NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. III.

ad Annum MDCCL. et MDCCLI.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLIII.

Imprimatur

Cyrillus Comes de Rasumowsky.

SVMMARIVM

DISSERTATIONVM

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS III.

* * * * * * * * * *

Cum *Academia Scientiarum Imperialis*, Lector candide, *Nouorum Commentariorum Tomum* hunc *tertium* exhibere curauit, nihil eſt, quod reſtat, quam vt breuibus Te moneamus, ſecundum ſtatuta eſſe decretum, claſſes, quibus *Academia* conſtat, Tibi, vt in praecedentibus tomis ſunt diſpoſitae, iterum tradi. *Mathematica* itaque claſſis decem, *Phyſico - Mathematica* quinque, *Phyſica* duas, et *Aſtronomica* quatuor tantum ſiſtit diſſertationes. Praeterea autem pro more ac inſtituto breuis diſſertationum additur conſpectus. Ceterum Tuum, Lector beneuole, erit iudicare. Vale.

MATHEMATICA.

METHODVS AEQVATIONES DIFFERENTIALES ALTIORVM GRADVVM INTEGRANDI VLTERIVS PROMOTA AVCTORE L. EVLERO.

Haec Dissertatio sine dubio insigne continet calculi integralis augmentum; cum in ea tradatur methodus innumerabiles aequationes altiorum graduum ita expedite integrandi, vt per vnam operationem statim aequatio integralis obtineatur, neque opus sit, tot integrationes successiue instituere, quoti est gradus aequatio differentialis proposita, cuiusmodi operationes aliae methodi adhuc cognitae requirant. Tradiderat autem Auctor *in VII. Volumine Miscell: Berolinensium* iam specimen huius methodi, vbi docuerat vna operatione integrale huius aequationis inuenire:

$$o = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + \text{etc.}$$

vbi elementum dx sumtum est constans, litterae autem A, B, C, D etc. coefficientes denotant quoscunque constantes: nunc autem hanc methodum extendit ad hanc formam multo latius patentem:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + \text{etc.}$$

vbi littera X denotat quantitatem quamcunque ex variabili x et constantibus vtcunque conflatam. Omnino hic notatu est dignum, quod operatio semper succedat, ad quemcunque etiam gradum differentialium aequatio ascendat, ne gradu quidem infinitesimo excluso, cuius eximia exempla Auctor in sequentibus exhibet. In hac autem Dissertatione primum casum admodum simplicem hac aequatione

quatione $d^2y = y\,dx^2$ contentum methodo vulgari perſequitur, oſtendens quam prolixum ac taedioſum calculum eius ſolutio requirat, quippe quo tandem ad aequationem quidem differentialem primi ordinis perducitur, cuius autem integratio grauibus adhuc premitur difficultatibus. Inde tamen non leuibus in ſubſidium vocatis artificiis elicit integrale quidem, ſed tantum particulare, ex quo denique per nouam operationem integrale completum colligit. Tum vero duas praeterea integrationes inſtituere oportet, antequam ſolutio ad finem ſit perducta. Ex quo facilius iudicium de praeſtantia nouae methodi ferre licebit, cuius beneficio *ſine tam multis* et moleſtis ambagibus vna eaque facillima operatione non ſolum haec ſpecialis aequatio, ſed generalis exhibita ita perfecte reſoluitur, vt ſtatim aequatio integralis completa reperiatur. Operatio autem illa reducitur ad reſolutionem aequationis Algebraicae, cuius forma ita ex propoſita aequatione differentiali deriuatur, vt ſit

$$o = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.}$$

atque nunc totum negotium in reſolutione huius aequationis Algebraicae continetur, quod quidem cum de integratione eſt quaeſtio merito pro facillimo habetur. Huius ſcilicet aequationis cunctae quaerendae ſunt radices, earumque quaelibet ſuppeditat ope regulae ſimpliciſſimae portionem integralis quaeſiti, ita vt omnibus radicibus hoc modo pertractatis vniuerſum integrale completum obtineatur. Difficultate quidem haec methodus impediri videtur iis caſibus, quibus illa aequatio Algebraica radices habet vel aequales vel impoſſibiles; ſed et huic incommodo feliciter occurrit Auctor, dum pro his caſibus peculiares

praebet

praebet regulas, quarum ope tota operatio aeque expedite perfici poteſt.

Si quis quaerat, quemnam vſum huiusmodi ſpeculationes, quae fortaſſe plerisque nimis ſteriles videantur, habere queant, ei audacter reſpondere licet, nullum fere extare Problema Phyſicum, vel ad vitam communem pertinens, cuius ſolutio adaequata non plerumque ad aequationem differentialem altioris cuiusdam ordinis perducatur; ex quo facile intelligere licet, quam parum tales ſpeculationes contemni mereantur.

DE SERIERVM DETERMINATIONE SEV NOVA METHODVS INVENIENDI TERMINOS GENERALES SERIERVM AVCTORE *L. EVLERO.*

Quanti ſit vſus doctrina ſerierum per vniuerſam Analyſin ſublimiorem, eiusque imprimis applicationem ad problemata praxi accommodata, nemo in hoc ſtudiorum genere vel leuiter verſatus ignorat; vnde quae inueſtigationes circa naturam ſerierum penitius perſcrutandam inſtitui ſolent, minime vſu carere ſunt cenſendae. In hac autem Diſſertatione Auctor non parum mirabilia phaenomena circa ſeries aperit; primum ſcilicet oſtendit, ſeriem nondum pro determinata eſſe habendam, etiamſi omnes eius termini ſint dati, qui nimirum indicibus integris reſpondeant: cum innumerabiles diuerſae ſeries inueniri queant, quibus iidem termini conueniant. Perinde quippe ſerierum ratio eſt comparata atque linearum curuarum, quatenus per data puncta ſunt ducendae, etiamſi enim punctorum numerus ſit infinitus, nemo tamen Geometra ignorat, infinita exhiberi poſſe genera curuarum,

quae

quae omnes per eadem puncta transeant. Simili modo quamuis infiniti termini seriei sint dati, inde tamen ipsa series non determinatur, neque vera eius natura intelligitur; tum autem demum naturam seriei cognoscimus, quando non solum omnes terminos, qui indicibus integris conueniunt, sed etiam eos, qui indicibus fractis quibuscunque respondent assignare valemus. Talem autem perfectam cognitionem continet terminus seriei, qui vocari solet generalis, quippe quo generaliter designatur terminus cuicunque indici indefinito respondens; ita vt cognito demum termino generali ipsa seriei natura nobis plene perspecta esse sit censenda. Plerique alii modi, quibus vulgo series describi solent, eodem laborant defectu, vt iis series non perfecte determinentur; veluti si series numerorum ita definiatur, vt primus eius terminus vnitas, quilibet vero sequentium praecedentem vnitate superare dicatur, quis non crederet, seriem numerorum naturalium hoc modo perfecte determinari, ita, vt terminus quisque in genere indici suo aequalis statui queat? Seu vt terminus indici indefinito x respondens, ipse sit $= x$. Nihilo vero minus ab Auctore innumerabiles aliae formae termini generalis proferuntur, qui omnes praescriptis conditionibus aeque satisfaciant. Omnes scilicet hae series in hoc conueniunt, vt primus terminus sit 1, secundus 2, tertius 3, quartus 4, et ita porro, in genere vt quoties index x fuerit numerus integer, terminus respondens ipsi sit aequalis: in eo autem discrepabunt, quod ponendis pro x numeris fractis, termini respondentes inter se dissideant. Auctor porro obseruat eundem determinationis defectum locum habere, quoties quilibet seriei terminus non per indicem

dicem solum, sed insuper per terminos quosdam praecedentes definitur: et cum his casibus infiniti termini generales aeque conditionem adimpleant, hoc problema soluendum suscepit, vt proposita tali lege progressionis omnes terminos generales ei satisfacientes inueniat. Quod problema ideo pro difficillimo est habendum, quod perducat ad solutionem aequationis differentialis infiniti gradus; commode hic autem vsu venit, vt haec aequatio in illis formis, quarum resolutionem Auctor in superiori Dissertatione docuit, contineatur; hocque adeo argumentum ipsi praeclaram occasionem praebuerit methodi ante traditae, eximium vsum ostendendi. Eius methodi scilicet beneficio plura genera serierum, in quibus quilibet terminus vel per solos terminos antecedentes, vel insuper per indicem definitur, percurrit, earumque terminos generales omnes assignat: ex quo haec methodus merito pro maxime naturali, atque indoli ipsarum quaestionum conformi habetur, quippe qua vera huiusmodi serierum natura perfectissime cognoscitur.

CONSIDERATIO QVARVMDAM SERIERVM QVAE SINGVLARIBVS PROPRIETATIBVS SVNT PRAEDITAE AVCTORE L. *EVLERO*.

In praecedente Dissertatione Auctor iam mentionem fecerat alicuius seriei singularis, cuius terminus primus est 0, decimus 1, centesimus 2, millesimus 3, decies millesimus 4 etc. ita, vt in genere indici, qui potestas quaecunque fuerit denarii, respondeat terminus, ipsi exponenti huius potestatis, siquidem sit numerus integer, aequalis. Cui fundamento cum logarithmi sint superstructi

cti, primo intuitu videri posset, quemuis seriei terminum esse logarithmum sui *indicis*. Interim tamen ostendit Auctor terminum nonum huius seriei esse 0, 897050585, ideoque logarithmo nouenarii notabiliter minorem; quod insigne est exemplum seriei cum serie logarithmorum infinitos terminos communes habentis, neque tamen cum ea congruentis; cuiusmodi serierum genera in superiore dissertatione fusius est persecutus. Hic autem casum memoratum singularem accuratius euoluit, qui in sequenti forma generaliori continetur, vt indici cuicunque indefinito x conueniat in serie terminus

$$= \frac{1-x}{1-a} + \frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3} + \frac{(1-x)(a-x)(c^2-x)}{a^3-a^6} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)}{a^6-a^{10}} + \text{etc.}$$

quae expressio etsi est in infinitum continuanda, tamen quoties x sumitur aequalis cuipiam potestati rationali ipsius a ea non solum abrumpatur, sed etiam ipsi exponenti ipsius a fiat aequalis: hinc autem casus supra memoratus nascitur, si pro a denarius sumatur. Priorem autem formam generaliorem contemplans animaduertit, si terminus indici x respondet, ponatur $= s$, is vero qui indici $a\,x$ respondet $= t$, fore:

$$1 + s - t = (1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a^2}\right)\left(1-\frac{x}{a^3}\right)\left(1-\frac{x}{a^4}\right) \text{ etc.}$$

vnde liquet, si pro x capiatur potestas quaepiam ipsius a ob vnum factorem certo euanescentem esse $t = 1 + s$. Plura autem alia non contemnenda consectaria hanc formam variis modis transmutando deducit, vnde doctrina serierum non mediocriter amplificari est existimanda: veluti pro quadratura circuli, si ratio diametri ad peripheriam denotetur per $1 : \pi$ hanc satis concinnam consecutus est seriem:

 $\frac{9}{4}\pi +$

$$\tfrac{1}{4}\pi + 8 = \frac{2\cdot 4}{5\cdot 5} + \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7} + \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8}{5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9} + \text{etc.}$$

Poftea vero ex eadem ferie generali plures alias formas deriuat, in quibus euoluendis multa infignia calculi artificia cernuntur, quae hac occafione percepiffe in aliis inueftigationibus operae pretium videtur.

His errata, a *Clar. Auctore* transmiffa, funt adiicienda.

Pagin.	Linea	loco	lege
4	14	qui variabilis	quia varibilis
9	6	fubftitutione fuppeditat	fubftitutiones fuppeditat
10	9	fuppedituro	fuppeditare
	19	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha\delta\mathfrak{E})^2$	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha-\mathfrak{E})^2$
12	23	$\alpha e^{kx\,\mathrm{cof.}\,\Phi}$ fin. kz fin. Φ	$\alpha e^{kx\,\mathrm{cof.}\,\Phi}$ fin. kx fin. Φ
13	21	quotumque	quotcunque
14	4	$2\mathfrak{C}x+\mathfrak{D}x^2$	$2\mathfrak{C}x+3\mathfrak{D}x^2$
	13	$\mathfrak{D}Ax^3 = Av$	$\mathfrak{D}Ax^3 + Av$
17	15	$P = D(z+\alpha)$ etc.	$P = \Delta(z+\alpha)$ etc.
	penult:	$+\dfrac{\Delta d^n y}{d y^n}$	$+\dfrac{\Delta d^n y}{d x^n}$
	vltima	$+\frac{\alpha C' ddy}{dx^3}$	$+\frac{\alpha C' ddy}{dx^2}$
19	3	aequatione denuo	aequationem denuo
	11	$D' = \mathfrak{E}D'' = C''$	$D' = \mathfrak{E}D'' + C''$
20	4	per $e^{\gamma x}dx$, fit	per $e^{\gamma x}dx$. Sit
23	15-16	imaginariae	imaginarii
28	5	multiplicato	multiplicati
29	16 feq.	$e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}Xdx = \begin{matrix}+\\-\surd-1\\+\surd-1\\+\text{ etc.}\end{matrix}$	$e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}Xdx = \left\{\begin{matrix}+\\-\surd-1\\+\surd-1\\+\quad\text{etc.}\end{matrix}\right.$

29

Pagina	Linea	loco	lege
29	16 seq:	$e^{\beta x}\int e^{-\beta x}X\,dx = \begin{matrix}+\\+\sqrt{-1}\\-\sqrt{-1}\\+\end{matrix}$	$e^{\beta x}\int e^{-\beta x}X\,dx = \begin{cases}+\\+\sqrt{-1}\\-\sqrt{-1}\\+\end{cases}$
34	penult:	ad formulam V	ad formulam V
35	12	mula V	mula V
37	5	de limit	de finit
38	20	xx et ponatur $-=\frac{1}{2}$	xx, et ponatur $x=\frac{1}{2}$
39	3	ssit semper	fiat semper
40	17:	affirmatic nis	determmnationis
42	15	cuius radices $=1$	cuius radius $=1$
	20	posito enim $x=\frac{\pm}{4}$	posito enim $x=\frac{1}{4}$
44	vltima	$2(1+\frac{z}{n})$ fin. $\frac{2k\pi}{n}+\frac{zz}{nn}$	$2(1+\frac{z}{n}$ fin. vers. $\frac{2k\pi}{n}+\frac{zz}{nn}$
48	20	$(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{33\pi\pi})(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{69\pi\pi})$	$(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{36\pi\pi})(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{64\pi\pi})$
50	1	ex hac fonte	ex hoc fonte
51	antep:	$=\frac{1}{934}\pi^4$	$=\frac{1}{90}\pi^4$
	penult:	$=\frac{1}{94}5\pi^6$	$=\frac{1}{945}\pi^6$
55	antep:	quamcunque ipsarum	quamcunque parem ipsarum
57	14	$Z=(1-\frac{z}{n})(1$ etc.	$Z=(1-\frac{z}{\lambda})(1$ etc.
	19	Hisque terminis infinitas resolutis	Hisque terminis in series infinitas resolutis
58	1	ponatur $\frac{dZ}{Zdz}-A+$	ponatur $\frac{dZ}{Zdz}=A+$
	14	$-8\lambda^3C$	$-8\lambda^3\mathfrak{C}$
59	antep:	$-\frac{1}{4\eta^3(1-m)}$	$-\frac{1}{4\lambda^3(1-m)}$
62	3	$\frac{-1}{2aa}=\frac{1}{2(2k+1)^2}$	$\frac{-1}{4aa}=-\frac{1}{2(2k+\ )^2}$
63	3	numerus integus	numcrus integer
64	23	$1=\alpha e^{-2z}+\beta e^{-2z}$	$1=\alpha e^{-z}+\beta e^{-2z}$
	vlt:	euolue oportet	euolui oportet
67	4	secundum Moioraeum	secundum Moiuraeum

Pagina	Linea	loco	lege
68	12	haberi ſole.	haberi ſolet.
	30	inducent,	induant,
70	10	$+\gamma u^{n-3}\ \delta u^{n-4}$	$+\gamma u^{n-3}+\delta u^{n-4}$
87	3	obrumpi,	abrumpi
	20	aequatio ſtatuatur	aequalis ſtatuatur
88	16	notabiliter *a l x*	notabiliter a *l x*
89	8	tamen non niſi	tamen non valet, niſi
90	18	poſito $x=a'$	poſito $x=a$
93	20	valores exacto	valores exacte
94	20	cum infinitiſſima ſit	cum infiniterima ſit
96	9	$C=\frac{a^4}{(1-a)(1-aa^2)}$	$C=\frac{a^2}{(1-a)(1-aa)^2}$
105	vlt:	vt Geometriae	vt Geometrae

DE DIVISORIBVS NVMERORVM INDAGANDIS AVCTORE G. *W. KRAFFT.*

Hoc problemate Auctor, numerum propoſitum ex certis regulis diuiſores admittere ſimplices, tradere ſtudet; hanc ob cauſam in generales numerorum formulas inquirit, eruitque quomodocunque, quosnam illae admittant diuiſores. Talem numerum generaliſſime expreſſum examinat, et non nulla Theoremata deducit, quorum omnium id, quod in *Actor. Erudit. Lipſ. Supplementis Tom. 6. p.* 471. legitur, eſt elegans: ſi numero, ſcilicet, quouis quadrato ſubtrahatur binarius, reſiduum nunquam diuidi poſſe per ternarium. Ex hoc itaque ingenioſum ſoluitur problema: dato numero quocunque ita mutare notam vnicam, vt certum ſit, numerum ita mutatum per omnes transpoſitiones poſſibiles non exhibere quadratum. Quum autem ex allatis formulis ad indagandum

gandum numeri alicuius dati diuisorem parum auxilii trahi potest: hinc aliam viam, quae aliquando plus subsidii subministrabit, tentat, quamuis Arithmetica tali formula generali vnica destituatur, quae numeros primos omnes successiue exhibeat. Tandem omnia exemplis illustrat, et, quo modo diuisorem expiscari possit, inquirit.

DE PARTITIONE NVMERORVM
AVCTORE *L. EVLERO.*

Problema de partitione numerorum Auctori quondam a *Cl. Professore Berolinensi Naudaeo* fuit oblatum, qui pro *casu speciali quaesiuerat*, quot variis modis numerus 50 in septem partes dispertiri possit. Problema hoc primo intuitu ita comparatum videbatur, vt aliter nisi per inductionem resolui non posset, quo fere modo pleraque problemata ad artem combinatoriam pertinentia resolui solent. Qui scilicet eius solutionem suscipere velit, primo quaeret, quot variis modis quisque in duas partes discerpi possit, vbi quidem nullam difficultatem offendet, deinde procedet ad diuisionem in tres partes, quod negotium etiam nunc satis commode succedet. In diuisione in *quatuor* partes fortasse iam haerebit, neque statim perspiciet, quomodo numerus partitionum cum numero partiendo increscat, inductione tamen fretus, et hanc progressionis legem diuinabit, Quinque partitio ipsi iam maiores creabit molestias, ac nisi omni circumspectione vtatur, verendum est, ne inductioni, vtcunque certa ipsi videatur, nimis confidens in errorem inducatur; quod eo magis est pertimescendum in partitione in plures partes; vti etiam ipse problematis Auctor fuit seductus, et pro

casu

casu proposito in diuisione numeri 50 in septem partes, post taediosissimos calculos enormiter a veritate aberrauit, neque etiam alii insignes Mathematici hac via incedentes ab errore se vindicare valuerunt: qui autem actu omnes partitiones dinumerare voluerit, non solum in immensum laborem se immergit, sed omni etiam attentione adhibita vix cauebit, ne turpiter decipiatur. Cum igitur hoc problema tam insigne specimen contineat, quam parum inductioni vel maxime confirmatae sit fidendum, eo pluris est aestimandum Auctoris studium, quo certa methodo solutionem istius problematis inuestigauit, cum vix vlla alia via praeter inductionem ad eam patere videatur.

Nihil igitur inductioni tribuens Auctor ex certissimis Analyseos principiis eiusmodi formulas hausit, quae pro quocunque numero proposito statim ostendunt, quot variis modis is in tot, quot lubuerit, partes diuidi possit, ita, vt etiam circa maximos numeros nullum dubium superesse queat. Problema autem hic geminum tractat, quorum altero quaeritur, quot modis datus numerus in tot partes inaequales tantum, quot requiruntur, dissecari possit; in altero vero partium aequalitas non excluditur. Ita in exemplo initio memorato inuenit numerum 50 omnino 522 modis in septem partes inter se inaequales distribui posse, aequalitate autem partium non exclusa numerum partitionum omnium esse 8946, qui ergo numerus quaestioni primum propositae satisfacit.

Pluribus aliis modis problema variari potest, dum scilicet singulae partes datae indolis esse iubentur, veluti numeri impares, vel quadrati, vel termini progressionis Geometricae duplae etc. partium numero vel praescripto,

vel

vel secus: Auctoris autem methodus aeque patet ad omnia huiusmodi problemata soluenda.

Subiungit denique Auctor tabulam satis amplam, ex qua responsiones ad plerasque huius generis quaestiones sine vllo labore depromere licet; quae multo longius est continuata, quam in Auctoris *Introductione in Analysin*, vbi idem argumentum iam tractauerat, hic autem studiosius expoliuit. Ceterum haec Dissertatio referta est plurimis tam egregiis artificiis, quam nouis et notatu dignis obseruationibus circa naturam serierum, vnde eius vsus multo latius patere videtur: neque vllum est dubium, quin ex *eodem fonte plurima* alia argumenta felicissimo cum successu expediri queant.

Nunc errata, a *Clar. Auctore* transmissa, communicamus.

Pagina	Linea	loco	lege
125	7	Professore Haude	Professore Naude
	14	*partio-*	*partitio-*
126	24	$12=3+3+6$; $11 =2+4+5$	$12=3+3+6$; $12=3+4+5$
129	12	factorum, siue	siue factorum
138	11	numerus 6 ex numeris	numerus n ex numeris
143	4	Si hae series cum illis,	Si hae series cnm illis conferantur,
146	antep	$n^{(2)}=n^{(2)}+(n-2)^{(2)}$	$n^{(2)}=n^{(1)}+(n-2)^{(2)}$
147	2	Seu cum series 𝔄	Seu cum seriei 𝔄
	22	$1+1^{(3)}x+2^{(3)}x^2$ etc.	*tota haec linea omittatur*
149	6	fiet manifestum:	fiet manifesta:

Pagina	Linea	loco	lege
152	16	erit $20^{(20)} = 192$	erit $20^{(5)} = 192$
154	8	$+(11-8)^{(4)}+$	$+(n-8)^{(4)}+$
155	20	esse $x^{n(3n\pm1)2)}$	esse $x^{n(3n\pm1):2}$
	vlt.	$+(n-40)^{(\ast)}(n-51)^{(\ast)}-$	$+(n-40)^{(\ast)}-(n-51)^{(\ast)}.$
156	1	locum haberi	locum habere

MEDITATIONES DE QVANTITATIBVS IMAGINARIIS AVCTORE *HENRICO KUHNIO.*

Haec dissertatio talis est valoris, de qua nihil, propter eiusdem modum procedendi, est dicendum; hinc velimus, vt lectores dissertationem ipsam introspiciant.

SOLVTIO PROBLEMATIS GEOMETRICI AVCTORE *L. EVLERO.*

Problema, cuius Auctor hic plures constructiones tradit, ita se habet, vt ex datis tam quantitate, quam positione diametris coniugatis ellipseos, eius axes principales definiri debeant. *Celeb*: *Prof*: *Krafft* eiusdem problematis in his *Comment.* iam satis elegantem dedit constructionem, quod igitur minime pro nouo est habendum; verum ita est comparatum, vt calculum prosequendo secundum regulas cognitas plerumque ad constructionem admodum complicatam, et a concinnitate, quae in Geometria potissimum desiderari solet, multum remotam perueniatur. Exhibet igitur Auctor primum huius problematis tres constructiones, quibus calculum, cui illae innituntur, subiungit denique, vero ipse ingenue fatetur, eam constructionem, quae iam in Pappi *collectionibus*, sed sine demonstratione, reperitur, his ob concinnitatem palmam longe praeripere. Demonstrationem

nem ergo huius constructionis Geometricam adornat more veterum, ac sub finem nouam multoque simpliciorem constructionem doceto, quae et illi longe praeferenda videtur.

DE PERTVRBATIONE MOTVS PLANETARVM A FIGVRA EORVM NON SPHAERICA ORIVNDA AVCTORE *L. EVLERO.*

Ante omnia Lectores sunt certiores faciendi, hanc Dissertationem iam ante ad Academiam esse transmissam, quam quaestio de sufficientia Theoriae *Neutonianae ad omnes motus lunae inaequalitates* explicandas iudicio Academiae erat composita. Auctor autem iam palam est professus, se ante hac in ea fuisse opinione, quod Theoria *Neutoni* ad motum Apogei Lunae explicandum minime sufficeret, eiusque tantum semissem propemodum produceret, quam in sententiam plura huius Dissertationis momenta sunt conscripta. Postquam autem *Celeb. Clairaut*, qui ipse ante hac hanc opinionem propugnauerat, solidissimis rationibus contrarium demonstrauisset, Auctor quoque ipsi sine mora est adstipulatus. Tantum autem abest, vt iste error quicquam de pretio huius Dissertationis, si quod habet, detrahat, vt potius eius conclusio veritatem non mediocriter confirmet. Cum enim hic dilucide ostendatur, Lunae figuram oblongatam, quantacunque, quidem admitti potest, nullo modo tantopore motum Apogei accelerare posse, quantum Theoria perperam explicata requirere videbatur, hoc ipsum iam validi argumenti loco esse debet, veritatem ex sola Lunae figura saluari non posse. Namque si contrarium euenisset, ri non poteſt: ſed manifeſto principia et leges motus in ſubſidium vocari debent, ſine quibus nihil certi in hoc negotio definire licet. Maxime autem principia aequilibrii et motus, etiamſi vulgo perperam inter ſe miſceri ſunt ſolita, a ſe inuicem diſcrepent, iam Magnus agnouit *Leibnizius*, dum illa neceſſario vera haec vero tantum contingentes vera eſſe pronunciauit. Cui effato tametſi grauiſſima argumenta aduerſantur, tamen certum eſt ingens inter haec duplicia principia diſcrimen intercedere, quod vel inde perſpicuum eſt, quod principia aequilibrii nunquam fere non fuerint cognita, neque de iis vnquam ſit diſceptatum, cum contra motus principia ante *Galilaeum* penitus ſint ignorata, eorumque diſtincta expoſitio demum *Neutono* ſummo potiſſimum accepta ſit referenda.

Cum igitur nulla Machina non ad motum ſit deſtinata, manifeſtum eſt effoetum ſine principiis motus accurate definiri non poſſe; horum autem principiorum applicatio ſine Analyſi ſublimiori inſtitui non poteſt. Doctrinam ergo vulgarem de Machinis, cuius imperfectio defectui principiorum motus atque Analyſis ſublimioris eſt tribuenda, Auctor in hac Diſſertatione perficere annititur; cuiusmodi perfectio cum fruſtra in Matheſi elementari quaeratur, quorſum vulgo haec doctrina referri eſt ſolita, neceſſitas Matheſeos ſublimioris hinc maxime fit perſpicua. Tantum ergo abeſt, vt haec ſcientia magis ſit ſubtilis quam vtilis, quod communiter obiici ſolet, vt ea potius in maxime popularibus inueſtigationibus nullo modo carere queamus. Exemplo, quod Auctor affert, hoc magis illuſtrabitur, caſum perpendit, quo onus 1000 librarum ope ponderis 100 librarum eleuari debet, ad quod quidem

dem axis in peritrochio ſit adhibendus: atque doctrinae vulgaris docet, ſi radius maior ad minorem capiatur in ratione 10 ad 1 onus a pondere ſuſtentari in aequilibrio, nondum vero moueri poſſe: vnde quidem intelligimus ad motum producendum radium maiorem plus quam decies minorem ſuperare debere. Motus igitur ſequetur tardus quidem ſi ille radius vndecies longior capiatur, at celerior ſi vndecies vel duodecies: ſimul vero intelligitur, ſi nimis longus veluti centies vel millies longior ſtatuatur, pondus quidem multo celerius eſſe deſcenſurum, oneris autem aſcenſum iterum tardiorem eſſe futurum.

Quam velox autem quouis caſu motus oneris exiſtat, ex vulgaribus Mechanicae principiis minime definire licet, quae cognitio tamen ſi de Machinae effectu iudicare velimus, abſolute eſt neceſſaria: multo minus vide ea Machinae diſpoſitio, in qua ſumma perfectio continetur, quae oneri aſcenſum celerrimum inducit, definiri poteſt. Hanc igitur aliasque ſimiles quaeſtiones Mechanicas Auctor euoluit, atque Analyſi ſublimiori in ſubſidium vocata accurate enucleat.

DE MOTV TAVTOCHRONO PENDVLORVM COMPOSITORVM AVCTORE *L. EVLERO.*

Pendula vulgaria, quibus motus horologiorum temperari ſolet, hoc vitio laborare, quod omnes oſcillationes, ſiue ſint ampliores, ſiue minores, non paribus temporis interuallis abſoluantur, iam pridem eſt notum. Duplex autem huius inaequalitatis ratio deprehenditur; altera in motu circulari eſt poſita, quae figura ad tautochroniſmum ſeu aequalem oſcillationum durationem minus mus est, accommodata, altera vero in resistentia medii, in quo oscillationes absoluuntur. Hanc posteriorem caussam Auctor hic penitus seponendam arbitratur, cum quod perturbatio inde oriunda est minima, tum vero imprimis quod ipse iam primus veram curuam, quae in fluido tautochronismum gignit, inuenit, et quomodo ad praxin sit accommodanda ostendit. In hac igitur dissertatione motum penduli, quasi in vacuo fierit, contemplatur, et quo pacto is tautochronus reddi queat, accuratius perpendit. Ac primo quidem constat, pendula ad duo genera, simplicia et composita, reuocari solere. Pendulum simplex vocatur id, cuius tota moles in vnico quasi puncto est collecta, quale quidem nullum effici potest, proxime autem huiusmodi pendulum obtinetur, si corpus minimum et grauissimum de filo tenuissimo suspendatur; cum enim moles fili pro nihilo reputari possit, corpusque alligatum sit minimum, tota moles quasi in puncto collecta sine sensibili errore concipi potest. Tale pendulum oscillationes omnes aequalibus temporibus absoluere acutissimus *Hugenius* primus inuenit, si ita suspendatur, vt corpus motum suum in cycloide conficiat; quem in finem filum intra duas similes cycloides suspendi opportere ostendit; verum hic probe est notandum, istud remedium tantum ad pendula simplicia esse accommodatum. Pendula autem composita vocantur, quorum moles non in puncto collecta, sed per aliquod volumen expansa est, ad quod quidem genus omnia pendula realia sunt referenda, cum massa mouenda semper per filum seu virgam, qua suspenditur, et corpus seu lentem appensam sit distributa. Atque idem quidem *Hugenius* regu-

regulam tradit, cuius ope pendulum quoduis compositum ad simplex reuocari, seu pendulum simplex inueniri potest, cuius motus conueniat cum motu compositi; quae reductio inuentione centri oscillationis continetur: pendulum scilicet compositum perinde moueri demonstrauit, ac si tota eius massa in centro oscillationis esset collecta. His igitur duobus inuentis combinandis non difficile videtur pendulum quoduis compositum ad tautochronismum adaptare, ac nemo adhuc dubitasse videtur, quin ista motus oscillatorii aequabilitas obtineatur, si pendulum compositum ita suspendatur, vt eius centrum oscillationis secundum cycloidem incedat. Verum si perpendamus determinationem centri oscillationis a puncto suspensionis pendere, atque in motu intra duas cycloides punctum suspensionis iugiter mutari, id scilicet punctum, circa quod pendulum quouis momento gyratur, facile agnoscemus, in quouis situ penduli obliquo centrum oscillationis mutari, neque idcirco per cycloidem tautochronismum obtineri posse. Cum igitur cyclois penduli tantum simplicis oscillationes isochronai reddat, in hac dissertatio pro quouis pendulo composito curua ad tautochronismum apta inuestigatur, quae pro diuersa corporis oscillantis figura plurimum variari potest. Etiamsi autem inuestigatio huius curuae ad aequationem constructu difficillimam perducat. Auctor tamen eius constructionem satis feliciter ad quemuis casum oblatum accommodat, et quicquid praestari posse videtur, expedit, non spernendis adhibitis calculi molestissimi artificiis.

His errata, a *Clar. Auctore* transmissa, addimus.

Pagina	Linea	loco	lege
224	8	tam magnitudine quam longitudine	tam magnitudine quam positione
231	26	centrum C transire	centrum C circulum transire
232	6	altera vt quod	altera quod
235	12	atteruter	alteruter
237	23	posito simitoto $= 1$	posito sinu toto $= 1$
238	3	ita vt fit $y = \Phi + \theta$	ita vt fit $\eta = \Phi + \theta$
239	penult:	$-2dz^d\Phi \sin \Phi - z^d\Phi^2 \cos \Phi - z^{dd}\Phi \sin.\Phi$	$-2dzd\Phi \sin \Phi - zd\Phi^2 \cos.\Phi - zdd\Phi \sin.\Phi$
	vlt:	$+2dz^d\Phi \cos.\Phi - z^d\Phi^2 \sin.\Phi + z^{dd}\Phi \cos.\Phi$	$+2dzd\Phi \cos.\Phi - zd\Phi^2 \sin.\Phi + zdd\Phi \cos.\Phi$

NB. Per totam hanc dissertationem character differentiationis *d* crebro supra supra lineam instar exponentis exprimitur, quem errorem hic semel notasse sufficiat.

Pagina	Linea	loco	lege
241	13	distantiarum secarum	distantiarum suarum
	19	seu $ddy =$	seu $dd\eta =$
243	21	II. $2^d z^d + z^{dd}\Phi =$	II. $2dzd\Phi + zdd\Phi =$
	penult:	informiter reuoluen-	vniformiter reuoluen-
245	12	I. $ddz = z^d \Phi^2$	I. $ddz - zd\Phi^2 =$
246	10	hanc indicet formam:	hanc induet formam:
248	20	negligantior	negligantur
	bid.	negligentes	inuoluentes
251	14	notus medium ad motum	motus medius ad motum

Pagina	Linea	loco	lege
252	18	$b - 60$,	$b = 60$;
256	27	quaecunque Machina	quacunque Machina
258	6	Cum autem pono ,	Cum autem porro
	12	nullam vnquam viri	nullam vnquam vim
259	22	fore conſtitutum	fore conſtitutam
270	8	iam attingent	iam attigerit
280	6	$= 15625\, tt \frac{p-q}{P+Q}$	$= 15625\, tt \frac{p-q}{P+Q}$
282	3	tang. $\Phi = v$: vnde ſi $v = 3$	tang. $\Phi = \nu$: vnde ſi $\nu = 3$.

NB. In ſequentibus etiam ſaepius Latina littera v pro Graeco ν ponitur.

Pagina	Linea	loco	lege
286	23	*Huienius*	*Hugenius*
296	8	$= (dt^2 - dt^2 ʃ$	$= C dt^2 - dt^2 ʃ$
	11	ita autem id accepi ponamus	ita autem id accipi ponamus ,
300	2	$\frac{dz\sqrt{(kk+r)}}{r} = \frac{dx\sqrt{ʃ}}{\sqrt{2x}}$	$\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r} = \frac{dx\sqrt{f}}{\sqrt{2x}}$

PHYSICO - MATHEMATICA.

DE ARGENTO VIVO CALOREM CELERIVS RECIPIENTE ET CELERIVS PERDENDE QVAM MVLTA FLVIDA LEVIORA EXPERIMENTA ET COGITATIONES AVCTORE G. *W. RICHMANN.*

Quas Auctor anno 1750. conuentui exhibuit cogitationes, paucis recenſemus, et Corollaria, Phyſicam experimentalem amplificantia, ex obſeruationibus potiſſimum

mum exponemus. Auctor nouum in Physicis, vt axioma, tadit exemplum: Densiora corpora difficilius calefieri, et difficilius calorem adquisitum perdere, quam rariora; hinc et argentum viuum difficilius calefieri aqua et aliis fluidis, difficiliusque refrigerari. Verum enim vero cum hocce alii partim non absque veri specie tradiderunt, partim cautius rem attigerunt, tamen, quo modo solida diuersa calorem inter se, et cum fluidis, communicent, examinauit, quia ei hac in re parum praestitum esse videbatur, experimentisque XXIII. probauit, ex quibus petet: a) Argentum viuum vel in medio aëre densiori aqueo, vel in niue frigidiori, maiora, quam aqua, spiritus vini ordinarius, petroleum, oleum Terebinthinae, spiritus rectificatissimus et oleum lini, caloris pati decrementa. b) Idem in medio aqueo calidiori maiora, quam petroleum, oleum Terebinthinae et spiritus vini ordinarius, capere incrementa. c) Incrementa et decrementa caloris mercurii et petrolei; decrementa autem caloris olei Terebinthinae, petrolei et mercurii, ferme in aëre esse aequalia. d) Aquae et spiritus vini ordinarii decrementa et incrementa caloris in aëre esse minora, decrementis et incrementis caloris argenti viui et petrolei; olei lini autem decrementa in aëre esse minora decrementis petrolei et mercurii. *Cel. Nolletius* quidem in *lectionum Physicarum tomo IV. anno* 1749. euulgato, idem asserit, experimentisque confirmat; lectores autem ex ratione experimentorum abunde cognituros, Auctorem ea, dum has concinnauit cogitationes, nondum legisse et vidisse. Quo autem diuersitas Thermometrorum vasorumque nullum iniiceret dubium, quamquam allata Corollaria ex experi-

experimentis ſatis patent, tamen hoc experimento XXIV. alia ratione confirmare voluit. Poſito igitur, ſi diuerſitas accideret, obſeruat, hancce in fluidis, in calore recipiendo et perdendo, forte a magnitudine particularum homogenarum primae compoſitionis pendere, in corporibus autem heterogeniis rationem atque multitudinem pororum ad materiam aliter ſeſe habere. Vltimo experimentis XXV. vſque XXVII, mercurium maius, quam dicta fluida, decrementum caloris pati, confirmat.

DE RATIONE CALORVM ET RATIONE DENSITATIS RADIORVM *DIRECTORVM* AD DENSITATEM PER LENTEM REFRACTORVM DEFINIENDA COGITATIONES AVCTORE *G. W. RICHMANN.*

Dum ad hancce recenſendo progredimur diſſertationem, notamus, vtramque inquiſitionem ad perficiendam Philoſophiam naturalem aliquid conferre poſſe; hanc ob cauſam Auctor ponit, efficaciam radiorum ſolarium per vitra cauſtica augeri, et maiorem obſeruari in minori, minorem vero in maiori a foco vitri diſtantia. Et cum denſitates radiorum ſolarium vitrum cauſticum penetrantium, et in foco concurrentium, in diſtantiis a foco ſunt diuerſis; hinc patet: poſitis caloribus in ratione denſitatum radiorum, inuenire rationem calorum per Thermometra ordinaria, et diuerſis expanſionibus liquoris Thermometrici numeros, rationi praedictae congruentes, aſſignare. E contrario efficaciam quidem radiorum ſolarium, ſi per aërem his radiis antea calefactum tranſeat, poſt vitra cauſtica minui, obſeruationibus ab alio inſtitutis, confirmatam vidit, ei tamen in culpa eſſe tranſitus ignis in aërem calefactum largior, quam in alia corpora, non videbatur, ſed radii a vaporibus inter vitra cauſtica et ſolem haerentibus intercipi videbantur. Quo autem quilibet indicare poſſit, quantum obſeruationibus eiusmodi ſit tribuendum; hinc aliam iniit viam, ſi eiusmodi experimentis calorum veram definiret rationem, ita, vt experimenta repeteret, eaque alia inſtitueret ratione. Si ad obſeruationes attendit, patet, radios directos cum radiis refractis commode comparari non poſſe; ſi autem liceret comparare: a) Creſcente efficacia radiorum directorum, creſcere etiam deberet conſtanter efficacia radiorum refractorum, et contra. b) Eidem gradui a radiis directis producto ſemper idem gradus a refractis productus reſpondere deberet, et eidem gradui a radiis refractis producto idem gradus a radiis directis productus. Ex his apparet, quomodo de efficacia caloris in ſectione coni radiantis a lente producti iudicandum ſit; et quomodo ratio denſitatis radiorum lente refractorum ad denſitatem radiorum directorum definiri debeat. Quo autem Auctor potioribus impedimentis obuiam iret, et diuerſas radiorum, in diuerſis ſpatiis collectorum, efficacias comparare valeret, obſeruat, non parum forte facere, ſi duas lentes, ſimiles et aequales, eligeret, et in diuerſis a foco diſtantiis in vtriusque coni radiantis axe Thermometri bulbum collocaret, qua ratione obtineretur: a) Tantum radiorum intercipi ab vna lente, quantum ab altera. b) Tot radios penetrare per vnam lentem, quot penetrant per alteram c) Per idem tempus in vnius Thermometri bulbum efficaciam ſuam exerere radios ſolares, per quod exerunt in alterius Thermometri bulbum. d) Denſitates radio-

radiorum esse ferme in ratione inuersa quadratorum distantiarum Thermometrorum a focis, et in eadem ratione efficaciae radiorum refractorum. Tandem, vt constet, quomodo hae obseruationes commode institui possint, non nulla, adpendicis loco, addit momenta.

EMENDATIO LATERNAE MAGICAE AC MICROSCOPII SOLARIS AVCTORE *L. EVLERO.*

Non solum Auctor haec instrumenta dioptrica per se satis nota, ab insignibus, quibus laborant, vitiis purgare conatur, sed etiam nouam plane eorum constructionem docet; quae si successu, vti sperare licet, non careat, maximam vtilitatem allatura videatur.

Vitia autem, quibus haec instrumenta vulgari modo confecta laborant, sequentia potissimum ab Auctore commemorantur. Primo scilicet per Laternam magicam et microscopium solare non omnis generis obiecta repraesentare licet, sed tantum eiusmodi, quae maximam partem sint diaphana: vnde figuras ope Laternae magicae exhibendas super tabulas vitreas coloribus admodum dilutis depictas esse oportet, et Microscopia solaria aliis obiectis repraesentandis non inseruiunt, nisi quae ita sint tenuia, vt lumini liberum transitum permittant, ac pro diaphanis haberi possint. Ob hoc ergo vitium innumera corporum genera ab vsu horum instrumentorum excluduntur.

Secundum vitium in hoc consistit, quod etiam huiusmodi corpora pellucida neutiquam satis distincte per memorata instrumenta exprimi queant. Cum enim obiecta in parte auersa illuminentur, vnde partes eorum depingendae non nisi ob pelluciditatem lumen adipiscuntur, radii libere transmissi simul in tabulam, super qua pictura excipitur,

cipitur, incidentes imaginem non ſolum perturbant, ſed etiam dum tabulam colluſtrant, ipſam repraeſentationem non mediocriter debilitant: notum enim eſt in hoc negotio omne lumen peregrinum ſollicite a tabula arceri, neque vllius aliis radiis lucis acceſſum concedi debere, niſi qui ad imaginem exprimendam concurrant. Quin etiam iſti radii peregrini lucis, ob diuerſam, qua pollent, refrangibilitatem imaginem ſuper tabula iridis coloribus circumfundunt, quod incommodum in microſcopio ſolari imprimis cernitur.

Huic duplici incommodo Auctor ita occurrit, vt obiecta non per radios a tergo transmiſſos, ſed a parte antica incidentes colluſtrare ſuadeat; hoc enim modo etiam obiecta non diaphana adhiberi poterunt, neque vlla perturbatio a lumine alieno erit pertimeſcenda. Simili ſcilicet modo haec repraeſentatio perfici debet, quo in vulgaribus cameris obſcuris fieri ſolet; quibus, vti conſtat, obiecta quaeuis, dummodo ſufficienter fuerint illuminata, ſatis clare ac diſtincte exprimuntur. Ex quo intelligitur, ſi etiam ea obiecta, quorum imagines per Laternam magicam vel microſcopium ſolare exhibere velimus, a parte antica ſatis fuerint illuminata, repraeſentationem pari modo ſuccedere debere.

Totum ergo negotium eo redit, vt obiectis repraeſentandis ſatis fortis illuminatio inducatur, neque tamen a luce, quae ad hoc adhibetur, vllus radius directe in tabulam incidere poſſit: quod quidem non difficulter efficietur, ſi lux iſta illuminans ad latera tubi, per quem fit repraeſentatio, conſtituatur, eique omnis aditus ad tabulam, quae imaginem recipit praecludatur. Tum vero non

non difficile est eiusmodi mechanismum adiungere, quo obiecto siue a sole, si a lumine plurium lampadum ope speculorum lentiumue conuexarum illuminatio quantumuis magna induci queat.

Assumta porro pro cognita obiecti illuminatione Auctor per Theoriam inquirit in splendorem seu quantitatem luminis, quo ipsa imago per lentem refringentem exprimi debeat: huncque splendorem, cum non admodum fortis obtineri queat, cum lumine, quo ipsum obiectum a Luna plena collustraretur, comparat, sicque lumen, quo imago quouis casu sit apparitura a priori definit. Ad omnes *autem* has repraesentationes vnicalente conuexa vtitur, quoniam inuersio imaginis nihil turbare est censenda, praeter quam quod ipsa obiecta situ inuerso exponere licet.

Pro magnitudine autem obiectorum, quae repraesentari debent, et ratione multiplicationis in imagine factae quatuor praecipua huiusmodi Machinarum genera constituit: quorum primum est accommodatum ad obiecta sex pedum repraesentanda, secundum ad obiecta vnius pedis, tertium duorum digitorum, et quartum duarum linearum, quorum vltimum ratione vsus vicem microscopii solaris *sustinere* potest, priora vero totidem laternas magicas consuetis multo praestantiores referent. In quolibet denique genere Auctor tam magnitudinem quam aperturam lentis maxime idoneae sollicite determinat, simulque splendorem imaginis, qui cuilibet multiplicationi conuenit; assignat rationem scilicet eius ad splendorem ipsius obiecti; ita vt nullum dubium superesse videatur, quin praeceptis Auctoris probe obseruatis non contemnenda huius generis instrumenta tam ad vtilitatem quam delectationem parari queant.

e His

His errata, a *Clar. Auctore* transmissa, mittimus.

Pagina	Linea	loco	lege
363	16	obiecta, repraesentanda	obiecta repraesentanda
364	7	- - - euersa	- - - auersa
365	12	confundantur	confunduntur
	penult.	accepit	accipit
368	4	omni lumen	omne lumen
	penult.	apparitura	apparitura
369	11	a lana plena	a Luna plena.
	14	imagines	imaginis
	16	huic	hinc
	19	$Be = n$, E A	$Be = n$: E A
	20	$Be = na \frac{af}{a-f}$	$Be = na = \frac{af}{a-f}$
371	5	fit cognitus	sit cognitus
	20	*feg*	*feg*
372	13	imagines	imaginis
	23	$b = 1$ pollices	$b = 1$ pollici
	27	queri quies	quinquies
375	3	impade	lampades
	5	umo	fumo

ANNOTATIONES CIRCA CONSTRVCTIONEM HOROLOGII MARINI AVCTORE C. G. KRATZENSTEIN.

De horologiorum constructione et motu multae nunc instituuntur disquisitiones, ac plena sunt *Anglorum Acta Societatis* de hoc negotio. Nuper *Clar. Koesfeldius* etiam horologium proposuit autobarum, quod in nauigationibus ad obseruationes Astronomicas instituendas, et longitudinem maris inde determinandam, commendat. Hoc itaque

itaque Auctori occasio est data, meditationes suas de perficiendo horologio marino conscribendi. Quum autem clepsydrae mercuriales, nautis alias commendatae, multis laborant imperfectionibus; hinc studio eas recenset, et firmis demonstrat argumentis, horologium marinum eiusmodi imperfectionibus laborare non debere, si illud in suo genere, tanquam perfectum, iudicare velimus. Tandem requisita talis horologii marini adducit, et concludit, adhibito praescripto studio, et obseruatis indicatis cautelis, tale horologium scopo nautarum omnino satisfacere posse.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE FACTAE TVBINGAE, ANNIS 1747, 1748 ET 1749. AVCTORE G. W. KRAFFT.

Exhibuit Auctor hac dissertatione obseruationes suas *Tubingae* institutas. §. 1. Instrumenta, quibus vsus est, et reliquas obseruationum circumstantias, adducit. §. 2. Obseruationis altitudinis Barometricae, maxumae et minimae differentiam adfert. §. 3. Obseruationes tradit Thermometricas, ex quibus adparet, maxumum calorem fuisse 87 graduum secundum *Fahrenheitianum*. §. 4. 5. et 6. Non nullas auroras boreales, aut earumdem vestigia ab eo obseruatas, et partim a *M. Bischoff* in vicino ibidem pago, *Steinebrunn* dicto, partim a *Clar. Volzio Stuttgardiae* notatas et communicatas, refert. §. 7. Lumen zodiacale Cassinianum annis 1748. et 1749. distincte annotat. §. 8. Declinationes acus Magneticae, sex pollices longae, et §. 9. quasdam in Eclipsi lunae obseruationes anno 1747. die 25. Febr. temp. matut., omni cura addit. §. 10. Instar adpendicis, tonitrua, grandines, primas hirundines et halones adducit.

 PHYSICA.

goriano fuit instructus sub eo apparatu, quo hoc obiecta secundum diametrum 52 vicibus amplificabat. Macularum emersiones optime obseruauit, et terminum vmbrae probe distinguere potuit. Momenta appulsuum ad duo horologia comparata in obseruatis recenset.

OBSERVATIONVM LIPSIENSIVM ANNO 1748 HABITARVM, CONTINVATIO AVCTORE G. *HEINSIO.*

Auctor cum Academicis varias obseruationes communicare pergit: hinc primo Eclipses satellitum Iouis exponit; deinde occultationes fixarum a luna tradit; tum obseruationes de Cometa 1748 addit; post de apparitione Veneris non nulla refert; tandemque obseruationes Meteorologicas an. 1748. institutas, indicat.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE ECLIPSIVM SATELLITVM IOVIS DVRANTE KAMTZATKIENSI IN DIVERSIS SYBIRIAE LOCIS HABITAE A CENTVR. VICARIO *ANDREA KRASILNICOW.*

REFERENTE EX MANDATO ILLVSTRISSIMI ACADEMIAE PRAESIDIS ADIVNCTO *NIC. POPOW.*

Obseruationes Auctoris non omnes sunt exactae, quia interdum vnico vsus est horologio, et coelum per aliquod dies non fuit serenum. Eclipses satellitum Iouis obseruauit in *Ilginskoy* et *Kiringinskoy Ostrog*, in pago *Witimsk* et *Oljokminskoy Ostrog*, in vrbe *Iakuzk* et *Bolscherezkoy Ostrog*, in vrbe Portus *Petri* et *Pauli* dicta et portu *Ochozk*, in vrbe *Ieniseysk* et *Tomsk*, vt et in castello *Iamyschewsk.* Tandem vero differentias meridianorum a *Petroburgo* addit.

INDEX

INDEX COMMENTARIORVM.

Mathematica.

Phyſico-Mathematica.

L. Euleri,

Physica.

Astronomica.

* * *
* *
*

MATHEMATICA.

METHODVS AEQVATIONES DIFFERENTIALES ALTIORVM GRADVVM INTEGRANDI VLTERIVS PROMOTA

AVCTORE

L. EVLERO.

§. 1.

Tradidi in volumine septimo Miscellaneorum Berolinensium methodum facilem aequationes differentiales cuiusque gradus, in quibus altera variabilis vbique vnicam obtinet dimensionem, alterius vero tantum differentiale, quod constans assumitur, occurrit, integrandi, atque adeo aequationem finitam, quae differentialem propositam penitus exhauriat, inueniendi. Neque enim, si aequatio proposita differentialis primum gradum superet, pluribus repetitis integrationibus opus erat, sed *vno* quasi ictu cuiuscunque demum fuerit gradus aequatio proposita, methodus ibi exposita eandem suppeditat aequationem finitam, quae proditura esset, si successiue tot instituerentur integrationes, quot gradus differentialia in ea obtinent. Sic si aequatio proposita sit differentialis quarti gradus, more solito ea per vnam integrationem primo ad aequationem differentialem tertii gradus reduci, tum vero denuo integratio suscipi deberet, vt ad gradum secundum reuocetur: quo facto adhuc duae superessent integrategrationes instituendae, antequam ad aequationem quantitatibus finitis expressam perueniretur. Hanc igitur operationum plerumque difficillimarum multiplicitatem per methodum meam prorsus euito, dum vnica operatione statim veram aequationem integralem elicio.

§. 2. Quantopere autem modum integrandi vulgarem toties repetendum, quoties differentialitas in aequatione inest, secuti in molestissimos calculos incidamus, vnico exemplo ostendisse iuuabit. Sit ergo proposita haec aequatio differentialis tertii gradus $d^3y = ydx^3$, in qua elementum dx constans ponitur. Haec aequatio, etsi mea methodo facillime ter integratur, tamen ne quidem modus eam semel tantum integrandi perspicitur. Statim quidem, qui variabilis x ipsa deest, apparet eam ad gradum secundum deprimi posse. Si enim ponatur $dx = pdy$, ob dx constans erit $o = pddy + dpdy$ et denuo differentiando $o = pd^3y + 2dpddy + dyddp$. vnde fit $ddy = -\frac{dpdy}{p}$ et $d^3y = -\frac{2dpddy}{p} - \frac{dyddp}{p} = \frac{2dp^2dy}{pp} - \frac{dyddp}{p}$, qui valores in aequatione proposita $d^3y = ydx^3$ substituti dabunt:

$$\frac{2dp^2dy}{pp} - \frac{dyddp}{p} = yp^3dy^3 \text{ seu } yp^4dy^2 = 2dp^2 - pddp.$$

Quae cum neque dp neque dy sit constans, sed constantiae ratio ex aequatione $ddy = -\frac{dpdy}{p}$ definiatur, per methodos solitas vix vlterius tractari potest. Transmutari quidem aequatio potest in aliam formam, in qua nullum differentiale constans insit. Ponatur $dp = qdy$; erit $ddp = qddy + dqdy$ at $ddy = -\frac{dpdy}{p}$ dabit $ddy = -\frac{qdy^2}{p}$, vnde $ddp = -\frac{qqdy^2}{p} + dqdy$

sicque

ſicque aequatio inuenta hanc induet formam:

$$yp^5 dy = 2qqdy + qqdy - pdq = 3qqdy - pdq.$$

In qua pro lubitu differentiale conſtans aſſumere licet. Sit dy conſtans, ob $q = \frac{dp}{dy}$ erit $dq = \frac{ddp}{dy}$; habebiturque

$$yp^5 dy^2 = 3dp^2 - pddp.$$

At ſi ponatur $p = \frac{1}{r}$ fiet $ydy^2 = rdr^2 + rrddr$ quae aequatio cum ambae variabiles vbique totidem ſcilicet tres dimenſiones teneant, ope methodi meae in III. Tomo Comment. explicatae tractari poteſt. Ponatur ſcilicet $y = e^{\int zdu}$ et $r = e^{\int zdu} u$ denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, erit $dy = e^{\int zdu} zdu$ et $ddy = 0 = e^{\int zdu}(zddu + dudz + zzdu^2)$. Deinde eſt $dr = e^{\int zdu}(du + zudu)$ et ob $r = uy$ erit $ddr = 2dudy + yddu = e^{\int zdu}(ddu + 2zdu^2)$. Sed $ddu = -\frac{dudz}{z} - zdu^2$ vnde $ddr = e^{\int zdu}(zdu^2 - \frac{dudz}{z})$. Qui valores in aequatione $ydy^2 = rdr^2 + rrddr$ ſubſtituti dabunt:

$$zzdu = u(1 + zu)^2 du + uuzdu - \frac{uudz}{z}$$

quae aequatio etſi eſt differentialis primi gradus, tamen multo difficilius tractatur, quam ipſa aequatio propoſita ſimplicior quidem aliquantum reddi poteſt ponendo $z = tu$, fiet enim. $\frac{dt}{t} = ttu^2 du + 3tudu - ttdu$

Quin potius cum aequatio propoſita ipſa facile conficiatur, inde integratio huius aequationis petenda videtur. Ponatur porro $t = \frac{1}{s}$, atque aequatio inuenta abibit in hanc

$$sds + 3sudu = du(1 - u^2)$$

quae aequatio immediate ex propoſita elicitur, ponendo $dx = \frac{du}{s}$ et $\frac{dy}{y} = \frac{udu}{s}$, fiet enim ob $\frac{du}{s}$ conſtans, $sddu$

 $= dsdu$

$= ds\,du$ et $\frac{ddy}{y} = \frac{u^2du^2}{ss} + \frac{du^2}{s}$ et $\frac{d^3y}{y} = \frac{u^3du^3}{s^3} + \frac{3udu^3}{ss} + \frac{du\,ddu}{s} = \frac{u^3du^3}{s^3} + \frac{3udu^3}{ss} + \frac{du^2ds}{ss}$, qui valores in aequatione $d^3y = ydx^3$ ſubſtituti praebebunt aequationem inuentam.

$$sds + 3sudu = du(1-u^3).$$

§. 3. Totum ergo negotium ad integrationem huius aequationis reuocatur; quam integrabilem eſſe vel inde patet, quod aequatio differentialis tertii gradus, ex qua eſt nata, integrationem admittat. Quemadmodum autem hoc opus ſit abſoluendum in aequatione latius patente, quae per eandem ſubſtitutionem ex hac aequatione differentiali tertii gradus oritur,

$$Aydx^3 + Bdx^2dy + Cdxddy + Dd^3y = 0.$$

Prodibit autem ponendo $dx = \frac{du}{s}$ et $\frac{dy}{y} = \frac{udu}{s}$ haec aequatio differentialis primi gradus.

$$Dsds + sdu(C + 3Du) + du(A + Bu + Cuu + Du^3) = 0$$

quam primum obſeruo huiusmodi valorem pro $s = \alpha + \beta u + \gamma uu$ admittere. Erit enim $ds = \beta du + 2\gamma udu$. Vnde fit

$$\begin{array}{llll}
\frac{Dsds}{du} = D\alpha\beta + 2D\alpha\gamma u & + 2D\beta\gamma u^2 & + 2D\gamma^2u^3 \\
\quad + D\beta\beta u & + D\beta\gamma u^2 & \\
s(C+3Du) = C\alpha + C\beta u & + C\gamma uu & \\
\quad + 3D\alpha u & + 3D\beta u^2 & + 3D\gamma u^3 \\
A+Bu+Cu^2+Du^3 = A + Bu & + Cu^2 & + Du^3.
\end{array}$$

Reddantur iam ſinguli termini homologi $= 0$, fietque primo $1 + 3\gamma + 2\gamma\gamma = 0$. Vnde fit vel $1 + \gamma = 0$ vel $1 + 2\gamma = 0$. Deinde eſt $3D\beta(\gamma+1) + C(\gamma+1) = 0$, cui aequationi quoque ſatisfacit $\gamma + 1 = 0$, ergo erit $\gamma = -1$.

Porro

Porro fiet $D\alpha = -B - C\beta - D\beta\beta$. Seu $\alpha = \frac{-B - C\beta - D\beta\beta}{D}$
Substituatur hic valor in aequatione $D\alpha\beta + C\alpha + A = o$, seu
$$\begin{array}{l} D^2\alpha\beta + CD\alpha + AD = o \quad \text{eritque} \\ \quad -BD\beta - CD\beta^2 - DD\beta^3 = o \\ -BC - CC\beta - CD\beta^2 \\ \quad AD \end{array}$$
Ad β ergo inueniendum hanc aequationem cubicam resoluere oportet. Sin autem α quaeratur erit:
$$D^3\alpha^3 + BD\alpha^2 + AC\alpha + A^2 = o$$
Sit $\alpha = \frac{A\omega}{D}$, fiet $A\omega^3 + B\omega^2 + C\omega + D = o$
Sit ergo ω radix huius aequationis cubicae, fiet
$$\alpha = \frac{A\omega}{D}; \quad \beta = -\frac{D - C\omega}{D\omega} \text{ et } \gamma = -1$$
atque $s = \frac{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2}{D\omega}$ Porro fiet
$x = \int\frac{du}{s} = \int\frac{D\omega du}{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2}$ atque
$ly = \int\frac{u\,du}{s} \int\frac{D\omega u\,du}{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2}$.
Quamuis autem laborem has formulas integrandi susciperemus, tamen integrale tantum particulare obtineremus, neque adeo totum negotium etiam nunc esset confectum. Non enim valor ipsius s hic inuentus aequationem exhaurit, quia in eo nulla noua occurrit constans, quae in ipsa aequatione non insit. At vero cognito valore particulari ipsius s, ex eo valor completus sequenti modo eruetur. Ponatur valor iam inuentus $\frac{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2}{D\omega} = V$ ac ponatur $s = V + z$; vt sit $ds = dV + dz$, atque prodibit
$$\left.\begin{array}{ll} DVdV & + DVdz + DzDV + Dzdz \\ + CVdu & + Czdu \\ + 3DVudu & + 3Duzdu \\ + (A + Bu & + Cuu + Du^3)du \end{array}\right\} = o.$$

Cum

Cum vero sit per hypothesin:

$$DVdV+Vdu(C+3Du)+du(A+Bu+Cu^2+Du^3)=0$$

erit $Dzdz+z(Cdu+3Dudu+DdV)+DVdz=0$

At ob $V=\frac{A\omega}{D}-\frac{u}{\omega}-\frac{Cu}{D}-uu$ erit $dV=-\frac{du}{\omega}-\frac{Cdu}{D}$ $-2udu$ atque $Dzdz+z(\frac{-Ddu}{\omega}+Dudu)+\frac{dz}{\omega}(A\omega^2-(D+C\omega)u-D\omega u^2)=0$ seu $zdz+zdu(u-\frac{1}{\omega})+dz(\frac{A\omega}{D}-\frac{(D+C\omega)u}{D\omega}-uu)=0$ quae aequatio nisi bene tractetur, difficulter ad separationem variabilium perducitur. Interim tamen continetur in hac forma generali, quae separationem admittit:

$$zdz+zdu(u+a)=dz(uu+2bu+c).$$

Ad quam separandam pono $dz=pdu$ fietque

$$z=\frac{(uu+2bu+c)p}{p+u+a} \text{ et differentiando:}$$

$$dz=pdu=\frac{(u+a)(uu+2bu+c)dp+pdu(2p(u+b)+uu+2au+2ab-c)}{(p+u+a)^2}$$

seu $pdu(pp+2ap-2bp+aa-2ab+c)=(u+a)(uu+2bu+c)dp$ in qua variabiles sponte a se inuicem separantur: erit enim:

$$\frac{dp}{p(pp+2(a-b)p+aa-2b+c)}=\frac{du}{(u+a)(uu+2bu+c)}$$

Opus autem foret summe taediosum, si hanc aequationem integrare, atque exinde integrale aequationis differentialis tertii gradus eruere vellemus.

§. 4. Apparet hinc quanto labore tandem huiusmodi regulas sequendo integrale aequationis differentialis tertii gradus erui possit, vnde vtilitas methodi meae in Vol. VII. Misc: expositae non mediocriter perspicitur. Eo magis autem eius vtilitas in oculos incurret, si loco aequationis differentialis tertii gradus alia, quae sit quarti altiorisue gradus more vsitato tractetur, tum enim substitutiones

nes hic adhibitae aequationem differentialem non primi, sed secundi altiorisue gradus praebebit, cuius integrale vix vllis artificiis obtineri poterit. Et quamuis tandem etiam huius aequationis integrale inueniretur, tamen id plerumque tantum foret particulare, et post molestissimas demum substitutione suppeditat, et ipsius aequationis propositae integrale, et quidem particulare tantum: cum mea methodus fere sine vllo labore statim integrale completum praebeat. Quod vt clarius intelligatur vtamur ante tradita substitutione in hac aequatione differentiali quarti gradus:

$$Aydx^4 + Bdx^3dy + Cdx^2ddy + Ddxd^3y + Ed^4y = 0.$$

in qua dx ponitur constans. Sit igitur $dx = \frac{du}{s}$ seu $du = sdx$, et $\frac{dy}{y} = \frac{udu}{s} = udx$; erit ob dx constans: $\frac{ddy}{y} - \frac{dy^2}{y^2} = dx\,du = sdx^2$; ideoque $\frac{ddy}{y} = u^2dx^2 + sdx^2$. Hinc fiet porro $\frac{d^3y}{y} - \frac{dy\,ddy}{y^2} = 2usdx^3 + dsdx^2$ et $\frac{d^3y}{y} = u^3dx^3 + 3usdx^3 + dsdx^2$: iterumque differentiando prodibit $\frac{d^4y}{y} - \frac{dyd^3y}{yy} = 3uusdx^4 + 3udx^2ds + 3ssdx^4 + dx^2dds$, ideoque $\frac{d^4y}{y} = u^4dx^4 + 6uusdx^4 + 4udx^2ds + 3ssdx^4 + dx^2dds$. Quibus valoribus in aequatione hac substitutis.

$$Adx^2 + \frac{Bdxdy}{y} + \frac{Cddy}{y} + \frac{Dd^3y}{ydx} + \frac{Ed^4y}{ydx^2} = 0$$

proueniet haec aequatio:

$$Adx^2 + Budx^2 + Cu^2dx^2 + Csdx^2 + Du^3dx^2 + 3Dusdx^2 + Ddxds$$
$$+ Eu^4dx^2 + 6Euusdx^2 + 4Eudxds + 3Essdx^2 + Edds = 0$$

Cum autem sit $dx = \frac{du}{s}$ erit

$$du^2(A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4) + sdu^2(C + 3Du + 6Euu)$$
$$+ 3Essdu^2 + sduds(D + 4Eu) + Essdds = 0$$

 Appa-

Apparet quidem huic aequationi satisfieri, si sit $s=0$ et u radix huius aequationis:

$$A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4=0.$$

Sit ergo α vna ex radicibus huius aequationis, et sumendo $u=\alpha$, erit $\frac{dy}{y}=\alpha dx$ et $y=e^{\alpha x}$, qui valor quoque aequationi differentiali quarti gradus propositae conueniet. Erit autem tantum integrale maxime particulare; etiamsi autem quaternae aequationis $A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4=0$ radices, quae sint α, β, γ, δ, suppedituro queant valorem

$$y=\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}+\mathfrak{D}e^{\delta x}$$

qui est integrale completum, tamen hinc non facile patet, qualis futurus sit valor ipsius y, si radicum α, β, γ, δ quaedam fuerint imaginariae vel inter se aequales. Contra vero potius ex valore ipsius y cognito integrale superioris aequationis differentio differentialis inter u et s assignabitur. Erit enim $u=\frac{dy}{ydx}$ et $s=\frac{du}{dx}$; ideoque

$$u=\frac{\mathfrak{A}\alpha e^{\alpha x}+\mathfrak{B}\beta e^{\beta x}+\mathfrak{C}\gamma e^{\gamma x}+\mathfrak{D}\delta e^{\delta x}}{\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}+\mathfrak{D}e^{\delta x}} \text{ et}$$

$$s=\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha-\beta)^2e^{(\alpha+\beta)x}+\mathfrak{A}\mathfrak{C}(\alpha-\gamma)^2e^{(\alpha+\gamma)x}+\mathfrak{A}\mathfrak{D}(\alpha-\delta)^2e^{(\alpha+\delta)x}+\mathfrak{B}\mathfrak{C}(\beta-\gamma)^2e^{(\beta+\gamma)x}+\text{etc.}}{(\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}+\mathfrak{D}e^{\delta x})^2}$$

Hinc concluditur fore:

$$s+uu=\frac{\begin{array}{l}+\mathfrak{A}^2\alpha^2e^{2\alpha x}+\mathfrak{B}^2\beta^2e^{2\beta x}+\mathfrak{C}^2\gamma^2e^{2\gamma x}+\mathfrak{D}^2\delta^2e^{2\delta x}\\+\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha^2+\beta^2)e^{(\alpha+\beta)x}+\mathfrak{A}\mathfrak{C}(\alpha^2+\gamma^2)e^{(\alpha+\gamma)x}+\text{etc.}\end{array}}{(\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}+\mathfrak{D}e^{\delta x})^2}$$

quae fractio deprimi potest, eritque

$s+$

$$s+uu=\frac{\mathfrak{A}\alpha^2e^{\alpha x}+\mathfrak{B}\beta^2e^{\beta x}+\mathfrak{C}\gamma^2e^{\gamma x}+\mathfrak{D}\delta^2e^{\delta x}}{\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}+\mathfrak{D}e^{\delta x}}$$

Cum iam ſit

$$u=\frac{\mathfrak{A}\alpha e^{\alpha x}+\mathfrak{B}\beta e^{\beta x}+\mathfrak{C}\gamma e^{\gamma x}+\mathfrak{D}\delta e^{\delta x}}{\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}+\mathfrak{D}e^{\delta x}}$$

ſi hinc x, quod autem actu fieri nequit, eliminetur, prodibit aequatio inter s et u. Si quidem ponatur $\mathfrak{C}=0$ et $\mathfrak{D}=0$, prodibit aequatio integralis particularis haec

$$s+uu-(\alpha+\beta)u+\alpha\beta=0.$$

Quare ſi fuerint α et β duae radices huius aequationis

$$A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4=0.$$

aequationi differentio differentiali inter s et u ſatisfaciet hic valor $s=-\alpha\beta+(\alpha+\beta)u-uu$. In aequatione autem illa non du ſed $\frac{du}{s}$ poſitum eſt conſtans, quae conſideratio exuetur ponendo $ds=qdu$: erit enim $\frac{ds}{qs}$ conſtans ideoque $qsdds=qds^2+sdsdq$, et $dds=\frac{ds^2}{s}+\frac{dsdq}{q}$, ſtatuatur iam du conſtans, erit $dq=\frac{dds}{du}$ et $\frac{dq}{q}=\frac{dds}{ds}$, vnde fit $dds=\frac{ds^2}{s}+dds$. Prodibit ergo haec aequatio:

$$du^2(A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4)+sdu^2(C+3Du+6Eu^2)$$
$$+3Essdu^2+sduds(D+4Eu)+Esds^2+Essdds=0$$

in qua differentiale du aſſumtum eſt conſtans. Quodſi iam formulae $A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4$ factor trinomialis ſit $L+Mu+Nu^2$ erit integrale particulare

$$L+Mu+Nu^2+Ns=0.$$

§. 5. Quoniam autem hic methodum meam integrandi aequationes differentiales altiorum graduum vlterius extendere constitui, regulam quam loco citato dedi paucis repetam. Patet vero methodus mea ad omnes aequationes in hac forma generali contentas:

$$o = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2} + \frac{E\,d^3y}{dx^3} + \frac{F\,d^4y}{dx^4} + \frac{G\,d^5y}{dx^5} + \text{etc.}$$

Vbi differentiale dx positum est constans. Ad huius aequationis integrale finitis terminis expressum inueniendum ex ea formetur sequens forma Algebraica:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + Gz^6 + \text{etc.}$$

cuius quaerantur omnes factores reales tam simplices quam trinomiales, inter quos, si qui fuerint inter se aequales, coniunctim repraesententur. Ex quolibet autem factore nascetur integralis pars, et, si omnes istae partes ex singulis factoribus oriundae in vnam summam coniiciantur, habebitur integrale completum aequationis propositae. Ex sequenti autem tabella partes integralis ex singulis factoribus oriundae desumentur.

Factores	Partes Integralis
$z-k$	αe^{kx}
$(z-k)^2$	$\alpha+\beta x)e^{kx}$
$(z-k)^3$	$(\alpha+\beta x+\gamma x^2)e^{kx}$
$(z-k)^4$	$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)e^{kx}$
etc.	etc.
$zz-2kz\cos.\Phi+kk$	$\alpha e^{kx\cos.\Phi}\sin.kz\sin.\Phi+\mathfrak{A}e^{kx\cos.\Phi}\cos.kx\sin.\Phi$
$(zz-2kz\cos.\Phi+kk)^2$	$(\alpha+\beta x)e^{kx\cos.\Phi}\sin.kx\sin.\Phi+$ $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x)e^{kx\cos.\Phi}\cos.kx\sin.\Phi$
$(zz-2kz\cos.\Phi+kk)^3$	$(\alpha+\beta x+\gamma x^2)e^{kx\cos.\Phi}\sin.kx\sin.\Phi+$ $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^3)e^{kx\cos.\Phi}\cos.kx\sin.\Phi$
$(zz-2kx\cos.\Phi+kk)^4$	$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)e^{kx\cos.\Phi}\sin.kx\sin.\Phi+$ $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3)e^{kx\cos.\Phi}\cos.kx\sin.\Phi$
etc.	etc.

In

In his formulis litterae α, β, γ, δ, etc. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. denotant constantes quantitates arbitrarias. Hinc in partibus integralis colligendis cauendum est, ne eadem harum litterarum bis scribatur, quia alioquin extensio integralis restringeretur. Oportebit ergo has constantes continuo nouis litteris indicari, hocque modo in aequationem integralem tot ingredientur constantes arbitrariae, quoti gradus fuerit aequatio differentialis proposita: id quod certum est indicium integrale hoc modo inuentum esse completum, atque in aequatione differentiali nihil contineri, quod non simul in hac aequatione integrali contineatur. Ceterum in eo loco, vbi hanc methodum fusius exposui, pluribus eam exemplis illustraui, ita vt circa eius applicationem nulla difficultas locum habere queat.

§ 6. Aequatio autem generalior, cuius integrationem hic sum traditurus, denotante X functionem quamcunque ipsius x ita se habet:

$$X = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} + \frac{E\,d^4y}{dx^4} + \text{etc.}$$

in qua iterum differentiale dx constans est assumtum. Hanc igitur aequationem quotcunque constet terminis, seu ad quemcunque ea differentialium gradum ascendat, semper per quantitates finitas integrari posse affirmo, perinde atque aequationem ante memoratam, quae tanquam casus ex hac nascitur, si fuerit functio $X = 0$. Ac primo quidem patet, rem nulli difficultati fore subiectam, si X fuerit functio rationalis integra ipsius x, seu si habeat huiusmodi formam:

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$$

Quodsi enim functio X ita sit comparata, adhibeatur huiusmodi substitutio:

$$y = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \text{etc.} + v \text{ eritque}$$

$$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + \mathfrak{D}x^2 + \text{etc.} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = 2\mathfrak{C} + 6\mathfrak{D}x + \text{etc.} + \frac{ddv}{dx^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6\mathfrak{D} + \text{etc.} + \frac{d^3v}{dx^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \text{etc.} + \frac{d^4v}{dx^4}$$

etc.

Ponamus autem esse $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$, atque in valore ipsius y omnes termini post $\mathfrak{D}x^3$ euanescentes erunt ponendi. Facta ergo substitutione habebitur:

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 =$$

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}Ax + \mathfrak{C}Ax^2 + \mathfrak{D}Ax^3 = Av + \frac{Bdv}{dx} + \frac{Cddv}{dx^2} + \frac{Dd^3v}{dx^3} + \frac{Ed^4v}{dx^4} + \text{etc.} \\ \mathfrak{B}B + 2\mathfrak{C}Bx + 3\mathfrak{D}Bx^2 \\ 2\mathfrak{C}C + 6\mathfrak{D}Cx \\ 6\mathfrak{D}D \end{array}$$

Hic iam coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ita definiri poterunt, vt omnes termini, in quibus non inest v eiusue differentialia, euanescant, fiet enim:

$$\mathfrak{D} = \frac{\delta}{A}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\gamma}{A} - \frac{3\mathfrak{D}B}{A} = \frac{\gamma}{A} - \frac{3\delta B}{AA}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\beta}{A} - \frac{2\mathfrak{C}B}{A} - \frac{6\mathfrak{D}C}{A} = \frac{\beta}{A} - \frac{2\gamma B}{A^2} + \frac{6\delta B^2}{A^3} - \frac{6\delta C}{AA}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\alpha}{A} - \frac{\mathfrak{B}B}{A} - \frac{2\mathfrak{C}C}{A} - \frac{6\mathfrak{D}D}{A} = \frac{\alpha}{A} - \frac{\beta B}{A^2} + \frac{2\gamma B^2}{A^3} + \frac{12\delta BC}{A^3} - \frac{6\delta B^3}{A^4}$$

$$- \frac{2\gamma C}{A^2} - \frac{6\delta D}{A^2}$$

His ergo valoribus pro $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ assumtis erit

$0 =$

$$o = Av + \frac{Bdv}{dx} + \frac{Cddv}{dx^2} + \frac{Dd^3v}{dx^3} + \frac{Ed^4v}{dx^4} + \text{etc.}$$

quae aequatio ope ſuperioris methodi integrabitur.

§. 7. Quo autem facilius aequationis propoſitae, qualiscunque X fuerit functio ipſius x integrale eruamus, a caſibus ſimplicioribus inchoemus, ac primo quidem ſit aequatio tantum differentialis primi gradus,

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx}.$$

quam patet integrabilem reddi poſſe, ſi multiplicetur per huiusmodi formam $e^{\alpha x}dx$ denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$. Fiet enim

$$e^{\alpha x}Xdx = Ae^{\alpha x}ydx + Be^{\alpha x}dy.$$

Atque α ita comparatum eſſe oportet, vt pars poſterior ſit differentiale cuiuspiam quantitatis finitae: quae ex termino vltimo alia eſſe nequit niſi $Be^{\alpha x}y$, cuius differentiale cum ſit $= Be^{\alpha x}dy + \alpha Be^{\alpha x}ydx$ neceſſe eſt vt ſit $A = \alpha B$ et $\alpha = \frac{A}{B}$. Hoc ergo valore pro α ſumto erit

$$\int e^{\alpha x}Xdx = Be^{\alpha x}y \text{ et } y = \frac{\alpha}{A}e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}Xdx.$$

§. 8. Sit aequatio propoſita differentialis ſecundi gradus:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}.$$

Multiplicetur ea per $e^{\alpha x}dx$ ac definiatur α ita, vt integratio ſuccedat. Habebitur ergo

$$e^{\alpha x}Xdx = Ae^{\alpha x}ydx + Be^{\alpha x}dy + \frac{Ce^{\alpha x}ddy}{dx},$$

cuius integrale ſit:

$$\int e^{\alpha x}Xdx = e^{\alpha x}\left(A'y + \frac{B'dy}{dx}\right)$$

Quo

Quo differentiato habebitur:

$$e^{\alpha x}X\,dx = e^{\alpha x}(\alpha A' y\,dx + A' dy + \tfrac{B' ddy}{dx}) + \alpha B' dy$$

Comparatione ergo facta fiet $B' = C$: $A' = B - \alpha C$ et $A = \alpha B - \alpha^2 C$, debet ergo esse α radix huius aequationis $o = A - \alpha B + \alpha^2 C$, quae cum habeat duas radices vtramlibet assumere licet; eritque $A' = B - \alpha C$ et $B' = C$. Peruentum est ergo ad hanc aequationem differentialem primi gradus:

$$e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx = A' y + \tfrac{B' dy}{dx}.$$

Ad quam denuo integrandam multiplicetur per $e^{\beta x}dx$ vt habeatur.

$$e^{(\beta-\alpha)x}dx\int e^{\alpha x}X\,dx = A' e^{\beta x}y\,dx + B' e^{\beta x}dy$$

quae vt sit integrabilis, debet esse $\beta = \frac{A'}{B'} = \frac{B-\alpha C}{C}$ seu $\alpha + \beta = \frac{B}{C}$, vnde patet β esse alteram radicem aequationis $o = A - \alpha B + \alpha^2 C$, eritque integrale:

$$\int e^{(\beta-\alpha)x}dx\int e^{\alpha x}X\,dx = B' e^{\beta x}y = C e^{\beta x}y.$$

Est vero $\int e^{(\beta-\alpha)x}dx\int e^{\alpha x}X\,dx = \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{\beta-\alpha}\int e^{\alpha x}X\,dx - \frac{1}{\beta-\alpha}\int e^{\beta x}X\,dx$

Ergo $Cy = \frac{e^{-\alpha x}}{\beta-\alpha}\int e^{\alpha x}X\,dx + \frac{e^{-\beta x}}{\alpha-\beta}\int e^{\beta x}X\,dx.$

In hac aequatione integrali ambae radices α et β aequationis quadraticae $o = A - Bz + Czz$ aequaliter insunt, et hanc ob rem si istius aequationis radices sint cognitae ex iis statim aequatio integralis formatur. Ista autem aequatio $o = A - Bz + Czz$ ex ipsa aequatione proposita

$$X = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2}$$

facilli-

facillime formatur: simili scilicet modo, quo in casu $X = 0$ sumus vsi. Ponatur enim 1 pro y; z pro $\frac{dy}{dx}$; et z^2 pro $\frac{ddy}{dx^2}$, vt prodeat ista expressio $A + Bz + Czz$; cuius factores si fuerint $C(z+\alpha)(z+\beta)$, erunt α et β eae ipsae litterae, quae ad aequationem integralem formandam requiruntur.

§. 9. His praemissis aditus ad integrationem aequationis integralis non adeo erit difficilis. Sit ergo proposita haec aequatio:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc.}$$

cuius vltimus terminus sit $\frac{\Delta d^n y}{dx^n}$. Formetur hinc ista expressio modo ante indicato:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots\ldots + \Delta z^n = P.$$

quae in factores simplices resoluta sit:

$$P = D(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta) \text{ etc.}$$

Dico iam si aequatio differentialis proposita per $e^{ax}dx$ multiplicetur eam euadere integrabilem. Erit enim

$$e^{ax}Xdx = e^{ax}dx\left(Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{\Delta d^n y}{dx^n}\right)$$

cuius integrale ponamus esse:

$$\int e^{ax}Xdx = e^{ax}\left(A'y + \frac{B'dy}{dx} + \frac{C'ddy}{dx^2} + \frac{D'd^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{\Delta d^{n-1}y}{dx^n}\right)$$

Sumto autem differentiali habebitur

$$e^{ax}Xdx = e^{ax}dx\left(aA'y + \frac{A'dy}{dx} + \frac{B'ddy}{dx^2} + \frac{C'd^3y}{dx^3} + \ldots\ldots + \frac{\Delta d^n y}{dy^n}\right.$$
$$\left. + \frac{aB'dy}{dx} + \frac{aC'ddy}{dx^2}\right.$$

quae si cum proposita conferatur erit:

$A' = \frac{A}{\alpha}$;

$B' = \frac{B}{\alpha} - \frac{A}{\alpha^2}$

$C' = \frac{C}{\alpha} - \frac{B}{\alpha^2} + \frac{A}{\alpha^3}$

$D' = \frac{D}{\alpha} - \frac{C}{\alpha^2} + \frac{B}{\alpha^3} - \frac{A}{\alpha^4}$

quibus valoribus vsque ad vltimum continuatis, peruenietur ad hanc aequationem:

$$A - B\alpha + C\alpha^2 - D\alpha^3 + E\alpha^4 - \ldots\ldots \pm \Delta\alpha^n = 0$$

cum igitur α sit radix huius aequationis erit $z + \alpha$ factor istius expressionis

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots\ldots + \Delta z^n.$$

existente $P = \Delta(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta)$ etc.

§. 10. Prima ergo integratione absoluta erit

$$e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X dx = A'y + \frac{B'dy}{dx} + \frac{C'ddy}{dx^2} + \frac{D'd^3y}{dx^3} + \ldots \frac{\Delta d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

Formetur hinc iterum modo ante exposito haec expressio:

$$P' = A' + B'z + C'z^2 + D'z^3 + \ldots + \Delta z^{n-1}$$

Cum iam sit:

$A = \alpha A'$

$B = \alpha B' + A'$

$C = \alpha C' + B'$

$D = \alpha D' + C'$

etc.

manifestum est fore $P = (\alpha + z)P'$, ideoque $P' = \frac{P}{z+\alpha}$

et

et $P' = \Delta(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta)(z+\varepsilon)$ etc.
Simili ergo modo, quo supra vsi sumus, euincetur hanc aequatione demo reddi integrabilem, si multiplicetur per $e^{\beta x}dx$.

Sit igitur aequatio integralis hinc oriunda.

$$\int e^{(\beta-\alpha)x}dx\int e^{\alpha x}Xdx = e^{\beta x}\left(A''y + \frac{B''dy}{dx} + \frac{C''ddy}{dx^2} + \ldots + \frac{\Delta d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$$

fietque comparatione instituta

$A' = \beta A''$

$B' = \beta B'' + A''$

$C' = \beta C'' + B''$

$D' = \beta D'' = C''$

etc.

Ergo si ponatur

$$P'' = A'' + B''z + C''z^2 + D''z^3 + \ldots + \Delta z^{n-2}$$

erit $P' = (\beta + z)P''$, et $P'' = \frac{P'}{z+\beta} = \frac{P}{(z+\alpha)(z+\beta)}$ vnde fit $P'' = \Delta(z+\gamma)(z+\delta)(z+\varepsilon)$ etc. scilicet hinc duo iam factores $z+\alpha$ et $z+\beta$ sunt egressi. Est autem:

$$\int e^{(\beta-\alpha)x}dx\int e^{\alpha x}Xdx = \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{\beta-\alpha}\int e^{\alpha x}Xdx - \frac{1}{\beta-\alpha}\int e^{\beta x}Xdx$$

vnde aequatio bis integrata reducitur ad hanc formam

$$\frac{e^{-\alpha x}}{\beta-\alpha}\int e^{\alpha x}Xdx + \frac{e^{-\beta x}}{\alpha-\beta}\int e^{\beta x}Xdx = A''y + \frac{B''dy}{dx} + \frac{C''ddy}{dx^2} + \frac{D''d^3y}{dx^3} + \ldots \frac{\Delta d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$

§. 11. Cum porro hinc posito 1 pro y et z pro $\frac{dy}{dx}$ etc. prodeat haec expressio,

$$P'' = A'' + B''z + C''z^2 + \ldots\ldots + \Delta z^{n-2}$$

fitque $P'' = \Delta(z+\gamma)(z+\delta)(z+\varepsilon)$ etc.
manifestum est aequationem vltimo inuentam denuo reddi integrabilem si multiplicetur per $e^{-\gamma x}dx$, fit aequatio integralis hinc oriunda haec:

$$\int \frac{e^{(\gamma-\alpha)x}dx}{\beta-\alpha}\int e^{\alpha x}X dx + \int \frac{e^{(\gamma-\beta)x}dx}{\alpha-\beta}\int e^{\beta x}X dx = e^{\gamma x}\left(A'''y + \frac{B'''dy}{dx} + \frac{C'''ddy}{dx^2} + \ldots\ldots + \frac{\Delta d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\right)$$

fietque ex comparatione terminorum homogeneorum:

$$A'' = \gamma A'''$$
$$B'' = \gamma B''' + A'''$$
$$C'' = \gamma C''' + B'''$$
$$D'' = \gamma D''' + C'''$$
etc.

Quare si ponatur:

$$P''' = A''' + B'''z + C'''z^2 + D'''z^3 + \ldots + \Delta z^{n-3}$$

erit $P'' = (\gamma + z)P'''$ et $P''' = \frac{P''}{z+\gamma} = \frac{P}{(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma)}$
vnde sequitur fore:

$$P''' = \Delta(z+\delta)(z+\varepsilon)(z+\zeta) \text{ etc.}$$

Cum autem sit generaliter $\int e^{(\mu-\nu)x}dx \int e^{\nu x}X dx = \frac{e^{(\mu-\nu)x}}{\mu-\nu}\int e^{\nu x}X dx + \frac{1}{\nu-\mu}\int e^{\mu x}X dx$, si hinc integralia reducantur reperietur.

$$\frac{e^{-\alpha x}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\int e^{\alpha x}X dx + \frac{e^{-\beta x}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}\int e^{\beta x}X dx + \frac{e^{-\gamma x}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\int e^{\gamma x}X dx$$
$$= A'''y + \frac{B'''dy}{dx} + \frac{C'''ddy}{dx^2} + \frac{D'''d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta d^{n-3}y}{dx^{n-3}}.$$

§. 12.

§. 12. Si hoc modo eo vsque progrediamur, quoad nulla amplius differentialia ipsius y supersint, tum ex altera parte aequationis habebitur vnicus terminus $\frac{\Delta d^{0} y}{d x^{0}} = \Delta y$; id quod eueniet, si integratio toties fuerit instituta quot maximus exponens n continet vnitates. Ad hoc ergo vltimum integrale commode exprimendum, cum sit

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + \Delta z^n = \Delta(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma) \text{ etc.}$$

formentur ex radicibus α, β, γ, δ, etc. sequentes valores

$$\mathfrak{A} = \Delta(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)(\varepsilon-\alpha) \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{B} = \Delta(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)(\varepsilon-\beta) \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{C} = \Delta(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)(\varepsilon-\gamma) \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{D} = \Delta(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)(\varepsilon-\delta) \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{E} = \Delta(\alpha-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)(\delta-\varepsilon) \text{ etc.}$$

etc.

quibus inuentis erit integralis aequatio vltima quae sita:

$$y = \frac{e^{-\alpha x}}{\mathfrak{A}} \int e^{\alpha x} X dx + \frac{e^{-\beta x}}{\mathfrak{B}} \int e^{\beta x} X dx + \frac{e^{-\gamma x}}{\mathfrak{C}} \int e^{\gamma x} X dx + \text{etc.}$$

quae cum tot contineat terminos, quoti gradus fuerit aequatio differentialis proposita.

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{\Delta d^n y}{dx^n}$$

totidem inuoluet constantes arbitrarias, ideoque erit integralis completa.

§. 13. Alio autem modo valores quantitatum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. exprimi possunt, qui plerumque multo commodius negotium conficit. Dico enim fore $\mathfrak{A} = \frac{dP}{dz}$, si si vbique pro z substituatur $-\alpha$, seu si ponatur $z+\alpha=0$. Cum enim sit

$$P=\Delta(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta) \text{ etc.}$$

erit differentiando:

$$\frac{dP}{dz}=\Delta(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta)\text{etc.}+\frac{\Delta(z+\alpha)d.}{dz}(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta)\text{etc.}$$

Si iam ponatur $z=-\alpha$ posterius membrum euanescet, et prius dabit:

$$\frac{dP}{dz}=\Delta(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha) \text{ etc.} = \mathfrak{A}.$$

Cum autem sit $P=A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots.+\Delta z^n$ erit:

$$\frac{dP}{dz}=B+2Cz+3Dz^2+4Ez^3+\ldots.+n\Delta z^{n-1}$$

ponatur ergo $z=-\alpha$, seu fiat $z+\alpha=0$, erit

$$\mathfrak{A}=B-2C\alpha+3D\alpha^2-4E\alpha^3+\text{etc.}\ldots.\pm n\Delta\alpha^{n-1}$$

simili modo reperietur fore

$$\mathfrak{B}=B-2C\beta+3D\beta^2-4E\beta^3+\ldots.\pm n\Delta\beta^{n-1}$$

$$\mathfrak{C}=B-2C\gamma+3D\gamma^2-4E\gamma^3+\ldots.\pm n\Delta\gamma^{n-1}$$

etc.

§. 14. Si ergo huiusmodi proponatur aequatio:

$$X=Ay+\frac{Bdy}{dx}+\frac{Cddy}{dx^2}+\frac{Dd^3y}{dx^3}+\frac{Ed^4y}{dx^4}+\text{etc.}$$

quam integrari oporteat, ante omnia ex ea formetur haec expressio Algebraica

$$P=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{etc.}$$

cuius quaerantur omnes factores simplices, cuiusmodi vnus sit $z+\alpha$, atque quilibet factor dabit partem integralis ita vt omnes partes, quae hoc modo ex singulis factoribus eruuntur, iunctim sumtae exhibeant completum ipsius fius y valorem finitum. Scilicet fi factor fimplex fuerit inuentur $z + \alpha$, tum quaeratur quantitas $\mathfrak{A}$ vt fit

$$\mathfrak{A} = B - 2C\alpha + 3D\alpha^2 - 4E\alpha^3 + \text{etc.}$$

qua inuenta erit pars integralis ex hoc factore $z + \alpha$ oriunda haec.

$$\frac{e^{-\alpha x}}{\mathfrak{A}} \int e^{\alpha x} X dx.$$

Hinc perfpicitur fi factor fimplex formae P fuerit $z - \alpha$; tum fore

$$\mathfrak{A} = B + 2C\alpha + 3D\alpha^2 + 4E\alpha^3 + \text{etc.}$$

atque integralis partem hinc oriundam effe

$$+ \frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}} \int e^{-\alpha x} X dx.$$

§. 15. Supereft autem vt oftendamus, quomodo iftae integralis partes fint comparatae, fi factorum fimplicium aliquot fuerint vel inter fe aequales vel imaginariae. Ex fuperioribus enim liquet vtroque cafu partes integralis fingulari modo adornari debere, vt formam finitam et realem obtineant. Sint igitur primo duo factores $z - \alpha$ et $z - \beta$ inter fe aequales feu $\beta = \alpha$, eritque tam $\mathfrak{A} = 0$ quam $\mathfrak{B} = 0$; et vtraque pars integralis euadet infinita, altera quidem affirmatiue altera negatiue, ita vt differentia fit finita. Ad quam inueniendam ponamus $\beta = \alpha + \omega$, denotante ω quantitatem euanefcentem. Cum ergo fit

$$\mathfrak{A} = \Delta(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon) \text{ etc. et}$$

$$\mathfrak{B} = \Delta(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)(\beta - \varepsilon) \text{ etc.}$$

fumtis

sumtis litteris α, β, γ, δ, etc. negatiuis, erit,

$$\mathfrak{A} = -\Delta\omega(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon) \text{ etc. et}$$

$$\mathfrak{B} = \Delta\omega(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon) \text{ etc.}$$

Tum vero erit $e^{\beta x} = e^{\alpha x+\omega x} = e^{\alpha x}(1+\omega x)$ et $e^{-\beta x} = e^{-\alpha x}(1-\omega x)$. Hinc pars integralis ex factoribus binis aequalibus $z-\alpha$ et $z-\beta$ oriunda erit

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}}\int e^{-\alpha x}X\,dx + \frac{e^{\alpha x}(1+\omega x)}{\mathfrak{B}}\int e^{-\alpha x}(1-\omega x)X\,dx$$

Ponatur:

$$\mathfrak{A}' = \Delta(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon) \text{ etc.}$$

erit $\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}'\omega$ et $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}'\omega$, vnde fiet ista pars $=$

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'\omega}\left((1+\omega x)\int e^{-\alpha x}(1-\omega x)X\,dx - \int e^{-\alpha x}X\,dx\right) =$$

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'\omega}\left(\omega x\int e^{-\alpha x}X\,dx - \omega\int e^{-\alpha x}X\,x\,dx\right) =$$

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'}\left(x\int e^{-\alpha x}X\,dx - \int e^{-\alpha x}X\,x\,dx\right) = \frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'}\int dx\int e^{-\alpha x}X\,dx.$$

quae est pars integralis ex factore expressionis P quadrato $(z-\alpha)^2$ oriunda.

§. 16. Valor autem ipsius $\mathfrak{A}'$ sequenti modo commodius exhiberi poterit. Ob $\beta = \alpha$, cum sit $P = \Delta(z-\alpha)^2(z-\gamma)(z-\delta)(z-\varepsilon)\text{etc.} = A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{etc.}$, ponatur $\Delta(z-\gamma)(z-\delta)(z-\varepsilon)$ etc. $= Q$, ita vt valor ipsius Q praebeat $\mathfrak{A}'$ si loco z ponatur α. Erit ergo $P = (z-\alpha)^2 Q$, et differentiando $\frac{dP}{dz} = (z-\alpha)^2\frac{dQ}{dz} + 2(z-\alpha)Q$ atque $\frac{ddP}{dz^2} = (z-\alpha)^2\frac{ddQ}{dz^2} + 4(z-\alpha)\frac{dQ}{dz} + 2Q$; posito nunc $z=\alpha$ fiet $Q = \frac{ddP}{2dz^2} = \mathfrak{A}'$, orieturque $\mathfrak{A}'$ si in $\frac{ddP}{2dz^2}$ ponatur $z=\alpha$. Est vero

$\frac{ddP}{2dz^2}$

$$\frac{ddP}{2dz^2} = C + 3Dz + 6Ez^2 + 10Fz^3 + 15Gz^4 + \text{etc.}$$

vnde fit

$$\mathfrak{A}' = C + 3D\alpha + 6E\alpha^2 + 10F\alpha^3 + 15G\alpha^4 + \text{etc.}$$

Quare si proposita hac aequatione:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc.}$$

expressio hinc formata

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$$

habeat factorem quadratum $(z-\alpha)^2$, sumatur

$$\mathfrak{A}' = C + 3D\alpha + 6E\alpha^2 + 10F\alpha^3 + 15G\alpha^4 + \text{etc.}$$

eritque pars integralis inde oriunda:

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'} \int dx \int e^{-\alpha x} X\, dx.$$

Sin autem reliqui factores formulae P fuerint cogniti, nempe

$$P = \Delta(z-\alpha)^2(z-\gamma)(z-\delta)(z-\varepsilon) \text{ etc.}$$

erit $\mathfrak{A}' = \Delta(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)$ etc.

§. 17. Ponamus iam tres factores inter se esse aequales, seu sit insuper $\gamma = \alpha$, at ob rationes supra expositas ponamus

$\gamma = \alpha + \omega$, erit $\mathfrak{A}' = -\Delta\omega(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\zeta)$ etc.

et $\mathfrak{C} = \Delta(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)(\gamma-\zeta)$ etc.

seu $\mathfrak{C} = \Delta\omega^2(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\zeta)$ etc.

sit $\mathfrak{A}'' = \Delta(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\zeta)$ etc.

erit $\mathfrak{A}' = -\mathfrak{A}''\omega$ et $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}''\omega^2$. Factisque his substitutionibus tandem reperietur pars integralis ex factore cubico $(z-\alpha)^3$ oriunda haec,

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}''}\int dx\int dx\int e^{-\alpha x}X\,dx$$

existente:

$$\mathfrak{A}''=D+4E\alpha+10F\alpha^2+20G\alpha^3+\text{etc.}$$

Facilius autem hoc immediate ex aequalitate trium factorum ostenditur. Sint enim, tres factores quicunque $(z-\alpha)$ $(z-\beta)(z-\gamma)$ ac positos.

$$\mathfrak{A}=\Delta(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)\ \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B}=\Delta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\beta-\varepsilon)\ \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C}=\Delta(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)\ \text{etc.}$$

erunt integralis partes hinc oriundae.

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}}\int e^{-\alpha x}X\,dx+\frac{e^{\beta x}}{\mathfrak{B}}\int e^{-\beta x}X\,dx+\frac{e^{\gamma x}}{\mathfrak{C}}\int e^{-\gamma x}X\,dx.$$

Ponatur iam $\beta=\alpha+\omega$ et $\gamma=\alpha+\phi$, existentibus ω et ϕ quantitatibus euanescentibus, ac posito

$$\mathfrak{A}''=\Delta(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\zeta)\ \text{etc.}$$

erit $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}''\omega\phi$; $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}''\omega(\omega-\phi)$, et $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}''\phi(\phi-\omega)$. tum vero erit $e^{\beta x}=e^{\alpha x}(1+\omega x+\frac{1}{2}\omega^2x^2)$, $e^{-\beta x}=e^{-\alpha x}$ $(1-\omega x+\frac{1}{2}\omega^2x^2)$ et $e^{\gamma x}=e^{\alpha x}(1+\phi x+\frac{1}{2}\phi^2x^2)$, $e^{-\gamma x}=e^{-\alpha x}$ $(1-\phi x+\frac{1}{2}\phi^2x^2)$. Quibus substitutis ternae integralis partes abeunt in:

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}''\omega\phi(\omega-\phi)}\left\{\begin{array}{l}\int e^{-\alpha x}X\,dx(\omega-\phi+\phi+\omega\phi x+\frac{1}{2}\omega^2\phi x^2-\omega-\omega\phi x+\frac{1}{2}\omega\phi^2x^2)\\ \int e^{-\alpha x}Xx\,dx(-\omega\phi-\omega\omega\phi x+\omega\phi+\omega\phi\phi x)\\ \int e^{-\alpha x}Xx^2\,dx(\frac{1}{2}\omega\omega\phi-\frac{1}{2}\omega\phi\phi)\end{array}\right.$$

sublatis nunc per diuisionem litteris euanescentibus ω et ϕ factor cubicus $(z-\alpha)^3$ dabit hanc integralis partem

$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}''}$

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}''}\left(\tfrac{1}{2}xx\int e^{-\alpha x}X\,dx - x\int e^{-\alpha x}Xx\,dx + \tfrac{1}{2}\int e^{-\alpha x}Xxx\,dx\right)$$

quae reducitur ad hanc formam simpliciorem:

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}''}\int dx\int dx\int e^{-\alpha x}X\,dx.$$

existente $\mathfrak{A}''=D+4E\alpha+10F\alpha^2+20G\alpha^3+$ etc. scilicet valor ipsius $\mathfrak{A}''$ oritur ex formula $\frac{d^3P}{6dz^3}$ posito $z=\alpha$.

§. 18. Simili modo vlterius procedendo patebit quaternos factores inter se aequales seu formulae $I=A+Bz+Cz^2+$ etc. factorem $(z-\alpha)^4$ praebiturum fore hanc integralis partem:

$$\frac{e^{\alpha x}\int dx\int dx\int dx\int e^{-\alpha x}X\,dx}{E+5F\alpha+15G\alpha^2+35H\alpha^3+\text{etc.}}$$

qui denominator ex formula $\frac{d^4P}{24dz^4}$ nascitur ponendo $z=\alpha$. Superfluum foret pro pluribus factoribus simplicibus inter se aequalibus partes integralis, quae ex ipsis conflantur hic exhibere, cum lex, qua hae partes formantur, per se sit manifesta. Ceterum complicatio plurium signorum integralium in his formulis nullam inuoluit difficultatem, cum facillime ad simplicia integralia reuocentur. Est enim

$$\int dx\int e^{-\alpha x}X\,dx=\frac{x\int e^{-\alpha x}X\,dx-\int e^{-\alpha x}Xx\,dx}{1.}$$

$$\int dx\int dx\int e^{-\alpha x}X\,dx=\frac{x^2\int e^{-\alpha x}X\,dx-2x\int e^{-\alpha x}Xx\,dx+\int e^{-\alpha x}Xxx\,dx}{1.\ 2.}$$

$$\int dx\int dx\int dx\int e^{-\alpha x}X\,dx=\frac{x^3\int e^{-\alpha x}X\,dx-3x^2\int e^{-\alpha x}Xx\,dx+3x\int e^{-\alpha x}Xxx\,dx-\int e^{-\alpha x}Xx^3\,dx}{1.\ 2.\ 3.}$$

etc.

§. 19. Expeditis factoribus aequalibus pergo ad factores imaginarios. Sint ergo formulae $P = \Delta(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)(z-\varepsilon)$ etc. $= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$ etc. bini factores $z-\alpha$ et $z-\beta$ imaginarii, qui hoc non obstante multiplicato praebeant productum reale

$$zz - 2kz\,\mathrm{cos.}\,\Phi + kk$$

erit ergo $\alpha = k\,\mathrm{cos.}\,\Phi + k\sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,\Phi$

et $\beta = k\,\mathrm{cos.}\,\Phi - k\sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,\Phi$

harumque litterarum potestates quaecunque ita se habebunt.

$$\alpha^n = k^n\,\mathrm{cos.}\,n\Phi + k^n\sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,n\Phi$$

$$\beta^n = k^n\,\mathrm{cos.}\,n\Phi - k^n\sqrt{-1}.\,\mathrm{sin}\,n\Phi$$

Iam primo erit:

$$e^{\alpha x} = e^{kx\,\mathrm{cos.}\Phi}\left(1 + \frac{k\sqrt{-1}}{1}x\,\mathrm{sin.}\Phi - \frac{kk}{1.2}x^2\,\mathrm{sin.}\Phi^2 - \frac{k^3\sqrt{-1}}{1.2.3}x^3\,\mathrm{sin.}\Phi^3 + \frac{k^4}{1.2.3.4}x^4\,\mathrm{sin.}\Phi^4 - \mathrm{etc.}\right)$$

ideoque

$$e^{\alpha x} = e^{kx\,\mathrm{cos.}\Phi}(\mathrm{cos.}\,kx\,\mathrm{sin}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,kx\,\mathrm{sin.}\,\Phi)$$

$$e^{\beta x} = e^{kx\,\mathrm{cos.}\Phi}(\mathrm{cos.}\,kx\,\mathrm{sin.}\,\Phi - \sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,kx\,\mathrm{sin.}\,\Phi)$$

$$e^{-\alpha x} = e^{-kx\,\mathrm{cos.}\Phi}(\mathrm{cos.}\,kx\,\mathrm{sin.}\,\Phi - \sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,kx\,\mathrm{sin.}\,\Phi)$$

$$e^{-\beta x} = e^{-kx\,\mathrm{cos.}\Phi}(\mathrm{cos.}\,kx\,\mathrm{sin.}\Phi + \sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,kx\,\mathrm{sin.}\Phi)$$

Deinde cum sit:

$$\mathfrak{A} = B + 2C\alpha + 3D\alpha^2 + 4E\alpha^3 + 5F\alpha^4 + \mathrm{etc.} \quad \mathrm{et}$$

$$\mathfrak{B} = B + 2C\beta + 3D\beta^2 + 4E\beta^3 + 5F\beta^4 + \mathrm{etc.}$$

superioribus valoribus pro α et β substitutis habebitur

$$\mathfrak{A} = \begin{cases} B + 2Ck\,\mathrm{cos.}\Phi + 3Dk^2\,\mathrm{cos.}\,2\Phi + 4Ek^3\,\mathrm{cos.}\,3\Phi + \mathrm{etc.} \\ + (2Ck\,\mathrm{sin.}\Phi + 3Dk^2\,\mathrm{sin.}\,2\Phi + 4Ek^3\,\mathrm{sin.}\,3\Phi + \mathrm{etc.})\sqrt{-1} \end{cases}$$

$$\mathfrak{B} = \begin{cases} B + 2Ck\,\mathrm{cos.}\Phi + 3Dk^2\,\mathrm{cos.}\,2\Phi + 4Ek^3\,\mathrm{cos.}\,3\Phi + \mathrm{etc.} \\ - (2Ck\,\mathrm{sin.}\Phi + 3Dk^2\,\mathrm{sin.}\,2\Phi + 4Ek^3\,\mathrm{sin.}\,3\Phi + \mathrm{etc.})\sqrt{-1}. \end{cases}$$

§. 20.

§. 20. Cum autem $z-\alpha$ et $z-\mathfrak{b}$ sint factores formulae $P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$ erit

$$A + Bk\,\mathrm{cos}.\Phi + Ck^2\,\mathrm{cos}.\,2\Phi + Dk^3\,\mathrm{cos}.\,3\Phi + Ek^4\,\mathrm{cos}.\,4\Phi + \text{etc.} = 0$$

et $$Bk\,\mathrm{sin}.\,\Phi + Ck^2\,\mathrm{sin}.\,2\Phi + Dk^3\,\mathrm{sin}.\,3\Phi + Ek^4\,\mathrm{sin}.\,4\Phi + \text{etc.} = 0$$

Ponatur nunc:

$$\mathfrak{M} = B + 2Ck\,\mathrm{cos}.\,\Phi + 3Dk^2\,\mathrm{cos}.\,2\Phi + 4Ek^3\,\mathrm{cos}.\,3\Phi + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{N} = \quad 2Ck\,\mathrm{sin}.\,\Phi + 3Dk^2\,\mathrm{sin}.\,2\Phi + 4Ek^3\,\mathrm{sin}.\,3\Phi + \text{etc.}$$

atque fiet:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1}$$

sicque imaginaria a realibus erunt separata. Cum nunc ex ambobus factoribus $z-\alpha$ et $z-\mathfrak{b}$ nascantur istae integralis partes

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}}\int e^{-\alpha x}X\,dx + \frac{e^{\mathfrak{b}x}}{\mathfrak{B}}\int e^{-\mathfrak{b}x}X\,dx$$

hae abibunt in hanc formam:

$$\frac{(\mathfrak{M}-\mathfrak{N}\sqrt{-1})e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}X\,dx + (\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\sqrt{-1})e^{\mathfrak{b}x}\int e^{-\mathfrak{b}x}X\,dx}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}$$

At est:

$$e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}X\,dx = \begin{cases} + e^{kx\,\mathrm{cos}.\Phi}\,\mathrm{cos}.\,kx\,\mathrm{sin}.\,\Phi\int e^{-kx\,\mathrm{cos}.\Phi}X\,dx\,\mathrm{cos}.\,kx\,\mathrm{sin}.\,\Phi \\ -\sqrt{-1}.\,e^{kx\,\mathrm{cos}.\Phi}\,\mathrm{cos}.\,kx\,\mathrm{sin}.\,\Phi\int e^{-kx\,\mathrm{cos}.\Phi}X\,dx\,\mathrm{sin}.\,kx\,\mathrm{sin}.\,\Phi \\ +\sqrt{-1}.\,e^{kx\,\mathrm{cos}.\Phi}\,\mathrm{sin}.\,kx\,\mathrm{sin}.\,\Phi\int e^{-kx\,\mathrm{cos}.\Phi}X\,dx\,\mathrm{cos}.\,kx\,\mathrm{sin}.\,\Phi \\ + e^{kx\,\mathrm{cos}.\Phi}\,\mathrm{sin}.\,kx\,\mathrm{sin}.\,\Phi\int e^{-kx\,\mathrm{cos}.\Phi}X\,dx\,\mathrm{sin}.\,kx\,\mathrm{sin}.\,\Phi \end{cases}$$

$$e^{\mathfrak{b}x}\int e^{-\mathfrak{b}x}X\,dx = \begin{cases} + e^{kx\,\mathrm{cos}.\Phi}\,\mathrm{cos}.\,kx\,\mathrm{sin}.\,\Phi\int e^{-kx\,\mathrm{cos}.\Phi}X\,dx\,\mathrm{cos}.\,kx\,\mathrm{sin}.\,\Phi \\ +\sqrt{-1}.\,e^{kx\,\mathrm{cos}.\Phi}\,\mathrm{cos}.\,kx\,\mathrm{sin}.\,\Phi\int e^{-kx\,\mathrm{cos}.\Phi}X\,dx\,\mathrm{sin}\,kx\,\mathrm{sin}.\,\Phi \\ -\sqrt{-1}.\,e^{kx\,\mathrm{cos}.\Phi}\,\mathrm{sin}.\,kx\,\mathrm{sin}.\,\Phi\int e^{-kx\,\mathrm{cos}.\Phi}X\,dx\,\mathrm{cos}\,kx\,\mathrm{sin}\,\Phi \\ + e^{kx\,\mathrm{cos}.\Phi}\,\mathrm{sin}.\,kx\,\mathrm{sin}.\,\Phi\int e^{-kx\,\mathrm{cos}.\Phi}X\,dx\,\mathrm{sin}.\,kx\,\mathrm{sin}.\,\Phi \end{cases}$$

Partes ergo ambae integrales transibunt, imaginariis se mutuo sublatis, in hanc formam,

$$\frac{2\mathfrak{M}e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}(\cos.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}Xdx\cos.kx\sin.\Phi+\sin.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}Xdx\sin.kx\sin.\Phi)$$

$$+\frac{2\mathfrak{N}e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}(\sin.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}Xdx\cos.kx\sin.\Phi-\cos.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}Xdx\sin.kx\sin\Phi)$$

quae etiam hoc modo exprimi poteſt:

$$\frac{2\,e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}\cos.kx\sin.\Phi+\mathfrak{N}\sin.kx\sin.\Phi)\int e^{-kx\cos.\Phi}Xdx\cos.kx\sin.\Phi+\\(\mathfrak{M}\sin.kx\sin.\Phi-\mathfrak{N}\cos.kx\sin.\Phi)\int e^{-kx\cos.\Phi}Xdx\sin.kx\sin.\Phi\end{array}\right\}$$

Haec ergo pars integralis oritur ex formulae $P=A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ etc. factore trinomiali $zz-2kz\cos.\Phi+kk$.

§. 21. Simili modo ſi bini huiusmodi factores trinomiales fuerint inter ſe aequales, ſeu ſi formula

$$P=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{etc.}$$

factorem habuerit $(zz-2kz\cos.\Phi+kk)^2$, pars integralis hinc oriunda reperietur ex formulis pro binis factoribus ſimplicibus aequalibus ſupra inuentis reperietur. Ponatur nempe

$$\mathfrak{M}'=C+3Dk\cos.\Phi+6Ek^2\cos.2\Phi+10Fk^3\cos.3\Phi+\text{etc.}$$
$$\mathfrak{N}'=\quad 3Dk\sin.\Phi+6Ek^2\sin.2\Phi+10Fk^3\cos.4\Phi+\text{etc.}$$

eritque integralis pars hinc oriunda,

$$\frac{2\,e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}'\mathfrak{M}'+\mathfrak{N}'\mathfrak{N}'}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}'\cos.kx\sin.\Phi+\mathfrak{N}'\sin.kx\sin\Phi)\int dx\int e^{kx\cos.\Phi}Xdx\cos.kx\sin.\Phi+\\(\mathfrak{M}'\sin.kx\sin.\Phi-\mathfrak{N}'\cos.kx\sin.\Phi)\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}Xdx\sin.kx\sin\Phi\end{array}\right\}$$

Sin autem tres factores trinomiales radices imaginarias continentes fuerint inter ſe aequales, ſeu ſi formulae $P=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+$ etc. factor fuerit $(zz-2kz\cos.\Phi+kk)^3$ ſtatuatur

$\mathfrak{M}''=$

$$\mathfrak{M}'' = D + 4Ek\cos.\Phi + 10Fk^2\cos.2\Phi + 20Gk^3\cos.3\Phi + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{N}'' = \phantom{D +{}} 4Ek\sin.\Phi + 10Fk^2\sin.2\Phi + 20Gk^3\sin.3\Phi + \text{etc.}$$

atque pars integralis ex hoc factore oriunda erit

$$\frac{2e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{N}''\mathfrak{M}''+\mathfrak{N}''\mathfrak{N}''}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}''\cos.kx\sin.\Phi+\mathfrak{N}''\sin.kx\sin.\Phi)\int dx\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\cos.kx\sin.\Phi+\\(\mathfrak{M}''\sin.kx\sin.\Phi-\mathfrak{N}''\cos.kx\sin.\Phi)\int dx\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\sin.kx\sin.\Phi\end{array}\right\}$$

Hinc igitur iam lex perspicitur, secundum quam istae integralis partes formari debent, si maior potestas formulae $zz - 2kz\cos.\Phi + kk$ fuerit factor ipsius P: ideoque omnes casus, qui vnquam occurrere possunt hinc conficientur.

§. 22. Ex his ergo sequenti modo resolui poterit hoc

Problema.

Inuenire valorem ipsius y in quantitatibus finitis expressum, qui ipsi conuenit ex hac aequatione differentiali cuiuscunque gradus:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} \text{ etc.}$$

vbi differentiale dx ponitur constans, atque X denotat functionem quamcunque ipsius x.

Solutio.

Ex aequatione proposita formetur sequens formula Algebraica:

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.}$$

cuius quaerantur omnes factores reales tam simplices, quam trinomiales, quippe qui factorum simplicium imaginariorum vices sustinent; et si qui horum factorum inter se se fuerint aequales, ii coniunctim repraesententur. Quo facto pro singulis factoribus quaerantur conuenientes integralis partes, atque omnes istae partes ex cunctis factoribus oriundae, si in vnam summam colligantur, dabunt valorem ipsius y quaesitum, qui erit integrale completum aequationis propositae. Sequenti autem modo ex factoribus formulae P integralis partes reperientur.

I. *Si formulae* P *factor sit* $z-k$

Ponatur $\mathfrak{R} = B + 2Ck + 3Dk^2 + 4Ek^3 + 5Fk^4 +$ etc. eritque integralis pars huic factori $z-k$ respondens:

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int e^{-kx} X\,dx.$$

II. *Si formulae* P *factor sit* $(z-k)^2$

Ponatur $\mathfrak{R} = C + 3Dk + 6Ek^2 + 10Fk^3 + 15Gk^4 +$ etc. eritque integralis pars factori $(z-k)^2$ respondens:

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int dx \int e^{-kx} X\,dx.$$

III. *Si formulae* P *factor sit* $(z-k)^3$

Ponatur $\mathfrak{R} = D + 4Ek + 10Fk^2 + 20Gk^3 + 35Hk^4 +$ etc. eritque integralis pars factori $(z-k)^3$ respondens:

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int dx \int dx \int e^{-kx} X\,dx.$$

IV. *Si formulae* P *factor sit* $(z-k)^4$

Ponatur $\mathfrak{R} = E + 5Fk + 15Gk^2 + 35Hk^3 + 70Ik^4 +$ etc. eritque integralis pars factori $(z-k)^4$ respondens:

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int dx \int dx \int dx \int e^{-kx} X\,dx.$$

V. Si

V. *Si formulae* P *factor sit* $zz-2kz\cos.\Phi+kk$

Ponatur:

$$\mathfrak{M}=B+2Ck\cos.\Phi+3Dk^2\cos.2\Phi+4Ek^3\cos.3\Phi+\text{etc.}$$

$$\mathfrak{N}=\quad 2Ck\sin.\Phi+3Dk^2\sin.2\Phi+4Ek^3\sin.3\Phi+\text{etc.}$$

erit pars integralis factori $zz-2kz\cos.\Phi+kk$ respondens:

$$\frac{2e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}\cos.kx\sin.\Phi+\mathfrak{N}\sin.kx\sin.\Phi)\int e^{-kx\cos.\Phi}Xdx\cos.kx\sin.\Phi+\\(\mathfrak{M}\sin.kx\sin.\Phi-\mathfrak{N}\cos.kx\sin.\Phi)\int e^{-kx\cos.\Phi}Xdx\sin.kx\sin.\Phi\end{array}\right\}$$

VI. *Si formulae* P *factor sit* $(zz-2kz\cos.\Phi+kk)^2$

Ponatur:

$$\mathfrak{M}=C+3Dk\cos.\Phi+6Ek^2\cos.2\Phi+10Fk^3\cos.3\Phi+\text{etc.}$$

$$\mathfrak{N}=\quad 3Dk\sin.\Phi+6Ek^2\sin.2\Phi+10Fk^3\sin.3\Phi+\text{etc.}$$

erit pars integralis factori $(zz-2kz\cos.\Phi+kk)^2$ respondens:

$$\frac{2e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}\cos.kx\sin.\Phi+\mathfrak{N}\sin.kx\sin.\Phi)\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}Xdx\cos.kx\sin.\Phi+\\(\mathfrak{M}\sin.kx\sin.\Phi-\mathfrak{N}\cos.kx\sin.\Phi)\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}Xdx\sin.kx\sin.\Phi\end{array}\right\}$$

VII. *Si formulae* P *factor sit* $(zz-2kz\cos.\Phi+kk)^3$

Ponatur:

$$\mathfrak{M}=D+4Ek\cos.\Phi+10Fk^2\cos.2\Phi+20Gk^3\cos.3\Phi+\text{etc.}$$

$$\mathfrak{N}=\quad 4Ek\sin.\Phi+10Fk^2\sin.2\Phi+20Gk^3\sin.3\Phi+\text{etc.}$$

erit pars integralis factori $(zz-2kz\cos.\Phi+kk)^3$ respondens:

$$\frac{2e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}\cos.kx\sin.\Phi+\mathfrak{N}\sin.kx\sin.\Phi)\int dx\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}Xdx\cos.kx\sin.\Phi+\\(\mathfrak{M}\sin.kx\sin.\Phi-\mathfrak{N}\cos.kx\sin.\Phi)\int dx\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}Xdx\sin.kx\sin.\Phi\end{array}\right\}$$

etc.

Omnes igitur istae partes singulis factoribus formulae P respondentes in vnam summam collectae dabunt valorem ipsius y quaesitum. Q. E. I.

§. 23. Explicata hac regula, cuius ope omnes aequationes differentiales in forma generali contentae integrari possunt, aliquot exempla adiungam, ex quibus regulae huius vsus facilius perspicietur.

Exempl. I. Proposita sit haec aequatio differentialis secundi gradus.

$$X = y - \frac{ddy}{dx^2}$$

Hinc igitur formula Algebraica P erit $= 1 - zz$ cuius factores sunt $z + 1$ et $z - 1$. et ex formula prima erit $\mathfrak{R} = \frac{dP}{dz} = -2z$. pro factore ergo $z + 1$ ob $k = -1$ erit $\mathfrak{R} = 2$ et pars integralis $= \frac{e^{-x}}{2} \int e^x X dx$. Pro altero factore est $k = 1$ et $\mathfrak{R} = -2$, cui respondet pars integralis $-\frac{e^x}{2} \int e^{-x} X dx$, quibus partibus collectis erit integrale quaesitum.

$$y = \tfrac{1}{2} e^{-x} \int e^x X dx - \tfrac{1}{2} e^x \int e^{-x} X dx.$$

Exempl. 2. Proposita sit haec aequatio:

$$X = y - \frac{3ady}{dx} + \frac{3aaddy}{dx^2} - \frac{a^3 d^3 y}{dx^3}$$

Erit ergo $P = 1 - 3az + 3aazz - a^3 z^3 = (1 - az)^3$. Sumenda ergo est formula tertia, eritque $k = \frac{1}{a}$, et $\mathfrak{R} = \frac{ddP}{6dz^2} = -a^3$, vnde prodit integrale quaesitum.

$$y = -\tfrac{1}{a^3} e^{x:a} \int dx \int dx \int e^{-x:a} X dx \text{ seu}$$

$$y = -\tfrac{1}{a^3} e^{x:a} \left(x \int dx \int e^{-x:a} X dx - \int x dx \int e^{-x:a} X dx \right) \text{ seu}$$

$$y = -\tfrac{1}{a^3} e^{x:a} \left(\tfrac{1}{2} xx \int e^{-x:a} X dx - x \int e^{-x:a} X x dx + \tfrac{1}{2} \int e^{-x:a} X xx dx \right)$$

Exempl. 3. Proposita sit haec aequatio:

$$X = y + \frac{aaddy}{dx^2}$$

Erit ergo $P = 1 + aazz$, quae ad formulam V pertinet. Erit nempe cos. $\Phi = 0$ sin. $\Phi = 1$, et $k = \frac{1}{a}$. Porro ob

A =

$A = 1$, $B = 0$ et $C = aa$, erit $\mathfrak{M} = 0$, et $\mathfrak{N} = 2a$, vnde erit integrale:

$$y = \tfrac{1}{a}\,\text{fin.}\,\tfrac{x}{a}\int X\,dx\,\text{cof.}\,\tfrac{x}{a} - \tfrac{1}{a}\,\text{cof.}\,\tfrac{x}{a}\int X\,dx\,\text{fin.}\,\tfrac{x}{a}.$$

Exempl. 4. Propofita fit haec aequatio:

$$X = y + \frac{a^3 d^3 y}{dx^3}$$

Erit ergo $P = 1 + a^3 z^3$, cuius duo funt factores $1 + az$ et $1 - az + aazz$, Prior ad formam $z - k$ reductus, dat $k = -\frac{1}{a}$; et ob $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, et $D = a^3$, erit ex formula prima $\mathfrak{R} = 3a$, et pars integralis:

$$\frac{1}{3a} e^{-x:a} \int e^{x:a} X\,dx.$$

Alter factor $1 - az + aazz$ feu $zz - \frac{z}{a} + \frac{1}{aa}$ cum formula V comparatus, dat $k = \frac{1}{a}$; cof $\Phi = \frac{1}{2}$ et fin $\Phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ atque $\Phi = 60°$. Deinde eft $\mathfrak{M} = 3a\,\text{cof.}\,120° = -\frac{3}{2}a$, et $\mathfrak{N} = 3a\,\text{fin.}\,120° = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$, vnde $\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 = 9aa$, atque $\frac{2\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2} = -\frac{1}{3a}$ et $\frac{2\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3a}$. Pars integralis ergo hinc oriunda eft:

$$\frac{1}{3a} e^{x:2a}\left(-\text{cof.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a} + \sqrt{3}.\,\text{fin.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}\right)\int e^{-x:2a} X\,dx\,\text{cof.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}$$
$$+ \frac{1}{3a} e^{x:2a}\left(-\text{fin.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a} - \sqrt{3}.\,\text{cof.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}\right)\int e^{-x:2a} X\,dx\,\text{fin.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}$$
$$\text{feu } \frac{-2}{3a} e^{x:2a}\,\text{cof.}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + 60°\right)\int e^{-x:2a} X\,dx\,\text{cof.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}$$
$$- \frac{2}{3a} e^{x:2a}\,\text{fin.}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + 60°\right)\int e^{-x:2a} X\,dx\,\text{fin.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}.$$

Hinc igitur integrale quaefitum erit:

$$y = \frac{1}{3a} e^{-x:a}\int e^{x:a} X\,dx - \frac{2}{3a} e^{x:2a}\,\text{cof.}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + 60°\right)\int e^{-x:2a} X\,dx\,\text{cof.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}$$
$$- \frac{2}{3a} e^{x:2a}\,\text{fin.}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + 60°\right)\int e^{-x:2a} X\,dx\,\text{fin.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2a}$$

Haec ergo exempla fufficiunt ad regulam pro quouis cafu oblato accommodandam.

DE SERIERVM DETERMINATIONE SEV NOVA METHODVS INVENIENDI TERMINOS GENERALES SERIERVM.

AVCTORE

L. EVLERO.

§. 1.

Cum lex progreſſionis, quam termini cuiusque ſeriei tenent, in infinitum variare poſſit, non ſolum omnes diuerſae ſerierum ſpecies, ſed etiam ne genera quidem, quantumuis late extendantur, enumerari poſſe videntur. Hinc duae pluresque ſeries dantur, quae etiamſi tot, quot quis voluerit, habeant terminos communes, tamen inter ſe diſcrepent, ac maxime diuerſis legibus contineantur. Qui ampliſſimum ſerierum campum vel obiter inſpexerit, facile intelliget, naturam ſeriei non determinari, quotcunque etiam eius termini exhibeantur. Sic ſi quaeratur, qualis ſit ſeries, quae ab his incipiat terminis: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15; quaeſtio maxime eſt indeterminata; et praeter ſeriem numerorum imparium naturali ordine procedentium innumerabiles aliae aſſignari poſſunt ſeries, quae ab iisdem terminis incipiant: neque iſte determinationis defectus ad certum terminorum datorum numerum adſtringitur, ſed quantuſcunque is fuerit, infinitis ſeriebus communis eſſe poteſt.

§. 2. Clarius autem hoc perſpicietur, ſi naturam ſerierum ad Geometriam transferamus. Quaelibet enim ſeries

series per lineam curuam repraesentari potest, cuius applicatae per ipsos seriei terminos exprimantur, dum abscissae eorum *indices*, seu numeros, qui ordinem cuiusque termini designant, referunt. Hoc modo quilibet seriei terminus punctum in linea curua definit, quod datae abscissae respondet. Quare si series requiratur, quae tot, quot libuerit, habeat terminos datos, quaestio huc redit, vt quaeratur linea curua, quae per totidem puncta data transeat. Perspicuum autem est, quotcunque etiam data fuerint puncta, semper innumerabiles lineas curuas assignari posse, quae per singula simul transeant. Quod cum NEVTONVS *de solis curuis parabolicis* ostendisset, si non solum omnes curuae Algebraicae, sed etiam transcendentes admittantur, dubium est nullum, quin numerus curuarum satisfacientium insuper infinities fiat maior.

§. 3. Magis mirum videbitur, si dixero, seriem nondum determinari, etiamsi innumeri eius termini dentur. Sic si hanc seriem $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +$ etc. ita definiam, vt dicam, in ea omnes numeros integros naturali ordine contineri; quis non putet hanc seriem penitus esse determinatam? cum cuiuis seriei loco suus terminus sit assignatus: in loco enim, qui x vnitatibus ab *initio* distat, erit terminus $=$ ipsi numero x; seu terminus, cuius index $= x$, ipse quoque erit $= x$. Quatenus autem illa series ita vt factum est describitur, plus inde non constat, nisi indici x, si fuerit x, numerus integer, respondere terminum $= x$: sin autem pro indice x assumatur numerus fractus, nulla adhuc ratio adest, qua euinceretur, terminum isti indici x respondentem esse $= x$. Ostendam autem, si pro hac serie

 termi-

terminus indici x respondens ponatur $= y$, infinitis modis fieri posse, vt quoties x sit numerus integer, toties semper fiat $y = x$, etiamsi numeris fractis pro x sumendis, valores ipsius y ab x discrepent. Hinc etsi omnes seriei termini, qui indicibus integris respondent, sunt determinati, intermedios tamen, qui indices habent fractos infinitis variis modis definire licet, ita vt interpolatio istius seriei maneat indeterminata.

§. 4. Quod, quo clarius perspiciatur, ad arcus circulares est recurrendum; cum enim posita semicircumferentia circuli $= \pi$ cuius radius sit $= 1$; sit sinus arcus $n\pi = 0$, quoties n est numerus integer: manifestum est, si ponatur $y = x +$ P sin. πx, denotante P, vel quantitatem constantem, vel functionem quamcunque ipsius x; ac pro x successiue ponantur indices integri 1, 2, 3, 4, 5, etc: tum valores ipsius y futuros esse $=$ 1, 2, 3, 4, 5, etc. perinde ac si esset P $= 0$. Neque tamen termini intermedii, qui indicibus fractis respondent, his ipsis indicibus erunt aequales. Sit enim e. g. P $= xx$ et ponatur $x = \frac{1}{2}$; ob sin. $\frac{1}{2}\pi = 1$, fiet terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.\ 1 = \frac{3}{4}$. Infinitae autem aliae huiusmodi expressiones excogitari possunt, quae aeque satisfaciant, cuiusmodi sunt: $y = x +$ P sin. $\pi x +$ Q sin. $2\pi x +$ R sin. $3\pi x +$ S sin. $4\pi x$ etc. quibus interpolatio multo magis indeterminata redditur.

§. 5. Simile exemplum seriei, quae determinata videri queat, iam ante aliquod tempus exhibui: inueneram enim expressionem, seu functionem ipsius x, quae si loco x potestas quaecunque ipsius 10. ponatur, ipsi exponenti huius potestatis aequalis fiat, siquidem hic exponens sit numerus integer affirmatiuus. Functio scilicet illa ipsius x, quam

quam littera y indicabo, ita erat comparata, vt posito $x=1$, fiat $y=0$; et, si ponatur $x=10^n$, existente n numero integro affirmatiuo, fit semper $y=n$: vnde sequi videbatur, functionem y semper fore logarithmum vulgarem ipsius x. Nihilo vero minus monstraui, si pro x non quaepiam denarii potestas substituatur, valorem ipsius y saepe numero non parum a logarithmo numeri x discrepare. Facta ergo serie, cuius sint

Indices 1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, etc. et
termini 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.

ad descriptionem logarithmorum non sufficit, si quis dicat, logarithmos esse terminos medios inferioris seriei, qui indicibus in superiori serie assumtis respondeant.

§. 6. Cum igitur natura seriei non ex aliquot eius terminis, etiamsi eorum numerus sit infinitus, determinetur; propterea quod interpolatio nihilominus maneat indeterminata, infinitisque modis absolui possit; facile perspicitur, quam incertae sint omnes illae interpolandi methodi, quae negotium ex solis terminis integros indices habentibus perficere docent. Neque enim interpolatio pro certa haberi poterit, nisi ipsa seriei natura spectetur, eiusque ratio in operatione habeatur. Perfecte autem natura seriei cognoscitur, si eius terminus generalis, seu formula, quae cuiuis indici x, siue integro, siue fracto, siue etiam surdo, terminum respondentem exhibeat, fuerit cognita. Hoc enim modo non solum omnes seriei termini, qui indicibus integris respondent, determinantur, sed etiam termini, qui indicibus quibuscunque non integris conueniunt, sine ambiguitate definiuntur; sicque interpolationis negotium nulla amplius incertitudine impeditur.

§. 7.

§. 7. Habentur autem praeter terminum generalem innumerabiles alii modi series formandi: interim tamen omnes isti modi commode ad tria genera reuocari possunt. Ad primum genus refero eos seriērum formandarum modos, quibus terminus quisque seriei per solum indicem respondentem determinatur; quod cum per certas operationes in hunc finem instituendas efficiatur, formula istas operationes in genere complectens ipse erit terminus generalis seriei, quo pacto seriem absolute ac perfectissime determinari iam notaui. Ad genus secundum pertineant isti series formandi modi, quibus terminus quiuis seriei per aliquot terminos antecedentes secundum certam quandam regulam determinatur, qui modus in seriebus imprimis recurrentibus adhiberi solet Quando vero ad terminum quemuis seriei inueniendum non solum terminorum antecedentium ratio est habenda, sed etiam ipse index adhiberi debet, hinc tertium genus affirmationis serierum constituo.

§. 8. Si quilibet seriei terminus ex solo indice determinatur, tum siue numerus integer, siue fractus, pro indice assumatur, terminus respondens aeque definitur, sicque interpolatio seriei, neque quicquam difficultatis, neque incertitudinis habet. Sin autem, vti in secundo genere posuimus, quilibet terminus ex praecedente vel aliquot antecedentibus determinatur, tum primo vel aliquot primoribus terminis pro lubitu assumtis, singuli quidem termini, qui indicibus integris respondent, inuenientur, terminos vero intermedios, indicibus fractis conuenientes hinc definire non licet; quod idem de tertio genere est tenendum. Quamquam autem hoc modo in secundo et tertio genere non solum omnes termini, qui indicibus integris respondent, assignantur, sed etiam lex praescribitur inter terminum quemuis eiusque antecedentes, quae ad terminos indicum fractorum aeque patet; tamen ne hoc quidem modo series penitus determinatur, sed pro qualibet serie huius generis infiniti termini generales exhiberi possunt, qui dum eosdem terminos pro indicibus integris praebent, tamen pro fractis dissentiunt.

§. 9. Quod cum merito maxime paradoxon videatur, operae pretium erit, hunc determinationis defectum in seriebus, quarum quisque terminus ex antecedentibus definitur, *diligentius* perpendere. Sumamus ergo casum simplicissimum, seriemque ita definiri concipiamus, vt quilibet terminus aequalis sit antecedenti ipsi. Quodsi iam primus seriei terminus statuatur $= 1$, secundus quoque erit $= 1$, omnesque sequentes, qui indicibus integris respondent, vnitati aequabuntur, nasceturque haec series:

Indic:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	etc.
Term:	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	etc.

atque manifestum est, indici cuicunque integro x respondere terminum $= 1$. Quemadmodum autem termini indicibus fractis respondentes se sint habituri, hinc non definitur: hoc tantum constat, si terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens fuerit $= a$ omnes quoque terminos, qui indicibus $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$ etc. conueniunt, fore $= a$. Omnes enim terminos, quorum indices vnitate, vel aliquot vnitatibus, differunt, per legem praescriptam inter se aequales esse oportet: quia antecedens quisque terminus intelligitur is, cuius index est vnitate minor.

§. 10. Haec igitur series ita definitur, vt, si terminus indici x respondens ponatur $= y$, sequens vero terminus indici $x + 1$ respondens $= y'$, habeatur $y' = y$; tum vero praeterea assumitur, si fuerit $x = 1$, fore quoque $y = 1$. Quare si pro hac serie terminus generalis desideretur, is eiusmodi functio ipsius x esse debet, quae sit $= y$, vt si loco x ponatur $x + 1$ functionis y valor resultans y' aequalis sit futurus ipsi y, atque vt facto $x = 1$ fiat $y = 1$. Manifestum autem est, si generatim ponatur $y = 1$, huic conditioni satisfieri, hocque casu non solum terminos, qui indicibus integris, sed etiam eos, qui fractis respondeant, vnitati aequales fore. At vero his conditionibus infinitis quoque aliis modis satisfieri potest: si enim ponatur $y = 1 + \alpha \sin. 2\pi x$, denotante π semicircumferentiam circuli, cuius radices $= 1$, erit $y' = 1 + \alpha \sin. 2\pi (x + 1)$; at est $\sin. 2\pi(x + 1) = \sin. 2\pi x$, ideoque $y' = y$, tum vero posito $x = 1$ erit $y = 1$. Hoc vero casu termini intermedii, seu qui indicibus fractis respondent, non amplius vnitati aequabuntur, posito enim $x = \frac{1}{4}$ erit $y = 1 + \alpha$.

§. 11. Quoniam hic non solum α pro arbitrio assumi potest, sed etiam innumerabiles aliae eiusmodi formulae excogitari possunt, quae praescriptas conditiones adimpleant, cuiusmodi sunt $y = 1 + \alpha \sin. 2\pi x + \beta \sin. 4\pi x + \gamma \sin. 6\pi x +$ etc. perspicuum est, interpolationem vel huius simplicissimae seriei $1 + 1 + 1 +$ etc. quatenus aliter non definitur, nisi quod quilibet terminus antecedenti aequalis esse, primus vero vnitate exprimi dicatur, interpolationem maxime esse indeterminatam: cum termini intermedii indices habentes fractos, quibuscunque numeris metis aequales esse queant. Interim tamen etiamsi innumerabiles termini generales pro hac serie exhiberi queant, tamen ii omnes in lege quadam generali continentur, atque sine diuinatione per analysin inueniri possunt. Methodus scilicet latissime patens tradi potest, cuius ope omnium serierum, quarum termini per antecedentes, siue sine indice, siue cum indice, definiuntur, terminos generales vniuersalissime inueniri licet: quam methodum, cum non solum pleniorem serierum cognitionem suppeditet, sed etiam non contemnenda analyseos augmenta complectatur, hic diligentius euoluere constitui: quem in finem sequentia problemata *pertractabo*.

Problema.

§. 12. Inuenire terminum generalem seriei, cuius quilibet terminus aequalis sit antecedenti, terminus vero primus $= 1$.

Solutio.

Sit terminus generalis seu is, qui indici x respondet $= y$, ac ponatur terminus sequens, (cuius index $= x + 1$) $= y'$ debebitque esse $y' = y$; ac posito $x = 1$, fieri debet $y = 1$. Cum iam sit y quaepiam functio ipsius x, per naturam calculi differentialis, si loco x ponatur $x + 1$, fiet:

$$y' = y + \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

sumto differentiali dx constante. Quocirca esse debet:

$$0 = \frac{dy}{1.dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Haecque aequatio omnes omnino satisfacientes valores ipsius y continet, dummodo integratio ita temperetur, vt posito $x = 1$ fiat $y = 1$, seu quod eodem redit, vt

 posito

posito $x = 0$ fiat $y = 1$. Quaestio itaque perducta est ad resolutionem istius aequationis differentialis, quae non solum infinito terminorum numero constat, sed etiam omnes differentialium gradus in se complectitur. Quia vero variabilis y vbique plus vna dimensione non habet, et alterius variabilis x non nisi differentiale dx, quod constans est assumtum, occurrit, haec aequatio eo modo tractari potest, quem in *Miscell. Berol. Tomo. VII.* exposui. Formetur igitur ponendo z loco $\frac{dy}{dx}$; z^2 loco $\frac{ddy}{dx^2}$ et generatim z^n loco $\frac{d^ny}{dx^n}$ aequatio Algebraica:

$$0 = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

quae sumto e pro numero cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, transit in hanc formam finitam $0 = e^z - 1$. Huius iam aequationis omnes radices, quarum numerus est infinitus, inuestigari, seu omnes factores formulae $e^z - 1$ assignari oportet. Est vero $e^z = (1 + \frac{z}{n})^n$, posito n numero infinito, qui valor, si substituatur, habebitur haec formula resoluenda $(1 + \frac{z}{n})^n - 1$, cuius quidem vnus factor simplex est $= \frac{z}{n}$ seu z: quem aequatio infinita statim monstrat. Ad reliquos inueniendos in subsidium vocari debet Theorema, quo demonstratur formulae binomiae $a^n - b^n$ factorem esse $aa - 2ab \cos. \frac{2k\pi}{n} + bb$ denotante k numerum quemuis integrum. Praesenti ergo casu est $a = 1 + \frac{z}{n}$ et $b = 1$, vnde formulae propositae $e^z - 1$ omnes factores continentur in hac forma generali.

$$1 + \frac{2z}{n} + \frac{zz}{nn} - 2\left(1 + \frac{z}{n}\right) \cos. \frac{2k\pi}{n} + 1$$

seu $2(1 + \frac{z}{n}) \sin. \frac{2k\pi}{n} + \frac{zz}{nn}$: vnde hunc factorem per quan-

quantitatem constantem $2\,\text{sin.}\,\frac{2k\pi}{n}$ diuidendo erit factor generalis $= 1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{2\,nn\,\text{sin.}\,v\,\frac{2k\pi}{n}}$. Cum iam n sit numerus infinitus erit $\text{cos.}\,\frac{2k\pi}{n} = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{nn}$ et $\text{sin.}\,v,\ \frac{2k\pi}{n} = \frac{2kk\pi\pi}{nn}$: quo valore substituto, erit factor formulae $e^z - 1$ generalis $= 1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{4kk\pi\pi}$, et loco k succeßiue omnes numeros integros 1, 2, 3, 4, etc. substituendo orientur omnes omnino factores formulae $e^z - 1$. At primus factor z dat integralis partem constantem, quae sit $= C$: reliqui vero factores, qui ad hanc formam reducuntur

$$4kk\pi\pi + \frac{4kk\pi\pi}{n}z + zz;$$

si cum forma factorum, quos in ante allegata dissertatione euolui, $ff - 2fz\,\text{cos.}\,\Phi + zz$ comparentur, erit $f = 2k\pi$ et $\text{cos.}\,\Phi = -\frac{k\pi}{n}$; et $\text{sin.}\,\Phi = 1$ ob n numerum infinitum, quo casu est $\text{cos.}\,\Phi = 0$. Pars ergo integralis hinc oriunda erit

$$\alpha e^{\frac{-2kk\pi\pi}{n}x}\,\text{sin.}\,2k\pi x + \mathfrak{A} e^{\frac{-2kk\pi\pi}{n}x}\,\text{cos.}\,2k\pi x;$$ seu ob $n = \infty$ $\alpha\,\text{sin.}\,2k\pi x + \mathfrak{A}\,\text{cos.}\,2k\pi x$. Substitutis ergo pro k succeßiue omnibus numeris integris 1, 2, 3, 4, etc. proueniet integrale aequationis inuentae.

$$0 = \frac{1dy}{dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

sequenti forma expreßum:

$$y = C + \alpha\,\text{sin.}\,2\pi x + \mathfrak{A}\,\text{cos.}\,2\pi x + \mathfrak{b}\,\text{sin.}\,4\pi x + \mathfrak{B}\,\text{cos.}\,4\pi x + \gamma\,\text{sin.}\,6\pi x + \mathfrak{C}\,\text{cos.}\,6\pi x + \text{etc.}$$

Iam constans C ita definiatur vt posito $x = 0$ fiat $y = 1$ reperieturque terminus generalis seriei propositae:

 $y =$

$$y = 1 + \alpha \sin. 2\pi x + \mathfrak{A}(\cos. 2\pi x - 1) +$$
$$+ \beta \sin. 4\pi x + \mathfrak{B}(\cos. 4\pi x - 1) +$$
$$+ \gamma \sin. 6\pi x + \mathfrak{C}(\cos. 6\pi x - 1) +$$
$$\text{etc.}$$

Quicunque ergo valores loco $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, etc. ſubſtituantur, ſemper prodibit formula, quae terminum generalem ſeriei propoſitae exhibet. Q. E. I.

Coroll. I.

§. 13. Si terminus primus, cui omnes reliqui, habentes exponentes integros, ſunt aequales, non debeat eſſe vnitas, ſed quantitas quaecunque, terminus generalis ſeriei y, ſeu terminus, qui indici x reſpondet, reperitur:

$$y = a + \alpha \sin. 2\pi x + \beta \sin. 4\pi x + \gamma \sin. 6\pi x + \delta \sin. 8\pi x$$
$$+ \mathfrak{A} \cos. 2\pi x + \mathfrak{B} \cos. 4\pi x + \mathfrak{C} \cos. 6\pi x + \mathfrak{D} \cos. 8\pi x \text{ etc.}$$

eritque terminus quilibet indicem habens numerum integrum $= a + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} +$ etc.

Coroll. 2.

§. 14. Quia ſinus et coſinus arcuum $4\pi x$, $6\pi x$, $8\pi x$ etc. per poteſtates ipſorum ſin. $2\pi x$ coſ. $2\pi x$ exprimi poſſunt; atque viciſſim omnes functiones rationales, ſeu quae ambiguas ſignificationes non habent, per huiusmodi ſeries, qualem pro y inuenimus, exhiberi poſſunt: terminum generalem y ita definire poterimus, vt dicamus, y eſſe functionem quamcunque ipſorum ſin. $2\pi x$ et coſ. $2\pi x$: dummodo non occurrant huiusmodi formulae $\sqrt{(1 \pm \cos. 2\pi x)}$, aliaeque ſimiles, quae inuoluunt ſinus vel coſinus angulorum ſubmultiplorum ipſius $2\pi x$.

Coroll.

Coroll. 3.

§. 15. His igitur casibus exclusis, si ponamus sin. $2\pi x = p$ et cos. $2\pi x = q$, erit y aequalis functioni cuicunque ipsarum p et q: vnde ista aequatio differentialis infinita

$$0 = \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

in genere ita integrabitur, vt sit y functio quaecunque ipsarum p et q.

Coroll. 4.

§. 16. Sin autem vocemus sin. $\pi x = r$ et cos. $\pi x = s$, erit $p = 2rs$ et $q = ss - rr$; et functiones ipsarum p et q erunt functiones parium dimensionum ipsarum r et s. Quare ex illa aequatione differentiali infinita valor ipsius y in genere aequabitur functioni cuicunque parium dimensionum ipsarum r et s, vbi notandum ob sinum totum $= 1$ esse $rr + ss = 1$.

Coroll. 5.

§. 17. Ponatur $\frac{x}{a}$ loco x, vt habeatur ista aequatio

$$0 = \frac{ady}{1dx} + \frac{a^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{a^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{a^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Si iam ponamus sin. $\frac{\pi x}{a} = r$ et cos. $\frac{\pi x}{a} = s$, integrale istius aequationis ita describetur, vt sit $y =$ functioni cuicunque parium dimensionum ipsarum r et s.

Coroll. 6.

§. 18. Gemina ergo formula pro valore huius integralis exhiberi potest, quarum altera est:

$$y = \frac{A + Br^2 + Crs + Dss + Er^4 + Fr^3s + Gr^2s^2 + Hrs^3 + Is^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta r^2 + \gamma rs + \delta ss + \varepsilon r^4 + \zeta r^3s + \eta r^2s^2 + \theta rs^3 + \iota s^4 + \text{etc.}}$$

altera vero forma erit:

$y =$

$$y = \frac{Ar + Bs + Cr^3 + Dr^2 s + Ers^2 + Fs^3 + Gr^5 + \text{etc.}}{\alpha r + \beta s + \gamma r^3 + \delta r^2 s + \varepsilon rs^2 + \zeta s^3 + \eta r^5 + \text{etc.}}$$

Coroll. 7.

§. 19. Quicunque ergo huiusmodi valor pro y in aequatione:

$$0 = \frac{a\,dy}{1\,dx} + \frac{a^2\,ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{a^3\,d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{a^4\,d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

ſubſtituatur, aequatio prodibit identica: ſeu ſeries proueniet infinita, cuius ſumma erit $= 0$. Pro differentiationibus autem continuis tenendum eſt eſſe $\frac{dr}{dx} = \frac{\pi s}{a}$ et $\frac{ds}{dx} = -\frac{\pi r}{a}$ ideoque per ſubſtitutionem differentialia dx ſe mutuo vbique tollent.

Scholion 1.

§. 20. Notari etiam merentur factores, in quos expreſſio Algebraica infinita: $\frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5}$ $+$ etc. ſupra eſt reſoluta. Cum enim primus factor ſimplex ſit $= z$, et reliqui trinomiales in hac forma generali contineantur: $1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{4kk\pi\pi}$; ſi loco k ſucceſſiue ponantur numeri 1, 2, 3, 4, etc. Ponamus breuitatis gratia:

$$Z = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

eritque per factores infinitos:

$$Z = z\left(1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{16\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{83\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{69\pi\pi}\right)\text{etc.}$$

quorum factorum, excepto primo, numerus eſt infinitus atque $= \frac{1}{2}n$. Sit igitur $\frac{1}{2}n = m$ ſeu $n = 2m$, ac ponatur $z = 2v$ erit $\frac{2v}{1} + \frac{2^2v^2}{1.2} + \frac{2^3v^3}{1.2.3} + \frac{2^4v^4}{1.2.3.4} + $ etc.

$$2v\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{16\pi\pi}\right)\text{ etc.}$$

ideoque

ideoque sequens productum infinitorum factorum, quorum numerus est $= m$, erit:

$$\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{4\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{9\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{16\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

$$= 1 + \frac{2}{1\cdot 2}v + \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}v^2 + \frac{8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}v^3 + \frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^4 + \text{etc.}$$

Quodsi iam illud productum actu euoluatur, quia factorum numerus est $= m$, existente m numero infinito, prouenient:

$$1 + v + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{vv}{mm} + \frac{vv}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{v^3}{m^3} + \frac{(m-1)v^3}{m\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

qui termini cum serie iam inuenta comparati dabunt.

$$1 = \frac{2}{1\cdot 2};\quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}\right) = \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}\right) = \frac{8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

Vnde vtrinque habetur:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\text{etc.} = \frac{1}{6}\pi\pi$$

quae est eadem summatio, quam iam ante complures annos primus inveneram; pluribusque demonstrationibus confirmaueram. Ceterum hinc perspicuum est, etiamsi sit in his factoribus m numerus infinitus; tamen alterum terminum $\frac{v}{m}$ omitti non licere: cum in euolutione ob replicationem infinitam ex terminis infinite paruis $\frac{v}{m}$ termini finiti exsurgant. Quando autem quilibet factor seorsim consideratur, vt in formatione integralis fecimus, tum sine errore hos terminos infinite paruos praetermittere licuit.

Scholion 2.

§. 21. Altiores quoque potestates terminorum seriei

1 +

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+$ etc. ex hac fonte summare licet, eaedemque expressiones prodibunt, quas iam olim erueram. Ne autem calculus nimis fiat prolixus, sequenti modo facile expediri poterit. Ponatur

$$V=1+\frac{2v}{1\cdot 2}+\frac{2^2v^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2^3v^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2^4v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\text{etc.}$$

erit $V=\frac{e^{2v}-1}{2v}$ et $\frac{dV}{Vdv}=\frac{2e^{2v}}{e^{2v}-1}-\frac{1}{v}$; quae reducitur ad hanc formam commodiorem: $\frac{dV}{Vdv}=\frac{2e^{v}}{e^{v}-e^{-v}}-\frac{1}{v}$

$$=\frac{1+\frac{v}{1}+\frac{v^2}{1\cdot 2}+\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\text{etc.}}{\frac{v}{1}+\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{v^7}{1\cdots 7}+\text{etc.}}-\frac{1}{v}:$$ ita ut

fit $$\frac{dV}{Vdv}-1=\frac{1+\frac{v^2}{1\cdot 2}+\frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{v^6}{1\cdot 2\cdots 6}+\text{etc.}}{\frac{v}{1}+\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{v^7}{1\cdot 2\cdots 7}+\text{etc.}}-\frac{1}{v}$$

seu $$\frac{dV}{Vdv}-1=\frac{\frac{2v}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{4v^3}{1\cdot 2\cdots 5}+\frac{6v^5}{1\cdot 2\cdots 7}+\frac{8v^7}{1\cdot 2\cdots 9}+\text{etc.}}{1+\frac{v^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{v^4}{1\cdot 2\cdots 5}+\frac{v^6}{1\cdot 2\cdots 7}+\frac{v^8}{1\cdot 2\cdots 9}+\text{etc.}}$$

Ponatur $\frac{dV}{Vdv}=1+\mathfrak{A}v-\mathfrak{B}v^3+\mathfrak{C}v^5-\mathfrak{D}v^7+\mathfrak{E}v^9-\text{etc.}$

erit $\mathfrak{A}=\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}$

$\mathfrak{B}=\frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{4}{1\cdot 2\cdots 5}$

$\mathfrak{C}=\frac{\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2\cdots 5}+\frac{6}{1\cdot 2\cdots 7}$

$\mathfrak{D}=\frac{\mathfrak{C}}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdots 5}+\frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2\cdots 7}-\frac{8}{1\cdot 2\cdots 9}$

etc.

His valoribus inuentis consideretur altera forma quantitatis V per factores expressa, haec:

$$V=\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{1\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{4\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{9\pi\pi}\right)\text{ etc.}$$

ex

ex qua per differentiationem elicitur:

$$\frac{dV}{Vdv}=\frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{1\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{1\pi\pi}}+\frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{4\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{4\pi\pi}}+\frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{9\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{9\pi\pi}}+\text{etc.}$$

Generaliter vero est

$$\frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{\lambda\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{\lambda\pi\pi}}=\frac{1}{m}+\left.\begin{matrix}\frac{2}{\lambda\pi\pi}\\-\frac{1}{mm}\end{matrix}\right\}v\left.\begin{matrix}-\frac{2}{m\lambda\pi\pi}\\+\frac{1}{m^3}\end{matrix}\right\}v^2\left.\begin{matrix}+\frac{4}{m^2\lambda\pi\pi}\\-\frac{1}{m^4}\\-\frac{4}{\lambda\lambda\pi^4}\end{matrix}\right\}v^3\ \text{etc.}$$

Cum autem sit m numerus infinitus, ipsique factorum numerus aequalis, excepto primo termino, reliqui per m diuisi sine errore praetermitti poterunt, ita vt sit

$$\frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{\lambda\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{\lambda\pi\pi}}=\frac{1}{m}+\frac{2v}{\lambda\pi\pi}-\frac{2v^3}{\lambda^2\pi^4}+\frac{2v^5}{\lambda^3\pi^6}-\frac{2v^7}{\lambda^4\pi^8}+\text{etc.}$$

substitutis ergo pro λ successiue numeris quadratis 1, 4, 9, 16 etc. hisque seriebus, quarum numerus est m in vnam summam coniectis, reperietur:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{Vdv}=1&+\frac{2v}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}\right)\\&-\frac{2v^3}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{25^2}+\text{etc.}\right)\\&+\frac{2v^5}{\pi^6}\left(1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{16^3}+\frac{1}{25^3}+\text{etc.}\right)\\&-\frac{2v^7}{\pi^8}\left(1+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{16^4}+\frac{1}{25^4}+\text{etc.}\right)\\&\text{etc.}\end{aligned}$$

Quodsi iam haec serie cum prius inuenta comparetur habebitur:

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\text{etc.}&=\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\pi^2=\tfrac{1}{6}\pi^2\\1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{16^2}+\text{etc.}&=\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\pi^4=\tfrac{1}{90}\pi^4\\1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{16^3}+\text{etc.}&=\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}\pi^6=\tfrac{1}{945}\pi^6\\1+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{16^4}+\text{etc.}&=\tfrac{1}{2}\mathfrak{D}\pi^8=\tfrac{1}{9450}\pi^8\\&\text{etc.}\end{aligned}$$

Hocque modo summationes a me iam olim exhibitae magis confirmantur, cum non nullis principium, quo tum vsus fueram, lubricum esset visum.

Problema. II.

§. 22. Inuenire terminum generalem seriei, cuius quilibet terminus excedat praecedentem data quantitate, et cuius terminus primus sit datus.

Solutio.

Sit terminus primus $= a$, et excessus cuiusque termini supra praecedentem $= g$, erunt vtique termini indicibus integris respondentes hi:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a, & a+g; & a+2g; & a+3g; & a+4g; & a+5g; & a+6g; \text{ etc.} \end{array}$$

ita vt indici integro x conueniat terminus $y = a + (x-1)g$. At existente x numero quocunque infinitae aliae formulae pro y locum inueniunt. Sit enim y' terminus indici $x+1$ respondens, erit:

$$y' = y + \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Cum iam per hypothesin esse debeat $y' = y + g$, erit

$$g = \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Quamuis huiusmodi aequationum, vbi praeter terminos, qui differentialia ipsius y continent, adest terminus, vel constans, vel functio quaecunque ipsius x, resolutionem ante aliquod tempus tradiderim, tamen expediet per substitutionem $y = + g x + u$ hunc terminum g tollere, erit enim $dy = g dx + du$, $ddy = ddu$, $d^3y = d^3u$, etc. ob dx constans. Fiet ergo

$0 =$

$$0 = \frac{du}{1dx} + \frac{ddu}{1.2dx^2} + \frac{d^3u}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4u}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Quae aequatio cum conueniat cum ea, quam in problemate praecedente inuenimus: si ponamus sin. $\pi x = r$ et cos. $\pi x = s$: erit u functio quaecunque parium dimensionum ipsarum r et s, cuiusmodi §. XVIII. exhibuimus; hacque inuenta erit terminus generalis quaesitus $y = A + gx + u$, dummodo constans A ita definiatur, vt posito $x = a$ fiat $y = a$ Q. E. I.

Problema. III.

§. 23. Inuenire terminum generalem seriei, cuius quilibet terminus prodeat, si praecedens per datum numerum m multiplicetur, et cuius terminus primus sit $= a$.

Solutio.

Termini ergo huius seriei, qui indices habent integros, sequentem progressionem Geometricam constituent:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a, & ma; & m^2a; & m^3a; & m^4a; & m^5a; \text{ etc.} \end{array}$$

ita vt indici integro x respondeat terminus am^{x-1}. Sit igitur generatim y terminus indici x, et y' terminus indici $x+1$ conueniens: eritque $y' = my$. At est

$$y' = y + \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.} = my.$$

Ad hanc aequationem resoluendam, ponatur secundum praecepta data 1 pro y; z pro $\frac{dy}{dx}$; z^2 pro $\frac{ddy}{dx^2}$: etc. vt prodeat sequens aequatio Algebraica:

$$m = 1 + \frac{z}{1} + \frac{zz}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

cuius radices singulas inuestigari oportet. Erit autem $m = e^z$, at sit logarithmus hyperbolicus ipsius $m = \lambda$, vt sit $m = e^{\lambda}$, ideoque $e^{\lambda} - e^{z} = 0$. Quia vero sumto n numero infinito est $e^{\lambda} = (1 + \frac{\lambda}{n})^n$ et $e^z = (1+\frac{z}{n})^n$, habebitur ista aequatio, cuius radices sunt inuestigandae:

$$(1 + \frac{\lambda}{n})^n - (1 + \frac{z}{n})^n = 0,$$

cuius quidem statim vna radix $z - \lambda = 0$ constat, vnde pars integralis obtinetur $y = \alpha e^{\lambda x} = \alpha m^x$ ob $e^{\lambda} = m$. Reliquae radices sunt imaginariae et continentur in hoc factore trinomio:

$$(1 + \frac{\lambda}{n})^2 - 2(1 + \frac{\lambda}{n})(1 + \frac{z}{n})\cos.\frac{2k\pi}{n} + (1 + \frac{z}{n})^2$$

existente k numero quocunque integro: quae forma transit in hanc:

$$2 + \frac{2\lambda}{n} - 2(1 + \frac{\lambda}{n})\cos.\frac{2k\pi}{n} + \frac{\lambda\lambda}{nn}$$
$$+ \frac{2z}{n} - \frac{2z}{n}(1 + \frac{\lambda}{n})\cos.\frac{2k\pi}{n} + \frac{zz}{nn}.$$

Verum ob n numerum infinitum est $\cos\frac{2k\pi}{n} = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{nn}$. Multiplicata ergo illa forma per nn, erit factor generalis $= 2n(n + \lambda)(1 - \cos.\frac{2k\pi}{n}) + \lambda\lambda + 2nz(1 - \cos.\frac{2k\pi}{n}) - 2\lambda z \cos.\frac{2k\pi}{n} + zz = \lambda\lambda + 4kk\pi\pi + \frac{4kk\pi\pi z}{n} - 2\lambda z + zz$; neglectis terminis euanescentibus: quo respectu etiam terminus $\frac{4kk\pi\pi z}{n}$ omitti potest, ita vt factor generalis sit:

$$\lambda\lambda + 4kk\pi\pi - 2\lambda z + zz$$

horumque factorum numerus, si pro k successiue numeri 1, 2, 3, 4, etc. substituantur, erit $= \frac{n}{2}$. Haec autem forma cum generali in *dissertatione mea Tom. VII. Miscell.* tradita, $ff - 2fz\cos.\Phi + zz$ dabit $f = \sqrt{(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)}$

et

et cof. $\Phi = \frac{\lambda}{\surd(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)}$, hincque fin. $\Phi = \frac{2k\pi}{\surd(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)}$. Vnde nafcitur haec integralis y pars,

$$y = e^{\lambda x}(a \text{ fin. } 2k\pi x + \mathfrak{A} \text{ cof. } 2k\pi x).$$

Subftitutis igitur pro k fucceffiue valoribus, ob $e^{\lambda} = m$ reperietur:

$$y = m^x \left\{ \begin{matrix} C + \alpha \text{ fin. } 2\pi x + \beta \text{ fin. } 4\pi x + \gamma \text{ fin. } 6\pi x + \text{ etc.} \\ + \mathfrak{A} \text{ cof. } 2\pi x + \mathfrak{B} \text{ cof. } 4\pi x + \mathfrak{C} \text{ cof. } 6\pi x + \text{ etc.} \end{matrix} \right\}$$

Quare cum pofito $x = 1$ fieri debeat $y = a$, erit $a = m(C + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{ etc.})$ Vnde conftans C definitur. Seu fi pofitis fin. $\pi x = r$ et cof. $\pi x = s$, fit Q functio quaecunque parium dimenfionum ipfarum r et s, erit terminus generalis quaefitus $y = m^x Q$. Q. E. I.

Coroll. 1.

§. 24. In progreffione ergo Geometrica, quatenus ita tantum defcribitur, vt quisque terminus ad praecedentem rationem conftantem habere dicatur, interpolatio non eft determinata, cum termini intermedii infinitis diverfis modis exprimi, imo quemuis valorem recipere queant.

Coroll. 2.

§. 25. Huius ergo aequationis differentialis infinitae

$$(m-1)y = \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1\cdot 2\, dx^2} + \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3} + \frac{d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\, dx^4} + \text{ etc.}$$

integrale completum generaliter exprimi poteft. Pofitis enim fin. $\pi x = r$ et cof. $\pi x = s$, fi Q denotet functionem quamcunque ipfarum r et s erit $y = m^x Q$: ideoque $m^{-x} y$ functioni cuicunque parium dimenfionum ipfarum r et s aequatur.

Coroll.

Coroll. 3.

§. 26. Si pro x scribatur $\frac{x}{a}$ prodibit haec aequatio:

$$(m-1)y = \frac{a\,dy}{1\,dx} + \frac{aa\,ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{a^3\,d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{a^4\,d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

Ad quam integrandam ponatur sin. $\frac{\pi x}{a} = r$ et cos. $\frac{\pi x}{a} = s$. significetque Q functionem quamcunque parium dimensionum ipsarum r et s, ita vt Q eundem valorem retineat, etiamsi pro r et s scribantur $-r$ et $-s$. Quo facto, erit $y = m^{x:a}Q$.

Coroll. 4.

§. 27. Et huius problematis solutio reduci poterat ad solutionem problematis primi. Cum enim esse debeat $y' = my$, erit $ly' = ly + lm$. Ponatur $ly = v$, vt sit $ly' = v'$, fiatque $lm = \lambda$, oportebit esse $v' = v + \lambda$, vnde fit ob $v' = v + \frac{dv}{1\,dx} + \frac{ddv}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3\,dx^3} + \text{etc.}$

$$\lambda = \frac{dv}{1.dx} + \frac{ddv}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3\,dx^3} + \frac{d^4v}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

et posito $v = u + \lambda x$ habebitur:

$$o = \frac{du}{1dx} + \frac{ddu}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3u}{1.2.3\,dx^3} + \frac{d^4u}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

quae est aequatio, ad quam in primo problemate peruenimus. Quodsi ergo ponatur sin. $\pi x = r$ et cos. $\pi x = s$, atque Q denotet functionem parium dimensionum ipsarum r et s, erit $u = Q$, hincque $v = \lambda x + Q = ly = x\,lm + Q$. Numeris itaque sumendis habetur $y = m^x e^Q$, vbi cum e^Q sit quoque functio parium dimensionum ipsarum r et s, si pro ea scribatur Q, erit vt ante inuenimus $y = m^x Q$.

Scholion.

§. 28. Quoniam aequationis Algebraicae:

$$m = 1 + \frac{z}{1} + \frac{zz}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

omnes

omnes radices inuenimus, poterimus inde huius expressionis infinitae:

$$Z = 1 + \frac{z}{1(1-m)} + \frac{zz}{1.2(1-m)} + \frac{z^3}{1.2.3(1-m)} + \frac{z^4}{1.2.3.4(1-m)} + \text{etc.}$$

omnes factores exhibere. Posito enim $lm = \lambda$ primus factor simplex erit $1 - \frac{z}{\lambda}$: et reliqui factores trinomiales in hac forma generali continebuntur:

$$1 + \frac{4kk\pi\pi z}{n(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)} - \frac{2\lambda z + zz}{\lambda\lambda + 4kk\pi\pi}$$

quae transformatur in hanc:

$$1 + \frac{z}{n} - \frac{\lambda\lambda z}{n(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)} - \frac{2\lambda z + zz}{\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)}$$

si loco k successiue substituantur numeri 1, 2, 3, 4, etc. et n est numerus infinite magnus, cuius semissis $\frac{n}{2}$ exhibet ipsum factorum numerum. Sit breuitatis gratia $\lambda\lambda + 4kk\pi\pi = \Phi$; eritque

$$Z = (1 - \tfrac{z}{n})(1 + \tfrac{z}{n} - \tfrac{\lambda\lambda z}{n\Phi} - \tfrac{2\lambda z}{\Phi} + \tfrac{zz}{\Phi})$$

vbi posterior factor locum teneat omnium infinitorum, qui ex variatione quantitatis Φ ex eo nascuntur. Sumtis ergo logarithmis, iisque differentiatis, obtinebitur.

$$\frac{dZ}{Zdz} = \frac{-1}{\lambda - z} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{\lambda\lambda}{n\Phi} - \frac{2\lambda}{\Phi} + \frac{2z}{\Phi}}{1 + \frac{z}{n} - \frac{\lambda\lambda z}{n\Phi} - \frac{2\lambda z}{\Phi} + \frac{zz}{\Phi}}.$$

Hisque terminis infinitas resolutis:

$$\begin{array}{llllllll}
\frac{dZ}{Zdz} = & -\frac{1}{\lambda} & -\frac{z}{\lambda^2} & -\frac{zz}{\lambda^3} & -\frac{z^3}{\lambda^4} & -\frac{z^4}{\lambda^5} & -\frac{z^5}{\lambda^6} & -\text{etc.} \\
& +\frac{1}{n} & -\frac{4\lambda^2 z}{\Phi^2} & -\frac{8\lambda^3 zz}{\Phi^3} & -\frac{16\lambda^4 z^3}{\Phi^4} & -\frac{32\lambda^5 z^4}{\Phi^5} & -\frac{64\lambda^6 z^5}{\Phi^6}, & \\
& -\frac{\lambda\lambda}{n\Phi} & +\frac{2z}{\Phi} & +\frac{6\lambda zz}{\Phi\Phi} & +\frac{16\lambda^2 z^3}{\Phi^3} & +\frac{40\lambda^3 z^4}{\Phi^4} & +\frac{96\lambda^4 z^5}{\Phi^5} & \text{etc.} \\
& -\frac{2\lambda}{\Phi} & & & -\frac{2z^3}{\Phi^2} & -\frac{10\lambda z^4}{\Phi^3} & -\frac{36\lambda^2 z^5}{\Phi^4} & \\
& & & & & & +\frac{2z^5}{\Phi^3} &
\end{array}$$

 pona-

ponatur $\frac{dZ}{Zdz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 +$ etc.
et cum sit $\Phi = \lambda\lambda + 4kk\pi\pi$, vbi successiue pro k omnes numeri 1, 2, 3, 4, etc. vsque ad $\frac{1}{2}n$ substituti concipiendi sunt: eritque

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - 2\lambda\left(\frac{1}{\lambda\lambda+4\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+16\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+36\pi\pi} + \text{etc.}\right)$$

Vel si breuitatis gratia statuatur:

$$\frac{1}{\lambda\lambda+4\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+16\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+36\pi\pi} + \text{etc.} = \mathfrak{A}$$
$$\frac{1}{(\lambda\lambda+4\pi\pi)^2} + \frac{1}{(\lambda\lambda+16\pi\pi)^2} + \frac{1}{(\lambda\lambda+36\pi\pi)^2} + \text{etc.} = \mathfrak{B}$$
$$\frac{1}{(\lambda\lambda+4\pi\pi)^3} + \frac{1}{(\lambda\lambda+16\pi\pi)^3} + \frac{1}{(\lambda\lambda+36\pi\pi)^3} + \text{etc.} = \mathfrak{C}$$
$$\frac{1}{(\lambda\lambda+4\pi\pi)^4} + \frac{1}{(\lambda\lambda+16\pi\pi)^4} + \frac{1}{(\lambda\lambda+36\pi\pi)^4} + \text{etc.} = \mathfrak{D}$$
etc.

erit: $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - 2\lambda\mathfrak{A}$

$$B = -\frac{1}{\lambda\lambda} + 2\mathfrak{A} - 4\lambda^2\mathfrak{B}$$
$$C = -\frac{1}{\lambda^3} + 6\lambda\mathfrak{B} - 8\lambda^3\mathfrak{C}$$
$$D = -\frac{1}{\lambda^4} - 2\mathfrak{B} + 16\lambda^2\mathfrak{C} - 16\lambda^4\mathfrak{D}$$
$$E = -\frac{1}{\lambda^5} - 10\lambda\mathfrak{C} + 40\lambda^3\mathfrak{D} - 32\lambda^5\mathfrak{E}$$
$$F = -\frac{1}{\lambda^6} + 2\mathfrak{C} - 36\lambda^2\mathfrak{D} + 96\lambda^4\mathfrak{E} - 64\lambda^6\mathfrak{F}$$
etc.

Cum iam sit $Z = 1 + \frac{z}{1(1-m)} + \frac{zz}{1\cdot2(1-m)} + \frac{z^3}{1\cdot2\cdot3(1-m)} +$ etc.
erit $Z = \frac{e^z - m}{1-m} = \frac{e^z - e^\lambda}{1-e^\lambda}$; et $\frac{dZ}{dz} = \frac{e^z}{1-e^\lambda}$; vnde

$$\frac{dz}{Zdz} = \frac{e^z}{e^z - e^\lambda} = \frac{1}{1 - e^\lambda e^{-z}} = \frac{1}{1 - me^{-z}},$$ hincque

$$\frac{dZ}{Zdz} = \frac{1}{1 - m + mz - \frac{mzz}{1\cdot2} + \frac{mz^3}{1\cdot2\cdot3} - \frac{mz^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \text{etc.}}$$

Iam

Iam ob $\frac{dz}{zdz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.}$ fiet:

$$\begin{array}{llllll}
1 = (1-m)A & +(1-m)Bz & +(1-m)Cz^2 & +(1-m)Dz^3 & +(1-m)Ez^4 & + \text{etc.} \\
 & + mA & + mB & + mC & + mD & \\
 & & -\frac{1}{2}mA & -\frac{1}{2}mB & +\frac{1}{2}mC & \\
 & & & +\frac{1}{6}mA & +\frac{1}{6}mB & \\
 & & & & -\frac{1}{24}mA &
\end{array}$$

vnde sequentes prodibunt determinationes:

$$A = \frac{1}{1-m}$$

$$B = \frac{-mA}{1-m} = \frac{-m}{(1-m)^2}$$

$$C = \frac{-mB + \frac{1}{2}mA}{1-m} = \frac{mm}{(1-m)^3} + \frac{m}{2(1-m)^2}$$

$$D = \frac{-mC + \frac{1}{2}mB - \frac{1}{6}mA}{1-m} = \frac{-m^3}{(1-m)^4} - \frac{mm}{(1-m)^3} - \frac{m}{6(1-m)^2}$$

$$E = \frac{-mD + \frac{1}{2}mC - \frac{1}{6}mB + \frac{1}{24}mA}{1-m} = \frac{m^4}{(1-m)^5} + \frac{3m^3}{2(1-m)^4} + \frac{7mm}{12(1-m)^3} + \frac{m}{24(1-m)^2}$$

Sequentes ergo orientur serierum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. summationes:

I. $\frac{1}{1-m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - 2\lambda\mathfrak{A}$; seu $\mathfrak{A} = \frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{2\lambda\lambda} - \frac{1}{2\lambda(1-m)}$

II. $\frac{-m}{(1-m)^2} = -\frac{1}{\lambda\lambda} + 2\mathfrak{A} - 4\lambda\lambda\mathfrak{B} = \frac{1}{2\lambda} - \frac{2}{\lambda\lambda} - \frac{1}{\lambda(1-m)} - 4\lambda\lambda\mathfrak{B}$

vnde $\mathfrak{B} = \frac{1}{8\lambda^3} - \frac{1}{2\lambda^4} - \frac{1}{4\lambda^3(1-m)} + \frac{m}{4\lambda\lambda(1-m)^2}$

III. $\frac{mm}{(1-m)^3} + \frac{m}{2(1-m)^2} = -\frac{1}{\lambda^3} + 6\lambda\mathfrak{B} - 8\lambda^3\mathfrak{C} = \frac{3}{4\lambda\lambda} - \frac{4}{\lambda^3} - \frac{3}{2\lambda^2(1-m)}$
$+ \frac{3m}{2\lambda(1-m)^2} - 8\lambda^3\mathfrak{C}.$

H 2 Ergo

Ergo $\mathfrak{C} = \frac{3}{32\lambda^5} - \frac{1}{2\lambda^6} - \frac{3}{16\lambda^5(1-m)} + \frac{3m}{16\lambda^4(1-m)^2} - \frac{m}{16\lambda^3(1-m)^2} - \frac{mm}{8\lambda^3(1-m)^3}$

Sicque sequentes serierum propositarum summae $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc. inuenientur.

Coroll. 1.

§. 29. Cum igitur sit $m = e^\lambda$ erit:

$$\frac{1}{\lambda\lambda + 4\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda + 16\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda + 36\pi\pi} + \text{etc.} = \frac{1}{4\lambda}$$

$$- \frac{1}{2\lambda\lambda} - \frac{1}{2\lambda(1-e^\lambda)}$$ sit $\lambda = \frac{2\pi a}{b}$ erit:

$$\frac{bb}{4(aa+bb)\pi^2} + \frac{bb}{4(aa+4bb)\pi^2} + \frac{bb}{4(aa+9bb)\pi^2} + \text{etc.} = \frac{b}{8\pi a} - \frac{bb}{8\pi\pi aa} -$$

$$\frac{b}{4\pi a(1-e^{2\pi a:b})}$$ ideoque per $\frac{4\pi\pi}{bb}$ multiplicando habebitur:

$$\frac{1}{aa+bb} + \frac{1}{aa+4bb} + \frac{1}{aa+9bb} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2ab} - \frac{1}{2aa} + \frac{\pi}{ab(e^{2\pi a:b} - 1)}$$

quam summam iam alibi ex alio fonte deductam exhibui.

Coroll. 2.

§. 30. Si ergo statuatur $b = 1$, habetur haec summa

$$\frac{1}{aa+1} + \frac{1}{aa+4} + \frac{1}{aa+9} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2a} - \frac{1}{2aa} + \frac{\pi}{a(e^{2\pi a} - 1)}$$

ac si ponatur praeterea $a = 0$, vt prodeat haec series: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. huius summa, ob terminos in infinitum excrescentes, ita ex formula deriuabitur: Concipiatur a infinite paruum, erit $e^{2\pi a} = 1 + 2\pi a + 2\pi\pi aa + \frac{4}{3}\pi^3 a^3$

ideoque summa erit $= \frac{\pi}{2a} - \frac{1}{2aa} + \frac{1}{2aa + 2\pi a^3 + \frac{4}{3}\pi^2 a^4}$

$=$

$$= \frac{\pi a + \pi\pi aa + \frac{2}{3}\pi^3 a^3 - 1 - \pi a - \frac{2}{3}\pi^2 aa + 1}{2aa(1+\pi a + \frac{2}{3}\pi\pi a^2)} = \frac{1}{6}\pi^2,$$ quae vt constat est summa seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc.

Coroll. 3.

§. 31. Si in serie ante inuenta

$$\frac{1}{aa+bb} + \frac{1}{aa+4bb} + \frac{1}{aa+9bb} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2ab} - \frac{1}{2aa} + \frac{\pi}{ab(e^{2\pi a:b}-1)}$$

quantitas a vt variabilis tractetur, et differentiatio instituatur prodibit summa seriei 𝔅, sicque porro per continuam differentiationem ex serie 𝔄 reperientur summae serierum sequentium 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈, etc.

Coroll. 4.

§. 32. Summa huius seriei commodius ita exprimi potest $\frac{1}{aa+bb} + \frac{1}{aa+4bb} + \frac{1}{aa+9bb} + \text{etc.} = \frac{-1}{2aa} + \frac{\pi(e^{2\pi a:b}+1)}{2ab(e^{2\pi a:b}-1)} = \frac{-1}{2aa} + \frac{\pi(e^{\pi a:b}+e^{-\pi a:b})}{2ab(e^{\pi a:b}-e^{-\pi a:b})}$. Ex qua forma facile colligitur valor seriei, si b sit numerus imaginarius, sit enim $b = \frac{c}{\sqrt{-1}}$ erit:

$$\frac{1}{aa-cc} + \frac{1}{aa-4cc} + \frac{1}{aa-9cc} + \text{etc.} = \frac{-1}{2aa} + \frac{\pi(e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}} + e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}})\sqrt{-1}}{2ac(e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}} - e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}})}$$

At est $e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}} + e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}} = 2\cos.\frac{\pi a}{c}$ atque

$$e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}} - e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}} = 2\sqrt{-1}.\sin.\frac{\pi a}{c}$$

vnde fit:

$$\frac{1}{aa-cc} + \frac{1}{aa-4cc} + \frac{1}{aa-9cc} + \text{etc.} = \frac{-1}{2aa} + \frac{\pi\cos.\pi a:c}{2ac\sin.\pi a:c}$$

Coroll. 5.

§. 33. Cum sit $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}=0$: casibus, quibus est $a=2k+1$ et $c=2$ summa seriei est $=\frac{-1}{2aa}=\frac{1}{2(2k+1)^2}$ existente k numero quocunque integro: Quare erit:

$$\frac{1}{(2k+1)^2-4}+\frac{1}{(2k+1)^2-16}+\frac{1}{(2k+1)^2-36}+\frac{1}{(2k+1)^2-64}+\text{etc.}=\frac{-1}{2(2k+1)^2}$$

quam summationem iam alibi demonstraui. Si enim singulae fractiones in partes resoluantur, oritur

$$\frac{-1}{2k+1}=\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k-3}+\frac{1}{2k-5}+\frac{1}{2k-7}+\frac{1}{2k-9}+\text{etc.}$$
$$+\frac{1}{2k+3}+\frac{1}{2k+5}+\frac{1}{2k+7}+\frac{1}{2k+9}-\text{etc.}$$

Coroll. 6.

§. 34. Transposito termino $\frac{-1}{2k+1}$ ad alteram partem binisque terminis collectis orietur noua series, cuius summa $=0$. Erit scilicet singulis terminis per $4k$ diuisis

$$0=\frac{1}{4kk-1}+\frac{1}{4kk-9}+\frac{1}{4kk-25}+\frac{1}{4kk-49}+\frac{1}{4kk-81}+\text{etc.}$$

cuius veritas in singulis casibus facile elucet.

Problema. IV.

§. 35. Inuenire terminum generalem seriei, cuius quilibet terminus oritur, si antecedens per datum numerum m multiplicetur, atque ad productum datus numerus c addatur, cuiusque seriei terminus primus sit pariter datus $=a$,

Solutio.

Termini ergo, qui indicibus integris respondent, ita habebunt:

I

a;

1 2 3 4

a ; $ma+c$; $m^2a+mc+c$; $m^3a+m^2c+mc+c$; etc. vnde ſi index quicunque x ſit numerus integrus, erit terminus conueniens $= m^{x-1}a + \frac{m^{x-1}-1}{m-1}c$: Sin autem x ſit numerus non integer, infinitae aliae formulae praeter hanc perinde ſatisfacient; ad quas inueniendas ſit y terminus indici x reſpondens, et y' ſequens ſeu indici $x+1$ competens: erit $y' = my + c$: vnde fiet:

$$my + c = y + \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Ponatur $y = v - \frac{c}{m-1}$; eritque:

$$mv = v + \frac{dv}{1dx} + \frac{ddv}{1.2dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3dx^3} + \text{etc.}$$

quae aequatio cum congruat cum ea, quam in problemate praecedente inuenimus; ſi ponatur ſin. $\pi x = r$ et coſ. $\pi x = s$ atque Q ſumatur pro functione quacunque parium dimenſionum ipſarum r et s, erit $v = m^x Q$; ideoque $y = m^x Q - \frac{c}{m-1}$. Ponatur $x = 1$, quo caſu fit $r = 0$ et $s = -1$, abeatque Q in C, oportet eſſe $a = mC - \frac{c}{m-1}$; ideoque erit $C = \frac{a}{m} + \frac{c}{m(m-1)}$. Quare ſi pro Q ſumatur quantitas conſtans C ipſa, erit $y = m^{x-1}a + \frac{(m^{x-1}-1)c}{m-1}$ pro caſu ſimpliciſſimo. Atque ſi P ſit functio parium dimenſionum ipſarum r et s talis quae euaneſcat poſito $x = 1$, poni poterit $Q = C + P$ eritque termini generalis quaeſiti forma latiſſime patens $y = m^{x-1}a + \frac{(m^{x-1}-1)c}{m-1} + m^x P$. Q. E. I.

Proble-

Problema V.

§. 36. Inuenire terminum generalem serierum recurrentium secundi ordinis, in quibus quilibet terminus aequatur aggregato binorum terminorum antecedentium per quoscunque numeros multiplicatorum:

Solutio.

Sit terminus indici x respondens $= y$;
terminus indici $x-1$ respondens $= {}'y$
terminus indici $x-2$ respondens $= {}''y$

haecque proposita sit lex seriei recurrentis, vt sit:

$$y = \alpha\,'y + \beta\,''y$$

Quia igitur est

$$'y = y - \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} - \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \text{etc.}$$
$$''y = y - \frac{2dy}{1dx} + \frac{4ddy}{1.2dx^2} - \frac{8d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{16d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \text{etc.}$$

erit his formulis substitutis:

$$y = \begin{array}{l} +\alpha\left(y - \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} - \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \text{etc.}\right) \\ +\beta\left(y - \frac{2dy}{1dx} + \frac{4ddy}{1.2dx^2} - \frac{8d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{16d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \text{etc.}\right) \end{array}$$

Ad quam aequationem resoluendam ponatur secundum praeceptum generale 1 pro y; z pro $\frac{dy}{dx}$; z^2 pro $\frac{ddy}{dx^2}$ etc. fietque

$$1 = \begin{array}{l} +\alpha\left(1 - \frac{z}{1} + \frac{zz}{1.2} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}\right) \\ +\beta\left(1 - \frac{2z}{1} + \frac{4z^2}{1.2} - \frac{8z^3}{1.2.3} + \frac{16z^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}\right) \end{array}$$

quae aequatio ad hanc formam finitam reducitur, $1 = \alpha e^{-1z} + \beta e^{-2z}$: cuius factores inuestigare oportet. Posito ergo $e^{+z} = u$ ac resoluatur haec aequatio $uu = \alpha u + \beta$: cuius vel ambae radices sunt reales, vel ambae imaginariae, vel denique ambae inter se aequales. Hosque tres casus seorsim euolue oportet.

I. Sint

I. Sint igitur primo ambae radices reales et inaequales inter se, seu sit $uu - \alpha u - \beta = (u-A)(u-B)$: hincque pro u ponendo e^x habebimus binos factores generales $(e^x - A)$ et $(e^x - B)$. Vidimus autem supra formulam $e^x - m$ dedisse integrale hoc:

$$y = m^x \left(\begin{array}{l} C + \alpha \sin. 2\pi x + \beta \sin. 4\pi x + \gamma \sin. 6\pi x \\ + \mathfrak{A} \cos. 2\pi x + \mathfrak{B} \cos. 4\pi x + \mathfrak{C} \cos. 6\pi x \end{array} + \text{etc.} \right)$$

Ergo ambo factores $e^x - A$ et $e^x - B$ dabunt coniunctim hunc valorem pro termino generali y:

$$y = \begin{array}{l} + A^x \left(\begin{array}{l} C + \alpha \sin. 2\pi x + \beta \sin. 4\pi x + \gamma \sin. 6\pi x + \text{etc} \\ + \mathfrak{A} \cos. 2\pi x + \mathfrak{B} \cos. 4\pi x + \mathfrak{C} \cos. 6\pi x + \text{etc.} \end{array} \right) \\ + B^x \left(\begin{array}{l} C' + \alpha' \sin. 2\pi x + \beta' \sin. 4\pi x + \gamma' \sin. 6\pi x + \text{etc} \\ + \mathfrak{A}' \cos. 2\pi x + \mathfrak{B}' \cos. 4\pi x + \mathfrak{C}' \cos. 6\pi x + \text{etc.} \end{array} \right) \end{array}$$

Vel ponatur $\sin. \pi x = r$ et $\cos. \pi x = s$, sintque P et Q functiones quaecunque parium dimensionum ipsarum r et s, eritque si fuerit $uu - \alpha u - \beta = (u-A)(u-B)$, seu si sint A et B radices aequationis $uu - \alpha u - \beta = 0$; hoc inquam casu erit:

$$y = A^x P + B^x Q.$$

II. Si ambae radices fuerint imaginariae, tum quidem eadem formula iam inuenta vsum habere poterit, quoniam quouis casu imaginaria se mutuo destruent: interim tamen formula pro y exhiberi potest ab imaginariis libera. Hoc enim casu aequatio $uu - \alpha u - \beta = 0$ eiusmodi induet formam $uu - 2fu \cos. \omega + ff = 0$, cuius radices sunt $u = f \cos. \omega \pm f \sqrt{-1}. \sin. \omega$, ita vt sit $A = f \cos. \omega + f\sqrt{-1}. \sin. \omega$ et $B = f \cos. \omega - f\sqrt{-1}. \sin. \omega$. Hinc autem erit $A^x = f^x \cos. \omega x + f^x \sqrt{-1}. \sin. \omega x$, atque

 $B^x =$

$B^x = f^x \cos.\, \omega x - f^x \sqrt{-1}.\sin.\, \omega x$. Hi igitur valores, si loco A^x et B^x substituantur, fiet $y = (P+Q)\, f^x \cos.\, \omega x + (P-Q)\sqrt{-1}.\, f^x \sin.\, \omega x$. Quia iam P et Q sunt functiones arbitrariae ipsarum r et s, dummodo dimensiones habeant pares: loco $P+Q$, scribatur P, et loco $(P-Q)\sqrt{-1}$, ponatur Q eritque ex aequatione $uu - \alpha u - \beta = uu - 2fu \cos.\, \omega + ff = 0$, terminus generalis quaesitus:

$$y = f^x P \cos.\, \omega x + f^x Q \sin.\, \omega x.$$

III. Si ambae aequationis $uu - \alpha u - \beta = 0$ radices A et B fuerint aequales, puta $A = B = m$, aequatio habebitur $(e^z - m)^2 = 0$. Ponatur vt in §. XXIII; $m = e^\lambda$, erit formulae $(e^z - e^\lambda)^2$ primus factor quadratus $= (z-\lambda)^2$: ex quo oritur pars integralis $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)\, e^{\lambda x} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)\, m^x = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)\, A^x$. Reliqui factores omnes erunt pariter quadrati, et continebuntur in hac forma generali:

$$(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi - 2\lambda z + zz)^2$$

ex quo oritur secundum praecepta a me tradita pars integralis:

$$A^x (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x) \sin.\, 2k\pi x + A^x (\mathfrak{C} + \mathfrak{D}x) \cos.\, 2k\pi x.$$

Quibus colligendis sequitur, si fuerit $uu - \alpha u - \beta = (u-A)^2 = uu - 2Au + AA$, fore terminum generalem quaesitum: $y =$

$$A^x \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + (\mathfrak{C} + \mathfrak{D}x)\sin.\, 2\pi x + (\mathfrak{G} + \mathfrak{H}x)\sin.\, 4\pi x + \text{etc.} \\ \qquad + (\mathfrak{E} + \mathfrak{F}x)\cos.\, 2\pi x + (\mathfrak{I} + \mathfrak{K}x)\cos.\, 4\pi x + \text{etc.} \end{array} \right)$$

Ponatur iterum $\sin.\, \pi x = r$ et $\cos.\, \pi x = s$, sintque P et Q functiones quaecunque pares ipsarum r et s, atque terminus generalis ita exprimi poterit, vt sit $y = A^x (P + Qx)$. Q. E. I.

Coroll.

Coroll. 1.

§. 37. Si ergo in serie recurrente quilibet terminus y ita per binos praecedentes $'y$ et $''y$ determinetur, vt sit $y = \alpha\, 'y + \beta\, ''y$, seu si secundum Moiuraeum fuerit $+\alpha, +\beta$ scala relationis; ac si x fuerit index termini y: erit y functio maxime indeterminata ipsius x: cum innumerabiles formulae exhiberi queant, quae valores satisfacientes pro y praebeant.

Coroll. 2.

§. 38. Ad has autem omnes expressiones pro y inueniendas, formetur ex scala relationis $+\alpha, +\beta$ haec aequatio $uu - \alpha u - \beta = 0$: ex cuius resolutione forma termini generalis y sequenti modo reperietur.

Coroll. 3.

§. 39. Sint aequationis $uu - \alpha u - \beta = 0$ radices A et B, ita vt sit $A = \frac{1}{2}\alpha + \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta)}$ et $B = \frac{1}{2}\alpha - \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta)}$, sumanturque, posito sin. $\pi x = r$ et cos. $\pi x = s$, functiones quaecunque pares ipsarum r et s, quae sint P et Q, erit $y = A^x P + B^x Q = (\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta)})^x P + (\frac{1}{2}\alpha - \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta)})^x Q$.

Coroll. 4.

§. 40. Sin autem aequationis $uu = \alpha u + \beta$ ambae radices fuerint aequales, illa formula vsu caret, ob $\beta + \frac{1}{4}\alpha\alpha = 0$. Hoc autem casu, cum vtraque radix futura sit $\frac{1}{2}\alpha$, si ponatur $\frac{1}{2}\alpha = A$, erit terminus generalis $y = A^x(P + Qx)$.

Coroll. 5.

§. 41. Sin autem sit $\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta$ quantitas negatiua, partes ante inuentae erunt imaginariae. Ad formam ergo realem inueniendam comparetur aequatio $uu - \alpha u - \beta = 0$ cum hac $uu - 2fu\, \text{cos.}\, \omega + ff = 0$, erit $f = \sqrt{-\beta}$, et $\alpha = 2\sqrt{-\beta}\, \text{cos.}\, \omega$, seu $\text{cos.}\, \omega = \frac{\alpha}{2\sqrt{-\beta}}$ et $\text{sin.}\, \omega = \frac{\sqrt{(-4\beta - \alpha\alpha)}}{2\sqrt{-\beta}} = \sqrt{(1 + \frac{\alpha\alpha}{4\beta})}$, vnde angulus ω inuenietur, ex quo erit $y = f^x\, (P\, \text{cos.}\, \omega x + Q\, \text{sin.}\, \omega x)$

Coroll. 6.

§. 42. Si pro P et Q quantitates constantes assumantur, prodit eadem termini generalis forma, quae vulgo exhiberi ac pro sola, quae satisfaciat, haberi sole. Qualibet autem serie determinata proposita, istas binas quantitates constantes ex duobus terminis primis, qui dati sumuntur, definiri oportet. In genere autem, cum duae ingrediantur functiones arbitrariae P et Q, quae quoties x est numerus integer, eosdem valores constantes inducent, patet duos seriei terminos indicibus integris respondentes, pro lubitu assumi posse.

Scholion.

§. 43. Methodus haec inueniendi terminos generales serierum recurrentium ideo potissimum est notatu digna, quod non solum omnes possibiles formas exhibeat, sed etiam quod a priori procedat, atque ex solis principiis analyticis negotium conficiat, cum alii, qui has series tractauerunt, omnes per viam indirectam ad formam illam terminorum generalium specialem peruenerint. Haec enim

enim est praecipua proprietas, et quasi criterium methodi directae, vt non solum ex ipsis cuiusque rei principiis eius affectiones eruat, sed etiam omnes determinationis modos simul complectatur. Methodi autem indirectae, etsi saepe concinnas et elegantes problematum solutiones suppeditant, tamen rarissime naturam quaestionis, quae tractatur, exhauriunt. Cuius discriminis eximium exemplum in problemate antecedente spectatur; luculentius autem in problemate sequente occurret, vbi in genere omnium serierum recurrentium termini generales inuestigabuntur.

Problema VI.

§. 44. Inuenire terminum generalem serierum recurrentium cuiuscunque ordinis, quarum quilibet terminus aequatur aggregato aliquot terminorum antecedentium per numeros quoscunque multiplicatorum.

Solutio.

Sit terminus indici x respondens $= y$, termini autem antecedentes, qui indicibus $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$, etc. conueniunt, designentur per $'y$, $''y$, $'''y$, ^{IV}y, etc: propositaque sit haec seriei lex, vt habeatur vbique:

$$y = \alpha\, 'y + \beta\, ''y + \gamma\, '''y + \delta\, ^{IV}y + \text{etc.}$$

Cum iam sit ex natura differentialium:

$$'y = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} - \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{etc.}$$

$$''y = y - \frac{2dy}{1dx} + \frac{2^2ddy}{1.2dx^2} - \frac{2^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{etc.}$$

$$'''y = y - \frac{3dy}{1dx} + \frac{3^2ddy}{1.2dx^2} - \frac{3^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{etc.}$$

etc.

 Si

Si hi valores ibi substituantur, prodibit aequatio, in cuius singulis terminis vnica variabilis y dimensio occurrit; alterius vero variabilis x, nonnisi differentiale dx, quod constans ponitur, ingreditur. Quare si vbique 1 loco y, z loco $\frac{dy}{dx}$, et generatim z^m loco $\frac{d^m y}{dx^m}$ substituatur, emerget reductione facta haec aequatio:

$$1 = \alpha e^{-z} + \beta e^{-2z} + \gamma e^{-3z} + \delta e^{-4z} + \text{etc.}$$

Fiat nunc $e^z = u$, atque sublatis fractionibus prodibit huiusmodi aequatio Algebraica:

$$u^n = \alpha u^{n-1} + \beta u^{n-2} + \gamma u^{n-3} \delta u^{n-4} + \text{etc.}$$

quae tot erit dimensionum, quot termini antecedentes ad termini y determinationem requiruntur; seu quoti ordinis fuerit ipsa series recurrens. Iam forma termini generalis y ex radicibus huius aequationis, seu ex factoribus huius formulae:

$$u^n - \alpha u^{n-1} - \beta u^{n-2} - \gamma u^{n-3} - \delta u^{n-4} - \text{etc.} = U$$

simili modo colligetur, quo in solutionibus problematum hactenus propositorum sumus vsi: scilicet si sit sin. $\pi x = r$ et cos. $\pi x = s$, ac P, Q, R, S, T, etc. denotent functiones quascunque parium dimensionum ipsarum r et s. Deinde formulae U inuestigentur omnes factores reales tam simplices quam trinomiales, et, si qui eorum fuerint aequales, ii coniunctim per potestates exprimantur. Singuli autem factores isti totidem partes termini generalis y praebebunt, quae partes ope sequentium regularum formabuntur;

I. Si

I. Si factor sit $u - A$ erit pars integralis

$$y = A^x P$$

II. Si factor sit $(u-A)^2$ erit pars integralis

$$y = A^x (P + Qx)$$

III. Si factor sit $(u-A)^3$ erit pars integralis

$$y = A^x (P + Qx + Rx^2)$$

IV. Si factor sit $(u-A)^4$ erit pars integralis

$$y = A^x (P + Qx + Rxx + Sx^3)$$

etc.

1. Si factor sit $uu - 2Au \text{ cof. } \omega + AA$ erit

$$y = A^x (P \text{ cof. } \omega x + Q \text{ fin. } \omega x)$$

2. Si factor sit $(uu - 2Au \text{ cof. } \omega + AA)^2$ erit

$$y = A^x (P + Qx) \text{ cof. } \omega x + A^x (R + Sx) \text{ fin. } \omega x$$

3. Si factor sit $(uu - 2Au \text{ cof. } \omega + AA)^3$ erit

$$y = \begin{array}{l} A^x (P + Qx + Rxx) \text{ cof. } \omega x \\ + A^x (S + Tx + Vxx) \text{ fin. } \omega x \end{array}$$

etc.

Quodfi ergo pro fingulis formulae U factoribus hinc partes integralis quaerantur, eaeque in vnam fummam coniiciantur, habebitur valor completus pro termino generali y quaefito. Q. E. I.

Coroll. 1.

§. 45. Hoc ergo modo obtinetur integrale completum fequentis aequationis differentialis infinitae:

$y =$

$$y = y\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.})$$
$$- \frac{dy}{1dx}\,(\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \text{etc.})$$
$$+ \frac{ddy}{1 \cdot 2dx^2}\,(\alpha + 2^2\beta + 3^2\gamma + 4^2\delta + \text{etc.})$$
$$- \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3dx^3}\,(\alpha + 2^3\beta + 3^3\gamma + 4^3\delta + \text{etc.})$$
$$+ \frac{d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4dx^4}\,(\alpha + 2^4\beta + 3^4\gamma + 4^4\delta + \text{etc.})$$
$$\text{etc.}$$

ſeu valor ipſius y exprimetur per functionem ipſius x.

Coroll. 2.

§. 46. Omnis ergo difficultas reducitur ad reſolutionem aequationis Algebraicae:

$$u^n = \alpha u^{n-1} + \beta u^{n-2} + \gamma u^{n-3} + \delta u^{n-4} + \text{etc.}$$

Eius enim radicibus ſeu factoribus inuentis facile eſt ope regularum ante traditarum valorem ipſius y determinare.

Coroll. 3.

§. 47. Quoniam per integrationem tot quantitates arbitrariae P, Q, R, S, etc. inuehuntur, quot vnitates continet exponens n, ſeu quot termini antecedentium in determinationem ſequentis ingrediuntur: manifeſtum eſt totidem terminos pro lubitu aſſumi poſſe, ex quibus reliqui omnes, quorum indices ſunt integri determinentur. Hoc tamen non obſtat, quo minus termini indicum non integrorum maneant maxime indeterminati, vti in praecedentibus problematis iam eſt notatum.

Problema VII.

§. 48. Si ſeriei quilibet terminus aequetur quantitati cuipiam conſtanti c, vna cum aggregato aliquot terminorum

rum

rum antecedentium per datos numeros multiplicatorum, (vt in problemate praecedente): inuenire huius feriei terminum generalem.

Solutio.

Posito vt ante termino indici indeterminato x respondente $= y$, sint antecedentes indicibus $x-1, x-2, x-3$, etc. respondentes $'y$, $''y$, $'''y$ etc. atque proposita sit haec lex progressionis

$$y = c + \alpha\, 'y + \beta\, ''y + \gamma\, '''y + \delta\, {}^{IV}y + \text{etc.}$$

substitutis ergo pro $'y$, $''y$, $'''y$, ${}^{IV}y$, etc. valoribus supra exhibitis erit:

$$\begin{aligned} y = c &+ y(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{ etc.}) \\ &- \frac{dy}{1 \cdot dx}(\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta+\text{ etc.}) \\ &+ \frac{ddy}{1 \cdot 2dx^2}(\alpha+2^2\beta+3^2\gamma+4^2\delta+\text{ etc.}) \\ &- \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3dx^3}(\alpha+2^3\beta+3^3\gamma+4^3\delta+\text{ etc.}) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Ponatur iam ad terminum constantem c ex aequatione tollendum $y = v + g$, fiatque: $g = c + g(\alpha+\beta+\gamma+\delta+$ etc. ideoque $g = \frac{c}{1-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\text{etc.}}$. Quo facto ob $dy = dv$, $ddy = ddv$ etc. habebitur aequatio haec:

$$\begin{aligned} v = &\; v(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{ etc.}) \\ &- \frac{dv}{1dx}(\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta+\text{ etc.}) \\ &+ \frac{ddv}{1 \cdot 2dx^2}(\alpha+2^2\beta+3^2\gamma+4^2\delta+\text{ etc.}) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Quae aequatio cum similis sit ei, quam in problemate praecedente resoluimus, valor ipsius v per regulas ibi datas inuenietur. Quo inuento habebitur terminus generalis quaesitus

$$y = v + \frac{c}{1 - \alpha - \beta - \gamma - \delta - etc.}$$

ex quo natura seriei propositae innotescet. Q E I.

Coroll. 1.

§. 49. Quantitas igitur constans c, quae ad formulam $\alpha' y + \beta'' y + \gamma''' y +$ etc. accedit, terminum generalem y aliter non afficit, nisi quod ipsi numerum constantem adiiciat. Quaeratur ergo terminus generalis pro serie recurrente pura cuius scala relationis sit: α, $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$, etc. ad eumque addatur numerus $\frac{c}{1-\alpha-\beta-\gamma-etc.}$

Coroll. 2.

§. 50. Haec autem quantitas constans adiicienda $\frac{c}{1-\alpha-\beta-\gamma-etc.}$ euadit infinita ideoque incerta, si denominator euanescit, seu si $1 - \alpha - \beta - \gamma - \delta -$ etc. $= 0$. Hoc autem casu aequatio $u^n - \alpha u^{n-1} - \beta u^{n-2} - \gamma u^{n-3} -$ etc. $= 0$ radicem habebit $u - 1 = 0$, vnde nascitur integralis pars $y = P$; quae ne omnes termini fiant infiniti, quantitas P ita debet esse infinita, vt ea cum illa constante infinita praebeat valorem finitum, qui erit $= P + Qx$.

Scholion 1.

§. 51. Quod quo clarius appareat, obseruandum est huiusmodi series, quales hic sumus contemplati, semper reduci posse ad series recurrentes puras vno gradu altiores. Si enim sit

$y =$

$$y = c + \alpha\,'y + \beta\,''y + \gamma\,'''y + {}^{IV}y,$$

erit $'y = c + \alpha''y + \beta'''y + \gamma\,{}^{IV}y + {}^{V}y,$

quarum differentia dat:

$$y = (\alpha+1)'y + (\beta-\alpha)''y + (\gamma-\beta)'''y + (\delta-\gamma)^{IV}y - \delta\,{}^{V}y,$$

quae est lex pro ferie recurrente pura: cuius terminus generalis formabitur ex resolutione huius aequationis:

$$u^{n+1} - (\alpha+1)u^{n} - (\beta-\alpha)u^{n-1} - (\gamma-\beta)u^{n-2} - \text{etc.} = 0.$$

Huius autem factor vnus iam constat, scilicet $u-1$ cum sit

$$(u-1)(u^{n} - \alpha u^{n-1} - \beta u^{n-2} - \gamma u^{n-3} - \text{etc.}) = 0$$

Factor autem $u-1$ dat partem integralis 1^{x} P tum solum, quando non simul factor est alterius formae $u^{n} - \alpha u^{n-1}$ – etc. sin autem haec quoque factorem habeat $u-1$ eiusue potestatem, istius exponens vnitate augeri, indeque debita integralis pars inuestigari debet. Inuento autem hac ratione termino generali y, is, cum in eo quantitas c non insit, nimis erit generalis; ad casum ergo propositum restringi debebit. Ex valore scilicet ipsius y eruantur valores terminorum praecedentium $'y$, $''y$, $'''y$, etc. loco x ponendo $x-1$, $x-2$, $x-3$, etc. vbi notandum est, functiones P, Q, R, etc. eosdem valores retinere, nullamque inde mutationem pati. Deinde hi valores substituantur in aequatione:

$$y = c + \alpha'y + \beta''y + \gamma'''y + \delta\,{}^{IV}y + \text{etc.}$$

atque hoc pacto vna functionum illarum P, Q, R, etc. determinabitur. Sic si proposita sit haec seriei lex:

$$y = c + 3'y - 2''y$$

hinc nascetur aequatio $(u-1)(u^{2} - 3u + 2) = 0$, cuius

 facto-

factores sunt $(u-1)^2(u-2)=0$; ex quibus colligitur terminus generalis:

$$y = P + Qx + 2^x R\text{, erit ergo}$$
$$'y = P + Qx - Q + 2^{x-1} R\text{, et}$$
$$''y = P + Qx - 2Q + 2^{x-2} R\text{,}$$

qui substituti hanc dabunt aequalitatem:

$$P + Qx + 4 . 2^{x-2} R = c + P + Qx + Q + 4 . 2^{x-2} R\text{,}$$

vnde reperitur $Q = -c$: sicque terminus generalis propositae legi conueniens erit $y = P - cx + 2^x R$, vbi pro P et R functiones quascunque parium dimensionum ipsarum r et s assumi possunt.

Scholion 2.

§. 52. Quoniam igitur methodum vniuersalem tradidimus inueniendi terminos generales serierum, quarum terminus quisque per praecedentes determinatur, siquidem terminorum antecedentium nullae potestates occurrant; eandem hanc methodum accommodemus ad series, quarum quisque terminus, non solum ex praecedentibus, sed etiam ex ipso indice, determinatur; in quo tertium formationis serierum genus constituimus. Quodsi vero terminorum praecedentium quadrata, altioresue potestates in determinationem sequentis ingrediantur, vt si fuerit $y' = yy + ay$, tum quidem aequatio differentialis infinita, qua terminus generalis inuenitur, facile exhibetur, quae hoc casu erit:

$$yy + ay = y + \frac{dy}{1\,dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3\,dx^3} + \text{etc.}$$

sed quia artificium nondum constat huiusmodi aequationes resoluendi, tractationem huius generis serierum hic praetermittere cogimur.

Proble-

Problema. VIII.

§. 53. Inuenire terminum generalem feriei, cuius quilibet terminus indici x refpondens, aequatur praecedentis multiplo cuicunque vna cum multiplo ipfius indicis, et quantitate quapiam conftante.

Solutio.

Sit y terminus indici x refpondens, et y' denotet terminum fequentem, fitque haec feriei lex propofita.

$$y' = my + a + bx,$$

ex qua valorem ipfius y definiri oporteat. Si ergo pro y' valorem fuum fubftituamus, habebimus hanc aequationem:

$$a + bx + my = y + \frac{dy}{1\,dx} + \frac{ddy}{1\cdot 2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} + \text{etc.}$$

Huiusmodi autem aequationes etfi generaliter refoluere docui, tamen expediet hanc aequationem per fubftitutionem in aliam refoluere, in qua omnes termini vnam ipfius y complectantur dimenfionem. Ponatur ergo

$y = A + Bx + v$, erit $dy = B\,dx + dv$; $ddy = ddv$ etc. fietque:

$$\begin{aligned} a + bx + mv &= A + Bx + v + \frac{dv}{1\,dx} + \frac{ddv}{1\cdot 2\,dx^2} + \frac{d^3v}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} + \text{etc.} \\ + mA + mBx &\quad + B \end{aligned}$$

Iam fiat $A + B = a + mA$ et $B = b + mB$; reperieturque $B = \frac{-b}{m-1}$; et $A = \frac{-m}{(m-1)^2} - \frac{a}{m-1}$. Reftabit ergo haec aequatio:

$$mv = v + \frac{dv}{1\,dx} + \frac{ddv}{1\cdot 2\,dx^2} + \frac{d^3v}{1\cdot \cdot \cdot\,dx^3} + \text{etc.}$$

quae cum reducatur ad $e^z - m = u - m = 0$: erit:

$v = m^x P$, ideoque terminus generalis quaefitus,

$$y = \frac{-b}{(m-1)^2} - \frac{a-bx}{m-1} + m^x P.$$

Vnicus casus hic excipitur quo $m=1$, ob denominatorem $m-1$ euanescentem. Cum enim hoc casu habeatur:

$$a+bx=\frac{dy}{1dx}+\frac{ddy}{1.2dx^2}+\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}+\text{etc.}$$

ad terminum bx tollendum huiusmodi valor pro y accipi debet $y=A+Bx+Cxx+v$: vnde fit $\frac{dy}{dx}=B+2Cx+\frac{dv}{dx}$ et $\frac{ddy}{dx^2}=2C+\frac{ddv}{dx^2}$: sicque habebitur:

$$a+bx=\begin{matrix}B+2Cx\\+C\end{matrix}+\frac{dv}{1dx}+\frac{ddv}{1.2dx^2}+\frac{d^3v}{1.2.3dx^3}+\text{etc.}$$

Fiat ergo $C=\frac{1}{2}b$, et $B=a-\frac{1}{2}b$; eritque $v=P$, et terminus generalis $y=A+(a-\frac{1}{2}b)x+\frac{1}{2}bxx+P$; seu cum A in functione P comprehendi possit, erit: $y=(a-\frac{1}{2}b)x+\frac{1}{2}bxx+P$. Q. E. I.

Scholion.

§. 54. Huiusmodi autem series reuocari possunt ad legem recurrentium simplicium. Cum enim sit

$$\begin{array}{ll}
y'=a+bx+my & \text{erit}\\
\underline{y''=a+b(x+1)+my'} & \text{vnde subtrahendo}\\
y''-y'=\quad b+my'-my & \text{simili modo erit}\\
\underline{y'''-y''=\quad b+my''-my'} & \text{denuoque subtrahendo:}\\
y'''-2y''+y'=my''-2my'+my & \text{seu}\\
y'''=(m+2)y''-(2m+1)y'+my & \text{siue pro terminis antecedentibus}\\
y=(m+2)'y-(2m+1)''y+m'''y. &
\end{array}$$

Hinc ergo secundum §. LI. formabitur aequatio: $u^3-(m+2)u^2+(2m+1)u-m=0$ quae habet factores: $(u-1)^2(u-m)=0$. ex quibus oritur terminus generalis: $y=P+Qx+m^xR$. Iam vt haec forma nimis late patens ad casum propositum $y'=a+bx+my$ accommodetur, ob

$y'=$

$'y = P + Qx + Q + m.m^x R$, fiet

$$P + Q + Qx + m.m^x R = a + bx + mP + mQx + m.m^x R$$

ideoque $P + Q = a + mP$, et $Q = b + mQ$; vnde inuenitur $Q = \frac{-b}{m-1}$ et $P = \frac{-b}{(m-1)^2} - \frac{a}{m-1}$, ita vt sit terminus generalis vt ante est inuentus:

$$y = \frac{-b}{(m-1)^2} - \frac{a-bx}{m-1} + m^x R.$$

Sin autem $m = 1$, statim patet aequationis $(u-1)^2 (u-m) = 0$, tres factores fore aequales, fierique $(u-1)^3 = 0$, vnde fit terminus generalis $y = P + Qx + Rxx$, et propterea:

$$\begin{aligned} 'y = P + Qx + Rxx &= P + Qx + Rxx \\ +Q + 2Rx \quad & \quad a + bx \\ +R \quad & \end{aligned}$$

Ergo prodit: $R = \frac{1}{2}b$ et $Q = a - \frac{1}{2}b$, ita vt sit terminus generalis $y = P + (a - \frac{1}{2}b)x + \frac{1}{2}bxx$, vt ante. Simili modo apparet, si lex progressionis in genere sit:

$$y = X + \alpha\,'y + \beta\,''y + \gamma\,'''y + \delta\,^{IV}y + \text{etc.}$$

atque X sit functio ipsius x rationalis integra, veluti $X = a + bx + cxx + dx^3 + \text{etc.}$ per continuam subtractionem tandem perueniri ad legem, qua singuli termini per solos antecedentes determinentur; sicque seriem semper fore recurrentem, cuius terminus generalis per praecepta ante data definiri queat. Hic autem terminus nimis late patebit; hancque ob rem quaerendis valoribus terminorum $'y$, $''y$, $'''y$ etc. ad legem propositam accommodari debebit, quo pacto tot semper functiones P, Q, R, etc. determinabuntur, quot litterae a, b, c, d, etc. fuerint per subtractionem eliminatae. Cum igitur huiusmodi

modi series nihil amplius habeant difficultatis, alias consideremus, in quibus X non sit functio, vel rationalis, vel integra ipsius x.

Problema. IX.

§. 55. Inuenire terminum generalem seriei, cuius quilibet terminus aequetur praecedenti vna cum functione quacunque ipsius indicis.

Solutio.

Sit terminus indici x respondens $= y$, eiusque antecedens

$$'y = y - \frac{dy}{1\,dx} + \frac{ddy}{1.2\,dx^2} - \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} - \text{etc.}$$

Lex autem progressionis sit $y = 'y + X$, vnde fiet

$$X = \frac{dy}{1\,dx} - \frac{ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} - \frac{d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

quae aequatio resoluetur ope regularum, quas ante aliquod tempus tradidi. Scilicet ponendo z^n pro $\frac{d^ny}{dx^n}$ formetur haec expressio:

$$Z = z - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} - \frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} = 1 - e^{-z}$$

cuius quaerantur omnes factores, qui erunt primo z; reliqui in hac forma generali continentur: $zz + 4kk\pi\pi$. Ex factore $z - 0$ orietur autem haec pars integralis:

$$y = \int X\,dx + \text{etc.}$$

Ex factore autem $zz + 4kk\pi\pi$ si comparetur cum formula $zz - 2kz\cos.\Phi + kk$, fiet $k = 2k\pi$, et $\cos.\Phi = 0$, vnde $\Phi = 90°$, ideoque litterae $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ ita determinabuntur ob $A = 0$; $B = 1$, $C = \frac{-1}{1.2}$; $D = \frac{1}{1.2.3}$ etc.

$\mathfrak{M} =$

$$\mathfrak{M} = 1 - \frac{4k^2\pi^2}{1.2} + \frac{16k^4\pi^4}{1.2.3.4} - \frac{64k^6\pi^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{N} = - \frac{2k\pi}{1} + \frac{8k^3\pi^3}{1.2.3} - \frac{32k^5\pi^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$$

ita vt sit $\mathfrak{M} = \operatorname{cos}. 2k\pi$, et $\mathfrak{N} = -\operatorname{sin}. 2k\pi$. His valoribus inuentis, erit pars integralis ex factore $zz + 4kk\pi\pi$ oriunda:

$$y = 2\begin{cases}(\operatorname{cos}. 2k\pi \operatorname{cos}. 2k\pi x - \operatorname{sin}. 2k\pi . \operatorname{sin}. 2k\pi x)\int X dx \operatorname{cos}. 2k\pi x \\ (\operatorname{cos}. 2k\pi . \operatorname{sin}. 2k\pi x + \operatorname{sin}. 2k\pi . \operatorname{cos}. 2k\pi x)\int X dx \operatorname{sin}. 2k\pi x\end{cases}$$

at est, si $2k = 0$, $\operatorname{cos}. 2k\pi = 1$, vnde erit:

$$y = 2\operatorname{cos}. 2k\pi x \int X dx \operatorname{cos}. 2k\pi x + 2\operatorname{sin}. 2k\pi x \int X dx \operatorname{sin}. 2k\pi x.$$

Quod si iam omnes hi valores, ex variabilitate numeri k oriundi, in vnam summam colligantur, prodibit terminus generalis quaesitus:

$$y = \int X dx \begin{matrix} +2\operatorname{cos}.2\pi x \int X dx \operatorname{cos}.2\pi x + 2\operatorname{cos}.4\pi x \int X dx \operatorname{cos}.4\pi x + 2\operatorname{cos}.6\pi x \int X dx \operatorname{cos}.6\pi x \\ +2\operatorname{sin}.2\pi x \int X dx \operatorname{sin}.2\pi x + 2\operatorname{sin}.4\pi x \int X dx \operatorname{sin}.4\pi x + 2\operatorname{sin}.6\pi x \int X dx \operatorname{sin}.6\pi x \end{matrix} \text{etc.}$$

Q. E. I.

Coroll. 1.

§. 56. Quia est $y = {}'y + X$, manifestum est, y exprimere terminum summatorium seriei, cuius terminus generalis sit $= X$. Si enim summa omnium terminorum a primo vsque ad hunc X, cuius index est $= x$, ponatur $= y$, erit summa omnium praeter vltimum $= {}'y$, ideoque $y = {}'y + X$.

Coroll. 2.

§. 57. Expressio ergo inuenta y, seu terminus generalis seriei propositae, simul est terminus summatorius seriei, cuius terminus generalis est $= X$; sicque nouam adepti sumus expressio-

 nem

nem pro summa cuiusque seriei, cuius terminus generalis datur; quae autem ob multitudinem integralium infinitam rarissime vsum aliquem praestabit.

Scholion.

§. 58. Si praeter functionem quamcunque indicis x, non solum terminus proxime praecedens, sed plures praecedentium, ad formationem termini sequentis adhibeantur, simili modo peruenietur ad resolutionem aequationis differentialis infinitae, quae ope *methodi a me propositae* tractari poterit. Non solum igitur series, quarum lex formationis ad genus pertinet secundum, methodo hic exposita ad calculum reuocari, earumque termini generales inueniri possunt, sed etiam ad genus tertium aeque patet, istarumque serierum veram indolem clarius ob oculos ponit.

Problema X.

§. 59. Inuenire terminum generalem seriei, cuius quilibet terminus aequalis sit praecedenti per suum indicem multiplicato.

Solutio.

Si terminus primus vnitati aequalis statuatur, orietur *Wallisii* series Hypergeometrica haec:

ind:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	etc.
term:	1,	1,	2,	6,	24,	120,	720,	5040,	40320,	

Ponatur terminus indici x, respondens $= y$, eumque sequens $= y'$, erit $y' = yx$, vnde nascitur haec aequatio:

1 . . . $yx =$

$$yx = y + \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

pro tali autem aequatione resoluenda regula generalis non constat. At leui negotio haec aequatio in aliam formam transformatur, quam resoluere liceat. Ponatur scilicet $y = e^v$, erit $y' = e^{v'}$, ideoque fiet $e^{v'} = e^v x$, sumtisque logarithmis: $v' = v + lx$, quocirca habebitur:

$$lx = \frac{dv}{1dx} + \frac{ddv}{1.2dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4v}{1.2.3.4dx^4} + \frac{d^5v}{1.2.3.4.5dx^5} + \text{etc.}$$

quae aequatio in praecedente continetur, faciendo $X = lx$, quocirca integrale erit:

$$v = \int dx\,lx \begin{array}{l} + 2\,\text{cos.}\,2\pi x \int dx\,lx.\,\text{cos.}\,2\pi x + 2\,\text{cos.}\,4\pi x \int dx\,lx.\,\text{cos.}\,4\pi x + \text{etc.} \\ + 2\,\text{sin.}\,2\pi x \int dx\,lx.\,\text{sin.}\,2\pi x + 2\,\text{sin.}\,4\pi x \int dx\,lx.\,\text{sin.}\,4\pi x + \text{etc.} \end{array}$$

Inuento autem valore ipsius v, erit terminus generalis quaesitus $y = e^v$: denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$. Q. E. I.

Scholion.

§. 60. Primum huius expressionis membrum $\int dx\,lx$, est $= x\,lx - x$, reliqua vero membra singula per series infinitas integrari poterunt. Est enim:

$$\int dx\,lx.\,\text{cos.}\,mx = \frac{1}{m}\,\text{sin.}\,mx\left(lx + \frac{1}{m^2x^2} - \frac{1.2.3}{m^4x^4} + \frac{1.2.3.4.5}{m^6x^6} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{m}\,\text{cos.}\,mx\left(\frac{1}{mx} - \frac{1.2}{m^3x^3} + \frac{1.2.3.4}{m^5x^5} - \text{etc.}\right)$$

$$\int dx\,lx.\,\text{sin.}\,mx = -\frac{1}{m}\,\text{cos.}\,mx\left(lx + \frac{1}{m^2x^2} - \frac{1.2.3}{m^4x^4} + \frac{1.2.3.4.5}{m^6x^6} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{m}\,\text{sin.}\,mx\left(\frac{1}{mx} - \frac{1.2}{m^3x^3} + \frac{1.2.3.4}{m^5x^5} - \text{etc.}\right)$$

Vnde colligitur, fore:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,\text{cos.}\,mx \int dx\,lx.\,\text{cos.}\,mx \\ + 2\,\text{sin.}\,mx \int dx\,lx.\,\text{sin.}\,mx \end{array}\right\} = \frac{2}{mmx}\left(1 - \frac{1.2}{m^2x^2} + \frac{1.2.3.4}{m^4x^4} - \frac{1.2.3.4.5.6}{m^6x^6} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \alpha\,\text{cos.}\,mx + \mathfrak{A}\,\text{sin.}\,mx$$

Substitutis iam successiue pro m valoribus: 2π, 4π, 6π, etc. cunctisque his expressionibus collectis reperietur:

$$\begin{aligned} v = \mathfrak{C} + x\,lx - x \qquad & + \frac{1}{2\pi^2 x}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}\right) \\ \alpha \cos. 2\pi x + \mathfrak{A} \sin. 2\pi x & - \frac{1 \cdot 2}{8\pi^4 x^3}\left(1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \text{etc.}\right) \\ \beta \cos. 4\pi x + \mathfrak{B} \sin. 4\pi x & \\ \gamma \cos. 6\pi x + \mathfrak{C} \sin. 6\pi x & + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{32\pi^6 x^5}\left(1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \text{etc.}\right) \\ \text{etc.} \qquad & \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Si nunc pro his seriebus potestatum *summae, a me dudum inuentae*, substituantur, habebitur:

$$\begin{aligned} v = C + x\,lx - x & + \alpha \cos. 2\pi x + \beta \cos. 4\pi x + \gamma \cos. 6\pi x + \text{etc.} \\ & + \mathfrak{A} \sin. 2\pi x + \mathfrak{B} \sin. 4\pi x + \mathfrak{C} \sin. 6\pi x + \text{etc.} \\ & + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2x} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{1}{6x^5} - \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9} \cdot \frac{3}{10x^7} + \frac{1}{9 \cdot 10 \cdot 11} \cdot \frac{5}{6x^9} - \text{etc.} \end{aligned}$$

seu si sit P functio parium dimensionum ipsarum $r = \sin. \pi x$, et $s = \cos. \pi x$, erit:

$$v = P + x\,lx - x + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2x} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{1}{6x^5} - \text{etc.}$$

Cum iam posito $x = 1$, fiat $y = 1$, et $v = 0$; debebit hoc casu fieri: $P = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6} + \frac{3}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} - \text{etc.}$ cuius valorem, alibi ostendi, esse $P = \frac{1}{2}\,l\,2\pi$, huncque valorem habebit, quoties x sit numerus integer quicunque. Hinc ad numeros regrediendo inuenietur terminus generalis quaesitus:

$$y = \frac{x^x}{e^x} \cdot e^{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2x} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{1}{6x^5} - \text{etc.}} \sqrt{2\pi} \text{ seu}$$

$$y = \frac{x^x}{e^x}\, e^{\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \text{etc.}} \sqrt{2\pi}.$$

Vnde

Vnde si x sit numerus valde magnus, erit proxime:

$$v = \frac{x^x}{e^x}\left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} + \text{etc.}\right)\sqrt{2\pi}$$

sicque magnitudo cuiusuis termini, ab initio valde remoti, non difficulter proxime assignatur.

CONSIDERATIO QVARVMDAM SERIERVM, QVAE SINGVLARIBVS PROPRIETATIBVS SVNT PRAEDITAE.

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Saepe numero *consideratio serierum*, quae quasi casu se nobis offerunt, non contemnenda suppeditare solet artificia, quibus deinceps in vniuersa serierum doctrina summo cum fructu vti licet. Cum igitur doctrina *de seriebus* sit maximi momenti in Analysi, huiusmodi speculationes omnino dignae sunt habendae, quae omni industria euoluantur. Hunc in finem sequentem seriem offerre constitui, quae, tum ob singulares, quibus praedita deprehenditur proprietate, tum vero propter insignes vsus, quos nobis exhibet, omni attentione digna videtur. Series autem ita se habet:

$$\frac{1-x}{1-a}+\frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3}+\frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{a^3-a^6}+\frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)}{a^6-a^{10}}+\text{etc.}$$

Lex numeratorum ex sola inspectione est manifesta, formantur enim ex multiplicatione terminorum huius seriei:

$1-x$; $a-x$; a^2-x; a^3-x; a^4-x; a^5-x; a^6-x; etc.

Denominatores omnes duobus constant terminis, qui sunt potestates ipsius a, quarum exponentes sunt numeri trigonales. Hinc terminus ordine n seriei propositae erit:

$$\frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)\;.\;.\;.\;.\;.\;(a^{n-1}-x)}{a^{n(n-1):2}-a^{n(n+1):2}}$$

§. 2.

§. 2. Primo quidem patet, si quantitas x potestati cuipiam ipsius a aequalis capiatur, tum seriem alicubi ita obrumpi, vt omnes sequentes termini abeant in nihilum. Ponamus ergo in genere s pro summa seriei propositae, vt sit:

$$s = \frac{1-x}{1-a} + \frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{a^3-a^6} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)}{a^6-a^{10}} + \text{etc.}$$

ac statuatur primo $x = 1$, seu $x = a^0$, eritque ob omnes terminos euanescentes $s = 0$. Sit porro $x = a$, vt solus primus terminus supersit, eritque $s = 1$. Sit $x = a^2$, fietque $s = \frac{1-a^2}{1-a} + \frac{(1-a^2)(a-a^2)}{a-a^3}$ seu $s = 2$. Ponatur $x = a^3$, ac prodibit:

$$s = \frac{1-a^3}{1-a} + \frac{(1-a^3)(a-a^3)}{a-a^3} + \frac{(1-a^3)(a-a^3)(a^2-a^3)}{a^3-a^6}.$$

Horum terminorum primus dat $1 + a + aa$; secundus dat $1 - a^3$, et tertius dat $1 - a - aa + a^3$; quibus collectis fiet $s = 3$.

§. 3. Simili modo si ponatur $x = a^4$, operatione instituta reperietur $s = 4$; et posito $x = a^5$, prodibit $s = 5$. Vnde satis tuto per inductionem concludi posse videtur, quoties x cuicunque potestati ipsius a, cuius exponens sit $= n$, aequatio statuatur, toties hunc ipsum exponentem praebiturum esse valorem ipsius s. At vero haec inductio tantum valet, si n sit numerus integer affirmatiuus. Quod si enim pro quouis numero fracto valeret, tum foret $s =$ logarithmo ipsius x, sumto a pro numero, cuius longarithmus sit $= 1$. Sic si hoc verum esset, posito $a = 10$, summa seriei s semper exprimere deberet logarithmum communem ipsius x, essetque:

$$s = -\frac{(1-x)}{9} - \frac{(1-x)(10-x)}{990} - \frac{(1-x)(10-x)(100-x)}{999000} - \frac{(1-x)(10-x)(100-x)(1000-x)}{9999000000} - \text{etc.} = lx.$$

Ex

Ex sequentibus autem perspicuum euadet, hanc aequalitatem non subsistere, nisi sit x potestas ipsius a, exponentem habens integrum affirmatiuum.

§. 4. Quod autem, posito $x = a^n$, non semper sit $s = n$, nisi n sit numerus integer affirmatiuus, ex casu quo $x = 0$ facile colligitur. Hoc enim casu, si superior inductio se ad omnes omnino numeros extenderet, fieri deberet $s = -\infty$, cum $-\infty$ sit perpetuo longarithmus cyphrae. Verum posito $x = 0$, fiet:

$$s = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-aa} + \frac{1}{1-a^3} + \frac{1}{1-a^4} + \frac{1}{1-a^5} + \text{etc.}$$

quae series etsi summari non potest, tamen quilibet facile perspiciet, eius summam esse debere finitam, neque propterea logarithmum ipsius $x = 0$ exprimere posse. Simili modo, si posito $a = 10$, atque x non potestati ipsius 10 aequale ponatur, per summationem valor inuenietur, plerumque satis notabiliter $a\,l\,x$ discrepans. Sit enim $x = 9$, posito $a = 10$, eritque:

$$s = \frac{8}{9} + \frac{8\cdot 1}{990} + \frac{8\cdot 1\cdot 91}{999000} + \frac{8\cdot 1\cdot 91\cdot 991}{9999000000} + \frac{8\cdot 1\cdot 91\cdot 991\cdot 9991}{99999000000000}\ \text{etc.}$$

qui termini si in fractionibus decimalibus exprimantur, prodibit:

$$\begin{array}{r}
s = 0{,}88888888888888888888 \\
808080808080808080 \\
8008008008008008 \\
80008000800080 \\
800008000080 \\
8000008000 \\
80000008 \\
800000 \\
8000 \\
80 \\
\hline
s = 0{,}89705058521067321224
\end{array}$$

qui

qui valor vtique minor eſt, quam logarithmus nouenarii.

§. 5. Series igitur noſtra ita eſt comparata, vt ſi pro x ſubſtituantur poteſtates ipſius a rationales, ſumma ſeriei aequalis fiat exponenti illius poteſtatis: ſcilicet

ſi ſit $x = a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8$, etc.

erit $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, etc.

quae etſi eſt proprietas logarithmorum, tamen non niſi exponentes ipſius a ſint numeri integri. Quod ſi ergo concipiatur linea curua, cuius abſciſſae ſint s, et applicatae $= x$, haec curua logarithmicam in punctis innumeris interſecabit, ſcilicet quoties abſciſſa s per numerum integrum exprimitur, toties applicata per interſectionem tranſibit. Vnde patet, curuam logarithmicam ne per infinita quidem puncta determinari; quod etiam in omnibus aliis lineis curuis vſu venit. Hinc itaque intelligitur, quam libet ſeriem, etſi omnes eius termini indicibus integris reſpondentes dentur, infinitis modis diuerſis interpolari poſſe, quod argumentum alia occaſione vberius pertractabo.

§. 6. Quo autem propius ad cognitionem noſtrae ſeriei perueniamus, eam in hanc formam transmutare licet:

$$s = \frac{1}{1-a}(1-x) + \frac{1}{1-a^2}(1-x)(1-\frac{x}{a}) + \frac{1}{1-a^3}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{a^2}) + \frac{1}{1-a^4}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa})(1-\frac{x}{a^3}) \text{ etc.}$$

quae propterea ſimplicior eſt praecedente, quod hic numeri trigonales abierint. Ponamus nunc ax in locum ipſius x, denotetque t ſummam ſeriei hinc reſultantis, erit:

$$t = \frac{1}{1-a}(1-ax) + \frac{1}{1-a^2}(1-ax)(1-x) + \frac{1}{1-a^3}(1-ax)(1-x)(1-\frac{x}{a}) + \frac{1}{1-a^4}(1-ax)(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa}) + \text{ etc.}$$

ſubtrahatur prior ſeries a poſteriore, ac reperietur:

$t-s=x+\frac{x}{a}(1-x)+\frac{x}{aa}(1-x)(1-\frac{x}{a})+\frac{x}{a^3}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa})+$ etc.
ſubtrahatur haec ſeries ab vnitate, et cum reſiduum ſit per $1-x$ diuiſibile erit:

$1+s-t=(1-x)(1-\frac{x}{a}-\frac{x}{aa}(1-\frac{x}{a})-\frac{x}{a^3}(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa})-$ etc.)

Hic factor poſterior autem porro diuiſibilis eſt per $1-\frac{x}{a}$, vnde fit $1+s-t=(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa}-\frac{x}{a^3}(1-\frac{x}{aa})-$ etc.) Hic denuo factor deprehenditur $1-\frac{x}{aa}$, hocque ſeorſim expreſſo, factor apparebit $1-\frac{x}{a^3}$, et ita porro, vnde tandem reperitur fore:

$1+s-t=(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{a^2})(1-\frac{x}{a^3})(1-\frac{x}{a^4})(1-\frac{x}{a^5})$ etc.

§. 7. Hinc igitur patet, quoties x aequalis capiatur cuipiam poteſtati ipſius a, ob vnum factorem huius expreſſionis euaneſcentem fore $1+s-t=0$, ſeu $t=1+s$. Quare ſi poſito $x=a^n$, denotante n numerum integrum affirmatiuum, fuerit ſumma ſeriei propoſitae $s=n$, poſito $x=a^{n+1}$, erit ſumma ſeriei $t=s+1=n+1$. Cum igitur ſumto $n=0$, ſeu $x=1$, ſit ſumma ſeriei $s=0$, erit, poſito $x=a^1$, ſumma ſeriei $s=1$: hincque porro ſequitur, ſi ponatur $x=a^2$, fore $s=2$, et ſi $x=a^3$, fore $s=3$. Atque in genere nunc patet, quod ante per ſolam inductionem elicuimus, ſi fiat $x=a^n$, denotante n numerum integrum affirmatiuum, fore perpetuo $s=n$. Sin autem n non ſit numerus integer affirmatiuus, atque s deſignet ſummam ſeriei initio propoſitae, facto $x=a^n$, tum poſito $x=a^{n+1}$, ſumma ſeriei, quae ſit $=t$ non erit $=s+1$, fiet enim:

$t=1+s-(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})(1-a^{n-3})(1-a^{n-4})$ etc.

His

His ergo casibus valor seriei manifeste recedit a natura logarithmorum.

§. 8. Quemadmodum hic valores ipsius x per a multiplicando ex valore ipsius s elicuimus valorem ipsius t, ita vicissim valores ipsius x per a diuidendo ex valore ipsius t obtinebimus valorem ipsius s; hincque ad valores negatiuos exponentis n descendere poterimus. Scilicet in serie initio proposita, vel ad hanc formam perducta:

$$s = \frac{1}{1-a}(1-x) + \frac{1}{1-a^2}(1-x)(1-\frac{x}{a}) + \frac{1}{1-a^3}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{a^2}) + \text{etc.}$$

pro sequentibus casibus summam seriei ita indicemus:

si $x = 1$ sit $s = A = 0$

$x = \frac{1}{a}$ - - - $s = B$

$x = \frac{1}{a^2}$ - - - $s = C$

$x = \frac{1}{a^3}$ - - - $s = D$

$x = \frac{1}{a^4}$ - - - $s = E$.

etc.

Quod si iam ponatur $x = \frac{1}{a}$; fiet $s = B$, et $t = A = 0$, quia t oritur ex s, si loco x scribatur ax: ex praecedentibus oritur:

$$1 + B = (1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{a^2})(1-\frac{1}{a^3})(1-\frac{1}{a^4})(1-\frac{1}{a^5}) \text{ etc.}$$

seu $B = -1 + (1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{a^2})(1-\frac{1}{a^3})(1-\frac{1}{a^4})(1-\frac{1}{a^5})$ etc.

sic si $a = 10$, fiet $B = -0,1099899000000998$.

§. 9. Sit $x = \frac{1}{a^2}$, eritque $s = C$, et $t = B$; vnde habebitur;

$$1 + C - B = (1-\frac{1}{a^2})(1-\frac{1}{a^3}(1-\frac{1}{a^4})(1-\frac{1}{a^5}) \text{ etc.}$$

ad hanc addatur prior $1 + B$, eritque:

$$2 + C = (2-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{a^2})(1-\frac{1}{a^3})(1-\frac{1}{a^4})(1-\frac{1}{a^5}) \text{ etc.}$$

M 2 et

et $C = -2 + \left(2 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{a^3}\right)\left(1 - \frac{1}{a^4}\right)\left(1 - \frac{1}{a^5}\right)$ etc.
Vel ipſa ſerie eliminata erit:

$1 + B = \left(1 - \frac{1}{a}\right)(1 + C - B)$, ſeu $C - 2B = \frac{1}{a}(1 + C - B)$.

Simili modo ſi ponatur $x = \frac{1}{a^2}$. erit $s = D$, et $t = C$, vnde fiet:

$1 + D - C = \left(1 - \frac{1}{a^3}\right)\left(1 - \frac{1}{a^4}\right)\left(1 - \frac{1}{a^5}\right)\left(1 - \frac{1}{a^6}\right)$ etc.

ad quam prior ſeries addita praebebit:

$3 + D = \left(3 - \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^3}\right)\left(1 - \frac{1}{a^3}\right)\left(1 - \frac{1}{a^4}\right)\left(1 - \frac{1}{a^5}\right)\left(1 - \frac{1}{a^6}\right)$ etc.

Ac poſito $x = \frac{1}{a^4}$ cum fiat:

$1 + E - D = \left(1 - \frac{1}{a^4}\right)\left(1 - \frac{1}{a^5}\right)\left(1 - \frac{1}{a^6}\right)\left(1 - \frac{1}{a^7}\right)$ etc. erit

$4 + E = \left(4 - \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{2}{a^5} - \frac{1}{a^6}\right)\left(1 - \frac{1}{a^4}\right)\left(1 - \frac{1}{a^5}\right)\left(1 - \frac{1}{a^6}\right)$ etc.

ſicque quousque libuerit, vlterius progredi licet.

§. 10. Poteſt autem inter ternos valores ſummae ſeriei s, pro ternis valoribus ipſius x ſucceſſiuis, relatio per expreſſionem finitam exhiberi. Manente enim pro valore x ſumma $= s$, ſit ſi loco x ponatur ax, ſumma ſeriei $= t$, et ſi loco x ponatur aax, ſit ſumma ſeriei $= u$. Cum igitur inter t et s hanc inuenerimus relationem:

$1 + s - t = (1 - x)\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a^2}\right)\left(1 - \frac{x}{a^3}\right)\left(1 - \frac{x}{a^4}\right)$ etc.

ſi hic pro x ſcribamus ax, prodibit relatio ſimilis inter u et t:

$1 + t - u = (1 - ax)(1 - x)\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a^2}\right)\left(1 - \frac{x}{a^3}\right)$ etc.

Hinc ergo erit $1 + t - u = (1 - ax)(1 + s - t)$ ſiue

$$u = 2t - s + ax(1 + s - t)$$

vel $s = \frac{2t - u + ax(1 - t)}{1 - ax}$

Atque

Atque hinc pro supra assumtis valoribus A, B, C, D, etc. sequentes prodibunt relationes.

Si $x = \frac{1}{a^2}$; erit $A = 2B - C + \frac{1}{a}(1 + C - B)$

seu $C = \frac{1+(2a-1)B-aA}{a-1} = B + \frac{1+a(B-A)}{a-1}$

si $x = \frac{1}{a^3}$; erit $D = C + \frac{1+a^2(C-B)}{a^2-1}$

si $x = \frac{1}{a^4}$; erit $E = D + \frac{1+a^3(D-C)}{a^3-1}$

si $x = \frac{1}{a^5}$; erit $F = E + \frac{1+a^4(E-D)}{a^4-1}$

etc.

Hae relationes autem sequenti modo commodius exprimi possunt:

$$C = 2B - A + \frac{1+B-A}{a-1}$$

$$D = 2C - B + \frac{1+C-B}{a^2-1}$$

$$E = 2D - C + \frac{1+D-C}{a^3-1}$$

$$F = 2E - D + \frac{1+E-D}{a^4-1}$$

etc.

Cum ergo sit $A = 0$, si solius litterae B valor fuerit repertus:

$B = -1 + (1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{a^2})(1-\frac{1}{a^3})(1-\frac{1}{a^4})$ etc.

hinc omnium sequentium litterarum C, D, E, F, etc. valores exacto poterunt assignari.

§. 11. Cum autem denotante n numerum integrum affirmativum, si ponatur $x = a^n$, fit $s = n$, ex nostra assumta serie consequemur hanc summabilem.

$$n = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3} + \text{etc.}$$

Tum vero hoc casu, quia est $t = n + 1$, erit:

 $1 =$

$1 = a^n + a^{n-1}(1-a^n) + a^{n-2}(1-a^n)(1-a^{n-1}) + a^{n-3}(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})$ etc.

cuius veritas omnibus terminis ad eandem partem coniectis est manifesta, fiet enim:

$(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})(1-a^{n-3})(1-a^{n-4})$ etc. $= 0$.

Hinc ansam nanciscimur generalius huiusmodi formas contemplandi. Sit enim A, B, C, D, E, F, etc. series quantitatum quarumuis, sitque:

$$(1-A)(1-B)(1-C)(1-D)(1-E) \text{ etc.} = S.$$

Atque hinc obtinebitur:

$1 - A - B(1-A) - C(1-A)(1-B) - D(1-A)(1-B)(1-C) - \text{etc.} = S;$

haec enim formula facillime reducitur ad illam. Hanc ob rem habebimus:

$A + B(1-A) + C(1-A)(1-B) + D(1-A)(1-B)(1-C) + \text{etc} = S + 1.$

§. 12. Quod si ergo quaepiam harum quantitatum A, B, C, etc. vnitati fiat aequalis, erit $S = 0$, prodibitque series, cuius summa $= 1$. Sumatur verbi gratia haec series:

$$\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \\ \frac{1}{2}; & \frac{2}{3}; & \frac{3}{4}; & \frac{4}{5}; & \frac{5}{6}; & \frac{6}{7}; \text{ etc.} \end{array}$$

quarum fractionum cum infinitissima sit $= 1$, erit $S = 0$, et sequens nascetur series:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{etc.}$$

cuius quidem veritas facile perspicitur, oritur enim ea hoc modo:

sit $z = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{etc.}$

erit $z - 1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} +$ etc. hincq. per subtr. prodit

$1 =$

$1=\frac{1}{2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+$ etc.

§. 13. Sit $A=\frac{8}{9}$; $B=\frac{24}{25}$; $C=\frac{48}{49}$; $D=\frac{80}{81}$; etc. erit $S=\frac{8}{9}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{80}{81}\cdot\frac{120}{121}\cdot$ etc. $=\frac{\pi}{4}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter est $=1$. Hinc ergo orietur haec series pro quadratura circuli.

$$\frac{\pi}{4}+1=\frac{1}{9}+\frac{8}{9\cdot 25}+\frac{8\cdot 24}{9\cdot 25\cdot 49}+\frac{8\cdot 24\cdot 48}{9\cdot 25\cdot 49\cdot 81}+\text{etc.}$$

seu $\frac{9}{4}\pi+8=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}+\frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}+\frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7}+$ etc.

Cum ergo huiusmodi producta, quorum valor S exhiberi potest, innumerabilia habeantur: ex quolibet hoc modo series infinita, cuius summa assignari queat, deriuabitur. *Amplissimus* ergo hinc aperitur campus, series summabiles, quotquot libuerit, inueniendi.

§. 14. Reuertor autem ad seriem initio assumtam

$$s=\frac{1}{1-a}(1-x)+\frac{1}{1-a^2}(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{1-a^3}(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a^2}\right)+\text{etc.}$$

quam in aliam formam, in qua termini secundum potestates ipsius x procedant, transfundere animus est. Hoc primo quidem per euolutionem singulorum terminorum fieri posset, at quia hoc pacto prodituri essent singuli coefficientes in seriebus infinitis, commodissime in hunc finem adhibebitur formula supra inuenta $u=2t-s+ax(1-t+s)$, seu $u-2t+s=ax+ax(s-t)$, vbi ex s nascitur t, si loco x ponatur ax, parique modo ex t fit u, si loco x denuo ponatur ax. Quare si pro serie quaesita assumamus

$s=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+$ etc. erit:

$t=A+Bax+Ca^2x^2+Da^3x^3+Ea^4x^4+Fa^5x^5+$ etc. et

$u=A+Ba^2x+Ca^4x^2+Da^6x^3+Ea^8x^4+Fa^{10}x^5+$ etc.

Ex

Ex his ergo conficietur:

$$u-2t+s=B(1-a)^2x+C(1-aa)^2x^2+D(1-a^3)^2x^3+E(1-a^4)^2x^4+\text{etc.}$$

$$ax(1+s-t)=ax+Ba(1-a)x^2+Ca(1-aa)x^3+Da(1-a^3)x^4+\text{etc.}$$

Ex quarum serierum aequalitate concluditur fore:

$$B=\frac{a}{(1-a)^2};\ C=\frac{Ba(1-a)}{(1-aa)^2};\ D=\frac{Ca(1-aa)}{(1-a^3)^2};\ E=\frac{Da(1-a^3)}{(1-a^4)^2};\ \text{etc.}$$

§. 15. Hinc ergo sequentes coefficientium assumtorum valores obtinebuntur:

$$B=\frac{a}{(1-a)^2}$$
$$C=\frac{a^2}{(1-a)(1-aa)^2}$$
$$D=\frac{a^3}{(1-a)(1-aa)(1-a^3)^2}$$
$$E=\frac{a^4}{(1-a)(1-aa)(1-a^3)(1-a^4)^2}$$
$$F=\frac{a^5}{(1-a)(1-aa)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)^2}$$
etc.

Primus autem terminus A hinc non definitur. At quia A praebet valorem ipsius s, si ponatur $x=0$, perspicuum est fore:

$$A=\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-a^3}+\frac{1}{1-a^4}+\frac{1}{1-a^5}+\text{etc.}$$

His ergo valoribus definitis, series initio proposita:

$$s=\frac{1}{1-a}(1-x)+\frac{1}{1-a^2}(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{1-a^3}(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{aa}\right)+\text{etc.}$$

transmutabitur in hanc formam:

$$s=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-a^3}+\frac{1}{1-a^4}+\frac{1}{1-a^5}+\text{etc.}\\+\frac{ax}{(1-a)^2}+\frac{a^2x^2}{(1-a)(1-aa)^2}+\frac{a^3x^3}{(1-a)(1-aa)(1-a^3)^2}+\frac{a^4x^4}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)^2}+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

§. 16. Cum igitur posito $x=a^n$, denotante n numerum integrum affirmativum, fiat $s=n$, habebitur haec summatio:

$$n + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \frac{1}{a^4-1} + \frac{1}{a^5-1} + \text{etc.} =$$

$$\frac{a^{n+1}}{(a-1)^2} - \frac{a^{2n+2}}{(a-1)(aa-1)^2} + \frac{a^{3n+3}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)^2} - \frac{a^{4n+4}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)^2} + \text{etc.}$$

Quod ſi ergo fuerit $n = 0$, erit:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \text{etc.} = \frac{a}{(a-1)^2} - \frac{a^2}{(a-1)(aa-1)^2} + \frac{a^3}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)^2} + \text{etc.}$$

ac, ſi ponatur $n = 1$, erit:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \text{etc.} = \frac{a^2}{(a-1)^2} - \frac{a^4}{(a-1)(a^2-1)^2} + \frac{a^6}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)^2} - \text{etc.} - 1$$

Generaliter ergo erit:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \frac{1}{a^4-1} + \text{etc.} = \frac{a^{n+1}}{(a-1)^2} - \frac{a^{2n+2}}{(a-1)(a^2-1)^2} + \frac{a^{3n+3}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)^2} - \text{etc.} - n$$

denotante n numerum integrum quemcunque affirmatiuum.

§. 17. Si loco n ponatur $n-1$, habebitur:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \frac{1}{a^4-1} + \text{etc.} = \frac{a^n}{(a-1)^2} - \frac{a^{2n}}{(a-1)(a^2-1)^2} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)^2} - n + 1$$

a qua, ſi ſeries ſuperior auferatur, proueniet:

$$1 = \frac{a^n}{a-1} - \frac{a^{2n}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \frac{a^{4n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)} + \text{etc.}$$

Huius ergo ſeriei ſumma ſemper aequalis eſt vnitati, quicunque valor ipſi a tribuatur, et quicunque numerus integer affirmatiuus pro n ſubſtituatur. Caſu autem quo $n = 1$ haec ſummatio facile perſpicitur. Quod enim ſit:

$$1 = \frac{a}{a-1} - \frac{a^2}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^3}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc.}$$

ſequitur luculenter ex conſideratione huius ſeriei:

$$z = 1 - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{(a-1)(a^2-1)} - \frac{1}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} + \text{etc.} \text{ vnde fit:}$$

$$1 - z = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{1}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \frac{1}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)} + \text{etc.}$$

quae inuicem additae dabunt:

$1 =$

$$1 = \frac{a}{a-1} - \frac{aa}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^3}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \frac{a^4}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)} + \text{etc.}$$

§. 18. Deinde autem veritas istius seriei pro reliquis ipsius n valoribus sequentem in modum ostendi potest. Si fuerit:

$$1 = \frac{a^n}{a-1} - \frac{a^{2n}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc.}$$

dico fore quoque:

$$1 = \frac{a^{n+1}}{a-1} - \frac{a^{2n+2}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n+3}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc.}$$

Nam cum sit per hypothesin:

$$1 = \frac{a^n}{a-1} - \frac{a^{2n}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc, erit quoque}$$

$$0 = a^n - \frac{a^{2n}}{a-1} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)} - \text{etc.}$$

quae series inuicem additae dabunt:

$$1 = \frac{a^{n+1}}{a-1} - \frac{a^{2n+2}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n+3}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc.}$$

Quare cum haec series:

$$1 = \frac{a^n}{a-1} - \frac{a^{2n}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc.}$$

vera sit ostensa casu $n = 1$, erit quoque vera casu $n = 2$, hincque porro casibus $n = 3$, $n = 4$, etc. ita vt quicunque numerus integer affirmatiuus pro n substituatur, summa seriei perpetuo futura sit $= 1$.

§. 19. Quoniam seriem initio propositam $s = \frac{1}{1-a}(1-x)$ etc. secundum dimensiones ipsius x hic disposui, ope proprietatis supra demonstratae $u-2t+s = ax+ax(s-t)$; non incongruum erit eandem transmutationem immediate ex ex ipsa serie s deriuare; sic enim ad summationem innumerabilium nouarum serierum pertingemus. Oportebit ergo singulos seriei s terminos per multiplicationem euolvi, quod vt expeditius fieri possit, considerabo terminum quemcunque: $\frac{1}{(1-a^m)}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{a^2})(1-\frac{x}{a^3})\ldots(1-\frac{x}{a^{m-1}})$

Ponam ergo $P=(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{a^2})(1-\frac{x}{a^3})\ldots(1-\frac{x}{a^{m-1}})$

eritque $lP=l(1-x)+l(1-\frac{x}{a})+l(1-\frac{x}{a^2})+\ldots+l(1-\frac{x}{a^{m-1}})$

et differentiando fiet:

$$\frac{dP}{P}=\frac{-dx}{1-x}-\frac{dx}{a-x}-\frac{dx}{aa-x}-\ldots-\frac{dx}{a^{m-1}-x}.$$ seu

$$\frac{dP}{P}=-dx\left\{\begin{array}{l} 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\text{ etc. infin.}\\ \frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^3}{a^4}+\frac{x^4}{a^5}+\frac{x^5}{a^6}+\text{ etc.}\\ \frac{1}{a^2}+\frac{x}{a^4}+\frac{x^2}{a^6}+\frac{x^3}{a^8}+\frac{x^4}{a^{10}}+\frac{x^5}{a^{12}}+\text{ etc.}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \frac{1}{a^{m-1}}+\frac{x}{a^{2m-2}}+\frac{x^2}{a^{3m-3}}+\frac{x^3}{a^{4m-4}}+\frac{x^4}{a^{5m-5}}+\frac{x^5}{a^{6m-6}}+\text{ etc} \end{array}\right\}.$$

singulas nunc series verticales summando orietur:

$$dP=-Pdx\left(\frac{a^m-1}{a^m-a^{m-1}}+\frac{a^{2m}-1}{a^{2m}-a^{2m-2}}x+\frac{a^{3m}-1}{a^{3m}-a^{3m-3}}x^2+\frac{a^{4m}-1}{a^{4m}-a^{4m-4}}x^3+\text{ etc.}\right)$$

§. 20. Fingatur nunc pro P haec series:

$P=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+$ etc. eritque:

$\frac{dP}{dx}=\beta+2\gamma x+3\delta x^2+4\varepsilon x^3+5\zeta x^4+$ etc.

N 2 Facta

Facta iam substitutione fiet:

$$\beta + \frac{a^m-1}{a^m-a^{m-1}}\,\alpha = 0$$

$$2\gamma + \frac{a^m-1}{a^m-a^{m-1}}\,\beta + \frac{a^{2m}-1}{a^{2m}-a^{2m-2}}\,\alpha = 0$$

$$3\delta + \frac{a^m-1}{a^m-a^{m-1}}\,\gamma + \frac{a^{2m}-1}{a^{2m}-a^{2m-2}}\,\beta + \frac{a^{3m}-1}{a^{3m}-a^{3m-3}}\,\alpha = 0$$

etc.

atque cum posito $x = 0$, fiat $P = 1$, patet esse $\alpha = 1$.

Erit ergo $\beta = \frac{-a^m+1}{a^m-a^{m-1}}$ et $2\gamma - \frac{(a^m-1)^2}{(a^m-a^{m-1})^2} + \frac{a^{2m}-1}{a^{2m}-a^{2m-2}} = 0$

seu $2\gamma = \frac{a^m-1}{a^m-a^{m-1}}\left(\frac{a^m-1}{a^m-a^{m-1}} - \frac{a^m-1}{a^m+a^{m-1}}\right) = \frac{2a^m(a^{m-1}-1)(a^m-1)}{(a^m-a^{m-1})(a^{2m}-a^{2m-2})}$

ideoque $\gamma = \frac{(a^m-1)(a^{m-1}-1)}{(a^m-a^{m-1})(a^m-a^{m-2})}$. Simili modo reliqui coefficientes, verum tamen non sine ingenti labore eruentur, atque tandem satis concinne exprimi deprehendentur.

§. 21. Quo igitur hanc coefficientium determinationem commodius expediam, methodum hic iam aliquoties vsurpatam adhibebo. Scilicet in serie $P = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 +$ etc. loco x pono $\frac{x}{a}$, seriei que resultantis summa sit $= Q$, nempe:

$$Q = \alpha + \frac{\beta x}{a} + \frac{\gamma x^2}{a^2} + \frac{\delta x^3}{a^3} + \frac{\varepsilon x^4}{a^4} + \text{etc.}$$

Cum autem sit $P = (1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa}) \ldots\ldots (1-\frac{x}{a^{m-1}})$

erit $Q = (1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{a^2})(1-\frac{x}{a^3}) \ldots\ldots (1-\frac{x}{a^m})$, ideoque

P(1—

$$P\left(1-\frac{x}{a^m}\right)=Q(1-x),\ \text{seu}\ a^mP-Px-a^mQ+a^mQx=0,$$

substituantur hic series pro P et Q assumtae, fietque:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha a^m+\beta a^m x+\gamma a^m x^2+\delta a^m x^3+\text{ etc.}\\ \quad -\alpha x\quad -\beta x^2\quad -\gamma x^3\quad -\text{ etc.}\\ -\alpha a^m-\beta a^{m-1}x-\gamma a^{m-2}x^2-\delta a^{m-3}x^3-\text{ etc.}\\ \quad +\alpha a^m x+\beta a^{m-1}x^2+\gamma a^{m-2}x^3+\text{ etc.}\end{array}\right\}=0.$$

Ex comparatione terminorum homogeneorum hinc invenitur:

$$\beta=\frac{-\alpha(a^m-1)}{a^{m-1}(a-1)};\quad \delta=\frac{-\gamma(a^{m-2}-1)}{a^{m-3}(a^3-1)}$$

$$\gamma=\frac{-\beta(a^{m-1}-1)}{a^{m-2}(aa-1)};\quad \varepsilon=\frac{-\delta(a^{m-3}-1)}{a^{m-4}(a^4-1)}$$

etc.

§ 22. Cum igitur sit $\alpha=1$, coefficientes ita se habebunt;

$$\alpha=1$$

$$\beta=\frac{-(a^m-1)}{a^{m-1}(a-1)}$$

$$\gamma=\frac{+(a^m-1)(a^{m-1}-1)}{a^{2m-3}(a-1)(aa-1)}$$

$$\delta=\frac{-(a^m-1)(a^{m-1}-1)(a^{m-2}-1)}{a^{3m-6}(a-1)(aa-1)(a^3-1)}$$

$$\varepsilon=\frac{+(a^m-1)(a^{m-1}-1)(a^{m-2}-1)(a^{m-3}-1)}{a^{4m-10}(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)}$$

etc.

Terminus ergo feriei s, quicunque $\frac{1}{1-a^m}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa})\ldots\ldots(1-\frac{x}{a^{m-1}})$ evolutus, dabit hanc progreffionem:

$$\frac{1}{1-a^m}-\frac{1}{a^{m-1}(1-a)}x+\frac{(1-a^{m-1})x^2}{a^{2m-3}(1-a)(1-a^2)}-\frac{(1-a^{m-1})(1-a^{m-2})x^3}{a^{3m-6}(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}.$$

Si igitur fucceffiue pro m numeri 1, 2, 3, 4, etc. fubftituantur, prodibunt fequentes formulae, feu termini feriei s.

Primus $=\frac{1}{1-a}-\frac{x}{1-a}$

Secund: $=\frac{1}{1-a^2}-\frac{x}{a(1-a)}+\frac{(1-a)x^2}{a(1-a)(1-a^2)}$

Tert: $=\frac{1}{1-a^3}-\frac{x}{a^2(1-a)}+\frac{(1-a^2)x^2}{a^3(1-a)(1-a^2)}-\frac{(1-a)(1-a^2)x^3}{a^3(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}$

Quart: $=\frac{1}{1-a^4}-\frac{x}{a^3(1-a)}+\frac{(1-a^3)xx}{a^5(1-a)(1-a^2)}-\frac{(1-a^2)(1-a^3)x^3}{a^6(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}+\frac{(1-a)(1-a^2)(1-a^4)x^4}{a^6(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}$

etc.

§. 23. Si ergo omnes ifti termini in vnam fummam colligantur, prodibit congeries infinitarum ferierum, quae fimul fumtae, feriei initio propofitae, erunt aequales. Scilicet cum fit:

$s=\frac{1}{1-a}(1-x)+\frac{1}{1-a^2}(1-x)(1-\frac{x}{a})+\frac{1}{1-a^3}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa})+$ etc. erit:

$s=\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-a^3}+\frac{1}{1-a^4}+\frac{1}{1-a^5}+$ etc.

$\frac{-x}{1-a}(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+$ etc.$)$

$\frac{+x^2}{a(1-a)(1-a^2)}(\frac{1-a}{1}+\frac{1-a^2}{a^2}+\frac{1-a^3}{a^4}+\frac{1-a^4}{a^5}+$ etc.$)$

$\frac{-x^3}{a^3(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}(\frac{(1-a)(1-a^2)}{1}+\frac{(1-a^2)(1-a^3)}{a^3}+\frac{(1-a^3)(1-a^4)}{a^6}+$ etc.$)$

$\frac{+x^4}{a^6(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}(\frac{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}{1}+\frac{(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}{a^4}+$ etc.$)$

etc.

Cum

Cum igitur haec ſeries congruere debeat cum ante inuenta, ex conſenſu ſingularum harum ſerierum ſumma reperientur.

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \text{etc.} = \frac{-a}{1-a}$$

$$\frac{1-a}{1} + \frac{1-a^2}{a^2} + \frac{1-a^3}{a^4} + \frac{1-a^4}{a^6} + \text{etc.} = \frac{+a^3}{1-aa}$$

$$\frac{(1-a)(1-a^2)}{1} + \frac{(1-a^2)(1-a^3)}{a^3} + \frac{(1-a^3)(1-a^4)}{a^6} + \text{etc.} = \frac{-a^6}{1-a^3}$$

$$\frac{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}{1} + \frac{(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}{a^4} + \text{etc.} = \frac{+a^{10}}{1-a^4}$$

$$\frac{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}{1} + \frac{(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)}{a^5} + \text{etc.} = \frac{-a^{15}}{1-a^5}$$

§. 24. Hae ſeries in ſequentes formas transfundi poſſunt, ex quibus lex progreſſionis clarius perſpicietur:

$$\frac{a}{a-1} = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \text{etc.}$$

$$\frac{a^2}{a^2-1} = (1-\tfrac{1}{a}) + \tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{a^2}) + \tfrac{1}{a^2}(1-\tfrac{1}{a^3}) + \tfrac{1}{a^3}(1-\tfrac{1}{a^4}) + \tfrac{1}{a^4}(1-\tfrac{1}{a^5}) + \text{etc.}$$

$$\frac{a^3}{a^3-1} = (1-\tfrac{1}{a})(1-\tfrac{1}{a^2}) + \tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3}) + \tfrac{1}{a^2}(1-\tfrac{1}{a^3})(1-\tfrac{1}{a^4}) + \text{etc.}$$

$$\frac{a^4}{a^4-1} = (1-\tfrac{1}{a})(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3}) + \tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3})(1-\tfrac{1}{a^4}) + \text{etc.}$$

$$\frac{a^5}{a^5-1} = (1-\tfrac{1}{a})(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3})(1-\tfrac{1}{a^4}) + \tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3})(1-\tfrac{1}{a^4})(1-\tfrac{1}{a^5}) + \text{etc.}$$

etc.

Vnde colligitur fore generaliter $\frac{a^{m+1}}{a^{m+1}-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{a^{m+1}}}$

$$= (1-\tfrac{1}{a})(1-\tfrac{1}{a^2})\ldots(1-\frac{1}{a^m}) + \tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3})\ldots(1-\frac{1}{a^{m+1}}) +$$

$$\tfrac{1}{a^2}(1-\tfrac{1}{a^3})(1-\tfrac{1}{a^4})\ldots(1-\frac{1}{a^{m+2}}) + \tfrac{1}{a^3}(1-\tfrac{1}{a^4})(1-\tfrac{1}{a^5})\ldots(1-\frac{1}{a^{m+3}}) + \text{etc.}$$

§. 25. Summa huius ſeriei etiam hoc modo inueſtigari poteſt. Sit breuitatis gratia $\frac{1}{a} = b$, atque ponatur ſumma quaeſita:

$z =$

$$z=(1-b)(1-b^2)\ldots(1-b^m)+b(1-b^2)(1-b^3)\ldots(1-b^{m+1})+$$
$$b^2(1-b^3)(1-b^4)\ldots(1-b^{m+2})+b^3(1-b^4)(1-b^5)\ldots(1-b^{m+3})+\text{etc.}$$

Multiplicetur vtrinque per $1-b^{m+1}$, atque prodibit:

$$(1-b^{m+1})z=(1-b)(1-b^2)\ldots(1-b^m)(1-b^{m+1})+(1-b^2)(1-b^3)\ldots(1-b^{m+1})(b-b^{m+2})$$
$$+(1-b^3)(1-b^4)\ldots(1-b^{m+2})(b^2-b^{m+3})+\text{etc.}$$

At est $b-b^{m+2}=1-b^{m+2}-(1-b)$; $b^2-b^{m+3}=1-b^{m+3}-(1-bb)$ $b^3-b^{m+4}=1-b^{m+4}-(1-b^3)$, etc. qui valores loco vltimorum factorum substituti dabunt:

$$(1-b^{m+1})z=(1-b)(1-b^2)\ldots(1-b^{m+1})+(1-b^2)(1-b^3)\ldots(1-b^{m+2})$$
$$-(1-b)(1-b^2)\ldots(1-b^{m+1})-(1-b^2)(1-b^3)\ldots(1-b^{m+2})$$
$$+(1-b^3)(1-b^4)\ldots(1-b^{m+3})+(1-b^4)(1-b^5)\ldots(1-b^{m+4})+\text{etc.}$$
$$-(1-b^3)(1-b^4)\ldots(1-b^{m+3})-\quad\text{etc.}$$

Cum ergo omnes termini destruantur, solus remanebit vltimus, $(1-b^{m+1})z=(1-b^{\infty})(1-b^{\infty+1})\ldots(1-b^{m+\infty})$, vnde patet, si fuerit $b<1$, hoc est $a>1$, vti assumimus, fore $(1-b^{m+1})z=1$, ideoque $z=\frac{1}{1-b^{m+1}}=\frac{a^{m+1}}{a^{m+1}-1}$, vti inueneramus.

§ 26. Ex iis, quae §. XXI. sunt tradita, facile reperitur series secundum dimensiones ipsius x procedens, quae aequalis sit huic producto infinitorum Factorum.

$$P=(1-x)(1-\tfrac{x}{a})(1-\tfrac{x}{a^2})(1-\tfrac{x}{a^3})(1-\tfrac{x}{a^4})\ \text{etc.}$$

Posito enim $P=1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3+\delta x^4-\varepsilon x^5+$ etc. scribatur ax loco x, et valor resultans sit $=Q$, erit:

$$Q=(1-ax)(1-x)(1-\tfrac{x}{a})(1-\tfrac{x}{aa})(1-\tfrac{x}{a^3})\ \text{etc.}=P-axP$$

et

et $Q = 1 - \alpha a x + \beta a^2 x^2 - \gamma a^3 x^3 + \delta a^4 x^4 - \epsilon a^5 x^5 + \text{etc.}$
sed $axP = ax - \alpha a x^2 + \beta a x^3 - \gamma a x^4 + \delta a x^5 - \text{etc.}$
$-P = -1 + \alpha x - \beta x^2 + \gamma x^3 - \delta x^4 + \epsilon x^5 - \text{etc.}$
vnde fit: $\alpha = \frac{a}{a-1}$; $\beta = \frac{\alpha a}{a^2-1}$; $\gamma = \frac{\beta a}{a^3-1}$; $\delta = \frac{\gamma a}{a^4-1}$ etc.
Quam ob rem productum infinitum $P = (1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa})$ etc. resoluetur in hanc seriem infinitam:

$$P = 1 - \frac{ax}{a-1} + \frac{a^2x^2}{(a-1)(a^2-1)} - \frac{a^3x^3}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} + \frac{a^4x^4}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)} \text{ etc.}$$

§. 27. Si igitur istud productum P nihilo aequale ponatur haec aequatio infinita:

$$0 = 1 - \frac{ax}{a-1} + \frac{a^2x^2}{(a-1)(a^2-1)} - \frac{a^3x^3}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} + \text{etc.}$$

omnes suas radices x habebit reales, eruntque valores ipsius x terminis istius progressionis Geometricae:

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ \text{etc.}$$

vnde si ponatur $x = a^n$, denotante n numerum integrum affirmatiuum quemcunque, erit:

$$0 = 1 - \frac{a^{n+1}}{a-1} + \frac{a^{2n+2}}{(a-1)(a^2-1)} - \frac{a^{3n+3}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} + \text{etc.}$$

cuius veritas iam supra §. XVIII. est demonstrata.

§. 28 Praecipue autem est notatu digna series, cui supra innumerabiles aliae aequales sunt inuentae (§. XVI.), quae est

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \frac{1}{a^4-1} + \frac{1}{a^5-1} + \text{etc.}$$

cuius summa, si $a > 1$, etsi est finita et per approximationes facile assignatur; tamen neque numeris rationalibus, neque irrationalibus exprimi potest. Quo circa ea imprimis digna videtur, vt Geometriae naturam illius quantititatis transcendentis inuestigent, qua eius summa exprimatur.

§. 29. Monstrabo autem, quem ad modum summa huiusmodi serierum vero proxime expedite inueniri posset, et quidem hanc seriem in aliquanto latiori sensu considerabo. Sit:

$$s = \frac{1}{a-z} + \frac{1}{a^2-z} + \frac{1}{a^3-z} + \frac{1}{a^4-z} + \frac{1}{a^5-z} + \text{etc.}$$

Conuertantur singuli termini in series Geometricas, eritque:

$$s = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} + \text{etc.}$$
$$+ z\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^8} + \frac{1}{a^{10}} + \text{etc.}\right)$$
$$+ z^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^9} + \frac{1}{a^{12}} + \frac{1}{a^{15}} + \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

quae series denuo summatae dabunt:

$$s = \frac{1}{a-1} + \frac{z}{a^2-1} + \frac{z^2}{a^3-1} + \frac{z^3}{a^4-1} + \frac{z^4}{a^5-1} + \text{etc.}$$

Quod si ergo fuerit $z = 1$, hae ambae series in eandem recidunt, neque haec transmutatio vllum affert discrimen.

§. 30. Ad seriem hanc summandam ponamus prioris formae iam n terminos actu esse summatos, quorum summa sit $= A$, ita vt sit:

$$A = \frac{1}{a-z} + \frac{1}{a^2-z} + \frac{1}{a^3-z} + \frac{1}{a^4-z} + \ldots\ldots + \frac{1}{a^n-z}.$$

Erit ergo tota summa quaesita:

$$s = A + \frac{1}{a^{n+1}-z} + \frac{1}{a^{n+2}-z} + \frac{1}{a^{n+3}-z} + \frac{1}{a^{n+4}-z} + \text{etc.}$$

Iam istae fractiones in series Geometricas euoluantur, eritque:

s = A

$$s = A + \frac{1}{a^{n+1}} + \frac{1}{a^{n+2}} + \frac{1}{a^{n+3}} + \frac{1}{a^{n+4}} + \text{etc.}$$

$$+ z\left(\frac{1}{a^{2n+2}} + \frac{1}{a^{2n+4}} + \frac{1}{a^{2n+6}} + \frac{1}{a^{2n+8}} + \text{etc.}\right)$$

$$+ z^2\left(\frac{1}{a^{3n+3}} + \frac{1}{a^{3n+6}} + \frac{1}{a^{3n+9}} + \frac{1}{a^{3n+12}} + \text{etc.}\right)$$

etc.

quae series denuo summatae dabunt:

$$s = A + \frac{1}{a^n(a-1)} + \frac{z}{a^{2n}(aa-1)} + \frac{zz}{a^{3n}(a^3-1)} + \frac{z^3}{a^{4n}(a^4-1)} + \text{etc.}$$

quae eo citius conuergit, quam prima, quo maior fuerit numerus n.

§. 32. Sit: $a = 2$, vt sit $s = \frac{1}{2-z} + \frac{1}{4-z} + \frac{1}{8-z} + \frac{1}{16-z} + \text{etc.}$ Si igitur fuerit: $A = \frac{1}{2-z} + \frac{1}{4-z} + \frac{1}{8-z} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n - z}$

erit: $s = A + \frac{1}{1.2^n} + \frac{z}{3.2^{2n}} + \frac{z^2}{7.2^{3n}} + \frac{z^3}{15.2^{4n}} + \frac{z^4}{31.2^{5n}} + \text{etc.}$

Ponamus autem $z = 1$, ita vt quaeratur summa huius seriei

$s = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{63} + \text{etc.}$

Addantur exempli causa quatuor termini initiales actu, vt sit $n = 4$; erit:

$1 = 1,000000000000000$
$\frac{1}{3} = 0,333333333333338$
$\frac{1}{7} = 0,142857142857142$
$\frac{1}{15} = 0,066666666666666$

$A = 1,542857142857141$

Hinc erit $s = A + \frac{1}{16 \cdot 1} + \frac{1}{16^2 \cdot 3} + \frac{1}{16^3 \cdot 7} + \frac{1}{16^4 \cdot 15} + \text{etc.}$

O 2 atque

atque isti termini in fractionibus decimalibus dabunt:

$$0,063838009558149$$

$$A = 1,542857142857142$$

Ergo $s = 1,606695152415291$

§. 32. Ceterum si seriei $s = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} +$ etc. singuli termini in series Geometricas resoluantur, atque potestates similes ipsius a colligantur, reperietur haec forma:

$$s = \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^5} + \frac{4}{a^6} + \frac{2}{a^7} + \frac{4}{a^8} + \frac{3}{a^9} + \text{etc.}$$

quae series hanc habet proprietatem, vt cuiusuis fractionis numerator indicet, quot diuisores habeat exponens ipsius a in denominatore. Sic fractionis $\frac{4}{a^6}$ numerator est $= 4$, quia exponens 6 quatuor habet diuisores $1, 2, 3, 6$. Vnde si exponens ipsius a in denominatore sit numerus primus, numerator perpetuo erit $= 2$: pro numeris autem non primis erit is binario maior. Hinc facile patet, si $a = 10$ fore:

$$s = 0,122324243426244526264428344628.$$

DE

DE DIVISORIBVS NVMERORVM INDAGANDIS.

AVCTORE

G. W. KRAFFT.

§. 1.

An numerus quis propoſitus diuiſores admittat ſimplices 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, facilibus regulis quidem cognoſci poteſt: ſed ſi nullum horum recipiat, tum plerumque non niſi magna opera, aut aliquando plane non, talis diuiſor detegitur. Ita exempli gratia nemo facile deteget, numerum hunc 11339 compoſitum eſſe ex factoribus 17, 23, et 29; et multo difficilius, aut plane non, eſſe $826277 = 907 \cdot 911$. Egregios vſus praeſtant in hoc labore tabulae numerorum primorum, quales dederunt *Schootenius* in *Exercitat. Mathem. lib. V, ſect. V*, *p.* 394; et *Ozanamus* in *Recreations Mathem. Tome I*, *p.* 47; multo vero magis nos iuuant illae tabulae numerorum naturalium, in quibus ſingulis horum diuiſores ſunt adſcripti, qualis habetur in *Ioh. Mich. Poetii Arithmetica*, in fine libri, ſub titulo *Anatomiae numerorum* adiecta. Sed dolendum eſt, haec adiumenta non longius eſſe extenſa quam ad 10000, in quibus adeo iam pro numero allegato 11339 nihil ſubſidii obtineri poteſt; deinde in eaſdem haſce tabulas vltimas aliquot errores irrepſerunt; ita 731 non eſt $17 \cdot 37$, ſed $17 \cdot 43$; 871 non eſt primus, ſed $13 \cdot 67$; 1591 non eſt primus, sed 37.43; 6773 non est primus, sed 13.521; 9463; 9929, et 1289, non adsunt, qui tamen primi sunt *Ozanamo* et *Schootenio*; 6497 non adest, = 73.89.

§. 2. Nihil itaque vtilius in hoc negotio fieri potest, quam vt in generales numerorum formulas inquiramus, eruamusque quomodocunque, quosnam illae admittant diuisores. Talem numerum generalissime expressum examinabo hac vice, tentaturus quae exinde Theoremata possint deduci. Sit is numerus generaliter ita scriptus $a^\alpha + b^\beta$, de quo instituam quaestionem, quibusnam in casibus diuidi is queat per $a^\gamma + b^\delta$, si nempe per a, b, α, β, γ, δ, intelligantur numeri integri, positiui. Instituta diuisio Algebraica hunc tenebit typum:

$$
\begin{array}{l}
a^\gamma + b^\delta)\, a^\alpha + b^\beta \quad \text{Quot}: a^{\alpha-\gamma} - a^{\alpha-2\gamma}b^\delta + a^{\alpha-3\gamma}b^{2\delta} - \text{etc.}\\
\qquad a^\alpha + a^{\alpha-\gamma}b^\delta\\
\hline
\text{resid. 1.} - a^{\alpha-\gamma}b^\delta + b^\beta\\
\qquad - a^{\alpha-\gamma}b^\delta - a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta}\\
\hline
\text{resid. 2.} + a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta} + b^\beta\\
\qquad + a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta} + a^{\alpha-3\gamma}b^{3\delta}\\
\hline
\text{resid. 3.} - a^{\alpha-3\gamma}b^{3\delta} + b^\beta
\end{array}
$$

neque necesse est vt vlterius operatio continuetur, cum ex his iam tota lex seriei et residuorum abunde pateat.

§. 3. Sit enim in serie quoti, in infinitum excurrente, numerus termini cuiuslibet $= n$, atque erit terminus is ipse talis, $\pm a^{\alpha - n\gamma} b^{(n-1)\delta}$; idem porro terminus erit positiuus, quotiescunque est n numerus impar; sed erit negatiuus, si n fuerit numerus par. Deinde cuiuslibet termini residuum in diuisione relictum erit huius formae:

+

$\mp a^{\alpha-n\gamma} b^{n\delta} + b^{\beta}$, atque prior quidem huius terminus erit positiuus, quoties n erit numerus par, negatiuus autem si impar.

§. 4. Vt itaque nunc diuisio indicata institui possit, ad quotum finitum obtinendum, requiritur vt residuum prodeat nullum; statuatur itaque ab initio hoc residuum positiuum nullum, atque erit $+ a^{\alpha-n\gamma} b^{n\delta} + b^{\beta} = 0$; hoc fieri poterit non aliter, quam ponendo $\alpha - n\gamma = 0$, ex quo fit residuum $b^{n\delta} + b^{\beta} = 0$, vel $b^{n\delta-\beta} = -1$; quod fieri nequit; si enim vel maxime assumamus $n\delta - \beta = 0$, prodibit $+1 = -1$, quod contradictorium est; nec alius numerus $n\delta - \beta$ fingi potest, ad quem eleuata quantitas b fiat $= -1$. Adeoque ex hoc casu nihil sperari potest.

§. 5. Sed melius succedet res, si statuamus residuum prodire cum signo negatiuo, quo casu id erit $-a^{\alpha-n\gamma} b^{n\delta} + b^{\beta}$. Assumatur itaque hic $\alpha - n\gamma = 0$, vel $\alpha = n\gamma$, abibit illud in hanc formam, $-b^{n\delta} + b^{\beta}$, quae vt redigatur ad nihilum, fit $n\delta = \beta$, ex quo idem residuum fiet $-b^{\beta} + b^{\beta} = 0$. Tum vero progressionis termini sequentem formam induent, vt sint isti, $a^{\overline{n-1}\cdot\gamma} - a^{\overline{n-2}\cdot\gamma} b^{\delta} + a^{\overline{n-3}\cdot\gamma} b^{2\delta} - a^{\overline{n-4}\cdot\gamma} b^{3\delta} + a^{\overline{n-5}\cdot\gamma} b^{4\delta} -$ etc., quae series necessario potentiam a^{n-4}, a^{n-5} etc. alicubi acquiret $= a^{0} = 1$, si n per determinatum numerum exprimatur; qui vero idem numerus n semper debet esse impar, (§. III.) vt nempe residui prius membrum fiat negatiuum, et residuum ipsum nullum. Vnde ergo iam conficitur, substitutis pro α et β valoribus inuentis, numerum hunc vniuersalem $a^{n\gamma} + b^{n\delta}$ semper diuidi posse per $a^{\gamma} + b^{\delta}$, si modo n assumatur numerus impar; vel $\frac{a^{n\gamma} + b^{n\delta}}{a^{\gamma} + b^{\delta}}$ hoc casu semper repraesentare numerum integrum.

§. 6.

§. 6. Tentabimus nunc diuisionem numeri vniuersalis $a^\alpha - b^\beta$ per $a^\gamma - b^\delta$, in quo instituta diuisio Algebraica iam hunc tenebit typum:

$a^\gamma - b^\delta)\, a^\alpha - b^\beta$ Quot: $a^{\alpha-\gamma} + a^{\alpha-2\gamma}b^\delta + a^{\alpha-3\gamma}b^{2\delta} +$ etc.

$a^\alpha - a^{\alpha-\gamma}b^\delta$

resid. 1. $a^{\alpha-\gamma}b^\delta - b^\beta$

$a^{\alpha-\gamma}b^\delta - a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta}$

resid. 2. $a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta} - b^\beta$

$a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta} - a^{\alpha-3\gamma}b^{3\delta}$

resid. 3. $a^{\alpha-3\gamma}b^{3\delta} - b^\beta$

vbi iterum facile perspici potest, si ponatur numerus termini cuiuscunque in quoto n, esse eundem terminum $a^{\alpha-\gamma}b^{\overline{n-1}\delta}$, et pro eodem esse residuum $a^{\alpha-n\gamma}b^{n\delta} - b^\beta$, neque hic occurrere signorum in residuo, aut in terminis quoti, varietatem, vti prius factum fuit. Vt ergo residuum fiat nihilum, poni debet $\alpha\ n\gamma = 0$, aut $\alpha = n\gamma$; atque sic orietur residuum tale $b^{n\delta} - b^\beta$, quod vt etiam annihiletur, statuendum est $n\delta = \beta$, quibus substitutis clarum est, numerum $\frac{a^{n\gamma} - b^{n\delta}}{a^\gamma - b^\delta}$ semper esse integrum, siue n par sit numerus, aut vero impar.

§. 7. Hinc iam deduco, esse quoque hunc numerum generalem $2^{4m+1} - 2^{2m} - 1$ semper diuisibilem per 9, atque ita quidem, vt quotus ex diuisione prodiens sit numerus triangularis. Quod vt demonstrem, assumam rem ita se habere, atque esse $\frac{2^{4m+1} - 2^{2m} - 1}{9} = \frac{x^2 + x}{2}$, qui generaliter est numerus triangularis; ex qua aequatione deducitur,

ducitur, radicem extrahendo, $\frac{2^{2m+1}-2}{3} = x$; ut igitur appareat esse x numerum integrum, qui, siue par sit, siue impar, semper efficit quoque integrum $\frac{x^2+x}{2}$; considerabimus, esse $x = \frac{2^{2m+1}-2}{3} = \frac{2(2^{2m}-1)}{3} = \frac{2(4^m-1)}{4-1}$, qui integer est ex eo, quod continetur sub formula generali modo adducta $\frac{a^{n\gamma}-b^{n\delta}}{a^\gamma-b^\delta}$ per 2 multiplicata, positis $a=4$, $n=m$, $\gamma=1$, $b=1$.

§. 8. Ex Theoremate priori (§. V.) statim consequitur, numerum a^n+1 diuisibilem esse semper per $a+1$, posito n numero impari. Abit enim formula generalis illa in hanc specialiorem, si statuatur $\gamma=1$, $\delta=0$. Pariter ex Theoremate altero (§. VI.) fluit, a^n-1 semper diuidi posse per $a-1$, siue par sit n, aut impar; abit enim iterum formula vniuersalis in hanc particularem, si fuerit $\gamma=1$, $\delta=0$. Quorum vtrumque supposuit *Celeberr. Eulerus* in acutissima Dissertatione, *de Theoremate quodam Fermatiano*, *Commentar. Acad. Imper. Tomo VI. pag.* 103.

§. 9. Si in formula generali altera (§. VI.) $\frac{a^{n\gamma}-b^{n\delta}}{a^\gamma-b^\delta}$ fiant $a=2$, $n\gamma=m$, aut $\gamma=\frac{m}{n}$, $\delta=0$, abibit haec in talem expressionem $\frac{2^m-1}{2^{\frac{m}{n}}-1}$; erit igitur 2^m-1 Diuisibilis per numerum $2^{\frac{m}{n}}-1$, quoties m fuerit numerus compositus, quia pro n assumere licet numerum quemcunque,

 parem

parem aut imparem. Quod si vero m fuerit numerus primus, vt ita nullus n detur, per quem diuidi queat m; tum videtur 2^m-1 nullum admittere diuisorem, et consequenter esse numerus primus; at vero male ita ratiocinamur; nam id solum sequitur, 2^m-1 non admittere diuisorem huius formae $2^{\frac{m}{n}}-1$; haud vero plane nullum, sed forsan alium huius formae $m\alpha+1$. Ita exempli gratia $2^{11}-1$ diuisibilis est per 23; $2^{23}-1$ per 47; $2^{29}-1$ per 1103; $2^{37}-1$ per 223; $2^{43}-1$ per 431; $2^{47}-1$ per 2351; $2^{73}-1$ per 439; $2^{83}-1$ per 167; quos diuisores omnes vide in allegata Dissertatione *Celeberr. Euleri*, excepto solo 2351, quem priuatim mecum communicauit anno demum 1741.

§. 10. Falsa haec persuasio, 2^m-1 esse numerum primum, quoties m talis sit, in errorem praecipue abduxit *Celeb. Michael. Gottl. Hanschium*, qui in *Epistola ad Mathematicos de Theoria Arithmetices nouis à se inuentis aucta*, edita 1739, viginti tales pro numeris primis assumsit; nempe hac tabella comprehensos:

2^2-1	$2^{31}-1$
2^3-1	$2^{37}-1$
2^5-1	$2^{41}-1$
2^7-1	$2^{43}-1$
$2^{11}-1$	$2^{47}-1$
$2^{13}-1$	$2^{53}-1$
$2^{17}-1$	$2^{59}-1$
$2^{19}-1$	$2^{61}-1$
$2^{23}-1$	$2^{67}-1$
$2^{29}-1$	$2^{71}-1$

atque ex illis totidem numeros perfectos elici posse putauit.

unt. Sed vti inter $2^{\text{[illegible]}}-1$ et $2^{\text{[illegible]}}-1$ ante iam sex tales fuerunt eliminati: ita de reliquis, $2^{\text{[illegible]}}-1$ vsque ad $2^{\text{[illegible]}}-1$, magnus dubitandi campus est, quot eorum sint primi; vnde palam fit, nos hodie nondum de pluribus quam nouem numeris perfectis esse certos.

§. 11. Venit hic in mentem Theorema elegans *Illustris Goldbachii*, quod legitur in *Actor. Erudit. Lipſ. Supplementis Tomo VI*, *pag.* 471; nempe si numero quouis quadrato subtrahatur binarius, residuum nunquam diuidi posse per ternarium. Hoc exinde fit, quia numerorum quadratorum quorumuis, ordine naturali succedentium, notae omnes simul additae faciunt has summas; 1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1, 9; redeunte semper eadem periodo, si fuerit absoluta; vel quia quadratum quodcunque, diuisum per 9, relinquit 1, aut 4, aut 7, aut 0; a quarum notarum summis singulis si subtrahas 2, remanent respectiue −1, 2, 7, 5, 5, 7, 2, −1, 7, vbi nullus ternarius prodit, qui alias indicio est, numerum propositum per 3 esse diuisibilem. Idem etiam verum est, si a quadrato subtrahas 5, aut 8. Ex his solui iam potest ingeniosum Problema, quod in *loco modo citato* adiunctum est, *dato numero quocunque ita mutare notam vnicam, vt certum sit, numerum ita mutatum per omnes transpositiones possibiles non exhibere quadratum*. Praxis sine dubio talis esse debet, vt a numero proposito subtrahatur 2, ac deinde residuum, mutata quauis nota, excepta vltima quae ad dextram est, ita adornetur vt diuidi possit per 3, quod multis quidem modis, et facile, fit. In hac vero praxi adnotandum est *primo*, numerum propositum non posse esse quemcunque, sed ta-

P 2 lem,

lem, qui ex permutatione notarum in quadratum abire queat; aliter enim per eandem hanc operationem ipsam incidere in quadratum possumus. Veluti si assumamus numerum 1677, qui nulla notarum transpositione quadratus fit, is subtracto 2 fit 1675 non diuisibilis per 3; si igitur ad hoc obtinendum mutarem 5 in 4, aut 7 in 6, emergerent numeri 1674 et 1665, diuisibiles per 3, sed vterque per transpositionem notarum quadratus, scilicet 1764, et 6561. Problema igitur de solo tali numero intelligendum est, qui per transpositionem notarum suarum quadratus fieri posset; hoc est, qui abiectis nouenariis relinquit vel 0, 1, 4, 7. *Secundo* propositi talis numeri debent mutari notae duae; vna subtracto 2, et haec extima quidem ad dextram; altera autem intermedia, vt residuum hoc fiat diuisibile per 3. Nam si assumerem exempli gratia numerum 1489, qui quadratus est his ipsis notis ita scriptis 1849, atque ab illo subtraherem 2, vt fiat 1487, et tum notam vltimam mutarem in 5, vt oriatur multiplum 3, obtinerem sic 1485, qui quadratus fit notis in 5184 transpositis.

§. 12. Sed dolendum est, parum auxilii trahi posse ex praecedentibus formulis ad indagandum numeri alicuius dati diuisorem. Liceat igitur tentare aliam adhuc viam, quae aliquanto plus subsidii nobis subministrabit. Quamuis destituatur Arithmetica tali formula generali vnica, quae numeros primos omnes successiue exhibeat: certum tamen est, omnes illos contineri his duabus; nempe omnis numerus primus est vel $6m+1$, vel $6m+5$. Omnis enim numerus, per 6 diuisus, relinquit vel 0, 1, 2, 3, 4, 5, adeoque omnes numeri in genere conti-

continentur his formulis: $6m$, $6m+1$, $6m+2$, $6m+3$, $6m+4$, et $6m+5$; sed inter hos primi nequeunt esse $6m$, $6m+2$, $6m+3$, et $6m+4$; supererunt ergo primi soli aut $6m+1$, aut $6m+5$; quod est Theorema *Leibnitii* in *Journal des Savans*, *Tomo VI*, p. 76, quo tamen inductus falsum primum numerum statuit 1007, qui est 19×53. Aut eadem ratione demonstrare potuisset, omnes numeros primos esse vel $3m+1$, vel $3m+2$; aut vero $2m+1$; quamuis haec propositio nequeat inuerti. Multiplicentur ergo duo hi primi, si modo tales fuerint, $6m+1$, et $6n+1$, inter se mutuo, obtinebitur factum $\overline{6m+1}\,.\,6n+6m+1$, quod iam admittet duos indicatos diuisores, et, si numerus aliquis propositus dicatur A, eruetur exinde *Regula I.* haec $\frac{A-1-6m}{(6m+1)6}=n$. Multiplicentur porro secum $6m+5$, et $6n+5$, orietur $\overline{6m+5}\,.\,6n+30m+25=A$, aut vero *Regula II.* $\frac{A-25-30m}{(6m+5)6}=n$. Tertio multiplicentur secum $6m+5$, et $6n+1$, obtinebitur $\overline{6m+5}\,.\,6n+6m+5=A$, vnde fluit *Regula III.* $\frac{A-5-6m}{(6m+5)6}=n$.

§. 13. Iam vt exemplis aliquot doceam, quomodo hoc aliquali subsidio diuisorem expiscari possimus; statuam, numerum propositum esse $1219=A$; adhibendo nunc vnam regulam post alteram, erit ex I. $\frac{1218-6m}{(6m+1)6}=n$, vbi video, deprimi posse hanc fractionem, diuidendo supra et infra per 6, vnde prodit $\frac{203-m}{6m+1}=n$, atque sic indagatio eo recurrit, qualis numerus debeat esse m, vt $203-m$ diuidi queat per $6m+1$. Huic fini commode adhibentur series hoc typo adornandae, quod haud

P 3 difficul-

difficulter, sic cum lex progressionis [illegible] currat: [illegible]

m - - - -	1	2	3	4	5	6
$203 - m$ - -	202	201	200	199	198	197
$6m + 1$ - -	7	13	19	25	31	37

Facile iam diiudicari, aut tentari potest, si aliquis numerus superior $203 - m$ occurrat, qui per suum inferiorem sit diuisibilis; extendi autem series debet eousque, donec $203 - m = 6m + 1$, aut hoc casu vltimum m erit 29. Deprehenditur autem hic nullam diuisionem succedere.

§. 14. Igitur accedendum erit ad Regulam II, ex qua hoc casu erit $\frac{1194-30m}{(6m+5)6} = n$, aut iterum deprimendo hanc fractionem per 6, quod, quotiescunque fieri potest, maximum affert adiumentum, $\frac{199-5m}{6m+5} = n$. Series igitur adornandae erunt hae:

m - - - -	1	2	3	4	5	6
$5m$ - - - -	5	10	15	20	25	30
$199 - 5m$ - -	194	189	184	179	174	169
$6m + 5$ - -	11	17	23	29	35	41

atque deprehendo diuisionem succedere inter 184 et 23, prodeunte quoto 8, erunt ergo $m = 3$, $n = 8$, et diuisores quaesiti $6m + 5 = 23$, et $6n + 5 = 53$. Quod vero si factum non fuisset, tum adeunda fuisset Regula III, quae si nullum quoque subministraret diuisorem, numerus propositus esset primus.

§. 15. Sit quaerendus diuisor numeri $6631 = A$; erit ex Regula I. $\frac{6630-6m}{(6m+1)6} = n$, vel, facta depressione per 6, habebitur $\frac{1105-m}{6m+1} = n$, vnde series ita constituuntur:

m - -

m - - - - - -	1	[illegible]	3	4	[illegible]
$1105 - m$ - - -	1104	1103	1102	1101	1100
$6m + 1$ - -	7	13	19	25	31

et video diuisionem perfici posse sub $m = 3$, ipsius 1102 per 19, prodeunte quoto $58 = n$, ergo diuisor vnus erit $6m + 1 = 19$, atque alter $6n + 1 = 349$.

§. 16. Aliud quid tentaui adhuc in hoc negotio, quod quamuis irritum fuerit, commemorabo tamen, vt alii ne frustra hinc remedium quaerant. Omnia multipla numeri primi exempli gratia 23, habent summam notarum comprehensam in hac periodo, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, vel, quod idem est, successiue diuisa per 9, hos numeros relinquunt. Sic etiam omnia multipla numeri primi 2011 habent summam notarum contentam in hac periodo, 4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5, 9. Sit itaque examinandus numerus 67813, an is per 2011 sit diuisibilis. Proposito numero addo ter aut quater 2011, et video harum summarum notas additas sibi producere 7, 2, 6, 1, qui est ordo talis, qualis in periodo multiplorum 2011 occurrit. Videri itaque posset ex hoc, numerum propositum per 2011 esse diuisibilem, quod tamen minime fit. Attendi enim hic debet ad illud, per additionem numeri eiusdem 2011, ad alteram 67813 repetitam, notarum summas semper ita conformari, ac si haberetur multiplum ipsius 2011. Sit enim exempli gratia numerus par 2 A, cuius summa notarum sit 6, adeoque ipse $9m + 6$; atque apparet, ipsum hunc numerum raro nimis posse per 23. Simulabo tamen, me velle tentare, an dictus numerus 2 A sit diuisibilis per 23, faciamque hoc sequenti typo:

Summa

Summa notarum	numeri
6	$2A$
	23
2	$2A+23$
	23
7	$2A+46$
	23
3	$2A+69$
	23
8	$2A+92$
	23
4	$2A+115$
	23
9	$2A+138$

atque ideo sic prodire periodum illam, quam pro multiplis 23 obtinet, quamuis tale multiplum A semper non sit.

§. 17. Persequar itaque Theoremata quaedam huc spectantia, quae ulteriori diuisorum inquisitioni inseruire possunt. Si in formula $\frac{a^{n\gamma}-b^{n\delta}}{a^{\gamma}-b^{\delta}}$ (§. VI.) statuamus $a=2$, $\delta=0$, mutabitur illa in hanc $\frac{2^{n\gamma}-1}{2^{\gamma}-1}$; est itaque binarius ad numerum compositum quemcunque $n\gamma$ eleuatus, et vnitate minutus semper diuisibilis per $2^{\gamma}-1$, vbi indifferens est, siue n sit par, siue impar. Si vero in altera formula (§. V.) $\frac{a^{n\gamma}+b^{n\delta}}{a^{\gamma}+b^{\delta}}$ ponamus $a=2$, $\delta=0$,

mutatur

mutatur illa in hanc $\frac{2^{n\gamma}+1}{2^{\gamma}+1}$, vnde patet, binarium eleuatum ad numerum compositum $n\gamma$, et deinde vnitate auctum, diuisibilem esse quidem per $2^{\gamma}+1$, sed requiri vt n sit impar. Si autem in formula $\frac{2^{n\gamma}-1}{2^{\gamma}-1}$ exponens ipsius 2 non sit compositus sed primus numerus, ob allegatam conditionem, diuisio non succedit. Graue igitur est, hoc nos inuento adhuc destitui, vt, posito numero primo p, sciamus quibus in casibus $2^{p}-1$ diuisorem admittat vel non. Interim tamen quoniam, vti ante vidimus, (§. IX.)

$2^{11}-1$	diuisibilis est per	23	$=2.\ 11+1.$
$2^{23}-1$	- - - - - -	47	$=2.\ 23+1$
$2^{29}-1$	- - - - - -	1103	$=2.\ 19.29+1$
$2^{37}-1$	- - - - - -	223	$=2.\ 3.37+1$
$2^{43}-1$	- - - - - -	431	$=2.\ 5.43+1$
$2^{47}-1$	- - - - - -	2351	$=2.\ 5^{2}.47+1$
$2^{73}-1$	- - - - - -	439	$=2.\ 3.73+1$
$2^{83}-1$	- - - - - -	167	$=2.\ 83+1$

ex analogia concludere licet, numerum $2^{p}-1$, si fuerit diuisibilis, admittere diuisorem huius formae $2.q^{m}p+1$, assumto etiam q primo.

§. 13. Porro etiam, quod nescio an hucusque obseruatum fuerit, si p sit primus, erit $2^{p}-2$ semper diuisibilis per p. Veluti exempli gratia $2^{37}-2$ diuisorem recipit 37. Quod vt demonstrem, notum est, ex methodo

Newtoni esse $2^p = \overline{1+1}^p = 1 + p + \frac{p.\overline{p-1}}{1.\ 2} + \frac{p.\overline{p-1}.\overline{p-2}}{1.\ 2.\ \ 3} + \frac{p.\overline{p-1}.\overline{p-2}.\overline{p-3}}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.} +$ etc. in qua serie, si p fuerit numerus determinatus, euadet terminus vltimus $= 0$, ob numeros naturales omnes, et consequenter etiam primos, successiue a p subtractos; sed hoc pacto terminus penultimus euadet 1, et termini intermedii diuidi quidem poterunt per 2, 2. 3, 2. 3. 4, etc. sed nullus horum diuisorum quadrabit in p, ob hunc primum; ergo in casu particulari series acquiret hanc faciem $2^p = 1 + p + p\alpha + p\beta + p\beta + p\alpha + p + 1 + 0$, ex qua fit $2^p - 2 = p(2 + 2\alpha + 2\beta)$, et consequenter $\frac{2^p - 2}{p} = 2 + 2\alpha + 2\beta$, numero integro, et pari.

§. 19. Memini *Celeberrimum Eulerum* aliquando communicasse mecum, numerum talem vniuersalem $a + 1 + \sqrt{2a - m}$ nunquam diuidi posse per m. Huius demonstratio haec nunc mihi succurrit. Ponam esse m diuisorem, et quotum prodentem h, erit sic $a + 1 + \sqrt{2a-m} = hm$. Vt auferatur irrationalitas, sumatur $\sqrt{2a-m} = e$, vnde est $a = \frac{e^2 + m}{2}$, $a + 1 = \frac{e^2 + m + 2}{2}$, quae substituta numerum vniuersalem propositum reddunt hunc $\frac{e^2 + m + 2 + 2e}{2}$, vel hunc, in paullo mutatam formam redactum, [illegible] $e^2 +$

$\frac{e^2+2e+1+m+1}{2} = \frac{\overline{e\pm 1}^2}{2} + \frac{m+1}{2}$. Si itaque numerus propositus diuisibilis esset per m, tum foret $\frac{\overline{e\pm 1}^2}{2m} + \frac{m+1}{2m}$ numerus integer, nempe b. At vero hoc fieri nequit; nam aut e debet esse multiplum ipsius $2m$, aut $e\pm 1$; si illud sit, tum erit $e=2ma$, $e\pm 1 = 2ma\pm 1$, $\overline{e\pm 1}^2 = 4m^2a^2 \pm 4ma + 1$, quod per $2m$ diuisum relinquit residuum $\frac{1}{2m}$, sed hoc coniunctum cum $\frac{m+1}{2m}$ reddit $\frac{m+2}{2m}$, quae semper fractio est ob $2m > m+2$, si modo $m > 2$. Si vero $e\pm 1$ sit multiplum ipsius $2m$, vti $e\pm 1 = 2ma$, erit $\overline{e\pm 1}^2 = 4m^2a^2$, adeoque $\frac{\overline{e\pm 1}^2}{2m} = 2ma^2$, sed tunc $\frac{m+1}{2m}$ manebit fractio adiuncta integro $2ma^2$, quia semper $2m > m+1$, si modo $m > 1$. Sequitur autem ex his, $a+1\pm\sqrt{2a-m}$ esse tamen diuisibile per m, si fuerit $m=2$, et $a=3, 9, 19, 33$, etc.

---

§. 20. Ex eadem hac consideratione, quod nempe $\frac{m+1}{2m}$ immo generaliter $\frac{a+1}{a+m}$, semper sit fractus, ob $a+m > a+1$, plurima alia condi possunt Theoremata de numeris per alios non diuisibilibus. Veluti quoniam $\frac{2^p-2}{p}$ semper est integer, posito p primo, consequitur

tur esse $\frac{2^{p}-2}{p}+\frac{\alpha+1}{\alpha+m}$ semper integrum cum adiuncta fractione, hoc est, si reducatur haec formula, numerus generalis $\overline{\alpha+m}.2^{p}+\overline{\alpha+1}.p-2.\overline{\alpha+m}$ nunquam diuidi se patitur per $\overline{\alpha+m}.p$, si, praeter primum p, α et m sint numeri qualescunque integri, positiui.

DE PARTITIONE NVMERORVM.

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Problema *de partitione numerorum* primum mihi est propositum a *Celeb. Professore Naudé*, in quo quaerebat, quot variis modis datus numerus integer, (hic enim perpetuo de numeris tantum integris et affirmatiuis est sermo,) possit esse aggregatum, duorum vel trium vel quatuor, vel in genere quot libuerit numerorum. Siue quod eodem redit, quaeritur; quot variis modis datus numerus vel in duas, vel tres, vel quatuor, vel quot libuerit partes dispertiri queat, vnde huic Problemati aptissime *partitionis numerorum* nomen est impositum. Bipartitum autem hoc Problema a *Viro Celeb.* proponi solet: primo scilicet eos tantum partitionis modos postulat, quibus singulae partes, in quas numerus propositus resoluitur, sint inter se inaequales; tum vero hac inaequalitatis conditione omissa omnes omnino partitionis modos requirit, siue partes quaepiam inter se fuerint aequales, siue omnes inaequales. Perspicuum autem est, hoc posteriori casu numerum partitionum plerumque multo esse maiorem, quam priori, cum non solum omnes partitiones, quae casui priori satisfaciunt, simul posteriorem resoluant, sed etiam plerumque plures alii accedant, in quibus partes aequales continentur.

§. 2. Vt vis Problematis huius clarius perspiciatur, non nullos casus simpliciores, qui actuali partitionum enumeratione facile expediuntur. Si quaeratur, quot variis modis numerus 6. in duas partes resolui possit, statim apparet, hoc tribus modis fieri posse, cum sit:

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$$

si quidem partium aequalitas non excludatur. Sin autem partes tantum inaequales desiderentur; vltima partitio $3 + 3$ est omittenda, hocque casu numerus 6 duobus tantum modis in duas partes inter se inaequales dispertiri potest. Quod si numerus impar, vti 9 proponatur, in duas partes distribuendus, quatuor prodibunt partitiones, quae sunt:

$$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$$

vbi cum partes aequales non occurrant, numerus 9 quatuor modis in duas partes dispertietur, siue partes aequales excludantur, siue secus. Si plures duabus partes desiderentur, vti si quaeratur, quot variis modis numerus 12 in tres partes dispertiri possit, hoc sequentibus 12. modis fieri poterit:

$$12 = 1 + 1 + 10;\quad 12 = 1 + 2 + 9;\quad 12 = 1 + 3 + 8$$
$$12 = 1 + 4 + 7;\quad 12 = 1 + 5 + 6;\quad 12 = 2 + 2 + 8$$
$$12 = 2 + 3 + 7;\quad 12 = 2 + 4 + 6;\quad 12 = 2 + 5 + 5$$
$$12 = 3 + 3 + 6;\quad 12 = 3 + 4 + 5;\quad 12 = 4 + 4 + 4$$

Sin autem partes aequales excludantur, respondendum erit, numerum 12 tantum 7 modis in tres partes distribui posse.

§. 3. Hinc facile intelligitur, si tam numerus dispertiendus fuerit maior, atque numerus partium, in quas eum resolui oportet, ternarium quaternariumue superet,

E 9

nume-

numerum partitionum tam fieri magnum, ut per enumerationem actu instituendam difficillime obtineri queat. Neque etiam in hoc negotio inductioni multum est fidendum, quae, uti periculum facienti facile patebit, plerumque fallit, si ab enumeratione pro casibus simplicioribus facta ad magis compositos conclusiones formare voluerit. Sic ex methodo post explicanda patebit numerum 50 in septem partes non exclusa partium aequalitate dispertiri posse 8946 modis; sin autem partes aequales excludantur, remanebunt tantum 522 partitiones. Numerus porro 42 mille diversis modis in 20 partes omnino resolvi potest. At si quaeratur, quot variis modis numerus 125 in 12 partes, quae sint inter se omnes inaequales distribui possit, reperietur hoc fieri posse 64707 modis.

§. 4. Quemadmodum hic omnes numeri integri partium loca tenere possunt, ita hoc Problema in infinitum variari potest, prout numeri partes constituentes restringuntur. Ita aliud erit Problema, si quaeratur, quot variis modis datus numerus n in p partes, quarum nulla datum numerum m excedat, resolvi possit. Partium quoque numerus omitti potest, uti si quaeratur, quot variis modis numerus 6 ex his numeris 1, 2, 3, 4 per additionem produci possit, quod sequentibus 9 modis fieri poterit:

$6=1+1+1+1+1+1$	$6=1+1+1+3$
$6=1+1+1+1+2$	$6=1+1+4$
$6=1+1+2+2$	$6=1+2+3$
$6=2+2+2$	$6=2+4$
	$6=3+3$

Vel

Vel etiam qualitas numerorum praescribi potest, qui partes constituant; vti si partes debeant esse vel numeri impares, vel quadrati, vel trigonales, vel alius cuiusque generis. Sic si quaeratur, quot variis modis datus numerus possit esse summa quatuor quadratorum, quaestio ad hoc genus pertinebit. Iam pridem quoque partitio numerorum omnium in partes, quae sint termini huius progressionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. est considerata, et quilibet numerus obseruatus est vnico tantum modo ex his numeris 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. per additionem componi posse. Cuius quaestionis post *Stifelium* mentionem facit *Schotenius* in suis *Exercitationibus*, vbi ostendit pondera 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. librarum sufficere posse ad merces quotcunque librarum ponderandas. Neque vero ad hoc ostendendum alia methodo praeter inductionem vtitur. Quam ob rem non abs re erit veritatem huius effati rigorose demonstrasse.

§. 5. Quem ad modum ergo haec aliaque similia Problemata resolui oporteat, hic eiusmodi methodum certam ac tutam proponam, vt inductione, cui vulgo ad solutionem istius modi quaestionum plurimum tribui solet, plane non sit opus. Vtor ad hoc sequenti Lemmate notissimo:

Si istud productum $(1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)(1+ez)$ *etc. siue factorum numerus sit finitus, siue infinitus, per actualem multiplicationem euoluatur, vt huiusmodi forma prodeat:*

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\text{etc.}$$

erit coefficiens secundi termini A *summa quantitatum singularum* a, b, c, d, e, *etc. Coefficiens vero* B *erit summa* *ma productorum ex binis harum quantitatum inaequalium. Coefficiens* C *erit summa productorum ex ternis istarum quantitatum inaequalibus; et coefficiens* D *erit summa productorum ex quaternis harum earundem quantitatum, et ita porro.* In huiusmodi enim productis eadem quantitas puta a, vel quaenis alia plus quam semel nusquam inesse potest. Vnde hoc Lemma mihi fundamentum suppeditat ad partitiones in partes inaequales.

§. 6. Sin autem aequalitas partium non excludatur, adhibeo hoc Lemma:

Si ista formula $\frac{1}{(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)(1-ez)}$ *etc. factorum, siue denominatorem constituentium numerus sit finitus, siue infinitus, post euolutionem denominatoris ope multiplicationis factum, per diuisionem in seriem explicetur huius formae:*

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+ \text{ etc.}$$

tum erit A *quidem vt ante summa quantitatum* $a+b+c+d+e+$ etc. *At coefficiens* B *erit summa productorum ex binis harum quantitatum, non exclusa repetitione eiusdem quantitatis, erit scilicet:*

$$B=aa+ab+bb+ac+bc+cc+ad+bd+cd+dd+ae+\text{etc.}$$

Simili modo coefficiens C *erit summa productorum ex ternis harum quantitatum;* a, b, c, d, e, etc. *factoribus aequalibus in quouis producto non exclusis. Atque eadem conditione adiecta erit coefficiens* D *summa productorum ex quaternis harum quantitatum, et ita porro.*

Hincque istud Lemma viam aperiet ad partitiones, in quibus partium aequalitas non excluditur, absoluendas.

§. 7. Cum autem in Problemate proposito non de productis, sed de summis numerorum, quaestio instituatur, loco quantitatum a, b, c, d, e, etc. substituo potestates x^p, x^q, x^r, x^s, x^t, etc. Sic enim in productis ex binis eiusmodi occurrent potestates, quarum exponentes sint summae binarum ex serie p, q, r, s, t, etc. Simili modo producta ex ternis constantibus eiusmodi potestatibus, quarum exponentes sint summae trium numerorum ex eadem serie p, q, r, s, etc. Atque producta ex quaternis erunt potestates, quarum exponentes sint aggregata ex quaternis horum numerorum, et ita porro. Sicque quae ante de productis sunt notata, nunc ad summas transferuntur; et ita quidem, vt, si Lemma prius adhibeatur, summae ex partibus tantum inaequalibus conflentur, sin autem Lemma posterius in vsum vocetur, partium aequalitas non excludatur. Hoc igitur modo ambo Lemmata ad solutionem quaestionum ante memoratarum accommodari debebunt.

§. 8. Aggrediamur ergo hanc primum quaestionem. *Inuenire quot variis modis datus numerus* N *possit dispertiri in* p, *partes, quae sint inter se inaequales*: Quoniam huc omnes numeri integri affirmatiui ad partes constituendas sunt idonei, pro serie superiorum exponentium accipienda est series numerorum naturalium: 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. Formetur ergo secundum Lemma prius haec expressio:

$$s = (1 + xz)(1 + x^2 z)(1 + x^3 z)(1 + x^4 z)(1 + x^5 z) \text{ etc.}$$

in infinitum, quae multiplicatione actu instituta euoluatur in hanc seriem:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{ etc.}$$

eritque: $A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ etc.

quod

quod eſt aggregatum omnium poteſtatum ipſius x. Deinde quia B eſt ſumma productorum ex binis terminis inaequalibus ſeriei A, erit B ſumma poteſtatum ipſius x omnium, quarum exponentes ſint aggregata duorum numerorum inaequalium: et cum eadem poteſtas ſaepius reſultare poſſit, ea vnciam habebit numericam indicantem, quot ea poteſtas modis ſit productum ex duobus terminis ſeriei A; ſeu quot variis modis eius exponens poſſit eſſe ſumma duorum numerorum inaequalium. Binis autem terminis ſeriei A re ipſa multiplicandis reperietur:

$$B = x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + \text{etc.}$$

Cuius ſeriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens poteſtatis ipſius x adiunctae in duas partes inaequales diſpartiri poſſit. Hac igitur ſerie in infinitum continuata, ope legis poſt eruendae, reſoluitur Problematis propoſiti caſus, quo partitio in duas partes requiritur.

§. 9. Quantitas deinde C, cum contineat omnia producta, quae oriuntur ternis terminis inaequalibus ſeriei A inuicem multiplicandis, conſtabit ex ſerie poteſtatum ipſius x, quarum exponentes ſunt ſummae trium numerorum inter ſe inaequalium. Atque eadem poteſtas toties in iſta ſerie C occurret, quoties eius exponens ex tribus numeris inter ſe inaequalibus per additionem reſultare poterit, reperieturque:

$$C = x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + 10x^{14} + \text{etc.}$$

Cuius ſeriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens poteſtatis ipſius x adiunctae in tres partes inaequales diſpertiri poſſit, ſic ex termino $8x^{13}$ colligitur, numerum 13 octo diuerſis modis in tres partes inaequales ſecari poſſe, quae ſunt:

$13 = 1 + 2 + 10$	$13 = 2 + 3 + 8$
$13 = 1 + 3 + 9$	$13 = 2 + 4 + 7$
$13 = 1 + 4 + 8$	$13 = 2 + 5 + 6$
$13 = 1 + 5 + 7$	$13 = 3 + 4 + 6$

Ista igitur series C in infinitum continuata inseruiet omnibus numeris in tres partes inaequales dispertiendis.

§ 10. Quantitas porro D, cum contineat omnia producta ex quaternis terminis inaequalibus seriei: $A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 +$ etc. constabit serie potestatum ipsius x, quarum exponentes sint aggregata quatuor numerorum inter se inaequalium; et in hac serie quaelibet potestas eiusmodi habebit coefficientem, qui indicat, quot variis modis eius exponens per additionem quatuor numerorum inter se inaequalium resultare possit. Reperietur autem:

$$D = x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + 6x^{15} + 9x^{16} + 11x^{17} + \text{etc.}$$

Haec igitur series in infinitum continuata ostendet, quot variis modis quisque numerus possit esse summa quatuor numerorum inaequalium. Ex termino quippe $9x^{16}$ cognoscitur numerum 16 nouem modis in quatuor partes inter se inaequales distribui posse.

§ 11. Si hoc modo ulterius progrediamur, patebit litteram E fore seriem potestatum ipsius x ita comparatam, vt cuiusuis termini coefficiens indicet, quot variis modis exponens ipsius x in quinque partes inaequales dissecari possit. Erit autem:

$$E = x^{15} + x^{16} + 2x^{17} + 3x^{18} + 5x^{19} + 7x^{20} + 10x^{21} + 13x^{22} + \text{etc.}$$

Simili modo valor litterae F erit series partitionibus in sex partes inaequales inseruiens, et litterae G, H, I, etc.

pro

pro partitionibus in partes septem, octo, nouem etc. valebunt, eruntque:

$$F = x^{28} + x^{29} + 2x^{30} + 3x^{31} + 5x^{32} + 7x^{33} + 11x^{34} + 14x^{35} + \text{etc.}$$

$$G = x^{36} + x^{37} + 2x^{38} + 3x^{39} + 5x^{40} + 7x^{41} + 11x^{42} + 15x^{43} + \text{etc.}$$

etc.

Vnde perspicitur primi cuiusque seriei termini exponentem esse numerum trigonalem numeri partium propositi: tum vero tam huius, quam secundi termini coefficientem esse $=1$. Cuius quidem ratio facile intelligitur: minimus enim numerus, qui est summa septem numerorum inter se inaequalium, necessario est $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{1}{2}7.8 =$ numero trigonali ipsius septenarii: hicque numerus pariter ac sequens vnitate maior, plus vno modo in septem partes inaequales dispertiri nequit.

§. 12. Totum ergo negotium redit ad commodam serierum B, C, D, E, F, etc. formationem, ne id ipsum, quod quaeritur, scilicet partitionum numerus ad cuiusque seriei formationem adhibeatur. Ac primo quidem lex progressionum A et B est aperta, cum prioris coefficientes sint omnes vnitates, posterioris vero termini seriei numerorum naturalium geminati: sequentium vero serierum lex minus est aperta, et quousque eas hic continuauimus, coefficientes ex ipsis cuiusque exponentis partitionibus constituimus. Alio itaque modo valores istarum litterarum A, B, C, D, etc. inuestigari oportet, vnde haec exoritur quaestio: Inuenire valores litterarum A, B, C, D, E, etc. ita vt summa huius seriei:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$$

aequalis fiat isti expressioni:

$s = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)$ etc.

Hunc in finem igitur perpendendus est nexus, qui inter has duas expressiones intercedit, et quem ad modum altera immutari debeat, si in altera mutatio instituatur.

§. 13. Quia vtriusque expressionis idem est valor s, ambae inter se manebunt aequales, si in vtraque loco z scribatur quaecunque alia quantitas. Ponamus igitur in vtraque xz loco z, et valor vtrinque resultans vocetur $= t$, eritque primo:

$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 +$ etc.

tum vero altera expressio transmutabitur in hanc:

$t = (1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)$ etc.

qui posterior ipsius t valor, si cum posteriore valore ipsius s comparetur, quo erat:

$s = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)$ etc.

mox patebit esse $s = (1+xz)t$. Quae relatio cum etiam in alteris valoribus ipsarum s et t locum habere debeat, nobis praebebit hanc aequationem:

$$\begin{array}{rl} s = & 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.} \\ \hline (1+xz)\,t = & 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + \text{etc.} \\ & \quad + xz + Ax^2z^2 + Bx^3z^3 + Cx^4z^4 + \text{etc.} \end{array}$$

Vnde terminis homogeneis inter se aequandis, fiet:

$$A = \frac{x}{1-x}$$

$$B = \frac{Ax^2}{1-x^2} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$C = \frac{Bx^3}{1-x^3} = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$D = \frac{Cx^4}{1-x^4} = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$E = \frac{Dx^5}{1-x^5} = \frac{x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

etc.

§. 14.

§. 14. Series ergo, quae ſupra pro litteris A, B, C, D, E, etc. prodire obſeruatae ſunt, oriuntur ex euolutione fractionum, quas hic inuenimus, vnde conſtat, ſeriem A eſſe Geometricam, nempe $A = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 +$ etc. quae, quod quidem eſt planiſſimum, indicat quemque numerum vnico modo ex vno numero integro conſtare. Reliquae vero ſeries B, C, D, E, etc. ſunt recurrentes, quarum ſcala relationis ex cuiusuis fractionis denominatore per multiplicationem euoluto patebit. Ad hoc oſtendendum negligamus tantiſper numeratores, qui ſunt poteſtates ipſius x, quarum exponentes ſunt numeri trigonales, earumque loco ſcribamus vnitatem. Sit igitur.

$$\frac{A}{x} = 1 + \alpha' x + \beta' x^2 + \gamma' x^3 + \delta' x^4 + \varepsilon' x^5 + \ldots + v' x^n = \mathfrak{A}$$
$$\frac{B}{x^3} = 1 + \alpha'' x + \beta'' x^2 + \gamma'' x^3 + \delta'' x^4 + \varepsilon'' x^5 + \ldots + v'' x^n = \mathfrak{B}$$
$$\frac{C}{x^6} = 1 + \alpha''' x + \beta''' x^2 + \gamma''' x^3 + \delta''' x^4 + \varepsilon''' x^5 + \ldots + v''' x^n = \mathfrak{C}$$
$$\frac{D}{x^{10}} = 1 + \alpha^{IV} x + \beta^{IV} x^2 + \gamma^{IV} x^3 + \delta^{IV} x^4 + \varepsilon^{IV} x^5 + \ldots + v^{IV} x^n = \mathfrak{D}$$
$$\frac{E}{x^{15}} = 1 + \alpha^{V} x + \beta^{V} x^2 + \gamma^{V} x^3 + \delta^{V} x^4 + \varepsilon^{V} x^5 + \ldots + v^{V} x^n = \mathfrak{E}$$
$$\frac{F}{x^{21}} = 1 + \alpha^{VI} x + \beta^{VI} x^2 + \gamma^{VI} x^3 + \delta^{VI} x^4 + \varepsilon^{VI} x^5 + \ldots + v^{VI} x^n = \mathfrak{F}$$

etc.

15. Solutio ergo quaeſtionis ad inuentionem ſerierum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc. reducitur, quas patet ſingulas eſſe recurrentes. Ac primo quidem ſeries $\mathfrak{A}$, cum ſit $\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$, eſt adeo Geometrica, atque $\alpha' = 1$, $\beta' = 1$, $\gamma' = 1$, $\delta' = 1$, etc. quod per ſe eſt perſpicuum. Series autem $\mathfrak{B}$, cum ſit $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{1-x-x^2+x^3}$, erit recurrens, ſcala relationis exiſtente $+1$, $+1$, -1; Vnde erit:

$\alpha'' =$

$$\alpha'' = 1,$$
$$\beta'' = \alpha'' + 1$$
$$\gamma'' = \beta'' + \alpha'' - 1$$
$$\delta'' = \gamma'' + \beta'' - \alpha''$$
$$\varepsilon'' = \delta'' + \gamma'' - \beta''$$
$$\zeta'' = \varepsilon'' + \delta'' - \gamma''$$
etc.

Simili modo series $\mathfrak{C}$ ob $\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^5-x^6}$ erit recurrens et scalam relationis habebit $+1, +1, 0, -1, -1, +1$. Vnde erit:

$$\alpha''' = 1$$
$$\beta''' = \alpha''' + 1$$
$$\gamma''' = \beta''' + \alpha''' + *$$
$$\delta''' = \gamma''' + \beta''' + * - 1$$
$$\varepsilon''' = \delta''' + \gamma''' + * - \alpha''' - 1$$
$$\zeta''' = \varepsilon''' + \delta''' + * - \beta''' - \alpha''' + 1$$
$$\eta''' = \zeta''' + \varepsilon''' + * - \gamma''' - \beta''' + \alpha'''$$
$$\theta''' = \eta''' + \varepsilon''' + * - \delta''' - \gamma''' + \beta'''$$
etc.

Eodem modo series sequentes perspicientur esse recurrentes, singularumque scalae relationis hoc modo assignari poterunt. Etsi autem hoc pacto istae series non difficulter formari possunt, tamen ista ratione relicta mox multo commodiorem modum exhibebo, harum serierum quamuis ex praecedente formandi, postquam obseruationem maximi momenti communicauero.

§. 16.

§. 16. Cum sit $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$, patet in serie euoluta $\mathfrak{B}$, quamuis potestatem ipsius x toties occurrere debere, quoties ea ex potestatibus x^1, x^2 per multiplicationem oriri potest, seu quoties eius exponens ex numeris 1 et 2 per additionem produci potest. Ita cum sit:

$$\mathfrak{B} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \ldots + v''x^n$$

ex termino $3x^4$ intelligitur, numerum 4 tribus modis ex numeris 1 et 2 per additionem oriri posse, qui sunt:

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1\,;\ 4 = 1 + 1 + 2\,;\ \text{et}\ 4 = 2 + 2.$$

In genere ergo terminum $v''x^n$ considerando, coefficiens v'' indicabit, quot modis exponens n ex numeris 1 et 2 per additionem produci possit. Cum igitur sit $B = \mathfrak{B}x^3$, in serie B habebitur iste terminus $v''x^{n+3}$, qui cum indicet, numerum $n+3$ tot variis modis in duas partes inaequales secari posse, quot vnitates coefficiens v'' in se complectatur, manifestum est, numerum $n+3$ tot modis in duas partes inaequales distribui posse, quot modis numerus n ex numeris 1 et 2 per additionem produci queat.

§. 17. Deinde cum sit $\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$, patet in hac serie $\mathfrak{C}$, quamuis potestatem ipsius x toties occurrere debere, quoties ea ex potestatibus x^1, x^2, x^3 per multiplicationem oriri queat, seu quod idem est, quoties eius exponens ex numeris 1, 2, 3 per additionem produci possit. Ita cum sit:

$$\mathfrak{C} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + \ldots + v''x^n$$

ex quouis eius termino $5x^5$ cognoscetur, exponentem 5 quinque modis ex numeris 1, 2, 3 per additionem produci posse, qui sunt:

$5 = 1+1+1+1+1$; $5 = 1+1+1+2$; $5 = 1+1+3$;
$5 = 1+2+2$; $5 = 2+3$.

In genere autem terminum $v''' x^n$ considerando, coefficiens v''' indicabit, quot variis modis numerus n ex numeris 1, 2, 3, per additionem oriri queat. Cum igitur sit $C = \mathfrak{C}x^6$, in serie C habebitur iste terminus $v''' x^{n+6}$ quo indicatur, numerum $n+6$ tot modis, quot vnitates continentur in coefficiente v''' in tres partes inaequales dispertiri posse. Vnde consequitur, numerum $n+6$ totidem modis in tres partes inaequales distribui posse, quot modis numerus 6 ex numeris 1, 2, 3, per additionem produci possit.

§. 18. Non opus est, vt hoc ratiocinium longius prosequamur, cum hinc iam abunde perspiciatur, quemuis numerum $n+10$ tot variis modis in quatuor partes inaequales dispertiri posse, quot modis numerus n ex his quatuor numeris 1, 2, 3, 4 per additionem produci possit. Simili modo quilibet numerus $n+15$ tot variis modis in quinque partes inaequales dispertiri poterit, quot modis numerus n ex his quinque numeris 1, 2, 3, 4, 5 per additionem produci potest. Generatim ergo numerus $n + \frac{m(m+1)}{2}$ tot variis modis in m partes inaequales dispertiri poterit, quot variis modis numerus n ex his numeris 1, 2, 3, 4 . . . . . . m per additionem produci potest. Quod si ergo quaeratur, quot variis modis numerus N in m partes inaequales dispertiri possit, responsio reperietur, si casuum numerus inuestigetur, quibus numerus $N - \frac{m(m+1)}{2}$ ex numeris 1, 2, 3, 4 . . . . . . m per additionem produci potest.

§. 19. Hoc igitur modo resolutio quaestionis propositae, de partitione cuiusque numeri, in quot libuerit partes

tes inaequales, reducitur ad solutionem alius Problematis iam supra commemorati, quo quaeritur, quot variis modis quilibet numerus ex aliquot terminis huius progressionis Arithmeticae 1, 2, 3, 4, 5, etc. per additionem produci possit. Hacque posteriore quaestione resoluta simul prior resoluetur. Quod vt clarius explicemus, noua signa ad commodiorem expressionem adhibeamus. Denotet ergo haec scriptio:

$n^{(2)}$ numerum casuum, quibus numerus n ex duobus numeris 1, 2 per additionem formari possit.

$n^{(3)}$ denotet numerum casuum, quibus numerus n ex his numeris 1, 2, 3 per additionem formari possit.

Et $n^{(m)}$ denotet numerum casuum, quibus numerus n ex his numeris 1, 2, 3, ... m per additionem produci possit. Cum igitur valores huiusmodi characterum fuerint definiti, quod deinceps praestabimus, Problema propositum ita resoluetur. Si quaeratur scilicet, quot variis modis numerus N in m partes inaequales dispertiri possit; numerus casuum quaesitus exprimetur hoc charactere $\left(N - \frac{m(m+1)}{1.2}\right)^{(m)}$, quippe quo indicatur, quot variis modis numerus $N - \frac{m(m+1)}{2}$ ex his numeris 1, 2, 3, ... m per additionem produci possit.

§. 20. Ad hanc eandem quaestionem quoque reducitur solutio alterius Problematis a *Celeb. Naudeo* propositi, quam ob rem expediet, et hoc Problema ante resolui, quam ampliorem characterum modo assumtorum euolutionem suscipiamus, sic enim tria Problemata, quae inter se maxime videantur diuersa, vna eademque opera resoluemus. Problema autem ita se habet:

Inuenire quot variis modis datus numerus N *possit dispertiri in* p *partes, partium aequalitate non exclusa.*

Quoniam hic partium aequalitas non excluditur, sequentem formam contemplabor, quae huius quaestionis solutionem in se continebit

$$s = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)} \text{ etc.}$$

quae secundum potestates ipsius z euoluta praebeat hanc seriem:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{ etc.}$$

eritque, vt supra §. VI. notauimus, coefficiens A summa omnium terminorum huius seriei. x, x^2, x^3, x^4, x^5, etc. seu. $A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 +$ etc. quae est eadem series, quam in solutione praecedentis Problematis pro littera A obtinuimus.

§. 21. Deinde vero est B summa productorum ex binis terminis seriei A, quadratis singulorum terminorum non exclusis. Hinc erit B summa omnium potestatum ipsius x, quarum exponentes sint aggregata duorum numerorum, siue aequalium, siue inaequalium: et cum eadem potestas hoc modo saepius resultare possit, ea vnciam habebit numericam indicantem, quot ea potestas modis sit productum ex binis terminis seriei A; seu quot variis modis eius exponens possit esse summa duorum numerorum, tam aequalium, quam inaequalium. Ex hoc fonte reperietur:

$$B = x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 4x^8 + 4x^9 + \text{ etc.}$$

cuius

cuius feriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens poteftatis ipfius x adiunctae in duas partes difpertiri poffit. Hac igitur ferie in infinitum continuata, Problematis propofiti cafus, quo partitio in duas partes requiritur, facile refoluitur.

§. 22. Quantitas porro C, cum contineat omnia producta, quae oriuntur terminis ternis feriei A, fiue inaequalibus fiue aequalibus inuicem multiplicandis, conftabit ex ferie poteftatum ipfius x, quarum exponentes fint fummae trium numerorum integrorum affirmatiuorum. Atque eadem poteftas x^n toties in ferie C occurret, quoties eius exponens n ex tribus numeris, fiue aequalibus, fiue inaequalibus per additionem refultare poteft. Erit autem:

$$C = x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 7x^9 + 8x^{10} + 10x^{11} + \text{etc.}$$

cuius feriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens poteftatis ipfius x adiunctae in tres partes, fiue aequales, fiue inaequales difpertiri poffit. Sic ex termino $8x^{10}$ colligitur, numerum 10 octo modis diuerfis in tres partes fecari poffe, quae partitiones funt:

$10 = 1 + 1 + 8$	$10 = 2 + 2 + 6$
$10 = 1 + 2 + 7$	$10 = 2 + 3 + 5$
$10 = 1 + 3 + 6$	$10 = 2 + 4 + 4$
$10 = 1 + 4 + 5$	$10 = 3 + 3 + 4$

Ifta igitur feries C in infinitum continuata omnibus numeris in tres partes difpertiendis inferuiet.

§. 23. Simili modo quantitas D, cum contineat omnia producta ex quatuor terminis feriei $A = x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.}$ eiusdem termini repetitione non exclusa: constabit serie potestatum ipsius x, quarum exponentes sint aggregata quatuor numerorum, siue aequalium, siue inaequalium. In hac igitur serie quaelibet potestas ipsius x eiusmodi habebit coefficientem, qui indicet, quot variis modis eius exponens per additionem 4 numerorum resultare possit. Reperietur autem hinc:

$$D = x^4 + x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 9x^{10} + 11x^{11} + \text{etc.}$$

Haec igitur series in infinitum continuata ostendet, quot variis modis quilibet numerus in quatuor partes dispertiri possit. Sic ex termino $9x^{10}$ concluditur numerum 10 nouem modis in quatuor partes dispertiri posse, quae partitiones sunt:

$10 = 1 + 1 + 1 + 7$	$10 = 1 + 2 + 2 + 5$
$10 = 1 + 1 + 2 + 6$	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$
$10 = 1 + 1 + 3 + 5$	$10 = 1 + 3 + 3 + 3$
$10 = 1 + 1 + 4 + 4$	$10 = 2 + 2 + 2 + 4$

$$10 = 2 + 2 + 3 + 3$$

§. 24. Hoc modo vlterius procedendo patebit, litteram E fore seriem potestatum ipsius x ita comparatam, vt cuiusuis termini coefficiens indicet, quot variis modis exponens ipsius x in quinque partes dispertiri possit. Erit autem:

$$E = x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 5x^9 + 7x^{10} + 10x^{11} + 13x^{12} + \text{etc.}$$

Pari modo valor litterae F erit series partitionibus in sex partes inseruiens, et litterarum G, H, I, etc. valores pro partitionibus in partes septem, octo, nouem, etc. valebunt, erit autem:

F =

$$F = x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 7x^{11} + 11x^{12} + 14x^{13} + \text{etc.}$$
$$G = x^7 + x^8 + 2x^9 + 3x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 11x^{13} + 15x^{14} + \text{etc.}$$
etc.

Si hae series cum illis, quas in solutione superioris Problematis pro iisdem litteris inuenimus, mox patebit totum discrimen tantum in potestatibus ipsius x constare, coefficientesque solos vtrinque similiter procedere. Ne autem hic inductioni vllum locum concedamus, istam conuenientiam sequenti demonstratione euincemus.

§. 25. Consideremus, vt supra duos valores ipsius s, qui sunt:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$$
$$s = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ \text{etc.}}$$

qui si loco z vbique ponatur xz, abeant in t eritque:

$$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + Ex^5z^5 + \text{etc.}$$
$$t = \frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ \text{etc.}}$$

Vnde si posteriores ipsarum s et t valores inuicem comparentur, mox patet esse $s = \frac{t}{1-xz}$ seu $t = (1-xz)s$, quae eadem relatio cum quoque inter priores litterarum s et t valores locum tenere debeat, erit:

$$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + Ex^5z^5 + \text{etc.} =$$
$$\begin{aligned}(1-xz)s = 1 &+ Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}\\ &- xz - Axz^2 - Bxz^3 - Cxz^4 - Dxz^5 - \text{etc.}\end{aligned}$$

Vnde per coaequationem terminorum homogeneorum inuenitur:

A =

$$A = \frac{x}{1-x}$$
$$B = \frac{Ax}{1-xx} = \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$
$$C = \frac{Bx}{1-x^3} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$
$$D = \frac{Cx}{1-x^4} = \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$
etc.

§. 26. Ex his formulis intelligitur, istas series non solum quoque esse recurrentes, vti superiores, sed etiam coefficientium vtrinque eandem esse legem. Quare si neglectis numeratoribus ponatur: vt sit

$\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$	$A = \mathfrak{A}x$
$\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$	$B = \mathfrak{B}x^2$
$\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$	$C = \mathfrak{C}x^3$
$\mathfrak{D} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$	$D = \mathfrak{D}x^4$
etc.	etc.

Partitio cuiusque numeri in partes quotcunque, siue aequales, siue inaequales, pendet a formatione serierum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. quae, vti ante obseruauimus, indicant, quot variis modis quiuis numerus ex aliquot terminis initialibus huius seriei 1, 2, 3, 4, 5, etc. per additionem produci queat. Sic cum sit $B = \mathfrak{B}x^2$, quiuis numerus $n+2$ totidem modis in duas partes dispertiri potest, quot modis numerus n ex numeris 1 et 2 per additionem produci potest. Simili modo cum sit $C = \mathfrak{C}x^3$, numerus $n+3$ tot modis in tres partes dispertietur, quot modis numerus n per additionem ex numeris 1, 2, 3 componi poterit. Atque generaliter numerus $n+m$ tot variis

riis modis in m partes, siue aequales, siue inaequales dispertiri potest, quot modis numerus n ex numeris 1, 2, 3, ... m per additionem produci potest.

§. 27. Pendet ergo et hoc Problema a solutione quaestionis, qua quaeritur, quot variis modis datus numerus ex aliquot terminis initialibus huius seriei 1, 2, 3, 4, etc. per additionem resultare possit. Si igitur vt supra haec scribendi formula $N^{(m)}$ denotet numerum modorum, quibus numerus N ex numeris 1, 2, 3, ... m per additionem componi potest, seu quibus numerus N in partes quotcunque distribui possit, quarum nulla maior sit numero m; huius modi characteribus et hoc Problema propositum resolui poterit. Scilicet $n^{(m)}$ indicabit, quot variis modis numerus $n+m$ in m partes, siue aequales, siue inaequales dispertiri possit. Hinc si quaeratur, quot modis numerus N in partes m, siue aequales, siue inaequales distribui possit, numerum modorum quaesitum indicabit haec formula $(N-m)^{(m)}$. Si igitur hoc Problema cum praecedente conferatur, perspicuum erit, numerum $n+m$ totidem modis in m partes, siue aequales, siue inaequales distribui posse; quot modis numerus $n+\frac{m(m+1)}{2}$ in m partes inaequales dispertiri possit.

§. 28. Solutio ergo amborum Problematum a *Cel. Naudeo* propositorum huc reuocatur, vt definiatur, quot variis modis numerus quicunque n ex his numeris 1, 2, 3 .... m per additionem produci possit; seu vt inuestigetur valor characteris $n^{(m)}$. Quemadmodum ergo hoc nouum Problema ex formulis iam ante inuentis commodissime resolui queat, videamus. Ac primo quidem, si sit $m = 1$, quia quilibet numerus vnico modo ex meris vnitatibus per additionem elici potest, erit $n^{(1)} = 1$, quod idem prima formula $\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$, seu series inde formata: $\mathfrak{A} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 +$ etc. manifesto indicat.

§. 29. Quoniam series $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ indicat, quot modis quisque numerus ex numeris 1 et 2 per additionem formari possit, in hac serie potestatis x^n coefficiens erit $= n^{(2)}$, haec enim expressio assumta est ad significandum, quot modis numerus n ex numeris 1 et 2 per additionem oriri possit. Hinc igitur erit:

$$\mathfrak{B} = 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + \text{etc.}$$

atque ad similitudinem huius expressionis erit:

$$\mathfrak{A} = 1 + 1^{(1)}x + 2^{(1)}x^2 + 3^{(1)}x^3 + 4^{(1)}x^4 + 5^{(1)}x^5 + 6^{(1)}x^6 + \text{etc.}$$

Deinde vero cum sit $\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$ et $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ erit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(1 - x^2)$, vnde sequens inter has series relatio oritur:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \quad &= 1 + 1^{(1)}x + 2^{(1)}x^2 + 3^{(1)}x^3 + 4^{(1)}x^4 + 5^{(1)}x^5 + 6^{(1)}x^6 + \text{etc.}\\
\left.\begin{aligned} +\mathfrak{B} \\ -\mathfrak{B}x^2 \end{aligned}\right\} &\begin{aligned} &= 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + \text{etc.}\\ &\qquad\qquad - x^2 - 1^{(2)}x^3 - 2^{(2)}x^4 - 3^{(2)}x^5 - 4^{(2)}x^6 - \text{etc.}\end{aligned}
\end{aligned}$$

Quodsi hinc coaequatio terminorum homogeneorum instituatur, erit:

$1^{(2)} = 1^{(1)}$	$4^{(2)} = 4^{(1)} + 2^{(2)}$	$7^{(2)} = 7^{(1)} + 5^{(2)}$
$2^{(2)} = 2^{(1)} + 1$	$5^{(2)} = 5^{(1)} + 3^{(2)}$	$8^{(2)} = 8^{(1)} + 6^{(2)}$
$3^{(2)} = 3^{(1)} + 1^{(2)}$	$6^{(2)} = 6^{(1)} + 4^{(2)}$	$9^{(2)} = 9^{(1)} + 7^{(2)}$

§. 30. Generaliter ergo erit $n^{(2)} = n^{(1)} + (n-2)^{(2)}$. Cum igitur sit $n^{(1)} = 1$, erit $n^{(2)} = 1 + (n-2)^{(2)}$; sicque coefficientes seriei $\mathfrak{B}$ ita determinabuntur, vt quis-

que

quo terminus vltimus aequalis sit antepenultimo vnitate aucto. Seu cum series $\mathfrak{A}$ omnes coefficientes sint vnitates, ex serie $\mathfrak{A}$ sequenti modo series $\mathfrak{B}$ formabitur:

$$
\begin{array}{l}
\mathfrak{A} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \text{etc.} \\
\qquad\qquad\qquad 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 \\
\hline
\mathfrak{B} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 5x^9 + \text{etc.}
\end{array}
$$

Scilicet cum seriei $\mathfrak{B}$ duo termini initiales $1 + x$ constent, subscribantur ii sub terminis tertio et quarto seriei $\mathfrak{A}$, hincque per additionem oriuntur termini tertius et quartus seriei $\mathfrak{B}$, qui porro terminis quinto et sexto seriei $\mathfrak{A}$ subscripti et additi dabunt terminos quintum et sextum seriei $\mathfrak{B}$, hocque modo series $\mathfrak{B}$, quousque libuerit, facillime continuatur. Patet autem hinc esse $n^{(2)} = \frac{1}{2}\left(n \genfrac{}{}{0pt}{}{\mp}{+} \frac{1}{2}\right)$, scilicet si n est numerus impar, erit $n^{(2)} = \frac{1}{2}(n + 1)$, sin autem n sit numerus par, erit $n^{(2)} = \frac{1}{2}(n + 2)$.

§. 31. Cum porro sit $\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ erit $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}(1 - x^3)$, vnde cum seriei $\mathfrak{C}$ terminus generalis sit $n^{(3)}x^n$ sequens nascetur relatio inter series $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$:

$$
\begin{array}{l}
\mathfrak{B} = 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + \text{etc.} \\
\left.\begin{array}{l} +\mathfrak{C} \\ -\mathfrak{C}x^3 \end{array}\right\} = \begin{array}{l} 1 + 1^{(3)}x + 2^{(3)}x^2 + 3^{(3)}x^3 + 4^{(3)}x^4 + 5^{(3)}x^5 + 6^{(3)}x^6 + \text{etc.} \\ 1 + 1^{(3)}x + 2^{(3)}x^2 + 3^{(3)}x^3 + 4^{(3)}x^4 + 5^{(3)}x^5 + 6^{(3)}x^6 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - 1x^3 - 1^{(3)}x^4 - 2^{(3)}x^5 - 3^{(3)}x^6 - \text{etc.} \end{array}
\end{array}
$$

Si iam hic aequatio inter terminos homogeneos instituatur erit:

$$
\begin{array}{l|l|l}
1^{(3)} = 1^{(2)} & 4^{(3)} = 4^{(2)} + 1^{(3)} & 7^{(3)} = 7^{(2)} + 4^{(3)} \\
2^{(3)} = 2^{(2)} & 5^{(3)} = 5^{(2)} + 2^{(3)} & 8^{(3)} = 8^{(2)} + 5^{(3)} \\
3^{(3)} = 3^{(2)} + 1 & 6^{(3)} = 6^{(2)} + 3^{(3)} & 9^{(3)} = 9^{(2)} + 6^{(3)}
\end{array}
$$

et generaliter $n^{(3)} = n^{(2)} + (n-3)^{(3)}$

 Series

Series ergo $\mathfrak{C}$ ex ſerie $\mathfrak{B}$ ſuisque terminis antecedentibus ſequenti modo facile formatur. Omittamus autem poteſtates ipſius x, quia totum negotium in coefficientibus verſatur:

$$\begin{array}{l}
\mathfrak{B} = 1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+ \text{etc.} \\
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 1+1+2+3+4+5+7+8+10 \\
\hline
\mathfrak{C} = 1+1+2+3+4+5+7+8+10+12+14+16+ \text{etc.}
\end{array}$$

Scilicet ſeriei $\mathfrak{B}$ ſubſcribatur ſeries $\mathfrak{C}$, initium ſub termino quarto faciendo, et pro vti hoc modo ſeries $\mathfrak{C}$ per additionem oritur, ita quoque ſub ſerie $\mathfrak{B}$ continuabitur.

§. 32. Quia deinde eſt $\mathfrak{D} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$ erit $\mathfrak{C} = (1-x^4)\mathfrak{D}$. Vnde ſimili modo, quo hactenus ſumus vſi, reperietur:

$$\begin{array}{l|l|l}
1^{(4)} = 1^{(3)} & 4^{(4)} = 4^{(3)} + 1 & 7^{(4)} = 7^{(3)} + 3^{(4)} \\
2^{(4)} = 2^{(3)} & 5^{(4)} = 5^{(3)} + 1^{(4)} & 8^{(4)} = 8^{(3)} + 4^{(4)} \\
3^{(4)} = 3^{(3)} & 6^{(4)} = 6^{(3)} + 2^{(4)} & 9^{(4)} = 9^{(3)} + 5^{(4)}
\end{array}$$

et generaliter $n^{(4)} = n^{(3)} + (n-4)^{(4)}$

Pari modo vlterius progrediendo colligetur fore:

$$n^{(5)} = n^{(4)} + (n-5)^{(5)}$$
$$n^{(6)} = n^{(5)} + (n-6)^{(6)}$$
$$n^{(7)} = n^{(6)} + (n-7)^{(7)}$$

etc.

Generatim ergo hinc colligetur fore:

$$n^{(m)} = n^{(m-1)} + (n-m)^{(m)}$$

Vbi notandum eſt, ſi fuerit $n < m$, tum terminum $(n-m)^{(m)}$ prorſus euaneſcere, ſin autem ſit $n = m$, etiamſi ſit $n-m = 0$, tamen terminum $(n-m)^{(m)}$ valere vnitatem. Deinde ſi ſit $n-m = 1$, quoque erit $(n-m)^{(m)} = 1$.

Erit

Erit ergo perpetuo tam $0^{(m)} = 1$, quam $1^{(m)} = 1$, et $n^{(1)} = 1$.

§. 33. His relationibus inter series 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, etc. notatis eae facillime formantur, et quousque libuerit, continuantur, quae operatio per hic adiunctum schematismum fiet manifestum:

	1,	x^1,	x^2,	x^3,	x^4,	x^5,	x^6,	x^7,	x^8,	x^9,	x^{10},	x^{11},	x^{12},	x^{13},	x^{14},	x^{15},	etc.
𝔄 =	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	etc.
			1 +	1 +	2 +	2 +	3 +	3 +	4 +	4 +	5 +	5 +	6 +	6 +	7 +	7 +	etc.
𝔅 =	1 +	1 +	2 +	2 +	3 +	3 +	4 +	4 +	5 +	5 +	6 +	6 +	7 +	7 +	8 +	8 +	etc.
				1 +	1 +	2 +	3 +	4 +	5 +	7 +	8 +	10 +	12 +	14 +	16 +	19 +	etc.
ℭ =	1 +	1 +	2 +	3 +	4 +	5 +	7 +	8 +	10 +	12 +	14 +	16 +	19 +	21 +	24 +	27 +	etc.
					1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	6 +	9 +	11 +	15 +	18 +	23 +	27 +	etc.
𝔇 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	6 +	9 +	11 +	15 +	18 +	23 +	27 +	34 +	39 +	47 +	54 +	etc.
						1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	10 +	13 +	18 +	23 +	30 +	etc.
𝔈 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	10 +	13 +	18 +	23 +	30 +	37 +	47 +	57 +	70 +	84 +	etc.
							1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	14 +	20 +	26 +	etc.
𝔉 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	14 +	20 +	26 +	35 +	44 +	58 +	71 +	90 +	110 +	etc.
								1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	21 +	etc.
𝔊 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	21 +	28 +	38 +	49 +	65 +	82 +	105 +	131 +	etc.
									1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	etc.
ℌ =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	29 +	40 +	52 +	70 +	89 +	116 +	146 +	etc.
										1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	etc.
ℑ =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	41 +	54 +	73 +	94 +	123 +	157 +	etc.
											1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	etc.
𝔎 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	42 +	55 +	75 +	97 +	128 +	164 +	etc.
												1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	etc.
𝔏 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	42 +	56 +	76 +	99 +	131 +	169 +	etc.
													1 +	1 +	2 +	3 +	etc.
𝔐 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	42 +	56 +	77 +	100 +	133 +	172 +	etc.
														1 +	1 +	2 +	etc.
𝔑 =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	42 +	56 +	77 +	101 +	134 +	174 +	etc.

§. 34. Hoc modo tabula hic adiuncta per solam continuam additionem est constructa, atque ratio constructionis tam est perspicua ex inspectione, vt ampliori explicatione non egeat. Ope huius tabulae igitur immediate resoluitur hoc Problema, quo quaeritur, *quot variis modis datus numerus* n *ex his numeris* 1, 2, 3 . . . . . m *per additionem produci possit.*

Sic si quaeratur, quot variis modis numerus 10 ex his numeris 1, 2, et 3 per additionem oriri possit, erit $n = 10$ et $m = 3$, atque ex tabula reperitur modorum numerus $= 14$, qui modi sunt:

$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$	$10 = 1+1+1+2+2+3$
$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+2$	$10 = 1+1+2+2+2+2$
$10 = 1+1+1+1+1+1+1+3$	$10 = 1+1+2+3+3$
$10 = 1+1+1+1+1+1+2+2$	$10 = 1+2+2+2+3$
$10 = 1+1+1+1+1+2+3$	$10 = 1+3+3+3$
$10 = 1+1+1+1+2+2+2$	$10 = 2+2+2+2+2$
$10 = 1+1+1+1+3+3$	$10 = 2+2+3+3$

Si quaeratur, quot variis modis numerus 25 ex his numeris 1, 2, 3, 4, 5 per additionem produci possit, facto $n = 25$ et $m = 5$, reperietur ex tabula numerus modorum $= 377$.

Si quaeratur quot variis modis numerus 50 ex his numeris 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. 8, 9, 10 per additionem resultare possit, posito $n = 50$ et $m = 10$, inuenitur modorum numerus $= 62740$

Si vel numerus propositus, vel numerus partium maior sit quam in tabula, tum nihilo minus casuum numerus ex tabula ope formularum supra inuentarum colligi poterit. Vti si quaeratur, quot modis numerus 60 ex his numeris 1, 2, 3 . . . . 20 per additionem resultare possit, erit $n = 60$ et $m = 20$, quaeriturque valor formulae $60^{(20)}$. Est vero $60^{(20)} = 60^{(19)} + 40^{(20)}$, at $60^{(19)} = 60^{(18)} + 41^{(19)}$, porroque $60^{(18)} = 60^{(17)} + 42^{(18)}$, et $60^{(17)} = 60^{(16)} + 43^{(17)}$, sicque deinceps. Vnde tandem erit $60^{(20)} = 40^{(20)} + 41^{(19)} + 42^{(18)} + 43^{(17)} + 44^{(16)} + \ldots\ldots\ 59^{(1)}$, qui numeri ex tabula collecti dant 792131, totque modis numerus 60 ex numeris 1, 2, 3 . . . . . 20 per additionem elici potest.

§. 35.

§. 35. Ope huius tabulae deinde ambo Problemata *Cel. Naudei* expedite resolui possunt. At primo quidem si quaeratur, *quot variis modis datus numerus* N *in* m *partes inter se inaequales dispertiri possit, hoc fiet, vti supra ostendimus, tot modis, quot vnitates continentur in hac expressione* $(N - \frac{m(m+1)}{2})^{(m)}$ *quam tabula indicat.* Vsum igitur huius tabulae aliquot exemplis ostendamus.

I. *Quaeratur, quot variis modis numerus* 25 *in quinque partes inaequales dispertiri possit?*
Erit ergo hic $N = 25$ et $m = 5$, vnde $\frac{m(m+1)}{2} = 15$ et responsum continebit formula $10^{(5)}$, quae ex tabula est $= 30$ ita vt partitio 30 modis institui possit:

II. *Quaeratur, quot variis modis numerus* 50 *in* 7 *partes inaequales dispertiri possit?*
Hic est $N = 50$, $m = 7$ et $N - \frac{m(m+1)}{2} = 22$, vnde numerus partitionum quaesitus est $= 22^{(7)} = 522$.

III. *Quaeratur, quot variis modis numerus* 100 *in* 10 *partes inaequales dispertiri possit?*
Cum sit $N = 100$ et $m = 10$ erit $N - \frac{m(m+1)}{2} = 45$ et numerus partitionum reperietur $45^{(10)} = 33401$.

IV. *Quaeratur, quot diuersis modis numerus* 256 *in* 20 *partes inaequales dispertiri possit?*
Ob $N = 256$ et $m = 20$ erit $N - \frac{m(m+1)}{2} = 46$, et numerus partitionum fiet $= 46^{(20)} = 96271$.

V. *Quaratur, quot diuersis modis numerus* 270 *in* 20 *partes inaequales dispertiri possit?*
Ob $N = 270$ et $m = 20$ erit $N - \frac{m(m+1)}{2} = 60$,

ideo.

ideoque numerus partitionum quaesitus fit $= 60^{(20)}$, cuius valorem ante inuenimus esse $= 791131$. Tot ergo diuersis modis numerus 270 in 20 partes inaequales dispertiri potest.

§. 36. Simili modo ex tabula quoque alterum Problema resoluetur, quo quaerebatur: *quot variis modis numerus N in m partes aequalitate partium non exclusa dispertiri possit?*
Supra enim ostendimus partitionum numerum quaesitum contineri in hac formula $(N-m)^{(m)}$, quem valorem ex tabula depromere licet. Quae solutio quo facilius intelligatur, aliquot exempla adiiciamus.

I. *Quaeratur, quot variis modis numerus 25 in quinque partes siue aequales siue inaequales dispertiri possit?*
Hic est $N = 25$ et $m = 5$ vnde $N-m = 20$, et partitionum numerus erit $20^{(20)} = 192$.

II. *Quaeratur, quot variis modis numerus 50 in septem partes siue aequales siue inaequales dispertiri possit?*
Ob $N = 50$ et $m = 7$ erit $N-m = 43$; et partitionum numerus quaesitus fiet $43^{(7)} = 8946$.

III. *Quaeratur, quot variis modis numerus 50 in decem partes siue aequales siue inaequales dispertiri possit?*
Ob $N = 50$ et $m = 10$ erit $N-m = 40$ et partitionum numerus erit $40^{(10)} = 16928$.

IV. *Quaeratur, quot variis modis numerus 60 in 12 partes siue aequales siue inaequales dispertiri possit?*
Cum sit $N = 60$ et $m = 12$ erit $N-m = 48$, et partitionum numerus quaesitus erit $48^{(12)} = 74287$.

V. *Quaeratur, quot variis modis numerus 80 in 20 partes siue aequales siue inaequales dispertiri possit?*

Erit

Erit ergo $N = 80$ et $m = 20$, vnde $N - m = 60$, et partitionum numerus erit: $= 60^{(20)} = 791131$.

§. 37. In ſeriebus horizontalibus, quas tabula exhibet notatu digna eſt conuenientia inter terminos initiales harum ſerierum, quae eo longius procedit, quo maior fuerit numerus m: ſic ſeries decima quinta quindecim ſuos terminos initiales cum omnibus ſeriebus ſequentibus habet communes. Hinc inueniri poterit ſeries, quae numero m in infinitum aucto reſpondet, quae ergo continebit valores huius formulae $n^{(\infty)}$; quae denotat, quot variis modis numerus n, ex omnibus prorſus numeris integris per additionem produci poſſit. Haec ergo quaeſtio digna videtur, quae diligentius euoluatur. Cum $n^{(\infty)}$ complectatur omnes omnino partitiones numeri n, pro quocunque partium numero ſimul ſumtas: erit $n^{(\infty)}$ aggregatum ex numeris partitionum in 1, 2, 3, 4, . . . vsque ad n partes, ſiue aequales, ſiue inaequales; quia numerus n in plures quam n partes ſecari nequit. Quam ob rem erit:

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(1)} + (n-2)^{(2)} + (n-3)^{(3)} + (n-4)^{(4)} + (n-5)^{(5)} + \ldots \ldots (n-n)^{(n)}$$

in qua ſerie tam primus terminus $(n-1)^{(1)}$, qui denotat ſectionem in vnam partem, quam vltimus $(n-n)^{(n)}$, qui denotat ſectionem in n partes, eſt vnitas. Hinc igitur ſeries numerorum $n^{(\infty)}$, quae in calce tabulae exhibetur per additionem terminorum ex ſuperioribus ſeriebus inueniri poteſt. Sic erit: $6^{(\infty)} = 5^{(1)} + 4^{(2)} + 3^{(3)} + 2^{(4)} + 1^{(5)} + 0^{(6)} = 1 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$, qui numerus in infima tabulae ſerie ſub numero 6 habetur.

§. 38. Poteſt autem haec operatio contrahi ope Lemmatis ſupra inuenti $n^{(m)} = n^{(m-1)} + (n-m)^{(m)}$, vnde fit $n^{(m)} - n^{(m-1)} = (n-m)^{(m)}$.

 Cum

Cum enim sit:

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(1)} + (n-2)^{(2)} + (n-3)^{(3)} + (n-4)^{(4)} + (n-5)^{(5)} + (n-6)^{(6)} + \text{etc.}$$

si vbique loco n scribatur $n-1$, erit:

$$(n-1)^{(\infty)} = (n-1)^{0} + (n-2)^{(1)} + (n-3)^{2} + (n-4)^{(3)} + (n-5)^{(4)} + (n-6)^{(5)} + \text{etc.}$$

vbi ob vniformitatem praefigitur terminus $(n-1)^{0}$, cuius valor est $= 0$. Si igitur inferior series a superiori subtrahatur, ope Lemmatis prodibit:

$$n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} = (n-2)^{(1)} + (n-4)^{(2)} + (n-6)^{(3)} + (11-8)^{(4)} + (n-10)^{(5)} + (n-12)^{(6)}$$

sicque terminus quisque $n^{(\infty)}$ ope praecedentis $(n-1)^{(\infty)}$ per additionem duplo pauciorum terminorum quam ante inuenitur. Erit ergo ex: gr. $12^{(\infty)} = 11^{(\infty)} + 10^{(1)} + 8^{(2)} + 6^{(3)} + 4^{(4)} + 2^{(5)} + 0^{(6)}$ siue $12^{(\infty)} = 56 + 1 + 5 + 7 + 5 + 2 + 1 = 77$, qui numerus quoque pro valore ipsius $12^{(\infty)}$ in tabula reperitur.

§. 39. Simili modo haec operatio vlterius contrahi potest, cum enim sit:

$$n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} = (n-2)^{(1)} + (n-4)^{(2)} + (n-6)^{(3)} + (n-8)^{(4)} + (n-10)^{(5)} + \text{etc.}$$

si loco n ponamus $n-2$ habebimus:

$$(n-2)^{(\infty)} - (n-3)^{(\infty)} = (n-2)^{(0)} + (n-4)^{(1)} + (n-6)^{(2)} + (n-8)^{(3)} + (n-10)^{(4)} + \text{etc.}$$

vbi ob vniformitatem terminum $(n-2)^{(0)} = 0$ praemittimus. Nunc hanc seriem a superiore subtrahendo ope Lemmatis obtinebimus:

$$\left.\begin{array}{l} +n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} \\ -(n-2)^{(\infty)} + (n-3)^{(\infty)} \end{array}\right\} = (n-3)^{(1)} + (n-6)^{(2)} + (n-9)^{(3)} + (n-12)^{(4)} + (n-15)^{(5)} + \text{etc.}$$

Haec ergo series si dicatur $= P$ erit:

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(\infty)} + (n-2)^{(\infty)} - (n-3)^{(\infty)} + P.$$

In serie ergo quaesita ad definiendum terminum quemuis $n^{(\infty)}$ praeter valorem ipsius P nosse oportet ternos termi-

nos

nos praecedentes. Hoc modo procedendo tandem quantitas P euanescet, et quilibet terminus istius seriei per solos terminos praecedentes definietur, quae est proprietas serierum recurrentium.

§. 40. Hanc vero seriem re vera esse recurrentem ex eius genesi est manifestum, cum oriatur ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\ \text{etc.}}$$

Scala ergo relationis istius seriei habebitur, si iste denominator actu per multiplicationem euoluatur. Instituta autem hac multiplicatione denominator sequenti modo expressus inuenietur.

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-x^{70}-x^{77}+\text{etc.}$$

Quae ipsius x potestates qualem teneant legem, ex ipsa formatione vix definiri posse videtur; interim tamen ex inspectione mox patet, alternatim binos terminos esse affirmatiuos et negatiuos. Neque minus exponentes ipsius x certam legem tenere obseruantur, vnde eius terminus generalis colligitur esse $x^{n(3n\pm 1):2}$. Scilicet nullae aliae potestates occurrunt nisi quarum exponentes continentur in hac formula $\frac{3nn\pm n}{2}$, et ita quidem vt potestates, quae ex numeris imparibus pro n assumtis oriuntur, habeant signum $-$, quae vero ex numeris paribus formantur, signum $+$.

§. 41. Haec igitur forma nobis suppeditat scalam relationis seriei quaesitae, qua constat fore:

$$n^{(*)}=(n-1)^{(*)}+(n-2)^{(*)}-(n-5)^{(*)}-(n-7)^{(*)}+(n-12)^{(*)}+(n-15)^{(*)}$$
$$-(n-22)^{(*)}-(n-26)^{(*)}+(n-35)^{(*)}+(n-40)^{(*)}(n-51)^{(*)}-(n-57)^{(*)}+\text{etc.}$$

Hanc autem legem progressionis locum habere tentanti facile patebit. Sit enim $n = 30$ reperietur fore:

$$30^{(\infty)} = 29^{(\infty)} + 28^{(\infty)} - 25^{(\infty)} - 23^{(\infty)} + 18^{(\infty)} + 15^{(\infty)} - 8^{(\infty)} - 4^{(\infty)}$$

est enim his numeris ex tabula desumtis

$$5604 = 4565 + 3718 - 1958 - 1255 + 385 + 176 - 22 - 5$$

Atque hoc modo ista series quo vsque libuerit continuari potest.

§. 42. Quoniam vero series pro valore $m = 20$ iam est formata, ex ea aliquanto facilius series quaesita pro valore $m = \infty$ erui poterit. Cum enim series $n^{(20)}$ formetur ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \quad \ldots\ldots \quad (1-x^{20})}$$

series vero $n^{(\infty)}$ ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \quad \ldots\ldots \quad (1-x^{\infty})}$$

manifestum est si haec series multiplicetur per

$$(1-x^{21})(1-x^{22})(1-x^{23})(1-x^{24})(1-x^{25}) \text{ etc. seu per}$$

$$1 - x^{21} - x^{22} - x^{23} - x^{24} - x^{25} - x^{26} - x^{27} - \text{etc.}$$
$$+ x^{43} + x^{44} + 2x^{45} + 2x^{46} + 3x^{47} + 3x^{48} + 4x^{49} + 4x^{50} + \text{etc.}$$
$$- x^{66} - x^{67} - 2x^{68} - 3x^{69} - 4x^{70} - 5x^{71} - 7x^{72} - 8x^{73} - 10x^{74} - \text{etc.}$$
$$+ x^{90} + x^{91} + 2x^{92} + 3x^{93} + 5x^{94} + 6x^{95} + 9x^{96} + 11x^{97} + 15x^{98} + \text{etc.}$$
$$- x^{115} - x^{116} - 2x^{117} - 3x^{118} - 5x^{119} - 7x^{120} - 10x^{121} - 13x^{122} - 18x^{123} - \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

tum prodire debere priorem. Hinc concluditur fore:

$n^{(20)}$

$$n^{(20)} = n^{(\infty)} - (n-21)^{(\infty)} - (n-22)^{(\infty)} - (n-23)^{(\infty)} - (n-24)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ (n-43)^{(\infty)} + (n-44)^{(\infty)} + 2(n-45)^{(\infty)} + 2(n-46)^{(\infty)} + 3(n-47)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- (n-66)^{(\infty)} - (n-67)^{(\infty)} - 2(n-68)^{(\infty)} - 3(n-69)^{(\infty)} - 4(n-70)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ (n-90)^{(\infty)} + (n-91)^{(\infty)} + 2(n-92)^{(\infty)} + 3(n-93)^{(\infty)} + 5(n-94)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- (n-115)^{(\infty)} - (n-116)^{(\infty)} - 2(n-117)^{(\infty)} - 3(n-118)^{(\infty)} - 5(n-119)^{(\infty)} - \text{etc}$$
$$\text{etc.}$$

quarum serierum coefficientes procedunt secundum series superiores pro partitione numerorum in 2, 3, 4, 5, 6, etc. partes inseruientes.

§. 43. Denotet $\int (n-21)^{(\infty)}$ summam omnium terminorum seriei $n^{(\infty)}$, quae est:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 15 + 22 + 30 + \text{etc.}$$

vsque ad terminum $(n-21)^{(\infty)}$ inclusiue: similique modo sit generaliter $\int p^{(\infty)}$ summa omnium terminorum eiusdem seriei vsque ad terminum $p^{(\infty)}$ inclusiue, quae summae cum successiue facile formentur, erit

$$n^{(20)} = n^{(\infty)} - \int(n-21)^{(\infty)} + \int(n-43)^{(\infty)} + \int(n-45)^{(\infty)} + \int(n-47)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- \int(n-66)^{(\infty)} - \int(n-68)^{(\infty)} - \int(n-69)^{(\infty)} - \int(n-70)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ \int(n-90)^{(\infty)} + \int(n-92)^{(\infty)} + \int(n-93)^{(\infty)} + 2\int(n-94)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Hincque adeo erit:

$$n^{(\infty)} = n^{(20)} + \int(n-21)^{(\infty)} - \int(n-43)^{(\infty)} - \int(n-45)^{(\infty)} - \int(n-47)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ \int(n-66)^{(\infty)} + \int(n-68)^{(\infty)} + \int(n-69)^{(\infty)} + \int(n-70)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- \int(n-90)^{(\infty)} - \int(n-92)^{(\infty)} - \int(n-93)^{(\infty)} - 2\int(n-94)^{(\infty)} - \text{etc.}$$

Huius formulae ope, nisi n sit numerus valde magnus, ex serie pro partitione in 20 partes inseruiente ipsa series $n^{(\infty)}$ facile constituitur, hocque modo ea in tabula constructa exhibetur, cum vbique excessus terminorum $x^{(n)}$ supra terminos $x^{(\infty)}$ sint assignati.

§. 44. Hac igitur serie constructa proposito quocunque numero definiri poterit, quot omnino modis is in partes dispertiri possit. Sic patet numerum 10 omnino 42 modis ex additione resultare posse; atque numerus 59 tot modis, quot indicat iste numerus 831820 per additionem produci poterit. Sin autem numeri maiores proponantur, tum tabula hic exhibita vlterius continuari, vel pro quouis casu numerus desideratus per praecepta hic tradita inuestigari debet. In his autem partitionibus aequalitas partium non excluditur. Vnde nouum oritur Problema, *quo pro quouis numero proposito quaeritur omnium partitionum numerus in partes inter se inaequales*, quod Problema resoluetur ope huius expressionis:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\ \text{etc.}$$

His enim factoribus in se inuicem multiplicatis orietur series, in qua quilibet coefficiens ostendet, quot variis modis exponens ipsius x in partes inter se inaequales dispertiri possit.

§. 45. Quod si autem hoc productum actu euoluatur, reperietur haec series:

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+10x^{10}+12x^{11}+15x^{12}$$
$$+18x^{13}+22x^{14}+27x^{15}+32x^{16}+38x^{17}+46x^{18}+54x^{19}+64x^{20}+76x^{21}+89x^{22}+\text{etc.}$$

quae cum sit productum ex factoribus infinitis tam simplicem legem seruantibus, omni attentione digna videtur. Ac primo quidem manifestum est coefficientes horum terminorum plerumque esse pares, et eos solum esse impares, qui sint cum eiusmodi ipsius x potestatibus coniuncti, quarum exponentes in hac forma $\frac{3nn\pm n}{2}$ continentur neantur: cuius phaenomeni eadem est ratio, atque illius quod circa exponentes eiusdem formae $\frac{3nn\pm n}{2}$ in euolutione producti $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)$ etc. obseruauimus. Cum autem sit:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)+etc. = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\ etc.}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ etc.}$$

apparet, seriem ante inuentam exprimi hac fractione:

$$\frac{1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+x^{44}+x^{52}-x^{70}-x^{80}+\ etc.}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ etc.}$$

vnde ea ad modum serierum recurrentium formari poterit.

§. 46. Facillime autem sine dubio haec series construitur ex ipsa eius indole, qua cuiuslibet termini coefficiens indicare debet, quot variis modis exponens ipsius x in partes inaequales dispertiri possit. Sit N coefficiens potestatis x^n in ista serie, eritque:

$$N = (n-1)^{(1)} + (n-3)^{(2)} + (n-6)^{(3)} + (n-10)^{(4)} + (n-15)^{(5)} + (n-21)^{(6)} + \text{etc.}$$

nam $(n-1)^{(1)} = 1$ indicat numerum n vnico modo ex vna parte constare: $(n-3)^{(2)}$ ostendit, quot modis numerus n in duas partes inaequales, $(n-6)^{(3)}$ ostendit, quot modis numerus n in tres partes inaequales distribui possit, et ita porro: vnde et haec series ope tabulae datae quousque libuerit continuari potest. Ceterum hic notatu dignum est, si numeri partitionum in partes numero pares negatiue capiantur, hanc expressionem resultantem:

$$(n-1)^{(1)} - (n-3)^{(2)} + (n-6)^{(3)} - (n-10)^{(4)} + (n-15)^{(5)} - (n-21)^{(6)} + \text{etc.}$$

semper esse $= 0$, nisi fuerit n numerus in hac forma contentus $\frac{3zz\pm z}{2}$; sin autem n in hac forma contineatur, tum illius expressionis valorem esse vel $+1$ vel -1, pro vt z fuerit numerus vel impar vel par.

§. 47.

§. 47. Quemadmodum hactenus omnes numeros integros ad partes constituendas admisimus, ita partium conditione limitanda numerus quaestionum in infinitum augeri posset: cui negotio, cum methodus certa ad huiusmodi quaestiones resoluendas sit tradita, non diutius immorabimur. Sufficiat ex praecedente insignem proprietatem partitionis in partes impares annotasse. Cum sit:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ etc. = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)\ etc.}$$

quae formula ex aequatione in §. XLIV. exhibita sponte fluit, hinc sequitur, quemuis numerum totidem modis ex numeris solis imparibus per additionem produci posse, quot modis idem numerus omnino in partes inter se inaequales dispertiri possit. Sic cum numerus 10 decem modis in partes inaequales dispertiri possit, qui modi sunt:

$10 = 10$	$10 = 1 + 2 + 7$
$10 = 1 + 9$	$10 = 1 + 3 + 6$
$10 = 2 + 8$	$10 = 1 + 4 + 5$
$10 = 3 + 7$	$10 = 2 + 3 + 5$
$10 = 4 + 6$	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$

idem numerus 10 quoque decem modis ex solis numeris imparibus per additionem produci potest, hoc modo

$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$	$10 = 1+3+3+3$
$10 = 1+1+1+1+1+1+1+3$	$10 = 1+1+1+1+3+3$
$10 = 1+1+1+1+1+5$	$10 = 1+1+3+5$
$10 = 1+1+1+7$	$10 = 3+7$
$10 = 1+9$	$10 = 5+5$

§. 48. Relictis autem his speculationibus progredior ad inuestigandum, quomodo quisque numerus ex terminis progressionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc.

etc. per additionem formari possit. Ac primo quidem si istae partes inter se debeant esse omnes inaequales, quaestio resoluetur per euolutionem huius expressionis:

$$s=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\text{etc.}$$

Multiplicatione enim actu instituta, cuiusque termini coefficiens indicabit, quot modis exponens potestatis ipsius x adiunctae ex numeris progressionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, etc. per additionem produci possit. Cum igitur quiuis numerus vnico modo sic resolui posse obseruatus sit, ostendendum est in hac serie omnes ipsius x potestates occurrere, omniumque eundem esse coefficientem vnitatem.

§. 49. Vt hoc demonstremus, ponamus esse

$$s=1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\zeta x^6+\eta x^7+\theta x^8+\text{etc.}$$

atque ad valores coefficientium α, β, γ, δ, etc. eruendos, ponamus xx loco x, sitque valor pro s hoc modo resultans $=t$, erit:

$$t=(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\text{ etc.}$$

ideoque fiet $s=(1+x)t$. Qua relatione in seriebus considerata ob $t=1+\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6+\delta x^8+\varepsilon x^{10}+$ etc. habebitur:

$$(1+x)t=1+x+\alpha x^2+\alpha x^3+\beta x^4+\beta x^5+\gamma x^6+\gamma x^7+\delta x^8+\delta x^9+\text{etc.}$$

quae cum aequalis esse debeat seriei s, comparatio coefficientium dabit:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
\alpha=1 & \delta=\beta & \eta=\gamma & \varkappa=\varepsilon \\
\beta=\alpha & \varepsilon=\beta & \theta=\delta & \lambda=\varepsilon \\
\gamma=\alpha & \zeta=\gamma & \iota=\delta & \mu=\zeta
\end{array}\quad\text{etc.}$$

 vnde

vnde manifestum est, singulos coefficientes esse vnitati aequales, ac propterea esse:

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \text{etc.} = \frac{1}{1-x},$$

quod idem per se perspicuum est, cum sit:

$$(1-x), (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) \text{ etc.} = 1.$$

§. 50. Sin autem quaeratur, quot variis modis quisque numerus ex terminis progressionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, etc. partium aequalitate non amplius sublata, per additionem produci queat: solutio petenda erit ex euolutione huius fractionis:

$$s = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})(1-x^{32})} \text{ etc.}$$

hac enim in serie euoluta coefficiens cuiusque termini ostendet, quot variis modis exponens potestatis ipsius x adiunctae ex terminis progressionis Geometricae propositae per additionem resultare possit. Ponamus xx loco x, et valor ipsius s abeat in t, erit:

$$t = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16}) \text{ etc.}} = (1-x)s,$$

sit igitur:

$$s = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \iota x^9 + \text{etc.}$$

erit:

$$\begin{array}{llllllllllll}
(1-x)s = 1 & + \alpha x & + \beta x^2 & + \gamma x^3 & + \delta x^4 & + \varepsilon x^5 & + \zeta x^6 & + \eta x^7 & + \theta x^8 & + \iota x^9 & \text{etc.} \\
 & - 1 & - \alpha & - \beta & - \gamma & - \delta & - \varepsilon & - \zeta & - \eta & - \theta & \text{etc.} \\
= t = 1 & & + \alpha x^2 & & + \beta x^4 & & + \gamma x^6 & & + \delta x^8 & & \text{etc.}
\end{array}$$

vnde

vnde ex aequalitate terminorum homogeneorum obtinebitur:

$$\begin{array}{lll|lll|lll}
\alpha = 1 & & = 1 & \eta = \zeta & & = 6 & \nu = \mu & & = 20 \\
\beta = \alpha + \alpha & & = 2 & \theta = \eta + \delta & & = 10 & \xi = \nu + \eta & & = 26 \\
\gamma = \beta & & = 2 & \iota = \theta + & & = 10 & o = \xi & & = 26 \\
\delta = \gamma + \beta & & = 4 & \varkappa = \iota + \varepsilon & & = 14 & \pi = o + \theta & & = 36 \\
\varepsilon = \delta & & = 4 & \lambda = \varkappa + & & = 14 & \rho = \pi & & = 36 \\
\zeta = \varepsilon + \gamma & & = 6 & \mu = \lambda + \zeta & & = 20 & \sigma = \rho + \iota & & = 46
\end{array} \quad \text{etc.}$$

§. 51. Notatu digna est haec series, cum quod bini termini sint vbique aequales, tum quod ea facillime quovsque libuerit continuetur. Vlterius autem continuata ita se habebit:

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 4x^5 + 6x^6 + 6x^7 + 10x^8 + 10x^9 + 14x^{10} + 14x^{11} + 20x^{12} + 20x^{13} + 26x^{14} + 26x^{15} + 36x^{16} + 36x^{17} + 46x^{18} + 46x^{19} + 60x^{20} + 60x^{21} + 74x^{22} + 74x^{23} + 94x^{24} + 94x^{25} + 114x^{26} + 114x^{27} + 140x^{28} + 140x^{29} + 166x^{30} + 166x^{31} + 202x^{32} + 202x^{33} + 238x^{34} + 238x^{35} + 284x^{36} + 284x^{37} + \text{etc.}$$

Ex hac ergo serie patet numerum verbi gratia 30 centum sexaginta, et sex modis ex terminis progressionis Geometricae duplae per additionem produci posse. Ceterum attendenti facile patebit, legem huius progressionis nullo modo per terminum generalem exprimi posse cum reuera sit series recurrens, cuius scala relationis in infinitum extendatur. Dabit autem hoc productum infinitum:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-{}^8)(1-x^{16})(1-x^{32}) \text{ etc.}$$

si euoluatur scalam relationis. Ad quam inueniendam ponatur hoc productum $= p$, quod abeat in q si loco x ponatur x^2, eritque: $q = (1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})$ etc. $= \frac{p}{1-x}$, seu $p = (1-x)q$. statuatur ergo:

$$p = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \iota x^9 + \varkappa x^{10} + \text{etc.}$$

eritque:

$$(1-x)q = 1 - x + \alpha x^2 - \alpha x^3 + \beta x^4 - \beta x^5 + \gamma x^6 - \gamma x^7 + \delta x^8 - \delta x^9 + \varepsilon x^{10} - \text{etc.}$$

vnde per coaequationem terminorum similium obtinetur:

$\alpha = -1 = -1$	$\theta = \delta = -1$	$o = -\eta = +1$
$\beta = \alpha = -1$	$\iota = -\delta = +1$	$\pi = \theta = -1$
$\gamma = -\alpha = +1$	$\varkappa = \varepsilon = +1$	$\rho = -\theta = +1$
$\delta = \beta = -1$	$\lambda = -\varepsilon = -1$	$\sigma = \iota = +1$
$\varepsilon = -\beta = +1$	$\mu = \zeta = +1$	$\tau = -\iota = -1$
$\zeta = \gamma = +1$	$\nu = -\zeta = -1$	$\upsilon = \varkappa = +1$
$\eta = -\gamma = -1$	$\xi = \eta = -1$	$\varphi = -\varkappa = -1$

etc.

§. 52. Coefficientes ergo feriei p, quae ex euolutione huius producti:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})(1-x^{32}) \text{ etc.}$$

nafcitur omnes funt vel $+1$ vel -1, neque tamen legem obtinent folito more affignabilem, erit enim:

$$p = 1 - x^1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + x^6 - x^7 - x^8 + x^9 + x^{10} - x^{11} + x^{12} - x^{13} - x^{14}$$
$$+ x^{15} - x^{16} + x^{17} + x^{18} - x^{19} + x^{20} - x^{21} - x^{22} + x^{23} + x^{24} - x^{25} - x^{26} + x^{27} - x^{28} + x^{29}$$
$$+ x^{30} - x^{31} - x^{32} + x^{33} + x^{34} - x^{35} + x^{36} - x^{37} - x^{38} + x^{39} + x^{40} - x^{41} - x^{42} + x^{43} - x^{44} \text{ etc.}$$

vbi notandum eft, quamlibet poteftatem exponentis imparis x^{2n+1} contrarium habere fignum ei, quod habet poteftas x^{2n}, huiusque fignum perpetuo conuenire cum figno poteftatis x^n; vnde cuiusuis poteftatis fignum facile affignabitur. Vti fi quaeratur fignum poteftatis huius x^{1745}, erit refpectu ad fola figna habito:

$$x^{1745} = -x^{1744} = -x^{872} = -x^{436} = -x^{218} = -x^{109} = +x^{108} =$$
$$+x^{54} = +x^{27} = -x^{26} = -x^{13} = +x^{12} = +x^{6} = +x^{3} = -x^{2} = -x^{1}$$

fignum ergo poteftatis x^{1745} contrarium eft figno poteftatis x^1 quod cum fit $-$ erit id $+$.

Tabula

Tabula indicans, quot variis modis quilibet numerus n ex numeris 1, 2, 3, 4, - - - - m per additionem produci possit, seu exhibens valores formulae $n^{(m)}$.

Num.	Valores numeri n.																					
m.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11
2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12
				1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33	37	40
3	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33	37	40	44	48	52
					1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64	72	84
4	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64	72	84	94	108	120	136
						1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101	119
5	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101	119	141	164	192	221	255
							1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	136
6	1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	136	163	199	235	282	331	391
								1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131
7	1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131	164	201	248	300	364	436	522
									1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116
8	1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146	186	230	288	352	434	525	638
										1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94
9	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157	201	252	318	393	488	598	732
											1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75
10	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164	212	267	340	423	530	653	807
												1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56
11	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131	169	219	278	355	445	560	695	863
													1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
12	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100	133	172	224	285	366	460	582	725	905
														1	1	2	3	5	7	11	15	22	30
13	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	134	174	227	290	373	471	597	747	935
															1	1	2	3	5	7	11	15	22
14	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	175	229	293	378	478	608	762	957
																1	1	2	3	5	7	11	15
15	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	230	295	381	483	615	773	972
																	1	1	2	3	5	7	11
16	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	296	383	486	620	780	983
																		1	1	2	3	5	7
17	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	384	488	623	785	990
																			1	1	2	3	5
18	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	489	625	788	995
																				1	1	2	3
19	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	626	790	998
																					1	1	2
20	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627	791	1000
																						1	2
∞	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627	792	1002

m.	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17
2	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17	18
	44	48	52	56	61	65	70	75	80	85	91	96
3	56	61	65	70	75	80	85	91	96	102	108	114
	94	108	120	136	150	169	185	206	225	249	270	297
4	150	169	185	206	225	249	270	297	321	351	378	411
	141	164	192	221	255	291	333	377	427	480	540	603
5	291	333	377	427	480	540	603	674	748	831	918	1014
	163	199	235	282	331	391	454	532	612	709	811	931
6	454	532	612	709	811	931	1057	1206	1360	1540	1729	1945
	164	201	248	300	364	436	522	618	733	860	1009	1175
7	618	733	860	1009	1175	1367	1579	1824	2093	2400	2738	3120
	146	186	230	288	352	434	525	638	764	919	1090	1297
8	764	919	1090	1297	1527	1801	2104	2462	2857	3319	3828	4417
	123	157	201	252	318	393	488	598	732	887	1076	1291
9	887	1076	1291	1549	1845	2194	2592	3060	3589	4206	4904	5708
	97	128	164	212	267	340	423	530	653	807	984	1204
10	984	1204	1455	1761	2112	2534	3015	3590	4242	5013	5888	6912
	76	99	131	169	219	278	355	445	560	695	863	1060
11	1060	1303	1586	1930	2331	2812	3370	4035	4802	5708	6751	7972
	56	77	100	133	172	224	285	336	460	582	725	905
12	1116	1380	1686	2063	2503	3036	3655	4401	5262	5290	7476	8877
	42	56	77	101	134	174	227	290	373	471	597	747
13	1158	1436	1763	2164	2637	3210	3882	4691	5635	5761	8073	9624
	30	42	56	77	101	135	175	229	293	378	478	608
14	1188	1478	1819	2241	2738	3345	4057	4920	5928	7139	8551	10232
	22	30	42	56	77	101	135	176	230	295	381	483
15	1210	1508	1861	2297	2815	3446	4192	5096	6158	7434	8932	10715
	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	296	383
16	1225	1530	1891	2339	2871	3523	4293	5231	6334	7665	9228	11098
	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297
17	1236	1545	1913	2369	2913	3579	4370	5332	6469	7841	9459	11395
	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231
18	1243	1556	1928	2391	2943	3621	4426	5409	6570	7976	9635	11626
	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176
19	1248	1563	1939	2406	2965	3651	4468	5465	6647	8077	9770	11802
	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135
20	1251	1568	1946	2417	2980	3673	4498	5507	6703	8154	9871	11937
	4	7	12	19	30	45	67	97	139	195	272	373
∞	1255	1575	1958	2436	3010	3718	4565	5604	6842	8349	10143	12310

m. 35

m	35	36	37	38	39	40	41	42	43
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	17	18	18	19	19	20	20	21	21
2	18	19	19	20	20	21	21	22	22
	102	108	114	120	127	133	140	147	154
3	120	127	133	140	147	154	161	169	176
	321	351	378	411	441	478	511	551	588
4	441	478	511	551	588	632	672	720	764
	678	748	831	918	1014	1115	1226	1342	1469
5	1115	1226	1342	1469	1602	1747	1898	2062	2233
	1057	1206	1360	1540	1729	1945	2172	2432	2702
6	2172	2432	2702	3009	3331	3692	4070	4494	4935
	1367	1579	1824	2093	2400	2738	3120	3539	4011
7	3539	4011	4526	5102	5731	6430	7190	8033	8946
	1527	1801	2104	2462	2857	3315	3828	4417	5066
8	5066	5812	6630	7564	8588	9745	1108	12450	14012
	1549	1845	2194	2592	3060	3585	4206	4904	5708
9	6615	7657	8824	10156	11648	13338	15224	17354	19720
	1455	1761	2112	2534	3015	3590	4242	5013	5888
10	8070	9418	10936	12690	1466	16928	19466	22367	25608
	1303	1586	1930	2331	2812	3370	4035	4802	5708
11	9373	11004	12866	15021	17475	20295	23501	27169	31316
	1116	1380	1686	2063	2503	3036	3655	4401	5262
12	10489	12384	14552	17084	19978	23334	27156	31570	36578
	935	1158	1436	1763	2164	2037	3210	3882	4691
13	11424	13542	15988	18847	22142	25971	30366	35452	41269
	762	957	1188	1478	1819	2241	2738	3345	4057
14	12186	14499	17176	20325	23961	28212	33104	38797	45326
	615	773	972	1210	1508	1861	2297	2815	3446
15	12801	15272	18148	21535	25469	30073	35401	41612	48772
	486	620	780	983	1225	1530	1891	2339	2871
16	13287	15892	18928	22518	26694	31603	37292	43951	51643
	384	488	623	785	990	1236	1545	1913	2369
17	13671	16380	19551	23303	27684	32839	38837	45464	54012
	297	385	489	625	788	995	1243	1556	1928
18	13968	16765	20040	23928	28472	33834	40080	47420	55940
	231	297	385	490	626	799	998	1248	1563
19	14199	17062	20425	24412	29092	34622	41078	48668	57503
	170	231	297	385	490	627	791	1000	1251
20	14375	17293	20722	24803	29588	35251	41869	49668	58754
	508	684	915	1212	1597	2087	2714	3506	4507
21	14883	17977	21637	26015	31185	37338	44583	53174	63261

m	44	45	46	47	48	49	50	51
1	1	1	1	1	1	1	1	1
	22	22	23	23	24	24	25	25
2	23	23	24	24	25	25	26	26
	161	169	176	184	192	200	208	217
3	184	192	200	208	217	225	234	243
	632	672	720	764	816	864	920	972
4	816	864	920	972	1033	1089	1154	1215
	1602	1747	1898	2062	2233	2418	2611	2818
5	2418	2611	2818	3034	3266	3507	3765	4033
	3005	3331	3692	4070	4494	4935	5427	5942
6	5427	5942	6510	7104	7760	8442	9192	9975
	4526	5102	5731	6430	7190	8033	8946	9953
7	9953	11044	12241	13434	14950	16475	18134	19928
	5812	6630	7564	8588	9749	11018	12450	14012
8	15765	17670	19805	22122	24699	27493	30588	33640
	6615	7657	8824	10156	11648	13338	15224	17354
9	22380	25331	28629	32278	36347	40831	45812	51294
	6912	8070	9418	10936	12690	14663	16928	19466
10	29292	33401	38047	43214	49037	55494	62740	70760
	6751	7972	9373	11004	12866	15021	17475	20298
11	36043	41373	47420	54218	61903	70515	80215	91058
	6290	7476	8877	10489	12384	14552	17084	19978
12	42333	48849	56297	64707	74287	85067	97299	111036
	5635	6761	8073	9624	11424	13542	15988	18847
13	47968	55610	64370	74331	85711	98609	113287	129883
	4920	5928	7139	8551	10232	12186	14499	17176
14	52888	61538	71509	82882	95943	110795	127786	147059
	4192	5096	6158	7434	8932	10715	12801	15272
15	57080	66634	77667	90316	104875	121510	140587	162331
	3523	4293	5231	6334	7665	9228	11098	13287
16	60603	70927	82898	96650	112540	130738	151685	175618
	2913	3579	4370	5332	6469	7841	9459	11395
17	63516	74506	87268	101982	119009	138579	161144	187013
	2391	2943	3621	4426	5409	6570	7976	9635
18	65907	77449	90889	106408	124418	145149	169120	196648
	1939	2406	2965	3651	4468	5465	6647	8077
19	67846	79855	93854	110059	128886	150614	175767	204725
	1568	1946	2417	2980	3673	4498	5507	6703
20	69414	81801	96271	113039	132559	155112	181274	211528
	5761	7333	9287	11715	[illegible]	18413	22952	28515
21	75175	89134	105558	124754	147273	173525	204226	239943

m	52	53	54	55	56	57	58	59
1	1	1	1	1	1	1	1	1
	26	26	27	27	28	28	29	29
2	27	27	28	28	29	29	30	30
	225	234	243	252	261	271	280	290
3	252	261	271	280	290	300	310	320
	1033	1089	1154	1215	1285	1350	1425	1495
4	1285	1350	1425	1495	1575	1650	1735	1815
	3034	3266	3507	3765	4033	4319	4616	4932
5	4319	4616	4932	5260	5608	5969	6351	6747
	6510	7104	7760	8442	9192	9975	10829	11720
6	10829	11720	12692	13702	14800	15944	17180	18467
	11044	12241	13534	14950	16475	18138	19928	21873
7	21873	23961	26226	28652	31275	34082	37108	40340
	15765	17674	19805	22122	24699	27493	30588	33940
8	37638	41635	46031	50774	55974	61575	67696	74280
	19720	22380	25331	28629	32278	36347	40831	45812
9	57358	64015	71362	79403	88252	97922	108527	120092
	22367	25608	29292	33401	38047	43214	49037	55494
10	79725	89623	100654	112804	126299	141136	157564	175586
	23501	27169	31316	36043	41373	47420	54218	61903
11	103226	116792	131970	148847	167672	188556	211782	237489
	23334	27156	31570	36578	42333	48849	56297	64707
12	126560	143948	163540	185425	210005	237405	268079	302196
	22142	25971	30366	35452	41269	47968	55610	64370
13	148702	169915	193906	220877	251274	285373	323689	366566
	20325	23961	28212	33104	38797	45326	52888	61538
14	169027	193880	222118	253981	290071	330699	376577	428104
	18148	21535	25469	30073	35401	41612	48772	57080
15	187175	215415	247587	284054	325472	372311	425349	485184
	15892	18928	22518	26694	3160[illegible]	37292	43951	51643
16	203067	234343	270105	310748	357075	469603	469300	536827
	13671	16380	19551	23303	27684	32839	38837	45864
17	216738	250723	289656	334051	384759	442442	508137	582691
	11626	13968	16765	20040	23928	28472	33834	40080
18	228364	264691	306421	354091	408687	470914	541971	622771
	9770	11802	14199	17062	20425	24418	29098	34624
19	238134	276493	320620	371153	429112	495332	571069	657395
	8154	9871	11937	14375	17293	20722	24803	29588
20	246288	286364	332557	385528	446405	516054	595872	686983
	35301	43567	53598	65748	80418	98100	119348	144837
∞	281589	320931	386155	451276	526823	614154	715220	831820

MEDITATIONES
DE
QVANTITATIBVS IMAGINARIIS CONSTRVENDIS
ET
RADICIBVS IMAGINARIIS EXHIBENDIS.

AVCTORE
HENRICO KUEHNIO.

§. 1.

Tab. I.

In *Commercio Mathematico Petropolitano Anni* 1736, occasione Problematis a *Cel. Eulero* mihi propositi de inueniendo Cubo numeri $-1 \mp \sqrt{-3}$, (quorum vterque est $= 8$) cum quantitatibus scilicet imaginariis affecti, praeter genuinam rationis definitionem, dedi quoque veras notiones quantitatum homogenearum, item positiuarum primitiuarum, et praeterea definitiones geneticas quantitatum deriuatiuarum, tam nihilo aequalium, quam priuatiuarum, et positiuarum deriuatiuarum, easque omnes inter se homogeneas, reales, et assignabiles esse ostendi. At vero quantitatum, quas *imaginarias* appellare solemus, definitionem geneticam tum temporis nondum habui, consequenter nec modum ostendere potui, quo quantitates imaginariae essent exhibendae, etsi iam tum temporis, contra doctrinam receptam, affirmaueram, has ipsas non esse impossibiles, sed, aeque vt ceteras quantitates deriuatiuas, omnino reales esse et assignabiles.

§. 2. Ad hunc defectum, quantum possum, supplendum pertinent ea, quae haud pridem de constructione quantitatum imaginariarum meditatus sum. Has ipsas meditationes Iudicio *Illustris Academiae Scientiarum Imperialis* permitto, sperans, me hoc Tentamine occasionem suppe-

suppeditaturum Analystis perspicacioribus, ad doctrinam quantitatum imaginariarum, quae hactenus tantis tenebris inuoluta fuit, et latius et profundius pertractandam.

§. 3. Sint nimirum (*Fig.* 1.) quatuor rectangula α, β, γ, et δ, ad idem punctum P coniugata, quorum omnium latera et areae, ob homogeneitatem conseruandam, aestimanda sint ex lateribus et area rectanguli α, cuius nempe longitudo PQ est positiua ($= + a$), et latitudo PR ($= + b$) itidem positiua; adeoque □li α area $= + a . + b = + ab$. Iam producantur PQ et PR in q et r, donec sit Pq = PQ $= a$, et Pr = PR $= b$: notum est, rectas deriuatiuas Pq et Pr ita exprimendas esse, vt dicatur Pq = − PQ $= - a$, et Pr = − PR $= - b$. Rectangulum itaque γ, ipsi □lo α oppositum, h. e. ipsi α, quoad longitudinem et latitudinem simul, deinceps positum, habebit longitudinem priuatiuam Pq ($= - a$), et latitudinem priuatiuam Pr ($= - b$), eritque area □li γ = Pq . Pr $= - a . - b = + ab$, vel $= + b a$, vt □lum γ ($= + b a$) ab altero α ($= + a b$) discerni possit. Et hactenus nota sunt omnia. Similiter □lum β, ipsi α, quoad latitudinem solam PR, deinceps positum, habebit longitudinem positiuam PQ ($= + a$), sed latitudinem priuatiuam Pr ($= - b$), eritque adeo area □li $\beta = + a . - b = - ab$, vel vt latitudo deinceps posita ($= - b$) simul exprimatur $= - b a$. Eodem modo □lum δ, ipsi α, quoad longitudinem solam PQ, deinceps positum, habebit latitudinem positiuam PR ($= + b$), sed longitudinem priuatiuam Pq ($= - a$); eritque adeo area □li $\delta = - a . b$, vbi expressio $- a b$ alteri $- a b$ praeferenda videtur, ad latus deinceps positum ($- a$) simul exprimendum. Fig. 1.

§. 4.

§. 4. Quod si ergo, ex area □li positiui primitiui $\alpha = +ab$, area □li positiui deriuatiui $+ba$ exhibenda est, nulla alia re opus est, nisi vt longitudo et latitudo positiua PQ et PR vltra punctum concursus P producatur in q et r, factaque $Pq = PQ$, et $Pr = PR$, construatur □lum γ, cuius area $= Pq.Pr = -a.-b = +ba$. Eodem modo patet, si ex □lo $\alpha (= +ab)$, construendum fuerit □lum cuius area $= -ab$, opus esse, vt longitudo positiua PQ sola vltra eius originem P retrorsum producatur in q, donec sit $Pq = PQ$, construaturque □lum δ, cuius area $= Pq.PR = -a.+b = -ab$. Tandem, si ex □lo $\alpha (= +ab)$, construendum fuerit □lum cuius area $= -ba$, necesse est, vt, latitudine positiua PR sola vltra eius originem P retrorsum producta in r, donec sit $Pr = PR$, construatur □lum β, cuius area $= Pr.PQ = -b.+a = -ba$.

§. 5. Iam ponatur in α, latitudo PR = longitudini PQ, seu $b = a$; quatuor ista □la α, β, γ, δ, abibunt in totidem quadrata α, β, γ et δ ad idem punctum P coniugata, quorum primum α habet longitudinem et latitudinem positiuam, adeoque eius area $= PQ.PR = +a.+a = +a^2$, eiusque latus PQ vel PR (seu, accuratius loquendo, radix areae quadratae) recte exprimitur per $\sqrt{+a^2} = \sqrt{[+a.+a]} = +a$. Secundum □tum β habet latitudinem priuatiuam $Pr = -a$, et longitudinem positiuam $PQ = +a$, adeoque eius area $= Pr.PQ = -a.+a = -a^2$, eiusque latus seu radix, cum nec per solam $PQ (= +a)$, nec per solam $Pr (= -a)$ exprimi possit, sed vtriusque dimensionis simul ratio habenda sit, recte exprimitur per $\sqrt{[Pr.PQ]} = \sqrt{[-PR.PQ]}$

$= \sqrt{}$

$=\sqrt{[-a.+a]}$, ſeu, breuitatis gratia, per $+\sqrt{-a^2}$. Tertium $\square$tum γ habet longitudinem et latitudinem priuatiuam, adeoque eius area $= Pq.Pr = -a.-a = +a^2$, eiusque latus ſeu radix Pq vel Pr recte exprimitur per $\sqrt{[-a.-a]}$, ſeu per $-a$. Quartum denique $\square$tum δ habet longitudinem priuatiuam $Pq = -a$, et latitudinem poſitiuam $PR = +a$, adeoque eius area $= Pq.PR = -a.+a = -a^2$, latus autem ſeu radix, cum nec per ſolam $Pq (= -PQ = -a)$, nec per ſolam $PR (= +a)$ exprimi poſſit, vtriusque dimenſionis rationem ſimul habendo, exprimenda erit per $\sqrt{[Pq.PR]} = \sqrt{[-PQ.PR]} = -\sqrt{[-a.+a]}$, ſeu per $-\sqrt{-a^2}$. Nimirum ſigno radicali ſignum $-$ praeſigitur, ob $\square$ta β et δ inter ſe oppoſita. Atque ſic $\square$torum β et δ latera ſeu radices ſunt quantitates imaginariae, et nihilo minus aſſignabiles. Quadrato enim β aut δ, ipſi $\square$to α deinceps poſito, aſſignato ſeu conſtructo, ſimul latera eorundem aſſignata ſunt.

§. 6. Vnde etiam patet, ſi calculus deducat ad aequationem $x^2 = -a^2$, ſeu ad $x^2 + a^2 = 0$, eam aequationem non eſſe diuiſibilem, nec per $x - a = 0$, nec per $x + a = 0$, ſed per $x + a\sqrt{-a^2} = 0$, item per $x - \sqrt{-a^2} = 0$. Eſt enim $\dfrac{x^2 * + a^2 = 0}{x + \sqrt{-a^2} = 0} = x - \sqrt{-a^2} = 0$, et $\dfrac{x^2 * + a^2 = 0}{x - \sqrt{-a^2} = 0} = x + \sqrt{-a^2} = 0$, ita vt $\square$ti β latus, ſeu, accuratius loquendo, radix difiniatur per aequationem $x - \sqrt{-a^2} = 0$, ſeu $x = +\sqrt{-a^2}$, $\square$ti autem δ latus per $x + \sqrt{-a^2} = 0$, ſeu $x = -\sqrt{+a^2}$, cum aequatio propoſita $x^2 * + a^2 = 0$, ſimul definiat

□tum β, et □tum δ. Hicce processus aequationem quadraticam puram resoluendi et construendi plane similis est processui ordinario in casu α et γ; quoniam quadratorum vtrumque, seu x^2, cum sit $= + a^2$, aequatio $x^2 * - a^2 = 0$, vtrumque casum simul complectitur, et diuisibilis est tam per $x - a = 0$, quam per $x + a = 0$. Est enim $\frac{x^2 * - a^2 = 0}{x - a = 0} = + a = 0$; idem $\frac{x^2 * - a^2 = 0}{x + a = 0} = x - a = 0$; vbi latus □ti α definitur per aequationem $x - a = 0$, seu $x = + a$, et latus □ti γ per $x + a = 0$, seu $x = - a$: aut similitudo operationis clarius dispalescat, reperietur esse $\frac{x^2 * - a^2 = 0}{x - \sqrt{+ a^2} = 0} = x + \sqrt{+ a^2} = 0$, seu $x + a = 0$, item $\frac{x^2 * - a^2 = 0}{x + \sqrt{+ a^2}} = x - \sqrt{+ a^2} = 0$; seu $x - a = 0$; quarum expressionum ista, $x \mp \sqrt{+ a^2} = 0$, propria atque genuina videtur, altera autem, $x \pm a = 0$, saltem impropria, et non nisi toleranter vera.

§. 7. Quoniam quadratum priuatiuum $= - a^2$, eiusque latus seu radix, siue ponatur $+ \sqrt{- a^2}$, siue $- \sqrt{- a^2}$, haberi solet pro quantitate imaginaria, et (quod idem valere creditur) pro impossibili, adeoque pro non reali, aut inassignabili; operae pretium videtur, vt contrarium Fig. 2. Geometrice ostendam. Sint nimirum (*Fig.* 2.) quatuor quadrata α, β, γ, δ, ad idem punctum P coniugata, eaque, absolute considerata, inter se aequalia, sed tamen, quoad aream et latera, pro diuerso quadratorum situ, diuersimode exprimenda. Quod attinet aream □ti α, tanquam positiui primitiui considerati, notum est ex *Elementis Geometriae*, eius aream inueniri inferendo:

I.

I. $\overset{F\;G}{P\square H} : \overset{F\;I}{P\square Q} = \overset{R\;K}{P\square H} : \overset{R\;S}{P\boxed{\alpha}Q}$
seu PH : PQ

e.g. 1 : 3 = 3 □tula PFGH : 9 □tula PFGH, pro area □ti α,
vt adeo sit area $\alpha = +9$, qualium □tulum PFGH, pro mensura omnium quadratorum in P coniugatorum assumtum, est 1.

II. Pro area □ti β ita inferendum:

1) PF : Fr = $\overset{F\;I}{P\square Q} : \overset{F\;I}{r\square S}$

2) PF : [PF−Fr] = $\overset{F\;I}{P\square Q} : \left[\overset{F\;I}{P\square Q} - \overset{F\;I}{r\square S}\right]$ seu aream β

h. e. 1 : (1 − 4) = 3 □tula PFGH : [3 □tula − 4. 3 □tula]

seu 1 : −3 = 3. $\overset{F\;G}{P\square H}$: −9. $\overset{F\;G}{P\square H}$

Est ergo area □ti β = −3. 3 = −9, qualium est $\overset{F\;G}{P\square H} = +1$.

III. Pro area □ti δ inferendum erit:

1) PH : Hq = $\overset{R\;K}{P\square H} : \overset{f\;K}{q\square H}$

2) PH : [PH−Hq] = $\overset{R\;K}{P\square H} : \left[\overset{R\;K}{P\square H} - \overset{f\;K}{q\square H}\right]$ seu aream δ

h. e. 1 : (1 − 4) = 3 □tula PFGH : (3 □tula − 4. 3 □tula)

seu 1 : −3 = 3. $\overset{F\;G}{P\square H}$: −9. $\overset{F\;G}{P\square H}$

Est ergo area □ti δ = −9, qualium est $\overset{F\;G}{P\square H} = +1$.

IV.

IV. Denique pro area $\square$ti γ ita inferendum:

$$1)\ PQ:PH = {}^{P}_{r}\boxed{\substack{\text{area}\\ \beta}}{}^{Q}_{\mathfrak{S}} : {}^{P}_{r}\square^{H}_{L};\ \text{h. e. } 3:1 = -9 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H} : -3\ \text{ſeu}\ -3 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H}\ (\text{p n. II}).$$

$$2)\ PH:Hq = {}^{P}_{r}\square^{H}_{L} : {}^{q}_{ſ}\square^{H}_{L}$$

$$\text{adeoque } PH:[PH-Hq] = {}^{P}_{r}\square^{H}_{L} : \left[{}^{P}_{r}\square^{H}_{L} - {}^{q}_{ſ}\square^{H}_{L}\right]\ \text{ſeu aream } \gamma$$

$$\text{h. e. } 1 : (1-4) = -3 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H} : \left[-3 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H} - 4 \cdot \left(-3 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H}\right)\right]$$

$$\text{ſeu } 1 : -3 = -3 : [-3-4 \cdot (-3)]\ \text{ſeu}\ (-3+12=+9)$$

Eſt ergo area $\square$ti $\gamma = +9$, qualium eſt ${}^{F}_{P}\square^{G}_{H} = +1$.

Tandem areis $\square$torum α, β, γ et δ ad idem punctum P coniugatorum inuentis, latus quoque cuiuslibet facile exprimi poteſt, modo notetur, per latus quadrati in hoc negotio perpetuo radicem quadratam areae quadratae intelligendum eſſe. Eſt namque

Latus $\square$ti $\alpha = \sqrt{[PQ.PR]} = +\sqrt{[+3.+3]} = +\sqrt{+9} = +3$.

Latus $\square$ti $\gamma = \sqrt{[Pq.Pr]} = \sqrt{[-PQ.-PR]} = -\sqrt{[-3.-3]} = -\sqrt{+9} = -3$, vbi formulae $\sqrt{[-3.-3]}$ praefigitur ſignum $-$, ad ſitum quadratorum γ et α oppoſitum ſignificandum.

Latus $\square$ti $\beta = \sqrt{[PQ.Pr]} = \sqrt{[PQ.-PR]} = +\sqrt{[+3.-3]} = +\sqrt{-9}$.

Latus $\square$ti $\delta = \sqrt{[PR.Pq]} = \sqrt{[PR.-PQ]} = -\sqrt{[+3.-3]} = -\sqrt{-9}$, pro ſitu ſcilicet $\square$ti δ, ipſi β oppoſito, ſignificando.

§. 8. Hic ſatis ſpecioſe obiici poteſt, eiusmodi radices $x = \mp\sqrt{-a^2}$, e. g. $= \mp\sqrt{-9}$, eſſe mere imaginarias, impoſſibiles, et inaſſignabiles, propterea quod ex $-a^2$ nullo modo radix quadrata extrahi poſſit: nec enim

enim eam eſſe $=-a$, nec $=+a$, cum $-a.-a$, item $+a.+a$ det quadratum poſitiuum $=+a^2$, atque adeo omnia quadrata realia, aut aſſignabilia, eſſe poſitiua. At non difficilis ad iſta eſt reſponſio. Praeterquam enim quod calculus ex datis poſſibilibus aut realibus profectus, et axiomatibus indubiis conuenienter tractatus, nullo modo ad impoſſibilia, ad non realia aut inaſſignabilia deducere poſſit, minus recte etiam ſupponi videtur, omnia quadrata realia eſſe poſitiua. Hoc tum demum verum foret, ſi ad vnum idemque punctum P duo ſaltem □ta coniugari poſſent, qualia ſunt □ta α et γ, latitudinem ſcilicet et longitudinem oppoſitam habentia: conſtat enim ex §. V. praeter haec duo, etiam duo alia □ta, β et δ, poſſibilia eſſe et aſſignabilia, quae nempe ſunt ipſis α et γ, deinceps poſita, latitudinis ſcilicet priuatiuae et longitudinis poſitiuae, aut contra, longitudinis priuatiuae et latitudinis poſitiuae. Proinde ſi conſtruendum fuerit □tum negatiuum, e. g. $=-9$, eiusque radix $=\mp\sqrt{-9}$, primo conſtruendum erit □tum poſitiuum $\alpha=+9$, cuius radix quadrata $=\sqrt{+9}=\mp 3$. Quo facto, aut huius latitudo poſitiua PR ſola, $=+3$, ſumatur in parte oppoſita, nempe $Pr=-3$, aut longitudo poſitiua PQ ſola, $=+3$, ſumatur in parte oppoſita, nempe $Pq=-3$, et ex poſitione datis PQ et Pr, aut Pq et PR, compleantur □ta deinceps poſita β et δ: erit (per demonſtr. in §. VII.) area □ti $\beta=-9$, et area □ti $\delta=-9$, tandemque, ſi □ti β radix x dicatur $=+\sqrt{-9}$, alterius δ radix x dicenda erit $=-\sqrt{-9}$, cum □ta β et δ aeque inter ſe oppoſita ſint, vti reliqua duo α et γ, ſitque et $+\sqrt{-9}.+\sqrt{-9}=-9$, et ſimiliter $-\sqrt{-9}.-\sqrt{-9}=-9$. Ceterum eiusmodi quantitas imaginaria $\sqrt{-a^2}$; cum ſit $=\sqrt{[+a.-a]}$, intelligibilis euadit per radicem □ti deinceps poſiti, h. e. per $\sqrt{[+a.+a]}$, vel per $\sqrt{[-a.-a]}$. Vbique enim longitudo $\mp a$ aequalis eſt latitudini $\mp a$, niſi quod illic harum alterutra concipienda ſit poſitione, quae datae opponitur.

§. 9. Hactenus de conſtruendis aequationibus quadraticis puris, ſeu incompletis, per omnes 4 caſus poſſibiles α, β, γ et δ. Reſtat vt nunc dicam de conſtructione aequationis quadraticae completae, ſeu affectae
Fig. 3. $x^2-px+q=0$. Sit nimirum (*Fig.* 3.) duarum quantitatum ſumma $=PL=PM=p$, ſemiſumma $=PA=PE=\frac{1}{2}p$, ſemidifferentia $=AK=AR=EI=QE=\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$; erit duarum quantitatum maior, ſeu duarum radicum aequationis

mai. $x=\left\{\begin{matrix}PK=PA+AK\\PI=PE+EI\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2-q)}$; min $x=\left\{\begin{matrix}PR=PA-AR\\PQ=PE\ QE\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$.

Eſt enim in Caſu primo	Item in Caſu ſecundo
$\left.\begin{matrix}x^2=\frac{1}{4}p^2-q+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}\\-px=-\frac{1}{2}p^2-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}\\+q=\quad +q\end{matrix}\right\}=0.$	$\left.\begin{matrix}x^2=\frac{1}{4}p^2-q-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}\\-px=-\frac{1}{2}p^2+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}\\+q=+q\end{matrix}\right\}=0.$

Haec igitur aequatio $x^2-px+q=0$, vtrumque caſum, et $x=PK=PI$, et $x=PR=PQ$, ſimul complectitur, horumque quadratorum x^2 vtrumlibet, ſiue PKTI, ſiue PRVQ, repraeſentat □tum aliquod poſitiuum primitiuum
Fig. 1. 2. α ex *Fig.* 1. et 2.

Fig. 3. §. 10. Iam (*Fig* 3.) producantur PK et PI in k et i, factisque $Pk=PK$, $Pa=PA$, $Pr=PR$, item $Pi=PI$, $Pe=PE$, $Pq=PQ$, conſtruantur duo diuerſa □ta γ, nempe $Pkti$ et $Prvq$, quorum illud erit $=Pi.Pk=-PI.-PK=-x.-x=x^2$, hoc autem $=Pq$.

Pr

$Pr = -PQ . -PR = -x . -x = x^2$: erit radicum maior $= -x = Pk = Pi = -PK = -PI = -\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$; radicum autem minor $= -x = Pr = Pq = -PR = -PQ = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ adeoque summa radicum $= -p$, et haec contrario signo affecta $= +p$. Est ergo

In casu primo	In casu secundo
$\left.\begin{array}{l} -x.-x = x^2 = \frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} \\ +p.-x = px = -\frac{1}{2}p^2 - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} \\ \quad +q = +q \end{array}\right\} = 0.$	$\left.\begin{array}{l} -x.-x = x^2 = \frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} \\ +p.-x = -px = -\frac{1}{2}p^2 + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} \\ \quad +q = +q \end{array}\right\} = 0.$

Aequatio igitur $(-x)^2 + p.(-x) + q$, seu $x^2 - px + q = 0$, in □to γ vtrumque casum, et $-x = Pk = Pi$, et $-x = Pr = Pq$; simul complectitur, estque in γ et □tum $Pkti$, et □tum $Prvq$, quadratum positiuum deriuatiuum $=$ areae □ti α.

§. 11. *Vlterius* (*Fig.* 3.) ex PI et Pk, item PQ et Pr positione datis compleatur vtrumque □tum β, nempe kI et rQ. Quoniam area β est ipsi areae α deinceps posita, estque aequatio pro α, $x^2 - px + q = 0$; aequatio pro β reuera erit $-[x^2 - px + q] = 0$, seu $-x^2 + px - q = 0$. Quoniam tamen in calculo aequationum ex more *Harriotti* instituto etiam area β tractari solet vt □tum aliquod $+x^2$, manifestam scilicet quadrati formam habens (nullam, credo, aliam ob rationem, quam quod area quadrata $-x^2$ *Harriotto* impossibilis visa fuerit); in isthac hypothesi aequatio pro β ita inuestiganda videtur. Est namque *area maioris* □*ti* $\beta = PI.Pk = PI.-PK$, h. e. $= [\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}].-[\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]$. Proinde si huius areae quadratae β latus seu radix dicatur x, erit Fig. 3.

 $x^2 =$

$$x^2 = -[\tfrac{1}{4}p^2 + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} + \tfrac{1}{4}p^2 - q] = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$$

eiusque radix $x = \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}$

Quare cum sit *area minoris* □ti $\beta = PQ.Pr = PQ.-PR = [\tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\ldots)}].-[\tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\ldots)}]$

erit $x^2 = -[\tfrac{1}{4}p^2 - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} + \tfrac{1}{4}p^2 - q] = -\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$

huius radix $x = \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}$

adeoque summa radicum $= \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]} + \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}$, quae si, breuitatis gratia, dicatur π, erit summa radicum contrario signo affecta $= -\pi = -\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]} - \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}$.

Hinc aequatio pro □to maiore β

$$x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$$
$$-\pi x = \Big[-\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]} - \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}\Big].\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}$$
$$+q = +q$$

hoc est, $x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$

$$-\pi x = -[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}] - \sqrt{[(-\tfrac{1}{2}p^2 + q)^2 - p^2(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]}$$
$$+q = +q$$

h. e. $x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$

$$-\pi x = +\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} \left\{ \begin{matrix} -\sqrt{[\tfrac{1}{4}p^4 - p^2q + q^2 - \tfrac{1}{4}p^4 + p^2q]} \\ \text{seu } -q \end{matrix} \right\}$$
$$+q = +q$$

adeoque $x^2 - \pi x + q = -\tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}p^2 = 2q - 2q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} = 0$

Atque sic res eodem redit, ac si, pro area maiore β, loco aequationis definientis $x^2 - \pi x + q = 0$, adhibita fuisset aequatio definiens $-x^2 + px - q = 0$. Est enim

$$\left.\begin{aligned} -x^2 &= -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} \\ +px &= -p.-x = -p.-[\tfrac{1}{2}p + \sqrt{(\ldots)}] = +\tfrac{1}{2}p^2 + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} \\ -q &= -q \end{aligned}\right\} \text{add.}$$

$$\tfrac{1}{2}p^2 - \tfrac{1}{2}p^2 + q - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} = 0.$$

Similiter pro □to minore β erit

$x^2 =$

$x^2 = -\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$

$-\pi x = [-\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]} - \sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}].\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}$

$+q = +q$

h. e. $x^2 = -\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$

$-\pi x = -[-\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]$ $\left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{[(-\frac{1}{2}p^2 + q)^2 - p^2(\frac{1}{4}p^2 - q)]} \\ \text{seu } -\sqrt{(\frac{1}{4}p^4 - p^2 q + q^2 - \frac{1}{4}p^4 + p^2 q)} \\ \text{seu } -q \end{array} \right\}$

$+q = +q$

h. e. $\left. \begin{array}{l} x^2 = -\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} \\ -\pi x = +\frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} - q \\ +q = +q \end{array} \right\} = 0.$

Proinde etiam in area minore β res eodem redit, ac si, loco aequationis definientis $x^2 - \pi x + q = 0$, adhiberetur aequatio difiniens $-x^2 + px - q = 0$. Est enim

$\left. \begin{array}{l} -x^2 = -\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} \\ +p \cdot x = -px = p \cdot [\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}] = +\frac{1}{2}p^2 - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} \\ -q = -q \end{array} \right\} = 0$

§. 12. Denique (*Fig.* 3.) pro □to δ, ipsi □to β opposito, erit □tum maius $\delta = x^2 = Pi.PK = -PI.PK = -[\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}][\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]$ Fig. 3.

$= -[\frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}] = -\frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]$

eius radix $x = -\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}$

item □tum minus $\delta = x^2 = Pq.PR = -PQ.PR = -[\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}][\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]$

$= -[\frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}] = -\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]$

eius radix $x = -\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}$

adeoque summa radicum, quam breuitatis gratia pono $= \pi$, sed contrario signo affecta $= -\pi = +\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]} + \sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}$

Est ergo pro □to maiore δ

 $x^2 =$

$$x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$$

$$-\pi x \left\{ \begin{array}{l} = [\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]} + \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}] - \sqrt{[\tfrac{1}{2}p^2 + q\,p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]} \\ = -(-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}] - \sqrt{[(-\tfrac{1}{2}p^2 + q)^2 - p^2(\tfrac{1}{4}p^2 - p)]} \\ = +\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} - \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^4 - p^2 q + q^2 - \tfrac{1}{4}p^4 + p^2 q)} \\ = +\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} - q \end{array} \right.$$

$$+q = \quad +q$$

adeoque $x^2 - \pi x + q = -\tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}p^2 + 2q - 2q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} = 0.$

In □to autem minore δ erit

$$x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$$

$$-\pi x \left\{ \begin{array}{l} = [\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]} + \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}] - \sqrt{[\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]} \\ = -[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}] - \sqrt{[\tfrac{1}{4}p^4 - p^2 q + q^2 - p^2(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]} \\ = +\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} - q \end{array} \right.$$

$$+q = \quad +q$$

$x^2 - \pi x + q = \tfrac{1}{2}p^2 - \tfrac{1}{2}p^2 + 2q - 2q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} = 0.$

Quam ob rem etiam in vtraque area quadrata δ res eodem redit, ac si, loco aequationis definientis $x^2 - \pi x + q = 0$, vteremur aequatione deinceps posita $-[x^2 - px + q] = 0$, seu $-x^2 + px - q = 0$. Est enim

Pro area maiore δ

$$\left. \begin{array}{l} -x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} \\ +px = -p.-x = -p.-[\tfrac{1}{2}p + \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}] = +\tfrac{1}{2}p^2 + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} \\ -q \quad = -q \end{array} \right\} = 0$$

Pro area minore δ

$$\left. \begin{array}{l} -x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} \\ +px = -p.-x = -p.-[\tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}] = +\tfrac{1}{2}p^2 - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} \\ -q \quad = -q. \end{array} \right\} = 0$$

§. 13. Quae in §. IX. X. XI. XII. de aequationibus quadraticis completis per omnes quatuor casus possibiles α, β, γ, δ exhibendis dicta sunt, commode illustrari ti possint ope schematismi (*Fig.* 4.), vbi diuersae areae partiales ingredientes breuiter dicuntur a, b et d. Nimirum sub α est □tum maius $x^2 = {}^{K}_{P}\square^{T}_{I} = a+4b+4d$; $\tfrac{1}{2}p\cdot x = {}^{K}_{P}\square^{\mathfrak{F}}_{E} = {}^{A}_{P}\square^{\mathfrak{D}}_{I} = a+3b+2d$; adeoque $px = 2.{}^{A}_{P}\square^{\mathfrak{D}}_{I} = 2a+6b+4d$; $\tfrac{1}{4}p^2 = {}^{A}_{P}\square^{C}_{E} = a+2b+d$; $q = {}^{K}_{P}\square^{\mathfrak{G}}_{Q} = {}^{R}_{P}\square^{\mathfrak{B}}_{I} = a+2b$, et hinc $\tfrac{1}{4}p^2 - q = (a+2b+d)-(a+2b) = d = {}^{\mathfrak{H}}_{V}\square^{C}_{\mathfrak{A}}$; Contra autem □tum minus $x^2 = {}^{R}_{P}\square^{V}_{Q} = a$; $\tfrac{1}{2}p\cdot x = {}^{R}_{P}\square^{\mathfrak{A}}_{E} = {}^{A}_{P}\square^{\mathfrak{H}}_{Q} = a+b$, adeoque $px = 2.{}^{R}_{P}\square^{\mathfrak{A}}_{E} = 2a+2b$. Fig. 4.

Erit igitur

Pro □to maiore α	Pro □to minore α
$x^2 = {}^{K}_{P}\square^{T}_{I} = a+4b+4d$	$x^2 = {}^{R}_{P}\square^{V}_{Q} = a$
$-px = -2.{}^{P}_{A}\square^{\mathfrak{D}}_{I} = -2a-6b-4d$	$-px = -2.{}^{R}_{P}\square^{\mathfrak{A}}_{E} = -2a-2b$
$+q = {}^{K}_{P}\square^{\mathfrak{G}}_{Q} = a+2b$	$+q = {}^{K}_{P}\square^{\mathfrak{G}}_{Q} = a+2b$
$0 = 0 = 0$	$0 = 0 = 0$

Eaedem aequationes prodeunt pro vtroque □to γ, ex inspectione Figurae facile eliciendae.

Pro □to maiore β	Pro □to minore β
$-x^2 = {}^{P}_{k}\square^{I}_{H} = -a-4b-4d$	$-x^2 = {}^{P}_{r}\square^{Q}_{O} = -a$
$+px = -(-px) = -2.{}^{P}_{a}\square^{I}_{G} = +2a+6b+4d$	$+px = -(-px) = -2.{}^{P}_{a}\square^{Q}_{N} = +2a+2b$
$-q = {}^{P}_{r}\square^{I}_{F} = -a-2b$	$-q = {}^{P}_{r}\square^{I}_{F} = -a-2b$
$0 = 0 = 0$	$0 = 0 = 0$

Easdem

Easdem aequationes pro vtroque □to δ prodire ex inspectione Figurae manifestum est.

§. 14. Cum aequationis quadraticae affectae, et radicum respondentium dentur quatuor formae sequentes:

1) $x^2-px+q=0$; $x=+\frac{1}{2}p\mp\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$; vel $x-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}=0$.

2) $x^2-px-q=0$; $x=+\frac{1}{2}p\mp\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$; vel $x-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}=0$.

3) $x^2+px+q=0$; $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$; vel $x+\frac{1}{2}p\mp\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}=0$.

4) $x^2+px-q=0$; $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$; vel $x+\frac{1}{2}p\mp\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}=0$;

patet, pro aequatione generali $x^2\mp px\mp q=0$, radicum formam generalem esse, $x=\mp\frac{1}{2}p\mp\sqrt{(\frac{1}{4}p^2\pm q)}$, seu $x=>\frac{1}{2}p\mp\sqrt{(\frac{1}{4}p^2>q)}$, in qua formula signum $>$ ipsi $\frac{1}{2}p$ et q praefixum denotat signum contrarium eius, quo in aequatione nihilo aequali afficiuntur p et q. Et, cum primae et tertiae aequationis, $x^2\pm px+q=0$, constructionem Geometricam in §. IX. et X. iam dederim; ad naturam aequationis quadraticae plene intelligendam consultum erit, vt etiam reliquarum duarum aequationum constructiones Geometricas per omnes casus possibiles persequamur.

Tab. II. Fig. 5. §. 15. Pro construenda igitur aequatione secunda $x^2-px-q=0$, fit (*Fig.* 5.) summa duarum quantitatum $PL=PM=p$, semisumma $=PE=EL=PA=AM\frac{1}{2}p$, semidifferentia $=EI=AK=\sqrt{[\frac{1}{4}p^2-(-q)]}=\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$; erit duarum quantitatum seu radicum aequationis maior

$$x=\left\{\begin{matrix}PK=PA+AK\\PI=PE+EI\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)},$$ adeoque □tum a seu $PKTI=\frac{1}{2}p^2+q+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$. Iam producantur PI et PK retrorsum in i et k, factisque Pi et Pk $=$PI, item Pf et Pζ, EQ et AR$=$EI, erit

Pi =

$\left.\begin{array}{l}Pi=fi+Pf=-PE-EI\\Pk=\zeta k+P\zeta=-PA-AK\end{array}\right\}=-\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$, adeoque □tum $Pitk=$ $[-\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]^2=\frac{1}{2}p^2+q+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$, et radicum minor x $=\left\{\begin{array}{l}PQ=PE-EQ=PE-EI\\PR=PA-AR=PA-AK\end{array}\right\}=\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$, consequenter huius □tum y seu $PQVR=\frac{1}{2}p^2+q-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$. Est enim

$$\text{□tum } mlt\!f+\text{□tum } Pfm\zeta=-\tfrac{1}{2}p.-\tfrac{1}{2}p+(\tfrac{1}{4}p^2+q)=\tfrac{1}{2}p^2+q$$

$$\text{□lum } Rbm\zeta+[\text{□lum } Q\,fbV+\left\{\begin{array}{l}\text{□tum } Vbmn\\\text{seu □tum } mlt\!f\end{array}\right\}]=2\,[-\tfrac{1}{2}p.-\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]=p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}.$$

consequenter subtrahendo habebitur $mlt\!f+Pfm\zeta-mlt\!f-Rbm\zeta-Q\,fbV$ $=$ □to $PQVR=\frac{1}{2}p^2+q-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$, vt ante. Erit ergo

In casu $x=PI=PK$

$$\left.\begin{array}{lll}x^2=\tfrac{1}{2}p^2+q+p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}=PI.PK & & =\text{□tum } PITK\\-px=-\tfrac{1}{2}p^2\quad-p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}=-PL.PK & & =-\text{□lum } PL\varsigma K\\-q=\quad-q & =PQ.PK=-LI.L\varsigma & =-\text{□lum } LIT\varsigma\end{array}\right\}=0.$$

Et in casu $x=PQ=PR$ erit

$$\left.\begin{array}{lll}x^2=\tfrac{1}{2}p^2+q-p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}=PQ.PR & & =\text{□tum } PQVR\\-px=-\tfrac{1}{2}p^2\quad+p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}=Rk.QV & & =+\text{□lum } RVwk\\-q=\quad-q & =PQ.PK=\text{□lum } PQ\theta K & =-\text{□lum } PQwk\end{array}\right\}=0.$$

§ 16. Pro construenda aequatione quarta $x^2+px-q=0$, sit (Fig. 6.) Fig. 6.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}Pi=PE+Ei\\Pk=PA+Ak\end{array}\right\}=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}\\\left.\begin{array}{l}PQ=PE-EQ=PE-Ei\\PR=PA-AR=PA-Ak\end{array}\right\}=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}\end{array}\right\}\text{summa}=-p=PL$$

adeoque factum $=Pk.PQ=Pi\,PR=\frac{1}{4}p^2-(\frac{1}{4}p^2+q)=-q$

Ergo in casu $x=Pi=Pk$ erit

$$\left.\begin{array}{lll}x^2=\tfrac{1}{2}p^2+q+p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}=Pi.Pk & & =\text{□tum } Pitk\\px=-\tfrac{1}{2}p^2\quad-p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}=-PL.Pk & & =-\text{□lum } PL\varrho k\\q=\quad-q & =PQ.Pk=-Li.L\varrho & =-\text{□lum } Lit\varrho\end{array}\right\}=0.$$

 Et

Et in casu $x = PQ = PR$ erit

$$\left.\begin{array}{llll} x^2 = \frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)} = PQ.PR & & = \square\text{tum } PQVR \\ +px = -\frac{1}{2}p^2 & +p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)} = -PL.PR = QI.QV & = \square\text{lum } QIGV \\ -q = & -q & = Pi.PR = PI.PR = -\square\text{lum } PIGR \end{array}\right\} = 0$$

§. 17. Nunc construamus aequationis secundae $x^2 - px - q = 0$, deinceps positam $-[x^2 - px - q] = 0$, seu $-x^2 + px + q = 0$, vel $x^2 - \pi x - q = 0$. Est namque

Fig. 5. (Fig. 5.) □tum β, seu $PIHk = PI.-PK = [\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}].-[\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]$ (§. XV.).

h. e. $x^2 = -[\frac{1}{4}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}] = -\frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$

adeoque $x = \sqrt{\square}$ti $PIHk = \sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$ et □tum

oppositum δ, seu $PQvr = Pr.PQ = -PR.PQ = -[\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}][\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]$ (§. XV.)

h. e. secundum $x^2 = -[\frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}] = -\frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$

adeoque secunda $x = \sqrt{\square}$ti $PQvr = -\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$ (§. VIII).

Erit ergo summa radicum (quam pono $= \pi$), sed contrario signo affecta

$= -\pi = -\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]} + \sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$,

et factum radicum $= \sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}.\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{[(-\tfrac{1}{2}p^2 - q)^2 - p^2(\tfrac{1}{4}p^2 + q)]} \\ &= \sqrt{[\tfrac{1}{4}p^4 + p^2q + q^2 - \tfrac{1}{4}p^4 - p^2q]} = \sqrt{q^2} \\ &= +q, \end{aligned}$$

Proinde pro □to β erit

$$\begin{array}{l} x^2 = -\frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)} \ldots\ldots = \square\text{tum } PIHk = -\square\text{tum } PITK \\ -\pi x = [-\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]} + \sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}].\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]} \\ \quad = -[-\frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}] + \sqrt{q^2} \\ \quad = +\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)} + q = -\square\text{tum } PIHk - \square\text{lum } PI\eta R = +\square\text{tum } PITK + \square\text{lum } PI\alpha \\ -q = \quad -q \ldots\ldots\ldots = \quad + \square\text{lum } PI\eta R = \quad -\square\text{lum } PI\alpha \\ \hline \end{array}$$

quorum summa vtrobique est $= 0$, vti esse debebat.

Simili-

Similiter pro □to δ seu $PQvr$ erit

$$x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 + x) \ldots\ldots = \square\text{tum } PQvr = -\square\text{tum } PQVR$$
$$-\pi x = [-\surd[+\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 + q)] + \surd[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 + q)]] . \surd[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 + q)]$$
$$= -[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 + q)] + \surd q^2$$
$$= +\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 + q) \;\; + q = -\square\text{tum}PQvr - \square PI\eta R = +\square\text{tum}PQVR + \square PIcr.$$
$$-q = \quad -q \ldots\ldots\ldots = \quad + \square PI\eta R = \quad - \square PIcr.$$

quorum summa vtrobique est $= 0$.

§. 18. Tertia aequatio erat $x^2 + px + q = 0$; adeoque eius deinceps posita est $-[x^2 + px + q] = 0$, seu $-x^2 - px - q = 0$, vel $x^2 + \pi x + q = 0$. Ad hanc construendam sit (Fig. 3.) sub γ), $\left.\begin{matrix} Pe \\ Pa \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}p$, et $\left.\begin{matrix} ei = eq \\ ak = ar \end{matrix}\right\} = -\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)$; Fig. 3.

$$\left.\begin{matrix} \text{erit} \left\{\begin{matrix} Pi = Pe + ei \\ Pk = Pa + ak \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}p - \surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) \\ \text{et} \left\{\begin{matrix} Pq = Pe - eq \\ Pr = Pa - ar \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}p + \surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{summa} = -p;\ \text{factum} = \tfrac{1}{4}p^2 - (\tfrac{1}{4}p^2 - q) = +q. \\ = \square Picr = \square PqZk. \end{matrix}$$

hinc □tum maius $Pik = \tfrac{1}{2}p^2 - q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)$
□tum minus $Pqvr = \tfrac{1}{2}p^2 - q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)$

Ergo pro maiore □to δ, seu pro $PKi\tau$ erit

$$x^2 = -[\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)$$

eiusque radix $x = \surd$ □ti $PKi\tau = -\surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]$ (§. VIII).

Pro minore □to δ, seu pro $PqwR$ erit

$$x^2 = -(\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] = -\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)$$

eiusque radix $x = \surd$ □ti $PqwR = -\surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]$ (§. VIII).

adeoque summa radicum (quam pono $= -\pi$), sed contrario signo affecta

$$= +\pi = +\surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] + \surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)$$

et factum $= -\surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] . -\surd[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\surd(\tfrac{1}{4}p^2 - q)]$,

$$= +\surd[(-\tfrac{1}{2}p^2 + q)^2 - p^2(\tfrac{1}{4}p^2 - q)] = +\surd[\tfrac{1}{4}p^4 - p^2q + q^2 - \tfrac{1}{4}p^4 + p^2q] = +\surd q^2$$
$$= +q,$$

 Ergo

Ergo pro □to maiore δ erit

$$x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} = \text{□tum } P i \tau K \qquad = - \text{□tum } P i t k$$

$$+\pi x = [\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]} + \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}] . - \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}]}$$

$$= -[-\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}] \quad - \sqrt{q^2}$$

$$= + \tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} \quad -q = - \text{□tum } P i \tau K + \square P q \zeta K = + \text{□tum } P i t k - \square P q Z k$$

$$+q = \qquad\qquad +q = \qquad\qquad - \square P q \zeta K = \qquad\qquad + \square P q Z k$$

adeoque, deletis, quae se mutuo destruunt, summa vtrobique est $= 0$. Eodem plane modo reperietur, etiam pro □to minore δ esse $x^2 + \pi x + q = 0$. Calculus enim idem est, nisi quod, loco $-p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$, nunc scribendum sit $+p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$, et contra, figurae autem calculo respondentes desumendae sint

Fig. 3. ex *Figurae* 3. areis minoribus δ et γ.

§. 19. Quarta aequatio erat $x^2 + px - q = 0$, cuius deinceps posita est $-[x^2 + px - q] = 0$, seu $-x^2 - px + q = 0$, vel $x^2 + \pi x - q = 0$. Ad hanc

Fig. 6. construendam sit (*Fig.* 6. sub γ et α)

$$\left.\begin{matrix} Pi = PE + Ei \\ Pk = PA + Ak \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + p)}; \text{ et } \left.\begin{matrix} PQ = PE - EQ = PE - Ei \\ PR = PA - AR = PA - Ak \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}.$$

hinc sub γ erit □tum maius $Pitk = \tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$

et sub α □tum minus $PQVR = \tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$

Ergo pro maiore □to δ seu $P i \tau K$ erit

$$x^2 = -[\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}] = -\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)},$$

eiusque radix $x = \sqrt{\text{□ti } P i \tau K} = -\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}]}$ (§. VIII).

et pro minore □to β seu $PQvr$ erit

$$x^2 = -[\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}] = -\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$$

eiusque radix $x = \sqrt{\text{□ti } PQvr} = +\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}]}$, (§. VIII.), adeoque summa radicum (quam pono $= -\pi$), sed contrario signo affecta

$$+\pi = +\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}]} - \sqrt{]-\tfrac{1}{2}p^2 - q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}]}$$

et factum $= -\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}]} . \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}]}$

$$= -\sqrt{[(-\tfrac{1}{2}p^2 - q)^2 - p^2(\tfrac{1}{4}p^2 + q)]} = -\sqrt{[\tfrac{1}{4}p^4 + p^2 q + q^2 - \tfrac{1}{4}p^4 - p^2 q]} = -\sqrt{q^2}$$

$$= -q.$$

Hinc

Hinc pro maiore □to δ erit

$$\begin{array}{llll}
x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} & = \square\text{tum } Pi\tau K & = -\square\text{tum } Pitk & \\
+\pi x = [+\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]} - \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]}] . -\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]} & & & \\
\quad = -[-\tfrac{1}{2}p^2 - q - q\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}] + \sqrt{q^2} & & & \\
\quad = +\tfrac{1}{2}p^2 + p + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)} + q & = -\square\text{tum } Pi\tau K - \square PigR & = \square\text{tum } Pitk + \square PIGR & \\
-q = \qquad\qquad -q & = +\square PigR & = -\square PIGR & \\
\hline
\end{array}$$

quorum summa vtrobique est $= 0$.

Similiter pro minore □to β erit

$$\begin{array}{llll}
x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} & = \square\text{tum } PQvr & = -\square\text{tum } PQVR & \\
+\pi x = [+\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]} - \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]}] . \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]} & & & \\
\quad = -[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}] + \sqrt{q^2} & & & \\
\quad = +\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)} + q & = -\square\text{tum } PQvr - \square PI\lambda r & = +\square\text{tum } PQVR + \square PIGR & \\
-q = \qquad\qquad -q & = +\square PI\lambda r & = -\square PIGR & \\
\hline
\end{array}$$

adeoque, deletis quae se mutuo destruunt, summa vtrobique est $= 0$.

§. 20. In §. XVII. construxi aequationis secundae, $x^2 - px - q = 0$, deinceps positam $x^2 - \pi x - q = 0$. Res tamen eodem redit, si, loco huius, construatur aequatio $-[x^2 - px - q] = 0$, seu $-x^2 + px + q = 0$. Est enim (*Fig.* 5.) Fig. 5.
□tum maius β, seu $PIHk = -$ □tum α,

$$\text{h. e.}\left.\begin{array}{lll}
-x^2 = -[\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}] = -\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)} & = -\square\text{tum } PITK \\
+px = \qquad\qquad = +\tfrac{1}{2}p^2 + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)} & = \square PL\varsigma K \\
+q = \qquad\qquad = \qquad +q & = \square LIT\varsigma .
\end{array}\right\} = 0$$

Item □tum minus $\delta = -$ □to minori γ.

$$\text{h. e.}\left.\begin{array}{lll}
-x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)} & = -\square\text{tum } PQVR \\
+px = +\tfrac{1}{2}p^2 \quad - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)} & = -\square PQwk \\
+q = \quad +q & = +\square PQwk
\end{array}\right\} = 0$$

Similiter in §. XVIII. construebatur aequationis tertiae $x^2 + px + q = 0$, deinceps posita $x^2 + \pi x + q = 0$. Interim res eodem redit, si, loco huius, construeretur aequatio

tio $-[x^2+px+q]=0$, ſeu $-x^2-px-q=0$. Eſt enim

Fig. 3. (*Fig* 3.) $\Box$tum maius $\delta = -\Box$tum maius γ,

$$\text{h. e.}\ \left.\begin{array}{lllll} -x^2 = -[\tfrac{1}{2}p^2-q+p\surd(\tfrac{1}{4}p^2-q)] & & = -\tfrac{1}{2}p^2+q-p\surd(\tfrac{1}{4}p^2-q) & & = -\Box\text{tum } Pitk \\ -px = 2.Pe.Pk = -p[-\tfrac{1}{2}p-\surd(\ldots)] & & = +\tfrac{1}{2}p^2+p\surd(\tfrac{1}{4}p^2-q) & & = +2.\Box PeYk \\ -q = \qquad = & & = \quad -q & & = -\Box PqZk \end{array}\right\} = 0$$

Item cum ſit $\Box$tum minus $\delta = -\Box$tum minus γ;

$$\text{erit}\ \left.\begin{array}{llll} -x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2+q+p\surd(\tfrac{1}{4}p^2-q) = & & & -\Box\text{tum } Pq\varpi r \\ -px = +\tfrac{1}{2}p^2 & -p\surd(\tfrac{1}{4}p^2-q) = 2.Pe.Pr & & = +2\Box Peſr \\ -q = & -q & = -Pq.Pk & = -\Box PqZk \end{array}\right\} = 0$$

Similiter in §. XIX. conſtruebatur aequationis quartae $x^2+px-q=0$, deinceps poſita $x^2+\pi x-q=0$. Sed res eodem redit, ac ſi, loco huius, conſtrueretur aequatio

Fig. 6. $-[x^2+px-q]=0$, ſeu $-x^2-px+q=0$. Eſt enim (*Fig.* 6.) $\Box$tum maius $\delta = -\Box$tum maius $\gamma = -[\tfrac{1}{2}p^2+q+p\surd(\tfrac{1}{4}p^2+q)]$.

$$\text{h. e.}\ \begin{array}{llll} -x^2 = -\tfrac{1}{2}p^2-q-p\surd(\tfrac{1}{4}p^2+q) & & = -\Box\text{tum } Pitk & \\ -px = +\tfrac{1}{2}p^2 & +p\surd(\tfrac{1}{4}p^2+q) = -p[-\tfrac{1}{2}p-\surd(\tfrac{1}{4}p^2+q)] & = \Box PL\varrho k & = 0. \\ +q = & +q \qquad = Li.L\varrho & = \Box Lit\varrho & \end{array}$$

Item cum ſit $\Box$tum minus $\beta = -\Box$tum minus α;

$$\text{erit}\ \left.\begin{array}{llll} -x^2 = -[\tfrac{1}{2}p^2+q-p\surd(\tfrac{1}{4}p^2+q)] & = -\tfrac{1}{2}p^2-q+p\surd(\tfrac{1}{4}p^2+q) & & = -\Box\text{tum } PQVR \\ -px = -p[-\tfrac{1}{2}p+\surd(\tfrac{1}{4}p^2+q)] & = +\tfrac{1}{2}p^2 & -p\surd(\tfrac{1}{4}p^2+p) & = -\Box\ QIGV \\ +q = & = & +q & = +\Box\ PIGR \end{array}\right\} = 0.$$

§. 21. Expreſſiones radicum pro aequationibus deinceps poſitis, quas in §. XI. XVII. XVIII. et XIX. venatus ſum, nimis ſunt compoſitae, et ad additionem earundem actualem, aut ſubtractionem non accommodatae. Poſſunt tamen eaedem per ſimpliciores formulas exprimi, quarum ope, ſumma, item differentia radicum actu exhiberi poteſt. Ad id praeſtandum inſeruit ſequens

Proble-

Problema.

Datis duabus quantitatibus irrationalibus non communicantibus; inuenire earundem summam, itemque differentiam. Et contra: data summa, aut differentia duarum eiusmodi quantitatum irrationalium; inuenire quantitates aggregantes aut subtrahentes ipsas.

Resolutio.

Sint quantitates datae $\surd m$ et $\surd n$. Ponatur $\surd m + \surd n = \surd v$; et $\surd m - \surd n = \surd y$: euehendo ad quadratum, fiet $m + n + 2\surd mn = v$; item $m + n - 2\surd mn = y$, consequenter summa $= \surd m + \surd n = \surd[(m+n) + 2\surd mn] = \surd v$, et differentia $= \surd m - \surd n = \surd[(m+n) - 2\surd mn] = \surd y$. *Quod erat primum.* Contra: sit summa e. g. $= \surd[12 + \surd 140]$, item differentia $= \surd[12 - \surd 140]$; quaeruntur Termini additionis et subtractionis ipsi. Fiat $\surd[(m+n) + 2\surd mn] = \surd[12 + \surd 140] = \surd[12 + 2\surd 35]$, ponaturque $(m+n) = 12$, et $2\surd mn = 2\surd 35$; erit $\frac{m+n}{2} = 6$, et $mn = 35$,

adeoque $\frac{(m+n)^2}{4} = 36$,

subtrahatur $\frac{4mn}{4} = 35$

fiet $\frac{(m-n)^2}{4} = 1$, adeoque $\left.\begin{array}{l}\frac{m-n}{2} = 1 \\ \text{sed } \frac{m+n}{2} = 6\end{array}\right\}$ add. subtr.

habebitur $m = 6 + 1 = 7$, et $n = 6 - 1 = 5$, consequenter erit $\surd[12 \mp \surd 140] = \surd m \mp \surd n = \surd 7 \mp \surd 5$. *Quod erat alterum.*

§. 22. Nunc applicemus ista ad formulas radicum simpliciores pro aequationibus deinceps positis inueniendas. In §. XI. (*Fig.* 3. β) erat Fig. 3.

Ima

I^{ma} $x = \sqrt{}$ □ti PIH$k = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}$, et II^{da} $x = \sqrt{}$ □ti PQO$r = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}$. Fiat igitur $\sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]} = \sqrt{m} - \sqrt{n}$ $= \sqrt{[(m+n) - 2\sqrt{mn}]}$, ponaturque $\frac{m+n}{2} = \frac{-\frac{1}{2}p^2 + q}{2}$, et $-\sqrt{mn} = -\frac{p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}}{2}$;

erit $\frac{(m+n)^2}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 - p^2q + q^2}{4}$; et $mn = \frac{p^2(\frac{1}{4}p^2 - q)}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 - p^2q}{4}$

$\frac{4mn}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 - p^2q}{4}$ subtr.

fiet $\frac{(m-n)^2}{4} = \frac{1}{4}q^2$, adeoque $\frac{m-n}{2} = \frac{1}{2}q$ } add. subtr.

sed $\frac{m+n}{2} = -\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}q$ }

habebitur $m = -\frac{1}{4}p^2 + q = -(\frac{1}{4}p^2 - q)$; et $n = -\frac{1}{4}p^2$, consequenter

$\sqrt{m} - \sqrt{n} = +\sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)} - \sqrt{-\frac{1}{4}p^2}$ }
vel $= -\sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)} + \sqrt{-\frac{1}{4}p^2}$ } $= \mp\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} \pm \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, vbi inferiora valent qro $x = \sqrt{}$ □ti PIHk, superiora autem pro $x = \sqrt{}$ □ti oppositi aequales PπK (per §. VIII). Est ergo I^{ma} $x = \sqrt{}$ □ti PIH$k = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]} = +\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} - \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, et II^{da} $x = \sqrt{}$ □ti PQO$r = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]} = +\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} + \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, quarum radicum summa est $= +2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} = \frac{2}{2}p\sqrt{-1} = p\sqrt{-1}$, et factum $= -\frac{1}{4}p^2 - [-(\frac{1}{4}p^2 - q)]$ hanc habebit formam $x^2 - 2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}.x - q = 0$; seu $x^2 - p\sqrt{-1}.x - q = 0$.

Fig. 5. Similiter in §. XVII. (*Fig.* 5. β et δ) erat I^{ma} $x = \sqrt{}$ □ti PIH$k = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$, et II^{da} $x = \sqrt{}$ □ti PQ$vr = -\sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$. Fiat ergo $\sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]} = \sqrt{m} - \sqrt{n} = \sqrt{[(m+n) - 2\sqrt{mn}]}$, ponaturque $\frac{m+n}{2} = \frac{-\frac{1}{2}p^2 - q}{2}$; et $-\sqrt{mn} = \frac{-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}}{2}$;

erit $\frac{(m+n)^2}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 + p^2q + q^2}{4}$; et $mn = \frac{p^2(\frac{1}{4}p^2 + q)}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 + p^2q}{4}$

$\frac{4mn}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 + p^2q}{4}$ subtr.

fiet $\frac{(m-n)^2}{4} = \frac{1}{4}q^2$, adeoque $\frac{m-n}{2} = \frac{1}{2}q$ } add. subtr.

sed $\frac{m+n}{2} = -\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}q$ }

habebitur $m = -\frac{1}{4}p^2$; et $n = -\frac{1}{4}p^2 - q = -(\frac{1}{4}p^2 + q)$, consequenter

$\sqrt{m}-$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{m}-\sqrt{n}=+\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}-\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)}\\ \text{vel} =-\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}+\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)}\end{array}\right\}=\mp\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}\pm\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)},$$

vbi ſigna inferiora valent pro $x=\sqrt{}\,\square$ti PIHk, ſuperiora autem pro $x=\sqrt{}\,\square$ti oppoſiti aequalis P$i\pi$K (per §. VIII). Eſt ergo

Ima $x=\sqrt{}\,\square$ti PIH$k=\sqrt{m}-\sqrt{n}=+\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}-\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)}$,
IIda $x=\sqrt{}\,\square$ti PQ$vr=\sqrt{m}+\sqrt{n}=+\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}+\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)}$,
quarum ſumma $=+2\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}=\tfrac{2}{2}p\sqrt{-1}=+p\sqrt{-1}$; et factum $=-\tfrac{1}{4}p^2-[-(\tfrac{1}{4}p^2+q)]=-\tfrac{1}{4}p^2+\tfrac{1}{4}p^2+q=+q$. Conſequenter aequatio deinceps poſita quaeſita hanc habebit formam $x^2-2\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}.x+q=0$, ſeu $x^2-p\sqrt{-1}.x+q=0$.

§. 23. Eodem plane modo inueniri poſſunt radices aequationum, quae ſunt (§. XIV.) aequationi tertiae $x^2+px+q=0$, et quartae $x^2+px-q=0$, deinceps poſitae, et ex radicibus inuentis aequationes deinceps poſitae ipſae formari. Neque tamen iſto labore opus eſt, cum ex calculo in §. XXII. adhibito manifeſtum ſit, totum negotium breuius expediri poſſe, ſi in quatuor formis aequationum (§ XIV), loco $\mp p$, ſcribatur $\mp 2\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}$, et in tertio Termino, loco $\mp q$, ſcribatur $\pm q$, pro reſpondente aequatione deinceps poſita obtinenda; huiusque radices innoteſcent, aut aequationem quadraticam methodo ordinaria reducendo, aut radices in §. XIV. datas transformando, ſi, loco $\mp\tfrac{1}{2}p$, ſcribatur $\mp\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}$, et in locum $\mp\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}$, vel $\mp\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}$, reſpectiue ſurrogetur $\pm\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2-q)}$, vel $\pm\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)}$: quem ad modum apparet ex Tabula ſubiecta, in qua numeri vulgares 1, 2, 3, 4 indicant aequationes atque radices ordi-

ordinariis, numeri Romani autem I. II. III. IV designant respondentes aequationes atque radices deinceps positas.

1) $x^2 - px + q = 0$; $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Fig. 3. α et α

I) $x^2 - 2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}\,.\,x - q = 0$; $x = +\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} \pm \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Fig. 3. β et β

2) $x^2 - px - q = 0$; $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$. Fig. 5. α et γ

II) $x^2 - 2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}\,.\,x + q = 0$; $x = +\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} \pm \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 + q)}$. Fig. 5. β et δ

3) $x^2 + px + q = 0$; $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Fig. 3. γ et γ

III) $x^2 + 2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}\,.\,x - q = 0$; $x = -\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} \mp \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Fig. 3. δ et δ

4) $x^2 + px - q = 0$; $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$. Fig. 6. γ et α

IV) $x^2 + 2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}\,.\,x + q = 0$; $x = -\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} \mp \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 + q)}$. Fig. 6. δ et β

Hinc etiam apparet, data aequatione deinceps posita, perueniri ad respondentem aequationem ordinariam, si, loco termini tertii $\pm q$, ponitur $\mp q$, et, loco $\pm 2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}$, ponatur $\pm p$; item, illius radicibus datis, inueniri respondentes radices ordinarias, pro $\mp\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}$, et $\pm\sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, et $\pm\sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 + q)}$, respectiue substituendo $\mp\frac{1}{2}p$, et $\mp\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, et $\mp\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$.

§. 24. Vt autem duorum quadratorum deinceps positorum comparatio inter se recte institui possit, notanda
Fig. 3. sunt sequentia. Nimirum (*Fig.* 3. α et β) □tis primitiuis positiuis PITK et PQVR respondent □ta priuatiua, seu illis deinceps posita PIHk et PQOr. Proinde, quia area □ti deinceps positi PIHk magis deficit ab area □torum positiuorum PITK aut PQVR, quam deinceps positorum alterum PQOr; □tum PIHk minus esse censendum est altero PQOr, illiusque adeo radix minor habenda erit radice huius; etsi res contra habeat, si □ta deinceps posita absolute inter se considerentur, seu sine relatione

latione ad aream □ti primitiui positiui (*sub* α). [§. III. VII. n. II. et III.] Vnde etiam mirum non est, quod e. g. in §. XXII. (*Fig.* 3. β) $\surd$ □ti PIH$k = + \surd - \frac{1}{4}p^2 - \surd - (\frac{1}{4}p^2 - q)$, habeat formam radicis minoris, contra autem $\surd$ □ti PQO$r = + \surd - \frac{1}{4}p^2 + \surd - (\frac{1}{4}p^2 - q)$, formam radicis maioris; item quod in §. XXII. (*Fig.* 5. β et δ) $\surd$ □ti PIH$k = + \surd - \frac{1}{4}p^2 - \surd - (\frac{1}{4}p^2 + q)$, radicis minoris formam habeat, sed $\surd$ □ti PQ$vr = + \surd - \frac{1}{4}p^2 + \surd - (\frac{1}{4}p^2 + q)$, formam radicis maioris. Breuiter: duo eiusmodi □ta ex α (*Fig.* 3.) et duo □ta ex β, secundum congruentiam inter se comparata constituunt proportionem Geometricam. Fig. 3. Fig. 5. Fig. 3.

E. gr $\left\{\begin{matrix} \square PITK : \square PQVR = \square PIHk : \square PQOr \\ +25 : +9 = -25 : -9 \end{matrix}\right\}$; at eadem □ta secundum quantitatem arearum inter se comparata, faciunt proportionem Arithmeticam.

E. gr. $\left\{\begin{matrix} \square PITK - \square PQVR = \square PQOr - \square PIHk \\ +25 - +9 = -9 - -25 \end{matrix}\right\}$, vbi differentia Terminorum vtriusque rationis est $= -16$.

§. 25. Quomodo autem eiusmodi radices arearum priuatiuarum ex mente mea in calculo tractandae sint, in vnico exemplo adiecto ostendisse sufficit. Nimirum, ex §. XXIII. *num* II, sit construenda aequatio $x^2 - 2\surd - \frac{1}{4}p^2 . x + q = 0$, et quidem (*Fig* 5. β) pro casu $x = \surd$ □ti PIH$k = + \surd - \frac{1}{4}p^2 - \surd - (\frac{1}{4}p^2 + q)$: Fig. 5.

erit $x^2 = - \frac{1}{4}p^2 - (\frac{1}{4}p^2 + q) - \frac{2}{2}p\surd[-1 . - (\frac{1}{4}p^2 + q)]$

$= - \frac{1}{2}p^2 \quad - q \quad - p\surd(\frac{1}{4}p^2 + q) \ldots\ldots\ldots = \square PIHk$

$-2\surd - \frac{1}{4}p^2 . x = -2\surd - \frac{1}{4}p^2 [\surd - \frac{1}{4}p^2 - \surd - (\frac{1}{4}p^2 + q)]$

$= -2\surd[- \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p\surd[-1 . - (\frac{1}{4} + q)]]$

$= + \frac{1}{2}p^2 \quad + p\surd(\frac{1}{4}p^2 + q) \ldots\ldots = PL.PK = PL. - Pk = - \square PL\Phi k$

$+ q \quad = \quad + q \quad \ldots\ldots\ldots = - PQ.PK = LI.L\varsigma = LI. - L\Phi = - \square LIH\Phi$

quorum summa vtrobique est $= 0$, et praeterea calculus pariter ac constructio ex asse consentit cum §. XX. num. 1.

§. 26. In omnibus quatuor aequationum quadraticarum formis in § XIV. descriptis est quadratum semisummae radicum vel $=(+\frac{1}{2}p)^2$, vel $=(-\frac{1}{2}p)^2=+\frac{1}{4}p^2$, factum autem radicum vel $=+q$, vel $=-q$. Si ponatur $\mp p=0$; fiet x vel $=\mp\sqrt{-q}$, vel $=\mp\sqrt{+q}$, vel $=\pm\sqrt{-q}$, vel $=\pm\sqrt{+q}$. Si autem ponatur $q=0$. semper radicum vna fiet $=0$, adeoque euanescet, et aequatio quadratica degenerabit in aequationem primae dimensionis, fietque x vel $=+p$, vel $=-p$: quemadmodum ex inspectione tabulae in §. XIV. datae statim patescit. Sed hisce casibus simplicibus sepositis, persequamur saltem tres casus compositos diuersos, qui resultant, quantitates $+\frac{1}{4}p^2$ et $+q$ inter se comparando. Aut enim esse potest 1) $q=\frac{1}{4}p^2$; aut 2) $q<\frac{1}{4}p^2$, sed tamen $q>0$, adeoque $q+m^2=\frac{1}{4}p^2$, seu $q=\frac{1}{4}p^2-m^2$; aut 3) $q>\frac{1}{4}p^2$, adeoque $q=\frac{1}{4}p^2+m^2$. Ne quis autem excipiat, rectam datam ($+p$ vel $-p$) in duas partes ita secari non posse, vt sit rectangulum sub partibus (q) maius □to partis dimidiae ($\frac{1}{4}p^2$), adeoque casum tertium esse impossibilem; monendum est, propositionem istam saltem veram esse, si ponatur, □tum semidifferentiae partium esse debere □tum positiuum. Quoniam autem, praeter □ta positiua, etiam dantur □ta priuatiua, eaque realia et assignabilia (§. VII. *seqq*); vtique fieri poterit, vt □tum semidifferentiae partium sit □tum priuatiuum, adeoque semidifferentia $=\sqrt{}$ □ti priuatiui seu (stylo hactenus vsitato) quantitas imaginaria. Quo in casu erit et *factum partium* (q) *maius* □*to partis dimidiae* ($\frac{1}{4}p^2$), et *summa* □*torum partium minor duplo* □*to partis dimidiae* ($\frac{2}{4}p^2$): quod vtrumque secus accidit

cidit in quantitatibus ordinariis, quando scilicet □tum semidifferentiae est □tum positiuum. E. gr. sit $\frac{1}{2}p = 5$, adeoque $\frac{1}{4}p^2 = 25$, sit porro □tum semidifferentiae $= 9$, adeoque semidifferentia ipsa $= \sqrt{9} = 3$; erit pars maior $= 5 + 3 = 8$, et minor $+ 5 - 3 = 2$, adeoque factum $q = 8 . 2 = 16$, et summa □torum $= 8^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68$, consequenter, $16 < 25$, seu $q < \frac{1}{4}p^2$, et $68 > 2 . 25$, seu summa □torum $> \frac{2}{4}p^2$, seu $34 > 25$, h. e. semisumma □torum $> \frac{1}{4}p^2$. Contra autem in altero casu sit, vt ante, $\frac{1}{2}p = 5$, adeoque $\frac{1}{4}p^2 = 25$, sed □tum semidifferentiae $= -9$, adeoque semidifferentia ipsa $= \sqrt{-9}$; erit pars maior $= 5 + \sqrt{-9}$, et minor $= 5 - \sqrt{-9}$, adeoque factum $q = (5 + \sqrt{-9})(5 - \sqrt{-9}) = 25 - (-9) = 25 + 9 = 34$, et summa □torum $= [5 + \sqrt{-9}]^2 + [5 - \sqrt{-9}]^2 = 25 - 9 + 10\sqrt{-9} + 25 - 9 - 10\sqrt{-9} = 50 - 18 = 32$, consequenter $34 > 25$, seu $q > \frac{1}{4}p^2$, et $32 < 2 . 25$, seu summa □torum $< \frac{2}{4}p^2$, seu $16 < 25$, h. e. semisumma □torum $< \frac{1}{4}p^2$.

§. 27. Proinde *si I. ponatur* $q = \frac{1}{4}p^2$; in §. XIV. fiet Fig. 3.

1) $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 = 0$; et $x = + \frac{1}{2}p \mp 0$; adeoque (Fig. 3 α) puncta Q et I cadunt in E, eritque Ima $x = \frac{1}{2}p =$ PE $=$ PA, et IIda $x = \frac{1}{2}p =$ PE $=$ PA, h. e. aequatio habebit duas radices positiuas aequales. Porro fiet

3) $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = 0$; et $x = - \frac{1}{2}p \mp 0$; adeoque (Fig. 3. γ) puncta q et i cadunt in e, eritque Ima $x = - \frac{1}{2}p = Pe = Pa$, et IIda $x = - \frac{1}{2}p = Pe = Pa$, h. e. aequatio habebit duas radices priuatiuas aequales.

Fig. 5. 2) fiet $x^2 - px - \frac{1}{4}p^2 = 0$; et $x = + \frac{1}{2}p \mp \sqrt{\frac{1}{2}p^2}$; adeoque (*Fig.* 5. *α et γ*) erit I^ma^ $x = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{2}p^2} = PI = PE + EI = PE + \sqrt{2PE^2}$, seu $PI > 2PE$, h. e. $PI > PL$, et II^da^ $x = \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{2}p^2} = PQ = PE - EQ = PE - \sqrt{2PE^2}$, h. e. PQ, absolute spectata erit $< PE$.

Fig. 6. 4) Fiet $x^2 + px - \frac{1}{4}p^2 = 0$; et $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{2}p^2}$, adeoque (*Fig.* 6. *γ et α*) erit I^ma^ $x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{2}p^2} = PE + Ei$, seu Pi, absolute spectata, erit $> PL$, et II^da^ $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{2}p^2} = PQ = PE - \sqrt{2PE^2}$, h. e. Q cadit inter P et *e*, si sumatur $Pe = PE$.

§. 28. *Si II. ponatur* $q < \frac{1}{4}p^2$, adeoque $q = \frac{1}{4}p^2 - m^2$; in §. XIV.

1) fiet $x^2 - px + (\frac{1}{4}p^2 - m^2) = 0$; et $x = \frac{1}{2}p$
Fig. 3. $\mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p^2 + m^2)} = \frac{1}{2}p \mp \sqrt{m^2}$, adeoque (*Fig.* 3. *α*) radices PI et PQ cadunt, vti ibidem delineantur, vltra P, cis et vltra punctum E.

3) Fiet $x^2 + px + (\frac{1}{4}p^2 - m^2) = 0$; et $x = -\frac{1}{2}p \mp \sqrt{m^2}$, adeoque (*Fig.* 3. *γ*) radices Pi et Pq cadunt versus sinistram puncti P, cis et vltra punctum *e*.

2) Fiet $x^2 - px - (\frac{1}{4}p^2 - m^2) = 0$; et $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{2}p^2 - m^2)}$,
Fig. 5. adeoque (*Fig.* 5. *α* et *γ*) radices PI et PQ cadunt, illa vltra L, haec inter P et *e*, si sumatur $Pe = PE$.

4) Fiet $x^2 + px - (\frac{1}{4}p^2 - m^2) = 0$; et $x = -\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{2}p^2 - m^2)}$,
Fig. 6. adeoque (*Fig.* 6. *α* et *γ*) radices PQ et Pi cadunt, illa inter P et *e*, si sumatur $Pe = PE$, haec ad sinistram puncti P, vltra L.

§. 29. *Si denique III. ponatur* $q > \frac{1}{4}p^2$, *adeoque* $q = \frac{1}{4}p^2 + m^2$; in §. XIV.

1) Fiet $x^2 - px + (\frac{1}{4}p^2 + m^2) = 0$; et $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p^2 - m^2)} = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{-m^2}$; atque sic preuenitur ad duas

duas radices, quarum semidifferentia ($\sqrt{-m^2}$) radicem $\square$ti priuatiui, seu quantitatem imaginariam constituit. Quare, cum (*Fig.* 8. α, β, δ), $+\sqrt{-m^2}$ in area β, et $-\sqrt{-m^2}$ in area δ assignanda sit (§. VIII.); erit radicum Fig. 8.

$$\text{maior } x = \sqrt{\square\text{ti } PECA} + \sqrt{\square\text{ti } EI\omega\psi} = \sqrt{\square\text{ti } PECA} + \sqrt{\square\text{ti } Pfgb}$$

$$\text{maior } x = \sqrt{\square\text{ti } PECA} \left\{\begin{array}{l} -\sqrt{\square\text{ti } EI\omega\psi} \\ \text{h.e.} +\sqrt{\square\text{ti } AKol} \end{array}\right\} = \sqrt{\square\text{ti } PECA} \left\{\begin{array}{l} -\sqrt{\square\text{ti } Pfgb} \\ \text{h.e.} +\sqrt{\square\text{ti } Pbcd} \end{array}\right\}$$

3) Fiet $x^2 + px + (\frac{1}{4}p^2 + m^2) = 0$; et $x = -\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p^2 - m^2)} = -\frac{1}{2}p \mp \sqrt{-m^2}$; atque sic denuo peruenitur ad duas radices, quarum semidifferentia ($\sqrt{-m^2}$) est radix $\square$ti priuatiui, seu quantitas imaginaria. Quare cum (*Fig.* 9. γ, δ, β), $-\sqrt{-m^2}$ in area δ, et $+\sqrt{-m^2}$ in area β assignanda sit (§. VIII.); erit radicum Tab. III. Fig. 9.

$$\text{I}^{\text{ma}}\ x = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{-m^2} = \sqrt{\square\text{ti } Peca} \left\{\begin{array}{l} +\sqrt{\square\text{ti } ei\omega\psi} \\ \text{seu } \sqrt{\square\text{ti } Pfgb} \end{array}\right\} = -\sqrt{\square\text{ti } PECA} - \sqrt{\square\text{ti } Pd\varsigma b}.$$

$$\text{II}^{\text{da}}\ x = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{-m^2} = \sqrt{\square\text{ti } Peca} + \sqrt{\square\text{ti } akol} \left\{\begin{array}{l} -\sqrt{\square\text{ti } ei\omega\psi} \\ -\sqrt{\square\text{ti } Pfgb} \end{array}\right\} = -\sqrt{\square\text{ti } PECA} + \sqrt{\square\text{ti } Pd\varsigma b}.$$

2) Fiet $x^2 - px - (\frac{1}{4}p^2 + m^2) = 0$, et $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + m^2)}$, adeoque (*Fig.* 5. α et γ) radices PI et PQ cadunt, vti ibidem delineantur, et quidem tanto magis vltra L et e, quo maior fuerit quantitas m. Fig. 5.

4) Fiet $x^2 + px - (\frac{1}{4}p^2 + m^2) = 0$, et $x = -\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + m^2)}$, adeoque (*Fig.* 6. α, γ) radices PQ et Pi cadunt tanto magis vltra e et L, quo maior fuerit quantitas m. Fig. 6.

§. 30. Ex hac omnium casuum aequationis quadraticae enumeratione et constructione (§. XXVII. XXVIII. XXIX.) mani-

manifestum fit, in ea resoluenda nunquam perueniri ad quantitates imaginarias, nisi vtraque radix vel positiua, vel priuatiua fuerit, vt factum possit esse $= + q$, et praeterea fuerit $q > \frac{1}{4}p^2$. Inter 24 enim radices possibiles diuersas, quas in §. XXVII. XXVIII. XXIX. exhibui, non nisi 4 radices dantur, quae sint quantitatibus imaginariis quasi desormatae. Nec tamen propterea existimandum est, radicum imaginariarum in calculo interuentum fore rarissimum: occurrunt enim frequentius, quam inexpertus quisque opinari possit, praesertim quando de aequationibus cubicis, altioribusque resoluendis agitur. Satis enim constat, aequationem cubicam, imo etiam altiorem quamcunque, resolui non posse, nisi ea ante ad quadraticam reducta fuerit; haec autem frequentissime ita comparata est, vt eius radix vtraque sit vel positiua, vel priuatiua, et praeterea factum radicum maius sit quadrato semisummae, quo in casu semidifferentia radicum non potest non esse quantitas imaginaria (§. XXIX. *num.* 1. et 3). Vt taceam aequationum quadraticarum ordinariarum deinceps positas, quarum radices omnes ex meris quantitatibus imaginariis sint conflatae (§. XXIII). Quae cum ita sint, optandum esset, vt, abdicata persuasione de quantitatum imaginariarum impossibilitate atque inassignabilitate, earundem Theoria magis magisque excolatur. Hac in lucem protracta, via, si quid mei iudicii est, aperta erit ad aequationes altiores exacte resoluendas, imo etiam radicum ad aequationes cubicas pertinentium constructiones genuinae dari poterunt.

§. 31. Haud parum facit ad naturam quantitatum imaginariarum penitius perspiciendam, si duae aequationes

nes quadraticae sequentes $x^2 \pm px + q = 0$, et $x^2 \pm px + Q = 0$, vbi, (*per. hyp.*) est $Q > q$, distincte euoluantur: quemadmodum apparet ex Tabula subiecta. Nimirum sit

In casu I.		In casu II.
$\mp\frac{1}{2}p$ . . . . $\frac{1}{4}p^2$ . . . . per hyp. sit $+\frac{1}{4}d^2$ . . . . $\mp\frac{1}{2}d$ . . . . (et quidem $\frac{1}{2}d < \frac{1}{2}p$.)	Semisumma radicum □tum semisummae □tum semidifferentiae semidifferentia	. . . $\mp\frac{1}{2}p$ . . . . $\frac{1}{4}p^2$ sit $-\frac{1}{4}d^2$ (per hyp.) . . . $\mp\sqrt{-\frac{1}{4}d^2}$
erit $\mp\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}d$ . . . $\mp\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}d$ . . .	Radix maior — — minor	. . . $+\frac{1}{2}p + \sqrt{-\frac{1}{4}d^2}$ . . . $\mp\frac{1}{2}p - \sqrt{-\frac{1}{4}d^2}$
$+q = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}d^2$ . . .	Factum = □ semis. — □ semidiff.	. . . $\frac{1}{4}p^2 - (-\frac{1}{4}d^2) = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}d^2 = +Q$
$\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}pd + \frac{1}{4}d^2$ $\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}pd + \frac{1}{4}d^2$	□tum maioris, vel min. □tum minoris, vel mai.	. . . $\frac{1}{4}p^2 + p\sqrt{-\frac{1}{4}d^2} + (-\frac{1}{4}d^2)$ . . . $\frac{1}{4}p^2 \pm p\sqrt{-\frac{1}{4}d^2} + (-\frac{1}{4}d^2)$
$\frac{2}{4}p^2 \quad + \frac{2}{4}d^2$ $\frac{1}{4}p^2 \quad + \frac{1}{4}d^2$	Summa □torum semisumma □torum = □ semis. + □ semidiff.	. . . $\frac{2}{4}p^2 \quad + 2\,(-\frac{1}{4}d^2)$ . . . $\frac{1}{4}p^2 \quad + 1.(-\frac{1}{4}d^2)$ $= \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}d^2$
$\frac{2}{2}pd = p.d$ . . . $\frac{1}{2}pd = p.\frac{1}{2}d$ . .	differentia □torum semidifferentia □torum = Summa . semidifferentia	. . . $2p\sqrt{-\frac{1}{4}d^2} = p.2\sqrt{-\frac{1}{4}d^2}$ . . . $p.\sqrt{-\frac{1}{4}d^2}$
$q + \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}p^2$ . . . Ergo $q < \frac{1}{4}p^2$, seu factum . < □to semis.	□tum semisummae = factum + □ semidiff.	$Q + (-\frac{1}{4}d^2) = Q - \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}p^2$ Ergo $Q > \frac{1}{4}p^2$, seu factum > □to semis.
et, ob $\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}d^2 > \frac{1}{4}p^2$, erit semis. □□ > □ semis.		et, ob $\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}d^2 < \frac{1}{4}p^2$, erit semis. □□ < □to semis.

§. 32. Hos duos caſus inter ſe conferenti patebit etiam

1) eſſe factum caſus I $=$ ſemiſ. □□ caſus II $= \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}d^2$. Et contra

2) eſſe ſemiſummam □□ caſus I $=$ facto caſus II $= \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}d^2$. Et contra

Hinc ſequens formula generalis F inſeruit et □to ſemiſummae, et ſemiſummae □torum, et facto radicum, et □to ſemidifferentiae in vtroque caſu ſimul repraeſentandis.

$$F \text{ - - - - - } = \tfrac{1}{4}p^2 \mp \tfrac{1}{4}d^2. \quad \text{Nam}$$

ſi ponatur $d=0$, fiet $F = \frac{1}{4}p^2 \mp 0 = \frac{1}{4}p^2 =$ □to ſemiſummae in vtroque caſu.

Si ponatur $p=0$, valeatque ſignum inferius, fiet $F = 0 + \frac{1}{4}d^2 = + \frac{1}{4}d^2$ $=$ □to ſemidifferentiae caſus I.

Si ponatur $p=0$, valeatque ſignum ſuperius; fiet $F = 0 - \frac{1}{4}d^2 = - \frac{1}{4}d^2$ $=$ □to ſemidifferentiae Caſus II.

Vtroque autem membro retento,

Si valeat ſignum inferius; fiet $F = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}d^2 =$ ſemiſ. □□ caſus I. $=$ facto caſus II.

Si valeat ſignum ſuperius; fiet $F = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}d^2 =$ facto caſus I. $=$ ſemiſ. □□ caſus II.

§. 33. Nunc progredior ad aequationes cubicas. Harum conſtructio ſupponit notitiam Formularum generalium pro radicibus ex data aequatione cubica extrahendis. Etſi vero Formulae iſtae, ſub titulo *Regularum Cardani*, ſatis notae ſint; iuuat tamen easdem alia methodo, magis naturali et paulo commodiore, in quam ante annos complures incidi, eruere, et additamentis, quae ad reliquas duas radices determinandas pertinent, illuſtrare: praeſertim cum eo ipſo *Regulae Cardani*, quae multis ſuſpectae videri ſolent, valde confirmentur. Nimirum aequationes cubicae, ſecundo Termino ſublato, reducuntur ad hos qua-

quatuor Casus: I. $v^3 * - pv - q = 0$; II. $v^3 * + pv - q = 0$;
III. $v^3 * - pv + q = 0$; IV. $v^3 * + pv + q = 0$.

In Casu I. fiat $v = y * + mpy^{-1}$; erit

$$\left.\begin{array}{l} v^3 = y^3 + 3mpy + 3m^2p^2y^{-1} + m^3p^3y^{-3} \\ -pv = \quad - \quad py - \quad mp^2y^{-1} \\ -q = \quad\quad -q \end{array}\right\} = 0.$$

Iam ponatur $3mp - p = 0$; erit $3m - 1 = 0$, et $m = \frac{1}{3}$; adeoque $3m^2p^2 - mp^2 = \frac{1}{3}p^2 - \frac{1}{3}p^2 = 0$. Ex quo fit $\left.\begin{array}{l} y^3 ** + \frac{1}{27}p^3y^{-3} \\ -q \end{array}\right\} = 0$, et, per y^3 multiplicando, $y^6 - qy^3 + \frac{1}{27}p^3 = 0$, quam aequationem quadraticam ad duas simplices reducendo, et ex his radicem cubicam extrahendo, fit $y = [\frac{1}{2}q \mp \sqrt{}(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3}$. Vnde, ob $v = y + \frac{mp}{y}$, prodit: $v = [\frac{1}{2}q \mp \sqrt{}(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3} + \frac{\frac{1}{3}p}{[\frac{1}{2}q \mp \sqrt{}(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3}}$. Est autem $\frac{1}{3}p = [\frac{1}{2}q \mp \sqrt{}(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3}.\ [\frac{1}{2}q \pm \sqrt{}(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3}$, vti actu multiplicando patet, adeoque $\frac{\frac{1}{3}p}{[\frac{1}{2}q \mp \sqrt{}(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3}} = [\frac{1}{2}q \pm \sqrt{}(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3}$. Ergo, siue signa inferiora, siue superiora valere debere ponas, erit $v = [\frac{1}{2}q + \sqrt{}(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3} + [\frac{1}{2}q^2 - \sqrt{}(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3}$. Quae est ipsa *Regula Cardani* pro Casu I: in qua de signis $+$ et $-$ notandum est, cubum $\frac{1}{27}p^3$ affici eodem, quantitatem autem $\frac{1}{2}q$ contrario signo, respectu signorum, quibus quantitates p et q in aequatione nihilo aequali I. afficiuntur.

§. 34. Quodsi porro in aequationibus propositis I. II. III. IV, loco p et q, respectiue ponatur $3P$ et $2Q$; *Regulae Cardani* concinnius exprimi poterunt.

Fiet nempe, attendendo ad Regulam de signis modo datam;

in casu I. $v = [Q + \sqrt{(Q^2 - P^3)}]^{1:3} + [Q - \sqrt{(Q^2 - P^3)}]^{1:3}$

II. $v = [Q + \sqrt{(Q^2 + P^3)}]^{1:3} + [Q - \sqrt{(Q^2 + P^3)}]^{1:3}$

III. $v = [-Q + \sqrt{(Q^2 - P^3)}]^{1:3} + [-Q - \sqrt{(Q^2 - P^3)}]^{1:3}$

IV. $v = [-Q + \sqrt{(Q^2 + P^3)}]^{1:3} + [-Q - \sqrt{(Q^2 + P^3)}]^{1:3}$.

§. 85. Quoniam autem in omnibus his quatuor casibus aequatio cubica respondens habere debet tres radices v; valor quoque pro v in §. XXXIV. inuentus, qui (breuitatis gratia) dicatur $A + B$, seu $+ 1.(A + B)$, re vera triplex esse debet, vt quamcunque libet trium radicum aequationis repraesentare possit. Quoniam tamen adhuc dum desideratur methodus extrahendi radicem cubicam ex data quantitate irrationali composita (ea enim, quae in *Elementis Algebrae* communiter tradi solet, rem, vt erat, inconfectam relinquit), ita vt in hoc difficili negotio multum indulgendum sit diuinationibus repetitis, et examini subiectis; admodum contenti sumus horum trium valorum vnum saltem, quem primam radicem aequationis, seu 1) v, dicimus, ex formula determinasse, cum, ex hoc cognito, reliqui valores, absque vlla diuinatione, certa methodo, per resolutionem aequationis quadraticae haberi possint. Nimirum ad reliquas duas radices inueniendas fiat factor simplex $v - (A + B) = o$, per quem cum diuisibilis esse debeat aequatio cubica respondens, e. g. I^{ma} $v^3 * - 3Pv - 2Q = o$, diuisione actu instituta, erit residuum diuisionis $= (A+A)^3 * - 3P(A + B) - 2Q$, h. e. $= v^3 * - 3Pv - 2Q = o$,

$=0$, quotus autem dabit hanc aequationem quadraticam $v^2 + (A+B)v - [3P - (A+B)^2] = 0$, qua reducta, prodibit

$$2)\, v = \frac{-(A+B)}{2} + \frac{\sqrt{[12P - 3(A+B)^2]}}{2};\ \text{et}\ 3)\, v = \frac{-(A+B)}{2} - \frac{\sqrt{[12P - 3(A+B)^2]}}{2}.$$

Est autem (per cas. I. in §. XXXIII. $P = \frac{1}{3}p = A.B$; hoc igitur valore, loco P, substituto, habebitur

$$2)\, v = \frac{-(A+B)}{2} + \frac{\sqrt{-3(A-B)^2}}{2} = \frac{-(A+B)}{2} + \frac{(A-B)\sqrt{-3}}{2} = \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}.A + \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}.B,$$

$$3)\, v = \frac{-(A+B)}{2} - \frac{(A-B)\sqrt{-3}}{2} = \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}.A + \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}.B.$$

In casibus II. III. et IV eadem methodo tractatis deuenitur ad easdem plane pro $2)\,v$ et pro $3)\,v$ Formulas. Quamuis enim in casu II et IV. reperiatur $2)\,v$, vel $3)\,v = -\frac{(A+B)}{2} \pm \frac{\sqrt{[-12P - 3(A+B)^2]}}{2}$, ita vt nunc, loco $+12P$, habeatur $-12P$; ista tamen Formularum diuersitas saltem apparens est, cuius inspectio formularum ex §. XXXIV. facile doceat, hic non esse factum $A.B = +P$, sed potius $= -P$, consequenter $-12P = +12A.B$, vt ante.

§. 36. Si in data aequatione cubica reperiatur valor ipsius $(A+B)$, seu pro $1)\,v$, negatiuus; commoditatis gratia consultum est, vt, valore affirmatiuo respondente assumto, $1)\,v$ exprimatur per $+1.(A+B)$. Quo facto, erit $2)\,v = \frac{(+1+\sqrt{-3})}{2}.A + \frac{(+1-\sqrt{-3})}{2}.B$, $3)\,v = \frac{(+1-\sqrt{-3})}{2}.A + \frac{(+1+\sqrt{-3})}{2}.B$.

§. 37 Ob eam, quam in §. XXXV. commoraui, difficultatem, haud raro insuperabilem, extrahendi radicem cubicam ex data quantitate irrationali composita, visum est, in vsum sequentium, hic adiicere nonnullas eiusmodi Formulas speciales, vt, praecisa calculi difficultate atque prolixitate, hinc excerpi possint. Harum autem veritas, actu multiplicando, facile explorari poterit.

$(\mp 1+\surd{-3})(\pm 1-\surd{-3})=+4;\ (-1\mp\surd{-3})^2(-1\pm\surd{-3})=-4\mp 4$

$(-1\mp\surd\ 3)^3=+8=2^3;\ (-1\mp\surd{-3})^2=2.(-1\pm\surd{-3});\ (\mp\surd{-3})^3=-8=($

$(1+2\surd{-1})(1-2\surd{-1})=+5;\ (1-2\surd{-1})^2+3(2\surd{-1}+1)=+2$

$(1-2\surd{-1})^3=-11+2\surd{-1};\ (-1\pm\surd{-1})^3=+2\pm 2\surd{-1};\ a^3(1-2\surd{-1})^3=-1$

$(-1\mp\surd 3)^3=-10\mp 6\surd 3;\ (-10+6\surd 3)^{1:3}.(-10-6\surd 3)^{1:3}=(-1+\surd 3)(-1-\surd 3$

$(-10+6\surd 3)^{2:3}.(-10-6\surd 3)^{1:3}=-2.(-10+6\surd 3)^{1:3}=-2.(-1+\surd 3)=+$

$(-10-6\surd 3)^{2:3}.(-10+6\surd 3)^{1:3}=-2.(-10-6\surd 3)^{1:3}=-2.(-1-\surd 3)=+$

$(\tfrac{3}{2}\mp\tfrac{1}{6}\surd{-3})^3=3\mp\tfrac{10}{9}\surd{-3};\ (3+\tfrac{10}{9}\surd{-3})^{1:3}.(3-\tfrac{10}{9}\surd{-3})^{1:3}=(\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{6}\surd{-3})(\tfrac{3}{2}-$

$=+\tfrac{7}{3}.$

$(-1+\surd{-1})^2=-2\surd{-1};\ (1+\surd{-1})^2=+2\surd{-1};\ (-1-\surd{-1})^2=+2\surd{-1};\ (1-\surd{-1}$

His praemissis, quae ad resolutionem aequationis cubicae pertinent, nunc agamus de constructione radicum eiusmodi aequationis, etsi easdem tantum non semper quantitates imaginariae ingrediantur.

§. 38. Sint quatuor rectangula α, β, γ, δ,
Fig. 10. ad idem punctum P coniugata, et pro basibus *parallelepipedorum* possibilium ad P coniugatorum assumta, sitque praeterea P T altitudo positiua (sursum tendens) $=+c$, et P t altitudo priuatiua (deorsum tendens) $=-c$; orientur octo *parallelepipeda* diuersa ad P coniugata, et quidem quatuor capacitatis positiuae $+abc$, reliqua quatuor autem capacitatis priuatiuae $-abc$. Nimirum erit *parallelepipedum positiuum*

1) $\alpha . PT = (+a . +b) . +c = +abc$; 2) $\gamma . PT = (-a . -b) . +c = +abc$.
3) $\beta . Pt = (+a . -b) . -c = +abc$; 4) $\delta . Pt = (-a . +b) . -c = +abc$.
Similiter erit *parallelepipedum priuatiuum*
1) $\gamma\ Pt = (-a . -b) . -c = -abc$; 2) $\alpha . Pt = (+a . +b) . -c = -abc$;
3) $\beta\ PT = (+a . -b) . +c = -abc$; 4) $\delta . PT = (-a . +b) . +c = -abc$.

§. 39. Pro *parallelepipedo* igitur positiuo dantur quatuor casus diuersi. Aut enim omnes tres dimensiones sunt positiuae; aut quaecunque binae dimensiones priuatiuae esse possunt, tertia positiua existente. Similiter pro *parallelepipedo* priuatiuo quatuor occurrunt casus diuersi. Aut enim omnes tres dimensiones sunt priuatiuae; aut quaecunque binae dimensiones possunt esse positiuae, tertia priuatiua existente (§. XXXVIII).

§. 40. Iam in area α ponatur $a = b = c$; orientur Fig. [illegible]
8 Cubi ad idem punctum P coniugati, quorum quatuor sunt capacitatis positiuae $+a^3$, reliqui quatuor autem capacitatis priuatiuae $-a^3$ (§. XXXVIII.): quoniam in Cubo $\alpha . PT$, in meros cubulos aequales resoluto, horum cubulorum vnus $= 1 . 1 . 1 = +1$, assumitur pro mensura omnium cuborum ad P coniugatorum.

§. 41. Proinde si octo illi Cubi coniugati absolute considerantur, erunt et capacitates omnium aequales; et singula singulorum latera inter se aequalia: at vero eosdem ex situ Cubi primitiui $\alpha . PT$ aestimando, nec singula singulorum latera aequalia sunt, nec capacitates omnium aequales erunt, sed eorum quatuor sunt capacitatis positiuae $+a^3$, reliqui quatuor autem priuatiuae capacitatis $-a^3$. Est namque solus Cubus $\alpha . PT$ primitiuus, reliqui autem omnes sunt ex illo deriuatiui. Hi enim omnes sunt

sunt illi deinceps positi, vel quoad vnicam dimensionem, vel quoad duas, vel denique quoad omnes tres dimensiones (§. XXXVIII. XXXX): in quo casu postremo, qui prodit, *Cubus*, dicitur illi α.PT *oppositus*. Si itaque Cubi longitudo, latitudo et altitudo primitiua respectiue dicatur $+L$, $+l$, $+A$, adeoque longitudo, latitudo, et altitudo deinceps posita respectiue exprimatur per $-L$, $-l$, $-A$; tabula subiecta vno obtutu ostendet Cubos primitiuo α.PT deinceps positos, et quidem quoad quam, vel quaspam dimensiones, vna cum eorundem capacitate: vbi sequens signum ('') indicat, spatia vacua, si videtur, supplenda esse ex linea prima $+l$, $+L$, $+A$.

		Capacitates
Cubus primitiuus. α.PT	$+l$, $+L$, $+A$	$+a^3$
β.PT	$-l$, '', ''	$-a^3$
γ.PT	$-l$, $-L$, ''	$+a^3$
δ.PT	'', $-L$, ''	$-a^3$
α.Pt	'', '', $-A$	$-a^3$
β.Pt	$-l$, '', $-A$	$+a^3$
γ.Pt	$-l$, $-L$, $-A$	$-a^3$
δ.Pt	''l, $-L$, $-A$	$+a^3$

Cubi primitiuo diuersimode deinceps positi.

Ex huius Tabulae inspectione quoque apparet, hic quatuor dari binorum Cuborum sibi inuicem oppositorum copulas sequentes.

1) α.PT, et γ.Pt; 2) β.PT, et δ.Pt
3) α.Pt, et γ.PT; 4) β.Pt, et δ.PT.

§. 42. Hinc aequatio cubica pura $x^3 = a^3$, seu $x^3 * * - a^3 = 0$, simul definit 1) Cubum α.PT; 2) Cu-

2) Cubum γ.PT; 3) Cubum β.Pt; 4) Cubum δ.Pt (§. XXXXI), adeoque erit I. $x^3 = +a. +a. +a$; II. $x^3 = -a. -a. +a$; III. $x^3 = +\sqrt{-a^2}. +\sqrt{-a^2}. -a$; IV. $x^3 = -\sqrt{a^2}. -\sqrt{-a^2}. -a$ (§. XXXVIII. XXXIX. XXXX. 8).

§. 43. Similiter aequatio cubica pura $x^3 = -a^3$, seu $x^3 ** + a^3 = 0$, simul definit 1) Cubum γ.Pt; 2) Cubum α.Pt; 3) Cubum β.PT; 4) Cubum δ.PT (§. XXXXI), ita vt nunc sit 1) $x^3 = -a. -a. -a$; 2) $x^3 = +a. +a. -a$; 3) $x^3 = +\sqrt{-a^2}. +\sqrt{-a^2}. +a$; 4) $x^3 = -\sqrt{-a^2}. -\sqrt{-a^2}. +a$ (§. XXXVIII. XXXIX. XXXX 8).

§. 44. Quia igitur aequatio cubica pura $x^3 ** \pm a^3 = 0$, quatuor cubos coniugatos, et situ inter se diuersos, aut, si valeat signum superius, his oppositos quatuor (§. XXXXI. XXXXII) simul definit; propterea eadem ipsa nondum satis determinata est ad latera seu radices Cubi primi, aut secundi, aut tertii, aut quarti indicandas, sed aequatio $x^3 ** - a^3 = 0$, saltem indicat, Cubi, cuius capacitas est $= + a^3$, radicem, seu latus x, seu $\sqrt[3]{+a^3}$, aeque esse posse $= \sqrt[3]{(-a. -a. +a)}$, aut $= \sqrt[3]{(+\sqrt{a^2}. +\sqrt{-a^2}. -a)}$, aut $= \sqrt[3]{(-\sqrt{-a^2}. -\sqrt{-a^2}. -a)}$, quam $= \sqrt[3]{(+a. +a +a)}$, littera a latus Cubi primitiui α.PT denotante, nec tamen determinat, quinam horum quatuor casuum possibilium valere debeat, sed id saltem docet, quemlibet horum trium cuborum deriuatiuorum, seu deinceps positorum aequalium, e. g. cubum β.Pt, absolute, seu sine relatione ad situm ipsius α.PT, consideratum, transire in Cubum aliquem primitiuum ipsi α.PT aequalem, cum in ista consideratione, et longitudo $+\sqrt{-a^2}$ abeat

 in

in $+a$, et latitudo $+\sqrt{-a^2}$ in $+a$, et altitudo $-a$ in $+a$ (§. XXXXI). Eodem modo, aequatio $x^3 * * + a^3 = 0$, nihil amplius ostendit, nisi quod Cubi, cuius capacitas est $= -a^3$, radix, seu latus x, seu $\sqrt[3]{-a^3}$, aeque esse possit $= \sqrt[3]{(+a.+a.-a)}$, aut $= \sqrt[3]{(+\sqrt{-a^2}.+\sqrt{-a^2}.+a)}$, aut $= \sqrt[3]{(-\sqrt{-a^2}.-\sqrt{-a^2}.+a)}$, quam $= \sqrt[3]{(-a.-a.-a)}$, littera a itidem latus cubi primitiui α.PT designante, et quemlibet horum cuborum deinceps positorum aequalium, e. g. Cubum β.PT, sine relatione ad situm cubi γ.Pt ipsi α.PT oppositi consideratum, transire in Cubum ipsi γ.Pt aequalem, cuius et longitudo, et latitudo et altitudo abeat in $-a$ (§. XXXXI).

§. 45. Etsi vero aequatio generalis $x^3 * * - a^3 = 0$, re vera habeat tres radices, ita vt sit 1) $x = +a = +1.a$; 2) $x = \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}a$; 3) $x = \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}a$ (quem ad modum intelligitur, si in §. XXXIV. ponatur $3P = 0$; tum enim in casu I. et II. fit 1) $x = A + B = A + 0 = 1.A$, in casu autem III et IV. fit 1) $x = A + B = 0 + B = 1.B$, adeoque in §. XXXV. fit $12P = 0$, et hinc, in casu I et II, 2) x vel 3) $x = -\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{-3}.A = \left(\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}\right).A$, in casu autem III et IV. 2) x vel 3) $x = -\frac{1}{2}B \mp \frac{1}{2}\sqrt{-3}.B = \left(\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}\right).B$); quarum trium radicum haec est conditio, vt sit summa radicum $= 0$, summa productorum ex binis $= 0$, et factum omnium vt $+1$; nihilo minus tamen istae tres radices non valent pro vllo quatuor cuborum positiuorum in §. XXXXII. descriptorum (§ XXXXIV), sed id saltem indicant, si aequationes completae, pro singulis istis quatuor diuersis cubis definiendis diuersae, dentur,

tur, eaedemque ita transformentur, vt Terminus secundus, aeque vti in aequatione generali respondente, deficiat; quacunque libet trium radicum pro prima assumta, tres aequationis transformatae radices hanc inter se relationem tenere, vt $+1$; $\frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}$; $\frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}$, atque adeo, vna radice cognita, reliquas promte inueniri posse. Est autem $\frac{(-1\mp\sqrt{-3})}{2}=-\frac{1}{2}\mp\sqrt{-1}.\sqrt{\frac{3}{4}}$. Quare cum, posito sinu toto $=+1$, et semiperipheria circuli $=\pi$, sit cos. $0\pi=$ cos. $2\pi=+1=$ cos. 4π, aut in genere $=$ cos. $2k\pi$, littera k quemlibet numerum integrum denotante; cos. $\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$; sin. $\frac{2}{3}\pi=\sqrt{\frac{3}{4}}$; patet, in aequatione cubica pura $x^3**-a^3=0$, tres eius radices hanc inter se relationem tenere, vt $+1$; $-\frac{1}{2}+\sqrt{-1}.\sqrt{\frac{3}{4}}$; $-\frac{1}{2}-\sqrt{-1}.\sqrt{\frac{3}{4}}$; hoc est, vt cos. $2k\pi$; cos. $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{-1}$. sin. $\frac{2}{3}\pi$; cos. $\frac{2}{3}\pi-\sqrt{-1}$. sin. $\frac{2}{3}\pi$; et duarum postremarum factum esse vt $(\text{cos. }\frac{2}{3}\pi)^2+(\text{sin. }\frac{2}{3}\pi)^2=+1=(\text{cos. }2k\pi)^2$, factum denique omnium trium radicum, $+1.(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})=+1$, esse vt cos. $2k\pi$. $(\text{cos. }2k\pi)^2=(\text{cos. }2k\pi)^3$, seu vt cubum sinus totius, cuius basis, $(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})=1$, aequatur quadrato sinus totius. Breuiter: hic Cubus mentitur formam Cubi $\gamma.PT^2$ ex §. XXXXI.

§. 46. Similiter aequatio generalis $x^3**+a^3=0$, habet quidem suas tres radices, ita vt sit 1) $x=-a=-1.a$; 2) $x=(\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}).a$; 3) $x=(\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}).a$ (§. XXXVI), huius scilicet conditionis, vt sit summa radicum $=0$, summa factorum ex binis $=0$, et factum omnium vt -1; hae tamen tres radices non valent pro vllo quatuor cuborum priuatiuorum in §. XXXXIII. descriptorum (§. XXXXIV),

 sed

sed id saltem ostendunt, si habeantur aequationes completae definientes, pro singulis istis quatuor diuersis cubis diuersae; eaedemque ita transformentur, vt Terminus secundus, aeque vti in aequatione generali respondente, deficiat; quacunque libet trium radicum pro prima assumta, tres aequationis transformatae radices esse inter se, vt -1; $(\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}$; $(\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}$ (§. XXXVI); atque sic, vna radice cognita, reliquas, ope huius relationis, expedite formari posse. Est autem $\frac{+1\mp\sqrt{-3}}{2}=\frac{1}{2}\mp\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\frac{3}{4}}$. Vnde cum, posito sinu toto $=+1$, et semiperipheria $=\pi$, sit cos. $\pi=-1=$ cos. $3\pi=$ cos. 5π, aut in genere $=$ cos. $(2k+1)\pi$, littera k quemlibet numerum integrum denotante, et praeterea sit cos. $\frac{1}{3}\pi=+\frac{1}{2}$, sin. $\frac{1}{3}\pi=\sqrt{\frac{3}{4}}$; perspicuum est, in aequatione cubica pura $x^3**+a^3=0$, tres eius radices hanc inter se relationem habere, vt -1; $+\frac{1}{2}+\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\frac{3}{4}}$; $+\frac{1}{2}-\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\frac{3}{4}}$, h. e. vt cos. $(2k+1)\pi$; cos. $\frac{1}{3}\pi+\sqrt{-1}\,.$ sin. $\frac{1}{3}\pi$; cos. $\frac{1}{3}\pi-\sqrt{-1}\,.$ sin $\frac{1}{3}\pi$; et duarum postremarum factum esse vt (cos. $\frac{1}{3}\pi)^2+($sin. $\frac{1}{3}\pi)^2$ $=1=(-1)^2=[$cos $(2k+1)\pi]^2$, seu vt quadratum radicis primae; factum denique ex omnibus tribus radicibus, $-2.(\frac{+1+\sqrt{-3}}{2})(\frac{+1-\sqrt{-3}}{2})=-1$, esse vt cos. $(2k+1)\pi$. $[$cos. $(2k+1)\pi]^2=[$cos. $(2k+1)\pi]^3$, seu vt cubum cubo sinus totius oppositum (§. XXXXI), cuius basis est quadratum, prioris basi quadratae oppositum Vt adeo hic Cubus videatur mentiri formam Cubi α. P t ex §. XXXXI.

§. 47. Quia autem ex aequatione cubica completa Terminus secundus tollitur, singulas eius tres radices x, h. e. omnes tres Cubi dimensiones, eadem quantitate

data,

data, nempe subtripla summa radicum ($\frac{1}{3}m$), in casu §. XXXXV. minuendo, in casu §. XXXXVI. augendo; perspicuum est, per modo dictam aequationis cubicae completae transformationem, in aequatione resultante figuram quantitatis trium dimensionum $[(x \pm \frac{1}{3}m)^3 = v^3]$, de cuius radicibus inueniendis agitur, non mutari, sed eam manere cubicam, imo etiam differentias radicum in aequatione transformanda et transformata manere easdem. Et, cum in isto negotio ponendum sit $v = x \pm \frac{1}{3}m$; patet quoque, valorem cuiuslibet radicis v ad minimum binomii formam habiturum, etsi in aequatione transformanda valor cuiuslibet radicis x monomii formam habere ponatur. Tandem id quoque intelligitur, si, ob $v \mp \frac{1}{3}m = x$, singulis tribus radicibus diuersis v inuentis adiiciatur subtripla summa radicum ($\mp \frac{1}{3}m$), eo ipso prodire debere singulas tres radices x aequationis cubicae completae propositae.

§. 48. Iam persequamur aequationes completas ipsas pro singulis quatuor Cubis positiuis in §. XXXXII. commemoratis. Cum Cubum α. P T solum definiat haec aequatio $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = 0$; ob rationes in §. XXXXV. et XXXXVI. allatas, ponatur $x = v + a$: fiet $v^3 *** = 0$, seu $v = 0$, eritque (per §. XXXV.) 1) $v = +1 . 0 = 0$; 2) $v = \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2} . 0 = 0$; 3) $v = \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2} . 0 = 0$, et hinc, ob $x = v + a$, habetur 1) $x = 0 + a = +a$; 2) $x = 0 + a = +a$; 3) $x = 0 + a = +a$. Habet igitur Cubus primitiuus α. P T tres radices positiuas, *etiam quoad formam expressionis*, inter se aequales.

 Sit

Sit aequatio Cubum $\gamma.PT$ ſolum diffiniens $x^3 + ax^2 - a^2x - a^3 = 0$: ponendo $x = v - \frac{1}{3}a$, fiet $v^3 * - \frac{4}{3}a^2 v - \frac{16}{27}a^3 = 0$, eritque (per §. XXXIV.) $v = [\frac{8}{27}a^3 + \sqrt{(\frac{8^2}{27^2}a^6 - \frac{4^3}{9^3})}]^{1:3} + [\frac{8}{27}a^3 - \sqrt{(\frac{8^2}{27^2}a^6 - \frac{4^3}{9^3})}]^{1:3}$. Eſt autem $\sqrt{(\frac{8^2}{27^2}a^6 - \frac{4^3}{9^3}a^6)} = 0$. Erit ergo $v = \sqrt[3]{\frac{8}{27}a^3} + \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a = +1.\frac{4}{3}a$, h. e. 1) $v = A + B = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a$; et hinc 2) $v = (\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a + (\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a = -1.\frac{2}{3}a = -\frac{2}{3}a$; et 3) $v = (\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a + (\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a = -\frac{2}{3}a$ (§. XXXV.), adeoque, ob $x = v - \frac{1}{3}a$, habetur 1) $x = 1) v - \frac{1}{3}a = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}a = +a$; 2) $x = 2) v - \frac{1}{3}a = -\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}a = -a$; 3) $x = 3) v - \frac{1}{3}a = -\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}a = -a$. Proinde in Cubo deriuatiuo $\gamma.PT$ expreſſiones trium radicum $+a$, $-a$, et $-a$, non habent formam radicum aequalium, etſi in eodem abſolute conſiderato omnes tres radices ſeu dimenſiones re vera aequales exiſtant (§. XXXXI).

Pro Cubo $\beta.Pt$ aequatio definiens eſt $x^3 - (2\sqrt{-a^2} - a)x^2 - (2a\sqrt{-a^2} - a^2 + a^2)x - a^3 = 0$. Faciendo $x = v + \frac{2\sqrt{-a^2} - a}{3}$, fiet $v^3 * - \frac{2a\sqrt{-a^2}}{3}v - \frac{(4a^3 - 4a^2\sqrt{-a^2})}{27} = 0$, et hinc $v = [\frac{2a^3 - 2a^2\sqrt{-a^2}}{27} + \sqrt{(\frac{(2a^3 - 2a^2\sqrt{-a^2})^2}{27^2} - \frac{(2a\sqrt{-a^2})^3}{9^3})}]^{1:3} + [\ldots - \sqrt{(\ldots)}]^{1:3}$ (§. XXXIV). Quare cum ſit $\sqrt{(\frac{(2a^3 - 2a^2\sqrt{-a^2})^2}{27^2} - \frac{(2a\sqrt{-a^2})^3}{9^3})} = 0$; fiet $v = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})} + \frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$ h. e (per §. XXXVII.) erit 1) $v = \frac{1}{3}a(-1 - \sqrt{-1}) + \frac{1}{3}a(-1 - \sqrt{-1}) = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}, -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2} = +1.(-\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2})$; et hinc 2) $v = (\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) + (\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) = +\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$; et 3) $v = (\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) + (\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) = +\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$. Vnde, ob $x = v + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a$, fit 1) $x = 1) v + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = -\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = -a$; 2) $x = 2) v + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = +\sqrt{-a^2}$; et 3) $x = 3) v + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$

$\sqrt{-a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=+\sqrt{-a^2}$. Examen radicis e. g. ſecundae et tertiae facile inſtituitur. Debebit enim eſſe in aequatione definiente $(\sqrt{-a^2})^3-(2\sqrt{-a^2}-a).-a^2-(2a\sqrt{-a^2}+a^2).\sqrt{-a^2}-a^3=0$, h. e. $-a^2\sqrt{-a^2}+2a^2\sqrt{-a^2}-a^3+2a^3-a^2\sqrt{-a^2}-a^3=0$.

Denique Cubus δ.Pt definitur per hanc aequationem: $x^3+(2\sqrt{-a^2}+a)x^2+(2a\sqrt{-a^2}-a^2)x-a^3=0$. Ponendo $x=v-\frac{(2\sqrt{-a^2}+a)}{3}$, fiet $v^3*+\frac{2a\sqrt{-a^2}}{3}v-\frac{(4a^3+4a^2\sqrt{-a^2})}{27}=0$ et hinc (§. XXXIV) $v=[\frac{2a^3+2a^2\sqrt{-a^2}}{27}+\sqrt{(\frac{(2a^3+2a^2\sqrt{-a^2})^2}{27^2}+\frac{(2a\sqrt{-a^2})^3}{9^3})}]^{1:3}+[\ldots-\sqrt{(\ldots)}]^{1:3}$. Quare cum reperiatur pars irrationalis $\overline{+}\sqrt{(\ldots.)}=0$; fiet (per §. XXXVII) $v=\frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2+2\sqrt{-1})}+\frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2+2\sqrt{-1})}$ $=\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{-1})+\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{-1})$, h. e. erit 1) $v=-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}, -\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}=+1.(-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2})$, adeoque 2) $v=(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})+(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})=+\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$; 3) $v=(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})+(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})=+\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$. Hinc prodit 1) $x=1)v-\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=-a$; 2) $x=2)v-\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=-\sqrt{-a^2}$; item 3) $x=3)v-\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=-\sqrt{-a^2}$.

§. 49. Eodem modo tractemus aequationes cubicas completas, per quas definiuntur Cubi priuatiuae capacitatis in §. XXXXIII. deſcripti. Nimirum cubum γ.Pt definit haec aequatio $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3=0$, quae, ponendo $x=v-a$, transformatur in hanc, $v^3***=0$, adeoque ob $v=0$, erit 1) $v=-1.0=0$; 2) $v=(\frac{\pm1+\sqrt{-3}}{2}).0=0$; 3) $v=(\frac{\pm1-\sqrt{-3}}{2}).0=0$ (§. XXXVI). Vnde, ob $x=v-a$, habetur 1) $x=0-a=-a$; item 2) $x=-a$; et 3) $x=-a$. Habet igitur Cubus γ.Pt, primitiuo α.PT oppoſitus, tres radices priuatiuas, *etiam quoad formam expreſſionis*, inter ſe aequales.

Pro

Pro Cubo α. P t aequatio definiens est haec: $x^3-ax^2-a^2x+a^3=0$, quae, ponendo $x=v+\frac{1}{3}a$, transit in hanc: $v^3 * -\frac{4}{3}a^2v+\frac{16}{27}a^3=0$. Vnde fit (§. XXXIV.)

$v=[-\frac{8}{27}a^3+\sqrt{(\frac{8^2}{27^2}a^6-\frac{4^3}{9^3}a^6)}]^{1:3}+[\ldots-\sqrt{(\ldots)}]^{1:3}=\sqrt[3]{-\frac{8}{27}a^3}+\sqrt[3]{-\frac{8}{27}a^3}$, h. e. 1) $v=-\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}a=-1.\frac{4}{3}a$; et hinc 2) $v=(\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a+(\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a=+\frac{2}{3}a$; et 3) $v=(\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a+(\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a=+\frac{2}{3}a$ (§. XXXVI). Vnde, ob $x=v+\frac{1}{3}a$, habetur 1) $x=1)v+\frac{1}{3}a=-\frac{4}{3}a+\frac{1}{3}a=-a$; 2) $x=2)v+\frac{1}{3}a=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}a=+a$; et 3) $x=3)v+\frac{1}{3}a=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}a=+a$.

Cubus β. P T definitur per hanc aequationem: $x^3-(2\sqrt{-a^2}+a)x^2+(2a\sqrt{-a^2}-a^2-a^2)x+a^3=0$. Haec, ponendo $x=v+\frac{2\sqrt{-a^2}+a}{3}$, transformatur in sequentem $v^3 * +\frac{2a\sqrt{-a^2}}{3}v+\frac{4a^3+4a^2\sqrt{-a^2}}{27}=0$. Ex qua fit (§. XXXIV) $v=[-\frac{(2a^3+2a^2\sqrt{-a^2})}{27}+\sqrt{(\frac{(2a^3+2a^2\sqrt{-a^2})^2}{27^2}+\frac{(2a\sqrt{-a^2})^3}{9^3})}]^{1:3}+[\ldots-\sqrt{(\ldots)}]^{1:3}$. Reperitur autem duorum cuborum particularium pars irrationalis $\mp\sqrt{(\ldots)}=0$; Erit ergo $v=[\frac{-(2a^3+2a^2\sqrt{-a^2})}{27}]^{1:3}+[-\frac{(2a^3+2a^2\sqrt{-a^2})}{27}]^{1:3}$, adeoque (per §. XXXVII.) erit 1) $v=-\frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2+2\sqrt{-1})}-\frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2+2\sqrt{-1})}=-\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{-1})-\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{-1})=+\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}=-1.(-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2})$; et hinc

2) $v=(\frac{+1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})+(\frac{+1-\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})=-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$;

3) $v=(\frac{+1-\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})+(\frac{+1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})=-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$.

Consequenter, ob $x=v+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}+\frac{1}{3}a$, habetur 1) $x=1)v+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}+\frac{1}{3}a=\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}+\frac{1}{3}a=+a$; 2) $x=2)v+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}+\frac{1}{3}a=-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}+\frac{1}{3}a=+\sqrt{-a^2}$; et 3) $x=3)v+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}+\frac{1}{3}a=-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}+\frac{1}{3}a=+\sqrt{-a^2}$.

Cubus denique δ. P T ita definitur: $x^3+(2\sqrt{-a^2}-a)x^2-(2a\sqrt{-a^2}+a^2)x+a^3=0$. Haec, ponendo $x=v-\frac{(2\sqrt{-a^2}-a)}{3}$, transit in hanc: $v^3 * -\frac{2a\sqrt{-a^2}}{3}v+\frac{(4a^3-4a^2\sqrt{-a^2})}{27}=0$,

eritque

eritque $v = [-\frac{(2a^3 - 2a^2\sqrt{-a^2})}{27} + \sqrt{(\frac{(2a^3 - 2a^2\sqrt{-a^2})^2}{27^2} - \frac{(2a\sqrt{-a^2})^3}{9^3})}]^{1:3} + [-\ldots - \sqrt{(\ldots)}]^{1:3}$, vbi cum reperiatur pars irrationalis $\mp \sqrt{(\ldots)} = 0$; fiet $v = -\frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$, $-\frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$, seu $v = -\frac{1}{3}a(-1 - \sqrt{-1})$, $-\frac{1}{3}a(-1 - \sqrt{-1})$ (§. XXXVII) $= \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2}$. Cum itaque sit 1) $v = -1 \cdot (-\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2}$; erit 2) $v = (\frac{+1 + \sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) + \frac{(+1 - \sqrt{-3})}{2}(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$; et 3) $v = \frac{(+1 - \sqrt{-3})}{2}(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) + \frac{(+1 + \sqrt{-3})}{2}(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$. Vnde, ob $x = v - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a$, habetur

1) $x = 1) v - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = +a$;

2) $x = 2) v - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = -\sqrt{-a^2}$;

3) $x = 3) v - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = -\sqrt{-a^2}$.

§. 50. Quodsi ergo Formulae ex §. XXXXVIII. et XXXXIX. inter se conferantur, apparebit, quales esse debeant aequationes atque radices pro Cubis inter se oppositis. Nimirum si fuerit 1) $x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3 = 0$; adeoque 1) $x = \mp a$; 2) $x = \mp a$; 3) $x = \mp a$; valentibus signis inferioribus, prodit aequatio cum suis radicibus pro Cubo α, PT; si autem valeant signa superiora, habebitur aequatio cum suis radicibus pro Cubo opposito γ. Pt (§. XXXXI).

Si fuerit 2) $x^3 \pm (2\sqrt{-a^2} + a)x^2 + (2a\sqrt{-a^2} - a^2)x \mp a^3 = 0$, adeoque 1) $x = \mp a$; 2) $x = \mp\sqrt{-a^2}$; 3) $x = \mp\sqrt{-a^2}$; si signa inferiora valeant, habetur aequatio cum suis radicibus pro Cubo β. PT; si autem valeant signa superiora, pro Cubo opposito δ. Pt (§. XXXXI).

Si fuerit 3) $x^3 \pm ax^2 - a^2x \mp a^3 = 0$; adeoque 1) $x = \pm a$; 2) $x = \mp a$; 3) $x = \mp a$; adhibendo signo inferiora, prodit aequatio cum suis radicibus pro Cubo α. Pt; sed, signis superioribus vtendo, pro Cubo opposito γ. PT (§. XXXXI).

Denique 4) Si fuerit $x^3 + (2\sqrt{-a^2} - a)x^2 - (2a\sqrt{-a^2} + a^2)$ $x + a^3 = 0$, adeoque 1) $x = \pm a$; 2) $x = \mp\sqrt{-a^2}$; 3) $x = \mp\sqrt{-a^2}$: valentibus signis inferioribus habetur aequatio cum suis radicibus pro Cubo β. Pt; sin autem signa superiora adhibentur, pro Cubo opposito δ. PT (§. XXXXI).

§. 51. Quodsi paullo attentius consideremus octo illos Cubos (§. XXXXII. XXXXIII.) ad idem punctum P coniugatos, et absolute considerando inter se aequales; apparebit, inter eos tantum dari duos, nempe Cubum α. PT et γ. Pt, eius conditionis, vt eorum omnes tres radices, etiam quoad formam expressionis, inter se aequales sint (quo in casu, secundo Termino in aequatione definiente sublato, tota aequatio transformata, $v^3 * * * = 0$, nullescit), reliquos vero 6 Cubos eius conditionis esse, vt duae saltem radices, seu dimensiones, etiam quoad formam expressionis, inter se aequales existant (quo in casu, terminum secundum in aequatione definiente tollendo, in aequatione transformata solus Terminus secundus deficit, et in Formula pro 1) v valor partis irrationalis $\mp\sqrt{(Q^2 \pm P^3)}$ fit $= 0$) (§. XXXXVIII. XXXXIX). Quodsi ergo Cubus deriuatiuus per aequationem definientem propositus, talis fuerit, vt trium radicum, aut dimensionum (re vera aequalium) nulla alteri, quoad formam expressionis, aequalis sit, tum nec esse poterit pars irrationalis $\mp\sqrt{(Q^2 \pm P^3)} = 0$, sed cubus propositus aeque bene ad duos Cubos ex illis octo in §. XXXXII. et XXXXIII. descriptis, reduci poterit, e. g. vel ad Cubum γ. Pt, vel ad Cubum α. Pt, quorum scilicet solae bases inter se oppositae sunt. E. gr. sit aequatio biquadratica pura $x^4 * * * - a^4 = 0$, seu $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = 0$, cuius adeo

adeo radices sunt $+a$; $-a$; $+\sqrt{-a^2}$; $-\sqrt{-a^2}$. Hac aequatione, per factorem simplicem $x-a=0$, diuisa, oritur haec cubica: $x^3+ax^2+a^2x+a^3=0$, cuius forma a formis in §. L. datis dissidere videtur. Iam ponamus, huius radices (quae sunt $-a$; $+\sqrt{-a^2}$; $-\sqrt{-a^2}$) ignorari, et demum, methodo ordinaria adhibita, esse inuestigandas. Ponendo igitur $x=v-\frac{1}{3}a$, fiet $v^3 * +\frac{2}{3}a^2v +\frac{20}{27}a^3=0$, et hinc $v=[\frac{-10a^3}{27}+\sqrt{(\frac{10^2}{27^2}a^6+\frac{2^3}{9^3}a^6)}]^{1:3} +[-\ldots-\sqrt{(\ldots)}]^{1:3}=\frac{1}{3}a[-10+6\sqrt{3}]^{1:3}+\frac{1}{3}a[-10-6\sqrt{3}]^{1:3} =\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{3})+\frac{1}{3}a(-1-\sqrt{3})$ (§. XXXVII.) $=-\frac{2}{3}a$. Cum itaque sit 1) $v=A+B=\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{3})+\frac{1}{3}a(-1-\sqrt{3})$; erit

2) $v=\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{3})(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})+\frac{1}{3}a(-1-\sqrt{3})(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})=\frac{1}{3}a(1+3\sqrt{-1})=\frac{1}{3}a+\sqrt{-a^2}$;

3) $v=\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{3})(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})+\frac{1}{3}a(-1-\sqrt{3})(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})=\frac{1}{3}a(1-3\sqrt{-1})=\frac{1}{3}a-\sqrt{-a^2}$.

Vnde, ob $x=v-\frac{1}{3}a$, habetur 1) $x=$ 1) $v-\frac{1}{3}a=-\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}a=-a$;

2) $x=$ 2) $v-\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}a+\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=+\sqrt{-a^2}$;

3) $x=$ 3) $v-\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}a-\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=-\sqrt{-a^2}$; atque adeo tres radices inuentae coincidunt cum tribus radicibus aliunde cognitis. Iam vero ex §. VIII. et *Fig* 10. constat, quantitatem imaginariam $+\sqrt{-a^2}$, in area β, alteram autem, $-\sqrt{-a^2}$, in area δ assignandam esse, ita quidem, vt, pro basi Cubi assignanda, si $+\sqrt{-a^2}$ explicetur per latitudinem Pr ex quadrato β sumtam, $-\sqrt{-a^2}$ explicanda sit per longitudinem Pq ex □to δ sumtam; et contra, si $+\sqrt{-a^2}$ explicetur per longitudinem PQ ex □to β sumtam, $-\sqrt{-a^2}$ explicanda sit per latitudinem PR ex □to δ sumtam. In priore igitur casu fiet basis Cubi $=$ facto $+\sqrt{-a^2}.-\sqrt{-a^2}$ $=$ Pr.Pq $=$ □to $\gamma=-a.-a=+a^2$; in posteriore autem casu $=$ PQ.PR $=$ □to $\alpha=+a.+a=+a^2$. Quare cum tertia (seu inuentarum prima) radix $-a$ explicanda Fig. 10.

da ſit per altitudinem deorſum ſumtam Pt; ex his tribus dimenſionibus aſſignatis orietur in priore caſu Cubus $\gamma.\ Pt = +a^2 . -a = -a^3$, in poſteriore autem caſu Cubus $\alpha.\ Pt = +a^2 . -a = -a^3$. Examen radicis ſecundae et tertiae facile inſtituitur. Eſt enim $x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 = (\mp \sqrt{-a^2})^3 + a . -a^2 + a^2 . \mp \sqrt{-a^2} + a^3 = \pm a^2 \sqrt{-a^2} - a^3 \mp a^2 \sqrt{-a^2} + a^3 = 0$.

§. 52. Tandem conſideremus eiusmodi aequationem cubicam, in qua tres cubi reſpondentes nec quoad formam expreſſionis, nec abſolute conſiderati inter ſe aequales ſunt: manifeſtum eſt, eam continere debere tres radices, et quoad formam expreſſionis, et abſolute conſideratas, inter ſe inaequales, et harum primam valere debere pro ſingulis tribus dimenſionibus Cubi primi, ſecundam pro ſecundi, tertiam pro tertii ſingulis tribus dimenſionibus. E. gr. ſit propoſita aequatio $v^3 * - 7v - 6 = 0$, quae cum pertineat ad Caſum I. ex §. XXXIII et XXXIV, comparanda erit cum hac $v^3 * - 3Pv - 2Q = 0$. Habetur ergo $P = \frac{7}{3}$; $Q = 3$, eritque 1) $v = [Q + \sqrt{(Q^2 - P^3)}]^{1:3} + [Q - \sqrt{(Q^2 - P^3)}]^{1:3} = [3 + \sqrt{(3^2 - \frac{7^3}{3^3})}]^{1:3} + [3 - \sqrt{(3^2 - \frac{7^3}{3^3})}]^{1:3} = [3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}]^{1:3} + [3 - \frac{10}{9}\sqrt{-3}]^{1:3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{-3}, + \frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{-3}$ (§. XXXVII.) $= +3$; et hinc 2) $v = \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{-3}) + \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{-3}) = -\frac{2}{2} + \frac{2}{6}\sqrt{-3}, -\frac{2}{2} - \frac{4}{6}\sqrt{-3} = -2$; et 3) $v = \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{-3}) + (\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{-3}) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\sqrt{-3}, -\frac{1}{2} + \frac{6}{6}\sqrt{-3} = -1$. Ex quo apparet, eſſe $3 \mp \frac{10}{9}\sqrt{-3} = (\frac{3}{2} \mp \frac{1}{6}\sqrt{-3})^3 = (-\frac{2}{2} \mp \frac{4}{6}\sqrt{-3})^3 = (\frac{1}{2} \pm \frac{5}{6}\sqrt{-3})^3$: id quod, examine facto, facile comprobatur.

§. 53.

§. 53. Etsi vero in eiusmodi singulis tribus radicibus, quales in §. LII. inuentae sunt, quantitates imaginariae se mutuo destruant, ita vt in praesenti exemplo sit maxima $v = +3$, media $v = -1$, minima $v = -2$, adeoque earum Cubi haud difficulter ita exhiberi possint, vt aequationi propositae (e. g. huic $v^3 * -7v -6 = 0$) satis fiat; nihilo minus, cum nunc agatur de quantitatum imaginariarum realitate atque assignabilitate ostendenda, res ipsa postulare videtur, vt, saltem in hoc vnico exemplo, aequationem, retentis quantitatibus imaginariis, construamus. Nimirum

1. Factis quatuor quadratis maioribus α, β, γ, δ ad idem punctum P coniugatis, obsolute considerando, aequalibus, quorum latera sint $= PI' = 3$, in recta PI' fiat $PE' = \frac{2}{3} PI' = 2$, et $P\omega = \frac{1}{3} PI' = 1$, ductaque $\omega\lambda$ ad PI' perpendiculari, super diametro PI describatur semicirculus $P\lambda I'$: erit chorda $P\lambda = Pa = Pb = \sqrt{3}$, et □tum $Pacb = \sqrt{3} . \sqrt{3} = 3$. Fig. 11.

2. Recta Pa in 6 partes aequales secta, fiat $P\mu' = \frac{1}{6} Pa = \frac{1}{6}\sqrt{3}$; item $P\mu'' = \frac{5}{6} Pa = \frac{5}{6}\sqrt{3}$; et $P\mu''' = \frac{3}{6} Pa = \frac{3}{6}\sqrt{3}$.

3. Assumto latere $P\mu' = \frac{1}{6}\sqrt{3}$, fiant quatuor □ta minima α', β', γ', δ', ad P coniugata, absolute considerando, aequalia: erit □tum $\alpha' = \frac{1}{6}\sqrt{3} . \frac{1}{6}\sqrt{3} = \frac{3}{36}$, sed □tum $\beta' = +\frac{1}{6}\sqrt{3} . -\frac{1}{6}\sqrt{3} = -\frac{3}{36}$ (§. VIII.), et $\sqrt{}$ □ti $\beta' = +\frac{1}{6}\sqrt{-3}$, sed $\sqrt{}$ □ti $\delta' = -\sqrt{}$ □ti $\beta' = -\frac{1}{6}\sqrt{-3}$ (§ VIII).

Cum itaque sit I^ma $v = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{-3}$, $+\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{-3}$; erit

$$\mathrm{I}^{\text{mus}}\,v = \left\{\begin{matrix}\mathrm{PE}'\\ \mathrm{PA}'\end{matrix}\right\} + \sqrt{\square\text{ti}\,\beta'} + \left\{\begin{matrix}\mathrm{E}'\mathrm{I}'\\ \mathrm{A}'\mathrm{K}'\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}+\sqrt{\square\text{ti}\,\delta'}\\ -\sqrt{\square\text{ti}\,\beta'}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathrm{PE}'+'\mathrm{EI}'\\ \mathrm{PA}'+'\mathrm{AK}'\end{matrix}\right\} = \tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2} = \left\{\begin{matrix}\mathrm{PI}'\\ \mathrm{PK}'\end{matrix}\right\} = +3,$$

adeoque I^mi^ Cubi basis $= \square$to $\mathrm{PI}'\mathrm{T}'\mathrm{K}' = \square$to maximo $\alpha = 3^2$, et altitudo PL' sursum tendens $= \mathrm{PI}' = 3$, et hinc I^mus^ Cubus $v^3 = \alpha.\mathrm{PL}' = 3^2.3 = 27$.

4. Assumto latere $\mathrm{P}\mu'' = \frac{5}{6}\sqrt{3}$, fiant quatuor $\square$ta α'', β'', γ'', δ'', ad P coniugata, absolute considerando, aequalia: erit $\square$tum α'', vel $\gamma'' = \mp\frac{5}{6}\sqrt{3}.\mp\frac{5}{6}\sqrt{3} = \frac{25.3}{36}$, sed $\square$tum β'', vel $\delta'' = \frac{5}{6}\sqrt{3}.-\frac{5}{6}\sqrt{3} = -\frac{25.3}{36}$, et $\sqrt{\square\text{ti}\,\beta''} = +\frac{5}{6}\sqrt{-3}$, sed $\sqrt{\square\text{ti}\,\delta''} = -\sqrt{\square\text{ti}\,\beta''} = -\frac{5}{6}\sqrt{-3}$. Proinde facta $\mathrm{PE}'' = \mathrm{PA}'' = ''\mathrm{EI}'' = ''\mathrm{AK}'' = \frac{1}{2}\mathrm{P}w = \frac{1}{2}$, cum sit $\mathrm{PE}'' = \mathrm{PA}'' = ''\mathrm{EI}'' = ''\mathrm{AK}'' = -\frac{1}{2}\mathrm{P}w = -\frac{1}{2}$ (§. III.); erit II^dus^ $v = -\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\sqrt{-3}$, hoc est,

$$= \left\{\begin{matrix}\mathrm{PE}''\\ \mathrm{PA}''\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}+\sqrt{\square\text{ti}\,\delta''}\\ -\sqrt{\square\text{ti}\,\beta''}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathrm{E}''\mathrm{I}''\\ \mathrm{A}''\mathrm{K}''\end{matrix}\right\} + \sqrt{\square\text{ti}\,\beta''} = \left\{\begin{matrix}\mathrm{PI}''\\ \mathrm{PK}''\end{matrix}\right\} = -\tfrac{2}{2},$$

adeoque II^di^ Cubi basis $= \square$to $\mathrm{PI}''\mathrm{T}''\mathrm{K}''$, et altitudo $\mathrm{P}l''$, deorsum tendens $= \mathrm{PI}''$, consequenter II^dus^ Cubus $v^3 = \square\mathrm{PI}''\mathrm{T}''\mathrm{K}''.\mathrm{P}l'' = (-\frac{2}{2}.-\frac{2}{2}).-\frac{2}{2} = -\frac{8}{8} = -1$.

5. Denique assumto latere $\mathrm{P}\mu''' = \frac{4}{6}\sqrt{3}$, construantur quatuor quadrata α''', β''', γ''', δ''', ad P coniugata, absolute considerando, aequalia, fiatque $\mathrm{PE}''' = '''\mathrm{EI}''' = \mathrm{PA}''' = '''\mathrm{AK}''' = 2\,\mathrm{PE}''' = 2.-\frac{1}{2} = -\frac{2}{2}$; erit $\square$tum α''', vel $\gamma''' = \mp\frac{4}{6}\sqrt{3}.\mp\frac{4}{6}\sqrt{3} = \frac{16.3}{35}$, sed $\square$tum β''', vel $\delta''' = \mp\frac{4}{6}\sqrt{3}.\pm\frac{4}{6}\sqrt{3} = -\frac{16.3}{36}$, et $\sqrt{\square\text{ti}\,\beta'''} = +\frac{4}{6}\sqrt{-3}$,

$\surd -3$, sed $\surd\,\square ti\ \delta''' = -\surd\,\square ti\ \beta''' = -\frac{4}{2}\surd -3$, adeoque III^tia^ $v = -\frac{2}{2} + \frac{4}{2}\surd -3,\ -\frac{2}{2} - \frac{4}{2}\surd -3 =$.

$$\left\{\begin{matrix} PE''' \\ PA' \end{matrix}\right\} + \surd\,\square ti\beta''' + \left\{\begin{matrix} E'''\,I''' \\ A'''K''' \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} +\surd\,\square ti\delta''' \\ -\surd\,\square ti\beta''' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} PE''' + '''EI'' \\ PA''' + '''AK'' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} PI'' \\ PK'' \end{matrix}\right\} = -\tfrac{4}{2} = -2,$$

adeoque III^tii^ Cubi basis $= \square to\ PI'''T'''K'''$, et altitudo Pl''' deorsum tendens $= PI'''$, consequenter III^tius^ Cubus $v^3 = \square PI'''\,T'''\,K'''.\ Pl''' = (-\tfrac{4}{2}.\ -\tfrac{4}{2}).\ -\tfrac{4}{2} = -\tfrac{64}{8} = -8.$

SOLUTIO

SOLVTIO PROBLEMATIS GEOMETRICI.

AVCTORE

L. EVLERO.

Problema.

Tab. IV Fig. 1. Datis Diametris coniugatis $E\,e$, $F\,f$ ellipsis tam magnitudine quam positione, inuenire axes coniugatos tam magnitudine quam longitudine.

Constructio.

Iungatur $E\,F$, et ex centro ellipsis C ducatur recta $C\,G$ ita vt ang: $F\,C\,G =$ ang: $E\,C\,F$; tum ducatur $F\,G$ ita vt ang: $C\,F\,G =$ ang: $C\,E\,F$; sicque triangulum $C\,F\,G$ simile fiat triangulo $C\,E\,F$. Deinde iuncta $e\,G$ angulus $C\,e\,G$ bisecetur recta $e\,H$ huicque ex centro C parallela educatur $C\,I$, huicque constituatur perpendicularis $C\,K$, quibus recta per E alteri diametro $F\,f$ parallela acta $I\,E\,K$ occurrat in punctis I et K. Ex E porro tam in $C\,I$ quam $C\,K$ demittantur perpendicula $E\,L$ et $E\,M$, atque in $C\,I$ capiatur $C\,A$ media proportionalis inter $C\,L$ et $C\,I$, itemque in $C\,K$ capiatur $C\,B$ media proportionalis inter $C\,M$ et $C\,K$, erunt $C\,A$ et $C\,B$ semiaxes principales, tam positione quam magnitudine, determinati.

Alia Constructio.

Sint C E et C F semidiametri coniugatae, statuatur E D = E C, vt C E D sit triangulum isosceles, et capiantur E G = E H = C F, iungatur C H ipsique parallela ducatur G I rectam E D secans in I. Per I agatur C I K = C E, iunctaque E K bisecetur in M, erit recta C M positio alterius axis, eique perpendicularis C R positio alterius axis coniugati. Ex F demittatur quoque in C M perpendiculum F N, quo producto in L vt sit N L = F N erunt E K et F L ordinatae ad axem C M, et cum insuper dentur tangentes in E et F et in L, est enim tangens E P parallela C F et tangens L Q parallela C K, hinc vtriusque semiaxis quantitas facile determinatur. Erit nempe alter semiaxis C A media proportionalis inter C M et C P, et alter C B media proportionalis inter C R et C Q ducta L R ad C Q perpendiculari. Fig. 2.

Alia Constructio.

Cum diametri coniugatae in centro se ad angulos obliquos intersecent, quorum alter acutus, alter obtusus, eligantur binae semidiametri coniugatae C E, C F angulum acutum E C F constituentur, statuaturque vt ante E D = E C, ac fiat E G = E H = C F, tum ductae C H per G parallela agatur G I; iunctaque C I angulus E C I bisecetur recta C U, quae aequalis capiatur mediae proportionali inter C E et C I, eritque U alter focus. vnde simul alter e regione situs habebitur: Datis autem focis et puncto in ellipsi axes principales facile assignantur. Fig. 3.

 Demon-

Demonstratio
harum Constructionum.

Fig. 4. Sit E C F quadrans ellipticus, in quo datae sunt semidiametri coniugatae $CE = e$, $CF = f$, vna cum angulo intercepto $ECF = \theta$. Sit C A alter semiaxium principalium cuius tam positio quam quantitas quaeritur; Ponatur ergo primum pro eius positione inuenienda angulus $ECA = \Phi$, huic angulo aequalis statuatur angulus A C M, vt sit angulus $ECM = 2\Phi$, et quia puncta E et M ab axe C A aequidistant, a centro quoque C aequidistabunt, eritque propterea $CM = CE = e$. Ducatur M P ipsi C F parallela, eritque angulus E P M $= ECF = \theta$.

Nunc in triangulo CPM praeter latus $CM = e$ habentur omnes anguli nempe: $EPM = \theta$; $PCM = 2\Phi$; et $CMP = \theta - 2\Phi$; vnde ex Trigonometria erit:

$\sin. EPM : CM = \sin. PCM : PM = \sin. CMP : CP$.
seu $\sin. \theta : e = \sin. 2\Phi : PM = \sin. (\theta - 2\Phi) : CP$

Hinc itaque obtinetur:

$$PM = \frac{e \sin. 2\Phi}{\sin. \theta} \text{ et } CP = \frac{e \sin. (\theta - 2\Phi)}{\sin. \theta}$$

Iam ex natura ellipsis est

$$PM^2 = \frac{BF^2}{CE^2}(CE^2 - CP^2) \text{ siue}$$

$$CE^2, PM^2 + CF^2, CP^2 = CE^2, CF^2:$$

vbi si valores pro PM et CP substituantur, orietur

$$\frac{e^4 \sin. 2\Phi^2}{\sin. \theta^2} + \frac{eeff \sin. (\theta - 2\Phi)^2}{\sin. \theta^2} = eeff$$

quae diuisa per ee et multiplicata per $\sin \theta^2$, abit in

$$ee \sin. 2\Phi^2 + ff \sin. (\theta - 2\Phi)^2 = ff \sin. \theta^2.$$

At est $\sin. (\theta - 2\Phi) = \sin. \theta \cos. 2\Phi - \cos. \theta \sin. 2\Phi$, ideoque

sin.

$\sin.(\theta-2\Phi)^2 = \sin.\theta^2 \cos.2\Phi^2 - 2\sin.\theta\cos.\theta\sin.2\Phi\cos.2\Phi + \cos.\theta^2\sin.2\Phi^2$

Vnde cum sit $ee \sin.2\Phi^2 = ff(\sin.\theta^2 - \sin.(\theta-2\Phi)^2)$ erit

ob $1 - \cos.2\Phi^2 = \sin.2\Phi^2$:

$\sin\theta^2 - \sin.(\theta-2\Phi)^2 = \sin\theta^2\sin.2\Phi^2 + 2\sin.\theta\cos.\theta\sin.2\Phi\cos.2\Phi - \cos.\theta^2\sin.2\Phi^2$

At est $2\sin.\theta\cos.\theta = \sin.2\theta$ et $\cos.\theta^2 - \sin.\theta^2 = \cos.2\theta$, ergo

$\sin.\theta^2 - \sin.(\theta-2\Phi)^2 = \sin.2\theta\sin.2\Phi\cos.2\Phi - \cos.2\theta\sin.2\Phi^2$

sicque erit

$$ee\sin.2\Phi^2 = ff\sin.2\theta\sin.2\Phi\cos.2\Phi - ff\cos.2\theta\sin.2\Phi^2$$

quae diuisa per $\sin.2\Phi$ dabit

$$ee\sin.2\Phi = ff\sin.2\theta\cos.2\Phi - ff\cos.2\theta\sin.2\Phi$$

ex qua tandem elicitur:

$$\frac{\sin.2\Phi}{\cos.2\Phi} = \text{tang}.\,2\Phi = \frac{ff\sin.2\theta}{ee+ff\cos.2\theta}$$

Inuento ergo angulo $ECM = 2\Phi$ cuius tangens est $= \frac{ff\sin.2\theta}{ee+ff\cos.2\theta}$; si hic angulus bisecetur recta CA, haec iam erit positio alterius axis principalis, cuius quantitas ita definitur.

Demisso ex E in CA perpendiculo ER, ductaque ad E tangente ET, quae ipsi CF erit parallela, donec ipsi CA productae occurrat in T, ex natura tangentis constat fore CA mediam proportionalem inter CR et CT. Iam ob $CE = e$ et $ECA = \Phi$ erit $ER = e\sin.\Phi$ et $CR = e\cos.\Phi$. Tum ob ang: $CTE = \theta - \Phi$ erit $ET = \frac{e\sin.\Phi}{\sin.(\theta-\Phi)}$ et $CT = \frac{e\sin.\theta}{\sin.(\theta-\Phi)}$.

Hinc itaque erit:

semiaxis $CA = e\sqrt{\frac{\sin.\theta\cos.\Phi}{\sin.(\theta-\Phi)}}$.

Alter semiaxis ad CA erit normalis, qui si intelligatur linea CB repraesentari, cum sit

 $RE^2 =$

$RE^2 = \frac{CB^2}{CA^2}(CA^2 - CR^2)$, ex natura ellipsis erit $CB = \frac{CA.RE}{\sqrt{(CA^2 - CR^2)}}$.

Iam est $CA.RE = ee \text{ fin. } \Phi \sqrt{\frac{\text{fin. } \theta \text{ cof. } \Phi}{\text{fin. } (\theta - \Phi)}}$

$\sqrt{(CA^2 - CR^2)} = \sqrt{\left(\frac{ee \text{ fin. } \theta \text{ cof. } \Phi}{\text{fin. } (\theta - \Phi)} - ee \text{ cof. } \Phi^2\right)}$ feu

$\sqrt{(CA^2 - CR^2)} = e\sqrt{\frac{\text{cof. } \Phi}{\text{fin. } (\theta - \Phi)}} (\text{fin. } \theta - \text{fin. } (\theta - \Phi) \text{cof. } \Phi)$

Cum autem fit $\theta = \theta - \Phi, + \Phi$ erit

$\text{fin. } \theta = \text{fin. } (\theta - \Phi) \text{cof. } \Phi + \text{cof. } (\theta - \Phi) \text{fin. } \Phi$; ex quo habebitur

$\sqrt{(CA^2 - CR^2)} = e\sqrt{\frac{\text{cof. } (\theta - \Phi) \text{ fin. } \Phi \text{ cof. } \Phi}{\text{fin. } (\theta - \Phi)}}$

Ergo prodibit alter femiaxis.

$CB = e \text{ fin. } \Phi \sqrt{\frac{\text{fin. } \theta}{\text{cof. } (\theta - \Phi) \text{ fin. } \Phi}} = e\sqrt{\frac{\text{fin. } \theta \text{ fin. } \Phi}{\text{cof. } (\theta - \Phi)}}$.

Idem hic calculus locum habebit, fi figura ad alteram femidiametrum datam $CF = f$ accommodetur, tum autem quantitates e et f atque anguli Φ et $\theta - \Phi$ inter fe permutari debent; vnde denuo orietur.

$CA = f\sqrt{\frac{\text{fin. } \theta \text{ cof. } (\theta - \Phi)}{\text{fin. } \Phi}}$ et $CB = f\sqrt{\frac{\text{fin. } \theta \text{ fin. } (\theta - \Phi)}{\text{cof. } \Phi}}$

fi ergo axes coniugatos quaefitos ponamus alterum $CA = a$, alterum $CB = b$ erit

$a = e\sqrt{\frac{\text{fin. } \theta \text{ cof. } \Phi}{\text{fin. } (\theta - \Phi)}} = f\sqrt{\frac{\text{fin. } \theta \text{ cof. } (\theta - \Phi)}{\text{fin. } \Phi}}$

$b = e\sqrt{\frac{\text{fin. } \theta \text{ fin. } \Phi}{\text{cof. } (\theta - \Phi)}} = f\sqrt{\frac{\text{fin. } \theta \text{ fin. } (\theta - \Phi)}{\text{cof. } \Phi}}$.

Hinc erit primo $ab = ef \text{ fin. } \theta$, qua aequatione continetur aequalitas parallelogrammorum circa diametros coniugatas defcriptorum:

Deinde hinc etiam denuo angulum Φ determinare poterimus; erit enim

$\frac{ee \text{ fin. } \theta \text{ cof. } \Phi}{\text{fin. } (\theta - \Phi)} = \frac{ff \text{ fin. } \theta \text{ cof. } (\theta - \Phi)}{\text{fin. } \Phi}$

feu $ee \text{ fin. } 2\Phi = ff \text{ fin. } 2(\theta - \Phi) = ff \text{ fin. } 2\theta \text{ cof. } 2\Phi - ff \text{ cof. } 2\theta \text{ fin. } 2\Phi$

vnde

vnde fit vt ante:

$\frac{\sin. 2\Phi}{\cos. 2\Phi} = \text{tang. } 2\Phi = \frac{ff \sin. 2\theta}{ee + ff \cos. 2\theta}$.

Ex quatuor fuperioribus formulis quoque obtinemus:

$\frac{\sin. (\theta - \Phi)}{\cos. \Phi} = \frac{ee \sin. \theta}{aa} = \frac{bb}{ff \sin. \theta} = A$

$\frac{\cos. (\theta - \Phi)}{\sin. \Phi} = \frac{aa}{ff \sin. \theta} = \frac{ee \sin. \theta}{bb} = B$

vnde fit

$\sin. \theta - \frac{\cos. \theta \sin. \Phi}{\cos. \Phi} = A$ et $\frac{\cos. \theta \cos. \Phi}{\sin. \Phi} + \sin. \theta = B$

ergo $\frac{\cos. \theta \sin. \Phi}{\cos. \Phi} = \sin. \theta - A$ et $\frac{\cos. \theta \cos. \Phi}{\sin. \theta} = B - \sin. \theta$

quae aequationes inuicem multiplicatae praebent:

$\cos. \theta^2 = (A+B) \sin. \theta - AB - \sin. \theta^2$ feu $1 + AB = (A+B) \sin. \theta$.

Cum iam A et B geminos habeant valores, erit

$AB = \frac{ee}{ff}$ et $(A+B) \sin. \theta = \frac{bb}{ff} + \frac{aa}{ff}$

vnde fit $1 + \frac{ee}{ff} = \frac{aa+bb}{ff}$, ideoque hinc ifta nota ellipfeos proprietas refultat: $aa + bb = ee + ff$.

Porro fi alterum focum ponamus in U, erit vti conftat

$CU = \sqrt{(aa - bb)} = \sqrt[4]{(aa - bb)^2}$

at $(aa - bb)^2 = (aa + bb)^2 - 4aabb$.

Cum igitur fit $aa + bb = ee + ff$ et $ab = ef \sin. \theta$ erit

$CU = \sqrt[4]{(e^4 + f^4 + 2eeff(1 - 2 \sin. \theta^2)}$

verum eft $1 - 2 \sin. \theta^2 = \cos. 2\theta$, hincque obtinetur:

$CU = \sqrt[4]{(e^4 + f^4 - 2eeff. \cos. 2\theta)}$

His inuentis ratio conftructionum datarum fiet perfpicua:

Pro I. *Conftructione*. Ob $ECF = FCG = \theta$ erit ECG Fig. 1. 2θ; et cum fit $EC(e) : CF(f) = CF(f) : CG$ erit $CG = \frac{ff}{e}$; Porro ducta eG erit tang. $CeG = \frac{CG \sin. eCG}{Ce - CG \cos. eCG}$

 At

At $Ce = e$; $\sin. eCG = \sin. 2\theta$ et $\cos. eCG = -\cos. 2\theta$, vnde fit tang. $CeG = \frac{ff \sin. 2\theta}{ee + ff \cos. 2\theta}$ quae est expressio ante pro tang. 2Φ inuenta. Erit ergo $CeG = 2\Phi$, anguloque CeG bisecto per eH erit angulus CeH eique aequalis $ECI = \Phi$. Vnde recta CI erit positio alterius axis, eique normalis CK dabit positionem alterius. Deinde recta IEK per E ipsi CF parallela ducta est tangens ellipsis in E, quare si ex E in vtrumque axem perpendicula EL, EM demittantur, semiaxis CA erit media proportionalis inter CL et CI, itemque semiaxis CB media proportionalis inter CM et CK, plane vti constructio habet.

Fig. 2. *Pro II. Constructione.* Ob triangulum CED isosceles et angulum $ECD = EDC = \theta$ erit ang: $CED = 180° - 2\theta$. Deinde ob $EC = e$, $EG = EH = CF = f$, quia GI ipsi CH est parallela, erit $EI = \frac{ff}{e}$. Porro est tangens $ECI = \frac{EI \sin. CED}{CE - EI \cos. CED}$ ergo ob $\sin. CED = \sin. 2\theta$ et $\cos. CED = -\cos. 2\theta$ habebitur tangens $ECI = \frac{ff \sin. 2\theta}{ee + ff \cos. 2\theta}$, eritque ergo $ECI = 2\Phi$; vnde sumta $CK = CE = e$, bisectaque EK in M, recta CM angulum $ECK = 2\Phi$ bisecabit, ita vt sit $ECM = \Phi$, ideoque CMAP positio alterius axis, cuius semissis quantitas CA vt ante definitur, et determinatio alterius semiaxis CB ex ipsa constructione est manifesta.

Fig. 3. *Pro III. Constructione.* Ex ratione praecedentis constructionis intelligitur rectam CU angulum ECI bisecantem dare positionem axis transuersi. Cum igitur sit $CE = e$, $EI = \frac{ff}{e}$ et $CEI = 180° - 2\theta$ et erit $CI = \sqrt{(CE^2 + EI^2 - 2\,CE.EI \cos. CEI)} = \sqrt{(ee + \frac{f^4}{ee} + 2ff \cos. 2\theta)}$ $= \frac{1}{e}\sqrt{(e^4 + f^4 + 2eeff \cos. 2\theta)}$.

Hinc

Hinc cum sit CU media proportionalis inter CE et CF erit $CU = \sqrt{e \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{(e^4 + f^4 + 2eeff \operatorname{cof.} 2\theta)}}$

seu $CU = \sqrt[4]{(e^4 + f^4 + 2eeff \operatorname{cof.} 2\theta)}$.
Ex qua expreſſione manifeſtum eſt fore U alterum ellipſeos focum, vnde ſimul alter focus innoteſcit.
Hic tantum certum eſſe oportet, rectam CU eſſe poſitionem axis transuerſi non vero coniugati; ſed in hoc error facile euitatur, ſi perpendamus, axem transuerſum ſemper intra angulum acutum, quem diametri coniugatae conſtituunt, cadere.

Verum vt hae conſtructiones faciles videntur, tamen fateri cogor, conſtructionem, quam *Pappus Alexandrinus* ſine demonſtratione quidem exhibuit, his palmam longe praeripere. Quoniam vero demonſtrationem non addidit, eamque *Commentator eius Commendinus* non ſatis feliciter ſupplere conatus eſt, hic non ſolum conſtructionem *Pappi*, ſed etiam eius rationem coronidis loco ſubiungam.

Sint igitur CE et CF ſemidiametri ellipſis datae, ac per F agatur ipſi CE parallela indefinita, quae ellipſin in F tanget. Cadant axes principales in rectas CG et CH, atque perſpicuum eſt, ſi puncta G et H eſſent cognita, poſitionem axium principalium inde determinari. Totum negotium ergo huc redit, vt puncta G et H definiantur. Concipiamus per haec puncta quaeſita G et H, atque ellipſis centrum C tranſire, et quoniam angulus GCH rectus eſt iam nouimus huius circuli centrum alicubi in recta GH exiſtere. Praeterea vero ex natura tangentium ellipſis nouimus, quoniam CE et ſemidiameter Fig. 5.

ter coniugata ad C F, tangensque in F ab axibus principalibus in G et H secatur, esse rectangulum F G, F H aequale quadrato ipsius C E. Duas ergo habemus conditiones, quibus circulus quaesitus per C et ambo desiderata tangentis puncta G et H transiturus determinatur: altera vt quod eius centrum in ipsa hac recta G H situm esse debet, altera vero quod rectangulum F G, F H quadrato ipsius C E aequale esse debet. Transeat iste circulus etiam nunc incognitus per rectae C F productae punctum K. et quia erit $CF.FK = FG.FH$, erit quoque $CF.FK = CE^2$, ideoque F K tertia proportionalis ad C F et C E quarum cum vtraque sit data, innotescet punctum K et circulus quaesitus transire debet per puncta C et K, ita vt eius centrum in rectam G H cadat. Bisecta ergo C K in L, eique in L iuncta normali L I rectam G H in I secante erit I centrum circuli quaesiti, ex quo circulus radio I C vel I K descriptus rectam G H in punctis quaesitis secabit; quae est *Pappi* constructio.

Sequens autem constructio simplicior videtur quam hactenus allatae, quoniam non solum axium principalium positionem sed etiam qnantitatem sponte exhibet, atque omnes operationes, quibus opus est, iam in se complectitur, ita vt ne mediae quidem proportionalis sumtione indigeamus.

Noua Constructio.

Problematis propositi.

Fig. 6. Sint C E, C F semidiametri coniugatae propositae ad angulum acutum E C F inclinatae; ad quas compleatur paralle-

parallelogrammum CEDF. Tum producatur EC in e, vt sit $Ce = CE$, et ad CF normaliter iungatur CG = CF. Iunctis EG et eG producatur EG in H, vt sit GH = Ge, et ducta eH bisecetur in I; atque in recta CI capiatur KL = KI. Deinde ex centro C circini apertura CI describatur arcus MN rectas FD et ED secans in M et N, atque ad has rectas ex punctis istis perpendiculares constituantur MO et NO se mutuo in O secantes, per quod punctum O ex centro C vsque ad arcum MN ducatur recta COA, erit haec semiaxis transuersus, in eoque punctum O alter ellipseos focus. Denique ad CA normaliter statuatur CB = CL, eritque CB semiaxis coniugatus.

Demonstratio.

Ponantur semidiametri coniugatae $CE = e$ et $CF = f$ angulus vero $ECF = \theta$; erit ex constructione $Ce = e$, $CG = f$, et angulus $GCe = 90° - \theta$, ideoque cof. GCe = fin. θ. Porro vocetur semiaxis transuersus $CA = a$, et semiaxis coniugatus $CB = b$; erit per supra inuenta $aa + bb = ee + ff$ et $abef$ fin. θ. Hinc fiet:

$aa + 2ab + bb = ee + ff + 2ef \text{ fin.} \theta$ et $aa - 2ab + bb = ee + ff - 2ef \text{ fin.} \theta$.

ergo $a + b = \sqrt{(ee + ff + 2ef \text{ fin.} \theta)}$ et $a - b = \sqrt{(ee + ff - 2ef \text{ fin.} \theta)}$

At ex triangulo ECG ab $CE = e$, $CG = f$ et cof. GCe = fin. θ reperitur $EG = \sqrt{(ee + ff + 2ef \text{ fin.} \theta)}$, ex triangulo vero eCG, vbi est $Ce = e$, $CG = f$ et cof. GCe = fin. θ, fit $Ge = \sqrt{(ee + ff - 2ef \text{ fin.} \theta)}$. Hanc ob rem habebitur:

$$a + b = EG \quad \text{et} \quad a - b = eG$$

ideoque $2a = EG + eG$ et $2b = EG - eG$.

 Cum

Cum iam ſit $GH = eG$, erit $2a = EH$, ac biſecta eH in I, ob C rectae Ee punctum medium, erit CI parallela ipſi EH eiusque ſemiſſis, vnde $a = CI$; et quia $IK = \frac{1}{2} GH = \frac{1}{2} Ge$, et $KL = IK$, erit $CL = CI - 2IK = CI - GH = a - Ge$, ideoque $CL = b$. Aequatur ergo CI ſemiaxi transuerſo et CL ſemiaxi coniugato. His inuentis praeterea ex natura ellipſis conſtat, quia ED et FD ſunt ellipſis tangentes, ſi ex altero foco O in has tangentes perpendicula demittantur ON et OM, punctorum M et N a centro C diſtantias ſemiaxi transuerſo aequari. Viciſſim ergo ſi puncta M et N ita accipiantur, vt eorum diſtantia a centro C aequalis ſit ſemiaxi transuerſo CI, quemadmodum ea quoque in conſtructione ſunt ſumta, atque ex his punctis ad tangentes perpendicula ducantur MO et NO, haec perpendicula ſe inuicem in foco O eſſe interſectura. Reperitur ergo hoc modo alter focus O, qui cum in axe transuerſo ſit ſitus, erit recta CA per O ducta ad arcum MN non ſolum axi transverſo aequalis, ſed etiam veram eius poſitionem tenet. Cum igitur ſit CA ſemiaxis transuerſus, ſi ad eum normaliter ſtatuatur $CB = CL$, erit quoque CB ſemiaxis coniugatus.

DE

DE PERTVRBATIONE MOTVS PLANETARVM AB EORVM FIGVRA NON SPHAERICA ORIVNDA.

AVCTORE

L. EVLERO.

§. 1.

Quamuis cum *Neutono* assumamus dari in systemate planetario eiusmodi centrum virium, ad quod cuncta materiae, ex qua planetae constant, elementa attrahantur in ratione reciproca duplicata distantiarum; hinc tamen non sequitur, singulos planetas circa istud centrum perfectas descripturos esse ellipses, quarum alteruter focus in hoc centro esset situs. Haec enim conclusio, vti ex ipsius *Neutoni* demonstrationibus facile colligitur, locum non habet, nisi corpora planetarum vel sint tam parua, vt instar punctorum spectari queant, vel ita comparata, vt omnium virium, quibus singulae planetae particulae vrgentur, media directio per ipsius centrum grauitatis simul et centrum virium transeat, atque insuper vis aequiualens ipsa, quae ex singulis illis viribus conflatur, sit distantiarum quadratis reciproce proportionalis.

§. 2. Egregie vero etiam *Neutonus* demonstrauit, si corpus planetae sit perfecte sphaericum atque ex materia homogenea constet, tum omnium virium, quibus singulae eius particulae ad centrum virium nitantur, mediam directionem non solum per ipsum planetae centrum ad centrum virium porrigi, sed etiam vim ex omnium con-

 iun-

iunctione natam reciproce proportionalem esse quadrato distantiae centri planetae a centro virium. Hoc igitur casu planeta perinde circa centrum virium mouebitur, ac si cuncta eius materia in ipsius centro esset vnita, ideoque eius motus perficietur in sectione conica, cuius alteruter focus in centro virium existat.

§. 3. Quae proprietas, cum tam commode in figuram sphaericam materia vniformiter repletam competat, atque ob hanc caussam non adeo multis aliis figuris sit communis, nullum est dubium, quin planeta, qui alia figura diuersa fuerit praeditus, non eandem legem in motu suo sit secuturus. Nisi enim eius corpus hoc modo exposito sit formatum, omnino euenire potest, vt media omnium virium directio vel non per centrum grauitatis planetae transeat, vel non per centrum virium, vel etiam per neutrum. Tum vero etiam saepissime accidit, vt vis omnibus simul sumtis aequiualens non sit quadratis distantiae a centro virium reciproce proportionalis, quarum anomaliarum si vel vna affuerit, motus planetae ab ellipsi seu sectione conica discrepare debebit.

§. 4. Cuiusmodi autem motus perturbatio a defectu idoneae Planetae formae oriri debeat, difficillimum profecto erit generatim determinare, cum fines analyseos nondum sint eousque promoti, vt aequationes, quas leges Mechanicae suppeditant, euoluere atque ad vsum accommodare liceret. Neque huiusmodi inuestigatio cum vlla successus spe suscipi potest, nisi cum constet, illam perturbationem motus tam esse exiguam, vt in calculo instar quantitatis propemodum euanescentis tractari queat. Cum vero et haec tractatio, ob infinitam figurarum, quae

plane-

planetis tribui queant, varietatem nimis late pateat, hic singularem tantum casum euoluere constitui, ex quo tamen via ad innumeros alios tractandos cognosci possit.

§. 5. Considerabo ergo corpus ex duobus globis A et B virga rigida et inertiae experte iunctis compositum, quod in plano tabula repraesentato moueatur circa centrum virium O, ad quod vterque globus seorsim sollicitetur in ratione duplicata reciproca distantiarum. Ad motum ergo huius corporis AB hinc oriundum recte inuestigandum ad eius centrum grauitatis, quod sit in C respici oportet. Repraesentent ergo litterae A et B massas globorum A et B, sintque distantiae $AC = a$, $BC = b$, ab horum globorum centris aestimandae, erit ex natura centri grauitatis $Aa = Bb$. Porro vis centri virium O tanta sit vt in distantia f, aequetur grauitati, atque globus A versus O vrgebitur vi motrice $= \frac{Aff}{OA^2}$, et globus B eodem trahetur secundum directionem BO vi $= \frac{Bff}{OB^2}$. Tab. V. Fig. 1.

§. 6. Sumta quadam recta OE pro axe ad quem motus referatur, sit EC linea curua, quam centrum grauitatis C iam descripserit, ac vocetur distantia $OC = z$, et angulus $EOC = \Phi$, erit demisso ex C in axem perpendiculo CP, abscissa $OP = x = z$ cos. Φ et applicata $PC = y = z$ sin. Φ, posito sinitoto $= 1$. Hoc autem temporis puncto virga AB eum situm teneat, quem figura refert sitque angulus $OCA = \theta$, quem motus continuatione augeri ponam, ita vt corpus A circa C respectu lineae OC arcum DA iam descripserit. At quia haec ipsa linea OC est mobilis, motum istum angularem ad lineam quandam fixam OE referri conuenit, producatur ergo recta BCA donec huic OE occurrat in R, eritque

 angulus

angulus ERC mensura vera motus angularis, qui angulus ERC, quem ponam $= \eta$ erit $= \Phi + \theta$, qui pergente motu augebitur, ita vt sit $y = \Phi + \theta$.

§. 7. Vt iam motus centri grauitatis C determinetur ambae vires, quibus globi A et B ad O sollicitantur, in centrum grauitatis sunt transferendae, in quo simul vtriusque massa collecta concipi debet, quae est $= A + B$, sollicitabitur igitur primo punctum C in directione ipsi AO parallela vi motrice $= \frac{Aff}{AO^2}$, vnde nascitur vis in directione CO $= \frac{Aff.OC}{AO^3}$ et vis in directione CB $= \frac{Aff.AC}{AO^3}$. Simili modo ob attractionem globi B, centrum grauitatis C sollicitabitur secundum directionem ipsi BO parallelam vi $= \frac{Bff}{BO^2}$, vnde oritur vis in directione CO $= \frac{Bff.OC}{BO^3}$ et vis in directione CA $= \frac{Bff.BC}{BO^3}$. His collectis centrum grauitatis C primo vrgebitur secundum directionem CO vi motrice $= ff.OC(\frac{A}{AO^3} + \frac{B}{BC^3}) = ffz(\frac{A}{AO^3} + \frac{B}{BO^3})$; deinde vero vi secundum directionem CA $= ff(\frac{Bb}{BO^3} - \frac{Aa}{AO^3})$ $= Aaff(\frac{1}{BO^3} - \frac{1}{AO^3})$ ob $Bb = Aa$.

§. 8. Has autem vires ad directiones constantes, axi OE tum parallelas tum normales reuocari oportet: atque ex vi $ffz(\frac{A}{AO^3} + \frac{B}{BO^3})$ in directione CO sollicitante resultabit ob angulum EOC $= \Phi$;

in directione CP vis $= ffz \sin.\Phi(\frac{A}{AO^3} + \frac{B}{BO^3})$

in directione Co vis $= ffz \cos.\Phi(\frac{A}{AO^3} + \frac{B}{BO^3})$

Porro ex vi $ff(\frac{Bb}{BO^3} - \frac{Aa}{AO^3})$ secundum CA vel CR vrgente ob angulum ERC $= \eta = \Phi + \theta$ proueniet

in directione CP vis $= ff \sin.\eta(\frac{Bb}{BO^3} - \frac{Aa}{AO^3})$

in directione Co vis $= ff \cos.\eta(\frac{Bb}{BO^3} - \frac{Aa}{AO^3})$

sicque

ſicque coniunctim habebitur

Vis motrix $CP = \frac{Bff}{BO^3}(b\,\text{ſin.}\,\eta + z\,\text{ſin.}\,\Phi) + \frac{Aff}{AO^3}(z\,\text{ſin.}\,\Phi - a\,\text{ſin.}\,\eta)$

Vis motrix $Co = \frac{Bff}{BO^3}(z\,\text{coſ.}\,\Phi + b\,\text{coſ.}\,\eta) + \frac{Aff}{AO^3}(z\,\text{coſ.}\,\Phi - a\,\text{coſ.}\,\eta)$

§. 9. Maſſa autem ſeu inertia in C mouenda eſt $= A + B$, per quam vtraque vis motrix diuiſa dabit vim acceleratricem ſecundum eandem directionem. Ponamus breuitatis gratia vim acceleratricem ſecundum directionem abſciſſae parallelam $Co = P$, et vim acceleratricem ſecundum directionem applicatae $CP = Q$ erit

$$P = \frac{Aff(z\,\text{coſ.}\,\Phi - a\,\text{coſ.}\,\eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z\,\text{coſ.}\,\Phi + b\,\text{coſ.}\,\eta)}{(A+B)BO^3}$$

$$Q = \frac{Aff(z\,\text{ſin.}\,\Phi - a\,\text{ſin.}\,\eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z\,\text{ſin.}\,\Phi + b\,\text{ſin.}\,\eta)}{(A+B)BO^3}$$

quarum vtraque tendit ad diminutionem coordinatarum x et y.

§. 10. Si igitur elementum temporis exponatur per dt, idque in progreſſu ad differentialia ſecunda conſtans ponatur, erit ſecundum leges motus acceleratio in directione abſciſſae $= \frac{2ddx}{dt^2}$, et acceleratio in directione applicatae $= \frac{2ddy}{dt^2}$; quibus formulis propterea illae vires acceleratrices P et Q negatiue ſumtae aequales ſunt ponendae; vnde prodibunt iſtae aequationes

I. $\frac{2ddx}{dt^2} = -P$ et II. $\frac{2ddy}{dt^2} = -Q$.

Cum autem ſit $x = z\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $y = z\,\text{ſin.}\,\Phi$ erit

$dx = dz\,\text{coſ.}\,\Phi - zd\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$; $dy = dz\,\text{ſin.}\,\Phi + zd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$ atque

I. $ddx = ddz\,\text{coſ}\,\Phi - 2dzd\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi - zd\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi - zdd\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi = -\frac{Pdt^2}{2}$

II. $ddy = ddz\,\text{ſin.}\,\Phi + 2dzd\Phi\,\text{coſ}\,\Phi - zd\Phi^2\,\text{ſin.}\,\Phi + zdd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = -\frac{Qdt^2}{2}$

§. 11.

§. 11. Vt istae aequationes ad vsum propius accommodentur, multiplicetur prima per cos. Φ, altera per sin. Φ, erit ob cos. $\Phi^2 +$ sin. $\Phi^2 = 1$ eas addendo.

$$ddz - z\,d\Phi^2 = -\tfrac{1}{2}dt^2(P\cos.\Phi + \sin.\Phi)$$

Deinde prior multiplicetur per − sin. Φ, et altera per cos. Φ, erit eas pariter addendo

$$2dz\,d\Phi + z\,dd\Phi = -\tfrac{1}{2}dt^2(Q\cos.\Phi - P\sin.\Phi)$$

Superest igitur vt pro P et Q valores ante exhibiti substituantur.

§. 12. Erit autem hos valores ex §. IX. restituendo

$$Q\sin.\Phi + P\cos.\Phi = \frac{Aff(z - a\sin.\Phi\sin.\eta - a\cos.\Phi\cos.\eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z + b\sin.\Phi\sin.\eta + b\cos.\Phi\cos.\eta)}{(A+B)BO^3}$$

similique modo

$$Q\cos.\Phi - P\sin.\Phi = \frac{Aff(a\sin.\Phi\cos.\eta - a\cos.\Phi\sin.\eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(b\cos.\Phi\sin.\eta - b\sin.\Phi\cos.\eta)}{(A+B)BO^3}.$$

At est sin. Φ sin. $\eta +$ cos. Φ cos. $\eta =$ cos. $(\eta - \Phi) =$ cos. θ, ob $\eta = \Phi + \theta$, tum vero sin. Φ cos. $\eta -$ cos. Φ sin. $\eta =$ sin. $(\Phi - \eta) = -$ sin. θ, sicque angulo η ex computo exeunte, habebitur.

$$Q\sin.\Phi + P\cos.\Phi = \frac{Aff(z - a\cos.\theta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z + b\cos.\theta)}{(A+B)BO^3} \text{ et}$$

$$Q\cos.\Phi - P\sin.\Phi = \frac{-Aaff\sin.\theta}{(A+B)AO^3} + \frac{Bbff\sin.\theta}{(A+B)BO^3}$$

§. 13. Quodsi iam isti valores in superioribus aequationibus (§. XI.) substituantur, orientur sequentes duae aequationes, quibus motus centri grauitatis C continetur.

I. ddz

$$\text{I. } ddz - zd\Phi^2 = \frac{-ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{A(z-a\cos.\theta)}{AO^3} + \frac{B(z+b\cos.\theta)}{BO^3}\right)$$

$$\text{II. } 2dzd\Phi + zdd\Phi = \frac{ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{Aa\sin.\theta}{AO^3} - \frac{Bb\sin.\theta}{BO^3}\right)$$

quae adhuc in se continent quatuor indeterminatas z, Φ, θ et t; vnde vna praeterea opus est aequatione, vt binae eliminari et aequatio inter duas tantum indeterminatas elici queat.

§. 14. Verum hanc tertiam aequationem nobis suppeditabit consideratio motus rotatorii virgea A B, quae cum axe Q E iam constituit angulum E R C $= \eta = \Phi$ [illegible], progressu temporis augendum. Ad huius accelerationem definiendam nosse oportet totius [illegible] momentum inertiae, quod oritur, si singulae eius particulae per quadrata distantiarum secarum ab axe gyrationis multiplicentur, haecque producta in vnam summam colligantur. Sit igitur hoc momentum inertiae $=(A+B)kk$. Deinde si momentum virium hunc motum gyratorium accelerantium, seu ad angulum η augendum tendentium ponatur $= Rr$, erit tempusculo dt acceleratio motus rotatorii $\frac{2dd\eta}{dt^2} = \frac{Rr}{(A+B)kk}$ seu $dd\eta = \frac{Rrdt^2}{2(A+B)kk}$.

§. 15. Cum autem globus A ad O sollicitetur vi $= \frac{Aff}{AO^2}$, erit eius momentum respectu axis rotationis C $= \frac{Aff}{AO^2} \cdot AC \sin. OAR$; at est $\sin. OAR : OC = \sin. OCA : AO$, ideoque $\sin. OAR = \frac{OC \sin. OCA}{AO} = \frac{z \sin.\theta}{AO}$ ergo hoc momentum erit $= \frac{Aaffz\sin.\theta}{AO^3}$, et ad anguli η diminutionem tendit. Globus autem B ad O trahitur vi $= \frac{Bff}{BO^2}$, eiusque ergo momentum ad C erit $= \frac{Bff}{BO^2} BC \sin. OBC = \frac{Bbffz\sin.\theta}{BO^3}$, et ad angulum η augendum impenditur, vnde totale momentum, quod posui Rr, erit $= ffz\,\text{sin.}\,\theta\left(\frac{Bb}{BO^2} - \frac{Aa}{AO^2}\right)$ hincque acceleratio motus rotatorii ita difinietur, vt sit: $dd\eta = \frac{ffzdt^2\,\text{sin.}\,\theta}{2(A+B)kk}\left(\frac{Bb}{BO^2} - \frac{Aa}{AO^3}\right) = dd\Phi + dd\theta$.

§. 16. En igitur tres aequationes, quibus opus est ad motum tam centri grauitatis C, quam motum gyratorium ipsius virgae AB determinandum:

I. $ddz - zd\Phi^2 = \frac{-ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{A(z - a\,\text{cos.}\,\theta)}{AO^3} + \frac{B(z + b\,\text{cos.}\,\theta)}{BO^3}\right)$

II. $2dzd\Phi + zdd\Phi = \frac{ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{Aa\,\text{sin.}\,\theta}{AO^3} - \frac{Bb\,\text{sin.}\,\theta}{BO^3}\right)$

III. $dd\Phi + dd\theta = \frac{-ffzdt^2}{2(A+B)kk}\left(\frac{Aa\,\text{sin.}\,\theta}{AO^3} - \frac{Bb\,\text{sin.}\,\theta}{BO^3}\right)$

Tota ergo huius duplicis motus determinatio huc est reducta, vt ex istis tribus aequationibus duae indeterminatae eliminentur, et aequatio inter duas tantum variabiles eliciatur, cuius resolutio ad vsum vocari queat.

§. 17. Diuidatur aequatio II, per III, ac prodibit sequens formula perquam concinna.

$$\frac{2dzd\Phi + zdd\Phi}{dd\Phi + dd\theta} = \frac{-kk}{z}.$$

seu $2zdzd\Phi + zzdd\Phi + kkdd\eta = 0$ ob $\eta = \Phi + \theta$.

Integratione ergo instituta erit:

$zzd\Phi + kkd\eta = Cdt$ denotante B quantitatem constantem. Exprimit autem $\frac{1}{2}zzd\Phi$ elementum areae EOC, quae si dicatur $= S$, erit $2dS + kkd\eta = Cdt$, et quia celeritas gyratoria exponitur per $\frac{d\eta}{dt}$, erit $\frac{d\eta}{dt} = \frac{C}{kk} - \frac{2dS}{kkdt}$, et denuo integrando: $\eta = D + \frac{Ct}{kk} - \frac{2S}{kk}$.

§. 18. Hinc primo patet, si area EOC a centro grauitatis C circa centrum virium O descripta exacte

esset

esset tempori proportionalis, tum etiam motum gyratorium eiusue celeritatem $\frac{d\eta}{dt}$ futuram esse vniformem. Sin autem areae EOC descriptio non sit tempori proportionalis; quod re vera euenire mox ostendetur, tum etiam motus gyratorius virgae AB circa centrum C tantundem ab vniformitate discrepabit. Atque hinc sine dubio circa motum lunae libratorium, quia descriptio arearum circa terram non est tempori proportionalis, praeclara concludere licebit, etiamsi casus, quem hic contemplor, non admodum congruat cum figura lunae. Sed hanc applicationem tam diu differre conueniet, donec reliqua motus phaenomena fuerint euoluta.

§. 19. Cum igitur iam adepti simus hanc aequationem $zzd\Phi + kkd\eta = Cdt$: ob $d\eta = d\Phi + d\theta$, hinc eliminare poterimus elementum quantitatis variabilis θ, ope formulae

$$d\theta = \frac{Cdt - zzd\Phi}{kk} - d\Phi$$

ideoque duae tantum nobis supererunt aequationes euoluendae, nempe:

$$\text{I. } ddz - zd\Phi^2 = \frac{-ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{A(z - a\,\text{cos.}\,\theta)}{AO^3} + \frac{B(z + b\,\text{cos.}\,\theta)}{BO^3}\right)$$

$$\text{II. } 2dzd\Phi + zdd\Phi = \frac{ffdt^2\,\text{sin.}\,\theta}{2(A+B)}\left(\frac{Aa}{AO^3} - \frac{Bb}{BO^3}\right)$$

in quibus etsi angulus θ adhuc inest, tamen sufficit nosse eius differentialis valorem:

$$d\theta = \frac{Cdt - zzd\Phi}{kk} - d\Phi.$$

§. 20. Loco elementi temporis dt introducamus in calculum motum corporis sphaerici circa centrum virium O in circulo cuius radius sit $= hu$, informiter reuoluentis; quod tempusculo dt angulum circa O describat $= d\omega$,

 qui

qui propterea ipsi dt erit proportionalis, eiusque loco in calculum induci poterit. Relatio autem inter $d\omega$ et dt elicietur ex aequatione prima ponendo, $z = b$; $d\Phi = d\omega$, $a = b = 0$ et $AO = BO = b$; quo facto erit $-bd\omega = \frac{-ffdt^2}{2bb}$, ita vt sit $\frac{dt^2}{2} = \frac{b^3 d\omega}{ff}$ vnde aquationes nostrae erunt:

$$\text{I. } ddz - zd\Phi^2 = \frac{+b^3 d\omega^2}{A+B}\left(\frac{A(z-a\,\text{cof.}\,\theta)}{AO^3} + \frac{B(z+b\,\text{cof.}\,\theta)}{BO^3}\right)$$

$$\text{II. } 2dzd\Phi + zdd\Phi = \frac{k^3 d\omega^2\,\text{fin.}\,\theta}{A+B}\left(\frac{A\,a}{AO^3} - \frac{B\,b}{BO^3}\right)$$

et mutata constante C erit $d\theta = \frac{ggd\omega - zzd\Phi}{kk} - d\Phi$.

§. 21. Antequam autem hinc quicquam concludere valeamus, valores analyticos pro distantiis AO et BO in calculum inducere oportet. Quia est autem $CO = z$; $CA = a$; $CB = b$ et ang: $OCR = \theta$, erit ex regulis Trigonometriae.

$$AO = \sqrt{(aa + zz - 2az\,\text{cof.}\,\theta)}$$

$$\text{et } BO = \sqrt{(bb + zz + 2bz\,\text{cof.}\,\theta)}.$$

Neque vero hinc in genere quicquam, quod in vsum conuerti posset, concludere licet, nisi distantias a et b prae distantia $CO = z$ ponamus minimas, qui etiam casus ad vsum Astronomiae maxime videtur accommodatus.

§. 22. Sint igitur distantiae $AC = a$ et $BC = b$ prae $CO = z$ quam minimae, ac per regulam approximationum erit:

$$\frac{1}{AO^3} = (zz - 2az\,\text{cof.}\,\theta + aa)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{z^3} + \frac{3a\,\text{cof.}\,\theta}{z^4} - \frac{3aa(1-5\,\text{cof.}\,\theta^2)}{2z^5}$$

$$\frac{1}{BO^3}(zz + 2bz\,\text{cof.}\,\theta + bb)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{z^3} - \frac{3b\,\text{cof.}\,\theta}{z^4} - \frac{3bb(1-5\,\text{cof.}\,\theta^2)}{2z^5}$$

Hinc igitur fiet:

$$\frac{z - a\,\text{cof.}\,\theta}{AO^3} = \frac{1}{zz} + \frac{2a\,\text{cof.}\,\theta}{z^3} - \frac{3aa(1 - 3\,\text{cof.}\,\theta^2)}{2z^4}$$

$$\frac{z + b\,\text{cof.}\,\theta}{BO^3} = \frac{1}{zz} - \frac{2b\,\text{cof.}\,\theta}{z^3} - \frac{3bb(1 - 3\,\text{cof.}\,\theta^2)}{2z^4}$$

Atque aequationes resoluendae erunt

$$\text{I. } ddz - zd\Phi^2 = -b^3 d\omega^2 \left(\frac{1}{zz} + \frac{2(Aa - Bb)\,\text{cof.}\,\theta}{(A+B)z^3} - \frac{3(Aaa + Bbb)(1 - 3\,\text{cof.}\,\theta^2)}{2(A+B)z^4}\right)$$

$$\text{II. } 2dzd\Phi + zdd\Phi = b^3 d\omega^2 \,\text{fin.}\, \theta \left(\frac{Aa - Bb}{(A+B)z^3} + \frac{3(Aaa + Bbb)\,\text{cof.}\,\theta}{(A+B)z^4}\right)$$

quibuscum coniungenda est formula:

$$d\theta = \frac{ggd\omega - zzd\Phi}{kk} - d\Phi.$$

§. 23. Est autem ex natura centri grauitatis $Aa = Bb$, vnde erit $Aaa + Bbb = Bab + Aab$, ideoque $\frac{Aaa + Bbb}{A + B} = ab$, quo notato binae nostrae aequationes induent has formas,

$$\text{I. } ddz = z^d\Phi^2 = \frac{-b^3 d\omega^2}{zz} + \frac{3abb^3 d\omega^2 (1 - 3\,\text{cof.}\,\theta^2)}{2z^4}$$

$$\text{II. } 2dz^d\Phi + z^{dd}\Phi = \frac{3abb^3 d\omega^2 \,\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta}{z^4}$$

existente $d\theta = \frac{ggd\omega - zzd\Phi}{kk} - d\Phi$

Ad has resoluendas notari conuenit, quod si esset $ab = 0$, motum in ellipsi secundum regulas *Kepleri* absolutum iri, foreque talem, vt si distantia media ponatur $= b$: excentricitas $= n$, et anomalia excentrica $= v$, futurum sit:

$z = b(1 + n\,\text{cof.}\,v)$; $d\omega = dv(1 + n\,\text{cof.}\,v)$ atque $d\Phi = \frac{dv\sqrt{(1 - nn)}}{1 + n\,\text{cof.}\,v}$.

§. 24. Quia autem veri valores aliquantum ab his discrepabunt, ponatur:

$$d\omega = \mu dv(1 + n\,\text{cof.}\,v),$$
$$z = b(1 + n\,\text{cof.}\,v + p)$$

et cum iam satis prope sit $d\Phi = \frac{dv\sqrt{(1 - nn)}}{1 + n\,\text{cof.}\,\Phi}$

 erit

erit $d\theta = \frac{ggdv(1+n\cos.v)}{kk} - \frac{bbdv(1+n\cos.v)\sqrt{(1-nn)}}{kk} - \frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos.v}$
vbi primo notandum esse kk quantitatem prae bb minimam, simulque proxime esse $gg = bb\sqrt{(1-nn)}$ nisi motus gyratorius vehementer fuerit velox. Sit igitur $gg - bb\sqrt{(1-nn)} = \alpha kk$, vt sit proxime $d\theta = \alpha dv(1+n\cos.v) - \frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos.v}$, qui valor cum θ tantum in terminis minimis occurrat, ad approximandum satis est exactus.

§. 25. Incipiamus ab aequatione posteriori, quae hanc indicet formam:

$$\frac{2zdzd\Phi + zzdd\Phi}{d\omega} = \frac{3\lambda bb^3 d\omega \sin.\theta\cos.\theta}{z^3} = \frac{3abb^3 d\omega \sin.2\theta}{2z^3}$$

et integrando $\frac{zzd\Phi}{d\omega} = \frac{3}{2}ab\int\frac{b^3}{z^3}d\omega\sin.2\theta + Cbb$ at cum ab sit minimum in hoc termino sufficit pro z ponere $b(1+n\cos.v)$, et ob $d\omega = \mu dv(1+n\cos.v)$ erit

$$\frac{zzd\Phi}{\mu dv(1+n\cos.v)} = \frac{3}{2}\mu^2 ab\int\frac{dv\sin.2\theta}{(1+n\cos.v)^2} + Cbb$$

Neque vero hinc vtiles conclusiones deducere valebimus, nisi excentricitatem n valde paruam statuamus, quod quidem pro applicatione ad motus planetarum tuto facere poterimus.

§. 26. Hoc autem casu cum sit $\frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos.v} = dv(1-n\cos.v)$ proxime, erit $d\theta = dv(\alpha - 1 + (\alpha+1)n\cos.v)$ hincque $dv = \frac{-d\theta}{1-\alpha-(1+\alpha)n\cos.v} = -d\theta(-\alpha+(1+\alpha)n\cos.v)$ et proxime $\frac{dv}{(1+n\cos.v)^2} = -d\theta(1-\alpha-(1-3\alpha)n\cos.v)$ sicque erit $\int\frac{dv\sin.2\theta}{(1+n\cos.v)^2} = -(1-\alpha)\int d\theta\sin.2\theta + (1-3\alpha)n\int d\theta\sin.2\theta\cos.v$ sed sufficiat solum primum terminum retinuisse vt integratione instituta sit $\int\frac{dv\sin.2\theta}{(1+n\cos.v)^2} = \frac{1}{2}(1-\alpha)\cos.2\theta$ ideoque habebitur satis accurate

zzdΦ

$$\frac{zzd\Phi}{dv(1+n\cos v)} = Cbb + \tfrac{3}{4}(1-\alpha)\mu^2 ab\cos 2\theta$$

vnde erit:

$$d\Phi = \frac{Cbb\,dv(1+n\cos v) + \tfrac{3}{4}(1-\alpha)\mu^2 abdv(1+n\cos v)\cos 2\theta}{zz}$$

§. 27. Sumtis ergo quadratis et minimis neglectis terminis erit

$$z^4 d\Phi^2 = CCb^4 dv^2(1+n\cos v)^2 + \tfrac{3}{2}(1-\alpha)\mu\mu Cabbb\,dv^2(1+n\cos v)^2\cos 2\theta$$

Iam vero prima aequatio exuta differentialis constantis $d\omega$ ratione transit in sequentem,

$$z^3 d\frac{dz}{d\omega} - \frac{z^4 d\Phi^2}{d\omega} + b^2 z\,d\omega = \frac{3abb^2 d\omega(1-3\cos\theta^2)}{2z}$$

At cum sit $z = b(1+n\cos v+p)$ erit $\frac{dz}{b} = -ndv\sin v + dp$ et ob $d\omega = \mu dv(1+n\cos v)$ erit

$$(1+n\cos v+p)^3 d\left(\frac{dp-ndv\sin v}{\mu dv(1+n\cos v)}\right) - \frac{CCdv(1+n\cos v)}{\mu}$$

$$-\tfrac{3}{2}(1-\alpha)\mu\frac{Cab}{bb}dv(1+n\cos v)\cos 2\theta + \mu dv(1+n\cos v)(1+n\cos v+p)$$

$$= \frac{3\mu abdv(1+n\cos v)(1-3\cos\theta^2)}{2bb(1+n\cos v+p)}.$$

§. 28. Ponatur iam differentiale dv constans, eritque

$$d.\frac{dp-ndv\sin v}{\mu dv(1+n\cos v)} = \frac{ddp}{\mu dv(1+n\cos v)} + \frac{ndp\sin v}{\mu(1+n\cos v)^2} - \frac{ndv\cos v + nndv}{\mu(1+n\cos v)^2}$$

et quia est approximando:

$$(1+n\cos v+p)^3 = (1+n\cos v)^3 + 3(1+n\cos v)^2 p,$$

erit substitutione facta, iisque terminis in quibus p plus vna dimensione obtinet neglectis;

$$\frac{ddp}{\mu dv}(1+n\cos v)^2 + \frac{ndp\sin v}{\mu}(1+n\cos v) - \frac{ndv(\cos v+n)}{\mu}(1+n\cos v)$$

$$-\frac{3npdv(\cos v+n)}{\mu} - \frac{3(1-\alpha)\mu Cabdv(1+n\cos v)\cos 2\theta}{2bb} - \frac{CC}{\mu}dv(1+n\cos v)$$

$$+\mu$$

$$+\mu p dv(1+n\cos.v) - \frac{3\mu abdv(1-3\cos.\theta^2)}{2bb} + \mu dv(1+n\cos.v)^2$$
$$+ \frac{3\mu abpdv(1-3\cos.\theta^2)}{2bb(1+n\cos.v)} = 0.$$

§. 29. Reducatur cos. θ^2 ad cosinum simplicem ponendo cos. $\theta^2 = \frac{1+\cos.2\theta}{2}$, erit $1-3\cos.\theta^2 = -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cos.2\theta$, atque aequentur termini, in quibus p non inest seorsim $=0$, eritque diuisione per dv peracta:

$$+\mu + 2\mu n\cos.v + \mu nn\cos.v^2 = 0$$
$$-\frac{CC}{\mu} - \frac{CCn}{\mu}\cos.v - \frac{nn}{\mu}\cos.v^2$$
$$-\frac{nn}{\mu} - \frac{n}{\mu}\cos.v$$
$$-\frac{n^3}{\mu}\cos.v$$

cui aequationi vt satis fiat, necesse est, vt sit:
$\mu = 1$ et $CC = 1-nn$, ita vt fiat:
$d\omega = dv(1+n\cos.v)$ atque

$$d\Phi = \frac{dv(1+n\cos.v)\sqrt{(1-nn)}}{(1+n\cos.v+p)^2} + \frac{\frac{3}{4}(1-\alpha)abdv(1+n\cos.v)\cos.2\theta}{bb(1+n\cos.v+p)^2}$$

§. 30. Altera vero aequatio, ex qua valorem ipsius p definiri oportet erit:

$$\frac{ddp}{dv}(1+n\cos.v)^2 + ndp\sin.v(1+n\cos.v) + pdv(1-2n\cos.v-3nn)$$
$$-\frac{3(1-\alpha)abdv(1+n\cos.v)\cos.2\theta}{2bb}\sqrt{(1-nn)} - \frac{3abpdv(1+3\cos.2\theta)}{4bb(1+n\cos.v)}$$
$$+\frac{3abdv(1+3\cos.\theta)}{4bb} = 0$$

negligantior primo termini angulum θ negligentes vt et excentricitas n erit

$$\frac{ddp}{dv} + pdv - \frac{3abpdv}{4bb} + \frac{3abdv}{4bb} = 0$$

eritque $p = \frac{-3ab}{4bb-3ab}$, quae est pars veri valoris ipsius p neque ab excentricitate n neque ab angulo θ pendens.

§. 31.

§. 31. Maneat adhuc excentricitas n euanefcens, eritque

$$\frac{ddp}{dv}+pdv-\frac{3abpdv}{4bb}-\frac{9abpdv\ \text{cof.}\ 2\theta}{4bb}-\frac{3(1-\alpha)abdv\ \text{cof.}\ 2\theta}{2bb}$$
$$+\frac{3abdv}{4bb}+\frac{9abdv\ \text{cof.}\ 2\theta}{4bb}=0$$

fit nunc $p=\frac{-3ab}{4bb-3ab}+q$, erit

$$0=\frac{ddq}{dv}+qdv-\frac{3(1-\alpha)abdv\ \text{cof.}\ 2\theta}{2bb}+\frac{9abdv\ \text{cof.}\ 2\theta}{4bb}$$

omiffis terminis, qui ob $\frac{ab}{bb}$ prae reliquis funt minimi, atque facile patet, valorem ipfius q effe huiusmodi: $q=\frac{3\mathfrak{C}ab}{4bb}$ cof. 2θ; nam ob $d\theta=-(1-\alpha)dv$, erit $dq=\frac{3(1-\alpha)\mathfrak{C}abdv\ \text{fin.}\ 2\theta}{2bb}$ atque $ddq=\frac{-3(1-\alpha)^2\mathfrak{C}abdv^2\ \text{cof.}\ 2\theta}{bb}$, quibus valoribus fubftitutis fiet diuifione per $3\,dv$ cof. $2\,\theta$ facta

$$0=\frac{-(1-\alpha)^2\mathfrak{C}ab}{bb}+\frac{\mathfrak{C}ab}{4bb}-\frac{(1-\alpha)ab}{2bb}+\frac{3ab}{4bb}$$

feu $0=\mathfrak{C}(1-4(1-\alpha)^2)+3-2(1-\alpha)$ vnde fit $\mathfrak{C}=\frac{1+2\alpha}{4(1-\alpha)^2-1}=\frac{1+2\alpha}{3-8\alpha+4\alpha\alpha}$. Erit ergo

$$p=\frac{-3ab}{4bb}+\frac{3(1+2\alpha)b\ \text{cof.}\ 2\theta}{4bb(3-8\alpha+4\alpha\alpha)}$$

qui eft verus valor ipfius p, quatenus is non ab excentricitate n pendet: quia autem hic ipfe valor valde eft paruus, eius partes ab excentricitate n pendentes, vtpote multo minores facile negligere licet.

§. 32. Quoniam haec potiffimum ad motum lunae accommodare animus eft, propterea quod lunae corpus ob eius motum libratorium ita formatum videtur, vt notabiliter a figura Sphaerica difcrepet, pofitiones noftras ita definiamus, vt ad lunam pertinere videantur. In luna autem directio virgae AB conftanter propemodum in

 rectam

rectam CO incidit, vnde fit angulus θ fere $= 0$; ideoque statui debet $\alpha = 1$, ob $d\theta = dv(\alpha - 1 + (\alpha + 1) n \operatorname{cof.} v)$, eritque $p = -\frac{3ab}{4bb} - \frac{9ab}{4bb} = -\frac{3ab}{bb}$ ob cof. $2\theta = 1$. Hinc fiet.

$$z = b\left(1 - \frac{3ab}{bb} + n \operatorname{cof.} v\right)$$

$$\text{et } d\Phi = \frac{dv(1 + n \operatorname{cof.} v)\sqrt{(1 - nn)}}{\left(1 - \frac{3ab}{bb} + n \operatorname{cof.} v\right)^2}$$

§. 33. Ponatur breuitatis gratia $1 - \frac{3ab}{bb} = m$

$$\text{erit } \frac{1}{(m + n \operatorname{cof.} v)^2} = \frac{1}{m^2} - \frac{2n \operatorname{cof.} v}{m^3} + \frac{3nn \operatorname{cof.} v^2}{m^4}$$

reiectis terminis, in quibus altiores potestates ipsius n occurrunt. Multiplicetur per $1 + n \operatorname{cof.} v$

$$\text{ac fiet } \frac{1}{m^2} + \frac{n \operatorname{cof.} v}{mm} - \frac{2nn \operatorname{cof.} v^2}{m^3}$$
$$- \frac{2n \operatorname{cof.} v}{m^3} + \frac{3nn \operatorname{cof.} v^2}{m^4}.$$

quae insuper per $\sqrt{(1 - nn)} = 1 - \frac{1}{2} nn$ multiplicata dat $\frac{2 - nn}{2mm} - \frac{n(2-m) \operatorname{cof.} v}{m^3} + \frac{nn(3-2m) \operatorname{cof.} v^2}{m^4}$.

At ob cof. $v^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cof.} 2v$ habebitur

$$\frac{2mm - mmnn + 3nn - 2mnn}{2m^4} - \frac{n(2-m) \operatorname{cof.} v}{m^3} + \frac{nn(3-2m) \operatorname{cof.} 2v}{2m^4}$$

quae per dv multiplicata dat valorem ipsius $d\Phi$

§. 34. Habebimus ergo hanc aequationem

$$d\Phi = \frac{dv}{mm} + \frac{nn(1-m)(3+m)dv}{2m^4} - \frac{n(2-m)dv \operatorname{cof.} v}{m^3}$$
$$+ \frac{nn(3-2m)dv \operatorname{cof.} 2v}{2m^4}$$

cuius integrale est

$$\Phi = C + v\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right) - \frac{n(2-m) \operatorname{fin.} v}{m^3}$$
$$+ \frac{nn(3-2m) \operatorname{fin.} 2v}{4m^4}$$

Vbi

vbi eſt $m = 1 - \frac{3ab}{bb}$. Denotat autem v anomaliam excentricam, quae ita eſt comparata, vt, ſi anomalia media ponatur $= u$, ſit $u = v + n$ ſin. v.

§. 35. Ponatur in primo termino pro v eius valor $u - n$ ſin. v, erit:

$$\Phi = C + u\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right)$$
$$-\left(\frac{2}{m^3} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right) n \text{ ſin. } v$$
$$+ \frac{nn(1-2m)}{4m^4} \text{ ſin. } 2v$$

vbi duo vltimi termini continent aequationem centri, quae indicat, quantum locus medius a vero diſtet. Primi ergo termini

$$C + u\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right)$$

deſignant locum medium.

§. 36. Erit ergo motus medium ad motum anomaliae mediae, vt

$$u\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right) \text{ ad } u$$

ſed cum non ſolum nn ponatur valde paruum ſed etiam $1 - m = \frac{3ab}{bb}$, ſit vehementer paruum, alterum terminum negligere licet, ita vt ſit motus medius ad motum anomaliae vti $\frac{1}{mm}$ ad 1, ſeu vt 1 ad mm, quae ratio erit, vt 1 ad $\left(1 - \frac{3ab}{bb}\right)^2$ ſeu vt 1 ad $1 - \frac{6ab}{bb}$. Motus medius autem erit ad motum Aphelii, ſi O ſit [illegible], ſeu ad motum Apogaei, ſi O ſit terra, vt 1 ad $\frac{6ab}{bb}$. Sicque Aphelium ſeu Apogaeum in conſequentia promouetur; et quidem interuallo vnius reuolutionis ſecundum motum medium per ang. $= \frac{6ab}{bb} \cdot 360°$.

§. 37. Egregie haec conclusio quadrat in motum lunae, cuius Apogaeum fere duplo celerius progreditur, quam per Theoriam inuenitur. Obseruationes enim praebent motum lunae medium ad motum anomaliae mediae, vt 1, 0085193 ad 1, ita vt motus medius sit ad motum Apogaei vt 1, 0085193 ad 0, 0085193; hoc est, vt 1 ad 0, 0084473. Per Theoriam autem ob actionem solis motus lunae medius ad motum Apogaei tantum esse deberet vt 1 ad 0, 0041045, vnde excessus motus Apogaei veri supra Theoreticum est ad motum medium vt 0, 0043428 ad 1.

§. 38. Ad modum ergo probabile videtur, hunc motus Apogaei lunae excessum inde oriri, quod lunae corpus sit oblongum, eiusque axis longior perpetuo ad centrum terrae fere directus. Atque hinc etiam ratio figurae istius oblongae definiri poterit, cum esse debeat $\frac{6ab}{bb} = 0,\ 0043428$. Posito enim in semidiametris terrae $b = 60$, fiet $ab = 2,\ 60568$, et si fingamus $a = b$ seu $CB = CA$, foret $CA = CB = 1\frac{1}{4}$: hincque prodiret tota distantia seu longitudo virgae $AB = 2\frac{1}{2}$ semid. terrae. Luna ergo, cum non sit virga duobus globis onusta, vt eius figura quasi aequiualeat, multo longior esse deberet, ac fortasse 3 diametros terrae superare, ita vt eius axis longior plus quam octies excederet breuiorem, quod vix verisimile videtur.

§. 39. Quodsi ergo huiusmodi figura lunae oblonga non toleranda videatur, etsi fortassis minor a figura Sphaerica defectus aliquid ad Apogaei accelerationem conferre possit; alia certe vis adesse debet insuper in lunam

agens

agens, quae tanto Apogaei motui producendo par sit: seu statuendum erit, vim terrae, lunam trahentem, non exacte esse quadratis distantiarum reciproce proportionalem: quod cum ex nonnullis lunae exiguis inaequalitatibus, quae Theoriae repugnant, concludendum videtur, tum etiam inde, quod parallaxis lunae vera integro fere minuto maior deprehenditur, quam secundum Theoriam esse deberet.

DE MACHINIS IN GENERE.

AVCTORE

L. EVLERO.

§. 1.

Cum disciplinae Mathematicae semper ob certitudinem et perspicuitatem, qua reliquis artibus longe antecellunt, magni sint aestimatae et collaudatae, tum imprimis propter summam vtilitatem, quam ad commune vitae commodum afferre videntur, omni honore, studiisque hominum dignissimae sunt habitae. Quem ad modum enim vix vllum vitae genus Arithmetica carere potest, neque pauca Geometriae cognitionem requirunt, atque Astronomia ad vitam commode instituendam plurima adminicula suppeditat; ita Mechanicae vsus latissime patet, cum pleraeque artes ope Machinarum, quarum inuentio et perfectio Mechanicae debetur, absoluuntur. Quos insignes vsus cum sola Mathesis elementaris, quae iam a longo tempore est inuenta et pertractata, praestare putetur, non leues inde obiectiones contra vtilitatem Matheseos subtilioris, quae hoc imprimis seculo excoli est coepta, opponi solent; quod ab vsu populari abhorreat, nimisque sit ardua, quam vt vllum ex ea commodum in commune bonum redundare possit.

§. 2. Quamquam autem incrementa Astronomiae aliarumque Matheseos partium, quae recentiori Analysi sublimiori dictae accepta sunt referenda, eam ab istis obiectionibus

nibus iam satis superque vindicare videntur; tamen ipsa Mechanica vulgaris, quae in Machinis instruendis et explicandis versatur, summam Analyseos non solum vtilitatem, sed etiam necessitatem, clarissime euincit. Quaecunque enim in Mechanica de natura et vsu Machinarum tradi solent, tam sunt imperfecta, et plerumque omni fundamento destituta, vt maxime mirandum sit, communem opinionem de eius eximio vsu tamdiu sustentari potuisse: hic autem defectus nulli alii causae, nisi ignorationi Analyseos sublimioris, adscribi potest, quippe cuius adminiculo demum cognitio Machinarum perfici, atque ad exoptatum vsum in vita communi accommodari queat.

§. 3. Maxime autem vulgarem Mechanicae doctrinam de Machinis esse imperfectam, iam pridem non obscure, qui in Machinis elaborandis sunt occupati, animaduerterunt. Quantumuis enim nouae cuiuspiam Machinae structura principiis Mechanicae conformis videatur, tamen de eius effectu vix quicquam ante polliceri licet, quam experientiae approbatio accesserit: et, quamquam saepe ii, qui multum operae studiique in Machinis construendis consumserunt, tantam sagacitatem longo vsu sint adepti, vt de effectu earum certo pronunciare ausint, antequam experientiam consuluerint, tamen tantum abest, vt hoc scientiae ipsorum Theoreticae tribui possit, vt potius soli experientiae adscribi debeat. Hinc qui solis regulis, quae vulgo in Mechanicae elementis tradi solent, imbutus ad Machinarum fabricam se accingit, de earum successu vel nihil praedicere valebit, vel spe concepta saepissime frustrabitur. Ex quibus clarissime perspicitur, cognitionem Machinarum vulgarem, qualis in Mechanicae elementis

ex-

exponitur, maxime esse mancam, nihilque minus quam Theoriae nomen mereri.

§. 4. Cum autem ii, qui nihilominus cognitionem Machinarum Theoreticam profitentur, eamque aduersus obiectiones practicorum defendere sustinent, hunc defectum ac perpetuum fere ab experientia dissensum tollere nequeant, omnem culpam in frictionem transferre solent; hacque sola effici, vt Machina alioquin secundum praecepta Mechanicae diligentissime instructa saepe numero sperato effectu excidat. Quamquam autem frictio actionem Machinarum non mediocriter perturbat, tamen immerito omnis culpa in eam transfertur. Cognitio enim Machinarum, quae vulgo ab his hominibus ostentatur, tam est imperfecta, vt etiamsi nulla omnino frictio adesset, tamen nihil quicquam de effectu Machinarum accurate definiri posset. Hunc igitur summum Mechanicae vulgaris defectum hic diligentius expendere, et quem ad modum per solam Analysin sublimiorem tolli possit, vberius explicare constitui; cum vt insignem huius nouae Matheseos partis vtilitatem, quae vulgo in dubium vocari solet, luculenter ob oculos ponam, tum vero imprimis, vt doctrinam ipsam de Machinis pro viribus perfectiorem reddam.

§. 5. Primum igitur vniuersa de Machinis doctrina vulgo principiis aequilibrii superstrui solet: quibus magnitudo ac directio virium determinatur, quae obiecto cuicunque applicatae in aequilibrio consistunt. Hinc proposita quaecunque Machina, in Mechanica vulgari nihil aliud inuestigatur, praeter rationem vis sollicitantis ad onus superandum, quae ad statum aequilibrii requiritur: ita si vis alteri vectis termino, pondus vero alteri sit applicatum

tum

itam, demonstratum est ad aequilibrium obtinendum, vim ad pondus rationem reciprocam distantiarum ab hypomochlio tenere oportere In Machinis autem vtcunque compositis ex iisdem principiis proportio inter vires sollicitantes et onera superanda, qua aequilibrium efficitur, non difficulter definitur; hacque determinatione tota Machinarum tractatio absolui solet. Altum vero vbique deprehenditur silentium de motu, qui sublato statu aequilibrii sit insecuturus, nisi quod generatim notetur, si vis sollicitans maior fuerit, quam effectio aequilibrii exigat, onus promotum iri, si quidem vis frictioni simul superandae par sit.

§. 6. Tum vero etiam ex indole et proportione partium Machinae definiri potest, si potentia seu vis, siue trahens siue pellens, data celeritate progrediatur; quanta celeritate ipsum onus promoueatur. Quam enim rationem inter potentiam et onus status aequilibrii postulat, eadem ratio, sed inuersa, inter celeritatem potentiae et oneris intercedit, vndecunque motus sit profectus. Hinc notus ille Mechanicae canon originem habet, quo promotio oneris eo tardior esse affirmatur, quo minor potentia ad aequilibrium requiratur, si quidem potentia data celeritate progrediatur. Quae regula, nisi longius, quam par est, extendatur in dispositione Machinarum saepe eximium habet vsum, sed nihil prorsus confert ad ipsum motum, qui sublato statu aequilibrii re vera subsequitur, definiendum. Cum igitur omnes Machinae ad motum destinentur, nullaque construi soleat, quae in statu aequilibrii effectum desideratum praestet; manifestum est, actionem et effectum Machinarum nullo modo ex memoratis Mechanicae principiis

cipiis explicari ac definiri posse: satis enim constat, ad motum determinandum principia aequilibrii minime sufficere, sed praeterea cognitionem legum motus requiri, quae sine analysi sublimiori neque tradi neque ad vsum applicari possunt.

§. 7. Cum autem pono, si status aequilibrii cuiuspiam Machinae spectatur, relatio inter vim potentiae protrahentem, et vim oneris contrariam, qua Machinam in plagam oppositam mouere conatur, determinetur, manifestum est, plurimas Machinas ne hanc quidem determinationem admittere. Si enim onus ope Machinae horizontaliter sit promouendum, nullam vnquam viri ad Machinam repellendam exercet, quemadmodum euenit, si pondus perpendiculariter eleuari debeat; isto igitur casu vel minima vis, dummodo frictioni superandae sufficiat, onus promouere valebit, maior autem motum celeriorem producet, quam minor, neque idcirco statui aequilibrii vllus locus relinquitur. Hoc idem euenit in horologiis, molendinis, aliisque huius generis Machinis, in quibus nulla cuiusquam ponderis eleuatio intenditur, sed omnis effectus in solo Machinae motu producendo consumitur. De hoc ergo Machinarum genere nihil est, quod in vulgari Mechanica tradi queat, praeter meram ac nudam partium descriptionem et coagmentationem; cum tamen in praxi multo amplior et accuratior cognitio requiratur.

§. 8. Si enim ad certum quemdam effectum producendum Machina proponitur, parum quidem refert nosse, quanta vi ad aequilibrium conseruandum opus sit, si quidem Machina ad id genus pertineat, in quo status aequilibrii datur; sed vel maxime interest nosse, quanta celerita-

celeritate desideratus effectus a qualibet vi Machinae istius ope edatur; vt si forte effectus nimium fuerit lentus, vel scopo non conformis, Machina repudiari possit, antequam per experientiam inepta fuerit deprehensa. Huiusmodi accurata motus a data vi oriundi determinatio etiam maxime necessaria est, si plures Machinae ad eundem finem obtinendum proponuntur, quo ea, quae promtissimum, vel intentioni maxime conuenientem effectum producat, reliquis anteferri queat. Quin etiam Theoriam eousque perfici conueniet, vt proposito quocunque opere absoluendo, inter omnes omnino Machinas, quae ad id exsequendum excogitari queant, ea potissimum assignari possit, quae hoc opus vel breuissimo tempore, vel minimo virium dispendio, vel alio modo, qui maxime idoneus videatur, peragere valeat.

§. 9. Momentum harum quaestionum vnico eoque facili exemplo docuisse sufficiat. Ponamus onus mille librarum verticaliter eleuari debere a vi, quae valeat 100 libras, ad hocque opus nos vti velle axe in peritrochio. Primum quidem perspicuum est, si radiorum alter decies longior assumatur altero, vim cum onere in aequilibrio fore constitutum, nullumque motum sequi. Quo igitur onus eleuetur, necesse est, vt radius maior plus quam decies longior altero statuatur; facile quoque est praeuidere, si is vndecies tantum longior capiatur, lentiorem motum esse insecuturum, quam si duodecies longior caperetur: neque quisquam dubitabit, si maior radius vel tredecies, vel decies quater, vel vltra longior caperetur, motum adhuc celeriorem esse proditurum. Deinde vero pariter non est dubium, quin si maior radius millies, vel decies millies, longior efficeretur altero, motum iterum tardiorem productum iri. Crescet

 ergo

ergo celeritas eleuationis ad certum vsque longitudinis terminum, quem si transgrediatur, iterum decrescat. Merito ergo quaestio instituitur, quoties radium alterum longiorem altero constitui oporteat, vt onus citissime eleuetur.

§. 10. Quantopere autem haec aliaeque similis generis quaestiones, quae ad veram Machinarum Theoriam omnino ita pertinent, vt nisi eae resolui queant, Theoria maxime imperfecta censeri debeat, communis Mechanicae limites transgrediantur, quilibet, qui vel allatum leue exemplum attentius perpenderit, facile agnoscet. Nihil enim prorsus in omnibus libris, qui gloriosum Theoriae Machinarum titulum prae se ferunt, inuenitur, quo isti quaestioni vllo modo satisfacere posset. Magis ergo ardua est haec quaestio, et cum vulgaria Mechanicae praecepta huc nihil conferant, ad Mathesin sublimiorem dictam est confugiendum, in qua cum non solum verae motus leges explicentur, sed etiam ad quosuis casus, quibus motus producitur, ope calculi infinitorum accommodentur; ea sola veros nobis aperiet fontes, ex quibus solutionem huiusmodi quaestionum haurire liceat. Quod quo facilius fieri possit, praecipua ante momenta, quae in omnibus Machinis occurrunt, diligenter examinari, et quantum singula ad motum cum promouendum tum impediendum afferant, sedulo determinari conueniet. Hac enim tractatione praemissa non difficulter omnis generis Machinae ad calculum reuocari, earumque effectus accurate definiri poterunt.

§. 11. In omni autem Machina tres res sunt considerandae: primo scilicet vis, quae Machinae motum inducit;

ducit; secundo ipsa Machina, seu eius structura, particulaeque, quibus constat coagmentatio; ac tertio onus mouendum; quamquam enim in pluribus Machinis nullum onus occurrit, sed totus Machinae effectus in ipsius motu consistit, tamen haec diuisio tripartita non impedit, quo minus etiam huius generis Machinae in tractatione comprehendantur: quippe quae exoriuntur, si onus mouendum omittatur, vel euanescens assumatur. Hae porro tres res duplici modo debent perpendi; vel per se, vel ratione motus, quem singulae suscipiunt. In Machina enim ipsa eius structura probe est distinguenda a motu, qui ei singulisque eius partibus inducitur; propterea quod Machina non solum vi in onus transferendae inseruit, sed etiam ob motum, quem ipsa accipit, aliquam vis sollicitantis partem consumit; hocque ipso effectum, qui alias produceretur, non parum imminuit.

§. 12. Quod igitur primum ad vires, quibus Machinae impelli solent, attinet, earum plurima genera adhibentur, quae omnia enumerare difficile foret; cuiusmodi sunt pondera, elastra, vires humanae et animales, impulsiones aquarum, et venti, ignis, fumus, etc. Circa has autem vires ante omnia attendendum est, vtrum indesinenter agant, an per interualla? an perpetuo aequali vi vrgeant, an modo intendantur, modo remittantur? et quandoque per aliquod interuallum penitus cessent. Ad quem casum referendae sunt percussiones, quarum actio ex regulis collisionis definiri debet. Quando autem sine interruptione operantur, earum vera quantitas est spectanda, quam semper per pondus quodpiam exponere licet. Scilicet quacunque vi Machina impellatur, pondus assignari ri poterit, quod tantundem vrgeat et cum mensura ponderum sit notissima loco cuiuslibet vis mente substituere licebit pondus aequiualens; quod pro natura vis sollicitantis, vel constantis erit quantitatis, vel variabilis. Quin etiam si Machina percussionibus ad motum incitetur, quouis momento pressio aequalis substitui potest, sed plerumque calculus contrahitur, si regulae collisionis in subsidium vocentur.

§. 13. Quaecunque autem vis ad Machinam impellendam adhibeatur, ea semper cum quadam materia est coniuncta, quae simul moueri debet; quam inertiam vis sollicitantis appellabimus. Haec si solus status aequilibrii determinatur, omnino non in computum ingreditur, quoniam aequilibrium a sola quantitate virium impellentium pendet, nihilque interest, vtrum inertia adsit an secus? simulac vero motus generatur, omnis materia, quae motum recipit, attente est consideranda, quippe ad quam mouendam portio quaedam virium impenditur. Quantitas igitur eius materiae, in qua ipsa vis impellens residet, sedulo est attendenda, et quantum motum, dum Machina mouetur, ipsa nanciscatur, definiri debet. Quo plus enim materiae, vel quo maior inertia cum vi sollicitante fuerit connexa, eo tardior orietur motus. Sic praeter virium varietates ante commemoratas duae res in qualibet vi, qua Machina ad motum concitatur, potissimum erant considerandae: primo scilicet ipsa cuiusque vis quantitas; ac deinde eius inertia: quarum illa per pondus, haec vero per quantitatem materiae, quae pariter ad pondus, reuocari potest, mensurari solet.

§. 14.

§. 14. In ipsa deinde Machina eius structura, et modus, quo singulae partes inter se sint connexae, perpendi debet: ex quibus, si vnius partis vel solum puncti motus fuerit cognitus, simul omnium reliquarum partium motus innotescet. Hinc cum vis sollicitans Machinae sit applicata, si celeritas ipsius vis fuerit inuenta, simul motus singularum Machinae partium cognoscetur. Verum praeterea in motus productione ipsius quantitatis materiae, ex qua Machina componitur, ratio est habenda; quam inertiam ipsius Machinae vocabimus. Haec primum ex quantitate materiae seu pondere cuiusque partis est aestimanda; tum vero cum reluctatio inertiae eo magis se exerat, quo celerior fuerit motus; si diuersae Machinae partes diuersis celeritatis gradibus moueantur, haec circumstantia simul in computum est ducenda. Scilicet si omnes Machinae partes motibus paribus progrediantur, vt nulla adsit motu svarietas, sufficiet, ipsam materiae quantitatem eiusu epondus nosse: sin autem, vt plerumque fit, motus gyratorius circa axem quempiam generetur, tum momentum inertiae respectu huius axis computatum, in motus determinationem ingredietur: quae circumstantia saepe actionem Machinarum determinatu difficillimam reddere solet.

§. 15. Restat ergo onus considerandum, quod ope Machinae promoueri debet, nisi forte totus effectus in solo Machinae motu consistat. Circa onus autem primo dispiciendum est, vtrum praeditum sit vi Machinam sollicitante, vti euenit, si pondus eleuari debet, an vero tantum ratione inertiae actioni Machinae reluctetur, velut si pondus secundum directionem horizontalem sit protrahendum:

hendam: illam vocabimus oneris vim renitentem, cuius ratio in determinatione status aequilibrii haberi debet; hanc vero inertiam oneris dicemus, quae in motu demum spectanda venit. Ad vim oneris renitentem denique frictio tota, qua tam motus Machinae, quam ipsius oneris impeditur, commode reuocari potest. Per experientiam enim constat, frictionem eandem exerere effectum, ac si maior vis oneris renitens esset superanda; quae etsi in quiete Machinae nullam vim inferat, in motu tamen vicem vis motum retardantis sustineat, et quidem constantis maneat quantitatis, siue motus tardior sit, siue celerior. Quare si vnico experimento magnitudo frictionis fuerit explorata, eam tantum vi oneris renitenti addere conueniet, quo pacto calculus Machinarum ob frictionem non amplius perturbabitur.

§. 16. Dum autem motus cuiusque Machinae per calculum determinatur, imprimis necesse est, vt vires, quibus singulae Machinae partes in se inuicem agunt, accurate definiantur; quo constet, quantam vim cum rotae, tum funes, tum axes, super quibus partes Machinae rotantur, etiam durante motu sustineant. Nisi enim de hoc fuerimus certi, difficile foret partes Machinae vel non nimis imbecilles efficere, vel non nimis robustas: quorum prius Machinam prorsus inutilem redderet, si quidem vi, quam in actione subit, sustinendae par non esset. Posterius vero non parum Machinae officit, si enim praeter necessitatem nimis robusta et fortis construeretur, ob maiorem inertiam totus motus retardaretur; huicque incommodo sola Mathesis sublimior medelam afferre valet. His igitur, quae ad actionem Machinarum in genere spectant, expositis, singula Machinarum genera secundum hoc institutum pertractabo, ac primo quidem a simplicioribus exordiar.

II.

II.
DE PROMOTIONE SIMPLICI.

§. 1.

Promotionem simplicem voco, quando onus, vel immediate a potentia promouetur, siue trahendo siue trudendo, vel ope huiusmodi Machinarum simplicium, quibus actio potentiae neque augetur neque imminuitur: quod fit vel funibus nudis vel trochleis, quae circa axes fixos sint mobiles, innixis. His scilicet casibus onus eadem celeritate promouetur, qua ipsa potentia, seu vis mouens, procedit: ita vt per quantum spatium potentia iam processerit, per tantumdem spatium onus sit protractum. Ab hoc autem casu potissimum exordior, cum quia est simplicissimus, eiusque cognitio ad omnis generis Machinas examinandas summopere necessaria, tum vero, quia hic locus maxime idoneus conceditur de frictione tractandi: quae doctrina nondum satis explicata neque ad actionem Machinarum accommodata videtur; praecipue quando frictio ad axem, circa quem pars Machinae est mobilis transfertur.

§. 2. Ponamus ergo primo onus *a b c d* super plano horizontali A B promoueri debere, ad hocque adhiberi potentiam, cuius directio pariter sit horizontalis, et quae onus vel trudendo in puncto E propellat, vel trahendo secundum F *p* protrahat. Transeat autem directio vis siue trudentis P E, siue trahentis F *p* per oneris centrum grauitatis, ne, etiamsi onus liberum esset, in eo vllus alius motus praeter progressiuum horizontalem generetur. Quando enim directio vis vrgentis non Tab. V. Fig. 2.

per centrum grauitatis oneris transit, tum ei praeter motum progressiuum rotationem quamdam imprimere conabitur, qui etsi a firmitate plani A B, cui incumbit, impediatur, tamen appressionem oneris ad hoc planum immutat, cuius cognitio saepe numero non parui est momenti. Sin autem ad hanc appressionem non respiciamus, perinde est, vtrum directio vis sollicitantis per oneris centrum grauitatis transeat, nec ne? dummodo corpori re ipsa nullum motum rotatorium inducat.

§. 3. Ponamus praeterea planum A B esse politissimum, vt onus in motu suo nullam frictionem sentiat, quia effectum frictionis deinde seorsim sum contemplaturus. Hic igitur solum onus et potentia vrgens in computum ingredietur. Sit massa oneris $= Q$, quae eius pondere mensuratur, et qua tantum motui reluctatur, quia ob motum horizontalem nullam vim potentiae contrariam seu renisum exerit. Potentiae vero sollicitantis quantitas sit $= p$, inertia autem, seu quantitas materiae, quae cum potentia est coniuncta, cum eaque simul mouetur, sit $= P$; vbi tam P quam p ponderibus metiri licet. Confecerit tam potentia quam onus motu iam viam seu spatium $= z$: et vtrumque habeat celeritatem, quantam graue ex altitudine v libere cadendo adipisci solet. Cum igitur a vi p quouis momento massa seu inertia $P + Q$ accelerari debeat, ex principiis Mechanicis habebimus hanc aequationem $d v \frac{pdz}{P+Q}$, quae integrata dat $v = \frac{pz}{P+Q}$.

§. 4. Cum igitur celeritas ipsa sit radici quadratae ex altitudine v proportionalis; si enim v in partibus millesimis pedis Rhenani exprimatur, eius radix quadrata $\sqrt{v}$ per 4 diuisa indicabit, quot pedes Rhenanos corpus hac celeritate vniformiter motum singulis minutis secundis esset

esset percursurum: onus motu vniformiter accelerato promouebitur, nisi quatenus a resistentia aeris impeditur. Si tempus praeterea, quo iam spatium z absoluit, ponatur $= t$. ob $dt = \frac{dz}{\sqrt{v}}$ erit $dt = \frac{dz\sqrt{(P+Q)}}{\sqrt{pz}}$ et $t = \frac{2\sqrt{z(P+Q)}}{\sqrt{p}}$ $= 2\sqrt{\frac{P+Q}{p} . z}$. Quae formula si per 250 diuidatur, dum spatium z in partibus millesimis pedis Rhenani exprimitur, indicabit numerum minutorum secundorum tempori t conuenientium. Vnde vicissim si tempus t in minutis secundis exprimatur, vt sit $t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{P+Q}{p} z}$ erit $z = 15625\, tt . \frac{p}{P+Q}$ part. mill. ped. Rhenani; seu $z = \frac{15625}{1000} . \frac{p}{P+Q}$ ped. Rhen: sicque per quantum spatium onus dato tempore promoueatur, definiri poterit.

§. 5. Cum autem hic casus nusquam locum inueniat, ponamus insuper frictionem accedere, qua fit, vt simul atque onus mouetur, vi propellenti perinde resistat, ac si quadam vi contra vrgeretur: hocque vi resistente ipsa frictio mensurari solet. Prouenit ea vero partim ab asperitate superficierum se in motu fricantium, partim ab appressione earum mutua. Quanquam autem videtur quoque a magnitudine spatii $a b$, quo fit contactus, pendere tamen plurimis experimentis ab *Amontono* institutis euictum est, magnitudinem contactus nihil ad frictionem conferre, sed totam soli appressioni esse proportionalem, si asperitas maneat eadem. Atque in plerisque tabulis ligneis modice laeuigatis inuenit frictionem fere tertiae parti eius vis, qua onus ad tabulam apprimatur, esse aequalem. Hinc si A B esset huiusmodi tabula lignea, quoniam appressio toti ponderi oneris Q aequatur, frictio foret $= \frac{1}{3}$ Q. Maior autem minorue erit, si superficies A B magis minusue aspera fuerit. Quo igitur determinatio latius pateat, frictionem ponamus $= F$, vbi tenendum est, fore $F = \frac{1}{n} Q$, denotante n numerum siue maiorem siue minorem quam 3.

§. 6. Cum igitur frictio F, dum onus mouetur, vi propellenti p sit contraria, ea a vi p subtrahi debebit, onusque perinde mouebitur, ac si sublata frictione propelleretur a vi $= p - F$. Quare confecto spatio z celeritas oneris debita erit altitudini v, ita vt iam sit $v = \frac{(p-F)z}{P+Q}$: atque tempore t minutorum secundorum onus promouebitur per spatium tot pedum Rhen: quot vnitates ista expressio $\frac{15625}{1000} \cdot \frac{p-F}{P+Q}$ indicabit. Hic igitur ante omnia aduertendum est, onus de loco non moueri, nisi sit $p > F$, hoc est, nisi vis pellens p fuerit maior quam frictio F: et quamdiu vis vrgens p sit minor, onus in quiete persistere. Hic enim non, vti alias in calculo fieri solet, valorem ipsius v, casu quo $p < F$ negatiuum concludere licet; vt motus in contrariam plagam dirigatur: quoniam frictio, etsi vi pellenti est contraria, tamen hunc effectum non nisi in motu exerit, atque in quiete penitus cessat. Quod notandum est, ne per huiusmodi formulas perperam intellectas in errores seducamur.

§. 7. Hic igitur simplicissimus se nobis offert modus quantitatem frictionis explorandi per experimenta. Corpore enim quocunque $a\,b\,c\,d$ plano horizontali A B imposito, ei in directione horizontali F p ope fili seu funiculi applicentur successiue maiores vires; donec corpus moueri incipiat; quae experimenta commodissime instituentur, si funiculus in p trochleae liberrime mobili imponatur

tur

tur, eique continuo maiora pondera appendantur. Tum enim frictio ei ponderi erit aequalis censenda, a quo corpus primum promoueri inceperit. Hoc autem modo *Amontonus* deprehendit, si asperitas fuerit eadem, frictionem ad pondus corporis perpetuo datam et constantem rationem tenere; neque quantitatem contactus *a b* quicquam ad frictionem conferre. Ab aliis quidem haec regula deinceps in dubium est vocata, qui pariter experientiae innixi eam falsitatis arguere voluerunt. Verum hi ad frictionem, quae in motu gyratorio cernitur, potissimum respexerunt: quae autem hoc casu longe aliter motui resistit, vti infra docebo, ita vt hinc nulla obiectio firma contra regulam *Amontonianam* peti possit. Interim tamen optandum esset, vt haec experimenta cuncta omni adhibita solertia repetantur; atque nunc quidem ope perfectionis Theoriae ab omnibus dubiis liberentur.

§. 8. Ex formula inuenta $v = \frac{(p-F)x}{P+Q}$ apparet, frictione F non obstante, onus motu vniformiter accelerato promotum iri, si quidem resistentia aeris negligatur. Verum in hac formula assumsimus vim vrgentem p perpetuo eandem quantitatem retinere, siue motus fuerit tardior siue celerior; quem ad modum euenit, si promotio ope ponderis descendentis efficiatur, quippe quod perinde trahere pergit, siue demum descendere incipiat, siue iam celeritatem quamcunque acquisiuerit. Sin autem aliae vires adhibeantur, eae plerumque eo minores euadunt, quo celerius iam ipsae mouentur: quod imprimis in viribus hominum et animalium vsu venit, quae quo celerius iam onus promoueant, eo minores vires ad nouam accelerationem procurandam exerere valent. His ergo casibus littera p erit variabilis, atque a celeritate iam acquisita, seu altitudine ei debita v

pendebit, cuius variabilitatis ratio proinde in integratione formulae $d\,v = \frac{(p-F)dz}{P+Q}$ erit habenda, antequam ipse motus definiri queat.

§. 9. Ponamus onus Q ab homine secundum directionem horizontalem A B progrediente trahi, et cum homo omnibus viribus adhibitis certum celeritatis gradum in currendo superare nequeat; manifestum est, si hunc gradum iam attigerit, tum nullam amplius vim ad protractionem oneris impendere posse, sed omnes, quibus pollet, vires ad sui ipsius motum continuandum consumi, ex quo evidens est, hominem eo minorem vim in onus exerere posse, quo celerius iam ipse progrediatur. Quanquam autem hanc diminutionem accurate definire non liceat, tamen coniectando formulam a vero parum discrepantem consequemur, si duobus tantum casibus satisfaciamus. Sit igitur g vis maxima, quam homo quiescens ad promotionem oneris impendere valeat; b autem sit altitudo debita celeritati, qua cum si homo progrediatur, nullam amplius vim exerere queat. Debebit ergo p, qua littera vis hominis exprimitur, dum iam celeritate altitudini v debita progreditur, eiusmodi esse functio ipsius v, vt posito $v = 0$ fiat $p = g$; sin autem ponatur $v = b$, vt sit $p = 0$; his autem conditionibus satisfacit formula $p = g - \frac{gv}{b}$.

§. 10. Substituamus ergo hanc formulam $p = g - \frac{gv}{b}$ in aequatione differentiali $d\,v = \frac{(p+F)dz}{P+Q}$, habebimusque $d\,z = \frac{b(P+Q)dv}{gb-gv-bF}$; et integrando $z = \frac{b}{g}(P+Q)\,l\,\frac{b(g-F)}{b(g-F)-gv}$. Perspicuum autem est motum oneris accelerari, quamdiu fuerit $g\,b - g\,v - b\,F > 0$: simul ac vero fiat $v = \frac{b(g-F)}{g}$, accele-

accelerationem cessare, motumque fore vniformem: quem quidem elapso demum tempore infinito assequetur. Verum tamen mox ab initio iam tam prope hunc gradum velocitatis acquiret, vt motus statim appareat vniformis: quod etiam experientia ita confirmat, vt acceleratione initiali penitus neglecta totus motus ex hoc gradu velocitatis aestimari soleat. Onus ergo promouebitur vniformiter celeritate, quae oriatur lapsu ex altitudine $v = \frac{h(g-F)}{g}$: seu ex posita altitudine h in partibus millesimis pedis Rhenani, singulis minutis secundis tot pedes absoluentur, quot vnitates erunt in formula $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g-F}{g}\,.\,h}$.

§. 11. Seu cum h sit altitudo debita celeritati, quam homo libero cursu assequi valeat, $\frac{1}{4}\sqrt{h}$ exprimet spatium in pedibus, quod homo hoc cursu singulis minutis secundis emetiri valeat. Quodsi ergo ponamus hominem summo hoc velocitatis gradu, singulis minutis secundis n pedes absoluere, idem homo onus Q protrahens singulis minutis secundis conficiet spatium $n\sqrt{(1-\frac{F}{g})}$ pedes. Si duo homines coniunctim trahant, littera n quidem eadem manebit, sed eorum vis, dum quiescunt, erit dupla, sicque celeritas oneris erit $= n\sqrt{(1-\frac{F}{2g})}$ ped. in minuto secundo. Atque si numerus hominum, qui viribus aequalibus polleant, fuerit $= m$, celeritas oneri impressa erit $= n\sqrt{(1-\frac{F}{mg})}$ ped. in minuto secundo. Haec eadem sunt tenenda, si onus ab equis aliisue animalibus protrahatur, dummodo pro quouis animalium genere debiti valores pro litteris g et n assumatur.

§. 12. Dum igitur ad hunc summum atque vltimum celeritatis gradum attendimus, quo onus a datis viribus humanis seu animalibus promoueri queat; inertia oneris

oneris Q non amplius in calculum ingreditur, sed tantum frictionis F ratio est habenda; quae igitur quo fuerit minor, eo maiori celeritate onus promouebitur: atque si penitus tolli posset, tum onus non impediret, quominus homines ea ipsa celeritate progrediantur, ac si ab onere essent soluti. Frictione autem reluctante, iste celeritatis gradus oneri induci nequit, nisi hominum numerus in infinitum augeatur. Quo autem onus data quadam celeritate protrahatur, numerum hominum m frictioni F proportionalem esse oportet; vnde patet, si frictio reddatur duplo minor, dimidio tantum hominum numero opus esse, et si frictio centuplo minor effici posset, centesimam virium partem eidem motui producendo sufficere. Quae circumstantia in vectione onerum, plaustrorum et tormentorum maxime attendi meretur.

§. 13. Quo vsus huius formulae clarius percipiatur, eam exemplis illustremus. Si igitur onus ab hominibus promoveatur, pro littera g accipiendum est pondus, quod homo pauimento firmo insistens sustinere valet; quando scilicet pondus verticaliter suspensum ope funiculi super trochleam in directionem horizontalem reducti secundum hanc directionem trahendo continet. Vis enim hominis mensurari debet pondere, quod tanta vi deorsum tendat, quantam homo secundum directionem horizontalem exerit. Difficile autem est pro g determinatum valorem assignare, cum homo modo fortius modo remissius trahat, eiusque vis plurimum a pauimento, cui insistit, pendeat; tum vero etiam actionem non fortiorem assumi conuenit, quam vt homo eam per aliquod tempus exerere valeat. His perpensis pro vi g maius pondus non videtur assumi posse quam 70 librarum circiter. Deinde si homo ab

omni

omni onere solutus currit, singulis minutis secundis fere 6 pedes conficiet. Quam ob rem in exemplis calculo subiiciendis assumere licebit $g = 70$ libr. et $n = 6$ ped. Frictionem autem oneris Q, nisi imminuatur per singularem Machinae structuram, tertiae parti totius ponderis aequalem assumamus.

§. 14. Si igitur onus Q ab vno homine horizontaliter promoueri debeat, erit $m = 1$, et $F = \frac{1}{3} Q$, vnde celeritas, qua hoc onus promouebitur, erit $= 6 \sqrt{(1 - \frac{F}{70})} = 6 \sqrt{(1 - \frac{G}{210})}$ pedum in minuto secundo. Si ergo onus G fuerit vel 210 ℔, vel maius prorsus non de loco mouebitur: sin autem sit minus, ab vno homine protrahi poterit. Celeritates autem per spatia in minuto secundo confecta expressae erunt. Vt haec tabella indicat.

Pondus oneris in libris	Celeritas in pedibus	Pondus oneris in libris	Celeritas in pedibus
0	6,00	110	4,14
10	5,86	120	3,93
20	5,76	130	3,70
30	5,55	140	3,46
40	5,40	150	3,21
50	5,24	160	2,93
60	5,07	170	2,62
70	4,90	180	2,27
80	4,72	190	1,85
90	4,54	200	1,31
100	4,34	210	0,00

§. 15. Quanquam haec tabula ad vim vnius hominis est accommodata, tamen ex ea quoque inueniri potest ceeritas oneris, si plures homines simul trahant. Cum

 enim

enim eadem prodeat celeritas, si pondus oneris ad numerum hominum eandem habeat rationem; manifestum est, onus 1000 ℔ a 10 hominibus eadem velocitate promotum iri, qua onus 100 ℔ ab vno homine: haec autem celeritas in tabula est $4\frac{1}{3}$ pedum in minuto secundo. Sic si onus 2375 ℔ a 14 hominibus protrahatur, numerum 2375 diuido per 14, et quotum $169\frac{9}{14}$, seu 170 proxime quaero in tabella; cui respondebit celeritas oneris, quae erit 2, 62 pedum singulis minutis secundis. Sin autem frictio maior minorue fuerit tertia parte oneris, tum in calculo hoc onus in eadem ratione vel augeatur vel diminuatur; sicque denuo vera eius celeritas reperietur. Ita si onus 1200 ℔, cuius frictio tantum quintae parti 240 ℔ aequetur, ab 8 hominibus protrahatur, loco 1200 assumo eius tres quantas 720, quem numerum per 8 diuido, et quotus 90 dabit celeritatem 4, 54 pedum.

§. 16. Hinc porro etiam solui potest Problema, quo quaeritur, quot hominibus opus sit ad onus data celeritate promouendum. Sit enim onus $= Q$ librarum, cuius frictio siue tertiae siue alii parti aequetur, ponatur $= F$ librarum. Celeritas vero, quae postulatur, sit k pedum in minuto secundo; ponatur numerus hominum ad hoc praestandum requisitorum $= m$, atque esse oportebit $6\sqrt{(1 - \frac{F}{70m})} = k$. Fiet ergo $36 - \frac{36F}{70m} = kk$, ideoque $m = \frac{18F}{35(36-kk)}$, seu quia in his mensurae accuratae non dantur, proxime saltem $m = \frac{\frac{1}{2}F}{36-kk}$. Quod si ergo requiratur celeritas, qua 3 pedes singulis minutis secundis absoluantur, fiet

$k = 3$,

$k = 3$, et numerus hominum erit $m = \frac{\frac{1}{2}F}{27} = \frac{F}{54}$ seu ex priori formula $m = \frac{2F}{105}$. Ita si onus 1000 ℔, cuius frictio sit 250 ℔ celeritate trium pedum in 1″ sit protrahendum, numerus hominum erit $= \frac{500}{105}$, ideoque quia fractiones reiici oportet, opus erit quinque hominibus.

§. 17. Si loco hominum equis vtendum sit ad onera protrahenda, valores litterarum n et g experientiae conuenienter definiri debebunt; quorum vterque maior erit quam pro hominibus, cum equi non solum longe maioribus viribus valeant, sed etiam celeriorem cursum habeant. Si igitur vis equi quadruplo maior statuatur, quam hominis, erit $g = 280$ ℔, et pro spatio n, quod vno minuto secundo libero cursum conficitur, fere 10 vel 12 pedes assumere licebit. Vnde si oneris frictio sit $= F$ librarum, id ab m equis tanta celeritate protrahetur, vt singulis minutis absoluatur spatium $10\sqrt{(1 - \frac{F}{280m})}$ pedum. Pro bobus autem loco equorum adhibitis, vis fortasse g erit minor, at celeritas n certe multo deficiet, cum boui vix maior celeritas quam homini tribui queat. In hoc autem negotio experientia imprimis erit consulenda, atque pro quouis virium genere litterae n et g per experimenta definiri debebunt: quod facile fiet, si formulae generales cum experimentis conferantur.

§. 18. In hoc ergo praecipuum spectatur discrimen inter vires animales et eas, quae a grauitate petuntur, quod hae continuo aequaliter vrgeant, siue ipsae sint in motu constitutae, etiam nunc quiescant; cum illae eo eo magis diminuantur, quo celerius iam ipsae mouentur, atque determinantum celeritatis gradum transgredi nequeant. Hic autem ipse modus, quo animalia vires suas exercent, potissimum est spectandus, siue agant trahendo, siue trudendo, siue nitendo, siue calcando, siue alio denique modo; vnde tam valor vis absolutae g, qua, dum in quiete persistunt, pollent, plurimum variatur quam maximus celeritatis gradus, quem, cum omnino onus auferatur, omnibus viribus adhibitis adipisci valent. Multa deinde alia dantur virium genera, veluti venti, aquae fluentis, ignis etc. quae autem sine accurata plurium Machinarum cognitione definiri nequeunt; quam ob rem donec eousque progredi liceat, haec duo tantum virium genera ab animalibus et grauitate profecta in calculum inducam.

§. 19. Praeter motum autem ipsius oneris, quo cuiusuis Machinae ope promouetur, plurimum interest nosse vires, quas durante motu singulae Machinae partes sustinent, atque in se inuicem exerunt. In proposita igitur Machina, quoniam tractio ope funis fieri solet, ponamus primo funem Ff esse breuissimum, vt eius pondus nullius sit momenti, inuestigemusque vim, qua iste funis Ff quouis motus momento extenditur. Positis ergo massa oneris, vt supra $= Q$, frictione $= F$, vi protrahente $= p$, eius inertia $= P$; atque celeritate, quam confecto spatio $= z$ iam acquisiuit, debita altitudini $= v$ sit hoc momento tensio funis $Ff = t$: quae cum vi sollicitanti p sit contraria, si sola inertia huius vis spectetur, ea perinde mouebitur, ac si protraheretur vi $= p$, retro autem vrgeretur vi $= t$, vnde fiet $dv = \frac{(p-t)dz}{P}$.

Onus

Onus autem, in quod immediate sola vis t agit, dabit hanc aequationem $dv = \frac{(t-F)dz}{Q}$: supra autem inuenimus $dv = \frac{(p-F)dz}{P+Q}$.

§. 20. Ex his ergo aequationibus elicitur tensio funis $t = F + \frac{Q(p-F)}{P+Q} = \frac{pQ+FP}{P+Q}$: nisi ergo funis hanc tensionem sustinere possit, quin rumpatur, motus produci non poterit. Apparet autem, si vis p sit vniformis seu a pondere petita, funem perpetuo eandem tensionem sustinere. Sin autem vis p sit animalis, quae crescente motu imminuatur: quo casu motus mox ad vniformitatem reducetur, fietque $p = F$. Hoc ergo casu tensio funis $t = \frac{FQ+FP}{P+Q} = F$ ipsi frictioni aequalis erit: initio autem motus, quo vis p frictionem superare debuit, tensio funis quoque maior fuerit necesse est: vnde intelligi potest, quanta vi funem praeditum esse oporteat, vt ne rumpatur; maximumque rumpendi periculum in ipsum motus initium incidere.

§. 21. Tensio igitur funis antequam motus ad vniformitatem reducitur, perinde ac velocitas oneris pendet quoque ab inertia vis vrgentis, quam vocauimus $= P$: quae si esset nulla tensio foret perpetuo ipsi vi sollicitanti p aequalis. Sin autem inertia haec P, qua si esset infinita; prodiret $t = F$, sicque tensio ipsi frictioni constanter esset aequalis. Cum igitur sub initium vis sollicitans p maior esse debeat frictione F, priori casu $P = o$, tensio continuo decrescet, quoad motus fiat vniformis: ipso autem motus initio erat $= p$. Quare si inertia vis sollicitantis neque nulla fuerit neque infinita, tensio quidem ab initio minor erit quam p, maior tamen quam frictio F; quippe cui tum demum aequalis fiet, cum motus euaserit vniformis. Ceterum in viribus animalium inertia proxime erit ponderi animalis aequalis, si quidem eorum tota corpora ad parem motum incitari debent. Parum autem interest nosse, quanta haec inertia exacte sit aestimanda, cum in motu vniformi, ad quem potissimum respirespicitur, eius cognitione non sit opus.

§. 22. Si funis Fp, cuius ope onus Q a vi p protrahitur, fuerit tam longus, vt eius inertiae quoque habenda sit ratio, tensio in singulis eius punctis non erit aequalis. Maximam quidem inaequalitatem producet incuruatio funis a grauitate oriunda, sed quia haec in Staticis definiri solet, hic tantum ad inaequalitatem ab actione ortam attendam. Inuestigabo ergo tensionem in quacunque funis particula mn, quam ponam $= t$, sit massa portionis anterioris $np = M$, et massa posterioris $mF = N$; quarum illa ad potentiae inertiam, haec vero ad onus Q referri debebit. Cum igitur massa $P + M$ protrahatur a vi $p - t$, erit $dv = \frac{(p-t)dz}{P+M}$: massa autem $Q + N$ a vi $t - F$, erit $dv = \frac{(t-F)dz}{Q+N}$, et coniunctim $dv = \frac{(p-F)dz}{P+Q+M+N}$ existente $M + N$ pondere totius funis, quod sit $= L$. Hinc ergo erit $t = F + \frac{(Q+N)(p-F)}{P+Q+L} = \frac{(Q+N)p+(P+M)F}{P+Q+L}$. Atque si motus fiat vniformis, seu $p = F$, tensio denuo fiet $t = F$, vnde hoc casu vbique erit eadem, sin autem $p > F$, tensio funis à p ad F recedendo continuo decrescet.

Fig. 3. §. 23. His de motu oneris horizontali expeditis ponamus onus Q verticaliter sursum eleuari debere, ope funis EM, qui trochleae T sit circumplicatus, vt vis solli-

licitans secundum directionem horizontalem N P trahens concipi queat, si quidem fuerit vis animalis: sin autem grauitate ponderis, vti velimus, in P denuo trochleam statui conueniet, cui funis quoque circumductus deorsum trahatur. Hic autem nullam motus perturbationem ab his trochleis oriundam in calculum introducamus: sed trochleas tanquam immobiles consideremus, super quibus funis liberrime sine frictione hinc inde protrahi queat. Re vera autem motus oneris non mediocriter tam a productione motus in ipsis trochleis, quam a frictione perturbari debet: quem effectum singulari capite inuestigare constitui. Hic itaque cum onus nulli corpori incumbat, nulla quoque aderit frictio. Sit igitur massa oneris $= Q$, vis motui renitens seu eius pondus $= q$, vt sit $Q = q$; tum vero vis in P vrgens $= p$, eiusque inertia $= P$. Confecerit iam tam onus quam potentia spatium $= z$, et sit vtriusque celeritas debita altitudini $= v$, erit $(P + Q)\,dv = (p - q)\,dz$, si quidem ponderis funis eiusque inertiae nulla ratio habeatur.

§. 24. Si igitur vis sollicitans p fuerit constans, vti euenit, si onus Q ab alio pondere grauiore descendente eleuetur, erit vtique $v = \frac{(p-q)z}{P+Q}$. Necesse ergo est, vt sit $p > q$, seu vis eleuans maior pondere oneris: si enim esset $p = q$, onus in aequilibrio sustineretur, sin autem esset $p < q$ onus delaberetur, vimque trahentem p secum abriperet. Verum si $p > q$ onus eleuabitur motu vniformiter accelerato, eiusque celeritas continuo augebitur, nisi quatenus resistentia aeris obsistit. In quo vis ergo spatii, per quod onus eleuatur, puncto eius celeritas assignari potest; vnde si tempus dicatur $= t$, erit $dt = \frac{dz}{\sqrt{v}}$

=

$= \frac{dz}{\sqrt{z}} \sqrt{\frac{P+Q}{p-q}}$, hincque ipſum tempus $t = 2\sqrt{\frac{P+Q}{p-q}z}$: ſeu ſi ſpatium z in ſcrupulis pedis Rhenani exprimatur, tempus t in numero minutorum ſecundorum reperietur $= \frac{1}{125}\sqrt{\frac{P+Q}{p-q}}z$. Vnde viciſſim ſi tempus t in minutis ſecundis exprimatur, erit ſpatium interea abſolutum $= 15625\, tt. \frac{p-q}{P+Q}$ ſcrup. ped. Rhenani.

§. 25. Si vis ſollicitans p ſit humana ſeu animalis, quae in motus initio ſit $= g$, cum autem celeritate altitudini b debita iam progrediatur, penitus euaneſcat, vt ſit, quem ad modum ſupra aſſumſimus, $p = g - \frac{gv}{b}$: habebimus hanc aequationem differentialem $(P+Q)\,dv = (g - q - \frac{gv}{b})\,dz$, ſeu $\frac{g\,dv}{gb - bq - gv} = \frac{g\,dz}{b(P+Q)}$, cuius integrale eſt $\frac{gz}{b(P+Q)} = l\frac{b(g-q)}{gb - bq - gv}$; ſi quidem celeritas oneris in motus initio euaneſcens aſſumatur. Hoc ergo caſu celeritas oneris mox ad vniformitatem reducetur, atque acceleratio ceſſabit, quando fiet $v = \frac{b(g-q)}{g}$. Neceſſe ergo eſt, vt vis abſoluta g ſuperet reniſum oneris q, tum vero haec celeritas conſtans $\sqrt{v}$ more ſolito exhiberi poterit, ita vt ſpatium, quod ſingulis minutis ſecundis abſoluitur, in pedibus exprimatur. Ad huncque vſum tabulae ante traditae accommodari poterunt, cum enim ſupra ob frictionem tantum tertia pars oneris Q reniti ſit aſſumta, hic totum onus reluctari eſt ponendum; ideoque ſi magnitudo oneris in ſuperioribus tabulis exhibita triplo minor aſſumatur, eae tabulae ad vſum praeſentem transferentur. Sic patebit onus 240 tt ab octo hominibus ſingulis minutis ſecundis per altitudinem 4, 54 pedum eleuari, poſtquam quidem motus iam ad vniformitatem fuerit compoſitus.

§. 26.

§. 26. Si onus *a b c d* super plano inclinato A C sursum trahi debeat, ope vis, cuius directio E M sit ipsi plano A C parallela; seu si oneri applicatus sit in E funis, qui trochleae in T fixae circumductus a data vi secundum directionem N P protrahatur, ita vt portio funis E M ipsi plano A C maneat parallelus. Ponamus angulum C A B, quem planum inclinatum A C cum horizonte A B facit $= \Phi$, pondus oneris eiusue massam $= Q$, atque onus vrgebitur deorsum secundum directionem verticalem Q V per eius centrum grauitatis Q transeuntem vi $= Q$, quae resoluatur secundum directiones Q R et Q S, quarum illa sit ad planum inclinatum normalis, haec vero eidem parallela. Posito ergo sinu toto $= 1$, erit ob angulum $V Q R = B A C = \Phi$, vis $Q R = Q \cos. \Phi$, et vis $Q S = Q \sin. \Phi$: quae posterior tota motui reluctatur. Prior vero vis $Q \cos. \Phi$ apprimit onus ad planum inclinatum, vnde nascitur frictio F, dum onus mouetur; quae si trienti vis apprimentis sit aequalis, erit $F = \frac{1}{3} Q \cos. \Phi$. Generatim autem ponamus frictionem $F = \frac{1}{\nu} Q \cos. \Phi$, ita vt dum onus promouetur, tota vis motui renitens sit $= Q \sin. \Phi + \frac{1}{\nu} Q \cos. \Phi$. Fig. 4.

§. 27. Si igitur planum A C esset horizontale, seu $\Phi = 0$, tota vis oneris motui renitens foret $= \frac{1}{\nu} Q$, seu sola frictione constaret: sin autem planum A C verticaliter erigatur, vt angulus Φ fiat rectus, frictio euanescet, et onus solo suo pondere motui renitetur. In reliquis autem plani A C inclinationibus tam ob pondus quam ob frictionem onus motui reluctabitur, et dabitur quidem eiusmodi plani inclinatio, ex qua oritur maxima reluctatio, ita vt onus super eo difficilius eleuetur, quam si verticaliter eleuari deberet Quae inclinatio inuenietur, si differentiale formulae Q fin. $\Phi + \frac{1}{v}$ cof. Φ ponatur $= 0$, vnde fit tang. $\Phi = v$: vnde fi $v = 3$, angulus BAC fiet circiter $= 71^\circ, 34'$, et fuper huiusmodi plano AC onus omnium difficillime eleuabitur. Vis enim renitens ob tang. $\Phi = 3$, hincque fin. $\Phi = \frac{3}{\sqrt{10}}$ et cof. $\Phi = \frac{1}{\sqrt{10}}$, erit $= \frac{4}{\sqrt{10}} Q$, cum in fitu plani verticali fit tantum $= Q$. Dabitur ergo quoque eiusmodi plani inclinatio, in qua onus motui aeque renitetur, ac fi verticaliter effet eleuandum; quod euenit, fi Q fin. $\Phi + \frac{1}{v} Q$ cof. $\Phi = Q$, hoc eft, fi fin. $\Phi = 1 - \frac{1}{v}$ cof. Φ, vnde fit cof. $\Phi = \frac{2v}{1+vv}$ et fin. $\Phi = \frac{vv-1}{vv+1}$. Si $v = 3$, erit ifte angulus $= 53^\circ, 8'$.

§. 28. Quodfi iam vis ponatur $= p$ eiusque inertia $= P$; celeritas oneri iam debita fit altitudini v, atque dum promotio fit per fpatiolum $P p = dz$, erit per regulas motus $dv = (p - Q \text{ fin. } \Phi - \frac{1}{v} Q \text{ cof } \Phi)\, dz : (P + Q)$, vnde patet, motum denuo fore vniformiter acceleratum, fi quidem vis follicitans fuerit eiusmodi, vt aequaliter vrgere pergat, fiue tarduis moueatur fiue celerius. Perfpicuum eft igitur, quo oneri motus imprimatur, neceffario vim follicitantem p fuperare debere vim renitentem Q fin. $\Phi + \frac{1}{v} Q$ cof. Φ. Sin autem in crefcente motu ipfa vis trahens remittatur, vt fit in viribus hominum et animalium; vtendum erit pro p valore fupra affignato $g - \frac{gv}{b}$; fietque $dv = (g - \frac{gv}{b} - Q \text{ fin } \Phi - \frac{1}{v} Q \text{ cof. } \Phi)$ $dz : (P + Q)$. Hoc ergo cafu motus ad aequabilitatem conuerget, cuius celeritas definietur hac aequatione $v = b - \frac{bQ}{g}(\text{fin. } \Phi + \frac{1}{v} \text{cof. } \Phi)$. Ceterum hic tam inertiam funis, quam effectum ex trochlea oriundum neglex imus, quippe qui peculiarem inueftigationem requirit.

§. 29.

§. 29. Consideremus descensum oneris super plano inclinato tam spontaneum, quam a vi secundum directionem Q P ipsi plano C A parallelam vrgente productum. Transeat autem huius vis directio Q P per ipsum oneris centrum grauitatis Q, et basis oneris *a b*, qua plano incumbit, tam sit larga, vt onus voluendo prolabi nequeat. Sit igitur angulus $A = \Phi$, quem planum C A cum horizonte B A constituit, et vocetur massa oneris, eiusue pondus $= Q$; cuiusuis directio Q V cum sit verticalis, resoluatur secundum directiones Q P, ipsi plano C A parallelam, et Q R ad planum perpendicularem, atque ob angulum $V Q R = A = \Phi$, erit vis $Q P = Q \sin. \Phi$ et vis $Q R = Q \cos. \Phi$. Illa ergo vis $Q P = Q \sin. \Phi$ motui non solum non reluctatur, sed etiam ipsam vim protrahentem, si quae adest, adiuuabit, ad motum accelerandum. Altera vero vis $Q R = Q \cos. \Phi$ oneri ad planum apprimendo impenditur, ab eaque frictio originem habebit. Scilicet si frictio aequetur trienti vis apprimentis, erit hic frictio $= \frac{1}{3} Q \cos. \Phi$. Quo autem inuestigatio latius pateat, ponamus, frictionem esse $= \frac{1}{\nu} Q \cos. \Phi$: quae hoc casu sola motui renitetur. Fig. 5.

§. 30. Sit iam *p* vis sollicitans, qua onus praeter vim propriam $Q P = Q \sin. \Phi$ secundum directionem Q P protrahatur: haecque vis coniuncta sit cum inertia $= P$. Tota ergo vis onus promouens erit $= p + Q \sin. \Phi$: et quia sola frictio motui reluctatur, onus accelerabitur ab excessu istius vis supra frictionem $p + Q \sin. \Phi - \frac{1}{\nu} Q \cos. \Phi$. Quo igitur motus oriatur, necesse est, vt sit $p + Q \sin. \Phi > \frac{1}{\nu} Q \cos. \Phi$, quamdiu enim fuerit $p + Q \sin. \Phi < \frac{1}{\nu} Q \cos. \Phi$, onus in quiete perseuerabit. Quodsi ergo onus a

 nulla

nulla vi externa p sollicitetur, sed solo suo pondere ad motum nitatur, nullus motus subsequetur, quamdiu fuerit Q fin. $\Phi < \frac{1}{\nu} Q$ cos. Φ seu tang. $\Phi < \frac{1}{\nu}$; statim vero atque angulus Φ tantum augeatur, vt fiat tang. $\Phi > \frac{1}{\nu}$ onus descendet. Ex quo tutissimus ac facillimus modus obtinetur quantitatem frictionis explorandi. Onere enim quocunque huiusmodi plano imposito, eius inclinatio seu angulus $A = \Phi$ pedetentim augeatur, donec onus super eo descendere incipiat, sicque innotescet anguli Φ magnitudo, cuius tangens sit $= \frac{1}{\nu}$; hincque porro valor fractionis $\frac{1}{\nu}$, per quam frictio determinatur. Ita si iste eleuationis angulus A deprehendatur $= 18°$, erit $\frac{1}{\nu} = 0,3249$ seu proxime $\frac{1}{\nu} = \frac{13}{40}$. Hoc ergo modo pro omnis generis corporibus quantitas frictionis explorari poterit. Atque si frictio aequetur tertiae parti vis apprimentis, onus super plano inclinato quiescere perget, quoad angulus inclinationis B A C non excedat $18°, 26'$.

§. 31. Vt autem ipsum motum oneris definiamus, qui oritur, quando $p + Q$ fin. $\Phi > \frac{1}{\nu} Q$ cos. Φ, ponamus onus iam confecisse spatium $= z$, eiusque celeritatem nunc esse debitam altitudini $= v$. Quoniam vis accelerans est $= p + Q$ fin. $\Phi - \frac{1}{\nu} Q$ cos. Φ, et massa mouenda $= P + Q$, erit $(P + Q)\, dv = (p + Q \text{ fin. } \Phi - \frac{1}{\nu} Q \text{ cos. } \Phi)\, dz$: atque si vis p in motu non diminuatur, sed perpetuo constans maneat, erit quoque $(P+Q)v = (p + Q\text{fin.}\Phi - \frac{1}{\nu}Q\text{cos.}\Phi)z$, quae aequatio indicat, motum fore vniformiter acceleratum. Sin autem vis p in motu remittatur, seu ad genus virium animalium pertineat, vt sit $p = g - \frac{gv}{b}$, erit $(P + Q)\, dv = (g - \frac{gv}{b} + Q \text{ fin. } \Phi - \frac{1}{\nu} Q \text{ cos. } \Phi)\, dz$. Hoc ergo casu motus ad vniformitatem conuerget, cuius celeri-

celeritas debita ſit altitudini $v = b + \frac{hQ}{g}(\text{ſin. } \Phi - \frac{1}{\nu} \text{coſ. } \Phi)$, ſi quidem fuerit ſin. $\Phi < \frac{1}{\nu}$ coſ. Φ ſeu tang. $\Phi < \frac{1}{\nu}$. Si enim angulus Φ maior fuerit, vt frictio a ſola grauitate oneris ſuperetur, tum etiamſi nulla vis p adeſſet, motus oneris in infinitum accelераretur. Atque hoc caſu vis p tamdiu tantum aget, quoad fiat $v = b$; ac deinceps onus a ſola grauitate accelerabitur, niſi forte vis p motui celeriori, a quo ipſa abripiatur, reluctetur; hocque caſu fiat negatiua. Quod ſi eueniat, visque p negatiuum valorem induat, quando $v > b$; tum acceleratio oneris a propria grauitate orta coercebitur, atque motus ad vniformitatem reducetur celeritate debita altitudini $v = b + \frac{hQ}{g}$ (ſin. $\Phi - \frac{1}{\nu}$ coſ. Φ). Hoc ergo caſu prorſus contrarium accidit, atque in praecedente: dum hic vis, quae corpus initio accelerabat, deinceps in vim retardantem abit, atque effectum grauitatis reprimere debet.

DE MOTV TAVTOCHRONO PENDVLORVM COMPOSITORVM.

AVCTORE
L. EULERO.

§. 1.

Etsi Theoria motus pendulorum, quae a Viro summo *Hugenio* primum felicissime est exposita, Mechanicam amplissimis atque vtilissimis inuentis locupletauit, tamen iam satis constat, modum, quo motum pendulorum in horologiis ope cycloidis ad vniformitatem reuocare est conatus, in praxi ad scopum non prorsus esse accommodatum. Quod quidem nullo Theoriae vitio vsu venit, quae firmissimis nititur fundamentis, neque ipsi Geometriae ratione certitudinis quicquam cedit: sed cum pendula, quae ad motum horologiorum moderandum, adhiberi solent, multum discrepent ab iis, quorum motus ope cycloidis in Theoria ad aequabilitatem reduci docetur; mirum non est, Theoriam praxi non perfecte respondere, atque in pendulis horologiorum inaequalitatem quamdam relinqui, etiamsi in Theoria perfectus Tautochronismus habeatur.

§. 2. Demonstrauit autem *Huienius*, si corpus pendulum ita suspendatur, vt eius motus peragatur in cycloide vulgari basin horizontalem habente, tum omnes eius oscillationes, siue fuerint ampliores siue contractiores, aequalibus temporibus absolui. Verum tamen conditiones, sub

ſub quibus iſte tautochronismus locum habet, probe ſunt notandae, ne huic propoſitioni in ſe veriſſimae plus tribuatur, quam demonſtrationis vis euincit. Primum igitur neceſſe eſt, vt motus fiat in medio non reſiſtente, ſeu in ſpatio ab omni materia vacuo: deinde non minus requiritur, vt pendulum ſit ſimplex, ſeu vt tota penduli maſſa in vno quaſi puncto collecta exiſtat: cuiusmodi pendulum ſatis exacte exhibetur, ſi globulus minimus ſimulque grauiſſimus ope fili tenuiſſimi et leuiſſimi, cuius pondus prae grauitate globuli euaneſcat, ſuſpendatur.

§. 3. Niſi igitur tam medii reſiſtentia, in quo motus peragitur, fuerit nulla, quam maſſa ipſius penduli quaſi infinite parua, vti in Theoria aſſumitur, oſcillationes etiamſi in cycloide abſoluantur, tamen non erunt iſochronae. Quare cum in vſu horologiorum neque aeris reſiſtentia tolli queat, neque eiusmodi pendula adhiberi poſſint, quae pro ſimplicibus haberi liceat, ob hanc duplicem cauſam ſatis perſpicuum eſt, hoc caſu eam cycloidis proprietatem, quae tantum pro pendulis ſimplicibus in ſpatio vacuo eſt demonſtrata, locum non amplius inuenire: neque ideo huiusmodi pendulorum oſcillationes fore iſochronas. Hunc etiam defectum ipſa experientia non obſcure indicaſſe videtur, cum artifices vſum cycloidis ad motus horologiorum moderandos nunc fere penitus repudiauerint.

§. 4. Quod quidem ad difficultatem a medii reſiſtentia oriundam attinet, quoniam ea ob aeris raritatem valde eſt parua, ea ſine notabili errore negligi poſſet. Interim tamen Geometrae in ea ſuperanda multo magis elaborauerunt, quam in altera, quae tamen vti mox ſum

sum ostensurus, motui multo maiorem inaequalitatem inducit. *Neutonus* enim demonstrauit, si medii, in quo pendulum simplex agitatur, resistentia ipsis celeritatibus sit proportionalis, cycloidem non secus atque in spatio vacuo esse satisfacturam. Cum autem resistentia aeris non celeritatum rationem simplicem, sed duplicatam sequatur, hic cycloidis vsus cessat, eiusque loco ad tautochronismum obtinendum alium curuam substitui oportet, quam ego primus elicui atque in *Comment. Acad. Petrop. Tom.* exposui. Requirit ea autem, perinde ac cyclois *Hugeniana* pendulum simplex, neque pro pendulis compositis vllum vsum praestat.

§. 5. Si igitur motui pendulorum, quibus horologia instrui solent, isochronismum inducere velimus, potissimum ad pendula composita erit respiciendum, quorum massa non in vno quodam puncto collecta, sed per totum penduli volumen, vti re vera est, dispersa concipiatur. Vnde sequens nascitur quaestio, *vt proposito pendulo quocunque composito, ea linea curua determinetur, in qua, si hoc pendulum moueatur, omnes eius oscillationes futurae sint aequidiurnae, seu aequalibus temporibus absoluantur.* Atque in hac inuestigatione mentem facile ab aeris resistentia abstrahere poterimus, tum quod calculus fieret maxime intricatus et insuperabilis, tum vero imprimis quod resistentia tam sit exigua, vt sine sensibili errore negligi queat. A solutione autem huius Problematis tota horologiorum perfectio, quae quidem ex hoc genere expectari potest, pendet.

§. 6. Motum quidem penduli cuiusuis compositi *Hugenius* ad motum penduli simplicis reducere docuit, dum

dum demonſtrauit omne pendulum compoſitum perinde oſcillari, ac ſi tota eius maſſa in certo quodam puncto, quod centrum oſcillationis vocat, eſſet collecta. Hinc pendulum compoſitum pari modo oſcillationes ſuas abſoluet, quo pendulum ſimplex, cuius longitudo aequetur diſtantiae centri oſcillationis ab axe: ſic igitur determinatio motus cuiusque penduli compoſiti ad inuentionem centri oſcillationis perducitur, pro quo negotio *Hugenius* elegantem tradidit regulam, variis paſſim modis demonſtratam. Primum autem animaduertendum eſt, hanc regulam tantum ad corpora rigida et inflexibilia patere, cuiusmodi quidem corpora vulgo ad pendula adhiberi ſolent. Deinde autem porro haec centri oſcillationis inuentio tantum ad motum pendulorum circularem extenditur, quo pendulum circa axem fixum libere gyratur, eiusque ſingula puncta circulos deſcribunt.

§. 7. Cum autem motus penduli circularis ad tautochronismum producendum ſit ineptus, dum ampliores oſcillationes tardius abſoluuntur, quam minores; hic nobis motus penduli in alia quacunque linea curua erit euoluendus. Poteſt vero pendulum ad curuam quamcunque deſcribendam accommodari, ſi loco axis fixi, circa quem vulgo pendulum oſcillatur, linea curua, quae illius curuae deſcribendae ſit euoluta; ſubſtituatur; ſimili modo, quo *Hugenius* docuit, pendulum intra duas cycloides ſuſpendere, vt ab eo cyclois deſcriberetur. In hunc finem ſuperiorem penduli portionem flexibilem eſſe oportet, qua iſti curuae applicatur, vt reliqua portio perpetuo ſecundum tangentem huius curuae extendatur, ſicque nouam

 curuam

curuam ex eius euolutione natam describat. Quo motu in genere expedito, eam curuam inuestigari oportebit, ad quam pendulum instructum omnes oscillationes aequalibus temporibus absoluat.

Fig. 6. §. 8. Si igitur pendulum quodcunque in puncto A sit suspensum, sit curua A M B eius directrix, quam superiori parte flexibili A M ita contactu complectatur, vt pars inferior M G, dum mouetur, ab vltimo contactus puncto M continuo in directum porrigatur. Primum ergo manifestum est, hanc tangentem M G per corporis centrum grauitatis G esse transituram, eo quod media vis centrifugae directio, qua pendulum praeter grauitatem sollicitatur, per punctum hoc G transit. Deinde cum corpus hoc mouetur, punctum G describet curuam G C, cuius euoluta erit ipsa directrix A M B, ita vt ipsius radius curuedinis in puncto G sit recta G M. Sit recta A C, quae curuam in supremo puncto A tangit, verticalis, ad cuius alteram partem similis existat curua directrix A M B, in figura non expressa, hocque pendulum ista oscillabitur, vt eius punctum G in curua G C ad alteram partem producta motu reciproco alternatim descendat et ascendat, sicque oscillationes perficiat.

§. 9. Consideremus primum huius corporis situm medium, quo eius centrum grauitatis in rectae verticalis A C puncto C versatur, et in quo situ pendulum, nisi iam motum habeat perpetuo sit quieturum. In hoc situ sit punctum D centrum oscillationis totius penduli, cuius distantia a puncto A prodit, si singulae corporis particulae per quadrata distantiarum ab axe A multiplicentur, horumque quae productorum omnium summa per factum ex massa corporis in distantiam centri grauitatis ab axe A C diuidatur. Vel si per corporis centrum grauitatis C transfixus concipiatur axis horizontalis ipsi axi A, qui ad planum verticale C A G normalis intelligatur, parallelus, singulaeque corporis particulae in quadrata distantiarum suarum ab hoc axe ducantur, atque horum productorum summa vocetur $= M k k$, denotante M massam seu pondus totius penduli, quam expressionem momentum inertiae corporis respectu istius axis per C ducti appello, erit rectangulum C D, A C $= k k$ seu C D $= \frac{kk}{AC}$. sicque ex quantitate cognita $k k$ centrum oscillationis D determinatur.

§. 10. Cum iam pendulum in alium quemcunque situm AMG peruenerit, vbi curuam directricem AMB in puncto M tangat: hic non amplius circa axem A, sed circa punctum M primo quidem instanti motu angulari feretur. Hinc interuallum inter centrum grauitatis G et centrum oscillationis H non amplius aequale erit interuallo C D in situ naturali, sed ob diminutam penduli longitudinem M G, seu axem motus nunc in M promotum, interuallum G H maius erit quam C D; cum enim esset C D $= \frac{kk}{AC}$, ob eandem rationem nunc erit G H $= \frac{kk}{MG}$, seu G H : C D $=$ A C : M G. Quare cum pendulum compositum continuo perinde moueatur, ac si vniuersa eiusmodi in centro oscillationis esset collecta, perspicuum est, ob variabilitatem huius centri H nullum pendulum simplex exhiberi posse, cuius motus cum motu pen-

 duli

dali compositi conueniat, nisi curua directrix A M B prorsus tollatur.

§. 11. Huc accedit, vt dum penduli portio A M curuae directrici A M B applicatur, ea tantisper motus non fiat particeps. Quam ob rem cum quouis momento ea tantum massa, quae cum pendulo mouetur, spectari debeat, ipsa quoque massa eiusque adeo centrum grauitatis erit variabile, hincque porro eiusdem momentum inertiae respectu axis per centrum grauitatis ducti, quod ante vocauimus $= M k k$ continuo immutabitur, ex quo longe alia centri oscillationis ratio mutabilitatis existet. Vt igitur hanc posteriorem difficultatem remoueamus, superiorem penduli partem flexibilem, qua eius massa, modo aucta, modo minuta, censeri debet, leuissimam, inferiorem vero partem E F, quae penduli molem proprie constituit, grauissimam assumamus, vt augmenta illa et decrementa ex portione leuissima orta sine errore pro nihilo reputari queant, simili modo quo resistentiae aeris effectum negligimus.

§. 12. Reiecta igitur massa portionis flexibilis A M tanquam minima, quippe quae re vera, nisi oscillationes admodum amplae efficiantur, valde parua existit, sit reliqua penduli massa $= M$, eius centrum grauitatis G, eiusque momentum inertiae respectu axis horizontalis per G ducti $= M k k$, quae quantitas ex motu oscillatorio libero definiri potest, dum pendulum remota curua directrice A M B ad oscillationes minimas incitatur. Si enim hoc casu centrum oscillationis reperiatur in D, vt sit A D longitudo penduli simplicis isochroni, erit $k k = A C . C D$. existente C corporis centro grauitatis.

Vt

Vt igitur praesens penduli situs, quo eius centrum gravitatis in G versatur, symbolis exprimatur, ponatur curvae directricis portio A M $= s$ et tota penduli longitudo A M G $= a$, quae est constans et ipsi A C aequalis, erit distantia M G $= a - s$, quae simul est radius osculi curuae C G in puncto G. Deinde per M ducatur recta verticalis M S, ac vocetur angulus declinationis penduli S M G $= \Phi$.

§. 13. Ponamus pendulum ex situ A C motum ita inchoasse, vt ibi celeritas centri grauitatis C debita fuerit altitudini b, seu ipsa celeritas $= \sqrt{b}$; hinc autem elapso tempore $= t$ peruenisse in situm A M G, vbi centri grauitatis G celeritas sit $= \sqrt{v}$. Iam tempusculo infinite paruo $= dt$ vlterius progrediatur in g, ita vt nunc curua directrix A M B tangatur in puncto m, existente eius elemento M $m = ds$; erit angulus infinite paruus G M $g = d\Phi$, et spatiolum percursum G$g = (a-s)\,d\Phi$, quod per tempusculum dt diuisum dabit celeritatem centri grauitatis, ita vt sit $\sqrt{v} = \frac{(a-s)d\Phi}{dt}$ et $v = \frac{(a-s)^2 d\Phi^2}{dt^2}$. Cum autem inclinatio penduli ad rectam verticalem M S tempusculo hoc dt crescat angulo $= d\Phi$, motus corporis in G erit duplex, alter progressiuus secundum directionem G g celeritate $= \sqrt{v} = \frac{(a-s)d\Phi}{dt}$, alter gyratorius circa axem per G transeuntem, cuius celeritas angularis $= \frac{d\Phi}{dt}$. Hoc enim duplici motu coniuncto verus penduli motus existet; quippe qui semper considerari potest tanquam compositus ex motu progressiuo centri grauitatis, et ex gyratorio circa axem per centrum grauitatis transeuntem.

 §. 14.

§. 14. Antequam in effectum grauitatis, quo iste duplex motus afficitur, inquiramus, inuestigemus perturbationem motus a vi quacunque sollicitante oriundam. Sollicitetur ergo pendulum in puncto quopiam Z a vi ZX = P, cuius directio ZX et ad rectam MZ normalis, quia vires obliquae eatenus tantum motum penduli afficiunt, quatenus per resolutionem praebent vim ad directionem MZ normalem. Sit interuallum GZ = b ac primo quidem motus progressiuus perinde afficietur, ac si haec vis ZX = P in ipso centro grauitatis esset applicata; quae ergo motum retardabit. Hinc cum massa corporis sit = M, per leges sollicitationis est:

$$\frac{2d.(a-s)d\Phi}{dt^2} = -\frac{P}{M} \text{ posito } dt \text{ constante.}$$

Deinde cum huius vis P momentum sit respectu motus gyratorii = Pb, et momentum inertiae corporis = Mkk erit retardatio motus gyratorii:

$$\frac{2dd\Phi}{dt^2} = \frac{-Pb}{Mkk}.$$

§. 15. Hoc modo vterque corporis motus afficeretur, si corpus esset liberum, et ad omnes motus recipiendos aeque comparatum. Cum autem ob suspensionis rationem motus gyratorius perpetuo datam teneat rationem ad motum progressiuum, hinc punctum Z definitur, in quo vim P applicari oporteat, vt vtrique motui conueniens immutatio simul inducatur. Positionem vero huius puncti Z binae ante inuentae formulae sponte indicant: cum enim ex iis haec nascatur analogia:

$$dd\Phi : d.(a-s)d\Phi = b : kk$$

$$\text{erit } b = \frac{kk\,dd\Phi}{d.(a-s)d\Phi} = \frac{kk\,dd\Phi}{(a-s)dd\Phi - ds\,d\Phi}$$

Vnde

Vnde patet punctum hoc Z non incidere in centrum oscillationis H, quod puncto suspensionis M conueniat. Est enim $GH = \frac{kk}{a-s}$; cui quidem aequale foret interuallum $b = GZ$, si foret $ds = 0$, hoc est si punctum suspensionis M non esset variabile. Ob eius igitur variabilitatem internallum GZ maius erit quam GH.

§. 16. Inuento hoc puncto Z, in quo vis applicata motum ad suspensionis penduli rationem accommodatum gignit, vim istam P ita definiamus, vt sollicitationi grauitatis aequi polleat; vt motum penduli a grauitate oriundum obtineamus. Vis grauitatis autem aequalis est ponderi penduli $= M$, eiusque directio per ipsum centrum grauitatis G deorsum tendit. Repraesentet ergo recta verticalis GV hanc vim, quae sit $= M$; atque nihil aliud superit, nisi vt vis illius P momentum respectu puncti suspensionis M aequale reddatur momento vis grauitatis. Ob angulum itaque $VGF = \Phi$ erit $M.MG.\sin.\Phi = P.MZ$ seu $P = \frac{M(a-s)\sin.\Phi}{a-s+b}$; cum autem sit $b = \frac{kkdsd\Phi}{(a-s)dd\Phi - dsd\Phi}$ erit

$$a-s+b = \frac{(a-s)^2 dd\Phi - (a-s)dsd\Phi + kkdsd\Phi}{(a-s)dd\Phi - dsd\Phi}$$

ideoque $P = \frac{M((a-s)^2 dd\Phi - (a-s)dsd\Phi)\sin.\Phi}{(c-s)^2 dd\Phi - (a-s)dsd\Phi + kkdsd\Phi}$;

et $Pb = \frac{Mkk(c-s)dsd\Phi \sin.\Phi}{(a-s)^2 dd\Phi - (a-s)dsd\Phi + kkdsd\Phi}$.

§. 17. Quoniam igitur pro motu penduli supra altera aequatio inuenta est: $\frac{2dd\Phi}{dt^2} = \frac{-Pb}{Mkk}$, si loco Pb valorem modo repertum substituamus, proueniet haec aequatio:

$2dd\Phi$

$$\frac{a\,dd\Phi}{dt^2} = \frac{-(a-s)dd\Phi \sin.\Phi}{(a-s)^2 dd\Phi - (a-s)ds d\Phi + kkdd\Phi}$$

quae transformabitur in hanc:

$$2(a-s)^2 dd\Phi - 2(a-s)dsd\Phi + 2kkdd\Phi = -(a-s)dt^2 \sin.\Phi$$

qua motus penduli a grauitate perturbatus, ideoque ipse motus oscillatorius determinabitur. Quia vero in hac aequatione differentiale dt ponitur constans, ea per $d\Phi$ multiplicetur, atque integretur, sic prodibit:

$$(a-s)^2 d\Phi^2 + kkd\Phi^2 = (dt^2 - dt^2 \int(a-s)d\Phi \sin.\Phi$$

vbi quia curua directrix A M B tanquam data assumitur integrale $\int(a-s)d\Phi \sin.\Phi$ ob relationem inter s et Φ datam exhiberi poterit: ita autem id accepi, ponamus, vt euanescat posito $s=0$, quo casu etiam sit $\Phi=0$; eritque

$$dt = \frac{d\Phi\sqrt{(kk+(a-s)^2)}}{\sqrt{(C-\int(a-s)d\Phi \sin.\Phi)}}.$$

§. 18. Cum sit altitudo celeritati debita $v = \frac{(a-s)^2 d\Phi^2}{dt^2}$ erit nunc $v = \frac{(a-s)^2(c-\int(a-s)d\Phi \sin.\Phi)}{kk+(a-s)^2}$; quae expressio ad statum initialem in situ penduli verticali A C D transferatur, vbi sit $s=0$; et $\int(a-s)d\Phi \sin.\Phi = 0$. Quare cum hoc statu sit $v=b$, erit $b=\frac{aac}{kk+aa}$, vnde loco constantis c celeritas initialis $\sqrt{b}$ in calculum introduci potest. Sit D centrum oscillationis penduli in situ verticali, erit ob $AC=a$, $CD=\frac{kk}{a}$ ideoque $AD=\frac{aa+kk}{a}$, quo valore substituto habebitur $b=\frac{AC.c}{AD}$. Quod si porro curuae descriptae C G ponatur abscissa $CQ=x$, ob $Gg=(a-s)d\Phi$, et rectam G M ad curuam C G normalem erit sin. GMS $=\sin.\Phi = \frac{dx}{Gg} = \frac{dx}{(a-s)d\Phi}$; ideoque $dx=(a-s)d\Phi \sin.\Phi$ et et $\int (a-s) d\Phi$ sin. $\Phi = x = CQ$. Hinc ergo erit $v = \frac{(a-s)^2(c-x)}{kk+(a-s)^2}$; et ob $MG = a-s$; $GH = \frac{kk}{a-s}$ altitudo celeritati debita v ita exprimetur, vt sit $v = \frac{MG(c-x)}{MH}$.

§. 19. Consideremus curuam descriptam CG tamquam datam, quoniam ex ea curua directrix AMB definitur et contra; sitque posita eius abscissa verticali $CQ = x$, arcus iam descriptus $CG = z$, et radius osculi $GM = r$, erit $a-s = r$; et $\frac{dz}{r} = d\Phi$; hinc ergo fit primo altitudo celeritati centri grauitatis in G debita $v = \frac{rr(c-x)}{kk+rr}$, vnde patet, pendulum eo vsque esse ascensurum, donec fiat $x = c$. Deinde vero elementum temporis dt ita exprimetur, vt sit:

$$dt = \frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$$

cuius integrale debite sumtum indicabit tempus, quo pendulum per arcum indefinitum $CG = z$ ad altitudinem indefinitam $CQ = x$ ascendit. Quodsi ergo in hac expressione ponatur $x = c$, habebitur tempus totius ascensus, cui cum tempus sequentis descensus, ob defectum resistentiae aequale sit, pendulumque ex altera parte per similem curuam incedat, erit tempus vnius oscillationis $= 2\int \frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$, siquidem post integrationem ponatur $x = c$.

§. 20. Quando ergo in hac expressione, postquam factum est $x = c$, quantitas c relinquitur, duratio cuiusque oscillationis ab amplitudine arcus ea descripti pendebit, neque propterea omnes oscillationes siue sint maiores, siue minores aequalibus temporibus absoluentur. Quo igitur omnes oscillationes fiant isochronae, expressionem

 inuen-

inuentam $2\int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$ ita comparatam esse oportet, vt posito post integrationem $x=c$, quantitas c ex ea penitus discedat, idemque constanter eius integralis valor resultet, quaecunque magnitudo litterae c tribuatur. Ex hac igitur affectione, si conueniens relatio inter z et x definiatur, vt ante memorata proprietas locum inueniat; cognoscetur natura illius curuae C G, secundum quam, si pendulum moueatur, id omnes oscillationes aequalibus temporibus sit peracturum.

§. 21. Quo igitur facilius huius curuae C G, qua cuiusque penduli compositi tautochronismus continetur, naturam inuestigemus, primo pendulum simplex contemplemur, cuius tota massa in puncto G sit collecta. Quoniam ergo corpus extra hoc punctum G nullas habet partes erit, $kk=0$, ac propterea tempus vnius oscillationis erit $=2\int\frac{dz}{\sqrt{(c-x)}}$: cuius valor a c non pendebit, si fuerit $dz=\frac{dx\sqrt{f}}{\sqrt{x}}$; et $z=2\sqrt{fx}$; quae est aequatio pro cycloide. Eius autem radius osculi in imo puncto C, qui sub normali aequatur, erit $=\frac{zdz}{dx}=2f$, qui cum ipsi A C $=a$ aequalis esse debeat, fiet $f=\frac{1}{2}a$; seu f aequabitur semissi penduli simplicis isochroni, quod quidem suas oscillationes minimas perficiat. Hanc autem elegantissimam cycloidis proprietatem *Hugenius* elicuit, aliique Geometrae deinceps variis demonstrationibus confirmauerunt.

§. 22. Vt ergo formula pro quocunque pendulo composito inuenta $2\int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$ ad tautochronismum ac-

com-

commodetur, necesse est, vt ea induat hanc formam $2\int\frac{dx\sqrt{\frac{1}{2}f}}{\sqrt{(c-x)x}}$, sic enim posito post integrationem $x = c$, littera c ex calculo egredietur, atque singulae oscillationes aequi diurnae erunt oscillationibus minimis penduli simplicis, cuius longitudo sit $= f$. Quodsi vero formula inuenta $2\int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$ cum hac $2\int\frac{dx\sqrt{\frac{1}{2}f}}{\sqrt{x(c-x)}}$ conferatur, sequens prodibit aequatio:

$\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r} = \frac{dx\sqrt{f}}{\sqrt{2x}}$ seu $\sqrt{2fx} = \int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r}$.

Haec ergo aequatio exprimit naturam curuae CG tautochronae pro quocunque pendulo composito, quam non parum a cycloide discrepare, per se satis est manifestum.

§. 23. Quaeramus huius curuae radium osculi in puncto C, quoniam is esse debet $= AC = a$. Fiet ergo hoc loco $r = a$ ac propterea $\sqrt{2fx} = \frac{z\sqrt{(aa+kk)}}{a}$, vnde erit $zz = \frac{2aafx}{aa+kk}$. Cum igitur in puncto C radius osculi aequalis sit subnormali $\frac{zdz}{dx} = \frac{aaf}{aa+kk}$, necesse est, vt sit $\frac{aaf}{aa+kk} = a$; ideoque $f = a + \frac{kk}{a}$. Aequabitur ergo longitudo penduli simplicis isochroni f longitudini $AD = a + \frac{kk}{a}$: quod quidem per se est perspicuum, cum penduli huius compositi minimae oscillationes, quibus maiores, quaeque sunt isochronae, fiant in arcubus circularibus radio AC descriptis, ac proinde non secus se habeant, ac si tota corporis massa in centro oscillationis D esset collecta: ita vt ipsa longitudo AD exhibeat longitudinem penduli simplicis isochroni.

§. 24. Aequatio autem pro curua tautochrona inuenta: $\frac{dz\sqrt{(kk+r)}}{r} = \frac{dx\sqrt{s}}{\sqrt{2x}} = \frac{dx\sqrt{(kk+2a)}}{\sqrt{2ax}}$ constructu est difficillima, neque variabiles vllo modo a se inuicem separare licet. Quamuis enim radius osculi r per binas reliquas variabiles x et z definiri queat, (erit enim, si applicata QG $= y$ ponatur, $r = \frac{-dz^3}{dxddy} = \frac{-dydz^2}{dxddz}$, posito dx constante, vel $r = \frac{dzdy}{ddx}$ posito dz constante, et $dy = \sqrt{(dz^2 - dx^2)}$); tamen hinc aequatio tantopere perturbaretur, vt nihil prorsus ex ea concludi posset. Sin autem ex ea vel x vel z exterminetur in multo maiores tricas delaberemur. Cum igitur pro pendulo simplici constructio curuae tautochronae sit facillima, pro pendulo composito tantis laborat difficultatibus, vt eas nullo etiam nunc pacto superare potuerim.

§. 25. Si quidem loco quantitatum x et z introducatur angulus variabilis Φ, non solum aequatio ad duas variabiles reducetur, sed etiam a differentialibus secundi gradus liberabitur; neque tamen ad separationem variabilium pertingere licet. Cum enim sit $d\Phi = \frac{dz}{r}$, erit $dz = r\,d\Phi$, et $dx = (a - s)\,d\Phi$ sin. $\Phi = r\,d\Phi$ sin. Φ, hincque $x = \int r\,d\Phi$ sin. Φ. Substituantur hi valores pro dz et dx in aequatione inuenta, prodibitque.

$$\sqrt{(kk+rr)} = \frac{r\,\text{sin.}\,\Phi\sqrt{(kk+aa)}}{\sqrt{2ax}}$$

vnde fit $2ax = \frac{(aa+kk)rr\,\text{sin.}\,\Phi^2}{kk+rr}$; quae differentiata dabit:

$adx =$

$$a\,dx = \frac{(aa+kk)rr\,d\Phi\,\sin.\Phi\,\cos.\Phi}{kk+rr} + \frac{(aa+kk)kkr\,dr\,\sin.\Phi^2}{(kk+ar)^2}$$

Hic si pro dx valor $r.d\Phi\,\sin.\Phi$ substituatur, orietur

$$a\,d\Phi = \frac{(aa+kk)r\,d\Phi\,\cos.\Phi}{kk+rr} + \frac{(aa+kk)kk\,dr\,\sin.\Phi}{(kk+rr)^2}.$$

§. 26. Quamquam haec aequatio ad constructionis rationem aeque parum ac praecedens redigi potest, tamen aequatio $2ax = \frac{(aa+kk)rr\,\sin.\Phi^2}{kk+rr}$ insignem continet proprietatem, qua curua ista tautochrona CG determinari potest. Si enim in hac tautochrona CG ducantur radii osculi CA et GM, ille quidem in puncto imo C, hic vero in puncto quocunque G, atque pro punctis suspensionis A et M centra oscillationis notentur D et H, tum vero insuper ducantur horizontalis GQ et verticalis MS; quoniam erit $AC = a$; $AD = a + \frac{kk}{r}$; $CQ = x$; $MG = r$; $MH = r + \frac{kk}{r}$, et $GS = r\,\sin.\Phi$ erit:

$$2\,CQ = \frac{AD.\,GS^2}{MG.\,MH}.$$

Ducatur porro ex S recta ST in GM normalis, erit $2\,CQ = \frac{AD.\,GT}{MH}$ seu $AD : MH = 2\,CQ : GT$, vel $AD : 2\,CQ = MH : GT$. Qua concinna proprietate natura curuae tautochronae CG exponitur.

§. 27. Vt tamen non nullum fructum ex hac aequatione percipiamus, accommodemus eam ad eiusmodi pendula, in quibus quantitas kk sit tam parua, vt prae reliquis quantitatibus, cum quibus comparatur, fere euanescat. Huiusmodi autem casus existet, si corpus penduli praecipuum EF sit valde ponderosum simulque mini-

 mum,

mum, ac praeterea oscillationes ampliores excludantur. Tum enim quo longius sumatur tale pendulum, eo minorem obtinebit valorem quantitas kk, respectu quantitatum aa et rr. Quod cum euenit, si aequationis inuentae integrale per seriem exprimatur, cuius termini secundum potestates ipsius kk progrediantur, sufficiet huius seriei duos vel tres terminos initiales accepisse, cum sequentes ob altiores ipsius kk potestates sine errore praetermitti queant.

§. 28. Aequationem ergo quoque differentialem inuentam secundum potestates ipsius kk disponamus, quae induet hanc formam:

$$\begin{aligned}
&+ar^4 d\Phi + 2akkrrd\Phi + ak^4 d\Phi \\
&-aar^3 d\Phi \operatorname{cos.}\Phi - a^3k^2 rd\Phi \operatorname{cos.}\Phi - k^4 rd\Phi \operatorname{cos.}\Phi = 0 \\
&\qquad -kkr^3 d\Phi \operatorname{cos.}\Phi - k^4 dr \operatorname{sin.}\Phi \\
&\qquad -aakkdr \operatorname{sin.}\Phi
\end{aligned}$$

ex qua, si kk euanesceret, foret $r = a \operatorname{cos.}\Phi$; ponamus ergo ad valorem ipsius r veriorem inueniendum:

$$r = a \operatorname{cos.}\Phi + k^2 P + k^4 Q + \text{etc. erit}$$

$$dr = -ad\Phi \operatorname{sin.}\Phi + k^2 dP + k^4 dQ + \text{etc. atque}$$

$$\begin{aligned}
r^2 &= a^2 \operatorname{cos.}\Phi^2 + 2ak^2 P \operatorname{cos.}\Phi + 2ak^4 Q \operatorname{cos.}\Phi + \text{etc.} \\
&\qquad\qquad + k^4 PP \\
r^3 &= a^3 \operatorname{cos.}\Phi^3 + 3a^2k^2 P \operatorname{cos.}\Phi^2 + 3a^2k^4 Q \operatorname{cos.}\Phi^2 + \text{etc.} \\
&\qquad\qquad + 3ak^4 P^2 \operatorname{cos.}\Phi \\
r^4 &= a^4 \operatorname{cos.}\Phi^4 + 4a^3k^2 P \operatorname{cos.}\Phi^3 + 4a^3k^4 Q \operatorname{cos.}\Phi^3 + \text{etc.} \\
&\qquad\qquad + 6a^2k^4 P^2 \operatorname{cos.}\Phi^2
\end{aligned}$$

§. 29.

§. 29. Quodsi iam hi valores in aequatione differentiali substituantur, orietur sequens aequatio:

$$\begin{aligned}
&+a^6 d\Phi \cos.\Phi^4 + a^4 k^2 P d\Phi \cos.\Phi^5 + a^4 k^4 Q d\Phi \cos.\Phi^6 \\
&-a^5 d\Phi \cos.\Phi^4 + a^3 k^2 d\Phi \cos.\Phi^2 + 3a^3 k^4 P^2 d\Phi \cos.\Phi^2 \\
&\qquad -a^3 k^2 d\Phi \cos.\Phi^4 + 3a^2 k^4 P d\Phi \cos.\Phi \\
&\qquad +a^3 k^2 d\Phi \sin.\Phi^2 - 3a^2 k^4 P a\Phi \cos\Phi^3 = 0 \\
&\qquad\qquad - a^2 k^4 dP \sin.\Phi \\
&\qquad\qquad + a k^4 d\Phi \\
&\qquad\qquad - a k^4 d\Phi \cos\Phi^2 \\
&\qquad\qquad + a k^4 d\Phi \sin.\Phi^2
\end{aligned}$$

Hinc termino secundo ad nihilum redacto fiet:

$$aP\cos.\Phi^3 + \cos.\Phi^2 - \cos.\Phi^4 + \sin.\Phi^2 = 0$$

ideoque $P = \frac{-1 + \cos.\Phi^4}{a\cos.\Phi^3} = \frac{-1}{a\cos.\Phi^3} + \frac{\cos.\Phi}{a}$: ex quo porro fit $dP = \frac{-3d\Phi \sin.\Phi}{a\cos.\Phi^4} - \frac{d\Phi \sin.\Phi}{a}$

et $P^2 = \frac{+1}{aa\cos.\Phi^6} - \frac{2}{aa\cos.\Phi^2} + \frac{\cos.\Phi^2}{aa}$.

§. 30. Tertius porro terminus ad nihilum redactus dat:

$$a^3 Q\cos.\Phi^3 + 3a^2 P^2 \cos\Phi^2 + 3aP\cos.\Phi - 3aP\cos.\Phi^3 - adP\sin.\Phi : d\Phi + 2\sin\Phi^2 = 0$$

quae aequatio, si loco P^2, P, et dP valores modo inventi substituantur abibit in:

$$a^3 Q\cos.\Phi^3 + \frac{3}{\cos.\Phi^4} - 3 - \frac{3}{\cos.\Phi^2} + 3\cos.\Phi^2 + 3\sin.\Phi^2 + \frac{3\sin.\Phi^2}{\cos.\Phi^4} = 0$$

seu ob $\sin.\Phi^2 = 1 - \cos.\Phi^2$ habebitur

$$a^3 Q\cos\Phi^3 + \frac{6}{\cos.\Phi^4} - \frac{6}{\cos.\Phi^2} = 0$$

ideoque $Q = \frac{-6 + 6\cos.\Phi^2}{a^3\cos.\Phi^7} = \frac{-6\sin.\Phi^2}{a^3\cos.\Phi^7}$.

Quam

Quam ob rem erit proxime:

$$r = a\cos.\Phi - \frac{kk(1-\cos.\Phi^4)}{a\cos.\Phi^3} - \frac{6k^4\sin.\Phi^2}{a^3\cos.\Phi^7}$$

vnde patet in situ penduli verticali, quo est $\Phi = 0$, fore $r = a = AC$, vti rei natura postulat.

§. 31. Pro curua ergo tautochrona CG, quae conueniat corporibus, in quibus quantitas kk valde est parua, nacti sumus aequationem inter eius radium osculi $GM = r$, eiusque amplitudinem seu angulum $GMS = \Phi$, ex qua aequatione quantitates constructioni huius curuae inseruientes sequenti modo definientur. Sit arcus curuae $CG = z$; abscissa $CQ = x$ et applicata $QG = y$ eritque $dz = r\,d\Phi$; $dx = r\,d\Phi\sin.\Phi$ et $dy = r\,d\Phi\cos.\Phi$. Hinc ergo obtinebitur:

$$z = a\int d\Phi\cos.\Phi - \frac{kk}{a}\int\frac{d\Phi}{\cos.\Phi^3} + \frac{kk}{a}\int d\Phi\cos.\Phi - \frac{6k^4}{a^3}\int\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{\cos.\Phi^7}$$

$$x = a\int d\Phi\sin.\Phi\cos.\Phi - \frac{kk}{a}\int\frac{d\Phi\sin.\Phi}{\cos.\Phi^3} + \frac{kk}{a}\int d\Phi\sin.\Phi\cos.\Phi - \frac{6k^4}{a^3}\int\frac{d\Phi\sin.\Phi^3}{\cos.\Phi^7}$$

$$y = a\int d\Phi\cos.\Phi^2 - \frac{kk}{a}\int\frac{d\Phi}{\cos.\Phi^2} + \frac{kk}{a}\int d\Phi\cos.\Phi^2 - \frac{6k^4}{a^3}\int\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{\cos.\Phi^6}.$$

§. 32. Integralia vero haec ita se habent, vt sit:

$$\int d\Phi\cos.\Phi = \sin.\Phi;\ \int d\Phi\sin.\Phi\cos.\Phi = \tfrac{1}{2}\sin.\Phi^2;\ \int d\Phi\cos.\Phi^2 = \tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{2}\sin.\Phi\cos.\Phi$$

$$\int\frac{d\Phi}{\cos.\Phi^3} = \frac{\sin.\Phi}{2\cos.\Phi^2} + \tfrac{1}{2}l\,\mathrm{tang.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\Phi);\ \int\frac{d\Phi\sin.\Phi}{\cos.\Phi^3} = \frac{1}{2\cos.\Phi^2};\ \int\frac{d\Phi}{\cos.\Phi^2} = \frac{\sin.\Phi}{\cos.\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{\cos.\Phi^7} = \frac{\sin.\Phi}{6\cos.\Phi^6} - \frac{\sin.\Phi}{24\cos.\Phi^4} - \frac{\sin.\Phi}{16\cos.\Phi^2} - \tfrac{1}{16}l\,\mathrm{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)$$

$$\int\frac{d\Phi\sin.\Phi^3}{\cos.\Phi^7} = \frac{1}{6\cos.\Phi^6} - \frac{1}{4\cos.\Phi^4};\ \int\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{\cos.\Phi^6} = \frac{\sin.\Phi}{5\cos.\Phi^5} - \frac{\sin.\Phi}{15\cos.\Phi^3} - \frac{2\sin.\Phi}{15\cos.\Phi}.$$

His ergo valoribus substitutis habebitur:

$$z = a\sin.\Phi + \frac{kk}{a}\sin.\Phi - \frac{kk\sin.\Phi}{2a\cos.\Phi^2} - \frac{kk}{2a}l\,\mathrm{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)$$

$$- \frac{k^4\sin.\Phi}{a^3\cos.\Phi^6} + \frac{k^4\sin.\Phi}{4a^3\cos.\Phi^4} + \frac{3k^4\sin.\Phi}{8a^3\cos.\Phi^2} + \frac{3k^4}{8a^3}l\,\mathrm{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)$$

$x =$

$$x = \tfrac{1}{2}a\,\mathrm{fin.}\,\Phi^2 + \tfrac{kk}{2a}\,\mathrm{fin.}\,\Phi^2 + \tfrac{kk}{2a} - \frac{kk}{2a\,\mathrm{cof.}\,\Phi^2} - \frac{k^4}{2a^3} - \frac{k^4}{a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^6} + \frac{3k^4}{2a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^4}$$

$$y = \tfrac{1}{2}a\Phi + \tfrac{1}{2}a\,\mathrm{fin.}\,\Phi\,\mathrm{cof.}\,\Phi + \tfrac{kk}{2a}\Phi + \tfrac{kk}{2a}\,\mathrm{fin.}\,\Phi\,\mathrm{cof.}\,\Phi - \frac{kk\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{a\,\mathrm{cof.}\,\Phi} - \frac{6k^4\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{5a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^5} + \frac{2k^4\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{5a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^3} + \frac{4k^4\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{5a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi}$$

vnde pro quouis angulo Φ coordinatae curuae tautochronae x et y aſſignari, ideoque ipſa curua quaeſita C G conſtrui poterit.

§. 33. Ad vſum autem pendulorum expediet huius curuae euolutam, ſeu ipſam curuam directricem A M B conſtruere; quo igitur hanc curuam A M B, quae pendulo motum tautochronum conciliat, definiamus, poſito eius arcu quocunque A M $= s$, ſit abſciſſa A P $= p$, et applicata P M $= q$; erit $s = a - r$; $dp = ds\,\mathrm{cof.}\,\Phi$ et $dq = ds\,\mathrm{fin.}\,\Phi$, ideoque $p = \int ds\,\mathrm{cof.}\,\Phi$ et $q = \int ds\,\mathrm{fin.}\,\Phi$. Ex ſuperioribus ergo habebitur:

$$s = a - a\,\mathrm{cof.}\,\Phi - \frac{kk\,\mathrm{cof.}\,\Phi}{a} + \frac{kk}{a\,\mathrm{cof.}\,\Phi^3} - \frac{6k^4}{a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^5} + \frac{6k^4}{a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^7}$$

vnde fit:

$$ds = a\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi + \frac{kk\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{a} + \frac{3kk\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{a\,\mathrm{cof.}\,\Phi^4} - \frac{30k^4\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^6} + \frac{42k^4\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^8},$$

hincque porro:

$$dp = a\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi\,\mathrm{cof.}\,\Phi + \frac{kk\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi\,\mathrm{cof.}\,\Phi}{a} + \frac{3kk\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{a\,\mathrm{cof.}\,\Phi^3} - \frac{30k^4\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^5} + \frac{42k^4\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^7}$$

$$dq = a\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi^2 + \frac{kk\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi^2}{a} - \frac{3kk\,d\Phi}{a\,\mathrm{cof.}\,\Phi^2} + \frac{3kk\,d\Phi}{a\,\mathrm{cof.}\,\Phi^4} + \frac{30k^4\,d\Phi}{a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^4} - \frac{72k^4\,d\Phi}{a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^6} + \frac{42k^4\,d\Phi}{a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^8}$$

§. 34. Quodſi iam hae formulae debite integrentur, primo quidem reperietur abſciſſa

$$p = \tfrac{1}{2}a\,\mathrm{fin.}\,\Phi^2 + \frac{kk\,\mathrm{fin.}\,\Phi^2}{2a} - \frac{3kk}{2a} + \frac{3kk}{2a\,\mathrm{cof.}\,\Phi^2} - \frac{15k^4}{2a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^4} + \frac{7k^4}{a^3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^6} + \frac{k^4}{2a^3}$$

Deinde cum ſit: $\int d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi^2 = \tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{fin.}\,\Phi\,\mathrm{cof.}\,\Phi$

$$\int \frac{d\Phi}{\cos.\Phi^2} = \frac{\sin.\Phi}{\cos.\Phi}; \int \frac{d\Phi}{\cos.\Phi^4} = \frac{\sin.\Phi}{3\cos.\Phi^3} + \frac{2\sin.\Phi}{3\cos.\Phi};$$

$$\int \frac{d\Phi}{\cos.\Phi^6} = \frac{\sin.\Phi}{5\cos.\Phi^5} + \frac{4\sin.\Phi}{15\cos.\Phi^3} + \frac{8\sin.\Phi}{15\cos.\Phi},$$

$$\int \frac{d\Phi}{\cos.\Phi^8} = \frac{\sin.\Phi}{7\cos.\Phi^7} + \frac{6\sin.\Phi}{35\cos.\Phi^5} + \frac{8\sin.\Phi}{35\cos.\Phi^3} + \frac{16\sin.\Phi}{35\cos.\Phi}$$

obtinebitur:

$$q = \tfrac{1}{2}a\Phi - \tfrac{1}{2}a\sin.\Phi\cos.\Phi + \frac{kk\Phi}{2a} - \frac{kk\sin.\Phi\cos.\Phi}{2a} - \frac{kk\sin.\Phi}{a\cos.\Phi} + \frac{kk\sin.\Phi}{a\cos.\Phi^3}$$
$$+ \frac{k^4\sin.\Phi}{a^3\cos.\Phi}\left(\tfrac{4}{5} + \frac{2}{5\cos.\Phi^2} - \frac{36}{5\cos.\Phi^4} + \frac{6}{\cos.\Phi^6}\right).$$

Cum igitur ambae coordinatae p et q ex dato angulo Φ qui curuae quoque A M amplitudinem metitur, determinari queant, curua quaesita A M B non difficulter construetur.

PHYSICO-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

 DE

* DE ARGENTO VIVO

CALOREM CELERIVS RECIPIENTE ET CELERIVS PERDENTE QVAM MVLTA FLVIDA LEVIORA EXPERIMENTA ET COGITATIONES.

AVCTORE

G. *W. Richmann.*

Exemplum nouum propono in Phyſicis, ſine experimentis absque periculo nihil facile ſtabiliri poſſe, et nudis ratiociniis experientia non firmatis viam ad errores ſaepius patefieri. Receptum eſt a multis, primi ordinis etiam Philoſophiae naturalis cultoribus, inſtar axiomatis, denſiora corpora difficilius calefieri, et difficilius calorem acquiſitum perdere, quam rariora; et hinc etiam argentum viuum difficilius calefieri aqua et aliis fluidis, difficiliusque refrigerari. Et hoc non absque veri ſpecie factum, cum maiori materiae quantitati difficilius motus ab igne imprimi poſſe videatur, quam minori quantitati materiae. Hinc ſcriptum eſt in P. van *Muſſchenbrockii* Elem. Phyſ. ed. 1734. §. 573: *Quo grauiora et duriora ſunt corpora, eo difficilius igniuntur, veluti ferrum, cuprum, ſaxa, ſed haec quoque diutiſſime ignem retinent. Quo leuiora ſunt corpora, eo citius ignem amittunt: hinc aër ocyus calorem perdit, quam Alcohol, hoc citius aqua,*

* Traditae ſunt anno 1750. et anno 1752. incidit in manus *Cel. Nolletii* lectionum Phyſ. quartus Tomus anno 1749. euulgatus, vbi idem aſſeritur et experimentis confirmatur: Spero tamen lectorem ex ratione experimentorum abunde cogniturum, me *Cel. Nolletii* IV. Tomum nondum vidiſſe, dum has cogitationes concinnaui.

haec citius Mercurio. Eadem affirmata in Praelectionibus in Physicam Theoreticam *G. W. Krafftii*, §. 367. vbi aqua calorem citius amittere dicitur, quam Mercurius ob minorem densitatem. Neque Mercurius suam insignem mobilitatem per calorem praestantissimis Chymicis prodidit. H*ermannus Boerhave* scribit Tomo I. Chemiae in Capite de igne exp. XXI: *Quo densiora corpora, siue fluida fuerint, siue consistentia, eo pluri tempore egent, vt ab eodem igne aequaliter incalescant .... calescit citissime aër, dein Alcohol, oleum Petrolei limpidissimum postea, tum oleum Terebinthinae, mox aqua pura, dein aqua salsa, lixiuium fortissimum, metalla mercurius aurum.* Idem asseritur Experim. XX. Corrol. 9, ratione refrigerationis. Vt rite iudicari possit, quae corpora caloris tenacissima sint, omnes conditiones l. c. Corrol. 17. sequentibus comprehendit: *Quo corpus aliquod constat materia densiore, quo maius existit mole, quo deinde figurae exactius sphaericae, eo etiam idem erit aptius, ignem receptum diutius in se conseruare; id et experientia vbique confirmat. Sed si tunc simul hoc corpus spatio inhaeret omnium rarissimo, aut inani penitus, tum conspirabunt omnes causae Physicae hactenus notae calori diu conseruando.* Hic notandum, nullam cohaerentiae maioris vel minoris haberi rationem, quae tamen non parum hic concurrere, et diuersitatis haut exigua causa esse videtur. Silentio praeterire liceat quam plurimos alios antiquiores et recentiores, qui idem asseruerunt. Cautius hanc rem attigerunt *G. E. Hamberger* et G. I. *Grauesande*. Hic in Elem. Phys: Math: Tom. II. n. 2400 scribit: *Non ignis aeque facile corpora omnia intrat, quod variis causis, non omnibus notis, tribuendum;*

et

et n. 2515. *In multis occasionibus non eodem modo in idem corpus agunt corpora aeque calida; neque in corporibus variis, eodem fluido aequaliter vbique calido circumdatis, aequali tempore calor aequalis sit calori ipsius fluidi*; et n. 2516. *difficilius corpora quaedam aliis incalescunt, et quidem ex duplici causa; non enim aeque facile corporum omnium partes agitantur, et in quaedam difficilius ignis, quam in alia, penetrat*; et n. 2517. *Corporum partes diuersae sunt, et in diuersis corporibus non tantum densitate differunt, sed etiam cohaesione, vnde non aeque facile eadem ipsis communicatur agitatio; quare inaequales ignis actiones desiderantur, vt aequales gradus caloris corporibus communicentur et calor non sequitur proportionem quantitatis ignis.* *Hamberger* in Elem. Phys. §. 430. edit. 2. scribit: Ignis in corpus solidum quodcunque penetrat, et deinde n. 4. *Maior ignis copia requiritur ad conciliandum eundem caloris gradum corpori solido, quam aquae et aëri, magis enim resistit corpus solidum motui, ex igne oriundo, quam aqua et aër: ob cohaerentiam partium, et ob partium maiorem copiam solida maiorem ignis copiam retinere, hinc in quiete conseruare valent, quam aqua et aër sub eadem mole; quaecunque igneae particulae vero non mouentur, istae calorem dare nequeunt*; et n. 5. *Corpora solida pro diuersa grauitate specifica diuersam caloris quantitatem ex aëre absorbent, vnde est, quod conclavia, quorum parietes sunt lapidei, difficilius longe calefiant, quam ea, quorum parietes sunt lignei*; n 6. *Diutius tamen ob easdem causas* n. 4, *calorem quoque seruant solida, quam aqua, aër.* Ex his videre est, *Gravesandium* et ***Hambergerum*** ad tenacitatem caloris maiorem requirere cohaeren-

cohaerentiam maiorem coniunctam cum densitate maiori. Densitatem certe solam, maiorem vel minorem, non esse conditionem maioris vel minoris tenacitatis caloris, ex sequentibus Experimentis videtur apparere; quae forte ad leges communicationis caloris diuersorum corporum eruendas, aliquid conferre poterunt, in qua materia in Physicis parum mihi praestitum esse videtur; quare etiam imposterum, quomodo solida diuersa calorem communicent inter se et cum fluidis, examinare animus est.

Experim. I.

§. 1. Elegi 1) duo vasa vitrea cylindrica eiusdem diametri, altitudinis et crassitiei, (diameter capacitatis vtriusque erat 2. dig. Lond. et altitudo quinque digitorum), et suspendi ea ita, vt ab aëre temperiei 65 graduum Therm. F. contingerentur. 2) Vni vasorum infudi argentum viuum, (cuius grauitas specifica ad grauitatem spec. aquae erat, vt 13, 57 : 1), vsque ad altitudinem duorum digitorum et 4 linearum, et calefeci illud, alteri aquam calidam ad eandem altitudinem. 3) Immersi vtrique massae Thermometrum mercuriale ad eandem profunditatem, cumque obseruarem, discrepantiam caloris indicari, effeci maiore calore frigidiori massae adplicato, vt discrepantia nulla appareret. 4) Notare incepi, a) tempus decrescentis caloris, b) gradum caloris aquae, et c) decrementum caloris aquae post quoduis temporis interuallum ab initio obseruationis, d) gradum caloris argenti viui, et e) decrementum graduum caloris argenti viui post tempus definitum, vti ex sequenti Tabula videre est.

Post

Post Temp.		grad. cal. aq.	decr.	grad. cal. ☿rii	decr.
0	min. pr.	132	0	131	0
7		122	10	118	13
12		$115\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$	109	22
17		111	21	104	27
22		107	25	99	32
27		103	29	94	37
42		93	39	84	47
47		90	42	81	50
52		88	44	79	52
62		84	48	76	55
72		81	51	73	58
87		78	54	$71\frac{1}{3}$	$59\frac{2}{3}$
92		77	55	71	60
97		76	56	70	61

Experim. II.

§. 2. Produxi in vtraque massa, aquea et argenti viui eandem ferme temperiem scil. 78 gr. temperies vero aëris, in quo refrigeratio fiebat, erat 65 gr. et obseruaui:

Post Temp.		cal. aq.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0	min. pr.	78	0	78	0
4		$77\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$77\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
12		$76\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$75\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
18		$75\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	74	4
34		73	5	$71\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$
46		72	6	70	8
70		70	8	$68\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$.

Experim. III.

§. 3. Immersi vtramque massam aquae cum frustulis glaciei vsque ad gr. 33. Therm. *Fabr.* frigefactae, cum vtraque haberet temperiem 69 gr. et notaui, vt antea, in temperie aëris 65 gr.

Post Temp.	cal. aq.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	69	0	69	0
5	56	13	41	28
10	47	22	35	34
16	42	27	34	35
19½	39	30	33½	35½
24½	37	32	33¼	35¾
28½	36½	32½	33	36
47½	34⅓	34⅔	33	
62	34	35	33.	

Experim. IV.

§. 4. In temperie aëris 66 gr. suspendi massas easdem, et notaui, vti antea:

Post Temp.	cal. aq.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	33½	0	33½	0
5	36½	3	38	4½
16	39⅕	5⅕	46	12½
37	46	12½	55	21½
54	50½	17	59	25½
65	53	19½	61½	28
75	55	21½	63	29½
105	59	25½	66	32½
122	61	27½	66	32½
134	64½	31	66	32½

Experim.

Experim. V.

§. 5. In niue temperiei $33\frac{1}{2}$ gr. locaui ſimul vas cum argento viuo, et aliud ſimile cum ſpiritu vini, cum Thermometris in iis ad eandem profunditatem immerſis: Spiritus vini ſtagnabat ad eandem altitudinem in vaſe, ad quam argentum viuum ſtagnabat. Obſeruaui, vt antea, in temperie aëris 65 gr.

Poſt T.	cal. Sp. V.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	61	0	61	0
5	53	8	47	14
10	48	13	40	21
15	$45\frac{2}{3}$	$15\frac{1}{3}$	37	24
20	44	17	35	26
25	$42\frac{1}{5}$	$18\frac{4}{5}$	34	27
30	41	20	$33\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$
35	40	21	$33\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$
40	39	22	$33\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$
45	38	23	$33\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$
50	37	24	$33\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$
55	$36\frac{1}{2}$	$24\frac{1}{2}$	$33\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$

Experim. VI.

§. 6. Vtrumque vas ex niue extraxi, et mercurium ita caleſeci, vt eandem cum Sp. V. haberet temperiem 36 grad. et in temperie aëris 65. grad. obſeruaui vt antea

Poſt Temp.	cal. Sp. V.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	36	0	36	0
5	39	3	40	4
17	42	6	46	10

22	44	8	49	13
32	47	11	$52\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$
43	50	14	55	19
57	52	16	$56\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$
68	54	18	58	22.

Experim. VII.

§. 7. Immersi aquae calidae superante 150 gr. vas cum Sp. V. et obseruaui in temperie aëris 65 gr.

Post T.	cal. Sp. V.	incr.	Post Temp.	cal. Sp. V.	incr.
0 min. pr.	61	0	9	126	65
3	94	33	11	129	68
6	108	47	12	130	69
8	122	61			

Experim. VIII.

§. 8. Spiritum Vini rectificatissimum, cuius grauitas specifica ad grauitatem specificam aquae erat vti 861 ad 1000, infudi ad praedictam (§. 1.) altitudinem, et Thermometro immerso, in temperie aëris 63 graduum obseruaui, vase niui immerso, cuius temperis 33 gr. erat.

Post Temp.	cal. Sp. V. R.	decr.
0 min. pr.	61	0
1	59	2
3	57	4
4	55	6
6	53	8
$8\frac{3}{4}$	51	10
10	49	12
14	46	15

21	- - - - 43 - - -	18
28	- - - - 41 - - -	20
41	- - - - $38\frac{2}{5}$ - - -	$22\frac{3}{5}$
46	- - - - $37\frac{2}{5}$ - - -	$23\frac{3}{5}$
56	- - - - 36 - - -	25.

Experim. IX.

§. 9. Extraxi vas ex niue, et obſeruaui in temperie aëris 63 gr. vt antea

Poſt Temp.	- - cal. Sp. V. R	- - incr.
- - 0 m. p.	- - 36 - -	- - 0
- - 4	- - - 37 - -	- - 1
- - 10	- - - 40 - -	- - 4
- - 33	- - - 50 - -	- - 14
- - 46	- - - 53 - -	- - 17
- - 90	- - - $58\frac{1}{2}$ - -	- - $22\frac{1}{2}$.

Experim. X.

§. 10. Immerſi aquae calidae 150 gr. ſuperanti vas cum Spiritu V. rectificatiſſimo in temperie aëris 63 gr. et notaui

Poſt Temp.	- - cal. Sp. V. R.	- - incr.
- - 0 m. p.	- - 62 - -	- - 0
- - 2	- - - 83 - -	- - 21
- - 4	- - - 94 - -	- - 32
- - 5	- - - 108 - -	- - 46
- - 8	- - - 124 - -	- - 62
- - 10	- - - 130 - -	- - 78.

Experim. XI.

§. 11. Immerſi vas cum Petroleo limpidiſſimo eiusdem voluminis cum argento viuo, et ſimul alterum vas cum argento viuo aquae fruſtulis glaciei ad gr. 33 frigefactae, et obſeruaui in temperie aëris 64 gr.

Poſt Temp.	cal. Petrol.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	57	0	57	0
10	48	9	38	19
15	$43\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$	$34\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$
20	40	17	$33\frac{2}{3}$	$23\frac{1}{3}$
25	38	19	$33\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{2}$
30	37	20	33	24
35	$36\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$	33	24
40	36	21	33	24
65	$35\frac{3}{5}$	$21\frac{2}{5}$	33	24
75	$35\frac{4}{5}$	$21\frac{1}{5}$	$33\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{2}$.

Experim. XII.

§. 12. Extraxi ex aqua vtrumque vas, et deterſis parietibus ſuſpendi, vt tantummodo ab aëre temperiei 64 gr. contingeretur, et notaui:

Poſt Temp.	cal. Petrol.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	$35\frac{2}{5}$	0	$33\frac{2}{3}$	0
5	38	$2\frac{3}{5}$	39	$5\frac{1}{3}$
10	$41\frac{4}{5}$	$6\frac{2}{5}$	42	$8\frac{1}{3}$
15	$45\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{10}$	45	$11\frac{1}{3}$
20	$47\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{10}$	47	$13\frac{1}{3}$
25	50	$14\frac{3}{5}$	50	$16\frac{1}{3}$.

Experim.

Experim. XIII.

§. 13. Transtuli in medium aëreum frigidius vtramque massam, et obseruaui in temperie aëris $33\frac{1}{2}$ gr.

Post Temp.	cal. Petrol.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	65	0	65	0
26	54	11	$51\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$
65	40	25	40	25
159	33	32	$33\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$.

Experim. XIV.

§. 14. Ex temperie aëris 30 gr. portaui adparatum in temperiem 63 gr. et obseruaui.

Post Temp.	cal. Petrol.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	30	0	30	0
6	$36\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	38	8
18	40	10	42	12
26	$45\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	46	16
70	58	28	57	27.

Experim. XV.

§. 15. Aquae calidae gr. 150 + immersi vasa cum Mercurio et petroleo simul cum temperies vtriusque esset 61 gr. et obseruaui in temperie aëris 64 gr.

Post. Temp.	cal. Petrol.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	61	0	61	0
3	96	35	131	70
6	116	55	144	83
9	$142\frac{1}{2}$	$81\frac{1}{2}$	150	89
12	144	83	147	86.

Experim.

Experim. XVI.

§. 16. Extraxi simul ex aqua vas vtrumque, et suspendi in aëre temperiei 62 gr. et obseruaui.

Post Temp.	cal Petrol.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	145	0	145	0
5	128	17	$127\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$
10	119	26	119	26
15	111	34	111	34
20	104	41	$104\frac{1}{2}$	$40\frac{1}{2}$
25	98	47	99	46
30	$92\frac{1}{3}$	$52\frac{2}{3}$	93	52
40	88	57	86	59
45	85	60	83	62
70	$73\frac{2}{3}$	$71\frac{1}{3}$	72	73
80	$71\frac{2}{3}$	$73\frac{1}{3}$	70	75.

Experim. XVII.

§. 17. Vasi vni aquam alteri petroleum infudi, ita, vt volumina rursus essent aequalia, et Thermometris ad eandem profunditatem immersis vtrumque vas immisi aquae calidae temperie antea eadem vtrique fluido tributa, et obseruaui in temperie aëris 65 gr.

Post Temp.	cal. aq.	incr.	cal. Petr.	incr.
0 min. pr.	79	0	79	0
2	98	19	104	25
6	$101\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	$106\frac{1}{2}$	27
7	102	23	107	28
12	$102\frac{1}{3}$	$23\frac{1}{3}$	$106\frac{2}{3}$	$27\frac{2}{3}$.

Experim.

Experim. XVIII.

§. 18. Eadem vasa suspendi in aëre temperiei 68 gr. et obseruaui

Post Temp.	cal. aq.	decr.	cal. Petrol.	decr.
0 min. pr.	102	0	105	0
4	99	3	101	4
10	95	7	$95\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$
15	92	10	$91\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$
21	$89\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	$87\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$
25	88	14	$85\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{2}$
35	$81\frac{1}{3}$	$20\frac{2}{3}$	$78\frac{1}{2}$	26
55	77	25	74	31
69	$74\frac{1}{3}$	$27\frac{2}{3}$	72	33
90	72	30	$70\frac{1}{2}$	$34\frac{1}{2}$
110	$70\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$	70	35
120	70	32	$69\frac{1}{2}$	$35\frac{1}{2}$.

Experim. XIX.

§. 19. Oleum Terebinthinae pari ratione examinaui, et immersi cum argento viuo aquae calidae, et obseruaui in temperie aëris 66 gr.

Post Temp.	cal. ol. Tereb.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	76	0	74	0
3	84	8	89	15
4	86	10	93	19
5	$89\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	94	20
9	104	28	110	36.

Experim. XX.

§. 20. Extraxi vasa ex aqua, et suspendi in aëre 66 gr. et obseruaui vti antea

Post Temp.	cal. ol. Tereb.	decr.	cal. ♀rii	decr.
0	107	0	$107\frac{3}{5}$	0
5	104	3	102	$5\frac{3}{5}$
14	95	12	$94\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{10}$
19	90	17	90	$17\frac{3}{5}$
28	87	20	87	$20\frac{3}{5}$
36	86	21	84	$23\frac{3}{5}$
45	83	24	82	$25\frac{3}{5}$
50	82	25	$80\frac{2}{5}$	$27\frac{1}{5}$
71	78	29	$76\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{10}$
84	76	31	75	32,6.

Experim. XXI.

§. 21. Apparatum niui cum sale mixtae immersi, et obseruaui, descendisse Thermometra simul

oleum Tereb.	Mercurius
a gr. 64 ad 56	a gr. 64 ad 45
a gr. 56 ad 45	a gr. 45 ad 34
a gr. 45 ad 31	a gr. 34 ad 22.

Experim. XXII.

§. 22. Oleum lini pariter examinaui in niue temperiei 33 gr. et in temperie aëris 62 gr. obseruaui

Post Temp.	cal ol. lini	decr.
0 min. pr.	61	0
5	52,4	8,6

10 - - - - -	47,	13, 8
15 - - - - -	43, 2 - -	17, 8
20 - - - - -	39, 6 - -	21, 4
25 - - - - -	38, - -	23,
30 - - - - -	37, - -	24,
35 - - - - -	36, 6 - -	24, 4
40 - - - - -	35, 8 - -	25, 2.

Experim. XXIII.

§. 23. Extraxi ex niue vas, et obſeruaui in temperie aëris 62 gr.

Poſt Temp. - -	cal. ol. lini - -	decr.
0 min. pr. - -	35 - -	0
4 - - - - -	37 - -	2
20 - - - -	44 - -	9
33 - - - - -	48, 6 - -	13, 6
40 - - - - -	50, 5 - -	15, 5
43 - - - - -	51, - -	16
54 - - - -	53, 4 - -	18, 4
64 - - - - -	55 - -	20,
75 - - - - -	56, 2 - -	21, 2.

§. 24. Ex his experimentis videre eſt:

1) Argentum viuum in medio aëre denſiori aqueo vel etiam in niue, frigidiori, maiora decrementa caloris pati, quam a) aqua, Exp. III. b) Spiritus vini ordinarius, Exp. V. c) petroleum, Exp. XI. d) oleum Terebinthinae, Exp. XXI. e) Spir. vin. rectificatiſſimus, Exp. VIII. coll. Exp. V. f) oleum lini, Exp. XXII. coll. Exp. XI. quia ferme aequalia decrementa cum petroleo in medio aqueo patitur.

2) Idem caloris incrementa maiora capere in medio aqueo calidiori, quam a) petroleum, Exper. XV. b) oleum Terebinthinae, Exp. XIX. c) Spiritus vini ordinarius, Exp. VII. coll. Exper. XV. cumque petroleum maiora incrementa caloris acquirat quam aqua in medio aqueo, Exper. XVII. quod minora in eodem capit, quam argentum viuum, etiam d) argentum viuum maiora incrementa caloris acquirere quam aqua, et tandem maiora quam e) Spiritus vini rectificatissimus, Exper. X. coll. Exper. VII. et Exper. XV.

3) Incrementa et decrementa caloris Mercurii, petrolei et decrementa caloris olei Terebinthinae, petrolei et Mercurii in aëre esse ferme aequalia, Exp. XII. XIII. XIV. XX. paruae enim discrepantiae plurimam partem diuersitati Thermometrorum et vasorum, quae licet exigua admodum fuerit, tamen nonnihil efficere potuit, et diuersitati aliarum circumstantiarum minimarum, quae in eiusmodi experimentis non tolli in totum potest, forte tribuendae sunt. Aliqualem tamen differentiam adesse, et Mercurium motui a calore minus resistere probabiliter quam dicta fluida infra patebit.

4) Aquae vero et Spir. V. ordinarii decrementa et incrementa caloris etiam in aëre esse minora decrementis et incrementis caloris argenti viui, Exp. I, II, VI. consequenter etiam minora decrementis et incrementis Petrolei (coll. n. 3), etiam olei lini decrementa in aëre esse minora decrementis petrolei et consequenter Mercurii, Exp. XXIII. coll. Exp. XX.

§. 25. Haec consectaria licet videantur ex experimentis satis patere, alia ratione tamen confirmare volui, vt vt nullum dubium diuersitas Thermometrorum saltim et vasorum iniicere posset. Obseruaui saepius, per satis longum temporis interuallum, temperiem in Museo eandem, vt Thermometrum nullam mutationem indicaret; hinc finem sequenti ratione obtinere putaui.

Experim. XXIV.

§. 26. Elegi 1) vas vitreum cylindricum tenuium parietum, et ei infudi ad certam altitudinem fluidum examinandum (altitudo haec erat 11 lin. Lond. Diameter 30 lin. superficies integra fluidi in vase stagnantis 24'', 80''' □ et volumen 7'' 870''' ⊡.)

2) Thermometri bulbo fluido immerso calefeci vas cum fluido in aqua calida vsque ad gradum 130, hoc facto.

3) Extraxi ex aqua vas, et suspendi, ita, vt solum ab aëre 68 graduum contingeretur, et superficies fluidi superior et fundi essent parallelae.

4) Cum Mercurius Thermometri haereret circa gradum 128, incepi notare tempus ab initio obseruationis, et gradum Thermometri vsque dum calor fluidi examinandi decreuisset ad gradum centesimum.

5) Vno fluido examinato simili ratione reliqua examinaui in eodem vase, eodem Thermometro immerso, cuius quilibet gradus diuisus erat in 5 partes, eratque aequalis $\frac{5}{4}$ partibus lin. Lond.

6) Paulo maiorem altitudinem concessi argento viuo, quam reliquis fluidis examinandis, cuius rei rationem infra dabo.

Obseruationes cum Mercurio, oleo Terebinthinae, aqua, Spiritu vini ord. sequenti tabula comprehendo, vbi prima columna tempora ab initio obseruationis praeterlapsa in minutis primis exhibet, et reliquae columnae fluidorum supra positorum gradus caloris post definitum tempus residuos.

Post T.	cal. ☿rii	cal. ol. Ter.	cal. aq.	cal. Sp. V. o.
0, m. p.	128	128	128	128
2′	123	124, 2	124	125
4′	119, 4	120	120	121, 5
7′	114	114, 6	115	115, 8
9′	111	111, 6	112	112, 6
14′	104	104, 4	105, 8	105, 6
17′	100, 4	100, 4	102, 6	102, 4
17′ $\frac{35}{60}$	100,	100, 28	102,	101, 85
17′ $\frac{50}{60}$		100		
18′ $\frac{25}{60}$			100	
19′ $\frac{10}{60}$				100.

§. 27. Sunt ergo decrementa aequalibus temporibus ab initio obseruationum, vt sequens tabula indicat.

Post Temp.	decr. ☿rii	decr. ol. Ter.	decr. aq.	decr. S. V.
2 min. pr.	5, 0	3, 8	4, 0	3, 0
4	8, 6	8, 0	8, 0	6, 5
7	14, 0	13, 4	13, 0	12, 2
9	17, 0	16, 4	16, 0	15, 4
14	24, 0	23, 6	22, 2	22, 4
17	27, 6	27, 6	25, 4	25, 6
17, $\frac{35}{60}$′	28, 0	27, 72	26,	26, 15

§. 28. Alio tempore sal cinerum Clau. solutum, Spiritum vini rectificatissimum, cuius grauitas specifica ad grauitatem spec. aquae erat vti 861 ad 1000, et oleum lini nis examinaui in temperie aëris 65, 3 gr. et inueni.

Post. Temp.	Sp. V. R. cal.	Sal. cin. cl. sol.	ol. lini
0 min. pr.	128	128	128
2	123, 8	123, 8	127, 15
4	119, 8	120, 4	124, 8
7	113, 6	115, 6	120, 2
9	110,	112, 6	117,
14	101, 6	106	109, 6
15	110, 4	105	108
$15\frac{12}{60}$	100.		
$19\frac{54}{60}$		100	102
$21\frac{20}{60}$			100.

§. 29. Decrementa caloris hinc aequalibus temporibus ab initio obseruationum praeterlapsis erant, vti sequens tabula indicat.

Post Temp.	decr. cal. S. V. R.	Sal. cin. cl. sol.	ol. lini
2 min. pr.	4, 2	4, 2	0, 85
4	8, 2	7, 6	3, 20
7	14, 4	12, 4	7, 80
9	18, 0	15, 4	11, 00
14	26, 4	22, 0	18, 40

Si comparare volumus haec decrementa cum decrementis (§. 27), debemus haec reducere ad statum aëris temperiei 68 gr. quia decrementa temporibus paruis sunt in ratione differentiarum, inter temperiem fluidi et aëris, facilis erit reductio. Mutatur tali ratione tabula praecedens in sequentem.

Post Temp.	cal. decr. S. V. R.	Sal. cin. cl. sol.	ol. lini
2 min. pr.	4, 02	4, 02	0, 81
4,	7, 83	7, 22	2, 67

7,

7,	-	--	-- 13,72	--	11,78	-- 7,07
9,	-	--	-- 17,12	--	14,63	-- 10,11
14,	-	--	-- 25,01	--	20,85	-- 17,11

Haec tabula poteſt comparari cum tabula decrementorum calorum fluidorum tabulae §. 27. et apparet, decrementa initialia Mercurii etiam decrementis initialibus ſpiritus vini rectificatiſſimi, ſalis cinerum clauellatorum ſoluti, et olei lini eſſe maiora, ſal cin. cl. ſolutum tardius quam praedicta fluida, oleum lini vero etiam tardius quam ſal cinerum caluel. ſolutum refrigerari.

§. 30. Si reſpicio ad ea, quae *Tom. I. Nov. Comment.* in inquiſ. in legem decr. caloris §. 22. coll §. 25. dixi, eſſe ſcil. in homogeneis corporibus (poſitis ſuperficiebus integris vti S ad *s*, voluminibus vti V ad *v*, differentiis inter temperiem fluidi et aëris vti A ad *a*, decrementis aut incrementis initialibus vti B ad *b*) $B : b = \frac{SA}{V} : \frac{sa}{v}$, et decrementa et incrementa poſt tempus *n* vti $\frac{B(A-B)^{n-1}}{A^{n-1}}$ ad $\frac{b(a-b)^{n-1}}{a^{n-1}}$. Hoc inde fit, quia in corporibus homogeneis ratio pororum ad materiam conſtantem ſemper eſt eadem, multitudo etiam pororum ad multitudinem particularum ſe paratarum eandem habet rationem. Deinde per ſuperficiem cuiusuis corporis materia aequaliter diſperſa eſt, hinc pendet definita quaedam ad certam quantitatem caloris recipiendam et perdendam proprietas, vt decrementa et incrementa ſint in praedicta ratione, ita, vt, quo minor quantitas materiae mouendae ſit, et quo liberior ad eam acceſſus, vel ex ea exitus, id eſt, quo maior ſuperficies, eo maius ſit incrementum caloris et decrementum.

§. 31. In corporibus heterogeneis:

(a) Ratio pororum ad materiam constantem non est eadem, neque multitudo pororum in vno corpore aequalis est necessario multitudini pororum in alio, si vel maxime densitates sint eaedem, et volumina Geometrica eadem, et inde pendere potest infinita varietas, et multae discrepantes proprietates, quae efficere valent, vt corpora calori magis vel minus obnoxia reddantur.

(b) Corpora heterogenea, quae densitate differunt, sub aequalibus voluminibus Geometricis habent quantitates materiae constantis in ratione densitatum. Si superficies etiam sunt aequales, superficies materiae constantis etiam possunt esse in ratione densitatum, hoc casu materia mouenda actione ignis vnius corporis erit ad materiam mouendam alterius, vt superficies illius ad superficiem huius. Si s et v superficiem et volumen materiae constantis indicant, erunt $\frac{s}{v}$ hoc casu aequales, si $\frac{S}{V}$ sunt aequales.

(c) At possunt voluminibus et superficiebus Geometricis aequalibus superficies materiae constantis a ratione densitatum corporum recedere. Potest corpus ita excauatum esse canaliculis, vt per superficies internarum etiam partium ignis allapsus particulas interiores corporum ad motum concitare possit, vel in corpore calido per talem superficiem etiam medium frigidius versus tendere, et illud afficere, vt ita corpus eo maiorem quantitatem motus ab igne perdere possit, quo maior ei per superficiem maiorem libertas motum suum cum medio frigidiori communicandi datur, licet superficies Geometrica non differat a superficie alterius, quod eiusmodi proprietate carere potest. Si (1) volumen et superficies Geometrica corporum A et B ponatur aequalis, et (2) vtrumque constare certo numero particularum perfecte sphaericarum minimarum homogenearum primae compositionis. Sitque (3) numerus particularum in A $= n$, et in B $= m$; sit (4) densitas particularum in A $= \delta$, in B $= d$; sit (5) volumen summae particularum omnium in vtroque corpore $= v$; orientur (6) corpora interstitiis praedita ex sphaerulis composita, in quorum interiora materia subtilis ignis penetrare, et particulas commouere, ex iisque iterum liberis viis discedere poterit; eritque (7) vnius particulae volumen in A $= \frac{v}{n}$, et vnius particulae volumen in B $= \frac{v}{m}$; hinc (8) superficies particulae in A erit vti $\frac{v^{2:3}}{n^{2:3}}$, et in B vti $\frac{v^{2:3}}{m^{2:3}}$; erit ergo (9) superficies particulae in A ad superficiem particulae in B vti $m^{2:3} : n^{2:3}$, conseq. (10) superficies omnium particularum in A ad superficiem omnium in B vti $nm^{2:3} : mn^{2:3}$. Cum (11) quantitas materiae mouendae in A sit ad quantitates materiae mouendae vel calefaciendae in B $= \delta : d$, quia volumina sunt aequalia, erunt superficierum particularum summae diuisae per quantitates materiae vti $\frac{nm^{2:3}}{\delta} : \frac{mn^{2:3}}{d}$; Si ergo (12) $nm^{2:3}$ resp. $mn^{2:3}$ maior ponitur, quam δ respectu d, erit etiam decrementum vel incrementum caloris, si caetera sint paria in A maius quam in B. Ponatur (13) $\delta : d \lessgtr f : 1$, et $nm^{2:3} : mn^{2:3} = f : 1$, erit (14) $nm^{2:3} = f\, mn^{2:3}$, hinc (16) $\frac{n}{m} = f^3$; hinc erit (15) multitudo particularum in B ad multitudinem particularum in A vti 1 ad f^3; et (16) magnitudo vnius particulae in A ad magnitudinem vnius parti-

particulae in B vti 1 ad f^3, diameterque particulae ad diametrum particulae in B $= 1 : f$. Consequenter in rariori corpore sub his conditionibus diameter particulae superare debet diametrum particulae in densiori magis, quam densitas densioris densitatem rarioris, si decrementum et incrementum caloris densioris corporis maius esse debet decremento vel incremento caloris rarioris corporis. Sint densitates vti 14 ad 1, et f debebit esse $>$ 14, conseq. diameter particulae rarioris corporis plus quam quatuordecies maior esse debet diametro particulae densioris corporis.

(d) Potest etiam densitas superficiei materiae cum superficie externa Geometrica coincidentis densitatem totius valde superare. Ob diuisibilitatem materiae inassignabilis limitationis non dicam in infinitum progredientem, quantitas materiae parua per volumen finitum ita distributum concipi potest, vt pori sint qualibet extensione dabili minores, datoque volumine materiae constantis et volumine integro item multitudine pororum potest extensio pori inueniri. Sit volumen integrum V, volumen materiae v, erit volumen pororum $= V - v$; sit multitudo pororum $= n$, erit volumen vnius pori $= \frac{V-v}{n}$; si porus concipitur cubicus sex lateribus quadratis constantis materiae vestitus, et V ponitur $= 1001'''$ ◻; et deinde $n = 1^{IV}$, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, erit extensio pori millies trillionesima pars lineae cubicae, et $\left(\frac{V-v}{n}\right)^{1:3}$ siue radix cubuli vna decies millionesima pars lineae. Corpus vero ex talibus cubulis constructum habebit densitatem superficiei

ciei maximam, quam habere potest, densitas vero totius erit ad densitatem maximam possibilem, vt volumen constantis materiae ad volumen integrum $= 1 : 1001$; hinc densitas totius corporis erit ad densitatem superficiei vt 1 ad 1001. Vtrum in natura talia corpora dentur definire non valemus. Facile vero patet, talia corpora, si darentur, admodum cohaerentia esse debere, et dura, talemque structuram fluidis prorsus non conuenire, quibus sphaerica magis respondet. Ab hac densitate maxima potest densitas superficiei plus vel minus recedere, quatenus plus vel minus porulis superficies distinctus est. Hinc ratio superficiei constantis materiae ad quantitatem materiae superficie inuolutae infinitae varietati obnoxia est. Patet hinc, inanem esse laborem ex figura diuersa particularum, et peculiari structura totius rationem diuersitatis caloris petere et definire, cum minimae particulae sint supra inuestigationem nostram, dum sensus nostros fugiunt.

§. 32. In fluidis, quae probabiliter sphaericam figuram habent, diuersitas in calore recipiendo et perdendo forte pendet a magnitudine particularum homogenearum primae compositionis; de qua (§. 31, (c)) scripsi. Si hoc obtineret, positis decrementis initialibus $B : b$, corporum A et B voluminibus Geometricis aequalibus, et multitudine particularum in corpore A, quod decrementum B patitur ad multitudinem particularum in corpore, B, quod decrementum b patitur, vti $n : m$, et densitatibus vti $\delta : d$, erit $\frac{nm^{2:3}}{\delta} : \frac{mn^{2:3}}{d} = B : b$ (§. 31), hinc $m : n = d^3 b^3 \delta^3 : B^3$; hinc multitudo particularum in B ad multitudinem particularum in A $= d^3 b^3 : \delta^3 B^3$, et magnitudo

tudo particulae in A ad magnitudinem particulae in $B = d^3 b^3 : \delta^3 B^3$; diameter vero particulae in A ad diametrum particulae in $B = db : \delta B$. i. e. in ratione composita densitatum et decrementorum initialium reciproca. Hinc diameter particulae argenti viui esset ad diametrum particulae aqueae $= 1:17$ circiter; quia (§. 27) $B = 5$, $b = 4$, $\delta = 14$, $d = 1$; ad diametrum particulae olei Terebinthinae vti $1:19$ ferme, ad diametrum particulae Spiritus V, vti $1:26$ ferme. Particulam vero aquae minimam homogeneam primae compositionis minorem esse particulis similibus Spiritus vini et olei Terebinthinae nullum est dubium, quia hae ex aqua et aliis constitutiuis compositae sunt. Quamcunque tamen rationem habeant particulae et superficies particularum, et qualiscunque sit $\frac{s}{v}$, B et b, positis A et a aequalibus vti (§. 26), experientia definiri possunt, et erunt post tempus n in ratione $B(a-B)^{n-1}$ ad $b(a-b)^{n-1}$. Ponatur $B > b$, erit $(a-B)^{n-1} < (a-b)^{n-1}$. Hinc post aliquod tempus debet esse $(a-B)^{n-1} : (a-b)^{n-1} = b : B$, et tunc decrementa debent esse aequalia, si omnes reliquae conditiones praeter differentias inter temperiem fluidi et aëris manent pares. Potest hoc tempus n inueniri ex aequatione, $B(a-B)^{n-1} = b(a-b)^{n-1}$, et erit $n = \frac{lB - lb}{l(a-b) - l(a-B)} + 1$. Ita vero oleum Terebinthinae in 27 minutis primis, et aqua in 24 circiter, idem decrementum cum Mercurio pati deberent, quod sec: experientiam in 17 ad 19 minutis fit. Spiritus V. post 28. min. pr. cum Mercurio eandem temperiem acquirere deberet, quod in 19 min. fit. Spiritus V. et aqua deberent in 34 minutis ad eandem temperiem peruenire,

 quod

quod in 9 ad 14 minutis fit. Aqua et oleum Terebinthinae 31 minuto praeterlapso vnius temperiei esse deberent, quod quarto iam minuto contingit. Ratio huius recessus a lege pendet ab euaporatione saltem ex parte; Aqua Spiritus V. oleum Terebinthinae ob euaporationem $\frac{s}{v}$ accipiunt maius, conseq. etiam $\frac{s}{v}$ maius fit (§. 31. (b)), quam argentum viuum habet, cuius volumen manet constans. Quam ob rem Spiritus vini etiam debet plus euaporare in eadem temperie quam aqua, et aqua plus quam oleum Terebinthinae. Diuersimode etiam expanduntur fluida, hinc ratio magnitudinis particularum minimarum homogenearum primae compositionis mutatur (§. 31 (c)). Ex his simul patet, reliqua fluida, si non passa essent euaporationem, sicuti argentum viuum non passum est, adhuc minus decrementum aequalibus temporibus acquisiuisse. Intelligitur etiam, cur in experimentis altitudinem Mercurio in vase concesserim maiorem, quam reliquis fluidis (§. 26. (6)), ita $\frac{s}{v}$ in reliquis fluidis maior reddebatur, et hinc decrementum in reliquis fluidis ex hac causa debuit fieri maius, quam factum fuisset, si $\frac{s}{v}$ in reliquis fluidis mansisset aequalis $\frac{s}{v}$ in Mercurio. Ergo minora adhuc decrementa passa fuissent, ac re vera passa sunt, si $\frac{s}{v}$ in illis fuisset aequalis $\frac{s}{v}$ in Mercurio. Hinc confirmatur, maius decrementum caloris pati Mercurium quam dicta fluida. Vt rem vlterius stabilirem, concessit mihi primarius pharmacopoeiae praefectus *Modelius* pro sua erga me amicitia, et ad scientias promouendas desiderio, vt in laboratorio cum massa ☿rii 56 libr. sequentia experimenta instituerem.

Experi-

Experim. XXV.

§. 33. Massam Mercurii 56 librarum infudi vasi cupreo, et notaui in margine, ad quam altitudinem argentum stagnaret, deinde immersi Thermometrum, et notaui temperiem. Hoc facto vas igni in furno anemio admouebatur, et simul notabatur tempus, obseruataque est massa dicta a temperie 44 gr. incalescere quinque minutis primis ad gradum 242. Vase cupreo frigefacto, loco Mercurii infudi aquam ad praedictam notatam altitudinem, et notaui pariter gradum temperiei aquae, qui erat 44 gr. admouique vas eidem igni notato rursus tempore, et creuit calor nouem minutis a gr. 44. ad 212.

Experim. XXVI.

§. 34. Massam ☿rii 56 libr. calefactam infudi doliolo ligneo corio intus vestito, et immisi bulbum Thermometri per foramen in superiori parte corii factum in temperieque aëris 45. gr. obseruaui singulis horis temperiem massae, vt ex sequenti tabula videre licet, vbi appositum quinam gradus secundum calculum prodeant?

Post Temp.	cal. ☿rii obs.	cal. ☿rii per calc.
0 hora	120	120
1	97,6	97,6 per obseru. et hyp.
2	81,8	82 3
3	71,0	70,8
4	63,8	63 1
6	54,6	53,9
9	48,4	48.

§. 35. Si decrementum post $\frac{1}{n}$ temporis ponitur $a - x$, et a differentia initialis temperiei argenti viui et

aëris

aëris, differentiaque inter temperiem eiusdem et aëris post tempus $n = c$, erit per aequationem $\frac{x^n}{a^{n-1}} = c$, $lx = \frac{lc+(n-1)la}{n}$; habemus post horam vel 6. 10 min. pr. per obseruationem (§. 34) $c = 97,6 - 45,0 = 52,6$, et $a = 1200 - 450 = 750$ et $n = 6$; consequenter temperies post 10 min. pr. debet esse 115 . 6, et decrementum post idem tempus $= 44$. Ex his elementis calculus appositus est ortus, cuius mira harmonia cum obseruationibus satis demonstrat legis veritatem, et simul ratio facile perspicitur, cur Mercurius se legi exactius conformet quam aqua ex (§. 32). Notandum etiam circa Exper. XXVI. si massa non inuoluta fuisset corio, et crassities parietum dolioli lignei minor fuisset, quod celerius decreuisset temperies probabiliter.

Vt compararem decrementa caloris magnae massae Mercurii cum decrementis caloris magnae massae Aquae, sequens adhuc institui Experimentum.

Experim. XXVII.

§. 36. 1) Elegi vas ligneum coni truncati figuram habens, quod capiebat quatuor libras, et $\frac{1}{8}$ partem aquae, quae idem volumen occupabat, ac argentum viuum Exp. XXVI. quia grauitas spec. eius ad grauitatem specificam aquae inuenta erat, vti 13570 ad 1000. Superficies vero aquae integra erat paulo maior in vase ligneo conico, ac superficies argenti viui in dolio, quae superficiem sphaericam propius accedebat, erat haec ad illam ferme vti 38537 : 41200. Hinc $\frac{s}{v}$ in Mercurio debebat esse minor, quam $\frac{s}{v}$ in aqua. Et hinc decrementa caloris aquae ex ex hac cauſa deberent ſub eadem A maiora eſſe, quam decrementa in Mercurio, ſi ergo inueniantur ſaltem aequalia, rurſus patebit etiam ex his Experimentis, decrementa argenti viui eſſe maiora, quam aquae ſub iisdem $\frac{SA}{V}$.

2) Calefeci aquam, et impleui vas, Thermometrumque ei immiſi, poſtea obſeruaui in temperie aëris 34 gr. 1) tempus decreſcentis caloris, 2) temperies poſt notata tempora reſiduas, 3) appoſui ſimul calculum, poſita temperie aëris 34 gr. et 4) calculum, poſita temperie aëris 45. gr. vti Exper. XXVI. erat.

Poſt Temp.	cal. aq. obſ.	calc. ſub. 34 gr. aëris	calc. ſub 45 gr. aëris
0 min. pr.	169,6	- - -	
5	166,0		
75	125,4	126,4	128,3
0)90	- -	117,5	121,8
105	111,6	111,	115,9
135	101,3	99,5	102,1
1)150	- -	- -	100,6
165	92,3	89,7	96,3
2)210	- -	- -	85,3
225	79	74,4	- - -
3)270	- -	65,7	74,3
4)330	- -	56,9	66,1
405	53	53,3	59,1
6)450	- -	49,3	56,1
465	$47\frac{1}{2}$	45,1	55,2
600	39,9	39,3	49,9
9)630	- -	38,5	49,2
690	36,3.		

 Si

Si ponitur temperies aëris 45 gr. inuenitur decrementum post 5 min. pr. 3, 3 gr. temperies post idem tempus 166, 3 et post 630 min. pr. 49, 2 talique ratione maior temperie Mercurii post idem tempus; decreuit enim calor Mercurii a gr. 120 ad gr. 48, 2, nouem horis, et aqua sub eadem temperie aëris deberet 9 horis a gr. 121 sec: calculum peruenire ad temperiem 49, 2; hinc minus derementum pati quam Mercurius. Id confirmatur etiam post reliqua tempora, licet (1) euaporatio auxerit $\frac{5}{7}$ aquae, et conseq. decrem. (2) superficies aquae maior fuerit ab initio, et (3) massa aquae magis exposita, quam massa Mercurii corio involuti.

Tab. VI. Fig. 1. §. 37. Vt commode Experimenta eiusmodi institui possint, fiat (1) vas cupreum A B C D cuius fundum C B sit planum. (2) Ex vtraque parte in locis A et D sint aptatae columnae A E et D F, quae transuerso parallelepipedo E F coniunctae sint. 3) Parallelepipedum E F sit in distantiis a columnis A E et D F aequalibus excauatum secundum situm verticalem columnis parallelum, vt recipi possint commodae caudae ON et PQ Thermometrorum similium et aequalium IN et LP, et in cauitatibus deprimi et eleuari, cochleisque S et T eas ad cauitatum latera apprimentibus firmari. 4) Vasa vitrea I et L similia et aequalia, tenuium satis parietum, retortis oris praedita recipiantur ab annulis ligneis, qui bacillis *c d*, *a b*, *e f*, *g h* cum tabulis Thermometrorum coniuncti sint, vt vasa I et L eleuatis thermometris eleuari, et depressis Thermometris deprimi possint.

Vasi

Vaſi cupreo poteſt aqua infundi, et totus apparatus furno anemio UWVX imponi, vt ebulliente aqua vaſa examinandis fluidis plena illi immergi poſſint.

Poteſt etiam apparatus a furno tolli, et in commodo ad obſeruandum loco poni, ſi decrementa caloris obſervanda ſunt.

Loco vitreorum vaſorum poſſunt etiam lapidea adhiberi, quae vehementem et ſubitaneam temperiei mutationem facilius ſuſtinere valent.

Facile patet in idem vas cupreum etiam aquam frigidam infundi, et totum apparatum materiae frigorificae admoueri poſſe.

Tandem et Experimentum XXV. commode maxime inſtitui poteſt, Mercurium et aqaam vaſi cupreo ABCD infundendo, et ad ignem furni anemii calefaciendo.

DE RATIONE CALORVM ET RATIONE DENSITATIS RADIORVM DIRECTORVM AD DENSITATEM PER LENTEM REFRACTORVM DEFINIENDA COGITATIONES.

AVCTORE
G. W. Richmanni.

§. 1.

Talia nondum adminicula inuenta esse, quibus definiri possit, quoties vnus caloris gradus alium superet, et Thermometra nostra optima Mercurialia indicare, vnum gradum caloris esse maiorem altero, et prodere solum excessus dilatationum argenti viui supra volumen eius in Thermometris contenti sub definita quadam temperie, non vero veram calorum rationem exhibere, notum est. *Vnde Cel. S. Gravesande in Elem. Math. Phys. nouiss. edit.* n. 2423. *scribit. Non satis nota est relatio, quae datur inter mutationem in expansione, et mutationem in calore, vt ex comparatis dilatationibus gradus caloris possint conferri inter se.* Neque, quantum mihi constat, ostensum est, quomodo densitas radiorum per lentem refractorum in quauis distantia a foco, quouis tempore respectu densitatis radiorum directorum difiniri possit. Nemo dubitabit, vtramque inquisitionem ad perficiendam Philosophiam naturalem aliquid conferre posse. Cum ergo quaedam sese mihi de hisce rebus cogitanti obtulere, ea cum Societate communicare apud me constitui.

§. 2.

§. 2. Per vitra caustica radiorum solarium efficaciam augeri et maiorem obseruari in minori, minorem vero in maiori a foco vitri distantia notissimum est. Cumque densitates radiorum solarium vitrum causticum penetrantium, et in foco concurrentium sint in distantiis a foco diuersis, caeteris paribus, ferme in ratione inuersa quadratorum distantiarum a foco, facillimum videri poterit, positis caloribus in ratione densitatum radiorum, inuenire rationem calorum per Thermometra ordinaria et diuersis expansionibus liquoris Thermometrici numeros rationi praedictae congruentes assignare.

§. 3. Facile tamen patet:

1) Non eodem tempore in diuersis a foco distantiis Thermometra in axe coni radiantis locari et obseruationes simultaneas institui posse; vnius enim Thermometri bulbus in axe coni radiantis positus interciperet radios, vt ad alterius foco propinquioris bulbum non peruenirent.

2) Successiuas obseruationes cum vnico Thermometro in diuersis a foco distantiis erroribus occasionem praebere posse, cum radiorum solarium efficacia perpetuo mutetur.

3) Cum ipso vitro et vaporibus multi radii intercipiantur, ita, vt omnes non penetrent, et in foco concurrant, patet, radios naturalis densitatis cum radiis artificialis densitatis non facile comparari posse. Si enim calor Thermometro radiis solis directis exposito indicatus minor est, radii per eandem lentem refracti in eadem distantia a foco expansionem liquoris Thermometrici producunt saepius maiorem, quam si praedictus calor maior est. Hinc *Cel.* S. *Gravesande* in Elem. Math. Phys. nouiss: edit: n. 2523 scribit: „Effectus speculi minuitur, si ra-

„dii ſolares per aërem his radiis antea calefactum tranſ-„eant; quod demonſtrat, ignem maiori copia in partes „aëreas calidas penetrare, quam in alias„. Ipſam rem, efficaciam nempe radiorum ſolarium, ſi per aërem his radiis antea calefactum tranſeant, poſt vitra cauſtica minui, confirmatam vidi obſeruationibus a *Clariſſ. Lomonoſſovio* inſtitutis, quas mecum humaniter communicauit, dum in diuerſis in axe coni radiantis a lente diſtantiis Thermometri bulbum ad planum ligneum mobile lenti parallelum tempore aeſtiuali et hyemali adplicuit, et gradus Thermometri annotauit, ſimulque Thermometrum directis radiis ſolis oppoſuit, et eius gradus pariter annotauit. Non tamen videtur in culpa eſſe tranſitus ignis in aërem calefactum largior quam in alia corpora, ſed intercipi videntur potius radii a vaporibus inter vitra cauſtica et ſolem haerentibus, vt hinc pauci radii vitra penetrent et in focis concurrant.

§. 4. Anſam dedit. *Cl. Collega*, vt Experimenta ipſius partim repeterem, partim alia ratione inſtituerem, eum tamen ſolum in finem *, vt quilibet iudicare poſſit, quantum obſeruationibus eiusmodi tribuendum ſit, et difficulter radios directos cum radiis poſt lentem refractis ita comparari poſſe, aliamque viam ineundam mihi eſſe, ſi eiusmodi Experimentis calorum veram rationem definire vellem.

§. 5. *In diſtantia* 10 *dig. a foco, et* 30 *digit. a lente* locaui Thermometrum A, ita, vt bulbi Thermometrici medium in coni radiantis axi eſſet, et Thermometrum aliud B in

* Obſeruationes has medio menſe Iulii 1750. cum lente plano conuexa inſtitutas communicabo.

B in ſitu priori parallelo poſui, vt radii directi non refracti in illud eodem modo inciderent, notauique gradus Thermometri vnius et ſimul alterius.

	Gradus Ther. A	gradus Ther. B	differ.
1)	213	$96\frac{1}{2}$	$116\frac{1}{2}$
2)	$221\frac{1}{2}$	97	$124\frac{1}{2}$
3)	212	$93\frac{1}{2}$	$118\frac{1}{2}$
4)	210	93	117
5)	212	93	119
6)	213	94	119
7)	211	$94\frac{1}{2}$	$116\frac{1}{2}$
8)	214	95	119
9)	216	95	121
10)	215,5	95	120,5
11)	220	$95\frac{1}{2}$	124,5
12)	219	$94\frac{1}{2}$	124,5
13)	217	94	123
14)	210	$93\frac{1}{4}$	$116\frac{3}{4}$
15)	211	$93\frac{1}{2}$	$117\frac{1}{2}$
16)	213	94	119
17)	213	$94\frac{1}{2}$	$118\frac{1}{2}$
18)	212	$93\frac{1}{2}$	$118\frac{1}{2}$
19)	213	$94\frac{1}{2}$	$118\frac{1}{2}$
20)	$215\frac{1}{2}$	$94\frac{1}{2}$	121
21)	219	96	123
22)	222	$96\frac{1}{2}$	$125\frac{1}{2}$
23)	223	97	126
24)	221	$95\frac{1}{2}$	$125\frac{1}{2}$
25)	$219\frac{1}{2}$	95	$124\frac{1}{2}$
26)	$221\frac{1}{2}$	$94\frac{1}{2}$	127

27)	225	95	130
28)	226½	96	130½
29)	222½	96	126½
30)	222	96	126
31)	220	94	126
32)	221	94	127
33)	223½	94	129½
34)	226	95½	130½
35)	228½	97	131½
36)	229½	97	132½.

§. 6. Cum Thermometrum A asseri adplicatum erat, repetii obseruationes alio tempore, et curaui, vt nulla reflexione radiorum ab aliis corporibus, neque propinquitate corporum crassiorum calefactorum calor augeretur, et notaui.

	Gradus A	et gradus B	differ.
1)	180	88	92
2)	187	92½	94½
3)	188	100	88
4)	189	99	90
5)	191	99	92
6)	192	100	92
7)	194	100	94
8)	184	97½	86½
9)	182	94½	87½
10)	185	94	97
11)	186	94	92
12)	188	95½	92½
13)	189	97	92
14)	190	97½	92½
15)	190	101	89

16)

16)	192	100	92
17)	194	99	95
18)	195	100	95
19)	193	$101\frac{1}{2}$	$91\frac{1}{2}$
20)	195	$102\frac{1}{2}$	$92\frac{1}{2}$
21)	196	103	93
22)	187	$102\frac{1}{2}$	$84\frac{1}{2}$
23)	190	104	86
24)	194	104	90
25)	196	104	92
26)	196	103	93
27)	198	103	95
28)	$198\frac{1}{2}$	$102\frac{1}{2}$	96
29)	197	102	95
30)	181	101	80
31)	190	103	87
32)	192	$101\frac{1}{2}$	$90\frac{1}{2}$

§. 7. *In distantia* 20 *digit. a foco*, *et* 20 *digit. a lente* Thermometrum asseri adplicatum radiis refractis opposui, et notaui:

	Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,	differ.
1)	132	94	38
2)	135	95	40
3)	136	94	42
4)	135	93	42
5)	134	$91\frac{1}{2}$	$42\frac{1}{2}$
6)	133	$92\frac{1}{2}$	$40\frac{1}{2}$
7)	133	92	41
8)	133	91	42
9)	133	92	41

10)	- - $132\frac{1}{2}$ - - - - - -	92 - - - -	$40\frac{1}{2}$
11)	- - $132\frac{1}{2}$ - - - - - -	92 - - - -	$40\frac{1}{2}$
12)	- - 132 - - - - - -	92 - - - -	40.

§. 8. Alio tempore Thermometrum A ita posui, vt nulla reflexione radiorum a corporibus vicinis, neque calore eorum, affici potuerit, et notaui *in distantia* 20 *digit. a foco* :

	Gradus A,	et gradus B ante vitr. - -	differ.
1)	- - 110 - -	$97\frac{4}{5}$ - - - -	$12\frac{1}{5}$
2)	- - 114 - -	$97\frac{1}{2}$ - - - -	$16\frac{1}{2}$
3)	- - 114 - -	$96\frac{1}{2}$ - - - -	$17\frac{1}{2}$
4)	- - 114 - -	$96\frac{4}{5}$ - - - -	$17\frac{1}{5}$
5)	- - 115 - -	98 - - - -	17
6)	- - 120 - -	99 - - - -	21
7)	- - $117\frac{1}{2}$ - -	$97\frac{1}{2}$ - - - -	20
8)	- - 117 - -	96 - - - -	21
9)	- - $117\frac{1}{2}$ - -	98 - - - -	$19\frac{1}{2}$
10)	- - 118 - -	98 - - - -	20
11)	- - $119\frac{1}{2}$ - -	$99\frac{1}{2}$ - - - -	20
12)	- - $122\frac{1}{2}$ - -	$100\frac{1}{2}$ - - - -	22
13)	- - 123 - -	101 - - - -	22
14)	- - 124 - -	99 - - - -	25
15)	- - 110 - -	94 - - - -	16
16)	- - 122 - -	$99\frac{1}{2}$ - - - -	$22\frac{1}{2}$
17)	- - 121 - -	$100\frac{1}{2}$ - - - -	$20\frac{1}{2}$.

§. 9. Alio adhuc tempore coelo non prorsus sereno et aëre non tranquillo rursus Thermometrum A ita locaui, vt nulla reflexione radiorum a corporibus vicinis, neque calore eorum, affici potuerit, et obseruaui *in dist.* 20 *dig. a foco* :

Gradus

Gradus Ther. A, et	gradus Therm. B ant vitr. --	differ.
1) -- $96\frac{3}{4}$	87	$9\frac{3}{4}$
2) -- 96	86	10
3) -- 97	86	11
4) -- 99	86	13
5) -- 100	86	14
6) -- 98	85	13
7) -- 100	86	14
8) -- $101\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{2}$	15
9) -- $101\frac{1}{3}$	$86\frac{1}{5}$	$15\frac{1}{8}$.

§. 10. *In distanti a* 30 *digit. a foco, et* 10 *a lente* Thermometrum A, asseri adplicatum, radiis refractis, exposui et notaui:

Gradus Therm. A et	gradus Therm. B ante vitr. --	differ.
1) -- 115, 5	100, 5	15
2) -- 115	97, 3	17, 7
3) -- 115	97	18
4) -- 115	97	18
5) -- 115	97	18
6) -- 113	96	17
7) -- 114	96	18
8) -- 114, 5	95, 5	19
9) -- 114	95	19
10) -- 113, 5	95, 5	18
11) -- 114, 5	96, 5	18
12) -- 116, 5	96, 5	20
13) -- 117	96, 5	20, 5
14) -- 116, 5	96, 5	20
15) -- 115, 5	96, 5	19

§. 11. Alio tempore curaui, vt nulla reflexione radiorum ab aliis corporibus, neque propinquitate corporum craſſiorum calefactorum calor augeretur, et notaui *in diſt.* 30 *dig. a foco*:

Gradus	Therm. A,	et gradus B ante vitr.	differ.
1)	109	95	14
2)	110	96	14
3)	$110\frac{1}{2}$	$96\frac{1}{2}$	14
4)	111	97	14
5)	$111\frac{1}{4}$	97	$14\frac{1}{4}$
6)	112	97	15
7)	$114\frac{1}{2}$	$99\frac{1}{2}$	15
8)	112	$96\frac{1}{2}$	15
9)	113	97	15
10)	$113\frac{1}{2}$	98	$15\frac{1}{2}$
11)	$113\frac{1}{2}$	$98\frac{1}{4}$	$15\frac{1}{4}$
12)	114	99	15
13)	114	$98\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$
14)	112	97	15
15)	111	$96\frac{1}{2}$	$14\frac{1}{2}$
16)	107	93	14
17)	106	93	13
18)	$107\frac{1}{2}$	94	$13\frac{1}{2}$
19)	$107\frac{1}{2}$	$93\frac{1}{2}$	14.

§. 12. Alio tempore coelo non prorſus ſereno et aëre non tranquillo repetii *in eadem diſtantia a foco*, et eadem cautione adhibita obſeruationes, et notaui:

Gradus	Therm. A,	et gradus Therm. B,	differ.
1)	88	$85\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
2)	88	86	2

3)

3)	88$\frac{1}{2}$	86$\frac{1}{2}$	2
4)	86	85	1
5)	86	85	1
6)	86$\frac{1}{2}$	85	1$\frac{1}{2}$
7)	87	86	1
8)	87	86$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
9)	87$\frac{1}{2}$	86$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$.

§. 13. Alio tempore coelo non prorſus ſereno et aëre non tranquillo notaui *indiſtanti a* 30 *digit. a foco*:

	Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B ante vitr.	differ.
1)	90	87$\frac{1}{2}$	2$\frac{1}{2}$
2)	90	89$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3)	89	88	1
4)	90	89$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
5)	92	91	1
6)	91	91$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
7)	91	89	2
8)	92	88$\frac{1}{2}$	3$\frac{1}{2}$
9)	87	83	4
10)	88	82	6
11)	89$\frac{1}{2}$	82	7$\frac{1}{2}$
12)	89$\frac{3}{4}$	81	8$\frac{3}{4}$
13)	84$\frac{1}{2}$	80$\frac{1}{2}$	4
14)	84$\frac{1}{2}$	83$\frac{1}{2}$	1
15)	86	85	1
16)	87$\frac{1}{2}$	87	$\frac{1}{2}$
17)	87	87	0
18)	87	87	0

§. 14. *In distantia 9 digit a lente, et 31 digit. a foco*, coelo non prorsus sereno et tranquillo collocaui Thermometrum, vt antea notaui:

	Gradus A,	et gradus B ante vitr.	differ.
1)	88	87	1
2)	87	87	0
3)	87	87	0
4)	86$\frac{1}{2}$	86$\frac{1}{2}$	0

In distantia 8 digit. a lente, et 32 a foco:

	Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,	differ.
1)	86$\frac{3}{4}$	85$\frac{3}{4}$	1
2)	86	85	1
3)	85	85	0

In distantia 7 digit. a lente, et 33 a foco.

	Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,	differ.
1)	85$\frac{1}{2}$	85$\frac{1}{2}$	0
2)	85	85	0
3)	85$\frac{1}{2}$	85	$\frac{1}{2}$

In distantia 6 digit. a lente, et 34 dig. a foco:

	Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,	differ.
1)	86	86$\frac{1}{2}$	— $\frac{1}{2}$
2)	87	87	0
3)	87$\frac{1}{2}$	88	— $\frac{1}{2}$

§. 15. Alio tempore collocaui Thermometri A bulbum *in distantia 35 dig. a foco, et 5 dig. a lente*, et obseruaui

	Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,	differ.
1)	105$\frac{1}{2}$	95	10$\frac{1}{2}$
2)	102	93$\frac{1}{2}$	8$\frac{1}{2}$

3)

3)	$102\frac{1}{4}$	$93\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$
4)	105	97	8
5)	$106\frac{3}{4}$	$97\frac{1}{4}$	$9\frac{1}{2}$

§. 16. Alio tempore coelo non prorſus ſereno et tranquillo notaui *in diſtantia* 35 *dig. a foco*:

Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,	differ.
1) 85	86	— 1
2) 83	84	— 1
3) 83	85	— 2
4) $83\frac{3}{4}$	$84\frac{3}{4}$	— 1
5) $83\frac{1}{2}$	$84\frac{1}{4}$	— $\frac{3}{4}$
6) $84\frac{1}{2}$	86	— $1\frac{1}{2}$
7) 84	$85\frac{1}{2}$	— $1\frac{1}{2}$
8) 83	85	— 2
9) $83\frac{1}{2}$	82	+ $1\frac{1}{2}$
10) $83\frac{1}{2}$	83	+ $\frac{1}{2}$
11) $84\frac{3}{4}$	$84\frac{3}{4}$	0
12) $84\frac{3}{4}$	$85\frac{1}{2}$	— $\frac{3}{4}$
13) $84\frac{3}{4}$	86	— $1\frac{1}{4}$
14) 85	$86\frac{1}{2}$	— $1\frac{1}{2}$
15) 85	$86\frac{3}{4}$	— $1\frac{3}{4}$
16) 84	$86\frac{3}{4}$	— $2\frac{3}{4}$
17) 84	86	— 2
18) $83\frac{1}{2}$	86	— $2\frac{1}{2}$
19) 84	86	— 2
20) 84	$86\frac{1}{2}$	— $2\frac{1}{2}$
21) 84	$86\frac{1}{3}$	— $2\frac{1}{3}$
22) $84\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{3}$	— $1\frac{5}{6}$
23) $84\frac{1}{2}$	$87\frac{1}{3}$	— $2\frac{5}{6}$
24) 85	$87\frac{1}{3}$	— $2\frac{1}{3}$

25))

25)	85	88	-3
26)	85	88	-3
27)	85	88	-3
28)	$85\frac{1}{2}$	$88\frac{1}{3}$	$-2\frac{5}{6}$

§. 17. Auxi diſtantiam Thermometri a foco, et collocaui illud *in diſt.* 37 *dig. a foco*, et 3 *digit. a lente*, vt antea, et obſeruaui:

Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,		differ.
1)	82	83	-1
2)	83	83	-0
3)	$83\frac{1}{2}$	83	$+\frac{1}{2}$
4)	83	83	0
5)	84	85	-1
6)	$84\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	-1
7)	$84\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{2}$	-2
8)	85	$86\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$
9)	84	$85\frac{3}{4}$	$-1\frac{3}{4}$
10)	$83\frac{1}{2}$	85	$-1\frac{1}{2}$
11)	$82\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	-3
12)	82	$84\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$

§. 18. Auxi rurſus diſtantiam a foco et *in diſt.* 38 *dig. a foco*, et 2 *digit. a lente* collocaui Thermometri bulbum in coni radiantis axi, et notaui:

Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,		differ.
1)	84	85	-1
2)	85	$85\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
3)	85	86	-1
4)	$84\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{2}$	-2
5)	84	$86\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$

6)

6)	84	87	-3
7)	$84\frac{1}{2}$	87	$-2\frac{1}{2}$
8)	$84\frac{1}{2}$	84	$+\frac{1}{2}$
9)	$84\frac{1}{2}$	84	$+\frac{1}{2}$
10)	$84\frac{1}{2}$	85	$-\frac{1}{2}$
11)	$84\frac{1}{2}$	85	$-\frac{1}{2}$
12)	$84\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	-1
13)	85	$85\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
14)	85	86	-1
15)	$84\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	-1
16)	$84\frac{1}{2}$	$84\frac{1}{2}$	0
17)	84	85	-1
18)	84	85	-1
19)	84	$85\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$
20)	85	$86\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$
21)	86	86	0
22)	$85\frac{1}{2}$	86	$-\frac{1}{2}$
23)	$85\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	0
24)	$85\frac{1}{2}$	86	$-\frac{1}{2}$.

§. 19. Auxi rursus distantiam a foco, et collocaui Thermometri A bulbum *in dist.* 39 *dig. a foco*, et 1 *digiti a lente* in coni radiantis axe, et obseruaui:

Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B	- - differ.
1) 87	$86\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
2) $87\frac{1}{2}$	$85\frac{3}{4}$	$+1\frac{3}{4}$
3) $87\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	$+2$
4) $87\frac{1}{2}$	85	$+2\frac{1}{2}$
5) 88	$85\frac{1}{2}$	$+2\frac{1}{2}$.

§. 20. Thermometrum A tandem collocaui ita in coni radiantis axe, vt contingeret ipsam lentem, et notaui:

Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B	differ.
1) - - - - 88	- - - - - 86	- - - + 2
2) - - - - 89½	- - - - - 86	- - + 3½
3) - - - - 90	- - - - - - 86½	- - - + 3½
4) - - - - 89	- - - - - - 86½	- - + 2½
5) - - - - 90	- - - - - - 88	- - + 2
6) - - - - 91	- - - - - 89	- - + 2
7) - - - - 90	- - - - - - 89	- - + 1
8) - - - - 90	- - - - - 88	- - + 2
9) - - - - 90	- - - - - 87½	- - + 2½
10) - - - - 90	- - - - - 88	- - + 2.

§. 21. Si ad has obseruationes attendimus, statim patet, radios directos cum radiis refractis commode comparari non posse. Si enim liceret comparare: 1) Crescente efficacia radiorum directorum, crescere etiam deberet constanter efficacia radiorum refractorum, et contra. Quaedam obseruationes sese huic legi accommodant, plures tamen recedunt ab ea. 2) Eidem gradui a radiis directis producto semper idem gradus a refractis productus respondere deberet, et eidem gradui a radiis refractis producto idem gradus a radiis directis productus: vtrumque fieri nequit; quia calor a radiis solaribus in Thermometris productus non aeque velociter decrescit, ac radiorum solarium numerus interpositione vaporum minui potest.

§ 22. Deberet etiam maior differentia graduum Thermometri a radiis refractis et directis productorum obseruari, si maior gradus Thermometri a radiis directis producitur, et contra. Ponatur enim efficacia radiorum directorum ad efficaciam radiorum refractorum per totum tempus obseruationum $= a : na$, erit differentia $na - a$.

Ponatur

Ponatur incrementum efficaciae radiorum directorum $= b$; erit $a : na = a + b : (a + b)n$. Erit hinc efficacia radiorum refractorum $(a + b)n$; Vnde differentia efficaciae radiorum refractorum et directorum $= (a + b)n - (a + b)$. Erunt hinc differentiae vt $a : (a + b)$ i. e. in ratione efficaciarum radiorum directorum. Est vero $(a + b) > a$; ergo etiam differentia calorum radiis refractis et directis productorum maior esse deberet, si maior calor a radiis directis producitur; hinc etiam differentia graduum Thermometrorum in hoc casu maior esse deberet, quod non semper obtinet, vt ex obseruationibus allatis videre licet. Obseruationes §. 11. tamen respondent satis praedicto requisito.

§. 23. Si ponuntur calores in ratione inuersa quadratorum distantiarum a foco, differentiae graduum Thermometri non sunt in eadem ratione, in qua sunt differentiae calorum constanter. Erit enim sub hac conditione calor Thermometro A indicatus ad calorem Therm. B indicatum (§. 6.) vt $16 : 1$, et (§. 8.) vt $4 : 1$. Medius omnium graduum A (§. 6.) est $190\frac{19}{32}$, et medius omnium graduum B eiusdem §. $99\frac{17}{32}$, ergo differentia media $91\frac{1}{16}$. Medius omnium graduum A (§. 8.) erit $117\frac{10}{17}$, et omnium graduum B $98\frac{3}{17}$, et differentia media $19\frac{7}{17}$. Est autem $16 - 1 : 4 - 1 = 15 : 3 = 91\frac{1}{16} : 18\frac{1}{5}$, et deberet esse sec. obseruationes vt $91\frac{1}{16} : 19\frac{7}{17}$; parua ergo est differentia. Si autem calor distantiae 10 digit. a foco confertur cum calore distantiae 30 digit. a foco, erit medius graduum A (§. 11.) $= 111$, et medius graduum B (§. 11.) $= 96\frac{8}{19}$, hinc differentia media $14\frac{11}{19}$. Erit autem calor Therm. A indicatus ad calorem Therm. B indicatum (§. 11.) sub praedicta conditione vt $16 : 9 = \frac{16}{9} : 1$,

et

et (§. 6.) vt 16 : 1. Est 16 - 1 : $\frac{16}{9}$ + $\frac{3}{8}$ = 15 : $\frac{5}{9}$ = 91 $\frac{1}{18}$: 4 $\frac{27}{133}$, et deberet esse vt 91 $\frac{1}{18}$: 14 $\frac{11}{19}$ sec. obseruationes, magna ergo est discrepantia. Est etiam 4 - 1 : $\frac{16}{9}$ - 1 = 3 : $\frac{7}{9}$ = 19 $\frac{7}{17}$: 5 $\frac{1}{17}$, collatis §. §. 8. et 11. et deberet esse vt 19 $\frac{7}{17}$: 14 $\frac{11}{19}$ sec. obseruationes (ibid.); magna ergo rursus discrepantia apparet inter suppositionem et obseruationes. Cum ratio differentiarum graduum Thermometri probabiliter non possit recedere multum a ratione differentiarum calorum; patet, descripta ratione, calorum rationem non definiri.

§. 24. Nec mirum est, tantum enim abest, vt in omni distantia post vitrum calor augeatur, vt potius minuatur ob interpositionem vitri et vaporum. Conf. §. 13. obs. 6, et §. 16. obseruationes in distantia quinque digitorum a lente, §. 17. obseruationes in distantia 3 digitorum a lente. Si constaret, vbinam post vitrum radii refracti eandem efficaciam habeant, quam radii non refracti eodem tempore, et a quo puncto appropinquando magis magisque ad focum efficacia radiorum refractorum crescat, posset definiri, quantum efficaciae interpositione vitri et vaporum pereat, et ratio excessuum calorum super calorem in vmbroso aëre exhiberi in diuersis a foco Fig. 2. distantiis. An ad hunc vsum lentium aliquis antea attenderit? nescio.

§. 25. Quodsi enim radii nullum obstaculum offenderent, et omnes a sole venientes per lentem *a b* frangerentur; densitas radiorum in D deberet esse ad densitatem radiorum in A, vt $(ab)^2 : (cd)^2$. At habent in distantia D radii refracti eandem efficaciam, quam radii directi (per hyp.), ergo radii multi intercipi a vitro et vaporibus debent, ita, vt non plus radiorum refractorum

in

in planum D incurrat, quam in eandem aream absque lente radiorum directorum incideret. Est hinc densitas radiorum refractorum in distantia A D post vitrum, vitro et vaporibus diminuta aequalis densitati radiorum directorum interpositione vaporum diminutae.

§. 26. Inter D et lentem radii loco D proximi minorem debent habere efficaciam ob minorem densitatem, quam radii directi, quod obseruationes confirmant, vti dictum §. 24. Si efficaciae radiorum accedendo magis magisque ad lentem perpetuo decrescerent, minima tandem esse deberet in contactu cum vitro, nisi calor vitri a radiis solaribus productus maior quam aëris ambientis efficeret, vt gradus Thermometri in parua distantia post lentem maior obseruetur, quam si Thermometrum ab aëre radiis directis calefacto contingitur, conf. §. §. 19. 20. In distantia maiori a lente, vbi calor vitri non pertingit, minor obseruatur Thermometri gradus, quam ille, qui a radiis aërem directe calefacientibus producitur; donec in distantia quadam sit idem cum gradu Thermometri a radiis directis calefacti.

§. 27. Quodsi ergo coelum serenum est, et hinc probabiliter vapores aequaliter dispersi, posset definita distantia D de vaporum copiosiori vel parciori interpositione iudicari. Si excessus caloris radiorum directorum super calorem in vmbra est paruus, tunc multi vapores debent intercipere radios, et numerus radiorum directorum debet esse minor, quam si calor radiorum directorum est idem, vti antea, et excessus istius super calorem in vmbra maior. Numerus radiorum directorum vero, quo est minor, eo minor est distantia D. Sit $AF = P$ et $DF = D$,

 erit

erit numerus radiorum interceptorum ad numerum radiorum residuorum vti $(ab)^2 - (cd)^2 : cd^2 = F^2 - D^2 : D^2$; i. e. vti differentia inter quadratum distantiae focalis, et quadratum distantiae a foco, vbi radii refracti eandem habent efficaciam, quam directi ad quadratum distantiae a foco, vbi radii refracti aequalem efficaciam habent cum radiis directis, ita numerus radiorum interceptorum ad numerum radiorum residuorum, tam in Thermometrum in axe coni radiantis in distantia D positum, quam in Thermometrum radiis solis directis expositum virtutem exerentium. Numerus radiorum interceptorum etiam est, vti numerus vaporum radios intercipientium, quo minor ergo D est, eo maior erit numerus vaporum, et quo maior illa est, eo minor erit numerus vaporum. Si $D = F$ nihil radiorum intercipi debet. Sint distantiae D vti $d : nd$, et $n > 1$; erit copia vaporum casu illo vbi $D = d$, ad copiam vaporum illo casu, quo $D = nd$ $F^2 - d^2 : F^2 - n^2 d^2$, et $F^2 - d^2 > F^2 - n^2 d^2$. Tali ergo ratione de maiori et minori multitudine vaporum in Atmosphaera coelo sereno iudicium ferri posse probabile est, si Machina ita construatur, vt distantia D facile inueniri possit.

§. 28. Si in ipso foco densitas radiorum refractorum est aequalis densitati radiorum directorum, et calor a radiis directis productus non maior quam calor in vmbra, D erit $= 0$, hinc omnes radii intercipientur, et lens non augebit calorem.

§. 29. Ex his satis apparet, quomodo de efficacia caloris in sectione coni radiantis a lente producti iudicare debeamus, et quomodo ratio densitatis radiorum lente

te

te refractorum ad densitatem radiorum directorum definiri debeat.

§. 30. Vt potioribus impedimentis obuiam ire, et diuersas radiorum in diuersis spatiis collectorum efficacias comparare valeamus, non parum forte faciet, si duas lentes aequalium distantiarum focalium et earundem amplitudinum et crassitierum ex simili vitro confectas, verbo duas lentes similes et aequales eligamus, et in diuersis a foco distantiis in vtriusque coni radiantis axe Thermometri bulbum collocemus.

§. 31. Hac ratione obtinebitur:

1) Tantum radiorum intercipi ab vna lente, quantum ab altera.

2) Tot radios penetrare per vnam lentem, quot penetrant per alteram.

3) Per idem tempus in vnius Thermometri bulbum efficaciam suam exerere radios solares, per quod exerunt in alterius Thermometri bulbum. Et erunt:

4) densitates radiorum ferme in ratione inuersa quadratorum distantiarum Thermometrorum a focis, et in eadem ratione efficaciae radiorum refractorum. Quodsi ergo gradus Thermometrorum simul obseruentur in diuersis distantiis, ratio calorum horum graduum vera siue potius excessuum calorum super calorem in vmbra innotescet; erunt enim excessus illi in eadem praedicta ratione inuersa quadratorum distantiarum a focis. Hos excessus calorum respectiuos calores nominare licebit.

§. 32. Vt constet, quomodo commode hae obseruationes institui possint, sequentia addo: Tab. VII. Fig. 1.

1)

1) Includantur lentes tabulae quadrangularis ligneae *a b c d* foraminibus A et B, diſtantia focalis vtriusque lentis ab vna parte planae, ab altera conuexae ſit quadraginta digitorum Londinenſium, et diameter vtriusque et amplitudo octo digitorum.

2) Firmetur tabula *a b c d* ad aliam tabulam *c d e f* normaliter, et ſit longitudo tabulae *c d e f*, 60 dig. Londinenſium, quae ex vtraque parte in 60 partes aequales diuiſa ſit.

3) Jungatur extremitati *e f*, et firmetur normaliter ad tabulam *e c d f*, tabula lingnea *e f m l* parallela tabulae *a b c d*, et concipiantur perpendiculares ex centris lentium B *r* et A *q* continuatae vsque ad tabulam *e f l m*, et in *q* et *r*, vbi tabulam penetrarent, fiant circuli.

4) Fiant fulcra C D E F et G H I K, quae pariter in ſitu cum tabulis deſcriptis parallelo, et in diuerſis a focis lentium diſtantiis ad tabulam *c d e f* firmari poſſint.

5) Tranſeant per iuga C D et I H cochleae, ad quarum extremitates Thermometra exacte reſpondentia aequalium quantum poteſt eſſe, et ſimilium bulborum firmari poſſint, et ita earum ope Thermometra deprimi et eleuari, vt centra bulborum Thermometricorum a lineis B *r* et A *q* ſecentur.

6) Inſiſtat tota Machina pedi tali, vt in plano horizontali circumduci, et in plano verticali ſimul deprimi et eleuari poſſit. Circa medium nempe tabulae *c d e f*, ex vtraque parte procumbant axes cylindrici, qui penetrant foramina cylindrica L et O fulcrorum L M et N O, et illa exacte expleant, ita, vt ſola frictione tota Machina deſcripta in qualibet inclinatione ſeruetur immobilis, vel ſi

Fig. 1. et Tab. VI. Fig. 3.

si hoc non sufficit, firmetur per cuneos per axes cylindricos diametraliter perforatos transeuntes.

7.) Fulcra L M et N O contineantur tigno M N, cui in medio iunctus sit cylindrus ligneus P Q. Recipiatur cylindrus ligneus P Q foramine cylindrico cylindri amplioris R S, qui ad mensam robustam T V W X firmatus sit. Tali ratione fulcrum cum Machina verti poterit circa axin P Q, et circa axin L O deprimi et eleuari, ita vt lentes in quolibet situ solis, soli opponi possint.

8.) Lentes soli ita obuertantur, vt radii solares circulos luminosos forment *e f l m*, circulos ibi delineatos tegentes.

9.) Deprimantur vel eleuentur Thermometra, ita vt vmbrae bulborum circa centra circulorum luminosorum in *q* et *r* appareant.

10.) Ad obseruationes cum hac Machina commode instituendas tres requiruntur obseruatores, vnus notat gradus Thermometri W V, alter simul Thermometri X Y signo accepto, et tertius obseruat gradus Thermometri in loco vmbroso. Potest etiam quartus obseruare gradus Thermometri radiis solis directis expositi. Adhuc aliquis debet vnice sollicitus esse de Machina secundum solis motum ita dirigenda, vt vmbrae bulborum in centris circulorum luminosorum in *r* et *q* appareant.

§. 33. Quodsi lentes aequales et similes non obtineri possunt, post vnam lentem vtrumque Thermometrum tam W V quam X Y in diuersis a foco distantiis ponendum est, ita, vt vmbrae bulborum in aequalibus a circuli luminosi in planum *m l f e* proiecti centro distantiis appareant. Et caetera fiant, vt §. 32. monuimus.

§. 34. Si diuturnae cum hac Machina obseruationes sub distantiis Thermometrorum diuersis factae sint, ex diario obseruationum notentur simultaneae obseruationes, et computentur rationes efficaciarum radiorum solarium refractorum, et ea ratio exprimet simul rationem calorum respectiuorum graduum Thermometricorum notatorum. Eadem ratione ex reliquis obseruationibus aliorum graduum calores respectiui, in qua ratione sint, definiri poterit. et tandem Thermometrum genuinum condi, quo calores respectiuos exactius metiri licebit. Si maiora vitra adhibeantur, calor metallorum fusorum definiri poterit, si post vnum vitrum Thermometrum collocetur in distantia conuenienti a foco, post alterum in foco ipso, vel in distantia a foco, vbi incipit fundi, lamina metallica teneatur.

§. 35. Tali Thermometro obtento distantia sectionis coni radiantis, vbi radii refracti eandem densitatem habent, ac radii directi facile inueniri poterit. Obseruetur (1) Thermometro praedicto calor respectiuus radiorum directorum, ponatur is $= a$ 2) calor respectiuus radiorum refractorum in parua distantia a foco, ponatur is $= b$, et distantia respondens $= d$, et distantia inuenienda $= x$, erit $x^2 : d^2 = b : \frac{bd^2}{x^2}$. Hinc erit $x = d \sqrt{b : a}$. Si ergo lens accurate elaborata, distantiae focalis longioris commode fulciatur cum Thermometro, in certa distantia a foco firmato, vt soli ita opponi possit, vt bulbus Thermometri in coni radiantis axi sit, potest ex notato calore per Thermometrum ex distantia nota, et ex calore radiis directis producto, distantia D inueniri, et ex hac distantia et distantia focali numerus, qui comparatus cum numeris ex sequentibus similibus obseruationibus similiter inuentis, det rationem radiorum interceptorum et vaporum radios intercipientium (§. 27.).

EMEN-

EMENDATIO
LATERNAE MAGICAE
AC
MICROSCOPII SOLARIS.

AVCTORE

L. Eulero.

§. 1.

Cum constructio et effectus horum duorum instrumentorum Dioptricorum satis sit cognitus, incommoda et vitia, quibus ea laborant, ante commemorabo, quam eorum emendationem exponam. Primo autem obiecta, quae per vtrumque horum instrumentorum repraesentare volumus, pellucida esse debent, ita vt ab vna parte illuminata etiam ex altera parte splendeant, atque illuminatio quasi per ipsum obiecti corpus penetret. Hinc pro Laterna Magica obiecta, repraesentanda super tabulis vitreis pingi solent, idque coloribus tenuibus ac diaphanis, vt pictura pelluciditati nullum detrimentum afferat. Pro Microscopio autem solari minima obiecta, quorum imago per id in oppositam tabulam albam proiicitur, tam tenuia esse opportet, vt pro diaphanis haberi queant. Vnde non solum hoc incommodum nascitur, quod non omnis generis obiecta per haec instrumenta repraesentari queant, sed etiam, cum perfecta pelluciditas etiam in iis obiectis, quae aptissima videntur, inesse non possit, eius defectus necessario in repraesentatione obscuritatem et confusionem pariet.

§. 2. Deinde obiecta in his instrumentis non in ea parte, quae lenti refringenti est obuersa, sed in altera parte auersa illuminantur, quam ob caussam quoque ea pellucida esse debent. In Laterna enim Magica figurae super vitro depictae a luce pone eas posita illuminari solent, quod lumen etiam a speculo augetur. In Microscopio autem solari obiectum a radiis solis ope speculi in id reflexis, et per lentem conuexam magis collectis illustratur, idque in ea etiam parte, quae a lente Microscopica est euersa. Hinc fit, vt ea facies, quae proprie in effigie repraesentari debet, non nisi ob pelluciditatem illuminetur, et si quae partes sint opacae, eae penitus inconspicuae maneant, quod quidem vitium iam ante est commemoratum. Sed praecipuum incommodum, quod hinc nascitur, in hoc consistit, quod plurimi radii lucis vel solis per obiectum penetrent, atque tabulam albam, effigiei excipiendae destinatam illuminent. Constat autem, vt effigies in tabula alba clare exprimatur, omne lumen alienum ab hac tabula sollicite arceri debere: ita vt nulli alii radii, nisi qui ab ipso obiecto emittuntur, eiusque quasi formam continent, in tabulam incidant. Ex quo intelligitur, repraesentationem effigiei in tabula alba ob istud lumen alienum a luce vel sole immediate profectum non mediocriter infringi debere.

§. 3. Denique hi radii alieni tabulam illuminantes ibidem imaginem quandam confusam lucis vel solis exhibebunt, quae quidem in Laternis Magicis lente peculiari ipsi obiecto contigua magis confusa redditur, vt nulla flammae species determinata dignosci queat. Interim tamen vtcunque ista imago fuerit confusa, ea semper erit imagini verae permixta, eamque corrumpet. Praeterea vero hi radii ob diuersam refrangibilitatem imaginem di-

uersis

uerfis coloribus inquinabunt, quod incommodum imprimis in Microfcopio folari animaduertitur, per quod fingulae obiecti partes coloribus iridis circumfufae apparent, quibus incommodis efficitur, vt in effigie per Microfcopium folare repraefentata nihil fere diftincte fpectari queat. Ad quae ingentia impedimenta accedit, quod vulgo non folum lentibus nimis magna apertura tribuitur, fed etiam obiecto nimis magna amplitudo relinquitur, vnde radii ab obiecti extremitatibus in lentem nimis oblique incidunt. Hinc notabilis confufio per totam effigiem fuper tabula expreffam iniicitur, hinc vero partes effigiei extremae vehementer confundantur, vt faepe vix agnofci queant.

§. 4. Quo facilius intelligi poffit, quibus remediis haec incommoda tolli queant, videamus, quibusnam rebus opus fit ad claram et diftinctam cuiusuis obiecti repraefentationem efficiendam. Sit igitur FEG obiectum, cuius imago per lentem conuexam MM fuper tabula alba TV diftincte exhiberi debeat, quae cum fitu inuerfo appareat, fit *feg*. Obiectum hic FEG tanquam fpatio circulari terminatum confidero, cuius diameter fit FG, et centrum E, quo melius eius quantitatis ratio haberi poffit, ita vt in tabula TV maior imago non fit repraefentanda, quam quae ab ifto circulo FEG producitur. Iam de obiecti huius ratione fequentia funt tenenda: primo vt totum corpus habeat fuperficiem, quae quidem lenti MM obuertitur, proxime planam, feu, vt quam minimis eminentiis et cauitatibus fit praeditum. Deinde autem imprimis requiritur, vt ifta obiecti fuperficies, vnde lens MM radios accepit, quam maxime fit illuminata, quae illuminatio obiecto vel radiis folis, vel ope lampadum conciliari Fig. 1.

ciliari ſolet: atque ad lumen magis augendum etiam ſpecula et lentes conuexae in vſum vocantur.

§. 5. Quod deinde ad lentem MM attinet, primo cauendum eſt, ne eius ab obiecto diſtantia EA ſit nimis exigua, ſeu ne angulus FAG, qui a radiis obiecti extremis ad lentem ductis formatur, nimis fiat magnus. Quo maior enim fuerit iſte angulus, eo confuſius obiecti extremitates in effigie feg reddentur. Videtur autem hic angulus FAG 20 gradus non excedere debere, ne confuſio inde orta nimis ſit ſenſibilis. Sit huius anguli ſemiſſis FAE, foret $10°$, et quia axis lentis AE in planitiem obiecti perpendicularis eſſe, ac per eius centrum E transire debet, diſtantia EA circiter ſextupla prodiret ſemidiametri obiecti EF, ſeu $EA = 6EF$. Minor ſcilicet haec diſtantia non eſt admittenda, niſi forte confuſionem ſatis ſenſibilem non euitandam cenſeamus; at quo maior ea ſtatuatur, eo magis diſtincta imago in tabula exprimetur. Dummodo autem haec diſtantia EA non fuerit minor quam $6EF$, confuſio hinc oriunda vix percipi poterit.

§. 6. Quam conuexa autem debeat eſſe lens MM, cum ex diſtantia EA, tum ex magnitudine, qua imaginem feg apparere oportet, facile definitur. Inuenta autem hinc diſtantia focali huius lentis, quae ſit $= f$, ſeu quae radios a ſole exceptos ad diſtantiam $= f$ in focum congreget, quantam aperturam huic lenti tribui conueniat, videndum eſt. Nam quo maior lenti conceditur apertura, eo maiori confuſione imago in feg afficitur, quia radii per aperturae oram transmiſſi, et ii, qui per medium lentis tranſeunt, non in eadem diſtantia colliguntur.

Ne

Ne igitur haec confuſio nimis fiat ſenſibilis, ſi aperturae, quam circularem aſſumo, ſemidiameter ponatur $= b$, quantitas $\frac{bb}{f}$ partem digiti quinquageſimam ſuperare vix debet: ſeu ſi δ denotet digiti partem quinquageſimam, non eſſe oportebit $b > \sqrt{\delta f}$: quo autem minor accipiatur apertura, eo magis confuſio ab apertura oriunda cauetur. Quodſi vero exiguam confuſionem non curemus, quantitas δ ad partem digiti viceſimam imo decimam augeri poterit.

§. 7. Tabula denique T V dealbata, atque ad axem lentis A e normaliter conſtituta eſſe debet. Tum vero id imprimis requiritur, vt haec tabula in loco maxime obſcuro ſit poſita, vt in eam nulli alii radii lucis, niſi qui ab obiecto F E G per lentem M M transmittantur, incidant. Hinc ſollicite omni alienae luci aditus ad tabulam eſt praecludendus, atque totum ſpatium inter lentem M M et tabulam T V interceptum perfectis tenebris obſcurari debet. Quae circumſtantia, ſi probe obſeruetur, radii ab obiecto per lentem transmiſſi effigiem ſuper tabula non ſolum clare ſed etiam diſtincte exhibebunt. Spectator ergo, qui eam contemplari cupit, in eodem loco obſcuro collocatus eſſe, vel ſaltem ei apertura eo inſpiciendi relinqui debet. Tum vero etiam ipſi commoditas procurari poterit, vt non ſolum effigiem intueri, ſed etiam eam ſtylo proſequi ac delineare valeat.

§. 8. Loco tabulae albae T V etiam tabula vitrea adhiberi poteſt, cuius altera ſuperficies politura ſit priuata; haec enim ſuperficies albedinem mentietur, atque effigiem obiecti perinde recipiet. Quod ſi haec ſuperficies extus vertatur, tum a ſpectatore pone tabulam conſtituto effigies non ſolum aſpici, ſed etiam ſtylo plumbeo delineari

neari poterit, quo in negotio etiam hoc commodum accedit, quod manu vel ſtylo effigiei expreſſionem non intercipiat, vti euenit, ſi ante tabulam ſit conſtitutus. Interim tamen etiam a parte poſteriori omni lumen, quantum fieri poteſt, arceri debet. Tum vero effigie ſuper tabula vitrea plumbo delineata, eadem charta, ſi parumper humefacta tabulae arcte apprimitur, facile imprimitur Praeterea etiam obſeruandum eſt, ſi locus, vbi imago apparet, minus fuerit idoneus, eam ope ſpeculi in quamuis aliam poſitionem pro lubitu proiici poſſe; ex quo huiusmodi inſtrumenta infinitis modis variari licet.

§. 9. Quo haec planius explicem, ſit obiecti ſemidiameter $EF = EG = e$, eius a lente diſtantia $EA = a$; quam iam vidimus non minorem eſſe debere quam $6e$. Tum ſit lentis MM diſtantia focalis $= f$, et aperturae ſemidiameter $= b$, debebitque eſſe $b < \sqrt{\delta f}$, denotante δ partem digiti vel quinquageſimam vel etiam maiorem, prout confuſio inde oriunda magis minusue fugienda videatur. His poſitis imago poſt lentem exhibebitur ad diſtantiam $Be = \frac{af}{a-f}$, hocque loco tabulam conſtitui oportebit; vnde patet, diſtantiam $EA = a$ neceſſario maiorem eſſe debere quam lentis diſtantiam focalem f. Magnitudo autem imaginis, quae pariter erit circularis, tanta eſt, vt ſit eius ſemidiameter eg ad ſemidiametrum obiecti $EF = e$, vti diſtantia Be ad AE, hinc erit imaginis ſemidiameter $ef = eg = \frac{ef}{a-f}$.

§. 10. Imprimis autem ſplendoris ſeu quantitatis luminis, quo imago ſuper tabula eſt apparitura, ratio eſt habenda, vt iam ante iudicare valeamus, vtrum effigies

ad

ad contemplandum satis futura sit luminosa nec ne. Ac splendor quidem iste imaginis, vt alibi demonstraui, partim a splendore istius obiecti, partim ab apertura lentis MM, partim vero a distantia $Be = \frac{af}{a-f}$ ita pendet, vt si obiecti splendor seu quantitas luminis ponatur $= L$, ob aperturae semidiametrum $= b$, splendor effigiei super tabula alba depictae futurus sit $= \frac{bb}{4.Be^2} . L = \frac{bb}{4}(\frac{1}{f}-\frac{1}{a})^2 L$, quae quantitas quidem semper erit valde parua, sed ex *Celeb: Bougueri* experimentis recordandum est, si L denotet lumen, quo corpora a sole illustrata conspiciuntur, tum $\frac{1}{250000}$ L esse splendorem corporum a luna plena illuminatorum, vnde non difficulter splendor effigiei cum hoc lumine lunari comparabitur.

§. 11. Si iam requiratur, vt magnitudo imagines datam teneat rationem ad magnitudinem ipsius obiecti, natura lentis ac locus imaginis huic facile definietur. Cum enim semidiameter obiecti sit $= e$, ponamus imaginis semidiametrum esse debere $= ne$; atque hinc quidem statim patet, fore, $Be = na$, seu $Be = n$, EA. Deinde ex aequatione $Be = na\frac{af}{a-f}$, elicitur lentis distantia focalis $f = \frac{n}{n+1} a$, cui deinceps conueniens apertura facile assignatur. Lumen denique, quo imago super tabula splendebit, erit $= \frac{bb}{4nnaa}$ L, posito obiecti lumine $=$ L. Cum autem sit $bb = \delta f = \frac{n}{n+1}\delta a$, erit hoc lumen imaginis $\frac{\delta}{4n(n+1)a}$ L, vnde patet, lumen hoc eo fore debilius, quo maior fuerit tam ratio multiplicationis $n : 1$ quam distantiae, $EA = a$.

§. 12. Ex his iam principiis non erit difficile eiusmodi Machinas construere, quae quorumuis obiectorum imagines in loco obſcuro ſuper tabula alba clare ac diſtincte exhibeant. Ratio autem conſtructionis potiſſimum pendebit a magnitudine obiecti F E G: niſi enim hoc ſatis fuerit paruum, id non ſimul in Camera obſcura incluſum eſſe poterit, cum propter nimis magnum interuallum, quo tam ipſum obiectum, quam imago a lente diſtare debet, tum vero quia tantum obiectum illuminari non poſſet, quin ſimul Camera inde illuminaretur. Minora autem obiecta, quoniam paruo interuallo a lente diſtare debent, ſaepe minus commode extra Cameram obſcuram collocari et illuminari poſſunt; in ipſa igitur Camera obſcura debito loco conſtituta illuminari conuenit, ſed ſpatium in quo cum lente continentur vndequaque tam probe clauſum eſſe debet, vt inde nihil luminis erumpere, ac tabulam albam illuſtrare valeat. Sequentia igitur huiusmodi Machinarum genera pro diuerſa obiectorum magnitudine conſtituere viſum eſt.

GENVS PRIMVM
AD OBIECTA MAGNITVDINIS SEX PEDVM REPRAESENTANDA.

Fig. 3. §. 13. Oporteat ergo primo eiusmodi obiecta repraeſentari, quae in circulo, cuius diameter F G ſit ſex pedum contineri queant. Erit ergo circuli repraeſentandi ſemidiameter $EF = EG = e = 3$ pedum ſeu 36 dig: quod ſpatium aptum erit ad homines, animalia, aliaque maiora obiecta capienda. Maiora enim obiecta veluti aedificia et integras regiones hic non conſidero, quoniam vulgares Camerae obſcurae ad ea repraeſentanda ſatis accommodatae videntur. Diſtantia ſcilicet huiusmodi obiectorum tanta eſſe debet, vt quaſi pro infinita haberi poſſit, atque ad ea repraeſentanda quauis lente vti licebit, dum-

dummodo tabula in focum lentis constituatur. Eo minor autem erit imago, quo minor fuerit lentis distantia focalis, contra vero splendor imaginis eo magis diminuetur, quo distantia focalis maior accipiatur. Cum autem iste Camerarum obscurarum vsus satis sit cognitus, eo fusius exponendo hic supersedeo.

§. 14. Cum igitur sit obiecti semidiameter $e = 3$ pedum, eius a lente distantia E A ad minimum esse debebit 18 pedum, seu E A $= a = 18$ ped. Hinc obiectum F E G extra Cameram obscuram R S T V constitutum esse debet, quod quo sufficienter illuminetur, vel radiis solaribus sit expositum, vel per ingentem luminum vim collustretur; sit igitur quantitas luminis obiecto inducta $= L$. Quoniam igitur obiectum ipsum iam satis est magnum, non conueniet id maiori forma super tabula exprimi, sit ergo imago ipsi obiecto aequalis, seu $n = 1$, vnde lentis M M distantia focalis esse debebit $f = 9$ pedum, seu 108 dig: cui tribuatur apertura semidiametri $b = 1$ dig. Quo facto imago repraesentabitur naturali magnitudine, sed situ inuerso $f\,e\,g$, ad distantiam a lente B$e = 18$ ped. eiusque lumen erit $= \frac{1}{4 \cdot 18^2 \cdot 12^2} L = \frac{1}{186624} L$.

§. 15. Si igitur obiectum a sole fuerit illustratum, lumen imaginis adhuc maius erit, quam si ipsum obiectum a luna plena illuminatum cerneretur, quoniam illuminatio lunae est ad illuminationem solis, vt 1 ad 250000. Quod si vero hoc lumen nimis debile videatur, vel lenti maior apertura tribui et eius semidiameter b ad $1\frac{1}{2}$ augeri poterit, vnde lumen imaginis duplo fieret maius. Verum si maius lumen desideretur, potius conueniet, imagi-

 nem

nem minori forma repraesentari, quae eandem lentem adhibendo non solum clarior, sed etiam distinctior euadet.

§. 16. Ponamus ergo per eandem lentem M M, cuius distantia focalis $f = 9$ ped. et aperturae semidiameter $b = 1$ dig. obiectum quadruplo minus repraesentari, seu imaginis semidiametrum esse debere $= \frac{1}{4}$ ped. Oportebit ergo esse $Be = \frac{1}{2}a = \frac{9a}{a-9}$, vnde elicitur iusta obiecti ante lentem distantia $EA = a = 27$ ped. atque in Camera obscura post lentem tabula alba constitui debebit ad distantiam $Be = 13\frac{1}{2}$ ped. Tum igitur huius imaginis lumen erit $= \frac{bb}{4 \cdot Be^2} L = \frac{1}{4 \cdot 26244} L = \frac{1}{104976} L$, ideoque fere duplo maius quam casu praecedente. Si adhuc minori imagines magnitudine contenti esse velimus, maiori quoque lumine imago praedita conspiceretur.

§. 17. Maiorem vero etiam splendorem imaginis impetrabimus, si lentem statim ad minorem imaginis formam accommodemus. Maneat ergo distantia $EA =$ 18 ped. quoniam minor admitti nequit, ne confusio imaginis nimis fiat sensibilis, ac ponatur $ef = \frac{1}{2}$ EF seu $= \frac{1}{2}$, vt prodeat imaginis post lentem distantia in Camera obscura $Be = 9$ ped. eritque lentis ad hoc requisitae distantia focalis $f = 6$ ped. cui adhuc satis commode apertura semidiametri $b = 1$ pollices tribui poterit. Hinc quantitas luminis, quo imago super tabula praedita cernetur, erit $= \frac{1}{4 \cdot 11664} L = \frac{1}{46656} L$; quae ergo plus quam duplo maior erit quam casu praecedente; atque si obiectum fuerit a sole illustratum, imaginis lumen fere quater quales fortius videbitur, quam si obiectum a luna plena illuminatum cerneretur, hocque splendore imago super tabula iam satis clara apparebit.

GENVS

GENVS SECVNDVM
AD OBIECTA MAGNITVDINIS VNIVS PEDIS REPRAESENTANDA.

§. 18. Sit igitur circuli, quo obiectum repraesentandum contineatur, semidiameter $EF = e = \frac{1}{2}$ ped. seu 6 dig: quae magnitudo apta erit ad facies humanas, partes animalium, minora animalia, ac plantas pictumasque capienda, atque distantia horum obiectorum a lente tribus pedibus minor esse non poterit. Sit ergo $EA = a = 3$ pedum, quae distantia non impedit, quo minus interdiu obiectum a sole, noctu vero etiam extra Cameram obscuram lampadibus illuminari queat. At si obiectum radiis solis directe exponi non liceat, ope speculorum lumen solare in id reflecti poterit. Noctu vero etiam specula adhiberi conueniet, siue plana siue concaua, quibus radii lampadum maiori vi in obiectum coniiciantur. Lampades autem a latere constitutas esse oportet, ne vlli inde radii directe in lentem incidere queant.

§. 19. Quod si iam semidiameter imaginis $ef = eg$ debeat esse $\frac{1}{2}n$ ped. seu $6n$ dig. fiet distantia $Be = 3n$ pedum vel $36n$ poll. lentis distantia focalis $f = \frac{3n}{n+1}$ ped. ac sumto $\delta = \frac{1}{50}$ dig semidiameter aperturae erit $b = \sqrt{\frac{36n}{50(n+1)}}$ dig. et quantitas luminis imaginis $= \frac{1}{7200n(n+1)}$ L.

Hinc sequitur, fore, si sit:

	f	b	Be	Quantit. lumin. imagin.
$n = 3$	27 dig.	0,73 dig.	108 dig.	$\frac{1}{86400}$ L
$n = 2$	24	0,69	72	$\frac{1}{43200}$ L
$n = 1$	18	0,60	36	$\frac{1}{14400}$ L
$n = \frac{2}{3}$	$14\frac{2}{5}$	0,54	24	$\frac{1}{8000}$ L
$n = \frac{1}{2}$	12	0,49	18	$\frac{1}{5400}$ L.

 §. 20.

§. 20. Patet ergo, nisi imago plus quam nouies, casu scilicet $n = 3$, superare debeat ipsum obiectum, hocque fuerit sole illuminatum, splendorem imaginis multo fore fortiorem quam casu praecedente, ita vt lumen a luna plena oriundum longe superet. Sic videmus, si obiectum tantum naturali magnitudine exhiberi debeat, quo casu imago ad distantiam trium pedum post lentem in Camera obscura apparebit, lumen imaginis fore ad lumen obiecti vt 1 ad 14400: quae illuminatio in Camera obscura iam satis splendida apparebit, si quidem obiectum fuerit a sole collustratum. Quod quemadmodum etiam in conclaui, in quod radiis solaribus modo ingressus pateat, ope speculi obtineri queat, satis est perspicuum, videmus igitur, quomodo noctu ope lampadum et speculorum satis fortis illuminatio produci queat.

§. 21. Sit igitur F E G obiectum a lampadibus ita illuminandum, vt ab iis nulli radii in lentem M M incidere queant. Atque ductis rectis F M et G M, secundum eas lens tubo M M N N sit inclusa, quo omnis introitus lucis alienae arceatur, manifestum est, vltra hunc tubum extra rectas N F et N G lampades constitui debere, id quod vtrinque in locis L, l, l, l, pro lubitu fieri poterit; quo plures enim vtrinque lampades accendentur, eo magis obiectum illuminabitur: e re quoque erit tubum N N M M intus nigro colore tingi, ne lumen ab interiori tubi superficie reflexum repraesentationi damnum afferat: et quanquam distantia lentis ab obiecto E A est determinata praesente scilicet casu 3 pedum, tamen conueniet tubi extremitatem fieri ductitiam, vt lens pro lubitu magis minusue ab obiecto remoueri queat.

Fig. 4.

§. 22.

§. 22. Vt etiam ipsum obiectum in Camera obscura contineri queat, neque tamen a lampadibus Camera illuminetur, spatia lampade continentia vtrinque parietibus vti in Laternis Magicis fieri solet, firmiter includi oportebit, vt nonnisi superne fumo exitus concedatur. Hoc modo Machina antrorsum in tubum N M M N desinens, a parte postica duas vtrinque alas habere debebit adiunctas N O P, quae lampadibus locum sufficientem praebeant. Sic enim obiectum a parte lenti obuersa F E G satis intensum lumen pro numero ac vi lampadum accensarum nanciscetur, et quia nulli alii radii, nisi qui ab ipso obiecto emittentur, per lentem M M in Cameram obscuram prorumpere possunt, eius imago super tabula alba nullo lumine alieno perturbabitur.

§. 23. Illuminatio etiam ope speculorum, quae vicem plurium lampadum sustineant, mirum in modum augeri poterit. Eductis enim ad axem E A vtrinque sub angulo circiter semirecto rectis E L I, et ad distantiam L I vtrinque trium circiter pollicum constituantur specula concaua C I D, ne ipsis flamma vicinitas damnum afferat: atque si lampades L et L in horum speculorum focis sint positae, ea radios parallele in obiectum reflectent, quibus igitur totum obiectum illuminabitur, si specula aeque fuerint ampla atque obiectum, sin autem specula fuerint minora, eorum distantia focalis aliquantum superare debet interuallum L I, quo radii reflexi nonnihil fiant diuergentes, atque totum obiectum expleant. Hoc modo binae vel quaternae lampades sufficient ad obiectum satis intenso lumine perfundendum.

12

GENVS

GENUS TERTIUM

AD OBIECTA MAGNITUDINIS DUORUM POLLICUM REPRAESENTANDA.

§. 24. Hoc instrumentum ratione magnitudinis obiectorum fere cum Laterna Magica consueta conueniet; nisi quod hic obiectum in superficie anteriori debet illuminari. Haec magnitudo ergo idonea erit ad partes animalium et plantarum, imo etiam ad exigua animalia integra et plantas, nec non ad picturas capiendas, quae multo maiori forma sint repraesentanda. Cum enim sit $\mathfrak{z} = 1$ dig. distantia $EA = a$ fiet ad minimum 6. poll. praestabit autem, quo confusio magis euitetur, eam assumere aliquanto maiorem, sit igitur $a = 9$ dig. et semidiameter effigiei in tabula exprimendae $= n$ dig. erit lentis ad hoc idoneae distantia focalis $f = \frac{9n}{n+1}$ dig. ac imago post lentem distincte apparebit in distantia $Bc = 9n$ dig. Denique si lumen obiecti sit $= L$, et semidiameter aperturae lentis $b = \sqrt{\delta f} = \sqrt{\frac{9n}{180(n+1)}}$ dig. erit lumen imaginis $= \frac{1}{180 n(n+1)} L$.

§. 25. Hinc pro varia multiplicatione quantitatis imaginis seu numeri n hae quantitates, quibus quaedam instrumenti determinatur, sequentes obtinebunt valores.

Si

Si	f	b	Be	Lumen imaginis.
$n=1$	$4\frac{1}{2}$ dig.	0, 30 dig.	9 dig.	$\frac{1}{3000}$ L
$n=2$	6 dig.	0, 34	18	$\frac{1}{12000}$ L
$n=3$	$6\frac{3}{4}$	0, 36	27	$\frac{1}{31000}$ L
$n=4$	$7\frac{1}{5}$	0, 38	36	$\frac{1}{50000}$ L
$n=5$	$7\frac{1}{2}$	0, 39	45	$\frac{1}{34000}$ L
$n=6$	$7\frac{5}{7}$	0, 39	54	$\frac{1}{75000}$ L
$n=7$	$7\frac{7}{8}$	0, 40	63	$\frac{1}{100000}$ L

nisi ergo lumen in imagine admodum ingens desideretur, magnitudo obiecti quinquagies fere multiplicari poterit.

§. 26. Quod si ergo obiectum radiis solaribus illuminare liceat, imago adhuc multo erit splendidior, quam obiecti a luna illuminati. Tum autem obiectum F E G extra Cameram obscuram regionem versus, vbi sol existit, prominere, et ope tubi N M M B cum lente MM connexum esse debet, ita vt altera lentis facies B in Cameram obscuram spectet. Huic porro tubo in C, quod punctum adhuc 5 vel 6 pollicibus ab obiecto absit, adiungatur speculum C I D, cuius latitudo duos pollices superet, longitudo vero C D multo sit maior, vt vbicunque fuerit sol in S eius radii a speculo in ipsum obiectum reflecti queant, quem in finem speculum circa C mobile esse oportebit, quo facilius semper soli obuerti queat. Commodissimum erit hunc Mechanismum Cameris obscuris portatilibus applicare, quo saepius, vbicunque sol splendeat, in visum adhiberi possit. Tab. VIII. Fig. 1.

§. 27. Vt autem huiusmodi repraesentationes semper etiam sole non lucente exhiberi queant in Camera obscura, Machina ad formam Laternae Magicae effonmata Fig. 2.

 vti

vti conueniet, in qua obiectum F E G a lampadibus L, l et speculis C I D illuminetur: quae cum multo minor sit, quam supra descripta, ob longitudinem $EA = 9$ poll. et $EF = EG = 1$ poll. alae N O vtrinque ratione longitudinis multo ampliores esse debebunt. Quoniam hic lampades non solum obiecto erunt viciniores, sed etiam speculis obiecto maioribus vti licebit, ita, vt obiectum totum a radiis conuergentibus illuminari queat, illustratio tanto fortior effici poterit. Optimum esset ad hoc specula parabolica adhibere, quorum distantia foci aliquanto esset minor, quam L I vel l I; quae, quo fuerint maiora, eo fortiorem illuminationem producent. Conueniet quoque vel specula vel lampades mobilitate instrui, quo facilius omnes radii reflexi in obiectum coniugari possint, sicque nullum est dubium, quin obiecto illuminatio admodum vehemens conciliari possit.

GENVS QVARTVM
AD OBIECTA MAGNITVDINIS DVARVM LINEARVM REPRAESENTANDA.

§. 28. Hoc instrumentum locum tenebit Microscopiorum solarium, cum in circulo diametri $FG = 2$ lin: seu $\frac{1}{6}$ dig. eiusmodi obiecta, quae vulgo per Microscopia considerari solent, commode includuntur. Cum ergo sit $EF = EG = e = \frac{1}{12}$ dig. sumatur interuallum $EA = a = 1$ dig. ac si effigiei repraesentandae semidiameter $ef = eg$ esse debeat $= ne = \frac{n}{12}$ dig. erit distantia effigiei a lente $Be = n$ dig. Eiusmodi vero tum lente vti conueniet, cuius distantia focalis sit $f = \frac{n}{n+1}$ dig. cui si tribuatur apertura, cuius semidiameter $= b = \sqrt{\frac{n}{50(n+1)}}$, erit lumen effigiei repraesentatae $= \frac{1}{200\, n(n+1)}$ L, designante L lumen

men ipſius obiecti. Quod ſi apertura maior vel minor aſſumatur ſplendor effigiei in eadem ratione augebitur vel diminuetur.

§. 29. Hinc pro varia multiplicatione quantitatis imaginis, ſeu pro variis valoribus numeri n, inſtrumentum ſequentes requiret determinationes.

Si	f	b	Be	Lumen imaginis.
$n=5$	$\frac{5}{6}$ dig.	0, 13 dig.	5 dig.	$\frac{1}{6000}$ L
$n=6$	$\frac{6}{7}$ dig.	0, 13 dig.	6 dig.	$\frac{1}{8400}$ L
$n=7$	$\frac{7}{8}$	0, 13	7	$\frac{1}{11200}$ L
$n=8$	$\frac{8}{9}$	0, 13	8	$\frac{1}{14400}$ L
$n=9$	$\frac{9}{10}$	0, 13	9	$\frac{1}{18000}$ L
$n=10$	$\frac{10}{11}$	0, 14	10	$\frac{1}{22000}$ L
$n=12$	$\frac{12}{13}$	0, 14	12	$\frac{1}{31200}$ L
$n=14$	$\frac{14}{15}$	0, 14	14	$\frac{1}{42000}$ L
$n=16$	$\frac{16}{17}$	0, 14	16	$\frac{1}{54400}$ L
$n=18$	$\frac{18}{19}$	0, 14	18	$\frac{1}{68400}$ L
$n=20$	$\frac{20}{21}$	0, 14	20	$\frac{1}{84000}$ L.

§. 30. Si obiectum a ſole illuminari velimus; non ſolum id, ſed etiam lens M M extra Cameram obſcuram prominere debet, vt ſatis habeatur ſpatii ad radios ſolis excipiendos; lens ergo M M tubulo N O O ſit inſerta, qui modo magis, modo minus extra Cameram obſcuram extrahi poſſit. Tum vt ante ſpeculum C L D ita applicetur, vt eius ope radii ſolares commode obiectum verſus reflecti queant, atque quo illuminatio tanto fiat fortior, lens conuexa C D adhiberi poterit, quae radios reflexos eo propius in obiecto colligat Et quia hoc modo illuminatio multo vehementior effici poteſt, multo maior Fig. 3.

 multi-

multiplicatio effigiei exhiberi poterit, quem in finem lentem tantillum propius ad obiectum admoueri oportebit, vt tum imago in multo maiori distantia sit excipienda, quae in eadem ratione euadet maior.

Fig. 4. §. 31. Ope lampadum quoque idem obiectum vehementer illuminari licebit, si Machina ad similitudinem Laternae Magicae duabus alis O O instructae efformetur. Tum enim commode duo specula concaua C L D applicari poterunt, quae radios lampadum L, L in obiectum quasi infocum coniiciant. Ad hoc conueniet, specula in formam ellipticam elaborari, in quorum altero foco lampades collocentur, in altero autem ipsum obiectum existat. Sic enim cum obiectum sit minimum, id, etsi est in foco positum, totum illuminabitur. Poterunt etiam si spatium id permittit duae vtrinque lampades accendi, quo non solum lumen fiat intensius, sed etiam focus reddatur amplior. Ceterum perspicuum est inter haec quatuor instrumentorum genera innumera alia, prout obiectorum ratio id postulat, constitui atque ad vsum accommodari posse.

ANNO-

ANNOTATIONES
CIRCA CONSTRVCTIONEM HOROLOGII MARINI.
AVCTORE
C. G. Kratzenstein.

§. 1.

Propositum nuper a *Cl. Koesfeldio* horologium autobarum, quod in nauigationibus ad obseruationes astronomicas instituendas, et longitudinem maris inde determinandam commendat, ansam mihi dedit, meditationes meas de perficiendo horologio marino explicandi, et rerum peritis ad examen proponendi. Eo magis operae pretium esse duco, huic rei studiose indulgere, quo plurium hominum saluti, commodo et vtilitati eo prospicitur.

§. 2. Cognitis vulgarium clepsydrarum imperfectionibus *Dudlaeus in arcanis suis maris* clepsydras mercuriales nautis commendauit. Tantum vero abest, vt eiusmodi clepsydrae longitudinis determinationi inseruire possint, vt nautae eis confidentes maius potius periculum incurrere, quam euitare, queant; possent enim in scyllam incidere, cum se adhuc longe ab ea distare putassent. Ad hoc eo euidentius ostendendum clepsydrarum mercurialium imperfectiones hic recensebo.

Huc pertinent:

1) Alteratio aëris vitro inclusi propter calorem et frigus, modo plus, modo minus fluxui resistens.

2) Dilatatio et contractio vitri et fluiditatis mercurium transmittentis caloris mutationibus oriunda.

 3) Hu-

3) Humiditates modo plus modo minus mercurio adhaerentes et fluxum retardantes.

4) Acceleratio vel retardatio fluxus per vim centrifugam oscillatione nauis mercurio impressam.

5) Irregularitas fluxus ex diuersa cohaesione ☿rii inter se et cum lateribus vitri pro diuerso caloris frigorisue gradu.

§. 3. Inquiramus iam quatenus hisce imperfectionibus mederi possimus. Quod ad primam attinet, ea per aëris euacuationem commode tollitur. Altera, tertia et quinta per conseruationem clepsydrae in eodem caloris gradu remouetur. Quartam vero, quae maximi momenti est, quantum ego quidem perspicio, ineuitabilem esse iudico. Cum enim centrum arcus oscillationis nauis, partim pro diuersa celeritate cursus nauis et velorum dispositione, partim pro vndarum agitatione, admodum variet, parum iuuabit, clepsydram circa illud centrum constituisse.

§. 4. Procul dubio sibi persuasit *Cl. Koesfeldius* circa horologii sui marini constructionem vim centrifugam horologio non posse imprimi, dum illud intra annulos libratorios suspensum situm perpendicularem semper seruat. Cum enim reliquas imperfectiones horologiorum marinorum sollicite euitare studet, de vi centrifuga euitanda ne quidem cogitat. Neque eo respexit, quod, naui ad aequatorem appropinquante, notabilis vis mouentis pars propter imminutam corporum grauitatem pereat, ideoque motus horologii sensibiliter accelerari debeat. Verum quidem est in pendulo longiori eiusmodi vis motricis imminutionem nullam sensibilem motus alterationem producere, sed longe aliter res sese habet in horologiis, vbi ro-

tula

tula libratoria (eine Unruhe) moderatoris vicem gerit; ibi enim experientia teste vna nocte error ex humiditate et frigore accedente oriundus ad 5 minuta prima excrescere potest. Constat adeo, longe maiori cum circumspectione rem esse ineundam, si voti nostri compotes fieri velimus.

§. 15. Considerabimus itaque, quibusnam proprietatibus horologium marinum gandere debeat, vt in suo genere perfectum iudicari possit. Requiritur scilicet, vt in tali horologio nulla motus variatio contingere possit.

1. Ex oscillatione et succussione nauis.
2. Ex differentia grauitatis sub diuersis ab aequatore distantiis.
3. Ex penduli elongatione et contractione calore et frigore oriunda.
4. Ex mutatione densitatis et humiditatis aëris.
5. Ex aucta tenacitate olei ad inunctionem adhibiti.
6. Ex variatione vis elasticae sub diuerso caloris gradu, si elater adhibetur.
7. Ex noua intensione vis motricis.

Quoniam oscillatio et succussio nauis non solum oscillationes penduli turbant, sed et grauitatem penduli mutant, cuiuis patet, neque pendulum moderatoris, neque pondus vis motricis vicem in horologio marino sustinere posse. Eorumdem quoque vsum inhibent requisitum II, III et IV. Nullum itaque pro praesenti mechanices perfectione nobis relinquitur refugium, quam vt pro moderatore libratorem, et pro vi motrice elaterem substituamus. Cum enim in libratore non pondus, sed vis eius inertiae moderamen efficiat, quae inuariabilis est, obtinebimus sic requisi-

requisitum IIdum. Aequaliter deinde per ambitum libratoris distributa inertia non patitur, vt aliqua acceleratio oscillationis ex motu a naue impresso contingere possit.
Fig. 5.
Ponamus enim libratorem *a c* oscillare ex *a* versus *b* et ex *c* versus *e*; nauem vero ex *b* versus *a*, euidens est partibus libratoris circa *b* motum imprimi versus *a* adeoque primo intuitu apparet, quasi inde aliqua retardatio proficisci debeat. Quoniam vero partibus in *c* simul per eandem nauis oscillationem similis motus ex *c* versus *e*, priori ex *b* in *a* contrarius, imprimitur, haec impressio alteram tollit, et nulla plane inde oscillationis variatio vel turbatio contingere potest. Ad quartum et quintum requisitum obtinendum integrum horologium cistae ligneae includi poterit, quae circa discum horarium vitro crassiori munita, ceteroquin vndique ferreis stannoque obductis lamellis probe ferruminatis vestita sit, ita, vt aer ex parte ope antliae manuariae inde extrahi possit. Eiusmodi attenuatus aer neque oscillationi sensibiliter resistit, neque humiditates fouet, neque inspissationem olei per euaporationem partis aquosae admittit. Requisitum sextum duplici modo poterit obtineri. Aut enim potest horologium per subsidia satis cognita in vno eodemque caloris gradu semper conseruari; aut, si hoc nimis taediosum videatur, per obseruationes in antecessum determinari, in quantum spiralis libratoris intendenda vel remittenda sit, vt sub diuerso caloris gradu oscillationes suas eadem celeritate absoluat. Hoc cognito per virgae metallicae adplicatae contractionem et dilatationem ista intensio et relaxatio spiralis automatice absque concursu obseruatoris potest obtineri. Ad vltimum denique requisitum obtinendum

dum *in IIdo Nouor. Commentar. Tomo* iam indicaui artificium aliquod, quo adhibito, horologia, elaterem pro vi motrice habentia, motum suum sub intensione elateris nihilominus continuare possunt.

§. 6. Ceterum partes horologii marini maxima cum cura debent esse elaboratae. Elater ex optimo chalybe sit fabrefactus, prouide temperatus, et plurimis conuolutionibus adornatus. Cochlea curatissime cum elatere sit aequilibrata, et rotae cum axibus et rotulis ex compactissimo metallo perfectissime, politissime et pro magnitudine operis subtilissime sint elimatae, id quod praecipue circa dentes rotae vltimae serratae obseruandum est. Libratoris brachia, in extremitatibus pondera lenticularia gerentia, tantae longitudinis conficiantur, quantam circumstantiae permittunt; vt adeo moderator per tantum momentum magis valeat irregularitates rotarum ineuitabiles coercere. Diuisio rotarum ita sit facta, vt, rota maxima semel circumacta, omnes rotae eumdem positum iterum obtineant, quem initio habuerunt; sic intra illud spatium omnes anomaliae ex imperfectione rotarum oriundae semel periodum suam absoluunt. Praeterea anomaliae ex cochleae irregularitatibus oriundae ad pendulum astronomicum obseruentur et notentur. Denique et in itinere horologium saepius poterit corrigi, cum locus quidam cognitae longitudinis in conspectum venit. Adhibito tanto studio et obseruatis modo dictis cautelis, nullum est dubium quin tale horologium scopo nautarum satisfacere possit.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE FACTAE TVBINGAE, ANNIS 1747, 1748, ET 1749,

a

Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Barometro, Thermometroque, in eodem adhuc, quem prius indicaui, situ aptissime locatis, emergunt ex quotidianis institutis obseruationibus annorum indicatorum menstruae altitudines maximae et minimae Barometri sequentes; quas, vna cum earundem differentiis, hic appono, intelligendo pedis Londinensis pollices duodecimales, atque eorundem partes centesimas.

Anno,	mense	max.	min.	differ.
1747	Ianuario	29.04	27.88	1.16
	Febr.	28.81	27.90	0.91
	Mar.	29.05	28.03	1.02
	April.	28.90	28.31	0.59
	Maio	28.73	28.20	0.53
	Iun.	28.83	28.28	0.55
	Iul.	28.80	28.38	0.42
	Aug.	28.88	28.50	0.38
	Sept.	28.82	28.16	0.66
	Oct.	29.10	28.40	0.70
	Nou.	29.14	28.34	0.80
	Dec.	29.04	27.90	1.14
1748	Ian.	28.98	28.10	0.88
	Febr.	28.85	27.98	0.87

Mart.

Anno,	mense	max.	min.	differ.
1748	Mart.	28.73	28.02	0.71
	Aprili	28.85	28.07	0.78
	Maio	28.80	28.20	0.60
	Iun.	28.80	28.50	0.30
	Iul.	28.90	28.16	0.74
	Aug.	28.89	28.49	0.40
	Sept.	28.95	28.20	0.75
	Oct.	28.98	27.86	1.12
	Nou.	29.24	27.98	1.26
	Dec.	29.06	28.31	0.75
1749	Ian.	28.99	27.64	1.35
	Febr.	29.03	27.74	1.29
	Mart.	28.88	28.20	0.68
	Apr.	28.80	28-22	0.58
	Maio	28.79	28.13	0.66
	Iun.	28.71	27.98	0.73
	Iul.	28.93	28.48	0.45
	Aug	28.83	28.03	0.80
	Sept.	28.78	28.32	0.46
	Oct.	29.00	28.54	0.46
	Nou.	29.30	28.30	1.00
	Dec.	29.20	28.15	1.05

§. 2. Apparet ex his, manere etiam nunc maximam altitudinum Barometri hic obseruatarum 29. 36, quae anno 1746 annotata fuit. Sed earundem minima, quae hucusque erat 27. 65, mutanda nunc est in 27. 64, visam d. 22. Ianuarii 1749, cum, antea iam incipiente, ac per integrum octiduum durante, fortiori modo, modo leniori, S W, intermixta pluuiis leuibus aliqua

 sereni-

ſerenitate ; antecedente autem d. 21. Ianuarii, h. 5. p. m. grandine piſorum magnitudine delabente, et grauiſſima fulguribus tonitrubusque tempeſtate, incipiente tum fortiſſimo vento S W. Prioris igitur maximae, et huius nouae iam minimae, differentia eſt 1. 72, vt adeo media Barometri altitudo apud nos nunc aeſtimanda ſit 28. 50, nulla habita inſtrumenti, ſupra Nicri fluuii libellam eleuati, ratione, quae, vti dictum eſt, proxime 60 pedes adaequat.

§. 3. Ex obſeruationibus Thermometri, in aëre vmbroſo, Boream verſus conſtituti, ſequentem formo tabellam, quae cuiusque menſis exhibet gradum caloris maximum, minimum, atque differentiam vtriusque, ita quidem, vt vbique intelligendi ſint gradus Fahrenheitiani, caloris.

Anno	menſe	max.	min.	differ.
1747	Ian.	50	9	59
	Febr.	63	34	29
	Mart.	46	15	31
	Apr.	68	28	40
	Maio	76	44	32
	Iun.	87	56	31
	Iul.	86	52	34
	Aug.	86	48	38
	Sept.	87	48	39
	Oct.	68	36	32
	Nou.	56	23	33
	Dec.	64	25	39

Anno

Anno,	menſe	max.	min.	differ.
1748	Ian.	44	8	36
	Febr.	39	22	17
	Mart.	46	6	40
	Apr.	59	31	28
	Maio.	80	46	34
	Iun.	80	55	25
	Iul.	80	54	26
	Aug.	75	53	22
	Sept.	68	40	28
	Oct.	61	32	29
	Nou.	52	16	36
	Dec.	56	29	27
1749	Ian.	52	27	25
	Feb.	47	0	47
	Mart.	55	23	32
	Apr.	66	31	35
	Maio	77	38	39
	Iun.	76	51	25
	Iul.	82	47	35
	Aug.	81	49	32
	Sept.	73	43	30
	Oct.	65	18	47
	Nou.	46	18	28
	Dec.	39	−1	40.

Ex quibus itaque apparet, maximum per hos annos calorem fuiſſe 87 graduum, anni ſcilicet 1747, maximum autem frigus in eodem anno, quippe 9 graduum infra 0. Manet itaque ex meis obſeruationibus annus adhuc ſuperior 1746 calidiſſimus omnium, quippe qui gra-

 dus

dus ostendit 94; frigidissimus autem 1745, qui nimirum depressit Thermometrum ad gradus 13 infra 0.

§. 4. Ad auroras boreales, aut earundem indicia, refero haec:

1747, Ianuarii 22, hora 10 vesp. videbatur aurora borealis, hinc et inde mota, coelo perfecte sereno; tota fere nocte coruscans.

Febr. 13, hora 8 vesp. lux borea, per medias nubes et pluuias, crebris coruscationibus conspicua videbatur.

Martii 26, hora 9 vesp. inter nubes continuas dubia mihi videbatur talis lux.

Aprilis 8, inter pluuias raras conspiciebatur lux borealis vaga, et irrequieta, hora 8 vesp.

Octobris 23, hora 9 p. m. visa est lux borealis magna, radiis latis et albis, sursum ascendentibus, insignis, ac vsque ad Austrum fere extensa, in serenitate multa.

1748, Aprilis 1, hora 9 p. m. conspexi lucem borealem, versus plagam S W quoque extensam, integra fere serenitate.

Iunii 3, vestigia huius lucis quaedam vidi hora 10 p. m.

1749, Septembris 22, hora 8 noct. in serenitate perfecta, magna apparuit coeli rubedo, quam vulgus pro exorto incendio habuit, sed quae sine dubio ab aurora boreali, sub horizonte nostro latente, profecta fuit.

§. 5.

§. 5. Plures vero annotauit auroras boreales *Clariss. M. Bischoff*, in vicino nobis pago, Steinebrunn, Pastor ecclesiae Meritissimus, loci sui eleuatioris opportunitate vsus, cum hic, Tubingae, has obseruationes montes partim versus septentrionem iacentes, partim etiam fastigia alta tectorum, valde impediant. Is igitur sequentes mecum amice communicauit, debiles modo, modo fortiores. Nimirum anno 1747, Nouembris 23. 24, haec nebula aliquantum erat obducta 27. Decembris 2. 21. 23. 26. 29. 31. Anno 1748, Ianuarii 2. 25. 28. Martii 1, simul cum lumine zodiacali apparens. Aprilis 20. Septembris 27. Octobris 18. Nouembris 17. Anno 1749, Martii 10. Septembris 22, h. 8. p. m. rubrum phoenomenum in plaga septentrionali, quod paullo ante ego etiam a me obseruatum retuli.

§. 6. Alias praeterea quasdam auroras boreales, Stuttgardiae obseruatas, amice itidem communicauit mecum *Clarissimus Volzius*, Gymnasii ibidem Professor. Nempe anno 1748, Febr. 24. Martii 28. 29. Aprilis 27. Decembris 16. 24. Anno 1749, Ianuarii 20. 21. Februarii 2. 16. Martii 10 lux borealis interdum in septentrione albis striis versus Zenith eiaculatis conspicua. Martii 17, lux borealis a N W in N O extensa, instar lucidarum nubium latae striae ad Zenith extendebantur; aliae ad horizontem magis inclinatae erant, caetera totum coelum obscura nocte obuolutum. Martii 18. 21. 23. 31. Aprilis 7 lucis borealis vestigia. Aprilis 9 in borea quinque aut sex striae albicantes ab horizonte versus Zenith emittebantur. Aprilis 14. 16. Maii 3 totum coelum atris nubibus tectum, quarum pleraeque in

omnibus

omnibus plagis debili luce, qualis aurorae borealis eſt, infectae videbantur, mox ſequebantur fulgura.

§. 7. Lumen Zodiacale *Caſſinianum* obſeruatum fuit diſtincte anno 1748, Februarii 18 viuidiſſimum, 21. 22, per nubes etiam viſibile. Martii 1. 16. 18. 27. Anno 1749, Aprilis 5, atque multis aliis etiam diebus.

§ 8. Declinationes acus Magneticae, ſex pollices longae, omni cura deprehendi ſequentes, medias inter plures obſeruatas, et ſelectas, omnes occidentem verſus. Anno 1747, $13^{\circ}\ 34'$; 1748 - - $14^{\circ}\ 22'$; 1749 - - $14^{\circ}\ 45'$.

§. 9. In eclipſi Lunae, quae accidit 1747, Februarii 25, temp. mat. ob nubes ingruentes ſequentia modo potui obſeruare. Occultatus nempe fuit *Plato* $4^{h}\ 7'\frac{1}{2}$; *Copernicus* $4^{h}\ 14\frac{1}{2}'$; mare nubium vmbra fuit tactum $4^{h}\ 20'\frac{1}{2}$, temporis veri, in Horologio portatili rotati.

§. 10. Reliqua huc referenda ſequentibus abſoluam.

Primo, tonitrua audita fuerunt anno 1747, Maii 31. Iunii 1. 2. 4. 5. 6. 19. 25. 28. Iulii 28. Aug. 6. 11. 21. 22. Sept. 8. 9. 23. Dec. 5. 1748, Maii 8. 19. Iunii 1. 2. 3. 14. 21 29. 30. Iulii 12. 18. 23. 25. Aug. 6. 14 17. 27. 30. 1749, Ian. 21. Maii 9. 11. 12. 26 27. Iunii 4. 5. Iulii 12 23. 26 29. Aug. 5. 9. 10. 11.

Secundo, grando cecidit, anno 1747, Iun. 5. 1748, Iun. 29. Aug. 14. 1749, Ian. 21. Iulii 15. Aug. 11. Octobr. 22.

Tertio, primas hirundines vidi anno 1747, Aprilis 14. calore 53 graduum. 1748, Apr. 16. caloris 53. grad. 1749, April. 12. caloris 48. grad.

Quarto, Halones conſpecti fuerunt, anno 1747, Martii 21, hora 7 a. m. ſolaris obſeruata fuit portio aliqua. Martii 22, hora 9 p m. lunaris integer, amplus primum, diametri 40°, ſine coloribus; poſtea multo anguſtior redditus et coloratus. 1748, Ianuarii 12. alius lunaris. 1749, nullus.

PHYSICA

PHYSICA.

OBSERVATIONES ANATOMICO - PRACTICAE COMMVNICATAE A IOANNE FREDRICO SCHREIBER.

I.

Ob errores, qui in Chirurgia capitis, huius suturas cum fracturis confundendo, aliquando obuenire possunt, opera danda est, vt suturarum varietates, quot possunt, cognoscantur. Memor eorum, non plane inutile quid fecero, si figuram capitis, adcurate delineatam, communicauero, in quo ossa, quae *triquetra* vocari consueuerunt, elegantius, atque magis regulari ordine formata, opinor, visa sunt numquam.

Lunulam, constitutam a duobus arcubus circularibus, quorum superior et maior per oras posteriores processuum mastoideorum, et verticem suturae, quae Λ Graecorum refert, inferior et minor, per easdem oras et mediam fere altitudinem ossis occipitis transit, implent tria ossa, ad sensum inter se aequalia, quorum duo extrema sunt quadrilatera, et tertium medium est figurae pentagonae regularis, cuius summus angulus cum angulo illius suturae congruit. Tab. IX.

II.

In memoriam atque recordationem Viri, dum viueret, Amicissimi et Honestissimi, elegantiarum litterarum

 Studio-

Studiosissimi, et Membri huius Academiae Scientiarum Imperialis Honorarii, *Gottlob Friderici Guilielmi Juncker*, a consiliis redituum aulicorum AVGVSTAE, quae A: 1746. d. XII. Nouembris, in Ipsius cadauere singularia a me visa sunt, Ipsi Academiae nunc referam:

Vir ille valde bonus per duos ante obitum annos morbo laborauit, qui tamen saepe longa interualla meliori valetudini largitus est. Respirandi impedimentum, quale in pectore sensit, erat ex praecipuis malis. Constitutione corporis; vitae genere; nocentium et iuuantium effectis, inter se comparatis omnibus; constitutum fuit, in Ipso pati, quod in corpore est subtilissimum, atque omnium maxume mobile: neruos scilicet, horumque origines, medullas.

Autumno A. 1746. pessime se habuit: verum versus finem Octobris omnia in melius mutata sunt. Nihilominus domi se debuit continere; id quod propter varia, et magni momenti negotia, ipsi arduum valde, denique impossibile, fuit. Quam ob rem, libero aëri, tempestate serena, et circum meridiem, se committendi, venia Ipsi danda fuit. Enimuero D. VIII. Nouembris, apud amicum bene pransus, dein amicos plures, ab Ipsius domicilio magno interuallo remotos, vsque ad sextam vespertinam, quo tempore gelu iam vrebat, animo, ad hilaritatem, si vmquam, maxume composito, inuisit, sic, vt hora septima pomeridiana demum domum rediret, vbi vsque ad vndecimam praeterea cum familiari iocos, seriaque, miscuit. Postridie, quum mane se egregie habuisset, cum plurimis colloquutus esset, atque in expediundis negotiis aliquibus occupatus fuisset, post horam

decimam

decimam ante meridiem, inopinato cadebat adtonitus. Certe, hora tertia post meridiem, Ipsum inueni motu sensuque omni plane destitutum. Atque eiusmodi miseram vitam vixit vsque ad supremam Ipsi horam, quae fuit nocte inter diem decimam et vndecimam illius mensis.

Quae sequuntur, sunt praecipua ex eis, quae in Ipsius cadauere obseruaui:

In Capite.

Suturae sagittalis, vt et coronalis, vix vestigia.

Dura mater validissime adhaesit cranio.

Iuxta longitudinem adcumbentium sibi hemisphaeriorum cerebri, inter piam et arachnoidem, materia albida, gelatinae non adeo dissimilis deprehensa est, quae pressu serum fudit.

Arteriae piae matris, vt et ea, quae sub protuberantia annulari simplex procedit, et hac ipsa ab illius ramis integre rubente, repletissimae fuerunt sanguine. Sed sinus, longitudinalis superior, nec non laterales, fere omnino collapsi. Ad lobum medium sinistrum cerebri, vbi quatuor ante mortem horis manum sponte motam viderant adstantes, omnia sanguine perfusa, et corrupta. Cortex ibi totus ruber: atque medulla hinc inde pluribus punctis rubris interstincta. Rubebat similiter cortex in aliqua portione lobi posterioris sinistri; nec non in lobo anteriore dextro.

Hemisphaeriis cerebri vix ab inuicem reclinatis, corpus callosum mox conspiciebatur, ita, vt eius altitudo solito maior adpareret. An hoc ab arteriis subiectis, sanguine infarcto tumentibus?

In cauitatium superiorum cerebri, quae portionem lymphae hadebant, plexu choroide, materia gelatinosa, priori similis.

In glandula pineali calculus exiguus.

In Pectore.

Pulmo sinister inferius firmiter adcretus erat: et ipsius extremitas alba, duraque, instar cartilaginis.

In auricula anteriore cordis, vbi vena caua inferior se ei inserit, verus fuit polypus, haud tamen valde amplus: aliusque oblongus, in arteria pulmonali.

Aorta, quamdiu in pectore procedit, indurata erat; inque interna eius superficie, vsque ad curuaturam magnam, hinc inde spectabantur excrescentiae, siue villi oblongi, de natura, vt adparebat, gelatinae. Tunica interna infra illum arcum erat incrassata; et, postea quam ab incumbente musculosa separata esset, in oculos incurrebant tumores exigui, flaui, quos steatomata putaui, orificia arteriarum intercostalium ambientes, et inconsueto modo coarctantes. Haec est valde rara obseruatio, nec infecunda nouarum propositionum Practicarum.

In Abdomine.

Duo loca in ventriculo rubuerunt.

Lien erat cum diaphragmate concretus, et in eo, vt de sinistro pulmone notatum, obseruabatur plaga alba, dura, cartilaginea.

III.

Adolescens 20. annorum, media hieme, portans trabem, prolabitur in glaciem adeo infortunato, vt sinistrum capitis latus a trabe percuteretur. Homo illico mentis vsum amittit; sanguine per os et aurem sinistram fluente, cum respiratione oppressa et strepente, et tusse vehementi. In vsum adhibitis venae sectionibus ac clysteribus; et dein deraso capite, duo vel tres tumores adparuerunt, quorum maximus supra auriculam sinistram sub ora inferiore ossis verticis sedebat. Illo sensim aperto, in hoc osse fractum spectabatur, ad suturam sagittalem sursum tendens, nec non alia fractura obliqua versus os occipitis. Facta sunt omnia, quae in vulneribus et fracturis capitis faciunda ars hodie praecipit. Vesperi ingruebant aliqui motus conuulsiui. Postridie adhuc carebat mentis vsu miser, sed ronchus stertorque cessauerant, manente specie somni profundi. Die quinto, incisione producta, praegrandis fractura conspiciebatur, cum osse temporis angulum efficiens. Die sexto, secundum methodum Chirurgi *Belloste*, margines fractorum perforabantur. Dein nullum graue symptoma terruit, praeter tussem, vsque ad diem sextum et decimum, quo ex improuiso febre corripitur tanta, vt a frigore, calorem praecedente, concuteretur aeger. Rediit eadem febris, eodem tempore, die sequente. Die 18uo omnia in deterius ruebant, sic, vt miser die nona et decima, conuulsis, ac singultiens, post meridiem obiret.

Enormis fractura, in cranio post obitum visa, et duabus figuris expressa sequentem in modum se habuit;

In

In osse temporis sinistri fractum vsque in meatum auditorium externum progrediebatur.

In osse verticis sinistro fractura duplex. Altera, circum medium ossis temporis sub sutura squamosa enata, adscendebat, et dein, forma arcus, abibat, et finiebat versus suturam lambdiformem. Altera, ex priore oriunda, ex ipsa circumferentia, qua musculus temporalis hic ossi verticis admotus est, per medium os recta surgebat, et desinebat distantia pollicis a sutura sagittali. Hae sunt illae duae fracturae, quas dixi in viuo animaduersas fuisse.

Quae sequuntur, in denudato cranio tantum videri potuerunt. Prior fractura transibat suturam lambdoideam, arcu illo per os occipitis deorsum producto, et in latere sinistro antrorsum ad processum mastoideum procedebat, qua de causa oriebatur portio triangularis, scilicet a fractis et sutura lambdoide. Eratque intropressa. Portio mammillaris sinistra ab osse occipitis omni nexu soluta fuit. Praeterea illa fractura, per transuersum ossis occipitis, itidem arcus figura, vsque ad processum mastoideum dextrum protendebatur, quo loco portio mammillaris os verticis deseruerat libera. Os dextrum verticis itidem fractum erat, quae fractura sub osse verticis in linea recta adscendebat, dein oblique, angulum obtusum formans, retrorsum ferebatur.

Tab. X. et XI. In latere sinistro adhuc duae fissurae fuerunt, sed et insignis fractura, supra fossam iugularem et condylum occipitalem vsque in foramen magnum finiens.

Hippocrates notam perituri ex capitis vulneribus, vbi os quomodocumque fractum, fissum, vel collisum fuerit, adscripsit,

adscripsit, quod plerumque febris inuadat ante diem quartum et decimum, hieme.

IV.

Vir circiter 50. annorum ostendit in dextro pectoris latere tumorem valde pulsantem, colore cutis, figurae oualis, 12. digitos ab osse pectoris vsque ad axillam longum, et 8. digitos latum, in distantia trium digitorum a clauicula vsque ad duos pollices infra papillam. Occasionem ei dederat contusio, olim ibi loci facta, vnde tumor sensim creuit, donec eo vsque adoleuerit. Conquerebatur miser de oppressione pectoris, anxietate circum praecordia, et tusse sicca: arteria interim debiliter, inaequaliter, et aliquando remittendo, pulsabat. Hunc in modum vixit per sex hebdomadas vsque ad mortem.

Tumor examinatus maxumam partem subiacebat musculo pectorali, et aliquam partem musculo serrato antico, siue pectorali paruo. His ablatis, videbatur cruor coagulatus, ater, cum portione puris mixtus: et hoc quoque remoto, foramen, pugnum commode capiens, in oculos incurrit. Erant enim costae verae, tertia, quarta, et quinta, cum segmentis cartilagineis, carie excesae. Atque tum nec latuit aneurisma disruptum, quod erat saccus, ab exitu aortae ex pericardio vsque ad originem arteriae subclauiae sinistrae extensus. Saccus hic continebat polypos octo et triginta, omnes veros, lamellarum instar, sibi circumpositos. Eorum maxumus ponderabat vncias quindecim, alter vncias sex et quinque drachmas, ceteri minus: omnes coniunctim aequabant pondus librarum trium, vnciarum vndecim, et duarum drachmarum ille saccus inferius concreuerat, partem cum diaphragmate, et anterius partem cum membrana, succingente costas. Cum eadem vnum corpus constituebat concretione pulmo dexter, aneurismatis volumine, versus posteriora superioraque pressus. Ipsa membrana, costas succingens, hinc inde admodum crassa fuit, sic, vt, vbi cum pulmone coaluerat, crassitiem dimidii digiti habuerit. Pulmo sinister sanus in magna seri quantitate fluctuabat. Denique adparuit leuis inflammatio ad mucronem cordis.

V.

Aestus, ardor, et dolor punctorius in pectore, respiratio anxia, tussis sicca perpetua, infestabant aegrum, et quidem vsque in tertiam hebdomadam. Vsu congruorum medicamentorum, calor quarta hebdomade desiit integre, sed pressio in pectore, et difficultas respirandi, e contrario adeo increuerunt, vt saepius in suffocandi periculum incurrerit. Haec mala dein adhuc per sex hebdomadas inconstanti sorte continuarunt, quum se nunc melius, nunc peius haberet aeger. Tandem adcessit summum molestiae respirandi incrementum, screatu reiecta alba, viscosa, materia, multo sanguine admixto: sine insigni aegritudinum augmento, in alterutro pectoris latere cubare, impossibile, sed in dorso iacere, tolerabile fuit. Et hunc in modum moriebatur.

Aperto pectore, pulmones versus posteriora et latera compulsi, ac membranae, quae costas succingit, valde adcreti spectabantur: supra diaphragma aliqua portio seri flauescentis fluctuabat; partes pectoris, media, et anteriores laterales, a pericardio, valde extenso, et liuescen-

te,

te, replebantur, e quo aperto librae circiter quatuor aquae cruentae effluxerunt. Sed cordis superficies tota circumcirca hirta erat villis magnis, longis, latisque, quasi carnis fungosae tenerae, per quos valde diffusos et superior ventriculus pericardio quam firmissime adhaesit.

Prout villi cordis a sero sanguinis formantur: ita illi cum hydrope pericardii plerumque coniunguntur.

Vide Tabulam XII; vbi corda villosa et latis, magnis, laciniis munita, repraesentantur. Tab. XII. Fig. 1.

VI.

Vir iuuenis, propter tabem, defunctus est. Aliquo ante obitum tempore, conquestus est de dolore in scroto. Instituto examine, scroto inesse deprehendebantur tria corpora, sibi inuicem aequalia et rotunda: vnde homo tribus testiculis donatus credebatur. Aperto dein scroto cadaueris, visum est, praeter duos testiculos, rectissime constitutos, corpus tertium, illis quoad figuram et magnitudinem simillimum, vt homo viuus pro triorchide, si quis vmquam vere fuit, agnosci debuerit. Erat vero tertium, insolitum corpus, inter duos veros testiculos medium, ampulla, aqua repleta, siue hydatis, ab arteriis seminalibus arterias recipiens, et venis seminalibus venas reddens. Praeterea firmiter connectebatur, ope solidae membranae, cum vase deferente testiculi sinistri. Nullum est dubium, telae cellulosae morbosam mutationem originem largitam esse huic praeternaturali corpori, prout hydatidibus omnibus largiri consueuit. Potest ergo haec obseruatio inseruire dubiae reddendae sententiae de *exsistentia trium testiculorum*

lorum in vno corpore humano, si non refellendae. Nam quicumque scriptores de triorchidibus loquuti sunt, ei retulerunt de tribus corporibus, rotundis, et aequalibus, scroto inclusis, tactu deprehensis; sed ne vnicam hactenus licuit legere obseruationem, vbi corpus tertium, praeternaturale, habuit structuram testiculi, et vas deferens proprium, desinens in receptaculum seminale proprium et tertium, vel in alterutrum ex duobus ordinariis, id est, vbi corpus tertium, praeternaturale, habuit essentialia testiculi.

Fig. 2. Communicauit mecum hanc obseruationem Chirurgus nosocomii marini Petropolitani, qui aegroto adstitit, ipseque ad viuum ab vtraque parte delineauit, quae hic conspiciuntur.

OBSER-

*OBSERVATIONES GENERALES VNIVERSAM HISTORIAM PISCIVM CONCERNENTES.

AVCTORE

Georg. Wilhelm. Stellero.

DE GENERATIONE PISCIVM.

Omnes cetacei et cartilaginei, longi et plani, viuum foetum absque ouo, vel ouo inclusum, edentes, intus vterum mares, testes atque parastatas, extus vero organa ad generandum manifeste, et corpora ad coitum apte structa, habent; omnes hinc coeunt, ita, vt foemella supina in dorso iaceat, ac marem superuenientem in elemento aquae instabili pinnis excipiat, ne autem delabatur, appendicibus iuxta pudenda, vel forma lata et supine scabra, vel amplexatione caudarum, vt in cartilagineis latis, impedit.

Omnes spinosi et cartilaginei, ouipari, teretes et angulosi ouaria saltem et vesiculas seminales, neque vlla alia externa ad generandum apta organa, obtinent.

Inter spinosos excipienda est Mustela viuipara *Schoenefeldii* et forte Muraena. Acipenseris autem genus, cum corpus ad congrediendum aptum non obtinuit, licet quaedam species ad cetaceam magnitudinem perueniat, ouiparum est, et organis externis ac intus vtero caret.

Verum enim vero cum omnia in vniuersum animalia, ne minima culice excepta, organa generationis externa habent, ac iisdem manifeste congrediuntur, hinc quaerendum est, quare Deus spinosis piscibus haec non concesserit?

 Resp.

* Kamtschatkae sunt traditae, et nunc, vt opus postumum, publici iuris fiunt. Cum autem indicare nostri officii esse duximus, non nulla perlegendo obscura occurrere loca; hinc speramus, lectores ea, quaecunque sint, in meliorem partem interpretaturos, et ea non auctori, sed amanuensi, vitio esse versuros.

Resp. I. Frustranea essent organa, cum corpora omnium horum piscium, praecipue in elemento aquae, ad congrediendum prorsus sunt inepta.

a) Si enim in vadosis ac sicco congrederentur, cum pulmonibus destituerentur; cum primis aër extra aquam branchiarum structurae ita est aduersus et lethalis, vt, antequam generatio succederet, morirentur; structura autem haec branchiarum ratione finis, elementi piscium et magnitudinis, tanquam sapientissima talis, est necessaria.

b) In aquis etiam ob corporis lubricam et cylindricam structuram coitus est impossibilis.

c) Si instrumenta quaedam stationi aut retentioni necessaria adessent, motus celer impediretur.

d) Si autem quaeritur, quare Deus illorum corpora, ita, nec aliter, vt Raiarum aut Squatorum, struxerit? Tunc respondendum est: Deus voluit, vt non solum maris accolae, sed et dissitae continentis incolae, piscibus, e mari venientibus, fruerentur; et nisi corpora ita leuia, in aquis celeriter, et sine molestia mobilia essent, hic finis non obtineretur, pisces defatigarentur, in via morirentur, nec ad fontes fluuiorum, vel tarde satis, peruenirent, nec obstacula in via obuia superare adeo facile possent. Contrarium videmus in Gottis, piscibus litoralibus, Pleuronectis, ac aliis marinis, nunquam fluuios subeuntibus.

II. Vt numerus spinosorum piscium, organis his carentium, millies maior est, quam reliquorum, organis his donatorum, ita et vsu, sapore, specierum diuersitate reliquos omnes vincunt.

a). Iam vero si organa adessent in tanta corporis paruitate, in maribus vesiculae seminales longe minores, pariter ac ouaria, esse deberent, nec soboles tam copiose foret, quod intentioni diuinae fuit contrarium.

b). Vno

b). Vno actu tot milliades ouorum intus impraegnari non possent.

c). Continuus partus et coitus esset necessarius, quod debilibus, et otio soli viuentibus, et incrementa capientibus, creaturis his noxae et exortio foret.

d). Si continuo congrederentur, nullam custodiendorum ouorum curam impenderent, vel prae libidine impendere possent, ac numerosa oua in vanum abirent, quia in elemento aquae fluxili, et inter tot pisces, et insecta, ouis alienarum specierum insidias struerent: ita vero cum organa desunt, ouaria amplissima sunt, duas partes abdominis occupantia.

Theses.

1. Ouaria maxima sunt in piscibus maximi vsus, vt in Salmonum genere, quo integrae regiones, tanquam vnico victu, sustentantur.

2. Quo maiora oua, et quo magis nutriunt, eo magis nutriunt pisces, vt Salmones.

3. Quo maiora oua, eo citiora incrementa sumunt, pisces hinc numerosiores, e. g. genus Truttaceum.

4. Lactes et oua concreata sunt piscibus, incrementa sumunt vna cum ipso corpore, a trunco descendente arteria aortae, quod in Gadis optime conspicitur.

5. Truttacei grandia habent oua, et foemellae semel tantum in vita pariunt, deinceps, exhausto ouario, pereunt.

6. In reliquis longaeuioribus oua minora sunt, et nunquam penitus exhauriuntur; sed subinde accrescunt noua.

7. Cum autem omnia animalia voluptuosa quadam sensatione ad coitum, et per consequens ad speciei suae propagationem, inuitantur, hinc naturae iniuria videtur esse in pisces spinosos, dum non coeunt, consequenter eos nullam quoque capere voluptatem? Sed respondendum est: licet pisces maximum

mum et perlongum satis tempus non coeant, tamen diuturnitatem voluptatis sensum percipiant, quod sequentibus probo:

a. Mares maiorem longe seminis copiam, ac foemellae plura oua, quam reliqui pisces omnes, habent. Anadromi huius seminis maximam partem, reliqui dimidiam, alii, vt Salmones, fere omnem, effundunt; et Februario capti, e genitura inanes reperiuntur.

b. Tantus est sensus, vt Salmones omnem rictum respirant, et continue per vadosa loca assurgant, quo attritu continuo titillantem genituram excernant, donec ab inedia et voluptate exhausti, penitus emaciati, pereant.

c. Lusum venereum triplicem obseruaui:

1. In vadosis locis obseruaui, Salmones, mares et foeminas, mutuo ventrium attritu quorum et seminis profusionem promouere.

2. Solitarios attritu ad saxa idem agere.

3. Mares Ianuario et Februario fugare foemellas, et Oestro percitos, ante se agere; e contrario autem foemellas varios Maeandros fugere. Ita et obseruaui, mares foemellarum caudas dentibus arripere, et eas adeo arcte tenere desiderio quodam voluptuoso, vt non tantum caudam cute sua spolient, sed et ipsos radios prorsus praemordeant.

4. In fluminibus hyeme obseruatur, eos vnanimiter in locis profundioribus viuere, ita, vt vnus alteri tam arcte apprimatur, quasi humana industria in tot lineas vel series dispositi forent. Procul dubio in profundo maris idem agunt, vel hoc natura admoniti in fluuiis repetunt, quod antea sub mari agere consueuerunt. Hinc probabile, cum societatem tam arcte seruant, vnius speciei pisces sub aquis per tam longum interuallum temporis id fieri non posse propter calorem, cum ac aliis ad tactum semper frigida sunt, sed propter quandam dulce-

dulcedinem veneream, quam eo mutuo accubitu hauriunt.

5. Pisces, qui sero autumno genituram eiiciunt, hyeme solae foemellae, genitura exhaustae, capiuntur, vere mares et foeminae, vna circa brumam ambo, in profundum maris se recipiunt, inertia et somno pinguescunt, ac mutuo accubitu genituram reparant, autumno inde se versus litora, et loca profunda minus, et arenosa recipiunt. Ob eiaculationem seminis et ouorum etiam capiuntur, et, vt in Gottis et Gadis obseruaui, vere pariunt, aestate autem, et hyeme latent.

6. Dum vesicae seminales et ouaria adeo turgent, vt geniturae nihil propter spatii angustiam addi possent, tunc alimentum superfluum in carnem retundant, et musculi reparantur. Hoc reparato, genitura fluere incipit, consistentiam amittit tenuitate, exitum intestini stimulat, ad emissionem pisces inuitat, et e latebris suis ad vada prouocat, vt generent, capiantur, ac voluptuoso sensu fruantur; vlterius autem hinc et tunc temporis propter morem aliorum animalium pisces pinguissimi boni habitus et sapidissimi sunt.

Stimulare vero semen profluendo sphincterem anni ex eo patet:

a. Quod sphincter intumescit magis.

b. Quod fermentationis quadam specie salinae partes ab oleogineis diuortium faciunt, semen masculinum et foemininum fluide reddunt, ac laxa euadunt, quo ipso semen exaltatur spirituosum, et ad effectum extra corpus producendum idoneum redditur.

c. Ob laxatum vinculum et praesentem efferuescentiam oua marinorum piscium noctu lucent instar Phosphori, id, quod in siccatis, in aëre non contingit, et splendor inter siccandum singulis noctibus, donec omnimode cesset, magis

 immi-

imminuitur, ratio, quod spiritus salinus, arinosus, laxatus, sensim exhalat, et siccatione partes collabescunt, condensantur, et arctius ambiuntur.

d. Oua et lactes piscium citissime putrescunt, et sulphureum odorem spirant, quod a salibus etiam obseruatur.

e. Oua vt vt solertissime praeparata sale, vel siccata rancida, tamen et aeria euadunt, nec diu asseruari possunt.

f. Stimulare lactes et oua pisces, ex eo patet, quod Salmonum lactes aestate in terris Kamtschaticis, crudae comestae, alui profluuium excitant, coctae laxant; in calidis vero regionibus Salmonum lactes et oua exitiosas dysenterias excitant, vt a Kalmuccis comperi. Hinc et Itaelmani, licet oua Salmonum auidissime comedant cocta, tamen semper vel siccata cruda non audent; lactes vero prorsus non, neque crudas, neque coctas comedunt, quia impotentiam inde prouenturam credunt, quod per consequens verum, dum post validam purgationem alui venus non adeo stimulatur.

Quod *Clar. Linnaeus* in Cyprinis obseruauit, hoc ego in Corregonis et Salmonibus obseruaui: foemellas scilicet haurire ore semen maris auidissime. Ego insuper obseruaui, mares deglutire foemellarum oua, tantum autem abest, vt credam, haec amoris mutui testimonium coitus succedaneum esse, vt potius credam, hoc ipso mutuo hausto philtro, semen magis fluidum, et oua laxiora ad elabendum reddi; nullum enim ductum huc dum inuenire potui a gula ad ouaria, nisi truncum arteriae aortae descendentem. Si itaque semen oua foecunda redderet, piscivori pisces pisces integros, cum ipsis testiculis seminalibus, deglutiunt, et sic non tantum impraegnatio citra tempus foret, sed et qualis causa, talis effectus alias piscium species ederet.

Quomo-

Sed quomodo fit concubitus et foecundatio?

Respond. 1. Attritu mutuo ventris vnus alterius genituram elicit.

2. Sperma masculinum irrigando oua foeminina impraegnat.

3. Pinnis ventralibus scrobem excauant, et oua in locis quietis eo deponunt, vt aqua, mediante arena, obruantur, imo saxa Salmones eligunt, et cauernas sub illis efformant.

Mari rostrum in vncum cauatur, ne proprium vel alienum foetum degluttiat.

Mas et foemella vna ad fontes ascendunt, donec exhauriantur genitura, et in pluribus locis oua deponunt, in quo natura cauit, si in vno loco perirent, tamen in reliquis, in saluo essent.

Vna species post aliam ascendit, ne vna alteram turbet, et in prolificando oua rapiat, vel alieni concubitus fiant.

Si vero plures species vna ascendunt, annui simul tanquam custodes vna ascendunt, plures ibique custodiunt foetum, vbi parentes protulerunt, et Hodegi sunt foetus autumno.

In vadosis fluuiis Salmones dum pariunt, pereunt; in profundis annum superuiuunt, sed non amplius generant, et pariunt semel exhausti.

Aliter se res cum Corregonis, et reliquis piscibus Anadromis habet, qui minuta oua habent.

In hominibus et animalibus maribus semen, et in foemellis oua pariter concreata sunt; successu temporis, corpore satis aucto et nutrito, et haec augentur; his auctis, oritur stimulus; cogitatio et libido congressu animatur;

orum masculino semine intra corpus, quod in piscibus spinosis extra corpus, contingit; voluptas sentitur ex attritu et emissione seminis, quod et in piscibus obtinet; mutua amicitia in conuersatione stimulante sanguis disponitur ad vberiorem seminis secretionem, futurae excretioni destinatam, quod et per mutuam cohabitationem in piscibus succedit; semine stimulante, vel volitione voluptuosa, organa disponuntur in piscibus; plenitudo vasorum, hoc vt in omnibus animalibus, efficit intumescentia organorum excretoriorum, fermentatio, et feminum peculiaris odor attentionem animalium excitant ratione carentium; hinc quo tempore animal optimi est habitus, ac tempore fit libidinosum, tunc et consequenter congressus pro alimentorum ratione periodi tempore fiunt.

Organa generationis in hunc vsque diem non detecta sunt, et non necessaria; hinc, vt intentioni diuinae contraria, non [illegible].

Propter hunc congressum subeunt:

1. Pisces e mari fluuios citra aliam necessitatem.
2. E lacubus profundis fluuios.
3. E fluuiorum profundioribus locis ad [illegible] fontes, quorsum alias numquam peruenirent.
4. E latebris in lucem.
5. Hinc quo magis Deus terram piscibus nutrire, et ditare voluit, eo plures eiusmodi pisces, et inter hos magna ouaria, et grandia oua habentia, dedit; hinc et Salmones nullibi, in tota terrarum orbe, frequentiores, quam in Russico Imperio, et frequentior, quo miserius clima, et pauperior terra euadit. In terris Kamtschaticis nullus alius habetur piscis, cum nec panis,

nec

nec olus, ibi prouenire, nec iumenta copiosa seruare possint ob niuis copiam.

Mares Truttacei generis non tantum 1. rostrum acutius, sed et 2. dorsum acuminatius, habent; foeminae autem rotundius et conuexius.

Aetas Truttaceorum.

1. Quo plures lamellae membranae branchiostegae sunt, eo maior fit piscis; si itaque piscis permultus 14. 16. 18. 20. habet, hinc facile colligitur, illum iuuenem esse.

2. Quo crassiora et breuiora prima ossicula pinnarum dorsi sunt, et post annum, eo maior fit piscis, si haec ossicula, non nisi elixata pinna accurate numerari et cerni possunt, signum est, piscem esse iuuenem.

3. Quo plures sunt appendices, et longius infra pylorum extenduntur, eo maior fit piscis, nisi minimus occurrat, ratio, quia tanta copia pro magno corpore alendo structa sunt.

4. Quo maior vertebrarum numerus, eo maior fit piscis; si vero exiguus multas obtineat, signum est, piscem esse infantulum aut iuuenem, ita et in iuuenibus superiores vertebrae leuius, inferiores arctius, cohaerent, et apophyses stabiles facile separantur.

Obseruanda quaedam in examine piscium, et obseruata.

1. An Petromyzi et Syngnathi linea laterali careant, et quare? Forte musculos spirales habent, vel vertebrae costis et apophysibus carent.

2. An Cartilaginei ouipari, vt acipenser, linea laterali careant, quia cum prioribus conueniunt.

3. An Cartilaginei ouipari duplices nares habeant, ob id, quod foramina supra oculos pro auditu habent? si

simplices, certissimum erit, nares in piscibus et auditus et olfactus organa esse.

4. Scrutandum, quid cum viuaci pisce fiat, si illi aqua immittitur, antea calida aqua omnis mucus abstergitur.

5. Certum est, linguas piscium sapore praeditas esse, ob id, quod vnam escam alteri praeferunt; quaedam vero in vniuersum respuunt.

8. Ingenium piscium non exiguum arguit, quod Salmones in terris Kamtschaticis inquirunt, quonam in loco claustra sunt humiliora, vt commodius transilire possint, et vbi vnus transilit, reliqui omnes hunc sequuntur, ita et si transilire nequeunt ob claustrorum altitudinem, vniculos sub claustris fodere audent, vbi vnum foramen inueniunt, ne vnus quidem piscis aberrat ab hoc foramine.

Obseruationes
vsum appendicum intestinalium concernentes.

Appendices pylori secernunt quidem succum nutritium ex sanguine, affundunt illum in intestinum ad iuuandum et accelerandam concoctionem in corporibus frigidis, sed et praeterea diuerticula et receptacula chyli sunt, quo pisces tempore inopiae vitam diu sustentant, hoc probatur sequentibus argumentis.

1. Multi pisces et pancreas et simul appendices habent, ergo appendices non vnice pancreatis vice funguntur, nisi ita esset, aut pancreas, aut appendices superfluae essent.

2. Pisces, quo grandiores euadunt, et citius augentur, ac diutius famem patiuntur, eo maiores et copiosiores appendices habent; hoc patet ex Anatomia Salmonum, qui per integros

integros 6 menses corpus vehementissimo motu et libidine attenuantes, et absque omni cibo sunt viuentes. Plura vide in Anatome Corregoni, Biela rybiza siue бѣла рыбица Ruthenis dicti.

Omnes pisces spinosi propter generationem profunda loca deserunt, et vadosa quaerunt, hinc eo tempore copiosissime capiuntur, vt Cyprini, Braßem dicti, tempore coitus ripas petunt, et alias semper in profundis degunt, procul dubio hoc fit ad facilitandam generationem.

Lucii seu Esoces tempore inundationis riuulos petunt, et foemella quandam impraegnationis speciem praebet; mas coitu praeterlabitur citissime foemellam, foemella autem, dum mas praeterlabitur, repente in dorsum se conijcit, ac in mari ventrem obuertit, quo tempore in Holsatia etiam accensis facibus noctu manibus capiuntur.

Corregoni a Salmonibus differunt:

1. Paucitate ossiculorum branchiostegorum.
2. Paruitate ouorum.
3. Colore ouorum.
4. Carnis colore.
5. Intestinis praepinguibus, e quibus facile ingens copia pinguedinis elixatur.

Caro Salmonum inter spinosos pisces maxime omnium nutrit, cibum largitur solidum, absque condimentis sapidissimum, ac contra Medicorum sententiam maxime sanum, id, quod integrae gentes in terris Kamtschatkicis suis exemplis euincunt, qui solis Salmonibus viuunt, nec febribus, nec scabiei, nec conuulsiuis morbis obnoxii sunt; hinc singulariter his piscibus prospexit Deus omnibus illis genti-

gentibus, qui pane carent, et ob coeli et terrae inclementiam perpetuo carere debent. Sapore omnes conueniunt prope modum Salmones, elixati musculum insipidum relinquunt, ac omnem vim nutriendi ab igne et aqua coagulatam in se seruant, venerem magis quam carnes stimulant, praecipue ova idque magis, si exsiccata raucorem contraxerint; perpetuo igitur ieiunantes Itaelmeni lasciuiores sunt, et ad venerem proniores, quam vel maxime carniuora animalia alia. Idem etiam de victu et moribus Astracanensium valet.

In Historia Salmonum, Corregonorum et Osmerorum accuratissime sequentia obseruanda sunt:

1. Longitudo maxillarum.

2. Series dentium et numerus.

3. Figura primae caudae exactissime determinanda.

4. Figura caudae musculosae ante pinnam caudae, num rotunda, num e conuexo plana, ita Keta e conuexo planam, Krasna et Biela ryba teretem et carnosiorem obtinent.

5. Ossiculorum branchiostegorum figura, et numerus in vtroque latere, et in pluribus subiectis.

6. Vertebrarum numerus exactissimus.

7. Num branchiae in parte concaua in omnibus eandem structuram obtinent.

8. Epatis figura.

9. Si fieri potest appendicum numerus, sed hic variat.

10. Pleurae color.

11. Ossiculorum pinnarum numerus.

12. Carnis crudae et coctae qualitas et color.

Inter Salmones ossicula branchiostega continent numero:

18. Tſchawytſcha.
11. et 12. Sioemga.
13. Biela ryba.
12. 13. 14. Kraſna ryba, ſaepe 3. in dorſo, et 14. in ſiniſtro latere.
12. et 13. Fluuiatilis Malma, aut 12. ſaepe in dextro, et 11. in ſiniſtro, imo 11. in vtroque latere.
13. Lacuſtris Malma e promontorio Kronoky idem piſcis.
12. Kunſcha Tunguſorum.
14. Kaiko, ſed raro, plerumque in dextro 15. et in ſiniſtro 16.
12. Lax Suecorum. *Artedi ſyn. ſpec.* 22.
10. 12. In Laxunge Elf karlorum *Artedi* deſcripti. *p.* 50.

Pinna dorſi oſſiculorum:

14. Kaiko.
14. Kunſcha.
14. Sioemga.
11. Malma e lacu Kronok.
13. Malma fluuiatilis.
12. Kraſna ryba.
14. Gorbuſcha.

Pinna poſt annum:

10. In Malma e Kronok.
10. et 11. In Malma fluuiatili.
15. Kaiko.
11. Kunſcha.
13. Sioemga.
15. 16. 17. Kraſna ryba.

16. Gorbuſcha.

Numerus oſſiculorum pinnarum poſt-branchialium:

16. Gorbuſcha.

Numerus oſſiculorum pinnarum ventralium:

10. Gorbuſcha.

Vertebrarum numerus:

71. Tſchawytſcha.

61. Sioemga.

66. Malma, et lacuſtris et fluuiatilis, conſtantiſſime.

66. Kaiko.

54. Osmerus, Itaelmanis Inniacha.

65. Biela ryba.

60. Waliök, corregonus.

61. Kunſcha.

56. Lax Suecorum, *Artedi.*

60. Forell. *Artedi ſyn.* 51.

67. Krasna ryba.

68. Gorbuſcha.

Inter Salmones ſquamas magnas obtinent:

Salmo, omnium Autorum *Artedi ſpec.* 48.

Tſchawytſcha Kamtſchadalis.

Kaiko vel Keta.

Krasna ryba.

Biela ryba.

Inter Salmones ſquamas minutiſſimas obtinent:

Malma Tunguſorum.

Laenok Lenenſium.

Myhkyhs Kamtſchadalis.

Gorbuſcha Kamtſchadalis.

Kunſcha Tunguſorum.

Taimen

Taimen Sibiriensium.

Inter Salmones caudas resimas obtinent:

Salmo, maculeis cinereis, caudae extremo aequali. *Artedi syn.* 23. *The Greg* Anglis, et *Graelax* Suecorum.

Salmo latus, maculis rubris nigrisque, cauda aequali *Artedi syn.* 94. *spec.* 5. Trutta Salmonata est *The Seurf* Anglis, et *Boerteng* Suecis.

Inter Salmones caudas forcipatas obtinent:

Salmo, omnium Auctorum *Artedi spec.* 48.

Sioemga Kamtschadalis forte idem.

Tschawytscha Kamtschadalis.

Krasna ryba.

Biela ryba,

Malma.

Kunscha Tungusorum.

Kaiko Kamtschadalis, vel Keta Tungusis.

Salmo cauda bifurca, maculis solum nigris, et sulco longitudinali in ventre est. *Syn.* 25.

Trutta lacustris.

Salmo, lineis lateralibus sursum recuruis, cauda bifurca. *Artedi syn.* 25. Vmbla prior.

Mandibulam superiorem longiorem obtinent clauso ore:

Sioemga Kamtschadalis.

Tschawytscha.

Kaiko.

Kunscha.

Salmo, et Blanklak Suecis.

Salmo pedalis, siue Saluelin. *Artedi syn.* 26.

Gorbuscha.

Mandibulam inferiorem longiorem obtinent:

Salmo maxilla inferiore paulo longiore, maculis rubris. *Artedi spec.* 23. Trutta fluuiatilis est auctor Forelli.

Salmo vix pedalis pinnis ventris rubris, maxilla inferiore paulo longiore. *Artedi spec.* 52.

Epar indiuisum obtinent:

Tschawytscha.
Kunscha.
Sioemga.
Lax Suecorum forte idem cum priori.

Epar diuisum in 2. lacinias:

Kaiko.

Lien indiuisum obtinent:

Kunscha forma linguae.
Sioemga velut segmentum panis.

Lien diuisum obtinent in 2. lobos figura γ:

Tschawytscha.
Kaiko.
Taimen.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

SVMMARIVM
OBSERVATIONIS ECLIPSEOS SOLARIS d. 8. IANVARII 1750. ſt. n. a CL. *KRAFFTIO* TVBINGAE HABITAE E LITTERIS * AD *WINSHEIMIVM* DATIS CVM ACADEMICIS COMMVNICATVM.

Initium ob tempus nebuloſum ſole non admodum eleuato obſeruari quidem haud potuit, ob ſubſecutum autem tempus ſerenum, per totum diem continuans, finis Eclipſeos determinatus fuit.

Inſtrumenta quidem ad obſeruationem adhibita fuere mediocria, horologium ſcil. portatile Anglicanum, tubus terreſtris itidem Anglicanus 5. pedum, et quadrans vnius pedis, pro altitudinibus ſolis capiendis. Hae autem altitudines pro aberratione horologii calculatae, dum intra minutum primum conuenirent, horam 10. cum 52. minutis primis tempore medio pro fine Eclipſis ſat accurate dederunt.

Exitus autem diſci lunae e diſco ſolis vna cum duabus maculis in ſole obſeruatis, in adiecto ſchemate quodammodo adumbratae ſunt. Tab. XIII. Fig. 1.

De cetero Barometrum circa initium 28. $\frac{80}{100}$ poll. duod. Angl. monſtrans, ad 28. $\frac{76}{100}$ circa meridiem depreſſum fuit. Variatio autem Thermometri *Fahrenheitiani* intra 20.° 30.° obſeruata fuit.

* Ex epiſtola Germanico idiomate ſcripta in linguam Latinam tranſtulit, ſcriniis Academicis inſerendum, *Chr. Nic. de Winsheim.*

OBSER-

OBSERVATIO
ECLIPSIS LVNAE TOTALIS d. 19. IVNII st. n. 1750. LIPSIAE HABITA.
a
G. Heinsio.

Initium huius Eclipsis ex calculo contigit, luna nondum orta. Hanc ob causam et cum nubes copiosae adspectum lunae, post ortum eius, impedirent, immersionem lunae in vmbram terrae obseruare non licuit. Circa hor. $9\frac{1}{2}$ lunam, in nubium hiatu per aliquot tempus conspicuam, totam deprehendi in vmbra terrae; et versus hor. 10., luna denuo in conspectum prodeunte, nucleum vmbrosum figurae irregularis in disco eius animaduerti ab oriente occidentem versus discum successu temporis perua-gantem, ita quidem, vt quarta circiter pars disci meridiem versus (situ erecto) nucleo libera et prae reliqua disci parte valde lucida cerneretur. Luna deinde per vices subiit nubes, quibus tandem hor. 10. 35′. tempore vero liberata patefecit, emersionem primam ex vmbra terrae iam factam esse, ante duo circiter minuta prima temporis. Coelum postea serenum obseruationi vsque ad finem Eclipsis fauit. Instructus itaque Telescopio *Gregoriano* sub apparatu, quo istud obiecta 52. vicibus amplificat, macularum lunae emersiones ex vmbra terrae optime obseruare et terminum vmbrae probe distinguere potui, ita vt de momentis appulsuum vmbrae ad maculas admodum certus sim, ambiguo si quid acciderit, vix ad 5. secunda temporis ascendente; id quod in eiusmodi obseruationibus raro contingere solet. Momenta appulsuum

ad

ad duo horologia comparata, et ex altitudinibus Solis respondentibus diebus 20. et 21. Iunii captis probe correcta, sequentia accipe.

Tempore vero

10^h.	38′.	38″.	Grimaldus incipit emergere.
	43.	57.	Galileus ex vmbra prodire incipit.
	44.	20.	Galileus totus ex vmbra, quae simul Mare Humorum tangit.
	51.	4.	Aristarchus incipit emergere.
	51.	17.	Medium Aristarchi aestimatum.
	51.	36.	Aristarchus totus. Intelligitur hic macula Aristarchi rotunda, abstrahendo a cuspidibus eius versus ortum excurrentibus.
	55.	40.	Vmbra incipit relinquere Tychonem.
	56.	40.	- - - - Tychonis medium ex aestimio.
	57.	45.	- - - - Tychonem totum.
11^h.	0′.	28″.	Copernicus incipit emergere.
	1.	40.	Medium Copernici aestimatum.
	2.	48.	Copernicus totus.
	8.	54.	Vmbra ad orientale extremum Platonis.
	9.	33.	- - ad medium Platonis ex aestimio.
	10.	15.	- - ad occidentale extremum Platonis.
			Intelligitur hic nigrum maculae Platonis.
	17.	12.	Manilius ex vmbra prodire incipit.
	17.	44.	Medium Manilii aestimatum.
	18.	18.	Manilius totus.
	21.	5.	Vmbra per medium Menelai transit, et Dionysius totus emergit. Obseruatio aliquantulum dubia.

31.	40.	Menelaus totus ex vmbra.
34.	0.	Medium Procli emergit.
34.	36.	Mare Crisium incipit emergere.
36.	55.	Medium Maris Crisii ex aestimatio.
39.	6.	Mare Crisium totum.
40.	16.	Finis Eclipsis. Obseruatio bona et intra 10. secunda temporis certa.
40.	30.	Finis certe factus est.

OBSER-

OBSERVATIONVM LIPSIENSIVM ANNO 1748 HABITARVM CONTINVATIO

AVCTORE

G. Heinsio.

Eclipses Satellitum Iouis.

In obseruationibus Eclipsium Satellitum Iouis sequentibus Telescopio vsus sum consueto Gregoriano sub apparatu, quo istud obiecta secundum Diametrum 52. vicibus amplificat; temporis autem correctio ex altitudinibus Solis respondentibus innotuit.

An. 1738. temp. vero Astron. styl. nou.

August. 21. $12^h. 24'. 38''$. Emersio Sat. 2. prima, obseruatio exacta Satellite celeriter emergente ad distantiam circiter $\frac{1}{2}$ Diametr. Iouis a proximo eius limbo.

$12^h. 26'. 50''$. Satelles lumine pleno fulgebat; minimus tamen inter reliquos.

August. 26. $12^h. 0'. 47''$. Emers. Sat. 1. prima. Sic quidem opinor hoc momento Satellitem ad distantiam circiter $\frac{1}{2}$ Diam. Iouis a proximo eius limbo primum in conspectum venisse; certissime autem id affirmare non possum, Iouem nempe non nisi per nubium hiatus, adspectum eius, per vices concedentes, contemplari licuit, sic quidem vt adspectus eius circa momentum notatum 5. circiter secunda temporis tantum durauerit, atque de facta emer-

 sione

sione me haesitantem reliquerit. Cessauit adspectus deinceps vsque ad $12^h. 10'. 58''$, quo tempore Satellitem inueni emersum.

Septembr. 4. $8^h. 24'. 23''$. Emers. Sat. 1. prima, ad distantiam $\frac{1}{4}$ Diam. Iouis a proximo eius limbo, obseruatio exacta.

Septembr. 11. $10^h. 21'. 46''$. Emers. prima Sat. 1. ad distantiam $\frac{4}{5}$ Diam. ♃ a proximo eius limbo, obseruatio exacta.

$10^h. 23'. 46''$. Satelles totus emersus.

Septembr. 14. $10^h. 28'. 4''$. Emers. prima Sat. 3. ad distantiam $\frac{4}{5}$ Diam. ♃ a proximo eius limbo, obseruatio exacta.

$10^h. 30'. 20''$. Emersio totalis.

Septembr. 20. $6^h. 49'. 4''$. Emers. prima Sat. 1. obseruatio exacta, crepusculo vespertino licet adhuc satis notabili.

$6^h. 50'. 35''$. Satelles lumine pleno videbatur.

Occultationes Fixarum a Luna.

D. 15. August. post hor. 15. temporis Astronomici instabat transitus lunae per Pleiades, quem per tubum Gregorianum sub apparatu ante memorato tantummodo obseruare licuit. Visum scilicet Machinae parallacticae insignis lunae altitudo pro conditione loci obseruationis irritum reddidit. Vt autem annotata distincte exponere possem, schema adiectum ex elementis, quae Calendarium Astron. Berolinense suppeditauit, situ erecto construxi, eique

Fig. 2.

eique stellas Pleiadum insigniores pro earundem differentiis longitudinum et latitudinum, ex obseruationibus *Cassini* et *Maraldi* in *Commentar. Acad. Sc. Paris*, *ad an.* 1708. *p.* 384. *ed. Bat.* notis inserui. Schematis sequentes sunt conditiones: *a* A repraesentat parallelum Eclipticae per lucidam Pleiadum *a* transeuntem; *a* B eiusdem circulum latitudinis; CL semitam centri lunae visam, ad quam parallelae sunt *c* D; *e* E; *g* F, *h* K, vsque ad occursum cum peripheria lunae, vel linea cuspidum M I respectiue protractae, posito lunae centro in C. Stellas iisdem litteris insigniui, quibus visus est *de la Hire* in *Comment. Acad. Sc. Paris*, *ad an.* 1693. *p.* 59, iisque respondent nomina sequentia *Riccioli*:

a. Alcione seu Lucida Pleiadum. *d*. Merope. *h*. Pater Atlas.
b. Electra. *e*. Maia. *i*. Mater Pleione.
c. Taygeta. *g*. Celeno.

Luna ante quatuor circiter horas quadraturam secundam celebrauerat, et Immersiones stellarum ad limbum lunae lucidum factae sunt. His praemissis sequentia noto ex obseruatione.

Momenta.

An. 1748. d. 15. Aug. st. nou. temp. vero Astron.

$15^h. 24'. 25''$. Stellam *g* (*Celeno*) limbo lunae ita vicinam deprehendi, vt post $2\frac{1}{2}$ minut. temporis occultationem futuram esse coniicerem. Centrum lunae tunc locum C in schemate occupabat, quem, sumta Diametro lunae $= 31'. 5''$. altitudini tem-

 pore

poro obseruationis vi calculi conuenienre, ope semihorarii lunae in semita eius visa $= 12'. 20''$. ex interuallo Immersionum posthac obseruatarum per schema eruti, assignare licuit.

— 25. 25 Eadem stella ad distantiam a limbo lunae lucido $= 45''$. circuli maximi ope schematis simili methodo posthac definitam, ob lumen lunae forte disparere incepit. Arbitrabar itaque:

$19^h\, 27'. 15''$. Occultationem huius stellae re vera contigisse; et de hoc momento intra 10. vel 15. secunda temporis certus sum.

— 35. 25. Stella *c* (*Taygeta*) a limbo lunae lucido interuallo $= 1\frac{1}{2}$ Diametro Grimaldi G H a borea austrum versus sumtae ex aestimio distabat, cui circiter $1'. 37''$. circuli respondent.

— 37. 25. Distantia eiusdem stellae a limbo luna aestimata fuit $= \frac{1}{2}$ G H vel $48''$.

— 38. 55. Eadem stella ad distantiam a limbo lunae circiter $= 24''$. circuli euanescere incepit. Iudicabam itaque:

— 39. 15. Occultationem huius stellae a limbo lunae re vera accidere debuisse; atque de hoc momento intra 10. secunda temporis certus sum. Immersio facta est ad punctum limbi lunaris D ita respectu Grimaldi situm, vt $\frac{1}{2}$ ipsius G H supra D boream

ream verſus, ; ipſas G H infra D exiſterent.

m. 40. 0. Crepuſculum matutinum notabiliter iam ingruebat.

Acceſſit deinceps luna ad ſtellam *b* (*Electram*), quam vero tranſeundo auſtrum verſus a ſe reliquit. Notaui itaque momentum intra 10. ſecunda temporis certum:

m. 57. 0. Quo ſtella *b* in lineam cuſpidum lunae M I productam incidit in K, aeſtimando diſtantiam I K aequalem diſtantiae centri Albategnii a proximo limbo Waltheri, quae maculae prope lineam cuſpidum haerebant. In ſchemate lunari *Doppelmaieri* haec diſtantia conficit $\frac{5}{31}$ Diametri lunaris, quae, ſi vera eſt, ſiſtit IK = 5′. 0″, tantummodo 50″ maiorem ea, quam ſchema conſtructum ex calculo = 4′. 10″. ſuppeditauit.

Cum igitur luna prope quadraturam, ideoque linea cuſpidum ad ſenſum perpendicularis exiſteret ad parallelum Eclipticae; momento notato centrum lunae eandem habuit longitudinem cum ſtella *b*; differentia autem latitudinum vtriusque vi praec. foret = 20′, 33″. centro lunae a ſtella boream verſus diſtante.

16^h. 1'. 5''. Distantiam stellae *e* (*Maiae*), ad quam luna nunc accedebat, a proximo eius limbo aestimaui aequalem Diametro Grimaldi G H.

— 4. 38. Immersio facta est huius stellae, quam occultationem optime et stellam ad ipsum lunae marginem constitutam obseruare licuit. Interuallum horum momentorum Diametrum Grimaldi G H assignat $= 1'$. 5''. circuli maximi. Crepusculum nunc tantum luminis incrementum ceperat, vt scriptionibus expediendis absque candelae accensae vsu sufficeret. Hoc lumen ingrauescens obseruationibus quoque finem imposuit.

Circa horam 15, antequam has obseruationes suscepi, discrepantiam luminis stellarum Pleiades componentium sensuum iudicio notaui. Lucidissima erat *a*, quam proxime excipiebat *b*, et hanc deinceps *e*; minores ipsa *e* videbantur *d*, *b*, *c*, *i*, ad sensum inter se aequales; minima tandem inter praecedentes visa est *g*. Hanc lucis diuersitatem comparando cum distantiis, ad quas a limbo lunae lucido stellae *e*, *c*, *g*, (scilicet ad 0'', 24'', 45'', respectiue) ob intensitatem luminis lunaris disparuerunt, ea confirmantur, quae de eiusmodi effectu intensitatis luminis in descriptione occultationis Palilicii a luna d. $\frac{21. \text{ Sept.}}{2. \text{ Octobr.}}$ 1738. Academiae Imperiali exhibita in medium protuli.

d. 2. Septembr. 1748.

Vesperi luna appropinquabat ad fixam 6 Sagittarii 3tiae magnitudinis, eamque occultabat. Congressus huius obseruationem ope Machinae parallacticae, iam ante descriptae, suscepi, et positiones aliquot fixae ad lunam determinaui, prout istas figura 3., situ erecto delineata, distincte ob oculos ponit, 5 *p* repraesentat parallelum ad diurnum fixae; *b p* autem, perpendicularis ad 5 *p*, exhibet circulum horarium. Luna post quadraturam primam gibbosa phasi instructa limbo suo praecedente tangit *p b*, limbo autem meridionali rectam 5 *p*, ad quam inclinata est linea cuspidum. Si ergo fixa, verbi caussa, in 6 ponatur, et 65 ad *b p* parallela agatur; repraesentabit 5 *p* differentiam ascensionum rectarum limbi lunae praecedentis et fixae, 65 autem differentiam declinationum limbi lunae meridionalis et fixae, facta scilicet relatione ad diurnum fixae. Huius relationis re vera rationem habui in definiendis locis fixae per 1, 2, 3, 4, secundum ordinem obseruationum insignitis; praeterea vero, cum luna in vicinia horizontis in altitudine circiter 11°. existeret, ideoque declinationum differentia correctionem aliquam ex diuersitate refractionum admitteret, hanc quoque attendere sategi. His ita comparatis ex obseruationibus sequentia definita sunt momenta. Fig. 3.

Ex obs. pro momento temporis veri d. 2. Sept.	Differentia ascens. rectarum limbi ☽. praeced. et fixae in partibus diurni (vel etiam quoad numerum in partibus aequatoris).	Differentia declinationum limbi ☽. meridionalis et fixae in partibus circuli maximi.
1. 7h. 55′. 49″.	0°. 58′. 18″.	0°. 24′. 52″.
2. 8. 11. 2.	51. 5.	23. 25.

3. 8^h. 17'. 40''. 0°. 47'. 51''. 0°. 22'. 38''.
4. — 25. 42. 43. 41. 21. 47.

Obseruationem tertiam dubiam aliquantulum reddiderunt nubes tenues subinde interuenientes. Denique 8^h. 41'. 0''. Immersio facta est stellae ad marginem lunae obscurum. Emersionis obseruationem nubes impediuerunt.

De Cometa an. 1748.

Cometam, qui magnitudinis exiguae mense Maio an. 1748. in boreali coeli regione apparuit, non nisi simplici vice et difficulter d. 9. Maii deprehendere licuit. Lunae enim post tres dies plenilunium celebraturae lumen forte non solum, verum etiam nubes tenues subinde interuenientes, saepissime erant impedimento. Tandem hor. $12\frac{1}{4}$ temporis Astron. situm Cometae inter fixas oculorum aestimio cognoscere licuit. Recta scilicet per γ Cephei et Cometam C producta bisecabat interuallum stellarum γ et δ Cassiopeiae, in qua recta Cometa C a γ Cephei tantum distabat, vt intercapedo stellarum γ et π Cephei aequaretur $\frac{2}{3}$ distantiae Cometae C et γ Cephei. Signatura stellarum est *Bayeri* in *Vranometria*. Per tubulum Hollandicum $1\frac{1}{2}$ digit. longum Cometa magnitudine apparente aequalis visus est stellae π. Cephei, quae est 5^{tae} magnitudinis, pallidioris tamen luminis. Interdum et caudam sat bene discernere licuit $\frac{3}{4}$ gradus longam, quae a capite Cometae versus π Cephei ita dirigebatur, vt, si producta intelligeretur, hanc orientem versus ad distantiam tamen vix sensibilem transiret. Circa hor. $13\frac{1}{2}$ Cometam per Tubum *Gregorianum* sub apparatu, quo iste 52. vicibus obiecta secundum Diametrum amplificat, contempla-

Fig. 4.

tus

tus sum. Cometam iste satis lucidum sistebat; nucleus autem tam male terminatus apparuit, vt figuram eius discernere non liceret. Nucleum Atmosphaera sat lucida circumdabat, lumine tamen continuo decrescens a nucleo versus extrema, ita, vt Solem versus figura semicirculari satis sensibili terminaretur; in regione vero a Sole auersa cum productione caudae absque termino sensibili confunderetur. Partem Atmosphaerae lucidissimam et nucleo proximam acuminatam credidi caudam versus. Lumen caudae admodum debile et pallidum Tubus iste docebat, eamque ad 20. minuta prima circiter extensam difficulter distinguere licuit. Diameter Atmosphaerae ad sensum $\frac{1}{8}$ capacitatis Tubi *Gregoriani* occupabat, eaque Diametrum nuclei duodecies in se continebat, quantum quidem terminus nuclei incertus aestimium hoc concessit. Hoc pacto, cum Tubus $19\frac{1}{4}$ minuta prima circuli maximi capere solet, Diameter Atmosphaerae emergit $= 2'. 24''$; Diameter autem nuclei $= 12''$. Fixas non nullas minores in regione Cometae per Tubum Astron. 5. ped. animaduerti quidem et ab iisdem distantias Cometae ope Micrometri explorare fategi; ast conamen omne nubes saepissime interuenientes et deinceps crepusculum matutinum ingrauescens irritum reddiderunt.

Definitio eleuationis poli ex altitudinibus Solis solstitialibus.

Circa solstitium aestiuum an. 1748. Quadrante consueto obseruaui altitudines limbi superioris Solis meridianas, vt inde altitudo meridiana solstitialis centri Solis erui posset. Cum correctiones adhuc prorsus sint eaedem, quas in recensione obseruationum solstitialium an. 1746. adhibui, excepta differentia declinationis Solis a solstitiali declinatione, quam facile supplere licet; altitudines tantum Quadrante captas, et inde deductas altitudines solstitiales notabo. Deprehendi autem:

Altitudinem meridianam

	Limbi superioris ☉ secundum diuisionem Quadrantis, nulla prorsus adhibita correctione.		Solstitialem centri Solis adhibitis memoratis correctionibus deductam.
An. 1748.			
Iunii. 18.	62°. 40′. 15″.	non admodum incerta.	62°. 6′. 17″.
19.	— 40. 40.	obs. operosa.	— 5. 46.
20.	62°. 40′. 45″ vel 41. 0.	dubius circa hanc determinationem.	— 5′. 21″ / 36
21.	— 41. 0.	obseru. exacta.	— 5. 31.
22.	— 40. 40 / 45	sat certa.	— 5. 30 / 35.
23.	— 40. 0.	obs. exacta.	— 5. 34.
Iunctis altitudinibus solstitialibus aestiuis an. 1746 - - Iunii. 24.			— 6. 6.
25.			— 5. 46.
emergit media			62°. 5′ 42″.

Circa solstitium brumale an. 1748.

Decembr. 24. 15°. 50′. 0″. obseru. exacta. 15°. 8′. 50″.

Si cum hac conferantur altitudines solstitiales hybernae an. 1747.

d. 20. Decembr.	15. 9. 41.	
d. 21. - - - - -	8. 58.	

definitae, cuiusmodi prodire solent,

si parallaxis Solis ratio habeatur, cuius considerationem in recensione obseruationum an. 1747. omisi, habebitur media

habebitur media	15°.	9'.	10''.
Hinc cum inter. aestitas media sit	62.	5.	42.
erit distantia Tropicorum	46.	56.	32.
Obliquitas Eclipticae	23.	28.	16.
et Eleuatio poli Lipsiae	51.	21.	34.

De apparitione Veneris interdiu.

D. 13. et 14. Octobr. an. 1748. horis antemeridianis Venerem interdiu ad dextram respectu Solis nudis oculis conspexerunt multi, quam insolitam stellae apparitionem instar portenti habuit vulgus. Eandem quoque d. 18. Octobr. post horam 9. matutinam probe adhuc in vicinia lunae videre mihi licuit. Apparentiam hanc contingere debere docuit *Hallejus* in *Transact. Anglic.* N. 349, si area partis illuminatae disci Veneris e terra conspiciatur maxima, quae conditio prope coniunctionem Veneris cum Sole inferiorem locum habet, dum Venus a Sole vel versus Orientem vel Occidentem ad 40. gradus circiter elongatus cernitur. Hoc quidem pacto, cum Venus ad eundem respectu Solis et terrae situm interuallo 584. dierum circiter redire soleat, eiusdem quoque phaenomeni reditus ad idem interuallum accidere debet. Interim experientia abunde docet, euidentem eiusmodi apparitionem Veneris tam frequentem non esse, vt ista cum periodo memorata conciliari possit. Nec coeli inclementia adspectum phaenomeni forsan impediens hic excusationi semper locum facit, siquidem duratio visus eiusdem-que apparitionis limitibus nimis arctis circumscripta non est, sed ad 15. pluresque dies extenditur. Aliam igitur, praeter illam *Halleji*, conditionem, attendere necesse erit. Scilicet situs Veneris respectu horizontis in computum quoque trahi debebit. Manente enim Veneris fulgore, quem a Sole recipit ista, eodem, conspectus Veneris interdiu facilior detur necesse est, si ista insignem super horizonte altitudinem habeat, Sole locum depressiorem occupante, ac si Veneri horizonti viciniori debilitatio lucis ex maiori vaporum Atmosphaerae copia accidat. Vt igitur conditionem hanc regulis generalioribus explicare liceat, sequentes hypotheses introducere conueniet. Fingamus, Venerem, quippe ab Ecliptica non multum euagantem, in Ecliptica semper incedere; tempus autem, quo Venus interdiu nudo oculo conspici debeat, restringatur ad momentum ortus vel occasus Solis. His positis conditiones assignare debemus, sub quibus Venus, accedente ad istas hypotheses *Halleji* conditione, maximam super horizonte altitudinem acquirat. Referat H E Z meridianum; Fig. 5. Z Zenith, H A S horizontem, E V S Eclipticam eo in situ, qui pro data poli eleuatione locum habet, Sole ad S in horizonte ad datum diem constituto. Distet nunc Venus in Ecliptica a Sole arcu V S = 40. grad. vi conditionis *Hallejanae*; et per locum Veneris V ductus sit circulus verticalis Z V A; erit V A altitudo Veneris, quae hypothesibus supra dictis et conditioni *Hallejanae* respondet. Haec maxima; manente poli eleuatione, requiritur, si casus maxime idoneus pro apparitione Veneris interdiu existere debeat. Est autem in triangulo S V A ad A rectangulo sin. tot. : sin. S V = sin. V S A : sin. V A;

V A; vnde, cum arcus S V vi conditionis *Hallejanae* sit constans, semper scilicet = 40. grad., erit ratio sin. tot.: sin. S V; ideoque et ratio sin. V S A : sin. V A constans; quam ob rem arcus V A euadit maximus, si angulus V S A, angulus scilicet Eclipticae cum horizonte, sit maximus. Euenit hoc pro regionibus terrae borealibus in plaga coeli orientali, si in 0° ♎; in occidentali, si in 0°. ♈. sol versetur. Si ergo circa coniunctionem Veneris cum sole inferiorem Venus a Sole occidentem versus distet 40. grad. tempore aequinoctii autumnalis, horis antemeridianis conspectus Veneris facillimus interdiu dabitur; horis autem pomeridianis, si tempore aequinoctii verni Venus a Sole orientem versus 40. grad. remota sit. Ast tam arctis limitibus rem comprehendere non opus est, siquidem in hoc negotio omnem rigorem attendere superuacaneum esset. Sic phaenomeno satisfiet horis antemeridianis, modo, ceteris manentibus, Sol a 0°. ♎ hinc vel illinc non vltra signum coeleste circiter distet, hoc est, locum Eclipticae intra 0°. ♍ et 0°. ♏ situm occupet; horis autem pomeridianis, modo Sol haereat intra 0°. ♓ et 0°. ♉; in his enim casibus angulus Eclipticae cum horizonte parum differt a suo maximo. Haec circumstantia quoque euincit, commodum apparitionis Veneris interdiu tempus ad ortum vel occasum Solis praecise restringi non debere, sed ad vnam duasue horas vel post Solis ortum vel ante Solis occasum poni posse, modo Solis locus intra iam memoratos limites respectiue contineatur; si quidem tunc in reuolutione Sphaerae coelestis Ecliptica respectu horizontis per aliquot tempus positionem phaenomeno nostro fauentem conseruat. Accedit tandem,

rigorem

rigorem nimium quoque obseruandum non esse circa elongationem Veneris a Sole = 40. grad., sed istam sensu latiori in excessu aliquo vel defectu accipi posse. His ita comparatis, sequentes conditiones pro indicando phaenomeno nostro, facta ad anni dies relatione, praescribere licebit: *Venus commode conspicietur interdiu horis antemeridianis, si elongatio Veneris a Sole occidentem versus circiter = 40. grad. post ☌ ♀ ☉ inferiorem incidat in aliquem diem intra 23. August. et 23. Octobr. circiter successu temporis comprehensum; horis autem pomeridianis, si eiusmodi elongatio orientem versus respectu Solis ante ☌ ♀ ☉ infer. die aliquo contingat intra 19. Februar. et 19. April. circiter sito.* Facile hinc intelligitur, post vnam quamque Veneris respectu Solis et terrae periodum (584 dierum) phaenomenum nostrum redire non posse, conditionibus istis non semper occurrentibus; interuallo autem octo annorum, quo Venus ad eundem respectu Solis et terrae situm in iisdem anni temporibus proxime restituitur, phaenomenum nostrum redire debere. Vt omnia distincte oculis subiici possint, ex Ephemeridibus Manfredii dies circiter notaui, quibus ab an. 1732. vsque ad an. 1750. tum coniunctiones Veneris et Solis inferiores, tum elongationes Veneris a Sole = 40°. ante vel post coniunctiones istas respectiue contigerunt, vnde sequens emersit tabula.

Elongatio ♀ris a ☉le = 40°. orientem versus respectu Solis horis pomeridianis conspicua.	Coniunctio inferior Veneris et Solis.	Elongatio ♀ris a ☉le = 40° respectu Solis occidentem versus horis matutinis conspicua.
Iulii. 16. an. 1732. -	an. 1732. August. 23. -	Septembr. 30. an. 1732.
Febr. 27. - 1734. -	- 1734. April. 3. -	Maji. 11. - 1734.
Sept. 28. - 1735. -	- 1735. Nov. 5. -	Decembr. 12. - 1735.
Maji. 6. - 1737. -	- 1737. Iunii. 12. -	Iulii. 20. - 1737.

Dec

Dec.	14. -	1738. - -	1739.	Ianuar.	18. -	Febr.	25. -	1739.
Iulii.	14. -	1740. - -	1740	August.	21. - *	Sept.	29. -	1740.
* Febr.	24. -	1742. - -	1742.	April.	1. -	Maji.	8. -	1742.
Sept.	26. -	1743. - -	1743.	Nov.	2. -	Decembr.	9. -	1743.
Maji.	4. -	1745. - -	1745.	Iunii.	10. -	Iulii.	18. -	1745.
Dec.	12. -	1746. - -	1747.	Ianuar.	16. -	Febr.	22. -	1747.
Iulii.	12. -	1748. - -	1748.	August.	19. - *	Sept.	25. -	1748.
* Febr.	22. -	1750. - -	1750.	Mart.	29. -	Maji.	6. -	1750.

Statim haec tabula patefacit, annis 1734, 1742, 1750, criteria competere, quae apparitioni Veneris horis pomeridianis fauent; annos autem 1732, 1740, 1748, notas continere commodum Veneris adſpectum horis matutinis indicantes; quam ob rem praedictos annos ſtellula (*) reliquis diſtinxi. Caſum poſteriorem confirmat obſeruatio noſtra, quae huic diſquiſitioni anſam dedit, conſpectus ſcilicet Veneris interdiu diebus 13, 14, 18, Octobr. 1748; eique adſtipulatur obſeruatio a me Lipſiae an. 1732, ideoque ante octennium bis elapſum habita, quam in Diario meo conſignatam reperio his verbis: „d. 24. Octobr. (ſcil. an. 1732.) hora 9. „matut. coelo ſereno ſoleque ſplendente Venerem oculis „nudis obſeruaui. D. 25. Octobr. poſt horam ſeptimam „matutinam eandem tam oculis non armatis, quam ar„matis contemplatus ſum. Plebs portentoſam hanc ha„buit ſtellam.„ Hoc pacto reditum huius phaenomeni circa finem Septembris vel menſe Octobri an. 1756. et ſic deinceps ſingulis octenniis praedicere licebit. Coronidis loco monendum eſſe duco, viſus praeſtantiam in hoc negotio attendi quoque debere. Pone enim obſeruatorem inſigni oculorum acie pollentem, pone exercitatum et ad videndam interdiu Venerem praeparatum, lar-

 gior,

gior, accedente maxima coeli serenitate, istum forsan deprehensurum esse Venerem interdiu in elongatione a Sole circiter = 40° circa ☌ ♀ ☉ infer., etiamsi situs Eclipticae respectu horizontis non prorsus faueat; et quidem eo facilius, quo propius Eclipticae positio respectu horizontis ad casum nostrum appropinquat; cuiusmodi, verbi causa, conditio in praecedenti tabula pro apparitione Veneris horis matutinis locum habere potuit mense Iulio, tum an. 1737, tum an. 1745. Ast circumstantia haec disquisitionem nostram non euertit; phaenomeni enim in sensus cuiusuis modo euidentiori sponte incurrentis rationem reddere, et obseruationibus corroborare allaborauimus.

Obseruationes Meteorologicae an. 1748.

Thermometrum idem adhibui, quod in precedentium annorum obseruationibus descripsi. Per integrum fere Martium frigus in his terris satis notabile regnauit, et Thermometrum d. 7. Mart. post hor. 7. matutinam ostendebat 176½ grad.

Circa finem Iunii vsque ad medium Iulii aestum maxime extraordinarium, praesertim d. 12. et 13. Iulii experti sumus. D. 13. Iulii horis pomeridianis Thermotrum in loco vmbroso boream versus libero aëri expositum, leni spirante Euro (secundum *Vitruuii nomenclaturam*, nobis Süd-Ost-Wind) sequentes notabat gradus diuisionis consuetae

		grad. Therm.			grad. Therm.
hor. 3.	5′,	— 100. $\frac{1}{8}$	hor. 4.	1′.	— 100, $\frac{1}{3}$
	— 30,	— 99. $\frac{1}{4}$		— 22.	— 100, $\frac{7}{8}$
	— 43,	— 99. $\frac{5}{8}$		— 45.	— 101, $\frac{1}{3}$

Coelum

Coelum, quod horis antemeridianis faciem serenam mentiebatur, et cuius fauore Mercurius in Thermometro Soli libere exposito vsque ad gradum 76. extendebatur, statim post meridiem vaporibus copiosis impraegnatum fuit. Tonitrua quoque non nulla versus hor. 6. pomerid. audita fuerunt. Tantum aestum 99½ grad. Thermom. respondentem neque Petroburgi, neque hic loci vnquam expertus sum. Illum enim, qui an. 1738. d. 14. Iulii st. n. Petropoli per 103. grad. signatus est, gradibus 4½ excedit obseruatus.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE

Eclipsium satellitum Iouis durante expeditione Kamtzatkiensi in diuersis Sybiriae locis habitae a Centur. Vicario

ANDREA KRASILNIKOW:

Referente ex mandato Illustrissimi Academiae Praesidis Adiuncto NIC. POPOW.

Notanda circa has obseruationes.

Obseruationes, quae sequuntur, non prorsus omnes exactae sunt, ad eas namque instituendas obseruator aliquando vnico tantum horologio vsus est, quod non raro cessabat in motu suo, eo ipso tempore, quo motu eius ad tempus verum obseruationis habitae definiendum opus erat; accedit, quod nebulosae tempestates per aliquot dies durantes obseruatorem de motu eius certum fieri non sinebant, adeo vt tempus verum obseruationum in illis casibus habitarum rite determinari non potuerit. Quibus itaque temporibus hoc factum est, in sequentibus indicatur asterisco * in margine posito. Posteaquam autem d. obseruator alterum horologium a Cl. Professore de *la Kroerio* sibi traditum accepit, de tempore vero obseruationum a se habitarum certior semper, quam prius, comparando sc: motum eorum cum motu Solis, fieri potuit. Caeterum a 29. Martii anni 1736. ad 1*mum* Febr. 1742. idem vsus est in obseruationibus suis tubo 14. pedes Anglicanos longo, ab illo autem tempore ad finem vsque expeditionis obseruauit satellites tubo 15. pedes itidem Anglicanos longo.

ECLIPSES

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS OBSERVATAE

In Ilginskoy ostrog.

St: veteri Anno, Menſe	tempore vero die. hor.	min′.	min″.	
1736. Mart.	29, 16	14	53	Immerſio 1*mi* obſeruatio bona.
— — Maio	7, 14	44	34	Immerſio 1*mi*. Iupiter ob nebulam tenuem eundem cingentem coloratus apparebat.
				In Kiringinskoy *ostrog.*
— — Iulio	8, 13	20	5	Immerſio 1*mi*. Iouem circumdabant vapores tenues, ſatellesque in vicinia eiusdem vmbram ingrediebatur, quapropter obſeruatio haec aliqua ex parte dubia eſt.
	10, 11	18	36	Immerſio 2*di*. Coelo tranquillo et ſereno.
				In *Pago Witimsk.*
— — Auguſto	4, 11	43	4	Emerſio 2*di*. Coelo quidem ſereno, ſed Iupiter male terminatus apparebat, et ſatelles in vicinia eiusdem ex vmbra eggrediebatur,

St: veteri Anno, Menfe	tempore vero die. hor. min′. min″.	
		tur, quare obferuatio haec pro dubia reputanda eft.
		In Oljokminskoy oftrog.
1736. Sept.	3, 7 52 32	Emerfio 1*mi.* Obferuatio bona.
		In Vrbe Jakuzk.
*1737. Nov.	16, 7 13 0	Emerfio 1*mi.* Iupiter propter vapores coloratus apparebat.
— — *	26, 8 15 55	Immerfio 3*tii.* Dubia ob coelum tenuibus nubibus confperfum.
— — * Dec.	18, 3 38 40	Emerfio 1*mi.* Iouem cingebat nebula tenuis crepufculo lucente; quare obfernatio haec dubia eft intra aliquot minuta fecunda.
1738. Febr.	9, 5 36 46	Emerfio 1*mi.* Iupiter propter vapores eundem circumdantes coloratus apparebat, lucente crepufculo, quare obfcruatio haec ali- quantifper dubia eft.
— — Iulio	25, 12 49 9	Immerfio 1*mi.* Iupiter male terminatus

St: veteri Anno, Mense	tempore vero die. hor. min′. min″.	
		tus apparebat, Luna in vicinia eiusdem lucente.
1738. Aug.	6, 14 27 3	Immersio 2di. Coelo sereno obseruatio bona.
	31, 11 44 32	Immersio 2di. Obseruatio bona.
	16 54 0	Immersio 1mi. Hanc obseruationem lux crepusculi impediebat, quare eadem aliquantisper dubia est.
—— Sept.	7, 14 24 13	Immersio 2di. Obseruatio bona.
	30, 13 42 48	Immersio 3tii. Coelo quidem sereno, sed satelles in vicinia Iouis vmbram ingrediebatur.
		In vrbe Jakuzk.
—— * Oct.	2, 11 42 39	Immersio 2di. Coelo quidem sereno et tranquillo, nihilominus tamen obseruatio dubia propter nimiam viciniam satellitis Ioui.
—— *	2, 13 37 24	Immersio 1mi. Coelo quidem sereno et tranquillo, sed propter nimiam

St: veteri Anno, Menſe	tempore vero die.	hor.	min′.	min″.	
1738. Octb.					nimiam Ioui viciniam ſatellitis obſeruatio haec aliquantiſper dubia eſt.
	13,	6	16	2	Emerſio *2di*. Iupiter tenui nebula inuoluebatur, et male terminatus apparebat parum ſupra horizontem eleuatus.
		6	41	6	Emerſio *1mi*. Coelo quidem ſereno, ſed propter nimiam *Ioui* viciniam ſatellitis aliquantiſper dubia.
	27,	10	29	24	Emerſio *1mi* exacta.
		11	32	33	Emerſio *2di*. Itidem exacta.
— — Nov.	5,	6	52	0	Emerſio *1mi*. Coelo ſereno et tranquillo.
	12,	8	44	47	Emerſio *1mi*. Coelum quidem ſerenitatem mentiebatur, ſed Iupiter male terminatus apparebat, praeterea accedebat ſplendor Lunae vicinae, quare obſeruatio haec dubia eſt.

Emerſio

St: veteri Anno, Mense.	tempore vero die hor. min'. min''.	
1738. Nov.	14, 6 5 33	Emersio 1*mi*. Hanc obseruationem fumus impediebat, quo Iupiter saepenumero tegebatur.
	19, 10 37 54	Emersio 1*mi* exacta.
	26, 12 30 4	Emersio 1*mi*. Dubia ob tenuem nebulam Iouem cingentem.
	28, 6 58 52	Emersio 1*mi*. Hanc obseruationem ventus tubum vacillando impediebat.
— — Dec.	5, 8 50 23	Emersio 1*mi*. Iupiter non prorsus bene terminatus apparebat.
	14, 5 10 18	Emersio 1*mi*. Coelo sereno et tranquillo.
	18, 9 49 43	Immersio 3*tii*. Coelo densis vaporibus repleto, Ioueque male terminato apparente, quare obseruatio haec aliquantisper dubia est.
	21, 7 2 4	Emersio 1*mi*.

St : veteri Anno Menſe.	tempore vero die hor. min′. min″.			
				Coelo ſereno et tranquillo.
1789. Ian.	6,	5	15	42	Emerſio 1*mi*.
					Coelum quidem ſerenum erat, ſed Iupiter propter vapores coloratus apparebat.
	13,	7	9	0	Emerſio 1*mi* exacta.
	23,	5	48	3	Immerſio 3*tii*.
					Coelo non prorſus ſereno et Ioue propter vapores eundem circumdantes male terminato apparente, quare obſeruatio haec pro dubia habenda eſt.
	29,	5	27	23	Emerſio 1*mi*.
					Obſeruatio bona.
					In Bolſcherezkoy oſtrog.
Nov.	12,	16	31	41	Immerſio 3*tii*.
					Coelo non prorſus ſereno, et Ioue male terminato apparente.
Dec.	3,	13	20	5	Immerſio 1*mi* exacta, Iupiter tamen non nihil coloratus apparebat.
	6,	16	56	6	Immerſio 2*di*.
					Coelo quidem ſereno ſed

St: veteri Anno, Mense	tempore vero die hor. min'. min''.			
				ed obseruationem ventus impediebat, et satelles in vicinia Iouis vmbram ingrediebatur.
1739. Dec.	10, 15	9	14	Immersio 1*mi*. Hanc obseruationem ventus tubum vacillando impediebat, et satelles in vicinia Iouis vmbram ingrediebatur, quare eadem pro dubia haberi debet.
	11, 8	16	32	Immersio 3*tii*. Coelo sereno et tranquillo, obseruatio bona.
	12, 9	38	3	Immersio 1*mi*. Dubia aliquantisper ob viciniam satellitis Ioui.
	28, 10	2	15	Emersio 1*mi*. Coelum erat tenuissimis nubeculis conspersum, et Iupiter coloratus apparebat.
				In vrbe Portus Petri et Pauli dicta.
1741. Ian.	23, 8	5	36	Immersio 3*tii*. Hanc obseruationem ventus impediebat et Iupiter

St: veteri Anno, Mense	tempore die hor.	vero min'.	min''.	
				Iupiter ob vapores coloratus apparebat.
1741. Ian.	23, 11	7	22	Emersio 3*tii*. Iupiter ob vapores coloratus conspiciebatur.
	25, 13	44	26	Emersio 2*di* exacta.
	27, 12	9	25	Emersio 1*mi*. Coelo quidem sereno sed ♃ vaporibus erat inuolutus et male terminatus conspiciebatur, quare obseruatio haec dubia aliquantisper est.
	29, 6	38	13	Emersio 1*mi*. Vento tubum multum vacillante.
	30, 12	5	30	Immersio 3*tii*. Coelum erat vaporibus repletum et Iupiter male terminatus apparebat.
Febr.	5, 8	33	26	Emersio 1*mi* exacta.
	12, 8	20	53	Emersio 2*di* exacta. Non obstante tubi vacillatione a vento.
	10	28	49	Emersio 1*mi*. Ventus tubum non nil vacillabat.

St: veteri Anno, Menſe	tempore vero die	hor.	min.	min.	
					In Bolſcherezkoy oſtrog.
1741 *Mart.	23	9	3	56	Emerſio 1*mi*. Coelo hinc inde tenuibus nubeculis conſperſo.
		10	55	2	Emerſio 2*di*. Coelum erat tenuibus nubeculis conſperſum et Iupiter male terminatus apparebat, quare obſeruatio haec dubia eſt.
—— Sept.	5	15	47	16	Immerſio 1*mi*. Iupiter ob vapores male terminatus apparebat.
—— *Octob.	15	15	27	36	Emerſio 3*tii*. Ob nebulam ſpiſſiuſculam aliquantiſper dubia.
	23	14	17	23	Immerſio 4*ti*. Iupiter ob vapores coloratus apparebat.
—— Nov.	15	10	51	33	Immerſio 1*mi*. Iupiter ſupra horizontem parum erat eleuatus et male terminatus conſpiciebatur, quare obſeruatio haec dubia aliquantiſper eſt.
	16	11	5	11	Immerſio 2*di*. Luna in vicinia Iouis lucente.
	27	11	40	3	Immerſio 3*tii* exacta.
				13	Emerſio

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die hor. min'. min''.	
1741. Nov.	27, 15 10 59	Emerſio 3tii. Coelo quidem ſereno et tranquillo, nihilominus tamen obſeruatio haec ob viciniam ſatellitis Ioui dubia eſt.
— — Dec.	29, 13 46 42	Immerſio 4ti. Obſeruationem ventus tubum vacillando impediebat, quare eadem pro dubia reputanda eſt.
	31, 10 51 58	Immerſio 1mi exacta.
1742. Ian.	5, 18 15 38	Immerſio 1mi. Iupiter vaporibus erat circumdatus, et male terminatus apparebat, ſatellesque in vicinia Iouis vmbram ingrediebatur, quare obſeruatio haec pro dubia reputabatur.
	7, 12 43 37	Immerſio 1mi. Coelum hinc inde tenuibus nubeculis conſperſum erat, et ſatelles in vicinia Iouis vmbram ingrediebatur. *Ab hinc vſus eſt obſeruator tubo 15½ pedes Anglicanos longo.*

Emerſio

St: veteri Anno, Mense.	Tempore vero Die	hor.	min'.	min''.	
1742. Febr.	1,	6	20	49	Emersio *4ti* exacta.
	10,	5	59	47	Emersio *1mi* exacta.
	22,	15	23	15	Emersio *1mi*. Dubia aliquantisper ob Iouem a vaporibus male terminatum.
April.	27,	8	51	33	Emersio *1mi*. Obseruatio bona.
					In Portu Ochozk.
Nov.	2,	14	45	34	Immersio *1mi*. Coelo quidem sereno, sed ob paruam eleuationem Iouis supra horizontem et splendorem Lunae obseruatio haec aliquantisper dubia est.
	9,	16	38	14	Immersio *1mi*. Coelo quidem sereno et tranquillo, sed splendor Lunae obseruationem non nihil impediebat.
	12,	19	6	38	Immersio *4ti*. Coelo quidem sereno, sed motus valde tardus satellitis obseruationem circa aliquot secunda incertam reddidit.
	18,	18	50	43	Immersio *3tii*. Iupiter parum supra horizon-

St: veteri Anno, Mense.	tempore vero die hor. min'. min''.	
		rizontem eleuatus erat; coloratusque apparebat, quare obseruatio haec dubia aliquantisper est.
1742. Nov.	13, 17 19 37	Emersio 3tii. Coelo sereno sed Iupiter interdum male terminatus apparebat.
	29, 17 20 20	Emersio 4ti. Aër erat turbidus, Iupiterque male terminatus conspiciebatur, et praeterea ventus tubum vacillabat; quare obseruatio haec non prorsus exacta est.
— — Dec.	1, 16 50 22	Immersio 2di. Coelum erat nubibus tenuissimis conspersum, et Iupiter male terminatus apparebat.
	2, 16 37 12	Immersio 1mi. Coelo quidem sereno, sed vapores a superficie maris ascendentes Iouem male terminatum, et obseruationem dubiam effecerunt.
	8, 19 20 5	Immersio 2di. Eam ventus tubum vacillan-

St: veteri Anno, Mense.	tempore vero die, hor. min'. min''.	
		cillando impediebat.
1742. Dec	9, 18 26 11	Immersio 1*mi*. Coelum tenuibus nubibus hinc inde et in loco etiam ♃ consperſum erat; quare obseruatio haec intra aliquot secunda dubia est.
	11, 12 54 46	Immersio 1*mi*. Iupiter ob vapores a mari ascendentes male terminatus apparebat, quare obseruatio haec aliquantisper dubia est.
	16, 11 10 53	Emersio 4*ti*. Coelo quidem sereno, sed Iupiter parum supra horizontem erat eleuatus, et ob vapores male terminatus apparebat, quare obseruatio haec dubia est.
	20 17 23	Immersio 1*mi*. Hanc obseruationem splendor crepusculi impediebat.
	18, 24 44 59	Immersio 1*mi*. Iupiter a vaporibus coloratus apparebat.
	25, 16 35 27	Immersio 1*mi*.

 Coelo

St: veteri Anno, Mense.	tempore vero die,	hor.	min′.	min″.	
					Coelo tranquillo et sereno.
1742. Dec.	26,	13	19	33	Immersio 3*tii* exacta.
		13	33	49	Immersio 2*di* exacta.
		16	44	46	Emersio 3*tii* exacta.
	27,	11	2	55	Immersio 1*mi*. Iupiter a vaporibus male terminatus apparebat parum supra horizontem eleuatus, quare obseruatio haec dubia est circa aliquot secunda.
1743. Ian.	3,	12	54	5	Immersio 1*mi*. Coelo sereno, sed Luna Iouem aliquantisper illustrante.
	10,	14	45	15	Immersio 1*mi*. Dubia non nihil ob Iouem male terminatum.
	17,	16	37	8	Immersio 1*mi*. Ioue male terminato.
	19,	11	5	25	Immersio 1*mi* exacta.
	20,	10	41	34	Immersio 2*di* exacta.
	24,	18	29	48	Immersio 1*mi* exacta.
	26,	12	58	50	Immersio 1*mi*. Coelo tranquillo et sereno.
Febr.	3,	15	27	19	Immersio 2*di*. Coelo sereno sed vento tubum non nihil vacillante.

Immer-

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor.	min′	min″.	
1743. Febr.	4, 9	21	0	Immerſio 1*mi*. Coelo ſereno.
	7, 12	58	58	Immerſio 3*tii*. Coelo ſereno et tranquillo.
	11, 11	15	43	Immerſio 1*mi*. Coelo ſereno et tranquillo, ſed ſatelles in vicinia ♃ vmbram ingrediebatur.
	20, 9	55	43	Emerſio 1*mi*. Dubia aliquantiſper ob viciniam ſatellitis Ioui.
	27, 11	51	14	Emerſio 1*mi*. Coelo tenuibus nubeculis conſperſo, et Luna ſplendente, quare obſeruatio haec pro dubia non nihil habenda eſt.
— — April.	7, 10	20	37	Emerſio 1*mi*. Coelo tranquillo et ſereno.
	29, 10	15	54	Emerſio 4*ti* exacta.
	30, 10	36	4	Emerſio 1*mi* exacta.
— — Maio.	7, 12	31	7	Emerſio 1*mi*. Coelo quidem ſereno et tranquillo, ſed Iupiter male terminatus apparebat parum ſupra horizontem eleuatus, quare

Mmm 2

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor.	min′.	min″.	
				re obſeruatio haec aliquantiſper dubia eſt.
				In vrbe Iakuzk.
1743 *Dec.	5, 11	36	57	Immerſio 1*mi.* Coelo quidem ſereno, ſed in regione Iouis tenuis nebula conſpiciebatur.
1744. *Ian.	24, 14	56	26	Immerſio 3*tii.* Coelo ſereno, ſed Iupiter interdum male terminatus apparebat.
	17	43	44	Emerſio 3*tii.* Iupiter interdum a vaporibus valde coloratus apparebat, adeo vt colores ad ſatellitem vsque pertingebant, quare obſeruatio haec dubia eſt.
- - Febr.	7, 11	18	35	Immerſio 1*mi.* Coelo quidem ſereno, ſed Iupiter ob vapores non nihil deformis apparebat, quare haec obſeruatio pro dubia aliquantiſper reputabatur.
	22, 10	31	11	Immerſio 2*di* exacta.
	29, 10	50	51	Immerſio 3*tii* exacta.
	13	6	54	Immerſio 2*di* exacta.
- - Martio	1, 11	33	0	Immerſio 1*mi* exacta.

Emerſio

St: veteri Anno, Menſe.	tempore die, hor.	vero min′.	min″.	
1744 * Mart.	26, 8	32	22	Emerſio 1*mi*. Dubia ob ventum et aërem turbidum.
-- * April.	5, 9	24	11	Emerſio 3*tii*. Coelo quidem ſereno, ſed Iouem cingebat nebula tenuis, quare obſeruatio haec dubia aliquantiſper viſa eſt.
	9, 12	23	58	Emerſio 1*mi*. Coelo tranquillo et ſereno.
	18, 8	49	15	Emerſio 1*mi*. Coelo quidem ſereno et tranquillo, ſed ſplendor crepuſculi obſeruationem dubiam aliquantiſper reddidit.
*	25, 10	44	57	Emerſio 1*mi* exacta.
				In vrbe Ieniſeysk.
-- * Dec.	30, 18	56	13	Immerſio 1*mi*. Fumus ab aedificiis aſcendens hanc obſeruationem dubiam reddidit circa aliquot ſecunda.
1745 * Ian.	10, 17	58	14	Immerſio 2*di*. Dubia ob Coelum multis tenuibus nubeculis conſperſum.
	15, 17	5	50	Immerſio 1*mi* exacta.

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
1745. Ian.	31, 15 18 55	Immerſio 1*mi* exacta.
– – Febr.	4, 14 57 46	Immerſio 2*di*. Coelo tranquillo et ſereno.
	7, 17 12 7	Immerſio 1*mi*. Coelo quidem ſerenitatem mentiente, ſed in regione Iouis tenuiſſima nebula haerebat, quae et Iouem deformem et obſeruationem dubiam aliquantiſper reddidit.
		In vrbe Tomsk.
*	23, 15 2 17	Immerſio 1*mi*. Coelo ſereno ſed Ioue male terminato, quare obſeruatio haec dubia aliquantulum eſt.
– – * April.	2, 11 13 30	Immerſio 2*di*. Aër turbidus Iouem deformem reddebat, et ſatellitem interdum prorſus ex oculis eripiebat, quare obſeruatio haec dubia eſt.
	5, 14 40 6	Immerſio 3*tii* exacta.
	9, 13 49 8	Immerſio 2*di*. Dubia ob aërem vaporibus a ſuperficie Terrae aſcen-

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.			
				aſcendentibus repletum.
1745 April.	10, 15.	31	37	Immerſio 1*mi*. Dubia ob paruam elevationem Iouis ſupra horizontem Iouemque ob vapores male terminatum.
	12, 10	2	12	Immerſio 1*mi*. Coelo ſereno et tranquillo, ſed ipſum momentum immerſionis ob viciniam ſatellitis Ioui difficile erat determinatu.
	27, 10	36	36	Emerſio 2*di*. Dubia aliquantinſper ob vapores, qui Iouem parum deformem reddiderunt.
	28, 10	29	36	Emerſio 1*mi*. Iupiter coloratus apparebat in hac obſeruatione.
– – Maio.	4, 13	6	13	Emerſio 2*di* exacta.
	29, 10	2	25	Emerſio 2*di* exacta.
				In Caſtello Iamyſchewsk.
– – Iun.	29, 8	36	51	Emerſio 1*mi*. Coelo quidem ſereno et tranquillo, ſed ſplendor cre-

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′ min″.	
		crepuſculi obſeruationem impediebat; quare eadem pro dubia non nihil habenda eſt.
1745. Iunio.	30, 9 1 30	Emerſio 2di. Obſeruatio bona.

Comparatis praemiſſis obſeruationibus Eclipſium 1mi ſatellitis Iouis cum ſimilibus obſeruationibus eiusdem Petropoli habitis per vnam tamen vel duas aut etiam tres reuolutiones differentibus, quippe quas eodem tempore ob nimiam diſtantiam locorum Sybiriae a Petroburgo inſtituere non licuit, differentiae meridianorum ſequentium Sybiriae locorum deductae ſunt. Idque modo ſequenti, ſc:

1mo Kiringinskoy oſtrog a Petroburgo.
$5^h\ 10'\ 51''$

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
1736. Iulio.	6, 13 40 43	Immerſio 1mi Petropoli obſeruata, coelo ſereno, tubo 15 pedes Pariſinos longo.
	1, 18 28 34	Reuolutio 1mi ex tabulis.
	8, 8 9 17	Immerſio 1mi Petropoli obſeruanda.
	8, 13 20 5	Eadem Immerſio in Kirin-

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min'. min''.	
1736. Iul.		ginskoy oſtrog obſeruata tubo 14 pedes Anglicanos longo dubia aliquantiſper ob aërem turbidum viciniamque ſatellitis Ioui.
	5 10 48	Differentia meridianorum Kiringinskoy oſtrog a Petroburgo, ad quam adiici debent 3'' propter incertitudinem obſeruationis in Kiringinskoy oſtrog habitae, et prodibit differentia meridianorum illorum vera 5^h 10' 51''.

2do Vrbis Iakuzk a Petroburgo.
6^h 37' 24''

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min'. min''.	
		Obſeruatio 1ma.
1737. Nov.	14, 6 7 35	Emerſio 1*mi*. Petropoli obſeruata tubo catadioptrico, dubia circa 15'' propter aërem turbidum.
	1, 18 28 17	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die,	hor.	min′.	min″.	
1737. Nov.	16,	0	35	52	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruanda.
	16,	7	13	0	Eadem emerſio in vrbe Iakuzk tubo 14 pedes obſeruata.
		6	37	8	Differentia meridianorum Petropolin inter et Iakuzkum, ad quam additis 15″ propter incertitudinem emerſionis a nebula factam et inſuper 8″ ob differentiam tuborum, prodibit differentia meridianorum vera ſeu correcta 6^h 37′ 31″.
					Obſeruatio 2da.
1738. Iulio.	23,	11	39	45	Immerſio 1*mi* Petropoli diuerſis tubis obſeruata, ex omnibusque media, obſtante aliquantiſper obſeruationi nebula.
	1,	18	28	50	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	25,	6	8	35	Immerſio 1*mi.* Petropoli obſeruanda.
	25,	12	46	9	Eadem Immerſio Iakuzki obſeruata.
		6	37	34	Differentia meridianorum

rum

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die,	hor.	min′.	min″.	
					rum Petropolitani a Iakuzkenſi.
					Obſeruatio 3tia.
1738. Dec.	19,	5	56	19	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruata.
	1,	18	28	5	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	21,	0	24	24	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruanda.
	21,	7	2	4	Eadem emerſio Iakuzki obſeruata.
		6	37	40	Differentia meridianorum Petropolitani a Iakuzkenſi.
					Obſeruatio 4ta.
1739. Ian.	11,	6	3	15	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruata.
	1,	18	28	53	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	13,	0	32	8	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruanda.
	13,	7	9	0	Eadem Emerſio Iakuzki obſeruata.
		6	36	52	Differentia meridianorum inter Petropolin et Iakuzkum. Si autem media ex omnibus quatuor ſumatur, prodibit eadem $6^h\ 37'\ 24''$.

3*tio*

3tio Portus Petri et Pauli a Petroburgo.
$8^h\ 33'\ 0''$.

St: veteri Anno Mense.	tempore vero die	hor.	min'.	min''.	
1741. Febr.	3,	5	31	35	Emersio *1mi* Petropoli obseruata tubo *Neutoniano* 7 pedes longo.
	5,	7	26	23	Tres reuolutiones satellitis, ex tabulis.
-- Ianuario.	28,	22	5	12	Emersio *1mi* Petropoli obseruanda.
	29,	6	38	13	Eadem Emersio in Portu Perri et Pauli obseruata.
		8	33	1	Differentia meridianorum inter Portum Petri et Pauli atque Petroburgum.
					Obseruatio 2da.
--Februario.	3,	5	31	35	Emersio *1mi* Petropoli obseruata.
	1,	18	28	54	Reuolutio satellitis ex tabulis.
	5,	0	0	29	Emersio *1mi* Petropoli obseruanda.
	5,	8	33	26	Eadem Emersio in Portu Petri et Pauli obseruata.
		8	32	57	Differentia meridianorum inter Portum Petri et

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
1741. Febr.		et Pauli atque Petroburgum. Media ex his differentiis erit 8^b 32′ 59″ ſeu rotunde 8^b 33′ 0″.

4to Bolſcherezkoy oſtrog a Petroburgo.
8^b 27′ 57″.

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
1741. Mart.	23, 9 3 56	Emerſio 1*mi* in Bolſcherezkoy oſtrog obſeruata.
	5, 7 30 51	Tres reuolutiones ſatellitis ex tabulis.
	28, 16 34 47	Emerſio 1*mi* in Bolſcherezkoy oſtrog obſeruanda.
	28, 8 6 50	Eadem emerſio Petropoli obſeruata tubo catadioprico 5 pedes longo.
	8 27 57	Differentia meridianorum Bolſcherezkoy oſtrog inter et Petroburgum.

5to Portus Ochozkensis a Petroburgo.
$7^h\ 31'\ 34''$.

St: veteri Anno, Mense.	tempore vero die, hor.	min'.	min''.	
1743. Ian.	15, 14	37	36	Immersio 1*mi* Petroburgi tubo catadioptrico 5 pedes longo obseruata.
	1, 18	28	3	Reuolutio satellitis ex tabulis.
	17, 9	5	39	Immersio eiusdem Petropoli obseruanda.
	17, 16	37	8	Eadem immersio in Portu Ochozk obseruata.
	7	31	29	Differentia meridianorum Ochozkensis a Petropolitano.
				Obseruatio 2da.
— — Ian.	15, 14	37	36	Immersio 1*mi* Petropoli obseruata.
	3, 12	56	11	Duae Reuolutionis satellitis ex tabulis.
	19, 3	33	47	Immersio eiusdem Petropoli obseruanda.
	19, 11	5	25	Eadem immersio in Portu Ochozkensi obseruata.
	7	31	38	Differentia meridianorum Ochozkensis a Petropolitano. Media autem earum est $7^h\ 31'\ 34''$.

6to

6to Iudomskoy kreſt a Petroburgo.
$7^h\ 18'\ 14''$.

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min'. min''.				
					Obſeruatio 1ma.
1743. Aprili.	5	8	32	51	Emerſio 1*mi* Petroburgi tubo catadioptrico 5 pedes longo obſeruata.
	1,	18	29	7	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	7,	3	1	58	Emerſio eiusdem Petropoli obſeruanda.
	7,	10	20	15	Eadem emerſio in Iudomskoy kreſt obſeruata.
		7	18	17	Differentia meridianorum Iudomscenſis a Petroburgenſi.
					Obſeruatio 2da.
— — Aprili.	28,	8	49	12	Emerſio 1*mi* Petropoli eodem tubo catadioptrico obſeruata crepuſcolo nimis lucente.
	1,	18	28	47	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	30,	3	17	59	Emerſio eiusdem Petropoli obſeruanda.
	30,	10	36	4	Eadem Emerſio in Iudomskoy Kreſt obſeruata.
		7	18	5	Differentia meridianorum

St : veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
1743. April.		rum Iudomscenſis a Petroburgenſi, ſubtractis autem ab obſeruatione poſteriori Petropoli habita ob nimium ſplendorem crepuſculi 5″. Media differentia meridianorum illorum ex vtraque deducetur 7ʰ 18′ 14″.

7mo Vrbis Tomsk a Petroburgo.
3^h 38′ 38″.

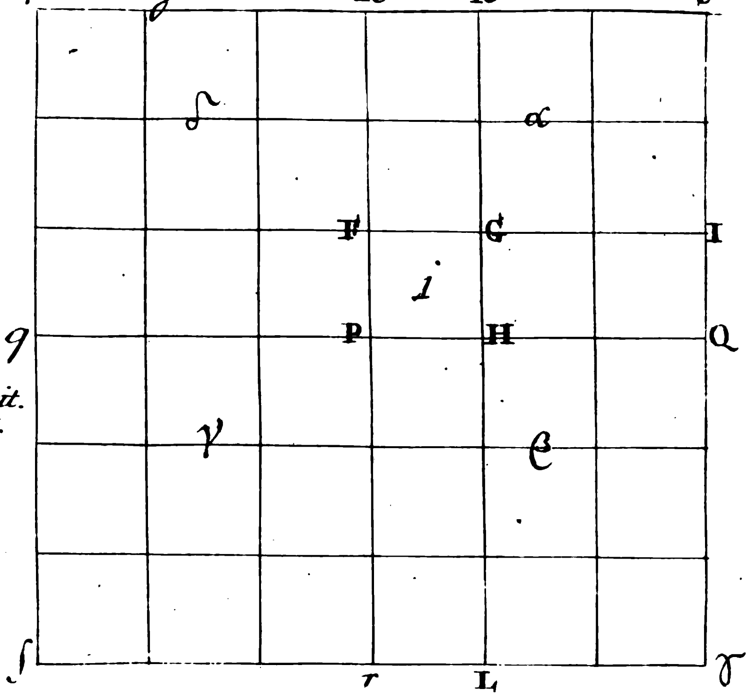
St : veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor.	min′	min″.	
1745. April.	26, 12	22	20	Emerſio 1*mi* Petropoli tubo catadioptrico 5 pedes longo obſeruata, dubia aliquantiſper ob nimiam ſatellitis viciniam Ioui.
	1, 18	28	38	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	28, 6	50	58	Emerſio eiusdem Petropoli obſeruanda.
	28, 10	29	36	Eadem emerſio in vrbe Tomsk obſeruata.

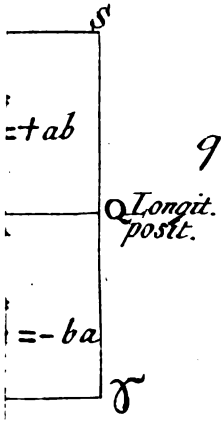
Differen-

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor.	min′.	min″.	
1745. Aprili.	3	38	38	Differentia meridianorum Tomscenſis a Petroburgenſi, additis autem ad obſeruationem Petropoli habitam 5″ ob nimiam viciniam ſatellitis Ioui prodibit differentia meridianorum ad veram propius accedens $3^h\ 38'\ 33''$.

F I N I S.

Fig. 2


R
K
S
α
δ
F
G
I
i
q
P
H
Q
γ
β
r
L


S
+ab
Q Longit. posit.
=-ba

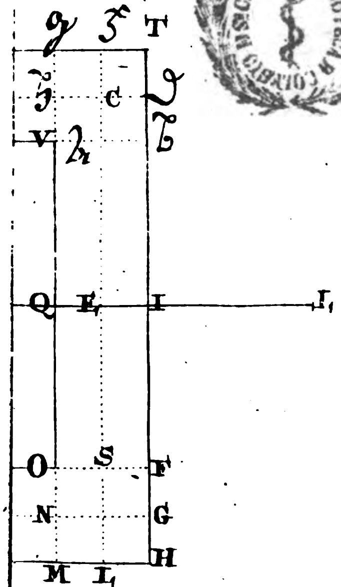
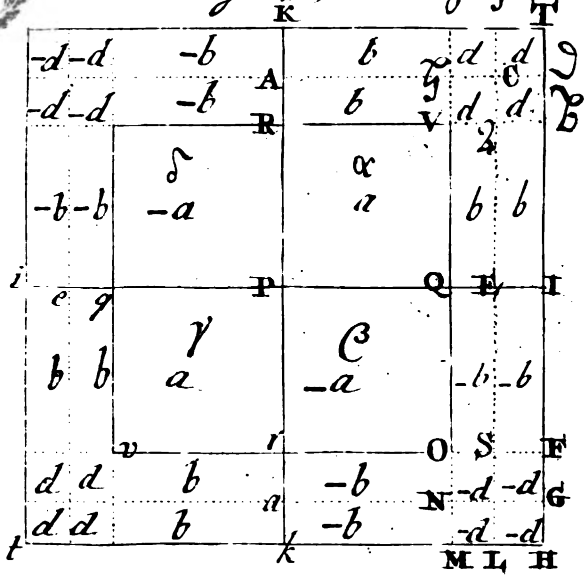

T
c
V
Q
E
I
L
O
S
F
N
G
M
L
H

Fig. 4.


K
T
-d -d
-b
b
A
R
V
δ
α
-b -b
-a
a
b b
P
Q
E
I
γ
β
b b
a
-a
O
S
F
d d
-b
N
G
t
k
M
L
H

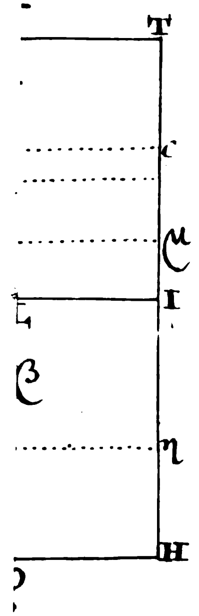
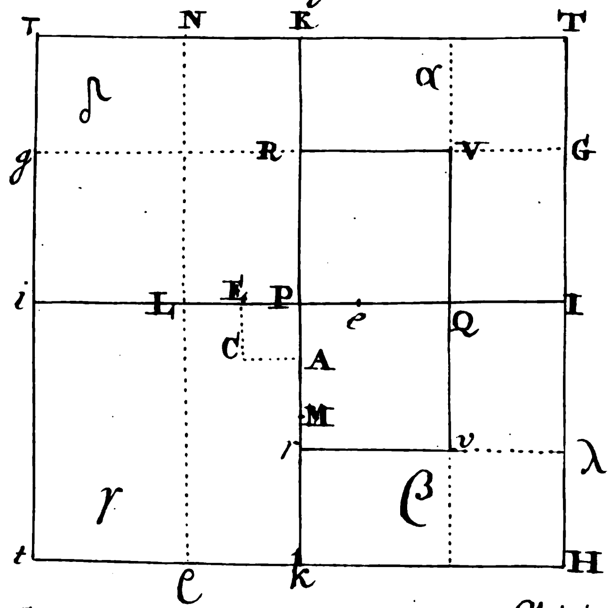

T
c
C
I
C
η
H

Fig. 6.


T N K T
α
δ
g R V G
i L E P e Q I
C A
M
r v λ
γ C
t e k H

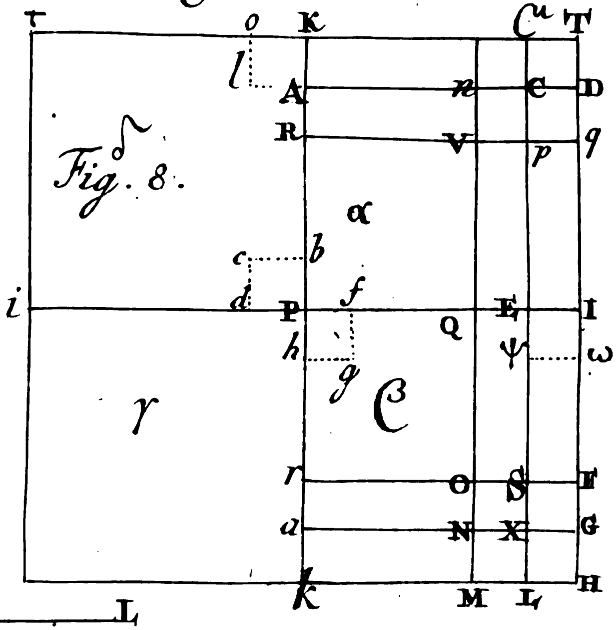
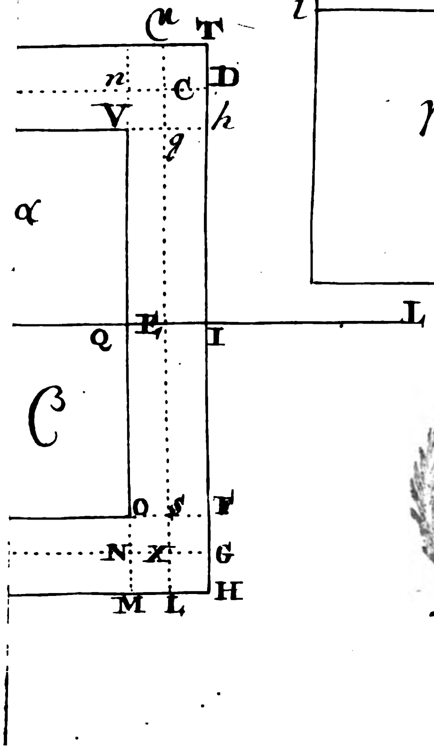

T o K C T
l A n C D
R V p q
δ
α
c b
i d P f Q E I
h g ψ ω
γ C
r O S F
a N X G
k M L H

Fig. 8.


C T
n C D
V h
g
α
Q E I L
C
O S F
N X G
M L H

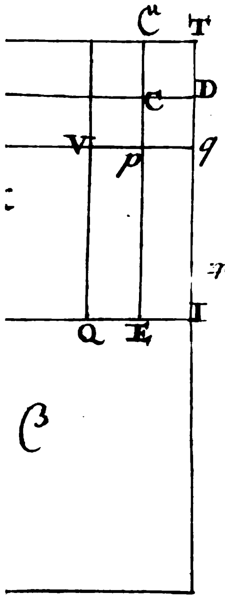

C
T
D
C
V
p
q
Q
E
I

Fig. 10.

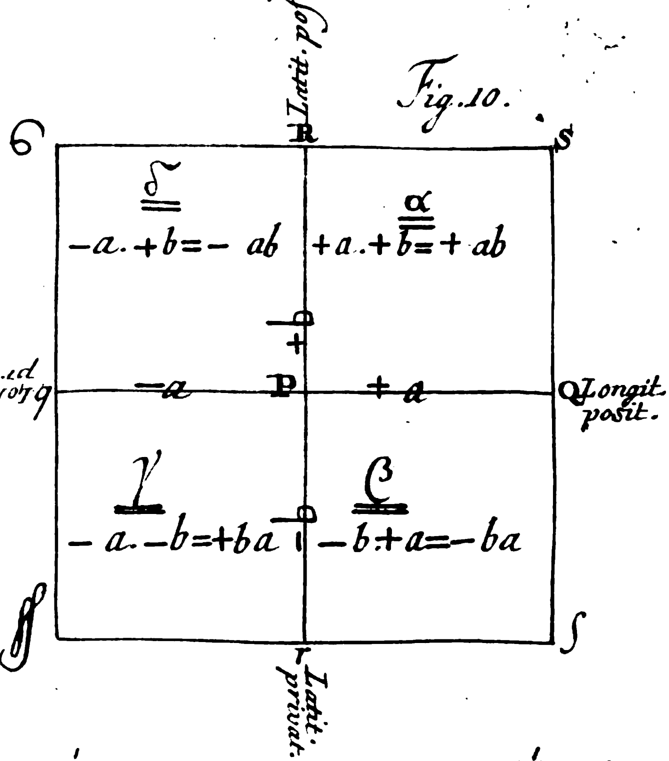
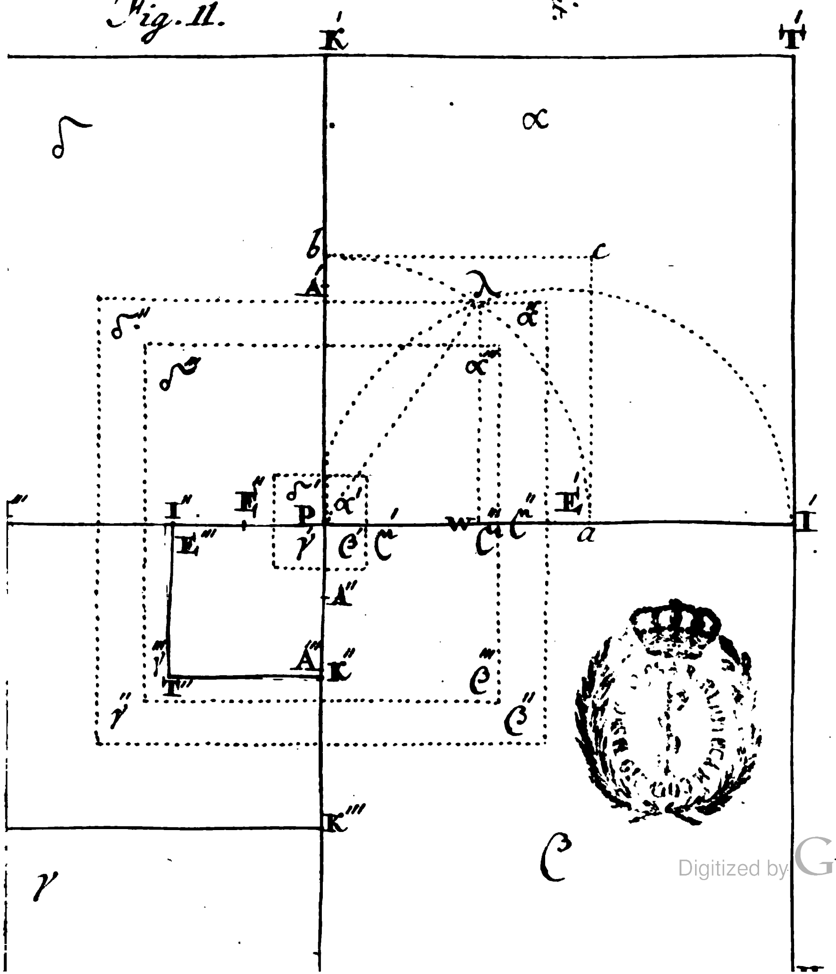

Latit. posit.
R
S
δ
α
−a.+b=− ab
+a.+b=+ ab
−a
P
+a
Q Longit. posit.
γ
β
− a.−b=+ba
−b.+a=−ba
Latit. privat.

Fig. 11.


K
T
δ
α
γ
β
b
c
λ
P
a
I
K'''

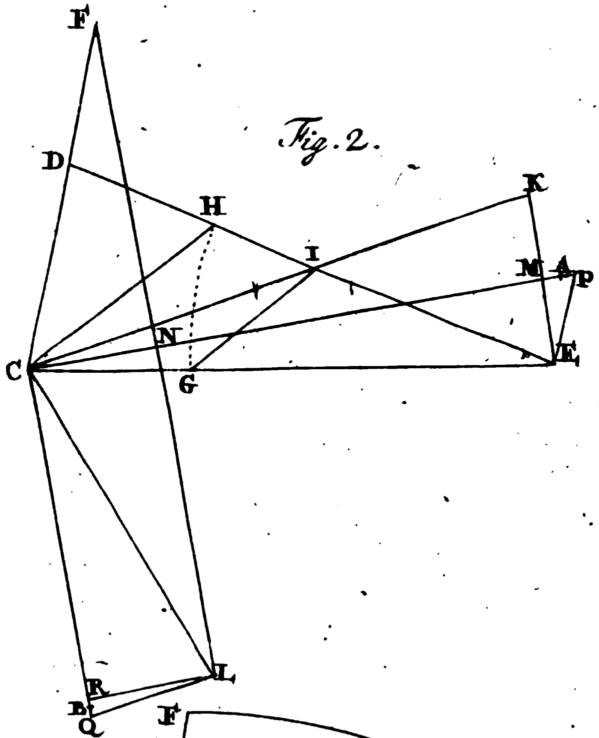


Fig. 2.

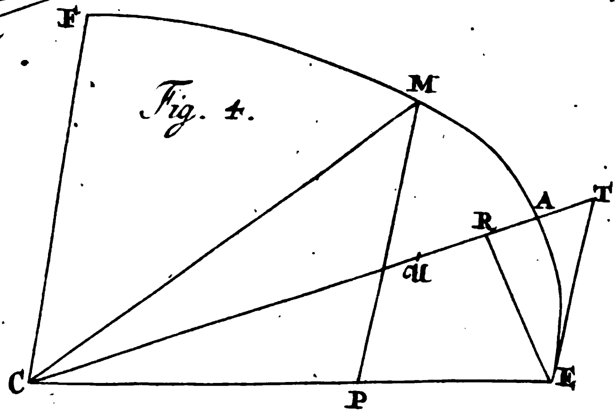
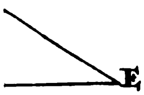


Fig. 4.



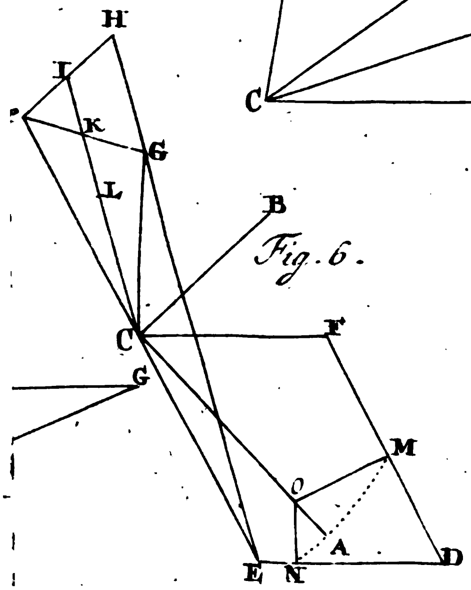


Fig. 6.

Fig. 2

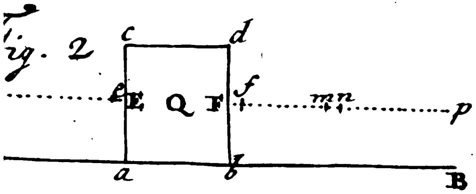
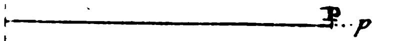
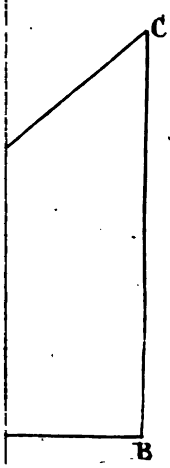


Fig. 3.





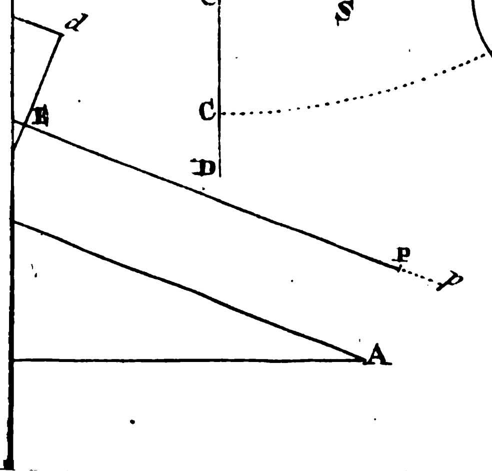
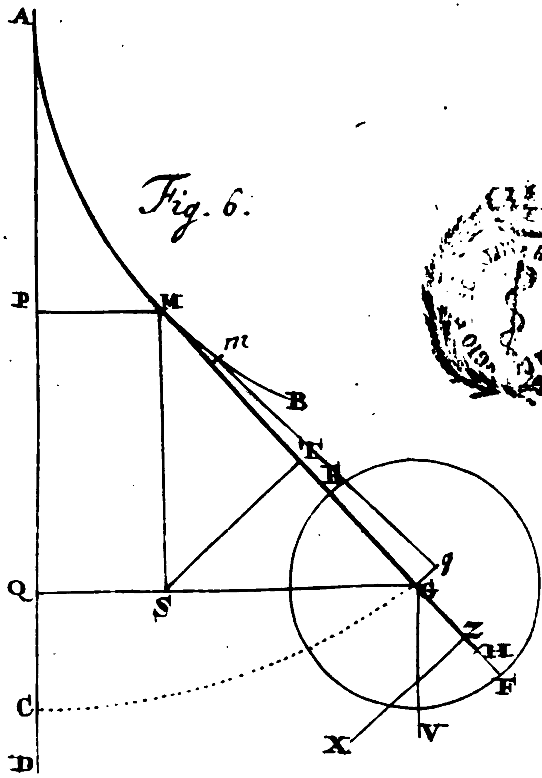


Fig. 4.

Fig. 6.



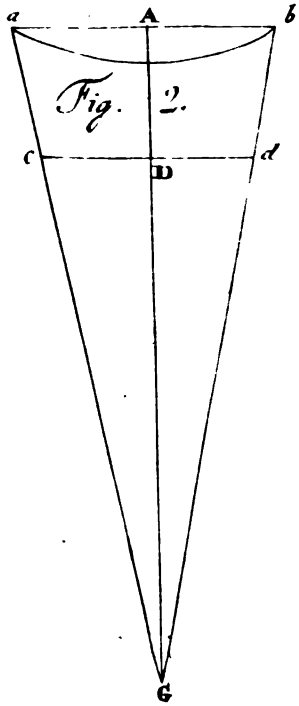


Fig. 2.

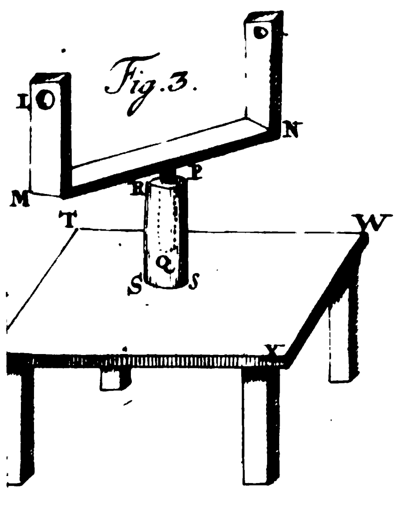


Fig. 3.

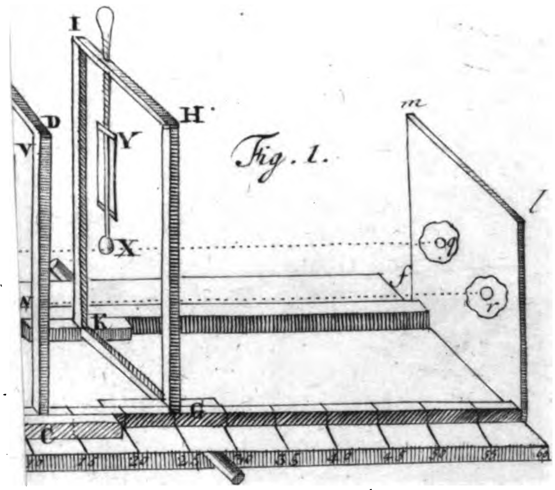


Fig. 1.

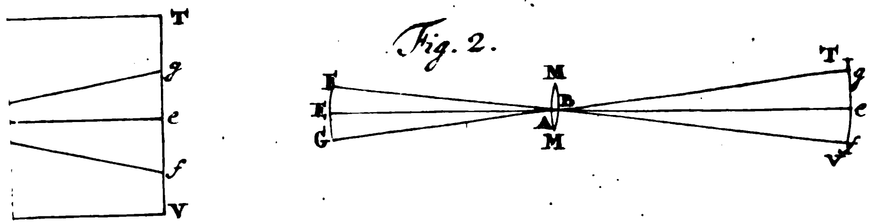


Fig. 2.

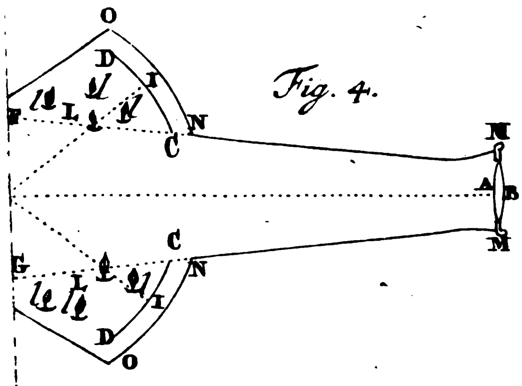


Fig. 4.

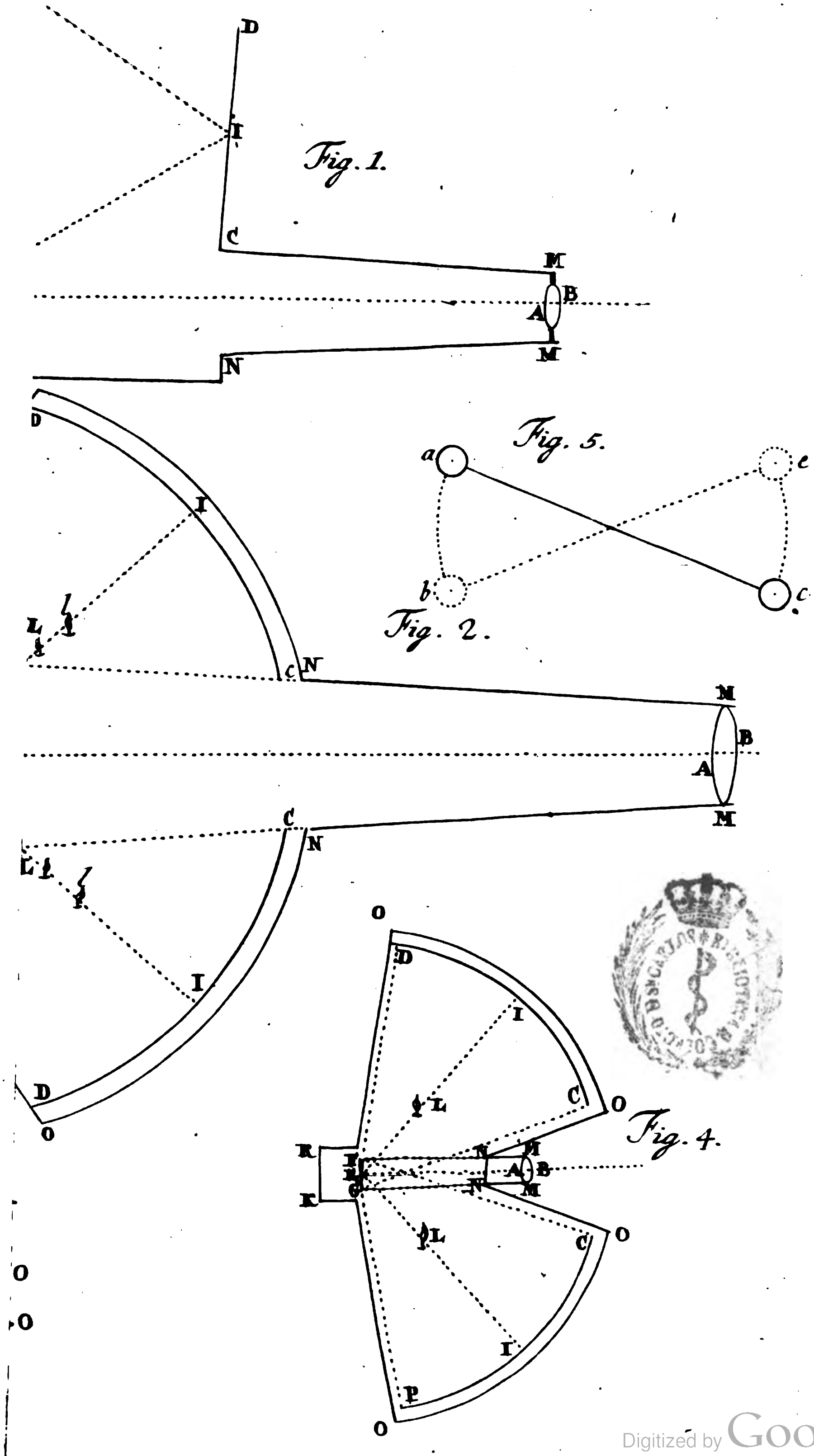
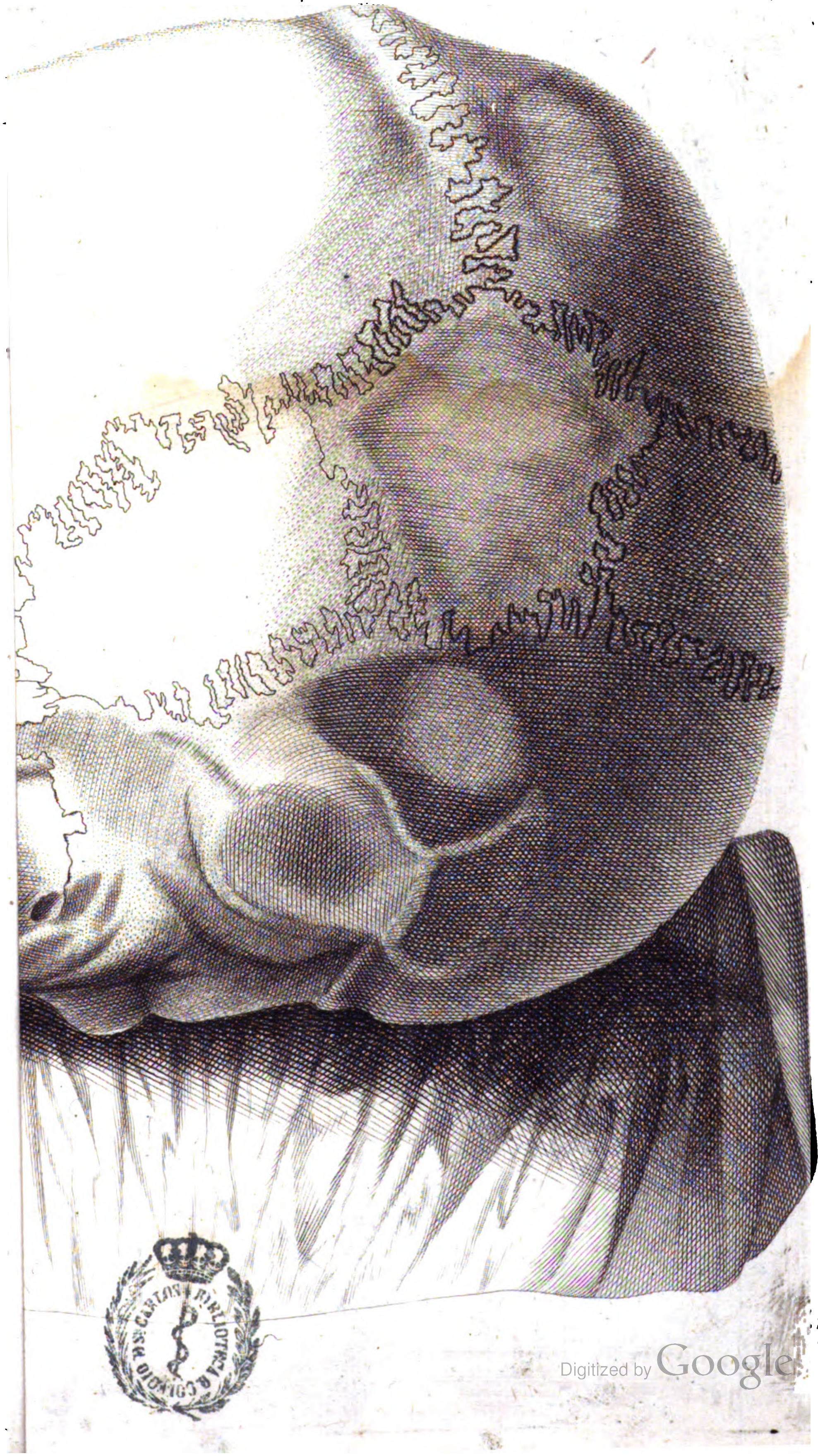


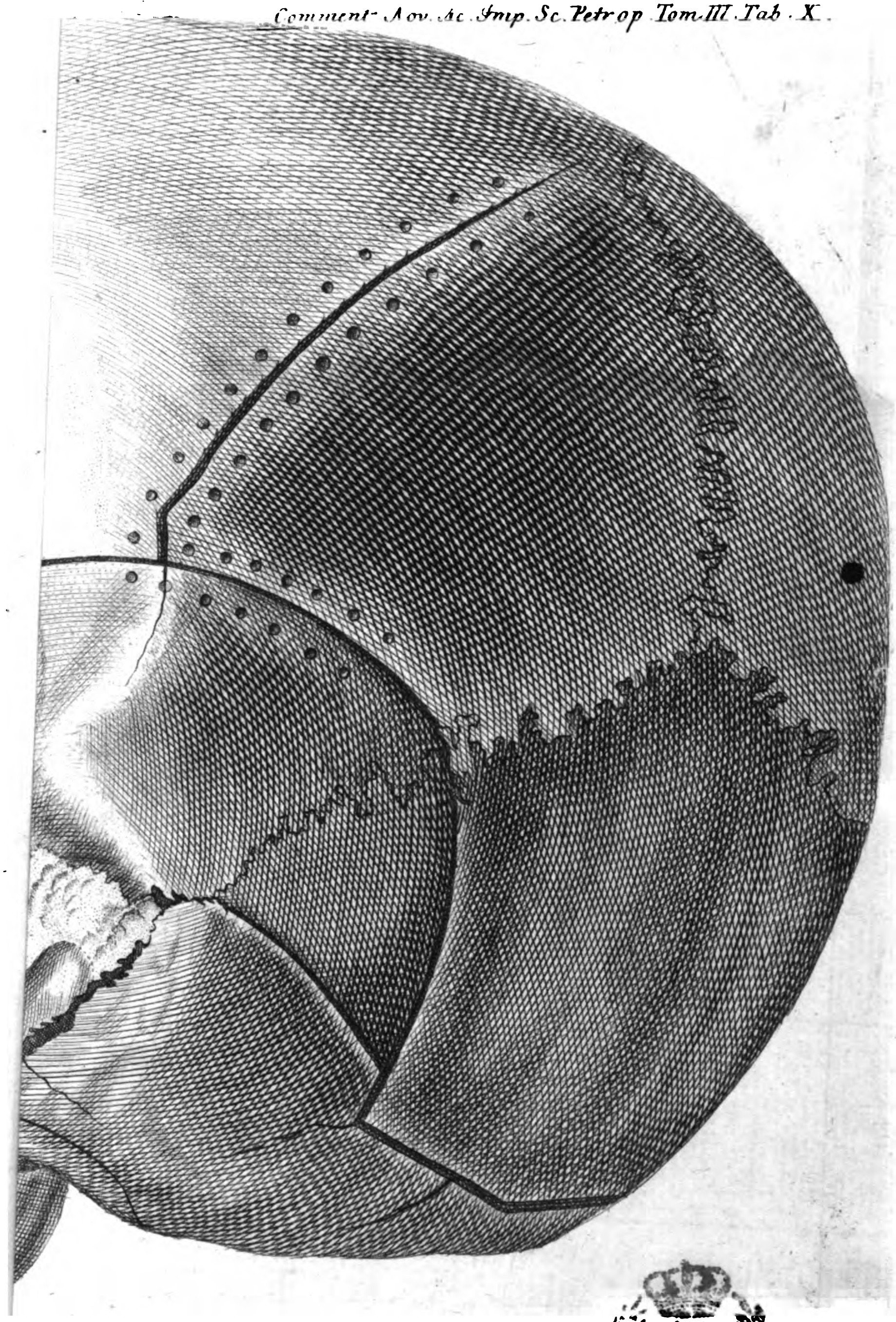
Fig. 1.

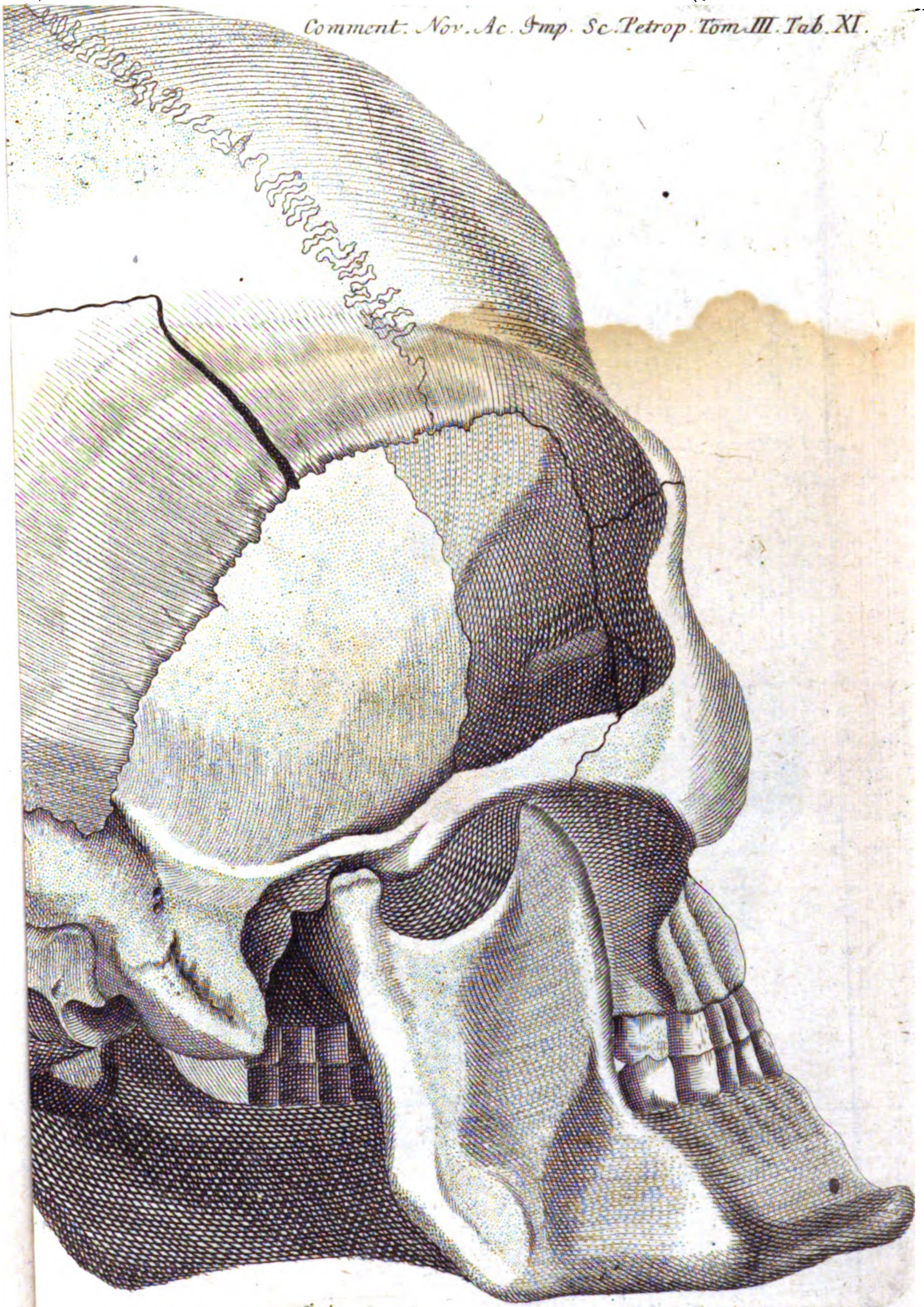
Fig. 5.

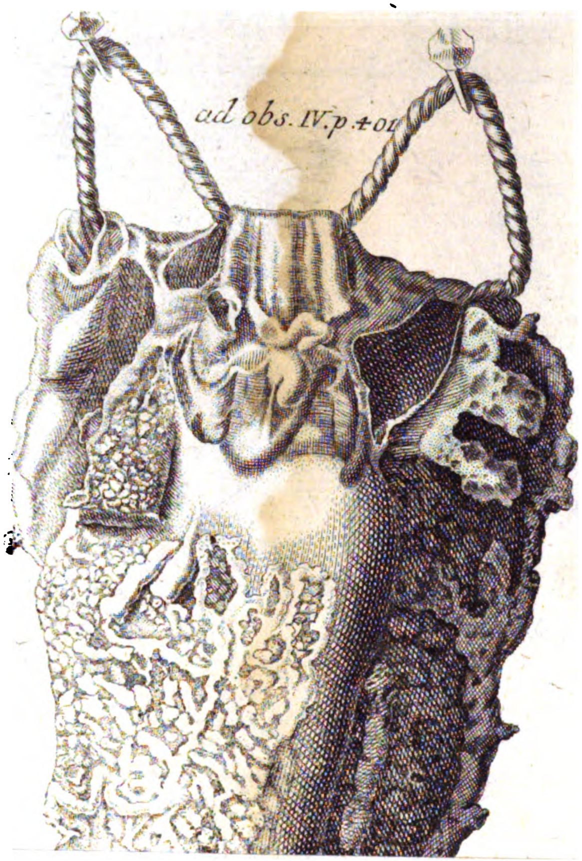
Fig. 2.

Fig. 4.








ad obs. IV. p. 401

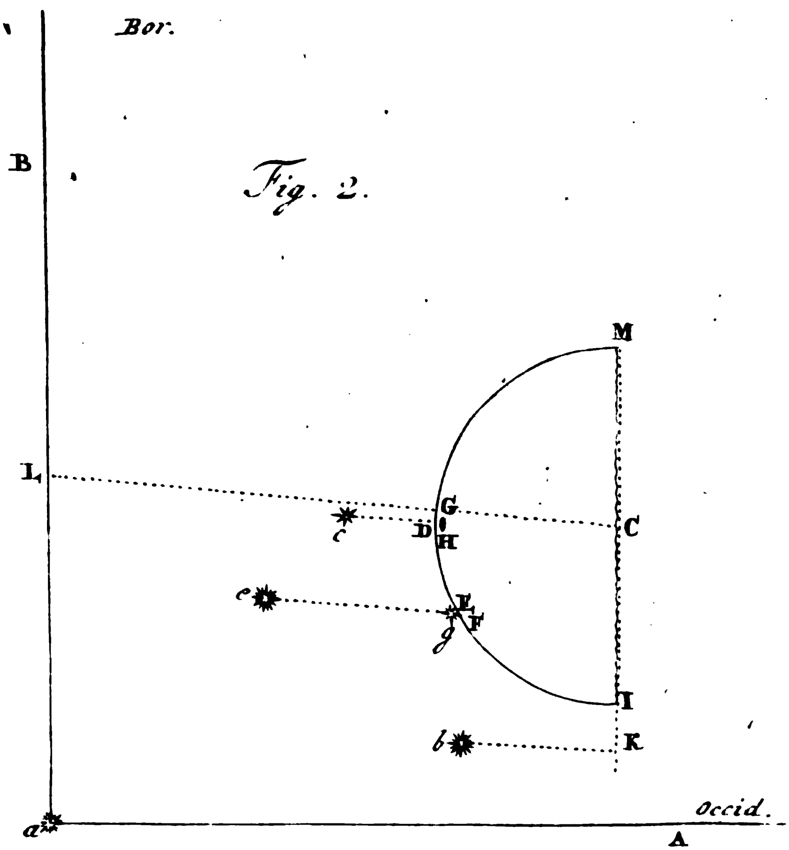


Fig. 2.

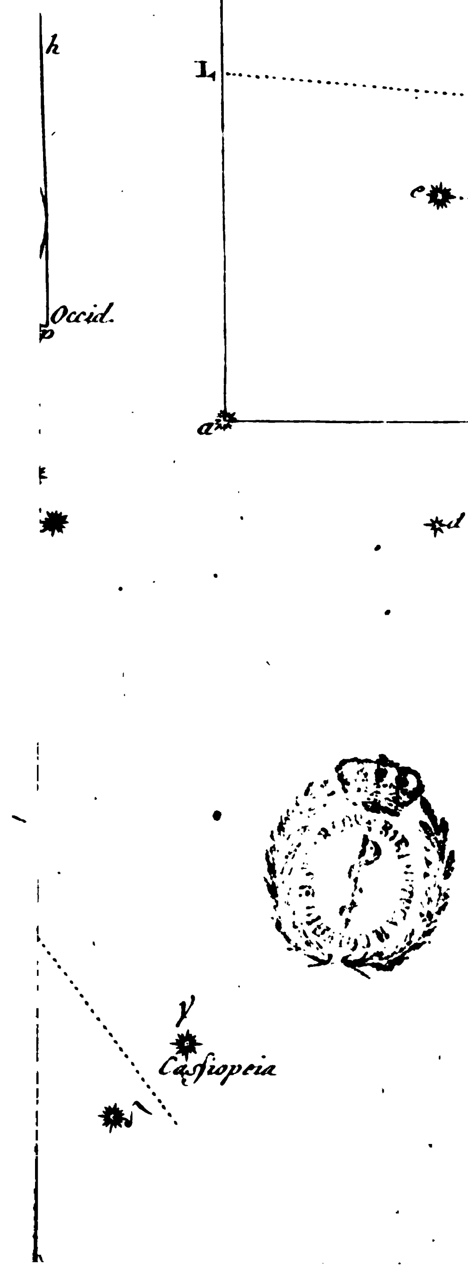


Fig. 5.