

| Numerus acierum | Limites pro numeris H et S | Numerus acierum | Limites pro numeris H et S |
|--------------------|-----------------------------------|--------------------|-----------------------------------|
| 34 | $22\frac{2}{3} --- 13\frac{1}{3}$ | 48 | 32 --- 18 |
| 35 | $23\frac{1}{3} --- 13\frac{2}{3}$ | 49 | $32\frac{2}{3} --- 18$ |
| 36 | 24 --- 14 | 50 | $33\frac{1}{3} --- 18$ |
| 37 | $24\frac{2}{3} --- 14\frac{1}{3}$ | 51 | 34 --- 19 |
| 38 | $25\frac{1}{3} --- 14\frac{2}{3}$ | 52 | $34\frac{2}{3} --- 19$ |
| 39 | 26 --- 15 | 53 | $35\frac{1}{3} --- 19$ |
| 40 | $26\frac{2}{3} --- 15\frac{1}{3}$ | 54 | 36 --- 20 |
| 41 | $27\frac{1}{3} --- 15\frac{2}{3}$ | 55 | $36\frac{2}{3} --- 20$ |
| 42 | 28 --- 16 | 56 | $37\frac{1}{3} --- 20$ |
| 43 | $28\frac{2}{3} --- 16\frac{1}{3}$ | 57 | 38 --- 21 |
| 44 | $29\frac{1}{3} --- 16\frac{2}{3}$ | 58 | $38\frac{2}{3} --- 21$ |
| 45 | 30 --- 17 | 59 | $39\frac{1}{3} --- 21\frac{2}{3}$ |
| 46 | $30\frac{2}{3} --- 17\frac{1}{3}$ | 60 | 40 --- 23 |
| 47 | $31\frac{1}{3} --- 17\frac{2}{3}$ | | |

COROLL. 8.

§. 50. Ad hanc tabulam insuper notari conuenit, quantum numerorum H et S alter limitem minorem superet, tantundem alterum a limite maiore deficere debere. Ita si numerus acierum A est = 30, et numerus hedrarum $H = 12 + n$, erit numerus angulorum solidorum $S = 20 - n$, at $20 - n$ non debet esse minus quam 12, vnde n octonarium superare nequit.

PROPOSITIO VII.

§. 51. Nullum existere potest solidum, cuius omnes bedrae sint hexagonae, vel plurium laterum; neque vllum existere potest solidum, cuius omnes anguli solidi ex sex, pluribusque angulis planis sint formati.

R 2

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Sit ut haecenus numerus acierum $= A$, numerus hedrarum $= H$, et numerus angulorum solidorum $= S$. Quod si iam omnes hedrae essent hexagonae, vel plurium laterum, numerus omnium angulorum planorum esset vel $= 6H$, vel $> 6H$; hinc numerus acierum A foret vel $= 3H$, vel $> 3H$. At supra vidimus, semper esse $A = 3H - 6$, vel $A < 3H - 6$; nullo modo ergo fieri potest, ut esset vel $A = 3H$, vel $A > 3H$; unde impossibile est, ut omnes hedrae sint vel hexagonae, vel plurium laterum. Q. E. Vnum.

Simili modo si omnes anguli solidi ex sex pluribusve angulis planis constarent, foret omnium angulorum planorum numerus vel $= 6S$ vel $> 6S$, hincque numerus acierum A esset vel $= 3S$, vel $> 3S$. At supra demonstravimus, fieri non posse, ut sit $A + 6 > 3S$, multo minus ergo esse poterit $A = 3S$, vel adeo $A > 3S$. Unde impossibile est, ut omnes anguli solidi ex sex pluribusve angulis planis constent. Q. E. Alterum.

PROPOSITIO VIII.

§. 52. *Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu cuiuscunque solidi reperiuntur, aequalis est quater tot angulis rectis, quot unitates occurrunt in excessu numeri acierum super numerum hedrarum.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus acierum $= A$, numerusque hedrarum $= H$

= H, atque demonstrandum est, summam omnium angulorum planorum aequalem esse $4A - 4H$ rectis. Ad hoc demonstrandum constat solidi ambitus

- ex a hedris trigonis
- ex b hedris tetragonis
- ex c hedris pentagonis
- ex d hedris hexagonis
- ex e hedris heptagonis

etc.

erit ergo numerus hedrarum $H = a + b + c + d + e + \text{etc.}$
 et numerus acierum $A = \frac{1}{2}(3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \text{etc.})$
 quia numerus angulorum planorum est $= 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \text{etc.}$

- Iam cum summa angulorum vnus trianguli fit = 2 rectis
 - - - - - vnus quadrilateri = 4 rectis
 - - - - - vnus pentagoni = 6 rectis
 - - - - - vnus hexagoni = 8 rectis
 - - - - - vnus heptagoni = 10 rectis
- etc.

erit summa omnium angulorum planorum =
 $2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \text{etc.}$ angulis rectis,
 et est $4A = 6a + 8b + 10c + 12d + 14e + \text{etc.}$
 et $4H = 4a + 4b + 4c + 4d + 4e + \text{etc.}$

ergo $4A - 4H = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \text{etc.}$
 Consequenter summa omnium angulorum planorum aequalis est $4A - 4H$ angulis rectis. Q. E. D.

R 3 COROLL.

COROLL. 1.

§. 53. Cum sit vel $2A = 3H$, vel $2A > 3H$, si ponamus $2A = 3H + \alpha$, erit summa angulorum planorum $= 2H + 2\alpha$, ideoque minor esse nequit, quam $2H$ anguli recti.

COROLL. 2.

§. 54. Deinde cum sit $A = 3H - 6 - \alpha$, erit $4A - 4H = 8H - 24 - 4\alpha$. Hinc summa omnium angulorum planorum maior esse nequit, quam $8H - 24$ anguli recti. Numerus ideoque angulorum rectorum, quibus summa omnium angulorum planorum est aequalis, extra hos limites $2H$, et $8H - 24$ cadere nequit.

PROPOSITIO IX.

§. 55. *Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu solidi cuiuscunque occurrunt, aequalis est quater tot angulis rectis, quot adsunt anguli solidi, demtis octo.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus angulorum solidorum $= S$, ac demonstrari debet, summam omnium angulorum planorum aequalem esse $4S - 8$ angulis rectis. Ponatur ad hoc numerus hedrarum $= H$, et numerus acierum $= A$, et quia in praecedente propositione demonstrauius, summam omnium angulorum planorum esse $= 4A - 4H$ angulis rectis, ob $H + S = A + 2$, erit $A - H = S - 2$, ideoque $4A - 4H = 4S - 8$. Vnde perspicuum est, summam

summam omnium angulorum planorum esse $= 4S - 8$ rectis, seu aequari quater tot rectis, quot sunt anguli solidi demtis octo. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 56. Insignis ac palmaria haec est proprietas solidorum, quod summa omnium angulorum planorum vnice per numerum angulorum solidorum definitur, simili modo, quo in quavis figura plana summa angulorum eorum numero colligitur.

COROLL. 2.

§. 57. Merito igitur desideratur demonstratio huius propositionis ex solo numero angulorum solidorum petita, ita vt eam neque numerus hedrarum, neque numerus acierum ingrediatur. Hinc igitur, atque ex propositione quarta, cuius ne demonstrationem quidem apodicticam exhibere potui, eo magis elucet, quam parum etiam nunc elementa Stereometriae sint exculta.

COROLL. 3.

§. 58. Quoniam summa omnium angulorum planorum vnice a numero angulorum solidorum pendet, iste numerus eiusmodi characterem solidorum constituit, a quo genera solidorum deriuanda esse videantur. Hinc ergo genera solidorum erunt secundum numerum angulorum solidorum sequentia: 1. Tetragonum. 2. Pentagonum 3. Hexagonum, 4. Heptagonum etc. quae deinceps per numerum hedrarum magis determinabuntur.

PROBLE-

PROBLEMA I.

§. 59. *Genera notabiliora, ad quae omnia solida figuris planis inclusa, sunt referenda, enumerare, nominibusque idoneis denotare.*

SOLVITIO.

Sit numerus angulorum solidorum = S , atque supra vidimus, numerum hedrarum extra hos limites: $2S - 4$, et $\frac{1}{2}S + 2$ cadere non posse. Hinc ex tabella (§. 47.) exhibita pro quouis numero angulorum solidorum sequentia solidorum genera constituentur:

| Num. ang. sol. | numerus hedrarum | numerus acierum | Nomina generum |
|----------------|------------------|-----------------|------------------------|
| 4 | 4 | 6 | Tetragonum tetraedrum |
| 5 | 5 | 8 | Pentagonum pentaedrum. |
| | 6 | 9 | Pentagonum hexaedrum. |
| 6 | 5 | 9 | Hexagonum pentaedrum. |
| | 6 | 10 | Hexagonum hexaedrum. |
| | 7 | 11 | Hexagonum heptaedrum. |
| | 8 | 12 | Hexagonum octaedrum. |
| 7 | 6 | 11 | Heptagonum hexaedrum. |
| | 7 | 12 | Heptagonum heptaedrum. |
| | 8 | 13 | Heptagonum octaedrum. |
| | 9 | 14 | Heptagonum enneaedrum. |
| | 10 | 15 | Heptagonum Decaedrum. |

Num.

DOCTRINAE SOLIDORVM. 137

| Num. ang. solidor. | numerus hedrarum | numerus acierum | nomina generum |
|-----------------------|---------------------|---------------------|--------------------------|
| 8 | 6 | 12 | Octogonum hexaedrum. |
| | 7 | 13 | Octogonum heptaedrum. |
| | 8 | 14 | Octogonum octaedrum. |
| | 9 | 15 | Octogonum enneaedrum. |
| | 10 | 16 | Octogonum decaedrum. |
| | 11 | 17 | Octogonum hendecaedrum. |
| | 12 | 18 | Octogonum dodecaedrum. |
| 9 | 7 | 14 | Enneagonum heptaedrum. |
| | 8 | 15 | Enneagonum Octaedrum. |
| | 9 | 16 | Enneagonum enneaedrum. |
| | 10 | 17 | Enneagonum decaedrum. |
| | 11 | 18 | Enneagonum hendecaedrum. |
| | 12 | 19 | Enneagonum dodecaedrum. |
| | 13 | 20 | Enneagonum 13edrum. |
| 14 | 21 | Enneagonum 14edrum. | |
| 10 | 7 | 15 | Decagonum heptaedrum. |
| | 8 | 16 | Decagonum octaedrum. |
| | 9 | 17 | Decagonum enneaedrum. |
| | 10 | 18 | Decagonum decaedrum. |
| | 11 | 19 | Decagonum hendecaedrum. |
| | 12 | 20 | Decagonum dodecaedrum. |
| | 13 | 21 | Decagonum 13edrum. |
| | 14 | 22 | Decagonum 14edrum. |
| | 15 | 23 | Decagonum 15edrum. |
| | 16 | 24 | Decagonum 16edrum. |

etc.

superfluum foret hunc generum solidorum catalogum vlt-
 Tom. IV. Nou. Com. S rius

rius continuare, quoniam ex his progressio sequentium generum sponte perspicitur. Q. E. I.

COROLL. 1.

§. 60. Notari hic conuenit, nullum dari solidum, quod septem habeat acies, cum tamen primum genus tantum sex habeat acies; secundum genus habet octo, sequentia plures, atque in numeris acierum post senarium omnes numeri occurrunt, solo septenario excepto.

COROLL. 2.

§. 61. Ex primo genere patet, omne solidum tetragonon simul esse tetraedrum, et vicissim, quod genus, uti est simplicissimum, ita unicam speciem continet, quae est pyramis triangularis quatuor triangulis inclusa.

COROLL. 3.

§. 62. Secundum genus habens 16 angulos planos, et 5 solidos, horum quatuor ex tribus planis, vnus ex 4 planis erit formatus, similiterque quinque eius hedrarum quatuor erunt triangula, vna vero quadrilaterum, ex quo hoc genus unicam speciem, scilicet pyramidem super basi quadrilatera extractam, continet.

COROLL. 4.

§. 63. Tertium genus habens 18 angulos planos, 5 solidos, et 6 hedras includetur sex triangulis, quod vnico modo fieri potest, eritque hoc solidum pyramis trian-

triangularis geminata, seu erit ex duabus pyramidibus secundum bases aequales iunctis compositum.

COROLL. 5.

§. 64. Quartum genus pariter vnicam speciem continet tribus quadrilateris, et duobus triangulis inclusam, quae prisma triangulare vocatur. Sequentia genera plerumque plures species comprehendunt, sed iis enumerandis immorari non licet, propterea quod adhuc aliae proprietates solidorum huc spectantes nondum satis sunt euolutae.

SCHOLION.

§. 65. Haec sunt ergo quasi prima elementa Stereometriae, quae solidorum in genere spectatorum affectiones, ac proprietates continent, vnde deinceps singularum specierum proprietates sint deducendae. Propositiones scilicet hic traditae similes sunt earum, quae in Geometria plana de proprietatibus generalibus figurarum demonstrari solent, et quae ad has duas reducuntur, vt in omni figura rectilinea primum angulorum numerus aequalis sit numero laterum, tum vero vt summa omnium angulorum aequetur bis tot angulis rectis, quot sunt latera, demtis quatuor. In solidis autem numerus huiusmodi propositionum fundamentalium multo est maior, quod quidem ob maiorem rerum, quibus determinantur multitudinem, non est mirandum. Hoc autem merito maxime mirum videtur, quod cum non solum elementa Geometriae planae ad summum perspicuitatis fastigium sint promota, sed etiam Stereometria iam ab antiquissimis Geometris sit exulta,

S 2 tamen

tamen prima eius quasi fundamenta adhuc inter desiderata sint referenda. Quanquam enim nunc equidem ista fundamenta in lucem protraxisse arbitror, tamen fateri cogor, ea, quae primaria sunt habenda, idoneis, ac vere Geometricis demonstrationibus adhuc destitui, quae ideo potissimum hic proponenda duxi, ut alios, quibus hoc studium curae cordique est, excitem ad istas demonstrationes inuestigandas; quibus inuentis nullum plane est dubium, quia Stereometria ad parem perfectionis gradum, atque Geometria euehiatur.

DEMONSTRATIO
NONNVLARVM INSIGNIVM PROPRIETATVM,
QVIBVS SOLIDA HEDRIS PLANIS INCLVSA
SVNT PRAEDITA.

Auth. L. Eulero.

Quemadmodum figurae planae rectilineae, quarum indoles in Geometria inuestigari solet, certas quasdam habent proprietates generales ac notissimas, veluti quod numerus angulorum aequalis sit numero laterum, et quod summa angulorum aequalis sit bis tot angulis rectis, quot sunt latera demtis quatuor, ita nuper eiusmodi Stereometriae elementa adumbraui, in quibus similes proprietates solidorum hedris planis inclusorum continentur. Cum enim in Stereometria ea corpora, quae circum quaque hedris planis terminantur, primum locum aequè merito occupent, ac figurae rectilineae in Planimetria, seu Geometria proprie sic dicta, ita similia Stereometriae principia stabilire in mentem venit, ex quibus

bus formatio solidorum consequatur, eorumque praecipue proprietates demonstrari queant. In quo negotio maxime mirum visum est, quod cum Stereometria iam a tot seculis aequae ac Geometria sit exculta, eius tamen prima quasi elementa adhuc essent incognita, neque quisquam in tam longo temporis intervallo sit inventus, qui ea investigare, atque in ordinem redigere sit conatus. Hoc autem labore suscepto, cum plures insignes proprietates, quae omnibus corporibus hedris planis contentis sunt communes, detexissem, et quae omnino similes videbantur earum, quae inter elementa figurarum planarum rectilinearum referri solent, non sine summa admiratione deprehendi, praecipuas eamm tantopere esse reconditas, ut tum temporis omne studium in earum demonstratione eruenda frustra impendissem. Neque etiam ab amicis in his rebus alias versatissimis, quibuscum illas proprietates communicaveram quicquam luminis mihi est accensum, unde has demonstrationes desideratas haurire potuissem. Contemplatione enim plurium corporum generum eo sum deductus, ut proprietates, quas in illis deprehenderam, ad omnia plane corpora patere intellexissem, etiamsi id mihi rigida demonstratione ostendere non licuisset; sicque istas proprietates in eam veritatum classem referendas censebam, quas nobis quidem agnoscere, non vero demonstrare esset concessum.

Solidorum autem proprietates generales, quae demonstratione adhuc indigent, ab una pendent, ita ut si hanc demonstrare liceret, cuncta, quae exhibui, Stereometriae elementa aequae essent firmata, atque elementa Geometriae. Proprietas vero ista nondum demonstrata, quae

plures alias in se complectitur, hac continetur propositione :

In omni solido hedris planis incluso numerus angulorum solidorum una cum numero hedrarum binario superat numerum acierum.

Hinc aliam deriuavi non minus insignem proprietatem omnibus huius generis solidis communem, quae ita se habet :

In omni solido hedris planis incluso summa omnium angulorum planorum, quibus anguli solidi constituuntur, aequalis est quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi demtis octo.

Haecque propositio ita cum praecedente cohaeret, ut si altera demonstrari posset, simul alterius demonstratio haberetur; unde defectus elementorum Stereometriae, quae in medium protuli, supplebitur, si harum duarum propositionum alterutrius demonstratio reperietur.

Cum autem hoc argumentum denuo perpendissem, desideratas harum propositionum demonstrationes tandem sum adeptus, ad quas simili fere modo perueni, quo in Geometria propositio analogae de summa angulorum figurae cuiusuis rectilineae demonstrari solet. Quemadmodum enim in Geometria figura quaecunque rectilinea refecandis continuo angulis tandem ad triangulum reducitur, ita proposito quocunque solido hedris planis incluso, obseruavi, inde continuo angulos solidos refecari posse, ut tandem pyramis triangularis remaneat, quae cum sit figura inter solida simplicissima, ex cognitis eius proprietatibus hoc modo perspexi, vicissim ad proprietates omnium solidorum ascendi posse. In pyramide enim trigonali numerus angulorum solidorum est = 4, numerus

rus hedrarum = 4, et numerus acierum = 6, cuius duplum 12 dat numerum angulorum planorum, quorum summa aequalis est 8 angulis rectis.

Sumto quidem puncto quocunque intra solidum, si inde ad singulos angulos solidos lineae rectae ductae concipiantur, solidum hoc modo in totidem pyramides dividetur, quot sunt hedrae, quippe quae singulae bases pyramidum constituent, dum earum vertices in illo puncto vniuntur. Atque hae pyramides, nisi sint triangulares, porro facile in triangulares dissecabuntur. Verum hic modus solidum quodcunque in pyramides triangulares resolvendi ad praesens institutum parum confert; alterum ergo modum, quo quoduis solidum resecandis successive eius angulis solidis tandem ad pyramidem triangularem redigitur, hic exponam, vnde deinceps demonstratio memoratarum propositionum facile concinnabitur.

Similis autem haec operatio est eius, qua quaelibet figura rectilinea, dum eius anguli successive rescantur, tandem in triangulum redigi solet. Si enim habeatur figura plana quocunque laterum ABCDEFGA, si ab ea per rectam CE triangulum CDE rescetur, remanebit figura ABCEFGA, cuius numerus angulorum vnitatem erit minor. Si iam denuo recta CF triangulum CFE rescetur, figura remanebit ABCFGA; vnde si porro triangulum BCF, tumque triangulum BGF abscindatur, relinquetur tandem triangulum ABG.

Ex hac resolutione facile ambae palmariae figurarum planarum proprietates demonstrantur: Sit enim figurae ABCDEFG numerus laterum = L, et numerus angulorum = A; ac si ducenda recta CE inde
angulus

Tab. III.

Fig. 1.

angulus D refecetur, figurae residuae numerus angulorum erit $= A - 1$; numerus autem laterum, quia duo latera CD , et DE sunt sublata, eorum autem loco novum latus CE accessit, erit $= L - 1$. Hinc patet, si denuo vnus angulus refecetur, numerum angulorum fore $= A - 2$, numerumque laterum $= L - 2$; atque si iam hoc modo n anguli fuerint refecti, figurae residuae numerus angulorum erit $= A - n$, et numerus laterum $= L - n$. Sit iam haec figura residua triangulum, erit $A - n = 3$, et $L - n = 3$; vnde sequitur fore $L = A$, seu in quavis figura rectilinea numerum laterum aequalem esse numero angulorum.

Deinde sit R numerus angulorum rectorum, quibus omnes anguli figurae propositae $ABCDEF G$ simul sumti sunt aequales, atque refecto angulo D , seu triangulo CDE , ab angulis figurae auferantur tres anguli trianguli CDE , qui cum aequales sint duobus rectoris, summa angulorum figurae residuae $ABCEFG$ aequabitur $R - 2$ angulis rectoris, numero angulorum existente iam $= A - 1$. Si denuo angulus refecetur, vt numerus angulorum sit $= A - 2$, eorum summa erit $= R - 4$ rectoris; atque si iam n angulos absciderimus, vt figurae residuae numerus angulorum sit $= A - n$, eorum summa aequabitur $R - 2n$ angulis rectoris. Sit nunc ista figura residua triangulum, seu $A - n = 3$, quia summa angulorum est $= 2$ rectoris, erit $R - 2n = 2$; inde vero est $2A - 2n = 6$, a qua, si ista aequatio auferatur, erit $2A - R = 4$, seu $R = 2A - 4 = 2L - 4$: ficque constat, in quouis polygono summam omnium angulorum aequalem esse bis tot angulis rectoris, quot sunt latera demtis quatuor. Simili

Simili igitur modo, quo ex tali figurarum rectilinearum sectione duas praecipuas huiusmodi figurarum proprietates elicui, pro solidis inuestigationem instituiam, dum omnia solida hedris planis inclusa successiua angulorum solidorum resectione tandem ad pyramides triangulares sum reducturus; quorsum cum peruenero, numerus angulorum solidorum, numerus hedrarum, numerus acierum, et summa angulorum planorum omnium erunt cognita. Quae quo fiant planiora, totam rem sequentibus propositionibus complectar.

PROPOSITIO I. PROBLEMA

i. Proposito solido quocunque hedris planis incluso inde datum angulum solidum ita resecare, ut in solido residuo numerus angulorum solidorum unitate sit minor.

S O L V T I O.

Sit O angulus solidus obtruncandus, in quo coeant Fig. 2.
 acies AO, BO, CO, DO, EO, FO , ita, ut is formatus sit ab angulis planis $AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA$, atque puncta A, B, C, D, E, F repraesentent angulos solidos vicinos corporis, qui cum angulo O cohaerent rectis AO, BO, CO, DO, EO, FO . Cum iam eiusmodi pars a solido abscindi debeat, ut angulus solidus O inde penitus auferatur, reliqui vero omnes relinquantur, neque tamen nouus angulus solidus efformetur, prima sectio instituat per angulum quempiam vicinum B , secundum planum ABC , donec pertingat ad angulos A et C , tum ex O fiat sectio AOC ; quo pacto a solido

Tom. IV. Nou. Com. T lido

lido refecabitur pyramis triangularis $OABC$. Tum cuf-
tro ad AC applicato sectio dirigatur ad angulum F per
planum AFC , et ex O alia sectio FOC fiat, vt sepa-
retur pyramis triangularis $OACF$. Porro secetur soli-
dum secundum planum CDF , et ex O alia sectio ad
 DF vsque instituatür, vt hoc modo rescindatur pyra-
mis triangularis $OCDF$. Denique sectio secundum
 DEF facta refecabit pyramidem triangularem $ODEF$;
sicque angulus solidus O omnino erit obruncatus, et
quia reliqui anguli solidi manent, nullusque nouus per
sectiones factas est formatus, numerus angulorum solidor-
um in corpore residuo vnitate erit diminutus; Q. E. E.

C O R O L L. 1.

2. Si solidum ipsum fuerit pyramis triangularis, per huius-
modi sectionem tota remouebitur, vt nihil relinqua-
tur. Verum quia hanc sectionem ideo instituimus, vt
tandem ad pyramidem triangularem corpus reducamus, si
iam fuerit huiusmodi pyramis, sectione plane non erit
opus.

C O R O L L. 2.

3. Si angulus solidus O , a corpore refecandus, a
tribus tantum angulis planis formetur, seu si tres tan-
tum acies in eo concurrant, tum vnica sectione a cor-
pore abscindetur, hocque modo vnica pyramis triangula-
ris auferetur.

C O R O L L. 3.

4. Si angulus solidus O a quatuor angulis planis
formetur,

formetur, totidemque acies in eo concurrant, tum ad eum obtruncandum duae pyramides triangulares refecari debent. Hoc autem duplici modo fieri poterit; nam Fig. 3. duae pyramides refecandae erunt vel OABC et OACD, vel OABD et OBCD. Ac nisi puncta A, B, C, D fuerint in eodem plano, inde solidum residuum diuersam accipiet figuram.

COROLL. 4.

5. Si angulus solidus a quinque angulis planis formetur, rectaeque in eo coeuntes ad quinque alios angulos solidos porrigantur, tum angulus O refecabitur tribus pyramidibus triangularibus abscindendis, hocque quinque diuersis modis fieri poterit, qui diuersa quoque residua relinquant, nisi quinque anguli solidi vicini fuerint in eodem plano siti.

COROLL. 5.

6. Cum igitur ista vnus anguli solidi resectio in quolibet corporis propositi angulo suscipi queat, eaque nisi tres tantum anguli plani ad angulum solidum formandum concurrant, pluribus modis institui possit, patet, quodlibet corpus solidum, nisi iam sit pyramis triangularis, pluribus modis vno angulo solido mutilari posse.

COROLL. 6.

7. Quotcumque ergo corpus propositum habuerit angulos solidos, dum hoc modo eorum numerus continuo vnitate diminuitur, tandem cum quatuor tantum an-

T 2

guli

guli solidi superfuerint, id in pyramidem triangularem erit redactum, et quoniam singulae partes abscissae sunt pyramides triangulares, hoc modo totum corpus in pyramides triangulares diffecabitur.

S C H O L I O N.

8. Si in solido proposito numerus angulorum solidorum sit $= S$, postquam modo indicato vnus eorum fuerit resectus, in corpore residuo numerus angulorum solidorum erit $= S - 1$. In qua diminutione cum vis propositionis contineatur, ea pluribus casibus exceptione indigere videtur; si enim corpus propositum fuerit pyramis triangularis, resecto vno angulo simul tota pyramis aufertur, ita, vt nihil relinquatur. Sectione enim facta secundum planum $A B C$, quod basin pyramidis $O A B C$ constituit, simul tota pyramis rescinditur. Verum hoc casu res ita concipi potest, ac si basis $A B C$ relinquatur, quae etsi est figura plana nulla crassitie praedita, tamen instar solidi tribus tantum angulis constantis spectari potest, quod duas hedras, tresque acies habere censendum est; referet scilicet prisma triangulare altitudinis euanescentis, in quo hedrae laterales in nihilum abeant, et basis superior cum suis angulis in basin inferiorem incidat. Hoc autem modo ambae supra memoratae solidorum proprietates in saluo manent; quia enim numerus angulorum solidorum hoc casu fit $S = 3$, numerus hedrarum $H = 2$, et numerus acierum $A = 3$, patet, esse $S + H = A + 2$. Tum vero summa angulorum planorum in vtraque hedra contentorum aequatur

tur 4 angulis rectis, qui numerus est $= 4S - 8$. Idem euenit in omnibus pyramidibus, si angulus verticalis O inde resecatur, vbi tota pyramis simul tollitur, tunc autem sola basis relinqui concipienda est, quae si sit polygonum n laterum, spectari poterit instar solidi, in quo numerus angulorum solidorum sit $S = n$, numerus hedrarum $H = 2$, et numerus acierum $A = n$, ita vt denuo sit $S + H = A + 2$. Deinde cum vtraque hedra sit polygonum n laterum, omnes anguli in ambabus contenti aequabuntur $4n - 8 = 4S - 8$ angulis rectis, vti alterum Theorema postulat. Etsi autem hi casus veritati non aduersantur, tamen in praesenti negotio non opus est ad eos attendere; cum enim propositum sit omnia solida ad pyramides triangulares reuocare, si solidum iam fuerit istiusmodi pyramis, resectione cuiuspiam anguli penitus erit superfedendum; sin autem sit pyramis basin habens plurium laterum, tum non angulum verticalem, sed quempiam angulorum ad basin sitorum inde abscindi conueniet, qui tribus tantum angulis planis formantur; hoc modo semper post resectionem pyramis relinquetur, cuius angulorum solidorum numerus vno erit minor, quam ante. Atque generatim quodcunque proponatur solidum, semper conueniet resectionem incipi ab angulo solido, qui quam paucissimis angulis planis sit formatus, vt semper quaedam solidi portio sit remansura, donec ad pyramidem triangularem perueniatur. Interim tamen vis sequentium demonstrationum ab hac limitatione non pendet, quippe quam tantum cum in finem adieci, vt incommodum apparens non verum euitetur.

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

9. Si a corpore proposito angulus quispiam solidus modo ante exposito resecetur, sicque numerus angulorum solidorum unitate diminuatur, determinare in corpore relicto tam numerum hedrarum, quam numerum acierum, itemque summam omnium angulorum planorum.

S O L V T I O.

Pro solido proposito sit numerus angulorum solidorum $= S$, numerus hedrarum $= H$, numerus acierum $= A$, et omnium angulorum planorum summa aequetur $= R$ angulis rectis. Sit iam O angulus solidus resecandus, ita, ut eo resecto in solido reliquo numerus angulorum solidorum futurus sit $= S - 1$; atque ut reliquas solidi remanentis affectiones cognoscamus, contemplemur primo summam angulorum planorum, quam in solido integro ponimus $= R$ angulis rectis. Primo autem resectione anguli O ex computo angulorum planorum egrediuntur omnes anguli in triangulis $A O B$, $B O C$, $C O D$, $D O E$, $E O F$, et $F O A$ contenti, quoniam haec triangula a superficie corporis abscinduntur. Sit n numerus horum triangulorum, seu angulorum vicinorum A , B , C , D , etc; atque summa angulorum ablatorum erit $= 2n$ angulis rectis. At abscissis his triangulis eorum loco superficies corporis iam terminabitur triangulis $A B C$, $A C F$, $C F D$, et $D F E$, quorum numerus illo est binario minor, ideoque $= n - 2$. Cum nunc horum triangulorum anguli superaccedant, eorumque summa sit $= 2n - 4$ angulis rectis, manifestum est, per resectionem anguli

anguli solidi O summam angulorum planorum R. primo
 imminui $2n$ angulis rectis, tum vero iterum augeri
 $2n - 4$ angulis rectis, ex quo diminutio erit 4 ang:
 rect. Hinc in solido residuo summa omnium angulorum
 planorum aequabitur $R - 4$ rectis, sicque quouis angulo so-
 lido resecto summa omnium angulorum planorum dimi-
 nuitur quatuor angulis rectis.

Si omnes hedrae in O concurrentes fuerint triangu-
 lae, abscissione anguli O cunctae istae hedrae resecantur,
 quarum numerus si dicatur n ; hinc numerus hedrarum
 H diminuetur numero n ; at loco harum hedrarum no-
 vae ex sectione ortae hedrae triangulares in superficie
 corporis apparebunt, scilicet ABC, ACF, CFD, DFE,
 quarum numerus est $= n - 2$; hinc numerus hedrarum,
 qui ante erat H, nunc erit $H - n + (n - 2) = H - 2$.
 Verum si eueniat, vt horum triangulorum duo plurae
 in eodem plano sint sita, veluti si triangula ABC, et ACF
 sint in eodem plano constituta, ea iam non duas, sed
 vnicam hedram quadrilateram exhibere censentur, ita vt
 numerus hedrarum futurus sit $= H - 3$; ac si huius modi
 duarum hedrarum in idem planum incidentia μ vicibus
 occurrat, numerus hedrarum erit $= H - 2 - \mu$. At
 si hedrarum in O concurrentium non omnes fuerint tri-
 angulares, sed vna veluti A O F Q P pluribus lateribus
 constet, manifestum est, resectione trianguli A O F non
 totam hedram aufertur, sed partem reliquam A F Q P
 etiam nunc in censum hedrarum ingredi; ita numerus
 hedrarum erit $= H - 2 - \mu + 1$; atque si inter hedras
 in O coeuntes reperiantur ν hedrae non triangulares, nu-
 merus hedrarum reliquarum erit $= H - 2 - \mu + \nu$.

Pro

Pro numero acierum, quae post resectionem anguli O supererunt, inuestigando, ponamus primo vt ante, omnes hedras in O conuenientes esse triangula; ac primo quidem ex acierum numero recedent acies OA , OB , OC , OD , etc. quarum numerus est $= n$, earum vero loco de nouo accedent acies AC , CF , FD , quarum numerus est $= n - 3$, sicque acierum numerus erit $= A - n + (n - 3) = A - 3$, si quidem nouae hedrae ABC , ACF , etc. fuerint inuicem inclinatae: At si duae earum ABC , et ACF in eodem plano sint sitae, vt vnicam hedram constituere censeantur, euanescet acies AC , eritque acierum numerus $A - 3 - 1$: ac si huiusmodi duarum hedrarum in idem planum incidentia μ vicibus occurrat, vt ante posuimus, numerus acierum erit $= A - 3 - \mu$. Deinde si quaequam hedrarum angulum O formantium non sit trigonalis, videlicet hedra $AOFP$, tum abscissione trianguli AOF noua acies existit AF , quae ante non aderat, vnde numerus acierum hoc casu vnitatem augebitur. Ac si, vt ante posuimus, inter hedras in O coeuntes ν hedrae non triangulares reperiantur, numerus acierum in corpore proposito post resectionem anguli O erit $= A - 3 - \mu + \nu$, cum ante fuisset $= A$. Q. E. I.

COROLL. I.

10. Quod si ergo solidum hedris planis inclusum vno angulo solido mutiletur, vt angulorum solidorum numerus nunc sit $= S - 1$, cum ante esset $= S$, summa omnium angulorum planorum diminuitur quatuor angulis rectis, seu cum ante fuisset $= R$ angulis rectis, nunc erit $= R - 4$ angulis rectis. COROLL.

COROLL. 2.

11. Cum numerus hedrarum, qui ante erat $=H$, nunc post detruncationem anguli O sit $=H - 2 - \mu + \nu$, patet, fieri posse, vt numerus hedrarum maior euadat, id quod eueniet, si sit $\nu > 2 + \mu$, vbi μ et ν eos obtinent valores, qui in solutione sunt assignati.

COROLL. 3.

12. Idem patet euenire posse in numero acierum, qui cum ante mutilationem anguli O esset $=A$, nunc re-
 pertus est $=A - 3 - \mu + \nu$; qui numerus ~~illo~~ maior est, si $\nu > 3 + \mu$; hoc ergo casu multo magis numerus hedrarum augetur.

COROLL. 4.

13. Cum in expressionibus $H - 2 - \mu + \nu$, et $A - 3 - \mu + \nu$ litterae μ et ν idem significant, patet, decrementum numeri acierum A vnitate maius esse, quam decrementum numeri hedrarum. Ita si numerus hedrarum post obruncationem vnus anguli solidi fiat $=H - \alpha$, numerus acierum fiet $=A - \alpha - 1$.

COROLL. 5.

14. Hinc ergo differentia inter numerum hedrarum, et numerum acierum, quae initio erat $=A - H$, nunc post remotionem vnus anguli solidi erit $=A - H - 1$. Haec scilicet differentia semper vnitate fit minor, vtcunque corptis ratione litterarum μ et ν fuerit comparatum.

SCHOLIION.

15. Ex his iam facillime Theorematum supra memoratorum demonstrationes concinnare licebit, quae nulla re inferiores sunt demonstrationibus in Geometria
 Tom. IV. Nou. Com. V vtitatis

visitatis, nisi quod hic ob solidorum indolem plus imaginationi sit tribuendum, siquidem solida super plano depingantur: at si huiusmodi figurae corporeae formarentur, omnia aequae clara essent futura. Ceterum quae in solutione istius problematis assumi, per se sunt manifesta; si enim habeatur polygonum $ABCDEF$, n lateribus terminatum, leuiter attendenti mox patebit, si ea figura diagonalibus ducendis in triangula dissecetur, numerum horum triangulorum fore $= n - 2$, numerumque diagonalium hoc modo ductarum $= n - 3$: quadrilaterum enim vna diagonalibus in dua triangula, pentagonum duabus diagonalibus in tria triangula, et hexagonum tribus diagonalibus in quatuor triangula dispertitur, et ita porro.

PROPOSITIO III. THEOREMA.

16. *In omni solido bedris planis incluso summa omnium angulorum planorum, qui in eius bedris existunt, aequalis est quater tot angulis reetis, quot sunt anguli solidi, demtis octo; seu si numerus angulorum solidorum fit $= S$, summa omnium angulorum planorum aequatur $4S - 8$ angulis reetis.*

DEMONSTRATIO.

In solido quocunque sit numerus angulorum solidorum $= S$, summa autem omnium angulorum planorum aequetur R angulis reetis, ita vt demonstrari oporteat, esse $R = 4S - 8$. Iam modo ante indicato abscindatur a solido vnus angulus solidus, vt numerus angulorum solidorum, quos habebit, fit $= S - 1$, et summa angulorum

PROPRIETATVM SOLIDORVM 155

lorum planorum erit $\equiv R - 4$ angulis rectis. Si demum angulus solidus refecetur, vt reliquorum numerus fit $S - 2$, angulorum planorum summa erit $\equiv R - 8$, atque ita pergendo patebit, pro quouis angulorum solidorum numero summam omnium angulorum planorum fore, vt tabella sequens indicat.

| Numerus angulorum solidorum | Summa omnium angulorum planorum |
|-----------------------------|---------------------------------|
| S | R angulis rectis |
| $S - 1$ | $R - 4$ |
| $S - 2$ | $R - 8$ |
| $S - 3$ | $R - 12$ |
| \vdots | \vdots |
| \vdots | \vdots |
| $S - n$ | $R - 4n$ |

Cum igitur hac continua mutilatione peruenerimus ad $S - n$ angulos solidos, summa angulorum planorum erit $\equiv R - 4n$ angulis rectis. At hoc modo tandem peruenietur ad 4 angulos solidos, quo casu corpus abibit in pyramidem triangularem, in qua constat, summam omnium angulorum planorum esse aequalem 8 angulis rectis: hoc est, si fit $S - n = 4$, erit $R - 4n = 8$, seu $R = 4n + 8$. At inde est $n = S - 4$, quo valore hic substituto fiet $R = 4S - 16 + 8 = 4S - 8$, ita vt in quouis solido summa angulorum planorum aequetur quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi demtis octo. Q. E. D.

V s SCHOLION

SCHOLIUM.

17. Quamquam alterum Theorema ita ab hoc pendet, ut cum hoc fuerit demonstratum, simul illius veritas sit euicta, tamen ex problemate praemisso etiam alterius Theorematis demonstratio confici potest sequenti modo.

PROPOSITIO IV. THEOREMA.

18. In omni solido hedris planis incluso numerus hedrarum una cum numero angulorum solidorum, binario excedit numerum acierum.

DEMONSTRATIO.

Sit in solido quocunque proposito :

numerus angulorum solidorum = S

numerus hedrarum - - - = H

numerus acierum - - - = A

atque ante vidimus, si resectione vnius anguli solidi numerus S vnitatem minuat, ut sit $S - 1$, tum differentiam inter numerum acierum et numerum hedrarum futuram esse $= A - H - 1$. Continuata ergo hac mutilatione,

si numerus angulorum solidorum sit,

| | |
|-------|-----------|
| S | A - H |
| S - 1 | A - H - 1 |
| S - 2 | A - H - 2 |
| S - 3 | A - H - 3 |
| ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ |
| S - n | A - H - n |

Excessus numeri acierum super numerum hedrarum erit

Quando

Quando ergo hoc modo ad pyramidem triangularem deuenietur, in qua numerus angulorum solidorum est $\equiv 4$, numerus hedrarum $\equiv 4$, et numerus acierum $\equiv 6$, ita vt excessus numeri acierum supra numerum hedrarum futurus sit $\equiv 2$; euidens est, si fiat $S - n \equiv 4$, fore $A - H - n \equiv 2$. Inde ergo est $n \equiv S - 4$, hinc vero $n = A - H - 2$; sicque habetur $S - 4 = A - H - 2$, seu $H + S \equiv A + 2$; vnde constat, in omni solido hedris planis incluso numerum hedrarum H vna cum numero angulorum solidorum S binario superare numerum acierum A .
 Q. E. D.

SCHOLIION.

19. Demonstratis ergo his Theorematis, elementa Stereometriae, quae ante aliquod tempus explicauimus, firmissimis demonstrationibus sunt munita, ita vt elementis Geometriae nihil plane concedant. Verum prima tantum Stereometriae elementa sic in medium attulisse fateor, quibus haec scientia vterius excolenda superstrui debeat: quippe quae plurimas praeclaras corporum affectiones in se complectitur, quas adhuc omnino ignoramus. Cum autem cuiusque solidi propositi soliditas quaeri solet, coronidis loco modum tradam, soliditatem cuiusuis pyramidis triangularis inueniendi; cum enim puncto quocunque intra solidum hedris planis inclusum assumpto, solidum in tot pyramides resoluatur, quot habet hedras, dum quaelibet hedra basin pyramidis constituit, quatenus autem pyramis, cuius basis non est triangularis, facile in pyramides triangulares resoluatur; sufficit, pyramidis triangularis soliditatem inuenisse. Quae cum obtineatur, si basis per tertiam partem

partem altitudinis multiplicetur, ostendam, quem ad modum, si latera pyramidis fuerint data, ex iis soliditas definiri queat; perinde ac area trianguli ex datis tribus lateribus determinari solet.

PROPOSITIO V. PROBLEMA.

20. *Datis sex lateribus seu aciebus pyramidis triangularis, eius soliditatem inuenire.*

SOLVITIO.

Fig. 5. Sit $ABCD$ pyramidis triangularis, cuius basis triangulum ABC , et vertex D ; ac ponantur eius latera: $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$. Iam in hedris ADB , et ADC ex D ad bases oppositas demittantur perpendiculara DP , et DQ , et in basi ABC ex punctis P , et Q educantur ad latera AB , et AC normales PO , et QO se mutuo secantes in O , erit recta DO perpendicularis ex vertice D in basim ABC , unde soliditas pyramidis erit $= \frac{1}{3} DO \times$ aream ABC ; at ducta AO , erit $DO = \sqrt{(AD^2 - AO^2)} = \sqrt{(AD^2 - AP^2 - PO^2)}$. Iam ex elementis Geometriae constat, esse, $AP = \frac{aa + dd - ee}{2a}$. et $AQ = \frac{bb + dd - ff}{2b}$. Hinc producta QO in S , si angulus BAC vocetur $= \alpha$, erit $QS = AQ \operatorname{tang.} \alpha$, et $AS = \frac{AQ}{\operatorname{cos.} \alpha}$, hinc $PS = \frac{AQ}{\operatorname{cos.} \alpha} - AP$. At cum sit $QS : AQ : AS = PS : PO : OS$, erit $PO = \frac{AQ \cdot PS}{QS} = \frac{PS}{\operatorname{tang.} \alpha} = \frac{AQ}{\operatorname{sin.} \alpha} - \frac{AP}{\operatorname{tang.} \alpha}$, seu $PO = \frac{AQ - AP \operatorname{cos.} \alpha}{\operatorname{sin.} \alpha}$; tum vero $OS = \frac{AS \cdot PS}{QS} = \frac{PS}{\operatorname{sin.} \alpha} = \frac{AQ}{\operatorname{sin.} \alpha \operatorname{cos.} \alpha} - \frac{AP}{\operatorname{sin.} \alpha}$, ideoque $QO = QS - OS = AQ \operatorname{tang.} \alpha - \frac{AQ}{\operatorname{sin.} \alpha \operatorname{cos.} \alpha} + \frac{AP}{\operatorname{sin.} \alpha}$

$$-\frac{AQ}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{AP}{\sin \alpha} = \frac{AP - AQ \cos \alpha}{\sin \alpha}. \text{ Hinc erit } AO^2 = AP^2 + PO^2 = \frac{AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}; \text{ ideoque } DO^2 = \frac{AD^2 \sin^2 \alpha - AP^2 - AQ^2 + 2AP \cdot AQ \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Verum area trianguli ABC est $= \frac{1}{2} ab \sin \alpha$, ex quo erit soliditas pyramidis $= \frac{1}{3} abV(AD^2 \sin^2 \alpha - AP^2 - AQ^2 + 2AP \cdot AQ \cos \alpha) = \frac{1}{3} V[aabbdd \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} bb(aa + dd - ee)^2 - \frac{1}{2} aa(bb + dd - ff)^2 + \frac{1}{2} ab(aa + dd - ee)(bb + dd - ff) \cos \alpha]$. Deinde ex triangulo ABC est $\cos \alpha = \frac{aa + bb - cc}{2ab}$, ideoque $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4a^2b^2} (aa + bb - cc)^2$, quibus valoribus substitutis prodibit soliditas pyramidis:

$$\frac{1}{12} V(aabbdd - dd(aa + bb - cc)^2 - bb(aa + dd - ee)^2 - aa(bb + dd - ff)^2 + (aa + bb - cc)(aa + dd - ee)(bb + dd - ff))$$

quae terminis euolutis in sequentem abit formam:

$$\frac{1}{12} V \left(\begin{array}{l} aaccdd + aabbee + aabfff + aaddff + bbccdd + bbddde \\ aaccff + aeeff + bbccce + bbeeff + ccddde + ccddff \\ - aabbc - aadde - bddff - cceff \\ - a^2ff - aaf^2 - b^2ee - bbe^2 - c^2dd - ccdd^2 \end{array} \right)$$

quae adhuc commodius ita exhiberi posse videtur:

$$\frac{1}{12} V \left\{ \begin{array}{l} + aaff(bb + cc + dd + ee) - aaff(aa + ff) - aabbc \\ + bbee(aa + cc + dd + ff) - bbee(bb + ee) - aadde \\ + cedd(aa + bb + ee + ff) - cedd(cc + dd) - bddff \\ - cceff \end{array} \right\}$$

Sicque ex datis sex lateribus a, b, c, d, e, f pyramidis triangularis eius soliditas definitur. Q. E. I.

SCHOLIUM I.

21. Quo ratio, qua in hac expressione latera a, b, c, d, e, f inter se combinantur, clarius perspiciatur, notandum est, ex iis quatuor formari triangula, scilicet

- ΔABC constat lateribus a, b, c
- ΔABD - - - - a, d, e
- ΔACD - - - - b, d, f

ΔBCD

ΔBCD c, e, f

vnde patet, latus a cum singulis reliquorum ad triangula constituenda concurrere, praeter quam cum latere f , quamob rem haec latera a et f disiuncta appellabo, quia inter se non iunguntur; simili modo latera b et e erunt disiuncta, itemque latera c et d .

Occurrunt ergo post signum radicale primo termini ex lateribus disiunctis formati $aaff$, $bbee$, $ccdd$, qui sunt multiplicati per summam quadratorum reliquorum, deinde iidem termini negativie summi multiplicantur per summam suorum quadratorum, hincque denique subtrahuntur producta ex quadratis ternorum laterum, cuiusque trianguli.

SCHOLIION 2.

22. Formula quoque pro soliditate pyramidis inveniri potest aliquanto simplicior, si tria tantum latera in vno angulo solido coeuntia dantur, vna. cum angulis planis, quos ibi constituunt.

Sint enim tria latera in angulo solido A coeuntia

$$AB = a, \quad AC = b, \quad AD = d$$

deinde anguli plani;

$$BAC = p; \quad BAD = q; \quad CAD = r.$$

Atque ex his soliditas pyramidis erit

$$\frac{1}{6}abd\sqrt{(1 - \cos.p^2 - \cos.q^2 - \cos.r^2 + 2\cos.p.\cos.q.\cos.r)}$$

quae reducitur ad formam sequentem:

$$\frac{1}{6}abd\sqrt{\sin.\frac{p+q+r}{2}\sin.\frac{p+q-r}{2}\sin.\frac{p+r-q}{2}\sin.\frac{q+r-p}{2}}$$

vnde patet, vt area prodeat realis, trium angulorum planorum p, q ; et r , in angulo quouis solido coeuntium binos simul sumptos tertio maiores esse debet.

DE MO-

DE MOTV
CORPORVM COELESTIVM
A VIRIBVS QVIBVSCVNQVE PERTVRBATO.

A V C T. L. E V L E R O.

I.

Motus corporum coelestium censetur regularis, nullisque inaequalitatibus perturbatus, si ea ita revolvuntur in ellipsi aliaue sectione conica, ut circa alterutrum focum areas temporibus proportionales describant. Notum autem est, huiusmodi motum regularem oriri, si corpora ad istum focum continuo sollicitentur viribus, quae sint quadratis distantiarum reciproce proportionales. Ex quo intelligitur, si vires sollicitantes ab hac lege recedant, motum proditurum esse irregularem, ita ut vel orbita non amplius sit ellipsis, vel areae circa focum descriptae rationem temporum non amplius sequantur. In motu ergo planetarum primariorum perturbatio oriri debet, si praeter vim quadratis distantiarum reciproce proportionalem, qua ad solem vrgentur, aliis quoque viribus quibuscunque sollicitantur; in planetis autem secundariis seu satellitibus motus perturbatio vestimanda est ex viribus, quibus praeter eam vim quadratis distantiarum reciproce proportionalem, qua ad suos planetas principales pelli concipiuntur, insuper sollicitantur.

2. Si planeta motu regulari fertur, seu per ellipsis perimetrum ita progreditur, ut circa alterutrum eius focum areas temporibus proportionales conficiat, eius motus sequenti modo ad certas leges reuocatur. Primo scilicet tam positio, quam longitudo axis transuersi ellipsis defini debet; tum vero species eius, quae siue axe coniugato, siue parametro, siue excentricitate determinatur; tertio ad quodvis tempus propositum anomaliam planetae mediam assignare oportet, quae inuenitur, si a longitudine media longitudo aphelii seu summae absidis subtrahatur. Sicque, si tam tempus periodicum fuerit cognitum, quam momentum, quo planeta semel in abside summa fuerit versatus, inde ad quoduis tempus propositum anomalia media colligi poterit. Ex anomalia autem media porro et specie ellipsis per problema *Keplerianum* definitur anomalia vera, atque distantia planetae a foco; unde si ad anomaliam veram longitudo absidis summae addatur, orietur tandem longitudo vera; quae eadem quoque obtinetur, si excessus anomaliae verae supra anomaliam mediam ad longitudinem mediam addatur, siue defectus ab ea subtrahatur; qui excessus, vel defectus ab Astronomis Prosthaphaereticis appellari solet.

3. In motu regulari tam positio lineae absidum seu axis transuersi, quam eius quantitas vna cum excentricitate perpetuo manent eadem, ita ut, si haec res semel fuerint cognitae, eae nulli deinceps immutationi sint obnoxiae. Harum ergo rerum constantia primum constituit discrimen inter motum regularem, et irregularem; ita ut, si vel positio axis transuersi, vel eius quantitas,

vel

vel excentricitas mutabilis existeret, motus non amplius esset regularis, sed irregularis. Atque hinc motus quicumque irregularis ita saltem ad speciem motus regularis reuocari poterit, vt istae res tanquam variables considerentur. Vtuncque enim motus fuerit perturbatus, quacuis eius portio minima ad motum regularem referri potest, dummodo situs, quantitas, et species ellipsis definiatur, ad quam spatii elementum a corpore descriptum pertineat.

4. Effectus ergo virium motum alias regularem perturbantium in hoc consistet, vt vel positionem lineae absidum immutet, vel axem ellipsis transuersum, vel eius excentricitatem. Atque si constet, quantam mutationem vires quaecunque perturbantes his tribus rebus pro quouis tempore induxerint, locus planetae inde aequae facili definietur, atque in motu regulari. Quocirca iste modus effectum virium perturbantium determinandi aptissimus atque ad vsum Astronomiae accommodatissimus videtur. Eo autem Astronomi iam reipsa vtuntur, dum in planetis principalibus loca apheliorum mobilia statuunt, et in luna non solum apogaeo, sed etiam excentricitati mutationem continuam tribuere solent. Quo igitur facilius effectum virium quarumcunque perturbantium hoc modo per calculum definire liceat, motum primo regularem, qui oritur a viribus reciproce quadrato distantiae proportionalibus ad calculum reuocabo, quo facto problemata ad motus perturbationem spectantia commodius tractari poterunt.

P R O B L E M A. I.

5. Determinare motum corporis, quod ad punctum ^{T A B. III.}
 X ₂ fixum Fig. 6.

fixum C perpetuo sollicitatur viribus distantiae eius ab hoc puncto quadratis reciproce proportionalibus.

S O L V T I O.

In plano orbitae, quam corpus circa punctum fixum C describit, ducatur recta Ca ad punctum coeli fixum, a quo elongatio seu longitudo corporis quouis tempore computetur. Elapso tempore t pervenerit corpus in M , ac ponatur eius a puncto C distantia $CM = x$, et longitudo seu angulus $A.C.M = \Phi$. Vis autem acceleratrix, qua corpus hic ad C vrgetur, fit $= \frac{C}{x^2}$; ubi C denotat quantitatem constantem, qua intensitas absoluta huius vis determinatur. His positis ex legibus motus colligitur, motum huius corporis sequentibus binis aequationibus differentio-differentialibus exprimi, sumto elemento temporis dt constante:

$$\text{I. } 2 dx d\Phi + x dd\Phi = 0; \text{ II. } ddx - x d\Phi^2 + \frac{1}{2} dt^2 \cdot \frac{C}{x^3} = 0.$$

Minius autem convenit in his aequationibus elemento temporis dt vti; atque ad homogeneitatem servandam praestabit loco temporis absoluti motum solis medium introducere, quippe qui aptissimam temporis mensuram supeditat. Sit igitur distantia solis media a terra $= a$; eius longitudo media tempori t respondens $= \zeta$; et pro distantia x vis solis in terram $= \frac{A}{x^2}$, quae si pro $\frac{C}{x^2}$ scribatur, ponaturque $x = a$, et $\Phi = \zeta$, ut formulae traditae motum solis medium referant, ob $dx = 0$, et $dd\Phi = 0$, erit $-a d\zeta^2 + \frac{1}{2} dt^2 \cdot \frac{A}{a^3} = 0$, ideoque $\frac{1}{2} dt^2 = \frac{a^3}{A} d\zeta^2$; qui valor si substituatur, aequatio secunda abit in:

$$ddx$$

$$d d \bar{x} - x d \Phi^2 + \frac{C a^2}{\Lambda x x} d \zeta^2 = 0.$$

At prima aequatio integrata, ob $d \zeta$ iam constans, praebet $x x d \Phi = E d \zeta$, vnde fit $d \Phi = \frac{E d \zeta}{x x}$, et $x d \Phi^2 = \frac{E E d \zeta^2}{x^2}$; substituatur hic valor in illa aequatione, vt habeatur:

$$d d x - \frac{E E d \zeta^2}{x^2} + \frac{C a^2 d \zeta^2}{\Lambda x x} = 0,$$

quae multiplicata per $2 d x$, et integrata dabit

$$d x^2 + \frac{E E d \zeta^2}{x x} - \frac{2 C a^2 d \zeta^2}{\Lambda x} + F d \zeta^2 = 0,$$

ex qua elicitur:

$$d \zeta = \frac{x d x}{\sqrt{(-E E + \frac{2 C a^2 x}{\Lambda} - F x x)}};$$

$$\text{et } d \Phi = \frac{E d x}{x \sqrt{(-E E + \frac{2 C a^2 x}{\Lambda} - F x x)}};$$

vbi E , et F sunt quantitates constans ex natura orbitae

definiendae. Ponatur $x = \frac{b}{z}$, vt fit $d x = \frac{-b d z}{z z}$,

et $\frac{d x}{x} = \frac{-d z}{z}$, eritque:

$$d \zeta = \frac{-b b d z}{z z \sqrt{(-E E z z + \frac{2 C a^2 b z}{\Lambda} - F b b)}}, \text{ et}$$

$$d \Phi = \frac{-E d z}{\sqrt{(-E E z z + \frac{2 C a^2 b z}{\Lambda} - F b b)}};$$

quae postrema aequatio a quadratura circuli aperte pendet, ad eamque integrandam notandum est, z maximum et minimum valorem obtinere posse, quorum utroque formula irrationalis in nihilum abeat. Sit igitur ad constans E et F definiendas, $1 + k$ valor ipsius z maximus, et $1 - k$ valor minimus, vt 1 fit eius valor medius; atque

$(1+k-z)(z-1+k) = -(1-kk) + 2z - zz$
 debet esse factor quantitatis post signum radicale constitutae, altero factore existente EE , vnde oritur

$$\frac{Ca^2b}{A} = EE, \text{ et } Fbb = EE(1-kk),$$

fietque $\sqrt{-EEzz + \frac{2Ca^2bz}{A} - Fbb} = E\sqrt{(1+k-z)(z-1+k)} = E\sqrt{kk - (z-1)^2}$; Ergo, ob $E = \sqrt{\frac{Ca^2b}{A}}$, erit

$$d\zeta = \frac{-bbdz}{zz\sqrt{\frac{Ca^2b}{A}[kk - (z-1)^2]}} = \frac{-dz\sqrt{\frac{Ab^2}{Ca^2}}}{zz\sqrt{kk - (z-1)^2}};$$

$$d\Phi = \frac{ds}{\sqrt{kk - (z-1)^2}}.$$

Quia $z = 1+k$ est maximus, et $z = 1-k$ minimus valor, quilibet medius ita exprimetur commode $z = 1+k \cos. s$, eritque $\sqrt{kk - (z-1)^2} = k \sin. s$, et $dz = -k ds \sin. s$: vnde fit

$$d\zeta = \frac{ds\sqrt{\frac{Ab^2}{Ca^2}}}{(1+k \cos. s)^2}, \text{ et } d\Phi = ds,$$

atque $x = \frac{b}{1+k \cos. s}$; hincque $\Phi = D + s$.

Quia angulus $ACM = \Phi$, capiatur angulus $ACP =$ quantitati constanti D , eritque angulus $PCM = s$; qui qualis sit respectu orbitae ex distantia $x = \frac{b}{1+k \cos. s}$ colligi poterit. Nam si fit $s = 0$, quo casu CM abit in CP , erit $CP = \frac{b}{1+k}$; erit ergo P id orbitae punctum, vbi corpus minime a puncto C distat, ideoque est absis imia, seu perihelium, si C fit sol. Cum igitur distantia minima fit $= \frac{b}{1+k}$, et prodeat, si $s = 0$; distantia maxima prodibit ponendo $s = 180^\circ$, fitque $= \frac{b}{1-k}$; sicque distantiae minimae e diametro erit opposita: vnde

Vnde summa harum ambarum distantiarum maximae et minimae, $= \frac{2b}{1-kk}$ dabit axem transuersum orbitae, et cum, posito $s = 90^\circ$, distantia fiat femilateri recto aequalis, erit femilatus rectum $= b$; hincque axis coniugatus $= \frac{2b}{1-kk}$. Porro axis transuersus cum sit $= \frac{2b}{1-kk}$, et distantia focorum, (quae est excessus distantiae maximae supra minimam) $= \frac{2bk}{1-kk}$, haec per axem transuersum diuisa dabit excentricitatem $= k$. Tum vero manifestum est, angulum $PCM = s$ referre anomaliam veram ab abside ima computatam, cuius longitudo seu angulus ACP si ponatur $= \omega$; erit longitudo corporis $ACM = \Phi = \omega + s$. Vnde haec nascitur problematis solutio.

Corpus mouebitur in sectione conica, cuius si fuerit 1°. femi-latus rectum $= b$; 2°. excentricitas $= k$; 3°. locus absidis imae seu angulus $ACP = \omega$; ad quodvis tempus locus corporis in orbita ita assignabitur. Pro tempore proposito, cui respondeat longitudo solis $= \zeta$, quaeratur corporis anomalia vera $= s$, ex hac aequatione: $d\zeta = \frac{ds}{(1+k\cos s)^2} \sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$, qua inuenta erit longitudo corporis seu angulus $ACM = \Phi = \omega + s$, et distantia eius $CM = x = \frac{b}{1+k\cos s}$. Q. E. I.

COROLL. I.

6. Cum ergo sit $d\zeta \sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} = \frac{ds}{(1+k\cos s)^2}$, totum negotium redit ad integrationem formulae huius differentialis, quae euoluitur in hanc formam:

$$d\zeta \sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}}$$

$d\zeta \sqrt{\frac{c a^2}{\Lambda b^2}} = ds(1 - 2k \cos s + 3k^2 \cos^2 s - 4k^3 \cos^3 s + 5k^4 \cos^4 s - \text{etc.})$,
 qui termini, nisi excentricitas k sit valde magna, tanto-
 pere convergunt, ut sufficiat aliquot ab initio assumisse.
 Verum ad integrationem absolvendam conveniet, potestates
 cosinus anguli s in cosinus angulorum multiplo-
 rum convertere, secundum has formulas:

$$\cos s = \cos s$$

$$\cos s^2 = \frac{1}{2} \cos s + \frac{1}{2} \cos 3s$$

$$\cos s^3 = \frac{3}{4} \cos s + \frac{3}{4} \cos 3s + \frac{1}{4} \cos 5s$$

$$\cos s^4 = \frac{3}{8} \cos s + \frac{3}{4} \cos 3s + \frac{1}{8} \cos 5s \text{ etc.}$$

$$\cos s^5 = \frac{15}{16} \cos s + \frac{5}{8} \cos 3s + \frac{5}{16} \cos 5s \text{ etc.}$$

etc.

$$\cos s^6 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cos 2s$$

$$\cos s^7 = \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \cos 2s + \frac{1}{8} \cos 4s$$

$$\cos s^8 = \frac{7}{16} + \frac{15}{16} \cos 2s + \frac{3}{8} \cos 4s + \frac{1}{16} \cos 6s$$

$$\cos s^9 = \frac{63}{256} + \frac{9}{32} \cos 2s + \frac{9}{64} \cos 4s + \frac{1}{32} \cos 6s \text{ etc.}$$

$$\cos s^{10} = \frac{63}{512} + \frac{15}{128} \cos 2s + \frac{15}{256} \cos 4s + \frac{1}{128} \cos 6s \text{ etc.}$$

etc.

Erit ergo:

$$\begin{aligned} d\zeta \frac{c a^2}{\Lambda b^2} &= ds(1 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{8} k^4 + \frac{5}{16} k^6 + \frac{35}{256} k^8 + \text{etc.}) \\ &- 2 ds \cos s (k + \frac{1}{2} k^3 + \frac{3}{8} k^5 + \frac{5}{16} k^7 + \frac{35}{256} k^9 + \text{etc.}) \\ &+ ds \cos 2s (\frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{2} k^4 + \frac{15}{8} k^6 + \frac{63}{64} k^8 + \text{etc.}) \\ &- ds \cos 3s (k^3 + \frac{15}{8} k^5 + \frac{35}{16} k^7 + \frac{105}{128} k^9 + \text{etc.}) \\ &+ ds \cos 4s (\frac{1}{2} k^4 + \frac{3}{16} k^6 + \frac{63}{128} k^8 + \text{etc.}) \\ &- ds \cos 5s (\frac{1}{8} k^5 + \frac{7}{8} k^7 + \frac{63}{128} k^9 + \text{etc.}) \\ &+ ds \cos 6s (\frac{1}{32} k^6 + \frac{1}{16} k^8 + \text{etc.}) \end{aligned}$$

et

et integrando habebitur $\zeta \sqrt{\frac{Ca^2}{Ab^2}} =$
 $= \text{const.} + s(1 + \frac{3}{2}k^2 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}k^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}k^6 + \text{etc.})$
 $- 2k \sin. s(1 + \frac{3}{2}k^2 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}k^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}k^6 + \text{etc.})$
 $+ \frac{3}{2}k^2 \sin. 2s(1 + \frac{5}{2}k^2 + \frac{3 \cdot 5}{16}k^4 + \frac{21}{8}k^6 + \text{etc.})$
 $- \frac{3}{2}k^3 \sin. 3s(1 + \frac{15}{8}k^2 + \frac{21}{8}k^4 + \text{etc.})$
 $+ \frac{5}{16}k^4 \sin. 4s(1 + \frac{21}{16}k^2 + \frac{63}{16}k^4 + \text{etc.})$
 $- \frac{1}{16}k^5 \sin. 5s(1 + \frac{7}{2}k^2 + \text{etc.})$
 $+ \frac{7}{128}k^6 \sin. 6s(1 + \frac{15}{8}k^2 + \text{etc.})$
 etc.

COROLL. 2.

7. Patet hic coefficientem ipsius s esse =

$\frac{1}{(1-kk)\sqrt{(1-kk)}}$. Quare si aequatio nostra per $(1-kk)^{\frac{3}{2}}$
 multiplicetur, orietur $\zeta \sqrt{\frac{Ca^2(1-kk)^2}{Ab^2}} =$
 $= \text{Const.} + s - 2k \sin. s + \frac{3}{2}k^2(1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{16}k^4 + \frac{1}{32}k^6) \sin. 2s$
 $- \frac{1}{2}k^3 \sin. 3s(1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{16}k^4) + \frac{5}{16}k^4(1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k^4) \sin. 4s$
 $- \frac{1}{16}k^5(1 + \frac{1}{2}kk) \sin. 5s + \frac{7}{128}k^6(1 + \frac{15}{16}kk) \sin. 6s$
 etc.

vbi notari conuenit, fractionem $\frac{b}{1-kk}$ exprimere semi-
 axem transversum. Erit ergo $\zeta \sqrt{\frac{Ca^2(1-kk)^2}{Ab^2}} = \text{Const.}$
 anomalia media, quippe quae temporis est proportionalis,
 vnde si anomalia media ponatur = r , quae pariter ab
 abside ima computetur, erit $r = \zeta \sqrt{\frac{Ca^2(1-kk)^2}{Ab^2}} = \text{Const.}$ atque
 $s = r + 2k \sin. s - \frac{3}{2}k^2(1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{16}k^4 + \frac{1}{32}k^6) \sin. 2s$
 $+ \frac{1}{2}k^3(1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{16}k^4) \sin. 3s - \frac{5}{16}k^4(1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k^4) \sin. 4s$
 $+ \frac{1}{16}k^5(1 + \frac{1}{2}kk) \sin. 5s - \frac{7}{128}k^6(1 + \frac{15}{16}kk) \sin. 6s$
 quae formula ad excentricitates satis notabiles se extendit.

ex eaque leui negotio per approximationes ad datam quamuis anomaliam mediam r , ei respondens anomalia vera s , poterit inuestigari. Quod si forte difficile videatur; ad singulos gradus anomaliae verae s quaeratur anomalia media r , qua tabula constructa sine labore inde tabula inuersa formabitur, quae ad singulos gradus anomaliae mediae r respondentes anomalias veras s exhibeat.

COROLL. 3.

8. Inuenta autem anomalia vera s , quia longitudo absidis imae posita est $= \omega$, erit longitudo vera seu angulus $A C M = \Phi = \omega + s$. Hinc porro eruitur distantia $C M = x = \frac{b}{1 + k \cos s}$; pro qua, cum ex anomalia media r constet vera s , ad singulos gradus anomaliae mediae r tabula distantiarum x poterit concinnari. Diameter autem corporis ex C spectati apparens, vt et eius parallaxis horizontalis, erit, vt $1 + k \cos s$.

COROLL. 4.

9. Motus quoque huius corporis horarius ex aequatione differentiali colligi poterit, quae est $d\zeta = \frac{ds \sqrt{\Delta b^2} : C a^2}{(1 + k \cos s)^2}$. Nam si $d\zeta$ denotat motum horarium solis medium, erit $d\Phi$ seu ds motus horarius corporis verus, quatenus ex puncto C spectatur. Hinc ergo erit motus horarius solis medius, qui est $148''$ ad motum horarium corporis, vt 1 ad $(1 + k \cos s)^2 \sqrt{\frac{C a^2}{\Delta b^2}}$: vnde motus horarius corporis erit $= 148'' (1 + k \cos s)^2 \sqrt{\frac{C a^2}{\Delta b^2}}$. Seu cum sit $x = \frac{b}{1 + k \cos s}$, erit $(1 + k \cos s)^2 = \frac{b^2}{x^2}$, ideoque motus horarius erit $= 148'' \sqrt{\frac{C a^2 b}{\Delta x^2}}$.

COROLL.

COROLL. 5.

10. Per excentricitatem k cognoscitur species sectionis conicae, quam corpus percurrit; si enim fuerit $k = 0$, orbita corporis erit circulus, cuius radius $= b$. Sin autem valor ipsius k sit unitate minor, siue sit affirmatiuus, siue negatiuus, orbita erit ellipsis, cuius semi-latus rectum $= b$, et semi-axis transuersus $= \frac{b}{1-kk}$, et distantia absidis imae $= \frac{b}{1+k}$, et summae $= \frac{b}{1-k}$. Verum, si tertio sit k unitati aequalis, ita vt $1-kk$ fiat $= 0$, orbita erit parabola, seu ellipsis in infinitum elongata: sin autem quarto valor ipsius k sit unitati maior, ita, vt sit $1-kk$ numerus negatiuus, tum orbita erit hyperbola. His autem duobus posterioribus casibus, et quando orbita est ellipsis admodum longa, vbi k prope ad unitatem accedit, series ante inuenta, quae valorem ipsius ζ exhibebat, vel fit nimis parum conuergens, vel etiam si $k > 1$ diuergens et imaginaria, quibus casibus peculiari modo integratio aequationis differentialis est instituenda, cui autem non immoror.

COROLL. 6.

11. Ex aequatione integrali §. 7. inuenta, facile colligitur tempus periodicum corporis, siquidem in ellipsi reuoluitur. Ponatur enim $s = 360^\circ$, ita, vt corpus ad eandem absidem, vnde est egressum, reuertatur, et quia sinus omnium angulorum $s, 2s, 3s, 4s$ etc.

euanescent, erit $\zeta \sqrt{\frac{Ca^2(1-kk)^{\frac{3}{2}}}{\Lambda b^2}} = 360^\circ$; vnde constat, eodem tempore, quo corpus vnam periodum absoluit, solem motu medio conficere angulum $\zeta = 360^\circ \sqrt{\frac{\Lambda b^2}{Ca^2(1-kk)^{\frac{3}{2}}}}$,
 Y 2 seu

seu cum sit semi-axis transuersus $= \frac{b}{1-kk}$, ponatur is $= f$: at tempus periodicum aequabitur illi tempori, quo sol motu medio absoluit angulum $= 360^\circ \sqrt{\frac{A f^3}{C a^3}}$. Haec formula, si ponatur $f = a$, et $C = A$, praebit tempus periodicum solis, seu quantitatem anni medii, quae exprimeretur per 360° . Vnde tempus periodicum corporis erit ad tempus vnus anni, vt $\sqrt{\frac{A f^3}{C a^3}}$ ad 1, seu vt $\sqrt{\frac{f^3}{C}}$ ad $\sqrt{\frac{a^3}{A}}$; vel tempus periodicum corporis propositi erit $= \sqrt{\frac{A f^3}{C a^3}}$ annis. Hinc apparet, si plura corpora circa diuersa centra virium motu regulari in ellipsis reuoluantur, fore eorum tempora periodica in ratione composita ex directa sesquuplicata axium transuersorum et inuersa subduplicata virium absolutarum, seu earum virium, quas centra in aequalibus distantis exerunt.

PROBLEMA II.

12. Si corpus in M, data celeritate et secundum datam directionem Mm, proiciatur, inuenire eius orbitam, quam ad centrum virium C attractum, describit, si quidem vis, ad C tendens, ponatur quadratis distantiarum reciproce proportionalis.

S O L V T I O.

Sit distantia CM $= x$, quae cognita assumitur, et vis in M, ad C tendens, $= \frac{C}{x^2}$: deinde cum detur celeritas corporis in M, eiusque directio Mm, ne angulo CMm opus habeamus, resoluaturn motus secundum Mm in duos laterales secundum Mμ et Mπ, quorum illius directio Mμ sit in CM producta, huius Mπ ad CM
norma-

normalis. Sint autem $M\mu$ et $M\pi$ ea spatiola, quae a corpore confici concipiuntur, dum Sol motu medio angulum $d\zeta$ seu spatiolum ad ζ percurrit; ac ponatur $M\mu = m d\zeta$ et $M\pi = n d\zeta$, ita, ut celeritas motus secundum $M\mu$ sit ad solis celeritatem mediam ut m ad a , et celeritas motus secundum $M\pi$ ad celeritatem solis mediam ut n ad a . Praeter x et C igitur dantur quoque quantitates m et n ; tum vero etiam datur angulus $ACM = \Phi$, seu positio lineae CM respectu lineae fixae CAa : hinc cum angulus MCm sit $= d\Phi$, qui tempusculo $d\zeta$ absoluitur, erit $d\Phi = \frac{n d\zeta}{x}$, et $dx = mn = m d\zeta$: actio enim vis $\frac{C}{x^2}$, quatenus corpus de via Mm retrahit, in elementis $d\Phi$ et dx tantum differentialia secundi gradus producit.

His positis, quae sunt cognita, sit P orbitae, quam corpus est descripturum, absis ima et angulus $ACP = \omega$, anomalia vera seu angulus $PCM = s$; semi-latus rectum orbitae $= b$, et excentricitas $= k$. Quae quantitates, cum quaerantur, habebimus ex problemate praecedente primo $x = \frac{b}{1+k \cos s}$ deinde $d\zeta = \frac{ds}{(1+k \cos s)^2} \sqrt{\frac{Ab^2}{Ca^3}}$; et tertio $d\Phi = ds$, ob $\Phi = \omega + s$ et angulum ω constantem; ideoque $ds = \frac{n d\zeta}{x}$: quo valore substituto fiet $x = \frac{n}{(1+k \cos s)^2} \sqrt{\frac{Ab^2}{Ca^3}} = \frac{b}{1+k \cos s}$; hincque $n \sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}} = 1+k \cos s$. Praeter ea ob $dx = m d\zeta$ aequatio $\dot{x} = \frac{b}{1+k \cos s}$ differentiata dat $dx = \frac{b k ds \sin s}{(1+k \cos s)^2} = m d\zeta = \frac{n b k d\zeta \sin s}{x(1+k \cos s)^2}$. Ergo $m(1+k \cos s) = nk \sin s$. Tres ergo nacti sumus aequationes, ex quibus tres nostras incognitas b, s et k definire oportet. Scilicet $b = x(1+k \cos s)$; $n \sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}} = 1+k \cos s$ atque $m(1+k \cos s) = nk \sin s$; at valor ipsius $1+k \cos s$

ex prima, qui est $\frac{b}{x}$ in secunda surrogatus dat $n\sqrt{\frac{A b}{C a^2}} = \frac{b}{x}$
 seu $A n n x x = C a^2 b$, vnde fit $b = \frac{A n n x x}{C a^2}$; sicque iam
 constat latus rectum orbitae. Porro ob $\frac{A n n x x}{C a^2} = x(1 + k \cos. s)$
 habebimus $1 + k \cos. s = \frac{A n n x}{C a^2} = \frac{n k \sin. s}{m}$; vnde obtinemus
 $k = \frac{A m n x}{C a^2 \sin. s}$: sicque erit $1 + \frac{A m n x \cos. s}{C a^2 \sin. s} = \frac{A n n x}{C a^2}$; vnde
 elicitur $\frac{\cos. s}{\sin. s} = \cot. s = \frac{n}{m} - \frac{C a^2}{A m n x} = \frac{A n n x - C a^2}{A m n x}$

et $\sin. s = \frac{A m n x}{\sqrt{[A^2 m^2 n^2 x x + (A n n x - C a^2)^2]}}$, atque

$$\cos. s = \frac{A n n x - C a^2}{\sqrt{[A^2 m^2 n^2 x x + (A n n x - C a^2)^2]}}$$

Ex quibus definitur excentricitas:

$$k = \frac{1}{C a^2} \sqrt{[A^2 m^2 n^2 x x + (A n n x - C a^2)^2]}$$

Ex datis ergo m, n, x , quibus motus, corpori initio im-
 pressus, determinatur et vi $\frac{C}{x x}$, orbita quam corpus de-
 scribet, ita definietur, vt fit

$$1^\circ. \text{ Eius semi-latus rectum } b = \frac{A n n x x}{C a^2}.$$

$$2^\circ. \text{ Eius excentricitas } k = \frac{1}{C a^2} \sqrt{[A^2 m^2 n^2 x x + (A n n x - C a^2)^2]}$$

3°. Situs lineae absidum CP ex angulo PCM = s co-
 gnoscitur, cum sit $\tan. s = \frac{A m n x}{A n n x - C a^2}$: erit enim longi-
 tudo absidis imae seu angulus ACP = ACM - s . De-
 nique motus corporis in hac orbita cognoscetur, seu ad
 motum solis medium comparabitur, ope huius formulae:

$$d\zeta \sqrt{\frac{C a^2}{A b^2}} = \frac{ds}{(1 + k \cos. s)^2}. \quad \text{Q. E. I.}$$

SCHOLION.

13. Quia excentricitas k formula irrationali expri-
 mitur, dubium relinquitur, vtrum valor ipsius k sit affir-
 mativae accipiendus, an negativae; vel quod eodem redit,
 an angulus PCM = s elongationem corporis ab abside
 ima

ima exhibeat, an ab abside summa? Verum hoc dubium cessabit, si ad directionem motus secundum $M\mu$. attendamus, seu ad valorem ipsius m , qui, si fuerit affirmatiuus, indicat, corporis a puncto C distantiam augeri, ex quo manifestum est, id ab abside ima ad summam progredi, ideoque punctum P absidem imam referre, unde angulus PCM duobus rectis erit minor, hincque $\sin s$ affirmatiuus: quam ob rem excentricitas k affirmatiue erit accipienda. Quodsi autem anomaliam semper ab abside ima computare instituamus, semper quoque valor excentricitatis k positius capi debet, atque tum ex expressione sinus et cosinus ipsius s intelligetur, vtrum angulus PCM sit duobus rectis maior an minor: cum sit $\sin s = \frac{Annx}{Ca^2k}$ et $\cos s = \frac{Annx - Ca^2}{Ca^2k}$.

COROLL. I.

14. Si corpus in M perpendiculariter ad CM proiciatur, vt motus $md\zeta$ euanescat, in ipso puncto M erit absis vel summa vel ima: Vtra autem ibi existat, sic explorabitur. Cum posito $m = 0$ sit $k = \pm \frac{Annx - Ca^2}{Ca^2}$, prout $Annx$ sit vel maius vel minus quam Ca^2 ; ita vt valor ipsius k prodeat affirmatiuus; fiet $\cos s = +1$ si $Annx > Ca^2$, et $\cos s = -1$ si $Annx < Ca^2$. Priori ergo casu si $Annx > Ca^2$ in M erit absis ima, sin autem $Annx < Ca^2$ in M erit absis summa. At si $Annx = Ca^2$ planum est, orbitam fore circulum ob excentricitatem k euanescentem, hoc ergo casu, quia celeritas corporis secundum Mn est $= nd\zeta$, existente celeritate solis media $= ad\zeta$, erit celeritas corporis ad celeritatem solis vt \sqrt{Ca} ad $\sqrt{Ax} = \sqrt{\frac{C}{a}} : \sqrt{\frac{A}{a}}$.

COROLL.

COROLL. 2.

15. Cum sit semi-latus rectum $b = \frac{A n n x x}{C a^2}$, patet in tantum a motu corpori secundum Mn impresso pendere, atque quadrato huius celeritatis esse proportionale, ita, ut motus secundum $M\mu$ impressus valorem lateris recti plane non immutet. Semi-axis transuersus vero f , quia est $= \frac{b}{1-kk}$, ob $1-kk = \frac{2 A C a^2 n n x x - (m m + n n) A A n n x x}{C C a^2}$ seu $1-kk = \frac{A n n x x}{C C a^2} [2 C a^2 - A x (m m + n n)]$, fiet $f = \frac{C a^2 x}{2 C a^2 - A x (m m + n n)}$.

COROLL. 3.

16. Cum corpus nunc uerfetur in M , definiri poterit tempus, quo ante per absidem imam P transire debuit, si iam ante hunc motum esset profecutum. Tempus hoc designabitur angulo ζ , quem inter ea sol motu medio absoluit, et qui per integrationem huius aequationis

$$d\zeta \sqrt{\frac{C a^2}{A b^2}} = \frac{ds}{(1+k \cos s)^2}$$
 elici debet.

Supra autem uidimus (7) esse integratione per approximationem instituta

$$\zeta \sqrt{\frac{C a^2 (1-kk)^2}{A b^2}} = s - 2 k \sin. s + 2 k k \sin. 2 s - 2 k^3 \sin. 3 s + 2 k^4 \sin. 4 s - 2 k^5 \sin. 5 s + 2 k^6 \sin. 6 s - \text{etc.}$$

vbi porro breuitatis gratia :

$$A = \frac{2}{3} (1 + \frac{1}{3} k^2 + \frac{1}{15} k^4 + \frac{1}{105} k^6); B = \frac{2}{3} (1 + \frac{1}{3} k^2 + \frac{1}{15} k^4);$$

$$C = \frac{2}{3 \cdot 2} (1 + \frac{1}{3} k^2 + \frac{1}{5} k^4); D = \frac{2}{3 \cdot 2} (1 + \frac{1}{3} k^2); E = \frac{2}{3 \cdot 2} (1 + \frac{1}{3} k^2).$$

Constantem autem ibi adiectam hic negligo, quia posito angulo $s = 0$ simul tempus, quod angulo ζ refertur, euanescere debet. Tempus ergo hoc quaesitum tantum est, cuius interuallo sol motu medio percurrit angulum

$$\zeta = (s - 2 k \sin. s + 2 k^2 \sin. 2 s - 2 k^3 \sin. 3 s + 2 k^4 \sin. 4 s - \text{etc.}) \sqrt{\frac{A b^2}{C a^2 (1-kk)^2}}$$

vnde hoc tempus facile assignatur. PKO.

PROBLEMA III.

17. Si corpus, quod motu regulari A P M circa C ^{Fig. 7.} descripsit, cum peruenerit in M hic impetu quocunque percutiatur, ut eius celeritas et directio in M inde subito mutetur, inuenire orbitam, quam post hunc ictum acceptum prosequetur.

SOLVTIO.

Quia orbita, quam corpus ante ictum in M describit, ponitur data, sit CP eius absis ima et angulus ACP = ω ; tum sit orbitae semi-latus rectum = b ; excentricitas = k , et anomalia vera seu angulus PCM = s , tempus autem, quo ab abside ima ad M peruenerit, exprimaturs angulo ζ , quem sol interea motu medio descripsit. Sit porro angulus ACM = $\omega + s = \Phi$, et distantia CM = x , erit $x = \frac{b}{1+k\cos s}$ et $\zeta = (s - 2k\sin s + 2k^2\sin 2s - 3k^3\sin 3s + 4k^4\sin 4s - \text{etc.}) \sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^2(1-k^2)^3}}$ posita vi centrali in $M = \frac{c}{x^2}$. Nunc consideretur motus verus, quem corpus in M habebit, qui resoluaturs, ut ante secundum directiones M μ et Mn, quorum illius celeritas seu spatium tempusculo $d\zeta$ percursum sit M $\mu = m d\zeta$, huius vero Mn = $n d\zeta$, erit, uti ex problemate praecedenti colligere licet $n = (1+k\cos s) \sqrt{\frac{Ca^2}{Ab}}$ et $m = k\sin s \sqrt{\frac{Ca^2}{Ab}}$. Nunc autem ictu in M subito facto motus corporis in M ita immutetur, ut eius celeritas secundum M μ fiat M $\mu' = m' d\zeta$, et celeritas secundum Mn fiat M $n' = n' d\zeta$; hac vero motus mutatione facta, corpus in alia orbita progredi perget, quae sit A'P'M, cuius absidis imae P' longitudo sit A'CP' = ω' , semi-latus rectum = b' , excentricitas = k' , et anomalia

Tom. VI. Nov. Com. Z vera

vera seu angulus $P'CM = s'$. Tempus autem, quo ex P' in M peruenisset, si iam ante in orbita hac noua cucurrisset, sit $= \zeta'$ et \mathcal{A}' , \mathcal{B}' , \mathcal{C}' etc. sint valores harum litterarum, quas ob mutatum excentricitatis k valorem in k' induent: eritque $\zeta' = (s' - 2k' \sin. s' + \mathcal{A}' k'^2 \sin. 2s' - \mathcal{B}' k'^3 \sin. 3s' + \text{etc.}) \sqrt{\frac{\Delta \mathcal{B}'^2}{C a^2 (1 - k' k)^2}}$. Verum ob angulum ACM et distantiam CM eadem nunc ac ante percussio- nem erit $\omega + s = \omega' + s'$ et $\frac{b}{1 + k \cos. s} = \frac{b'}{1 + k' \cos. s'}$. Praeterea vero ob motum corpori in M de nouo impressum erit $n' = (1 + k' \cos. s') \sqrt{\frac{C a^2}{\Delta \mathcal{B}'}}$ et $m' = k' \sin. s' \sqrt{\frac{C a^2}{\Delta \mathcal{B}'}}$ vnde ob $x = \frac{b}{1 + k \cos. s} = \frac{b'}{1 + k' \cos. s'}$ per problema praecedens reperitur.

$$\text{Primo } b' = \frac{\Delta n' n' x x}{C a^2}$$

$$\text{Secundo } k' = \frac{1}{C a^2} \sqrt{[A^2 m' m' n' n' x x + (\Delta n' n' x - C a^2)^2]}$$

$$\text{Tertio tang. } s' = \frac{\Delta m' n' x}{\Delta n' n' x - C a^2} \text{ siue}$$

$$\sin. s' = \frac{\Delta m' n' x}{C a^2 k'} \text{ et } \cos. s' = \frac{\Delta n' n' x - C a^2}{C a^2 k'}$$

Hincque ergo noua orbita, in qua corpus post acceptum impetum feretur, innotescet vna cum positione lineae absidum seu angulo $\omega' = \omega + s - s'$. Et quia tempus ab abside ima P' elapsum constat ζ' , etiam post hac pro quouis tempore dato, si angulus solaris interea descriptus ad ζ' addatur, anomalia vera illi tempori respondens inuestigari, sicque locus corporis in noua orbita ad quodvis tempus assignari poterit. Q. E. I.

COROLL. I.

18. Quia est pro orbita, in qua ante percussio- nem factam corpus mouebatur, $b = \frac{\Delta n n x x}{C a^2}$, et pro noua $b' = \frac{\Delta n' n' x x}{C a^2}$ erit $\frac{b'}{b} = \frac{n' n'}{n n}$ seu $b' = \frac{n' n'}{n n} b$. Vnde patet

patet, si motus secundum normalem Mn ab ictu non fuerit immutatus, tum etiam latus rectum orbitae nullum neque augmentum, neque decrementum recipere. Verum si ab ictu motus secundum Mn acceleretur, latus rectum augebitur in duplicata ratione auctae celeritatis, contra in eadem ratione diminuetur, si motus secundum Mn retardetur ab ictu.

COROLL. 2.

19. Inuento semi-late re recto nouae orbitae b' , quia est $Ca^2 = \frac{An'n'x^2}{b'}$, anomalia vera noua s' , quae per hanc formulam $\text{tang. } s' = \frac{Am'n'x}{An'n'x - Ca^2}$ est definita, etiam hoc simpliciori modo determinari poterit per hanc formulam $\text{tang. } s' = \frac{b'm'}{a'(b'-x)}$. Angulo autem s' inuento excentricitas nouae orbitae k' colligetur ex formula $x = \frac{b'}{1+k'\text{cos. } s'}$, vnde fit $k' = \frac{b'-x}{x\text{cos. } s'}$.

COROLL. 3.

20. Hinc ergo si planeta, qui alias circa solem motu regulari ferretur, a causa quacunque subito percutiatur, atque ab hoc ictu eius vterque motus tam secundum $M\mu$ quam secundum Mn , quae est recta ad CM normalis, alteretur orbita, quam post ictum sequetur, determinabitur. Hoc enim problemate orbitae immutatae tam latus rectum b' cum excentricitate k' , quam longitudo perihelii $A'CP' = \omega' = \omega + s - s'$ assignari poterit. Tum vero momento, quo percussio fit, tempus a perihelio, quod angulo solari ζ' definitur, per formulam erutam, reperitur: ad quod si deinceps tempus quodcunque

elapsum in angulo pariter solari addatur, et summa pro ζ scribatur, ex eadem formula anomalia vera seu longitudo planetae a nono perihelio eruetur. Quae autem hic de percussionibus subitaneis sunt dicta, ad sollicitationes continuas facile transferri possunt, cum quaevis sollicitatio continua in infinitas percussiones subitaneas, quae infinite paruis temporis interuallis se inuicem insequantur, resolui possit; ad quod negotium sequentis problematis solutione erit opus.

PROBLEMA IV.

28. Si ictus, quem corpus, quod adhuc in orbita $A P M$ motu regulari ferebatur, subito in M patitur, fuerit infinite paruus, definire tam orbitae, quam motus, quo corpus post ictum feretur, mutationem.

SOLVTIO.

Quia ictus ponitur infinite paruus, mutatio, quae inde in motu corporis, secundum directiones $M \mu$ et $M n$ resoluto, oriatur, erit infinite parua. Sic cum ante ictum celeritas corporis secundum $M \mu$ fuerit $= m d \zeta$ et secundum $M n = n d \zeta$, ponatur ictu facto celeritas secundum $M \mu = (m + dm) d \zeta$ et secundum $M n = (n + dn) d \zeta$, erit solutione praecedentis problematis huc translata, $m' = m + dm$ et $n' = n + dn$. Tum sit ante ictum locus absidis imae seu angulus $A C P = \omega$; orbitae semi-latus rectum $= b$, excentricitas $= k$, anomalia vera seu angulus $P C M = s$, et tempus ab abside ima $= t$, quod in arcu solari eodem tempore confecto exprimatur. Loco ζ autem hic malo uti littera t , quia postea ζ ad tempus quodcunque denotandum adhibebitur. Porro sit distantia $C M$

CM = x; et angulus seu longitudo vera ACM = Φ; eritque
 $x = \frac{b}{1+k \cos s}$; $\Phi = \omega + s$; et $t = (s - 2k \sin s + 2k^2 \sin 2s -$
 $- 3k^3 \sin 3s + \text{etc.}) \sqrt{\frac{\Lambda b^3}{Ca^3(1-kk)^2}}$ posita vi centrali = $\frac{C}{\omega x}$,
 vi solis = $\frac{\Lambda}{\omega x}$ et distantia solis a terra media = a. Pro
 orbita autem, quam corpus post ictum describet, sit, quia
 omnes mutationes erunt infinite parvae, longitudo absi-
 dis imae A'CP' = ω' = ω + dω; orbitae semi-latus re-
 ctum b' = b + db; excentricitas k' = k + dk, anomal-
 lia vera P'CM = s' = s + ds; et tempus ab abside ima
 = t' = t + dt, quod pro ζ' scribi debet.

Erit ergo dω = -ds, et ds cum reliquis mutatio-
 nibus db, dk et dt sequenti modo inuenietur. Cum sit
 $m = k \sin s \sqrt{\frac{Ca^2}{\Lambda b}}$ et $n = (1+k \cos s) \sqrt{\frac{Ca^2}{\Lambda b}}$, quia inue-
 nimus $b' = \frac{n'n'}{n} b$, posito $b + db$ pro b' et $n + dn$ pro
 n' habebimus $db = \frac{2ndn}{n} b = \frac{2dn}{1+k \cos s} \sqrt{\frac{\Lambda b^3}{Ca^2}}$. Deinde
 ob $\text{tang. } s' = \frac{b' m'}{n' (b' - x)}$ erit $l \text{ tang. } s' = lb' + lm' - ln' - l(b' - x)$
 ideoque differentiando $\frac{ds}{\sin s \cos s} = \frac{db}{b} + \frac{dm}{m} - \frac{dn}{n} - \frac{db}{b-x}$,
 et ob $db = \frac{2bdn}{n}$ erit $\frac{ds}{\sin s \cos s} = \frac{dm}{m} + \frac{dn}{n} - \frac{2bdn}{n(b-x)}$
 $= \frac{dm}{m} - \frac{(b+x)dn}{n(b-x)}$, vnde pro m et n substitutis valoribus erit
 $\frac{ds}{\sin s \cos s} = \left(\frac{dm}{k \sin s} - \frac{(b+x)dn}{(1+k \cos s)(b-x)} \right) \sqrt{\frac{\Lambda b}{Ca^2}}$.
 et quia $x = \frac{b}{1+k \cos s}$ et $\frac{b+x}{b-x} = \frac{2+k \cos s}{k \cos s}$, erit
 $\frac{ds}{\sin s \cos s} = \left(\frac{dm}{k \sin s} - \frac{dn(2+k \cos s)}{(1+k \cos s)k \cos s} \right) \sqrt{\frac{\Lambda b}{Ca^2}}$, ideoque
 $ds = -d\omega = \frac{1}{k} \left(dm \cos s - \frac{dn(2+k \cos s) \sin s}{1+k \cos s} \right) \sqrt{\frac{\Lambda b}{Ca^2}}$.
 Denique ob $k' = \frac{b'-x}{x \cos s}$ seu $lk' = l(b'-x) - lx - l \cos s$,
 erit $\frac{dk}{k} = \frac{db}{b-x} + \frac{ds \sin s}{\cos s} = \frac{2bdn}{n(b-x)} + \frac{ds \sin s}{\cos s}$,
 et ob $\frac{b}{b-x} = \frac{1+k \cos s}{k \cos s}$ et $n = (1+k \cos s) \sqrt{\frac{Ca^2}{\Lambda b}}$
 $\frac{dk}{k} = \frac{2dn}{k \cos s} \sqrt{\frac{\Lambda b}{Ca^2}} + \frac{\sin s}{k \cos s} \left(dm \cos s - \frac{dn(2+k \cos s) \sin s}{1+k \cos s} \right) \sqrt{\frac{\Lambda b}{Ca^2}}$ feu

$$\text{seu } dk = \frac{s}{\cos s} \left(dm \sin s \cos s + 2 dn - \frac{dn(2+k \cos s) \sin s^2}{1+k \cos s} \right) \sqrt{\frac{A b}{C a^2}}$$

$$\text{vel } dk = \left(dm \sin s + \frac{dn(2 \cos s + k + k \cos s^2)}{1+k \cos s} \right) \sqrt{\frac{A b}{C a^2}}$$

Sicque iam haec tria differentialia db , dk et ds seu $d\omega$ elicuimus; restat ergo, vt mutationem in tempore t ab abside ortam eruamus; quod fiet differentiatione aequationis

$$t \sqrt{\frac{C a^2}{A b^2}} = (1-kk)^{-\frac{1}{2}} (s - 2k \sin s + \mathcal{A} k^2 \sin 2s - \mathcal{B} k^3 \sin 3s + \text{etc.})$$

ponendis b , k , s et t variabilibus, et scribendis pro db , dk et ds valoribus iam inuentis. At est, vt ex superi-

$$\text{oribus constat } (1-kk)^{-\frac{1}{2}} (s - 2k \sin s + \mathcal{A} k^2 \sin 2s - \mathcal{B} k^3 \sin 3s + \text{etc.})$$

$= \int \frac{ds}{(1+k \cos s)^2}$ si in hac integratione tantum s , vt quantitas variabilis tractetur. Vicissim ergo huius formulae

differentiale, si k constans sumatur, erit $= \frac{ds}{(1+k \cos s)^2}$, at

si simul k pro variabili habeatur, ponamus, esse differentiale completum $= \frac{ds}{(1+k \cos s)^2} + S dk$ atque constat dif-

ferentiale primi termini $\frac{ds}{(1+k \cos s)^2}$ posito k tantum variabili aequale esse debere differentiali posterioris termini $S dk$ posito tantum s variabili, sit igitur $dS = V ds$, eritque

$$\frac{-2 dk ds \cos s}{(1+k \cos s)^2} = V ds dk, \text{ ac proinde } V = \frac{-2 \cos s}{(1+k \cos s)^2} : \text{ et}$$

$$S = \int \frac{-2 ds \cos s}{(1+k \cos s)^2}. \text{ Quare huius formulae}$$

$$(1-kk)^{-\frac{1}{2}} (s - 2k \sin s + \mathcal{A} k^2 \sin 2s - \mathcal{B} k^3 \sin 3s + \text{etc.})$$

differentiale plenum, si tam k quam s variantur, erit

$$\frac{ds}{(1+k \cos s)^2} - 2 dk \int \frac{ds \cos s}{(1+k \cos s)^2}$$

$$\text{Verum est } \int \frac{ds \cos s}{(1+k \cos s)^2} = \frac{1}{k} \int \frac{ds(k \cos s + 1 - 1)}{(1+k \cos s)^2} = \frac{1}{k} \int \frac{ds}{(1+k \cos s)^2}$$

$- \frac{1}{k} \int \frac{ds}{(1+k \cos s)^2}$, atque huius formulae posterioris valor integralis perinde reperietur ac prioris. Ponamus igitur, quoniam haec integralia, tanquam cognita, spectare licet:

$$\int \frac{ds}{(1+k \cos s)^2}$$

$\int \frac{ds}{(1+k \cos s)^2} = P$ vbi quidem k , vt quantitas constans
 et $\int \frac{ds}{(1+k \cos s)^2} = Q$ spectatur, et integralia P et Q ita capiuntur, vt evanescant posito $s=0$.

eritque $t \sqrt{\frac{Ca^2}{Ab^2}} = P$ seu $t = PV \frac{Ab^2}{Ca^2}$, vnde cum sumto tam k quam s variabili sit $dP = \frac{ds}{(1+k \cos s)^2} - \frac{dk}{k} (P - Q)$ erit

$$dt = \left[\frac{ds}{(1+k \cos s)^2} - \frac{dk}{k} (P - Q) + \frac{P db}{b} \right] \sqrt{\frac{Ab^2}{Ca^2}}$$

quod est incrementum temporis ab abside ima elapsi, ab effectu percussione oriundum, vbi autem pro db , ds et dk valores ante inuenti scribi debent, scilicet:

$$db = \frac{2 dn}{1+k \cos s} \sqrt{\frac{Ab^2}{Ca^2}} \text{ seu } \frac{db}{b} = \frac{2 dn}{1+k \cos s} \sqrt{\frac{Ab}{Ca^2}}$$

$$ds = \frac{1}{k} \left(dm \cos s - \frac{dn(2+k \cos s) \sin s}{1+k \cos s} \right) \sqrt{\frac{Ab}{Ca^2}}$$

$$dk = \left(dm \sin s + \frac{dn(2 \cos s + k + k \cos^2 s)}{1+k \cos s} \right) \sqrt{\frac{Ab}{Ca^2}}$$

qua facta substitutione, erit

$$dt = \left\{ \begin{array}{l} \frac{dm \cos s}{k(1+k \cos s)^2} - \frac{dn(2+k \cos s) \sin s}{k(1+k \cos s)^2} - \frac{2(P-Q)dm \sin s}{k} \\ - \frac{2(P-Q)dn(2 \cos s + k + k \cos^2 s)}{k(1+k \cos s)} + \frac{2Pdn}{1+k \cos s} \end{array} \right\} \sqrt{\frac{Ab^2}{Ca^2}}$$

At hoc impulsu mutatio in loco absidis imae facta erit

$$d\omega = \frac{1}{k} \left(\frac{dn(2+k \cos s) \sin s}{1+k \cos s} - dm \cos s \right) \sqrt{\frac{Ab}{Ca^2}}$$

Quibus formulis tota mutatio tam in orbita quam in motu, quae ab impulsu infinite paruo oritur, continetur. Q. E. I.

SCHOLION.

22. Quod ad valores formularum P et Q attinet priorem P iam supra inuenimus esse:

$$P =$$

$$\begin{aligned}
 P = & s \left(1 + \frac{3}{2} k^2 + \frac{15}{8} k^4 + \frac{35}{16} k^6 + \frac{315}{128} k^8 + \text{etc.} \right) \\
 & - 2k \sin. s \left(1 + \frac{3}{2} k^2 + \frac{15}{8} k^4 + \frac{35}{16} k^6 + \text{etc.} \right) \\
 & + \frac{3}{4} k^3 \sin. 2s \left(1 + \frac{3}{2} k^2 + \frac{15}{8} k^4 + \frac{35}{16} k^6 + \text{etc.} \right) \\
 & - \frac{3}{8} k^5 \sin. 3s \left(1 + \frac{15}{8} k^2 + \frac{21}{4} k^4 + \text{etc.} \right) \\
 & + \frac{3}{32} k^7 \sin. 4s \left(1 + \frac{21}{16} k^2 + \frac{63}{16} k^4 + \text{etc.} \right) \\
 & - \frac{1}{16} k^9 \sin. 5s \left(1 + \frac{7}{2} k^2 + \text{etc.} \right) \\
 & + \frac{7}{128} k^{11} \sin. 6s \left(1 + \frac{11}{2} k^2 + \text{etc.} \right) \\
 & \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Simili autem modo inueniemus $Q = \int \frac{ds}{(1+k \operatorname{cof}.s)^2}$, sed cum in nostra aequatione occurrat $\frac{1}{k}(P-Q) = \int \frac{ds \operatorname{cof}.s}{(1+k \operatorname{cof}.s)^2}$, praestabit statim huius formulæ valorem integralem inuestigare. Cum igitur sit

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{cof}.s}{(1+k \operatorname{cof}.s)^2} = & \operatorname{cof}.s - 3k \operatorname{cof}.s^2 + 6k^2 \operatorname{cof}.s^3 - 10k^3 \operatorname{cof}.s^4 + 15k^4 \operatorname{cof}.s^5 - \\
 & - 21k^5 \operatorname{cof}.s^6 + 28k^6 \operatorname{cof}.s^7 - 36k^7 \operatorname{cof}.s^8 \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

reductis potestatibus $\operatorname{cof}.s$ ad cosinus angulorum multiporum erit

$$\begin{aligned}
 & - k \left(\frac{3}{2} + \frac{15}{4} k^2 + \frac{105}{16} k^4 + \frac{315}{32} k^6 + \text{etc.} \right) \\
 \frac{\operatorname{cof}.s}{(1+k \operatorname{cof}.s)^2} = & \operatorname{cof}.s \left(1 + \frac{3}{2} k^2 + \frac{75}{8} k^4 + \frac{245}{16} k^6 + \text{etc.} \right) \\
 & - k \operatorname{cof}. 2s \left(\frac{3}{2} + 5k^2 + \frac{315}{32} k^4 + \frac{63}{4} k^6 + \text{etc.} \right) \\
 & + k^3 \operatorname{cof}. 3s \left(\frac{3}{2} + \frac{75}{16} k^2 + \frac{147}{16} k^4 + \text{etc.} \right) \\
 & - k^5 \operatorname{cof}. 4s \left(\frac{3}{2} + \frac{63}{16} k^2 + \frac{63}{8} k^4 + \text{etc.} \right) \\
 & + k^7 \operatorname{cof}. 5s \left(\frac{15}{16} + \frac{49}{16} k^2 + \text{etc.} \right) \\
 & - k^9 \operatorname{cof}. 6s \left(\frac{21}{16} + \frac{9}{4} k^2 + \text{etc.} \right)
 \end{aligned}$$

vnde

vnde integratione peracta reperietur :

$$\begin{aligned} \frac{k}{r}(P-Q) = & -\frac{1}{2} k s \left(1 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{25}{8} k^4 + \frac{125}{16} k^6 + \text{etc.} \right) \\ & + \sin s \left(1 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{73}{8} k^4 + \frac{265}{16} k^6 + \text{etc.} \right) \\ & - \frac{1}{2} k \sin. 2s \left(1 + \frac{10}{3} k^2 + \frac{105}{16} k^4 + \frac{21}{2} k^6 + \text{etc.} \right) \\ & + \frac{1}{3} k^3 \sin. 3s \left(1 + \frac{25}{3} k^2 + \frac{49}{3} k^4 + \text{etc.} \right) \\ & - \frac{5}{16} k^5 \sin. 4s \left(1 + \frac{63}{16} k^2 + \frac{63}{16} k^4 + \text{etc.} \right) \\ & + \frac{3}{16} k^7 \sin. 5s \left(1 + \frac{49}{16} k^2 + \text{etc.} \right) \\ & - \frac{7}{24} k^9 \sin. 6s \left(1 + \frac{21}{8} k^2 + \text{etc.} \right) \end{aligned}$$

PROBLEMA V.

23. Si corpus, quod ad centrum virium C attra- Fig. 6.
hitur in ratione reciproca duplicata distantiarum, insuper in
singulis punctis M sollicitetur viribus quibuscunque, inue-
nire continuam, tam orbitae, quam motus variationem,
quae ab his viribus perturbantibus producetur.

SOLV T I O.

Exprimat $\frac{c}{xx}$ vim, qua corpus continuo ad cen-
trum C urgetur, quae si sola ageret, corpus motu re-
gulari circa C gyraretur. Vis autem quae praeter ea in
corpus agit, eiusque motum perturbat, in singulis pun-
ctis M resolvatur secundum directiones MC et MN,
quarum haec ad illam sit normalis. Ponatur vis acce-
leratrix secundum MC = M et vis acceleratrix secundum
MN = N, quas vires M et N perturbantes vocabo.
Peruenerit corpus ab his viribus sollicitatum in M, ex-
istente CM = x, et ACM = Φ ; atque si nunc vi-
res perturbantes cessarent, corpusque posthac a sola vi
 $\frac{c}{xx}$ traheretur; id motu regulari incederet, orbitamque el-
lipticam esset descripturum; pro quo motu regulari ponamus
Longitudinem absidis imae seu angulum ACP = ω

semi-latus rectum orbitae = b

excentricitatem = k

Corporis, dum in M versatur, anomaliam veram $PCM = s$
 et tempus ab abside ima elapsum = t .

Quibus positis, erit $x = \frac{b}{1+k \cos s}$; $\Phi = \omega + s$, atque
 $t = P \sqrt{\frac{A b^3}{C a^3}}$, existente $P = \int \frac{ds}{(1+k \cos s)^{3/2}}$, cuius valorem
 iam ante inuenimus. Nunc vero, quia corpus, dum in M
 versatur, a duabus viribus M et N perturbantibus sollicitatur,
 a vi M eius motus secundum $M \mu$ diminuetur
 ita, vt secundum hunc motum tempusculo $d\zeta$ non spa-
 tium $m d\zeta$, sed spatium $m d\zeta - \frac{1}{2} M dt^2 = m d\zeta - \frac{N a^2}{A} d\zeta^2$
 percurret; ob viam autem N secundam $M n$ spatium con-
 ficiet eodem tempusculo $= n d\zeta - \frac{N a^2}{A} d\zeta^2$. Qui effectus
 quanquam tempusculo $d\zeta$ eduntur, concipiamus tamen
 eos subito corpori in M imprimi; eritque propterea, so-
 lutione praecedentis problematis huc translata, $dm = -\frac{N a^2}{A} d\zeta$,
 et $dN = -\frac{N a^2}{A} d\zeta$. Hanc ob rem nunc quidem corpus in
 alia orbita apm progredi pergeret, nisi deinceps a viri-
 bus perturbantibus afficeretur atque noua haec orbita a
 praecedente ita differet, vt nunc sit

$$\text{semi-latus rectum} = b - \frac{2 N d\zeta}{1+k \cos s} \sqrt{\frac{a^2 b^3}{A C}}$$

$$\text{excentricitas} = k - d\zeta \left(M \sin s + \frac{N(2 \cos s + k + k \cos^2 s)}{1+k \cos s} \right) \sqrt{\frac{a^2 b^3}{A C}}$$

$$\text{locus absidis} = \omega + \frac{d\zeta}{k} \left(M \cos s - \frac{N(2+k \cos s) \sin s}{1+k \cos s} \right) \sqrt{\frac{a^2 b^3}{A C}}$$

$$\text{anomaliam veram} = s - \frac{d\zeta}{k} \left(M \cos s - \frac{N(2+k \cos s) \sin s}{1+k \cos s} \right) \sqrt{\frac{a^2 b^3}{A C}}$$

At tempus ab abside ima p ad M vsque elapsum erit

$$= t - d\zeta \left(\frac{M \cos s}{k(1+k \cos s)^2} - \frac{N(2+k \cos s) \sin s}{k(1+k \cos s)^2} - \frac{2N(P-Q)(\cos s + k + k \cos^2 s) b b}{k(1+k \cos s)} \right) \frac{b b}{C} \\ - \frac{2}{k} N(P-Q) \sin s + \frac{2NP}{1+k \cos s}$$

Verum quia haec mutatio re vera tempusculo $d\zeta$ absol-
 vitur

vitur, ea tunc demum, cum corpus elapso tempusculo $d\zeta$ in m pervenerit, perfecta est statuenda, sicque cum corpus in m versatur, quod fit confecto angulo $MCm = d\Phi = d\zeta(1+k\cos.s)^2 \sqrt{\frac{Ca^2}{Ab^2}}$, vti ex problemate primo, ob $ds = d\Phi$, colligere licet, locus absidis imae, semi-latus rectum et excentricitas eos habebunt valores, quos modo assignauimus, at anomalia vera ante inuenta nunc augebitur angulo $MCm = d\zeta(1+k\cos.s)^2 \sqrt{\frac{Ca^2}{Ab^2}}$, et tempus ab abside ima elapsum augebitur tempusculo $d\zeta$: ideoque nunc, dum corpus in m versatur, erit anomalia vera $= s + d\zeta(1+k\cos.s)^2 \sqrt{\frac{Ca^2}{Ab^2}} - \frac{d\zeta}{k} (M\cos.s - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}) \sqrt{\frac{a^2b}{AC}}$, et tempus ab abside ima elapsum nunc erit

$$s + d\zeta - \frac{bb d\zeta}{c} \left(\frac{M \cos.s}{k(1+k\cos.s)^2} - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{k(1+k\cos.s)^2} - \frac{\frac{1}{2}N(P-Q)\sin.s + \frac{1}{2}NP}{1+k\cos.s} - \frac{2N(P-Q)(\cos.s+k+k\cos.s^2)}{k(1+k\cos.s)} \right)$$

Hinc si tum, cum corpus in m existit secundum legem continuitatis, ponamus

- locum Absidis imae $aCp = \omega + d\omega$
- semi-latus rectum $= b + db$
- excentricitatem $= k + dk$
- anomaliam veram $= s + ds$
- tempus ab abside $= t + dt$

habebimus harum differentialium sequentes valores,

$$db = -\frac{2Nd\zeta}{1+k\cos.s} \sqrt{\frac{a^2b^2}{AC}}$$

$$dk = -d\zeta \left(M\sin.s + \frac{N(2\cos.s+k+k\cos.s^2)}{1+k\cos.s} \right) \sqrt{\frac{a^2b}{AC}}$$

$$d\omega = \frac{d\zeta}{k} \left(M\cos.s - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s} \right) \sqrt{\frac{a^2b}{AC}}$$

$$ds = d\zeta(1+k\cos.s)^2 \sqrt{\frac{Ca^2}{Ab^2}} - \frac{d\zeta}{k} \left(M\cos.s - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s} \right) \sqrt{\frac{a^2b}{AC}}$$

ac si breuitatis gratia ponamus $\frac{1}{2}(P-Q) = R$, erit

$$dt = d\zeta - \frac{bb d\zeta}{c} \left(\frac{M \cos.s}{k(1+k\cos.s)^2} - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{k(1+k\cos.s)^2} + \frac{1}{2}NP \right) - \frac{2NR(\cos.s+k+k\cos.s^2)}{1+k\cos.s}$$

A 2 2

Supra

Supra autem vidimus, si quantitas $P\sqrt{\frac{Ab^2}{Ca^2}}$ differentietur sumtis b , k et s variabilibus, eius differentiale fore

$$\left(\frac{ds}{(1+k\cos s)^2} - 2R dk + \frac{2P d^2b}{2b^2}\right)\sqrt{\frac{Ab^2}{Ca^2}} \text{ ob } R = \frac{1}{k}(P-Q)$$

in quo, si pro ds , dk et db valores modo inuenti substituantur, eadem emergit expressio, quam pro valore dt eruimus, vade sequitur, fore

$$dt = d \cdot P\sqrt{\frac{Ab^2}{Ca^2}}, \text{ ideoque integrando } t = P\sqrt{\frac{Ab^2}{Ca^2}}.$$

Deinde continua tam orbitae, quam motus mutatio per integrationes formularum db , dk , $d\omega$ et ds debet investigari, quo facto ad quoduis tempus propositum orbita, in qua corpus tum mouetur, eiusque in ea locum definiri poterit. Erit autem $dx = k d\zeta \sin s \sqrt{\frac{Ca^2}{Ab^2}}$

$$\text{et } ddx = k d\zeta^2 \cos s (1+k\cos s)^2 \frac{Ca^2}{Ab^2} - \frac{Ma^2 d\zeta^2}{A}$$

qui valor, cum $d\Phi = d\zeta (1+k\cos s)^2 \sqrt{\frac{Ca^2}{Ab^2}}$, satisfacit aequationibus $2 dx d\Phi + x d\Phi = -\frac{Na^2}{A} d\zeta^2$, et $ddx - x d\Phi^2 = -\frac{Ca^2 d\zeta^2}{Axx} - \frac{Ma^2}{A} d\zeta^2$. Q. E. I.

COROLL. I.

24. Quia t indicat tempus, quo corpus ab abside ima p in M peruenturum fuisset, si motu regulari ita esset ingressum, vt in M eam, quam ibi iam actu habet, celeritatem acquisiisset, patet, cum corpus iam, antequam in M peruenit, a viribus M et N fuerit in motu suo perturbatum, id re vera nunquam in puncto p esse verisatum, ideoque tempore t plane non erit opus ad motum corporis cognoscendum. Atque hinc patet cum tempus t a sola corporis celeritate in M eiusque ibi directione pendeat, id quoque per solas quantitates b , k et s , quae hoc momento locum habent, determinari, neque harum quan-

quantitatum immutationes a viribus perturbantibus M et N profectas in valorem ipsius t ingredi. Quae etiam causa est, quod formulam differentialem pro dt inuentam tam expedite licuit integrare. Quin etiam sine respectu ad variationes litterarum b , k et s habito, valor ipsius t statim ex ipsa rei natura elici potuisset, cum sumtis b et k constantibus esse debeat $t \sqrt{\frac{Ca^3}{\Delta b^3}} = \int \frac{ds}{(1+k \cos s)^2} = P.$

COROLL. 2.

25. Pro quouis ergo tempore tam orbita, quam locus corporis in ea ex formulis differentialibus, quae valores elementorum db , dk , ω et ds exhibent, debet definiti, in quibus formulis, etsi variables, b , k et s sunt maxime inter se permixtae, tamen si vires M et N sunt admodum exiguae prae vi $\frac{C}{x^2}$, ac propter ea earum effectus valde parui, facile eiusmodi methodus approximandi reperietur, cuius ope ad quoduis tempus propositum, quod littera ζ indicatur, valores b , k , et s , itemque ω inueniri queant; praecipue si excentricitas k fuerit valde parua. Peruenietur autem tandem ad huiusmodi aequationem integram.

$$\zeta = S + \text{Const.}$$

in qua, si constans, ita definiatur, vt posito $s = 0$, fiat $\zeta = 0$; valor ipsius ζ indicabit tempus, quo corpus postquam de abside ima vera, ubi erat $s = 0$, excesserit, ad anomaliam veram s pertigerit, vnde, si constet momentum, quo fuerit semel $s = 0$, ad quoduis tempus inde elapsum, quod angulo solari ζ exprimetur, ope superioris aequationis anomalia vera s definietur, quae si addatur ad angulum ω seu longitudinem praesentem

tem absidis imae, obtinebitur longitudo vera seu angulus $\angle A C M$. Ex reliquis enim aequationibus rite tractatis pro eodem tempore valores litterarum b, k et ω elicentur, qui simul in aequationem $\zeta = S + \text{Const.}$ ingredientur, quibus inuentis erit vera corporis a centro C distantia $C M = x = \frac{b}{1+k \cos \zeta}$. Verum notandum est pro casuum diuersitate saepe numero methodos diuersas has aequationes tractandi adhiberi debere.

COROLL. 3.

26. Si axis orbitae transuersus, qui pariter erit variabilis, ponatur $=f$, cum sit $f = \frac{b}{1-k^2}$, erit $df = \frac{(1-k^2)db + 2bkdk}{(1-k^2)^2}$. Hic si pro db et dk valores ante inuenti substituuntur, reperietur:

$df = \frac{2d\xi}{(1-k^2)^2} [Mk \sin s + N(1+k \cos s)] \sqrt{\frac{a^2 b^2}{AC}}$,
vnde patet, axem transuersum ab vtraque vi perturbante M et N immutari, cum contra latus rectum tantum a vi N , cuius directio est ad radium $C M$ normalis, varietur.

COROLL. 4.

27. Si vis haec perturbans N euanescat, motus corporis a sola vi M , quae continuo ad centrum C tendit, perturbetur, latus rectum orbitae sibi $db = 0$, perpetuo eiusdem quantitatis manebit. Pro axe transuerso autem erit $df = \frac{2Mk d\xi \sin s}{(1-k^2)^2}$, qui ergo perinde atque excentricitas k et longitudo absidis ω continuas mutationes perpetuetur. Atque excentricitas quidem k diminuetur, dum corpus ab abside ima ad summam progreditur, contra vero rursus augebitur, dum corpus ab abside sum-

summa ad imam reuertitur: sicque, prout vis M fuerit comparata fieri potest, vt post quamuis reuolutionem integram excentricitas ad pristinam quantitatem reducatur. Linea autem absidum promouebitur, quando $\cos.s$ est affirmatiuus, contra retrocedet: fierique simili modo potest, vt linea absidum post integram reuolutionem in situm pristinum redigatur: quo casu linea absidum inuariabilis erit censenda, quia linea absidum eatenus tantum mobilis aestimari solet, quatenus post quamque reuolutionem integram de loco suo mota deprehenditur. P espicuum est, hoc euenire debere, si vis perturbans M quoque sit quadratis distantiarum a puncto C reciproce proportionalis; quia tum corpus motu regulari in ellipsi immobili incedet.

SCHOLION I.

28. Quodsi autem ponatur $M = \frac{B}{r^2} = \frac{B(1+k\cos.s)^2}{b^2}$ existente $N=0$, erit b quantitas constans, et

$$dk = -\frac{B d\zeta(1+k\cos.s)^2 \sin.s}{b^2} \sqrt{\frac{a^2 b}{\Delta C}}$$

$$d\omega = \frac{B d\zeta(1+k\cos.s)^2 \cos.s}{b^2 k} \sqrt{\frac{a^2 b}{\Delta C}}$$

$$ds = d\zeta(1+k\cos.s)^2 \sqrt{\frac{Ca^2}{\Delta b^2}} - \frac{B d\zeta(1+k\cos.s)^2 \cos.s}{b^2 k} \sqrt{\frac{a^2 b}{\Delta C}};$$

vnde fit $\frac{ds}{dk} = -\frac{C}{B \sin.s} + \frac{\cos.s}{k \sin.s}$, seu

$$Bkds \sin.s = -Ckdk + Bdk \cos.s,$$

cuius integrale est

$$\frac{1}{2} Ckk = Bk \cos.s + D;$$

vnde sequens calculus facile expeditur. Erit enim $k = \frac{B \cos.s + \sqrt{(B^2 \cos.s^2 + 2CD)}}{C}$, hincque fit $d\omega = \frac{B ds \cos.s}{\sqrt{(B^2 \cos.s^2 + 2CD)}}$, et integrando, $\sin.\omega = \frac{B \sin.s}{\sqrt{(B^2 + 2CD)}}$, ex quo patet, integra reuolutione absoluta, tam excentricitatem k , quam locum lineae absidum in statum pristinum restitui. Verum hic mirum videbitur, quod tam excentricitas

tricitas, quam linea absidum mutabilis reperitur, cum tamen constet, motum corporis esse regularem: sed notandum est, hoc calculo non veram corporis orbitam, quae conuenit vi $= \frac{C+B}{xx}$ exhiberi, sed quouis tempore eam per calculum orbitam indicari, quam corpus motu suo profecturum esset, si vis B subito cessaret. Simili modo respondebitur ad dubium, quod forte ex casu petetur, quo vis M est reciproce, vt cubus distantiae, quoniam motus fieri in ellipsi mobili est demonstratus, cuius axis et excentricitas nullam mutationem subeant: cum tamen hic utrinque variatio prodeat: scilicet iste modus, quo hic utimur ad motum definiendum, prorsus est diuersus ab eo, quo hoc casu motus vulgo determinari solet. Verum modus hic traditus motus quosunque perturbatos ad calculum reuocandi, tum in primis insignem habet vsum, quando subinde vires perturbantes intermittunt, motuique regulari locus conceditur; quem calculus noster statim manifestabit. Interim tamen nullum est dubium, quin etiam in perturbationibus continuis saepe vtiliter in vsum vocari possit.

S C H O L I O N 2.

29. Casus, quem hic sum contemplatus, quo altera vis perturbans erat $M = \frac{B}{xx}$, altera $N = 0$, meretur vltiorem evolutionem, quoniam deducit ad aequationem maxime perplexam, cum tamen motus re vera sit regularis. Quoniam inuenimus

$$d\omega = \frac{B d s \cos s}{\sqrt{(B^2 \cos^2 s + 2CD)}} = \frac{B d \zeta (1 + k \cos s)^2 \cos s}{b b k} \sqrt{\frac{a^2 b}{AC}}, \text{ hinc habebimus: } d\zeta \sqrt{\frac{a^2}{ACb^2}} = \frac{k d s}{(1 + k \cos s)^2 \sqrt{(B^2 \cos^2 s + 2CD)}}, \text{ vbi si pro } k \text{ valor inuentus substituitur, } \frac{B \cos s + \sqrt{(B^2 \cos^2 s + 2CD)}}{C}, \text{ prodibit}$$

$$d\zeta \sqrt{\frac{a^2}{ACb^2}} = \frac{C d s [B \cos s + \sqrt{(B^2 \cos^2 s + 2CD)}]}{[C + B \cos s + \cos s \sqrt{(B^2 \cos^2 s + 2CD)}]^2 \sqrt{(B^2 \cos^2 s + 2CD)}},$$

cuius

cuius integratio maxime ardua videtur. Verum cum certum sit, hunc motum esse regularem, quia a vi $\propto \frac{B+C}{x^2}$ oritur, inabit conformitatem huius formulae complicatae cum motu regulari monstrasse. Sit igitur verae orbitae, quam motu regulari corpus describit, latus rectum $= b$; excentricitas $= \kappa$, et anomalia vera $= \sigma$: erit $x = \frac{b}{1 + \kappa \cos \sigma}$; et distantia minima $= \frac{b}{1 + \kappa}$, maxima vero $= \frac{b}{1 - \kappa}$; Motus autem per problema primum ita erit comparatus, ut sit $d\zeta \sqrt{\frac{(B+C)a^2}{\Delta \xi^2}} = \frac{d\sigma}{(1 + \kappa \cos \sigma)^2}$. At ex formulis, pro motu perturbato, inuentis est distantia $x = \frac{Cb}{C+B \cos s^2 + \cos s \sqrt{(B^2 \cos^2 s + 2CD)}}$, unde, si ponatur $s = 0$, prodit distantia minima, maxima vero si $s = 180^\circ$, sicque erit

$$\frac{b}{1 + \kappa} = \frac{Cb}{C+B + \sqrt{(B^2 + 2CD)}} \quad \text{et} \quad \frac{b}{1 - \kappa} = \frac{Cb}{C+B - \sqrt{(B^2 + 2CD)}}$$

ex quibus elicitur $\kappa = \frac{Cb}{C+B}$ et $\kappa = \frac{\sqrt{(B^2 + 2CD)}}{C+B}$. Hinc porro obtinemus

$$x = \frac{Cb}{C+B + \cos s \sqrt{(B^2 + 2CD)}} = \frac{Cb}{C+B \cos^2 s + \cos s \sqrt{(B^2 \cos^2 s + 2CD)}}$$

itaque erit $\cos \sigma = \frac{\cos s \sqrt{(B^2 \cos^2 s + 2CD)} - B \sin^2 s}{\sqrt{(B^2 + 2CD)}}$ et

$$1 + \kappa \cos \sigma = \frac{C+B \cos^2 s + \cos s \sqrt{(B^2 \cos^2 s + 2CD)}}{C+B}$$

Cum autem sit $\sin \omega = \frac{B \sin s}{\sqrt{(B^2 + 2CD)}}$ et $\cos \omega = \frac{\sqrt{(B^2 \cos^2 s + 2CD)}}{\sqrt{(B^2 + 2CD)}}$, manifestum est, esse $\cos \sigma = \cos s \cos \omega - \sin s \sin \omega$, ideoque $\sigma = s + \omega$, unde intelligitur angulum σ a loco fixo esse computatum, prorsus ut in motu regulari fieri solet; sumitur scilicet anomalia vera σ a linea absidum, quae est immobilis.

Deinde quia est $d\sigma = ds + d\omega$, at $d\omega \cos \omega = \frac{B ds \cos s}{\sqrt{(B^2 + 2CD)}}$ erit $d\omega = \frac{B ds \cos s}{\sqrt{(B^2 \cos^2 s + 2CD)}}$ et $d\sigma = \frac{ds [B \cos s + \sqrt{(B^2 \cos^2 s + 2CD) }]}{\sqrt{(B^2 \cos^2 s + 2CD)}}$

Quibus valoribus pro b , $d\sigma$ et $1 + \kappa \cos \sigma$ substitutis

Tom. VI. Nou. Com. B b

aequa-

aequatio ex motu regulari deducta $d\zeta \sqrt{\frac{(B+C)a^2}{A^2 s^2}} = \frac{ds}{(1+k \cos s)^2}$
induct hanc formam :

$$\frac{(B+C)^2}{C^2} d\zeta \sqrt{\frac{C a^2}{A^2 s^2}} = \frac{(B+C)^2 ds [B \cos s + \sqrt{(B^2 \cos^2 s + CD)}]}{[C + B \cos s + \cos s \sqrt{(B^2 \cos^2 s + CD)}]^2 \sqrt{(B^2 \cos^2 s + CD)}}$$

quae multiplicata per $\frac{C}{(B+C)^2}$ eadem plane fit, quam ex
consideratione motus perturbati elicuimus.

SCHOLIUM 3.

30. Quem ad modum calculi etiam secundum no-
stras formulas facillimus euasisset, si vim perturbantem
 $\frac{A}{x^2}$, quia est reciproce, ut quadratum distantiae, statim
cum vi centrali $\frac{C}{x^2}$ coniunxisset, quo facto vires pertur-
bantes euasissent, motusque regularis sponte prodisset:
ita quoque si in aliis casibus vis perturbans M partem
contineat, quae fuerit quadrato distantiae reciproce pro-
portionalis, conueniet eam partem cum vi centrali con-
iungere, et reliquam partem solum in M relinquere; ita
ut vis M discrepantiam tantum vis secundum MC per-
turbantis a ratione reciproca duplicata distantiarum com-
plectatur. Hoc etiam latius patet atque ad vires appli-
cari potest, quae ab hac ratione prorsus diuersae videntur:
Sic si vis perturbans secundum directionem MC fuerit

$$= \frac{B}{x^2} = \frac{B}{b^2} (1 + k \cos s)^2 \text{ ea in huiusmodi duas partes}$$

$$\frac{E}{b^2} (1 + k \cos s)^2 \text{ et } \frac{E}{b^2} (1 + k \cos s)^2 - \frac{E}{b^2} (1 + k \cos s)^2,$$

$$\text{existente } E = \frac{Bbb}{b^2}. \text{ Tum igitur pro } C \text{ scribi debet}$$

$$C + E, \text{ et litterae } M \text{ tribuatur valor } \frac{E}{b^2} (1 + k \cos s)^2$$

$[(1 + k \cos s)^2]$

$[(1+k\cos.s)^{n-2}-1]$; qui si excentricitas k non sit notabilis, multo erit minor, atque minores aberrationes a motu regulari producere reperietur. Ita si excentricitas k fuerit valde parua, erit $M = \frac{(n-2)E k \cos.s}{b^2} (1+k\cos.s)^2$ et scripto C pro $C+E$ breuitatis ergo, posito $N=0$, erit b quantitas constans et

$$dk = -\frac{(n-2)E k d\zeta \sin.s \cos.s}{b^2} (1+k\cos.s)^2 \sqrt{\frac{a^2 b}{\Delta C}}$$

$$d\omega = \frac{(n-2)E d\zeta \cos.s^2}{b^2} (1+k\cos.s)^2 \sqrt{\frac{a^2 b}{\Delta C}}$$

$$ds = d\zeta (1+k\cos.s)^2 \sqrt{\frac{C a^2}{\Delta b^2}} - \frac{(n-2)E d\zeta \cos.s^2}{b^2} (1+k\cos.s)^2 \sqrt{\frac{a^2 b}{\Delta C}}$$

Hinc ergo elicitur $\frac{dk}{d\omega} = -\frac{k \sin.s}{\cos.s}$, et

$$\frac{ds}{dk} = \frac{-C}{(n-2)E k \sin.s \cos.s} + \frac{\cos.s}{k \sin.s}, \text{ vnde fit}$$

$$\frac{C dk}{(n-2)E} = dk \cos.s^2 - k ds \sin.s \cos.s, \text{ quae per } k \text{ multiplicata et integrata dat } \frac{C k k}{(n-2)E} = k k \cos.s^2 + \frac{D}{(n-2)E}, \text{ vnde}$$

$$\text{obtinetur } k = \sqrt{\frac{D}{C - (n-2)E \cos.s^2}}. \text{ Cum iam fit}$$

$$\frac{ds}{d\omega} = \frac{C}{(n-2)E \cos.s^2} - 1, \text{ erit } d\omega = \frac{(n-2)E ds \cos.s^2}{C - (n-2)E \cos.s^2} \text{ seu}$$

$$d\omega + ds = \frac{+C ds}{C - (n-2)E \cos.s^2} = \frac{+C ds}{C - \frac{1}{2}(n-2)E - \frac{1}{2}(n-2)E \cos.s^2}$$

At huius formulae integrale, quatenus a solo angulo s pendet, erit $+s \sqrt{\frac{C}{C - (n-2)E}}$; ideoque $\omega = s(-1 + \sqrt{\frac{C}{C - (n-2)E}})$, neglectis inaequalitatibus, quae a sinibus angulorum $2s$, $4s$, etc. pendunt: qui sinus, cum euanescant, si $s=0$, $s=90$, $s=180$, etc. patet singulis reuolutionibus anomaliae, lineam absidum promoueri angulo

$$= \frac{\sqrt{C} - \sqrt{C - (n-2)E}}{\sqrt{C - (n-2)E}} 360^\circ. \text{ Quare si corpus ad centrum}$$

$$C \text{ attrahatur vi } = \frac{C}{x x} + \frac{B}{x^n}, \text{ fueritque excentricitas}$$

quam minima, si semi-latus rectum orbitae, seu quod hoc
B b 2
casu

casu eodem redit, distantia corporis media ponatur = b ,
 fiatque $E = \frac{B}{b^{n-2}}$; linea absidum orbitae, in qua corpus
 mouebitur, erit mobilis atque singulis reuolutionibus ano-
 maliae conficiet angulum = $\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(n-2)E}{C+E}}} - 1 \right] 360^\circ$

quia pro C scribi oportet $C + E$. Vnde patet, si sit
 $n = 2$, lineam absidum quiescere, progredi vero, si $n - 2 > 0$,
 et regredi, si $n - 2 < 0$ vel si $n < 2$. Pro motu autem
 ipso definiendo, quo corpus in hac orbita mutabili pro-
 feretur, peruenitur ad hanc aequationem:

$$d\zeta \sqrt{\frac{C \cos^2 \zeta}{A \sin^2 \zeta}} = \frac{C ds}{[\sqrt{(C - (n-2)E \cos^2 \zeta) + \cos^2 \zeta D}]^2}$$

cuius resolutio non est difficilis.

31. Hanc autem methodum effectus virium per-
 turbantium definiendi eum potissimum in finem excogi-
 tati, vt eius opera perturbationes, quae in motibus plane-
 tarum ob eorum actionem mutuam euenire obseruantur,
 commodius indagari atque assignari queant. Hinc igitur
 quantum motus Saturni a Ioue, et motus Iouis a vi Sa-
 turni perturbetur, meliori cum successu inuestigari pote-
 rit, quam aliis methodis, quae adhuc adhiberi sunt so-
 litae. Deinde si vis Iouis ad Saturnum vsque porrigitur,
 nullum est dubium, quin ab ea motus Martis, et Ter-
 rae, ac fortasse etiam inferiorum planetarum non nihil af-
 ficiatur. Denique etiam inuestigatio inaequalitatum mo-
 tus Lunae hac methodo non parum promoueri videtur,
 quia vires Solis partim ad vim regularem, partim ad
 vires perturbantes M et N commode reuocare licet. Sed
 vnaquaeque harum inuestigationum tantum est momenti,
 vt peculiarem tractationem mereatur. Quam ob rem nunc
 quidem in ipsa methodi explicatione acquiesco.

PHYSICO-

**PHYSICO-
MATHEMATICA.**

B b 3

RESO,

RESOLUTIONES PROBLEMATVM
SPECTANTIVM AD
ARCHITECTVRAM CIVILEM.

AUCTORE
GEORG. WOLFFG. KRAFFTIO.

§. 1.

Cognitionem rerum mathematicam vti requirit *Philosophia Theoretica*, veri inveniendi studio occupata: ita eandem deposcit sibi *Philosophia* quoque *Practica*, salutis nostrae communis amore incensa. Atque haec quidem hunc summum intelligentiae gradum eo magis necessarium sibi habet, quo facilius est speculari et cogitare de re aliqua generaliter, sine mensuris ac indeterminate: ut vero agamus, ut exerceamus operam quandam, sine mensuris, sine omnimoda determinatione, fieri omnino nequit. Nemini ergo obscurum esse poterit, *Architecturam Civilem*, hoc est, *Philosophiam Practicam* in aedificando, nobilissimam, dignitatisque humanae convenientissimam, scientiam cognitione rerum suarum mathematica quam plurimum adiuuari; immo eadem, si sapiens esse debeat, carere nullo modo posse. Fecit hoc, ut cogitarem iam diu de *problematibus Architecturae civilis* omnibus illis, quae, a variis Auctoribus pertractata, Geometricam arundinem admoueri sibi patiuntur, in vnum fasciculum colligendis, atque

atque accurate excutiendis, vt publicae vtilitati pro viribus profim, sed propriae etiam delectationi, quae ad labores maxime nos inuitat, indulgerem.

§. II. Primo quidem campum integrum hic nobis sperit constructio et aedificatio concamerationum architectonicarum, quae *Fornices*, *Voutes* gallice, appellari solent; aut etiam *Arcus*; vel a *Vitruuio*, lib. vii. cap. 3, *Camerae*; quibus omnibus nihil aliud indigitatur, quam lacunar incuruatum, partes aedificii tegens. De his Cameris paucissima tradit *Vitruuius*, nempe haec lib. vi. cap. 11, *sin hypogea, concamerationesque insituentur: fundationes eorum fieri debent crassiores; suadetque ibidem, vt directiones lapidum, fornicem constituentium, tendant ad commune centrum arcus medium; vid. Blondel, Cours d'Architecture, P. 1v. lib. 1. cap. 2, p. 316; Agnouit porro, in loco modo allegato, fornicationes leuare onus parietum; adeoque, si lacunar fenestrae, aut portae, oneri imposito impar sit ferendo, illud esse incuruandum; vel constitui debere fornicem supra lacunar; aut etiam muniendum esse illud cantheriis; in angulum coeuntibus, quos vocat *subcuneatos postes*; de quo vid. *Perraltum* in versione Gallica, et notis ad loc. cit. Quibus deinde commentatores *Vitruuii* adiecerunt diuisionem camerarum in *testudines*, *fornices*, et *hemisphaeria*; de quibus vid. *Philander*, in notis ad *Vitruuii* lib. vii. cap. 3. Eadem hac Camerarum firmitate *similis* loco vsus est *Seneca*, *Epist.* 95, p. m. 447, dicens: *societas nostra lapidum fornicationi simillima est; quae casura, nisi inuicem obstarent, hoc ipso sustinetur.**

§. III.

§. III. Ut igitur, quae recentiori aetate de firmitate
 camerarum per Mathesin stabilita sunt, connectamus,
 sequenti modo rem hanc aggrediamur. Ante omnia **TAB. IV.**
 praemittamus definitiones. Sit fornix **A B C D**, **vo-** **Fig. 1.**
 cantur lapides, ex quibus ille est compositus, *cunei*,
 quia cunei formam habent, velati **E F G H**; *voussoir*
 Gallice. Lineae rectae, iuxta quas sibi incumbunt cunei,
F H, **E G**, sunt *lecti iuncturae*; *conclusurae Vitruvii*,
les lits, *les joints*; cuneus omnium supremus **BCNO**,
 est *tholus*, *umbilicus*, *la clef de la voute*, *clavis*;
 columnae, quibus arcus insistit, **K A Q**, **D P R**,
 appellantur *moles*, *pilae*, *pedroits*; arcus interior
A B C D est *concauitas*, *l'intrados*; arcus exterior **K L M P**,
 si adfuerit, est *convexitas*, *l'extrados*; basis pi-
 lae **DP**, cui impositus est primus cuneus **FHPD**, di-
 citur *puluinar*, *couffinet*, *imposse*.

§. IV. Supponunt autem Auctores optimi omnes,
 lectos singulos conuergere in centrum medium **S**, et
 arcui esse perpendiculares, quod *Vitruvius* etiam suadet;
 (§. II.) nec immerito, quia sic et venustati consulitur,
 et commoditati tam futurae dimensionis Geometricae,
 quam constructionis, cuneorum. Deinde assumitur, lectos
 omnes habere superficies perfecte politas sibi commissas,
 ita ut vnus cuneus supra alterum perfecte lubricum labi
 possit, et descendere sine omni resistentia. Si enim fir-
 mitas conciliata fuerit cuneis talibus politissimis ex eorun-
 dem figura et pondere; tum certa illa maior adhuc erit,
 si calce, aut caemento, intermixtis sibi mutuo adhuc ad-
 haerescant. Tertio etiam plerumque eligi solent latitu-
 dines

202 RESOLUTIONES PROBLEMATVM

dines cuneorum E F, omnes inter se aequales. In arcubus quidem Toscanis eadem inaequales fecit *Vignola*, notante *Blondello*, *Cours d'Architecture*, p. 329, sed ingrata id est visui.

Tab. IV. §. V. Ponamus nunc cavitatem arcus esse A D F, ac alicuius cunei conclusuram continuatam in centrata esse M C, cui incumbat cuneus, tanquam punctum consideratus ponderis absoluti p . Evidens est ad descensum suum mihi hunc cuneum in hoc lecto iuxta rectam M C, eodem modo ac si plano inclinato M C, ad horizontem A G, cuius altitudo sit $P M = u$, impositus esset. Conabitur itaque descendere pondere non absoluto, sed respectivo tantum, quod est $= \frac{p u}{x c}$; hinc etiam tholus ipse, si cadere posset, caderet pondere suo aliquo tantum respectivo. Ex quo facile patet, si in arcu semicirculari cunei omnes inter se sint aequales, aut eiusdem ponderis, tum superiorem quemvis maiori pondere respectivo descensurum esse, quia altiori semper incumbit plano inclinato; erit enim hac ratione, ob M C, et p , constantes, pondus respectivum quodvis uti u ; talis itaque fornix ipse per suam structuram inaequaliter se sustinebit, et maxime debilis erit in vertice suo circa tholum. Ut igitur in omnibus cuneis idem sit conatus descendendi, vel idem pondus respectivum: requiritur ut superior quivis inferiore suo teneat pondus absolutum minus. Si enim alicubi cuneus quis maiorem habeat conatum descendendi, quam caeteri, is quidem caemento interposito impeditur, sed successu temporis ibi fornix fatiscit. Quare tales fornices semicirculares, in quibus cunei omnes sunt aequales, et eiusdem ponderis, firmi non sunt.

§. VII

§. VI. Cum ergo requiramus fornicem in singulis punctis suis aequè firmum, ac inde durabilem: efficiendum est, ut singula ipsius puncta habeant vim descendendi, in suis planis inclinatis, eandem, aut pondus respectuum constans; utque adeo in hoc versus centrum delabendi conatu nullus cuneorum alterum superet. In quem finem optime dicit *Fentenellius in Histoire des Memoires de Paris, 1729.* „tous les vouffoirs, qui composent une voute, sont des especes de coins; ils tendent tous à tomber, & il faut qu'aucun ne tombe; il faut de plus, afin que la voute soit la plus durable qu'il se puisse, qu'ils tendent tous avec une force égale à tomber; autrement l'endroit, où il se trouveroit plus de cette force, viendroit à s'abaisser peu à peu.

§. VII. Si nunc ponamus ergo in arcu architonico singulorum punctorum pondus respectuum constans: erit $\frac{p}{u} = x$, (§. V.) aut $p = \frac{xu}{u}$; hoc est, pondera absoluta cuneorum debent esse in ratione directa ipsarum MC , atque inversa ipsarum PM , ut exinde omnium nascatur dein pondus respectuum idem. Sit porro altitudo arcus $CD = a$, abscissa concavitas $DF = x$, semiapplicata $FM = CP = y$, erit $u = a - x$; quo substituto prodit cuiusvis cunei pondus absolutum

$$p = \frac{y^2 + a - x}{a - x}$$

§. VIII. Ducatur concavitas tangens DE in vertice arcus D , ad DC nempe normalis, et directio lecti in

C c 2

M,

204 RESOLUTIONES PROBLEMATVM

M, quae est MC, producta occurrat tangenti hinc in E; atque ob similia triangula PMC, DCE, erit $\frac{MC}{r} = \frac{CE}{CD}$; unde praecedens mensura ponderum absolutorum hoc etiam exprimi potest modo, ut illa esse debeant in ratione $\frac{CE}{CD}$.

§. IX. Ex puncto N ducatur alia directio lecti alicuius in centrum fornicis BNC, et vocetur angulus BCD sinus m , cosinus n , posito sinu toto $= 1$; atque erit $1 : CB = m : BD$, unde $CB = \frac{BD}{m}$; sitque etiam ND dimidius tholus, et cuneorum singulorum iuncturae in centrum C continuatae, faciant angulos aequales MCN; atque erit nunc angulus MCN duplus ipsius NCD; et sinus MCN $= 2mn$; ex elementis Trigonometriae. Habetur hinc $2mn : BE = n : CE = \frac{BE}{2m}$. Cum adeo esse debeat pondus absolutum in N ad pondus absolutum in M $= \frac{CB}{CD} : \frac{CE}{CD} = CB : CE$. (§ VIII.), erunt eadem pondera inter se uti $\frac{BD}{m} : \frac{BE}{2m} = BD : \frac{BE}{2} = 2BD : BE = BI : BE$, si NDH fuerit tholus integer, et NCH ipsius angulus. Idem ratiocinium extenditur ad omnes reliquos cuneos, si horum singulorum anguli in centro C fuerint aequales, quare patet exinde Theorema De la Hirii, *Traité de Méchanique*, Prop. cxxv, pondera cuneorum absoluta esse in ratione differentiarum tangentium angulorum, quos faciunt lecti continuati in centrum, qui nempe anguli omnes supponuntur inter se sequales. Quod vero Theorema De la Hirius de solo circulo, et longe diuersa ab hac nostra methodo demonstrauit. Sed memorabile fuit hoc inuentum, cum inde

a Vi-

• *Vitruvius* usque ad hoc tempus Architecti in condendis fornicibus nihil certi haberent, quod sequerentur, sed pal- pando tantum cuneos formarent, testante *Fontenellio in Mem. de l'Acad. 1704. p. 95.*

§. X. Apparet hinc, pondus absolutum primi cunei TAB. IV.
FDHP debere esse infinite magnum. Debet enim esse $= \frac{MC}{u}$, Fig. 1.
(§. VII.); hoc autem casu est $u = 0$, ergo $p = \frac{MC}{0} = \infty$.

Nam quaecunque pondus finitum habeat cuneus hic primus, minima vis, premens ipsum secundum directionem lecto- suo normalem, a cuneo superiori proximo proficiscens, repellat ipsum a centro, et fornicem turbabit. In hac igitur hypothesi, in qua cunei sunt perfecte lubrivi, pon- dus valde magnum debet tribui cuneo primo, et sequen- tibus proxime ipsum, ut vim tholi sustinere queant. Quia autem cunei interposita calce ununtur, adeoque multum absunt a perfecta lubricitate; hinc regula haec, cum in rigore observari non possit: nec etiam debet.

§. XI. Haec vero regula de pondere infinite magno cunei primi, in eo tantum casu valet, in quo pulvinar est horizontale, atque simul, vti diximus, perfecte po- litum. Cuius rei rationem optime explicat iterum *Fontenellius in Mem. de l'Acad. de Paris, 1704, p. 94*, hisce verbis: „ tous les vouffoirs, hormis le dernier, ne „ pourroient laisser tomber un autre sans s'élever, à quelle „ elevation ils résistent; mais le dernier (*nobis primus*) „ peut laisser tomber un autre sans s'élever, en glissant ho- „ rizontalement, au quel mouvement les poids, tant qu'ils „ sont finis, n'apportent aucune résistance, & ils ne com-
C c. 3 „ men-

„mencent à y en apporter une finie, que quand on les
 „conçoit infinis. „ Sin autem pulvinar ipsum sit inclinatum
 ad horizontem: tam primus cuneus requirit pondus
 absolutum finitum, traditis reglis conforme; quod pri-
 mus annotavit Coupletus, *Memoires de l'Acad. des Scien-
 ces* 1729. p. 83.

§. XII. Ex his perspicitur, nullam rite constitui
 posse fornixem, aut arcum architectonicum, in quo cunei
 omnes idem teneant pondus absolutum. Quoniam curva

generaliter est $p = \frac{\sqrt{(y^2 + a - x)}}{a - x}$, (§. VII.);

ponatur $\frac{\sqrt{(y^2 + a - x)}}{a - x} = x$, vnde deducitur $y = 0$,
 quod indicat, nullam curvam huic requisito efficiendo dari;
 sed solos lapides quadratos sibi verticaliter super impo-
 sitos hoc efficere posse; quod alias patet.

§. XIII. Colligitur exinde porro, nullam lineam
 curvam esse, quae non apta sit concamerationi extruen-
 dae firmissimae, nullamque alteri in hoc negotio prae-
 ferri posse, modo diversum etiam, pro cuiuslibet curvae
 natura, cuneis singulis tribuatur pondus absolutum. Sit ex-
 gr. parabola, cuius parameter $4a$, efficietur ex illa
 fornix absolutissimus, si cuneorum pondera absoluta sint
 ubique uti $\frac{a+x}{a-x}$, et pondus tholi $= x$; Cum enim
 in hac curva sit $4ax = y^2$, erit, hoc substituendo
 in aequatione superiori (§. VII.) $p = \frac{\sqrt{(4ax + a^2 - 2ax + x^2)}}{a - x}$
 $= \frac{a+x}{a-x}$; atque similiter in omnibus aliis curvis pon-
 dera cuneorum erunt determinanda. Sine sufficiente ra-
 tione

TAB. IV.

Fig. 3.

tene igitur statuerunt: ellipsin solam construendis fornibus aptam, nisi venustatis causa hoc fecerunt, *Serlius Architect. l. 1, c. 1*; *Alb. Durerus*, atque cum hoc *Dan. Hartmannus, Architect. f. 7*. Si iusta etiam ponderum absolutorum assumatur mensura, conueniens semper inuenietur curua, ad cuius ductam fornix extruendus est, vt sit firmissimus.

§. XIV. Diximus paullo ante, (§. XII.) nullum dari fornitem, aequabiliter firmum, in quo puncta singula idem teneant pondus absolutum; aut qui vbique eiusdem sit crassitiei, adeoque teneat conuexitatem concauitati parallelam. Sed contrarium afferunt duo Viri egregii, putantes fieri id posse; si fornix extruatur ad curuitatem illius lineae, quae *catenaria* vocatur, atque illa est, quam assumit libere catena, aequae grauis vbique, ac ex vtraque sua extremitate firmata deorsum pendens. Cur itaque dubio nobis est occurrendum. Primus inventor huius praxeos est *Dav. Gregorius*, qui in *demonstrationibus de Catenaria, Act. Erud. Lips. a. 1699, m. Febr.* dicit: catenam in plano verticali, sed situ inverso positam; figuram suam seruare, nec decidere, adeoque fornitem facere. Hinc ad talem usum hanc curuam commendat, atque, cur nihilominus etiam aliae curuae reddant stabiles fornices, causam in eo sitam esse putat, quod hae curuae, in latitudine fornium, *catenariam* in se includant et semper comprehendant.

§. XV. Sed mirum videri potest, quae via ad hanc consequentiam duxerit, vt quae catena deorsum
pen-

208 RESOLUTIONES PROBLEMATVM

pendens in aequilibrio manet: eadem quoque sursum versa idem faciat. Dum enim deorsum pendet talis catena, vtrinque clauo affixa: pondusculis ipsius tensionem efficientibus deorsum, et clavis renitentibus, aequilibrium tandem in certa aliqua curuitate catenae consistit; quae vero omnia cessant, cum catenula haec ita incuruata sursum iam erigitur; pondera enim non tendunt eam sursum, vti antea deorsum; et ratiocinium allatum videtur simile esse illius, quo quis probaret, pendulum in aequilibrio situm esse posse etiam tum, cum pondusculum ex situ verticali deorsum tendente transfertur in situm eundem sed sursum tendentem.

§. XVI. Alter, qui denuo in hanc de catenaria incidit opinionem, est *Couplet*, *Mem. de l'Acad. des Sciences de Paris*, 1729, pag. 87, *propos. IV*; hanc ad fornices aptitudinem huic curuae ex eo adhibens, quoniam Theorema *Hirianum* supra allatum, (§. 12.) in eadem locum inueniat. Sed, praeterquam quod ea falsa suppositione hoc demonstrat auctor, nempe posse intra catenariam punctum aliquod vnicum, ex quo educi possint perpendiculares in singulas chordas, et in paruas eiusdem, quae scilicet proprietas soli circulo convenit, et nulli alii praeterea curuae: idem Theorema *Hirianum* ad omnes curuas quadrat; (§. 12.) quo palam est, catenariam ad fornices competentiorem non esse, quam aliam lineam inflexam, quae hanc sententiam *Coupleti* optime expressit *Fontanelle*, in *Histoire de Memoires* 1729, dicendo: "Mr. Couplet a pensé, qu'une voûte, qui auroit la courbure de la chaînette, pour-

„ pourroit avoir par cette nature tous ses vouffoirs ega-
 „ lement pesans , & seroit par consequent d'une epais-
 „ seur uniforme „ ; sed nihil contra monuit. Nouissime
 etiam catenariam pro aedificandis fornicibus commenda-
 vit in *Commentariis Academiae Scient. Suevicæ* , *tomo*
IV. p. 138 , *Clariff. Polhemius*. Omnia vero haec eo
 intelligenda sunt , vt catenaria sola , per se considerata ,
 fornicem efficere stabilem nequeat , quia , vt linea , nul-
 lam tenet latitudinem , in qua cunei , ad fornicem necessa-
 rii , et introlabi conantes , concipi possent. Si vero capitur
 catenaria , eaque ad altitudinem aliquam circumdetur
 alia curua ipsi parallela , vt priori huic requisito locus
 relinquatur : tum demum catenaria , cum alia sibi curua
 parallela , fornicem formare poterit vbiuis aequae den-
 sum , et perfecte firmum ; non quidem ex ea causa ,
 quam hic solam assumimus , vt singularum in ea par-
 ticularum idem sit pondus respectuum , sed ex alia ,
 nempe quod ex intro cessione hac cuneorum , aequae
 ponderantium , cuneus superior quavis tanta vi sursum
 premitur , quanta ipse deorsum premit sibi subiectum ;
 in qua hypothese fornicem a catenaria pendere primus
 distincte ostendit *Iac. Bernoullius* , in *Operum tomo II. pag.*
1119 , cuius methodum alia occasione explicabo.

§. XVII. Cum itaque nulla curuarum alteri pas-
 sam praeripiat in constituendo fornice , omnes adeoque
 ad hunc usum pariter sint aptae (§. VII.) : recte fe-
 cerunt superioris aetatis Architecti quidam celebres , qui
 praeter circulares et ellipticos fornicibus alias quoque ha-
 rum formas assumpserunt , quas nempe aspectui gratas

Tom. VI. Nov. Com.

D d

esse

esse iudicarunt; sed in eo defecerunt a veritate, quod cuique tali curvae, oculis gratæ, suam certam et propriam rationem in ponderibus cuneorum non assignauerint. Ita recenset *De la Hire* in *Mem. de l'Acad. des Sciences de Paris* 1702, quosdam hanc tribuisse formam

- TAB. IV. fornicibus, quæ ex sequenti constructione patefcet. Sit
 Fig. 4. AB altitudo fornicis, et recta BD, priori ad angulum rectum iuncta, semilattitudo eiusdem; debet fornix tangere has rectas in A & D; præter ea verò diuidatur utraque in eundem numerum partium aequalium prælubitu, tum iungantur puncta EF, GH, IK, et describatur curva, quæ tangat alicubi omnes has rectas EF, GH, IK, etc.

§. XVIII. Vt sciatur, qualis sit hæc curva, ita ducta, quam *de la Hire* fatetur ab initio habuisse præellipsi; ducit idem hic ex quocunque puncto M rectas ML et MN, perpendiculares ad BD et BA, asseritque, patere ex regula de maximis et minimis, quod BD, BF, BL et BA, BE, BN, sint in proportione continua; ex qua proprietate naturam curvæ dedit. Cum vero vix perspici possit, quomodo de hac proportione constet: melius soluitur problema hoc per methodum *Hospitalii*, in *Analyse des infiniment petits*, §. 146, de inveniendâ curvâ tangente infinite multas rectas, certa lege ductas; quod hac ratione præstabimus. Sit pro tangente EF, $DL = y$, $LM = x$, $BD = a$, $BA = b$; et præter ea $BE = t$, $BF = u$; et quia, per constructionem, AE similis est pars ipsius AB, qualis est BF ipsius BD: erit $AE (b - t) : AB(b) = BF(u) : BD$

BD(a), hinc $u = a - \frac{at}{b}$; (A) et $FD = BD - BF = a - u = \frac{at}{b}$. Porro est FL ($y - \frac{at}{b}$): LM(x) \doteq FB(u): BE(t), aut $ux = ty - \frac{at^2}{b}$ (B). Nunc considerandum est, esse DL, LM, aut y et x , constantes, dum BF, BE, u et t , incrementum infinite paruum assumunt; hinc aequatio modo inuenta differentietur positis x et y , constantibus, atque orietur $xdu = ydt - \frac{2atdt}{b}$, aut, ob $du = -\frac{at}{b}$ (A); erit facta substitutione, $t = \frac{ax + by}{2a}$; et $u = a - \frac{ax + by}{2b}$ (A). Vnde haec iterum subrogando in (B), habebitur haec aequatio: $ax - \frac{ax^2 + bxy}{2b} = \frac{axy + by^2}{2a} - \frac{ax^2 + 2abxy + b^2y^2}{4ab}$; quae aequatio reducitur ad hanc, $\frac{ax^2 + bxy}{2b} = 4a^2bx$, quae eadem quoque est cum Hiriana, atque secundum regulas ordinarias Locorum Geometricorum est ad Parabolam Apollonianam; quam sequenti modo construit *de la Hire*: Ducatur AD, et bifecetur in O, erit ducta BO diameter Parabolae; huic BO fit normalis BP; et t ad hanc normalis AP; fiat AN = AP, erit N focus Parabolae, et ducta RN, normalis itidem ad BP, erit axis curvae; qua RN bisecta in f , habebitur in f vertex eiusdem. Haec itaque curua parabolica, quamvis pluribus placeat architectis, reiicitur a *de la Hire*, ex ea iusta causa, quod duplex fracturae species, apud f in vertice Parabolae et in D transitu vtriusque parabolae ingrata visui futura est, qualem inflexionem visibilem Galli vocant *un parret*, quasi poplitem, aut poplitis flexuram; vnde his parabolicis fornicibus praeferendi sunt elliptici, qui tali poplite visum non laedunt.

TAB. IV.
Fig. 5.

242 RESOLUTIONES PROBLEMATVM

§. XIX. Ceterum ex hac nostra soluendi metho-
do praecedens problema, illud *de la Hirii* assertum,
modo memoratum (§. XVIII.), statim patescit. Inue-
nimus enim $t = \frac{ax+by}{2a}$, hoc est $2at = ax + by$; si
igitur in aequatione curvae inuenta hic valor ipsius ax
TAB. IV. $+by$ substituatur: emergit $4a^2t^2 = 4a^2bx$, aut $t^2 = bx$,
Fig. 4. vel $b:t = t:x$, hoc est $BA:BE = BE:BN$; unde
BA, BE, BN, sunt in proportione Geometrica conti-
nua; et similiter quoque BD, BF, BL.

§. XX. Quoniam ergo ducta AD, et bisecta ea
Fig. 5. in O, recta BO est diameter parabolae, ob tangentes
DB, AB, in eodem puncto B concurrentes; *per con-
uersam propof. 30, lib. II. Conicor. Apollanii*; hinc ex
construptione Hiriana (§. XVIII.) aequatio ad axem huius
parabolae ita eruitur. Ducatur ad axem TN perpen-
dicularis AQ, et alia arbitraria VM, sintque $SM = x$,
 $MV = y$, $AD = \sqrt{a^2 + b^2} = m$; atque erit, *per Tri-
gonometriae planae regulas* $\sin. D = \frac{b}{m}$, $\cos. D = \frac{a}{m}$, hinc
 $\sin. 2D = \frac{2ab}{m^2}$, $\cos. 2D = \frac{a^2 - b^2}{m^2}$,posito sinu toto = 1.
Erit etiam ex construptione sinus totus (1): AB (b) =
 $\sin. PBA \left(\frac{b}{m} \right)$; $PA \left(\frac{b^2}{m} \right) = AN = TN$; sunt enim trian-
gula BCD, BOA, TNA, aequicrura, ob tres lineas ae-
quales OA, OB, OD, quia ex O per angulum re-
ctum B semicirculus describi potest, et RN parallelam
ipfi BO. Iam in triangulo rectangulo AQN est sinus
totus (1): $AN \left(\frac{b^2}{m} \right) = \sin. N \left(\frac{2ab}{m^2} \right)$; $AQ \left(\frac{2ab^2}{m^2} \right)$;
est enim angulus $N = BOA = 2D$; porro est sinus to-
tus (1): $AN \left(\frac{b^2}{m} \right) = \cos. N \left(\frac{a^2 - b^2}{m^2} \right)$; $QN \left(\frac{a^2 - b^2}{m^2} \right) b^2$,
hinc

AD ARCHITECTURAM CIVILEM 233

hinc $TQ = TN - QN = \frac{b^2}{m} - \frac{a \cdot a - b \cdot b \cdot b^2}{m^3} = \frac{2b^4}{m^3}$. Sed est, ob tangentem AT, subtangens TQ, hinc $TS = SQ = \frac{1}{2} TQ = \frac{b^4}{m^3}$, et ex natura parabolae fluit $AQ^2 (\frac{4a^2 b^6}{m^6}) : MV^2 (y^2) = SQ (\frac{b^4}{m^3}) : SM (x)$; vnde extremis et mediis in se multiplicatis, fit $\frac{4a^2 b^2}{m^3} x = y^2$, vnde patet, esse parametrum ad axem $= \frac{4a^2 b^2}{m^3} = 4SN$; et $SN = SQ + QN = \frac{a^2 b^2}{m^3}$, vti paullo ante etiam inuentum est. Est denique in triangulo rectangulo TQA, $\sin. ATQ (\frac{a}{m}) : AQ (\frac{2ab^3}{m^3}) = \sin. tot. (1) : AT (\frac{2b^2}{m^2})$, hinc $BT = b - \frac{2b^3}{m^2} = b (\frac{a^2 - b^2}{m^2})$; atque in triangulo BRT, habebitur haec analogia, $\sin. tot. (1) : BT (\frac{b \cdot a - b^2}{m^2}) \sin. T (\frac{a}{m}) : BR (\frac{a \cdot b \cdot a - b \cdot b}{m^3})$, quae est distantia axeos RN a diametro prius ducta BO. Aequatio autem ad diametrum BO facile habetur, ducta quavis EF parallela ad AD; est enim, ob DB, tangentem, BO subtangens, $= 2CO$, adeoque $CO = \frac{1}{2}BO = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}m$; vnde, ex natura parabolae, $AO^2 (\frac{1}{4}m^2) : EG^2 = CO (\frac{1}{2}m) : CG$, aut vero $m \cdot CG = EG^2$; vnde patet, parametrum ad hanc diametrum pertinentem esse $m = AD$.

TAB. IV.
Fig. 6.

§. XXI. Maxime autem in hoc negotio confugerunt ad arcs circulares Architecti, eo modo inter se combinandos, vt figuram ellipticam, oculo gratam referrent, poplite destitutam. Aptissimum quidem est, fornici tibuere formam circulem; quam in tres species distinxerunt. Si arcus contineat perfectum semicirculum; dicitur *semicircularis fornix*; un *arc en plein cintre*. Si minus contineat quam semicirculum, vocatur *arcus depressus*, un *arc surbaissé*;

214 RESOLUTIONES PROBLEMATVM

si vero plus contineat quam semicirculum, est *arcus exaltatus*, un *arc surbauffé*. Arcus igitur Semicircularis nullo deprauatur poplite, neque in puluinari, neque circa thalam, adeoque venustissimus omnium est. Cum vero quandoque suadeant circumstantiae, immo etiam venustas quibusdam postulare videatur, vt adhibeantur arcus depressi: hi certe sine visibili poplite in vtroque puluinari extrui nequeunt. Commode hic adhiberentur arcus semielliptici, qui nullos progignunt poplites: sed cum hi difficilis sint descriptionis, conuerterunt se artifices ad describendos arcus semiellipticis similes: sed ex aliquot arcibus circularibus compositos; quos *ouales* dicunt, *arcs à anse de panier*; eosque variis modis concinnare docet *Serlio* et alii; quorum est commodissimus,

Tab. IV. descriptus a *Blondelo Cours d'Architecture*, lib. IV, **Fig. 7.** *cap. 6*, sequens: sit latitudo fornicis AB , bisecetur illa in C , et hinc et inde capiantur aequales arbitrariae CD , CE , et super DE erigatur pro lubitu triangulum aequicrurum DFE , ductis rectis FDG , FEH ; tum centris D ac E , radiis DA , EB , describantur arcus circulares AG , BH ; centro denique F arcus circularis GH ; habebitur ita arcus, elliptici similis, sed re vera ex arcibus circularibus compositus, at omni poplite destitutus.

§. XXII. Tradita autem haec methodus non eo extensa est vsque, vt etiam altitudinem datam aliquam CI arcus requirat, sed solam latitudinem datam AB ; pro qua quidem hac restrictione solutionem etiam affert *Blondel*, l. c. sed sine demonstratione, et operosam
non

non nihil. Hinc sequenti consilio hoc problema aggres. TAB. IV.
 sus sum. Sint fornicis semilatio AC , alitudo CB datae. Fig. 8.
 Quoniam itaque poples euitandus est in puluinari apud
 A , arcus circularis AK centrum suum alicubi habere debet
 in recta AC , veluti in I . Ut poples absit in K , debent duo
 arculi contigui ibidem infinite parui habere communem
 tangentem; cum autem tangens puncti K in respectu
 ad arcum KA sit perpendicularis radio IK : talis etiam
 debet esse tangens similis in respectu ad arcum KB ,
 hoc est, arcus KB centrum suum habere debet in recta
 KIM protensa; vt effugiamus poplitem in B cum al-
 tera arcus medietate: requiritur centrum arcus KB quo-
 que in recta BC protensa; centrum ergo arcus KB
 nusquam esse potest, nisi in interfectione rectarum KI ,
 BC , productarum, hoc est in M ; requiritur itaque,
 vt sit $MK = MB$. Necessesse porro deinde est, vt duo
 radii IK et MK non nimium inter se differant lon-
 gitudine; alias aspectus enormiter laeditur, quod facili
 delineatione concipi potest. Quamuis enim arculi con-
 tigui etiam in hac circumstantia habeant communem tan-
 gentem: tamen curuitates vtriusque arcus AK et KB ,
 cuius curuitatis indices sunt radii IK et MK , subito et
 multum immutantur, si radii multum differant longitu-
 dine; quae ipsa subita mutatio animum spectatoris laedere
 magnopere solet. Similes porro regulae adhiberi debent
 pro euitando poplite in illis membris architectonicis
 omnibus, quae ex duobus circuli arcibus componuntur,
 qualia sunt *cymatium Lesbium*, *trochilus*, *simae*; immo
 etiam alia, veluti *torus*, et *apophygis*, in quibus effici
 debet

216 RESOLUTIONES PROBLEMATVM

debet, vt ne arcus vnus cum lineis rectis ingratam reddat inclinationem.

Tab. IV. §. XXIII. His itaque praesuppositis sint $CA = a$,
Fig. 8. $CB = b$, et differentia horum semiaxium $CA - CB = a - b = m$, qua describatur ex C quadrans circuli DE , et postea assumatur quelibet $DI = x$, et $EM = y$; atque erit $MB = b + m + y$, $AI = KI = a - m - x$, $CI = m + x$, $CM = m + y$, adeoque $MI = \sqrt{\left(\frac{m+x}{m+x} + \frac{m+y}{m+y}\right)}$, et hinc ob $MK = MB$, erit etiam $\sqrt{\left(\frac{m+x}{m+x} + \frac{m+y}{m+y}\right)} : + a - m - x = b + m + y$, aut vero $\sqrt{\left(\frac{m+x}{m+x} + \frac{m+y}{m+y}\right)} = m + x + y$; vnde producitur $2xy - m^2 = 0$, aut vero $y = \frac{m^2}{2x}$; quae facili constructione obtinetur, quaerendo nempe, arbitrarie assumpta, x , ad $2x$ et m tertiam continue proportionalem, quae deinde dabit centrum quaesitum M .

§. XXIV. Cum itaque hoc problema sit indeterminatum: eius aequatio localis est $xy - \frac{1}{2}m^2 = 0$, quae est ad Hyperbolam inter asymptotos. Axe igitur transverso $AB = 2m$ construatur Hyperbola aequilatera $HAKOBM$, eius ducantur asymptoti CG, CI, CN, CL , orthogonales, tum capsula quauis $CE = x$, erit normalis ad asymptotum hanc ducta $EF = y$. Ducta enim normali DA ad eandem asymptotum in verticem hyperbolae A , erit ex huius natura $CE \times EF = CD \times DA$; nec non $CD = DA$; ergo $CD = DA = \frac{m}{\sqrt{2}}$; consequenter $xy = \frac{m^2}{2}$, aut $xy - \frac{m^2}{2} = 0$.

§. XXV.

§. XXV. Considerandi autem hic occurrunt varii Tab. IV.
 casus, prouti x sit positiva aut negativa, hoc est in la- Fig. 10.
 tus CG , vel in oppositum CL cadat; ac etiam pro-
 uti eadem haec x alias atque alias teneat magnitudines.
 Sit ergo *Primo*, x positiva quaecunque DI ; inuenietur
 ex Hyperbola descripta, pro hac differentia semiaxium
 $CA - CB$, siue m , conueniens y etiam positiva $= EM$;
 ducatur itaque recta MIK , et centro I radio IA de-
 scribatur arcus circuli AK ; centro autem M , radio MK
 arcus KB , qui per punctum datum B transibit, et for-
 nicem oualem AKB absoluet sine omni poplite.

§. XXVI. *Secundo*; sit x negativa $= DI$; sed Tab. V.
 minor quam $\frac{1}{2}m$ inuenietur ex Hyperbola, applicata hac Fig. 1.
 x in partem oppositam CL , conueniens y etiam nega-
 tiua, hoc est ab E sursum ponenda EM . Ducta nunc
 IMK , describendus erit centro I , radio IA , arcus AK ,
 et deinde centro M , radio MK , arcus KB , qui per
 datum punctum B transibit quidem, sine poplite in K ,
 sed fornici construendo inutilis.

§. XXVII. *Tertio*, sit x negativa, sed $= \frac{1}{2}m$ Fig. 2.
 DI , inuenietur correspondens $-y$ ex Hyperbola $= -m$,
 $= EM$; hinc centro I , radio IA describendus erit ar-
 cus ALK , deinde centro M , quod coincidit cum C ,
 radio CK , arcus KB , iterum retrorsum ducendus, qui
 per datum punctum B rursus quidem transibit, sed for-
 nici constituenda est ineptus.

§. XXVIII. Quarto, si fuerit $x = -m$; erit ex aequatione locali, substituto hoc valore, $-my - \frac{1}{2}m^2 = 0$, aut vero $-m(y + \frac{1}{2}m) = 0$; quae aequatio supponit $-m = 0$, et $y + \frac{1}{2}m = 0$, siue $y = -\frac{1}{2}m = -\frac{1}{2}o$; hic adeoque casus supponit semiaxes inter se aequales; in alio autem casu solutionem problematis efficit impossibilem.

TAB. V. §. XXIX. Quinto, si fuerit x negativa, sed maior quam m , veluti DI ; erit y adhuc negativa $= EM$; et ducta IMK , describendus erit centro I , radio IA , arcus deorsum vergens AK ; deinde centro M , radio MK , arcus KLB sursum vergens, qui attinget quidem punctum datum B , sed rursus fornicem non efficiet, adeoque nostro instituto non erit accommodatus. Sexto denique si fuerit $x = 0$, correspondens y cadet in asymptotum ipsam, requiret adeoque magnitudinem infinitam;

TAB. IV. Fig. 10. tam; unde et hic casus est impossibilis; quod ita etiam ostenditur: requiritur ut sit $AI + IM = BC + CM$; sed si $x = 0$, est $AI = AD = BC$; ergo erit hoc casu $BC + IM = BC + CM$, aut $IM = CM$, hoc est quaelibet hypothensam aequalis suae catheto; quod est absurdum. (*Elem. Euclidis lib. I. prop. 18.*) Patet igitur ex his omnibus, nullum casum valere in nostro negotio alium, nisi eum solum, qui assumit x positivam.

§. XXX. In eodem hoc, quod modo pertractauimus, problemate prolixam admodum operam consumsit Pictus in *Commentariis Acad. Scient. Parisinae ad annum 1726*, p. 209; sed, quod fateri debemus, non adeo felici successu. Recenset, ac prolixè demonstrat, hanc con-

constructionem. Sit fornicis latitudo AB , altitudo ON ; Tab. V.
 fiat $BY = ON$, $OZ = \frac{1}{2} OY$; supra ZY descripto se- Fig. 4.
 micirculo ducatur ZT , cui aequalis reddatur ZD ; iam
 super $DE = 2 DO$ erigatur triangulum aequilaterum DCE ,
 eritque D et E centrum arcus AL et BM , intra AB ,
 et CL , CM , ducendi; C vero erit centrum arcus LMN .
 Sit pro hoc constructionis modo $OD = x$, $OA = a$, ON
 $= b$, ac $a - b = m$; eritque $DE = DC = 2x$; $OC =$
 $x\sqrt{3}$; $AD = LD = a - x$; nec non, ob $CL = CN$,
 habebitur $2x + a - x = x\sqrt{3} + b$, vnde deducitur
 $x = \frac{m}{\sqrt{3}-1}$, aut, si commodius videatur hoc uti valo-
 re, $x = \frac{m(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = m \frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$, qui expeditius ita
 potest construi. Fig. 5. Fiant OR , OQ , OP , aequales sin-
 gulae $\frac{1}{2} m$, et super PR erigatur triangulum aequilate-
 rum PSR , erit $SQ = x$. Habebitur enim sic OS
 $= \sqrt{m^2 - \frac{1}{4}m^2} = \frac{m\sqrt{3}}{2}$, et consequenter $SQ = \frac{m\sqrt{3}}{2}$
 $+ \frac{m}{2} = \frac{m(\sqrt{3}+1)}{2}$. Haec autem constructio arcus,
 valde a *Pitoto* depraedicata, cum sine necessitate supponit trian-
 gulum DEC aequilaterum, quod *Blondellus* multo melius
 aequicrurum assumit (§. XXI.), id incommodi secum
 fert, ut in arcibus valde depresso circa L et M in-
 grati poplites orientur, quia tum radii LD , LC , ni-
 mium inter se differunt longitudine, quod supra sollicite
 euitandum esse vidimus (§. XXII.). Est enim in hac so-
 lutione differentia radiorum $DC = 2x = \frac{2m}{\sqrt{3}-1} = \frac{200m}{78}$
 $= 2\frac{5}{13}m$, aut fere aequalis $3m$; quo maior itaque
 adest differentia semiaxium m , eo maior etiam aderit
 differentia radiorum DC .

§. XXXI. Cum igitur ex regula Pitoti differentia radorum constans sit, neque minimum quod admittat: videamus, qualis optio in nostra regula sit instituenda, vt differentia radorum, pro quibuslibet semiaxibus datis, fiat minima, ac inde efficiatur arcus omnium possibilium aspectui gratissimus. Est autem (§. XXIII.) dif-

TAB. IV.

Fig. 8.

ferentia radorum $MI = \sqrt{(m^2 + 2mx + x^2 + m^2 + 2my + y^2)} = \sqrt{(2m^2 + 2mx + x^2 + 2m^2 + 2my + y^2)}$, et $y = \frac{m^2}{x}$. Vt igitur MI fiat omnium possibilium minima, erit ipsius differentiale $\frac{m dx + x dx + m dy + y dy}{\sqrt{(2m^2 + 2mx + x^2 + 2m^2 + 2my + y^2)}}$, aut vero $m dx + x dx + m dy + y dy = 0$. Est autem simul $dy = -\frac{m^2 dx}{x^2}$, et $y dy = -\frac{m^2 dx}{x}$; quibus subrogatis oritur x , quae differentiam radorum MI minimam reddit, elicienda ex hac aequatione, $x^2 + mx^2 - \frac{1}{2}m^2 x - \frac{1}{2}m^2 = 0$.

TAB. V.

Fig. 6.

§. XXXII. Huius aequationis incognita x ita eruitur. Construaturs Parabola DAM, cuius parameter = m , differentiae semiaxium fornici; in hae capiatur $DE = \frac{11m}{16}$, et ad hanc perpendicularis $EC = \frac{5m}{16}$; centro hoc C, et radio $CM = \frac{m\sqrt{165}}{16}$, describatur circulus, secans parabolam in m et M; tum capiatur $DG = \frac{m}{16}$, eritque sic, ex natura parabolae, $GA = \frac{m}{7}$; ex A ducatur AP, parallela axi parabolae, et ad hanc AP demittantur ex M et m perpendiculares MP, mp , erunt hae aequales, et PM, aut pm , = x . Ponatur enim $AP = y$; atque erit $GE = DE - DG = \frac{5m}{8}$; demissa perpendiculari CH ad FP, erit $PH = GA - EC = \frac{m}{16}$; hinc ex natura para-

AD ARCHITECTURAM CIVILEM. 227

parabolae, $m \cdot xDF = FM^2$, aut $m(y + \frac{m}{16}) = (x + \frac{m}{16})^2$; unde prodit $y = \frac{x^2}{m} + \frac{x}{8}$. Sed ex natura circuli est $CH^2 + HM^2 = CM^2$, aut vero $(y - \frac{5m}{16})^2 + (x + \frac{m}{16})^2 = \frac{165m^2}{16^2}$; unde deducitur $y = \frac{5m}{16} \pm \sqrt{(\frac{165m^2}{16^2} - x^2 - \frac{mx}{8})}$. Ex his itaque duobus valoribus ipsius y aequatis nanciscimur hanc aequationem, $\frac{x^2}{m} + \frac{x}{8} - \frac{5m}{16} = \pm \sqrt{(\frac{165m^2}{16^2} - x^2 - \frac{mx}{8})}$, et quadratis membris, deletisque sese tollentibus, redit haec aequatio, $x^2 + mx^2 - \frac{1}{8}m^2x - \frac{1}{16}m^4 = 0$, quae erat construenda. Atque prodit quidem sic x quam

proxime aequalis $\frac{11\frac{1}{2}m}{16}$ siue $0,70833m$, et constanter $y = \frac{12m}{17}$, siue $0,70588m$.

Eo igitur iam negotium hoc deduximus, ut, de quo nemo huc usque cogitavit, fornicem delineare possimus, ex duobus circuli arcubus constantem, de quo demonstrare liceat, illum omnium possibilium, pro datis semiaxibus, esse venustissimum, minimumque poplitis habere. Capiatur **Tab. IV.** enim modo loco x , $DI = 0,70833m$, et loco y , **Fig. 8.** $EM = 0,70588m$, ducatur MIK , et describantur arcus AK , KB , centris I et M , vti supra modo dictum fuit (§. XXII.). Cum autem DI sic inventa ipsam EM $0,00245$ partibus modo superet: in praxi tuto assumi potest, pro differentia radiorum minima reddenda DI et EM esse aequales; aut $x = y = \frac{m^2}{2x}$, quod efficit $x = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}m\sqrt{2}$; captis igitur CD et CE ,

vti ante aequalibus, $= m$, ducatur hypotenusâ ED , et bifecetur in N , erit $EN = DI = EM$, pro differentia radiorum MI efficienda minima. Sed quoniam semper

E e 3

debet

debet esse DILDA, $\sphericalangle a - m \sphericalangle b$, necesse est, vt in hac praxi sit DI, aut hoc casu DN, $\sphericalangle b$, aut DE $\sphericalangle 2b$.

Tab. V. §. XXXIII. Fastigia turrium arcuata rotunda sequenti modo eleganter delinearí possunt, pro quavis ratione altitudinis ad latitudinem. Sit enim haec AB, et super hanc triangulum aequicrurum quoduis ACB; latera AC, BC, secentur in tres partes aequales, per quas ducantur parallelae KL, DE, OI, bifecetur CE in H, et ex H erigatur perpendicularis HI, secans OC in I, erit CI radius communis, quo arcus duci debent. Nam ducta recta per E, quae sit IEK, erit I centrum arcus CE et K centrum arcus EG. In triangulis nempe ICH, et IEH, praeter rectos ad H, est HC = HE, et HI communis; ergo haec triangula aequalia, et IC = IE, quare arcus CE transibit per C et E, neque vnquam arcus oppositus CD, centro O, vbi CO = CI, describendus, hunc priorem interfecabit, ob vtriusque angulum in C rectum. Sed porro in triangulis CIE, GKE, est EG = EC, per construct. ICE = KGE, ob parallelas CI et KG; et anguli apud E verticales etiam aequales; vnde etiam haec triangula sunt aequalia, et, ob IC = IE, erit quoque KE = KG; vnde centro K radio communi descriptus arcus transibit per G; et quoniam centra I et K sunt in eadem recta IEK, arcus CE et EG, facient apud E vterque angulum rectum, adeoque poplitum non efficient. Capiatur denique GM = radio communi CI, et pari ratione demonstrabitur, futuram esse GM = BM, hoc est M esse centrum arcus GB; centra K et

K et M esse in eadem linea recta, et hinc poplitem apud G euitari; sed apud B poples dabitur, qui in eiusmodi tectis non est effugiendus. Arcus deinde ex altera parte describantur radio eodem communi, centris O, L, N, similiter cum prioribus positis. Hinc nullam rationem sufficientem perspicio, quare *Ioh. Wilhelmus in Architectura civili*, 1668 edita pro radiis arcuum CE et BG generaliter assumat $\frac{7}{22}$ BC, pro radio autem arcus EG $\frac{1}{11}$ BC; ex hac enim mensura constanti radiorum fit, ut in his fastigiis, paullo altioribus quam latis, arcus CD et CE sese interfecerent, adeoque constructionem inutilem reddant.

§. XXXIV. Haec itaque arcuum circularium combinatio poplites excludens, huc usque pertractata optime succedit, cum pilae sunt verticaliter erectae, et aequales, ut recta ipsarum summitates iungens fiat horizontalis; sed cum pilae sunt inaequales, neque verticales, sed quomocumque inclinatae inter se, hoc est, cum fornices constitui debent obliqui, *arcs rampants*, tum nihil plane agi posse eiusmodi arcuum circularium compositione, annotavit *Blondel, Cours d'Architecture, P. IV, lib. VI, cap. 9 p. 424*, necessariasque, et usus indispensabilis esse hic indicavit sectiones conicas, ita ducendas, ut illae tangant duas rectas datas in datis punctis, et tertiam in puncto quocumque. Sed erasse in hoc Virum sagacissimum videbimus infra (§. XXXVII.). Construendos vero saepius esse eiusmodi fornices obliquos, praecipue in stalis, aliisque occasionibus, ibidem ostenditur.

§. XXXV.

424 RESOLUTIONES PROBLEMATVM

TAB.V. §. XXXV. Sit igitur fornix ellipticus AHB effi-
Fig. 8. ciendus super pilas, *piedroits*, PA, QB, quomocun-
 que inclinatas, et horizonti PQ oblique insistentes; sitque
 linea obliquitatis, *la ligne de la rampe*, AB, hinc et
 inde continuata, in μ et I; et linea determinans alti-
 tudinem fornix EF, continuata etiam in I, ubi secet
 lineam obliquitatis; totum negotium iam eo reducitur,
 vt describatur ellipsis, quae triangulum GEF conclusum,
 ex pilarum, et lineae altitudinem determinantis, produ-
 ctione, tangat in duobus punctis datis A et B, et tertio
 H ubicunque. Bifecetur ergo data recta AB in Z, et
 ex G ducatur recta GZ Φ , atque haec erit, ob tangen-
 tes GA, GB, diameter ellipsos; AB ordinatim ap-
 plicata, per *Apollonii prop. 30, lib. II.* Sit itaque in
 hac centrum eiusdem Y, et ducantur AH, BH, cum
 EY, FY, eruntque ob tangentes EA, EH; FB,
 FH; rectae EY, FY, diametri, et ad has respectiue
 ordinatim applicatae AH, BH, bifectae in V, et X.
 Demittantur ex centro perpendiculares in latera trianguli
 Y λ , et Yr; ducantur praeter ea rectae E μ , F η ,
 diametro G Φ parallelae; nec non rectae AY, HY,
 BY; atque ob aequalia triangula AGZ, BGZ,
 nec non ob aequalia AYZ, BYZ, hoc est,
 ob aequalia triangula GAY, GBY, erit iam
 $AG \times Y\lambda = BG \times Yr$; aut vero $BG : AG$
 $= Y\lambda : Yr$. (A). Deinde ob familia triangula E μ A,
 GZA; et F η B, GZB; habebitur E μ : AE
 $= GZ : AG$, nec non BF : F η = BG : GZ; ex
 quibus proportionibus inter se multiplicatis oritur haec
 $E\mu \times BF : F\eta \times AE = BG : AG$, aut vero talis
 E μ :

$E\mu : F\eta = AE \times BG : BF \times AG$, vel pro ratione
 $BG : AG$ substituendo aequalem $Y\lambda : Yr$, (A)
 emergit haec proportio $E\mu : F\eta = AE \times Y\lambda : BF \times Yr$. (B) Est autem $EH : HF = EYH : FYH$;
 est porro $EI : FI = E\mu : F\eta = AE \times Y\lambda : BF \times Yr$, per (B) $= AEY : BYF$. Sunt deinde,
 ob bisectam AH in V , triangula AEY , et EYH
 aequalia; et pariter, ob bisectam BH in X , triangula
 BYF et FYH aequalia; ergo ratio $AEY : BYF$
 eadem est cum ratione $EYH : FYH$; hinc etiam
 rationes $EI : FI$, et $EH : HF$ erunt aequales, hoc
 est, $EI : FI = EH : HF$; aut, quod in ~~idem~~ recidit,
~~recta EI dividit~~ ~~et~~ harmonice in punctis H et F ; siue
 tres rectae EI, HI, FI , sunt harmonice proportionales,
 ut nempe sit $EI - HI : HI - FI = EI : FI$. Vnde,
 si inter datas EI et FI quaeratur media proportionalis
 harmonice HI , determinabit illa punctum H , in quo
 ellipsis tertium trianguli latus EF tangit; ducta deinde
 BH , et bisecta in X , determinabitur per rectam FX
 centrum ellipseos Y ; et quoniam ob tangentem GA ,
 et ordinatim applicatam AB , est $YZ : Ya = Ya : YG$;
 vti ex conicis patet: erit *Semidiameter* ellipseos $Ya = Y\beta = \sqrt{YZ \times YG}$; et consequenter semidiameter con-
 iugata huic priori $Y\delta = \frac{ZAYGY}{VGZ}$. Idem hoc problema
 copiose soluit et prolixè *Blondel in Memoires de l'Academie
 Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699, tomo v.*
 in peculiari tractatu, cui titulus est *Apollonius Gallus
 Tactionum*. Si vero aliquando ellipsis haec inuenta abeat
 in circulum, sub casibus specialibus, egit de hoc *Bosse,*
in Ouvrages d'Architecture.

§. XXXVI. Vt aequationem algebraicam ex hac praemissa constructione eruamus vtilem ad varios problematis casus excutiendos, ponantur, ducta MN parallela ad ZA , adeoque ordinatim applicata ad diametrum $G\beta$, $\beta M = x$, $MN = y$, semidiameter $\beta Y = m$, $ZA = a$, $\beta Z = b$; et hinc $aZ = 2m - b$. Erit sic ex natura ellipseos $ZA^2 (a^2) : MN^2 (y^2) = aZ \times Z\beta (2m - b \cdot b) : \alpha M \times M\beta (2m - x \cdot x)$, quae reducitur ad hanc aequationem $y^2 + \frac{a^2 x^2}{2mb - b^2} - \frac{a^2 m x}{m b - b^2} = 0$. Ex qua nunc facile perspicitur, eam generaliter esse ad *Ellipsin*, cuius diameter $\alpha\beta$, et ordinatim applicata ZA , antea determinatae; in casibus vero particularibus eandem esse ad *Circulum*, si fuerit $a^2 = 2mb - b^2$; ad *Hyperbolam*, si existat $b > 2m$; ad *Parabolam* autem, si contingat esse $m = \infty$, vbi nempe $\frac{a^2}{2mb - b^2}$ euanescit, et prodit $y^2 - \frac{a^2 x}{b} = 0$, vbi scilicet pilae fornicis PA , QB , sunt parallelae. Inueniri igitur haud difficili constructione hac ratione potest diameter Ellipseos $\alpha\beta$, atque huius coniugata $\delta Y \pi$, ducendo nempe parallelam $\delta \pi$ ipsi AB , per centrum Y ; quomodo autem ex his diametris coniugatis datis deinde porro reperiri debeant axes methodo omnium commodissima, et noua, docui in horum ipsorum *Nouorum Commentariorum Academiae Scientiarum Imperialis* tomo I. pag. 127, quanquam etiam ex solis diametris duabus coniugatis datis Ellipsis commode describi possit per puncta infinita, secundum methodum *Hospitalii*, *section. conicor. prop. 13, p. 43*.

§. XXXVII. Diximus supra, *Blondellum* necessarias existimasse sectiones conicas in construendis fornicibus supra

pra pilas inclinatas et inaequales (§. XXXIV.): verba eius haec sunt in *Cours d'Architecture P. IV, lib. VI.*
 „cap. 9. Il y a eû divers architectes, qui ont essayé
 „de trouver des manières d'en tracer le trait par des
 „portions de cercle sur divers centres: mais comme
 „leur pratiques sont fausses, faissant jarret en divers
 „lieux, & principalement sur les lignes des piedroits,
 „outre que les centres des cercles dont ils se servent ne
 „sont le plus souvent trouvés que par hazard & en
 „tatonnant; je n'ai pas crû devoir y faire aucune re-
 „flexion, & j'ai jugé, que ces arcs, pour être justes
 „& corrects, devoient être l'une des sections. „
~~Rejicit igitur hic vir solertissimus arcs circulares, et sectiones~~
 concavas in Architecturam civilem recipit, contra huius praecepta, necessitate, vti putat, adductus, quia in hoc casu arcus circulares poplites evitare nequeant, nec ratio Geometrica constet, cuius ope tales arcus circulares debeant describi. Sed errat in hac re vir alias subtilissimus; tradam enim methodum formandi fornices supra pilas quomocunque inclinatas, et inaequales, ex arcubus duobus circularibus, qui et nusquam poplitem vllum faciant, sed et ratione Geometrica determinantur; qua ipsa non parum utilitatis ad scientiam aedificandi attulisse mihi videor.

§. XXXVIII. Sint in hunc finem duae pilae in-TAB. V.
 clinatae et inaequales PA , QB , ad vtramque erigantur Fig. 9.
 perpendiculares AF , BE , decussantes se in D ; capiatur
 DC differentia harum perpendicularium, et bifecetur in
 G ; erecta perpendicularis GI secans BE in I , dabit
 F f 2 in

in I centrum ducendi arcus circularis HB, atque in C centrum erit describendi arcus alterius circularis AH; Constat ita de constructionis huius ratione Geometrica perfecta; deinde arcus AH perfecte coincidit cum pila AP, quoniam et ad AP, et ad AH, perpendicularis est radius AC, quod simili modo de arcu HB probatur. Ductus est igitur, quod *Blondellus* fieri posse negavit, super pilas quascunque arcus circularis duplex, Geometrice et omni poplite carens.

§: XXXIX. Solutio problematis Algebraica haec esse potest. ~~Sint DC = x, DI = y, et, demissa perpendiculari BK, DA = a, BK = b; DK = c, BD = e;~~ atque erit, ob triangula similia BKD, IGD, BD(e): DI(y) = BK(b): IG($\frac{by}{e}$); et pariter BD(e): DI(y) = DK(c): DG($\frac{cy}{e}$); vnde GC = $x - \frac{cy}{e}$, et CI = $\sqrt{(\frac{b^2y^2}{e^2} + x^2 - \frac{2cxy}{e} + \frac{c^2y^2}{e^2})} = \sqrt{(\frac{b^2+c^2}{e^2}y^2 + x^2 - \frac{2cxy}{e})}$ = $\sqrt{(y^2 + x^2 - \frac{2cxy}{e})}$, ob $b^2 + c^2 = e^2$. Exinde debet esse CA = $x + a = CH = CI + IB = \sqrt{(y^2 + x^2 - \frac{2cxy}{e})} + e - y$; aut vero, ponendo $m = e - a$, debet esse $\sqrt{(y^2 + x^2 - \frac{2cxy}{e})} = x + y - m$; vnde prodit $y = \frac{\frac{1}{2}m^2e - emx}{em - e + c.x}$; ex quo patet, infinitas solutiones admittere hoc problema, vti superius (§. XXIII.); quarum unicam dabo, assumendo nempe, vti modo ante feci, $x = DC = m$; hinc fit ergo $y = \frac{\frac{1}{2}me}{c}$; est autem per constructionem traditam, ob triangula similia DKB

et.

$$\text{et } DGI, DK(c) : DB(e) = DG(: m) : DI\left(\frac{me}{c}\right) = y.$$

Manifestum est porro, locum Geometricum problematis huius indeterminati esse iterum Hyperbolam intra asymptotos, cuius vero tradendae constructioni, aut determinandae differentiae radiorum IC minimae, non immorabor. Ad hoc solum erit attendendum in praxi, ut, si punctum D cadat extra pilam PA, et sic AD fiat negativa; tum capiatur $m = e + a$.

§. XL. Cum autem praecedens haec constructio et solutio non adeo commode applicari possit ad summae altitudinis pilas, sed inaequales: destinabimur hinc sequentem aliam soluendi modum. TAB. VI.
Fig. 1. Sint pilae verticales, sed inaequales, PA, QB, supra quas ducendus est fornix circularis compositus; ad PA ducatur perpendicularis AD, et sit centrum arcus AF in D, ipsa vero $AD = x$, et praeterea differentia altitudinum $GB = a$, $AG = b$, $BC = y$, ita ut in perpendiculari BC ad BG in C haereat centrum alterius arcus FB. Erit ita $AE = b - y$, $ED = x - AE = x - b + y$, adeoque $\sqrt{(ED^2 + EC^2)} + CB = DF = DA$, hoc est, $\sqrt{(x^2 - 2bx + b^2 + 2xy - 2by + a^2 + y^2)} + y = x$, ex quo efficitur $y = \frac{bx - a^2 - b^2}{x - b}$; atque iterum elucet, problema hoc infinitis modis posse resolui, prout haec nempe x , aut alia, assumitur; sed brevitatis causa assumamus $x = b = AG$, atque erit sic $y = \frac{b^2 - a^2}{b}$, aut $2y = b - \frac{a^2}{b}$; hinc pro hoc casu facillima sequens emergit constructio: ex vna pila ducatur perpendicularis AG ad ipsam; ex altera B huic parallela BC; capiatur $AD = GB$, erigatur Fig. 2.

E f. 3.

gatur perpendicularis DF, et huic fiat aequalis AH, erit $HG = b - \frac{a^2}{b} = 2y$; sin igitur HG bifecetur in E, et erigatur perpendicularis EI secans superiorem BC in I, dabitur in I centrum arcus CK B et in G centrum arcus ACK; quae omnia vltiori demonstratione non egent.

TAB. VI. §. XLI. Nihil attinet dicere de arcibus Gothicis

Fig. 3. Gallice, *arcs à tiers point*, in quibus centro A, radio AB, describitur arcus BC, eodem deinde radio, centro B, arcus AC, vt ita triangulum rectilineum ABC sit aequilaterum. Quamuis enim iudice *Blondello* in *Cours d'Archit.* 419, tales arcus omnium sint fortissimi ad gestanda onera, minimeque impulsiois (aut) faciant in suas pilas, vnde sine dubio in aedificiis Gothicis antiquis, templis, portis, fenestris, ex hac causa perpetuo fuerunt in vfu; tamen eodem arbitro grauissimo, exulare debent hi arcus ex omnibus aedificiis secundum regulas probae et elegantis Architecturae extruendis, quae nempe nusquam tolerant poplitem adeo insignem et inuenustum, qualem hi arcus in summitate sua prae se ferunt, eoque oculos intelligentis spectatoris mirum in modum laedunt.

§. XLII. In tectis rectilineis etiam multa occurrunt, quae mathematicam admittunt cognitionem. Catherii tectorum, (*les chevrons*) ab impositis tegulis premuntur; adeoque propius ab his ad fracturam adiguntur, quam si liberi ab hoc integumento, necessario tamen, essent. Quaeritur itaque, an tectum altius BA, magis prematur ab imposito sibi onere tegularum, quam vero tectum

Fig. 4.

tectum depressius BC; posita vtriusque tecti semilatitudo BD eadem? Quod, vt examinemus, ponamus tecti AB pondus esse $= p$, collectum in centro grauitatis E, hoc est in medio ipsius AB, hoc pondus sit expositum per EF verticalem; resoluta hac in EG, perpendicularem ad AB, et GF eidem parallelam, dabit ex similitudine triangulorum $EG = \frac{p \cdot BD}{AB}$, = pressioni, quam tectum hoc altius AB sustinet. In tecto depressiori BC, cuius pondus HI $= \pi$, similiter reperietur pressio HK $= \frac{\pi \cdot BD}{CB}$, quae duae pressiones igitur inter se erunt $= p \cdot CB : \pi \cdot AB$; sed ob tecta ~~supposita~~ ~~homogenea~~ erit ~~CB : AB~~: CB erit $p \cdot CB = \pi \cdot AB$; ergo pressiones, quas tectum aut altius, aut depressius, recipiunt a materia homogenea, sunt inter se aequales; posita latitudine tecti in vtraque altitudine eadem. Quod primus reperit Coupletus, in *Memoires de l'Acad.* 1731. p. 69. Certum igitur est, super eadem basi erecto siue altiori, siue depressiori tecto, vtrumque aequaliter premi ab onere sibi imposito: interim tamen altius tectum erit debilius; quoniam in eo pressio eadem agit in brachium longius AE $= \frac{1}{2} AB$, adeoque exinde maius acquirit momentum mechanicum, ex ratione vectis facile perspiciendum.

§ XLIII. Si praeterea examinare velimus, vtrum tectum altius, aut depressius, habeat plus impulsionis, *poussée*; considerabimus cantherium ab onere suo trahi iuxta longitudinem suam quantitate GF; capiatur huic GF $= BL$, et resoluatur in verticalem BM, et horizontalem

lem BN ; absorbebitur illa in pilam tecto suppositam; Sed BN conabitur pilam eandem extus trahere et protrudere; erit itaque BN mensura legitima impulsione. Est autem $BL = GF = \frac{p+AD}{AB}$; atque hinc in triangulo BNL erit sinus totus (1): $BL \left(\frac{p+AD}{AB}\right) = \sin. BNL \left(\frac{BD}{AB}\right)$; sed ob $p : \pi = AB : CB$, aut $\frac{p}{AB} = \frac{\pi}{CB}$, erit $\frac{p}{AB}$ constans, qualis etiam supponitur esse BD ; habetur ergo impulsio tecti proportionalis huic quantitati $\frac{AD}{AB}$, siue sinui anguli ABD ; cum inque tecto altiori sinus hic sit maior quam in depressiori: ~~maior est~~, illius propulsione esse maiorem. Nescio igitur, qua ~~causa~~ ~~inductus~~ ~~ratione~~ ~~Complanis~~ in *Memoires de l'Acad.* 1731. p. 69. seqq. tecta, quo sint altiora, eo esse solidiora; ob liberio rem defluxum pluviarum, difficiliorem subleuationem tegularum a vento forti efficiendam, quae certe vera sunt; sed cum addit altiora tecta habere minorem impulsione horizontalem, id non perspicio.

§. XLIV. Elegans et utilis est quaestio de tectis, *Marsardicis* dictis, ita construendis, vt quantum fieri potest, illa ipsa se teneant in aequilibrio, neque alicubi, sine necessitate praegrauent. Huius problematis solutionem reperi sequentem. Sit tale tectum construendum super similitudine DC , ac altitudine DA ; iungantur A et C linea recta, quae biseetur in M , et ex M erigatur perpendicularis MB , cuius determinatio desideratur, vt deinde rectae duae aequales AB , BC illud ductae tectum *Marsardicum* constituent, et sese mutuo teneant

TAB. VI.

Fig. 5.

teneant in aequilibrio. Igitur erit triangulum ABC aequicrurum. Sit nunc trabis AB pondus $= p$, collectum in centro grauitatis ipsius E , et expositum per rectam libere assumtam verticalem $EF = p$; resoluatur haec EF in vires collaterales EH et EG , quarum haec sit horizontalis, altera in directione ipsius trabis AB . Patet, illam horizontalem destrui a trabe, ex altera tecti parte similiter posita; hanc vero EH idem efficere, ac si trabs AB traheretur in suo extremo B vi $= EH = BI$, recta AB continuata. Resoluatur haec BI iterum in collaterales BK et BL , illam normalem ad BC , et hanc in directione ipsius BC , redundabit haec in hypomochlium C ; illa vero BK conabitur trabem BC vertere circa C extro in momento $BK \times BC$. Iam vero trabs BC , vi ponderis sui in centro grauitatis N , collecti, deorsum nititur verticaliter vi $NP = EF = p$, ob aequalitatem harum trabium; quae NP resoluatur in NO et NQ , quarum illa sit normalis ad BC , haec in directione BC . Redundabit NQ iterum in hypomochlium C ; vnde hoc par esse debet sustinendis viribus $BL + NQ$; sed NO conabitur trabem BC introsum vertere circa C , momento $NO \times NC = \frac{1}{2} NO \times BC$. Vt igitur hae duae trabses AB , et BC sese teneant in mutuo aequilibrio: debet esse $\frac{1}{2} NO \times BC = BK \times BC$; ex quo fit $NO = 2 BK$. Sint igitur anguli DAC sinus m , cosinus n ; anguli $MAB = MCB$ sinus x , cosinus y ; erit sinus FHE (cos. DAB , $ny - mx$): $EF (p) = \sin. \text{tot.} (1) : EH \left(\frac{p}{ny - mx} \right) = BI$. Porro est, sin. tot. (1) : $BI \left(\frac{p}{ny - mx} \right) = \sin. BIK$
 Tom. IV. Nou. Com. $G g$ (sin.

(sin. LBI, sin. 2 MAB, $2xy$): BK ($\frac{2pxy}{ny-mx}$).
 Est denique etiam sin. tot. (1): NG (p) = sin.
 OPN (sin. PNQ, cos. DCN, $my-nx$): NO
 ($p \cdot my-nx$); ergo erit $p(my-nx) = \frac{2pxy}{ny-mx}$; quae re-
 ducitur ad hanc sequentem $mn(x^2+y^2) - xy(m^2+n^2) = 4xy$; sunt vero $x^2+y^2 = 1$, et pariter $m^2+n^2 = 1$; ergo obtinebitur $mn = 5xy$; aut vero
 $\frac{2mn}{5} = 2xy = \text{sin. } 2MAB$. Sed est pariter $2mn = \text{sin. } 2DAC$; ergo resultat $\frac{2}{5} \text{sin. } 2DAC = \text{sin. } 2MAB$. Accipiat ergo sinus anguli dati 2DAC, hic diuidatur per 5; dabit quotus sinum 2MAB; unde problema erit constructum. Idem hoc problema soluit quoque *Coupletus in Memoires de l'Academie des Sciences de Paris*, 1731 p. 69. sed iudicent aequi et intelligentes huius rei aestimatores, vter nostrum verum tetigerit? Si iam porro quaerantur valores ipsarum BL et NQ: harum summa trahet trabem BC, in C, secundum directionem BC. Haec summa resoluatur in vires collaterales horizontalem et verticalem; atque erit illa propulsio, quam pilae domus ab hoc tecto imposito patiuntur, et cui proinde resistere debent; quae propulsio iterum in loco citato diuersa ab hac aestimatione mensuratur.

DE

DE VIRTUTE MAGNETICA
ABSQUE MAGNETE COMMVNICATA
EXPERIMENTA.

AVCTORE

G. W. RICHMAN.

Aceptis a Viro plurimum Reuerendo *Dumaresque*, Anglicanae Ecclesiae Pastore, quibusdam ex Anglia ad ipsum missis scriptis, in quibus methodus virtutem magneticam absque magnete communicandi descripta erat, et lamellis chalybeis in hunc finem paratis, quibus tamen virtus magnetica nondum communicata erat, decantata in Anglia experimenta imitari tentavi. Et quia, quae requirebantur ad experimenta haec rite instituenda, omnia ad manus non erant, et nonnulla ab autore *Michel* Anglo, qui methodum praescripsit, minus distincte proposita, substitui alia, de quibus cogitavi, idem praestitura esse, et mutavi methodum aliqua ex parte ad finem eundem obtinendum, sequentiaque pericula feci.

EXPERIM. I.

Ope veru AB, prope A suspenſi, lamellam *ab* ex TAB. VI. chalybe molli, politam, longitudinis trium digit. Lond. Fig. 6. latitudinis duarum et dimidiae lineae et crassitiei vnus quartae circiter partis lineae, ponderis 69 granorum, inter parallelepipeda ferrea DE et FG, (quorum quodlibet erat 50 libr. Russ. longitudinis 23. digit. Lond. circiter, latitudinis 6 digit. ferme et crassitiei paulo plus quam digiti.) lineae meridianae magneticae ferme pa-

G g 2

rallela

lamella parallelepipedis parvis ferreis *c* et *d* impositam, strinxi a septentrionali plaga australem plagam versus, versus quam plagam veru respiciebat extremitate A. Et tandem veru et lamella virtutem directricem tali tritu acceperunt, quam acus magnetica prodidit. Extremitas *b* illa, quae boream versus respexerat, polus borealis lamellae fiebat, altera polus australis. Aliquot centenis tamen ductibus opus erat, antequam lamella acquireret dictam virtutem. Virtute directrice acquisita, paucis ductibus additis, e. g. 50 ad 60 additis, lamina obtinuit virtutem 7 ad 8 drachmas ferri sustentandi virtute sua magnetica acquisita, et idem pondus etiam veru A B trahebat, quod ante tritum nullam aliud ferrum attrahendi virtutem prodiderat.

Iob. Michel in tractatu de *Artificialibus Magnetibus* loco parallelepiedi FG, extremitati boreali adplicati, simile parallelepipedum triginta libr. Lond. adhibuit, longit. quatuor pedum Lond. extremitate boreali parallelepiedi paululum infra horizontalem depresso, extremitati australi adplicuit parallelepipedum 18 libr. Lond. longit. quatuor pedum et 6 digitorum.

Instrumentum istud, cui ego veru substitui, *Michelo* fuit baculus ferreus, quo in Anglia vtuntur ad carbonem in caminis agitandos et cuius pondus libram Lond. paululum superabat. Virtus magnetica, quam *Michel* chalybeae lamellae tribuit tritu per baculum praedictum ferreum, minor tamen erat ea, quam ego ipsi tribui per veru, lamella enim eius ponderis 80 granorum sustentabat tantum 4 drachmas post acquisitam tritu per baculum ferreum magneticam virtutem, cum mea lamella 69 granorum, 7 ad 8 drachmas ferri traheret.

EX-

EXPERIM. II.

Laminae talis absque magnete magnetica virtute imbutae virtus attrahendi ferrum debilitabatur

I. Vehementi et saepius repetita proiectione in pavimentum, vel lapsu vehementi, ita vt tandem pauca tantum grana ferri attrahere valeret, virtus directrix tamen non periit.

II. Inflexionibus in multis locis factis, virtus directrix tamen non prorsus periit.

III. Candefactione in igne, qua virtus directrix etiam periit, semel tamen obseruavi sensibilem virtutem directricem post candefactionem residuam, licet lamina in directione ad acum magneticam normali frigeret.

IV. Malleatione, qua virtus directrix tamen difficulter tollebatur.

V. Contrariis ductibus situ lamellae inuerso per verum factis.

Hinc videre est, virtutem magneticam lamellarum absque magnete magnetica virtute imbutarum eadem ratione debilitari ac lamellarum magnete magnetica virtute imbutarum.

EXPERIM. III.

Si lamella, cuius virtus magnetica debilitata erat insigniter vel vehementi lapsu vel inflexione, ope veru, vti dictum Exp. I. quater tantum stringebatur, restituebatur tota virtus attrahendi ferrum, quam antea habebat.

DE VIRTUTE

EXPERIM. IV.

Iis lamellis, quae candefactione in igne virtutem magneticam perdiderunt, difficilius tribuebatur et restituebatur magnetica virtus, quam politis non candefactis.

EXPERIM. V.

Cum contrariis ductibus situ lamellae inter parallelepipedam inuerso virtutem ipsi directricem adimere volebam ope veru, obseruaui ad tollendam magneticam virtutem requiri multo maiorem numerum ductuum, quam ad eam tribuendam. Quatuor enim sufficiebant ad tribuendam, si semel lamella magneticam virtutem acceperat (Exp. III.) et inflexione, lapsu vel contrariis ductibus perdiderat, dum centum non sufficiebant ad virtutem adimendam.

EXPERIM. VI.

TAB. VI. Si loco ferreorum fulcimentorum *c* et *d* lignea fulcimenta adhibui, virtus tanta nullo modo tam paruo tempore lamellae potuit tribui, quanta si fulcimenta ferrea adhibita sunt.

Michel nullam mentionem facit fulcimentorum ferreorum *c* et *d*, vt probabile sit, ipsum ista non adhibuisse.

EXPERIM. VII.

Si quatuor lamellis *abcd* dicta ratione Exp. I. magnetica virtute imbutis, aliam *ef*, quae nondum virtutem acceperat, inter ferrea parallelepipedam *ED* et *FG* super fulcimenta ferrea locabam et priores *abcd* amplioribus

prioribus lateribus sibi impositis ita coniungebam, ut duo boreales poli *ab* ex vno latere et duo australes *cd* ex altero terminarentur, in eodem ferme plano, interpositoque ab altera extremitate frusto ligni *K*, lamellas verticales *abcd* horizontali *ef* ita imponerem, ut poli boreales verticalium lamellarum *gb* respicerent polum australem subiacentis *ef* et poli australes verticalium nimirum *lm* polum borealem subiacentis *ef*, duceremque lamellas *abcd* antro et retro saepius.

a) Horizontalis *ef* accipiebat (1) virtutem magneticam, quam antea non habebat, (2) virtutem maiorem, quam verticales acceperant ope veru.

b) Verticalium tamen virtus tali ratione debilitata est.

Michel contrarium asserit in tractatu laudato scilicet crescere tali permutatione lamellarum virtutem perpetuo usque ad definitum gradum. Vel igitur ille non observavit decrementum virtutis lamellarum verticalium, vel ego imitatus experimentum peccaui in aliqua circumstantia.

EXPERIM. IX.

Debilitata lamellarum virtute, ut vix scrupulum ferri attraherent, iungebam *abcdef*, ita ut lamellae *f* extremitas *g* lineam circiter prominere, haec extremitas *g* trahebat statim 7 drachmas, et prout laminae prominentis virtus minor erat et pondus ferri attrahendum maius, eo minor pars prominere debebat. Si omnes lamellae in eodem plano desinebant, parum admodum trahebant.

EXPERIM. X.

Si lamellae virtutem insignem habebant, ut septem drach-

drachmas ferri sustentarent, vnitis ita vt poli boreales desinerent in eodem plano, et ferro iis admoto, attrahebant et sustentabant quidem coniunctim ferrum, cuiuslibet tamen lamellae virtus insigniter debilitabatur.

VI. Ergo debilitatur magnetica virtus lamellarum, si lamellae vnitis viribus ferrum trahunt. Confer Exper. II.

EXPERIM. XI.

Si parallelepipedum ex indurato chalybe politum longit. 6 ferme digitorum Lond. lat. dimidii digiti et crassitiei 0. 166 dig. simili ratione inter parallelepipeda

Tab. VI. DE et FG locatum, vti lamellae ex chalybe molli

Fig. 6. Exp. I. stringebatur cum laminis ex chalybe molli virtute magnetica imbutis, simili ratione vti experimento

Fig. 7. VII. indicatum, tandem virtutem magneticam acquirebant, vt pondus octo drachmarum ferri attraherent nimirum non maius pondus, quam quod lamellae ipsae et veru trahebant. Laboravi multis modis, vt maiorem virtutem parallelepipedo communicarem, sed frustra hucusque.

INQVI.

INQUISITIO IN DECREMENTA ET INCREMENTA CALORIS SOLIDORVM IN AERE

AVCTORE

G. W. RICHMANN.

Maiorem et minorem corporum virtutem calorem retinendi consideraturus sum, quae sedulo distinguenda est a capacitate eorum maiori vel minori caloris: ea enim ipsa corpora, quae maioris caloris capacia sunt, minorem saepius virtutem calorem retinendi produunt, vti de mercurio constat, si cum aqua et aliis fluidis crassioribus confertur. Ultimam proprietatem, dum Physici nonnulli in corporibus offenderent, cum illa etiam priorem connexam esse asseruerunt. Obtinet hinc in multis scriptis Physicis propositio, corpora eo tardius definitum calorem assumere, quo densiora sunt, et eo tardius rursus calorem istum perdere. Alii simul respiciunt cohaerentiam, et credunt, cohaerentiam simul sumtam cum densitate efficere maiorem vel minorem virtutem calorem retinendi, et motui ex calore resistendi. De argento vivo ostendi, illud, licet fluidum sit densissimum, nihilo minus motui ex calore obedientissimum esse inter fluida crassiora. Solida nunc sub-examen voco, et edoceor, idem obtinere, neque mobilitatem maiorem a calore (1) densitati minori, neque (2) cohaerentiae minori, neque (3) vtrique simul, neque (4) duritiei minori, neque tandem (5) omnibus simul, esse adscribendam. E re etenim vtrique esse, et ad incrementum scientiae facere

Tom. IV. Nou. Com. H h videtur,

242 INQUISIT. IN DECREM. ET INCREM.

videtur, in proprietates corporum ita inquirere, ut definire valeamus, quid fieri debeat, ne ex propositionibus precario adsumtis errores in totum systema immaturo concludendi studio serpent et illud perturbent. Proprietatibus etiam accurate definitis legitimis confectionariis veritates plures alias maiori cum certitudine eruere poterimus. Nunc apparatus et experimenta, quae hunc in finem institui, sine ambagibus describam.

§. 1. Metallis sub examen vocatis, illis primo definitam temperiem conciliare constitui, et ea postea definitae temperiei aeris exponere, ut decremента caloris conferre possem. Hinc fieri curavi (1) Globos A ex variis metallis cavitatibus cylindricis *a b*, recipiendis bulbis Thermometrorum *c d* aptis praeditos et ansis *e* et *f*, ex quibus globi suspendi possent. Diametri globorum erant 4. digit. Lond. et cavitatum cylindricarum diametri unusus digiti. et profunditates etiam unusus digiti. (2) Afferruminari curavi tubulos *g h c h* ex lamella aurichalcea tenui, ut profunditates cavitatum fierent duorum digitorum. (3) Thermometra confecta sunt exacte harmonica bulborum exiguorum, ut hydrostatice examinata non maius volumen occuparent ac 20 circiter grana medica aquae.

EXPERIM. I.

§. 2. Globo metallico A in aqua, in vase BCD, in furnulo collocato, ebulliente suspenso ex funibus *f k*, *e l*, aquae in vase BC immerfi bulbum Thermometri *m n*, ut cognoscerem, utrum ad 212 gradum argentum vivum ascenderet, siue ad summum ebullitionis aquae gradum.

gradum. Infusa cavitati quolibet experimento eadem copia aquae et immerfo bulbo Thermometri *c d* notavi temperiem aquae in cavitare metallorum contentae. Ita observavi, licet aqua ambiens vehementer ebulliret, vt mercurius gradum 212 Therm. F attingeret, mercurium Thermometri *c d* ad hunc gradum nulla ratione potuisse perducere, ebullitione interdum per horae spatium continuata. Substitit mercurius 6 ad 10 gradus infra 212 gr., et dum decrefcebat aquae ambientis temperies, simul mercurius in Thermometro *c d* descendebat. In ferreo globo temperies aquae ambientis erat constanter 212. gr. per dimidiam horam, et Thermometrum ostendebat constanter 205 gr. Cum temperiem aquae ambientis decrefcere sinebam

| | | | |
|------------|-------------------------|------------|-----------------------|
| ad gr. 198 | Thermometrum <i>c d</i> | ostendebat | gr. 193 |
| - - - 196 | - - - | - - - | - 190 $\frac{2}{16}$ |
| - - - 187 | - - - | - - - | - 183 $\frac{7}{16}$ |
| - - - 179 | - - - | - - - | - 174 $\frac{11}{16}$ |
| - - - 163 | - - - | - - - | - 159 $\frac{6}{16}$ |
| - - - 149 | - - - | - - - | - 147 $\frac{7}{16}$ |

In cupreo globo, cum temperies aquae globum ambientis decrefcebat

| | | | |
|-------------------------|-------------------------|------------|-------------------|
| ad gr. 199 | Thermometrum <i>c d</i> | ostendebat | gr. 190 |
| - - - 197 | - - - | - - - | - 189 |
| - - - 186 | - - - | - - - | - 177 |
| - - - 174 | - - - | - - - | - 167 |
| - - - 173 $\frac{1}{2}$ | - - - | - - - | - 165 |
| | Therm. <i>m n</i> | | Therm. <i>c d</i> |
| ad gr. 159 | $\frac{0}{16}$ | - - - | - 154 |
| - - - 132 | $\frac{1}{16}$ | - - - | - 130 |
| - - - 123 | $\frac{0}{16}$ | - - - | - 122 |

Stannum, plumbum, aurichalcum similiter examinaui et similia obseruaui, et semper discrimen inter calorem aquae ambientis et calorem aquae in cavitare metallorum contentae initio, vbi calor aquae ambientis erat vicinus gr. 212, obseruabatur. Differentia haec in metallis diuersis erat diuersa, diuersitatis tamen huius rationem habere non potui, quia globos aquae ebullienti simul immittere et Thermometra simul obseruare non potui. Huic enim rei apparatus meus non sufficiebat.

§. 3. Videtur exinde patere, metalla in aqua ebulliente, quae calorem celerius communicat cum aëre frigidiori superficiem contingenti, quam cum quibuslibet corporibus calidis, quibus contigua est, minorem temperiem habere ac aqua ipsa ambiens. Hoc phaenomenon similitudinem habet cum phaenomeno isto, quod G. E. Hamberger *describit in Elementis suis Phys.* §. 611. *Ed. alt.* dum scribit. *Peculiare quoque est phaenomenon, quod fundus abeni, in quo aqua ebullit, si abenum subito ab igne auferatur, tamdiu nullum sensibilem caloris gradum possideat, quamdiu aqua ebullit, eo momento vero, quo ebullitio aquae cessat, insignem acquirat calorem.*

§. 4. Subnasci poterit circa Exp. I. cogitatio:

- 1) Aquam ipsam nunquam forte caloris 212 gr. capacem esse, sed Thermometrum a superfluis ex aqua ascendenti-bus particulis igneis affici ita, vt argentum viuum, quod maioris caloris capax est, ac aqua, ascendere possit ad gr. 212.

2)

2) Affici quidem metalla etiam ab istis particulis igneis adscendentibus et nancisci maiorem calorem, quam aqua capax esset, non tamen posse communicare istum calorem aquae in cavitare contentae, quae istius caloris non capax esset, hinc neque Thermometrum posse affici, vt mercurius adscendat ad gr. 212.

Videtur quidem (1) igneas particulas etiam ex metallo per aquam in cavitare contentam adscendentes afficere debere Thermometrum et eleuare mercurium ad gr. 212; (2) mercurium Thermometri *mn*, quia continuo a particulis igneis superfluis, quibus retinendis aqua non capax esset, afficeretur, adscendere debere ad maiorem adhuc gradum, quam 212. si ratio praedicta obtineret. Vt tamen experimento nouo rationem phaenomeni explorarem, an valida esset, loco aquae, oleum oliuarum adhibui et cavitati metallorum infudi, quod perinde ac mercurius multo maioris caloris capax est, ac aqua, et phaenomenon idem obseruauit, nimirum durante ebullitione adscendit mercurius in Thermometro ab 205 gr. ad 206, et rursus descendit ad eundem gradum, et hic adscensus et descensus una quarta parte horae saepius obseruatus est.

§. 5. Possset etiam disparitas attribui lamellae aurichalcae ex aqua prominenti, quae cum metallo connexa maiorem efficeret metalli superficiem, et ita decrementum caloris progigneret, quod a calore aquae non refarciri posset. Vt explorarem, an haec ratio obtineret, T. VII. paruum Thermometrum fieri curauit, in quo terminus Fig. 2. caloris aquae ebullientis notatus erat et infra hunc ter-

H h 3

minum

minum digitus Londinensis diuisus in 20 partes in scala lignea, et una talis pars erat quinque graduum. Tale Thermometrum aquae in cauitate metalli contentae immerfi et ope suberis, per quod Thermometrum penetrabat, cauitatem cylindricam clausi contra aquae ambientis ingressum, vt nimirum submerso globo metallico et cylindrico tubulo, aquae omnis aditus in cauitatem metalli prohiberetur. Ne vero etiam vapores in cauitate metalli retenti calorem excitarent maiorem, veluti in machina Papiniana, per tubulum vitreum *op* per suber transmissum iis exitum concessi. His praeparatis immerfi globum metalli, et phaenomenon idem obseruavi, substitit nimirum mercurius in Thermometro plus quam dimidiam lineam i. e. plus quam quinque gradus infra terminum ebullitionis, licet aqua per horae spatium in continua ebullitione esset. Aqua etiam ipsa in phiala ebullienti aquae immersa non ebullit, sed ad minorem gradum incalcescit, vt hinc concludere sit, aquam ebullientem, dum calorem communicat celerrime cum aëre contiguo frigidiori, cum phiala aequae ferme calida eum non communicare posse, bulbum Thermometri tamen ob volumen paruum et mobilitatem mercurii a calore ad gr. 212 ebullientis aquae perduci posse.

EXPERIM. II.

§. 6. Globis A ex aqua ebulliente simul extra-
 TAB. VII. ctis et suspensis in temperie aeris per Therm. *m n* no-
 FIG. 3. tata, notauit tempora decrementi caloris et gradus tem-
 periei, quos Thermometra *c d* aquae in cauitatibus
 globorum stagnanti immersa prodebant. In prima co-
 lonna sequentis Tabellae exstant tempora, vnitas quin-
 que

CALORIS SOLIDORVM IN AERE 247

que minuta prima valet. In secunda columna sistantur gradus caloris cupri residui. In tertia sunt gradus ferri residui et in quarta gradus stanni residui. In quinta aëris refrigerantis temperies notatur. Notandum tamen est circa hoc experimentum, adhibitos fuisse globos, qui non exactissime fuerunt eorundem voluminum. Volumina cupri, ferri et stanni post examina hydrostatica enim se habebant; vti 8757, 9124, 8834.

| Tempora. | II [♀] | III [♂] | IV [♂] | V: aeris | Temper. |
|------------------|-------------------|------------------|------------------|------------------|---------|
| 0 | 180 | 180 | 180 | 65 | gr. |
| 2 | 174 | 172 | 161 | 63 | |
| 4 | 160 | 159 | 142 | — | |
| 7 $\frac{1}{2}$ | 143 | 142 | 120 | — | |
| 8 | 140 | 139 | 116 | — | |
| 10 | 133 | 132 | 107 | — | |
| 12 | 124 | 124 | 98 $\frac{1}{2}$ | 60 $\frac{1}{2}$ | |
| 14 | 118 | 118 | 92 | 60 | |
| 16 | 113 $\frac{1}{2}$ | 112.5 | 88.5 | — | |
| 18 | 107.5 | 107.5 | 83.5 | — | |
| 20 | 104 | 103 | 80 | — | |
| 28 | 89.5 | 90 | 71 | — | |
| 30 | 88 | 88 | 70 | 59.5 | |
| 32 | 84.2 | 85 | 68.5 | 60 | |
| 36 | 82 | 81.5 | 66.5 | — | |
| 37 $\frac{1}{2}$ | 80 | 80 | 66 | — | |
| 40 | 79.5 | 78.3 | 65 | — | |
| 44 | 75.5 | 76 | 64 | — | |
| 52 | 72.2 | 72 | 63 | — | |
| 64 | 68 | 68 | 62 | — | |
| 80 | 65 | 64.5 | 61.5 | — | |

9. 7.

§. 7. Stannum ergo a gr. 142 ad 80, 80 min. pr: ferrum ab 142 ad 80, 151 min. pr. et cuprum ab 142 ad 80 eodem tempore pervenit, ac ferrum.

Corol. 1. Cum volumen cupri sit minus quam volumen stanni (§. praeced.) et nihilo minus decrementum caloris cupri tardius fiat, quam decrementum caloris stanni, tardius adhuc idem decrementum caloris pati debet cuprum, si cum stanno idem volumen habet.

Corol. 2. Cum volumen cupri fuerit minus volumine ferri (§. praec.) et decremēta aequalia caloris vtrumque metallum passum sit, cuprum minora decremēta eodem tempore pati debet quam ferrum, si cum ferro habet idem volumen.

Corol. 3. Cum stannum ob minus resp. ferri volumen maius decrementum caloris passum esse dici possit quam ferrum, nondum ex his observationibus concludere licebit, stannum citius frigescere, quam ferrum.

EXPERIM. XI.

§. 8. Detecta disparitate globorum metallicorum omnes exactissime aequales fieri curavi et eadem ratione examinaui cuprum, ferrum, plumbum.

| Temp. | II ♀ | III ♂ | IV ♀ | V temp. aër. |
|-----------------|----------------------|-----------|-----------|--------------|
| ○ circiter | 194 | circ. 194 | circ. 194 | 57 |
| 1 $\frac{2}{3}$ | - 174 | - 172.4 | - 148 | - |
| 1 $\frac{1}{2}$ | - 172 $\frac{1}{10}$ | - 171.2 | - 146 | - |
| 3 $\frac{2}{3}$ | - 162 | - 159.8 | - 129 | - |
| 3 $\frac{1}{2}$ | - 160 | - 158 | - 127 | - |

CALORIS SOLIDORVM IN AERE 249

| Temp. | II ♀ | III ♂ | IV ♀ | V. temper. aer. |
|------------------|--------------|-----------|-----------|-----------------|
| 3 $\frac{4}{5}$ | circiter 160 | circ. 158 | circ. 127 | - - |
| 10 | - 131 | - 129.2 | - 92 | - - |
| 13 | - 121 | - 119 | - 83 | - - |
| 16 $\frac{2}{5}$ | - 112 | - 109.4 | - 77 | - - |
| 20 $\frac{4}{5}$ | - 103 | - 100 | - 71 | - - |
| 21 $\frac{3}{4}$ | - 101 | - 98.6 | - 70 | - 60 |
| 22 | - 100 | - 98 | - 70 | - - |
| 25 | - 94 | - 91.4 | - 67 | - - |
| 28 | - 90 | - 87.8 | - 66 | - - |
| 37 | - 82 | - 78.8 | - 62 | - - |
| 46 | - 76 | - 71.6 | - 61 | - 62 |
| 51 | - 74 | - 70 | - 60 | - - |
| 85 | - 63 | - 60 | - 59 | - - |

§. 9. Cuprum ergo ab 142.4 gr. ad 100. centum et duobus minutis primis, ferrum 97 min. pr. peruenit. Plumbum ab 129 gr. ad 70 quadraginta et uno min. primo, ferrum ab 129 ad 70 gr. ducentis et quinque minutis primis accessit.

Coroll. 1. Cuprum hinc et ferrum minora decremēta caloris patiuntur eodem tempore quam plumbum.

Coroll. 2. Ferrum paulo maiora decremēta caloris patitur, quam cuprum eodem tempore.

EXPERIM. IV.

§. 10. Aurichalcum cum cupro examinans erat:
 Tom. IV. Nou. Com. I i Tem-

252 *INQUISIT. IN DECREM. ET INCREM.*

ferme aequalia , globo plumbeo vero aequali reddito globo stanneo et omnibus reliquis inueni

| Temp. | Stanni calorem. | Plumbi cal. | Aeris cal. |
|------------------|-----------------|-------------|------------|
| 0 circiter | 180 | circ. 180 | - - 64. |
| 1 $\frac{1}{2}$ | - - 173 | - - 162 | - - - |
| 1 $\frac{2}{3}$ | - - 171 | - - 158 | - - - |
| 1 $\frac{5}{6}$ | - - 169 | - - 155 | - - - |
| 1 $\frac{4}{3}$ | - - 166 | - - 151 | - - - |
| 2 | - - 164 | - - 148 | - - - |
| 2 $\frac{1}{2}$ | - - 162 | - - 145.5 | - - - |
| 2 $\frac{2}{3}$ | - - 160 | - - 142 | - - - |
| 2 $\frac{3}{4}$ | - - 159 | - - 140 | - - - |
| 3 | - - 154 | - - 135 | - - - |
| 4 | - - 146 | - - 124 | - - - |
| 5 | - - 239 | - - 116 | - - - |
| 8 | - - 124 | - - 100 | - - - |
| 9 | - - 119 | - - 97 | - - - |
| 10 | - - 114 | - - 93 | - - - |
| 13 $\frac{1}{2}$ | - - 103 | - - 83 | - - - |
| 14 $\frac{2}{3}$ | - - 100 | - - 81 | - - - |
| 16 $\frac{3}{4}$ | - - 95 | - - 77.5 | - - - |
| 67 $\frac{4}{5}$ | - - 65 | - - 62 | - - - |

§. 15. Plumbi calor ergo ab 162 ad 100 triginta quatuor minutis primis et stanni ab 162 ad 100 in eadem temperie aeris 61 min. prim. decreuit. .

Coroll. 1. Patitur ergo plumbum maiora decrementa caloris , quam stannum.

Coroll.

CALORIS SOLIDORVM IN AERE 253

Coroll. 2. Cum ferri calor ab 139 ad 100 sexaginta nouem min. pr. decrescat (*Exper. V*) in temperie aeris 64 gr : et stannum idem decrementum in eadem temperie quadraginta septem minutis primis patiatur (per *Exper. praeced.*), ferrum etiam tardius frigescit , quam stannum.

§. 16. *Coroll.* 3. Aurichalcum ergo et cuprum maximam , postea ferrum , deinde stannum , et tandem plumbum virtutem minimam retinendi calorem habet inter examinata haec corpora.

§. 17. Ex his obseruationibus rationem decrementorum caloris praedictorum metallorum sub certa temperie aeris erui posse accurate , promittere haud possum , quia uno Thermometro post alterum obseruato tempus praeterlapsum est , vt hinc qualibet obseruatione dimidiū gradus errorem forte non euitauerim et vel in excessu vel defectu peccauerim. Accedit , Thermometra fuisse angustioris scalae et difficultatem accurate obseruandi auxisse. Constitutionem denique aeris ratione siccitatis et tranquillitatis forte fuisse diuerso tempore diuersam. Iuuat tamen adposuisse , quodcunque ex obseruationibus deduci potuit sequenti tabula. Decrementorum caloris initialium propterea rationem non habui , quia initio obseruationum Thermometrorum velocitas nimis prohibuit , quo minus tempus , quo mercurius eodem tempore in Thermometris stagnabat , notari potuerit , et sic ipsum initium incertum sit.

In tabulae sequentis Columna prima exstat corpus examinatum : in secunda Experimentum , ex quo erutum

154 INQUISIT. IN DECREM. ET INCREM.

est decrementum caloris: in tertia, gradus caloris, à quo mercurius Thermometri descendere incepit: in quarta differentia inter temperiem metalli et aeris refrigerantis: in quinta gradus, quos quinque minutis primis mercurius absoluit in temperie aeris, quae obtinebat: in sexta gradus, quos mercurius absolvere debuisset sub differentia 119.5 gradus inter temperiem metalli et aeris eodem tempore quinque minutorum primorum. Praecedit omnes columnas columna, quae numerum casuum adductorum exhibet.

| | I - II | - III | - IV | - V | - VI |
|---------------------|---------|---------|--------|---------------|---------|
| 1. ♀ - Exp. III. | - 174.0 | - 117.0 | - 6.0 | $\frac{+}{+}$ | - 6.1 |
| 2. ♀ - Exp. III. | - 100.0 | - 40.0 | - 2.0 | $\frac{+}{+}$ | - 6.0 |
| 3. ♂ - Exp. III. | - 172.4 | - 115.4 | - 6.3 | $\frac{+}{+}$ | - 6.5 |
| 4. ♂ - Exp. III. | - 98.0 | - 38.0 | - 2.2 | $\frac{+}{+}$ | - 6.9 |
| 5. ♀ - Exp. III. | - 148.0 | - 91.0 | - 9.5 | $\frac{+}{+}$ | - 12.4 |
| 6. ♀ - Exp. III. | - 70.0 | - 10.0 | - 1.0 | $\frac{+}{+}$ | - 11.95 |
| 7. ♀ - Exp. VI. | - 173.0 | - 109.0 | - 11.0 | $\frac{+}{+}$ | - 12.0 |
| 8. ♀ - Exp. VI. | - 162.0 | - 98.0 | - 16.5 | $\frac{+}{+}$ | - 18.0 |
| 9. Aurich. Exp. IV. | - 175.0 | - 112.0 | - 6.0 | $\frac{+}{+}$ | - 6.29 |
| 10. ♂ - Exp. V. | - 139.0 | - 75.0 | - 4.0 | $\frac{+}{+}$ | - 6.37 |
| 11. ♀ - Exp. V. | - 103.0 | - 39.0 | - 2.5 | $\frac{+}{+}$ | - 7.60 |
| 12. ♀ - Exp. V. | - 119.0 | - 55.0 | - 5.0 | $\frac{+}{+}$ | - 10.8 |
| 13) Aurich. Exp. V. | - 81.0 | - 17.0 | - 0.66 | $\frac{+}{+}$ | - 4.68 |

Si secundum legem decrementi caloris ex aequatione

$$\frac{(a - x)^n}{a^{n-1}} = c, \quad (\text{vbi ponitur } a \text{ differentia inter tem-}$$

periem corporis et aeris initialem et n tempus refrigerii, c vero differentia inter temperiem corporis et aeris post tempus n) deducitur formula ad decrementum x , quod corpus

corpus quinque minutis primis patitur, eruendum, habetur
 $l(a-x) = \frac{lc + (n-1)la}{n}$. Secundum hanc formulam in-
 veni, (Exper: III. sumta pro cupro $a = 117$ et $c = 46$ et $n = 19 \frac{2}{3}$, pro ferro $a = 115.4$ et $c = 36$
 $n = 19 \frac{2}{3}$, pro plumbo $a = 910$, $c = 14$ et $n = 19 \frac{2}{3}$)
 decremēta caloris quinque minutis primis sub eadem dif-
 ferentia inter temperiem corporum et aeris scil. sub diff.
 119.5 gr.

| | | | |
|-----|-------|-------|-----------|
| pro | cupro | ferro | et plumbo |
| vti | 6. 20 | 6. 55 | 11. 75 |

Similiter Experimento V collato cum Experimento VI. (sumta pro aurichalco Exper. V. $a = 83.0$, $c = 43.75$ et $n = 13 \frac{2}{3}$ et sumta pro stanno $a = 109.0$, $c = 36.0$ et $n = 13 \frac{2}{3}$) inueni decremēta caloris quinque minutis primis sub eadem differentia inter temperiem corporis et aeris.

| | | |
|-----------|------------|-------------|
| pro | aurichalco | stanno |
| vti - - - | 6. 20 | - - - 8. 57 |

hinc pro cupro, aurichalco, ferro, stanno et plumbo vti 6. 20, 6. 20, 6. 55, 8. 57, 11. 75. Hanc rationem tamen accuratam esse asserere non audeo.

§. 18. Cum ergo, rationem veram decremētorum caloris examinerem metallorum accurate praedicta ratione erui posse, non crediderim, et ex antecedentibus tantum sequatur aurichaleum et cuprum minimum et deinde ferrum, postea stannum et tandem plumbum maximum decre-

256 *INQUISIT. IN DECREM. ET INCREM.*

decrementum caloris pati sub iisdem circumstantiis, non vero quantum vnus metalli decrementum caloris decrementum caloris alterius metalli superet, vt exactius compararem virtutes retinendi calorem horum metallorum Thermometro scalae amplioris adhibito, in qua gradus quilibet diuisus erat in quinque satis distinctas partes, (pars enim vna aequabat $\frac{1}{2}$ lin. Lond.) omnia metalla examinare constitui continuo vnum post alterum et tempus accuratissime secundum minuta secunda obseruare, quo quodlibet metallum decrementum caloris pateretur in temperie certa aeris.

E X P E R I M. VII.

§. 19. Aurichalcum examinans in temperie aeris 60 gr. et vnus dimidii gradus erat temperies

Tempore

| | | | | | | | |
|--------|------|-----|---|----------|-----------------|---|------------|
| 0 | - | - | - | 180. gr. | post 4 min. pr. | - | 175. 2 gr. |
| post 1 | min. | pr. | | 778. 8. | - - 5 | - | 173. 8 gr. |
| - | 2 | - | - | 177. 6. | | | |
| - | 3 | - | - | 176. 4. | | | |

E X P E R I M. VIII.

§. 20. Cuprum examinans in temperie aeris 57.5 gr. erat temperies

| | | |
|----------------|--------|------------------------------|
| post tempus | | post tempus |
| - - 0 min. pr. | 180. 6 | - - 6 min. pr. - - 173. 1gr. |
| - - 1 - - | 179. 4 | - - 7 - - - - 171. 8. |
| | | post |

CALORIS SOLIDORUM IN AERE 297

| post: tempus | | post: tempus | |
|--------------|--------|--------------|--------|
| - - 2 - - | 178. 2 | - - 8 - - | 170. 8 |
| - - 3 - - | 177. | - - 9 - - | 169. 6 |
| - - 4 - - | 175. 6 | - - 10 - - | 168. 2 |
| - - 5 - - | 174. 4 | | |

Corol. Ab 177 gr. ad 170 $\frac{2}{3}$ per 6 $\frac{1}{3}$ gradus, differentia inter temperiem corporis et aëris initiali existente vti in præcedente experimento, decrevit cuprà calor quinque minutis primis.

E X P E R I M. IX.

§. 21. Ferrum examinans in temperie aëris 57. 5 gr. erat

| tempore | temperies | tempore | temperies |
|---------------------------|-----------|--------------------------|--------------------|
| 0 - - - | 180. erat | 6 min. pr. | 171. 7 |
| 1 min. pr. | 178. 6 | 7 - - - | 170. 4 |
| 2 - - - | 177. 2 | 8 - - - | 169. 2 |
| 3 - - - | 175. 8: | Ergo 7 $\frac{1}{2}$ - - | 170. $\frac{2}{3}$ |
| Ergo 2 $\frac{1}{2}$ min. | 177 | erat 9 - - - | 167. 8 |
| 4 - - - | 174. 4 | 10 - - - | 166. 6 |
| 5 - - - | 173 | | |

Corol. Ferrum hinc a gr. 177 ad gr. 170 $\frac{2}{3}$ per 6 $\frac{1}{3}$ gradus, differentia inter temperiem corporis et aëris initialem existente vti in præcedentibus experimentis VIII. IX, peruenit quinque min. pr.

E X P E R I M. X.

§. 22. Stannum examinans in temperie 60 $\frac{1}{2}$ gr. erat

258 *INQUISIT. IN DECREM. ET INCREM.*

| tempore | temperies | tempore | temperies |
|---------|-----------|----------|-----------|
| 0 - - - | 180. | 8 - - - | 167. 8 |
| 1 - - - | 177. 8 | 9 - - - | 165. 4 |
| 2 - - - | 175. 6 | 10 - - - | 163. |
| 3 - - - | 173. 6 | 11 - - - | 160. 8 |
| 4 - - - | 171. 8 | 12 - - - | 158. 4 |
| 5 - - - | 169. 6, | | |

Corol. Peruenit ergo stannum a gr. 180 ad gr. 169 $\frac{2}{3}$ per 10 $\frac{2}{3}$ gradus, eadem existente differentia initiali inter temperiem corporis et aëris ac in praecedentibus experimentis, quinque minutis primis.

E X P E R I M. XI.

§. 23. Plumbum examinans in temperie aëris 60 et vnus dimidii gradus erat

| tempore | temperies | tempore | temperies. |
|---------|-----------|----------|------------|
| 0 - - - | 180. | 7 - - - | 159. |
| 1 - - - | 176. 8 | 8 - - - | 156. 4 |
| 2 - - - | 173. | 9 - - - | 153. 8 |
| 3 - - - | 170. | 10 - - - | 151. 2 |
| 4 - - - | 167. | 12 - - - | 146. 6. |
| 5 - - - | 164. 4. | | |

Corol. Peruenit plumbum a gr. 180 ad 164. 4, eadem existente differentia initiali inter temperiem plumbi et aëris, vti in praecedentibus experimentis, per 15. 6 gr. quinque minutis primis.

§. 24.

CALORIS SOLIDORVM IN AERE 259

§. 24. Fuerunt ergo decrementa caloris quinque minutis primis, differentia inter temperiem corporum initialem et aëris existente 119.5 gr. Thermometro F indicata,

Aurichalci, Cupri, Ferri, Stanni, Plumbi.
 vti 6. 2 gr - 6.2 gr. 6.8 gr. - 10. 4 gr. 15.6 gr.
 S. vti 10 - 10 - 11 - 17 - 25 ferme.

§. 25. Si confero haec cum tabula ex obseruationibus deducta (§ 17); paruo errore qualibet obseruatione admissio, qui vnum gradum facile superare potuit, in primis iis casibus, vbi velocitas Thermometri adhuc fuit magna, casu 5, 7, 8, ~~multa~~ ~~est~~ repugnantia. Vt hoc euidenter pateat in sequenti Tabula, in prima columna sisto numerum casuum Tab. §. 17. in secunda columna errorem in obseruando addendum vel subtrahendum suppositum; in tertia columna decrementum caloris ante correctionem sub differentia inter temperiem metalli et aëris 119.5 gr. in quarta decrementum caloris post correctionem, sub differentia eadem;

| I. | II. | III. | IV. |
|-------|-------------|-----------|------------|
| (1) ♀ | - - + 0.1 | - - 61. | - - - 6.2. |
| (2) ♀ | - - + 0.067 | - - 60. | - - - 6.2. |
| (3) ♂ | - - + 0.29 | - - 65. | - - - 6.8. |
| (4) ♂ | - - - 0.31 | - - 69. | - - - 6.8. |
| (5) ♀ | - - - 2.4 | - - 12.4 | - - - 15.6 |
| (6) ♀ | - - + 0.3 | - - 11.95 | - - - 15.6 |
| (7) ♀ | - - - 1.37 | - - 12 | - - - 10.4 |
| | K k 2 | | (8.) |

INQUISIT. IN DECREM. ET INCREM.

| I. | II. | III. | IV. |
|--|-----|------|-----|
| (8.) Φ - - - 2.2 - - - 18 - - - 15.6 | | | |
| (9.) Aurich. - 0.9 - - - 6.29 - - - 6.2 | | | |
| (10.) σ^{\dagger} - - + 0.27 - - - 6.37 - - - 6.8 | | | |
| (11.) \mathcal{Z} - - + 0.9 - - - 7.66 - - - 10.4 | | | |
| (12.) \mathcal{Z} - - - 0.22 - - - 10.18 - - - 10.4 | | | |
| (13.) Aurich. + 0.22 - - - 4.68 - - - 62 | | | |

§. 26. Nunc superfedere possem labori inquirendi in incrementa caloris solidorum in aere constantis temperiei, quia, ubi de decremento et incremento caloris fluidorum tractavi, ostendi, incrementa caloris pariter se habere, quam decrementa; ut tamen in hac re nihil omitatur, institui etiam experimenta sequentia.

EXPERIMENT. XII.

§. 27. Aurichalceum globum suspendi foras in temperie aeris aliquot graduum infra gr. 32 aquae gelascentis, spirituque vini cavitati cylindricae infuso, Thermometrum immergi spiritui vini et expectari, donec globus temperiem aeris acquireret. Deinde portavi globum in musaeum et in temperie aeris 62 graduum suspendi et peruenit a gradu 32 calor globi

| post | 3 min. | prim. | ad gr. | 33 | temper. aëris | 62 |
|------|--------|-------|----------|------------------|---------------|----|
| - | 5 | - | - ad gr. | 33 $\frac{1}{2}$ | - | - |
| - | 6 | - | - | 34 | - | - |
| - | 10 | - | - | 35 $\frac{1}{2}$ | - | - |
| - | 15 | - | - | 37 | - | - |

post

CALORIS SOLIDORVM IN AERE 267

| post | min. | prim. | ad | gr. | 39 $\frac{1}{2}$ | - | - | 62 | temper. aëris |
|------|------|-------|----|-----|------------------|---|---|----|---------------|
| - | 99 | - | - | - | 51 | - | - | - | - |
| - | 101 | - | - | - | 51.2 | - | - | - | - |
| - | 110 | - | - | - | 51.8 | - | - | - | - |
| - | 114 | - | - | - | 51.9 | - | - | - | - |
| - | 120 | - | - | - | 52 | - | - | - | - |
| - | 125 | - | - | - | 52.2 | - | - | - | - |
| - | 131 | - | - | - | 52.6 | - | - | - | - |
| - | 136 | - | - | - | 52.7 | - | - | - | - |
| - | 143 | - | - | - | 53 | - | - | - | - |
| - | 166 | - | - | - | 54 | - | - | - | - |
| - | 189 | - | - | - | 55 | - | - | - | - |
| - | 240 | - | - | - | 57.3 | - | - | - | - |

Aurichalcum ergo initiali differentia inter temperiem eius et aeris existente 30 grad. a gr. 32 ad gr. 51 incrementum caloris 19 graduum obtinuit, in aere eiusdem ferme temperiei 99 minutis primis.

E X P E R I M X I I I .

§. 28. Cuprum simili ratione examinavi, quod in temperie aeris 60 $\frac{1}{2}$ gr. pervenit a gr. 28. 6.

| post | 2 min. | pr. | ad | gr. 30 | Temp. aër. | 60 $\frac{1}{2}$ | | post | 8 min. | pr. | ad | gr. 32 | Temp. aër. | 60 $\frac{1}{2}$ |
|------|--------|-----|----|--------|------------|------------------|--|------|--------|-----|----|--------|------------|------------------|
| 3 | - | - | - | 30.5 | - | - | | 9 | - | - | - | 32.3 | - | - |
| 6 | - | - | - | 31.5 | - | - | | 15 | - | - | - | 34.2 | - | - |

K k 3

post

262 *INQUISIT. IN DECREM. ET INCREM.*

| | | Temp. aëris | | | | Temp. aëris | |
|------|----|-------------|-------------|------|-----|-------------|-------------|
| post | 23 | - | 36.4 - 60.5 | post | 89 | - | 48.6 - 61.5 |
| | 28 | - | 38 - - | - | 97 | - | 49. - 62 |
| | 33 | - | 39.2 - - | - | 117 | - | 50.6 - 61.5 |
| | 38 | - | 40.5 - - | - | 147 | - | 52.1 - - |
| | 43 | - | 41.5 - - | - | 157 | - | 52.8 - - |
| | 48 | - | 42.4 - - | - | 167 | - | 53.6 - - |
| | 53 | - | 43.4 - 61 | - | 187 | - | 54.6 - - |
| | 68 | - | 45.7 - - | - | 197 | - | 54.8 - - |
| | 73 | - | 46.4 - - | - | 202 | - | 55 - - |
| | 78 | - | 47 - 61 | | | | |

Cuprum ergo initiali temperie existente 30 $\frac{1}{2}$ gr. in temperie aëris 60 $\frac{1}{2}$ gr. quo parum postea crevit et incrementa caloris cupri hinc auxit, incrementum caloris 19 graduum 94 min. primis obtinuit.

E X P E R I M. XIV.

§. 29. Ferrum in temperie aëris 61 gr. peruenit a gradu 25.2.

| | | Temp. aër. | | | | Temp. aër. | |
|------------------|--------|------------|-----|------------|-----|------------|----|
| post 5 min. post | ad gr. | 27.7 | 61. | post 20 ad | gr. | 34.5 | 61 |
| 10 | - | 30.4 | - | 25 | - | 36.1 | - |
| 12 | - | 31.0 | - | 30 | - | 37.8 | - |
| 15 | - | 32.6 | - | 35 | - | 39.2 | - |

post

CALORIS SOLIDORVM IN AERE 263

| post 40 min. pr. ad gr. 40.5. | Temp. aër. | post 80 min. pr. ad gr. 48.0 | Temp. aër. |
|-------------------------------|------------------|------------------------------|------------|
| | 61 $\frac{1}{2}$ | | 62 |
| 45 - - | 41.7 - | 85 - - | 48.5 - |
| 50 - - | 43.0 - | 90 - - | 49.1 - |
| 55 - - | 43.9 - | 95 - - | 49.6 - |
| 60 - - | 44.9 - | 98 - - | 50 - |
| 65 - - | 45.7 - | 100 - - | 50.2 - |
| 70 - - | 46.5 - | 105 - - | 50.5 - |
| 75 - - | 47.2. 62 | | |

Ferrum igitur in temperie aeris 61 gr. a gradu 31, initiali differentia inter temperiem corporis et aëris existente 30 gr. ad gradum 50 per 19 gradus incaluit 86 min. prim. acceleratum tamen parum est incrementum caloris temperie aëris crescente.

EXPERIM. XV.

§. 30 Stannum in temperie aeris 61. gr. a gradu 31. pertinet initiali differentia inter temperiem stanni et aeris existente 30. gr.

| Post 5 min. pr. ad gr. | Temp. aër. |
|------------------------|------------|
| 34.7 - - - | 61 |
| 26.4 - - - | — |
| 40.0 - - - | — |
| 43.3 - - - | — |
| 45. - - - | 61.5 |
| 46.7 - - - | — |
| 48.8 - - - | — |
| 49.4 - - - | 62 |

Post

264. *INQUISIT. IN DECREM. ET INCREM.*

| | | | | | | Temp. aer. | | | |
|------|-----|------|-----|----|-----|------------|---|---|------|
| post | 52 | min. | pr. | ad | gr. | 50 | - | - | 61 |
| - | 55 | - | - | - | - | 50.4 | - | - | - |
| - | 60 | - | - | - | - | 51 | - | - | - |
| - | 70 | - | - | - | - | 52 | - | - | 61.5 |
| - | 80 | - | - | - | - | 52.6 | - | - | - |
| - | 90 | - | - | - | - | 53.1 | - | - | 62 |
| - | 100 | - | - | - | - | 53.8 | - | - | - |
| - | 125 | - | - | - | - | 55.6 | - | - | - |

Stannum ergo initiali temperie existente 31. gr. in temperie aeris 61 gr. quae vero deinde aucta est et incrementum caloris stanni acceleravit, 52 min. prim. a gr. 3.1 ad 50 per 19 gradus. accessit.

E X P E R I M. XVI.

§. 31. Plumbum in temperie aeris 58 gr. peruenit a gradu 28

| | | | | Temp. aer. | | | | | Temp. aer. | | | | | | |
|------|----|------|-----|------------|-----|------|----|------|------------|------|-----|----|-----|------|----|
| Post | 5 | min. | pr. | ad | gr. | 31.8 | 58 | Post | 39 | min. | pr. | ad | gr. | 46.6 | 59 |
| - | 10 | - | - | - | - | 34.6 | - | - | 42 | - | - | - | - | 47.2 | - |
| - | 15 | - | - | - | - | 37.2 | - | - | 46 | - | - | - | - | 48.1 | - |
| - | 20 | - | - | - | - | 39.8 | 59 | - | 48 | - | - | - | - | 48.4 | - |
| - | 24 | - | - | - | - | 41.6 | - | - | 58 | - | - | - | - | 49.6 | - |
| - | 28 | - | - | - | - | 43.2 | - | - | 68 | - | - | - | - | 50.8 | - |

Plumbum ergo initiali temperie aeris existente 58 gr. a gr. 28 ad gr. 47 per 19 gr. quadraginta duobus minutis primis accessit accelerato parum incremento caloris per temperiem aeris auctam.

§. 32.

CALORIS SOLIDORVM IN AERE 265

§. 32. Vt perspiciamus, vtrum haec conspirent cum iis, quae de decrementis calorum ostendi, secundum legem decrementi et incrementi caloris fluidorum has observationes cum antecedentibus conferre iuabit. Debent secundum hanc legem decremēta et incrementa caloris in aequalibus temporibus paruis esse in ratione composita incrementorum vel decrementorum initialium et differentiarum inter temperies residuas et temperaturam aëris. Vel, si secundum inquisitionem in legem incrementi et decrementi caloris, differentia inter temperaturam corporis et aëris ponatur a , decrementum vel incrementum caloris tempore paruo (1) sub hac differentia b , erit decrementum vel incrementum post tempus $n = \frac{b(a-b)^n}{a^{n-1}}$. Et pro alio

metallo erit post tempus $m = \frac{B(a-B)^m}{a^{m-1}}$. Erunt ita

decremēta et incrementa pro metallis diuersis, vti $\frac{b(a-b)^n}{a^{n-1}} : \frac{B(-B)^m}{a^{m-1}}$ in genere. Re vera, secundum legem decrementi et incrementi caloris, debent esse decremēta

et incrementa caloris, vti $\frac{b(a-b)^n}{a^n} : \frac{B(a-B)^m}{a^m}$, at ratio

tio $\frac{(a-b)^n}{a^n} : \frac{(a-B)^m}{a^m}$ non differt a ratione $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} : \frac{(a-B)^m}{a^{m-1}}$. Cum nunc $b : B$ denotent decremēta vel

incrementa sub aequalibus circumstantiis, sumamus ea ex

Tabula §. 24. Ratio $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} : \frac{(a-B)^m}{a^{m-1}}$ vero exhibetur

Tom. IV. Nou. Com.

L 1

in

266 INQUISIT. IN DECREM. ET INCREM.

ia Experimentis XII. XIII. XIV. XV. XVI. vbi differentiae inter temperiem corporis et aëris his formulis expressae possunt haberi.

Si Aurichalcum cum cupro confertur, est $b = B = 6.2$ gr. Sumatur $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ pro aurichalco $62 - 32$ et

$\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ pro cupro $60.5 - 28.6 = 31.9$, erit ergo de-

crementum vel incrementum caloris aurichalci, ad decrementum vel incrementum caloris cupri 5 min. pr. $= 300 : 31.9 = 1 \frac{1}{2}$ gr. : $1 \frac{1}{20}$. secundum observationes est $= 1 \frac{1}{2}$: 2.4, differentia inter observationes et calculum est 0.64 gr.

Si aurichalcum cum ferro confertur, est $b : B = 6.2 :$

6.8. Sumatur $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ pro aurichalco, vt ante, $\frac{(a-B)^n}{a^{n-1}}$

pro ferro $61.5 - 25.2$. Est igitur incrementum caloris pro aurichalco ad incrementum caloris pro ferro quinque min. primis $= 1 \frac{1}{2}$: 2.18. per observationes est, vti $1 \frac{1}{2}$ ad 2.5. differentia ergo inter calculum et observationes est 0.32 gr.

Si aurichalcum cum stanno confertur, et pro aurichalco ponuntur omnia, vt ante, pro stanno vero $B = 10.4$,

et $\frac{(a-B)^n}{a^{n-1}} = 30.0$, erit incrementum caloris aurichal-

ci ad incrementum caloris stanni, vti $1 \frac{1}{2}$: 3.79. et per observationes est, vti $1 \frac{1}{2}$: 3.7. differentia inter observationes et calculum est 0.91 gr.

Si

CALORIS SOLIDORVM IN AERE 267

Si aurichalcum tandem cum plumbo confertur et pro aurichalco ponuntur omnia, vti ante, et pro plumbo differentia inter temperiem plumbi et aëris, vti pro aurichalco 30.0, pro plumbo $B = 15.6$. erit hinc incrementum caloris aurichalci ad incrementum caloris plumbi, vti $1\frac{2}{3}$ ad 4.16, per obseruationes est, vti $1\frac{2}{3} : 3.8$. differentia hinc est 0.36. gr.

Summam conuenientiam inter obseruationes et calculum non videmus, quia status aëris non semper fuit idem. Aer siccus et tranquillus aliter calefacere debet corpora, ac humidus et agitatus

§. 33. Collatis præmissis obseruationibus omnibus luculenter patet, decrementa et incrementa caloris:

1.) Non sequi rationem inuersam densitatum.

a) Plumbum inter examinata metalla densissimum decrementa maiora passum est, quam reliqua.

b) Cuprum et aurichalcum aequalia exacte decrementa, et incrementa etiam ferme aequalia passa sunt, aequalibus temporibus, licet densitate differant.

c) Ferrum a cupro et aurichalco multo magis densitate discrepat, quam a stanno, et nihilo secius decrementa et incrementa caloris ferri recedunt magis a decrementis et incrementis caloris stanni, quam a decrementis et incrementis caloris cupri et aurichalci, quibus tantum non aequalia obseruantur.

2.) Non sequi rationem inuersam cohaerentiarum absolutarum, quae secundum(*) P. van Muschenbroek sunt pro cupro, aurichalco, ferro, stanno, plumbo, vti 29925, 36000, 45000, 4900, 2925; decrementa et incrementa caloris vero sunt, vti

62, 62, 68, 104, 156.

L 1 2

3.)

(*) vid. dissertationes Physf. Exper.

3.) Neque rationem compositam, ex praedictis; deberent enim decremента et incrementa tali ratione esse pro cupro, aurichalco, ferro, stanno, plumbo, vti $\frac{1}{2602475}$, $\frac{1}{2110000}$, $\frac{1}{2420000}$, $\frac{1}{2377000}$, $\frac{1}{220775}$ et fuit re vera,

vti $\frac{1}{2802475}$, $\frac{1}{2602475}$, $\frac{1}{2365886}$, $\frac{1}{1520867}$, $\frac{1}{231490}$

- a) Ergo decrementum et incrementum caloris aurichalci minus invenitur decremento et incremento caloris cupri, cum per observationes aequalitas inter decremента et incrementa caloris in utroque metallo adsit.
 - b) Decrementum et incrementum caloris cupri et aurichalci minus invenitur decremento et incremento caloris ferri contra observationes.
 - c) Decrementum et incrementum caloris stanni quadruplo maius invenitur decremento et incremento caloris per observationes.
 - d) Decrementum et incrementum caloris plumbi $2\frac{1}{2}$ vicibus minus invenitur decremento et incremento per observationes.
 - e) Comparatis duorum quorumcumque metallorum incrementis et decrementis caloris per calculum, cum decrementis et incrementis caloris per observationes discrepantia insignis apparet.
- 4.) Non sequi rationem inverſam duritiarum; ferrum enim maiorem duritiem habet, quam cuprum et aurichalcum, et nihilo ſecius maiora decremента et incrementa caloris patitur, quam cuprum et aurichalcum.

5)

CALORIS SOLIDORVM IN AERE 269

5) Neque tandem sequi rationem compositam, ex omnibus recensitis rationibus. Quod si enim secundum Mueschenbroek (cit. loco) ponantur durtities:

pro cupro, aurichalco, ferro, stanno, plumbo,
vti 11278, 39000, 80575, 4550, 2304,

erunt decrementa et incrementa caloris per calculum,
pro cupro, aurichalco, ferro, stanno, plumbo, ferme
vti $\frac{1}{812}$, $\frac{1}{11232}$, $\frac{1}{27581}$, $\frac{1}{161}$, $\frac{1}{75}$, et sunt
per obseruationes,

vti $\frac{1}{812}$, $\frac{1}{11232}$, $\frac{1}{283}$, $\frac{1}{188}$, $\frac{1}{124}$.

a) Ergo cupri decrementum et incrementum caloris 36ies maius inuenitur, quam aurichalci, et 88ies maius, quam ferri.

b) Stanni decrementum et incrementum caloris inuenitur duplo ferme maius, quam cupri, et 70ies fere maius, quam aurichalci, et 171ies maius, quam ferri.

c) Plumbum quadruplo maius decrementum et incrementum caloris pati deberet, quam cuprum, et 150ies ferme maius, quam aurichalcum, et 376ies maius, quam ferrum, et $2\frac{11}{25}$ vicibus maius, quam stannum. Haec omnia repugnant valde obseruationibus, vnde apparet, nondum rationem virtutis maioris retinendi calorem ex hisce dari posse, propositionesque in scriptis non nullis physicis precario assumtas esse, quibus asseritur, vel densitatem maiorem, vel cohaerentiam maiorem, vel vtramque simul, vel durtiem maiorem, vel omnes has proprietates simul, efficere virtutem retinendi calorem maiorem. Hoc adhuc magis patebit ex dissertatione, in qua comparationem instituiam

170 SOLUTION. IN DIVERSA TEMP.

inter decrementsa et incrementa caloris solidorum et fluidorum, quam proxime exhibebo, contentus, si phaenomenis accurate definitis, causis veris inveniendis occasionem dedero.

TENTAMEN SOLUTIONEM IN DIVERSA TEMPERIE AD MENSURAM REDUCENDI.

AVCTORE

G. W. RICHMAN.

§. I.

Inter tentamina rationem calorum graduum Thermometri definiendi, effectum solutionis contemplari cum circumspeditione constitui, ut experirer, an inde aliquid concludere liceret? Videbantur enim corpora homogeneae materiae, aequalia et similia in solvente quodam constantis quantitatis, diversae tamen temperiei pati debere solutione decrementsa ponderum in ratione celeritatum particularum soluentis a calore agitatarum.

§. 2. Hunc in finem fieri curavi ex sale gemmae cubulos, quantum fieri potuit, exactos. Frusta salis, ex quibus cubuli confecti erant, videbantur satis homogenea. Pondus unius cubuli in bilance accuratissima, quae additis post aequilibrium $\frac{1}{10}$ partibus grani mobilis erat, ponderatum, erat 163. gran. et alterius 195 $\frac{1}{2}$ granorum. Cubi maioris latus erat 0.56 dig. Lond. circiter
et

AD MENSURAM REDUCENDI 272

et minoris 0.51 + dig. L. Grauitate specifica cubulo-
rum in spiritu vini rectificato et sale saturato, vt nihil
salis solueret temperiei 62. grad. Therm. F. cum cura
examinata et cum grauitate specifica aquae eiusdem
temperiei comparata, inueni grauitatem specificam vtrius-
que cubuli ad grauitatem specificam aquae, vti 209:100.

EXPERIM. I.

§. 3. His praeparatis, in vas amplum decem libras
aquae infudi et aquam ad temperiem 42. graduum reduxi.
Deinde cubulum minorem argento viuo, in vitreo vase
contento, immerfi et orificium vasis bene clausi, totum-
que vas aquae temperiei 42. graduum immisi, vt ar-
gentum viuum et cubulus acquirerent temperiem qua-
draginta duorum graduum. Post dimidiaae horae spatium
cubulum seta equina bene ligatum ex argento viuo ex-
traxi, coaestimque ex bilance hydrostatica suspendi,
cuius lanci alteri 163 grana imposita erant et lanci, ex
qua cubulus pendeat, 78½ grana, quod decrementum
cubulus ex grauitate sua specifica in aqua pati debebat,
immisique aquae temperiei 42. grad. in vase amplo
stagnanti notato simul tempore. Addidi adhuc ponderi
78½ grana in lance, ex qua cubulus pendeat impo-
sito 13½ grana, et post sex min. pr. aequilibrium sub-
latum restitutum est: dein rursus addidi pondus 10. gra-
norum et aequilibrium sublatum post 5. m. pr. resti-
tutum. Ita continuavi, donec cubulus, ex aqua extractus,
pondus 53. granorum haberet, et hinc decrementum
110 granorum passus esset. Erat pondus lanci, ex qua
cubulus pendeat, impositum, vt aequilibrium obtineret in-
ter vtramque lancem

172 SOLUTION. IN DIVERSA TEMP.

| | |
|------------------------|--------------------------|
| post 6 m. pr. 92 gran. | post 20 m. pr. 122 gran. |
| - 11 - - 102 - | - 26 - - 132 - |
| - 15 - - 112 - | |

§. 4. Per leges hydrostaticas patam est, nominato decremento ponderis cubuli initiali in aqua ob gravitatem specificam d , pondere ipso a , summaque ponderum lanci impositorum ad aequilibrium inter pondera in vtraque lance obtinendum b , decrementoque, quod cubulus patitur solutione x , esse debere $b = \frac{(a-x)^2}{d} + x$, et hinc $x = \frac{(b-d)a}{a-d}$. Inveni ergo decrem. ponderis solutionis facta :

| post | 6 | min. | pr. | decrem. | pond. | 26. | gran. |
|------|----|------|-----|---------|-------|------|-------|
| - | 11 | - | - | - | - | 45.3 | - |
| - | 15 | - | - | - | - | 64.4 | - |
| - | 20 | - | - | - | - | 83 | - |
| - | 26 | - | - | - | - | 103 | ½ |

§. 5. Vt comparatio commodius institui possit, appofuisse tabulam iuvat, in qua decrem. tempore simplo, duplo, triplo, etc. sistuntur, et decrem. singulis quinque minutis primis. Quia temperies solventis non mutatur et superficies cubuli mutationes solum subit et volumen, solutio deberet quidem naturaliter decrefcere, vti superficies decrefcit, in paruis tamen temporum intervallis, vbi superficies cubuli non valde mutatur, solutio sine metu aequabilis supponi potest, eritque hinc :

post

AD MENSURAM REDUCENDI 273

post 5 min. prim. solut. 21 $\frac{1}{2}$ gran.

| | | | | |
|------|-------|------------------|-------------------|---------------------|
| - 10 | - - - | 41.4 | - ergo 5 min. pr. | - 19 $\frac{2}{3}$ |
| - 15 | - - - | 64.4 | - ergo 5 min. pr. | - 23 - |
| - 20 | - - - | 83 | - ergo 5 min. pr. | - 18.6 |
| - 25 | - - - | 99 $\frac{1}{2}$ | - ergo 5 min. pr. | - 16. $\frac{2}{3}$ |

§. 6. Summa decrementorum ponderis solutione generatorum fuit per §. 4. 103 $\frac{1}{2}$ gran. 26. min. pr. quo residuo ponderato inuenta est 110. gr. § 3.

Sex $\frac{1}{2}$ ergo solum granis recedit decrementum obseruatum a decremento computato integro solutionis tempore, quae discrepantia oriri potuit a mutata grauitate specifica salis inter solutionem, cum propter cauitates quasdam non fuit perfectissime in omnibus portiunculis homogeneous. Pyramis enim initio accurata abiit tandem in deformem, parte superiori ab vno latere profundius soluta, quam a reliquis lateribus, vnde grauitas specifica aucta ob cauitatem quandam destructam, siue potius apertam, quam occupauit aqua. Quia enim $b < a$, fiet, posita d minori, hinc grauitate specifica salis maiori, $\frac{(b-d)a}{a-d}$ maior, quam antea.

§. 7. *Schol.* Figura pyramidalis, solutione orta, videtur ostendere, soluens inferiorem cubi partem tangens saturatius esse soluente superiorem cubi partem contingente, deorsum enim particulae omnes resolutae initio tendunt; hinc lentius soluit cubi inferiores partes, quam superiores. Cur inclinata pyramidis latera et latus supremum laeuius fuerint, inferior vero cauitatibus inaequalis reddita sit, ratio absque dubio fuit aer incarceratus sale, qui particulis salis abrasis liber et sese expandens,

Tom. IV. Nou. Com.

M m

superi-



274 SOLUTION IN DIVERSA TEMP.

superioraque versus secedere nitens a sale impeditus ca-
vitates effecit, quae effici haud potuerunt ab aëre ex
superiori parte et lateribus inclinatis libere ascendente.

EXPERIM. II.

§. 8. In temperie aquae 84. gr. Therm. F. eius-
dem quantitatis in eodem vase cubum alterum, simili-
ter in argento viuo ad temperiem 84. grad. reductum,
examinaui. Similiter nempe suspendi cubulum ex bilan-
ce et aquae immisi, notato tempore, et 93½ granis
lanci, ex qua cubulus pendeat antea impositis, quod
decrementum ex gravitate specifica pati debuit in aqua,
alteri vero lanci 195½ granis. Addidi dein pondus 17½
granorum 93½ granis lanci, ex qua cubulus pendeat, im-
positis, atque aequilibrium post 3½ min pr. restitutum est:
addidi rursus 20 grana et ita continuaui. Decrementum
ponderis cubuli interuallo 26 min. pr. fuit 174½ gran.
residuum, cum ponderatum fuit, 21 granorum. Cubulus
rursus abibat in pyramidem truncatam superficiei praeter
basin laevis. Basis, vt in primo experimento, cavitatibus
inaequalis et pyramis tandem deformis reddita est. In
sequenti tabula sisto pondera lanci, ex qua cubulus pende-
bat, imposita, et tempus, quo aequilibrium dictis ponderi-
bus restitutum

| pondera | tempus | pondera | tempus |
|-----------|----------------|-----------|--------|
| 111 grana | post 3½ m. pr. | 171 grana | 18½ |
| 131 | - - - 8 | 181 | 22 |
| 151 | - - - 13 | 189 | 26 |

§. 9.

§. 9. Decrementa secundum §. 4. computata ergo sunt, uti sequens tabula exhibet:

| | | | | |
|--------------------------|------------|----------|---|-----------|
| post 3½ min. pr. solutio | 33.5 gran. | post 18¼ | - | 148.5 gr. |
| - 8 | - | - 22 | - | 167.7 - |
| - 13 | - | - 26 | - | 183 - |

Solutio ergo 26 m. pr. computata recedit ab observata (§. 8.) 8¼ granis ob gravitatem specificam salis inter solutionem minutam, quia enim $b < a$, fiet, posita d maiori, hinc gravitate specifica salis minori, $\frac{(b-d)a}{a-d}$ minor, quam antea.

§. 10. Ut comparare possimus observationes Experimenti II. cum observationibus Exper. I, debemus solum solutionem intervallo isto temporis contemplari, quo sal Experim. II. habuit idem pondus cum sale Experim. I. et cuius initio et fine cubuli aequales habuissent superficies, si gravitas specifica non mutata fuisset inter solutionem. Cum minoribus temporibus superficies non mutetur valde solutione, ponatur Experim. II. superficies cubuli initio per 3½ min. pr. constans et solutiones erunt, uti tempora. Erit hinc 33.5 ad 32.5 = 3½ min. pr. ad 3 ⅓ m. pr. Post 3 min. pr. et 23 min. l. cubulus accepit pondus 163 gran. quod cubulus Experim. I initio habuit. Ab hoc tempore decrementum 103 gran. post 13½ min. prima in temperie 84. grad. factum est. In primo Experimento idem decrementum 26. min. pr. sub temperie 42 graduum generatum est. Tempora igitur solutionum aequalium sub temperiebus 42. et 84 graduum fuerunt, uti 2 : 1. Tredecim nempe min. pr. cubus Exper. II. ferme idem passus est decrementum ponderis

M m 2

deris

deris, quod cubus Exper. I. 26. min. pr. Si ergo grauitas specifica cubulorum constans mansisset, figura cubuli Experim. II. interuallo tredecim minut. pr. similiter et aequaliter mutata fuisset ac figura cubuli Experim. I. interuallo 26. min. pr. Solutio tali ratione fuisset constanter aequalis in temporibus minoribus dictam rationem habentibus. Hoc vero non obtinuit exactissime propter grauitatem specificam forte dispariter mutatam durante solutione et ob homogeneitatem cubulorum minus perfectam. Quinque enim min. pr. quidem cubulus Exp. II. decrementum 41. 4 gran. passus est, et cubulus Exp. I. idem decem. 41. 4 gran. decem minutis primis: sequentibus tamen quinque minutis pr. cubulus Exper. II. decrementum 35. 6 gr. et cubulus Exper. I. respondentibus 10. min. pr. 41.6 gran. passus est. Residuis tribus minutis cubulus Exper. II. 22. granorum iacturam fecit, cubulus Experimenti I. vero 6. min. pr. respondentibus 20 $\frac{1}{2}$ gran.

§. 11. Discrepantia, §. praecedente indicata, non est tanta, vt non asserere liceat, solutiones sub temperiebus 42. et 84. graduum Therm. F. sub similibus caeterum circumstantiis et aequalibus temporibus fuisse, vt 1. ad 2. et consequenter in ratione graduum Thermometri F. supra 0. Quid si idem obtineret in solutionibus sub reliquis gradibus Thermometri? Nomen ita gradus Thermometri F. exprimerent celeritates solutionum, quae quidem maiores sunt, si calores sunt maiores, nondum tamen forte calores ipsos mensurare poterunt. Interim diuisionis Thermometri F. praestantia prae reliquorum
Ther.

RATIO CALOR. RESP. LENT. ET TH. DEF. 277

Thermometrorum diuisionibus ex hisce elucet, qua neque Delilianum, neque Reaumuri, gaudet. Nam

| | | | | | | |
|----|-----|--------|----|------------|-------------------|--------|
| 42 | gr. | Therm. | F. | respondent | 141 $\frac{2}{3}$ | Del. |
| 84 | - | - | - | - | 106 $\frac{2}{3}$ | Del. |
| 42 | - | - | - | - | 4 $\frac{1}{3}$ | Reaum. |
| 84 | - | - | - | - | 23 $\frac{1}{3}$ | Reaum. |

Mirandum absque consilio, Thermometrum Fahrenheitianum ita constructum esse.

TENTAMEN RATIONEM CALORVM RESPECTIVORVM LENTIBVS ET THERMOMETRIS DEFINIENDI.

AVCTORE

G. W. RICHMANN.

§. 1.

In cogitationibus meis (*) de ratione calorum et ratione densitatis radiorum directorum ad densitatem per lentem refractorum ostendi, qua ratione in relatiuorum calorum rationem inquirendum sit. Absolutos enim calores comparare, et, in qua ratione sint, definire, aequè supra nostras vires positum est, ac motum absolutum a motu relativo discernere.

M m 3

§. 2.

(*) Non. Comm. Tom. III. p. 340. seq.

§. 2. Calor absque dubio consistit in certo motu certarum particularum corporearum, et quo perniciosior est iste motus, eo maior debet esse calor. Quodsi ergo innotesceret, quae celeritas particularum requiratur, ut definitus calor generetur, absolutus calor definiri posset. Hoc tamen exspectare non licet. Hinc quomodo relativi calores siue excessus caloris super constantem calorem ex excessibus dilatationis argenti viui super dilatationem ab eodem constanti calore aliquo modo definiri possint, inquiram.

§. 3. Rationem excessuum dilatationis super dilatationem a certo calore, a ratione excessuum caloris super eundem calorem, excessus dilatationis producentium differre non est dubium. Quodsi enim mercurius certo gradu iam dilatatus est, minor vis et minor calor sine dubio requiritur ad aequalem dilatationem efficiendam, vi, qua particulae ad unionem sollicitantur, quam Philosophi vim attrahentem nominare amant, dilatatione minuta. Debentque esse excessus dilatationis super dilatationem a certo calore in ratione excessuum caloris super calorem istum certum et inuersa virium particulas argenti viui in Thermometris ad unionem cogentium. Quodsi hinc excessus dilatationis accuratissime innotescerent, et excessus caloris respondentes, a quibus excessus dilatationis pendent, pariter accuratissime constarent, non solum vires, particulas argenti viui ad unionem cogentes sub diuerso temperiei gradu, definiri possent; sed etiam comparatis excessibus dilatationis cum excessibus caloris lex erui, secundum quam ex excessibus dila-

LENTIBVS ET THERMOMETRIS DEFIN. 279

dilatationis argenti viui super dilatationem a calore constanti datis, excessus caloris respondentes super eundem calorem inueniri possent.

§. 4. Vt haec ita represententur, vt vnico obtutu pateant, liceat breuissimis formulis dicta comprehendere. Ponantur excessus dilatationis $D : d$, vires ad vnionem particulas cogentes, quae respondent $A : a$, excessus caloris respondentes $C : c$. Erit $D : d = \frac{c}{A} : \frac{c}{a}$; hinc $A : a = d C : D c$ et $C : c = A D : a d$.

§. 5. Fingamus, duo Thermometra perfecte harmonica nullo affici calore et absolute frigida esse, exponique radiis solaribus, quorum efficaciae sint constanter in ratione data, calores, quos tempusculo paruo radii in mercurio producent, erunt in eadem ratione data, et ita crescet sensim calor Thermometrorum, donec oriantur calores, qui non augeri possunt vltius efficacia radiorum solarium. Cum enim incrementa singula calorum sint in ratione data, summae incrementorum in eadem ratione erunt, et calores in Thermometris producti erunt proportionales efficacis radiorum solarium. Pone aequaliter, sed relatiue frigida esse Thermometra, vt in umbra collocata esse solent, et exponi radiis solaribus, quarum efficaciae sint in ratione data, eadem argumentatione patet, excessus caloris in Thermometris productos super calorem, quem initio habuerunt, siue relatiuos calores esse debere in ratione efficaciarum radiorum solarium, quibus Thermometra afficiuntur.

§. 6.

§. 6. Efficacias radiorum per lentes refractorum in distantiiis datis a foco esse in ratione densitatum radiorum et has densitates in ratione inuersa quadratorum distantiarum a foco ponere licebit. Easdem efficacias radiorum per lentem refractorum esse, vt excessus caloris super calorem in umbra, facile patet. Quodsi enim consideratur, solos radios solis per lentem refractos afficere Thermometra, non directos, liquet, si radii refracti et directi non afficiant Thermometra, illa tantummodo affici debere illo calore, qui aëri umbroso communicatus est, et si lentes accedunt et augent calorem, calores lentibus productos esse excessus caloris super calorem in umbra. Erunt ergo hi excessus calorum pariter in ratione inuersa quadratorum distantiarum a foco.

§. 7. In hoc tentamine ergo ita processi, vt ope machinae, in cogitationibus de ratione calorum etc. descriptae, 1) per Thermometra harmonica post lentes soli obiectas, in diuersis distantiiis a foco posita, excessus dilatationis mercurii super dilatationem mercurii a calore in umbra definiuerim; et 2) per distantias Thermometrorum a foco lentium excessus caloris super calorem in umbra; et vt 3) ex comparatione excessuum dilatationis argenti viui super dilatationem a calore in umbra legem eruere tentauerim, secundum quam, excessibus dilatationis argenti viui super dilatationem a calore constanti datis, excessus caloris respondentes definiri possint.

§. 8. Antequam verò rem aggrediebar, expediebat prius apparatus, quem ad experimenta instituenda com-

LENTIBVS ET THERMOMETRIS DEFIN. 231

comparare licuit, examinare; vtrum nimirum lentes requisitas proprietates haberent, aequaliter nempe interciperent et colligerent radios? Hunc in finem Thermometra aequae velocitatis A et B in aequalibus a foco distantibus locati in axe conii radiantis et obseruati praeter omnem spem, semper Thermometrum post lentem vnam maiorem ostendisse calorem, quam post lentem alteram. Apparebat ergo, lentem vnam plures radios interceptisse, quam alteram, quod, vel a diuersa pelluciditate, vel inaequalitate distantiarum focalium, vel ab vtraque causa simul pendere potuit.

§. 9. Re vera distantiae focales lentium discrepabant, quod apparebat post examen cum solertia institutum, licet artifex omnem solertiam adhibuisse fassus esset, cui iniunxeram, vt si in patina vnam lentem polisset per vnum atque alterum momentum, alteram lentem per idem intervallum temporis poliret in eadem patina, et deinde primam rursus etc. sperans, alterna tali et aequaliter facta politura lentes exacte easdem distantias focales nacturas esse. Euentus spei minus respondit, vel ob artificis minorem solertiam, vel ob rei difficultatem, quod vltimum tamen credere nolim. Cum distantiae focales discrepabant et hinc etiam crassities lentium, non mirandum erat, lentes diuersimode interceptisse radios, vt in distantibus a foco inaequalibus efficaciam diuersam producere debuerint.

§. 10. Thermometra ipsa aequae velocitatis obseruavi post multa examina; hinc ex diuersitate Thermometrorum

Tom IV. Nou. Com.

N a

nulla

nulla metuenda erat discrepantis, quae certe a di-
 versitate Thermometrorum oriri potuisset cacteris omni-
 bus paribus. Quodsi enim bulbi Thermometrorum ita
 calefacti sint, ut excessus caloris super calorem in um-
 bra sint in ratione inuersa quadratorum distantiarum a
 foco, vel ratione densitatum radiorum in dictis distantis,
 et ob maiorem vel minorem interpositionem vaporum
 mutatio oriatur, densitates radiorum quidem mutari de-
 bent, seruent tamen semper necesse est rationem inuer-
 sam quadratorum distantiarum a foco. Erunt ergo incre-
 menta vel decrementa calorum initialia in eadem ratio-
 ne, et etiam in eadem ratione omnia sequentia. Si enim
 similes rationes similibus augeantur vel minuantur, ratio-
 nes non mutantur, et hoc tam diu continuari debet, do-
 nec mercurius in Thermometris quiescat. Quies haec
 vero solam obtineri potest, si bulbi Thermometrorum
 sint aequales et similes, vel superficies in ratione volu-
 minum. Quodsi vero contrarium obtinet, incrementa et
 decrementa erunt in ratione composita directa differenti-
 um inter efficacias radiorum solarium sibi succedentes, i. e.
 in ratione inuersa quadratorum distantiarum a foco et
 directa superficialium bulborum Thermometricorum et
 inuersa voluminum eorumdem. Hinc fieri potest, ut
 mercurius in vno Thermometro citius ad quietem per-
 ducatur, quam in altero, et hinc gradus non respondean-
 tes notentur, quod tamen a nobis non fieri potuit,
 quia Thermometra aequae velocitatis adhibuimus.

§. 12. Vt apparet, vtrum post eandem lentem sequen-
 ter distribuuntur radii per sectiones coni radiantis ad axin
 noc-

normales, vnum Thermometrum in axe conii radiantis et alterum in certa distantia ab axe, vtrumque vero in aequali distantia a foco locauit, et vidi discrepantiam quandam, caloremque prope axem esse minorem, quam in distantia ab axi, quod etiam obtinere debuit ob maiorem crassitiem lentis in medio, quam prope peripheriam, vbi minus radiorum intercipi debet. Discrimen tamen istud non fuit alicuius momenti, nempe non superabat tres ad quatuor gradus secundum scalam F. vt hinc, radios aequaliter distributos fuisse, sine sensibili errore adsumere liceret, inprimis respectu radiorum, qui in eadem distantia ab axe conii radiantis et eadem distantia a foco in Thermometra incidebant, vbi semper Thermometra eundem ferme gradum ostendebant per saepius repetitas obseruationes.

§. 12. Cum per §. 8. et 9. lentes in machina nostra non haberent requisitas proprietates, vel lentes erant aequales reddendae et similes, vel vtrumque Thermometrum erat ponendum post vnam eandemque lentem ita, vt umbrae Thermometrorum in aequalibus a circuli luminosi in planum vltimum machinae proiecti centro distantis sitae essent. Primum tam cito expectare non licebat, hinc alterum modum elegi. Vt tamen appareat, quantum discrepauerint obseruationes duabus lentibus captae ab obseruationibus vna lente institutis, et quomodo excessus dilatationis mercurii supra constantem gradum Thermometri in umbra positi ab inuersa ratione quadratorum distantiarum a foco vtroque casu recesserint, obseruationes duabus lentibus institutas sequentibus

N a s

com-

communicabo. Iuvat enim interdum erronea et imperfecta experimenta adducere, ut cum perfectioribus comparari possint, et tali ratione criteria perfectiorum melius eluceant. Mensibus Aprilis, Iunii et Iulii anni 1752. observationes has institui:

E X P E R I M. I.

Non. Comm.
Tom. III.
Tab. VII.
Fig. 1.

§. 13. 1) Machinam opposui radiis solaribus ita, ut circuli luminosi in vltima tabula apparent, et peripheriis in illa descriptis continerentur.

2) Thermometrum A in distantia 12 digitorum Lond. a foco locavi et alterum harmonicum B in distantia 24 digitorum, vtrumque vero ita, ut umbrae bulborum in centris circulorum luminosorum apparent.

3) Thermometrum tertium harmonicum C in umbra suspendi ita, ut non a radiis solaribus directis nec reflexis affici potuerit. His factis et Thermometris per aliquod temporis intervallum calefactis notavi gradum Thermometri A, ad quem mercurius ascendit, et pariter gradus reliquorum Thermometrorum vnius post alterum tam celeriter, quam fieri potuit. Observationes sequenti tabula exhibeo. In vltima columna exhibetur ratio excessuum dilatationis argenti viui supra dilatationem a calore in umbra, excessu minori dilatationis unitate expressa.

LENTIVS ET THERMOMETRIS DEFIN. 285

| 1) Num. obs. | 2) Therm. A. | 3) Therm. B. | 4) Therm. C. | 5) Excess. Dilat. |
|--------------|--------------|--------------|--------------|-----------------------|
| 1) | 120 | 90 | 80 | 4 : I |
| 2) | 111 | 87 | 79 | 4 : I |
| 3) | 120 | 90 | 80 | 4 : I |
| 4) | 121 | 91 | 83 | 4 $\frac{1}{2}$: I |
| 5) | 122 | 92 | 83 | 4 $\frac{1}{2}$: I |
| 6) | 122 | 91 | 84 | 5 $\frac{1}{2}$: I |
| 7) | 121 | 90 | 83 | 5 $\frac{1}{2}$: I |
| 8) | 107 | 84.5 | 77 | 4 : I |
| 9) | 108 | 85 | 77 | 3 $\frac{7}{8}$: I |
| 10) | 108 | 84 | 76 | 4 : I |
| 11) | 106 | 82 | 75.5 | 4 $\frac{1}{4}$: I |
| 12) | 109 | 83 | 74.5 | 4 $\frac{1}{4}$: I |
| 13) | 102 | 80 | 74 | 4 $\frac{1}{2}$: I |
| 14) | 106 | 82 | 74.5 | 4 $\frac{1}{2}$: I |
| 15) | 105 | 80.5 | 74 | 4 $\frac{10}{16}$: I |
| 16) | 98 | 80 | 73 | 3 $\frac{7}{8}$: I |
| 17) | 102 | 80 | 73 | 4 $\frac{1}{2}$: I |
| 18) | 110 | 82 | 73 | 4 $\frac{1}{2}$: I |
| 19) | 107 | 83 | 73.5 | 3 $\frac{19}{16}$: I |
| 20) | 106 | 83 | 78.5 | 3 $\frac{15}{16}$: I |
| 21) | 102 | 80 | 73.5 | 4 $\frac{1}{16}$: I |
| 22) | 104 | 80 | 73 | 4 $\frac{1}{2}$: I |
| 23) | 103 | 80 | 72 | 3 $\frac{3}{4}$: I |
| 24) | 103 | 80 | 72 | 3 $\frac{3}{4}$: I |
| 25) | 104 | 82 | 72 | 3 $\frac{1}{2}$: I |
| 26) | 104 | 80 | 72 | 4 : I |
| 27) | 103 | 80 | 72 | 3 $\frac{3}{4}$: I |
| 28) | 97 | 77 | 71 | 4 $\frac{1}{2}$: I |
| 29) | 95 | 75 | 70.5 | 5 $\frac{1}{2}$: I |
| 18 | - | N 11 3 | 261 | 6, 30) |

(12

202

186. RATIO CALORVM RESPECTIVORVM

| 1) Num. obl. | 2) Therm. A | 3) Therm. B. | 4) Therm. C. | 5) Excess. Dilat. |
|------------------------|------------------|------------------|--------------|---------------------|
| 30) | 96 | 79 | 71 | 3 $\frac{1}{2}$: 1 |
| 31) | 100 | 80 | 71 | 3 $\frac{1}{2}$: 1 |
| 32) | 98 | 78 | 70.5 | 3 $\frac{1}{2}$: 1 |
| 33) | 100 | 78 | 70.5 | 3 $\frac{1}{2}$: 1 |
| 34) | 98 | 77 | 70 | 4 : 1 |
| 35) | 97 | 77 | 70 | 3 $\frac{5}{7}$: 1 |
| 36) | 97 | 77 | 69 | 3 $\frac{5}{7}$: 1 |
| Sum. 3812. | S. 2960. | S. 2680.5. | | |
| med. 105 $\frac{2}{3}$ | 82 $\frac{2}{3}$ | 74 $\frac{1}{2}$ | | 4 $\frac{5}{7}$: 1 |

In iisdem distantis observationes similes captae,
 Studio vno Thermometrum A, et Studio altero si-
 mul Thermometrum B, et me ipso Thermometrum C
 obseruantes.

| | | | |
|------|-----|------|------|
| (37) | 138 | 95.5 | 80 |
| (38) | 137 | 95 | 80 |
| (39) | 134 | 95 | 80 |
| (40) | 135 | 94 | 80 |
| (41) | 131 | 93 | 80 |
| (42) | 132 | 94 | 80 |
| (43) | 140 | 94.5 | 80 |
| (44) | 138 | 95 | 80 |
| (45) | 139 | 96 | 80 |
| (46) | 137 | 96.5 | 80 |
| (47) | 135 | 96.5 | 80 |
| (48) | 137 | 97 | 80.4 |
| (49) | 133 | 96.5 | 80.4 |
| (50) | 122 | 96 | 81 |

521

LENTIVS ET THERMOMETRIS DEFIN. 217

| | | | | | | |
|-----|---|----------|---|----------------------------------|---|---|
| 51) | - | 184 | - | 96.5 | - | 81 |
| 52) | o | 137 | - | 96 | - | 81 |
| 53) | + | 138 | - | 97 | - | 81 |
| 54) | - | 139 | - | 97.5 | - | 81 |
| 55) | - | 138 | - | 97 | - | 81 |
| 56) | - | 136 | - | 96 | - | 81 |
| 57) | - | 137 | - | 96.5 | - | 81 |
| | | <hr/> | | <hr/> | | <hr/> |
| | | S. 6669 | | 4970 | | 4368 |
| | | med. 117 | | 87 ¹¹ / ₁₆ | | 76.6. β ¹⁰⁰ / ₁₀₀₀ :1 |

EXPERIMENTUM II

§. 24. Vnus Studiosorum observavit in distantia 3 digitorum a foco Thermometrum A, alter in distantia 24 digitorum a foco simul Thermometrum B, et ipse attendit ad Thermometrum C in umbra.

| 1) Num. obs. | 2) Therm. A. | 3) Therm. B. | 4) Therm. C. | 5) Exces. Dilat. |
|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------------------|
| 1) | - 212 | - 93.5 | - 78 | - $8 \frac{100}{115} : 1$ |
| 2) | - 217 | - 94 | - 78 | - $8 \frac{11}{16} : 1$ |
| 3) | - 220 | - 94.5 | - 78 | - $8 \frac{110}{118} : 1$ |
| 4) | - 221 | - 94.5 | - 78 | - $8 \frac{110}{118} : 1$ |
| 5) | - 222 | - 95 | - 78 | - $8 \frac{6}{19} : 1$ |
| 6) | - 214 | - 96 | - 78 | - $7 \frac{10}{18} : 1$ |
| 7) | - 219 | - 95 | - 78 | - $8 \frac{6}{19} : 1$ |
| 8) | - 222 | - 94.5 | - 78 | - $8 \frac{100}{115} : 1$ |
| 9) | - 217 | - 94 | - 78 | - $8 \frac{110}{118} : 1$ |
| 10) | - 216 | - 93.5 | - 78 | - $9 \frac{17}{111} : 1$ |
| 11) | - 213 | - 93 | - 78 | - $9 \frac{11}{113} : 1$ |
| 12) | - 208 | - 93.5 | - 78 | - $8 \frac{11}{111} : 1$ |

13)

288 RATIO CALORVM RESPECTIVORVM

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|------------|---|--------|---|-------|---|----------------------|---|---|
| 13) | - | 207 | - | 94 | - | 78.8 | - | $8 \frac{46}{133}$ | : | 1 |
| 14) | - | 204 | - | 94.5 | - | 79 | - | $8 \frac{10}{133}$ | : | 1 |
| 15) | - | 203 | - | 94.5 | - | 79 | - | 8 | : | 1 |
| 16) | - | 206 | - | 94.5 | - | 79 | - | $8 \frac{30}{133}$ | : | 1 |
| 17) | - | 219 | - | 94.5 | - | 79 | - | $9 \frac{5}{133}$ | : | 1 |
| 18) | - | 222 | - | 94.5 | - | 79 | - | $9 \frac{25}{133}$ | : | 1 |
| 19) | - | 223 | - | 96 | - | 79 | - | $8 \frac{8}{17}$ | : | 1 |
| 20) | - | 217 | - | 96.5 | - | 79 | - | $7 \frac{11}{175}$ | : | 1 |
| | | Sum. 4302 | | 1890.5 | | 1569 | | | | |
| | | med. 215.1 | | 94.5 | | 78.47 | | $8 \frac{839}{1005}$ | : | 1 |

E X P E R I M. III.

§. 15. Vnus Studioforum obseruabat Thermometrum A in distantia 6 digitorum a foco, et alter simul Thermometrum B in distantia 24 digitorum a foco, ipse attendi ad Thermometrum C in umbra.

| 1) Num. obs. | 2) Therm. A. | 3) Therm. B. | 4) Therm. C. | 5) Excess. Dilat. | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|-------------------|---|----|---|--------------------|---|---|
| 1) | - | 302 | - | 91 | - | 76 | - | $15 \frac{1}{3}$ | : | 1 |
| 2) | - | 297 | - | 91 | - | 76 | - | $14 \frac{17}{15}$ | : | 1 |
| 3) | - | 282 | - | 90 | - | 76 | - | $14 \frac{10}{14}$ | : | 1 |
| 4) | - | 292 | - | 89 | - | 76 | - | $16 \frac{8}{13}$ | : | 1 |
| 5) | - | 297 | - | 90 | - | 76 | - | $15 \frac{11}{14}$ | : | 1 |
| 6) | - | 292 | - | 91 | - | 76 | - | $14 \frac{6}{15}$ | : | 1 |
| 7) | - | 302 | - | 89.5 | - | 76 | - | $16 \frac{20}{11}$ | : | 1 |
| 8) | - | 312 | - | 91.5 | - | 76 | - | $15 \frac{7}{11}$ | : | 1 |
| 9) | - | 307 | - | 92 | - | 76 | - | $14 \frac{7}{16}$ | : | 1 |
| 10) | - | 302 | - | 93 | - | 77 | - | $14 \frac{1}{16}$ | : | 1 |
| 11) | - | 312 | - | 94 | - | 77 | - | $13 \frac{14}{17}$ | : | 1 |

12)

LENTIBVS ET THERMOMETRIS DEFIN. 289

| 1) Num. obs. | 2) Therm. A | 3) Therm. B | 4) Therm. C | 5) Excessus Dila. |
|--------------------------|-------------|-------------------|--------------------|----------------------------|
| 12) | 317 | 95.5 | 77 | 13 : I |
| 13) | 332 | 96 | 77 | 13 $\frac{5}{19}$: I |
| 14) | 328 | 94 | 77 | 14 $\frac{14}{17}$: I |
| 15) | 322 | 93.5 | 77 | 14 $\frac{14}{18}$: I |
| 16) | 317 | 92.5 | 77 | 15 $\frac{14}{11}$: I |
| 17) | 313 | 92 | 77 | 15 $\frac{11}{17}$: I |
| 18) | 320 | 92 | 77 | 16 $\frac{1}{7}$: I |
| 19) | 342 | 94.5 | 77 | 15 $\frac{1}{7}$: I |
| S. 5888 | | S. 1752 | S. 1454 | |
| med. 309 $\frac{17}{16}$ | | 92 $\frac{1}{19}$ | 76 $\frac{10}{19}$ | 14 $\frac{1115}{1355}$: I |

§. 16. Ex his observationibus videre est :

- 1) Excessus dilatationis mercurii super dilatationem eius a calore in umbra non prorsus abluere a ratione inuersa quadratorum distantiarum a foco; et
- 2) Excessum dilatationis a calore maiori esse ad excessum dilatationis a calore minori:
 - 1) modo exacte in ratione quadrati distantiae a foco, vbi dilatatio minor producitur, ad quadratum distantiae a foco, vbi dilatatio maior producitur, vid. Exp. I. obs. 1. 2. 3. 8. 26. Exp. II. obser. 10. 16. Exp. III. obs. 5. 17.
 - 2) modo excessum dilatationis a maiori calore esse minorem, quam secundum praedictam rationem esse deberet,
 - 3) modo maiorem.
- 3) Quo minor est calor, eo minus excessus dilatationis ad rationem inuersam quadratorum distantiarum accedere, et quo minor est calor, eo propius

290 **RATIO CALORUM RESPECTIVORUM**

excessus dilatationis ad rationem inversam quadratorum distantiarum appropinquare.

§. 17. Possemus facile ostendere, parvos errores in observatione commissos posse efficere, ut recedant excessus dilatationis a ratione inversa quadratorum distantiarum a foco, cum quinque gradus in Thermometris nostris A et B non excedant $1 \frac{1}{2}$ lin. Lond, si experimenta cum Thermis nostris instituta principiorum loco ponere liceret. Ipsa convenientia rationis excessuum dilatationis cum ratione inversa quadratorum distantiarum a foco non minus, quam quod excessus dilatationis a maiori calore saepissime minor observetur, quam secundum rationem inversam quadratorum distantiarum esse deberet, exhibet certum criterium, non veros excessus calorum pro dilatationibus observatis assumptos fuisse, cum ratio suadet, excessum dilatationis mercurii a maiori calore maiorem esse debere, quam praedicta ratio excessuum caloris assumptorum supra calorem in umbra, vel inversa quadratorum distantiarum a foco requirit.

§. 18. Ex experimentis et observationibus allatis nihil certi colligere licere ex sequentibus adhuc distinctius patebit.

Exp. I. Sunt excessus dilatationis medii supra dilatationem in umbra uti - - - 1 ad 3.797
 excessus caloris respondentes assumti 1 ad 4.
 Hinc viros attrahentes mercurii
 respondentes per §. 4. = - 3.797 ad 4.

Exp.

LENTIBVS ET THERMOMETRIS: DEFIN. 291

Exp. II. Sunt iidem excessus dilatationis vti 1 ad 8.523
excessus caloris respondentes assumti, vti 1 ad 9.

hinc vires attrahentes mercurii

respondentes vti - - - 8.523 ad 9.

Exp. III. Sunt excessus dilatationis iidem 1 ad 14.947
excessus caloris respondentes assumti 1 ad 1600;

hinc vires attrahentes respondentes 14.947 ad 16

vt omnia complectar, sunt

| | | | | |
|------------------------------------|--------|--------|--------|---------|
| pro excessibus caloris assumtis | 1 | 4 | 9 | 16 |
| excessus dilatationis respondentes | 1 | 3,797 | 8,523 | 14,947 |
| et vires attrahentes respondentes | 14,945 | 15,744 | 15,781 | 16,000. |

Pro dilatatione ergo minima vis attrahens minima et pro dilatatione maxima vis attrahens maxima inuenitur. Pro dilatatione 3.797 deberet esse vis attrahens minor, quam pro 1 et inuenitur maior; pro dilatatione 8.523 deberet esse vis attrahens minor, quam pro dilatationibus 1 et 3.797 et inuenitur maior, haec omnia valde repugnant et ostendunt excessus caloris assumtos non respondere dilatationibus obseruatis.

§. 19. Propter imperfectionem hanc videre volui, an obseruationes cum vna lente institutae magis cum iis, quae ratio suadet, conspirent et criterium prodant, excessus caloris veris magis adpropinquantes assumtos esse.

E X P E R I M. IV.

§. 20. Post lentem istam, quae in camera obscura distinctius repraesentabat obiecta in distantia 12 digitorum a foco, posui Thermometrum A² in distantia 24 di-

292 *RATIO CALORVM RESPECTIVORVM*

digitorum Thermometrum B, vtrumque vero ita, vt lentibus soli obuervis vmbrae bulborum a centro circuli luminosi tabulae vltimae machinae aequaliter distarent et in eadem peripheria circuli terminascantur, obseruauit que consueto more Thermometra A. B. C.

| 1) Num. obs. | 2) Therm. A | 3) Therm. B | 4) Therm. C | 5) Exces. Dilat. |
|--------------|-------------|-------------|-------------|------------------|
| 1) | 106 | 77.5 | 70 | 4.80 : I |
| 2) | 104 | 77 | 70 | 4.85 : I |
| 3) | 101 | 77.5 | 70 | 4.13 : I |
| 4) | 99 | 77 | 70 | 4.14 : I |
| 5) | 99 | 77 | 70 | 4.14 : I |
| 6) | 99.5 | 77.5 | 70 | 3.93 : I |
| 7) | 99 | 77.5 | 70 | 3.87 : I |
| 8) | 97 | 77 | 70 | 3.86 : I |
| 9) | 95 | 76 | 70 | 4.16 : I |
| 10) | 95 | 76 | 70 | 4.16 : I |

In sequentibus obseruationibus vnus Studioforum obseruabat Thermometrum A, alter obseruabat Thermometrum B, ipse attendi ad Thermometrum C.

| | | | | |
|-----|-----|----|------------------|----------|
| 11) | 104 | 74 | 66 $\frac{1}{2}$ | 5 : II |
| 12) | 109 | 76 | 66 $\frac{1}{2}$ | 4.47 : I |
| 13) | 109 | 76 | 66 $\frac{1}{2}$ | 4.47 : I |
| 14) | 105 | 75 | 67 | 4.75 : I |
| 15) | 103 | 74 | 66 $\frac{1}{2}$ | 4.86 : I |
| 16) | 105 | 74 | 66 $\frac{1}{2}$ | 5.13 : I |
| 17) | 111 | 76 | 66 $\frac{1}{2}$ | 4.68 : I |
| 18) | 105 | 75 | 66 $\frac{1}{2}$ | 4.53 : I |

19)

LENTIBVS ET THERMOMETRIS DEFIN. 293.

| | | | | |
|-------------|---------|---------|---------|-------------|
| 19) | - 106 | - 75 | - 66½ | - 4.65 : I |
| 20) | - 109 | - 76 | - 67.5 | - 4.88 : I |
| 21) | - 111 | - 77 | - 67.5 | - 4.58 : I |
| 22) | - 114 | - 78 | - 67.5 | - 4.42 : I |
| 23) | - 111 | - 77 | - 67.5 | - 4.58 : I |
| 24) | - 111 | - 77 | - 67.5 | - 4.58 : I |
| 25) | - 109 | - 76 | - 68.5 | - 5.40 : I |
| 26) | - 109 | - 76 | - 68.5 | - 5.40 : I |
| 27) | - 107 | - 77 | - 68 | - 4.33 : I |
| 28) | - 106 | - 76 | - 68 | - 4.75 : I |
| 29) | - 99 | - 73 | - 68 | - 6.20 : I |
| 30) | - 102.5 | - 74 | - 67.5 | - 5.38 : I |
| 31) | - 102 | - 75 | - 66.5 | - 4.17 : I |
| 32) | - 101 | - 74 | - 66.5 | - 4.60 : I |
| 33) | - 107 | - 77 | - 66.5 | - 3.86 : I |
| 34) | - 110 | - 78 | - 67.5 | - 4.05 : I |
| 35) | - 109 | - 77 | - 67.5 | - 4.36 : I |
| 36) | - 107 | - 77 | - 67.5 | - 4.15 : I |
| 37) | - 110 | - 78 | - 68.5 | - 4.36 : I |
| 38) | - 112 | - 79 | - 68.5 | - 4.14 : I |
| 39) | - 108 | - 79 | - 69.5 | - 4.05 : I |
| 40) | - 109 | - 80 | - 70.5 | - 4.05 : I |
| 41) | - 111 | - 80.5 | - 71.5 | - 4.39 : I |
| 42) | - 110 | - 81 | - 72.5 | - 4.41 : I |
| S. 34360 | | 32175 | 2868 | |
| med. 105.60 | | - 76.60 | - 68.28 | - 4.485 : I |

EXPERIM. V.

§. 21. Post eandem lentem in distantia 8 dig. a
foco Thermometrum A. et 24 dig. a foco Thermome-
trum

O O 3.

294 RATIO CALORVM RESPECTIVORVM

trum B. locauit et Thermometrum C in umbra suspendi, obseruauitque successive Thermometra.

| 1) Num. obs. | 2) Therm. A. | 3) Therm. B. | 4) Therm. C. | 5) Excess. Dist. |
|--------------|--------------|--------------|--------------|------------------|
| 1) | 152 | 81 | 72 | 8.89 : F |
| 2) | 152 | 81 | 72 | 8.89 : F |
| 3) | 147 | 80.5 | 72 | 8.82 : F |
| 4) | 137 | 78 | 71 | 9.43 : F |
| 5) | 133 | 77.5 | 71.5 | 10.54 : F |
| 6) | 128 | 76 | 71 | 11.40 : F |
| 7) | 131 | 76.5 | 71 | 10.91 : F |
| 8) | 131 | 77 | 71 | 10. : F |
| 9) | 132 | 77 | 71 | 10.16 : F |
| 10) | 132 | 77 | 71 | 10.16 : F |

In sequentibus obseruationibus vnus Studioforum obseruauit Thermometrum A, alter Thermometrum B, ipse attendi ad Thermometrum C.

| | | | | |
|-----|-----|------|----|-----------|
| 11) | 138 | 67 | 59 | 9.87 : F |
| 12) | 137 | 67 | 59 | 9.75 : F |
| 13) | 142 | 67 | 59 | 10.37 : F |
| 14) | 140 | 67 | 59 | 10.12 : F |
| 15) | 141 | 67 | 60 | 11.57 : F |
| 16) | 132 | 67 | 60 | 10.28 : F |
| 17) | 146 | 67 | 60 | 12.28 : F |
| 18) | 147 | 68.5 | 60 | 10.23 : F |
| 19) | 148 | 68.5 | 60 | 10.35 : F |
| 20) | 145 | 68.5 | 60 | 10. : F |
| 21) | 150 | 68.5 | 60 | 10.59 : F |
| | | | | 22) |

LENTIBVS ET THERMOMETRIS DEFIN. 295

| | | | | | | | | | |
|-------------|---|----------------|---|-------------|---|-------------|---|--------------|------------|
| 22) | - | 138 | - | 68.5 | - | 60 | - | 9.17 | : I |
| 23) | - | 146 | - | 68.5 | - | 60 | - | 10.11 | : I |
| 24) | - | 148 | - | 68.5 | - | 60 | - | 10.35 | : I |
| 25) | - | 136 | - | 67.5 | - | 60 | - | 10.13 | : I |
| 26) | - | 142 | - | 67.5 | - | 60 | - | 10.56 | : I |
| 27) | - | 137 | - | 67.5 | - | 60 | - | 10.62 | : I |
| 28) | - | 140 | - | 67.5 | - | 60 | - | 10.66 | : I |
| 29) | - | 143 | - | 67.5 | - | 60 | - | 11.06 | : I |
| 30) | - | 150 | - | 68.5 | - | 60 | - | 10.59 | : I |
| 31) | - | 145 | - | 68.5 | - | 60 | - | 10. | : I |
| 32) | - | 142 | - | 68.5 | - | 60 | - | 9.64 | : I |
| 33) | - | 133 | - | 67.5 | - | 60 | - | 9.73 | : I |
| 34) | - | 128 | - | 65.5 | - | 60 | - | 12.36 | : I |
| 35) | - | 130 | - | 66.5 | - | 59 | - | 9.46 | : I |
| 36) | - | 142 | - | 67.5 | - | 59 | - | 9.76 | : I |
| | | <u>S. 5041</u> | | <u>2539</u> | | <u>2268</u> | | <u>10.25</u> | <u>: I</u> |
| med. 140.02 | | | | 7052 | | 63.00 | | | |

EXPERIM. VI.

§. 22. Post eandem lentem in distantia 6 digitorum a foco Thermometrum A et 24. digitorum Thermometrum B locaui, Thermometro C in umbroso loco suspenso et obseruaui, uti antea.

| 1) Num. obs. | 2) Therm. A. | 3) Therm. B. | 4) Therm. C. | 5) Excess. Dilat. | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|-------------------|---|------|---|-------|-----|
| 1) | - | 257 | - | 82 | - | 72 | - | 18.5 | : I |
| 2) | - | 263 | - | 82 | - | 71.5 | - | 18.24 | : 2 |
| 3) | - | 270 | - | 83 | - | 72 | - | 18 | : I |
| 4) | - | 253 | - | 82 | - | 72 | - | 18.1 | : I |

5)

296 RATIO CALORVM RESPECTIVORVM

| 1) Num. obs. | 2) Therm. A. | 3) Therm. B. | 4) Therm. C. | 5) Exces. Dilat. |
|--------------|--------------|--------------|--------------|------------------|
| 5) | 250 | 81 | 72 | 19.78 : 1 |
| 6) | 241 | 80.5 | 71 | 17.89 : 1 |
| 7) | 240 | 80.75 | 71 | 17.33 : 1 |
| 8) | 242 | 81 | 71.5 | 18 : 1 |
| 9) | 237 | 81 | 71.5 | 17.42 : 1 |
| 10) | 234 | 81 | 72 | 18 : 1 |

In sequentibus Studiosi obseruauerunt A. et B., ipse obseruauit Thermometrum C.

| | | | | |
|-----|-----|----|------|-----------|
| 11) | 192 | 67 | 59 | 16.63 : 1 |
| 12) | 201 | 67 | 59.5 | 18.87 : 1 |
| 13) | 207 | 67 | 59.5 | 19.66 : 1 |
| 14) | 199 | 67 | 59 | 17.50 : 1 |
| 15) | 202 | 67 | 59 | 17.78 : 1 |
| 16) | 199 | 67 | 59 | 17.50 : 1 |
| 17) | 204 | 67 | 59 | 18.13 : 1 |
| 18) | 207 | 67 | 58.5 | 17.47 : 1 |
| 19) | 198 | 67 | 58.5 | 16.41 : 1 |
| 20) | 200 | 67 | 58.5 | 16.65 : 1 |
| 21) | 204 | 67 | 58.5 | 17.12 : 1 |
| 22) | 202 | 67 | 58.5 | 16.88 : 1 |
| 23) | 206 | 67 | 59 | 18.37 : 1 |
| 24) | 213 | 67 | 59 | 19.25 : 1 |
| 25) | 211 | 67 | 59 | 19 : 1 |
| 26) | 213 | 67 | 59 | 19.25 : 1 |
| 27) | 197 | 67 | 59 | 17.25 : 1 |
| 28) | 197 | 67 | 59 | 17.25 : 1 |
| 29) | 198 | 66 | 59 | 19.86 : 1 |

30)

LENTIBVS BY THERMOMETRIS DEFIN. 297

| | | | | |
|------|-------------|----------------|--------------|-------------|
| 30) | 202 | - 66 | - 59 | - 20.48 : 1 |
| 31) | 211 | - 66 | - 59 | - 21.71 : 1 |
| 32) | 205 | - 66 | - 59 | - 20.86 : 1 |
| 33) | 183 | - 66 | - 59 | - 17.71 : 1 |
| 34) | 218 | - 67 | - 59 | - 19.88 : 1 |
| 35) | 211 | - 67 | - 59 | - 19 : 1 |
| | <u>7567</u> | <u>2484.25</u> | <u>2190.</u> | |
| med. | 216.2 | 70.98 | 62.57 | 18.23 : 1 |

§. 23. Videmus ergo ex obseruationibus cum vase lente institutis

- 1.) Semper ferme a calore maiori maiores excessus dilatationis prodire, quam secundum rationem inversam quadratorum distantiarum a foco prodire deberent.
- 2.) Eo magis recedere dilatationes a lege, quo magis crescut calores. Haec rationi valde conformia sunt et profus contraria iis, quae § 16. ex obseruationibus cum duabus lentibus captis deducta sunt.

§. 24. Vt distinctius omnia pateant, obseruationes in compendium mittam.

Exp. IV. Sunt excessus dilatationis medii supra dilatationem in umbra vti - - - 1 : 4.485.
 Excessus caloris respondentes assumti vti 1 : 4.
 hinc vires attrahentes mercurii resp. 4.485:4.000.

Exp. V. sunt iidem excessus dilat. 1 : 10.25.
 excessus caloris respondentes vti 1 : 9.
 hinc vires attrahentes respond. vti 10.25 : 9.00

Tom. IV. Nou. Com. P p Exp.

598 RATIO CALORVM RESPECTIVORVM

Exp. VI. Sunt iidem excess. dilat. vti 1 : 18.27.
 excessus caloris resp. vti 1 : 16.
 hinc vires attrahentes vti 18.27:16.00.

Vt omnia complectar, sunt

| | | | | | | | |
|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|---|-----|
| pro excessibus caloris | 1 | - | 4 | - | 9 | - | 16. |
| excessus dilatationis | 4 | - | 4.485- | 10.25- | 18.27- | | |
| et vires attrahentes vti | 18.27- | 16.34- | 16.04- | | 16.00. | | |

§. 25. Pro dilatatione ergo minima vis attrahens maxima et pro dilatatione maxima vis attrahens minima invenitur; pro dilatatione 4.485 invenitur vis attrahens maior, quam pro dilatatione 1. et pro dilatatione 10.25 invenitur vis attrahens minor, quam pro dilatatione 4.485. haec omnia rationi convenientissima sunt.

Est porro inter vires attrahentes particularum dilatatarum ab excessibus caloris, qui sunt vti 1 ad 4, differentia vti 0.193. ; inter vires attrahentes particularum dilatatarum ab excessibus caloris, qui sunt vti 4 ad 9, est differentia 0.30. inter vires attrahentes particularum dilatatarum ab excessibus caloris, qui sunt 9 ad 16, est differentia vti 0,04. Sit differentia inter vires attrahentes particularum dilatatarum ab excessibus caloris, qui sunt vti 4 ad 16=0.34. Est ergo differentia praedicta inter excessum caloris 1 et 4 ferme sextuplo maior, quam inter excessum caloris 4 et 16. Hoc rursus rationi valde conforme est, et vires attrahentes in maioribus dilatationibus tandem evanescere debent.

§. 26. Imo excessus dilatationis vili fuit secundum certam legem crescere; Oritur firmo in quolibet
 casu

LENTIBVS ET THERMOMETRIS DEFIN. 299

causa excessus dilatationis calore maiori productus, si $\frac{1}{7}$ pars excessus simplicis dilatationis addatur integrae simplici dilatationi et per numerum excessum caloris maiorem experimentem multiplicetur.

Ita 4. 485 est ferme $= \frac{3300}{7} \cdot 4 = 4 \cdot 57$.
 et 10. 25 est ferme $= \frac{3300}{7} \cdot 9 = 10 \cdot 28$.
 et 18. 27 est ferme $= \frac{3300}{7} \cdot 16 = 18 \cdot 000$.

§. 27. Legem tamen nondum inuentam iudico, secundum quam ex dilatationibus mercurii quilibet calores relativi definiri possint, et vires argentum viuum diuersimode calidum ad vnionem sollicitantes inueniantur. Observationes hae paucae huic rei sufficere non videntur, multiplicentur obseruationes necesse est, et pro aliis distantis a foco adhuc simili ratione inueniantur dilatationes, vt lex tandem erui possit.

§. 28. Iis, quae §. 26. continentur rem nondum absolui, facile patet; fingamus enim hac nostra inquisitione rem esse ad finem perductam, et definiendam esse rationem caloris gradus a Therm. ad gradum b , erunt excess. dilatationum vti a ad $b = 1$ ad $\frac{b}{a}$. Erit ergo per §. 26 $\frac{b}{a} = (1 + \frac{1}{7})x$; si x maiorem caloris excessum exprimere ponatur, qui producit excessum dilatationis x , erit $x = \frac{7b}{8a}$. Erunt ergo relativi calores pro 1 et $\frac{b}{a}$. vti $1 : \frac{7b}{8a} = 8a : 7b$. Erunt ergo vires attrahentes pro a et b , vti $7ab : 8ba = 7 : 8$ (§. 4.). i. e. in constanti ratione, quod est absurdum.

§. 29. In observationibus adductis vires mercuriam ad vnionem follicitantes forte non multum recesserunt ab hac ratione. Recesserunt tamen re vera per §. 24. Ponamus etiam simplici dilatationi primo Experimento addendam quantitatem x , 2do y et 3tio z , erit

$$\text{Exp. I. } (1.00 + x)4 = 4.845$$

$$\text{et hinc } x = 0.12.$$

$$\text{Exp. II. } (1.00 + y)9 = 10.25$$

$$\text{hinc } y = 0.1389.$$

$$\text{Exp. III. } (1.00 + z)16 = 18.27$$

$$\text{hinc } z = 0.1418.$$

Primo experimento ergo minor, quam octaua pars simplici

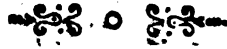
excessui dilatationis est addenda, nimirum $\frac{1}{8\frac{1}{2}}$, et secundo

maior, quam vna octaua pars, nimirum $\frac{1}{8\frac{1}{2}}$ pars, et tertio

maior, quam $\frac{1}{7\frac{1}{2}}$, scil. $\frac{1}{7}$ pars.

§. 30. Quo magis ergo maior excessus caloris simplicem excessum caloris superat, eo maior pars simplicis excessus dilatationis simplici excessui dilatationis est addenda, vt summa oriatur, quae per excessum caloris maiorem multiplicata det dilatationem maiorem, calore minore multiplicatam. Hoc rursus criterium suppeditat excessus caloris propinquos veris pro dilatationibus argenti viui definitis assumptos fuisse. Si Deus viuere sinat, ex pluribus imposterum obseruationibus aptioribus et scalae maioris thermometris experimenta repetiturus et continuaturus, pro excessibus caloris, qui in alia ratione sunt excessus dilatationis respondentēs, eruere laborabo.

DE



DE INDICE ELECTRICITATIS
ET DE EIVS VSV IN DEFINIENDIS ARTIFI-
CIALIS ET NATVRALIS ELECTRICITATIS
PHAENOMENIS

DISSERTATIO

G. W. RICHMANNI.

Officium meum in leges naturae inquirendi effecit, ut octo ab hinc annis in electricitatis phaenomena inquirere, inter alios labores Academicos, inceperim. Cum perfectum electrometrum, siue instrumentum, quo virtus electrica definitur, ad electricitatis doctrinam perficiendam absque omni dubio multum faciat; initio statim cogitavi de commoda ratione definiendi virtutis electricae intensiorem. Mihi tamen nondum ita felici esse licuit, ut electrometrum perfectum nactus fuero, nescio vtrum alii? Relatum mihi quidem est, quendam le Roy in Gallia et d'Arcy adiunctum Mechanices, corpus aquae innatans, per communicationem electricatum in vase vitreo, et vicino alio corpore deriuatiuae electricitatis attractum et eleuatum, adhibuisse ad electricitatem mensurandam, spatio adscensus gradum electricitatis notante, utque scala redderetur amplior, corporis electricati extremitatem acutam ita luce illuminare docuisse, ut umbra acutae extremitatis proiiceretur in tabulam distantem, in qua scala, pro electricitatis gradu mensurando, delineata erat. Deinde Fräncklin primus electricitatis per acuta corpo-

ra ex atmosphaera , fulminea materia grauida , prouocandae auctor , machinulam ex rotulis compositam leuissimis , ex charta crassiori , instar molendini alati , electricitate ad motum concitauit , ad materiae electricae motum ostendendum. Haec forte machina , celeritate circumvolutionis indicis cuiusdam , vim electricitatis mensurare poterit. Nihil tamen de imperfectione et perfectione harum machinarum mihi dicere licet , cum eas nondum adhibere et ne accuratas quidem earum descriptiones videre licuerit. Eo ergo solum indice electricitatis usus sum , qui in Commentariorum Tomo xrv. a me descriptus est , et quem postea emendaui. Mentionem quidem etiam feci , ex percussionum campanulae , electricitate factarum , frequentia iudicium ferri posse de virtutis electricae intensione ; campanula tali tamen non usus sum , ad phaenomena electrica definienda , sed solo filo lineo , ad regulam pendulo , de quo nunc quaedam phaenomena electricitatis tam artificialis , quam naturalis , quatenus indice praedicto definita sunt , exponere , phaenomenaque electricitatis explicare constitui.

Indicem electricitatis voco tale instrumentum , cuius ope electricitas cuiuslibet corporis , in diuersis circumstantiis , cognosci potest ita , vt appareat , vtrum nunc sit maior , quam alias ? et quod inferuit legibus electricitatis commode definiendis. Probabile est in vna regione maiorem electricitatem excitari posse , quam in altera. Cel. Muschenbrockio non imitari licuit in Belgio quaedam experimenta electrica , nec mihi hic Petropoli , quae in Germania , Gallia , Italia capta sunt felicissime. De magno autem experimentatore Muschenbrockio per-

suasus

status sum, ipsum satis assuetum esse experimentis cum cura et circumspectione instituendis, et occasionem etiam habuisse, machinam idoneam et perfectissimam electricam sibi comparandi. Neque dubitandum est, electricitatem naturalem, in atmosphaera sponte generatam, in vna regione maiorem esse, quam in alia: e re igitur utique erit, instrumentum aliquod adhibere, quod discrimen eiusmodi prodit.

Vtrum meus index aliqualem vtilitatem habeat? ex sequentibus iudicandum est. Ex Tomo XIV. Com-TAB. VIII. mentariorum perspicitur, illum nihil aliud esse, nisi filium lineam AB ; pedis Lond: et dimidii grani medicum prope regulam latam verticalem AC , adplicatum et ex suprema regulae parte ad latus angustius pendulum, sub quo quadrans ligneus $DEFGH$ paulo maioris radii, quam longitudo fili est, ita locatur, vt punctum suspensionis fili sit centrum quadrantis et planum quadrantis cum sectione regulae verticali, eaque ampliori, sit in eodem plano. Si talis regula cum massa electricata est connexa, ipsa electricata repellit filum electricatum, quod etiam quadrante ligneo non electricato attrahitur. Tali ratione, quo magis recedit filum a regula, eo maior electricitas excitata sit necesse est.

Cauendum etiam est, ne pinguedo et cera regulae metallica adhaereat, quae efficit, vt filum a regula electricata in eo puncto, vbi cera adhaeret, non repellatur, sed potius retineatur quam tenacissime, indicio certissimo, materiae electricae agitationem in hoc puncto non solum impediri, sed etiam ceram aliam electrica-

citatem obtinere, quae loco repulsionis filum attrahit. Quodsi vero electricitas fortior excitetur ita, ut vis repellens reliquarum partium regulae vim attrahentem cerae superet, tandem filum a regula recedit. Imo vasculum vitreum, quo regula excipitur, pariter retinet filum, si ab eo contingitur, ut non nisi electricitate fortius excitata filum a vasculo vitreo separetur.

In praedicto indice fili recessus a regula maior, quam antea, filo manente eiusdem longitudinis et ponderis et massa electricata eadem, indicat, uti dictum, maiorem electricitatem, quam antea excitatam fuisse; varique indices sibi similes et aequales, quorum fila sunt eiusdem longitudinis et ponderis, in diuersis locis ad eandem massam electricatam applicati, ostendunt eundem gradum. Quodsi massae vni electricatae index applicatus prodit certum gradum, similisque index, aequè longo et aequè graui filo instructus, alteri massae electricatae, et post electrificationem a priori separatae, iunctus, eundem ostendit gradum, massae electricatae sese mutuo contingentes nullam scintillam exhibent, et vterque index etiam post contactum eundem respicit gradum, indicio certo aequaliter electricatas esse. Applicatas tandem indicibus aequè longorum et grauium filorum massis diuersis electricatis et post electrificationem separatis, debilitataeque vnius massae electricitate quomocunque, ita ut filum minorem gradum ostendat, quam filum alterius indicis, massae dum sese contingunt, scintillam exhibent electricam, et post contactum massarum index vterque ostendit eundem gradum. Quodsi haec considerentur, patebit, indicem talem idoneum

neum esse instrumentum, cognoscendi cuiusque massae electricatae gradum electricitatis vel maiorem vel minorem. Obseruandum tamen est, semper eiusdem longitudinis et ponderis filum adhibendum esse. Aliter electricitatis virtus male definitur, et nulla comparatio institui poterit, vnumque filum hunc, et alterum alium, gradum ostendere poterit, virtute electrica eadem cum vtraque massa communicata. Rationem rei non difficile intelligere est: Materiam electricam circa corpus motu quodam agitatum ad certam distantiam cingere debere corpus necesse est, et in minori distantia a superficie corporis maioris efficaciae esse, consequenter crescente distantia certa lege et nobis nondum cognita, decrescere virtutem. Quodsi ergo filum eiusdem longitudinis et ponderis a superficie vnius corporis remoueatur ad eandem distantiam, ad quam remouetur ab alio corpore, indicium erit certum, materiam electricam agitatum in aequalibus his distantis efficaciae aequalis esse, et in aliis distantis minoribus aequalibus aequaliter pariter se habere, virtutemque electricam in vtroque corpore esse aequalem. Quodsi vero filum a superficie vnius corporis electricati remoueatur ad distantiam maiorem, quam filum eiusdem longitudinis et ponderis a superficie alterius corporis electricati, indicium similiter certum erit, efficaciam materiae electricae agitatae in corpore priori in distantia minori et aequali distantiae, ad quam filum a superficie alterius corporis remouetur, maiorem esse, hinc etiam eius virtutem electricam maiorem esse debere.

Fac nunc requisitum boni indicis nihil aliud esse, quam vt ostendat maiorem vel minorem electricitatis

Tom. IV. Nou. Com.

Qq

gra-

gradum, nit desiderari videtur amplius. Sed nemo forte negabit usum indicis ampliore reddi, si (1) index applicatus corpori electrico non efficit, ut electricitas excitata cito pereat, ut nempe lex decrementi electricitatis et constitutio materiae electricae agitatae detegere tandem possit, et si (2) cuilibet massae commode possit applicari ad electricitatis gradum examinandum, quod interdum valde necessarium. Neutrum requisitum in indice descripto inuenitur, electricitas enim excitata valde diminuitur ob arcum ligneum angulis solidis regulae vicinum, quibus forti electricitate excitata in tenebris conus coeruleus electricus cum susurro ex scintilla electrica, in angulis solidis regulae sponte orta, generatus adhaeret: remedium tamen inueniri poterit, uti ex sequentibus adparebit.

Notissimum est phaenomenon electricum, quod modo descripsi, et attente consideranti videtur esse reuera eiectio continua radiorum diuergentium ex corpusculis lucidis constantium, qui quidem ex angulis solidis corporum, quae deriuatae electricitatis capacitates sunt, electricorum, oriuntur; inprimis aliis corporibus deriuatae electricitatis infinitis non electricis ita admotis, ut anguli solidi adpropinquatorum non respiciant angulos solidos electricorum corporum. Quodsi vero anguli solidi acuti corporum sibi obuertantur, in distantia 5: vel 6 digitorum ex angulo solido utriusque, electrici nimirum et non electrici, conus multo minor, quam praedictus, cum sibilo erumpit, debiliorque electricitate excitata, lumen extinguitur.

Hic filum sermonis, quod mihi sequendum proposui, parumper relinquam, illuc mox reuersurus; in-

primis

primis cum dicenda, ad quaedam, quæ sub finem addere animus est, melius intelligenda, facere videantur. Quaeritur, cur lumen conicum in angulis solidis acutis potius et prominentibus corporum partibus oriatur? cur non in superficie plana et curva? cur non in angulis planis? cur ex acuto corpore electrificato, obtuso corpore infinito opposito, erumpat conus magnus electricus, acuto vero obuerso multo minor? Certe quæ a nonnullis allata sunt obscuritatem redolent, neque ego nunc rem ita explanare in promptu habeo, ut nihil desiderari possit, sat contentus, si occasionem iis, qui ingenio præstant, dederò aliqualem, rem rite explicandi, conditiones, sub quibus phaenomenon oritur, definiendo.

Verum quidem est, cingi debere corpora electrica, ad certam distantiam, materia quadam subtili agitata: nihil dicam de his phaenomenis, quæ talis materia in ipsis intimis recessibus et porulis corporum, omni sagacitati sese subducens, efficere potest, et ponere fortasse licebit, materiam electricam agitatum occupare spatium circa corpus electrificatum tale, ut extendatur a quolibet puncto superficiei ad aequalem distantiam. Quodsi ergo corpora figuris differunt, et magnitudinis etiam, volumina materiae electricae agitatae valde discrepabunt. Nonne etiam discrepantibus his voluminibus actiones corporum electrificatorum, sub eodem electricitatis gradu, discrepabunt? Hoc ex sequentibus experimentis cum magna veri specie concludi posse credidi. Massam ferream superficiei 10'' \square torum prismaticam impositam vitro adplicui ad massam electrificatam et oriebatur scintilla massa electrificata tacta. Deinde tu-

Qq 2

bum

bum ferreum aequalis massae cum massa prismatica, sed cuius superficies erat 130 digitorum \square eodem modo applicui ad eandem massam, cuius electricitas diminuta erat applicatione prismatis et maior oriebatur concrepatione et scintilla, et maior etiam indicis mutatio. Etiam per massam aurichalceam ponderis $\frac{1}{2}$ librae et superficiei 700'' \square , magis concrepantem scintillam elicui ex massa minus electrificata, quam per massam aurichalceam duarum librarum, et superficiei 50'' \square ex massa magis electrificata eadem. Certe scintilla posteriori casu efficacior non erat, quam priori casu.

Amplissimus sese hic offert campus, quo stereometriae amatores sese exercere possunt. In prismatibus omnibus rectis, consequenter etiam infinitangulari siue cylindro et etiam sphaera, facile volumen materiae electricae excitatae definiiri potest, radio actiuitatis cognito. Est enim istud in prismate recto summa (1) ex *parallelepipedo*, cuius basis integra superficies prismatis, altitudo vero aequalis radio actiuitatis corporis electrificati, (2) ex *prismate*, cuius basis quarta pars circuli, radii, aequalis radio actiuitatis corporis electrificati et altitudo duplum perimetri baseos prismatis, atque (3) ex *cylindro* cuius basis circulus, radii, aequalis radio actiuitatis corporis electrificati, et altitudo aequalis altitudini prismatis, et (4) ex *sphaera*, cuius radius aequalis radio actiuitatis corporis electrificati. In cubo in specie est volumen materiae electricae agitatae summa 1) ex *parallelepipedo*, cuius basis sextuplum quadratum lateris, et altitudo aequalis radio actiuitatis corporis electrificati. 2) Ex *cylindro*, cuius baseos radius, aequalis

lis radio actiuitatis corporis electrici, et altitudo triplum latus cubi; et tandem. 3) Ex *sphaera* radii aequalis radio actiuitatis cubi electrici. Ultima pars summae, nimirum *sphaera*, imprimis venit consideranda.

Ad angulos solidos prismatum continentur sectores *sphaerae*, radii, aequalis radio actiuitatis corporis electrici, tribus planis, in quibus sectoribus materia electrica agitata continetur, et summa omnium talium sectorum in prismatico est aequalis *sphaerae* integrae, eiusdem radii. In prismatico triangulato recto, est hinc volumen materiae electricae, vni angulo solido adhaerentis, sexta pars praedictae *sphaerae*, in prismatico quadrangulato octava pars eiusdem, in prismatico quinquangulato $\frac{1}{5}$ pars etc. consequenter in prismatico infinitangulato siue cylindro infinitesima pars.

Considerari meretur, eo maius esse volumen materiae electricae agitatae, angulo solido inclusum, quo acutior est angulus bascos prismatis, lateribus bascos inclusus, eo minus vero esse praedictum volumen, quo obtusior est angulus praedictus, si radius actiuitatis ponitur idem. Quodsi nunc ponatur materiam electricam agitam a corporibus eo difficilius separari, quo in pluribus punctis materia haec corpus contingit, et eo facilius, quo in paucioribus punctis hoc fit, adhaesionem nempe hanc si iusto maior est, impedire, quominus materia agitata a corporibus separetur, et in aliam similem materiam extra corpus incurrat, vt collisione lux oriatur, si vero minor est, separationem et collisionem praedictam non impediri, et hinc lucem per satis notabile interuallum exhiberi, non difficulter videtur concipi

pi posse, cur lux continua generetur, si corpus non electrificatum ad corporis electrificati angulum adpropinquet. Materia enim electrica corporis non electrificati quiescens, in locum materiae agitatae et a corpore electrificato expulsa secedere debere videtur, hinc tritus oriri et lux: praesertim si angulo solido corporis electrificati obiciatur corpus obtusum non electrificatum, quo casu separatio materiae facilis, et accessus nouae materiae largus esse videtur.

In superficiebus corporum planis materia electrica agitata adhaeret in pluribus punctis corpori, ita, vt non separetur facile: haec fortasse est ratio, cur hoc casu lumen, praedictum, continuum, non oriatur in eiusmodi superficiebus. In omnibus angulis planis materia electrica, quae vni puncto adhaeret, est ita parua, vt prismata infinite paruae altitudinis constituat, cuius basis est sector circuli, radii, aequalis radio actiuitatis corporis electrificati, hinc probabiliter ob paucitatem materiae, talis angulus, lumini praedicto praebendo, par non est. In superficie incuruata cylindri, qui instar prismatis infinitangularis, considerari potest, latera baseos faciunt angulum planum, hinc idem, quod in praecedente casu fieri debet. In angulis solidis prismatum, si adhaeret materia electrica agitata angulis baseos prismatis obtusis valde, volumen materiae electricae agitatae debet esse paruum, hinc per supradicta lumen praedictum non oritur, quod experientiae est. In angulis solidis prismatum acutis aliter se res habet, vt ibi lumen praedictum exhibeatur experientia teste. Quia angulus solidus electricae materiae in cylindris est infinite paruus, propterea

pterea in angulis solidis cylindri non licet sperare lumen praedictum continuum, quod experientia satis notum est. In pyramidibus, quo acutior est angulus solidus pyramidis, eo obtusior est angulus solidus materiae electricae, verticibus pyramidis adhaerentis, et eo maius est volumen materiae electricae ibi agitatae; hinc experientia teste, ex eiusmodi angulis e. g. extremitate siue cuspidis gladii electricitati, et extremitatibus foliorum, plantarum electricatarum, hoc lumen exit. Quodsi guttulae aquae parallelepipedo horizontali electricitato incumbunt, et admoventur corpus non electricatum, guttulae eleuantur et figuram conicam induunt, verticibus sursum spectantibus, debet ergo per modo dicta lumen praedictum in verticibus exhiberi, quod experientia comprobatur.

Nolim tamen dicere nullo gradu electricitatis exitato non nisi in angulis solidis corporum et partibus procumbentibus lumen praedictum oriri. Ea electricitate, quam ego producere potui, lumen conicum in his tantum exhibere licuit, in aliis non item. Electricitas vero mea, quam Petropoli producere potui, filum iudicis descripti ultra 50 gradum hyeme nunquam et aestate vix ad gradum quadragesimum eleuauit. Forte, si eleuari posset multo magis filum, etiam lumen in aliis partibus corporum exhiberetur et totum corpus lumine circumdaretur, quod a *Cel. Basso* obseruatum in eius Commentariis legimus, vbi ei hoc phaenomenon beatificationis nomine insigne colibitum est. Neque audeo dicere ex acutissimo angulo solido lumen conicum maximum oriri, quia ei obtusissimus angulus solidus, electricam materiam agitatam continens, obicitur, et quia volumeni

men huius materiae ferme aequale est dimidiae sphaerae, radii, aequalis radio actiuitatis corporis electrici. Prismatis enim quadrangularis angulus solidus mihi visus est maius lumen praebuisse, quam acutissimus pes circini. Fortasse ex maiori angulo solido etiam largius materia electrica, vel materiam electricam ex parte constituens, erumpit et refarcit decrementum electricitatis magis in hoc loco, quam materia ex angulo solido minori eiaculata, adestque forte hic quaedam compositio rationum ex ratione magnitudinum angulorum solidorum corporis electrici et angulorum solidorum, qui materiam electricam agitatam continent; ubi ex principiis arithmetiis patet, factum oriri maximum, si factores sint aequales, summa manente eadem, quod in dicto casu obtinet.

Consideratio luminis conici electrici forte nos iusto diutius a proposito nostro persequendo detinuit, ad quod nos nunc rursus accingimus.

Dixi cum lumine praedicto decrementum electricitatis eximium coniunctum esse, quod edoctus sum, dum tempus, quo descendebat filum indicis electrici, per certum arcum, annotarem, deinde extremitatem regulae vasculo vitreo exciperem et interuallum inter vasculum et regulam limatura martis vel rasura alio metalli explerem, deuoque excitata electricitate, ut filum eundem gradum ostenderet, quem initio in primo casu, tempus, quo electricitas decrecebat per eundem arcum obseruarem. Tempus enim ultimo casu semper multo maius erat, quam primo, certo indicio electricitatem priori casu decreuisse citius, quam atero. Priori casu etiam filum nunquam ad tantam altitudinem eleuare potui

ac

ac altero casu. Inuat hic monuisse, non necessari-
um esse limaturae martis, vel rasurae alius metalli usum.
Quodsi enim regula fundum vasis vitrei tangit, idem fit;
quin absque contactu fundi decrementum electricitatis
minuitur. Auro etiam obduci potest interior vasculi su-
perficies et regula demitti, donec aurum tangat. Ex
dictis simul satis intelligitur, qua ratione index emendan-
dus sit, ne electricitas cito decreseat.

Observatio decrementi electricitatis, ob angulum so-
lidum corporis electricitati corpori non electricato vi-
cium, occasionem dat variis cautelis in experimentis ele-
ctricis adhibendis, ad quas in usu indicis cum industria
attendendum est, si phaenomena comparare volumus.

1.) Cum cura cauendam, ne in massa electricata
anguli solidi praesertim acuti occurrant, lumina conica
exhibentes in tenebris: hinc extremitates filorum me-
talllicorum, lucem hanc eiaculantes, cera obturavi; qua
re, effeci, ut lux in extremitatibus euanesceret. In ca-
tena ferrea adhibita hinc et inde lux illa adparebat in
tenebris, et cum catenam examinarem, in locis illis pro-
cumbentes lamellas acutas offendebam, quibus abrasis lux
cessabat et decrementum electricitatis minuebatur. Dum
circinum massae electricandae imponebam, ita ut pedes
ex utraque parte prominere, vix electricitas excita-
batur ea, ut ad gradum quadragesimum filum indicis
motu, certa lege retardato, eleuaretur, et a gradu 40 ad
35 cessante tritu vitri electricatorii 36 minutis secun-
dis descendebat, remoto vero circino et electricitate de-
nuo excitata promte filum, motu, certa lege retardato,

314 DE INDICE ELECTRICIT.

ad 50 gradum ascendebat, et a gradu 40 ad 35 centum minutis secundis peruenit.

2) Non solum electricitas decrefcit cito ob acuta corpora massae electricatae adplicata, sed etiam si corpora deriuatae electricitatis capacia, imprimis infinitae connexionis cum aliis similibus et obtusa, vicina sint angulis solidis corporum electricatorum, vel acutis extremitatibus massae electricatae, et hoc quidem casu citius etiam electricitas decrefcit. Quod si enim circini pedi admouetur manus in distantia 5 vel 6 digitorum, massa ad gradum e. g. 40 electricata, filum admodum celeri motu regulam versus descendere incipit.

3) Possunt duo diuersa corpora aequalia et similia aequaliter electricata in eodem medio inaequaliter virtutem electricam perdere, vnum citius, alterum tardius; si nimirum vnum versus corpus respiciant admodum acuta corpora, deriuatae electricitatis, infinita, in distantia 6 et plurimum digitorum, alterum versus vero non similiter. Ad hoc maxime attendendum est, et omni cura cauendum, ne massae electricandae corpora acuta, deriuatae electricitatis, infinita, vicina sint. Quod si enim pes circini teneatur in distantia 6 digitorum a massa ad gradum e. g. quadragesimum electricata, filum indicis continuo et celeriter descendere incipit. Quod si vero caput circini, vel aliud quodcumque corpus obtusum massam electricatam versus dirigatur, tardior filii accessus ad regulam obseruabitur, licet corpus obtusum propinquius admo-ueatur, quam acutum admotum erat. Eadem res curioso spectaculo confirmatur, si suberis frustum ex filo serico suspendatur prope massam electricatam. Notum est, illud repelli debere

debere, attractione praecedente. Hoc facto, teneatur in distantia quinque vel sex digitorum a subere circini pes, et accedet statim ad massam electricatam suber, evidenti indicio, illud electricitatis iacturam passum esse, et adhaerebit massae electricatae similiter: ponatur dein digitus inter pedem circini et frustum suberis, digitusque adpropinquetur suberi, et accedet suber ad digitum, nempe corpus electricatum ad non electricatum. Hoc repetitis vicibus fieri potest.

4.) In medio siccissimo, quantum potest, experimenta electrica sunt instituenda: humidum aerem electricitati officere ab omnibus ferme notatum est, neque dubito genuinam rationem, cur fiat, allatam fuisse, licet mihi non innouit, si quis fuerit. Si medium est humidum, humiditates a massa electricata attrahuntur, et non facile separantur, nec repelluntur ob cohaesionem. Quateus tamen humiditates massae electricatae adhaerent, nullum decrementum electricitatis oritur, nisi guttae illapsae aquae, admotis aliis corporibus obtulis infinitis, conicam figuram uanciscantur, et conos lucidos emittant. Decrementum istud oritur potius ob fulcimentata humectata, quae electricata per communicationem eodem attrahunt humiditates, ac corpora deriuatiuae electricitatis electricata. Ista humectatio eo promptius fit, quo electricitas efficacior excitatur, et haec est ratio, cur electricitas in frigido conclauu spectatoribus multis praesentibus initio sat valida sit, mox tamen decrescat et interdum cesset. Humiditates enim ex spectatoribus praesentibus per transpirationem insensibilem emissae attrahuntur a fulcimentis corporum electricatis, quae mutantur in corpora deriuatiuae electricitatis infinita.

R 1 2

Con-

Confirmatum fuit hoc egregie experimento, cui occasionem dedit Collega honoratissimus Vir Amplissimus Lomonosow, dum tres portiones vitri, in puluerem diuersae subtilitatis triti, sumsi eum in finem, vt examinarem, vtrum pulueres triti mutarentur in corpora deriuatiuae electricitatis? an suam indolem etiam triti retinerent? Examinaui rem, et vidi corpora iis suffulta electricari nullo modo potuisse, ne vero humiditates forte adhaerentes in culpa essent, in fornace calefeci valde, et repetito experimento obseruari, pulueres hos indolem suam retinuisse, et originariae electricitatis mansisse. Continuata tamen electricatione, puluis subtilior breuiori tempore in corpus deriuatiuae electricitatis mutabatur, quam pulvis crassior, indicio probabili, puluerem subtiliorem ob superficiem maiorem plus humiditatis eodem tempore attrahere, quam puluerem crassiorem. Ne vero aliquis obiceret, calorem in culpa esse, non humorum absentiam, cur vitrum in puluerem tritum originariae electricitatis sit, et frigidum forte perpetuo deriuatiuam electricitatem habere, sequenti ratione rem extra omnem dubitationis aleam posui. Vitri puluerem in phiala vitrea calefeci, et obturaui bene subere collum: suberem perforaui binis in locis, per foramina transmissi tubulos vitreos: per tubulos vitreos traieci fila metallica, donec contingerent puluerem vitri in duobus diuersis locis. Alteram extremitatem vnus filii metallici cum massa electricata coniunxi, alteram alterius filii metallici extremitatem ligaui cum corpore infinito deriuatiuae electricitatis, et electricaui massam, calida etiam phiala et puluere, et postea phiala et puluere frigidis: electricitas

vuo

utroque casu insignis excitabatur, quod non fieri potuisset, si pulvis frige factus derivativae electricitatis euassisset. Quo tardius ergo electricitas lagenae Muschenbrockianae decrescit, caeteris paribus, eo siccius debet esse medium, quo lagena circumdata est.

5) Diminuitur electricitas insigniter, regula vel filo metallico lagenae praedictae Muschenbrockianae applicato ad massam electricatam, et lagena in corporibus originariae electricitatis posita; conseruatur vero, si imponitur corporibus derivativae electricitatis valde capacibus infinitis: filum indicis enim multo celerius descendit priori casu, quam posteriori. Quodsi lagena fundo eius vase metallico armato ponatur in fulcimento sicco vitreo et regula lagenae massam electricatam contingente, gradus electricitatis obseruetur, et deinde tangatur vas, fundum lagenae cingens, continuo electricitas per multos gradus augetur. An hic ex corporibus derivativae electricitatis infinitis materia electrica noua per parietes lagenae electricitate affectos accedat, et decrementum materiae electricae corporis electricati compenset? an vitri crassities impediāt accessum huius materiae? an potius motus in lagena praedicta productus vel potius in particulis eius minimis conseruetur, si lagena in metallo collocetur, et citius retardetur, si in vitro ponatur, vel alio corpore originariae electricitatis? dicere non audeo. In sequentibus electricitatem, applicata lagenae Muschenbrockiana productam, vocabo compositam, et sine ea simplicem. In electricitate simplici perpetuo obtinet, corpus electricandum esse suffulciendum corpore originariae electricitatis, si electricitatem suam per notabile tempus

311. DE INDICE ELECTRICIT.

sine motu et tritu vitri electricatorii conseruare debeat. Infinitum siue non suffultum corpus per breuissimum solum momentum. temporis electricatur; Quodsi enim massa vehementer electricata est, et ceruix, e. g. hominis, non suffulti corporibus originariae electricitatis, et percutientis ferrea virga massam electricatam, tangitur leuiter ab alio corpore, deriuatiuae electricitatis, infinito, ictum quendam tangens sentit, et inter digitum et ceruicem lumen in tenebris cernere licet, indicio satis certo, electricitatem communicatam esse cum corpore, quod percusserat massam electricatam. In electricitate composita, si metallum, cum lagenae fundo armato filo metallico iunctum, scintillis electricis percutitur, et metallum istud vel filum tangitur, tremor sentitur et concussio, licet metallum corpus infinitae connexionis sit cum alijs deriuatiuae electricitatis corporibus. Et filum metallicum, dum metallum prouocat scintillam ex corpore electricato, ipsum redit scintillam, si tangatur.

Decreſcit ergo electricitas massae finitae

- 1) Ob angulos solidos massae electricatae.
- 2) Ob corpora deriuatiuae electricitatis alia infinita in primis acuta vicina.
- 3) Ob humiditates ad fulcimenta attractas.
- 4) Ob lagenam Muschenbrockianam in corporibus originariae electricitatis positam et regulam eius ad massam electricatam adplicatam.

Quaeri hic potest: an non etiam ab inaequalitate superficiei, massarum, densitatum et constitutiuarum partium corporum electricatorum decrementi electricitatis diuerſitas ori-

oritur? Ad has quaestiones tamen ob penuriam experimentorum respondere nondum licet. Decrescente vero electricitate minuitur volumen materiae electricae agitatae, dum filum indicis descendit, donec corpus iam nulla materia electrica agitata contingatur amplius, tempusque descensus fili per spatia diuersa definit forte tandem legem decrementi electricitatis, si modocurua, quam filum facit, et ex curua ratio efficacitatis materiae electricae in diuersis a superficie corporis distantis definiri possit. Neque difficile est intellectu, hac ratione cognita, indicem mutari in perfectum electrometrum.

Dixi ad perfectionem indicis facere, ut electricitas eo applicato ad corpus, quantum potest, conseruetur, et ostendi, quomodo hoc, adhibito indice descripto, obtineatur. Nec silentio praeterendum credo alterum indicis requisitum, uti nimirum commode tolli possit a corporibus electrificatis, et quibuscumque aliis electrificatis applicari ad gradum electricitatis cognoscendum. Hoc requisito caret, uti facile patet, index descriptus, non tamen ita, ut nullum rei remedium afferri possit. Paucis nunc exponam, qua ratione huic incommodo obviam iri possit.

Lagenula patua vitrea ABC, colli angustioris et cy- **Tab. VIII.**
 lindrica, tenuium parietum, cum limatura martis, ra- **Fig. 2.**
 fra cuiuslibet metalli, vel globulis plumbeis minimis ad
 dimidiam altitudinem impleatur, deinde regula metallica
 KN immittatur in lagenulam, donec fundum tangat,
 ita ut circumdata sit limatura martis, et obtineat verti-
 calem situm, atque in collo lagenae bene firmetur
 habere,

320 DE INDICE ELECTRICIT.

subere, ne vacillet. Ad extremitatem partis regulae prominentis ex lagenula, quae 12 digitorum sit, ligetur filum tenuissimum KM, certi ponderis, e. g. dimidii grani medici, quod tantum non tangat collum lagenulae. Lagenula immitatur vasi metallico FGBC tenui, arcuissime lagenulam contingenti. Vasis metallici altitudo non superet dimidiam altitudinem lagenulae. Cum vase metallico connexa sit ansa GCDE, sustinens arcum circuli ligneum HEI, in 170 gradus diuisum, ita locatum, vt (1) centrum arcus coincidat cum puncto regulae, vbi filum est ligatum, (2) regula continuata supremam arcus extremitatem stringat, et (3) fili linei extremitas inferior lineam vnam ab arcu distet. Vt regula metallica adplicari possit quibuscunque corporibus electricis, firmetur ad extremitatem lamella metallica incuruata LK. Quodsi hoc instrumentum prehensa ansa ad massam electricatam adplicetur, lamella incuruata massam tangente, regula electricabitur, et ob paruam regulae massam, electricitas massae maioris electricatae vix inde electricitatis decrementum patietur, filum a regula repellitur, et gradus arcus circuli, quem versus dirigitur, gradum electricitatis notabit. Remoueat instrumentum et tangatur digito regula ex lagenula prominens, vix aliquid electricitatis residuum erit: adplicetur alii massae electricatae examinandae, quae electricitatem maiorem vel minorem habet, quam prior massa habebat, et filum regulae respiciet alium gradum maiorem vel minorem. Hoc indice mihi nondum quidem vti licuit, attamen minime dubito, illum in multis occasionibus in experimentis electricis commode adhiberi posse; praesertim cum lagenula Muschenbrockiana
ele.

electricitatem per aliquot horas conferuet. Quocunque ergo phaenomena definire licuit, ea definita sunt indice priori.

Propero nunc ad alteram dissertationis partem, in qua phaenomena praecipua, quae indice descripto aliqua ex parte definiui, recensere constitui. Docuit me index descriptus

1.) Corpus tritu excitans electricitatem diversum esse debere et separatum a corpore recipiente electricitatem, si notabilis electricitas est producenda. Quodsi enim ex vna parte vitri electrificatorii homo in resina stans, corpus recipiens electricitatem ex altera parte vitri recte suffultum tangit, siue machina et homo rotam agitans in resina stent, siue non, vix paucorum graduum electricitas in massa electrificanda produci potest, si simplex electricitas excitatur, et si composita electricitas est impertienda massae, nulla electricitas tritu vitri electrificatorii producitur. Aliter se res habet, si corpus recipiens electricitatem ab eo, quod excitat electricitatem, separatum est, et ab hoc non contingitur. Sic enim filum indicis cito eleuatur et scintilla vehemens oritur, si corpora sese mutuo tangunt, neque tali tactu omnis electricitas cessat, sed tantum debilitatur: plurium graduum electricitas residua obseruatur, quae sensim decrescit. Hoc fit siue machina et homo rotam agitans in resina stent, quo casu tamen electricitas difficilius excitatur, siue minus. Vehementia scintillae hic non augetur cum differentia electricitatum, vti alias, sed potius maior esse videtur, si summa electricitatum est maior. An ergo hoc casu particulae electricae materiae

magis ad corpora originariae electricitatis accedere debere facile intelligitur. Hinc etiam cognosci potest ex indice, quae vitra sint optima ad electricitatem producendam. Quodsi enim electricitas excitatur in massa quadam, et notetur tempus, quo a gradu certo ad gradum alium filum indicis descendit, et dein electricitate denuo excitata, et vitro examinando sicco ad massam electricatam applicato, ita, ut ex vna parte massa electricata, ex altera parte massa non electricata infinita vitrum contingat examinandum; si notetur rursus tempus, quo ab eodem gradu, quo in priori casu, ad eundem gradum accedit filum indicis, inueniaturque tempus prius aequale esse posteriori, vitrum deprehendetur ad electricitatem producendam idoneum; quodsi vero maius obseruetur temporis spatium, saltem non ita bonae notae erit ac vitrum, quo excitata est electricitas. Hinc Celeb. *Galabert* detexit, vitra electricitati tritu producendae inepta per communicationem electricata dare lumen fulgentius, quam ea, quae electricitati tritu producendae aptissima sunt. Facile etiam patet, ea vitra maximo cum successu fulcimentis corporum electricandorum inseruire, quae per communicationem difficulter et parum electricantur.

6.) Supra iam monui, indicem ostendere, cum differentia electricitatum vehementiam scintillae augeri, si nempe homogeneae electricitatis sint corpora; aliter enim satis vehementem scintillam produci monui, si nulla electricitatum differentia prodatur indicibus, nempe si excitans electricitatem in resina stet, et non connexum sit cum recipiente electricitatem. Cum differentia electricitatum vehementiam scintillae augeri, sequenti ratione experiri

experiri licet. Electrificetur massa electricitate composita, et insistat aliquis resinae, tangatque massam electricatam, scintilla vehemens orietur, et homo ipse electricabitur, filo parum ad regulam accedente. Remoueat manum idem homo, et rursus adplicet, nulla mutatio indicis neque scintilla observabitur, quia corpora aequali gradu electricata concurrunt. Quo facto, excitetur massae electricitas rursus, donec filum ostendat priorem gradum, et dem homo resinae insistens et minori electricitate praeditus, quam massa electricata, tangat massam electricatam, scintilla erit debilior, quam primo casu, vbi homo non electricatus massam electricatam tangebatur et homo electricitatem maiorem nanciscetur, quam priori casu habebat. Excitetur tertio electricitas massae, donec idem gradus, qui initio erat, filo notetur, et idem homo resinae insistens, minori gradu electricitatis praeditus, tangat massam electricatam, aliquanto minor scintilla orietur, quam praecedentibus casibus, et homo maiorem rursus electricitatem habebit, quam antea, differentiaque electricitatum inter electricitatem massae initio excitatam et hominis minor minorque euadet; hoc continuari potest, donec differentia electricitatum fiat aequalis nihilo, quo casu nulla scintilla oritur. Tali ergo ratione satis patet cum differentia electricitatum scintillae vehementiam decrescere. Vltimae enim scintillae ita paruae et debiles sunt, vt non nisi in tenebris attente consideranti appareant.

7.) Simplici electricitate fluida inflammabilia non nisi calefacta accendere potui; composita vero electricitate, si filum ostendebat gradum trigesimum, spiritum vini

re-

lagenae, in resina sustentatae, et vibrationes electricas exercentis, materiae subtilis particulae contrario motu agitantur? et hinc, quando sese contingunt, colliduntur aequalibus ferme celeritatibus, directionibus directe oppositis, et ita vehementem concussionem cum totali ferme electricitatis extinctione producant?

TAB. VIII.

Fig. 3.

3.) Edoctus sum indice, alternatim ex vno corpore quasi extrudi posse electricitatem in aliud corpus. Quod si enim ex utraque parte lagenae Muchenbroeckianae ABC, cuius fundi externa superficies vase metallico BCDE armata est, in vitreo plano FGHI positae massae recte ex corporibus originariae electricitatis suspensae KL et MN adsint, indicibus similibus et aequalibus OQR ac SVUW, et vna massa tangat regulam ZA lagenae Muchenbroeckianae, et altera vas metallicum DEBC lagenam cingens, excitata in vna massa electricitate tritu vitri electricatorii, eadem excitatur etiam in altera, quod indices produunt. Quo facto, si tangatur massa KL a vitro electricatorio immediate electricata, perit eius electricitas, et filum OP sese regulae adplicat, et per momentum etiam filum indicis alterius ST se adplicat regulae suae, mox tamen restituitur electricitas in massa vltima MN, quod repulsio fili ostendit. Quodsi nunc rursus haec massa tangatur, filum indicis sese adplicat regulae, et massa ex altera parte lagenae electricitatem nascitur, quod filum repulsivum ostendit. Hoc sine motu machinae, si electricitas est vehemens, alternatim vel decies fit sine totali electricitatis extinctione. An hic infinitum corpus tollit motum particulis vitri, vel particulis electricae materiae, particulis

particulis vitri adhaerentis, impressum ab vna parte superficiei lagenae, et facit, vt ex altera tantum parte superficiei fiat? An reuera conceditur materiae cui-dam transitus ex infinito corpore in corpus finitum per lagenae parietes electricitate affectos?

4.) Obseruavi, massae maioris electricitatem durare diutius, quam massae minoris, si eodem filo metallico cum vitro electrificatorio iungantur: diuersis enim temporibus filum ad regulam reuertitur. Tempora vero haec nulla ratione obseruata sunt in ratione massarum. Deinde cognoui, massae maiori electrificatae certam massam saepius adplicari posse, antequam tota electricitas extinguatur, quam minori massae eodem gradu electrificatae, summam tamen massarum, ~~quae maioris massae~~ electricitatem tollit, non esse multo maiorem, quam summam ~~massarum~~, quae minoris massae electricitatem aufert, consequenter summam has prorsus non esse in ratione massarum electrificatarum. An ergo, ob volumen materiae electricae agitatae in maiori massa maius, electricitatis decrementum tardius fit? hoc tum demum inquirere animus est, quando corpora magnae superficiei adhibere licebit eiusmodi, quorum volumina materiae electricae agitatae facile definiri poterunt.

5.) Cognoui hoc indice, commode inueniri posse, quae corpora deriuatiuae electricitatis capacia sint gradu vel maiori, vel minori; si adplicatis iis ad massam electrificatam et per corpora deriuatiuae electricitatis infinita suffultis, tempora accessus filii ad regulam notentur: quo enim minus est hoc tempus, eo magis ea ad corpora deriuatiuae electricitatis, et quo maius est tempus, eo

corpori excitanti electricitatem adhaerentes contrarium et directe oppositum motum nanciscuntur ei, quem particulae electricae materiae corporis recipientis electricitatem habent, ut actio mutuo occursum particularum fiat vehemens et scintilla concrepans efficax. Idem confirmatur, si lagenae vitreae, cylindricae, tenuissimorum parietum, qualem Fig. 2. exhibet, siccissimae ab homine resina suffulto, vel non suffulto, siccissima manu leuissimo ductu demulceantur quasi. Virgae enim ferreae, ad quarum extremitates fila linea sunt ligata, lagenis exceptae, electricantur ita, ut fila ab iis repellantur, et scintillae ex iis concrepantes eliciantur.

TAB. VIII.

Fig. 2.

Obtulit se mihi tamen phaenomenon, quod modo dicti conuenire videtur. Particulae argenti viui sicci, per vitrei infundibuli pariter sicci paruum foraminulum in lagenam vitream siccam tenuium parietum illas, et etiam a fundo vel ipso argento viuo reflexae in parietes lagenae impingentes, producant collisione ad vitrum electricitatem, quae deriuatur in argentum viuum in fundo lagenae collectum et in regulam ferream, remoto infundibulo ope funiculi serici, in argentum viuum per orificium lagenae immersam: filum enim lineum ex regula pendens repellitur, tactaque regula scintillae concrepantes oriuntur. Quodsi vero res bene consideretur, guttulae argenti viui impingentes in parietes vitreos minime contingunt argentum viuum in fundo lagenae stagnans; hinc momento collisionis particulae argenti viui, excitantes electricitatem, a particulis argenti viui, quae recipiunt electricitatem, separatae sunt. Simul intelligitur in atmosphaera allapsa et collisione par-

particularum deriuatiuae electricitatis ad particulas originariae electricitatis, has electricificari, et electricitatem ab iisdem cum aliis deriuatiuae electricitatis, ad eas attractis, communicari posse. Minime enim dubitandum, originariae et deriuatiuae electricitatis corpuscula in atmosphaera interdum magna copia et ita adesse; vt electricitas produci possit, cum reuera in ea electricitas cum massis rite suffultis communicetur, vti ex sequentibus videbimus.

2.) Deprehendi regula lagenae Muchenbroeckianae indice instructa et electricata imaque parte lagenae vase metallico armata, si aliquis in resina stans lagenam manu sustentet, et deinde ad regulam akeram ~~adplicet~~ adplicet, vehementem oriri scintillam et ~~concussionem~~ concussionem in utroque brachio, fere nullam tamen electricitatem post ~~concussionem~~ in regula et in homine obseruari. Filum enim prope regulam ferme ignauum pendet. Phaenomenon detexit *Franclinus*, naturalis electricitatis inuentor, absque indice adhibito, et totalem electricitatis post concussionem extinctionem fieri asseruit; quod ego non obseruavi, sed perpetuo in regula sensibilem electricitatem inueni, manu a regula remota, et lagena armata in corporibus deriuatiuae electricitatis posita. *Franclinus* hic statuit negatiuam electricitatem et positiuam; superficiem lagenae e. g. externam negatiua electricitate et internam positiuam electricitate gaudere, et si virtutes tales contrariae aequales concurrant, electricitatem fieri nihilo aequalem. Difficillimus mihi tamen videtur conceptus electricitatis negatiuae, nisi statuatur, vti in mechanicis, motum materiae electricae, contraria directione factum, esse motum negatiuum. An ergo ex vtraque parte

rectificatum et Petroleum temperiei 75 graduum Therm. Far. vnica scintilla accendere licuit, vase nimirum metallico, cui infusus erat liquor accendendus, iuncto cum fundo lagenae armato per filum metallicum, et corporis electricitati accendentis electricitate a superficie liquoris duas lineas distante. Poterunt hinc particulae inflammabiles in atmosphaera telluris natantes, scintillis electricis, si quae in illa generentur, accendi.

8.) Vapores aqueos subtilissimos non deriuare electricitatem sensibiliter, sequenti ratione expertus sum: Vapores aqueos ex Aeolipila emissos in massam electricitatis communicatam direxi, Aeolipila cum aliis deriuatiuae electricitatis corporibus, non suffultis corporibus originariae electricitatis, connexa, in fili directio non mutabatur sensibiliter. Neque vapores ex Aeolipila electricitatem emissi electricitatem cum aliis in resina positis sensibiliter communicarunt. Limatura martis mixta cum massa aequalis ponderis ex cera et resina facta, et massa hinc formata cylindriciformi, adplicata ad massam electricitatem manu, filum indicis non vidi notabiliter descendere; vnde iudicari, corpora deriuatiuae electricitatis, nisi sint contigua, non tollere electricitatem massae electricitatis sensibiliter; vnde nec vapores subtilissimi in aere hoc efficere poterunt. Intelligi ergo potest, cur corpora deriuatiuae electricitatis, originariae electricitatis corporibus suffulta in atmosphaera, vaporibus grauida, electricari possint.

9.) Inter plura corpora vna serie sese excipientia successiue interuallo temporis breuissimo scintillas concrepantes plures generari, sequenti experimento edoctus sum: Impressi massae ex cera cum resina mixta clauu-

clauulos cum capitulis aurichalceis in distantis a se mutuo minimis e. g. vnus quartae partis lineae, arbitraria serie, literam quandam vel aliam figuram repraesentante dispositos, et cum altero extremorum clauulorum ligam filum metallicum tenuissimum cum fundo lagenae armato iunctum, cum altero vero filum metallicum simile cum massa electricata connexum. Electricitate deinde excitata tanta, vt filum quadragesimum gradum ostenderet, iucundo spectaculo inter quemlibet clauulum scintilla cum concrepatione exhibebatur. Dum enim clauuli omnes sibi mutuo vicini electricantur praeter vltimum, qui corpus derivatiuae electricitatis infinitae connexionis est, inter clauulum hunc vltimum et ei vicinum debet oriri scintilla; ita vero clauuli vltimo proximi electricitas perit: oriri ergo debet inter hunc et ipsi vicinum noua scintilla, et rursus noua inter hunc et sequentem, etc. donec omnes scintillae vsque ad clauulum vltimum generentur. Absoluitur vero hic successiuus scintillarum ortus breuissimo temporis spatio; hinc non mirum est, vt figura ex punctis lucidis ea serie se excipientibus, qua clauuli dispositi sunt, constans, repraesentetur. Quae si continua lux desideretur: aliud quodcunque corpus derivatiuae electricitatis infinitum clauulo adplicetur filo metallico, a fundo lagenae Muschenbrockianae ducto, remoto. Serpentinum fulminis ductum simili ratione variis nubibus electricatis concurrentibus generari concipi poterit. Index ostendit

10.) Vacuum ab aere spatium in tenebris lumine electrico facile impleri, quod sequenti ratione obseruari poterit. Tubum Torricellianum phosphorescentem tabulae Tom. IV. Nou. Com. T t lignae

lignae adplicatam, quae ex serico funiculo suspensa erat, electricitate composita electricaui, argento viuo cum massa electricata, per filum ferreum, per lumen inferius tubi sursum hians mercurio immersum, iuncto, ita ut filum ferreum ibi, ubi ingrediebatur tubum, lineam a tabula lignea distaret. Dum electricitas excitabatur, continua in vacuo tubi fulgura et mutum lumen absque omni mercurii oscillatione oriebantur in tenebris, cessanteque vitri electricatorii motu, tacta tabula, quae inter tangendum lumen praebat, aliquoties adhuc provocabantur. Quodsi vero non tangebatur tabula, interdum sponte vel centies oriebantur fulgura in vacuo, intervallo temporis inter duo fulgura interdum centum minuta secunda superante. Quin tacta massa compositae electricatae, et indice gradum nullum ostendente, lumen interdum in vacuo tubi sistitur, indicio certo, nondum electricitatem massae prorsus extinctam, sed residuam esse, quae vacuo tubi Torricelliani illuminando sufficiat. Simpliciter electricitate fulgura in vacuo pariter producuntur, sponte tamen finito vitri electricatorii motu rarius apparent. Nonne etiam fulgura in rariore aeris regione absque insequenti Tonitru debili electricitate oriri poterunt? nonne item aurorae boreales? Index docuit porro

(I.) Electricitatem catenae Longit. 66 pedum Lond. et ponderis 9 librarum hyeme decreuisse a gradu 45. ad gradum 0 quatuor horis, aestate vero electricitatem celerius extinguere. Speravi etiam, me aliquam legem decrementi electricitatis ope huius indicis stabilire posse. Hunc in finem observavi tempora descensus sili massae cele-

electricitae certo gradu et gradus descensus. Initio, videbar mihi obseruare egregiam harmoniam, ast postea repetito saepius experimento minime. Hoc solum animaduerti, filum motu, certa lege retardato, accedere ad regulam. Docuit index

12.) Massam quandam cum acuta extremitate rite fissilam in vicinitate corporis a globo electricatorio immediate electricitati, ita, vt acuta extremitas corpus electricatum versus dirigatur, et ad eo plures digitos distet, electricari. Sensim sensimque enim filum indicis tali massae adplicati ascendit. Quodsi tollitur electricitas corporis immediate a globo electricati, etiam sensim massae cum acuta extremitate electricitas languescit. Phaenomenon hocce et varia praecedentia ducunt nos ad naturalem electricitatem considerandam, quae phaenomenis allatis perpensis, quomodo generetur, non diffi- culter intelligitur.

Electricitas haec naturalis nouissime detecta nostra contemplatione dignissima est. Oriri videtur in atmosphaera collisione particularum deriuatae electricitatis in corpuscula originariae electricitatis, quae haec ratione electricata cum aliis deriuatae electricitatis corpusculis, nubes multitudine constituentibus, electricitatem communicant. Philadelpbiae in America praedictus *Franklinus* sagacissimus inexpectati phaenomeni proditor fuit, et nunc de rei veritate obseruationibus passim in Europa euulgatis prorsus non dubitare licet, quilibetque, qui ferrum acutum ex serico funiculo suspendere valet, vel vitro et resina fulcire, de illa conuinci poterit. Suspicatus quidem erat iam anno 1735 Cl. *Gray*, qui inter primos

et præcipuos Phænomenorum electricitatis inuestigatores locum habet; lumen et ignem electricum naturam fulminis et tonitru habere, et Cel. Vinckler Lipsiensis tractatum edidit anno 1746, in quo idem demonstrare laboravit. Imo obseruationes quaedam remotissimis ab hinc temporibus figacitatem naturalis scientiæ cultorum præcesserunt. *Iulius. Cæsar* de bello Africano Cap. 47. describit tempestatem quandam, *nimbum cum saxea grandine subito esse exortum; et pilorum cacumina arfisse* referens. Verisimile admodum videtur, atmosphæram electricitatem cum cacuminibus pilorum communicasse electricitatem, ut iis lumen conicum caeruleum conistans adhaeserit, quæ ardere visa sunt. Huc etiam pertinet videtur locus *Livi* Lib. XXII. Cap. 1. ubi dicitur; in Sicilia militibus aliquot spicula; et in Sardinia in muro circumcuncti vigilas; equiti scipionem; quam manu tenuerat; arfisse. Principem locum; qui huc pertinet legitur in *Seneca* Naturalium questionum L. 1. ubi scribitur; *In tempestate magna apparent quasi stellæ celo insidentes; adiuari se tunc periclitantes existimant; Castoris et Pollucis numine.* Deinde; *Gylippa Syracusas petenti visa est stella super ipsam lanceam constitisse.* In Romanorum castris visa sunt ardere pila ignibus scilicet in illa delapsis, quæ sæpe fulgurum modo animalia ferire solent et arbuſta; et si minora ea mittuntur defluunt tantum et insidunt; non feriunt nec vulnerant. Hic ignis forte concrepans electricus ab igne continuo cum fulſtro discernitur; ille enim percussit et vulnerat; hic nullo modo.

Similis observationis nostris temporibus mentio facta est in nouis publicis: nimirum Academiae Parisiense relatam esse, crucem turri templi Plauzatenfis in Gallia impositam ferream, cuius finis repræsentant flores liliæ extremitatibus acutissimis, tempestate densissimis nubibus et frequentia fulminum terribili conspicuam esse ita, vt iuxta quamuis extremitatem hæc appareat, traditioneque bene longa 27 annorum constare, rarissime fulmine damnari afferri vrbis et locis vicinis, si prope crucem lumen prædictum appareat. Idem ergo, quod remotissimis temporibus obseruatum est, etiam recentissimis confirmatum videmus. Simili etiam confidentia prædicti esse videntur eius Plauzatenfes, ac nautæ remotissimis temporibus; erant, qui, dum in tempestate lumina velis incidentia obseruabant, aduersos se emittunt. Nullum est dubium, si obseruatio cluium Plauzatenfis hæc est vera, crucem turris Plauzatenfis ab atmosphaera electricam corporibus originarie electricitatis sustulam esse.

Non minus auctori hæc meretur illud, quod Cel. *Muschbroeckius* Exp. 106 in Diss. de magnete scribit; nimirum aliquoties antea fuisse, filmen prope Versbium delatum huius directionem prorsus immutasse, ita vt polis septentrionalis euaserit australis. Anno 1736 die 24 Iulii Vltraiecti Batatorum obseruatum erat declinationem auctam fuisse 10. minutis, et a Cel. *Krafftio* Tubingæ an. 1745 die 31. Aug. obseruatio notata confirmata, dum declinatio acus inter tonitrua et fulmina 15 min. dimota fuit. Quantum mihi constat, scientiæ naturalis amatoribus tunc temporis de hæc

Sagacitas perspicendi, vel potius nondum ausi sunt asserere, eiusmodi variationem acus magneticae electricitati in atmosphaera productae deberi, quod mihi quidem nunc verisimillimum est. Acus enim magnetica ordinarie suscipitur theca lignea siccā, et lignum siccum inter corpora originariae electricitatis, saltem inter corpora derivatiuae electricitatis minori gradu capacia, locum habet. Dum ergo inter fulmina, observator declinationis acus se adpropinquare debet acui, fulmine electricatae, attrahere debet acus extremitatem viciniorē; hinc acus directionem naturalem deserere debet, nisi observator exacte in plano isto stet, in quo acus naturaliter quiescit. Hic boni publici causa subiungere liceat, quomodo effici possit, ut acus magneticae directio in navi, inter fulmina et tonitrua vel electricitate naturali, non turbetur. Filum metallicum quodlibet praeter ferreum connectatur cum stylo acuminato, qui sustentat capitellum aurichalceum acus, et ducatur ita, ut altera extremitas fili metallici contingat aquam. Tali ratione acus mutatur in corpus derivatiuae electricitatis capax infinitae connexionis cum aliis similibus, et electricari haud potest ita, ut electricitas per notabile tempus conservetur, consequenter nec directionem suam relinquere poterit, corpore non electricato alio accedente.

Electricitas haec naturalis certe ita comparata est, ut non mirandum esset, si nonnulli attoniti magis et ancipites insolitum hoc phaenomenon contemplantur, quam ut de circumstantiis phaenomeni definiendis solliciti essent. Posset enim alios horror quidam naturalis, alios metus ab educatione generatus, ab alteriori inquisitione deter-

deterrere. Hinc illae quaestiones oriuntur : utrum observationes eiusmodi absque periculo institui possint? et annon a corporibus materia fulminea electricitatis tremendus fulminis effectus produci, et periculum imprudentissima arte adduci possit? Iste horror et metus, si auferri potest, certe non aliter fiet, nisi ut ostendatur, observationes eiusmodi absque periculo institui posse, et remedium afferri, si periculum adsit. Hoc vero, si remedio res non careat, efficere nemo poterit, nisi qui multis antea observationibus et experienciis edoctus fuerit, cur et quibus sub circumstantiis fulmen periculosum eadat. Patet ergo dari his nouissimis temporibus etiam Physicis occasionem, qua fortitudinem quandam ostendant, et in re ancipiti audaciam. Hinc cum mei officii sit in res naturales, quantum in me est, inquirere, nihil me ab observationibus eiusmodi abduxit; hinc nullam occasionem omisi, qua electricitatis naturalis phaenomena non solum obseruare, sed etiam aliquatenus definire liceret. Iam anno superiori expertus eram sine indice idoneo, effectum electricitatis naturalis. Hoc anno vero omnia praeparavi, ut sub determinatis circumstantiis phaenomena contemplari possem.

Elegi catenas duas ferreas longitudine 66 ped. Lond. et ponderis 9 librarum. Vtriusque catenae extremitatem alteram ex fune serico ad altitudinem 40 circiter pedum Lond. super superficiem fluminis Nevae suspendi, et omnia ita instruxi, ne pluuia humectarentur funes serici, et uti catenas commode dimittere et eleuare possem: alteram extremitatem debita cautione in conclauē, vbi obseruationes instituire volebam, duxi, et fune serico cum clauo parietis

parieti infixo iunxi. Catenae utrique adplicui indicem aequalom. Vnius catenae extremitati virgam ferream cum acuta extremitate coniunxi, obseruauique

1) Electricitatem maiorem communicatam cum catena, cui virga cum acuta extremitate erat coniuncta, quam cum altera. Catena absque virga acuta propter domicilium, super cuius tegmine ex palo suspensa erat, in variis aedificii partibus ad funiculos sericos alligata erat, vt hinc et inde anguli orientur. Ne ergo obiici posset, non obtusam extremitatem in culpa esse, sed directionis multiplicem mutationem, cur hoc casu electricitas debilior orta sit, quam eo, cum catenae superioris extremitas cum virga ferrea acutae extremitatis coniuncta erat, alia occasione virgam cum acuta extremitate a catena, cui adplicata erat, remouit, et cum altera coniunxit, cuius extremitas antea obtusa erat. Euentus autem obseruationis erat idem, qui ante, et rursus catena cum obtusa extremitate electricitatem debiliorem nancisebatur. Suborta est suspicio noua, nimirum differentiam altitudinum paruum in culpa esse posse, cur discrimen praedictum adsit; hinc catenam cum virga acuta de industria ad paulo minorem altitudinem dimisi, et nihilominus electricitas huius catenae maior obseruabatur, quam alterius. Acutum corpus citius electricitati, quam obtusum ex artificialis electricitatis phaenomenis satis intelligitur. Quodsi enim corpus acutum recte suscultum volumini materiae electricae agitatae corporis arte electricitati immersum est, et cum acuta extremitate corpus electricitatum versus dirigitur, electricitas corporis electricitati decrescit, et corpus acutum propinquum electricitatur.

Quodsi

Quodsi cum obtuso corpore idem fit, electricitas corporis electricitati tardius decrescit, et corpus obtusum difficilius electricatur. Hinc non dubitandum, virgam ferream acutam recte suffultam corporibus originariae electricitatis et atmosphaerae electricatae expositam immeritam esse volumini materiae electricae agitatae, quae nubem electricatam virgae vicinam cingit.

2) Observavi catenae electricitatem non augeri ob eius longitudinem. Adhibui 130 pedum Lond. catenam; electricitas tamen non erat maior, quam catenae 66 pedum.

3) Vidi, electricitatem naturalem manere interdum integram per quartam ferme horae partem, licet saepius interea temporis tangeretur catena; et Vir Amplissimus Lomonosow observavit sine omni tonitru et fulmine electricitatem insignem communicatam esse cum ferro recte suffulto.

4) Dum tonaret, electricitatem productam vidi diminui et interdum cessare, ita, ut filum indicis regulae adhaereret. Hoc etiam Berolini a Caelo Ludolfo observatum est praecedenti anno, et quidem electricitatem proximam ante fulmen fuisse maximam et fulmine producto diminuatam, interdumque prorsus extinctam. Observavi

5) cum ipso fulmine et tonitru electricitatem catenae ortam esse, et post fulmen et tonitru subito minutam: dum hoc fieret simul notavi, decrescere electricitatem catenae crescente numero minutorum secundorum inter fulmen et tonitru. Cum enim numerus minutorum secundorum erat 6, filum respiciebat 80. gradum, cum

Tom. IV. Nou. Com. V. erat

338 DE INDICE ELECTRICIT.

erat 9, filum notabat 25. gradum, cum erat 11. filum prope 20. gradum erat, et cum tandem erat 14, filum haerebat circa 10. gradum.

6) Electricitatem cum ipso fulmine et tonitru productam post fulmen et tonitru auctam esse.

7) Inter fulmina splendidissima absque tonitru, quae spatio duarum horarum sat frequenter sese excipiebant, nullam electricitatem cum catena communicatam esse, et filum indicis iners regulae adpensum mansisse. Simulac vero tonare incipiebat, eo ipso momento filum indicis ad gr. 25 eleuari, et deinde sensim rursus descendere.

8) Maximum gradum, ad quem naturalis electricitas filum indicis eleuauit, fuisse 30 graduum.

Potest ergo 1) absque omni tonitru et fulmine catena electricari, et electricitas haec per multa minuta eadem virtute manere. Potest 2) cum ipso fulmine et tonitru electricitas catenae minui vel cessare, et proxime ante fulmen maxima esse. Potest 3) cum fulmine et tonitru electricitas catenae oriri, et deinde vel per multa minuta in eadem virtute persistere, vel fulmine facto subito rursus diminui, vel cessare Tandem 4) non videtur repugnare inter fulmina et tonitrua saepius nullam electricitatem produci. (*)

Ponas enim catenam nondum esse electricatam, potest 1) virga ferrea cum acuta extremitate nubis electri-

(*) Post dissertationem hanc Academiae traditam contigit mihi electricitatem naturalem die 11 Julii obseruare; et inspectionem notatam ipsa experientia confirmatam videre. Dum enim inter fulmen et tonitru 8 min. sec. numerarem, filum indicis respiciebat gradum 25, dum numerarem 24 min. sec. debilis valde electricitas erat, et dum 40 min. sec. numerarem, electricitas nulla obseruatur.

electricitatis volumini materiae electricae agitatae immersa esse; quo casu necesse est, ut virga ferrea absque omni fulmine et tonitru electricetur, si nimirum nulla nubes maiori vel minori gradu electricata ad nubem illam accedit, cuius volumini materiae electricae agitatae virga ferrea immersa est, quo facto scintilla concrepans et inflammabilibus materiis praesentibus inflammatio, et interdum etiam tonitru observari deberet. Ita enim artificiali electricitate electricatur virga ferrea, si recto suffulta est et sphaerae activitatis corporis electricati immersa, sine omni scintilla concrepante praecedente: neque mirandum est hoc casu filum indicis per insigne temporis intervallum ostendere eundem gradum.

Potest 2) eadem virga ferrea extra sphaeram activitatis nubis electricatae existere; quo casu nullam electricitatem filum indicabit. Ponatur autem

3) adpropinquatione diversarum nubium inaequaliter electricatarum oriri scintillam concrepantem, et inde fulmen et tonitru, potest hinc subito augeri radius sphaerae activitatis nubis, uti virga ferrea eius sphaerae activitatis immergatur, et ita subito potest electricitas oriri. Hoc posito si medium est siccum et originariae electricitatis, quod catena electricanda contingit, potest electricitas per aliquod temporis spatium in eadem intensione persistere. Quodsi vero medium est humidum, et ita adpropinquat ad indolem corporum derivativae electricitatis, possunt fulcimenta catenae facile humectari, et ita tota catena brevi in corpus derivativae electricitatis infinitum mutari; unde non mirum, si electricitas catenae subito decrescit. Potest vero etiam radius

V v 2

sphae-

sphaerae actiuitatis minui, si nimirum ad nubem certo gradu electricatam virgae viciniorum altera minoris electricitatis accedit; ita enim sphaera actiuitatis contrahi debet. Tantum ergo abest, vt virga tali ratione electricetur, vt potius magis recedat a virga causa electricitatis.

4) Tandem potest fortasse scintilla electrica in atmosphaera fulmen et tonitru generare, et sphaera actiuitatis nubis electricatae tamen virgam non contingere, quo casu inter fulmina et tonitru nulla electricitas obseruari poterit. An hoc interdum eueniat, asserere nondum audeo. (*)

(*) Post obseruationes d. xi. Iulii asserere audeo: dum 40. min. sec. inter fulmen et tonitru autenticum, et electricas nulla obseruaretur, nubes electricata tantum distare debuit a caetera, vt radius eius actiuitatis ad caeteram non pertingeret.

PHYSICA.

V 13

ABRAHAMI KAAU BOERHAAVE

DISSERTATIO
DE
COHAESIONE SOLIDORVM
IN CORPORE ANIMALI.

Dum vivimus, partes corporis nostri sunt in statu semper violento, contractae quippe firmae extendi debent, extensae vero sunt iterum contrahendae; unde illis contentae fluidae comprimuntur et relaxantur alternatim. Firmat hoc cordis systole et diastole, vasorum omnium oscillatio perpetua, motus deinde humorum atque horum, prius permistorum, separatio subtilis. Habet haec vicissitudo rationem, momentanea in partibus, respectu actionum, ad propriam structuram. Hinc minima vascula, dum extenduntur a subtilissimo fluido, determinata vi impulso, renituntur, ratione inversa distendentis, per virtutem sibi, uti in maioribus, appropriatam. Quo ergo momento vis extendens minuitur, augetur contractilis, et illud, quod vasa dilatat, haec reprimendo pellunt et propellunt, iterum momento subsequenti extendenda per fluidam, vi emboli cordis impulsam. Actio haec a principio motus, per vitam, durat alternatim, et, ratione aetatis, valida; ut, quantum sit, corpus vix maneat oculi

344 DE COHAESIONE SOLIDORVM

oculi nictu plane in statu eodem. Hoc ita speculatus Hippocrates, ideo actuosum circulo simile, in quo idem principium et finis est unus (a), pronunciauit constare continentibus, contentis, et eo, quod in haec facit impetum (b). Sunt solida, fluida, eorumque motus in se inuicem. Et certe qui, praeter haec tria memorata, quaerit in illo quartum, laborabit frustra. Est etenim determinata solidorum cohaerentia, cuius oscillatione definitur, causa vitae sola, est eadem ratio vnica sanitatis non modo, sed certi cuique proprii temperamenti et longaeuitatis: dum quippe debito tono et iusto ordine agit in humores, haud alia potest in singulis operari, quam ut sint suo quaeque loco praesentia talia liquida, quae in certum usum a Creatore praefinita, necessaria, eaque sana secreta, in solida reagentur. Natura etenim a nemine edocta efficit omnia, quae conueniunt, absque vlla disciplina (c).

Ita interim minorum partium, quae iuncturae maiores compositas constituunt, elementa prima cohaerent in fluidis aequae, ac in firmis, ut ad certam distantiam recedere, et ad se inuicem accedere iterum, valeant. Est haec in variis conditio diuersa, ut patet comparanti in oculo expansam nerui optici substantiam medullarem, pulposam nempe retinam, cum aortae initio, ubi corde egreditur, cuius tamen ista, sicuti reliqui nerui, continuatio est et finis. Est eadem res in fluidis euidentis ex speculatione sanguinis, qui in maximis vasibus et corde permiscetur, atque contemplatione laticis illius, qui, ex eo secretus tenuissimus, de corpore exhalat.

Prima

(a) De locis in Homine, in principio. (b) Epidem. Lib. vi. Sect. 8.
(c) Hippocrates de alimento.

Prima interim elementa, quae partes solidorum et fluidorum omnium minima constituunt, videntur, quousque sensus percipiunt, plane immutabilia, simplicissima, adeoque in hominibus non modo, in cunctis animalibus et plantis, sed in omnibus forsitan semel creatis, prorsus eadem. Corporum omnium generatio, incrementum, horum in partibus solutio, et in toto cohaesionis destructio, eorumque in alia transitus, denique rerum Universi per sex mille et ultra annos, immutata et constans, sed toties renouata, facies hoc firmant argumentum. Ex vnoquoque vegetabili, ex omnis animalis quacunque corporis parte, combustis, collapsi cineres, lege artis vexati, ut ab omni omnino adherente alieno liberentur, dant meram Terram, Chemistis Virginem dictam, nullo sensuum inter se, vel ab alia, distinguendam. Haec nec aqua soluitur, nec fluit ad ignem, sed fixa perstat prorsus et immutabilis: id norunt Docimastae, qui absque notabili vlla omnino differentia, ex utraque cupellas, ad aurum et argentum explorandum, conficiunt, summam ignis torturam perferentes. Haec singulis plantis, omnibus animalibus, cuique homini, omnibus forsitan creatis corporibus, denique et horum partibus diversis, fulcrum dat et rei stabile principium. Quae ergo in structura, fabrica, et actione solidorum, tanta observatur, diversitas pendet vnice ab alia elementorum simplicissimorum adunatione. Quo etenim in corpore animali vel vegetabili partes sunt firmiores, eo plus solidi exhibent sub eodem volumine. Os vnus librae, combustum, dat longe maiorem copiam purae Terrae, quam musculus eiusdem ponderis. Molle cere-

cerebrum, tantae in homine molis, a membranis liberum, fere totum diffluit. Quo ponderosius et dure magis compactum lignum est, eo plus cinerum exhibet sub forma cum leuiori simili. Quo ergo partes sunt in corpore magis stabiles, eo propius sibi iuncta habent elementa prima, ita tamen, vt vnum alterum directe non tangat, ne rigiditas perfecta oriatur, sed remota ad certam distantiam, quam implet molle vinculum interpositum, quod Gluten vocamus, in ipsis siccissimis partibus aquosum vel oleosum deprehendendum, licet non statim sensibus occurrat. Ossa, cornua, ungulae, dentes, pili, sericum, animalium, a longo tempore exsiccata; pudibundae herbae aridi stipites per annos seruati, dant in destillatione copiam aquae, copiam olei, cuius vtriusque adeo in adunandis siccissimis et subtilissimis particulis vis est stupenda: hisce orbata pristinam formam quidem retinent, sed libero aëri exposita diutius, vel igne aperto combusta, collabuntur in cineres albos, qui meram terram descriptam suppeditant. Et latet eadem in fluidis mira adeo, vt animalium limpidissimi et tenues, ignis vi de humoribus expressi, spiritus alcalini, terram gerant elementalem, eorumque et vegetantium olea, saepius de puro vitro repetita destillatione cohobata, eandem in fundo deponant, facta ipsa volatilia (a).

Interim

(a) H. Boerhaave El. Chem. Part. 1. pag. 637. et Boyleus de Mutabil. Princip. Interim an omnis illa terra, quae purissima, post tot destillationes, colligitur, prius permixta haeserit in oleis siccissimis et animalium spiritibus alkalinis, dubito. Nonne potius aliqua pars ex puluere aëris accedit, dum toties vasa et excipula mutantur? Conferantur ea, quae scripsit H. Boerhaave de aqua pluua, coelo delapsa et cautissime recepta, destillata deinde. Loc. citat. pag. 627 et seq.

Interim prima haec solidorum elementa, aequae ac glutinosa, quod illa iungit intermedium, prius haeserunt in liquidum, cum illis mota fuerunt, tandemque ex iisdem subtilissimis sunt secreta. Id incremento patet. Ex dactyli senariae foecundae terrae commisso, per sensum allabens haustuque pabulum extenso, furculus, ex furculo annosa producitur vercus. Homo adultus athleticus fuit vix visibile stamen, quod, nisi a liquido, cui innatat, sustentetur, in mucum informem collabitur. Stamen hoc vtero materno conceptum, de momento in momentum increfcit, vt post nouem menses foetus nascatur, duodecim et plurimum quandoque mensebrarum. Ex ovo, a gallo foecundato, ex simili principio, vix semigrani ponderis, intra viginti et vnum dies, pullus procedit, ossibus et solidis partibus firmus. Fit hinc continuum incrementum, dum atomus sensim alteri, cum secretae et cohaerenti, apponitur, illique per intermedium, eodemque apparatu elaboratum, gluten adnectitur. Liquidum autem secernenda vehens, a corpore matris prius praeparatum, datur foetui, atque per eiusdem corpusculi vascula, omnem non modo sensum, sed omnem conceptum humanum, subtilitate sua superantia, vterius perficitur ante secretionem. Fit idem in pullo, dum, dato tempore, albumen per incubatum attenuatum, intra corpusculum in solida et fluida consumitur. Idem in insectorum ovis, vnde minimae erucae prodeunt, exilitate stupendae, obtinet. Pergit eadem actio post natiuitatem, peregrina ingesta commutans in naturam propriam, per incrementum ad statum, et ab hoc per decrementum ad mortem, apponendo nutiens, augens.

348 DE COHAESIONE SOLIDORVM

instaurans, irrorans, dum in locum illorum, quae omni momento per vim vitae et humorum impetum abrasa vehuntur eliminanturque, noua secreta reponit.

Varietas interim, quae in diuersis corporibus, et partibus eiusdem aliis, aliaque aetate in iuuenem, tam notabilis obseruatur, non ipsa dependet ab his secretis solidis, quae in omni videntur corporibus prorsus eadem: sed est gluten coniungens, quod in maiori, vel strictiori, vinculo elementa prima adunans in infantia molliorem, in statu robur, in senio rigiditatem, facit. Quo etenim hoc tenuius et magis extensibilis partes constituentibus elementis interponitur, et facilius haec a se inuicem recedunt, superata, ratione extensionis, vi vitae adiuuante, oriturque mollior, maior, flexibilitas, laxitas et debilitas, in compositis. Quo idem facile compingendum, crassius, tenacius, et magis plasticum est, et robur, rigiditas, et elasticitas, notabiliora sunt. Hinc partes molles et tenaces facile, prius extensae, contrahuntur, ossa duriora vix elongantur aut flectantur sine dissolutione. Differentia haec euentissima est inter musculi eiusdem partem carnosam et tendineam, quarum sunt fibrae non modo numero eadem, sed et aliis continuae.

Videtur autem gluten hoc (vbi postea apparebit clarius) in omnibus idem, sed in diuersis partibus, et in iisdem alia aetate, per variam solidorum oscillationem, et ab aucta sensim resistentia eorundem, diuersimode compactum. In infantia tenue, firmiter in iuuentute, in statu corporis magis validum, tenax in senio, ex subtili allabente liquido conficitur ope partium, quae firmatae reagent, separatae prius ex simili fluido, similique glutinae

glutine iunctae. Hisce interpositum illud retinet indolem, quam in maximis, et per decrepescientiam variam inde in minimis, quae sub sensus nostros cadunt, plasticam notamus, glutinosam, mucosam, ductilem, saponaceam, oleoso-aquosam, hinc mora et motu compingendam, adeoque in piceam quodammodo naturam mutabilem: sicuti hoc in reliquis oleis obtinet, siue pressa fuerint ex vegetabilibus, siue destillata ex iisdem, vel animalium humoribus. In plantis, quae tantam cum corpore animali analogiam habent, res eidentissima est. Sol quippe, calore et motu, in his olea limpidissima, spiritu rectore subtilissimo suave-olentia ita inspissat, ut in terebinthinam transeant, quae, aestu magis excocta, mutatur in resinam: vnde Bohnius(a) ~~aliquo~~ putauerunt, hanc ex oleo condensato componi, rursumque eandem liquefactam oleum constituere. Phaenomena porro, quae observantur, dum ultimum vinculum in parte quacunque animalis vel vegetantis destruitur, reliquis, quae interposita prius eandem retinent et constituunt, coctione prius ablatis, dicta ulterius firmant. Dum quippe in aëre libero illa comburitur, primo nigrescit, tumque ex illa exsurgit simul fumus ater, deinde piceus, foetens magis et densior, quo flamma ipsi propior est, quae, vno ictu proficiens, foetorem minuit et fumum tollit, solo tamen in apice eiusdem superstite fumulo, qui chartam suprapositam atra, pingui, inflammabili fuligine inquinat, claro documento, quod flamma sit fumus accensus, fuligo vero fumi pars non accensa, avolans de flamma, quae consumendo pabulum phlogiston

X x 3

(a) Dissert. Chemic. pag. 29. 319. 326.

senfim minor fit , et tandem extincta quiescit. Tum pars combusta albescit , quodque superest adhuc de nigro , scintillae coruscantes , lambendo fauillas , et circumambulando consumunt , dum illa pristinam formam retinet et figuram , ad minimum tamen attractum collapsa in cineres albos , inodoros , fere insipidos , qui salini , aquosi , vel oleosi , nihil exhibent , ast calcis quasi exustae leuissimum saporem imprimunt aquae incocti , atque exsiccati terram suppeditant virginem , iam supra notatam in omnibus eandem. Fumus interim et flamma , dum de corpore combustili exhalant , secum rapiunt aequas materiam terrestrem ignis actione aperta in aëre libero volatilem factam , quam spiritum , aquam , oleum et sal. Docet id fuliginis analysis(a). Blandissimos interim oleoso-aquosos in corpore animali humores , motu et calore ita condensandos , tandemque in solida mutabiles , horum contemplatio docet , et euentissimum est ex consideratione Lactis , quod in se habet materiem omnium partium firmarum et fluidarum , quae corpus humanum , successiue ab ortu ad interitum , constituunt ; adeo quidem , vt eo nutriatur non modo Infans , sed increascat et sustineatur omne animal galactophorum , per pro-

(a) H. Boerhaave Elem. Chem. Part. 2. Process. LXXXVIII. Sed eadem , quae mox notauimus de terra in humoribus animalium post repetitas destillationes deprehendenda , hic etiam locum habent. Flamma etenim , dum ascendit , et Fumus dum aërem voluitur ad supremum elati camini cacumen , multum inuoluit de pulvere aëreo , illum transiens. Dumque Fuligo affigitur lateribus camini , rapit flocculenta ex aëre , et sustinet , iisdem affixa , particulas terrestres volitantes , a quibus ante destillationem non prius depuratur.

proprium corpus confecto, mas sit vel foemina, virgo aequae et sterilis, nunquam puerpera (a), quam mater nutritrix. Hoc recens multum, blandissimum, in calore hominis sani breui aescit, et, sponte sua, ipsum quiescens, partem pinguiorem, cremorem dictum, reiiicit fursum, qui subactus condensatur in butyrum rancescens. Certo caloris gradu idem exhalando format in superficie sua pelliculam, toties renascentem solidam, dum auferitur: cui non illepide Veteres renascentem in corpore humano cuticulam comparant. Si vero eidem lacti coagulatum, de succo ventriculi ruminantium paratum, ~~est~~ acidum quodcunque, commiscetur, tum abit in ~~usam~~ usam, aequabilem, scissilem, massam, quae ~~in-fanem~~ in-fanem secedit et colostrum, quod vltimum ~~summa~~ summa vi intra densum linteum compressum, caseum format pinguem et blandum, qui tractu temporis acerrimus fit et alcalescens. Si vero prius a cremore suo, fursum reiecto, lac priuatur, atque desloratum eadem deinde ratione tractatur, tum caseum dat, qui scissilis, aetate, cornu instar, durefcit, atque igni admotus, perfecte ac illud lentescit, vstulatur, et cum simili foetore comburitur. Sic ex liquidissima et blanda adeo lactis materie, vt oculo instillata nullum dolorem imprimat, contra eundem leniat, fit coagulo et motu durum, solidum, aetate acre adeo, vt linguam, os, et fauces, inflammet. Vti hoc in multo extra corpus obtinet, idem fere fit in viui corporis humani vasis mammae galactophoris, quoties
ibi-

(a) H. Boerhaave Elem. Chem. Part. 2. Pag. 297. No. 9. et Institut. Medic. §. 690. Ad quem vide compilationem *Autorum affirmantium* in notis Halleri.

ibidem lac a causa qualicunque coagulatur, abeuns cum fillicidio feri tenuioris per papillam, vel et eiusdem resorptione per venas inbibentes, in crassamentum, ex quo durities nascitur et tumor; vnde inflammatio, suppuratio, vel scirrhus oritur et cancer, quod, vkeratum et apertum, virus fundit horrende adeo corrodens, vt omnia, quae attingit, exedat. Notamus insuper, tenuissimos corporis nostri humores, ex vltimis arteriolarum, forsitan et neruorum, osculis secretos, dum stagnant quocunque loco in cryptis, inspissari sensim calore ipsius corporis, et breui fieri glutinosos et gelatinosos, tandemque solidescere. Narium mucus, oculorum externus et palpebrarum humor, aurium cerumen, adeo subtiliter secreta, crassescunt non modo, sed in lemas coriaceas ductiles concresecunt. Calculi solidi nascuntur vbique in corpore, appositione particularum, quae sensim ex humoribus, prius de sero et lymphâ sanguinis separatis, secernuntur.

Constat ergo, fluida in corpore animali per motum et calorem, resorptu et difflatu tenuissimi laticis, fieri solida, siue externum aërem attingant, siue ab eodem occulta arceantur, idque fieri naturaliter et citius, quo sunt subtiliora secreta de prius commistis. Secundo patet; prius ita secreta ipsa inorganica, partes organicas componere, vt iterum de tenuissimis humoribus sibi simillima solida secernant, et secretis prius apponant. Docet hoc nutritio et incrementum, vnde roboris et rigiditatis causa patula est. Affirmatur insuper incubatu oui, eiusque feri analysi chemica.

Obseruamus autem, quod firma quaecunque, organica, quousque in illa sensus penetrant, consistunt
 fibris

Fibris. Firmas voco in corpore animali partes organicas, quae ex ultimis solidis, ratione modo dicta secretis, glutine intermedio connexis, cum debita flexibilitate constituuntur, quaeque, postea iunctae, causa continentiae efficiunt coërentia, τὰ ἐχοντα Hippocratica. Ex elementis terrestribus, antea notatis, iuxta longitudinis directionem glutine adunatis, fit Fibra simplicissima, consideranda uti linea geometrica latitudinis exers. Eiusmodi fibrae plures, iuxta se invicem molliter iunctae, faciunt Membranam simplicissimam, quae convoluta, ut linea ordine ultima, concurrens cum prima, eidem iungatur per longitudinem, efficit Canalem minimum, ex quo cum similibus agglutinato Membrana, et ex hac, eadem ratione convoluta et concreta, Vas secundi ordinis exsurgit.

Est in maioribus, quae partes inter se molliter ita connectit, ut accedere, recedere, et supra se invicem lubricae moveri possint, Tela Cellulosa. Est eadem, quae in minoribus sensim subtilior, subtilissima deprehenditur in istis, quas sensus nostri minimas dissolubiles notant, partibus; unde eandem in ultimis obtineri, concludimus; quoniam ex minimis maiores, et ex his maximae partes, illis simillimae, ubique in corpore, constant, simili ratione actuosae. Sententiam hanc firmat ortus huius telae, qualem descripsi (a), suspicatus, fieri hanc ex gelatinoso et plastico humore agitato, quae placuit et aliis recipitur (b): cumque illud, quod continetur huius telae cellulis, omnium minimis per sensus

(a) Nosor. Comment. Petropol. Tom. 1.º pag. 372. (b) Haller Prim. Lin. Physiolog. §. xv.

54. DE COHAESIONE SOLIDORVM

nostros, artis adminiculis adiutos, perceptis, ratione partium noctendarum extenuatum, apparet simillimum illi, quod copia in maioribus et maximis aggregatur, motu magis valido condensatum, non adeo vana est conclusio, quod hisce simillimum, est longe iterum subtilius, continuo, sed debiliori et appropriato; motu elaboratum simplicissimas omnium fibrillas, imo et harum elementa ad se inuicem retineat, quo partes, nobis nulla dissolutione distinguendae, sensim decreescunt. Certe notamus, quod omnia minima, aequae ac maxima, absque ulla confusione, distincta ordinantur ita, ut nusquam in corpore, alteri impedimento sint. Fibrae, quae nostris sensibus apparet minima dissoluenda, deprehenditur cum simili socia iungi iuxta longitudinem solum, interuentu cellulosae dictae telae tenuissimae. Hoc accuratissima specilla attento demonstrant. Sed vixit haec dissoluta nobis fibrilla, capillo humano decies et ultra tenuior, iterum constat fibrillis longe subtilioribus, non facile arte dissoluendis, sed, ope acuti microscopii, visus acie distinguendis, imprimis quando, vel leniter dilacerando, vel siccitate obiecti, dissiliant, crispantur, et ita in arcum solutae flectuntur: tum quippe in his, ac in maioribus compositis, eadem apparet coniunctionis directio longitudinalis: suntque insuper leuiter hirtae. Vnde concludere auisa, quod minimae omnium non dissolubiles, quae memoratas ultimas, non dissolutas, iterum constituunt, sese habeant eadem ratione directionis, simili vinculo retinente coniunctae. Interim in ossium structura (quod obiter moneo) aliquid mihi obscuri manet, cum pro certo definire non possim villo artificio.

artificio, vel ope acutissimi specilli, vtrum fibrae, quae iunctae membranas offeas componunt, nectantur cum vicinis interuentu lamellarum, quae distinctae et peculi-ares sunt, an vero fibrae ipsae, in longitudine ex diuer-
 sis interruptis adunatae, retundantur inflexae, sicque strata offeum superius cum supposito agglutinantes, inter-
 stitia cellulosa forment; etsi hoc, quam illud, potius apparere videatur. Affirmo tamen, et in diuersimode praeparatis animalium variae aetatis ossibus demonstrare possum, quod lamellulae, quae transuersae in cranio ta-
 bulas iungunt, et ita inter has diploem vulgo dictam constituunt, vti et illae, quae in oblongis ossium extre-
 mis, fibras a se inuicem distantes nectunt, et cum his spongiositatem latam efficiunt, nunquam easdem per-
 ceptent; sed quod inflexae vtroque suo extremo ne-
 cte cum lateribus oppositis fibrarum longitudinalium confluunt, atque ita cellulas distinctas, singulares, for-
 nicatas, faciant. In cartilaginibus res est obscurior: videretur tamen eadem esse in illis, quae postea, dum partes constituentes magis indurantur, in os transeunt. In mollibus vero partibus, vti musculi sunt et membranae, in strato eiusdem superficiei, vnicam modo, vt antea monui, iuxta solam longitudinem semper obseruo dire-
 ctionem, magis minusue compactam, rectam vel inflexam; nec vnquam vidi, fibrarum cum simili, funis instar, contorqueri, aut ab hac diuersa directione decussa-
 ri; neque notare vsquam potui, quod fibrae nervosae vel carnae, obliquae aut transuersae, ambient longitu-
 dinales, vel ita easdem interreperant, vt cum his inter-
 textae reticulum forment, etsi per triginta fere annos,

356. DE COHAESIONE SOLIDORVM

a prima nempe iuuentute, partes animalium, inquirendo incumens, nullam fere, neglexerim, occasionem indagandi musculorum imprimis fabricam, ardua hac in re incitatus, ostenso fructu laborum, laetissimo, ab istis Viris, quos summos in arte dedit, bonum fortunatum Praeceptores. Horum memor, monitorum, cum dudum, autopsia edoctus forem, desiderari in: musculis, decantatas fibrillas transuersas, iam ante viginti annos explicui, quid sit illud, quod errorem imponit (a). Deinde, toties repetita indagine certior de structura, et expositionem musculorum simplicissimam (b). Iam vero tot experimentis de nouo in diuersis animalibus institutis, aliorumque mecum consensu (c) iterum firmior, aio, esse non modo fibrarum, in vno eodemque musculo, et membranae strato decursum vnum, simplicissimum, parallelum, sed dari nihil, quod has ultimas solubiles et visibiles, cum similibus directe iungit, nisi, iuxta longitudinem, solam, telam cellulosam, quae euadit subtilior, et subtilius elaboratam, cacterum simillimum, et continet humidum, quo sensim fiunt fibrae tenuiores. Secundo: arteriae et venae, diuisae in minores minoresque ramulos, perreptant in omni puncto strata fibrarum, pauciores in parte tendinea, quam carnea, notandae. Inter se rami et ramuli arteriarum per anastomoses innumeratas iterum confluunt et retia formant. Idem in venis obtinet. Deinde arteriae cum venis iunguntur per innumeratas insertiones, dum omnium minimae videntur

(a) Perspirat. Hippocr. dict. 6. 780. (b) Impetum Fac. Hippocr. dict. 6. 294. (c) Haller. Not. c. in Comment. ad Inst. Boerhaav. p. 326.

videntur in ipsas fibras musculosas implantari. Tertio :
 serui accedunt distributi in ramulos tenaces, qui
 cito oculum optime armatum prae subtilitate fugiunt,
 unde horum indagatio obscurior et difficilior est, nec
 anastomosis inter ramulos notandam praebet, sed coniun-
 ctionem in fasciculos maiores, et dissolutionem in mero-
 res. Quarto : omnia haec vasa visibilia laxè inuoluuntur
 tela cellulosa et huius ope fibris adhaerent, intra illam
 folcita. Haec uti vidi, saepius aliis exhibui, habens
 demonstrò in musculis, musculorum fasciculis, et horum
 fibrillis dissoluendis, per adhibitam et toties repetitam,
 in variis animalibus, diuersam encheiresin. Scilicet ad
 hoc opus impleui quandoquidem in parte solas arterias,
 in alia solas venas, materie, quae liquefacta in minima
 vascula penetrat, et frige facta deinde in illis consistit
 colorata. Repleui in eodem obiecto arterias et venas di-
 stinctè per similem materiem, sed diuersissimo colo-
 rem, unde tamen in minimis fere semper quaedam con-
 siliò oritur, quoniam vix caeri potest, ut materies in
 opposita vasa non transeat. Aegeri denique materiam
 per arterias ita, ut venas ex his intret, et contra.
 Partes iam ita praeparatas exsiccati, alias maceraui
 aqua raro renouata, ut leuis putrefactio laxet, non pe-
 nitus soluat aut destruat, cohesionem; alias leniter sa-
 lé, alias sale prius, deinde fumo, alias denique alkoho-
 lé induravi, ut fibrae siciores, et pro examine fierent
 fortiores. Similia praestiti, non impletis prius in parte
 vasis, deinde in tenuissima, quae potui, filamenta dis-
 cerpras fibrillas optimis microscopiis perlustravi, sed nec
 in his, nec in recentissimis, sine vili praecua prepara-
 tione, deprehendere potui vsquam aliud, nisi memorata

DE COHÆSIONE SOLIDORVM

De fibrarum cohæſione iuxta longitudinis directionem ſolam. In proprie dicti muſculi parte carnea et tendinea vti hoc eſt euidentius, diſtinctius idem, et pulchrius apparet in illis membranis ex fibris conflatis, quæ ſunt veri muſculi caui, qualis in arteria, vena, oſophago, ventriculo, inteſtiniſ, veſica urinaria, Veſica fellis, eſt tunica dicta muſculoſa. Eſt quidem eadem in tenui membrana cognitio; obſcurior tamen propter eiusdem pelluciditatem, quam obſeruo in fibris muſculoſis maiorem, quo magis ſubtiles et tenuiores diſſoluuntur vltimus, idque in maximis aequè, quam minoribus animalibus. Diſſeciui hiſ Petropoli Elephantem, partesque diuerſimode præparatas ſeruantur eo aſpectu iucundiores, quo ſunt magnitudine notabiliores, vtpote in quibus nudo oculo apparent, quæ in minoribus animalibus per microſcopia diſtinguntur, tam ad reptatum vltimorum veſculorum, quæ per coloratam materiam iniectam rigeſcunt, quam ad fabricam telæ cellulofæ ſubtiliſſime ſolutam, ſed imprimis ad fibrarum muſcularium decurſum, quas arte mea vltimas diſſolubiles, nec craſſiores, nec magis opacas, comperui ſum, quam quæ in hominibus, et diuerſæ magnitudinis animalibus, inter ſe ſunt ſimillimæ. Vade didici, robur in muſculis non pendere a craſſitie vniuſcuſque et ſingularis fibræ, ſed a multitudine illarum, dum plures ſimul iunctæ ex ſciſcipulis aduatis craſſioribus, toroſiores muſculos conſtituunt, in acti one ſynchronæ, adiuuante forſitan longitudine in directione partis mouendæ, ex pluribus elementis conflata. Sed et in hoc animali lamella tenuiſſima demta de oſſe, et microſcopio examinata, fibras niſi vltimas

vltimas distinguendas exhibuit, quam in alio animali
 haud crassiores, ita quidem vt hic iterum copia robur
 efficiat. Quae in musculis et ossibus, eadem apparent
 in membranis, dummodo ab omni alieno adhaerente libe-
 rentur. Peritonaeum in elephante tenue est, ac in ho-
 mine. Et seruo ex eodem animali omēti portionem
 in liquore spirituofo suspensam, amoenissima subtilitate
 pellucidam, aliamque exsiccatam, quae ex tenuissimo
 quasi serico eleganter contexta apparet. Sunt in eadem
 bellua nerui validissimi et crassissimi (a): ast arte et pa-
 tientia dissoluti in fibrillas, plures quidem et longiores,
 non vero, quam in alio animali, robustiores easdem ex-
 hibent. Omnia haec affirmavit nuperrima perlustratio
 viscerum omnium, quae in Testudine maritima maxima
 masculina artificio supra memorato tractari, robustiora;
 lacertisque musculosis validiora, quam in vilo animalium,
 quorum copiam, diuersam adeo, dissecui, hucusque
 compertus fui. Nec mirum! Propria sua energia agere
 sola debent in contenta, intra duas vix mobiles testas tu-
 to deposita, adeoque destituuntur ope musculorum ab-
 dominalium, pectoris, et respirationi intersumentium, qua-
 caeterum plurima animalia gaudent. Inquirendae ergo
 in his fibrosae fabricae opportunitas est pulcherrima, quae,
 in aliis toties reperta et supra memorata, fidelior con-
 firmavit.

Cadit ergo tota, aliisque diuersa adeo explicata
 doctrina, tam variis hypothesibus superba, de actio-
 ne musculorum, fibris horum obliquis vel transuersis,
 longi-

(a) Vid. Tabul. I. Descriptionis nostrae Infantis montrosi; manu
 dextra retentam nerui quinti paris portionem.

longitudinales comprimentibus, superstructa, ob illarum absentiam. Addunt quidem in arte celebres Viri, patere easdem nervosas ex demonstratione anatomica, sed qualis illa foret, non percipio. Demonstrationem Anatomicam puto Mathematicae similem, qua mens per sensus corporeos rem demonstratam ita percipit, ut nulla de veritate eius et existentia, uti definitur, superfit dubitatio. Per talem si exhibentur fibrae in musculis et membranis, funis instar inter se intortae, vel nervosae, quae longitudinales carneas (obliquae vel transterrae ambiunt, aut easdem decussant, denique si elucidantur similes inter has ita decurrere, ut intertextae reticulum forment, labores meos (tot annorum in his frustraneos perditosque ipse pronuntiabo, et libens candidusque mutabo sententiam, quam simplicissimam exposui, simplici quidem, sed ideo in ultimis obscurae, partium structurae maxime congruam, adeoque veritati proximam (*). Sit modo talis demonstratio in ipsa corporis humani, vel cuiuscunque animalis, recenti vel arte praeparato musculo aut membrana, non vero in nitide delineata figura, prout illa per fingendi libertatem in museo concipitur. Et, quaeso? quid fiet de fibris ita fictis transverfis, si adessent, quoties musculi crassities notabile augetur, ut fit brevi saepe temporis spatio in homine, ex macilento subito obeso, et in animali intra paucos menses, vel intra aliquot dies, uti in aibus obtinet, saginato? Tum nihil ex superaddito elongatur, sed tela cellulosa magis impletur pingui copiosiore et largius secreto.

(*) Impet. Fac. Hippocrat. dia. §. 286.

secreto. Quatenus ergo fibras longitudinales ambiens, iisdem intertexta has coniungit, plus distenditur, atque ita easdem a se inuicem remouet, et fasciculos musculares a fasciculis magis abducit. Ergo, quae forent obliquae vel transuersae longitudinales has interreptantes, fibrae extendendae sunt, et tamen, uti prius, aequae promptae actuosae. Sed supponuntur esse neuosae, ideo hoc illarum actioni contrarium est. Nerus quippe praeter modum vel minime, inprimis subito, extensus excitat dolorem, quo ipse minor est, maiorem: uti patet in podagra, atque ibi, ubi agit, vel ab obiectis afficitur, prius liberandus est ab illa membrana, qua, uti theca, inuolutus inter partes desertur ad locum destinatum, vel maxime ab origine in corpore distantem. Erit itaque mollior et nimis pulposus, quam ut maiori repletionis spirituum tumens, fibras musculosas cauas quidem, sed a contento proprio fluido distentas et resistentes, ubi has interreptat, comprimeret, adeoque vim semet ipso maiorem exerceret. Neque ibi, ubi neruus musculum intrat, tunicas suas, quantum ego deprehendere possum subtili indagine, deponit; quousque etenim in minores ramulos, respectu trunci, ad angulos internos satis acutos illum dispersum, et musculum perreptantem, prosequor, longe tenacior est, quam ibi, ubi in initio ex medulla oblongata vel spinali oritur, antequam vaginulata a dura matre datam, iam pie matris inuolucro velatus, ingreditur. Unde suspicor, tum demum fibrillas neuosae thecula deposita egredi, quando singulis fibris cauis, musculosis singulares inseruntur, ad actionem distinctam, sine ulla confusione, in omnibus exercendam. Erit ita

Tem. IV. Non. Com. Z z vna;

vnaquaeque fibra muscularis organum ad motum distinctum, solitarium actione, cum reliquis in eodem musculo synchrona, conspirans (a). Haec cylindrica apparet, creditur caua, gaudetque sua arteriola (b), quae nondum vnica et simplex, sed in minores ramos dispersa, videtur, quorum demum subtilissimi in omni fibrillae superficiei puncto rorem oculis apertis inter minima constituenta effundunt, pro nutrimento, lenitate, incremento, flexibilitate. His respondent venularum ramuli vltimi (c), in penultimos, ex his in maiores, inde in trunculum coeuntes. Nec forsitan solitaria est fibrilla nervea, quae fibram in musculo distinctam facit moueri, potius inferuntur plures eodem momento actuosae. Nonne hoc firmat longitudo fibrae in musculis diuersa, diuersa in animalibus, dum subtilitas huius, et dissoluti nerui teneritudo, in omnibus interim notatur eadem? Nutritio certe fibrae musculosae in omni puncto, partium minimarum hanc constituentium cohaesio per vltimum elaboratum vinculum, sensus vbique aequalis, actio denique subtilis, argumento pondus addunt. Ita in his praesens semper est spiritus subtilissimus, replens neruorum tenuissima et simul di-

(a) §. 197 Impetum facient: Hippocrati dicit: explicui, qua ratione omnium neruorum fibrillae minimae sine vlla coniunctione, vel vilo commercio, distinctae solitariae decurrant, iunctae, vel potius leniter colligatae inter se, per membranam tenuissimam cellulotam intra thecam datam a dura matre. Qua porro ratione, a se inuicem secedunt fibrillae haec, non proprie in ramos dispersae, vti in theca inuolvente obrinet: et quomodo sine consensu agant.

(b) Ibid: §. 263.

(c) Ibid: §. 267. 268.

distinctissima fila caua aequaliter ab origine ad mouenda , a causa minima incitandus ; quae videtur , vix definienda , laticis incomprehensibilis tantilla copia aucta. Praesens est humor arteriosus ; cuius partes minimae seruant fibram musculosam , et hanc constituentia minima fila , apta et idonea , vt a spiritu nervoso promptissime moueri queant. Haec patent per experimenta zootomica (a). Vterque vero hic humor subtilis , ab actione et nutritione superfluus , reducitur ad cor.

Ex his omnibus patet , quod quoties agit musculus , id est , longitudinae minuta , in latitudinem extenditur , toties fibrae eiusdem accedunt ex cylindrica ad figuram sphaericam , siue vno tractu cauae , seu potius per interstitia in vesiculas communicantes diuisae , exporriguntur. Simplicissimae ergo , quae illas constituunt , fibrillae mutantur ratione cohaesionis propriae , et ratione cohaesionis cum aliis similibus. Iuxta longitudinem quippe iunctae recedunt a se inuicem , imprimis in media vesiculae parte , vbi extensio maxima est. Deinde cum latera fibrae muscularis simul supponuntur elongari , dum magis haec impletur , atomi , quae fibras simplices constituunt , magis ab altera remouentur , et quod has intermedium iungit , ductile gluten plus extenditur. Desinente vero hac actione , musculus iterum elongatur restitutione fibrarum , adque atomi ad se inuicem accedunt et gluten iterum magis compingunt. Sic fibra musculosa non modo capacitate minuitur , sed simul accartatur , dum musculus extenditur. Haec autem contractionis insita vis est conamen illud , quo minimae rem constituentes particulae tentant ad se

Z z ip-

(a) Ibit : §. 287.

364 DE COHAESIONE SOLIDORVM.

inuicem , prius remotae , iterum accedere per mutuum , viz explicandum , amorem , quem Vim dicunt Attrahentem : cuius causa licet lateat , phaenomena tamen illius in solidis et in fluidis , vti extra nos , in nobis facile obseruantur.

Fibra ergo quaecunque simplicissima , adeoque quae ex his adnatis componitur , est in musculo et membrana robustissima , quando contracta est , et manet semper in eodem statu , nisi accedat causa , quae extendit , priorem superans . Hoc patet morte , et reactione in antagonista deleta . Dum vero extenditur , fit debilior , sed tum demum vires dictas contractiles reddit manifestas , vti a quiete in corporibus nulla , omnis a motu , pendet mutatio . Magnes si unquam magneti vel ferro adeo propinquus fuisse , vt ab eodem tractus idem attrahat , vires admirandas suas nunquam patefecisset . Sunt tamen , qui contrarium dicunt , et vires tum crescere autumant in fibra , quando haec elongatur , et , quod miror ! pro exemplo adducitur differentia inter fibram tensam et flaccide pendulam . In diuerso hoc opposito statu dicti absurditas sponte patet , siue experimento vti velint , siue bono ratiocinio ex partium cohaesione . Fibra , vel filum de quacunque materia subtili , elongata et tensa , ictu percussa sciudente acuto , facillime , difficilium pendula et flaccida , soluitur . Contracta eadem habet partes constituentes proximae sibi adnatas , quo breuior est , adeoque in corpore animali , iam toties memoratum , intermedium gluten inter illas compressum . Dum vero elongatur , partes minimae constituentes magis et magis a se inuicem remouentur , et quod haec

intercedit, ductile gluten extenditur cum fisdem. Ergo in ultimo casu robur et cohaesionis virtus diminuitur ratione, qua puncta contactuanti in partibus minimis trinuuntur. (Impetrabo facile veniam pro verbo, vbi sermo de atomis, in quibus ratio aliquam concedet figuram, gluten saltim intermedium de natura fluidi partes habet iterum constituentes non homogeneas.) Interim infeliciter Illi errant, qui diuersitatem inter flaccidam et tensam fibram referunt ad corpus animale, dum viuit, in quo certe nulla fibra sana pendula et flaccida est: cum in eodem omnes partes firmae, etiam contractissimae, insuper nituntur in adunationem maiorem, quam impedit illa continuitas, qua pars parti cohaeret et eandem tendit, hac etenim soluta, cutis et membranae hiant in vulnere, arteria vero, vena, nervus, tendo, caro, discissa sese abscondunt, regressa intra partes molles, vix vi adhibita iterum adducendis extremis. Omnis ergo differentia, quae obseruatur in viventis corporis fibra, est inter eandem tensam et extensam sanam; flaccida quippe est pendula, nec agit, nec promte reagit, etiam prius extensa. Chorda segmenti peripheriae circuli extrema iungens in arcu elastico, si flaccida extenditur, nullam vim exercet, sibi iterum relicta: sed prius tensa, si deinde extensa remittitur, telum sibi impositum proficit, semet ipsam restituendo, dum partes constituentes, prius remotae magis, propius iterum ad se iuicem accedunt. Fit autem hoc vi tanto maiori, quo magis tensa chorda, plus extenditur, et citius remittitur. Qui post mortem obseruatur in corporis partibus, habitus nihil contrarium docet. In castrare recens suffocato, vel aquis submerso,

omnia quidem adfunt folida et fluida, quae momento antea aderant in viuo, sed vitalis ifta virtus, qua in fe inuicem agunt, perit; hinc et tensio et torofitas in internis aeque, quam in externis, inprimis euacuatifimul, quae fufinent, contentis, abeft: patet in arteriis, venis, et firmis partibus continentibus, quae in contenta, vt in continua mollia quidem, fed elastica, fuerant *actuofae*. Exemplo fit vefica ratione copiofae vrinae plus minusue extenfa, et in viuo plane vacua contracta tamen et carnofa. Haec fi in cadauere preffu externo a lotio euacuatur, lintei inftar flaccida iacet, deffrueto in fibrif elatere, quo femet contrahunt. Ligata in cane vrethra potu faturato, fi viuis inciditur, vefica plena dura, dum acu non nimis tenui perforatur, eiusdem fibrae fe fe circa lotium extendens aequabiliter contrahunt, atque illud per vulnufculum non refiftens ad altitudinem notabilem, quafi per fiphonem, expellunt ad integram fere euacuationem contractae. Interim funt femper, dum agunt, extenfae, et quidem, quo plenior vefica eft, quae etiam contracta non tum flaccescit. In explicanda vrinae euacuatione physiologicis lectionibus folebat hoc experimentum recitare magnus Boerhaauius, quod non femel repetendo me docuit, quo citius, incifis continentibus abdominalibus, pertunditur vefica, eo saltum vrinae effe fortiozem, dum contrarium obtinet in animali femimortuo. Sciunt porro Venatores ex fera exenterata, vituda viscera carnea moueri, fi vero ex femimortuo animalis abdomine eximuntur, membranacea pellucefcunt et extenfa pallida iacent.

Sim-

Simplex autem fibra non agit solitaria, hoc iam patuit in illis, quae compositae musculum constituunt, sed aetate firmatur ad actionem magis validam per propriam, et cum fibris similibus cohaesionem arctiorem. Prior obtinet, dum mucosa in incremento, per augmentum atomorum et harum adunationem propiorem, glutine plus inter easdem condensato, tenacior fit. Altera vero, dum vascula minima ex simplicissima membrana convoluta in fibram compositam, per *θλίψιν*, vel cum contento liquido, abolita cavitare, concresecunt. Sic roboratur, dum increfcit, corpus. Absolute ergo impossibile est, certam dare cohaesionis definitionem in eiusdem corporis partibus diuersis non modo, sed et alia aetate in iisdem. Ossium lineamenta in primo formato embrione diffluunt mucosa, non sustentata aequali liquore. Fiunt deinde membranacea, cartilaginea, et ossescunt in foetu iam in vtero: in iunioribus eadem succosa, demum in decrepitis eburnea euadunt. Dentes adamantina duritie splendentes, fuere mucus, membrana tenuissima vasculosa, rudimenta cohaerentia media in gelatina natantia. Vidi in sene post centesimum annum mortuo, quae in iuuentute ex meris fere vasculis constare per iniectiones anatomicas apparet, aortam, vbi corde egreditur, et primo diuiditur, plane corneam, rigidam, et immobilem. Vidi in eodem Nauta emerito, sinum durae matris longitudinalem et processum, qui falciformis hemispheria cerebri distinguit, granulis innumeris osseis, quasi tot punctis, vnde ossificatio incipit, repletum, et erat sinuum concursus, quem torcular Herophili dicunt, plane osseus. Idem vti in animalibus, obtinet in fossilibus et in vege-

vegetabilibus. Sarculus fit arbor, augmento et robore partium, quae constituunt, magis adactarum. Fluitque in venis metallum immaturum sub nomine Gur metallici. Haeret autem, uti in initio monui, omnis haec, et successiva in partibus et in toto, differentia non in solidis ipsis constituentibus, sed in glutine iungente, plus minusve elaborato et compacto. Farina frumenti volatilis cum aqua commista in pulvem, motu deinde subacta, condensatur in massam, ex qua certo ignis gradu panis coquitur. Pulvis viarum, vento mobilis, spargitur per aras; imbre vero madefactus et subactus idem vertitur in limum cohaeretque ductilis, inprimis si vel ipse pinguior, vel mucosior est pluvia: inde formatus globulus mollis, ardore elibani, torretur in lapideam duritiem. Ex oleo et pulvere cretae impalpabili mistis materies conflat tenax et ductilis, qua iunguntur vitra ligno, quaeque, sensim siccata et solida facta, aërem arcet et aquam. Notissima haec ex innumeris adduco exempla, ut pateat, dum in corpore humano praesto sunt partes minimae terrestres, humor has connectens aquoso-oleolus, motus continuus, et calor appropriatus, ut ex mucoso principio, in singulis et in omnibus, ratione partium, cuncta firmentur, increcant, tandemque per ipsum calorem et motum continuum rigescant ita, ut sit inevitabilis fati senilis necessitas, quam sint vana illorum promissa, qui, spe longioris aevi, paucis elixirii aut essentiae guttalis credulos fallunt ipsi decepti; dum per integram corporis massam, vi penetrabili, cuncta concreta dissolvere, novaque apta infundere, iisdem conantur: adeoque a morbo quocunque, caeteris insanabili medicamentis, liberatum

corpus

corpus producere ad longaeuitatem ; imo vero in singulis peculiaria , et in aliis plane partibus peragere opposita vno eodemque auxilio. Tutior , si quid agendum , ars Medae , fabulis implicita , per fomenta et tepida balnea , rigido et exsucco decrepiti Aesonis corpori reddit priscum iuuentutis floridae specimen. Hoc docet , certo nixa fundamento , cura toties Sapientibus adhibita in vasorum et viscerum morbis atque artuum contracturis , a nimis praeter naturam indurata et rigida fibra dependentibus. Sed et in partibus animalibus analogis extensis mira est proprietas et conditio singularis semet ipsas contrahendi , adeoque primordia constituentia solida ad se inuicem adigendi , atque ductile extensumque gluten iterum compingendi. In ventriculo et intestinis , quotidie diuersimode extensis et contractis , motus peristalticus viget et perennat. Vterus a tantilla mole in ingentem eandem tempore grauiditatis excrescens , breui post partum dierum interuallo ad pristinum statum redit. Haec res mira , vti admiranda reuera est , extollitur ! sed non video , quod minus stupenda sit , cutis , pinguedinis , musculorum abdominalium , horumque aponeurosum , sed inprimis tenuissimi peritonei , singulorum prius extensorum , valida et repetita contractio in foeminis toties parturientibus. Certe si cutis et muscoli in alia plaga corporis , si membranae peritoneo similis fibrae constituentes ita elongarentur et a se inuicem abducerentur , vix restituerentur vnquam , sed manerent potius paralyticae. Interim miramur magis , quod vis haec peculiaris contrahens extensa , tanto validior in corpore faemino obtineat , quam in masculino , cum tamen longe

Tom. IV. Nou. Com.

A a a

mollius

mollius sit et textura laxius. Hanc puto maximam esse rationem, ob quam quotidie obseruamus in praxi Mulieres longe diutius et longe commodius perferre asciten, quam Viros, quoniam partes abdomen inferius ambientes ex propria et connata natura ad validam extensionem et contractionem sunt praedispositae, licet hoc etiam multum faciat latus peluis ambitus, nimium extensas et extendentes aquas melius sustinens. Patet et mira, sed diuersa in aliis, contrahendi proprietates in exactis partibus similibus irritatis, vti euidentis est in corde et aliis musculis quorundam animalium.

Sicuti vero fibra naturaliter contracta, in maiorem adhuc nititur partium adunationem, (quod iam antea memorauimus) ita eadem extensa elongatur etiam ulterius, quoties et ratione, qua vis extendens augetur, tumque eo magis renitens vires contractiles plus reddit conspicuas, quae reagunt in causam extendentem, quo haec fortior est. Aucta hoc explicat humorum circulatio, vnde vasorum extensio et contractio citissime mutatur et simul validissime: quod fit a causa minima, et toties leuissima obseruata, siue mentem prius, siue directe corpus afficiat; in quo, sanissimo etiam declarato, vix idem omni diei hora cordis et arteriarum pulsus deprehenditur: quare inter Medicos multi dubitant, an perfecta sanitas sit definienda (a).

Quoties vero causa haec extendens aucta, vel per propriam virtutem, vel per imminutam resistentiam in fibra ipsa, eandem plus elongare pergit, adeoque partes minimas constituentes magis a se inuicem remouet, tan-

(a) Galenus de sanitate tuenda Lib. vi. Cap. 5.

tandem omnem in illa vim contractilem superat et destruit. Agit quippe mutua inter partes virtus attrahens ad certam modo distantiam, in minori interuallo fortior, in maiori debilior, desinens in iisdem, extra suae virtutis limites extensis. Oriuntur tunc in partibus compositis omnes illi morbi vasorum et viscerum, per gradus ad paralyfin et continui solutionem vsque, qui a laxa et nimis debili fibra, quam vt naturaliter contrahatur, dependent.

Cum ergo vltima constituentia solida terrestria, alia vocula aliis denominata, significatione eadem (a) ipsa simplicissima et vnica, in quocunq; animali, vt omni vegetanti, explorata ita inter se conueniunt, vt vel attentissima indagatio nullam inter illa differentiam deprehendat; cumque cohaesio vltima in vtroque non soluitur, nisi per viuum ignem in aura aperta, aut per aëris, aquae, et temporis, diurnam actionem, an etiam vinculum vltimum in hoc, quam in illo, est perfecte idem aquoso-oleosum gluten? Praeter destructionis eandem in cohaesione memoratam rationem, nonne hoc firmat ipsorum elementorum summa soliditas, simplicitas, adamantina durities, immutabilitas, adeoque in omnibus figura omnino et prorsus eadem, et talis quidem, quae solummodo iungitur per simplex vinculum ita, vt per ignis et frigoris actionem alternam remota et adducta principia in compositis corporibus rarefactionem et condensationem efficiant; quae praeter illum, quem ex impulsu liquidi notauimus in compositis, motum continuum excitant. Certe quidem cum deprehenderant

A a a 2

dudum

(a) Muschenbrock Institut. Physic. §. 43.

dudum attenti Physici , calore dilatari , rarefcere , debilitari quaecunq; corpora folida ; frigore vero condensari , compingi , et roborari eadem in tribus regnis , fimul notarunt feduli , omnem hanc mutationem non pendere in primis elementis ipsis , at vero in iis , quae ex his conflantur , particulis. An ita funt prima compofita corporum principia , in vegetantibus et in animalibus , etiam prorfus eadem , tam materie , quam cohaefione ? An diuerfitas in compofitis maioribus dependet a molecularum , inter fe fimilium , appofitione et adunatione alia , vt inde varia componantur vafcula , vafa , et continentia , per quorum diuerfam intorfionis figuram , atque inde natam aliam ofcillationis energiam , ex vno eodemque fanguine in animali , ex vno eodemque fucco haufto de tellure in planta , adeo discrepantes fecernuntur humores , prout hi alio directionis angulo in illorum parietes incidunt et repelluntur , atque ita diuerfimode mixti alia iterum ratione feperantur. An et inde diuerfi characteris in fpeciem diftinctio ? Hac quidem videtur incomparabilis Ruifchii fententia , cum per totam vitam , eamque longaeuam , attentiffimus et dexterimus in extricandis corporis humani labyrinthis , tandemprehenderat ; quod in omni eiusdem parte , per artem fuam diffoluta et vifibilia facta vafa minima , alio decurfu procederent aliaque intorfione aperirentur.

Similitudo attente notata , fue ortum refpiciamus , incrementum , nutrimentum , aut nutritorum fecretionem et exhalationem , inter animantia et vegetantia , vt ex pofita elucidat , ita in primis eadem affirmat vnus in alterius corpus metempsychofis , ne quidem plane in elementa

elementa prima soluti prius. De tellure hausto succo aluntur stirpes, stirpibus pascuntur animalia, aut aliorum animalium partibus, quae prius comederant vegetabilia. Pisces maiores minores deuorant, ipsi minimos, qui iterum insecta, et haec nutriuntur vegetabili tenuissimo.

Torua Leaena Lupum sequitur, Lupus ipse Capellam, Florentem Cytisum sequitur lasciuia Capella. (a)

Vastissima animalia, elephas, camelus, bos saginatus, equus generosissimus, herbis constant comestis et aqua pura, in suum mutatis corpus. Homo vero vegetabilia comedit, varias animalium carnes, pisces et insecta, his semet sustinet, quorum omnium principium est de terra haustum pabulum vnicum et aqua iterum. Contra quae ex his assumtis prius conuersa in corpus mutans exhalant de homine, de reliquis animalibus, per insensibilem perspirationem et sudorem, quae per saliuam, vrinam, aluum, depurationem, excernuntur, illa omnia breui tempore disparent euanescentia in aëra. Imo vero ingentia belluarum corpora in desertis mortua, hominum post belli conflictus relicta in campis cadauera, non longa ita mora, per coeli et tempestatum asperitates, aëris vicissitudines, solis ardorem et teporem, resoluta prius in tabem, diffluunt putrefacta; et illa, quae sub terra sepeliuntur, ibidem vertuntur in tenuissimam mephitim, quae volatilis facta per eiusdem poros transit. Tandem ossa relicta albicantia, iisdem iniuriis calcinata, collabuntur in cineres vento difflandos. Hac ratione ingentia corpora animalium dissoluta sepeliuntur tota in aëre, citius si

A a a 3

combu-

(a) Virgilius Bucol. eclog. 11, versu 62.

comburuntur. Sed ita dispersa et oberrantia in vasta atmosphaera horum meteora iterum redduntur telluris gremio, quoties cum rore, pruina, nebula, pluuia, imbre, decidunt, atque salina, oleosa, saponacea aquae mixta, eidemque intime nupta, sub forma lixiuii subtilissima sabuleta penetrant, et in subterraneis his locis, per alternam ignis et aëris oscillationem, cum suo vehiculo commota a bibulis plantarum radicum osculis recipiuntur, nouum his, nouum animalibus, iterum redditura alimentum. Sic permutantur quotidie partes animalium in materiem vegetabilem. Sic ex plantis assumtis, omni momento aluntur animalium corpora, iisdemque constituuntur assimilatis in suam formam, aëri et terrae iterum reddendam. Vtque de terra oriuntur in aërem omnia, ita ex eodem relabuntur cuncta in illam, iterum proditura circulo continuo. Vt ergo omnium rerum vnum chaos terra, ita alterum aër est.

Quae interim de corporibus rapiuntur in vita particulae, neque quae post mortem separantur, siue igne, siue putrefactione illa dissoluuntur, sunt semper solutae in, omnia constituenta, minima elementa; contrarium docet virtus harum molecularum odorifera late dispersa, et quidem in aliis diuersa animalibus, vti in carnibus tabidis et pisce putrefacto est euidentis distinctio. Neque, relapsa in terram, semper in principia dissiliunt, vti ex combinatione cum aqua patuit; multo minus id fiet, dum vegetabilibus recepta, per affabre horum factam compagem in propriam naturam elaborantur.

Hinc tandem concludere ausim: quod Elementa omnium prima, in omnibus corporibus animalium et
 vege-

vegetabilium, simplicissima, terrestria, immutabilia sunt prorsus eadem. Et, quod haec prima in ambobus iungit, Gluten sit eiusdem omnino naturae, neque vltimum tamen elaboratum, simplicissimum, sed ex aqua saltem et oleo compositum, forsan et ex alio adhuc principio saponaceum: hinc ductile est et quodammodo figura mutatur. Est demum in vtrisque ratio cohaesionis plane eadem. Sunt ergo omnium prima composita principia, aequae quam simplicia, in his eadem. Sic ex plane simillimis componuntur principiis et in eadem resoluntur animalium et vegetabilium corpora, ut facile ad eandem possent referri classem, licet character sit valde diuersus. Ideo distinctio necessaria est ob nascituram caeterum confusionem.

Sic ex elementis paucis innumerabiles nouorum corporum series oriuntur. Sic ex compositorum separatione, atque deinde commixtionè iterum cum aliis adunatis vel cum primis compositis principiis, infinita nascuntur corpora, quae alia appositione, varia figura et superficie, diuersissimas agendi virtutes et operandi potestates acquirunt, etiam remanente materia prorsus eadem.

Tandem: an quae inter vegetabilia et animalia, eadem inter haec et regnum minerale obtinet metempsychosis? Certissimum est, quod vti illorum, ita fossilium, et inter haec metallorum, particulae deferantur per atmosphaeram (*a*); vnde saepe noxius fit aër, quandoque et venenatus, imprimis circa fodinas. Particulae hae simili ratione, qua vegetantium et ani-

(a) Boerhaave Elem. Chem. Tom. 1. pag. 490.

animalium, deciduae redduntur telluris gremio (*a*). Interim non semper ad matricem suam redeunt, reliquis corporibus intactis. Mercurius igne simplici eleuatur, et per auram dispersus particulis inuisibilibus corpus humanum intrat, hoc in ptyalismum incitat, dumque rapitur, de metallis obuiis aliquid aufert (*b*). Vegetabilium autem et quorundam animalium exusti cineres dant Ferrum verum conspicuum. Scribit Ioachimus Becker (*c*), sese ex argilla vulgari cum oleo terebinthinae subacta globulos formae sclopetariorum confecisse, et, post oleum Philosophicum inde destillatione ablatum, residuum in pollen impalpabile triuisse, ex quo per magnetem admotum spiculas extraxit. Geofroy (*d*) ex nigra faece lucida olei vitrioli et terebenthinae mixti et destillati eadem inuenit, quae ex suis mox memoratus Bekkerus: affirmat deinde, quod loco argillae captis cineribus diuersis plantarum, nullo horum inuenerit, qui non dederunt magneti adhaerentia granula, quae verum ferrum esse inde apparent, quod speculo caustico exposita, perfecte patiuntur et dant omnia illa phaenomena, quae exhibet de minera sua separatum ferrum; quod adest in exustis etiam millepedum et castorei cineribus (*e*). Quis autem definiet, dato semel corpore, quod aurum, argentum, reliquaque metalla ita attrahit, vti magnes ferrum, an non similia horum spicula elicerentur de corporibus combustis? quod dum non affirmo, etiam negare non auderem

Nec

(*a*) Ibid. pag. 494.

(*b*) Ibid. pag. 492.

(*c*) In Physica subterranea.

(*d*) Memoires de l'Acad. de Scienc. 1704. pag. 285. 286.

(*e*) Ibid. 1706. pag. 529.

Nec vllius momenti obiectio est, generari, quod extrahitur de cineribus, demum ferrum tum, quando corpora comburuntur: agimus etenim de particulis constituentibus, adeoque ferri praesentia, post ignis violentiam, probat, dari in memoratis corporibus materiem, vnde metallum hoc conflatur, siue id fiat per ignem in combustione, siue ante illam, per causam quamcunque aliam.

Difficillius forsitan erit, exhibere in fossilibus animalium et vegetantium particulas. Notamus interim, terram, quam sales natiui, sulphura, semimetalla, et metalla viliora, dant, si rite depuratur, esse omni dote iterum eandem cum illa, quae ex vegetabilibus separatur et ex animalibus, nec vlla nota ab hac distinguitur. In perfectissimis autem metallis haec non deprehenditur, quae eius loco pro basi agnoscunt Argentum viuum fixatum per sulphur. Sulphur autem in omnibus corporibus, hominum fuerint vel ratione carentium animantium, stirpium vel fossilium, palam declarant Chemicorum Principes idem (a): vtpote quae materia luminis in corpora quaecunque penetrat, semper principium actiuum mouetur, moratur in horum poris, molem et pondus auget, figuras mutat, principia diuersa miscet, et hac ratione noua corpora facit. Vti deinde in animalibus et vegetabilibus gluten auferitur, dum comburuntur, vel alia ratione in principia dissoluuntur, ita auolat de metallis sulphur hoc oleosum, quoties illa foco speculi caustici exposita vitrificantur, tumque omni

Tom. IV. Non. Com.

B b b

vin-

(a) De hac re videndae sunt obseruationes, quas dedere Ingens Hombergius, Geoffroy, et Le Meryus Iunior, in Actus Societatis Regiae Parisinae passim.

vinculo liberum in vastissima atmosphaera non magis est sulphur metallicum, quam animale vel vegetabile, sed principium commune, aptum ad corpora quaecunque ingredienda, liganda, constituenda. Hinc metalla sulphure suo orbata, hoc iterum recipiunt ex vegetabili. Si etenim materies prius per speculum causticum vitrificata in cupella, deinde posita supra carbonem funditur iterum per vitrum vrens, tunc ilico induit pristinam formam et recipit indolem metallicam. Inde fit, quod metalla carboni imposita, si foco speculi caustici exponuntur, nunquam vitrescant, sed diffiliant in parva fragmenta, semper adhuc metallica; carbo etenim de suo sulphure vegetabili reddit, loco eius, quod ignis abstulerat. Est ergo sulphur metallicum; oleosum nempe, opacans, colorans, et malleabile reddens, idem, quod vegetabile; et est hoc idem, quod animale sub nomine glutinis.

Vt ergo omnium corporum basis est terra simplicissima, elementalis, formam dans, et rei cuiuscunque principia caetera sibi, deinde et inter se, vniens, nimis per se volatilia a dissipatione retinens, praestans facultatem alieni assimilandi in cuiuscunque nutriti corporis naturam, adeoque et potestatem seminalem procreandi sibi similia efficiens, quae pereunt omnia, fabrica a terra praecipue pendente destructa, ita in Metallis et quibusdam Fossilibus similia praestat Argentum viuum. Hinc Hermeticorum antiquissimi, qui et optimi sunt, palam affirmant, ex Mercurio sincero solo per Sulphur purissimum fixato nasci Aurum et Argentum; ex eodem vero minus defocato et argento viuo magis aliena habere

in-

inquinato miqus simplicia et viliora metalla in matrice sua condensari.

Ergo videntur omnia fore in rerum vniuerso creato volatilia , mixta in chaos , si abesset Terra et Argentum viuum. Neque haec darent rerum principiis formam , nisi fixentur illorum elementa per materiem fluidam interpositam , quae superficies et asperitates laeuigat ita , vt cohaereant. Hanc materiem vnam esse , et eandem in vegetabilibus et animalibus , vti sunt simplicissima , adeoque eadem principia constituentia ipsa , euincere conatus fui. Est forsitan et videtur eadem , quae in fossilibus sub Sulphuris nomine venit cum illa substantia , quam Gluten diximus in reliquis. Inde transmigratio ex vno corpore in alterum non adeo obscura est.

Ergo Fossilia cum vegetantibus et animantibus conueniunt , ratione materiei fixantis , conueniunt in quibusdam ratione materiei fixatae. Differunt ratione alterius , terrestris nempe principii vel mercurialis : magis quidem , quam reliqua mineralia , metalla ; et inter haec , maxime perfectissima.

An ergo Ars , quae in tam multis Naturam perbelle sequitur , aliquid valet perficere transponendo prima principia , iamque ex his compositas primas moleculas , vt nascantur ex vno corpore diuersa ?

Notamus quidem , per inoculationem mitescere in vegetantibus asperitatem , nunquam tamen , vt pristina indoles deleatur : nec poterit felicissima agricultura de femine anisi producere foeniculi plantam. Omnes artifices simul intenti , non facient vnicam guttulam chyli , lactis , sanguinis , feri , lymphae , bilis , vrinae , quae

B b b 2

cor-

corpora animalium conficiunt ex ingestis diuersis, quorum omnium principium vegetans est, idque per affabre factam campagem et structuram singulis peculiarem ad destinata perficienda creatam, et quidem cum virtute feminali prolifera, similem producente prolem. Haec est mira a Deo data finitis infinitatis species; et haec admiranda distinctio generum et specierum, ex iisdem plane principiis, in vegetantibus et animalibus, alia modo horum appositione, connexionem, et inde resultante actione in compositis, diuersa obtinet.

An fossilia, et imprimis metalla tamen, cum sint corpora magis simplicia, quam plantae et animantia, ideo ex vna in aliam speciem minori cum labore transferri poterunt? Torset haec res ita acutissima omnium ingenia, spe tanta retinuit mortalia pectora auri sacra fames, vt, a remotissimis temporibus in hanc horam, inuenti fuerint semper, qui omnem operam in hoc soli impenderunt, et quidem inter Philosophos sapientissimi. Ego, qui ab hisce quam maxime disto, palam tamen aio, ex consideratione illorum, quae recitavi, errare omnes, qui ex re non metallica metallum arte conficere student; errare et illos, qui perfectissima metalla tentant producere, nisi ex argento viuo. Forsitan et ipsi errant, qui nimiam, et omnem, in illo operam intendunt. Mercurius enim, quocumque locorum idem, nunquam ex venis educitur purus, sed semper inquinatus labe difficillime ab illo separabili, quia ab origine ipsi concreta intimis eius recessibus inhaeret, impediens et obtundens penetrabilitatem, maculans puritatem, simplicitatem cogens in connubium compositi: depuratus autem ab
hac

hac labe foret purus, sincerus, tumque adeo simplex, ut ubique in sua diffusione prorsus sit idem, et immutabilis omnino. Haec admirabilis certissime res! est Alchemistis ideo quaerenda omni labore, omni pretio est redimenda, utpote quae cruda metalla maturat, vilia in aurum et argentum perficit, reliqua corpora in radicale humidum dissolvit, ipsa prorsus immutata. Ideo maximus Hermeticorum labor semper in eo fuit, ut, exurendo maculam, infectum hoc tollerent de mercurio; ex vitro ergo purissimo toties per vim ignis in excipulum purum pellebant, donec totus in pulverem rubrum scintillantem redactus erat. Hunc pulverem iterum ex vitris urgebant, donec de mortuo resuscitabant mercurium viuum, quem habuerunt pro depuratissimo. Sed falluntur. Resuscitatus etenim eadem, qua prius, ignis actione cogitur iterum in pollinem rutilum, quod fieri posse cum suo mercurio, plane negant in arte Magistri, quia semel defoecatus, ab igne deinceps non mutatur. Legantur, quae circa hanc rem de mercurio quingentis et vndecim vicibus per se destillato, scripsit in Actis Philosophorum in Britannia Hermannus Boerhaavius. Qui et alia methodo deinde defoecationem ab impuro tentavit, miscendo argentum viuum cum corporibus purissimis, natura illi simillimis, ex quibus iterum ope ignis millies et ultra abstulit. Promittunt namque in arte Principes, eo modo mercurium, relicta faece in corpore fixo, depuratum penitus et viuum ascendere. Sed in his multa docentur vana, errantibus salutaria, si sapere volunt alieno periculo cauti.

372. DE COHAES. SOLIBOR. IN CORP. ANIM.

Si ergo in solo defocando mercurio tanti sunt frustra adhibiti labores, quid de eodem condensando cogitabimus? cum si pondus index massae corporeae, adeoque potentiam fere creantem requirat (a). Sed de hisce commode magis agetur, quando et haec, et reliqua Boerhaaviana posthuma edam, nactus otium.

(a) H. Boerhave Elem. Chem. part. I. pag. 41. 2.

MVS

MVS AQUATICVS EXOTICVS

CLVS AVCTAR.

Raii. Syn. Quadrup. p. 217.

Russ. БИХУХОЛД

AVCTORE IO. GEORG. GMELIN.

Tres huius generis mures a piscatoribus Casanienſibus obtinens, e re esse dixi, descriptionem eorum adornare, eamque cum Raii et Sarrazini descriptionibus conferre.

Omnes masculi coloris per totum dorsum et capitis superiorem partem ex cinereo nigricantis, in ventre ex cinereo albens. Odorem spirant Moschi vehementem, quem difficulter, attamen sine deliquio sustuli. Conquesti sunt de capitis doloribus, qui mecum in hypocausto erant, quos et ego, leues tamen, sensi. Cum sola magnitudine, et parum quidem differant, maximum tantum describam.

Tota longitudo est 1 ped. Rhen. 2 $\frac{26}{100}$ poll. Cauda 6 $\frac{1}{10}$ poll. aequat. Caput pro mole corporis satis paruum, in rostrum suillo analogum, ultra $\frac{1}{4}$ poll. longum, in extremitate ultra $\frac{1}{4}$ poll. latum, desinit. Rictus latera villis, seu potius setis, albensibus, circum circa ornantur. Dentes sunt, vt in reliquis huius generis. Auriculas, licet omnem diligentiam adhibuerim, inuenire non potui. Retro oculos vero in distantia $\frac{6}{100}$ poll. loco, in quo auriculae alias adhaerere solent, rima in cute apparet, 4 lin. longa et 1 lata, quae ad meatum audi-

auditionem ducit, et ita occultata est, ut non nisi pilis abscissis, vel vstis, conspici facile possit.

Tam in capite, quam in corpore, duplex pilorum genus observatur. Primum longiusculum est, molle et raram, ac supra alterum eminent, quod coloris magis diluti et molissimum, breue ac copiosum est.

Pedes anteriores cum unguiculis non ultra pollicem longi sunt, vsque ad digitos pilis raris hirtis obtiti. Vtrinque ad oras series pilorum hirtorum, non ultra $\frac{2}{15}$ poll. longorum, albertium, iabae equinae instar pendent. Digni 5 nudi per membranas cohaerentes, quorum singuli quatuor articulis componuntur, et in unguem perparum aduncum, tenuem, $\frac{1}{2}$ poll. circiter longum, desinunt. Pedes posteriores ab ortu suo rotundiusculi, angusti, non ultra $\frac{2}{15}$ poll. lati, pilis ibidem raris obtiti, sensim et sensim nudi euadunt, et ex rotunditate latam superficiem acquirunt. In extremitate $\frac{1}{8}$ poll. lati sunt, imo ad 1 $\frac{1}{100}$ poll. extendi possunt, crassitie vero ibidem vix $\frac{1}{15}$ poll. aequat. Ad oram externam series pilorum hirtorum $\frac{2}{15}$ poll. longorum pendet. Pars prona pedum nigricat, et cutis ibidem tessellata est, squamosae analoga. Pars supina versus extremitatem colorem nigrum, albo parum dilutum, obtinet, qui carneus fere est in reliquo pede. Abit in quinque digitos, per membranas latiores cohaerentes, et in extremitate unguiculis acutis, magis aduncis, albertibus, instructos.

In pube penis loratus est, pilis albicantibus, breuibus, obtitus $\frac{1}{100}$ poll. longus, obtuso et quasi abscisso fine terminatus. Anus medio inter caudam et penem loco situs, et ab utroque $\frac{1}{15}$ poll. distans, ori-

Orificio rotundo, cuius diameter $\frac{1}{16}$ poll. est, in cute hiat. Foramen singulare pro vrinæ fluxu, licet diligenter perquisiuerim, reperire non potui.

Cauda superius ex cinereo ferrei coloris est, inferius, in primis in principio, carnei. Rotundiuscula ab initio et crassa, ibidemque circulo pilorum obscure fuscorum $\frac{1}{16}$ poll. longorum, pinguium, cincta, tenuis et lata sensim euadit, et in tenuem apicem definit. In medio maximam latitudinem habet. Partis latae orae scindentes fere sunt, et vtrumque latus in medio per totam longitudinem in aciem quandam eleuatur, instar ancipitis gladii, cuius figuram tota caudae lata et tenuis pars refert. Latera partis latae non horizontalem, vt in castore, sed verticalem situm habent. Tota cauda squamosa est. Squamae aqua tepida facile secedentes, figurae oualis sunt, ab initio caudae maiores, et pro distantia ab ea minores, longiori parte transuersim sita. Dimidia tantum pars eminet, reliqua ab alterius squamae dimidia parte tegitur. Series squamarum ita sibi succedunt, vt singulae sequentis seriei spatio medio inter duas praecedentes respondeant. Sub singulis squamis 2 vel 3 setae prodeunt, $\frac{1}{16}$ poll. longae, ex luteo albicantes, quibus itaque tota cauda hirta est. Cauda est pars huius muris, quae omnium maxime moschum redolet.

Internarum partium conformatio ita se habet :

Pulmonum quatuor maiores lobi, et aliquot minores.

Hepar latum, tenue, figurae trapezoidis, in quinque lobos maiores et aliquot minores sectum.

Tom. IV: Nou. Com.

C c c

Ve-

Vesiculam felleam, licet omni cura in hisce tribus membris, quos dissecui, inquisuerim, reperire non potui.

Ventriculus figura dimidiam fere lunam repraesentat, cornubus sursum spectantibus. Dextrum latus altius est sinistro, et supra locum, ubi oesophagus ingreditur, ad $\frac{1}{2}$ poll. eleuatum, cum sinistrum vix $\frac{1}{4}$ poll. eleuatum sit. Contenta frigore congelata erant, iis vero aqua dissolutis, plura minima corpuscula, vermiformia, carnis colore praedita, innatate vidi.

Intestina coeca nulla. Tota intestinorum longitudo 12 prope poll. aequat. Foeces intestinorum, imprimis recti, resinam fere super igne liquefactam, referunt, nec notabili foetore nares feriunt.

Renes $\frac{13}{16}$ poll. longi, $\frac{1}{2}$ poll. lati, figura humanis similes, vtrinque in vterem desinunt, qui recta fere linea in vesicam usque extenditur. Superius supra spinam vtrinque adiacet ren succenturiatus, ex albo lutescens, lentem maiorem figura et magnitudine referens.

Penis vsque ad (c) extra corpus prominens, intra corpus crassior euadit, (e) et versus dextram latus incuruatur, desinitque, vti videtur, in bina corpora, ex oblongo globosa, (ff) quae pro testibus habeo. Vtrinque ad istos testes duo alia, pariter ex oblongo globosa corpora, maiora, (gg) paulo inferius locantur, quorum vtrumque in tenuem appendiculam (i) terminatur, cuius finis infra testes ad penem est. Substantia tam horum corporum, quam appendicularum, glandulosa est; in corporibus cavitatis perexigua obseruatur, nullo liquore imbuta. Flatum in eam inmitens, non nisi semel accidit, ut ductum versus renes excurrentem, distenderet, cuius

Tab. VIII.
Fig. I.

cuius insertionem assequi non potui. Habere hæc corpora pro folliculis, moschi odorem continentibus, si vel liquorem tali odore paeditum in iis deprehendissem, aut si odorem moschi reliquis partibus fortiolem de se sparsissent. Sed neutrum obseruare licuit. Pluribus et magis exactis circa hæc et vasa spermatica obseruationibus instituendis, tempestas nubila, breues dies, et locus obscurus, quo dissectiones faciendae erant, obstiterunt.

Raii mus exoticus, et loco natali, et descriptione, nostro respondet. Tantum proportio pedum longe alia in Raii descriptione explicatur, quam in nostro deprehendi; Forte, quia Raiana descriptio ex pelle facta, vel ex Clusio desumpta fuit, de cuius descriptione Raius eandem suspicionem mouet.

In Commentar. Ac. Sc. Paris. 1755 Sarrazinus murem, ~~Moschum~~ redolentem, ~~Americae~~ incolas, describit, a quo noster omnino differt. 1.) Odorem non tam grauem noster spirat, qui Anatomicum duabus vicibus in deliquium coniciat; remedio enim vstionis pilorum, quod Sarrazini cerebro tantopere conduxit, licet haud vsus sim, erectus tamen mansi. 2.) Auriculis Americanus gaudet, noster nullis. 3.) Oculi Americano magni sunt, nostro parui. 4.) In nostro foramen, vrinae excretioni singulariter destinatum, quod in Americano obseruatur, deest. 5.) Testiculi et folliculi muris Americani non nisi oestri venerei tempore magnitudinem talem acquirunt, quae facile sub sensu cadit, nostri tempore, quo nulla oestri suspicio est, magnitudinem fere maiorem obtinent. 6.) Quod certo de folliculis Americani muris asseritur, quod principia odoris Moschi

C c c 2

contineant

contineant, de folliculis nostri muris nondum asserere a-
 fim. 7.) Calamo aromatico Casanienses mures non ve-
 scuntur: Quapropter nec causa odoris Moschi, quem
 spargunt, esse potest. 8.) Pedes anteriores Americani
 muris more aliorum huius generis animalium confor-
 mati sunt, nostri per membranas, breues licet, cohae-
 rent Male vero Clusum erroris argui existimo, qui
 pedes posteriores membranis munitos esse scribit.
 Haec expressio significat: pedes posteriores membranis
 cohaerere. Et forte pedibus posterioribus membranas ad-
 natas esse, idem est. Certe figura pedum, quam Sar-
 razinus fieri curauit, pedibus Casaniensis muris ex asse
 respondet.

R V P I C A P R A

CORNVBVS ARIETINIS.

Russ. СТЕПНОЙ БАРАБ.

Chalmucc. ARGALI.

Auct. IO. GEO. GMELIN.

TAB. VII. **C**eruum capite, collo, pedibus, pilis et agilitate cor-
Fig. 2. poris refert. Masculus, quem descripsi, trimulus
 erat. Altitudo $1\frac{1}{2}$ vln. Russ. longitudo ab exortu cor-
 nuum ad caudam vsque $1\frac{1}{2}$ vlnarum. Cornua ex albo
 lutescentia, aetate magis prouectis nigrescentia, supra
 oculos ante aures prodeuntia, ad dimidium fere admodum
 rugosa,

rugosa, reliquam partem non nisi leuissimis rugis conspicua, retro in circulum fere flectuntur, ita tamen, vt extremitas paululum supra et extra vertatur. Aures, quas animal plerumque erectas gerit, mediocriter latae, acuto apice terminantur. Pedes vngulis bisidis instructi, anteriores $\frac{3}{4}$ vlnae longi, posteriores longiores. Anterioribus, recta linea extensis, animal semper stare solet, posterioribus, non nisi incurvatis, in plano horizontali incedit; curuaturam vero pro ratione plani, cui instat, dirigere videtur, ita, vt praecipitia conscendendo eos in rectum fere extendat, quae opportunitas ob loca praerupta, quae inhabitare solet, a natura ipsi concessa est. Cauda brevis ceruinae instar. Sub collo paleare dependet. Color capitis et totius corporis gryseus ad fascum vergens erat. Per medium dorsum, in natibus et pedum interna parte, vt et in ventre, lutescens color, ad ruffum aequaliter inclinans, obtinebat, ita tamen, vt in ventre pallidior esset. Hic color hybernae vesti conuenit: Pilos nempe non diu mutauerat; Vestis autem aestiua vndique e luteo rufescens est. Ferus erat, nec vel decem homines ad eum coerendum apti videbantur; cornubus enim pessime ferit; viribus maximis pollens. Maximi ceruum iuniorem aequant; Cornua vero adultis in tantam molem excrescunt, vt, mensura secundum curuaturam sumpta, duas vlnas longitudine aequent, et 30. libras pendant.

Foemina masculo semper minor est, cum quo TAB. VIII.
de caetero ipsi toto corporis habitu exacte conuenit. Fig. 3.
Cornua vero fert hirci instar, rectiora, nec multum rugosa, paruae molis, tenuia, quae nec aetate molem multo maiorem acquirunt. Quam figura sistit, bimula

C c c 3

erat,

erat, vt plurimum rufescens, hinc inde cinerascens. Vestem nimirum aestiuam demum mutare incepit. Alias color ipsi cum masculino communis est.

Circa Vst-Kameno gorense fortalitium in Sibiria, et montes, qui eius loci montibus connexi sunt, magis tamen eos, qui ad Chalmuccos pergunt, versantur, montium imprimis ad Buchturma fl. sitorum amantissimae. Quadraginta leucas infra Vst-Kameno gorense fortalitium in littore Irtis orientali, quod Krasnoi-Iar vocant, terra falsa est; Eo saepissime et lubenter migrant, salis lambendi causa. Cursu sunt velocissimo. Victus e graminibus. Autumno coeunt, vere pariunt, foetum vnum, quandoque et gemellos, edentes

Erat eo tempore, cum in fortalitio Vst-Kameno-gorense versarer, masculus ibidem bimulus huius animalium generis, qui morbo diu conflictatus, vitam miserimam egit. Hunc a Locumtenente, qui fortalitio praeest, ad sectionem petii et obtinui. Parum quidem me ista sectione profecisse profiteor, quia temporis ratio, quam propositum nobis iter habere iubebat, effecit, vt festinanter admodum administrari debuerit. Vt de vita animalis adhuc proficerem, in venam iugularem externam amplam incisionem feci, atque in ipsam Thermometrum immisi, in quo satis diu ibi retento, mercurius ad 80 gradum caloris Therm. Delisiani eleuatus fuit.

In descriptione externarum partium nihil est, quod morer, cum iam descripto, nisi paruitate, in omnibus respondeat. Distantia inter penem et testiculos 7 poll. erat.

Ventriculus totam fere cavitatem abdominis occupat. E quatuor vero constat ventriculis, quorum maxi-

CORNVBVS ARIETINIS 391

maximus is est, de quo iam dixi, et in quem oesophagus
 inseritur. Membranosus est et columnulis plurimis mu-
 sculosus factus. Hunc proxime sequitur alter, multo mi-
 nor, qui a priori membrana interna in altum eleuata
 distinguitur. Eius superficies plurimis cellulis sexangula-
 ribus obsita est. Tertius pariter minor, interne rubens;
 plicis plurimis constat, quae numerosissimis papillulis
 dense stipatae sunt. Quartus duobus iam dictis aliquantum
 angustior, sed longior, interne laeuis et rugosus est. In-
 testina tenna 55 pedes, crassa tertiam tenuium partem
 longa. Colum plus septies reflectitur. Ad insertionem
 ilei in coecum valuula est, valuulae coli in homine
 analoga. Coecum vero, ultra pedem longum, in pro-
 cessum abit vermiformem, amplitudine quoduis tenue
 intestinum superantem, non ultra 2. poll. longum. He-
 par duobus primariis lobis maioribus constat, quorum
 tamen dexter, cui vesicula fellea, tres pollices longa, cy-
 lindroidea, felle viridescenti repleta, adhaeret, maior
 est. Praeter hos alius est, triangularis, oblongus, cauae
 accretus, et lobulus Spigelii satis insignis. Splen 8 poll.
 longus, in medio, ubi latissimus est, 4 poll. latus, ven-
 triculo arcte adhaeret. Renes humanis similes, 3 poll.
 longi, duos lati. Vreteres vrachum superscandentes
 posteaque rursus infra eum flexi, recta fere linea ad ve-
 sicam pergunt, inde vero oblique non procul a collo
 vesicae inseruntur. Renes succenturiati ouales fere, versus
 internum latus auriculae quasi, triangularis figurae, ad
 venam cauam arcte adhaerente, donati. Cavitatem in se
 habent, quae flatu distendi potest. Penis, digitum me-
 diocrem crassus, anfractuoso admodum itinere versus
 pubem

pubem pergit, et, si in rectum extenditur, ad duos pedes facile longus est. Extra corpus vero dimidium circiter pollicem prominet. Praeter ligamentum suspensorium duo adhuc erant, ex ossibus pubis prodeuntia, et paulo ante musculos erectores supra glandulam quandam oblongam, maximam, tres circiter pollices a collo vesicae distantem, terminata. Ad collum vesicae duae prostatae, satis sensibilibus distinctae. Vas deferens in vesiculas partim feminales, quae glanduloso cuidam corpori magis comparari possunt, partim in ipsam vethram ad radicem eius abit. Cor dimidium pedem longum. Auriculae ad oras pulchre laciniatae. Pulmonum duo praecipue lobi, quorum sinister dextro maior est. Uterque superius quatuor lobulos adhaerentes habet, sinistri vero lateris maiores sunt. In vno lobulorum sinistri lateris vesicula transparentis fuit, $1\frac{1}{2}$ poll. longa, et 3 poll. lata, non nisi aere distenta. Vermiculae plures, pus non fundentes, pulmones hinc inde occupabant.

DE-

❁ ❁ ❁

DESCRPTIO

ANIMALIS MOSCHIFERI, KABARGA DICTI.

Auctore IO. GEO. GMELIN.

Inter praecipuos labores, Krasnoiarii suscipiendos, hunc mihi praescripti, ut, quae ibi de Animali Moschifero comperire possem, diligenter annotarem, cum inter cognita et descripta adhuc animalia pauca sint, quorum descriptiones emendatione tanta egere videantur, ac hoc ipsum animal. Ita vero votis meis fortuna fauit, ut tria huius generis animalia, duo mascula, vnum foemininum, ope Praefecti huius loci ad disquisitiones meas obtinuerim, e quibus descriptionem ita adornabo, ut quae utriusque sexui communia, quae propria-observauerim, probe inter se distinguam, parum occupatus in refellendis aliorum erroribus, qui descriptione fideli et ad vivum facta sponte collabuntur.

Delineationem animalis nullam fieri curavi, quia ea, quam Isbrand Ides dedit, meliorem ab exemplis mortuis desumi posse non speravi. Caeterum is in Isbrandi figura praecipuus defectus est, quod venter nimis prominet, et animal sine pilis repraesentatur. Refert hoc animal forma externa capreolum, intellige auriculis longis, collo brevi, pedum longitudine, et cauda, vel nulla, vel vix conspicua. Capreolo vero statura inferius

Tom. IV. Nou. Com.

Ddd

est.

est. Illud enim, quod Grewius et ex eo Rains describit, e maximis est, nullo eorum, quae apud me habui, ad talem magnitudinem accedente. Intellexi vero a venatoribus parum iis maiora reperiri. Dimensiones haec sunt:

| | Ped. | POLL. |
|--|-----------|--------|
| Longitudo ab extremo rostro ad finem ossis sacri | 3 | 3 |
| - - - capitis ab extremo rostro ad medium vsque interstitium inter et retro vtramque aurem | - - - - - | 7 1/2 |
| - - - colli ab eodem interstitio ad finem vsque vertebrarum colli. | - - - - - | 7 |
| - - - Auricularum a radice ad summum vsque | - - - - - | 4 |
| Frontis latitudo | - - - - - | fere 3 |
| Distantia extremi rostri a medio inter oculos interstitio | - - - - - | 3 |
| - - - internorum oculi canthorum inter se | - - - - - | 2 1/2 |
| - - - auricularum ab externis oculorum canthis | - - - - - | 2 |
| Longitudo pedum anteriorum ab initio armorum ad extremum vsque pedem | - - - - - | 3 |
| Longitudo pedum posteriorum ab initio femoris ad extremum vsque pedem | - - - - - | 9 |

Eandem fere proportionem in hisce tribus, quae illustravi, animalibus deprehendi, nisi in capite, quod in foemella brevis erat, rostroque magis obtuso gaudebat. E quo colligitur, auriculas et caput nimis brevia, collum vero nimis longum a Grewio describi, cuius causa fortassis in eo latet, quod descriptio Grewiana e pelle facta sit.

Pes

Pes uterque profunde fissus in quatuor ungulas, duas anteriores $1\frac{1}{2}$ poll. longas, in basi $\frac{1}{2}$ poll. latas, et totidem posteriores, pollice aliquantum longiores, in basi vero latiores quadrante pollicis, et vel in mortuo animali conspici potest, illud viuum, quando in solo horizontali incedit, unguis etiam posterioribus necessario insistere.

De cauda, quid statuam, hæreo. In duobus masculis, in quibus solícite in eam inquisiui, nihil eiusmodi obuenit, pilis vero circa anum diductis teretiuseculum quoddam corpus in conspectum prodiit, $1\frac{1}{2}$ poll. ultra anum emmens, basi sua $\frac{1}{2}$ poll. latum, atque in cuspidem desinens, ossi sacro adnatum, carne tantum et cute, nullis vero pilis tectum, rubri coloris. Cum in primo huius generis animali hoc viderem, credidi, caudam forte auulsam fuisse, altero vero eodem modo se habente, non dubitavi, quin hæc constitutio naturalis sit, temere mutilationem partis cuiusdam a diuersis venatoribus in eodem loco eodemque modo factam supponi existimans; sancte insuper uterque venator affirmavit, animalia omnino integra fuisse apportata. Sed ecce nouum scrupulum! Lustraui foemellam, inque ea idem quidem corpus, sed pilis tectum, inueni. Rem igitur in suspenso relinquo, in eam pronus sententiam, ossa coccygis maris pilis nuda, foeminarum pilosa esse.

Quod ad colorem animalis, is in dorso et collo ut plurimum fuscus est, cinerei mixtura aliquantulum alteratus. Tibiæ et pedes intense fusco colore gaudent. Sub maxilla inferiori ad mentum vsque, ut et inferius ad auriculas et in interna femorum parte color gryseus obtinet. Gulam linea fusca, alba utrinque fascia cincta,

D d d s

per

per totam suam longitudinem exornat, eademque fusca linea superius in duas partes diuiditur, mentum album vndique cingens. Pectoris et ventris supremi colore fusco cinereus est, pubis vero et partium, anum et pubem interiacentium, cinereus est sine fusci mixtura.

Pilis hoc animal tegitur copiosissimis et longissimis. Pili capitis et crurum vltra dimidium pollicem, dorsi et ventris 2 $\frac{1}{2}$ poll. pubis vero ad 4 poll. longi sunt. Omnes in genere pili vltra tres quartas partes a radice candidissimi sunt, inde fusco colore tincti, extremo apice vel candentes, vel futescentes. Licet pili crassi sint, nec setae porcinae crassitie multam cedant, et pilos capreoli dicti superent, mollioris tamen et tenuioris structurae sunt, atque per totam longitudinem a radice vsque ad apicem per breuia interualla crispantur, aut, vt Grewii verbis vtar, flexu reflexuque quodam vndante crispi sunt, vt ceruino generi familiare est. Ad quoduis latus inferioris maxillae singularem cespitem pilorum crassorum, breuium et rigidorum, describit Grewius, cui similem inuenire non potui in vilo horum animalium. In vno masculo in ipso mento quinque vel sex pilos per totum albos, reliquis pilis multum eminentes, atque in angulo maxillae inferioris, qui vltra 2 poll. ab angulo oris distabat, vtrinque pilum singularem, reliquis 2 poll. eminentem, per totam suam longitudinem atrum vel atrofuscum, extremo apice, qui albus erat, excepto, conspexi. In alio pariter masculo nec hos nec a Grewio descriptos pilos vidi. Eminebant vero vtrinque infra canthum oculi inferiorem duo pili longissimi, fusci, atque supra vnamquamque orbitam superiorem oculi in medio

vultu

Unus insuper paulo brevior pilus exiit. In foemina rufus aliis in locis singulares eiusmodi pili erant. Vtrinque ad rictus latera albi, et circa nasum hinc inde fafei pili, reliquis paulo longiores, eminebant. Adeoque concludo, haec in omnibus variare individuis, imo existimo, talia nec in aliis animalium generibus deesse, cum vero nimis curatam inspectionem requirant, non observata esse.

Vtriusque sexus animal in inferiori maxilla octo dentibus incisuris, quorum duo extremi satis parvi sunt, et sex vtrinque molaribus, in superiori nullis incisuris, sex vero vtrinque molaribus munitur. Hunc numerum in omnibus constantem inveni, existimo vero, Grewii fallaciam ex eo ortum trahere, quia molares dentes ita arte sibi invicem opponuntur, ut distinguere eos, nisi praenata coctione, difficile sit.

Masculinus sexus a foeminino insignibus notis differt.

1) Totius corporis mole maiori. 2) Rostro magis acuto. 3) Duobus dentibus exertis, e superiori maxilla, situ aprinis dentibus simili, egredientibus, substantia ebur referentibus, clauso ore unum circiter pollicem extra os prominentibus, retrosum incurvis, in basi ultra quadrantem pollicis latas et in cuspidem terminatis, non teretibus sed falciformibus. 4) Ventre eo in loco, ubi penis esse solet, dimidium circiter pedem infra cartilagineam ensiformem, prominente. Referbat vero ista prominentia tumorem, ovo gallinaceo magnitudine parum cedentem, pilis undique histum, qui anterus in corpus quoddam, balneo penis simile, minitaci fere coloris, pilisque albis eorum versus eundem corporis directis,

D d d 3

ibidem

ibidemque convergentibus, vestitum definebat: Pilis illis diductis duo in illo corpore ostia apparent, unum superius, oblongum et maius, area depili cinctum, alterum inferius rotundum et minoris diametri, cuius orae circum circa pilis longissimis rigidis et erectis muniscitur. Vtrumque horum foraminum fetam admittit, quarum ea, quae superiori foramini intrusa fuit, in ipso tumore definire visa est. Imo presso tumore per illud foramen fusca quaedam et pinguis materia exiit, moscium redolens. 5. Testiculis, qui ultra 1 poll. sub nominato tumore et a poll. et $\frac{1}{2}$ poll. supra anam, seroto exterius eleganter robente, pilisque albis raris et crispis obfuso, includuntur, et reliquo ventre eminent. Denique extremitas coccygis pilis nada notam distinctionis in mare exhibet.

In foemella duas papillas observavi, quae licet cute quadrantem fere poll. eminent, ita tamen inter pilos delitescunt, ut, nisi hos novacula caute abscidissem, papillae istae me forte adhuc laterent. Sunt vero tenuissimae, nec culmo crassiores, a cartilagine Xyphoidea decem fere, a vulva $3\frac{1}{2}$ poll. distantes. Vulva plus octavae pollicis diametro continet. Sub vulva immediate anus est, cui appendicula ossis coccygis, ut dixi pilosa, imminet.

Umbilici vestigium in neutro sexu externe apparuit.

Caro huius animalis huius loci incolis in escam cedit. Masculi caro moschi lenem odorem spirat, foeminae vero omni odore experta est. Quae in Martini Atlante Sinico de moschi e carne huius animalis praeparatione exstant, tam vana commenta sunt, ut de his filere satius sit.

Pro-

Progredior ad earum partium descriptionem, quas non nisi facta dissectione conspici poterant. Separata ante abdominis umbilici vestigium vidi quinque pollices infra cartilagineam Xyphoideam, adeoque umbilicum quinque pollicibus altius tumore illo situm. Cutis huius animalis tenuissima est, nec pilis firmum fulcrum præbet; vix enim tacti deflaunt. In suspensio tamen relinquo, an constitutio hæc naturalis sit, aut an potius a diuturna congelatione horum animalium et regelatione inducta.

Musculi abdominis nihil peculiare habebant. Oblique descendens a 5 - 11 costis quinque processibus digitatis atque a costis spuris oriebatur. Rectus quatuor habebat inscriptiones tendineas, quibus etiam transversus ornatur erat. Sub musculo oblique ascendente utrinque ad eum locum, ubi funiculus vasorum spermaticosum abdomen egreditur, musculus carneo principio oritur, non ultra quadrantem poli. latus, qui postea turgidior factus utrinque tumorem versus illum, externe in abdomine conspicuum, ascendit, quem fibris sparsis undique cingit. Excipiendæ tamen sunt fibræ inferiorem versus partem tumoris progredientes, quæ cum superioribus non coniunguntur, sed recta balanam versus præcurrunt, et circa inferius eius orificium terminantur sub alio quodam musculo corpore, balanam undique cingente, quod cum serie illâ fibrarum a tumore eum in locum extensum ita cohaeret, ut sine laceratione separari nequeat. Haec dispositio efficit, ut tumore constricto saccus aliquis exprimat per foramen superius, in balano situm, impedit vero, ne eodem tempore per inferius foramen

foramen aliquat effluere possit, illud enim necessario constringitur.

Tumor, de quo hactenus sermonem feci, folliculus est moschum continens, cuius adeo situs plane alius est, ac qui adhuc traditus fuit; omnes enim scriptores, quos hac de re consului, Missionariis Danicis, in ora Coromandelina versantibus, exceptis, qui pro testiculis habent, vno affirmant ore, folliculum moschiferum umbilici quandam excrescentiam esse, vel tumorem, plane ut olim de Tajacu, siue Apro Mexicano moschifero, viri eruditi diu senserunt, quorum vero errores D. Tyson solide excussit. Sed vel ex hoc exemplo patet, consuetum esse plebi, omne illud pro umbilico vendere, quod in aliquo inferiorum partium, vel ventris, vel dorsi, protuberat, quando id nec peni nec testiculis comparari potest, quo minus vitio illis nimio verti poterit, qui huius animalis folliculum in ventre situm, pro umbilico habent. Indicavi supra, quo in loco rudimenta umbilici conspexerim, ex quo satis evidens est, folliculum distinctum plane corpus ab umbilico esse.

Vt situm folliculi eiusque nexum cum aliis partibus distinctius notem, licet in sequentibus vberius id expositurus sim, hoc loco tantum moneo, eum posterius, et sinistra sui parte, cum vrethra connecti. Qualem cum pens habeat connexionem, adhuc dicere nequeo, quia pius ne vestigium quidem adhuc vidi; tantum abest, ut penis folliculi corpus transeat, prout recessus quidam scriptor contra vulgarem sententiam afferere ausus est. Videtur certe natura, cum sexui masculino in hoc genere animalium tot insignes notas concesserit, quibus
a femi-

à foemino. Facillime distingri potest; nobilissimam partem, qua essentialis sexus differentia sita est, caute relasse sinterfluorum non amans.

Separata cute huius folliculi et musculo supra descripto, membrana apparet, membranae internae ventriculi gallinae siccati consistentia respondens, adeoque firma et tactu duriuscula, coloris amethystini et pro vario radiorum solarium reflexu hinc inde aurei, qua incisa cavitus interna apparet, materiam illam a Ziß ad Ziïß continens, quae moschus dicitur. Erat vero illa materies fusci coloris, eique multi breues pili vel paleae immiscebantur. Consistentia erat Electuarii non plane siccati, nec enim fluida erat, nec plane solida. Tactu erat pinguis, illudque pingue presso folliculo e superiori balani foramine exit. Moscho e folliculo exempto facies interior folliculi apparet, quae membranis plurimis, a membrana interna folliculi in altum surgentibus vndique scatet, prouti illud in fig. I. Litt. A apparet in qua folliculus cum vrethra adhuc cohaerens et apertus, optime ad viuum expressus sistitur. (a) tenue lignum est, quod per superius balani ostium (α) in folliculum vsque facillime et sine vlla vi immisi. Plura non habeo, quae de hoc folliculo dicam; Non vidi glandulas illas, quas Lucas Schroekius ad meatus moschiferi orificium se observasse statuit. Adhibui microscopia eaque bona, vt glandulas discernere, probabile etiam est adesse, sed visum meum fugerunt. Vasa sanguifera vidisse mihi videor, nec tamen distincte, multo minus igitur, vbi origines moschi sint, percepi.

Tab. IX.

Fig. 1.

Aperto abdomine ventriculus totam fere eius capacitatem implere videbatur. Eius vero dispositio plane talis est utri in *Ruminantibus* *Fig. 3.* in omnibus ruminantibus. (A) est venter magnus, et (a) oesophagus, illum ingrediens. (B) reticulum seu alter ventriculus. (C) omasus seu tertius ventriculus. (D) Abomasus seu quartus ventriculus in intestinum duodenum (b) terminatus. Primus ventriculus omnium maximus est, et aperto abdomine nondumque diductis partibus solus conspicuus. Tres quasi appendiculas caecas appensas habet, quarum vna (c) longissima est, et reliquae huius ventriculi parti ad dextram sita. Secundus omnium supremum locum obtinet, atque in sinistra abdominis parte situs est. Tertius secundo inferiorem situm obtinet, primus hos ordine sequitur, quartus omnium infimum locum obtinet. Omnes hi ventriculi materia viridi, instar pultis spissa, repleti erant.

Intestinorum pauca pars, nec nisi ea, quae in infimo ventre sita est, et coli quaedam pars, in sinistro hypochondrio eminens conspicitur, quando abdominis viscera in situ suo naturali relinquuntur. Intestinum duodenum plus vna longum, in fine suo pancreaticum et choledochum ductus, diuersis orificiis, sibi inuicem proximis, hiantes recipit. Ieiuni atque ilei nullam potui differentiam animaduertere, ideoque eorum fines singulatim exponere nequeo. Vtrumque faecibus erat repletum, vtrumque striis longitudinalibus albis $\frac{1}{2}$ poll. latis, in tota superficie breuibisque interuallis vndequaue cinctum. Adeo vtriusque intestini idem habitus fuit. Luescebat vtrumque a corruptione, quo factum

ANIMALIS MOSCHIFERI 403.

factum est, ut striae illae albae, quas pro ductibus pinguedinosis habeo, liuescentem superficiem tegentes, intestino utriusque faciem, plane peregrinam induerint. Ilei in caecum insertio nihil peculiare habebat. Aliquid valvulae analogum aderat, uti in homine. Coecum ratione habita ad caecum humanum, satis exiguum erat. Processus vero vermiformis ultra $\frac{1}{2}$ pedem longus. Horum nexus et configuratio fig. 4. sistitur. (A) coecum, (a) ileum, (bbb) processum vermiformem, (cc) coli initium exhibent. Colum, processus vermiformis et rectum eandem faciem habebant, ac jejunum et ileum, idque in omnibus illis tribus animalibus, quae inspexi. Intestina tenuia a pyloro ad insertionem usque ilei duodecim vlnas crassa, sex vlnas longitudine aequabant. Continebant vbius excrementa, pilularum in formam conglobata.

In arteriarum et venarum melaraicarum distributione nihil singulare animaduerti.

Hepar in dextro hypochondrio situm, paruae molis, si comparetur cum hepate aliorum animalium, in duos tantum lobos diuiditur, quorum dexter sinistro dimidia parte minor est. Ligamentorum et vasorum sanguineorum eadem dispositio, ac vulgariter esse solet. Vesiculam felleam in primo, quod dissecui, animali indagans nullam inueni, nec eo tempore negligentiae in inquirendo me accusaueram, imo bene cum mansuetudine animalis, quam varii Autores tantopere praedicant, conuenire existimaui. Verum in duobus reliquis aderat vesicula fellea, quam quidem diu non videre potui, licet locum, vbi sita erat, saepius antea manibus contractauerim et

oculis meis usurpauerim. Vesicula enim in utroque (et pato etiam in tertio) horum animalium plane collapsa, albentis cuiusdam membranae speciem exhibebat, diametro pollicem maioris digiti non multum superans, felleis vero ne guttam quidem continens.

Splen in sinistro hypochondrio situs maioris molis erat, ac esse solet. Longitudine enim $4\frac{1}{2}$ poll. latitudine superius 2, inferius 3 poll. aequabat. Coloris erat e liuido rubescentis, substantiae pulmonum fere.

Fig. 1. et 2. **Renes (BB)** humanis erant similes, dexter vero situm altiorem sinistro obtinebat. Arteriae (*bb*) et venae (*cc*) emulgentes, utrinque aortae (*D*) et cauae (*E*) connectuntur, atque intra renes se surripiunt, uti figura exprimit, qua in distributione non sine ratione factum esse existimo, quod vena emulgens dextri lateris arteriam emulgentem eiusdem lateris, et emulgens sinistra aortam superascendant. Ureteres (*dd*) recta, nec notabiliter inflexi, in medio fere fundi vesicae (*c*) implantatur.

Omentum ventriculorum tanquam in marsupio continebat, et parum habebat pinguedinis, quin pellucidum fere ubique erat.

Pancreas $4\frac{1}{2}$ poll. longum et fere latum, conglomeratae glandulae faciem obtinebat, ductus vero pancreaticus tenuissimus erat.

Fig. 1. **Aortae et cauae situs in abdomine non multum abludebat ab eo, qualis in homine est. In Kabarga foemina differentiam inveni, quae accidentalis sit, an sexus particularis, determinare non audeo. Aorta enim (*D*) sub vena caua (*E*) perpetuo delitescit, nec prodit, antequam**

ANIMALIS MOSCHIFERI 405

tequam in iliacas (FF) diuidatur, quarum dextra cauam mox superascendit.

Cor 4 fere poll. longum, in basi 2 $\frac{1}{2}$ poll. latum est. Vasorum et auricularum dispositio, vti in oue et huius generis animalibus.

Palmo dexter in quatuor lobos diuisus, sinister in duos. Hisce interiacet vnus in medio thorace. Trachea tota quanta in omnibus spuma repleta erat.

Thymus in sinistro magis latere situs, Carotidem vndique arcte amplectitur, inferius bifidus, vtroque tenui ramo ad carotidem sito, superius eo in loco, vbi carotis in externam et internam diuiditur, a sinistro maxillae inferioris angulo, quem arcte amplectitur, figuram lunatam obtinet, cornubus sursum flexis. Cartilagini thyroideae aut potius musculis hyothyroideis glandula incumbit thyroidea, vnum poll. longa, superius angustior, inferius latior; Eius substantia inter glandulam et pianguedinem ambigit. Versus sinistram cartilaginis thyroideae profunde se insinuat, ibidemque cum thymo arctissime cohaeret et confunditur.

In quarto annulo asperae arteriae posterius musculus quidam carneo sed tenui nec $\frac{1}{2}$ poll. crassitie excedente principio ortus, oblique *antrorsum* flectitur, eandemque in decursu retinens crassitiem in primo tracheae annulo ad latus sinistram sine admodum crasso et protuberante sedem figit, in loco insertionis a musculo sterno-thyroideo tectus.

Musculos oculorum sequentes obseruavi: 1. anterior situs, teres, tenuioris calami scriptorii crassitie, in medio orbitae in peculiari foramine ossis quarti maxillae superioris

rioris, quod processum, antrum Hyghmori condentem, constituit, originem sumens, carneus, oblique corneam versus ascendit, et antèrius ad marginem eius carnosum sine inferitur. Praeter hunc musculum octo adhuc sunt, e fundo orbitae enati, quorum quinque priores globum oculi undique cingunt, atque in tunicam albugineam desinunt, tres reliqui sub illis locantur, neruum opticum circum circa cingentes, et in fundo bulbi terminati. Eorum, qui bulbum oculi cingunt, tres antèrius siti, quorum anterior trochlearis est, et tendinem in corneam vsque mittit. Trochlea quam tendo huius musculi transit, parallelogrammum refert, in breuiori latere vtrinq; in lunulae formam excisum. Duo vero postèrius locantur, nec tendines suos tam alte mittunt, vt trochlearis.

In partibus genitalibus, quicquid discernere potui figurae adiectae, optime ad viuum expressae, monstrant. Masculinae partes mihi videntur tam peculiare, vt ad omnem eorum apparatus euoluendum multa mihi operi opus esse videatur, nec, fateor, mei in secando exigui profectus huic eleganti naturae artificio penitus euoluendo pares fuerunt. Diu quaesui, donec ipsum penis corpus reperi, adeo solícite reconditum est. Vrethrae hiatum, (β) vt supra dixi, in balano, tumori accreto, ante sectionem administratam, facillime vidi, fetam etiam per eum ad (*e*) vsque intrudere potui. Vidi etiam vesicam vrinariam, (C) quin ex illa spiritum ad locum (*f*) vsque facillima opera immittere potui. Ultra vero designata loca nec flatus, nec feta, transibant. Lotium, quo vesica plena erat, Moschum redolens, ultra locum eundem (*f*), licet summam vim adhibuerim, adigere non valui.

Fig. 1.

ANIMALIS MOSCHIFERI 407

valui. Ipsum canalem a (β) ad (g) vsque pro vrethra
 quidem habebam, sed resistentia inter (e) et (f) insu-
 perabilis erat. Satis distincte de caetero cerni poterat,
 corpus, a (β) ad (e) et a (g) ad (f) extensum, ca-
 poteram. esse, nec enim quicquam aliud
 vrethram ad (i), continuando... exponam. Aperui
 donec ad locum resistentiae (e) peruenerim. Canalis
 ibi non ita peruius erat, ac ante, sed corpori (ef)
 obscure rubenti, circulis concentricis vndique cincto atque
 in tenuissimum filum (eK) in vrethram hians desinenti,
 vndique adhaerebat. Corpus hoc corporibus constat ca-
 vernosis, septo inter se distinctis, atque in extremitate
 (fl) quae prope vesicam vrinariam est, tubere quodam
 insigne, quod capiti gallinaginis aliorum animalium re-
 spondet, et apertum cauitate intus donatur, in qua nul-
 lum vidi liquorem, erat vero membrana, qua cauitas
 cincta est, instar cribri innumeris poris pertusa. Satis
 puto iam causae esse, vt corpus (ef) penem esse pro-
 nunciem. Vesiculae seminales (bb) ad tuber (fl) po-
 sterius sitae erant, nullum vero ductum in illud pro-
 ductum discernere valui, licet, quin sit, non dubitem.
 Id interim euentissimum est, corpus (Kf) siue penem
 in oestro venereo ita explicari, vt et foramine vrethrae
 (β) prodeat. Cui enim alias vsui inseruiret? Imo nihil
 est, quod transitui remoram iniiciat. Arteriae sperma-
 ticae (mm) vtrunque ex aorta progrediuntur, in vno
 horum animalium praeter consuetam arteriam alia adhuc
 (n) ex hypogastrica sinistri lateris procedebat. Venarum
 spermaticarum (oo) vtraque in venam cauam abibat,
nec,

nec ullam connexionem cum emulgente sinistra vidit. Vas deferens (*ppp*) utrinque ex epididymide (*qq*) sui lateris ortum, progressum habuit solennem, atque in vesiculis seminalibus (*hh*) terminabatur. Corpus Highmori
 ,sue glandulae fere conglomeratae facies huius

Quam occulte natura, nam libere et aperte in fabrica partium alterius sexus se gessit. Vagina uteri, **Fig. 2.** anterius collo vesicae (*i*) connexa, 1½ poll. longa, nullis rugis conspicua, neque clitoride neque nymphis munita, in uterum (*A*) tenuem, membranaceum desinit, in cuius orificio interno nullas valvulas discernere potui, adeo ut tanquam continuus cum vagina canalis, eo in loco tantum aliquantisper dilatatus, considerari mereatur. Posterius in collum angustum (*e*) abit, qui in duos ramos siue cornua (*ff*) curvatur, quorum utrumque sese coarctando et varios gyros efformando ad ovarium (*gg*) sui lateris, quod pisum magnitudine non excedit, pergit, et tubulo angustissimo, in extremitate pervio, terminatur. Adeo transitus ubique pervius erat, ut quaecunque in figura delineata sunt, adhuc recensita, omnia per vulvam tubulo inflari potuerint. In vagina dimidii circiter pollicis a vulva distantia, duae erant sacunae, quarum altera oblique in collum (*i*) vesicae (*C*) terminabatur, altera sub interna vaginae membrana pollicem circiter versus uterum decurrit, atque prope eius orificium internum, seu, ut aptius dicam, in eius collo corpori cuidam glanduloso confunditur, ibidemque terminatur. Uterus quoad situm ab aliorum animantium uteris non differt, vesicam (*C*) quae ad latus reclinata,
 in

ANIMALIS MOSCHIFERI 409

in figura sistitur et intestinum rectum (G) interiaccens, ligamentisque consuetis firmatur. In vasorum spermaticorum distributione nihil singulare occurrit. Arteria spermatica dextri lateris, sinistra multo inferius sita, ex aorta (D) progrediebatur, atque mox cauam (E) superascendens, emidentiam quandam eius, (h) quae in ipso illo loco est, ubi vena spermatica (o) sinistri lateris ingreditur, fere tangit, mox funiculo vasorum spermaticorum intoluta. Spermatica vena sinistri lateris id peculiare habet, vt sub aorta progrediendo in parte posteriori cauae implantetur.

Quae de seculo dici adhuc merentur, quia e seculo Petropolin misso quavis occasione exacta descriptio fieri potest, specialius recensere supersedeo. Claviculae nullae. Sex vertebrae colli, quatuordecim dorsii et sex lumborum. Ossa pubis omnino peculiarissima sunt et anterioribus per cartilagineum iunguntur, e tribus cruribus conflata, vno longiori, duos pollices longo et vtrumque os pubis interiaccens, atque duobus, ab hoc longiori vtrinque ad oras ossis pubis productis. Spatium nimirum illud, quo ossa pubis iunguntur, non vt in homine, aliquot lineas tantum, sed duos pollices longitudine comprehendit; adeo sollicita natura partes genitales custodiuit, vt quod foemininis partibus valvularum vel aliarum artificiosarum machinarum apparatu decederet, per solidas haec partes compensaretur. Valvulae forte, ad vteri humani orificium internum sitae, datae tantum sunt, vt aërem arceant. In hoc animali ossum pubis singulari structura eidem rei cautum est. In pedibus anterioribus calcaneum longitudine tam humerum, quam vnam et radium

Tom. IV. Nou. Com. F f f supera-

superabat. Digiți quatuor, quorum mediis unguis anterioribus, extremis posteriores affiguntur, duabus singulis phalangis constant. Inter ossa pedum posteriorum tibia omnium longissima est, os femoris et calcaneum ordine sequuntur. Ossa humeri, cubiti et calcaneum anteriorum simul sumpta 18 poll. Ossa femoris, tibiae et calcaneum pedum posteriorum 21. poll. longa erant.

Degit hoc animal in meridionalibus Ieniseae, fluvii, ad lacum Baikal, ad Argunum fl. et fluvii in Argunum labentibus, atque in pinetis montosis commoratur, raro exinde, nisi veris tempore, prodiens. Incessu gaudet Capreae Plinii analogo. Hominum consortium admodum fugit, solitudinis amantissimum. Quando venatores illud prosequuntur, in summis rupibus sibi asilum quaerit, quo nec venatoribus nec canibus facile ire licet. Idem animal in confiniis sinicis regnum Tangut versus copiose versari dicitur. Moschus vero animalium Sinensium et Tanguticorum multo praestantior odore et decuplo fere pretiosior est

OBSER.

OBSERVATIONES
QVAEDAM
NIDOS ET OVA AVIVM
CONCERNENTES.

AVCTORE GEO. WILH. STELLER.

Commodum illud, quod ad dignoscenda avium genera et species ex nidorum ovorumque observatione sedula in Ornithologiam redundaturum crediderunt quidam, nimis longe petum, incertum et omnino nullum est; namque modus generandi, ipsaque ova, in piscibus et avibus, tantum lucis non afferunt, quantum fructus in plantis continuo affixis, nec separabilibus plantarum cognitioni.

Neque unius generis aves nidos, vno eodemque loco, forma, materia et modo struunt. Aquilae et in rupibus et super arborea nidificant. Hirundines aequae in fissuris littorum nidos collocant, eosque e gramine et limo haud semper compingunt, verum ex alia quoque materia eos interdum construere solent pro diversitate locorum, quam circumstantiae loci et temporis suppeditant. Deinde et nihil certi ob eam causam inde petitur, quod diversorum generum aves vno eodemque loco uniformes nidos ex uniformi materia fingant; quae vero interdum singularia sunt, vni saltem speciei singularia sunt, ut nidos edulis Hirundinis Sinensis, Bontii dictae, nidi pensiles e salicum quarundam pappis diversorum generum avibus communes, ut Galbulae et Salicariae.

F f f 2

Ovorum

Ouorum forma, color, magnitudo, numerus, substantia interna, plura promittere videntur illi, qui oua auium singula per transeantem adspicit; verum mihi vnus auis oua quamplurima inter se collata secundum hæc attributa omnia valde, et nimium differre obseruata sunt, vt deinceps in història ouorum Lommiæ et Graculi palmipedis apparebit.

Forma insuper ouorum eadem pluribus diuersorum generum et specierum auibus communis est, color itidem sæpe in vnus speciei auium ouis vel remissior, vel intensior, imò plura alia et diuersissima, vt Lommiarum et Graculorum exemplo clarum erit. De magnitudine idem valet. Numerus et magnitudo pro aetate, climate et foecunditate auis plurimum variat, quod non tantum ex domesticarum, sed et syluestrium, obseruatione clarum. Interna substantia optimum quidem dat differimen, sed limites nulli dantur in describendis his differentis. Inuenimus sæpe nidos, præsertim cum auicola, aut ante nos nidum reliquit, aut dum auolat, obseruatoris oculo nullam obseruandi moram concedit; certiores autem essemus, qualis esset auicula, si eam ipsam, quam si centies nidum et oua, inspexissemus.

Spestat igitur nidorum et ouorum obseruatio sedula magis ad historiam vnus cuiusque individui separatim, quam ad scientiam, seu regulas, methodi. Propterea autem, vt eximia auium ipsarum, ita et oua, non indigna subiecta sunt, quæ simul cum auibus in Gazophytiis naturæ exhibeantur, ac miraculosis suis formis, coloribus, quantitibus relativis, creatorem, et auant, ab ouo ad mala mirandum ac venerandum ostendant.

Quan-

ET OVA AVIUM CONCERNENT. 413

Quantum ad magnitudinem ouorum relationem
omnium avium in genere observavi sequentia :

1.) Ova terrestrium avium magnitudine semper
proportionata esse ipsi magnitudini avis.

2.) Terrestrium avium ova aquaticarum avium
ovis minora esse.

3.) *Marinarum*, clios maritimos, insulas desertas, in-
colentium avium ova maxima esse, et pro respectiva
avis magnitudine solitam magnitudinem excedentia. Aves
vulgo, sed perperam, ab Auctoribus dicuntur *Arcticae*, cum
et sub latitudine 48 graduum mihi copiose inventae sint,
dummodo loca sint maritima inculta, aspera et deserta.
Op. ingentem stupiditatem illis Deus haec loca assigna-
vit. Si in cultis essent, brevis ob stupiditatem et stolidita-
tem genus deficeret, ut et propter numerum paucio-
rem ouorum et tempus ponendi semel tantum in anno iis
concessum. Pauciora autem ova fieri debuerunt, quia
maiora mole necessaria erant, ne calor cito expiraret,
cum per vices saltim illis incabent.

Quantum ad numerum ouorum :

4.) Aves terrestres, domesticae, quod ova non tan-
tum pullis, sed etiam hominum usui destinata sunt,
ponunt plura et quovis tempore.

5.) Aves aquarum dulcium comparate pauciora,
quod ipsae tantum in cibum veniant, aut casu saltem ova.

6.) Aves marinae stolidae maxima, sed paucissima,
ova ponunt, quod vero numerosissimae sint, loca de-
serta et inaccessa, longaeuitas quoque vitae harum avium
efficiunt.

Quantum ad colorem :

7. 1. Albus color domesticis auibus, earumque inimicis rapacibus, vt et auiculis omnium minimis, Regulo, Afilo, Guainumbi etc. familiaris.

8. 2.) Varius reliquis, sed constans, quauis aetate, quouis loco.

9. 3) Varius, sed inconstantissimus, color marinis stolidis.

Quantum ad formam auium marinarum stolidarum, oua solito longiora et acutiora sunt

Oua Lominae ad scalam Anglicanam dimensiones habuerunt sequentes :

| | Vnc. | lin. |
|---|------|------|
| 1. Longitudo axis | 3 | 2 |
| Diametralis latitudo maxima | 2 | 1 |
| Diametralis latitudo tres vncias a vertice latiori. | 1 | 5 |

TAB. X. Ouum virore viridis aeris intense tinctum erat, maculis fuscis, veluti literis Turcicis, inscriptum, ad verticem latiore magis, ad acutiorem minus, et formam magis pyri, quam oui, obtinet.

Fig. 1. et 2.

| | Vnc. | lin. |
|--|------|------|
| 2. Longitudo axis | 3 | 2 |
| Diametralis latitudo maxima | 2 | |
| Diametralis latitudo tres vncias a vertice latiori | 1 | 1. |

Fig. 3. Ouum virore viridis aeris valde diluto tinctum, et lituris confusissimis spadiceis confertis et confluentibus

ET OVA AVIVM CONCERNENT. 415

fluentibus in vertice latiore quaquaversum ultra vnciam conspurcatum erat. Similes, sed rariores, et minus conferti linearum ductus in medio cernebantur. Vertex acutior ad vnam vnciam his lituris carebat. Longius multo priori, sed angustius erat.

3. Cum 2 do eadem obtinebat dimensiones, et Fig. 4. priori simile erat circa verticem latiore, coronam ostendebat fuscam, maculosam, maculae autem in vnam confluebant, reliqua superficies raris fuscis punctis insignita erat, vertex acutior albus.

4. Praecedentibus forma, virore et magnitudine par, Fig. 5. circa verticem latiore maculis albis pictum, quarum orae quaquaversum fuscae erant, adeoque insulas referebant, quales in mappis Geographicis pingi solent, reliqua superficies insulis minutis et punctis varia. Vertex acutior immaculatus candidus.

| | Vnc. | Lin. |
|---|------|------|
| 5. Longitudo axis - - - - | 3 | 3. |
| Diametralis latitudo maxima - | 2 | 1. |
| Diametralis latitudo 3 vncias a vertice latiore - - - - | - | 9. |

Latius, verum brevius, erat tertio, et maculas pene easdem habebat.

6 Longitudo axis - - - - 3. 3.
Maculis confluentibus nigris circa latiore verticem, hinc inde insulis et maculis pictum erat varie.

7. Totum erat pallide viride, absque vlla macula, figura priori simile, vt alius avis ouum iudicares. Fig. 6.

8. Erat pallide viride, maculis maiusculis nigris, veluti digitorum impressorum vestigiis, varium.

9. Lon.

Vnc. Lin.

| | | | | | |
|--|---|---|---|---|----|
| 9. Longitudo axis | - | - | - | 3 | 3. |
| Diametralis latitudo maxima | - | - | - | 1 | 9. |
| Diametralis latitudo 3. vncias a vertice latiore | - | - | - | - | 8. |

Tab. XI. Ouum hoc colore erat album, et obscure admodum Fig. 7. cum, hinc inde viridiusculas exiguas maculas ostendebat

| | | | | | |
|-----------------------------|---|---|---|---|----|
| 10. Longitudo axis | - | - | - | 3 | 5. |
| Diametralis latitudo maxima | - | - | - | 1 | 9. |

Longius et angustius, ac reliqua omnia, erat, colore album, et hinc inde subpurpureas paucissimas lituras et maculas obscure ostendebat.

11. Dimensiones obtinuit, quas sub No. 5. recensui.

Candidum erat, et ex ferrugineo nigricantibus maculis et lituris, confluentibus circa verticem latioris, vltimum, imo in summo vertice lineae cruciatim disponebantur, reliqua superficies omnis crebris minutis punctulis, ac raris masculis maculis, varie picta erat.

| | | | | | |
|-----------------------------|---|---|---|---|----|
| 12. Longitudo axis | - | - | - | 3 | 6. |
| Diametralis latitudo maxima | - | - | - | 1 | 8. |

Sordide album erat, maculis ferrugineis maioribus circa verticem latioris maioribus, in medio medioribus, circa verticem acutiorem pictum; ceterum longius et angustius reliquis omnibus erat.

Possideo praeter recensita haec XXI. ova adhuc parva, forma, magnitudine, colore, maculis adeo varia, ut varietates omnes recensere supernacaneum ducam, cum haec ipse recensitis duodecim satis superque demonstrataerint.

Auis

ET OVA AVIVM CONCERNENT. 417

Anis coruo non maior, adeoque ouum pro magnitudine auis maximum; nidum nullum fruit, sed oua praeruptis nudis extantibus saxis, vix palmum saepe latis, imponit, nec ea, auolans et aduolans, quod maxime mirum, e rupibus in mare deiicit, imo cum pertica loco mouere tentarem, vix obtinui, ob id, quod ouorum vertici conuexo respondentem concauum quaerant lapidem, in quo, veluti in theca, recondita iacent. Oua saepe per horam relinquunt, in mari natantes, et victum quaerentes. Oua per varietatem colorum et magnitudinem id praeterea habent, vt sapidissima sint omnium quantum memini; vitellus crocei coloris. Oua inueni a fine Maii vsque ad vltimos dies Iulii, quod maxime mirum mihi videtur. Singulae aues singula ponunt oua; timidiores et paululum callidiores sunt reliquis marinis. Natant saepe in mari dormituriantes, et dum proxime aduentantis cymbae strepitum audiunt, ac homines in propinquo vident, adeo exhorrestunt, vt neque submergere se, neque auolare possint, sed iucundo spectaculo vndas pedibus tadunt, ac ridicule alis verberant; tandem ancipiti fortuna deceptae perticis occiduntur ac raro euadunt.

Ouum mergi tridactyli nigri, rostro nigro; pedibus rubris.

Ouum auis Columbae Groenlandicae.

- - The Greenland Dove or See-Turt

- - The Dove Raii et Will. p. 245

Ouum Turturis Bassae, ab insula }
 quadam Scotiae, Bassa, et ad Insulas } ex mente Raii
 Farcos the Puffinet. dicti - - - }

Tom. IV. Nou. Com. G g g Ouum

Ouum auis, Itackmenis Cajour, Kurillis Pynan dictae. Nidificat ad mare in rupibus praeruptis, ob pilas et saxa inaccessis, nidum nullum struunt, sed ova ponunt singulae aues vnicum Iunio mense intra cauernas et fissuras rupium, imo ipsae, veluti mares, sub saxis delitescunt.

Oua magnitudine et forma Gallinaceis similia, quamuis auis Columba non sit maior; colore nihil omnino differunt, nisi quod vnum maioribus et rarioribus, alterum minoribus et crebrioribus maculis, varium fit; ova alba sunt, alia purius, alia sordidius, maculisque ferrugineis, punctis cinereis conspersa. Horum 14 habui, et sequentes obseruavi mensuras:

| | | Vnc. lin. | |
|----------|---|--|------|
| TAB. XI. | { | 1. Longitudo axis | 2 5 |
| | | 2. " " " " " " | 2 6 |
| | | 3. " " " " " " | 2 4 |
| Fig. 8. | { | 1. Diameter maxima | 1 6½ |
| | | 2. " " " " " " | 1 8 |
| | | 3. " " " " " " | 1 6½ |
| Fig. 9. | { | 1. Diameter 2 vncias a vertice latiori | 1 2 |
| | | 2. " " " " " " | 1 3 |
| | | 3. " " " " " " | 1 1½ |

Ouum anseris feri, maximi, Raii et Will. Ornith. 274. Parit circa medium Iunii. Oua quinque, magna, sordide alba, quasi albor fumo conspurcatus esset. Nidum struunt in locis gramineis circa ripas fluminum, vel in locis arenosis ad fluuios, e gramine sicco et stipulis, ac plumas mittunt, vt mollius decumbant ona, et calorem diutius retineant, quod Rutheni vocant: Peria Wypuschtshaiet

ET OVA AVIVM CONCERNENT. 419

schtschajet (перья выпущающъ), haeque plumae e nidis avium collectae omnium mollissimae sunt.

In genere notandum, cygnos, anferes et anates vna ratione nidum struere, similia loca eligere, materiamque pro nidis struendis similem.

| | Vnc. | lin. | |
|---|------|------|----------|
| Longitudo axis - - - | 3 | 6 | Fig. 10. |
| Diameter maxima 2 vncias a latiore vertice - - - | 2 | 3 | |
| Latitudo diametralis 3 vncias a vertice latiore ad verticem acutiorem - | 1 | 7 | |

Ouum anatis Fuligulae primae Gesn. et Aldr. Nidus forma, loco, materia, cum reliquis anatinis consentit.

Oua ponunt circa Iunii initium valde multa, glabra et veluti polita; colore marmorii, an Hildesiano? similia sunt, ex albo leuissime ad cinereum inclinantia, seu ex opaco albertia.

Dimensiones obtinuerunt sequentes :

| | Vnc. | lin. | |
|--|------|-----------------|----------|
| 1. Longitudo axis - - - | 2 | 5 $\frac{1}{2}$ | Fig. 11. |
| 2. - - - - - | 2 | 4 $\frac{1}{2}$ | Fig. 12. |
| 3. - - - - - | 2 | 3 $\frac{1}{2}$ | |
| 1. Diameter maxima - - - | 1 | 7 $\frac{1}{2}$ | |
| 2. - - - - - | 1 | 6 $\frac{1}{2}$ | |
| 3. - - - - - | 1 | 6 $\frac{1}{2}$ | |
| 1. Diametralis latitudo 2 vncias a vertice latiore | 1 | 5 $\frac{1}{2}$ | |
| 2. - - - - - | 1 | 3 $\frac{1}{2}$ | |
| 3. - - - - - | 1 | 2 $\frac{1}{2}$ | |

G g g a

Nota :

Nota: observavi generatim de ovis anium, et bifariam differre, alia crassiora esse, maioremque obtinere latitudinem diametralem, altero vertice minus acuto, e quibus masculos excludi puto; alia autem ambitu angustiora; ita et 10. 12. vnius anatis oua ad duas formas duasque dimensiones vt plurimum reduci possunt, quod experimento quodam a curioso, res domesticas curante, extra dubium ponendam foret.

Qua anatis nigrae, ventre fusco, capite pulcherrimis coloribus picto.

Kamennaia vtka (Каменная утка) Ruthenis.

Nyking Itaelmenis.

Nidum struit in elatis litoribus, ad fontes fluviorum, circa finem Iunii mensis, altum scilicet graminibus concalcat, ibique solito anatis more et tabido gramine et plumis nidum format, mares autem, postquam comitarunt foemellas, denuo mare et ostia fluminum repetunt, oua ponunt 6, iagentia, glabra, alba, anserum domesticarum ovis similia.

Dimensiones obtinuerunt sequentes:

| | | Vnt. | lin. |
|----------|--------------------|------|------|
| Fig. 13. | 1. Longitudo axis | 2 | 7 |
| | 2. " " " " | 2 | 6½ |
| | 3. " " " " | 2 | 3½ |
| Fig. 14. | 1. Diameter maxima | 1 | 9 |
| | 2. " " " " | 1 | 8½ |
| | 3. " " " " | 1 | 8. |

Qua anatis, rostro gibboso, nigro, rubro, et luteo, Mascherelli apud Aldrouandum.

Foe.

Oua candida, immaculata sunt, pro auis mole grandia fatis, ad alterum verticem solito acutiora. Vitellus ouorum crocei coloris, valde sapidus.

Fig. 17.

| Oua anatis arcticæ | Vnc. | lin. |
|----------------------|-----------------|------|
| Longitudo axis | 2 | 9 |
| Diameter maxima | 2 | 1 |
| Diametralis latitudo | 2 vncias a ver- | |
| tice latiore | 1 | 8. |

Oua pro auis mole grandia, candida, immaculata sunt, ambitu crassa, non subito ad sensum versus verticem acutiorem latitudine decrescunt. Putamen crassius, ac in reliquis, vitellus croceus; oua elixa sapidissima; numero quævis auis vnum ponit in cauernis præruptorum locorum, sub faxis nidum sibi more anatis cirratae arcticæ excavans, spoliantium manus rostro valide ferit.

Oua ponit circa 20. Die 8. Iunii in quorundam nidis iam inueni pullos.

Oua Graculi palmipedis.

Hæc aues inter omnes aues marinas oua ponunt

- 1.) Admodum mature circa 24. Maii vsque ad 20. Iunii.
- 2.) Oua ipsa numero plura multum inter se differunt.
- 3.) Eadem pro magnitudine relatiua adeo differunt, vt limites prorsus excedant.
- 4.) Colore multum differunt, quaedam candidissima, quaedam ex albo subuiridia, alia ex albo et viridi subcaerulea sunt.
- 5.) Forma, alia angusta, oblonga, alia gallinaceis similia, alia a vertice lato crassiori alterum versus subito ambitu decrescunt, et acuta euadunt.

Ouum

ET OVA AVIVM CONCERNENT. 423

Ouum Graculi palmipedis, candida in femoribus macula carentis, 28. Junii 1743 e nido exemi.

| | Vnc. | lin. |
|---|------|------|
| Longitudo axis - - - | 2 | 3 |
| Diameter maxima 1. vncias 3 lin. | | |
| a latiore vertice - - - | 1 | 4 |
| Diametralis latitudo 2 vncias a vertice | | |
| latiore circa verticem acutiorem. - | | 9. |

Ouum ipsum candidum erat, materia tartarea incrustatum, haecque crusta hinc et inde rugosa erat.

Ouum Graculi palmipedis, candida in femoribus macula.

| | Vnc. | lin. | |
|---|------|---------------|----------|
| Longitudo axis - - - | 2 | 3 | Fig. 18. |
| Diameter maxima - - - | 1 | 5 | |
| Diametralis latitudo 2 vnc. a vertice latiore | 1 | $\frac{1}{2}$ | |

Ouum, Gallinaceo ovo forma et magnitudine par, ex albo parum in subcaeruleum vergebat.

Eiusdem avis ouum habui $\frac{1}{2}$ minus priori

| | Vnc. | lin. | |
|---|------|----------------|----------|
| Longitudo axis - - - | 1 | 5 | Fig. 19. |
| Diameter maxima - - - | 1 | $1\frac{1}{2}$ | |
| Diametralis latitudo 1 vnc. a vertice latiore | 1 | $\frac{1}{2}$ | |

Ouum ex albo subcaeruleum, columbino par magnitudine, crusta alba vndique obductum, crassum et versus verticem acutiorem subito ambitu decrescens.

Oua haec comeduntur quidem, verum insipida, ac nullius pretii sunt, vitellus pallide luteus, aquosus, ac vix diutina coctione coagulari possunt, ne diffuant, hinc

hinc vitellus ob consistentiam mucosarium ab Itaelmenis comparatur.

Nidum nullum fruunt, sed ova faxis, in praeruptis locis, imponunt, ac stipulas quasdam confase substernunt, vel locis gramineis in vertice pilarum marinarum stantes excludunt. Ob pedum situm pone aequilibrium cadentem corpus inclinant faxis. Vidi etiam iacentes et incumbentes ovis in plano pilarum marinarum, sed raro; ob stupiditatem et difficultatem sese mouendi ova saepe e nido deiiciunt et incaute perdunt.

Ouum anatis caudacutae Haueldae Islandis.

| | | Vnc. lin. | | | | |
|----------|-----------------|-----------|---|---|---|---|
| Fig. 20. | Longitudo axis | - | - | - | 2 | 3 |
| | Diameter maxima | - | - | - | 1 | 5 |

Nidificat in locis gramineis non procul a maris littore nidumque eadem forma ac ratione, vt reliquae anates, fruit; ova ponit magnitudine ovium gallinaceis non maiora, nec forma ab illis aliena, crassiuscula, colore alba, fordide in cinereum leuiter vergentia, nitide glabra et veluti polita.

Ouum Colymbi caudati stellati.

| | | Vnc. lin. | | Vnc. lin. | | | | |
|----------|----------------------|-----------|---|-----------|----------------|-------|---|---|
| Fig. 21. | Longitudo axis | - | - | 2 | 8 | aliud | 2 | 7 |
| | Diametralis latitudo | - | - | 2 | $7\frac{1}{4}$ | 1 | 7 | |

Nidum fruit circa lacus, non procul a mari, vel in insulis lacuum, ex aquis emergentibus, graminum solummodo incubatu deprimendo, ibidemque ova deponit duo, putamine duro obtecta, asserinis mole non multum inferiora, exacte ovalia, extus fusca ac nigris punctis raris vndique conspersa. Vitellus lutescit.

Ouum

ET OVA AVIVM CONCERNENT 423

Ouum Picae marinae Gallbrum.

| | | |
|--------------------------------|-----------|-------------|
| | Vnc. lin. | |
| Longitudo axis. - - - - - | 2 | 1½ Fig. 22. |
| Diametralis latitudo - - - - - | 1 | 6 |

Nidum struit in fluviorum insulis, vt et in saxis circa mare, negligenter eum in finem stipulas quasdam saltim colligit; imò nudae terrae et arenae saepe imponit, oua ponens duo breuiora sed Gallinaceis ambitu crassiora, coloris ex albo subtineri, seu arenacei, qualis in marmore Hildesiano, vndique vero nigris maculis et punctis dense positis variegata. Oua reperi die 2. Iunii 1743:

Ouum Lati in insulis Kurillicis Iacut dicti

| | | | | | | | |
|--------------------------------|---------------------------|---|-----------|----|-----------|---|------------|
| | primum; secundum; tertium | | | | | | |
| | Vnc. lin. | | Vnc. lin. | | Vnc. lin. | | |
| Longitudo axis - - - - - | 2 | 3 | 2 | 5 | 2 | 2 | TAB. XIII. |
| Diametralis latitudo - - - - - | 1 | 7 | 3 | 6½ | 1 | 7 | Fig. 23. |

Nidum struit in saxis praeruptis iuxta mare, vt et in pilis et petris marinis, e congestis straminibus et gramine ac paucis plumis intermixtis. Oua ponit communiter tria; forma, magnitudine et colore differentia.

N. 1. Cum leuissimo virore album, ac maculis et punctis vmbriae colore aequaliter vndique diffematis varium, forma vero longius ac crassius reliquis.

N. 2. Forma longius et angustius priori, sordide album, maculis fuscis crebrioribus circa verticem latior, rarioribus circa acutiorem, varium, maculis cinereis hinc inde intermixtis.

N. 3. Forma breuius reliquis; crassius ambitu ac rotundius, alter vertex subito acutior euadit; color

Tom. IV. Nou. Com. Hhh idem,

idem, qualis in n° 2.; latior vero axis situris, veluti Turcicis literis, inscribitur; in reliqua oui parte maculae rariores aderant.

Ouum Lari, supine ex albo cinereo et baetico varii, prone albi, pedibus flauentibus.

| | Vnc. lin. | Vnc. lin. |
|----------------------------|-----------------|-------------------|
| Longitudo axis - - - | 2 $\frac{1}{2}$ | alind 2 |
| Diametralis latitudo - - - | 1 5 | 1 4 $\frac{1}{2}$ |

Oua duo ponit; in insulis fluuiorum nidum struit negligenter, stipulis confuse super arenam imo nudam saepius terram dispositis.

Oua haec gallinaceis minora, breuiora, et versus alterum verticem solito gallinaceis acutiora et subito decrefcentia; colore ex albo cinerea, ac maculis fuscis vndique aequaliter varia.

Ouum Mergi marini in terris Kamtschaticis Starik dicti.

| | Vnc. lin. | Vnc. lin. |
|-------------------------------------|-----------|-----------|
| Fig. 25. Longitudo axis - - - | 2 5 | 2 7 |
| Fig. 26. Diametralis latitudo - - - | 1 5 | 1 6 |

Singulae aues singula ponunt oua circa initium ad 10. diem Iunii; nidum nullum struunt, sed oua fixis rupium extantibus, circa mare, imponunt, vel in insulis desertis, absque vlla cura terrae. Oua pro auis magnitudine, quippe quae Querquedulam vix aequat, satis magna sunt, gallinaceis maiora, oblonga, angusta; colore valde differunt, alia sordide alba, et punctis rarioribus fuscis, alia ex albo in rufum colorem inclinant, et punctis spadiceis varia sunt, alia ex albo arenacei coloris sunt, ac punctulis spadiceis et cinereis variegantur.

Quum

ET OVA AVIVM CONCERNENT 427

Ouum An Lari cinerei maximi Raii et Willughbeii ?

| | Vnc. | lin. |
|---------------------------------|------|------|
| Longitudo axis - - - - | 3 | - |
| Diametralis latitudo maxima - - | 2 | 1 |

Oua habui quatuor, quae mihi simul ex vno nido allata fuere; mihi vero res nihilominus suspecta videbatur, licet omnia oua magnitudine et forma consentiebant, colore tamen plus discrepabant, ac mihi antea in Larorum familia obseruatum. Primum ex albo subcoeruleum erat, maculis maiusculis fuscis circa verticem latiore pictum, reliqua ex albo cinerea erant maculis fuscis picta. Magnitudine aenaria oua aequabant, reperta sunt in insula, faxis minutis constante, paucis saltem stipulis substratis.

Fig. 27.

Fig. 28.

Ouum Lari cuiusdam speciei.

| | Vnc. | lin. |
|------------------------------|------|------|
| Longitudo axis - - - - | 3 | 1 |
| Diametralis latitudo - - - - | 1 | 9 |

Fig. 29.

Putamen oui valde crassum erat et validum, versus acutiorem verticem subito peripharia decrescens, in superficie scabrum, ex albo subflauum; vertex latior fere totus fuscus erat, ob maculas in vnum confluentes, acutior vero maculis rarioribus seiunctis distinguebatur.

Ouum Motacillae vulgaris.

| | lin. |
|------------------------------|-----------------|
| Longitudo axis - - - - | 8 $\frac{1}{2}$ |
| Diametralis latitudo - - - - | 6 $\frac{1}{2}$ |

Ouum instar viridis aeris viret, absque vllis maculis. Nidum struit, ex gramine sicco, hemisphaericum. Oua ponit plurima ad 5. vel 6.

H h h 2

Oua

428. **OBSERV. NID. ET OVA AV. CONCERN.**

Ova Hirundinis subtos castanei coloris.

| | lin. |
|-----------------------------|------|
| Longitudo axis | 7 |
| Diametralis latitudo maxima | 5 |

Nidum fruit hemisphaericum, ex luto, intermixtis stipulis, cumque parietibus sub tectis affigit. Ova habuit quinque circa med. lun. candida et spadiceis punctulis vndique aequaliter variegata.

Ova Cincli, the Stint.

| | lin. |
|----------------------|------|
| Longitudo axis | 7 |
| Diametralis latitudo | 6 |

Nidum fruit hemisphaericum planum, e ficoso gramine, in gramineis collibus, circa mare, ova ponit quatuor cinerea, punctulis fuscis aequaliter variegata circa 5 diem Iunii.

OBSER.



OBSERVATIONES
METEOROLOGICAE
ANNORVM MDCCXLIV. — — MDCCXLVII,
cum animaduersionibus et confectionibus.

Auctore IOSEPHO ADAMO BRAVNIO.

Observationes meteorologicae, potissimum barometricae et thermometricae, hic Petroburgi ab Academia iam MDCCXXVI fieri coeperunt, et habentur ab hoc anno ad finem vsque MDCCXXXVII Tomo IX. Commentariorum veterum Academiae, scilicet ab anno 1726 vsque in finem 1736 p. 316 et 344, anni autem 1737 p. 358, a Krastio V. C. comparatae et communicatae. Tomo XI. exstant observationes annorum 1738 et 1739 p. 241 et 254. Tomo XIII. deprehenduntur observationes annorum 1740 et 1741 p. 339 et 374. Denique Tomo XIV. ultimo veterum Commentariorum inueniuntur observationes annorum 1742 et 1743 p. 240 et 247. Observationes a me domi factae, quas in posterum communicabimus, incipiunt ab anno 1751, et perpetuae ad hoc vsque tempus sunt. Vt igitur hae observationes meteorologicae serie haud interrupta, quantum fieri potuit, in Commentariis Academiae haberentur, supplere studimus observationes annorum 1744 et sequentium vsque ad finem 1750, potissimum ex iis, quae in Observatorio Astronomico sunt factae. Solus annus 1748 est, cuius observationes meteorologicae deficiunt, quo vel nullae factae, vel certe non inueniuntur. Vt igitur ordinem

H h h 3

annorum

annorum obseruemus, incipiemus ab anno 1744 et ad sequentes, vsque ad tempus praesens procedemus. Factae sunt hae observationes eodem fere modo, quo illae, quae iam in Commentariis exstant, scilicet ad barometricas observationes quod attinet, notatae sunt altitudines maximae et minimae mercurii in tubo torricelliano cuiuslibet mensis per totum annum cum differentiis. Numeri ante punctum pollices pedis regii Parisini hic denotant, numeri autem post punctum, partes centesimas eiusdem pollicis. Observationes autem, quae in Commentariis iam sunt publicatae, secundum pedem Londinensem eiusque pollices et horum partes centesimas confectas constat. Simili modo quoque quolibet mense totius anni enotauimus maximum et minimum caloris gradum secundum thermometrum Delislianum, vbi, quod satis iam constat, cyphra gradum caloris aquae ebullientis, numerus autem 150 gradum aquae in glaciem abeuntis, siue quod eodem redit, niuis vel glaciei, quae incipit regelari, vel aquae sub glacie, idem enim semper constantissimus gradus a nobis est obseruatus. Quia, quod iam monuimus, observationes ab anno 1744 ad finem 1750 in specula astronomica factae sunt, notandum est, eam supra planum maris Baltici 51 pedes parisinos fuisse euectam. Ea ipsas observationes anni 1744.

Anni MDCCXLIV. fidei noui Observationes barometricae.

| Mense. | Dies. | Altitudo barometri maxima | minima | Differentia |
|----------|-------|------------------------------|----------|---------------|
| Ianuar. | 14 | - 28. 56 | - 27. 27 | Die 5 - 1. 29 |
| Februar. | 8 | - 28. 89 | - 27. 57 | - 26 - 1. 32 |
| Martii | 26 | - 28. 30 | - 26. 90 | - 12 - 1. 40 |
| Aprilis | 22 | - 28. 10 | - 27. 20 | - 14 - 1. 90 |
| | | | | Maii |

METEOROLOGICAE 431

| Mensis. | Die. | Maxima. | Minima. | Die. Differentia. |
|---------|------|---------|---------|-------------------|
| Maii | 10 | 28. 10 | 27. 28 | - 5 - 1. 82 |
| Iunii | 7 | 28. 15 | 27. 15 | - 15 - 1. 00 |
| Iulii | 23 | 28. 20 | 27. 57 | - 1 - 0. 63 |
| Augusti | 23 | 28. 14 | 27. 12 | - 28 - 1. 02 |
| Sept. | 30 | 28. 37 | 27. 43 | - 2 - 0. 94 |
| Oct. | 3 | 28. 49 | 27. 38 | - 17 - 1. 11 |
| Nou. | 7 | 28. 13 | 27. 10 | - 25 - 1. 03 |
| Dec. | 25 | 28. 17 | 27. 10 | - 21 - 1. 07 |

Comparatis his observationibus adparet, maximam per totum annum altitudinem barometricam fuisse 28. 89, minimam autem 26. 90. Contigit maxima die 8 mensis Februarii, coelo sereno, vento non sensibili, qui diebus antecedentibus et sequentibus fuit **NO** debilis, dies antecedens, et qui sequuti fuerunt aliquot, fuerunt sereni, quibus frigoris gradus inter 169 et 174 subsistebat. Minima altitudo accidit Martii 12 coelo nubilo, vento **SO** mediocri. Dies duo antecedentes et sequentes fuerunt quoque nubili, vento **SW** mediocri flante, thermometrum autem mane 149, meridie 147 et vespere 149 monstrabat. Fuit igitur variatio barometrica maxima hoc anno fere duorum pollicum siue proprie 1. 99. Secundum observationes ante habitas, quae in Commentariis leguntur, spatium variationum barometricarum maximum hic adhuc fuit 2. 77 mensurae Londinensis, adeoque secundum mensuram Parisinam 2. 60, siue proprie 2. 59 $\frac{1}{2}$. Nam maxima altitudo, quae adhuc hic est observata, est 20. 95 pollicum Londinensium, adeoque 29. 01. $\frac{1}{2}$ pollicum Parisinorum. Notata haec fuit 1737 vide Commentariorum tomum IX. p. 359, et minima est

est 28: 18 pollicum Lond. adeoque Paris. 26. 41 $\frac{1}{2}$, quae visa est 1729 Octobris 12 circa meridiem vid. p. 323 Tomi IX. Comment. Quum igitur spatium variationum barometricarum anni 1744 minus deprehendatur illo, quod antea inuentum est: manet etiamnum illud 2.60 maximum, et maxima quoque altitudo hic loci obseruata illa 29. 01, vti 26. 41 minima quoque manet. Porro et hic obseruatur lex et confirmatur, in antecedentibus obseruationibus barometricis et alibi iam detecta: variationes menstruas barometricas primis et vltimis anni mensibus esse maiores, mediis autem minores.

Sequuntur obseruationes thermometricae huius anni 1744, vbi calor minimus et maximus per omnes totius anni menses cum differentiis notatus est.

| Mensis. | Dies. Hor. | Calor min. | Calor max. | Dies. Hor. | Differentia |
|---------|-------------------------|-------------------|-------------------|------------|--------------------|
| Januar. | 1. 12 mer. | 182 | 152 $\frac{1}{2}$ | 26. 12 | - 30 |
| Febr. | 13. 7a.m. | 180 $\frac{1}{2}$ | 150 | 25. 10p.m. | 30 $\frac{1}{2}$ |
| Mart. | 7. 7a.m. | 180 $\frac{1}{2}$ | 147 | 12. mer. | - 33 $\frac{1}{2}$ |
| April. | 1. 6 $\frac{1}{2}$ a.m. | 162 | 124 | 26. 6p.m. | 38 |
| Maii | 4. 6 a.m. | 152 | 117 | 12. mer. | - 35 |
| Iunii | 15. 6 a.m. | 142 | 116 | 22. mer. | - 26 |
| Iulii | 21. 7 a.m. | 133 | 106 | 11. 5p.m. | 27 |
| Aug. | 23 et 30, 6a.m. | 136 | 119 | 19. 5p.m. | 17 |
| Sept. | 30. 6a.m. | 144 | 118 | 27. 5p.m. | 26 |
| Oct. | 12. 6a.m. | 158 | 136 | 1. mer. | - 22 |
| Nou. | 28. 12 mer. | 164 | 140 $\frac{1}{2}$ | 5. mer. | - 23 $\frac{1}{2}$ |
| Dec. | 29. 8a.m. | 176 $\frac{1}{2}$ | 145 $\frac{1}{2}$ | 2. mer. | - 31 |

Ex hisce obseruationibus patet minimum calorem, seu maximum frigus fuisse 182, et maximum calorem, 106, adeoque

adeoque differentiam annuam sine maximam 76. graduum. Frigus maximum contigit Ianuarii 1. coelo nubilo, vento W exiguo, barometro 27. 55. ascendente. Maximus autem calor accidit Iulii 11. h. 5. p.m. coelo sereno, praecedentibus quoque et sequentibus aliquot diebus serenis vento SO forti. Barometrum altitudinem habebat 27. 91 et ascendebat. Conspicitur praeterea, variationes caloris primis anni mensibus fuisse maiores, quam mediis et ultimis, excepto Decembri.

Frigus maximum, quod hic Petroburgi adhuc est observatum, est 200. quod 1733 et 1739. contigit. Quum igitur hoc superet gradum 182, hoc anno 1744 observatum, manet idem gradus adhuc maximus, qui Petroburgi sit notatus. Maximus caloris gradus, qui hic est observatus, adhuc fuit 104. qui saepius est observatus, et maximus manfit vsque ad 1756. quo anno, vt ex sequentibus patebit, maiores sunt observati. Quum igitur et caloris gradus huius anni 1744 scil. 106. minor illo deprehendatur; ad hunc vsque annum 104. maximus ille caloris gradus manet, vti et differentia maxima, seu variatio thermometrica maxima 96. gr. perstat. Fuit igitur huius anni hiems neque admodum frigida, nec aestas admodum calida. Dies nubili mense Ianuario fuerunt 22, Februario 14. Martio 13. Apr. 5. Maio 10. Iunio 13. Iulio 6. Augusto 12. Sept. 15. Oct. 14. Nou. 23. Decembri omnes dies fuerunt nubili, excepto 29. Primo Maii nix cecidit h.6. a.m. et p.m. Die 7 p.m. procella orta est cum tonitru et pluvia. Iunii 27. vehemens ventus cum pluvia, Iulii 19. p. m. magna fulmina cum tonitru, vento W non magno, barometro meridie 28. 06 et

Tom. IV. Nou. Com. I i i ther-

thermometro 114. monstrante. Augusto 28. p. m. ventus vehemens NO cum exundatione aquarum fluminis, qui ad mediam vsque noctem continuauit, et aquae tunc subidere coeperunt, barometro 27. 20. thermometro 131. monstrantibus, quum barometrum die antecedenti fuerit 27. 37. et sequenti 27. 42. meridie. Septembri 20. vesperi ventus vehementissimus exitit W, qui mane die sequenti 21 NW factus, eadem vehementia flauit cum magna exundatione fluminis Neuae; barometrum meridie erat 27. 62. die precedenti 27. 72. et sequenti 27. 66. durante tempestate aliquot lineas barometrum cecidit. Thermometrum erat 130. Oct. 4 ventus vehementior W. et die 10, 11 et 12 venti vehementiores O et S fuerunt. Nouembri magnus ventus W. die 19. et 20 cum inundatione aquarum, barometro 27. 23, et die anteced. 27. 65., seq. autem 27. 77 monstrante. Decembris 20, 21 et 27 potissimum ex occidente venti vehementiores flauerunt: Glacies fluii Neuae Apr. 6 a.m. frangi et h. 3 p.m. abire coepit. Nouembris 26 glacies natauit in Neua, et seq. 27, circa h. 5. a. m. fluminis glacies stetit. Ad hunc vsque annum ab anno 1718. Martii dies 22dus fuit terminus quo citissime et 26 Apr. quo tardissime fluius Neua a glacie est liberatus; contra Oct. 24 quo citissime et Nouembris 30, quo tardissime flumen Neua glacie obductum fuit sed stili veteris. Prima congelatio facta est nocte diei 29 ad 30 Sept. et sequenti 1 et 2 Oct. continuauit.

Annus MDCCXLV.

Anni 1745 st. n. obseruationes sunt, quae sequuntur. Primum barometricae ita se habent:

Baro-

BAROMETRI

| Mensis. | Dies. | Altitudo Maxima. | Minima. | Differentia |
|---------|-------|------------------|----------|------------------|
| Ianuar. | 24 | - 28. 55 | - 27. 06 | d. 31 - 1. 49 |
| Febr. | 28 | - 28. 45 | - 27. 20 | - 1 et 2 - 1. 25 |
| Mart. | 12 | - 28. 35 | - 27. 23 | - 7 - 1. 12 |
| Apr. | 29 | - 28. 30 | - 27. 24 | - 17 - 1. 06 |
| Maii | 3 | - 28. 85 | - 27. 62 | - 30 - 1. 23 |
| Iunii | 16 | - 28. 23 | - 27. 82 | - 1 - 0. 41 |
| Iulii | 3 | - 28. 45 | - 27. 42 | - 18 - 1. 03 |
| Aug. | 18 | - 28. 21 | - 27. 29 | - 30 - 0. 92 |
| Sept. | 26 | - 28. 49 | - 27. 61 | - 2 - 0. 88 |
| Octobr. | 22 | - 28. 19 | - 27. 47 | - 26 - 0. 72 |
| Nou. | 15 | - 28. 52 | - 27. 20 | - 28 - 1. 32 |
| Decem. | 18 | - 28. 57 | - 27. 72 | - 11 - 0. 85 |

Hae observationes igitur monstrant, maximam barometri altitudinem hoc anno fuisse 28 . 85 , et minimam 27. 06 adeoque differentiam , et variationem maximam annuam 1. 79. Observata fuit altitudo maxima Maii tertio meridie , coelo nubilo , vento SW. mediocri ; die antecedenti fuit 28. 04 et sequenti 27. 73. Dies aliquot antecedentes fuerunt sereni , et fere sine vento sensibili , sequentes vero nubili , vento potissimum S et SW. debili flante. Minima altitudo contigit Ianuarii 31. coelo nubilo , vento S exiguu. Die antecedenti erat 27. 25 , et sequenti 27. 20 , dum praecedentes dies multi fuerunt nubili , flante potissimum vento W debili , et SW mediocri ; fuere et sequentes nubili , vento vario , excepto proxime sequente 1 Febr. qui fuit serenus.

I i i 2

Quum

Quum et maxima barometri altitudo, hoc anno observata, sit minor ea, quae in antecedentibus observationibus est notata, scil. 29. 01. et minima huius anni maior 26. 41 in antec. minima adnotata: spatium variationum barometri in antecedentibus stabilitum, manet invariatum scilicet 2. 60, vti et altitudo media 27. 71 perstat.

Ex variationibus mensuris inter se comparatis porro patet, legem suis exceptionibus esse obnoxiam, quod scilicet variationes barometri mensurae primis et ultimis mensibus anni maiores, mediis autem, sint minores. Nam licet variationes primorum anni mensium manifesto sint maiores mediis, tamen ultimarum mensium maiores non omnes deprehenduntur, vti vtplurimum observari solet alias.

Variationes caloris, A. 1745 thermometro observatae, sunt sequentes.

| | | Frigus max. | Calor max. | Diff. |
|--------|------------------|-------------|----------------------------|-------|
| Jan. | 18. h 8 a.m. | 177 | - 147½ d. 11. h 8 a.m. | 29½ |
| Febr. | 3. 7½ a.m. | 191 | - 149 - 8. mer. | 42 |
| Mart. | 5. 6 a.m. | 183 | - 144 - 8. 6 p.m. | 39 |
| April. | 2. 6 a.m. | 169 | - 138 - 30. 6 p.m. | 31 |
| Maii | 1. 5 a.m. | 147 | - 117 - 29. 4 p.m. | 30 |
| Iun. | 2. 6 a.m. | 131½ | - 109½ mer. et h. 5 p.m. | 22 |
| Iulii | 20. 5 a.m. | 131½ | - 115½ d. 6 et 8 h. 5 p.m. | 16½ |
| Aug. | 29. 5½ a.m. | 141 | - 112 - 7. 4 p.m. | 29 |
| Sept. | 17. 6 a.m. | 147½ | - 127½ - 5. 6 p.m. | 20 |
| Oct. | 28 et 31. 6 a.m. | 158 | - 131 - 13. 5 p.m. | 27 |
| Nou. | 9. 7 a.m. | 171 | - 145 - 20. mer. | 26 |
| Dec. | 28. 8 a.m. | 174½ | - 148½ - 31. 8 p.m. | 26 |

Ex his observationibus clarum est, maximum frigus hoc anno fuisse 109½, et maximum calorem 191½ adcoque

adeoque variationem thermometricam $81\frac{1}{2}$ graduum. Spatium igitur variationum thermometricarum in antecedentibus inuentum 96 graduum manet adhuc maximum. Variationes thermometricae primis anni mensibus sunt maiores mediis et vltimis excepto Augusto, qui cum Ianuario conuenit. Quae praeterea hoc anno memorabiliora videntur, haec fere redeunt.

Mense Ianuario omnes dies fuerunt nubili, exceptis duobus 18 et 22. vento W debili flante. Venti vehementiores hoc mense fuerunt d. 9. S, 10 W et 11 W, quum dies antecedens et sequens sine ventofuerint, barometro a 27. 97 ad 27. 30 descendente, quum iam diebus aliquot ante descendisset, thermometro a 168 ad 151 variante. Per totum mensem ventus W potissimum spirauit.

Mense Februario sex dies fuerunt sereni 1, 17, 25; 26, 27, 28. ceteri omnes nubili. Semel ventus vehemens fuit die 18. NO, praecedente et subsequente tranquillitate sine vento. Die antecedenti barometrum erat 27. 89. et sequenti 27. 38. 27. 50 ipso die fuit, et frigus 169.

Martius habuit dies 13 serenos, ceteros nubilos. Venti fortiores fuerunt d. 7. NO. coelo sereno, barometro 27. 23, et therm. 172. Die praecedenti fuit 26. 64 et seq. 27. 60; dies antecedens sine vento, sequens cum S. debili. Porro d. 12. coelo sereno, barometro 28. 35 ventus O vehementior fuit, dies praecedens sine vento, et sequens cum vento debili. Barometrum die antec. 28. 15, et seq. 28. 13 erat altitudinis. Denique die 26 ventus W fortior, coelo nubilo, barometro 27. 78 quod die antec. fuit 28. 16 et seq. 27. 72; thermometro autem 160.

Mense Aprili dies 13 fuerunt sereni, reliqui nubili.

Venti vehementiores fuerunt die 5. et 6. W. praecedente WNW mediocri, subsequente W mediocri, niue et porro vento vix sensibili. Barometrum die 5 erat altitudine 28 04. d. 6. 27. 57. praecedenti 28. 07. et subsequenti 27. 41. Thermometrum inter 150. et 147 tantum variabatur. Porro die 25. et 26 ventus vehementissimus O fuit, qui d. 27. N factus satis adhuc vehemens fuit, dies 25 nubilus, duo sequentes sereni. Barometrum d. 25 erat 28. 00. d. 26, 28. 25. d. 27. 28. 40. sequenti 28. 28. die ventum praecedente 27. 93, thermometrum inter 147 et 149 subsistebat.

Primum tonitru fuit d. 10. h. 7. p.m. cum pluvia et fulminibus, circa h. 10. a. m. iam tonitru fuit auditum debile. Die 20. circa h. 8. et 9. a. m. glacies Neuae frangi coepit, et circa h. 3. p. m. omnis glacies abierat.

Mense Maio dies fuerunt sereni 15. Venti vehementiores fuerunt d. 14 et 15 NO. coelo sereno, praecedente W. mediocri, et subsequente O. leni; barometrum erat d. 14, 28. 86. d. 15, 28. 42. die antec. 28. 29 et subsequenti 28. 33, et rursus descendere aliquot diebus seq. pergebat, therm. inter 135 et 128 variabili. Porro d. 29 et 30 V. SSW et S vehemens, antecedente vento NW leni, et subsequente V. 00, barometrum d. 29, 27. 75 et 30, 27. 62, die praeced. 27. 82 et seq. 27. 73.

Mense Iunio tres tantum dies fuerunt nubili, ceteri sereni. Venti vehementiores fuerunt d. 4. coelo sereno, praecedente V. 00 et sequente NO. debili. Barometrum erat 28. 08, die antec. 28. 06. et subseq. 28. 08, deinde descendit. Porro d. 28, 29, 30 ventus ab
initio

initio W, dein NW vehementior fuit, praecedente NW mediocri, et sequente N mediocri. Barometrum d. 28 erat 27.96. d. 29, 27.98. d. 30, 28.04 die antec. 28.12 et sequenti 1 Julii 28.10, vbi vehemens adhuc fuit, dein per aliquot dies adscendere barometrum pergebat; vento debili potissimum W. Thermometrum inter 121 et 124 variabat.

Mense Iulio fuerunt dies nubili 5, et mixti 6. Venti vehementiores d. 8, 9 et 11 W, die 14, 15 SW, die 24, 25 NW. Die 8 erat barometrum 27.88 et 9.27.71. in antecedenti obseruatione 27.91 et sequenti 27.75, coelo mixto. Dies sequens 10 erat sine vento, quem rursus sequebatur d. 11 ventus W fortis. d. 14 et 15 SW et W vehemens, die 24 et 25 NW. sequente W debili et tranquillitate, barometro d. 24, 27.89 et 25, 27.91. thermometro 120 et 121 monstrantibus.

Mense Augusto dies fuerunt nubili 6, et 5 mixti. Venti vehementiores d. 7, 22, 24. Die 7 coelo sereno ventus SO vehemens fuit, praecedente mediocri SO, et sequente NW mediocri, et dein V 00; barometrum erat 27.81; die antec. 27.98 et seq. 27.93 et adscendere perrexit, thermometro 113 ostendente. Die 22 ventus vehemens W. die antec. V. 00 et seq. SW mediocri, thermometro 116, coelo mixto, barometro 27.61. die antec. 27.92 et seq. 27.93 dein rursus adscendere coepit. d. 24. V. NW coelo sereno, thermometro 124 et barometro 27.40 indicantibus.

Mense Septembri dies fuerunt sereni 11 et 2 mixti. Venti vehementiores d. 5. et 6. NO praecedente W mediocri et sequente debili NO. dies 5 serenus et 6 nubilus fuit, praecedentibus et sequentibus diebus nubilis; baro-

barometro 27.70. d. 5, et 6, 27 80. die antec. 27. 92 et seq. 28 16, thermometro 129 et 137 indicantibus.

Mense Octobri dies sereni 9. Venti vehementes d. 3, 4, 17, 23, 24, 27, 31. Primus d. 3. et 4. erat NO, secundus d. 17 erat W, tertius 23 et 24. NW, quartus 27 NO, et quintus die 31 SO, ut plurimum tranquillitas antecedebat et sequebatur, vel antecedebat minimum, vel sequebatur tum. Die 8. prima congelatio exigua et nig. Nocte diei 15 ad 16 exundatio Neuae, vento vehementi W. Fortior congelatio demum nocte inter 26 et 27 vento NO contigit.

Mense Nouembri fuerunt dies sereni 9. Venti fortiores fuerunt d. 1. 25, 29. Primus est continuatio mensis antec. d. 31. Die 25. ventus erat W, quem praecedebat et sequebatur ventus admodum lenis N et O, barometro 27.64. die antec. 27. 30 et seq. 27. 74. tertius d. 29 erat W. barometro 27. 25, die antec. 27. 20 et seq. 27. 55. Die 1 vesperi glacies natans in Neua est observata, quae continuauit ad 7, quo circa h. 6. p. m. stetit.

Mense Decembri sex dies fuerunt sereni. Ventus vehemens tantum ultimo die contigit, qui ex occidente spirabat, barometro 27. 82 die antec. 27. 81 et seq. 28. 00. Ventus W lenis antecedebat, et sequebatur, thermometer monstrabat 149.

Dies igitur sereni per totum annum fuerunt 149. Ceterum facile intelligitur, non omnes inter illos fuisse integros serenos, sed a potiori hic quoque fieri denominationem. Venti vehementiores per totum annum fuerunt per 42 dies. Frequentissime autem, per antece-

antecedentia, contigerunt mensibus Octobri et Julio. Nam quolibet horum mense per septem dies venti fuerunt vehementiores. Mense autem Februario et Decembri paucissimi, quolibet enim horum mense vnicus tantum vehementior ventus fluit. Nullus autem mensis sine vento vehementiori fuit. Ceterum huius anni hiems inter gelidiores numerari non meretur. Nam licet mense Februario frigus ad 186 peruenerit, quin mense Martio gradum 183 obtinuerit: duratio tamen huius frigoris tantum exigua fuit, ex qua omnino hiemis frigus iudicandum est, non vero ex vno alteroque die licet gelidissimo, id quod de vehementia caloris diiudicanda valere quoque debere, facile intelligitur.

Anni 1746. st. n. sequentes obseruationes meteorologicis enotauimus: Sequuntur, vt supra, primum Obseruationes Barometricae.

| Mensis. | Dies. | Maxima | Altitudo. | Minima | Die. | Differentia |
|---------|-----------|--------|-----------|--------|------|-------------|
| Jan. | 12 et 27. | - 28. | 36 | - 27. | 40. | 20 - 96 |
| Febr. | 16. | - 28. | 24 | - 27. | 15. | 24 - 1. 09. |
| Mart. | 22. | - 28. | 38 | - 26. | 90. | 3 - 1. 48. |
| April. | 10 et 23. | - 28. | 14 | - 27. | 30. | 10 - 0. 84 |
| Maii | 7. | - 28. | 47 | - 27. | 68. | 11 - 0. 89 |
| Iunii | 7 et 19. | - 27. | 92 | - 27. | 46. | 1 - 0. 46 |
| Iulii | 7. | - 28. | 18 | - 27. | 78. | 24 - 0. 40 |
| Aug. | 14 et 19. | - 27. | 88 | - 27. | 32. | 11 - 0. 48 |
| Sept. | 5. | - 28. | 37 | - 27. | 22. | 24 - 1. 15 |
| Octobr. | 24. | - 28. | 48 | - 27. | 10. | 26 - 1. 38 |
| Nou. | 10. | - 28. | 58 | - 27. | 43. | 17 - 1. 15 |
| Dec. | 13. | - 28. | 20 | - 27. | 28. | 22 - 0. 92 |

Tom. IV. Nou. Com.

K k k

Ex

Ex comparatione harum obseruationum manifestum est, hoc anno maximam mercurii altitudinem fuisse 28. 58, Minimam autem 26. 90 adeoque variationem annuam 1. 68. Maxima altitudo est obseruata Nouembr. 10. meridie, dum precedenti die fuit 28. 16 et sequenti itidem 28. 58, coelo nubilo, sine vento, vti quoque aliquot praecedentes dies sine vento fuerunt. Minima accidit Martii 3. die praecedenti 27. 12 et seq. 27. 12, coelo nubilo, vti quoque duo praecedentes fuerunt nubili, V.NO exiguo flante, quum proxime praecedens sine vento et sequens cum lenissimo W. fuerunt. Hinc spatium variationum barometricarum quum sit 1. 68, adeoque minus illo, quod in antecedentibus est inuentum, deprehendatur: maximum illud manet, vti quoque maxima altitudo et minima manent in praecedentibus inuentae. Variationes mensuras primis et vltimis mensibus anni maiores, mediis minores et hic esse, ex comparatione differentiarum adparet.

Obseruationes thermometricae 1746 ft. n. factae, sequenti se habent modo:

| Mensis. | D. | H. | Frigus max. | Calor. max. | Diff. | |
|---------|-----|-----------------------|-------------|-----------------------|-------------------------------|--------------------|
| | | | | | D. | H. |
| Ian. | 23. | 8. a.m. | - 172 | - 146. | 24. mer. | - 25 |
| Febr. | 28. | 6. $\frac{1}{2}$ a.m. | - 179 | - 144. | 6. m. | - 35 |
| Martii | 9. | 12. p.m. | - 179 | - 149. | 27. et 28. | - 30 |
| Apr. | 1. | 6. a.m. | - 161 | - 136. | 24. 6p.m. | 26 |
| Maii | 6. | 5. a.m. | - 158 | - 124. | 16. m. et 7 $\frac{1}{2}$ pm. | 35 |
| Iun. | 1. | 5. a.m. | - 142 | - 109. | 18. mer. | - 33 |
| Iul. | 3. | 5. a.m. | - 130 | - 111 $\frac{1}{2}$. | 23. m. | - 18 $\frac{1}{2}$ |
| Aug. | 25. | 5. a.m. | - 136 | - 111. | 4. m. | - 25 |
| Sept. | 26. | 6. a.m. | - 143 | - 120. | 15. m. | - 23 |

Ob.

METEOROLOGICAE 443

| Mensis. | D. | H. | Frig. max. | Calor max. | Differ. |
|---------|-----|---------|------------|---------------------|------------------|
| Oct. | 30. | 7. a.m. | 158 | 131 $\frac{1}{2}$. | 9. mer. - 27 |
| Nou. | 20. | 7. a.m. | 176 | 143 $\frac{1}{2}$. | 8. et 9. mer. 33 |
| Dec. | 1. | 6. a.m. | 164 | 144. | 13. mer. - 20 |

Secundum has observationes maximum frigus fuit 179., quod incidit in Febr. 28 et Mart. 9, calor autem maximus 109, qui observatus est Junii 18 unde adparet hiemem satis mitem, et aestatem non admodum calidam fuisse.

Mense Ianuario dies fuerunt sereni 7. Ventus vehementior fuit d. 17. NO coelo nubilo, therm. 149, barometro 27.61, die autem antecedenti fuit 27.79 et seq. 27.98. Praecedebat hunc ventum ventus W lenis, et sequebatur quoque ventus W debilis.

Mense Februario dies sereni 13. Venti vehementiores fuerunt d. 1, 7, 20, 24. Primus fuit W sequente O exiguo, secundus SW praecedente S debili et sequente W mediocri, tertius W non admodum vehemens, quartus O sequente vento non sensibili.

Mense Martio dies fuerunt sereni 20. Venti vehementiores d. 1. NW sequente vento 00. die 5. SO, sequente aere tranquillo, et praecedente W admodum debili, d. 10 NO.

Mense Aprili dies sereni 14 fuerunt. Venti vehementiores d. 28. et 29. NO, praecedente NO debili, et sequente N leni. Nocte inter 24. et 25. glacies fluminis rumpi coepit, et die 25. mane h. 8. flumen a glacie liberum fuit.

Mense Maio dies sereni 21 erant, venti vehementes die 3. NO, d. 15. NW, d. 18. et 19. NO, d. 22. W, d. 25. NO.

K k k a

Mense

Mense Iunio fuerunt 18 diēs sereni, et duo mixti. Venti vehementiores d. 2, 3 NO. ascendente barometro a 27. 69 ad 27. 78. die praecedenti fuit 27. 46 V 00 thermometro inter 126 et 128. subsistente. Porro d. 6. NW. d. 13 O. die 21. O. d. 31. NW.

Mense Iulio dies sereni 14, mixti 6 numerati sunt. Venti vehementiores d. 15. NW, et 17. W, d. 24. NO.

Augustus habuit dies serenos 13, mixtos 7. Ventus vehemens d. 7 ex occidente spirans, barometro 27. 62, praecedenti die 27. 63. et sequenti 27. 82, thermometro 119, praecedentibus diebus inter 111 et 122 subsistebat.

Septembri dies sereni 17, mixti 3. Venti vehementes d. 20, 22, 24, 29, reliquis diebus ventus, vel nullus, vel admodum lenis.

Mense Octobri dies sereni 9 mixti 3 fuerunt. Ventus vehemens d. 5. NO, d. 14. SW, d. 18. NW, d. 21. NW, d. 29. NW. Nocte inter diem sextum et septimum prima congelatio fortis erat, et glacies diarum linearum crassitie deprehensa, et d. 17. p. m. prima nix, soluta mox cum magna pluvia sequenti, thermometro 144 notante.

Mense Nouembri dies sereni 8. Venti vehementiores d. 2. N, d. 18. O. Die 19 vesperi glacie Neva fluvius est obductus.

Mense Decembri dies sereni 2. d. 4 et 31. Nullus ventus vehemens hoc mense, omnibus enim diebus ventus, vel debilis, vel nullus, est observatus.

Annus

Annus 1747. St. V.

Quæ nunc sequuntur observationes, omnes secundum stilum veterem sunt notatæ, quàm antecedentes, quod monuimus, ex stilo nouo fuerint consignatæ. Ad Barometri altitudines quod attinet, sequentes maximæ et minimæ sunt obseruatæ.

| | | Barometri altitudo | | | |
|--------|-----|--------------------|---------|-------------|--------------|
| | | Maxima. | Minima. | | Differentia: |
| Ian. | 16. | 28. 35 | - | 27. 48. 5. | - 0.87 |
| Febr. | 28. | 28. 25 | - | 27. 30. 23. | - 0.95 |
| Mart. | 13. | 28. 34 | - | 27. 15. 6. | - 1.19 |
| Apr. | 16. | 28. 24 | - | 27. 15. 29. | - 1.09 |
| Maii. | 17. | 27. 80 | - | 26. 98. 12. | - 0.82 |
| Iunii. | 16. | 27. 56 | - | 26. 69. 21. | - 0.87 |
| Iulii. | 17. | 27. 70 | - | 26. 79. 8. | - 0.92 |

Reliquæ observationes huius anni barometricæ deficiunt. Ex comparatione observationum horum septem mensium patet, maximam barometri altitudinem fuisse 28. 35, et minimam 26. 69, adeoque maximam variationem 1. 66. Maxima obseruata est Ian. 16, coelo sereno, vento W mediocri, thermometro 155 meridie monstrante. Minima obseruata est Iunii 21. mer. coelo nubilo, thermometro 125, vento SW mediocri. Dies præcedentes fuerunt nubili et pluuii, proxime sequens serenus, vento W facto. Quia altitudo maxima 28, 35 minor est 29, 01, et minima 26. 69, maior 26. 41, adeo quoque differentia 1. 66 minor

K k k 3

2. 60, omnia manent invariata respectu altitudinum maximae et minimae, adeo quoque ratione spatii variationum barometricarum; ceterum variationes mensurae primis anni mensibus maiores, quoque hic deprehenduntur mediis, excepto Januario.

Variationes caloris his septem mensibus ex sequentibus observationibus thermometricis cognosci possunt.

| Mensis. | Die. | Calor | Minimus. | Maximus. | Die. | Diff. |
|---------|------|----------|--------------------|----------|-------------------|--------------------------------|
| Ian. | 22. | 8. a. m. | 18.8 | - | 148. | 29 mer. - 40 |
| Febr. | 15. | 6. a. m. | 19.2 | - | 146. | 9. mer. - 46 |
| Mart. | 6. | 6. a. m. | 16.8 $\frac{1}{2}$ | - | 142 $\frac{1}{2}$ | 22. mer. - 26 |
| Apr. | 13. | 6. a. m. | 15.7 | - | 132. | 22. mer. - 25 |
| Maji. | 1. | 6. a. m. | 14.8 | - | 111. | 26. mer. - 37 |
| Iunii. | 23. | 6. a. m. | 13.7 $\frac{1}{2}$ | - | 106. | 5. mer. - 31 $\frac{1}{2}$ |
| Iul. | 24. | 6. a. m. | 13.5 | - | 111 $\frac{1}{2}$ | 8. 2. p. m. - 23 $\frac{1}{2}$ |

Si comparentur hae observationes, conspicitur, frigus maximum fuisse 19.2, et maximum calorem 106. Frigus maximum incidit in Februarii decimum quintum h. 6 ante meridiem, coelo sereno, flante nullo vento, meridie erat 18.4, die antecedenti 18.5 et sequenti 18.2, barometro 27.92 meridie monstrante. Hic gradus frigoris licet sit magnus, tamen minor est illo, qui 1733 et 1739 est observatus scilicet, 200, qui igitur adhuc maximus manet. Gradus maximus caloris notatus est Iunii quinto meridie, coelo subnubilo, vento SW mediocri, ante meridiem erat nebulosum. Barometrum erat 26.97. Quum et maior caloris gradus hoc gradu 106 sit in antecedentibus observatus scilicet.

104: manet adhuc hic gradus caloris maximus Petroburgi observatus, et spatium variationum thermometricarum idem, quod supra est determinatum, scilicet 96. Reliqua notatu digniora haec fere sunt:

Mense Ianuario 7 dies fuerunt sereni, duo mixti. Nullus ventus vehementior per integrum mensem fuit, octo dies sine omni vento sensibili fuerunt, et per quinque tantum dies ventus fuit mediocris.

Mense Februario dies sereni 8, et reliqui nubili; ubi scilicet coelum ex parte nubilum, ex parte serenum fuit. Neque hoc mense ventus ullus vehementior est observatus. Octo quoque dies sine vento fuerunt, et sex dies ventum mediocrem habuerunt.

Mense Martio 15 dies fuerunt sereni. D. 8. nebula spissa, quam sequebatur serenitas. Die 26. h. 10. p. m. conspectum est phaenomenum NW vefus. Coelum fuit ad horizontem nebulosum, radii autem albicantes lucidi ad Zenith usque extensi, continuo in parte superiore in apices conicos abeuntes, qui post tres horas evanuerunt, sequebantur dies sereni aliquot, qui etiam praecedebant. Barometrum erat h. 6. p.m. 28. 25 in descensu, qui in sequentibus continuabat, thermometer 159, ventus NO mediocris, quem NO vehementior antecedebar, et O debilis sequebatur. Ventus vehementiores fuerunt d. 4. 5. W, d. 21. O, d. 25 NO, d. 29 O.

Mense Aprili 13 dies fuerunt sereni. Ventus vehementior d. 14, coelo sereno, SW, quem sequebatur V. 00. d. 18. NO, coelo sereno; d. 28. W. coelo nubilo, pluuio et niuoso. D. 29. SO.

Mense

448 OBSERVATIONES METEOROLOGICAE.

Mense Maio ventus vehementior d. 7. W, caelo sereno, et ad horizontem subnubilo. d. 18. ex oriente d. 21. N.O et 22. O. d. 28. O. d. 30. et 31. W coelo vt plurimum sereno, excepto d. 18. Ceterum dies 20 fuere sereni, et nullum tonitru.

Mense Junio venti vehementiores d. 11. et 12. coelo nubilo, V.W, d. 15. N, coelo hinc inde sereno. d. 17, 18 W, coelo sereno. d. 23. et 24. W. Dies 14 sereni hoc mense fuerunt. Die 6. h. 5. p. m. ad h. 6. tonuit, coelum meridie erat serenum, barometro 27.06, et thermometro 111. Ventus SW, qui hora 5, durante tempestate mutatus in SO mediocrem, finita autem tempestate h. 6, rursus W factus est, et barometrum, quod durante tempestate 26.90 erat, ascendit ad 26.94, et ascendere perrexit.

Mense Julio venti vehementiores d. 1. et 2. W, d. 8. O, d. 11. NO, d. 14. W, d. 16. O, d. 23. et 24. N, d. 27. et 28. W. Die 21. Iulii copiose pluere coepit h. 2½ p. m. et thermometrum subitam mutationem obtinuit, h. 2. enim erat 116½, incipiente vero et durante pluuiā ad 123½ descendit, barometro 27.30, vento W. I. Iris quoque tenuissimi coloris viridis et rubri adparuit h. 3, quae duravit ½ horae. Ceterum dies nubili et pluuii hoc mense frequentiores fuerunt, quā dies sereni tantum 6 sint numerati.

Monuimus iam supra obseruationes anni 1748 deesse, progrediendum igitur nunc nobis esset ad annum 1749 et annos sequentes, ne autem nimium longi hic simus, sequentes obseruationes alteri praelectioni reseruare placet.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

Tom. IV. Nou. Com.

LII

ME-

METHODVS INVESTIGANDI PARALLAXIN LVNAE ET PLANETARVM ECLIPSIBVS STELLARVM FIXARVM A LVNA ET PLANETIS INNIXA.

Auct. A. N. GRISCHOW.

Quanti terrae satellitis theoriam ad maximum perfectionis fastigium perducere et Geographiae perficiendae et rei nauticae excolendae intersit, quis vigilantiam Astronomorum, magnosque Geometrarum conatus perspecta habens non sentit? Quantis vero arduum hocce opus prematur difficultatibus, ob elementa, ad theoriam lunarem in apticum producendam requisita, haud perfecte cognita, perspicuum est cuius consideranti difficultates, quibus ipsae nodosae ac intricatae praedicta elementa determinandi methodi sunt subiectae.

Astronomi longa multarum observationum serie 18 circiter annorum, Geometrae autem mechanicis legibus Lunae theoriam compescere conantur. Uterque vero modus praecipue nititur cognitione perfecta excentricitatis orbitae Lunaris, Apogaei et Nodorum locorum, inclinationis orbitae Lunae ad eclipticam, loci et motus Lunae medii, et parallaxeos horizontalis. Methodos autem si consideremus, quibus Astronomi ad ista elementa determinanda plerumque utuntur, haud difficulter apparet, nullum fere horum elementorum exinde accurate defini posse. Praesertim vero modi, Apogaei locum et parallaxin Lunae investigandi, usitatioris, tam lubrici videntur, ut vix sperare liceat, fore ut, nisi singulari

L 11 2 adhi-

adhibita in observationibus ipsis diligentia, ista elementa perfecte patefcant.

In maxime incognitis lunaris theoriae elementis habenda est, vt opinor, parallaxis Lunae horizontalis, quae tamen, vtpote praecipuum elementorum, prae reliquis ex observationibus maxima diligentia institutis definiri deberet. Quia enim locus Lunae verus inter fixas, sine e centro telluris spectatus, non nisi data parallaxi assignari potest, manifestum est, reliqua lunaris orbitae elementa supra memorata parallaxi inniti. Inde factum est, vt Astronomorum bona magnaue pars parallaxi parum fidentes, Apogaei et Nodorum loca determinandi causa eclipses lunares adhibere soleant. Quam accurate vero eiusmodi eclipsium observationes institueri liceat, vel quantum observationes in diuersis locis, aut in diuersis obseruatoribus habitae, a se inuicem discrepent, ipsa experientia edocti, explorare iudicium ferre possimus de elementis orbitae lunaris ex eclipsibus lunaribus deductis.

Perspecto igitur amplissimo parallaxeos Lunae in tabulis lunaribus accurate condendis vsu, haud inuicilis erit opera, methodis, praedictam parallaxin vel accuratius, vel facilius, vel tandem saepius obseruandi, inueniendis, impensa. Veterum quidem Astronomorum in methodis parallaxin corporum coelestium, praesertim vero Lunae et Solis, explorandi, inueniendis sagacitatem requirere non possumus, cum illi varias hunc in finem ingeniose excogitauerint methodos, quas vero praxis Astronomica, praesertim illis temporibus vsitata, haud contemnendis arguit difficultatibus, ita vt istae methodi ne parallaxi Lunae quidem debita exactitudine detegendae inseruire videantur

deantur. Tales sunt methodi ab Hipparcho et Aristarcho Samio pro inveniendâ parallaxi Solis, a Ptolemaeo, Tychone Brahe, Dano, aliisque pro parallaxi Lunae determinandâ adinventae et adhibitae.

Neque minus egregii sunt modi aliquot huc spectantes a Celeberrimo Astronomo Anglo Halleio propositi, quorum praxis vero in hunc usque diem ob latitudinem Lunae maximam inconstantem, aliaque incommoda ex positione locorum terrestrium praxi Astronomica florentium nascentia, ex sententia successisse non videtur.

Nec incognita est methodus Planetarum parallaxes determinandi omnium simplicissima, duos postulans observatores correspondentes, in duobus locis terrestribus sub eodem circiter meridiano satis longe distitis locatos, instrumentisque munitos differentiis altitudinum meridianarum Planetæ et stellæ alicuius fixæ, parallelo Planetæ proximæ, quam accuratissime observandis accommodatis. Comparatis enim parallelorum Lunae et fixæ differentiis in utroque loco observatis, facili negotio parallaxis distantiae locorum debita, et hinc ipsa parallaxis horizontalis innotescit. Ad maiorem autem exactitudinem obtinendam requiruntur duo loca in diversis terræ, respectu aequatoris, hemisphaeriis sita. Hancce quidem methodum parallaxeos Lunae determinandæ gratia Illust. Baro de Krosick primus adhibere est conatus; successus autem, huius incepti votis minime respondens, Astronomiæ parum utilitatis attulit. Idcirco, perspecta utilitate huiusce modi, Cl. Abbas de la Caille e grege Astronomorum Gallorum, omnibus rebus rite perpensis, iussus est iter in promontorium Bonæ Spei suscipere

scipere feliciori cum successu procul dubio rediturus. Nobilis sane ille conatus totius orbis terrarum Astronomorum et sideralis scientiae cultorum oculos in nostrum satellitem conuertit, nullusque dubito, quin maxima theoria lunaris inde sit captura incrementa, praesertim si Astronomorum in borealioribus Europae erit lunae obseruandae inuigilantium diligentia, coelique fauor conspirarent, neque temporis angustiae impedimento forent.

Neque tamen putandum esse existimo, omnes difficultates, quae in accurate determinanda parallaxeos lunaris quantitate occurrunt, hoc instituto superatum iri, neque, absoluto calculo, nodosum hocce negotium veteriori indagine indigere. Terra toties dimensa, quis dubitet, quin ad maiorem certitudinem obtinendam, rursus certis in locis mensuranda sit? Quis igitur dubitabit, quin parallaxeos Lunae quantitas, aequae ac planetarum, diuersis turissimisque methodis magis magisque sit stabilienda? Eiusmodi vero methodis antitulerandis est modus inuestigandi Lunae parallaxin binis obseruatis Solis eclipsibus, altera in Nodo Lunae ascenderente, altera autem in Nodo descendente celebratis inuicibus. Denique autem haud minus digna et expedita, huc usque uero neglecta, uidetur methodus, quam hic proponam, obseruari eclipsibus fixarum a Luna nixa. Cum enim eiusmodi eclipses satis sint frequentes, simulque momentaneae, noster nonnulli fauente successu illas longitudinibus terrestribus accuratius definitendis adhibuerunt. Quid igitur obstat, cur non aequae feliciter, data locorum differentia meridianorum, parallaxeos lunaris quantitati saepius et in diuersis lunaris orbitae punctis inuestigandae inferuire possint?

Faten-

Fatendum quidem est, ut quantitas parallaxis hac methodo eruenda certior euadat, utendum esse observationibus in locis terrestribus longe distitis institutis. Cum vero nostris temporibus Sideralis scientiae dignitas atque usus florescat quotidie magis, nullus dubito, quin observationes ad hocce propositum aptas siderum scrutatores largiri possint. Quin etiam in vastissimo Russico Imperio constituti duo observatores correspondentes viam sibi ad parallaxin Lunae hac methodo determinandam patefacere valent. Oram enim si comparaueris terrae Camtschatkae orientiorem cum observatorii Imperialia situ, inuenies Meridianorum differentiam 125 gradus superantem, adeoque ad scopum sufficienti cum exactitudine attingendum satis idoneam. Requiritur tantum diligens observator horologio oscillatorio Astronomico, tubo et quadrante munitus, in terra Camtschatka observandis siderum eclipsibus inuigilans. Id quod eo facilius felicisque effici potest, quod eiusmodi observatori instrumentorum supellectile satis modica, et Geographiae Ruthenici Imperii perficiendae simul inseruiante, opus est.

Methodum itaque propositam explicaturo statim duo diuersi occurrunt processus; alter soli observato vel immersionis vel emersionis momento stellae alicuius fixae innititur; alter vero magis intricatus immersionis aequae ac emersionis momenta postulat. De priori igitur processu exponendo primum agam, alterum exemplo illustrandum in aliam occasionem relinquens. Intento vero animo priorem indagans processum, sequentia ad problema hocce exsoluendum requiri data reperio.

- 1.) Differentia meridianorum locorum in tellure, vbi obseruationes peractae sint, maxima quidem, quantum fieri potest, diligentia, ex obseruationibus eclipsium satellitum Iouis determinanda. Constat quidem inter Astronomos longitudinum terrestrium differentias ex praedictis satellitum Iouis obseruationibus non satis tute deduci posse. Nihilominus tamen nullum dubium relinquatur, quin Meridianorum differentiae ex obseruatis satellitum Iouis in quadrato Solis versantis eclipsibus saepius repetitis, immersionum praecipue momentis adhibitis, reliquisque et coeli et instrumentorum circumstantiis haud neglectis, vel ex appulsibus vmbrae telluris ad lunaris corporis maculas ad $15''$ minimum definiri queant.
- 2.) Differentia altitudinum centri Lunae et stellae, huc vsque in obseruationibus occultationum plerumque neglecta, cum altitudine stellae tempore immersionis vel emersionis per quadrantem micrometro instructum obseruandae; licet absoluta stellae altitudo haud necessario, vt ex sequentibus patebit, ad calculum requiratur. Ad veram deinde altitudinum differentiam indagandam, refractionum differentiam differentiae altitudinum debitam attendendum est.
- 3.) Diameter Lunae apparens horizontalis, a verticali propter refractionum differentiam diuersa, micrometri exquisitissimi ope, habita dilatationis luminis ratione, tempore eclipsios obseruanda.
- 4.) Distantia stellae a nonagesimo eclipticae, vna cum altitudine nonagesimi gradus ad obseruationis momentum, more consueto, siue potius ex obseruato stellae
fixae,

fixae, cuius ascensio recta accuratissime datur, per meridianum transitu, ad Poli elevationem datam determinanda.

5. Locus stellae eclipsin passae apparens, tam secundum longitudinem, quam secundum latitudinem, ex dato loco vero, adhibitis et aberrationis et mutationis axis telluris correctionibus, inuestigandus.
6. Motus Lunae verus horarius in longitudinem, ex optimis lunaribus tabulis desumendus, supputando locum Lunae verum ad observationis momentum loco occidentiori conveniens, et deinde ad horam proximè insequentem. Proinde exactior hoc modo prodibit motus Lunae verus quaesitus, cum parallaxis momentum observationis in locis occidentalioribus semper antevertat momento observationis in locis orientioribus habitae.

Hisce ita adornatis expositisque, ipsum aggrediemur calculum, exhibendo in sequenti problemate formulas eruendae, et differentiae latitudinum stellae centrique Lunae tempore observationis, et distantiae pro eodem temporis momento Lunae a coniunctione visa inseruientes:

PROBLEMA.

Dato momento immerfionis stellae fixae, cuius locus apparens ad diem eclipsios reductus accuratissime datur; datisque ad idem momentum differentia altitudinum stellae et centri Lunae, diametro Lunae apparenti, nonagesimo eclipticae gradu eiusdemque altitudine, inuenire differentiam latitudinum stellae et centri Lunae, nec non distantiam Lunae in ecliptica a coniunctione visa.

Tom. IV. Nou. Com.

M. m. m

SOLV.

S O L V T I O.

Tab. XIV. In schemate repræsentet ECL eclipticam, cuius
Fig. 1. Robus alter P; Z designet zenith, C gradum eclipticæ
 ab oriente puncto nonagesimum, et ZP nonagesimi gra-
 dus altitudinem. Sit porro ipso immersionis momento
 centrum Lunæ in M, et stellâ in S. Ductis arcibus
 AS horizonti, et NS eclipticæ parallelis, AM deno-
 tabit altitudinum differentiam stellæ et centri Lunæ, MN
 differentiam latitudinum, et angulus MPS distantiam
 Lunæ a coniunctione visâ cum stellâ ipso immersionis
 momento.

Vocetur altitudo nonagesimi eclipticæ gradus ZP -- a
 Distantia stellæ a nonagesimo perangulum ZPS definita -- u
 Differentia altitudinum stellæ et centri Lunæ AM -- d
 Semidiameter Lunæ apprens M S -- a
 Latitudo stellæ apprens, cuius complementum SP -- b

Dantur igitur in triangulo sphaerico ZPS latera ZP,
 PS, et angulus ZPS, hinc erit

$$\cotang. ZSP = \frac{\cos. l - \cos. u. \sin. l. \tang. a}{\sin. u. \tang. a} = \cotang. ASN$$

$$\text{adæque } \sin. ASN = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos. l - \cos. u. \sin. l. \tang. a}{\sin. u. \tang. a}\right)^2}}$$

$$\text{et } \cosin. ASN = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin. u. \tang. a}{\cos. l - \cos. u. \sin. l. \tang. a}\right)^2}}$$

Porro erit in triangulo rectangulo AMS pro re-
 ctilineo habendo sin. ASM = $\frac{d}{a}$; cumque angulus
 MSN sit = ASM + ASN, erit

cosin.

$$\text{cofin. MSN} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \delta^2}}{\alpha \sqrt{1 + \left(\frac{\sin v \cdot \text{tang. } a}{\text{cof. } l. - \text{cof. } v \cdot \text{tang. } a \cdot \text{fin. } l.} \right)^2}} - \frac{\delta}{\alpha \sqrt{1 + \left(\frac{\text{cof. } l. - \text{cof. } v \cdot \text{tang. } a \cdot \text{fin. } l.}{\sin v \cdot \text{tang. } a} \right)^2}}$$

$$\text{et fin. MSN} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \delta^2}}{\alpha \sqrt{1 + \left(\frac{\text{cof. } l. - \text{cof. } v \cdot \text{tang. } a \cdot \text{fin. } l.}{\sin v \cdot \text{tang. } a} \right)^2}} + \frac{\delta}{\alpha \sqrt{1 + \left(\frac{\sin v \cdot \text{tang. } a}{\text{cof. } l. - \text{cof. } v \cdot \text{tang. } a \cdot \text{fin. } l.} \right)^2}}$$

Quibus inuentis prodibit distantia centri Lunae a coniunctione visa in ecliptica pro tempore immersionis quaesita, siue angulus

$$\text{MPS} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \delta^2}}{\text{cof. } l. \sqrt{1 + \left(\frac{\sin v \cdot \text{tang. } a}{\text{cof. } l. - \text{cof. } v \cdot \text{tang. } a \cdot \text{fin. } l.} \right)^2}} - \frac{\delta}{\text{cof. } l. \sqrt{1 + \left(\frac{\text{cof. } l. - \text{cof. } v \cdot \text{tang. } a \cdot \text{fin. } l.}{\sin v \cdot \text{tang. } a} \right)^2}}$$

$$\text{vel MPS} = \frac{(\text{cof. } l. - \text{cof. } v \cdot \text{tang. } a \cdot \text{fin. } l.) \sqrt{\alpha^2 - \delta^2} - \sin v \cdot \text{tang. } a \cdot \delta}{\text{cof. } l. \sqrt{(\text{cof. } l. - \text{cof. } v \cdot \text{tang. } a \cdot \text{fin. } l.)^2 + (\sin v \cdot \text{tang. } a)^2}}$$

Simili modo differentia latitudinum centri Lunae et stellae, vel recta MN ad idem temporis momentum, erit

$$= \frac{\sqrt{\alpha^2 - \delta^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{cof. } l. - \text{cof. } v \cdot \text{tang. } a \cdot \text{fin. } l.}{\sin v \cdot \text{tang. } a} \right)^2}} + \frac{\delta}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin v \cdot \text{tang. } a}{\text{cof. } l. - \text{cof. } v \cdot \text{tang. } a \cdot \text{fin. } l.} \right)^2}}$$

$$\text{vel MN} = \frac{\sin v \cdot \text{tang. } a \cdot \sqrt{\alpha^2 - \delta^2} + (\text{cof. } l. - \text{cof. } v \cdot \text{tang. } a \cdot \text{fin. } l.) \delta}{\sqrt{(\text{cof. } l. - \text{cof. } v \cdot \text{tang. } a \cdot \text{fin. } l.)^2 + (\sin v \cdot \text{tang. } a)^2}}$$

M m m a

Positio

460 METHODVS INVESTIGANDI

Positis tempore observationis altitudinibus centri Lunae et stellae aequalibus, erit.

$$\text{angulus MPS} = \frac{\alpha}{\cos. l \sqrt{1 + \left(\frac{\sin. u \cdot \text{tang. } a}{\cos. l - \cos. u \cdot \text{tang. } a \cdot \sin. l} \right)^2}}$$

$$\text{et MN} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos. l - \cos. u \cdot \text{tang. } a \cdot \sin. l}{\sin. u \cdot \text{tang. } a} \right)^2}}$$

Hinc datis α et δ siue semidiametro Lunae apparenti et differentia altitudinum in minutis secundis, formulae praecedentes quaesitam quoque in minutis secundis exhibebunt, et differentiam latitudinum et distantiam centri Lunae a coniunctione visa in ecliptica, quo tandem modo nullo fere negotio locus Lunae visus ad tempus observationis pro utroque loco eclipsi observandae destinato assignari poterit.

Cum hoc in negotio nil difficilius sit determinari, quam altitudinum Lunae et stellae differentia ipso immersionis vel emersionis momento quam accuratissime observanda, operae pretium erit, ut ista differentia ante immersionem, vel post emersionem, crebro capiatur. Adscripto enim singulis observationibus tempore penduli, satis accurate, si dentur tres aliquae aut quatuor differentiae observatae, definiri poterit differentia altitudinum tempori immersionis vel emersionis competens. Nam varietas altitudinum mutua semper erit exilis, coeque minor, quo maior siderum a meridiano elongatio, manente eadem azimuthorum differentia, ita ut a motu Lunae proprio abstrahendo, incrementum, siue decrementum, altitudinis

altitudinis Lunae, sit ad incrementum, siue decrementum, altitudinis stellae, paruo temporis interuallo respondens, in ratione directa sinus azimuthi Lunae ad sinum azimuthi stellae: vnde lucide apparet, altitudinum variationem mutuum, eo temporis momento, quo sidera in eodem Tab. XIV. verticali obseruantur, esse omnium minimam. Ad quod Fig. 2. probandum sit in Z Zenith, in P Polus aequatoris, et in S Stella aliqua fixa. Ponatur eleuatio aequatoris $ZP = a$; distantia stellae a Polo $SP = p$; angulus ad Polum $ZPS = x$; azimuthus $SZP = y$; et distantia stellae a vertice $ZS = z$; eritque $\cos. z = \cos. x. \sin. a. \sin. p. + \cos. a. \cos. p.$, hinc differentiando $\sin. z. dz = \sin. a. \sin. p. \sin. x. dx$, vel $dZ = \frac{\sin. a. \sin. p. \sin. x. dx}{\sin. z.}$. Cum vero $\sin. Z = \frac{\sin. a. \sin. p.}{\sin. y.}$; obtinebitur incrementum, vel decrementum altitudinis stellae dz paruo temporis interuallo per dx expresso respondens $= \sin. a. \sin. y. dx$, ex qua formula supra allata facile fluunt.

Quod iam ad variationem differentiae altitudinum Lunae et stellae ex motu Lunae proprio oriundam attinet, illa facili negotio sequentium aequationum ope assignari poterit. Vocato enim incremento ascensionis rectae Lunae dato tempusculo respondente dx , erit variatio altitudinum competens, siue $dz = \sin. a. \sin. y. dx$, quae tricies circiter sumta aequatur absoluto incremento, vel decremento, altitudinis stellae eidem tempusculo conueniens. Ponatur simili modo mutatio declinationis Lunae paruo temporis interuallo debita $= dp$, eritque variatio dif-

ferentiae altitudinum a mutata declinatione Lunae proficiscens $= \frac{d \cdot p}{\sin. p.} \sqrt{(\sin. p.)^2 - \sin. p. \cdot \sin. a^2}$.

Adhibuimus quidem in calculo praecedenti differentiam altitudinum, utpote arculum quadrantis mobilis micrometro virgaque gubernatrice (*verge de conduite*) instructi ope observatu facillimum. Dubitare tamen non possumus, quin praedictorum elementorum inuestigatio facilius sub manus succederet, si observatores sectore Grahmi, vel potius tubo micrometro munito machinaeque parallaxicae imposito armati observandae declinationum differentiae tempore immersionis, siue emersionis, incumbent. Quocumque vero modo res peragitur, sufficit, ut ad tempus observationis distantia centri Lunae a coniunctione visa in ecliptica nec non differentia latitudinum Lunae et stellae quam diligentissime determinentur. Hae enim elementis, tanquam basi, sequens parallaxeos horizontalis inuestigatio in sequenti problemate, calculo ducta, explicanda inquitur.

PROBLEMA.

Datis immersionis stellae post Lunam e binis terrestribus locis longe distitis, positione datis, observatae momentis, nonagesimo gradu eclipticae eiusque altitudinis una cum loco Lunae viso respectu stellae occultatae ex observationibus ad praedicta momenta deducto, et motu Lunae vero horario in longitudinem, determinare eius parallaxin horizontalem.

SOLV.

464 METHODVS INVESTIGANDI

Distante Luna tempore immerfionis a nonagesimo
eclipticae ortum versus.

$$\text{Tempus Conj. verac.} \begin{cases} \text{pro loco orient.} = I + \frac{3600}{m} \left(Q + \frac{x \sin R \sin A}{\cos P} \right) \text{ sec.} \\ \text{pro loco occid.} = i + \frac{3600}{m} \left(q + \frac{x \sin r \sin a}{\cos p} \right) \text{ sec.} \end{cases}$$

Distante Luna a nonagesimo occasum versus.

$$\text{Tempus Conj. verac.} \begin{cases} \text{pro loco orient.} = I + \frac{3600}{m} \left(Q - \frac{x \sin R \sin A}{\cos P} \right) \text{ sec.} \\ \text{pro loco occid.} = i + \frac{3600}{m} \left(q - \frac{x \sin r \sin a}{\cos p} \right) \text{ sec.} \end{cases}$$

Ex hisce formulis sequentes eliciuntur expressiones
differentiam Meridianorum datam exhibentes:

Distante Luna in utroque loco a nonagesimo
ortum versus.

$$D = I - i + \frac{3600}{m} \left[Q - q + x \left(\frac{\sin R \sin A}{\cos P} - \frac{\sin r \sin a}{\cos p} \right) \right] \text{ sec.}$$

Distante Luna in utroque loco a nonagesimo
occasum versus.

$$D = I - i + \frac{3600}{m} \left[Q - q - x \left(\frac{\sin R \sin A}{\cos P} - \frac{\sin r \sin a}{\cos p} \right) \right] \text{ sec.}$$

Distante Luna a nonagesimo in loco orientiori
ortum versus, in loco occidentiori occasum versus.

$$D = I - i + \frac{3600}{m} \left[Q - q + x \left(\frac{\sin R \sin A}{\cos P} + \frac{\sin r \sin a}{\cos p} \right) \right] \text{ sec.}$$

Distante Luna a nonagesimo in loco orientiori oc-
casum versus, in loco vero occidentiori ortum versus.

$$D = I - i + \frac{3600}{m} \left[Q - q - x \left(\frac{\sin R \sin A}{\cos P} + \frac{\sin r \sin a}{\cos p} \right) \right] \text{ sec.}$$

Facili iam negotio aequationes sequentes pro pa-
ralaxi Lunae horizontali quaesita deducuntur, nempe:

In casu primo.

$$\alpha = \frac{m}{3600} \left(D - (I - i) \right) + q - Q$$

$$\frac{\sin R \sin A}{\cos P} - \frac{\sin r \sin a}{\cos p}$$

In secundo

$$x = \frac{\frac{m}{3600} (D - (1 - i)) + q - Q}{\frac{\sin r \cdot \sin a}{\cos p} - \frac{\sin R \cdot \sin A}{\cos P}}$$

In tertio.

$$x = \frac{\frac{m}{3600} (D - (1 - i)) + q - Q}{\frac{\sin R \cdot \sin A}{\cos P} + \frac{\sin r \cdot \sin a}{\cos p}}$$

In quarto.

$$x = \frac{\frac{m}{3600} (1 - i - D) + Q - q}{\frac{\sin R \cdot \sin A}{\cos P} + \frac{\sin r \cdot \sin a}{\cos p}}$$

Immersionis momentum licet observatu sit facilius, quam emersionis tempus, quippe quod maiorem attentionem requirens plerumque incertius, propter oculos observando defatigatos, evadat, dubitandum non existimavi, quia hic paucis subnecterem formulas parallaxi horizontali ex observata emersione stellae eruendae inferuentes.

Retentis igitur iisdem datarum quantitatum designationibus sequentes obtinebimus valores ipsius x:

In casu primo.

$$x = \frac{\frac{m}{3600} [D - (1 - i)] + Q - q}{\frac{\sin R \cdot \sin A}{\cos P} - \frac{\sin r \cdot \sin a}{\cos p}}$$

In secundo.

$$x = \frac{\frac{m}{3600} [D - (1 - i)] + Q - q}{\frac{\sin r \cdot \sin a}{\cos p} - \frac{\sin R \cdot \sin A}{\cos P}}$$

In tertio.

$$x = \frac{\frac{m}{3600} [D - (I - i)] + Q - q}{\frac{\sin. R. \sin. \Lambda}{\cos. P} + \frac{\sin. r. \sin. a}{\cos. p}}$$

In quarto.

$$x = \frac{\frac{m}{3600} (I - i - D) + q - Q}{\frac{\sin. R. \sin. \Lambda}{\cos. P} + \frac{\sin. r. \sin. a}{\cos. p}}$$

In supra exhibitis pro inuenienda parallaxi Lunae horizontali formulis semper istam parallaxin supposuimus per tempus inter obseruationes elapsam constantem; Cum vero differentiam nunquam non satis notabilem intercedere necesse sit, leuis ex formulis praecedentibus inuentae parallaxi Lunae horizontali adhibenda erit correctio, siue incremento, siue decremento parallaxis horizontalis interea temporis acquisito conueniens. Adeo quidem haec correctio exilis est, praesertim versante Luna prope Apogaeum vel Perigaeum, ut eam iure negligere possimus; verum ut leuioris huius correctionis rationem habere possimus, cum Luna in distantia a terra media versatur, ponamus parallaxin Lunae horizontalem tempore obseruationis in loco orientaliore = x , in loco autem occidentaliore = $x + z$, ita ut z designet incrementum vel decrementum parallaxeos horizontalis tempore inter obseruationes elapso debitum. Quo facto inuenimus praedictam correctionem parallaxeos horizontalis

$$= \frac{\cos. p. \sin. R. \sin. \Lambda}{\cos. P. \sin. r. \sin. a} + x$$

quo valore dempto quantitati parallaxeos horizontalis ex formulis supra inuentis determinatae, vel ad eandem addito,

dito, prodibit parallaxis Lunae horizontalis momento eclipses in loco orientiori obseruato respondens; atque haud difficulter patebit, vtrum quantitas ista addenda sit, an subducenda. Tabulae enim Astronomicae accurate satis suppeditant incrementum, vel decrementum parallaxeos horizontalis pro tempore inter binas obseruationes quaesitum, et ex positione Lunae, respectu eclipticae nonagesimi gradus, de vnitatis valore siue affirmatiuo, siue negatiuo iudicandum est. Si enim Luna in vtroque loco tempore obseruationis a nonagesimo siue ortum siue occasum versus distans visa fuerit, vnitas subducenda, e contra vero addenda est, versante Luna in diuersis eclipticae respectu nonagesimi quadrantibus.

Superest vt pauca addam de delectu et obseruationum et locorum terrestrium huiusmodi obseruationibus iustituendis destinandorum, obseruando. Considerandi scilicet hic veniunt casus, quibus leuis error siue in meridianorum differentiam, siue in obseruationes ipsas, ratione temporis, admissus, maiorem minoremue in parallaxeos calculum trahat errorem. Hunc in finem ponamus errorem, siue in meridianorum differentia, siue in ipsis obseruationibus = dz , et errorem in parallaxi horizontali hinc pendentem = dx , prouenietque

$$dx = \frac{m dz}{3600 \left(\frac{\sin R \cdot \sin A}{\cos P} + \frac{\sin r \cdot \sin a}{\cos p} \right)}$$

Quae formula declarat errorem in parallaxi horizontali maioris vel minoris esse momenti; pro minori maiorive valore terminorum $\frac{\sin R \cdot \sin A}{\cos P}$ et $\frac{\sin r \cdot \sin a}{\cos p}$ rationem indicantium parallaxium longitudinis obseruationum temporibus respondentium. Vnde sequitur

1. Errorē augeri adhibita horum terminorum differentia, id quod semper accidit quandoeunque Luna tempore eclipsos in utroque loco in eandem plagam a nonagesimo eclipticæ distat. Error tamen minor erit hærente Luna propè nonagesimum.

2. Error maior erit notabilis cum Luna in diversis eclipticæ quadrantibus respectu nonagesimi observata fuerit, quo casu termini prædicti in unum summam sunt colligendi; quæ conditio reliquis, ad errores minima quæ fieri potest cura evitanda, longe præferenda est, etque magis, quo longius Luna à nonagesimo distat.

Ex hisce concludimus, observatores in determinanda hac methodo parallaxim incertitates constitutas esse oportere in locis secundum longitudinem longe distis, quo errores siue in differentia meridianorum, siue in observationibus ipsis inevitabiles, minime Astronomos de vera parallaxeos Lunæ quantitate iuveniendâ detineat. Liquet vero simul, errorem in determinandâ parallaxi Lunæ horizontali in partibus æquatoris, quibuscunque in locis terrestribus, et sub quibusvis conditionibus methodo nostræ maxime faventibus observationes institutæ fuerint, minimum æquare errorem admissum siue in observationem ipsam, siue in meridianorum differentiam, in minutis secundis temporis divisum per 4.

Cum autem eiusmodi conditiones sint oppido rare et forte nunquam possibile, Astronomis saltem intendendum est, ut observationes correspondentes, quas methodus hæc postulat, in locis terrestribus instituantur, quarum positio ita sit comparata, ut terminorum $\frac{\sin. R. \sin. k}{\cos. P}$ et $\frac{\sin. r. \sin. a}{\cos. p}$ siue summa, siue differentia obtineant valores
vel

vel unitate maiorem, vel parum minorem. Si ex. gr. ut initio huius dissertationis proposuimus, binī observatores alter Petropoli, alter in terra Camtschatka in vico Bolscherezkoi eandem stellae cuiusdam fixae a Luna eclipsae iuxta praecepta supra tradita observarent, leni negotio ex formulis nostris inuenirentur errorem, siue in differentia meridianorum, siue in ipsa observatione fore ad errorem inde natis in parallaxi Lunae horizontali ut 3. ad 2. circiter, hoc est, si in differentiam meridianorum irreperit error triginta minorum secundorum temporis, error exinde ortus in parallaxi Lunae horizontali aequabitur 10. tantum minutis secundis aequatoris.

Supponamus iterum, Parallaxin Lunae ex Petropoli et Londini observata fixae a Luna eclipsae esse deducendam, reperirentur errorem in parallaxi horizontali Lunae errori in meridianorum differentiam admissio, ferme aequalis h. e. error 15. min. sec. temporis, siue in differentia meridianorum praedictorum locorum, siue in observatione eclipsae, prodiret valet errorem 15. min. sec. aequatoris in parallaxi horizontali nostri satellitis.

Hinc vicissim facile intelligere possumus, quantus certitudinis gradus in determinanda meridianorum differentia ab eclipsibus fixarum a Luna sit expectandus. Patet enim, hanc methodum esse omnium certitudine praestantissimam, quando de locis in tellure vicinis agitur. De locis autem positione determinandis longe diffitis si sermo est, haud aequè feliciter res succedit. Si e. g. in differentiam meridianorum Petropoli inter et vicum Bolscherezkoi hac methodo inquirendum esset, in parallaxi autem Lunae horizontali ex tabulis lunaribus

desumpta deprehenderetur error 30'' (saepè maius adhuc inter parallaxin Lunae certis ex tabulis desumptam et veram esse discrimen haud dubito) ex praecedenti ratione colligimus differentiam meridianorum errore triplo circiter maiori siue 1'. 30''. temp. affectam, quin magis erroneam, quam ex eclipsibus satellitum Iouis.

Ex hisce demum considerationibus colligimus, haud infructuosum futurum, neque parum utilitatis parallaxi nostri satellitis accuratius rimandae esse allaturum, methodo, quam proponimus, innixum Astronomorum laborem. Maximam quidem adhibendam esse prudentiam ex praecedentibus ratiociniis non intelligere non possumus; cum vero aeuo nostro obseruatoria exquisitissimis instrumentis, horologiisque coelo consonis exactissime sint exornata, vel exornari queant, quin haec omnia ad voluntatem nostram fluere possint, nemini vel dubitare licet.

Antequam dissertationi huic finem imponam, pauca de utilitate huius methodi ad parallaxin planetarum definiendam afferre haud inconsultum videtur. Intelligimus enim facile ex supra dictis, planetarum parallaxin, hactenus minus perfecte cognitam, aequè accurate ac lunarem, hoc modo inuestigari posse, si obseruationes occultationum fixarum a planetis in diuersis telluris habitationibus habitae Astronomis suppetere.

Leui quidem attentione patet, occultationes fixarum a planetis multo esse rariores, quam eclipses fixarum a Luna, ex quibus non nisi 12. ad summum circiter spatio annuo, intra quod Luna 13 orbitam 100. circiter stellas nudo oculo conspicuas complectentem percurrit, Astronomorum oculos non fugiunt. Sed planetae
Mars

Mars et Venus ambo definiendae nostri systematis solaris amplitudini inferuentes eclipsium fixarum a planetis difficultatem compensare videntur, cum saepius ad nebulosam cancri et ad pleiades appellant. Maxima vero difficultas, in observandis fixarum a planetis occultationibus obuia, versatur in vero siue immerfionis, siue emerfionis momento observando, praesertim si stella fuerit inferioris honoris. Hanc ob causam huiusmodi eclipses praestantissimis tubis micrometris munitis observare decet.

Triplici equidem modo in calculo parallaxium planetarum eclipsibus fixarum innixo errari posse manifestum est. 1.) Considerandus est error in momento eclipsios. 2.) error in differentia meridianorum, et 3.) error in distantia centri planetae a coniunctione visa cum stella tempore immerfionis, siue emerfionis. Primo loco nominatus error eo provenit, quod fixarum a planetis occultationes non aequae sint momentaneae ac earum eclipses a Luna. Propter radiorum luminis dilatationem enim, diametrum planetae amplificantem, stella per intervallum temporis eo longius, quo planetae motus e terra visus tardior, planetae margini inhaerere videtur, paulatimque, si stella fuerit parva, evanescens a planeta, ubi radius luminis circum aberrationis constituentes sunt fulgentissimi, non amplius, vel ante verum immerfionis post planetae corpus momentum, discerni potest.

Ponamus motum planetae horarium in longitudinem in minutis secundis expressum = m , et exiguam distantiam, qua stella a margine corporis planetae abesse posset, tempore, quo oculo armato sese iam, propter amplificatam diametrum, subduxerit = δ . Proinde error in

mo-

472 **METHODVS INVESTIGANDI**

momentum eclipses admissus erit $= \frac{1699}{m} \delta$. Ad errorem iam in parallaxi planetae horizontalem irrepturum definiendum, substituitur in formula supra inuenta

$$d x = \frac{m d \delta}{3600 \left(\frac{\sin R \sin A}{\cos P} + \frac{\sin v \sin \alpha}{\cos p} \right)}$$

ipsius $d x$ valor inuentus $\frac{1699 \delta}{m}$; prodibitque error in parallaxi horizontali quaesitus $= \frac{\delta}{\frac{\sin R \sin A}{\cos P} + \frac{\sin v \sin \alpha}{\cos p}}$

ex quo apparet, errorem hunc semper esse eiusdem valoris, quaecumque fuerit planetae velocitas; ita ut δ hic pro quantitate constanti valde parua, nullamque in parallaxi planetae determinanda errorem productura, si ambo obseruatores eadem quantitate, inque eandem partem errauerint, haberi possit.

Errorem iam si consideremus, in quem erronea meridianorum differentia inducere valet, patet, illum fore eo maiorem, quo planeta fuerit rapidior, posita ratione parallaxium longitudinalis, tempore obseruationum, siue quantitate $\frac{\sin R \sin A}{\cos P} + \frac{\sin v \sin \alpha}{\cos p}$ constante. Ex praecedentibus autem cognouimus, errorem in momentum eclipses admissum nullo modo a velocitate planetae pendere, vnde methodum colligimus, planetae parallaxin accuratissime determinandi, eclipsi stellae fixae e binis in tellure locis obseruata, dum planeta a tellure visus simul prope stationem suam haeret, innixum. In stella Martis scilicet circa tempus, quo achronice oritur, vbi simul eius parallaxis est maxima. Talis forte eclipsis continget circa d. 11. Dec. lt. v. 1753, cum planeta Mars, in ipsa statione versans ad directionem, cum stella

Stella δ arietis adeo arcte coniungitur, ut eius a praedicta stella boream versus distantia futura sit valde exigua, vel forsitan nulla. In Venere haec obtinent, cum inter elongationem a Sole, vbi maxime splendet, et coniunctionem inferiorem cum Sole intermedia versatur. Ponamus e. gr. motum horum planetarum alterutrius diurnum, die quo stellam fixam occultat, $= 6'$, vel eius motum horarium in longitudinem $= 15''$, occultatio vero observata sit e duobus in tellure locis longe diffitis, v. g. Petropoli et in vico Bolscherezkoi in terra Camtschatka, ita ut $\frac{\sin. R \sin. A}{\cos. p} + \frac{\sin. r \sin. a}{\cos. P} = 1.5$ quam proxime. Iam si in differentia Meridianorum praedictorum locorum supponatur error integri minuti primi temporis, manifestum est, errorem hinc pendentem in Parallaxi planetae horizontali ad $\frac{1}{6}$ tantum affurgere, adeo ut non obstante errore 15 min. prim. in differentia longitudinum locorum planetae parallaxis caeteris paribus ad partem sui 130 definiti queat.

In maximam autem difficultatem incurrere videtur summa cura diligentia tempore immersionis determinanda planetae a coniunctione visa cum stella in ecliptica distantia, quae duplicem ob causam erronea evadere potest, partim ob errorem in differentia, siue altitudinum, siue declinationum planetae et stellae, partim ob summam difficultatem acuitate observandi planetarum diametros apparentes. Astronomi exquisitissimis instrumentis variisque modis de diametris planetarum determinandis adnixi rem iam consummatam exploratamque esse vix fateentur. Cum vero ad calculum parallaxeos horizontalis instituendum differentia potius differentiarum quam absoluta planetae a
 Tom. IV. Nou. Com. O o o coniu-

coniunctione visa distantia in utroque loci observata requiratur, huiusmodi errores saepe leuioris momenti sunt censendi, praesertim si, adhibito tubo Gregoriano micrometro instructo machinaeque parallacticae imposito, observatorum cura in mensuranda ipso immersionis momento declinationum stellae et planetae differentia euigilaret.

OBSERVATIO INSOLITI LUMINIS AUSTRALIS PETROPOLI HABITA

Auct. A. N. GRISCHOW.

Singulas aurorae borealis observationes, cum in nostris oris septentrionalibus haecce lumen polare noctes saepissime illustret, Physicorum disquisitioni submittere parum utilitatis et erroneis huius meteori hypotesibus discutendis, et verae theoriae detegendae afferre videtur. Singulares tamen et notatu dignissimas huius luminis apparitiones cum naturae cultoribus communicare vel maxime necessarium, saepe numero autem neglectum esse patet. In huiusmodi apparitionibus merito annumeratur meteorum, quod per aliquot dies in horizonte australi quasi immobile observavi, eoque magis, quod eius locus, tempestatis mutationes subsequatae, et reliquae circumstantiae ad diligentioreni coeli boreali lumine illustrati contemplationem observatores excitare valent.

D. 6. Nou. st. v. 1791 circa h. 9. p. m. mihi coelum stellatum speculanti insolitum quoddam visum est lumen rutilans duos circiter gradus longum in ipso horizonte

zonte australi extensum, in seram usque noctem in eodem loco, nulla observata figurae variatione, subsistens. Meteoron hocce valde mirans, suspicatus sum, splendorem hunc proficisci a stella primae magnitudinis Fornahant horizonti Petroburgico proxima, deinde vero vesperi istam stellam a loco huius luminis satis longe esse remotam observavi.

D. 7. Nou. Cum crepusculo, stellis primae et secundae magnitudinis iam eminentibus, coeloque eximie undique sereno lumen hocce australe iterum sub eadem figura conspexi 10 circiter gradibus a pristino loco in ipso vero horizonte orientem versus distans, in vno eodemque loco permanens ad h. 9. p. m. usque, quo nempe tempore massa rutilans spatio horae octantis nubecula turbida cingebatur, subitoque radiationes fulgurationum haud absimiles ex ipsa massa rutilante surgentes sese undantes per totum coelum diffundebant. Paulo post coelum undique nubibus e nubecula lumen australe cingente surgentibus magis ac magis turbidis inuoluebatur, nullo per hocce dies aurorae borealis animaduerso vestigio.

Hocce notatu dignissimum lumen australe haud inepte probandis mutationibus tempestatum lumen boreale subsequenter inferuire videtur, cum ventus biduo continenti ex NNW spirans ipso, quo lumen australe resolutum, radios emittebat, momento ex eadem plaga australi flare caepit, tempestatisque mutatio satis notabilis cuiusque solutio insequabatur.

476 OBSERVATIO INSOLITI LUMINIS

Ad circumstantias huius meteori tempestatisque mutationes magis dilucidandas adiungere consultum visum est meteorologicarum observationum triduum.

| Dies et horae | Barom. mensurae Paris. | therm. De Isle | Directio et vis venti | Directio nubium. | Coeli facies. |
|-------------------|------------------------|----------------|--------------------------------------|------------------|---|
| VI. Nou. | | | | | |
| 7½ a. m. | 27. 34 | 153½ | NW. NWZN. f. 2 | NWZN f. 2 | Coelum fere vndique grato serenum |
| 1. p. m. | 27. 41½ | 153½ | NW. f. 2. | NW. f. 2 | Nubes turbidae multum dissociatae. |
| 10. p. m. | 27. 70 | 156½ | NNW. f. 2. | - - | Fere vndique coelum turbidum stellis emicantibus. |
| VII. Nou. | | | | | |
| 7½ a. m. | 27. 90 | 161½ | NNW. plg. 1 | NNW. 1 | } Spissae nubes albae, reliquam coelum eximie serenum. |
| 12. - m. | 27. 99 | 156 | NNW. plg. 1 | NNW. plg. 1 | |
| 4. p. m. | 28. 11 | 157 | N. plg. 1 | - - | Fere vndique coelum grato serenum |
| 10½ p. m. | 28. 15 | 161½ | Inde ab h. 9½ venti austr. vis. f. 2 | 5. f. 2. | Coelum vndique obnubilatum. |
| VIII. Nou. | | | | | |
| 9. a. m. | 28. 17 | 159½ | SW. f. 2. | - - | Nubes subturbidae passim dissociatae. Circa Solis ortum coelum rabes |
| 1. p. m. | 28. 09 | 158½ | SW. f. 2. | - - | Nix larga vsque ad h. 6. p. m. |
| 9. p. m. | 27. 84 | - | SW. f. 2. | - - | Inde ab h. 8. p. m. ad h. 10. nubes multum dissociatae, deinde coelum vndique turbidum. |
| 10½ p. m. | 27. 81½ | 146½ | SW. f. 3 nisi 3 | - - | |

OBSERVATIONES

LIPSIAE HABITAE

an. 1749. stil. nou.

^a
G. HEINSIO.

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS.

Die 16 Septembr. quo Iupiter oppositionem cum Sole paulo post meridiem celebrabat, eclipses Satellitum Iouis primi et secundi obseruare licuit; quae quidem obseruationes, quamuis vsui geographico rigore summo respondere nequeant, theoriae tamen Satellitum inferuire videntur, cum loca istorum et geocentrica et heliocentrica simul respiciant. Scilicet tempore oppositionis Solis et Iouis umbra Iouis ab eius disco tecta immediatam immersionis vel emersionis obseruationem non concedit; sed appulsus tantum disculi Satellitis ad Iouis marginem annotare tunc licet, ad quos exactiori modo discernendos Tubum Gregorianum ita instruxi, vt iste obiecta secundum diametrum 97. vicibus amplificaret. Hoc apparatu et Satellites et fasciae Iouis, caelo optime fauente, nitide conspici potuerunt. Praeter fascias *m, n*, versus borealem et meridionalem Iouis marginem conspicuas duae maiores *ab, cd*, ad sensum in te se parallelae, discum Iouis ita traiciebant, vt extremitas tum borealis *ab*, tum australis *cd*, a centro disci distaret: diametri Iouis, et vnaquaeque dimidio huius internalli centrum versus lata esset; quantum quidem

dem sensum iudicio constitit. Figura sua erecto hor. 8, 23' delineata est, et fasciae *ab, cd*, successu temporis per omnes observationes sequentes sicut hunc secundum apparentiam conseruarunt, His praemissis

Tempore vero

8^b. 18'. 8". Satelles primus ad marginem Iouis orientalem prope extremitatem fasciae *ab* inferiorem instar tuberculi in conspectum venire incipiebat. Intra pauca temporis secunda hic certus sum.

18. 28. Egressum Satellitis certe fieri optime convincebar.

20. 3. Emergio totalis accidit, qua scilicet Satelles instar disculi margine suo occidentali limbum Iouis orientalem tangebatur ad *r*. in figura. Satelles secundus, qui ad immersionem appropinquabat, tunc circiter ad *e*. positus erat.

46. 24. In accessu Satellitis *z*di ad Iouem intervallum inter limbum disculi Satellitis orientalem et marginem Iouis occidentalem aequale diametro Satellitis *z*di aestimaui.

56. 40. Certe credebam, Satellitem *z*dum margine suo orientali nunc tangere limbum Iouis occidentalem ad *i* in figura. In hoc aestimio intra minutum temporis certus sum.

9. 0. 40. Dimidium disculi Satellitis a limbo Iouis tectum iudicaui.

6. 0. Satelles secundus ultima vice instar tuberculi

TAB. XIV.

Fig. 3.

cui admodum exigui ad limbum Iouis occidentalem videri potuit ; statim post e conspectu ereptus est.

11^b. 44'. 10'', Satelles 2^{dus} instar tuberculi ad orientalem Iouis limbum prorumpere primum cernitur.

46. 10. Dimidium disculi Satellitis emerferat.

48. 20. Disculum Satellitis margine suo occidentali in contactum cum Iouis margine ad e peruenire credebam.

49. 20. Contactus certe celebratus erat. Emerfio igitur multo citius absoluta fuit, quam Immerfio. Inclinata erat semita Satellitis *ie* ad fasciam *ab* orientem versus.

Correctionem temporis altitudines Solis respondentes praeberunt, pariter ac in obseruatione sequente.

Die 10. Nouembr.

Tempore vero

5^b. 18'. 50''. Contigit Emerfio prima Satellitis *imi* ex umbra Iouis. Licet coelum videretur vaporosum et crepusculum adhuc duraret ; tempore emerfionis tamen Iupiter cum Satellitibus et fasciis optime conspici potuit. Obseruatio facta est ope Telescopii Gregoriani sub apparatu, quo istud obiecta secundum diametrum 52 vicibus auget.

Die 24. Decembr.

Eodem Telescopii apparatu, quo d 10. Nouembr. visus erat, eclipsin Satellitis tertii Iouis animaduertere licuit.

480 OBSERVATIONES ASTRONOMICAE.

licuit. Immerfionis obferuationem quidem nubes fubinde interuenientes turbauerunt. Sic enim

Tempore vero

4^b. 28'. 45". Satelles 3^{tus} fenfibiliter lumine decrefcere videbatur, reliquis Satellitibus probe confpiciis, donec

29. 6. Satelles lumine valde diminutus vna cum Ioue a nube c confpectu eriperetur, qui non nifi

30. 21. Iterum concedebatur, et per 4. vel 5. fecunda temporis tantum durabat. Satellitem tunc immerfum deprehendi, licet iftum femel vel bis lumine admodum debili, quali in infanti Immerfionis totalis, adhuc corufcare crederem, incertus tamen. Interim pro certo habeo immerfionem totalem accidiffe inter 4^b. 29'. 6". et 4^b. 30'. 21"; et a vero non multum aberrabis, fi eam ponas ad 4^b. 30'. 10".

31. 7. Iupiter nubibus denuo liberatus diftincte docebat Satellitem 3. euanuiiffe

7^b. 13'. 21". Contigit Emerfio prima Sat. 3. ad diftantiam a proximo Iouis limbo = 1 $\frac{1}{2}$ diam. 2 $\frac{1}{2}$ ad fenfum. Obferuatio eft exacta, coelo admodum fereno.

16. 20. Lumine pleno Satelles effulgebat.

Modum, quo temporis correctio inftituta hic fuit, defcriptum inuenies in fequente Eclifis lunaris refectione.

OBSER-

OBSERVATIO
ECLIPSIS LVNÆ PARTIALIS

d. 23. Decembr. 1749.

Tempus in hac obseruatione ad duo horologia oscillatoria comparauī, quorum statum respectu temporis sideris ex altitudinibus Capellæ iisdem, diebus 23. et 25. Decembr. captis, optime cognoui. Inde etiam innouit status eorundem respectu temporis veri solaris, et calculus variis eiusmodi altitudinibus superstructus meridiem verum d. 23. Decembr. consensu egregio in dictis horologiis patefecit.

Tempore vero

7^b. 32'. 0". Penumbra ad marginem Lunæ medio loco inter Phocildem et Schillerum dilata se ostendebat. Obseruatio facta est Tubo astron. 6. ped.

38. 30. Penumbra manifesta in dicto loco per Tubum eundem.

40. 17. Initium Eclipsis fieri creditur. Obseruationem hanc, prout et omnes sequentes, nisi expresse aliud moneatur, peregrinæ ope Telescopii Gregoriani sub eo apparatu quo istud obiecta secundum diametrum 52 vicibus auget. In hac obseruatione intra 20 secunda temporis certus fuit. For-
san initium paulo citius momento notato contigit, puta 7^b. 40'. 7". Stellula quædam videbatur in vicinia marginis obscu-

Tom. IV. Nou. Com.

P p p

rati

rati Lunae, intensitate luminis circiter aequipollens. Satellitibus Iouis, prout hi per tubum iam memoratum conspici solent. Haec stellula appropinquabat ad punctum peripheriae lunaris, quod (quantum iudicio ad maculas lunares comparato consistit) a puncto limbi lunaris centro Schickardi normaliter respondente circiter 17, vel 18. gradus peripheriae lunaris distabat versus regionem Tychonis. In hoc loco etiam stellula

7. 47. 2'. ab obscurato quidem, ast adhuc luce debili donato, Lunae margine occultabatur. Stellula, antequam disparebat, disculo suo, cuius diametrum circiter = 2". aestimabam, tota intra marginem Lunae conspiciebatur, et statim post disparitionem instanti contigit. Indicium, inde petent licet, marginem Lunae, eclipsi quatuor affectum, ex luce spuria tamen adhuc augmentum aliquod capere.
54. 17. Umbra tangit Tychonem.
55. 22. Umbra per medium Tychonis.
56. 27. Tycho totus in umbra.
- Umbra hic bene terminata apparuit.
82. 11. 30. Umbra lente accedit ad Bullialdum.
12. 27. Umbra certe tangit Bullialdum.
14. 17. Totus Bullialdus in umbra.
31. 48. Totus Fracastorius in umbra.
38. 0. Umbra nunc diluta cernitur coloris subtilis.
8. 44. 10". Umbra appellit ad St. Theophilum.

46. 26. Umbra per medium St. Theophili.
 47. 36. Totus St. Theophilus in umbra.
 Observationes huius maculae, umbra nunc male terminata, paulo incertae sunt.
 49. 36. Umbra ad Goclenium.
 51. 36. - - - per medium Goclenii
 53. 36. - - - totum Goclenium inuoluit.
 Meliori paulo successu peractae sunt observationes iam enumeratae.
 56. 26. 30. Tycho incipit emergere. Observatio dubia.
 27. 18. Medium Tychonis emergit. Observatio bona.
 28. 28. Tycho totus emergit.
 Nubes nunc coelum occupabant.
 57. 30. Lunam in hiatus nubium constitutam per telescopium terrestre 3. ped. contemplans, finem eclipsis post 2. vel 3. minuta prima temporis instare iudicabam. Ipsam autem finis observationem nubes denuo superuenientes impediuerunt. Ninxit postea.

Observationes Meteorologicae.

In thermometro mercuriali consueto notavi frigus maximum d. 11. Ianuar. hor. 9. matutina 176 $\frac{1}{2}$ grad. calorem autem maximum d. 9. August. hor. 4. post merid. 104 $\frac{1}{2}$ grad.

D 22. Septembr. circa hor. 8. vespertinam aurora borealis ingens conspicua erat. Praesertim autem radii (vel potius radiorum plurium congeries) colorem rutilum prae se ferentes, tum Borolybicum, tum Graecum versus, usque ad Zenith fere extendi videbantur. Eandem auroram Romae quoque vilam fuisse ex nouis publicis postea constat.

OBSERVATIO ECLIPSIS SOLIS

An. 1750. d. 8. Ianuar. st. n. temp. ciuil. horis antemeridianis
Lipsiae habita

G. HEINSIO.

Coelum quidem diebus 7. et 8. Ianuarii obseruationibus tunc pro correctione temporis, ad duo horologia oscillatoria numerati, tum ipse Eclipsis optime fuit; circumstantiae tamen, nonnullae limites quosdam ipsa circumscripserunt. Sic tempus verum ex altitudinibus Solis respondentibus rigore sufficienti cognoscere vicinia Solis ad horizontem, accedente situ observatorii mei non satis idoneo, non potuit. Quamobrem ad explorandum horologiorum statum altitudines Capellae quadrante consueto diebus 7. et 8. Ianuar. captas adhibui, et ex respondentibus eundem respectu temporis fiderei optime cognoui, egregio consensu cum iis obseruationibus, quae in seipsum similes diebus 23. et 25. Decembri an. 1749. institueram, siquidem dicta horologia intervallo temporis a 23. Decembr. usque ad 8. Ianuar. non interrupto ordine motum conseruauerant. Sic quoque altitudines Capellae diebus 7. et 8. Ianuar. captae, subducto calculo, statum horologiorum respectu temporis veri solaris consensu exoptato patefecerunt, ita ut de temporis dimensione exacta nullus superesset scrupulus.

Quod Eclipsin ipsam attinet, situs observatorii ad spectum Solis non nisi hor. 9. 21' concessit, quo momento Eclipsis iam multum processerat. Ab eo tempore
vsque

tempore ad finem Eclipsis Solem. optime deinceps contem-
plari licuit. Maculae insignes in Sole erant conspicuae,
ad quas appulus Lunae annotare satagebam, quem in fi-
nem quoque positionem macularum in disco Solis et re-
spectu diurni, opp. Machinas parallacticae, Tom. I. Nou.
Commentar. p. 483. descriptae, durante adhuc Eclipsi
observabant, quam schema situ erecto exhibet. Macula
a, prae ceteris maxima erat et nigerrima, hal ne ingenti
cincta, ad quam sursum in aliqua distantia macularum
minorum catena excurrerat. Hanc catenam vna cum
halone in computum non traho, quotiescunque in se-
quentibus maculam *a* nomino, sed nucleum tantum eius
nigerrimum subintelligo. Nucleus iste per tubos mino-
res integer quidem, ast per Telescopium Gregorianum
ex aliquot partibus intervallo exiguo lucido a se inui-
cem seiunctis compositus videbatur; has tamen partes
coniunctim sumptas pro nucleo maculae *a* in sequentibus
habeo, dum appulus Lunae ad maculam *a* noto. Ma-
culae *b* et *d*, licet ad magnitudinem ipsius *a* non assur-
gebant, prae reliquis tamen distinctae et nigerrimae ap-
parebant.

TAB. XIV.
Fig. 4.

His ita expositis appulus Lunae ad maculas sequen-
tes animadvertere licuit.

Temp. vero
ante meridiem

9^h 22' 24". Peripheria Lunae maculam *a* tangebatur, ob-
servatio, facta est ope Tubi astronomici
5. ped.; copia enim Telescopii Gregoriani
nondum dabatur.

— 22. 11. Peripheria Lunae per medium maculae *a*.
P.P.P. 9^h

9^b 23'. 50". Vel aliquot secunda ferius, macula *a* tecta. Terminus scilicet phaeos figuram videntem tunc referebat, ob vapores in aëre volitantes. Vtraque observatio per eundem Tubum 5 ped. peracta est.

Sequentibus observationibus inservit Telescopium Gregorianum, sub apparatu, quo istud obiecta secundum diametrum 52. vicibus amplificat.

10. 0. 38. Medium maculae *a* emergit.
 10. 0. 58. Integer nucleus maculae *a* emergit.
 — 10. 24. Maculam *d* tangit peripheria Lunae.
 — 11. 5. Per medium maculae *d* transit peripheria Lunae.
 — 11. 33. Toti macula *d* immersa. Observatio haec paululum dubia est.
 — 51. 42. Medium maculae *d* emergit.
 — 52. 17. Macula *d* tota emergit.
 11. 12. 32. Finis Eclipsis maxime propinquus.
 — 12. 36. Finis nunc certe contingit.

Intercapedines harum observationum locum faciunt determinationi positionis macularum in disco Solis et respectu diurni, ope Machinae parallacticae, sic quidem, ut post immersionem maculae *a* positio maculae *d* ab Eclipsi liberae definiretur, quam ad hor. 9. 45'. refero. Emersa macula *a* cum reliquis adjacentibus, positiones macularum *a*, *b*, *f*, observatae sunt, quas ad hor. 10. 35'. alligo. Observationes macularum omnium excepta macula *f*, reiteratis vicibus, consensu optimo, sunt institutae, ex duabus autem maculis ad *f* notatis per *f* intelligo inferiorem. Re

Repraesentent $p s$ portionem diurni limbi superioris Solis (situ scilicet erecto,) circulus $\pi \sigma$ Solis discum, π limbum Solis praecedentem, σ sequentem, Rectae πp , σs , perpendiculares ad $p s$, tangant discum in π , σ , ut $p s$ diametrum Solis apparentem exhibeat, cuius quantitatem in partibus temporis solaris ex mora transitus disci Solis per horarium exprimere licet. $\equiv 2'$. $2\frac{1}{4}''$, observationibus consentientibus. Intelligantur per maculas b , a , f , d , rectae $b \beta$, $a \alpha$, $f \Phi$, $d \delta$, parallelae ad πp . His factis, in iisdem temporis partibus pro mac. b inveni $p \beta = 0'. 31''$, $b \beta = 1'. 32''$.
 - - - a - - - $p \alpha = 0. 4\frac{1}{4}'$, $a \alpha = 1. 19\frac{1}{2}'$
 - - - f - - - $p \Phi = 0. 55\frac{1}{2}'$, $f \Phi = 1. 23''$
 - - - d - - - $s \delta = 0. 17$, $d \delta = 1. 1.$

Observatae sunt etiam positiones macularum a et d horis antemeridianis die 7. Ianuar. eaeque ad hor. 11. 32'. adstrictae, ita definitae, vt pro mac. a effet $p \alpha = 0'. 54\frac{1}{2}''$, $a \alpha = 1'. 19''$.
 - - - d - - - $s \delta = 0. 9\frac{1}{2}'$, $d \delta = 1. 1.$

Cum motus macularum istarum in disco Solis hoc modo pro dato tempore constaret, assignare quoque licuit earum positionem ad id tempus, quo vnaquaeque macula obscurationem maximam passa est. Contigit haec pro macula a die 8. Ianuar. hor. 9. 42'; pro macula d hor. 10. 31'. proxime, ad quae ergo respective tempora

pro mac. a statnere licebit $p \alpha = 0'. 41\frac{1}{2}''$, $a \alpha = 1'. 19\frac{1}{2}''$.
 - - - d - - - $s \delta = 0. 16\frac{1}{2}'$, $d \delta = 1. 1.$

Hanc maculae a vel d positionem durante eius Eclipsi, ob exiguum temporis intervallum, constantem sumsi,

sumsi, ut ope istius conclusionis nonnullae possent formari.

Observatio Eclipsis nostrae calculum multum anticipavit. Sic in Calendario Lipsensi ponitur Finis Eclipsis Lipsiae hor. 11. 29'. 34''; et in Ephemeridibus *Manfredii* hor. 11. 31', cum observatio hor. 11. 12'. 36'', finem factum esse doceat. Ut igitur quaedam calculi elementa pro circumstantiis observationis nostrae corrigere liceret; elementa in Calendario Lipsensi ex Tabulis *Cassini* ad projectionem Eclipsis efficiendam proposita ita adhibui; ut positionem semitae visae centri Lunae respectu disci Solis immoti et meridiani seu circuli horarii proxime obtinerem; divisione semitae istius ratione temporis ex observatione finis eclipsis quodammodo iam correctae. Summi nempe:

| | | |
|---------------------------------------|----|---------------|
| Parallaxin Lunae horiz: | == | 0°. 59'. 44". |
| Latit. Lunae hor. in ☉ | == | 0. 41. 53! |
| Inclinat. vias visae centri penumbrae | | |
| ad circulum latitud. | == | 84. 21. 45. |
| Angulum Eclipticae cum meridiano | == | 82. 21. — |
| Horarium Lunae a Sole verum | == | 0. 33. 57 |
| Semidiametrum penumbrae | == | 0. 32. 32! |
| Semidiam. Solis ('convenientem' cum | | |
| mora eius per circ. horarium) | == | 0. 16. 20! |
| Semidiam. Lunae horiz: | == | 0. 16. 11! |
| - - - - in altit. quam Sol | | |
| circiter habuit tem- | | |
| pore Eclipsis | == | 0. 16. 13. |
| Declinationem Solis austrab. | == | 22. 15. 20. |
| Elevat. Aequator. Lips | == | 38. 36! |

Facile

Facile autem perspexi, semitam visam centri Lunæ respectu disci Solis immoti et circuli horarii methodo consueta ex his elementis constructam de durationibus occultationum macularum *a* et *d* observationibus, non assentire, sed durationes istas iusto minores prodere; quamobrem semitam istam curvilineam motu sibi parallelo propius admoueri ad centrum disci solaris, donec consensus daretur inter durationes occultationum macularum, quas observationes docebant, cum iis, quas schema sic correctum suppeditabat, habita variabilis quantitatis motus semihorarii Lunæ in hac semita ratione. Sic tandem, omnibus bene inter se consentientibus, sequentes formare licuit conclusiones. Inveni scilicet

Distantiam visam centrōrum ☉ et

☾ minimam = 15'. 0". circ. max.

Quantitatem partis diam. Solis (b-

scuratae in o sc ratione maxima = 17. 33. — —

et inde Quantitatem Eclipsis = 6. digit. 26 $\frac{1}{2}$. min

Tempus obfuscationis maximæ visæ = 9^b. 58'. 45". t. ver.

Translato deinceps hoc schemate particulari sic correcto ad schema generale, quod projectionem telluris exhibere solet, deprehendi

Latitudinem centri Lunæ ve-

ram seu ex centro terræ vi-

sam tempore ☉ ☾ veræ

seu Nouilunii veri esse debere = 0°. 43'. 15". bor.

et Tempus Nouilunii veri seu ex centro terræ visi in Ecliptica

| | | | |
|------------------------------|----------|-----------------------|---------|
| ex Immersione medii mac. a | \equiv | $10^{\circ} 16' 12''$ | t. vero |
| Emerf. med. mac. a | \equiv | 16. 36. | |
| Immersione med. mac. d | \equiv | 16. 21. | |
| Emerf. med. mac. d | \equiv | 16. 20. | |
| obseruato sine Eclipsis | \equiv | 17. 6. | |

vnde Medium $\equiv 10^{\circ} 16' 31''$

RESIDVVM OBSERVATIONVM

Lipsiae an. 1750. s. nou. habitatum.

Cum observationes Eclipsis Lunae totalis d. 19. Junii an. 1750. inlytae Academiae iam exhibitae, respondentes nonnullas obtinuerim, expedit earum comparisonem cum nostra instituere, vt quorundam Meridianorum a Lipsiensi distantia inde innotescat. Eandem scilicet Eclipsin obseruauit Veronae Io: Franciscus Segnerius Tubo catadioptrico, Castellis Grisebowius nunc in Academia Imperiali Professor Astronomiae, Berolini Kiefsus, Göttingae Segnerus Telescopio Gregoriano. Ea obseruationum comparisonem:

| | Lipsiae | | Veron. | | Dif. Merid. |
|----------------------------------|--------------|--------|--------------|--------|----------------|
| | Lipsiae | Veron. | Lipsiae | Veron. | Lipsiae Veron. |
| Grimaldus incipit emergere 10. b | 38. / 38. 12 | 10. b | 33. / 34. 12 | 0. 45 | 4 17 |
| Tycho. - - - - - | 55. 40. | | 49. 38. | | 6 2 |
| Tycho totus emerf. - - - | 57. 45. | | 52. 18. | | 5 27 |
| Copernicus incipit emergere II. | 0. 28. | | 55. 23. | | 5 5 |
| Manilius. - - - - - | 17. 12. | II. | 12. 24. | | 4 48 |
| Mare Crisum. - - - - - | 34. 36. | | 29. 10. | | 5 26 |
| Finis Eclipsis. - - - - - | 40. 16. | | 36. 40. | | 3 36 |
| | | | Med. ob. | 4 4 | |
| | | | | Verona | |

Verona occidentalis est quam Lipsia.

Tycho totus emerfit Cassellis $10^b. 48', 26''$, et finis ibi contigit $11^b. 29'. 16''$. Ex priori obseruatione eruitur Meridianorum Lipsiensis et Casselensis differentia = $9'. 19''$.; ex posteriori = $11'. 0''$. unde media = $10'. 10''$. qua Cassilium occidentalius est quam Lipsia.

Finis Berolini accidit $11^b. 46' 0''$. quare distantia meridiani Berolinensis a Lipsiensi versus orientem = $5'. 44''$. Per medium Tychonis umbra in emersione transit Lipsiæ $10^b. 56'. 40''$. Göttingæ $10^b. 47'. 48''$. Distat igitur meridianus Göttingensis a Lipsiensi in occidentem $3'. 52''$.

D. 12 Augusti.

Occultatio δ Serpentarii a Luna

Fixam hanc 4^{te} vel 3^{tie} magnitud. Luna transeundo ad distantiam aliquot minutorum a suo centro boream versus relinquebat (situ erecto). Copiosæ nubes coelum occupabant, ut Lunam non nisi per interualla in hiatis nubium constitutam contemplari liceret. Inde factum est, ut obseruatio ingressus ad marginem Lunæ obscurum in irritum ceciderit; feliciter autem Luna in conspectum prodierit, cum iam stella, facto egressu ad limbum Lunæ lucidum, sita diametro ab hoc limbo distaret. Aestimauit inde emersionem ipsam

Q q q a

con-

contingere debuisse $8^{\text{h}} 55' 53''$ temp: veri, et persuasum habeo, in hoc aestimio errorem 3 vel 4 secundorum temporis locum habere non posse. Hor. $8 56' 25''$ distantiam stellae a proximo Lunae limbo diametro maculae lunaris Manilii, et $8^{\text{h}} 57' 53''$ diametro Copernici aequalem iudicabam. Observatio perfecta est Telescopio Gregoriano sub apparatu, quo istud obiectum secundum diametrum 52. vicibus auget; correctio autem temporis ex altitudinibus Solis respondentibus diebus proxime sequentibus suscepta.

Observationes variae

Frigus maximum hoc anno incidit in d. 4. Februarii; quo hora 8. matut. Thermometrum, Tomo L. Nouor. Commentar. p. 469 descriptum, in aëre libero $166\frac{1}{2}$ grad. indicabat.

Versus finem mensis Iulii ingentem experti sumus aestum per plures dies a 20. Iulii scilicet usque ad initium Augusti duratem. Thermometrum memoratum aëri libero in loco umbrato versus boream expositum singulis diebus calorem maximum patefecit:

| Iulii. | hor. | Eipſiae | | Berolini post merid. | |
|--------|------|-------------|-------------------|----------------------|--------------------|
| | | post merid. | grad. | inter hor. 3. et 4. | |
| 22. | 4. | 4 | $103\frac{1}{2}$ | - | $106\frac{6}{10}$ |
| 25. | - | 3. | $106\frac{5}{10}$ | - | $109\frac{10}{10}$ |
| 27. | - | 4. | $103\frac{1}{2}$ | - | $106\frac{10}{10}$ |

| | | | | |
|------|----|-----------------|-------------------|-------------------|
| 28. | - | 4. | 103 $\frac{1}{2}$ | 107 $\frac{1}{2}$ |
| 31. | - | 1 $\frac{1}{2}$ | 107 $\frac{1}{2}$ | - |
| Aug. | P. | - | 4 $\frac{1}{2}$ | 105 $\frac{1}{2}$ |

Observationes Berolinenses debentur Cel. *Grischowie* thermometro scalae similis cum meo institutae.

Visae quoque sunt Aurorae boreales.

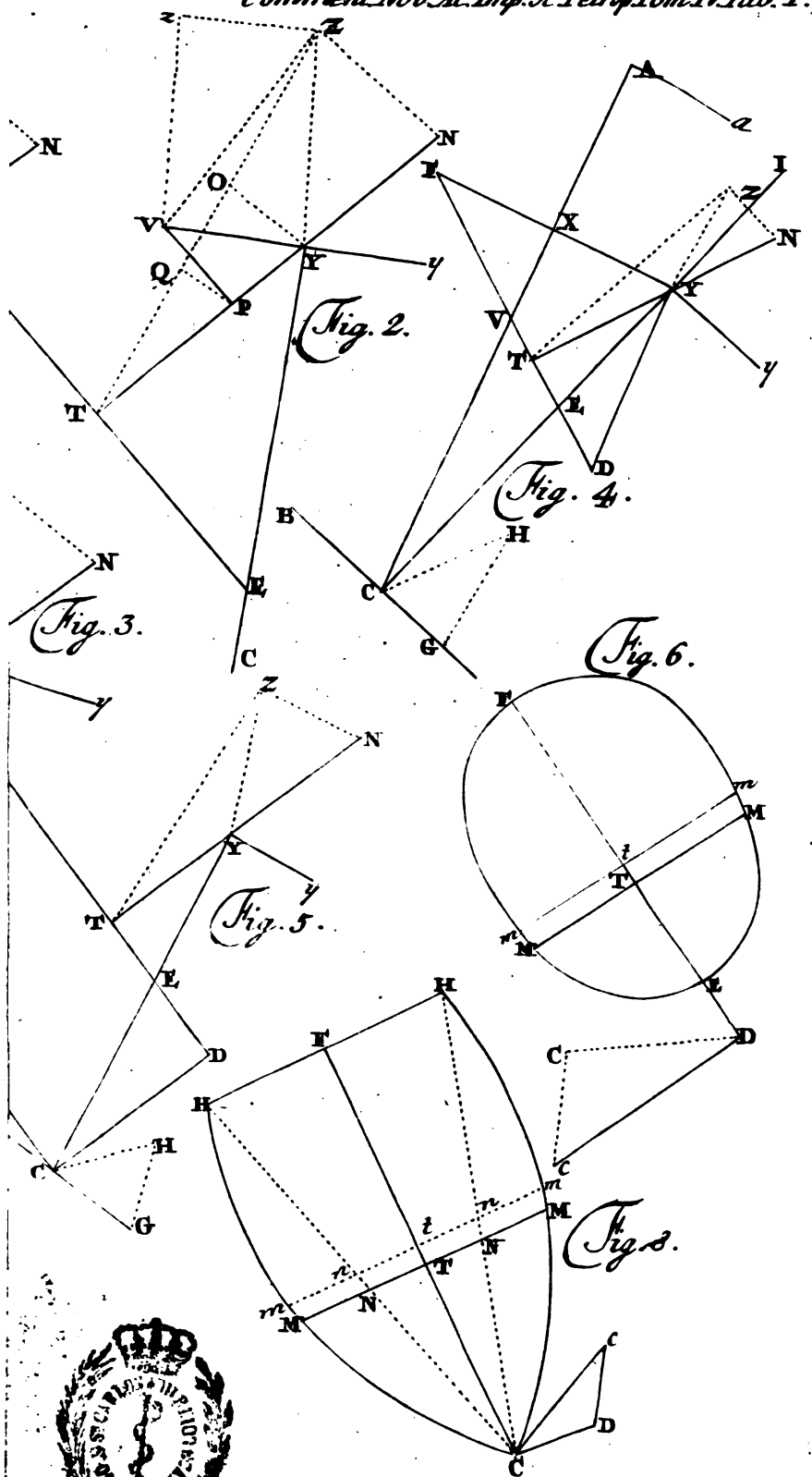
d. 3. Februar. statim post hor. 6. vespertinam ingens eiusmodi aurora comparebat, siquidem tam Arctopolioten tum Borolybicum versus ingentes materiae tractus instar nubium flammis coloris conspicui erant, qui successivae radiorum vel columnarum formas induentes ultra Zenith excurrerant, ab hoc tamen austrum versus declinabant. Inclinati scilicet erant radii versus horizontem iique etiam, quoad longitudinem, non continui (ut alias fieri solet) sed interrupti cernebantur. Post horam nubes rutilae disparebant; coelum autem, quod antea colorem cinereum, adspectum tamen stellarum non impediens, prae se ferebat, serenam faciem nunc nanciscebatur, interea dum ingens claritas ad horizontem boreum in conspectum prodibat. Aurora haec, testibus novellis publicis, Romae quoque visa est.

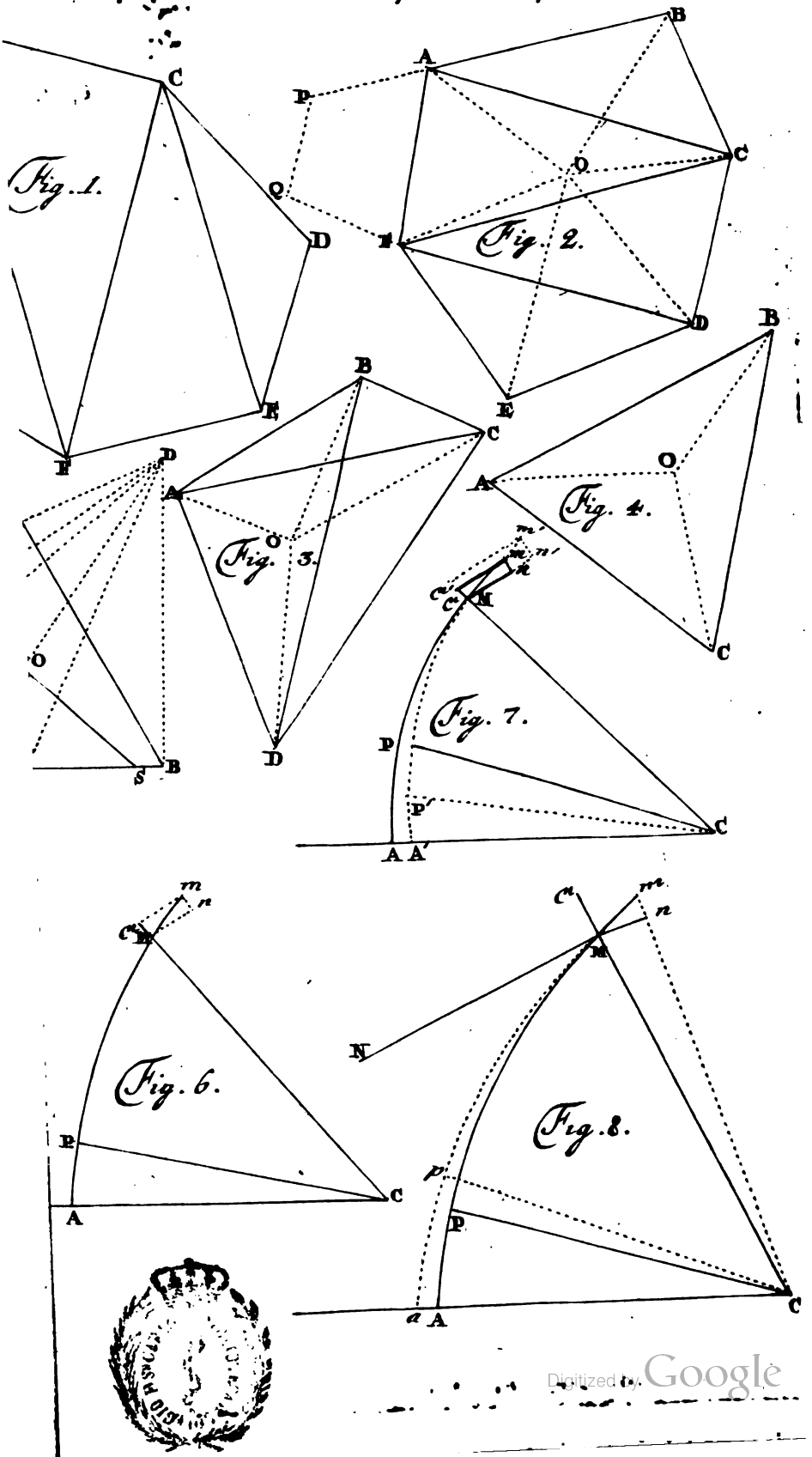
d. 26 Iulii vesperi post hor. 10. coelo sereno, cum aestus ingens in atmosfera adhuc regnaret, columnae aurorae borealis apparebant.

d. 22. Septembr. vesperi hora 11. ingens aurora borealis conspicua erat, columnis et tractibus materiae coloratae distincta.

Declinationem acus magneticae, cuius longitudo erat 2. digit. 3. lin. mensurae Parisiensis, diebus 17. et 20. Augusti reiteratis vicibus exploravi, eamque 13. grad. occidentem versus deprehendi.

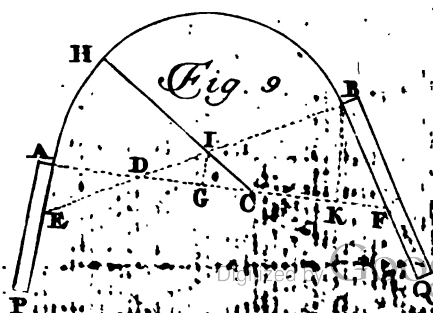
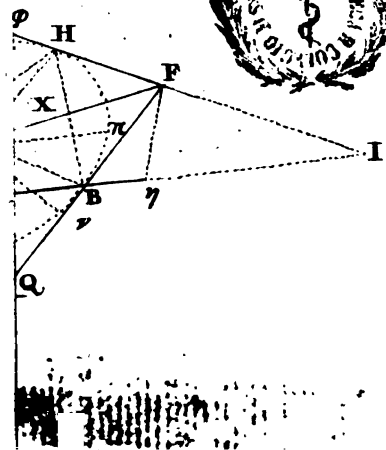
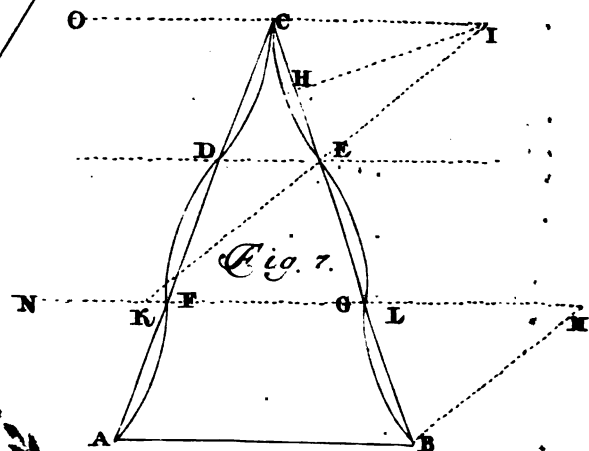
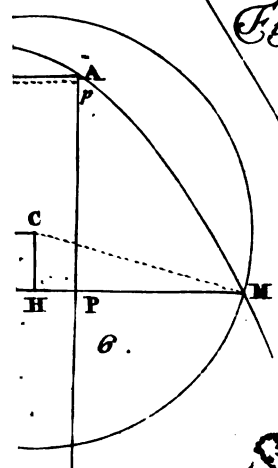
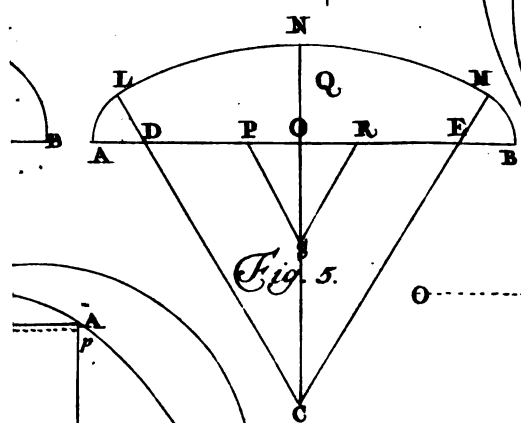
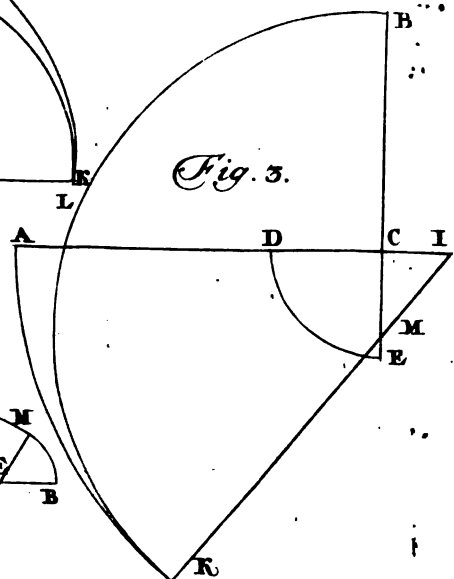
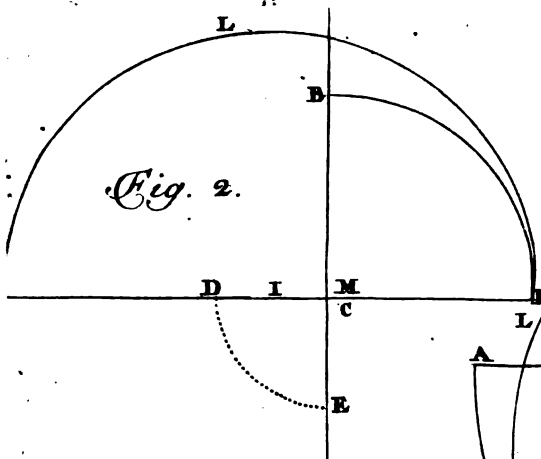


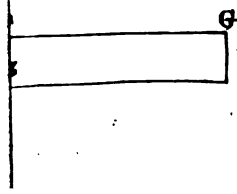
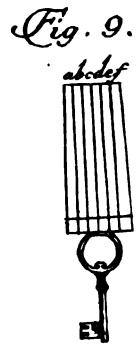
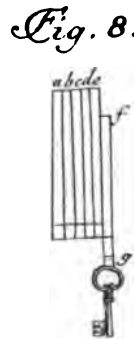
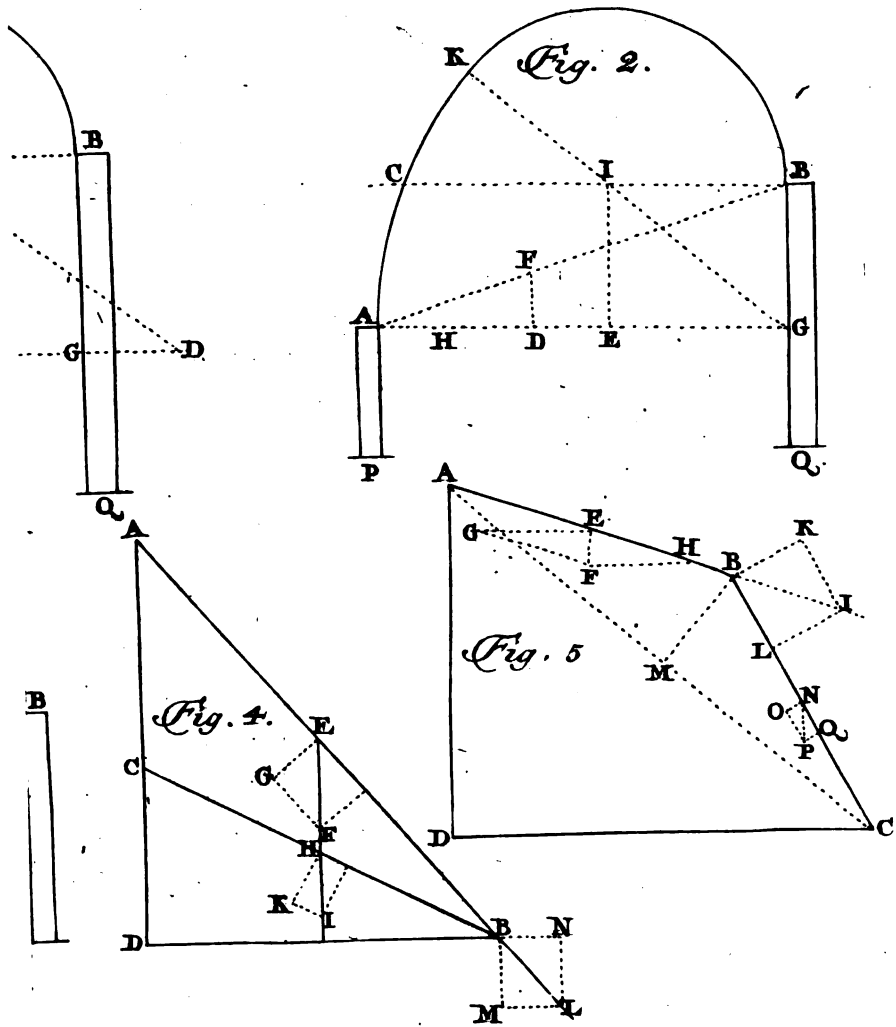




Dr.

d





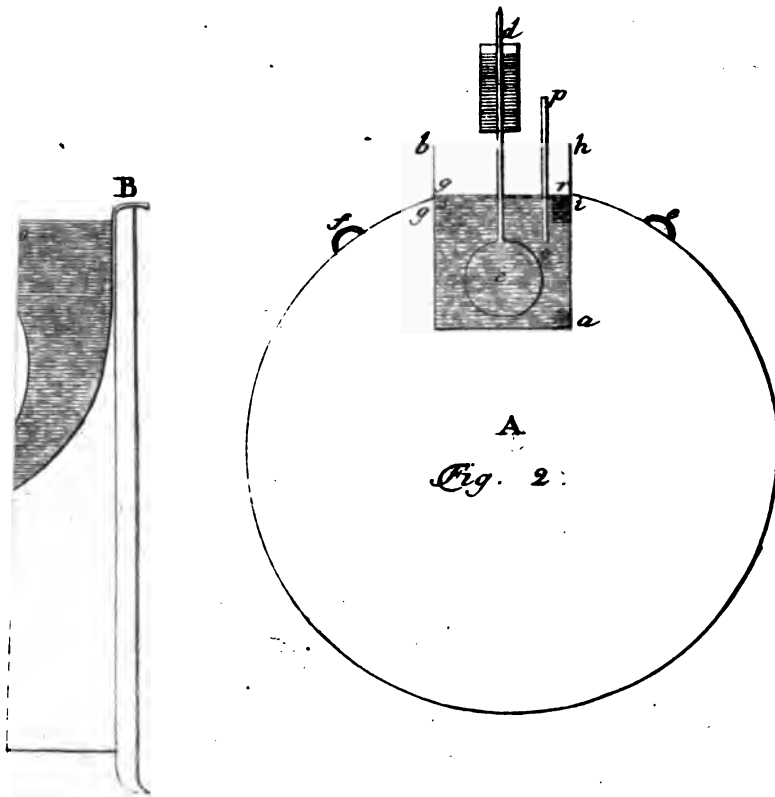


Fig. 2.

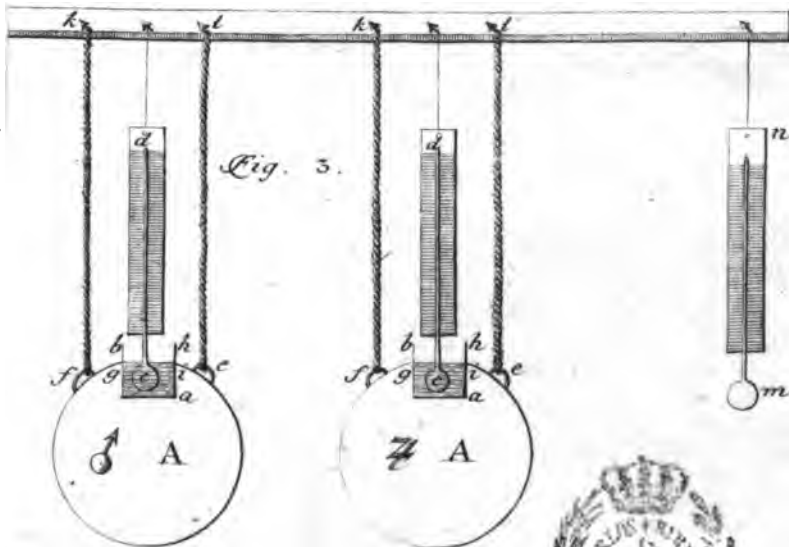


Fig. 3.



22

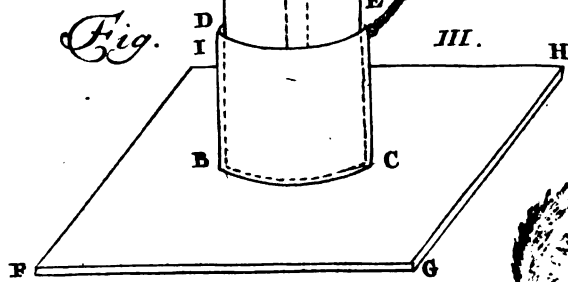
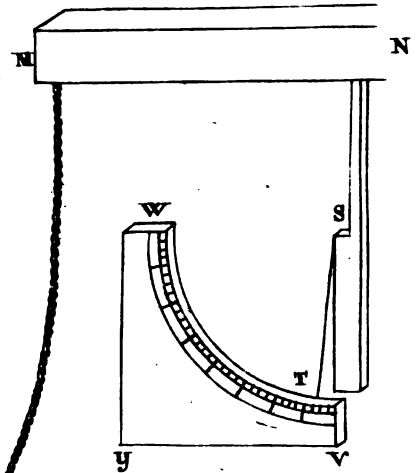
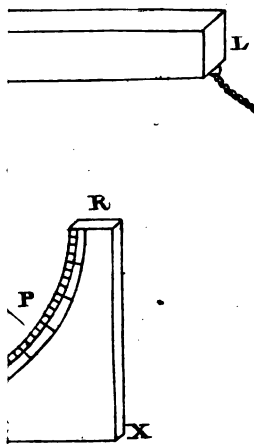
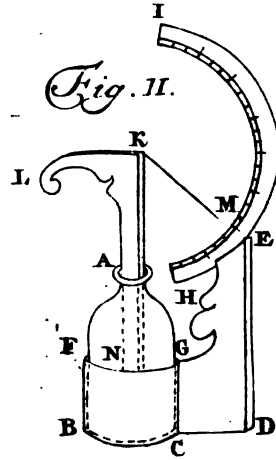
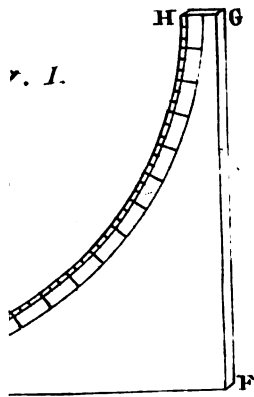


Fig. 1.



Ad micrem aquaticum exoticum,
moschum redolentem.

a. Cauda amputata.

b. Pes posterior dextri lateris amputatus.

c. Locus, ubi penis corpus ingreditur.

d. Arx.

e. Locus, quo penis notabiliter turgescit & incurvatur.

ff. Testiculi.

gg. Folliculi.

h. Vesica urinaria.

i. Appendicula folliculi sinistri lateris.

cornibus arietinis



Fig. 3.
Foemina.



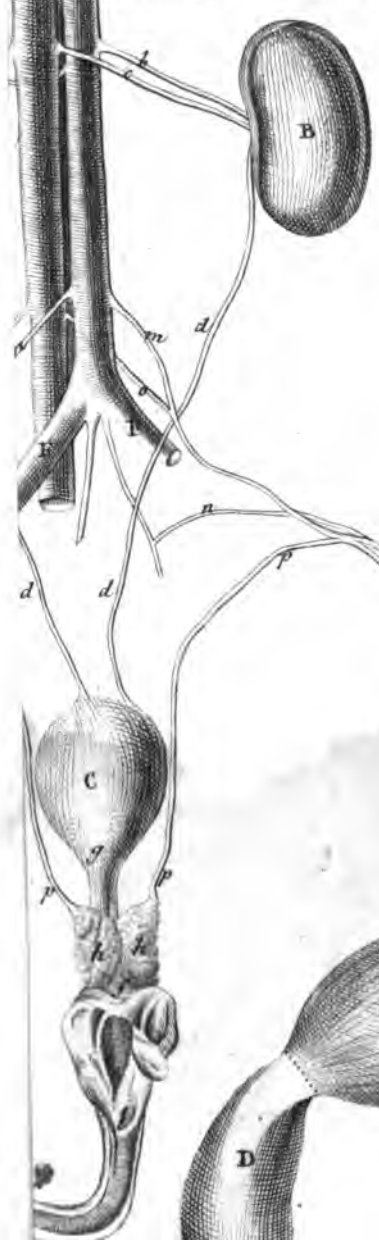


Fig. II

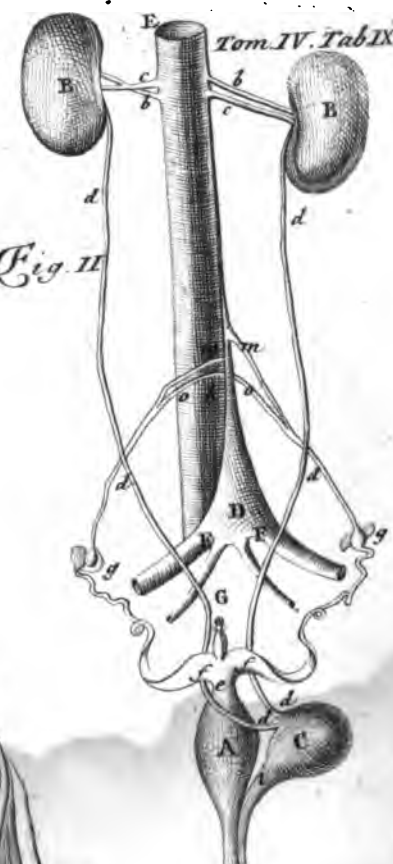
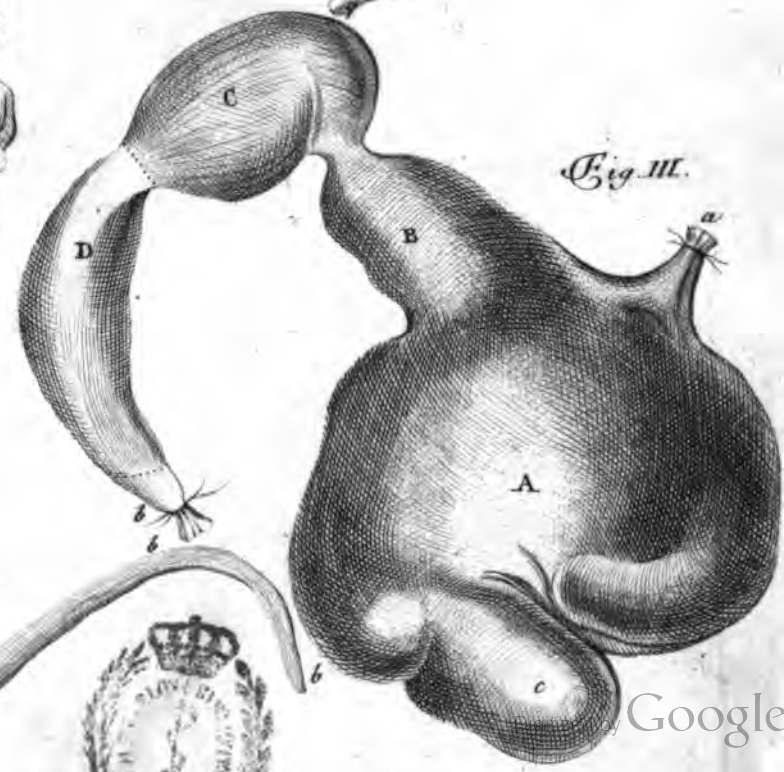


Fig. III.



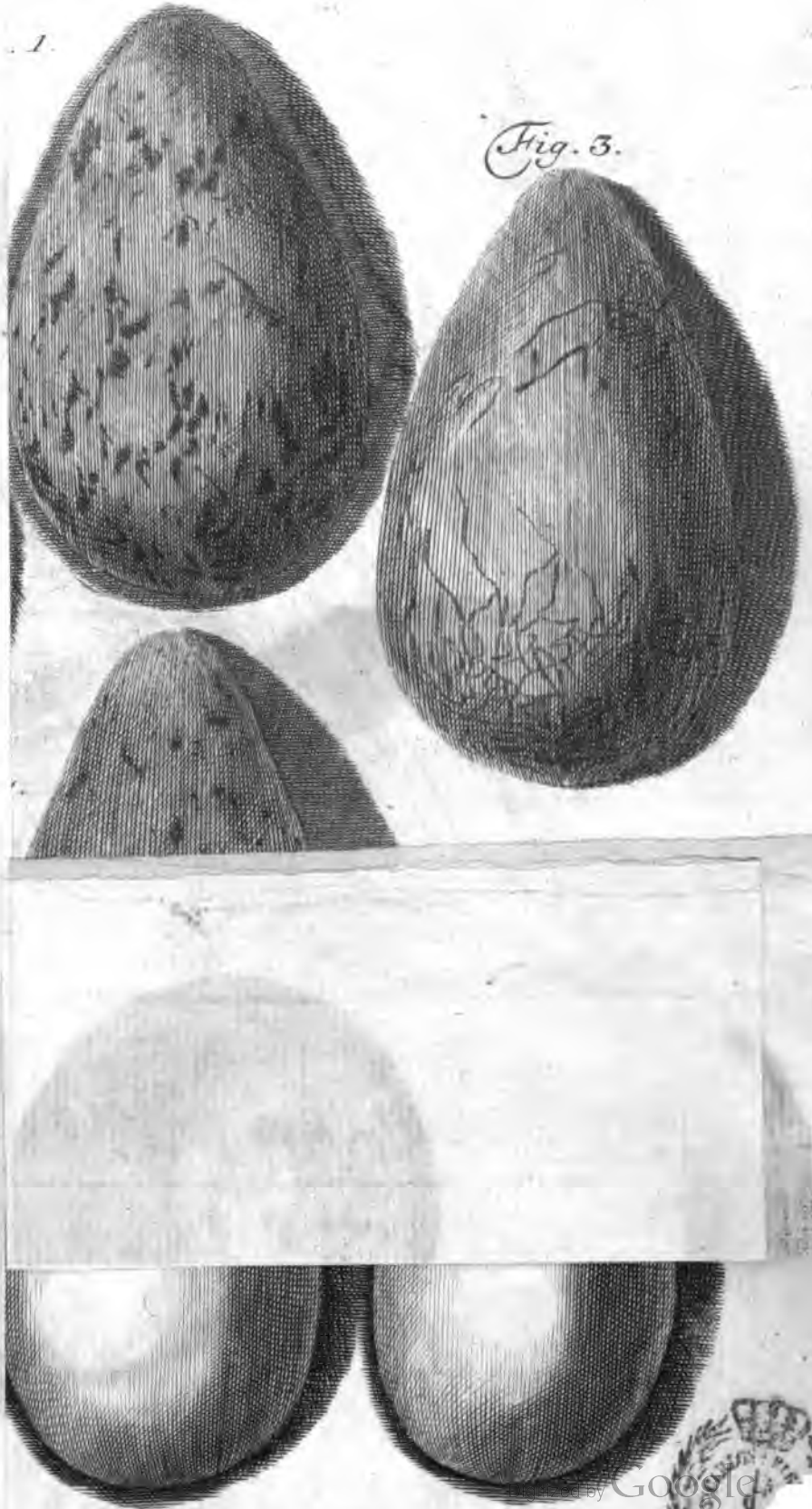


Fig. 16.

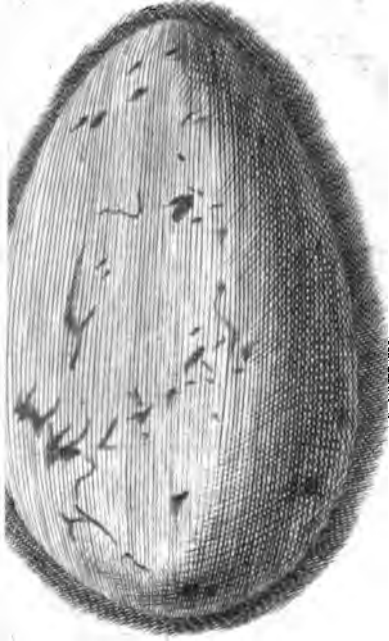


Fig. 17.



Fig. 19.

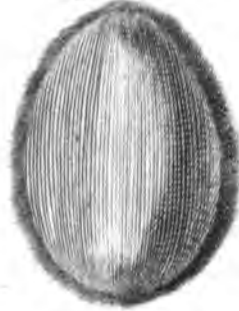


Fig. 21.



Fig. 22.





Fig: 24.



Fig: 27.



Fig: 26.



28.



Fig: 29.



