NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. XIV.

pro Anno MDCCLIX

PARS PRIOR

CONTINENS CLASSEM MATHEMATICAM, PHYSICO-*MATHEMATICAM* ET PHYSICAM.

PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXX.

SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XIV.

PARS I.

MATHEMATICA.

I.

Disquisitiones Analyticae de nouo Problemate coniecturali

Auctore Daniele Bernoulli. pag. 3.

Quod in nouorum Commentariorum volumine XII, Illustr. Auctor huius dissertationis, attulerat insigne exemplum, quaestionis ad doctrinam probabilitatum pertinentis, ope solius calculi infinitesimalis solutae, id hac dissertatione vberius exponere et explicare constituit. Quaestio autem, quam heic sibi pertractandam proposuit sequens est: Si ex duabus, tribus vel pluribus vrnis, in quibus schedulae certo et aequali numero repositae ita sunt, vt vnius cuiusuis vrnae schedulae ab illis reliquarum vrnarum peculiari diſtinguantur colore; vnaquauis permutatione, vna extrahatur ſchedula et in vrnam ordine ſequentem transponatur, ſic vt, quae ex vltima vrna extracta ſit, in primam reponatur; dato permutationum ſecundam hanc legem factarum numero, determinare numerum ſchedularum cuiusvis coloris, probabiliter in quauis vrna contentarum? Vt iam vera, quibus ſolutio huiusquaeſtionis innititur principia tanto euidentius explicare liceret, caſum primo ſimpliciſſimum, quamuis in ſe ſatis obuium, Illuſtr. Auctori adferre placuit, eum ſcilicet, quo duae tantum eiusmodi proponuntur vrnae, pro quo quidem caſu poſtquam ex principiis doctrinae combinationum expreſſionem deduxit generalem numeri ſchedularum pro quouis permutationum numero, oſtendit quem valorem, haec induat expreſſio, ſi non ſolum numerus factarum permutationum ponatur infinite magnus; ſed etiam numerus ſchedularum permagnus fuerit et ſic quidem pro infinito haberi poſſit. Hac facta ſuppoſitione valorem eiusdem expreſſionis calculo infiniteſimali in ſubſidium vocato eruit, quo eundem plane obtinuit, quem antea ex regulis doctrinae combinationum deduxerat. Hac vero quoque conſtituta hypotheſi, alia problemata, quae proprie ad doctrinam permutationum non pertinent, facilem admittunt ſolutionem, quemadmodum ſi duo ſupponantur vaſa duobus canaliculis inter ſe communicantia, et duobus fluidis diuerſis impleta, quorum

quorum perpetua fiat transuasatio ex vno vase in alterum, et quaeratur quaenam certo tempore elapso sit lex permixtionis..

Deinde explicationem casus aliquanto difficilioris, quo tres proponuntur vrnae adgressus est Illustr: Auctor, ostendit autem huius quaestionis solutionem eo reduci, vt inuestigetur lex permutationum pro schedulis, quae solae ab initio in prima vrna repositae erant; inde enim reliquarum permutationes facili negotio deduci possunt. Ex praeceptis igitur doctrinae combinationum, inuentis expressionibus numerum schedularum albarum, in quauis vrna contentarum *explicantibus*, insigni artificio analytico adhibito, explicauit quomodo his expressionibus alia forma induci queat, vt terminos contineant numero finitos, eosque omnes reales. Tum vero eandem hanc solutionem, vt pro casu priori fecerat, etiam ex principiis calculi infinitesimalis deduxit, quo ipso vtriusque consensus egregie illustratur. Denique considerationes quasdam singulares superaddidit, ad illustrandam legem, quam hae permutationus sequuntur, vbi quidem obseruauit non solum totum systema ad statum permanentem vergere, quo omnes schedulae in singulis vrnis aequaliter inter se sunt permixtae sed etiam infinitas fieri, vltra citraque hunc statum permanentem transitiones, antequam ad eum perueniatur.

II.

II.

Menſura ſortis ad fortuitam ſucceſſionem rerum naturaliter contingentium applicata.

Auct. Daniele Bernoulli. pag. 26.

Inter ſingulares naturae leges, quas tabulae anthropologicae offerunt, praecipue attentionem meretur illa, quae proportionem concernit, qua nati in vtrumque diuiduntur ſexum, et quemadmodum in genere quidem conſtet prolem maſculam praeualere, ita difficulter determinari poteſt, vtrum hoc merae ſorti adſcribendum ſit, an vero natura ad procreationem prolis maſculae aliquanto procliuior ſit quam ad eam ſexus foeminini? Hanc autem quaeſtionem optime dirimi poſſe exiſtimat Illuſtr: huius diſſertationis Auctor, ſi inquiratur in leges probabilitatis, quae pro vtraque hypotheſi locum inuenturae ſint, atque hac quidem occaſione eas, quae pro prima hypotheſi, qua natura ad vtriusque ſexus procreationem aeque procliuis aſſumitur, locum obtinent, exponere conſtituit.

Tradita igitur primum formula generali, qua probabilitas pro quocunque puerorum numero dato exprimitur, oſtendit maximam probabilitatem adeſſe, dum infantum vtriusque ſexus idem eſt numerus, ipſam

ipsam vero a medio recedendo decrescere et pro aequalibus a medio distantiis eandem esse; deinde quo maior sit numerus partuum, tanto difficilius contingere vt in vtrumque sexum aequaliter distribuatur, eo tamen non obstante inaequalitatem per numerum partuum diuisam semper decrescere. Insignis autem et maxime memoratu digna est lex, quam natura pro decremento probabilitatis, ex incremento partuum oriundo, sequitur, et quae hoc continetur theoremate, quod probabilitas quam proxime sit in ratione inuersa subduplicata prolis genitae. Vt vero pro dato quouis partuum numero haec probabilitas facillime determinetur, inuenit Illustr. *Auctor* hoc institutum optime prosequi, si ex probabilitate, quae pro ipso medio obtinet, reliquae versus extremitates definiantur, in quo negotio id singulare occurit phaenomenon vt in mediocri a medio distantia omnis probabilitas tantum non euanescat. Formula denique traditur simplex qua pro quouis casu probabilitas satis exacte exprimi potest, vbi sensibiles aberrationes metuendae non sunt, nisi dum probabilitates absolutae fere iam euanescunt.

III.

Considerationes de Traiectoriis orthogonalibus.

Auct. L. Eulero. pag. 46.

Quemadmodum natura linearum curuarum per aequationem coordinatas ipsarum orthogonales et quantitates constantes inuoluentem exprimitur, ita si quaedam harum constantium variabilis assumitur, infinitas inde lineas curuas communi lege contentas prodire euidens est, curuae autem illas normaliter traiicientes, ipsarum traiectoriae orthogonales dicuntur. Solutio igitur problematis de curuis hisce traiectoriis eo redit vt ex aequatione, qua relatio differentialium parametri et coordinatarum pro curuis secandis exprimitur, inuestigetur alia aequatio differentialis relationem coordinatarum pro curuis secantibus exprimens, quae aequatio ad integrabilitatem perduci debet. Quum vero id in genere nequidem aggredi liceat omnino e re est, istos nosse casus, quibus id perfici potest, et qui imprimis ad hos sequentes redeunt. Primo si parameter p fuerit functio ipsarum coordinatarum x et y aequatio differentialis pro traiectoriis duas tantum variabiles x et y continebit adeoque eius integratio pro concessa haberi potest. Secundo si y fuerit functio ipsarum

rum x et p problematis solutio redit ad integrationem aequationis differentialis solas p et x inuoluentis, vnde saltem per constructionem x ex p adeoque et y inueniri potest. Tertio si x fuerit functio ipsarum p et y, vbi omnis difficultas consistet in integratione aequationis differentialis solas y et p inuoluentis. Haec autem tantum valere censenda sunt si istae expressiones pro p, x et y fuerint explicitae sin vero formulas continerent integrales, tum integratio aequationis differentialis ad quam peruenitur non amplius pro concessa spectari potest. Interim tamen singulari artificio excogitata est solutio, istius casus quo y per hanc formulam summatoriam $\int V dx$ exprimitur, vbi V est functio quaecunque ipsarum p et x.

In praesenti autem dissertatione Illustr. Auctor potissimum consideratione dignam iudicauit, insignem harum curuarum proprietatem, qua inter se reciprocantur. Quum enim vtriusque systematis natura exprimatur certa relatione inter coordinatas x et y et parametros, si pro posteriori systemate parameter dicatur q, inde liquet non solum p et q per solas x et y, sed etiam vicissim x et y per solas p et q determinari posse. Insignis autem proprietas, qua relatio harum quatuor quantitatum definitur, sequenti aequatione exprimitur

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dx}{dq}\right)+\left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right)=0$$

Hac vero aequatione in subsidium vocata, x et y per functiones ipsarum p et q exprimere licet, et expressiones quidem pro x et y inde oriundae, ita comparatae sunt, vt si bina linearum se mutuo orthogonaliter secantium systemata inventa sunt, inde infinita alia talium systematum paria deduci queant. Insigne autem hoc artificium, viam quoque sternit, ad solutionem istius problematis, quo ea quaeruntur linearum algebraicarum systemata, quarum traiectoriae itidem sint lineae algebraicae. Cognitis scilicet simplicioribus quibusdam eiusmodi systematum casibus, inde infinitos alios facillimo negotio deriuare licet. Similiter vero et hinc solutiones aliorum non minus elegantium problematum erui poterunt, quorum praeprimis haec attentionem merentur, primum quo bina eiusmodi linearum orthogonalium quaeruntur systemata, quae eadem aequatione continentur, eo tantum cum discrimine, quod dum pro priori valor parametri sit positiuus, pro posteriori negatiuus assumatur, et alterum quo eiusmodi quaeruntur curuae secandae, vt curuae secantes, eo tantum ab ipsis discrepent, quod coordinatae x et y inter se permutentur.

IV.

IV.

De formulis integralibus duplicatis.

Auctore L. Eulero pag. 72.

Disquisitio de corporum soliditatibus et superficiebus, quum ad eiusmodi formulas integrales deducatur, quae ex producto differentialium duarum variabilium x et y, et functione quadam harum quantitatum componantur, adeoque duplicem integrationem requirant, antequam valor ipsis competens determinari possit; res omnino fuit maximi momenti in naturam et proprietates harum formularum accuratius inquirere. De formulis autem eiusmodi integralibus, quas duplicatas appellare Illustr. Auctori visum est, tenendum est, quod si binae variabiles x et y plane a se inuicem non pendeant, duplicem earum integrationem ita instituendam esse, vt in vna earum sola x variabilis, in altera vero sola y ponatur, tum vero loco constantium quantitatum duas quaslibet functiones singularum x et y adiici oportere, vt integrale completum inueniatur, et perinde omnino esse quo ordine eiusmodi instituatur integratio, quum semper idem prodire debeat integrale. Hae autem formulae plane diuersae sunt ab iis, quibus soliditas vel superficies corporum exprimitur, in his enim posterioribus omnino aliqua relatio inter x et y intercedit, vnde earum integratio ita instituenda erit, vt postquam in priori altera variabilium vt x pro constante assumta sit, hac integratione peracta, ea per omnes valores ipsius y extendi debeat, et loco y extremus valor, quem recipit, substituendus erit, vnde fit vt in posteriori integratione y non amplius ab x sit independens, sed plerumque aliqua functione ipsius x exprimatur, adeo vt posteriorem integrationem vnica variabilis x ingrediatur. Ad determinationem vero integrationum inuestigandam, functionem qua productum $dx\,dy$ multiplicatum est, vnitati aequalem supponere licet, liquet enim aream basis hac formula $\int\int dx\,dy$ exprimi, ex cuius formulae igitur integratione, etiam istae conditiones quae pro hac altera $\int\int Z\,dx\,dy$ valent praescribi possunt. Insignes autem et plane singulares sunt affectiones harum formularum duplicatarum, in earum transformatione conspicuae, scilicet quemadmodum variabiles x et y, in alias t et v certa ratione ab ipsis dependentes, transformari possunt, ita etiam, pro x et y his earum valoribus inuentis, substitutis nouae oriuntur formulae duplicatae alias variabiles inuoluentes. Iam cum quam maxime probabile videri posset nouas has formulas integrales non solum in se complectere tales quas productum $dt\,dv$ ingreditur, sed praeter has quoque alias quae ex dv^2 et dt^2 constant, facile tamen perspicitur hoc fieri non posse, quia posteriores hae formulae dv^2 et dt^2 in se complectentes, ex numero

mero

mero formularum duplicatarum excludantur. Hoc autem dubium facile diluetur si consideretur non plane necessarium esse, vt noua formula integralis duplicata priori prorsus sit aequalis, quoniam in hac posteriore aliae plane, sunt conditiones sub quibus integratio peragenda est, ac in priori. Potissimum igitur fundamentum cui haec transformatio innititur ex eo peti debet, quod prima integratio formae integralis per transformationem ortae ita institui debeat, vt vel *u* vel *t* pro constanti habeatur. Insignem autem hae transformationes saepius habent vsum ad solutiones faciliores reddendas, quod imprimis exemplo famosi istius problematis Florentini illustratur, *cuius plurimas* solutiones elegantes *Illustr.* Auctor hac occasione adduxit, quarum quae §. 44. occurrit generalissima est. Caeterum quoque notari meretur huic dissertationi occasionem dedisse elegans problema, de inuenienda figura corporis, quod inter omnia eiusdem soliditatis, minima superficie contineretur, cuius tamen problematis solutio quomodo inueniri queat, nondum patet.

V.

Euolutio insignis paradoxi circa aequalitatem superficierum.

Auctore L. Eulero. p. 104.

Quemadmodum in doctrina linearum curuarum, haec semper locum obtineat proprietas, vt pro-

proposita quacunque linea curua, nulla alia assignari possit, priori ita longitudine aequalis, vt arcus omnibus abscissis respondentes sint aequales, ita contrarium plane in doctrina solidorum locum habere inuenitur, scilicet proposita superficie quadam, innumerabiles semper inueniri possunt superficies diuersae quarum portiones, spatio cuique plani cuiusdam fixi imminentes prorsus inter se sunt aequales. Vt autem ratio discriminis, quod hoc respectu inter doctrinam linearum et superficierum intercedit, melius intelligatur, perpendendum est punctum quodlibet superficiei alicuius determinari per aequationem, inter tres coordinatas orthogonales, quarum binae in plano quodam fixo ducuntur, tertia vero distantiam huius puncti a plano fixo exprimit. Si igitur priores dicantur x, y et tertia z, inde differentiale ipsius z huiusmodi nanciscetur formam $dz = pdx + qdy$, elementum autem quoduis superficiei sic exprimetur $dxdy\sqrt{(1+pp+qq)}$. Proposita iam alia superficie quae cum priori congruere debet, intelligitur posito $dz = rdx + sdy$ esse elementum superficiei pro eadem $dxdy\sqrt{(1+rr+ss)}$, vnde oportet esse $pp+qq = rr+ss$. Quodsi autem quis dubitauerit, vtrum haec aequalitas alia ratione locum inueniat, quam ea qua $p=r$, et $q=s$, ponat solum $p=v$ sin. θ, $q=v$ cos. θ et $r=v$ sin. Φ, $s=v$ cos. Φ et mox inueniet praefatam aequalitatem adhuc locum obtinere. Maxime igitur curiosum hinc nascitur problema: quomodo proposita quacunque

super-

superficie, aliae vel omnes ipsi congruentes inueniri possunt, quod quum latissimo sensu solutionem non admittat, casus praecipuos solutionem admittentes euoluere Illustr. Auctori visum est In problemate igitur primo, postquam generaliter in naturam earum superficierum inquisiuit quae cum superficie plana ad datum planum fixum vtcunque inclinata congruunt, ostendit non solum omnes alias superficies planas ad basin aeque inclinatas cum primum propofita congruere, sed superficies quoque conicas, quarum axes basi perpendiculariter insistunt, tum vero generalem et elegantissimam adfert constructionem pro superficiebus cum plano congruentibus, *scilicet si in* plano pro basi assumto, linea curua ad lubitum describatur, et a singulis eius punctis ducantur rectae ad curuam normales, ad basin autem inclinatae, sub eodem angulo, quo superficies plana proposita inclinatur, omnes hae rectae totae, sitae erunt in superficie congruente. In reliquis insequentibus Problematibus casus aliquanto difficiliores considerantur, vbi quidem partim insignes istae substitutiones, quibus Illustr. Auctor vsus est ad solutiones inueniendas, partim etiam elegantes constructiones, quae inde deriuatae sunt, singularem analystarum merentur attentionem. In Problemate demum quinto, eae quaeruntur superficies, quae cum sphaerica congruunt, etsi autem solutionem difficillimi huius problematis Illustr. Auctori eruere licuerit; ex ea tamen vix aliqua superficies simplior sphaericae congruens determinari poteſt. De ſolutione autem huius problematis in genere monendum eſt, eam non ſolum admittere eiusmodi ſuperficies, quarum natura exprimitur per aequationes, quae quantitates continuitatis vinculo inter ſe iunctas comprehendunt, ſed etiam tales vbi nulla continuitatis lex locum habere animaduertitur, ſic pro ſolutione quidem problematis primi, ſuperficies pyramidales aeque ſatisfacere deprehenduntur ac ſuperficies conicae.

VI.

De ſummis Serierum numeros Bernoullianos inuoluentium.

Auctore L. Eulero. pag. 129.

Numeri *Bernoulliani*, qui ita ab inuentore *Iacobo Bernoullio* magni nominis Mathematico vocantur, eo magis notatu digni ſunt, quod non ſolum ipſe iisdem ſit vſus ad inueniendas ſummas progreſſionum ex poteſtatibus numerorum naturalium ſed etiam quod hi numeri poſtmodum ab Illuſtr. huius diſſertationis Auctore ad ſummandas ſeries poteſtatum reciprocarum adhibiti fuerint In hac autem diſſertatione, Illuſtr. Auctori propoſitum fuit, in eiusmodi ſerierum ſummas inquirere, quorum termini numeros *Bernoullianos*, praeterea vero quoque alios factores ſecundum legem quandam cognitam

tam progredientes, inuoluunt. Propofita igitur primum fimpliciffima huius generis ferie, oftendit quomodo per certas transformationes ope integrationis vel differentiationis inftituendas, innumerabiles aliae inde deduci poffint, quarum fummas itidem affignare licet. Dein vero alium fontem, ex quo iftiusmodi feries promanant in confiderationem ducit, fcilicet formulam hanc generalem:

$$2S = 2\int X dx + X + \frac{\mathfrak{A}\, dX}{1.2.3.dx} - \frac{\mathfrak{B}\, d^3X}{1.2...5dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\, d^5X}{1.2...7\,dx^5} - \text{etc.}$$

in qua X terminum defignat generalem feriei cuiuscunque pro indice x, S vero terminum fummatorium *et* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ numeros *Bernoullianos*. Si enim in hac ferie introducantur numeri A, B, C, D quorum relatio ad priores $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ab initio differtationis expofita fuit, hinc huiusmodi nafcetur expreffio

$$\frac{A\, dX}{2\, dx} - \frac{B\, d^3X}{2^3\, dx^3} + \frac{C\, d^5X}{2^5\, dx^5} - \frac{D d^7X}{2^7\, dx^7} + \text{etc.} = S - \int X dx - \tfrac{1}{2} X$$

quae indicat fummam iftius feriei litteras A, B, C inuoluentis femper in poteftate effe, quoties fumma progreffionis, cuius X eft terminus generalis affignari poffit. Ad vlteriorem autem huius veritatis explicationem, Illuftr: Auctor, eas confiderauit feries in quibus $X = \frac{1}{x^n}$, potioresque earum cafus feorfim euoluit, eos fcilicet quibus n fignificat vel 2 vel 4 vel numerum quemcunque, vel etiam vnitatem. Pro fingulis autem docetur quomodo earundem ferierum fummae ope methodi primum propofitae positae inuestigari debeant, vt eo ipso non solum vtriusque methodi consensus exponatur, sed etiam appareat, quibus in casibus vna alteri sit praeferenda.

VII.

De Partitione Numerorum in partes tam numero, quam specie datas.

Auctore L. Eulero, p. 168.

Methodus, qua Illustr. huius dissertationis Auctor, problema de partitione numerorum olim tractauit, quum ita sit comparata, vt etiam ad alia problemata soluenda adhiberi possit, hac occasione eam ad solutionem vulgatissimi problematis, quo quaeritur quot modis datus numerus, dato tesserarum numero proiici possit, applicare constituit. Haec autem quaestio generaliter concepta eo redit, vt inuestigandum sit, quot modis datus numerus, in datum partium numerum dispertiri queat, quarum singulae specie dentur, data quoque multitudine omnium harum partium. Si nimirum concipiantur eiusmodi tesserae quae non sex vt vulgo habent hedras, sed in quibus hedrarum numerus ad m numerum vtcunque magnum ascendat, tum vero faciebus harum hedrarum inscripti sint numeri α, β, γ, δ, quaestio in eo versatur, vt determinetur quot modis, proiiciendo n eiusmodi tesseras, numerus

rus N-produci possit. Vt vero ad huius problematis tractationem eo facilior aditus pateret, Illustr: Auctor casum primo vulgarem, quo tesserae numeris naturalibus ab 1 vsque ad 6 notantur considerauit, circa quam ostendit, si huiusmodi expressionis $(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n$ fiat euolutio, tum quamuis potestatem x^N in ea toties occurrere, quot modis proiiciendo n tesseras, numerus N cadere possit. Deinde quomodo haec euolutio aptissime sit instituenda docet, et quaenam inde oriatur determinatio coefficientium, quae ita comparata est, vt semper quilibet coefficiens per tres praecedentes exprimatur, *vbi id tamen* notatu dignum euenit, vt licet hi coefficientes tandem in nihilum abeant, et postremi primis sint pares, id tamen ex ipsa earundem relatione inuenta nequaquam perspicere liceat.

Porro faciliorem exponit modum, quo hi coefficientes inuestigari possunt, pro quouis tesserarum numero, si iidem pro numero vnitate minore iam fuerint inuenti, vbi etiam Tabulam subiungit ostendentem, quot modis omnes numeri ab 1 ad 36 tesseris vulgaribus quarum numerus vsque ad 8 ascendit cadere possit. At vero quum euolutio formulae primum propositae, alia ratione institui possit, vt quilibet coefficiens absolute assignetur neque praecedentibus ad hoc opus sit, isthaec euolutio, tanto magis expositionem meruit, quo facilius eadem ad ipsum problema generale applicari queat. Neque maiorem quidem moleſtiam, hac euolutione adhibita, faceſſit problema adhuc generalius propoſitum, quo ſingulae teſſerae inaequali hedrarum numero praeditae ſupponuntur. Si enim ex: cauſſa proponantur tres teſſerae, quarum prima hexaedra, ſecunda octaedra, tertia vero dodecaedra eſt, quarum faciebus numeri naturales ab vnitate incipiendo inſcripti ſint, atque quaeratur quot modis tribus his teſſeris numerus N cadere poſſit; reſolutio eius quaeſtionis pendebit ab euolutione huius producti $(x+x^2+\ldots x^6)(x+x^2+x^3\ldots x^8)(x+x^2+x^3\ldots+x^{12})$ coefficiens nimirum poteſtatis x^N, oſtendet caſuum numerum. Denique mentio inſtituitur quorundam elegantium Theorematum Fermatii, quorum demonſtrationes, ope huius methodi, aptiſſime inveſtigari poſſe videntur, licet nondum conſtet quomodo id perficere liceat. Horum prius eſt quod omnes numeri in tres numeros trigonales reſolubiles ſint, poſterius vero quod omnes numeri ex additione quaternorum quadratorum oriantur, quibus etiam hoc adiici poteſt quod omnis numerus ſit aggregatum m numerorum polygonalium, laterum numero exiſtente $=m$ vel pauciorum.

VIII.

VIII.

De inuentione quotcunque mediarum Proportionalium citra radicum extractionem.

Auctore L. Eulero. Pag. 188.

In hac differtatione Illuft. Auctor, methodum exponit facilem et elegantiffimam, medias quotcunque proportionales ope approximationis, quantumuis accurate inueniendi. Fundamentum autem cui haec *fuperftruitur methodus* in eo fitum eft, quod fi numeri quicunque continue proportionales proponantur, eorum quoque differentiae in continua proportione geometrica eiusdem exponentis fint, fin vero feries numerorum propofitorum a proportione geometrica aliquantum aberret, multo maiorem fore differentiarum aberrationem, ex quo viciffim colligitur fi proponatur feries numerorum a proportione geometrica aliquantum aberrantium, fummas horum numerorum ad proportionem geometricam propius accedere. Propofitis igitur duobus numeris A et r A inter quos media proportionalis quaerenda eft, ita procedere licet, vt affumtis pro lubitu binis numeris a et b inde formentur hi tres

$a+b$; $ar+b$, et $ar+br$, quorum bini priores fi compendii cauffa vocentur a', b', inde iterum hos

hos numeros elicere licet $a'+b'$, $a'r+b'$, nec non vlterius progrediendo hos

$a''+b''$, $a''r+b''$ ex quo intelligitur eiusmodi fractiones $\frac{b''}{a''}$, $\frac{b'''}{a'''}$ eo propius ad valorem mediae proportionalis accedere, quo longius haec operatio continuata ſuerit. Simili ratione duae mediae proportionales inueniuntur, aſſumendo primum pro lubitu tres numeros a, b, c, ex iisdem vero continuo formando alios hac lege vt ſit $a'=a+b+c$: $b'=b+c+ar$; $c''=c+ar+br$; quo enim vlterius haec operatio continuetur eo propius eiusmodi numeri

$a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$, $ra^{(n)}$ quatuor numeros in proportione geometrica progredientes exhibebunt. Sic quidem ſi inter duos numeros rationem duplam tenentes, quaerantur bini medii proportionales, ponendo $a=1$, $b=1$, $c=1$, poſt ſeptimam operationem inuenietur $a^{(7)}=10080$ $b^{(7)}=12700$ $c^{(7)}=16001$, vnde hae rationes $\frac{12700}{10080}$ et $\frac{16001}{12700}$ valorem mediorum proportionalium ſatis exacte exhibebunt, erroribus infra decies milleſimam partem vnitatis ſubſiſtentibus. Conſimili autem operatione vti licet ad tres vel quatuor medias proportionales inueſtigandas, quin etiam in genere huius methodi ope, inter duos numeros datam tenentes rationem, quotcunque medii proportionales expedite inueniri poſſint. Series autem numerorum

a, a', a'' etc. b, b', b'' etc. c, c', c'; $d, d' d''$ etc.

ſingula-

singularem merentur attentionem, quum earum terminos generales semper concinne exprimere liceat, et ita quidem vt mutua relatio, quae has series intercedit inde facillime perspiciatur.

IX. et X.

De integratione Aequationis differentialis

$$a^n d^n y + b a^{n-1} d^{n-1} y dx + c a^{n-2} d^{n-2} y dx^2 + \ldots + r y dx^n = X dx^n.$$

et

Methodus integrandi, nonnullis aequationum differentialium exemplis illustrata.

Auctore A. I. Lexell. p. 215 et 238.

Aequatio differentialis, cuius integrandi Methodus in priori harum dissertationum proponitur, eo magis attentione digna videtur, quod inter paucissimas earum sit, quae sub forma generali propositae completam admittant integrationem. Postquam vero haec eadem aequatio differentialis a summis nostri aeui Geometris, Illustr. *Eulero* et *d'Alembertio*, iam dudum sit tractata, superfluum quidem videri posset, quicquid ad eam illustrandam adiiceretur; quum tamen methodus in hac dissertatione exposita, in quibusdam ab antea allatis differat, et ſemper conducat eandem veritatem pluribus modis elicuiſſe, non prorſus inutilem exiſtimauit Cl. Auctor huius diſſertationis operam, quam huic materiei explicandae impenderat. Quum igitur haec aequatio differentialis, ſit generalis gradus nimirum n, vbi n numerum quemcunque integrum denotat, primum diſquirendum fuit, qualis ſit forma aequationis differentialis, gradus proxime inferioris $n-1$, ex propoſita per integrationem eliciendae, ſcilicet inuentum eſt eius formam plane ſimilem fore propoſitae, atque ita repraeſentari poſſe:

$$a^n d^{n-1}y + \alpha a^{n-1} d^{n-2}y dx + \beta a^{n-2} d^{n-3}y dx^2 + . + \lambda a y dx^{n-1} = z dx^{n-1}$$

vbi $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ denotant coefficientes ex quantitatibus conſtantibus conflatas z vero functionem ipſius x, vnde totum integrationis negotium reducitur ad inueniendos valores α, β, λ et functionis z. Heic vero ſingularis haec ſe prodit circumſtantia, quod ex aequatione propoſita, tot oriantur aequationes differentiales gradus proxime inferioris, quot n continet vnitates, vbi tamen ſaepenumero fit, vt plures earum inter ſe prorſus congruentes deprehendantur, pro diuerſis igitur his caſibus, integrale completum diuerſa ratione inueſtigandum eſſe perſpicitur. Primum itaque ſi omnes aequationes differentiales gradus proxime inferioris inter ſe ſint diuerſae ab vna earum reliquas ſubtrahendo, eruentur aequationes differentiales gradus adhuc inferioris $n-2$ tot, quot hic numerus $n-2$ vnitatibus conſtat,

atque

atque si haec operatio continuetur, demum pervenietur ad aequationem finitam valorem ipsius y exprimentem. Quum vero hic valor ipsius y ex tot functionibus ipsius x componatur, quot m continet vnitates, ostenditur quomodo per solam differentiationem, coefficientes, quibus hae functiones ipsius x afficiuntur inuestigari queant.

Deinde explicatur, qua ratione integrale completum quaeri debeat casu, quo aequationum differentialium gradus $n-1$ quaedam inter se congruunt reliquae vero inter se sint diuersae, quin etiam qualem formam id integrale completum induat, dum *plane omnes aequationes* gradus $n-1$ congruunt, adeoque vt vnica spectari possunt. Porro et is casus considerationem singularem meretur, quo plures dantur classes aequationum differentialium congruentium gradus $n-1$, pro quibus aeque facile ac pro reliquis integrale completum assignari potest. Denique exempla quaedam adiiciuntur, quibus regulae pro quocunque casu allatae illustrantur.

In posteriori harum dissertationum, exempla quaedam aequationum differentialium superiorum graduum adferuntur, quarum integratio ad plures aequationes differentiales gradus proxime inferioris deducit, per quarum igitur inter se comparationem vel ad aequationem finitam peruenire licet, vel etiam saltem ad aequationem differentialem multo simpliciorem, ad cuius igitur integrationem totum

 negotium

negotium denuo reducitur. Praeter eas autem aequationes differentiales, quas ibi attulerat Cl. Auctor etiam ſequens aequatio, eadem ratione tractanda, attentione digna videtur.

$$dy\,d^3y + a\,ddy^2 + b\,dy^2\,ddy + c\,dy^4 = 0.$$

Si enim huius integrale ponatur $ddy + a'\,dy^2 = b'e^{\lambda y}\,dy^n\,dx^{n-2}$ ſequentes pro a', λ et n inuenientur valores

$$n = -a;\ \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{(bb - 4(2+a)c)}}{2}$$

et $a' = \frac{-c}{\lambda}$; b' vero ſit quantitas conſtans pro lubitu aſſumta. Poſito iam maioris breuitatis gratia $f = \sqrt{(bb - 4(2+a)c)}$, ſequentes duo oriuntur aequationes differentiales

$$ddy + \frac{2c}{b-f}dy^2 = \mathrm{A}.e^{\frac{-b+f}{2}y}.\,dy^{-a}\,dx^{2+a}$$

$$ddy + \frac{2c}{b+f}dy^2 = \mathrm{B}.e^{\frac{-b-f}{2}y}\,dy^{-a}\,dx^{2+a}$$

vnde ſi poſterior a priori ſubtrahatur haec oritur aequatio:

$\frac{4cf}{bb-ff}.\,dy^2 = e^{-\frac{1}{2}by}(\mathrm{A}e^{\frac{1}{2}fy} - \mathrm{B}e^{-\frac{1}{2}fy})\,dy^{-a}\,dx^{2+a}$ ſeu $\frac{f}{2+a}dy^{2+a} = e^{-\frac{1}{2}by}\,dx^{2+a}(\mathrm{A}e^{\frac{1}{2}fy} - \mathrm{B}e^{-\frac{1}{2}fy})$, deſignante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$

PHYSICO-

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

Commentationes Physico-Mechanicae de Frictionibus, variis illustratae exemplis.

Auctore Daniele Bernoulli. pag. 249.

Commentationibus hisce occasionem Illustr. Auctori subministrauit quaestio de motu virgae plano aspero incumbentis, cuius extremitati potentia quaedam oblique esset applicata, virgam motu lentissimo protrahens, cuius solutio licet primo intuitu facillima videbatur, aliquae tamen minus exspectatae se manifestarunt difficultates, dum definiendae erant directiones, sub quibus frictiones motui resistunt. Hoc igitur argumentum de directione resistentiae ex frictione oriundae, dignum iudicauit Illustr. Auctor quod heic aliquot praeceptis et exemplis illustraret. Dum vero effectus frictionis definiendus est, primum obseruasse iuuat, haud maiores potentias corpori applicatas supponi debere, quam quae ad frictionem superandam sufficiunt, ne scilicet simul inertiae rationem

 habere

distantiam quasi infinitam adplicetur, cadet centrum rotationis in ipsum medium virgae, si diminuatur distantia potentiae a virga, accedet centrum rotationis ad oppositum virgae terminum A, si applicatio fiat in ipsa virga, adhucpropius ad alterum virgae terminum A, qui a potentia magis dissitus est accedet, donec applicatio in ipso medio fiat, quo casu idea centri rotationis plane desinit, quia virga motu parallelo incedet, translata autem potentia versus alteram extremitatem virgae A, protinus centrum rotationis versus terminum B transferetur.

II.

Sectio secunda de Principiis motus fluidorum.

Auctore L. Eulero. pag. 270.

Postquam in Prima Sectione Tomo XIII. horum Commentariorum inserta Illust: EVLERVS naturam et statum aequilibrii fluidorum pertractasset, in hac, principia quibus doctrina de eorum motu innititur, explicare constituit. *Primum* igitur huius Sectionis *caput*, considerationes circa motus fluidorum in genere continet, vbi ostenditur perfectam motus fluidorum cognitionem, ad haec quatuor capita reduci, densitatem, pressionem, vires sollici-

sollicitantes et celeritates quibus quodcunque elementum fluidi secundum ternas directiones fixas inter se normales mouetur; quae si ad quoduis tempus assignari possunt, quicquid fere ad motus fluidorum cognitionem pertinet innotescet. Heic autem manifesta se prodit differentia inter motum fluidorum et corporum solidorum, quemadmodum enim in solidis sufficiat trium punctorum non in directum sitorum motum determinasse pro inueniendo motu omnium, ita ex aduerso in fluidis, singulis elementis peculiaris inesse potest motus, adeo vt praecepta pro motu solidorum heic nequaquam applicari possint. In reliquis ad *hoc caput* pertinentibus problematibus docetur, quomodo datis celeritatibus, quibus vnumquodque fluidi elementum mouetur, inuestigari queant, translatio cuiuscunque moleculae huius fluidi tempusculo *infinite* paruo, variatio quae inde in densitatem infertur et ipsa acceleratio, et de vltima quidem id omnino notatu dignum occurrit, quod celeritatis incrementa secundum quamlibet directionem a *binis* reliquis celeritatibus pendeant, secus ac in corporis solidis fieri solet, in his enim si celeritas secundum quamcunque directionem dicatur v, tempore per t designato, acceleratio semper per hanc formulam $(\frac{dv}{dt})$ exprimetur. In *secundo* huius sectionis capite principia explicantur motus fluidorum a viribus quibuscunque sollicitatorum. Heic nimirum docetur, quomodo datis viribus corporis *sollicit*antibus, non solum vires eius acceleratrices sed etiam motus ipsius definiri debeant. Aequationes vero differentiales ad quas doctrina motus fluidorum reducitur, tanto magis notatu dignae sunt, quod functiones quatuor variabilium a se inuicem non pendentium inuoluant, adeoque ad nouum calculi genus referendae sunt. Quicquid enim in calculo integrali hucusque praestitum est, fere ad functiones vnicae tantum variabilis extenditur; ea huius calculi parte, quae circa functiones duarum variabilium versatur parum adhuc exculta. Ex quo igitur liquet quanta etiamnunc calculi subsidia ad Theoriam fluidorum rite tractandam desiderentur. Quamobrem in id quam maxime incumbendum est, vt aequationes, quibus haec doctrina continetur, tam ad maximam quam fieri potest simplicitatem, quam minimum numerum reducentur. Inuenit autem Illustr. Auctor vniuersam motus fluidorum doctrinam ad duas reduci posse aequationes differentiales secundi gradus, per quarum igitur integrationem quicquid hoc in negotio desideretur, absolui potest. *Caput tertium* applicationem continet principiorum in capite praecedenti stabilitorum ad fluida eiusdem densitatis. Quum vero vix sperari queat, vt problema generaliter conceptum de motu fluidi homogenei, facilem admittat solutionem, consultum duxit Illustr. Auctor casus particulares considerare, quibus motum huiusmodi fluidorum definire licet. Ad quos imprimis sequentes pertinent, primo si ternae celeritates plane euanescunt, quo casu fluidum in aequilibrio

versa-

verſabitur, deinde ſi hae celeritates fuerint conſtantes, adeo vt omnia fluidi elementa motu vniformi et parallelo ferantur, tertio ſi ternae fluidi celeritates, per functiones temporis exprimantur, tum vero denique ſi fluidi celeritates certam et conſtantem inter ſe teneant rationem. Quum vero quae in hoc capite adferuntur, motum ſolum fluidorum homogeneorum progreſſiuum ſpectent, *ſequens* explicationi motus gyratorii huiusmodi fluidorum ab Illuſtr Auctore deſtinatum eſt, vbi eum quidem caſum praecipue notatu dignum iudicauit, quo fluidum ita circa axem fixum gyratur, vt ſingulorum elementorum motus ſit *vniformis*, celeritates vero functionibus quibuscunque diſtantiarum ab axe proportionales. In *Capite quinto* motus explicatur fluidorum pro eo caſu, quo haec formula $udx + vdy + wdz$ integrationem admittit, vbi x, y et z tres coordinatas orthogonales, quibus locus elementi fluidi definitur deſignant, u vero v et w celeritates eiusdem elementi ſecundum directiones fixas in quibus x, y et z captae ſunt. Huic vero caſui ideo peculiare aſſignatum fuit *caput*, quia is explicando motui fluidorum per tubos in quo Theoria praeprimis adhuc fuit occupata, inſeruiat. *Caput* demum *ſextum* tractationem continet de motu fluidorum ex ſtatu initiali definiendo id nimirum heic quaeritur, vt ex ſitu elementi cuiuscunque initiali, defniatur quem ſitum certo elapſo tempore habebit, nec non qua denſitate et preſſione afficiatur.

PHYSICA.

I.

Mus Suslica.

Auctore A. I. Gueldenstaedt p. 389.

Murem hunc minus adhuc cognitum, camporum australis orientalisque Russiae desertorum incolam, quem hic Zoologis offert Cl. Auctor, adeo solerter proposuit, vt in delineatione ipsius plura desiderari fere nequeant. Tractatio a Cl. Auctore de illo elaborata complectitur 1°. descriptionem omnium partium cum dimensionibus accuratam, 2°. Anatomiam omnibus numeris absolutam, 3°. oeconomiae singularis, fatorum morumque notitiam concinnam et 4°. annotationes, quibus *suslica* a *marmota*, *criceto* aliisque maxime affinibus generis murini speciebus distinguitur, perspicuas. Character specificus hoc modo audit: *Mus corpore fusco flauescenti, dorso maculis rotundis albidis variegato, cauda pedum longitudine, depressa pilosa, palmis tetradactylis plantis pentadactylis.* Nobis mus hic ipsissimus est Citillus Agricolae, quem nemini Zoologorum post illum, etiamsi in Polonia et Rossia australiori frequentissimum animalculum, oculis videre licuit.

II.

II.

Anas nyroca.

Auctore A. I. Gueldenſtaedt p. 403.

Nomen triuiale, quo Cl. Auctor hanc anatis ab Ornithologis adhuc vix determinatam ſpeciem diſtinguit, *nyrocam* loquor, Roſſice vrinatorem **нырокъ** (Nyroc) ſignificat. Data exacta deſcriptione omnium partium vtriusque ſexus, characterem conſtituit hunc: *Anas ruſo-nigricans, abdomine, ſpeculo alarum criſſoque albis.* Maxime affinis *Anas nyroca* eſt *anati faligulae*, diuerſas tamen et conſtantes ſpecies illas conſtituere multifaria obſeruatione didicit Cl. Auctor. Memorabilia ſunt migratio, nuptiae, oeconomia, vſus, quae in fine operis adfert.

III.

Spalax nouum Glirium genus.

Auctore A. I. Gueldenſtaedt p. 409.

Praemiſſa notitia ordinis Glirium, examinatisque generibus, quae hic ordo comprehendit, ad ipſum Characterem animalculi nouum huius ordinis genus conſtituentis, Cl. Auctor explicandum accedit. Audit ipſi Spalax, *Glis dentibus primoribus* *in vtraque maxilla cuneiformibus planis*; *rostro proboscoideo*, *pedibus pentadactylis*; *auriculis caudaque nullis.* Essentiam characteris huius generici itaque in dentium primorum figura ponit, nec Cl. Auctori a veritate alienum videtur, Spalacem, cui nomen triuiale *Microphtalmus* dedit, *Talpam versicolorem* esse Sebae, quam Ill. a *Linne Talpam ecaudatam palmis tridactylis* nominauit.

Singularissimum est, et in historia quadrupedum res inaudita, quod visu plane careat Spalax noster: nulli enim oculi per cutem apparent; nec vllum foraminis vestigium in cute caput obtegente detegendum. Spatium tamen inter apophysin zygomaticam ossis maxillaris et inter musculum crotaphytem occupat conglomeratum quoddam glandulosum, liquidum spissiusculum puri laudabili simillimum, in cellulis continens; centro huius conglomerati per cellulosam adhaeret oculus corpusculum nigricans, globosum, vix semine papauerino maius, antice subpellucidum nitidum referens, in quo ob minutiem nec pupilla nec liquores discerni queunt. Anomalum igitur hunc esse oculum, nec ad uisum destinatum vnusquisque animaduertit, quoniam non tantum, vt supra commemoratum, appertura per cutem careat, sed etiam musculo subcutaneo valido vestita sit.

IV.

IV.

Peregusna noua Mustelae species.

Auctore A. I. Gueldenstaedt p. 441.

Praemissa descriptione et anatomia Peregusnae, varia ad physiologiam animalis huius pertinentia pulchre adfert Cl. Auctor. Victitat haec bestiola vt omnes congeneres carne, praesertim muribus *marmota*, *criceto*, *suslica*, *jaculo* aliisque camporum tanaicensium inermibus phytophagis, inter voracissima animalia est referenda idque ratione structurae tractus intestinalis breuissimi nec valuulosi, quae communis fere et maxime necessaria est omnium mere carniuorarum conditio. Olera, panem, oua et mel, quae peregusnae exposuit Cl. Auctor, intacta reliquit, gallinam viuam oblatam autem mox pedibus prehendit, dentes femoribus gallinae infixit et sanguinem auide suxit. Dentibus gaudet ad conterendas plantarum partes ineptissimis ad carnem autem dilacerandam et praedam necandam aptissimis.

Mirum in modum in campis tanaicensibus aliisque australis orientalisque Rossiae desertis vastissimis stabilita est politia naturae humana arte non turbata; numerosissimae enim plantarum myriades campos hosce obuestientes partim insectorem laruis, partim auibus graniuoris, partim quadrapedibus phy-

phytophagis destinatae, vt aequilibrum inter plantas seruetur, ne vna specie nimis multiplicata altera suffocetur et pereat. Sed iterum cauendum fuit, ne horum animalium nnmero nimis aucto, nimia plantarum copia comedatur, et hac via plantae pereant; hinc conditori naturae quam plurimis auium insectiuorarum speciebus, haud paucis auibus ornithophagis, variis quadrupedibus carniuoris quadrupedibus phytophagis infestis, apta domicilia in his campis parare placuit; vt proportio inter creaturas, quae finis est politiae natura, seruetur.

Expositis variis quae mores, nuptias, domicilia aliaque ad oeconomiam animalis pertinentia spectant, peregusnam suam nomine specifico a congeneribus distinguit sequenti: *Mustela pedibus fissis, capite et corpore subtus aterrimis; corpore supra brunneo luteoque vario; ore fascia frontali, auriculisque albis.*

V.

De Ouo simplici gemellifero.

Auctore C. F. Wolff. pag. 456.

Foetus praeternaturaliter constituti, siue monstra hi fuerint irregularia, siue foetus connati, siue gemelli, vni tamen ouo inclusi, ab omni tempore a physiologis magna cum attentione considerati fuerunt, eo fine et ea spe, vt aliqua tandem inde lux

lux theoriae generationis adfunderetur. De ouis gemellificis *Aristoteles* iam mentionem fecit. Deinde *Fabricius ab Aquapendente* de iisdem vberius scripsit. Denique *Harvaeus* quoque suas his addidit obseruationes. Verum, quae oua gemellifica ab his auctoribus vocantur, ea neque vero sensu talia, sed potius gemella oua, vni testae inclusa fuere; (siquidem vitello, qui essentiam oui constituit, non simplici, qui geminum foetum produceret, sed duplici vitello duplicique albumine praedita fuerunt;) neque videntur illi auctores vnquam embryones horum ouorum ipsos in ouis incubatis, sed mera tantum oua non incubata vidisse, quod satis ex descriptione, *quam tradiderunt*, et ex dissensu eorundem respectu foetuum apparet; dum *Aristoteles* foetum gemellum, *Fabricius* autem monstrum potius fore suspicatur, quod prodiret ex eiusmodi ouis gemellificis dictis, et *Harvaeus* tandem ab vtroque iterum dissentit. Subiectum, de quo hic agitur, verum ouum gemelliferum fuit, simplici albumine, simplicique vitello, ex quo duplex embryo propullulat, instructum, sex quidem dies incubatum; quo tempore scilicet foetus gallinaceus in statu embryonis adhucdum versatur et notabili tamen magnitudine iam gaudet, vt nudis etiam oculis perlustrari queat, praetereaque plurimas partes inchoatas, licet nondum perfectas, iam habet. Praemisso discursu de differentia inter oua gemella et gemellifera, deque in specie priorum natura et ortu, *Clarissimus Auctor*

 statum

ſtatum naturalem oui ſex dies incubati breuiter deſcribit, vt accuratius eo intelligantur, quae ſingularia et praeter naturam huic ſubiecto inſunt. Deinde deſcriptionem oui gemelliferi ipſam aggreditur. Praeter ea, quae iam indicauimus, plura alia ſingularia non minus digna notatu in eo ouo occurrunt; veluti abſentia amnii et ſitus embryonum nudorum prorſus extra vitellum, cui pedunculorum ope adnectuntur; cum naturaliter intra externam vitelli membranam embryo incluſus eſt; et alia, quae in Diſſertatione ipſa legenda. Denique conſectaria quaedam addit de ſtatu oui gemelliferi ante ſextum incubationis diem; nam iſte quidem ex praeſenti ſtructura concludi poterat. Porro ſimili modo de ſtatu eiusdem poſt diem ſextum. Porro de partu vel excluſione foetuum eiusmodi gemellorum, qui illum terminum ſuperuiuere vix poſſe videntur. Denique de ortu monſtrorum, quae non fieri ex gemellis compreſſis et concreſcentibus, ſed ex vegetatione potius ipſa luxuriante, ſatis luculenter oſtenditur.

VI.

VI.

Descriptio piscis, e Gadorum genere, Russis Nawaga (навага) dicti, historico anatomica.

Auctore I. T. Koelreuter pag. 484.

Piscem hunc oceani europaei incolam, ichthyologis quidem recentioribus notum a nemine autem descriptum, quem Cel. Auctori nobiscum communicare placuit, ea solertia explicauit, quam Lectores in operibus *Koelreuterianis* pulcherrimis expectare consueuerunt. Datis exactis descriptionibus omnium partium externarum omnibusque partibus internis cultro anatomico subiectis, synonyma Ill. a *Linne* et Artedii adfert. Est Nawaga *Gadus* (*Callarias*) *tripterygius cirratus varius*, *cauda integra*, *maxilla superiore longiore Lin.* Syst. Nat. ed. XII. Tom. I. pag. 436. n. 2. Dolendum est, vt de oeconomia plurimarum incolarum pelagicarum, quae iucundissima est Zoologiae pars, ichthyologis fere nihil dicere liceat.

VII.

Descriptio quorundam animalium.

Auctore I. Lepechin pag. 498.

In hac commentatione sex animalia quinque aues et vnum mammale describit Cl. Auctor. *Prima* auis est Parus dorso dilute coeruleo inferne albus capite albo tania ad oculos et medio abdomine macula oblonga ex atro coeruleis fascia alarum media alba, qui Russice Kniaesiok (князіокъ) nominatur et in virgultis circa Synbirsk habitat. *Secunda* est sterna Tschegraua (чеграва) superne ex albo cana, inferne niuea capillitio nigro albedine irrorato, rostro coccineo, pedibus nigris, quae ad mare caspium frequentissima et voce risum aemulatur. *Tertia* est Fringa, inferne alba, supra nigra lituris longitudinalibus flauescentibus, fascia alarum alba, pedibus lobatis, quae ad lacus salsos habitat et circa mare caspium gregatim volitat. *Quinta* est Ardea pumila, capite et collo flauicante castaneo alboque variis, dorso castaneo, inferne albicans, quae etiam ad mare caspium habitat. *Quinta* est Motacilla Pleschanca (плешанка) dorso pectoreque nigris, capillitio abdomineque albis, quae in fossis praeruptis circa Saratow et alibi ad Wolgam habitat, vbi in modum hirundinis ripariae effodit cauernas horizontales, profundas, aliquando etiam aliarum auium cavita-

vita-

vitates occupat. Singularis est propagatio huius auiculae: decem enim pullos Cl. Auctor in nido vnico inuenit.

Mammale de quo agit est Mus oculis minutissimis, auriculis caudaque nullis, corpore rufo cinereo, quem incolae Slepyschok (слепышокъ) vocant. Hunc murem Cl. Auctor primus omnium inuenit, idemque est animalculum quod Cl. *Gueldenstaedt* Spalacem nominauit et cuius in hoc summario pag. 409. mentionem fecimus.

VIII.

De Capra Saiga et Erinaceo aurito Dissertatio.

Auctore Samuel Gottlieb Gmelin pag. 512.

Prior pars dissertationis huius exactam descriptionem Caprae Saigae exhibet, quam Illustr. a *Linne* in XII^{ma} editione syst. naturae Tom. I. p. 97. n. 11. Capram *tataricam* cornibus teretibus rectiusculis perfecte annulatis apice diaphanis; gula imberbi, nominauit; et beat. *Gmelinus* sub nomine Ibicis imberbis in Commentariis nostris proposuit. Posterior pars Erinacei nouam speciem tradit, quam Cel. Auctor in regione Astrachanensi frequentissimam obseruabit et ob aures exstantes *auritum* nominauit.

IX.

Lychnanthos volubilis et Limnanthemum peltatum noua plantarum genera.

Auctore Samuel Gottlieb Gmelin pag. 525.

Prior harum plantarum, quam Cel. Auctor ad Tanaim legit, ad Decandriam Trigyniam Ill. a *Linne* pertinet. Dato charactere generico, allata etiam descriptione omnium partium exacta, paululum adhuc haesitare videtur; ita enim sese exprimit: aut Lychnanthos noster Silene erit, aut Cucubalus, aut demum Saponaria. Sed si haec genera bene distincta sunt, neutrum recte ingreditur. *Faux coronata* a Cucubalo eundem separat. Ab eodem et Silene *Bacca globosa vnilocularis.* Atque a Saponaria *stylo trifido* recedit. Summe videtur conuenire cum Cucubalo baccifero, sed cum eum nunquam vidisse meminerim nil determino. Nec errauit Vir Cel. et nobis Lychnanthos nihil aliud quam Cucubalus baccifer esse videtur.

Alterum genus Limnanthemum peltatum puta, quod ad vrbem Tscherkask in paludibus inuenit, ad Pentandriam monogyniam Illustr. a *Linne* referendum est. Nos in Limnanthemo summam cum

cum Menyanthe nymphoide affinitatem animaduertimus: omnia enim quae de illo dixit Cel. Auctor etiam de hoc dici possint, excepta *Corollae quinque petala*, quae in Menyanthe nymphoide *quinque partita*.

X.

Obseruationes et descriptiones botanicae.

Auctore I. Gaertnero pag. 531.

Octo hac Dissertatione plantarum partim nouarum partim minus sufficienter antea descriptarum exactam delineationem Botanicis offert Cel. Auctor. Prima earum est noua species Veronicae, quae Cel. Viro Veronica *grandiflora* racemis lateralibus laxis, foliis oppositis, crenatis, hirsutis; caule adscendente, stolonifero, audit. Secunda non quidem prorsus noua sed minus rite hactenus definita planta, quam beat. *Stellerus* cum priore in Kamtschatca legit et *Gmelinus* Fl. Sib. Tom. 3. p. 219. veronicam foliis inferioribus ouatis, crenatis; superioribus rotundis mucronatis, caule spica terminato, appellauit. Hanc, cuius character in calyce altero latere fisso cum flore diandro consistit, Cel. Auctor diuersi et nouique generis esse cognouit et Lagotidem dixit. Nomen triuiale huius

plantae

plantae est Lagotis *glauca* foliis radicalibus petiolatis, caulinis et spica terminali sessilibus. Tertia est Bronus *ouatus* panicula ouata, fasciculata, erecta; spiculis oblongis: intermediis primoribus breuius pedunculatis; secundariis sessilibus, qui ad maris caspii littora habitat. Quarta et quinta sunt agropyri noui generis ex ordine graminum duae species, agropyron puta *cristatum* spica composita, flosculis hirsutis, et Agropyron *triticeum* spica simplici, flosculis laeuibus. Prius Illustr. a *Linne* Bromum spiculis distiche imbricatis, sessilibus, depressis, dixit, et beat. *Gmelinus* Festucam culmo spicato, spiculis multifloris, in Flora Sibirica nominavit: posterius vero noua species est quae ad Wolgam et Iaicum vt et in tota fere Sibiria australi in locis sterilibus passim occurrit. Sexta est Rubia *cordifolia* frequentissima in rupestribus Sibiriae transbaicalensis planta, cuius semina Zachertius Pharmacopola apud Argentifodinas argunenses et botanophilus misit. Septima est Anemone *pusilla* flore calyculato; scapo aphyllo pubescente, foliis radicalibus ternatis, incisis, quae etiam inter plantas Sibiriae proprias numeranda. Octaua est pulchra Digitatis *glutinosa* Chinae septentrionalis incola.

XI.

XI.

Descriptiones Quadrupedum et Auium anno 1769. obseruatarum.

Auctore P. S. Pallas pag. 547.

Trium quadrupedum et quinque auium minus antea cognitarum descriptiones Cel. Auctori hac Dissertatione cum eruditis communicare placuit. Quadrupedes sunt Mus *Citillus* et *talpinus* et Erinaceus *auritus* Aues vero Anas *rutila*, Sterna *Caspia*, *Motacilla leucomela* Loxia *erythrina* et Parus *cyanus*. In omnibus his descriptionibus eadem elucet solertia, eadem eruditio, perspicuitas ea, quam antea semper in scriptis nostri Zoologi inuenerunt lectores.

XII.

Nouae Insectorum species.

Auctore E. Laxmann pag. 593.

Si magnos illos scarabaeos americanos, quos Cel. *Koelreuter* pulchre descripsit, excipiamus, nihil de Insectis in Commentariis nostris occurrit. Vt etiam de Russicis et Sibiricis Insectis eruditis aliquid constaret, operae precium esse duxit Auctor, qui plurima haec vastissimi Imperii animalcula per totum sexennium collegit, tredecim has species tradere. Primae septem harum ad Coleoptera, octaua et nona ad Hemitera pertinent. Speciosissimae sunt quatuor vltimae Myrmeleon puta *Kolywanense*, Ichneumon *gigas*, Conops *petiolatus* et Aranea *singoriensis*. Cum autem in describendis ipsis breuitati magnopere studuerit, plura de illis in hoc summario dicere superuacaneum putauimus.

INDEX

INDEX DISSERTATIONVM.

Mathematica.

Physico-Mathematica.

Physica.

MATHE-

MATHEMATICA.

DISQVISITIONES ANALYTICAE DE NOVO PROBLEMATE CONIECTVRALI.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Sint duae, tres, pluresue vrnae, in quibus singulis schedulae certo et aequali numero repositae putentur, schedulae autem vniuscuiusuis vrnae suo peculiari colore a schedulis reliquarum vrnarum ab initio distinctae sint; tum porro schedulae successive, forte tamen, permutentur hac lege vt quauis vice ex singulis vrnis schedula vna extrahatur, et deinde in vrnam ordine sequentem translocetur, illa autem quae ex vrna, vltimo loco posita, extracta sint, in primam reponatur: his ita positis datoque permutationum, praefato modo factarum, numero quaeritur numerus schedularum cuiusuis coloris quae probabiliter in quauis vrna continebuntur, quoties autem extractio ex ſingulis vrnis ſimul facta fuit, ſimulque eo, quo dixi, modo in vrnam ſequentem ſchedula quaeuis transpoſita, integram iſtam operationem vnius permutationis nomine indico. Tale eſt argumentum, quod nunc diſcutiendum mihi propoſui: potuiſſet quidem generalius proponi, ſumendo numeros ſchedularum primitiuos in diuerſis vrnis vtcunque inaequales easque vel ab ipſo initio qualitercunque permixtas, at aliquid concinnae breuitati dari poſſe putaui.

§. 2. Quamuis obuius ſit calculus pro duabus vrnis eum tamen ob nexum, quem habebit cum ſequentibus, apponam: ſint igitur in prima vrna n ſchedulae albae totidemque nigrae, in vrna altera, erit ſecundum notas combinationum atque probabilitatum regulas, poſt primam permutationem, numerus ſchedularum albarum in prima vrna reſiduarum $= n - 1$, poſt ſecundam permutationem $= \frac{(n-1)(n-2)}{n} + 1$, poſt tertiam permutationem habebitur $\frac{(n-1)(n-2)^2}{nn} + \frac{n-2}{n} + 1$; poſt quartam $\frac{(n-1)(n-2)^3}{n^3} + \frac{(n-2)^2}{nn} + \frac{n-2}{n} + 1$; poſt quintam $\frac{(n-1)(n-2)^4}{n^4} + \frac{(n-2)^3}{n^3} + \frac{(n-2)^2}{nn} + \frac{n-2}{n} + 1$; et ſic porro; inde colligitur, ſi generaliter numerus factarum permutationum fuerit r atque ponatur breuitatis gratia $\frac{n-2}{n} = m$ fore numerum ſchedularum albarum in prima urna reliquarum $= \frac{1-m^{r-1}}{1-m} + (n-1)m^{r-1}$

$= \frac{1}{2}n$

$= \frac{1}{2} n (1 + m^r)$. De hinc reliquarum ſchedularum diſtributio per ſe intelligitur.

§. 3. Quia m ſemper eſt vnitate minor euaneſcit terminus m^r, ſi r ſit numerus admodum magnus atque tunc fit numerus ſchedularum albarum in prima vrna reſiduarum ſimpliciter $= \frac{1}{2} n$; ſtatus is eſt aſymptotos, ad quem dum permutationes fiunt, magis magisque peruenitur, niſi fuerit n vel aequalis vnitati vel binario; etenim ſi vnica ſchedula alba vrnae primae et vnica nigra vrnae alteri indita fuerit, fit $m = -1$ alternisque vicibus vel nulla vel vna ſchedula *alba in vrna* erit locata, quando *quidem formula* noſtra abit in $\frac{1}{2}(1 + (-1)^r)$; ſi vero fuerit $n = 2$ fit $m = 0$ formulaque indicat vnitatem ſeu valorem medium ſiue probabilem inter ſingulos valores poſſibiles. Haec non vrgebo; aliud eſt quod potiſſimum intendo nempe vt inquiratur quid futurum ſit, cum ipſe ſimul numerus ſchedularum permagnus eſt ita vt pro infinito veluti haberi poſſit, nec enim tum amplius numerus m^r negligi poteſt, niſi r ſit veluti infinities maior vel ipſo numero n: Hac facta ſuppoſitione incidimus in argumentum, quod ſolo calculo infiniteſimali breuiter expediri poſſe, nulla combinationum habita ratione, oſtendi in Commentariorum volumine XII. Igitur conſenſum vtriusque methodi, vt nouo argumento manifeſtarem, animum induxi, praeſertim cum hanc eandem methodum infiniteſi-

 malem

malem in ſequentibus, quae magis erunt abſtruſa; pariter adhibere conſtitui; Nunc in viam redeo.

§. 4. Quod ſi proinde numerus n pro infinito habeatur, erit $\frac{2}{n}$ pari iure veluti infinite paruus, quem vocabo α fietque $m = 1 - \alpha$; ergo formula noſtra $\frac{1}{2} n (1 + m^r)$ numerum ſchedularum albarum in prima vrna reſiduarum exprimens dabit $\frac{1}{2} n (1 + (1 - \alpha)^r)$: Eſt vero $(1 - \alpha)^r = 1 - r\alpha + \frac{rr\alpha\alpha}{1.2.} - \frac{r^3\alpha^3}{1.2.3} + \frac{r^4\alpha^4}{1.2.3.4} -$ etc. quae ſeries aequalis eſt ſimpliciter $c^{-r\alpha}$ vel $= \frac{1}{c^{r\alpha}} = \frac{1}{c^{\frac{2r}{n}}}$; vbi litera c denotat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus vnitas eſt, aut proxime numerum 2, 7 18. Igitur ſi numerus quaeſitus ſchedularum albarum poſt r permutationes in prima vrna reſiduarum indicetur per x, habebitur

$$x = \frac{1}{2} n \left(1 + \frac{1}{c^{\frac{2r}{n}}} \right).$$

§. 5. Iam vero quaeritur quemadmodum idem valor altera methodo inueniri queat, conſiderando nempe quantitates x et r tanquam fluentes, quod vtique fieri poteſt, quamdiu vnitas pro valde parua reſpectu numeri ſchedularum in vrna reſiduarum haberi poteſt: Hoc ita poſito haud difficulter apparet fore $dx = \frac{-x}{n} dr + \frac{n-x}{n} dr$, vbi primum membrum debetur ſchedulae extractae: alterum immiſſae. Inde habetur $\frac{dx}{2x-n} = \frac{-dr}{n}$ vel $\frac{1}{2} \log \frac{2x-n}{n} = \frac{-r}{n}$ vel

vel $\frac{2x-n}{-n} = c^{\frac{-2r}{n}}$, vnde protinus fit $x = \frac{1}{2} n \left(1 + \frac{1}{c^{\frac{2r}{n}}}\right)$, plane vt antea habuimus.

§. 6. Sunt itaque huiuscemodi quaestiones solutu multo faciliores, cum numerus schedularum ceu infinitus haberi potest, quin fere totam suam indolem mutant et vix adhuc in censum probabilium referendae videntur, etiamsi solutionem alteram ex meris principiis artis coniectandi deduxerim; perspicuum enim est, posteriorem nostram solutionem plane eandem fore, si duo supponantur vasa duobus *canaliculis inter se communicantia*, per quos perpetua fiat transuasatio duorum fluidorum in ambobus vasis contentorum et protinus perfecte permiscibilium, sique lex permixtionis pro quouis temporis puncto quaeratur. Velim autem notetur numeros vel mediocriter magnos sine sensibili errore pro infinitis haberi posse; fuerit, verbi gratia, $n = 200$ et $r = 100$, dabit formula paragraphi secundi numerum schedularum albarum in prima vrna probabiliter reliquarum $= 136\frac{5}{7}$, dum hypothesis infinitae magnitudinis exhibet $136\frac{2}{3}$. Imo potuissent numeri seligi multo minores.

§. 7. Faciem aliam Problema nostrum induit cum plures quam duas proponimus vrnas; tres modo si fuerint, protinus in calculos incidimus satis perplexos; miratus sum nouam adhibendi calculi indolem

inde-

indeque iudicaui latius patere ac putaueram vsum algorithmi infinitesimalis in huiusce modi quaestionibus pertractandis. Prius vero quam ad examen de numero schedularum veluti infinito descendam, solutionem exponam generalem ex principiis vsitatioribus deductam vt sic quisque perspiciat, si rem vlterius prosequi voluerit, viam quam debeat calcare.

§. 8. Sint igitur nunc tres vrnae, quarum prima ab initio contineat n schedulus albas, altera totidem nigras, tertia autem totidem rubras, supponaturque post datum factarum permutationum numerum, superesse in prima vrua A schedulas albas, simulque in vrna secunda atque tertia numerum schedularum albarum esse B et C: Est autem perpetuo $A + B + C = n$; His ita positis quisque facile videbit fore post nouam superuenientem permutationem numerum schedularum in prima, secunda atque tertia vrna $\frac{(n-1)A+C}{n}$; $\frac{(n-1)B+A}{n}$ atque $\frac{(n-1)C+B}{n}$; Cognita autem distributione schedularum albarum caetera omnia sua sponte innotescunt erit nempe numerus schedularum nigrarum in vrna prima $= C$; in secunda $= A$; in tertia $= B$ atque rubrarum in vrna prima $= B$, in vrna secunda $= C$; in tertia $= A$; Igitur de sola distributione albarum inquiram. Quia vero, vt vidimus, status sequens ex dato praecedente cognoscitur, statusque initialis datus est, omnis variatio ab initio vsque ad quamuis factam permutationem intelligitur. Tabulam

bulam adiicio, qua progreſſio terminorum magis eluceſcit.

Numerus permutationum.	Numerus ſchedularum albarum, quae probabiliter erunt in vrna. Prima	Secunda	Tertia
0.	$n.$	$0.$	0
1.	$n-1$	$1.$	0
2.	$\frac{(n-1)^2}{n}$	$\frac{2(n-1)}{n}$	$\frac{1}{n}$
3.	$\frac{(n-1)^3+1}{nn}$	$\frac{3(n-1)^2}{nn}$	$\frac{3(n-1)}{nn}$
4.	$\frac{(n-1)^4+4(n-1)}{n^3}$	$\frac{4(n-1)^3+1}{n^3}$	$\frac{6(n-1)^2}{n^3}$
5.	$\frac{(n-1)^5+10(n-1)^2}{n^4}$	$\frac{5(n-1)^4+5(n-1)}{n^4}$	$\frac{10(n-1)^3+1}{n^4}$
6.	$\frac{(n-1)^6+20(n-1)^3+1}{n^5}$	$\frac{6(n-1)^5+15(n-1)^2}{n^5}$	$\frac{15(n-1)^4+6(n-1)}{n^5}$
7.	$\frac{(n-1)^7+35(n-1)^4+7(n-1)}{n^6}$	$\frac{7(n-1)^6+35(n-1)^3+1}{n^6}$	$\frac{21(n-1)^5+21(n-1)^2}{n^6}$
8.	$\frac{(n-1)^8+56(n-1)^5+28(n-1)^2}{n^7}$	$\frac{8(n-1)^7+70(n-1)^4+8(n-1)}{n^7}$	$\frac{28(n-1)^6+56(n-1)^3+1}{n^7}$
9.	$\frac{(n-1)^9+84(n-1)^6+84(n-1)^3+1}{n^8}$	$\frac{9(n-1)^8+126(n-1)^5+36(n-1)^2}{n^8}$	$\frac{36(n-1)^7+126(n-1)^4+9(n-1)}{n^8}$
	etc.	etc.	etc.

§. 9. Quicunque animum ad praemiſſam tabellam attenderit, hic facile perſpiciet legem progreſſionis, quae talis eſt. Indicetur numerus factarum permutationum generaliter littera r, aſſumaturque binomium cuius alterum membrum ſit $n-1$ alterum 1, iſtudque binomium eleuetur ad dignitatem r, ſic vt habeatur $((n-1)+1)^r$; conuertatur dein haec quantitas in ſeriem:

$$(n-1)^r+r(n-1)^{r-1}+\frac{r.r-1}{1.2}(n-1)^{r-2}+\frac{r.r-1.r-2}{1.2.3}(n-1)^{r-3}\ldots\ldots+1.$$

In ista serie, quam vocabo, generatrice addantur primus, quartus, septimus etc. terminus, eorumque summa diuidatur per n^{r-1}, sicque habebitur numerus schedularum in prima vrna; Deinde si addantur secundus, quintus, octauus etc. terminus summaque pariter diuidatur per n^{r-1} habebitur numerus schedularum albarum in vrna secunda; Denique summa tertii, sexti, noni etc. termini diuisa per n^{r-1} dabit numerum schedularum albarum in tertia vrna. Vnde per se liquet, numerum omnium schedularum albarum, vi huius constructionis, esse constanter $= n$, prouti natura rei postulat.

§ 10. Res eo, quo mihi obseruatae fuerunt ordine profero; Iam vero facile intelligere potui ex praecedente paragrapho, quotcunque fuerint vrnae, praefatam seriem generatricem semper eandem permanere, „primum autem eius terminum pertinere „ad primam vrnam, secundum terminum ad secun„dam vrnam, tertium ad tertiam et sic porro donec peruentum fuerit ad vrnam vltimam, tumque terminos sequentes eodem ordine iterum tribuendos esse vrnae primae, secundae etc. donec secunda periodus finita fuerit, quo facta tertia incipit periodus incipiendo iterum ab vrna prima et sic deinceps, vsque dum omnes seriei termini fuerint exhausti Erunt porro singuli termini diuidendi per n^{r-1}; hoc facto indicabit summa omnium terminorum ad eandem

eandem vrnam pertinentium numerum omnium ſchedularum albarum in iſta vrna contentarum: Et haec eſt ſolutio generalis problematis noſtri paragrapho primo expoſiti.

§. 11. Videamus nunc an iſta ſolutio generalis conſentiat cum ſolutione, quam dedimus pro duabus vrnis in fine §. 2. vbi vidimus eſſe numerum ſchedularum albarum in prima vrna contentarum $= \frac{1}{2}n(1 + m^r)$ vel $= \frac{1}{2}n\left(1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^r\right)$, nam ibi breuitatis gratia poſueramus $m = \frac{n-2}{n}$; Praeſens vero ſolutio generalis dat numerum ſchedularum albarum in prima vrna $= \frac{(n-1)^r}{n^{r-1}} + \frac{r.(r-1)(n-1)^{r-2}}{1.\,2.\,n^{r-1}}$
$$+ \frac{r.(r-1)(r-2)(r-3)(n-1)^{r-4}}{1.\,2.\,3.\,4\,n^{r-1}} + \text{etc.}$$
oportet igitur vt praefata ſeries indefinita ſit aequalis $\frac{1}{2}n\left(1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^r\right)$, vt iſta aequalitas appareat, conſiderabimus praefatam quantitatem ſub hac altera forma $\frac{1}{2}n\left(\left(\frac{(n-1)-1}{n}\right)^r + 1\right)$ ſiue $\frac{((n-1)-1)^r + ((n-1)+1)^r}{2\,n^{r-1}}$;
Nunc vero ſi ambo numeratoris binomia in ſeriem indefinitam conuertantur fiet vt termini plane iidem alternatim vel duplicentur vel deſtruantur ſicque ipſiſſimam ſolutionis generalis formam exhibeant. At pro caſu hoc particulari praeferenda vtique eſt expreſſio paragraphi ſecundi ceu longe compendioſior.

 Si

Si vnica consideraretur vrna, permaneret vtique in illa idem constanter numerus schedularum albarum, quod ipsum pariter solutio generalis indicat.

§. 12. Iam propius ad id accedo, quod potissimum constitutum habebam nempe vt pro tribus vrnis ostenderem quemadmodum istud negotium ope calculi infinitesimalis confici possit, si quampluri-mae sint schedulae saepiusque permutationes fuerint repetitae ita vt numeri n et r veluti infiniti censeri possint, cuiusmodi examen fecimus pro duabus vrnis §. §. 4 et 5, hanc disquisitionem vtraque methodo, analysi nempe communi atque infinitesimali faciam, vt rursus consensus inter vtrumque elucescat.

Si statim sermo sit de vrna prima, habebimus, vi paragraphi noni, numerum schedularum albarum in illa contentarum, mutata tantisper forma neglectisque terminis negligendis ita expressum $n, (1 - \frac{1}{n})^r (1 + \frac{r^3}{1.2.3\,n^3} + \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6\,n^6} + \text{etc.})$.

Est vero per paragraphum quartum quantitas $(1 - \frac{1}{n})^r = \frac{1}{c^{\frac{r}{n}}}$, quae proin quantitas substitui potest; postmodum pari methodo definiri potest numerus schedularum albarum in vrna secunda ac denique

denique in tertia, hoc modo inuenimus numerum ſchedularum albarum.

$$\text{In vrna I.} = \frac{n}{c^{\frac{r}{n}}}\left(1 + \frac{r^3}{1.2.3\,n^3} + \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6\,n^6} + \text{etc.}\right).$$

$$\text{In vrna II.} = \frac{n}{c^{\frac{r}{n}}}\left(\frac{r}{n} + \frac{r^4}{1.2.3.4.n^4} + \frac{r^7}{1.2.3.4.5.6.7n^7} + \text{etc.}\right).$$

$$\text{In vrna III.} = \frac{n}{c^{\frac{r}{n}}}\left(\frac{rr}{1.2.nn} + \frac{r^5}{1.2.3.4.5\,n^5} + \frac{r^8}{1.2.3.4.5.6.7.8\,n^8} + \text{etc.}\right).$$

Hic ſupereſt vt et in hiſce formulis factorem poſteriorem, *ſerie infinita* expreſſum, ad quantitatem *terminis finitis* circumſcriptam reducere tentemus qua quidem in re non memini, quid. ab aliis iam praeſtitum fuerit: quicquid id ſit, haud abs re mea fore puto, ſi omnia ſimul conſpectui exponam.

§. 13. Incipiam a prima ſerie infinita $1 + \frac{r^3}{1.2.3\,n^3} + \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6\,n^6} +$ etc. cuius ſumma S quaeritur, atque ſic habebimus.

$$1 + \frac{r^3}{1.2.3\,n^3} + \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6\,n^6} + \text{etc.} = S$$

Huius aequationis ſumatur differentiale tertii ordinis ponendo elementum dr conſtans et conſiderando quantitatem r tanquam fluentem; ſic recurremus ad ipſam ſeriem propoſitam, multiplicatam per $\frac{d r^3}{n^3}$, proindeque habebimus.

$$\frac{S d r^3}{n^3} = d^3 S.$$

Completa huius aequationis integratio necessario tres continebit quantitates constantes, equidem facile apparet assumi posse aequationem $S = \alpha c^{\frac{m r}{n}}$, si ponatur $m^3 = 1$: habebit sic m tres radices, nempe $m = 1$; $m = (-1 + \sqrt{-3}) : 2$ et $m = (-1 - \sqrt{-3}) : 2$, qua propter nunc assumere possumus aequationem $S = \alpha c^{\frac{r}{n}} + \beta c^{(-1+\sqrt{-3})\frac{r}{2n}} + \gamma c^{(-1-\sqrt{-3})\frac{r}{2n}}$, quae sic tribus gaudet quantitatibus constantibus arbitrariis α, β et γ, quarum ope singulis circumstantiis satisfieri potest, quae in eo consistunt, quod numerus schedularum initialis in quauis vrna arbitrarius est, si quaestio generalissima proponatur; vnde liquet argumentum nostrum, si vel decem ponerentur vrnae non nisi aequatione differentiali decimi ordinis recte explicari posse, quae tamen semper integram admittet integrationem, Notum autem est, quantitates exponentiales imaginarias in sinus et cosinus conuerti posse; est scilicet $c^{\frac{r\sqrt{-3}}{2n}} = \text{sin.}\, \frac{r\sqrt{3}}{2n}$ et $c^{\frac{-r\sqrt{-3}}{2n}} = \cos \frac{r\sqrt{3}}{2n}$ atque his factis substitutionibus obtinebimus aequationem meris terminis realibus expressam, nempe

S =

$$S = \alpha c^{\frac{r}{n}} + \beta c^{\frac{-r}{2n}} \text{sin.} \frac{r\sqrt{}}{n} + \gamma c^{\frac{-r}{2n}} \text{cos.} \frac{r\sqrt{3}}{2n}.$$

Iam aliud non superest quam vt determinentur quantitates constantes α, β et γ: id vero exinde petendum est, quod facto $r = 0$ fieri debeat $S = 1$, $dS = 0$, atque $ddS = 0$ hinc sequitur esse $\alpha + \gamma = 1$; deinde $\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2n} - \frac{\gamma}{2n} = 0$ atque $\frac{\alpha}{nn} - \frac{\beta\sqrt{3}}{2nn} - \frac{\gamma}{2nn} = 0$. Ex hisce aequationibus deducitur esse $\alpha = \frac{1}{3}$; $\beta = 0$ et $\gamma = \frac{2}{3}$, sicque fit

$$S = \frac{1}{3} c^{\frac{r}{n}} + \frac{2}{3} c^{\frac{-r}{2n}} \text{cosin.}\ \frac{r\sqrt{r}}{2n}.$$

Atque iste valor, terminis finitis simulque realibus expressus, potest substitui seriei in infinitum continuatae $1 + \frac{r^3}{1.2.3.n^3} + \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6.n^6} +$ etc. sit verbi gratia $\frac{r\sqrt{3}}{2n} =$ quadranti circuli cuius radium vnitas exprimit $= \pi =$ proxime $\frac{11}{7}$, fiet $S = \frac{1}{3} c^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$. Haec ad vrnam primam.

Simili plane modo determinatur valor seriei secundae quae pertinet ad vrnam secundam; iste quippe valor eadem exprimitur aequatione generali cum hoc solo discrimine quod coefficientes α, β et γ nunc alium acquirunt valorem, quandoquidem facto $r = 0$ fieri debet ista secunda series $= 0$ siue, si series indicetur per S', oportet sit $S' = 0$; tum $\frac{dS'}{dr} = \frac{1}{n}$ atque $\frac{ddS'}{dr^2} = 0$, vnde $\alpha + \gamma = 0$;

$\alpha +$

$\alpha + \frac{1}{2}\beta \sqrt{3} - \frac{1}{2}\gamma = 1$ et $\alpha - \frac{1}{2}\beta \sqrt{3} - \frac{1}{2}\gamma = 0$ atque ſic fit $\alpha = \frac{1}{3}$; $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\gamma = -\frac{2}{3}$; Igitur

$$S' = \tfrac{1}{3} e^{\frac{r}{n}} + \tfrac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{-r}{2n}} \text{ſin.} \tfrac{r\sqrt{3}}{2n} - \tfrac{1}{3} e^{\frac{-r}{2n}} \cos. \tfrac{r\sqrt{3}}{2n}.$$

Denique ſi ſummam ſeriei ad tertiam vrnam pertinentis indicemus per S'', reperiemus pauculis mutatis iisque, plane obuiis.

$$S'' = \tfrac{1}{3} e^{\frac{r}{n}} - \tfrac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{-r}{2n}} \text{ſin.} \tfrac{r\sqrt{3}}{2n} - \tfrac{2}{3} e^{\frac{-r}{2n}} \cos. \tfrac{r\sqrt{3}}{2n}.$$

§. 14, Quod ſi nunc in paragrapho 12. inventos modo valores loco ſerierum ſubſtituamus inveniemus numerum ſchedularum albarum pro ſingulis vrnis, nempe.

In vrna prima $= \frac{1}{3} n + \frac{2}{3} n. e^{\frac{-3r}{2n}}. \cos. \frac{r\sqrt{3}}{2n}$

In vrna ſecunda $= \frac{1}{3} n + \frac{n}{\sqrt{3}}. e^{\frac{-3r}{2n}}. \text{Sin.} \frac{r\sqrt{3}}{2n} - \frac{n}{3}. e^{\frac{-3r}{2n}}. \text{Coſ.} \frac{r\sqrt{3}}{2n}$.

In vrna tertia $= \frac{1}{3} n - \frac{n}{\sqrt{3}}. e^{\frac{-3r}{2n}}. \text{Sin.} \frac{r\sqrt{3}}{2n} - \frac{n}{3} e^{\frac{-3r}{2n}}. \text{Coſ.} \frac{r\sqrt{3}}{2n}$.

Deinde ſchedulae nigrae ſe habebunt in vrna ſecunda, tertia atque prima ſimulque ſchedulae rubrae in vrna tertia prima et ſecunda, quemadmodum ſchedulae albae ſe habent in vrna prima, ſecunda et tertia, ſic vt omnes et ſingulae ſchedularum diſtributiones in ſingulis vrnis, ſecundum regulas probabilitatis nunc ſint exacte determinatae pro hypotheſi

thesi quod numeri n et r ita sint magni, vt veluti pro infinitis haberi queant. Istaque omnia terminis finitis exprimuntur, quae antea non aliter quam per series indefinitas determinari poterant. Notetur porro velim, omnia et singula ex principiis artis coniectandi communi analysi fuisse deducta; etenim quae §. 13. dicta sunt non tam ob rem ipsam, quam in gratiam calculi commodioris maiorisque concinnitatis exposui, tum etiam vt notabili ostenderem exemplo insignem consensum inter methodos communes et nouam methodum, quem iam passim pro huiuscemodi quaestionibus adhibui solis calculis infinitesimalibus vsus: fateor equidem et nouam *istam methodum* suas habere spinas tricasque; at, ni fallor, tanto melius scopo nostro respondebit suaque praestantia simul ac nouitate erit commendabilis. Caeterum ipsa ista methodus requirit vt numeri n et r permagni sint, quod idem in postremis tribus paragraphis vsque suppofuimus.

§. 15. Sit itaque, retentis denominationibus caeteris, numerus schedularum albarum in vrna prima $= x$ et in vrna secunda $= y$; sic erit numerus iste pro vrna tertia $= n - x - y$; si nunc quantitates x, y, et r tanquam fluentes consideremus, erit $dx = \frac{-x}{n} dr + \frac{n-x-y}{n} dr$, vbi prius membrum debetur extractioni ex vrna prima, alterum transportationi ex vrna tertia in primam; vnde $dr = \frac{n\,dx}{n-2x-y}$; similiter erit $dy = -\frac{y\,dr}{n} + \frac{x\,dr}{n}$ vel

 dr

$dr = \frac{n\,dy}{x-y}$, vnde $\frac{dx}{n-2x-y} = \frac{dy}{x-y}$ vel $x\,dx - y\,dx = n\,dy - 2\,x\,dy - y\,dy$: haec aequatio paullo fiet ſimplicior ſi ponatur $x = \frac{1}{3}n + p$ et $y = \frac{1}{3}n - q$, ſic enim fit $2\,p\,dq - q\,dq = p\,dp + q\,dp$. Haec aequatio ob permixtionem indeterminatarum, cum nondum integrari poſſit, ponam $q = tp$ atque $dq = t\,dp + p\,dt$; ſic fiet, ſi calculus recte ponatur $\frac{dp}{p} = \frac{t-2}{t-tt-1}\,dt$, quae poſterior aequatio ita eſt integranda, vt ab initio ſit $x = n$ et $y = 0$, vel vt ſit $p = \frac{2}{3}n$ et $t = \frac{1}{2}$; integrata autem aequatione habebitur relatio inter p et t, indeque deducetur relatio inter x et y ita vt y per x determinari queat, quo demum facto recurrendum erit ad aequationem elementarem $dr = \frac{n\,dy}{x-y}$ eiusque integratio tentanda, vt *ſic habeatur* relatio inter r et x. At vero iſta methodus, quae prima ſe offert, fit nimium complexa atque plane inutilis; igitur aliam viam inire coactus rem ita ſum aggreſſus.

Supra obtinuimus $\frac{dp}{p} = \frac{t-2}{t-tt-1}\,dt$ vna cum hac altera aequatione $\frac{dr}{n} = \frac{dy}{x-y}$, quae factis congruenter ſubſtitutionibus, quas aſſumſimus, dat $\frac{dr}{n} = \frac{dt}{t-tt-1}$: vtraque aequatio iam integrari poteſt atque ſic determinari valor quantitatis p aeque ac valor quantitatis t per functiones quantitatis r; totum negotium commodiſſime ſic abſoluetur.

Pona-

Ponatur $t = s + \frac{1}{2}$ tuncque obtinebitur $\frac{dp}{p} = \frac{\frac{3}{2}\, ds}{ss + \frac{3}{4}} - \frac{s\,ds}{ss + \frac{3}{4}}$ ſimulque $\frac{dr}{n} = \frac{-ds}{ss + \frac{3}{4}}$; Hinc $\frac{dp}{p} = -\frac{3\,dr}{2n} - \frac{s\,ds}{ss + \frac{3}{4}}$, cuius integralis eſt log. $\frac{p}{\frac{2}{3}n} = -\frac{3r}{2n} - \frac{1}{2}$ log. $\frac{ss + \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}$ vel

$$p = \frac{2nc^{\frac{-3r}{2n}}}{3\sqrt{(1 + \frac{4}{3}ss)}}.$$

Porro aequatio $\frac{dr}{n} = \frac{-ds}{ss + \frac{3}{4}}$ dat $\frac{r}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ arc. tang. $\frac{-2s}{\sqrt{3}}$ ſiue $\frac{r}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ arc. ſecant. $\sqrt{1 + \frac{4}{3}ss}$, quae ſi invertatur, dat $\sqrt{(1 + \frac{4}{3}ss)} =$ ſecant. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$; ſubſtituatur iſte valor atque ſic habebitur

$$p = \frac{2nc^{\frac{-3r}{2n}}}{3 \text{ ſecant. arc. } \frac{r\sqrt{3}}{2n}} \text{ ſiue } p = \frac{2n \text{ coſ. arc. } \frac{r\sqrt{3}}{2n}}{3c^{\frac{3r}{2n}}}.$$

Cum vero fuerit $\frac{r}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ arc. tang. $-\frac{2s}{\sqrt{3}}$, erit $-\frac{2s}{\sqrt{3}} =$ tang. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$ ſiue $s = t - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ tang. arc $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$, vnde $t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ tang. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$ ſiue $t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \times \text{ſin.} \frac{r\sqrt{3}}{2n}}{2 \text{ coſ.} \frac{r\sqrt{3}}{2n}}$.

Quia denique posuimus supra $x = \frac{1}{3}n + p$ et $y = \frac{1}{3}n + q = \frac{1}{3}n - tp$, oportebit valores inuentos quantitatum p et t substituere, sicque inueniemus numeros quaesitos x et y, qui denotant numeros schedularum albarum in vrna prima atque secunda contentarum; qui ambo si a numero n subtrahantur habebitur numerus schedularum albarum in vrna tertia. His omnibus ita factis, obtinemus numerum schedularum albarum

$$\text{In vrna prima} = \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}n.c^{\frac{-3r}{2n}}.\,\text{Cos. arc.}\,\frac{r\sqrt{3}}{2n}$$

$$\text{In vrna secunda} = \frac{1}{3}n + \frac{n}{\sqrt{3}}.c^{\frac{-3r}{2n}}.\,\text{Sin. arc.}\,\frac{r\sqrt{3}}{2n} - \frac{n}{3}.c^{\frac{-3r}{2n}}.\,\text{Cos. arc.}\,\frac{r\sqrt{3}}{2n}.$$

$$\text{In vrna tertia} = \frac{1}{3}n - \frac{n}{\sqrt{3}}.c^{\frac{-3r}{2n}}.\,\text{Sin. arc.}\,\frac{r\sqrt{3}}{2n} - \frac{n}{3}.c^{\frac{-3r}{2n}}.\,\text{Cos. arc.}\,\frac{r\sqrt{3}}{2n}.$$

Atque istae formulae plane sunt eaedem cum iis quas §. 14. exposuimus, nec id tantum valore suo sed et ipsa expressione; notabilis mihi visus est consensus notam inter methodum meam alteramque principiis familiaribus superinstructam.

§. 16. Paucula superaddam de argumenti proprietatibus; et primo quidem statim apparet totum systema vergere in statum permanentem eumque asymptoton, quem demum post permutationes numero infinitas attingat; tum vero schedulae omnes singulis in vrnis aequis partibus sunt permixtae; nec

nec id prouidere difficile erat; verum modus quo continue fit ad statum permanentem accessus, mihi plane fuit improuisus; scilicet suspicabar fore vt numerus schedularum albarum in vrna prima indesinenter decresceret, in secunda et tertia vicissim incresceret; nunc autem video infinitas fieri in quauis vrna vltra citraque statum, qui permanens erit, transitiones variationesque motu vndulatorio continuo decrescente, diminui tandemque euanescere. Notari autem merentur formulae analyticae quibus huiuscemodi accessus recessusque eorundemque perpetuae diminutiones indicantur: accessus recessusque *naturam sequuntur sinuum* atque cosinuum eorumque diminutiones debentur communi factori exponentiali $e^{\frac{-3r}{4n}}$. Huiusmodi autem expressiones in variis quaestionibus physico-mechanicis, vel saltem similes, aliquoties me obtinuisse memini. Inquiramus nunc in Casus praecipuos.

§. 17. Considerabimus primo omnes illos Casus quibus Cos. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = 0$, id est, quibus $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$ est vel aequalis quadranti circuli, cuius radius vnitas est, vel triplo aut quintuplo aut septuplo etc. quadranti. Sit scilicet quadrans istius circuli $= q$ faciamusque $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = q$ vel $= 3q$ vel $= 5q$ vel $= 7q$ etc. adeoque successiue $\frac{r}{n} = \frac{2q}{\sqrt{3}}$ siue $= \frac{6q}{\sqrt{3}}$ siue $= \frac{10q}{\sqrt{3}}$ siue $\frac{14q}{\sqrt{3}}$ etc. In omnibus istis casibus, numero infinitis, fit Cos. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = 0$ et Sin. Arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = 1$

adeo-

adeoque numerus ſchedularum albarum in prima vrna $= \frac{1}{3}n$; verum in vrna ſecunda erit numerus iſte ſucceſſiue $= \frac{1}{3}n + \frac{n}{\sqrt{3}} c^{-q\sqrt{3}}$ vel $\frac{1}{3}n + \frac{n}{\sqrt{3}} c^{-3q\sqrt{3}}$ vel $\frac{1}{3}n + \frac{n}{\sqrt{3}} c^{-5q\sqrt{3}}$ vel $\frac{1}{3}n + \frac{n}{\sqrt{3}} c^{-7q\sqrt{3}}$ etc. Denique ſi omnes iſtas quantitates exponentiales accipiamus negatiue habebimus ſucceſſiue numeros ſchedularum albarum in vrna tertia. Sit, verbi gratia, $n = 3000$ ponamusque $q = \frac{11}{7}$ et $c = 2,718$, erit poſt primas 5443 permutationes numerus ſchedularum albarum in vrna prima $= 1000$, in vrna ſecunda $= 1146$ et in vrna tertia $= 854$: tum ſi 10886 nouae ſuperueniant permutationes, *conſimiles* numeri fient 1000, 1001, et 999. Igitur iam omnia ad ſtatum permanentem erunt proxime reducta. Exinde apparet, qui fiat vt ſtatus permanens non ſit, etiamſi numerus ſchedularum albarum in vrna prima fuerit ad trientem reductus; etenim cum prima vice id euenit, erit numerus ſchedularum nigrarum in eadem vrna prima $= 854$ et numerus ſchedularum rubrarum $= 1146$, igitur ſtatus permanens eſſe nequit.

§. 18. Quod ſi nunc ſcire cupiamus numerum permutationum r, poſt quem numerus ſchedularum albarum prima vice in ſecunda vrna fuerit ad trientem reductus, oportebit ambos terminos $\frac{n}{\sqrt{3}} . c^{\frac{-3r}{2n}}$. Sin. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} - \frac{n}{3} . c^{\frac{-3r}{2n}}$. Coſ. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$ facere $= 0$, haec

autem

autem conditio obtinetur cum ſit arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \frac{1}{3}q$ ſiue $\frac{r}{n} = \frac{2q}{3\sqrt{3}}$, qui numerus tertiam tantum partem efficit eius qui pro vrna prima requirebatur; eſt enim inter 1814 et 1815. Simili modo haec quaeſtio determinatur pro tertia vrna, vbi nunc erit $\frac{r}{n} = \frac{10q}{3\sqrt{3}}$ ſiue quinquies maior quam pro vrna ſecunda adeoque $r =$ proxime 9072.

Quoties autem numerus ſchedularum albarum ſit $= \frac{1}{3}n$, in quacunque vrna id contingat, tum ab iſto valore iterum recedit modo in vnam modo in alteram partem poſtmodumque iterum accedit hique receſſus alicubi maximi fiunt pro quauis periodo; poſt *primam tamen periodum* tantum non toti euaneſcunt.

§. 19. Denique inquiramus, quisnam futurus ſit ſecundum leges probabilitatum, pro quauis vrna minimus maximusue ſchedularum cuiusuis coloris numerus, qui vnquam praeſumi debeat et quotnam permutationes requirantur vt eo perueniatur. Incipiam a ſchedulis albis in vrna prima duo autem ſunt modi, quibus maxima iſta vel minima definiri poſſunt; alter in hoc poſitus eſt, vt differentiale numeri ſchedularum fiat $= 0$, alter vt numerus iſte in vrna prima fiat aequalis numero in vrna tertia, tunc enim extractio ex vrna prima fit aequalis transpoſitioni ex vrna tertia in primam vterque modus eodem recidit, quod ipſum formulas noſtras tanto magis confirmat. Sic intelligimus

fore

fore Cof. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ Sin. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$ vel tang. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = -\sqrt{3}$; quoties huic fatisfit conditioni, fatisfieri autem poteft modis infinitis, obtinetur minimum aliquod maximumue, primum autem erit inter minima minimum At tangens $-\sqrt{3}$ indicat arcum 120°, eft igitur $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \frac{4}{3}q$ fiue $\frac{r}{n} = \frac{8}{3\sqrt{3}}q$, hinc $r = 7257$; ergo poft 7257 permutationes numerus fchedularum albarum in vrna prima fit, quantum vnquam fieri poteft, minimus defcenditque a numero initiali 3000 ad 953, tumque iterum increfcit fed parum vltra 1000 rurfusque decrefcit fed vix infra 1000 defcendit: quoniam autem in his cafibus numeri fchedularum albarum in vrna prima et tertia iidem funt, habebimus *pariter* poft 7257 permutationes in vrna tertia 953 fchedulas albas adeoque in vrna fecunda 1094. Sic poft easdem 7257 permutationes erunt in vrna fecunda 953 fchedulae nigrae, in tertia 1094 et in prima rurfus 953; denique erunt fimul in vrna tertia 953 fchedulae rubrae, in prima 1094 et in fecunda 953; hoc modo fingulae fchedulae pro quavis vrna determinantur pro cafu quo fchedulae albae in vrna prima ad minimum fuerint reductae numerum.

§. 20. Sed et porro calculo noftro fubiiciamus, ad quem numerum maximum affurgere posfint fchedulae albae in vrna fecunda atque tertia *et* quot permutationes requirantur vt id eueniat. Patet

tet autem pro vrna secunda satisfaciendum esse huic aequationi Cos. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Sin. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$, siue tang. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \sqrt{3}$; hinc $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \frac{2}{3}q$ aut $\frac{r}{n} = \frac{4q}{3\sqrt{3}} = 1{,}210$; hinc $r = 3630$ tuncque fit numerus schedularum albarum in vrna secunda $= 1163$, qui proin numerus maximus est, ad quem schedulae albae in vrna secunda assurgere possunt idque obtinetur post 3630 permutationes eoque tempore vrna prima pariter continebit 1163 schedulas albas, tertia vero vrna nonnisi 674. Denique numerus schedularum albarum maximus fit in vrna tertia, quando ponitur $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = 2q$ siue $r = 10890$ atque tunc numerus *iste fit 1004 qui simul* valet pro vrna secunda.

Quae momenta praecipua pro schedulis albis allata sunt, haec sola transpositione vrnarum ad schedulas nigras rubrasque applicari poterunt. Tenue erat per se argumentum variis tamen, ni fallor, titulis vtile, potissimum autem scopo quem habui, accommodum.

MENSVRA SORTIS
AD FORTVITAM SVCCESSIONEM RERVM NATVRALITER CONTINGENTIVM APPLICATA.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Quicunque varias attentius examinauerit *tabulas* anthropologicas immenso labore congestas, facile, ex magno obseruationum numero, plures perspexerit naturae leges nec praeuisas nec exspectatas idemque dixerim de innumeris rebus aliis, si modo pari industria exploratae simulque pro diuerso rerum circumstantium aspectu ordinatae fuerint. Duo sunt, quae in huiusmodi disquisitionibus notanda veniunt: scilicet euentus fortuiti, quos sorti adscribimus, et leges ipsi sorti praescriptae ex magno euentuum numero diiudicandae; innumera cum sint argumenta, quae huc pertinent vnicum allegabo exemplum atque id ipsum seligam quod istis ansam dedit obseruatiunculis. Cum varias iterum inspicerem tabulas anthropologicas argumento instituti quod de proportione agit, qua nati in vtrumque diuiduntur sexum, prolem autem masculam praeualere nunc

nunc vno ore fatentur omnes; id phaenomeni vel mera contigit forte: quamuis sua natura aeque ad vtrumque sexum procliui vel aliqua erit in ipsa forte modificatio, qua procliuior redditur ad sexum masculinum quam ad alterum, plane vt sors in proiectione duarum alearum posita procliuior dicitur ad numerum septenarium quam ad senarium; istam vero ambiguitatem longe melius explicabit, qui gradum probabilitatis pro quouis euentu prius determinauerit; hunc vt in me susciperem laborem, non haesitaui; vtramque disquiram hypothesin si Deus vitam ac vires concesserit numerosque emergentes *ad tabulas quae* prostant applicabo. In praesentia rerum primam percurram hypothesin, qua natura ad vtriusque sexus formationem aeque facilis atque prona supponitur.

§. 2. Fuerit numerus partuum annuorum $= 2N$, quem sic parem facio vt idem esse possit numerus de vtroque sexu: quaeritur quanta sit probabilitas, vt numerus puerorum datum seu praescriptum obtineat valorem; sit numerus iste $= m$; indicatur autem probabilitas alicuius rei fractione cuius numerator eam habeat rationem ad denominatorem vt numerus casuum fauorabilium ad numerum casuum omnium, si aequali facilitate casus singuli contingant; hoc sensu maxima, quae haberi potest, probabilitas vnitate exprimitur eaque res certas, quae non possunt non contingere, indicat.

 Facile

Facile autem ex theoria combinationum colligitur, fore quaesitam probabilitatem =

$$\frac{2N.(2N-1).(2N-2)\ldots\ldots(2N-m+3).(2N-m+2).(2N-m+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(m-2).(m-1).m} \times \frac{1}{2^{2N}}$$

vbi tam in numeratore quam denominatore fractionis indefinitae tot sint factores accipiendi quot sunt vnitates in m. Si vero proponatur casus $m = 0$, quo scilicet singuli partus puellam dedisse finguntur, per se liquet fore tunc probabilitatem $= \frac{1}{2^{2N}}$ atque adeo longe minimam si vel mediocris fuerit annuus partuum numerus. Crescente numero m increscit probabilitas atque maxima fit in medio, *vbi* supponitur $m = N$ idemque adeo infantum vtriusque sexus numerus est; vltra medium probabilitas decrescit sic vt pro aequalibus a medio distantiis aequalis sit probabilitas, quod notum est ex natura vnciarum in binomio ad potentiam $2N$ eleuato, quas ipsa nostra formula paragraphi secundi sistit successiue si numerus m instar numerorum naturalium progrediatur.

§. 3. De casu, cuius modo mentionem fecimus, aequalitatis inter vtrumque sexum plura occurrunt notanda: faciamus igitur pro isto casu $m = N$ atque sic formula nostra generalis in praecedente paragrapho exposita talis erit

$$\frac{2N.(2N-1).(2N-2)\ldots\ldots(N+3).(N+2).(N+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(N-2).(N-1).(N)} \times \frac{1}{2^{2N}}.$$

Sic

Sic igitur pro paucioribus partubus maxima ista probabilitas facile determinatur; quo maior autem eorum est numerus tanto difficilius atque rarius continget vt sexu suo in duas diuidantur classes praecise aequales; verumtamen probabilitas applicata ad numerum partuum crescit crescente numero N, quod deinde demonstrabimus: hinc fiet vt inaequalitas inter vtrumque sexum, diuisa per numerum partuum, probabiliter decrescat, quod pariter dicendum est de omnibus obseruationibus, cuiuscunque sint generis, incerto passu procedentibus: omnes in hoc conueniunt Authores; minorem praesumendam esse *aberrationem ex pluribus* institutis obseruationibus quam ex paucioribus: at normam, secundum quam istae aberrationes, caeteris paribus diminuantur a repetitis obseruationibus, nemo adhuc quod sciam docuit; hanc inferius tradam.

§. 4. Formula, quam in praecedente paragrapho exposui, indefinita hoc laborat ineuitabili incommodo vt laborem requirat insuperabilem, si magnus fuerit partuum numerus (ascendit autem Parisiis atque Londini propemodum ad viginti millia) etiamsi tabulae logarithmorum in auxilium vocentur; at de huiusmodi exemplis plerumque sermo est eorumque potissimum curiosus simulque enormitate calculi absterritus viam quaesiui compendiariam, quam paullo curatius describam, quoniam in plurimis aliis argumentis conducibilis est.

Primum expressionem analyticam atque indefinitam paragraphi praecedentis in aliam transtuli formam concinniorem simulque instituto nostro magis accommodam, nempe hanc

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \ldots \ldots \frac{2N-5}{2N-4} \times \frac{2N-3}{2N-2} \times \frac{2N-1}{2N}.$$

vbi tot sunt ordine suo factores accipiendi quot sunt vnitates in N, id est, in numero partuum dimidiato. Praemissa hac transformatione rem porro ita sum aggressus.

§. 5. Ponatur, pro numero factorum N, productum ex omnibus factoribus $= q$ postéaque nouum superuenire putemus factorem, ponendo *scilicet* $N + 1$ loco numeri N; sic fiet nouum productum pro $(N + 1)$ factoribus $= \frac{2N+1}{2N+2} q = q - \frac{q}{2N+2}$; Quoties igitur numerus N vnitate augetur, toties productum q diminuitur quantitate $\frac{q}{2N+2}$: istud vero decrementum valde paruum est, quando numerus N permagnus assumitur; hinc erit proxime $-dq : dN = \frac{q}{2N+2} : 1$; vnde oritur $-\frac{dq}{q} = \frac{dN}{2N+2}$: Et hac aequatione differentiali, postquam integrata fuerit vti licebit ad determinandum valorem q pro dato numero N, si modo aliquot factores initiales in formula praecedentis paragraphi fuerint actu inter se multiplicati; attamen, maioris accurationis causa lubet alteram, veluti secundi ordinis, superaddere correctiunculam: igitur notetur valorem $\frac{dq}{q}$ deductum fuisse ex mutatione quae oritur si loco N pona-

ponatur $N + 1$; potuisset autem pari iure ex mutatione deduci quae fit cum loco N ponitur $N - 1$ atque tunc obtinetur aequatio differentialis paululum diuersa, nempe $\frac{-dq}{q} = \frac{dN}{2N - 1}$: hinc recte concluditur, accuratiorem fore aequationem differentialem si denominator medius accipiatur inter $2N + 2$ et $2N - 1$ siue aequalis dimidiae summae eorum, id est, $2N + \frac{1}{2}$: vtemur ergo aequatione differentiali accuratiori et supra expectationem satisfaciente

$$-\frac{dq}{q} = \frac{dN}{2N + \frac{1}{2}}.$$

Integratio istius aequationis ita est instituenda vt, *mediante quantitate aliqua* constante addenda, vnico satisfiat casui; quo plures autem habuerit factores initiales, eo accuratior erit formula pro tot factoribus consequentibus quot libuerit; ponamus igitur, quod posito numero factorum initialium $= f$, productum emergens sit $= A$; habebitur ab integratione praefatae formulae differentialis

$$\log. \frac{A}{q} = \frac{1}{2} \log. \frac{2N + \frac{1}{2}}{2f + \frac{1}{2}}, \text{ siue}$$

$$q = A \sqrt{\frac{4f + 1}{4N + 1}}.$$

§. 6. Praestantia praefatae methodi magis elucescet si exemplum assumatur cuius valor per se pateat.

pateat. Proponatur formula indefinita, praecedenti simillima, nempe

$$\tfrac{1}{2} \times \tfrac{2}{3} \times \tfrac{3}{4} \times \tfrac{4}{5} \ldots\ldots\ldots \frac{N-2}{N-1} \times \frac{N-1}{N} \times \frac{N}{N+1}.$$

cuius valor manifesto est $= \frac{1}{N+1}$: videamus autem quid noua methodus indicet; sit rursus productum ex omnibus factoribus $= q$; si vero nouus superueniat factor, erit productum $\frac{N+1}{N+2} q = q - \frac{q}{N+2}$: vnde nunc oritur $-dq : d\text{N} = \frac{q}{N+2} : 1$ siue $-\frac{dq}{q} = \frac{dN}{N+2}$: Quod si e contrario vltimus factor resecetur, fiet $-\frac{dq}{q} = \frac{dN}{N}$: ergo assumto rursus denominatore medio, faciemus $-\frac{dq}{q} = \frac{dN}{N+1}$, cuius integralis, retenta significatione literarum f et A antea adhibitarum, erit $\log. \frac{A}{q} = \log. \frac{N+1}{f+1}$ siue $q = \frac{f+1}{N+1} A$; at vero in isto exemplo est $A = \frac{1}{f+1}$; est igitur simpliciter atque generaliter $q = \frac{1}{N+1}$, sic vt methodus, in hoc quidem exemplo, exacte indicet quod res est. Plura alia hac de re adiici possent, si id instituti nostri ratio permitteret.

§. 7. Quicunque simplicem aequationem in fine paragraphi quinti expositam ad exempla qualiacunque applicare volet, aberrationem certe vix sensibilem deprehendet. Quo maiorem autem factorum initialium numerum, indicatum per f, actu multiplicauerit atque numerum A determinauerit, eo accuratius quaesitum productum q pro integro factorum numero N inueniet. Exemplum allegabo ipsi

ipsi methodo quam maxime inimicum; ponam simpliciter $f = 2$; sic erit $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ atque fiet $q = \frac{9}{8\sqrt{4N+1}}$: ponatur porro simpliciter $N = 6$ atque sic erit $q = \frac{9}{40}$. Est autem verum productum $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{10} \times \frac{11}{12} = \frac{231}{1024}$, quod ab altero vix differt; at multo accuratius respondebit formula nostra, si numero f maiori superinstruatur computus; ponam igitur $f = 12$ atque adeo $\sqrt{(4f+1)} = 7$; sic fiet productum ex duodecim factoribus initialibus siue $A = \frac{676039}{4194304}$; vnde $A\sqrt{(4f+1)} = \frac{4732273}{4194304} = 1,12826$; adeoque pro assumto numero $f = 12$, prodit $q = \frac{1,12826}{\sqrt{(4N+1)}}$: atque isto valore, qualiscunque fuerit *numerus N*, absque vllo plane sensibili errore vti licebit.

§. 8. Intelligitur ex formula generali §. 2. si maiusculus fuerit partuum annuorum numerus, probabilitatem fere nullam esse circa initium et finem atque maximam fieri circa medium etiamsi et tunc pro quouis casu speciali parua admodum sit: Nunc autem porro intelligitur hanc eandem probabilitatem decrescere crescente numero partuum et ita quidem vt sequatur quam proxime rationem inuersam subduplicatam prolis genitae; theorema istud calculos, qui prima fronte insuperabiles videbantur, insigniter subleuat: computus enim vnius exempli protinus indicat caetera omnia: Velim notetur insuper inquirendum fere vnice esse, quid forti tribui possit circa medium, vbi exigua est inter vtrumque sexum differentia, cum vix fieri possit vt inaequalitas certos transgrediatur limites, quod ipsa testatur experientia, si variationes, non inaequalitates, consideremus. Haec causa est, quod conveniat potius argumentum prosequi a medio versus extremitates quam vicissim.

§. 9. Descendamus iam ad exemplum; permagnum supponam partuum numerum, qualis quotannis esse solet Parisiis atque Londini; faciam $2N = 20000$ siue $N = 10000$: pro hoc exemplo quaeritur, in hypothesi naturam aequaliter in formationem vtriusque sexus esse procliuem, quanta sit probabilitas vt numerus puellorum *sit praecise* $= 10000$. Nemo profecto computum conabitur ad ductum formulae paragrapho quarto expositae, multoque minus ad formulam paragraphi tertii recurret; verum si formula vtamur in fine paragraphi septimi tradita, protinus inuenimus $q = 0,0056413$ siue $q = \frac{1}{177\frac{1}{4}}$. Tali probabilitate gaudet, cui aequa sorte res fuerit cum 176 collusoribus: paruula spes est, minorem tamen aestimabam ante institutum calculum. Si vero in ciuitate mediocri foecunditas ponatur centies minor, erit per paragraphum praecedentem, pro simili euentu expectatio decies maior atque adeo proxime $= \frac{10}{177\frac{1}{4}}$. Haec de aequali editorum partuum in vtrumque sexum diuisione.

§. 10. Permanere nunc putetur valor litterae N et omnem variationem cadere in valorem litterae m siue in numerum puellorum in progeneratione annua comprehensorum: animus scilicet est variationem probabilitatis inquirere, dum numerus m sensim sensimque, siue in vnam siue in alteram partem, recedit ab numero N. Igitur faciam successiue $m = N \pm 1$; $m = N \pm 2$; $m = N \pm 3$ ..... $m = N \pm \mu$, vbi μ indicat numerum quo puelli a numero N distant siue in excessu siue in defectu, quia in vtramque partem probabilitas aequaliter decrescit. Patet autem ex formulis §.§. 2 et 3 adhibitis, *probabilitatem* successiue fore $\frac{N}{N+1}q$; $\frac{N \times (N-1)}{(N+1) \times (N+2)}q$; $\frac{N \times (N-1) \times (N-2)}{(N+1) \times (N+2) \times (N+3)}q$ etc. vnde formula generalis quae probabilitatem exprimit, qua numerus puellorum fiat $= N \pm \mu$, nunc talis erit

$$\frac{N}{N+1} \times \frac{N-1}{N+2} \times \frac{N-2}{N+3} \times \ldots\ldots \times \frac{N-\mu+1}{N+\mu} \times q.$$

Valor autem litterae q, qua formula haec multiplicata est, adhuc est (vi §. 7.) $= \frac{1,12826}{\sqrt{(4N+1)}}$.

§. 11. Ecce iam tabellam ad praeceptum praecedentis paragraphi constructam vbi rursus ponitur $N = 10000$, in qua columna prima denotat valorem litterae μ, altera vero probabilitatem ipsi respondentem.

I.

I.	II.	I.	II.
1.	0, 9999 q	26.	0, 9341 q
2.	0, 9996 q	27.	0, 9291 q
3.	0, 9991 q	28.	0, 9239 q
4.	0, 9984 q	29.	0, 9185 q
5.	0, 9975 q	30.	0, 9131 q
6.	0, 9964 q	31.	0, 9076 q
7.	0, 9951 q	32	0, 9019 q
8.	0, 9936 q	33.	0, 8961 q
9.	0, 9919 q	34.	0, 8902 q
10.	0, 9900 q	35.	0, 8842 q
11.	0, 9879 q	36.	0, 8780 q
12.	0, 9856 q	37.	0, 8716 q
13.	0, 9831 q	38.	0, 8651 q
14.	0, 9804 q	39.	0, 8585 q
15.	0, 9775 q	40.	0, 8517 q
16.	0, 9744 q	41.	0, 8449 q
17.	0, 9711 q	42.	0, 8379 q
18.	0, 9677 q	43.	0, 8308 q
19.	0, 9641 q	44.	0, 8236 q
20.	0, 9604 q	45.	0, 8163 q
21.	0, 9565 q	46.	0, 8089 q
22.	0, 9524 q	47.	0, 8014 q
23.	0, 9481 q	48.	0, 7938 q
24.	0, 9436 q	49.	0, 7861 q
25.	0, 9389 q	50.	0, 7783 q

§. 12. Appoſui primam hanc tabellae portiunculam eo fine vt inde quaeſtionis minime inutilis vtilis, quam mente conceperam, solutionem deducere possem: quaeruntur scilicet ambo limites a medio aequidistantes hac lege, vt eadem sit probabilitas, numerum puerorum hosce limites esse transgressurum vel non transgressurum.

Solutio huius quaestionis requirit, vt indagetur quotnam termini tabellae ab initio versus finem sint addendi, vt duplum summae auctum quantitate q fiat $= \frac{1}{2}$: summa enim terminorum, vltra medium positorum, dat summam probabilitatum, vt numerus puerorum non transcendat limitem, eademque summa citra medium positorum exprimit summam probabilitatum vt numerus puellorum non descendat infra limitem oppositum, eapropter summa est duplicanda; denique huic duplae summae addenda est ipsa probabilitas q pro casu $\mu = 0$ siue pro aequalitate inter vtrumque sexum. Ad normam huius praecepti inuenitur distantia vtriusque limitis a medio siue $\mu = 47$ quam proxime: Etenim summa quadraginta septem terminorum est $= 43,6406\,q$, eius duplum $= 87,2812\,q$ cui si super addatur q oritur $88,2812\,q$: Inuenimus autem paragrapho nono $q = 0,0056413$, vnde tandem quantitas finalis prodit $0,4980$, quae paullo minor est quam $\frac{1}{2}$: Quod si vero assumatur $\mu = 48$, tunc eadem quantitas finalis fit $= 0,5070$ atque adeo maior quam $\frac{1}{2}$ interpolatio dat proxime $\mu = 47\frac{1}{4}$: distantia autem mutua limitum erit $2\,\mu = 94\frac{1}{2}$. Igitur tandem inter 20000 partus annuos aeque probabile erit, vt numerus masculorum non euagetur extra limites 9953 et 10047 quam vt illos limites transgrediatur, si modo sors vtrique sexui aeque faveat. Posterius tamen aliquantillum probabilius est ob fractiunculam neglectam.

§. 13. Simili modo problema nostrum soluetur pro quocunque alio numero N; verum quis nouum pro quouis exemplo ferat laborem? Datur compendium operis; dico enim numeros quaesitos μ quam proxime sequi rationem subduplicatam datorum numerorum N, quod quidem ex praemissis, si attentius fuerint examinata, facile colligitur, tantoque erit accuratius compendium *quanto maior* assumptus fuerit numerus partuum. *Ponatur numerus* partuum annuus in tota Gallia siue $2N = 600000$, adeoque $N = 300000$, qui numerus trigesies maior est praecedente; dico fore nunc $\mu = 47\frac{1}{4} \times \sqrt{30} = 258,8$ atque $2\mu = 517,6$. Sic igitur in hypothesi, quam commentamur, aequipollentiae sortis pro vtroque sexu, aequa erit certatio, siue contendas maius fore in Gallia sexus discrimen, siue minus.

Quod si vero pro vrbe mediocriter copiosa ponatur numerus partuum annuorum $= 200$, id est, centies minor quam qui in paragrapho praecedente fuit assumptus, fiet numerus μ decies minor siue $= \frac{47\frac{1}{4}}{10} = 4,725$, nec ambo limites magis quam 9,45 a se inuicem distabunt. Hinc intelligimus, esse

esse paullo probabilius vt differentia inter vtrumque sexum non excedat denarium quam vt excedat.

§. 14. Lubet nunc posterius istud exemplum directe computare, vt veritas compendii in praecedente paragrapho adhibiti elucescat; hunc in finem aliam tabellae portiunculam apponam pro $N = 100$ ad ductum formulae indefinitae paragrapho decimo descriptae, in qua sufficiet quinque considerasse terminos pro numeris naturalibus 1, 2, 3, 4 et 5, his alio fine superaddam probabilitates pro numeris 10, 15, 20, 25, 30, 35, et 40: prima columna rursus ordine suo singulos hos numeros indicat, *dum secunda columna* docet probabilitates respondentes: maximam vero probabilitatem pro casu perfectae aequalitatis inter vtrumque sexum, id est, pro $\mu = 0$, nunc indicabo per q'.

I.	II.	I.	II.
1.	$0,9901\, q'$	15.	$0,1057\, q'$
2.	$0,9610\, q'$	20.	$0,01819\, q'$
3.	$0,9143\, q'$	25.	$0,001864\, q'$
4.	$0,8528\, q'$	30.	$0,0001124\, q'$
5.	$0,7797\, q'$	35.	$0,000003924\, q'$
10.	$0,3691\, q'$	40.	$0,00000007774\, q'$

Est autem propemodum $q' = \frac{10}{177}$ (§. 9.) vel accuratius $q' = \frac{1,12826}{\sqrt{401}} = 0,05634$ vi paragraphi septimi atque hic valor in singulis numeris erit substituendus.

§. 15. Sumatur nunc ſumma quinque priorum terminorum et habebitur 4, 4979 q'; huius duplum $= 8, 9958\, q'$, cui addatur q' atque ſic obtinebitur 9, 9958 q' vel 0, 5631 et haec quidem quantitas maior eſt quam $\frac{1}{2}$; at ſi ſumantur quatuor priores termini erit ſumma eorum $= 3, 7182\, q'$; huius duplum $= 7, 4364\, q'$: ſi addatur q' habebitur nunc 8, 4364 q' vel 0, 4753 haec autem quantitas nunc minor eſt quam $\frac{1}{2}$; ergo regula noſtra compendiaria optime quadrat cum vero va ore: ſic itaque pro ducentis natis ſi fiat certatio, num ſexus differentia maior futura ſit quam decem vel non, dico poſterius eſſe probabilius et aequam demum fore certationem, ſi 5631 offerantur contra 4369: imo poterit audacter ducenties millena millia contra unum offerre, ſi alteruter ſexus infra 60 deſcenderit.

§. 16. Quae dicta ſunt de quaeſtione paragraphi duodecimi, qua limites pro aequiprobabilitate, ſiue valores μ ad datum numerum N, determinandi erant, eius ſunt indolis vt conuerti poſſint hinc, nouae quaeſtiones formantur, in quas analyſis dominetur: Sint, verbi gratia, duo Colluſores a'ea continuo inter ſe certantes, vter quouis jactu, prout alea ſiue numerum parem ſiue imparem attulerit, punctum vnum lucrifaciet, nec prius finita res ſit, quam cum alteruter alterum 94 punctis vicerit, quaeritur numerus iactuum poſt quem aeque

aeque probabile fit, vt certatio finita fit vel non finita: Solutionem indicat paragraphus duodecimus; erit nempe numerus iactuum = 20000 vel tantillo minor ob neglectam fractionem numero 94 adiiciendam. Si lucro 94 punctorum fubftituatur minus, veluti nouem aut decem punctorum, requirentur 200 iactus vi paragraphi decimi tertii, Nec video methodum magis directam, qua huiuscemodi quaeftiones folutionem admittere poffint.

§. 17. Paruula tabella paragraphi decimi quarti haud obfcure nobis indicat, qua lege probabilitates a medio verfus extrema decrefcant; praefertim exinde *apparet, omnem* probabilitatem in mediocri *diftantia* a medio tantum non totam euanefcere etenim, fi $\mu = 40$, fit probabilitas relatiua $= 0,0000000 7774\, q'$ et probabilitas abfoluta $= 0,000000004478$, quae fi vel omnibus probabilitatibus pro terminis infequentibus addatur absque omni fcrupulo negligi poteft.

Velim porro notetur harmonia, quae inter tabellas §.§. 11 et 14 intercedit, quandoquidem probabilitates in priori tabula pro numeris 10, 20, 30, 40 et 50 proxime iisdem coefficientibus numericis exprimuntur, qui in altera tabella pro numeris decies minoribus id eft, pro numeris 1, 2, 3, 4 et 5, quod quidem haud difficulter ex theoria noftra prouideri poterat. Quia vero numeri columnae fecundae in tabula paragraphi undecimi non

 admo-

admodum mutantur, sequitur inde fore etiam summam decies maiorem proxime, quandoquidem decies plures termini sunt accipiendi et cum e contrario q' est propemodum decies maior quam q, sequitur quod summa 10, 20, 30, 40 vel 50 terminorum sit proxime aequalis in tabula §. 11. summae 1, 2, 3, 4 vel 5 terminorum in tabella §. 14. postquam nimirum valores pro q et q' substituti fuerint.

§. 18. Huiusmodi obseruationes egregie vsu venire possunt; Ita intelligimus eandem esse propemodum probabilitatem absolutam, vt inter ducentos natos numerus puerorum non nisi ad 70 ascendat, quae est inter 20000 natos, vt *non nisi* ad 9700 perueniat: vtraque probabilitas *tam exigua est* vt superfluum sit calculos vltra hos fines extendere, in priori casu fit $\mu = 30$ in altero $\mu = 300$.

Vnicum est quod superaddam; formulam nempe dabo non indefinitam sed determinatam, quae non male admodum numeros vtriusque tabulae exprimit, si modo intra certos subsistamus limites; hanc formulam eodem fere modo inveni, quo vsus sum in paragrapho quinto ad detegendum quam proxime valorem q, qui probabilitatem pro perfecta aequalitate inter vtrumque sexum denotat. Sit generaliter dimidius omnium natorum numerus $= N$; sitque rursus numerus puerorum $= N \pm \mu$, dico fore propemodum probabilitatem huius casus $= \frac{Q}{c^{\frac{\mu\mu}{N}}}$

modo

modo numerus μ non sit multo maior quam $\sqrt{N}$: Est autem Q probabilitas pro casu aequalitatis inter vtrumque sexum et c est numerus cuius logarithmus hyperbolicus vnitas est, siue $c = 2, 718$.

§. 19. Vt vim huius simplicissimae formulae, vnico termino expressae, dignoscere liceat, recurram ad paruulam tabellam §. 14. in qua $N = 100$ et $q' = Q$, numerosque secundae columnae ad ductum istius formulae computabo: sic aberrationes immediate innotescent.

I.	II.	I.	II.
1.	0, 9901 q'	10.	0, 3679 q'
2.	0, 9608 q'	15.	0, 1054 q'
3.	0, 9141 q'	20.	0, 01832 q'
4.	0, 8522 q'	25.	0, 001931 q'
5.	0, 7789 q'	30.	0, 0001235 q'

Ex collatione apparet aberrationes vix esse sensibiles et vbi paullo sensibiliores fieri incipiunt relatiue, ibi probabilitates absolutas fere totas euanescere: Licebit vtique regula compendiaria vti quamdiu numerus μ non excedit numerum $3\sqrt{N}$.

Eadem librabimus lance formulam pro alio et quidem longe maiore valore literae N: Sit iterum $N = 10000$ vt diuersos casus conferre possimus cum tabula paragrapho undecimo exhibita et directe computata; sic erit valor Q idem quod in tabula indicatur litera q; ponam autem pro μ successiue

 nume-

numeros 10, 20, 30, 40, et 50: his positis inueniuntur probabilitates respondentes 0,9901 q; 0,9608 q; 0,9141 q; 0 8522 q et 0,7889 q: ipsa vero tabula paragraphi undecimi dat 0,9900 q; 0,9604 q; 0,9131 q; 0,8517 q; et 0,7783 q: qui profecto numeri tantum non ad amussim inter se conueniunt.

§. 20 Perspecta praestantia regulae vnicum superaddam exemplum, quo appareat quemadmodum vbique calculus institui debeat pro numeris qualibuscunque.

In egregio opere viri de hisce rebus longe meritissimi, *Ioh. Petri Süsmilch*, editione tertia parte secunda plures annexae sunt tabulae, *in quibus* pag. 17. videmus, quod in Prouincia Selandica a. 1758 natae fuerint 3533 filiolae et 3805 puelli; vnde numerus natorum $= 2\,N = 7338$ atque $N = 3669$: quia vero numerus puellorum erat 3805, habebitur $\mu = 136$; hinc $\frac{\mu\mu}{N} = 5\,\frac{151}{3669} = 5{,}04$: ergo probabilitas, qua numerus puellorum sit praecise $= 3805$, in hoc exemplo indicatur formula

$$\frac{Q}{c^{5,04}} = 0{,}0006628\,Q,$$

isteque valor tanto accuratior est, quod numerus μ parum vltra numerum $2\sqrt{N}$ ascendit igitur probabilitas pro casu aequalitatis inter vtrumque sexum est ad probabilitatem qua numerus puerorum istam aequalitatem praecise superat numero 136 vt 10000000 ad 0,0006628; probabilitas vero absoluta pro posteriori casu habetur si pro Q

vel

vel q valor paragrapho feptimo definitus fubftituatur nempe 0, 009313; hoc modo ifta probabilitas abfoluta fit = 0, 000006173; dico autem, quod in hoc parvulo valore incerti effe poteft, id folum duas figuras numericas vltimas fpectare. Sic igitur videmus poffe pro omni cafu probabilitatem abfolutam determinari absque vt per cafus intermedios, procedamus atque hoc demum eft quod potiffimum intendebam, cum hafce difquifitiones fusciperem.

§. 21. Quae dicta funt adhucdum pure funt analytica, quandoquidem procreationi puellorum puellarumue fubftitui potuiffet extractio fchedularum *fiue nigrarum fiue albarum* ex vrna fi modo fchedula in vrnam reponatur priusquam noua fiat extractio; tum, fi numero aequali fchedulae de vtroque colore in vrnam repofitae fuerint, habebimus, quod nobis res fuit; Quod fi vero fchedulas nigras numero praevalere ponamus, incidimus in alteram hypothefin, qua ponitur naturam magis vergere ad fexum formandum mafculinum quam muliebrem. Alterum iftud argumentum, quod prius ceu fimplicem in fe continet cafum, non poteft non nouos obiicere labores mihi nondum exploratos: quicquid id fit negotii proximo fufcipiam otio.

CONSIDERATIONES
DE TRAIECTORIIS ORTHOGONALIBVS.

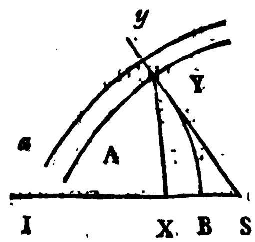
Auctore

L. EVLERO.

I.

Problema traiectoriarum orthogonalium, quod olim Geometrarum sagacitatem diu multumque exercuit, ita se habebat

vt propositis infinitis lineis AY, ay *communi quadam lege contentis, quaerantur aliae lineae* BYy *illas normaliter traiicientes*



ad quod soluendum sequentia momenta perpendi oportet.

1°. Cum lineae secandae communi quadam aequatione contineantur, haec aequatio praeter binas coordinatas IX $= x$ et XY $= y$, parametrum inuoluet p, quae pro eadem curua AY eundem valorem retineat, valore autem mutato reliquas curuas exhibeat.

2°. Hinc ista aequatio differentiata parametrum p quoque variabilem sumendo huiusmodi formam induet $L\,dy = M\,dx + N\,dp$; vnde pro eadem curua AY, AY, ob $dp = 0$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{M}{L}$; ideoque ducta ad eam recta normali YS fiet subnormalis $XS = \frac{My}{L}$.

3°. Verum haec eadem subnormalis XS pro curua secante BY debet esse subtangens, vnde retentis pro hac curua iisdem coordinatis $IX = x$, et $XY = y$, necesse est sit eius subtangens $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{-My}{L}$ ideoque $L\,dx + M\,dy = 0$.

4°. Pro lineis ergo secandis proposita aequatione inter coordinatas x, y et parametrum variabilem p, quae differentiata praebeat $L\,dy = M\,dx + N\,dp$, pro curuis secantibus haec habebitur aequatio differentialis $L\,dx + M\,dy = 0$.

II.

Totum ergo negotium huc est reductum, vt data huiusmodi aequatione differentiali $L\,dy = M\,dx + N\,dp$, methodus inueniatur hanc aequationem $L\,dx + M\,dy = 0$ integrandi, in quo quidem nulla foret difficultas si quantitates L et M solas binas coordinatas x et y implicarent exclusa parametro p, quia tum in ea duae tantum occurrent variabiles x et y, et huiusmodi aequationum integratio merito hic tanquam concessa spectatur. Verum si quantitates L et M insuper parametrum p inuoluant, ita vt aequatio $L\,dx + M\,dy = 0$ tres contineat quantitates variabiles x, y et p, eius integrationem ne suscipere quidem licet, nisi simul cum altera aequatione data $L\,dy = M\,dx + N\,dp$ coniungatur, indeque

deque vna trium variabilium penitus extrudatur, vt aequatio differentialis inter duas tantum variabiles obtineatur. Quod nisi efficere licuerit, vix quicquam circa naturam traiectoriarum orthogonalium definiri poterit, quare quoties haec difficultas occurrit, problema hoc merito inter difficillima refertur; tantumque abest vt hoc problema etiamsi olim summo studio sit tractatum, pro confecto sit habendum, vt potius etiamnunc maxima attentione dignum sit iudicandum.

III.

Cum igitur totum negotium eo redeat, vt pro traiectoriis eiusmodi aequatio differentialis eliciatur, quae duas tantum quantitates variabiles contineat, praecipuos percurramus casus, quibus hunc scopum assequi licet.

1°. Ac primo quidem si aequatio pro curuis secandis ita exhiberi queat, vt parameter p per coordinatas x et y absolute definiatur, seu functioni cuipiam ipsarum x et y aequetur, haec aequatio differentiata huiusmodi dabit formam $dp = P\,dx + Q\,dy$, in qua P et Q sunt functiones ipsarum x et y tantum quae cum forma $L\,dy = M\,dx + N\,dp$ comparata praebet $L = Q$, $M = -P$ et $N = 1$. Quare pro traiectoriis haec habebitur aequatio: $Q\,dx - P\,dy = 0$ duas tantum variabiles x et y inuoluens, cuius adeo integratio pro concessa haberi potest.

2°.

2°. Si aequatio pro curuis fecandis ita exhiberi queat, vt applicata y aequetur functioni cuipiam ipsarum x et p, ex eiusque differentiatione prodeat $dy = Pdx + Rdp$, ita vt P et R sint functiones ipsarum x et p tantum, tum ob $L = 1$, $M = P$ et $N = R$, pro traiectoriis habebitur aequatio $dx + Pdy = 0$, quae ob $dy = Pdx + Rdp$ abit in hanc formam: $(1 + PP)dx + PRdp = 0$, duas tantum variabiles p et x implicantem.

3°. Si aequatio pro curuis fecandis ita exhibeatur, vt abscissa x aequetur functioni cuipiam ipsarum y et p ex cuius differentiatione prodeat $dx = Qdy + Rdp$, vbi Q et R sint functiones ipsarum y et p tantum tum ob $L = Q$, $M = 1$ et $N = -R$, natura traiectoriarum exprimetur hac aequatione $Qdx + dy = 0$, quae ob $dx = Qdy + Rdp$ transformatur in hanc $(1 + QQ)dy + QRdp = 0$ inter y et p tantum.

IV.

Quoties ergo vel parameter p per ambas coordinatas x et y vel altera coordinatarum per alteram et parametrum definitur, inuentio traiectoriarum ad aequationem eiusmodi differentialem reducitur in qua duae tantum insunt quantitates variabiles, cuius propterea resolutio tanquam concessa poterit spectari, etiamsi forte nulla etiamnum pateat via negotium expediendi. Hoc autem intelligendum est si illae expressiones fuerint explicitae, siue sint algebraicae siue transcendentes, sin autem tantum per formulas integrales dentur, in quibus altera variabilium pro constante habeatur, tum aequationes inventae nullum praestant vsum, nisi forte peculiari artificio a formula integrali liberari queant. Veluti si pro curuis secandis huiusmodi habeatur aequatio $y = \int V dx$, vbi V sit functio ipsarum x et p, in hac autem integratione parameter p vt constans spectetur: tum enim pro valore ipsius $dy = P dx + R dp$, habetur quidem $P = V$, sed quantitas R noua forma integrali implicatur dum sit $R = \int dx (\frac{dV}{dp})$, in qua integratione iterum sola x variabilis assumitur. Quare cum aequatio pro traiectoriis futura sit $(1 + VV) dx + V dp \int dx (\frac{dV}{dp}) = 0$, ob hanc formulam integralem minime patet, quomodo eius resolutionem instituí conueniat.

V.

Quo haec difficultas clarius appareat casum singularem euoluam, quo aequationem pro traiectoriis exhibere licet et qui iam olim methodo perquam ingeniosa fuit erutus. Quaeritur scilicet, cuiusmodi functio ipsarum x et p debeat esse quantitas V, vt cum pro curuis secandis sit $y = \int V dx$, aequatio pro traiectoriis $(1 + VV) dx + V dp \int dx (\frac{dV}{dp}) = 0$, per certam quantitatem multiplicata integrabilis euadat.

dat. Sit iste multiplicator $\frac{\Pi}{V}$, existente Π functione ipsius p tantum, vt habeatur.

$$\frac{\Pi dx(1+VV)}{V} + dp\int \Pi dx\left(\frac{dV}{dp}\right) = 0$$

quoniam enim Π quantitatem x non inuoluit, erit vtique

$$\Pi dp\int dx\left(\frac{dV}{dp}\right) = dp\int \Pi dx\left(\frac{dV}{dp}\right).$$

Iam statuatur huius formae integrale $= \int \frac{\Pi dx(1+VV)}{V}$ vt pro traiectoriis habeatur haec aequatio.

$$\int \frac{\Pi dx(1+VV)}{V} = C$$

et cum eius differentiale ex variabilitate vtriusque x et p natum fiat:

$$\frac{\Pi dx(1+VV)}{V} + dp\int dx\left(\frac{1}{dp} d\frac{\Pi(1+VV)}{V}\right) = 0$$

Quare statui oportet:

$$\int \Pi dx\left(\frac{dV}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{1}{dp} d.\frac{\Pi(1+VV)}{V}\right)$$

seu $\Pi\left(\frac{dV}{dp}\right) = \left(\frac{1}{dp} d.\frac{\Pi(1+VV)}{V}\right)$. Cum nunc in his differentialibus sola p vt variabilis, x vero vt constans spectetur facta euolutione prodit:

$$\Pi dV = \frac{\Pi dV(VV-1)}{VV} + \frac{d\Pi(1+VV)}{V} \text{ seu}$$

$$\frac{\Pi dV}{VV} = \frac{d\Pi(1+VV)}{V}, \text{ ideoque } \frac{d\Pi}{\Pi} = \frac{dV}{V(1+VV)} = \frac{dV}{V} - \frac{VdV}{1+VV}$$

vnde integrando elicitur $\Pi = \frac{VX}{\sqrt{(1+VV)}}$, loco constantis indroducta X functione ipsius x tantum. Hinc ergo fit $V = \frac{\Pi}{\sqrt{(XX-\Pi\Pi)}}$

VI.

En ergo casum satis elegantem simulque non parum late patentem, quo traiectorias orthogonales exhibere licet etiamsi aequatio pro curuis secandis sit $y = \int \frac{\Pi\, dx}{\surd(XX - \Pi\Pi)}$ vbi X denotat functionem quamcunque abscissae x, atque Π functionem parametri p quamcunque, ita vt forte haec formula integralis nullo modo euolutionem admittat. Pro traiectoriis enim, ob $1 + VV = \frac{XX}{XX - \Pi\Pi}$, habebitur ista aequatio $\int \frac{XX\, dx}{\surd(XX - \Pi\Pi)} = C$. quae pro diuersis valoribus constantis C infinitas praebet curuas, quae omnes normaliter curuas datas traiicient. Pro iis quidem aequatio inter coordinatas x et y eliceretur, si ope aequationis $y = \int \frac{\Pi\, dx}{\surd(XX - \Pi\Pi)}$, parameter p eiusue functio Π eliminari posset verum ad constructionem aequatio inuenta iam maxime est accommodata. Pro quauis enim parametro, seu quouis valore litterae Π super axe describatur curua, cuius applicata $= \frac{XX}{\surd(XX - \Pi\Pi)}$, in eaque abscindatur area datae areae aequalis, cuius abcissa si sit $= x$, applicata traiectoriae erit $y = \int \frac{\Pi\, dx}{\surd(XX - \Pi\Pi)}$: vel sufficit notasse has duas aequationes:

$$y = \int \frac{\Pi\, dx}{\surd(XX - \Pi\Pi)} \quad \text{et} \quad C = \int \frac{XX\, dx}{\surd(XX - \Pi\Pi)}$$

vbi notetur C designare parametrum traiectoriarum.

VII.

Verum his quae iam olim copiosissime sunt pertractata, diutius hic immorandum non censeo; sed potius alias considerationes, ad quas me haec quaestio perduxit, in medium afferam. Ac primo quidem, quod per se est perspicuum obseruo lineas secandas et traiectorias inter se reciprocari; atque quaestionem circa duo eiusmodi systemata linearum versari quae ad eundem axem descripta, se mutuo vbique ad angulos rectos intersecent. Vtriusque autem systematis natura exprimitur aequatione inter binas coordinatas x et y et parametrum, cuius variabilitas infinitas lineas suppeditat. Pro altero ergo *systemate sit parameter* $=p$, pro altero vero $=q$; vnde duas concipi oportet aequationes, alteram *inter* x, y et p, alteram vero inter x, y et q; inter quas quaenam intercedere debeat relatio, vt propositae conditioni satisfiat, hic accuratius sum inuestigaturus. Supra autem vidimus, si pro altero systemate habeatur huiusmodi aequatio differentialis $Ldp+Mdx+Ndy=0$, tum naturam alterius hac aequatione $Ndx-Mdy=0$ expressum iri hicque eius parametrum q vt constantem spectari.

VIII.

Quia nunc aequatio $Ndx-Mdy=0$ duas tantum quantitates variabiles x et y continere intelligitur, et huius systematis parameter q in constante per integrationem accedente demum inuolui-

 tur,

Iam quaecunque fuerint P et Q functiones ipsarum p et q multiplicator semper inueniri poterit hanc formulam ambiguam $Pdp \mp Qdq\sqrt{-1}$ integrabilem reddens: sit ergo M iste multiplicator et ponatur $\int M(Pdp \mp Qdq\sqrt{-1}) = T \pm V\sqrt{-1}$; atque pro $R \pm S\sqrt{-1}$ assumi oportet functionem quamcunque ipsius $T \pm V\sqrt{-1}$ in M ductam, vnde facta integratione prodibit

$$x+y\sqrt{-1} = \text{funct.}\,(T+V\sqrt{-1}) \text{ et } x-y\sqrt{-1} = \text{funct.}\,(T-V\sqrt{-1})$$

hincque colligimus has formas integrales:

$$x = \tfrac{1}{2}\Gamma:(T+V\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma:(T-V\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(T+V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(T-V\sqrt{-1})$$

$$y = \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(T+V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(T-V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2}\Delta:(T+V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2}\Delta:(T-V\sqrt{-1})$$

quae semper ad realitatem reuocantur, quaecunque functiones his signis Γ et Δ denotentur.

XI.

Hic quidem litterae T et V denotant functiones binarum parametrorum p et q sed minime arbitrarias, definiuntur enim ex formula differentiali $Pdp \mp Qdq\sqrt{-1}$, vbi P et Q necessario sunt quantitates reales. Verumtamen sine hac conditione indoles illarum quantitatum T et V erui potest, considerando quod esse debeat $\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right) = 0$.

Cum

Cum enim inueneriмus:

$$x+y\sqrt{-1}=\Sigma:(T+V\sqrt{-1}),\ \text{et}\ x-y\sqrt{-1}=\Theta:(T-V\sqrt{-1})$$

erit differentiando:

$$\text{I.}\quad \left(\frac{dx}{dp}\right)+\left(\frac{dy}{dp}\right)\sqrt{-1}=\left(\left(\frac{dT}{dp}\right)+\left(\frac{dV}{dp}\right)\sqrt{-1}\right)\Sigma':(T+V\sqrt{-1})$$

$$\text{II.}\quad \left(\frac{dx}{dq}\right)+\left(\frac{dy}{dq}\right)\sqrt{-1}=\left(\left(\frac{dT}{dq}\right)+\left(\frac{dV}{dq}\right)\sqrt{-1}\right)\Sigma':(T+V\sqrt{-1})$$

$$\text{III.}\quad \left(\frac{dx}{dp}\right)-\left(\frac{dy}{dp}\right)\sqrt{-1}=\left(\left(\frac{dT}{dp}\right)-\left(\frac{dV}{dp}\right)\sqrt{-1}\right)\Theta':(T-V\sqrt{-1})$$

$$\text{IV.}\quad \left(\frac{dx}{dq}\right)-\left(\frac{dy}{dq}\right)\sqrt{-1}=\left(\left(\frac{dT}{dq}\right)-\left(\frac{dV}{dq}\right)\sqrt{-1}\right)\Theta':(T-V\sqrt{-1})$$

colligantur hinc producta I x IV et III x II in vnam summam ac reperietur:

$$2\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dx}{dq}\right)+2\left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right)=2\left(\left(\frac{dT}{dp}\right)\left(\frac{dT}{dq}\right)+\left(\frac{dV}{dp}\right)\left(\frac{dV}{dq}\right)\right)$$
$$\Sigma':(T+V\sqrt{-1}).\,\Theta':(T-V\sqrt{-1})$$

ideoque functiones T et V ita sunt comparatae; vt sit

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)\left(\frac{dT}{dq}\right)+\left(\frac{dV}{dp}\right)\left(\frac{dV}{dq}\right)=0.$$

XII.

Hinc ergo intelligimus pro T et V eiusmodi functiones ipsarum p et q sumi debere, quae iam ipsae idoneos valores pro coordinatis x et y praebeant. Quare inuentis iam duobus valoribus bina linearum se mutuo orthogonaliter secantium systemata exhibentibus; $x=t$ et $y=u$ existentibus t et u eiusmodi functionibus binarum parametrorum p et q vt sit $\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right)+\left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right)=0$ hinc facillime infinita alia eiusmodi systematum paria deriuan-

deriuantur, quae binis sequentibus aequationibus continentur

$$x = \tfrac{1}{2}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma:(t-u\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(t+u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(t-u\sqrt{-1})$$

$$y = \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t-u\sqrt{1}) + \tfrac{1}{2}\Delta:(t+u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Delta:(t-u\sqrt{-1})$$

quam formam magis complicatam ideo elegi, vt imaginaria singulis functionibus euoluendis sponte se destruant.

XIII.

Hae formulae eo magis ad praxin *sunt* accommodatae, quod eadem operatione infinitae *solutiones* obtineri queant. Prodeant enim pro Γ variis functionibus determinatis sumendis ex forma $\frac{1}{2}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\Gamma:(t-u\sqrt{-1})$ hi valores $T; T'; T''; T'''$ etc. ex hac vero $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t-u\sqrt{-1})$ hi V, V', V'', V''' etc. atque valores quaestioni satisfacientes erunt sequentes

$$x = \alpha T + \beta T' + \gamma T'' + \delta T''' - \varepsilon V - \zeta V' - \eta V'' - \theta V'''$$

$$y = \alpha V + \beta V' + \gamma V'' + \delta V''' + \varepsilon T + \zeta T' + \eta T'' + \theta T'''$$

vbi litterae $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta$ denotant coefficientes quoscunque. Probe autem notandum est valores homologos V, V, item T', V' etc ex iisdem functionibus Γ: simulque omnes ex iisdem litteris t et u esse formandas. Neque enim hinc in genere concludere

dere licet si satisfaciant valores $x = T$, $y = V$, tum vero etiam alii quicunque $x = R$, $y = S$ inde quoque hos $x = \alpha T + \beta R$ et $y = \alpha V + \beta S$ esse satisfacturos; hoc enim non valet nisi functiones R et S ex iisdem litteris t et u sint natae atque functiones T et V. Hinc probe cauendum est, ne superioribus formis generalibus plus tribuatur, quam fas est.

XIV.

Valores simpliciores litterarum T et V ex iam inuentis quantitatibus idoneis t et u formandi, ex potestatibus loco functionis Γ substitutis nascuntur *atque ita se habebunt:*

$$\left.\begin{array}{l} T = t \\ V = u \end{array}\right| \begin{array}{l} T = tt - uu \\ V = 2tu \end{array} \left| \begin{array}{l} T = t^3 - 3tuu \\ V = 3ttu - u^3 \end{array} \right| \begin{array}{l} T = t^4 - 6ttuu + u^4 \\ V = 4t^3u - 4tu^3 \end{array} \Big| \text{ etc.}$$

ex potestatibus vero negatiuis oriuntur:

$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{t}{tt+uu} \\ V = \frac{u}{tt+uu} \end{array}\right| \begin{array}{l} T = \frac{tt-uu}{(tt+uu)^2} \\ V = \frac{2tu}{(tt+uu)^2} \end{array} \left| \begin{array}{l} T = \frac{t^3-3tuu}{(tt+uu)^3} \\ V = \frac{3ttu-u^3}{(tt+uu)^3} \end{array} \right| \begin{array}{l} T = \frac{t^4-6ttuu+u^4}{(tt+uu)^4} \\ V = \frac{4t^3u-4tu^3}{(tt+uu)^4} \end{array}$$

vbi obseruare licet: si ponatur $t = v \operatorname{cos}. \Phi$ et $u = v \sin. \Phi$ tum omnes hos valores in istis formulis simplicibus contineri

$$T = v^n \operatorname{cos}. n\Phi \text{ et } V = v^n \sin \Phi$$

Totum ergo negotium huc redit vt pro t et u eiusmodi idoneae functiones ipsarum p et q obtineantur, vt fiat

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right) + \left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right) = 0.$$

XV.

XV.

Seu quod eodem redit sumtis pro P et Q functionibus quibuscunque ipsarum p et q, consideretur formula differentialis $P\,dp + Q\,dq\,\sqrt{-1}$, et quaeratur multiplicator eam reddens integrabilem tum integrale ex parte reali et imaginaria constans comparetur cum formula $t + u\sqrt{-1}$, indeque vtriusque litterae t et u valor idoneus elicietur. Vnde primum obseruo si P sit functio solius p et Q solius q, prodire $t = \int P\,dp$ et $u = \int Q\,dq$. Quoniam autem hae formae $\int P\,dp$ et $\int Q\,dq$ aeque pro parametris amborum systematum linearum haberi possunt atque ipsae quantitates p et q, idem est ac si hinc statuamus $t = p$ et $u = q$, neque etiam latius patere, censendi est haec positio $t = \alpha p + \beta$ et $u = \gamma q + \delta$. Interim tamen si sumamus $P = 1$ et $Q = 1$ formula $dp + dq\sqrt{-1}$ non solum dat $t = p$ et $u = q$, sed quia illa formula per $m + n\sqrt{-1}$ multiplicata manet integrabilis, et integrale est $mp - nq + np\sqrt{-1} + mq\sqrt{-1}$, inde etiam hi obtinentur valores:

$$t = mp - nq \text{ et } u = np + mq.$$

qui vtique latius patere videntur, verumtamen, quia valores inde natos T, T′, T″ et V, V′, V″ etc. combinare licet, non aliae lineae inde nascuntur, atque ex simplicibus valoribus $t = p$ et $u = q$.

XVI.

XVI.

Statuamus ergo $t = p$ et $u = q$, et percurramus simpliciora linearum systemata se mutuo ad angulos rectos secantium: ac primo quidem occurrunt hae formae:

$$x = \alpha p - \varepsilon q \text{ et } y = \alpha q + \varepsilon p$$

vnde eliminando primo q tum vero p ambo linearum systemata his aequationibus continebuntur:

$$\alpha x + \varepsilon y = (\alpha\alpha + \varepsilon\varepsilon)p \text{ et } \alpha y - \varepsilon x = (\alpha\alpha + \varepsilon\varepsilon)q$$

vtrumque continens infinitas lineas rectas inter se parallelas quarum *quaelibet* rectas alterius systematis *normaliter secat* qui sine dubio casus est simplicissimus.

XVII.

Sumatur secundo $T = tt - uu$ et $V = 2tu$, et quia binis terminis iungendis lineae tantum ad alium axem transferuntur statuamus simpliciter $x = pp - qq$ et $y = 2pq$; vnde cum sit $\sqrt{(xx + yy)} = pp + qq$, elidendo alternatim q et p, pro binis linearum systematibus adipiscimur has aequationes

$$\sqrt{(xx + yy)} + x = 2pp \text{ et } \sqrt{(xx + yy)} - x = 2qq.$$

Quare si loco $2pp$ et $2qq$ simpliciter scribamus p et q hae aequationes ita se habebunt:

$$yy = pp - 2px \text{ et } yy = qq + 2qx.$$

Vtraque aequatio infinitas continet parabolas ſuper communi axe ex eodem foco deſcriptas, dum alterius ſyſtematis parabolae dextrorſum, alterius vero ſiniſtrorſum excurrunt; quae eſt pulcerrima parabolarum proprietas, ſine dubio iam olim obſeruata. Praeterea obſeruo etiamſi praecedentes valores $T = p$ et $V = q$ cum his combinentur, tamen easdem parabolas eſſe prodituras.

XVIII.

Statuamus nunc $T = t^3 - 3tuu$ et $V = 3ttu - u^3$, formemusque has aequationes:

$$x = p^3 - 3pqq \quad \text{et} \quad y = 3ppq - q^3$$

quarum haec dat $p = \sqrt{\frac{y + q^3}{3q}}$, qui valor in prima ſubſtitutus praebet: $x = \frac{y - 8q^3}{3q} \sqrt{\frac{y + q^3}{3q}}$, et ſumtis quadratis:

$$27q^3 xx = y^3 - 15q\, yy + 48q^6 y + 64q^9$$

ſcribamus q et p loco q^3 et p^3, et aequationes pro ambobus linearum ſyſtematibus erunt:

$$27qxx = y^3 - 15qyy + 48qqy - 64q^3$$

$$27pyy = -x^3 + 15pxx - 48ppx + 64p^3$$

quae autem ad proprietates agnoſcendas commodius ita repraeſentantur:

$$x = \frac{y - 8q}{3} \sqrt{\frac{y + q}{3q}} \quad \text{et} \quad y = \frac{x + 8p}{3} \sqrt{\frac{p - x}{3p}}.$$

quae

quae aequationes dant lineas tertii ordinis, quae pro vtroque fyftemate funt eiusdem naturae, dum coordinatae tantum permutantur.

XIX.

Confideremus etiam functiones ex poteftatibus negatiuis natas fitque $T = \frac{t}{tt + uu}$ et $V = \frac{u}{tt + uu}$ atque ob $t = p$ et $u = q$, habebimus:

$$x = \frac{p}{pp + qq} \quad \text{et} \quad y = \frac{q}{pp + qq}.$$

Hinc fit $xx + yy = \frac{1}{pp + qq}$, ideoque pro ambobus linearum fyftematibus habebimus has aequationes:

$$x = p(xx + yy) \quad \text{et} \quad y = q(xx + yy).$$

Formam vtriusque parametri ita immutemus vt ftatuamus $p = \frac{1}{2p}$ et $q = \frac{1}{2q}$, et bina linearum fyftemata his aequationibus exprimentur:

$$xx + yy = 2px \quad \text{et} \quad xx + yy = 2qy$$

quae praebent circulorum bina fyftemata.

XX.

Euoluamus etiam ex eodem genere fequentes formulas, fitque

$$x = \frac{pp - qq}{(pp + qq)^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{2pq}{(pp + qq)^2}.$$

Hinc primo elicimus:

$$xx + yy = \frac{1}{(pp + qq)^2} \text{ ita vt fit}$$

$$\frac{x}{xx + yy} = pp - qq \quad \text{et} \quad \frac{y}{xx + yy} = 2pq.$$

Dein-

Deinde cum ſit $pp + qq = \frac{1}{\sqrt{(xx+yy)}}$ reperimus

$$2pp = \frac{x + \sqrt{(xx+yy)}}{xx+yy} \text{ et } 2qq = \frac{\sqrt{(xx+yy)} - x}{xx+yy}$$

ſcribamus nunc $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ loco $2pp$ et $2qq$, et bina linearum ſyſtemata his aequationibus exprimuntur

$$xx+yy = px + p\sqrt{(xx+yy)} \text{ et } xx+yy = q\sqrt{(xx+yy)} - qx$$

quae reducuntur ad has:

$$(xx+yy)^2 - 2px(xx+yy) = ppyy; \text{ ſeu } yy = \tfrac{1}{2}pp + px - xx + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}pp + px)}$$

$$(xx+yy)^2 + 2qx(xx+yy) = qqyy; \text{ ſeu } yy = \tfrac{1}{2}qq - qx - xx - q\sqrt{(\tfrac{1}{4}qq + qx)}.$$

Haec adeo duo linearum ſyſtemata ſub eadem communi aequatione quarti ordinis continentur, dum in altero tantum parameter negatiue accipitur.

XXI.

Haec ſolutio ideo omni attentione digna videtur quod in genere per integrationem eſt eruta, atque adeo ad ſolutionem huius problematis maxime accommodata:

Inuenire ea linearum algebraicarum ſyſtemata quarum traiectoriae itidem ſint lineae algebraicae.

Quamdiu enim aequatio pro illis lineis inter coordinatas x et y conſideratur, enodatio huius quaeſtionis fruſtra ſuſcipitur; totumque artificium, ad hunc ſcopum perducens in eo eſt ſitum, quod

Vtram-

vtramque coordinatam per binas parametros variabiles vtriusque systematis reuocauimus. Solutio igitur huius problematis ita se habet, vt ex quouis casu inuento facillime infiniti alii assignari queant. Sint enim t et u eiusmodi functiones parametrorum p et q, quae iam coordinatas binorum systematum referant ita vt sit:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right)+\left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right)=0.$$

Tum aliae quotcunque coordinatae x et y obtinebuntur, sumendo $x+y\sqrt{-1}=f:(t+u\sqrt{-1})$, vnde si t et u iam sint functiones algebraicae, omnes functiones algebraicae formulae $t+u\sqrt{-1}$, pariter pro x et y functiones algebraicas praebebunt.

XXII.

Totum ergo negotium huc redit, vt primo casus simpliciores pro t et u innotescant; ac simplicissimi quidem se statim offerentes sunt $t=p$ et $u=q$, vel etiam $t=\alpha p+\beta q$ et $u=\gamma p+\delta q$, qui iam vberrimam messem binorum systematum algebraicorum largiuntur.

Tum vero hic casus singularis notari meretur

$$t=\sqrt{p(a+q)} \quad \text{et} \quad u=\sqrt{q(b-p)}$$

qui quomodo satisfaciat sumendis differentialibus intelligitur:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)=\frac{\sqrt{(a+q)}}{2\sqrt{p}};\ \left(\frac{dt}{dq}\right)=\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{(a+q)}} \text{ hinc } \left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{du}{dp}\right)=\frac{-\sqrt{q}}{2\sqrt{(b-p)}};\ \left(\frac{du}{dq}\right)=\frac{\sqrt{(b-p)}}{2\sqrt{q}} \text{ hinc } \left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right)=-\frac{1}{4}.$$

ex quo, propterea etiam infinitas alias solutiones deriuare licet. Ipse autem hic casus pulcerrima duo systemata linearum secundi ordinis suppeditat: posito enim:

$$xx = ap + pq \text{ et } yy = bq - pq \text{ ob } xx + yy = ap + bq$$

pro vtroque systemate prodeunt hae aequationes:

$$1^\circ.\ p(xx + yy) - bxx + ap(b - p) = 0$$

$$2^\circ.\ q(xx + yy) + ayy - bq(a + q) = 0$$

quarum haec est pro infinitis ellipsibus, illa vero ob $b > p$ pro infinitis hyperbolis super communi axe ex eodem centro descriptis.

XXIII.

Supra iam ostendi (14) quomodo ex huiusmodi valoribus idoneis pro t et u cognitis infinitos valores T, V, T′, V′, T″, V″, etc. elicere liceat, ex quibus deinceps porro infinita alia systematum paria formari queant, sumendo

$$x = \alpha T - \varepsilon V + \zeta T' - \zeta V' + \gamma T'' - \eta V'' \text{ etc.}$$

$$y = \alpha V + \varepsilon T + \zeta V' + \zeta T' + \gamma V'' + \eta T'' \text{ etc.}$$

Hos quidem valores T et V ibi ex solis potestatibus formulae $t + u\sqrt{-1}$ elicui, ponendo $T + V\sqrt{-1} = (t + u\sqrt{-1})^n$ eodem autem jure aliis quibuscunque functionibus vti licet. Veluti si ponamus $T + V\sqrt{-1} = \frac{f + g(t + u\sqrt{-1})}{h + k(t + u\sqrt{-1})} = \frac{f + gt + gu\sqrt{-1}}{h + kt + ku\sqrt{-1}}$, denominatorem primo realem reddamus tum vero adipiscemur:

T =

$$T = \frac{(f+gt)(b+kt)+gkuu}{(b+kt)^2+kkuu} \text{ et } V = \frac{(gb-fk)u}{(b+kt)^2+kkuu}$$

vbi notasse iuuabit, cum sit $T - V\sqrt{-1} = \frac{f+gt-gu\sqrt{-1}}{b+kt-ku\sqrt{-1}}$ fore $TT+VV = \frac{(f+gt)^2+gguu}{(b+kt)^2+kkuu}$ hinc enim colligitur:

$TT+VV = \frac{(fk+gb+2gkt)T-g(f+gt)}{k(b+kt)}$ tum vero etiam $T(b+kt)-kuV = f+gt$ et $TT+VV = \frac{(gb-fk)V+2gkuT-ggu}{kku}$ item $kT + \frac{(b+kt)V}{u} - g = 0$

XXIV.

Applicemus hanc euolutionem ad casus simpliciores ac ponamus primo $t=p$ et $u=q$, et pro T et V ipsas coordinatas x et y sumendo binae postremae aequationes praebent

$$xx+yy = \frac{(fk+gb+2gkp)x-g(f+gp)}{k(b+kp)} = \frac{(f+gp)x+gqy}{b+kp}$$

$$(b+kp)x - kqy = f+gp$$

quarum prior solam parametrum p continens, iam alterum linearum systema exhibet, quae quidem omnes erunt circuli. Tum vero ob $p = \frac{f-bx+kqy}{kx-g}$ pro altero systemate orietur haec aequatio: facta reductione.

$$xx+yy = \frac{(gb-fk)y+2gkqx-ggq}{kkq}$$

quae etiam infinitos circulos complectitur.

Pro altero casu faciamus $a=0$, $b=cc$, et loco p et q scribamus pp et qq vt habeamus $t=pq$ et $u=q\sqrt{(cc-pp)}$ hinc ergo fiet

$xx+yy = \frac{(fk+gb+2gkpq)x-g(f+gpq)}{k(b+kpq)}$; $(b+kpq)x-kqy\sqrt{(cc-pp)} = f+gpq$, tum vero etiam:

$$xx+yy=\frac{(gb-fk)y+2gkqx\sqrt{(cc-pp)}-ggq\sqrt{(cc-pp)}}{kkq\sqrt{(cc-pp)}} \text{ et } kx+\frac{(b+kpq)y}{q\sqrt{(cc-pp)}}-g=0$$

Vnde cum ſit $q=\frac{by}{(g-kx)\sqrt{(cc-pp)}-kpy}$ elicitur pro altero ſyſtemate haec aequatio:

$$xx-yy=\frac{(gb+fk)x}{bk}-\frac{(gb-fk)py}{bk\sqrt{(cc-pp)}}-\frac{fg}{bk}$$

Quae cum hac forma repraeſentari queat:

$xx+yy=py-aa$ pro circulis

alterius ſyſtematis aequatio erit

$xx+yy=qx+aa$ itidem pro circulis.

Talibus circulis in mappis mundi meridiani et paralleli referri ſolent.

XXV.

Ne iſte calculus tantopere fiat moleſtus, ſi in genere velimus ponere $t=\sqrt{p(a+q)}$ et $u=\sqrt{q(b-p)}$, primo hinc tam p quam q per t et u exprimamus vnde ſequentes naſcentur aequationes

$$0=btt-p(tt+uu)-ap(b-p) \text{ et } 0=auu+q(tt+uu)-bq(a+q)$$

Iam loco T et V capiendo ipſas coordinatas x et y ex formulis ſuperioribus colligemus:

$$t=\frac{(fk+gb)x-fg-bk(xx+yy)}{kk(xx+yy)-2gkx+gg}=\frac{(kx-g)(f-bx)-bkyy}{(kx-g)^2+kkyy}$$

$$u=\frac{(gb-fk)y}{(kx-g)^2+kkyy}.$$

Ponamus ad calculum contrahendum

$f-bx=br$ et $kx-g=ks$ vt ſit $fk-gb=bk(r+s)$ atque

$t=$

$t = \frac{b}{k} \cdot \frac{rs - yy}{ss + yy}$; $u = \frac{-b}{k} \cdot \frac{(r+s)y}{ss+yy}$ ideoque

$tt + uu = \frac{bb}{kk} \cdot \frac{rrss + (rr+ss)yy + y^4}{(ss+yy)^2} = \frac{bb}{kk} \cdot \frac{rr+yy}{ss+yy}$.

Nunc quia r et s abſciſſam x inuoluunt, aequationes pro binis linearum ſyſtematibus ita erunt comparatae.

$$\text{I.} \quad 0 = b(rs-yy)^2 - p(rr+yy)(ss+yy) - \frac{akkp(b-p)}{bb}(ss+yy)^2$$

$$\text{II.} \quad 0 = a(r+s)^2 yy + q(rr+yy)(ss+yy) - \frac{bkkq(a+q)}{bb}(ss+yy)^2$$

quae ambae ad lineas quarti ordinis referuntur.

Nunc caſu $a = 0$, cuius euolutio ante valde erat difficilis poſterior aequatio per $ss + yy$ diuiſa ſtatim dat

$0 = rr + yy - \frac{bkk(a+q)}{bb}(ss+yy)$ ſeu $bb(rr+yy) = bkkq(ss+yy)$

quae ob $r = \frac{f}{b} - x$ et $s = x - \frac{g}{k}$ manifeſto eſt ad circulum, prior vero ob $(rr+yy)(ss+yy) = (rs-yy)^2 + (r+s)^2 yy$ abit in hanc: $0 = (b-p)(rs-yy)^2 - p(r+s)^2 yy$,

ſeu $rs - yy = (r+s)y \sqrt{\frac{p}{b-p}}$ pariter pro circulo.

XXVI.

Ex ſolutione autem generali ſupra data etiam hanc quaeſtionem elegantiſſimam enodare poterimus, quam alia methodo vix tractare liceat.

Inuenire eiusmodi bina ſyſtemata linearum ſe mutuo normaliter ſecantium, quae ambo ſub eadem aequatione contineantur, ita vt prouti parametro valor tribua-

tribuatur vel positiuus vel negatiuus ambo inde nascantur systemata.

Casum simplicissimum huic conditioni satisfacientem iam supra §. 17. sumus adepti, quo haec aequatio $yy = pp - 2px$, prout parameter p vel positiue vel negatiue accipitur, duas parabolarum series exhibet, quae se mutuo ad angulos rectos intersecant.

XXVII.

Solutionem autem latius patentem reperiemus, si ponamus

$$x + y\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})^{2n} = (pp - qq + 2pq\sqrt{-1})^n$$

quae forma permutandis parametris p et q, abit in

$$(qq - pp + 2pq\sqrt{-1})^n = (-1)^n (pp - qq - 2pq\sqrt{-1})^n$$
$$= (-1)^n (x - y\sqrt{-1})$$

ideoque tum $x + y\sqrt{-1}$ abit vel in $x - y\sqrt{-1}$ vel in $-x + y\sqrt{-1}$ prout n fuerit vel numerus par vel impar. Illo autem casu tantum applicata y hoc vero tantum abscissa x negatiue accipitur, et vtroque curuae manent eaedem, seu sub eadem aequatione contentae. Ex quo si litterae α, β, γ, etc. denotent numeros impares quoscunque, geminam solutionem hinc consequimur:

I. $$x + y\sqrt{-1} = A(p + q\sqrt{-1})^{2\alpha} + B(p + q\sqrt{-1})^{2\beta} + C(p + q\sqrt{-1})^{2\gamma} \text{ etc.}$$

II. $$x + y\sqrt{-1} = A(p + q\sqrt{-1})^{4\alpha} + B(p + q\sqrt{-1})^{4\beta} + C(p + q\sqrt{-1})^{4\gamma} \text{ etc.}$$

in

in priori ſcilicet omnes exponentes ſunt numeri impariter pares, in poſteriori vero pariter pares: litterae autem α, β, γ etiam numeros negatiuos atque adeo fractos, dummodo numeratores et denominatores ſint impares denotare poſſunt. Generalius vero hae duae ita exhiberi poſſunt, vt poſito $pp-qq+2pq\sqrt{-1}=R$ formula $x+y\sqrt{-1}$ aequari debeat functioni vel impari vel pari ipſius R.

XXVIII.

Adiungere inſuper liceat hoc problema.

Inuenire eiusmodi curuas ſecandas, vt curuae ſecantes ab illis non aliter differepent niſi quod coordinatae x *et* y *inter ſe permutentur: ſeu vt eaedem lineae ad axem priori normalem translatae illas normaliter traiiciant.*

Soluetur hoc problema ope huius formulae

$$x+y\sqrt{-1}=A(p+q\sqrt{-1})^{\alpha}+B(p+q\sqrt{-1})^{\beta}+C(p+q\sqrt{-1})^{\gamma}$$

ſi loco exponentium α, β, γ capiantur numeri impares vel formae $4i+1$ vel formae $4i+3$. Huius autem duplicis generis numeros impares in eadem forma inter ſe neutiquam permiſcere licet. Vnde $x+y\sqrt{-1}$ aequari debet eiusmodi functioni impari ipſius $p+q\sqrt{-1}$, in qua nullae aliae occurrant poteſtates, niſi quarum exponentes ſint vel omnes formae $4i+1$, vel omnes formae $4i+3$.

DE FORMVLIS INTEGRALIBVS DVPLICATIS.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Si corporis cuiuscunque propositi vel soliditatem vel superficiem vel alias huiusmodi quantitates definire velimus, id per duplicem integrationem fieri solet; Formula enim differentialis bis integranda tali forma $Zdxdy$ exprimitur, binas variabiles x et y continente quarum altera sola in priori integratione vt variabilis spectatur; posterior vero integratio ad alteram iam vt variabilem spectatam instituitur. Hinc quantitas per duplicem istam integrationem resultans duplex signum integrale praefigendo indicari solet hoc modo: $\int\int Z\,dx\,dy$, quippe qua duplicatione formula differentialis proposita $Z\,dx\,dy$ bis integrari debere est intelligenda. Huiusmodi igitur expressiones geminato signo summatorio affectas hic formulas integrales duplicatas appello, quarum vsus cum latissime pateat, in earum indolem hic diligentius inquirere, earumque proprietates et affectiones accuratius euoluere constitui.

2. Pri-

2. Primum igitur cum x et y sint duae quantitates variabiles a se inuicem non pendentes, Z vero denotet earum functionem quamcunque, formulae integralis duplicatae $\int\int Z\,dx\,dy$ vis ita exponi potest, vt quaerenda sit functio finita binarum istarum variabilium x et y, quae ita bis differentiata, vt in altera differentiatione sola x in altera sola y pro variabili habeatur, ad formulam $Z\,dx\,dy$ deducat. Ita si fuerit $Z = a$, euidens fore $\int\int a\,dx\,dy = axy$; generalius vero erit $\int\int a\,dx\,dy = axy + X + Y$, denotante X functionem quamcunque ipsius x et Y ipsius y, quandoquidem hae duae quantitates per geminam illam differentiationem ex calculo tolluntur.

3. In genere autem si V fuerit eiusmodi functio ipsarum x et y, quae bis differentiata ita vt modo est praeceptum, praebeat $Z\,dx\,dy$; erit quidem vtique $V = \int\int Z\,dx\,dy$; verum duplex integratio insuper functiones arbitrarias X et Y, illam ipsius x; hanc ipsius y inducit, vt sit generalissime:

$$\int\int Z\,dx\,dy = V + X + Y.$$

Ex statim perspicitur, huiusmodi formulas differentiales necessario affectas esse producto $dx\,dy$, neque propterea secundum hanc significationem tales formulas $\int\int Z\,dx^2$ vel $\int\int Z\,dy^2$ quicquam significare; siquidem per ipsam rei naturam excluduntur, dum in altera integratione sola x, in altera vero sola y, vt variabilis tractatur.

 4. Con-

4. Constituta sic forma huiusmodi formularum integralium duplicatarum $\int\int Z\,dx\,dy$, ita vt x et y sint duae quantitates variabiles a se inuicem non pendentes et Z functio finita ex iis vtcunque composita, haud difficile est duplicem integrationem, quam inuoluunt, instituere, quod quidem prout primo vel x vel y sola variabilis consideratur, duplici modo fieri potest. Sumta scilicet primo y pro variabili, altera x vt constans tractatur, quaeriturque integrale $\int Z\,dy$ quod erit certa quaedam functio ipsarum x et y; qua inuenta suscipiatur formula differentialis $dx\int Z\,dy$ in qua iam y vt constans solaque x vt variabilis tractetur, eiusque quaeratur integrale $\int dx\int Z\,dy$ qui erit valor quaesitus formulae integralis duplicatae propositae $\int\int Z\,dx\,dy$. Si in hac duplici integratione ordo variabilium x et y inuertatur, valor quaesitus ita exprimetur $\int dy\int Z\,dx$, qui ab illo non discrepabit.

5. Ob hunc consensum fit, vt talis forma $\int\int Z\,dx\,dy$ promiscue siue hoc modo $\int dx\int Z\,dy$ siue hoc $\int dy\int Z\,dx$ exhiberi possit; vtrouis autem vtamur, regulae vulgares integrationis sunt obseruandae, si modo notetur in ea integratione, in qua vel x vel y pro constante sumatur, constantem introductam eiusdem fore functionem quamcunque. Veluti si proponatur haec forma $\int\int \frac{dx\,dy}{xx+yy} = \int dx\int \frac{dy}{xx+yy}$ ob $\int \frac{dy}{xx+yy} = \frac{1}{x}$ A tang. $\frac{y}{x} + \frac{dX}{dx}$, denotante $\frac{dX}{dx}$ functionem quamcunque ipsius x, erit $\int\int \frac{dx\,dy}{xx+yy} = \int \frac{dx}{x}$ A tang.

A tang. $\frac{y}{x} + X$, vbi in integratione adhuc perficienda y pro constante habetur. Simili vero modo reperitur $\int\int \frac{dx\,dy}{xx+yy} = \int \frac{dy}{y}$ A tang. $\frac{x}{y} + Y$, in qua integratione x constans assumitur, in quo quidem exemplo consensus binorum valorum inuentorum non satis est perspicuus.

6. Interim tamen veritas consensus per series facile ostenditur; cum enim sit A tang. $\frac{x}{y} = \frac{\pi}{2}$ − A tang. $\frac{y}{x}$, denotante $\frac{\pi}{2}$ angulum rectum, et

$$\text{A tang.}\,\frac{y}{x} = \frac{y}{x} - \frac{y^3}{3x^3} + \frac{y^5}{5x^5} - \frac{y^7}{7x^7} + \frac{y^9}{9x^9} - \text{etc.}$$

erit

$$\int \frac{dx}{x}\,\text{A tang.}\,\frac{y}{x} = -\frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{etc.} + f:y \text{ et}$$

$$\int \frac{dy}{y}\,\text{A tang.}\,\frac{x}{y} = \frac{\pi}{2}\,ly - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{etc.} + f:x$$

ex quarum vtraque oritur:

$$\int\int \frac{dx\,dy}{xx+yy} = X + Y - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{etc.}$$

Verum vbi ambae integrationes succedunt, conuenientia sponte se offert: quod quidem pluribus exemplis ostendisse superfluum foret, cum eius ratio ex natura differentialium et integralium perfecte sit demonstrata.

7. Haec igitur tenenda sunt de istiusmodi formulis integralibus duplicatis, quando binae variabiles x et y nullo plane nexu inter se cohaerent, ita vt in altera integratione altera, in altera vero altera constans accipiatur. Verum tales formulae

non confundendae sunt cum iis, quibus vt initio dixi, soliditas et superficies corporum quorumcunque exprimi solet. Etsi enim hae formulae etiam duplicem integrationem requirunt, et in priori altera binarum variabilium puta y sola vt variabilis tractatur altera x pro constante assumta, tamen priori integratione peracta, ea per omnes valores ipsius y extendi, sicque tandem loco y extremus valor, quem recipere potest, statui debet, qui plerumque ab x pendet, ita vt hoc valore post primam integrationem loco y constituto in posteriori integratione y tanquam functio quaedam ipsius x ingrediatur, neque propterea pro *constanti* *haberi* queat, qua conditione fit, vt altera integratio plurimum immutetur, etsi prior simili modo vt ante absoluatur.

Tab I. Fig. 1. 8. Quod discrimen quo clarius perspiciatur, exemplum attulisse iuuabit. Quaeratur ergo soliditas sphaerae, cuius centrum sit C et radius $CA = a$, ac primo quidem portio eius quadranti ACB insistens, cuius elementum est columella $YZyz$ areolae $Yy = dx\,dy$ insistens, positis $CP = x$, et $PY = y$ eritque eius altitudo $YZ = \sqrt{(aa - xx - yy)}$; hinc soliditas columellae elementaris $= dxdy\sqrt{(aa-xx-yy)}$ quam bis integrari oportet. Maneat primo interuallum $CP = x$ constans, et integrale $\int dy\sqrt{(aa-xx-yy)}$ ita sumtum, vt euanescat posito $y = 0$, dabit portiunculam areolae $PpYq$ insistentem, quae ergo erit

erit $= \frac{1}{2} y \sqrt{(aa-xx-yy)} + \frac{1}{2}(aa-xx) \, \text{A sin.} \frac{y}{\sqrt{(aa-xx)}}$. Iam hoc valore in altera integratione vti oportet, sed antequam is inducatur, per totam distantiam P M extendi debet, vt habeatur elementum soliditatis toti areolae $P p M m$ insistens; puncto autem Y ad M vsque promoto, fit $y = \sqrt{(aa-xx)}$, qui ergo valor loco y substitui debet, ita vt in sequente integratione quantitas y minime vt constans consideretur, haecque tractandi methodus plurimum a praecedente discrepet.

9. Posito ergo $y = \sqrt{(aa-xx)}$, fit $\int dy \sqrt{(aa-xx-yy)} = \frac{\pi}{4}(aa-xx)$ cum sit $\text{A sin.}\, 1 = \frac{\pi}{2}$; sicque integratio adhuc absoluenda erit $\int dx \int dy \sqrt{(aa-xx-yy)} = \frac{\pi}{4} \int (aa-xx) dx$, vbi quidem vnica variabilis x inest, sed non ideo, quod iam hic y pro constanti habeatur, sed quia pro y certa quaedam functio ipsius x est substituta. Haec altera vero integratio ita instituta, vt euanescat posito $x = 0$, dabit soliditatem portionis sphaerae, quae areae C B M P insistit, quae idcirco erit $= \frac{\pi}{4}(aax - \frac{1}{3}x^3)$; vnde sphaerae octans seu portio toti quadranti A C B insistens prodibit punctum P vsque in A promouendo vt fiat $x = a$. Tum ergo soliditas octantis sphaerae erit $= \frac{\pi}{6} a^3$, hincque totius sphaerae $= \frac{4\pi}{3} a^3$ vti constat. Ex quo exemplo intelligitur, talem soliditatis inuestigationem plurimum differre ab integratione duplicata formularum primo exposita.

Tab. I. Fig. 2. 10. Quod si non totum octantem sphaerae, sed eam tantum eius portionem quae areae rectangulari CEDF insistit inuestigare velimus, prior integratio vt ante instituenda est, sed ea peracta ipsi y valor PM debet tribui, qui quidem est constans et propterea haec inuestigatio ad primum genus videtur accedere, verumtamen eo discrepat, quod integrale determinatum prodeat, cum ibi functiones indefinitae X et Y inueherentur. Posito ergo vt ante sphaerae radio $CA = a$, sit rectanguli CEFD latus $CD = e$ et $CE = f$: et solidum elementare areolae $Pp Yq$ insistens erit vt ante

$$\tfrac{1}{2} y \surd(aa - xx - yy) + \tfrac{1}{2}(aa - xx) \text{ A sin } \frac{y}{\surd(aa - xx)},$$

quod vsque ad M extensum, vbi fit $y = f$; erit

$$\tfrac{1}{2} f \surd(aa - ff - xx) + \tfrac{1}{2}(aa - xx) \text{ A sin. } \frac{f}{\surd(aa - xx)}$$

vnde solidum areae CPEM insistens sequenti integrali exprimetur.

$$\tfrac{1}{2} f \int dx \surd(aa - ff - xx) + \tfrac{1}{2} \int (aa - xx) dx \text{ A sin. } \frac{f}{\surd(aa - xx)}$$

si quidem ita definiatur, vt euanescat posito $x = 0$. Euoluamus ergo seorsim has binas formulas.

11. Ac prima quidem statim praebet;

$$\int dx \surd(aa - ff - xx) = \tfrac{1}{2} x \surd(aa - ff - xx) + \tfrac{1}{2}(aa - ff) \text{ A sin. } \frac{x}{\surd(aa - ff)}$$

altera autem ob $d. \text{ A sin. } \frac{f}{\surd(aa - xx)} = \frac{f x d x}{(aa - xx)\surd(aa - ff - xx)}$ ita transformatur:

$\int (aa-$

$$\int (aa-xx)\,dx\, \text{A sin.}\frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}} = (aax-\tfrac{1}{3}x^3)\,\text{A sin.}\frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}} - ff\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)\,xx\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}$$

ad quam poſtremam partem integrandam, notetur eſſe

$$\text{A sin.}\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}} = \int\frac{af\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}$$

huius ergo dabitur multiplum quoddam, quod illi formae adiectum praebeat talem formam

$$\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)\,xx\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}} + m\,\text{A sin.}\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}} = \int\frac{(aaxx-\frac{1}{3}x^4+maf)\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}$$

vt $aaxx-\frac{1}{3}x^4+maf$ fiat per $aa-xx$ diuiſibile, id quod fit ſumendo $m=-\frac{2a^3}{3f}$; hincque erit

$$\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)\,xx\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}} = \frac{2a^3}{3f}\,\text{A sin.}\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}} - \tfrac{1}{3}\int\frac{(2aa-xx)\,dx}{\sqrt{(aa-ff-xx)}}.$$

12. Cum igitur ſit

$$\int\frac{(2aa-xx)\,dx}{\sqrt{(aa-ff-xx)}} = \tfrac{1}{2}(3aa+ff)\,\text{A sin.}\frac{x}{\sqrt{(aa-ff)}} + \tfrac{1}{2}x\sqrt{(aa-ff-xx)}$$

erit . . . . . $\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)\,xx\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}$

$=$

$$= \tfrac{2a^3}{3f}\,\text{A ſin.}\,\tfrac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}} - \tfrac{1}{6}(3aa+ff)\,\text{A ſin.}\,\tfrac{x}{\sqrt{(aa-ff)}} - \tfrac{1}{6}x\sqrt{(aa-ff-xx)}$$

hincque . . . . $\int(aa-xx)\,dx\,\text{A ſin.}\,\tfrac{}{\sqrt{(aa-xx)}}$

$$= (aax-\tfrac{1}{3}x^3)\,\text{A ſin.}\,\tfrac{f}{\sqrt{(aa-xx)}} - \tfrac{2}{3}a^3\,\text{A ſin.}\,\tfrac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}$$

$$+ \tfrac{1}{6}f(3aa+ff)\,\text{A ſin.}\,\tfrac{x}{\sqrt{(aa-ff)}} + \tfrac{1}{6}fx\sqrt{(aa-ff-xx)}.$$

Quare poſito $x = CD = e$, erit ſoliditas portionis ſphaerae rectangulo C D E F inſiſtentis:

$$\tfrac{1}{4}ef\sqrt{(aa-ee-ff)} + \tfrac{1}{4}f(aa-ff)\,\text{A ſin.}\,\tfrac{e}{\sqrt{(aa-ff)}} + \tfrac{1}{6}e(3aa-ee)$$
$$\text{A ſin.}\,\tfrac{f}{\sqrt{(aa-ee)}} - \tfrac{1}{3}a^3\,\text{A ſin.}\,\tfrac{ef}{\sqrt{(aa-ee)(aa-ff)}} + \tfrac{1}{12}f(3aa-ff)$$
$$\text{A ſin.}\,\tfrac{e}{\sqrt{(aa-ff)}} + \tfrac{1}{12}ef\sqrt{(aa-ee-ff)}$$

quae expreſſio reducitur ad hanc:

$$\tfrac{1}{3}ef\sqrt{(aa-ee-ff)} + \tfrac{1}{6}f(3aa-ff)\,\text{A ſin.}\,\tfrac{e}{\sqrt{(aa-ff)}} + \tfrac{1}{6}e(3aa-ee)$$
$$\text{A ſin.}\,\tfrac{f}{\sqrt{(aa-ee)}} - \tfrac{1}{3}a^3\,\text{A ſin.}\,\tfrac{e}{\sqrt{(aa-ee)(aa-ff)}}.$$

13. Si ergo rectanguli terminus F vſque ad peripheriam porrigatur vt ſit $ee+ff=aa$, primum membrum euaneſcit et arcus circulares tria reliqua afficientes abeunt in angulum rectum ſeu $\frac{\pi}{2}$, eritque ſoliditas

$$\tfrac{\pi}{2}\left(\tfrac{1}{2}aae + \tfrac{1}{2}aaf - \tfrac{1}{6}e^3 - \tfrac{1}{6}f^3 - \tfrac{1}{3}a^3\right)$$

ſeu ob $f = \sqrt{(aa-ee)}$

$$\tfrac{\pi}{12}\left((2aa+ee)\sqrt{(aa-ee)} - 2a^3 + 3aae - e^3\right)$$

quod ſolidum fit maximum, ſi $f = e = \frac{a}{\sqrt{2}}$, fitque id tum $= \frac{\pi a^3(5-2\sqrt{2})}{12\sqrt{2}}$, dum ſoliditas octantis ſphaerae eſt $= \frac{\pi}{6}a^3$. Ita vt noſtrum ſolidum ſit ad octan-

octantem sphaerae vt $5 - 2\sqrt{2}$ ad $2\sqrt{2}$. Sin autem punctum F non ad peripheriam quadrantis pertingat, fueritque $f = e$ erit soliditas quaesita $= \frac{1}{3}ee\sqrt{(aa-2ee)} + \frac{1}{3}e(3aa-ee)\,\text{A sin.}\frac{e}{\sqrt{(aa-ee)}} - \frac{1}{3}a^3\,\text{A sin.}\frac{ee}{aa-ee}$ Quare si fuerit

$$\text{A sin.}\frac{e}{\sqrt{(aa-ee)}} : \text{A sin.}\frac{ee}{aa-ee} = a^3 : e(3aa-ee)$$

solidum algebraice exprimetur.

14. Quo autem rem generalius complectamur quaeramus solidum areae cuicunque GQHR insistens cuius elementum cum areolae $Yy = dxdy$ insistat, idque sit $= dxdy\sqrt{(aa-xx-yy)}$, prima integratio sumto x constante praebet $\frac{1}{2}dx(y\sqrt{(aa-xx-yy)} + (aa-xx)\,\text{A sin.}\frac{y}{\sqrt{(aa-xx)}})$ Tab. I. Fig. 3.

Sint iam ex natura curuae GQHR distantiae extremae $PQ = q$ et $PR = r$, atque solidum elementare areolae QR insistens erit

$$\frac{1}{2}dx\left\{\begin{array}{l} +r\sqrt{(aa-xx-rr)} + (aa-xx)\,\text{A sin.}\frac{r}{\sqrt{(aa-xx)}} \\ -q\sqrt{(aa-xx-qq)} - (aa-xx)\,\text{A sin.}\frac{q}{\sqrt{(aa-xx)}} \end{array}\right\}$$

Quare cum q et r possint esse functiones quaecunque ipsius x, euidens est quantum absit, quo minus quantitas y in sequente integratione pro constanti habeatur. Sequens autem integratio a valore $x = OE$ vsque ad valorem $x = OF$ est extendenda.

15. Si figura basis GQHR a recta CA traiiciatur vt quaeratur solidum basi CGH insistens cuius Tab. I. Fig. 4.

cuius natura exprimatur aequatione quacunque inter $CP = x$, $PR = r$, erit solidum:

$$\tfrac{1}{2}\int dx\left(r\sqrt{(aa-xx-rr)}+(aa-xx)\,\mathrm{A\,sin.}\frac{r}{\sqrt{(aa-xx)}}\right)$$

vbi problema non inelegans se offert, *quo figura basis* CGH *quaeritur, vt solidum ei insistens algebraice exprimatur*. Statuatur in hunc finem $r = u\sqrt{(aa-xx)}$ vt solidum indefinitum areae CPRG insistens sit:

$$\tfrac{1}{2}\int(aa-xx)\,dx\,(u\sqrt{(1-uu)}+\mathrm{A\,sin.}\,u)$$

quae expressio transformatur in hanc:

$$\tfrac{1}{2}(aax-\tfrac{1}{3}x^3)(u\sqrt{(1-uu)}+\mathrm{A\,sin.}\,u)$$
$$-\int(aax-\tfrac{1}{3}x^3)\,du\sqrt{(1-uu)}$$

Fiat iam $\int(aax-\frac{1}{3}x^3)\,du\sqrt{(1-uu)} = na^3\,\mathrm{A\,sin.}\,u + a^3U$ existente U functione algebraica ipsius u, et cum sit soliditas

$$\tfrac{1}{2}(aax-\tfrac{1}{3}x^3)u\sqrt{(1-uu)}-a^3U+(\tfrac{1}{2}aax-\tfrac{1}{6}x^3-na^3)\,\mathrm{A\,sin.}\,u$$

ea erit algebraica casu $-x^3+3aax=6na^3$: dummodo u euanescat posito $x=0$, tum enim soliditas erit $=na^3u\sqrt{(1-uu)}-a^3U$.

16. Ponamus $dU = U'du$, ac prodibit haec inter x et u aequatio:

$$aax-\tfrac{1}{3}x^3 = \frac{na^3}{1-uu}+\frac{a^3U'}{\sqrt{(1-uu)}}.$$

Fingatur $U = mu\sqrt{(1-uu)}$, erit $U' = \frac{m-2muu}{\sqrt{(1-uu)}}$, et vt u euanescat posito $x=0$, debet esse $m=-n$, vt fiat

$$aax-\tfrac{1}{3}x^3 = \frac{2na^3uu}{1-uu}, \text{ seu } u = \sqrt{\frac{3aax-x^3}{6na^3+3aax-x^3}}$$

hinc-

hincque $r = \sqrt{\frac{(aa-xx)(3aax-x^3)}{6na^3+3aax-x^3}}$. Iam ob $u\sqrt{(1-uu)} = \frac{\sqrt{6na^3(3aax-x^3)}}{6na^3+3aax-x^3}$, fit ſoliditas illa $= \frac{2na^3\sqrt{6na^3(3aax-x^3)}}{6na^3+3aax-x^3}$ Si haec ſoliditas locum habere debeat, facto $x = a$; fit $n = \frac{1}{3}$; $r = \sqrt{\frac{(aa-xx)(3aax-x^3)}{2a^3+3aax-x^3}} = \sqrt{\frac{x(a-x)(3aa-xx)}{(a+x)(2a-x)}}$ ac poſito $x = a$, erit ſoliditas $= \frac{1}{3}a^3$, et curua pro baſi inuenta eſt linea quarti ordinis.

17. Quae hic de ſoliditate portionis ſphaericae datae baſi inſiſtentis ſunt tradita, ſimili calculo ad quaeuis alia corpora accommodari poſſunt, cum tantum in formula $Z\,dx\,dy$ quantitas Z alio modo per x et y determinetur dum hic erat $Z = \sqrt{(aa-xx-yy)}$. *Quin etiam ſi ſuperficies* corporis cuiuscunque datae baſi imminens definiri debeat, id integratione gemina ſimilis formulae differentialis $Z\,dx\,dy$ eodem modo expedietur: *ita* ſi corpus ſit ſphaera, elementum ſuperficiei areolae elementari baſis $dx\,dy$ imminentis eſt $\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{(aa-xx-yy)}}$ ita vt ſit $Z = \frac{a}{\sqrt{(aa-xx-yy)}}$, cuius gemina integratio pari modo pro ratione baſis, cui imminens portio ſuperficiei quaeritur, eſt inſtituenda. Atque in genere quantitates quaecunque aliae cuiusuis corporis, quae certae baſi reſpondeant, ope ſimilium operationum determinabuntur.

18. Quaecunque ergo Z fuerit functio ipſarum x et y pro integrali duplicato $\int\int Z\,dx\,dy$ primo quaeritur integrale $\int Z\,dy$, quantitate x vt conſtante ſpectata, idque extendatur per totam quantitatem y, ſicque

ſicque extremi valores ipſius y in computum ingredientur, quae erunt functiones ipſius x, ex baſis figura cognitae: ſicque pro $\int Z\,dy$ orietur functio ipſius x, quae in dx ducta denuo more ſolito debet integrari. Idem tenendum eſt, ſi ordine inuerſo primo formula $\int Z\,dx$ integretur, ſpectato y vt conſtante quod integrale dum per totum interuallum x extenditur extremi valores ipſius x eidem y reſpondentes, qui erunt functiones ipſius y, inuehentur, ſicque $\int Z\,dx$ abibit in functionem ipſius y tantum, quae per dy multiplicata denuo ita integrari debet, vt integrale per totum interuallum y extendatur. Vtroque ſcilicet modo integratio per totam baſin eſt extendenda, eademque praecepta ſunt obſeruanda, qualiscunque Z fuerit functio ipſarum x et y.

19. Baſi ergo data, determinatio integrationum perinde ſe habet, ac ſi quantitas Z eſſet conſtans, quaerereturque tantum integrale $\int\int dx\,dy$, quo area baſis exprimitur. Quare ad praecepta, quae in determinatione horum integralium obſeruari oportet ſtabilienda, ſufficiet poſuiſſe $Z = 1$, vt integrale duplicatum $\int\int dx\,dy$ definiendum ſit ſiue autem ſumatur x ſiue y, extremi valores vtriusque determinabuntur per aequationem baſis figuram exprimentem. Scilicet priori integratione peracta, vbi
Tab. I. Fig. 5. punctum Y vbicunque intra terminos extremos erat aſſumtum, tum hoc punctum in peripheriam baſis trans-

transferatur, quo pacto x et y fient coordinatae basis, inter quas aequatio datur, ex qua deinceps siue y per x siue x per y determinabitur.

20. Quae quo clarius perspiciantur, sumamus basis figuram esse circulum centrum in G et radium GQ habentem, ponamusque $CF = f$; $FG = g$, et $GQ = c$, erit puncto Y in peripheriam huius circuli translato $cc = (f-x)^2 + (g-y)^2$. Iam ad aream huius circuli inuestigandam sit primo x constans, eritque $\int dy = y + C$, et quia y habet geminum valorem in nostra basi $y = g \pm \sqrt{(cc-(f-x)^2)}$, haec integratio ita determinetur, vt integrale euanescat, *dum ipsi y minor horum* valorum $g - \sqrt{(cc-(f-x)^2)}$ tribuitur, ita vt sit

$$\int dy = y - g + \sqrt{(cc-(f-x)^2)}$$

Nunc ergo y vsque ad alterum terminum $y = g + \sqrt{(cc-(f-x)^2)}$ extenso erit $\int dy = 2\sqrt{(cc-(f-x)^2)}$, quod iam per dx multiplicatum et integratum praebet: $\int dx \int dy = C - (f-x)\sqrt{(cc-(f-x)^2)} - cc\,\text{A sin.}\frac{f-x}{c}$ quod vt euanescat posito $x = f - c$ fit $C = cc\,\text{A sin.}\,1 = \frac{\pi}{2}cc$. Porro statuatur $x = f + c$. et ob $cc\,\text{A sin.}\frac{f-x}{c} = -cc\,\text{A sin.}\,1 = -\frac{\pi}{2}cc$ erit area quaesita tota $= \frac{\pi}{2}cc + \frac{\pi}{2}cc = \pi cc$, vti constat.

21. Si has determinationes accuratius perpendamus videmus extremos valores ipsius x ita esse comparatos, vt alter sit maximus, siquidem

 basis

basis tota quadam curua in se redeunte terminetur: Hi ergo ambo valores reperientur, si aequatio naturam basis exprimens differentietur, et $d x = 0$ ponatur. Quando autem basis non vna quadam linea curua terminatur, sed portione quapiam veluti CGH continetur, cuius basis CH sit maxima tum minor terminus ipsius x manifesto est $= 0$, maior autem ipsi CH aequalis: eodemque casu termini applicatae PR abscissae $CP = x$ respondentis sunt alter $= 0$, alter vero $= PR$, Quacunque ergo basi proposita eius figura ante probe est examinanda ipsiusque termini quaquauersus explorandi, quam inuestigatio areae vel cuiusuis alius formulae integralis duplicatae suscipi queat: definitis autem terminis quibus area continetur, inde determinationes integrationum sunt petendae.

Tab. I. Fig. 4.

22. His de integrationum determinatione expositis, insignes maximeque notatu dignae affectiones huiusmodi formularum integralium duplicatarum perpendi merentur, quae in earum transformatione occurrunt. Scilicet quemadmodum coordinatae eiusdem curuae infinitis modis sumi possunt, ita hic loco binarum variabilium x et y, binae quaecunque aliae variabiles in computum introduci possunt, siue eae pariter sint coordinatae, siue aliae quantitates vtcunque definitae. Ita talis transformatio in genere ita concipi potest, vt loco x et y functiones quaecunque aliarum duarum variabilium

t et

t et v ſubſtituantur, hisque in aequationem pro baſi datam introductis, ſimili modo limites harum quantitatum t et v quibus figura baſis terminatur, definiri poterunt. Vtcunque autem hae ſubſtitutiones ſumantur, tandem poſt duplicem integrationem ſemper eadem quantitas reſultet neceſſe eſt.

23. Si loco x et y aliae quaecunque binae coordinatae orthogonales introducantur puta t et v quod fit in genere ponendo:

$$x = f + mt + v\sqrt{(1-mm)} \text{ et } y = g + t\sqrt{(1-mm)} - mv$$

manifeſtum eſt elementum areae baſis, quod ante erat $dx\,dy$, nunc per $dt\,dv$ exprimi debere. Cum autem inde ſit

$$dx = m\,dt + dv\sqrt{(1-mm)} \text{ et } dy = dt\sqrt{(1-mm)} - m\,dv$$

minime patet, quomodo loco $dx\,dy$ per has ſubſtitutiones oriri poſſit $dt\,dv$; dum potius prodiret $dx\,dy = m\,dt^2\sqrt{(1-mm)} + (1-2mm)\,dt\,dv - m\,dv^2\sqrt{(1-mm)}$ quae autem formula, vtcunque ad geminam integrationem adaptatur, ſemper in maximos errores inducet. Multo minus ergo hinc colligere licet, ſi loco x et y aliae functiones ipſarum t et v ſubſtituantur, cuiusmodi expreſſio loco $dx\,dy$ adhiberi debeat.

24. Ac primo quidem obſeruo nullam hic eſſe rationem, cur expreſſio loco $dx\,dy$ in calculum introducenda ei aequalis eſſe debeat; quod tum demum

demum necesse esset, si binae integrationes eodem modo vt ante secundum binas variabiles instituerentur. Cum autem nunc aliae variabiles t et v adsint, atque altera integratio per variabilitatem ipsius t, altera ipsius v sit administranda, quae operationes a praecedentibus plurimum differunt; formula iam loco $dxdy$ inducenda non ex aequalitate aestimari, sed potius ad scopum, qui est propositus, accommodari debet. Et quoniam iam binas integrationes secundum binas variabiles t et v distingui oportet, manifestum est formulam loco $dxdy$ adhibendam necessario producto $dtdv$ affectam esse, et huiusmodi formam $Z\,dt\,dv$ habere debere.

25. Quo haec certius expediantur, maneat primo x, et loco y introducatur alia variabilis u, ita vt sit y functio quaecunque ipsarum x et u, et $dy = P\,dx + Q\,du$. Si iam in priori integratione x constans sumatur, erit vtique $dy = Q\,du$, hinc $\int\int dx\,dy = \int dx \int Q\,du$, ita vt nunc loco formulae $dx\,dy$ habeatur $Q\,dx\,du$, cuius integrale duplicatum proinde etiam hoc modo exprimi poterit $\int du \int Q\,dx$, vbi in priori integratione $\int Q\,dx$ quantitas u sumitur pro constante. Quodsi nunc simili modo u retineatur et loco x introducatur functio quaecunque ipsarum t et u, vt sit $dx = R\,dt + S\,du$, in tractatione formulae $\int du \int Q\,dx$ prior integratio $\int Q\,dx$, in qua u constans statuitur, abibit in hanc $\int QR\,dt$; ita vt integrale duplicatum sit

fit $\int du \int QR\,dt$ seu promiscue $\iint QR\,dt\,du$ vnde manifestum est ob has ambas substitutiones loco formulae $dx\,dy$ hanc $QR\,dt\,du$ tractari debere.

26. Introducamus nunc statim loco x et y has duas nouas variabiles t et u, per quas illae ita determinentur, vt sit:

$$dx = R\,dt + S\,du \quad \text{et} \quad dy = T\,dt + V\,du$$

vnde valore ipsius dx in forma $dy = P\,dx + Q\,du$ substituto fit $dy = PR\,dt + (PS + Q)\,du$, ita vt sit $PR = T$ et $PS + Q = V$, vnde fit $P = \frac{T}{R}$ et $\frac{ST}{R} + Q = V$ sicque $QR = VR - ST$. Quare vi harum substitutionum loco $dx\,dy$ vti debemus formula $(VR - ST)\,dt\,du$ quae bis integrata iustis adhibitis determinationibus aeque aream totius basis praebere debet, atque ipsa formula $dx\,dy$ bis integrata. Quod autem hic pro formula areae baseos $\iint dx\,dy$ est ostensum, locum habet pro quacunque alia formula $\iint Z\,dx\,dy$, quippe quae per easdem substitutiones transformatur in hanc $\iint Z(VR - ST)\,dt\,du$ dummodo in Z loco x et y assumti valores substituantur. Pari enim modo binas integrationes ex figura basis determinari oportet.

27. Quod si ergo ponatur:

$$dx = R\,dt + S\,du \quad \text{et} \quad dy = T\,dt + V\,du$$

loco $dx\,dy$ consequimur $(RV - ST)\,dt\,du$, quae formula plurimum differt ab ea, cui productum

 $dx\,dy$

$dx\,dy$ reuera est aequale; etiamsi enim termini per dt^2 et du^2 affecti, vtpote ad duplicem integrationem inepti, reiiciantur tamen quod restat $(RV + ST)\,dt\,du$ ratione signi a vera formula discrepat. Verum hic non leue dubium exoritur quod cum coordinatae x et y pari passu ambulent, nostra formula potius differentiam $RV - ST$ quam inuersam $ST - RV$ complectatur: quod dubium eo magis augetur, quod si superius ratiocinium respectu x et y inuertissemus eaedem substitutiones nos reuera ad formulam $(ST - RV)\,dt\,du$ perduxissent. Sed quia totum discrimen tantum in signo versatur, alteraque formula alterius est negatiua, hinc determinatio absoluta areae basis, quippe *cuius quantitas* absoluta quaeritur, nullam mutationem realem patitur.

Tab. I. Fig. 5. 28. Haec autem magis fient perspicua, si modum quo supra (20) ad aream $EQHR$ inueniendam vsi sumus attentius consideremus. Primum scilicet ex integratione formulae $\int\int dx\,dy$ deduximus hanc aream $= \int dx\,(PR - PQ)$, vbi quidem PQ a PR subtraximus, quia manifesto erat $PR > PQ$, sed in ipso calculo nulla continetur ratio, quae praecipiat, vt potius PQ a PR quam vicissim PR a PQ subtrahamus, sicque non aduersante calculo potuissemus aequo iure eandem aream per $\int dx\,(PQ - PR)$ exprimere, quo pacto ea negatiua sed priori aequalis prodiitura fuisset. Ex quo perspicuum est signum $+$ vel $-$ non quantitatem

areae,

areae, quae quaeritur, afficere, et calculum pari iure ad vtrumque perducere posse. Quam ob causam superius dubium ita diluetur, vt dicamus aream quaesitam ita exprimi debere, vt sit $= \pm \int\int dt\,du\,(RV - ST)$, et vt area positiue expressa prodeat, quouis casu eo signo vtendum esse, quo $\pm(RV - ST)$ reddatur quantitas positiua.

29. Hinc etiam dubia, quae forte oriri possent circa inuentionem areae curuarum, quarum partes vtrinque ad axem sunt dispositae, et quibus tyrones saepe non parum turbari solent, facile resoluuntur. Si enim curuae QAR ad axem AP relatae area tota QAR abscissae $AP = x$ respondens definiri debeat, eiusque partes APQ et APR seorsim considerentur, certum est si altera APQ affirmatiue spectetur vt sit $= +Q$, alteram APR negatiue concipi debere, vt sit $= -R$. Neque tamen hinc sequitur aream totam QAR fore $= Q - R$, quippe quae euanesceret, si ambae partes APQ et APR essent aequales; sed perinde ac si ambo puncta Q et R ad eandem axis partem sita essent, area perpetuo est $= \pm \int dx\,(PR - PQ)$, vnde ob $\int PQ.\,dx = Q$ et $\int PR.\,dx = -R$, fit tota area $= \pm(Q + R)$, vti rei natura postulat. Tab. I. Fig. 6.

30. Ope autem talium substitutionum, quibus loco binarum variabilium x et y binae quaecunque aliae introducantur t et u saepe numero integrationes plurimum subleuari facilioresque reddi possunt,

 et

et quouis casu haud difficile est substitutiones maxime idoneas reperire. Veluti si area circuli EQHR ad axem CP relati definiri debeat, vbi ob $CF = f$, $FG = g$, $GQ = c$ erat $cc = (f-x)^2 + (g-y)^2$, poni conueniet

Tab. I. Fig. 5.

$$f - x = \frac{t}{\sqrt{(1+uu)}} \text{ et } g - y = \frac{tu}{\sqrt{(1+uu)}}$$

vt fiat $tt = cc$ et $t = c$. Tum vero ob

$$dx = \frac{-dt}{\sqrt{(1+uu)}} + \frac{tudu}{(1+uu)^{\frac{3}{2}}} \text{ et } dy = \frac{-udt}{\sqrt{(1+uu)}} - \frac{tdu}{(1+uu)^{\frac{3}{2}}}$$

loco $dx\,dy$ per §. 27. adipiscimur: $dt\,du\left(\frac{t}{(1+uu)^2} + \frac{tuu}{(1+uu)^2}\right) = \frac{tdtdu}{1+uu}$, cuius duplex integrale ita exprimatur; $\int \frac{du}{1+uu} \int t\,dt$. Iam vero est $\int t\,dt = \frac{1}{2}tt = \frac{1}{2}cc$, et area tota erit $\frac{1}{2}cc\int\frac{du}{1+uu}$, dum ipsi u omnes valores possibiles tribuuntur, quandoquidem u non amplius aequationem pro basi afficiebat.

31. Quo hunc vsum clarius explicemus, consideremus iterum sphaeram centrum C et radium $CA = a$ habentem, cuius portio basi circulari perpendiculariter insistens quaeri debeat. Quia radium CA per centrum huius circuli G ducere licet sit $FG = g = 0$, vt fiat $cc = (f-x)^2 + yy$, et solidum quaesitum $= \int\int dx\,dy\,\sqrt{(aa - xx - yy)}$ statuatur iam $x = \frac{t}{\sqrt{(1+uu)}}$ et $y = \frac{tu}{\sqrt{(1+uu)}}$, vt fiat $xx + yy = tt$, et $\sqrt{(aa-xx-yy)} = \sqrt{(aa-tt)}$, et pro $dx\,dy$ prodeat $\frac{tdtdu}{1+uu}$, ita vt soliditas quaesita ita exprimatur $\int\int \frac{tdtdu\sqrt{(aa-tt)}}{1+uu}$, quae integrationes deter-

determinari debebunt ex aequatione hinc pro figura basis oriunda: $cc = ff - \frac{2ft}{\sqrt{(1+uu)}} + tt$, vnde fit

$$\text{vel } t = \frac{f \pm \sqrt{(cc + ccuu - ffuu)}}{\sqrt{(1+uu)}}$$

$$\text{vel } \sqrt{(1+uu)} = \frac{2ft}{ff - cc + tt}.$$

32. Consideretur primo t vt constans, fietque integrale $= \int t\,dt\,\sqrt{(aa - tt)}$. A tang. u, vbi constantem adiici non est necesse quia euanescente u simul y euanescit, quaeramus enim primo solidum semicirculo insistens. At integrali hoc primo extenso ad terminum extremum, ob A tang. $u =$ A cos. $\frac{1}{\sqrt{(1+uu)}}$ fit id

$$\int t\,dt\,\sqrt{(aa - tt)}.\ \text{A cos.}\ \frac{ff - cc + tt}{2ft}$$

cuius integrationis limites sunt $t = f - c$ et $t = f + c$. Si non soliditatem huius portionis sphaerae, sed eius superficiem basi quasi imminentem definire voluissemus peruenturi fuissemus ad hanc formulam

$$\int \frac{a\,t\,dt}{\sqrt{(aa - tt)}}\ \text{A cos.}\ \frac{ff - cc + tt}{2ft}$$

at operae pretium non videtur eius integrationem fusius prosequi.

33. Methodus autem huiusmodi formulas integrales duplicatas tractandi haud parum illustrabitur si eam ad problema illud quondam famosum Florentinum accommodemus, quo in superficie sphaerica portio geometrice assignabilis requirebatur, cuius superficies algebraice exprimi possit. Immineat talis sphae- Tab. I. Fig. 4.

ſphaerae portio curuae GRH cuius propterea figura eſt determinanda: in qua ſi ponatur $CP = x$ $PR = y$, ſuperficies ſphaerae imminens hac formula integrali duplicata exprimitur $\int\int \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$ Iam nulla ſubſtitutione adhibita, ſi primo x pro conſtante habeatur, prodibit $\int a\,dx\, \mathrm{A\,ſin.} \frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}}$, qua portio ſphaerae aream indefinitam CPRG tegens exprimitur; et quaeſtio nunc huc redit, vt eiusmodi aequatio algebraica inter x et y aſſignetur, vnde pro tota area C'H R'G portio ſuperficiei ſphaericae ei reſpondentis fiat algebraice aſſignabilis.

34. Ponamus breuitatis gratia $\frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}} = v$, vt ſit $y = v\sqrt{(aa - xx)}$, ac poſito $x = 0$ fiat $v = n$: quoniam ſuperius integrale euaneſcere debet poſito $x = 0$: Erit ergo ſuperficies ſphaerica aream indefinitam CPRG tegens $= ax\,\mathrm{A\,ſin.}\,v - a\int \frac{x\,dv}{\sqrt{(1 - vv)}}$. ſumto hoc integrali ita vt euaneſcat poſito $x = 0$. Statuatur nunc $\int \frac{x\,dv}{\sqrt{(1 - vv)}} = f\,\mathrm{A\,ſin.}\,v - aV$, denotante V functionem quamcunque algebraicam ipſius V, quae abeat in N poſito $x = 0$, eritque ſuperficies noſtra $= ax\,\mathrm{A\,ſin.}\,v - af\,\mathrm{A\,ſin.}\,v + aaV + fa\,\mathrm{A\,ſin.}\,n - aaN$, atque x per v ita determinabitur, vt ſit.

$$x = f - \frac{a\,dV\sqrt{(1 - vv)}}{dv}$$

ſit iam $CH = b$, ac ponatur $x = b$, quo caſu fiat $v = m$ et $V = M$, et cum ſuperficies propoſita ſit

$$ab\,\mathrm{A\,ſin.}\,m - af\,\mathrm{A\,ſin.}\,m + aaM + af\,\mathrm{A\,ſin.}\,n - aaN$$

ea

ea algebraica esse nequit nisi sit

$$h\,A\,\text{fin.}\,m - f\,A\,\text{fin.}\,m + f\,A\,\text{fin.}\,n = 0$$

35. Hic igitur primo arcus quorum finus sunt m et n inter se commensurabiles reddi debent, nisi forte sit $n = 0$, quo casu sufficit fieri $h = f$. Quod etsi facile infinitis modis praestari potest: tamen hoc problema multo facilius adhibendis substitutionibus ante expositis resoluetur. Ponatur ergo $x = \frac{t}{\sqrt{(1+uu)}}$ et $y = \frac{tu}{\sqrt{(1+uu)}}$, vt fiat $xx+yy=tt$, et pro $dx\,dy$ prodeat $\frac{t\,dt\,du}{1+uu}$, atque superficies portionis sphaericae hac formula integrali duplicata exprimetur. $\int\int\frac{a\,t\,dt\,du}{(1+uu)\sqrt{(aa-tt)}}$. Sumatur primo u constans erit ea $=\int\frac{a\,du}{1+uu}(b-\sqrt{(aa-tt)})$ quae iam facile absolute integrabilis reddi potest: ponatur enim aequalis functioni algebraicae cuicunque ipsius u quae sit $= V$ eritque $b-\sqrt{(aa-tt)}=\frac{dV(1+uu)}{a\,du}$, et portio superficiei sphaericae adeo indefinita erit $= V$, vbi pro V functionem algebraicam quamcunque ipsius u accipere licet.

36. Simplicissimae solutiones deducentur ex hac hypothesi $V = \frac{a(\alpha+\beta u)}{\sqrt{(1+uu)}}$, vnde fit $\frac{dV}{a\,du}$ $=\frac{-\alpha u+\beta}{(1+uu)^{\frac{3}{2}}}$ hincque

$$b-\sqrt{(aa-tt)}=\frac{\beta-\alpha u}{\sqrt{(1+uu)}}.$$

Ponatur

39. Tota ergo curua in quadrante descripta figuram habebit ERFGC, et ducta in ea ex C recta vtcunque CR, angulique ECR tangens sit $= u$, tum portio superficiei sphaericae sectori ECR imminens algebraice poterit assignari, eritque ea $= \frac{1}{2}aau$. Quare si CR ad occursum cum tangente AT producatur, ob AT $= au$ ea portio praecise aequabitur triangulo CAT: et portio imminens sectori ECF erit $= \frac{1}{2}aa$, si autem angulus ECR maior semirecto sumatur, vt sit $u > 1$, quia tum $\sqrt{(aa-tt)} = \sqrt{(aa-xx-yy)}$ quae est eleuatio superficiei sphaericae supra quadrantem, fit negatiua, superficies in inferiori octante capi debet. Quodsi huius curuae aequationem inter coordinatas $CP = x$ et $PR = y$ desideremus ob $tt = xx+yy$ et $u = \frac{y}{x}$, habebimus:

$$4xx+4yy = aa\left(3+\frac{2yy}{xx}-\frac{y^4}{x^4}\right) = \frac{aa(xx+yy)(3xx-yy)}{x^4}$$

quae diuisa per $xx+yy$ praebet:

$$4x^4 = 3aaxx-aayy \text{ seu } yy = 3xx-\frac{4x^4}{aa}.$$

40. Hanc solutionem reddere possumus generaliorem ponendo $V = abu$, fietque $a-\sqrt{(aa-tt)} = b(1+uu)$ hinc $\sqrt{(aa-tt)} = a-b-buu$, ergo

$$tt = 2ab-bb+2(a-b)buu-bbu^4 = (1+uu)(2ab-bb-bbuu).$$

Qua ad coordinatas orthogonales translata, diuisio per $xx+yy$ iterum succedet, fietque

$$x^4 = (2ab-bb)xx-bbyy \text{ seu } y = \frac{x}{b}\sqrt{(2ab-bb-xx)}$$

ac

ac portio superficiei sphaericae sectori ECR huius curuae imminens erit $= \frac{a\delta y}{x} = b.AT$: quae expressio locum habet, quamdiu $uu < \frac{a-b}{b}$; hoc est donec anguli ECR tangens fiat $= \sqrt{\frac{a-b}{b}}$, vbi fit $t = a$. Tum vero angulo ECR vltra aucto perpendiculares super curua erectae ad hemisphaerium inferius protendi debent, quo casu superficies eo magis augetur. Si ergo fit $b = a$ quia $\sqrt{(aa-tt)}$ vbique fit quantitas negatiua, quantitas $b.AT$ portionem sphaericae superficiei ad inferius hemisphaerium continuatae exprimit.

41. Sit adhuc $b = a$, ac ponatur $V = \frac{a^2(\alpha+\beta u)}{\sqrt{(1+uu)}} - \alpha a^2$ vt *superficies assignanda euanescat posito* $u = 0$, eritque

$$a - \sqrt{(aa-tt)} = \frac{a(\beta-\alpha u)}{\sqrt{(1+uu)}} \text{ et } \sqrt{(aa-tt)} = a - \frac{a(\beta-\alpha u)}{\sqrt{(1+uu)}}$$

vbi notandum est, si haec expressio fiat negatiua, ibi in hemisphaerium inferius descendi. Ex his autem prodit

$$\frac{tt}{aa} = \frac{2(\beta-\alpha u)}{\sqrt{(1+uu)}} - \frac{(\beta-\alpha u)^2}{1+uu}.$$

Quare euanescente angulo ECR cuius tangens $= u$, erit $\frac{tt}{aa} = 2\beta - \beta\beta$, at si $u = \frac{\beta}{\alpha}$, euanescit t. Pro altera parte axis CA fit u negatiuum, ac posito $u = -v$ habetur superficies negatiue expressa $V = \frac{aa(\alpha-\beta v)}{\sqrt{(1+vv)}} - \alpha a^2$ et curua hac definietur aequatione

$$\frac{tt}{aa} = \frac{2(\beta+\alpha v)}{\sqrt{(1+vv)}} - \frac{(\beta+\alpha v)^2}{1+vv}$$

 vnde

vnde posito v infinito prodit $\frac{tt}{aa} = 2\alpha - \alpha\alpha$; vbi recta CR fit in curuam normalis, quod etiam euenit, vbi $v = \frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{tt}{aa} = 2\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)} - \alpha\alpha - \beta\beta$. Quare ne fiat t imaginarium oportet sit $\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)} < 2$.

42. Consideremus casum quo $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vt sit superficies $V = aa\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1+u}{\sqrt{2(1+uu)}}\right)$ et

$$\frac{tt}{aa} = \frac{2(1+u)}{\sqrt{2(1+uu)}} - \frac{(1+u)^2}{2(1+uu)}.$$

vbi patet si $u = -1$ fore $t = 0$; tum vero vt sequitur:

si $u = 0$; si $u = 1$; si $u = 7$; si $u = \infty$
erit $t = a\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}$; $t = a$; $t = a\sqrt{\frac{24}{25}}$; $t = a\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}$

vbi notandum casibus $u = 1$ et $u = \infty$ rectam CR fore in curuam normalem. In hoc ergo quadrante curua nostra fere cum quadrante confunditur, cum vbique sit proxime $t = a$: cui portio superficiei sphaericae imminens erit $= aa\sqrt{2}$, quae deficit a superficie totius octantis, quae est $\frac{\pi}{2}aa$ parte satis parua $aa(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}) = 0,15658\,aa$. Ad alteram axis CA partem haec curua in centrum incidit vbi tangens cum CA faciet angulum semirectum.

43. Verum solutio §. 35. data multo magis amplificari potest, cum enim superficies sphaerae assignanda hac formula exprimatur $\int\frac{a\,du}{1+uu}\int\frac{t\,dt}{\sqrt{(aa-tt)}}$, et in integratione $\int\frac{t\,dt}{\sqrt{(aa-tt)}}$ quantitas u vt constans consideretur, integrale ita exhiberi poterit $U - \sqrt{(aa-tt)}$, denotante U functionem quamcunque ipsius u, quae formu-

formula quoniam euanescit si $\sqrt{(aa-tt)}=U$ et $t=\sqrt{(aa-UU)}$, ab hoc termino quantitas t vlterius protendi est concipienda. Denotet iam V aliam quamcunque functionem ipsius u, quae abeat in C posito $u=0$, ac ponatur superficies

$$\int \frac{a\,du}{1+uu}(U-\sqrt{(aa-tt)})=aV-aC$$

eritque hinc $U-\sqrt{(aa-tt)}=\frac{dV(1+uu)}{du}$

ideoque $\sqrt{(aa-tt)}=U-\frac{dV(1+uu)}{du}$

vnde alter terminus ipsius t definitur.

44. Hinc igitur solutio problematis Florentini ita generalissime adornabitur. Constituto quadrante circuli ACB, cui octans sphaerae insistat, radio CA existente $=a$, ductoque radio quocunque C S, vocetur anguli A C S tangens $=u$; tum primo curva E Q G ita construatur vt sit $CQ=\sqrt{(aa-UU)}$, et perpendiculum ex Q ad sphaericam vsque superficiem erectum $QM=U$, denotante U functionem quamcunque algebraicam ipsius u. Si $u=0$ abeat C Q in C E, et Q M in E I. Deinde alia describatur curua F R H, vt sit Tab. II. Fig. 9.

$$CR=\sqrt{(aa-(U-\frac{dV(1+uu)}{du})^2)}$$

et perpendiculum ex R ad sphaeram vsque pertingens

$$RN=U-\frac{dV(1+uu)}{du}$$

denotante V aliam quamcunque functionem algebraicam ipsius u, quae abeat in C si $u=0$; quo casu simul C R in C F et R N in F K abeat. Iam his duabus curuis constructis portio superficiei sphaeri-

 cae

cae areae EQRF imminens et intra terminos I, K, M, N contenta, algebraice exprimetur eritque $= a(V - C)$.

45. Haec de natura formularum integralium duplicatarum commentandi occasionem praebuit problema aeque elegans atque vtile in analysi, si quidem eius solutionem euoluere liceret. Quaerebatur scilicet inter omnia corpora eiusdem soliditatis id, quod minima superficie contineretur: quod quidem ad ternas coordinatas orthogonales x, y et z relatum, posito $dz = p\,dx + q\,dy$ ita analytice exprimitur, vt inter omnes relationes harum trium variabilium, quae eandem quantitatem huius formulae integralis duplicatae $\int\int z\,dx\,dy$ contineant, ea definiatur cui minima quantitas huius $\int\int dx\,dy\,\surd(1+pp+qq)$ respondeat. Quod problema si per theoriam variationum aggrediamur, effici oportebit vt fiat

$$a\delta\int\int dx\,dy\,\surd(1+pp+qq) = \delta\int\int z\,dx\,dy$$

ita vt totum negotium ad variationes huiusmodi formularum integralium duplicatarum indagandas reducatur.

46. Quoniam vtraque formula duplicem integrationem exigit, si in priori x pro constante habeatur, nostra aequatio ita repraesentabitur:

$$a\delta\int dx\int dy\,\surd(1+pp+qq) = \delta\int dx\int z\,dy$$

Verum hic probe animaduertendum est, postquam integralia $\int dy\,\surd(1+pp+qq)$ et $\int z\,dy$ fuerint inuenta tum variabilem y non amplius indefinitam

seu

ſeu ab x non pendentem relinqui, quin potius pro y certam functionem ipſius x quam figura corporis exigit, ſubſtitui oportere, ita vt in ſecunda integratione quantitas y non vt conſtans ſeu ab x non pendens ſpectari queat. Quia autem ob figuram corporis etiamnunc incognitam iſta functio non conſtat, neutiquam apparet, quomodo variationes iſtiusmodi formularum duplicatarum determinari debeant.

47. Ipſa vero huius quaeſtionis natura alias praeterea determinationes requirere videtur, quarum ratio in ſolutione haberi debeat. Nam quemadmodum ſi curua quaeritur, quae inter omnes alias eandem aream includentes breuiſſimo arcu contineatur: non ſolum baſis AP ſed etiam duo puncta B et M, per quae curua tranſeat, praeſcribi ſolent, ita etiam in noſtro problemate non modo baſis, cui corpus tanquam columna inſiſtat pro cognita aſſumi debere videtur, ſed etiam ipſi extremi termini ſuperficiei quaeſitae. Quodſi enim hae res non praeſcribantur omnes, ne quaeſtioni quidem certae locus relinquitur: nam etiamſi baſis praeſcriberetur, termini vero ſupremi ſuperficiei arbitrio noſtro relinquerentur manifeſtum eſt, quo altior fuerit columna eo magis ſoliditatem auctum iri eadem manente ſuperficie ſuprema; quandoquidem ſuperficies laterum non in computum ducitur. Multo minus autem problema ſine baſis praeſcriptione vllam vim retineret, quoniam baſi coarctanda quantumuis magna ſoliditas cum minima ſuperficie poſſet eſſe coniuncta. Tab. II. Fig. 10.

EVO-

EVOLVTIO
INSIGNIS PARADOXI
CIRCA AEQVALITATEM SVPERFICIERVM.

Auctore

L. EVLERO.

In doctrina linearum curuarum, si proponatur quantitas, cui arcus cuique abscissae indefinitae respondens aequalis esse debeat, linea curua inde ita determinatur vt plus vna *problemati satisfacere* neutiquam possit. Veluti si pro coordinatis orthogonalibus x et y, quarum illa x abscissam haec y applicatam denotet, eiusmodi *linea* curua quaeratur, cuius arcus abscissae x conueniens aequetur eiusdem functioni cuicunque X, problema perfecte determinatur, atque nonnisi vnicam lineam curuam admittit. Cum enim statui oporteat, $\surd(dx^2+dy^2)=dX$, posito $dX=Pdx$, vbi P itidem erit functio data ipsius x, fiet $dy=dx\surd(PP-1)$ cuius formulae integratio aequationem determinatam pro linea curua quaesita suppeditabit, siquidem constans per integrationem inuecta naturam curuae non afficit, sed tantum eius ab axe distantiam definit. Ita proposita linea curua quacunque praeter eam nulla datur alia, ipsi ita longitudine aequalis, vt arcus omnibus

bus abſciſſis reſpondentes ſint aequales. Quae enim a Geometris de aequalitate linearum curuarum paſſim ſunt inueſtigata, haec aequalitas non ad omnes arcus eidem abſciſſae reſpondentes extenditur; ſed pro vna tantum determinata abſciſſa ſeu etiam pluribus, nequaquam autem omnibus locum habere poteſt. Ex quo perſpicuum eſt non dari duas lineas curuas diuerſas, quae ad eundem axem relatae pro omnibus abſciſſis habeant arcus inter ſe aequales.

Haec ideo praemonenda duxi, quo clarius inſigne diſcrimen, quod inter lineas curuas et ſuperficies intercedit, perſpici poſſit. Cum enim ſuperficies *perinde ad planum* quoddam fixum ac lineae curuae ad axem rectilineum fixum referri earumque portiones cuique ſpatio in illo plano aſſumto imminentes indagari ſoleant; etiamſi hic pro quouis ſpatio quantitas ſuperficiei imminentis proponatur, inde tamen natura ſuperficiei neutiquam determinatur, ſed ſemper innumerabiles ſuperficies diuerſae exhiberi poſſunt, quarum portiones cuique ſpatio plani fixi imminentes ſint inter ſe aequales. Quae circumſtantia a natura linearum tantopere diſcrepans eo magis omni attentione digna videtur, quod inſigne paradoxon in doctrina ſolidorum complectitur. Ita ſuper baſi circulari hemiſphaerio conſtituto, ſuper eadem baſi innumerabilia alia ſolida exſtrui poſſe omnino mirum videbitur, quorum non ſolum tota ſuperficies aequalis ſit ſuperficiei hemisphaerii, sed etiam quorum superficies cuique portioni indefinitae basis imminens superficiei sphaericae eidem imminenti sit aequalis. Quin etiam si basi aliud planum oblique immineat, cuius proinde quaelibet portio ad basin cui imminet datam teneat rationem, infinita alia solida seu superficies siue conuexae siue concauae assignari possunt, quarum portiones quaeuis indefinitae ad basin cui imminent, eandem teneant rationem. Hoc igitur insigne paradoxon in Theoria solidorum hic accuratius examini subiicere constitui, cum inde haud leuia incrementa tam in ipsam hanc Theoriam quam in analysin redundatura videantur.

Primum ergo veritatem huius paradoxi euicturus, determinetur puncti cuiusuis superficiei situs ternis coordinatis orthogonalibus x, y, z, quarum binae priores sitae sint in plano fixo, tertia vero z illius puncti ab hoc plano distantiam exprimat. Cum iam natura superficiei aequatione inter has ternas coordinatas contineatur, ex ea valor ipsius z eliciatur, qui differentiatus praebeat $dz = pdx + qdy$; quo facto constat elementum superficiei hac formula $dxdy\sqrt{(1+pp+qq)}$ exprimi, imminet autem hoc elementum rectangulo infinite paruo baseos differentialibus dx et dy formato. Quodsi iam alia habeatur superficies, ex cuius aequatione inter easdem ternas coordinatas x, y et z prodeat $dz = rdx + sdy$, elementum huius superficiei eidem rectangulo

gulo $dx\,dy$ imminens erit $dx\,dy\sqrt{(1+rr+ss)}$; vnde manifeſtum eſt, ſi fuerit $rr+ss=pp+qq$, hoc illi fore aequale; et cum haec aequalitas in omnibus elementis locum habeat, etiam cuique ſpatio finito in plano fixo ſeu baſi aſſumto aequa portio vtriusque ſuperficiei imminebit. Verum quaeſtio ſupereſt principalis, vtrum haec aequalitas $rr+ss=pp+qq$ ſubſiſtere poſſit, quin ſimul ſit $r=p$ et $s=q$, vnde eadem ſuperficies prodiret; namque huic principali conditioni ſatisfieri oportet, vt formula $r\,dx+s\,dy$ integrationem admittat, quod an praeter caſum $r=p$ et $s=q$ fieri poſſit non tam *facile liquet*. Omnis autem dubitatio *vnico* exemplo euaneſcet quo eſt $p=\frac{x}{a}$ et $q=\frac{y}{a}$, vt ſit $z=\frac{xx+yy}{2a}$ ſi enim pro altera ſuperficie capiatur $r=\frac{y}{a}$ et $s=\frac{x}{a}$, vnde vtique fit $rr+ss=pp+qq$, eius aequatio erit $z=\frac{xy}{a}$. En ergo duas ſuperficies prorſus diuerſas, alteram hac aequatione $2az=xx+yy$ alteram vero hac $az=xy$ contentam, quae ita inter ſe conueniunt, vt omnibus ſpatiis in baſi aſſumtis in vtraque pares ſuperficiei portiones immineant. Huiusmodi ſuperficies congruentes appellabo, vnde naſcitur haec quaeſtio maxime curioſa, quomodo propoſita quacunque ſuperficie, alias atque adeo omnes ei congruentes inveſtigari oporteat. Quod problema latiſſimo ſenſu acceptum cum ſit difficillimum, caſus quos mihi quidem euoluere licuit, in ſequentibus problematibus complectar.

 Proble-

Problema I.

1. Si ſuperficies data fuerit plana ad baſin ſeu planum fixum vtcunque inclinata, inuenire omnes alias ſuperficies ipſi congruentes.

Solutio.

Cum ſuperficies data ſit plana eius natura tali aequatione exprimitur $z = a + mx + ny$, quae ad baſin inclinatur angulo, cuius ſecans eſt $\sqrt{(1 + mm + nn)}$. Hic ergo ob $dz = m\,dx + n\,dy$ eſt $p = m$ et $q = n$, ideoque $pp + qq$ conſtans. Statuatur ergo $r = \alpha \operatorname{cof.} \omega$ et $s = \alpha \operatorname{fin.} \omega$ exiſtente $\alpha = \sqrt{(mm + nn)}$, ac neceſſe eſt angulum eo ita per binas coordinatas in baſi aſſumtas x et y definiri vt formula $dz = \alpha\,dx \operatorname{cof.} \omega + \alpha\,dy \operatorname{fin.} \omega$ integrabilis euadat. Cum igitur per transformationem fiat

$$z = \alpha(x \operatorname{cof.} \omega + y \operatorname{fin.} \omega) + \alpha \int d\omega (x \operatorname{fin.} \omega - y \operatorname{cof.} \omega)$$

euidens eſt huic conditioni ſatisfieri, ſi fuerit $x \operatorname{fin.} \omega - y \operatorname{cof.} \omega$ functio quaecunque anguli ω. Denotet ergo in genere Ω functionem quamcunque anguli ω, ac ſtatuatur

$$x \operatorname{fin.} \omega - y \operatorname{cof.} \omega = a\Omega \text{ eritque } z = \alpha(x \operatorname{cof.} \omega + y \operatorname{fin.} \omega + a \int \Omega\, d\omega)$$

vbi notandum eſt litteram $\alpha = \sqrt{(mm + nn)}$ denotare tangentem anguli, quem planum propoſitum facit cum baſi.

Coroll.

Coroll. 1.

2. Primum ergo patet si planum propositum basi sit parallelum, ideoque $\alpha = 0$, fore etiam $z = 0$, seu $z =$ const. ita vt omnes superficies congruentes sint etiam planae basi parallelae; quod quidem per se est manifestum, cum tale planum sit minimum, quod cuique basis portioni imminere possit, neque propterea aliud detur ipsi aequale.

Coroll. 2.

3. Sin autem planum propositum basi non sit parallelum neque etiam perpendiculare, ita vt α valorem quemcunque finitum obtineat, tum vtique innumerabiles aliae superficies congruentes assignari possunt: cum functio Ω penitus ab arbitrio nostro pendeat.

Coroll. 3.

4. Quoniam formula $d\omega(x \sin.\omega - y \cos.\omega)$ integrabilis esse debet. haec conditio etiam impletur, si fuerit $d\omega = 0$, ideoque angulus ω constans; Sit ergo $\omega = \zeta$; fietque $z = \alpha(x \cos.\zeta + y \sin.\zeta) +$ const. quae est aequatio pro plano ad basin aeque inclinato ac propositum: ratione autem intersectionis vtrumque ab eo discrepare potest.

Exemplum 1.

5. Pro superficiebus autem diuersis inueniendis sit primo $\int \Omega\, d\omega = 0$, hincque $\Omega = 0$: et ob

 x sin.

x ſin. $\omega = y$ coſ. ω fiet ſin. $\omega = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}}$ et coſ. $\omega = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$, vnde aequatio pro ſuperficie prodit: $z = \alpha \sqrt{(xx+yy)}$, quae eſt ad ſuperficiem conicam, cuius axis baſi perpendiculariter inſiſtit, latus vero inclinatur angulo cuius tangens eſt $= \alpha$. Cum enim hic omnia plana tangentia ad baſin ſub eodem angulo inclinentur, ratio congruentiae eſt manifeſta.

Exemplum 2.

6. Sit $a\Omega = b$ ſin. $\omega +$ coſ. ω erit $a\int \Omega d\omega = a - b$ coſ. $\omega + c$ ſin ω. Fit ergo x ſin. $\omega - y$ coſ. $\omega = b$ ſin. $\omega + c$.coſ. ω, hinc: $\frac{\text{ſin.}\omega}{\text{co{ſ}.}\omega} = \frac{y+c}{x-b}$ atque ſin. $\omega = \frac{y+c}{\sqrt{(x-b)^2+(y+c)^2}}$ et coſ. $\omega = \frac{x-b}{\sqrt{((x-b)^2+(y+c)^2}}$ vnde colligitur.

$$z = \alpha(\sqrt{((x-b)^2+(y+c)^2)}+a)$$

quae eſt pro ſimili cono reſpectu baſis vtcunque aliter conſtituto, ita tamen vt eius axis baſi perpendiculariter inſiſtat.

Exemplum 3.

Tab. III. Fig. I. 7. Plano baſis in ipſa tabula aſſumto, ſit recta AX axis abſciſſarum x, et XY $= y$; iuncta AB ipſi AX normali ſumatur angulus BAM $= \omega$, et deſcripta curua quacunque EM, exprimat radius AM eam functionem ipſius, ω quam per $a\Omega$ indicaui. Ad hanc AM cadat recta YM normaliter et ob angulum ATM $= \omega$, fiet AM $= x$ ſin. $\omega - y$ coſ ω,

pror-

prorſus vt ſolutio inuenta poſtulat. Tum vero erit $MY = x \cos. \omega + y \sin. \omega$. Porro radio AM iungatur normaliter recta $MV = \int AM. d\omega$ eritque $z = \alpha (YM + MV) = \alpha. YV$: ſcilicet in puncto baſis Y erigi debet perpendicularis aequalis ipſi $\alpha. YV$ eaque pertinget ad ſuperficiem quaeſitam. Vel ſi ſuper recta VY perpendiculariter conſtituatur angulus cuius tangens $= \alpha$, vertice in ipſo puncto V exiſtente, latus ſurſum vergens totum ſitum erit in ſuperficie quaeſita. Simili modo ſi ſuper alia quacunque recta $v m O$ conſtituatur planum ad baſin normale, in eoque ex v ducatur recta cum $v O$ faciens angulum, cuius tangens $= \alpha$, etiam haec *recta tota* in ſuperficiem quaeſitam cadet ſicque tota ſuperficies facile determinabitur.

Scholion.

8. Conſtructio haec attentius conſiderari meretur. Primo igitur curua EMm circa punctum A pro arbitrio eſt deſcripta, et rectae cuique ceu radio AM normaliter iuncta eſt recta MY, in qua vltra M producta capi debet $MV = \int AM. d\omega$, atque ex puncto V facile educitur recta, quae tota in ſuperficiem quaeſitam incidit. Hic animaduerto ſi radius Am ipſi AM ſit proximus, ideoque ang. $MAm = d\omega$, fore rectam $mv = MV + AM. d\omega$. at eſt $M\mu = AM. d\omega$, hincque $mv = \mu V$. Quod ſi ergo recta vm priorem VM ſecet in O erit elementum Vv arculus circularis centro O deſcriptus. Hinc

Hinc loco curuae E M pro arbitrio describi potest curua $V v$, ad quam sufficit in singulis punctis V, v normaliter eduxisse rectas $V O$, $v o$, super quibus deinceps angulos, quorum tangens $= \alpha$, erigi oportet. Hinc ergo colligitur sequens facillima constructio.

Constructio omnium superficierum planae congruentium.

9. Super plano pro basi assumto describatur pro lubitu linea curua quaecunque B P F, ad cuius singula puncta P in plano basis ducantur normales P Q Y, euolutam illius curuae C Q G *tangentes in* Q. Ad punctum autem Q basi normaliter insistat recta Q S, vt sit $QS = \alpha PQ$, tum recta P S tota erit sita in superficie quaesita. Haec. ergo constructio adhuc breuius ita enunciari potest:

Descripta in plano pro basi assumto ad lubitum curua quacunque B P F, ad eius singula puncta P extra basin educantur rectae et ad hanc curuam normales et ad ipsam basin inclinatae sub angulo cuius tangens $= \alpha$ tum omnes istae rectae in infinitum productae totae erunt sitae in superficie congruente, ideoque eam determinabunt.

Ratio huius constructionis etiam per se est euidens, cum enim omnes rectae S P in superficiem inventam cadant eoque in curua B P F terminentur, etiam

etiam omnia plana tangentia hanc curuam tangent, ideoque ad basin sub angulo cuius tangens $= \alpha$ inclinantur vnde superficiei portiuncula baseos elemento $dx\,dy$ imminens erit $= dx\,dy\sqrt{(1+\alpha\alpha)}$.

Scholion.

10. Imprimis autem hic notasse iuuabit hanc constructionem latissime patere, cum descriptio curuae BPF prorsus ab arbitrio nostro pendeat, quod ita est interpretandum, vt pro ea non solum curuas regulares aequatione quapiam contentas siue algebraicas siue transcendentes accipere liceat, sed etiam ex pluribus partibus diuersarum linearum *vtcunque compositas*, quin etiam lineas libero manus ductu vtcunque descriptas. Ita si eius loco perimeter trianguli accipiatur, prodibit superficies pyramidis: *circulus autem* semper dat superficiem conicam.

Problema 2.

11. Si superficies data hac aequatione $2az = xx + yy$ exprimatur, inuenire omnes superficies alias illi congruentes.

Solutio.

Cum pro superficie data sit $adz = xdx + ydy$, ponatur pro quaesitis $adz = rdx + sdy$, atque necesse est sit $rr + ss = xx + yy$, vnde eiusmodi valores pro r et s elici oportet, vt formula

 rdx

$r\,dx + s\,dy$ integrationem admittat. Ac casus quidem statim obuii sunt primo $r = y$ et $s = x$, vnde oritur $az = xy$, deinde $r = x$ et $s = -y$, vnde fit $2az = xx - yy$ quae autem a priori non est diuersa, dum mutando binarum x et y in basi directionem similem recipiunt formam; ac generaliter quidem ponendo $x = X\,\text{cos}.\,\zeta - Y\,\text{sin}.\,\zeta$ et $y = X\,\text{sin}.\,\zeta + Y\,\text{cos}.\,\zeta$, prior dat

$$az = XX\,\text{sin}.\,\zeta\,\text{cos}.\,\zeta + XY(\text{cos}.\,\zeta^2 - \text{sin}\,\zeta^2) - YY\,\text{sin}.\,\zeta\,\text{cos}.\,\zeta \text{ seu}$$

$$2az = XX\,\text{sin}.\,2\zeta + 2XY\,\text{cos}.\,2\zeta - YY\,\text{sin}.\,2\zeta$$

quae sumto angulo 2ζ recto manifesto in formam posteriorem abit. Vt autem alias superficies eliciamus, statuamus $rr = xx + 2v$ et $ss = yy - 2v$. Hinc cum sit $az = \int r\,dx + \int s\,dy$

habebimus

$$\int r\,dx = \int dx\sqrt{(xx+2v)} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(xx+2v)} + vl(x+\sqrt{(xx+2v)}) - \int dv\,l(x+\sqrt{(xx+2v)})$$

$$\int s\,dy = \int dy\sqrt{(yy-2v)} = \tfrac{1}{2}y\sqrt{(yy-2v)} - vl(y+\sqrt{(yy-2v)}) + \int dv\,l(y+\sqrt{(yy-2v)})$$

quare vt summa fiat integrabilis, sumi oportet pro $l\frac{y+\sqrt{(yy-2v)}}{x+\sqrt{(xx+2v)}}$ functionem quampiam ipsius v quae sit lV, eritque $az = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(xx+2v)} + \tfrac{1}{2}y\sqrt{(yy-2v)} - vlV + \int dv\,lV$ existente $\frac{y+\sqrt{(yy-2v)}}{x+\sqrt{(xx+2v)}} = V$, sicque introducendo nouam variabilem v, eiusque functionem quamcunque assumendo ad quoduis basis punctum perpendiculum erigi potest vsque ad superficiem

ciem quaesitam pertingens. Notandum autem est esse $-vlV+\int dvlV=-\int\frac{v\,dV}{V}$, ita vt logarithmus ex calculo egrediatur. Verum hic ingens incommodum occurrit, quod relatio inter x, y et v nimis difficulter expediatur; ex quo aliam solutionem adiungo.

Alia Solutio.

12. Cum esse debeat $rr+ss=xx+yy$ statuamus:

$x=v\,\text{cos}.\Phi$, $y=v\,\text{sin}.\Phi$, $r=v\,\text{cos}.\omega$ et $s=v\,\text{sin}.\omega$ eritque $dx=dv\,\text{cos}\Phi-vd\Phi\,\text{sin}.\Phi$ et $dy=dv\,\text{sin}.\Phi+vd\Phi\,\text{cos}.\Phi$ hincque $adz=vdv\,\text{cos}.(\Phi-\omega)-vvd\Phi\,\text{sin}.(\Phi-\omega)$. Iam cum sit $\int vdv\,\text{cos}.(\Phi-\omega)=\frac{1}{2}vv\,\text{cos}.(\Phi-\omega)+\frac{1}{2}\int vv(d\Phi-d\omega)\,\text{sin}.(\Phi-\omega)$ erit $az=\frac{1}{2}vv\,\text{cos}.(\Phi-\omega)-\frac{1}{2}\int vv(d\Phi+d\omega)\,\text{sin}.(\Phi-\omega)$ quod vltimum membrum integrabile esse nequit, nisi sit $vv\,\text{sin}.(\Phi-\omega)$ functio anguli $\Phi+\omega$. Statuo ergo secundum signandi modum iam passim receptum, $vv\,\text{sin}.(\Phi-\omega)=F':(\Phi+\omega)$, vt fiat

$$2az=vv\,\text{cos}.(\Phi-\omega)-F:(\Phi+\omega)$$

existente $d.F:(\Phi+\omega)=(d\Phi+d\omega)F':(\Phi+\omega)$.

Vel introducantur alii bini anguli μ et ν vt sit $\Phi=\frac{\mu+\nu}{2}$ et $\omega=\frac{\mu-\nu}{2}$, hincque habebitur

$$v=\sqrt{\frac{F':\mu}{\text{sin}.\nu}};\quad x=v\,\text{cos}.\Phi,\ y=v\,\text{sin}.\Phi \text{ tandemque}$$

$$2az=\frac{F'.\mu}{\text{tang}.\nu}-F:\mu$$

 quae

quae solutio multo est simplicior; nihilo tamen minus tertiam subiungo.

Solutio tertia.

13. Cum esse debeat $rr + ss = xx + yy$, ponatur

$$r = x \operatorname{cos.} \omega + y \operatorname{sin.} \omega \quad \text{et} \quad s = x \operatorname{sin.} \omega - y \operatorname{cos.} \omega$$

eritque $adz = xdx \operatorname{cos.} \omega + (ydx + xdy) \operatorname{sin.} \omega - ydy \operatorname{cos.} \omega$ ideoque

$$az = \tfrac{1}{2} xx \operatorname{cos.} \omega - \tfrac{1}{2} yy \operatorname{cos.} \omega + xy \operatorname{sin.} \omega - \int d\omega (xy \operatorname{cos.} \omega - \tfrac{1}{2}(xx - yy) \operatorname{sin.} \omega).$$

Sit itaque Ω functio quaecunque anguli ω, statuaturque $2xy \operatorname{cos.} \omega - (xx - yy) \operatorname{sin.} \omega = \Omega$ eritque

$$2az = (xx - yy) \operatorname{cos.} \omega + 2xy \operatorname{sin.} \omega - \int \Omega d\omega$$

quae solutio praecedentes simplicitate multum superat.

Coroll. 1.

14. Si in hac vltima solutione ponatur $x = v \operatorname{cos.} \Phi$ et $y = v \operatorname{sin.} \Phi$ erit $xx - yy = vv \operatorname{cos.} 2\Phi$ et $2xy = vv \operatorname{sin.} 2\Phi$; ex quo solutio ita his duabus aequationibus erit contenta

$$vv \operatorname{sin.} (2\Phi - \omega) = \Omega \quad \text{et} \quad 2az = vv \operatorname{cos.} (2\Phi - \omega) - \int \Omega d\omega$$

vbi pro Ω functio quaecunque anguli ω accipi potest.

Coroll. 2.

15. Casus euolutu facillimus habetur ponendo $\Omega = A \operatorname{cos.} \omega + B \operatorname{sin.} \omega$ vnde fit $\int \Omega d\omega = A \operatorname{sin.} \omega - B \operatorname{cos.}$

$-B\cos.\omega$. Hinc postrema solutio dat $(2xy-A)\cos.\omega = (xx-yy+B)\sin.\omega$ vnde elicitur:

$$\sin.\omega = \frac{2xy-A}{\sqrt{((xx+yy)^2-4Axy+2B(xx-yy)+AA+BB)}} = \frac{2xy-A}{V}$$

$$\cos.\omega = \frac{xx-yy+B}{\sqrt{((xx+yy)^2-4Axy+2B(xx-yy)+AA+BB)}} = \frac{xx-yy+B}{V}$$

scribendo V loco formulae radicalis. Hincque fit

$$2az = \sqrt{((xx+yy)^2-4Axy+2B(xx-yy)+AA+BB)}.$$

Coroll. 3.

16. Cum in tertia solutione formula $d\omega(xy\cos.\omega-\frac{1}{2}(xx-yy)\sin.\omega)$ integrabilis effici debeat, euidens est hoc fieri si angulus ω constans accipiatur. *Sit ergo* $\omega=\zeta$ prodibitque solutio iam supra indicata $2az=(xx-yy)\cos.\zeta+2xy\sin.\zeta$.

Constructio generalis.

17. Positis $AX=x$ et $XY=y$ erit pro coroll. 1. $AY=v$ et angulus $XAY=\Phi$. Ducatur AV vt sit ang. $YAV=XAY=\Phi$ et sumta $AD=a$, capiatur AV tertia proportionalis ad AD et AY, vt fiat $AV=\frac{vv}{a}$. Ad alteram axis partem statuatur angulus $XAM=90°-\omega$, erit angulus $VAM=90°+2\Phi-\omega$, ex V ad AM ducatur normalis VM, eritque $AM=-\frac{vv}{a}\sin.(2\Phi-\omega)$, ideoque $\Omega=-AM.a$, et $VM=\frac{vv}{a}\cos.(2\Phi-\omega)$. Ex hac ergo constructione colligitur Tab. III. Fig. 3.

$$2az=a.VM-a\int AM\,d\omega \text{ seu } 2z=VM+\int AM.d\omega$$

 suma-

ſumatur ergo $MP = \int AM.d\omega$ vt fiat $2z = VP$, ac ſupra iam vidimus, in quacunque curua fuerit punctum M, curuam CPG punctum P continentem ita eſſe comparatam, vt recta MP ad eam ſit normalis. Quare reiecta curua BMF eius loco curvam CPG pro arbitrio aſſumere licet, vnde haec conſtructio conficietur.

Sumta in baſi recta AX, in eaque $AD = a$, ad lubitum deſcribatur curua quaecunque CPG, ad quam in quouis puncto P ducatur normalis indefinita PV, in qua ſumto puncto quocunque V ductaque recta AV biſecetur angulus DAV recta AY cuius longitudo ſumatur media proportionalis inter AD et AV, et in puncto Y ad baſin perpendiculariter erigatur recta ſemiſſi ipſius PV aequalis, quae ad ſuperficiem quaeſitam pertinget. Si hoc modo in ſingulis normalibus PV in infinitum productis omnia puncta euoluantur, omnia ſuperficiei ex curua CPG oriundae puncta determinabuntur.

Scholion.

18. Solutio huius problematis multo eſt difficilior quam praecedentis, cum reductio formulae $rdx + sdy$ ad integrabilitatem, ita vt ſit $rr + ss = xx + yy$ haud exigua artificia requirat. Qui autem alios caſus tentare voluerit, ſaepe tantas offendet difficultates, quibus ſuperandis omnis ſagacitas Analytica vix ſufficere videtur. Quare ſolutionem

generalem etiamnunc vix ſperare licet; quae huc redit vt propoſita formula integrabili $pdx + qdy$, inueſtigetur alia formula $rdx + sdy - dz$ itidem integrabilis, ita vt ſit $rr + ss = pp + qq$. Statui quidem poſſet $r = p \operatorname{cof.} \omega + q \operatorname{fin.} \omega$ et $s = q \operatorname{cof.} \omega - p \operatorname{fin.} \omega$, fieretque

$$dz = (pdx + qdy) \operatorname{cof.} \omega + (qdx - pdy) \operatorname{fin.} \omega$$

vbi cum $pdx + qdy$ ſit integrabile ſtatuatur integrale $= u$ eritque $z = u \operatorname{cof.} \omega + \int (ud\omega + qdx - pdy) \operatorname{fin.} \omega$. Neque vero patet quomodo angulum ω per x et y definire liceat vt haec formula integrabilis euadat. Quare eiusmodi caſus euoluam, vbi mihi quidem *difficultates ſuperare licuit.*

Problema 3.

19. Si ſuperficies data hac exprimatur aequatione $dz = Xdx + Ydy$, vbi X per ſolam x et Y per ſolam Y detur, inuenire omnes ſuperficies iſti congruentes.

Solutio.

Quod ſi ergo pro ſuperficiebus quaeſitis ponatur

$dz = rdx + sdy$, neceſſe eſt ſit $rr + ss = XX + YY$ ſtatuatur ergo $r = \surd(XX + 2v)$ et $s = \surd(YY - 2v)$ vt fiat $z = \int (dx\surd(XX + 2v) + dy\surd(YY - 2v))$

Iam

Iam quaeratur integrale formulae $dx\sqrt{(XX+2v)}$ ſumta quantitate v conſtante, quod ſit $=P$, ita vt P ſit functio ipſarum x et v, quam tanquam datam ſpectare licet; ea igitur differentiata prodeat $dP=dx\sqrt{(XX+2v)}+Rdv$, vbi quidem conſtat fore $R=\int\frac{dx}{\sqrt{(XX+2v)}}$ quantitate v pro conſtante habita. Simili modo ſpectata v vt conſtante quaeratur quantitas $Q=\int dy\sqrt{(YY-2v)}$, eaque denuo differentiata vtraque y et v pro variabili habita prodeat $dQ=dy\sqrt{(YY-2v)}+Sdv$, eritque $S=-\int\frac{dy}{\sqrt{(YY-2v)}}$, quae ergo quantitates pariter erunt cognitae. Hinc facta ſubſtitutione habebitur.

$$z=\int(dP-Rdv+dQ-Sdv)=P+Q-\int(R+S)dv$$

et nunc formulam $(R+S)dv$ integrabilem reddi oportet quod aliter fieri nequit niſi $R+S$ ſit functio ipſius v. Sit itaque V functio quaecunque ipſius v, et ſumatur $R+S=V$, eritque $z=P+Q-\int Vdv$, in quibus aequationibus conſtructio generalis omnium ſuperficierum congruentium continetur.

Problema 4.

20. Si pro ſuperficie data coordinata ad baſin perpendicularis exprimatur functione homogenea n dimenſionum ipſarum x et y, inueſtigare omnes ſuperficies ipſi congruentes.

Solutio.

Ponatur $y=ux$, et aequatio pro ſuperficie data talem habebit formam $a^{n-1}z=x^{n}U$ exiſtente U functio-

functione ipsius u tantum, quae ergo erit data. Hinc fit.

$$a^{n-1}\,dz = n\,x^{n-1}\,U\,dx + x^n\,dU.$$

ab ob $dy = u\,dx + x\,du$, erit:

$$a^{n-1}\,dz = x^{n-1}\left(nU\,dx + \frac{dU}{du}\,dy - \frac{u\,dU}{du}\,dx\right)$$

ita vt fit $p = x^{n-1}\left(nU - \frac{u\,dU}{du}\right)$ et $q = x^{n-1}\frac{dU}{du}$.

hincque $pp + qq = x^{2n-2}\left(nnUU - \frac{2nuU\,dU}{du} + \frac{(1+uu)\,dU^2}{du^2}\right)$

Statuatur $nnUU - \frac{2nuU\,dU}{du} + \frac{(1+uu)\,dU^2}{du^2} = VV$, ita vt etiam V fit functio data ipsius u: et iam pro superficiebus quaesitis constituatur haec aequatio differentialis

$$a^{n-1}\,dz = x^{n-1}\,(r\,dx + s\,dy)$$

ac necesse est vt fit $rr + ss = VV$. Nunc pro y substituto valore ux, fit.

$$a^{n-1}\,dz = x^{n-1}\,((r + su)\,dx + x\,s\,du)$$

hincque prius membrum integrando per x.

$$a^{n-1}\,z = \frac{1}{n}x^n(r + su) + \int x^n\left(s\,du - \frac{dr - s\,du - u\,ds}{n}\right)$$

Statuatur $r = V\,\mathrm{cof.}\,\Phi$ et $s = V\,\mathrm{fin.}\,\Phi$, vt habeatur

$$na^{n-1}\,z = x^n V(\mathrm{cof.}\,\Phi + u\,\mathrm{fin.}\,\Phi) + \int x^n((n-1)V\,du\,\mathrm{fin.}\,\Phi$$
$$+ V\,d\Phi(\mathrm{fin.}\,\Phi - u\,\mathrm{cof.}\,\Phi) - dV(\mathrm{cof.}\,\Phi + u\,\mathrm{fin.}\,\Phi))$$

Hic formula differentialis $(n-1)V\,du\,\mathrm{fin.}\,\Phi + V\,d\Phi(\mathrm{fin.}\,\Phi - u\,\mathrm{cof.}\,\Phi) - dV(\mathrm{cof.}\,\Phi + u\,\mathrm{fin.}\,\Phi)$ duas tantum variabiles u et Φ complectitur, dabi-

 tur

tur ergo multiplicator M itidem functio ipsarum u et Φ qui eam reddat integrabilem: sit ergo

$$M((n-1)V du \,\text{sin.}\,\Phi + V d\Phi (\text{sin.}\,\Phi - u \,\text{cos.}\,\Phi) - dV(\text{cos.}\,\Phi + u \,\text{sin.}\,\Phi)) = dS$$

et S etiam erit functio assignabilis ipsarum u et Φ, inde cum sit

$$na^{n-1}z = x^n V(\text{cos.}\,\Phi + u \,\text{sin.}\,\Phi) + \int \frac{x^n\, dS}{M}$$

euidens est hanc formulam integrabilem esse non posse nisi sit $\frac{x^n}{M}$ functio ipsius S. Ponamus ergo $x^n = MF' : S$ fietque $na^{n-1}z = x^n V(\text{cos.}\,\Phi + u \,\text{sin.}\,\Phi) + F : S$

Per binas porro variabiles u et Φ, determinantur M et S, hincque porro x et $y = ux$, atque z, vnde ob functionem arbitrariam hic indroductam haec solutio est generalis.

Scholion 1.

21. Hic modo prorsus singulari euenit, vt casu $n = 0$ haec solutio locum non inueniat, neque etiam patet quomodo huic incommodo occurri possit. Quod hic eo magis mirum videtur, cum alioquin huiusmodi casus alio modo tractati satis facile expediantur. Interim haec duo problemata latissime patent, et ex III. casus resolui possunt quibus superficies data est cylindrica, ex IV. vero quibus

quibus est conica, qui etiamsi videantur facillimi, tamen solutiones hinc resultantes formulas transcendentes valde complicatas inuoluunt, vt inde superficies congruentes simpliciores nullo modo elicere liceat. Verum neuter horum casuum ad superficiem sphaericam accommodari potest cuius natura cum hac aequatione $z = \sqrt{(aa - xx - yy)}$ exprimatur, pro aequatione superficierum congruentium $dz = rdx + sdy$ fieri debet $rr + ss = \frac{xx + yy}{aa - xx - yy}$; quomodocunque autem hinc quantitates r et s definiantur, haud patet quomodo formula $rdx + sdy$ ad integrabilitatem perduci possit. Dubium tamen est nullum, quin dentur infinitae superficies sphaericae congruentes.

Scholion 2.

22. Casum autem, quo superficies proposita est sphaerica, aliosque similes expediri posse obseruaui, si in plano fixo pro basi assumto binae coordinatae non orthogonales capiantur, sed altera sumatur recta ex puncto fixo educta, altera vero angulo eius positionem determinante contineatur. Tab. III. Fig. 4. Sit igitur C hoc punctum fixum, et recta CA positione data, et pro puncto quocunque in basi assumto V statuatur recta $CV = v$ et angulus $ACV = \Phi$, perpendiculum autem in V insistens ad superficiem pertingens sit z, quod ita per v et Φ exprimatur vt sit $dz = pdv + qd\Phi$; consideretur primo angulus Φ constans et sumto $Vv = dv$ perpendiculum puncto v insistens erit $z + pdv$ vnde

 tangens

tangens in rectae VC punctum Q incidet vt sit $VQ = \frac{z}{p}$. Tum consideretur distantia v vt constans, et sumto angulo $VCu = d\Phi$ vt sit $Vu = v\,d\Phi$ perpendiculum puncto u insistens erit $= z + q\,d\Phi$; quare in recta VP ad CV normali tangens incidet in P vt sit $VP = \frac{zv}{q}$ vnde planum tangens basin secabit recta PQ, ad quam ex V demisso perpendiculo VR, erit $VR = \frac{VP.VQ}{PQ} = \frac{zv}{\surd(qq + ppvv)}$ ideoque anguli quem planum tangens facit cum basi, tangens $= \surd(pp + \frac{qq}{vv})$ et secans $= \surd(1 + pp + \frac{qq}{vv})$. Quare cum in basi spatiolum rectangulare $vVuo$ sit $= v\,dv\,d\Phi$, elementum superficiei ipsi imminens habebitur $= v\,dv\,d\Phi \surd(1 + pp + \frac{qq}{vv})$, ex quo alia superficies aequatioue $dz = r\,dv + s\,d\Phi$ expressa illi erit congruens si fuerit $rr + \frac{ss}{vv} = pp + \frac{qq}{vv}$. Verum etiam hanc substitutionem in analysi praecedente instituere licet, vti ex solutione problematis sequentis perspicietur.

Problema 5.

23. Si superficies proposita fuerit sphaerica radio $= a$ descripta, inuestigare omnes superficies ipsi congruentes.

Solutio.

Cum aequatio pro superficie sphaerica sit $z = \surd(aa - xx - yy)$ posito $dz = p\,dx + q\,dy$ erit $p = \frac{-x}{\surd(aa - xx - yy)}$ et $q = \frac{-y}{\surd(aa - xx - yy)}$ vnde

$pp +$

$pp+qq=\frac{xx+yy}{aa-xx-yy}$. Quare si pro superficiebus quaesitis aequatio sumatur $dz=rdx+sdy$, oportet sit $rr+ss=\frac{xx+yy}{aa-xx-yy}$. Nunc vero statuatur $x=v\cos.\Phi$ et $y=v\sin.\Phi$, vt fiat $rr+ss=\frac{vv}{aa-vv}$, eritque $dz=dv(r\cos.\Phi+s\sin.\Phi)+vd\Phi(s\cos.\Phi-r\sin.\Phi)$, pro qua breuitatis gratia scribatur $dz=Rdv+Svd\Phi$, vbi perspicuum est etiam fieri oportere $RR+SS=\frac{vv}{aa-vv}$, vnde idoneos valores pro R et S erui conuenit, vt formula $Rdv+Svd\Phi$ integrationem admittat. Hoc autem per problema tertium praestari posse manifestum est. Ponatur enim $S=\frac{t}{v}$ et $R=\surd(\frac{vv}{aa-vv}-\frac{tt}{vv})$ et habebitur

$$dz=dv\surd(\frac{vv}{aa-vv}-\frac{tt}{vv})+td\Phi, \text{ seu}$$

$$z=t\Phi+\int(dv\surd(\frac{vv}{aa-vv}-\frac{tt}{vv})-\Phi dt).$$

Quaeratur eiusmodi functio ipsarum v et t, vt fiat

$$dP=dv\surd(\frac{vv}{aa-vv}-\frac{tt}{vv})+Qdt$$

ita vt sit $P=\int dv\surd(\frac{vv}{aa-vv}-\frac{tt}{vv})$ sumto t constante et $Q=-t\int\frac{dv}{vv\surd(\frac{vv}{aa-vv}-\frac{tt}{vv})}$ sumto pariter t constante.

Tum igitur fit $z=t\Phi+\int(dP-Qdt-\Phi dt)$ seu

$$z=P+t\Phi-\int dt(Q+\Phi).$$

Quo circa necesse est sit $Q+\Phi=$ functioni ipsius t quae sit T, vnde fit $\Phi=T-Q$ et

$$z=P+Tt-Qt-\int Tdt=P-Qt+\int tdT.$$

Scholion.

24. En ergo solutionem huius problematis difficillimi vnde simul patet simili modo problema multo generalius quo $rr+ss$ seu $RR+SS$ aequari debeat functioni cuicunque ipsius v resolui potuisse. Verum cum hic valores litterarum P et Q nonnisi maxime transcendentaliter assignari possint, neutiquam patet, quomodo vnica saltem superficies simplicior inueniri queat, quae sphaericae sit congruens. Ceterum hic artificia, quibus hactenus formulam $r\,dx+s\,dy$ ad integrabilitatem reuocare licuit distinctius exposuisse iuuabit. Hic autem primum obseruandum est in hac formula ternas variabiles contineri, praeter x et y scilicet vnam nouam in litteris r et s inuolutam, cuius relatio ad x y ea quaeritur, qua illa formula integrabilis reddatur. Artificia autem hic adhibenda eo redeunt, vt per idoneas substitutiones ternae nouae variabiles t, u et w introducantur, quaestioque eo redigatur, vt huiusmodi formula $M\,dt+N\,du$ integrabilis sit efficienda, tertium enim differentiale dw semper eliminare licet, ita vt haec variabilis w. tantum in quantitatibus finitis M et N contineatur. Tum autem sequentibus casibus solutionem elicere licebit;

1°. Si alterutra quantitatum M et N euanescat, namque si $N=0$, vt formula $M\,dt$ sit integrabilis, necesse est quantitatem M functioni ipsius t aequari; facto igitur $M=F':t$, vnde relatio inter ternas varia-

variabiles t, u et w generalissime definitur, erit $\int M\,dt = F:t$.

2°. Si formula $M\,dt + N\,du$ huiusmodi formam habeat $S(P\,dt + Q\,du)$, vbi P et Q sint functiones tantum binarum variabilium t et u, tertia vero w in [illegible] contineatur. Tum enim semper inueniri potest multiplicator R vt sit $R(P\,dt + Q\,du) = dV$ sicque quantitas V definiri queat, quae erit functio ipsarum t et u. Hoc modo formula abit in, $\frac{S\,dV}{R}$, ac iam statui debet $S = RF':V$, formulaeque integrale fiet $\int \frac{S}{R}\,dV = F:V$.

3°. Resolutio quoque succedit si quantitas M tantum sit functio binarum t et u tertiaque w in sola N insit, tum enim eiusmodi functionem binarum t et u quae sit V inuenire licet, vt sit $dV = M\,dt + S\,du$ hoc modo formula proposita hanc induit formam $dV + (N - M)\,du$: sicque capi debet $N = M + F':u$ et integrale erit $V + F:u$.

4°. Si tertia variabilis w ita in vtramque quantitatem M et N ingrediatur, vt binae functiones ipsarum t et u puta P et Q dentur, quibus haec forma $MQ + NP$ a variabili w immunis reddatur, tum solutio sequenti modo obtineri poterit.

$$dt = \frac{Q\,dp - R\,dq}{PQ - RS} \text{ et } du = \frac{P\,dq - S\,dp}{PQ - RS}.$$

Con-

Consideretur formula differentialis $P\,dt - Q\,du$, quae multiplicatore R integrabilis reddatur; ponaturque $dv = R(P\,dt - Q\,du)$, eritque v functio cognita ipsarum t et u, vnde vicissim t per u et v definiatur ac fiet $dt = \frac{Q\,du}{P} + \frac{dv}{PR}$. Quare formula proposita erit:

$\frac{MQ + NP}{P} du + \frac{M\,dv}{PR}$, vbi $\frac{MQ + NP}{P}$ est functio ipsarum u et v tantum sicque resolutio per n°. 4 absoluetur.

Scholion 2.

25. De his integrationibus imprimis notandum est, eas esse generalissimas, dum functiones maxime generales cuiuspiam variabilis in integralia introducuntur, pro quibus adeo functiones *nullo continuitatis* vinculo contentas, quae vt supra videmus ex libero manus ductu nascuntur, assumere licet. Quin etiam omnium huius generis quaestionum criterium in hoc consistit, vt tales functiones prorsus ab arbitrio nostro pendentes in earum solutiones introducantur.

DE

DE SVMMIS SERIERVM NVMEROS BERNOVLLIANOS INVOLVENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quantopere sint notatu digni numeri ab Inuentore *Bernoulliani* vocati, quippe quibus olim *Iacobus Bernoulli* in Arte coniectandi est vsus ad progressiones potestatum numerorum naturalium summandas, cum ab aliis, qui serierum doctrinam nouis inuentis locupletauerunt, tum etiam a me abunde est ostensum, vbi per eosdem numeros serierum potestatum reciprocarum summas expressas dedi. *Bernoullius* quidem progressionem horum numerorum ob calculi molestiam non vltra quintum terminum continuauit, qui sunt $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{5}{66}$, atque Auctori vsque ad vndecimas potestates summandas sufficiebant. Postquam autem satis concinnam huius progressionis legem detexissem, 17 eius primores terminos assignaui. Ipsos vero numeros *Bernoullianos* respectiue per numeros 6, 10, 14, 18, 22 etc. multiplico quo denominatores fiant simpliciores, terminosque huius nouae seriei litteris 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈 etc. designans, earum sequentes reperi valores:

$$\mathfrak{A} = 1$$
$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{3}$$
$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{3}$$
$$\mathfrak{D} = \tfrac{3}{5}$$
$$\mathfrak{E} = \tfrac{5}{3}$$
$$\mathfrak{F} = \tfrac{691}{105}$$
$$\mathfrak{G} = \tfrac{35}{1}$$
$$\mathfrak{H} = \frac{3617}{15}$$
$$\mathfrak{I} = \frac{43867}{21}$$
$$\mathfrak{K} = \frac{1222277}{55}$$
$$\mathfrak{L} = \frac{854513}{3}$$
$$\mathfrak{M} = \frac{1181820455}{273}$$
$$\mathfrak{N} = \frac{76977927}{1}$$
$$\mathfrak{O} = \frac{23749461029}{15}$$
$$\mathfrak{P} = \frac{8615841276005}{231}$$
$$\mathfrak{Q} = \frac{84802531453387}{85}$$
$$\mathfrak{R} = \frac{90219075042845}{3}$$

2. Contemplatio autem serierum potestatum reciprocarum, quarum summas quoties exponens est numerus par, per similes potestates numeri π peri-

peripheriam circuli, cuius diameter eſt $=1$, referentis definiri poſſe demonſtraui, horum numerorum nexum multo clarius exhibuit. Si enim has ſummas ſequenti modo deſignamus:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.}=A\pi^2$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{etc.}=B\pi^4$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\text{etc.}=C\pi^6$$
$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\text{etc.}=D\pi^8$$
$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\text{etc.}=E\pi^{10}$$

primum per hos numeros A, B, C, D etc. praecedentes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. ita determinari oſtendi *vt ſit:*

	ideoque
$\mathfrak{A}=\frac{1\cdot2\cdot3}{1}A$	$A=\frac{2^0\,\mathfrak{A}}{1\cdot2\cdot3}$
$\mathfrak{B}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{2^2}B$	$B=\frac{2^2\,\mathfrak{B}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$
$\mathfrak{C}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots7}{2^4}C$	$C=\frac{2^4\,\mathfrak{C}}{1\cdot2\cdot3\cdots7}$
$\mathfrak{D}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots9}{2^6}D$	$D=\frac{2^6\,\mathfrak{D}}{1\cdot2\cdot3\cdots9}$
$\mathfrak{E}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots11}{2^8}E$	$E=\frac{2^8\,\mathfrak{E}}{1\cdot2\cdot3\cdots11}$
$\mathfrak{F}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots13}{2^{10}}F$	$F=\frac{2^{10}\,\mathfrak{F}}{1\cdot2\cdot3\cdots13}$
etc.	etc.

3. Porro autem pro litterarum A, B, C, D etc. progreſſione duplicem obſeruaui legem, cuius ope quamlibet per praecedentes determinari licet. Prior lex quemlibet terminum per ſingulos praecedentium ita definit, vt ſit

$$A = \frac{1}{1.2.3}$$

$$B = \frac{A}{1.2.3} - \frac{2}{1.2\ldots5}$$

$$C = \frac{B}{1.2.3} - \frac{A}{1.2\ldots5} + \frac{3}{1.2\ldots7}$$

$$D = \frac{C}{1.2.3} - \frac{B}{1.2\ldots5} + \frac{A}{1.2\ldots7} - \frac{4}{1.2\ldots9}$$

$$E = \frac{D}{1.2.3} - \frac{C}{1.2\ldots5} + \frac{B}{1.2\ldots7} - \frac{A}{1.2\ldots9} + \frac{5}{1.2\ldots11}.$$

Altera vero lex commodius quemuis terminum per producta ex binis praecedentibus sequenti modo exprimit:

$$5B = 2A^2 \quad \text{existente } A = \tfrac{1}{6}$$

$$7C = 4AB$$

$$9D = 4AC + 2BB$$

$$11E = 4AD + 4BC$$

$$13F = 4AE + 4BD + 2CC$$

$$15G = 4AF + 4BE + 4CD$$

$$17H = 4AG + 4BF + 4CE + 2DD$$

etc.

vnde etiam mihi quidem has series tam longe continuare licuit.

4. His expositis hoc loco in summas plurium serierum, quorum termini istos numeros A, B, C, D, E etc. praeter alios factores, quorum lex per se est manifesta, inuoluunt, inquirere constitui, ita vt mihi in genere proposita sit inuestigatio summae huius seriei

$S = \alpha$

$$S = \alpha A x^2 + \beta B x^4 + \gamma C x^6 + \delta D x^8 + \varepsilon E x^{10} + \text{etc.}$$

dum litterae α, β, γ, δ etc. feriem quamcunque cognitam conftituunt, eximias enim hinc enafci feries, quarum fummae omni attentione fint dignae pluribus fpeciminibus iam oftendi. Incipio igitur ab hac ferie:

$$S = A x^2 + B x^4 + C x^6 + D x^8 + E x^{10} + \text{etc.}$$

quam per priorem legem progreffionis litterarum A, B, C, D etc. manifefto ex euolutione huius fractionis refultare manifeftum eft:

$$S = \frac{\frac{1}{1.2.3}x^2 - \frac{2}{1.2 \ldots 5}x^4 + \frac{3}{1.2 \ldots 7}x^6 - \frac{4}{1.2 \ldots 9}x^8 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{1.2.3}x^2 + \frac{1}{1.2 \ldots 5}x^4 - \frac{1}{1.2 \ldots 7}x^6 + \frac{1}{1.2 \ldots 9}x^8 - \text{etc.}}$$

cuius denominator exhibet valorem $\frac{\sin. x}{x}$; eiusque differentiale $\frac{dx \cos. x}{x} - \frac{dx \sin. x}{xx}$ per $\frac{-x}{2dx}$ multiplicatum ipfum praebet numeratorem, ita vt fit:

$$s = \frac{\sin. x - x \cos. x}{2 \sin. x} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} x \cot. x$$

hincque fumma iftius feriei

$$A x^2 + B x^4 + C x^6 + D x^8 + E x^{10} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} - x \cot. x$$

vbi notari meretur fi x euanefcat, fore fummam $= \frac{1}{6} xx$ ob $\cot. x = \frac{1 - \frac{1}{3} xx}{x}$.

5. Ponamus $xx = -yy$, totamque feriem negatiue exponamus, vt quaeratur haec fumma:

$$s = A yy - B y^4 + C y^6 - D y^8 + E y^{10} - \text{etc.}$$

 atque

atque cum iam sit per legem priorem:

$$s = \frac{\frac{1}{1.2.3}y^2 + \frac{2}{1.2\ldots5}y^4 + \frac{3}{1.2\ldots7}y^6 + \frac{4}{1.2\ldots9}y^8 + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{1.2.3}y^2 + \frac{1}{1.2\ldots5}y^4 + \frac{1}{1.2\ldots7}y^6 + \frac{1}{1.2\ldots9}y^8 + \text{etc.}}$$

cuius denominator est $\frac{1}{2y}(e^y - e^{-y})$, eiusque differentiale $= \frac{-dy}{2yy}(e^y - e^{-y}) + \frac{dy}{2y}(e^y + e^{-y})$, quod per $\frac{y}{2dy}$ multiplicatum dat numeratorem $= -\frac{1}{4y}(e^y - e^{-y}) + \frac{1}{4}(e^y + e^{-y})$ ita vt huius seriei summa sit

$$s = \frac{y}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} - \frac{1}{2}.$$

Casus hic notari meretur quo $y = 1$, haecque series summatur:

$$A - B + C - D + E - \text{etc.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ee+1}{ee-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{ee-1}.$$

Si hic pro litteris A, B, C, D etc. ipsae series assumtae restituantur, et quatenus fieri potest, in summas colligantur, erit

$$\frac{1}{\pi\pi+1} + \frac{1}{4\pi\pi+1} + \frac{1}{9\pi\pi+1} + \frac{1}{16\pi\pi+1} + \text{etc.} = \frac{1}{ee-1}.$$

6. Inuenta summa seriei

$$Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + \text{etc} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \cot. x$$

in qua simul alteram complecti licet

$$Ay^2 - By^4 + Cy^6 - Dy^8 + \text{etc.} = \frac{y}{2} \cdot \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1} - \frac{1}{2}$$

tam ope differentiationis quam integrationis innumerabiles aliae inde deduci possunt quarum summa

pariter

pariter aſſignari valet. Multiplicata ſcilicet illa ſerie per x^n differentiatio dabit

$$(n+2)Ax^{n+1} + (n+4)Bx^{n+3} + (n+6)Cx^{n+5} + (n+8)Dx^{n+7} \text{ etc.}$$

$$= \tfrac{n}{2}x^{n-1} - \frac{(n+1)}{2}x^n \cot. x + \frac{x^{n+1}}{2 \sin x^2} \text{ ſiue}$$

$$(n+2)Ax^2 + (n+4)Bx^4 + (n+6)Cx^6 + (n+8)Dx^8 \text{ etc.}$$

$$= \tfrac{n}{2} - \tfrac{1}{2}(n+1)x \cot. x + \frac{xx}{2 \cdot \sin. x^2}$$

ſin autem illa ſeries per $x^{n-1}dx$ multiplicata integretur, prodibit ſequens ſummatio:

$$\frac{A}{n+2}x^{n+2} + \frac{B}{n+4}x^{n+4} + \frac{C}{n+6}x^{n+6} + \frac{D}{n+8}x^{n+8} + \text{ etc.}$$

$$= \frac{1}{2n}x^n - \tfrac{1}{2}\int x^n dx \cot. x$$

quae ſumma vt cognita eſt ſpectanda, etiamſi formulae $\int x^n dx \cot. x$ integrale euolui vel exprimi finite nequit. Quin etiam ambabus operationibus combinandis ac repetendis infinitae ſeries formae

$$\alpha Ax^2 + \beta Bx^4 + \gamma Cx^6 + \delta Dx^8 + \text{ etc.}$$

obtinebuntur, vbi literae α, β, γ, δ etc. ſint productae ex duabus pluribusue fractionibus, quarum tam numeratores quam denominatores progreſſiones arithmeticas conſtituant. Veluti ſi ſeries per differentiationem inuenta per $\frac{dx}{x}$ multiplicetur et integretur orietur:

$$\tfrac{n+2}{2}Ax^2 + \tfrac{n+4}{4}Bx^4 + \tfrac{n+6}{6}Cx^6 + \text{ etc.} = \tfrac{n}{2}\, l\frac{x}{\sin. x} - \frac{x \cos. x}{2 \sin. x} + \tfrac{1}{2}$$

ita

ita vt sit.

$$\tfrac{1}{2}Ax^2+\tfrac{1}{4}Bx^4+\tfrac{1}{6}Cx^6+\tfrac{1}{8}Dx^8+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}l\frac{x}{\sin.\,x}$$

7. Datur vero praeterea alia methodus omnino singularis ex serie inuenta alias innumerabiles eruendi quarum summa itidem assignari queat. Hunc in finem seriem principalem ita repraesento:

$$Aa^2x^2+Ba^4x^4+Ca^6x^6+Da^8x^8+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}ax\cot.\,ax$$

eamque multiplico per eiusmodi formulam differentialem Xdx, vt si post integrationem ipsi x certus valor $x=f$ tribuatur, integrale $\int Xx^n dx$ valorem nanciscatur concinnum: scilicet vt fiat:

$$\int Xx^2dx=\alpha\int Xdx;\ \int Xx^4dx=\beta\int Xx^2dx;\ \int Xx^6dx=\gamma\int Xx^4dx \text{ etc.}$$

quo facto nascetur huiusmodi series:

$$\alpha Aa^2+\alpha\beta Ba^4+\alpha\beta\gamma Ca^6+\alpha\beta\gamma\delta Da^8+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}-\frac{a\int Xxdx\cot.\,ax}{2\int Xdx}$$

vbi X ita accipi potest, vt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. fiant vel numeri in arithmetica progressione procedentes, vel fractiones, quarum tam numeratores quam denominatores talem progressionem constituant. Veluti si sumatur.

$X=x^{m-1}(1-x^2)^k$ erit posito $x=1$	ideoque
$\int x^{m+1}dx(1-x^2)^k=\frac{m}{m+2k+2}\int x^{m-1}dx(1-x^2)^k$	$\alpha=\frac{m}{m+2k+2}$
$\int x^{m+3}dx(1-x^2)^k=\frac{m+2}{m+2k+4}\int x^{m+1}dx(1-x^2)^k$	$\beta=\frac{m+2}{m+2k+4}$
$\int x^{m+5}dx(1-x^2)^k=\frac{m+4}{m+2k+6}\int x^{m+3}dx(1-x^2)^k$	$\gamma=\frac{m+4}{m+2k+6}$
$\int x^{m+7}dx(1-x^2)^k=\frac{m+6}{m+2k+8}\int x^{m+5}dx(1-x^2)^k$	$\delta=\frac{m+6}{m+2k+8}$

etc.

At

At si sumatur $X dx = e^{-mxx} x^n dx$ erit posito post integrationem $x = \infty$

$$\begin{array}{l|l} & \text{ideoque} \\ \int e^{-mxx} x^{n+2} dx = \frac{n+1}{2m} \int e^{-mxx} x^n dx & \alpha = \frac{n+1}{2m} \\ \int e^{-mxx} x^{n+4} dx = \frac{n+3}{2m} \int e^{-mxx} x^{n+2} dx & \beta = \frac{n+3}{2m} \\ \int e^{-mxx} x^{n+6} dx = \frac{n+5}{2m} \int e^{-mxx} x^{n+4} dx & \gamma = \frac{n+5}{2m} \end{array}$$

etc.

Sumto autem $X dx = x^{n-1} dx (lx)^m$ fit posito $x = 1$ post integrationem:

$$\int x^{n-1} dx (lx)^m = \pm \frac{1.2.3 \ldots\ldots m}{n^{m+1}}$$

signo $+$ valente si m sit numerus par, contra signo $-$.

8. *His* autem transformationibus, quae alibi fusius sunt expositae, hic non immoror, sed alium fontem, vnde huiusmodi series promanant, contemplabor quem olim iam mihi aperuit summatio progressionum generalis scilicet si seriei cuiuscunque terminus generalis, seu is qui indici x conuenit, ponatur $= X$, vt sit X functio quaecunque ipsius x, huiusque seriei terminus summatorius statuatur $= S$ reperi fore per numeros *Bernoullianos* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc.

$$2S = 2\int X dx + X + \frac{\mathfrak{A} dX}{1.2.3 dx} - \frac{\mathfrak{B} d^3 X}{1.2 \ldots 5 dx^3} + \frac{\mathfrak{C} d^5 X}{1.2 \ldots 7 dx^5} - \frac{\mathfrak{D} d^7 X}{1.2 \ldots 9 dx^7} + \text{etc.}$$

 vnde

vnde si alteri numeri A, B, C, D etc. ad summas potestatum reciprocarum relati introducantur, deducimus:

$$2S = 2\int X dx + X + \frac{A dX}{1 dx} - \frac{B d^3 X}{2^2 dx^3} + \frac{C d^5 X}{2^4 dx^5} - \frac{D d^7 X}{2^6 dx^7} + \text{etc.}$$

Quare si seriem cuius terminus generalis est X et summatorius $= S$ pro lubitu accipiamus habebimus hanc summationem:

$$\frac{A dX}{2 dx} - \frac{B d^3 X}{2^3 dx^3} + \frac{C d^5 X}{2^5 dx^5} - \frac{D d^7 X}{2^7 dx^7} + \text{etc.} = S - \int X dx - \tfrac{1}{2} X.$$

Quaecunque ergo pro X sumatur functio ipsius, concessa progressionis, cuius X est terminus generalis, summatione istius seriei litteras A, B, C, D etc. inuoluentis summam assignare poterimus, *etiamsi* forte eiusdem summatio secundum praecepta modo exposita instituta summis difficultatibus sit obnoxia.

9. Primum ergo ipsi X tribuamus eiusmodi valorem vt sit $X = \frac{1}{x^n}$; vnde fit

$$\frac{dX}{dx} = \frac{-n}{x^{n+1}};\ \frac{d^3 X}{dx^3} = \frac{-n(n+1)(n+2)}{x^{n+3}};\ \frac{d^5 X}{dx^5} = \frac{-n(n+1)\ldots\ldots(n+4)}{x^{n+5}}$$

et quia est $\int X dx = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ atque

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots + \frac{1}{x^n}$$

habebi-

habebimus hanc feriem:

$$\frac{-nA}{2x^{n+1}}+\frac{n(n+1)(n+2)B}{2^3x^{n+3}}-\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)C}{2^5x^{n+5}}+\text{etc.}$$

$$=S-\frac{1}{2x^n}+\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}-O$$

vbi constantem O ex casu quodam cognito definiri conuenit, quo ipsi x certus tribuitur valor. Ita posito $x=\infty$, quoniam tum tota series in nihilum ibit constans haec O exprimet summam huius seriei in infinitum continuatae $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\text{etc.}$ quam *nouimus per* quadraturam circuli π exhiberi *posse* quoties exponens n est numerus par. Hos ergo casus primum euoluam.

Casus I. quo $n=2$.

10. Hoc ergo casu $n=2$ fit constans $O=\frac{\pi\pi}{6}=A\pi^2$, positaque huius progressionis summa indefinite

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{x^2}=S$$

habebimus hanc summationem:

$$-\frac{2A}{2x^3}+\frac{2.3.4B}{2^3x^5}-\frac{2.3.4.5.6C}{2^5x^7}+\frac{2.3\ldots\ldots8D}{2^7x^9}-\text{etc.}$$

$$=S-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}-A\pi^2 \text{ seu}$$

$$\frac{1.2A}{2^1x}-\frac{1.2.3.4B}{2^3x^3}+\frac{1.2\ldots\ldots6C}{2^5x^5}-\frac{1.2\ldots\ldots8D}{2^7x^7}+\text{etc.}$$

$$=A\pi^2x^2-x+\frac{1}{2}-Sxx.$$

 Cuius

Cuius ergo ſumma quoties x eſt numerus integer exhiberi poteſt. Ita obtinebimus:

$$\frac{1.2A}{2} - \frac{1.2.3.4B}{2^3} + \frac{1\ldots\ldots6C}{2^5} - \frac{1\ldots\ldots8D}{2^7} + \text{etc.} = A\pi^2 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1.2A}{4} - \frac{1\ldots\ldots4B}{4^3} + \frac{1\ldots\ldots6C}{4^5} - \frac{1\ldots\ldots8D}{4^7} + \text{etc.} = 4A\pi^2 - \frac{3}{2} \\ - 4\left(1 + \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1.2A}{6} - \frac{1\ldots\ldots4B}{6^3} + \frac{1\ldots\ldots6C}{6^5} - \frac{1\ldots\ldots8D}{6^7} + \text{etc.} = 9A\pi^2 - \frac{5}{2} \\ - 9\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right)$$

$$\frac{1.2A}{8} - \frac{1\ldots\ldots4B}{8^3} + \frac{1\ldots\ldots6C}{8^5} - \frac{1\ldots\ldots8D}{8^7} + \text{etc.} = 16A\pi^2 - \frac{7}{2} \\ - 16\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right).$$

II. Inueſtigemus iam easdem ſeries methodo ſupra expoſita, et cum ibi inueniſſemus:

$$Aay - Ba^3y^3 + Ca^5y^5 - Da^7y^7 + \text{etc.} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2ay}+1}{e^{2ay}-1} - \frac{1}{2ay}$$

multiplicemus per $e^{-y}y\,dy$, et integratione ita inſtituta vt integralia euaneſcant poſito $y = 0$, ſtatuamus $y = \infty$, ſicque adipiſcimur:

$$\int e^{-y}y^2dy = -e^{-y}y^2 - 2e^{-y}y - 2.1e^{-y} + 1.2 = 1.2$$

$$\int e^{-y}y^4dy = -e^{-y}(y^4 + 4y^3 + 4.3y^2 + 4.3.2.y \\ + 4.3.2.1.) + 1.2.3.4 = 1.2.3.4$$

ſimilique modo

$$\int e^{-y}y^6dy = 1.2.3.4.5.6;\quad \int e^{-y}y^8dy = 1.2\ldots\ldots8.$$

Hinc itaque perueniemus ad hanc ſummationem

$$1.2Aa - 1\ldots.4Ba^3 + 1\ldots\ldots6Ca^5 - \text{etc.} = \frac{1}{2}\int e^{-y}y\,dy.\frac{e^{2ay}+1}{e^{2ay}-1} - \frac{1}{2a}.$$

Pona-

Ponamus nunc $a = \frac{1}{2}$ vt prodeat haec feries:

$$\frac{1.2 A}{2} - \frac{1.2.3.4 B}{2^3} + \frac{1.2 \ldots 6 C}{2^5} - \frac{1.2 \ldots 8 D}{2^7} + \text{etc.}$$

cuius fummam nouimus effe $= A\pi^2 - \frac{1}{2}$, nunc autem eandem ita expreffam inuenimus:

$$\tfrac{1}{2}\int e^{-y} y\,dy . \frac{e^y + 1}{e^y - 1} - 1 = \tfrac{1}{2}\int y\,dy . \frac{1 + e^{-y}}{e^y - 1} - 1$$

fi modo poft integrationem ponatur $y = \infty$. Cuius veritas hoc modo oftendi poteft: fit $e^{-y} = z$ et nunc integratione ita abfoluta, vt integrale euanefcat pofito $z = 1$, ftatui oportet $z = 0$, quae fubftitutio praebet

$$\tfrac{1}{2}\int y\,dy . \frac{1 + e^{-y}}{e^y - 1} = \tfrac{1}{2}\int dz . lz \frac{1 + z}{1 - z} = \int dz\,lz . (\tfrac{1}{2} + z + z^2 + z^3 + z^4 + \text{etc.}).$$

Verum ob $\int z^{n-1} dz\,lz = \frac{z^n}{n} lz - \frac{z^n}{nn} + \frac{1}{nn}$ facto $z = 0$ fit $\int z^{n-1} dz\,lz = \frac{1}{nn}$, hincque per feriem

$$\tfrac{1}{2}\int y\,dy . \frac{1 + e^{-y}}{e^y - 1} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \text{etc.} = A\pi\pi - \tfrac{1}{2}$$ vti oportet.

12. Facilius idem oftenditur ponendo $1 - z = v$ feu $z = 1 - v$, vt iam integralia a termino $v = 0$ vsque ad terminum $v = 1$ extendi debeant; tum autem noftra fumma ita exprimetur $= \frac{1}{2}\int \frac{(2 - v)\,dv}{v}$

$l(1 - v)$

$l(1-v)-1$, quam aequalem esse oportet ipsi $A\pi\pi-\frac{3}{2}$, ita vt sit.

$$A\pi\pi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\int \frac{2\,dv}{v}\, l(1-v) + \tfrac{1}{2}\int dv\, l(1-v)$$

at $\int dv\, l(1-v) = -(1-v)\,l(1-v) + (1-v) - 1 = -1$ sicque sit necesse est $A\pi\pi = -\int \frac{dv}{v}\, l(1-v)$, quod per se est manifestum. Cum enim sit

$$-l(1-v) = v + \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{3}v^3 + \tfrac{1}{4}v^4 + \text{etc.}$$

erit integratione secundum legem praescriptam instituta:

$$-\int \frac{dv}{v}\, l(1-v) = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \text{etc.} = A\pi^2.$$

13. Euoluamus etiam simili modo casum $n=\frac{1}{4}$ atque ostendi oportebit fore:

$$\tfrac{1}{2}\int e^{-y}\, y\, dy \cdot \frac{e^{\frac{y}{2}}+1}{e^{\frac{y}{2}}-1} - 2 = 4A\pi^2 - \tfrac{3}{2} - 4\left(1+\tfrac{1}{4}\right)$$

seu $\int e^{-y}\, y\, dy \cdot \dfrac{e^{\frac{y}{2}}+1}{e^{\frac{y}{2}}-1} = 8A\pi^2 + 1 - 8\left(1+\tfrac{1}{4}\right) = 8A\pi^2 - 9.$

Ponamus $e^{-\frac{y}{2}} = 1-v$, vt iam integrale a termino $v=0$ vsque ad $v=1$ extendi debeat, et habebimus ob $e^{-y} = (1-v)^2$, $y = -2\,l(1-v)$, et $dy = \frac{2\,dv}{1-v}$ hanc aequalitatem demonstrandam:

$$-4\int \frac{2-3v+vv}{v}\, dv\, l(1-v) = 8A\pi^2 - 9$$

verum

verum vti iam obseruauimus est

$$\int dv\, l(1-v) = -1 \quad \text{et} \quad \int v\, dv\, l(1-v) = -\tfrac{3}{4}$$

vnde conficitur

$$-8\int \tfrac{dv}{v} l(1-v) - 12 + 3 = 8A\pi^2 - 9 \text{ seu } \int \tfrac{dv}{v} l(1-v) = A\pi^2.$$

14. Simili modo si capiatur $a = \frac{1}{3}$ ostendi debet esse

$$\tfrac{1}{3}\int e^{-y} y\, dy . \frac{e^{\frac{y}{3}}+1}{e^{\frac{y}{3}}-1} - 3 = 9A\pi^2 - \tfrac{5}{2} - 9\left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9}\right)$$

$$\text{seu } \int e^{-y} y\, dy . \frac{e^{\frac{y}{3}}+1}{e^{\frac{y}{3}}-1} = 18A\pi^2 + 1 - 18\left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9}\right).$$

Ponamus primo $e^{\frac{-y}{3}} = z$ vt sit $y = -3\,lz$ et $dy = \frac{-3\,dz}{z}$ habebimusque:

$$9\int zz\, dz\, lz . \frac{1+z}{1-z} = 9\int dz\left(-zz - 2z - 2 + \frac{2}{1-z}\right) lz$$

at est $\int zz\, dz\, lz = +\frac{1}{9}$, $\int z\, dz\, lz = +\frac{1}{4}$; $\int dz\, lz = +1$ vnde nostra formula integralis euadit

$$18\int \tfrac{dz}{1-z} lz - 18\left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9}\right) + 1$$

ita vt sit $\int \frac{dz}{1-z} lz = A\pi^2$ vti iam supra ostendimus atque hoc modo etiam sequentium casuum veritas euincetur.

15. Sin autem sumamus $a = 1$, vt summanda sit haec series:

$$1.2A - 1.2.3.4B + 1 \ldots 6C - 1 \ldots 8D + \text{etc.}$$

quoniam fit $x = \frac{1}{2}$, ex §. 10 summam assignare non licet, siquidem valor progressionis $S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{xx}$ quando terminorum numerus $= \frac{1}{2}$ non constat. Altera vero methodus eius summam praebet:

$$\tfrac{1}{2}\int e^{-y} y\, dy.\ \frac{1 + e^{-2y}}{1 - e^{-2y}} - \tfrac{1}{2}$$

quae posito $e^{-y} = z$ in hanc formam transmutatur

$$\tfrac{1}{2}\int dz\, lz.\ \frac{1+zz}{1-zz} - \tfrac{1}{2} = \int \frac{dz\, lz}{1-zz} - \tfrac{1}{2}\int dz\, lz - \tfrac{1}{2}$$

et quia $\int dz\, lz = 1$, fiet ea

$$\int \frac{dz\, lz}{1-zz} - 1 = 1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49} + \text{etc.} - 1 = \tfrac{3}{4} A\pi\pi - 1.$$

Quod si iam ponamus sumto $x = \frac{1}{2}$ fieri $S = \Delta$ eadem summa reperitur $= \frac{1}{4} A\pi\pi - \frac{1}{4}\Delta$ vnde concludimus fore $\frac{3}{4} A\pi\pi - 1 = \frac{1}{4} A\pi\pi - \frac{1}{4}\Delta$ ideoque quantitas illa incognita $\Delta = 4 - 2A\pi\pi$ ex quo hanc progressionem interpolare licebit

1	$4 - 2A\pi\pi$
$1 + \frac{1}{4}$	$4 - 2A\pi\pi + \frac{4}{9}$
$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$	$4 - 2A\pi\pi + \frac{4}{9} + \frac{4}{25}$
$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$	$4 - 2A\pi\pi + \frac{4}{9} + \frac{4}{25} + \frac{4}{49}$
$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$	$4 - 2A\pi\pi + \frac{4}{9} + \frac{4}{25} + \frac{4}{49} + \frac{4}{81}$
etc.	

et quoniam termini infinitesimi sunt aequales, fit

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16}\ \text{etc.} = 4\left(1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \text{etc.}\right) - 2A\pi\pi$$

quae

quae aequalitas per se est manifesta cum sit

$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}\text{ etc.}=A\pi\pi \text{ et } 1+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{25}+\text{ etc.}=\tfrac{3}{4}A\pi\pi.$$

16. Consideremus rem in genere sitque $a=\frac{m}{n}$ vt summanda sit haec series infinita.

$$\frac{1.2\,A\,m}{n}-\frac{1.2\ldots 4\,B\,m^3}{n^3}+\frac{1.2\ldots 6\,C\,m^5}{n^5}-\frac{1.2\ldots 8\,D\,m^7}{n^7}+\text{ etc.}$$

ac posito $e^{\frac{-y}{n}}=z$, reperitur eius summa

$$\tfrac{1}{2}\int e^{-y}y\,dy.\frac{1+e^{\frac{-2my}{n}}}{1-e^{\frac{-2my}{n}}}-\frac{n}{2m}=\frac{nn}{2}\int z^{n-1}dz\,lz.\frac{1+z^{2m}}{1-z^{2m}}-\frac{n}{2m}$$

quae reducitur ad hanc formam

$$nn\int\frac{z^{n-1}dz\,lz}{1-z^{2m}}-\frac{nn}{2}\int z^{n-1}dz\,lz-\frac{n}{2m}.$$

Cum autem sit $\int z^{n-1}dz\,lz=\frac{-1}{nn}$, per euolutionem primi membri nanciscimur hanc seriem illi aequalem

$$-\tfrac{1}{2}-\frac{n}{2m}+\frac{nn}{nn}+\frac{nn}{(2m+n)^2}+\frac{nn}{(4m+n)^2}+\frac{nn}{(6m+n)^2}+\text{ etc.}$$

Verum ex §. 10 ob $2x=\frac{n}{m}$ seu $x=\frac{n}{2m}$ posito

$$S=1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{4^2}+\ldots+\tfrac{1}{x^2}$$

eadem summa prodit $\frac{nn}{4mm}A\pi^2-\frac{n}{2m}+\frac{1}{2}-\frac{nn}{4mm}S$ qua cum praecedente comparata colligitur.

$$S=A\pi\pi-\frac{4mm}{(2m+n)^2}-\frac{4mm}{(4m+n)^2}-\frac{4mm}{(6m+n)^2}-\frac{4mm}{(8m+n)^2}-\text{ etc.}$$

ex quo valorem ipsius S assignare poterimus, quicunque numerus fractus pro x accipiatur veluti si statuatur $x=\frac{\nu}{\mu}$ erit

$$S = A\pi^2 - \frac{\mu\mu}{(\mu+\nu)^2} - \frac{\mu\mu}{(2\mu+\nu)^2} - \frac{\mu\mu}{(3\mu+\nu)^2} - \frac{\mu\mu}{(4\mu+\nu)^2} - \text{etc.}$$

quae ſeries hoc modo immediate per x commodius exhibetur, vt ſit

$$S = A\pi^2 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{(x+4)^2} - \text{etc.}$$

17. Quod hic per tantas ambages inuenimus, ita obuium videtur, vt ſtatim immediate ex ſerie prima deriuari potuiſſet. Cum enim ſit

$$A\pi^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \text{etc.}$$

hinc vtique manifeſtum eſt fore

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{x^2} = A\pi^2 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2} - \text{etc.}$$

Quia vero illa ſeriei ſumma $A\pi^2$ non eſt *veritati* conſentanea, niſi littera x denotet numeros integros quo quidem caſu concluſio eſt, perſpicua, eius certitudo pro caſibus quibus x eſt numerus fractus vel adeo irrationalis, maxime adhuc dubia relinquitur, et cum nunc quidem pateat, eam inter veritates eſſe referendam, hoc certe neutiquam ex iſto breui ratiocinio perſpicitur, ac niſi praecedentes rationes negotium confeciſſent, merito maximam haberemus dubitandi rationem. Nunc autem plena fiducia hoc ratiocinium multo latius extendere licet ita vt ſi fuerit

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc. in infinitum}$$

hinc

hinc tuto inferre queamus fore generatim

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots+\frac{1}{x^n}=S-\frac{1}{(x+1)^n}-\frac{1}{(x+2)^n}-\frac{1}{(x+3)^n}-\text{etc.}$$

etiamsi x non fuerit numerus integer sed fractus vel adeo irrationalis quicunque.

Casus II. quo $n=4$.

18. Posito primo indefinite

$$S=1+\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{4^4}+\ldots+\tfrac{1}{x^4}$$

tum vero hac serie in infinitum continuata

$$O=1+\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{4^4}+\text{etc. in infinitum}$$

vt sit $O=B\pi^4$, *habebimus hanc summationem*

$$\frac{-4A}{2x^5}+\frac{4.5.6\,B}{2^3x^7}-\frac{4.5\ldots 8\,C}{2^5x^9}+\frac{4.5\ldots 10\,D}{2^7x^{11}}-\text{etc.}$$

$$=S-\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3x^3}-B\pi^4$$

quae per $-1.2.3\,x^4$ multiplicata abit in hanc

$$\frac{1.2\ldots 4\,A}{2x}-\frac{1.2\ldots 6\,B}{2^3x^3}+\frac{1.2\ldots 8\,C}{2^5x^5}-\frac{1.2\ldots 10\,D}{2^7x^7}+\text{etc.}$$

$$=1.2.3\,B\pi^4x^4+3-2x-6Sx^4$$

sicque quoties x est numerus integer, istius seriei summa exhiberi potest. Per numeros ergo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. erit

$$\frac{4\mathfrak{A}}{2x}-\frac{6\mathfrak{B}}{2x^3}+\frac{8\mathfrak{C}}{2x^5}-\frac{10\mathfrak{D}}{2x^7}+\text{etc.}=6B\pi^4x^4+3-2x-6Sx^4$$

19. Eiusdem autem seriei summam ex forma supra inuenta definire possumus, quae erat:

$$Aay - Ba^3y^3 + Ca^5y^5 - Da^7y^7 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{e^{2ay}+1}{e^{2ay}-1} - \frac{1}{2ay}$$

haec enim per $e^{-y}y^3\,dy$ multiplicata et integratione a termino $y = 0$ vsque ad $y = \infty$ extenſa praebet

$$1.2..4Aa - 1.2..6Ba^3 + 1.2..8Ca^5 - 1.2...10Da^7 + \text{etc.}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int e^{-y}y^3\,dy.\ \frac{1+e^{-2ay}}{1-e^{-2ay}} - \frac{1}{a}$$

Hanc vero formulam integralem ſine ſubſtitutione hoc modo euoluere licet: cum ſit

$$\frac{1+e^{-2ay}}{1-e^{-2ay}} = 1 + 2e^{-2ay} + 2e^{-4ay} + 2e^{-6ay} + 2e^{-8ay} + \text{etc.}$$

multiplicetur per $\frac{1}{2}e^{-y}y^3\,dy$, et *quoniam in genere eſt*

$$\int e^{-my}y^3\,dy = -e^{-my}\left(\frac{y^3}{m} + \frac{3y^2}{m^2} + \frac{3\cdot2\cdot y}{m^3} + \frac{3\cdot2\cdot1}{m^4}\right) + \frac{3\cdot2\cdot1}{m^4} = \frac{1\cdot2\cdot3}{m^4}$$

ſumma illa transformatur in hanc ſeriem infinitam

$$-\frac{1}{a} + 3 + \frac{6}{(2a+1)^4} + \frac{6}{(4a+1)^4} + \frac{6}{(6a+1)^4} + \frac{6}{(8a+1)^4} + \text{etc.}$$

Hinc poſito $a = \frac{1}{2x}$ vt prodeat prior ſeries, erit etiam

$$-2x + 3 + \frac{6x^4}{(x+1)^4} + \frac{6x^4}{(x+2)^4} + \frac{6x^4}{(x+3)^4} + \frac{6x^4}{(x+4)^4} + \text{etc.}$$
$$= 6B\pi^4x^4 + 3 - 2x - 6Sx^4$$

ideoque per $6x^4$ diuidendo

$$B\pi^4 - S = \frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \text{etc.}$$

prorſus vti ſupra iam animaduertimus.

Caſus

Casus III. *quo* n *est numerus quicunque.*

20. Primum hic obseruo, si ponatur series infinita

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.} = O$$

hanc seriem ex euolutione huius formulae integralis oriri $\int \frac{dz\,(lz)^{n-1}}{1-z}$, si integratio a termino $z=0$ vsque ad terminum $z=1$ extendatur. Cum enim hac lege obseruata sit

$$\int z^{m-1}\,dz(lz) = \tfrac{1}{m} z^m\, lz - \tfrac{1}{m^2} z^m = -\tfrac{1}{m^2}$$

$$\int z^{m-1}\,dz(lz)^2 = \tfrac{1}{m} z^m (lz)^2 - \tfrac{2}{m^2} z^m\, lz + \tfrac{2.1}{m^3} z^m = + \tfrac{1.2}{m^3}$$

$$\int z^{m-1}\,dz(lz)^3 = - \tfrac{1.2.3}{m^4}$$

$$\int z^{m-1}\,dz(lz)^4 = + \tfrac{1.2.3.4}{m^5}$$

etc.

erit in genere $\pm \int z^{m-1}dz(lz)^{n-1} = + \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{m^n}$ vbi signum superius $+$ valet si n sit numerus impar inferius vero $-$, si n sit numerus par. Quam ob rem euolutio formulae $\pm \int \frac{dz}{1-z} (lz)^{n-1}$ praebet hanc seriem sub eadem lege ambiguitatis:

$$1.2.3\ldots(n-1)\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.}\right)$$

ita vt sit $O = \frac{\pm 1}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)} \int \frac{dz}{1-z} (lz)^{n-1}$

21. Simili modo haec series ad datum quemvis terminum indefinite summari poterit, si enim ponatur:

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots + \frac{1}{m^n}$$

erit $S = \frac{\pm 1}{1.2.3 \ldots (n-1)} \int \frac{1-z^m}{1-z} dz (lz)^{n-1}$

quae formula veritati est consentanea siue m sit numerus integer siue fractus: vnde cum sit $\frac{\pm 1}{1.2.\ldots(n-1)}$:

$$\int \frac{z^m dz}{1-z} (lz)^{n-1} = \frac{1}{(m+1)^n} + \frac{1}{(m+2)^n} + \frac{1}{(m+3)^n} + \text{etc.}$$

perspicuum est fore:

$$S = O - \frac{1}{(m+1)^n} - \frac{1}{(m+2)^n} - \frac{1}{(m+3)^n} - \frac{1}{(m+4)^n} - \text{etc.}$$

Quocirca cum sumto $m = \frac{1}{2}$ sit

$$\frac{1}{m^n} + \frac{1}{(m+1)^n} + \frac{1}{(m+2)^n} + \text{etc.} = \frac{2^n}{1} + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{5^n} + \frac{2^n}{7^n} + \text{etc.}$$

$= (2^n - 1) O$, hinc elicimus:

$$S = O - (2^n - 1) O + 2^n = 2^n - (2^n - 2) O$$

vnde valores interpolati ipsius S ita se habebunt

si sit

si sit	erit S
$m = 0$	0
$m = \frac{1}{2}$	$2^n - (2^n - 2)\,O$
$m = 1$	1
$m = 1\frac{1}{2}$	$2^n + \frac{2^n}{3^n} - (2^n - 2)\,O$
$m = 2$	$1 + \frac{1}{2^n}$
$m = 2\frac{1}{2}$	$2^n + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{5^n} - (2^n - 2)\,O$
$m = 3$	$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$
$m = 3\frac{1}{2}$	$2^n + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{5^n} + \frac{2^n}{7^n} - (2^n - 2)\,O$

etc.

si ad singulos terminos addatur $(2^n - 2)O$, iique tum per 2^n diuidantur, habebitur interpolatio huius seriei

$$0,\ 1,\ 1 + \frac{1}{3^n},\ 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n},\ 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n};\ \text{etc.}$$

22. Cum summa seriei infinitae O per quadraturam circuli seu litteram π sit assignabilis, quoties exponens n fuerit numerus par, notari merentur sequentium formularum integralium reductiones ad circuli quadraturam:

$\int \frac{dz}{1-z}$

$$\int \frac{dz}{1-z}\, lz = -1.\, A\, \pi^2 \qquad = -\frac{2^0}{2.\,3}\mathfrak{A}\pi^2$$

$$\int \frac{dz}{1-z}\, (lz)^3 = -1.\,2.\,3\, B\, \pi^4 \qquad = -\frac{2^2}{4.\,5}\mathfrak{B}\pi^4$$

$$\int \frac{dz}{1-z}\, (lz)^5 = -1.\,2.\,3.\,4.\,5\, C\, \pi^6 = -\frac{2^4}{6.\,7}\mathfrak{C}\pi^6$$

$$\int \frac{dz}{1-z}\, (lz)^7 = -1.\,2\ldots.7\, D\, \pi^8 \qquad = -\frac{2^6}{8.\,9}\mathfrak{D}\pi^8$$

$$\int \frac{dz}{1-z}\, (lz)^9 = -1.\,2\ldots.9\, E\, \pi^{10} \qquad = -\frac{2^8}{10.\,11}\mathfrak{E}\pi^{10}$$

etc.

Atque hinc eo magis eſt mirandum, quod nullam harum formularum $\int \frac{dz}{1-z}(lz)^2$, $\int \frac{dz}{1-z}(lz)^4$, $\int \frac{dz}{1-z}(lz)^6$ etc. nullo modo ad quampiam quadraturam cognitam reducere liceat, cum tamen ex hoc ordine prima formula $\int \frac{dz}{1-z}(l\,z)^0$ manifeſto per logarithmos abſoluatur.

23. Scribamus nunc in §. 9. m loco x, et aequationem ibi datam per $-1.\,2.\ldots.(n-1)m^n$ multiplicemus, vt obtineamus hanc ſummationem:

$$\frac{1.\,2\ldots n\,A}{2\,m} - \frac{1.\,2\ldots.(n+2)B}{2^3\,m^3} + \frac{1.\,2\ldots.(n+4)C}{2^5\,m^5} - \frac{1.\,2\ldots.(n+6)D}{2^7\,m^7} + \text{etc.}$$

$$= 1.\,2\ldots.(n-1)\left(Om^n - Sm^n + \tfrac{1}{2} - \frac{m}{n-1}\right)$$

ſimili autem modo quo ſupra ſumus vſi (19), ponendo $a = \frac{1}{2m}$ eiusdem ſeriei ſummam per ſequentem formulam integralem expreſſam inueniemus:

$$\tfrac{1}{2}\int e^{-y} y^{n-1} dy.\frac{1+e^{-y:m}}{1-e^{-y:m}} - 1.\,2\ldots.(n-2).\, m$$

ita

ita vt sit

$$\tfrac{1}{2}\int e^{-y} y^{n-1} dy \cdot \frac{1+e^{-y:m}}{1-e^{-y:m}} = 1 \cdot 2 \ldots\ldots (n-1)(Om^n - Sm^n + \tfrac{1}{2})$$

atque ob $\frac{1+e^{-y:m}}{1-e^{-y:m}} = -1 + \frac{2}{1-e^{-y:m}}$ erit

$$\int \frac{e^{-y} y^{n-1} dy}{1-e^{-y:m}} = 1 \cdot 2 \ldots\ldots (n-1) m^n (O-S)$$

quae formula integralis ponendo $e^{-y:m} = z$ ad eam quam modo tractauimus, reducitur scilicet $\int \frac{dz}{1-z} (lz)^{n-1}$, siquidem eius integrale a termino $z=1$ vsque ad terminum $z=0$ extendatur.

Casus IV. quo $n=1$.

24. Hic casus peculiarem tractationem postulat, quia seriei $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ etc. summa est infinita sit ergo indefinite

$$S = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots + \tfrac{1}{x}$$

vt quia ob $X = \frac{1}{x}$, est $\int X dx = lx$, habebimus hanc summationem

$$\frac{-1A}{2x^2} + \frac{1.2.3B}{2^3 x^4} - \frac{1.2\ldots5C}{2^5 x^6} + \frac{1.2\ldots7D}{2^7 x^8} - \text{etc.} = S - lx - \frac{1}{2x} - O$$

seu per $-x$ multiplicando:

$$\frac{1A}{2x} - \frac{1.2.3B}{2^3 x^3} + \frac{1.2\ldots5C}{2^5 x^5} - \frac{1.2\ldots7D}{2^7 x^7} + \text{etc.} = (O-S)x + \tfrac{1}{2} + x\,lx$$

vbi constantem O ex casu per se cognito definiri oportet. Veluti si sumatur $x=1$, ob $S=1$ et $lx=0$, erit

$$O - \tfrac{1}{2} = \frac{1A}{2} - \frac{1.2.3B}{2^3} + \frac{1.2\ldots\ldots 5C}{2^5} - \frac{1.2\ldots\ldots 7D}{2^7} + \text{etc.}$$

Quo autem iste valor ipsius O facilius obtineatur, ponatur $x = 10$, et cum fiat:

$$(O - 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} \ldots\ldots - \tfrac{1}{10}).10 + \tfrac{1}{2} + 10l10 =$$
$$\frac{1A}{20} - \frac{1.2.3B}{20^3} + \frac{1.2\ldots\ldots 5C}{20^5} - \frac{1.2\ldots\ldots 7D}{20^7} + \text{etc.}$$

hinc valor ipsius O per seriem maxime conuergentem eruitur:

$$O = 0,5772156649015325$$

qui numerus eo maiori attentione dignus videtur, quod eum, cum olim in hac inuestigatione multum studii consumsissem, nullo modo ad cognitum quantitatum genus reducere valui. *Eo autem invento* vicissim seriei harmonicae ad quotcunque terminos continuatae summa facile assignatur, cum sit

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots + \tfrac{1}{x} =$$
$$O + lx + \frac{1}{2x} - \frac{1A}{2x^2} + \frac{1.2.3B}{2^3x^4} - \frac{1.2\ldots\ldots 5C}{2^5x^6} + \frac{1.2\ldots\ldots 7D}{2^7x^8} - \text{etc.}$$

25. Cum autem scripta littera m loco x seriei

$$\frac{1A}{2m} - \frac{1.2.3B}{2^3m^3} + \frac{1.2\ldots\ldots 5C}{2^5m^5} - \frac{1.2\ldots\ldots 7D}{2^7m^7} \text{ etc.}$$

summa, quae modo prodiit $= (O - S)m + \tfrac{1}{2} + mlm$ existente $S = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots\ldots \tfrac{1}{m}$, etiam ex hac serie:

$$Aay - Ba^3y^3 + Ca^5y^5 - Da^7y^7 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}.\frac{1 + e^{-2ay}}{1 - e^{-2ay}} - \frac{1}{2ay}$$
$$= -\tfrac{1}{2}$$

$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2ay} + \frac{1}{1-e^{-2ay}}$ definiri poſſit, hanc operationem ſuſcipiamus. Multiplicemus ſcilicet per $e^{-y}dy$ et integrale a termino $y=0$ vsque ad $y=\infty$ extendamus, et quia in genere eſt $\int e^{-y}y^{\mu}dy = 1.2.3\ldots\ldots\mu$, nanciſcemnr

$$1Aa - 1.2.3Ba^3 + 1.2\ldots\ldots 5Ca^5 - 1.2\ldots\ldots 7Da^7 + \text{etc.}$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2a}\int\frac{e^{-y}dy}{y} + \int\frac{e^{-y}dy}{1-e^{-2ay}}.$$

Quare poſito $a = \frac{1}{2m}$ erit

$$(O-S)m + \frac{1}{2} + mlm = -\frac{1}{2} - m\int\frac{e^{-y}dy}{y} + \int\frac{e^{-y}dy}{1-e^{-y:m}}$$

ideoque poſito $m=1$, fiet

$$O = -\int\frac{e^{-y}dy}{y} + \int\frac{e^{-y}dy}{1-e^{-y}}$$

ita vt numerus O quem quaerimus, duplicem quantitatem tranſcendentem inuoluat.

26. Transformemus has formulas ope ſubſtitutionis $e^{-y}=z$ fietque integralia a termino $z=1$ vsque ad $z=0$ extendendo

$$O = -\int\frac{dz}{lz} - \int\frac{dz}{1-z} = -\int\frac{dz(1-z+lz)}{(1-z)lz}.$$

Vel ſtatuamus $1-z=v$, vt iam integralia a termino $v=0$ vsque ad $v=1$ extendi debeant, provenietque

$$O = \int\frac{dv}{l(1-v)} + \int\frac{dv}{v} = \int\frac{v+l(1-v)}{vl(1-v)}dv.$$

At maxima difficultas hic in eo consistit, quod vtraque pars seorsim euoluta praebeat numerum infinite magnum quae autem duo infinita necessario se mutuo ita tollere debent vt pro O obtineatur valor ille finitus supra assignatus.

Retenta autem priori forma integralia more solito a termino $z = 0$ ad $z = 1$ extendamus, vt sit $O = \int \frac{dz}{lz} + \int \frac{dz}{1-z}$, et cum denotante i numerum infinitum sit $lz = i(z^{1:i} - 1)$, erit

$O = \int \frac{dz}{1-z} - \frac{1}{i} \int \frac{dz}{1 - z^{1:i}}$. Iam ponamus $z = u^i$, vt fiat

$$O = i\int \frac{u^{i-1}du}{1-u^i} - \int \frac{u^{i-1}du}{1-u}$$

quarum formularum euolutio praebet:

$$\begin{aligned} O = {} & u^i + \tfrac{1}{2}u^{2i} + \tfrac{1}{3}u^{3i} \text{ etc.} \\ & - \tfrac{1}{i}u^i - \tfrac{1}{i+1}u^{i+1} \ldots\ldots - \tfrac{1}{2i}u^{2i} - \tfrac{1}{2i+1}u^{2i+1} \ldots\ldots - \tfrac{1}{3i}u^{3i} - \tfrac{1}{3i+1}u^{3i+1} \text{ etc.} \end{aligned}$$

et ponendo vti oportet $u = 1$, fit

$$\begin{aligned} O = {} & +1 - \left(\tfrac{1}{i} + \tfrac{1}{i+1} + \tfrac{1}{i+2} \ldots\ldots + \tfrac{1}{2i-1}\right) \\ & + \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2i} + \tfrac{1}{2i+1} + \tfrac{1}{2i+2} \ldots\ldots + \tfrac{1}{3i-1}\right) \\ & + \tfrac{1}{3} - \left(\tfrac{1}{3i} + \tfrac{1}{3i+1} + \tfrac{1}{3i+2} \ldots\ldots + \tfrac{1}{4i-1}\right) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

vbi notandum est harum progressionum harmonicarum primam $\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} \ldots\ldots + \frac{1}{2i-1}$ ob i numerum infinitum exprimere $l2$ secundam $l\frac{3}{2}$,

tertiam

tertiam $l\frac{4}{3}$, etc. ita vt habeatur per feriem fatis fimplicem et regularem:

$$O = 1 - l2 + \tfrac{1}{2} - l\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{3} - l\tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{4} - l\tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{5} - l\tfrac{6}{5} + \text{etc.}$$

27. Eandem hanc feriem ex prima ftatim forma deriuare licuiffet, fi enim ibi (24) ponatur $x = \infty$ fit $0 = S - lx - O$ ita vt fit

$$O = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \ldots\ldots + \tfrac{1}{x} - lx$$

quia vero tam feries $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots\ldots + \frac{1}{x}$ quam lx habet valorem infinitum, quo facilius pofterior a priori auferri queat conueniet lx in totidem partes diuidere, quot prior feries habet terminos, quod manifefto fit hoc *modo*

$$lx = l\tfrac{2}{1} + l\tfrac{3}{2} + l\tfrac{4}{3} + \ldots\ldots + l\tfrac{x}{x-1}$$

vnde feries inuenta conficitur. Haec feries nunc pluribus *modis in alias formas* transmutari poteft, ex quibus valorem numeri O facile quam proxime faltem colligere licebit.

Primo enim cum fit $\frac{1}{n} - l\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{5n^5} + \text{etc.}$ habebimus

$$\begin{aligned} O = {} & \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{4^2} + \text{etc.}\right) - \tfrac{1}{3}\left(1 + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{4^3} + \text{etc.}\right) \\ & + \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{4^4} + \text{etc.}\right) - \tfrac{1}{5}\left(1 + \tfrac{1}{2^5} + \tfrac{1}{3^5} + \tfrac{1}{4^5} + \text{etc.}\right) \\ & + \tfrac{1}{6}\left(1 + \tfrac{1}{2^6} + \tfrac{1}{3^6} + \tfrac{1}{4^6} + \text{etc.}\right) - \tfrac{1}{7}\left(1 + \tfrac{1}{2^7} + \tfrac{1}{3^7} + \tfrac{1}{4^7} + \text{etc.}\right) \end{aligned}$$

etc.

Deinde ob $\frac{1}{n-1} - l\frac{n}{n-1} = \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{3n^3} + \frac{3}{4n^4} + \frac{4}{5n^5} + \frac{5}{6n^6} + \text{etc.}$

 erit

erit etiam

$$O = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{4^2}+\text{etc.}\right)+\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{4^3}+\tfrac{1}{5^3}+\text{etc.}\right)$$
$$+\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{4^4}+\text{etc.}\right)+\tfrac{4}{5}\left(\tfrac{1}{2^5}+\tfrac{1}{3^5}+\tfrac{1}{4^5}+\tfrac{1}{5^5}+\text{etc.}\right)$$
$$+\tfrac{5}{6}\left(\tfrac{1}{2^6}+\tfrac{1}{3^6}+\tfrac{1}{4^6}+\text{etc.}\right)+\tfrac{6}{7}\left(\tfrac{1}{2^7}+\tfrac{1}{3^7}+\tfrac{1}{4^7}+\tfrac{1}{5^7}+\text{etc.}\right)$$
etc.

28. Huius posterioris formae considerentur primo partes priores potestatibus paribus contentae; quae modo supra adhibito expressae ita se habebunt:

$$\tfrac{1}{2}(A\pi^2-1)+\tfrac{3}{4}(B\pi^4-1)+\tfrac{5}{6}(C\pi^6-1)+\text{etc.}$$

Contemplemur ergo seriem hanc:

$$P=(A\pi^2-1)x^2+(B\pi^4-1)x^4+(C\pi^6-1)x^6+\text{etc.}$$

eritque ex §. 7. $P=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\pi x\cot.\pi x-\frac{xx}{1-xx}$, cuius valor casu $x=1$ reperitur ponendo $x=1-\omega$ euanescente ω, tum autem oritur $P=\frac{1}{2}+\frac{\pi(1-\omega)\cos.\pi\omega}{2\sin.\pi\omega}-\frac{1+2\omega+\omega\omega}{\omega(2-\omega)}$

seu $P=\frac{1}{2}+\frac{1-\omega}{2\omega}-\frac{1+2\omega}{\omega(2-\omega)}=\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\omega(2-\omega)}=\frac{3}{4}$, ita vt quod omnino notatu dignum videtur sit

$$A\pi^2-1+B\pi^4-1+C\pi^6-1+D\pi^8-1\text{ etc.}=\tfrac{3}{4}.$$

Deinde per integrationem elicimus:

$$\int\frac{P\,dx}{x}=\tfrac{1}{2}(A\pi^2-1)xx+\tfrac{1}{4}(B\pi^4-1)x^4+\tfrac{1}{6}(C\pi^6-1)x^6+\text{etc.}$$

hincque $\int\frac{P\,dx}{x}=\frac{1}{2}lx-\frac{1}{2}l\sin.\pi x+\frac{1}{2}l(1-xx)+\frac{1}{2}l\pi$ seu $\int\frac{P\,dx}{x}=\frac{1}{2}l(1-xx)-\frac{1}{2}l\frac{\sin.\pi x}{\pi x}$. Ponatur nunc iterum $x=1-\omega$

fietque

fietque $\int \frac{P\,dx}{x} = \frac{1}{2} l\, 2\omega - \frac{1}{2} l \frac{\sin.\pi\omega}{\pi(1-\omega)} = \frac{1}{2} l\, 2$ ita vt sit

$$\tfrac{1}{2}(A\pi\pi - 1) + \tfrac{1}{4}(B\pi^4 - 1) + \tfrac{1}{6}(C\pi^6 - 1) + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} l\, 2$$

hac autem serie a superiori ablata relinquitur:

$$\tfrac{1}{2}(A\pi\pi - 1) + \tfrac{3}{4}(B\pi^4 - 1) + \tfrac{5}{6}(C\pi^6 - 1) + \text{etc.} = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2} l\, 2$$

ita vt sit

$$\begin{aligned} O = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2} l\, 2 &+ \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{4^3} + \text{etc.}\right) \\ &+ \tfrac{4}{5}\left(\tfrac{1}{2^5} + \tfrac{1}{3^5} + \tfrac{1}{4^5} + \text{etc.}\right) \\ &+ \tfrac{6}{7}\left(\tfrac{1}{2^7} + \tfrac{1}{3^7} + \tfrac{1}{4^7} + \text{etc.}\right) \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

29. *Cum igitur* numerus O duabus constet *partibus*, quarum prior est

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} l\, 2 = 0,4034264097200273$, ipse autem numerus sit $O = \underline{0,5772156649015325}$ erit altera pars

$$= 0,1737892551815052$$

si ergo simili modo haec altera pars ad logarithmos vel quadraturam circuli reuocari posset, nihil amplius in hoc negotio desiderari posset. Haec autem pars altera ob

$$\tfrac{2}{3} z^3 + \tfrac{4}{5} z^5 + \tfrac{6}{7} z^7 + \text{etc.} = 2\int \frac{zz\,dz}{(1-zz)^2} = \frac{z}{1-zz} - \tfrac{1}{2} l \frac{1+z}{1-z}$$

sequenti forma exhiberi potest:

$$\tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{3} - l\tfrac{3}{1}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - l\tfrac{4}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - l\tfrac{5}{3}\right) + \text{etc.}$$

quae autem denotante i numerum infinitum sponte reducitur ad hanc expressionem

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{i} - l\, i - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} l\, 2$$

ita

ita vt hinc nihil noui eliciatur, cum adiecta parte priori $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}l2$ oriatur vt per se constat

$$O = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{i}-li.$$

Manet ergo quaestio magni momenti, cuiusnam indolis sit numerus iste O, et ad quodnam genus quantitatum sit referendus.

Si terminus generalis $X = lx$.

30. Hic ergo erit $\int X\,dx = x\,lx - x$ et ob $\frac{dX}{dx} = \frac{1}{x}$ fiet porro $\frac{d^3X}{dx^3} = \frac{1.2}{x^3}$; $\frac{d^5X}{dx^5} = \frac{1.2.3.4}{x^5}$; $\frac{d^7X}{dx^7} = \frac{1.2\ldots6}{x^7}$ etc. Vnde si ponamus indefinite:

$$S = l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots\ldots + lx$$

habebimus hanc summationem

$$\frac{A}{2x} - \frac{1.2\,B}{2^3 x^3} + \frac{1.2.3.4\,C}{2^5 x^5} - \frac{1.2\ldots6\,D}{2^7 x^7} + \text{etc.} = S - \tfrac{1}{2}lx - x\,lx + x - O$$

quae constans ita esse debet comparata, vt vni ipsius x valori satisfaciat. Sit ergo $x = 1$ et cum sit $S = l1 = 0$ erit

$$-O + 1 = \frac{A}{2} - \frac{1.2\,B}{2^3} + \frac{1.2.3.4\,C}{2^5} - \frac{1.2\ldots6\,D}{2^7} + \text{etc.}$$

Cum igitur sit

$$A\,ay - B\,a^3y^3 + C\,a^5y^5 - D\,a^7y^7 + \text{etc.} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+e^{-2ay}}{1-e^{-2ay}} - \frac{1}{2ay}$$

ob $\int e^{-y}y^n\,dy = 1.2\ldots n$ multiplicemus per $e^{-y}\frac{dy}{y}$ et integratio suppeditabit:

$$Aa - 1.2\,Ba^3 + 1.2.3.4\,Ca^5 - \text{etc.} = \tfrac{1}{2}\int e^{-y}\frac{1+e^{-2ay}}{1-e^{-2ay}}\cdot\frac{dy}{y} - \frac{1}{2a}\int e^{-y}\frac{dy}{yy}$$

$$= \int\frac{e^{-y}\,dy}{y(1-e^{-2ay})} - \tfrac{1}{2}\int\frac{e^{-y}\,dy}{y} - \frac{1}{2a}\int e^{-y}\frac{dy}{yy}$$

inte-

integralibus his a termino $y=0$ vsque ad $y=\infty$ extensis.

31. Statuamus nunc $a=\frac{1}{2x}$, et obtinebimus hanc aequationem:

$$-O+S+x-\tfrac{1}{2}lx-xlx=\int\frac{e^{-y}dy}{y(1-e^{-y:x})}-\tfrac{1}{2}\int\frac{e^{-y}dy}{y}-x\int e^{-y}\frac{dy}{yy}$$

in quibus integrationibus quantitatem x vt constantem spectari oportet. Quare sumto $x=1$ fiet

$$-O+1=\int\frac{e^{-y}dy}{y(1-e^{-y})}-\tfrac{1}{2}\int\frac{e^{-y}dy}{y}-\int\frac{e^{-y}dy}{yy}$$

et quoniam est $-\int\frac{e^{-y}dy}{yy}=\frac{e^{-y}}{y}+\int\frac{e^{-y}dy}{y}$ erit

$$-O+1=\int\frac{e^{-y}dy}{y(1-e^{-y})}+\tfrac{1}{2}\int\frac{e^{-y}dy}{y}+\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e}{0}.$$

Hic si ponatur $e^{-y}=z$ et integralia a termino $z=0$ vsque ad $z=1$ extendantur, reperitur:

$$-O+1=\tfrac{1}{2}\int\frac{dz}{lz}-\int\frac{dz}{(1-z)lz}-\int\frac{dz}{(lz)^2}$$

neque vero hinc natura huius numeri O cognosci potest cum tamen aliunde constet eum esse $=\tfrac{1}{2}l2\pi$; sicque partim per logarithmos partim per circuli peripheriam π determinari. Quemadmodum ergo iste valor eruatur operae pretium erit accuratius perpendisse.

32. Quoniam a Wallisio inuenta est haec aequalitas

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2}{1.3}\cdot\frac{4.4}{3.5}\cdot\frac{6.6}{5.7}\cdot\frac{8.8}{7.9}\cdot\frac{10.10}{9.11}\text{ etc.}$$

 erit

erit logarithmis sumendis

$$\tfrac{1}{2}l\tfrac{\pi}{2} = l2 - l3 + l4 - l5 + l6 - l7 + l8 - l9 + \text{etc.}$$

seu hoc modo per duplicem seriem

$$\tfrac{1}{2}l\tfrac{\pi}{2} = l2 + l4 + l6 + l8 + l10 + l12 + \text{etc.} \ldots + l2x + \tfrac{1}{2}l2(x+1)$$
$$- l3 - l5 - l7 - l9 - l11 - l13 - \text{etc.} - l(2x+1)$$

siquidem vtraque series in infinitum quidem sed tamen parem terminorum numerum continuetur, seu ipsi x vtrinque idem valor tribuatur: quae duplex series etiam hoc modo exhiberi potest

$$\tfrac{1}{2}l\tfrac{\pi}{2} = l2 + l4 + l6 + l8 + \ldots\ldots + l2x - \tfrac{1}{2}l2x$$
$$- l1 - l3 - l5 - l7 - \ldots\ldots - l(2x-1)$$

At ex ipsa nostra serie sumto x infinito habemus

$$l1 + l2 + l3 + l4 \ldots\ldots + lx = 0 - x + (x + \tfrac{1}{2})lx$$

vnde si $xl2$ seu ad quemlibet terminum $l2$ addatur fit

$$l2 + l4 + l6 + l8 + \ldots + l2x = 0 - x + xl2 + (x + \tfrac{1}{2})lx$$

Deinde si ibi loco x scribamus $2x$ prodit

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + l2x = 0 - 2x + (2x + \tfrac{1}{2})l2 + (2x + \tfrac{1}{2})lx$$

a qua si illa auferatur relinquitur:

$$l1 + l3 + l5 + \ldots + l(2x-1) = -x + (x + \tfrac{1}{2})l2 + xlx$$

quae summae si in illa forma loco vtriusque seriei substituantur orietur haec aequatio:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}l\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}l2x = 0 - x + xl2 + (x + \tfrac{1}{2})lx \\ + x - (x + \tfrac{1}{2})l2 - xlx \end{aligned}\right\} = 0 - \tfrac{1}{2}l2 + \tfrac{1}{2}lx$$

vnde

vnde concluditur $O = \frac{1}{2}l\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}l2x + \frac{1}{2}l2 - \frac{1}{2}lx = \frac{1}{2}l2\pi$

seu $O = 0,91893853320467274178032 97$.

33. Cum ergo sit $O = \frac{1}{2}l2\pi$ hinc vicissim colligimus fore

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{dz}{lz} - \int\frac{dz}{(1-z)lz} - \int\frac{dz}{(lz)^2} = 1 - \tfrac{1}{2}l2\pi$$

sicque patet has tres integrationes, siquidem a termino $z = 0$ ad terminum $z = 1$ extendantur perduci ad quantitatem $l2\pi$ quod quomodo per calculum ostendi possit, haud liquet, vnde haec inuestigatio eo maiori attentione digna videtur. Facile quidem perspicitur esse

$-\int\frac{dz}{(lz)^2} = \frac{z}{lz} - \int\frac{dz}{lz}$, ita vt sit $\frac{z}{lz} - \frac{1}{2}\int\frac{dz}{lz} - \int\frac{dz}{(1-z)lz} = 1 - \frac{1}{2}l2\pi$

Parum quoque lucramur ponendo $z = v^i$ et $lz = -i(1-v)$ existente i numero infinito consequimur autem hanc aequationem.

$$\frac{-v^i}{i(1-v)} + \tfrac{1}{2}\int\frac{v^{i-1}dv}{1-v} + \int\frac{v^{i-1}dv}{(1-v)(1-v^i)} = 1 - \tfrac{1}{2}l2\pi$$

quae integralia pariter ab $v = 0$ vsque ad $v = 1$ extendi debent.

34. Euolutio harum formularum nihil aliud suppeditat nisi quod statim ex prima aequatione sumendo numerum x infinitum concludi potest, quia enim tum series litteras A. B. C. D etc. complectens euanescit, habebimus

$$O = \tfrac{1}{2}l2\pi = l1 + l2 + l3 + \ldots + lx - (x + \tfrac{1}{2})lx + x$$

 vbi

vbi cum feries $l1+l2\ldots+lx$ conftet x terminis quaelibet reliquarum partium $(x+\frac{1}{2})lx$ et x in feriem totidem terminorum conuertatur. Ac pofterior quidem x totidem terminos vnitati aequales praebet, prior vero $(x+\frac{1}{2})lx$ fequenti modo euoluitur:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}l2\pi = {} & l1+l2+l3\ldots+l(x-1)+lx\\ & +1+1+1\ldots+1 \qquad +1\\ & -\tfrac{3}{2}l1-\tfrac{5}{2}l2-\tfrac{7}{2}l3\ldots-(x-\tfrac{1}{2})l(x-1)-(x+\tfrac{1}{2})lx\\ & +\tfrac{3}{2}l1+\tfrac{5}{2}l2\ldots+(x-\tfrac{3}{2})l(x-2)+(x-\tfrac{1}{2})l(x-1)\end{aligned}$$

vnde colligitur haec feries fatis concinna:

$$\tfrac{1}{2}l2\pi = 1-(\tfrac{3}{2}l\tfrac{2}{1}-1)-(\tfrac{5}{2}l\tfrac{3}{2}-1)-(\tfrac{7}{2}l\tfrac{4}{3}-1)-(\tfrac{9}{2}l\tfrac{5}{4}-1)\text{ etc.}$$

quae commodius hac forma exhibetur:

$$1-\tfrac{1}{2}l2\pi = \tfrac{3}{2}l\tfrac{2}{1}-1+\tfrac{5}{2}l\tfrac{3}{2}-1+\tfrac{7}{2}l\tfrac{4}{3}-1+\tfrac{9}{2}l\tfrac{5}{4}-1\text{ etc.}$$

Terminus generalis huius feriei eft $\frac{x}{2}l\frac{x+1}{x-1}-1$, qui in hanc feriem euoluitur: $\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{5x^4}+\frac{1}{7x^6}+\frac{1}{9x^8}+\text{etc.}$ ex quo per infinitas feries habebimus:

$$\begin{aligned}1-\tfrac{1}{2}l2\pi = {} & \tfrac{1}{3\cdot 3^2}+\tfrac{1}{5\cdot 3^4}+\tfrac{1}{7\cdot 3^6}+\tfrac{1}{9\cdot 3^8}+\text{etc.}\\ & \tfrac{1}{3\cdot 5^2}+\tfrac{1}{5\cdot 5^4}+\tfrac{1}{7\cdot 5^6}+\tfrac{1}{9\cdot 5^8}+\text{etc.}\\ & \tfrac{1}{3\cdot 7^2}+\tfrac{1}{5\cdot 7^4}+\tfrac{1}{7\cdot 7^6}+\tfrac{1}{9\cdot 7^8}+\text{etc.}\\ & \tfrac{1}{3\cdot 9^2}+\tfrac{1}{5\cdot 9^4}+\tfrac{1}{7\cdot 9^6}+\tfrac{1}{9\cdot 9^8}+\text{etc.}\\ & \qquad\qquad \text{etc.}\end{aligned}$$

vbi

vbi cum series potestatum reciprocarum primo termino truncatarum occurrant, erit

$$1-\tfrac{1}{2}l2\pi=\tfrac{1}{3}(\tfrac{2^2-1}{2^2}A\pi^2-1)+\tfrac{1}{5}(\tfrac{2^4-1}{2^4}B\pi^4-1)+\tfrac{1}{7}(\tfrac{2^6-1}{2^6}C\pi^6-1)+\text{ etc.}$$

supra autem inueneramus:

$$1-\tfrac{1}{2}l2\pi=\tfrac{A}{2}-\tfrac{1.2B}{2^3}+\tfrac{1.2.3.4C}{2^5}-\tfrac{1.2\ldots6D}{2^7}+\text{ etc.}$$

35. Huiusmodi relationes eo maiorem attentionem merentur, quo magis sunt absconditae, vnde operae erit pretium seriem modo inuentam accuratius euoluere. Hunc in finem eam generaliori forma complectar, statuens:

$$P=\tfrac{1}{3}A\pi^2u^2+\tfrac{1}{5}B\pi^4u^4+\tfrac{1}{7}C\pi^6u^6+\tfrac{1}{9}D\pi^8u^8+\text{ etc.}$$

$$Q=\tfrac{1}{3}A\tfrac{\pi^2u^2}{2^2}+\tfrac{1}{5}B\tfrac{\pi^4u^4}{2^4}+\tfrac{1}{7}C\tfrac{\pi^6u^6}{2^6}+\tfrac{1}{9}D\tfrac{\pi^8u^8}{2^8}+\text{ etc.}$$

$$R=\tfrac{1}{3}u^2+\tfrac{1}{5}u^4+\tfrac{1}{7}u^6+\tfrac{1}{9}u^8+\text{ etc.}=\tfrac{1}{2u}l\tfrac{1+u}{1-u}-1$$

vt posito $u=1$ fit $1-\tfrac{1}{2}l2\pi=P-Q-R$

Iam ad valores litterarum P et Q definiendos sumo aequationem supra §. 6 datam

$$Ax^2+Bx^4+Cx^6+Dx^8+\text{ etc.}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x\cot.x$$

vnde per integrationem fit

$$\tfrac{1}{3}Ax^3+\tfrac{1}{5}Bx^5+\tfrac{1}{7}Cx^7+\text{ etc.}=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}\int\tfrac{x\,dx\cos.x}{\sin.x}$$

$$\text{seu }\tfrac{1}{3}Ax^2+\tfrac{1}{5}Bx^4+\tfrac{1}{7}Cx^6+\text{ etc.}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2x}\int\tfrac{x\,dx\cos.x}{\sin.x}.$$

Hinc posito primo $x=\pi u$ tum vero $x=\tfrac{\pi u}{2}$ deducimus

$$P=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2\pi u}\int\tfrac{\pi\pi u\,du\cos.\pi u}{\sin.\pi u}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{\pi}{2}\int\tfrac{u\,du\cos.\pi u}{\sin.\pi u}\text{ ob }u=1$$

 Q=½

$$Q = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\pi u}\int \frac{\pi\pi u du \operatorname{cos}. \frac{1}{2}\pi u}{4 \operatorname{sin}. \frac{1}{2}\pi u} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\pi}{4}\int \frac{u du \operatorname{cos}. \frac{1}{2}\pi u}{\operatorname{sin}. \frac{1}{2}\pi u}$$

et ob $\operatorname{sin}. \pi u = 2 \operatorname{sin}. \frac{1}{2}\pi u \operatorname{cos}. \frac{1}{2}\pi u$ et $\operatorname{cos}. \pi u = \operatorname{cos}. \frac{1}{2}\pi u^2 - \operatorname{sin}. \frac{1}{2}\pi u^2$ fiet

$$P - Q = \tfrac{\pi}{4}\int \frac{u du (\operatorname{cos}. \frac{1}{2}\pi u^2 - \operatorname{cos}. \frac{1}{2}\pi u^2 + \operatorname{sin}. \frac{1}{2}\pi u^2)}{\operatorname{sin}. \frac{1}{2}\pi u \operatorname{cos}. \frac{1}{2}\pi u} = \tfrac{\pi}{4}\int \frac{u du \operatorname{sin}. \frac{1}{2}\pi u}{\operatorname{cos}. \frac{1}{2}\pi u}$$

ita vt sit $1 - \frac{1}{2} l 2\pi = \frac{\pi}{4}\int \frac{u du \operatorname{sin}. \frac{1}{2}\pi u}{\operatorname{cos}. \frac{1}{2}\pi u} - \frac{1}{2} l \frac{1+u}{1-u} + 1$

seu $l 2\pi = \int \frac{-\frac{1}{2}\pi u du \operatorname{sin}. \frac{1}{2}\pi u}{\operatorname{cos}. \frac{1}{2}\pi u} + l\frac{1+u}{1-u} = l\frac{1+u}{1-u} + ul \operatorname{cos}. \frac{1}{2}\pi u - \int du l \operatorname{cos}. \frac{1}{2}\pi u$

siquidem integratione absoluta ponatur $u = 1$.

36. Statuamus nunc angulum $\frac{1}{2}\pi u = \Phi$, seu $u = \frac{2\Phi}{\pi}$, vt integrale a termino $\Phi = 0$ vsque ad $\Phi = \frac{\pi}{2} = 90°$ extendi oporteat, ac praecedens aequatio abibit in hanc formam

$$l 2\pi = l\frac{\pi + 2\Phi}{\pi - 2\Phi} + l \operatorname{cof}. \Phi - \tfrac{2}{\pi}\int d\Phi l \operatorname{cof}. \Phi. \text{ siue ob } \Phi = \tfrac{\pi}{2}$$

$$l 2\pi = l 2\pi - l\frac{\pi - 2\Phi}{\operatorname{cof}. \Phi} - \tfrac{2}{\pi}\int d\Phi l \operatorname{cof}. \Phi$$

vbi fractio $\frac{\pi - 2\Phi}{\operatorname{cof}. \Phi}$ casu $\Phi = \frac{\pi}{2}$ abit in $\frac{2}{\operatorname{sin}. \Phi} = 2$ ita vt sit $l 2\pi = l 2\pi - l 2 - \frac{2}{\pi}\int d\Phi l \operatorname{cof}. \Phi$ seu $\int d\Phi l \operatorname{cof}. \Phi = -\frac{\pi l 2}{2}$.

Quod si ergo demonstrari posset formulae integralis $\int d\Phi l \operatorname{cof}. \Phi$ valorem a termino $\Phi = 0$ ad $\Phi = 90° = \frac{\pi}{2}$ extensum reuera quantitati $= \frac{\pi l 2}{2}$ aequari, omnino per aliam viam id assequeremur quod ante per ambages circa valorem litterae $O = \frac{1}{2} l 2\pi$ conclusimus. Quoniam vero nunc de hoc valore sumus

ſumus certi, inſigne conſecuti ſumus hoc theorema quod ſit integrali a valore $\Phi = 0$ vsque ad $\Phi = \frac{\pi}{2} = 90°$ extenſum $\int d\Phi\, l\, \text{coſ.}\, \Phi = -\frac{\pi l 2}{2}$

vel ſi ponamus coſ. $\Phi = v$, vt termini integrationis ſint $v = 1$ et $v = 0$ oſtendendum eſt fore

$$\int \frac{dv\, lv}{\sqrt{(1-vv)}} = \frac{\pi l 2}{2}$$

vnde hoc integrali in ſeriem euoluto erit

$$\frac{\pi l 2}{2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9^2}$$

quae ſeries viciſſim reducitur ad $\int \frac{ds}{s}$ Ang. ſin. s ponendo poſt integrationem $s = 1$: haec vero porro poſito $s = \text{ſin.}\, \Phi$ ad hanc

$\int \frac{\Phi d\Phi\, \text{coſ.}\, \Phi}{\text{ſin.}\, \Phi} = \Phi l \text{ſin.}\, \Phi - \int d\Phi\, l\, \text{ſin.}\, \Phi = \frac{\pi l 2}{2}$, ſeu $\int d\Phi\, l\, \text{ſin.}\, \Phi = -\frac{\pi l 2}{2}$

quae cum ſuperiori congruit.

36. Quod autem ſit $\int d\Phi\, l\, \text{ſin.}\, \Phi = -\frac{\pi l 2}{2}$ hoc modo demonſtratur. Cum ſit $\frac{\text{coſ.}\, \Phi}{\text{ſin.}\, \Phi} = 2\, \text{ſin.}\, 2\Phi + 2\, \text{ſin.}\, 4\Phi + 2\, \text{ſin.}\, 6\Phi + 2\, \text{ſin.}\, 8\Phi$ etc. erit

$l\, \text{ſin.}\, \Phi = -\text{coſ.}\, 2\Phi - \frac{1}{2}\text{coſ.}\, 4\Phi - \frac{1}{3}\text{coſ.}\, 6\Phi - \frac{1}{4}\text{coſ.}\, 8\Phi$ etc. $- l2$

ergo $\int d\Phi\, l\, \text{ſin.}\, \Phi = -\Phi l 2 - \frac{1}{2}\text{ſin.}\, 2\Phi - \frac{1}{2 \cdot 2^2}\text{ſin.}\, 4\Phi - \frac{1}{2 \cdot 3^2}\text{ſin.}\, 6\Phi - \frac{1}{2 \cdot 4^2}\text{ſin.}\, 8\Phi$ etc.

iam facto $\Phi = \frac{\pi}{2}$ fit $\int d\Phi\, l\, \text{ſin.}\, \Phi = -\frac{\pi}{2} l 2$.

DE

DE PARTITIONE NVMERORVM IN PARTES TAM NVMERO QVAM SPECIE DATAS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Cum olim tractauissem problema de partitione numerorum, quo *quaerebatur, quot variis* modis datus numerus in duas, vel tres, vel quatuor vel generatim in tot partes, quot quis voluerit, discerpi possit, id potissimum curaui, vt in eius solutione nihil quicquam inductioni, cuius vsus plerumque in huiusmodi problematibus soluendis solet esse frequentissimus, tribuerem. Atque methodus, qua sum vsus, ita videtur comparata, vt etiam ad alia problemata aequo successu adhiberi possit, id quod vulgatissimo illo problemate, quo quaeri solet, quot modis datus numerus dato tesserarum numero proiici possit, eo quidem amplissime extenso hic ostendere constitui.

2. Quando autem quaeritur, quot modis datus numerus N datum tesserarum numerum *n* proiiciendo cadere possit, quaestio huc redit, quot variis

riis modis datus numerus N in n partes resolui possit, quarum singulae sint vel 1, vel 2, vel 3, vel 4, vel 5, vel 6, siquidem facies tesserarum his numeris sint insignitae. Ex quo nascitur haec quaestio latius patens, quot variis modis datus numerus N diuidi possit in n partes, quarum singulae sint vel α, vel β, vel γ, vel δ etc. quorum numerorum α, β, γ, δ etc. multitudo sit pariter data puta $= m$; ita vt partes, in quas datus numerus sit resoluendus tam numero quam specie dentur.

3. Concipiantur scilicet eiusmodi tesserae, quae non vt vulgo sex, sed m habeant facies seu hedras, ita vt *in singulis* hae facies notatae sint numeris α, β, γ, δ etc. atque iam quaeritur, si habeantur n huiusmodi tesserae, quot modis iis proiiciendis datus numerus N produci possit. Possent etiam tesserae inter se dispares assumi, ita vt singulae peculiarem haberent hedrarum numerum, quae etiam in singulis peculiaribus numeris sint inscriptae; verum ex iis quae de tesseris vulgaribus sum allaturus, etiam solutio huius quaestionis latissime patentis haud difficulter colligetur.

4. Numeros autem, quibus facies tesserarum sunt notatae, tanquam exponentes quantitatis cuiusdam x considero, ita vt pro tessera vulgari hanc habeamus expressionem $x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$, etc. vbi cuique potestati vnitatem pro coëfficiente tribuo, quandoquidem quilibet numerus exponente designatus

aeque facile cadere potest. Quodsi iam huius expressionis quadratum sumatur, quaeuis potestas ipsius x tantum recipiet coefficientem, qui indicet quot modis ea potestas ex multiplicatione binorum terminorum istius expressionis resultare, hoc est, quot modis eius exponens ex additione binorum numerorum ex ordine 1, 2, 3, 4, 5, 6 produci possit. Euoluto ergo nostrae expressionis quadrato, si in eo occurrat terminus Mx^N, inde colligitur numerum N binis tesseris iaciendis tot modis prodire, quot coefficiens M contineat vnitates.

5. Simili modo euidens est, si istius expressionis sumatur cubus $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$, in eius euolutione quamuis potestatem x^N toties occurrere, quot modis eius exponens N oriri potest addendis tribus numeris ex ordine 1, 2, 3, 4, 5, 6; vnde si huius potestatis coefficiens sit M, totusque terminus Mx^N, ex eo concludimus numerum N tribus tesseris iaciendis tot modis produci posse, quot coefficiens M contineat vnitates. Generatim ergo si sumatur exponentis n dignitas nostrae expressionis $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n$, ea euoluta secundum potestates ipsius x, quilibet terminus Mx^N docebit, si numerus tesserarum fuerit $= n$, iis iaciendis numerum N tot modis cadere posse, quot coefficiens M contineat vnitates.

6. Si ergo tesserarum numerus fuerit $= n$, quaeraturque quot modis datus numerus N iis proii-

proiiciendis cadere possit, quaestio resoluetur per euolutionem huius formulae $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n$, cuius cum primus terminus futurus sit x^n, vltimus vero x^{6n}, prodibit huiusmodi terminorum progressio:

$$x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+4} \ldots + Mx^N \ldots + x^{6n}$$

cuius quilibet terminus Mx^N ostendet numerum N exponenti aequalem tot modis cadere posse, quot coefficiens M contineat vnitates: ex quo statim elucet, quaestionem locum habere non posse, nisi numerus propositus N contineatur intra limites n et $6n$. Totum ergo negotium huc redit, vt ista progressio seu singulorum terminorum coefficientes assignentur.

7. Ad hos igitur inueniendos ponatur formula euoluenda hoc modo repraesentata

$$x^n(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^n = V$$

tum vero pro eiusdem euolutione statuatur

$$V = x^n(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \text{etc.})$$

Ac posito $\frac{V}{x^n} = Z$ erit ex priori differentiale logarithmicum:

$$\frac{x\,dZ}{Z\,dx} = \frac{nx + 2nx^2 + 3nx^3 + 4nx^4 + 5nx^5}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}$$

Eiusdem autem valor ex posteriori prodit

$$\frac{x\,dZ}{Z\,dx} = \frac{Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + 5Ex^5 + 6Fx^6 \text{ etc.}}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 \text{ etc.}}$$

 quae

quae duae expreſſiones inter ſe debent eſſe aequales, vnde coefficientium valores determinabuntur

8. Conſtituta autem harum duarum expreſſionum aequalitate oritur iſta aequatio

$$\begin{array}{llllllll}
nx & +nAx^2 & +nBx^3 & +nCx^4 & +nDx^5 & +nEx^6 & +nFx^7 & +nGx^8 \text{ etc.} \\
 & +2n & +2nA & +2nB & +2nC & +2nD & +2nE & +2nF \\
 & & +3n & +3nA & +3nB & +3nC & +3nD & +3nE \\
 & & & +4n & +4nA & +4nB & +4nC & +4nD \\
 & & & & +5n & +5nA & +5nB & +5nC \\
\hline
=Ax & +2Bx^2 & +3Cx^3 & +4Dx^4 & +5Ex^5 & +6Fx^6 & +7Gx^7 & +8Hx^8 \\
 & +A & +2B & +3C & +4D & +5E & +6F & +7G \\
 & & +A & +2B & +3C & +4D & +5E & +6F \\
 & & & +A & +2B & +3C & +4D & +5E \\
 & & & & +A & +2B & +3C & +4D \\
 & & & & & +A & +2B & +3C,
\end{array}$$

quae binae expreſſiones, cum ſecundum ſingulos terminos inter ſe debeant eſſe aequales, valores ſingulorum coefficientium ſuppeditabunt.

9. Hinc autem ſequentes determinationes impetrantur,

$$\begin{aligned}
&A = n \\
&2B = (n-1)A + 2n \\
&3C = (n-2)B + (2n-1)A + 3n \\
&4D = (n-3)C + (2n-2)B + (3n-1)A + 4n \\
&5E = (n-4)D + (2n-3)C + (3n-2)B + (4n-1)A + 5n \\
&6F = (n-5)E + (2n-4)D + (3n-3)C + (4n-2)B + (5n-1)A \\
&7G = (n-6)F + (2n-5)E + (3n-4)D + (4n-3)C + (5n-2)B \\
&8H = (n-7)G + (2n-6)F + (3n-5)E + (4n-4)D + (5n-3)C \\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Quili-

Quilibet ergo coefficiens determinatur per quinos praecedentium, quibus inuentis erit

$$V = x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + Dx^{n+4} + Ex^{n+5} + \text{etc.}$$

ſicque problema de n teſſeris in genere eſt ſolutum.

10. Si a qualibet ſuperiorum aequationum praecedens ſubtrahatur, obtinebuntur ſequentes determinationes multo ſimpliciores:

$A = n$

$2B = nA + n$

$3C = nB + nA + n$

$4D = nC + nB + nA + n$

$5E = nD + nC + nB + nA + n$

$6F = nE + nD + nC + nB + nA - 5n$

$7G = nF + nE + nD + nC + nB - (5n - 1)A$

$8H = nG + nF + nE + nD + nC - (5n - 2)B$

etc.

Si denuo differentiae caperentur, relationes iſtae adhuc ſimpliciores eſſent prodituræ, hoc modo

$2B = (n+1)A$; $3C = (n+2)B$; $4D = (n+3)C$; $6E = (n+4)D$;

$6F = (n+5)E - 6n$; $7G = (n+6)F - (6n-1)A + 5n$

$8H = (n+7)G - (6n-2)B + (5n-1)A$

$9I = (n+8)H - (6n-3)C + (5n-2)B$

$10K = (n+9)I - (6n-4)D + (5n-3)C$

etc.

11. Hinc prout tesserarum numerus fuerit vel 2, vel 3 vel 4 lex progressionis coefficientium erit vt sequitur:

	pro duabus	pro tribus	pro quatuor
$A =$	2	3	4
$2B =$	$3A$	$4A$	$5A$
$3C =$	$4B$	$5B$	$6B$
$4D =$	$5C$	$6C$	$7C$
$5E =$	$6D$	$7D$	$8D$
$6F =$	$7E - 12$	$8E - 18$	$9E - 24$
$7G =$	$8F - 11A + 10$	$9F - 17A + 15$	$10F - 23A + 20$
$8H =$	$9G - 10B + 9A$	$10G - 16B + 14A$	$11G - 22B + 19A$
$9I =$	$10H - 9C + 8B$	$11H - 15C + 13B$	$12H - 21C + 18B$
$10K =$	$11I - 8D + 7C$	$12I - 14D + 12C$	$13I - 20D + 17C$
$11L =$	$12K - 7E + 6D$	$13K - 13E + 11D$	$14K - 19E + 16D$
$12M =$	$13L - 6F + 5E$	$14L - 12F + 10E$	$15L - 18F + 15E$

etc.

quilibet ergo coefficiens per tres praecedentes determinatur vbi hac imprimis est notatu dignum, quod tandem in nihilum abeant, et postremi primis euadant pares, id quod ex hac lege minus perspicere licet.

12. Quo autem hanc legem clarius intelligamus denotet haec formula $(N)^{(n)}$ numerum casuum quibus numerus N per n tesseras produci potest, ita vt sit $(n)^{(n)} = 1$; $(n+1)^{(n)} = A$; $(n+2)^{(n)} = B$;

$(n+3)$

$(n+3)^{(n)} = C$; $(n+4)^{(n)} = D$; ..... $(n+9)^{(n)} = I$ et $(n+10)^{(n)} = K$. Hinc ergo fiet

$$10(n+10)^{(n)} = (n+9)(n+9)^{(n)} - (6n-4)(n+4)^{(n)} + (5n-3)(n-3)^{(n)}$$

vnde concluditur fore in genere:

$$\lambda(n+\lambda)^{(n)} = (n+\lambda-1)(n+\lambda-1)^{(n)} - (6n+6-\lambda)(n+\lambda-6)^{(n)}$$
$$+ (5n+7-\lambda)(n+\lambda-7)^{(n)}.$$

Ponamus iam $n+\lambda = N$ vt sit $\lambda = N-n$, eritque

$$(N)^{(n)} = \frac{(N-1)(N-1)^{(n)} - (7n+6-N)(N-6)^{(n)} + (6n+7-N)(N-7)^{(n)}}{N-n}$$

vbi notandum est semper fore $(P)^{(n)} = 0$, si fuerit $P < n$.

13. Facilius autem hi coefficientes definiri possunt pro quouis tesserarum numero; si iidem pro tesserarum numero vnitate minore iam fuerint reperti. Si enim sit

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n = x^n + A x^{n+1} + B x^{n+2}$$
$$+ C x^{n+3} + D x^{n+4} + \text{etc.}$$

ponaturque

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^{n+1} = x^{n+1} + A' x^{n+2} + B' x^{n+3}$$
$$+ C' x^{n+4} + D' x^{n+5} + \text{etc.}$$

erit,

erit, quia haec expressio illi per $x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$ multiplicatae est aequalis

	hinc differentiis sumendis
$A'=A+1$	
$B'=B+A+1$	$B'=A'+B$
$C'=C+B+A+1$	$C'=B'+C$
$D'=D+C+B+A+1$	$D'=C'+D$
$E'=E+D+C+B+A+1$	$E'=D'+E$
$F'=F+E+D+C+B+A$	$F'=E'+F-1$
$G'=G+F+E+D+C+B$	$G'=F'+G-A$
etc.	etc.

14. Quare si modo denotandi ante introducto vtamur, ex aequatione $G'=F'+G-A$ nascitur haec:

$$(n+8)^{(n+1)}=(n+7)^{(n+1)}+(n+7)^{(n)}-(n+1)^{(n)}$$

quae in genere ita repraesentabitur:

$$(n+1+\lambda)^{(n+1)}=(n+\lambda)^{(n+1)}+(n+\lambda)^{(n)}-(n+\lambda-6)^{(n)}.$$

Quod si iam pro $n+\lambda$ scribatur N erit

$$(N+1)^{(n+1)}=(N)^{(n+1)}+(N)^{(n)}-(N-6)^{(n)};$$

vbi notandum est quamdiu fuerit $N-6<n$ fore $(N-6)^{(n)}=0$. Hinc simul patet omnes hos numeros fore integros, quod ex priori lege minus apparet.

Tabula

Tabula ostendens

quot modis quilibet numerus N per n tesseras cadere possit

N	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0
7	0	6	15	20	15	6	1	0
8	0	5	21	35	35	21	7	1
9	0	4	25	56	70	56	28	8
10	0	3	27	80	126	126	84	36
11	0	2	27	104	205	252	210	120
12	0	1	25	125	305	456	462	330
13	0	0	21	140	420	756	917	792
14	0	0	15	146	540	1161	1667	1708
15	0	0	10	140	651	1666	2807	3368
16	0	0	6	125	735	2247	4417	6147
17	0	0	3	104	780	2856	6538	10480
18	0	0	1	80	780	3431	9142	16808
19	0	0	0	56	735	3906	12117	25488
20	0	0	0	35	651	4221	15267	36688
21	0	0	0	20	540	4332	18327	50288
22	0	0	0	10	420	4221	20993	65808
23	0	0	0	4	305	3906	22967	82384
24	0	0	0	1	205	3431	24017	98813
25	0	0	0	0	126	2856	24017	113688

N	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
26	0	0	0	0	70	2247	22967	125588
27	0	0	0	0	35	1666	20993	133288
28	0	0	0	0	15	1161	18327	135954
29	0	0	0	0	5	756	15267	133288
30	0	0	0	0	1	456	12117	125588
31	0	0	0	0	0	252	9142	113688
32	0	0	0	0	0	126	6538	98813
33	0	0	0	0	0	56	4417	82384
34	0	0	0	0	0	21	2807	65808
35	0	0	0	0	0	6	1667	50288
36	0	0	0	0	0	1	917	36688

15. In *his ergo feriebus etiam proprietas* §. 12 inuenta locum habet; ita si fuerit $n=6$ erit:

$$(N)^{(6)}=\frac{(N-1)(N-1)^{(6)}-(48-N)(N-6)^{(6)}+(43-N)(N-7)^{(6)}}{N-6}$$

vnde si exempli gratia $N=25$ erit

$$(25)^{(6)}=\frac{24.(24)^{(6)}-23.(19)^{(6)}+18.(18)^{(6)}}{19}$$

at est $(24)^{(6)}=3431$; $(19)^{(6)}=3906$; $(18)^{(6)}=3431$ ideoque

$$(25)^{(6)}=\frac{24.3431-23.3906+18.3431}{19}=\frac{54264}{19}=2856$$

vti tabula habet. Similiter si sit $N=29$ erit

$$(29)^{(6)}=\frac{28.(28)^{(6)}-19.(23)^{(6)}+14.(22)^{(6)}}{23}$$

hinc

hinc ob $(28)^{(6)}=1161$; $(23)^{(6)}=3906$ et $(22)^{(6)}=4221$ erit

$$(29)^{(6)}=\frac{32508-74214+59094}{23}=\frac{17388}{23}=756$$

16. Verum euolutio formulae V (§. 7) alio modo institui potest, vt quilibet terminus absolute assignetur, neque ad hoc praecedentibus sit opus. Cum enim sit

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5=\frac{1-x^6}{1-x}$$

erit $V=\frac{x^n(1-x^6)^n}{(1-x)^n}$, atque euolutione facta ob

$$(1-x^6)^n=1-\frac{n}{1}x^6+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{12}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{18}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{24}-\text{etc.}$$

$$\frac{x^n}{(1-x)^n}=x^n+\frac{n}{1}x^{n+1}+\frac{n(n+1)}{1.2}x^{n+2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^{n+3}$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}x^{n+4}$$

vnde colligitur fore:

$(n)^{(n)}=1$;	$(n+6)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+5)}{1\ldots\ldots6}-\frac{n}{1}\,1$
$(n+1)^{(n)}=\frac{n}{1}$	$(n+7)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+6)}{1\ldots\ldots7}-\frac{n}{1}.\frac{n}{1}$
$(n+2)^{(n)}=\frac{n(n+1)}{1.2}$	$(n+8)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+7)}{1\ldots\ldots8}-\frac{n}{1}.\frac{n(n+1)}{1.2}$
$(n+3)^{(n)}=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$	$(n+9)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+8)}{1\ldots\ldots9}-\frac{n}{1}.\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$
$(n+4)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+3)}{1\ldots\ldots4}$	$(n+10)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+9)}{1\ldots\ldots10}-\frac{n}{1}.\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$
$(n+5)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+4)}{1\ldots\ldots5}$	$(n+11)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+10)}{1\ldots\ldots11}-\frac{n}{1}.\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}$

$$(n+12)^{(n)} = \frac{n\ldots\ldots(n+11)}{1\ldots\ldots12} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n\ldots\ldots(n+5)}{1\ldots\ldots6} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 1$$

$$(n+13)^{(n)} = \frac{n\ldots\ldots(n+12)}{1\ldots\ldots13} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n\ldots\ldots(n+6)}{1\ldots\ldots7} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{n}{1}$$

etc.

vnde in genere concluditur:

$$(n+\lambda)^{(n)} = \frac{n\ldots(n+\lambda-1)}{1\ldots\ldots\lambda} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n\ldots(n+\lambda-7)}{1\ldots\ldots(\lambda-6)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{n\ldots(n+\lambda-13)}{1\ldots\ldots(\lambda-12)}$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{n\ldots(n+\lambda-19)}{1\ldots\ldots(\lambda-18)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{n\ldots(n+\lambda-25)}{1\ldots\ldots(\lambda-24)}$$

etc.

17. Hinc ſolutio ad teſſeras quocunque alio facierum numero praeditas accommodari poteſt. Sit enim m numerus facierum in *ſingulis teſſeris*, quae notatae ſint numeris $1, 2, 3 \ldots\ldots m$ talium *autem* teſſerarum numerus ſit $= n$, quibus proiectis quaeritur, quot modis datus numerus N cadere poſſit. Seu quod eodem redit, quaeritur quot modis numerus N in n partes reſolui poſſit, quae ſingulae in hoc ordine numerorum $1, 2 \ldots\ldots m$ ſint contentae; vbi quidem notandum eſt non ſolum diuerſas partitiones, ſed etiam diuerſos ordines earundem partium numerari, vti in teſſeris fieri ſolet, vbi exempli gratia iactus 3, 4 et 4, 3 pro duobus diverſis caſibus habentur.

18. Quodſi ergo haec ſcriptio $(N)^{(n)}$ denotet caſuum numerum, quibus numerus N proiiciendis n teſſeris, quarum ſingulae habeant m facies numeris $1, 2, 3 \ldots\ldots m$ notatas, produci poſſit; primo notandum

tandum eſt fore $(n)^{(n)}=1$, et ſi $N<n$ eſſe $(N)^{(n)}=0$. Deinde ſi $N=mn$ eſt quoque $(mn)^{(n)}=1$, et ſi $N>mn$ erit $(N)^{(n)}=0$. Denique ſiue ſit $N=n+\lambda$ ſiue $N=mn-\lambda$, numerus caſuum eſt idem ſeu $(n+\lambda)^{(n)}=(mn-\lambda)^{(n)}$. Poſtrema autem formula praebet:

$$(n+\lambda)^{(n)}=\frac{n\ldots(n+\lambda-1)}{1\ldots\ldots\lambda}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n\ldots(n+\lambda-m-1)}{1\ldots\ldots(\lambda-m)}+\frac{n(n-1)}{1.\,2}\cdot\frac{n\ldots(n+\lambda-2m-1)}{1\ldots\ldots(\lambda-2m)}$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\cdot\frac{n\ldots\ldots(n+\lambda-3m-1)}{1\ldots\ldots(\lambda-3m)}+\text{etc.}$$

19. Facillime autem hi numeri cum ex praecedentibus tum ex caſibus, vbi teſſerarum numerus eſt vnitate minor, determinabuntur. Erit enim generaliter, ſi ſingularum teſſerarum numerus facierum fuerit $=m$, eaeque numeris $1, 2 \ldots m$ ſint inſignitae:

$$(N+1)^{(n+1)}=(N)^{(n+1)}+(N)^{(n)}-(N-m)^{(n)}$$

ſeu $(N+1)^{(n)}=(N)^{(n)}+(N)^{(n-1)}-(N-m)^{(n-1)}$.

Hinc ſi pro $N+1$ ſcribatur $n+\lambda$ habebitur

$$(n+\lambda)^{(n)}=(n+\lambda-1)^{(n)}+(n+\lambda-1)^{(n-1)}-(n+\lambda-m-1)^{(n-1)}$$

Denique pro eodem teſſerarum numero n iſti numeri ita a praecedentibus pendent, vt ſit

$$\lambda(n+\lambda)^{(n)}=(n+\lambda-1)(n+\lambda-1)^{(n)}-(mn+m-\lambda)(n+\lambda-m)^{(n)}$$
$$+(mn-n+m+1-\lambda)(n+\lambda-m-1)^{(n)}$$

Ceterum notum eſt ſummam omnium horum numerorum eſſe $=m^n$.

20. Simili modo haec quaeſtio reſolui poteſt, ſi non omnes teſſerae pari hedrarum numero fuerint

 prae-

praeditae. Ponamus tres dari tesseras, primam hexaedram numeros 1, 2, 3, 4, 5, 6 secundam octaedram numeros 1 2, 3 ... 8 et tertiam dodecaedram numeros 1, 2, 3 ..... 12 gerentem: quod si iam quaeratur, quot modis datus numerus N cadere possit euoluatur hoc productum

$$(x+x^2+x^3\ldots x^6)(x+x^2+x^3\ldots x^8)(x+x^2+x^3\ldots x^{12})=V$$

et coefficiens potestatis x^N ostendet casuum numerum. Cum iam sit

$$V=\frac{x^3(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{12})}{(1-x)^3}$$

erit numeratorem euoluendo

$$V=\frac{x^3-x^9-x^{11}-x^{15}+x^{17}+x^{21}+x^{23}-x^{29}}{(1-x)^3}.$$

21. Hic numerator multiplicetur per $\frac{1}{(1-x)^3}$, seu hanc seriem:

$$1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+28x^6+36x^7+\text{etc.}$$

cuius coefficientes sunt numeri trigonales, vnde cum numeri n trigonalis $\frac{n(n+1)}{2}$, quinis huius seriei terminus erit:

$$\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} \text{ seu } \frac{(n-1)(n-2)}{2}x^{n-3}$$

Iam per numeratorem multiplicando, potestatis x^n coefficiens reperitur:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{(n-7)(n-8)}{2}-\frac{(n-9)(n-10)}{2}-\frac{(n-13)(n-14)}{2}$$
$$+\frac{(n-15)(n-16)}{2}+\frac{(n-19)(n-20)}{2}+\frac{(n-21)(n-22)}{2}-\frac{(n-27)(n-28)}{2}$$

quae

quae expressio autem quouis casu non vlterius continuari debet, quam donec ad factores negatiuos perueniatur.

22. Relicto autem denominatore $(1-x)^3 = 1-3x+3x^2-x^3$ series quaesita erit recurrens ex scala relationis $3, -3, +1$ nata, dummodo terminorum numeratoris ratio habeatur. Hinc pro quouis exponente sequentes coefficientes inueniuntur

Exp.	Coeff.	Exp.	Coeff.
3	1	15	47
4	3	16	45
5	6	17	42
6	10	18	38
7	15	19	33
8	21	20	27
9	27	21	21
10	33	22	15
11	38	23	10
12	42	24	6
13	45	25	3
14	47	26	1

Numeri hic maiores quam 26 produci nequeunt cum sit $26 = 6 + 8 + 12$, et omnium casuum summa est $576 = 6.8.12$.

20. Cum hoc modo resolutio numerorum in partes numero et specie datas sine inductionis subsidio absolui possit, in mentem mihi incidunt, quae-

quaedam Fermatii elegantia Theoremata, quae cum nondum ſint demonſtrata, fortaſſe haec methodus ad demonſtrationes eorum perductura videtur. Cum enim Fermatius aſſeueraſſet omnes numeros vel eſſe trigonales, vel duorum vel trium trigonalium aggregata; quia cyphra etiam in ordine trigonalium reperitur, theorema ita enunciari poteſt, vt vt omnes numeri in tres trigonales reſolubiles dicantur. Quare ſi numeris trigonalibus pro exponentibus ſumtis formetur haec ſeries:

$$1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + x^{28} + \text{etc.} =$$

demonſtrari oportet, ſi huius ſeriei cubus euoluatur tum omnes plane poteſtates ipſius x eſſe occurſuras, nullamque omiſſum iri quod ſi demonſtari *poſſet*, haberetur demonſtratio iſtius Theorematis Fermatiani.

24. Simili modo ſi huius *ſeriei*

$$1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + \text{etc.} = S$$

ſumatur poteſtas quarta, oſtendique queat, in ea omnes plane poteſtates ipſius x reperiri, habebitur demonſtratio huius Theorematis Fermatiani, quo omnes numeri ex additione quaternorum quadratorum reſultare ſtatuuntur. In genere autem ſi ponatur

$$S = 1 + x^1 + x^m + x^{3m-3} + x^{6m-8} + x^{10m-15} + x^{15m-24} + x^{21m-35} \text{ etc.}$$

huiusque ſeriei ſumatur poteſtas exponentis m, demonſtrandum eſt in ea omnes poteſtates ipſius x eſſe prodituras, ita vt omnis numerus ſit agregatum

tum m numerorum polygonalium laterum numero existente $= m$ vel pauciorum.

25. Ex iisdem principiis alia se offert via ad has demonstrationes inuestigandas, quae a praecedente hoc differt, quod vti ibi non solum diuersitas partium sed etiam ordo spectatur, hic ordinis ratio omittitur Pro resolutione scilicet in triangulares numeros constituatur haec formula

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^3z)(1-x^6z)(1-x^{10}z)(1-x^{15}z)\text{ etc.}}$$

quae euoluta hanc praebeat seriem:

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \text{etc.}$$

ita vt P, Q, R, S, etc. sint functiones ipsius x tantum Manifestum autem est fore:

$$P = 1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \text{etc.}$$

at Q praeterea eas potestates ipsius x continebit, quarum exponentes sunt aggregata duorum trigonalium. Demonstrari ergo debet, in functione R omnes plane potestates ipsius x esse occursuras.

26. Simili modo pro resolutione numerorum in quaterna quadrata euoluatur haec fractio

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^4z)(1-x^9z)(1-x^{16}z)(1-x^{25}z)\text{etc.}}$$

quae si abeat in hanc formam:

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \text{etc.}$$

demonstrandum est functionem S omnes potestates ipsius x complecti. Nam P aequatur seriei $1+x+x^4+x^9+x^{16}+$ etc. et Q praeterea eas continet potestates ipsius x, quarum exponentes sunt aggregata duorum quadratorum, in qua ergo serie multae adhuc potestates desunt. In R autem insuper eae potestates, quarum exponentes sunt aggregata ternorum quadratorum, aderunt; atque in S quoque eae; quarum exponentes sunt summae quaternorum ita vt in S omnes numeri in exponentibus occurrere debeant.

27. Ex hoc principio definiri potest, quot solutiones problemata, quae ab *arithmeticis* ad regulam Virginum referri solent, admittat. *Huiusmodi* problemata huc redeunt, vt inueniri debeant numeri p, q, r, s, t etc. ita vt his duabus conditionibus satisfiat:

$$ap+bq+cr+ds \text{ etc.} = n \text{ et}$$
$$\alpha p+\beta q+\gamma r+\delta s \text{ etc.} = \nu$$

et iam quaestio est, quot solutiones in numeris integris positiuis locum sint habiturae: vbi quidem tenendum est numeros a, b, c, d etc. n et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. ν esse integros, quia nisi tales essent, facile eo reducerentur. Statim quidem apparet, si duo tantum numeri inueniendi p et q proponantur, plus vna solutione non dari, quae adeo, nisi pro p et q numeri integri positiui prodeant, pro nulla haberi solet.

28.

28. Iam ad numerum omnium solutionum quouis casu definiendum, ne inductioni seu tentationi quicquam tribuatur, consideretur haec expressio

$$\frac{1}{(1-x^a y^\alpha)(1-x^b y^\beta)(1-x^c y^\gamma)(1-x^d y^\delta)\text{ etc.}}$$

eaque euoluatur; vnde prodibit huiusmodi series

$$1 + Ax^{\cdot\cdot}y^{\cdot\cdot} + Bx^{\cdot\cdot}y^{\cdot\cdot} + Cx^{\cdot\cdot}y^{\cdot\cdot} \text{ etc.}$$

in qua si occurrat terminus $Nx^n y^\nu$, coefficiens N numerum solutionum indicabit: ac si eueniat, vt hic terminus non occurrat, id indicio erit nullam dari solutionem. Totum ergo negotium in hoc versatur, vt coefficiens huius termini $x^n y^\nu$ inuestigetur.

DE INVENTIONE QVOTCVNQVE MEDIARVM PROPORTIONALIVM CITRA RADICVM EXTRACTIONEM.

Auctore

L. EVLERO.

Propositio I.

1.

Si numeri a, b, c, d etc. sint continue proportionales, etiam differentiae $b-a$, $c-b$, $d-c$ etc. erunt in proportione geometrica continua eiusdem exponentis; ac si prior series a proportione geometrica aberret, posterior multo magis aberrabit.

Demonstratio.

Prior propositionis pars in elementis est demonstrata; pro altera autem parte ponamus exponentem rationis geometricae $=r$ vt secundum proportionem geometricam foret $b=ar$, $c=ar^2$, $d=ar^3$ etc. Sit autem $b=ar+z$ manente $c=arr$, ita vt z sit error termini b a proportione geometrica, erunt-

eruntque differentiae $b-a=a(r-1)+z$ et $c-b=ar(r-1)-z$, quarum ratio eſt $\frac{ar(r-1)-z}{a(r-1)+z}=r-\frac{(r+1)z}{a(r-1)+z}$, cuius aberratio ab exponente r vtique maior eſt, quam rationis $\frac{b}{a}=r+\frac{z}{a}$. Vnde etiam facile intelligitur, ſi ſeriei a, b, c, d etc. plures termini a ratione geometrica $1:r$ aberrent, in ſerie differentiarum maiores errores ineſſe debere.

Corollarium.

2. Viciſſim ergo quantumuis ſeries differentiarum a proportione geometrica aberrauerit, ſeries terminorum ipſa propius ad hanc proportionem accedet.

Propoſitio II.

3. Inter duos numeros datam rationem $1:r$ tenentes *medium* proportionalem inuenire ſine extractione radicis.

Solutio.

Sint numeri propoſiti A et Ar, mediusque proportionalis prope ſaltem verus $=B$; vt hi tres numeri A, B, Ar progreſſionem a geometrica parum aberrantem conſtituant. Statuantur autem differentiae pro lubitu: $B-A=a$ et $Ar-B=b$, hincque colligitur $A(r-1)=a+b$ et $B(r-1)=ar+b$, ita vt ſit

$$A=\frac{a+b}{r-1} \quad \text{et} \quad B=\frac{ar+b}{r-1}$$

 nihil

nihil autem impedit quominus numeri A et B in ratione $1 : r-1$ augeantur, vt in integris habeamus:

$$A = a + b \quad \text{et} \quad B = ar + b$$

vnde ſumtis pro lubitu binis numeris a et b, hi tres numeri

$$a + b; \quad ar + b; \quad ar + br$$

quorum primus eſt ad tertium in ratione data $1:r$ eo propius ad progreſſionem geometricam accedent, quo minus numerorum aſſumtorum a et b ratio a ratione $1 : \sqrt{r}$ aberrauerit; ſeu fractio $\frac{ar+b}{a+b}$ propius ad valorem $\sqrt{r}$ accedet, quam fractio $\frac{b}{a}$. Quo igitur valorem medii proportionalis $\sqrt{r}$ inter 1 et r accuratius obtineamus, ſtatuamus $a + b = a'$ et $ar + b = b'$; atque fractio $\frac{a'r+b'}{a'+b'}$ adhuc propius valorem $\sqrt{r}$ exhibebit ſimili ergo modo ſi porro ſtatuamus

$$a' + b' = a''; \quad a'' + b'' = a'''; \quad a''' + b''' = a'''' \text{ etc.}$$
$$a'r + b' = b''; \quad a''r + b'' = b'''; \quad a'''r + b''' = b'''' \text{ etc.}$$

fractiones $\frac{b''}{a''}$; $\frac{b'''}{a'''}$; $\frac{b''''}{a''''}$ etc. continuo accuratius valorem medii proportionalis $\sqrt{r}$ exprimeat.

Coroll. 1.

4. Cum igitur quaeſtio ſit de medio proportionali inter numeros $1 : r$ ſumtis pro lubitu duobus numeris a et b formentur inde duae ſeries

a, a',

$$a,\ a',\ a'',\ a''',\ a'''' \text{ etc.}$$
$$b,\ b',\ b'',\ b''',\ b'''' \text{ etc.}$$

hac lege vt sit

$$a' = a + b;\ a'' = a' + b';\ a''' = a'' + b'';\ a'''' = a''' + b'''$$
$$b' = ar + b;\ b'' = a'r + b';\ b''' = a''r + b'';\ b'''' = a'''r + b'''$$

et fractiones $\frac{b}{a}$, $\frac{b'}{a'}$, $\frac{b''}{a''}$, $\frac{b'''}{a'''}$, $\frac{b''''}{a''''}$ etc. continuo propius valorem quaesitum $\sqrt{r}$ exhibebunt.

Coroll. 2.

5. Vel si constituatur progressio a ratione geometrica continua quantumuis aberrans, cuius termini alterni sint in ratione $1 : r$

$$a,\ b,\ ar,\ br,\ ar^2,\ br^2,\ ar^3,\ br^3,\ ar^4,\ br^4 \text{ etc.}$$

hinc binis terminis coniungendis noua formetur progressio:

$$a+b,\ b+ar,\ ar+br,\ br+ar^2,\ ar^2+br^2,\ br^2+ar^3, \text{ etc.}$$

haecque magis ad progressionem geometricam accedet.

Coroll. 3.

6. Si hic denuo bini termini coniungantur, prodibit haec series:

$$a(r+1)+2b;\ 2ar+b(r+1);\ ar(r+1)+2br;\ 2ar^2 + br(r+1) \text{ etc.}$$

hincque porro simili modo istae

$$a(3r+1)+b(r+3);\ ar(r+3)+b(3r+1);\ ar(3r+1) + br(r+3) \text{ etc.}$$

a(rr

$a(rr+6r+1)+b(4r+4)$; $ar(4r+4)+b(rr+6r+1)$; $ar(rr+6r+1)+br(4r+4)$ etc.

$a(5rr+10r+1)+b(rr+10r+5)$; $ar(rr+10r+5)+b(5rr+10r+1)$; etc.

quae continuo propius ad progressionem geometricam conuergunt.

Scholion.

7. Totum ergo negotium huc redit, vt binae series a, a', a'', a''' etc. b, b', b'', b''', b'''' etc. formentur quippe quarum termini homologi continuo propius rationem $1 : \sqrt{r}$ exhibebunt. Cum autem singuli termini post primos vtramque litteram a et b inuoluant ita vt quilibet terminus vtriusque hanc habiturus sit formam $Ma+Nb$, primum obseruo posteriorem seriem ex priori oriri, si loco litterarum a et b scribantur b et ar. Quare si prioris seriei terminus indici n respondens fuerit $a^{(n)}=Ma+Nb$, posterioris seriei terminus eidem indici n respondens erit $b^{(n)}=Mb+Nar$, ita vt fractio $\frac{Mb+Nar}{Ma+Nb}$ eo exactius valorem $\sqrt{r}$ sit expressura, quo maior fuerit exponens n, atque adeo sumto $n=\infty$ verus valor $\sqrt{r}$ prodire debeat. Ita si exempli gratia capiatur $r=2$ series illae binae ita se habebunt:

a	$a+b$	$3a+2b$	$7a+5b$	$17a+12b$	$41a+29b$
b	$2a+b$	$4a+3b$	$10a+7b$	$24a+17b$	$58a+41b$
$2a$	$2a+2b$	$5a+4b$	$14a+10b$	$34a+24b$	$82a+58b$

cui

cui tertiam fubfcripfi primae duplam, quippe cuius ope continuatio facillime inftituitur. Quicunque ergo numeri hic pro a at b accipiantur, feries media continebit fatis prope media proportionalia inter primam et tertiam, vti facile perfpicitur. Simili modo fumto $r = 3$, hae feries ita fe habebunt

$$\begin{array}{l|r|r|r|r|r}
a & a + b & 4a + 2b & 10a + 6b & 28a + 16b & 76a + 44b \\
b & 3a + b & 6a + 4b & 18a + 10b & 48a + 28b & 132a + 76b \\
3a & 3a + 3b & 12a + 6b & 30a + 18b & 84a + 48b & 228a + 132b
\end{array}$$

eritque ergo ex vltimis $\frac{132a + 76b}{76a + 44b} = \frac{33a + 19b}{19a + 11b}$ eo exactius $= \sqrt{3}$, quo propius ratio $\frac{b}{a}$ eo accedat, ita fumto $b = 2$ et $a = 1$ fit admodum exacte $\sqrt{3} = \frac{71}{41}$ et nunc *fumto* $b = 71$ et $a = 41$ exactiffime erit $= \frac{2702}{1560} = \frac{1351}{780} = \sqrt{3}$ errore ne millionefimam quidem partem vnitatis attingente.

Propofitio III.

8. Inueftigare legem progreffionis binarum illarum ferierum a, a', a'', a''' etc. et b, b', b'', b''' etc. quarum termini homologi continuo propius rationem $1 : \sqrt{r}$ exprimunt.

Solutio.

Quoniam nouimus omnes terminos binas litteras a et b ita complecti, vt in forma $Ma + Nb$ contineantur, ac fi pro priori ftatuatur in genere $a^{(n)} = Ma + Nb$ tum pro pofteriori fore $b^{(n)} = Mb$

 $+ Nar$

$+Nar$, hinc lex progressionis suppeditat terminos sequentes:

$$a^{(n+1)}=(M+Nr)a+(M+N)b \text{ et}$$
$$b^{(n+1)}=(M+Nr)b+(M+N)ra$$

ex quo in legem progressionis vtriusque serei inquiri oportet. Quo igitur scrutemur, quemadmodum primae seriei quilibet terminus definiatur, consideremus hanc seriem sub ista forma generaliori

$$a+a'x^1+a''x^2+a'''x^3+a''''x^4+$$

cuius in infinitum continuatae summa fingatur $Pa+Qb$ et quoniam altera ex hac nascitur, dum loco a et b scribitur b et ra erit

$$b+b'x+b''x^2+b'''x^3+b''''x^4+ \text{ etc.}=Pb+Qra.$$

Addantur hae series inuicem, et quia est

$$a+b=a';\ a'+b'=a'';\ a''+b''=a''' \text{ etc. erit}$$
$$a'+a''x+a'''x^2+a''''x^3 \text{ etc.}=(P+Qr)a+(P+Q)b$$

multiplicemus hanc seriem per x et a prima subtrahamus prodibitque

$$a=Pa+Qb-(P+Qr)ax-(P+Q)bx$$

Quoniam vero quantitates P et Q a litteris a et b non pendent, hinc duae resultant aequationes

$$1=P-Px-Qrx \text{ et } 0=Q-Px-Qx$$

vnde deducimus has determinationes

$$P=\frac{1-x}{(1-x)^2-rxx}=\frac{1-x}{1-2x-(r-1)xx} \text{ et}$$
$$Q=\frac{Px}{1-x}=\frac{x}{1-2x-(r-1)xx}.$$

Quo-

Quocirca prior series $a+a'x+a''x^2+a'''x^3+$ etc. nascitur ex euolutione huius fractionis $\frac{a(1-x)+bx}{1-2x-(r-1)xx}$, posterior vero $b+b'x+b''x^2+b'''x^3+$ etc. ex euolutione huius $\frac{b(1-x)+arx}{1-2x-(r-1)xx}$ ita vt vtraque sit series recurrens secundi ordinis, scala relationis existente $2, (r-1)$, hincque pro serie priori a, a', a'', a''', a'''' etc. fit primo $a'=a+b$, tum vero $a''=2a'+(r-1)a$; $a'''=2a''+(r-1)a'$; $a''''=2a'''+(r-1)a''$ etc. ex hac vero nascitur altera ponendo $a=b$ et $b=ra$. Hinc adeo huius seriei terminum generalem definire licet ad quod valores quantitatum P et Q in fractiones simplices resolui oportet. Cum igitur denominatoris communis factor sit $1-x-x\sqrt{r}=1-x(1+\sqrt{r})$, pro quantitate P statuatur fractio simplex inde nata $=\frac{\mathfrak{A}}{1-x(1+\sqrt{r})}$, ac demonstraui fore $\mathfrak{A}=\frac{1-x}{1-x+x\sqrt{r}}$ posito $1-x=x\sqrt{r}$, vnde fit $\mathfrak{A}=\frac{1}{2}$, pro altero autem factore tantum $\sqrt{r}$ negatiue accipi opus est, ita vt sit

$$P=\frac{1}{2}.\frac{1}{1-x(1+\sqrt{r})}+\frac{1}{2}.\frac{1}{1-x(1-\sqrt{r})}$$

Simili modo pro Q si fractio partialis ex denominatoris factore $1-x(1+\sqrt{r})$ nata ponatur $\frac{\mathfrak{A}}{1-x(1+\sqrt{r})}$, reperitur $\mathfrak{A}=\frac{x}{1-x+x\sqrt{r}}$ posito $1-x=x\sqrt{r}$ indeque $\mathfrak{A}=\frac{1}{2\sqrt{r}}$. Quare ipsi $\sqrt{r}$ binos valores tribuendo fit

$$Q=\frac{1}{2\sqrt{r}}.\frac{1}{1-x(1+\sqrt{r})}-\frac{1}{2\sqrt{r}}.\frac{1}{1-x(1-\sqrt{r})}$$

sicque summa prioris seriei $a+a'x+a''x^2+a'''x^3+$ etc. erit

$$=\frac{a\sqrt{r}+b}{2\sqrt{r}}.\frac{1}{1-x(1+\sqrt{r})}+\frac{a\sqrt{r}-b}{2\sqrt{r}}.\frac{1}{1-x(1-\sqrt{r})}$$

 cum

cum nunc ex vtraque parte progreſſio naſcatur geometrica prodit noſtrae ſeriei terminus generalis

$$\frac{a\sqrt{r}+b}{2\sqrt{r}}(1+\sqrt{r})^n x^n+\frac{a\sqrt{r}-b}{2\sqrt{r}}(1-\sqrt{r})^n x^n$$

ita vt ſit indefinite.

$$a^{(n)}=\frac{a\sqrt{r}+b}{2\sqrt{r}}.(1+\sqrt{r})^n+\frac{a\sqrt{r}-b}{2\sqrt{r}}(1-\sqrt{r})^n$$

et pro altera ſerie

$$b^{(n)}=\frac{b+a\sqrt{r}}{2}(1+\sqrt{r})^n+\frac{b-a\sqrt{r}}{2}(1-\sqrt{r})^n$$

Coroll.

9. Ex hoc termino generali demum plene conuincimur, fore ſumto exponente n infinito $\frac{b^{(n)}}{a^{(n)}}=\sqrt{r}$, cum enim tum poteſtas $(1-\sqrt{r})^n$ prae priori $(1+\sqrt{r})^n$ euaneſcat, erit vtique

$$\frac{b^{(n)}}{a^{(n)}}=\frac{b\sqrt{r}+ar}{a\sqrt{r}+b}=\sqrt{r}.$$

Vnde ſimul patet quo maior capiatur exponens n, eo propius ad veritatem accedi.

Scholion.

10. Eadem quidem veritas etiam hac ratione oſtendi poteſt. Poſito generatim $a^{(n)}=Ma+Nb$, erit $b^{(n)}=Mb+Nar$, et termini ſequentes:

$$a^{(n+1)}=(M+Nr)a+(M+N)b \text{ et } b^{(n+1)}=(M+Nr)b+(M+N)ar$$

Iam

Iam casu $n = \infty$, nullum dubium superesse potest, quin sit $\frac{b^{(n+1)}}{a^{(n+1)}} = \frac{b^{(n)}}{a^{(n)}}$; vnde necesse est sit:

$$\frac{(M+Nr)b+(M+N)ar}{(M+Nr)a+(M+N)b} = \frac{Mb+Nar}{Ma+Nb}$$

Statuatur hic valor $= v$, et quia tum fit

$$\frac{M}{N} = \frac{bv-ar}{b-av} \text{ et } \frac{M}{N} = \frac{arv+bv-br-ar}{b+ar-av-bv} \text{ seu}$$

$$\frac{M}{N} - v = \frac{a(vv-r)}{b-av} = \frac{(a+b)(vv-r)}{b+ar-(a+b)v}$$

vnde manifesto sequitur $vv - r = 0$ et $v = \sqrt{r}$. Simul vero etiam quantitatum M et N haec relatio perspicitur, quod sumto $n = \infty$ fiat $\frac{M}{N} = v = \sqrt{r}$.

Propositio IV.

II. Inter duos numeros datam rationem $1 : r$ tenentes duos medios proportionales in rationalibus proxime exhibere.

Solutio.

Sumantur bini numeri quicunque a et ar in ratione data inter eosque capiantur duo medii quicunque b et c atque quantumuis relatio $a : b : c : ar$ a ratione geometrica discrepet, inde alias propius eo accedentes hoc modo eliciemus. Quaerantur alii similes quaterni numeri $A : B : C : Ar$ quorum illi sint differentiae, ita vt sit $B - A = a$; $C - B = b$ et $Ar - C = c$, hincque $B = A + a$; $C = A + a + b$; et $Ar = A + a + b + c$ seu $A = \frac{a+b+c}{r-1}$; $B = \frac{ar+b+c}{r-1}$; $C = \frac{ar+br+c}{r-1}$

qui

qui per $r-1$ multiplicati praebebunt hos quaternos numeros

$$a'=a+b+c;\, b'=b+c+ar;\, c'=c+ar+br;\, a'r=ar+br+cr$$

qui iam multo propius ad proportionem geometricam continuam accedent. Simili ergo modo hinc alii noui a'', b'', c'', $a''r$ deriuabuntur ſumendo:

$$a''=a'+b'+c';\, b''=b'+c'+a'r;\, c''=c'+a'r+b'r$$

hincque denuo alii, qui continuo propius propoſito ſatisfacient. Totum ergo negotium reducitur ad formationem trium progreſſionum:

$$\text{I. } a, a', a'', a''', a'''' \ldots\ldots a^{(n)}$$
$$\text{II. } b, b', b'', b''', b'''', \ldots\ldots b^{(n)}$$
$$\text{III. } c, c', c'', c''', c'''' \ldots\ldots c^{(n)}$$

quarum lex eſt ſatis ſimplex quae quo vlterius continuentur, eo propius quaterni numeri

$$a^{(n)} : b^{(n)} : c^{(n)} : ra^{(n)}$$

proportionem geometricam continuam exhibebunt, etiamſi initio aſſumti a, b, c, ra plurimum aberrauerint.

Coroll. 1.

12. De his tribus ſeriebus primum obſeruo ſingulos earum terminos huiusmodi formam $La+Mb+Nc$ eſſe habituros, ita vt quantitates L, M, N litteras pro arbitrio aſſumtas a, b, c non inuoluant, ſed a ſola ratione propoſita $1:r$ pendeant.

Coroll.

Coroll. 2.

13. Deinde si primae seriei terminus quicunque fuerit $a^{(n)} = La + Mb + Nc$, euidens est pro serie secunda fore $b^{(n)} = Lb + Mc + Nra$, et pro serie tertia $c^{(n)} = Lc + Mra + Nrb$. Vnde sufficit harum trium serierum primae indolem explorauisse.

Scholion.

14. Harum obseruationum ope inuentio duarum mediarum proportionalium, quae quidem in rationalibus proxime satisfaciat, expedite instituitur. Sint enim exempli causa inter duos numeros rationem *duplam tenentes* duo medii proportionales inuestigandi, et operatio numerica sumendis pro litteris a, b, c numeris 1, 1, 1 ob $r = 2$ ita se habebit

a ..	1	3	12	46	177	681	2620	10080
b ..	1	4	15	58	223	858	3301	12700
c ..	1	5	19	73	281	1081	4159	16001
$2a$ ..	2	6	24	92	354	1362	5240	20160
$2b$ ..	2	8	30	116	446	1716	6602	25400

Hic quatuor postremi numeri

10080 : 12700 : 16001 : 20160

tam parum a proportione geometrica recedunt, vt si inter extremos per extractionem radicis cubicae duo medii proportionales quaerantur, ii ne parte quidem

quidem decies millesima a veritate aberrent; est enim:

$$\frac{12700}{10080} = \sqrt[3]{\frac{2048783000}{1024192512}} = \sqrt[3]{\left(2 - \frac{2024}{1024192512}\right)}$$

ideoque $= \sqrt[3]{2} - \frac{2024}{3 \cdot 1024192512 \sqrt[3]{4}}$, vnde cum fiat $12700 = 10080 \sqrt[3]{2} - \frac{1}{23906}$ error infra particulam decies millesimam vnitatis subsistit, ipsa autem fractio $\frac{12700}{10080}$ tantum particula $\frac{1}{10080 \cdot 23906} = \frac{1}{24097248}$ hoc est minore quam vicies millionesima vnitatis a vero valore $\sqrt[3]{2}$ deficit, tantam autem praecisionem ope logarithmorum attingere non licet. Vnde intelligitur, quantum vsum haec methodus praestare queat in radicibus cuiusuis dignitatis proxime exprimendis.

Propositio V.

15. Inuestigare legem harum trium progressionum:

$$a, a', a'' \text{ etc.} \quad b, b', b'', \text{ etc.} \quad c, c', c'' \text{ etc.}$$

quarum termini homologi $a^{(n)} : b^{(n)} : c^{(n)}$ continuo propius proportionem $1 : \sqrt[3]{r} : \sqrt[3]{r^2}$ exprimunt.

Solutio.

Cum omnes termini ex ternis primo assumtis a, b et c ita componantur, vt sit $a^{(n)} = La + Mb + Nc$, erit

erit ex earum indole $b^{(n)}=Lb+Mc+Nra$ et $c^{(n)}=Lc+Mra+Nrb$ at lex progreſſionis praebet ſequentes terminos:

$$a^{(n+1)}=(L+Mr+Nr)a+(L+M+Nr)b+(L+M+N)c$$
$$b^{(n+1)}=(L+Mr+Nr)b+(L+M+Nr)c+(L+M+N)ra$$
$$c^{(n+1)}=(L+Mr+Nr)c+(L+M+Nr)ra+(L+M+N)rb.$$

Hinc ſi generalius ſtatuamus:

$$a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\text{etc.}=Pa+Qb+Rc \text{ erit}$$
$$b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\text{etc.}=Pb+Qc+Rra$$
$$c+c'x+c''x^2+c'''x^3+\text{etc.}=Pc+Qra+Rrb.$$

Addantur hae ſeries inuicem, et quia eſt

$$a+b+c=a',\ a'+b'+c'=a'',\ a''+b''+c''=a''' \text{ erit}$$
$$a'+a''x+a'''x^2+\text{etc.}=(P+Qr+Rr)a+(P+Q+Rr)b$$
$$+(P+Q+R)c$$

quae per x multiplicata et a prima ſubtracta dat

$$a=Pa+Qb+Rc-(P+Qr+Rr)ax-(P+Q+Rr)bx$$
$$-(P+Q+r)cx.$$

Quia autem quantitates P, Q, R litteras a, b, c non inuoluunt, hinc naſcuntur tres aequationes:

I. $1=P-Px-Qrx-Rrx$ $\qquad 1=P-Q-Q(r-1)x$
II. $0=Q-Px-Qx-Rrx$ hincque $0=Q-R-R(r-1)x$
III. $0=R-Px-Qx-Rx$ $\qquad 1=P-R-(Q+R)(r-1)x.$

Pro faciliori reſolutione ſtatuamus $1-x+rx=z$ et ſequens combinatio praebebit

$$\begin{array}{lll} \text{I} - \text{II} & 1 = P - Qz & \\ & & \text{hinc} \quad Q = Rz \\ \text{II} - \text{III} & 0 = Q - Rz & \phantom{\text{hinc}} \quad P = 1 + Rzz \end{array}$$

vnde fit

$$\text{III.} \quad 0 = R(1-x) - Px - Qx = R(1 - x - xz - xzz) - x$$

ideoque $R = \frac{x}{1 - x(1+z+zz)}$, at eſt $x = \frac{z-1}{r-1}$.

Ergo $R = \frac{z-1}{r-1-(z-1)(1+z+zz)} = \frac{z-1}{r-z^3}$ ſicque prodit

$$P = \frac{r-zz}{r-z^3}; \quad Q = \frac{zz-z}{r-z^3}; \quad R = \frac{z-1}{r-z^3}$$

quarum formarum cum denominator ſit

$$r - 1 - 3(r-1)x - 3(r-1)^2 x^2 - (r-1)^3 x^3$$

ſeu $(r-1)(1 - 3x - 3(r-1)x^2 - (r-1)^2 x^3)$

perſpicuum eſt noſtras tres progreſſiones eſſe recurrentes ſcala relationis exiſtente 3, $3(r-1)$, $(r-1)^2$, ita vt ſit

$$a^{(n)} = 3a^{(n-1)} + 3(r-1)a^{(n-2)} + (r-1)^2 a^{(n-3)}.$$

Nunc pro terminis generalibus harum progreſſionum fractiones P, Q, R in ſimplices reſolui oportet: quoniam autem denominatoris factor ſimplex eſt $\sqrt[3]{r} - z$ ſimul vicem binorum reliquorum gerens, ſiquidem $\sqrt[3]{r}$ tres inuoluit valores diuerſos, ſufficit hunc vnicum factorem conſideraſſe. Sit ergo ex fractione R fractio ſimplex oriunda $= \frac{A}{\sqrt[3]{r} - z}$, et numeramerator erit $A = \frac{z - 1}{\sqrt[3]{r^2} + z\sqrt[3]{r} + zz}$ posito $z = \sqrt[3]{r}$, vnde fit $A = \frac{\sqrt[3]{r} - 1}{3\sqrt[3]{rr}}$, ideoque

$$P = \frac{1}{3\sqrt[3]{r^2}} \cdot \frac{r - \sqrt[3]{r^2}}{\sqrt[3]{r} - z} \text{ etc. } Q = \frac{1}{3\sqrt[3]{r^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{r^2} - \sqrt[3]{r}}{\sqrt[3]{r} - z} \text{ etc. } R = \frac{1}{3\sqrt[3]{r^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{r} - 1}{\sqrt[3]{r} - z} \text{ etc.}$$

Restituatur pro z valor $1 + (r-1)x$, sitque $\frac{r-1}{\sqrt[3]{r} - 1} = s$, ac fiet

$$P = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - sx} + \text{etc. } Q = \frac{1}{3\sqrt[3]{r}} \cdot \frac{1}{1 - sx} + \text{etc. } R = \frac{1}{3\sqrt[3]{r^2}} \cdot \frac{1}{1 - sx} + \text{etc.}$$

Hinc cum sit $a + a'x + a''x^2 + \text{etc.} = Pa + Qb + Rc$ sequitur fore

$$a^{(n)} = \tfrac{1}{3} s^n \left(a + \frac{b}{\sqrt[3]{r}} + \frac{c}{\sqrt[3]{rr}}\right) + \ldots\ldots + \ldots\ldots,$$

vbi duo membra omissa ex primo ita formantur, vt loco $\sqrt[3]{r}$ scribatur $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{r}$, id quod etiam de $s = \frac{r-1}{\sqrt[3]{r} - 1}$ est intelligendum. Deinde vero pro binis reliquis seriebus habebitur:

$$b^{(n)} = \tfrac{1}{3} s^n \left(a\sqrt[3]{r} + b + \frac{c}{\sqrt[3]{r}}\right) + \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

$$c^{(n)} = \tfrac{1}{3} s^n \left(a\sqrt[3]{r^2} + b\sqrt[3]{r} + c\right) + \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

Coroll. 1.

16. Si n sit numerus praegrandis, bina membra omissa prae primis hic appositis euanescunt; ex

 quo

quo perſpicuum eſt tum fore $a^{(n)} : b^{(n)} : c^{(n)} = 1 : \sqrt[3]{r} : \sqrt[3]{rr}$; in quo ipſo tota vis methodi hic traditae conſiſtit.

Coroll. 2.

17. Natura harum ſerierum recurrentium tertii ordinis ideo imprimis notari meretur; quod fractiones principales P, Q, R tam concinne in fractiones ſimplices reſoluere licuit, atque ex terminis generalibus inde deriuatis natura harum ſerierum facile perſpicitur.

Scholion.

18. Hinc ratio iſtam methodum ad plures medias proportionales extendendi ita iam eſt manifeſta, vt ſuperfluum foret omnia ratiocinia, quibus operationes vſurpatae innituntur, repetere. Quam ob rem inuentionem plurium mediarum proportionalium inter duos numeros datam rationem $1 : r$ tenentes, nunc quidem ſatis ſuccincte exponere atque adeo binas propoſitiones cuique caſui tribuendas commode in vnam contrahere poterimus.

Propoſitio VI.

19. Inter duos numeros rationem datam $1 : r$ tenentes, tres medias continue proportionales in rationalibus proxime exhibere.

Solutio.

Solutio.

Sumtis in ratione data duobus numeris a et ra inter eos pro lubitu tres medii constituantur b, c, d, vt habeantur hi quinque numeri quantumvis a scopo aberrantes:

$$a : b : c : d : ra.$$

Hinc formentur alii hac lege vt sit

$$a' = a + b + c + d$$
$$b' = b + c + d + ra$$
$$c' = c + d + ra + rb$$
$$d' = d + ra + rb + rc$$

qui constituent progressionem iam multo propius ad scopum attingentem hanc:

$$a' : b' : c' : d' : ra'$$

ex quibus porro eadem lege alii noui quaerantur, indeque denuo alii, quo pacto continuo propius ad proportionem geometricam continuam accedetur, ita vt aberratio tandem omni assignabili minor euadat.

Singulae porro harum serierum

$$a,\ a',\ a'',\ a''',\ a'''' \text{ etc.}$$
$$b,\ b',\ b'',\ b''',\ b'''' \text{ etc.}$$
$$c,\ c',\ c'',\ c''',\ c'''' \text{ etc.}$$
$$d,\ d',\ d'',\ d''',\ d'''' \text{ etc.}$$

sunt recurrentes quarti ordinis secundum scalam relationis: $4,\ 6(r-1),\ 4(r-1)^2,\ (r-1)^3$.

 Deni-

Denique harum ſerierum termini generales, poſito breuitatis gratia $\frac{r-1}{\sqrt[4]{r}-1} = 1 + \sqrt[4]{r} + \sqrt[4]{r^2} + \sqrt[4]{r^3} = s$ erunt

$$a^{(n)} = \frac{a\sqrt[4]{r^3} + b\sqrt[4]{r^2} + c\sqrt[4]{r} + d}{4\sqrt[4]{r^3}} s^n + \text{etc.}$$

$$b^{(n)} = \frac{a\sqrt[4]{r^3} + b\sqrt[4]{r^2} + c\sqrt[4]{r} + d}{4\sqrt[4]{r^2}} s^n + \text{etc.}$$

$$c^{(n)} = \frac{a\sqrt[4]{r^3} + b\sqrt[4]{r^2} + c\sqrt[4]{r} + d}{4\sqrt[4]{r}} s^n + \text{etc.}$$

$$d^{(n)} = \frac{a\sqrt[4]{r^3} + b\sqrt[4]{r^2} + c\sqrt[4]{r} + d}{4} s^n + \text{etc.}$$

quarum expreſſionum prima tantum membra appoſui, dum ex his reliqua facile formantur, loco $\sqrt[4]{r}$ eius ternos reliquos valores ſubſtituendo.

Ceterum ſi ſtatuatur

$$a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a''''x^4 + \text{etc.} = Pa + Qb + Rc + Sd$$

ac breuitatis gratia fiat $1 - x + rx = z$ reperitur vt ante:

$$P = \frac{r - z^3}{r - z^4};\ Q = \frac{z^3 - z^2}{r - z^4};\ R = \frac{z^2 - z}{r - z^4};\ S = \frac{z - 1}{r - z^4}$$

vnde ſimul reliquarum ſimilium ſerierum a litteris b, c, d incipientium ſummae exhibentur.

Exem-

Exemplum.

20. Inter duos numeros rationem duplam tenentes, tres medii proportionales sequenti modo reperiuntur:

a ... 1	4	22	116	613	3240	17124	90504
b ... 1	5	26	138	729	3853	20364	107628
c ... 1	6	31	164	867	4582	24217	127992
d ... 1	7	37	195	1031	5449	28799	152209
$2a$ ... 2	8	44	232	12[illegible]6	6480	34248	181008

vbi vltimi numeri tam prope progressionem geometricam in ratione $1 : \sqrt[4]{2}$ procedentem constituunt, quam *fieri potest*, numeris non maioribus adhibendis. Ita satis exacte erit $\frac{107628}{90504} = \sqrt[4]{2}$ seu per 12 reducendo $\frac{8969}{7542} = \sqrt[4]{2}$ cuius error longe infra partem millionesimam vnitatis subsistit.

Scholion 1.

21. In Musicis similis quaestio de vndecim mediis proportionalibus inter rationem duplam inveniendis tractari solet, vt hinc omnia semitonia vnius *Octauae* inter se aequalia reddantur; quod temperamentum etsi principiis harmoniae aduersatur, tamen non abs re fore arbitror eius solutionem ex iisdem principiis petitam hic apponere:

A. . 1

A ..	1	12	210	3532	59379	998592
B ..	1	13	222	3742	62911	1057971
H ..	1	14	235	3964	66653	1120882
C ..	1	15	249	4199	70617	1187535
Cs ..	1	16	264	4448	74816	1258152
D ..	1	17	280	4712	79264	1332968
Ds ..	1	18	297	4992	83976	1412232
E ..	1	19	315	5289	88968	1496208
F ..	1	20	334	5604	94257	1585176
Fs ..	1	21	354	5938	99861	1679433
G ..	1	22	375	6292	105799	1779294
Gs ..	1	23	397	6667	112091	1885093
a ...	2	24	420	7064	118758	1997184

vltima columna tam *parum* a *progreſſione* geometrica recedit, vt error ne ad millioneſimam partem aſſurgere ſit cenſendus.

Scholion.

22. Quae hactenus ſunt tradita facile ad quotcunque medios proportionales inueniendos in genere accommodari poſſunt, in quo negotio hoc imprimis notari meretur, quod ſeries numerorum, quibus ſolutio continetur non ſolum ſint recurrentes, ſed etiam denominator fractionum, ex quibus naſcuntur ſemper in factores reſolui queat, ad quemcunque etiam gradum aſcendat: vnde egregia exempla aequationum altioris gradus ſolutionem admittentium colliguntur, quibus coniectura mea circa formam

formam radicum cuiusque gradus olim prolata pulcherrime confirmatur. Verum methodus hic exposita multo latius extendi potest, quemadmodum in sequente propositione sum ostensurus; ita vt inde adhuc maiora subsidia in Analysin redundatura videantur.

Propositio VII.

23. Methodum multo latius patentem exhibere, cuius ope inter duos numeros datam rationem $1:r$ tenentes quotcunque medii proportionales in rationalibus proxime inueniri queant.

Solutio.

Inter duos numeros a et ar datam rationem tenentes vt ante totidem medii pro lubitu accipiantur, quot medios proportionales assignari oportet. Ponamus autem quatuor medios inueniri debere, quoniam hinc vis methodi clarius perspicietur, quam si rem generaliter tractare velimus. Constituta ergo pro hoc casu ad lubitum tali progressione

$$a:b:c:d:e:ar:br:cr:dr:er:ar^2 \text{ etc.}$$

sumantur pro arbitrio quinque indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ per quos inde noua similis progressio formetur:

$$a':b':c':d':e':a'r:b'r:c'r:d'r:e'r:a'r^2 \text{ etc.}$$

hac lege vt sit

$$\begin{aligned}
a' &= \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e \\
b' &= \alpha b + \beta c + \gamma d + \delta e + \varepsilon a r \\
c' &= \alpha c + \beta d + \gamma e + \delta a r + \varepsilon b r \\
d' &= \alpha d + \beta e + \gamma a r + \delta b r + \varepsilon c r \\
e' &= \alpha e + \beta a r + \gamma b r + \delta c r + \varepsilon d r
\end{aligned}$$

Tum vero per eosdem indices ex hac progressiore denuo alia formetur noua, atque ita porro, vt hac ratione sequentes series obtineantur

$$\begin{aligned}
a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \text{etc.} &= Pa + Qb + Rc + Sd + Te \\
b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + \text{etc.} &= Pb + Qc + Rd + Se + Tar \\
c + c'x + c''x^2 + c'''x^3 + \text{etc.} &= Pc + Qd + Re + Sar + Tbr \\
d + d'x + d''x^2 + d'''x^3 + \text{etc.} &= Pd + Qe + Rar + Sbr + Tcr \\
e + e'x + e''x^2 + e'''x^3 + \text{etc.} &= Pe + Qar + Rbr + Scr + Tdr
\end{aligned}$$

vnde ex lege praescripta valores litterarum P, Q, R, S, T quae a litteris arbitrariis a, b, c, d, e sunt immunes, et tantum ab indicibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ vna cum quantitate x et ratione proposita $1 : r$ pendent, ita determinantur vt sit:

$$\begin{aligned}
\frac{P-1}{x} &= \alpha P + \beta Tr + \gamma Sr + \delta Rr + \varepsilon Qr \\
\frac{Q}{x} &= \alpha Q + \beta P + \gamma Tr + \delta Sr + \varepsilon Rr \\
\frac{R}{x} &= \alpha R + \beta Q + \gamma P + \delta Tr + \varepsilon Sr \\
\frac{S}{x} &= \alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P + \varepsilon Tr \\
\frac{T}{x} &= \alpha T + \beta S + \gamma R + \delta Q + \varepsilon P
\end{aligned}$$

ex quibus aequalitatibus quidem valores harum litterarum admodum perplexi eliciuntur, ita vt denominator communis huiusmodi formam sit habiturus:

$$1-Ax-Bx^2-Cx^3-Dx^4-Ex^5$$

indicium praebens series illas esse recurrentes ex eadem scala relationis oriundas. Verum quod hic potissimum est notandum, hunc denominatorem semper in factores simplices resoluere licet, qui inter se ita erunt similes, vt ex quinis ipsius $\sqrt[5]{r}$ valoribus simili modo formentur. Scilicet si breuitatis gratia ponatur

$$\alpha+\beta\sqrt[5]{r}+\gamma\sqrt[5]{r^2}+\delta\sqrt[5]{r^3}+\varepsilon\sqrt[5]{r^4}=s$$

vbi etiam s quinos valores diuersos sortitur erit $1-sx$ factor simplex illius denominatoris, simul omnes quinque in se inuoluens. Hinc ergo singulas fractiones, quibus litterae illae P, Q, R, S, T exprimuntur in quinque fractiones simplices resoluere licebit quae ita concinne expressae reperiuntur:

$$P=\frac{1}{s(1-sx)}+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$

$$Q=\frac{1}{s(1-sx)\sqrt[5]{r}}+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$

$$R=\frac{1}{s(1-sx)\sqrt[5]{r^2}}+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$

$$S=\frac{1}{s(1-sx)\sqrt[5]{r^3}}+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$

$$T=\frac{1}{s(1-sx)\sqrt[5]{r^4}}+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$

vbi quaterna membra punctis indicata ex primis, ipsi $\sqrt[5]{r}$ quatuor reliquos valores tribuendo, sunt supplenda.

Hinc iam quinque serierum a numeris arbitrariis a, b, c, d, e incipientium termini generales formari possunt, qui etiam ponendo breuitatis gratia

$$a\sqrt[5]{r^4}+b\sqrt[5]{r^3}+c\sqrt[5]{r^2}+d\sqrt[5]{r}+e=k$$

(vbi quoque quantitas k quinque valores inuoluere est existimanda) sequenti modo concinne exprimuntur:

$$a^{(n)}=\frac{k}{5\sqrt[5]{r^4}}s^n+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$

$$b^{(n)}=\frac{k}{5\sqrt[5]{r^3}}s^n+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$

$$c^{(n)}=\frac{k}{5\sqrt[5]{r^2}}s^n+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$

$$d^{(n)}=\frac{k}{5\sqrt[5]{r}}s^n+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$

$$e^{(n)}=\frac{k}{5}s^n+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$

vbi quaterna membra omissa simili modo vt supra ex primis constitui oportet.

Hinc iam id in quo cardo rei versatur, intelligitur scilicet si series illae in infinitum continuentur, vt exponens n in infinitum excrescat, tum respectu eius membri, in quo ipsi $\sqrt[5]{r}$ valor realis posi-

positiuus tribuitur, reliqua euanescere, sicque manifesto numeros $a^{(n)} : b^{(n)} : c^{(n)} : d^{(n)} : e^{(n)} : ra^{(n)}$ progressionem geometricam constituere. Verum hic probe est notandum, illam euanescentiam locum non habere nisi indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sint positiui, quemadmodum hinc etiam casus supra tractatus resultat, si hi indices vnitati aequales statuantur.

Scholion.

24. Circa hanc solutionem generalem obseruari conuenit, quod si valores litterarum P, Q, R, S, T ex *formulis* inuentis euoluantur, earumque denominator communis ad nihilum redigatur, vt posito $x = \frac{1}{z}$ huiusmodi prodeat aequatio quinti gradus:

$$z^5 - Az^4 - Bz^3 - Cz^2 - Dz - E = 0$$

tum huius aequationis radicem fore

$$z = \alpha + \beta\sqrt[5]{r} + \gamma\sqrt[5]{r^2} + \delta\sqrt[5]{r^3} + \varepsilon\sqrt[5]{r^4}$$

in qua forma simul omnes quinque radices contineantur si modo pro $\sqrt[5]{r}$ eius quinque valores successiue substituantur. Cum igitur hae radices eam ipsam habeant formam, quam olim coniectura eram assecutus, hinc multo confidentius affirmare poterimus, omnium aequationum cuiuscunque gradus radices eo modo exprimi, quem coniectura mea indicat. Quodsi

 indices

indices α, β, γ, δ, ϵ vnitati aequentur aequatio quinti gradus fit ex superioribus:

$$z^5 - 5z^4 - 10(r-1)z^3 - 10(r-1)^2 z^2 - 5(r-1)^3 z - (r-1)^4 = 0$$

cuius radix erit $z = 1 + \sqrt[5]{r} + \sqrt[5]{r^2} + \sqrt[5]{r^3} + \sqrt[5]{r^4}$. Seu posito $z = y + 1$ erit huius aequationis

$$y^5 = 10ry^3 + 10r(r+1)y^2 + 5r(rr+r+1)y + r(r^3+r^2+r+1)$$

radix $y = \sqrt[5]{r} + \sqrt[5]{r^2} + \sqrt[5]{r^3} + \sqrt[5]{r^4}$.

DE

DE INTEGRATIONE AEQVATIONIS DIFFERENTIALIS:

$$a^n d^n y + b.a^{n-1} d^{n-1} y dx + c.a^{n-2} d^{n-2} y dx^2 + \ldots + r y dx^n = X dx^n \quad \text{(I)}$$

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

I.

Ex occasione aequationis differentialis $a^4 d^4 y - y d x^4 = 0$, cuius integrali inueniendo nuper eram intentus, incidi in methodum eam integrandi, haud inelegantem, quippe quae non solum eo nomine se commendabat, quod pro speciali isto exemplo videbatur esse facillima; sed etiam quia optimo cum successu applicari posset, ad perficiendam integrationem aequationis differentialis supra propositae, quae formae est generalis et innumeras sub se complectitur. Deinceps vero cum perspicerem, a summis Mathematicis, inprimis ab Illustr. *Eulero* in Tom. VII. Miscellan. Berolin. et Tom. III. Nov. Comment. Acad. Imper. Petropol. antea iam traditas fuisse, hanc aequationem integrandi Methodos, merito dubius haesi, vtrum quae ad hanc materiem illustrandam meditatus eram, publicae luci committerem, an non satius foret, eadem penitus

-tus supprimere? Verum enim vero, quum Methodus a me adhibita, haud parum differat, ab illis, quae in hoc negotio huc vsque allatae sunt, nec suis plane destituatur commodis, e re esse duxi, eandem Iudicio Illustrissimae Academiae Scient. Imperialis submittere.

2. In aequatione differentiali proposita, quam maioris facilitatis gratia, post hac per (I) designabo, sunt x et y quantitates variabiles earumque fluxiones dx, dy quarum dx assumitur constans, a vero b, c, r denotant constantes et cognitas quantitates, n numerum integrum quemcunque et X functionem quamlibet ipsius x. *Huius aequationis integrale, vt iam inuestigari possit, ponatur idem sequentis esse formae:*

$$a^n d^{n-1}y + \alpha . a^{n-1} d^{n-2}y\,dx + \beta . a^{n-2} d^{n-3}y\,dx^2 + \ldots\ldots$$
$$+ \lambda a y\,dx^{n-1} = z\,dx^{n-1}. \quad \text{(II)}$$

cuius aequationis indoles facile patebit, modo valores constantium sed incognitarum quantitatum α, $\beta \ldots \lambda$ atque variabilis quantitatis z erunt determinati. Quo autem facilius, ipsius z genuinus detegatur valor; primum considerandum venit, vtrum haec quantitas, vnice sit functio ipsius x, an vero simul contineat y, aut quandam eius fluxionem, vt $d^p y$? Ponamus ideoque z continere y sitque $dz = Q dy + ds$, vbi $Q dy$ designat differentiale ipsius z, quod prouenit, dum sola y vt variabilis tractatur,

tur, ds autem fluxionem eius, quae oritur, dum y pro conſtanti habetur. Quoniam autem differentiando aequationem (II), prodire debeat aequatio (I); hinc omnino neceſſum eſt, vt Q ſit quantitas conſtans, nam aliter fieri nequit, vt in aequatione (I) inueniatur terminus, qui reſpondeat huic $Q dy dx^{n-1}$. Sin vero Q fuerit quantitas conſtans, erit inſtituta integratione et poſito f conſtante, $z = Qy + s + f$, ex qua aequatione patet, quod s non contineat y, nam ſi ſecus eſſet, etiam ds contineret dy, vnde et colligitur, ſub hac ſuppoſitione, differentiale aequationis (II) non ſuppeditare terminum reſpondentem ipſi $rydx^n$ in aequatione (I), adeoque liquet z *non eſſe functionem* ipſius y. Quum autem eadem plane ratione demonſtrari poſſit, quod z non contineat $d^p y$, in procliui eſt, vt concludamus eam quantitatem vnice eſſe functionem ipſius x.

3. Ponatur iam $z = u(\int \frac{X dx}{u} + v)$, vbi u et v denotant quantitates, quae vnicam variabilem x continent. Quod vero z eiusmodi formam habere debeat, id exinde liquet, quia differentiale aequationis (II) omnino conuenire debet cum aequatione differentiali propoſita (I), quae continet terminum $X dx^n$. Valorem itaque allatum pro z ſubſtituendo et differentiando aequationem (II), ſequens emergit aequatio differentialis:

$$a^n d^n y + \alpha . a^{n-1} d^{n-1} y dx + \beta . a^{n-2} d^{n-2} y dx^2 + \dots + \lambda a dy dx^{n-1}$$
$$= du\, dx^{n-1} (\int \tfrac{X dx}{u} + v) + X dx^n + u dv . dx^{n-1},$$

 quae

quae iterum in hanc transformari potest:

$$a^n d^n y + \alpha . a^{n-1} d^{n-1} y dx + \beta . a^{n-2} d^{n-2} y dx^2 + \ldots + \lambda a dy dx^{n-1}$$
$$- \frac{du}{u} (a^n d^{n-1} y + \alpha . a^{n-1} d^{n-2} y + \beta . a^{n-2} d^{n-3} y + \ldots + \lambda a y dx^{n-1})$$
$$\text{(III)} = X dx^n + u dv . dx^{n-1}.$$

Si iam singulos huius aequationis terminos, conferamus cum terminis homogeneis aequationis (I), facile deprehendetur esse $dv = 0$ adeoque fore v quantitatem constantem $= A$, deinceps perspicere quoque licet, quod sit $\alpha dx - \frac{a du}{u} = b dx$ vel posito $m = \alpha - b$, $\frac{m dx}{a} = \frac{du}{u}$, vnde instituta integratione eruitur $u = N^{\frac{mx}{a}}$, posito nimirum, quod N sit numerus, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, ex quo demum sequitur esse $z = N^{\frac{mx}{a}} (\int N^{\frac{-mx}{a}} X dx + A)$. Hoc autem inuento, non amplius restat, quam vt inueniatur valor ipsius $m = \alpha - b$, quocirca dum aequationem (III) iterum comparamus cum aequatione (I), obseruamus esse $\alpha = m + b$, $\beta = c + \alpha(\alpha - b) = m^2 + mb + c$ atque $\lambda = m^{n-1} + b . m^{n-2} + c . m^{n-3} + \ldots + pm + q$, et quoniam denique $r + \lambda(\alpha - b) = r + \lambda m = 0$, erit:

$$m^n + b . m^{n-1} + c . m^{n-2} + \ldots + qm + r = 0, \quad \text{(IV)}$$

ex qua aequatione valores omnes et singuli ipsi m respondentes determinantur, ex quibus deinceps ipsorum α, $\beta \ldots \lambda$ aestimationes facile elici possunt.

4. Aequatio in § antecedenti tradita (IV), cuius ope m inuenitur, perspicue indicat, quod numerus

merus valorum ipsius m per numerum n exprimatur. In eo igitur casu, quo omnes hi valores inter se sunt inaequales, reduci potest aequatio differentialis proposita, dum secundum methodum allatam integratur, ad tot diuersas aequationes differentiales gradus $n-1$, quot numerus n continet vnitates, quam ob rem etiam in isto casu, per debitam harum aequationum comparationem valor ipsius y, facillime inuenitur. Vt vero eo euidentius perspicere liceat, quomodo haec comparatio sit instituenda et qualem y hinc nanciscatur formam, ponamus aequationem differentialem propositam esse quarti gradus, quae enim sub ista conditione valent, illa *rite adplicari possunt* ad aequationes differentiales altiorum graduum. Quum itaque m supponatur, quatuor valoribus inter se diuersis gaudere, sint iidem, e, f, g, i et ponatur praeterea maioris commoditatis gratia $N^{\frac{ex}{a}}(A+\int N^{\frac{-ex}{a}}.Xdx)=Q$, $N^{\frac{fx}{a}}(B+\int N^{\frac{-fx}{a}}.Xdx)=R$, $N^{\frac{gx}{a}}(C+\int N^{\frac{-gx}{a}}.Xdx)=S$, et $N^{\frac{ix}{a}}(D+\int N^{\frac{-ix}{a}}.Xdx)=T$, inuenientur hinc iuxta praecepta §. 3. sequentes quatuor aequationes differentiales tertii gradus:

$$a^4d^3y-(f+g+i)a^3ddydx+(fg+fi+gi)a^2dydx^2-fgiaydx^3=Q.dx^4$$
$$a^4d^3y-(e+g+i)a^3ddydx+(eg+ei+gi)a^2dydx^2-egiaydx^3=R.dx^4$$
$$a^4d^3y-(e+f+i)a^3ddydx+(ef+ei+fi)a^2dydx^2-efiaydx^3=S.dx^3$$
$$a^4d^3y-(e+f+g)a^3ddydx+(ef+eg+fg)a^2dydx^2-efgaydx^3=T.dx^3.$$

Si iam ex prima harum, succesſiue ſubtrahantur ſecunda, tertia et quarta, emergent ſequentes aequationes ſecundi gradus:

$$a^3 ddy - (g+i) a^2 dy dx + giay dx^2 = \frac{Q.dx^2}{e-f} + \frac{R.dx^2}{f-e}$$
$$a^3 ddy - (f+i) a^2 dy dx + fiay dx^2 = \frac{Q.dx^2}{e-g} + \frac{S.dx^2}{g-e}$$
$$a^3 ddy - (f+g) a^2 dy dx + fgay dx^2 = \frac{Q.dx^2}{e-i} + \frac{T.dx^2}{i-e}$$

et dum eadem operatio cum his inſtituitur, *repe*rietur:

$$a^2 dy - iay dx = \frac{Q dx}{(e-f)(e-g)} + \frac{R dx}{(f-e)(f-g)} + \frac{S dx}{(g-e)(g-f)}$$
$$a^2 dy - gay dx = \frac{Q dx}{(e-f)(e-i)} + \frac{R dx}{(f-e)(f-i)} + \frac{T dx}{(i-e)(i-f)}$$

ex quarum comparatione denique inuenitur:

$$ay = \frac{Q}{(e-f)(e-g)(e-i)} + \frac{R}{(f-e)(f-g)(f-i)} + \frac{S}{(g-e)(g-f)(g-i)} + \frac{T}{(i-e)(i-f)(i-g)}.$$

5. Huic autem rationi inueniendi y, aliam quoque addam quae non minus ſua elegantia ſeſe commendat. Etenim dum attente conſideramus methodum in §. 4 traditam, inuenimus quod eadem ad huiusmodi perducat aequationem: $ay = A'Q + B'R + C'S + D'T$ in qua A' B' C' D' quantitates conſtantes deſignant, adeoque ſimul patet, quod cognitis his coefficientibus, ipſum y eodem negotio inueniatur. Si igitur y ſucceſiue differentietur, emergent inde ſequentes aequationes differentiales:

$$ry\,dx^4 = \frac{rdx^4}{a}(\ A'Q + \ B'R + \ C'S + \ D'T)$$
$$qa\,dy\,dx^3 = \frac{qdx^4}{a}(e\ A'Q + f\ B'R + g\ C'S + i\ D'T)$$
$$ca^2\,ddy\,dx^2 = \frac{cdx^4}{a}(e^2A'Q + f^2B'R + g^2C'S + i^2D'T)$$
$$ba^3d^3y\,dx = \frac{bdx^4}{a}(e^3A'Q + f^3B'R + g^3C'S + i^3D'T)$$
$$a^4\,d^4y \ = \frac{d\ x^4}{a}(e^4A'Q + f^4B'R + g^4C'S + i^4D'T) + Xdx^4(e^3A' + f^3B' + g^3C' + i^3D')$$

Quamuis enim differentiando ay inueniatur $a^2\,dy = dx(e\,A'Q + f\,B'R + g\,C'S + i\,D'T) + aXdx(A' + B' + C' + D')$ facile tamen colligi poteſt, quod Xdx non ingrediatur dy, ſic enim valorem ipſius $a^2\,ddy$ ingrediretur $dXdx$, quod quum non contingat ſtatuendum eſt, quod ſit $A' + B' + C' + D' = 0$. Similem ob rationem Xdx, neque ingredietur valorem ipſius d^2y, nec ipſius d^3y, in differentiali vero d^4y neceſſum eſt vt Xdx reperiatur, alioquin enim non fieret $a^4d^4y + ba^3d^3y\,dx + ca^2\,ddy\,dx^2 + qady\,dx^3 + ry\,dx^4 = Xdx^4$. Seorſim itaque conſiderando terminos, quos ſub determinatione differentialium dy, d^2y, d^3y inuenimus $= 0$ et terminum, qui determinando d^4y prouenit $= 1$, ſequentes habebimus aequationes, inueniendis A', B', C', D' inſeruientes nimirum:

$$A' + \ B' + \ C' + \ D' = 0$$
$$e\,A' + f\ B' + g\ C' + i\ D' = 0$$
$$e^2A' + f^2B' + g^2C' + i^2D' = 0$$
$$e^3A' + f^3B' + g^3C' + i^3D' = 1.$$

 Dum

Dum vero has aequationes ſic tractamus, vt ſingulas tres priores per e multiplicatas a proxime inſequentibus ſubtrahamus, detegimus:

$$(f-e)B'+\ (g-e)C'+\ (i-e)D'=0$$
$$f\ (f-e)B'+g\ (g-e)C'+i\ (i-e)D'=0$$
$$f^2(f-e)B'+g^2(g-e)C'+i^2(i-e)D'=1$$

atque poſt ſimilem cum his inſtitutam operationem

$$(g-f)(g-e)C'+\ (i-f)(i-e)D'=0$$
$$g(g-f)(g-e)C'+i(i-f)(i-e)D'=1,$$

vnde denique oritur $D'(i-g)(i-f)(i-e)=1$ vel $D'=\frac{1}{(i-g)(i-f)(i-e)}$, et hinc reliquorum coefficientium A', B', C' ratio facile liquet.

6. Ex iis, quae in §. 4 monuimus, conſtat methodum ibidem traditam, eruendi incognitam y, non in aliis caſibus adhiberi poſſe, quam cum omnes valores ipſius m inter ſe ſunt inaequales. Nam ſi bini eorundem, nimirum g, i in §. 4 ponantur eſſe aequales, vnde et functiones S, T coincidere oportet; per integrationem aequationis differentialis quarti gradus, non prouenient plures, quam tres aequationes differentiales tertii gradus, per quarum debitam tractationem peruenire quidem licet ad aequationem differentialem primi gradus, non autem ad aequationem finitam determinando y inſeruientem. Haec quidem aequatio primi gradus, quia formae eſt *Bernoullianae* facile integratur, vnde

et

et y haud difficulter inuenitur, ſequenti tamen ratione idem multo facilius perfici poteſt. Dum ad aequationes in §. 4 adductas regredimur, inuenimus

$$a^3 ddy-(g+i)a^2 dydx+giaydx^2=\frac{Qdx^2}{e-f}+\frac{Rdx^2}{f-e}$$

$$a^3 ddy-(f+i)a^2 dydx+fiaydx^2=\frac{Qdx^2}{e-g}+\frac{Sdx^2}{g-e}.$$

Aequationum differentialium tertii gradus ibidem allatarum integretur ea, quae ordine tertia eſt atque ponatur $m=i$, eruetur inde $a^2 ddy-(e+f)a^2 dydx+efaydx^2=\frac{Vdx^2}{a}$, qualem vero formam quantitas V habeat, infra oſtendam. Iam collatis inter ſe hiſce aequationibus obtinemus:

$$a^2 dy-iaydx=\frac{Qdx}{(e-f)(e-g)}+\frac{Rdx}{(f-e)(f-g)}+\frac{Sdx}{(g-e)(g-f)}$$

$$a^2 dy-faydx=\frac{Qdx}{(e-g)(e-i)}-\frac{Sdx}{(g-e)^2}+\frac{Vdx}{a(g-e)}$$

atque ex his demum

$$ay=\frac{Q}{(e-f)(e-g)^2}+\frac{R}{(f-e)(f-g)^2}+\frac{S(e+f-2g)}{(g-e)^2(g-f)^2}+\frac{V}{a(g-e)(g-f)}.$$

Nunc itaque reſtat, vt quantitas V inueſtigetur, quoniam autem per hypotheſin ſit $g=i$, erit $\int N^{\frac{-gx}{a}} Sdx=\int dx(C+\int N^{\frac{-gx}{a}} Xdx)=x(C+\int N^{\frac{-gx}{a}} Xdx)-\int N^{\frac{-gx}{a}} Xxdx$ adeoque $V=N^{\frac{ix}{a}}(D+\int N^{\frac{-ix}{a}} Sdx)=N^{\frac{gx}{a}}(D+x(C+\int N^{\frac{-gx}{a}} Xdx)-\int N^{\frac{-gx}{a}} xXdx)$.

Eadem

Eadem plane ratione, si occurrat aequatio differentialis quinti gradus, in qua aequatio (IV). quinque habet factores, $m-e=0$, $m-f=0$, $m-g=0$, $m-i=0$, $m-k=0$ atque sit $i=k$, inuenietur eiusdem aequationis sequens esse integrale:

$$ay = \frac{Q}{(e-f)(e-g)(e-i)^2} + \frac{R}{(f-e)(f-g)(f-i)^2} + \frac{S}{(g-e)(g-f)(g-i)^2}$$
$$- \frac{T((i-e)(i-f)+(i-e)(i-g)+(i-f)(i-g))}{(i-e)^2\,(i-f)^2\,(i-g)^2} + \frac{V}{a(i-e)(i-f)(i-g)}$$

vbi obseruandum est, quod sit $V = N^{\frac{kx}{a}}(E + \int N^{\frac{-kx}{a}} T dx)$, quae functio, vt supra ostendi, in commodiorem mutari potest formam.

7. Quo magis de veritate eorum, quae in praecedenti §. adduximus, conuincamur, secundum methodum in §. 5 exhibitam examinabimus, quem valorem accipiat y dum integranda occurrit aequatio differentialis quarti gradus, in qua duo valores ipsius m ponuntur aequales. Sit itaque $ay = A'Q + B'R + C'S + D'V$, in qua aequatione coefficientes A', B', C', D' sequenti ratione indagantur. Dum y successiue differentiatur, sequentes inde oriuntur aequationes differentiales:

$$rydx^4 = \frac{dx^4}{a}(A'Q + B'R + C'S + D'V)$$
$$qadydx^3 = \frac{qdx^4}{a}(eA'Q + fB'R + (gC' + aD')S + gD'V)$$
$$ca^2ddydx^2 = \frac{cdx^4}{a}(e^2A'Q + f^2B'R + (g^2C' + 2agD')S + g^2D'V)$$
$$b.\,a^3d^3ydx = \frac{bdx^4}{a}(e^3A'Q + f^3B'R + (g^3C' + 3ag^2D')S + g^3D'V)$$
$$a^4d^4y = \frac{dx^4}{a}(e^4A'Q + f^4B'R + (g^4C' + 4ag^3D')S + g^4D'V)$$
$$+ Xdx^4(e^3A' + f^3B' + g^3C' + 3ag^2D'.$$

Nam

Nam ex iis, quae in §. 5 iam propofuimus, liquet differentialia dy, d^2y, d^3y non continere Xdx, fed folummodo d^4y, atque hinc etiam fequentes aequationes pro determinandis coefficientibus deriuantur:

$$A' + B' + C' = 0$$
$$e A' + f B' + g C' + a D' = 0$$
$$e^2 A' + f^2 B' + g^2 C' + 2ag D' = 0$$
$$e^3 A' + f^3 B' + g^3 C' + 3ag^2 D' = 1,$$

quae fi fecundum modum in §. 5. praefcriptum tractentur, dant:

$$(f-e)B' + (g-e)C' + aD' = 0$$
$$f(f-e)B' + g(g-e)C' + (2g-e)aD' = 0$$
$$f^2(f-e)B' + g^2(g-e)C' + (3g-2e)agD' = 1$$

ex quibus inuenitur:

$$(g-f)(g-e)C' + (2g-e-f)aD' = 0$$
$$g(g-f)(g-e)C' + (3g^2-2eg-2gf+ef)aD' = 1$$

vnde demum fit

$$(g^2-eg-gf+ef)aD' = 1, \text{ vel } D' = \frac{1}{a(g-e)(g-f)}$$

atque $C' = \frac{e+f-2g}{(g-e)^2(g-f)^2}$. Cum vero hi valores pro C' et D' furrogantur, A' et B' facile determinari poffunt. Sin vero iam proponatur aequatio differentialis fexti gradus, in qua factores aequationis (IV) funt fequentes $m-e=0$, $m-f=0$, $m-g=0$, $m-i=0$, $m-k=0$, $m-k=0$, erit huius aequationis integrale $ay = A'Q + B'R + C'S + D'T$

 $+ E$

$+E'U+F'V$, vbi Q, R, S, T retinent easdem significationes ac in §. 4, U autem est $=N^{\frac{kx}{a}}(\int N^{\frac{-kx}{a}}.X dx+E)$, et $V=N^{\frac{kx}{a}}(F+\int N^{\frac{-kx}{a}}.U dx)$, coefficientes vero secundum § praesentem sic definiuntur, vt sit

$$A'(e-f)(e-g)(e-i)(e-k)^2=1$$
$$B'(f-e)(f-g)(f-i)(f-k)^2=1$$
$$C'(g-e)(g-f)(g-i)(g-k)^2=1$$
$$D'(i-e)(i-f)(i-g)(i-k)^2=1$$
$$-E'((k-e)(k-f)(k-g)(k-i))^2=(k-i)(k-g)(k-f)+(k-i)(k-g)(k-e)$$
$$+(k-i)(k-f)(k-e)+(k-g)(k-e)(k-f)$$
$$F'(k-e)(k-f)(k-g)(k-i)=1.$$

Ex allatis itaque exemplis colligi facile potest, qualis forma sit tribuenda aequationi *integrali* quaesitae, cum differentialis *fuerit* altioris cuiuscunque gradus, atque bini tantummodo factores aequationis (IV) fuerint inter se aequales.

8. Si plures, quam bini factores dictae aequationis sint aequales, quemadmodum si quaeratur integrale aequationis differentialis quarti gradus, in qua m praeter vnum valorem $=e$, tres quoque inter se aequales $=f$ habeat, sequentem in modum erit procedendum, vt inueniatur aequatio finita determinando y inseruiens. In §. 6. iam ostensum est, quod sit

$$a^2 ddy-(g+i)a^2 dydx+giaydx^2=\frac{Qdx^2}{e-f}+\frac{Rdx^2}{f-e}$$ et

$$a^2 ddy-(e+g)a^2 dydx+egaydx^2=\frac{Vdx^2}{a},$$

vnde si posterior harum aequationum a priori subtrahatur, fit

$$a^2 dy-faydx=\frac{Qdx}{(e-f)^2}+\frac{Rdx}{(f-e)(e-f)}+\frac{Vdx}{a(f-e)},$$

posito nimirum $f=g=i$, deinceps integrando posteriorem hanc aequationem, secundum praecepta in §. 3. tradita, oritur

$$a^2 dy-eaydx=\frac{V'dx}{a^2},$$

ex qua collata cum antecedenti colligitur:

$$ay=\frac{Q}{(e-f)^3}+\frac{R}{(f-e)^3}-\frac{V}{a(f-e)^2}+\frac{V'}{a^2(f-e)}.$$

Quantitas vero integralis V' hac ratione indagatur: quia conf. §. 6. $\int N^{\frac{-fx}{a}}.Vdx=\int dx(C+x(B+\int N^{\frac{-fx}{a}}Xdx)-\int N^{\frac{-fx}{a}}xXdx)=Cx$
$$+\frac{x^2(B+\int N^{\frac{-fx}{a}}.Xdx)+\int N^{\frac{-fx}{a}}x^2Xdx-x\int N^{\frac{-fx}{a}}xXdx}{2}$$

erit $V'=N^{\frac{fx}{a}}(D+\int N^{\frac{-fx}{a}}.Vdx)=N^{\frac{fx}{a}}(D+x(C$
$$-\int N^{\frac{-fx}{a}}xXdx)+\frac{x^2(B+\int N^{\frac{-fx}{a}}Xdx)+\int N^{\frac{-fx}{a}}x^2Xdx}{2}).$$

Proposita iam aequatione differentiali quinti gradus, in qua m quinque valoribus e, f, g, i, k gaudet, quorum

quorum $g = i = k$, fit ipsius integrale secundum praesentem § sequens:

$$ay = \frac{Q}{(e-f)(e-g)^3} + \frac{R}{(f-e)(f-g)^3} + \frac{((g-e)^2 + (g-e)(g-f) + (g-f)^2)S}{(g-e)^3(g-f)^3}$$
$$+ \frac{(e+f-2g)V}{a(g-e)^2(g-f)^2} + \frac{V'}{a^2(g-e)(g-f)}.$$

Si denique proponatur aequatio differentialis sexti gradus, in qua tres factores aequationis (IV) fiunt aequales et per $m - i = 0$ exprimantur, reliqui autem sint $m - e = 0$, $m - f = 0$ et $m - g = 0$, tum pro integranda hac aequatione reperietur $ay = A'Q + B'R + C'S + D'T + E'V + F'V'$, vbi significatus litterarum Q, R, S, T, V et V′ ex §§. 4. 6. et praesenti satis perspicitur, coefficientes autem A′, B′ C′, D etc. ita determinantur, vt sit

$$A'(e-f)(e-g)(e-i)^3 = 1$$
$$B'(f-e)(f-g)(f-i)^3 = 1$$
$$C'(g-e)(g-f)(g-i)^3 = 1$$
$$D'(i-e)^3(i-f)^3(i-g)^3 = (i-e)^2(i-f)^2 + (i-e)^2(i-f)(i-g) + (i-e)^2(i-g)^2$$
$$+ (i-e)(i-f)^2(i-g) + (i-e)(i-f)(i-g)^2 + (i-f)^2(i-g)^2$$
$$-aE'(i-e)^2(i-f)^2(i-g)^2 = (i-e)(i-f) + (i-e)(i-g) + (i-f)(i-g)$$
$$a^2F'(i-e)(i-f)(i-g) = 1.$$

9. Haec itaque exempla ostendunt, qua ratione, integrationem cuiuscunque aequationis differentialis formae propositae, in qua valorum ipsius m quidam sunt aequales, reliqui vero inaequales, perficere liceat. Etenim eo totum redit negotium, 1mo vt coefficientes A′, B′, C′ etc. determinentur, quorum

quorum ratio ad §§ praecedentes attendenti obſcura eſſe nequit, 2[do] autem, vt inuenta functione quadam $T = N^{\frac{ix}{a}}(D + \int N^{\frac{-ix}{a}}.X\,dx)$ reliquae inſequentes V, V′, V″ etc. detegantur. Gaudent vero hae functiones ea proprietate, quod vnaquaeque earum, ab antecedente ſimili modo determinetur, ac V dependet a T, adeo vt quemadmodum ſit $V = N^{\frac{ix}{a}}(E + \int N^{\frac{-ix}{a}}.T\,dx)$, etiam erit $V' = N^{\frac{ix}{a}}(F + \int N^{\frac{-ix}{a}} V\,dx)$ et ſic in caeteris. Vt tamen generalem expreſſionem, pro his functionibus V, V′ eruamus, ſit Z inter easdem ordine ea, quae per numerum r indicatur, eritque

$$Z = N^{\frac{ix}{a}}.\left(\frac{x^r \int N^{\frac{-ix}{a}}.X\,dx}{1.\,2.\,3\ldots.r} - \frac{x^{r-1}\int N^{\frac{-ix}{a}}\,x\,X\,dx}{1.\,2.\,3\ldots r-1}\right.$$

$$+ \frac{x^{r-2}\int N^{\frac{-ix}{a}}\,x^2\,X\,dx}{1.2.3\ldots r-2.\,1.2} - \frac{x^{r-3}\int N^{\frac{-ix}{a}}\,x^3 X\,dx}{1.\,2.\,3\ldots r-3.\,1.2.3} + \ldots$$

$$\left.\pm \frac{\int N^{\frac{-ix}{a}}\,x^r X\,dx}{1.\,2.\,3\ldots r} + A x^r + B x^{r-1} + \ldots.\, F x + G\right)$$

circa quam formulam obſeruandum eſt, quod $\int N^{\frac{-ix}{a}}\,x^r X\,dx$ ſigno + afficiatur quoties r ſit numerus par, contra vero ſi idem ſit impar. Euidenter quoque hinc perſpicitur, ex aequatione differentiali gradus $r+1$, in qua omnes valores ipſius m fiunt aequales, inueniri $ay = Z$.

10. Postquam itaque indicauimus, quomodo aequatio differentialis formae propositae sit integranda, quando valores ipsius m vel omnes sunt aequales vel omnes inaequales vel etiam nonnulli aequales reliquis inter se inaequalibus; superest adhuc vt inquiramus, quomodo haec integratio debeat institui eo in casu, quo m habet valores aequales, qui non vnius eiusdemque sunt generis, exempli caussa si proponatur aequatio differentialis quinti gradus, in qua ipsi m hi valores respondent e, f, g, i, k quorum sit $f=g$ atque $i=k$. Designatis iam per Q, R, S, T iisdem quantitatibus ac in §. 4, iuxta methodum in illa § nec non §. 6 exhibitam, inuenientur hae aequationes differentiales tertii gradus

$$a^4 d^3y-(g+i+k)a^3d^2ydx+(gi+gk+ik)a^2dydx-gikaydx^3 = \frac{Q\,dx^3}{e-f}+\frac{R\,dx^3}{f-e}$$

$$a^4 d^3y-(f+g+k)a^3d^2ydx+(fg+fk+gk)a^2dydx-fgkaydx^3 = \frac{Q\,dx^3}{e-i}+\frac{T\,dx^3}{i-e}$$

$$a^4 d^3y-(e+i+k)a^3d^2ydx+(ei+ek+ik)a^2dydx-eikaydx^3 = \frac{V\,dx^3}{a}$$

$$a^4 d^3y-(e+f+g)a^3d^2ydx+(ef+fg+eg)a^2dydx-efgaydx^3 = \frac{Y\,dx^3}{a} \text{ vbi}$$

$$V=N^{\frac{fx}{a}}(C+\int N^{\frac{-fx}{a}}.R\,dx) \text{ et } Y=N^{\frac{ix}{a}}(E+\int N^{\frac{-ix}{a}}.T\,dx)$$

Subtractis ex prima earum, secunda et tertia, atque ex secunda, quarta emergent sequentes aequationes:

a^3ddy

$$a^3ddy-(g+k)a^2dydx+gkaydx^2=dx^2\left(\frac{Q}{(e-f)(e-i)}+\frac{R}{(f-e)(f-i)}+\frac{T}{(i-e)(i-f)}\right)$$

$$a^3ddy-(i+k)a^2dydx+ikaydx^2=dx^2\left(\frac{Q}{(e-i)^2}+\frac{R}{(f-e)(e-f)}+\frac{V}{a(f-e)}\right)$$

$$a^3ddy-(f+g)a^2dydx+fgaydx^2=dx^2\left(\frac{Q}{(e-i)^2}+\frac{T}{(i-e)(e-i)}+\frac{Y}{a(i-e)}\right)$$

et si haec operatio vlterius continuetur, inuenietur denique

$$ay=\frac{Q}{(e-f)^2(e-i)^2}-\frac{(3f-2e-i)R}{(f-e)^2(f-i)^3}+\frac{V}{a(f-e)(f-i)^2}-\frac{(3i-2e-f)T}{(i-e)^2(i-f)^3}+\frac{Y}{a(i-e)(i-f)^2},$$

ratio autem inueniendi V et Y, patet ex §. §. 6 et 9. Similiter si proposita sit aequatio differentialis sexti gradus, in qua ipsi m hi valores competunt, c, e, f, g, i, k et assumtum sit $f=g$, $i=k$ nec non $P=N^{\frac{cx}{a}}(F+\int N^{\frac{-cx}{a}}Xdx)$ erit huius aequationis integrale completum

$$ay=\frac{P}{(c-e)(c-f)^2(c-i)^2}+\frac{Q}{(e-c)(e-f)^2(e-i)^2}-\frac{R((f-c)(f-e)+(f-c)(f-i)+(f-e)(f-i))}{(f-c)^2(f-e)^2(f-i)^3}$$
$$+\frac{V}{a(g-c)(g-e)(g-i)^2}-\frac{T(2(i-c)(i-e)+(i-c)(i-f)+(i-e)(i-f))}{(i-c)^2(i-e)^2(i-f)^3}+\frac{Y}{a(i-c)(i-e)(i-f)^2}.$$

Denique si aequatio differentialis cuius quaeritur integrale, sit sexti gradus eiusque indolis, vt valores ipsiu m sint iidem ac in casu proxime praecedenti, eo tantum cum discrimine, quod iam ponatur $i=k=c$, obtinebitur per integrationem $ay=A'Q+B'R+C'T+D'V+E'Y+F'Y'$ in qua aequa-

aequatione functiones Q, R, T, V, Y, Y′ per § praesentem et §. §. 4. 9 innotescunt, coefficientes autem secundum §. 8 determinantur, quod hoc pacto fit. Ad inuestigandum coefficientem B, considerare debemus, qualis esset coefficiens functionis R, si solummodo bini valores ipsius m nimirum f et g essent aequales reliqui autem quatuor inaequales, in quo coefficiente deinceps ponendo $i=k=c$, orietur verus coefficiens B′, qui pro hoc casu obtinet. Similiter vt inueniatur C′, primum quaerendus est coefficiens quantitatis T pro aequatione sexti gradus in qua tres valores ipsius m, nimirum i, k, c ponuntur aequales, in quo coefficiente deinceps ponendo $f=g$, *habebimus quaesitum C′, quae Methodus aequali cum successu* ad reliquos coefficientes inueniendos adhiberi potest. Dabit vero eadem in casu allato hos coefficientium valores:

$$A'(e-f)^2(e-i)^3=1$$

$$-\quad B'(f-e)^2(f-i)^4=4f-3e-i$$

$$+\quad C'(i-e)^3(i-f)^4=3(i-e)^2+2(i-e)(i-f)+(i-f)^2.$$

$$+a\ D'(f-e)\ (f-i)^3=1$$

$$-a\ E'(i-e)^2(i-f)^3=3i-2e-f$$

$$+a^2\ F'(i-e)\ (i-f)^2=1.$$

11. Casus in § praecedenti commemorati, satis illustrare videntur, qualis forma sit tribuenda quantitati y, pro quacunque aequatione differentiali, in qua valores ipsius m aequales non vnius sunt

generis,

generis, adeoque eo magis superuacaneum duco hisce diutius immorari, quod generales formulae pro illis casibus, non videntur tradi posse satis expeditae. Itaque iam dispiciendum venit, quam variationem y subeat, ea ex ratione, quod aliqui aut omnes valores ipsius m sint imaginarii. Quoniam vero in hoc casu, sit $m - e = m - p\sqrt{-1}$ conf §. 4 adeoque $e = p\sqrt{-1}$ et praeterea sit cognitum, quod $N^{\frac{px\sqrt{-1}}{a}} = \text{cos}.\ \frac{px}{a} + \sqrt{-1}.\ \text{sin}.\ \frac{px}{a}$ nec non $N^{\frac{-px\sqrt{-1}}{a}} = \text{cos}.\ \frac{px}{a} - \sqrt{-1}.\ \text{Sin}.\ \frac{px}{a}$, erit pro $N^{\frac{ex}{a}}$ substituendo valorem ipsius, $N^{\frac{px\sqrt{-1}}{a}}$ et pro $N^{\frac{-ex}{a}}$ *eum, quem pro* $N^{\frac{-px\sqrt{-1}}{a}}$ assignauimus, in §. 4, $Q = (\text{cos}.\frac{px}{a} + \sqrt{-1}.\ \text{Sin}.\frac{px}{a})(A + \int X dx (\text{cos}.\ \frac{px}{a} - \sqrt{-1}.\ \text{sin}.\ \frac{px}{a})$, ex quo omnino perspicitur, quod functio Q, *etiamsi* m ponatur imaginarium, realis sit, quod quum simili ex ratione de R, S, T in §. 4, nec non de V, V', Y, Y' in §§ 6. 7. 8. 9. 10 valere censendum sit, patet vtique imaginarios quantitatis m valores non impedire, quo minus y per quantitates reales exprimatur.

12. Denique et illi casus aliquam merentur attentionem, vbi vnus vel plures valores ipsius m euanescunt. Ponatur itaque primo in aequatione (IV.) $r = 0$, vnde et sequitur esse $m = 0$, sit vero iste valor ipsius m idem, quem in §. 4

 per

per e indigitauimus, erit proinde in eadem §, $Q = A + \int X dx$, et aequatio integralis ibidem tradita, in hanc transformatur

$$ay = -\frac{Q}{fgi} + \frac{R}{f(f-g)(f-i)} + \frac{S}{g(g-f)(g-i)} + \frac{T}{i(i-f)(i-g)}.$$

Vlterius si in aequatione (IV.) non solum r, sed etiam $q = 0$ atque in §. 6 fit $m = g = i = 0$ mutabitur aequatio integralis, quae in eadem § occurrit in hanc:

$ay = \frac{Q}{e^2(e-f)} + \frac{R}{f^2(f-e)} + \frac{S(e+f)}{e^2 f^2} + \frac{V}{aef}$, vbi $S = C + \int X dx$ et $V = x(C + \int X dx) + D - \int x X dx$. Ex §§ autem 8 et 10 liquet, quomodo inueniatur y, dum aut plures quam bini valores ipsius $m = 0$, et reliqui sunt inter se inaequales, aut praeter quosdam valores ipsius m euanescentes, quidam eorum sunt finiti et aequales, ponatur exempli caussa, quod in § 10, vbi m his quantitatibus c, e, f, g, i, k exprimitur, fit $i = k = 0$ praetereaque $g = f$, erit quaesita aequatio integralis haec:

$$ay = \frac{P}{c^2(c-e)(c-f)^2} + \frac{Q}{e^2(e-c)(e-f)^2} - \frac{R(2(f-c)(f-e) + f(2f-e-c))}{f^3.(f-c)^2(f-e)^2}$$
$$+ \frac{V}{af^2.(f-c)(f-e)} + \frac{T(2ce + f(c+e))}{c^2 e^2 f^3} + \frac{Y}{cef^2},$$

in qua aequatione P, Q, R, V omnino retinent suos valores in § 10 traditos, at T fit $= D + \int X dx$ et $Y = x(D + \int X dx) + E - \int X x dx$. Denique obseruo, quod si omnes et singuli ipsius m valores euanescant seu si integranda sit aequatio $a^n d^n y = X dx^n$, esse secundum § 9 ipsius integrale hoc:

$ay =$

$$ay = \frac{x^{n-1}\int X\,dx}{1.2.3..n-1.} - \frac{x^{n-2}\int xX\,dx}{1.2.3..n-2} + \frac{x^{n-3}\int x^2 X\,dx}{1.2.3...n-3.1.2}$$
$$- \frac{x^{n-4}\int x^3 X\,dx}{1.2.3..n-4.1.2.3} + \ldots \frac{\pm \int x^{n-1} X\,dx}{1.2.3...n-1.} + A\,x^{n-1}$$
$$+ B\,x^{n-2} + C\,x^{n-3} \ldots + F\,x + G.$$

13. Quo magis illuſtretur methodus haec integrandi, cuius praecepta in antecedentibus expoſui, aliquot proponam exempla, quae eius vſum et adplicationem commonſtrare valebunt.

Exempl: 1. Sit aequatio differentialis, cuius integrale quaeritur $a^2 ddy + y\,dx^2 = 0$, erit vi § 5 $m = \pm \sqrt{-1}$ et iuxta formulam in § 4 traditam:

$$ay = \frac{A.N^{\frac{x\sqrt{-1}}{a}}}{2\sqrt{-1}} - \frac{B.N^{\frac{-x\sqrt{-1}}{a}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{A+B}{2}.\ \mathrm{Sin.}\,\frac{x}{a} + \frac{A-B}{2\sqrt{-1}}.\ \mathrm{Coſ.}\,\frac{x}{a}$$

conf. § 11, vnde poſitis

$\frac{A+B}{2} = C$ et $\frac{A-B}{2\sqrt{-1}} = D$, fiet $ay = C.\ \mathrm{ſin.}\,\frac{x}{a} + D.\ \mathrm{coſ.}\,\frac{x}{a}$.

2. Sit iterum propoſita aequatio differentialis $a^4 d^4 y - y\,dx^4 = 0$, in qua $m^4 = 1$ atque $m = \pm 1$ vel $= \pm \sqrt{-1}$, vnde per § 4 obtinetur

$$ay = \frac{A.N^{\frac{x}{a}}}{4} - \frac{B.N^{\frac{-x}{a}}}{4} - \frac{C.N^{\frac{x\sqrt{-1}}{a}}}{4} + \frac{D.N^{\frac{-x\sqrt{-1}}{a}}}{4},$$

quae aequatio ponendo $\frac{D+C}{2} = F$ et $\frac{D-C}{2\sqrt{-1}} = E$, migrat in hanc

 $ay =$

$$ay = \frac{A.N^{\frac{x}{a}} - B.N^{\frac{-x}{a}}}{4} + \frac{E.\cos.\frac{x}{a} - F.\sin.\frac{x}{a}.}{2}$$

3. Aequatio differentialis $ddy + \alpha^2 y dx^2 = X dx^2$, quae est illa, ad cuius solutionem, notissimum problema trium corporum reducitur, dum proponitur integranda, fiet id secundum praecepta tradita sequenti ratione: quoniam $a = 1$ et $m^2 + r = m^2 + \alpha^2 = 0$ erit $m = \pm \alpha \sqrt{-1}$, ex quo deducitur

$$y = \frac{N^{\alpha x\sqrt{-1}}(A + \int N^{-\alpha x \sqrt{-1}}.Xdx) - N^{-\alpha x\sqrt{-1}}(B + \int N^{\alpha x\sqrt{-1}}.Xdx)}{2\alpha\sqrt{-1}}$$

$$= \left(\frac{(A-B)\mathrm{Cos}.\alpha x}{\sqrt{-1}} + (A+B).\mathrm{Sin}.\alpha x + 2\,\mathrm{Sin}.\alpha x \int Xdx.\mathrm{Cos}.\alpha x - 2\,\mathrm{Cos}.\alpha x \int Xdx.\mathrm{Sin}.\alpha x\right) : 2\alpha$$

inde autem, posito $A + B = 2C$, $\frac{A-B}{\sqrt{-1}} = 2D$, eruitur $\alpha y = \mathrm{Sin}.\alpha x(C + \int Xdx.\mathrm{Cos}.\alpha x) - \mathrm{Cos}.\alpha x(D + \int Xdx.\mathrm{Sin}.\alpha x)$.

4. Aequatio differentialis $a^3 d^3 y - a^2 d^2 y dx - a dy dx^2 + y dx^3 = X dx^3$ ad praescriptum §. 6, hac ratione integratur. Quoniam bini factores aequationis $m^3 - m^2 - m + 1 = 0$ dent $m = 1$, et reliquus $m = -1$, erit substituendo in §. citata loco $e, -1$, loco $f, 0$, et ponendo $g = i = 1$, quaesita aequatio integralis haec:

$$ay = \frac{N^{\frac{-x}{a}}(A + \int N^{\frac{x}{a}}.Xdx) - 3N^{\frac{x}{a}}(C + \int N^{\frac{-x}{a}}.Xdx)}{4}$$

$$+ \frac{N^{\frac{x}{a}}(D + x(C + \int N^{\frac{-x}{a}}.Xdx) - \int N^{\frac{-x}{a}} xXdx).}{2a}$$

5. Sit

5. Sit iterum propoſita aequatio differentialis: $a^5 d^5 y - 2a^4 d^4 y dx - 2a^3 d^3 y dx^2 + 4a^2 d^2 y dx^3 + a dy dx^4 - 2y dx^5 = X dx^5$, perficietur eius integratio ſecundum §. 10, quum enim m quinque habeat valores, quorum duo $=1$ vnus $=2$ et duo reliqui $=-1$, ſi loco citato, pro e ſubſtituatur 2, et ponatur $f=g=1$ nec non $i=k=-1$, deriuetur inde hoc integrale:

$$ay = \frac{N^{\frac{2x}{a}}(A+\int N^{\frac{-2x}{a}}.Xdx)}{9} - \frac{N^{\frac{x}{a}}(C+x(B+\int N^{\frac{-x}{a}}.Xdx)-\int N^{\frac{-x}{a}}xXdx)}{4}$$

$$-\frac{N^{\frac{-x}{a}}(E+(4+3x)(D+\int N^{\frac{x}{a}}.Xdx)-\int N^{\frac{x}{a}}xXdx)}{36}.$$

6. Si denique quaeratur integrale huius aequationis $a^4 d^4 y + a^2 d^2 y dx^2 = X dx^2$, in qua ex quatuor valoribus ipſi m reſpondentibus, duo euaneſcunt, reliquorum autem vnus ſit $=\sqrt{-1}$ alterque $=-\sqrt{-1}$, habebit id ſecundum §§. 8 et 12 huiusmodi formam:

$$ay = -\frac{N^{\frac{x\sqrt{-1}}{a}}(A+\int N^{\frac{-x\sqrt{-1}}{a}}.Xdx)}{2\sqrt{-1}} + \frac{N^{\frac{-x\sqrt{-1}}{a}}(B+\int N^{\frac{x\sqrt{-1}}{a}}.Xdx)}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{x(C+\int Xdx)+D-\int xXdx}{a} = \mathrm{Coſ.}\tfrac{x}{a}(E+\int Xdx.\mathrm{Sin.}\tfrac{x}{a})$$

$$-\mathrm{Sin.}\tfrac{x}{a}(F+\int Xdx.\mathrm{Coſ.}\tfrac{x}{a}) + \frac{x(C+\int Xdx)}{a} + \frac{D-\int xXdx}{a},$$

poſito nimirum quod $A+B=2E$ et $\frac{B-A}{\sqrt{-1}}=2F$.

METHODVS INTEGRANDI, NONNVLLIS AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM EXEMPLIS ILLVSTRATA.

Auctore

AND. I. LEXELL.

§. 1.

Constat iam inter omnes fere, qui ad calculum integralem excolendum, animum adplicuere, quod vnaquaeque aequatio differentialis reducatur per integrationem ad tot aequationes differentiales gradus proxime inferioris, quot vnitates continet iste numerus, quo exprimitur, cuius sit gradus *aequatio* illa proposita. Dum igitur talis adhibetur *integrandi* methodus, quae ad singulas hasce aequationes differentiales inueniendas, simul et vno negotio perducit, haud mediocre inde oritur subsidium ad detegendam aequationem finitam, qua completum integrale aequationis differentialis primum allatae absoluitur. Quoties nimirum omnes hae quaesitae aequationes inter se differunt, toties per earundem comparationem, vltimum istud integrale statim inuenitur; sin vero aliquot earum inter se plane congruant, tum non vnica quidem operatione, totam integrationem perficere licet, id tamen lucri accipitur, vt aequatio differentialis, ad aliam, quae

quae inferioris eſt gradus deprimi queat. Haec omnia, quae ex diſſertatione, quam cum Illuſtriſſima Academia nuper communicaui, egregie comprobantur, praeſenti occaſione, nonnullis aequationibus differentialibus in exemplum vocatis, vlterius confirmare conſtitui.

§. 2. Proponatur itaque ad integrandum, primum haec aequatio differentialis ſecundi gradus: $a^2 y\,ddy + b a^2 dy^2 = y^2 dx^2$. Huius vero integrale vt inueniri poſſit, ponatur idem ſequentis eſſe formae: $a y^p dy + n y^r dx = A.\,N^{\frac{mx}{a}} dx$, in qua aequatione p, n, r, m denotant conſtantes ſed incognitas quantitates, quibus detectis, tota determinatur aequatio. Differentietur igitur aſſumtum hoc integrale, atque eruetur inde: $a y^p ddy + p a y^{p-1} dy^2 + n r y^{r-1} dy\,dx = \frac{mA}{a}.\,N^{\frac{mx}{a}} dx^2 = m y^p dy\,dx + \frac{mn}{a} y^r dx^2$, proinde ſi tota haec aequatio, ducatur in $a y^{1-p}$, transmutabitur in iſtam:
$a^2 y\,ddy + p a^2 dy^2 + n r a y^{r-p} dy\,dx - a m y\,dy\,dx = m n y^{r-p+1} dx^2$, qua demum cum aequatione differentiali propoſita, collata, inuenitur $p = b$, $r = p + 1 = b + 1$, $nr = m$ et $mn = 1$ vnde deducitur $m^2 = b + 1$ atque $m = \pm \sqrt{(b+1)}$, nec non $n = \pm \frac{1}{(\sqrt{b+1})}$. Dum itaque bini hi valores ipſorum m et n adhibentur, emergent duae aequationes differentiales primi gradus, ſcilicet $a y^b dy + \frac{1}{\sqrt{(b+1)}} y^{b+1} dx = A.\,N^{\frac{+x\sqrt{(b+1)}}{a}} dx$ et $a y^b dy - \frac{1}{\sqrt{(b+1)}} y^{b+1} dx = B.\,N^{\frac{-x\sqrt{(b+1)}}{a}} dx$

quam

quam ob rem, subtracta hac ab illa habetur $y^{b+1} = \frac{\sqrt{(b+1)}}{2}(A.\,N^{\frac{x\sqrt{(b+1)}}{a}} - B.\,N^{\frac{-x\sqrt{(b+1)}}{a}})$ vel $y^{b+1} = C.\,N^{\frac{x\sqrt{(b+1)}}{a}} - D.\,N^{\frac{-x\sqrt{(b+1)}}{a}}$, si in locum quantitatum $\frac{A\sqrt{(b+1)}}{2}$ et $\frac{B\sqrt{(b+1)}}{2}$ substituantur C et D.

Quando b negatiuum accipit valorem, adeoque fit $= -(c+1)$ tum erit quaesitum integrale hoc $y^{-c} = C(\mathrm{Cos.}\frac{x\sqrt{c}}{a} + \sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin.}\frac{x\sqrt{c}}{a}) - D(\mathrm{Cos.}\frac{x\sqrt{c}}{a} - \sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin.}\frac{x\sqrt{c}}{a})$, adeoque positis $C - D = E$ et $(C+D).\sqrt{-1} = F$, $y^{-c} = E.\,\mathrm{Cos.}\frac{x\sqrt{c}}{a} + F.\,\mathrm{Sin.}\frac{x\sqrt{c}}{a}$. Solutio aequationis iam propositae vtut generalis videtur, vnicam tamen admittit exceptionem, *pro isto nimirum casu, quo* $b = -1$ *adeoque* $\frac{1}{\sqrt{(b+1)}} = \infty$, cum vero hoc accidit, erit $\frac{dy}{y} = \frac{(x+e)dx}{a^2}$, significante e constantem arbitrariam, atque hinc iterum integrando detegitur $cy = N^{\frac{x^2+2ex}{2a^2}}$, si videlicet N *sit numerus* cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$.

§. 3. Egregium deinceps vsum, praestat methodus haec commemorata ad integrandam aequationem:

$$yx^2ddy + bx^2dy^2 + cyxdxdy = ay^2dx^2,$$

cuius casum particularem considerauit Cel. Prof. *Krafft* in Tom. V. Nou. Comment. Acad. Huius vero integrale, si assumatur esse $y^p dy + ny^q x^r dx = Ax^s dx$, idem facili negotio determinabitur, inventis valoribus incognitarum p, n, q, r, s. Hae itaque

itaque quantitates vt indagentur, capiendum est differentiale assumtae aequationis, quo fiet:

$$y^p ddy + p y^{p-1} dy^2 + nq y^{q-1} x^r dy dx + nr y^q x^{r-1} dx^2 = sA.x^{s-1}dx^2 = \frac{sy^p dy dx}{x} + nsy^q x^{r-1} dx^2,$$

atque ducta hac aequatione in $y^{1-p}x^{1-r}$ et ordinatis terminis reperietur:

$$yx^{1-r}ddy + px^{1-r}dy^2 + nqy^{q-p}x dy dx - syx^{-r}dy dx = (s-r).ny^{q-p+1}dx^2.$$

Si iam vltima haec aequatio, conferatur cum ista, cuius integrale quaerimus, determinantur incognitae hunc in modum, vt sit $r=-1$, $p=b$, $q-p=1$ vel $q=b+1$, $nq-s=c$ et $n(b+1)=c+s$, est vero quoque $n(s-r)=ns+n=a$, proinde $(s+1).(s+c)=a.(b+1)$ ex quo eruitur $s=-\frac{(c+1)}{2}\pm\sqrt{(\frac{(c-1)^2}{4}+a.(b+1))}$ et $n=\frac{c-1\pm2\sqrt{(\frac{(c-1)^2}{4}+a.(b+1))}}{2(b+1)}$ vel si ponatur $f=2\sqrt{(\frac{(c-1)^2}{4}+a.(b+1))}$, erit $s=-\frac{(c+1)\pm f}{2}$ et $n=\frac{c-1\pm f}{2.(b+1)}$. Substitutis itaque pro p, n, q, r, s ipsorum valoribus, deprehenduntur binae aequationes primi gradus, scilicet

$$y^b dy + \frac{c-1+f}{2(b+1)} y^{b+1} x^{-1} dx = A.x^{\frac{-(c+1)+f}{2}} dx \text{ et}$$

$$y^b dy + \frac{c-1-f}{2(b+1)} y^{b+1} x^{-1} dx = B.x^{\frac{-(c+1)-f}{2}} dx,$$

ideoque dum subtrahatur posterior a priori $\frac{f}{b+1}\cdot\frac{y^{b+1}}{x}$

 $=x$

$= x^{\frac{-(c+1)}{2}}(Ax^{\frac{f}{2}} - Bx^{\frac{-f}{2}})$ vel $y^{b+1} = x^{\frac{1-c}{2}}(Cx^{\sqrt{(\frac{(c-1)^2}{4}+a.(b+1))}} - Dx^{-\sqrt{(\frac{(c-1)^2}{4}+a(b+1))}})$, posito nempe quod $C = \frac{a.(b+1)}{f}$ et $D = \frac{B.(b+1)}{f}$.

In eo casu, quo f euanescit, seu $(c-1)^2 = -4a.(b+1)$, fiunt hae aequationes primi gradus coincidentes, quapropter tum denuo suscipienda est integratio, per quam obtinetur $y^{b+1}x^{\frac{c-1}{2}} = (b+1)Ax + B$ vel $y^{b+1} = x^{\frac{1-c}{2}}(Cx + B)$, si in locum quantitatis $(b+1)A$ sufficiatur C. Quod si vero contingat, vt f sit quantitas imaginaria et $= b\sqrt{-1}$, sequenti ratione procedendum est, ad detegendam genuinam integralis formam. Ponatur $x = N^z$ designante vt antea N numerum cuius logarithmus naturalis $= 1$, erit itaque $y^{b+1} = x^{\frac{1-c}{2}}(CN^{bz\sqrt{-1}} - D.N^{-bz\sqrt{-1}})$, quae aequatio in hanc mutatur $y^{b+1}x^{\frac{c-1}{2}} = C(\mathrm{Cos}.bz + \sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin}.bz) - D(\mathrm{Cos}.bz - \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.bz)$, vnde posito $C - D = E$ et $(C+D).\sqrt{-1} = F$, fit $y^{b+1}x^{\frac{c-1}{2}} = E.\mathrm{Cos}.bz + F.\mathrm{Sin}.bz = E.\mathrm{Cos}.b\,Lx + F.\mathrm{Sin}.b.\,Lx$ denotante L logarithmum.

§. 4. Sit iam aequatio cuius detegenda est integratio, haec: $ddy - \frac{dy\,dX}{X} = y\,X^2\,dx^2$, in qua dx ponitur constans et X functio quaecunque ipsius x. Huius aequationis quaesita integralis assumatur:

$$dy + nX^p y\,dx = AX^q.\,N^{m\int X\,dx}\,dx,$$

vt

vt itaque incognitae quantitates n, p, q, m inueniantur differentietur vltima haec aequatio, vnde orietur:

$$ddy+nX^p dydx+npX^{p-1}ydXdx=A(qX^{q-1}N^{m\int Xdx}dXdx+mX^{q+1}.N^{m\int Xdx}dx^2)=\frac{qdXdy}{X}+qnX^{p-1}ydXdx+mXdxdy+mnX^{p+1}ydx^2,$$ vel $$ddy+nX^p dydx-mXdxdy+n(p-q)X^{p-1}ydXdx-\frac{qdXdy}{X}=mnX^{p+1}ydx^2,$$

atque quum haec aequatio, congruere debeat cum illa, quae ad integrandum proponitur, fiet per terminorum homologorum comparationem, $p=q=1$ $n=m$ et $mn=1$, atque ideo $m=\pm 1$. Hinc duae proueniunt aequationes differentiales primi gradus, *nimirum*:

$$dy+yXdx=AX.N^{\int Xdx}dx \text{ et } dy-yXdx=BX.N^{-\int Xdx}dx$$

quo ipso habetur

$$2y=A.N^{\int Xdx}-B.N^{-\int Xdx}.$$

Continetur aequatio differentialis in hac § proposita, sub ista generaliori $ddy+\frac{adydX}{X}=yX^2dx^2$, cuius integratio, si in potestate esset, generaliter quoque integrari posset haec aequatio primi gradus $dz+z^2dx=X^2dx$.

§. 5. Vt vero methodi nostrae vsus et applicatio, ad perficiendam integrationem aequationum altiorum, eo magis constet, adferre etiam placet exemplum aequationis tertii gradus, ope illius solutae. Sit ista aequatio

$$d^3y + a\,dy\,ddy = b\,dy^3.$$

Iam more consueto, ponatur eius integrale esse sequens:

$$N^{my}(ddy + q\,dy^2) = A\,dx^2$$

atque sumatur huius differentiale, quo facto postquam omnes termini per N^{my} diuisi fuerint, oritur

$$d^3y + (2q + m)dy\,ddy + mq\,dy^3 = 0,$$

vnde debita instituta comparatione huiusce aequationis cum primum proposita, fiet $a = 2q + m$ $-mq = b$, ideoque $m^2 - ma = 2b$, ex quo iter deducitur $m = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 + 8b)}}{2} = \frac{a \pm c}{2}$, si breuitatis c. loco $\sqrt{(a^2 + 8b)}$ substituatur c, atque $q = \frac{a \mp c}{4}$. I determinatis, inueniuntur hae aequationes differentiales secundi gradus:

$$ddy + \frac{a + c}{4}dy^2 = A.\,N^{\frac{c-a}{2}.y}\,dx^2 \text{ et}$$

$$ddy + \frac{a - c}{4}.dy^2 = B.\,N^{\frac{-(c+a)}{2}.y}\,dx^2$$

vnde per subtractionem posterioris a priori deduc. $\frac{c\,dy^2}{2} = N^{\frac{-ay}{2}}dx^2.(A.\,N^{\frac{cy}{2}} - B.\,N^{\frac{-cy}{2}})$, quae ad aequationem primi gradus facile deprimitur. Si fu. $c = 0$, quod accidit cum $a^2 = -8b$ ex. gr. si a et $b = -2$, tum denuo integranda est alter aequationum secundi gradus, multiplicetur ig. ea per $2dy$, eritque $N^{\frac{ay}{2}}(2dy\,ddy + \frac{a}{2}dy^3) = 2A\,dy$

c

EXEMPL[illegible] III V [illegible]

[illegible]

quod perfecte cognoſcetur, inuentis valoribus incognitarum m, p, q. Sumto igitur differentiali aſſumti huius integralis, et diuiſis omnibus terminis per N^{my}, eruitur:

$$d^4y + (m+p)d^3y\,dy + p\,ddy^2 + (mp+3q)dy^2ddy = -mq\,dy^5.$$

Quae aequatio collata, cum ipſa cuius integrale quaeritur dabit $a = m+p$, $b = p$, $c = 3q + mp$ et $e = -mq$, vnde duae deducuntur aequationes, ipſi m inueniendo inſeruientes, ſcilicet $m = a - b$ et $m^2 b = mc + 3e$, adeoque fiet $(a-b)^2 . b = a-b).c + 3e$. Sub hac itaque conditione liquet aequationem fore integrabilem et reduci poſſe, ad aequationem hanc tertii gradus:

$$N^{(a-b)y}(d^3y + b\,dy\,ddy + \frac{e}{b-a}dy^3) = A\,dx^3.$$

Conſiderata aequatione $(a-b)^2 b = (a-b)c + 3e$, patet quod datis tribus coefficientium $a, b, c, e,$ *reliquus* facile determinetur, et quidem c vnica ratione, ſi dati fuerint a, b, e, itemque e vnico modo datis a, b, c, a vero duplici ratione, datis b, c, e et b triplici datis a, e, c.

PHYSICO-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

COM-

COMMENTATIONES PHYSICO-MECHANICAE DE FRICTIONIBVS VARIIS ILLVSTRATAE EXEMPLIS.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Non raro accidit, cum nouas de argumento nondum satis explorato disquisitiones aggredimur, vt ea quae facillima videbantur in ipso limine aliquam haud expectatam difficultatem manifestent. Id nuper mihi euenit cum ad leues aliquas quaestiunculas mechanicas de frictionibus deducerer nimium vt videbatur simplices, quam quae vllo modo solutionem morari possent; motum cogitabam virgae plano aspero incumbentis, cuius extremitati potentia oblique esset applicata, quae virgam lentissimo motu protraheret; huiusmodi Problematibus incertitudo directionis, sub qua frictiones partium translationi resistunt, inopinata superaddit impedimenta. Constitui itaque id argumenti aliquibus explanare praeceptis atque exemplis.

§. 2. Quum de solis superandis frictionibus sermo est, potentiae haud maiores statuendae sunt, quam quae ad hunc finem requiruntur, ne simul inertiae ratio sit habenda. Hinc est quod motum in singulis partibus lentissime fieri suppono: nec loquor de corpore simplici, cuius singula elementa communi quasi motu protracta censeri solent, sed de systemate plurium huiusmodi corporum simplicium nexu aliquo inter se cohaerentium. In iis quae pertractabo exemplis a simplici potentia plerumque duplex oritur motus, alter progressiuus alter rotatorius circa centrum aliquod peculiari modo determinandum; nec tamen licet principio alias solenni, compositionis et resolutionis *motus* indiscriminatim vti; compositio autem et resolutio *potentiarum* hic eodem modo adhiberi poterit sicuti in mechanica, quae dicitur pura; adhibendae *cautelae* ex sequentibus elucescent.

§. 3. Fingamus super plano horizontali corpus, quod voco simplex, cuius frictio sit $=f$; corpori applicetur potentia, qua vniformiter lentoque motu moueatur sub directione constanter eadem; erit vtique ista potentia $=f$; si minor sit, corpus non mouebitur, si maior, motus fiet acceleratus, quod vtrumque ab hypothesi nostra recedit: haec dum ita fiunt, superuenire putetur noua potentia Φ, cuius directio sit ad alteram perpendicularis; si minor fuerit potentia Φ quam altera f, erunt fortasse tásse qui dubitent, an non omnia sint in statu pristino permansura, ideo quod nouus motus ad priorem perpendicularis videatur fieri non posse, quin de nouo frictio f superetur. Verum quaestione paullo accuratius perpensa perspicitur, vtcunque paruula sit potentia Φ, motum oriturum inter vtramque directionem medium; id cum paradoxum videretur amico cuidam, cui quaestionem proposueram, rerum physicarum probe gnaro, vt omnem ipsi scrupulum eximerem, in mentem venit facillimum experimentum; praesto erat tabula ardeacea (*d'ardoise*) cui nummum imponebamus; huic pauxillo cerae tenue agglutinabamus filum; deinde tabulam *tantillum* inclinabamus ac denique filum lentissime trahebamus sub directione quae constanter et exacté esset parallela cum intersectione tabulae et plani horizontalis; vidimus autem nummum continue propius ad hanc intersectionem accedere, semitamque a directione fili declinare, tantoque magis declinare, quanto magis tabula inclinaretur. Ergo potentia Φ, quae in hoc exemplo ab ipsa corporis grauitate oritur, suum habet effectum, vtcunque fuerit exigua etiamsi ad alteram potentiam fuerit perpendicularis, et si sola agat omni effectu careat. Notandum porro potentiam priorem, quanta ad mouendum corpus requiritur, diminui statim ac altera superueniat; sit ista potentia diminuta $= F$ atque angulus interceptus inter directionem potentiae F et directionem motus orituri $= s$

habebitur pro motu super plano horizontali $\sqrt{(FF + \Phi\Phi)} = f$; simulque tangens $z = \frac{\Phi}{F}$ quia potentia simplex ex duabus potentiis composita semper esse debet $= f$ simulque directio potentiae simplicis coincidere cum directione motus. Igitur inter quantitates arbitrarias F, Φ et z, si vnica proponatur ceu data, ambae reliquae inde simul determinabuntur.

Tab. IV. §. 4. Sit nunc (fig. 1.) planum *inclinatum* F H L G denotetque F G intersectionem huius *plani* cum horizonte; sit porro horizontalis F M ad F G perpendicularis, ita vt angulus M F H indicet inclinationem plani atque huic plano superincumbat corpus simplex A; quaeritur directio A C sub *qua* corpus A protrahendum sit, vt sua sponte *moueatur* sub directione A D ipsi F G parallela et quanta futura sit ista potentia.

Sit pondus corporis $= P$, frictio super plano pro situ eius horizontali $= f$ et angulus inclinationis plani siue M H F $= A$; considerabimus hic alium insuper angulum quem vocabo C et qui *indicat* maximam plani inclinationem, sub qua pondus sola sua grauitate super plano defluere incipit: notum autem est sic fieri P sin. $C = f$ cos. C, vnde $f = P$ tang. C. Exprimat nunc linea A C potentiam quaesitam eiusque directionem fiatque parallelogrammum rectangulum A D C E, cuius latus A D sit parallelum cum horizontali F G atque latus A E ad A D perpendiculare; sit angulus CAD$= z$, at-

que

que potentia $AC = \pi$; denique ducatur AB quae exprimat conatum corporis super plano defluendi ab actione grauitatis oriundum; patet fore potentiam AB perpendicularem ad AD et $= P$ sin. A; iam vero si potentia AC resoluatur in AE et AD, erit potentia $AE = \pi$ sin. z et potentia $AD = \pi$ cos. z; oportet autem vt sit $AE = AB$ siue π sin. $z = P$ sin. A et π cos $z = f$ cos. A; posterior haec aequatio ex eo petitur quod frictio, dum planum inclinatur, diminuatur in ratione cosinus inclinationis, quia nimirum in hac ratione appressio corporis contra planum diminuitur. Ex istis duabus aequationibus deducitur $\frac{\text{sin.}\, z}{\text{cos.}\, z} = \frac{P\,\text{sin.}\, A}{f.\,\text{cos.}\, A}$. siue tang. $z = \frac{P}{f}$. tang. $A =$ tang. $A \times$ cotang. C, determinato angulo z, obtinetur ipsa potentia $\pi = \frac{P\,\text{sin.}\, A}{\text{sin.}\, z}$ siue etiam $\pi = \frac{f\,\text{cos.}\, A}{\text{cos.}\, z}$; quod si vero omnia per quantitates immediate datas determinare velimus habebimus $\pi = f$ cos. $A \times \sqrt{(1 + (\text{tang.}\, A\, \text{cotang.}\, C)^2)}$ siue etiam $\pi =$ cos. $A \times \sqrt{(ff + PP \,\square\, \text{tang.}\, A)}$; huiusmodi exempla satis indicant cautelas, quibus pro corporibus simplicibus vtendum sit; iam igitur ad alia progredior.

§. 5. Sint duo corpora simplicia A et B (fig. 2.) in plano horizontali posita et filo tenui atque extenso aut virgula intermedia ponderis experte connexa; putetur porro corpori anteriori B potentiam BE ad datum angulum applicari, quae praecise tanta sit, vt corpus B vel ambo corpora A et B mouere possit; quaeritur relatio inter fri- Tab. IV.

ctiones et potentiam mouentem. Resoluatur potentia BE in BC secundum directionem AB et in BD perpendicularem; sitque frictio corporis B $= f$ alteriusque corporis A $= \Phi$; potentia BE $= \pi$ et angulus EBD $=$ A; vt nunc relatio inter praefatas obtineatur quantitates, duo erunt ab inuicem casus distinguendi; vel enim corpus B solum mouebitur motu circulari circa alterum corpus A quiescens, vel mouebuntur ambo corpora pro magnitudine anguli A vel intensitate frictionis corporis A.

Casus primus contingit, cum potentia BD est aequalis frictioni f, dum altera potentia BC corpus A de loco mouere non valet, ita vt plane fiat inutilis; est autem potentia BD $= \pi$ cos. A vnde habetur π cos. A $= f$ vel $\pi = \frac{f}{cos. A}$;

Casus secundus oritur, cum aucto angulo A potentia BC seu π sin. A ita increscit, vt superet frictionem corporis A indicatam litera Φ; limes autem est inter vtrumque casum cum sit π sin. A $= \Phi$ vel $\frac{f \, sin. A}{cos. A} = \Phi$ vel tang. A $= \frac{\Phi}{f}$; superato hoc limite protinus incerta fit directio secundum quam corpus B moueri incipiat, ipsaque potentia mouens BE alium valorem, quam qui aequatione $\pi = \frac{f}{cos. A}$ antea expressus fuerat, sumit: cum etiam alterum corpus motum obtinet, qui insuper erit determinandus. Haec singula sequentem in modum erunt definienda.

§. 6.

§. 6. Retentis denominationibus quibus vsi sumus, ponamus (fig. 3.) tangentem anguli DBE maiorem quam $\frac{\Phi}{f}$, tunc calculus ita erit ponendus. Tab. IV. Diuidatur potentia lateralis BC in duas partes BF et FC, sitque $FC = \Phi$ adeoque $BF = \pi \text{ sin. } A - \Phi$; inseruiet autem potentia FC ad superandam frictionem corporis A, cuius motus necessario habebit directionem AB: hoc modo duae vires BF et BD vnice impenduntur in mouendum corpus B: compleatur rectangulum BFGD ducaturque diagonalis BG; sic perspicuum fit corpus motum iri secundum directionem BG, atque fore singulis momentis (si modo angulus A constanter idem retineatur) motum corporis A ad motum corporis B vt BF ad BG; ipsa denique diagonalis BG vsque facienda est aequalis frictioni f. His praemissis, quae reliqua sunt, nullam facient haesitationem, quandoquidem nihil aliud porro requiritur quam vt determinetur potentia BE seu π talis, vt praefatis satisfiat conditionibus. Est autem $BD = \pi \text{ cos. } A$ et vi constructionis $BF = \pi \text{ sin. } A - \Phi$; hinc $BG = \sqrt{((\pi \text{ cos. } A)^2 + (\pi \text{ sin. } A - \Phi)^2)} = f$ vnde deducitur $\pi = \Phi \text{ sin. } A + \sqrt{(ff - \Phi\Phi \square \text{ cos. } A)}$; vt nunc etiam determinemus directionem BG secundum quam corpus B mouebitur, ponemus angulum quaesitum $DBG = z$ atque sic facile ex praemissis deducitur fore $\frac{DG}{DE}$ siue

$$\frac{\text{tang. } z}{\text{tang. } A} = 1 - \frac{\Phi}{\Phi \square \text{ sin. } A + \text{ sin. } A \sqrt{(ff - \Phi\Phi \square \text{ cos. } A)}}.$$

§. 7.

§. 7. Liceat nunc aliqua ex praemissa theoria deducere corollaria.

(a) Si ponatur $z = 0$, habetur iterum limes, inter motum corporis A eiusque quietem; tunc autem si debitae fiant substitutiones, prodit tang. A $= \frac{\Phi}{f}$ et $\pi = \frac{f}{\text{cos. A}}$, plane vt in quinto paragrapho inuenimus. Si angulus A minor acciperetur, protinus falsae forent aequationes praecedentis paragraphi, quamuis quantitas radicalis nondum sit imaginaria; transitus fit a vero ad falsum, non ab reali ad imaginarium, nec enim ambo casus vlla lege continuitatis inter se cohaerent.

(b) Si fuerit $f = \Phi$ id est, si frictiones amborum corporum fuerit inter se aequales, fit $\pi = 2 f$ sin. A et $\frac{\text{tang. } z}{\text{tang. A}} = 1 - \frac{1}{2 \square \text{ sin. A}}$.

(c) Si $\Phi = 0$ prodit $\pi = f$ atque tang. $z =$ tang. A, quod ipsa rei natura per se indicat, verum si e contrario ponatur $f = 0$ oportebit vtique vt simul ponatur cos. A $= 0$, ne in quantitatem imaginariam incidamus; sicque prodibit $\pi = \Phi$ atque tang. $z = 0 \times \infty$ ratio huius ambiguitatis iterum per se est manifesta.

(d) Si pro quibuscunque frictionibus ponatur cos. A $= 0$, fiet semper $\pi = \Phi + f$ et tang. $z = \frac{f}{\Phi + f}$ tang. A $= \infty$, quod rursus per se manifestum erat.

§. 8. Quae dicta sunt multis aliis problematibus ansam darent, si ad systemata multifila progredi

gredi vellemus; expositis autem principiis nostris physico-mechanicis quod reliquum est, id fere omne ad Geometriam puram pertinet, nimiumque nos ab instituto deduceret. Ad alia propero scopo nostro minus aliena; dicam primo de centro rotationis spontaneae quod frictioni conueniat. Ante hos triginta et quod excurrit annos argumentum istud tunc temporis nouum examini subieci, quatenus solam materiae inertiam respicit et ab eo tempore haec theoria eximio vsui esse coepit; prima eius elementa stabiliui et exposui in dissertatione de *percussione excentrica* commentariis nostris Academicis eius temporis inserta; demonstraui autem, centrum rotationis spontaneae inertiae debitum positum esse in ipso centro oscillationis, si punctum cui potentia applicatur pro puncto suspensionis accipiatur.

§. 9. Sit nunc A B (fig. 4.) linea vniformiter grauis plano horizontali incumbens eidemque in singulis punctis vniformiter appressa; putetur porro vectis B C grauitatis expers, ad A B in directum positus eidemque firmiter applicatus, cuius extremitati C potentia C E perpendiculariter adhaereat, quanta requiritur vt rotatio fiat circa punctum D positione datum et axiculo firmatum; tum quaeritur relatio inter omnes has quantitates huc facientes, quod quidem ex primis elementis mechanicis de vecte et ex indole frictionum, quatenus hae ab velocitatibus independentes ponantur, deducitur, sed Tab. IV.

 quod

quod hic ob nexum, quem habebit cum ſequentibus, indicandum cenſui; ſit nempe $AB = l$, $BC = a$; $DC = \lambda$; intelligatur per f frictio directa totius lineae AB; ſi ab axiculo libera ſecundum longitudinem ſuam protrahatur; ſit denique potentia $CE = \pi$; erit ſumma omnium momentorum, quae a frictione partis DB formantur $= (\lambda - a)^2 \times \frac{f}{2l}$, ſimiliſque ſumma pro altera parte AD eodem ſenſu accipienda $= (l + a - \lambda)^2 \times \frac{f}{2l}$: ambae hae quantitates ſimul ſumtae erunt aequales momento potentiae π pro eodem rotationis centro in D ſiue aequalis quantitati $\lambda\pi$. Exinde deducitur $\pi = \frac{2\lambda\lambda - 4a\lambda + 2aa + ll + 2al - 2l\lambda}{2l\lambda} f$; notetur autem numeratorem nihil aliud eſſe quam aggregatum ex quadrato AD et quadrato DB id eſt, ex partium quadratis. Sic igitur erit alio modo $\frac{\pi}{f} = \frac{AD^2 + DB^2}{2AB \times DC}$.

§. 10. Nunc vero lineam AB ab axe ſuo liberari ponamus, atque potentiam in C applicatam ſenſim intendi, donec motus oriatur; ſic manifeſtum eſt, etiamnum motum rotatorium oriturum eſſe circa punctum aliquod quod rurſus in D poſitum putetur; huiusmodi punctum centrum *rotationis ſpontaneae* nunc vocari ſolet, idque ſic determinabitur ſit $BD = x$; $AD = l - x$ atque $CD = \lambda = a + x$; his acceptis denominationibus fit $\frac{\pi}{f} = \frac{ll - 2lx + 2xx}{2l(a + x)}$, quia vero potentia π minima ponitur, quae virgam ſiue lineam AB quocunque

modo

modo mouere possit, oportet vt punctum D ita sit locatum, vt quantitas $\frac{ll-2lx+2xx}{2l(a+x)}$ sit minima; vnde sequitur fore $x=-a+\sqrt{\frac{(ll+2al+2aa)}{2}}$ (tuncque erit potentia, ad rotationem virgae liberae requisita, aequalis $\frac{\sqrt{(2ll+4al+4aa)}-2a-l}{l}f$.

§. 11. Nouum cum sit istud de centro gyrationis spontaneae argumentum, quamuis triuiali calculo exploratum, non detrectabo generaliorem eius commentationem physicam.

Si fuerit BC vel a veluti infinita, poterit pro quantitate radicali $\sqrt{\frac{(ll+2al+2aa)}{2}}$ simpliciter poni $a+\frac{1}{2}l$ adeoque $x=\frac{1}{2}l$; ergo tunc punctum D cadit in medium lineae AB; quod si deinceps diminui ponatur distantia a, accedet centrum conuersionis seu punctum D ad extremitatem A; tum si potentia in ipso puncto B sit applicata, fiet BD seu $x=l\sqrt{\frac{1}{2}}$ deinde si potentia citra punctum B ipsi lineae AB applicata fuerit, etiam tunc punctum conuersionis ad extremitatem A magis accedet, donec potentia posita fuerit in medio lineae AB; tunc autem erit $a=-\frac{1}{2}l$ et $x=l$, sic vt linea AB circa ipsam extremitatem A rotetur. Paradoxa admodum videtur haec postrema proprietas; quis enim dubitet virgam vniformem AB, cuius puncto medio potentia applicata fuerit, dum mouetur, parallelismum constanter esse seruaturam? En igitur quod res est. Si potentia omni accura-

 tione

tione mathematica virgam bisecet, in duas partes aequales, mouebitur virga motu parallelo, at si, vel infinite parum, punctum cui potentia applicatur, distet a medio, protinus eueniet vt gyratio fiat vel circa extremitatem A vel circa alteram B; circa priorem si paullo propior sit extremitati *B*, circa posteriorem si propior fuerit extremitati A. Id ipsum indicat theoria; quod vt tanto clarius fiat, notabimus quantitatem radicalem $\sqrt{\frac{(ll + 2al + 2aa)}{2}}$ vi nostrae figurae ab initio positiue esse accipiendam; variante autem distantia a, eandem quantitatem radicalem negatiue sumendam esse, si C propius ad A quam ad B situm sit; in ipsissimo autem medio, cum ambiguum sit signum, *habebitur* $x = \frac{1}{2}l \pm \frac{1}{2}l$; ergo B D est vel $= l$ vel $= 0$ atque sic centrum rotationis spontaneae D cadet *vel in* punctum A, si punctum C nondum *accurate attigerit* medium lineae A B, vel in punctum B, si tantillum fuerit transgressum, atque in bisectionis puncto, motus virgae ad vtrumque statum aequaliter inclinabit, quod fit cum sibimet parallelus est; sic igitur centrum rotationis a puncto A subito transilit in punctum B et nunquam extra lineam propositam A B cadit. Denique si potentia ad alteram virgae medietatem transposita putetur, omnia inuerso ordine recurrent.

Post determinatum centrum rotationis spontaneae, indicat formula in fine paragraphi 10^{mi} ex-

posita

posita ipsam potentiam requisitam ad rotandam virgam. Sic si potentia applicatur extremitati B, erit haec potentia $=f(\sqrt{2}-1)$ seu propemodum $=\frac{2}{5}f$; si ipsi medio inferatur, posito $a=-\frac{1}{2}l$, fiet $\pi=f$ vel potius $\pi=\pm f$, quia nimirum paullo post hanc insertionem potentia protinus ad oppositam partem agere debet, vt rotatio ad eandem qua coepit plagam pergat.

§. 12. Quamuis centrum liberae rotationis nunquam vltra extremitates A et B euagetur, nihil tamen obstat, quo minus ponatur, rotationem coactu fieri circa punctum extra virgam AB assumtum; hoc posito potentia π directe foret ex *principiis mechanicis* determinanda; si scilicet punctum conuersionis D ad alteram partem extremitatis A putetur atque distantia inter vtrumque punctum vocetur b, reperitur, retentis caeteris singulis, $\pi=\frac{b+\frac{1}{2}l}{b+l+a}f$ siue $\pi=\frac{b+\frac{1}{2}l}{\lambda}f$; iste autem valor minime cohaeret cum eo, quem in fine paragraphi noni exposuimus, nisi cum sit $b=0$; ratio huius rei est, quod ambo casus lege continuitatis non cohaereant; idem dicendum de casu, quo punctum conuersionis D ad alteram partem extremitatis B positum assumitur.

§. 13. His praemissis praeliminaribus aggredior denique quaestionem cuius statim ab initio in paragrapho 1° mentionem feci, non sine peculiari circumſpectione pertractandam; ſcilicet nunc inquiram, quid futurum ſit, ſi potentia puncto C applicata, obliqua fuerit ad vectem BC ſub angulo ACE conſtanter eodem. Erunt fortaſſe qui putent, potentiam obliquam ſimpliciter in duas laterales eſſe reſoluendam, alteram perpendicularem ad BC, alteram in directum poſitam cum BC, tuncque fore priorem, vi paragraphi $10^{mi} = \frac{\sqrt{(2ll+4al+4qa)}-2a-l}{l} f$ atque alteram potentiam $= f$. Legitima haec foret Problematis ſolutio, ſi in aeſtimanda frictione liceret principio compoſitionis et reſolutionis motus vti, id autem cum minime liceat, dico ante omnia pro ſingulis virgae AB elementis motum definiendum eſſe abſolutum eiusque directionem, inde enim habebitur directio, ſecundum quam elementum propoſitum frictionem patitur; erit vtique *illa directio* alia pro ſingulis elementis. Sic *pro quouis elemento* innoteſcit frictionis potentiola elemento applicata; Haec demum potentiola erit reſoluenda in duas laterales, alteram in ipſa directione AB alteram ad AB perpendicularem; ſumma primae claſſis indicabit potentiam quae in directione AB agit et ſumma omnium momentorum ſecundae claſſis, ſi referantur ad punctum D erit aequalis momento potentiae quae perpendiculariter ad AC agit; Haeque tandum duae aequationes indicabunt relationem omnium quantitatum quaeſtionem noſtram determinantium, ſi modo punctum conuerſionis D legitime definitum fuerit.

Patet

Patet iam ex ista solutionis adumbratione, problema nostrum, plura quam quae a geometria communi expectari possint, requirere subsidia, quamuis inter simplicissima numerandum statim videatur; Igitur operae pretium me facturum puto, si solutionem accuratius exponam praesertim cum intactum adhuc sit hoc argumenti genus, plurimisque amplificari possit modis, qui Geometrarum vel maxime exercitatorum contemplationem allicere queant.

§. 14. Fuerit AB (fig. 5) virga vel veluti linea grauis, vniformiter ad planum, cui incumbit appressa; huic in directum affixus putetur vectis BC omnis quasi expers grauitatis, extremitati C applicata nunc sit potentia CE sub angulo permanente GCE vel gce, quae lentissimo motu virgam protrahat; tum quaeritur huius motus plena determinatio vna cum potentiae magnitudine. Sit situs proximus systematis abc, ponaturque centrum rotationis spontaneae virge in D idque mox translatum in d; centro D ducantur arculi circulares infinite parui BL, NO, Ma, vna cum lineolis Bb, Nn, Aa, est autem locus puncti N vel n indeterminatus et vbiuis sumendus: in figura ad vtramque conuersionis partem sistitur.

Solutionis cardo in hoc potissimum vertitur, vt proportio consideretur inter Lb et BL quae relationem indicant inter motum progressiuum siue longitudinalem et motum rotatorium sit igitur Tab. IV.

Lb =

$Lb = \alpha$, $BL = \beta$, $Bb = \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}$; patet motum longitudinalem in singulis virgae punctis esse eundem, dum rotatorius tanto minor est, quantum vicinior puncto D; Ex vtroque motu componitur motus absolutus Nn pro quouis puncto N; ergo directio motus fit secundum Nn atque secundum eandem directionem in contrarium agit resistentia frictioni debita; resistentia haec constanter quidem pro quouis elemento manet eadem, directionem autem suam, variato puncto N, variat; Retentis denominationibus in §. 9° adhibitis, ponemus DN vel $dn = s$, eiusque elementum NN′ vel $nn' = ds$, erit frictio huius elementi $= \frac{f\,ds}{l}$: Quod si nunc praefatam frictionem vel resistentiam *exprimamus* per ipsam lineolam Nn licebit respectu potentiae principio decompositionis vti, quod *non licebat* cum Nn motum absolutum puncti N *exprimeret; igitur* iam potentiolam nN resoluemus in longitudinalem nO eidemque perpendicularem ON; sic duas obtinebimus potentiolarum classes, quarum prior tota ad motum longitudinalem posterior ad motum rotatorium pertinet: Vtramque partem seorsim exponam.

Pars prima solutionis. Ponatur $DB = A$; sic erit $NO = \frac{s}{A}\beta$; $On = \alpha$; $Nn = \sqrt{(\alpha\alpha + \frac{ss}{AA}\beta\beta)}$; potentiola nO a frictione elementi NN′ oriunda $= \frac{nO}{nN}$

$$\times \frac{f\,ds}{l} = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\alpha + \frac{ss}{AA}\beta\beta)}} \times \frac{f\,ds}{l} = \frac{f\,ds}{l\sqrt{(1 + \frac{\beta\beta ss}{\alpha\alpha AA})}};$$ Ponatur

$s =$

$s = \frac{\alpha A (1 - qq)}{2 \beta q}$ mutabitur postrema ista quantitas in $-\frac{f \alpha A d q}{l \beta q}$ cuius integralis est $\frac{f \alpha A}{l \beta}$ log. $\frac{1}{q}$, quae si valor s restituatur, dat $\frac{f \alpha A}{\beta l}$ log. $\frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{\beta \beta s s}{\alpha \alpha A A})} - \frac{\beta s}{\alpha A}}$ nec enim vlla requirebatur constans addenda, quandoquidem euanescente s, tota simul quantitas euanescit: Haec postrema formula integram exprimit potentiam a frictione virgae oriundam, longitudinalem, quae partem virgae DN vel dn retrahit, atque si ponatur $s = DB = A$ obtinebitur haec potentia pro integra longitudine DB vel db, quae proin erit $= \frac{f \alpha A}{\beta l}$ log. $\frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{\beta \beta}{\alpha \alpha})} - \frac{\beta}{\alpha}}$. Similiter potentia pro parte altera virgae DA vel da, habebitur, si simpliciter ponatur $l - A$ loco longitudinis A: tum si priori addatur, obtinebitur potentia longitudinalis frictioni debita, pro integra virga, quae sic fit $\frac{f \alpha}{\beta}$ log. $\frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{\beta \beta}{\alpha \alpha})} - \frac{\beta}{\alpha}}$. Hinc potentiae vel resistentiae opponitur potentia CG, postquam potentia CE resoluta fuit in CG in directum positam cum recta BC et in CF perpendicularem; hinc si ponatur potentia incognita CE $= \pi$ et angulus GCE $= Q$, erit potentia CG $= \pi$ cos. Q vnde denique deducitur aequatio

$$1.\ \pi \operatorname{cosin.} Q = \frac{f \alpha}{\beta} \log . \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{\beta \beta}{\alpha \alpha})} - \frac{\beta}{\alpha}} \text{ vel } = \frac{f \alpha}{\beta} \log . (\sqrt{(1 + \frac{\beta \beta}{\alpha \alpha})} + \frac{\beta}{\alpha})$$

Pars secunda solutionis; Ex iis quae modo dicta sunt patet potentiolam a frictione elementi NN′ oriundam, perpendiculariter ad virgam sumtam esse $= \frac{NO}{NN'} \cdot \frac{f\,ds}{l} = \frac{\beta\, s}{A\sqrt{(\alpha\alpha + \frac{ss}{AA}\beta\beta)}} \cdot \frac{f\,ds}{l}$, quae multiplicata per DN siue per s dat momentum potentiolae pro puncto rotationis D: Erit adeoque momentum istud $= \frac{f\beta ss\,ds}{lA\sqrt{(\alpha\alpha + \frac{ss\beta\beta}{AA})}}$ siue $= \frac{f\beta ss\,ds}{lA\alpha\sqrt{(1 + \frac{\beta\beta ss}{\alpha\alpha AA})}}$, cuius integratio passim apud authores reperitur: est nempe

$$\int \frac{f\beta ss\,ds}{lA\alpha\sqrt{(1+\frac{\beta\beta ss}{\alpha\alpha AA})}} = \frac{fA\alpha s}{2\beta l}\sqrt{(1+\frac{\beta\beta ss}{\alpha\alpha AA})} + \frac{\alpha\alpha AAf}{2\beta\beta l}\log.(\sqrt{(1+\frac{\beta\beta ss}{\alpha\alpha AA})} - \frac{\beta s}{\alpha A})$$

fiat nunc $s = A$, vt sic habeatur summa momentorum pro integra DB, atque habebitur $\frac{f\alpha AA}{2\beta l}\sqrt{(1+\frac{\beta\beta}{\alpha\alpha})} + \frac{f\alpha\alpha AA}{2\beta\beta l}\log.(\sqrt{(1+\frac{\beta\beta}{\alpha\alpha})} - \frac{\beta}{\alpha})$; huic frictionum momento addatur momentum pro altera parte DA, rursus affirmatiue sumendum, quod reperitur, si in praecedente formula loco quantitatis A sumatur quantitas $l - A$: sic erit momentum integrum pro ambabus partibus $= (ll - 2lA + AA)$ $(\frac{f}{2l}\sqrt{(\frac{\alpha\alpha+\beta\beta}{\beta\beta})} + \frac{f\alpha\alpha}{2l\beta\beta}\log.(\sqrt{(\frac{\alpha\alpha+\beta\beta}{\alpha\alpha})} - \frac{\beta}{\alpha})$; Postremum istud momentum erit aequale momento Potentiae CF in vectem CD siue aequale producto ex π sin. Q et $a + A$; inde obtinetur altera aequatio $ll - 2Al + 2AA)(\frac{f}{2l}\sqrt{(\frac{\alpha\alpha+\beta\beta}{\beta\beta})} + \frac{f\alpha\alpha}{2.\beta\beta}\log.(\sqrt{(\frac{\alpha\alpha+\beta\beta}{\alpha\alpha})} - \frac{\beta}{\alpha})) = (a+A)$ π sin. Q siue.

$$\text{II.}\ \pi \sin Q = \frac{ll - 2Al + 2AA}{a + A}\left(\frac{f}{2l}\sqrt{\frac{(\alpha\alpha + \beta\beta)}{\beta\beta}} + \frac{f\alpha\alpha}{2l\beta\beta}\log.\left(\sqrt{\frac{(\alpha\alpha + \beta\beta)}{\alpha\alpha}} - \frac{\beta}{\alpha}\right)\right).$$

§. 15. Diuidatur nunc aequatio secunda praecedentis paragraphi per aequationem primam, et habebitur Tang. Q

$$= \frac{ll - 2Al + 2AA}{2l(a + A)}\left(\sqrt{\frac{(\alpha\alpha + \beta\beta)}{\beta\beta}} + \frac{\alpha\alpha}{\beta\beta}\log.\left(\sqrt{\frac{(\alpha\alpha + \beta\beta)}{\alpha\alpha}} - \frac{\beta}{\alpha}\right)\right) : \frac{\alpha}{\beta}\log.\left(\sqrt{\frac{(\alpha\alpha + \beta\beta)}{\alpha\alpha}} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Docet haec aequatio relationem inter directionem potentiae CE et directionem viae Bb quam extremitas virgae describit; apparet autem quanto compendiosius sit priorem definire ex posteriori quam vicissim posteriorem ex priori; prius solo tabularum vsu conficitur, alterum taediosam approximationum methodum postulat

Determinato angulo Q, dabit aequatio prima potentiam CG, aequatio secunda potentiam CF, indeque cognoscitur potentia absoluta CE. Necdum problema nostrum confectum erit, nisi punctum conversionis D probe fuerit determinatum; Id equidem fecimus in fine § 10^{mi}, vbi demonstrauimus esse BD siue nunc $A = -a + \sqrt{\frac{ll + 2al + 2aa)}{2}}$. An vero idem valor ad nostrum praesentem casum applicari poterit? Id nondum liquet; etenim longe aliter frictiones in elementa virgae hic distribuuntur, quam antea in § 10mo, vbi singula elementa aequalem frictionem patiebantur. Hoc dubium soluemus, si consideremus potentiam CG plane nihil conferre ad rotationem

 virgae

virgae, alteram vero CF totam vnice in illam impendi; Eſt vero potentia $CF = \pi$ ſin. Q, atque punctum conuerſionis D ſua ſponte ſe ita locabit, vt potentia haec in rotationem requiſita minima fiat erit itaque valor quantitatis π ſin. Q. in fine praec: §. expoſitus inter omnes minimus, qui diuerſis longitudinibus B D reſpondeant. Licebit autem directionem Bb, ab qua ratio inter α et ζ vnice pendet, pro data accipere, quaecunque fuerit poſitio puncti D; hoc modo quantitas $\frac{\zeta}{\zeta}$ pro conſtanti erit accipienda, dum quantitates A, π et Q ſimul varientur, et quia π ſin. Q minima eſſe debet, erit quoque quantitas $\frac{ll - 2Al + 2AA}{a + A}$ minima aſſumenda vnde $A = -a + \sqrt{\frac{ll + 2al + 2aa}{2}}$, quem valorem pro diſtantia BD etiam ſupra § 10mo inuenimus. Caeterum vbique logarithmi hyperbolici *erunt* accipiendi.

§. 16. Fuerit $Lb = a = 4$; $LB = \zeta = 3$; $BC = \alpha = 0$; fiet angulus CBb fere $37°$. dum angulus GCE tantillo maior inuenitur $11°$; ergo paruula obliquitas potentiae notabilem in motu puncti B obliquitatem producit; ipſa vero potentia CE ſeu π ab iſta obliquitate non multum admodum decreſcit, eſt enim paululum maior quam $\frac{24}{100} f$; Prouidebam equidem haud difficulter aliquid emolumenti hac in re ab obliquitate potentiae, ſi modo in dextram modo in ſiniſtram partem detorqueretur, ſperari poſſe, atque vt verum fatear, potiſſima haec fuit ratio,

ratio, quae me ad istas disquisitiones suscipiendas impulit; nunc autem video, exiguam esse potentiae motricis diminutionem, nec ad istiusmodi obliquitatem recurrendum esse, nisi cum paruuli requiruntur motus, et vires vix sufficiunt ad resistentiam directe superandam: saepe autem obseruaui equos aliquo instinctu, ad momentum temporis opportunum, sibimet hoc modo auxiliari, cum longis alligati trabibus viam offenderent difficiliorem.

SECTIO SECVNDA
DE
PRINCIPIIS MOTVS FLVIDORVM.

Auctore
L. EVLERO.

CAPVT I.
CONSIDERATIO MOTVS FLVIDORVM IN GENERE.

Problema 17.

1.

Si massa fluida in motu quocunque versetur, elementa exponere, ex quibus eius statum et motum ad quoduis tempus commodissime cognoscere et ad calculum reuocare liceat.

Solutio.

Tab. V. Fig. 22. Referantur singula fluidi elementa ad ternos axes fixos inter se normales OA, OB et OC, ita vt vt cuiusque elementi in Z siti locus per ternas coordinatas illis axibus parallelas determinetur, quae sint $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$: et cum fluidum in motu sit constitutum, id elementum consideremus, quod nunc, postquam datum tempus $= t$ a certa epocha effluxerit, in puncto Z versetur, quandoquidem labente tempore alia atque alia fluidi elementa per idem punctum Z transeunt. Iam ad statum fluidi praesentem cognoscendum, si eius densitas variationis sit capax, primo densitas fluidi in puncto Z est definienda, quam littera q designemus, quae cum non solum pro diuerso situ puncti Z, sed etiam pro diuerso tempore, diuersa esse possit, hanc quantitatem q tanquam functionem quatuor variabilium x, y, z et t spectari oportet, in qua si pro t tempus propositum scribatur, loco x, y et z vero eae tres coordinatae OX, XY, YZ, quae puncto Z conueniunt, ipsa densitas fluidi in Z ad tempus propositum obtinetur. Sin autem densitas fluidi vbique et perpetuo sit eadem, littera q denotabit quantitatem constantem.

Secundo loco etiam pressionem in loco Z cognitam esse oportet, quae exprimatur altitudine $= p$, quae scilicet tribui debet columnae ex materia homogenea, cuius densitas $= 1$. constanti, vt eius pondus pressioni aequali basi innitenti fiat aequale, ac pro ratione huius densitatis vnitate expressae perpetuo illa densitas q sit mensuranda. Cum igitur

et

et haec altitudo pro varietate loci ac temporis diversa esse possit, etiam p vt functio quatuor variabilium x, y, z et t tractari debet.

Tertio si fluidum actioni virium veluti gravitatis aliarumque similium, sit subiectum, eas semper in ternas secundum directiones coordinatarum resoluere licet. Sint ergo hae vires acceleratrices elementum in Z situm sollicitantes, sec. dir. $Zx = P$, sec. dir. $Zy = Q$ et sec. dir. $Zz = R$, posita vi gravitatis naturalis $= 1$. Hae vires si sint variabiles tantum ab loco puncti Z non vero a tempore t pendere solent.

Quarto pro motus cognitione imprimis necesse est motum cuiusque elementi ad quodvis tempus nosse, qui motus conuenientissime secundum directiones trium axium resoluitur. Sit ergo pro tempore $= t$ elementi in Z versantis celeritas secundum directionem $Zx = u$, secundum directionem $Zy = v$ et secundum $Zz = w$, quae ergo ternae celeritates tanquam functiones quatuor variabilium x, y, z et t spectari debent. Vbi facile patet calculum ita instrui posse, vt tempus t in minutis secundis, celeritates autem u, v, w per spatia vno minuto secundo percurrenda exprimantur.

Coroll. 1.

2. Cognitio ergo perfecta status et motus fluidorum his quatuor capitibus, quae exposuimus, continetur, densitate scilicet pressione, viribus sollici-

tantibus et ternis cuiusque elementi celeritatibus quae si ad quoduis tempus assignare valeamus, perfectam totius motus cognitionem habebimus.

Coroll. 2.

3. Vires quidem, quibus fluidum sollicitatur semper vltro dantur, neque ipsae a motu pendent: ita etiamsi motus sit incognitus vires P, Q, R quibus singula elementa incitantur, inter quantitates cognitas sunt referendae, atque ex iis potissimum reliqua capita determinationem nanciscuntur.

Coroll. 3.

4. Quando fluidum est homogeneum, eiusque densitas nulli variationi obnoxia, etiam quantitas q erit *data*, sin autem sit siue heterogeneum, siue quaelibet particula densitatem habeat variabilem, omnino necessarium est, vt durante motu pro quouis puncto Z particulae ibi versantis densitas inuestigetur.

Coroll. 4.

5. Tota ergo theoria motus fluidorum huc redit, vt pro data fluidi natura et viribus sollicitantibus, quantitates q, p, u, v, w definiantur, ac per quatuor variabiles x, y, z et t ita exprimantur vt earum valores tam pro quouis puncto Z quam quouis tempore t assignari queant.

Scholion I.

6. Cum hae quantitates q, p, u, v, w vt functiones harum quatuor variabilium x, y, z et t tractari debeant, cuiusque differentiale in genere sumtum ita exprimetur:

$$dq = dx\left(\frac{dq}{dx}\right) + dy\left(\frac{dq}{dy}\right) + dz\left(\frac{dq}{dz}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

cuius formae tres partes priores incrementum densitatis, quae nunc in Z statuitur $= q$, exhibent, dum manente tempore t eodem ad aliud punctum ipsi Z proximum transimus, cuius locus his ternis coordinatis $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ determinatur, sicque intelligitur quomodo tempore t constanti assumto pro quouis instanti per totam fluidi massam in singulis punctis densitas se sit habitura, quod simili modo de pressione et ternis celeritatibus singulorum elementorum est intelligendum, atque hoc quidem ex natura differentialium per se est manifestum. At si manentibus coordinatis x, y et z iisdem tempus t differentiali suo dt augetur, densitas iam fiet $q + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$ quae autem neutiquam eius elementi fluidi, quod in Z haeserat densitatem tempusculo dt variatam praebet, quemadmodum non satis attendenti videri posset, sed ea formula potius alius elementi quod demum elapso tempusculo dt per punctum Z transibit densitatem declarabit. Quando autem eiusdem elementi fluidi quod in Z versabatur et cuius densitas erat $= q$ densitatem tempusculo dt variatam definire velimus ante

omnia

omnia ad locum vbi hoc elementum poſt tempuſculum dt haerebit reſpicere debemus, qui ſi his coordinatis variatis $x + dx$, $y + dy$, $z + d$ indicetur, verum denſitatis incrementum erit

$$dx\left(\frac{dq}{dx}\right) + dy\left(\frac{dq}{dy}\right) + dz\left(\frac{dq}{dz}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right).$$

Haecque eadem cautio adhibenda eſt, ſi eiusdem fluidi elementi quod nunc in Z verſatur, elapſo tempuſculo dt ſiue preſſionem ſiue motum ternis celeritatibus u, v, w determinatum aſſignare debemus. Quae cautio eo magis eſt neceſſaria et omni cura inculcanda, quod ea ob attentionis defectum neglecta in grauiſſimos errores incidere poſſemus.

Scholion 2.

7. Ad motum porro fluidi cognoſcendum omnino neceſſe eſt eius elementorum motus noſſe, minimeque ſufficit, vti in corporibus ſolidis vſu venire ſolet, aliquot tantum punctorum motum inveſtigaſſe. In motu ſcilicet corporum ſolidorum rigidorum, ſtatim ac trium punctorum non in directum ſitorum motus innotuerit, inde ſimul omnium reliquorum punctorum totius corporis motus definitur, ac ſi corpus flexuris ſit praeditum plurium quidem punctorum motus ad totius corporis motum definiendum requiritur, eorum tamen numerus ſemper eſt finitus. In fluidis autem ſingula elementa motu peculiari ferri poſſunt, ita vt etiamſi mille particularum motum exploratum haberemus,

totus tamen motus iis nondum ſit determinatus. Neque tamen omnium elementorum motus ideo neutiquam a ſe mutuo pendere ſunt cenſendi, quodſi enim denſitas fluidi nullam mutationem patiatur, euidens eſt ſingulas particulas non ita temere profluere poſſe, vt vel in maius ſpatium diſpergantur, vel in minus compellantur, vnde certa quaedam conditio inter ſingularum particularum motus ſtabilitur. At etiamſi fluidum condenſationis et rarefactionis ſit capax, tamen talis mutatio *non ſine reſpectu* ad preſſionem habito euenire nequit, ex *quo* ob preſſionem omnes omnium particularum motus certa quadam lege limitantur. Haec autem ipſa limitatio in theoria motus fluidorum *praecipuum* caput conſtituit quod eo reduci facile perſpicitur, vt motu omnium elementorum, vt *cognito ſpectato*, variatio cum denſitatis tum *motus cuiusque* puncti inveſtigetur.

Scholion 3.

8. Quatuor illa capita quibus perfectam notitiam motus fluidorum contineri diximus, fortaſſe huic ſcopo nondum ſufficere videbuntur, quoniam plerumque ad plures alias circumſtantias attendi neceſſe eſt, veluti ſi fluidum vaſi ſit incluſum, per quod vel transfluat, vel ex quo effluat ad quoduis tempus quoque noſſe oportet, quouſque fluidum in vaſe porrigatur, ſimulque *vaſis* figuram probe perſpectam eſſe oportet: tum ſi qua in parte

fluidum

fluidum ſit apertum, vbi ſcilicét preſſio fuerit nulla, etiam haec circumſtantia ad motum vlteriorem determinandum omnino neceſſaria videtur. Verum hic in genere tantum eſt tenendum, quatuor expoſita capita omnino ſufficere ad motum aequationibus differentialibus includendum, in quo principiorum motus vis potiſſimum conſiſtit. His autem aequationibus inuentis, quando eas integrari oportet, tum demum omnes illae circumſtantiae in computum ingrediuntur, atque analyſis ſemper ita ad omnes caſus accommodata deprehendetur, vt omnibus illis conditionibus, quascunque circumſtantiae, praeſcribunt, ſemper perfecte ſatisfieri poſſit.

Problema 18.

9. Datis celeritatibus, u, v et w quibus ſingula fluidi elementa mouentur, inueſtigare translationem cuiuscunque moleculae fluidi tempusculo infinite paruo, dt factam.

Solutio.

Moleculae, cuius translationem quaerimus, tribuamus figuram pyramidis triangularis ZLMN, pro cuius quatuor angulis ſint ternae coordinatae.

Pro Z, $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$

Pro L, $OR = x + dx$, $RP = y$, $PL = z$

Pro M, $OX = x$, $XQ = y + dy$, $QM = z$

Pro N, $OX = x$, $XY = y$, $YN = z + dz$.

 Cum

Cum nunc pro puncto Z ſint celeritates ſecundum directiones ternis axibus parallelas u, v, w, functiones quatuor variabilium x, y, z et t hinc pro ſingulis angulis hae celeritates ita ſe habebunt

Pro Z ſecundum celeritas $OA = u$, ſec. celeritas $OB = v$, ſec. celeritas $OC = w$

Pro L ſec. $OA = u + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$, ſec. $OB = v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$

ſec. $OC = w + dx\left(\frac{dw}{dx}\right)$

Pro M ſec. $OA = u + dy\left(\frac{du}{dy}\right)$, ſec. $OB = v + dy\left(\frac{dv}{dy}\right)$

ſec. $OC = w + dy\left(\frac{dw}{dy}\right)$

Pro N ſec. $OA = u + dz\left(\frac{du}{dz}\right)$, ſec. $OB = v + dz\left(\frac{dv}{dz}\right)$

ſec. $OC = w + dz\left(\frac{dw}{dz}\right)$.

His ergo celeritatibus tempuſculo dt haec quatuor puncta Z, L, M, N transferentur in z, l, m, n quae ſequentibus ternis coordinatis determinabuntur:

$Ox = x + udt$ $\quad xy = y + vdt$

$yz = z + wdt$

$Or = x + dx + udt + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\quad rp = y + vdt + dtdx\left(\frac{dv}{dx}\right)$

$pl = z + wdt + dtdx\left(\frac{dw}{dx}\right)$

$Os = x + udt + dtdy\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\quad sq = y + dy + vdt + dtdy\left(\frac{dv}{dy}\right)$

$qm = z + wdt + dtdy\left(\frac{dw}{dy}\right)$.

$Ot = x + udt + dtdz\left(\frac{du}{dz}\right)$, $\quad to = y + vdt + dtdz\left(\frac{dv}{dz}\right)$

$on = z + dz + wdt + dtdz\left(\frac{dw}{dz}\right)$.

Fluidi

Fluidi ergo materia in pyramide Z L M N contenta ita mouetur vt elapſo tempuſculo dt pyramidem $zlmn$ occupet et impleat. Quoniam enim pyramis Z L M N eſt infinite parua vtcunque motus fuerit irregularis, omnia puncta in ſingulis hedris pyramidis Z L M N contenta ita moueri neceſſe eſt, vt perpetuo ſecundum hedras planas maneant diſpoſita, ſicque hedra Z L M in zlm peruenire eſt cenſenda, ſimilique modo de reliquis.

Coroll. 1.

10. Etiamſi ergo forte figura moleculae pyramidis Z L M N mutatur, tamen figuram pyramidis triangularis retinet, vnde cum quaelibet molecula in huiusmodi pyramides reſolui queat, eius quoque figura, quae ipſi ob motum inducitur, hinc colligi poterit.

Coroll. 2.

11. Cum latera pyramidis Z L M N principalia ſint $ZL = dx$, $ZM = dy$ et $ZN = dz$ quae inter ſe ſunt normalia, reliqua erunt $LM = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, $LN = \sqrt{(dx^2 + dz^2)}$ et $MN = \sqrt{(dy^2 + dz^2)}$ atque ſoliditas iſtius pyramidis erit $= \frac{1}{6} dx\, dy\, dz$, cum baſis Z L M area ſit $= \frac{1}{2} dx\, dy$ et altitudo $ZN = dz$.

Scholion 1.

12. Nunc ergo quoque ſingula latera pyramitis translatae $zlmn$ definire poterimus. Primo enim ob

Or-

$Or - Ox = dx + dtdx(\frac{du}{dx})$, $rp - xy = dtdx(\frac{dv}{dx})$, $pl - yz = dt\,dx(\frac{dw}{dt})$ erit $zl = \sqrt{}(dx^2 + 2\,dt\,dx^2(\frac{du}{dx})) = dx + dt\,dx(\frac{du}{dx})$, quia particulas post signum radicale, vbi differentialia ad quatuor dimensiones assurgunt, reiicere licet, simili modo erit

$$zm = dy + dt\,dy(\frac{dv}{dy}) \text{ et } zn = dz + dt\,dz(\frac{dw}{dz})$$

deinde pro latere lm ob

$$Or - Os = dx + dt\,dx(\frac{du}{dx}) - dt\,dy(\frac{du}{dy})$$

$$sq - rp = dy - dt\,dx(\frac{dv}{dx}) + dt\,dy(\frac{dv}{dy})$$

$$qm - pl = -dt\,dx(\frac{dw}{dx}) + dt\,dy(\frac{dw}{dy})$$

fiet $lm = \sqrt{}(dx^2 + dy^2 + 2\,dt\,dx^2(\frac{du}{dx}) - 2dtdxdy(\frac{du}{dy}) - 2dtdxdy(\frac{dv}{dx}) + 2\,dt\,dy^2(\frac{dv}{dy}))$

seu $lm = \sqrt{}(dx^2 + dy^2) + \frac{dtdx^2(\frac{du}{dx}) - dtdxdy(\frac{du}{dy}) - dtdxdy(\frac{dv}{dx}) + dtdy^2(\frac{dv}{dy})}{\sqrt{}(dx^2 + dy^2)}$

Hinc autem commodius angulus lzm definitur, cum enim sit cos. $lzm = \frac{zl^2 + zm^2 - lm^2}{2zl.zm}$ reperitur

$$\text{cos.}\,lzm = \frac{2\,dt\,dx\,dy((\frac{du}{dy}) + (\frac{dv}{dx}))}{2\,dx\,dy} = dt(\frac{du}{dy}) + dt(\frac{dv}{dx})$$

qui ergo angulus infinite parum a recto discrepat, simili autem modo inuenitur

cos. $lzn = dt(\frac{du}{dz}) + dt(\frac{dw}{dx})$ et cos. $mzn = dt(\frac{dv}{dz}) + dt(\frac{dw}{dy})$

vnde patet sinus horum angulorum tam prope ad sinum totum accedere, vt defectus formulis differentialibus secundi gradus exprimatur.

Scho-

Scholion 2.

13. Si quaeſtio eſſet de motu corporum ſolidorum, quorum elementa ita ſunt comparata, vt neque in quantitate ſua neque in figura vllam mutationem admittant, pyramis $zlmn$ omnino ſimilis et aequalis eſſe deberet pyramidi $ZLMN$, vnde laterum principalium aequalitas has ſuppeditaret aequationes

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=0;\ \left(\frac{dv}{dy}\right)=0;\ \left(\frac{dw}{dz}\right)=0$$

reliquorum vero laterum aequalitas has

$$\left(\frac{du}{dy}\right)+\left(\frac{dv}{dx}\right)=0;\ \left(\frac{du}{dz}\right)+\left(\frac{dw}{dx}\right)=0;\ \left(\frac{dv}{dz}\right)+\left(\frac{dw}{dy}\right)=0$$

Quocirca pro corporibus ſolidis hae tres celeritates u, v, w cuiusque puncti neceſſario tales functiones quatuor variabilium x, y, z et t eſſe debent, vt ſex iſtae conditiones locum habeant. Ex ternis prioribns quidem ſequitur, celeritatem u ab x pendere non poſſe, neque v ab y, neque w a z. Deinde cum ſit $\left(\frac{du}{dy}\right)=-\left(\frac{dv}{dx}\right)$ hinc ſequitur formulam $udx-vdy$ integrabilem eſſe debere, ſiquidem ſolae x et y vt variabiles ſpectentur, tum vero eodem modo, has formulas differentiales $udx-wdz$ et $vdy-wdz$ integrabiles eſſe oportebit, ex quibus conditionibus motus corporum ſolidorum eodem modo determinari reperitur, quo is ex aliis principiis determinari ſolet. Ex hoc autem caſu intelligitur etiam pro fluidis has ternas celeritates certis conditionibus circumſcribi debere, ſi enim fluidum ſit eius indolis, vt eius denſitas nullam mutationem admittat, tum omnino neceſſe eſt, vt pyramidis $zlmn$ volumen aequale ſit volumini pyramidis ZLMN, ac ſi denſitas variationem patiatur, ex ipſa hac variatione volumen pyramidis $zlmn$ determinatur, viciſſim autem ex hoc volumine variatio denſitatis colligi poterit, vnde ſequens problema naſcitur.

Problema 19.

14. Datis ternis celeritatibus u, v, w quibus ſingula fluidi elementa mouentur, inueſtigare variationem denſitatis, quam ſingula elementa dum tempuſculo infinite paruo dt proferuntur, *accipiunt.*

Solutio.

Tab. V. Fig. 23. Conſideretur vt ante fluidi elementum ZLMN cuius figura ſit pyramidalis, et denſitas in hoc ſtatu $= q$: cum igitur volumen huius pyramidis, poſitis ternis coordinatis $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ ſit $= \frac{1}{6} dx dy dz$, maſſa huius elementi erit $= \frac{1}{6} q dx dy dz$ quae etiam in motu eadem perpetuo manet, quomodocunque interea volumen ſiue augeatur ſiue minuatur. Ob motum autem, quem huic elemento tribuimus, id tempuſculo dt promouetur in $zlmn$, cuius figura itidem pyramidalis, vidimusque eius latera principalia eſſe.

$$zl = dx + dt\,dx\left(\frac{du}{dx}\right);\ zm = dy + dt\,dy\left(\frac{dv}{dy}\right);\ zn = dz + dt\,dz\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

angu-

angulos autem ad z ita esse comparatos, vt sit

$$\text{cos.}\, lzm = dt\left(\frac{du}{dy}\right) + dt\left(\frac{dv}{dx}\right), \text{cos.}\, lzn = dt\left(\frac{du}{dz}\right) + dt\left(\frac{dw}{dx}\right),$$
$$\text{cos.}\, mzn = dt\left(\frac{dv}{dz}\right) + dt\left(\frac{dw}{dy}\right)$$

vnde volumen huius pyramidis definiri oportet. Quod si autem breuitatis gratia ponamus

$$\text{cos.}\, lzm = \nu, \text{cos.}\, lzn = \mu, \text{ et cos.}\, mzn = \lambda$$

ex geometria volumen istius pyramidis ita reperitur expressum

$$= \tfrac{1}{6} zl.\, zm.\, zn \sqrt{(1 - \lambda\lambda - \mu\mu - \nu\nu + 2\lambda\mu\nu)}$$

Quoniam vero λ, μ, ν sunt differentialia primi ordinis eorum quadrata ad ordinem secundum ascendunt, vnde sine errore hoc volumen statuitur $= \frac{1}{6} zl.zm.zn$ sicque exit $= \frac{1}{6} dx\, dy\, dz \left(1 + dt \frac{du}{dx}\right) \left(1 + dt\left(\frac{dv}{dy}\right)\right) \left(1 + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)$ et facta euolutione reiectisque differentialibus altioribus prodit pyramidis $zlmn$ volumen $= \frac{1}{6} dx\, dy\, dz \left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{dv}{dy}\right) + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)$ statuatur iam densitas istius pyramidis $= q'$, quae cum per volumen eius multiplicata massam pyramidis ZLMN producere debeat, habebimus hanc aequationem per $\frac{1}{6} dx\, dy\, dz$ vtrinque diuidendo:

$$q = q' + q' dt\left(\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right)\right)$$

Incrementum ergo densitatis $q' - q$ ita exprimitur, vt sit

$$\frac{q' - q}{q' dt} = \frac{q' - q}{q\, dt} = -\left(\frac{du}{dx}\right) - \left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{dw}{dz}\right)$$

 Coroll.

Coroll. 1.

15. Si ergo ſingula fluidi elementa nullam mutationem in denſitate ſua durante motu patiuntur; ternae celeritates u, v et w eiusmodi debent eſſe functiones ipſarum x, y, z et t, vt ſit $\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0$.

Coroll. 2.

16. Viciſſim igitur etiam quoties fuerit $\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0$ per motum ſingulorum elementorum fluidi denſitas non mutatur. Hoc ergo inter alios innumeros caſus euenit, ſi neque u ab x, neque v ab y neque w a z pendeat.

Coroll. 3.

17. Quoties autem in motu denſitas particularum fluidi mutatur, eius variatio ex valore formulae $\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)$ cognoſcitur, qui vbi fuerit poſitiuus, denſitas decreſcit, vbi autem negatiuus ibi denſitas augetur.

Scholion.

18. Methodus hic adhibita volumen pyramidis $zlmn$ inueſtigandi, multo eſt concinnior ac facilior ea, qua olim ſum vſus in Vol. XI. Mem. Acad. Reg. Boruſſ: vbi per multas demum ambages eandem formulam pro iſto volumine elicui, dum eius inuentionem ad prismata triangularia reduxi.

reduxi. Compendium autem calculi hic inde eſt ortum, quod tres anguli lzm, lzn, mzn infinite parum ab angulo recto diſcrepent ac diſcrimen adeo per quadrata differentialium exprimatur quod niſi commode vſu veniſſet altera methodus anteferenda fuiſſet Cum ſcilicet pyramis $zlmn$ aequetur. ſummae horum trium prismatum $ypozln + yqozmn + poqlmn$ demto quarto $ypqzlm$, erit ea

$$=\tfrac{1}{3}\Delta ypo(yz+pl+on)+\tfrac{1}{3}\Delta yqo(yz+qm+on)+\tfrac{1}{3}\Delta poq(pl+qm+on)$$
$$-\tfrac{1}{3}\Delta ypq(yz+pl+qm)$$

quae reducitur ad hanc formam

$$\tfrac{1}{3}(\Delta ypo+\Delta yqo+\Delta poq)(yz+pl+qm+on)$$
$$-\tfrac{1}{3}\Delta ypo.\,qm-\tfrac{1}{3}\Delta yqo.\,pl-\tfrac{1}{3}\Delta poq.\,yz$$
$$-\tfrac{1}{3}\Delta ypq(yz+pl+qm+on)+\tfrac{1}{3}\Delta ypq.\,on$$

vnde ob $\Delta ypq = \Delta ypo + \Delta yqo + \Delta poq$ fit pyramis

$$zlmn = \tfrac{1}{3}on.\,\Delta ypq - \tfrac{1}{3}qm.\,\Delta ypo - \tfrac{1}{3}pl.\,\Delta yqo - \tfrac{1}{3}yz.\,\Delta poq.$$

Iam haec triangula porro ita repraeſentantur:

$$\Delta ypq = \tfrac{1}{2}xs(xy+sq)+\tfrac{1}{2}sr(rp+sq)-\tfrac{1}{2}xr(xy+rp)$$
$$=\tfrac{1}{2}(xs+rs)(xy+rp+sq)-\tfrac{1}{2}xs.\,rp-\tfrac{1}{2}sr.\,xy-\tfrac{1}{2}xr(xy+rp+sq)+\tfrac{1}{2}xr.\,sq$$

ideoque $\Delta ypq = \tfrac{1}{2}xr.\,sq - \tfrac{1}{2}xs.\,rp - \tfrac{1}{2}sr.\,xy$ et ſimili modo

$$\Delta ypo = \tfrac{1}{2}xr.\,to - \tfrac{1}{2}xt.\,rp - \tfrac{1}{2}tr.\,xy$$
$$\Delta yqo = \tfrac{1}{2}xt.\,sq - \tfrac{1}{2}xs.\,to - \tfrac{1}{2}st.\,xy$$
$$\Delta poq = \tfrac{1}{2}rt.\,sq - \tfrac{1}{2}st.\,rp - \tfrac{1}{2}sr.\,to$$

ex quibus tandem colligitur

 $6zlmn$

$$6zlmn = on.xr.sq - on.xs.rp - on.sr.xy$$
$$- qm.xr.to + qm.xt.rp + qm.tr.xy$$
$$- pl.xt.sq + pl.xs.to + pl.st.xy$$
$$- yz.rt.sq + yz.st.rp + yz.sr.to.$$

Quoniam nunc omnes hae lineae supra sunt definitae, hinc volumen istius pyramidis rationaliter exprimetur, facta autem substitutione haec forma in expressionem succinctam modo inuentam contrahitur.

Problema 20.

18. Datis ternis celeritatibus u, v et w quibus singula fluidi elementa mouentur, inuestigare accelerationem quam quoduis elementum tempusculo infinite paruo dt capit.

Solutio.

Tab. V. Fig. 24. Concipiamus fluidi elementum iam transiens per punctum Z coordinatis $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ determinatum, quod celeritatibus u, v et w latum elapso tempore dt in punctum z perueniat. Hoc ergo punctum istis tribus coordinatis $Ox = x + udt$, $xy = y + vdt$, et $yz = z + wdt$ determinabitur. His positis quaeritur, quantum ternae celeritates, quas iam elementum in z habebit, et quae sint u', v', w' sint superaturae, illas ternas celeritates u, v, w quas in Z habuerat? quandoquidem ex his incrementis acceleratio est aestimanda.

da. Cum iam u, v et w sint functiones quatuor variabilium x, y, z et t celeritates quaesitae in z elapso tempusculo dt hinc colligentur, si variabiles x, y, z et t his incrementis udt, vdt, wdt et dt augeantur: quamobrem colligemus

$$u' = u + udt\left(\frac{du}{dx}\right) + vdt\left(\frac{du}{dy}\right) + wdt\left(\frac{du}{dz}\right) + dt\left(\frac{du}{dt}\right)$$

$$v' = v + udt\left(\frac{dv}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dv}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dv}{dz}\right) + dt\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$w' = w + udt\left(\frac{dw}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dw}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dw}{dz}\right) + dt\left(\frac{dw}{dt}\right).$$

Quia igitur in motus inuestigatione celeritatis incrementum per tempusculum diuisum dat accelerationem, ternae accelerationes quaesitae ita se habebunt:

$$\frac{u'-u}{dt} = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$$

$$\frac{v'-v}{dt} = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{w'-w}{dt} = u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right).$$

Coroll. 1.

20. Eaedem ergo accelerationes resultare debent ex viribus, quibus idem fluidi elementum sollicitatur, vbi quidem opus est, vt vires sollicitantes secundum easdem ternas directiones resoluantur.

Coroll. 2.

21. Singularum ergo celeritatum incrementa etiam a binis reliquis celeritatibus pendent; neque hic

hic vulgari regula in mechanicis vſitata vti *licet*, qua celeritatis u acceleratio per $\frac{du}{dt}$ exprimi ſolet.

Scholion.

22. Ratio quod hic ab iſta regula vulgari recedere cogimur, ex praecedentibus, vbi ſignificationem celeritatum u, v, w expoſuimus ſatis eſt perſpicua. Hae enim celeritates non ita ſunt comparatae, vt perpetuo ad idem fluidi elementum referantur, quemadmodum in motu ſolidorum fieri ſolet, ſed eae hic potius ad idem ſpatii punctum referuntur, ita vt manentibus coordinatis x, y, z, ſi ſolum tempus t variabile ſtatuatur eae ſint praebiturae motum eius elementi, quod elapſo tempusculo dt per punctum Z tranſit. Quare cum hic accelerationes eiusdem elementi, quod nunc in Z, poſt tempusculum dt vero in z reperitur, deſiderentur functiones illas u, v, et w, non ſolum per tempusculum dt, ſed etiam a puncto Z in punctum z transferri debent, quarum tum exceſſus ſuper illas incrementa celeritatum eiusdem elementi fluidi indicabit. In errorem ergo inſignem fuiſſemus prolapſi, ſi regula illa vulgari decepti has accelerationes ſimpliciter formulis $\left(\frac{du}{dt}\right)$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ expreſſiſſemus, quae vt nunc videmus tantum partem aliquam verarum accelerationum conſtituunt.

Problema 21.

23. Si praeter ternas celeritates u, v, w quae ſingulis ſpatii punctis, per quod fluidum mouetur,

conue-

conueniunt, etiam densitas q in quolibet puncto datur, relationem quae inter celeritates et densitatem intercedit, inuestigare.

Solutio.

In probl. 19. inuenimus, si fluidi particula his celeritatibus u, v, w ex Z in z tempusculo dt proferatur, eiusque densitas in Z ponatur $= q$, in z vero $= q'$ tum fore

$$\frac{q'-q}{q\,dt} = -\left(\frac{du}{dx}\right) - \left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{dw}{dz}\right).$$

Nunc autem quia densitas q vt functio data quatuor variabilium x, y, z et t spectatur, et nunc quidem particulae in puncto Z versantis densitatem denotat, ex ea colligetur densitas q' si elapso tempusculo dt in punctum z transferatur, sicque quatuor variabilibus x, y, z et t haec incrementa $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$ et dt tribui oportet. Quocirca haec densitas q' eidem particulae ex Z in z translatae conueniens ita exprimetur:

$$q' = q + u\,dt\left(\frac{dq}{dx}\right) + v\,dt\left(\frac{dq}{dy}\right) + w\,dt\left(\frac{dq}{dz}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

vnde fit

$$\frac{q'-q}{dt} = u\left(\frac{dq}{dx}\right) + v\left(\frac{dq}{dy}\right) + w\left(\frac{dq}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right)$$

qui valor si in superiori aequatione substituatur, relatio quaesita inter celeritates et densitatem hac aequatione continebitur

$$\left.\begin{array}{l} q\left(\frac{du}{dx}\right) + q\left(\frac{dv}{dy}\right) + q\left(\frac{dw}{dz}\right) \\ + u\left(\frac{dq}{dx}\right) + v\left(\frac{dq}{dy}\right) + w\left(\frac{dq}{dz}\right) \end{array}\right\} + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

quae cum sit $q\left(\frac{du}{dx}\right)+u\left(\frac{dq}{dx}\right)=\left(\frac{d.qu}{dx}\right)$ in hanc contrahitur:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)=0$$

hic scilicet in differentiatione ipsius qu sola x, ipsius qv sola y et ipsius qw sola z vt variabilis tractari debet.

Coroll. 1.

23. Si ergo u, v et w fuerint functiones quatuor variabilium x, y, z et t datae, aequatio inventa indolem functionis q indicabit; quae autem quemadmodum inde definiri debeat, haud patet.

Coroll. 2.

24. Sin autem detur densitas q cum duabus celeritatibus u et v, quantitas $\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)$ vtpote certa functio ipsarum x, y, z et t erit cognita, qua posita $=Q$ erit $\left(\frac{d.qw}{dz}\right)+Q=0$. Spectetur sola quantitas z variabilis, ac prodibit integrando $qw+\int Q\,dz=$ Const. ergo $w=\frac{Const.-\int Q\,dz}{q}$.

Scholion 1.

25. Cum resolutio aequationis inuentae:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)=0,$$

sit maximi momenti, obseruo primo ei satisfieri, si sit

$q = \Gamma:(x, y, z)$; $qu = \Delta:(t, y, z)$; $qv = \Sigma:(t, x, z)$; $qw = \text{Н}:(t, x, y)$

tum enim ſingula membra ſeorſim euaneſcunt, quae eſt ſolutio iam latiſſime patens, cum quatuor habeantur functiones arbitrariae trium variabilium. Adhuc autem generalior ſolutio exhiberi poteſt ope functionis cuiuscunque omnium quatuor variabilium x, y, z et t; ſit enim T huiusmodi functio pro lubitu aſſumta, praebeatque differentiata:

$$dT = F\,dx + G\,dy + H\,dz + I\,dt$$

quoniam nunc nouimus ex natura differentialium eſſe:

$$\left(\frac{dF}{dt}\right) - \left(\frac{dI}{dx}\right) = 0;\ \left(\frac{dG}{dt}\right) - \left(\frac{dI}{dy}\right) = 0;\ \left(\frac{dH}{dt}\right) - \left(\frac{dI}{dz}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) - \left(\frac{dG}{dx}\right) = 0;\ \left(\frac{dF}{dz}\right) - \left(\frac{dH}{dx}\right) = 0;\ \left(\frac{dG}{dz}\right) - \left(\frac{dH}{dy}\right) = 0$$

introducendis ſex conſtantibus α, β, γ, δ, ε, ζ etiam ſequentes valores ſatisfacere deprehenduntur:

$$q = \alpha F + \beta G + \gamma H + \Gamma:(x, y, z)$$

$$qu = -\alpha I - \delta G - \varepsilon H + \Delta:(t, y, z)$$

$$qv = -\beta I + \delta F - \zeta H + \Sigma:(t, x, z)$$

$$qw = -\gamma I + \varepsilon F + \zeta G + \text{Н}:(t, x, y)$$

neque tamen aſſeuerare licet, hanc ſolutionem ita eſſe generalem, vt omnes caſus poſſibiles in ea contineantur.

 Scho-

Scholion 2.

26. Si fluidum ita sit homogeneum, vt eius densitas sit semper et vbique eadem, relatio inter ternas celeritates u, v et w ita determinatur vt esse debeat:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0$$

cui statim satisfaciunt hi quoque valores:

$$u=\Delta:(t,y,z);\quad v=\Sigma:(t,x,z);\quad w=\text{H}:(t,x,y).$$

Deinde vero etiam generalius introducta functione T vt sit $dT=F\,dx+G\,dy+H\,dz+I\,dt$, erit

$$u=-\delta G-\varepsilon H+\Delta:(t,y,z)$$
$$v=+\delta F-\zeta H+\Sigma:(t,x,z)$$
$$w=+\varepsilon F+\zeta G+\text{H}:(t,x,y)$$

in superiori scilicet solutione ponendo $\alpha=0$, $\beta=0$ $\gamma=0$. Hic autem obseruo non opus esse, vt quantitates δ, ε et ζ sint constantes, sed etiam variabiles sumi posse, dum sit $\left(\frac{d\delta}{dx}\right)-\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)=0$, $\left(\frac{d\delta}{dy}\right)+\left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)=0$ et $\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)+\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)=0$, hoc est dum haec formula $\zeta\,dx-\varepsilon\,dy+\delta\,dz$ sit integrabilis. Hinc praeter functionem arbitrariam T adhuc aliam introducere licet, V vt sit $dV=K\,dx+L\,dy+M\,dz+N\,dt$, atque satisfacient hi valores multo generaliores:

$$u=HL-GM+\Delta:(t,y,z)$$
$$v=FM-HK+\Sigma:(t,x,z)$$
$$w=GK-FL+\text{H}:(t,x,y).$$

Scho-

Scholion 3.

27. Eodem modo etiam in genere pro densitate variabili q solutionem magis vniuersalem reddere licet, introducendis duabus functionibus arbitrariis T et V quatuor variabilium x, y, z et t. Positis enim earum differentialibus:

$$dT = F\,dx + G\,dy + H\,dz + I\,dt \text{ et}$$

$$dV = K\,dx + L\,dy + M\,dz + N\,dt$$

conditioni requisitae sequentes satisfacient valores:

$$q = (G+H)K + (H-F)L - (F+G)M + \Gamma:(x, y, z)$$

$$q\,u = (H+I)L + (I-G)M - (G+H)N + \Delta:(t, y, z)$$

$$q\,v = (I+F)M + (F-H)N - (H+I)K + \Sigma:(t, x, z)$$

$$qw = (F+G)N + (G-I)K - (I+F)L + \mathrm{H}:(t, x, y).$$

Tum vero etiam duae pluresue huiusmodi formae inuicem coniungi possunt, at hoc modo solutio non generalior fieri est censenda; quia si alia functio pro T sumta veluti T′ cum eadem V coniungatur, et valores inde oriundi ad hos respectiue addantur, eadem prodit solutio, ac si statim pro T sumta fuisset functio T+T′, quod idem de altera V est intelligendum, quoniam commutationem admittunt.

CAPVT II.

PRINCIPIA MOTVS FLVIDORVM A VIRIBVS QVIBVSCVNQVE SOLLICITATORVM.

Problema 22.

28. Si fluidum a viribus quibuscunque sollicitetur, et pressio in singulis punctis vt cognita spectetur, inuestigare vires acceleratrices, quibus singula elementa ad motum impelluntur.

Solutio.

Tab. V. Fig. 25. Positis pro puncto Z coordinatis orthogonalibus $OX = x$, $XY = y$, $XZ = z$ elemento fluidi iam circa Z versanti tribuatur figura parallelepipedi rectanguli ZLMN $zlmn$ differentialibus coordinatarum $ZL = dx$, $ZM = dy$ et $Zz = dz$ contenti cuius ergo volumen erit $= dx\,dy\,dz$, ac si q denotet densitatem in Z. eius massa fit $= q\,dx\,dy\,dz$. Nunc primo consideremus vires grauitati similes in punctum Z agentes, quas cum semper secundum directiones axium OA, OB, OC resoluere liceat, sint istae vires acceleratrices sec OA seu $ZL = P$, sec. OB seu $ZM = Q$, sec. OC seu $Zz = R$ a quibus ergo elemento fluidi accelerationes secundum easdem directiones inducentur, ad quod quidem non

erat

erat necesse elemento certam figuram tribuisse. Verum haec figura maxime est idonea ad vires acceleratrices ex pressionibus natas eliciendas. Sit igitur pro hoc tempore altitudo pressioni in Z debita $=p$ quae vt functio quatuor variabilium x, y, z et t spectari debet: ex cuius indole pressiones in singulis angulis parallelepipedi definiri poterunt vt sequitur

In puncto	pressio	In puncto	pressio
Z	p	z	$p+dz\left(\frac{dp}{dz}\right)$
L	$p+dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$	l	$p+dx\left(\frac{dp}{dx}\right)+dz\left(\frac{dp}{dz}\right)$
M	$p+dy\left(\frac{dp}{dy}\right)$	m	$p+dy\left(\frac{dp}{dy}\right)+dz\left(\frac{dp}{dz}\right)$
N	$p+dx\left(\frac{dp}{dx}\right)+dy\left(\frac{dp}{dy}\right)$	n	$p+dx\left(\frac{dp}{dx}\right)+dy\left(\frac{dp}{dy}\right)+dz\left(\frac{dp}{dz}\right)$

quae pressiones in singulas hedras normaliter agunt. Consideremus binas hedras oppositas Z M $z\,m$ et L N $l\,n$ atque manifestum est pressiones, quas hedra L N $l\,n$ in singulis punctis sustinet, superare pressiones hedrae Z M $z\,m$ in punctis oppositis eadem pressione elementari $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$, qui excessus solus in computum venit. Sustinet ergo hedra L N $l\,n$ pressionem altitudini $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ debitam; vnde cum huius hedrae area sit $=dy\,dz$, tota pressio aequatur ponderi voluminis $=dx\,dy\,dz\left(\frac{dp}{dx}\right)$, si scilicet materia homogenea, cuius densitas $=1$, repletum concipiatur: et huius vis directio, quia in hedram est normalis, erit parallela axi AO. Quare nostrum parallelepipedum cuius massa $=q\,dx\,dy\,dz$ vrgetur secundum directionem AO vi motrice $=dx\,dy\,dz\left(\frac{dp}{dx}\right)$,

quae

quae ergo per maſſam diuiſa praebet vim acceleratricem $=\frac{1}{q}(\frac{dp}{dx})$, ſimili ratiocinio colligetur vis acceleratrix, qua noſtrum parallelepipedum ſecundum directionem, BO vrgetur $=\frac{1}{q}(\frac{dp}{dy})$, et ſecundum directionem $CO=\frac{1}{q}(\frac{dp}{dz})$. Cum igitur hae vires ſint contrariae iis, quibus fluidum ſollicitari aſſumſimus, elementum fluidi in Z verſans ſequentes tres ſuſtinet vires acceleratrices

ſecundum directionem $OA=P-\frac{1}{q}(\frac{dp}{dx})$

ſecundum directionem $OB=Q-\frac{1}{q}(\frac{dp}{dy})$

ſecundum directionem $OC=R-\frac{1}{q}(\frac{dp}{dz})$

In quibus vtique omnes vires, quibus fluidi elementa vrgeri poſſunt, comprehenduntur; Etiamſi enim vsquam fluidum extrinſecus ope piſtilli *trudatur*, hinc alia vis in elementa non *propagatur* niſi per preſſionem p, cuius hic iam rationem habuimus.

Coroll. 1.

29. Quarumcunque ergo virium actioni fluidum fuerit expoſitum, ſi modo preſſio in ſingulis eius elementis vt cognita ſpectetur facile hinc vires acceleratrices, quas ſingula fluidi elementa ſuſtinent, aſſignantur.

Coroll. 2.

30. Altitudo autem p preſſionem indicans ita in calculum ingreditur, quatenus eſt functio terna-

rum

rum coordinatarum x, y et z: ſiquidem in hac virium determinatione tempus t conſtans aſſumitur.

Coroll 3.

30. In viribus acceleratricibus ex preſſione natis etiam denſitas elementi fluidi q in computum ducitur, cuius, in ſollicitationibus P, Q, R nulla habetur ratio. quia hae vires elementa ſiue denſiora ſiue rariora perinde accelerant.

Scholion 1.

31. Quia vidimus hedram $LNln$ in ſingulis punctis eandem preſſionem $dx(\frac{dp}{dx})$ ſuſtinere omnium harum virium media directio per centrum inertiae parallelepipedi tranſibit, propterea quod eius maſſa vtpote infinite parua tanquam homogenea ſpectari poteſt. Quod cum etiam de binis reliquis preſſionibus ſit intelligendum, et vires P, Q, R grauitati ſimiles per ſe centro inertiae applicatae ſunt cenſendae ab his viribus iunctim ſumtis parallelipipedo nullus motus gyratorius imprimetur, interim tamen quia ob fluiditatem eius figura eſt mutabilis, fieri poteſt vt in motu eius dimenſiones varientur, quemadmodum etiam eius volumen, niſi denſitas fuerit inuariabilis, mutationi eſt obnoxium. Neque tamen omnis motus gyratorius hinc penitus excluditur: eatenus enim tantum omnes preſſiones $dx(\frac{dp}{dx})$, quas hedra $LNln$ ſuſtinet, ſunt aequales

 qua-

quatenus variationes differentiales secundi ordinis hic negligimus quippe a quibus vtique tandem quaedam conuersio parallelepipedi oriri potest. Colligere hoc licet ex eo, vbi supra translationem elementi pyramidalis ZLMN (fig. 23.) definiuimus: quod cum tempusculo infinite paruo *dt* in situm *zlmn* proferatur, tam in quantitate quam situ laterum quaedam mutatio est facta, quae tempore finito etiam finita euadere potest. Verum quicunque hic sit motus, eius natura per principia hic stabilienda determinabitur, neque verendum est hic vllam circumstantiam esse praetermissam, qua motus affici queat.

Scholion 2.

32. Mirum quoque videri potest, quod hic fluidi elemento figuram parallelepipedi rectanguli tribuimus; cum si alia figura fuisset *assumta*, calculus multo difficilior extitisset, hincque dubitare liceat, an ex pressionibus eaedem vires acceleratrices erutae fuissent? Verum supra iam ostendimus effectum pressionis non a figura corporis, quod eam sustinet, pendere sed a solo eius volumine: siquidem corpus aquae submersum ab eius pressione semper pro ratione voluminis sursum vrgetur, quaecunque fuerit eius figura. Obiici quidem potest hoc phaenomenon ideo euenire, quod tam aquae densitas quam grauitas vbique sit eadem; dum contra vbi densitas cum viribus sollicitantibus fuerit variabilis, vtique figura corporis submersi in computum

putum eſt ducenda. Hoc autem dubium prorſus euaneſcit, ſtatim ac volumen preſſiones ſuſtinens infinite paruum concipitur, vti hic fecimus quoniam in ſpatiolo infinite paruo omnis diuerſitas tam in denſitate quam viribus ſollicitantibus excluditur. Quam ob cauſam iam tuto affirmare licet, quamcunque fluidi elementum in Z conſideratum habuerit figuram inde nullum diſcrimen in vires acceleratrices, quas ſuſtinet, influere; ideoque eas, quas ex figura parallelepipedi elicuimus recte ſe habere, ſimulque ad omnes alias figuras aeque pertinere: ideo autem hac figura ſum vſus, quia ea ad calculum expediendum maxime eſt accommodata. Quin etiam ratio figurae ex concluſionibus inde deductis prorſus exceſſit manifeſto documento eas a figura nequaquam pendere.

Problema 23.

33. Si fluidum cuiuscunque naturae a viribus quibuscunque ſollicitetur, principia ſtabilire, ex quibus eius motum determinare liceat. Tab. V. Fig. 22.

Solutio.

Conſideremus ſtatum fluidi, in quo tempore quocunque $= t$ elapſo verſabitur, et conſtitutis ternis axibus fixis OA, OB, OC inter ſe normalibus, contemplemur fluidi particulam quamcunque in puncto Z cuius ſitus ternis coordinatis $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ determinatur: et quae ſollicitetur a viribus acceleratricibus P, Q, R secundum directiones Zx, Zy, Zz axibus illis et coordinatis parallelas. Iam ad motum fluidi inuestigandum statuatur primo densitas particulae nunc in Z versantis $= q$, quae ergo spectanda est vt functio quatuor variabilium x, y, z et t. Deinde sit nunc pressio in Z debita altitudini $= p$, quae perpetuo ad materiam vniformem grauem cuius densitas $= 1$ est referenda erit ergo quoque p functio quatuor variabilium x, y, z et t. Tertio quocunque motu nunc particula in Z versans feratur, is resoluatur secundum easdem ternas directiones Zx, Zy, Zz, sitque celeritas secundum $Zx = u$; $Zy = v$ et $Zz = w$ quas celeritates spatiis vno minuto secundo percurrendis exhibeamus, dum etiam tempus t in minutis secundis exprimatur. His positis iam vidimus inter has celeritates et densitatem q hanc relationem determinari vt sit:

$$\left(\frac{d\,q}{d\,t}\right) + \left(\frac{d.\,q\,u}{d\,x}\right) + \left(\frac{d.\,q\,v}{d\,y}\right) + \left(\frac{d.\,q\,w}{d\,z}\right) = 0.$$

Deinde in praecedente problemate inuenimus elementum fluidi in Z nunc his viribus acceleratricibus vrgeri

$$\text{sec. } Zx = P - \frac{1}{q}\left(\frac{d\,p}{d\,x}\right);\ \text{sec. } Zy = Q - \frac{1}{q}\left(\frac{d\,p}{d\,y}\right);\ \text{sec. } Zz = R - \frac{1}{q}\left(\frac{d\,p}{d\,z}\right).$$

Ex ipso autem motu huic elemento tributo in problemat. 20 eius accelerationes secundum easdem directiones ita inuenimus expressas:

secun-

$$\text{ſecundum } Zx = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$$
$$\text{ſecundum } Zy = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right)$$
$$\text{ſecundum } Zz = u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right).$$

Quodſi iam altitudinem, per quam corpus graue vno minuto ſecundo delabitur, ponamus $= g$, vt tempus et celeritates ſecundum praeſcriptam menſuram exprimantur, quaelibet acceleratio vi acceleratrici in $2g$ ductae eſt aequanda vnde nanciſcimur tres aequationes ſequentes:

$$2gP - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$$
$$2gQ - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right) = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right)$$
$$2gR - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right) = u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right)$$

quae cum *illa* ex conſideratione denſitatis nata coniunctae vniuerſam motus determinationem continent.

Coroll. 1.

34. Totum ergo negotium huc redit vt pro quantitatibus p, q, u, v, w eiusmodi functiones quatuor variabilium x, y, z et t inueniantur, quae his quatuor aequationibus ſatisfaciant, quod infinitis modis fieri poſſe cum per ſe eſt perſpicuum, tum natura rei maxime poſtulat.

Coroll. 2.

35. Cum autem denſitas q ſit vel conſtans, vel a preſſione p ſola vel inſuper a calore pendeat,

 hinc

hinc noua oritur conditio aequationibus inuentis adiungenda; eaque propterea quaestio magis restringitur.

Coroll. 3.

36. Cum igitur densitas q aliunde detur pro quatuor reliquis incognitis p, u, v, w quatuor *adepti* sumus aequationes, ex quo manifestum est solutionem hic datam esse completam, nullamque conditionem esse praetermissam, cuius insuper ratio foret habenda.

Scholion.

37. In his ergo aequationibus *inuentis* vniuersa Theoria motus fluidorum ita continetur, vt non solum ad omnis generis fluida *sed etiam* ad omnes prorsus vires, quibus fluida *sollicitari possunt*, extendatur. Verum tota haec Theoria ad calculi genus plane nouum, et adhuc vix libatum deuoluitur, cum per integrationem functiones quatuor variabilium x, y, z et t a se inuicem non pendentium erui oporteat Cuiusmodi calculus, quantopere sit inusitatus et absconditus hinc colligere licet, quod vniuersus calculus integralis, quatenus adhuc est excultus, tantum functionum vnicae variabilis inuestigatione consummatur; parumque etiamnunc ea eius pars, quae circa functiones duarum variabilium versatur, sit elaborata, quorsum est referendum problema de cordis vibrantibus maximis diffi-

difficultatibus inuolutum. Cum igitur hic adeo functiones quatuor variabilium debeant indagari, facile perſpicitur, quanta adhuc calculi ſubſidia in hoc negotio deſiderentur. Imprimis ergo in id eſt incumbendum, vt aequationes inuentas ſiue ad maiorem ſimplicitatem, ſiue ad minorem numerum redigamus, quo deinceps earum euolutio facilius ſuſcipi queat. Ac ternae quidem poſtremae aequationes ita ſunt comparatae, vt in vnam compingi queant, quae autem vim ſingularum in ſe complectatur, quemadmodum in ſequenti problemate explicabimus.

Problema 24.

38. *Si praeter vires ſollicitantes* P, Q, R *etiam ternae cuiusque puncti celeritates* u, v *et* w *cum denſitates* q *vt datae ſpectentur, preſſionem* p *per vnicam aequationem determinare.*

Solutio.

Trium aequationum, quas in praecedente problemate elicuimus, prima exhibet valorem ipſius $(\frac{dp}{dx})$, ſecunda ipſius $(\frac{dp}{dy})$ et tertia ipſius $(\frac{dp}{dz})$. Cum igitur p ſit functio quatuor variabilium x, y, z et t, ſi tempus t pro conſtante habeamus, erit vtique:

$$dp = dx\,(\tfrac{dp}{dx}) + dy\,(\tfrac{dp}{dy}) + dz\,(\tfrac{dp}{dz})$$

vnde

vnde totam rem ad differentiale abſolutum dp perducere poterimus. In hunc finem ſtatuamus breuitatis gratia

$$u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{du}{dy}\right)+w\left(\frac{du}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dt}\right)=U$$
$$u\left(\frac{dv}{dx}\right)+v\left(\frac{dv}{dy}\right)+w\left(\frac{dv}{dz}\right)+\left(\frac{dv}{dt}\right)=V$$
$$u\left(\frac{dw}{dx}\right)+v\left(\frac{dw}{dy}\right)+w\left(\frac{dw}{dz}\right)+\left(\frac{dw}{dt}\right)=W$$

vt tres aequationes ante inuentae fiant:

$$\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)=2gP-U;\ \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right)=2gQ-V;\ \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right)=2gR-W$$

quarum ſi prima in dx, ſecunda in dy, et tertia in dz ducatur, ob $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)+dy\left(\frac{dp}{dy}\right)+dz\left(\frac{dp}{dz}\right)=dp$, denotante dp differentiali preſſionis p dum tempus t conſtans habetur, obtinebimus eas addendo hanc aequationem:

$$\frac{2g\,dp}{q}=2g(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)-U\,dx-V\,dy-W\,dz$$

ex qua nunc per integrationem inueſtigari oportet preſſionem p. Obſeruandum autem eſt hanc ſolam aequationem aeque late patere, ac tres praecedentes iunctim ſumtas, easque ſingulas ita in ſe complecti, vt ea ſine vlla cuiusquam determinationis praetermiſſione in locum trium illarum aequationum ſubſtitui poſſit. Quodſi enim in genere fuerit $dp=L\,dx+M\,dy+N\,dz$ haec ſola aequatio iſtas tres in ſe complectitur $\left(\frac{dp}{dx}\right)=L$, $\left(\frac{dp}{dy}\right)=M$, et $\left(\frac{dp}{dz}\right)=N$, neque his tribus aequationibus plus determinatur, quam illa vnica.

Coroll.

Coroll. 1.

39. Nunc igitur vniuersa motus fluidorum Theoria in his duabus aequationibus continetur:

$$\text{I.}\quad \left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.\,qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.\,qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.\,qw}{dz}\right)=0$$

$$\text{II.}\quad \frac{2g\,dp}{q}=2g(Pdx+Qdy+Rdz)-Udx-Vdy-Wdz$$

quibus autem insuper relatio inter densitatem q et pressionem p, quam natura fluidi postulat adiungi debet.

Coroll. 2.

40. In posteriori harum aequationum tempus t constans assumitur, vnde absoluta integratione in valorem ipsius p loco constantis ingredietur functio quaecunque arbitraria temporis t: quemadmodum rei natura postulat, quia per vires externas pro lubitu quouis momento pressiones internae p mutari possunt.

Coroll. 3.

41. Si in posteriori aequatione quantitates U, V et W vt functiones datae ipsarum x, y et z spectentur, eas ita comparatas esse oportet, vt aequatio integrationem admittat; nisi enim hoc eueniat, eiusmodi motus plane pro impossibili est habendus.

Scholion 1.

42. Iam saepius obseruauimus vires acceleratrices P, Q, R, quae quidem in mundo reperiuntur,

tur, ſemper ita eſſe comparatas vt formula differentialis $Pdx + Qdy + Rdz$ integrationem admittit, cuius integrale eſt id, quod actionis quantitatem vocare licet. Quodſi ergo haec actio littera S indicetur, ſecunda aequatio hanc induet formam:

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,dS - U\,dx - V\,dy - W\,dz.$$

Quare ſi et forma $U\,dx + V\,dy + W\,dz$ admittat integrationem eiusque integrale vocetur T, vt ſit

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,dS - dT$$

vbi iam conditiones integrabilitatis ſatis ſunt manifeſtae. Scilicet ſi q ſit quantitas vel conſtans vel a ſola preſſione p pendens integrale eſt $2g\int\frac{dp}{q} = 2gS - T - \Gamma : t$, tum vero ſi q fuerit quantitas a p et $(2gS - T)$ vtcunque pendens aequatio pariter pro poſſibili eſt habenda, vtpote duas tantum variabiles p et $2gS - T$ inuoluens; inde vero tam p quam q ſeorſim certis functionibus quantitatis $2gS - T$ aequabuntur in quas quidem t inſtar conſtantis vtcunque ingredi poteſt. Atque ex hoc caſu facile intelligitur, ad id, vt noſtra ſecunda aequatio integrationem admittat, abſolute requiri, vt eam ope ſubſtitutionis cuiuscunque in formam binas tantum variabiles inuoluentem transmutare liceat. Quaecunque enim aequationes differentiales inter tres pluresue variabiles ſunt poſſibiles, quod quibus caſibus vſu veniat, certa criteria in Analyſi tradi ſolent; haec criteria ſemper eo redeunt, vt ope certae ſubſtitutionis

tionis eae aequationes ad duas tantum variabiles reduci queant; quemadmodum in casu ante euoluto fieri videmus.

Scholion 2.

43. Hac autem hypothesi, qua formulam $Udx + Vdy + Wdz$ integrabilem assumsimus formulae nostrae generali insignem restrictionem attulimus. Videtur quidem adeo triplex determinatio hac conditione inuehi, cum ea requiratur vt sit

$$\left(\frac{dU}{dy}\right) = \left(\frac{dV}{dx}\right);\ \left(\frac{dU}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dx}\right) \text{ et } \left(\frac{dV}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dy}\right)$$

sed obseruandum est, dum binis harum trium formularum fuerit satisfactum, eo ipso etiam tertiae satisfieri. Ponamus enim relationem inter U, V, et W ita esse limitatam, vt binae priores formulae impleantur, ex iisque vlteriori differentiatione elicietur:

$$\left(\frac{ddU}{dydz}\right) = \left(\frac{ddV}{dxdz}\right) = \left(\frac{ddW}{dxdy}\right).$$

Cum igitur hinc sit $\left(\frac{ddV}{dxdz}\right) = \left(\frac{ddW}{dxdy}\right)$, haec aequatio vtique iam tertiam illam formulam $\left(\frac{dV}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dy}\right)$ in se complectitur. Ex quo saltem nostram aequationem generalem duplici determinatione restrinximus. Tum vero etiam perpendendum est has quantitates U, V, et W ob primam aequationem generalem etiam a densitate q pendere, ita vt nobis non amplius liberum sit eiusmodi conditiones fingere, siquidem quantitas q etiam seorsim in alteram aequationem ingreditur.

ditur. Interim tamen hoc certum eſt, quoscunque valores pro quantitatibus p, q, u, v, w excogitare licuerit quibus vtrique aequationi generali ſatisfiat, iis motum quendam poſſibilem exhiberi, ſi modo eiusmodi fluidum exiſtat, cuius denſitas ratione preſſionis fictioni illi conueniat. Primam autem aequationem generalem, in quam neque vires P, Q, R ingrediuntur neque preſſio, ſine reſpectu ad alteram tractare licet: eius autem integrationem adeo completam reperire contigit, quam in ſequenti problemate ſum expoſiturus.

Problema 25.

44. Aequationis primae pro motu fluidorum inuentae:

$$\left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

integrale completum inueſtigare.

Solutio.

Quaeſtio ergo huc redit, vt huiusmodi aequatio generaliſſime reſoluatur.

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right) + \left(\frac{dS}{dt}\right) = 0$$

ſeu vt pro quatuor quantitatibus P, Q, R, S in genere eiusmodi functiones quatuor variabilium x, y, z et t aſſignentur, quae non ſolum huic aequationi ſatisfaciant, ſed etiam omnes omnino ſolutiones in ſe complectantur. Quem ſcopum quo tutius ac certius

certius attingamus a casibus simplicioribus incipiendo successiue ad hunc propositum ascendamus. Ac primo quidem si vnica habeatur variabilis x, et aequatio vnico constet termino $(\frac{dP}{dx}) = 0$ integrale completum vtique est $P =$ Const.

Nunc duae admittantur variabiles x et y, et integranda sit haec aequatio $(\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy}) = 0$. Hoc ingenere praestabitur sumendo pro arbitrio functionem quamcunque binarum variabilium x et y, quae sit O, qua differentiata fiat $dO = K dx + L dy$: ac manifestum est illam aequationem complete integrari his functionibus:

$$P = L + \Gamma : y \text{ et } Q = -K + \Delta : x.$$

Statuantur tertio tres variabiles x, y, z, vt integrari debeat haec aequatio $(\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy}) + (\frac{dR}{dz}) = 0$: ac supra (§. 25) vidimus ad hoc praestandum pro lubitu duas functiones trium variabilium x, y et z assumi posse, quae si fuerit O et o, ex earumque differentiatione prodeat.

$$dO = K dx + L dy + M dz \text{ et } do = k dx + l dy + m dz$$

solutio generalis erit:

$$\left.\begin{array}{l} P = Lm - Ml + \Gamma : (y, z) \\ Q = Mk - Km + \Delta : (x, z) \end{array}\right\} \text{ et } R = Kl - Lk + \Sigma : (x, y)$$

Quae solutio cum praeter functiones duas O et o pro lubitu assumtas, insuper tres complectatur functiones

ctiones arbitrarias binarum variabilium, vtique pro completa eſt habenda.

Hinc igitur ratio reſoluendi ipſam aequationem propoſitam concluditur, in qua quatuor variabiles continentur:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dQ}{dy}\right)+\left(\frac{dR}{dz}\right)+\left(\frac{dS}{dt}\right)=0.$$

Hic ſcilicet tres functiones pro lubitu quatuor variabilium aſſumantur, O, o, ω, quarum differentialia ſint:

$$dO=K\,dx+L\,dy+M\,dz+N\,dt$$

$$do=k\,dx+l\,dy+m\,dz+n\,dt$$

$$d\omega=\varkappa\,dx+\lambda\,dy+\mu\,dz+\nu\,dt$$

atque hinc functiones quaeſitae P, Q, R, S ita definiantur vt ſit

$$P=+Lm\nu+Mn\lambda+Nl\mu-Ln\mu-Ml\nu-Nm\lambda+T:(y,z,t)$$

$$Q=-Mn\varkappa-Nk\mu-Km\nu+Mk\nu+Nm\varkappa+Kn\mu+\Delta:(x,z,t)$$

$$R=+Nk\lambda+Kl\nu+Ln\varkappa-Nl\varkappa-Kn\lambda-Lk\nu+\Sigma:(x,y,t)$$

$$S=-Kl\mu-Ln\varkappa-Mk\lambda+Km\lambda+Lk\mu+Ml\varkappa+\Pi:(x,y,z)$$

qui valores cum ſatisfaciant, ac praeterea ſecundum progreſſionis legem tres functiones arbitrarias quatuor variabilium vna cum quatuor functionibus ternarum

narum variabilium ibidem pro arbitrio accipiendas inuoluant, fine dubio integrationem completam constituere sunt censendae.

Coroll. 1.

45. Ne multitudo litterarum mentem obruat, loco functionum O, o, ω scribamus litteras F, G, H, et ex harum formulis differentialibus solutio problematis nostri ita se habebit:

$$qu = \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right)$$
$$- \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) - \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) + \Gamma : (y, z, t)$$

$$qv = -\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) - \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right)$$
$$+ \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) + \Delta : (x, z, t)$$

$$qw = +\left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right)$$
$$- \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) + \Sigma : (x, y, t)$$

$$q = -\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right)$$
$$+ \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) + \text{И} : (x, y, z)$$

Coroll. 2.

46. Hic non obstante terminorum multitudine facile est legem obseruare, qua pro singulis valoribus partes combinantur, in prima nempe expressione nusquam occurrit elementum dx in secunda omittitur dy in tertia dz et in quarta dt. Tum vero si in prima loco dy scribitur dx, signaque mutentur

tur oritur ſecunda, ſin vero in prima loco dz ſcribatur dx oritur tertia: ſicque ex quauis data reliquas elicere licet.

Coroll 3.

47. Tum vero etiam in qualibet expreſſione ea tria membra eodem ſigno ſunt affecta, *quae* nullum habent factorem communem quae autem factorem habent communem diuerſis ſignis afficiuntur. Denique in diuerſis expreſſionibus, quae membra nullum factorem habent communem, ea *diuerſis* ſignis; quae vnicum factorem habent communem, eodem ſigno, et quae duos factores habent communes iterum diuerſis ſignis ſunt affecta.

Scholion 1.

48. Cuiuis autem membro *cuiusque expreſſionis* in reliquis expreſſionibus nonniſi vnicum reſpondet, quod cum eo duos factores datos habet communes, quod cum imprimis notari mereatur, quoniam ei tota demonſtratio iſtius ſolutionis innititur, id ſequenti modo oſtenditur. Sumatur ex forma qu membrum $(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})(\frac{dH}{dt})$, pro quo in reliquis quaeri debeat membrum; quod cum eo hos duos factores $(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})$ habeat communes. Euidens autem eſt tale membrum neque in forma qv, (quia hic dy excluditur), neque in forma qw (quia hic dz excluditur) occurrere poſſe: in forma autem q certe reperiri debet, idque vnicum ſigno contra-

contrario affectum scilicet $-(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})(\frac{dH}{dx})$, quod simul de quibusuis aliis membris est tenendum. Hoc iam euicto demonstratio nostrae solutionis ita se habet: considerentur tantum duo huiusmodi membra binos factores datos communes habentia, quae pro factoribus communibus $(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})$ in his formis reperiuntur;

$$qu = +(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})(\frac{dH}{dt}) + \text{etc.} \quad q = -(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})(\frac{dH}{dt}) \text{ etc.}$$

vnde pro aequatione proposita integranda:

$$(\frac{d.qu}{dx}) + (\frac{d.qv}{dy}) + (\frac{d.qw}{dz}) + (\frac{dq}{dt}) = 0$$

elicimus solos factores diuersos differentiando:

$$(\frac{d.qu}{dx}) = +(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})(\frac{ddH}{dt\,dx}) \text{ etc.}$$

$$(\frac{dq}{dt}) = -(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})(\frac{ddH}{dt\,dx}) \text{ etc.}$$

vbi haec duo membra se mutuo tollunt. Ex quo intelligitur si pro qu, qv, qw, et q totae expressiones inuentae substituantur, et singula membra debite differentientur, quo pacto singula membra in tres partes euoluuntur, omnes has partes se mutuo destruere debere. Siquidem dum singula membra differentiantur, inde pro ternis factoribus in differentialibus terna noua membra resultant, in quibus vnicus tantum factor differentiatur binis reliquis manentibus vnde quod hic de destructione membri differentiati $(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})(\frac{ddH}{dt\,dx})$ est ostensum idem de omnibus plane valere est iudicandum.

Scholion 2.

49. Ex ſolutione problematis, dum per gradus ad aequationem propoſitam ſumus progreſſi, caſum, quo fluidi denſitas q eſt conſtans, et prima aequatio ita ſe habet

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0$$

reſoluere poterimus, quod eo magis eſt notandum, quod huius ſolutionem ex generali, quam dedimus, deriuare non licet. Quamquam autem hic tres tantum variabiles x, y et z conſiderantur tamen nihil impedit, quominus in ſolutione ibi data, etiam quartum t introducamus, eam quaſi conſtantem ſpectando. Sumtis ergo pro lubitu duabus *functionibus* F, G quatuor variabilium x, y, z et t, ex iis ternae celeritates u, v, et w ita determinabuntur vt ſit

$$u=\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)-\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)+\Gamma:(y,z,t)$$
$$v=\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)-\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)+\Delta:(x,z,t)$$
$$w=\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)-\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)+\Sigma:(x,y,t)$$

vbi totum momentum iterum in eo eſt ſitum, quod cuiuis membro cuiusque formae in reliquis reſpondeat aliquod quod cum eo datum factorem habeat communem, et ſigno contrario ſit affectum. Totus autem hic caſus, quo denſitas fluidi eſt quantitas conſtans, meretur vt ſeorſim diligentius euoluatur, cui negotio ſequens caput eſt deſtinatum.

Cete-

Ceterum in vſum analyſeos hic notaſſe iuuabit, hac methodo etiam ſimiles aequationes, vbi plures variabiles quam quatuor occurrerent, generaliter reſolui poſſe; membrorum autem numerus ita increſcit, vt nimis prolixum foret ſaltem caſum quinque variabilium euoluere.

CAPVT III.

APPLICATIO HORVM

PRINCIPIORVM AD FLVIDA EIVSDEM VBIQVE DENSITATIS.

Problema 26.

50. *Si fluidi denſitas vbique et ſemper ſit eadem idque a viribus quibuscunque ſollicitetur, eius motum per formulas analyticas determinare.*

Solutio.

Quae in capite praecedente de motu fluidorum cuiuscunque indolis ſunt tradita, ea ad hunc caſum referentur, denſitatem, quae ibi vtcunque variabilis erat poſita, conſtantem ponendo, quae ſit $= b$, ita vt habeamus $q = b$. Hinc prima ſtatim aequatio in hanc formam contrahitur

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$$

quam ſumendis duabus functionibus quibuscunque F et G, quatuor variabilium x, y, z et t, ita complete integrari vidimus, vt ſit

$$u = \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right) - \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right) + \Gamma : (y, z, t)$$

$$v = \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right) + \Delta : (x, z, t)$$

$$w = \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right) + \Sigma : (x, y, t)$$

vbi $\Gamma : \Delta : \Sigma$ eiusmodi denotant functiones, vt ſit

$$\left(\frac{d\Gamma}{dx}\right) = 0, \ \left(\frac{d\Delta}{dy}\right) = 0, \text{ et } \left(\frac{d\Sigma}{dz}\right) = 0$$

Pro altera aequatione ponamus primo breuitatis gratia.

$$u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right) = U$$

$$u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right) = V$$

$$u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right) = W$$

et iſta aequatio hanc habebit formam:

$$\frac{2g\,dp}{b} = 2g(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) - U\,dx - V\,dy - W\,dz$$

vbi cum formula $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ ſemper per ſe ſit integrabilis, eius integrali poſito $= S$, erit

$$\frac{2g\,dp}{b} = 2g\,dS - U\,dx - V\,dy - W\,dz$$

in qua aequatione differentiali notetur tempus t conſtans eſſe aſſumtum. Cum igitur ex priori aequatione celeritates u, v, w iam per quatuor variabiles ſint expreſſae x, y, z et t, ex hac quoque preſſio p per easdem variabiles exhibetur, dum haec

haec aequatio fuerit possibilis, quod fieri nequit nisi formula $U dx + V dy + W dz$ per se integrationem admittat, qua conditione integratio prioris aequationis non mediocriter restringitur. Posito autem isto integrali $= T$ erit

$$\frac{2gp}{b} = 2gS - T + f : t$$

loco constantis functionem quamcunque ipsius t adiiciendo.

Coroll 1.

51. Ex generalissima igitur prioris aequationis integratione ii tantum casus sunt admittendi, quibus simul formula $U dx + V dy + W dz$ integrabilis redditur: quae conditio cum duas determinationes postulet functiones illae generales F, G et Γ, Δ, Σ duplicem restrictionem exigunt.

Coroll. 2.

52. Pro celeritatibus ergo ternis u, v, w eiusmodi functiones quatuor variabilium x, y, z et t inuestigari oportet, vt primo sit $\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$, tum vero insuper his formulis est satisfaciendum

$$\left(\frac{dU}{dy}\right) = \left(\frac{dV}{dx}\right); \left(\frac{dU}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dx}\right) \text{ et } \left(\frac{dV}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dy}\right)$$

quarum quidem trium posteriorum binae tertiam in se inuoluunt, ita vt omnino tres conditiones habeantur.

 Scho-

Scholion.

53. Prior ergo integratio etsi in genere successit vix tamen quicquam affert subsidii ad problema propositum resoluendum quoniam determinatio earum functionum, quas pro ternis celeritatibus u, v et w inuenimus, vt formula: $Udx+Vdy+Wdz$ integrabilis euadat, ne minimum quidem subleuatur. Ac temerarium certe foret, in tam ardua inuestigatione facilem resolutionem sperare, cum adeo determinatio motus corporum solidorum maximis sit difficultatibus subiecta. Etsi enim pro his corporibus euolutis casus, quo nullae adsunt vires sollicitantes, tandem feliciter est effecta, tamen nullum plane est dubium, quin motus fluidorum multo magis sit absconditus. Ex quo inuestigationes eo dirigi conueniet, vt saltem in plures casus particulares inquiramus, quibus motus fluidorum definire liceat. Ac primo quidem motus ille sibi parallelus se offert quo fluidum perinde ac corpus solidum progeditur quem idcirco accuratius perpendisse, et ex nostris formulis deriuasse haud parum iuuabit: Totum vero negotium haud mediocriter illustrabitur, si ante casum quo ternae celeritates plane euanescunt, examini subiiciamus, etsi enim sic omnis motus tollitur et res ad aequilibrium perducitur, tamen quoniam pressio variabilis esse potest, nonnulla hic obseruanda occurrent, quae in sequentibus vtilitate non carebunt.

Proble-

Problema 27.

54. Si cuiusque fluidi elementi ternae celeritates u, v, w euanescant vires autem quaecunque fluidum sollicitent litteris P, Q, R indicatae, quoniam fluidum in quiete permanere sumitur, pressionem fluidi tam in singulis elementis, quam ad quoduis tempus t definire.

Solutio.

Statim apparet hanc hypothesin $u=0, v=0, w=0$ primae aequationi $\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0$ satisfacere. Tum vero ob $U=0$, $V=0$, $W=0$ altera aequatio hanc induit formam:

$$\frac{dp}{b}=Pdx+Qdy+Rdz$$

ex qua perspicuum est hypothesin quietis ne locum quidem habere posse, nisi vires P, Q, R ita sint comparatae, vt formula $Pdx+Qdy+Rdz$ integrationem admittat. Si ergo eius integrale $=S$, vt sit $dp=bdS$, et quia tempus t constans est assumtum, integrale completum erit $p=bS+\Gamma:t$ loco scilicet constantis functionem quamcunque temporis t adiiciendo. Pro eodem ergo momento pressio per totam fluidi massam vnice pendet a quantitate S, ita vt in stratis aequilibratis, per quae S eundem vbique habet valorem, pressio sit aequalis, quemadmodum in prima sectione de aequilibrio est ostensum. Nunc autem insuper patet, quod ibi non est anno-

annotatum, fieri posse, vt in eodem puncto Z successu temporis pressio quomodocunque varietur. Quod etiam cum natura quaestionis mirifice consentit: vasi enim fluidum inclusum esse concipiatur, *in quo* ope emboli vi quacunque vrgeatur, sicque dum nullam compressionem patitur, sine dubio erit in aequilibrio. Verum hic status aequilibrii non turbabitur, etiamsi vis embolum adigens continuo immutetur siue lege quacunque siue etiam sine vlla lege, at hinc pressio in fluido continuo quoque immutabitur. Quare cum nostra solutio omnes casus possibiles quietis in se complecti debeat, ratio est manifesta, cur in expressionem pro p *inuentam* functio quaecunque temporis sit ingressa.

Coroll 1.

55. Ista igitur functio temporis t *quouis casu* ex variatione virium, quibus embolus impellitur, determinari debet: quae si fuerit arbitraria nullique legi adstricta, haec functio quoque ad genus earum quas discontinuas vocaui, est referenda: vnde necessitas huiusmodi functionum in Analysi multo clarius elucet.

Coroll 2.

56. Quod si ergo ad datum tempus pressio in puncto quocunque fuerit cognita, pro eodem momento in omnibus aliis punctis pressio assignari poterit, quippe quae a sola quantitate S pendebit.

Ab

Ab his autem pressionibus neque praecedentes neque sequentes vllo modo pendent.

Scholion.

57. Dum hic fluidum vasi inclusum et ope emboli vi quacunque vrgeri concipitur, per se intelligitur, nisi vas in suo loco sit affixum, id quouis momento talibus viribus sustineri debere, quae ei in quiete continendo sufficiant; alioquin casus cum hypothesi assumta non conueniret. At vires istae externae aeque parum atque ea qua embolus adigitur, in formulas nostras differentiales ingrediuntur, quoniam directe motum particularum fluidi non afficiunt, dum singulae tantum a viribus naturalibus P, Q, R et pressione sollicitantur: verum integratione demum peracta functiones illae arbitrariae per integrationes in calculum introductae ad illas vires externas, omnesque alias circumstantias accommodari debent. Vires externae autem duplicis sunt generis quarum alterae solum vas, tanquam corpus solidum vrgent neque ipsum fluidum afficiunt: alterae vero quasi embolo applicatae simul fluidum premunt, et vas ipsum perinde atque illae sollicitant. Praeterea vero etiam vas ipsum a viribus P, Q, R eandem sustinet vim ac si cum fluido vnum corpus solidum constitueret, earumque actioni esset expositum; ex quo facile intelligere licet quantis viribus opus sit ad vas in quiete

 con-

continendum ne cum vase etiam fluidum de statu quietis deturbetur.

Problema 28.

58. Si cuiusque fluidi puncti Z ternae celeritates u, v, w fuerit constantes, ita vt singula elementa motu vniformi secundum eandem directionem ferantur, dum a viribus acceleratricibus quibuscunque sollicitantur, pressiones fluidi vbique et pro omni tempore inuestigare.

Solutio.

Tota ergo fluidi massa perinde mouetur ac corpus solidum, si ergo vasi concipiatur *inclusum*, hoc vas cum fluido vniformiter in directum mouebitur, cuiusmodi motus vtique obtineri *potest*, non obstantibus viribus P, Q, R fluidum vrgentibus, dum eiusmodi vires vasi extrinsecus applicantur, quae quouis momento cum illis in aequilibrio constituantur. Tum vero si inter has vires quaepiam ope pistilli in ipsum fluidum agat, quoniam ea pro lubitu variari potest, etiam quouis momento pressiones in fluido ad arbitrium mutari poterunt, id quod calculus ex solutione deductus declarare debet. Nam ob celeritates ternas constantes ponatur $u = \alpha$, $v = \beta$, $w = \gamma$, ac primae quidem aequationi sponte satisfit. Tum vero fiet $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$, ex quo ob $P dx + Q dy + R dz = dS$ erit vt ante $dp = b dS$ et $p = bS + f:t$: Quouis ergo momen-

momento per totum vas pressio erit $p = bS + C$, sicque ab actione virium S eodem modo pendet, quo in casu quietis, diuersis autem temporibus haec pressio pro lubitu variari potest, prorsus vti natura quaestionis postulat.

Scholion.

59. Hic casus ex praecedente, quo tota fluidi massa in quiete perseuerabat, deduci potuisset secundum principium in Mechanica receptum, quod in motu corporum omnia maneant eadem, si totum eorum systema insuper vniformiter in directum proferri concipiatur. Verum hic ob vires sollicitantes P, Q, R aliquod discrimen accedit; in quiete enim quodlibet fluidi elementum perpetuo eandem sollicitationem sustinet, dum autem fluidi massa progreditur, et idem elementum alia atque alia loca percurrit euenire vtique potest, vt successiue ab aliis atque aliis viribus sollicitetur, siquidem hae vires a loco pendent, vt plerumque fieri solet. Cum igitur pro eodem fluidi elemento hic quantitas S sit variabilis, quae in casu quietis manebat constans peculiari solutione erat opus. Probe autem tenendum est, nisi vires sollicitantes ita sint comparatae, vt formula $Pdx + Qdy + Rdz$ integrationem admittat, tum talem motum aeque parum locum habere posse ac quietem, quomodocunque etiam vires extrinsecus agentes attemperentur. Si scilicet eiusmodi casus existeret, etiamsi initio motus vniformis

 in

in directum fluido fuisset impressus, is tamen *nullo* modo conseruari posset, sed aequabilitas perpetuo turbaretur; hocque adeo casu hypothesis celeritatum constantium contradictionem implicare est *censenda*. Denique hinc etiam clarius intelligitur, omnes circumstantias externas veluti vasis et virium siue vas solum, siue etiam fluidum pistillorum ope vrgentium in aequationes canonicas motum fluidorum exprimentes non ingredi, sed demum *integratione* peracta, functiones arbitrarias in calculum inuectas ad eas accommodari oportere, quae functiones etiam semper ita sunt comparatae, vt omnes plane circumstantias externas in se complectantur.

Problema 29.

60. Si ternae cuiusque puncti *celeritates* u, v, w per functiones solius temporis t exprimantur, explorare vtrum talis motus existere queat et sub quibus conditionibus, dum fluidi singulae particulae a viribus quibuscunque sollicitantur, tum vero pressionem per totam fluidi massam inuestigare.

Solutio.

Eodem ergo temporis instanti omnia fluidi elementa pari motu in eandem directionem feruntur, et tempore fluente omnibus aequalis mutatio cum celeritatis tum directionis ratione induci statuitur; vnde cum singula fluidi elementa easdem perpetuo inter se distantias seruent, tota massa instar corporis solidi promouebitur, et quia iisdem semper terminis circumscribitur, vasi inclusa vna cum vase motu progressiuo proferetur, omni scilicet motu gyratorio excluso. Cum igitur u, v et w sint functiones temporis t tantum, primae statim aequationi $(\frac{du}{dx}) + (\frac{dv}{dy}) + (\frac{dw}{dz}) = 0$ sponte satisfit; deinde pro altera aequatione ob $U = (\frac{du}{dt})$, $V = (\frac{dv}{dt})$, $W = (\frac{dw}{dt})$ ideoque et has quantitates functiones solius t, habebimus

$$\frac{2g\,dp}{b} = 2g\,dS - dx(\frac{du}{dt}) - dy(\frac{dv}{dt}) - dz(\frac{dw}{dt})$$

in qua tempus t constans assumitur. Quare dum sit formula $dS = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ integrabilis, etiam haec aequatio integrationem admittet, motusque assumtus subsistere poterit; fietque

$$\frac{2gp}{b} = 2gS - x(\frac{du}{dt}) - y(\frac{dv}{dt}) - z(\frac{dw}{dt}) + f:t.$$

Dummodo ergo vires extrinsecus tam vas quam fluidum sollicitantes ita fuerint comparatae, vt talem motum in corpore solido producant etiam fluidum eundem motum recipiet; et quoniam illud infinitis modis fieri potest, siquidem illis viribus semper binas sibi aequales et contrarias insuper adiungere licet; si earum altera simul in fluidum ope pistilli agat, quouis momento pressio in fluido pro arbitrio immutari potest, quae mutatio in functione illa arbitraria $f:t$ continetur. Ex quo manifestum est euenire vtique posse vt massa fluida motu praeſcripto feratur, et quomodocunque vires externae ad hoc requiſitae ſe habeant, ad quoduis tempus preſſionem per totam maſſam aſſignare licet, quae hoc caſu non ſolum ab actione S ſed etiam a coordinatis x, y, z pendebit.

Coroll. 1.

61. Si igitur fluidum vaſi, incluſum concipiatur, vt vas eo motu progreſſiuo feratur, quem celeritates u, v, w deſignant, fluidum reſpectu vaſis quieſcet, et cum eo quaſi corpus ſolidum conſtituere poterit ſpectari.

Coroll. 2.

62. Hoc tamen non obſtante preſſiones in fluido vtcunque poterunt eſſe variabiles, dum primum ab actione virium S, quae vtique a loco pendet, tum vero etiam a ternis variabilibus x, y, z, quae etiam pro eodem fluidi elemento iugiter mutantur, pendent; haecque poſtrema mutatio a defectu vniformitatis motus oriri eſt cenſenda.

Coroll. 3.

63. Praeter has autem mutationes, quae tam ab actione virium quam motus inaequalitate proueniunt, preſſio variationi cuicunque temporis ſucceſſu obnoxia eſſe poteſt. Interim tamen pro quouis tempore, ſi in vno loco preſſio conſtet, in omnibus reliquis aſſignari poterit.

Scho-

Scholion.

64. Dum ergo vires sollicitantes P, Q, R ita sint comparatae, vt formula $Pdx + Qdy + Rdz$ integrationem admittat, massa fluida omnes motus progressiuos recipere potest, qui in corpora solida cadunt; si modo densitas fluidi fuerit constans, nullamque mutationem a viribus sollicitantibus patiatur. Vtrum vero etiam motu gyratorio perinde ac corpus solidum ferri possit? hinc nondum patet; hancque inuestigationem in caput sequens reseruamus, vbi quidem hoc argumentum generalius pertractabimus, cum enim in corpore solido circa axem fixum *gyrante* celeritates sint ipsis distantiis ab axe *proportionales in* fluido aliae quoque proportiones locum habere possunt, quia hic nulla necessitas vrget, vt singula elementa eodem tempore suas reuolutiones absoluant. In hoc autem capite restant eiusmodi casus perpendendi, quibus inter ternas celeritates ratio quaedam constans praescribitur, dum earum quaelibet vtcunque variabilis assumitur cuiusmodi motus, quoniam a motu solidorum maxime abhorret nostro instituto imprimis dilucidando inseruiet.

Problema 30.

65. Si ternae cuiusque puncti celeritates u, v, w vbique et semper constantem inter se seruent rationem, conditiones scrutari, sub quibus talis motus existere queat, dum interea singula fluidi elemen-

elementa a viribus quibuscunque P, Q, R sollicitantur.

Solutio.

Quoniam ternae celeritates u, v, w constantem inter se tenent rationem, singula fluidi *elementa* secundum eandem directionem mouebuntur, *celeritate* vtcunque variabili; qui motus vtrum et sub quibus conditionibus locum habere posset, inuestigari oportet. Introducta ergo noua variabili ϑ *quae* sit functio quaecunque quatuor quantitatum x, y, z et t statuamus

$$u = \alpha\vartheta, v = \beta\vartheta \text{ et } w = \gamma\vartheta$$

vt α, β, γ sint quantitates constantes, *atque vt* primae aequationi satisfiat, oportet sit

$$\alpha\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right) + \beta\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right) = 0$$

Cum autem sit $d\vartheta = dx\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right) + dy\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right) + dz\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right)$ erit

$$\alpha d\vartheta = -\beta dx\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right) - \gamma dx\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right) + \alpha dy\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right) + \alpha dz\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right)$$

seu $\alpha d\vartheta = (\alpha dy - \beta dx)\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right) + (\alpha dz - \gamma dx)\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right)$

cui aequationi satisfieri intelligitur si modo ϑ sit functio binarum quantitatum variabilium $(\alpha y - \beta x)$ et $(\alpha z - \gamma x)$ vel harum $\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)$ et $\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right)$, quibus etiam tertia t adiungi potest. Sit enim ϑ functio quaecunque harum trium variabilium

$$\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right); \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right) \text{ et } t$$

quae

quae differentiata praebeat:

$$d\upsilon = L\left(\frac{dx}{\alpha} - \frac{dy}{\beta}\right) + M\left(\frac{dx}{\alpha} - \frac{dz}{\gamma}\right) + N\,dt$$

eritque

$$\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right) = \frac{1}{\alpha}L + \frac{1}{\alpha}M;\ \left(\frac{d\upsilon}{dy}\right) = -\frac{1}{\beta}L \text{ et } \left(\frac{d\upsilon}{dz}\right) = -\frac{1}{\gamma}M$$

vnde vtique fit $\alpha\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right) + \beta\left(\frac{d\upsilon}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{d\upsilon}{dz}\right) = 0$.

Tali ergo functione pro υ ſtabilita colligetur:

$$U = \alpha\alpha\upsilon\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right) + \alpha\beta\upsilon\left(\frac{d\upsilon}{dy}\right) + \alpha\gamma\upsilon\left(\frac{d\upsilon}{dz}\right) + \alpha\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$$

quae ob $\alpha\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right) + \beta\left(\frac{d\upsilon}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{d\upsilon}{dz}\right) = 0$ abit in $U = \alpha\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$, ſimilique modo erit $V = \beta\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$ et $W = \gamma\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$ Quocirca altera aequatio pro motu fluidorum inventa ita ſe habebit conſiderando tempus t conſtans

$$\frac{2g\,dp}{b} = 2g\,dS - (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$$

quae ſi formula $dS = P\,dx + Q + dy\,R\,dz$ ſit integrabilis abſolute poſtulat vt etiam altera pars $(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$ integrationem admittat; quod fieri nequit niſi $\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$ ſit functio harum duarum quantitatum $\alpha x + \beta y + \gamma z$ et t, quod cum ſuperiori conditione ſubſiſtere nequit niſi $\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$ ſit functio ſolius temporis t. Quamobrem quantitas υ ita eſſe debet comparata vt ſit

$$\upsilon = \text{funct:}\left(\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right) \text{ et } \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right)\right) + \Gamma : t$$

vt fiat $\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) = \Gamma' : t$ tum autem reperietur:

$$\frac{2gp}{b} = 2gS - (\alpha x + \beta y + \gamma z)\Gamma' : t + \Delta : t \text{ exiſtente } \Gamma' : t = \frac{d.\Gamma : t}{dt}.$$

Coroll 1.

66. Elementum ergo fluidi in Z mouetur celeritate, quae est $= v\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}$, *eiusque* directio ad axem OA inclinata est angulo cuius cosinus $= \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}$, ad axem OB angulo cuius cosinus $= \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}$ et ad axem OC angulo cuius cosinus $= \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}$.

Coroll 2.

67. Cum igitur motus directio vbique et semper sit eadem omnia fluidi elementa secundum lineas rectas inter se parallelas proferuntur. Celeritas autem tam ratione loci quam *temporis maxime* variabilis esse poterit dummodo v sit eiusmodi functio qualem descripsimus.

Coroll 3.

68. Summa autem varietas hic locum invenire potest cum pro v functionem quamcunque harum duarum quantitatum $\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}$ et $\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}$ accipere licet, eique insuper functionem temporis quamcunque adiicere.

Coroll 4.

69. Ex superioribus patet litteras U, V, W exprimere accelerationes motus secundum directiones coordinatarum x, y, z, vnde si fuerit $\Gamma : t = 0$,

ideoque

ideoque $(\frac{du}{dt})=0$, hae accelerationes euanefcent, et quoduis elementum vniformiter in directum progredietur.

Scholion.

70. Hic motus fatis fimilis deprehenditur ei, quo flumina progrediuntur; fi enim grauitas fola in fluidum agat deorfum fecundum ZY erit $P=0$, $Q=0$ et $R=-1$, ideoque $S=-z$ ac fi porro functio a tempore pendens euanefcat, vt fit $u=$ funct: $((\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta})$ et $(\frac{x}{\alpha}-\frac{z}{\gamma}))$ et $p=b(a-z)$, ficque preffio in plano horizontali ad altitudinem $z=a$ evanefcit. Neque vero neceffe eft, vt fluidi directio fit horizontalis fed motus fubfiftere poteft etiamfi fluidum fiue furfum fiue deorfum feratur, fiue vtcunque obliquum teneat curfum quod quidem difficulter concipi poteft, quia fluidum per fuperficiem fummam tranfire deberet. Verum hic aliud incommodum occurrit, quod in fluido vltra altitudinem a verfante preffio euaderet negatiua, ideoque fluidi continuitas diffolueretur, idque quafi in guttas difpergeretur. Initio autem iam monui haec principia, quae ftabiliui ita continuitati fluidi effe innixa, vt vbi ea ceffauerit illa non amplius locum habere poffe: ex quo eiusmodi cafus, vbi fluidum continuum cohaerere defierit, hinc funt excludendi. De cetero quando hic motum vt poffibilem praedicamus, id femper ita eft intelligendum, eiusmodi vires externas dari poffe, quarum actione ille motus

 obtineri

obtineri queat. Verum problema hic tractatum generalius sequenti modo proponi ac resolui potest.

Problema 31.

71. Si ternae cuiusque fluidi elementi celeritates u, v, w ita sint comparatae, vt sit

$$u = \alpha\mho + \Gamma : t;\; v = \beta\mho + \Delta : t \text{ et } w = \gamma\mho + \Sigma : t$$

denotante $\mho$ functionem quamcunque conditiones scrutari sub quibus talis motus subsistere potest, dum singula fluidi elementa a viribus quibuscunque P, Q, R sollicitantur.

Solutio.

Hic perinde atque in praecedente problemate, prima aequatio generalis postulat, vt $\mho$ sit functio harum duarum quantitatum $(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta})$ et $(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma})$, neque iam opus est ad eam quampiam functionem temporis t adiici, cum in hypothesi iam tales functiones indefinitae ternis celeritatibus sint adiunctae. Cum igitur hinc fiat $\alpha(\frac{d\mho}{dx}) + \beta(\frac{d\mho}{dy}) + \gamma(\frac{d\mho}{dz}) = 0$ obtinebitur $U = (\frac{du}{dt}) = \Gamma' : t$, $V = \Delta' : t$ et $W = \Sigma' : t$ ideoque posita virium actione $\int(Pdx + Qdy + Rdz) = S$ aequatio statum pressionis declarans erit

$$\frac{2gp}{b} = 2gS - x\Gamma' : t - y\Delta' : t - z\Sigma' : t + \Pi : t$$

Coroll. 1.

72. Hoc problema multo latius patet quam praecedens quod non solum labente tempore in eodem

eodem puncto directio motus vehementer variari possit sed etiam eodem tempore in diuersis fluidi elementis diuersa inesse possit motus directio.

Coroll 2.

73. Eodem autem tempore, quo functiones $\Gamma:t$, $\Delta:t$, $\Sigma:t$ per totam fluidi massam, eosdem valores sortiuntur, quoniam u pendet a loco Z in diuersis punctis non solum celeritas sed etiam directio motus maxime discrepans esse poterit: vbique tamen $\frac{u}{\alpha}-\frac{v}{\beta}$ et $\frac{u}{\alpha}-\frac{w}{\gamma}$. eosdem obtinebunt valores.

Scholion.

74. Multum autem hic motus adhuc differt a cursu fluminum; si enim formulas inuentas huc accommodare vellemus, primo vt motus in eodem puncto perpetuo prodeat idem, functiones temporis $\Gamma:t$, $\Delta:t$, $\Sigma:t$ quantitates constantes denotare deberent tum autem ob $S=-z$ oriretur $p=b(a-z)$, sicque pressiones in plano quodam horizontali euanescerent. Nullus ergo motus verticalis fluidi particulis tribui posset, quia alioquin fluidum supra superficiem summam esset admittendum, foret ergo $w=0$, ideoque et $\gamma=0$ et $\Sigma:t=0$ vnde singula fluidi elementa in planis horizontalibus mouerentur neque propterea vlla hic decliuitas locum inueniret quae tamen fluminum proprietas essentialis. Ex quo inuestigatio motus fluuiorum est res multo altioris

 indaginis

indaginis iudicanda. Interim tamen hic exemplum eiusmodi fluuii cernimus, cuius singulae particulae motu horizontali proferuntur, quarum autem directio aeque ac celeritas vtcunque sint variabiles. Hoc tamen non obstante pressio vbique a sola pendebit profunditate eodem plane modo, ac si fluidum stagnaret. Cum autem hoc casu sit $\gamma = 0$ fiet υ functio quaecunque harum duarum quantitatum $(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta})$ et z, sicque in eodem plano horizontali quocunque eadem reperietur in omnibus punctis vbi $\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}$ eiusdem erit valoris, hoc est in omnibus lineis rectis ad axem OA inclinatis angulo cuius tangens $= \frac{\beta}{\alpha}$ quae ergo inter se erunt *parallelae*: et omnes fluidi particulae in tali recta sitae pari *motu* ferentur: neque vero secundum hanc ipsam rectam progredientur, cum posito $\Gamma: t = m$ et $\Delta: t = n$ eius celeritates sint futurae $u = \alpha\upsilon + m$ et $v = \beta\upsilon + m$ vnde quidem celeritates erunt aequales, sed directiones ab illa recta vtcunque declinabunt, nisi sit $m:n = \alpha:\beta$. Dum igitur hoc modo ab ista recta in aliam sibi parallelam transferantur, vbi alia dabitur tam celeritas quam directio, euidens est fieri posse, vt singula fluidi elementa in lineis curuis motu maxime inaequabili deferantur. Vnde si via cuiusque particulae in plano horizontali sit definienda ope aequationis inter binas coordinatas x et y, ob $dx = dt(\alpha\upsilon + m)$ et $dy = dt(\beta\upsilon + n)$ eliminando dt fit $\upsilon(\beta dx - \alpha dy) + n dx - m dy = 0$. Quia vero hic profunditas z eadem manet erit υ functio ipsius $\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}$

seu

seu $\mathfrak{b}x - \alpha y$, pro qua scribendo Θ': $(\mathfrak{b}x - \alpha y)$ fit $nx - my + \Theta(\mathfrak{b}x - \alpha y) =$ Const. Functio ergo Θ ita accipi potest, vt data curua prodeat, quae ad externas particulas in hoc plano relatas figuram ripae flumen terminantis repraesentabit sicque ad singulas profunditates ad arbitrium figura ripae ideoque totius aluei cauitas formari poterit.

CAPVT IV.

DE FLVIDORVM HOMOGENEORVM *NVLLIVS COMPRESSIONIS CAPACIVM* MOTV GYRATORIO.

Problema 32.

75. Si fluidum ita circa axem fixum OC gyretur, vt singulorum elementorum motus sit vniformis, celeritas vero functioni cuicunque distantiae ab eodem axe proportionalis, inuestigare vtrum talis motus subsistere possit? Tab. V. Fig. 26.

Solutio.

Consideretur fluidi elementum in Z, coordinatis $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ definitum, cuius ergo ab axe OC distantia est $ZV = \sqrt{(xx + yy)}$, quae

quae ergo in motu non mutatur. Quoniam ergo elementum Z in plano ad axem A C normali gyratur circa punctum V, eius celeritas w euanescet, celeritates vero u et v ita sunt comparatae, vt dum coordinatae x et y tempusculo dt incrementa capiunt udt et vdt distantia $\sqrt{(xx+yy)}$ non varietur ex quo colligitur fore $ux+vy=0$. Statuatur ergo $u=Ty$ et $v=-Tx$, erit tota celeritas $=T\sqrt{(xx+yy)}$, ideoque per hypothesin T functio ipsius $\sqrt{(xx+yy)}$; quare ponamus $T=\Gamma:\frac{xx+yy}{2}$ vt sit $\left(\frac{dT}{dx}\right)=x\Gamma':\frac{xx+yy}{2}$ et $\left(\frac{dT}{dy}\right)=y\Gamma':\frac{xx+yy}{2}$ tum vero $\left(\frac{dT}{dz}\right)=0$ et $\left(\frac{dT}{dt}\right)=0$. His circa motum stabilitis videndum est, num is cum principiis motus fluidorum consistere possit. Ac prima quidem aequatio ob $w=0$ postulat vt sit $\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)=0$; quod egregie euenit, cum sit

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=y\left(\frac{dT}{dx}\right)=xy\Gamma':\frac{xx+yy}{2} \text{ et } \left(\frac{dv}{dy}\right)=-x\left(\frac{dT}{dy}\right)=-xy\Gamma':\frac{xx+yy}{2}.$$

Porro autem pro altera aequatione habebimus pro $\Gamma':\frac{xx+yy}{2}$ breuitatis gratia scribendo L vt sit $dT=Lxdx+Lydy$ fit

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=Lxy;\ \left(\frac{du}{dy}\right)=T+Lyy;\ \left(\frac{dv}{dx}\right)=-T-Lxx;\ \left(\frac{dv}{dy}\right)=-Lxy$$

vnde concludimus:

$$U=TyLxy-Tx.(T+Ly)=-TTx$$
$$V=-Ty(T+Lxx)+Tx.Lxy=-TTy$$

et $W=0$. Quare cum formula $Udx+Vdy=-TT(xdx+ydy)$ vtique integrationem admittat, quia

quia T eſt functio ipſius $xx+yy$ altera aequatio pro motu inuenta integrabilis euadit, quemadmodum motus poſſibilitas poſtulat, et poſita virium actione $\int(\mathrm{P}dx+\mathrm{Q}dy+\mathrm{R}dz)=\mathrm{S}$ preſſio ita definitur vt ſit

$$\frac{2gp}{b}=2g\mathrm{S}+\int\mathrm{TT}(xdx+ydy)+f:t.$$

Omnino ergo motus deſcriptus in fluido ineſſe poteſt: quem ergo accuratius ſcrutari operae erit pretium. Sit diſtantia ab axe $\mathrm{ZV}=\sqrt{}(xx+yy)=s$, ac ponatur integrale $\int\mathrm{TT}(xdx+ydy)=\int\mathrm{TT}sds=\Gamma:s$ eritque $\mathrm{TT}=\frac{\Gamma's}{s}$, vnde celeritas qua elementum Z in diſtantia $\mathrm{ZV}=s$ circa axem OC gyratur erit $=\mathrm{T}s=\sqrt{}s\Gamma':s$, et preſſio ibidem inuenitur $p=b\mathrm{S}+\frac{b}{2g}\Gamma:s+f:t$.

Coroll. 1.

76. Si ergo elementi Z, cuius diſtantia ab axe gyrationis eſt $\mathrm{ZV}=s$, celeritas ponatur $=\Delta:s$ fiet hinc $\Gamma':s=\frac{(\Delta:s)^2}{s}$ atque preſſio reperitur $p=b\mathrm{S}+\frac{b}{2g}\int\frac{ds}{s}(\Delta:s)^2+f:t$. Quare ſi illa celeritas ſit $=\alpha s^n$ fit $p=b\mathrm{S}+\frac{\alpha\alpha b s^{2n}}{4ng}+f:t$; vbi notandum caſu celeritatis conſtantis $=\alpha$ ob $n=0$ fieri $p=b\mathrm{S}+\frac{\alpha\alpha b}{2g}ls+f:t$.

Coroll. 2.

77. Functio temporis indefinita ideo in preſſionem p ingreditur quoniam per vires externas

quouis tempore pressio pro lubitu vel augeri vel diminui potest. Quicquid autem per vires externas effici potest, necesse est, vt id in solutione generali contineatur. Si ergo talis mutatio in viribus externis non admittatur, eam temporis functionem omitti oportet.

Coroll. 3.

78. Quicunque autem fingatur *huiusmodi* motus vorticosus, vires sollicitantes P, Q, R, quomodocunque etiam sint comparatae, neutiquam impediunt, quo minus is subsistere queat, *dummodo* formula $Pdx + Qdy + Rdz = dS$ *integrationem* admittat, semper scilicet viribus *externis in subsidium* vocandis talis motus obtineri poterit.

Coroll. 4.

79. Quoniam tota fluidi massa circa axem fixum OC gyratur, a quo singula elementa eandem conseruant distantiam, tota massa vasi rotundo seu tornato inclusa concipi potest cuius axis sit CO. Ad motum autem nihil refert, qualis figura ipsi tribuatur, dummodo omnes eius sectiones ad axem OC normales fuerint circuli.

Scholion 1.

80. Quo haec clarius exponamus, fluidum soli grauitati subiectum statuamus, cuius directio sit CO, seu potius axis gyrationis *OC ponatur* norma-

normalis, vt ſit $S = -z$; vnde pro preſſione habebimus $p = b(h-z) + \frac{b}{2g}\int\frac{ds}{s}(\Delta : s)^2 + f : t$, exiſtente celeritate ad diſtantiam $= s$ ab axe $= \Delta : s$. Sumamus porro in viribus externis nullam euenire mutationem, vt $f : t$ in nihilum abeat. Repraeſentet ergo figura EEFF ſectionem verticalem vaſis per axem OC factam, in qua ſit GHG ſuperficies fluidi ſuprema, per quam preſſio euaneſcat, vnde ſumta diſtantia ab axe $OP = s$, erit altitudo $PM = h + \frac{1}{2g}\int\frac{ds}{s}(\Delta : s)^2$, qua aequatione figura ſuprema ſuperficiei GHG exprimitur. Sumta ergo celeritate gyrationis pro diſtantia $s = \alpha s^n$, fiet $PM = h + \frac{\alpha\alpha}{4gn} s^{2n}$, vnde ſuperficies GHG circa medium H erit excauata ibique minima altitudo $OH = h$ ſi quidem n ſit numerus poſitiuus. At vero ſi n ſit numerus negatiuus in medio H adeo in infinitum deprimetur et cauitatem circa axem relinquet. Caſu quidem quo $n = 1$, et totum fluidum eodem tempore reuoluitur, haec curua erit parabola circa axem HC deſcripta, cuius parameter eſt $= \frac{4g}{\alpha\alpha}$: ac ſi tempus vnius reuolutionis, quod eſt $\frac{2\pi}{\alpha}$ min. ſec. ponatur $= \theta''$ erit parameter $= \frac{g}{\pi\pi}\theta\theta$, et preſſio in $Z = b(h-z) + \frac{\pi\pi b}{\theta\theta} \cdot \frac{ss}{g}$, vnde ſimul preſſio in latera vaſis innoteſcit, quae ita ſe habet, vt quo id fuerit amplius, eo futura ſit maior pro eadem altitudine. Quod ſi vero ſit $n = 0$ vel adeo numerus negatiuus, id incommodum naſcitur, quod elementa axi proxima reuolutiones ſuas tempore infinite

Tab. VI. Fig. 27.

 nite

nite paruo conficerent; verum hoc incommodum sponte tollitur, cum fluidum spatium vacuum circa axem relinquat cuiusmodi motum vt repraesentemus sit $n=-\frac{1}{2}$, vt in distantia ab axe $=s$ sit celeritas $=\frac{\alpha}{\sqrt{s}}$ et pressio $p=b(h-z)-\frac{\alpha\alpha b}{2gs}$; quae pro quauis altitudine z euanescit in distantia $s=\frac{\alpha\alpha}{2g(h-z)}$.

Tab. VI. Fig. 28. Spatium ergo circa axem $OH=h$ vacuum relictum FFGGII hyperbolis terminatur, existente HP. $PM=\frac{\alpha\alpha}{2g}$, sicque voraginem exhibet, ita vt per GI pressio vbique sit nulla: Extra hanc voraginem in Z vbi fluidum reperitur in Z erit pressio $p=b\,HP-\frac{\alpha\alpha b}{2g.PZ}$ seu $p=\frac{\alpha\alpha b}{2g}\left(\frac{1}{PM}-\frac{1}{PZ}\right)=\frac{\alpha\alpha b.MZ}{2g.PM.PZ}$. Huiusmodi ergo voragines seu euripi oriuntur, quoties celeritas gyratoria circa axem vel est constans, vel in maioribus distantiis decrescit, huicque causae sine dubio euripi in mari sunt adscribendi.

Scholion 2.

Tab. V. Fig. 26. 81. Manente fluido soli grauitati exposito, consideremus axem, circa quem fluidum gyratur, esse horizontalem, et grauitatem dirigi secundum rectam OA, vt sit $P=1$, $Q=0$ et $R=0$, ideoque $S=x$. Sit porro in distantia $=s$ ab axe celeritas $=\Delta:s$, ac pressio fiet $p=bx+\frac{b}{2g}\int\frac{ds}{s}(\Delta:s)^2$ omittendo $f:t$ dum a viribus externis omnem variationem remouemus. Contemplemur primo casum

Tab. VI. Fig. 29. quo $\Delta:s=\alpha s$ et propterea $p=b(x-h)+\frac{\alpha\alpha b}{2g}ss$, qui status in fig. 29 repraesentetur, vbi vasis EF HG

GH axis OC intelligendus est horizontalis, recta vero OA verticalis. Sumatur in ea $OH = b$, et pro puncto N in plano verticali AOC, cuius distantia ab axe $PN = s$ erit pressio $p = b(\frac{\alpha\alpha}{2g}PN^2 - QN)$, pro puncto autem M, quo illud N post semireuolutionem defertur erit $p = b(\frac{\alpha\alpha}{2g}PM^2 - QM)$ sicque durante motu idem elementum diuersas pressiones patitur quae ne vnquam fiant negatiuae, constans $OA = b$ negatiue accipi posset. Casu autem in figura repraesentato, ne vsquam pressio euadat negatiua: in vas inseri oportet cylindrum solidum cuius semidiameter $= k$ tantus sit, vt fiat $\frac{\alpha\alpha}{2g}kk - b - k = o$ ita vt extra hunc cylindrum pressio vbique fiat positiua et fluidum circa hunc cylindrum reuoluatur. Pro casu autem $n = -\frac{1}{2}$, fit $p = b(x - b) - \frac{\alpha\alpha b}{2gs}$, vbi ergo b negatiuum capi conuenit, vt recta OA sursum vergere sit censenda tum ergo erit pressio in $N = b(QN - \frac{\alpha\alpha}{2g.PN})$ et pressio in $M = b(QM - \frac{\alpha\alpha}{2g.PM})$, ex quo cylindrum tam crassum inseri oportet, vt eius semidiametro posito $= k$ fiat $b - k - \frac{\alpha\alpha}{2g.k} = o$ seu $bk - \frac{\alpha\alpha}{2g} = kk$, hinc $k = \frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}bb - \frac{\alpha\alpha}{2g})}$, vnde patet bb maius esse debere quam $\frac{2\alpha\alpha}{g}$. Deinde vero quia in nimis magna distantia ab axe pressio iterum fieret negatiua, etiam semidiameter vasis excedere non debet hunc valorem $\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb - \frac{\alpha\alpha}{2g})}$. Ceterum notandum est, dum huiusmodi motus semel inceperit, eum deinceps subsistere posse, ac ne ob attritum vasis debilitetur, ipsum vas pari motu circa axem reuoluatur.

Scholion 3.

82. Si fluidum a nullis plane viribus sollicitetur, vt sit $S=0$, tum posita in distantia ab axe $=s$ celeritate $=\Delta : s$, erit pressio in eadem distantia $p=bb+\frac{b}{2g}\int\frac{ds}{s}(\Delta : s)$, sublata omni variatione in viribus externis. Hinc posita celeritate $\Delta s=\alpha s^n$, prodit $p=b(b+\frac{\alpha\alpha}{4ng}s^{2n})$, et casu $n=0$ fit $p=b(b+\frac{\alpha\alpha}{2g}ls)$ At si $\Delta : s=\alpha s^{-m}$ erit $p=b(b-\frac{\alpha\alpha}{4mg}s^{-2m})$. Qui casus seorsim euolui merentur.

I. Si $\Delta : s=\alpha s^n$, tum b esse potest vel >0, vel $=0$, vel <0. Ac primo si $b>0$, pressio vbique erit positiua, et minima quidem in ipso axe, a quo recedendo continuo crescit: sicque integer fluidi cylindrus hoc modo gyrari poterit. Idem deinde euenit etiam si $b=0$, hoc tantum discrimine quod in ipso axe pressio euanescit. Tertio sumto b negatiuo fit $p=b(\frac{\alpha\alpha}{2gn}s^{2n}-b)$ vnde cum pressio prodeat negatiua quamdiu $s^{2n}<\frac{2gb}{\alpha\alpha}n$ hoc spatium circa axem vacuum relinquetur et fluidum circa hunc cylindrum cauum gyrabitur. His casibus corpusculum minimum fluido immersum axem versus vrgebitur vi $\frac{\alpha\alpha b}{2g}s^{2n-1}$.

II. Si $\Delta : s=\alpha$, et $p=b(b+\frac{\alpha\alpha}{2g}ls)$, pressio circa axem est negatiua vsque ad distantiam $s=e^{\frac{-2gb}{\alpha\alpha}}$; vbi

vbi euanefcit tam amplus ergo cylindrus circa axem vacuus relinquetur circa quem fluidum gyrabitur.

III. Si $\Delta : s = \alpha s^{-m}$ et $p = b(b - \frac{\alpha\alpha}{4mg} s^{-2m})$, patet conftantem b neceffario pofitiuam fumi debere, et cylindrum circa axem vacuum relictum iri, cuius radius $= \sqrt[2m]{\frac{\alpha\alpha}{4mgb}}$ tum vero in fluido extra hunc axem preffionem crefcere continuo, at in diftantia infinita demum fieri $= bb$. Corpufculum huic fluido in diftantia ab axe $= s$ immerfum ad axem pelletur vi $= \frac{\alpha\alpha b}{2g} s^{-2m-1}$, quae quadrato diftantiae ab axe reciproce fit proportionalis fi $m = +\frac{1}{2}$, et celeritas $= \frac{\alpha}{\sqrt{s}}$ feu reciproce in fubduplicata ratione diftantiae.

Problema 33.

83. *Si fluidum gyretur circa axem quemcunque feu ternae cuiusque puncti celeritates u, v, w proportionales fint his formulis $\alpha y - \beta z$, $\gamma z - \alpha x$, $\beta x - \gamma y$, conditiones explorare quibus talis motus in fluido exiftere queat, dum fluidum a viribus quibuscunque P, Q, R follicitatur.*

Solutio.

Ponamus ergo:

$$u = T(\alpha y - \beta z);\ v = T(\gamma z - \alpha x);\ w = T(\beta x - \gamma y)$$

et

et formulae differentiales hinc natae erunt:

$\left(\frac{du}{dx}\right)=(\alpha y-\beta z)\left(\frac{dT}{dx}\right)$	$\left(\frac{dv}{dx}\right)=-\alpha T+(\gamma z-\alpha x)\left(\frac{dT}{dx}\right)$	$\left(\frac{dw}{dx}\right)=\beta T+(\beta x-\gamma y)\left(\frac{dT}{dx}\right)$
$\left(\frac{du}{dy}\right)=\alpha T+(\alpha y-\beta z)\left(\frac{dT}{dy}\right)$	$\left(\frac{dv}{dy}\right)=(\gamma z-\alpha x)\left(\frac{dT}{dy}\right)$	$\left(\frac{dw}{dy}\right)=-\gamma T+(\beta x-\gamma y)\left(\frac{dT}{dy}\right)$
$\left(\frac{du}{dz}\right)=-\beta T+(\alpha y-\beta z)\left(\frac{dT}{dz}\right)$	$\left(\frac{dv}{dz}\right)=\gamma T+(\gamma z-\alpha x)\left(\frac{dT}{dz}\right)$	$\left(\frac{dw}{dz}\right)=(\beta x-\gamma y)\left(\frac{dT}{dz}\right)$
$\left(\frac{du}{dt}\right)=(\alpha y-\beta z)\left(\frac{dT}{dt}\right)$	$\left(\frac{dv}{dt}\right)=(\gamma z-\alpha x)\left(\frac{dT}{dt}\right)$	$\left(\frac{dw}{dt}\right)=(\beta x-\gamma y)\left(\frac{dT}{dt}\right)$

Hinc prima aequatio $\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0$ induit hanc formam:

$$(\alpha y-\beta z)\left(\frac{dT}{dx}\right)+(\gamma z-\alpha x)\left(\frac{dT}{dy}\right)+(\beta x-\gamma y)\left(\frac{dT}{dz}\right)$$

Cui aequationi satisfit si T fuerit functio quaecunque harum duarum quantitatum $\gamma x+\beta y+\alpha z$ et $xx+yy+zz$ nam si ponamus

$$dT=M(\gamma dx+\beta dy+\alpha dz)+N(xdx+ydy+zdz)$$

erit $\left(\frac{dT}{dx}\right)=M\gamma+Nx$; $\left(\frac{dT}{dy}\right)=M\beta+Ny$ et $\left(\frac{dT}{dz}\right)=M\alpha+Nz$.

Ad alteram ergo aequationem progrediamur; ac primo formulam $u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{du}{dy}\right)+w\left(\frac{du}{dz}\right)$ euoluamus, quae factis substitutionibus abit in

$$TT(\alpha\gamma z+\beta\gamma y-\alpha\alpha x-\beta\beta x).$$

Quare cum T non inuoluat tempus t ob $\left(\frac{dT}{dt}\right)=0$ erit etiam $\left(\frac{du}{dt}\right)=0$, vnde fit

$$U=TT(\alpha\gamma z+\beta\gamma y-\alpha\alpha x-\beta\beta x)$$
$$V=TT(\beta\gamma x+\alpha\beta z-\gamma\gamma y-\alpha\alpha y)$$
$$W=TT(\alpha\beta y+\alpha\gamma x-\beta\beta z-\gamma\gamma z)$$

ac

ac propterea

$$Udx+Vdy+Wdz=TTd.(\alpha\gamma xz+\beta\gamma xy+\alpha\beta yz-\tfrac{1}{2}(\alpha\alpha+\beta\beta)xx$$
$$-\tfrac{1}{2}(\gamma\gamma+\alpha\alpha)yy-\tfrac{1}{2}(\beta\beta+\gamma\gamma)zz)$$
$$=-\tfrac{1}{2}TTd.((\alpha y-\beta z)^2+(\gamma z-\alpha x)^2+(\beta x-\gamma y)^2).$$

Quae expressio cum debeat esse integrabilis, necesse est vt TT ideoque et T sit functio huius quantitatis

$$(\alpha y-\beta z)^2+(\gamma z-\alpha x)^2+(\beta x-\gamma y)^2$$

quae quia reducitur ad hanc:

$$(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)(xx+yy+zz)-(\gamma x+\beta y+\alpha z)^2$$

vtique in forma generali primae conditioni satisfaciente continetur. Quare ponendo

$$(\alpha y-\beta z)^2+(\gamma z-\alpha x)^2+(\beta x-\gamma y)^2=(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)ss$$

dummodo pro T sumatur functio quaecunque ipsius s, altera aequatio hanc pro pressione p suppeditat aequationem

$$\frac{2gp}{b}=2gS+(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)\int TTsds+f:t$$

existente S actione virium $\int(Pdx+Qdy+Rdz)$.

Coroll. 1.

84. Celeritas vero cuiusque particulae in Z est $=\sqrt{(uu+vv+ww)}=Ts\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}$, vnde cum T sit functio ipsius s, erit etiam functio ipsius celeritatis verae. Notandum autem est hanc quantitatem s designare distantiam puncti Z ab axe circa quem fit gyratio.

Coroll. 2.

85. Dummodo ergo ſingulae fluidi particulae vniformiter circa axem quemcunque reuoluantur, ita vt cuiusque celeritas ſit functioni diſtantiae proportionalis, huiusmodi motus in fluido locum habere poteſt.

Coroll. 3.

86. Ad motus realitatem autem porro *requiritur*, vt preſſio p valorem obtineat poſitiuum; ac ſi eueniat, vt eius valor vsquam ſit negatiuus, ibi ſpatium a fluido vacuum eſt ſtatuendum, *quod* ſit corpus ſolidum in eum locum collocando.

Scholion.

87. Problema quidem hoc non *latius patet* quam praecedens cum et hic motus fiat circa axem fixum, perindeque ſit qualis ſitus ipſi tribuatur; verumtamen quia formae pro celeritatibus u, v, w aſſumtae ſpeciem ſaltem mentiuntur generaliorem, earum euolutio non parum adiumenti ad huiusmodi inueſtigationes alias ſuſcipiendas afferre videtur. Quandoquidem nunc vniuerſa motus fluidorum Theoria ad reſolutionem huiusmodi aequationum eſt perducta, totumque negotium huc redit, vt pro u, v, w eiusmodi formae excogitentur, quibus primo formula $(\frac{du}{dx}) + (\frac{dv}{dy}) + (\frac{dw}{dz})$ euaneſcat, tum vero haec $Udz + Vdy + Wdz$ *integrabilis* euadat.

Hacte-

Hactenus autem hoc opus ita ſum aggreſſus, vt primum conditioni priori ſatisfecerim, quod adeo generaliſſime praeſtare licuit, tum vero hinc eiusmodi caſus elicere oportebat, quibus etiam poſteriori conditioni ſatisfieret, quae inueſtigatio caſibus euolutis non mediocriter illuſtrari et adiuuari videtur. Quodſi inuerſo ordine a conditione poſteriori exordiri velimus, opus multo magis difficile et arduum videatur; ita vt hic ſolutionem generalem vix expectare liceat. Caſum tamen vehementer late patentem obſeruaui, quo poſterior conditio impletur; quod ſcilicet fit ſi formula $udx + vdy + wdz$ fuerit integrabilis, vbi imprimis notandum eſt hunc caſum in motu fluidorum per tubos, in quo fere ſolo definiendo Theoria adhuc fuit occupata locum habere; Vnde operae pretium eſſe arbitror iſti caſui euoluendo ſequens Caput deſtinare, idque eo magis quod eum ad omnis generis fluida extendere licet.

CAPVT V.

DE MOTV FLVIDORVM EO CASV QVO INTEGRABILIS EST HAEC FORMA.

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz.$$

Problema 34.

88. Si cuiusque fluidi elementi ternae celeritates u, v, w ita sint comparatae, vt formula $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ integrationem admittat, aequationem, qua pressio fluidi exprimitur euoluere.

Solutio.

Cum u, v, w sint functiones quatuor variabilium x, y, z et t, quoniam formula $udx + vdy + wdz$ integrabilis ponitur, id intelligendum est, dum tempus t constans assumitur. Sit ergo I eius integrale completum, quod etiam tempore t pro variabili habito differentiatum praebeat:

$$dI = udx + vdy + wdz + \Phi dt.$$

Hinc igitur, vt primo accelerationem:

$$U = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$$

elicia-

eliciamus, ad nostrum institutum plurimum conducet has formulas differentiales ad solum elementum dx reuocare quod facile fit, dum ex illius formae integrabilitate est

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=\left(\frac{dv}{dx}\right);\ \left(\frac{du}{dz}\right)=\left(\frac{dw}{dx}\right)\ \text{et}\ \left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{d\Phi}{dx})$$

vnde consequimur:

$$U=u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{dv}{dx}\right)+w\left(\frac{dw}{dx}\right)+\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\ \text{similique modo}$$
$$V=u\left(\frac{du}{dy}\right)+v\left(\frac{dv}{dy}\right)+w\left(\frac{dw}{dy}\right)+\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)$$
$$W=u\left(\frac{du}{dz}\right)+v\left(\frac{dv}{dz}\right)+w\left(\frac{dw}{dz}\right)+\left(\frac{d\Phi}{dz}\right).$$

Cum iam posita virium acceleratricium P, Q, R actione:

$$\int(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)=S$$

et in fluidi elemento, quod consideramus pressione $=p$ et densitate $=q$, hanc inuenerimus aequationem:

$$\frac{2g\,dp}{q}=2g\,dS-U\,dx-V\,dy-W\,dz$$

in qua tempus t constans assumitur, quoniam in hac hypothesi est:

$$dx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)+dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)+dz\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)=d\Phi$$

erit hac reductione in reliquis membris obseruata

$$U\,dx+V\,dy+W\,dz=u\,du+v\,dv+w\,dw+d\Phi$$

quae forma cum sit integrabilis habebimus:

$$2g\int\frac{dp}{q}=2gS-\tfrac{1}{2}(uu+vv+ww)+\Phi+f:t$$

quae aequatio locum habet quoties q fuerit functio solius pressionis p; sin autem insuper ab alia causa pendeat, quo haec aequatio locum habere possit, necesse est vt q sit functio cum ipsius p tum huius quantitatis $2gS - \frac{1}{2}(uu + vv + ww) + \Phi$ alioquin haec hypothesis est excludenda.

Coroll. 1.

89. Cum vera elementi fluidi celeritas sit $= V(uu + vv + ww)$ patet in hac hypothesi pressionem ita ab hac celeritate pendere, vt quo celerius fluidum mouetur, eo pressio magis diminuatur, idque in ratione duplicata celeritatis.

Coroll. 2.

90. Quantitas Φ eatenus in hanc aequationem ingreditur, quatenus ternae celeritates u, v, w etiam a tempore pendent, ita vt in eodem spatii loco motus fluidi cum tempore varietur.

Coroll. 3.

91. Functio autem temporis insuper accedens a sola variatione virium externarum, quibus tota fluidi massa sollicitatur, prouenit, quae cum sit arbitraria, etiam hanc functionem ad circumstantias accommodari oportet. In ipso autem motu ea nihil turbat.

Scholion.

Scholion.

92. Hypothesis haec tam late patet, vt fere omnes fluidorum motus, in quibus definiendis Auctores adhuc fuerunt occupati, in se complectatur; ex quo videri posset eam ad motum fluidorum prorsus esse necessariam, nisi iam casus in praecedente capite occurrissent, in quibus haec proprietas non deprehenditur. In probl. 32 enim vidimus motum subsistere posse existente $u = \mathrm{T}y$, $v = -\mathrm{T}x$ et $w = 0$, dummodo T fuerit functio ipsius $xx + yy$; neque vero hic conditio nostrae hypotheseos, qua $udx + vdy = \mathrm{T}(ydx - xdy)$ locum habet nisi solo casu $\mathrm{T} = \frac{1}{xx + yy}$, quo fit celeritas vera $\sqrt{(uu + vv)} = \frac{1}{\sqrt{(xx + yy)}}$; cum tamen reliquis casibus motus aeque subsistere possit. Deinde si densitas vtcunque a loco pendeat, seu calor fuerit maxime diuersus in variis regionibus, eius varietas sine dubio tam esse poterit irregularis, vt nullo modo tanquam functio quantitatis $2g\mathrm{S} - \frac{1}{2}(uu + vv + ww) + \Phi$ spectari queat, neque propterea nostra aequatio integrationem admittat, quod tamen ad motus realitatem omnino est necessarium. Neque hic vt supra de aequilibrio regerere licet, motum huiusmodi casibus dari non posse, cum potius ob id ipsum quod aequilibrium sit impossibile, necessario motus existere debeat; motus igitur omnino alius ac secundum hanc hypothesin eueniat necesse est, ex quo ea nonnisi ad certas motus species patere est censen-

censenda. Tum vero quia eam ad primam conditionem nondum accommodauimus, ea adhuc noua limitatione indiget, quam in sequente problemate inuestigabimus.

Problema 35.

93. Si motus fluidorum ita sit comparatus, vt formula $udx + vdy + wdz$ integrabilis existit, eos casus determinare quibus simul prima conditio ad motum requisita adimpletur.

Solutio.

Cum denotante q densitatem fluidi in eo loco, vbi ternae celeritates sunt u, v, w prima motus conditio, quam densitatis ratio suppeditauerat, postulat vt sit

$$\left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

Sit nunc vt ante I ea functio ipsarum x, y, z et t, ex qua fiat $d\mathrm{I} = udx + vdy + wdx + \Phi dt$, et quia hinc est

$$u = \left(\frac{d\,\mathrm{I}}{dx}\right);\quad v = \left(\frac{d\,\mathrm{I}}{dy}\right);\quad w = \left(\frac{d\,\mathrm{I}}{dz}\right)$$

aequatio illa euoluta perducetur ad hanc:

$$q\left(\left(\frac{dd\,\mathrm{I}}{dx^2}\right) + \left(\frac{dd\,\mathrm{I}}{dy^2}\right) + \left(\frac{dd\,\mathrm{I}}{dz^2}\right)\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)\left(\frac{d\,\mathrm{I}}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dy}\right)\left(\frac{d\,\mathrm{I}}{dy}\right)$$
$$+ \left(\frac{dq}{dz}\right)\left(\frac{d\,\mathrm{I}}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0.$$

Functionem ergo I necessario ita assumi oportet, vt huic aequationi satisfiat, quod eo difficilius praestatur,

ſtatur, ſi denſitas q a preſſione p pendeat, quia haec demum per alteram aequationem

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,dS - udu - vdv - wdw - d\Phi$$

definiri debet; quo ergo caſu illa aequatio difficillime reſoluetur. Interim quocunque modo has duas aequationes ſimul expedire licuerit, ſemper inde eiusmodi motus obtinetur, qui in fluido eius ratione denſitatis indolis, quae fuerit aſſumta locum habere poterit. Hanc ergo hypotheſin vix vnquam ad vſum reuocare licebit, niſi denſitas fluidi vbique et ſemper fuerit conſtans ſeu $q = b$, pro quo caſu aequationes noſtrae euadent:

$$\left(\frac{ddI}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dz^2}\right) = 0 \text{ et}$$

$$2gp = 2gbS - \tfrac{1}{2}b(uu + vv + ww - 2\Phi) + f : t.$$

Coroll. 1.

94. Poſita ergo denſitate conſtante $q = b$ ad ſolutionem requiritur inueſtigatio eiusmodi functionum I, vt ſit

$$\left(\frac{ddI}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dz^2}\right) = 0$$

tali autem functione inuenta tum demum celeritates innoteſcent $u = \left(\frac{dI}{dx}\right)$; $v = \left(\frac{dI}{dy}\right)$; $v = \left(\frac{dI}{dz}\right)$.

Coroll. 2.

95. Si ponamus $I = \Gamma : (\alpha x + \beta y + \gamma z)$, vbi quidem tempus t vtcunque immiſceri poteſt, haec

haec relatio inter α, β, γ oritur, vt esse debeat $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 0$; quod nisi vna imaginaria admittatur fieri nequit.

Coroll. 3.

96. Huic autem incommodo ratione functionis occurri potest, veluti si ponatur

$$I = e^{\alpha x + \beta y}(A \sin. z \surd(\alpha\alpha + \beta\beta) + B \cos. z \surd(\alpha\alpha + \beta\beta))$$

vel $I = e^{z\surd(\alpha\alpha + \beta\beta)}(A \sin. (\alpha x + \beta y) + B \cos. (\alpha x + \beta y))$

vbi constantes A et B tempus vtcunque inuoluere possunt.

Scholion 1.

97. Euidens est hos valores pro *I datos maxime* esse speciales completus enim valor complecti deberet duas functiones arbitrarias, vtramque duarum quantitatum variabilium, dum valor coroll. 2. datus est vnica functio vnicae variabilis. Interim litterae α, β pro lubitu accipi possunt, vnde facile innumerabiles valores pro I exhibere licet. Quotcunque autem valores fuerint inuenti, ii inuicem additi idoneum semper valorem pro I praebent. Infiniti autem alii valores huiusmodi speciales inueniri possunt, sumendo functionem quamcunque quantitatis $\alpha x + \beta y + \gamma z$ existente $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 0$, nullo respectu ad imaginaria habito, et cum tales functiones semper in forma $M + N\surd - 1$ contineantur,

tur, inde ſemper infinitos valores pro I ſatisfacientes formare licet, cuiusmodi ſunt:

Ang. tang. $\frac{M}{N}$; $e^{\pm M}(A\,\text{coſ.}N + B\,\text{ſin.}N)$; $e^{\pm N}(A\,\text{coſ.}M + B\,\text{ſin.}M)$.

Quoniam ergo pro M et N facile infiniti valores aſſignari poſſunt, hinc infinities infinitos valores reales pro I colligere licebit; quae multitudo inſuper mutando pro lubitu quantitates α, β, γ, quarum ſemper binae reales accipi poſſunt, in immenſum multiplicabitur. Plurimum autem abeſt, quominus ſumma omnium huiusmodi valorum, pro valore generali ipſius I haberi queat.

Scholion 2.

98. Huiusmodi autem motus plerumque eiusmodi incommoda implicant, vt eorum ſimilitudo in mundo vix locum inueniat, propterea quod fluidum continuo in loca fertur, vbi preſſio fit negatiua, ideoque continuitas tollitur, tum vero vas ad id continendum adhiberi nequit, niſi non tantum ſimul moueatur, ſed etiam eius figura continuo mutetur. Quod vnico exemplo oſtendiſſe ſufficiet. Sit $\beta = 0$, capiaturque $I = Ae^{\alpha x}\,\text{ſin.}\,\alpha z$ vt fiat $u = A\alpha e^{\alpha x}\,\text{ſin.}\,\alpha z$, $v = 0$ et $w = A\alpha e^{\alpha x}.\text{coſ.}\,\alpha z$ hincque $uu + vv + ww = AA\alpha\alpha e^{2\alpha x}$. Vrgeatur fluidum a ſola grauitate in directione ZY, eritque $S = b - z$, ex quo pro preſſione prodit $2gp = 2gb(b-z) - \frac{1}{2}AA\alpha\alpha b e^{2\alpha x}$, ſiquidem eundem motus ſtatum perpetuo durare ponamus. Sit breuitatis gratia

 $A\alpha =$

$A\alpha = 2\sqrt{gh}$ et preſſio euaneſcet vbi $z = h(1 - e^{2\alpha x})$.
Tab. VI. Fig. 30. Sumta ergo OX recta horizontali, in qua ſit $OX = x$, et verticalis deorſum vergens $XZ = -z$, linea curua OZ in qua preſſio euaneſcit erit logarithmica, et infra eam preſſiones ſequentur rationem profunditatum, ſupra eam vero erunt negatiuae, ibique ergo fluidi continuitas tollitur. Interim tamen in O vbi $x = 0$ et $z = 0$, fit $u = 0$ et $w = 2\sqrt{gh}$; ita vt hic fluidum ſurſum moueatur. In linea porro verticali OF ad profunditatem $OB = \frac{\pi}{\alpha}$ motus fiet deorſum pari celeritate $2\sqrt{gh}$; in D vero ſumta $OD = \frac{2\pi}{\alpha}$ iterum aeque celeriter ſurſum mouebitur. Tum vero ſumta profunditate $OA = \frac{\pi}{2\alpha}$ ob $\alpha z = -\frac{\pi}{2} = -90°$, ſolo motu horizontali $= \sqrt{2gh}$ ſecundum Aa feretur, in C vero ſumto $OC = 3OA$ ſecundum Cc, in E vero iterum ſecundum Ee. Simili modo res ſe habebit in reliquis rectis verticalibus verſus X ſumtis niſi quod celeritates continuo fiunt maiores. Ex quo intelligitur eiusmodi motum in nullo vaſe concipi poſſe, praeterquam quod fluidi continuitas in aſcenſu vltra curuam OZ ſoluitur, tum vero inſuper paſſim fluidum ſolutum ſe iterum continuo admiſcet, vbi ſcilicet infra curuam OZ deſcendit.

Scholion 3.

99. Vehementer autem difficile eſt huiusmodi motus, qui re ipſa exiſtere nequeunt, dignoſce-

re et ab aequationibus nostris generatim separare. Cuius incommodi causa praecipue in eo posita videtur, quod celeritates, quibus singula fluidi elementa mouentur, ad spatii puncta restrinximus, quandoquidem quantitates u, v, et w perpetuo ad idem punctum Z referuntur, et quouis tempore eius particulae, quae in Z versatur, motum declarant, in quo negotio ad vlteriorem progressum eiusdem particulae non amplius respicimus. Cum igitur in pluribus quaestionibus necesse sit cuiusque particulae motum continuo prosequi, veluti si motus vndulatorius et quasi vibratorius est inuestigandus, eadem motus principia ad hoc institutum accommodare conabor. Quo pacto id commodi assequemur, vt litterae peculiares celeritatibus designandis inseruientes ex calculo elidantur earum vero loco aliae variabiles erunt introducendae, quae fluidi statum ad certum tempus in se complectantur. In sequente itaque capite hanc inuestigationem sum suscepturus.

CAPVT VI.

DE MOTV FLVIDORVM EX STATV INITIALI DEFINIENDO.

Problema 36.

100. Dato fluidi ſtatu initiali quantitates variabiles deſcribere, ex quibus deinceps eiusdem fluidi ſtatum elapſo tempore quocunque definire oportet.

Solutio.

Tab. VI. Fig. 31. In ſtatu initiali pro quo ſumimus tempus $t = 0$ conſideremus fluidi elementum quodcunque, quod ſit in puncto Z per ternas coordinatas $OX = X$, $XY = Y$ et $YZ = Z$ determinato quae ergo quamdiu idem elementum in motu proſequimur, manent conſtantes; ſin autem ad alia fluidi elementa reſpicimus, vt quantitates variabiles erunt ſpectandae. Iam elapſo tempore t translatum ſit iſtud elementum ex Z in z, pro quo loco vocemus coordinatas $Ox = x$, $xy = y$, $yz = x$, quae ergo pro functionibus quatuor quantitatum X, Y, Z et temporis t ſunt habendae; Hinc iſtae coordinatae x, y, z ſi ſeruatis X, Y, Z iisdem ſolum tempus t varietur, totam viam ab elemento, quod initio erat in Z ſucceſſiue percurſam indicabunt. Ex quo ſi eius motus, dum per z tranſit,

transit, secundum coordinatas resoluatur, erunt celeritates:

secundum $Ox = (\frac{dx}{dt})$; secundum $xy = (\frac{dy}{dt})$, sec. $yz = (\frac{dz}{dt})$,

atque hinc porro accelerationes secundum easdem directiones habebuntur quae erunt:

$$\text{sec. } Ox = (\frac{ddx}{dt^2}), \text{ sec. } xy = (\frac{ddy}{dt^2}); \text{ sec. } yz = (\frac{ddz}{dt^2})$$

Praeterea etiam perspicuum est illas functiones x, y, z hac praeditas esse debere proprietate, vt euanescente tempore t fiat $x = X$, $y = Y$ et $z = Z$, ac facto $t = 0$, formulae modo exhibitae dabunt celeritates et accelerationes initiales eiusdem elementi dum adhuc erat in Z.

Denotet porro q densitatem, quam nostrum elementum elapso tempore $= t$ in z habebit, eritque etiam q functio quatuor variabilium X, Y, Z et t, vnde ad quoduis tempus cuiusque elementi densitatem definire licebit.

Sit denique p pressio conueniens elemento in z versanti elapso tempore t atque etiam haec quantitas erit functio quatuor variabilium X, Y, Z et t.

His positis tota motus determinatio huc redit, vt quales sint functiones istae quinque quantitates x, y, z, q et p quatuor variabilium X, Y, Z et t inuestigetur.

Coroll.

Coroll. 1.

101. Cum x ſit functio quatuor variabilium X, Y, Z et t erit eius differentiale completum ſeu ex variatione omnium natum

$$dx = dX\left(\frac{dx}{dX}\right) + dY\left(\frac{dy}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dx}{dZ}\right) + dt\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

quod idem ſimili modo de reliquis functionibus y, z, p et q eſt tenendum.

Coroll. 2.

102. Quod ſi idem elementum tempuſculo dt ex z in z' peruenire ponamus ob X, Y, Z pro conſtantibus habendas erunt coordinatae hunc locum z' determinantes:

$$Ox' = x + dt\left(\frac{dx}{dt}\right) : x'y' = y + dt\left(\frac{dy}{dt}\right) : y'z' = z + dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

tum vero denſitas in $z' = q + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$, et preſſio ibidem $= p + dt\left(\frac{dp}{dt}\right)$.

Coroll. 3.

103. Sin autem quaeratur vbi poſt idem tempus t aliud elementum, quod initio erat in Z′ loco ipſi Z proximo deprehendatur, ac pro Z′ coordinatae ſint $X + dX$, $Y + dY$ et $Z + dZ$ ſi locus quaeſitus ſtatuatur in z' erit pro eo

$$Ox' = x + dX\left(\frac{dx}{dX}\right) + dY\left(\frac{dx}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dx}{dZ}\right)$$

quod etiam tum de binis reliquis coordinatis $x'y'$ et $y'z'$ quam pro denſitate et preſſione eſt intelligendum.

Scholion.

Scholion.

104. Vt nunc tam densitatis quam pressionis variationem dum idem elementum fluidi tempusculo dt vlterius progreditur, definire, queamus, necesse est vt simul in statu initiali duo elementa proxima in Z et Z′ contemplemur eorumque situm mutuum post tempus t inuestigemus. Hac enim ratione diiudicare licebit, quanto deinceps tempusculo dt vel propius ad se inuicem accedant, vel longius recedant quia illo casu densitas crescit, hoc vero decrescit. Verum hic ipse binorum elementorum accessus vel recessus plurimum ab eorum situ mutuo pendent, fierique adeo potest, vt in eadem fluidi massa infinite parua bina ad se inuicem accedant, dum alia recedant. Quamobrem hoc iudicium eodem modo est instituendum, vti supra fecimus dum translatio cuiusdam massae infinite paruae consideratur, in quo negotio tamen bina elementa proxima simul perpendi debent quod idem quoque ad pressionis inuestigationem requiritur quem in finem sequens problema propono.

Problema 37.

105. Elapso tempore t si detur densitas q et pressio p elementi in z versantis, quod initio fuerat in Z, pro eodem tempore inuenire densitatem et pressionem alius elementi ipsi proximi in z'. Tab. VI. Fig. 31.

Solutio.

Pro loco elementi propositi in z sint coordinatae $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$; pro elemento autem ipsi proximo in

z' sint $Ox' = x + \alpha$, $x'y' = y + \beta$; $y'z' = z + \gamma$, existentibus particulis α, β, γ infinite paruis. Iam pro loco Z vbi elementum z initio fuerat positis coordinatis $OX = X$, $XY = Y$ et $YZ = Z$, sit Z' locus vbi alterum elementum z' initio haeserat, pro eoque coordinatae $OX' = X + dX$, $X'Y' = Y + dY'$; $Y'Z' = Z + dZ$ quae differentialia iam dX, dY, dZ per illas particulas datas α, β, γ definiri oportet. Viciffim autem ex 104 habemus:

$$\alpha = dX\left(\frac{dx}{dX}\right) + dY\left(\frac{dx}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dx}{dZ}\right)$$
$$\beta = dX\left(\frac{dy}{dX}\right) + dY\left(\frac{dy}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dy}{dZ}\right)$$
$$\gamma = dX\left(\frac{dz}{dX}\right) + dY\left(\frac{dz}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dz}{dZ}\right)$$

Hinc ergo fit

$$\begin{aligned}\alpha\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \beta\left(\frac{dx}{dZ}\right) = {} & dX\left(\left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)\right) \\ & + dY\left(\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \gamma\left(\frac{dy}{dZ}\right) = {} & dX\left(\left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)\right) \\ & + dY\left(\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)\right)\end{aligned}$$

Vnde si breuitatis gratia ponamus:

$$\left.\begin{aligned} & + \left(\frac{dx}{dX}\right)\left[\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)\right] \\ & + \left(\frac{dx}{dY}\right)\left[\left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right)\right] \\ & + \left(\frac{dx}{dZ}\right)\left[\left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right) - \left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dY}\right)\right] \end{aligned}\right\} = K$$

colli-

colligitur fore

$$dX = \frac{1}{K}\left\{\begin{array}{l} +\alpha\left[\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right)-\left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)\right] \\ +\beta\left[-\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right)+\left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)\right] \\ +\gamma\left[\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)-\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)\right] \end{array}\right\}$$

$$dX = \frac{1}{K}\left\{\begin{array}{l} +\alpha\left[\left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)-\left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right)\right] \\ +\beta\left[\left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right)-\left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)\right] \\ +\gamma\left[-\left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)+\left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)\right] \end{array}\right\}$$

$$dZ = \frac{1}{K}\left\{\begin{array}{l} +\alpha\left[-\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dX}\right)+\left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right)\right] \\ +\beta\left[\left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dY}\right)-\left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right)\right] \\ +\gamma\left[\left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dY}\right)-\left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dY}\right)\right] \end{array}\right\}$$

Inuentis nunc his differentialibus pro loco z' habebimus

densitatem $= q + dX\left(\frac{dq}{dX}\right) + dY\left(\frac{dq}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dq}{dZ}\right)$ et

pressionem $= p + dX\left(\frac{dp}{dX}\right) + dY\left(\frac{dp}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dp}{dZ}\right)$.

Coroll. I.

106. Quantitas illa K quae in his formulis denominatorem constituit facta euolutione ita exprimitur:

$$K = \left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) + \left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) + \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)$$
$$- \left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right) - \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right)$$

quae expressio iam immunis est ab ordine coordinatarum.

Coroll. 2.

107. Si ad calculum contrahendum ponamus:

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)=A\,;\ \left(\frac{dx}{dY}\right)=D\,;\ \left(\frac{dx}{dZ}\right)=G$$

$$\left(\frac{dy}{dY}\right)=B\,;\ \left(\frac{dy}{dZ}\right)=E\,;\ \left(\frac{dy}{dX}\right)=H$$

$$\left(\frac{dz}{dZ}\right)=C\,;\ \left(\frac{dz}{dX}\right)=F\,;\ \left(\frac{dz}{dY}\right)=I$$

magis perſpicua euadet haec forma:

$$K=ABC+DEF+GHI-AEI-BFG-CDH.$$

Coroll. 3.

108. His porro iisdem adhibendis *ſignis* obtinebimus

$$dX=\frac{\alpha(BC-EI)+\beta(GI-CD)+\gamma(DE-BG)}{K}$$

$$dY=\frac{\alpha(EF-CH)+\beta(AC-FG)+\gamma(GH-AE)}{K}$$

$$dZ=\frac{\alpha(HI-BF)+\beta(DF-AI)+\gamma(AB-DH)}{K}$$

Coroll. 4.

109. Quo hae formulae magis contrahantur, quandoquidem earum ampliſſimus erit vſus ponamus porro:

$$BC-EI=\mathfrak{A}\,;\ GI-CD=\mathfrak{D}\,;\ DE-BG=\mathfrak{G}$$

$$AC-FG=\mathfrak{B}\,;\ GH-AE=\mathfrak{E}\,;\ EF-CH=\mathfrak{H}$$

$$AB-DH=\mathfrak{C}\,;\ HI-BF=\mathfrak{F}\,;\ DF-AI=\mathfrak{I}$$

vt

vt habeamus

$$dX=\frac{\alpha\mathfrak{A}+\beta\mathfrak{D}+\gamma\mathfrak{G}}{K};\ dY=\frac{\alpha\mathfrak{H}+\beta\mathfrak{B}+\gamma\mathfrak{E}}{K};\ dZ=\frac{\alpha\mathfrak{F}+\beta\mathfrak{I}+\gamma\mathfrak{C}}{K}$$

Problema 38.

110. Elapſo tempore t, ſi elementum in z' ipſi elemento in z proximum concipiatur, huius elementi z' motum per ternas celeritates ſecundum coordinatarum Ox, xy et yz directiones exhibere.

Solutio.

Sint elementi in z ternae celeritates vt ſupra u, v, w, ac vidimus ex receptis hic denominationibus fore

$$u=\left(\frac{dx}{dt}\right),\quad v=\left(\frac{dy}{dt}\right),\quad w=\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

eruntque hae celeritates pariter tanquam functiones quatuor variabilium X, Y, Z et t ſpectandae. Maneant iam vt ante puncti z' coordinatae $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$, ſitque Z' eius locus in principio, et pro eo differentialia dX, dY, dZ ex datis α, β, γ per problema praecedens determinentur: quo facto erunt puncti proximi z' celeritates

$$\text{ſec. } Ox'=u+dX\left(\frac{du}{dX}\right)+dY\left(\frac{du}{dY}\right)+dZ\left(\frac{du}{dZ}\right)$$

$$\text{ſec. } x'y'=v+dX\left(\frac{dv}{dX}\right)+dY\left(\frac{dv}{dY}\right)+dZ\left(\frac{dv}{dZ}\right)$$

$$\text{ſec. } y'z'=w+dX\left(\frac{dw}{dX}\right)+dY\left(\frac{dw}{dY}\right)+dZ\left(\frac{dw}{dZ}\right)$$

 atque

atque elisis litteris u, v, w eae ita se habebunt

$$\text{sec. } Ox' = \left(\frac{dx}{dt}\right) + dX\left(\frac{ddx}{dt\,dX}\right) + dY\left(\frac{ddx}{dt\,dY}\right) + dZ\left(\frac{ddx}{dt\,dZ}\right)$$

$$\text{sec. } x'y' = \left(\frac{dy}{dt}\right) + dX\left(\frac{ddy}{dt\,dX}\right) + dY\left(\frac{ddy}{dt\,dY}\right) + dZ\left(\frac{ddy}{dt\,dZ}\right)$$

$$\text{sec. } y'z' = \left(\frac{dz}{dt}\right) + dX\left(\frac{ddz}{dt\,dX}\right) + dY\left(\frac{ddz}{dt\,dY}\right) + dZ\left(\frac{ddz}{dt\,dZ}\right)$$

vbi loco dX, dY, dZ valores ante inuentos per α, β, γ scribi oportet.

Scholion.

Tab. V. Fig. 23 111. Transferamus haec ad figuram 23, vbi Z sit id punctum quod modo in z (fig. 31) considerauimus, cuius ergo ternae celeritates sunt $u = \left(\frac{dx}{dt}\right)$, $v = \left(\frac{dy}{dt}\right)$, $w = \left(\frac{dz}{dt}\right)$, loco puncti autem z' illi proximi successiue consideremus tria puncta L, M, N pro quibus sit $ZL = \alpha$, $ZM = \beta$, $ZN = \gamma$ Pro puncto ergo L in valoribus supra pro differentialibus dX, dY, dZ inuentis poni debet $\beta = 0$, $\gamma = 0$ pro puncto M, $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ et pro puncto N; $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Quare puncti L ternae celeritates erunt supra erat

$$\begin{array}{l|l}
\text{sec. } OX = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{A}}{K}\left(\frac{ddx}{dt\,dX}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{D}}{K}\left(\frac{ddx}{dt\,dY}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{G}}{K}\left(\frac{ddx}{dt\,dZ}\right) & u + dx\left(\frac{du}{dx}\right) \\
\text{sec. } XY = \left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{A}}{K}\left(\frac{ddy}{dt\,dX}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{D}}{K}\left(\frac{ddy}{dt\,dY}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{G}}{K}\left(\frac{ddy}{dt\,dZ}\right) & v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right) \\
\text{sec. } YZ = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{A}}{K}\left(\frac{ddz}{dt\,dX}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{D}}{K}\left(\frac{ddz}{dt\,dY}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{G}}{K}\left(\frac{ddz}{dt\,dZ}\right) & w + dx\left(\frac{dw}{dx}\right)
\end{array}$$

Puncti

Puncti autem M celeritates erunt

$$\text{sec. } OX = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\mathfrak{b}}{K}\left[\mathfrak{D}\left(\frac{d\,d\,x}{dt\,dX}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{d\,d\,x}{dt\,dY}\right) + \mathfrak{J}\left(\frac{d\,d\,x}{dt\,dZ}\right)\right] \quad \Big| \quad u + dy\left(\frac{du}{dy}\right)$$

$$\text{sec. } XY = \left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\mathfrak{b}}{K}\left[\mathfrak{D}\left(\frac{d\,d\,y}{dt\,dX}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{d\,d\,y}{dt\,dY}\right) + \mathfrak{J}\left(\frac{d\,d\,y}{dt\,dZ}\right)\right] \quad \Big| \quad v + dy\left(\frac{dv}{dy}\right)$$

$$\text{sec. } YZ = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\mathfrak{b}}{K}\left[\mathfrak{D}\left(\frac{d\,d\,z}{dt\,dX}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{d\,d\,z}{dt\,dY}\right) + \mathfrak{J}\left(\frac{d\,d\,z}{dt\,dZ}\right)\right] \quad \Big| \quad w + dy\left(\frac{dw}{dy}\right)$$

ac denique puncti N celeritates

$$\text{sec. } OX = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\gamma}{K}\left[\mathfrak{G}\left(\frac{d\,d\,x}{dt\,dX}\right) + \mathfrak{E}\left(\frac{d\,d\,x}{dt\,dY}\right) + \mathfrak{C}\left(\frac{d\,d\,x}{dt\,dZ}\right)\right] \quad \Big| \quad u + dz\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$\text{sec. } XY = \left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\gamma}{K}\left[\mathfrak{G}\left(\frac{d\,d\,y}{dt\,dX}\right) + \mathfrak{E}\left(\frac{d\,d\,y}{dt\,dY}\right) + \mathfrak{C}\left(\frac{d\,d\,y}{dt\,dZ}\right)\right] \quad \Big| \quad v + dz\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$\text{sec. } YZ = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\gamma}{K}\left[\mathfrak{G}\left(\frac{d\,d\,z}{dt\,dX}\right) + \mathfrak{E}\left(\frac{d\,d\,z}{dt\,dY}\right) + \mathfrak{C}\left(\frac{d\,d\,z}{dt\,dZ}\right)\right] \quad \Big| \quad w + dz\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

His autem formulis notatis sequens problema haud difficulter soluetur si problema 19 in subsidium vocemus

Problema 39.

112. Positis quae hactenus sunt explicata, elementi fluidi figuram pyramidalem habentis Z L M N translationem tempusculo dt factam inuestigare et densitatis incrementum definire. Tab. V. Fig. 23.

Solutio.

Problema hoc prorsus conuenit cum superiori (12), vnde eandem quoque solutionem habebit, si modo quae hic in designatione sunt mutata probe obseruentur. Primo scilicet pyramidis latera, quae ibi erant dx, dy, dz hic sunt α, $\mathfrak{b}$, γ; deinde celeritates u, v, w hic designantur per $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$, et formulae differentiales $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{dv}{dy}\right)$, $\left(\frac{dw}{dz}\right)$ ex §. praec.

facile

facile decerpuntur. Hinc cum istius pyramidis volumen in Z esset $= \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$, post translationem eius volumen erit

$$\tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma + \tfrac{1}{6}\frac{\alpha\beta\gamma dt}{K}\left\{\begin{array}{l} +\mathfrak{A}\left(\frac{ddx}{dtdX}\right)+\mathfrak{H}\left(\frac{ddx}{dtdY}\right)+\mathfrak{F}\left(\frac{ddx}{dtdZ}\right) \\ +\mathfrak{D}\left(\frac{ddy}{dtdX}\right)+\mathfrak{B}\left(\frac{ddy}{dtdY}\right)+\mathfrak{I}\left(\frac{ddy}{dtdZ}\right) \\ +\mathfrak{G}\left(\frac{ddz}{dtdX}\right)+\mathfrak{E}\left(\frac{ddz}{dtdY}\right)+\mathfrak{C}\left(\frac{ddz}{dtdZ}\right) \end{array}\right\}$$

Dum autem haec pyramis erat in Z eius densitas erat $= q$, post tempusculum autem dt eiusdem particulae densitas per hypotheses hic factas est $q + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$. Quare cum vtrumque volumen per suam densitatem multiplicatum eandem massam praebere debeat, sequens hinc nascitur aequatio densitatis rationem determinans:

$$\frac{K}{q}\left(\frac{dq}{dt}\right).\begin{array}{l} +\mathfrak{A}\left(\frac{ddx}{dtdX}\right)+\mathfrak{H}\left(\frac{ddx}{dtdY}\right)+\mathfrak{F}\left(\frac{ddx}{dtdZ}\right) \\ +\mathfrak{D}\left(\frac{ddy}{dtdX}\right)+\mathfrak{B}\left(\frac{ddy}{dtdY}\right)+\mathfrak{I}\left(\frac{ddy}{dtdZ}\right) \\ +\mathfrak{G}\left(\frac{ddz}{dtdX}\right)+\mathfrak{E}\left(\frac{ddz}{dtdY}\right)+\mathfrak{C}\left(\frac{ddz}{dtdZ}\right) \end{array}\Bigg\} = 0$$

vbi litterarum maiuscularum hic occurrentium valores ex §§. 107 et 109 desumi debent. Cum igitur inde sit

$$\left(\frac{ddx}{dtdX}\right) = \left(\frac{dA}{dt}\right);\ \left(\frac{ddx}{dtdY}\right) = \left(\frac{dD}{dt}\right);\ \left(\frac{ddx}{dtdZ}\right) = \left(\frac{dG}{dt}\right) \text{ etc.}$$

si loco litterarum germanicarum valores ex § 109 scribantur, erit

$$\frac{K}{q}\left(\frac{dq}{dt}\right)\begin{array}{l} +(BC-EI)\left(\frac{dA}{dt}\right)+(EF-CH)\left(\frac{dD}{dt}\right)+(HI-BF)\left(\frac{dG}{dt}\right) \\ +(GI-CD)\left(\frac{dH}{dt}\right)+(AC-FG)\left(\frac{dB}{dt}\right)+(DF-AI)\left(\frac{dE}{dt}\right) \\ +(DE-BG)\left(\frac{dF}{dt}\right)+(GH-AE)\left(\frac{dI}{dt}\right)+(AB-DH)\left(\frac{dC}{dt}\right) \end{array}\Bigg\} = 0$$

quae

quae expressio si comparetur cum valore litterae K qui est

$$K = ABC + DEF + GHI - AEI - BFG - CDH$$

facile perspicitur illius membrum posterius reduci ad $(\frac{dK}{dt})$, ita vt iam solutio problematis perducatur ad hanc simplicem aequationem

$$\frac{K}{q}(\frac{dq}{dt}) + (\frac{dK}{dt}) = 0 \text{ seu } K(\frac{dq}{dt}) + q(\frac{dK}{dt}) = 0$$

vel ad hanc concinniorem $(\frac{d.Kq}{dt}) = 0$. Ex quo intelligimus Kq eiusmodi esse functionem, cuius differentiale ex sola variabilitate temporis t ortum euanescat, seu quae omni tempore maneat eadem. Manifestum ergo est hoc fieri non posse, nisi Kq sit functio tantum harum trium variabilium X, Y, Z tempore excluso, vnde problematis solutio continebitur hac formula

$$Kq = f:(X, Y, Z).$$

Coroll. I.

113. Quantitas K determinatur per conditiones quibus coordinatae x, y, z post tempus t a principalibus X, Y, Z in statu initiali pendent, quemadmodum eius forma §. 106 exhibita declarat. Cum igitur quantitates x, y, z necessario tempus t inuoluant, id ita fieri necesse est vt ex forma Kq temporis ratio penitus egrediatur.

Coroll. 2.

114. Quod si ergo densitas fluidi q fuerit quantitas constans tum ipsa forma K a tempore debet esse immunis. Sin autem densitas q fuerit variabilis eius quantitas ad quoduis tempus t assignari poterit, cum sit $q = \frac{f:(X, Y, Z)}{K}$.

Coroll. 3.

115. Hic autem imprimis notari oportet, quantitatem q dum coordinatae principales X, Y, Z manent eaedem, perpetuo eiusdem fluidi elementi densitatem exprimere; quod ergo elementum si nullum mutationem in densitate patiatur, *manebit* q quantitas constans; etiamsi reliquae fluidi partes *diuersas* habeant densitates.

Coroll. 4.

116. Si ergo fluidum sit heterogeneum seu ex fluidis pluribus diuersae naturae mixtum, haec ratio motum definiendi plurimum praestat praecedenti; quoniam ibi quantitas q non ad eandem fluidi particulam, sed ad eundem locum refertur, ita vt omnium particularum, quae successiue per idem punctum transeunt, densitates exprimat.

Scholion 1.

117. In solutione huius problematis merito desideratur, quod demum per plures ambages ad postre-

postremam simplicitatem sit perducta; et quia tandem quasi casu ad aequationem differentialem integrabilem est peruentum; nullum est dubium, quin alia detur via quae immediate ad istam formulam integralem perducat. In ambages autem illas ideo incidi, quod solutionem eodem modo, quo supra sum vsus adstruere volui, cum tamen ratio qua hic motum intuemur, aliam viam commonstret ad solutionem perueniendi. Consideretur enim statim in statu initiali molecula fluidi sub figura pyramidali Z L M N, et quaeratur eius translatio tempore finito $= t$ facta. Tum igitur perueniat in situm $z\,l\,m\,n$, quae figura erit pariter pyramis vtcunque irregularis, si enim quis dubitet, an post tempus finitum $= t$ hedrae huius pyramidis etiamnunc pro planis tuto haberi queant? is priorem pyramidem Z L M N adhuc infinities minorem accipiat, et quantumuis ante hedrae fuerint conuexae seu concauae, nunc agnoscere debebit, eas infinite propius ad planitiem reduci, atque adeo pro planis haberi oportere. Quoniam igitur statim pyramidem principalem Z L M N infinite paruam assumimus, recte quoque in statu translato figuram $z\,l\,m\,n$ pro vero pyramide habebimus. Istius ergo pyramidis $z\,l\,m\,n$ inuestigetur volumen, quod, cum eius densitas iam in z elapso tempore $= t$ statuatur $= q$, si per q multiplicetur, prodibit massa istius moleculae, quae quia perpetuo manet eadem, eiusmodi sit functio necesse est; quae a tempore plane non Tab. V. Fig. 23.

 pendeat;

pendeat; seu ista massa erit functio trium quantitatum X, Y, Z tantum excluso tempore t. Quam cum solutio praecedens tandem dederit $Kq = f:(X, Y, Z)$, perspicuum est, si methodo hic indicata vtamur, volumen illius moleculae ipsi quantitati K *proportionale* inueniri debere.

Scholion 2.

118. Haec consideratio omnino est digna, quam diligentius prosequamur. Posito ergo *pro* pyramide principali $OX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$; tum vero $ZL = dX$, $ZM = dY$ et $ZN = dZ$, vt eius volumen sit $= \frac{1}{6} dX\, dY\, dZ$; sint *pro puncto* z in pyramide translata coordinatae $Ox = x$, $xy = y$ et $yz = z$. Nunc consideretur, si punctum in *statu* initiali, his coordinatis $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ definiatur, id tempore t translatum iri in punctum his coordinatis $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$ definitum, dum sit:

$$\alpha = A\,dX + D\,dY + G\,dZ;\quad \beta = H\,dX + B\,dY + E\,dZ;$$
$$\gamma = F\,dX + I\,dY + C\,dZ.$$

Hinc iam ex quaternis punctis pyramidis principalis, quaterna puncta translatae definiantur, quorum coordinatae ita se habebunt:

$$\text{pro } z \begin{Bmatrix} Ox = x \\ xy = y \\ yz = z \end{Bmatrix};\quad \text{pro } l \begin{Bmatrix} Or = x + A\,dX \\ rp = y + H\,dX \\ pl = z + F\,dX \end{Bmatrix}$$

pro

$$\text{pro } m \begin{cases} Os = x + D\,dY \\ sq = y + B\,dY \\ qm = z + I\,dY \end{cases} \text{pro } n \begin{cases} Ot = x + G\,dZ \\ to = y + E\,dZ \\ on = z + C\,dZ \end{cases}$$

Ex his iam colliguntur latera pyramidis translatae:

$$zl^2 = (AA + HH + FF)dX^2$$
$$zm^2 = (BB + II + DD)dY^2$$
$$zn^2 = (CC + GG + EE)dZ^2$$
$$lm^2 = (AdX - DdY)^2 + (HdX - BdY)^2 + (FdX - IdY)^2$$
$$ln^2 = (AdX - GdZ)^2 + (HdX - EdZ)^2 + (FdX - CdZ)^2$$
$$mn^2 = (DdY - GdZ)^2 + (BdY - EdZ)^2 + (IdY - CdZ)^2.$$

Hinc porro secundum praecepta §. 12 definiantur angulorum ad z cosinus:

$$\text{cos}.\, lzm = \nu = \frac{AD + BH + FI}{zl.\, zm}\, dX\, dY$$
$$\text{cos}.\, lzn = \mu = \frac{AG + EH + CF}{zl.\, zn}\, dX\, dZ$$
$$\text{cos}.\, mzn = \lambda = \frac{DG + BE + CI}{zm.\, zn}\, dY\, dZ.$$

Quibus valoribus substitutis volumen pyramidis $zlmn$ deducitur $=$

$$\tfrac{1}{6} dX\, dY\, dZ \sqrt{\begin{cases} +(AA+HH+FF)(BB+II+DD)(CC+GG+EE) \\ -(AD+BH+FI)^2(CC+GG+EE) \\ -(AG+EH+CF)^2(BB+II+DD) \\ -(DG+BE+CI)^2(AA+HH+FF) \\ +2(AD+BH+FI)(AG+EH+CF)(DG+BE+CI) \end{cases}}$$

quae forma post signum radicale si euoluatur, praecise quadrato quantitatis K aequalis deprehenditur: ita vt hoc volumen sit $= \tfrac{1}{6} K\, dX\, dY\, dZ$ eiusque

 propte-

propterea massa $=\frac{1}{8}Kq\,dX\,dY\,dZ$, vnde quantitas Kq a tempore t neutiquam pendere debet.

Problema 40.

119. Si fluidum a viribus quibuscunque acceleratricibus P, Q, R secundum directiones ternarum coordinatarum sollicitetur, aequationem inuestigare, qua pressio in singulis fluidi elementis determinatur.

Solutio.

Tab. V. Fig. 25. Elapso tempore t consideretur molecula fluidi quaecunque in Z, cui calculi gratia figura parallepipedi $ZLMNzlmn$ tribuatur, ac pro puncto Z positis coordinatis $OX=x$, $XY=y$, $YZ=z$ sint latera huius parallepipedi $ZL=\alpha$, $ZM=\beta$, et $Zz=\gamma$, vt eius volumen sit $=\alpha\beta\gamma$ et massa $=q\alpha\beta\gamma$. Iam posita pressione in $z=p$, quae est functio quantitatum X, Y, Z et temporis t, vbi X, Y, Z, sunt coordinatae eius puncti, vbi elementum, quod iam est in Z initio erat situm. Quo igitur hinc pressio in L definiatur cuius elementi coordinatae sunt $x+\alpha$, y, z, videndum est, vbi hoc elementum initio fuerat, et ex praecedentibus eius loci coordinatae erant

$$X+\frac{\alpha(BC-EI)}{K};\ Y+\frac{\alpha(EF-CH)}{K};\ Z+\frac{\alpha(HI-BF)}{K}$$

vnde concludimus pressionem in L fore:

$$p+\frac{\alpha(BC-EI)}{K}\left(\frac{dp}{dX}\right)+\frac{\alpha(EF-CH)}{K}\left(\frac{dp}{dY}\right)+\frac{\alpha(HI-BF)}{K}\left(\frac{dp}{dZ}\right)$$

cuius

cuius excessu supra pressionem p in Z tota hedra $LNln$ secundum directionem AO vrgetur. Istius autem hedrae superficies est $= \mathfrak{E}\gamma$, per quam ille excessus multiplicatus dat, vim motricem, haecque per massam $q\alpha\mathfrak{E}\gamma$ diuisa vim acceleratricem. Quare cum nostra molecula in directione OA sollicitetur vi acceleratrice P, si ab hac illa auferatur remanebit vera vis acceleratrix secundum directionem AO. Cum ergo acceleratio sit $= (\frac{ddx}{dt^2})$, habebitur haec aequatio

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 2gP - \frac{2g(BC-EI)}{Kq}\left(\frac{dp}{dX}\right) - \frac{2g(EF-CH)}{Kq}\left(\frac{dp}{dY}\right) - \frac{2g(HI-BF)}{Kq}\left(\frac{dp}{dZ}\right)$$

similique modo pro duabus reliquis directionibus reperitur:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2gQ - \frac{2g(GI-CD)}{Kq}\left(\frac{dp}{dX}\right) - \frac{2g(AC-FG)}{Kq}\left(\frac{dp}{dY}\right) - \frac{2g(DF-AI)}{Kq}\left(\frac{dp}{dZ}\right)$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 2gR - \frac{2g(DE-BG)}{Kq}\left(\frac{dp}{dX}\right) - \frac{2g(GH-AE)}{Kq}\left(\frac{dp}{dY}\right) - \frac{2g(AB-DH)}{Kq}\left(\frac{dp}{dZ}\right).$$

Introducendis ergo breuitatis ergo litteris germanicis ex §. 109 adipiscimur has tres aequationes pro pressione p definienda:

$$\mathfrak{A}\left(\frac{dp}{dX}\right) + \mathfrak{H}\left(\frac{dp}{dY}\right) + \mathfrak{F}\left(\frac{dp}{dZ}\right) = KqP - \frac{Kq}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$$

$$\mathfrak{D}\left(\frac{dp}{dX}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{dp}{dY}\right) + \mathfrak{J}\left(\frac{dp}{dZ}\right) = KqQ - \frac{Kq}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$$

$$\mathfrak{G}\left(\frac{dp}{dX}\right) + \mathfrak{E}\left(\frac{dp}{dY}\right) + \mathfrak{C}\left(\frac{dp}{dZ}\right) = KqR - \frac{Kq}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

Vt hinc formulam $(\frac{dp}{dX})$ definiamus, multiplicemus primam per $\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \mathfrak{E}\mathfrak{J} = AK$ secundam per $\mathfrak{E}\mathfrak{F} - \mathfrak{C}\mathfrak{H} = HK$, et tertiam per $\mathfrak{H}\mathfrak{J} - \mathfrak{B}\mathfrak{F} = FK$ ob

A $\mathfrak{A}$

$A\mathfrak{A} + H\mathfrak{D} + FG = K$ reperietur per KK diuidendo:

$$\left(\frac{dp}{dX}\right) = q(AP+HQ+FR) - \frac{q}{2g}\left(A\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + H\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + F\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right)$$

similique modo elicitur:

$$\left(\frac{dp}{dY}\right) = q(DP+BQ+IR) - \frac{q}{2g}\left(D\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + B\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + I\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right)$$

$$\left(\frac{dp}{dZ}\right) = q(GP+EQ+CR) - \frac{q}{2g}\left(G\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + E\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + C\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right).$$

Multiplicetur porro prima per dX, secunda per dY, tertia per dZ; vt obtineatur differentiale pressionis p, si tempus t constans statuatur, et cum in eadem hypothesi sit:

$$AdX + DdY + GdZ = dx;\quad HdX + BdY + EdZ = dy \text{ et}$$
$$FdX + IdY + CdZ = dz$$

nostrae tres aequationes in hanc vnam coalescent:

$$dp = q(Pdx + Qdy + Rdz) - \frac{q}{2g}\left(dx\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + dy\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + dz\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right)$$

in cuius integratione tempus t pro constante est habendum.

Coroll. I.

120. Cum x, y, z sint functiones ipsarum X, Y, Z et t, si ponamus differentiale completum $dx = AdX + DdY + GdZ + Ldt$ erit $\left(\frac{dx}{dt}\right) = L$ ideoque $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{dL}{dt}\right)$, loco dx autem in hac aequatione scribi oportet $AdX + DdY + GdZ$ quia in ea tempus constans assumitur.

Coroll.

Coroll. 2.

121. Ante autem vidimus, quomodocunque densitas q sit variabilis quantitatem Kq tempus t non inuoluere. Cum autem actio S a loco in quo elementum fluidi post tempus t reperitur, pendeat, ea vtique tempus in se includet.

Scholion.

122. Quoniam etiam in hac solutione ad aequationem multo simpliciorem pertigimus, quam per calculi ambages expectare licebat, nullum est dubium quin etiam via faciliori et concinniori ad eandem solutionem pertingere liceat. Neque vero facile patet, quomodo ratiocinium eo perducens, dirigi conueniat, id quidem perspicuum est formulam $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ exprimere differentiale actionis virium in elementum, cuius motum consideramus, prorsus vti in methodo superiori. Verum differentiale dp hic prorsus diuersam habet significationem, dum p hic est functio variabilium X, Y, Z et t, hincque sumendo t constans computatur, dum ante p fuerat functio quantitatum x, y, z et t, ex cuius differentiatione sumto quidem t item constante, differentiale dp capiebatur, quia vero hic ipsae coordinatae x, y, z iam tempus t inuoluunt, hoc differentiale ab illo prorsus discrepet necesse est. Tum vero etsi $(\frac{dx}{dt})$, $(\frac{dy}{dt})$, $(\frac{dz}{dt})$ celeritates quas supra u, v, w vocauimus, expri-

 munt,

munt, tamen hae formulae $(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2})$, $(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2})$, $(\frac{d\,d\,z}{d\,t^2})$, plurimum discrepant ab $(\frac{d\,u}{d\,t})$, $(\frac{d\,v}{d\,t})$, $(\frac{d\,w}{d\,t})$; denotant enim ipsas accelerationes, quas supra litteris U, V et W designauimus. Ratio autem discrepantiae manifesto in eo est sita, quod hic vniuersum calculum ad longe alias quaternas variabiles referimus, atque ante fecimus. Vnde quidem statim hoc commodi sumus nacti, vt prior aequatio pro densitate inuenta integrationem admiserit, contra vero altera pro pressione magis complicata videtur.

Problema 41.

Tab. VI. Fig. 31. 123. Dato fluidi cuiuscunque statu *initiali* et viribus, quarum actionem sustinet, *inuestigare motum* quo deinceps feretur, eiusque statum ad quoduis tempus.

Solutio.

In statu initiali consideremus fluidi particulam quamcunque in Z, cuius locus definiatur ternis coordinatis $OX = X$, $XY = Y$ et $YZ = Z$: tum vero eiusdem particulae sit densitas $= Q$ pressio vero $= P$. Praeterea autem eius motus ita sit comparatus, vt resolutus praebeat celeritates secundum directiones $OX = U$, $XY = V$ et $YZ = W$ Cum igitur status initialis sit cognitus, erunt Q, P, U, V, W functiones datae ternarum variabilium X, Y, Z. Elapso iam tempore $= t$, eadem particula,

cula, quae initio erat in Z, peruenerit in z cuius locus similibus coordinatis $Ox = x$, $xy = y$ et $yz = z$ definiatur, quae ergo spectandae sunt vt functiones quatuor variabilium X, Y, Z et t, ita comparatae, vt posito tempore $t = 0$, abeant in coordinatas initiales X, Y et Z, ex quo sequitur eodem casu $t = 0$ fore:

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) = 1;\ \left(\frac{dy}{dX}\right) = 0;\ \left(\frac{dz}{dX}\right) = 0$$
$$\left(\frac{dx}{dY}\right) = 0;\ \left(\frac{dy}{dY}\right) = 1;\ \left(\frac{dz}{dY}\right) = 0$$
$$\left(\frac{dx}{dZ}\right) = 0;\ \left(\frac{dy}{dZ}\right) = 0;\ \left(\frac{dz}{dZ}\right) = 1.$$

Deinde vero eiusdem particulae, dum post tempus $= t$ per punctum z transit, eius ternae celeritates erunt

secundum $Ox = \left(\frac{dx}{dt}\right) = u$; sec. $xy = \left(\frac{dy}{dt}\right) = v$; sec. $yz = \left(\frac{dz}{dt}\right) = w$

vnde euanescente tempore t fiat necesse est $\left(\frac{dx}{dt}\right) = U$; $\left(\frac{dy}{dt}\right) = V$ et $\left(\frac{dz}{dt}\right) = W$

Statuatur porro particulae iam per z transeuntis densitas $= q$ et pressio $= p$, quae duae quantitates itidem erunt functiones quatuor variabilium X, Y, Z et t, ita comparatae vt posito $t = 0$ fiat $q = Q$ et $p = P$.

Vires denique acceleratrices, quibus particula in z vrgetur reducantur ad has.

secundum $Ox = \mathfrak{P}$; secundum $xy = \mathfrak{Q}$; secund. $yz = \mathfrak{R}$.

Quibus positis euidens est cognitionem motus eo redire, vt quales hae quinque quantitates x, y, z, q et p sint functiones quatuor variabilium X, Y, Z et t definiatur, haecque determinatio ex sequentibus duabus aequationibus est petenda.

Pro priori quaeratur ex variabilibus x, y, z haec quantitas:

$$K = \begin{array}{l} +\left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right)+\left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)+\left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) \\ -\left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)-\left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)-\left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) \end{array}$$

vnde ex ante notatis constat posito $t = 0$, fore $K = 1$. Cum igitur viderimus in *probl* 39. durante motu pro eadem particula *quantitatem* Kq, perpetuo eundem valorem conseruare eius valor vtique illi aequalis esse debet, quem habebat *initio* posito $t = 0$, tum autem fit $K = 1$ et $q = Q$. Quocirca prior aequatio motus determinationem continens erit

$$Kq = Q, \text{ ideoque } q = \frac{Q}{K}.$$

Alteram aequationem in probl. praec. eliciuimus, vbi introducitur litera g altitudinem lapsus grauium tempore vnius minuti secundi designans, eum in finem vt tempus t in minutis secundis et celeritates per spatia vno minuto secundo percursa exprimi queant. Hinc igitur altera aequatio motus determinationem continens erit:

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g(\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz) - dx\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) - dy\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - dz\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

in

in qua aequatione differentiali probe obseruandum est, tempus t constans assumi solasque coordinatas initiales X, Y, Z vt variabiles tractari. Quare cum x, y, z insuper tempus t inuoluant, earum differentialia dx, dy, dz huic conditioni conformiter sunt capienda. Cum autem integrale fuerit inventum, loco constantis ei quamcunque temporis functionem adiici conueniet

Coroll. 1.

124. Quemadmodum posterior aequatio ex tribus est nata, ita etiam tres continet determinationes, quibus efficiendum est vt ea integrabilis euadat. Adiuncta ergo priori, insuperque ex natura fluidi relatione inter densitatem et pressionem, omnino quinque habentur determinationes, ideoque tot, quot opus est ad quinque functiones quaesitas x, y, z, q, p definiendas.

Coroll. 2.

125. Integrali autem posterioris aequationis inuento, si tum coordinatae X, Y, Z vt constantes spectentur, et solum tempus t variabile accipiatur, habebitur totus motus eius particulae fluidi, quae initio erat in Z; indeque ad quoduis tempus tam eius locus, et motus, quam densitas et pressio assignari poterit.

Coroll 3.

126. Si ista particula, quae initio erat in Z nullam densitatis mutationem admittat, perpetuo

erit $q = Q$ ideoque ex aequatione priori $K = 1$. Hinc ergo loco ipsius K valorem supra assignatum substituendo certa relatio functionum x, y, z definitur, quemadmodum ea a coordinatis principalibus X, Y, Z pendere debent.

Scholion I.

127. Si alteram aequationem attentius contemplemur, ex eius forma coniicere licet quomodo ea ex theoria virium sollicitantium sit deducenda. In statu enim initiali considerentur duo puncta sibi proxima Z et Z', quorum illud coordinatis X, Y, Z hoc vero istis $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ determinetur. Iam elapso tempore $= t$ *haec duo* puncta transferantur in z et z', illius coordinatis existentibus x, y, z huius vero $x + dx, y + dy, z + dz$ vbi probe notetur, haec incrementa dx, dy, dz ex differentiatione functionum x, y, z, dum tempus t constans assumitur, esse capienda, ita vt ex sola variabilitate coordinatarum principalium X, Y, Z resultent. Vocetur nunc interuallum $zz' = ds$, per quod extensa concipiatur molecula fluida figuram habens prismaticam seu cylindricam, cuius basis sit $= \delta\delta$, eritque eius volumen $= \delta\delta ds$ et massa $= q\delta\delta ds$. Quoniam igitur pressio in z ponitur $= p$ erit pressio in $z' = p + dp$, denotante dp id differentiale functionis p, quod ex variabilitate solarum coordinatarum X, Y, Z nascitur tempore t constante assumto. Haec ergo molecula zz' ab excessu

cessu pressionis in basi z' supra basin z in directione $z'z$ vrgetur vi motrice $= \delta\delta dp$, quae per massam $q\delta\delta ds$ diuisa dat vim acceleratricem $= \frac{dp}{q\,ds}$ secundum eandem directionem $z'z$. Cum vero adsint vires acceleratrices $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ secundum directiones Ox, xy, yz ex his colligatur vis secundum directionem zz' quae reperitur $= \frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz}{ds}$, ita vt iam tota vis acceleratrix secundum directionem zz' sit $= \frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz}{ds} - \frac{dp}{q\,ds}$. Hac inuenta considerentur accelerationes motus, quas secundum directiones Ox, xy, yz vidimus esse $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$, ex iisque colligatur acceleratio secundum directionem zz' quae prodit:

$$\frac{dx}{ds}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + \frac{dy}{ds}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + \frac{dz}{ds}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

atque ex motus principiis hanc accelerationem aequalem esse oportet vi acceleratrici illi per $2g$ multiplicatae; hincque per ds multiplicando ipsa aequatio altera motus naturam continens oritur; quam ergo statim sine tantis ambagibus inuenire licuisset. In hoc autem fere inusitato calculi genere maximi certe est momenti eandem aequationem plus vno modo elicuisse, cum hinc natura istius nouae analyseos non mediocriter illustretur.

Scholion 2.

128. Quia hic motus tantum principia tradere constitui, breuibus saltem vsum harum formularum ostendam. Primo igitur pro motu progressiuo seu parallelo singularum particularum ponamus:

$x = X$

$$x = X + L;\ y = Y + M;\ z = Z + N$$

existentibus L, M, N eiusmodi functionibus ipsius temporis t tantum, quae facto $t = 0$ euanescant. Cum igitur sit $\left(\frac{dx}{dX}\right) = 1$; $\left(\frac{dy}{dY}\right) = 1$; $\left(\frac{dz}{dZ}\right) = 1$, *reliquae* vero formulae differentiales omnes *euanescant* erit $K = 1$, et $q = Q$, vnde densitas cuiusque elementi manet eadem; seu haec hypothesis ad fluidum pertinet nullius compressionis capax: interim tamen si ex materiis heterogeneis constet, in statu *initiali* Q spectari poterit vt functio ipsarum X, Y et Z. Agat sola grauitas secundum directionem zy, vt sit $\mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{Q} = 0$ et $\mathfrak{R} = -1$, eritque altera aequatio:

$$\frac{2g\,dp}{Q} = -2g\,dZ - dX.\frac{ddL}{dt^2} - dY.\frac{ddM}{dt^2} - dZ.\frac{ddN}{dt^2}.$$

quae aequatio vt possit integrari densitas Q vbique debet esse eadem ideoque $Q = b$, atque *integrale erit:*

$$\frac{2g}{b}p = 2g(b - Z) - X.\frac{ddL}{dt^2} - Y.\frac{ddM}{dt^2} - Z.\frac{ddN}{dt^2} + f:t$$

nisi ergo motus sit vniformis, suprema superficies horizontalis non erit.

Deinde casum perpendamus quo singula elementa circa axem verticalem in planis horizonti parallelis reuoluuntur. In hunc finem sit angulus θ functio quaecunque temporis, t, et statuatur:

$$x = X\,\text{cos}.\,\theta - Y\,\text{sin}.\,\theta;\ y = Y\,\text{cos}.\,\theta + X\,\text{sin}.\,\theta;\ z = Z$$

hinc ob

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) = \text{cos}.\,\theta;\ \left(\frac{dx}{dY}\right) = -\text{sin}.\,\theta;\ \left(\frac{dy}{dY}\right) = \text{cos}.\,\theta;\ \left(\frac{dy}{dX}\right) = \text{sin}.\,\theta;\ \left(\frac{dz}{dZ}\right) = 1$$

colli-

colligitur $K = \cos. \theta^2 + \sin. \theta^2 = 1$. Quare vt ante densitas statuatur constans $q = Q = p$. Deinde reperitur:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = -(X \sin. \theta + Y \cos. \theta)\frac{d\theta}{dt};\ \left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = -(X \sin. \theta + Y \cos. \theta)\frac{dd\theta}{dt^2} + (Y \sin. \theta - X \cos. \theta)\frac{d\theta^2}{dt^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = -(Y \sin. \theta - X \cos. \theta)\frac{d\theta}{dt};\ \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -(Y \sin. \theta - X \cos. \theta)\frac{dd\theta}{dt^2} - (X \sin. \theta + Y \cos. \theta)\frac{d\theta^2}{dt^2}$$

vnde facta substitutione fit altera aequatio

$$\frac{2g\,dp}{b} = -2g\,dZ + (Y\,dX + X\,dY)\frac{dd\theta}{dt^2} + (X\,dX + Y\,dY)\frac{d\theta^2}{dt^2}$$

vbi cum t et θ pro constantibus sint habenda prodit integrando

$$\frac{2gp}{b} = 2g(b - Z) + XY, \frac{dd\theta}{dt^2} + \tfrac{1}{2}(XX + YY)\frac{d\theta^2}{dt^2} + f : t$$

Cum hic pro θ functionem quamcunque temporis accipere liceat hic motus multo latius patet eo, quem supra priorem methodum secuti euoluimus ex quo haec altera methodus insigni vsu praedita est censenda.

Scholion 3.

129. Casus hic allatos fusius non prosequor, cum hic ideam tantum circa applicationem huius posterioris methodi exhibere sit propositum, praeterquam quod vberior euolutio tam istius quam praecedentis methodi insignem analyseos promotionem exigit, antequam quicquam cum successu sperare liceat. Cum enim haec vniuersa analysis circa functiones quatuor variabilium versetur, dum ea pars quae in functionibus duarum tantum variabilium con-

consistit, vix adhuc excoli est coepta: temere certe tam arduum negotium subito susciperetur. Quod igitur quasi per gradus ascendendo ad hanc motus fluidorum inuestigationem in genere tendamus, a casibus facilioribus, vbi pauciores variabiles occurrunt inchoandum videtur. Atque hic ad geometriae similitudinem Theoriam motus fluidorum in tres partes *linearem*, *planam* et *solidam* commodissime partimur; quarum binae priores, etsi per abstractionem in subsidium tertiae sunt formatae, tamen proprio vsu neutiquam destituuntur. Pleraque enim quae adhuc de motu fluidorum sunt explorata ad fluxum per canales seu tubos referuntur, qui etsi non angustissimi assumi solent, tamen fluidum non aliter per eos moueri concipitur ac si tales essent, siquidem in singulis sectionibus transuersis nulla *motus inaequalitas* admittitur. Ita merito motum fluidi per huiusmodi tubos motum linearem appellare licet. Secunda pars est plana vel potius superficialis, qua fluido moto quasi duae tantum dimensiones tribuuntur, dum scilicet tertia dimensio nulli motus inaequalitati obnoxia consideratur. His ergo duabus demum partibus accuratius euolutis tractationem plenam per omnes tres dimensiones maiori fiducia adgredi poterimus.

PHYSICA.

PHYSICA.

MVS SVSLICA.

Auctore.

A. I. GVELDENSTAEDT.

Inter notiſſimas *Muris* generis ſpecies, *Marmotam* loquor et *Cricetum*, quae in campis deſertis ſakaicenſibus frequentiſſime habitant, animal eiusdem generis minus cognitum verſatur, quod putaui digniſſimum, cui determinando temporis aliquantulum et laboris impendatur. Incolae harum regionum appellant idem Suslik, (Сусликъ) quod, nomine triuiale exinde formato, nobis audit: *Mus Suslica*. Animalculo, quod ſecundum Ill. LINNAEI placita, genuina *Muris* ſpecies eſt, multa cum *Criceto* alia plura cum *Marmota* communia ſunt; quod ceterum nec moribus, nec vitae genere ab iſtis valde alienum, attamen ita differens, vt ſpeciem diuerſiſſimam conſtituat. Differentiam enunciet. Tab. VII.

DESCRIPTIO.

CAPVT obouatum, *fronte* et *vertice* depreſſo, plano; buccis ſubgibbis; *roſtro* obtuſiuſculo, craſſo, rotundato, ſubnudo; *labium ſuperius* bipartitum, *inferius* ſuperiore breuius; vtraque craſſa; *oris apertura* parua, triangularis, nec cauitas oris ampla, ſed *buccae ſaccatae*; *lingua* carnoſa, obtuſa, papillis ſetoſis obſita; *palatum* rugoſum.

Dentes incisiui quatuor, in vtraque maxilla duo; superiores plani, approximati; inferiores duplo longiores, subulati, anterius conuexi, posterius plani, leuissime incurui, dilatabiles: *canini* nulli: *molares* ab incisiuis remoti 18. superius vtrinque 5. inferius 4. *disco* rugoso, falcato, margine conuexo buccas et cruribus diuergentibus palatum respicientes in maxilla superiore; in inferiore vice versa; *radice* quadrifida, diuergente in alueolis.

Mystaces per quinque ordines inter nares et oculos dispositae; in 1. ordine 3; in 2do 4; in 3^{tio} 5, omnium longissimae; in 4to 4; in 5to tantum 3. *setae* supra cantum anteriorem oculi 4. vel 5. inter oculum et aurem plures detritae. *Narium* aperturae sat magnae, semilunatae, oculos versus recurvae, nudae. *Oculi* magni, prominentes, nigri; *palpebris* ciliatis; *ciliis* inferioribus duplo longioribus. *Auriculae* subrotundae, parum e vellere prominentes subpilosae.

COLLVM breue, capitis crassitudine.

TRVNCVS oblongus, cylindricus.

PEDES breues, fere inter se aequales; metatarsis incedentes; *palmae* nudae, verrucosae, tetradactylae; *digito* secundo longissimo, extimo breuissimo, primo et tertio longitudine intermediis, aequali; quibus accedit *unguiculus pollicaris* latus, obtusus, breuis, a terra eleuatus: *plantae* pentadactylae; digito intermedio maximo; primo et quinto

mini-

minimis, aequalibus; secundo et quarto intermediis, pariter aequalibus; *vngues* digitorum omnium longi, acuti, subincurui, subtus carinati.

CAVDA pedum longitudine, pilosa, depressa, vt fere secundae speciem referat.

PILI corporis rari, absque vellere, regidiusculi in abdomine et cauda aliquantum longiores ac in dorso; in pectore conniuentes in suturam pectoralem; *perinaeum* pilosum; *anus* nuda, rugosa.

MAMMAE vtrinque sex, duae sc. pectorales, duae abdominales, totidemque inguinales; *area papillae* nudiuscula.

GENITALIA: *labia vaginae*, ano proxima, longitudinalia, laxa, absque clitoride; *praeputium* in mare strictum, vix pendulum, nec testiculi apparentes.

COLOR: *Nigra* sunt mystaces, oculi, vngues; *albicantia* rostrum, oculorum regio, gula pedes anteriores in latere posteriori ad ipsam axillam et caudae apex; *cinereo-flauescentia* truncus subtus et pedes; *cinereo-fusca* totum corpus superius cum cauda, ita vt caput et cauda immaculata, reliqua autem *maculis rotundatis albicantibus* picta sint.

STATVRA fere muris criceti, cui magnitudine cedit, mustela erminea aliquantum maior.

DIMEN-

	poll.	lin.
DIMENSIONES partium ad londinenſes longitudo ab extremo roſtri ad caudae finem	9.	8.
—— a roſtro ad brachium - - - - -	2.	6.
—— a brachio ad femur - - - - -	4.	6.
—— a femore ad caudae radicem - -	—	10.
—— caudae - - - - - - - - - - -	1.	10.
—— a labio inferiore ad clauiculam	2.	—
—— a clauicula ad proceſſum xyphoidem	1.	6.
—— a proceſſu xyphoideo ad praeputium	3.	2.
—— a praeputio ad anum - - -	—	9.
—— cruris - - - - - - - - - -	1.	9.
—— antibrachii - - - - - - - -	1.	4.
—— plantae a calcaneo ad radic. digitorum	—	11.
—— palmae - - - - - - - -	—	6.
—— digiti medii plantae - - - -	—	5.
—— —— ſecundi et quarti - - -	—	4½.
—— —— primi et quinti - - -	—	3.
—— —— palmae ſecundi - - -	—	5.
—— —— —— primi et tertii - -	—	4.
—— —— —— quarti - - - - -	—	3.
—— vnguis digitorum longiſſimorum	—	3.
—— —— pollicaris palmae - -	—	1.
diameter rictus oris - - - - - - - -	—	8.
—— diſſepimenti narium - - - - -	—	1½.
—— inter nares et oculos - - - -	—	8.
—— inter oculos - - - - - - -	—	11.
—— inter oculos et aures - - - -	—	6.
—— inter aures - - - - - - -	1	—

diame-

	poll.	lin.
diameter oculorum - - - - - - - -	—	5.
—— aurium - - - - - - - - -	—	2.
—— humeri - - - - - - - - -	1.	6.
—— lumborum - - - - - - - -	1.	6.
Peripheria abdominis - - - - - -	5.	—

Descriptioni externarum partium subiungam.

ANATOMIAM.

Cutis totius corporis tenui musculo subcutaneo cincta. Tunica interna oris inter maxillas et dentes molares reuoluitur retrorsum in *sacculum* laxissimum, ad latera colli; vsque ad clauiculam decurrentem interne rugosum, albidum, papillis exasperatum, exterius, praesertim ad fundum, cinctum *fibris* fortissimis *muscularibus*, quae in vnum corpus collectae processui coracoideo scapulae inseruntur.

Cute soluta apparent ad latera colli proxime ad sterno-cleido-mastoideum musculum *glandulae* magnae *collares*, adipe inuolutae, inde collum crassum; *glandulae subaxillares* latae planae *glandulae mammarum* omne corpus inferius a clauiculis, vsque ad os pubis continua serie obducentes; *inguinales*, ob nimiam adipem, qua pudendorum regio scatet, vix conspicuae, quod etiam de testiculis valet, quanquam extremitate tuberculosa extra foramen abdominis ouale promineant.

THORACIS cauitas pleura tenui obducta et *mediaſtino* tranſparente, ad marginem ſterni dextrum adhaerente, in duas cameras ſeparata. Omne ſpatium a clauiculis, vsque ad cordis baſin replet *thymus* etiam in adultis ſat magna, biloba glandula. *Pulmones* parui rubicundiliuidi; *dexter* trilobus, lobo infimo maiore, medio minimo; *ſiniſter* bilobus; inter cor et diaphragma ante oeſophagum adhuc duo lobuli pulmonales acceſſorii.

Cor pulmonibus interpoſitum, apice interſtitium 5 et 6 coſtae reſpiciens; *Pericardium* laxiſſimum pellucidum, margine dextro *Helmontii ſpeculo* adhaerens.

Ventriculus cordis ſiniſter pro exitu *aortae*, paruus, ſed parietibus et diſſepimento denſiſſimis, fere totum cordis corpus conſtituit; *ventriculus dexter* pro exitu arteriae pulmonalis; *laxus*, tenuiſſimus et fere pellucidus, dextro quaſi appendiculatus. *Auricula dextra* duplo amplior ſiniſtra. Ex arcu aortae tria vaſa prodeunt, arteria nimirum axillaris dextra, carotis dextra et inominata, ceu truncus communis carotidis et axillaris ſiniſtrae. Poſt arcum aortae *trachea* annulata; ad marginem ſiniſtrum tracheae *oeſophagus*, vertebris dorſi incumbens.

ABDOMEN muſculis oblique deſcendente, adſcendente, transuerſo et recto, vt in homine cingitur. *Diaphragma* latum in ambitu coſtis ſpuriis adhaerenti muſculoſum, appendicibus ad lumborum

borum vertebras decurrens; in disco tendineum. *Peritoneum* tenue, leuissimum. *Omentum* magnum ab hepatis superficie inferiore et a ventriculi arcu maiori per totum abdomen descendens, laxissimum, quam maxime adiposum, pariter ac *mesenterium* et *mesocolon*, quod ad latera vtrinque latissimos appendices duplicatas, organa genitalia vtriusque sexus inuoluentes demittit.

Hepar magnum, hypochondria et epigastrium occupans, quadrilobum, lobi duo dextri, duo sinistri, *lobus dexter anterior* omnium maximus, hypochondrium dextrum replens, superficie conuexa diaphragmati contiguus, ipsique ligamento lato adnexus, superficie inferiore intestinis et margine sinistro lobo sinistro anteriori incumbens, margine anteriore bifidus, acutus, posteriore obtusus, integerrimus; *lobus dexter posterior* bipartitus, lobulo inferiori reni dextro incumbens et concauitate sua dimidium renem obtegens, cum quo per ligamentum hepatico-renale connexus; *lobus sinister anterior* dextro anteriore minor, in hypochondrio sinistro et epigastrio situs inter diaphragma et ventriculum, margine posteriore obtusissimo diaphragmati alligatus; inter hunc lobum et dextrum posteriorem transit *vena caua*, *lobus sinister posterior* omnium minimus, bifidus, minorem ventriculi arcum concauum replens inter hunc et sinistrum anteriorem fossa pro *venae portarum* insertione; *cystis fellea* inter fissuram marginis

 ginis

ginis anterioris lobi dextri anterioris ſita, fundo marginem coſtae ſeptimae reſpiciens, ceruice in *ductum choledochum* deſinens, qui proxime ad pylorum inteſtinum tenue petit, *arteria hepatica* lobo dextro anteriori in ſuperficie inferiore inſeritur, proxime ad exitum *ductus cyſtici*.

Lien oblongus, anguſtus, per laxam et adipe repletam omenti continuationem margini conuexo ventriculi in hypochondrio ſiniſtro alligatur.

Pancreas vix adeſt; niſi glandulas minores plures poſt ventriculum ſitas pro eo habeas.

Ventriculus bicruralis; *cardia* extremitati ſiniſtrae proxima, vt fundus tantummodo quaſi digiti apex promineat; a cardia abit arcus concauus minor ad *pylorum*, ſphinctere ligamentoſo *prominentem*; arcus inferior conuexus, duplo maior; *corpus* ventriculi oblongum, dilatatum, extremitatibus vtrinque aequaliter coarctatis.

Inteſtinum tenue aequale vbique, colo fere triplo longius, 30: pollices adaequans, meſenterio laxo, adipoſo annexum, regionem vmbilicalem, ventriculum et coecum inter, occupans, deſinit lateraliter in *coecum* lumine transuerſaliter bilabiato, in coeci cauitatem pendulo, valuulam conſtituente, quae vtrinque crura emittit in parte valuulae oppoſita concurrentia et annulum ſphinctericum intus pro-

prominentem, teretem, musculoso-ligamentosum, cui colon per suturam extus conspicuam adhaeret, simulantia. A tenuis insertione descendit *coecum* quam maxime dilatatum, et ventriculo duplo amplius ad os iliacum dextrum, fundo suo totum hypogastrium ad os iliacum sinistrum vsque replens. Ad alterum latus insertionis tenuis proxime ad vesiculam felleam, in situ naturali oritur *colon*, descendens per regionem iliacam dextram ad os ilii, abhinc curuatura simplicissima et parti descendenti arctissime alligatum redeuns ad pylorum, dein inter superficiem ventriculi posteriorem et spinam dorsi regionem iliacam sinistram ductu serpentino petens et tandem *S. romano* laxo, in ossis ilii sinistri superficie formato, in rectum desinens; interne coecum rugosissimum pariter ac colon in ipso initio, quod postea et interne et externe laeue. Post sphincterem recti datur *anus accessorius*, ventricosus, tribus sinubus mucosis, apice subcartilagineo, perforato, prominulo terminatis stipata; quos sinus animal vexatum protrudit, vt *apertura ani tricuspidata* appareat.

Renes duo; vtrinque vnus, inter secundam et tertiam lumborum vertebram situs, integer, ouatus, auellanae magnitudinis, cum *succenturiatis* extremitati superiori incumbentibus; sinister a ventriculo depressus dextro profundior; *vreteres* e pelvi renali ad vertebrarum latera descendentes petunt *vesicam vrinariam*, ouatam, vtrinque liberam et peritonaeo obductam.

 Genita-

Genitalia in femina ita: *vaginae labia* rugosa, laxa; *clitoris* nulla, sed ad ipsum pronaum, perinaeum versus, sinus magnus, coecus, mucosus, cui *apertura vrethrae* glandosa opposita est; *vagina vteri* longitudinaliter rugosa, laxa, terminata *orificio vteri* lacero, vix filo tenuissimo permeabili; *ceruix vteri* breuissimus bifurcatus in *cornu dextrum* et *sinistrum* tenue, cylindricum, laxum membranaceum, minime rugosum, tuberculosum hinc inde in femina quae ante mensem peperit (forte a placentarum vestigiis) alias laeue, inter laxissimam capsulam adiposam ad renes vsque adscendens ac in ipsa extremitate *ouariis* paruis, vix milii semen exsuperantibus, granulosis auctum.

Genitalia masculina: *penis* cum *testiculorum* extremitatibus extra abdomen, sed omnia tanta adipis copia obtecta, vt per cutem communem nil appareat. Fibrae oblique descendentis musculi abdominalis continuant in sacculum, fine caeco tendineo extremitati inferiori testiculi et epidydymidis adhaerentem; *tunica propria* testiculi tendinoso-membranacea, desinit in latam duplicaturam ad marginem interiorem et epidydymidem testiculo adnectit. *Epidydymis* in extremitate superiore testiculi incipit bulbosa, sed statim angustata descendit libere ad alteram testiculi extremitatem, cui iterum arcte adhaeret dilatata et tandem ductu retrogrado desinit in *vas deferens* angustissimum, vbique aequale, *vesiculas* *fiſculas ſpermaticas* minutas et vix conſpicuas petens, quibuscum apertura communi hiat vtrinque ad latera capitis gallinaginis in vrethram. *Vrethra* eiusdem cum corporibus cauernoſis longitudinis et diametri, muſculoſa, ante veſicularum ſpermaticarum lumina duobus ſinubus a *proſtatis* bilobis, inter rectum et vrethram ſitis, prouenientibus perforata et abeuns infra oſſium pubis angulum in *corpus cauernoſum vrethrae*, quod in initio bulboſum, dein anguſtatum et foramine lacero terminatum, ad latera autem in *glandem penis* caudam verſus recuruam, et oſſiculum cylindricum, capitulo cartilagineo verſus vrethram nutante auctum, continentem deſinens. *Corpora cauernoſa penis* duo, longitudinis ſeſquipollicis, muſculis ſuis erectoribus et radicibus ipſis oſſium pubis cruribus adhaerentia; diſſepimento ligamentoſo ſeparata; intus celluloſa. PHYSIOLOGICIS nonnullis, quae mihi de *Suslica* innotuerunt, auctiorem reddam hiſtoriam huius animalculi. *Victitat Suslica* vegetabilibus, foliis praeſertim et ſeminibus; delectatur foliis iunioribus millefolii; colligit grana cerealia in ſacco buccali eaque in cauerna pullis praebet; pedibus poſterioribus inſiſtens saepius anterioribus cibum ori admouet; faeces excernit ſub forma ſcybalorum per anum acceſſorium formatorum.

Coitum celebrant vnica vice per annum primo vere ad finem Martii poſt ſomnum brumalem. Prae-

Praeterlapsis ſex a conceptione ſeptimanis parit fe- mina quatuor, vel ſex, vel octo pullos, pilis et oculis apertis gaudentes.

Ingreſſus tardus, ita vt in planitie *effugiens* facile ab homine capi poſſit. Sub terra *fodit* ce- lerrime cauernam, corporis diametro proportiona- lem, per argyam vnam oblique deſcendentem, apertura nunc duplici, nunc ſimplici. Ante cauer- nae aperturam ſaepius *erecta* ſtat, murmura e *lon- ginquo* percipiens circumſpicit et *ſonum fiſtularem* edit. Autumno appropinquante cauernas petunt gregatim, iisque obturatis alto ſomno ſepultae per quinque menſes hybernant; circulatione et *ſecretio- nibus* tunc tardiſſimis et fere ſuppreſſis vitam vi- vunt minimam. Feces in coeco colliguntur, *quod* ipſis hanc ob cauſam, adeo amplum contigit, val- vula coeci, ſeu ſi mauis, coli ante *deſcripta regreſ- ſum* fecum in inteſtinum tenue *impediente*; quo magis enim per fecum collectionem coecum exten- ditur, eo anguſtior redditur valuulae rima, cuius labia eo ipſo coeci parieti apprimuntur et regreſſum impoſſibilem reddunt.

Praedatur Suslica a falconibus, praeſertim a miluo; rarius ab hominibus propter pellem minus nobilem, ideoque ſat vili pretio venalem.

Habitat animal frequenter in campis vaſtiſſi- mis tanaicenſibus, praecipue vrbes *Woroneſch* et *Tan- bov* inter, ſimul cum *Marmota* et *Criceto*.

Qui-

Quibus cum animalibus *Suslica* quod reuera in multis conueniat, vt iam indicaui, patebit conferenti haecce animalia inter se secundum descriptionem nunc traditam. *Marmota* tamen multo magis affinis est *Suslicae* ac *Cricetus*. In *Marmota* enim rostrum, labia, lingua, dentes, palatum nares, oculi, aures, mammae; pedes, cauda et anus omnino ita ac *Suslicae*; nec pili, nec color pilorum valde differunt, nisi in eo, quod dorsum *Suslicae* albido maculatum sit. Differt autem Marmota buccis a crassissimo masletere protuberantibus, plane non saccatis; trunco laxissimo, ventricoso, imaculato, magnitudine vel decies maiori.

In tanta animalium horum affinitate, insufficiens est ad distinctionem nomen specificum Marmotae: Mus cauda abbreuiata subpilosa, auriculis rotundatis, buccis gibbis: ab *Ill.* LINNAEO in *Syst. Nat.* 12ma Edit. p. 81. sancitum, quia pariter *Suslicae* respondet. Nomine specifico:

> *MVS corpore fusco-flauescenti, dorso maculis rotundis albidis variegato; cauda pedum longitudine, depressa, pilosa; palmis tetradactylis; plantis pentadactylis*:

distinguimus nos *Suslicam* et a congeneribus reliquis, et a *Marmota*, quae nobis audit:

> *MVS corpore fusco-flauescenti immaculato; cauda pedum longitudine, depressa, pilosa; palmis tetradactylis; plantis pentadactylis.*

Inter viscera *Suslicae* et *Marmotae* maior adhuc analogia; in thorace nulla differentia; et abdominis viscera perfecte conformia, excepto hepate ac colo. *Hepar* enim in *Marmota* differt in eo, quod lobi dextri et anterior et posterior integri sint; ceterum *Suslicae* hepati simillimum; in *colo* tandem loco vnicae curuaturae et duplicaturae, duae adsunt in *Marmota*, quarum altera regionem iliacam sinistram occupat. Reliqua omnia, genitalia interna et externa in vtroque sexu, ani sinus etc. adeo conformia, vt plane non, nisi magnitudine differant. Monita omnia de vitae genere et moribus *Suslicae*, si granorum collectionem excipis, valent etiam de *Marmota*.

Inter *Cricetum* et *Suslicam* minor est affinitas. Conueniunt aliquomodo quoad staturam, perfectis pedibus, minus sacco buccali. *Musculus* enim sacci buccalis *Criceti* alio loco ac in *Suslica* inseritur; adhaeret nempe processibus spinosis 5. 6 et 7. vertebrae dorsi, inter trapezium musculum et latissimum dorsi. Differt praeterea dentibus molaribus et cauda rotundata, abrupta, breuissima pilosa, mammis, quarum Cricetus modo duas inguinales habet, et praesertim genitalibus masculinis, quorum adeo singularis est constructio, vt propriam anatomicam expositionem, quam proxime dabo, expostulent.

Sufficiant haec de MVRE *Suslica*, cuius staturam *icon*, quam fieri curaui, sat accurate exprimit.

ANAS

ANAS NYROCA.

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

E numerosissimo anatum genere migratorio plurimas species regiones tanaicenses vidi salutantes. Habitant enim hic locorum per aestatem frequentissime ANATES, quae *Ill.* LINNAEO in *Systematis Naturae 12^ma^ editione audiunt clypeata*, *strepera*, *clangula*, *penelope*, *acuta*, *ferina*, *querquedula*, *crecca*, *boschas*, *fuligula.* Quibus exceptis occurrit anatis species non infrequens, quam vix ab ornithologis determinatam inuenio, certe nullibi sat distincte, vt dignosci possit. Mearum igitur partium esse duxi, succinctam huius anatis tradere descriptionem. Russis audit Nyroc (Нырокъ) exinde nomen triuiale originem duxit.

DESCRIPTIO MARIS.

ROSTRVM depressum, conuexum, obtusum, laeue, liuido-nigrum, capitis longitudine, latitudine vbique aequale; *mandibula superior* inferiori longior et latior, vnguiculo obtuso, subincuruo terminata; *mandibula inferior* recta; vtraque vtrinque dentibus paleaceis rigidis, breuibus armata.

 LIN-

LINGVA carnosa, dupliciter vtrinque ciliata, apice lamelloso, coarctato.

NARES ouatae, semitectae, peruiae.

OCVLI parui, vertici propiores; *iride* albicante; *pupilla* nigra.

CAPVT compressum, basi latiori, vertice fornicato, obscure castaneum, nitens.

COLLVM, quod attenuatum, PECTVS et HYPOCHONDRIA capiti concolores.

CERVIX et DORSVM atro-oliuacea, quo colore et colli intermedia attenuata pars in ceruicem desinens tincta est.

VROPYGIVM atrum.

ABDOMEN sericeo-albidum, ab apice plumarum albo, quae basin versus *ex fusco* et albiolo variegate sunt; *ani regio* fusca; *crissum* niueum.

ALAE paruae, ad digiti latitudinem cauda breuiores, dorso concolores; *remiges* quo exteriores, eo longiores, quarum 1. 2. et 3. totum latus exterius et apex; 4. 5. et 6. margo tantum exterior cum apice; 7-20. apex tummodo oliuaceo-niger, reliqua omnia alba; 21-24. totae pariter ac remigum et axillae *tectrices* atro-oliuaceae; *speculum alarum* album, antice posticeque oliuaceo-nigrum; *margo axillarum* et alae *subtus* albae.

CAVDA

CAVDA breuis, subcuneata; *rectricibus* 14. acuminatis, atro-fuscis.

PEDES natatorii, nigro-plumbei, cauda longiores, basi nimirum phalangis secundae digiti medii caudae extremum attingentes; *digiti* quatuor, vnus posticus, tres antici membrana nigricante connexi; *vngues* digitorum breues, rectiusculi, acuti, nigri.

	poll.	lin.
DIMENSIONES partium ad pedem londinensem ita: longitudo ab apice rostri ad caudae extremum	16.	8.
—— a vertice ad axillam alarum - -	6.	6.
—— ab axilla alarum ad earum extremum - - - -	7.	3.
—— ab extremitate alarum ad caudae apicem	1.	—
—— femoris - - - - - - - - - -	3.	—
—— cruris - - - - - - - -	1.	6.
—— digiti medii - - - - - - - -	2.	3.
—— —— exterioris - - - - - -	2.	—
—— —— interioris - - - - - -	1.	6.
—— —— postici - - - - - - -	—	8.
—— vnguis digiti medii - - - -	—	3.
reliquorum vngues in eadem ratione cum digitis decrescunt.		
diameter rostri longitudinalis ab angulo oris	2.	—
—— —— —— a basi frontis - -	1.	8.
—— —— perpendicularis ad basin -	—	9.

	poll.	lin.
—— —— diameter ad nares	—	6.
—— —— —— ad apicem	—	2.
—— inter apicem rostri et marginem anteriorem narium	1.	1.
—— narium longitudinalis	—	4.
—— inter marginem posteriorem narium et cantum anteriorem oculi	1.	1.
—— oculi	—	4.
—— capitis transuersalis ad orbitas	—	9.
—— —— —— ad basin cranii	1.	3.
—— —— perpendicularis a vertice ad basin	1.	6.
—— —— longitudinalis a nucha ad frontem	2.	1.
—— corporis transuersalis	3.	6.
—— —— perpendicularis	2.	6.
—— alarum expansarum	24.	—

DESCRIPTIO FEMINAE.

Femina magis decolor; ea, quae in mare castanea in femina sordide ferruginea sunt; *abdomen* nebuloso-albicans; *ani regio* dilutior fusca ac in mare et *dorsum* ruffescens, reliqua omnia vt in mare. Quoad totam corporis longitudinem 8. lin mare breuior et pro hac ratione etiam in reliquis dimensionibus vna alteraue linea deficit. Ex descriptionibus nunc de vtroque sexu traditis conficio nomen specificum *Nyrocae*:

ANAS

ANAS ruffo-nigricans, abdomine, speculo alarum, crissoque albis.

STATVRA *Anatis Nyrocae* perfecte cum *Anate Fuligula* LINNAEI conuenit, adeo vt icon *Fuligulae* etiam *Nyrocam* exprimat. Proximae certe sibi hae species sunt, quae etiam in ipsa partium tinctura multa communia habent; color enim caudae, alarum, alarumque speculi, rostri, pedumque in vtraque idem: diuersas attamen et constantes, vt ex multifaria obseruatione didici, species constituent. Differt enim *Fuligula mas* a *Nyroca mare* 1. capite cristato; 2. capite et pectore atris non castaneis; 3. oculorum iride lutea, non alba; 4. plumis abdominis totis albis, non basi variegatis; 5. hypochondriis abdomini albo, non pectori concoloribus; 6. ani regione alba, non fusca; 7. crisso nigro, non niueo.

Feminarum Fuligulae et *Nyrocae* similitudo maior adhuc ac marium et vix habeo quo distinguam, cum crista valde detrita et vix conspicua in Fuligula emina, cuius capitis et pectoris tinctura fere eadem ac Nyrocae, quo accedit, quod hypochondria pectori fusco - ferrugineo concolores et crissum ex fuliginoso- et albicanti variegatum sit. Rudimento cristae nuchalis, iridibus luteis et crisso nigricante attamen Fuligulam feminam a Nyroca femina attentus ac intelligens separat.

Anas Nyroca *migratoria* auis aduenit medio Aprilis in hisce regionibus Tanaicensibus inter gradum 54 et 55 latitudinis borealis sitis. Mas in *monogamia* viuit, nec feminam deserit, sed ea incubante excubias agit. Femina *ponit oua* 6-8, albida, immaculata in fossula excauata loci eleuati inundatorum, iisque per Maium *incubat* sola, marem arcens, ne oua diffringat et comedat, vt solet. *Victitant* vegetabilibus et praesertim seminibus, vix piscibus. *Caro* sapida, sat tenera. Haec sunt, quae habui de Historia *Anatis Nyrocae* monenda.

SPALAX

SPALAX,

NOVVM GLIRIVM GENVS.

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

Exhibit d. 21. Sept. 1769.

GLIRES, zoologorum recentissimorum facile omnium consensu, salutantur *quadrupeda digitata, dentibus primoribus geminis, approximatis, magnis, vix labiis tegendis gaudentia, caninis omnino carentia et molaribus truncatis a primoribus remotis instructa.* Pro diuersa dentium primorum figura, duce *illustrissimo Equite Aurato a* LINNE, in varia genera diuiduntur numerosae huius ordinis quadrupedum naturalis species, quas omnes fat distincte notas comprehendunt genera *Linneana* 5. *Hystrix* scil. *Castor*, *Lepus*, *Sciurus*, *mus*, quibus nuperrime accessit *Noctilis*, quem attamen ad *vespertilionem*, pace VIRI SVMMI, ablegare forte praestaret, ob palmas alatas, ceu criterium euidentissimum generis huius naturalissimi, cuius multo maior est vis ac dentium, qui et numero et figura et situ mire variant apud vespertiliones.

Nullum horum generum intrare potuit animalculum in itinere per *Russiam* nobis obuium, ad *Glires* omnino pertinens, vt ex subsequente dentium descriptione satis superque patebit: ab *Hystrice* et *Castore* autem diuersissimum, cum nec spinis nec cauda applanata squamosa instructum sit; a *Lepore* pariter alienum, cum nec dentes superiores duplicati, nec in reliquo auricularum et artuum habitu vlla conuenientia adsit; a *Sciuro* tandem remotissimum per dentes huius primores compressos, per caudam laxam villosam, omnemque vitae morumque rationem. Ad *muris* genus, praesertim sensu latissimo, vt *ill.* a LINNE placuit, sumtum proxime equidem accedit animalculum, sed dentes, primores inferiores *minime subulati*. Medium quoad dentes, videtur inter *Cauiam* KLEINII, (ad quod genus optimum *Mures Porcellus*, *Aguti* et *Paca* LINNAEI pertinent) et inter reliquas species *Linneanas Muris*, genus proprium constituere, quod nobis audit:

SPALAX, cuius sit character:

GLIS *dentibus primoribus in vtraque maxilla cuneiformibus, planis; rostro proboscoideo; pedibus pentadactylis; auriculis caudaque nullis.*

Essentia characteris huius generici, speciebus, in posterum forte detegendis accommodandi, ponitur in dentium primorum figura.

Veterum *Talpae* synonymon παρὰ τὸ σπᾶν, quod terram assidue vellicet animalculum, generi huic nouo imposuimus, vt ipso nomine et mores et affinitas cum *Talpa* indicentur. *Spalax* certe oculo-

oculorum minutie, auricularum defectu, pellis rostrique structura, corporis statura ac moribus *Talpae* adeo similis est, vt haud mirer, quod a SEBA, ab habitu seducto et dentes minus curante, *Talpa* dictus sit; nam, ni fallor, *Spalax* noster idem animalculum est, quod SEBAE *Talpa Sibirica* versicolor, et *ill.* a LINNE, nomini et iconi SEBAE freto *Talpa ecaudata palmis tridactylis* audit.

Nil autem certo de synonymia determinare audemus, cum obscura tantum idea restet iconis ante aliquot annos in SEBAE operibus perlustratae, quae nunc in peregrinatione deficiunt, quo minus dubia remouere possemus. Quidquid sit, animalculum zoologis adeo obscure et falso nomine notum est, vt pro nouo haberi possit, et adcuratiori determinatione quam maxime indigeat, quam dabimus, descriptionem concinnando, qua simul elucebit, quod non solum ab omni *Glirium* huc vsque noto genere differat, sed etiam a *Talpa Europaea* LINNAEI et dentibus et canalis cibarii genitaliumque structura, et diaeta, vt reliqua taceamus, diuersissimum sit. Ob eximiam oculorum minutiem, quorum plane nulla in facie apparent vestigia, sit ipsi nomen triuiale: *Microphthalmus*.

SPALAX MICROPHTHALMVS.

DESCRIPTIO: *Caput* depresso-rotundatum, patelliforme, ipso trunco fere latius; *rostrum* cartilatilagineum, productum, rotundatum, superne planum, inferne decliue, et naribus rotundis angustis perforatum, ad ipsos dentium primorum radices terminatum, eorumque gingiuam constituens, laeve, nudum, nigrum. Ad latera cartilaginis rostri vtrinque excurrit, aures fere vsque, *linea eleuata* tactu crassima, (quae musculus rostrum expandens) setis breuibus, rigidis horizontaliter patentibus obsita, qua pars capitis superior ab inferiore separatur; et supra et infra hanc lineam *mystaces* plurimae, quae inferius ad rictum oris longiores et numero plures, sparsae omnes.

Rictus oris paruus, vix digiti minimi apicem recipiens, longitudinalis magis ac transuersalis; *Labium* enim *superius* ad rostri latera et dentium margines descendit et retrogreditur ad labium inferius, et desinit in istud vix angulum oris efformans, vtrinque prominulum, sed strictum, interstitio lacunoso nudo, dentium primorum superficiei posteriori et palato interposito. *Labium inferius* laxum, dentium primorum inferiorum, gingiuam profunde vaginans, ipsos dentes denudatos relinquens; vtrumque subpilosum.

Lingua carnosa, crassa, plana, obtusa, laeuis.

Dentes primores in vtraque maxilla duo; superiores statim ad rostrum, nudi, approximati; firmi, anterius plani, posterius basin versus subcompressi, apicem versus in aciem cuneiformem attenuati,

nuati, lati, recti; inferiores figura superioribus simillimi, et latitudine, quae in toto dentis decursu eadem, ipsis aequales, sed quadruplo fere longiores, leuissime in arcum antrorsum protensi, dilatabiles: *Canini* nulli: *molares* a primoribus remoti, vtrinque supra infraque tres, truncati, subcylindrici, minimi, vix e gingiuis prominentes.

Oculi plane nulli per cutem apparent, nec vllum foraminis vestigium in cute caput obtegente detegendum, quod forte adeo angustum, vt omnem visus aciem effugiat.

Auriculae pariter nullae; aperturae aurium simplices, ad latera capitis in eadem cum rostro linea, pilis vndique tectae, et vix ac ne vix apparentes, annulo cartilagineo, interne cute pilosa vestito, cinctae.

Setae supra et ante aurium aperturam vtrinque duae, detritae.

Collum breuissimum, ac vix vllum, nec trunco angustius, cylindricum.

Truncus cylindricus, elongatus, laxus, rectus, clunibus obtusissimis, parum decliuibus, ecaudatis terminatus.

Pedes breues; posteriores vix anterioribus longiores; debiles, pilosi, calcaneis incidentes, pentadactyli; digitis fissis, basi subpalmatis, humano more inter se proportionatis, pollice tantum minus

 remoto,

remoto, in palma longioribus fuperne fubnudis, in planta breuioribus pilofis; palma plantaque inferne nudae, fubtuberculofae, anguftae; vngues rectiufculi, obtufi, fubtus concaui, in plantis longiores.

Cauda omnino nulla; fupra ani aperturam papilla nudiufcula, vix aciculae capitulum exfuperans, os coccygis terminans. *Anus* rugofus, pilofus; *perinaeum* breuiffimum, pubefcens; *praeputium* prominulum ftrictum, includens *glandem penis*, rubicundam, anterius fubconuexam, integram, pofterius papillis duabus antrorfum recurnis obfitam, inter quas *vrethrae* apertura; *mammae* in mare nullae: in femina vtrinque duae, inguinales.

Pellis delicatula, pilis longiufculis, vbique fere aequalibus, roftro proximis breuioribus, molliffimis, confertis, decumbentibus, retrorfum fpectantibus, fed in gula in verticem, et in pectore in futuram conniuentibus.

Color fetarum et myftacum niueus: caput anterius et totum animal inferius grifeum, murini coloris; fuperne totum grifeo-ruffum feu lutefcenti-rubicundum, bafi pilorum grifea, apice autem ruffefcente; digiti albido-incarnati.

Dimenfiones fecundum pedem londinenfem:	poll.	lin.
Longitudo animalis ab apice roftri ad corporis extremum - - - - -	8.	6.
— a maxilla inferiore ad proceffum xyphoideum - - - - - -	3.	6.

Lon-

	poll	lin.
Longitudo a processu xyphoideo ad praeputium - - - - - - -	3.	6.
—— a praeputio ad ani aperturam - -	—	3.
—— pedum anteriorum a capite ossis brachii ad digiti medii apicem - -	2.	3.
—— pedum posteriorum a capite ossis femoris ad apicem digiti medii - -	2.	6.
—— palmae a carpo ad apicem digiti medii	—	10.
—— plantae a calcaneo ad apicem digiti	1.	2.
medii - - - - - -	—	6.
—— digiti medii palmae - - - -	—	4.
—— vnguis digiti medii palmae - - -	—	1.
—— vnguis digiti medii plantae - -	—	$1\frac{1}{2}$.
Diameter transuersalis rostri - - -	—	8.
—— longitudinalis rostri verticem versus -	—	5.
—— capitis transuersalis - - - -	1.	10.
—— inter aures - - - - -	1.	8.
—— inter humeros - - - - -	1.	8.
—— inter lumbos - - - - -	2.	
—— perpendicularis capitis a vertice ad maxillam inferiorem - - -	1.	4.
—— perpendicularis thoracis - - -	1.	4.
peripheria abdominis - - - - -	5.	3.
latitudo dentium primorum - - - -	—	$1\frac{1}{2}$.
longitudo primorum superiorum - - -	—	2.
- - - - - inperiorum - - -	—	7.

ANATOMIA *Spalacis Microphthalmi.*

1. *de ossibus.*

Cum

Cum ossa praesertim ea capitis valde anomala sint, vberiorem horum descriptionem tradere constituimus.

Os nasi vnicum planum, apice latiori et productiori, basi angustiori subbifida, ossibus rostri per harmoniam interpositum, et cum osse frontis per suturam connexum; interne in medio spina longitudinali vomeri respondenti, ad latera processibus concheideis extrorsum curuatis, conchilis *inferioribus* nasi incumbentibus auctum.

Ossa rostri appellamus ossa duo incuruato-tubulosa, vtrinque ad marginem ossis nasi posita, ac longitudinis eiusdem, superne cum osse *frontis*, lateraliter cum margine interiore *foraminis magni* ossis maxillaris superioris, inferne cum corpore eiusdem ossis cohaerentia, alueolos dentium *primorum* superiorum constituentia. In spatio, ossi nasi et rostri ossibus interposito, narium cauitates sitae sunt.

Ossa frontalia duo in partem horizontalem et lateralem diuidenda: pars horizontalis vtriusque ossis, per harmoniam ab ipsa sutura sagittali continuatam cohaerens, triangulum constituit, cuius basis os nasi et ossa rostri, apex autem suturam sagittalem ossium parietalium respicit; pars lateralis oblique in fossam zygomaticam descendens, inaequaliter quadrata, concaua, antice cum margine superiore foraminis magni ossis maxillaris et cum osse vnguiculari, inferne cum apophysi alueolari ossis maxil-

maxillaris et cum apice alae magnae ossis sphaenoidei, tandemque postice inferius cum parte squamosa ossis temporalis et superius cum margine anteriore ossis parietalis cohaerens.

Ossa parietalia omnium ossium cranii propriorum minima, quadrata, plana, angulo acuto in vertice conniuentia, ita vt margo interior multo altior sit exteriori; hinc vertex linearis, sutura sagittali, vtraque ossa parietalia combinante, exaratus; margo anterior cohaeret cum parte descendente ossis temporalis, et posterior per suturam lamdoideam cum osse occipitali.

Os occipitale ossium capitis omnium maximum, in angulo semirecto a plano horizontali baseos cranii ad verticem adscendens, planum, ad trianguli sphaerici figuram accedens, basi verticem versus spectans, et ad angulos in spinam producta, sub qua sutura qua cum osse temporali connectitur; apex truncatus, marginem superiorem foraminis magni occipitalis constituens. Foramen magnum occipitale, transitui medullae spinalis arteriarumque ceruicalium inseruiens, ad planum baseos capitis perpendiculare. Apophysis basilaris cuneiformis, horizontalis, antice cum osse sphaenoideo concreta, postice condylis, cartilagine obductis, verticaliter sitis, et concauitati atlantis respondentibus terminata; ad latera condylorum apophyses styloideae breves, obtusae; ante condylos inferne foramina condyloidea pro transitu neruorum lingualium.

Os temporale in duas portiones, in petrosam et squamosam diuidendum: *pars petrosa*, quae organi auditorii receptaculum, inferior et posterior situ, facie superiore plana, per suturam cum osse occipitali cohaerente, nuchae complementum vtrinque constituit; facies inferior partis petrosae convexa, subglobosa, libere apophysi basilari ossis occipitalis et alae magnae ossis sphaenoidei interposita, sed cum parte posteriore eminentiae articularis et cum fossa articulari ossis temporalis in pullis per suturam connexa, in adultis plane concreta; apophysis in parte petrosa vnica mastoidea; obtusissima, tuberculosa in ipso angulo nuchae; foramina in parte petrosa tria, primum stylo-mastoideum, proxime ante apophysin mastoideam, quod apertura exterior aquae ductus fallopii, pro transitu nerui acustici duri; secundum proxime supra *processum mastoideum*, quod foramen auditorium externum, pro insertione meatus auditorii cartilaginei; tertium in extremitate interiore petrae, quod orificium tubae *Eustachianae*; accedunt foramina duo interiora in cauitatem cerebri hiantia, quorum vnum simplex, aperturam interiorem aquaeductus fallopii constituens; alterum amplius coecum, in fundo multiporosum, pro transitu portionis mollis nerui acustici.

In partis petrosae ossis temporalis cauitate *Organum auditus* absconditum est. Lamina inferiore ossea proxime ad foramen auditorium externum

subla-

ſublata, in conſpectum venit meatus auditorius oſſeus, foramini auditorio externo et membranae tympani interiectus, a foramine anguſtiſſimo mox in cauitatem amplam, rotundatam dilatatus. Membrana tympani margini circulari, in fundo meatus auditorii oſſei prominenti adhaeret pellucida, plana, centro in foſſulam retracto, ab extremitate manubrii mallei ſuperficiei interiori membranae tympani adglutinata; proxime ad marginem ſuperiorem prominet membrana tympani in tuberculum ab apophyſi breui mallei. Membrana tympani et Lamina oſſea inferiore conuexa petrae ſublatis, patet capſa tympani ampla, irregulariter ouata, officula auditus quatuor, vulgo ſic dicta, cum concha et canalibus ſemicircularibus ſimul continens. Concha in ipſo medio capſae horizontaliter ſita, et membranae tympani parallela, apice antrorſum, baſi retrorſum ſpectans; e ſpiris quatuor, quarum prima reliquis duplo amplior, conflata; apice obtuſo vix anguſtato; apertura dilatata repanda, membrana obducta, quae feneſtra rotunda ſurſum ſpectans, apertura altera ſcalarum conchae deorſum in veſtibulum hiat; ſtructura interna cum concha humana perfecte conuenit. Supra concham et retrorſum, apophyſin maſtoedeam verſus, canales ſemicirculares duo; vnus verticalis, ſuperior minor; alter horizontalis, conchae parallelus, retrorſum arcuatus duplo maior; vtrinque circulum fere integrum conſtituentes, tribus orificiis in veſtibulum hiantes. Veſtibulum,

bulum, cauitas canalibus semicircularibus et conchae interposita, angusta, irregularis; introrsum foraminulis perforata, pro transitu portionis mollis nerui acustici; antice foramine seu fenestra ouali terminata. Fenestram oualem obturat basis stapedis, cuius crura horizontalia, infra semicircularem horizontalem et supra fenestram rotundam conchae, in linea his parallela extrorsum procedunt et coeunt in caput rotundatum, quod in vertice concauum, pro articulatione cum osse lenticulari. Alterum ossis lenticularis hemisphaerium articulatum cum concauitate laterali apicis cruris longi, verticaliter descendentis, incudis. Crus breue incudis horizontale, angulo recto a corpore incudis basi latiori retrorsum procedit, et apice eminentiae pyramidalis concauae capsae tympani per musculum tenuissimum adhaeret; corpore autem sursum spectante *subcylindrico*, per superficiem cruri breui oppositam, *inaequalem* respondenti capitis mallei superficiei, per gynglimum, adnectitur. Caput mallei compressum, inaequaliter planum, superficie vna posteriore cum incudis corpore articulata, altera anteriore, libera; collum vix vllum; manubrium subcylindricum, cruri longo incudis parallelum, ad centrum membranae tympani descendens, eamque introrsum trahens; apophyses mallei duae, ad manubrii ortum fine, vna exterior membranam tympani in tuberculum protrudens, altera anterior pariter breuis, margini circulari osseo membranae tympani per musculum

tenuem

tenuem adnexa; vtraque obtusiuscula, longitudinis aequalis. Inter angulum coniunctionis canalium semicircularium et inter fenestram oualem transuersaliter procedit, aquae-ductus Fallopii, sursum leuissime arcuatus, extremitate interna in cranii cauitatem, externa in foramen stylomastoideum hians, transitui nerui duri et chordae tympani inseruiens. In regione, apici conchae opposita, orificium tubae *Eustachianae* in capsam tympani patet.

Pars squamosa ossis temporalis (quae improprie ita in hoc animale appellatur, cum per simplicem tantummodo suturam cum reliquis ossibus cohaereat iterum in duas portiones subdiuidenda, quarum vna superior verticalis, plana, musculi crotaphytis insertioni inseruiens; altera horizontalis inaequalis, nam in ea antice eminentia articularis, leuissime deorsum arcuata, transuersaliter concaua, cartilagine obducta, longitudinaliter a rostro occiput versus extensa, processu condyloideo maxillae inferioris duplo longior; post eminentiam fossa articularis, profunda, processui condiloideo amplitudine respondens, nuda. Ad angulum posticum, in eodem cum eminentia articulari plano, oritur extrorsum ac antrorsum procedens apophysis zygomatica attenuato-acuminata, cui inferne ad haeret *os zygomaticum*, quod lineare, simplicissimum, subarcuatum vtrinque attenuatum, antice incumbens apophysi zygomaticae ossis maxillaris.

Oſſa maxillaria ſuperiora parte inferiore horizontali, oſſibus roſtri et palati interpoſita, plana inter ſe cochaerent et foramine inciſiuo antice relicto palatum oſſeum fundúmque cauitatis narium poſticae conſtituunt, et dentes molares tres recipiunt. A radice alueolorum dentium molarium adſcendit aphophyſis alueolaris, quae perpendicularis, lata, cauitatem narium poſticam vtrinque lateraliter obtegens. In extremitate antica corporis oſſis maxillaris oriuntur apophyſes duae; anterior naſalis perpendiculariter ad baſin oſſium roſtri vsque, ad os frontale adſcendens; poſterior zygomatica, extrorſum horizontaliter procedens, quae margine inferiore foraminis ampliſſimi, quod foramen magnum *maxillare* appellamus, formata, mox bifurcatur in partem perpendiculariter adſcendentem introrſum arcuatam ac in amplexus cum apophyſi naſali ruentem, ad perficiendum forạmen magnum; pars altera bifurcationis, horizontalis continuatio apophyſeos, extrorſum arcuata et os zygomaticum petens, ac complementum totius arcus zygomatici ſiſtens.

Os vnguiculare planum, lineare, ſubincuruum, ad marginem poſteriorem cruris exterioris foraminis magni maxillaris ſitum, angulum a receſſione partis deſcendentis oſſis frontalis replens.

Oſſa palati portione palatina horizontali palati partem poſteriorem a dente molari medio ad vltimum vsque conficiunt, et in interſtitio alarum apophyſeos

ptery-

pterygoideae ossis sphaenoidei perpendiculariter adscendunt portione pterygoidea quae tandem dilatata antrorsum procedit, desinens in portionem nasalem quae parti descendenti ossis frontalis, alae magnae ossis sphaenoidei et apophysi alueolari ossis maxillaris interposita partem supremam parietis lateralis cauitatis narium posticae et simul imum fundum fossae zygomaticae constituit.

Os sphaenoideum corpore oblongo, solido, apophysi basilari ossis occipitalis et ossi ethoideo interposito, fundum cauitatis cranii internae planum et omnino aequalem sistit; ad latera corporis secedunt alae magnae, horizontales in eodem cum corpore plano, interne pariter aequales, retrorsum a corpore diuergentes, et interstitium magnum oblongum reliquentes, quod extrorsum duplici apertura hiat, apertura posterior maior formatur per alam externam et internam apophyseos pterygoideae ossis sphaenoidalis, quarum interstitium pro fossa venae iugularis inseruit; apertura altera anterior alae externae apophyseos pterygoideae et apophysi nasali ossis palati interiacet, pro transitu nerui sympathici medii. Inter radices alae magnae et alae externae apophyseos pterygoideae situs est canalis obliquus, transitum carotidi concedens.

Os ethmoideum totum quantum absconditum, inter ossa frontalia, nasi, rostrique et sphaenoidale situm

ſitum; lamina cribroſa, e qua criſta galli vix prominet, parietem anteriorem perpendicularem cauitatis cranii ſiſtit; lamina longitudinaliter perpendicularis antrorſum procedit, coniunctionem cum vomere init et cauitatem narium poſtice in duas partes aequales diuidit; huic vtrinque parallela oſſicula conchoidea quatuor radiculis tenuiſſimis laminae cribroſae ad haerentia: lamina tenuiſſima exterius inter ſe coadunata.

Conchylia inferiora naſi in narium cauitate vtraque per totam oſſium roſtri longitudinem horizontaliter decurrunt, his adhaerentia, extrorſum reflexa, introrſum plana, vomeri parallela, proceſſibus conchoideis oſſis naſi ſuccumbentia iisque ſimillima.

Vomer, partem inferiorem ſepti narium conſtituens, extremitate poſtica cum lamina *longitudinali* perpendiculari oſſis ethmoidei et margine inferiore cum harmonia oſſium roſtri cohaeret; margine ſuperiore ſuleato ſurſum ſpinam longitudinalem oſſis naſi verſus ſpectat ac cum ea ſepto narium cartilagineo iungitur.

Maxilla inferior bicruralis, ramis in mento per ſynchondroſin connexis; corpus rami ſinguli totum quantum alueolum dentis inferioris inciſiui conſtituit deſinens in extremitatem vltra apophyſin condyloideam elongatam, cylindricam, obtuſiſſimam concauam, quam proceſſum odontoideum appellamus quia

quia receptioni radicis dentis inſeruit. In eadem cum proceſſu hoc et cum apice dentis inciſiui linea ſita eſt apophyſis coronoidea, plana, acuminata, inſertioni ſtrati interioris crotaphytis inſeruiens; apophyſis condyloidea angulo ſemirecto e proceſſu odontoideo introrſum prodeuns, radice compreſſa, extremitate conuexa, cartilagine obducta, longitudinaliter nec transverſim ſita; in facie exteriore in regione apophyſi condyloideae oppoſita conſpicitur ſpina oſſea, obtuſiuſcula, angulo acutiſſimo ſurſum a ſtrato exteriore crotaphytis producta. In medio fere maxillae introrſum adeſt apophyſis alueolaris, dentes tres molares recipiens. In medio apophyſin condiloideam et alueolarem inter, apertura interior canalis maxillaris, qui in facie exteriore maxillae infra dentem molarem primum extrorſum hiat, tranſitui nerui et vaſorum dentium molarium propriorum inſeruiens. Nerui et vaſa denti inciſiuo deſtinata petunt foraminula in interſtitio proceſſus odontoidei et apophyſeos condyloideae obuia. Pro tranſitu vaſorum, os ipſum nutrientium foraminula plurima in omni ſuperficie interiori adſunt. De ſitu maxillae inferioris animaduertendum, quod dentibus primoribus diductis apophyſis condyloidea in extremitate anteriore, iisdem autem acie ſibi incumbentibus eadem in extremitate poſteriori eminentiae articularis oſſis temporalis collocata ſit; ſi tandem dentes molares inferiores ſuperioribus reſpondent, apophyſis condyloidea vt in foſſa articulari ſita ſit neceſſe eſt.

 Apex

Apex obtusus processus odontoidei in diductione maxillae inferioris superficiem inferiorem apophyseos zygomaticae ossis temporalis, hanc ob causam leuissime excauatam, respicit, quo mechanismo et mobilitati consulitur et luxationi praecauetur.

Dentium primorum inferiorum corpus cuneiforme, scindens; radix prismatica, concaua, corpore duplo longior arcuata: dentes primores superiores inferioribus similes, corpore breuiori, radice *semilunari* concaua. Dentium molarium corona cylindrica, truncata plana; radix subbifida, exterior breuior, interior longior maior, vtraque obtusa.

Vertebrae colli septem, dorsi quatuordecim; lumborum quinque, ossis sacri quinque *spuriae*; os coxygis subcartilagineum, breue, obtusiusculum; coniunctio ossium pubis synchondrica, dilatabilis. Clauicula tenuis, linearis; costa autem *prima latissima*, a scalenis fortissimis diducta; *costae* reliquae, quarum in vniuersum quatuordecim sunt, lineares, cartilaginibus longissimis auctae, quarum octo superiores separatim ossi sterni, quatuor subsequentes vero cartilagine communi sterno adhaerent; decima tertia et decima quarta libere inter musculos abdominales fluctuant. *Os sterni* lineare; cartilagine lato, rotundato, lamelloso terminatum. Extremitatum ossa vix ac ne vix differunt a vulgari structura.

Partes quaedam *capitis molles*, propter singularissimam conformationem succinctiori descriptione ne dignissimae. *Rostrum* cartilagineum apici ossis nasi et margini superiori, ossium rostri adhaeret, septo mobili crassissimo, bipartito. Sub cute capitis musculus fat fortis *subcutaneus*, omnem capitis cutem vestiens, superficiei superiori ossium rostri, nasi, frontalis, et suturae sagittali ossium parietalium, nec non processui zygomatico ossis maxillaris adhaerens. Cute capitis sublata in conspectum venit *musculus* crassissimus oblongus, *proboscidem expandens* lateraliter marginibus ossium rostri et postice ambitui foraminis magni ossis maxillaris superioris insertus; *buccinator* et *eleuatores labiorum* tenues, margini inferiori processus zygomatici ossis maxillaris et superficiei inferiori ossium rostri adhaerentes, *masseter* omnium fortissimus, omnem marginem inferiorem arcus zygomatici et totam superficiem externam maxillae inferioris obtegens; *crotaphytes* latissimus ambitui fossae zygomaticae a processu zygomatico ossis temporalis ad os vnguiculare vsque adhaerens, et totam fossam zygomaticam occupans, obtegendo partem descendentem ossis frontalis ac superficiem totam et ossis parietalis et partis squamosae ossis temporalis: stratum eius exterius procedit supra arcum zygomaticum, et inseritur spinae superficiei exterioris maxillae inferioris; stratum internum post arcum zygomaticum incisuram semilunarem maxillae inferioris petit, pariterque ei ac apophysi coronoideae adhaeret.

Spatium inter apophysin zygomaticam ossis maxillaris et inter musculum crotaphytem replet *conglomeratum glandulosum*, liquidum spissiusculum, puri laudabili simillimum, in cellulis continens; centro huius conglomerati per cellulosam adhaeret *oculus* corpusculum nigricans, globosum, vix semine papauerino maius, antice subpellucidum, nitidum referens, in quo ob minutiem nec pupilla nec liquores discerni queunt. Ad hoc oculi rudimentum accedunt filamenta neruea, capillaria, per foramen angustissimum, in linea coniunctionis processus nasalis ossis palati cum ala magna ossis sphaenoidei obuium, e basi cerebri prodeuntia et ad pollicis fere longitudinem per fossam zygomaticam *inter* musculum crotaphytem et conglomeratum istud glandulosum percurrentia, filamentis aliis *in oculum*, aliis in glandulam desinentibus. *Apertura* pro oculo cutanea nec in cute detracta detegenda, quae potius in eo ipso loco oculis respondente musculo subcutaneo vestita est; musculi pariter nulli ad oculum hunc anomalum accedunt; hinc nec tot neruorum paria ac alias solent, sed sex tantum, nasale scilicet, ophthalmicum, sympathicum medium, alias par quintum dictum, acusticum, vagum alias par octauum, et linguale.

Ad latera nuchae a processu zygomatico ossis temporalis ad foramen auditorium externum procedit *meatus auditorius cartilagineus*, conicus, externe dila-

dilatatus, introrſum anguſtatus, e duabus cartilaginibus compoſitus, quarum exterior integra, interior bipartita; in vtraque margines ſibi incumbunt, hinc ambitus exterior inaequalis, ad quem inſuper fibrillae muſculares a crotaphyte accedunt; ambitus vero interior aequalis tunica ſubpiloſa, a cute externa continuata, veſtitus. Superficies tota oſſis occipitalis muſculis ceruicalibus inſolenter craſſis obducitur. Haec ſufficiant de capite, in quo reliqua minus ſingularia ſunt.

Ad latera colli ſub cute *glandulae* conſpiciuntur *iugulares*, craſſae, latae, in nucham vsque extenſae; anterius glandula *thyreoidea* duplex, obouata.

Thorax elongatus, conuexus; *pulmo dexter* trilobus, lobulo infimo diaphragmati incumbenti maximo, reliquis ſuperioribus dimidio minoribus, inter ſe aequalibus; *pulmo ſiniſter* integer; *lobulus acceſſorius*, paruus, triangularis, inter pulmonem dextrum, ventriculum cordis dextrum et diaphragma poſitus. *Cor* ouatum longitudinaliter ſitum, apice interſtitium 6 et 7. coſtae ſiniſtrae reſpiciens. Supra cordis baſin ad apicem thoracis vsque glandula *thymus* ampla, lata, albida, ſub qua *trachea* procedit vniformis, ex annulis viginti cartilagineis remotis, poſtice truncatis compoſita, ſpinae incumbens; ad marginem huius ſiniſtrum *oeſophagus* muſculoſus.

Abdomen laxiusculum breue. *Hepar* quadrilobum; lobi duo anteriores, duo posteriores; *anterior dexter* omnium maximus, hypochondrium dextrum et epigastrium occupans, ligamento lato per superficiem superiorem accurrente diaphragmati annexus, bifidus, inter fissuram *vesiculam felleam*, pyriformem, paruam, profunde ad dorsi spinam sitam, ductu choledocho proxime post pylorum in intestinum hiantem recipiens; *anterior sinister* dextro aliquantum minor, integer, hypochondrium sinistrum replens, ventriculi fundo incumbens; *posterior dexter* bipartitus, lobulis paruis rotundato-angulatis, inferiore concauo et renis dextri extremitati superiori incumbente ac ligamento hepatico-renali annexo; *posterior sinister* iterum bipartitus, lobulis omnium minimis, ventriculi arcui minori concauo adhaerentibus. *Lien* arcui maiori ventriculi per omentum adhaerens, linearis fere et tenuissimus, longitudinis 1¼. poll. coloris rubicundi. *Pancreas*, inter spinam dorsi et ventriculi superficiem posteriorem, cylindricum fere, intestinulum referens, transuersaliter ad intestinum proxime ad pylorum decurrens, pollicem longum. *Omentum* ab hepate et liene ad superficiem posteriorem ventriculi proueniens, arcui maiori conuexo ventriculi adhaerens, conuolutum, breue nec intestina obtegens, vix aliquid adipis continens. *Ventriculus* ouato-incuruus, membranaceus, cardia angusta desinens sinistrorsum in fundum obtusum ad diaphragma et hypochondrium

drium finistrum versus incuruum; ex quo descendit extrorsum et deorsum arcus maior vsque ad pylorum, qui laxus, amplus et cardiae proximus, arcu paruo concauo ab ea separatus; corpus ventriculi albicans, tunica communi vestitum, sub qua stratum musculare tenue, varium; ad superficiem posteriorem ventriculi fundum versus, macula rotunda, glabra, rubicunda, extra reliquam ventriculi substantiam aliquantum prominula; eadem macula a superficie interna ventriculi glabra, rubra, sinum quasi formans, margine prominulo annulari, quo ipsa villosa ventriculi tunica terminatur, cincta; reliqua superficies interna omnis albicans, rugosa, rugis praesertim ad pylorum eminentioribus et valvulosis a tunicae villosae duplicaturis; quae simul cum neruea ad ipsum pylorum terminatur margine prominulo, annulari, rugoso, crenato; adeo vt tunica ventriculi externa communi et musculari soluta, et cellulosa remota nullus amplius nexus sit ventriculi cum tractu intestinali. *Intestinum tenue* ad pylorum valde amplum, capacitate 5. linearum, postea sensim sensimque coarctatum in diametrum 2. linearum, in initio rubicundum, post albicans, flexuosum, mesenterio laxiusculo adnexum, in regione vmbilicali inter ventriculum et coecum situm, ipso animali quintuplo longius, 44. pollices a pyloro ad coecum percurrens, desinens transuersaliter in coecum, lumine clauso valuula magna, simplici, semilunari, colon versus nutante. *Coecum*

per

per hypogastrium, regionem iliacam sinistram versus extensum, cylindricum, vix anfractuosum, fundo attenuato terminatum, longitudine 4½. poll. diametro maximo 8 linearum, externe subgyrosum, interne valuulis aliquot laxissimis vestitum. *Colon*, recta continuatio coeci, adscendit in regione iliaca sinistra ad ventriculi superficiem posteriorem, abit abhinc a coeco tectum ad regionem iliacam dextram; hic recuruatur et parti descendenti arcte annexum petit pristinam altitudinem, tandemque ad marginem sinistrum spinae dorsi descendit ductu recto ad peluim et desinit in rectum; in toto hoc decursu 18. pollices emetiens, diametro 2. linearum, externe vbique fere laeue, extremitatem versus hinc inde contractum, ad scybalorum formationem. *Rectum* musculosum desinit in *anum* cuius apertura cincta est conglomerato parenchymatoso, ex innumeris intestinulis quasi conuoluto, *liquidum* aperturam lubricans, sed inodorum secernens. *Renes* duo integri, ouati, auellanae magnitudinis, *succenturiatis* aucti; vreteres recta ad spinam dorsi vtrinque decurrentes in vesicam rotundam, amplam, vtrinque tunica cummuni vestitam, anterius ad symphysin ossium pubis ligamento lato annexam.

Genitalia in mare: testiculi extremitate vna extra abdomen prominentes, rotundi, magnitudine pisi; *Epidydymis* ad latus internum testiculo arcte adhaerens, vermiculosus, desinens in vas deferens, quod

quod in pelui vtrinque angulo acutiſſimo terminatur in veſiculas ſpermaticas, paruas, vix duarum linearum latitudine, multigyroſas, inter veſicam vrinariam et rectum, ad veſicae vrinariae ceruicem ſitas, hiantes in vrethram apertura prominula, ſubcartilaginea, proxime ante veſicae vrinariae aperturam. *Vrethra* muſculoſa, vix 6. lineas longitudine, nec vnam diametro excedens, continuatur in corpus cauernoſum vrethrae, longitudine 6. linearum, terminatum glande penis 3. lineas longa, oſſiculum lineare continente, quod baſi dilatatiori per ligamentum forte ipſi corporum cauernoſorum penis extremitati ad ligamentum, exterius autem duabus lateraliter adhaerentibus papillis acuminatis, vrethrae aperturam obtegentibus, ornatum. *Corpora cauernoſa penis duo*, diſſepimento ſeparata, baſi ſymphyſi pubis adhaerentia. Longitudo igitur totius penis a veſicae vrinariae ceruice ad glandis extremum 1. poll. 3. lin. proprie vero penis a corporum cauernoſorum baſi ad glandis extremitatem vsque 9. lineas longus, diametro vix linea craſſior.

Genitalia feminea: labia vaginae ſtrictiuſcula, in papillulam prominentia a clitoride, quam obtegunt; vrethrae apertura in pronao prominula, nymphis obuallata; vagina vteri membranacea, vix rugoſa, pollice breuior; os vteri papilloſum; ceruix vteri anguſtus; vix ſtylum tenuiſſimum recipiens, mox bifurcandus in cornu dextrum ſiniſtrumque

 ductu

ductu recto, ad renes fere adſcendens vtrinque vltra duorum pollicum longitudinem, ouario multigyroſo, veſiculoſo terminatum.

PHYSIOLOGIA.

Viſu plane carere videtur *Spalax noſter*; ea enim, quae absque rumore accedunt, quamuis capiti proxima ſint, omnino non percipit; leuiſſimo autem ſono edito caput erigit, et aurium aperturam, quantumcunque fieri poteſt, dilatat; hinc auditu forte pollet, vt animalibus caſu coecis ſolemne. Iniurias metuens rictum diſtendit, ſono ſtridulo difficili humanae reſpirationi non abſimili fremitat, ac dentes inciſiuos ad pugnam parat, iisque iratus oblata mordiens prehendit; dolens praeſertim ſub terra pipiendo, rattorum more, clamitat miſere.

Proxime ſub terra fodit canales horizontales, roſtro terram ſoluens dentibus primoribus radices obuias abſcindens; hinc muſculi maſticationis negotio inſeruientes fortiſſimi; terram ſolutam pedibus anterioribus verſus poſteriores pellit, eorumque ope tandem hanc ad canalis foramen in cumulum proiicit, idemque in cauitatis vberiori continuatione, talparum more iteratis vicibus peragit, in vna linea plures, duos treſue paſſus inter ſe diſtantes cumulos erigens: hyeme appropinquante profundius fodit; cauernam oblique deſcendentem ſibi conficiens, in qua hybernare dicitur.

citur. Inceſſu ſupra terram ob pedes breues tardiſſimus.

Diaeta mere vegetabilis; radicibus praeſertim aromaticis vmbelliferarum, in hortis et apricis campis obuiarum victitat, quarum fibrillis albicantibus bene comminutis ventriculus ſemper repletus. Feces in ſcybala redactae; hybernationis tempore pulpoſae in coeco ampliſſimo colliguntur. Vrina turbida, ſabuloſa.

Coeunt aeſtate; gregatim tunc in terrae ſuperficie apparentes, ſexum olfactu, quo excellunt, diſtinguentes; femina parit pullos duos ad quatuor de tempore durationis grauiditatis nil nobis conſtat. Pulicibus, non pediculis, obnoxium animalculum.

Spalax microphthalmus a nobis et hiſtorice et anatomice, et phyſiologice deſcriptus habitat frequentiſſime in campis apricis vaſtiſſimis deſertis tanaicenſibus ac in vicis hortisque vicinis.

Explicatio figurarum; et ſtaturam ſpalacis microphthalmi, et varias eiusdem capitis partes naturali magnitudine repraeſentantium.

Fig. 1. Oſſa capitis a latere dextro absque maxilla inferiore. Tab. VIII.

a. os naſi.
b. oſſa roſtri.
c. oſſa frontalia.

d. pars descendens ossis frontalis.
e. ossa parietalia.
f. os occipitale.
g. facies superior partis petrosae ossis temporalis.
h. pars squamosa ossis temporalis.
i. apophysis zigomatica ossis temporalis.
k. os zygomaticum.
l. apophysis zygomatica ossis maxillaris superioris.
m. apophysis nasalis ossis maxillaris.
n. foramen magnum ossis maxillaris superioris.
o. ossa vnguicularia.
p. foramen magnum occipitale.
q. apophysis condyloideae ossis occipitalis.
r. apophyses styloideae ossis occipitalis.
s. apophysis mastoidea ossis temporalis.
t. foramen auditorium externum.
u. dentes tres molares.
x. fossa zygomatica.
y. foramina ad sinus ethmoideos ducentia.
z. foraminis optici regio, quod autem magis retrorsum ideoque haud conspicuum.

Tab. VIII. Fig. 2. Basis ossium cranii.

a. margo terminalis ossis nasi.
b. septum narium cartilagineum.
c. aperturae narium anteriores.
d. ossa rostri.

e. al-

e. alueoli dentium incisiuorum superiorum.
f. corpus ossis maxillaris superioris.
g. foramen incisiuum winflouii.
h. ossa palatini.
i. apertura posterior narium.
k. apophyses pterygoideae ossis sphaenoidei.
l. alae magnae ossis sphaenoidei.
m. corpus ossis sphaenoidei cohaerens cum apophysi basilari ossis occipitalis.
n. apophysis basilaris ossis occipitalis, foramine magno et apophysibus condyloideis vtrinque terminata.
o. facies inferior conuexa partis petrosae ossis temporalis.
p. fossa articularis ossis temporalis.
q. eminentia articularis ossis temporalis.
r. apophysis zygomatica ossis temporalis.
s. os zygomaticum.
t. apophysis zygomatica ossis maxillaris.
y. foramina condiloidea ossis occipitalis.
z. apophysis styloidea ossis occipitalis
α. foramen auditorium externum.
β. foramen stylo-mastoideum.
γ. apophysis mastoidea.
δ. cartilago meatus auditorii interior bifidus.
ε. cartilago exterior integer.
ϑ. margo annularis, cui membrana tympani adhaeret.
λ. fenestra rotunda conchae.

 μ. fe-μ. feneſtra oualis veſtibuli, ſtapedis baſi obturata quae in icone remota ſimul cum reliquis auditus oſſiculis.

ψ, apertura tubae *Euſtachianae.*

σ. extremitas cerebralis aquae ductus fallopii.

τ. extremitas altera eiusdem ductus foramen ſtylomaſtoideum verſus.

π. canalis ſemicircularis verticalis.

ϱ. canalis ſemicircularis horizontalis

ω. eminentia pyramidalis inſertioni cruris breuis incudis inſeruiens.

θ. foſſa venae iugularis.

ξ. canalis caroticus.

Tab. VIII. Fig. 3. Ramus dexter maxillae inferioris a facie interna.

a apophyſis coronoidea.

b. apophyſis condiloidea.

c. proceſſus odontoideus.

d. ſpina muſcularis ſuperficiei - externae.

e. apertura interna magni canalis maxillaris.

f. foraminula varia, pro tranſitu vaſorum nutrientium.

g. apophyſis alueolaris.

h. tres dentes molares.

i. facies interna ſynchondroſeos ramorum.

k. dens inciſiuus inferior.

Tab. VIII. Fig. 4. Dens inciſiuus inferior extra alueolum.

a. corpus cuneiforme ſcindens.

b. lo-

b. locus in quo attenuatio corporis incipit.
c. radix priſmatica concaua.

Fig. 5. Dens inciſiuus ſuperior extra alueolum. Tab. VIII.
a. corpus cuneiforme ſcindens.
b. locus in quo attenuatio corporis incipit.
c. radix prismatica cocaua.

Fig. 6. Dens molaris.
a. corona cylindrica truncata.
b. radix exterior breuis.
c. radix interior longior, craſſior.

Fig. 7. Caput a latere ſiniſtro cum maxilla inferiori a cute denudatum. Tab. VIII.
a. cartilago roſtri.
b. muſculus roſtrum expandens.
c. muſculus crotaphytes.
d. adhaeſio ſtrati exterioris crotaphytis in ſpinam muſcularem maxillae inferioris.
e. conglomeratum glanduloſum.
f. oculus.
g. meatus auditorius cartilagineus.
h. maſſeter.
i. apex linguae.
k. interſtitium vacuum muſculis labiorum et buccinatore remotis.
l. dentes inciſiui inferiores et ſuperiores.
m. oſſa roſtri.
n. os naſi.
o. ſutura coronalis.

p. GS

p. os frontale.
q. apophysis zygomatica ossis maxillaris superioris.
r. os vnguiculare.
s. os zygomaticum.
t. sutura sagittalis ossium parietalium.
u. sutura lamdoidea.
x. spina ossis occipitalis.

Tab. IX. Fig. 8 Spalax microphthalmus incedens.

Tab. IX. Fig. 9. Spalax micropthalmus dorso incumbens mas, vt rostri, dentium, oris rictus et setarum capitis structura simul cum vortice gulari et sutura sternea eo distinctius pateat.

PERE-

PEREGVSNA, NOVA MVSTELAE SPECIES.

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

Trad. d. 21. Ian. 1770.

Nouum regni animalis ciuem, campos *Tanaicenses* vastissimos inhabitantem, *Mustelarum* generi adscribendum proponimus. Omnis corporis habitus et partium structura vitaeque genus indicant affinitatem animalculi, quod *Russis* et nobis triuialiter audit *Peregusna*, cum congeneribus *putorio* scilicet, *marte*, *ermineo*, et *mustela vulgari*, campis iisdem pariter indigenis. Vt pateat in quo conueniat, iterumque in quo differat, subiungitur.

DESCRIPTIO PEREGVSNAE.

CAPVT triangulare, depressum; *rostrum* vltra labium prominens, acuminatum, nudum, nigrum medio carinatum, *naribus* amplis recuruis perforatum. *Oris apertura* sat ampla, triangularis, infra oculos vsque extensa; *labium* superius integrum, laxum, crassum, pilosum, pendulum, dentes denudatos relinquens. *Lingua* lata, vix ex ore producenda, carnosa apice rotundato, submembranaceo, superne papillis retrorsum acuminatis confertissime obsita et albicans; inferne rubra, glabra,

 frenu-

frenulo laxissimo, musculoso alligata. *Palatum* vndulatum.

DENTES *in maxilla superiore: incisiui* sex in vna linea recta dispositi, teretes, acuminati, sibimet proximi, singulo vtrinque extimo reliquis intermediis crassiore et tantillum longiore: *Canini* duo vtrinque vnus, ab incisiuis parum remotus, molaribus proximus, incisiuis quadruplo maior, conicus, leuissime incuruus, exterius obsolete striatus: *Molares* vtrinque quatuor, quorum primus minimus, vix extra gingiuas prominens, obtusus; secundus aliquantum maior, exterius acuminatus; tertius omnium maximus, longitudinaliter extensus, bicuspidatus; quartus transuersaliter extensus, breuis, rugosus. *Dentes* in *maxilla inferiore; incisiui* sex, breuissimi, quorum quatuor maiores, obtusi, subtuberculosi, intermediis duobus *tantillum interius* sitis; duo minores, imo minimi, *granula* referentes ante interstitium dentium duorum maiorum intermediorum siti: *Canini* duo vtrinque vnus, tantillum et vix ab incisiuis remotus, figura et magnitudine superiorum: *molares* vtrinque quinque caninis proximi, quorum primus, obtusus, secundus et tertius maiores acuminati; quartus omnium maximus, tricuspidatus, denticulo intermedio productiore; quintus primo similis. Dentes igitur in vniuersum 34. in maxilla superiore 16. in inferiore 18. omnes eburnei. Ore clauso dentes incisiui intermedii quatuor superiores inferioribus maioribus arcte incumbunt; laterales autem

tem maiores interstitium, incisiuos et caninos inferiores inter, intrant; canini superiores extra labium inferius prominent, inferiores vero interstitium incisiuis et caninis superioribus interpositum occupant; molares alternatim interstitiis ipsis interstitis respondent.

MYSTACES quinque ordinum, in labio superiore sitae; ordinis superioris setae a reliquis remotiores, in eadem cum oculis linea, sursum spectantes, breues; reliquae deorsum flexae, inaequales, longissimis aures attingentibus. *Setae supra* oculum ad cantum anteriorem fere 10. quarum duae longiores; infra oculum pone cantum posteriorem duae, superioribus aliquantum longiores; pone sinum oris duae, longae deorsum declinatae; in mento plures detritae.

OCVLI in medio lineae a naribus ad aures ductae positi, laterales, parui, profundi, elliptici; cantho vno anteriori acutissimo, altero posteriori; margine palpebrarum nudo; membrana nyctitante ad cantum anteriorem obsoleta, albicante, iride et pupilla nigra.

AVRICVLAE laterales, erectae, rotundae, amplae, breues, pilosae.

COLLVM breue, vix capite angustius.

TRVNCVS elongatus, cylindricus, vix collo crassior.

PEDES trunco fere triplo breuiores, subaequales, posterioribus aliquantum longioribus; *plantae* et et *palmas* calcaneis incedentes, pilosae, subtus verrucis quatuor nudis insignitae, pentadactylae; *digiti* omnes fissi, in palmis longiores; primus interior seu pollex secundo dimidio breuior; secundus; tertius et quartus fere aequales, intermedio aliquantum prominente; quintus iterum breuior, longitudine media inter primum et secundum; *Vngues* compressi, vncinati, acuminati, flauicantes, in palmis longiores ac in plantis; sed vnguis digiti primi plantarum, latior, obtusior, breuior reliquis.

CAVDA longa, truncum fere longitudine adaequans, rotunda, pilosa, pilis basin versus longioribus, apicem versus breuioribus, vt inde cauda attenuato - acuminata.

PILI vbique confertissimi, *decumbentes*, retrorsum spectantes, absque suturis et lanugine rigidiusculi, vix semipollice longiores, vbique in corpore et pedibus aequales, in capite breuiores, in cauda longiores, pollicem ad basin excedentes.

COLOR: *Caput* nigrum; omni oris circumferentia, fascia frontali infra aures extensa, auricularumque ambitu et vertice medio albis; *truncus* supra et ad latera bruneo luteoque varius; regione interscapulari fere tota brunnea; maculae lutescentes, hyeme pallidiores euadunt et albescunt; truncus subtus et *pedes* toti aterrimi; *caudae* pili elongati basi cinerascentes, medio nigri, extremitate albidi;

pili

pili breuiores apicis caudae basi cinerei, extremitate nigri; pili omnes nitentes.

Vmbilicus nullus; *mammae* vtrinque sex, abdominales et inguinales, papillis minimis, vix conspicuis. *Vaginae labia* in papillam rugosam pilis obsitam prominentia; *praeputium* penis strictum, pilosum; *testiculi* non apparentes; *perinaeum* sat latum; *anus* rugosus, nudiusculus, rubicundus, empyreumatice foetens.

STATVRA proxime accedit ad *putorium auctorum*, quo aliquantum minor; in *dimensiones* secundum *londinensem* pedem:

	poll.	lin.
Longitudo ab apice rostri ad caudae extremum - - - - - - - - - - - - -	20.	—
—— a rostro ad nucham - - - -	2.	6.
—— a nucha ad caudae basin - - -	11.	—
—— caudae - - - - - - - - -	6.	6.
—— a labio inferiore ad sterni caput	1.	6.
—— capite sterni ad processum xyphoideum	3.	8.
—— a processu xyphoideo ad praeputium	4.	—
—— a praeputio ad anum - - - - -	—	8.
—— a vaginae apertura ad anum - -	—	6.
—— pedum anteriorum a capite ossis brachii ad apicem digiti medii - - -	4.	—
—— pedum posteriorum a capite ossis femoris ad apicem digiti medii -	4.	6.
—— palmae a carpo ad apicem digiti medii	1.	6.

	poll.	lin.
Longitudo plantae a tarſo ad apicem digiti medii	1.	10.
—— digiti medii palmae	—	10.
—— digiti medii plantae	—	8.
—— vnguis digiti medii palmae	—	6.
—— vnguis digiti medii plantae	—	$3\frac{1}{2}$.
Diameter inter roſtri apicem et oris angulum	1.	—
—— tranſuerſalis rictus oris	1.	—
—— inter narium aperturas	—	2.
—— inter nares et oculi cantum anteriorem	—	8.
—— inter oculi cantum poſteriorem et aures	—	8.
—— inter oculos	—	8.
—— inter aures	1.	6.
—— oculorum	—	$2\frac{1}{2}$.
—— aurium	1.	—
—— capitis perpendicularis inter aures	1.	3.
—— capitis transuerſalis in eodem loco	1.	8.
peripheria trunci maxima ante lumbos	5.	6.

ANATOMIA PEREGVSNAE.

THORACIS cauitas anguſtiſſima, ſed longiſſime extenſa, ſuperne acute conice terminata. *Cor* in medio cauitatis ſitum dextrorſum magis ac ſiniſtrorſum, auricula dextra, et margine corporis dextro ipſam coſtarum lateris dextri curuaturam attingens, ouatum, oui columbini magnitudine. *Pulmo* et dexter et ſiniſter trilobus; lobo ſuperiore longiſſimo, valde attenuato, imum thoracis apicem petente;

petente; inferior latiore et craſſiore, diaphragmati incumbente; medio minimo, in dextro pulmone maiore ac in ſiniſtro; accedit lobulus, cordis apicem et oeſophagum inter ſupra diaphragma, ad latus dextrum mediaſtini ſitus, triangularis. *Trachea* profunde in Thoracis cauitatem deſcendens, pollicibus tribus longior, ex annulis quinquaginta poſtice planis conflata. *Oeſophagus* laxus ad marginem ſiniſtrum tracheae. *Ductus thoracicus* tenuiſſimus, venam cauam ſuperiorem petens. *Thymus* oblonga, lata, tracheae et auriculae dextrae cordis incumbens.

ABDOMINIS cauitas anguſta, breuis, *Diaphragma* latum, muſculoſum, ſpeculo *helmontii* anguſto. *Hepar* magnum, quadrilobum; lobi duo dextri, duo ſiniſtri: *lobus dexter anterior* et ſuperior diaphragmati reſpondens, omnium maximus, trifidus, lobulo exteriore hypochondrium dextrum occupante, maximo, duobus interioribus minoribus, in ipſa cardiaca regione ſitis, et ligamento lato diaphragmati adnexis; *lobus dexter* poſterior bipartitus, lobulo inferiore minore reni dextro concauitate ſua incumbente, et ligamento hepatico renali adhaerente; *lobus ſiniſter anterior* et ſuperior diaphragma reſpiciens et ipſi per ligamentum coronarium, a margine poſteriore procedente, alligatus, hypochondrium ſiniſtrum replens; integer; *lobus ſiniſter poſterior* in arcu ventriculi concauo inter cardiam et pylorum ſitus et omento minori connexus inter lobi dextri anterioris lobulum exteriorem et proxi-

proximum minorem *fossa pro vestra fellea*, quae magna, pyriformis, fundo ad processum xyphoideum prominens, *ductu hepatico*, ex lobo dextro prodeunte replenda et *choledocho*, proxime post pylorum in intestinum hiante, sese exonerans; inter lobi dextri anterioris lobulos interiores minor *fossa pro vena umbilicali*; inter lobi dextri anterioris lobulum intimum et lobum sinistrum anteriorem anterius *fossa pro arteria hepatica* et *vena portarum*, posterior *fossa pro vena caua* per hepatis substantiam transeunte. *Lien* oblongus, tenuis, ad omnem arcum conuexum ventriculi extensus, et vasis breuibus omentoque ventriculo adnexus. *Pancreas* longissimum, eiusdem fere cum liene latitudinis, quo attamen tenuius, rubicundum, ab ipso hilo lienali, pone ventriculum laxa omenti duplicatura inuolutum, ad pylorum procedens, et intestino, in quod pone ductum cholodochum *ductus pancreaticus hiat*, ad pollicis longitudinem alligatum, extremitate recurua terminatum. *Omentum* parum adiposum, a ventriculi arcu maiore descendens ad peluim fere vsque et intestina obtegens. *Ventriculus* membranaceus, oblongo-incuruatus absque fundo; arcus enim maior conuexus statim a *cardia* ad *pylorum* descendit, hypochondrium sinistrum versus spectans; arcus superior concauus, breuis; sphincter pylori modice constritus. *Tractus intestinalis* et externe et interne laeuis et continuus, structura vbique eminenter musculosa, longitudine 82. *pollices londinenses* a pyloro ad anum adaequante,

hinc

hinc triplo truncum excedente, diametro vbique aequali vix 3. *lineis* ampliore; *mesenterium* strictum plane non adiposum. *Anus* rugosus, prominens, vtrinque sub cute stipatus *folliculo* rotundo, cauo; interne albo et laxissime rugoso; rugis autem ita arcte inuolutis, vt externe glandulam solidam referat; his apertis, ceu ex *pandorae* pyxide faetor suffocans, empyreumaticus, accerrimus, oculos et nares feriens exit, nec liquidum, nec ductum inueni. *Renes* ouati, auellanae magnitudine integri, dexter superior sinistro, tunica adiposa vix vlla; *vreteres* membranacei simplices, conuergendo peluim petentes; *vesica vrinaria* ouata, rene quadruplo minor, subligamentosa, vtrinque peritonaeo vestita, anterius ligamento lato symphysi pubis adhaerens, extra peluim sita.

GENITALIA *feminae* ita: *vteri ceruix* tres *lineas* longus, cylindricus, vesicae vrinariae et recto interpositus, bifurcatus in *cornua* duo, vnum dextrum, alterum sinistrum, eiusdem cum ceruice diametri, serpentino ductu ad renes vsque adscendentia, extremitatem versus attenuata, et *ouario* multoties gyrato et granuloso aucta, ligamento laxissimo, adipe repleto, lumbis adnexa; *orificium vteri* papillose in vaginam prominens, rugosum, ceruicis et cornuum cauitate angustius, vix stylo capillaceo permeabile; *vagina vteri* constipata, membranacea, orificium vteri versus transuersaliter pronaum versus longitudinaliter rugosa, ruga interme-

 dia

dia pubis arcum versus spectante eminentiori et anterius ab vrethra perforata; *clitoris* magna, tuberculoso-papillosa, cruribus vtrinque pubis ossibus adhaerens; *nymphas* vix vidi, nisi labia vaginae, quae rugosissima, sed arcte conniuentia, pro iis habeas.

GENITALIA *maris* ita; *corpus cauernosum penis* simplex, cylindricum, breue, simphysi ossium pubis postice, et officulo glandis penis antice adhaerens; *officulum glandis* lineari-angulatum, basi subtuberculosa corpori cauernoso penis, quo triplo longius, annexum, apicem versus et ipso apice, qui retrorsum seu abdomen versus hamatus, sulcatum, fere omnino nudum, et non nisi tunica tenuissima, pellucida, ab vrethra continuata obductum; *vrethra* enim infra ossium pubis *symphysin* sat longe decurrens, corpori cauernoso penis inferne adglutinata, ad officulum glandis abit, istud obducit vbique tenuissima, absque corpore cauernoso, et tandem tantillum ante apicem officuli hiat; longitudo corporis cauernosi penis semipollicaris, officuli glandis sesquipollicaris, hinc totius penis bipollicaris. *Testiculi* globosi, folliculis ani incumbentes, extra abdomen equidem prominentes, sed adipe adeo inuoluti, vt vix ac ne vix per cutem appareant; *epidydymis* testiculo arcte adnexa; *funiculus* spermaticus longus, vrethram profunde in pelui sitam petens, *vesiculis spermaticis* minutissimis et vix vllis

auctus,

auctus, sed fere immediate vasis deferentibus in vrethram vtrinque patens.

OSSA capitis et extremitatum vix differunt a congeneribus *putorio* sc. et *marte*, ex aureis BVFFONIANIS scriptis satis superque notis; sed haec pauca de trunci ossibus *peregusnae* monenda sunt; *claviculae* nullae; *os sterni* lineare, ex vndecim ossiculis longitudinaliter adpositis conflatum; *costae* 17. quarum decem primae separatim sterno insertae, sed vndecima, duodecima et decima tertia cartilagine communi processui xyphoideo adhaerentes, reliquae tres spuriae sunt, libere inter musculos abdominales fluctuantes; *vertebrae* colli 7. dorsi 17. lumborum 6.

PHYSIOLOGIA PEREGVSNAE.

Peregusna animal carniuorum est, vt omnes congeneres, *muribus* praesertim victitans, in campis iisdem *tanaicensibus*, quos inhabitat, frequentissimis, *marmota* scilicet, *criceto*, *suslica*, *iaculo* et *musculo*; et inermem *spalacem* nostratem ipsius praedam euadere, vix dubito. Saepius dum animalculum examini anatomico subieci, pilos horum animalium in ventriculo inueni. Miratus sum politiam naturae in his campis vastissimis stabilitam, non arte humana turbatam; e numerosissima plantarum cohorte, campos hosce obsidente assignatae sunt aliae insectorum larvis, aliae auibus granivoris,

ris, aliae quadrupedibus phytophagis nunc denominatis, vt aequilibrium inter plantas seruetur, ne vna specie nimis multiplicata altera suffocetur et pereat. Sed iterum cauendum fuit, ne horum animalium numero nimis aucto nimia plantarum copia comedatur, et hac via plantae pereant; hinc sapientissimus rerum conditor quam plurimas auium insectiuorarum species e *Muscicaparum Motacillarum* et *Hirundinum* familia, haud paucos aues ornithophagos e *Falconum Strygumque* gente et varia quadrupeda carniuora, quadrupedibus phytophagis infesta, quae praesertim e *Mustelarum* tribu sunt, eosdem campos inhabitare iussit. Sic tandem proportio seruatur, et optime obtinetur vltimus *politiae naturae* finis, eo vnice tendens, vt maximus, qui possibilis est, corporum organicorum viuorumque numerus in globo nostro terraqueo adsit *et laete* adsit. Sed vela a via proposita abducentia retraham, in posterum in politiam naturae, in campis *tanaicensibus* a me, ciue eorum per lustrum integrum adscripto et incola circumuagante, sedulo obseruatam vlterius commentaturus, si perspexero, haec pauca arrisisse. Redeamus igitur ad *peregusnam* nostratem, de cuius diaeta adhuc aliqua dicenda sunt. Voracissimum est animalculum, et vix *Gulo* voracior ex naturali tractus intestinalis structura; cum enim hic valde breuis, corpore vix triplo longior, nec interne valuulosus sit, citissime vt transeant cibi per anum et animalculum de nouo vt appetat necesse

cesse est. Haec communis fere omnium animalium mere carniuorarum conditio, et omnium maxime necessaria; nam si his tractus intestinalis adeo longus corporis longitudinem decies saepe excedens, et valvulosus coecoque auctus contigisset, vt phytophagis contigit, caro comesa, ad putrefactionem valde inclinans, certe ob remoram nimis diuturnam putrida euaderet in primis viis, et sanguinem acrimonia nociua imbueret. Phytophagis autem ista structura optime conuenit, quia plantae nec facile putrescunt, nec facile a partibus nutritiis priuantur, hinc eo diutius retinendae sunt, vt omnia corpori animali vtilia extrahantur, et humoribus animalium assimilentur; hanc ob causam iis valuulae intestinales et coecum maxime conducunt. Ita omnia sapientissime sunt adornata. *Peregusnae* exposui olera et panem sed intacta *reliquit*; nec masticationis organa ad vegetabilia comedenda apta sunt, haec enim motu maxillae inferioris laterali conterenda et comminuenda sunt; processus autem condyloideus maxillae inferioris *peregusnae* adeo arcte respondet fossae articulari ossis temporum, vt nullus motus lateralis possibilis; nec superficies articularis ante fossam adest, hinc nec valde diduci possunt maxillae; dentes praeterea omnes ad plantarum partes conterendas ineptissimi, sed ad carnem dilacerandam et praedam necandam aptissimi. Gallinam viuam oblatam mox pedibus prehendit, dentes femoribus gallinae infigens et sanguinem auide sugens; cibum nunquam palmis ori

 admo-

admouens: oua et mel intacta reliquit, nec comperi ab incolis, quod vnquam apiariis noxium fuerit, vt species quaedam congeneres solent; carnem ouinam et anserinam assatam comedebat. Noctu praesertim venatur; interdiu latitans in cauernis ab aliis animalibus effossis; attamen nec plane ignorat artem fodiendi; vidi enim animalculum funi alligatum sat cito canalem oblique descendentem pedibus anterioribus in solo duro fodire.

Corpore flexilissimo abrupte saliendo, dorso sursum curuato et cauda horizontaliter extensa, currit et difficilius accipitur; arbores vix scandit, sed in campis degit. Animal *agilissimum* oculis fulgentibus, vix vnquam dormiens et omni anni tempore apparens; iracundum et iratum acute fremitans, alias vix sonum edens, *caudam sursum* et dorsum versus pilis erectis *flectens*, magis ac antea foetens, caput erigens et dentibus oblata mordicus prehendens; vix cicur euadens.

Initio veris coitum celebrare, mares propter feminas rixas mouere, feminas post spatium bimestre catulos quatuor vel octo, validos et oculatos parere perhibent incolae; penes quos sit in his fides, vsque dum propria experientia doctus certiora communicare potero.

HABITAT in campis apricis desertis *Tanaicensibus*, nondum alibi in *Russia* obseruatum animalculum nec adeo frequens; pellis ob pilorum breuitatem

non

non aestimatur; in animalculo habitat PEDICVLVS *peregusnae* latus, rotundatus, antennis pediformibus, pedibus breuibus, tardigradis.

ICON staturam corporis *peregusnae* iratae, partium externarum structuram et magnitudinem naturalem optime exprimit; quam a congeneribus distinguo nomine hoc specifico: Tab. X.

MVSTELA *pedibus fissis, capite et corpore subtus atterrimis; corpore supra brunneo luteoque vario; ore fascia frontali, auriculisque albis.*

OVVM

OVVM SIMPLEX GEMELLIFERVM.

Auctore

C. F. WOLFF.

Exhibit. d. 22. Febr. 1770.

De ouis gemellificis Auctorum, quae proprie oua gemella sunt.

Annus elapsus est inde, quod ouum ostenderim Academiae Illustrissimae, simplici vno vitello et duobus embryonibus instructum, sex dies incubatum. Eius nunc descriptionem trado. Inter rariora equidem phaenomena illud referendum esse censeo, quum, quantum scio, a nemine hactenus huiusmodi ouum obseruatum sit. Agit quidem *Haruaeus* de ouis gemellificis et *Fabricius* ab Aqua pendente, ipseque *Aristoteles* similium *ouorum* mentionem faciunt, sed intelligunt *hi omnes* per oua gemellifica non oua simplicia, id est vno simplici vitello instructa duobus embryonibus praegnante; sed talia, quibus duplex vitellus insit, quorum vterque suo proprio embryone gaudeat. *Gemellifica* inquit *Haruaeus* cum *Aristotelae* (Exercitatio XXIV. de ouis gemellificis) *oua sunt e quibus gemelli prodeunt pulli; eaque binis vitellis praedita sunt; qui in aliquibus tamen albuminis dissepimento separantur, quo minus inter se confusi sint; in aliis nullum est; sed se mutuo contingunt.* Ipse aliquoties eiusmodi oua duplicia vidi; neque enim adeo rara esse videntur. Plerum-

Plerumque solitis maiora sunt, vt ex singulari sua magnitudine, qua anserinis ouis fere aequipollent, suspicari possis, duplicem in iis contineri vitellum. Tamen etiam vidi, quae nihil solitam magnitudinem excedebant, quamuis duplici vitello instructa fuerint; et alia porro, quae notabili magnitudine se commendabant et nonnisi vnicum tantummodo vitellum continebant. Haec oua tanquam duplicia consideranda esse existimo, et vocari potius debere gemella oua, quam gemellifica vel gemellifera; siquidem vitellus proprie ouum constituit, qui solus in ouario existit et in vtero denique albumine cingitur, crustaque sua testacea obducitur. Quodsi igitur duo vitelli his ouis insunt; oua duplicia vel gemella; haud vero gemellifica recte vocari videntur; quum quilibet horum vitellorum nonnisi vnum tantummodo fetum producit.

Clariora haec omnia euadent, si ad ortum horum ouorum respicias, qui haud difficilis intellectu, nec vllo modo dubius esse videtur. Constat nimirum experientia, nasci haec oua plerumque a gallinis maxime fecundis, aetate iunioribus et lasciuis. Quum albumina et testae ouorum in vtero demum vitellis addantur, vitellique in ouario et in toto ouiductu nunquam, nisi nudi, inueniantur; necesse est, dum oua gemella producuntur, vt bini eorum vitelli in ouario quidem atque in ouiductu perfecte adhucdum separati a se inuicem exstiterint,

Ouorum gemellorum a veris gemellificis differentia.

duoque diuersa oua repraesentauerint; (nihil enim est in his locis, quo in vnum ouum coniungerentur) in vtero vero oportet, vt primum coniunctio facta sit, cum commune albumen, vel testa communis illis circumduceretur. Porro vero necesse est quoque, vt bini eorum ouorum vitelli simul in vtero contigerint (alioquin enim haud potuissent vna communi testa obduci;) cum ordinarie nonnisi successiue et solitarii vitelli in eundem deueniant, solitariaque oua nascantur. Ita enim vterus comparatus est, vt vnum tantum ouum commode capere possit, nec alterum facile recipiat, nisi priori ante expulso. Patet igitur ex his *omnibus*, oua gemella oriri, dum in gallina *nimium fecunda duo* praeter naturam vitelli simul *in* vterum ingeruntur. Dum enim hoc fit; vitelli comprimuntur; albumina eorum confunduntur; vel si *distincta* conseruentur, compinguntur tamen in vnam molem globosam, quae, dum materia nunc testacea, ab vtero suppeditata, obducitur, nonnisi vni communi testae formandae ansam praebere potest. *Haruaeus* l. c. monet se oua vidisse quorum bini vitelli compressi vno communi albumine cincti fuerint; sed iterum alia quoque, quorum vterque vitellus proprio suo et distincto albumine gauderet, vbi sola testa communis esset. In quo casu posteriori nemo dubitabit, quin ex duobus compactis haec oua nata sint. Verum etiam dum vnum albumen vtrumque vitellum cingere videtur, credo *tamen*, duo esse,

adeo

adeo compressa, vt difficilius distinguantur, quae vero distincta fuissent, si accuratius et curiosius examinata fuissent. Quicquid sit, hoc facile patet, nihil aliud haec oua gemella proprie esse, quam duo diuersa oua, in vtero in vnum compacta, testa communi obducta. Sed aliter longe comparatum est cum praesenti ouo gemellifero, quod simplici vitello, simplici albumine constans, vero sensu simplex est, omnique tempore et a prima conformatione simplex fuit, quod nunquam compositum ex duobus aliis est, et tamen duplicem embryonem producit; quod igitur, si similem alium vitellum intra eandem testam secum inclusum haberet quemadmodum contingit in ouis gemellis, non duos, sed quatuor, in hoc ouo spectares foetus.

De foetu ouorum gemellorum.

Pauca adhuc verba addere liceat de his ouis gemellis, prius quam ad nostrum transeam gemelliferum. Quamuis non adeo rarum sit offendere haec oua gemella, neque *Haruaeus* tamen neque *Fabricius* ab *Aquapendente* neque quisquam alius, quod scio, eadem incubauit, eorumque foetus vidit. Neque hoc mirum est. Non omnia enim oua fecunda sunt; non omnia incubationi exponuntur, non omnia, quae incubationi subiecta sunt, aperiuntur et ad examen vocantur. Quando vero pulli naturaliter exclusi sunt, tum haud porro scire licet cuiusmodi ouum fuerit, ex quo pulli prodierunt. Inde factum est, vt *Fabricius* et *Haruaeus* dissentiant respectu foetuum, quos oua gemella producerent. Monstra putat *Fabricius*; nempe pullos, abdomine, pectore vel alia corporis parte connatos. *Haruaeus* gemellos potius credit inde prouenturos esse liberos, nullibi concretos, siquidem vitelli separati a se inuicem, propriisque suis albuminibus cincti fuerint. Si vero contingat, vt vitelli, communi albumine inclusi, adeo sint positi iuxta se inuicem, vt cicatriculae eorum (maculae) dum simul aperiuntur, vnum oculum (areolam pellucidam putat) constituant, tum equidem fieri posse, concedit *Fabricio*, vt monstrum eiusmodi bicorporeum inde oriatur. *Aristoteles* nonnisi gemellos ex his ouis sperauerat. Mihi quidem ipsa nostri subiecti conditio et phaenomena, quae in eo apparent, ita suadere videntur, vt dicam, tota via errasse *Fabricium* ab *Aquapendente*; *Haruaeum* propius ad veritatem accessisse; *acu* rem tetigisse *Aristotelem*. Si enim separati manere potuerunt embryones in ouo praesenti qui ex vno eodemque vitello pullularunt; quantum cogentur minus vt coeant in vnum corpus monstrosum illi, qui ex duobus distinctis vitellis oriuntur. Sed neque contiguitatem macularum neque ipsorum embryonum, siue in vno eodemque, siue in distinctis vicinis vitellis, producere posse eiusmodi monstrosam concretionem, idem nostrum subiectum demonstrat; siquidem embryones in eo adeo sibi propinqui in situ suo naturali fuerint, vt sese contigerint inuicem, adeoque propiores sibi nullo modo esse potuerint. Quin ipsa haec

haec conditio, quam *Haruaeus* ad productionem monstrorum requirit, vt vni nempe oculo gemelli embryones inclusi sint, obtinuit in ouo nostro, quemadmodum in subsequentibus (coroll. II.) patebit. Videntur ergo monstra causam longe aliam habere; de qua re in proprio corollario (coroll. IV.) quaedam adhuc addam.

Sex dies ouum nostrum incubatum est, quo tempore scilicet oua in eo, quem breuibus verbis describam, statu inueniuntur, iisque phaenomenis stipantur, quae continuo dicam. Oui, VI. dies incubati, naturaliter constituti, conditio.

Albumen, a vitello retractum, verticem oui acutum occupat, mole imminutum est, spissiori consistentia gaudet, massamque refert cohaerentem et tremulam, cum ante incubationem tenuius facile difflueret totumque vitellum ambiret. Albumen.

Vitellus alteram oui partem, obtusam, tenet. Mole auctus potius, quam imminutus est, quamuis inde embryo nutriatur; nam plus continuo ab albumine recipit, quam embryoni tradit. Tunicae eius eaedem sunt, quae primo incubationis tempore; exterior nempe tenuis pellucida, vasis omnino destituta; interior crassior mollior, in qua area vasculosa exaratur. Vitellus.

Area vasculosa, licet dimidiam vitelli superficiem occupat, rarioribus tamen vasorum surculis ornata est, minusque rubet quam die quinto, quo tempore Area vasculosa.

pore maxime floret. Adeoque in ſtatu decrementi nunc iam eſt. Quo enim veſicula vmbilicalis, inter tunicam vitelli exteriorem et interiorem contenta, quae primordium nouae tunicae vmbilicalis eſt, magis magisque increſcit, ſuperque globum vitelli extenditur; quo magis eius vaſa inflantur, et ſanguine turgent; eo magis ſenſim decreſcit area vaſculoſa; vaſa ſanguine ſenſim deplentur et euaneſcunt. Caeterum eadem ſemper vaſorum diſtributio in area vaſculoſa eſt. Praecipui trunci lateraliter de embryone egrediuntur, vterque eorum in ramum ſuperiorem et inferiorem diuiditur. Inter inferiores ramos media decurrit vera deſcendens, niſi iam euanuerit. Adſcendens, quae inter ramos ſuperiores adſcendit, hoc tempore raro ſupereſt. Denique terminalis, quae peripheriam areae deſcribit licet tenuior et debilior ſit, tamen *ſufficit*, vt area vaſculoſa euidenter a reliqua *vitelli* ſuperficie per eam diſtinguatur.

Areola pellucida. Areola pellucida, quae interiorem areae vaſculoſae partem efficit, in qua embryo ſitus eſt, die ſexto iam prorſus euanuit. Producitur enim a membrana vitelli interiori, quae prope embryonem ab exteriori tenui pellucida ſoluta eſt, fluidumque pellucidum cum ea comprehendit; remotius, vero ab embryone, vbi proprie area vaſculoſa incipit, ſuperiori membranae ope materiae opacae albae adhaeret, in qua ramificationes vaſorum diſtribuuntur. Inde efficitur vt vt ſpatium areae vaſculoſae interius diſtinctum ab exteriori et pellucidum appareat; cum exterius, quod proprie aream vaſculoſam conſtituit, album fit, et multis vaſorum ramificationibus ornatum. Illud igitur interius ſpatium areola pellucida vocatur, (vid. horum Comment. Tom. XII. Diſſ. de formatione Inteſtinorum. §. 22. fig.). Quodſi nunc die quinto et ſexto contingit, vt membrana vitelli interior per totum vitellum a ſuperiori ſoluatur; areola pellucida a vaſculoſa diſtincta eſſe ceſſat, adeoque euaneſcit.

Eandem ob cauſam amnium ſpurium quoque hoc tempore nullum inuenitur. Hoc enim ſimiliter a membrana vitelli interiori formatur, quae, continuata ex inteſtinis embryonis, prius quam extrorſum ducatur ad efficiendam areolam pellucidam, immediate circa embryonem reflectitur, bullamque producit, amnium verum vna cum embryone includentem, quae amnium ſpurium vocatur (vid. Diſſ. de form. Int. §. 36.). Hac bulla formata, membrana interior extrorſum tendit ad producendam areolam pellucidam. Dum igitur membrana haec interior ab exteriori, qua hactenus ſuſtenta fuit, ſoluitur; collabaſcit et bulla deſtruitur. Solae rugae quaedem irregulares in hac membrana relaxata, reliquiae priſtini amnii ſpurii, hoc tempore in eo loco reſtant. Amnium ſpurium.

Adeo-

Amnium verum eiusque et embryonis situs.

Adeoque exterius et vnicum embryonis inuolucrum proprium amnium verum eſt, quod continuatum ex orificio vmbilicali abdominis et reflexum circa embryonem, veſiculam refert, fabae fere magnitudine hoc tempore et figura, tenuem pellucidam, fluido repletam. Hoc amnium cum embryone ſuo inter vtrasque vitelli membranas haeret adeo, vt interiori incumbat, foueamque in ea producat, magnitudini et figurae amnii et veſiculae vmbilicalis, quae embryoni adnexa eſt, reſpondentem, ſatis profundam; dum exterior tenuis vitelli membrana recta et tenſa ſuper amnium tranſit; idemque in ſua ſuperficie ſuperiori tangit. In hoc ſuo ſitu amnium cum embryone detinetur partim membrana vitelli exteriori, quae, licet amnio non adhaereat tenſa tamen illud in ſuam foueam deprimit, partim interiori, quae ex inteſtinis embryonis *continuatur*. Cum exterior membrana vitelli *perfecte* pellucida ſit, amnium in vitello, licet integro, quaſi nudum ſed fixum in ſuo ſitu apparet. Vbi ea membrana remouetur, amnium mobile redditur, vt hinc inde volui poſſit, licet interiori membranae annexum ſit.

Veſicula umbilicalis.

Veſicula denique vmbilicalis vna cum amnio inter vtrasque membranas vitelli continetur; in eademque cum illo fouea ſita eſt. Exterior membrana ſuperficiei eius ſuperiori adhaeret. Ab interiori autem et ab amnio prorſus libera eſt, ſolique embryoni adnectitur, dum eius productio quaedam et et quasi collum in orificium abdominis, quod idem simul amnii apertura est, ingreditur. Magnitudine paululum superat amnium.

Hic igitur status naturalis est oui sex dies incubati. Videamus nunc, quaenam singularia occurrant in ouo gemellifero respectu horum phaenomenorum.

Descriptio oui gemelliferi (Tab. XI.)

Solitae magnitudinis ouum nostrum erat. Albumen (Tab. XI. fig. 1. *a. a.*) vnicum simplex solitum in eo locum occupabat, solita magnitudine et consistentia gaudebat.

Albumen vnum, vtrique embryoni commune. (fig. 1. *a. a.*)

Vitellus ipse (fig. 1. *b. b. b.*) simplex, nihil habet, quod praeter naturam aut consuetudinem sit. Situs magnitudo figura consistentia quoque et structura perfecte conueniunt cum statu naturali. Exterior tunica tenuis pellucida, interior, vt esse solet, mollior, crassior est.

Vitellus vnus communis. (fig. 1. *b. b. b.*)

Prima pars (si ab exterioribus ad interiora et versus embryonem progrediaris) area vasculosa est, (fig. 1. *c.*) in qua singularia quaedam occurrunt, quae prima duplicis embryonis indicia referunt, vel tanquam eius effectus considerari possunt. Area quidem ipsa vnica et simplex est omnino, vti vitellus; siquidem vnica simplici vena terminali (fig. 1. *c. c.*) nusquam interrupta, tanquam periphaeria circumscribitur, nec vlla ratione in duas quasi areas diuisa inuenitur. Sed vasa, in hac area exarata, du-

Area vasculosa communis (fig. 1. *c.*)

 plex

plex systema ramificationis efficiunt, quamuis vtrumque non sit plane perfectum; quod igitur primum quasi duplicis embryonis vestigium est. Quilibet enim embryonum binos suos, vt solitum est, truncos laterales emittit; vnde quatuor igitur, loco duorum, in area trunci resultant. Embryo scilicet superior (fig. 1. *f.*) trunco laterali sinistro (fig. 1. *p.* fig. 2. *i.*) et dextro (fig. 2. *h.*) gaudet. Embryo inferior (fig. 1. *g.*) trunco dextro (fig. 1. *u.* fig. 2. *q.*) et sinistro (fig. 1. *t.* fig. 2. *r.*) instructus est. Tum porro vterque truncus embryonis superioris, prout naturaliter fieri solet, in duos ramos, superiorem (fig. 1. *q.* et *r.*) et inferiorem (fig. 1. *s* et fig. 2. *l.*) diuiditur. Inferioris autem *embryonis* trunci haud porro in superiores et inferiores ramos diuiduntur, sed toti potius deorsum *decurrunt* ramosque inferiores referunt ipsi; *superioribus* plane deficientibus. Cuius rei causa vicinitas alterius embryonis esse videtur, qui ramificationibus suis inferioribus illud spatium in area occupat, in quo hi rami superiores sese dispergere debuissent. Denique vena descendens embryoni inferiori est satisspectabilis (fig. 1. *v.* fig. 2. *s.*) cum superiore embryo ob nimiam vicinitatem inferioris adestituatur. Vena terminalis caeterum, cuius pars tantum in hoc situ vitelli apparet (fig. 1. *c. c.*) vnica simplex est, vnam aream includens, in qua descriptae vasorum ramificationes distribuuntur.

His

His igitur consideratis in vnica area vasculosa duplex vasorum systema exaratum esse videtur, quamuis non plane perfectum, siquidem inferiori systemati rami superiores deficiunt. Verum enim haec bina systemata adeo tamen ergo se inuicem posita sunt, vt simul sumta haud obscure vnum maius et commune referant. Trunci enim embryonis superioris ramos superiores exhibent systematis huius communis; dum rami eorum inferiores tanquam subdiuisiones vel rami secundarii ramorum superiorum considerantur. Trunci embryonis inferioris eo magis simplices ramos inferiores maioris systematis referunt, cum nullos superiores ramos emittant, qui tamen ex veris truncis lateralibus oriri debent. Denique vnica, quae exstat, vena descendens situ et magnitudine perfecte respondet maiori systemati, idemque adeo supplet. Nulla igitur non modo pars est, quae deficeret communi huic systemati, sed nulla quoque arteria in area vasculosa datur, quae non aliquam huius systematis partem essentialem referret, vel ad illud recenseri non posset. Solum hoc praeter naturam habet hoc systema, vt rami superiores et inferiores, qui naturaliter ex vno trunco laterali vtrinque oriuntur, immediate ex ipso embryone, et superiores quidem ex embryone superiori, inferiores ex inferiori prodeant. Si igitur hac ratione consideratur haec vasorum distributio; non proprium cuique embryoni systema erit, sed vnum vtrique commune, adeo partitum, vt superior embryo partem eius ſuperiorem, ſeu ramos ſuperiores, qui loco truncorum ei ſunt, cum vena adſcendente, vbi ea adhuc exiſtit; inferior autem partem ſyſtematis inferiorem, ramos nempe inferiores cum vena deſcendente teneat. Omnibus igitur comparatis diſtributio vaſorum in area vaſculoſa aequiuoca eſt adeo, vt dubium ſit, vtrum vnum vaſorum ſyſtema, vtrique embryoni commune, an duo propria pro duobus ſint cenſenda. Similem conditionem areae vaſculoſae reperi quoque in ouo quodam III dies incubato, quod monſtrum bicorporeum gerebat, vbi accuratius etiam duo ſyſtemata vaſorum exprimebantur, quae ſimul ſumta egregie vnum referebant ſyſtema commune.

Amnium embryonibus deficit iique nudi vitello incumbunt.

Sed magis ſingularia, et quae minus a ſimplicitate pendere videntur, ſunt, *quae circa ſitum et* inuolucra embryonum in *noſtro* ouo occurrunt. Quum naturaliter embryo, amnio ſuo incluſus inter vtrasque membranas vitelli contineatur, adeo, vt exterior recta ſuper amnium tranſeat, idemque igitur vna cum foetu intra vitellum includat; embryones, noſtri non modo amnio plane carent, ſed extra membranam quoque vitelli exteriorem ſiti ſunt, adeo, vt vitello incumbant, opeque ſolorum vmbilicorum laxe et mobiles exteriori eius ſuperficiei adhaereant, (vid. fig. 1.) quod ſane non minus mihi mirum videtur, ac ſi ſemina in planta extra pericarpium prouenire, eiusque ſuperficiei externae

pedun-

pedunculi ope adhaerere videres. Viuebat vterque embryo, cum ouum aperirem, et corda non modo eorum satis vehementer palpitabant, sed motus quoque exercebantur voluntarii, quamuis non diu hi posteriores continuarentur. Inexspectatum igitur phaenomenon erat duos embryones inuenire liberos, mobiles, nudos, incumbere vitello.

Membrana amnii naturaliter ex orificio abdominis, seu vmbilico, oritur et continuatio cutis abdominis est. Inde continuo circa embryonem reflectitur ad formandum amnium. Funiculus enim vmbilicalis in auibus nullus existit. Iam non facile exemplum inuenitur in corporibus animalibus membranae, vel tunicae, quae sine, quasi abscisso terminetur; sed continuant membranae omnes in alias membranas, vel redeunt in se ipsas; vti cutis per os in villosam tubi cibarii, et villosa rursum in cutem per anum continuat, vti cutis palpebrae superioris in adnatam et porro in cutem palpebrae inferioris transit. Quodsi igitur in nostris embryonibus amnium deficit, cutis abdominis per vmbilicum continuat, in membranam vitelli exteriorem, quae tenuitate, pelluciditate, totaque natura perfecte similis est membranae amnii. Haec ergo vt amnium alias solet, cuti embryonis fundamentum suppeditat, ex quo deducatur.

Cutis abdominis eorundem in exteriorem vitelli membranam continuat Fig. I. *l. m.*

Quumque naturaliter embryo vno simplici pedunculo vitello adhaereat canali nempe breui com-

Inde duplicati pedunculi oriuntur

quibus embryones vitello adnectuntur.

communicatorio, qui productus ex inteſtinis in interiorem membranam vitelli continuatur; dum membrana vitelli exterior, vt ſaepius dixi, recta ſuper amnium tranſit, in nullamque vel amnii vel embryonis partem continuatur; embryones noſtri pedunculis gaudent duplici membrana conſtantibus, vel potius duplicibus, quorum alteri interiores ſolito modo ex inteſtinis in interiorem vitelli membranam continuantur, alteri exteriores, vaginas laxas prioribus ſuppeditant, quae ortae ex cute abdominis ad vmbilicum, in exteriorem membranam vitelli tranſeunt, ſpeciemque breuiſſimi funiculi vmbilicalis efficiunt, qui naturaliter in auibus prorſus non datur.

Situs embryonum.

Embryones adeo ſibi inuicem propinqui ſunt, vt tertius inter eos locum inuenire non poſſit, praecipue ob capita, quae ſe mutuo tangunt. Alter eorum ſuperior eſt, alter inferior. (Area enim vaſculoſa et vaſorum diſtributio regiones in vitello determinant). Quum ouum aperirem, embryones paulo aliter, quam nunc ſunt, ſiti erant. Qui enim transuerſales nunc vitello incumbunt, magis obliqui et fere perpendiculares ſecundum aream ſiti erant, magisque ſibi vicini, adeo, vt inferior capite ſuo regionem pubis ſuperioris occuparet, pedemque dextrum tegeret. Adeo caeterum poſiti ſunt embryones, vt facie corporis anteriori verſus ſe inuicem reſpiciant. Inde fit, vt ſuperior quidem

dem solito modo in latus sinistrum, inferior autem praeter naturam in dextrum latus decumbat.

Hac ratione sitis embryonibus cutis abdominis ad locum vmbilici primo constringitur, deinde continuo laxatur et in superficiem vitelli, in tunicam eius exteriorem expanditur, rugasque producit nonnullas, breues, in vitellum dispersas. Inter has vna praecipue notabilis est, quae ex vmbilico alterius embryonis recta in vmbilicum alterius transit et ligamentum quasi efficit, quo vtrique embryones inter se coniunguntur (vid. fig. 1. *n.*). Alia eiusmodi plica (fig. 1. *o.*) priori parallela ad regionem pectoris embryonum posita est. Spatium inter has plicas bullulis a membrana vitelli exteriori factis, repletur. Plicae inter embryones in superficie vitelli. Fig. 1. *l. m. n. o.*

Vesica vmbilicalis, cuique embryoni propria, solito modo inter tunicam vitelli exteriorem et interiorem collocata est. Apparetque in vitello integro, dum per tunicam eius exteriorem, vt fieri solet, transparet. Vbi exterior haec tunica in cutem abdominis transit; ibidem vesica quoque collo suo in cauitatem abdominis intrat. Caeterum minori copia fluidi repleta est, quam esse solet, vnde planior apparet. Magisque et firmius, quam naturaliter fieri solet, adnata est tunicae vitelli exteriori sibi incumbenti. Vesica vmbilicalis. Fig. 1. *h. k.*

Dissecto vitello in eius superficie interna quae scilicet membranae vitelli interioris superficies inter- Orificia intestinorum in vitellum.

hiantia Fig. 2. interna eſt) ad eum locum vbi exterius embryones vmbilicis ſuis vitello adhaerent ſolito modo apertura reperitur, quae ad inteſtina ducit, quae *ſcilicet* apertura illius ductus eſt, quo mediante membrana interna vitelli in membranam inteſtinorum continuat. Cum hac membrana vaſa ſimul ex abdomine prodeunt, quae per aream vaſculoſam diſperguntur, quaeque in ſuperioribus deſcripſi. Eorum igitur ortus, quemadmodum fig. 2 docet, hic maxime apparet. Caeterum eaedem plicae, quas vidimus eſſe in membrana exteriori vitelli inter vtrumque embryonem, in hac interiori membrana obſeruantur, illisque perfecte reſpondent, adeo, vt non ſola exterior, ſed vtraque vitelli membrana ſimul *ſumta* illas plicas producat.

Orificium vmbilicale Fig. 3. Solui quoque membranam *hanc interiorem ab* exteriori, praecipue ideo, vt *orificium* abdominis, ex quo illa continuatur, in ſuperficie interiori membranae exterioris appareat. Fere eodem modo hoc ſe habet, vt naturaliter fieri ſolet, dum loco membranae vitelli amnii membrana ex abdomine continuatur. Figura 3. ſuperficiem membranae exterioris internam vna cum orificio abdominis demonſtrat.

In embryonibus ipſis nihil inſoliti reperi. Habitus externus aeque ac ſtructura viſcerum penitus ſecundum leges et ordinem naturalem ſe habet.

COROL-

COROLLARIA QVAEDAM.

Coroll. I. De statu huius oui praeterito; in specie de amnio spurio, et alio singulari quodam amnio

Nulla caussa est, cur putemus nullo omnio spurio, quod existere potest, licet verum intra illud non existat, embryones nostros suo tempore indutos fuisse. Duplicitas enim embryonum non magis quam amnii veri defectus prohibet, quominus proprium suum cuique embryoni amnium spurium existat. Sed plicae quoque et rugae et laxitas, quas inter vtrumque embryonem in membrana vitelli interiori aeque ac exteriori obtinere vidimus, quasque vestigia esse monui amnii spurii resoluti, satis indicant, hoc suo tempore, die tertio nempe et quarto medioque quinto non defuisse. Iam vero ex situ embryonis respectu membranae vitelli exterioris et interioris facile intelligitur, amnium spurium, seu bullam ex membrana interiori circa embryonem aliter formari non posse, nisi vt similis bulla ex membrana exteriori simul formetur, quae ab illa priori includatur. Dum enim interior, quae ex intestinis oritur, inde circa embryonem reflectitur, vt bullam producat, fieri non potest, quin exterior, quae ex cute abdominis oritur indeque continuo interiori incumbit, aut impediat huius reflexionem circa foetum aut cedat eidem, adeoque eius ductum sequatur, similemque bullam interiorem producat; qua facta haec membrana, continuo interiori parallela et conformis cum eadem porro per areolam pellucidam, areamque vasculosam transsibit in tunicam vitelli. Porro plicae in membrana vitelli exteriori inter embryones et bullae similes et conformes illis, quas in interiori membrana in eodem loco notauimus, satis euidenter demonstrant hanc membranam aeque ac interiorem in bullam extensam fuisse, quae quippe nunc resoluta illam membranae laxitatem reliquerit.

Hac ratione igitur de statu praeterito huius *oui* tertii nempe et quarti diei constat, qui, non minus quam praesens, singularis fuit. Quilibet embryo proprio suo amnio spurio, praetereaque alio interiori indutus fuit, quod neque verum *proprie* neque spurium censeri potest; sed medium quasi *locum* inter vtrumque tenet, et tamen vicem veri hoc tempore praestat. Respectu figurae et compositionis simile illud est amnio spurio, siquidem non integram vesicam refert, sed in parte superiori apertum est. Respectu naturae membranae, qua constat, et respectu ortus ex cute abdominis amnio vero simile est.

Coroll. II. de areola pellucida. Quod areolam pellucidam attinet, nullum dubium est, eam, vti vasculosam, vnicam simplicem fuisse vtrique embryoni communem. Licet enim diebus praecedentibus, quo tempore illa floret, pars membranarum vitelli rugosa embryonibus intermedia non consumta fuisset in formandis amniis: tamen hoc spatium intermedium nimis longe angustum esset, vt duplicis areolae distinctae partes dimidiae in eo repraesentari possint. Quodsi vero supponas, ex ex membranis vitelli amnia formata fuisse priori illo tempore; quemadmodum corollario praecedenti factum esse vidimus; tota haec pars membranarum intermedia, in formandis his amniis, quibus vix sufficit, consumta erit: amnia vtriusque embryonis vbique contingent spatium nullum intermedium restabit, adeoque omnino impossibile erit, vt distincta in hoc loco areola pellucida formetur. Caeterum magnitudine et figura tamen ita comparatam fuisse existimo vnicam hanc areolam communem, vt duplicem in vnam confluentum, duplici embryoni communem, facile referat. Quum figura areolae, quae semper embryonis peripheriae conformis est, oblonga inde esse soleat, fine superiori obtuso, inferiori acuto terminata; haec, nisi quadrilatera, vix esse potuit. Eoque magis de hac re persuasus sum, cum similem conditionem in embryone bicorporeo, cuius in superioribus mentionem feci, iam viderim.

Sic vnum in hoc ouo albumen commune, vnus vitellus communis, vna area vasculosa communis, quae tandem iam incipit aliquas duplicitatis notas in distributione vasorum ostendere; vna porro suo tempore, sed maior, et quasi ex duabus confluens areola pellucida; denique amnium spurium, et quod loco veri est, duplex, sed tamen, vt puto, ob angustiam spatii, adhuc cohaerens. Embryo tandem perfecte duplex, perfecte separatus.

Die primo et fere secundo incubationis vasa in area vasculosa nondum formata sunt. Areae ipsius primordium maculae instar, pisi magnitudine, albae in vitelli superficie apparet, quod maculam vocant autores, seu cicatriculam. In hac macula areola quoque pellucida consuetae figurae oblongae satis euidenter conspicitur, quam oculum *Haruaeus* appellat. Primo igitur incubationis tempore vna macula in vitello fuit. In ea vnus oculus, sed solito latior et figura quadrilatera; in hoc duo separati embryones iuxta se inuicem collocati fuerunt. Ante incubationem, vbi sola macula in vitello, sine areola pellucida sine embryone apparet, nihil *insoliti* in hoc ouo se conspiciendum praebuisset.

Coroll. III. De statu huius oui futuro.

Vesicula vmbilicalis, quae vna cum amnio inter tunicam vitelli exteriorem et *interiorem* naturaliter sita est, post diem *decimum* continuo increscendo super amnium in quo fetus continetur, indeque porro super totum vitellum voluitur. Denique ad locum vbi albumen, quod mole nunc multum imminutum est, vitello adhaeret, qui locus sedi embryonis fere oppositus est, vesica haec parietibus collapsis sua circumferentia attingit, superque ipsum albumen sese extendit, membranam vitelli exteriorem, qua includitur, secum ferendo. Hinc alia oui inuolucra nascuntur. Duplex enim vesicae collapsae paries duplex toti ouo inuolucrum suppeditat. Sed membrana vitelli exterior, quae vna cum

cum vitello amnium quoque omni tempore includit et nunc ſuper albumen quoque producta eſt, exteriori parieti veſicae adeo firmiter adhaeret, vt ab eadem ſeparari non poſſit, adeoque nonniſi vnicam cum hac, membranam efficiat, quam *Malpighius* chorion *Hallerus* membranam vmbilicalem appellat. Interior autem veſicae paries ſoli amnio ad nata eſt, a vitello libera manet. Sic duplex inuolucrum, idemque commune oritur, quod amnium, vitellum et albumen includit. Vitellus autem, qui hactenus duplici membrana, ſibi propria, gaudebat, nunc vna tantum gaudet; ea nempe, quae interior erat; cum exterior a chorio nuper nato, ſuper albumen protracta eſt, adeoque ad conſtituendum commune hoc oui inuolucrum concurrit.

Nunc facile intelligitur, in ouo noſtro; cum embryones, amnio prorſus deſtituti, extra vitelli membranam exteriorem ſiti ſint; veſicae autem vmbilicales ſolito loco intra eam contineantur; dum hae ſuper totum vitellum et albumen extenduntur, vitellique membranam externam, ſibi adnatam, ſecum ducunt; inuolucrum fore vt inde oriatur, vt naturaliter fieri ſolet, quod vitellum et albumen includat, choriumque *Malpighii* conſtituat, embryones autem nullo modo ab hoc chorio ſore incluſos; quin potius eidem, vti nunc vitello nudi incumbent. Adeoque immediate ſub teſta iacebunt. Idemque ſtatus, vsque dum prodeunt pulli in lucem, manebit.

Coroll. IV. Num viuere possint huiusmodi faetus.

Videntur autem partui vix superuiuere posse eiusmodi foetus. Vitellus enim qui naturaliter ex intestinis continuat, dum increscente foetu sensim imminuitur, tanquam appendix intestinorum considerandus est; tandemque intra abdomen retrahitur; abdomen clauditur et vitellus magis magisque constrictus in partem intestini abit, quae a reliquo intestino tum porro distingui non potest. Quod si igitur vtraque horum foetuum intestina in vnum eundemque vitellum inseruntur; vterque foetus hunc vitellum retrahere intra abdomen suum conabitur. Nullus dubito, si alter horum foetuum perfectus et maturus, alter paruulus embryo fuerit; quin ille hunc totum vna cum vitello absorberet. Quum vero magnitudine non minus quam aetate aequales sint; hoc nunquam contingere poterit. Quilibet suam vitelli partem, quatenus *potest, retrahet;* donec ad vmbilicos contingant. *Tum aut* connascentur vmbilicis suis, speciemque partus exhibebunt, quam potius tamen foetus gemellos connatos, quam monstrum vocarem, qui quippe foetus totis corporibus suis separati, solaque breuis funiculi specie connexi sunt inter se; aut, quod magis verisimile videtur, rumpet distractus vitellus, excutietur partim foras partim intra abdomen materia vitelli et intestinorum, qui casus pullis lethalis esse videtur.

Coroll. V. Num monstra fiant

Non probabile est, fieri monstra ex gemellis compressis et concrescentibus. Requirebat *Fabricius* ab ab *Aquapendente* ad productionem monſtrorum vt duplex embryo in vno ouo naſcatur; licet ex diuerſis vitellis originem petat. Quamuis fieri poſſet, vt eiusmodi embryones dum ex diuerſis vitellis oriuntur, ſatis a ſe inuicem remoti ſint; tamen perſuaſus erat, coalituros eſſe eos in vnum corpus. Videmus in exemplo praeſenti, non modo in vno ouo ſed ex vno quoque eodemque vitello prodiiſſe duos embryones, eosque vna area vaſculoſa incluſos, adeoque propinquos vt propiores ſibi vix eſſe potuerint, tamen perfecte ſeparatos. *Haruaeus* aliud praeterea deſiderabat, vt oculi, quibus primo tempore embryones inſunt, ob vicinitatem confluerent in vnum oculum. Vidimus hos embryones adeo ſibi eſſe vicinos, vt non modo neceſſario oculi confluere debuiſſent, ſi quidem vnquam diſtincti exſtitiſſent, ſed vt fieri non poſſit, vt vnquam diſtincti exſtiterint; quin potius a primo principio nonniſi vni oculo vtrique embryones incluſi eſſe potuerint. Et tamen embryones ſeparati ad diem ſextum peractum vsque manſerunt. Quae ergo tandem ſufficiens concretionis cauſa eſſe poterit? Si dicas, fieri concretionem tempore ſeriori; dum embryones magis increſcunt, adeoque magis in ouo comprimuntur; conſiderandum eſt, partes adeo iam eſſe formatas omnes hoc tempore, die ſexto, vt, ſi deſtruerentur, quemadmodum ad formationem eiusmodi monſtrorum requireretur, nec partes denuo porro reſtitui, nec vita embryonum, durante hac corporum metamorphoſi

ex gemellis concreſcentibus.

phosi conseruari possit. Nec verum est, comprimi embryones in ouo eo magis, quo magis increscunt. Quo enim magis embryones increscunt, eo quoque magis reliquae partes, albumen et vitellus imminuuntur, adeo, vt eadem semper materiae quantitas in ouo conseruetur. Sed maius argumentum offert ouum illud, cuius in superioribus mentionem feci, monstro perfecto bicorporeo instructum, quod nonnisi tres dies incubatum fuit. Hoc illud saltim demonstrat, ad productionem monstrorum non requiri eiusmodi foetuum compressionem, quae contingeret post diem sextum ob incrementum foetuum.

Explicatio Tabulae.

Fig. 1. Ouum est testa exemtum.

a. a. Albumen.

b. b. b. Vitellus. *c. c.* pars venae terminalis.

d. d. Pars vitelli extra aream, vasis priuata.

e. Area vasculosa.

f. Embryo superior. *g.* Inferior.

h. Pars vesicae vmbilicalis embryonis superioris.

i. Fouca in vitello, a vesica eidem impressa.

k. Vesica vmbilicalis embryonis inferioris.

l. Vmbilicus embryonis inferioris.

m. Vmbili-

m. Vmbilicus embryonis ſuperioris.

n. Plica membranae vitelli, ex eius laxitate orta, inferior.

o Altera eiusmodi plica ſuperior.

p. Embryonis ſuperioris truncus lateralis ſiniſter.

q. Huius trunci ramus ſuperior.

r. Trunci lateralis dextri ramus ſuperior.

ſ. Ramus inferior lateris ſiniſtri.

t. Embryonis inferioris truncus lateralis ſiniſter.

u. Truncus lateralis dexter.

v. Vena deſcendens.

Fig. 2. Pars membranarum vitelli; cui embryones adhaerent, exſciſſa et inuerſa.

a. Pars membranarum exſciſſa.

b. Embryo ſuperior. *c.* Inferior.

d. Plica in membrana hac vitelli interiori, illi (fig. 1. *o.*) in exteriori membrana reſpondens.

e. Plica altera inferior, reſpondens illi in membrana exteriori (fig. 1. *n.*).

f. Orificium ductus inteſtinalis, ex quo cum membrana trunci vaſorum egrediuntur.

g. Limbus orificii vmbilicalis abdominis per membranam interiorem vitelli, illud tegentem transparens (vid fig. 3.).

h. Truncus lateralis dexter embryonis ſuperioris.

i. Truncus eiusdem lateralis ſiniſter (fig. 1. *p.*).

k. Ramus dexter ſuperior.

l. Ramus dexter inferior.

m. Ramus finifter fuperior.

n. Ramus finifter inferior.

o. Orificium ductus inteftinalis alterius embryonis cum egredientibus vafis.

p. Transparentis orificii vmbilicalis limbus.

q. Truncus lateralis dexter huius embryonis. (fig. 1. *u.*).

r. Truncus finifter eiusdem. (fig. 1. *t.*).

s. Vena defcendens. (fig. 1. *v.*).

Fig. 3. Membrana vitelli interior ab exteriori foluta et reflexa, quo interna fuperficiès membranae exterioris et partes inter vtramque membranam contentae appareant.

a. a. Membrana vitelli exterior eiusque fuperficies quidem interior.

b. Embryo fuperior. *c.* Inferior.

d. Particula membranae interioris, *qua haec in* inteftina embryonis fuper*ioris* continuabat, relicta, deorfum reflexa.

e. Particula eiusdem membranae, qua eadem in inferioris embryonis inteftina continuauit.

f. Veficula vmbilicalis embryonis fuperioris.

g. Veficula vmbilicalis embryonis inferioris. Hae veficulae inter vtramque membranam vitelli continebantur. Apparebant in fuperficie vitelli externa (fig. 1. *b. k.*) dum per tenuem pellucidam membranam exteriorem transparebant. Nunc feparatis membranis diftinctius apparent.

h. Orificium

h. Orificium abdominis vmbilicale, per quod membrana interior vitelli, ex inteſtinis continuata, vna cum vaſis egreditur.

i. Idem in embryone inferiori.

k. Trunci vaſorum areae ex cauitate abdominis prodeuntes, partemque inteſtini inter ſe continentes, quae arcum producit, ex quo ductus inteſtinalis in membranam interiorem vitelli continuat.

l. Plica (fig. 1. *o*.).

m. Plica (fig. 1. *n*.).

DESCRIPTIO PISCIS, E GADORVM GENERE, RVSSIS NAWAGA DICTI, HISTORICO-ANATOMICA.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Exhibit. d. 22. Febr. 1770.

Tab. XII. Capitis antica pars, ſc. ab oris extremo ad oculorum marginem poſticum, plagioplatea eſt, poſterior vero cathetoplatea, vti ex dimenſione *inferius* exponenda patebit. Ceterum reſpectu *trunci* magnum eſt caput, et quod formam cum Gadi *Lotae* capite plurimum conuenit.

Dorſum ab initio conuexum, ad primam et ſecundam ipſius pinnam parum contractum, inter ſecundam et tertiam vero planiuſculum, leuiterque carinatum.

Color in antica capitis parte, ſc. ab oris extremo ad nares vsque fuſcus ac immaculatus, potior vero capitis pars, dorſi ſummum, eiusdemque latera, ad apophyſes transuerſas vsque, digiti tactu facile percipiendas, lituris cinereis fuſcisque variegata, quarum

eae

eae, quae circa primam dorſi pinnam, lineaeque longitudinalis arcum apparent, viuidiores reliquis ſunt. Mutatur color mox infra dictas apophyſes, et per vtrumque abdominis latus ſubargenteum induit ſplendorem, pallide coeruleſcenti teſtaceoque permixtum, punctisque innumeris, nigris, confluentibus adſperſum.

Ambitus maxillae inferioris ſordide albet. Tota pectoris abdominisque inferior facies candicat. Pinnae dorſales, vna cum caudae prima verſus ambitum fuſcae, baſin verſus pallidiores; margo tamen huius extremus flaueſcit. Pinnae pectorales e fuſco flaueſcentes. Pinnae ventrales ſordide albent, inque flauum aliquantum vergunt. Pinnae duae ani flaueſcentes, praeprimis poſterior. Regio circa anum ſubfuſca. Mandibula ſuperior $1\frac{1}{3}'''$ inferiore longior, hinc clauſo ore nonnullae dentium ſeries ad iſtam prominent, quae hac non conteguntur. Narium vtriusque lateris diameter longitudinalis $3'''$, transuerſa $2'''$ exaequat; ambitus autem ipſe oualis eſt. Foramen earundem anterius paruum membranula coarctatur, poſtico ipſius margini adnata; poſterius patulum, ac velamento carens. Oculi magni, circa marginem orbitae ſuperiorem ac poſticum membrana nictitante, ſemilunari, punctisque nigricantibus conſperſa, muniti. Iridis colorem deſignare vetat mutatio, quam oculorum humores iterata congelatione ac regelatione paſſi ſunt. Membrana branchioſtega ſeptem oſſiculis vtrinque inſtructa eſt, quorum ope pectoris regionem verſus late extenditur.

Dentes vtraque maxilla continet, ſuperior tamen plures ac fortiores, quam inferior. In iſta ſeries eorum circiter tres quatuorue, in hac duas numeraui, hinc inde interruptas. Omnes hi dentes acuti, ac retrorſum leuiter incuruati, a prima ſeu extima ſerie ad intimam ex ordine, quo ſe inuicem excipiunt, magnitudine decreſcentes. Praeter hos ad diſtantiam a $\frac{1}{2}'''$ a primo maxillae ſuperioris dentium ordine area occurrit, duplici dentium ſerie compoſita, duoque trianguli obtuſanguli latera referens, cuius poſticum ab iisdem inane relictum eſt. Hi ipſi vero dentes a reliquis figura et directione haud diſſimiles. Praeterea quoque palati oſſicula duo, ſubrotunda ac aſpera rotunda ſunt, ciborum contritioni ſine dubio inſeruientia.

Diſtantia vnius lineae ab extremitate anguli maxillae inferioris barbula dependet ſubulata, flaueſcens 2''' longa.

Linea longitudinalis, ab initio latior, leuiſſimo ſub arcu pinnae dorſi primae principium verſus flectitur, dorſi ſummo propior facta, quam abdominis imo; abhinc vero breui ſpatio oblique deorſum ac retrorſum flexa, rectilineo dein ſub curſu, mediumque fere trunci tenens, ad caudae extremitatem vsque procedit.

Pinnae

Pinnae pectorales radiorum 21, (a) ad basin 4½''', expansae vero 1'', 5''' latae, ab antica facie pallidiores, quam a postica. Primus radius simplex, ceteri omnes ramosi, quatuor vltimis exceptis, qui pariter, ac iste, simplices ac indiuisi sunt. Radii 1 et 2 tribus subsequentibus vix vel parum breuiores, 3, 4, 5 omnium longissimi, reliqui ex ordine iterum longitudine decrescentes.

Pinnae ventrales radiorum 6; primo, secundo ac sexto, simplicibus, ceteris ramosis. Horum primus paullo breuior, secundo omnium longissimo; sequentes ex ordine breuiores.

Pinna dorsi prima sub erectione triangularis, radiorum 13; quorum primus fortis, secundo, qui omnium longissimus est, ac pollicis longitudinem aequat, parum breuior, eidemque proxime iunctus; sequentes ad vltimum vsque ex ordine breuiores. Rad. 1, 2, 11, 12 et 13 simplices, reliquorum extremitates ramosae.

Pinna dorsi secunda radiorum 20; primus, secundus et ex vltimis duo vel tres, simplices, ceterorum extremitates diuisae. Primus 8''', secundus

(a) In aliis indiuiduis radiorum numerus sequens erat:

α.	Longit. pisc.	9'', 4'''.	Pin.	P. 21.	V. 6.	D. 14. 20. 22.	A. 24. 24.
β.	—	—	9'', 8'''.	—	P. 19	V. 6.	D. 13. 20. 22.	A 24. 23.
γ.	—	—	9'', 9'''.	—	P. 20.	V. 6.	D. 13. 16 22.	A. 21. 23.
δ.	—	—	10'',	—	P. 20	V. 6.	D. 13. 19. 20.	A. 22. 23.
ε.	—	—	10'', 3'''.	—	P. 19.	V. 6.	D. 12. 20. 24.	A. 22. 23.

dus 10''', tertius et quartus 11''' longi; ſequentes ad vltimum vsque, cuius longitudo 1½''' eſt, ex ordine breuiores. Principium huius pinnae, ſi ex eo linea perpendicularis deorſum ducatur, aliquantum ab ani regione recedit.

Pinna dorſi tertia radiorum 25; increſcunt hi longitudine a primo ad ſeptimum; hic ipſe, octauus et nonus omnium longiſſimi, reliqui vero ad vltimum vsque iterum decreſcunt. Simplices eſſe videntur 1, 2, 3, 4, 22, 23, 24 et 25, ceteri in extremitatibus ramoſi.

Pinnae ani prima radiorum 23; ſimplices horum ſunt ac indiuiſi 1, 2, 3, 4, 19, 20, 21, 22 et 23; reliqui omnes bipartiti. Increſcunt *longitudine* a primo ad ſextum, abhinc iterum decreſcunt ad vltimum vsque.

Pinna ani ſecunda radiorum 25, quorum 1, 2, 3, 4, 5, 22, 23, 24 et 25 ſimplices eſſe videntur, ceterorum omnium extremitates vero ramoſae. Longitudo eorum, a primo ad ſeptimum, omnium longiſſimum, increſcit, ab hoc vero ad vltimum vsque decreſcit.

Pinna caudae radiorum circiter 40-44, ad extremi marginis medium leui exſciſa ſinu, quem radii ipſius intermedii proximis lateralibus aliquantum breuiores efformant. Ani oſtium ſtylum tenuiorem facile admittebat, orificiumque ouiductuum com-

communne adeo amplum erat, vt pennae anſerinae extremitatem facile reciperet.

ANATOME.

Ventriculus, in abdominis medio ſitus, maxima ſui parte pylori appendicibus obtegebatur, ex imo hypochondrii dextri prouenientibus, ac ſuper eius ſuperficiem late diſtributis. Ex eiusdem hypochondrii imo prodibat infra appendices infimas et iuxta ventriculi fundum pars inteſtini recti obliquo deorſum ducta, quae, ſimul ac abdominis medium attigit, rectilineo dein curſu anum petebat. Hepar in duas partes erat diuiſum, quarum vna, in dextro ſita hypochondrio, breuior ac minor mole mihi viſa eſt altera, in ſiniſtro collocata. Huius extremitas inferior, ouario eiusdem lateris contigua, in duos iterum ſubdiuiſa erat lobos, transuerſim ad abdominis anteriora inflexos, quorum ſuperior, inferiore longe breuior, ſiniſtrum ventriculi latus leviter tantum lambit, inferior autem ipſam huius faciem poſticam ac infimam ſubiit. Subrubelli adhuc erant hi lobi, firmaeque ſatis ſubſtantiae, cum reliquum huius viſceris iam exalbidi coloris fuerit, ac liquationi putridae proximum. Margo lobi longioris inferior a diaphragmate 1″, 11‴, ab ani orificio 10‴ diſtabat. Media, eaque anterior hepatis portio, ventriculi ſummitati, ſuperioribusque, apophyſibus transuerſis ſuperſtrata, a ſummo ad imum 7‴ longa. Poſtica hepatis portio magno ac profundo finui ad vtrumque oesophagi latus conspiciendo, immersa, nec, nisi prius vasa sanguinea, quorum ope hoc viscus diaphragmati cohaeret, dissecta fuerint, e cauitate sua facile extrahenda. Vesicula fellis pallide viridis sub dextrae ac posticae portionis imo delitescebat, et cum eadem connexa erat.

Duodenum ab initio statim leuiori sub arcu diaphragma versus assurgens, mox deflectebatur, ac peritonaeum inter dextrumque ouarium decurrebat, colorem huc vsque seruans e rubicundo testaceum, hinc vero sub forma coli, mutato pristino colore in nigricantem, in distantia 6''' ab ano reflexum, interiora versus adscendebat; cumque priori tractu a latere interno contiguitatem seruabat ad arcus duodeni concauitatem vsque, sub qua recti sub facie denuo inflexum, introrsum deorsumque descendebat, tandemque recta via inter vtrumque ouarium iter suum ad anum vsque prosequebatur. Ductus choledochus satis breuior, circa posticam principii duodeni faciem, 1½''' infra appendices eidem intestino inseritur. Oesophagus 4''' circiter longus, totidemque in medio, vbi angustior erat, latus, in ventriculum desinebat ab initio statim ampliatum, circa medium spatiosiorem, ad fundum vero denuo angustiorem. Longitudo ventriculi 1'', 8''', maxima ipsius latitudo 10'''. Ex huius fundi dextra parte pylorus oritur, dextrorsum ac oblique sursum flexus, a basi sua, ad quam maximam habet ampli-

amplitudinem, ad ipsius finem magis magisque contractus. Longitudo pylori 7''' circiter, latitudo ad basin 4''', eademque ad finem circa appendicum exortum, $\frac{1}{2}$'''. Appendicum pylori, pancreatis vices explentium, numerus quadraginta septem (*b*) erat. Binae vtplurimum ad basin sibi connexae, rarius vna vel altera ad insertionem vsque diuisa. Dimidia earum circiter pars posteriora ventriculi versus reflexa. Longitudo maiorum 9'''. Oesophago, ventriculo et pyloro dissectis, in oculos statim incurrit massa informis fusca, totum ventriculum replens, quae exemta et aqua abluta nil aliud esse visa est, quam maximus vermis, sine dubio marinus, cuius cuticula albida, concoctionis iam perpessae signo, corporis nexu soluta, hinc et inde fluctuabat. In alius indiuidui ventriculo spinam dorsi clupeae integram, eiusdemque piscis squamas nonnullas vesicamque natatoriam, nec non Entomi pyramidalis *Klein.* dub. 38. f. 1, 2. pedem reperi; ex quo escam Gadi nostri facile harioleris. Interior oesophagi superficies ab ista ventriculi non tantum colore albicante, sed et rugis pluribus longitudinalibus, obsoletioribusque erat distincta, cum in huius inferiore potissimum parte sex tantum, easdemque profundius exaratas, numerauerim; pylori vero superficies laeuis omnino apparuit, rugis-

(*b*) In alio indiuiduo 41. numeraui; it. 42. in alio.

que plane carens. Ad initium pylori iugum eminentius transuersim protendebatur, pro ipsa huius valuula habendum. Principium duodeni praeter appendicum oscula et proxime infra haec ductus cholidochi ostium obsoletum, setamque facile admittens, memoratu dignum nihil habebat. Liquor duodeni crassior quidem, non tamen tenax, particulis terreis, albentibus mixtus. Colon et rectum recremento nigricante referta. Sphincter ani ex fibris tam longitudinalibus, quam transuersis, rubentibus, facile cognoscendus. Lien e spadiceo rubens, figurae valde oblongae ad posticam dextramque ventriculi faciem, proxime sub pyloro situs. Ouaria duo, longa, valde turgida, distincta, supra orificium vtrique commune ad 2''', infra idem ad 6''' vsque, in vnum corpus coalita, extremitatibus vero a se inuicem denuo seiuncta. *Horum dextrum*, sinistro paullo maius. Singul*um* quoque a summo ad imum propria cauitate donatum, et ad concretionis locum septo intus interposito vnum ab altero erat diuisum. Quodlibet etiam proprio orificio in ouiductum vtrique communem proxime patebat. Lactes marium lobatae.

Peritonaeum album, punctis nigris vndique adspersum, plurimis quidem ad latera et iuxta apophyses transuersas, rarioribus vero, immo rarissimis ad mediam ac anteriorem abdominis partem. Membrana haec, totam huius superficiem circumdans, super vesicam aeream quoque expandebatur, eidemque

que arcte saepius adhaerebat. Cauum abdominis circa anum haud terminatur, sed ad 1'', 3''', pro vesica vrinaria ouariorumque extremitatibus recipiendis, vlterius se extendit.

Vesica aerea simplex, substantiae albicantis, mollis ac in pultem facile conterendae, figurae valde oblongae et ad summitatem bicornis, sub peritonaeo ad dorsum, quam longum est, excurrebat, apophysibus transuersis firmissimo ac indissolubili nexu vtrinque iuncta. Modo dictarum autem spinae dorsi apophysium fabrica omnium maxime singularis est: conos enim singulae excauatos et ad basin oblique exscisos referunt quorum cuncta lumina vesicae cauitati directe respondent. Cornicula vesicae supra memorata tubulosa, substantiaeque huic consimilis, duplici inflexione duo ista palati officula versus exporrecta sunt, ac apicibus suis vix duarum triumue linearum interuallo ab iisdem distant, altera parte, eademque angustiore, penitus occlusa, ampliore altera in vesicae cauum patentia. Ductus aerei ne vestigium quidem aderat. Renes, coloris e cinereo-nigricantis, per ipsum vesicae natatoriae dissectae latus posticum translucebant, a capite ad huius extremitatem vsque extensi, et in vnum corpus coaliti. Ex horum fine, inter apophysium transuersarum dextri lateris decimam sextam ac decimam septimam vreter prouenicbat simplex, versus vesicae vrinariae fundum oblique excurrens. Haec ipsa vero pinnae ani primae parti anteriori e diametro oppoſita, ouariorum coniunctioni ita reſpondet, vt collo ſuo oſtium horum commune, fundo vero abdominis finem reſpiciat. Flatu diſtenta eadem, in ſubcylindricam formam ſe mutauerat. Vrethra breuiſſima, orificio ſuo nonnihil producto, circa marginem oſtii ouiductus communis dextrum ac poſticum, ex aduerſo papillae alicuius rubicundae, prominebat. Coſtae vtrinque 14 circiter numero, ſubteretes, leuiter arcuatae, ac cartilaginum *ope* partim ipſis vertebris primoribus iunctae, partim apophyſium transuerſarum faciei poſticae leuiter adnatae. Apophyſes transuerſae in dextro latere 20, in ſiniſtro 19; prima illarum e quinta, *harum* prima e ſexta demum vertebra exorta. *Vertebrae* in vniuerſum 58 circiter.

Piſces hi pelagici Ianuario menſe *Petropolin* aduehuntur congelati, et a multis *in deliciis habentur*. Quod reliquum, Gadum hunc noſtrum, non obſtante radiorum numero aliquatenus diuerſo, quem in vnius eiusdemque ſpeciei indiuiduis ſaepius *variare* quotidiana me docit experientia, eundem eſſe, nullus dubito, qui a Cel. *Linnaeo* in ſyſt. Nat. ed. 10. p. 252, n. 2. vocatur:

Gadus (*Callarias*) tripterygius cirratus *varius*; cauda integra, maxilla ſuperiore longiore. In. Suec. 293.

Gadus dorſo tripterygio, ore cirrato, colore vario, maxilla ſuperiore longiore, cauda aequali. Art. gen. 16. ſyn. 35. ſp. 63.

Gadus

Gadus balthicus Torsk. *Linn.* It. vel. p. 87.
Gadus callarias balthicus. Eiusd. It. ſcan. p. 220.

Menſura.

	Poll.	Lin. paris.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad longiorum pinnae caudae radiorum apices	10.	5.
- - ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - -	9.	$7\frac{1}{2}$.
A mandibulae ſuperioris extremo ad oculi medium - - - - - - - - - -	—	$11\frac{1}{2}$.
- - - - ad principium pinn. pectoralium	2.	4.
- - - - - - - - pinn. ventralium	2.	
- - - - - - pinn. dorſi primae	3.	4.
- - - - - - - - - ſaecundae	4.	8.
- - - - - - - - tertiae	6.	$9\frac{1}{2}$.
- - - - - - pinn. ani primae	4.	$5\frac{1}{2}$.
- - - - - - - - - ſecundae	6.	8.
Longitudo pinn. pectoral. - - - -	1.	4.
- - pinn. ventral. - - - -	1.	3.
- - - pinn. dorſi primae, ad baſin -	1.	$1\frac{1}{2}$.
- - - - ſecundae, ad baſin -	1.	10.
- - - - - tertiae, ad baſin -	1.	7.
- - - - - pinn. ani primae, ad baſin	2.	
- - - - - - - ſecundae, ad baſin	1.	7.
- - - - pinnae caudae, in medio	—	$8\frac{1}{2}$.
ſc. a primis radiis marginalibus, ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices	1.	$7\frac{1}{2}$.

Longi-

	Poll. paris.	Lin.
Longitudo a mandibulae ſuperioris extremo ad narium foramen anticum - -	—	$5\frac{1}{2}$.
- - - - - poſticum - -	—	7.
- - - ad marginem oculi anticum	—	$8\frac{1}{2}$.
- - - - ad angulum operc. branch. ſuperiorem - - - - -	2.	2.
- - - - ad operculi branch. extremum ac poſticum marginem oſſeum - -	2.	3.
- - - - ad lineae longitudinalis principium - - - - - - -	2.	2.
- - - ad anum - - -	4.	4
- - - - ad oſtium ouiductuum commune - - - - - -	4.	5.
Diameter oculi orbitae - - - -	—	$5\frac{1}{4}$.
Diſtantia inter primi pinn. pect. primique pinn. vente. radii baſin - - -	1.	
- - vltimi pinn. dors. primae primique pinn. dors. ſecundae radii baſin	—	$3\frac{1}{2}$.
- - vltimi pinn. dors. ſecundae, primique pinn. dors., tertiae radii baſin	—	7.
- - vltimi pinn. dors. tertiae, primique pinn caudae radii baſin - -	—	5.
- - vltimi pinn. ani primae, primique pinn. ani ſecundae radii baſin - -	—	$4\frac{1}{2}$.
- - vltimi pinn. ani ſecundae, primique pinn. caudae radii baſin - - -	—	5.
principium. pinn. ventral. et anum	2.	7.

Lati-

	Poll.	Lin. paris.
Latitudo horizontalis per nares - -	—	$11\frac{1}{8}$.
- - - - - per oculorum axes	1.	1.
- - - - per pinnarum pectoralium principium - - - -	1.	6.
- - - - per principium pinnae dorsi primae - - - -	1.	3.
- - - - - - - secundae	1.	
- - - - - - - tertiae	—	6.
- - - - - - - caudae	—	3.
Latitudo perpendicularis per nares - -	—	8.
- - - - per oculi medium	—	11.
- - - - per principium pinn. pect.	1.	7.
- - - - - - dorsi primae	1.	8.
- - - - - - - secundae	1.	8.
- - - - - - - tertiae	—	11.
- - - - - - - caudae	—	5.
Interuallum, quo primi pinnarum ventralium radii a se inuicem distant. - - -	—	7.

DESCRIPTIO QVORVNDAM ANIMALIVM.

Auctore

I. LEPECHIN.

Exhibit. d. 15. Mart. 1770.

No. 1.

Tab. XIII. Fig. 1. (Князёкъ) Parus dorso dilute caeruleo inferne albus capite albo taenia ad oculos et medio abdomine macula oblonga ex atrocaeruleis fascia alarum media alba.

Crassitie parum maiorem adaequat.

Longitudo ab apice rostri ad extremum caudae 5. poll. et 7. lin. Longitudo caudae 2. poll. 5. lin. Longitudo rostri 4. lin. Tibiae pennis denudatae $6\frac{1}{2}$. lin. digitorum medius cum vngue 6. lin. laterales paulo sunt breuiores. At posterior digitus validior et vnguis longior. Alae explicatae 7. poll. et 4. lin. complicatae modo ad $\frac{1}{3}$ caudae extenduntur.

Rostrum breue, lateraliter compressum, ex caeruleo nigricans, marginibus mandibularum sordide albis. Nares exiguae, rotundae, tectae pennis antrorsum procumbentibus, rigidiusculis, breuibus, albis: frons, vertex, genae, gula, collum, pectus, atque

atque abdomen alba ſunt; excepta macula irregulari oblonga, caerulea, quae a pectore ad medium protenditur abdomen; a regione narium per oculos ducitur taenia ſat euidens caerulea ad concolorem nuchae faſciam latiorem; infra quam alia faſcia albidior conſpicitur. Dorſum atque vropygium dilute caeruleum, tectrices caudae ſuperiores intenſe caeruleae, apicibus albis, inferiores albae; tegetes alarum ſcapulares, quae itidem caeruleae, ſecundum earum ordinem conſtituunt pennulae longiores fere ex toto albae, vnde faſcia alba in alis apparet. Remiges 18 albo plumbeo et caeruleo variae. Caeruleus color conſpicitur in vexillo externo, a principio ad medium; reliquam partem albus occupat color, ita vt numerando a prima remige caeruleus color increſcat, albus vero decreſcat, et in reliquis in modum maculae albae terminalis appareat. Plumbeus color vexillum internum occupat excepto margine albo, qui eadem lege vt caeruleus increſcit, et in remigibus poſterioribus cum macula terminali confunditur. Vltima remigum penitus alba. Caudam 12 rectrices conſtituunt, quarum duae mediae fere ex toto caeruleae, et modo apice vexilli externi albent. Reliquarum et longitudo et caeruleus color ſenſim decreſcunt. Albus vero augetur ita vt vexillum extimarum album ſit omnino; pedes cum vnguibus nigri.

Habitat in virgultis circa Synbirsk, ſed copioſiſſime in montibus hyperboreis. Cantillat in

 modum

modum passeris domestici, sed voce tenuiori et suaviori. An parus indicus Aldrov. Ionst. Willigh. Rai?

No. 2.

Tab. XIII. Fig. 2. Sterna Tschegraua. чеграва.

Sterna superne ex albo cana, inferne niuea, capillitio nigro albedine irrorato, rostro coccineo pedibus nigris.

Longitudo totius 1. ped. 10½. poll. pars crurum pennis denudata 6. lin. reliquus pes cum digito et vngue 1. poll. et 11. lin. membrana palmarum longior, quae medium eum extimo iungit. Alarum extremitates 3. pedum et 2. pollicum interim albo distant. Rectricum longissimae 5. *poll.* et 6. lin. adaequant.

Rostrum coccineum, nares nudae, lineares, sulcatae, oculi nigri iride *obscura*, frons, capillitium, et occiput, intense nigra sunt hinc inde albedine irrorata. Oculorum ambitum itidem nigredo amplectitur, excepta parua lunula albicante in palpebra inferiore. Genae, collum lateraliter, vropygium vtrinque atque tota auis subtus niuea; superne vero ex cinereo cana. Remiges 6. primores saturate cinereae marginibus apicibusque vndique nigricantibus. Reliqua remigum cohors dorso concolor est. Cauda forcipata 12. rectricibus niueis constat.

ſtat. Pedes omnino nigri. Ad mare caſpium frequentiſſima; voce riſum aemulatur.

No. 3.

Fringa inferne alba, ſupra nigra lituris longitudinalibus flaueſcentibus, faſcia alarum alba, pedibus lobatis. Tab. XIII. Fig. 3.

Longitudo 6. poll. et 11. roſtrum 10'. pars crurum pennis denudata 6. lin. digitorum medius cum vngue 9. lin. laterales paulo ſunt breuiores, poſticus breuiſſimus. Extrema alarum aue volante 11. poll. cum interuallo diſtant. Alae complicatae paululum vltra caudae extremum protenduntur.

DESCRIPTIO.

Roſtrum nigrum gracile apice incuruum, nares pro more gentis, oblongae lineares. Frons albet capillitium nigrum eſt. A quo protenditur taenia eiusdem coloris per nucham atque collum ſuperius vsque ad regionem ſcapularem. Retro canthum oculi poſteriorem conſpicitur macula oblonga itidem nigra, per lineam albam a fronte ad occiput ductam, capillitio diſtincta; ſpatium genarum, colli lateraliter et ſubtus, pectus atque abdomen alba ſunt; dorſum vt et tegetes alarum ex fuſco nigrae lituris flauicantibus oblongis adornatae, vltimus tectricum ordo apicibus omnino albet, vnde quaſi faſcia alba media in ala conſpicitur. Remiges 4.

 pri-

primores nigri, rachi alba, posteriores per vexillum internum atque apicem albo marginatae. Cauda 12. constat rectricibus nigris ruso fimbriatis, ast duae exteriores fere penitus albae. Pedes sordide flauicantes, et ad secundum articulum digitorum integre palmati a secundo articulo ad insertionem vnguium membrana dupliciter lobata instructi. Habitat ad lacus salsos. Circa mare caspium gregatim volitat.

No. 4.

Ardea pumila { Ardea capite et collo flauicante castaneo alboque variis, dorso castaneo, inferne albicans, rectricibus niueis.

Tab. XIV. Fig. I.

Longitudo totius ab apice rostri ad caudae extremum - - - - -	1—7— 6.
rostrum - - - - - - -	—3 — —
pars crurum pennis denudata - -	— —10.
digitorum medius cum vngue - -	—2— 6.
extrema alarum distant - - -	1—10.

complicatae alae caudae extremum attingunt.

Mandibula superior sordide nigra marginibus flauescentibus, interior modo basi nigricat, reliqua parte ex flauo alba. Spatium inter rostrum et oculos nudum ochreaceum, oculi parui iride flaua. Caput et collum superius et ad latera vestiunt pennae medietate ab vtroque scapi latere simul cum scapo nunc albae, nunc ex ruso albae, marginibus obscu-

obſcure caſtaneis albo terminatis. Gula alba a qua per collum anterius protenditur faſcia longitudinalis eiusdem coloris vsque ad pectus, quod cum imo ventre album eſt, transparente hinc inde flauedine, alae ſubtus fere totae niueo inſigniuntur colore, exceptis remigibus poſterioribus cineraſcentibus. Extus idem praedominatur color, nam modo vexillum externum primarum duarum remigum, reliquarum vero apices cinerei, albo rufoque vix conſpiciendo adumbrati, inter ſcapulas, dorſum, tegetesque alarum ſuperiores coloris caſtanei; reliquam tectricum cohortem albus leuiterque flaueſcens ornant colores. Vropigium et 12. rectrices vtrinque niueae ſunt, pedes vero ſordidi, vngues nigricantes. Habitat ad mare caſpium.

No. 5.

Motacilla pleſchanka (плешанка). Motacilla dorſo pectoreque nigris, capillitio abdomineque albis. Tab. XIV. Fig. 2.

Craſſitie phoenicurum paululum antecellit.

Longitudo totius - - - - -	6—2.
roſtrum ab angulo oris ad apicem. - -	—6.
Digitorum medius cum vngue. - - -	—6.
Laterales breuiores. At poſticus medium adaequat. Alarum explicatarum diſtantia. -	8—6.
Alae complicatae mediam caudam attingunt. Cauda aequat. - - - - -	2—2.

Alba

Alba sunt, capillitium, occiput, nucha, imum abdomen, vropigium vtrinque, atque maiori ex parte cauda. Nigra sunt genae, vibrissae, collum anterius et lateraliter, pectus; dorsum, alae cum suis tegetibus extus, intus enim ex nigro cinerascunt et remiges minores taenia angusta alba ad apices notantur. Cauda ex 12. constat rectricibus, quarum duae intermediae fere penitus nigrae, laterales vero albae, fascia lata nigra terminatae. Rostrum pedesque sordidi, vngues nigri. Habitat in fossis praeruptis, circa *Saratow* et alibi ad Volgam; vbi in modum hirundinis ripariae effodit cauernas, horizontales, profundas, aliquando cauitates meropis apiastri occupat. Nidus simplex, stamineus. In quo 10. pullos inueni.

No. 6.

Tab. XV. Mus oculis minutissimis, *auriculis* caudaque nullis, corpore rufo cinereo (слепышокъ).

Fig. 1. Caput habet productum, quasi pyramidale, versus anteriora attenuatum, a naribus vsque ad meatum auditorium. Lateribus vtrinque linea prominente duriori pilis rigidis setaceis obsita, instructum, a qua regiones laterales duplici modo versus interiora atque inferiora procedunt. Apex nasi sat latus, durior, cute nuda tectus. Labium superius oblique versus interiora atque posteriora descendit; labium inferius multo breuius est. Oculi valde parvi

vi, vix granum papaueris aequantes nigri et non nisi detracta cute detegendi. Auriculae nullae, sed meatus auditorius nudus, modo pilis tectus, angustus; frons decliuis. Collum breue vt fere distingui non possit. Truncus corporis ratione longitudinis sat crassus, dorsum aliquomodo gibbum; cauda nulla est, modo tuberculum paruum regionem caudae notat. Pedes breues, palmae pentadactylae fissae, plantae itidem quinque digitis instructae semipalmatae. Nasus cute nigra tectus, apice albicans, taenia supra nasum per frontem ad 6. lin. excurrens, macula sat magna in iugulo, atque ante pedes posteriores in abdomine cruciformis, trabe transuersa vsque ad lumbos excurrens, vt et vibrissae albae sunt; reliquae corporis partes teguntur pilis ad instar serici mollibus, basi ex nigro cinereis, apice rufescentibus. Incola est regionum volgae adiacentium, a Sysran vsque ad Zaryzyn. Habitat sub terra, quam ad instar talpae rostro suo versus omnes plagas ductu obliquo effodit; reliquens in medio nidum, vbi lectum ex graminibus facit, quibus etiam pascitur. Ad nullos adhibetur vsus.

Longitudo corporis totius ab apice rostri ad anum mensurata. – – – –	8	—	—
Longitudo capitis ab apice rostri ad occiput	—	2 —	2.
Circumferentia rostri, circulo ductu etiam per radices dentium inciforum inferiorum		1 —	6.

Circumferentia capitis ad finem marginum prominentium ad latera - - -	4 —	2.
Rictus oris ſecundum labium ſuperius menſuratus - - - - -	1 —	7.
- - - - ad labium inferius -	1 —	
Diſtantia inter narem vtrumque - -	1 —	3.
Diſtantia inter aperturam narium et apicem roſtri - - - - - -	1 —	6.
Diſtantia inter meatus auditorios - -	2 —	2.
Circumferentia capitis ducta circulo per meatus auditorios - - - -	4 —	2.
Longitudo colli - - - - -	—	5.
Circumferentia colli - - - -	4 —	6.
Circumferentia trunci corporis retro pedes anteriores - - - - - -	5 —	7.
Circumferentia trunci maxima - - -	6 —	4.
Circumferentia ante pedes poſteriores -	6 —	
Longitudo a cubito ad metacarpum. - -	—	7½.
Latitudo pedis anterioris. - - -	1 —	5.
Circumferentia metacarpi. - - -	—	2.
Circumferentia palmarum ad exortum digitorum - - - - - -	1 —	2.
Longitudo palmarum ad extremum vnguis digiti medii - - - - -	—	10½.
Digitus medius cum vngue - - -	—	6.
Index - - - - - -	—	5.
Annularis. - - - - - -	—	4.
Auricularis. - - - - - -	—	3.
Pollex. - - - - - -	—	10.

Digiti

Digiti medii vnguis reliqui paulo minores		—	1.
Longitudo cruris ad talum.		—	10.
Latitudo cruris ad genu.		—	5.
Latitudo ad talum.		—	$4\frac{1}{2}$.
Circumferentia metatarsi.		—	9.
Circumferentia plantarum ad exortum digitorum.	1	—	
Maxima longitudo membranae digitos vnientis		—	$2\frac{1}{2}$.
Longitudo plantarum a talo ad apicem vnguis digiti medii.	1	—	2.
Digitus medius cum vngue.		—	5.
Halluci proximus medio aequalis			
Hallux		—	2.
Minimus		—	3.
Huic proximus		—	4.
Vnguium maximus		—	$1\frac{1}{2}$.

Omentum arcui magno ventriculi adhaerens extenditur vsque ad medium abdomen, ventriculus 1. poll. et 10. lin. longus, 11. lin. latus regionem occupat abdominis sinistram et longitudinaliter situs est. Finis caecus ipsius (A) sub lobis hepatis sinistris, fundus (B) in regione sinistra vmbilicali ad dimidium eiusdem lateris protenditur. Figura ipsius ouata; latior nimirum ad interiora, angustior ad superiora, medio vbi saccus incipit caecus quasi incisa gula (C) tenuior et $1\frac{1}{2}$ lin. in diametro per diaphragmatis foramen egrediens, et ad sinisteriora Tab. XV. Fig. 2.

ſe inclinans, inſeritur ventriculo ad inciſuram ipſius antea nominatam (D) pylorus (E) ſub fine hypochondrii ſiniſtri ſurſum paululum aſſurgens facit exiguam gibboſitatem et deorſum ſe inclinans occurrit inteſtino duodeno (F) quod in initio 3. Lin. in diametro aequans, ſub ventriculum ſe recipit, et inde emergens transuerſo atque inclinato ductu per regionem epigaſtricam ad hypochondrium dextrum, et quidem ad marginem renis dextri ſuperiorem, properat, et vndique hepati per ligamenta, adhaerens accurrit ieiuno, quod paulo tenuius duodeno 2½ lin. in diametro, a dextris verſus regionem vmbilicalem inclinatur, et in ea gyros ſuos perficit, vltimoque gyro ſurſum aſcendens confluit cum ileo, quod eiusdem fere diametri cum ieiuno, multis nec ſat enarrandis gyris implet reliquas partes poſteriores regionum vmbilicalium. *Inteſtinum caecum* cum ſuo appendice, quod a vermibus nomen habet, a ſiniſtro latere verſus dextrum expanditur; Tab. XV. Fig. 3. et fere ſolum omne occupat ſpatium regionum hypogaſtricae atque iliacarum. Proceſſus vermiformis *g. g. g.* triplici gyro intortus 2. poll. et 5. lin. longus maxima in diametro 1 pollicem latus. Cornu amalthaeae, vti a pictoribus fingi ſolet, referens, ex quindecim quaſi ſegmentis interſtinctis per ſpiras conſtat quarum prius anguſtius eſt, ſecundum latiſſimum reliqui gradatim decreſcunt, et vltimum apice anguſtato terminatum. Ex ſingula ſpira interne propendet valuula membranacea cameras appendicis diſtin-

distinguens; quae non facile excrementa elabi sinunt. Ipsum intestinum caecum (H) multo angustius est suo appendice et 6. lin. latum 1. poll. et 6. lin. longum ex duobus lobis itidem valuula interstinctis conflatum; prope collum posterioris intrat ileum (I); cum anteriori colon iungitur. In qua vnione caecum et colon valde firma sunt. Colon (K) ab initio factis quinque gyris intortis firmiter inter se per cellulosam cohaerentibus assurgit in regionem epigastricam, dein versus dexteriora inclinatum prope ieiunum descendit ad ilea. Inde iterum sursum flexum in hypochondrio sinistro sub duodeno cum quo arcte cohaeret transuersam legit viam, et ad fundum ventriculi perueniens abscondit se sub illo, inde emergens facit plicam et deorsum in latere descendit, intestinoque recto ad vertebras lumbales occurrit. Diameter coli maxima 5. linearum, recti vero dimidii pollicis est.

Hepar 1. poll. et 2. lin. longum vnum poll. et 8. lin. latum 6. lin. crassum, totam diaphragmatis conuexitatem implebat, et maius occupabat spatium in hypochondrio sinistro, quam dextro, 4. constans lobis quorum prior in hypochondrio dextro ex ouato oblongus, reliquis est minor, et ad inferiora lobulo minimo auctus: secundus erat omnium maximus; vltimus multum secundo magnitudine cedebat. Tertius medium habebat volumen inter lobum primum et vltimum. Ligamentum suspensorium hepatis

 maximo

maximo lobo inhaerebat. Vesicula fellea pyriformis iuncturae loborum. *Lien* 5. gran. pendens 1. poll. et 3. lin. longus, sine superiore 3. lin. latus. Curvaturae ventriculi minori vicinus erat. Pancreas arcum ventriculi maiorem exprimens latior ad regionem duodeni quam in reliquo tractu. Renes 2. lin. longi 4. lati erant, quorum sinister profundius descendebat dextro fere ad $\frac{2}{3}$ longitudinis suae: calyx pro mole renum sat amplus, vnica papilla instructus, substantia corticali atque tubulosa sat conspicua. Centrum diaphragmatis tendinosum subrotundum. In diametro longitudinali ab introitu venae cauae 6. lin. aequabat. Diameter vero transuersalis 8. lin. longa erat; pars carnosa superior a centro neruoso ad cartilaginem xiphoideam sex lineas lateralium vnaquaeque 10 lineas.

Cor non ita pendulum sed versus latus sinistrum inclinatum, maxima ipsius circumferentia ad basin erat $1\frac{1}{2}$ poll. longitudo ab auriculis ad apicem 10. lin. pulmo dexter 6 lobis constabat, quorum inferior omnium erat maximus secundus huic magnitudine cedebat, inter primum et secundum locatus fuit tertius in fouea a secundo lobo impressa, quartus superius atque posterius situs tertio subaequalis, vltimus, oblongus, angustus, parti posteriori loborum conuexae superincumbens. Pulmo sinister duos praebebat lobos, alterum maiorem, minorem alterum. Minor propior parieti pulmonum integerrimo, atque per

per fciffuram in duos lobulos quafi diuifus, fuftinebat cor, pofterior quadruplo maior integer, profundius in thorace defcendebat, quam lobi lateris dextri.

Maxillarum fingula inftructa anterioribus duobus dentibus quos incifores vocant, fat validis, fed fuperiores inferioribus triplo longiores 6. lin. aequantes. Canini nulli molares tantum modo fex in vnaquaque maxilla; lingua craffa.

DE

DE
CAPRA SAIGA
ET ERINACEO AVRITO.

Auctore
SAMVEL GOTTLIEB GMELIN.

DISSERTATIO

Trad. d. 28. Mart. 1770.

CAPRA SAIGA

Animal propono haud nouum, ſed in *itinere ſibirico* ab. PATRVO iam iam *obſeruatum*, et ab ipſo in Commentariis noſtris *T.* V. p. 345. et VII. p. 39. ſub denominatione: *ibex imberbis* deſcriptum, vnde dein idem Cl. ALLAMANT editioni auium BRISSONIANARVM Leydenſi p. 4. n. 4. immiſcuit, et Perill. a LINN. in nouiſſimo naturae ſyſtemate p. 97. n. 11. ſub nomine *capra cornubus rectiuſculis teretibus perfecte annulatis, apice diaphanis, gula imberbi*, exhibuit At haec omnia adeo manca deprehendo, vt operae pretium ſit Capram hanc ſylueſtrem denuo ſub incudem reuocare.

Magnitudine illa, (marem nunc dico) hircam communem ſuperat; ea enim pedibus quatuor cum dimi-

dimidio exacte respondet, relatumque habeo, grandiores non infrequentes esse. Sed proprietatibus aliis, adhuc euidentioribus distinguitur, quas prolixius recensere animus est.

	p.	p.	li.
Longitudo capitis infra mensurata a fine illius vsque ad basin oris	0.	7.	11.
Longitudo capitis supra mensurata a fine occipitis vsque ad extremum nasum	1.	3.	10.
Distantia angulorum maxillae inferioris	0.	1.	8.
Distantia nasi extremi ab oculis	0.	8.	10.
Distantia angulorum oris ab oculis	0.	5.	1.
Distantia inter oculos	0.	4	11.
Distantia oculorum ab auriculis	0.	2.	5.
Diameter oculorum longitudinalis	0.	1.	$7\frac{3}{4}$
Diameter oculorum latitudinalis	0.	1.	1.
Distantia narium	0.	0.	2.
Longitudo auricularum	0.	3.	8.
Latitudo auricularum maxima	0.	2.	$4\frac{1}{4}$
Diameter inter auriculas	0.	5	5
Longitudo cornuum	1.	0.	5.
Distantia inter ea	0.	12.	6.
Distantia inter ea et oculos *transuers. mensur.*	0.	1.	2.
Distantia inter ea et auriculas, *perpendicul. mensur.*	0.	1.	9.
Distantia inter angulum oculorum externum et mandibulae inferioris internum	0.	9.	11.
Longitudo colli	0.	10.	6.

Lon-

	p.	p.	l.
Longitudo a basi cornuum ad exortum pedum anteriorum - - - -	1.	5.	6.
Circumferentia colli - - - - -	1.	4.	7.
Circumferentia corporis pone pedes anteriores mensurata - - - - -	2.	11.	5.
Circumferentia corporis crassissimi - -	13.	1.	7.
Circumferentia corporis ante pedes posteriores - - - - - - -	2.	7.	$7\frac{3}{4}$
Longitudo caudae - - - - -	0.	4.	9.
Longitudo humeri - - - - -	0.	6.	11.
Latitudo humeri ad scapulam - - -	0.	2.	11
Latitudo humeri ad flexuram - - -	0	1.	7.
Circumferentia summa - - - -	0.	6.	10.
Longitudo cubiti ad exortum vngularum	0.	9.	5.
Latitudo cubiti sub flexum - - - -	0.	0.	$7\frac{1}{4}$
Latitudo cubiti ante vngulas - - -	0.	0.	10.
Circumferentia summa - - - -	0.	5.	2.
Longitudo femoris ad genu - - -	0.	10.	0.
Latitudo femoris media - - - -	0.	2.	3.
Circumferentia summa femoris - - -	0.	5.	9.
Longitudo tibiae ad calcar - - - -	0.	9.	6.
Circumferentia summa - - - - -	0.	4.	1.
Longitudo calcarum - - - -	0.	0.	7
Latitudo calcarum - - - - - -	0.	0.	$6\frac{2}{3}$
Distantia inter ea - - - - -	0.	0.	4
Distantia calcarum ab vngula - - -	0.	1.	0
Longitudo vngulae unius - - - -	0.	1	3
Latitudo vngulae unius - - - -	0.	2.	0

Caput

Caput habet oblongum valde informe, posterius latius, gibbumque, anterius elongatum, eminens et angustius. *Nasus* ad basin frontis amplissimus, lunae dimidiatae figura, sulco a cartilagine relicto, medio notatus, vltra mandibulam inferiorem per bipollicare spatium fere protensus, et extremo *naribus* amplis, orbicularibus, intus nudis, margine circumcirca gryseis, septo intermedio distinctis, perforatus terminatusque labio superiore inaequaliter quadrato, *verrucis pallidis* et oblongis obsito, medio lacuna exarato. *Labium* inferius sub capite, rotundiusculum, lateribus verrucis cuneatis obsitum, *mento* prominulo, *imberbi*. *Oculi* ad latera frontis, distantes, magni, *palpebris* principio ciliatis, extremo nudis, iride niuea, pupilla caerulea, splendente *membrana* nictitans, valida, ampla, vasis sanguineis multum referta, inferne sita supra oculos pollicis vnius linearumque duarum interuallo, *cornu* vtrinque vnicum, adulto animale plusquam pedale, aliquo vsque in capite absconditum, incuruatim sursum protensum, summo apice lateraliter inclinatum, concauum, semidiaphanum, *annulis* 16 vel 17. vltimis obliteratis, circumdatum, apice laeue, per totam, sui longitudinem *striis* copiosis, longitudinalibus exaratum, initio obscure viridiusculum, medio et finem versus in flavescentem et oliuaceum colorem vergens. *Aures* extremum occiput vtrinque occupantes, tripollicares et vltra, pilosissimae, erectae, semicirculares, obtusae.

Dentes incisores in maxilla superiore nulli, in inferiori octo sibi inuicem vicini, a molaribus remotissimi, erecti, paralleli, duabus vtrinque extimis reliquis breuioribus, angustioribusque. *Canini* in vtraque mandibula nulli. *Molares* in maxilla superiore et inferiore nouem, lati, lobati, *lingua* carnosa, oblonga, latiuscula, supra lateribus, infra omni superficie papilosa, medio sulcata, extremo obtusa, frenulo palato cohaerens. *Rictus* oris magnus, quadratus.

Collum crassum, longiusculum. *Truncus* oblongus, crassus, gibbosus. *Inguina* nuda, *mammae* ad eas vtrinque vna *inter* inguina, *penis* admodum longus, cui subsunt testiculi duo ampli, longi. *Cauda* tenuis, fere quinque pollicaris. *Praeputium* pilosum.

Pedes anteriores posterioribus vna quarta parte breuiores, extremitate bisulcae, calcatibusque duobus, rhomboidalibus, externo latere retrorsum versis, posterius linearum tredecim spatio, ante sulcum munitae. A sulco inter eos et cutem sinus fit profundus continuatus.

Pilorum sequens ratio est. In genere omnino valet, caprae domesticae illis multo breuiores esse, atque adeo pilis ceruinis multum respondere. Sed insignis tamen in diuersis corporis partibus differen-

tia

tia datur. Breuiſſimi illi *ſunt*, *denſiſſime incumbentes*, mollesque, qui *naſum* obtegunt, albi, et ad latera tantum ſummoque apice cinereo colore candicantes. Longiores fronti, vertici et occipiti adpoſiti, plusquam bipollicares, baſi nigricantes, vel fuſci, medio et apice plerisque albis, nonnullis flaueſcentibus. *Auriculae* piloſiſſimae; *pilis* molliſſimis, aut niueis, aut apice flauis. *Infra oculos* producta *ſetoſa verruca*; *ſetis* longiſſimis, candicantibus, vel fuſco ferrugineis, poſterioribus extremum verſus aurantiis. *Mentum* e fuſco colore niuet. *Pili* dorſi capitis poſterioris illis longitudine analogi, vel aliquantum ea maiores, perfecte quidem candidi viſi, ſed initio fuſco flaueſcentes, et finem verſus tantum albi: ex eo autem, quod valde denſi ſint, et oblique incumbant, primo adſpectu niuei comparent. Prope caudam medio plumbeo colore fuſceſcunt, et lateraliter ad innominata oſſa obſolete caſtaneo colore imbuuntur. *Cauda* pilis dorſalibus reſpondentibus componitur. Longiſſimi omnium *pili* ſunt, *pronum* corpus veſtientes, barbam aliquo modo mentientes; ii quidem *ad collum inferius*, *mediumque abdomen* flaui, *hoc* et *penem* inter *medio* faſcia fuſco flaveſcente; lateribus niueis; *regione genitali* iterum flauicante, *pene teſticulisque* albis, ano niueo. *Pedes anteriores* e candicante colore flaui, ita vt *parte* earum *interiore* candicans dominetur. *Pedes* poſteriores albi, et exterius interiusque apice tantum caſtanei. *Pili* ad vtrosque principio longiuſculi, poftea breuiores. *Vngulae* firmae, nigrae, vel e nigro liuidae.

Quare hoc animal ad pecora dentibus, et ad capras cornubus omnino referri, fed monftrofo nafo, ore infero, barbae defectu, coloris pilorumque diverfitate tanquam diftincta fpecies recenferi debet.

Afiae propria eft haec capra, ad *Tanais*, *Volgamque*, et in *Sibiriae* feptentrionalibus plagis frequentiffima, vafta amans deferta, victitans iumentorum ad inftar vegetabilibus, velociter currens, et agitata frequenter in altum faliens. Planis in locis difficulter a venatoribus exploditur, in montofis faltu breui defatigatur fuo, et certa praeda euadit. Sub autumnum et aeftatis initio femina vnum vel duos in lucem edit pullos. Haud incedunt gregatim, fed ad fummum quatuor fimul confpiciuntur. Autumno valde pingues, femina mare multum pinguior. Venti feptentrionales valde ipfis infefti, in primis niue iuncti, vnde contingit, vt e defertis Kirgificis hyeme tantum, fub ea aeris conditione in regione *Aftrachanenfi* confpiciantur, vbi tum infrequens non eft, confpicere illas in ipfam vrbem penetrantes. Caro fapida, inprimis feminina. Inter Tataros Mahumedanos fabula eft, ad grauidam pii *Abrahami* concubinam, *Hagar*, a coniuge ipfius *Sara*, exulatum, mififfe Angelum Gabrielem, cum in deferto Ismaelem pareret, capram noftram *Saiga*, fuis ſuis vt vberibus et matrem et infantem aleret; inde ab his infidelibus magno in cultu habetur. Praeter carnem cutis quoque in vſum venit, ex qua vilioris notae homines veſtes ſibi hyemales conficiunt; ſed cum pili laxi admodum, et facillime decidui ſint, pellibus ouinis omnium minimum pretioſis interiores adhuc ſolent eſſe.

ERINACEVS AVRITVS.

Multum inter auctores de Erinaceis diſputatum Tab. XVI. fuit, an vnica illorum exiſtat ſpecies, vel an plures reuera habeantur? Primaria quidem diuiſio ea eſt, qua in Erinaceos roſtro ſuillo praeditos, et in alios roſtro canino donatos, partiti fuerunt. Lis nondum compoſita eſt, ſed, cum hactenus obſeruati Erinacei europaei omnes roſtrum oſtenderint, neque ſuillo neque canino ſimile, veritas ab eorum potius parte ſtare videtur, qui genuinam vnicam tantum Erinaceorum, hactenus cognitorum, ſpeciem frequentibus obſeruationibus commoti, agnouerunt. Reliqui ab auctoribus excitati Erinacei aut ad vulgarem pertinent, aut ad alia animalium genera. Quibus tamen non obſtantibus nouam ego certiſſime propono ſpeciem, in regione *Aſtrachanenſi* frequentiſſimam, diſtinctam magnitudine, qua vulgari multoties cedit auribusque, admodum extantibus inſignem. Id quod nunc pluribus exponam.

Corpus

Corpus superne a basi capitis vsque ad caudam pungentibus aculeis obsitum firmissime cuti adnexis, confertissimis, sursum spectantibus, basi candicantibus, medio obsolete nigris, apice ex flauo colore albis infra incrassatis, exacte teretibus, supra attenuatis acutissimis, longitudine linearum septem. *Inferior* corporis *superficies* pilosa, *pilis* anterius ad mentum, pectus et ventrem albis pauco rubicundo passim intermixto, posterius ante caudam sordide flauis.

Caput anterius *pilis* vestitum, ex albido colore castaneis. *Oculis* minutis, quorum *palpebrae fuscae* sunt, *iride* pallide *caerulea*, *papilla* nigra. *Genae* colore capitis anterioris, proxime tamen *infra* et *supra* oculos paucos minutosque pilos obseruo nigros. Tempora castanea. Hoc autem caput terminatur *rostro*, Erinacei vulgaris simillimo, *mobili*, *nudo* obtuso, nigro, medio sulcato, *sulco* inferne euidentiore.

Nares extremo rostro, cui adnectuntur, crassiores, distantes, oris reuolutis, dentatis, neque et nostra in specie *mandibula superior* infra nasum protenditur, *inferiorque* ab eo fere quatuor lineas distat, vt adeo et nunc pateat, diuisionem Erinaceorum in suillos et caninos, lubrico fundamento niti. *Auriculae* insignes triangulum fere inaequilaterum repraesentantes, obtusae, ad situm quidem eundem ac in vulgari ordinatae, sed pro mole corporis quam mox

mox dico, longiſſimae, pollicem quippe cum lineis quatuor, et fere dimidia longae, inferne octo lineas latae, medio lineis ſex reſpondentes, extremitate ſuperiore vix duabus aequales, baſi ſua *pilis* denſis ex albo flauis, tanquam lanae ſpecie obducuntur, *vterque* eorum *latus* anterius intus ad finem proceſſu cartilagineo auctum. *Margo* reuolutus *ſuperficies ſupina* baſi nudiuſcula *apicem* verſus et *marginibus pilis* molliſſimis, albido - gryſeis, incumbentibus tecta, *inferior* baſi medioque omnino nuda, ſed extremitatem verſus et ad apicem ſimilibus, quos continuo enarraui, pilis munita *Myſtaces* capiti vtrinque adpoſitae, molles, ex albo nigrae, poſterioribus longioribus inflexae, numero inconſtantes. *Dentium* eſt ſequens ratio; *inciſores* in vtraque maxilla duo, reliquis longiores, cuneati; iis in *ſuperiore* admodum diſtantibus, dextro ſiniſtro longiore, iis in inferiore vicinioribus dextro iterum longiore, ſibi vero non reſpondent, ſed inciſores ſuperioribus ſub alterni ſunt. *Laniarii* in maxilla ſuperiori vtrinque 5. primo omnium minimo, arcte cum ſecundo, qui antrorſum decumbit adnato, a reliquis diſtante, tertio et quarto erectis et vicinis, quinto rurſus minore, remoto et interius poſito; in maxilla inferiore vtrinque tres antrorſum decumbentes, vicini, medio lateralibus longiore. *Molares* in vtraque mandibula vtrinque 4. viciniſſimi, e quibus primus maximus vltimusque minimus eſt. *Vtraeque* maxillae carneo margine nudae. *Palmae* et pedes pentadactili, corporis inferioris ad instar colorati; in his tamen plus flauidioris admiscetur. *Vnguiculi* rubicundi.

	poll.	lin.
Cauda breuissima, ex albido sordide flaua, apice nigra.		
Longitudo totius animalis ab extremo rostro ad initium caudae	4.	7.
Longitudo caudae	0.	5.
—— a rostro ad occiput	0.	7.
Diameter latitudinalis rostri anterior	0.	3.
—— —— —— —— posterior	0.	4.
Distantia narium ab oculis	0.	$9\frac{1}{2}$.
—— ab auriculis	1.	3.
—— oculorum inter se	0.	$8\frac{1}{2}$.
Diameter longitudinalis oculorum	0.	$2\frac{1}{2}$
Diameter latitudinalis eorumdem	0.	2.
Circumferentia corporis inter angulum s. Canthum oculorum internum	0.	3.
et angulum auricularum extremum	0.	$5\frac{1}{2}$.
Distantia apicis mandibulae inferioris ab extremo naso.	0.	8.
Distantia auricularum	0.	7.
Longitudo colli	0.	$5\frac{1}{2}$.
Latitudo colli	1.	4.
Circumferentia corporis inferioris ante palmas		
Distantia palmarum	1.	10.
Circumferentia corporis inter palmas et pedes	1.	5.
Longitudo caudae	0.	$4\frac{1}{2}$.
—— Palmarum vsque ad carpum	0.	10.

Circum-

	poll.	lin.
Circumferentia metacarpi - - - - -	o.	$4\frac{1}{2}$.
Longitudo digiti extimi in palmis cum vngue	—	$3\frac{3}{4}$.
—— intimi - - - - - - - - - -	—	$3\frac{3}{4}$.
—— medii - - - - - - - - - - -	—	5.
Digitorum lateralium - - - - - - -	—	$4\frac{1}{4}$.

Reſpondent magnitudine digiti pedum, ſed ſingulare hoc eſt, quod digitus infimus poſterius locetur, vltra 3. pollices a vicino remotus. Id quoque adhuc habeo addendum, quod pili, brachia, et metacarpum, tibias et metatarſum tegentes ex lucido colore caneſcant, quodque corpus et tarſus nudi, inferius ſordide fuſci obſeruentur.

Atque haec quidem magnitudo conſtans eſt, et conſtans aurium conformatio, ne forte putes enarratum animal varietatem erinacei Europaei eſſe. Quin quod hic, in reliqua Ruſſia ſat copioſus, et a me quoque per omne adhuc *Woronecenſe* gubernium obſeruatus, hic *Aſtrachaniae* et *Zarizyno* abhinc plane exulet. Sed noſtro animali iidem tamen mores ſolemnes ſunt, qui vulgari. In eundem ſe irritatum globum torquet, ita ſe defendere tentans, hoc in ſtatu penitus immobile. Incedere cupiens, elongatur pariter corpus, pedibus inſiſtit, curritque aequa velocitate ſi non maiore; eodem denique victu gaudet, eadem ipſi oeconomia ſolemnis,

 hyeme

hyeme in fouea aliquot pollices profunda, absque victu vitam occultam degit. *Astrachanensibus* pariter domesticum animal est, felium vices sustentus, et ab ipsis lacte, quod anhelat, potissimum sustentatur. Icon ad naturalem magnitudinem staturamque facta est.

LYCH-

LYCHNANTHOS VOLVBILIS
ET
LIMNANTHEMVM PELTATVM
NOVA PLANTARVM GENERA.

Auctore

SAMVEL GOTTLIEB GMELIN.

Exhibit. d. 28. Mart. 1770.

Quamuis mihi bene persuasum sit, genera plantarum, quae stabiliunt, neque naturae instituto, neque ipsius inniti legibus, ea tamen perquam necessaria arbitror, quod subleuent cognitionem vegetabilium, immensam eorum molem in compendium, miro vsu, redigentia. Ita olim in praeloquio ad Historiam fucorum scripsi. Hac mente bigam plantarum, in itinere orientali, quod me occupat, obseruatarum nunc propono.

LYCHNANTHOS VOLVBILIS.
CHARACTER GENERIS.

CAL. *Per.* monophyllum, quinquefidum, persistens. Tab. XVII. Fig. 1.
COR. *Petala* quinque, bifida, fauce dentibus coronata.
STAM. *Filamenta* decem, alterna. *Antherae* simplices.

 PIST.

PIST. *Ouarium* globoſum. *Styli* tres, ſubulati *Stigmata* contra ſolem verſa.

PER. *Bacca* globoſa, vnilocularis, apice dehiſcens.

SEM. plura, reniformia.

DESCRIPTIO.

Planta herbacea, ſcandens, inter frutices et arbores naſcens, humi proſtrata, ramisque eorum conuoluuli cynanchi cet. adinſtar mire circumuoluta. *Radix* geniculata, gemmaſcens. *Caulis* volubilis, teres, viridis, obſolete pubeſcens, mox a principio ſuo ramoſus, *ramis* cauli ſimilibus, tenuioribus, iterum diuiſis. *Folia* coniugata, ouato-oblonga, ſeſſilia, ſubſinuata, acutiuſcula, ſubtus et margine obſolete pubeſcentia, ſupra laete viridia, glaberrima. *Pedunculi* e foliorum axillis ſolitarii, *ſparſi et oppoſiti*, filiformes, duobus tribus*que* foliolorum deſcriptorum, ſed minimorum paribus veſtiti, extremo florem vnicum gerentes. *Calix* ventricoſus, inflatus, pallide viridis, pubeſcens, perſiſtens, vltra ſui medium diuiſus in lacinias quinque, ſubcordatas, latas, integerrimas, margine exſtante albido cinctas, maturo fructu reflexas. *Petala* quinque, vnguiculata; *vnguibus* oblongis, anguſtis, calyce breuioribus, ſtaminiferis; *limbo* collo ſuo dentibus duobus latiuſculis coronato, plano, vltra medium bifido. *Filamenta* decem, alterna, quinque nimirum medietati vnguium et quinque vngues inter et ouarium inſerta, breuiſſima,

ſima, ſubulata. *Antherae* oblongae, ſimplices. *Ouarium* in centro floris poſitum. *Styli* tres, filiformes, incurui, longitudine fere limbi. *Stigmata* ſimplicia contra ſolem flexa. *Bacca* vnilocularis, apice dehiſcens, maturitate nigerrima, calyce circumuallata, ſucculenta, ſemina continens plurima ad triginta, reniformia, nigro-purpurea.

Eo, quo dixi, modo creſcit in locis vmbroſis et montoſis circa radices arborum; primo mihi obſeruata ad oſtium fluuii *Cimlae* in Tanaim ſe exonerantis, loco ab vrbe *Tſcherkask* duo centum leucas diſtante.

Aut ergo Lychnanthos noſter Silene erit, aut Cucubalus, aut demum Saponaria. Sed ſi tria haec genera bene diſtincta ſunt, neutrum recte ingreditur. *Faux coronata* a cucubalo eundem ſeparat. Ab eodem et ſilene *Bacca* globoſa, vnilocularis. Atque a ſaponaria ſtylo trifido recedit, ſumme videtur conuenire cum cucubalo baccifero, ſed cum eum nunquam vidiſſe meminerim, nil determino.

LIMNANTHEMVM PELTATVM.
CHARACTER GENERIS.

CAL. *Per.* pentaphyllum, *laciniis* lanceolato-oblongis, diſtantibus. Tab. XVII. Fig. 2.

COR. *Pet.* quinque, vnguiculata; *vnguibus* piloſis.

STAM.

STAM. *Fil.* quinque, basi petalorum inserta, incuruata. *Antherae* longissimae, arcuatae, lateri filamentorum insertae.

PIST. *Ouarium* sphaerico-cylindricum. *Stylus* nullus. *Stygma* quadrifidum.

PER. *Capsula* cordato-oblonga, acuminata, bilocularis.

SEM. plura, longitudinaliter adfixa, ciliata.

Nouo huic generi nomen impono a b. STELLERO Claytoniae Sibiricae destinatum, nostram in plantam apprime quadrans. quod non nisi in aquis pigris, paludibus stagnisque crescat.

Nymphaeam autem foliis, crescendi modo, florumque colore e longinquo ita refert, vt putares vnam et eandem plantam esse. At *propius inspicienti* singularis planta statim *manifestatur.*

Super aquas ergo Limnanthemum natat, *caule* donatum, quemadmodum fere solet in plantis aquaticis esse, prostrato, tereti, sordide viridi, punctis creberrimis ex purpureo-nigris maculato, simplici, nudo; supra enim tantum contingit, vt ex hoc caule duo ex aduerso *rami* egrediantur, cauli similes, nisi quod subinde basi sua alati videantur, proprie petiolorum vices sustentantes, quique vnum extremo gerunt folium reniforme, carnosum, marginibus integerrimum, glaberrimum, supina parte laete viride, prona, qua aquam attingit, rubicundum

dum vel fuſcum. *Petiolus* autem diſco folii immittitur, vnde peltatum dixi. Variat autem foliorum magnitudo, cum in quibusdam ſpeciminibus Nympheae illis grandioribus non inferiora, et in aliis ambitu minora multo et minima viderim. Superiora plerumque magnitudine reliquis cedunt, neque etiam dubito, quin varia plantae aetas ſymbolon hic tribuat ſuum. Ex medietate foliorum in extremo caulis eleuantur pedunculi, vel diſtinctius loquendo, emiſſis in latera foliis continuatur caulis, per vnciale plus minus interuallum progreditur, bigam foliorum denuo in latera mittit, atque intra illam corymbus erigitur, pedunculis circiter ſex conſtans, vno poſt alterum increſcente, quouis flore terminato. Aut et frequenter contingit, vt petioli laterales, continuo deſcripti, ſua poſtquam emiſerunt folia, receptum intra *illa* corymbum erigant, a caulino principe plane non diſtinctum. *Calyx* pentaphyllus, *laciniis* lanceolato-oblongis, intus concauis et viridibus, apice obtuſiuſculis, extus e viridi et rubro variis, corolla dimidio breuioribus. *Corolla* pentapetala, infundibuliformis in iuniore plantae aetate, at in prouectiore patens, roſacea, colore croceo immaculato ſuperbiens, ampliſſima et minor. *Petala* ipſa vnguiculata, *vnguibus* breuibus, latiuſculis, faſciculo pilorum coronatis mire inter ſe complicatorum tenerrimorum, flaueſcentium, madentium ſucco, tactu obſeruando. Neque tamen glanduloſae vel alius ſecretoriae fabricae inuenio aliquid, vt auferim pilos hosce nectaria dicere *Limbus* petalorum planus, lanceolato-latus, membrana exstante vtrinque alatus, *ala* plicatili, reuoluta, marginibus vndique fimbriata atque ciliata. *Filamenta* quinque, basi petalorum inserta, breuia, subulata, lutescentia, apice suo incuruata. *Antherae* longissimae, arcuatae, lateri inferiori filamentorum adfixae, medio canaliculatae, *apertura* canalis basi ampliata, ouali. *Filamenta* autem petalis ita immittuntur, vt insertio eorundem fiat inter vtrumque petalum proximum; quare suo filamentum intermedio corpore cohaerere nonnunquam facit duo distincta petalorum corpora, vt imponat, monopetalam corollam esse, sed infra filamentum rursus vtique recedunt, vt natura polypetala euidenter dignoscatur. *Ouarium* superum, sphaerico-cylindricum, supra attenuatum. *Stylus* nullus. *Stigma* quadrifidum. *Pericarpium* formatur *capsula* cordato-oblonga, acuminata, biloculari, continente semina longitudinaliter adfixa, itidem cordata, margine ciliata.

Ad vrbem Tscherkask prope Castellum olim celebre, et a diua *Anna* nomen nactum frequentissime sub finem Iulii florebat. A Tscherkask redux, in itinere Zarizin versus constitutus inueni quoque in aquis pigris ad pagum cosacorum *Kriuye Chutory* dictum. Variat nonnunquam calyce, corolla, staminibus sex.

Obs. CLYTONIAE maxime adfine genus.

OBSER-

OBSERVATIONES ET DESCRIPTIONES BOTANICAE.

Auctore

I. GAERTNERO.

Exhibit. d. 12. April. 1770.

Stirpium aliquot ruthenicarum heic vobis exhibeo descriptiones, Academici Ill. quarum vel nulla prorsus, vel minus sufficiens hactenus facta fuit mentio.

Primo loco prodeat noua Veronicae species, triuiali nomine *grandiflora*, dicenda, specifica autem denominatione appellanda:

I.

Veronica racemis lateralibus laxis; foliis oppositis, crenatis, hirsutis; caule adscendente, stolonifero.

Descr. Radices plurimae ex singulis caulis geniculis, qua parte per terram repit fasciculatim oriundae et in fibras capillares longissimas diuisae.

Caulis plerumque simplicissimus, filiformis dissite geniculatus, ex reptante adscendens; inferius nudus et gracilis; ſuperius parce folioſus, craſſeſcens, villisque cineraſcentibus obtectus.

Stolones alterno ordine e geniculis caulis inferioribus enati, filiformes, aphylli, radicantes et late per terram ſparſi.

Folia oppoſita, inaequalia; *inferioribus* minimis rotundatis, *mediis* ouatis maximis, pollicem circiter longis, *ſummis* iterum minoribus, ouato lanceolatis: omnibus vero vtrinque villoſis, per ambitum leuiter crenatis, atque baſi ſua in petiolum breuem a folio ipſo vix diſtinctum excurrentibus.

Florum racemi ex alterutro tantummodo caulis latere atque e foliorum inferiorum et mediorum axillis oriundi; pauci, duobus ſcil. vix plures, erecti, longiſſimi, villoſi, bracteis linearibus *ad pedunculorum* inſertionem ſtipati.

Pedunculi alterni, calyce triplo longiores, erecto patentes hirſuti.

Corollae caeruleae omnium maximae, venis longitudinalibus albicantibus *ſtriatae*; laciniae rotundatae patentes, ſuperiore reliquis maiore.

Capſula laeuis, ſemina continens rotunda, annulo membranaceo cincta.

Variat haec planta foliis, magis, minusue crenatis et hirſutis, variat quoque racemis longioribus, breuioribusue; in omnibus tamen, folia ſuprema

prema hirsuta atque crenata; et racemi, parte caulis erecta, longiores sunt.

Kamtschatkam pro patria sua agnoscit haec veronicae species et in pratis alpinis illius regionis, referente STELLERO, copiose nascitur. Differt a veronica *alpina* europaea 1o. caule stolonifero 2o. foliis et floribus multo maioribus 3o. racemis lateralibus, iisque longissimis; denique 4°. seminibus annulo membranaceo cinctis.

II.

Eiusdem cum priori familiae, sed diuersi generis est, quae sequitur LAGOTIS, nouo nomine mihi dicta, non quidem prorsus noua, sed minus rite hactenus definita planta. Nominis ratio ex calycis figura, generis character ex sequentibus patebit:

LAGOTIDIS CHARACTER NATVRALIS.

CALYX monophyllus, ouatus, compressus; margine *anteriore* longitudinaliter fisso, *posteriore* integro, arcuato, carinato, apice inaequaliter tridentato; dentibus duobus lateralibus setaceis longioribus.

COROLLA monopetala, ringens. *Tubo* longitudine calycis leuiter arcuato. *Labio superiore* breui, reflexo, emarginato. *Labio inferiore* propendente, bifido aut trifido, laciniis oblongis acutiusculis. *Fauce* laeui, patula.

 STAMI-

STAMINA. *Filamenta* duo breuissima, fauci corollae ad basin labii superioris inserta. *Antherae* cordato-globosae, latere dehiscentes.

PISTILLVM. *Germen* ouato acuminatum. *Stylus* filiformis, longitudine staminum, inflexus. *Stigma* capitatum.

PERICARP. *Capsula* ouato-acuminata, bilocularis, apice dehiscens.

SEMEN in singulo loculamento vnicum, ouatum.

RECEPTACVLI margo germinis basin cingens, glandulosus, nectariferus.

Facile ex his colligitur, essentiam huius generis in calyce altero latere fisso cum flore diandro consistere, cui quidem similis structura, *in tota* reliqua classe didynamiarum angio*spermi*arum, *alia* nulla datur.

Species Lagotidis unica tantum mihi hactenus cognita est, scilicet:

LAGOTIS (*glauca*) foliis radicalibus petiolatis, caulinis et spica terminali sessilibus.

VERONICA foliis inferioribus ouatis, crenatis; superioribus rotundis mucronatis, caule spica terminato. Flor. Sibir. Tom. 3. p. 219.

Descr. Radix perennis simplex crassiuscula, fibris lateralibus filiformibus longissimis stipata. Capiti

piti constanter duae squamae emarcidae insident, quae basin caulis vaginae ad instar cingunt et originem suam a petiolis foliorum praeteritorum trahunt; cuiusmodi vaginae etiam in saxifraga *crassifolia* aliisque occurrunt.

Intra hancce vaginam inserta sunt folia radicalia, plerumque bina, longitudinis dimidii circiter caulis, ouata, glabra, costa media insigniore subtus protuberante notata et per marginem dentibus obtuse rotundatis circumserrata. Altera foliorum extremitas obtusiuscula est, altera vero cum costa media in petiolum angustata excurrit.

Petioli dimidio folio saepe longiores, subtus conuexi, supra profundo sulco exarati et prope basin suam in alam membranaceam, caulem ex parte cingentem et cum opposita vaginam circa eum efficientem, extenuati.

Caulis simplicissimus, succulentus, glaber, a dodrantali ad pedalem nonnunquam longitudinem adscendens. E radice gracilis oritur et ad mediam vsque partem suae longitudinis foliis destitutus est.

Folia caulina quatuor vel quinque parium; inferioribus oppositis, reliquis alternis, atque magnitudine sensim decrescentibus, magisque sibi approximatis, quo propius a spica florali distant. Caeterum, sessilia sunt haec folia atque mox ab insertione sua in laminam ex rotundato acuminatam, succu-

ſucculentam, neruis e baſi radiatim excurrentibus ſtriatam et in margine acutis dentibus ſerratam ampliantur.

Summo cauli ſpica foliis ſuffulta inſidet, pollicaris vel bipollicaris longitudinis; figurae nunc ex ouato acuminatae, nunc cylindricae ex floribus et bracteis denſe congeſtis formatae.

Bracteae calycibus anterius et paulo lateraliter accumbunt, eosque longitudine ſua paulo ſuperant; inferiores prorſus foliaceae et caulinis foliis ſimiles ſunt, ſuperiores autem ſenſim minores et praecipue verſus marginem acutis dentibus ſerratam, membranaceae fiunt.

Calyx pariter membranaceus, ſubdiaphanus, coſta viridi in dentem ſetaceum excurrente, vtrinque notatus.

Corollae et Antherae caeruleae. Labium inferius in pauciſſimis ſimplex, apice tantum inciſum; in multis bifidum, in plurimis vero trifidum eſt; laciniis oblongis, acuminatis: aequalibus, ſi bifidum, inaequalibus autem atque media reliquis anguſtiore, ſi trifidum ſit labium.

Singularis varietas huius plantae in Herbario STELLERIANO occurrit, foliis ſcil. radicalibus ternatis longo petiolo inſidentibus, inſtar foliorum Menyanthis trifoliatae; foliola partialia autem crenata ſunt prorſus vt in praecedenti ſpecie, cui etiam

iam in omnibus reliquis partibus atque tota facie externa ita similis est, vt potius pro varietate eius, locis paludosis forte nata, quam pro diuersa specie habenda esse videatur. Habitat in Kamtschatka.

III.

E graminibus, quorum plusculas nouas species habeo, duo ad praesentem scopum faciunt, heic itaque proponenda. Primum eorum mihi dicitur:

BROMVS (*ouatus*) panicula ouata, fasciculata, erecta; spiculis oblongis: intermediis primoribus breuius pedunculatis; secundariis sessilibus.

Descr. Gramen est annuum pedalis circiter longitudinis, gaudens radice fasciculata, ex fibris crassiusculis breuibus, parum ramosis composita.

Culmi spithamales, stricti, tribus plerumque geniculis laeuibus distincti; intermedio supremo longissimo seminudo.

Folia sex pollices longa, duas lineas lata atque subtilissimo tomento albicante vtrinque obducta. Vaginae striatae glabrae, annulo membranaceo lacero terminatae.

Panicula bi- vel triunciaiis, erecta ouato oblonga ex tribus spicularum fasciculis, alterno ordine culmo affixis, composita. Singuli fasciculi fiunt ex nouem ad duodecim pedunculis prima-

 riis,

riis, quorum vnus medius atque duo extremi reliquis longiores sunt et paniculas secundarias, paruas strictas efficiunt; reliqui autem, intermedii terni, quaterniue numero, prioribus multo breviores, simplices, et vnica tantum vel duabus spiculis instructi sunt.

Spiculae oblongae compressae, pollicares, subsexflorae, aristatae; aristis diuergentibus.

Calycis valuula *superior* linearis, acuminata, compressa, longitudinis dimidiae spiculae; *inferior* priori similis, angustior tamen atque breuior; vtraque vero villis minimis conspersa et margine membranaceo albicante cincta.

Corollae tereti compressae; gluma exteriore vncia dimidia paulo longiore, striata, pubescente, in mucronem membranaceum, album, diaphanum terminata; infra quem arista semipollicaris, *recta*, dorso huius glumae inseritur. *Interior* gluma minor, oblonga, plana; membranacea et diaphana est.

Nectarii squamulae minimae, obouatae, ciliatae.

Semina teretiuscula rufescentia.

Sponte prouenit hoc gramen ad maris caspii littora, vnde semina Astrachania missa accepi. Ad bromum scoparium prope accedere videtur, differt tamen ab eo: spiculis villosis atque glumis supra aristae insertionem in longum et acutum mucronem productis, denique etiam habitu externo.

IV.

IV.

Alterum ad quod transeo gramen, proprii omnino atque inter Bromum et Triticum medii generis est, cum hoc enim calycis situm, cum illo locustarum quodammodo structuram communem habet, sed ab vtroque facie externa et propriis notis a calyce praesertim petitis, ita recedit, vt, ad facilitandam, per se iam satis difficilem graminum cognitionem, nouum ex illo genus, sub quo etiam Bromus cristatus comprehendendus erit, iure confici posse censeam. Nouo generi nomen AGROPYRI facio eiusque characterem naturalem hic subiungo.

CALYX. gluma quadriflora, biualuis: *Valuulis* nauicularibus, mucronatis, adscendentibus, lateralibus.

COROLLA biglumis: gluma *exteriore* lanceolata, concaua, apice in aristam breuem excurrente. Gl. *interiore* lineari, membranacea, breui.

STAM. *Filamenta* tria capillaria. *Antherae* lineares.

PISTILL. *Germen* ouato oblongum. *Styli* duo, filiformes, hirsuti. *Stigmata* simplicia.

PERICARPIVM et nectarium nullum; Corolla semina inuoluens.

SEMEN vnicum oblongum, hinc conuexum inde sulco tenui exaratum.

 Duas

Duas ad hoc genus refero species, quorum altera specifico nomine dici poterit: Agropyron (*cristatum*) spica composita, flosculis hirsutis. Haec ab Ill. LINNAEO, bromus spiculis distiche imbricatis, sessilibus, depressis, dicta, a beat. GMELINO autem sub denominatione: Festucae culmo spicato, spiculis multifloris, in Flora sibirica descripta et delineata fuit. Altera vero, noua species, erit:

AGROPYRON (*triticeum*) spica simplici, flosculis laeuibus.

Descriptio. Radix annua, fibrosa, capillaris. Culmi ex ea plures, semipedales, adscendentes, simplices, ex quatuor vel quinque internodiis inaequalibus conflati.

Folia plana, acuminata, nuda, *striata*: vaginis inferioribus cylindricis, *striatis*, arctis; suprema autem laxa, ventricosa, magis striata atque annulo membranaceo, lacero, tenui, terminata.

Spica ouata, simplex, compressa, facta ex spiculis decem ad quindecim, distiche imbricatis, alternis, depressis, sessilibus, adscendentibus glaberrimis.

Calycis glumae ex triquetro nauiculares, dorso insigniter carinato, planam spicae partem respiciente apice autem in mucronem subulatum, sursum incuruatum, extenuato, ita, vt basis atque dorsum valuu-

valuularum, latera ſpicae plana, mucrones autem ariſtati, aciem eius efficiant.

Corollae teretiuſculae acuminatae, mucronibus in roſtrum conuergentibus, quod extra calycem, leuiter adſcendendo, producitur.

Ad Iaicum fluuium locis editis et ſterilibus elegans hoc gramen lectum fuit.

V.

Graminibus his ſubiungo Rubiam *cordifoliam* transbaicalenſibus Sibiriae ciuuem, a Cl. D. Prof. FALKE mecum beneuole communefactam. Similis eſt illi, quam Ill. LINNAEVS, ſub denominatione Rubiae foliis quaternis cordatis, in ſyſtem. Nat. Append. pag. 229. recenſuit, nec dubium, quin ſpecie quoque inter ſe conueniant; quum vero deſcriptio LINNAEANA fructificationis partes et florendi modum ſileat, ita vt vel de ipſo genere adhuc dubitari poſſit, noſtrae plantae, quae praeterita aeſtate laete in horto academico floruit, breuem heic addidiſſe delineationem, non ſuperfluum videbitur.

Sunt autem Rubiae *cordifoliae* radices perennes fibroſae ramoſiſſimae: ramis ſuperioribus lateralibus, repentibus, geniculatis, turioniferis. Color in recenti aurantius, in exſiccata ruber, ſed nimis pallidus, quam qui vſui tinctorio inſeruire queat.

Caules e radicibus plures, quaquauerſum diffuſi, cubitales, brachiati, tetragoni; angulis acutis

 retror-

retrorſum ſcabris. Rami ſimiles cauli, longioribus tamen internodiis diſtincti, praeſertim verſus extremitatem.

Folia vt in congeneribus verticillata, inferius ſena, in medio caulis et ramorum quaterna, in extimis ramis tantum bina. Figurae ſunt ex cordato lanceolatae, pagina *ſuperiore* ſcabriuſcula, ſaturate viridi et fere verticaliter patente; *inferiore* luteola, glabra; vtraque neruis quinque arcuatis ſtriata. Margo integerrimus, reflexus, retrorſum ſcaber. Petioli pariter ſcabri, in ſpontanea planta, folio longiores.

Flores racemoſi, pedunculis communibus binis vel quaternis ad latera petiolorum inſertis.

Calyx minimus, denticulis quinque *vix* conſpicuis germen coronans. Corolla *monopetala* cyathiformis; limbo patente, in quinque lacinias triangulares fiſſo; coloris pallide luteſcentis. Stamina conſtanter quinque, corolla breuiora. Germen ſubrotundum glabrum. Corollae itaque ſtructura genus abunde declarat. Floret apud nos per omnem aeſtatem, ſed fructus raro perficit.

VI.

Ad Anemones nouam ſpeciem quae inter varias huius generis ſibiriae proprias ſtirpes non infimum locum tenet, progredior. Denominatione ſpecifica dici illa poterit.

ANE-

ANEMONE (*pusilla*) flore calyculato; scapo aphyllo pubescente; foliis radicalibus ternatis, incisis.

Descr. Pusilla planta est, vix duos pollices longitudine sua attingens; instructa radice perenni, simplicissima, paucis lateralibus fibris stipata, atque superius denso foliorum fasciculo coronata.

Folia radicalia plerumque ternata; composita, ex foliolo medio, reliquis longiore (in aliis angusto et lineari, in aliis latiusculo et fere cuneiformi, in omnibus vero vtrinque profunde inciso) et foliolis duobus lateralibus priori similibus, sed minoribus et exteriore tantummodo latere incisis. His quandoque alia foliola vario numero, eiusdem tamen cum praecedentibus figurae accedunt, vt folium ex ternato fiat digitatum, imo pinnatum; sed rarius id nec nisi in quibusdam foliis aestiualibus euenire video. Omnibus istis foliolis, quae laete viridia et glaberrima sunt, communis subest petiolus, longus, teres, laeuis, folium in situ erecto sustinens et prope basin suam in vaginam, caput radicis cingentem ampliatus.

Scapus vnico flore terminatus e centro fasciculi foliorum radicalium oritur, aphyllus est et foliis paulo longior, atque totus ferrugineo tomento obtegitur.

Inuolucrum calycem mentiens, monophyllum proxime sub corolla positum, in octo vel decem lacinias

lacinias diuisum, quarum alternae latiores, ouatae concauae, alternae lanceolatae, planae, omnes vero extus virides, intus sericea lanugine splendentes.

Corolla pentapetala patens; petalis subrotundis, concauis, striatis, flauescentibus, inuolucro paulo longioribus.

Stamina numerosissima, breuia. Germina in globum conuergentia, teretiuscula, alba lanugine obducta. Stigmata simplicissima acuminata.

VII.

Vltimo denique loco addo Digitalem *glutinosam* plantam flore quidem congenerum satis simili, sed crescendi modo ab iis non parum diuersam. Gaudet enim radice repente tortuosa, perenni, raris fibris lateralibus aucta. Ex hac variis locis caules enascuntur dodrantales vel paulo longiores, prope basin foliis vestiti, in medio plerumque nudi, versus extremitatem superiorem autem floribus atque foliis in spicam depressam collectis onusti: Simplices caeterum sunt isti caules, herbacei, teretes et qua parte foliis destituuntur, ferruginea hirsutie scatent.

Folia radicalia alterna, approximata, ouata, obtuse dentata et vtrinque villosa. Petioli dimidio folio breuiores, sulcati, caulem ex parte amplexantes.

Folia

Folia caulina raro alia, quam quae floribus subiacent, adeoque tantummodo floralia; ad singulum florem singula, sessilia, lanceolata, dentata, vtrinque villosa et floribus duplo breuiora.

Flores in capitulum spicatum congesti, breuibusque pedunculis hirsutis affixi.

Calyx monophillus, hirsutissimus, venis reticulatus, laxus, in quinque lacinias aequales minus profunde incisus. Corolla calyce triplo longior, pilosa, purpurascens; *basi* angustata; tubi *ventre* deorsum gibbo; *dorso* leuiter sursum incuruo; *limbo* quinquefido: laciniis rotundatis, duabus *superioribus* erectis, nonnihil replicatis, *mediis* patentibus, *infima* reliquis maiore antrorsum producta.

Stamina quatuor, sine vestigio quinti; filamenta flexuosa tubo corollae breuiora. Antherae bipartitae, lobulis lanceolatis. Germen ouato acuminatum, basi oblique truncatum et margine receptaculi nectarifero cinctum stylus filiformis staminibus paulo longior. Stigma bipartitum lanceolatum. Capsula bilocularis, biualuis. Semina numerosissima, subrotunda, receptaculo dissepimenti carnoso affixa. Quum itaque fructu, antheris, et corolla cum digitali conueniat, ad hoc quoque genus referendam esse censeo plantam nostram, atque dicendam: Digitalem foliis radicalibus ouatis petiolatis,

 flora-

floralibus lanceolatis sessilibus; caule subnudo, villoso. Habitat versus chinam.

Explicatio Tabularum.

Tab. XVIII. Fig. 1. Veronica grandiflora.

Tab. XVIII. Fig. 2. Lagotis glauca.

a. Calyx cum bractea florali.

b. Idem labiis diductis.

c. Corolla labio inferiore tripartito.

d. Pistillum cum receptaculo nectarifero.

e. Sectio transuersalis capsulae.

f. Semina naturali magnitudine. F. *eadem aucta.*

Tab. XIX. Fig. 1. Bromus *ouatus.*

a. Spicula naturali magnitudine paulo maior.

b. Eadem flosculis diductis.

c. Corolla cum germine et stylis.

Tab. XIX. Fig. 2. Anemone pusilla foliis angustioribus cum floris parte superiore.

Fig. 3. Eadem foliis latioribus et parte floris inferiore.

Tab.

Tab. XIX. Fig. 4. Agropyron triticeum: naturali minus.

5. Spica et pars culmi, magnitudine naturali.

a. Calycis valuulae. *b*. Corollae glumae.

Tab. XX. Digitalis glutinosa.

a. *a*. Radix. *b*. Caulis. *c*. Calyx. *d*. Corolla cum staminibus. *e*. Pistillum. *f*. Sectio germinis transuersalis.

DESCRIPTIONES QVADRVPEDVM ET AVIVM ANNO 1769. OBSERVATARVM.

Auctore

P. S. PALLAS.

Exhibit. d. 16. Apr. 1770.

Pergo in describendis nouis animalibus Imperii Rutheno-Asiatici, quorum annus proxime elapsus, (MDCCLXIX.) largam messem obtulit, et forte largiorem dabunt sequentes. Plura omnino quam speraueram in Zoologicis noua occurrerunt, imo plura quam Commentarii Academici limites capiunt. Ideoque selecta tantum praemitto ex quadrupedibus et auibus eaque breuiter descripta, multaque ex omni Zoologiae parte collecta in aduersariis relinquens, *Faunae* olim *Rutheno-Asiaticae*, quam, post exantlatos, si fortuna dederit, labores, copiosissimam praestare animus est, non exiguo ornamento futura. Praemitto haec autem, vt sentiant historiae naturalis cultores, quantum prosperet scientia PROPITIO sub NVMINE, quod vniuersum orbem litterarium radiis suis illustrat, et sub moderamine Patroni scientiarum, quibus augendis natus videtur, amore flagrantissimi, *Illustrissimum* dico

Comi-

Comitem VLADIMIRVM ORLOF, vt gaudeant, inquam, Physiophili tanto successu, sub Auspiciis tantis, rem suam agi, notioremque CATHARINA *Russis Imperante* futuram, quam inquilina ipsius Europae passim est, in remotis Orientis plagis Naturam.

I. *MVS CITILLVS.*

Citillus, quem post AGRICOLAM Zoologi nominarant omnes, at nemo illorum oculis viderat, in campestribus Russiae et Sibiriae australioris copiosius est animal, quam in syluis sciuri, imo fere quam ratti in vrbibus et pagis. Iam ad Pianam et Suram fluuios passim occurrit, sed rarius; inde vero quo magis versus meridiem et versus orientem procedas, copiosius. Tandemque in desertis trans Volgam campis adeo numerosum habitat, vt facile vna die centeni intra paucorum stadiorum spatium capi possint. Notissimus ille vbique est russico nomine *Suslik* (сусликъ) quod mire cum Germano-Slauonico, ab AGRICOLA adhibito *Zisel*, et cum Polonico apud *Rzaczinskium* exposito Susel conuenit. Contra Tataris appellatur *Θymron* (*), quod a Morduanis in *Simral* et *Imral* corrumpitur, aput Calmuccos vero in *Zurrma* deflectitur. Accepi in Sibiria Tab. XXI. Fig. 1 et 2.

(*) Consonantem tataricae linguae proprium non potui aliter exprimere, quam per Θ Graecorum, quod moderni Graeci sibilo pronunciant, vti Angli *th* et Hispani *ç* sua in lingua vtuntur.

ria nomen *Iemuranka* illis appropriari, et in *Provincia* Isetensi, a rudi aliqua similitudine, *Feles campestres* (степныя кошки) ab incolis appellari; imo quibusdam locis sub nomine *Avraschka* veniunt.

Non vti Criceti, qui in campis hisce desertis et graminosis passim, sed rarius multo, habitant, campestrium plantarum semina varia legit citillus, sed teneriores plantulas, et succulentiora atque insipida vegetabilia depascitur. Sicubi forte in vicinitate satorum, hortorumque quibus Citrulli coluntur, (бахчи Russi vocant) latitet, ibi segetem quoque teneram et Citrullorum fructus maturos depopulari dicitur. Cultioribus tamen in locis in genere rarius habitat, neque syluas et montanos tractus colit, sed campis elatis, apricis, aridiusculis maxime abundat, contra atque, satorum hostis et pernicies cricetus.

Cum ob hanc caussam, tum quia parco victu et ipsis praesertim herbis victitat, neque ad hyemem granaria replet, multo minus, imo vix quidquam noxae Agricolis citilli inferunt, vnde nec a rusticis incuriosis infestantur; neque ab iis qui venationi et capturae ferarum indulgent requiruntur, cum pelles illorum, quamuis elegantes, in vestibus adhibere, ob pili raritatem, nondum in Russia receptum sit. Adeoque solos humano e genere hostes habent calmuccos, quibus eorundem in deliciis caro est, et puerulos, qui otiosi in campis infusa

antris

antris aqua expellunt, vel poſitis in aditu laqueis decipiunt illos, funiculisque laneis, quos non facile corrodunt, adligatos varios in luſus captiuant. Certe ob lepiditatem, morumque innocentiam et mitem indolem vtique meretur animalculum, vt parceatur illi, quamquam pelles, ſi magis innoteſcerent, apud exteros elegantia ſeſe ſatis commendaturae forent, caro autem in cibum ab expertis laudata mihi fuerit, gliresque Romanorum in menſis cum laude ſupplere poſſe videatur, autumno praeſertim, quum ſunt pinguiſſimi Citilli.

Tutus a maiore parte hominum Citillus non aeque tutus eſt a minoribus, nocturnis, campeſtria habitantibus feris, muſtelino e genere; Putorio ſpeciatim Ermineoque, quorum aeſtate facilis et ſolemnis eſt praeda. Neque antra, quae ſibi fodit, ſecurum illum praeſtant, quia vnico gaudent aditu, eoque, ob molem corporis, praeſertim maſculis, ſatis capaci, vt Putorii maiores quoque ſubire posſint; quos animalculum, incondito morſu non bene oppugnare valet, timidum praeſertim, et ineptum quando terrore percellitur. Extra antrum, dum interdiu vagatur, non raro etiam Falconibus variis obuolitantibus in praedam facillimam cedit.

Ad antra fodienda praeſertim eligit campos, vt iam monui, altiores, vel plana et decliuia collium apricorum, vbi ſolum arenoſum vel pauco limo mixtum et firmatum eſt; et herbae nonnimis luxu-

luxuriant. Seniores; vel qui seniorum desertos cuniculos occuparunt, facile produnt foramina duo vel tria ampliora, modo aliquot passis, modo parum ab inuicem remota, spithamae plus minus in profunditatem peruia, quorum vnum praeterito autumno occlusum indicat egesta ibi terra. Nouus, quo eo anno vtitur animal, canalis angustior est reliquis, et exacte animalis magnitudini solet esse proportionatus; nullam ibi terram egestam videas, sed nihil praeter foramen rotundum, in terram directione perpendiculo plerumque proxima descendens, et herbis saepe ita tectum, vt lynceo vix oculo detegas. Maris antrum denotat *apertura*, per quam iunctos transuersim tres digitos facile inseras, minutum vixque duos digitos admittens feminas. Canalis obliquata parum directione in terram penetrat, ad duum, trium, quatuorue *pedum profunditatem* ea lege vt multo *profundior* semper sit feminae cuniculus, quam maris. Vlterior cuniculi pars dein obliquius pergit, postque varios anfractus dilatatur in cameram oblongam vel subrotundam, subpedalis vel minoris diametri, depressiusculam, culmis siccis comminuti graminis molliter stratam, vndique praeter aditum clausam. Iuniora animalia, vel, quod saepe fit, quae nouum sibi fabricant cuniculum, praeter solitum aditum, nihil nisi caecum, aliqua ab isto distantia, cum egesta terra, foramen indicat. Nempe per obliquum cuniculum plerumque terram subit animal, terram continuo

retro

retro proiiciens, totamque e camera quam parat et canali quem pro exitu habet, partim per obliquum priorem canalem euerrit, partim huic ingerit, eumque obturat firmissime. Appropinquante hyeme, nouum sibi incipit parare canalem animal, quem ad caespitem vsque perducit, omnemque ex illo terram vsitato prius canali intrudit, quo simul ille ad hyemem clauditur, nunquam tamen ita pleniter, vt non sequenti vere coecum eius, vt dixi, vestigium appareat. Quem vero ad caespitem perduxit nouum exitum, primo vere, quamprimum defluxere niues, et extima terrae crusta resoluta est, ex hyberno torpore excitatus pertundit, inque lucem exit Citillus.

Exitus ergo antri constanter est vnicus, et quoties nouum fodit animal obturat antiquum, transeuntis forte aëris impatiens, quem contra Cricetus, duplici apertura conciliare sibi studet. Ea vero structura tunc fit perniciosa Citillo, quando a rapacibus Mustelis in antro oppugnatur, vel aqua infunditur; cuius tamen saepe quinque vel plures amphorae, praesertim pro antris feminarum, requiruntur, ad exturbandum animal, quod sensim altius et altius adscendit, donec repleto cuniculo madidum exeat tandem, frigiditate aquae ita perculsum, vt ad fugiendum vires fere desint. Alias cursu quo pollet satis expedito, subsultante, saepius effugeret.

In hisce suis cuniculis, solitarii viuunt Citilli, nec nisi tempore veneris, maris feminae in cu-

 niculo

niculo ſubinde deprehenduntur; mas vero mordacis feminae anguſtum cuniculum ſubire ipſe nequit. Primo mane, et oriente fere ſole antris exeunt, totaque die, ſi ſerena fuerit, interpoſita ſubinde quiete, vsque ad quintam et ſextam horam, et ſolis fere occaſum, vagantur, pabulantur, inſolantur, colludunt mares cum feminis. Feminarum tunc in campis fiſtulatus crebro exaudiuntur. Mares magis taciturni ambulant. Si hominem viderint ſtatim ad antra refugiunt. Videas etiam paſſim prope antra excubantes, inque talos erectos circumſpicientes; et quantocyus inimicum viderint, edito conſueto fiſtulante ſono, in cuniculos ruentes; quod marmotis etiam ruthenicis ſolemne eſt.

Vix vidi animal, quod facilius cicurari poſſit Citillo. Mares omnes, etiam ſeniores, vnam fere intra diem, iuniores aliquot horis, *non ſolum* catenulae adſuefiunt, ſed et ita manſueſcunt, vt coram hominibus ambulare, pabulari, lauare, ludere non pertimeſcant, imo poſt aliquot dies, domeſticorum inſtar animalium ad hominem ſponte accedant, ſeque manibus demulceri atque tractari patiantur, vel e digitis cibum legant. Feminae tamen, praeſertim ſeniores, vti natura ſunt mordaciſſimae atque ſubdolae, ita nunquam feritatem, plane deponunt. Contra marmotae noſtrates, etiam feminae et adultae, intra aliquot dies domi manſuetiſſimae fieri ſolent.

Multos

Multos domi alui Citillos, moresque animalis ſimpliciſſimos et innocuos otioſe contemplatus ſum. Noctem ſemper totam ſopiti quieſcunt, a prima iam veſpera torpeduli. Saepe et interdiu, pluuia maxime et procelloſa tempeſtate, plenoque ventre ſopiuntur. Dormiunt autem clunibus inſidentes, conglobato corpore, palmis et capite inter proiecta femora reconditis, more prorſus marmotae, cum qua ſummam ſtructurae et indolis habent ſimilitudinem; paulo agiliores tamen, minusque ſtupidae mihi viſae. Somno plerumque adeo profundo torpent, vt aegre excitentur, dormientes ſubinde in latus prouoluantur, imo ex altiore loco decidant, iaceantque mortuorum fere ſimiles, per minutum et quod excedit.

Ambulant, ſaltabundi currunt, in clunes vel talos varie eriguntur circumſpicientes, corpore extenſo et diuaricatis cruribus, anguſtias perrepère poſſunt, cibum minutum et herbas ore e terra legunt, maiora vero fruſtula, dentibus prehenſa in palmas accipiunt et conſumunt ſedentes, *omnia vti Marmotae.* Lepidiſſimum eſt videre, poſt paſtum vel quandocunque roſtrum vel pedes inquinarunt, qua diligentia non ſolum os et faciem, ſed totum quoque caput palmis lingua humefactis ſciuri inſtar permulceant aut lauent, poſticis pedibus ſcabendo excutiant puluerem, linguaque et palmis latera et ventrem pectant. In genere etiam ſcabi, et manibus foueri atque demulceri amant. Inter ſcabendum pigreſcunt, et oſcitabundi pandiculantur, praeſertim poſt ſomnum, quod et in Marmotis cicuratis obſeruatur.

Qui in hypocauſto aliquam latebram ſubire poterant, minus cicurabantur, qua in aprico detenti. Vinculis liberati electa quacunque latebra, praeſertim feminae grauidae, congerebant lanam, pilos, foeni et herbarum quidquid conquirere poterant, et ſi haec deeſſent, ligna et limum fornacum rodebant, chartasque cominuebant, vt nidum ſibi pararent.

Cicurati mares raro, niſi *perterriti aut irritati*, fiſtulatum penetrantiſſimum ſuum, hiante *ore*, edunt. Feminae multo clamoſiores ſunt, vocemque paulo productiorem et debiliorem, magisque querulam ſaepe iterant iracundae, impatientes, aliterue turbatae. Praeterea iracundi *grunniunt*, quod Marmotae potius blandientis eſt, et feminae ſtertunt, fere vt felis, quando deprehenſae commordent. Famelici et irritati, aliterue ad acuendos dentes, colliſis iisdem et contritis ſtrident, quaſi *Gryllum ſtridulum* dictum, volantem audires. Pugnantes feminae ſtatim in latus et dorſum ſeſe proiiciunt dentes vnguesque hoſtibus opponentes, felium inſtar. Mares tantum dente et palmis ſe defendunt.

Cicures mares, qui primo vere capti erant, adlatas e campo feminas auide excipiebant, demulcebant,

cebant, totoque corpore velut deosculabantur, continuo fistulante et quasi leuiter repugnante femina, quam tandem reluctantem palmis mediam arctissime complexus mas, secum in latus proiiciebat, et cute ceruicis mordicus adprehensa posticis pedibus circa femora faeminae adfixus, subigebat, inquietam et subinde passerum simili voce stridulam, donec post vnum alterumue minutum perageretur opus. Post congressum piger mas, eandem vix vltra curabat feminam, raroque in nouam eadem die venerem sufficere videbatur. Praegnantes feminas odore detegebat, et cito relinquere solebat intactas. Habui mares, quos e magnitudine anniculos esse constabat, qui ad venerem inepti fuerunt; sed an hoc lege naturae, non dixero. Pepererunt feminae omnes intra vigesimum quintum vel trigesimum ab inito congressu *diem*, quod in initium Maii mensis circiter incidit. Pariunt nudos et caecos, informes, mole satis insignes pullos, trinos, quaternos, interdum senos. Hi tunc tanta celeritate adolescunt, vt ineunte Iunio captos parum iam a magnitudine matris abfuisse viderim. Non tamen prius, quam sub autumnum matris cuniculum deserunt, sibique ipsis proprium fodiunt, puto illos tertio demum anno generare; certo tamen affirmare non ausim. Vitae interim breuitatem ex tempore gestationis atque adolescentiae exiguo hariolari licet.

Pabulum cicuratis meis vsitatissimum fuit triticum, et secale, auena, panis. Herbas insipidas et teneriores omnes depascebantur; praesertim tetradynamas, polygonum auiculare, trifolia, cytisos, robiniam frutescentem, betulam, cet. Raro sitiebant, sique recusaretur potus, vrinam propriam lambebant; nunquam vero si aqua praesto esset. Bibunt lambendo et parcissime, vti feles. Niuem non comedebant ad restinguendam sitim, vt hyeme sciuri auidissime solent. Contra perdite amarunt lacticinia, Marmotis pariter expetita, iisque vltra modum ventrem replebant, ita vt saepe inde aegros et diarrhoea laborantes, imo pereuntes viderim. Neque aquam curabant lacti adsueti, et recentes capti oblatum lac, statim ac degustauerant, lubenter hauriebant, indeque maxime cicurabantur. Praeterea saepe panem butyro illitum, placentulas butyratas, carnes coctas et assatas, imo lardum salsum comederunt cicurati et in genere pinguia impense amare visi sunt. Famelici vero nihil fere, nisi maxime contraria, respuebant, imo propria excrementa, quae Rattorum fere similia sunt, saepe deuorarunt.

Cum Marmotis, in eo maxime conuenit Citillo, quod tota hyeme sine alimento in antris suis torpeat. Primis plerumque septembris diebus, quo fere tempore frigora, saltem nocturna primulum incidunt, exitum antri sui aestiuum claudit citillus, terra, quam vt dixi e nouo canali euerrit, quem ad caespitem vsque, pro futuri veris exitu, parare instin-

instinctu quodam solet. Eo tempore pinguissimi sunt totique adiposo cortice quasi incrustati, eoque iam pigri atque tardi, quippe naturaliter somnolentae indolis. Accedens frigus adhuc pigriores reddit, in cuniculis coercet, et ad somnum disponit sensim, tandem, postquam propter frigus cuniculum obturavit animal, inclusus aër prioribus caussis iunctus, plane torpidos et immobiles reddit. Minuitur in hisce animalibus ab externo frigore sanguinis calor, vnde lentior circulatio et forte primaria caussa soporis et sine alimento vitae. Minuitur, inquam, sed non eo gradu, quo BVFFONIVS in mure auellanario decedere calorem obseruauit, quemque ipse in Sciuro Glire LINNAEI et Erinaceo, hyeme quasi mortuis animalibus certis et repetitis experimentis atque thermometro sensilissimo et exactissimo obseruaui. Scilicet in Citillo summus sanguinis calor aestate constans solet esse 91° scalae *De l'Islianae*. Sed quando infusa aqua ex cuniculis proturbatos, indeque quasi torpentes examinaui, saepe non vltra 106°. imo nonnullis vix ad 110° adscendisse Mercurium vidi. In cella glaciali aliquot diebus detentis tandem, et dormitabundis factis, gradum caloris 130°. circiter perstitisse expertus sum.

Primo statim vere, secundum rusticorum calculum festo circiter annunciationis, secundum Russicum nempe calendarium, (April 5. Styl. nou.) vel paulo post, plerumque certe ipso Aprilis initio vel,

vel, qui tardiſſime, ante eiusdem medium (ſec. Styl. nou.), ex antris paulatim pertuſo caeſpite exeunt Citilli; in altioribus auſtroque obuerſis collibus, vbi cito pereunt niues, citius, in frigidiori et inundato a niualibus vndis campo tardius. Macilentiſſimi tunc ſunt, tantum in iliis, axillis et omentis relicta pinguedine, quam autumno adeo copioſe collegerant. Ventriculum et inteſtina tunc inuenias vacua, et vsque adeo contracta, vt etiam vehementi ſufflatione vix ad dimidium ſolitae capacitatis diſtendi queant; etiam coecum, quamuis hoc, ſub finem quoque hyemis, ſemper fuſcae ſaburrae aliquantum contineat. Primis temporibus ob hanc ipſam cauſam Citilli nonniſi parciſſime cibum capiunt, cauente Natura; vt lente a diuturno ieiunio deſueſcant. Nihilo tamen ſecius, hyberno ſomno et diaeta quaſi praeparati, ſtatim atque exeunt tumidis teſtibus mares atque florido vtero *feminae* in venerem ruunt. Videas tunc in campis vbique per paria ambulantes.

Quamuis eo tempore vix pullulare incipiat herba tamen cito admodum pingueſcunt. In ventriculis, verno tempore diſſectorum, adhuc non bene diſtentis, plerumque nil niſi gramen et fruticum cortices commanducatos inueni contentaque ventriculi in puriſſimo hocce animalculo non ſolum nauſeoſi nihil olent, quod plerisque tamen animalibus ſolemne eſt, ſed gratiſſimum etiam et quaſi e conciſis Betu-

Betularum virgis odorem ſpirant, quod in Tetraone Tetrice quoque obſeruari ſolet. Ipſum tamen animal, Marmotae ad inſtar, ex ore ferinum quiddam redolet, toto ceteroquin corpore omnis foetoris expers, nec niſi eo turpe, quod aeſtate adulta pediculis peculiaribus, cimicum minutae proli ſimillimis, ſcatere ſoleat.

Haec omnia generatim propoſui; quia omnibus Citillis conueniunt. Notabile autem eſt duas dari varietates diſtinctiſſimas, quarum ortus eo difficilior explicatu erit quia in finitimis admodum terris, nunquam tamen mixtim, habitant. A quinquageſimo ſexto vel ſeptimo ſcilicet latitudinis borealis gradu in deſertis ſecundum Volgam et vsque ad Tanaim ſitis, ad gradum quinquageſimum tertium fere vsque minores occurrunt Citilli, vellere pulcherrime maculoſo vel guttato, proceribus etiam expetito, nobiles, cauda vero breuiſſima tereti; neque lanata inſtructi, qualem Tabula XXI. fig. 2. ſiſtit. Quamprimum vero Volgam tranſeas, vel a montano tractu inter Suram et Volgam a Syſtanienſi regione extenſo, ad auſtrum procedas, vbique copioſos quidem citillos, ſed longe maiores, vellere ſtictico, e cano fuſcoque mixto, ſubflaueſcentes inconſpicuos; cauda vero paulo longiore et ſciuri ad inſtar, longioribus villis criſtata inſignes. Et tales per vniuerſum deſertum inter Volgam, Samaram, Iaicum fluuios et Caſpium lacum incluſum, perque vaſtis-

Varietates.

Fig. 2.

vastissimos Nomadum campos ab orientali parte Iaici latissime patentes, imo in Sibiriam trans Irtin vsque fluuium abundant Citilli, vix vlla mutatione notabili, praeterquam quod ad Irtim fluuium, vnde adlatas pelles vidi, paulo obscuriore dorsi, et magis ad rufum inclinante proni corporis colore deprehendantur. Certe si vllam in proportione partium, in visceribus, moribusue animalis differentiam obseruare potuissem, pro diuersa specie vtramque varietatem tradere nullus dubitassem. Sed multo magis inter se conueniunt, quam marmota alpium helueticarum, cum marmota ruthenica, in cuius vellere et palmis pollice instructis, (mores vt sileam diuersos) aliquam specificam differentiam *quilibet* facile notabit, licet minimam.

Hoc solum discrimen in moribus *inuenire* potui, quod *Citilli*, *cis-Volgenses*, *vtpote* minores, multo exiliorem cuniculum *min*usque profundum, quam *altera varietas*, fodiant. Explicent ergo alii, admirandum hunc Naturae effectum, cuius ego causas neque in pabulo, neque in climate assequi possum, contentus vtriusque descriptionem adiecisse, et quidem primo copiosioris maiorisque varietatis.

Descriptio. Tab. XXI. Fig. 1. Masculi huius varietatis mole sciurum superant, et ieiuni atque macilenti vere, plerumque libram vnam et aliquot vncias medicas pondere superant; imo seniores habui, quorum pondus librae cum nouem vnciis aequale fuit. Anniculi vero et biennes

biennes minores et leuiores omnes ſunt; et feminae etiam his minores, quippe quae nouem vel decem vnciarum pondus excedere nunquam, niſi grauidae ſolent.

Caput minus depreſſum, quam in marmota, roſtrum magis conicum, parotides minus gibbae et collum tenuius. *Naſus* nigricans, conuexus, pubeſcens; nudus tantum circa *nares* lunulatas, *ſepto* canaliculato diremtas. *Labium* ſuperius vsque ad naſum bipartitum. *Buccae* ſubſinuatae auellanae maxime in femina capaces. *Dentes* primores ſuperiores conuexi, parum luteſcentes (vix in feminis) truncati inferiores albi, apice adtenuato-rotundati.

Myſtaces nigri capite breuiores, minus ordinati, quinque fere ordinibus, per latera roſtri conuexa ſparſi, ſupra oculum anterius ſetae nigrae, 4, ſerie tranſuerſa; ſetae paroticae itidem tranſuerſo ordine 4, vt in marmotis. Sub gula verrucula ſetis tribus tenellis, albis. Seta longa ſolitaria, in medio antibrachii, exterius.

Oculi magni, prominuli; *Irides* brunneo-fuſcae; *pupilla* maiuſcula, etiam ad lucem longitudinaliter oualis. *Periophtalmii* loco, caruncula canthi vnguiformis, fuſca.

Auriculae nullae. *Meatus auditorii* nudi, anfractuoſi, poſterius margine craſſo, piloſo cincti; quale reſectae auriculae, cicatrice obductum veſtigium in canibus fricatoribus eſſe ſolet.

Corpus reptabundum, depreſſum, minus ventricoſum, quam marmotis, flexile et per anguſta ſpatia facile penetrans. *Pellis* tenuis, laxa, praeſertim ad armos atque femora.

Artus tenuiores, quam in marmota; *palmae* tetradactylae, vnguiculo pollicari conico, inſigniter prominulo, magis quam in marmota ruthena. *Plantae* pentadactylae tribus mediis ſubaequalibus. *Vngues* nigri, compreſſi, acuti, palmis longiores.

Cauda poſticis artubus breuior, linearis, ſubannulata (murino more), ſed piloſiſſima, villisque longis in latum ſparſis ſciureae aemula, maxime quum iracundum expandit illam animal.

Vellus breue, laxum, ſatis molle; *vertex* pilis fuſcis, extus albicantibus caneſcit; ſed naſus, latera roſtri, tractus ſupra ciliares et oculorum cum genis, auriumque ambitus luteo ferrugineſcunt; intenſius naſus, ſupercilia, et macula ſub oculo.

Corpus ſupra totum pilis extremo albidis, annulo fuſco notatis, imo gryſeis mixtipile, caneſcens, aliqua flauedine. Subtus corpus e flaueſcente album, rudiori vellere veſtitum; ſed collum ante armos, et pedes quatuor lutei. *Caudae* villi corpori concolores, vnde ex luteo extus albicat, fuſco immixto.

Feminae in dorſo paulo magis luteſcunt, et caudam habent villoſiorem. *Papillae* a ſinu axillari ad ad inguina vtrinque octo, aequidistantes, praeter inguinales viciniores. *Glandulae* distinctae lactiferae ad singulam papillam. *Scrotum* masculis nudiusculum, fuscum. *Anus* citillis, vti marmotae, sub compressionem ventris tribus papillis conicis extrorsum riget, quae in statu contractionis totidem sinus sebaceos intra ipsum marginem orificii constituunt.

Longitudo masculorum maiorum, ab apice nasi ad ortum caudae, solet esse 10 pollicum; in feminis 9 pollicum et aliquot linearum, etenim minores quamuis hae, longitudine tamen corporis vix cedunt masculis. Cauda huic speciei 2 poll. 10 lin. in maribus pariter atque feminis; sed villus extremitatem adhuc pollice et vltra exsuperat.

Panniculus muscularis in dorso insignis, vti marmotis et dorsum antumno totum sub panniculo pinguedinosum. *Glandulae* thymo analogae ad collum, sub musculis pectoralibus, et thymus maxima, vt in iisdem. *Foetor* aperti abdominis, item vt in marmotis, insignis. *Omenta*, vt in illis, lumbaria pinguissima, a latere viscera obuoluentia; *Omentum* ventriculi vero circa ipsum ventriculum conuolutum.

Hepar tripartitum; *Cystis* maiuscula, globoso-adtenuata; bile saturatissima turgens. *Lien* mediocris, triquetro-depressus. *Vetriculus*, *coecum*, et *coli* conduplicatio, vt in marmotis. *Tenuis intestini*

 Longi-

longitudo circiter tripedalis; *Colon* a coeco vsque ad anum 20 pollicum.

In *genitalibus* masculis maxime notabiles *glandulae* duae globosae vtrinque ad caudam sub pelle haerentes, durissimae, in aqua ruptae eructantes gelatinam hyalinam, tenacissimam. Hae amplissimo canale effunduntur in vrethrae portionem dilatatam, intus lacertulis quasi pinnatam. *Glans* acuminata, margine agariciformi cincta, apice rigido, continens ossiculum incuruum, extremo spatulato atque denticulato, extra cutem prominulum, vix longitudine ⅔ lineae. *Vesiculae* seminales simplices, triquetra portione terminali replicata supra inferiorem. *Testes* maximi. *Vulua* feminae simplex, *clitoride* papillari, terminata ossiculo vnguiformi, denticulato; minutissimo, vti masculae glandis. *Vteri cornua* per omentum lumbare decurrentia; *foetuum* inaequali plerumque numero grauida. *Placentae* crassae, simplices, orbiculatae. Sed longum foret omnia prosequi, in animalculi curiosissimi structura.

Descriptio. Fig. 2. Ad minorem accedo *Varietatem guttatam*. *Pondus* his etiam autumno, cum sunt pinguissimi, vix vltra decem vncias; et pinguedo omnis deglupta in talibus ponderabat vncias duas et aliquot drachmas, praeter omenta, larga quidem et albissima, sed leuissima pinguedine farcta, quorum pondus fuit drachmarum tantum quatuor cum semisse. Animal, nisi magnitudine et colore, plane non a priori diversum.

versum. *Color* capitis et dorsi magis ad gryseum fuscumque declinans; in capite sticticus, vti maiore varietate; sed in dorso albedo fere omnis collecta in maculas distinctas, orbiculares, quae pellem elegantissime guttatam reddunt. Praeterea ambitus oculorum albescit, nasus pallide lutescit, vix ferruginescunt supercilia; sed litura infra oculum lunata intense ferruginea. Latera colli et pedes, maxime antici lutei, non vt in altero, rufescunt; contra vero prona corporis facies non albicat, sed tota obsolete lutescit; tantum gula late alba. *Cauda* vti iam monui, longe breuior, et pilosissima quidem, sed pilis strictis atque breuibus teres, nec lanata. Et hic coloris et corporis habitus plusquam in ducentis speciminibus a me examinatis aeque constans fuit, quam supra descriptus maioris varietatis, cuius pariter aliquot centenos mihi ceperunt rustici, in loco a priorum patria non multo plus quam centenis stadiis Russicis (milliariabus germ. ferme 15.) distante. Neque vnquam in eodem loco varietatem vtramque obtinere potui. *Longitudo* minorum summa solet esse nouem circiter pollicum; sed multo minores nascuntur feminae. *Cauda* in maximis tantum linearum quatuordecim pollicis. Interraneorum constitutio ita per omnia similis, vt iterare semel iam dicta superuacaneum foret.

II.

II. MVS TALPINVS.

Fig. 3. Datur animal in regionibus auſtralioribus Ruſſiae, ad occidentem Volgae ſitis, mole fere Citilli vel Sciuri, quod ſub terra continuis cuniculis incedit, et magnos cumulos egerit; coecum, auribus deſtitutum, natura tamen et characteribus omnibus a murino genere haud abludens. Mihi quidem admirandum hocce animalculum ſubterraneum, quodque Zoologos hucusque omnes latuit, non occurrebat, nec niſi pauca eius exempla a *Socio* itineris *Academiae Imperialis Adiuncto et Med. Doctore Dn.* LEPECHIN circa Saratouam lecti vidi; ſed aliud deſcribam iſti, praeter magnitudinem ſimillimum, et adeo analogum, vti citillus marmotae, a qua pari etiam gradu magnitudinis differt. Mirum eſt, vulgatiſſimum hocce animalculum, quod etiam Germaniae quibusdam regionibus inquilinum *eſſe ſcio*, a nemine hucusque Zoologorum *indicatum* fuiſſe. In campeſtribus auſtralioris *Ruſſiae* et, quantum exquirere potui, Sibiriae nusquam non datur, et arida quoque deſerta non reformidat, quamuis in herbidis, ſubtumidis et iis praeſertim locis maxime abundet, vbi Phlomis tuberoſa vel Lathyrus tuberoſus copioſe creſcunt; quorum in radice tuberculis maxime delectatur, vario ceteroquin radicum genere victitans. His vt potiatur, ſub ipſo caeſpite et ſuperficie terrae cauos canales per longos tractus fodit, ſesquiorgyae vel maiori minoriue interuallo pertundens caeſpitem et terrae cumulum talpino ſimilem

milem, sed longe minorem, et spithamalem vix diametrum superantem egestans. Hoc labore praesertim vesperi et sub auroram occupatus obseruatur Mus talpinus, et totam forte noctem in eo consumit. Noctu etiam cuniculo relicto migrat, alioque denuo loco propter quaerendum pabulum et latebras, sese suffodit. Interdiu vero nusquam apparet; ceterumque solitariam semper vitam agit. Nidum aestate certum vix nisi femina habet, et de huius quidem nido et partu mihi non constat. Accepi et verosimile est, vere adulto parere et nidum e molli gramine subterraneum parare pro pullis. Hoc certe noui, ad hyemem vel sub foeni aceruis in campo hybernaculum quaerere, murem talpinum, vbi saepius verno tempore vidi, ablato foeno innumeris canalibus quaquauersum sulcatum et perfossum caespitem, comestasque radices; vel si huiusmodi desit auxilium pro hybernaculo sibi fodit loco aliquo depresso cuniculum, ad vlnae vel sesquiulnae saepe profunditatem, quem egestae terrae vndique insigniores cumuli produnt, et in quo effossarum etiam radicum sibi paenum, peculiari cauernula effossa, colligere certo scio.

Facile capitur animalculum, si sit patientia. In locis vbi recentes cumuli terrae apparent vesperi vel primo mane vigilandum est; et leni gressu accedendum ad locum vbi tunc plerumque animalculum ostio in caespite facto terram summa agilitate

 egerere

egetere videas. Dum in hoc est, canalis subterraneus, cuius directio facile ex prioris diei cumulis cognoscitur, infixa spatha intercludendus, et manu cito inde ab ostio auferendus caespes; sic animalculum quod in suo canali vsque ad spatham recessit, viuum capietur. Imo digitis in ipso ostio captum fuisse scio; namque oculis minutis adstantem hominem non videt; auditu solo pollet Captum vocem edit nullam, neque maximis suis dentibus ad defensionem vtitur, breuique et leuissima e causa moritur. Rusticis vbique notum est sub nomine vago *Slepuschtschonka*, quod coecam significat, vel magis speciei appropriata denominatione *Semljaroika*, quod terrae fossorem denotat. Innocuum hucusque est, desertis et vastis praesertim campis addictum; sed horticulturae infestissimum esse animal, quod plantarum culinarium radices corrumpit, *et multo* maius damnum infert, quam talpa, *quae* in profundiori terra lumbricos quae*rit*, Germanorum horti satis experiuntur, vbi sub nomine R*äütmauß* passim notum, sed a nullo tamen Zoologo visum et descriptum fuit.

Descriptio Fig. 3. *Magnitudo* muris talpini fere quae *Muris amphibii*, quem etiam facie et forma aliquantum refert mutatis scilicet, quae propter subterraneam vitam mutanda sapiens Natura coaptauit. *Pondus* drachmas decem rarius, nec vnquam vndenas excedit.

Caput

Caput grande, subrotundum; rostrum breuissimum, crassum retusum, lateribus hirsutissimum. Nasus plane non productus, truncatus, didymus, fuscus, nudus, *nares* conniuentes, distantes.

Labium superius vsque ad nares late bipartitum, hians, dentesque superiores vsque ad basin detegens, ab vtroque latere vero tumidulum, pubescens, intraque os conniuens et coëuns, palato pone dentes primores deficiente. *Inferius* labium crassum, dentes vaginans, vt in congeneribus omnibus.

Dentes primores superiores denudati, quasi extra os porrecti, magni, interius plani, lataque acie terminali rotundata. *Molares.*

Mystaces nigri, breues, deorsum vergentes, per hirsuta rostri latera sparsi, 5 fere ordinibus. Punctum supraoculare tripile, paroticum et gulare vnipiles; pili sparsi per inferioris labii ambitum.

Oculi vertici, et naso propiores, minutissimi, vellere ferme latentes, nigri. *Aurium* apertura mediocris, vellere obumbrata, posterius margine prominulo marginata.

Corpus breue ventricosum; *artus* breues, robustissimi. *Pedes* nudiusculi, albidi, omnes pentadactyli, digitis subsquamatis. Palmae maiores, latae fossoriae, digitis interioribus sensim longioribus, praeter pollicem breuiorem. Palmae plantaeque exterius ad digitum vsque pilis rigidis, deflexis, crebris ciliatae.

Cauda breuiſſima, teres, truncata, vix alte vellere clunium eminens. *Vellus* murinum, tenerum, molle, circa clunes et caput denſiſſimum, ſub armis et in ventre rariuſculum aeſtate, hyeme vero vbique largum. *Color* capiti, praeſertim circa roſtrum ſubater, mentum albet; reliquum *corpus* ſupra fuſco gryſeoque mixtum murinum, verſus latera, magisque ſubtus et in artubus caneſcens.

Varietatem coloris, eodem anni tempore, notaui; quidam magis gryſeo mixti et murini plane coloris ſunt; alii nigriores, imo dantur carbonis inſtar toti atri. Hanc coloris naturalis in nigrum tendentiam in animalibus ſubterraneis variis Natura prodit. In mure terreſtri BVFFONIVS obſeruauit, et ego Cricetos toto vellere, praeter album os et pedes, aterrimos ſimulque nitidiſſimos, in quibusdam auſtralioris Ruſſiae regionibus, v. gr. circa oppidum Simbirsk; copioſiores fere eſſe vulgaribus luteis, pallido maculatis, admiratus ſum. Cum his tamen miſcentur, vnoque ſaepe partu naſcuntur neque diſtinctam conſtituunt ſpeciem.

Longitudo integri animalis, quod deſcribo, 3 pollices et 9. lin. non excedit; capitis menſura 1''. 3'''. caudae 4'''.

Zootomica. Vti facie externa, ſic et interaneis mus talpinus, cum mure amphibio magnam affinitatem habet.

habet. *Corpus* macilentum, pinguedine parca ad armos et inguina collecta. Ceruix musculosissima, glandulisque collo circumpositis aucta. *Inguinales* glandulae, quae vniuerso murino generi, huic geminae, altera minuta.

Omentum exile, pinguedine fere destitutum. *Ventriculus* cylindraceus, fundo maxime productus, antro pylori ad ipsum oesophagum recuruato. *Intestinum* tenue, a pyloro ad coecum ampliusculum, XI pollices aequat. *Coecum* maximum in spiram contortum, obtusum; *Coli* initium oblique striatum, in flexus sigmoideos contortuplicatum, excrementitius denique canalis 3″. 8‴. et calami scriptorii amplitudine. *Hepar* multilobum et cystis omnino nulla bilaria. *Genitalia* exilia; autumno testes maribus vix lini semen aequantes, in sinu annulorum abdominis latentes. In *sceleto* cranium maximum, costae tantummodo duodenae.

III. *ERINACEVS AVRITVS.*

Eelegantissimam et minime notam Erinacei speciem ad inferiorem Iaikum aliquoties inueneram a Falconibus semidilaniatam, et tandem viuam obtinui in nemorosa ripa inter excubias Koschacharof et Budarin, Septembris 5, 1769. In genere autem in australioris deserti fruticetis, a quinquagesimo circiter secundo gradu latitudinis, abundare dicitur, et in vulgaris Erinacei, qui rarior ibidem occurrit, locum succedere videtur. Similitudo cum vulgari summa est, ita tamen distinguunt *Auriculae pregrandes* nouam nostram speciem, vt alio charactere vix opus sit. Accedit quod semper paulo minor reperiatur, et puritate atque mollitie vrbana velleris inferiorem corporis faciem obuestientis, rusticum Erinacei vulgaris habitum antecellat.

Descriptio. Fig. 4. *Pondus* decem vnciarum non excedit haec species, omnibusque partibus, vt dixi, minor est Erinaceo vulgari. *Rostrum* paulo productius et argutius, quam in illo, supra conuexum, subtus bicanaliculatum apice nudum. *Nasus* apice profunde didymus, niger; nares lunulatae, longitudinales, margine exteriore reflexo prominulo, crenulato.

Maxilla inferior multo breuior, triangularis. *Labia* nudiuscula, carneola; rictus ad oculos vsque resciſſus. *Dentes* primores maiores vtrinque duo, distantes, superiores quidem magis, inferiores tamen non adeo vicini vt in Erinaceo vulgari. *Canini* infra continui vtrinque tres, medio maiore. *Supra* maior cum minuto vtrinque, et remoti ab incisoribus et molaribus. *Molares* inferne vtrinque 4, quorum primus et postremus *bifidi*, reliqui *multicuspides*; *supra* tres maiores, et seriem vtrinque claudentes minores duo, praeter accessorium anterius conicum, caninis maiorem et similem.

Mystaces quatuor ordinum longitudinalium fusci pili inferiorum ordinum postici vltra aures producti.

ducti. In labio inferiore vtrinque pili tres, longiores, albidi, ferie difpofiti. *Verruca* gulae bipilis, fupraciliaris bipilis, et pone oris angulos vnifeta.

Oculi paulo maiores, quam Erinacei vulgaris. *Palpebrarum* ambitus, nudiufculus, fufcus; margines extus nigri. Irides fufco lutefcentes. *Periophtalmium* ad medias fere corneas extenfile.

Auriculae maximae, patentiffimae, ouales, flaccidae nudiufculae, ambitu fufcae, interius pilis albidis teneris pubefcentes. Margo auricularum interior fubreflexus; *Atrium* auditorium extus pilis obuallatum, fuperius terminatum *lamella* auriculae interius transuerfa, medio productiore rotundata.

Artus paulo longiores et graciliores, quam in Erinaceo vulgari, extremo nudiufculi, fubsquamati atque fufci. *Pedes* omnes pentadactyli; volae pulpofae ad digitos, ipfisque digitis tumidulae.

Cauda breuior, quam Erinacei vulgaris, fufca nudiufcula murinae inftar fubannulata, bafi craffiufcula, apicem in acutum adtenuata.

Teftudo fpinifera conuexa, ouata, in verticem vsque productae *fpinae* teretes, bafi tenui recuruatae ceteroquin rectae, fufcae annulo ad apicem et verfus bafin albicante; vnde color fere qualis in Erinaceo vulgari. *Caput* pilis rigidioribus, gryfeo-fordidis, in roftro et circa oculos fubfufcis. Subtus vero

corpus

corpus totum cum artubus, et aliquousque *supra* caudam, *vellere* albo, molli vestitum.

Longitudine animal totum aequat 6. poll. et fere 9 vncias mensurae parisinae; caput cum rostro 1″. 11½‴. aequat, auriculae longitudine 1″. 4‴. latitudine 1″. 1‴. cauda non plus, quam 7‴.

Zootomica. *Omentum* ad hypogastrium descendit; *lobulus* pinguedinosus cardiacus distinctus, didymus, epigastrium obtegit. *Ventriculus* fere globosus, supra bicornis oesophago in medium inserto, et duodeno dexteriore. *Intestinum* a pyloro ad anum sub aequabile, laxum, longitudine 2. ped. 10. pollicum. *Hepar* mediocre, tripartito - subseptem - lobatum *Cystis* insignis, ouata in sinu loborum semirecondita. *Renes* situ suboppositi, dexter tamen paulo altior ad spinam. *Clitoris* feminae fungiformis intra aperturam vaginae prominula, plicaque *lunata cucullata* *Pulmones* magusculi secundum amplitudinem insignem thoracis; sinister indiuisus, dexter maior trilobus. *Costae* in sceleto 14. caudae articuli circiter 12.

Corpus pinguissimum. Totius animalculi dorsalis pinguedo quintam partem totius ponderis exaequabat. (Vnc. 1. drachm. 6.). Praeterea notabilis est, in nostro pariter et vulgari Erinaceo, apparatus singularis *glandularum*, quas *nutritorias* forsan appellare possis. Omnia scilicet animalia, quae hyeme torpent, vti Marmotae, Citillus, vespertiliones,

tiliones, Glis, Erinacei; ſub armis et ad collum latiſſima habent glanduloſa corpora, acinoſa, facie et ſubſtantia Thymo eorundem animalium ſimillima et a pinguedine diſtinctiſſima. Solent duo ſub gula, duo alia paulo inferius ad collum, prope ſternum duae item pectoralibus muſculis vtrinque ſubſtratae, et ad axillas dorſumque extenſae, imo ſaepe adhuc aliae vtrinque inter ſcapulam et ceruicem adeſſe. Cum aliis animalibns, hyeme pariter atque aeſtate vigentibus et cibum capientibus hae glandulae deſint, vero ſimillimum eſt, illas ad nutriendum, et ſuſtinendum, durante ſopore hyberno, corpus et ſubigendos forte ſuccos deſtinatas eſſe. Imo forte vſus Thymi in foetubus inde facilius explicabitur. Aderant in noſtro Erinaceo omnes iſtae glandulae et ſimul ſumtae pondus circiter 89 granorum explebant. Hyeme ergo *Erinaceus. Auritus* pariter ac *vulgaris* ſopitur, admiranda naturae lege; quam aeſtate quoque in minoribus animalibus, Citillo, Glire, Erinaceo, Veſpertilionibus, artificiali frigore in cellis glacialibus, imitari didici. Animalcula enim iſta viuidiſſima, ſi per noctem in eiusmodi cellam incluſa reliqueris, ſequente die iam torpent, et luce tertia plane ſtupent, ita vt ſenſu, etiam ad vulnera, fere careant. Obſeruaui tunc calorem ſanguinis in Erinaceis praeſertim vsque ad 145°. ſcalae *De l'Islianae* deſcendiſſe, dum aëris externi temperies erat ad minimum 125°. Imo aeſtate etiam naturali in ſtatu vix 28 gradibus atmoſphaera calidiores esse solent Glis et Erinaceus, omnesque illius mutationes calore suo sequuntur. Fateri tamen debeo, in marmotis cicuratis praedictum experimentum inutiliter me tentasse. Imo praeterita hyeme (1768.) rigidissimo gelu exposita marmota, per duos et quod excurrit menses, neque cibo abstinuit, neque torpida est facta, et calorem sanguinis seruavit paulo supra 93°. sed ferae marmotae, quas captas habui; ad leuissimum frigus torpidulae et somnolentae fieri solent; et *Citillus*, marmotis maxime consanguineus, qui aestate supra 92°. calere solet, si tantum aqua frigida perfundatur, fit stupidissimus, et vsque ad 115°. vel 110°. frigescit inque glaciali cella depositus certissime obdormescit.

Praeterea hoc in Erinaceo nostro, *aeque* ac in vulgari, obseruabile est, quod *cum* praecipuus eorum, praeter cadauera *victus* consistat in insectis e Gryllorum et Coleopterorum genere, a natura, cautum sit, vt ea quoque insecta, quae sale acerrimo, vesicatorio et paene caustico scateant, ab his animalculis, sine noxa, copiose ingurgitari possint, imo gratissimam ipsis escam praebeant. Vidi enim (et quilibet experiri potest in specie vulgari) cantharides, quibus medici vtuntur (*Meloidesue sicatorias*) vltra centum imo pastu ingerentes nec quidpiam inde mali passos Erinaceos, quum tamen canes et feles horrendis tormentis afficere, imo interfiterficere multo minori numero haec insecta soleant. Vnde nouum elucescit Naturae omnia prospicientis et ad fines instruentis mirifice varios argumentum.

IV. *ANAS RVTILA.*

Pulchritudine coloris et elegantia formae in suo genere illustrissima auis, quam *Anatem rutilam* dixi, apud auctores non occurrit (*), in australioribus tamen vniuersae Russiae atque Sibiriae copiosa est. Dicitur ad Tanaim occurrere et peculiari nomine illic appellari; Volgam inferiorem copiose inhabitat, ibique, vt et ad Iaikum Russicis nominibus *Krasnaia Vtka* (Anas rubra) et *Karagatka* omnibus nota est. In Sibiria vero *Turpan* vel *Nörowoi Gus* et Tataris quibusdam *Aath* vocitatur, finitimasque austro regiones ibi quoque seruat, vix vnquam in latitudine borealiori quam 55 graduum obseruata et quo propius austro descendas, eo copiosior. Est enim earum e numero auium, quae hyemem in calidis Persiae et Indiae regionibus transigunt, et vere ad nos commigrant prolis sub temperatiore coelo generandae causa. Pro nido tunc quaerit vel praeruptarum rupium Volgensem passim ripam exasperantium cauernas et fissuras, vel antra, in colliculosis desertis a marmotis olim effosa, imo ipsa Tab. XXII. Fig. 1.

(*) Posset confundi cum ansere aegyptiaca *Brissonii*, quem adeo citare volui, *Ornithol. Edit. Belg. Vol. II. pag.* 87. 9.

quoque more *Tadornae* ſubinde cuniculum ſibi fodere dicitur. Viſa etiam eſt in cauo arboris trunco nidum propriis plumis ſtrauiſſe. Monogama, vt congeneres omnes, viuit et aquas propter victum alternatim frequentant mas et femina. Oua ponit nouena circiter, alba, anatinis maiora, polita; Pulloſque excluſos roſtro ex ala ſublatos ad aquas rapere fertur. Ad Volgam a curioſis conquiri ſolent oua, et domeſticae anati excludenda ſubponi vnde domeſtica facta proles in vrbibus paſſim occurrit, nunquam tamen mole et pulchritudine ſpontaneae par, nunquam feritatem deponens, et plerumque quando adulta eſt, niſi diligenter alas reſeces, libertati ſeſe reddens. Neque ſi captim retineatur ſpeciem multiplcat, ſed oua in abditiſſimos quosuis angulos abiicit et ſpargit.

Volatus propter alarum magnitudinem leuis et ſine ſtrepitu. Inceſſus elegans et expeditus. Maxime ſingularis autem eſt vox huius auis, quem excitata inter volandum continuo iterat, cornuum muſicorum (*Clarinettes*), fere aemulum. Alia vox in cicuratis maſculis veſperi et mane exaudiri ſolet, pauoninae ſubſimilis. Alio tempore rariorem edunt, quaſi galli breuiter cucurientis ſonum. In genere minus timida eſt auis, neque hominem conſpectum ſtatim reformidat. Occiſo mare, vidi feminam diu circa venatorem, continuo clamore obvolitantem, nec niſi tertia ſclopi exploſione regione in ſn qua nidus erat, plane depulſam. Inter ſapidiſſimas ceteroquin ex anatino genere menſarum delicias laudanda eſt, nec minimum piſculenta, quamvis piſciculis ſaepius paſcatur.

Magnitudo ſpontaneae auis ſupra domeſticam anatem, et moſchatae fere par; maior autem videtur ob proceritatem pedum et alarum magnitudinem. *Roſtrum* anguſtius, ſemicylindricum nigrum, maxillis laxe coeuntibus. *Irides* oculorum e fuſco vix luteſcentes. *Periophtalmii* et palpebrarum margines nigricantes. *Deſcriptio.* Tab. XXII. Fig. 1.

Caput cum initio ceruicis albet, fronte et genis gulaque vix luteſcentibus. Collum inferius ferrugineſcit et in *maribus torque* cingitur inſigni atra, ad ceruicem paululum deſcendente, interdum ſubreticulata, quae deeſt feminis. Iugulum et criſſum intenſiſſime rufa, venter obſcurus, pectus atque latera dilutius rutila; dorſum inter ſcapulas et alae ſpuriae adhuc dilutiora. Poſtica dorſi cano fuſcoque obſoletiſſime vndulata; vropygium vero atrum et cum cauda leuiter rotundata, quatuordecim rectricibus compoſita, ſplendore virideſcente nitidum.

Alarum remiges primariae atrae, ſecundariae (11. 22.) exterius viridi ſericeae, violaceo variantes, interius extremitate nigrae; verſus baſin aliquae albae, ſubpulueratae. *Intimae* (23-27.) extus

 ferru-

ferrugineae, sensim dilutiores, interius canae; sed 23 fusca. Tectrices secundariae, cum tota basi alarum albae; solae incumbentes apice lutescunt. *Subtus* tectrices primariae, albae, apice nigro, secundariae albae; sed aliquot intimae, elongatae fuscae. *Pedes* longiusculi nigri.

Longitudo extensae auis a rostro ad vropygium est vnius pedis, quinque pollicum cum dimidio; caudae 4″. 9‴. Expansae alae tres cum dimidio pedes excedunt, et compositarum, caudam exaequantium, vlna 1′. 1″. 4‴. explet.

Labyrinthus tracheae in masculo vix piso maior. *Intestinum* deceme dale, *coecis* instructum semipedalibus; reliqua haud insolita.

V. STERNA CASPIA.

Tab. XXII. Fig. 2. Iure Caspiam Sternam appellari puto, quam nullibi praeterquam versus ipsum mare caspium et circa ostium Iaici obseruaui, vbi apud Russos incolas nomen *Tschagraua*, (чаграва) obtinuit. Piscatur et in mari et in fluuio, lari atricillae fere more, in aëre suspensa et teli instar subinde deuolans, vel et hirundineo volatu vndas stringens. Laris immixta, ripis et insulis copiose insidet, et inter alias aquatiles aues in nudo desertarum insularum solo *oua* ponit maiuscula, fusco maculata. Ceterum *moribus*, stoliditate, facie et colorum compositio-positione cum plerisque sternis nostratibus conuenit, sed magnitudo ea est, vt etiam neglectis reliquis characteribus ad distinguendam speciem sufficiat.

Mole larum atricillam excedit; pedibus fere, vt ille, procerioribus ingreditur. *Rostri* forma sternas exprimit, sed magnitudine vincit; compressum illud est, conuexum, carina tamen subangulatum, integerrimum et saturate rubrum *Nares* a basi rostri remotae, oblongae, totae peruiae et nudae, quamuis a fronte plumae rostri basin aliquousque obuestiant. *Oculorum* irides obscurae. *Descriptio. Tab.XXII. Fig. 2.*

Caput supra totum vltra lora et oculos et vsque in ceruicem nigrum, attamen plumarum apicibus albicantibus, maxime in iuniori aue adspersum; in biennibus magis nigret vertex et apicibus rarioribus canescentibus spargitur. Tempora pone oculos in omnibus late nigra immaculata.

Auis *subtus* tota niuea est. *Dorsum* vero leucophaeum, colore magis exsoleto, quam in sterna hirundine et laro atricilla, et in adultis quidem immaculatum. *Anniculis* vero, qualem *icon* nostra exhibet, contermina ceruicis pars, liturio fuscis adspersa, alae spuriae vero *notis* sagittatis, nigricantibus distinguuntur.

Alae longissimae angustae, caudam longe excedunt. Remex prima, minutissima, fusca, apice alba.

alba. Reliquae primariae 9 cum tectricibus fuſcae et niueo quaſi rore candicantes, a longiſſima ſecunda cito decreſcentes. Secundariae 15 breues, adhuc magis caneſcentes, et albo terminatae.

Cauda breuiuſcula, profunde forcipata; *rectrices* fuſceſcenti canae, interiore latere albae; mediae latiuſculae, extimae elongatae, anguſtae.

Pedes longiuſculi, ſubrubicundi, fuſci. Digitus interior breuior, breuiſſimus poſticus, vngues nigri. Longitudo auis a ſummo roſtro ad vropygium tredecim pollices, roſtrum ad angulos oris vsque tres fere pollices, cauda extimis pennis quinque circiter pollices, ſed alarum vlna quatuordecim, et quod excedit pollices aequare ſolet.

VI. MOTACILLA LEVCOMELA.

Tab.XXII. Fig. 3. *Motacillam leucomelam* montoſi praeruptique tractus propriam ſibi vindicant, qui Volgae inferioris dextram ripam maxime conſtituunt. Copioſam ſatis praeterito vere obſeruaui in rupeſtribus inter Samaram et Syſranum vrbes, neque poſtea vſpiam viſa fuit. Elegantiſſima auicula mas eſt, et feminae ita diſſimilis, vt niſi e cauda haec vix dignoſceretur. Circa ripas verſari et vermiculas legere ſolet; ad pagos etiam accedit, truncis arborum et ſaxis paſſim inſidens et hirundineo ferme garritu cantillans. Vti pleraeque motacillae, hominem proxime

xime admittit, et minime timida est, sed excitata semel inquietior vagatur, considensque alas crebro, et subinde caudam motitat. Inter volandum vero pipitus idem; qui ab hirundine exauditur. *Nidulatur*, praesertim in rupium praeruptarum cauernis, rimisque, et inter confragosa saxa, rubetrae ad instar; verum circa pagos quoque imo ecclesiarum sub tecto nidum instruxisse obseruata est.

Magnitudine conuenit cum motacilla flaua. *Rostrum* nigrum, basi latiusculum, apice vtrinque subemarginatum. *Faux* lutescens. *Vibrissae* sinus oris bisetae. *Nares* denudatae, ouali oblongae, patulae, exiguo lumine peruiae. *Lingua* membranacea, fusca angusta, extremitate lineari bifida. *Palpebrae* nigrae. *Periophtalmium* albescens. *Irides* obscurae. *Descriptio.* Tab. XXII. Fig. 3.

Vertex albidus, plumarum extremis plus minus fuliginoso inquinatis; ceruix candidior. Reliquum caput et collum subtus vltra medium aterrima, in genis tamen et gula limbis plumarum albicantibus. *Subtus* a iugulo auicula tota, itemque postica dorsi, candore intemerato niuent. Inter alas dorsum et bases alarum atra, plumarum limbis grysco-albicantibus.

Remiges 19. tectricesque, fusco-nigricantes, exteriore margine obsoletae, interiore versus basin albi-

albicante. Subtus brachia alba, antiço margine fusco-subsquamata.

Cauda longiuscula, aequalis; rectrices duae mediae fusco-nigricantes, tecta *basi* albae, laterales omnes niueae, extremo abrupto atrae, et nigredine exterius altius adscendente, praesertim in extima.

Pedes longiusculi, tibiae tantum *inferius* aliquot loricis annulatae, caeterum laeues, vt in motacillis esse solent. Auricula in longitudinem a summo rostro ad vropygium mensurata 5 poll. et 10 linearum deprehensa est. Cauda 2''. 4'''. Expansae alae 9''. 11'''. Alarum compositarum vlna dimidiam caudam vix aequans 3''. 5'''. *Pondus* auiculae, plusquam semunciale esse solet.

Femina colore diuersissima est a mare. Supra nempe tota fusca, seu fusco-cinerea, capite et ceruice paulo dilutioribus; subtus cinerascens, iugulo colloque ex gryseo cinereis. Ductus supraocularis a rostro albicans. Cauda sola vt in masculis. *Anatome* nihil notatu digni habet: contenta ventriculi Coleoptera varia minuta et maiorum fragmenta esse solent.

VII.

VII. LOXIA ERYTHRINA.

In siluis et arbustis densissimis habitat loxiae species, quam ego primum ad Volgam, MESSERSCHMIDIVS olim in Sibiria circa Tomum fluuium passim obseruauit, et sub *Passeris Erythraei* nomine in *Ornithologico* manuscripto recensuit. Ad Volgam et Samaram vulgatissima est, et sub nomine Passeris rubri (*Krasnoi Verobei*) vel lenticulariae (*Tschetschewiza*) notissima. Mas incondito et breui carmine cantillat, et stultitia compar est Emperizis. Femina pulcritudinis masculae expers nidum inter arborum ramos foenilem struit. Hyeme cum Emberizis niualibus circumuolare visa est haec auis; verum rarior tunc occurrit. In genere autem seminibus plantarum pascitur, vti Fringillae. Tab. XXIII Fig. 1.

Magnitudo Chloridis, sed caput minus grande. *Rostrum* fusco-corneolum, trochiforme-conoideum, breue, crassum, maxilla superiore subarcuata, inferiore ventricosa. *Nares* depressae basilares; setulis nigris, basi gryseis, a fronte procumbentibus tectae. Pili aliquot teneri supra oris angulos. *Descriptio.* Tab. XXIII Fig. 1.

Maribus lora gryseo-cinerascunt, sed *caput* reliquum, cum *collo* et *iugulo*, extremis plumarum detectis intensissime cinnabarinis, tota rubent; basis autem plumarum in capite fusca, in collo subtus albida. *Ceruix* et *dorsum* cinerea, rubore obsoletio-

 re

re obducta, vestitrices alarum cum tectricibus remigibusque secundariis fuscae, margine exteriore ex albido rubescente seu carneo. *Remiges* 18 primariae cum tectricibus fuscae, margine lutescentes. *Vropygium* intensius cinnabarinum. *Tegetes* caudae cinereae, extremitate russulae. *Subtus* auis alba, pectus et latera leui rubore perfusa. *Cauda* subforcipata, rectricibus subacutis fuscis, rhachi et *margine* lutescentibus. *Pedes* corneo-fuscidi.

Femina supra tota cinereo flauescit, vertice subliturato vropygio et pennarum alae marginibus flauescentibus; latera capitis albidiora. *Gula* alba; per collum liturae exiguae sparsae obsolete fuscae, versus iugulum euanidae. *Rectrices* obsoletius fuscae, margine gryseae. Solo rostro et habitu corporis ad marem referenda, colore maxime dissimilis.

Pondus auis vix drachmas quinque excedere solet. *Longitudo* a rostro ad vropygium aequat 3 poll. 9 lin. Cauda 1″. 2‴. Alae expansae 8″. 9‴. Vlnae alarum 2″. 11‴. In femina alae paulo maiores esse solent.

VIII. PARVS CYANVS.

Tab. XXIII Fig. 2. Praeter Paros Europaeos notos omnes, qui per Russiae atque Sibiriae syluas etiam septentrionales

les (*) abundant, elegantissima inde a Volgensibus regionibus datur auicula, cuius patria, qua latissime ad orientem patet Sibiria extenditur, vbi ab accuratissimo quondam MESSERSCHMIDIO passim obseruata, et pro *Paro caeruleo* (quem forte non viderat, quia rarior reliquis omnibus in hisce terris apparet), descripta fuit. Non solum tamen a *Paro caeruleo* vulgari toto coelo differt, sed et pro noua et incognita inter Zoologos specie habenda est; licet verosimile videatur eandem esse, cuius *Aldrouandus* sub nomine *Pari indici* breuiter mentionem fecit, et de qua dubitat *Raius* annon ex icone sola apud *Aldrovandum* nata (†) fuerit. Etiam in *Fauna* LINNAEI *Succica* prostat quidem icon, quae *Parum Cyanum* apprime refert; adeo tamen imperfecta et incerta mentio huius auiculae ibidem facta est, vt inde pro confirmata et agnita specie nemo adsumere illam velit, et ipse quoque *Illustris* LINNAEVS non adsumserit. Potuit nostra tamen e boreali Asia in Sueciam vsque transuolasse, et forsitan in Americam borealem vsque reperietur, quemadmodum *Emberiza niualis*, *Loxia enucleator*, *Picus tridactylus*,

 et

(*) Solis scilicet exceptis, *Paro Pendulino* et *Biarmico*, qui tantum in australibus Iaici et Volgae, inter riparum saliceta et arundines versantur.

(†) *Rai. syn. av. p. 74. n. 7.*

et *viridis minor* (*), *Tetrao Lagopus* atque *Bonasia*, aliaeque terrestres aues vniuerso orbi arctico communes sunt.

Plumae in toto corpore Pari cyani laxae, mollissimae et texturae rarae, prout in coruo glandario atque mimo obseruantur. Sedens auicula saepe tota, praeter caudem quasi glomus horrentium plumarum esse videtur, praesertim cum dormitat, capite sub alis condito. Semper etiam plumas molliter tumefacit et capitis plumas subinde arrigit in formam cristae, minus tamen insigniter, quam Parus coeruleus solet.

Descriptio. Tab. XXIII Fig. 2. *Pondere* et magnitudine eundem parum coeruleum superat paulo; plerumque drachmis tribus ponderosior. *Rostrum* breuius et crassius quam in Paris omnibus etiam paro caudato, cui tamen crassum prae ceteris rostellum. Accedit forma rostri ad tanagras fere, quamuis non granivora auicula. *Lingua* cartilaginea, plana, extrorsum vix angustata, biloba, lobo singulo 3 vel 5 setis ciliato. Caput circa *basin rostri* plumosissimum, fere vt in strygibus; quod cum paro caudato commune noster habet. *Oculi* e fusco-obscuri.

Vertex

(*) *Brisson. ornithol. ed. citat. Vol. II. p. 46. n. 4.* Picus viridis Noruegicus, distinctissima certe species et nomine *Pici Septentrionalis* insignienda.

Vertex e canefcente niueus et ceruix alba; *lora*, angufta, nigra, vltra oculos continuata in taeniolam coeruleo nigricantem; vtrinque defcendentem vfque ad *fafciam* ceruicis latam, tranfuerfam nigro-coeruleam quae in medio non, vti paro caeruleo, verfus nucham angulo adfcendit, fed ibi anguftior eft, neque ad gulam coit.

Dorfum pallide coerulefcens, non virefcens vti paro caeruleo; vropygium e cano albidum. Auicula *fubtus* tota niue candidior, neque in toto corpore flauedinis veftigium vllum. In fterno *macula* fufco nigricans, longitudinalis.

Tectrices caudae obfcurius coeruleae, apice albae. *Cauda* longiufcula, minus tamen quam in paro caudato, et rotundata. *Rectrices* mediae nigro coeruleae apice exterius albae, vt tandem extimae vix bafi interius nigrefcant..

Alae elegantiffimae. Humeri e fufco cyanei. *Tectrices* et alula nigricant, extus cyaneo perfufa, extremitate alba. *Remiges* 18. primariae fufcae, interiore margine albae, extus cyaneo perfufae, fed verfus extremitatem candidae, externae fenfim vlterius. *Secundariae* apice albae.

Pedes

Pedes e nigro coerulefcunt obfoletius; genua cinero annulato. *Longitudo* auiculae, ab apice roftri ad vropygium, folet effe 2″. 4‴. *Corpus* deplumatum vix, extremum pollicem aequat, minime pingue. *Cyftis* in hepate non confpicua; *Coeca* nulla. Inueni in ventriculo et inteftinis plurimorum *vermiculos* minutos, integerrimos qui intra auiculam vixiffe videbantur. *Pediculo* praeterea infeftatur minutiffimo, vix arenulae magnitudine, quem tamen rigidiffimo frigore in *mortua* quoque auicula vixiffe vidi.

NOVAE INSECTORVM SPECIES.

Auctore

E. LAXMANN.

Insecta Russica, Academici Illustr. illa sunt, quae in actis nostris adhuc intacta inuenimus. Rerum naturalium scrutatores exteri, qui egregiis laboribus nostrorum physicorum multum debent, nihil tam auide desiderant quam etiam aliquid de Insectis nostrarum regionum legere. Ita hac de re Illustr. a *Linne* in litteris ad me datis: "Insecta ex omnibus fere orbis terrarum partibus accepi et nuperrime etiam magnam collectionem illorum quae Caput bonae spei alit, de Russicis autem et Sibiricis Insectis Entomologis nihil constat. Maximopere vellam vt nonnulla eorum mitteres!" Vt itaque desiderio magni Viri aliorumque de Zoologia bene meritorum aliquo modo satisfacerem, Insecta haec Russica rariora cum naturae curiosis communicare volui. Primum illorum esto:

SCARABAEVS *bimaculatus* scutellatus, muticus, nitidus, elytris rubris, maculis duabus nigris. T. XXIV. Fig. 1.

Habitat in Russia australi.

Longitudo 4. Latit. fere 2. lin. Lond.

E grege illorum est, quibus in fimo et cloacis apta domicilia parauit natura.

Deſcriptio. Facies ſcarabaei fimetarii ſed fere duplo maior. Caput nigrum, ſcutellatum, ſubrotundum, glaberrimum. Antennae et palpi rufi. Thorax niger nitidus, marginatus, lateribus cinnabarinis. Elytra cinnabarina glaberrima; macula magna nigra, rotunda, verſus apicem. Abdomen medio nigrum; latera vero et pedes brunnea.

T. XXIV. Fig. 2. 2. LVCANVS *apterus* ater, thorace ſcutellato elytris connatis, gibbis, antennis clauatis, claua ſolidiuſcula.

Habitat in Ruſſiae auſtralis apricis ſub terra.

Longitudo maris pollicaris, latit. lin. 5. foemina paulo minor.

Deſcriptio. Animalculum hoc ſingulare, medium inter Scarabaeos et Lucanos genus *conſtituens*, ad hos, ob maxillas furcatas, dentatas, magnas maris, tuli. Caput antice trilobum. Oculi in lobis lateralibus parui. Labium apice medii lobi profunde emarginatum maxillaeforme. Maxillae e ſinubus loborum lunatae, dentatae, denticulis cum ipſo apice vndecim, in mare furcatae, furca e medio inferioris lateris incurua, glaberrima, maxilla duplo longiore. In foemina maxillae tantum dentatae. Antennae clauatae, articulis nouem, primo longiſſimo duabus ſpinis terminato, intermediis ſeptem ouatis, aequalibus, extremo, qui clauam conſtituit, craſſiſſimo, truncato, ſolido, vngulam equi-

nam

nam referente. Palpi ſex, quorum par exterius tribus, et medium duobus articulis, interius autem vno tantum articulo, cuius interius latus ſpinis armatum validis. Thorax laeuis, lateribus marginatis punctisque minutis vt ſcutellum excauatis. Elytra connata gibba. Pedum femora glabra, tibiae ſpinoſae, plantae duobus vnguibus terminatae.

3. ATTELABVS *dauricus*, vertice, elytris medioque abdominis atrocoeruleis; thorace, pedibus lateribusque abdominis luteis.

Habitat in Sibiria transbaicalenſi. Ad ſelengam in Vlmo pumila legi. T. XXIV. Fig. 3.

Longitudo 3. Latit. $1\frac{1}{2}$ lin.

Deſcriptio. Facies Attelabi coryli. Caput ſupra nigrum, infra luteum. Os et palpi lutei. Antennae brunneae, clauatae. Thorax luteus. Scutellum et elytra atrocoerulea, nitida punctis minutiſſimis excauata. Abdomen medio atrocoeruleum lateribus luteis. Pedes lutei.

4. ATTELABVS *ircutenſis* totus atrocoeruleus villoſus, elytris faſciis duabus coccineis. Fig. 4.

Habitat ad Baicalem in Polygono Flor. Sib. Tom. 3. pag. 56. Tab. X.

Long. $3\frac{1}{2}$ Latit. 1 lin.

Deſcriptio. Facies Attelabi apiarii ſed paulo minor. Totus atrocoeruleus, hirſutie veſtitus.

Antennae clauatae vt in congeneribus. Elytra fasciis duabus, in medio et versus apicem, coccineis. Pedes ob hirsutiem grisei.

T. XXIV. Fig. 5. 5. CERAMBYX *equestris* thorace spinoso ater apterus, elytris connatis, margine, cruce in sutura dorsali et duabus lineis ad basin longitudinalibus, albis.

Habitat in apricis Russiae *australis.*

Longitudo fere pollicaris, latit. fere 4 lin.

Descriptio Antennae mediocres, crassae, fuscae. Corpus quasi holosericum atrum. Thorax spinosus, marginibus vbi cum capite et trunco nectitur albicantibus. Elytra connata, abdomine paulo breuiora, cruce in sutura dorsali, margine et lineis duabus ad basin longitudinalibus punctatis, albis. *Alae* nullae. Pedes validi, brunnei.

T. XXIV. Fig. 6. 6. LEPTVRA *vtranica* nigra, antennis pedibusque rufis, thorace fascia et duabus maculis, elytris tribus et totidem fasciis flauis.

Habitat in Russiae australis vmbellatis.

Longitudo 7. latit. 2 lin.

Descriptio. Caput vbi cum thorace nectitur fascia flaua, quae vsque ad ateriorem angulum oculorum extenditur. Frons siue regio inter antennas et labium flaua. Antennae rufae, corpore paulo breuio-

breuiores. Thorax subrotundus, fascia flaua versus caput et maculis duabus oblongis transuersaliter sitis versus elytra. Scutellum flauum. Elytra punctis ad basin duobus oblongis vnoque communi versus medium, tribus fasciis curuatis transuersalibus et lineis dubus ad angulum exteriorem baseos longitudinalibus flauis. Pedes rufi exceptis quatuor femoribus anterioribus nigris.

7. LEPTVRA *altajensis* atra, elytris coccineis medio atris. T. XXIV. Fig. 7.

Habitat in vmbrosis ad radices alpium altajensium in vmbellatis.

Longitudo 6. latit. 2 lin.

Descriptio. Tota atra holoserica. Antennae longitudine corporis. Thorax subrotundus. Elytra coccinea macula maxima in medio atra, ad apicem rotundata, lata.

8. GRYLLVS *dauricus* apterus, testaceus nigro luridoque nebulosus, thorace scutellato, scuto quadrato, rugoso, antice bituberculato postice spinis dentato; abdomine lineis quinque albicantibus, longitudinalibus obsoletis.

Habitat in campis apricis glareosis Sibiriae transbaicalensis.

Longitudo cum ense 2½ poll. latit. 6 lin.

Descriptio. Corpus testaceum nigro luridoque nebulosum. Antennae setaceae longitudine fere corporis. Thorax sutellatus, scutum planum, rugosum, fouea transuersali in duas partes diuisum, quarum anterior singulo latere tuberculo spinoso terminatur; posterior pars quadrata, rugosa, medio excauata, lineis lateralibus eleuatis instar duarum carinarum tuberculis spinosis; angulis vero vti et antico et postico latere rotundatis. *Alae* nullae. Abdomen lineis quinque longitudinalibus obsoletis. Femina cauda ensifera. Quoad pedes cum Gryllo pupo aethiopico conuenit. Mordacissimus in propriam speciem saeuit.

NB. Gryllus noster *dauricus* Chinensibus esculentus et in deliciis est. Russis autem transbaicalensibus abominabilis; morbo enim in *Russia noto* Wolosetz (волосецъ) infici credunt, si contigerit edere aut bibere e vase, in quod haec bestiola casu cecidit.

Tab. XXV. Fig. 8. 9. GRYLLVS *Sibiricus* locusta thorace subcarinato, antennis clauatis, tibiis anticis ouato-clauatis crassis.

Habitat Barnauliae in campis passim, Ircutiae autem et in Sibiria transbaicalensi copiosissime.

Longitudo 8. s. 9. latit. $1\frac{1}{2}$ lin.

Descriptio. Corpus griseum nigro nebulosum. Antennae thorace duplo longiores, clauatae, griseae

ſeae articulis quatuordecim, claua nigra ouata articulis quinque. Thorax viridiuſculus ſtria longitudinali eleuata recta carinam conſtituente et duabus lateralibus obliquis, arcubus carinae approximatis. Alae ſuperiores griſeae nigro nebuloſae, inferiores plicatae hyalinae. Pedes griſeae, tribus vnguibus, medio craſſiori obtuſiuſculo; tibiae anticae clauatae craſſae, femora poſtica ſupra griſea nigro maculata ſubtus flaua.

NB. Illuſtr. a *Linne* huius mentionem fecit ſyſt. nat. ed. XII^{ma} Tom. I. pag. 701. n. 51.

10. MYRMELEON. *Kolywanenſe* antennis clauatis longitudine corporis; oculis oblongis, magnis, linea obliqua, piloſiſſima, in duas partes aequales diuiſis; thorace nigro, punctis et lineolis plurimis flauis; alis flauo, nigro et hyalino variis. Tab. XXV. Fig. 9.

Habitat in Alpibus Maloi Altai, Sinie Sopka et ad argentifodinam Tſchagirenſem rarius, victitans muſcis et culicibus.

Longitudo pollicaris et minor, latit. 1½ lin.

Deſcriptio. Caput piloſiſſimum, pilis in oculis et in fronte ſiue interſtitio oculorum nigris, in flauo autem, occipite et tractu inter os et oculos, albis. Oculi magni hemiſphaerici, in quatuor partes lineis eleuatis, piloſiſſimis diuiſi; *ſuperior* pars nigra, nitida, lunulata; *media*, ſeu ipſe oculus compoſitus, oblonga, rectangularis, linea obliqua, eleuata

eleuata pilosissima, cuius arcus thoracem versus, in duas partes aequales diuisa; *inferior* pars flaua, nitida, lunulata. Antennae nigrae clauatae longitudine corporis. Stemmata nulla. Os maxillosum. Thorax niger, pilosus, punctis et lineolis plurimis flauis. Alae quatuor coloratae, reticulatae, inflexae, abdomine longiores; *superiores* ad basin nigrae, a basi ad medium flauae, a medio ad apicem hyalinae, reticulatae, duabus maculis nigricantibus magnis; *inferiores* a basi ad medium nigrae, medio fascia latissima, et in nigro apice macula magna orbiculata, ocellum referente, flaua. Pedes breuiusculi, femora a basi vsque ad medium nigra, a medio ad apicem flaua; tibiae flauae; tarsi, qui duobus vnguibus validissimis terminantur, nigri. Abdomen atrum simplex.

Tab. XXV. Fig. 10. 11. ICHNEVMON *Gigas* antennis rufis, scutello flauo, corpore rufo brunneo et flauo vario, alis fuscis.

Habitat Barnauliae et Kolywani in siluis rarius.

Maximus in suo genere: longitudo corporis cum aculeo $4\frac{1}{2}$ poll. corporis $1\frac{1}{2}$ poll. aculei 3 poll. antennarum 8 lin. latitudo thoracis $1\frac{1}{2}$ lin.

Descriptio. Caput flauum, oculis, stemmatibus, interstitio oculorum et maxillis nigris. Antennae rufae, corpore paulo breuiores. Thorax rufus,

fus, antice, ad latera et radices alarum flauus, qui color a rufo interiacentibus lineolis fuscis discernitur. Scutellum flauum, linea longitudinali nigricante. Alae subfuscae longitudine antennarum. Abdomen subpetiolatum segmentis septem rufis; *primo* ad basin tenuissimo versus apicem dilatato fascia flaua in apice; *secundo* macula magna flaua, lateribus fuscis, quae in medio macula triloba rufa picta est; *tertio*, *quarto*, *quinto* et *sexto* aequalibus, reliquis maioribus, maculis duabus, ocellatis, ouatis, flauis, nigredine instar iridis, cinctis; *vltima* rufo et fusco vario. Aculeus penultimo segmento affixus, longissimus, niger, vagina fusca. Pedes flauescentes.

12. CONOPS *petiolata*, antennis clauatis nigris, claua rubra, capite flauo; abdomine petiolato. Illustr. a *Linne* syst. nat. ed. XII. Tom. I. pag. 1005. n. 9. Tab. XXV. Fig. 12.

Habitat Barnauliae post solstitium aestiuum in floribus, rarius.

Longitudo 4. latit. 1 lin.

Descriptio. Antennae basi geniculatae. Rostrum nigrum. Thorax niger, macula in angulis anticis tuberculata albo rufescente. Abdomen apice rotundatum nigricans marginibus segmentorum albicantibus, primo segmento tenuissimo, longissimo versus apicem dilatato, fascia in medio flauescente. Alae fuscae, margine tenuiore apiceque hyalino pedes rufescentes. Halterum clauae flauae.

NB. Varietas maculis thoracis tuberculatis quas oculos primo intuitu putares, nigris.

13. ARANEA *ſingorienſis* teſtacea nigro nebuloſa, piloſa, abdomine faſciis quatuor trauſuerſalibus albidis, geniculis et apicibus oſſium ſubtus nigris.

Habitat in Singoria ſub terra in modum *Scarabaei* ſtercorarii cauernas fodiens. *Ad* Argendifodinam cui a ſerpentibus nomen paſſim occurrit, ad Irtim autem circa oſtium Vlbae fluuii et in vallo terreo arcis Vſtkamenogorsk copioſiſſime inueni.

Inter maximas ſui generis ſpecies numeranda. Longitudo thoracis cum abdomine $1\frac{1}{5}$ poll. Latit. thoracis 5 abdominis 6 lin. Longitudo pedum breviorum pollicaris, longiorum $1\frac{1}{2}$ poll.

Deſcriptio. Tota teſtacea nigro nebuloſa, piloſa. Oculi octo nitidi quorum duo verſus tergum, magnitudinis mediae, brunnei, duo in fronte magnitudine prima nigri, quatuor verſus os tranſuerſo ordine minores nigri. Thorax ouatus antico latere eleuatus, obtuſus. Palpi quatuor articulis, ruſeſcentes, apicibus nigris. Retinacula valida vngue nigro nitido terminata. Pedes validi, craſſi, articulis ſex, *primo* ſubtusnigro; *ſecundo* ſiue femore griſeo; *tertio* ſiue geniculo nigro; *quarto* ſiue oſſe griſeo apice nigro; *quinto* ſiue pede duorum anteriorum parium toto, poſteriorum vero apice nigro; *ſexto* nigro mutico.

Supra

Supra omnes pedes grisei nigro maculati. Abdomen ouatum supra testaceum fasciis quatuor albicantibus, subtus nigrum holosericum.

Obseru. Nutricatio pullorum solis foeminis relicta. Oua subrotunda, grisea, seminibus Brassicae satiuae paulo maiora circiter ducenta ponit, telaque in globulum, magnitudine maioris nucis Coryli auellanae inuoluit. Hunc globulum nocte in fundo cauernae seruat die autem imprimis sereno et calido in ostio aprico circumuertit. Pulli exclusi aliquot dies corpori matris insident vnde haec duplo maior et horridula euadit; validiores facti dispergunter imitando vitam et mores maiorum.

EXPLICATIO TABVLARVM.

Tab. XXIV. Fig. 1. *a.* Scarabaeus bimaculatus.
b. infera pars huius insecti.

Fig. 2. *a.* Lucanus apterus mas.
b. - - - - - foemina.
c. infera pars maris.
d. infera pars foeminae.
e. maxilla maris magnitudine aucta.
f. maxilla foeminae magnitudine aucta.
g. palpi maris.
h. palpi foeminae.

Tab. XXIV. Fig. 3. *a.* Attelabus dauricus.
b. inſera pars huius inſecti.
Fig. 4. *a.* Attelabus ircutenſis.
b. inſera pars huius inſecti.
Fig. 5. *a.* Cerambyx equeſtris.
b. inſera pars huius inſecti.
Fig. 6. *a.* Leptura veranica.
b. inſera pars huius inſecti.
Fig. 7. *a.* Leptura *altaienſis.*
b. inſera pars huius inſecti.

Tab. XXV. Fig. 8. *a.* Gryllus Sibiricus.
b. pes anticus clauatus huius grylli per Microſcopium delineatus.
Fig. 9. *a.* Myrmellon Kolywanenſe.
b. idem animalculum *alis* expanſis.
Fig. 10. Ichneumon gigas naturali magnitudine paululum minor.
Fig. 11. Conops petiolata.
Fig. 12. *a.* Aranea ſingorienſis magnitudine naturali paululum minor.
b. inſera pars huius inſecti.

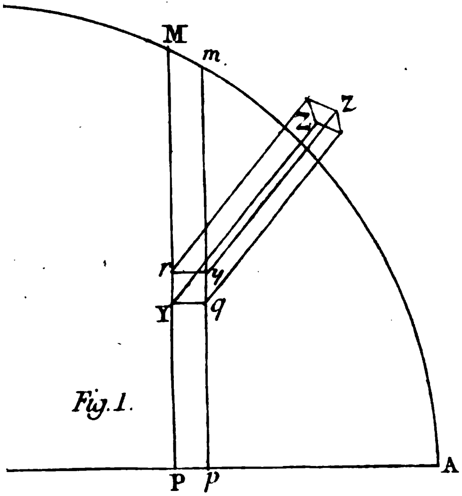


Fig. 1.

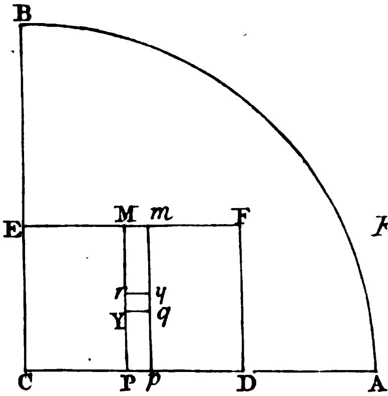
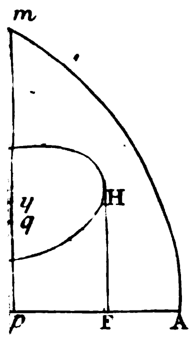


Fig. 2.



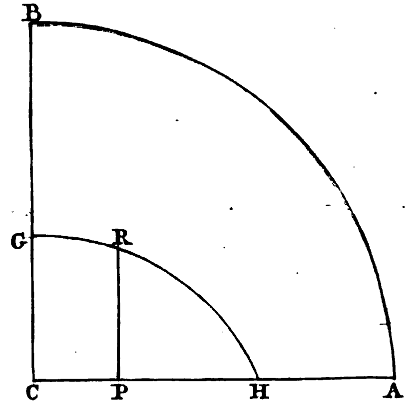


Fig. 4.

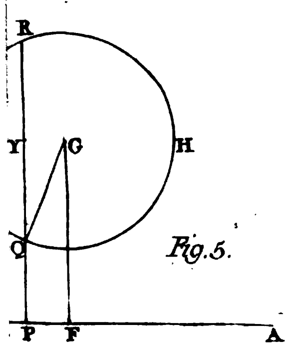


Fig. 5.

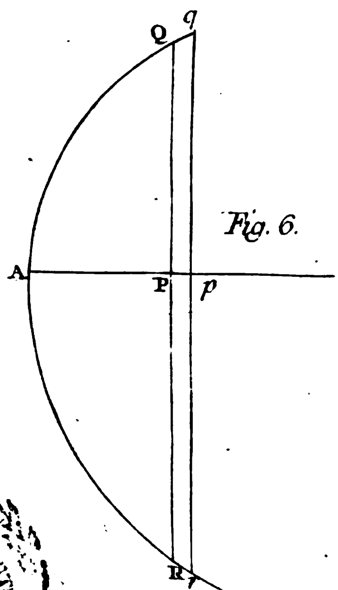


Fig. 6.

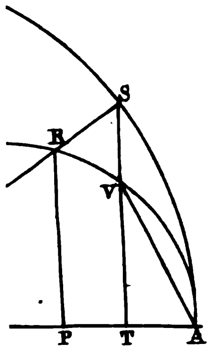
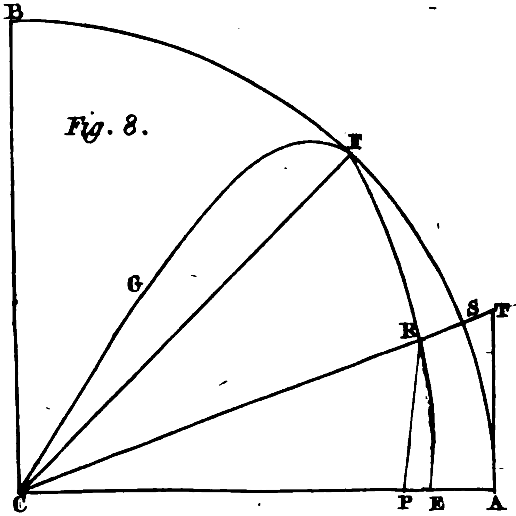


Fig. 8.



9.

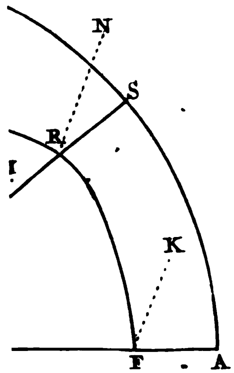
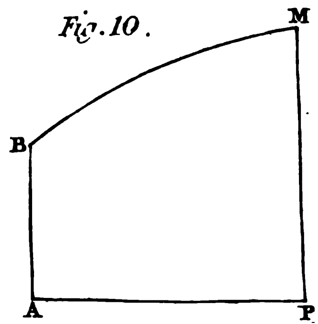


Fig. 10.



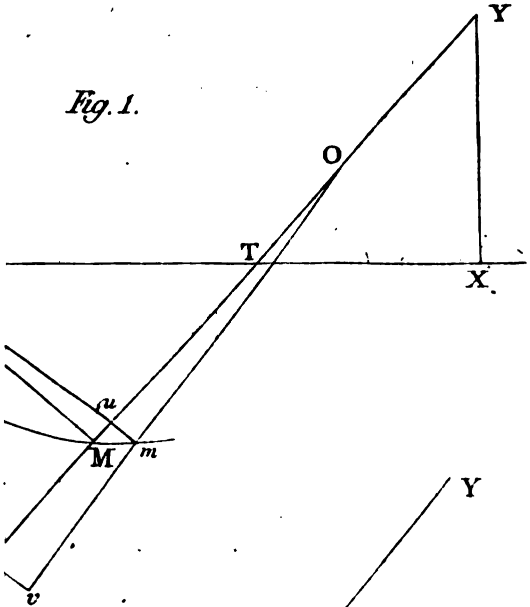


Fig. 1.

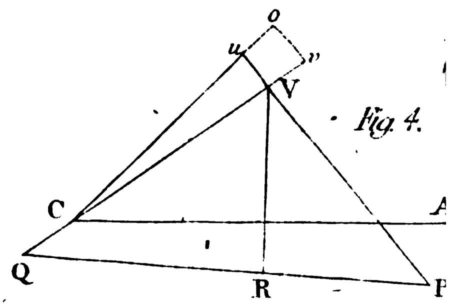
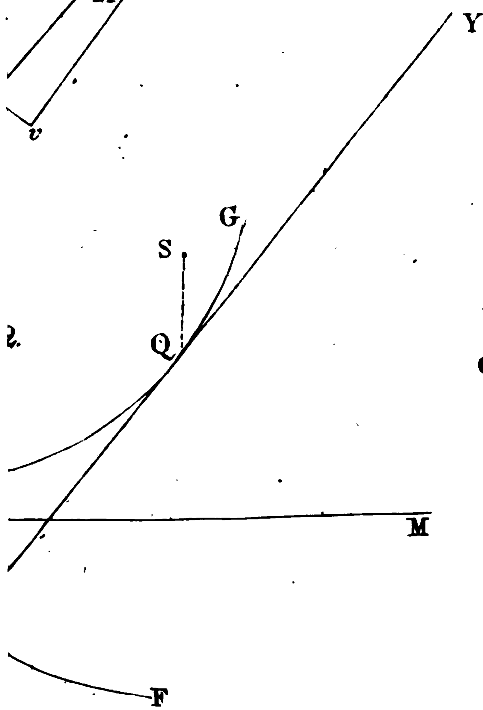


Fig. 4.



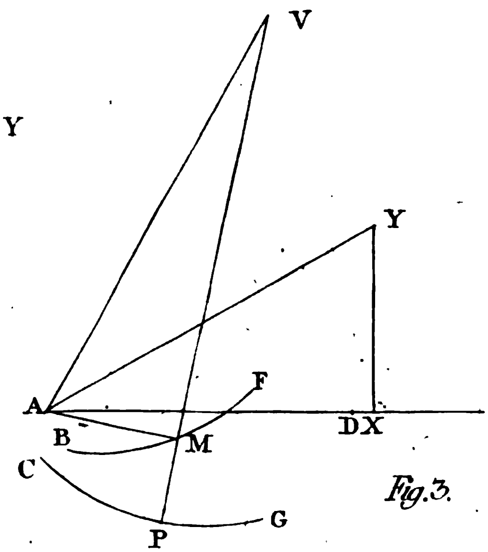
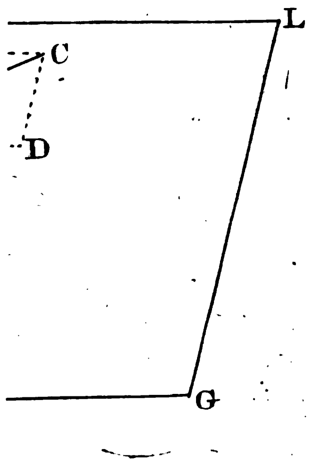


Fig. 3.



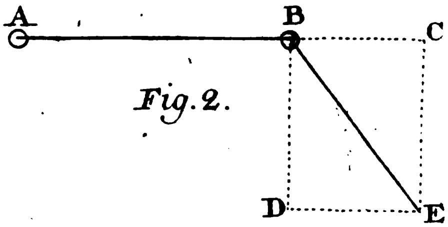


Fig. 2.

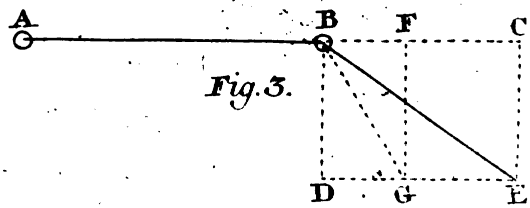


Fig. 3.

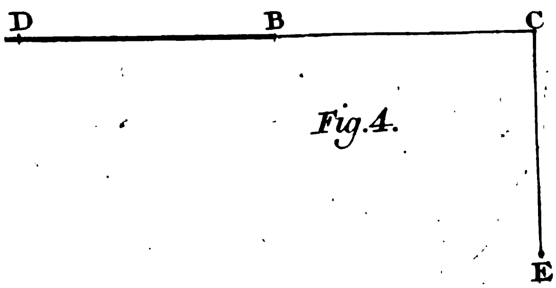


Fig. 4.

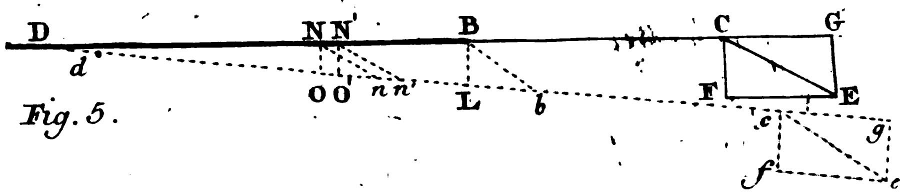
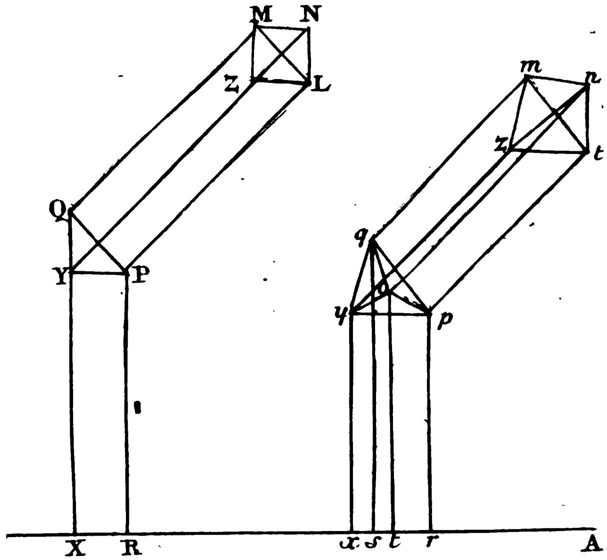


Fig. 5.



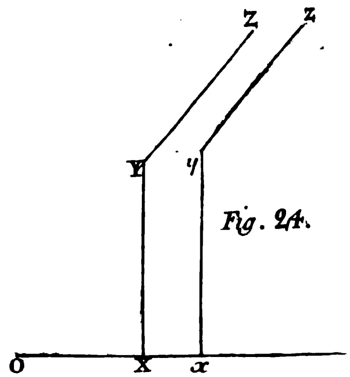
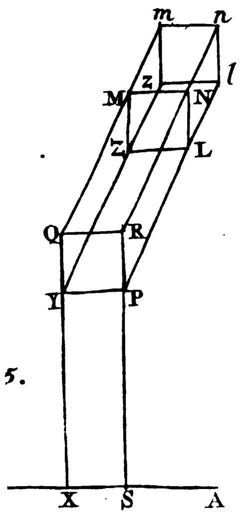


Fig. 24.



5.

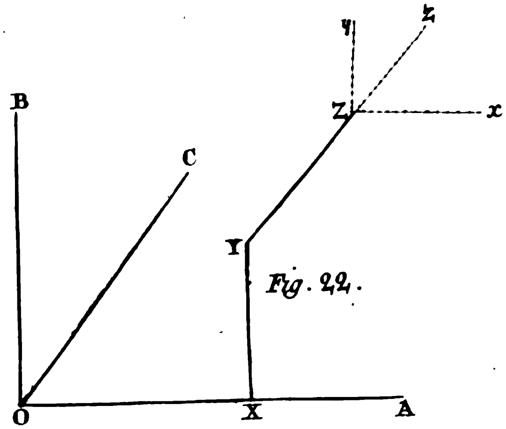


Fig. 22.

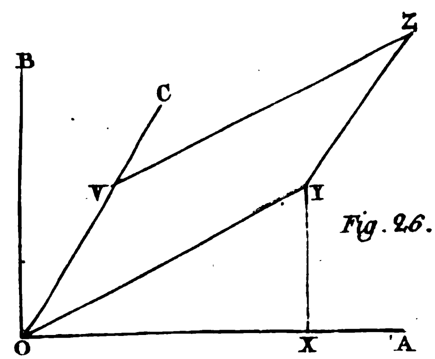


Fig. 26.

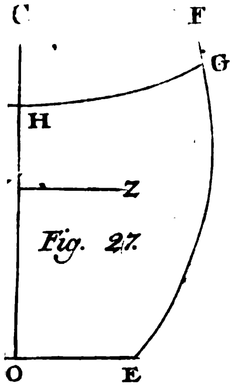


Fig. 27.

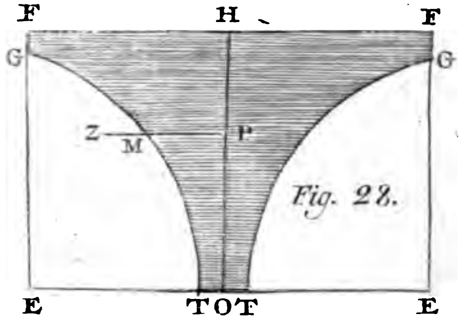
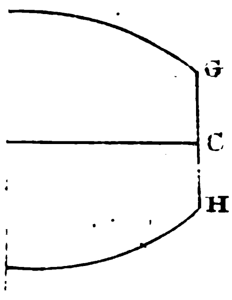


Fig. 28.



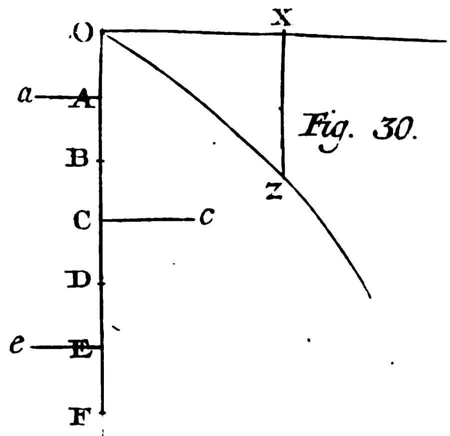


Fig. 30.

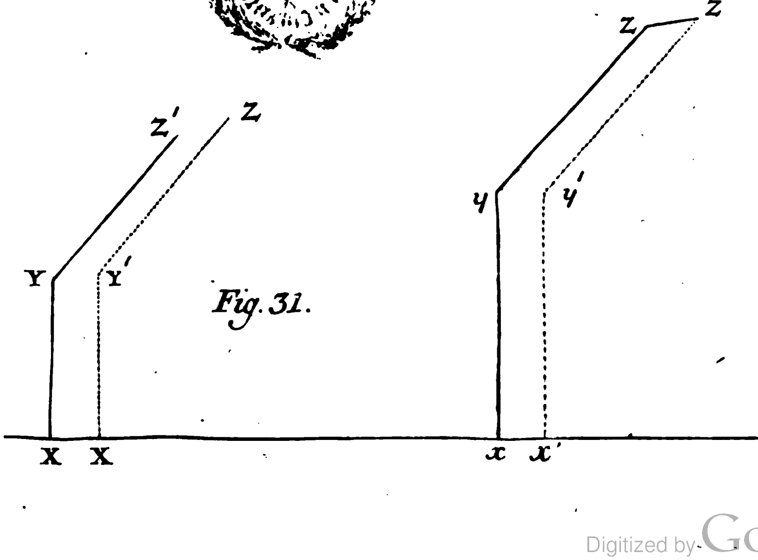


Fig. 31.

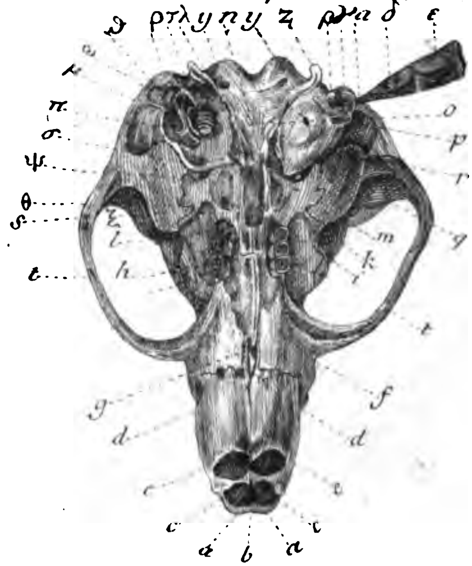


Fig. 2.

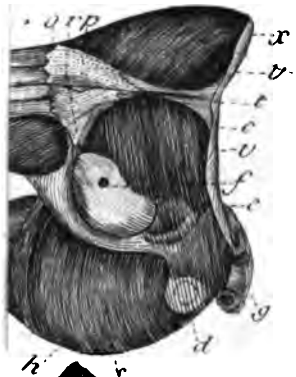


Fig. 7.

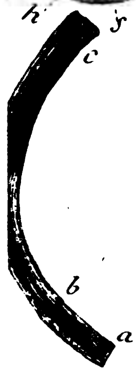


Fig. I.

b

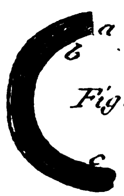
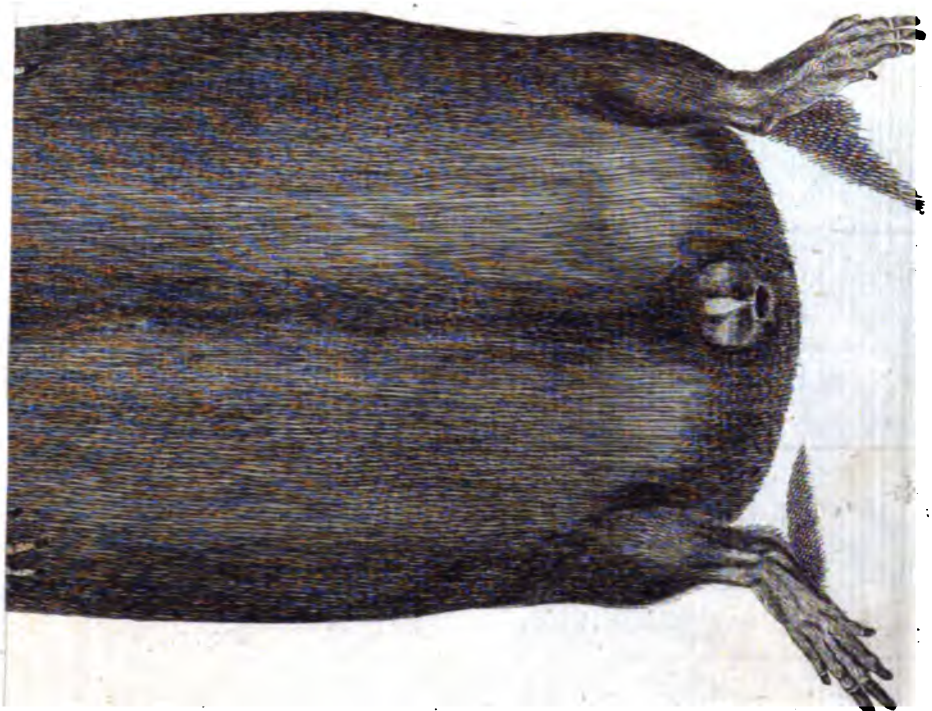


Fig. 5.



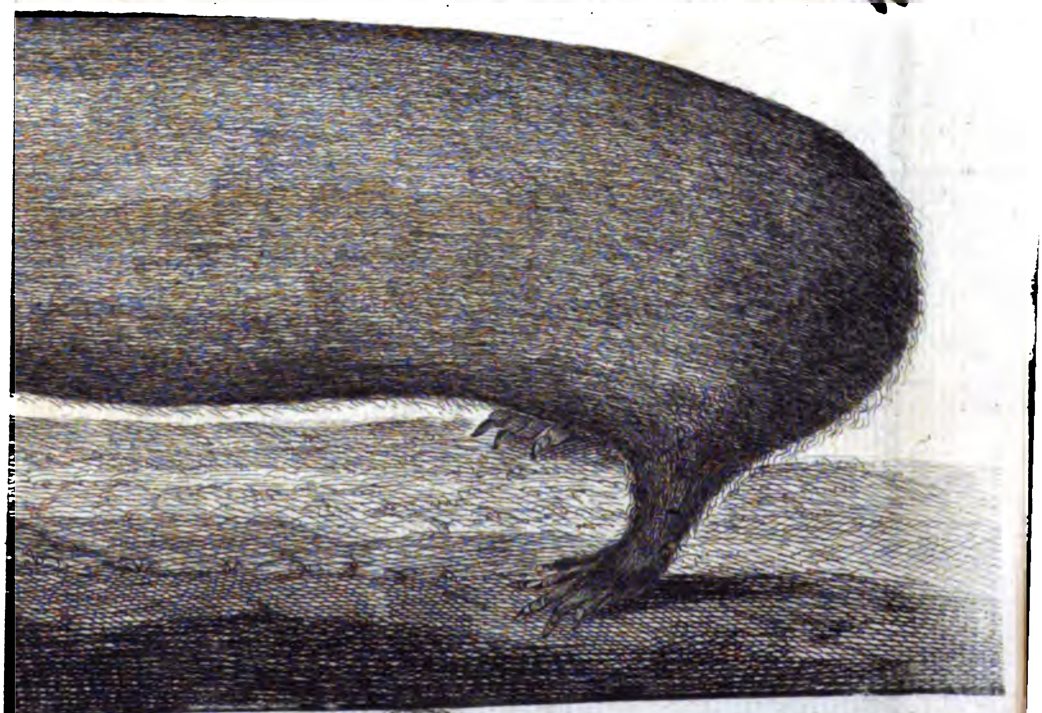


Fig. 1.

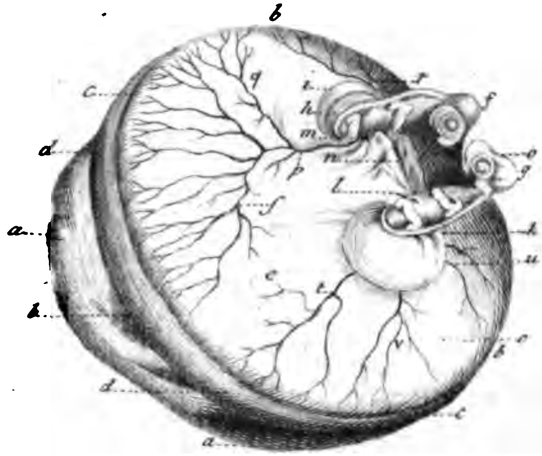


Fig. 2.

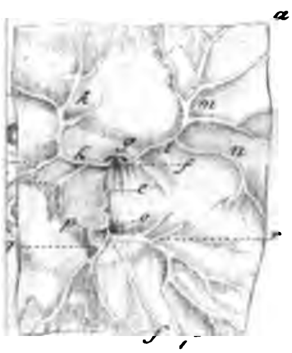
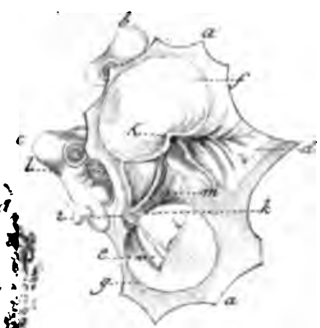
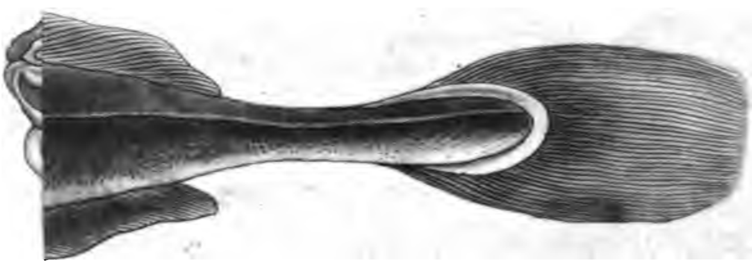


Fig. 3.





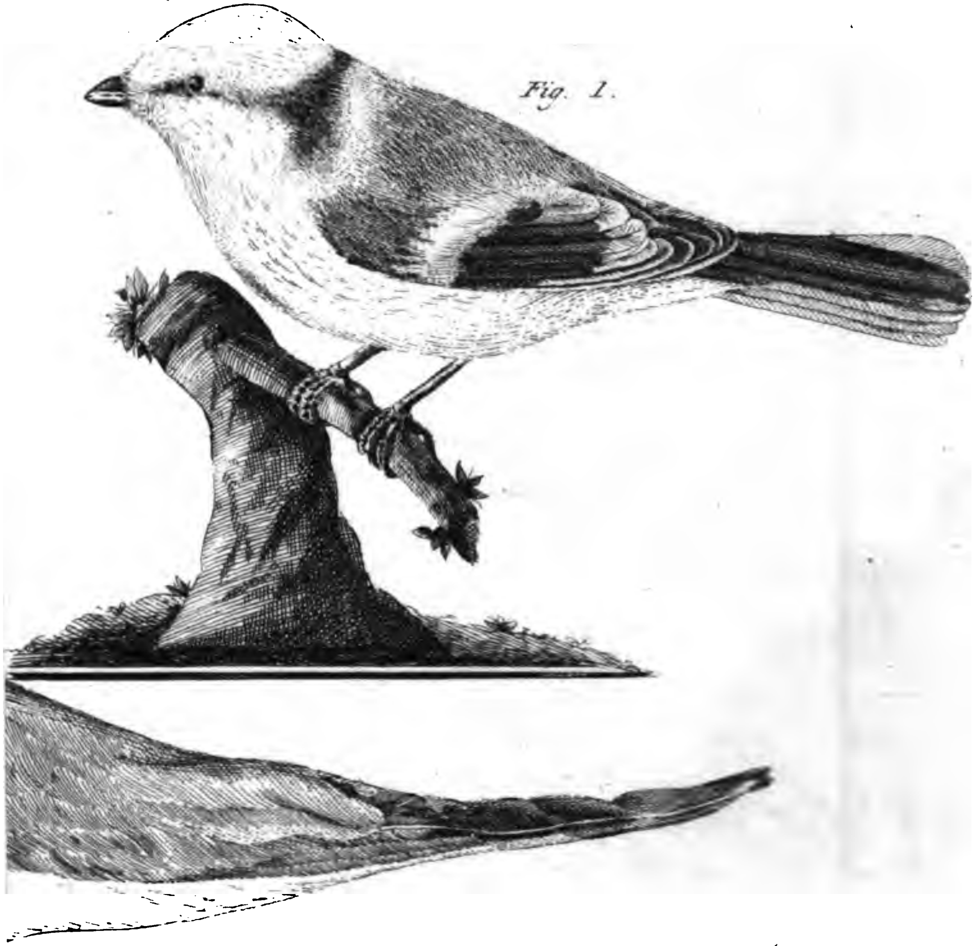
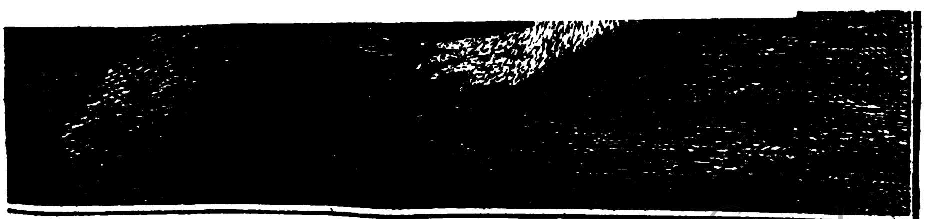


Fig. 1.



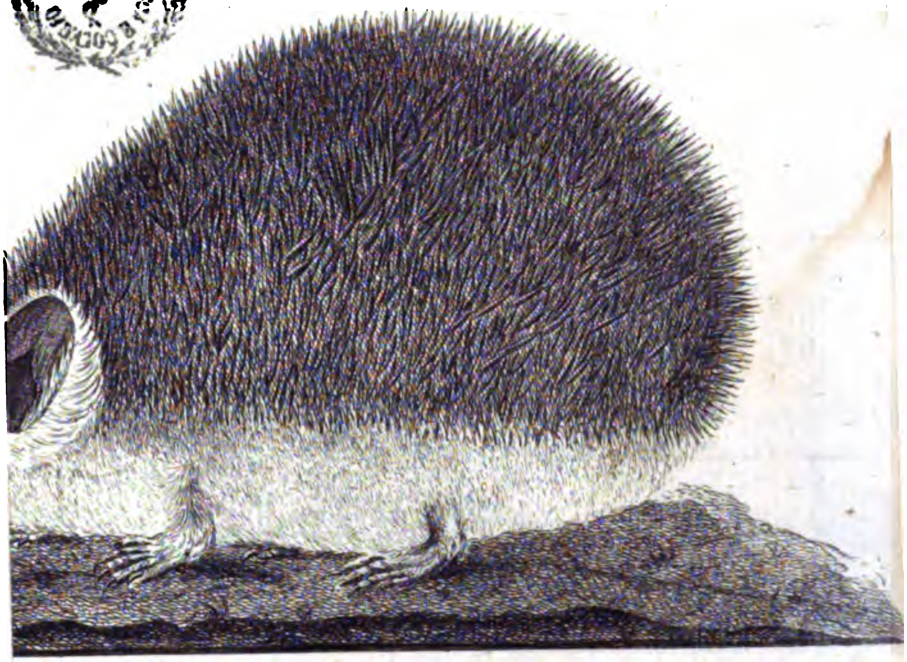


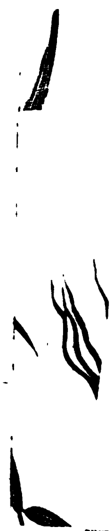
Fig. 2.

Fig. 2.

Fig. 2.

Fig. 3.

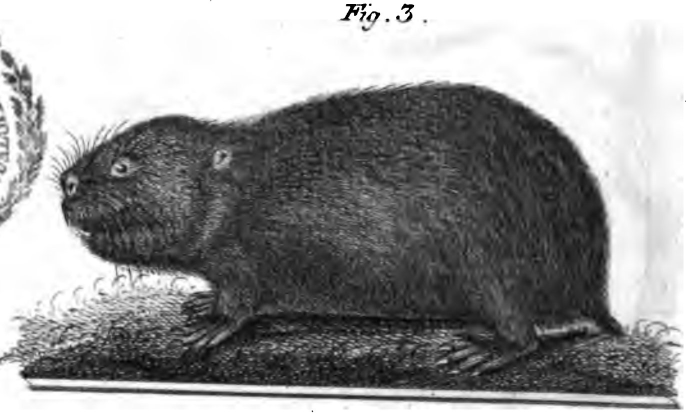
Fig. 5.

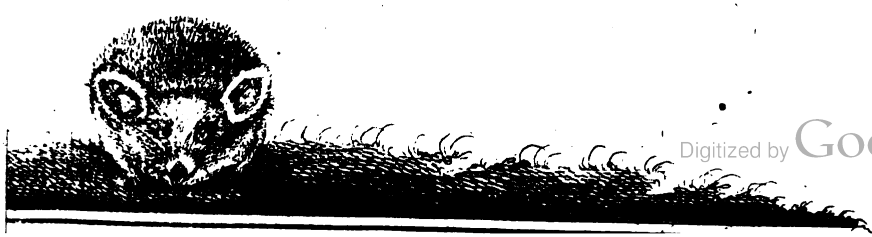



b
b
a
a
d
e
f

Fig. 1.

Fig. 3.





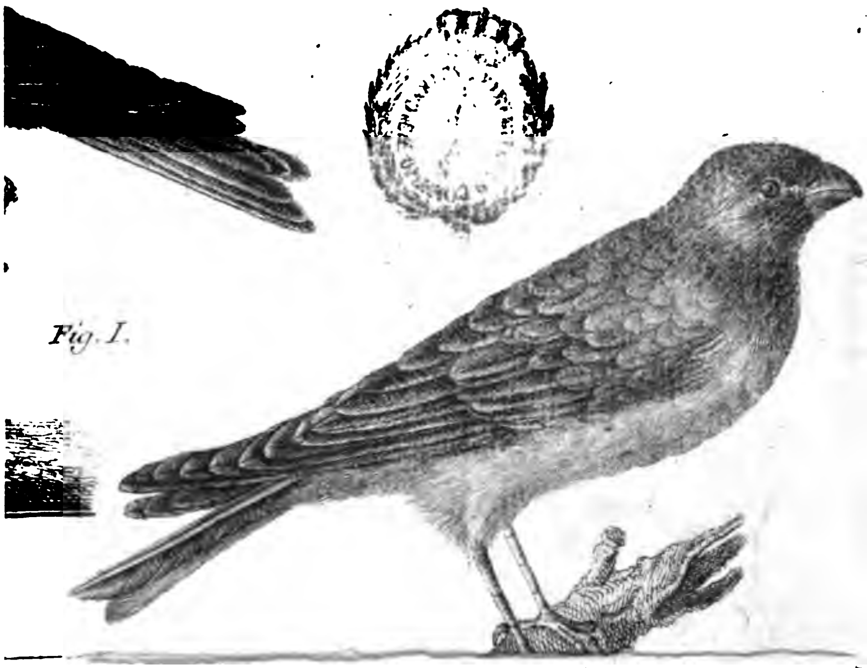


Fig. I.

Fig. 7.

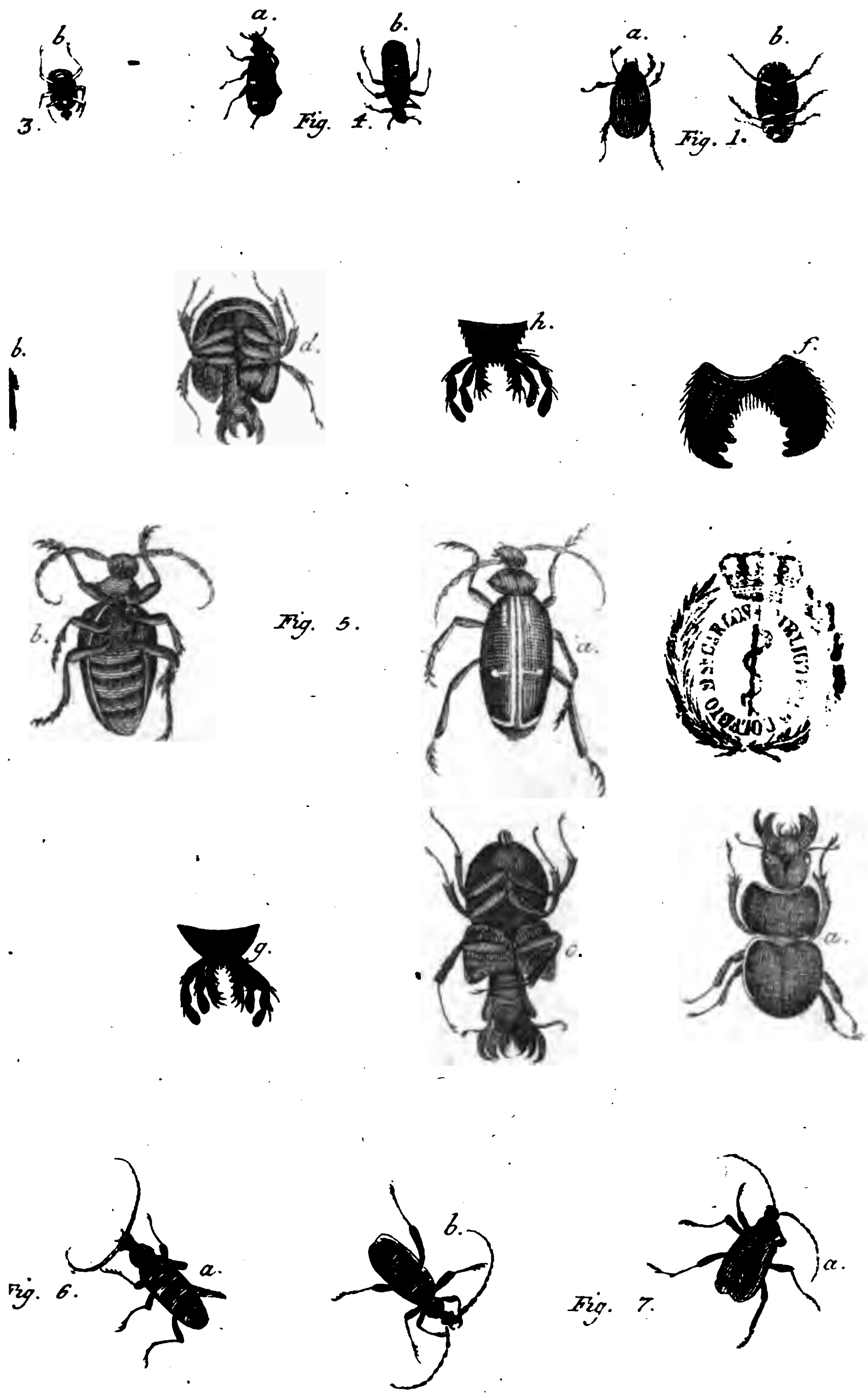


Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.

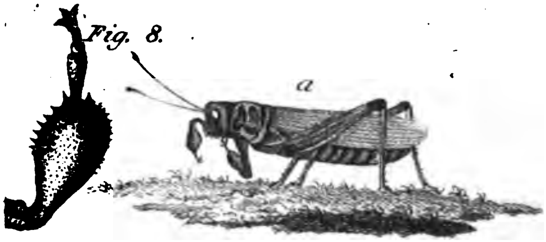


Fig. 8.

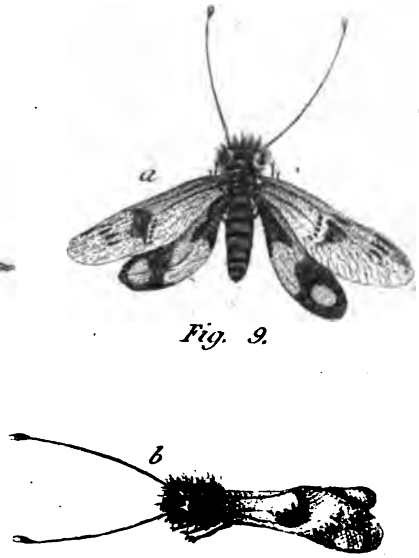


Fig. 9.

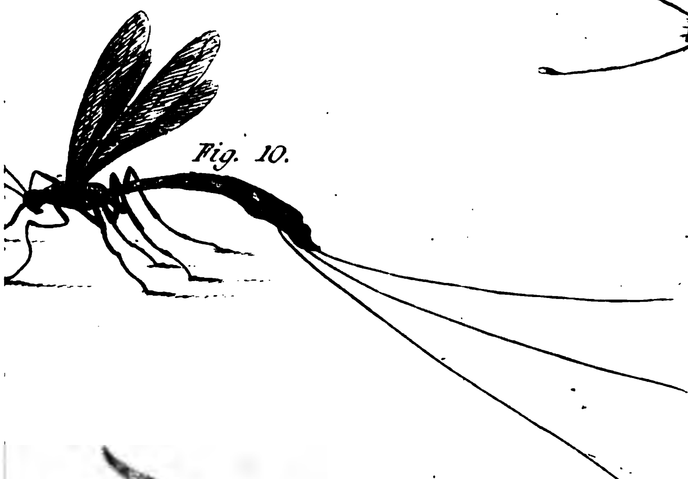


Fig. 10.

Fig. 11.

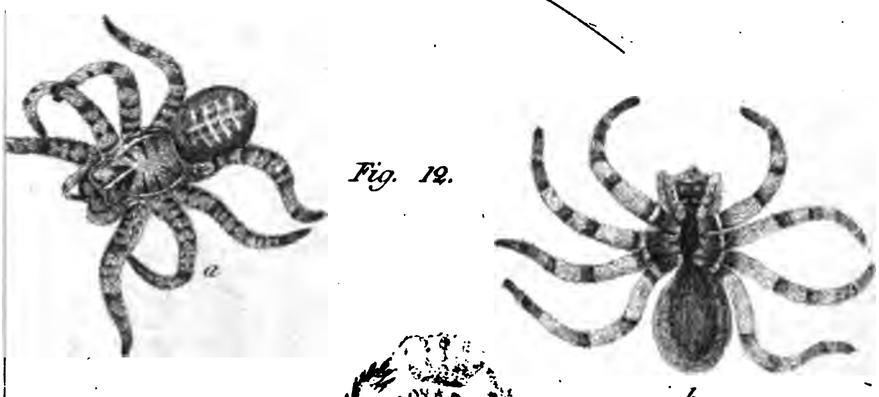


Fig. 12.