NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. XIII.
pro Anno MDCCLXVIII.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXIX.

SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XIII.

MATHEMATICA.

I.

De curua Hypergeometrica hac aequatione expressa.

$$y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x.$$

Auctore L. Eulero pag. 3.

In praesenti dissertatione Illustr. Auctor proprietates singularis cuiusdam curuae explicat, quam nomine *hypergeometricae* insigniuit eam ob caussam, quod si huius curuae abscissae secundum ordinem numerorum naturalium capiantur, applicatae progressionem hypergeometricam *Wallisii* sequantur. Etiamsi vero minus pateat, quomodo ex aequatione proposita, indoles curuae pro iis casibus definiatur; vbi x per numeros fractos exprimitur, in genere tamen liquet hanc aequationem etiam ad istos casus applicari posse, quoniam ex eadem omnino pateat, si pro $x = p$, fit $y = q$, fore quoque pro $x = p + 1$, $y = q(p + 1)$ atque pro $x = p - 1$, $y = \frac{p}{q}$. Insignes vero curuae commemoratae proprietates, quas hic contemplatus est Illustr. Auctor, quatuor omnino quaestionibus continentur,

 qua-

quarum *prima* in eo versatur, vt inuestigetur pro hac curua aequatio continua inter abscissam x et applicatam y, quae pro singulis valoribus ipsius x locum inuentura sit, *secunda* rationem exponit, qua directio tangentis ad datum quoduis curuae punctum definiatur, *tertia* vero indolem portionis minimae huius curuae, circa id punctum sitae determinat et denique *quarta* naturam curuae circa punctum eius infimum, vbi applicata est minima definit. Pro prima vero quaestione resoluenda, quum aequatio primum proposita, in alias ex factoribus in infinitum excurrentibus compositas, variis modis transformari queat, ex quibus nouis aequationibus iterum alias deriuare licet; praecipuae earum §. 12. recensentur, vt ex illis quouis casu, quae maxime ad vsum accommodatae videntur eligi possint. Praeter istas vero aequationes occurrunt quoque tales, vbi applicata y per aequationem integralem definitur, erit enim posito $x = p$, nouamque variabilem u introducendo $y = \int du\,(\mathrm{L}\frac{1}{u})^p$, integratione nimirum a termino $u = 0$ vsque ad $u = 1$ peracta, simili quoque ratione erit $y = \int e^{-v} v^p\, dv$, vbi integratio a valore $v = 0$ vsque ad $v = \infty$ extenditur. Pro inuestiganda ad datum quoduis curuae punctum eius tangente, imprimis adhibita est aequatio V ex §. 12, quippe quae huic negotio maxime visa est idonea, deinceps autem formula generalis pro tangentis determinatione inde deriuata, ad praecipua huius curuae puncta adplicata est. Similiter

militer ad binas vltimas quaestiones explicandas, aequatio haec V in vsum vocata est, vnde non solum tractus curuae egregie illustratur, sed etiam radius curuaturae eiusque variatio per formulas maxime concinnas definitur.

Quum vero Illustr. Auctor obseruauerit formulam 1. 2. 3 .... x exprimi quoque posse per hanc seriem:

$$x^x - x(x-1)^x + \frac{x(x-1)}{1.\,2}(x-2)^x - \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\,2.\,3}(x-3)^x + \text{etc.}$$

quae quidem series etiamsi ad curuae hypergeometricae naturam explicandam non admodum sit idonea, Geometrarum tamen attentione quam maxime digna videtur; hinc reliquam huius dissertationis partem, vberiori huius seriei explicationi destinauit, vbi eam statim in generaliorem transmutauit substituendo in exponentibus n loco x et in coefficientibus m loco x, ex quo igitur apparet, si fuerit $n = m$, fore summam huius seriei $= 1.\ 2.\ 3 \ldots m$. Quomodo autem pro aliis casibus quibus m et n sunt inaequales, haec summa comparata esse debeat, de eo imprimis fusius heic agitur. Et generatim quidem demonstratur, si fuerit $n < m$, positis ambobus numeris n et m integris, vel saltem $m - n$ numero integro positiuo, fore summam huius seriei $= 0$. Pro hac autem summa definienda, vbi $n > m$ speciales primo euoluuntur casus, quibus $n = m + 1$, $n = m + 2$ vel $n = m + 3$ etc. tum vero idem in genere perficitur pro valore ipsius $n = m + \lambda$,

quae

quae quidem summatio egregiam seriei allatae transformationem suppeditat, quam igitur Illust. Auctor alia deinceps via magis directa inuestigare, operae pretium iudicauit. Atque haec demum inuestigatio, occasionem subministrauit, eiusmodi summationes multo generalius perficiendi, ita vt denotante $\Phi : x$ functionem quamcunque ipsius x, etiam summa huius seriei:

$$s = \Phi:x - m\Phi:(x-1) + \frac{m.(m-1)}{1.2}\Phi:(x-2) - \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Phi:(x-3) + \text{etc.}$$

assignari queat.

II.

Quomodo numeri praemagni sint explorandi, vtrum sint primi, nec ne?

Auctore L. Eulero pag. 67.

Inter maximi momenti quaestiones Arithmeticas, praecipuum omnino locum tenet illa, qua quaeritur de methodo explorandi naturam numerorum, vtrum primi sint nec ne? Quamuis autem hoc ipsum, vix alia ratione generaliter perfici posse videatur, quam operatione vulgari, qua diuisio per omnes numeros primos, radice quadrata numeri pro-

propositi minores est tentanda; quum tamen haec operatio pro numeris mediocriter magnis, iam operosior sit, quam vt suscipi queat, hinc operae omnino pretium erat, eiusmodi methodum tradere, quae etiamsi pro certo tantum numerorum genere valeat, ad numeros tamen quantumuis magnos sub eo comprehensos, explorandos applicari possit. Quum itaque Illustr. Auctor post Fermatium obseruauerit omnes numeros primos in hac forma $4n+1$ contentos non nisi vnico modo, in duos numeros quadratos resolui posse, exinde vicissim colligit numeros huius formae $4n+1$, qui vnico modo in duo quadrata resoluuntur fore numeros primos, illis tamen numeris exceptis, qui ipsi sunt quadrati. Examen igitur hoc ita instituendum est, vt a numero proposito, omnes numeri quadrati ipso minores subtrahantur, eaque residua notentur, quae etiam numeri sunt quadrati, vbi si fiat, vt vel nullum vel plura talia dentur residua, tum tuto colligere licet, numerum esse compositum; sin autem vnicum detur, erit numerus propositus vel primus vel ipse quadratus, qui duo casus facile ab inuicem dignoscuntur. Liquet autem pro hoc fine obtinendo sufficere, si a numero proposito tantum quadrata semissi maiora subtrahantur, quo ipso numerus subtractionum ad trientem fere redigitur. Quum vero etiam haec operandi ratio pro numeris praemagnis nimis fit molesta, eae subtractiones heic excludendae sunt, quae ad talia residua perducant, quae cum quadratorum natura consistere nequeunt, qualia sunt, quae his formis continentur $3m+2$, $5m+2$, $5m+3$ etc. Si igitur numerus propositus $N=4n+1$ simul contineatur in his formis $3m+2$ et $5m+2$ vel $3m+2$ et $5m+3$, inde perspicitur quales esse debeant numeri, quorum quadrata subtrahenda sunt. Scilicet pro 1^{ma} specie, qua $N=4n+1$ per has formas $3m+2$, $5m+2$ exprimitur, continebitur N in hac formula $60n+17$, vnde si $N=xx+yy$, erit x vel y, huius formae $15p\pm(1.4)$, nempe vel $15p\pm1$, vel $15p\pm4$. Pro altera deinceps specie, qua $N=4n+1$, duplici forma $3m+2$ et $5m+3$ exprimi potest, erit quoque idem N huius formae $60.n+53$, vnde ab eo, ista solum quadrata subtrahenda sunt, quorum radices in forma $15p\pm(2.7)$ continentur. Omnes vero numeri formae $4n+1$, quum sub his quatuor speciebus comprehendantur:

$$16.n+1,\ 16.n+5,\ 16.n+9,\ 16.n+13.$$

si hae quatuor species, cum binis praecedentibus combinentur, orientur inde octo nouae species, pro quibus formae radicum numerorum subtrahendorum facile exhibentur, atque tum demum totidem nouae species orientur, si formae $32.n+5$, $32.n+13$, $32.n+21$, $32.n+29$ cum binis principalibus combinentur. Quae autem et quales sint pro quouis casu, formae radicum numerorum subtrahendorum ex ipsa Dissertatione addiscendum est, ad quam

studio-

ſtudioſe euoluendam Lectores ablegamus, id tantum obſeruantes, quod numeri primi hac ratione explorati 3861317 atque 10091401 tam magni ſint, vt non ſine labore taediosiſſimo, methodo vulgari, eorum indoles inueſtigari poſſit; quamobrem liquet examen heic allatum, eo maioris eſſe habendum, quod ad numeros maximos ſine vlla calculi prolixitate applicari poſſit.

III.

Noua criteria radices aequationum imaginarias dignoſcendi.

Auctore L. Eulero pag. 89.

Quae a *Newtono* aliisque poſt eum Geometris, allata fuerunt criteria; ex quibus cognoſci poſſet, vtrum aequatio aliqua radices habeat imaginarias nec ne? licet in ſe quidem vera et indubia ſint, ad finem tamen propoſitum obtinendum minime ſufficere inueniuntur, quum nimirum quoties radices imaginarias indicent, tales quidem re vera aequationi ineſſe deprehendantur, quando autem nullam radicem imaginariam indicent, ſaepenumero tamen fieri poſſit, vt eiusmodi aequationis vel plures vel adeo omnes radices ſint imaginariae. Hoc autem imprimis euenire ſolet in eiusmodi aequationibus vbi duo ſigna eiusdem naturae ſe continuo inſequuntur, ſic nimirum in aequatione biquadratica: $x^4 + 4x^3 - 8xx - 24x + 108 = 0$, quamuis ad praeſcriptum criteriorum iam dictorum nulla radix imaginaria reperiretur; tamen certiſſimum eſt, omnes eius radices eſſe imaginarias, quippe quum eadem aequatio reſoluatur in has duas quadraticas $xx + 8x + 18 = 0$ et $xx - 4x + 6 = 0$. In has igitur diſſertatione Illuſtr. Auctor doctrinam de criteriis radicum imaginariarum accuratius pertractandam ſibi propoſuit, quem in finem, primum methodos explicauit, quibus Auctores vſi ſunt ad haec criteria inuenienda, tum vero oſtendit, quomodo multo pluro eiusmodi criteria erui queant. *Primum* autem *principium* in hac doctrina adhibitum in eo conſiſtit, quod ſi omnes aequationis cuiusdam radices ſint reales, et ex hac alia aequatio formetur, cuius radices aequentur quadratis illarum, tum neceſſario fieri debere, non ſolum, vt omnes aequationis ſic formatae radices ſint reales, ſed etiam poſitiuae, ex quo principio iam magnam huiusmodi criteriorum copiam deriuare licet. Euidens autem eſt, quod hoc principium multo latius extendi queat, adeo vt ex aequatione quauis propoſita, aliae deriuari poſſint, quarum radices ſint vel cubi, vel biquadrata, vel altiores quaeuis poteſtates radicum aequationis propoſitae. *Secundum principium* in eo continetur quod ſumma quadratorum ex differentiis radicum conſtituat numerum poſitiuum, vnde ſi

ſumma

summa omnium radicum dicatur a et summa productorum ex binis b, elicitur $aa > \frac{2n}{n-1} b$. Per *tertium principium* haec criteria ea ratione indagantur, quod ex aequatione proposita duae aliae deriventur, de quibus etiam certi esse possumus omnes earum radices esse reales, si modo singulae aequationis propositae radices fuerint reales. Prima vero harum oritur, si singuli aequationis propositae termini, per seriem arithmeticam n, $n-1$, $n-2$, etc. multiplicentur; secunda vero si iidem termini in hanc progressionem arithmeticam 0, 1, 2, 3 etc. ducantur. Ex his duabus aequationibus gradus $n-1$, deinceps tres nouae gradus $n-2$ deducuntur, vnde continuata hac operatione demum ad aequationes secundi gradus peruenire licet, quae autem criteria in aequationibus sic deriuatis locum habent, eadem quoque ad aequationem primum propositam applicari poterunt. Quoniam vero nimis operosum foret, si per eiusmodi depressionem aequationum a gradu superiori ad inferiorem hoc negotium perficeretur, hinc Illustr. Auctor generalem tradidit methodum, qua ex aequatione cuiuscunque gradus, istiusmodi aequatio quadratica statim elici potest. His itaque criteriis absolutis, quae ex charactere aequationum quadraticarum deriuantur, sequuntur ea, quae simili ratione ope characteris aequationum cubicarum eruuntur, et quorum Illustr. Auctor primus mentionem fecit. Postquam igitur characterem completum pro aequationibus cubicis, quarum

 omnes

omnes radices sunt reales inuestigauerit; ostendit quomodo criteria inde deriuata, ad aequationes cuiuscunque gradus applicari debent, quod fit, istiusmodi aequationes ad aequationes tertii gradus ratione iam ante exposita deprimendo. Vt autem hoc facilius et expeditius institui queat, ostenditur quomodo in genere ex quauis aequatione, aequationes cubicas elicere possimus, quorum characteribus in vsum vocatis, oriuntur criteria pro relatione inter quaternos quosque coefficientes successiuos, quorum ope dignoscere licet, an aequationis propositae radices sint reales nec ne? Simili negotio ex charactere aequationum biquadraticarum radices reales exhibente, criteria erui possent pro exprimenda relatione inter quinos quosque coefficientes aequationis propositae; sed quum hae formulae nimis euaderent prolixae, iis inuestigandis non incumbendum esse videtur. Denique ad finem huius dissertationis Illustr. Auctor exponit, quomodo singula haec criteria, ex duobus tantum principiis, idque methodo admodum singulari nec non concinna, deducantur.

IV.

IV.

Confiderationes de Theoria motus Lunae perficienda et imprimis de eius variatione.

Auctore L. Eulero pag. 120.

Postquam fummi noftro feculo Geometrae in eo fuam exercuerunt induftriam, vt Theoriam motuum Lunae omni ftudio perficerent atque a Celeberr. *Mayero* Tabulae Lunares obferuationibus apprime conformes conftructae fint, facile in eam quis induci poffet opinionem, hanc ipfam Theoriam ad fummum perfectionis gradum euectam effe; tantum autem abeft, vt de eo fibi gratulari queant Analyftae, vt potius multae adhuc inaequalitates Lunae fuperfint, quae neque ex Theoriis ab Auctoribus in medium allatis nec ex Tabulis *Mayerianis* affignari poffint, atque etiamfi hae, quoniam admodum paruae fint, facile in praxi negligi poffunt, in Theoria tamen minime praetermittendae videntur, quoniam ea, fi perfecta erit, omnium prorfus inaequalitatum rationem reddere debebit. Vt autem Theoria feliciter excolatur, confultum omnino eft, non ftatim a vero motu Lunae initium facere, quoniam explicatio perturbationum, quibus verus motus Lunae tam fecundum longitudinem

quam

quam latitudinem afficitur, ipsas Analyseos vires superare videtur. Casus igitur primum fingendi sunt simpliciores et quidem ante omnia motus Lunae in latitudinem remouendus videtur, adeo vt iam inuestigandum sit, qualis foret motus Lunae, si in ipso Eclipticae plano incederet, tum vero quo adhuc maior facilitas obtineatur, motum Solis tamquam vniformem spectare licet, vnde id commodi nanciscimur, vt nullae aliae inaequalitates inuestigandae supersint, nisi quae ab excentricitate orbitae Lunaris atque ab elongatione Lunae a Sole originem ducunt. Sin vero adhuc maior simplicitas desideretur, ipsa consideratio excentricitatis orbitae Lunaris negligi potest, adeo vt iam quaestio sit, de inuestigando motu Lunae, si in ipso Eclipticae plano, sine vlla excentricitate incederet, Sole motum suum vniformiter absoluente. Hoc itaque institutum, quum Illustr. Auctor in praesenti dissertatione persequi sibi proposuisset, primum formulas differentiales exponit, quibus motus Lunae in ecliptica incedentis atque tam versus Solem quam terram, secundum legem attractionis *Newtonianam* impulsae, definitur, ex quibus formulis postquam ope distantiae mediae Lunae a terra et ratione inter motum medium Solis et Lunae data, considerationem massarum Solis Lunae et terrae eliminauerit, ostendit quoque qua ratione hae formulae differentiales ad integrationem perduci possunt. Hoc vero absoluto, explicat quomodo excentricitatem orbitae Luna-

Lunaris in computum ducendo, ad formulas differentiales primi gradus peruenire liceat, quae in calculo Astronomico cum insigni emolumento adhiberi possunt. Duplicem vero imprimis talem heic adhibuit reductionem, quarum quidem priorem iam alibi fusius explicauerat, vtramque tamen heic simul exponere voluit, vt de commodis ex vnaquaque earum redundantibus iudicium ferri possit. Reductionem autem deinceps generaliorem, quae binas praecedentes in se complectitur, exhibet. His autem reductionibus adhibitis, variationes tam semiparametri orbitae, quam excentricitatis et lineae apsidum formulis admodum concinnis et ad vsum practicum accommodatis definiuntur, et praecipue quidem si excentricitas satis sit notabilis, primam reductionem in vsum vocare licet; sin autem excentricitas fuerit quam minima vel adeo nulla, neutra harum reductionum vti fas est. Quum vero hic casus merito pro simplicissimo sit habendus, hinc Illustr. Auctor ad eum euoluendum aequationes differentio-differentiales primum allatas denuo considerationi subiecit, indeque approximationes huic instituto idoneas eruit. Atque inuentis sic binis aequationibus quibus motus Lunae continetur, operae pretium iudicauit, singulos eorum terminos euoluere; adeo vt hinc pro casu iam allato, ad datam quamuis longitudinem Solis mediam, tam longitudo Lunae, quam distantia eius a terra numeris absolutis exprimi possit.

V.

Annotatio quarundam cautelarum in inuestigatione inaequalitatum, quibus corpora coelestia in motu perturbantur obseruandarum.

Auctore L. Eulero pag. 159.

Quod *Newtonus* de corporibus coelestibus primus demonstrauit, ea hac lege moueri, vt se mutuo in ratione duplicata inuersa distantiarum attrahant, id adeo sufficienter per obseruationes comprobatum est, vt nullum supersit dubium, quin haec sit genuina lex, secundum quam omnium corporum coelestium motus peragantur. Quemadmodum enim theoria Lunae huic principio superstructa, cum obseruationibus optime congruat, adeo vt pro indubio haberi debeat, Lunam tam versus solem, quam terram secundum regulam *Newtoni* commemoratam impelli; sic quoque dubitare non licet, quin anomaliae istae, quae in motibus reliquorum planetarum, tam primariorum quam secundariorum obseruantur, similibus caussis sint attribuendae. Et quidem in Saturno et Ioue perturbationes hae manifeste se produnt, in eorum autem Satellitibus persimiles motuum variationes obseruantur ac in Luna. In Marte vero, terra, Venere et Mercurio, quamuis hae

hae anomaliae, non adeo sint conspicuae, multum tamen a vero aberraret, qui horum Planetarum motum regulis *Keplerianis* penitus conformem statuere vellet. Id enim si locum obtineret, in ipsorum orbitis neque lineae nodorum vllus motus, nec apsidum variatio aliqua obseruaretur; quod tamen quum secus sit, manifesto inde colligitur hos planetas non vnice versus Solem impelli, sed quoque in se mutuo agere; ex qua etiam caussa sine dubio quaedam inaequalitates in ipso motu eorum oriri debent, etiamsi eaedem vix perceptibiles sint. Vt igitur omnia corporum coelestium phaenomena rite explicari queant, in vsum vocanda est resolutio istius problematis, quo quaeritur de motu trium aut plurium corporum, quae se mutuo attrahunt in ratione reciproca duplicata distantiarum. Hoc autem problema in genere spectatum difficilius esse videtur, quam vt spes aliqua esse possit, illius resolutionem completam aliquando inueniri posse. Ratio autem huius difficultatis non in Mechanica quaerenda est, quippe quum vires corporum acceleratrices, indeque ipsae accelerationes eorum facillime definiri et formulis exprimi possint; sed in ipsa Analysi continetur, quoniam aequationes differentio-differentiales quibus hae accelerationes exprimuntur, plerumque adeo sunt complicatae, vt resolui nequeant. Hinc igitur videtur completam et omnibus numeris perfectam Theoriam motuum coelestium exspectari non posse, quousque methodus generalis non pateat, aequationes differentio - differentiales in quibus variabiles vtcunque inter se sunt permixtae resoluendi. Licet vero hoc problema adeo generaliter spectatum tantis implicetur difficultatibus, pro casibus tamen specialibus fieri potest, vt illae difficultates multum diminuantur. Sic cum quaestio est de definiendo motu Lunae, qualis ex terra spectatur, haec commoda quae solutionem faciliorem reddunt, obtinentur, primum vt motum Solis apparentem tamquam cognitum spectare liceat, deinde distantia Lunae prae distantia Solis admodum fit exigua, tum vero excentricitas orbitae et inclinatio eius ad planum eclipticae satis paruae fiunt. Si vero supponeretur Lunam adeo a terra fuisse remotam, vt Martis vel Veneris locum occupet, tum eueniet vt Luna motum planetae primarii sequeretur, eiusque perturbationes simili ratione determinandae essent, ac perturbationes motus Saturni vel alius cuiusdam planetae primarii. In vtroque igitur hoc casu, diuerso plane modo inaequalitates motus Lunae determinandae sunt, quippe quum in priori Luna ellipsin circa terram esset descriptura, in altero vero circa Solem. Qui igitur veram motus Lunae theoriam tradere vult, illi incumbit eam ita exponere, vt pro omni Lunae situ et statu locum obtineat. Haec autem non solum de motu Lunae valent, sed ad reliqua quoque corpora coelestia applicari possunt. Propositis igitur tribus corporibus se mutuo attrahentibus, omnino maximi momenti

est

est disquisitio, qua inuestigatur motus respectiuus duorum horum corporum, qualis spectatori in tertio corpore collocato apparebit, atque huius problematis solutionem Illustr. Auctor in hac dissertatione absoluendam sibi proposuit. Si itaque supponantur tria haec corpora in eodem plano moueri, et se mutuo attrahere secundum regulam attractionis *Newtonianam*, primum generaliter ostendit quibus aequationibus differentio - differentialibus exprimatur motus respectiuus duorum corporum B et C, qualis spectatori in corpore A apparet, deinceps vero exponit quales mutationes, istae aequationes subire debeant, si vel vnius vel duorum ex his corporibus A, B, C, massae vt euanescentes spectentur; vnde si quaestio speciatim sit de motu respectiuo Solis et Lunae ex terra spectando, designantibus A terram, B Solem et C Lunam, duo speciales oriuntur casus, alter quo tam B, quam C pro euanescentibus habeatur, alter vero quo A et C euanescunt. Qua ratione autem istarum aequationum integralia pro vtroque casu inueniri debeant, in problematibus proxime sequentibus docetur, vbi quidem pro casu posteriori solutionem non ex ipsa consideratione aequationum differentio - differentialium propositarum deriuare licuit, sed ex principio quodam aliunde petito; quamobrem eo magis confidendum est, ad motum Lunae accurate definiendum, multum subsidii inde esse exspectandum, si hanc solutionem directe ex ipsis nempe formulis differentio - differen-

 tiali-

tialibus eruere liceret. Artificium autem heic adhibitum pro solutione casus huius posterioris inuenienda, multo quoque latius extendi potest, ad definiendum scilicet motum respectiuum duorum corporum B et C, si supponantur corpora A et C ad B secundum quamuis attractionis legem impelli; motibus tamen vt antea in eodem plano peractis. Atque quum saepenumero contingat, vt calculi compendia facilius in problematibus generalioribus quam specialioribus inueniantur; hinc Illustr. Auctor motum respectiuum duorum corporum B et C, qualis spectatori in A posito apparet, si omnia haec tria corpora in eodem plano moueantur et secundum quamcunque distantiarum rationem se mutuo attrahant, generali problemate complexus est; vbi quum ad sex aequationes differentio-differentiales peruenisset, quarum quatuor priores problemati soluendo sufficiunt, duae tamen vltimae non plane vt inutiles reiiciendae sunt, quippe quod iis in subsidium vocatis et cum reliquis debito modo combinatis, non solum duae aequationes differentiales primi gradus eruantur; sed etiam hae solum cum vsu adhiberi possint, pro illo casu, quo $A = 0$. Quoniam denique constet motum Lunae, si terrae valde sit vicina, recte ad terram referri; sin autem admodum a terra distaret, conueniens fore, vt eius motus ad Solem referatur; facile colligi poterit, si quasi intermedium quendam statum teneat, eius motum neque ad Solem nec ad terram esse referendum,

dum, sed ad aliud quoddam punctum medium, quam ob rationem ad finem huius dissertationis ostenditur, qua ratione motus alicuius corporis ad certum quoddam punctum relatum, ad aliud punctum vtcunque motum referri possit.

VI.

Inuestigatio accuratior phaenomenorum, quae in motu terrae diurno a viribus coelestibus produci possunt.

Auctore L. Eulero pag. 202.

Insigne istud phaenomenon praecessionis aequinoctiorum, quo puncta aequinoctialia continuo regrediuntur seu contra seriem signorum mouentur, cum veteribus etiam Astronomis innotuisset; veram tamen huius phaenomeni rationem, in figura telluris nostrae et actione, qua motus terrae diurnus a viribus Solis et Lunae afficitur quaerendam esse, nemo ante *Newtonum* suspicatus fuit. Quemadmodum enim si figura telluris nostrae perfecte sphaerica esset, motus vertiginis ipsi impressus eadem velocitate perpetuo continuaretur; ita vicissim si haec figura a sphaerica recedat, adeo vt diameter aequatoris aliquanto maior sit axe, ex viribus Solis et et Lunae hunc axem afficientibus, orietur momentum ad eum de ſitu ſuo deturbandum. Quum itaque Illuſtr. huius diſſertationis Auctor, eam Dynamicae partem maxime abſtruſam, quae de motu corporum gyratorio agit, proſperrimo ſucceſſu pertractauerit; adeo vt in genere motus gyratorii corporum quacunque figura praeditorum et viribus quibuscunque ſollicitatorum feliciter determinari poſſint; hinc in praeſenti diſſertatione ex illis principiis omnes inaequalitates motus terrae diurni explicare conſtituit, idque ita vt non ſolum verus motus telluris gyratorius cognoſcatur; ſed etiam reliqui quos habere potuiſſet, ſi ab initio aliter fuiſſet impulſa. Hoc itaque in negotio vt primum conſideratio figurae et ſtructurae telluris euitari queat, quippe quae plerumque ad calculos taedioſiſſimos perducit, iſta inſignis proprietas trium corporis axium principalium, quae in centro inertiae normaliter ſe decuſſant, in vſum vocanda eſt, atque tum quidem ſtatim liquet, ſi tria momenta inertiae reſpectu horum axium, ſint plane inter ſe aequalia, motum gyratorium a viribus externis nullatenus turbari, id quod quoque locum habet, etiamſi figura corporis gyrantis, quam maxime ſit irregularis, modo memoratam illam proprietatem aequalitatis momentorum inertiae reſpectu axium principalium poſſideat. Tellus autem noſtra quamvis initio fuiſſet ſphaerica, tamen ſtatim ac circa axem gyrari coepiſſet, ob fluiditatem eius figura muta-

mutationem subiisset, quam ob rem vt heic fluiditatis rationem habere non necesse sit, statim considerare licet tellurem, vt corpus solidum ea figura praeditum, quam vi fluiditatis suae consequeretur, ex quo intelligitur omnes conclusiones hinc deriuandas ob maris mobilitatem aliquam correctionem admittere. Dum itaque consideratur terra vt eiusmodi corpus, cuius vnus axis principalis cum axe proprie sic dicto telluris coincidit, reliqui autem bini huic normales ita sunt comparati, vt momenta inertiae eorum respectu sint aequalia, primum dispiciendum est quaenam varietas motui terrae diurno, a motu qui initio erat impressus inducatur, mentem a viribus Solis et Lunae agentibus penitus abstrahendo; atque tum quidem perspicitur, si hic motus circa axem vel quemlibet diametrum aequatoris imprimatur, eum non solum fore vniformem, sed etiam axem gyrationis constanter eundem situm seruaturum; sin vero hic motus circa aliam lineam per centrum transeuntem imprimatur, tum motus gyratorius quidem manebit vniformis, ipse vero axis circa quodpiam coeli punctum circulum describeret. Accedentibus vero iam viribus Solis et Lunae perturbatricibus, non solum gyrationis celeritas admodum immutatur; sed axis quoque gyrationis motu magis irregulari fertur; vnde operae pretium visum est Illustr. Auctori quaestionem adeo generaliter proponere, vt ad eos etiam casus pateat, quibus terrae ab initio motum circa axem a principa-

 libus

libus diuersum impressum fuisse supponatur. Vt igitur a simplicioribus ad difficiliora procederet, supposita primum aequalitate binorum momentorum inertiae, sequentes imprimis casus considerationi subiecit, *primum* quo vires perturbatrices vt euanescentes spectantur, *secundum* quo astrum perturbans in ipsa ecliptica et motu quidem vniformi incedere supponitur, *tertium* quo hoc astrum in orbita ad eclipticam parum inclinata, sed motu vniformi circumfertur, denique *quartum* quo astro motus inaequabilis secundum leges *Keplerianas* tribuitur, orbita vero eius cum ecliptica coincidit; vbi quidem vltimus casus, ad explicandam perturbationem, quae ab actione Solis oritur, applicari potest, tertius vero cum vltimo coniunctus dabit explicationem perturbationis ab actione Lunae oriundae; commodum autem accidit, vt non opus sit ad horum astrorum inaequalitates respicere quum enim anomaliae ex motu medio resultantes iam admodum sint exiguae, facile intelligitur eas, quae ex orbitae excentricitate oriuntur plane negligi posse. Formulas vero analyticas quibus motus terrae diurni ob vires Solis et Lunae perturbatrices, variatio exprimitur, postquam Illustr. Auctor exposuerit, easdem dein quoque numerice euoluit, ita vt absoluta quantitas huius variationis inde innotescat, vnde applicatione facta, ad datum quoduis tempus obliquitas eclipticae eiusque variatio, non minus quam vera quantitas praecessionis aequinoctiorum et perturbaturbationum motus diurni telluris nostrae, accurate determinantur.

VII.

Commentatio de vtilissima ac commodissima directione potentiarum frictionibus Mechanicis adhibendarum.

Auctore Daniele Bernoulli pag. 242.

Quod in hac dissertatione ab Illustr. Auctore pertractatum est argumentum, solutionem continet quaestionis Mechanicae haud parum curiosae: sub quanam directione, potentiae motrices applicandae sint corpori alicui protrahendo, vt maximus inde percipiatur effectus? Quamuis scilicet primo quidem intuitu videretur, potentiam resistentiae directe opponendam esse, re tamen accuratius perpensa, inuenitur plurimos dari casus, quibus potentia sub directione ad resistentiam obliqua cum maximo fructu applicatur. Quoties nimirum potentia ad corpus super plano aspero protrahendum oblique applicatur, eiusdem potentiae duplex est effectus, vnus ad corpus protrahendum, alter vero ad ipsum sublevandum, vnde patet ab obliquitate potentiae aliquod dispendium simulque vero lucrum oriri, ex quo consequitur istam potentiae directionem optimam censendam esse, vbi lucrum sic oriundum, dispendium ab obliquitate ortum quam maxime superet. Quum vero frictio corporis super plano asperi moti, partim pendeat a pondere quo corpus ad planum apprimitur, partim a natura plani corpori subiecti; si dicatur P pondus corporis protrahendi, intensitas vero frictionis plani subiecti designetur per $\frac{1}{n}$, angulus autem sub quo potentia oneri super plano horizontali promouendo sit applicata per z indicetur; inuenietur potentia ista oblique applicata per hanc formulam expressa: $\frac{P}{n\,cos.\,z + sin.\,z}$. Hinc itaque colligitur potentiam hanc fore minimam, dum denominator $n\,cos.\,z + sin.\,z$ est maximum, hoc est quando $tang.\,z = \frac{1}{n}$, in eo autem casu erit potentia haec minima ad potentiam directe applicandam vt $\sqrt{(nn+1)}$ ad n. Sic quum Cel. Auctor obseruauerit viam silicatam siccam, in trahis super ea protrahendas resistentiam exserere, quae sit propemodum $\frac{1}{2}$ ponderis promouendi; ex hac theoria facile concluditur pro isto casu fore angulum $z = 26°, 34'$, quam regulam ab aurigis quoque non male obseruari vidit, multo autem minor obliquitas sufficit, si via niue calcata fuerit obtecta, quoniam tum intensitas frictionis admodum exigua est. Pro rhedis autem curribus et aliis machinis rotalibus, emolumentum ex obliquitate ortum plane insensibile fit, propter intensitatem frictionis adeo diminutam, vt vix $\frac{1}{20}$ ponderis partem superet.

Ex

Ex his igitur regula haec generalis formari potest: obliquitatem potentiae tum vtiliter adhiberi, quando intensitas frictionis satis magna est, ipsaque resistentia a subleuatione ponderis notabiliter diminuatur. Vnde haec theoria quoque certis casibus ad alias resistentiae species applicari potest, veluti cum de protrahendis corporibus aquae insidentibus quaestio est, idque imprimis si ob potentiam oblique applicatam non solum corporis natantis pars submersa imminuatur, sed etiam ob situs mutationem inde oriundam, minorem ab aqua resistentiam patiatur.

Si vero iam quaeratur de angulo obliquitatis, sub quo potentia applicanda est, vt corpus super via ad horizontem vniformiter accliui protrahatur; eius quaestionis solutio simili plane ratione perficitur. Si enim angulus accliuitatis dicatur A, inuenietur potentia ista obliqua $= \frac{n\,\text{sin.}\,A + \text{cos.}\,A}{\text{sin.}\,z + n\,\text{cos.}\,z} \cdot P$, quae itaque erit minima, si fuerit tang. $z = \frac{1}{n}$, tum vero erit haec potentia sub angulo quaesito applicata $= \frac{n\,\text{sin.}\,A + \text{cos.}\,A}{\sqrt{(nn+1)}} \cdot P$, vbi probe notandum est, si de via decliui sermo sit sin. A negatiue sumi debere. Angulus autem iste z eo magis attentione dignus est, quod idem sit, sub quo corpus proprio pondere in plano inclinato, superata frictione deuolui aut deorsum repere incipit.

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

De aequilibrio et motu corporum flexuris elasticis iunctorum.

Auctore L. Eulero pag. 259.

Inter eas Mechanicae partes, quae nondum satis excultae sunt, insignem omnino tenet locum doctrina de motu et aequilibrio corporum flexuris elasticis inter se iunctorum, quam ob rem eo maius pretium statuendum est illis, quae Illustr. Auctor in hac dissertatione de isto argumento commentatus est. Considerationi nimirum heic subiecit talia corpora rigida, quae certis inter se iunguntur flexuris, quarum autem flexurarum ea est indoles, vt vi inflectenti resistant eoque maiorem resistentiam exserant, quo magis vis illa inflectens statum corporum naturalem, quem ante inflexionem habebant, mutare annititur, sublata autem vi inflectente ob elasticitatem flexurarum corpora in situm naturalem restituantur. Vt itaque melius pateret quibus principiis determinatio motus eiusmodi corporum innitatur, simplicissimum primo casum considerauit, quo duo tantum corpora rigida huiusmodi flexura iunguntur; atque quum vtrumque horum

rum circa axem per flexuram transeuntem moueri possit, altero manente fixo; explicationem motus huiusmodi corporum, imprimis consideratione centri inertiae, momentorum inertiae et vis elasticae inflexioni resistentis contineri concludit, quam vltimam vim sinui anguli inflexionis esse proportionalem accurate demonstrat. Simplicissimo vero hoc casu expedito, ad explicationem motus plurium eiusmodi corporum flexuris iunctorum accedit Illustr. Auctor, vbi quum perspexisset hoc problema vix in genere tentari posse; istum tantum casum specialem examini subiecit, quo omnes axes inflexionis in singulis iuncturis inter se sunt paralleli, motusque in plano ad istos axes perpendiculari absoluatur, in quo etiam singularum partium centra inertiae sita esse supponuntur. Antequam vero motus eiusmodi corporum Systematis rite explicari queat, primum necessum erat exponere, quibus viribus in aequilibrio contineatur, ad hoc autem requiritur, non solum vt eae conditiones impleantur, quibus aequilibrium in corporibus rigidis obtinetur; sed etiam insuper vt vires sollicitantes cum vi elastica cuiusuis flexurae in aequilibrio consistant. Vt igitur principium hinc deriuandum pro aequilibrio horum corporum determinando facilius applicari queat; ostendit Illustr. Auctor quomodo ex virium quarumcunque momentis respectu ternorum axium inter se normalium, definiri possit earum momentum respectu alius cuiuscunque axis obliqui per idem punctum

ctum

ctum transeuntis, vnde etiam momentum virium corpus sollicitantium respectu cuiusque flexurae, cuius axis situm tenet obliquum facili negotio deduxit. Regulam quoque dehinc tradidit, qua in vsum vocata, praecepta quae pro aequilibrio horum corporum valent, ad motum etiam eorum definiendum reuocari possunt, huius autem regulae applicationem in plurimis casibus, maximis difficultatibus obnoxiam esse obseruauit, imprimis quando nec axes iuncturarum inter se sunt paralleli, nec motus quasi in eodem plano fieret, considerari potest; quam ob rem consultum ipsi visum est eum tantum casum heic exponere, quo axes commemorati inter se sunt paralleli et motus in eodem plano peragitur. Pro hoc itaque casu docuit, qua ratione inueniendae sint vires ad motus variationem requisitae, dum corpus aliquod motu quocunque variato incedit et quodnam sit harum virium momentum respectu axis ad idem planum in quo motus sit perpendicularis. Egregiam vero huius problematis applicationem exhibuit, dum motum corporis ex tribus partibus, flexuris elasticis inter se iunctis compositi, et super plano aliquo vtcunque proiecti, explicat et per formulas differentiales definit; eiusdem vero quaestionis aliam demum adfert solutionem eo magis attentione dignam, quod licet in eadem non opus sit principium aequilibrii commemoratum in vsum vocare, ipsum tamen negotium per eam multo commodius conficiatur, quam per priorem.

II.

II.

Sectio prima de statu aequilibrii fluidorum.

Auctore L. Eulero pag. 305.

Longum omnino foret, si singula quae hac tractatione continentur, accurate exponere vellemus; quam ob rem, ne limites breuitatis, quas in hisce recensionibus obseruare fas est, transgrediamur, praecipua tantum capitum huius operis contenta explicare constituimus. In *primo* scilicet capite, doctrina de natura et varietate fluidorum pertractatur, naturam autem fluidorum Illustr. Auctor in singulari ista proprietate constituit, qua pressio quaelibet iis applicata per totam eorum massam ita diffunditur, vt omnes particulae eandem sentiant pressionem, quatenus nimirum ipsum fluidum in aequilibrio manet. Est autem dicta haec proprietas ita comparata, vt non solum omnibus corporibus fluidis competat, reliquis autem quae non sunt fluida, inesse non deprehendatur; sed etiam ex eadem, omnia tam motus fluidorum quam aequilibrii principia facili negotio deduci possunt, vnde in ea proprietate fluidorum naturam quoque recte collocari euidens est. Quod ad fluidorum varietatem attinet, illa imprimis in eo consistit, quod quaedam eorum ita sint comparata, vt quantumuis magna vi premantur, idem tamen volumen ſemper retineant, alia vero eius ſunt indolis, vt quo magis comprimantur, ad eo minus volumen redigantur, de vltima autem hac fluidorum ſpecie obſeruandum eſt, dari pro iisdem denſitatem tam maximam, quam minimam, quarum illa eſt, ad quam haec fluida redigerentur, ſi infinita vi comprimerentur, haec autem ea, quae reſpondet eorum ſtatui naturali, vbi nulla vi comprimente afficiuntur. Denique ad varietatem fluidorum etiam hoc ſpectat, quod a calore in maius ſpatium expandantur, a frigore vero in minus volumen contrahantur, vnde pro vario caloris gradu, maxima denſitatum variatio oritur. Caput *ſecundum* doctrinam continet de aequilibrio fluidorum, quatenus eadem a grauitate vel aliis ſimilibus viribus non affici ſupponuntur. Dum autem fluidum a vi quacunque externa vrgetur, non ſolum omnes fluidi partes ſed etiam vas in quo continetur in aequilibrio manent; ſcilicet ſi fluidum nullius compreſſionis ſit capax, omnino maximis viribus reſiſtere valet; ſin autem ſe comprimi patiatur, tum eousque vi externae cedet, donec eam denſitatem nactum fuerit, qua vlteriori compreſſioni reſiſtere poteſt, atque ex his quidem perſpicitur quod ſublata omni vi externa in fluidum agente, illud ſemper in aequilibrio contineatur, etiamſi nequidem vaſi cuipiam ſit incluſum. Pro determinanda iam preſſione, quae ex vi quacunque externa fluidum premente oritur, obſeruandum eſt,

quod

quod licet illa eodem modo definiatur pro fluidis compressionis capacibus, ac pro illis quae nullam admittunt compressionem, maximum tamen oriatur discrimen, si ad effectum, quem in densitatem horum fluidorum habet attendatur, nam in his densitas manet inuariabilis, in illis autem eadem dependet non solum a pressione, sed etiam a calore, qui in vnoquoque huius fluidi loco inuenitur; pro stabilienda vero mensura caloris, haec regula obseruari potest: calorem esse in directa ratione pressionis et inuersa densitatis. In Capite *tertio* aequilibrium fluidorum a viribus quibuscunque sollicitatorum generatim consideratur et regulae traduntur, quae semper locum obtinere debent, vt fluidum huiusmodi viribus acceleratribibus sollicitatum aequilibrium seruare possit. Dein vero exponitur quibusnam viribus afficiatur corpus solidum, quatenus eiusmodi fluido viribus internis sollicitato, vel totum vel qua aliquam sui partem immergitur, obseruatur autem hoc corpus easdem sustinere pressiones, quibus afficeretur ea fluidi massa, cuius nunc occupat locum, vbi tamen simul necesse est, vt cognita sit densitas, quae fluido huic in locum corporis substituto in singulis sui punctis competeret. Quas demum vires, vas cui fluidum inclusum est, ab eius pressione sustineat, in hoc quoque Capite docetur et quidem ostenditur vas perinde vrgeri, ac si fluidum vna cum ipso corpus constitueret solidum ab iisdem viribus sollicitatum. Sequens Caput

e 2 quar-

quartum theoriam aequilibrii fluidorum a sola grauitate sollicitatorum exponit, principia nimirum in priori capite stabilita, hic ad casum vis acceleratricis constantis, quae grauitatis nomine venit applicantur, atque tum quidem perspicitur corpus solidum fluido graui immersum, tanta vi sursum vrgeri, quanta est fluidi massa eius locum occupans, directio autem huius vis per centrum inertiae massae huius fluidae transibit, totum denique vas, cui fluidum includitur, deorsum premetur pondere totius massae fluidae et huius pressionis directio per centrum inertiae eiusdem massae transibit, aequilibrium vero pro hoc casu nullo modo subsistere potest, nisi gradus caloris in eadem altitudine per totam massam fuerit idem. Quo accuratius iam status iste aequilibrii cognoscatur, seorsim considerandа sunt fluida, prouti vel omnis compressionis expertia sunt, vel aliquam admittunt compressionem, vtraque autem fluidorum species maximum iterum admittit discrimen, prouti fluidum per totam massam fuerit homogeneum vel minus. Pro fluidis prioris speciei homogeneis, quae communiter afferuntur regulae Hydrostaticae valent, nimirum in his fluidis suprema superficies semper in idem planum horizontale cadit, pressio autem infra eandem vbique profunditati est proportionalis. De fluidis vero prioris speciei heterogeneis tenendum est, illa nullo modo in aequilibrio contineri posse, nisi in qualibet sectione horizontali densitas sit eadem, adeo-

adeoque haec fluida heterogenea secundum strata horizontalia inter se disposita esse oportet, hinc quoque caloris gradus in eadem altitudine idem esse debet, quod si obtineri non possit, nec aequilibrium subsistere poterit, sed fluida continuo motu agitabuntur. Quantum ad fluida posterioris speciei attinet, exhibuit quoque Illustr. Auctor pro illis conditiones aequilibrii, ex quibus colligitur ista fluida nunquam in aequilibrio manere, nisi in eadem altitudine omnes eorum particulae, eandem sentiant pressionem, vnde atmosphaera nostra nunquam in quiete erit, nisi omnes aeris particulae eadem densitate ad eandem altitudinem praeditae sint, atque hinc praecipua ventorum caussa sine dubio erit quaerenda in inaequali atmosphaerae eiusque particularum statu, in specie vero facillime hinc explicari potest ratio ventus illius perennis orientalis, qui inter tropicos obseruatur. Caput demum *quintum* explicationem continet aequilibrii fluidorum quatenus ad centra virium fixa sollicitantur, vbi conditiones praescribuntur, quae pro aequilibrio obtinendo locum inuenire debent, non solum si haec fluida ad vnicum punctum fixum vrgerentur; sed etiam si ad plura eiusmodi puncta fixa impellerentur, et pro casu quidem priori ostenditur ad aequilibrium obtinendum necesse esse, vt pressio ad aequales a centro virium distantias eadem sit, quam ob rationem omnia horum fluidorum strata aequilibrata figuram habebunt sphaericam, pro casu autem posteriori sufficit vt in stratis aequilibratis pressio vbique sit eadem, ipsa autem figura horum stratorum non amplius sit sphaerica, sed plerumque maxime irregularis. Atque huius denique posterioris casus consideratione adhibita iam definiri potest status aequilibrii fluidorum, quae ad centrum aliquod fixum sollicitata, simul a dato quodam axe fixo, viribus distantiis ab axe proportionalibus repelluntur, quo ipso determinatio figurae telluris nostrae absoluitur, tum vero et hinc erui potest status aequilibrii fluidorum tellurem nostram ambientium oceani nimirum et atmosphaerae, si insimul considerentur vires attrahentes, quibus a Sole vel Luna afficiuntur, vnde explicatio eorum phaenomenorum, quae in fluxu et refluxu maris cernuntur, aliorumque his similium, deduci potest.

PHYSI-

PHYSICA.

I.

De calore animalium dissertatio physico Experimentalis.

Auctore Iosepho Adamo Braunio.

pag. 419.

Calorem animalium internum Clarissimus Auctor in hac Dissertatione explorauit, quem quidem constantem repperit adeo, vt neque aetas in homine, neque sexus, neque temperamentum, aut aliae circumstantiae vel mutationes eum caloris gradum, cuique animali proprium vel augere vel imminuere possint, dummodo homo vel animal sanum fuerit. Vsus est thermometro Delisliano, quod quidem hominibus in os inseruit vel vrinae recens excretae cum requisitis cautelis immersit. Animalibus autem in abdomen apertum idem indidit, vel in sanguinem eorum ex vena incisa effluentem. Calor hominis sani 96 circiter graduum scalae Delislianae inuentus est, vel $97\frac{1}{3}$ graduum secundum *Fahrenheitianam*. Calor vituli aeque ac porcellae 90 gradibus Delislianis vel 104

Fab-

Fahrenh. aequalis eſt. Capellae, agni et ouis calor gradibus 92 *Del.*. 101$\frac{1}{5}$ *Fahrenh.* reſpondet. Aues calore ſuperant quadrupeda; ſiquidem plerique eorum vti anſeres, anates, gallinae, columbae 87 Del. 107$\frac{3}{5}$ *Fahr.*. rubeculae vero 84 Del. 111$\frac{1}{5}$ *Fahrenh.* caloris gradibus gaudeant. Animalia frigida vti piſces, ranae, inſecta, quamuis iis vnus alterue caloris gradus plerisque ab Autoribus adſcriptus ſit (vid. *Hall.* Phyſiol. Tom. II. pag. 28. 29. 30.) omni calore, niſi qui atmoſphaerae vel fluidis ambiantibus ineſt, deſtituta inuenta ſunt. Idemque de animalibus valet, quae hyemem dormiendo conſumunt, quo tempore nempe hanc vitam vegetabilem agunt. Poſt haec de maximo, quem homines et animalia ferre poſſint, caloris et frigoris gradu pauca diſſeruit Auctor. Denique hypotheſes perſtringit de modo, quo calor in ſanguine animalium producatur, eamque proponit ornatque, quae ſibi prae caeteris placuit.

II.

De ossibus Sibiriae fossilibus, craniis praesertim Rhinocerotum atque Buffalorum obseruationes,

vt et

Descriptio Leporis pusilli.

Auctore

P. S. Pallas pag. 436 et 521.

In priore harum dissertationum exhibentur descriptiones variorum ossium fossilium quae in borealibus praesertim Sibiriae regionibus reperta, Museum academicum ornant. Primum eorum, rarissimumque Rhinocerotis cranium est, cuius descriptionem Cl. Auctor proponit, quamque eo maiori cura exarauit, quod structura ossium huius animalis adhucdum minus nota sit; diligentissime itaque singulas huius cranii partes describit, simulque ostendit nullum in maxillis locum dari, cui dentes primores commode insererentur, atque hinc, omnes illos hallucinatos fuisse, qui Rhinoceroti duos in singula maxilla dentes primores adscripserunt. Cornua Rhinocerotum, post haec, examini subiicit, de quibus id tantum heic adnotabimus, quod praeter fibras

 lon-

longitudinales, ex quibus maximam partem composita esse, fossilia eorum specimina docuerunt, per interualla quoque coalescentia quadam, siue transversis inscriptionibus solidioris texturae vndata atque distincta sint, quorum auxilio fortiora, vsuique aptiora reddi credibile est. Hasce Rhinocerotum reliquias, sequuntur crania Buffalorum gigantea, admiratione curiosorum eo magis digna, quod animalia, quorum pars fuere, hodie tanta in rerum natura, nullibi exstent. Ex structura cornuum et conformatione ossium frontis apparet, illa non fuisse Vri vel Bisontis crania, sed ad Buffali genus referri debere; quod vero enormem eorum magnitudinem spectat, eius rationem in climate et laetiori pabulo quaerendam esse, cum Cl. Auctore statuimus. Vltimo loco fossile cornu Gazellae *recticornis*, variique Elephantorum dentes in Museo asseruati describuntur, eorumque delineatione, ossium Sibiriae fossilium enumerationi finis imponitur. De origine horum ossium varii varia tradideruut, nobis vero sufficiat solum modo Cl. Auctoris ea de re sententiam breuibus heic indicasse. Eo illa redit: quod neque diluuio neque alii cuidam inundationi adscribenda sit harum exuuiarum origo, sed quod ideo tanta copia in hisce regionibus reperiantur, quia hae terrae calidiori coelo temporibus omni traditione humana anterioribus fuerint suppositae, ita vt animalia ista ibi et viuere et speciem suam multiplicare potuerint, vbi nunc nil nisi ossa eorum supersunt.

Altera

Altera diſſertatio Leporis puſilli continet deſcriptionem atque hiſtoriam, animalculi ſingularis omnino ſtructurae, quodque Cl. Auctor praeterita hyeme, cum Transuolgenſes campos ingreſſus fuerit, prima vice vidit et cum aliis adhucdum ignotis ſpeciebus animalium iſtarum regionum obſeruauit. Externa ſua figura, multum equidem a vulgari Lepore recedit, eiusdem tamen cum illo generis eſſe, duplicati dentes et pedum vellus abunde docent; quod vero ſpecificas notas, quod internam ſtructuram; quod denique mores huius animalis ſpectat; id, quum breuius atque curatius, quam a Cl. Auctore factum eſt, tradi nequeat, ex ipſis Commentariis ad quos lectorem ablegamus, melius haurietur.

III.

De formatione inteſtinorum obſeruationes in ouis incubatis inſtitutae.

Pars III.

Phaenomena amnii ſpurii interna; vbi ſimul de formatione Meſenterii, Thoracis, abdominis alarumque et pedum agitur.

Auctore C. F. Wolff pag. 478.

Quae partes embryonis gallinacei in diſſertationibus, praecedenti Commentariorum Tomo inſertis, ſecundum externum habitum conſideratae ſunt, earum phaenomena interna anatomiae microſcopicae beneficio in praeſenti Diſſertatione deteguntur et explicantur. In amnio ſpurio, quod inuolucrum embryonis exterius eſt, rima anterius apparebat, fouea ampliori ſurſum ad regionem cardiacam, deorſum ad regionem pubis minori foueola terminata, quae ipſa ventriculi et inteſtini, quod rima hac non longius eſt in his embryonibus, cauitas eſſe dicebatur, ea ratione, vt membrana inteſtini ftini vbi, ex mefenterio continuatur, vtrinque a fe inuicem fecederet, ventriculo et inteftino apertis relictis, extrorfum et circa embryonem reflecteretur, amniumque fpurium eo modo produceret. Amnium fpurium igitur diffectum et apertum eft, vt, quaenam fint illae partes interiores, quae rimam foueamque cardiacam et inferiorem foueolam efficerent, ex quibusque amnii fpurii membrana continuaretur, pateret; res, vti dictum, inuenta eft. Ventriculus foueam cardiacam efficit, dum eius membranae in parte anteriori non clauduntur, fed relicto orificio, quod foueam illam refert, in amnium fpurium continuantur. Rimam fimili modo inteftinum medium producit; cuius membranae, anterius non claufae, vtrinque reflectuntur, in amnium fpurium lateraliter abeunt. Et foueola inferior denique ab inteftino recto efficitur, quod fimili ratione membranis fuis in parte fui fuperiori et anteriori reflexis in amnium fpurium tranfit. Haec vt breuiori negotio oftenderet Cl. Auctor, primum embryonem expofuit ex ouo IV dies incubato, in quo nempe hae partes adeo iam comparatae funt, vt facilius cognofcantur, nec dubium effe poffit, quin fint inteftinum et ventriculus, quae pro iis traduntur. Deinde easdem partes in primis fuis principiis in embryonibus duorum et trium dierum perfecutus eft. Eas partes in diuerfis his embryonibus anatomice defcripfit, mutationesque fucceffiue accedentes notauit.

Quum in describendis his embryonibus versaretur, non potuit omittere res quasdam in iis obvias, a themate quidem alienas, sed tamen haud minus notatu dignas, et quae pariter ac intestinorum formatio ad epigenesin ducunt. Eiusmodi sunt ortus thoracis et amnii veri; porro abdominis et mesenterii, denique alarum et pedum formatio. Vbi partes thoracis laterales, a costis formatae, oriri deberent, ex latere spinae dorsalis, ibi immediate oriri vidit in primis embryonibus amnium verum, sine mora reflexum, quod in foetu gallinaceo maturo ex termino totius trunci anteriori, nempe ex circulo vmbilicali abdominis oritur, certo hercle testimonio, nullum adhucdum exstitisse thoracem. Similiter de abdomine vidit angustissimas laminas vtrinque iuxta spinam dorsi positas, in amnium reflexas, quae vix regionem lumbarem de toto abdomine exhibent. Hae, dum successiue antrorsum prolongantur, cauitatem paulatim referunt, apertura tamen instructam, quae non minor est, quam cauitas in suo ambitu ipsa. Denique apertura constringitur, vt integer saccus abdominis inde oriatur, ad analogiam tubi cibarii, quem similiter primo tempore apertum esse retulimus. Laminae mesenterii, quae intestini et amnii spurii continuationes sunt, pariter ac latera intestinorum in primo principio separatae existunt, fossamque efficiunt, in qua facies anterior spinae dorsalis comparet. Deinde in vnam membranam coniunguntur, qua coniunctione

futura

ſutura illa oritur, in prioribus diſſertationibus deſcripta, quae fundus rimae et margo poſterior inteſtini eſt. Alarum et pedum primordia tubercula referunt ſimplicia, ex ſuperficie corporis vix eminentia, quae ſenſim denique prolongantur. In horum ſuperficie interiori noua tubercula prodeunt, quae digitorum principia ſunt.

Ex his omnibus tandem colligitur, partes corporis animalis minime omni tempore exſtitiſſe, et integras quidem; ſed partim productas, partim formatas eſſe ex aliis, prius productis.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

Expositio vtriusque obseruationis et Veneris et Eclipsis Solaris factae Petropoli in specula Astronomica.

Auctore Christ. Mayer pag. 541.

Continet praesens dissertatio recensionem istarum obseruationum, quae occasione transitus Veneris per discum Solis et Eclipsis Solis heic Petropoli in Obseruatorio Astronomico institutae sunt. Quum itaque principale momentum circa obseruationes Astronomicas instituendas sit exacta temporis veri cognitio, Cel. Auctor ante omnia obseruationes altitudinum Solis correspondentium a die 18 Maii vsque ad 23 eiusdem mensis attulit, ex quibus innotescit motum pedunculi sui a motu medio solis tantum 9″, 53 defecisse. His expositis, mentionem facit instrumentorum, quibus ipse eiusque Socii, ad obseruationem Veneris faciendam vsi sunt. Scilicet Cel. Auctor tubum Achromaticum *Dollondi* 18 ped, Cel. Prof. et Acad. Secret. *Euler* alterum eiusdem generis 7 ped. adhibuhibuerunt, Cl. vero Dnis *Stahl* et *Lexell* Telescopia Catoptrica *Schortii*, 3 ped. 6 dig. et $2\frac{1}{2}$ ped. inseruierunt. Hoc apparatu instructi, iam 23 Maii vesperi, Obseruatores nostri, solem vsque ad ipsius occasum contemplati sunt, sed nullum tamen Veneris ingredientis vestigium viderunt, nisi quod hora 9, 9′, 39″, macula nigra, rotunda Cel. Auctori appareret, quam pro Venere ingressum suum iam celebrante habuit. Hanc autem obseruationem Cel. Auctor ipse quoque pro dubia agnoscit, quippe quum eadem non conciliari queat, cum illis obseruationibus, quae alibi circa ingressum Veneris institutae sunt, nam ex iisdem sequeretur primum contactum Veneris externum ad minimum 3′ tardius euenire debuisse.

Sequenti mane licet limbus Solis admodum vndulabatur, Cel. tamen Auctori eiusque sociis, momenta quibus Venus e Sole egrediens, limbum Solis, tam interne quam externe contingere videbatur, satis exacte determinare licuit. Propter temporis vero breuitatem, quo Venus in Sole conspiciebatur, aliae obseruationes ad Veneris positionem determinandam capi non potuerunt, quam ea qua Cel. Prof. *Mayer* distantiam Veneris a limbo Solis australi, Micrometro Obiectiuo Tubo *Dollondiano* applicato dimensus est. Diametrum autem Veneris eodem Micrometro mensuratam, Cel. Auctor magnit. 57″ inuenit. Quod ad obseruationes circa Eclipsin Solarem factas attinet, monuisse sufficiat,

ficiat, quod praeter initium et finem feliciter obſeruatum, Celeb. Auctor, Micrometro obiectiuo partes lucidas diſci Solaris dimenſus ſit, Cel. vero Prof. *Euler* immerſiones et emerſiones macularum praecipuarum in Sole eo tempore conſpicuarum obſeruauit, quarum macularum poſitio deinceps ope micrometri obiectiui quoque determinata fuit.

INDEX

INDEX COMMENTARIORVM.

Mathematica.

Physico-Mathematica.

Physica.

Astronomica.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE CVRVA HYPERGEOMETRICA HAC AEQVATIONE EXPRESSA $y = 1.2.3\ldots\ldots x$.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Denotante hic littera x abſciſſam et y applicatam, aequatio haec immediate nonniſi pro iis abſciſſis, quae numeris integris exprimuntur, applicatarum quantitatem indicat; hinc enim ſi fuerint

abſciſſae x . . 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc.
erunt
applicatae y . . 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720 etc.

ita, vt dum abſciſſae ſecundum numeros naturales capiuntur, applicatae ſecundum progreſſionem hypergeometricam *Walliſii* progrediantur; quam ob cauſam etiam hanc curuam hypergeometricam appellari conueniet. Etſi autem per hanc aequationem innumerabilia quidem iſtius curuae puncta, ſed inter ſe diſcreta aſſignantur; vniuerſa tamen huius curuae indoles per eam aequationem definiri eſt cenſenda, ita vt cuique abſciſſae certa ac vi iſtius ipſius aequationis determinata reſpondeat applicata. Ratio enim huius aequationis omnino poſtulat, vt ſi abſciſſae cuicunque $x = p$ conueniat applicata $y = q$, tum abſciſſae $x = p + 1$ reſpondeat applicata $y = q(p+1)$ abſciſſae vero $x = p - 1$ haec applicata $y = \frac{q}{p}$. Quam ob rem neutiquam arbitrio noſtro relinquitur per infinita illa puncta data curuam quandam parabolici generis ducere, cum omnia plane eius puncta ex ipſa aequatione determinentur.

II.

Praeter has autem applicatas, quae abſciſſis per numeros integros expreſſis reſpondent, imprimis notari merentur, quae inter eas ex aequo interiacent; et omnes per eam, quam abſciſſae $x = \frac{1}{2}$ reſpondere et quantitati $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ aequari olim oſtendi, determinantur. Cum igitur ſit $\sqrt{\pi} = 1,77245385090548$; hae applicatae coniunctim tam pro abſciſſis poſitiuis quam negatiuis ſequenti modo ſe habebunt:

pro

pro abſciſſis poſitiuis x	eſt applicata y	pro abſciſſis negatiuis x	eſt applicata y
0	1	0	$+1$
$\frac{1}{2}$	0,8862269	$-\frac{1}{2}$	$+1,7724538$
1	1	-1	$\pm\infty$
$1\frac{1}{2}$	1,3293404	$-1\frac{1}{2}$	$-3,5449077$
2	2	-2	$\mp\infty$
$2\frac{1}{2}$	3,3233509	$-2\frac{1}{2}$	$+2,3632718$
3	6	-3	$\pm\infty$
$3\frac{1}{2}$	11,6317284	$-3\frac{1}{2}$	$-0,9453087$
4	24	-4	$\mp\infty$
$4\frac{1}{2}$	52,3427777	$-4\frac{1}{2}$	$+0,2700882$
5	120	-5	$\pm\infty$
$5\frac{1}{2}$	287,8852775	$-5\frac{1}{2}$	$-0,0600196$
6	720	-6	$\mp\infty$
$6\frac{1}{2}$	1871,2543038	$-6\frac{1}{2}$	$+0,0109126$
7	5040	-7	$\pm\infty$.

Hinc delineaui iſtam curuam in fig. 1. expreſſam quae ab abſciſſa negatiua $x=-1$, vbi applicata fit infinita vsque ad $x=3$, vbi fit $y=6$ porrigitur, hinc vero continuo in infinitam aſcendere eſt intelligenda; ſiniſtrorſum vero, vbi pro ſingulis abſciſſarum valoribus integris applicatae abeunt in aſymtotas, vltra $x=-1$ non expreſſi. Tab. I. Fig. 1.

III.

Conſideratio huius curuae plures ſuppeditat quaeſtiones haud parum curioſas, eius naturae accuratius cognoſcendae inſeruientes, quarum euolutio eo maiori attentione digna videtur, quod aequatio pro curua more solito explicari nequit. Huiusmodi quaestiones primo circa determinationem reliquorum curuae punctorum praeter ea, quae facile assignare licet, versantur. Deinde in singulis punctis positio tangentis insignem inuestigationem requirit, quo facilius tractus totius curuae definiri queat. Tum vero ex inspectione figurae perspicuum est inter abscissas $x=0$ et $x=1$, alicubi applicatam omnium minimam esse debere; cuius adeo tam locum quam ipsam quantitatem assignari operae erit pretium.

Praeterea vero inter binas abscissas negatiuas $-1, -2, -3, -4, -5$ etc. vbi applicatae in infinitum extenduntur, necesse est dari quoque applicatas minimas, quae quo magis sinistrorsum progrediamur, continuo minores euadunt, donec tandem prorsus euanescant. Denique etiam quaestio de radio curvaminis in singulis curuae punctis attentionem nostram meretur, isque imprimis curuae locus notatu dignus videtur, vbi curuatura est maxima, siquidem manifestum est, in elongatione ab axe curuae ramos continuo propius ad lineam rectam accedere. Has igitur quaestiones resoluere institui.

Quaestio prima.

Pro curua hypergeometrica inuenire aequationem continuam inter abscissam x *et applicatam* y, *quae aeque locum habeat, siue pro* x *capiatur numerus integer, siue fractus quicunque.*

4. Cum

4. Cum aequatio propofita $y = 1 . 2 . 3 \ldots\ldots x$ locum proprie habere nequeat, nifi x fit numerus integer, eam in aliam formam transfundi oportet, quae ab hac conditione fit liberata; quod pluribus modis per expreffiones in infinitum excurrentes fieri poteft, inter quas primum occurrit ifta:

$$y = \frac{1}{1+x}\left(\frac{2}{1}\right)^x \cdot \frac{2}{2+x}\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \frac{3}{3+x}\left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \frac{4}{4+x}\left(\frac{5}{4}\right)^x \cdot \text{ etc.}$$

qui factores in infinitum continuari debent. Ratio huius expreffionis inde eft manifefta, quod quo plures capiantur factores, veritas eo propius, fumtis autem infinitis, accurate obtineatur: fi enim factorum numerus fit $= n$, habetur

$$y = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{2}{2+x} \cdot \frac{3}{3+x} \cdot \ldots\ldots \frac{n}{n+x}(n+1)^x$$

cuius numerator fi ita repraefentetur:

$$1 . 2 . 3 \ldots\ldots x(x+1)(x+2)(x+3) \ldots n$$

denominator vero ita

$$(1+x)(2+x)(3+x) \ldots n(n+1)(n+2) \ldots (n+x)$$

deletis factoribus communibus prouenit

$$y = \frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots\ldots x}{(n+1)(n+2)(n+3) \ldots (n+x)}(n+1)^x.$$

Quare fi n fit numerus infinitus, ob denominatoris fingulos factores $= n+1$ eorumque numerorum $= x$, totus denominator per multiplicatorem $(n+1)^x$ tollitur, proditque aequatio propofita $y = 1 . 2 . 3 \ldots x$.

5. Haec forma aliquanto generalior reddi poteft; cum enim totum negotium eo redeat, vt multi-

multiplicator $(n+1)^x$ postremo denominatori $(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+x)$ aequiualeat, casu quo numerus n est infinitus, euidens est huic conditioni quoque satisfieri, si multiplicator ille in genere statuatur $(n+a)^x$ existente a numero quocunque finito; maxime vero hanc formulam ad institutum fore accommodatam, si litterae a medius quidam valor inter 1 et x veluti $a=\frac{1+x}{2}$ seu $a=\sqrt{x}$ tribuatur. Nunc vero necesse est hunc multiplicatarem $(n+a)^x$ in tot factores, quot numerus n continet vnitates, resolui, quod commode hac resolutione praestatur;

$$(n+a)^x=a^x.\left(\frac{a+1}{a}\right)^x.\left(\frac{a+2}{a+1}\right)^x.\left(\frac{a+3}{a+2}\right)^x\ldots\left(\frac{a+n}{a+n-1}\right)^x.$$

Quocirca pro abscissa quacunque x habebimus applicatam:

$$y=a^x.\frac{1}{1+x}\left(\frac{a+1}{a}\right)^x.\frac{1}{2+x}\left(\frac{a+2}{a+1}\right)^x.\frac{3}{3+x}\left(\frac{a+3}{a+2}\right)^x.\text{ etc. in infinitum}$$

quae expressio semper veritati est consentanea, quicunque numerus pro a accipiatur, promtissime autem ad veritatem perducet, si sumatur $a=\frac{1+x}{2}$, vnde fiet:

$$y=\left(\frac{1+x}{2}\right)^x.\frac{1}{1+x}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x.\frac{2}{2+x}\left(\frac{5+x}{3+x}\right)^x.\frac{3}{3+x}\left(\frac{7+x}{5+x}\right)^x.\text{ etc.}$$

quae expressio ex infinitis factoribus formae $\frac{m}{m+x}\left(\frac{a+m}{a+m-1}\right)^x$ praeter primum a^x constat, et quo plures quouis casu inuicem multiplicantur, eo propius ad ad veritatem accedetur. Hinc autem naſcitur prima expreſſio, ſi ſumatur $a = 1$.

6. Eo magis autem haec expreſſio ad vſum eſt accommodata, quo promtius factores ad vnitatem conuergunt, id quod euenit ſumendo $a = \frac{1+x}{2}$, tum vero calculus eo facilius expedietur, quo minores numeri loco x ſubſtituuntur, ſemper autem ſufficit applicatas pro abſciſſis x vnitate vel adeo nihilo minoribus inueſtigaſſe, quoniam inde facili negotio applicatae per abſciſſis $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$ etc. deriuantur. Sit igitur $x = \frac{\alpha}{\beta}$ exiſtente $\alpha < \beta$, eritque

$$y = \left(\frac{\alpha+\beta}{2\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{3\beta+\alpha}{\beta+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{2\beta}{\alpha+2\beta}\left(\frac{5\beta+\alpha}{3\beta+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{3\beta}{\alpha+3\beta}\left(\frac{7\beta+\alpha}{5\beta+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \text{etc.}$$

vnde applicatae poteſtas y^β ita prodit expreſſa:

$$y^\beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2\beta}\right)^\alpha \cdot \frac{\beta^\beta(3\beta+\alpha)^\alpha}{(\beta+\alpha)^\beta(\beta+\alpha)^\alpha} \cdot \frac{(2\beta)^\beta(5\beta+\alpha)^\alpha}{(2\beta+\alpha)^\beta(3\beta+\alpha)^\alpha} \cdot \frac{(3\beta)^\beta(7\beta+\alpha)^\alpha}{(3\beta+\alpha)^\beta(5\beta+\alpha)^\alpha} \text{ etc.}$$

Pro abſciſſa autem $x = -\frac{\alpha}{\beta}$ applicata y hinc colligetur

$$y^\beta = \left(\frac{2\beta}{\beta-\alpha}\right)^\alpha \cdot \frac{\beta^\beta(\beta-\alpha)^\alpha}{(\beta-\alpha)^\beta(3\beta-\alpha)^\alpha} \cdot \frac{(2\beta)^\beta(3\beta-\alpha)^\alpha}{(2\beta-\alpha)^\beta(5\beta-\alpha)^\alpha} \cdot \frac{(3\beta)^\beta(5\beta-\alpha)^\alpha}{(3\beta-\alpha)^\beta(7\beta-\alpha)^\alpha} \cdot \text{ etc.}$$

Sumamus exempli gratia $x = \frac{1}{2}$ et impetrabimus:

$$y^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{3 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 11}{5 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{6 \cdot 6 \cdot 15}{7 \cdot 7 \cdot 11} \cdot \frac{8 \cdot 8 \cdot 19}{9 \cdot 9 \cdot 15} \cdot \text{ etc.}$$

cuius factor in genere cum ſit $\frac{2n \cdot 2n \cdot (4n+3)}{(2n+1)(2n+1)(4n-1)} = \frac{16n^3+12nn}{16n^3+12nn-1}$ $= 1 + \frac{1}{(2n+1)^2(4n-1)}$, hinc intelligitur, quam promte hi factores ad vnitatem accedunt, erit igitur:

$$y^2 = \tfrac{3}{4}\left(1+\tfrac{1}{3^2.3}\right)\left(1+\tfrac{1}{5^2.7}\right)\left(1+\tfrac{1}{7^2.11}\right)\left(1+\tfrac{1}{9^2.15}\right)\left(1+\tfrac{1}{11^2.19}\right) \text{ etc.}$$

vbi quidem nouimus esse $y^2 = \frac{\pi}{4}$. Sin autem statuamus $x = -\frac{1}{2}$, cui conuenit $y = \sqrt{\pi}$ erit ex altera expressione

$$\pi = 4.\ \tfrac{2.\ 2.\ 1}{1.\ 1.\ 5}.\ \tfrac{4.\ 4.\ 5}{3.\ 3.\ 9}.\ \tfrac{6.\ 6.\ 9}{5.\ 5.\ 13}.\ \tfrac{8.\ 8.\ 13}{7.\ 7.\ 17}. \text{ etc.}$$

seu $\pi = 4\left(1-\frac{1}{1^2.5}\right)\left(1-\frac{1}{3^2.9}\right)\left(1-\frac{1}{5^2.13}\right)\left(1-\frac{1}{7^2.17}\right)$ etc. inde vero est $\pi = 3\left(1+\frac{1}{3^2.3}\right)\left(1+\frac{1}{5^2.7}\right)\left(1+\frac{1}{7^2.11}\right)\left(1+\frac{1}{9^2.15}\right)$ etc.

ita vt altera crescendo, altera decrescendo ad veritatem appropinquet.

7. Commodius autem calculus instituetur, si expressio nostra in singulis factoribus abrumpatur, tum enim sequentes formulae prodibunt continuo propius ad veritatem accedentes:

$$y = \frac{1}{1+x}\left(\frac{3+x}{2}\right)^x$$

$$y = \frac{1}{1+x}.\frac{2}{2+x}\left(\frac{5+x}{2}\right)^x$$

$$y = \frac{1}{1+x}.\frac{2}{2+x}.\frac{3}{3+x}\left(\frac{7+x}{2}\right)^x$$

$$y = \frac{1}{1+x}.\frac{2}{2+x}.\frac{3}{3+x}.\frac{4}{4+x}\left(\frac{9+x}{2}\right)^x$$

$$y = \frac{1}{1+x}.\frac{2}{2+x}.\frac{3}{3+x}.\frac{4}{4+x}.\frac{5}{5+x}\left(\frac{11+x}{2}\right)^x.$$

Quia

Quia si loco x scribatur $-x$ prodit applicata $= \frac{y}{x}$ erit per similes formulas:

$$y = \left(\frac{2+x}{2}\right)^{x-1}$$

$$y = \frac{2}{1+x}\left(\frac{4+x}{2}\right)^{x-1}$$

$$y = \frac{2}{1+x} \cdot \frac{3}{2+x}\left(\frac{6+x}{2}\right)^{x-1}$$

$$y = \frac{2}{1+x} \cdot \frac{3}{2+x} \cdot \frac{4}{3+x}\left(\frac{8+x}{2}\right)^{x-1}$$

$$y = \frac{2}{1+x} \cdot \frac{3}{2+x} \cdot \frac{4}{3+x} \cdot \frac{5}{4+x}\left(\frac{10+x}{2}\right)^{x-1}.$$

Quare posito $x = \frac{1}{2}$ pro applicata $y = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ duplex series formularum eo conuergentium resultat:

$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{4}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{4}{3}}$
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\sqrt{\frac{11}{4}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{9}}$
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}\sqrt{\frac{15}{4}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5}\sqrt{\frac{4}{13}}$
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}\sqrt{\frac{19}{4}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7}\sqrt{\frac{4}{17}}$
etc.	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}\sqrt{\frac{4}{21}}$
	etc.

8. Huiusmodi autem producta commodissime per logarithmos euoluuntur; ac primo quidem ex forma generali numerum quemcunque a implicante nanciscimur:

$$ly = x\,la + x\,l\frac{a+1}{a} + x\,l\frac{a+2}{a+1} + x\,l\frac{a+3}{a+2} + x\,l\frac{a+4}{a+3} \text{ etc.}$$
$$- l(1+x) - l\left(1+\frac{x}{2}\right) - l\left(1+\frac{x}{3}\right) - l\left(1+\frac{x}{4}\right) \text{ etc.}$$

et sumto $a = \frac{1+x}{2}$, vt haec series maxime conuergens reddatur:

$$ly = x\,l\tfrac{1+x}{2} + x\,l\tfrac{x+3}{x+1} + x\,l\tfrac{x+5}{x+3} + x\,l\tfrac{x+7}{x+5} + x\,l\tfrac{x+9}{x+7} \text{ etc.}$$
$$- l(1+x) - l(1+\tfrac{x}{2}) - l(1+\tfrac{x}{3}) - l(1+\tfrac{x}{4}) \text{ etc.}$$

Sumtis igitur his logarithmis naturalibus, cum ſit in genere:

$$x\,l\frac{x+2m+1}{x+2m-1} = \frac{2x}{x+2m} + \frac{2x}{3(x+2m)^3} + \frac{2x}{5(x+2m)^5} + \frac{2x}{7(x+2m)^7} + \text{etc.}$$

et $l(1+\frac{x}{m}) = \frac{2x}{x+2m} + \frac{2x^3}{3(x+2m)^3} + \frac{2x^5}{5(x+4m)^5} + \frac{2x^7}{7(x+2m)^7} + \text{etc.}$

ſequentem formam infinitis ſeriebus conſtantem adipiſcimur:

$$ly = x\,l\tfrac{1+x}{2} + \tfrac{2}{3}x(1-xx)\left(\tfrac{1}{(x+2)^3} + \tfrac{1}{(x+4)^3} + \tfrac{1}{(x+6)^3} + \tfrac{1}{(x+8)^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{2}{5}x(1-x^4)\left(\tfrac{1}{(x+2)^5} + \tfrac{1}{(x+4)^5} + \tfrac{1}{(x+6)^5} + \tfrac{1}{(x+8)^5} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{2}{7}x(1-x^6)\left(\tfrac{1}{(x+2)^7} + \tfrac{1}{(x+4)^7} + \tfrac{1}{(x+6)^7} + \tfrac{1}{(x+8)^7} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{2}{9}x(1-x^8)\left(\tfrac{1}{(x+2)^9} + \tfrac{1}{(x+4)^9} + \tfrac{1}{(x+6)^9} + \tfrac{1}{(x+8)^9} + \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

9. Primae ſeriei ſumamus definitum terminorum numerum qui ſit $= n$, et cum ſuperior pars ad vnicum membrum $x\,l(a+n)$ redigatur, erit

$$ly = x\,l(a+n) - l(1+x) - l(1+\tfrac{1}{2}x) - l(1+\tfrac{1}{3}x) \ldots\ldots - l(1+\tfrac{1}{n}x)$$

quae expreſſio eo propius ad veritatem accedit, quo maior capiatur numerus n. Sit igitur n numerus praemagnus ac primo quidem habebimus $l(n+a) = ln + \frac{a}{n} - \frac{aa}{2nn} + \frac{a^3}{3n^3} - \text{etc.}$ vbi loco a ſumi $\frac{1+x}{2}$ conueniet; tum vero poſita breuitatis gratia fractione $0{,}5772156649015325 = \Delta$, nouimus eſſe ſummam progreſſionis harmonicae:

$1 + \frac{1}{2}$

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\ldots\ldots+\tfrac{1}{n}=\Delta+ln+\tfrac{1}{2n}-\tfrac{1}{12nn}+\tfrac{1}{120n^4}-\text{etc.}$$

vnde cum ſit:

$$l(n+a)=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\ldots\ldots+\tfrac{1}{n}-\Delta-\tfrac{1}{2n}+\tfrac{1}{12nn}-\tfrac{1}{120nn^4}$$
$$+\tfrac{a}{n}-\tfrac{aa}{2nn}+\tfrac{a^3}{3n^3}$$

colligimus ſumto $a=\frac{a+x}{2}$

$$ly=-\Delta x+x+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x\quad\ldots\ldots+\tfrac{1}{n}x+\tfrac{xx}{2n}$$
$$-l(1+x)-l(1+\tfrac{1}{2}x)-l(1+\tfrac{1}{3}x)-l(1+\tfrac{1}{n}x)-\tfrac{x-6xx-3x^3}{24nn}.$$

Reuera ergo augendo numerum n in infinitum erit:

$$ly=-\Delta x+x\quad+\tfrac{1}{2}x\quad+\tfrac{1}{3}x\quad+\tfrac{1}{4}x\quad+\text{etc.}$$
$$-l(1+x)-l(1+\tfrac{1}{2}x)-l(1+\tfrac{1}{3}x)-l(1+\tfrac{1}{4}x)-\text{etc.}$$

et ſingulis logarithmis per ſeries euolutis:

$$ly=-\Delta x+\tfrac{1}{2}xx(1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{4^2}+\text{etc.})$$
$$-\tfrac{1}{3}x^3(1+\tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{4^3}+\text{etc.})$$
$$+\tfrac{1}{4}x^4(1+\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{4^4}+\text{etc.})$$
$$-\tfrac{1}{5}x^5(1+\tfrac{1}{2^5}+\tfrac{1}{3^5}+\tfrac{1}{4^5}+\text{etc.})$$
$$\text{etc.}$$

10. Praeter has autem formulas, quibus cuique abſciſſae x conueniens applicata y aſſignatur, methodus mea progreſſiones indefinite ſummandi ſingularem ſuppeditat expreſſionem ad eundem ſcopum accommodatam.

Cum enim ſit $ly=l1+l2+l3+l4\ldots+lx$ hanc progreſſionem indefinite ſummari oportet; introducendo autem valores numericos:

$A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{90}$, $C = \frac{1}{945}$, $D = \frac{1}{9450}$, $E = \frac{1}{93555}$, $F = \frac{691}{1.\,3.\,5.\,\ldots\ldots\,15.\,315}$ etc. quorum progreſſio ita eſt comparata vt ſit

$$5B = 2AA;\quad 7C = 4AB;\quad 9D = 4AC + 2BB;$$
$$11E = 4AD + 4BC \text{ etc.}$$

oſtendi alibi fore

$$ly = \tfrac{1}{2} l 2\pi + (x + \tfrac{1}{2}) l x - x + \frac{A}{2x} - \frac{1.\,2\,B}{2^3 x^3} + \frac{1.\,2.\,3.\,4\,C}{2^5 x^5}$$
$$- \frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6\,D}{2^7 x^7} + \text{etc.}$$

quae ſeries prae ſuperioribus hunc praeſtat vſum, vt quo maiores capiantur abſciſſae x eo promtius verum valorem applicatae y exhibeat. Cum igitur ſi abſciſſae x conueniat applicata y, abſciſſae maiori $x+n$ conueniat applicata $y(x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+n)$, habebimus ſemper per ſeriem valde conuergentem:

$$ly = \tfrac{1}{2} l 2\pi - l(x+1) - l(x+2) - l(x+3) \ldots\ldots - l(x+n)$$
$$+ (x + n + \tfrac{1}{2}) l(x+n)$$
$$- x - n + \frac{A}{2(x+n)} - \frac{1.\,2\,B}{2^3(x+n)^3} + \frac{1.\,2.\,3.\,4\,C}{2^5(x+n)^5} - \frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6\,D}{2^7(x+n)^7} + \text{etc.}$$

Quodſi ergo e denotet numerum, cuius logarithmus naturalis $= 1$, breuitatis gratia ponatur:

$$\frac{A}{2(x+n)} - \frac{1.\,2\,B}{2^3(x+n)^3} + \frac{1.\,2.\,3.\,4\,C}{2^5(x+n)^5} - \text{etc.} = s$$

concludimus a logarithmus ad numeros regrediendo

$$y = \frac{\sqrt{2\pi(x+n)}}{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+n)} \left(\frac{x+n}{e}\right)^{x+n} e^s$$

vbi numerus integer n arbitrio noſtro relinquitur, quo

quo maior is autem accipiatur, eo facilius verum valorem ipſius s iuuenire licet.

11. Denique etiam applicatam y per formulam integralem exhibere licet, poſita enim abſciſſa $x = p$, nouaque introducta variabili u, prae qua quantitas p vt conſtans tractetur, erit applicata $y = \int du (l\tfrac{1}{u})^p$ ſiquidem integratio a valore $u = 0$ vsque ad valorem $u = 1$ extendatur. Vel ſi forma exponentiali vti malimus, erit quoque

$$y = \int e^{-v} v^p \, dv$$

integrationem a valore $v = 0$ ad $v = \infty$ extendendo. Ex his quidem formulis, quoties abſciſſa p eſt numerus integer, integratio ſtatim praebet $y = 1 . 2 . 3 \ldots\ldots p$. at ſi p fuerit numerus fractus, hinc ſimul intelligitur ad quodnam genus quantitatum tranſcendentium valor ipſius y referri debeat. Alio autem loco oſtendi, quomodo tum integrale per quadraturas curuarum algebraicarum exprimi queat.

12. En ergo plurimas ſolutiones quaeſtionis noſtrae primae, qua pro qualibet abſciſſa x etiamſi numero non integro exprimatur, valor applicatae y reperiebatur: quarum praecipuas ſimul aſpectui expoſuiſſe iuuabit, vt inde quouis caſu ea, quae maxime ad vſum accommodata videatur, eligi queat:

I. $y = \frac{1}{1+x}\left(\frac{2}{1}\right)^x \cdot \frac{2}{2+x}\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \frac{3}{3+x}\left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \frac{4}{4+x}\left(\frac{5}{4}\right)^x \cdot$ etc.

II. $y = \left(\frac{1+x}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{1+x}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x \cdot \frac{2}{2+x}\left(\frac{5+x}{3+x}\right)^x \cdot \frac{3}{3+x}\left(\frac{7+x}{5+x}\right)^x \cdot$ etc.

III.

III. $ly = xl\frac{2}{1} + xl\frac{3}{2} + xl\frac{4}{3} + xl\frac{5}{4} + \text{etc.}$
$\qquad - l(1+x) - l(1+\frac{1}{2}x) - l(1+\frac{1}{3}x) - l(1+\frac{1}{4}x) - \text{etc.}$

IV. $ly = xl\frac{1+x}{2} + xl\frac{x+3}{x+1} + xl\frac{x+5}{x+3} + xl\frac{x+7}{x+5} + xl\frac{x+9}{x+7} + \text{etc.}$
$\qquad - l(1+x) - l(1+\frac{1}{2}x) - l(1+\frac{1}{3}x) - l(1+\frac{1}{4}x) - \text{etc.}$

V. $ly = -\Delta x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \text{etc.}$
$\qquad - l(1+x) - l(1+\frac{1}{2}x) - l(1+\frac{1}{3}x) - l(1+\frac{1}{4}x) - \text{etc.}$

VI. $ly = -\Delta x + \frac{1}{2}xx(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.})$
$\qquad + \frac{1}{3}x^3(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.})$
$\qquad + \frac{1}{4}x^4(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.})$
$\qquad + \frac{1}{5}x^5(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{etc.})$
$\qquad + \text{etc.}$

VII. $ly = \frac{1}{2}l2\pi + (x+\frac{1}{2})lx - x + \frac{A}{2x} - \frac{1.2B}{2^3 x^3} + \frac{1.2.3.4C}{2^5 x^7} - \frac{1.2\ldots 6D}{2^7 x^7} + \text{etc.}$

existente $\Delta = 0,57721566490014225$ et

$A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{90}$, $C = \frac{1}{945}$, $D = \frac{1}{9450}$, $E = \frac{1}{93555}$ etc.

Tum in tribus postremis formis logarithmos naturales accipi oportet.

Quaestio secunda.

In curua hypergeometrica ad quoduis eius punctum directionem tangentis definire.

13. Hic igitur assumimus pro quauis abscissa x valorem applicatae y iam esse inuentum; et cum directio tangentis ratione differentialium $\frac{dy}{dx}$ definiatur, quippe qua fractione tangens anguli, quo curvae

vna tangens in loco proposito ad axem inclinatur, exprimi solet, tantum opus est, vt quandam formularum inuentarum differentiemus. In hunc autem finem formula V maxime videtur idonea, ex qua colligimus:

$$\frac{dy}{y\,dx} = -\Delta + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{etc.}$$
$$-\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} - \frac{1}{4+x} - \text{etc.}$$

quae expressio in hanc concinniorem contrahitur:

$$\frac{dy}{y\,dx} = -\Delta + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{2(2+x)} + \frac{x}{3(3+x)} + \frac{x}{4(4+x)} + \text{etc.}$$

vnde statim patet, si x sit numerus integer negatiuus, fieri non solum applicatam y, sed etiam formulam $\frac{dy}{dx}$ infinitam, ita vt in his locis ipsae applicatae, vtpote asymtotae fiant tangentes. Ponamus autem in genere angulum, quem tangens cum axe constituit $= \Phi$ vt sit $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\,\Phi$.

14. Primum ergo hinc definiamus tangentes pro abscissis x, quae numeris positiuis exprimuntur, siquidem applicatae y sponte dantur.

I. Sit ergo $x = 0$, et ob $y = 1$ fit

$$\frac{dy}{dx} = -\Delta = -0,5772156649 = \text{tang.}\,\Phi$$

vnde fit angulus $\Phi = -29°, 59', 39''$, vbi signum $-$ indicat, tangentem dextrorsum in axem incidere, cum eoque angulum tantum non $30°$ constituere.

II. Sit $x = 1$ et ob $y = 1$ fit $\frac{dy}{dx} = 1 - \Delta = 0,422784335$ $= \text{tang.}\,\Phi$, hincque angulus $\Phi = 22°, 55'$.

III. Sit $x=2$ et ob $y=2$ fit $\frac{dy}{dx}=2(1+\frac{1}{2}-\Delta)=1,845568670$ $=\text{tang.}\,\Phi$ hincque angulus $\Phi=61^\circ,33'$.

IV. Sit $x=3$ et ob $y=6$ fit $\frac{dy}{dx}=6(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\Delta)=\text{tang.}\,\Phi$ seu $\text{tang.}\,\Phi=7,536706010$ et $\Phi=82^\circ,26'$.

V. Sit $x=4$ et ob $y=24$ fit $\frac{dy}{dx}=24(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\Delta)$ hincque $\text{tang.}\,\Phi=36,146824040$ et $\Phi=88^\circ,25'$.

In genere igitur si abscissa x aequetur numero integro cuicunque n, ob $y=1.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n$ erit

$$\frac{dy}{dx}=\text{tang.}\,\Phi=1.\,2.\,3\,.\,.\,.\,.\,n(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n}-\Delta).$$

15. Definiamus hinc etiam tangentes pro locis intermediis, ac primo quidem ad abscissas positiuas relatis:

I. Sit $x=\frac{1}{2}$, erit $y=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ atque

$$\frac{dy}{ydx}=-\Delta+1-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{5}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{7}\text{ etc.}$$

seu $\frac{dy}{ydx}=-\Delta+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\text{etc.})=-\Delta+2(1-l2)$

hincque $\frac{dy}{dx}=\text{tang.}\,\Phi=y(2(1-l2)-\Delta)=0,0364899739\,y$

II. Sit $x=\frac{3}{2}$ erit $y=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$ atque

$$\frac{dy}{ydx}=-\Delta+2(1+\tfrac{1}{3}-l2)\text{ vnde fit}$$

$\frac{dy}{dx}=\text{tang.}\,\Phi=y(2(1+\frac{1}{3}-l2)-\Delta)=0,7031566405\,y$

III. Sit $x=\frac{5}{2}$ erit $y=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}\sqrt{\pi}$ et $\frac{dy}{ydx}=-\Delta+2(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-l2)$

hinc $\text{tang.}\,\Phi=y(2(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-l2)-\Delta)=1,1031566405\,y.$

Cum

Cum nunc sit $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.(2(1-l2)-\Delta)=0,0323383973$ erit pro his casibus:

$$x=\tfrac{1}{2};\ y=\ 0,8862269 \quad \text{tang.}\,\Phi=\ 0,0323384$$
$$x=\tfrac{3}{2};\ y=\ 1,3293404 \quad \text{tang.}\,\Phi=\ 0,9347345$$
$$x=\tfrac{5}{2};\ y=\ 3,3233509 \quad \text{tang.}\,\Phi=\ 3,6661767$$
$$x=\tfrac{7}{2};\ y=11,6317284 \quad \text{tang.}\,\Phi=16,1549694$$
$$x=\tfrac{9}{2};\ y=52,3427777 \quad \text{tang.}\,\Phi=84,3290907$$

etc.

16. Antequam vlterius progrediar, obseruo si fuerit pro abscissa quacunque

$$x=p;\quad y=q;\quad \text{tang.}\,\Phi=r$$

tum pro abscissa sequente fore

$$x=p+1;\ y=q(p+1)\ \text{et}\ \text{tang.}\,\Phi=r(p+1)+q$$

pro abscissa autem antecedente

$$x=p-1;\ y=\frac{q}{p};\ \text{et}\ \text{tang.}\,\Phi=\frac{r}{p}-\frac{q}{pp}$$

vnde superiores valores facile retro continuare poterimus:

$$x=\ \tfrac{1}{2};\ y=\ 0,8862269;\ \text{tang.}\,\Phi=\ 0,0323384$$
$$x=-\tfrac{1}{2};\ y=\ 1,7724538;\ \text{tang.}\,\Phi=-3,4802308$$
$$x=-\tfrac{3}{2};\ y=-3,5449077;\ \text{tang.}\,\Phi=-0,1293538$$
$$x=-\tfrac{5}{2};\ y=+2,3632718;\ \text{tang.}\,\Phi=+1,6617504$$
$$x=-\tfrac{7}{2};\ y=-0,9453087;\ \text{tang.}\,\Phi=-1,0428236$$
$$x=-\tfrac{9}{2};\ y=+0,2700882;\ \text{tang.}\,\Phi=+0,3781176$$
$$x=-\tfrac{11}{2};\ y=-0,0600196;\ \text{tang}\,\Phi=-0,0966971$$
$$x=-\tfrac{13}{2};\ y=+0,0109126;\ \text{tang.}\,\Phi=+0,0195654$$

etc.

17. Eadem aequatio differentialis ei curuae puncto μ inueniendo inseruit, vbi applicata est minima seu tangens axi parallela. Posito igitur $\frac{dy}{dx}=0$, abscissa respondens x ex hac aequatione quaeri debet:

$$\Delta = \frac{x}{1+x} + \frac{x}{2(2+x)} + \frac{x}{3(3+x)} + \frac{x}{4(4+x)} + \frac{x}{5(5+x)} + \text{etc.}$$

quae euoluitur in hanc:

$$\begin{aligned} \Delta = &+ x\left(1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{4^2}+\text{etc.}\right)\\ &- x^2\left(1+\tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{4^3}+\text{etc.}\right)\\ &+ x^3\left(1+\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{4^4}+\text{etc.}\right)\\ &- x^4\left(1+\tfrac{1}{2^5}+\tfrac{1}{3^5}+\tfrac{1}{4^5}+\text{etc.}\right)\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Summis autem harum serierum proximis substitutis erit

$$\begin{aligned} 0 = &+0,5772156649 - 1,6449340668\,x\\ &+1,2020569032\,x^2 - 1,0823232337\,x^3\\ &+1,0369277551\,x^4 - 1,0173430620\,x^5\\ &+1,0083492774\,x^6 - 1,0040773562\,x^7\\ &+1,0020083928\,x^8 - 1,0009945751\,x^9\\ &+1,0004941886\,x^{10} - 1,0002460866\,x^{11}\\ &+1,0001227233\,x^{12} - 1,0000612481\,x^{13}\\ &+1,0000305882\,x^{14} - 1,0000152823\,x^{15}\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Sin autem duae primae fractiones retineantur, sequens series multo magis conuergens emergit.

0 =

$$
\begin{aligned}
0 = &+0,5772156649 - \tfrac{x}{1+x} - \tfrac{x}{2(1+x)} \\
&+0,0770569032\,x^2 - 0,3949340668\,x \\
&+0,0056777551\,x^4 - 0,0198232337\,x^3 \\
&+0,0005367774\,x^6 - 0,0017180620\,x^5 \\
&+0,0000552678\,x^8 - 0,0001711062\,x^7 \\
&+0,0000059074\,x^{10} - 0,0000180126\,x^9 \\
&+0,0000006530\,x^{12} - 0,0000019460\,x^{11} \\
&+0,0000000706\,x^{14} - 0,0000002130\,x^{13} \\
&+0,0000000078\,x^{16} - 0,0000000235\,x^{15}.
\end{aligned}
$$

Hinc proxime reperitur $x = \frac{1}{2}$, verum haec applicata minima facilius ope sequentis quaestionis definietur.

Quaestio tertia.

Pro dato quouis curuae hypergeometricae puncto, indolem portionis minimae istius curuae circa id punctum sitae inuestigare.

18. Pro abscissa ergo data $x = p$ inuenta sit applicata $y = q$; et nunc quaeri oportet applicatam, quae abscissae parumper ab illa discrepanti $p + \omega$ respondeat; quae applicata statuatur $= q + \psi$. Cum igitur sit secundum formulam V

$$
\begin{aligned}
lq = -\Delta p + p \quad &+ \tfrac{1}{2}p \quad + \tfrac{1}{3}p \quad + \tfrac{1}{4}p \quad + \text{etc.} \\
&- l(1+p) - l(1+\tfrac{1}{2}p) - l(1+\tfrac{1}{3}p) - l(1+\tfrac{1}{4}p) - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

si hic loco p scribatur $p + \omega$, loco lq prodibit valor ipsius $l(q+\psi)$, quo ipso quaestio resoluetur. At si ponamus $lq = P$, scribendo $p + \omega$ loco p notum est prodire

$$
l(q+\psi) = P + \frac{\omega dP}{1\,dp} + \frac{\omega^2 ddP}{1.2\,dp^2} + \frac{\omega^3 d^3P}{1.2.3\,dp^3} + \frac{\omega^4 d^4P}{1.2.3.4\,dp^4} + \text{etc.}
$$

Eſt vero vt vidimus:

$$\frac{dP}{dp} = -\Delta + \frac{p}{1+p} + \frac{p}{2(2+p)} + \frac{p}{3(3+p)} + \frac{p}{4(4+p)} + \text{etc.}$$

hincque porro:

$$\frac{ddP}{1.dp^2} = \frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(2+p)^2} + \frac{1}{(3+p)^2} + \frac{1}{(4+p)^2} + \text{etc.}$$

$$\frac{d^3P}{1.2\,dp^3} = -\frac{1}{(1+p)^3} - \frac{1}{(2+p)^3} - \frac{1}{(3+p)^3} - \frac{1}{(4+p)^3} - \text{etc.}$$

$$\frac{d^4P}{1.2.3\,dp^4} = \frac{1}{(1+p)^4} + \frac{1}{(2+p)^4} + \frac{1}{(3+p)^4} + \frac{1}{(4+p)^4} + \text{etc.}$$

etc.

vnde ob $P = lq$ colligimus:

$$l\left(1+\frac{\psi}{q}\right) = -\Delta\omega + \omega\left(\frac{p}{1+p} + \frac{p}{2(2+p)} + \frac{p}{3(3+p)} + \text{etc.}\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}\omega^2\left(\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(2+p)^2} + \frac{1}{(3+p)^2} + \text{etc.}\right)$$

$$-\tfrac{1}{3}\omega^3\left(\frac{1}{(1+p)^3} + \frac{1}{(2+p)^3} + \frac{1}{(3+p)^3} + \text{etc.}\right)$$

$$+\tfrac{1}{4}\omega^4\left(\frac{1}{(1+p)^4} + \frac{1}{(2+p)^4} + \frac{1}{(3+p)^4} + \text{etc.}\right)$$

$$-\tfrac{1}{5}\omega^5\left(\frac{1}{(1+p)^5} + \frac{1}{(2+p)^5} + \frac{1}{(3+p)^5} + \text{etc.}\right)$$

etc.

19. Hic iam coordinatae p et q vt conſtantes ſpectari poſſunt, quoniam litterae ω et ψ nouas coordinatas a dato curuae puncto ſumtas atque illis parallelas referunt; ex quarum relatione hic definita indoles curuae circa id punctum verſantis facile inveſtigatur. Quare cum iam innumerabilia curuae puncta aſſignauerimus, hinc tractus ſingularum curvae portionum inter bina illorum punctorum interiacentium vero proxime definiri poterit. Primo ſcilicet

ſcilicet ex illa aequatione differentiata colligitur vt ante inclinatio tangentis ad axem Φ, fitque

$$\frac{d\psi}{d\omega} = \text{tang.}\,\Phi = q\left(-\Delta + \frac{p}{1+p} + \frac{p}{2(2+p)} + \frac{p}{3(3+p)} + \text{etc.}\right).$$

Deinde ſi pro aequatione differentiali breuitatis gratia ponamus $d\psi = A d\omega + B\omega d\omega + C\omega^2 d\omega +$ etc. erit radius curuaturae in dato curuae puncto $= \frac{(1+A A)^{\frac{3}{2}}}{B} = B\frac{1}{\cos.\,\Phi^3}$ ob $A = \text{tang.}\,\Phi$. Eſt vero

$$B = \text{tang.}\,\Phi\left(-\Delta + \frac{p}{1+p} + \frac{p}{2(2+p)} + \frac{p}{3(3+p)} + \text{etc.}\right)$$
$$+ q\left(\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(2+p)^2} + \frac{1}{(3+p)^2} + \frac{1}{(4+p)^2} + \text{etc.}\right)$$

vnde ſi radius curuaturae ponatur $= r$ erit

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin.\,\Phi^2 \cos.\,\Phi}{q} + q\left(\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(2+p)^2} + \frac{1}{(3+p)^2} + \text{etc.}\right)$$

20. Quo autem inueſtigationem directionis et curuaturae ad curuae puncta a puncto principali coordinatis p et q definito extendere queamus, ponamus breuitatis cauſa

$$-\Delta + \frac{p}{1+p} + \frac{p}{2(2+p)} + \frac{p}{3(3+p)} + \frac{p}{4(4+p)} + \text{etc} = P$$
$$\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(2+p)^2} + \frac{1}{(3+p)^2} + \frac{1}{(4+p)^2} + \text{etc.} = Q$$
$$\frac{1}{(1+p)^3} + \frac{1}{(2+p)^3} + \frac{1}{(3+p)^3} + \frac{1}{(4+p)^3} + \text{etc.} = R$$
$$\frac{1}{(1+p)^4} + \frac{1}{(2+p)^4} + \frac{1}{(3+p)^4} + \frac{1}{(4+p)^4} + \text{etc.} = S$$
$$\text{etc.}$$

vt ſit $l\left(1+\frac{\psi}{q}\right) = P\omega + \frac{1}{2}Q\omega^2 - \frac{1}{3}R\omega^3 + \frac{1}{4}S\omega^4 - \frac{1}{5}T\omega^5 + \text{etc.}$

Iam

Iam hinc differentiando elicimus:

$$\frac{d\psi}{d\omega}=(q+\psi)(P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-T\omega^4+\text{etc.})$$

atque vlterius differentiando

$$\frac{dd\psi}{d\omega^2}=(q+\psi)(P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-T\omega^4+\text{etc.})^2$$
$$+(q+\psi)(Q-2R\omega+3S\omega^2-4T\omega^3+\text{etc.})$$

$$\frac{d^3\psi}{d\omega^3}=3(q+\psi)(Q-2R\omega+3S\omega^2-4T\omega^3+\text{etc.})(P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-\text{etc.})$$
$$+(q+\psi)(P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-T\omega^4+\text{etc.})^3$$
$$-(q+\psi)(2R-6S\omega+12T\omega^2-\text{etc.}).$$

His expeditis pro curuae puncto, quod conuenit abscissae $x=p+\omega$ et applicatae $y=q+\psi$ directio tangentis ita se habebit vt sit

$$\text{tang.}\,\Phi=\frac{d\psi}{d\omega}=(q+\psi)(P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-T\omega^4+\text{etc.}).$$

Tum vero posito radio curuaturae $=r$, nouimus fore

$$r=\left(1+\frac{d\psi^2}{d\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}}:\frac{dd\psi}{d\omega^2}=1:\frac{dd\psi}{d\omega^2}\,\text{cos.}\,\Phi^3$$

seu $\frac{1}{r}=\frac{dd\psi}{d\omega^2}\,\text{cos.}\,\Phi^3$, vnde pro variabilitate curuaturae elicimus:

$$-\frac{dr}{rrd\omega}=\frac{d^3\psi}{d\omega^3}\,\text{cos.}\,\Phi^3-\frac{3dd\psi}{d\omega^2}\cdot\frac{d\Phi}{d\omega}\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi^2.$$

Est vero $\frac{d\Phi}{\text{cos.}\,\Phi^2}=\frac{dd\psi}{d\omega}$ vnde conficitur:

$$-\frac{dr}{rrd\omega}=\frac{d^3\psi}{d\omega^3}\,\text{cos.}\,\Phi^3-3\left(\frac{dd\psi}{d\omega^2}\right)^2\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi^4.$$

Quae-

Quaeſtio quarta.

Naturam curuae hypergeometricae circa punctum eius infimum μ, vbi applicata eſt minima, inueſtigare.

21. Quoniam hoc punctum parum diſtat a loco, cui reſpondet abſciſſa $=\frac{1}{2}$ et applicata $=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ſtatuamus $p=\frac{1}{2}$ vt ſit $q=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, hincque primo quaeramus valores litterarum P, Q, R, S etc. qui prodibunt

$$P=-\Delta+\frac{1}{3}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.7}+\text{etc.}=2(1-l2)-\Delta=0{,}03648997397857$$

$$Q=\frac{4}{3^2}+\frac{4}{5^2}+\frac{4}{7^2}+\frac{4}{9^2}+\text{etc.} \qquad =0{,}93480220054468$$

$$R=\frac{8}{3^3}+\frac{8}{5^3}+\frac{8}{7^3}+\frac{8}{9^3}+\text{etc.} \qquad =0{,}41439832211716$$

$$S=\frac{16}{3^4}+\frac{16}{5^4}+\frac{16}{7^4}+\frac{16}{9^4}+\text{etc.} \qquad =0{,}23484850566707$$

$$T=\frac{32}{3^5}+\frac{32}{5^5}+\frac{32}{7^5}+\frac{32}{9^5}+\text{etc.} \qquad =0{,}14476040831276$$

$$V=\frac{64}{3^6}+\frac{64}{5^6}+\frac{64}{7^6}+\frac{64}{5^6}+\text{etc.} \qquad =0{,}09261290502029$$

$$W=\frac{128}{3^7}+\frac{128}{5^7}+\frac{128}{7^7}+\frac{128}{9^7}+\text{etc.} \qquad =0{,}06035822809843$$

Deinde vero eſt. $q=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=0{,}886226925452 74$.

22. Hinc iam ante omnia definiamus locum μ, vbi applicata eſt omnium minima, quem cum leues approximationes oſtendant reſpondere abſciſſae $x=0{,}4616$, poſito $p+\omega=\frac{1}{2}+\omega=0{,}4616$, colligitur proxime $\omega=-0{,}0383$, qui iam valor ex aequatione $\frac{d\psi}{d\omega}=0$ ſeu

$$P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-T\omega^4+\text{etc.}=0$$

accuratius inuestigari debet. Cum igitur sit prope $\omega = -\frac{1}{26}$ statuatur $\omega = -\frac{1}{26} - z$, et facta substitutione necesse est fiat . . . . $0{,}03648997397857 =$

$$
\begin{array}{l}
+0{,}03595393079018 + 0{,}934802200\,z \\
+0{,}00061301526940 + 0{,}031876794\,z + 0{,}414398\,zz \\
+0{,}00001336188585 + 0{,}001042227\,z + 0{,}027097\,zz \\
+0{,}00000031677900 + 0{,}000032945\,z + 0{,}001285\,zz \\
+0{,}00000000779479 + 0{,}000001013\,z + 0{,}000053\,zz \\
+0{,}00000000019538 + 0{,}000000030\,z + 0{,}000002\,zz \\
+0{,}00000000000496 \\
\qquad 13 \\
\hline
0{,}03658063271970 + 0{,}967755211\,z + 0{,}442835\,zz \\
0{,}03648997397857 \\
\hline
0 = 0{,}00009065874113 + 0{,}967755211\,z + 0{,}442835\,zz
\end{array}
$$

vnde reperitur $z = -0{,}0000936823$ hincque $\omega = -0{,}0383678552$.

Quocirca minima applicata $m\mu$ respondet, abscissae $Om = 0{,}4616321447$. Pro applicata vero $m\mu = q + \psi$ euolui oportet aequationem

$$l\left(1 + \frac{\psi}{q}\right) = P\omega + \tfrac{1}{2}Q\omega^2 - \tfrac{1}{3}R\omega^3 + \tfrac{1}{4}S\omega^4 - \tfrac{1}{5}T\omega^5 + \text{etc.}$$

ex qua colligitur $l\left(1 + \frac{\psi}{q}\right) = -0{,}000704053$ porroque $1 + \frac{\psi}{q} = 1 - 0{,}000703805$, ita vt fiat applicata minima $m\mu = q + \psi = 0{,}885603194$.

23. Definiamus iam in genere ex aequatione logarithmica valorem ipsius ψ ac calculo subducto obtinebimus:

$$\frac{\psi}{q} =$$

$$\frac{\psi}{q} = +0{,}0364899740\omega + 0{,}468066860\omega^2$$
$$- 0{,}121069221\,\omega^3 + 0{,}16321479\,\omega^4$$
$$- 0{,}09360753\,\omega^5 \quad \text{etc.}$$

qui termini si quidem ω valde paruum accipiatur sufficiant. Ponamus autem breuitatis gratia

$$\frac{\psi}{q} = \mathfrak{P}\omega + \mathfrak{Q}\omega^2 - \mathfrak{R}\omega^3 + \mathfrak{S}\omega^4 - \mathfrak{T}\omega^5 \text{ vt sit}$$
$$\mathfrak{P} = 0{,}0364899740; \quad \mathfrak{Q} = 0{,}468066860$$
$$\mathfrak{R} = 0{,}121069221 \quad ; \quad \mathfrak{S} = 0{,}16321479$$
$$\mathfrak{T} = 0{,}09360753$$

atque hinc habebimus:

$$\frac{d\psi}{d\omega} = q(\mathfrak{P} + 2\mathfrak{Q}\omega - 3\mathfrak{R}\omega^2 + 4\mathfrak{S}\omega^3 - 5\mathfrak{T}\omega^4)$$
$$\frac{dd\psi}{d\omega^2} = q(2\mathfrak{Q} - 6\mathfrak{R}\omega + 12\mathfrak{S}\omega^2 - 20\mathfrak{T}\omega^3).$$

Quodsi iam hinc radium curuaturae in loco infimo μ vbi est $\omega = -0{,}0383678552 3$ indagare velimus, quoniam ibi est $\frac{d\psi}{d\omega} = 0$, erit is $= \frac{d\omega^2}{dd\psi}$. Ponatur in hoc loco radius curuaturae $= r$ et cum sit

$$\frac{1}{r} = 2q(\mathfrak{Q} - 3\mathfrak{R}\omega + 6\mathfrak{S}\omega^2 - 10\mathfrak{T}\omega^3) = 0{,}9669949$$

prodit pro puncto μ radius curuaturae $r = 1{,}166893$.

24. Determinationes has puncti curuae infimi μ ideo omni studio inuestigaui, quod non sine ratione suspicari licebat quemadmodum hoc punctum singulari praerogatiua est praeditum, ita numeros eius indolem exhibentes elegantiam quandam in se esse complexuros, ac nisi satis simpliciter siue ratio-

 naliter

naliter siue irrationaliter exprimantur, ad simplicius saltem genus quoddam transcendentium quantitatum relatum iri. Praeter expectationem autem vsu venit, vt tale criterium elegantiae neque in abscissa $Om = 0,46163214477$ neque in applicata $m\mu = 0,8856031945$ neque in radio curuaturae ibidem $= 1,166893$ appareat; nulla enim affinitas neque cum numeris rationalibus neque irrationalibus duntaxat simplicioribus, neque cum quadratura circuli, nec logarithmis vel exponentialibus deprehenditur. Cum etiam si abscissa Om vt logarithmus consideretur, numerus ei conueniens aliquid promittere videri posset, hunc numerum quaesiui et inueni $= 1,5866616$, in quo autem nulla affinitas cum quantitatibus cognitis cernitur.

25. Antequam huic speculationi finem imponam, obseruasse iuuabit formulam $1.\ 2.\ 3\ldots\ldots x$ etiam per sequentem seriem indefinite exprimi posse:

$$x^x - x(x-1)^x + \frac{x(x-1)}{1.\ 2}(x-2)^x - \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3.}(x-3)^x + \text{etc.}$$

quippe quae quoties x est numerus integer positiuus sponte dat illud productum $1.\ 2.\ 3\ldots.x$. Hoc vero etiam praestat ista expressio latius patens:

$$a^x - x(a-1)^x + \frac{x(x-1)}{1.\ 2}(a-2)^x - \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}(a-3)^x + \text{etc.}$$

erit enim si loco x successiue substituantur numeri $0,\ 1,\ 2.\ 3$ etc. vt sequitur:

$a^0 = 1$

$a^0 = 1$
$a^1 - (a-1)^1 = 1$
$a^2 - 2(a-1)^2 + (a-2)^2 = 1.\,2$
$a^3 - 3(a-1)^3 + 3(a-2)^3 - (a-3)^3 = 1.\,2.\,3$
$a^4 - 4(a-1)^4 + 6(a-2)^4 - 4(a-3)^4 + (a-4)^4 = 1.\,2.\,3.\,4$
$a^5 - 5(a-1)^5 + 10(a-2)^5 - 10(a-3)^5 + 5(a-4)^5 - (a-5)^5 = 1.\,2.\,3.\,4.\,5.$
etc.

26. Manifesta haec quidem sunt ex iis, quae de differentiis cuiusque ordinis progressionum algebraicarum sunt demonstrata, verumtamen ex ipsa harum serierum natura veritas haud facile euincitur; vnde sequens demonstratio non superflua videtur. Cum pro exponentibus minoribus x res per se sit perspicua, ratiocinium ita instruo vt concessa pro casu $x = n$ veritate, eam quoque pro casu $x = n+1$ locum habere sim ostensurus.

Sit ergo

I. $a^n - n(a-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.\,2}(a-2)^n - \text{etc.} = \text{N} = 1.\,2.\,3 \ldots n$

et quia summa N non ab a pendet erit etiam

II. $(a-1)^n - n(a-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.\,2}(a-3)^n - \text{etc.} = \text{N}$

quae ab illa subtracta relinquit

III. $a^n - \frac{(n+1)}{1}(a-1)^n + \frac{(n+1)n}{1.\,2}(a-2)^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\,2.\,3}(a-3)^n + \text{etc.} = 0$

haec multiplicetur per a vt prodeat

IV. $a^{n+1} - \frac{(n+1)}{1}a(a-1)^n + \frac{(n+1)n}{1.\,2}a(a-2)^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\,2.\,3}a(a-3)^n + \text{etc.} = 0$

huic addatur aequatio II in $n+1$ ducta, nempe:

$$\text{V. } +(n+1)1(a-1)^n - \frac{(n+1)n}{1.\ 2}2(a-2)^n + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}3(a-3)^n - \text{etc} = (n+1)N$$

atque aggregatum IV + V dabit

$$\text{VI. } a^{n+1} - \frac{(n+1)}{1}(a-1)^{n+1} + \frac{(n+1)n}{1.\ 2}(a-2)^{n+1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}(a-3)^{n+1} + \text{etc.} = (n+1)N$$

vbi ob $N = 1.\ 2.\ 3 \ldots n$ erit $(n+1)N = 1.\ 2.\ 3 \ldots (n+1)$.

Euictum ergo est, quod si propositio nostra

$$a^x - x(a-1)^x + \frac{x(x-1)}{1.\ 2}(a-2)^x - \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}(a-3)^x + \text{etc.} = 1.\ 2.\ 3 \ldots x$$

vera fuerit casu $x = n$, eam quoque veram esse casu $x = n+1$. Quoniam igitur ea manifesto vera est casu $x = 1$, hinc sequitur eam quoque veram esse pro omnibus numeris integris positiuis loco x assumtis.

27. Quanquam autem haec expressio satis est elegans et omni attentione digna, tamen ad nostrum institutum, cui curua hypergeometrica est proposita, minus est accommodata quoniam pro casibus quibus x est numerus fractus, haec series non solum in infinitum excurrit, sed etiam si denominator est numerus par, terminos imaginarios complectitur, ita vt eius valorem ne appropinquando quidem colligere liceat. Ita posito $x = \frac{1}{2}$ prodit haec series infinita:

$$\sqrt{a} - \frac{1}{2}\sqrt{(a-1)} - \frac{1.}{2.}\frac{1}{4}\sqrt{(a-2)} - \frac{1.}{2.}\frac{1.}{4.}\frac{3}{6}\sqrt{(a-3)} - \frac{1.}{2.}\frac{1.}{4.}\frac{3.}{6.}\frac{5}{8}\sqrt{(a-4)} - \text{etc.}$$

cuius valorem esse $= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, vix quisquam ostendere poterit. Pari modo sumendo $x = -\frac{1}{2}$ ex superioribus quidem iam nouimus esse

$\sqrt{\pi} =$

$$\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{(a-1)}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\sqrt{(a-2)}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\sqrt{(a-3)}} + \text{etc.}$$

Nihilo vero minus vberior huius feriei inueftigatio geometris merito commendatur, imprimis fi ei amplior extenfio inducatur, atque hac forma repraefentetur:

$$s = x^n - m(x-1)^n + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(x-2)^n - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(x-3)^n + \text{etc.}$$

feui enim ftudio adhibito, mox admodum infignes proprietates deprehenduntur, quarum euolutio omnem attentionem noftram mereri videtur. Equidem quae mihi circa eam obferuare contigit phaenomena prorfus fingularia hic in medium afferam.

Obferuationes circa hanc feriem.

$$s = x^n - m(x-1)^n + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(x-2)^n - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(x-3)^n + \text{etc.}$$

I. In praecedentibus igitur iam demonftraui, fi fuerit exponens $n = m$, fore huius feriei fummam

$$s = 1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots m$$

ita vt ea hoc cafu non a numero x pendeat. Hinc autem primo colligo fi fuerit $n = m-1$, tum fore $s = 0$. Cum enim fumto $n = m$ fit

$$1 \ldots 1.\ 2.\ 3 \ldots m = x^m - m(x-1)^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(x-2)^m - \text{etc.}$$

erit fcribendo $x-1$ loco x et $m-1$ loco m fimili modo:

$$2 \ldots 1.2.3\ldots(m-1) = (x-1)^{m-1} - (m-1)(x-2)^{m-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}(x-2)^{m-1} - \text{etc.}$$

Iam

Iam illa aequatio hoc modo referatur:

♂ $.. 1.2.3 \ldots m = x.x^{m-1} - mx(x-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x(x-2)^{m-1} - \text{etc.}$
$+ m(x-1)^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1}(x-2)^{m-1} + \text{etc.}$

aequatio autem ♃ per m multiplicata dat:

☉ $1.2.3 \ldots m = m(x-1)^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1}(x-2)^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}(x-2)^{m-1} - \text{etc.}$

quae ab illa ♂ subtracta et diuisione per x facta praebet

♀ $0 = x^{m-1} - \frac{m}{1}(x-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}(x-2)^{m-1} - \text{etc.}$

quae est ipsa aequatio proposita pro casu $n = m - 1$, cuius idcirco valor est $= 0$.

II. Eodem modo ostenditur seriei propositae summam s quoque euanescere casu $n = m - 2$. Series enim illa ♀ hoc modo repraesentetur:

☿ $= 0 = x.x^{m-2} - \frac{m}{1} x(x-1)^{m-2} + \frac{m(m-1)}{1.2} x(x-2)^{m-2} - \text{etc.}$
$+ m(x-1)^{m-2} - \frac{m(m-1)}{1}(x-2)^{m-2} + \text{etc.}$

et si in eadem serie ♀ scribatur $x-1$ loco x et $m-1$ loco m, tota vero series per m multiplicetur, fit

☽ $..\quad 0 = m(x-1)^{m-2} - \frac{m(m-1)}{1}(x-2)^{m-2} + \text{etc.}$

Hac ab illa subtracta residuum per x diuidatur, prodibitque:

$$0 = x^{m-2} - \frac{m}{1}(x-1)^{m-2} + \frac{m(m-1)}{1.2}(x-2)^{m-2} - \text{etc.}$$

Sicque

Sicque seriei propositae summa s etiam euanescit casu $n = m - 2$, parique modo ostendi potest eam quoque euanescere casibus $n = m - 3$, $n = m - 4$, et in genere $n = m - i$, existente i numero quocunque integro positiuo. Teneatur ergo seriei propositae summam esse $s = 1 . 2 . 3 \ldots m$ casu $n = m$, casibus autem quibus exponens n minor est numero m summam in nihilum abire, siquidem numeri m et n sint integri, seu saltem $n - m$ numerus integer positiuus.

III. Quo igitur indolem reliquorum casuum perscrutemur singulos terminos nostrae seriei euoluamus et secundum potestates ipsius x disponamus, quo pacto consequemur:

$$
\begin{aligned}
s = {} & x^n \left(1 - m + \frac{m(m-1)}{1 . 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} + \text{etc.}\right) \\
& + n x^{n-1} \left(m - \frac{2m(m-1)}{1 . 2} + \frac{3m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} - \text{etc.}\right) \\
& - \frac{n(n-1)}{1 . 2} x^{n-2} \left(m - \frac{4m(m-1)}{1 . 2} + \frac{9m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} - \text{etc.}\right) \\
& + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} x^{n-3} \left(m - \frac{8m(m-1)}{1 . 2} + \frac{27m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} - \text{etc.}\right) \\
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

quarum singularum serierum summas sequenti modo inueniemus; prima aliquanto generalius exhibeatur, et cum eius summa sit cognita:

$$1 - mu + \frac{m(m-1)}{1 . 2} u^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} u^3 + \text{etc.} = (1-u)^m$$

continuo eam differentiemus, et perpetuo loco du restituamus u, fietque signis mutatis:

 mu

$$mu-\frac{2m(m-1)}{1\cdot2}u^2+\frac{3m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}u^3-\text{etc.}=mu(1-u)^{m-1}$$

$$mu-\frac{2^2m(m-1)}{1\cdot2}u^2+\text{etc.}=mu(1-u)^{m-1}-m(m-1)u^2(1-u)^{m-2}$$

$$mu-\frac{2^3m(m-1)}{1\cdot2}u^2+\text{etc.}=mu(1-u)^{m-1}-3m(m-1)u^2(1-u)^{m-2}$$
$$+m(m-1)(m-2)u^3(1-u)^{m-3}$$

$$mu-\frac{2^4m(m-1)}{1\cdot2}u^2+\text{etc.}=mu(1-u)^{m-1}-7m(m-1)uu(1-u)^{m-2}+6m(m-1)$$
$$(m-2)u^3(1-u)^{m-3}$$
$$+m(m-1)(m-2)(m-3)u^4(1-u)^{m-4}$$

etc.

Hic ergo iam ſcribi oportet $u=1$, quo facto omnes termini in quouis ordine euaneſcunt, praeter eos, vbi exponens ipſius $1-u$ fit $=0$.

IV. Tribuantur nunc ſucceſſiue ipſi m valores $1, 2, 3, 4, 5$ etc. et loco coefficientis in genere $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i)}{1\cdot2\cdot3\ldots(i+1)}$ ſcribatur breuitatis gratia $\left(\frac{n-i}{i+1}\right)$, quo facto nanciſcimur valores ſequentes:

ſi	erit
$m=1$	$\frac{s}{1}=\left(\frac{n}{1}\right)x^{n-1}-\left(\frac{n-1}{2}\right)x^{n-2}+\left(\frac{n-2}{3}\right)x^{n-3}-\left(\frac{n-3}{4}\right)x^{n-4}+\left(\frac{n-4}{5}\right)x^{n-5}-\text{etc.}$
$m=2$	$\frac{s}{1\cdot2}=\left(\frac{n-1}{2}\right)x^{n-2}-3\left(\frac{n-2}{3}\right)x^{n-3}+7\left(\frac{n-3}{4}\right)x^{n-4}-15\left(\frac{n-4}{5}\right)x^{n-5}+31\left(\frac{n-5}{6}\right)x^{n-6}-\text{etc.}$
$m=3$	$\frac{s}{1\cdot2\cdot3}=\left(\frac{n-2}{3}\right)x^{n-3}-6\left(\frac{n-3}{4}\right)x^{n-4}+25\left(\frac{n-4}{5}\right)x^{n-5}-90\left(\frac{n-5}{6}\right)x^{n-6}+301\left(\frac{n-6}{7}\right)x^{n-7}+\text{etc.}$
$m=4$	$\frac{s}{1\cdot2\ldots4}=\left(\frac{n-3}{4}\right)x^{n-4}-10\left(\frac{n-4}{5}\right)x^{n-5}+65\left(\frac{n-5}{6}\right)x^{n-6}-350\left(\frac{n-6}{7}\right)x^{n-7}+1701\left(\frac{n-7}{8}\right)x^{n-8}+\text{etc.}$
$m=5$	$\frac{s}{1\cdot2\ldots5}=\left(\frac{n-4}{5}\right)x^{n-5}-15\left(\frac{n-5}{6}\right)x^{n-6}+140\left(\frac{n-6}{7}\right)x^{n-7}-1050\left(\frac{n-7}{8}\right)x^{n-8}+6951\left(\frac{n-8}{9}\right)x^{n-9}+\text{etc.}$
$m=6$	$\frac{s}{1\cdot2\ldots6}=\left(\frac{n-5}{6}\right)x^{n-6}-21\left(\frac{n-6}{7}\right)x^{n-7}+266\left(\frac{n-7}{8}\right)x^{n-8}-2646\left(\frac{n-8}{9}\right)x^{n-9}+22827\left(\frac{n-9}{10}\right)x^{n-10}+\text{etc.}$

vbi

vbi formatio coefficientium numericorum ex antecedentibus est manifesta, est nempe pro postrema sexta serie:

$$21 = 6.1 + 15;\; 266 = 6.21 + 140;\; 2646 = 6.266 + 1050 \text{ etc.}$$

Atque hinc statim perspicitur, si fuerit $n < m$ valorem ipsius s euanescere, in postrema enim serie si $n < 6$ ideoque vel 5 vel 4 vel 3 etc. erit $\left(\frac{n-5}{6}\right) = 0$, $\left(\frac{n-6}{7}\right) = 0$ etc.

Tum vero etiam si sit $n = m$, euidens est fore $\frac{s}{1.2.3 \ldots m} = 1$, est enim in infima serie:

$$\left(\frac{6-5}{6}\right) = 1,\; \left(\frac{6-6}{7}\right) = 0,\; \left(\frac{6-7}{8}\right) = 0,\; \left(\frac{6-8}{9}\right) = 0 \text{ etc.}$$

Euolutio casuum $n = m + 1$.

V. Hinc primo casus euoluamus, quibus est $n = m + 1$, et forma postrema praebet

si	has summas
$m = 1, n = 2$	$\frac{s}{1} = 2x - 1$
$m = 2, n = 3$	$\frac{s}{1.2} = 3x - 3$
$m = 3, n = 4$	$\frac{s}{1.2.3} = 4x - 6$
$m = 4, n = 5$	$\frac{s}{1.2.3.4} = 5x - 10$
$m = 5, n = 6$	$\frac{s}{1.2 \ldots 5} = 6x - 15$
	etc

vbi priores coefficientes ipsius x ipsi n, numeri absoluti autem trigonalibus ipsius n aequentur, habebimus in genere

si sit	hanc aequationem
$n = m+1$	$\frac{s}{1.2 \ldots m} = \frac{(m+1)x}{1} - \frac{m(m+1)}{1.2} = (m+1)(x - \frac{m}{2})$

ita vt sit

$$x^{m+1} - m(x-1)^{m+1} + \frac{m(m-1)}{1.2}(x-2)^{m+1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(x-3)^{m+1} + \text{etc.}$$
$$= 1.2.3 \ldots\ldots (m+1)(x - \tfrac{m}{2}).$$

Euolutio casuum $n = m+2$.

VI. Pro his ergo casibus habebimus

si fuerit	has aequationes	
$m = 1, n = 3$	$\frac{s}{1} = 3x^2 - 3.1x + 1.1$	$= 3(xx - x + \frac{2}{6})$
$m = 2, n = 4$	$\frac{s}{1.2} = 6x^2 - 4.3x + 1.7$	$= 6(xx - 2x + \frac{7}{6})$
$m = 3, n = 5$	$\frac{s}{1.2.3} = 10x^2 - 5.6x + 1.25$	$= 10(xx - 3x + \frac{15}{6})$
$m = 4, n = 6$	$\frac{s}{1.2.3.4} = 15x^2 - 6.10x + 1.65$	$= 15(xx - 4x + \frac{26}{6})$
$m = 5, n = 7$	$\frac{s}{1.2.3.4.5} = 21x^2 - 7.15x + 1.140$	$= 21(xx - 5x + \frac{40}{6})$
$m = 6, n = 8$	$\frac{s}{1.2 \ldots 6} = 28x^2 - 8.21x + 1.266$	$= 28(xx - 6x + \frac{57}{6})$

etc.

quae formae ita repraesentari possunt

si fuerit	erit
$m = 1; n = 3$	$\frac{s}{1} = \frac{2.3}{1.2}(xx - x + \frac{1.4}{12})$
$m = 2; n = 4$	$\frac{s}{1.2} = \frac{3.4}{1.2}(xx - 2x + \frac{2.7}{12})$
$m = 3; n = 5$	$\frac{s}{1.2.3} = \frac{4.5}{1.2}(xx - 3x + \frac{3.10}{12})$
$m = 4; n = 6$	$\frac{s}{1.2.3.4} = \frac{5.6}{1.2}(xx - 4x + \frac{4.13}{12})$
$m = 5; n = 7$	$\frac{s}{1.2.3 \ldots 5} = \frac{6.7}{1.2}(xx - 5x + \frac{5.16}{12})$
$m = 6; n = 8$	$\frac{s}{1.2 \ldots 6} = \frac{7.8}{1.2}(xx - 6x + \frac{6.19}{12})$

vnde

vnde manifesto sequitur, si in genere sit $n = m + 2$ fore $\frac{s}{1 \cdot 2 \cdots m} = \frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \left(xx - mx + \frac{m(3m+1)}{12}\right)$

seu $\frac{s}{1 \cdot 2 \cdots m} = \frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \left(\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{m}{12}\right)$.

Ergo hinc obtinetur ista summatio

$$x^{m+2} - m(x-1)^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(x-2)^{m+2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x-3)^{m+2} + \text{etc.}$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+2)\left(\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{m}{2}\right)^2 + \tfrac{m}{24}\right).$$

Euolutio casuum $n = m + 3$.

VII. Pro his casibus habebimus

si fuerit	has aequationes
$m = 1;\ n = 4$	$\frac{s}{1} = 4x^3 - 6 \cdot 1x^2 + 4 \cdot 1x - 1 \cdot 1$
$m = 2;\ n = 5$	$\frac{s}{1 \cdot 2} = 10x^3 - 10 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 7x - 1 \cdot 15$
$m = 3;\ n = 6$	$\frac{s}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20x^3 - 15 \cdot 6x^2 + 6 \cdot 25x - 1 \cdot 90$
$m = 4;\ n = 7$	$\frac{s}{1 \cdot 2 \cdots 4} = 35x^3 - 21 \cdot 10x^2 + 7 \cdot 65x - 1 \cdot 350$
$m = 5;\ n = 8$	$\frac{s}{1 \cdot 2 \cdots 5} = 56x^3 - 28 \cdot 15x^2 + 8 \cdot 140x - 1 \cdot 1050$

quae hoc modo repraesententur:

$$\frac{s}{1} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 4}{4}x - \frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{8}\right)$$
$$\frac{s}{1 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(x^3 - \frac{6}{2}x^2 + \frac{2 \cdot 7}{4}x - \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{8}\right)$$
$$\frac{s}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3 \cdot 10}{4}x - \frac{3 \cdot 3 \cdot 4}{8}\right)$$
$$\frac{s}{1 \cdot 2 \cdots 4} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(x^3 - \frac{12}{2}x^2 + \frac{4 \cdot 13}{4}x - \frac{4 \cdot 4 \cdot 5}{8}\right)$$
$$\frac{s}{1 \cdot 2 \cdots 5} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{5 \cdot 16}{4}x - \frac{5 \cdot 5 \cdot 6}{8}\right)$$

etc.

 vnde

vnde in genere concluditur pro caſu $n = m + 3$

$$\frac{S}{1 \cdot 2 \cdots m} = \frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \cdot \frac{m+3}{3} \left(x^3 - \frac{3m}{2} x^2 + \frac{m(3m+1)}{4} x - \frac{mm(m+1)}{8} \right)$$

$$= \frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \cdot \frac{m+3}{3} \left(\left(x - \frac{m}{2}\right)^3 + \frac{m}{4}\left(x - \frac{m}{2}\right) \right)$$

ita vt iam conſequamur:

$$x^{m+3} - m(x-1)^{m+3} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(x-2)^{m+3} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x-3)^{m+3} \text{ etc.}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+3)\left(\tfrac{1}{6}\left(x - \tfrac{m}{2}\right)^3 + \tfrac{m}{24}\left(x - \tfrac{m}{2}\right) \right).$$

Praeparatio ad caſus ſequentes.

VIII. Cum §. 4. formulas tantum ad caſum $m = 6$ produxerimus, conemur pro iis formam generalem eruere. In hunc finem ſtatuamus $n = m + \lambda$, et ad abbreuiandum loco talis expreſſionis $\frac{k(k-1)(k-2)(k-3) \cdots (k-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots i}$ ſcribamus $\left(\frac{k}{i}\right)$ ita vt k denotet primum factorem numeratoris, i vero vltimum denominatoris. Ponamus igitur eſſe pro caſu

$m-1$ $\quad \frac{S}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)} = \left(\frac{m+\lambda}{m-1}\right) x^{\lambda+1} - A\left(\frac{m+\lambda}{m}\right) x^{\lambda} + B\left(\frac{m+\lambda}{m+1}\right) x^{\lambda-1} - C\left(\frac{m+\lambda}{m+2}\right) x^{\lambda-2}$ etc.

m $\quad \frac{S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} = \left(\frac{m+\lambda}{m}\right) x^{\lambda} - A'\left(\frac{m+\lambda}{m+1}\right) x^{\lambda-1} + B'\left(\frac{m+\lambda}{m+2}\right) x^{\lambda-2} - C'\left(\frac{m+\lambda}{m+3}\right) x^{\lambda-3}$ etc.

ita vt A', B', C', D' etc. ſint ii coëfficientes, quos inueſtigari oportet. Ex lege autem iſtarum formularum vidimus eſſe; $A' = m \cdot 1 + A$; $B' = mA' + B$; $C' = mB' + C$; $D' = mC' + D$ etc. vbi euidens eſt eſſe $A = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ et $A' = \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2}$ ſeu noſtro ſignando modo $A = \left(\frac{m}{2}\right)$ et $A' = \left(\frac{m+1}{2}\right)$. Iam pro ſequentibus operationibus obſeruo eſſe:

$$\left(\frac{m+\mu+1}{\nu}\right) - \left(\frac{m+\mu}{\nu}\right) = \left(\frac{m+\mu}{\nu-1}\right)$$

quod

quod facile inde patet, quod sit euoluendo:

$$\binom{m+\mu+1}{\nu} = \frac{(m+\mu+1)(m+\mu)(m+\mu-1)\ldots\ldots(m+\mu+2-\nu)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \nu}$$

$$\binom{m+\mu}{\nu} = \frac{(m+\mu)(m+\mu-1)\ldots\ldots(m+\mu+2-\nu)(m+\mu+1-\nu)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \ldots (\nu-1) \cdot \nu}$$

vnde perspicitur esse $\binom{m+1}{2} - \binom{m}{2} = \binom{m}{1} = m$.

IX. Iam vt fiat

$$B' - B = mA' = \binom{m+1}{2} m = 3\binom{m+1}{3} + \binom{m+1}{2}$$

statuamus $B = \alpha\binom{m+1}{4} + \beta\binom{m+1}{3}$

hincque $B' = \alpha\binom{m+2}{4} + \beta\binom{m+2}{3}$

prodibitque

$$B' - B = \alpha\binom{m+1}{3} + \beta\binom{m+1}{2}$$

vnde fit $\alpha = 3$ et $\beta = 1$ ita vt sit

$$B' = 3\binom{m+2}{4} + \binom{m+2}{3}.$$

Pro sequentibus operationibus autem notetur esse in genere:

$$\binom{m+\mu}{\nu} m = (\nu+1)\binom{m+\mu}{\nu+1} + (\nu-\mu)\binom{m+\mu}{\nu}$$

quippe quae forma prodit, si valor ipsius $\binom{m+\mu}{\nu}$ supra euolutus multiplicetur per

$$m = m+\mu-\nu+\nu-\mu = (\nu+1) \cdot \frac{m+\mu-\nu}{\nu+1} + (\nu-\mu).$$

X. His obseruatis cum esse debeat $C' - C = mB'$, ob

$$\binom{m+2}{4} m = 5\binom{m+2}{5} + 2\binom{m+2}{4}$$

et

et $\left(\frac{m+2}{3}\right) = 4\left(\frac{m+2}{4}\right) + 1\left(\frac{m+2}{3}\right)$ erit

$$mB' = 15\left(\frac{m+2}{5}\right) + 10\left(\frac{m+2}{4}\right) + 1\left(\frac{m+2}{3}\right)$$

statuatur ergo

$$C = 15\left(\frac{m+2}{6}\right) + 10\left(\frac{m+2}{5}\right) + 1\left(\frac{m+2}{4}\right)$$

hinc $C' = 15\left(\frac{m+3}{6}\right) + 10\left(\frac{m+3}{5}\right) + 1\left(\frac{m+3}{4}\right)$.

XI. Simili modo cum esse debeat $D'-D = mC'$ quia est

$$m\left(\frac{m+3}{6}\right) = 7\left(\frac{m+3}{7}\right) + 3\left(\frac{m+3}{6}\right)$$

$$m\left(\frac{m+3}{5}\right) = 6\left(\frac{m+3}{6}\right) + 2\left(\frac{m+3}{5}\right)$$

$$m\left(\frac{m+3}{4}\right) = 5\left(\frac{m+3}{5}\right) + 1\left(\frac{m+3}{4}\right)$$

erit

$$mC' = 105\left(\frac{m+3}{7}\right) + 105\left(\frac{m+3}{6}\right) + 25\left(\frac{m+3}{5}\right) + \left(\frac{m+3}{4}\right)$$

vnde colligimus

$$D' = 105\left(\frac{m+4}{8}\right) + 105\left(\frac{m+4}{7}\right) + 25\left(\frac{m+4}{6}\right) + 1\left(\frac{m+4}{5}\right)$$

XII. Porro ob $E'-E = mD'$ quia est

$$m\left(\frac{m+4}{8}\right) = 9\left(\frac{m+4}{9}\right) + 4\left(\frac{m+4}{8}\right)$$

$$m\left(\frac{m+4}{7}\right) = 8\left(\frac{m+4}{8}\right) + 3\left(\frac{m+4}{7}\right)$$

$$m\left(\frac{m+4}{6}\right) = 7\left(\frac{m+4}{7}\right) + 2\left(\frac{m+4}{6}\right)$$

$$m\left(\frac{m+4}{5}\right) = 6\left(\frac{m+4}{6}\right) + 1\left(\frac{m+4}{5}\right)$$

colli-

colligimus

$$mD^{\prime} = 945\left(\tfrac{m+4}{9}\right) + 1260\left(\tfrac{m+4}{8}\right) + 490\left(\tfrac{m+4}{7}\right) + 56\left(\tfrac{m+4}{6}\right) + 1\left(\tfrac{m+4}{5}\right)$$

hincque

$$E^{\prime} = 945\left(\tfrac{m+5}{10}\right) + 1260\left(\tfrac{m+5}{9}\right) + 490\left(\tfrac{m+5}{8}\right) + 56\left(\tfrac{m+5}{7}\right) + 1\left(\tfrac{m+5}{6}\right)$$

et vlterius progrediendo

$$F^{\prime} = 10395\left(\tfrac{m+6}{12}\right) + 17325\left(\tfrac{m+6}{11}\right) + 9450\left(\tfrac{m+6}{10}\right) + 1918\left(\tfrac{m+6}{9}\right) + 119\left(\tfrac{m+6}{8}\right) + \left(\tfrac{m+6}{7}\right).$$

Euolutio casus $n = m + \lambda$.

XIII. Pro serie ergo nostra casu quo $n = m + \lambda$

$$s = x^{m+\lambda} - \tfrac{m}{1}(x-1)^{m+\lambda} + \tfrac{m(m-1)}{1.2}(x-2)^{m+\lambda} - \tfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(x-3)^{m+\lambda} + \text{etc.}$$

si aequationem generalem supra §. VIII. exhibitam diuidamus per $\left(\tfrac{m+\lambda}{m}\right) = \tfrac{(m+\lambda)(m+\lambda-1)(m+\lambda-2)\ldots\ldots(\lambda+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ m}$

perueniemus ad hanc expressionem

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)} = x^{\lambda} - \frac{\lambda}{m+1} A^{\prime} x^{\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{(m+1)(m+2)} B^{\prime} x^{\lambda-2} - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)} C^{\prime} x^{\lambda-3} + \text{etc.}$$

vbi loco litterarum $A^{\prime}$, $B^{\prime}$, $C^{\prime}$, $D^{\prime}$ etc. sequentes valores substitui oportet:

$$A^{\prime} = \left(\tfrac{m+1}{2}\right) = \tfrac{(m+1)m}{1.\ 2}$$

$$B^{\prime} = 3\left(\tfrac{m+2}{4}\right) + \left(\tfrac{m+2}{3}\right)$$

$$C^{\prime} = 15\left(\tfrac{m+3}{6}\right) + 10\left(\tfrac{m+3}{5}\right) + \left(\tfrac{m+3}{4}\right)$$

$$D^{\prime} = 105\left(\tfrac{m+4}{8}\right) + 105\left(\tfrac{m+4}{7}\right) + 25\left(\tfrac{m+4}{6}\right) + \left(\tfrac{m+4}{5}\right)$$

$$E^{\prime} = 945\left(\tfrac{m+5}{10}\right) + 1260\left(\tfrac{m+5}{9}\right) + 490\left(\tfrac{m+5}{8}\right) + 56\left(\tfrac{m+5}{7}\right) + \left(\tfrac{m+5}{6}\right)$$

$$F^{\prime} = 10395\left(\tfrac{m+6}{12}\right) + 17325\left(\tfrac{m+6}{11}\right) + 9450\left(\tfrac{m+6}{10}\right) + 1918\left(\tfrac{m+6}{9}\right) + 119\left(\tfrac{m+6}{8}\right) + \left(\tfrac{m+6}{7}\right)$$

vbi est $10395 = 11.945$; $17325 = 10.1260 + 5.945$

$$\begin{aligned} 9450 &= 9.490 + 4.1260 \\ 1918 &= 8.56 + 3.490 \\ 119 &= 7.1 + 2.56 \\ 1 &= 6.0 + 1.1 \end{aligned}$$

hinc si pro valore sequente ponatur:

$$G' = \alpha\left(\frac{m+7}{14}\right) + \beta\left(\frac{m+7}{13}\right) + \gamma\left(\frac{m+7}{12}\right) + \delta\left(\frac{m+7}{11}\right) + \varepsilon\left(\frac{m+7}{10}\right)$$
$$+ \zeta\left(\frac{m+7}{9}\right) + \eta\left(\frac{m+7}{8}\right)$$

hi coefficientes ita determinabuntur:

$$\begin{aligned} \alpha &= 13.\,10395 \\ \beta &= 12.\,17325 + 6.\,10395 \\ \gamma &= 11.\,9450 + 5.\,17325 \\ \delta &= 10.\,1918 + 4.\,9450 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varepsilon &= 9.\,119 + 3.\,1918 \\ \zeta &= 8.\,1 + 2.\,119 \\ \eta &= 7.\,0 + 1.\,1 \end{aligned}$$

XIV. Iidem autem valores commodius ita exprimentur:

$$A' = \left(\frac{m+1}{2}\right).\,1$$

$$B' = \left(\frac{m+2}{3}\right)\left(1 + 3.\,\frac{m-1}{4}\right)$$

$$C' = \left(\frac{m+3}{4}\right)\left(1 + 10.\,\frac{m-1}{5} + 15.\,\frac{m-1}{5}.\,\frac{m-2}{6}\right)$$

$$D' = \left(\frac{m+4}{5}\right)\left(1 + 25.\,\frac{m-1}{6} + 105.\,\frac{m-1}{6}.\,\frac{m-2}{7} + 105.\,\frac{m-1}{6}.\,\frac{m-2}{7}.\,\frac{m-3}{8}\right)$$

$$E' = \left(\frac{m+5}{6}\right)\left(1 + 56.\,\frac{m-1}{7} + 490.\,\frac{m-1}{7}.\,\frac{m-2}{8} + 1260.\,\frac{m-1}{7}.\,\frac{m-2}{8}.\,\frac{m-3}{9}\right.$$
$$\left. + 945.\,\frac{m-1}{7}.\,\frac{m-2}{8}.\,\frac{m-3}{9}.\,\frac{m-4}{10}\right)$$

$$F' = \left(\frac{m+6}{7}\right)\left(1 + 119.\,\frac{m-1}{8} + 1918.\,\frac{m-1}{8}.\,\frac{m-2}{9} + 9450.\,\frac{m-1}{8}.\,\frac{m-2}{9}.\,\frac{m-3}{10}\right.$$
$$+ 17325.\,\frac{m-1}{8}.\,\frac{m-2}{9}.\,\frac{m-3}{10}.\,\frac{m-4}{11}$$
$$\left. + 10395.\,\frac{m-1}{8}.\,\frac{m-2}{9}.\,\frac{m-3}{10}.\,\frac{m-4}{11}.\,\frac{m-5}{12}\right)$$

cuius

cuius progressionis lex quo facilius perspiciatur, ponamus in genere

$$M' = \left(\frac{m+\mu-1}{\mu}\right)\left(1 + \alpha . \frac{m-1}{\mu+1} + \beta . \frac{m-1}{\mu+1} . \frac{m-2}{\mu+2} + \gamma . \frac{m-1}{\mu+1} . \frac{m-2}{\mu+2} . \frac{m-3}{\mu+3} + \text{etc.}\right.$$

et sequentem

$$N' = \left(\frac{m+\mu}{\mu+1}\right)\left(1 + \alpha' . \frac{m-1}{\mu+2} + \beta' . \frac{m-1}{\mu+2} . \frac{m-2}{\mu+3} + \gamma' . \frac{m-1}{\mu+2} . \frac{m-2}{\mu+3} . \frac{m-3}{\mu+4} + \text{etc.}\right.$$

atque hi coefficientes hoc modo per praecedentes determinantur

$$\begin{aligned} \alpha' &= 2\alpha + \mu + 1; \\ \beta' &= 3\beta + (\mu+2)\alpha \\ \gamma' &= 4\gamma + (\mu+3)\beta \\ \delta' &= 5\delta + (\mu+4)\gamma \\ \varepsilon' &= 6\varepsilon + (\mu+5)\delta \end{aligned}$$

vnde has formulas facile quousque libuerit continuare licet.

XV. Substituamus iam hos valores, ac pro summa s seriei propositae quando $n = m + \lambda$ obtinebimus sequentem expressionem:

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots\ldots(\lambda+m)} =$$

$$x^{\lambda} - \frac{\lambda m}{1 . 2} x^{\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)m}{1 . 2 . 3} x^{\lambda-2}\left(1 + \frac{3(m-1)}{4}\right)$$

$$- \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)m}{1 . 2 . 3 . 4} x^{\lambda-3}\left(1 + 10 . \frac{m-1}{5} + 15 . \frac{m-1}{5} . \frac{m-2}{6}\right)$$

$$+ \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)m}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} x^{\lambda-4}\left(1 + 25 . \frac{m-1}{6} + 105 . \frac{m-1}{6} . \frac{m-2}{7} + 105 . \frac{m-1}{6} . \frac{m-2}{7} . \frac{m-3}{8}\right)$$

$$- \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-4)m}{1 \ldots\ldots 5 . 6} x^{\lambda-5}\left(1 + 56 . \frac{m-1}{7} + 490 . \frac{m-1}{7} . \frac{m-2}{8} + 1260 . \frac{m-1}{7} \,..\, \frac{m-3}{9}\right.$$

$$\left. + 945 \frac{m-1}{7} \ldots \frac{m-4}{10}\right)$$

$$+ \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-5)m}{1 \ldots 6 . 7} x^{\lambda-6}\left\{1 + 119 . \frac{m-1}{8} + 1918 . \frac{m-1}{8} . \frac{m-2}{9} + 9450 . \frac{m-1}{8} \ldots \frac{m-3}{10}\right.$$

$$\left. + 17325 . \frac{m-1}{8} \ldots \frac{m-4}{11} + 10395 . \frac{m-1}{8} \ldots \frac{m-5}{12}\right\}$$

etc.

ſubtrahatur hinc primo poteſtas

$$(x-\tfrac{m}{2})^\lambda = x^\lambda - \frac{\lambda m}{2}x^{\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)m^2}{1.\,2.\,4}x^{\lambda-2} - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)m^3}{1.\,2.\,3.\,8}x^{\lambda-3}$$
$$+ \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-3)m^4}{1 \ldots\ldots 4.\,16}x^{\lambda-4} - \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-4)m^5}{1 \ldots\ldots 5.\,32}x^{\lambda-5}$$
$$+ \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-5)m^6}{1 \ldots\ldots 6.\,64}x^{\lambda-6} - \text{etc.}$$

Commode autem hic euenit vt ſit

$$\frac{15}{5.\,6} = \frac{4}{8};\ \frac{105}{6.\,7.\,8} = \frac{5}{16};\ \frac{945}{7.\,8.\,9.\,10} = \frac{6}{32};\ \frac{10395}{8.\,9.\,10.\,11.\,12} = \frac{7}{64}$$

cuius quidem rei ratio per ſe eſt perſpicua; quamobrem expreſſio ſuperior euoluta ſequentem induit formam

$$(x-\tfrac{m}{2})^\lambda + \frac{\lambda(\lambda-1)m}{1.\,2.\,3}x^{\lambda-2}.\tfrac{1}{4} - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)m}{1.\,2.\,3.\,4}x^{\lambda-3}.\tfrac{m}{2} + \frac{\lambda \ldots (\lambda-3)m}{1 \ldots 4.\,5}x^{\lambda-4}(\tfrac{5}{8}m^2 + \tfrac{5}{48}m - \tfrac{1}{24})$$
$$- \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-4)m}{1 \ldots\ldots 5.\,6}x^{\lambda-5}(\tfrac{5}{8}m^3 + \tfrac{5}{16}m^2 - \tfrac{1}{8}m)$$
$$+ \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-5)m}{1 \ldots\ldots 6.\,7}x^{\lambda-6}(\tfrac{35}{384}m^4 + \tfrac{35}{384}m^3 - \tfrac{91}{576}m^2 - \tfrac{7}{96}m + \tfrac{1}{36}).\ \text{etc.}$$

XVI. In hac expreſſione denuo poteſtas ipſius $x-\frac{m}{2}$ ſcilicet $\frac{\lambda(\lambda-1)m}{2.\,3.\,4}(x-\frac{m}{2})^{\lambda-2}$ contineri deprehenditur qua inde ſeparata expreſſio noſtra erit:

$$(x-\tfrac{m}{2})^\lambda + \frac{\lambda(\lambda-1)m}{2.\,3.\,4}(x-\tfrac{m}{2})^{\lambda-2} + \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-3)m}{1 \ldots\ldots 4.\,5}x^{\lambda-4}(\tfrac{5}{48}m - \tfrac{1}{24})$$
$$- \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-4)m}{1 \ldots\ldots 5.\,6}x^{\lambda-5}(\tfrac{5}{16}m^2 - \tfrac{1}{8}m)$$
$$+ \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-5)m}{1 \ldots\ldots 6.\,7}x^{\lambda-6}(\tfrac{35}{384}m^3 - \tfrac{91}{576}m^2 - \tfrac{7}{96}m + \tfrac{1}{36})\ \text{etc.}$$

in qua adhuc continetur $\frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-3)m}{1 \ldots\ldots 4.\,5}(\frac{5}{48}m - \frac{1}{24})(x-\frac{m}{2})^{\lambda-4}$ ac praeterea ſupereſt

$$\frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-5)m}{1 \ldots\ldots 6.\,7}x^{\lambda-6}(\tfrac{35}{576}m^2 - \tfrac{7}{96}m + \tfrac{1}{36})$$

vnde

vnde ſine dubio inſuper haec poteſtas accedit:

$$+\frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-5)m}{1 \ldots\ldots 6 \cdot 7}\cdot\frac{35m^2-42m+16}{576}\left(x-\frac{m}{2}\right)^{\lambda-6}.$$

Quocirca aequatio noſtra ita erit comparata:

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}=\left(x-\frac{m}{2}\right)^{\lambda}+\frac{\lambda(\lambda-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{m}{12}\left(x-\frac{m}{2}\right)^{\lambda-2}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-3)}{1\cdot 2\ldots 4}\cdot\frac{m(5m-2)}{240}\left(x-\frac{m}{2}\right)^{\lambda-4}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-5)}{1\cdot 2\ldots 6}\cdot\frac{m(35m^2-42m+16)}{4032}\left(x-\frac{m}{2}\right)^{\lambda-6}\text{ etc.}$$

XVII. En ergo ſeriei noſtrae propoſitae generalis:

$$s=x^{m+\lambda}-\frac{m}{1}(x-1)^{m+\lambda}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(x-2)^{m+\lambda}$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(x-3)^{m+\lambda}+\text{etc.}$$

eximiam transformationem, quae cum per plures ambages ſit eruta, ac pluribus operationibus admódum intricatis innixa, tantopere abſtruſa videtur, vt eius inueſtigatio directa ingentia ſubſidia in Analyſin ſit allatura. Quo autem facilius hanc transformationem perſcrutari liceat eam hoc modo repraeſentabo, vt ſit

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}=\left(x-\frac{m}{2}\right)^{\lambda}+\frac{\lambda(\lambda-1)}{1\cdot 2}\,P\left(x-\frac{m}{2}\right)^{\lambda-2}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-3)}{1\cdot 2\ldots 4}\,Q\left(x-\frac{m}{2}\right)^{\lambda-4}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-5)}{1\cdot 2\ldots 6}\,R\left(x-\frac{m}{2}\right)^{\lambda-6}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-7)}{1\cdot 2\ldots 8}\,S\left(x-\frac{m}{2}\right)^{\lambda-8}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-9)}{1\cdot 2\ldots 10}\,T\left(x-\frac{m}{2}\right)^{\lambda-10}$$
etc.

 pro

pro qua expreſſione hactenus quidem inueni

$$P = \frac{m}{3 \cdot 4}$$

$$Q = \frac{m(5m - 2)}{5 \cdot 6 \cdot 8}$$

$$R = \frac{m(35mm - 42m + 16)}{6 \cdot 7 \cdot 96}$$

$$S = \frac{m(175m^3 - 420m^2 + 404m - 144)}{34560}$$

ſed methodus deſideratur harum litterarum valores expedite inueniendi.

XVIII. Imprimis autem hic notaſſe iuuabit, ſeriem noſtram in aliam eſſe transmutatam, quae ſecundum poteſtates formulae $x - \frac{m}{2}$ ita progrediatur, vt earum exponentes ſint λ, $\lambda - 2$, $\lambda - 4$ etc. binario continuo decreſcentes; tum vero litteras P, Q, R, etc. a ſolo numero m pendere, ita vt neque exponens λ neque quantitas x in eas ingrediatur; praeterea vero coefficientes praefixos ſolum numerum λ implicare, ac legem progreſſionis ex euolutione binomii ortae ſeruare. Hac forma probe obſeruata manifeſtum eſt valores litterarum P, Q, R, S etc. ſeorſim ex ipſa ſerie propoſita vel ex eius transformata §. XV. cuius lex progreſſionis itidem eſt cognita elici poſſe, ſiquidem ponatur $x = \frac{m}{2}$ ſi enim tum capiatur $\lambda = 2$ fit $P = \frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}$ poſito autem $\lambda = 4$ fit $Q = \frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}$ at poſito $\lambda = 6$ fit $R = \frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}$

etc.

XIX.

XIX. Quodſi ergo hic loco $\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}$ ſeries ſupra §. XV. inuenta ſubſtituatur, atque in hunc finem breuitatis gratia ponatur:

$$\mathfrak{A} = 1$$

$$\mathfrak{B} = 1 + 3.\frac{m-1}{4}$$

$$\mathfrak{C} = 1 + 10.\frac{m-1}{5} + 15.\frac{m-1}{5}.\frac{m-2}{6}$$

$$\mathfrak{D} = 1 + 25.\frac{m-1}{6} + 105.\frac{m-1}{6}.\frac{m-2}{7} + 105.\frac{m-1}{6}.\frac{m-2}{7}.\frac{m-3}{8}$$

$$\mathfrak{E} = 1 + 56.\frac{m-1}{7} + 490.\frac{m-1}{7}.\frac{m-2}{8} + 1260.\frac{m-1}{7}\ldots\frac{m-3}{9}$$
$$+ 945.\frac{m-1}{7}\ldots\frac{m-4}{10}$$

$$\mathfrak{F} = 1 + 119.\frac{m-1}{8} + 1918.\frac{m-1}{8}.\frac{m-2}{9} + 9450.\frac{m-1}{8}\ldots\frac{m-3}{10}$$
$$+ 17325.\frac{m-1}{8}\ldots\frac{m-4}{11} + 10395.\frac{m-1}{8}\ldots\frac{m-5}{12}$$

etc.

adipiſcimur ſequentes valores

$$P = \frac{m^2}{2^2} - 2\mathfrak{A}\frac{m}{2}.\frac{m}{2} + \mathfrak{B}\frac{m}{3}$$

$$Q = \frac{m^4}{2^4} - 4\mathfrak{A}.\frac{m}{2}.\frac{m^3}{2^3} + 6\mathfrak{B}.\frac{m}{3}.\frac{m^2}{2^2} - 4\mathfrak{C}.\frac{m}{4}.\frac{m}{2} + \mathfrak{D}\frac{m}{5}$$

$$R = \frac{m^6}{2^6} - 6\mathfrak{A}.\frac{m}{2}.\frac{m^5}{2^5} + 15\mathfrak{B}.\frac{m}{3}.\frac{m^4}{2^4} - 20\mathfrak{C}.\frac{m}{4}.\frac{m^3}{2^3} + 15\mathfrak{D}.\frac{m}{5}.\frac{m^2}{2^2}$$
$$- 6\mathfrak{E}\frac{m}{6}.\frac{m}{2} + \mathfrak{F}.\frac{m}{7}$$

quem in finem valores illos litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. euolui conueniet, vnde prodit

$$\mathfrak{A} = 1$$

$$\mathfrak{B} = \tfrac{3}{4}m + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}(m + \tfrac{1}{3})$$

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{2}m = \tfrac{1}{2}(mm + m)$$

$\mathfrak{D} =$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{5}{16}m^3 + \tfrac{5}{8}m^2 + \tfrac{5}{48}m - \tfrac{1}{24} = \tfrac{5}{16}(m^3 + 2m^2 + \tfrac{1}{3}m - \tfrac{2}{15})$$

$$\mathfrak{E} = \tfrac{5}{16}m^4 + \tfrac{5}{8}m^3 + \tfrac{5}{16}m^2 - \tfrac{1}{8}m = \tfrac{6}{32}(m^4 + \tfrac{10}{3}m^3 + \tfrac{5}{3}m^2 - \tfrac{2}{3}m)$$

$$\mathfrak{F} = \tfrac{7}{64}m^5 + \tfrac{35}{64}m^4 + \tfrac{85}{64}m^3 - \tfrac{91}{576}m^2 - \tfrac{7}{96}m + \tfrac{1}{3}$$

seu . . . $\mathfrak{F} = \tfrac{7}{64}(m^5 + 5m^4 + 5m^3 - \tfrac{13}{9}m^2 - \tfrac{2}{3}m + \tfrac{16}{63})$

hic autem praeterquam in primis terminis nullus ordo perſpicitur

XX. Quod vero ſeries transformata ſecundum poteſtates quantitatis $x = \frac{m}{2}$ progrediatur, id quidem per ſolam inductionem agnouimus, verumtamen hoc neceſſario euenire ita oſtendi poteſt. Quoniam progreſſio propoſita ſimili modo deſinit, quo incipit, ita vt vltimi bini termini futuri ſint $\pm m (x - m + 1)^{m+\lambda} \mp (x - m)^{m+\lambda}$, vbi ſigna ſuperiora valent ſi m ſit numerus impar, inferiora vero ſi par; ſumamus m eſſe numerum parem, (eadem enim concluſio producitur ſi fuerit impar) et ponamus $x - \frac{m}{2} = y$, eritque

$$2s = +(y + \tfrac{1}{2}m)^{m+\lambda} - \tfrac{m}{1}(y + \tfrac{1}{2}m - 1)^{m+\lambda} + \tfrac{m(m-1)}{1.\,2}(y + \tfrac{1}{2}m - 2)^{m+\lambda}$$
$$+ (y - \tfrac{1}{2}m)^{m+\lambda} - \tfrac{m}{1}(y - \tfrac{1}{2}m + 1)^{m+\lambda} + \tfrac{m(m-1)}{1.\,2}(y - \tfrac{1}{2}m + 2)^{m+\lambda}$$

et facta euolutione ſecundum poteſtates ipſius $y = x - \frac{m}{2}$ reperitur;

$$s = y^{m+\lambda}(1 - \tfrac{m}{1} + \tfrac{m(m-1)}{1.\,2} - \text{etc.})$$
$$+ \left(\tfrac{m+\lambda}{2}\right) y^{m+\lambda-2}\left((\tfrac{m}{2})^2 - \tfrac{m}{1}(\tfrac{m}{2} - 1)^2 + \tfrac{m(m-1)}{1.\,2}(\tfrac{m}{2} - 2)^2 - \text{etc.}\right)$$
$$+ \left(\tfrac{m+\lambda}{4}\right) y^{m+\lambda-4}\left((\tfrac{m}{2})^4 - \tfrac{m}{1}(\tfrac{m}{2} - 1)^4 + \tfrac{m(m-1)}{1.\,2}(\tfrac{m}{2} - 2)^4 - \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

Hae

Hae ſeries autem omnes euaneſcunt, donec perueniatur ad eam in qua exponentes ſunt m, eiusque ſummam nouimus eſſe $= 1.\ 2.\ 3 \ldots . m$, omiſſis ergo prioribus, quarum ſumma ad nihilum reducitur, obtinebimus:

$$s = \left(\frac{m+\lambda}{m}\right) y^{\lambda} \left(\left(\frac{m}{2}\right)^m - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2} - 1\right)^m + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\left(\frac{m}{2} - 2\right)^m - \text{etc.} \right)$$
$$+ \left(\frac{m+\lambda}{m+2}\right) y^{\lambda-2} \left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m+2} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2} - 1\right)^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\left(\frac{m}{2} - 2\right)^{m+2} - \text{etc.} \right)$$
$$\text{etc.}$$

ſicque manifeſtum eſt, quod demonſtrare ſuſcepi, ſcilicet hanc ſeriem ſecundum poteſtates $y^{\lambda}, y^{\lambda-2}, y^{\lambda-4}$ etc. deſcendere.

XXI. Tribuamus huic ſeriei ſimilem formam ei quam §. XVII. habuimus, fietque

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots.(\lambda+m)} = \frac{y^{\lambda}}{1.\ 2 \ldots . m} \left(\left(\frac{m}{2}\right)^m - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2} - 1\right)^m + \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{1.\ 2\ y^{\lambda-2}}{1.\ 2 \ldots . (m+2)} \cdot \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.\ 2} \left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m+2} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2} - 1\right)^{m+2} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4\ y^{\lambda-4}}{1.\ 2 \ldots . (m+4)} \cdot \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-3)}{1.\ 2 \ldots . 4} \left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m+4} - \text{etc.} \right)$$
$$\text{etc.}$$

vnde valores litterarum P, Q, R etc. nouo modo ita determinare licet

$$P = \frac{1}{3.\ 4 \ldots (m+2)} \left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m+2} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2} - 1\right)^{m+2} + \text{etc.} \right)$$
$$Q = \frac{1}{5.\ 6 \ldots (m+4)} \left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m+4} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2} - 1\right)^{m+4} + \text{etc.} \right)$$
$$R = \frac{1}{7.\ 8 \ldots (m+6)} \left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m+6} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2} - 1\right)^{m+6} + \text{etc.} \right)$$
$$S = \frac{1}{9.\ 10 \ldots . (m+8)} \left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m+8} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2} - 1\right)^{m+8} + \text{etc.} \right)$$
$$\text{etc.}$$

Hic quidem similium serierum summatione opus est quoniam vero istae series solum numerum m inuoluunt, nostra inuestigatio ad casum simpliciorem perducti est censenda. Ceterum nunc demum certo agnoscimus has litteras tantum a numero m pendere.

XXII. Quodsi autem hic litterae m successiue tribuamus valores definitos 1. 2. 3. 4. 5. 6 etc. totidem inde valores pro litteris P, Q, R, S etc. consequemur, quibus cognitis, facile earum formas generales colligere licebit.

Ita pro littera P inuenienda reperiemus

si $m =$	0,	1,	2,	3,	4	etc.
$3.2^2 P =$	0,	1,	2,	3,	4	etc.
diff.		1,	1,	1,	1,	

ita vt hinc sit $3.2^2 P = m$ et $P = \frac{m}{2^2.3}$ vt ante.

Porro pro littera Q

si $m =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6
$2^4.3.5 Q =$	0,	3,	16,	39,	72,	115,	168
Diff. I.		3,	13,	23,	33,	43,	53
Diff. II.			10,	10,	10,	10,	10

erit ergo $2^4.3.5 Q = 3m + 10\frac{m(m-1)}{1.2} = m(5m-2)$, hincque $Q = \frac{m(5m-2)}{2^4.3.5}$.

Eodem

Eodem modo pro littera R

si $m = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3 \quad 4, \quad 5 \quad 6$

$2^6.3.7\,R = 0, \quad 3, \quad 48, \quad 205, \quad 544, \quad 1135, \quad 2048$

Diff. I. $\quad 3, \quad 45, \quad 157, \quad 339, \quad 591, \quad 913$

Diff. II. $\quad 42, \quad 112, \quad 182, \quad 252, \quad 322$

Diff. III. $\quad 70, \quad 70, \quad 70$

vnde concluditur $2^6.3.7\,R = 3m + 21m(m-1) + \frac{35}{3}m(m-1)(m-2)$

atque $R = \frac{m(35m^2 - 42m + 16)}{2^6.3^2.7}$

quos eosdem valores iam supra sumus nacti, hinc igitur eandem operationem ad litteras sequentes accommodemus.

XXIII. Pro littera igitur S habebimus:

si fuerit $m = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6$

$2^8.5.9\,S = 0, \quad 5, \quad 256, \quad 2013, \quad 7936, \quad 22085, \quad 49920$

Diff. I. $\quad 5, \quad 251, \quad 1757, \quad 5923, \quad 14149, \quad 27835$

Diff. II. $\quad 246, \quad 1506, \quad 4166, \quad 8226, \quad 13686$

III. $\quad 1260, \quad 2660, \quad 4060, \quad 5460$

IV. $\quad 1400, \quad 1400, \quad 1400$

vnde fit $2^8.5.9\,S = 5m + 123m(m-1) + 210m(m-1)(m-2) + \frac{175}{3}m(m-1)(m-2)(m-3)$

et $S = \frac{m(175m^3 - 420m^2 + 404m - 144)}{2^8.3.5.9}$.

Nunc porro pro littera T habebimus:

si fuerit $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$2^{10}.3.11\,T = 0, 3, 512, 7665, 46080, 174255, 499968$

Diff. I. $3, 509, 7153, 38415, 128175, 325713$

II. $506, 6644, 31262, 89760, 197538$

III. $6138, 24618, 58498, 107778$

IV. $18480, 33880, 49280$

V. $15400, 15400$

vnde fit $2^{10}.3.11\,T = 3m + 253m(m-1) + 1023m(m-1)(m-2)$

$+ 770m(m-1)(m-2)(m-3)$

$+ \frac{385}{3}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$

et $T = \frac{m(385m^4 - 1540m^3 + 2684m^2 - 2288m + 768)}{2^{10}.9.11}$.

XXIV. Hos nunc valores ita repraesentemus, quo facilius lex progressionis explorari possit:

$P = \frac{1m}{12}$

$Q = \frac{1.7m}{12^2}(m - \frac{2}{5})$

$R = \frac{1.3.5m}{12^3}(m^2 - \frac{6}{5}m + \frac{16}{35})$

$S = \frac{1.3.5.7m}{12^4}(m^3 - \frac{12}{5}m^2 + \frac{404}{175}m - \frac{144}{175})$

$T = \frac{1.3.5.7.9m}{12^5}(m^4 - \frac{20}{5}m^3 + \frac{244}{35}m^2 - \frac{208}{35}m + \frac{768}{385})$

atque hic in primis et secundis terminis lex progressionis ita est manifesta, vt iidem pro omnibus sequentibus litteris tuto assignari possint, in reliquis autem terminis nullam plane legem etiamnum obseruare licet

XXV.

XXV. Pro valore ergo litterae V inueniendo ſtatuamus

$$V = \frac{1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11\, m}{12^6} \left(m^5 - \tfrac{30}{5} m^4 + \alpha m^3 - \beta m^2 + \gamma m - \delta\right).$$

Ex forma autem generali

$$V = \frac{1}{13 . 14 \ldots (m+12)} \left(\left(\tfrac{m}{2}\right)^{m+12} - m\left(\tfrac{m}{2} - 1\right)^{m+12} + \tfrac{m(m-1)}{1 . 2}\left(\tfrac{m}{2} - 2\right)^{m+12} - \text{etc.}\right)$$

colligimus

ſi ſit fore

$$m = 1;\ V = \frac{1}{2^{12} . 13} = \frac{5 . 7 . 11}{2^{12} . 3^3}(-5 + \alpha - \beta + \gamma - \delta)$$

$$m = 2;\ V = \frac{1}{7 . 13} = \frac{5 . 7 . 11}{2^{11} . 3^3}(-64 + 8\alpha - 4\beta + 2\gamma - \delta)$$

$$m = 3;\ V = \frac{597871}{2^8 . 5 . 7 . 13} = \frac{5 . 7 . 11}{2^{12} . 3^2}(-243 + 27\alpha - 9\beta + 3\gamma - \delta)$$

$$m = 4;\ V = \frac{5461}{2^2 . 5 . 7 . 13} = \frac{5 . 7 . 11}{2^{10} . 3^3}(-512 + 64\alpha - 16\beta + 4\gamma - \delta)$$

$$m = 5;\ V = \frac{5838647}{2^{17} . 7 . 13} = \frac{25 . 7 . 11}{2^{12} . 3^3}(-625 + 125\alpha - 25\beta + 5\gamma - \delta)$$

$$m = 6;\ V = \frac{6047}{2^2 . 3 . 13} = \frac{5 . 7 . 11}{2^{11} . 3^2}(-0 + 216\alpha - 36\beta + 6\gamma - \delta).$$

Hinc ergo ſequentes formemus aequationes:

$$\alpha - \beta + \gamma - \delta = \frac{27}{5 . 7 . 11 . 13} + 5$$

$$8\alpha - 4\beta + 2\gamma - \delta = \frac{27 . 2048}{5 . 7^2 . 11 . 13} + 64$$

$$27\alpha - 9\beta + 3\gamma - \delta = \frac{9 . 597871}{5^2 . 7^2 . 11 . 13} + 243$$

$$64\alpha - 16\beta + 4\gamma - \delta = \frac{27 . 256 . 5461}{5^2 . 7^2 . 11 . 13} + 512$$

$$125\alpha - 25\beta + 5\gamma - \delta = \frac{27 . 5838647}{5^2 . 7^2 . 11 . 13} + 625$$

$$216\alpha - 36\beta + 6\gamma - \delta = \frac{3 . 512 . 6047}{5 . 7^2 . 11 . 13} + 0.$$

Differentiae nunc primae ita se habebunt

$$7\alpha - 3\beta + \gamma = \frac{27 \cdot 157}{5 \cdot 7^2 \cdot 11} + 59$$

$$19\alpha - 5\beta + \gamma = \frac{9 \cdot 41627}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} + 179$$

$$37\alpha - 7\beta + \gamma = \frac{9 \cdot 276629}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} + 269$$

$$61\alpha - 9\beta + \gamma = \frac{27 \cdot 841587}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} + 113$$

$$91\alpha - 11\beta + \gamma = \frac{8 \cdot 8373269}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} - 625$$

secundae vero per 2 diuisae dant

$$6\alpha - \beta = \frac{9 \cdot 268}{5^2 \cdot 7} + 60$$

$$9\alpha - \beta = \frac{9 \cdot 1513}{5^2 \cdot 7} + 45$$

$$12\alpha - \beta = \frac{9 \cdot 4858}{5^2 \cdot 7} - 78$$

$$15\alpha - \beta = \frac{8 \cdot 34409}{5^2 \cdot 7} - 369.$$

Tertiae tandem differentiae per 3 diuisae praebent

$$\alpha = \frac{9 \cdot 249}{5 \cdot 7} - 5 = \frac{8 \cdot 669}{5 \cdot 7} - 41 = \frac{3967}{5 \cdot 7} - 97$$

quae tres aequationes praebent eundem valorem

$$\alpha = \frac{572}{5 \cdot 7} = \frac{4 \cdot 11 \cdot 13}{5 \cdot 7}.$$

ex quo valore iam reliqui definiuntur sequenti modo

$$\beta = \frac{6 \cdot 572}{5 \cdot 7} - \frac{9 \cdot 268}{5^2 \cdot 7} - 60 = \frac{18 \cdot 1329}{5^2 \cdot 7} - 60 = \frac{4248}{175} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 59}{175}$$

$$\gamma = 3\beta - 7\alpha + \frac{27 \cdot 157}{5 \cdot 7^2 \cdot 11} + 59 = \frac{255968}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11}$$

$$\delta = \alpha - \beta + \gamma - \frac{27}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} - 5 = \frac{1061376}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}.$$

XXVI.

XXVI. Conſpectui ergo ſimul exponamus litterarum P, Q, R, etc. valores hactenus inuentos

$$P = \frac{1m}{12}$$

$$Q = \frac{1.3m}{12^2}\left(m - \frac{2}{5}\right)$$

$$R = \frac{1.3.5m}{12^3}\left(m^2 - \frac{6}{5}m + \frac{16}{35}\right)$$

$$S = \frac{1.3.5.7m}{12^4}\left(m^3 - \frac{12}{5}m^2 + \frac{404}{175}m - \frac{144}{175}\right)$$

$$T = \frac{1.3.5.7.9m}{12^5}\left(m^4 - \frac{20}{5}m^3 + \frac{244}{35}m^2 - \frac{208}{35}m + \frac{768}{385}\right)$$

$$V = \frac{1.3.5.7.9.11m}{12^6}\left(m^5 - \frac{30}{5}m^4 + \frac{572}{35}m^3 - \frac{4248}{175}m^2 + \frac{255968}{13475}m - \frac{1061376}{175175}\right)$$

Ex prioribus terminis concludo poteſtates hic occurrere, quibus ſeorſim poſitis ordo facilius perſpici poſſe videtur:

$$P = \frac{1m}{12}$$

$$Q = \frac{1.3m}{12^2}\left(m - \frac{2}{5}\right)^1$$

$$R = \frac{1.3.5m}{12^3}\left(\left(m - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{17}{175}\right)$$

$$S = \frac{1.3.5.7m}{12^4}\left(\left(m - \frac{4}{5}\right)^3 + \frac{4.17}{175}m - \frac{16.17}{5.175}\right)$$

$$T = \frac{1.3.5.7.9m}{12^5}\left(\left(m - \frac{5}{5}\right)^4 + \frac{2.17}{35}m^2 - \frac{4.17}{35}m + \frac{383}{385}\right)$$

$$V = \frac{1.3.5.7.9.11m}{12^6}\left(\left(m - \frac{6}{5}\right)^5 + \frac{4.17}{35}m^3 - \frac{72.17}{175}m^2 + \frac{581296}{5^3.7^2.11}m - \frac{78185568}{5^5.7^2.11.13}\right)$$

quin etiam proxime ſequentes termini hoc modo contrahi poſſint vt prodeat

$$P = \frac{1m}{12}$$

$$Q = \frac{1.3m}{12^2}\left(m - \frac{2}{5}\right)$$

$$R = \frac{1.3.5m}{12^3}\left(\left(m - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{17}{175}\right)$$

S=

$$S = \frac{1.3.5.7\,m}{12^4}\left(\left(m-\tfrac{4}{3}\right)^3 + \frac{4.17}{175}\left(m-\tfrac{4}{3}\right)\right)$$

$$T = \frac{1.3.5.7.9\,m}{12^5}\left(\left(m-\tfrac{5}{3}\right)^4 + \frac{10.17}{175}\left(m-\tfrac{5}{3}\right)^2 + \tfrac{9}{385}\right)$$

$$V = \frac{1.3.5.7.9.11\,m}{12^6}\left(\left(m-\tfrac{6}{3}\right)^5 + \frac{20.17}{175}\left(m-\tfrac{6}{3}\right)^3 + \frac{15808}{5^3.7^2.11}m - \frac{4672128}{5^5.7^2.11.13}\right).$$

Nisi vltimum valorem euoluissemus, videretur omnes has expressiones ad huiusmodi potestates reduci, quod autem nunc secus euenire agnoscimus. Quocirca ex alio fonte in legem harum litterarum inquiri oportebit.

XXVIII. Singulos igitur terminos harum formarum potius euolutos repraesentemus:

$$P = \frac{m}{4.3}$$

$$Q = \frac{mm}{16.3} - \frac{m}{8.3.5}$$

$$R = \frac{5m^3}{64.9} - \frac{mm}{32.3} + \frac{m}{4.9.7}$$

$$S = \frac{5.7\,m^4}{256.27} - \frac{7\,m^3}{64.9} + \frac{101\,m^2}{64.27.5} - \frac{m}{16.3.5}$$

$$T = \frac{5.7\,m^5}{1024.9} - \frac{5.7\,m^4}{256.9} + \frac{61\,m^3}{256.9} - \frac{13\,m^2}{64.9} + \frac{m}{4.3.11}$$

$$V = \frac{5.7.11\,m^6}{4096.27} - \frac{5.7.11\,m^5}{2048.9} + \frac{1573\,m^4}{1024.27} - \frac{649\,m^3}{512.3.5} + \frac{7990\,m^2}{128.27.5.7} - \frac{691\,m}{8.9.5.7.13}$$

vbi quidem inter terminos primos et secundos iam ordinem obseruauimus postremi autem omni ordine destituti videbantur, quoad valore etiam litterae V, euoluto numerus 691 criterium nobis suppeditauerit, in his postremis terminis numeros *Bernoullianos* implicari.

Desi-

Deſignemus ergo numeros *Bernoullianos* litteris α, β, γ, δ etc. vt ſit

$$\alpha = \tfrac{1}{2};\ \beta = \tfrac{1}{6};\ \gamma = \tfrac{1}{6};\ \delta = \tfrac{3}{10};\ \varepsilon = \tfrac{5}{6};\ \zeta = \tfrac{691}{210} \text{ etc.}$$

et inter eos notemus hanc legem progreſſionis:

$$\alpha = \tfrac{1}{2^1}$$

$$\beta = \frac{5.4\,\alpha}{2^2.1.2.3} - \tfrac{2}{2^3}$$

$$\gamma = \frac{7.6\,\beta}{2^2.1.2.3} - \frac{7.6.5.4\,\alpha}{2^4.1.2\ldots5} + \tfrac{3}{2^5}$$

$$\delta = \frac{9.8\,\gamma}{2^2.1.2.3} - \frac{9.8.7.6.\,\beta}{2^4.1.2\ldots5} + \frac{9\ldots\ldots4\,\alpha}{2^6.1\ldots\ldots7} - \tfrac{4}{2^7}$$

$$\varepsilon = \frac{11.10\,\delta}{2^2.1.2.3} - \frac{11\ldots\ldots8\,\gamma}{2^4.1\ldots\ldots5} + \frac{11\ldots\ldots6\,\beta}{2^6.1\ldots\ldots7} - \frac{11\ldots\ldots4\,\alpha}{2^8.1\ldots\ldots9} - \tfrac{5}{2^9}$$

$$\zeta = \frac{13.12\,\varepsilon}{2^2.1.2.3} - \frac{13\ldots\ldots10\,\delta}{2^4.1\ldots\ldots5} + \frac{13\ldots\ldots8\,\gamma}{2^6.1\ldots\ldots7} - \frac{13\ldots\ldots6\,\beta}{2^8.1\ldots\ldots9} + \frac{13\ldots\ldots4\,\alpha}{2^{10}.1\ldots11} - \tfrac{6}{2^{11}}.$$

etc.

Ac poſtremi litterarum P, Q, R, S etc. termini ita concinne referri poterunt

$$\frac{\alpha m}{2.3};\ \frac{\beta m}{4.5};\ \frac{\gamma m}{6.7};\ \frac{\delta m}{8.9};\ \frac{\varepsilon m}{10.11};\ \frac{\zeta m}{12.13}.$$

XXIX. Quo autem nunc etiam inueſtigemus quomodo ipſae litterae P, Q, R, S etc. progrediantur, a qualibet eiusmodi multiplum praecedentis auferamus, vt primi termini tollantur, et quia has litteras praecedit littera $O = 1$, habebimus:

$$P - \tfrac{m}{12}O = 0$$

$$Q - \frac{3m}{12}P = -\frac{\beta m}{4.5}$$

$$R - \frac{5m}{12}Q = -\frac{mm}{16.9} + \frac{\gamma m}{6.7} = -\tfrac{m}{12}P + \frac{\gamma m}{6.7}$$

$$S - \frac{7m}{12}R = -\frac{7.m^3}{128.9} + \frac{3m^2}{16.5} - \frac{\delta m}{8.9}$$

$$T-\frac{9m}{12}S=-\frac{7m^4}{128.9}+\frac{17m^3}{64.3.5}-\frac{7m^2}{8.9.5}+\frac{\varepsilon m}{10.11}.$$

$$V-\frac{11m}{12}T=-\frac{5.7.11m^5}{2048.27}+\frac{451m^4}{512.27}-\frac{121m^3}{2048.27.5}+\frac{7159m^2}{128.27.5.7}-\frac{\zeta m}{12.13}.$$

Quodſi iam has formas penitius perpendamus, ac breuitatis gratia ponamus:

$$\frac{\alpha m}{2.3}=\alpha'; \quad \frac{\beta m}{4.5}=\beta'; \quad \frac{\gamma m}{6.7}=\gamma'; \quad \frac{\delta m}{8.9}=\delta'; \text{ etc.}$$

ſequentem legem ſatis ſimplicem in noſtris litteris P, Q, R etc. deprehendemus:

$$P-\alpha'=0$$

$$Q-\tfrac{3}{1}\alpha' P+\frac{3.2.1}{1.2.3}\beta'=0$$

$$R-\tfrac{5}{1}\alpha' Q+\frac{5.4.3}{1.2.3}\beta' P-\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}\gamma'=0$$

$$S-\tfrac{7}{1}\alpha' R+\frac{7.6.5}{1.2.3}\beta' Q-\frac{7.6\ldots3}{1.2\ldots5}\gamma' P+\frac{7.6\ldots1}{1.2\ldots7}\delta'=0$$

$$T-\tfrac{9}{1}\alpha' S+\frac{9\ldots7}{1\ldots3}\beta' R-\frac{9\ldots5}{1\ldots5}\gamma' Q+\frac{9\ldots3}{1\ldots7}\delta' P-\frac{9\ldots1}{1\ldots9}\varepsilon'=0$$

$$V-\tfrac{11}{1}\alpha' T+\frac{11\ldots9}{1\ldots3}\beta' S-\frac{11\ldots7}{1\ldots5}\gamma' R+\frac{11\ldots5}{1\ldots7}\delta' Q-\frac{11\ldots3}{1\ldots9}\varepsilon' P+\frac{11\ldots1}{1\ldots11}\zeta'=0$$

etc.

hae autem nouae litterae α', β', γ', δ' etc. ex praecedentibus hanc ſequentur legem:

$$\alpha'-\frac{m}{2^2.3}=0$$

$$\beta'-\frac{3.2}{2^2.1.2.3}\alpha'+\frac{m}{2^4.5}=0$$

$$\gamma'-\frac{5.4}{2^2.1.2.3}\beta'+\frac{5.4.3.2}{2^4.1\ldots5}\alpha'-\frac{m}{2^6.7}=0$$

$$\delta'-\frac{7.6}{2^2.1\ldots3}\gamma'+\frac{7\ldots4}{2^4.1\ldots5}\beta'-\frac{7\ldots2}{2^6.1\ldots7}\alpha'+\frac{m}{2^8.9}=0$$

$$\varepsilon'-\frac{9.8}{2^2.1\ldots3}\delta'+\frac{9\ldots6}{2^4.1\ldots5}\gamma'-\frac{9\ldots4}{2^6.1\ldots7}\beta'+\frac{9\ldots2}{2^8.1\ldots9}\alpha'-\frac{m}{2^{10}.11}=0$$

etc.

Quo-

Quocirca nunc quidem quaeſtionem circa ſeriem illam ſingularem, quam hactenus ſum contemplatus perfecte ſolutam dediſſe ſum cenſendus, vnde ſolutionem hic ſuccincte ſum propoſituru

Problema.

Propoſita hac progreſſione indefinita

$$s = x^{m+\lambda} - \frac{m}{1}(x-1)^{m+\lambda} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}(x-2)^{m+\lambda} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}(x-3)^{m+\lambda} + \text{etc.}$$

eius ſummam aſſignare, ſiquidem λ fuerit numerus quicunque integer poſitiuus.

Solutio.

Denotent litterae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. numeros *Bernoullianos*, ita vt ſit

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6};\ \mathfrak{B} = \tfrac{1}{6};\ \mathfrak{C} = \tfrac{1}{6};\ \mathfrak{D} = \tfrac{8}{10};\ \mathfrak{E} = \tfrac{5}{6}$$

$$\mathfrak{F} = \tfrac{691}{210};\ \mathfrak{G} = \tfrac{35}{2};\ \mathfrak{H} = \tfrac{8617}{30};\ \mathfrak{J} = \tfrac{43867}{48};$$

$$\mathfrak{K} = \frac{1222277}{110};\ \mathfrak{L} = \frac{8545.13}{6}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{11818 20455}{546};\ \mathfrak{N} = \frac{7697792}{2}$$

$$\mathfrak{O} = \frac{23749461029}{30};\ \mathfrak{P} = \frac{8615841276005}{462}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{84802531453387}{170};\ \mathfrak{R} = \frac{90219075042845}{6}$$

etc.

 Quos

Quos numeros ita progredi obſeruaui vt ſit

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathfrak{B} = \tfrac{4}{2}\cdot\frac{\mathfrak{A}^2}{3}$$

$$\mathfrak{C} = \tfrac{6}{2}\cdot\frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{3}$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{8}{2}\cdot\frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{3} + \frac{8\cdot 7\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{\mathfrak{B}^2}{5}$$

$$\mathfrak{E} = \tfrac{10}{2}\cdot\frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D}}{3} + \frac{10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{2\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{5}$$

$$\mathfrak{F} = \tfrac{12}{2}\cdot\frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{E}}{3} + \frac{12\cdot 11\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{2\mathfrak{B}\mathfrak{D}}{5} + \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}}{7}$$

$$\mathfrak{G} = \tfrac{14}{2}\cdot\frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{F}}{3} + \frac{14\cdot 13\cdot 12}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{2\mathfrak{B}\mathfrak{E}}{5} + \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\frac{2\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{7}$$

etc.

Hinc iam quaerantur numeri P, Q, R, S etc. vt ſit

$$P = \frac{1\mathfrak{A}m}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$Q = \frac{3\mathfrak{A}m}{1\cdot 2\cdot 3}P - \frac{3\cdot 2\cdot 1\,\mathfrak{B}m}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$R = \frac{5\mathfrak{A}m}{1\cdot 2\cdot 3}Q - \frac{5\cdot 4\cdot 3\,\mathfrak{B}m}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}P + \frac{5\cdot 4\cdots 1\,\mathfrak{C}m}{1\cdot 2\cdots 7}$$

$$S = \frac{7\mathfrak{A}m}{1\cdot 2\cdot 3}R - \frac{7\cdot 6\cdot 5\,\mathfrak{B}m}{1\cdot 2\cdots 5}Q + \frac{7\cdots 3\,\mathfrak{C}m}{1\cdot 2\cdots 7}P - \frac{7\cdots 1\,\mathfrak{D}m}{1\cdot 2\cdots 9}$$

vbi lex progreſſionis etiam eſt perſpicua.

Hac ſerie inuenta ſumma quaeſita s ita exprimetur:

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+m)} = (x-\tfrac{m}{2})^{\lambda} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1\cdot 2}P(x-\tfrac{m}{2})^{\lambda-2}$$
$$+ \frac{\lambda\dots(\lambda-3)}{1\dots 4}Q(x-\tfrac{m}{2})^{\lambda-4}$$
$$+ \frac{\lambda\dots(\lambda-5)}{1\dots 6}R(x-\tfrac{m}{2})^{\lambda-6}$$
$$+ \frac{\lambda\dots(\lambda-7)}{1\dots 8}S(x-\tfrac{m}{2})^{\lambda-8}$$

etc.

vbi

vbi notetur si forte numerus m non sit integer valorem producti $(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots\ldots(\lambda+m)$ per artificia alibi exposita definiri posse.

Corollarium 1.

Si loco numerorum *Bernoullianorum* numeros iis cognatos, quibus ad potestatum reciprocarum summas sum vsus, introducere velimus, hosque numeros litteris A, B, C, D etc. designemus, vt sit $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{90}$, $C = \frac{1}{945}$, $D = \frac{1}{9450}$; $E = \frac{1}{93555}$ quoniam hi numeri a prioribus ita pendent vt sit

$$\mathfrak{A} = \frac{1.2.3}{2^1}A;\ \mathfrak{B} = \frac{1\ldots\ldots5}{2^3}B;\ \mathfrak{C} = \frac{1\ldots\ldots\ldots7}{2^5}C;\ \text{etc.}$$

inter se autem ita connectuntur vt sit:

$$5B = 2A^2;\ 7C = 4AB;\ 9D = 4AC + 2BB;$$

$$11E = 4AD + 4BC;\ 13F = 4AE + 4BD + 2CC\ \text{etc.}$$

Tum ex his numeris litterae P, Q, R, S etc. ita determinabuntur:

$$P = \frac{1Am}{2}$$

$$Q = \frac{3Am}{2}P - \frac{3.2.1Bm}{2^3}$$

$$R = \frac{5Am}{2}Q - \frac{5.4.3Bm}{2^3}P + \frac{5.4\ldots1Cm}{2^5}$$

$$S = \frac{7Am}{2}R - \frac{7.6.5Bm}{2^3}Q + \frac{7.6\ldots3Dm}{2^5}P - \frac{7.6\ldots1Em}{2^7}$$

etc.

Corollarium 2.

Si pro variis valoribus numeri λ fummam progreffionis propofito hoc fignandi modo $\int(\lambda)$ indicemus, ac iam loco λ fucceffiue fcribamus numeros o, 1, 2, 3, 4 etc. pro his cafibus fummae $\int(0)$, $\int(1)$, $\int(2)$, $\int(3)$ etc. fequenti modo exprimentur ponendo breuitatis gratia $x-\frac{m}{2}=y$:

$$\frac{\int(0)}{1.2\ldots m}=1$$

$$\frac{\int(1)}{2.3\ldots(m+1)}=y$$

$$\frac{\int(2)}{3.4\ldots(m+2)}=y^2+P$$

$$\frac{\int(3)}{4.5\ldots(m+3)}=y^3+3Py$$

$$\frac{\int(4)}{5.6\ldots(m+4)}=y^4+6Py^2+Q$$

$$\frac{\int(5)}{6.7\ldots(m+5)}=y^5+10Py^3+5Qy$$

$$\frac{\int(6)}{7.8\ldots(m+6)}=y^6+15Py^4+15Qy^2+R$$

etc.

Corollarium 3.

Hinc ergo iftae fummae fequenti modo fingulae ex antecedentibus definiri poffunt

$$\int(1)=\frac{m+1}{1}y\int(0)$$

$$\int(2)=\frac{m+2}{2}y\int(1)+\frac{(m+2)(m+1)}{2.2}mA\int(0)$$

$$\int(3)=\frac{m+3}{3}y\int(2)+\frac{(m+3)(m+2)}{2.3}mA\int(1)$$

$\int(4)$

$$\int(4) = \frac{m+4}{4} y \int(3) + \frac{(m+4)(m+3)}{2 \cdot 4} m A \int(2) - \frac{(m+4) \ldots (m+1)}{2^3 \cdot 4} m B \int(0)$$

$$\int(5) = \frac{m+5}{5} y \int(4) + \frac{(m+5)(m+4)}{2 \cdot 5} m A \int(3) - \frac{(m+5) \ldots (m+2)}{2^3 \cdot 5} m B \int(1)$$

$$\int(6) = \frac{m+6}{6} y \int(5) + \frac{(m+6)(m+5)}{2 \cdot 6} m A \int(4) - \frac{(m+6) \ldots (m+3)}{2^3 \cdot 6} m B \int(2) + \frac{(m+6) \ldots (m+1)}{2^5 \cdot 6} m C \int(0)$$

$$\int(7) = \frac{m+7}{7} y \int(6) + \frac{(m+7)(m+6)}{2 \cdot 7} m A \int(5) - \frac{(m+7) \ldots (m+4)}{2^3 \cdot 7} m B \int(3) + \frac{(m+7) \ldots (m+2)}{2^5 \cdot 7} m C \int(1)$$

$$\int(8) = \frac{m+8}{8} y \int(7) + \frac{(m+8)(m+7)}{2 \cdot 8} m A \int(6) - \frac{(m+8) \ldots (m+5)}{2^3 \cdot 8} m B \int(4) + \frac{(m+8) \ldots (m+2)}{2^5 \cdot 8} m C \int(2)$$
$$- \frac{(m+8) \ldots (m+1)}{2^7 \cdot 8} m D \int(0)$$

quae lex progreſſionis inſpicienti mox fit manifeſta.

Concluſio.

Nunc haud multo difficilius erit hoc negotium longe generalius expedire, ita vt, ſi $\Phi : x$ denotet functionem quamcunque ipſius x ſummam huius ſeriei

$$s = \Phi : x - m \Phi . (x-1) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \Phi : (x-2) - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Phi : (x-3)$$

aſſignare queamus. Perſpicuum enim eſt hanc formam, differentiam ordinis m exhibere iſtius progreſſionis

$$\Phi : x; \quad \Phi : (x-1); \quad \Phi : (x-2); \quad \Phi : (x-3) \text{ etc.}$$

Ex iis enim quae in Inſtitutionibus Calculi Differentialis pag. 343. in medium attuli, ſi ponamus $\Phi : x = y$, colligitur differentias ſingulorum ordinum eſſe:

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} - \frac{ddy}{2dx^2} + \frac{d^3y}{2.\,3.\,dx^3} - \frac{d^4y}{2.\,3.\,4\,dx^4} + \frac{d^5y}{2\ldots5\,dx^5} - \text{etc.}$$

$$\Delta^2 y = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3\,d^3y}{3\,dx^3} + \frac{7\,d^4y}{3.\,4\,dx^4} - \frac{15\,d^5y}{3.\,4.\,5\,dx^5} + \frac{31\,d^6y}{3\ldots6\,dx^6} - \text{etc.}$$

$$\Delta^3 y = \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{6\,d^4y}{4\,dx^4} + \frac{25\,d^5y}{4.\,5.\,dx^5} - \frac{90\,d^6y}{4.\,5.\,6\,dx^6} + \frac{301\,d^7y}{4\ldots7\,dx^7} - \text{etc.}$$

$$\Delta^4 y = \frac{d^4y}{dx^4} - \frac{10\,d^5y}{5\,dx^5} + \frac{65\,d^6y}{5.\,6\,dx^6} - \frac{350\,d^7y}{5.\,6.\,7\,dx^7} + \frac{1701\,d^8y}{5\ldots6\,dx^8} - \text{etc.}$$

etc.

qui coefficientes cum ſint illi ipſi, quos ſupra §. IV habuimus, eodem modo intelligemus differentiam ordinis m ſeu $\Delta^m y$, hoc eſt ipſam ſummam ſeriei propoſitae fore

$$s = \frac{d^m y}{dx^m} - \frac{A'\,d^{m+1}y}{(m+1)\,dx^{m+1}} + \frac{B'\,d^{m+2}y}{(m+1)(m+2)\,dx^{m+2}} - \frac{C'\,d^{m+3}y}{(m+1)\ldots(m+3)\,dx^{m+3}} + \text{etc.}$$

quos coefficientes A', B', C' etc. ſupra §. 13. determinaui. Quocirca erit

$$\frac{A'}{m+1} = \frac{m}{2}$$

$$\frac{B'}{(m+1)(m+2)} = \frac{m}{1.\,2.\,3} + \frac{3m(m-1)}{1.\,2.\,3.\,4}$$

$$\frac{C'}{(m+1)\ldots(m+3)} = \frac{m}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{10\,m(m-1)}{1.\,2\ldots5} + \frac{15\,m(m-1)(m-2)}{1.\,2\ldots6}$$

$$\frac{D'}{(m+1)\ldots(m+4)} = \frac{m}{1.\,2\ldots5} + \frac{25\,m(m-1)}{1.\,2\ldots6} + \frac{105\,m(m-1)(m-2)}{1.\,2\ldots7} + \frac{105\,m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\,2\ldots8}$$

etc.

Quodſi iam nunc ponamus $\Phi : (x - \frac{m}{2}) = v$, ita vt v oriatur ex y, ſi loco x ſcribatur $x - \frac{m}{2}$, erit vtique

$$\frac{d^m v}{dx^m} = \frac{d^m y}{dx^m} - \frac{m\,d^{m+1}y}{2\,dx^{m+1}} + \frac{m^2\,d^{m+2}y}{2.\,4\,dx^{m+2}} - \text{etc.}$$

quae

quae aequatio si inde subtrahatur, calculus idem prorsus erit instituendus, quem supra expediuimus. Vnde introducendo easdem litteras P, Q, R, S etc. quas supra definiuimus, obtinebimus sequentem summae s valorem:

$$s = \frac{d^m v}{dx^m} + \frac{P d^{m+2} v}{1.2\, dx^{m+2}} + \frac{Q d^{m+4} v}{1.2.4\, dx^{m+4}} + \frac{R d^{m+6} v}{1.2\ldots 6\, dx^{m+6}} + \frac{S d^{m+8} v}{1.2\ldots 8\, dx^{m+8}} + \text{etc.}$$

atque hinc si sumatur $y = \Phi : x = x^{m+\lambda}$ et $v = (x - \frac{m}{2})^{m+\lambda}$ manifesto eadem summatio sequitur quam ante eruimus, sicque totum negotium redit ad litteras P, Q, R, S etc. quarum indolem ex numeris *Bernoullianis* supra deriuaui.

Hinc statim liquet, quod ante minus apparebat, si in functione y vel v numerus dimensionum minor fuerit quam exponens m, quem quidem numerum integrum positiuum esse oportet, tum omnia differentialia ordinis m et superiorum in nihilum abire, foreque summam $s = 0$.

Deinde hinc etiam planior patet via ad valores litterarum P, Q, R, S etc. inueniendos. Cum enim posito

$$s = \frac{d^m y}{dx^m} - \frac{\alpha d^{m+1} y}{dx^{m+1}} + \frac{\beta d^{m+2} y}{dx^{m+2}} - \frac{\gamma d^{m+3} y}{dx^{m+3}} + \text{etc.}$$

 sit

ſit $\alpha = \frac{m}{1.2}$

$$\beta = \frac{m}{1.2.3} + \frac{3m(m-1)}{1.2.3.4}$$

$$\gamma = \frac{m}{1\ldots4} + \frac{10m(m-1)}{1\ldots5} + \frac{15m\ldots(m-2)}{1\ldots6}$$

$$\delta = \frac{m}{1\ldots5} + \frac{25m(m-1)}{1\ldots6} + \frac{105m\ldots(m-2)}{1\ldots7} + \frac{105m\ldots(m-3)}{1\ldots8}$$

etc.

functio autem y ex functione $v = \Phi:(x - \frac{m}{2})$ naſcatur ſi in hac loco x ſcribatur $x + \frac{m}{2}$ erit in genere

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n v}{dx^n} + \frac{m}{2} \cdot \frac{d^{n+1} v}{dx^{n+1}} + \frac{m^2}{2.4} \cdot \frac{d^{n+2} v}{dx^{n+2}} + \frac{m^3}{2.4.6} \cdot \frac{d^{n+3} v}{dx^{n+3}} + \text{etc.}$$

unde ſi loco differentialium ipſius y, haec differentialia ipſius v ſubſtituantur, fiet

$$s = \frac{d^n v}{dx^n} + \left(\frac{m}{2} - \alpha\right)\frac{d^{n+1} v}{dx^{n+1}} + \left(\frac{m^2}{2.4} - \frac{m}{2}\alpha + \beta\right)\frac{d^{n+2} v}{dx^{n+2}}$$
$$+ \left(\frac{m^3}{2.4.6} - \frac{m^2}{2.4}\alpha + \frac{m}{2}\beta - \gamma\right)\frac{d^{n+3} v}{dx^{n+3}} + \text{etc.}$$

ſicque habebimus:

$$\frac{m}{2} - \alpha = 0$$

$$\frac{m^2}{2.4} - \frac{m}{2}\alpha + \beta = \frac{P}{1.2}$$

$$\frac{m^3}{2.4.6} - \frac{m^2}{2.4}\alpha + \frac{m}{2}\beta - \gamma = 0$$

$$\frac{m^4}{2.4.6.8} - \frac{m^3}{2.4.6}\alpha + \frac{m^2}{2.4}\beta - \frac{m}{2}\gamma + \delta = \frac{Q}{1.2.3.4}$$

$$\frac{m^5}{2.4.6.8.10} - \frac{m^4}{2.4.6.8}\alpha + \frac{m^3}{2.4.6}\beta - \frac{m^2}{2.4}\gamma + \frac{m}{2}\delta - \varepsilon = 0$$

etc.

facile enim perſpicitur has expreſſiones alternatim euaneſcere debere.

QVO-

QVOMODO NVMERI PRAEMAGNI SINT EXPLORANDI, VTRVM SINT PRIMI, NEC NE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Ante omnia monendum est, me hic non eiusmodi methodum polliceri, cuius ope omnes omnino numeri, cuiuscunque sint generis, examinari queant, vtrum sint primi nec ne? Huiusmodi enim methodum vix aliam dari posse existimo, nisi quae ad regulam redeat vulgarem, qua diuisio per omnes numeros primos radice quadrata numeri propositi minores est tentanda, quae operatio sane, si numeri saltem mediocriter magni proponantur, nimis est molesta, quam vt suscipi queat. Quae igitur hic in medium afferre constitui, ad certum tantum numerorum genus sunt restringenda, pro quo scilicet hoc examen, vtrum sint primi nec ne? citra laborem tam operosum institui queat. Cum enim numerorum primorum natura adhuc maxime sit abscondita, quicquid in hoc negotio praestare licuerit, etiamsi alias arctissimis limitibus sit circumscriptum, vsu neutiquam destitui est censendum.

2. Numeros ergo tantum in hac forma $4n+1$ contentos ſum contemplaturus, de quibus equidem poſt Fermatium demonſtraui, ſi huiusmodi numerus fuerit primus, tum eum ſemper eſſe ſummam duorum quadratorum, idque vnico modo. Vnde propoſito numero quocunque huius formae $4n+1$, examen vtrum ſit primus nec ne? hoc modo inſtituetur. Ab eo ſucceſſiue omnes numeri quadrati ipſo minores auferantur, eaque notentur reſidua, quae pariter ſint numeri quadrati; atque ſi vnico modo numerus propoſitus $4n+1$ in forma $aa+bb$ contineri deprehendatur, id certum erit criterium numerum propoſitum eſſe primum. Sin autem vel prorſus non in ea forma contineatur, vel plus vno modo, tum certe non erit primus; priori quidem caſu quo numerus $4n+1$ non eſt ſumma duorum quadratorum plus concludere non licet, quam eum non eſſe primum neque inde eius diuiſores innoteſcunt, ſin autem plus vno modo fuerit duorum quadratorum ſumma veluti $4n+1=aa+bb=cc+dd$, tum hinc quaerantur eiusmodi bini numeri p et q vt ſit $\frac{p}{q}=\frac{a\pm c}{b\pm d}$ vel $\frac{p}{q}=\frac{a\pm d}{b\pm c}$, ac numeri $4n+1$ et $pp+qq$ certo habebunt diuiſorem communem, qui ergo facile aſſignatur.

3. Propoſito itaque huiusmodi numero $4n+1$ operationem ita inſtitui conuenit, vt ab eo continuo numeri quadrati ſubtrahantur, eaque reſidua tantum notentur, quae etiam ſint numeri quadrati; vbi

vbi quidem ſtatim apparet, hanc ſubtractionem non vltra quadrata ſemiſſi minora continuari opus eſſe. Si enim fuerit $4n+1=aa+bb$, horum quadratorum alterum certe erit minus ſemiſſe $\frac{4n+1}{2}$. Vel cum horum binorum quadratorum alterum neceſſario ſit par, alterum impar, ſufficiet vel paria tantum, vel imparia quadrata ipſo numero propoſito minora ſubtrahi, quo pacto multitudo quadratorum ſubtrahendorum haud mediocriter imminuitur. Cum autem numerus omnium quadratorum ipſo numero propoſito minorum ſit $=\surd(4n+1)$, eorum autem quae eius ſemiſſe ſunt minora $=\surd\frac{4n+1}{2}$; erit quadratorum ſemiſſe maiorum numerus $=(1-\frac{1}{\surd 2})\surd(4n+1)$ $=\frac{5}{17}\surd(4n+1)$ proxime; quae quoniam etiam ſubtrahi ſufficit, hoc modo numerus ſubtractionum ad trientem fere redigitur.

4. Maxime ergo expedire videtur hanc operationem ita inſtitui, vt a quadrato maximo infra numerum propoſitum $4n+1$ initium capiatur, indeque quadrata continuo minora ſubtrahantur, donec ad quadrata ſemiſſi minora perueniatur. Veluti ſi numerus propoſitus ſit 101, ſufficiet inde haec tria quadrata 100, 81, 64 ſubtraxiſſe, quia ſequens 49 iam foret ſemiſſi $50\frac{1}{2}$ minus, hoc modo cum inter tria reſidua 1, 20, 37 vnicum occurrat quadratum 1, hoc certum eſt ſignum, numerum 101 eſſe primum. Verumtamen ſi numerus propoſitus $4n+1$ fuerit praemagnus, etiam hae operationes

 nimis

nimis multiplicantur; ex quo in id potissimum esse incumbendum, vt harum subtractionum numerus imminuatur, quod fiet si eae excludantur, quae ad talia residua perducunt, quae a quadratorum natura abhorreant, cuiusmodi sunt residua in his formis contenta: $3m+2$; $5m+2$; $5m+3$; $8m+5$ etc. formae enim $8m+3$ et $8m+7$ ob indolem numeri propositi $4n+1$ nunquam occurrunt.

5. Dantur autem certae numerorum formae $4n+1$ species vnde plurima quadrata inde subtrahenda excluduntur. Veluti si sit $4n+1=3m+2$, ac ponatur hic numerus $=xx+yy$, vterque numerus x et y in forma $3p\pm1$ contineatur necesse est, ita vt numeri formae $3p$ excludantur, simili modo si sit $4n+1=5m+2$, vtrumque numerum x et y in forma $5p\pm1$ contineri oportet, et si $4n+1=5m+3$ in forma $5p\pm2$. Denique si $8m+5=xx+yy$ numerorum quidem x et y alter est impar alter par, hic vero adeo impariter par seu formae $4p+2$. Quod si ergo simul fuerit

$$xx+yy=3m+2=5m+2$$

numeros x et y simul in his duabus formis $3p\pm1$ et $5p\pm1$ contineri oportet, vnde eorum forma concluditur:

$$x \text{ vel } y=15p\pm(1,4).$$

At si fuerit

$$xx+yy=3m+2=5m+3$$

forma

forma numerorum x et y eſt et $3p \pm 1$, et $5p \pm 2$, quae duplex forma in hanc vnam contrahitur

$$x \text{ vel } y = 15p \pm (2, 7).$$

6. Quoniam hoc modo duae tertiae partes omnium numerorum, quos tentari oporteret, excluduntur, hi caſus imprimis ſunt apti, quibus examen ſatis expedite inſtituere licebit. Quare numerorum $N = 4n + 1$ eas ſpecies potiſſimum contemplemur, quae vel in his duabus formis $3m + 2$ et $5m + 2$, vel in his $3m + 2$ et $5m + 3$ contineantur. Numeri autem prioris ſpeciei ad hanc formam $15m + 2$ reducuntur, qui cum inſuper in forma $4n + 1$ contineri debeant, haec ſpecies ſequenti formula exprimetur:

Species prima: $N = 60n + 17$

qui numerus alio modo ſumma duorum quadratorum eſſe nequit, niſi vtriusque quadrati radix ſit numerus formae $15p \pm (1, 4)$, ſcilicet vel $15p \pm 1$ vel $15p \pm 4$, vnde numeri tentandi ex his quatuor progreſſionibus ſunt capiendi:

1, 16, 31, 46, 61, 76, 91, 106, 121, 136 etc.

4, 19, 34, 49, 64, 79, 94, 109, 124, 139 etc.

11, 26, 41, 56, 71, 86, 101, 116, 131, 146 etc.

14, 29, 44, 59, 74, 89, 104, 119, 134, 149 etc.

et reliquos omnes in hoc negotio praetermittere licet.

7. Si-

7. Simili modo alteram speciem euoluamus, quae duplici forma $3m+2$ et $5m+3$ continetur, et propterea ad hanc vnam $15m+8$ reuocatur. Hinc autem tantum illi numeri sunt vsui, qui simul sunt formae $4n+1$, ex quo haec species sequenti formula exprimetur:

Species secunda $N=60n+53$.

Huius ergo formae si fuerit numerus explorandus, vtrum sit primus nec ne? ab eo alia quadrata subtrahi non est opus, nisi quorum radices in hac forma $15p\pm(2,7)$ contineantur; quas ergo ex sequentibus quaternis progressionibus arithmeticis sumi oportet:

2, 17, 32, 47, 62, 77, 92, 107, 122, 137, 152 etc.
7, 22, 37, 52, 67, 82, 97, 112, 127, 142, 157 etc.
8, 23, 38, 53, 68, 83, 98, 113, 128, 143, 158 etc.
13, 28, 43, 58, 73, 88, 103, 118, 133, 148. 163 etc.

hoc ergo modo multitudo quadratorum subtrahendorum fere ad trientem reducitur.

8. Neque vero his omnibus quadratis tentamen institui opus est, prout enim numerus propositus N insuper fuerit comparatus, inde praeterea multa excluduntur. Cum enim omnes numeri formae $N=4n+1$ in has quatuor resoluantur:

$16n+1,\ 16n+5,\ 16n+9,\ 16n+13$

si

si statuatur $N = xx + yy$, et x denotet numerum parem, y vero imparem, pro his speciebus numeri x et y sequenti modo comparati reperiuntur:

si sit	erit	et
$N = 16n + 1$	$x = 4m$	$y = 8p \pm 1$
$N = 16n + 5$	$x = 4m \pm 2$	$y = 8p \pm 1$
$N = 16n + 9$	$x = 4m$	$y = 8p \pm 3$
$N = 16n + 13$	$x = 4m \pm 2$	$y = 8p \pm 3$.

9. Combinemus has quaternas species cum binis praecedentibus, et obtinebimus sequentes octo species, pro quibus formas tam radicis paris x quam imparis y exhibeamus:

si fuerit N	erit $x =$	et $y =$
$240n + 17$	$60m \pm (4, 16)$	$120p \pm (1, 31, 41, 49)$
$240n + 77$	$60m \pm (14, 26)$	$120p \pm (11, 19, 29, 59)$
$240n + 137$	$60m \pm (4, 16)$	$120p \pm (11, 19, 29, 59)$
$240n + 197$	$60m \pm (14, 26)$	$120p \pm (1, 31, 41, 49)$
$240n + 53$	$60m \pm (2, 22)$	$120p \pm (7, 17, 23, 47)$
$240n + 113$	$60m \pm (8, 28)$	$120p \pm (7, 17, 23, 47)$
$240n + 173$	$60m \pm (2, 22)$	$120p \pm (13, 37, 43, 53)$
$240n + 233$	$60m \pm (8, 28)$	$120p \pm (13, 37, 43, 53)$

10. Dantur autem in his numeris species, quibus adhuc plures numeri tentandi excluduntur, quae ita se habent

si sit	erit	et
$N = 32n + 5$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 1$
$N = 32n + 13$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 3$
$N = 32n + 21$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 7$
$N = 32n + 29$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 5$

quae cum binis principalibus combinatae praebent

si sit N	erit $x =$	et $y =$
$480n + 77$	$60m \pm (14, 26)$	$240p \pm (19, 29, 61, 109)$
$480n + 197$	$60m \pm (14, 26)$	$240p \pm (1, 31, 49, 79)$
$480n + 317$	$60m \pm (14, 26)$	$240p \pm (11, 59, 91, 101)$
$480n + 437$	$60m \pm (14, 26)$	$240p \pm (41, 71, 89, 119)$
$480n + 53$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (7, 23, 73, 103)$
$480n + 173$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (13, 67, 77, 83)$
$480n + 293$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (17, 47, 97, 113)$
$480n + 413$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (37, 43, 53, 107)$

Hic ergo ex valoribus ipsius y, quos praecedentes species admittunt, denuo semissis excluditur.

11. Quoniam hic valores radicis imparis y multo magis imminuuntur, quam radicis paris x, calculus multo euadet facilior et breuior, si a numero proposito N siquidem in vna postremarum specierum contineatur successiue omnia quadrata imparia ipso minora subtrahantur, residuaque examinentur an sint quadrata nec ne? harum operationum numerus satis erit modicus, etiamsi numerus propositus fuerit praemagnus et quoniam radices per differentiam 240 increscunt, insignia compendia in calculo vsurpari poterunt. Scilicet si quaecunque quatuor minimarum radicum dicatur $= a$, quia a nume-

numero propofito N, fi modo in aliqua octo poftremarum fpecierum contineatur, vel quod eodem redit fi fuerit vel huius formae $120n+77$ vel huius $120n+53$, fucceffiue fubtrahi debent quadrata aa, $(240 \pm a)^2$, $(480 \pm a)^2$ etc. notetur differentias effe primas $57600 \pm 480a$; $3 \cdot 57600 \pm 480a$ etc. fecundas vero effe conftantes $= 115200$, quo pacto totum negotium ad meras additiones et fubtractiones reducitur; et quia quaelibet radix fimplex a tam pofitiue quam negatiue accipi poteft, vtraque pari calculo expedietur.

Problema.

12. Propofito numero quantumuis magno N, qui vel in hac forma $120n+77$ vel in hac $120n+53$ contineatur, explorare vtrum is fit primus nec ne?

Solutio.

Statuatur $N = aa + zz$, et pro octonis formis ipfius N littera a quatuor habebit valores fequentes

fi fit	erunt quaterni valores ipfius a
$N = 480n + 77$	19, 29, 61, 109
$N = 480n + 197$	1, 31, 49, 79
$N = 480n + 317$	11, 59, 91, 101
$N = 480n + 437$	41, 71, 89, 119
$N = 480n + 53$	7, 23, 73, 103
$N = 480n + 173$	13, 67, 77, 83
$N = 480n + 293$	17, 47, 97, 113
$N = 480n + 413$	37, 43, 53, 107.

K 2 Pro

Pro quolibet ergo numero N habebimus quatuor valores ipsius a, quorum singuli dabunt binas numerorum series descendentes.

$N-aa$; $N-(240+a)^2$; $N-(480+a)^2$; $N-(720+a)^2$ etc.
$N-aa$; $N-(240-a)^2$; $N-(480-a)^2$; $N-(720-a)^2$ etc.

quarum illius differentia prima est $57600+480a$ huius vero $57600-480a$, vtriusque vero differentia secunda constans $=115200$. Ambae hae progressiones continuentur donec ad terminos negatiuos perueniatur, ex iisque ii notentur, qui sunt numeri quadrati. Quodsi tum eueniat, vt vnicus occurrat numerus quadratus, hoc erit signum indubium, propositum numerum N esse primum; sin autem vel nullus numerus quadratus occurrat, vel plures vno, certo hinc erit concludendum, numerum propositum N non esse primum, sed ex factoribus componi.

Coroll. 1.

13. Quodsi ergo numerus propositus N in altera harum formarum $120n+77$ et $120n+53$ contineatur, tum satis expedite examen institui poterit, vtrum is numerus sit primus nec ne? cum quadrata, quae successiue subtrahi oportet scilicet $(240\lambda \pm a)^2$ mox ipsum numerum N sint superatura.

Coroll. 2.

14. Si enim numerus propositus N vnum millionem non superet, quadrata subtrahendo infra

(1200

$(1200 + a)^2$ ſubſiſtent, eorumque ergo numerus pro quolibet numero a non ad 9 vsque aſcendet; et quoniam quaterni huiusmodi numeri a habentur, paucioribus quam 36 operationibus totum negotium conficietur.

Coroll. 3.

15. Si numerus N adeo decuplo fuerit maior, operationum numerus ad triplum tantum increſcet, et quoniam pro quouis numero a quadrata ſubtrahenda eiusmodi progreſſionem conſtituunt, quarum differentiae ſecundae ſunt conſtantes, hinc ingentia calculi compendia naſcuntur.

Scholion.

16. Etſi haec methodus ad nonnullas tantum numerorum ſpecies patet, quippe quae in altera harum formarum $120n + 77$ et $120n + 53$ ſint contentae, ea tamen neutiquam attentione indigna videtur. Cum enim eiusmodi methodum, quae ſe prorſus ad omnes numeros extendat, ne ſperare quidem liceat, quae ſcilicet a vulgari regula, quae diuiſionem per omnes numeros primos radice quadrata numeri propoſiti minores tentari oportet, diſcrepet, eaque ſit multo expeditior; omnia compendia quae quidem in hoc negotio inuenire licet, neutiquam ſunt contemnenda, etiamſi ea ad pauciſſimas numerorum ſpecies extendantur, dummodo numeros quantumuis magnos in ſe complectantur.

K 3 Cum

Cum enim problema iam olim propofitum, quo numerus primus dato numero maior defideratur, adhuc vires ingenii humani fuperare videatur, non parum praeftitiffe cenfendus eft, qui numeros valde magnos, qui certo fint primi, in medium afferre valuerit. Vfum igitur methodi hic expofitae aliquot exemplis declarabo.

Exemplum 1.

17. Explorare vtrum hic numerus 481037 fit primus nec ne?

Cum hic numerus fit $=1002.480+77$ in prima forma continetur, vbi quatuor valores ipfius a funt 19, 29, 61, 109, calculus ergo fequenti modo inftituatur:

$a=\pm 19$		$a=\pm 29$	
481037	57600	481037	57600
361	9120	841	13920
−480676−	480676−	−480196	480196−
66720	48480	71520	43680
1152	1152	1152	1152
−413956	432196−	−408676	436516−
181920	163680	186720	158880
1152	1152	−221956	277636−
−232036	268516−		274080
			3556−

$a=$

$a = \pm 61$		$a = \pm 109$	
481037	57600	481037	57600
3721	29280	11881	52320
−477316	477316 −	−469156	469156 −
86880	28320	109920	5280
−390436	448996 −	−359236	463876 −
202080	143520	225120	120480
□ 188356	305476 −	− 134116	343396 □
	258720		235680
	46756 −		107716 −

In his residuis duo occurrunt quadrata signo □ notata dum reliqua non quadrata lineola — notaui; ex quo concludo numerum propositum non esse primum. Cum autem sit duplici modo duorum quadratorum summa scilicet

$$481037 = 434^2 + 541^2 = 586^2 + 371^2$$

eius diuisores, quos quoque summas esse duorum quadratorum necesse est, assignare licebit, sit enim $pp + qq$ diuisor, erit $\frac{p}{q} = \frac{434 \pm 586}{541 \pm 371}$ vel $\frac{p}{q} = \frac{586 \pm 541}{434 \pm 371}$, hinc $\frac{p}{q} = \frac{6}{1}$ vel $\frac{p}{q} = \frac{85}{36}$ ergo diuisores sunt 37 et 13001.

Exemplum 2.

18. Explorare vtrum hic numerus 829853 sit primus nec ne?

Cum hic numerus sit $= 1728 . 480 + 413$, ad vltimam speciem pertinet, vbi valores ipsius a sunt 37, 43, 53, 107 calculus ergo sequenti modo instituatur.

$a =$

$a = \pm 37$

829853	57600
1369	17760
−828484	828484−
75360	39840
1152	1152
−753124	788644−
190560	155040
1152	1152
−562564	633604−
305760	270240
−256804	363364−

$a = \pm 43$

829853	57600
1849	20640
−828004	828004−
78240	36960
1152	1152
−749764	791044−
193440	152160
1152	1152
−556324	638884−
308640	267360
−247684	371524−

$a = \pm 53$

829853	57600
2809	25440
−827044	827044−
83040	32160
1152	1152
−744004	794884−
198240	147360
1152	1152
−545764	647524−
313440	262560
	1152
□..232324	384964−
	377760
	7204−

$a = \pm 107$

829853	57600
11449	51360
−818404	818404−
108960	6240
1152	1152
−709444	812164−
224160	121440
1152	1152
−485284	690724−
339360	236640
	1152
□.. 145924	454084−
	351840
	102244−

Quo-

Quoniam hic duo occurrunt quadrata, vnde fit

$$829853 = 482^2 + 773^2 = 382^2 + 827^2$$

hic numerus non eſt primus ſed factores habet 257 et 3229.

Exemplum 3.

19. Explorare, vtrum hic numerus 2400317 ſit primus nec ne? Ex huius numeri forma $= 5000 \cdot 480 + 317$ intelligitur, eum ad ſpeciem tertiam pertinere, pro qua valores ipſius a ſunt 11, 59, 91, 101, vnde calculus ita ſe habebit:

$a = \pm 11$		$a = \pm 59$	
2400317	57600	2400317	57600
121	5280	3481	28320
—2400196	2400196—	—2396836	2396836—
62880	52320	85920	29280
1152	1152	1152	1152
—2337316	2347876—	—2310916	2367556—
178080	167520	201120	144480
1152	1152	1152	1152
—2159236	2180356—	—2109796	2223076
293280	282720	316320	259680
1152	1152	1152	1152
□..1865956	1897636—	—1793476	1963396—
408480	397920	431520	374880
1152	1152	1152	1152
—1457476	1499716—	—1361956	1588516—
523680	513120	546720	490080
1152	1152	1152	1152
—933796	986596—	—815236	1098436—
638880	628320	661920	605280
—294916	358276—	—153316	493156—

$a=\pm 91$		$a=\pm 101$	
2400317	57600	2400317	57600
8281	43680	10201	48480
−2392036	2392036−	−2390116	2390116.□
101280	13920	106080	9120
1152	1152	1152	1152
−2290756	2378116−	−2284036	2380996−
216480	129120	221280	124320
1152	1152	1152	1152
−2074276	2248996−	−2062756	2256076−
331680	244320	336480	239520
1152	1152	1152	1152
−1742596	2004676−	−1726276	2017156−
446880	359520	451680	354720
1152	1152	1152	1152
−1295716	1645156−	−1274596	1662436−
562080	474720	566880	469920
1152	1152	1152	1152
−733636	1170436−	−707716	1192516−
677280	589920	682080	585120
− 56356	580516−	−25636	607396−

Ex duobus quadratis, quae hic occurrunt, numerus propositus concluditur habere factores 53.45289.

Exemplum 4.

20. Explorare vtrum hic numerus 3861317 sit primus nec ne?

Cum hic numerus sit $=8044.480+197$ ad secundam speciem pertinet et calculus ita se habebit:

$a=$

$a = +1$		$a = +31$	
3861317	57600	3861317	57600
1	480	961	14880
— 3861316	3861316 —	— 3860356	3860356 —
58080	57120	72480	42720
1152	1152	1152	1152
— 3803236	3804196 —	— 3787876	3817636 —
173280	172320	187680	157920
1152	1152	1152	1152
— 3629956	3631876 —	— 3600196	3659716 —
288480	287520	302880	273120
1152	1152	1152	1152
— 3341476	3344356 —	— 3297316	3386596 —
403680	402720	418080	388320
1152	1152	1152	1152
□.. 2937796	2941636 —	— 2879236	2998276 —
518880	517920	533280	503520
1152	1152	1152	1152
— 2418916	2423716 —	— 2345956	2494756 —
634080	633120	648480	618720
1152	1152	1152	1152
— 1784836	1790596 —	— 1697476	1876036 —
749280	748320	763680	733920
1152	1152	1152	1152
— 1035556	1042276 —	— 933796	1142116 —
864480	863520	878880	849120
— 171076	178756 —	— 54916	292996 —

$a = \pm 49$

3861317	57600
2401	23520
−3858916	3858916−
81120	34080
1152	1152
−3777796	3824836−
196320	149280
1152	1152
−3581476	3675556−
311520	264480
1152	1152
−3269956	3411076−
426720	379680
1152	1152
−2843236	3031396−
541920	494880
1152	1152
−2301316	2536516−
657120	610080
1152	1152
−1644196	1926436−
772320	725280
	1152
−871876	1201156−
	840480
	−360676

$a = \pm 79$

3861317	57600
6241	37920
−3855076	3855076−
95520	19680
1152	1152
−3759556	3835396−
210720	134880
1152	1152
−3548836	3700516−
325920	250080
1152	1152
−3222916	3450436−
441120	365280
1152	1152
−2781796	3085156−
556320	480480
1152	1152
−2225476	2604676−
671520	595680
1152	1152
−1553956	2008996−
786720	710880
	1152
−767236	1298116−
	826080
	472036−

Quo-

Quoniam igitur in his residuis vnicum quadratum reperitur, numerus propositus certe est primus; aequatur autem summae horum duorum quadratorum $1714^2 + 961^2$.

Scholion.

21. Cum igitur iam certi simus numerum 3861317 esse primum, hic fortasse maximus est numerus primus quem nouimus; ac si quis hunc numerum secundum regulam vulgarem explorare voluerit, diuisionem per omnes numeros primos vsque ad 1965 tentare deberet, qui labor certe non solum maxime foret prolixus, sed etiam summopere taediosus; cum tamen hoc modo totum negotium breui temporis spatio facillime expediri possit. Simili modo tentaui numerum $3862997 = 8047 \cdot 480 + 437$, ad quartam speciem referendum, quem pariter primum esse deprehendi. Nisi autem numerus propositus in octo memoratis speciebus contineatur, etiamsi sit formae $4n+1$, examen laborem magis operosum postulat; quamuis negotium ita dirigi queat, vt non pluribus subtractionibus sit opus. Verum cum vniuersa haec inuestigatio plerisque omni vsu destituta videatur, hoc argumentum fusius non prosequar sed Theoremata tantum, quibus haec methodus innititur, breuiter subiungo.

Th. 1. Si fit $xx+yy=9n+1$ erit
vel $x=3p$ vel $x=9p\pm 1$

Th. 2. Si fit $xx+yy=9n+4$ erit
vel $x=3p$ vel $x=9p\pm 2$

Th. 3. Si fit $xx+yy=9n+7$ erit
vel $x=3p$ vel $x=9p\pm 4$

Th. 4. Si fit $xx+yy=3n+2$ erit $x=3p\pm 1$

Th. 5. Si fit $xx+yy=5n+2$ erit $x=5p\pm 1$

Th. 6. Si fit $xx+yy=5n+3$ erit $x=5p\pm 2$

Th. 7. Si fit $xx+yy=25n+1$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 1$

Th. 8. Si fit $xx+yy=25n+4$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 2$

Th. 9. Si fit $xx+yy=25n+6$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 9$

Th. 10. Si fit $xx+yy=25n+9$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 3$

Th. 11. Si fit $xx+yy=25n+11$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 6$

Th. 12. Si fit $xx+yy=25n+14$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 8$

Th.

Th. 13. Si sit $xx+yy=25n+16$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm4$

Th. 14. Si sit $xx+yy=25n+19$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm12$

Th. 15. Si sit $xx+yy=25n+21$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm11$

Th. 16. Si sit $xx+yy=25n+24$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm7$.

Conclusio.

Ex his theorematibus sequitur si summa duorum quadratorum habuerit hanc formam $xx+yy=14400n+11401$ tum quadrati imparis xx radicem fore

vel I. $x=480m\pm(75, 195)$
vel II. $x=1440m\pm(85, 355, 445, 715)$
vel III. $x=2400m\pm(99, 501, 651, 1149)$
vel IV. $x=7200m\pm\left\{\begin{matrix}149, 949, 1301, 1949\\2101, 2749, 3101, 3299\end{matrix}\right\}$

Ex hoc numerorum ordine sumto $n=700$, exploraui hunc numerum 10091401, cuius resolutionem in duo quadrata vnico modo succedere deprehendi scilicet

ſcilicet $1251^2 + 2920^2$, quod certum eſt indicium hunc numerum eſſe primum. Habemus ergo numerum decem millionibus maiorem 10091401, quem certo nouimus eſſe primum; ſi quis autem alia quacunque methodo vti voluerit, nunquam profecto tantum numerum primum exhibebit.

NOVA

NOVA CRITERIA
RADICES AEQVATIONVM IMAGINARIAS DIGNOSCENDI.

Auctore

L. EVLERO.

Summus *Newtonus* et poſt eum plures alii Geometrae in eo elaborarunt, vt criteria ſeu ſigna inuenirent, quorum ope aequationum cuiuscunque gradus radices reales et imaginariae dignoſci poſſent, ſimili modo quo radices poſitiuae et negatiuae dignoſci ſolent. Verum cuncta illa criteria ſeu ſigna hoc defectu laborant vt quoties radices imaginarias indicant, inde certe quidem concludi poſſit, tales radices in aequatione reuera ineſſe; ſed quando nullas radices imaginarias indicant neutiquam inde concludere licet, omnes radices eſſe reales, cum ſaepius euenire queat vt hoc non obſtante omnes adeo aequationis radices ſint imaginariae.

Hic defectus imprimis cernitur in aequationibus huius formae

$$+x^n+ax^{n-1}-bx^{n-2}-cx^{n-3}+dx^{n-4}+ex^{n-5}-\text{etc.}=0$$

vbi continuo bina ſigna eiusdem naturae ſe mutuo inſequuntur, tum enim omnia illa criteria quae hactenus ſunt prolata, nullas plane radices imaginarias ostendunt, cum tamen fieri possit vt plures atque adeo omnes sint imaginariae.

Ad hoc dilucidandum in genere aequatio quarti ordinis huius formae $+x^4+ax^3-bxx-cx+d=0$ exhiberi potest cuius omnes radices sint imaginariae; concipiatur ea enim conflata ex duobus huiusmodi factoribus $xx+px+q$ et $xx-rx+s$ in quibus sit $pp<4q$ et $rr<4s$ vt omnes radices fiant imaginariae.

Tum igitur fieri opportet $a=p-r$; $b=pr-q-s$; $c=qr-ps$ et $d=qs$; ideoque $p>r$: $pr>q+s$: et $qr>ps$.

Statuamus ergo $p=\alpha r$ et $q=\beta s$ et conditiones adimplendae erunt sequentes

I. $\alpha>1$; II. $\beta>\alpha$; III. $rr<4s$; IV. $rr<\frac{4\beta}{\alpha\alpha}s$;
V. $rr>\frac{\beta+1}{\alpha}s$:

Cum igitur ex quinta sit $\frac{\beta+1}{\alpha}s<rr$
erit multo magis $\frac{\beta+1}{\alpha}s<4s$ et $<\frac{4\beta}{\alpha\alpha}s$
vnde fit $\beta+1<4\alpha$ seu $\beta<4\alpha-1$ et
$\beta+1<\frac{4\beta}{\alpha}$ seu $\beta>\frac{\alpha}{4-\alpha}$.

Cum quibus nouis conditionibus iungatur secunda $\beta>\alpha$ et adipiscimur cum

$4\alpha-1>\alpha$ tum $4\alpha-1>\frac{\alpha}{4-\alpha}$

inde fit $\alpha>\frac{1}{3}$ quod per se supponitur quia $\alpha>1$; hinc vero $4\alpha>\alpha^2+1$; per qua conditione implenplenda necesse est vt α intra hos limites $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ accipiatur vel potius intra limites $2+\sqrt{3}$ et 1 tum vero facile erit pro β idoneos valores inuenire; constitutis autem valoribus pro α et β aeque facile erit pro s et rr idoneos valores assumere.

Sumto enim exempli gratia $\alpha=2$ debet esse $\beta>2$ et >1 et <7 vnde intra limites 2 et 7 debet contineri; sit igitur $\beta=3$ et habebimus has conditiones

$$rr>2s \text{ et } <4s \text{ et } <3s$$

vnde rr intra limites $2s$ et $3s$ debet contineri; sumto ergo $s=6$ capi poterit $r=4$ hincque fit $p=8$ et $q=18$; quocirca ex binis factoribus $xx+8x+18$ et $xx-4x+6$ nascetur haec aequatio quarti ordinis

$$x^4+4x^3-8xx-24x+108=0$$

cuius omnes radices certo sunt imaginariae, etiamsi criteria supra memorata hoc neutiquam innuant.

Hoc autem semper certum est, si cuiuspiam aequationis omnes radices fuerint reales, tum illa criteria perpetuo locum habere; propterea quod in illis certae proprietates continentur, quae huiusmodi aequationibus conueniunt, quae autem negotium non exhauriunt, sed quandoque etiam in eiusmodi aequationibus locum habent quae radices imaginarias inuoluunt.

Neque etiam adhuc aliud principium conſtat vnde talia criteria praeſertim pro aequationibus altiorum graduum peti poſſent; interim tamen numerum talium criteriorum pro lubitu augere licet, quo hoc commodi nanciſcimur vt dum quaedam nullas radices imaginarias indicant alia aduerſentur, quorum ſuffragium ſemper veritati conſentaneum eſt cenſendum.

Quod quo clarius appareat, methodos quibus memorati autores in hunc finem ſunt vſi breuiter hic exponam, tum vero oſtendam quomodo iisdem veſtigiis inſiſtendo plura alia imo infinita ſimilia criteria inueſtigari queant.

Primum principium inde petitur quod ſi cuiuſpiam aequationis omnes radices fuerint reales, indeque alia aequatio formetur, cuius ſingulae radices ſint quadratis illarum aequales, tum huius nouae aequationis omnes radices non ſolum futurae ſint reales ſed adeo poſitiuae, ita vt in ea ſigna + et − ſe mutuo alternatim inſequi debeant.

Sumamus ergo huius aequationis:

$$x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + c x^{n-3} + d x^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

omnes radices eſſe reales, indeque quaeramus nouam aequationem, cuius quaelibet radix z aequalis ſit quadrato xx, ſeu $z = xx$; hunc in finem illius aequationis alternos terminos ad alteram partem transferamus vt ſit:

$$x^n + b x^{n-2} + d x^{n-4} + \text{etc.} = -a x^{n-1} - c x^{n-3} - e x^{n-5} - \text{etc.}$$

capian-

capianturque vtrinque quadrata, quae iterum ad eandem partem dispoſita dabunt hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{lllll} x^{2n} + 2b.x^{2n-2} & + 2d.x^{2n-4} & + 2f.x^{2n-6} & + 2h.x^{2n-8} & \\ \quad - aa & + bb & + 2bd & + 2bf & \\ & - 2ac & - 2ae & + dd & \text{etc.} \\ & & - cc & - 2ag & \\ & & & - 2ce & \end{array}\right\} = 0$$

In qua omnes exponentes ipſius x ſunt numeri pares.

Scribamus ergo vbique z loco xx et habebimus nouam illam aequationem quaeſitam, quae erit

$$\begin{array}{lllll} z^{n} + 2b.z^{n-1} & + 2d.z^{n-2} & + 2f.z^{n-3} & + 2h.z^{n-4} & \text{etc.} = 0 \\ \quad - aa & + bb & + 2bd & + 2bf & \\ & - 2ac & - 2ae & + dd & \\ & & - cc & - 2ag & \\ & & & - 2ce. & \end{array}$$

In qua cum coefficientes primi, tertii, quinti, etc. termini ſint poſitiui, ſecundi vero quarti, ſexti etc. negatiui, obtinebimus ſequentes conditiones pro coefficientibus a, b, c, d etc. aequationis propoſitae:

$$\begin{array}{lcl} 2b - aa < 0 & & aa > 2b \\ 2d + bb - 2ac > 0 & \text{ſeu} & bb > 2ac - 2d \\ 2f + 2bd - 2ae - cc < 0 & & cc > 2bd - 2ae + 2f \\ 2h + 2bf + dd - 2ag - 2ce > 0 \ \text{etc.} & & dd > 2ce - 2bf + 2ag - 2h \\ & & \qquad \text{etc.} \end{array}$$

 quarum

quarum formularum ordo facile perspicitur.

En ergo iam insignes proprietates, quae omnibus aequationibus, quarum radices sunt reales, necessario conueniunt, ita vt aequationis propositae omnes radices reales esse neqveant, nisi simul hae conditiones inter eius coefficientes locum habeant. Neutiquam autem viciſſim inde sequitur, si hae conditiones locum habeant, etiam omnes aequationis radices fore reales: quod exemplo aequationis biquadraticae ante allegatae $x^4+px^3-qx^2-rx+s=0$ fit manifestum, cum enim facta applicatione fit $a=p$; $b=-q$; $c=-r$ et $d=s$; conditiones inuentae sponte implentur quoniam vtique est $pp>-2q$; $qq>-2pr-2s$; $rr>-2qs$ hoc autem non obstante nouimus, omnes huius aequationis radices esse posse imaginarias.

Scholion.

Quemadmodum hic ex data aequatione aliam elicuimus, cuius singulae radices sint quadrata singularum radicum illius, ita etiam inde aliae aequationes inueniri possunt, quarum radices sint vel cubi, vel biquadrata vel aliae potestates altiores radicum aequationis propositae.

Poni scilicet oportet vel $z=x^3$, vel $z=x^4$, vel $z=x^5$ etc. et negotium huc redit vt quantitas x eliminetur: pro qua operatione regulae passim sunt traditae.

Verum

Verum calculus plerumque tam fit intricatus et molestus, vt nemo facile hunc laborem sit susceptururus.

Quare haud abs re fore arbitror peculiarem methodum ostendisse, qua haec eliminatio facile effici queat.

Hunc in finem aequatio ordine inuerso exhibeatur vt sit

$$a + bx + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + \text{etc.} = 0$$

et pro casu iam euoluto, quo esse debet $z = xx$, facta substitutione, quatenus licet, habebimus

$$a + bx + cz + dxz + ezz + fxzz + gz^3 + \text{etc.} = 0$$

vbi breuitatis gratia statuamus

$$a + cz + ezz + gz^3 + \text{etc.} = P \text{ et } b + dz + fzz + \text{etc.} = Q$$

vt sit $P + Qx = 0$, quae aequatio per x multiplicata loco xx, scribendo z, dabit aliam eiusdem formae

$$Px + Qz = 0$$

vnde iam facile x eliminatur; prodit enim

$$PP - QQz = 0$$

quae formula operationem supra vsurpatam complectitur.

Ponamus autem requiri vt sit $z = x^3$, factaque substitutione quatenus licet, habebitur

$$a + bx + cxx + dz + exz + fxxz + gzz + \text{etc.} = 0$$

quae

quae cum tribus partibus constet, statuamus breuitatis gratia $a+dz+gzz+$ etc. $=P$

$$b+ez+hzz+\text{ etc.}=Q$$

$$c+fz+izz+\text{ etc.}=R$$

vt sit $P+Qx+Rxx=o$ haec per x multiplicata dat nouam eiusdem formae

$Rz+Px+Qxx=o$; haec denuo per x multiplicata dabit

$$Qz+Rzx+Pxx=o.$$

Iam vt ex his tribus aequationibus tam x quam xx eliminetur prima per L secunda per M et tertia per N multiplicetur, fiatque

$LQ+MP+NRz=o$ et insuper

$LR+MQ+NP=o$

eritque tum $LP+MRz+NQz=o$.

Ex duabus prioribus autem elicitur

$$L=\frac{-MP-NRz}{Q}=\frac{-MQ-NP}{R}$$

ideoque $MPR+NRRz=MQQ+NPQ$

vnde fit $\frac{M}{N}=\frac{PQ-RRz}{PR-QQ}$.

Statuatur ergo $M=PQ-RRz$

et $N=PR-QQ$ ac fiet $L=QRz-PP$

quocirca aequatio quaesita erit

$$3PQRz-P^3-Q^3z-R^3zz=o.$$

Hinc

Hinc iam ſatis perſpicuum eſt, quomodo eadem methodus etiam ad altiores poteſtates ſit accommodanda.

Secundum principium: ponamus aequationis propoſitae

$x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + c x^{n-3} + \text{etc.} = 0$ radices eſſe $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta, -$ etc. quarum numerus eſt n vt ſit $a = \alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc.

et $b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta +$ etc.

Et quia omnes radices ſunt reales erit ſequens forma $(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2 + (\gamma-\delta)^2 +$ etc. certe numerus poſitiuus, facta autem euolutione, prodit $(n-1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.}) - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma - 2\beta\delta - 2\gamma\delta -$ etc. eſt vero vti conſtat $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.} = aa - 2b$ vnde haec forma $(n-1)(aa-2b) - 2b = (n-1)aa - 2nb$ quae quantitas cum certe ſit poſitiua erit $aa > \frac{2n}{n-1} b$.

Quae iam inſignem continet proprietatem huiusmodi aequationum quarum omnes radices ſunt reales: etſi ea enim tantum ad tres terminos initiales ſe extendit, tamen mox patebit, quemadmodum ea ad ternos terminos quosuis ſucceſſiuos applicari queat.

Tertium principium. Si aequationis cuiuscunque gradus:

$$x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + c x^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

 omnes

omnes radices fuerint reales, ſemper duae aequationes vno gradu inferiores inde formari poſſunt quarum radices itidem omnes ſunt reales; altera ita ſe habet

$$nx^{n-1}+(n-1)ax^{n-2}+(n-2)bx^{n-3}+(n-3)cx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

quae ex propoſita naſcitur ſi ſinguli eius termini per progreſſionem arithmeticam n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, etc. multiplicentur; quia enim hoc modo vltimus terminus per o multiplicatur, tota aequatio diuiſionem per x admittet, ſicque vno gradu deprimetur: altera vero aequatio eſt

$$ax^{n-1}+2bx^{n-2}+3cx^{n-3}+4dx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

quae ex propoſita naſcitur, ſi ſinguli eius termini per progreſſionem arithmeticam 0, 1, 2, 3, 4 etc. multiplicentur.

Cuius demonſtratio ex conſideratione linearum curuarum eſt petenda: ſi enim x denotet abſciſſam et applicata ſtatuatur $y=x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+$ etc. euidens eſt applicatam fieri nullam quoties abſciſſa x radici aequationis propoſitae aequalis capitur.

Cum igitur noſtra aequatio n habeat radices reales, in totidem locis applicata y euaneſcet, ibique curua axem interſecabit. Inter binas igitur interſectiones certo dabitur applicata maxima, vbi erit $\frac{dy}{dx}=0$, vnde tales applicatae maximae erunt numero

mero $n-1$ ad minimum; quodfi ergo valor formulae $\frac{dy}{dx}$ quaeratur qui erit

$$nx^{n-1}+(n-1)ax^{n-2}+(n-2)bx^{n-3}+\text{etc.}$$

hic $n-1$ cafibus euanefcere poterit, fiue haec aequatio $nx^{n-1}+(n-1)ax^{n-2}+(n-2)bx^{n-3}+\text{etc.}=0$ certe habebit $n-1$ radices, hoc eft, omnes fuas radices reales, quae eft demonftratio prioris formae.

Pro altera ftatuamus $x=\frac{1}{y}$ et aequatio hinc refultans $1+ay+byy+cy^3+\text{etc.}=0$ itidem omnes habebit radices reales, quippe quae funt reciprocae radicum illius; quocirca aequatio per differentiationem hinc fimili modo formata

$$a+2by+3cyy+4dy^3+\text{etc.}=0$$

etiam omnes radices habebit reales; reftituamus nunc pro y valorem $\frac{1}{x}$, ac manifeftum erit etiam huius aequationis

$$ax^{n-1}+2bx^{n-2}+3cx^{n-3}+4dx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

omnes radices futuras effe reales.

Quemadmodum hinc duae aequationes vno gradu inferiores funt erutae, ita porro ex his tres nouae duobus gradibus inferiores deriuantur, quae funt

$$n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)ax^{n-3}+(n-2)(n-3)bx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

$$1.(n-1)ax^{n-2}+2.(n-2)bx^{n-3}+3(n-3)cx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

$$1.2.bx^{n-2}+2.3.cx^{n-3}+3.4.dx^{n-4}+\text{etc.}=0.$$

 Simili

Simili modo ex his elicientur quatuor aequationes tribus gradibus inferiores, scilicet

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4}+(n-2)(n-3)(n-4)bx^{n-5}+\text{etc.}=0$$

$$1.(n-1)(n-2)ax^{n-3}+2.(n-2)(n-3)bx^{n-4}+3.(n-3)(n-4)cx^{n-5}+\text{etc.}=0$$

$$1.2.(n-2)bx^{n-3}+2.3.(n-3)cx^{n-4}+3.4.(n-4)dx^{n-5}+\text{etc.}=0$$

$$1.2.3.cx^{n-3}+2.3.4.dx^{n-4}+3.4.5\,ex^{n-5}+\text{etc.}=0$$

sicque continuo vlterius progredi licet quoniam igitur omnes istae aequationes radices habent reales, quae criteria pro his aequationibus deriuatis habentur, eadem quoque in ipsa aequatione proposita locum habere debent.

Applicatio ad criteria primi principii.

Faciamus ergo applicationem ad criteria, ex primo principio eruta: et prima aequatio deriuata dabit:

$$(n-1)^2a^2 > 2n(n-2)b$$

$$(n-2)^2b^2 > 2(n-1)(n-3)ac-2n(n-4)d$$

$$(n-3)^2c^2 > 2(n-2)(n-4)bd-2(n-1)(n-5)ae+2n(n-6)f$$

etc. etc.

ex

ex ſecunda autem aequatione deriuata naſcuntur haec criteria

$$4bb > 2.6ac$$
$$9cc > 2.8bd - 2.5ae$$
$$16dd > 2.3.5ce - 2.2.6bf + 2.7ag$$
$$25ee > 2.4.6df - 2.3.7cg + 2.2.8bh - 2.8ai$$

etc. etc.

Si tantum primum criterium $aa > 2b$ ad vltimas aequationes cuiusque ordinis applicetur, ſequentia criteria emergent

$$aa > 2b \qquad\qquad aa > 2b$$
$$4bb > 2.3.ac \qquad \text{ſiue} \qquad bb > \tfrac{3}{2}ac$$
$$4.9.cc > 2.1.2.3.4bd \qquad\qquad cc > \tfrac{4}{3}bc$$
$$4.9.16\,dd > 2.1.2.3^2.4.5ce \qquad\qquad dd > \tfrac{5}{4}ce$$

etc.

Applicatio ad criterium ſecundi principii

$$aa > \frac{2n}{n-1}b.$$

Cum ſecundum hoc principium pro aequatione quacunque $px^m + qx^{m-1} + rx^{m-2} + \text{etc.} = 0$ habeatur $qq > \frac{2m}{m-1}pr$ binae aequationes vno gradu inferiores dabunt

$$(n-1)^2 aa > \frac{2(n-1)}{n-2}.n.(n-2)b \text{ ſeu } aa > \frac{2.nb}{n-1}$$

deinde $4bb > \frac{2.(n-1)}{n-2}.3ac$ ſeu $bb > \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}.ac.$

Tres aequationes duobus gradibus inferiores autem dabunt

I. $(n-1)^2(n-2)^2 aa > \frac{2.\overline{n-2}}{n-3}.n.(n-1)(n-2)(n-3)b$

seu $aa > \frac{2n}{n-1}b$

II. $4(n-2)^2 bb > \frac{2.\overline{n-2}}{n-3}.3.(n-1)(n-3)ac$

seu $bb > \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac$

III. $4.9.cc > \frac{2.\overline{n-2}}{n-3}.1.2.3.4.bd$ seu

$cc > \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd.$

Cum igitur ex quolibet ordine vltima aequatio sola praebeat nouum criterium; omnia criteria hinc nata ita se habebunt

$aa > \frac{2}{1}.\frac{n}{n-1}b$

$bb > \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac$

$cc > \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd$

$dd > \frac{5}{4}.\frac{n-3}{n-4}ce$

etc.

Hinc euoluamus ista criteria pro aequationibus singulorum graduum.

I°. Pro $xx+ax+b=0$ erit criterium

$aa > 4b$

quod ita est perfectum, vt si sit $aa > 4b$, radices certe sint reales.

II°.

II°. Pro $x^3 + axx + bx + c = 0$

erunt criteria

$aa > 3b$; $bb > 3ac$.

III°. Pro $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$

erunt criteria

$aa > \frac{8}{3}b$; $bb > \frac{9}{4}ac$; $cc > \frac{8}{3}bd$

IV°. Pro $x^5 + ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$

erunt criteria

$aa > \frac{5}{2}b$; $bb > 2ac$; $cc > 2bd$; $dd > \frac{5}{2}ce$.

V°. Pro $x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dxx + ex + f = 0$

erunt criteria

$aa > \frac{12}{5}b$; $bb > \frac{15}{8}ac$; $cc > \frac{16}{9}bd$; $dd > \frac{15}{8}ce$; $ee > \frac{12}{5}df$.

Scholion.

Omnia haec criteria a *Newtono* in Arithmetica vniuerſali ſunt prolata et deduci poſſunt ex criterio aequationum quadratarum, quod ſi aequatio $pxx + qx + r = 0$ ambas radices habeat reales neceſſario ſit $qq > 4pr$.

Cum enim cuiuscunque ordinis propoſita fuerit aequatio, ope tertii principii ex ea tandem plures aequationes quadraticae formae $pxx + qx + r = 0$ erui queant quae omnes radices habent reales, ſiquidem propoſitae aequationis omnes radices fuerit reales:

les: hoc principium ad aequationes cuiuscunque gradus extendi poterit.

Ita ex aequatione cubica $x^3 + axx + bx + c$ nafcuntur hae duae quadraticae

$$3xx + 2ax + b = 0 \quad \text{et} \quad axx + 2bx + 3c = 0$$

vnde concluditur vt ante

$$aa > 3b \quad \text{et} \quad bb > 3ac.$$

Simili modo aequatio quarti ordinis

$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$ praebet has tres quadraticas

$$4.3.\ xx + 3.2.ax + 2.1.b = 0$$
$$1.3.axx + 2.2.bx + 3.1.c = 0$$
$$1.2.bxx + 2.3\ cx + 3.4\ d = 0$$

et aequatio quinti gradus

$x^5 + ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$ praebet has quatuor quadraticas

$$5.4.3.\ xx + 4.3.2.ax + 3.2.1.b = 0$$
$$1.4.3\ axx + 2.3.2.bx + 3.2.1.c = 0$$
$$1.2.3.bxx + 2.3.2.cx + 3.4.1.d = 0$$
$$1.2.3.cxx + 2.3.4.dx + 3\ 4.5.e = 0$$

quae fupra allata criteria fuppeditant.

Quoniam autem operofum foret has formas vlterius continuare rem generatim expediamus et ex aequa-

aequatione cuiuscunque gradus statim aequationem quadraticam quamcunque eliciamus.

Aequationem generalem ita exhibeamus

$$\begin{array}{llllllll}
x^n & +ax^{n-1} & +bx^{n-2} & +\ldots & +px^{\lambda+2} & +qx^{\lambda+1} & +rx^{\lambda} & +\ldots+v=0 \\
\hline
0 & 1 & 2 & \ldots\ldots & n-\lambda-2 & n-\lambda-1 & n-\lambda & \\
 & 0 & 1 & \ldots\ldots & n-\lambda-3 & n-\lambda-2 & n-\lambda-1 & \\
 & & 0 & \ldots\ldots & n-\lambda-4 & n-\lambda-3 & n-\lambda-2 & \\
 & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
 & & & & \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda & \ldots\ldots 0 \\
 & & & & \lambda+1 & \lambda & \lambda-1 & \ldots 0 \\
 & & & & \lambda & \lambda-1 & \lambda-2 & \ldots 0 \\
 & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & & & & 3 & 2 & 1 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
+1.2.3\ldots n-\lambda-2.\,3.4.5\ldots\lambda+2.\,pxx \\
+2.3.4\ldots n-\lambda-1.\,2.3.4\ldots\lambda+1.\,qx \\
+3.4.5\ldots n-\lambda\,.\,.\,1.2.3\ldots\lambda r
\end{array}\right\}=0$$

Vnde patet pro ternis coefficientibus p, q et r hanc obtineri aequationem quadraticam

quae primo diuisa per $1.2.3.4\ldots\ldots n-\lambda-2$ dabit

$$3.4.5\ldots\lambda+2.\,pxx+\frac{n-\lambda-1}{1}.\,2.3.4\ldots\lambda+1.\,qx$$
$$+\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1.\ 2.}.\,1.\,2.\,3\ldots\lambda r=0$$

quae denuo per $1.2.3\ldots\lambda$ diuisa dabit

$$\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.\ 2}pxx+\frac{n-\lambda-1}{1}.\,\frac{\lambda+1}{1}qx+\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1.\ 2}r=0$$

 vnde

vnde pro radicibus realibus hoc habetur criterium:

$$\frac{(n-\lambda-1)^2(\lambda+1)^2}{1\cdot 1}\,qq > 4\cdot\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}\,pr$$

quod reducitur ad hoc

$$qq > \frac{\lambda+2}{\lambda+1}\cdot\frac{n-\lambda}{n-\lambda-1}\,pr.$$

Quemadmodum haec criteria ex caractere aequationum quadraticarum ſunt deriuata, ita ſi caractere aequationum cubicarum, quarum omnes radices ſunt reales, ſimili modo vti velimus, alia noua criteria impetrabimus, ſicque certius circa radices imaginarias aequationum iudicium inſtituere licebit.

Problema.

Caracterem completum inueſtigare pro aequationibus cubicis, quarum omnes radices ſunt reales.

Solutio.

Quoniam conſtat aequationis cubicae omnes radices eſſe reales, quoties regula *Cardani* ad formulas imaginarias perducit; ponamus aequationem cubicam $x^3+axx+bx+c=0$ ex hac forma naſci $(x+\frac{1}{3}a) = \sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$ ſumtis igitur vtrinque cubis prodit

$$x^3+axx+\tfrac{1}{3}aax+\tfrac{1}{27}a^3 = p+q+3(\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q})\times\sqrt[3]{pq}$$

vel $=p+q+(3x+a)\sqrt[3]{pq}$ ſeu

x^3+axx

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + axx + \frac{1}{3}aax + \frac{1}{27}a^3 \\ \qquad -3x\sqrt[3]{pq} - p \\ \qquad\qquad\qquad - q \\ \qquad\qquad\qquad -a\sqrt[3]{pq} \end{array}\right\} = 0$$

quae forma cum aequatione proposita comparata praebet $b = \frac{1}{3}aa - 3\sqrt[3]{pq}$ et

$c = \frac{1}{27}a^3 - p - q - a\sqrt[3]{pq}$; cum ergo sit

$\sqrt[3]{pq} = \frac{1}{9}aa - \frac{1}{3}b = \frac{aa-3b}{9}$ hincque

$pq = \frac{(aa-3b)^3}{729}$ et $p+q = \frac{1}{27}a^3 - \frac{a(aa-3b)}{9} - c = \frac{1}{27}a(9b-2aa) - c$

colligimus $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq$

$= \frac{1}{729}aa(9b-2aa)^2 - \frac{2}{27}ac(9b-2aa) + cc$

$- \frac{4}{729}(aa-3b)^3$

quae quantitas si fuerit negatiua, formula $p-q$ ideoque ambae litterae p et q obtinebunt valores imaginarios; quod cum sit signum radicum realium statuamus

$(\frac{1}{27}a(9b-2aa) - c)^2 - \frac{4}{729}(aa-3b)^3 = -\omega$

hincque

$\frac{1}{27}a(9b-2aa) - c = \pm\sqrt{(\frac{4}{729}(aa-3b)^3 - \omega)}$

et $c = \frac{1}{27}a(9b-2aa) \mp \sqrt{(\frac{4}{729}(aa-3b)^3 - \omega)}$.

Vnde pro c deducuntur hi limites

$c < \frac{1}{27}a(9b-2aa) + \frac{2}{27}(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}$

$c > \frac{1}{27}a(9b-2aa) - \frac{2}{27}(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}$.

Vel quoniam inde habetur $bb - 3ac = \frac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b) \pm 3a\sqrt{(\frac{4}{729}(aa-3b)^3 - \omega)}$

pro $bb-3ac$ hi oriuntur limites

$$bb-3ac < \frac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b) + \frac{2}{9}a(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}$$

$$bb-3ac > \frac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b) - \frac{2}{9}a(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}.$$

Vnde deducimus

$$\frac{bb-3ac}{aa-3b} < \frac{2aa-3b+2a\sqrt{(aa-3b)}}{9} \text{ seu}$$

$$\frac{bb-3ac}{aa-3b} < \left(\frac{a+\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2 \text{ et}$$

$$\frac{bb-3ac}{aa-3b} > \left(\frac{a-\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2.$$

Quoties ergo formulae $\frac{bb-3ac}{aa-3b}$ valor intra hos limites $\left(\frac{a+\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$ et $\left(\frac{a-\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$ continetur certi ſumus omnes radices noſtrae aequationis cubicae eſſe reales. In quo adeo conſiſtit caracter completus quem quaerimus.

Corollarium 1.

Quia limites inuenti locum habere nequeunt niſi $aa-3b$ ſit quantitas poſitiua, hinc ſtatim perſpicuum eſt radices reales eſſe non poſſe niſi ſit $aa > 3b$: quod criterium iam in ſupra allatis continetur.

Corollarium 2.

Deinde cum ambo limites ſint quadrata ideoque quantitates poſitiuae, valor formulae $\frac{bb-3ac}{aa-3b}$ debet

debet esse positiuus; quare cum sit $aa > 3b$ necesse est vt fiat quoque $bb > 3ac$; quod est alterum criterium supra iam allatum.

Corollarium 3.

Videmus ergo non solum ambo criteria ante inuenta in hoc charactere contineri, sed hunc characterem praeterea aliam conditionem complecti, quae nisi impleatur, radices non futurae sint reales, etiamsi fuerit $aa > 3b$ et $bb > 3ac$.

Mirum igitur videri poterit quod vnicus character plura criteria in se complectatur.

Scholion 1.

Si in aequatione cubica sumamus esse $c = 0$ vt ea abeat in quadraticam, manifestum est ad realitatem radicum requiri vt sit $aa > 4b$, atque adeo in hoc contineri characterem completum. Interim tamen si in nostro charactere inuento statuamus $c = 0$, non tam facile patet inde sequi $aa > 4b$; prodit enim $\frac{bb}{aa-3b} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \left(\frac{a \mp \sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$

operae igitur erit pretium inuestigare, quomodo iste character ad simplicem formam $aa > 4b$ reducatur.

Reuertamur igitur ad conditionem primo inventam, quae posito $c = 0$ abit in hanc formam $aa(9b-2aa)^2 - 4(aa-3b)^3 < 0$

quae contrahitur in hanc $-27bb(aa-4b)<0$ seu $bb(aa-4b)>0$ vnde manifesto sequitur $aa>4b$. Ceterum tamen memoratu dignum hic vsu venit quod conditio

$$\frac{bb}{aa-3b} \lessgtr \left(\frac{a \pm \sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$$

prorsus conueniat cum ista $aa>4b$, ita vt neutra plus inuoluat quam altera, sicque haec conuenientia tanquam insigne Theorema spectari possit.

Hoc quidem ostendi potest, quantitatem $\frac{bb}{aa-3b}$ alterutri limiti ipsi fore aequalem si fuerit vel $aa=4b$ vel $aa=\infty$; intra quos casus extremos vtique cadit $aa>4b$.

Scholion 2.

Iste caracter completus alio modo prorsus singulari inuestigari potest, vnde autem non patet eum esse completum, nisi de eo iam certiores essemus facti. Sequenti autem modo ratiocinium instituti potest.

Si aequatio $x^3+axx+bx+c$ omnes radices habet reales, tum posito $x=y+p$ aequatio resultans $y^3+(a+3p)yy+(b+2ap+3pp)y+c+bp+app+p^3=0$ etiam habebit radices omnes reales; criteria autem iam cognita dant

I. $(a+3p)^2>3(b+2ap+3pp)$ hoc est $aa>3b$,

II. $(b+2ap+3pp)^2>3(a+3p)(c+bp+app+p^3)$ hoc est
$bb+(ab-9c)p+(aa-3b)pp>3ac$

quae

quae conditio impletur tam si $p=0$ quo fit $bb>3ac$ quam si $p=\infty$ quia $aa>3b$.

Tribuatur igitur ipsi p eiusmodi valor quo formula illa fit minima, atque etiam nunc illa erit $>3ac$. Verum formula $A+Bp+Cpp$ fit minima sumto $p=\frac{-B}{2C}$ eiusque valor minimus erit $A-\frac{BB}{4C}$; facta ergo applicatione habebimus

$$bb-\frac{(ab-9c)^2}{4(aa-3b)}>3ac.$$

Quia $aa>3b$ multiplicetur per $4(aa-3b)$ et obtinebimus facta euolutione

$$3bb(aa-4b)>81cc+6ac(2aa-9b)$$

quod criterium completum supra inuentum continet.

Conclusio.

Pro Applicatione ergo ad aequationes altiorum graduum si methodo ante exposita inde deriuentur aequationes cubicae huius formae

$$px^3+qxx+rx+s=0.$$

Criterium radicum realium in hoc consistit vt sit

$$\frac{rr-3qs}{qq-3pr}\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\left(\frac{q\pm\sqrt{(qq-3pr)}}{3p}\right)^2$$

qua scribendi ratione indicatur quantitatem $\frac{rr-3qs}{qq-3pr}$ intra hos limites $\left(\frac{q+\sqrt{(qq-3pr)}}{3p}\right)^2$ et $\left(\frac{q-\sqrt{(qq-3pr)}}{3p}\right)^2$ contineri debere.

Appli-

Applicatio

ad aequationem quarti ordinis

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Hinc methodo ſupra oſtenſa deriuantur hae duae aequationes cubicae

$$4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c = 0$$
$$ax^3 + 2bx^2 + 3cx + 4d = 0.$$

Vnde, ſi omnes radices ſunt reales, inueniuntur duo ſequentia noua criteria

$$\frac{4bb - 9ac}{9aa - 24b} \lessgtr \left(\frac{3a \pm \sqrt{(9aa - 24b)}}{12}\right)^2 \text{ et}$$

$$\frac{9cc - 24bd}{4bb - 9ac} \lessgtr \left(\frac{2b \pm \sqrt{(4bb - 9ac)}}{3a}\right)^2$$

Simili modo applicatio fieri poſſet ad aequationes quinti gradus, vnde tria criteria obtinerentur, et ita porro ad aequationes altiorum graduum.

Verum res adeo in genere praeſtari poteſt, ita vt propoſita aequatione cuiuscunque ordinis, inter quaternos eius coefficientes ſucceſſiuos tale criterium inueniri poſſit: eodem ſcilicet modo calculum inſtitui opportet, quo ſupra pro criteriis prioris ordinis ſumus vſi (vid. Scholion ante Probl.)

$x^n +$

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
x^n & +ax^{n-1} & +bx^{n-2}\ldots & +px^{\lambda+3} & +qx^{\lambda+2} & +rx^{\lambda+1} & +sx^{\lambda}\ldots & \ldots & +px^2 & +qx & +v & =0 \\
0, & 1, & 2 & n-\lambda-3 & n-\lambda-2 & n-\lambda-1 & n-\lambda\ldots & n-2 & n-1 & n & & \\
 & 0 & 1 & n-\lambda-4 & n-\lambda-3 & n-\lambda-2 & n-\lambda-1\ldots & n-3 & n-2 & n-1 & & \\
 & & 0 & n-\lambda-5 & n-\lambda-4 & n-\lambda-3 & n-\lambda-2\ldots & n-4 & n-3 & n-2 & & \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & & \\
 & & & \lambda+3 & \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda\ldots\ldots & 2 & 1 & 0 & & \\
 & & & \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda & \lambda-1\ldots\ldots & 1 & 0 & & & \\
 & & & \lambda+1 & \lambda & \lambda-1 & \lambda-2\ldots\ldots & 0 & & & & \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\
 & & & 4 & 3 & 2 & 1 & & & & &
\end{array}
$$

Hinc ergo per continuas differentiationes ad hanc aequationem cubicam peruenitur

$$
\left.\begin{array}{l}
1.2.3\ldots(n-\lambda-3).4.5.6\ldots(\lambda+3)px^3+2.3.4..(n-\lambda-2).3.4.5..(\lambda+2)qx^2 \\
+3.4.5\ldots(n-\lambda-1).2.3.4\ldots(\lambda+1)rx+4.5.6..(n-\lambda).1.2.3\ldots\ldots\lambda\, s
\end{array}\right\}=0
$$

quae diuisa per $1.2.3\ldots\ldots(n-\lambda-3).1.2.3\ldots\ldots\lambda$ reducitur ad hanc formam

$$
\left.\begin{array}{l}
\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{1.\ 2.\ 3}px^3+\frac{(n-\lambda-2)}{1}.\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.\ 2}qxx \\
+\frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)}{1.\ 2}.\frac{(\lambda+1)}{1}rx+\frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)(n-\lambda)}{1.\ 2.\ 3}s
\end{array}\right\}=0
$$

seu

$$
\left.\begin{array}{l}
(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)px^3+3.(\lambda+1)(\lambda+2)(n-\lambda-2)qxx \\
+3(\lambda+1)(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)rs+(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)(n-\lambda)s
\end{array}\right\}=0
$$

Quare ex aequatione generali quacunque

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+dx^{n-4}+ex^{n-5}+fx^{n-6}+gx^{n-7}+hx^{n-8}\text{etc.}=0$$

 elicien-

elicientur ſequentes aequationes cubicae

I. Si $\lambda = n-3$ erit

$$n(n-1)(n-2)x^3 + 1.3(n-1)(n-2)axx + 1.2.3.(n-2)bx + 1.2.3\,c = 0$$

ſeu $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3}x^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\;2}axx + \frac{(n-2)}{1}bx + c = 0.$

II. Si $\lambda = n-4$ erit

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\;2.\;3}ax^3 + 2.\frac{(n-2)(n-3)}{1.\;2}bxx + 3.\frac{(n-3)}{1}cx + 4d = 0$$

III. Si $\lambda = n-5$ erit

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\;2.\;3}bx^3 + 3.\frac{(n-3)(n-4)}{1.\;2}cxx + 6.\frac{n-4}{1}dx + 10e = 0$$

IV. Si $\lambda = n-6$ erit

$$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\;2.\;3}cx^3 + 4.\frac{(n-4)(n-5)}{1.\;2}dxx + 10.\frac{n-5}{1}ex + 20f = 0$$

etc.

Quod ſi ergo aequatio propoſita omnes radices habet reales, ſingulae hae aequationes cubicae etiam ſuas radices habebunt reales: Vnde ſequentia oriuntur criteria

$$\frac{bb - \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac}{aa - \frac{2n}{n-1}b} \lessgtr \frac{1.(n-1)^2}{4.n^2}\left(a \pm \sqrt{\left(aa - \frac{2n}{n-1}b\right)}\right)^2$$

$$\frac{cc - \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd}{bb - \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac} \lessgtr \frac{4.(n-2)^2}{9.(n-1)^2aa}\left(b \pm \sqrt{\left(bb - \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac\right)}\right)^2$$

$$\frac{dd - \frac{5}{4}.\frac{n-3}{n-4}ce}{cc - \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd} \lessgtr \frac{9.(n-3)^2}{16.(n-2)^2bb}\left(c \pm \sqrt{\left(cc - \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd\right)}\right)^2$$

$ee - \frac{6}{5}.$

$$\frac{ee - \frac{6}{5} \cdot \frac{n-4}{n-5} df}{dd - \frac{5}{4} \cdot \frac{n-3}{n-4} ce} \lessgtr \frac{16 \cdot (n-4)^2}{25 \cdot (n-3)^2 cc} \left(d \pm \sqrt{\left(dd - \frac{5}{4} \cdot \frac{n-3}{n-4} ce\right)}\right)^2$$

etc. etc.

vnde lex progreſſionis clare perſpicitur.

Obſeruatio.

Quae hactenus attulimus praeter primum criterium ad duo genera reducuntur, quae proprietates aequationum quarum omnes radices ſunt reales in ſe complectuntur; primum genus eiusmodi relationes ſuppeditat, quae inter ternos quosque coefficientes ſucceſſiuos locum habent, et quae iam pridem ſunt cognitae. Alterum genus vero eiusmodi praebet relationes, quae inter quaternos quosque coefficientes ſucceſſiuos neceſſario ſubſiſtere debent, ſi quidem omnes radices fuerint reales. Circa vtrumque genus obſeruaſſe iuuabit, nullam accuratiorem relationem vel inter ternos vel quaternos coefficientes ſucceſſiuos exhiberi poſſe.

Quoties vel vnica harum relationum in quapiam aequatione locum non inuenit, certo concludere licet non omnes radices eſſe reales: vtrum autem duae tantum vel plures futurae ſint imaginariae, hinc non definitur. Ex defectu quidem vnici criterii concludi oportet ad minimum duas radices fore imaginarias, neque tamen hinc ſequitur duorum defectum quatuor radices imaginarias indicare.

Si enim aequatio propoſita fuerit tertii gradus, duo caracteres primi generis ad eam applicari poſſunt, qui etſi ambo deficiant, aequatio tamen non plures quam duas radices imaginarias habere poteſt.

Quemadmodum hos caracteres ex indole aequationum quadraticarum et cubicarum, quarum radices ſunt reales, deriuauimus, ita ſi commode aequationum biquadraticarum caracterem completum pro caſu quo omnes radices ſunt reales exprimere liceret, ſimili modo criteria tertii generis inde deducere poſſemus quibus relationes inter quinos quosque coefficientes ſucceſſiuos continerentur; verum cum formulae nimis prodirent prolixae, ad hunc vſum prorſus ineptae videntur.

Concluſio.

Cum hic plura principia in ſubſidium ſint vocata, coronidis loco oſtendam, quomodo omnia haec criteria ex duobus tantum principiis methodo ſatis ſingulari deduci queant.

Propoſita ſcilicet aequatione cuiuscunque gradus

$$x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} + d x^{m-4} \text{ etc.} = 0$$

cuius omnes radices ſint reales, pro priori principio aſſumo, ſemper eſſe $aa > 2b$, quod per ſe eſt manifeſtum, cum formula $aa - 2b$ exprimat ſummam quadratorum ſingularum radicum, alterum principium

pium in hoc consistit, quod huius aequationis vno gradu inferioris

$$a x^{m-1} + 2 b x^{m-2} + 3 c x^{m-3} + 4 d x^{m-4} + \text{etc.} = 0$$

etiam omnes radices futurae sint reales; quod supra est demonstratum.

His iam duobus principiis constitutis ratiocinium ita prosequor.

I. Pro criteriis primi generis, statuo $x = y + p$ denotante p quantitatem realem, vt aequatio hinc resultans etiamnunc omnes suas radices habeat reales, quae erit

$$\left.\begin{array}{llll} y^m + m p y^{m-1} & + \frac{m(m-1)}{2} p p y^{m-2} & + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} p^3 y^{m-3} & + \text{etc.} \\ + a & + (m-1) a p & + \frac{(m-1)(m-2)}{2} a p p & + \text{etc.} \\ & + b & + (m-2) b p & + \text{etc} \\ & & + c & + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0$$

per prius igitur principium necesse est vt hic sit

$$(mp + a)^2 > m(m-1)pp + 2(m-1)ap + 2b$$

seu facta euolutione $mpp + 2ap + aa > 2b$ quod cum de omnibus valoribus ipsius p valere debeat, necesse est vt etiam de eo valeat, quo ea formula fit minima, quod euenit si sumatur $p = \frac{-a}{m}$, tum autem habebitur $aa > \frac{2m}{m-1} b$; quod est primum criterium primi generis; ex quo reliqua per aequationes quas secundum principium praebet successiue deriuantur

Aequationes	Criteria
$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \text{etc.} = 0$	$aa > \frac{2m}{m-1} b$
$ax^{m-1} + 2bx^{m-2} + 3cx^{m-3} + \text{etc.} = 0$	$bb > \frac{3\cdot(m-1)}{2\cdot(m-2)} ac$
$bx^{m-2} + 3cx^{m-3} + 6dx^{m-4} + \text{etc.} = 0$	$cc > \frac{4\cdot(m-2)}{3\cdot(m-3)} bd$
$cx^{m-3} + 4dx^{m-4} + 10ex^{m-5} + \text{etc.} = 0$	$dd > \frac{5\cdot(m-3)}{4\cdot(m-4)} ce$
etc.	etc.

II. Pro criteriis secundi generis. Retenta substitutione $x = y + p$ aequationis inde resultantis, reiecto primo termino consideremus tres sequentes ad eosque criterium modo inuentum $bb > \frac{3\cdot}{2\cdot}\frac{(m-1)}{(m-2)} ac$ applicemus, quod hanc aequationem praebebit

$$\left(\frac{m(m-1)}{2}pp + (m-1)ap + b\right)^2 > \frac{3\cdot}{2\cdot}\frac{(m-1)}{(m-2)}(mp+a)\left\{\begin{array}{l}\frac{m(m-1)(m-2)}{6}p^3 \\ + \frac{(m-1)(m-2)}{2}app \\ + (m-2)bp + c\end{array}\right\}$$

vnde facta euolutione peruenietur ad sequentem conditionem

$$\left(aa - \frac{2\cdot m}{m-1}b\right)pp + \frac{2}{m-1}\left(ab - \frac{3m}{m-2}c\right)p + \frac{4}{(m-1)^2}bb > \frac{6}{(m-1)(m-2)}ac$$

statuatur nunc $p = \frac{-\left(ab - \frac{3m}{m-2}c\right)}{(m-1)\left(aa - \frac{2m}{m-1}b\right)}$ vt valor primi membri fiat minimus, obtinebimusque hanc conditionem, multiplicando per $\frac{(m-1)^2}{4}$

$$bb - \frac{\left(ab - \frac{3m}{m-2}c\right)^2}{4\left(aa - \frac{2m}{m-1}b\right)} > \frac{3\cdot}{2\cdot}\frac{(m-1)}{(m-2)}ac.$$

Quia iam $aa > \frac{2m}{m-1}b$, conditionem hanc per $4\left(aa - \frac{2m}{m-1}b\right)$ multiplicare licebit; tunc autem facta euolu-

euolutione obtinebimus hoc criterium secundi generis

$$bb\left(3aa-\frac{2m}{m-1}b\right) > \frac{9mm}{(m-2)^2}cc+\frac{6ac}{m-2}((m-1)aa-3mb)$$

ex quo deinceps eruitur vt supra inuenimus

$$\frac{bb-\frac{3}{2}\cdot\frac{(m-1)}{m-2}ac}{aa-\frac{2m}{m-1}b} \begin{matrix}<\\>\end{matrix} \frac{1.(m-1)^2}{4.m^2}\left(a\pm\sqrt{\left(aa-\frac{2m}{m-1}b\right)}\right)^2.$$

Quae formula ad aequationes differentiales applicata dabit reliqua criteria huius secundi generis.

Hinc concludere licet, si quis simili modo progredi, et secundum criterium huius generis ad aequationem transformatam, posito $x=y+p$, accommodare vellet, inde nouum criterium tertii ordinis deduci posse, quod contineret relationem inter quinos coefficientes successiuos: Verum tum in formula resultante littera p ad quartam dimensionem esset ascensurum, vnde eius valor eam formulam minimam reddens non applius commode definiri posset; quamobrem hanc inuestigationem vlterius non prosequor, eo contentus, quod criteria secundi generis, quae adhuc noua videntur, exhibuerim.

CON-

CONSIDERATIONES

DE THEORIA MOTVS LVNAE PERFICIENDA ET IMPRIMIS DE EIVS VARIATIONE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Etsi Theoria motuum Lunae a praestantissimis Geometris summo studio est inuestigata, atque adeo a Celeb. Professore Göttingensi *Mayero* Tabulae Lunares obseruationibus apprime satisfacientes sunt in medium allatae, plurimum tamen adhuc abest, quo minus ipsa Theoria penitus exculta existimari possit. Quanquam enim forma istarum Tabularum ex Theoria est deriuata, quae etiam plures inaequalitates in motu Lunae accurate suppeditauit nonnullae tamen maximi momenti occurrunt, quarum quantitas ex solis obseruationibus est definita cum earum determinatio per solam Theoriam nimis incerta relinqueretur. Quin etiam nullum est dubium quin verus Lunae motus multo pluribus inaequalitatibus, quam quae in his Tabulis assignantur, perturbetur quae etsi in vsu practico ob paruitatem facile praetermitti possunt, tamen in Theoria minime contemnendae videntur neque Theoria ante satis exculta

culta cenſeri poterit, quam omnes prorſus motus inaequalitates, ne minimis quidem exceptis, accurate aſſignare valuerimus.

II. Ad Theoriam autem motuum Lunae feliciter inueſtigandam, non ſtatim ab eius motu vero exordiendum videtur, quemadmodum ab iis, qui hoc opus ſuſceperunt, eſt factum, verus enim motus, quatenus non ſolum ſecundum longitudinem, ſed etiam ſecundum latitudinem continuo perturbatur, tot tantisque difficultatibus implicatur, et penitus obruitur, vt ſingulis expediendis neque noſtrae neque Analyſeos vires ſufficiant. Quam ob cauſam in hoc tam difficili negotio methodum ab Aſtronomis praecipue feliciſſimo cum ſucceſſu vſitatam adhiberi conueniet, vt ante quam veros Lunae motus inueſtigemus, caſus nobis fingamus ſimpliciores, multo paucioribus difficultatibus obnoxios, quos ſi expedire licuerit, tum demum ſtudia noſtra continuo propius ad veritatem applicare licebit.

III. Primo igitur motus Lunae in latitudinem prorſus remouendus videtur, ita vt non huius, ſed alius cuiusdam Lunae, quae in ipſo eclipticae plano moueatur, motus ſit inueſtigandus; quandoquidem hoc modo calculus a grauiſſimis illis difficultatibus, quibus motus nodorum et inclinatio ad eclipticam premitur, liberatur. Deinde ne ipſe ſolis motus quatenus non eſt vniformis moleſtiam faceſſat, hoc quoque obſtaculum in principio tollatur, et motus solis quasi esset vniformis spectetur. Hac ratione aliae inaequalitates inuestigandae non supererunt, nisi quae partim ab excentricitate orbitae lunaris, partim ab elongatione Lunae a Sole pendent. Ac si simplicitas adhuc maior desideretur, etiam excentricitas abiiciatur, et eiusmodi Lunae motus indagetur, quae sine vlla excentricitate in plano eclipticae moueretur sole cursum suum vniformiter absoluente. Hunc tantum casum adeo simplicem qui accurate et ad computum accommodate euoluere potuerit, is certe iam plurimum in Theoria praestitisse esset censendus.

Tab. I. Fig. 2. IV. Remota ergo inclinatione orbitae Lunaris, centrum terrae vt quiescens spectetur in T, et tabula referente planum eclipticae, sit tempore quodam t elapso centrum Lunae in L et Solis in S. Assumta iam recta fixa TA ad principium scilicet arietis ducta vocentur distantiae: $TL = v$, $TS = u$ et $LS = z$, et anguli $ATL = \Phi$, $ATS = \theta$, sitque breuitatis gratia $STL = \Phi - \theta = \eta$, erit $z = \surd(uu - 2vu \operatorname{cos}.\eta + vv)$ vbi quidem distantia v est valde parua prae u. Porro demisso ab L in rectam TA perpendiculo LV sit $TV = x$ et $VL = y$, eritque $x = v \operatorname{cos}.\Phi$ et $y = v \operatorname{sin}.\Phi$. Hinc $x \operatorname{cos}.\Phi + y \operatorname{sin}.\Phi = v$ et $x \operatorname{sin}.\Phi - y \operatorname{cos}.\Phi = 0$: Ergo differentiando $dx \operatorname{cos}.\Phi + dy \operatorname{sin}.\Phi - d\Phi(x \operatorname{sin}.\Phi - y \operatorname{cos}.\Phi) = dv$ seu $dx \operatorname{cos}.\Phi + dy \operatorname{sin}.\Phi = dv$ et $dx \operatorname{sin}.\Phi - dy \operatorname{cos}.\Phi + d\Phi(x \operatorname{cos}.\Phi + y \operatorname{sin}.\Phi) = 0$ seu $dx \operatorname{sin}.\Phi - dy \operatorname{cos}.\Phi = -v d\Phi$. Porro denuo differentiando:

ddx

$ddx\,\text{cof.}\Phi + ddy\,\text{fin.}\Phi - d\Phi(dx\,\text{fin.}\Phi - dy\,\text{cof.}\Phi) = ddv$ feu

$$ddx\,\text{cof.}\Phi + ddy\,\text{fin.}\Phi = ddv - vd\Phi^2$$

$ddx\,\text{fin.}\Phi - ddy\,\text{cof.}\Phi + d\Phi(dx\,\text{cof.}\Phi + dy\,\text{fin.}\Phi) = -dvd\Phi - vdd\Phi$ feu

$$ddy\,\text{cof.}\Phi - ddx\,\text{fin.}\Phi = 2dvd\Phi + vdd\Phi.$$

V. Iam maffae Solis, terrae ac Lunae defignentur litteris S, T et L, ita vt fint vires acceleratrices, quibus Luna vrgetur ad terram fecundum $LT = \frac{T}{vv}$, et ad folem fecundum $LS = \frac{S}{zz}$, quae ducta recta sLt ipfi TS parallela refoluitur in has binas vires:

1°. Secundum $LT = \frac{Sv}{z^3}$ et 2°. fecundum $Ls = \frac{Su}{z^3}$. Quia deinde terra ad folem vrgetur vi fecundum $TS = \frac{S}{uu}$, et ad Lunam vi fecundum $TL = \frac{L}{vv}$ hae vires contrarie in Lunam translatae dant vim fecundum $Lt = \frac{S}{uu}$, et fecund. $LT = \frac{L}{vv}$ ita vt iam Luna his viribus vrgeri cenfenda fit;

1°. Sec. $LT = \frac{T+L}{vv} + \frac{Sv}{z^3}$; 2°. fec. $Lt = \frac{S}{uu} - \frac{Su}{z^3}$

quae porro fecundum directiones coordinatarum TV et VL, feu ducta LR ipfi TA parallela fecundum LR et VL, refolutae dant

fecundum LR vim $= \frac{T+L}{vv}\,\text{cof.}\,\Phi + \frac{Sv}{z^3}\,\text{cof.}\,\Phi + \frac{S}{uu}\,\text{cof.}\,\theta + \frac{Su}{z^3}\,\text{cof.}\,\theta$

fecundum LV vim $= \frac{T+L}{vv}\,\text{fin.}\,\Phi + \frac{Sv}{z^3}\,\text{fin.}\,\Phi + \frac{S}{uu}\,\text{fin.}\,\theta - \frac{Su}{z^3}\,\text{fin.}\,\theta.$

VI. His viribus inuentis ſumendo temporis elemento dt conſtante, principia motus praebent has aequationes

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{(T+L)\operatorname{cof.}\Phi}{vv} - \frac{Sv\operatorname{cof.}\Phi}{z^3} - \frac{S\operatorname{cof.}\theta}{uu} + \frac{Su\operatorname{cof.}\theta}{z^3}$$

$$\frac{ddy}{dt^2} = -\frac{(T+L)\operatorname{fin.}\Phi}{vv} - \frac{Sv\operatorname{fin.}\Phi}{z^3} - \frac{S\operatorname{fin.}\theta}{uu} + \frac{Su\operatorname{fin.}\theta}{z^3}$$

vnde ob $ddy\operatorname{cof.}\Phi - ddx\operatorname{fin.}\Phi = 2dvd\Phi + vdd\Phi$

et $ddx\operatorname{cof.}\Phi + ddy\operatorname{fin.}\Phi = ddv - vd\Phi^2$

nanciſcimur has binas aequationes principales:

$$1^{\circ}.\ \frac{2dvd\Phi + vdd\Phi}{dt^2} = \frac{S\operatorname{fin.}\eta}{uu} - \frac{Su\operatorname{fin.}\eta}{z^3}$$

$$2^{\circ}.\ \frac{ddv - vd\Phi^2}{dt^2} = -\frac{(T+L)}{vv} - \frac{Sv}{z^3} - \frac{S\operatorname{cof.}\eta}{uu} + \frac{Su\operatorname{cof.}\eta}{z^3}.$$

Vt iam pro dt^2 valorem determinatum introducamus, conſideremus motum Solis, qui cum ad terram ſollicitari cenſendus ſit vi $\frac{S+T}{uu}$, habebitur ſimili modo:

$$\frac{2dud\theta + udd\theta}{dt^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{ddu - ud\theta^2}{dt^2} = -\frac{(S+T)}{uu}$$

ſumamus iam Solis diſtantiam a terra mediam $= a$, et motum medium tempori t conuenientem $= \zeta$, erit ex poſteriori aequatione $\frac{a d\zeta^2}{dt^2} = \frac{S+T}{aa}$, vnde colligimus $\frac{1}{dt^2} = \frac{T+S}{a^3 d\zeta^2}$

ſicque loco elementi dt introducimus elementum cognitum pariter conſtans $d\zeta$, et has formulas adipiſcimur:

$$1^{\circ}.\ 2dvd\Phi + vdd\Phi = \frac{Sa^3 d\zeta^2 \operatorname{fin.}\eta}{S+T}\left(\frac{1}{uu} - \frac{u}{z^3}\right)$$

$$2^{\circ}.\ ddv - vd\Phi^2 = -\frac{(T+L)a^3 d\zeta^2}{(T+S)vv} - \frac{Sa^3 d\zeta^2}{S+T}\left(\frac{v}{z^3} + \frac{\operatorname{cof.}\eta}{uu} - \frac{u\operatorname{cof.}\eta}{z^3}\right)$$

vbi

vbi notandum eſt loco $\frac{S}{S+T}$ vnitatem ſcribi licere cum maſſa T prae S euaneſcat.

VII. Vt litteras maiuſculas S, T, L ex calculo exterminemus, contemplemur etiam motum Lunae medium, qui quidem eſſet futurus, ſi vires perturbantes a Sole oriundae abeſſent; hoc caſu ſtatuatur diſtantia Lunae media a terra $=c$, et ratio eius motus medii ad motum medium Solis $=n:1$; cum igitur ſit $v=c$ et $d\Phi=nd\zeta$, poſterior aequatio praebet $-cnnd\zeta^2=-\frac{(T+L)a^3d\zeta^2}{(T+S)cc}$ vnde fit $\frac{T+L}{T+S}=\frac{nnc^3}{a^3}$; ex quo noſtrae aequationes principales ſequentes induent formas:

$$1^\circ.\quad 2dvd\Phi+vdd\Phi=a^3d\zeta^2\,\text{ſin.}\eta\left(\frac{1}{uu}-\frac{u}{z^3}\right)$$

$$2^\circ.\quad ddv-vd\Phi^2=-\frac{nnc^3}{vv}d\zeta^2-\frac{a^3v}{z^3}d\zeta^2-a^3d\zeta^2\,\text{coſ.}\eta\left(\frac{1}{uu}-\frac{u}{z^3}\right).$$

Totum ergo negotium huc redit, vt iſtae aequationes commode tractentur, ac ſi fieri queat ad integrationem perducantur: vbi quidem notaſſe iuuabit, membra poſteriora quantitates u et z inuoluentia prae reliquis eſſe valde parua, indeque rationem approximandi eſſe petendam.

VIII. Ponamus autem breuitatis gratia:

$$\frac{1}{uu}-\frac{u}{z^3}=-M \text{ et } \frac{v}{z^3}+\text{coſ.}\eta\left(\frac{1}{uu}-\frac{u}{z^3}\right)=N$$

vt aequationes noſtrae fiant

$$1^\circ.\quad 2dvd\Phi+vdd\Phi=-a^3Md\zeta^2\,\text{ſin.}\eta \text{ et}$$

$$2^\circ.\quad ddv-vd\Phi^2=-\frac{nnc^3}{vv}d\zeta^2-a^3Nd\zeta^2$$

vbi ob v prae u valde paruum et $z = \sqrt{(uu - 2uv\cos.\eta + vv)}$ erit per approximationem

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{u^3} + \frac{3v}{u^4}\cos.\eta - \frac{3vv}{2u^5}(1 - 5\cos.\eta^2) - \frac{5v^3}{2u^6}(3\cos.\eta - 7\cos.\eta^3) + \frac{15v^4}{8u^7}(1 - 14\cos.\eta^2 + 21\cos.\eta^4)\text{etc.}$$

ideoque litterarum M et N valores prodibunt

$$M = \frac{3v}{u^3}\cos.\eta - \frac{3vv}{2u^4}(1 - 5\cos.\eta^2) - \frac{5v^3}{2u^5}(3\cos.\eta - 7\cos.\eta^3) + \frac{15v^4}{8u^6}(1 - 14\cos.\eta^2 + 21\cos.\eta^4)$$

$$N = \frac{v}{u^3}(1 - 3\cos.\eta^2) + \frac{3vv}{2u^4}(3\cos.\eta - 5\cos.\eta^3) - \frac{v^3}{2u^5}(3 - 30\cos.\eta^2 + 35\cos.\eta^4) - \frac{5v^4}{8u^6}(15\cos.\eta - 70\cos.\eta^3 + 63\cos.\eta^5)$$

vbi singula membra sequentia prae antecedentibus sunt vehementer exigua.

IX. Prima aequationum nostrarum ad integrabilitatem perducitur multiplicando eam per v tum vero etiam per $2v^3 d\Phi$, posteriori modo prodit $v^4 d\Phi^2 = -2a^3 d\zeta^2 \int M v^3 d\Phi \sin.\eta$.

Deinde prior multiplicetur per $2vd\Phi$ et posterior per $2dv$ ac summa dabit:

$$2dvddv + 2vdvd\Phi^2 + 2vvd\Phi dd\Phi = -2a^3 Mvd\zeta^2 d\Phi \sin.\eta - \frac{2nnc^3 dv}{vv}d\zeta^2 - 2a^3 N d\zeta^2 dv$$

vnde per integrationem eruitur:

$$dv^2 + vv d\Phi^2 = \frac{2nnc^3 d\zeta^2}{v} - 2a^3 d\zeta^2 \int M v d\Phi \sin.\eta - 2a^3 d\zeta^2 \int N dv.$$

Statuamus breuitatis gratia:

$$a^3 \int M v^3 d\Phi \sin.\eta = -c^4 P \quad \text{et} \quad a^3 \int M v d\Phi \sin.\eta + a^3 \int N dv = -ccQ$$

vt

vt obtineamus has formas:

$1^\circ.\ v^4 d\Phi^2 = +2c^4 P d\zeta^2$ et $2^\circ.\ dv^2 + vv d\Phi^2 = \frac{2nnc^3 d\zeta^2}{v} + 2ccQ d\zeta^2$

quae facto $v = cx$ fiunt

$1^\circ.\ x^4 d\Phi^2 = +2P d\zeta^2$ et $2^\circ.\ dx^2 + xx d\Phi^2 = \frac{2nn d\zeta^2}{x} + 2Q d\zeta^2$

eritque:

$dP = \frac{-a^3}{c} M x^3 d\Phi \,\text{sin.}\,\eta$ et $dQ = \frac{-a^3}{c}(M \cdot x d\Phi \,\text{sin.}\,\eta + N dx)$

existente

$$M = \frac{3cx}{u^3}\text{cos.}\,\eta - \frac{3ccxx}{2u^4}(1 - 5\,\text{cos.}\,\eta^2) - \frac{5c^3x^3}{2u^5}(3\,\text{cos.}\,\eta - 7\,\text{cos.}\,\eta^3)$$

$$N = \frac{cx}{u^3}(1 - 3\,\text{cos.}\,\eta^2) + \frac{3ccxx}{2u^4}(3\,\text{cos.}\,\eta - 5\,\text{cos.}\,\eta^3) - \frac{c^3x^3}{2u^5}(3 - 30\,\text{cos.}\,\eta^2 + 35\,\text{cos.}\,\eta^4).$$

X. Ex priore aequatione iam est $d\Phi = \frac{d\zeta\sqrt{2P}}{xx}$, qui valor in altera substitutus dat:

$$dx^2 + \frac{2P d\zeta^2}{xx} = \frac{2nn d\zeta^2}{x} + 2Q d\zeta^2$$

vnde elicitur:

$$dx = d\zeta\sqrt{\left(2Q + \frac{2nn}{x} - \frac{2P}{xx}\right)} \text{ vel etiam}$$

$$\frac{dx\sqrt{2P}}{xx} = d\Phi\sqrt{\left(2Q + \frac{2nn}{x} - \frac{2P}{xx}\right)}$$

hincque discimus quantitatem $2Q + \frac{2nn}{x} - \frac{2P}{xx}$ nunquam fieri posse negatiuam; euanescere autem potest, quod fit dum Luna vel in apogeo versatur vel in perigeo, quandoquidem vtroque casu fit $dx = 0$. Ceterum si vires perturbantes abessent pro motu medio,

medio, quo $x=1$ et $d\Phi=nd\zeta$ foret $n=\sqrt{2P}$, seu $P=\frac{1}{2}nn$ et $nn=2nn+2Q$ seu $Q=-\frac{1}{2}nn$, qui ergo valores his litteris proxime conueniunt.

XI. Nisi excentricitas orbitae euanescat vel sit quam minima, eius introductio in calculum satis commode ad formulas differentiales primi gradus manuducit, quae ad computum astronomicum maxime videntur accommodatae. Duplici imprimis modo haec reductio institui potest, vnde deinceps alias latius patentes eiusmodi resolutiones deriuare licet. Alterum quidem modum iam alibi fusius sum persecutus, sed dignitas materiae omnino requirere videtur, vt vtrumque hic dilucide exponam, simulque cognationem ostendam, quo facilius intelligi possit, quanta emolumenta inde expectare liceat.

Reductio prior formularum inuentarum ope excentricitatis facta.

XII. Ordiamur a formula posteriori, quae per $\sqrt{2}$ diuisa est:

$$\frac{dx}{xx}\sqrt{P}=d\Phi\sqrt{(Q+\frac{nn}{x}-\frac{P}{xx})}$$

ac statuamus $\frac{1}{x}=\frac{1-q\cos.\omega}{p}$, seu $x=\frac{p}{1-q\cos.\omega}$, vbi sequentia sunt obseruanda:

1°. Quantitas p in c ducta ob $v=cx$ exprimit semiparametrum orbitae, quatenus ea cum ellipsi comparatur; foretque p quantitas constans, si vires per-

perturbantes abessent, nunc autem erit quantitas variabilis.

2°. Quantitas q in eadem comparatione denotat excentricitatem, quae ob vires perturbantes pariter vt variabilis est spectanda.

3°. Angulus ω designat anomaliam veram ab apogeo computatam, et ob $v = cx$, erit distantia apogei $= \frac{cp}{1-q}$ et distantia perigei $= \frac{cp}{1+q}$, vnde semiaxis transuersus orbitae $= \frac{cp}{1-qq}$.

4°. Loco vnius variabilis x introduximus tres nouas p, q et ω, inter quas autem iam vnam determinationem stabiliuimus qua dx euanescere debet si $\sin.\omega = 0$; alteram determinationem consideratio formulae irrationalis suppeditabit.

XIII. In formula $Q + \frac{nn}{x} - \frac{P}{xx}$ loco $\frac{1}{x}$ substituamus valorem assumtum $\frac{1-q\cos.\omega}{p}$, et prodibit

$$Q + \frac{nn}{p} - \frac{P}{pp} - \frac{nnq}{p}\cos.\omega + \frac{2Pq}{pp}\cos.\omega - \frac{Pqq}{pp}\cos.\omega^2$$

cuius radix quadrata quia factorem habere debet $\sin.\omega$ oportet vt sit 1°. $P = \frac{1}{2}nnp$, et 2°. $Q + \frac{nn}{p} - \frac{P}{pp} = \frac{Pqq}{pp}$ sicque prodeat $Q + \frac{nn}{x} - \frac{P}{xx} = \frac{Pqq}{pp}\sin.\omega^2$. Quo facto erit $\frac{dx}{xx}\sqrt{P} = -\frac{qd\Phi\sin.\omega}{p}\sqrt{P}$, seu $\frac{dx}{xx} = -\frac{qd\Phi}{p}\sin.\omega$. Cum autem sit $\frac{dx}{xx} = \frac{dp}{pp} + \cos.\omega\, d.\frac{q}{p} - \frac{q}{p}d\omega\sin.\omega$, habebimus $\frac{q}{p}(d\Phi - d\omega)\sin.\omega = -\frac{dp}{pp} - \cos.\omega.\, d.\frac{q}{p}$. Ex factis autem binis hypothesibus erit primo $p = \frac{2P}{nn}$ et ob $nn = \frac{2P}{p}$ altera dat $Q + \frac{P(1-qq)}{pp} = 0$,

 seu

seu $Q + \frac{nn}{2p}(1 - qq) = 0$ hincque $\frac{1-qq}{p} = -\frac{2Q}{nn}$. Denique prima aequatio $d\Phi = \frac{d\zeta \surd 2P}{xx}$ dat $\frac{d\Phi}{d\zeta} = \frac{n(1 - q\,cos.\,\omega)^2}{p \surd p}$, seu $d\zeta = \frac{p\,d\Phi \surd p}{n(1 - q\,cos.\,\omega)^2}$.

XIV. Quia nunc P et Q sunt quantitates, quarum differentialia saltem vt cognita spectantur, variationes momentaneae elementorum motus sequenti modo se habebunt.

1°. Pro quantitate p erit $dp = \frac{2dP}{nn}$, ideoque

$$dp = \frac{-2a^3}{nnc} M x^3 d\Phi\, sin.\, \eta \text{ vbi } x = \frac{p}{1 - cos.\,\omega}.$$

2°. Pro semiaxe orbitae $\frac{cp}{1-qq}$ habemus $d.\frac{1-qq}{p} = -\frac{2dQ}{nn}$

ideoque $d.\frac{1-qq}{p} = \frac{2a^3}{nnc}(M x d\Phi\, sin.\, \eta + N dx)$

quia vero est $dx = \frac{-qxxd\Phi}{p}\, sin.\, \omega$ erit

$$d.\frac{1-qq}{p} = \frac{2a^3}{nnc} x d\Phi \left(M\, sin.\, \eta - \frac{Nq\, sin.\, \omega}{1 - q\,cos.\,\omega}\right).$$

3°. Inuento differentiali quantitatis $\frac{1-qq}{p}$, quam tantisper vocabo R, erit $qq = 1 - pR$ et $\frac{qq}{pp} = \frac{1}{pp} - \frac{R}{p}$, vnde fit

$$d.\frac{qq}{pp} = \frac{2q}{p} d.\frac{q}{p} = -\frac{2dp}{p^3} + \frac{R\,dp}{pp} - \frac{1}{p} d.R = -\frac{(1+qq)dp}{p^3} - \frac{1}{p} dR$$

vbi si loco dp et dR valores inuenti substituantur, reperitur

$$\frac{2q}{p} d.\frac{q}{p} = \frac{2a^3 qxd\Phi}{nncp}\left(\frac{M(2\,cos.\,\omega + q\,sin.\,\omega^2)\,sin.\,\eta}{(1 - q\,cos.\,\omega)^2} + \frac{N\,sin.\,\omega}{1 - q\,cos.\,\omega}\right) \text{ ideoque}$$

$$d.\frac{q}{p} = \frac{a^3 xd\Phi}{nnc}\left(\frac{M(2\,cos.\,\omega + q\,sin.\,\omega^2)\,sin.\,\eta}{(1 - q\,cos.\,\omega)^2} + \frac{N\,sin.\,\omega}{1 - q\,cos.\,\omega}\right)$$

vnde

vnde concluditur:

$$\frac{q}{p}(d\Phi - d\omega)\,\text{ſin.}\,\omega = \frac{2a^3}{nnc}\,x\,d\Phi.\frac{M\,\text{ſin.}\,\eta}{(1-q\,\text{coſ.}\,\omega)^2} - \text{coſ.}\,\omega\, d.\frac{q}{p} \quad \text{ſeu}$$

$$\frac{q}{p}(d\Phi - d\omega)\,\text{ſin.}\,\omega = \frac{a^3 x\,d\Phi}{nnc}\left(\frac{M(2\,\text{ſin.}\,\omega^2 - q\,\text{ſin.}\,\omega^2\,\text{coſ.}\,\omega)\,\text{ſin.}\,\eta}{(1-q\,\text{coſ.}\,\omega)^2} - \frac{N\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega}{1-q\,\text{coſ.}\,\omega}\right)$$

ſicque habebimus:

$$d\Phi - d\omega = \frac{a^3 xx\,d\Phi}{nncq}\left(\frac{M(2-q\,\text{coſ.}\,\omega)\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\omega}{1-q\,\text{coſ.}\,\omega} - N\,\text{coſ.}\,\omega\right)$$

vnde motus lineae abſidum definitur.

4°. His variationibus definitis erit tandem

$$x = \frac{p}{1-q\,\text{coſ.}\,\omega} \quad \text{et} \quad d\zeta = \frac{p\,d\Phi\sqrt{p}}{n(1-q\,\text{coſ.}\,\omega)^2}$$

qua poſteriori formula ratio inter $d\Phi$ et $d\zeta$, illinc vero ratio inter $d\Phi$ et $d\omega$ exprimitur.

Reductio altera formularum inuentarum ad differentialia primi gradus.

XV. Aequationi poſteriori haec inducatur forma:

$$\frac{dx}{x}\sqrt{P} = -d\Phi\sqrt{(Qxx + nnx - P)}$$

priore exiſtente $xx\,d\Phi = d\zeta\sqrt{2P}$, et excentricitas ita introducatur vt ponatur $x = p + q\,\text{coſ.}\,\omega$, ſicque diſtantia maxima ſit $= p + q$ et minima $= p - q$, vbi autem quantitates p et q ſunt variabiles. Cum nunc ſit:

$\frac{dx}{x} = \frac{dp + dq\,\text{coſ.}\,\omega - q\,d\omega\,\text{ſin.}\,\omega}{p + q\,\text{coſ.}\,\omega}$, quae expreſſio euaneſcere debet ſi $\text{ſin.}\,\omega = 0$, valor ipſius x in altera parte ſubſtitutus dabit

$$Qxx+nnx-P=Qpp+2Qpq\,\text{cof.}\,\omega+Qqq\,\text{cof}\,\omega^2$$
$$+nnp+nnq\,\text{cof.}\,\omega$$
$$-P.$$

Hic ergo ponatur $2Qp+nn=0$ et $Qqq=-Qpp-nnp+P$ vt fiat $\sqrt{}(Qxx+nnx-P)=\text{fin.}\,\omega\sqrt{}(Qpp+nnp-P)=+q\,\text{fin.}\,\omega\sqrt{}-Q$. At ob $nnp=-2Qpp$, habemus $Qqq=Qpp+P$, feu

$Q=\frac{-P}{pp-qq}=\frac{-nn}{2p}$, vnde fit $\frac{nn(pp-qq)}{p}=2P$, et $\frac{nn}{p}=-2Q$. Quare altera aequatio hanc induit formam:

$$\frac{dx}{x}\sqrt{}P=-qd\Phi\,\text{fin.}\,\omega\sqrt{}-Q,\ \text{feu}\ \frac{dx}{x}\sqrt{}(pp-qq)=-qd\Phi\,\text{fin.}\,\omega$$

vnde colligimus:

$$dp+dq\,\text{cof.}\,\omega-qd\omega\,\text{fin.}\,\omega=\frac{-q(p+q\,\text{cof.}\,\omega)\,d\Phi\,\text{fin.}\,\omega}{\sqrt{}(pp-qq)}.$$

Hinc fingularum quantitatum variationes momentaneas ex differentialibus cognitis dP et dQ affignare poterimus.

1°. Aequatio $\frac{nn}{p}=-2Q$ dat $\frac{nndp}{pp}=2dQ$, ideoque $dp=\frac{2ppdQ}{nn}$.

2°. Ex aequatione $\frac{nn(pp-qq)}{p}=2P$ feu $p-\frac{qq}{p}=\frac{2P}{nn}$, fequitur

$$dp+\frac{qqdp}{pp}-\frac{2qdq}{p}=\frac{2dP}{nn},\ \text{feu}\ qdq=\frac{dp(pp+qq)}{2p}-\frac{pdP}{nn}$$

vnde fit $qdq=\frac{p(pp+qq)dQ-pdP}{nn}$.

3°. Hi valores in vltima aequatione fubftituti dabunt:

$$\frac{2ppdQ}{nn}+\frac{p(pp+qq)dQ\,\text{cof.}\,\omega}{nnq}-\frac{pdP\,\text{cof.}\,\omega}{nnq}-qd\omega\,\text{fin.}\,\omega=\frac{-q(p+q\,\text{cof.}\,\omega)d\Phi\,\text{fin.}\,\omega}{\sqrt{}(pp-qq)}$$

vnde

vnde fit:

$$qq\,d\omega\,\text{fin.}\,\omega = \frac{p\,dQ}{nn}(2pq + (pp+qq)\,\text{cof.}\,\omega) - \frac{p\,dP}{nn}\,\text{cof.}\,\omega + \frac{qq(p+q\,\text{cof.}\,\omega)\,d\Phi\,\text{fin.}\,\omega}{\sqrt{(pp-qq)}}.$$

4°. Cum autem fit $dx = -\frac{qx\,d\Phi\,\text{fin.}\,\omega}{\sqrt{(pp-qq)}}$ erit $dP = \frac{-a^3}{c}Mx^3 d\Phi\,\text{fin.}\,\eta$ et $dQ = \frac{-a^3}{c}d\Phi(Mx\,\text{fin.}\,\eta - \frac{Nqx\,\text{fin.}\,\omega}{\sqrt{(pp-qq)}})$, qui valores in formulis inuentis fubstituti praebent:

$$dp = \frac{-2a^3ppx\,d\Phi}{nnc}(M\,\text{fin.}\,\eta - \frac{Nq\,\text{fin.}\,\omega}{\sqrt{(pp-qq)}})$$

$$dq = \frac{a^3px\,d\Phi}{nnc}(M\,\text{fin.}\,\eta(2p\,\text{cof.}\,\omega - q\,\text{fin.}\,\omega^2) + \frac{N(pp+qq)\,\text{fin.}\,\omega}{\sqrt{(pp-qq)}})$$

$$d\omega = \frac{x\,d\Phi}{\sqrt{(pp-qq)}} - \frac{a^3px\,d\Phi}{nncq}(M\,\text{fin.}\,\eta\,(2p+q\,\text{cof.}\,\omega)\,\text{fin.}\,\omega - \frac{N(2pq+(pp+qq)\,\text{cof.}\,\omega)}{\sqrt{(pp-qq)}}).$$

Denique ob $2P = \frac{nn(pp-qq)}{p}$ eft $d\zeta = \frac{xx\,d\Phi\sqrt{p}}{n\sqrt{(pp-qq)}}$ exiftente $x = p + q\,\text{cof.}\,\omega$.

Reductio generalior binas praecedentes in fe complectens.

XVI. Statuamus $x = \frac{p+q\,\text{cof.}\,\omega}{1-r\,\text{cof.}\,\omega}$, vbi angulus ω ita fe habeat vt cafu fin. $\omega = 0$ euanefcat dx; feu vt diftantia fiat maxima cafu $\omega = 0$, minima vero cafu $\omega = 180°$.

Erit ergo $\frac{dx}{x} = \frac{dp + dq\,\text{cof.}\,\omega - q\,d\omega\,\text{fin.}\,\omega}{p+q\,\text{cof.}\,\omega} + \frac{dr\,\text{cof.}\,\omega - r\,d\omega\,\text{fin.}\,\omega}{1-r\,\text{cof.}\,\omega}$ feu

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp + dq\,\text{cof.}\,\omega}{p+q\,\text{cof.}\,\omega} + \frac{dr\,\text{cof.}\,\omega}{1-r\,\text{cof.}\,\omega} - \frac{(pr+q)\,d\omega\,\text{fin.}\,\omega}{(p+q\,\text{cof.}\,\omega)(1-r\,\text{cof.}\,\omega)}.$$

Nunc fiat fubftitutio in expreffione $Qxx + nnx - P$ quae abibit in hanc formam:

$$\left.\begin{array}{llll} +Qpp & +2Qpq\,\mathrm{cos}.\,\omega & +Qqq\,\mathrm{cos}.\,\omega^2 \\ +nnP & +nnq\,\mathrm{cos}.\,\omega & -nnqr\,\mathrm{cos}.\,\omega^2 \\ & -nnpr\,\mathrm{cos}.\,\omega & -Prr\,\mathrm{cos}.\,\omega^2 \\ -P & & \\ & +2Pr\,\mathrm{cos}.\,\omega & \end{array}\right\} : (1-r\,\mathrm{cos}.\,\omega)^2$$

Hic primo statuatur $nn(pr-q)=2Pr+2Qpq$, deinde sit $Qpp+nnp-P=-Qqq+nnqr+Prr$; vt fiat

$$\sqrt{(Qxx+nnx-P)}=\frac{\sqrt{(Qpp+nnp-P)}}{1-r\,\mathrm{cos}.\,\omega}\,\mathrm{fin}.\,\omega \text{ ideoque}$$

$$\frac{dx}{x}\sqrt{P}=\frac{-d\Phi\sqrt{(Qpp+nnp-P)}}{1-r\,\mathrm{cos}.\,\omega}\,\mathrm{fin}.\,\omega,$$

vnde sequentes determinationes deducentur.

XVII. Quaeramus primo rationem inter P et Q quae ob $nn=\frac{2Pr+2Qpq}{pr-q}$ ex aequatione

$$Qpp+nnp-P=-Qqq+nnqr+Prr$$

ita reperitur:

$$Q(p^3r-pqqr+ppq-q^3)=P(-pr+pr^3-q+qrr)$$

quae per $pr+q$ diuisa dat

$$Q(pp-qq)=-P(1-rr) \text{ seu } Q=\frac{-P(1-rr)}{pp-qq}.$$

Hinc prior determinatio $nn(pr-q)=2Pr+2Qpq$ praebet

$$nn(pr-q)=2Pr-\frac{2Ppq(1-rr)}{pp-qq}=\frac{2P(ppr-qqr-pq+pqrr)}{pp-qq}$$

et per $pr-q$ diuidendo $nn=\frac{2P(p+qr)}{pp-qq}$, ita vt sit

$$\frac{pp-qq}{p+qr}=\frac{2P}{nn} \text{ et } \frac{1-rr}{p+qr}=\frac{-2Q}{nn}.$$

Deinde

Deinde loco nn iterum ſcribendo $\frac{2Pr+2Qpq}{pr-q}$ fit

$$Qpp+nnp-P=\frac{(pr+q)(P+Qpp)}{pr-q}=\frac{P(pr+q)^2}{pp-qq}$$

vnde concludimus:

$$\frac{dx}{x}=\frac{-(pr+q)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\omega}{(1-r\,\text{coſ.}\,\omega)\sqrt{(pp-qq)}}.$$

At ob $x=\frac{p+q\,\text{coſ.}\,\omega}{1-r\,\text{coſ.}\,\omega}$, forma differentialis $\frac{dx}{x}$ ita exhiberi poteſt vt ſit

$$\frac{dx}{x}=\frac{dp+dq\,\text{coſ.}\,\omega}{x(1-r\,\text{coſ.}\,\omega)}+\frac{dr\,\text{coſ.}\,\omega}{1-r\,\text{coſ.}\,\omega}-\frac{(pr+q)\,d\omega\,\text{ſin.}\,\omega}{x(1-r\,\text{coſ.}\,\omega)^2}=\frac{-(pr+q)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\omega}{(1-r\,\text{coſ.}\,\omega)\sqrt{(pp-qq)}}.$$

Quocirca erit

$$\frac{(pr+q)\,d\omega\,\text{ſin.}\,\omega}{1-r\,\text{coſ.}\,\omega}=\frac{(pr+q)\,x\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\omega}{\sqrt{(pp-qq)}}+dp+dq\,\text{coſ.}\,\omega+x\,dr\,\text{coſ.}\,\omega.$$

XVIII. Quodſi iam formulas ſuperiores ad P et Q reductas differentiemus, ad ſequentes expreſſiones perueniemus:

$$+dp(pp+2pqr+qq)-dq(2pq+ppr+qqr)-qdr(pp-qq)=\frac{2(p+qr)^2dP}{nn}$$

$$dp(1-rr)+rdq(1-rr)+qdr(1+rr)+2prdr=\frac{2(p+qr)^2dQ}{nn}$$

vnde cum differentialia dP et dQ dentur, bina tantum trium elementorum dp, dq et dr definiuntur, tertio quaſi arbitrio noſtro relicto. Verum ob $dx=\frac{-(pr+q)\,x\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\omega}{(1-r\,\text{coſ.}\,\omega)\sqrt{(pp-qq)}}$

erit: $dP=\frac{-a^3x\,d\Phi}{c}.\,Mxx\,\text{ſin.}\,\eta$ et

$$dQ=\frac{-a^3x\,d\Phi}{c}\left(M\,\text{ſin.}\,\eta-\frac{N(pr+q)\,\text{ſin.}\,\omega}{(1-r\,\text{coſ.}\,\omega)\sqrt{(pp-qq)}}\right).$$

Vel

Vel etiam angulum ω pro lubitu aſſumere licet, ac tum binis illis aequationibus hanc tertiam iungendo $dp + dq \operatorname{cof.} \omega + x\,dr \operatorname{cof.} \omega = \frac{(pr+q)\,d\omega \operatorname{fin.} \omega}{1 - r \operatorname{cof.} \omega} - \frac{(pr+q)\,x\,d\Phi \operatorname{fin.} \omega}{\sqrt{(pp-qq)}}$ omnia tria elementa dp, dq et dr definiri poterunt. Denique ob $2\,P = \frac{nn(pp-qq)}{p+qr}$ erit $d\zeta = \frac{xx\,d\Phi \sqrt{(p+qr)}}{n\sqrt{(pp-qq)}}$.

XIX. Mirum videbitur, quod in hac reductione angulus ω arbitrio noſtro relinquatur, cum certe poſitio et motus lineae abſidum minime a noſtra voluntate pendeant. Verum hic perpendi oportet, eatenus tantum diſtantiam $v = cx$ fieri maximam vel minimam facto $\operatorname{fin.} \omega = 0$, quatenus idem angulus ω non in reliquas quantitates ita ingreditur, vt in valore pro $\frac{dx}{x}$ inuento factor $\operatorname{fin.} \omega$ iterum tollatur. Quodſi exempli cauſa reperiretur $\sqrt{(pp-qq)} = s \operatorname{fin.} \omega$, minime amplius concludere liceret poſito $\operatorname{fin.} \omega = 0$, formulam $\frac{dx}{x\,d\Phi}$ eſſe euanituram. Quocirca angulus ω neutiquam inter quantitates aſſumtas admitti poteſt, niſi forte conſtet a cuiusmodi angulo poſitio lineae abſidum pendeat.

XX. Antequam hunc caſum deſeram, binas illas aequationes differentiales pro elementis dp, dq et dr inuentas diligentius examinaſſe iuuabit. Ac ſi inde primo elementum dp elidatur reperitur:

$$\frac{dq(1-rr)(pr+q)}{p+qr} + dr(pr+q) = \frac{-(1-rr)\,dP + (pp+qq+2pqr)\,dQ}{nn}$$

ſin autem inde elementum dq exterminetur, prodit

$$\frac{dp(1-rr)(pr+q)}{p+qr} + \frac{dr(pr+q)^2}{p+qr} = \frac{r(1-rr)\,dP + (2pq+ppr+qqr)\,dQ}{nn}$$

Eiecto

Eiecto autem elemento dr obtinetur

$$dp(pr+q)-\frac{dq(pr+q)^2}{p+qr}=\frac{(2pr+q+qrr)dP+q(pp-qq)dQ}{nn}.$$

Quod ſi iam harum binas quasque in locum illarum ſubſtituamus, calculus haud parum fiet ſimplicior hae vero videntur commodiſſimae:

$$dp-\frac{dq(pr+q)}{p+qr}=\frac{(2pr+q+qrr)dP+q(pp-qq)dQ}{nn(pr+q)}$$

$$dr+\frac{dq(1-rr)}{p+qr}=-\frac{(1-rr)dP+(pp+qq+2pqr)dQ}{nn(pr+q)}.$$

Vnde aſſumto q reliqua elementa facile determinantur ſin autem angulus ω vt cognitus ſpectetur, hinc valores pro dp et dr in poſtrema aequatione differentiali ſupra data (XVIII.) ſubſtituti determinationem elementi dq ſuppeditabunt. Peruenitur autem ad hanc aequationem:

$$\begin{aligned}\frac{dq(pr+q)\sin.\omega^2}{p+qr}=(pr+q)\sin.\omega\left(d\omega-\frac{d\Phi(p+q\cos.\omega)}{\sqrt{(pp-qq)}}\right)\\
-\frac{dP}{nn(pr+q)}(2pr+q+qrr-(p+qr)(1+rr)\cos.\omega\\
-q(1-rr)\cos.\omega^2)\\
-\frac{dQ}{nn(pr+q)}(q(pp-qq)+(p+qr)(pp+qq)\cos.\omega\\
+q(pp+qq+2pqr)\cos.\omega^2).\end{aligned}$$

XXI. Subſtituendo denique hic pro dP et dQ valores ſupra indicatos (XVIII.)

$$\begin{aligned}\frac{dq\sin.\omega}{p+qr}=d\omega-\frac{d\Phi(p+q\cos.\omega)}{\sqrt{(pp-qq)}}\\
+\frac{a^3Mx\,d\Phi\sin.\eta\sin.\omega}{nnc(pr+q)(1-r\cos.\omega)^2}(2pp-qq+pqr+(p+qr)(3q-pr)\cos\omega\\
-q(pr-q+2qrr)\cos.\omega^2)\\
-\frac{a^3Nx\,d\Phi}{nnc(pr+q)(1-r\cos.\omega)}\left(\frac{q(pp-qq)+(p+qr)(pp+qq)\cos.\omega+q(pp+qq+2pqr)\cos.\omega^2}{\sqrt{(pp-qq)}}\right.\end{aligned}$$

si quidem nunc totam aequationem per $(pr+q)\sin\omega$ diuidere licuit; commode enim vsu venit, vt membrum elemento $M\sin.\eta$ affectum factorem $1-\cos.\omega^2 = \sin.\omega^2$ sortiretur.

Quodsi iam hic ponatur $q=0$, reductio resultat prior scribendo q loco r, sin autem ponatur $r=0$, reductio habetur posterior, vnde intelligitur quanto latius pateat haec reductio generalior ambas praecedentes in se complectens. Loco dP et dQ etiam in praecedentibus formulis substituantur valores ac reperietur:

$$dp = \frac{dq(pr+q)}{p+qr} - \frac{a^3 M x\, d\Phi \sin.\eta}{nnc(1-r\cos.\omega)^2}(2pp-qq+pqr+2q(p+qr)\cos.\omega + q(pr+q)\cos.\omega^2)$$
$$+ \frac{a^3 N x\, d\Phi \sin.\omega}{nnc(1-r\cos.\omega)} \cdot q\sqrt{(pp-qq)}$$

$$dr = \frac{-dq(1-rr)}{p+qr} - \frac{a^3 M x\, d\Phi \sin.\eta}{nnc(1-r\cos.\omega)^2}(pr+q-2(p+qr)\cos.\omega + (pr-q+2qrr)\cos.\omega^2)$$
$$+ \frac{a^3 N x\, d\Phi \sin.\omega}{nnc(1-r\cos.\omega)}\left(\frac{pp+qq+2pqr}{\sqrt{(pp-qq)}}\right)$$

et loco dq valorem superiorem substituendo:

$$\frac{dp\sin.\omega}{p+qr} = \frac{pr+q}{p+qr}\left(d\omega - \frac{d\Phi(p+q\cos.\omega)}{\sqrt{(pp-qq)}}\right)$$
$$- \frac{a^3 M x d\Phi \sin.\eta \sin.\omega \cos.\omega}{nnc(1-r\cos.\omega)^2}(pr-q+2qr\cos.\omega) - \frac{a^3 N x d\Phi \cos.\omega}{nnc(1-r\cos.\omega)}\left(\frac{pp+qq+2pq\cos.\omega}{\sqrt{(pp-qq)}}\right).$$

$$\frac{dr(pr+q)\sin.\omega}{p+qr} = -\frac{(pr+q)(1-rr)}{p+qr}\left(d\omega - \frac{d\Phi(p+q\cos.\omega)}{\sqrt{(pp-qq)}}\right)$$
$$- \frac{a^3 M x d\Phi \sin.\eta \sin.\omega}{nnc(1-r\cos.\omega)^2}(2p+qr-prr+(q-3pr-3qrr+pr^3)\cos.\omega + r(pr-q+2qrr)\cos.\omega^2)$$

+

$$+\frac{a^{3}Nx\,d\Phi}{nnc(1-r\cos.\omega)\sqrt{(pp-qq)}}(ppr+2pq+qqr+(1-rr)(pp+qq)\cos.\omega - r(pp+qq+2pqr)\cos.\omega^{2}).$$

XXII. Si excentricitas orbitae ſatis fuerit notabilis, commodiſſime reductione prima vtemur, quia ibi aberrationes a motu regulari in ellipſi facto definiuntur. Sin autem excentricitas fuerit quam minima vel adeo nulla, neque primam reductionem neque ſecundam in vſum vocare licebit, quandoquidem anomaliae ω tum ne locus quidem relinquitur; ac ſpectata quantitate q ſaltem vt minima, quia ea denominatorem formulae pro $d\Phi - d\omega$ inventae afficit, motus lineae abſidum nimis fit vagus et incertus. Neque etiam adhuc perſpicio, quomodo poſtrema reductio ſumendo $\omega = \eta$ in hac inveſtigatione vtilitatem afferre poſſet, tam propter multitudinem, quam complicationem formularum, quas reſolui oporteret. Nihilo tamen minus caſus quo excentricitas plane euaneſceret ſine dubio pro ſimpliciſſimo eſſet habendus; ex quo in eius reſolutione merito omne ſtudium collocandum videtur quo his difficultatibus ſuperatis deinceps veri motus lunaris inueſtigatio feliciori ſucceſſu ſuſcipi, neque tantum ad vſum practicum ſatis conuenienter, ſed etiam multo accuratius abſolui queat. Neque autem ad hunc caſum euoluendum alia via aptior videtur, quam vt ad ipſas aequationes differentio-differentiales reuertamur indeque approximationes idoneas petamus.

Inueſtigatio motus ſi Luna in ecliptica ſine vlla excentricitate ſol autem vniformiter moueretur.

XXIII. Ponamus in ipſis aequationibus differentio differentialibus $v = cx$, et habebimus.

$$1^\circ.\quad 2\,dx\,d\Phi + x\,dd\Phi + \frac{a^3}{c} M\,d\zeta^2 \,\text{ſin.}\,\eta = 0$$

$$2^\circ.\quad ddx - x\,d\Phi^2 + \frac{nn}{xx}\,d\zeta^2 + \frac{a^3}{c} N\,d\zeta^2 = 0$$

et quia motus ſolis aſſumitur vniformis erit $u = a$ et $\theta = \zeta$ ideoque $\Phi = \zeta + \eta$, hinc

$$\frac{a^3}{c} M = 3x \,\text{coſ.}\,\eta - \frac{3cxx}{2a}(1 - 5\,\text{coſ.}\,\eta^2) - \frac{5ccx^3}{2aa}(3\,\text{coſ.}\,\eta - 7\,\text{coſ.}\,\eta^3)$$

$$\frac{a^3}{c} N = x(1 - 3\,\text{coſ.}\,\eta^2) + \frac{3cxx}{2a}(3\,\text{coſ.}\,\eta - 5\,\text{coſ.}\,\eta^3) - \frac{ccx^3}{2aa}(3 - 30\,\text{coſ.}\,\eta^2 + 35\,\text{coſ.}\,\eta^4)$$

vnde binae noſtrae aequationes erunt

$$1^\circ.\left\{\begin{array}{l} \frac{2\,dx\,d\Phi}{d\zeta^2} + \frac{x\,dd\Phi}{d\zeta^2} \\ + 3x\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\eta - \frac{3c}{2a}xx\,\text{ſin.}\,\eta(1 - 5\,\text{coſ.}\,\eta^2) - \frac{5cc}{2aa}x^3\,\text{ſin.}\,\eta(3\,\text{coſ.}\,\eta - 7\,\text{coſ.}\,\eta^3) \end{array}\right\} = 0$$

$$2^\circ.\left\{\begin{array}{l} \frac{ddx}{d\zeta^2} - \frac{x\,d\Phi^2}{d\zeta^2} + \frac{nn}{xx} \\ + x(1 - 3\,\text{coſ.}\,\eta^2) + \frac{3cxx}{2a}(3\,\text{coſ.}\,\eta - 5\,\text{coſ.}\,\eta^3) - \frac{cc}{2aa}x^3(3 - 30\,\text{coſ.}\,\eta^2 + 35\,\text{coſ.}\,\eta^4) \end{array}\right\} = 0$$

vbi cum $\frac{c}{a}$ ſit quantitas quam minima, has aequationes in partes ſectas concipere licet, quae ſequentibus multo ſint maiores, ad quem ordinem etiam approximationem accommodari conuenit.

XXIV.

XXIV. Si omnis perturbatio abesset, foret ob excentricitatem euanescentem, vti vidimus, $x=1$ et $\frac{d\Phi}{d\zeta}=n$ hincque $\frac{d\eta}{d\zeta}=n-1$. Nunc perturbatione accedente statuamus:

$$x=1+P+Q+R \text{ et } \frac{d\Phi}{d\zeta}=n+p+q+r$$

hincque $\frac{d\eta}{d\zeta}=n-1+p+q+r$, vbi P, Q, R et p, q, r series maxime decrescentes referant, cum seriebus superioribus ex perturbatione natis comparandas ac has ipsas quantitates tanquam functiones anguli η spectemus, siquidem nouimus omnes inaequalitates ab hoc solo angulo pendere. Erit ergo $dx=dP+dQ+dR$ et per $\frac{d\eta}{d\zeta}=(n-1)+p+q+r$ multiplicando:

$$\frac{dx}{d\zeta}=\left\{\begin{array}{r}(n-1)dP+(n-1)dQ+(n-1)dR\\ +p\,dP\;+\;p\,dQ\\ +q\,dP\end{array}\right\}:d\eta$$

quae forma differentiata sumto iam elemento $d\eta$ constante dabit

$$\frac{ddx}{d\zeta}=\left\{\begin{array}{r}(n-1)ddP+(n-1)ddQ+(n-1)ddR\\ +p\,ddP\;+p\,ddQ\\ +dP\,dp+dp\,dQ\\ +q\,ddP\\ +dq\,dP\end{array}\right\}:d\eta$$

multiplicetur denuo per $\frac{d\eta}{d\zeta}$, prodibitque

$$\frac{ddx}{d\zeta^2} = \left\{\begin{array}{r} (n-1)^2 ddP + (n-1)^2 ddQ + (n-1)^2 ddR \\ +2(n-1)pddP + 2(n-1)pddQ \\ +(n-1)dpdP + (n-1)dpdQ \\ +2(n-1)qddP \\ +(n-1)dqdP \\ +ppddP \\ +pdpdP \end{array}\right\} : d\eta^2$$

ſimili modo cum ſit

$\frac{dd\Phi}{d\zeta} = dp + dq + dr$ per $\frac{d\eta}{d\zeta}$ multiplicando erit

$$\frac{dd\Phi}{d\zeta^2} = \left\{\begin{array}{r} (n-1)dp + (n-1)dq + (n-1)dr \\ +pdp \quad + pdq \\ +qdp \end{array}\right\} : d\eta$$

et $\frac{d\Phi^2}{d\zeta^2} = \begin{array}{l} nn + 2np + 2nq + 2nr \\ \quad + pp + 2pq \end{array}$ ac tandem

$$\frac{1}{xx} = \begin{array}{l} 1 - 2P - 2Q - 2R \\ \quad + 3PP + 6PQ \\ \quad - 4P^3. \end{array}$$

XXV. Hos igitur valores in aequationes noſtras introductos ſecundum ordines ſtabilitos diſtribuamus, vbi quidem elementum $d\eta$, quippe quod ſponte intelligitur, omittamus.

* Aequa-

* Aequatio Prima

II.	III.	IV.
$+2n(n-1)dP$	$+2n(n-1)dQ$	$+2n(n-1)dR$
$+(n-1)dp$	$+2npdP$	$+2npdQ$
$+3\sin.\eta\cos.\eta$	$+2(n-1)pdP$	$+2nqdP$
	$+(n-1)dq$	$+2(n-1)pdQ$
	$+pdp$	$+2ppdP$
	$+(n-1)Pdp$	$+2(n-1)qdP$
	$+3P\sin.\eta\cos.\eta$	$+(n-1)dr$
	$-\frac{3c}{2a}\sin.\eta(1-5\cos.\eta^2)$	$+pdq$
		$+qdp$
		$+(n-1)Pdq$
		$+Ppdp$
		$+(n-1)Qdp$
		$+3Q\sin.\eta\cos.\eta$
		$-\frac{3c}{a}P\sin.\eta(1-5\cos.\eta^2)$
		$-\frac{5cc}{2aa}\sin.\eta(3\cos.\eta-7\cos.\eta^3)$

Hic ſcilicet ordo primus deeſt, quia ſublata perturbatione primae aequationis omnia membra ſponte euaneſcunt.

Pro

* Huius aequationis nonniſi integrale particulare hic quaeritur, quod ſcilicet hypotheſi aſſumtae, qua excentricitas euaneſcit, conueniat, et manifeſto huiusmodi habet formam $P = A + B\cos.\eta^2$. Integrale autem completum foret

$$P = A + B\cos.\eta^2 + M\sin.\tfrac{n}{n-1}\eta + N\cos.\tfrac{n}{n-1}\eta$$

vbi M et N ſunt conſtantes arbitrariae, quibus conditio excentricitatis continetur. Id quod peculiarem euolutionem meretur.

Pro ſequentibus autem ordinibus terminos ad quemuis pertinentes ſeorſim nihilo aequari oportet.

XXVI. Aequatio altera ſequenti modo in membra diſtribuitur.

Aequatio ſecunda.

I.	II.	III.	IV.
$-nn$	$(n-1)^2 ddP$	$+(n-1)^2 ddQ$	$+(n-1)^2 ddR$
$+nn$	$-2np$	$+2(n-1)pddP$	$+2(n-1)pddQ$
	$-3nnP$	$+(n-1)dpdP$	$+2(n-1)qddP$
	$+(1-3\cos.\eta^2)$	$-2nq$	$+(n-1)dpdQ$
		$-pp$	$+(n-1)dqdP$
		$-2nPp$	$+ppddP$
		$-3nnQ$	$+pdpdP$
		$+3nnPP$	$-2nr$
		$+P(1-3\cos.\eta^2)$	$-2pq$
		$+\frac{3c}{2a}(3\cos.\eta-5\cos.\eta^3)$	$-2nPq$
			$-Ppp$
			$-2nQq$
			$-3nnR$
			$+6nnPQ$
			$-4nnP^3$
			$+Q(1-3\cos.\eta^2)$
			$+\frac{3c}{a}P(3\cos.\eta-5\cos.\eta^3)$
			$-\frac{cc}{2aa}(3-30\cos.\eta^2+35\cos.\eta^4)$

vbi membrum primum ſponte ſe tollit.

XXVII. Secundus ordo ex vtraque aequatione quantitatibus ſecundo loco aſſumtis definiendis inſer-

vit,

vit, quae sunt P et p, ideoque ex his duabus aequationibus determinandae.

$$1^\circ.\quad 2n(n-1)d\mathrm{P}+(n-1)dp+3d\eta\,\mathrm{fin.}\,\eta\,\mathrm{cof.}\,\eta=0$$

$$2^\circ.\quad (n-1)^2dd\mathrm{P}-2npd\eta^2-3nn\mathrm{P}d\eta^2+d\eta^2(1-3\,\mathrm{cof.}\,\eta^2)=0.$$

Prior autem integrata dat $2n(n-1)\mathrm{P}+(n-1)p=\Delta+\frac{3}{2}\mathrm{cof.}\,\eta^2$ seu $p=-2n\mathrm{P}+\frac{\Delta}{n-1}+\frac{3\,\mathrm{cof.}\,\eta^2}{2(n-1)}$, qui valor in altera substitutus praebet:

$$(n-1)^2dd\mathrm{P}+nn\mathrm{P}d\eta^2-\frac{2n}{n-1}\Delta d\eta^2-\frac{3nd\eta^2\,\mathrm{cof.}\,\eta^2}{n-1}+d\eta^2(1-3\,\mathrm{cof.}\,\eta^2)=0$$

seu $(n-1)^2dd\mathrm{P}+nn\mathrm{P}d\eta^2-\frac{2n}{n-1}\Delta d\eta^2-\frac{3(2n-1)}{n-1}d\eta^2\,\mathrm{cof.}\,\eta^2+d\eta^2=0.$

Statuamus, quandoquidem forma integralis sponte patet $\mathrm{P}=\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\mathrm{cof.}\,\eta^2$, si esset $nn=4(n-1)^2$ poni deberet $\mathrm{P}=\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\mathrm{cof.}\,\eta^2+\mathrm{C}\eta\,\mathrm{fin.}\,\eta\,\mathrm{cof.}\,\eta$, erit $\frac{d\mathrm{P}}{d\eta}=-2\mathrm{B}\,\mathrm{fin.}\,\eta\,\mathrm{cof.}\,\eta$ et $\frac{dd\mathrm{P}}{d\eta^2}=-2\mathrm{B}\,\mathrm{cof.}\,\eta^2+2\mathrm{B}\,\mathrm{fin.}\,\eta^2=2\mathrm{B}-4\mathrm{B}\,\mathrm{cof.}\,\eta^2$ et facta substitutione oritur:

$$\left.\begin{array}{l}+2(n-1)^2\mathrm{B}+nn\mathrm{A}-\frac{2n}{n-1}\Delta+1\\ -4(n-1)^2\mathrm{B}\,\mathrm{cof.}\,\eta^2+nn\mathrm{B}\,\mathrm{cof.}\,\eta^2-\frac{3(2n-1)}{n-1}\mathrm{cof.}\,\eta^2\end{array}\right\}=0$$

hincque $\mathrm{B}=\frac{-3(2n-1)}{(n-1)(n-2)(3n-2)}$ et $\frac{2n}{n-1}\Delta=1+nn\mathrm{A}+2(n-1)^2\mathrm{B}$

$$\begin{array}{ll}\text{et } p=-2n\mathrm{A} & -2n\mathrm{B}\,\mathrm{cof.}\,\eta^2\\ \quad+\frac{1}{2n} & +\frac{3}{2(n-1)}\mathrm{cof.}\,\eta^2.\\ \quad+\frac{1}{2}n\mathrm{A} & \\ \quad+\frac{(n-1)^2}{n}\mathrm{B}. & \end{array}$$

Quare si ponamus:

$$\mathrm{P}=\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\mathrm{cof.}\,\eta^2\quad\text{et}\quad p=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\,\mathrm{cof.}\,\eta^2$$

quan-

quantitas A arbitrio nostro relinquitur, eritque

$$\mathrm{B} = \frac{-3(2n-1)}{(n-1)(n-2)(3n-2)} \text{ atque}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2n} - \tfrac{3}{2} n \mathrm{A} + \frac{(n-1)^2}{n} \mathrm{B} \text{ et } \mathfrak{B} = \frac{5}{2(n-1)} - 2n\mathrm{B}.$$

Quantitas A ideo manet indefinita, vt vel distantia media vel motus medius ad veritatem definiri possit, ob perturbationem enim, si c conueniat cum distantia media n non amplius cum ratione $\frac{d\Phi}{d\zeta}$ congruit et vicissim.

XXVIII. Ad quantitates tertii ordinis Q et q determinandas, has habemus aequationes:

$$2n(n-1)dQ + (n-1)dq + 2(2n-1)p\,dP + p\,dp + (n-1)P\,dp$$
$$+ 3P \sin.\eta \cos.\eta - \tfrac{3c}{2a} \sin.\eta (1 - 5\cos.\eta^2) = 0$$

$$(n-1)^2 ddQ - 2nq - 3nnQ + 2(n-1)p\,ddP + (n-1)dp\,dP - pp - 2nPp$$
$$+ 3nnPP + P(1 - 3\cos.\eta^2) + \tfrac{3c}{2a}(3\cos.\eta - 5\cos.\eta^3) = 0.$$

Cum autem sit $P = A + B\cos.\eta^2$ et $p = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos.\eta^2$ erit $dP = -2B\sin.\eta\cos.\eta$ et $dp = -2\mathfrak{B}\sin.\eta\cos.\eta$

hi valores in prima aequatione substituti dant

$$\frac{2n(n-1)dQ + (n-1)dq}{d\eta} \begin{array}{l} -4(2n-1)\mathfrak{A}\mathrm{B} \\ -2\mathfrak{A}\mathfrak{B} \\ -2(n-1)\mathfrak{B}\mathrm{A} \\ +\;\;3\mathrm{A} \end{array} \sin.\eta\cos.\eta \begin{array}{l} -4(2n-1)\mathfrak{B}\mathrm{B} \\ -2\mathfrak{B}\mathfrak{B} \\ -2(n-1)\mathfrak{B}\mathrm{B} \\ +\;\;3\mathrm{B} \end{array} \sin.\eta\cos.\eta^3 - \tfrac{3c}{2a}\sin\eta(1 - 5\cos.\eta^2) = 0$$

vnde

vnde per integrationem elicitur

$$2n(n-1)Q+(n-1)q+\left(2(2n-1)\mathfrak{A}B+\mathfrak{A}B+(n-1)\mathfrak{B}A-\tfrac{5}{2}A\right)\text{cos.}\eta^2$$
$$+\tfrac{3c}{2a}\text{cos.}\eta-\tfrac{5c}{2a}\text{cos.}\eta^3=\Delta$$
$$+\left((2n-1)\mathfrak{B}B+\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\mathfrak{B}+\tfrac{1}{2}(n-1)\mathfrak{B}B-\tfrac{3}{4}B\right)\text{cos.}\eta^4$$

sit breuitatis gratia

$$2(2n-1)\mathfrak{A}B+\mathfrak{A}\mathfrak{B}+(n-1)\mathfrak{B}A-\tfrac{5}{2}A=\alpha$$
$$\tfrac{1}{2}(5n-3)\mathfrak{B}B+\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\mathfrak{B}-\tfrac{3}{4}B=\beta$$

erit $q=-2nQ+\frac{\Delta}{n-1}-\frac{\alpha}{n-1}\text{cos.}\eta^2-\frac{\beta}{n-1}\text{cos.}\eta^4-\frac{3c}{2a(n-1)}\text{cos.}\eta$
$$+\frac{5c}{2a(n-1)}\text{cos.}\eta^3.$$

Tum pro altera aequatione ob $ddP=2B-4B\text{cos.}\eta^2$ est

$2(n-1)p\,ddP$	$4(n-1)\mathfrak{A}B$	$-8(n-1)\mathfrak{A}B\text{cos.}\eta^2$	$-8(n-1)\mathfrak{B}B\text{cos.}\eta^4$	
$+(n-1)dp\,dP$		$+4(n-1)\mathfrak{B}B$		
		$+4(n-1)\mathfrak{B}B$	$-4(n-1)\mathfrak{B}B$	
$-pp$	$-\mathfrak{A}\mathfrak{A}$	$-2\mathfrak{A}\mathfrak{B}$	$-\mathfrak{B}\mathfrak{B}$	
$-2nPp$	$-2n\mathfrak{A}A$	$-2n\mathfrak{A}B$	$-2nB\mathfrak{B}$	
$+3nnPP$		$-2n\mathfrak{B}A$		
	$+3nnAA$	$+6nnAB$	$+3nnBB$	
$+P(1-3\text{cos.}\eta^2)$	$+A$	$-3A$	$-3B$	
		$+B$		$+\frac{9c}{2a}\text{cos.}\eta-\frac{15c}{2a}\text{cos.}\eta^3$
$+\frac{(n-1)^2ddQ}{a\eta^2}$	$-\frac{2n\Delta}{n-1}$	$+\frac{2n\alpha}{n-1}$	$+\frac{2n\beta}{n-1}$	$+\frac{3nc}{a(n-1)}\text{cos.}\eta-\frac{5nc}{a(n-1)}\text{cos.}\eta^3$
$+nnQ$				

XXIX. Pro resolutione huius aequationis poni oportere manifestum est:

$$Q=C+D\text{cos.}\eta^2+E\text{cos.}\eta^4+F\text{cos.}\eta+G\text{cos.}\eta^3$$

eritque $$\frac{ddQ}{d\eta^2}=\begin{array}{l}2D-4D\text{cos.}\eta^2-16E\text{cos.}\eta^4-F\text{cos.}\eta-9G\text{cos.}\eta^3\\ \qquad\;\; +12E \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +6G\end{array}$$

 Hinc

Hinc iſtae naſcuntur aequationes;

$$0 = nnC + 2(n-1)^2 D + 4(n-1)\mathfrak{A}B - \mathfrak{A}\mathfrak{A} - 2n\mathfrak{A}A + 3nnAA + A - \frac{2n\Delta}{n-1}$$

$$0 = 12(n-1)^2 E - (n-2)(3n-2)D - 2(5n-4)\mathfrak{A}B + 8(n-1)\mathfrak{B}B - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2n\mathfrak{B}A + 6nnAB - 3A + B + \frac{2n\alpha}{n-1}$$

$$0 = -(3n-4)(5n-4)E - 12(n-1)\mathfrak{B}B - \mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2n\mathfrak{B}B + 3nnBB - 3B + \frac{2n\beta}{n-1}$$

$$0 = 6(n-1)^2 G + (2n-1)F + \frac{5(5n-3)c}{2(n-1)\alpha}$$

$$0 = -(2n-3)(4n-3)G - \frac{5(5n-3)c}{2(n-1)\alpha}$$

vnde ordine retrogado litterae G, F, E et D determinantur tum vero ex prima valor ipſius Δ quaeratur, vt C maneat quantitas indefinita, at tum etiam valor litterae q innoteſcet per quantitates iam definitas A, B, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, ex quibus α et β reſultant. Si enim ponatur $q = \mathfrak{C} + \mathfrak{D}\cos.\eta^2 + \mathfrak{E}\cos.\eta^4 + \mathfrak{F}\cos.\eta + \mathfrak{G}\cos.\eta^3$ erit

$$\mathfrak{C} = -2nC + \frac{\Delta}{n-1}$$

$$\mathfrak{D} = -2nD - \frac{\alpha}{n-1}$$

$$\mathfrak{E} = -2nE - \frac{\beta}{n-1}$$

$$\mathfrak{F} = -2nF - \frac{5c}{2(n-1)\alpha}$$

$$\mathfrak{G} = -2nG + \frac{5c}{2(n-1)\alpha}.$$

XXX. Simili modo perturbationes ſequentium ordinum ex aequationibus ſupra datis colligi poſſe per

per se est manifestum. Calculus quidem haud parum fit molestus ac taediosus, verum sufficit methodum eum euoluendi hic dilucide exposuisse, ita vt nulla difficultas sit metuenda praeter calculi prolixitatem. Interim sequentia membra ita fiunt parva, vt pro vsu astronomico facile reiici queant. Inventis autem his omnibus litteris binae aequationes quibus iam motus lunae continetur ita se habent

$$x = 1 + A + C + (B + D)\cos.\eta^2 + E\cos.\eta^4 + F\cos.\eta + G\cos.\eta^5$$

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = n + \mathfrak{A} + \mathfrak{C} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{D})\cos.\eta^2 + \mathfrak{E}\cos.\eta^4 + \mathfrak{F}\cos.\eta + \mathfrak{G}\cos.\eta^5$$

existente $d\Phi = d\eta + d\zeta$, et $\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{d\Phi}{d\zeta} - 1$; vbi manifestum est constantem A nihilo aequalem poni posse, dummodo C in calculo retineatur, vt ratio media $d\Phi : d\zeta$ ob sequentes terminos aliquantillum a vero valore n depulsa corrigi et ad veritatem reduci possit modo infra exponendo.

Operae autem pretium erit hos singulos terminos euoluere sumendo pro n valorem per observationes definitum, quia eaedem inaequalitates; etiamsi ad casum hunc maxime particularem pertinentes, tamen in vero quoque lunae motu locum inueniunt.

XXXI. Sumamus ergo $A = 0$, et cum motum lunae medium cum solis motu comparando sit $n = 13,25586$, calculus pro determinatione harum inaequalitatum ita se habebit:

$n = 13,25586$	$l(2n-1) = 1,4067394$
$n-1 = 12,25586$	$l3 = 0,4771213$
$2n-1 = 25,51172$	$l3(2n-1) = 1,8838607$
$3n-2 = 37,76758$	$l(n-1) = 1,0883440$
$n-2 = 11,25586$	$l(n-2) = 1,0513787$
$B = -\ 0,0146899$	$l(3n-2) = 1,5771191$
$\frac{1}{2(n-1)} = +0,1223904$	$3,7168418$
$2nB = -\ 0,3894546$	$l-B = 8,1670189$
$\mathfrak{B} = +\ 0,5118450$	$l\tfrac{3}{2} = 0,1760913$
$\frac{1}{2n} = +\ 0,0377191$	$l(n-1) = 1,0883440$
$\frac{(n-1)^2}{n}B = -0,1664559$	$l\frac{1}{2(n-1)} = 9,0877473$
$\mathfrak{A} = -\ 0,1287368$	$l2 = 0,3010300$
	$ln = 1,1224079$
	$l2n = 1,4234379$
	$l-2nB = 9,5904568$
	$l(n-1)^2 = 2,1766880$
	$l\frac{(n-1)^2}{n} = 1,0542801$
	$l-\frac{(n-1)^2}{n}B = 9,2212990$

XXXII. Nunc pro litteris α et β calculus ita se habebit:

	$l\mathfrak{A} = -\ 9,1097027$
$2(n-1)\mathfrak{A}B = +0,096492$	$lB = -\ 8,1670189$
$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = -\ 0,065893$	$l2 = 0,3010300$
$\alpha = +\ 0,030599$	$l(2n-1) = 1,4067394$
$\frac{1}{2}(5n-3) = 31,63965$	$+\ 8,9844910$
$\frac{1}{2}(5n-3)\mathfrak{B}B = -0,237897$	$l\mathfrak{A} = -\ 9,1097027$
$\frac{1}{2}\mathfrak{B}\mathfrak{B} = +0,130993$	$l\mathfrak{B} = +\ 9,7091385$
$-\ 0,106904$	$-\ 8,8188412$
	$-\frac{3}{4}B$

$$\begin{array}{rl} -\tfrac{3}{4}B = & +0,011018 \\ \mathfrak{E} = & -0,095886 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} l\tfrac{1}{2}(5n-3) = & 1,5002316 \\ l\mathfrak{B} = & +9,7091385 \\ lB = & -\underline{8,1670189} \\ & -\underline{9,3763890} \\ l\mathfrak{B}\mathfrak{B} = & 9,4182770 \\ l2 = & \underline{0,3010300} \\ & 9,1172470 \end{array}$$

Hinc primo quaeratur littera E.

$$\begin{array}{rl} -12(n-1)\mathfrak{B}B = & +1,105820 \\ -2n\mathfrak{B}B = & \underline{+0,199340} \\ & +1,305160 \\ -\mathfrak{B}\mathfrak{B} = & \underline{-0,261986} \\ & +1,043174 \\ +3nnBB = & +0,113756 \\ -3B = & \underline{+0,044069} \\ & +1,200999 \\ +\frac{2n\mathfrak{E}}{n-1} = & \underline{-0,207419} \\ (3n-4)(5n-4)E = & +0,993580 \\ \text{ergo } E = & +0,00044603 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} l\mathfrak{B}B = & -7,8761574 \\ l(n-1) = & 1,0883440 \\ l12 = & \underline{1,0791812} \\ & -0,0436826 \\ l2n = & \underline{1,4234379} \\ & -\underline{9,2995953} \\ lBB = & 6,3340378 \\ lnn = & 2,2448158 \\ l3 = & \underline{0,4771213} \\ & +\underline{9,0559749} \\ l\mathfrak{E} = & -8,9817552 \\ l2n = & \underline{1,4234379} \\ & -0,4051931 \\ l(n-1) = & \underline{1,0883440} \\ & -\underline{9,3168491} \\ l0,99358 = & \underline{9,9972028} \\ l(3n-4) = & 1,5534895 \\ l(5n-4) = & \underline{1,7943437} \\ & \underline{3,3478332} \\ lE = & +6,6493696 \end{array}$$

XXXIII.

XXXIII. Porro pro littera D.

$12(n-1)^2 E = +0,803968$
$-2(5n-4)\mathfrak{A}B = -0,235557$
$+0,568411$
$+8(n-1)\mathfrak{B}B = -0,737223$
$-0,168812$
$-2\mathfrak{A}\mathfrak{B} = +0,131786$
$-0,037026$
$B = -0,014690$
$-0,051716$
$+\frac{2n\alpha}{n-1} = +0,066192$
$(n-2)(3n-2)D = +0,014476$
Ergo $D = +0,000034052$
$2(n-1)^2 D = +0,010230$
$+4(n-1)\mathfrak{A}B = +0,192984$
$+0,203214$
$-\mathfrak{A}\mathfrak{A} = -0,016573$
$+0,186641$
$nnC - \frac{2n\Delta}{n-1} = +0,186641$
$\frac{\Delta}{n-1} = 0,007040 + \frac{1}{2}nC$
Ergo $\mathfrak{C} = 0,007040 - \frac{3}{2}nC$
$-2nD = -0,0009028$
$-\frac{\alpha}{n-1} = -0,0024970$
Ergo $\mathfrak{D} = -0,0033998$
$-2nE = -0,0118250$
$-\frac{\varepsilon}{n-1} = +0,0078237$

$lE = +6,6493696$
$l(n-1)^2 = 2,1766880$
$l\,12 = 1,0791812$
$+9,9052388$
$l\,2\mathfrak{A}B = +7,5777516$
$l(5n-4) = 1,7943437$
$+9,3720953$
$l\alpha = +8,4857072$
$l\frac{2n}{n-1} = 0,3350939$
$+8,8208011$
$l\,0,014476 = 8,1606486$
$l(n-2)(3n-2) = 2,6284978$
$lD = 5,5321508$
$l(n-1)^2 = 2,1766880$
$l\,2 = 0,3010300$
$8,0098688$
$l\mathfrak{A}\mathfrak{A} = +8,2194054$
$l\,.\,. = 9,2710070$
$l\,2n = 1,4234379$
$7,8475691$
$lD = 5,5321508$
$l\,2nD = +6,9555887$
$l\alpha = +8,4857072$
$l(n-1) = 1,0883440$
$+7,3973632$
$lE = +6,6493696$
$l\,2n = 1,4234379$
$+8,0728075$

Ergo

Ergo $\mathfrak{E} = -0,0040013$ | $l\mathfrak{E} = -8,9817552$

$(2n-3)(4n-3)G = -12,90796 \frac{c}{a}$

$l(n-1) = 1,0883440$

$-7,8934112$

$l\frac{5n-3}{2} = 1,5002316$

$l(n-1) = 1,0883440$

$l\frac{5n-3}{2(n-1)} = 0,4118876$

$l5 = 0,6989700$

$1,1108576$

$G = -0,010975.\frac{c}{a}$

$1,1108576 = l12,90796$

$1,3712844 = l(2n-3)$

$1,6991735 = l(4n-3)$

$3,0704579$

$-8,0403997 = lG$

$2,1766880 = l(n-1)^2$

$0,7781513 = l6$

$-0,9952390$

$+6(n-1)^2G = -9,89097.\frac{c}{a}$

$\frac{3(5n-3)c}{2(n-1)a} = +7,74478.\frac{c}{a}$

$(2n-1)F = +2,14619.\frac{c}{a}$

$l\frac{5n-3}{2(n-1)} = 0,4118876$

$l3 = 0,4771213$

$0,8890089$

Ergo $F = +0,084126.\frac{c}{a}$

$-2nF = -2,23032.\frac{c}{a}$

$-\frac{3c}{2(n-1)a} = -0,122390.\frac{c}{a}$

$\mathfrak{F} = -2,35271.\frac{c}{a}$

$-2nG = +0,29096.\frac{c}{a}$

$+\frac{5c}{2(n-1)a} = +0,20399.\frac{c}{a}$

$\mathfrak{G} = +0,49495.\frac{c}{a}$

$l2,14619 = 0,3316683$

$l(2n-1) = 1,4067394$

$lF = +8,9249289$

$lG = -8,0403997$

$l2n = 1,4234379$

$l2nF = +0,3483668$

$l2nG = -9,4638376.$

XXXIV. Ex his igitur valoribus colligimus:

$$x = 1 + C - 0,014656 \cos.\eta^2 + 0,000446 \cos.\eta^4$$
$$+ 0,084126.\tfrac{c}{a}\cos.\eta - 0,010975.\tfrac{c}{a}\cos.\eta^3$$
$$\tfrac{d\Phi}{d\zeta} = 13,134163 - \tfrac{3}{2}nC + 0,508445 \cos.\eta^2 - 0,004001 \cos.\eta^4$$
$$- 2,3527\tfrac{c}{a}.\cos.\eta + 0,4949.\tfrac{c}{a}\cos.\eta^3$$

vbi conſtans C ita definiri debet, vt motus medius ex poſteriori forma erutus praeciſe conueniat cum motu medio ex obſeruationibus deducto. In hunc autem finem poteſtates $\cos.\eta^2$ et $\cos.\eta^4$ ad coſinus angulorum ſimplicium reduci debent, quia inde partes conſtantes emergunt cum principali coniungendae. Scilicet ob $\cos.\eta^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos.2\eta$ et $\cos.\eta^4 = \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2}\cos.2\eta + \tfrac{1}{8}\cos.4\eta$, fit pars conſtans: $13,386885 - \tfrac{3}{2}nC$ ipſi $n = 13,25586$ aequanda, vnde fit $\tfrac{3}{2}nC = 0,131025$, ideoque $C = 0,0065895$. Euolutis autem poteſtatibus $\cos.\eta$ reperitur

$$x = 0,999428 - 0,007105 \cos.2\eta + 0,000056 \cos.4\eta$$
$$+ 0,07589\tfrac{c}{a}\cos.\eta - 0,00274\tfrac{c}{a}\cos.3\eta$$
$$\tfrac{d\Phi}{d\zeta} = 13,25586 + 0,252222 \cos.2\eta - 0,000500 \cos.4\eta$$
$$- 1,9815\tfrac{c}{a}\cos.\eta + 0,1237\tfrac{c}{a}\cos.3\eta.$$

XXXV. Quo hinc facilius ipſum angulum Φ definire queamus, ponamus breuitatis gratia $\tfrac{d\Phi}{d\zeta} = n + r$ erit

$$\frac{d\Phi}{d\eta} = \frac{n+r}{n-1+r} = \frac{n}{n-1} - \frac{r}{(n-1)^2} + \frac{rr}{(n-1)^3}$$

fit

ſit $r = \alpha\cos.2\eta + \beta\cos.4\eta + \gamma\cos.\eta + \delta\cos.\eta^{3}$ erit

$rr = \frac{1}{2}\alpha\alpha + \frac{1}{2}\alpha\alpha\cos.4\eta$ omiſſis reliquis terminis, qui ad ordines ſequentes deuoluerentur, et ob paruitatem facile negliguntur. Integratione ergo inſtituta prodit

$$\Phi = \Delta + \frac{n}{n-1}\eta - \frac{\alpha\sin.2\eta}{2(n-1)^2} - \frac{\beta\sin.4\eta}{4(n-1)^2} - \frac{\gamma\sin.\eta}{(n-1)^2} - \frac{\delta\sin.3\eta}{3(n-1)^2}$$
$$+ \frac{\alpha\alpha}{2(n-1)^3}\eta \qquad + \frac{\alpha\alpha\sin.4\eta}{8(n-1)^3}.$$

vbi eſt:

$$\alpha = +0,252222;\ \beta = -0,000500;\ \gamma = -1,9815.\frac{c}{a};$$
$$\delta = +0,1237.\frac{c}{a}$$

atque iam ante quidem C ita definiri debuiſſet, vt et hic particula $\frac{\alpha\alpha}{2(n-1)^3}\eta$ tolleretur, prodiretque ſecundum motum medium $\Phi = \Delta + \frac{n}{n-1}\eta = \Delta + 1,081593\eta$. Singulis igitur terminis euolutis et in minuta ſecunda conuerſis habebitur:

$$\Phi = \Delta + 1.081593\eta - 173'',177\sin.2\eta + 1'',063\sin.4\eta$$
$$+ 2721''.\frac{c}{a}\sin.\eta - 57''.\frac{c}{a}\sin.3\eta.$$

XXXVI. Sed cum η ex motu medio non innoteſcat, relatio primo inter ζ et η eſt ſtabilienda, quae ob $\Phi = \zeta + \eta$ elicitur:

$$\zeta = \Delta + \frac{1}{n-1}\eta - \frac{\alpha\sin.2\eta}{2(n-1)^3} - \frac{\beta\sin.4\eta}{4(n-1)^2} - \frac{\gamma\sin.\eta}{(n-1)^2} - \frac{\delta\sin.3\eta}{3(n-1)^3}$$
$$+ \frac{\alpha\alpha\sin.4\eta}{8(n-1)^3}$$

hinc-

hincque colligitur:

$$\eta = \text{Conft.} + 12,25586\zeta + 2122'',43 \,\text{fin.}\, 2\eta - 13'',023 \,\text{fin.}\, 4\eta$$
$$- 33348'' \tfrac{c}{a} \,\text{fin.}\, \eta + 694'' . \tfrac{c}{a} \,\text{fin.}\, 3\eta$$

vnde haud difficulter ad datam folis longitudinem mediam angulus η colligitur, tum vero erit $\Phi = \eta + \zeta$. Denique diftantia lunae a terra habebitur:

$$v = c(0,999428 - 0,007105 \,\text{cof.}\, 2\eta + 0,000056 \,\text{cof.}\, 4\eta$$
$$+ 0,07589 \tfrac{c}{a} \,\text{cof.}\, \eta - 0,00274 . \tfrac{c}{a} \,\text{cof.}\, 3\eta)$$

At ex maffis Solis, lunae, et terrae quantitas c ita definitur vt fit $\frac{nnc^3}{a^3} = \frac{T+L}{T+S} = \frac{T}{S}$, vnde patet ob actionem folis diftantiam lunae mediam aliquantillum imminui.

XXXVII. In vero lunae motu eaedem iftae inaequalitates quoque occurrunt, vnde haud inutile erat eas omni cura determinaffe; ab Aftronomis autem nomine variationis lunae defignantur, quia omnes in vna tabula comprehendi poffunt, argumentum diftantiae folis a luna prae fe ferente. Patet autem eius partem pofteriorem a parallaxi folis pendere, feu a fractione $\frac{c}{a}$, dum prior abfolute datur. Quare fi quantitas huius inaequalitatis pro variis angulis per obferuationes innotefceret, inde viciffim parallaxis folis concludi poffet. Cum igitur Tabulae *Mayerianae* cum coelo ita exacte conueniant, biant, vt inaequalitates tanquam ex obseruationibus conclusae spectari queant; comparatio nostrae formulae inuentae cum his Tabulis parallaxin solis nobis exhibere poterit. Consideremus solum casum, quo angulus $\eta = 90°$, quia tum pars variationis absoluta euanescit, eritque per formulam nostram variatio $= -34042''.\frac{c}{a}$ tabulae autem *Mayerianae* habent $-1', 57'' = -117''$ vnde sequitur $\frac{a}{c} = \frac{34042}{117} = 291$, cui rationi cum ratio parallaxium sit aequalis, parallaxis autem lunae media sit $57', 15'' = 3435''$, erit parallaxis solis $= \frac{3435}{291} = 11\frac{4}{5}''$. Haec fortasse methodus parallaxin solis definiendi reliquis excepto veneris transitu, longe anteferenda videtur, si quidem tabulae *Mayerianae* nunquam vltra minutum a coelo diffident; quia enim haec variationis portio ad $117''$ assurgit, leuis mutatio in parallaxi solis assumta sensibilem aberrationem a veritate produceret vt scilicet parallaxis solis prodiret $= 8\frac{1}{2}''$ tabulae *Mayerianae* loco $-117''$ habere deberent $-84''$, ex hac autem solis parallaxi foret $\frac{a}{c} = 400$. Considerari potest quoque maxima variatio angulo $\eta = 135°$ fere respondens, quae ex nostra forma est $= -2122'' - 23050''.\frac{c}{a}$; at ex Tabulis *Mayerianis* $= -41', 41'' = -2501''$, vnde sequitur $\frac{a}{c} = \frac{23050}{379}$, sed haec conclusio minus est certa, ob effectum a parallaxi solis ortum multo minorem. Contra vero maxima variatio hinc potius oriri videtur $= -2202''$ seu $36', 42''$. Verum hic probe animaduerti oportet, ex excentricitate partem quoque ipsi sin. 2η proportionalem nasci, quae in his tabulis cum vera variatione est coniuncta. Haecque est causa, cur parallaxin solis ex variatione vbi sin. $2\eta = 0$ et sin. $4\eta = 0$ feliciter determinare licuerit minime vero ex variatione maxima.

ANNO-

ANNOTATIO QVARVNDAM CAVTELARVM IN INVESTIGATIONE INAEQVALITATVM QVIBVS CORPORA COELESTIA IN MOTV PERTVRBANTVR OBSERVANDARVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Omnis perfectio, quae adhuc in Theoria Astronomiae desideratur, in resolutione huius quaestionis continetur, vt trium pluriumue corporum, quae se mutuo in ratione duplicata inuersa distantiarum attrahant, motus definiatur. Cum enim ex motibus Lunae, quos iam satis exacte per Theoriam assignare licuit, vires illae, quibus corpora coelestia in se mutuo agunt, penitus sint confirmatae, nullum superest dubium, quin leues illae anomaliae, quae in motu planetarum tam primariorum quam secundariorum obseruantur, eidem causae sint attribuendae. In Saturno et Ioue ista motus perturbatio adeo nimis est manifesta, quam vt in dubium vocari possit; atque etiam in reliquis planetis, etsi eorum motus regulis *Kepleri* multo magis

est

est conformis, tamen nonnullae a Tabulis Astronomicis aberrationes obseruantur, quae nulli alii caussae nisi eorum actioni mutuae adscribi possunt. Satellitum autem cum Iouis tum Saturni motum similibus perturbationibus ac lunam esse obnoxium, obseruationes satis manifesto declarant.

2. Quanquam autem in Marte, Terra, Venere et Mercurio tales perturbationes minus sunt conspicuae, vt aberrationes a calculo astronomico solis elementis minus recte constitutis tribuendae videantur, tamen eorum motum non penitus Regulis *Keplerianis* esse consentaneum euidentissime ostendi potest. Si enim hi Planetae, vti istae Regulae a summo *Newtono* sunt expositae, vnice ad solem secundum rationem reciprocam duplicatam distantiarum pellerentur, non solum quisque motum suum in eodem plano ellipsim describendo perficeret, sed etiam haec ellipsis omnino foret immutabilis, suumque axem perpetuo in eodem situ esset conseruatura. Cum igitur tam lineae nodorum, quam absidum cunctorum planetarum etiam respectu stellarum fixarum non quiescant, manifestum hinc consequimur criterium, hos planetas non vnice solem versus impelli, sed ista phaenomena aliis caussis deberi, quarum effectus etiamsi potissimum in motu lineae absidum et nodorum cernatur, tamen dubium est nullum, quin inde etiam vel minimae inaequalitates in ipso earum motu proficiscantur.

3. Quan-

3. Quantumuis autem Tabulae planetarum inferiorum ac praecipue terrae ad consensum obseruationum accommodatae videantur, tamen saepenumero minutae quaedam aberrationes animaduertuntur, quae tabulas cuiusdam erroris arguunt, in quibus inuestigandis nunc quidem fere omnis Astronomorum industria consumitur, postquam crassiora huius scientiae momenta satis felici cum successu sunt expedita. Verum nullo modo sperare licet, istas leues aberrationes per solas obseruationes vnquam ita in ordinem redigi posse, vt praedici queant, in quo omnis Astronomiae vis versatur; minimi etiam errores, qui in obseruationibus plane euitari nequeunt, tale institutum omnino irritum reddunt, dum semper in dubio relinquunt, quanta pars re vera motum planetarum afficiat. Quemadmodum etiam ad eam accuratam motus Lunae cognitionem qua nunc quidem fruimur, solis obseruationibus innixi nunquam certe peruenturi fuissemus, nisi Theoria in subsidium fuisset vocata.

4. Etsi igitur summum studium, quod Astronomi ad artem obseruandi perficiendam impendunt, imprimis est necessarium, tamen maxima incrementa huius scientiae potissimum a Theoria sunt exspectanda, qua nisi praxis adiuuetur, parum inde commodi ad veram cognitionem motuum coelestium redundare potest. Vniuersa autem Theoria ad problema initio memoratum reducitur, vt motus plurium corporum, quae se mutuo attrahant in ratione

reciproca duplicata distantiarum, accurate determinetur. Solutionem vero huius problematis non solum esse difficillimam, sed etiam si in genere tractetur, vires ingenii humani fere superare, omnes qui in eo vires suas exercuerunt, satis superque sunt experti.

5. Si duo tantum essent corpora, quae se mutuo attrahant, quaestio nulli amplius difficultati esset obnoxia, cum vtrumque circa commune centrum grauitatis perfectam ellipsin esset descripturum. Verum statim ac tria considerantur corpora, problema tam fit difficile, vt omnia artificia quae quidem adhuc sunt detecta, ad id perfecte soluendum minime sufficiant. Haud igitur vtilitate cariturum arbitror, si has difficultates, earumque causas accuratius examinauero; quandoquidem illarum enodatio ne sperari quidem poterit, nisi ante diligentissime fuerint perpensae. Quin etiam haec ipsa contemplatio nouos aperiet fontes, ex quibus solutio petenda videtur, qui etsi initio parum adiumenti praebere videantur, tamen vberior meditatio fortasse nos continuo propius ad intentum scopum perducere valebit.

6. Quaestio ergo, quae omnem Astronomiae vim in se complectitur, ad Mechanicam seu motus scientiam refertur, cuius principia iam ita solide sunt constituta, vt eorum applicatio ad casum propositum nulla laboret difficultate; vnde causam tenebra-

nebrarum, in quibus adhuc circa accuratam motuum coelestium cognitionem versamur, minime ignorantiae nostrae in motus scientia tribuere licet. Peruenimus autem non difficulter, quotcunqne etiam fuerint corpora se mutuo attrahentia, ad aequationes differentio-differentiales, quae in se omnia motus phaenomena complectuntur, et ad quarum resolutionem totum negotium reducitur. Non igitur difficultas in Mechanica motusque determinatione est sita, sed omnis in Analysi continetur, cuius imperfectioni vnice est imputandum, quidquid adhuc in Theoria Astronomiae desideratur.

7. Forma harum aequationum differentio-differentialium iam satis est nota, ex iis scriptis, quae cum de Luna, tum de perturbatione motus saturni prodierunt, vnde patet motum vniuscuiusque corporis nisi fiat in eodem plano, necessario ternis huiusmodi aequationibus includi: in quibus omnes quantitates variabiles, quae ad singula corpora pertinent, maxime sint inter se permixtae; ita vt nullius corporis seorsim sumti motus definiri queat, quin simul inaequalitates motus omnium reliquorum corporum inuoluantur. Ex quo summa difficultas, qua huiusmodi motuum determinatio impeditur, per se est perspicua, neque vllum remedium extare videtur, nisi vt methodus generalis aperiatur aequationes differentio-differentiales quotcunque, in quibus variabiles vtcunque inter se fuerint permixtae, resoluendi; talis autem methodus nimis ma-

 gna

gna scientiae Analyticae incrementa requirit, quam vt ea vnquam sperare liceat.

8. Tanta scilicet impedimenta occurrerent, si problema de motu trium pluriumue corporum se mutuo attrahentium in genere et perfecte esset soluendum; pro dato autem casu plerumque se offerunt eiusmodi commoda, quibus illa impedimenta multo redduntur leuiora. Veluti si quaestio sit de tribus corporibus, Sole, terra ac Luna, huiusque motus, qualis ex terra spectatur, definiri debeat, qua quidem quaestione tota Lunae Theoria continetur; primum commode euenit, vt motus solis apparens tanquam cognitus spectari possit, propterea quod perturbationem in motu terrae ab attractione Lunae oriundam pro nihilo reputare licet. Deinde etiam solutio non mediocriter inde subleuatur, quod distantia Lunae prae solis distantia sit perquam exigua, simulque vis Lunae absoluta multo sit minor vi terrae. Tum vero etiam excentricitas orbitae Lunaris non nimis magna, atque inclinatio eius ad planum eclipticae satis parua plurimum confert ad difficultates superandas, his autem commodis Tabulae Lunares, quae quidem reliquis praestant, acceptae sunt referendae.

9. His autem subsidiis nullus amplius locus relinqueretur, si vel Lunae a terra distantia esset multo maior, vel eius massa seu vis attractiua absoluta multo fortior existeret, vel si orbita eius multo

multo maiorem haberet excentricitatem, vel denique si cum plano eclipticae multo maiorem angulum constitueret: quarum conditionum si vel vna vel plures in Luna deprehenderentur, eius motus hac ratione nullatenus definiri posset, neque eius inaequalitates per simplices angulos, vti in tabulis lunaribus fieri solet, repraesentare liceret. Si talis Luna terrae contigisset, vix patet, quomodo eius motus saltem ita prope cognosci potuisset, vt errores non fuerint vehementer enormes: hoc quippe casu Luna quasi medium quendam statum inter satellitem terrae et planetam primarium esset sortita, spectari deberet.

10. Cum igitur consueta methodus Lunae motum repraesentandi, tabulisque complectendi omni vsu destitueretur, si status Lunae tantillam mutationem accepisset; satis hoc est indicii, solitam motus Lunae repraesentationem naturae non esse conformem. Praeterquam enim quod motum Lunae tantum vero proxime definit, et accurata determinatio innumerabiles huiusmodi inaequalitates requireret, quarum praetermissio quidem in statu, quo Luna reuera versatur, errorem vix notabilem gignit; si alius status Lunae obtigisset, non solum inaequalitatum harum, quae adhuc essent notabiles, numerus in immensum augeri, sed etiam id incommodi facile accedere posset, vt istae infinitae inaequalitates ne seriem quidem conuergentem constituerent, verum continuo fierent maiores; ex quo istius mo-

di repraesentatio motus Lunae omni plane vsu esset caritura.

11. Quo magis autem distantia Lunae a terra augeretur, eo grauiora etiam obstacula motus determinationi aduersarentur; neque tamen ideo aucta distantia continuo multiplicarentur. Nam simulac Luna eousque a terra fuisset remota, vt locum Veneris vel Martis esset occupatura, ista obstacula iterum sed quasi contrario quodam modo euanescerent, dum Luna motum planetae primarii esset secutura, cuius perturbationes, si quae a vi terrae efficerentur, alia plane methodo inuestigari deberent. Haec scilicet inuestigatio similis foret illi, qua perturbationes motus saturni, aliusue planetae primarii, quae ab attractione alius planetae primarii oriuntur indagari solent; quae etsi per similes formulas expeditur, tamen multo dissimili modo instituitur; ibi enim Luna primum circa terram secundum regulas *Kepleri* moueri, assumitur, atque aberrationes ab his regulis quaeruntur; hic vero motus Lunae, quasi circa solem secundum easdem regulas fieret, spectari, et aberrationes ab hoc motu regulari assignari deberent.

12. Quantumuis igitur motus Lunae determinatu sit difficilis, si quidem determinatio ad omnes distantias, in quibus Luna a terra collocari potuisset, patere debeat, tamen dantur quasi duo casus extremi, quibus motus facillime definiri posset,

ſet, quos propterea probe expendi conueniet. Prior ſcilicet caſus, quo determinatio motus Lunae nulla difficultate laboraret, foret, ſi Luna terrae eſſet proxima tum enim ſecundum regulas *Kepleri* circa terram perfectam ellipſin eſſet deſcriptura, cuius alterum focum centrum terrae conſtanter occuparet. Poſterior vero caſus locum haberet, ſi Luna a terra tam longe eſſet remota, vt quaſi in regione Martis vel Veneris verſaretur; tum enim iterum motu regulari eſſet inceſſura et circa ſolem ellipſin deſcriptura, cuius alter focus in centro ſolis exiſteret. Vtroque autem caſu facile foret eius motum non ſolum per calculum definire, ſed etiam ad tabulas reuocare.

13. Hinc igitur colligimus veram motus Lunae, ſi neque terrae ſit proxima, neque ab ea nimis remota, determinationem ita comparatam eſſe debere, vt ambobus memoratis caſibus in determinationes illas ſimplices abeat. Atque hic inſignis defectus in methodo, qua motus Lunae ad certas regulas reuocari ſolet, ſtatim deprehenditur, quippe quae tantum ad alterum caſum extremum, refertur. Ita ſcilicet tantum motum Lunae definit, vt ſi diſtantia Lunae a terra euaneſceret, motus quidem regularis et regulis *Keplerianis* conformis eſſet prodituros; verum ſi Luna in immenſum a terra remoueretur, non ſolum non ad regularitatem illam, qua tum Luna eſſet progreſſura, appropinquaret, ſed potius ab ea in infinitum eſſet digreſſura. Nullum

lum igitur est dubium, quin huiusmodi methodus, quae ad vtrumque casum extremum aeque inclinet, naturae rei multo magis foret consentanea, atque negotium multo felicius esset expeditura.

14. His considerationibus etiam problema generale de motu trium corporum se mutuo attrahentium non mediocriter adiuuari videtur. Sint enim proposita tria corpora A, B, C, quae se inuicem in ratione reciproca duplicata attrahant, et quaeratur, vti in Astronomia quaestio institui solet, motus respectiuus, quo corpora duo B et C, spectatori in A posito moueri videbuntur; litterae autem A, B, C denotent massas horum corporum seu eorum vires attractrices absolutas. Quodsi iam vnum horum corporum euanesceret, haberetur casus duorum corporum tantum, quorum motus sine vlla difficultate definiri posset; vnde obtinemus illos casus extremos, ad quas solutionem generalem aeque dirigi oportet. Istas igitur extremitates diligentius examinari operae erit pretium, verum ne difficultates nimium obruantur, motum omnium trium corporum in eodem plano fieri assumam, quoniam si difficultates pro hac hypothesi essent superatae, reliquae ex planorum diuersitate oriundae haud difficulter vincerentur.

Problema 1.

15. Si tria corpora A, B, C se mutuo attrahant in ratione reciproca duplicata distantiarum, atque

que in eodem plano moueantur, definire motum corporum B et C qualis spectatori in corpore A posito apparebit.

Solutio.

Quoniam corpus A tanquam in quiete persistens considerari debet, ex quo motus binorum reliquorum spectetur, ducatur in plano motus per A linea recta ♈ A ♎ ad puncta aequinoctialia seu alia puncta in coelo fixa, directa; ac tempore quocunque ab epocha quadam elapso t reperiantur bina reliqua corpora in B et C ad quae ex A ducantur rectae AB et AC. Vocentur ergo hae distantiae $AB = x$; $AC = y$; itemque anguli ♈ $AB = p$; ♈ $AC = q$, qui longitudinem vtriusque corporis referunt; tum ponatur horum angulorum differentia $BAC = q - p = s$, eritque iuncta recta $BC = \sqrt{(xx + yy - 2xy \operatorname{cof.} s)} = v$. Iam cum horum corporum massae sint A, B, C, eaque se mutuo attrahant in ratione reciproca duplicata distantiarum, sequentes habebimus vires acceleratrices: Tab. II. Fig. 1.

I. Corpus B sollicitatur secundum $\begin{cases} BA \text{ vi} = \frac{A}{xx} \\ BC \text{ vi} = \frac{C}{vv} \end{cases}$

II. Corpus C sollicitatur secundum $\begin{cases} CA \text{ vi} = \frac{A}{yy} \\ CB \text{ vi} = \frac{B}{vv}. \end{cases}$

Corpus autem A sollicitatur a corporibus B et C viribus acceleratricibus secundum $AB = \frac{B}{xx}$ secundum

 AC =

$AC = \frac{C}{yy}$. Quare cum corpus A debeat in quiete retineri, hae vires secundum directiones contrarias in corpora B et C sunt transferendae. Praeter vires ergo superiores, si ducamus BM et CN parallelas ipsis CA et BA, insuper has habebimus:

I. Corpus B sollicitatur secundum $\begin{cases} BA \text{ vi} = \frac{B}{xx} \\ BM \text{ vi} = \frac{C}{yy} \end{cases}$

II. Corpus C sollicitatur secundum $\begin{cases} CA \text{ vi} = \frac{C}{yy} \\ CN \text{ vi} = \frac{B}{xx} \end{cases}$

Vires ergo quibus haec corpora coniunctim sollicitantur, sunt:

Corpus B sollicitatur secundum $\begin{cases} BA \text{ vi} = \frac{A+B}{xx} \\ BC \text{ vi} = \frac{C}{vv} \\ BM \text{ vi} = \frac{C}{yy} \end{cases}$

Corpus C sollicitatur secundum $\begin{cases} CA \text{ vi} = \frac{A+C}{yy} \\ CB \text{ vi} = \frac{B}{vv} \\ CN \text{ vi} = \frac{B}{xx} \end{cases}$

Quaestio ergo huc redit, quomodo motus corporum ab his viribus sollicitatorum futurus sit comparatus. Hunc in finem ductis ad rectam ♈♎ perpendiculis BP et CQ, illas vires resoluere licet, secundum directiones fixas, quarum alterae Bb et Cc sint ipsi ♈♎ parallelae, alterae vero BP et CQ ad eam normales; ad quod nosse oportet singularum rectarum inclinationes ad axem ♈♎. Ac primo quidem rectae BA et CN

co

eo inclinantur angulo: $\Upsilon AB = \Upsilon NC = p$; rectae vero CA et BM angulo $\Upsilon AC = \Upsilon MB = q$; verum recta BC ad axem inclinatur angulo CBb, cuius sinus est $= \frac{BP - CQ}{v}$ et cosinus $= \frac{AP - AQ}{v}$. Cum iam sit $BP = x\,\text{sin.}\,p$; $AP = x\,\text{cos.}\,p$; $CQ = y\,\text{sin.}\,q$ et $AQ = y\,\text{cos.}\,q$ fiet

$$\text{sin.}\,CBb = \frac{x\,\text{sin.}\,p - y\,\text{sin.}\,q}{v} \quad \text{et} \quad \text{cos.}\,CBb = \frac{x\,\text{cos.}\,p - y\,\text{cos.}\,q}{v}.$$

Hinc ergo corpus B sollicitabitur sequentibus viribus acceleratricibus:

Secundum Bb	secundum BP
$\frac{A+B}{xx}\,\text{cos.}\,p$	$\frac{A+B}{xx}\,\text{sin.}\,p$
$+ \frac{C}{vv} \cdot \frac{x\,\text{cos.}\,p - y\,\text{cos.}\,q}{v}$	$+ \frac{C}{vv} \cdot \frac{x\,\text{sin.}\,p - y\,\text{sin.}\,q}{v}$
$+ \frac{C}{yy}\,\text{cos.}\,q$	$+ \frac{C}{yy}\,\text{sin.}\,q.$

Porro autem corpus C sollicitabitur sequentibus viribus acceleratricibus:

Secundum Cc	secundum CQ
$\frac{A+C}{yy}\,\text{cos.}\,q$	$\frac{A+C}{yy}\,\text{sin.}\,q$
$- \frac{B}{vv} \cdot \frac{x\,\text{cos.}\,p - y\,\text{cos.}\,q}{v}$	$- \frac{B}{vv} \cdot \frac{x\,\text{sin.}\,p - y\,\text{sin.}\,q}{v}$
$+ \frac{B}{xx}\,\text{cos.}\,p$	$+ \frac{B}{xx}\,\text{sin.}\,p.$

Ponamus breuitatis gratia has vires:

$$\frac{A+B}{xx}\,\text{cos.}\,p + \frac{C(x\,\text{cos.}\,p - y\,\text{cos.}\,q)}{v^3} + \frac{C}{yy}\,\text{cos.}\,q = P$$

$$\frac{A+B}{xx}\,\text{sin.}\,p + \frac{C(x\,\text{sin.}\,p - y\,\text{sin.}\,q)}{v^3} + \frac{C}{yy}\,\text{sin.}\,q = Q$$

$$\frac{A+C}{yy}\,\text{cos.}\,q - \frac{B(x\,\text{cos.}\,p - y\,\text{cos.}\,q)}{v^3} + \frac{B}{xx}\,\text{cos.}\,p = R$$

$$\frac{A+C}{yy}\,\text{sin.}\,q - \frac{B(x\,\text{sin.}\,p - y\,\text{sin.}\,q)}{v^3} + \frac{B}{xx}\,\text{sin.}\,p = S$$

eritque ex principiis Mechanicis, sumto elemento temporis dt constante:

$$\frac{2}{dt^2}dd.\,x\cos.p + P = 0;\quad \frac{2}{dt^2}dd.\,x\sin.p + Q = 0$$
$$\frac{2}{dt^2}dd.\,y\cos.q + R = 0;\quad \frac{2}{dt^2}dd.\,y\sin.q + S = 0.$$

Hinc autem per idoneam combinationem elicitur:

$$P\cos.p + Q\sin.p + \frac{2}{dt^2}(ddx - xdp^2) = 0$$
$$Q\cos.p - P\sin.p + \frac{2}{dt^2}(2dxdp + xddp) = 0$$
$$R\cos.q + S\sin.q + \frac{2}{dt^2}(ddy - ydq^2) = 0$$
$$S\cos.q - R\sin.q + \frac{2}{dt^2}(2dydq + yddq) = 0.$$

At ex superioribus formulis fit:

$$P\cos.p + Q\sin.p = \frac{A+B}{xx} + \frac{C(x - y\cos.s)}{v^3} + \frac{C\cos.s}{yy}$$
$$Q\cos.p - P\sin.p = \frac{-Cy\sin.s}{v^3} + \frac{C\sin.s}{yy}$$
$$R\cos.q + S\sin.q = \frac{A+C}{yy} - \frac{B(x\cos.s - y)}{v^3} + \frac{B\cos.s}{xx}$$
$$S\cos.q - R\sin.q = \frac{+Bx\sin.s}{v^3} - \frac{B\sin.s}{xx}$$

unde pro motu amborum corporum determinando sequentes quatuor aequationes prodibunt:

$$\text{I.}\quad ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{A+B}{xx} + \frac{C(x - y\cos.s)}{v^3} + \frac{C\cos.s}{yy}\right) = 0$$
$$\text{II.}\quad 2dxdp + xddp + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{C\sin.s}{yy} - \frac{Cy\sin.s}{v^3}\right) = 0$$
$$\text{III.}\quad ddy - ydq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{A+C}{yy} + \frac{B(y - x\cos.s)}{v^3} + \frac{B\cos.s}{xx}\right) = 0$$
$$\text{IV.}\quad 2dydq + yddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\sin.s}{v^3} - \frac{B\sin.s}{xx}\right) = 0.$$

Coroll.

Coroll. 1.

16. Circa has aequationes in genere id tantum annotandum duco quod si prima multiplicetur per $y\,\text{fin.}\,s$; fecunda per $\frac{(A+C)x}{C} - y\,\text{cof.}\,s$ tertia per $-x\,\text{fin.}\,s$ et quarta per $\frac{(A+B)y}{B} - x\,\text{cof.}\,s$, fumma productorum futura fit:

$$\begin{aligned}(yddx-xddy)\,\text{fin.}\,s + xy(dq^2-dp^2)\,\text{fin.}\,s + \tfrac{A+C}{C}(xxddp+2xdxdp)\\ +\tfrac{A+B}{B}(yyddq+2ydydq) - 2ydxdp\,\text{cof.}\,s - xyddp\,\text{cof.}\,s\\ - 2xdydq\,\text{cof.}\,s - xyddq\,\text{cof.}\,s = 0\end{aligned}$$

cuius integrale eft:

$$\tfrac{A+C}{C}xxdp + \tfrac{A+B}{B}yydq + (ydx-xdy)\,\text{fin.}\,s - xy(dp+dq)\,\text{cof.}\,s = \alpha\,dt.$$

Coroll. 2.

17. Si haec ad motum Lunae transferre velimus, in A terra conftituatur et B pro fole, C vero pro Luna habeatur. Cum autem magnitudo maffae Lunae non in computum veniat, fiquidem ad perturbationem motus terrae inde oriundam hic non refpicimus, facto $C=0$, has habebimus aequationes:

$$\left.\begin{aligned}&\text{I.}\ ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\,\tfrac{A+B}{xx} = 0\\ &\text{II.}\ 2dxdp + xddp = 0\end{aligned}\right\}\ \text{pro motu folis}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{III.}\ ddy - ydq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\tfrac{A}{yy} + \tfrac{B(y-x\,\text{cof.}\,s)}{v^3} + \tfrac{B\,\text{cof.}\,s}{xx}\right) = 0\\ &\text{IV.}\ 2dydq + yddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\tfrac{Bx\,\text{fin.}\,s}{v^3} - \tfrac{B\,\text{fin.}\,s}{xx}\right) = 0\end{aligned}\right\}\ \text{pro motu Lunae.}$$

 Coroll.

Coroll. 3.

18. Motus ergo solis ex terra apparens erit regularis seu regulis *Keplerianis* conformis. Pro Luna autem alter casus extremus locum habebit, si distantiae x et v sint quasi infinities maiores quam y, seu Luna circa terram in minima distantia reuolveretur, quo casu etiam eius motus regulis *Keplerianis* foret conformis, hisque aequationibus contineretur:

$$\text{III. } ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 \cdot \frac{A}{yy} = 0$$

$$\text{IV. } 2\,dy\,dq + y\,ddq = 0$$

qui casus etiam ex generalibus formulis nascitur, si massa solis B vt euanescens spectetur.

Coroll. 4.

19. Alter autem casus extremus obtinebitur, quo Luna veluti planeta primarius circa solem reuolueretur, si massa terrae A pro nihilo habeatur; hoc igitur casu motus Lunae ex terra spectatus his aequationibus exprimeretur.

$$\text{III. } ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{B(y - x\cos.s)}{v^3} + \frac{B\cos.s}{xx}\right) = 0$$

$$\text{IV. } 2\,dy\,dq + y\,ddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\sin.s}{v^3} - \frac{B\sin.s}{xx}\right) = 0.$$

Coroll. 5.

20. Etsi autem hoc casu motus Lunae sit regularis, tamen resolutio istarum aequationum minus patet;

patet; propterea quod motum ex terra visum definiunt, sicque inaequalitatem secundam, vti ab Astronomis vocatur, simul inuoluunt. Quamobrem harum aequationum resolutio a posteriori est cognita; quae ergo si fuerit expedita, non parum ad resolutionem aequationum generalium collatura esse videtur.

Coroll. 6.

21. Hoc igitur certum est, resolutionem formularum generalium seu saltem earum, quae §. 17. pro motu Lunae sunt exhibitae, ita comparatam esse debere, vt tam formularum §. 18. quam formularum §. 19. integrationem in se complectatur. Illarum scilicet integratio oriri debet ex generali, si ponatur $B=0$, harum vero si $A=0$, quare vtrumque casum seorsim euoluamus.

Problema 2.

22. Propositae sint sequentes binae aequationes differentio-differentiales:

$$ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 . \frac{A}{yy} = 0 \quad \text{et} \quad 2\,dy\,dq + y\,ddq = 0$$

quarum integralia inueniri oporteat.

Solutio.

Posterior aequatio per y multiplicata ob dt constans statim praebet hoc integrale $yy\,dq = a\,dt$. Deinde

Deinde prima per $2dy$ posterior vero per $2ydq$ multiplicata summam dant:

$$2dyddy + 2ydydq^2 + 2yydqddq + dt^2 \cdot \frac{Ady}{yy} = 0$$

cuius integrale est:

$$dy^2 + yydq^2 = \mathfrak{C}dt^2 + \frac{Adt^2}{y}.$$

Cum igitur sit $dq = \frac{\alpha dt}{yy}$ erit

$$dy^2 + \frac{\alpha\alpha dt^2}{yy} = \mathfrak{C}dt^2 + \frac{Adt^2}{y}$$

ideoque $ydy = -dt\sqrt{(\mathfrak{C}yy + Ay - \alpha\alpha)}$ vnde fit

$$dt = \frac{-ydy}{\sqrt{(\mathfrak{C}yy + Ay - \alpha\alpha)}} \quad \text{et} \quad dq = \frac{-\alpha dy}{y\sqrt{(\mathfrak{C}yy + Ay - \alpha\alpha)}}.$$

Quo autem constantes arbitrarias α et $\mathfrak{C}$ commodius definiamus pro y introducamus angulum θ, vt sit $y = \frac{c}{1 - n\cos.\theta}$ et $dy = \frac{-ncd\theta\sin.\theta}{(1 - n\cos.\theta)^2}$ et $\mathfrak{C}yy + Ay - \alpha\alpha$ $= \frac{\mathfrak{C}cc + Ac - nAc\cos.\theta - \alpha\alpha + 2n\alpha^2\cos.\theta - nn\alpha\alpha\cos.\theta^2}{(1 - n\cos.\theta)^2}$ statuatur $\alpha^2 = \frac{1}{2}Ac$ et $\mathfrak{C}cc + Ac - \alpha\alpha = nn\alpha\alpha$, seu

$$\mathfrak{C}cc + \tfrac{1}{2}Ac = \tfrac{1}{2}nnAc \text{ ideoque } \mathfrak{C} = -\frac{A}{2c}(1 - nn)$$

eritque $\mathfrak{C}yy + Ay - \alpha\alpha = \frac{\frac{1}{2}nnAc\sin.\theta^2}{(1 - n\cos.\theta)^2}$ et $\sqrt{(\mathfrak{C}yy + Ay - \alpha\alpha)}$

$$= \frac{n\sin.\theta}{1 - n\cos.\theta}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ac}.$$

Quibus valoribus substitutis habebimus:

$$dt = \frac{ccd\theta}{(1 - n\cos.\theta)^2}\sqrt{\frac{2}{Ac}} \quad \text{et} \quad dq = d\theta$$

ideoque per nouam variabilem θ reliquas ita definimus vt sit:

$$q = f + \theta; \; y = \frac{c}{1 - n\cos.\theta} \text{ et } dt = \frac{d\theta}{(1 - n\cos.\theta)^2}\sqrt{\frac{2}{A}c^3}.$$

Coroll.

Coroll. 1.

23. Eodem modo etiam superiores aequationes motum solis continentes construentur:

$$ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 . \frac{A+B}{xx} = 0 \text{ et } 2dxdp + xddp = 0$$

si enim breuitatis gratia ponamus $A + B = E$ erit

$$p = e + \eta;\ x = \frac{a}{1 - m \operatorname{cos}. \eta};\ dt = \frac{d\eta}{(1 - m \operatorname{cos}. \eta)^2} V \frac{2}{E} a^3.$$

Cum autem vtrinque elementum temporis dt sit idem, erit

$$\frac{d\theta}{(1 - n \operatorname{cos}. \theta)^2} V \frac{2}{A} c^3 = \frac{d\eta}{(1 - m \operatorname{cos}. \eta)^2} V \frac{2}{E} a^3.$$

Coroll. 2.

24. Si nolimus nouam variabilem introducere, quoniam inuenimus, $\alpha\alpha = \frac{1}{2}Ac$ et $\mathfrak{C} = -\frac{A}{2c}(1 - nn)$, erit $V(\mathfrak{C}yy + Ay - \alpha\alpha) = V\frac{A}{2c}(-cc + 2cy - yy + nnyy)$ $= V\frac{A}{2c}((1+n)y - c)(c - (1-n)y)$, sicque habebimus

$$dt = \frac{-y\,dy\,V\,2c}{VA((1+n)y - c)(c - (1-n)y)} \text{ et } dq = \frac{-c\,dy}{yV((1+n)y - c)(c - (1-n)y)}$$

quae formulae ita ad ellipsin sunt accommodatae, vt $\frac{c}{1-n}$ denotet distantiam apogei, et $\frac{c}{1+n}$ distantiam perigei, vnde distantia media est $\frac{c}{1-nn}$, excentricitas $= n$, et c semiparameter.

Coroll. 3.

25. Simili modo pro motu solis, nullam nouam variabilem introducendo habebimus has formulas:

$$dt = \frac{-x\,dx\,V\,2a}{VE((1+m)x - a)(a - (1-m)x)} \text{ et } dp = \frac{-a\,dx}{xV((1+m)x - a)(a - (1-m)x)}$$

 vbi

vbi ſignum — praefixi, vt motus ab apogeo computetur.

Coroll. 4.

26. Sin autem nouam variabilem vtpote angulum θ introducere velimus, id etiam infinitis aliis modis fieri poteſt. Veluti ſi ponamus $y = \frac{c(1 + \nu \cos.\theta)}{1 - n \cos.\theta}$, reperiemus:

$$dt = \frac{d\theta(1 + \nu \cos.\theta)}{(1 - n \cos.\theta)^2} \sqrt{\frac{2}{A}(1 + n\nu)c^3} \text{ et } dq = \frac{d\theta}{1 + \nu \cos.\theta} \sqrt{(1 - \nu\nu)}$$

vbi diſtantia apogei eſt $= \frac{c(1 + \nu)}{1 - n}$; diſtantia perigei $= \frac{c(1 - \nu)}{1 + n}$ diſtantia media $= \frac{c(1 + n\nu)}{1 - nn}$, et excentricitas $= \frac{n + \nu}{1 + n\nu}$, tum vero ſemiaxis coniugatus $= c\sqrt{\frac{1 - \nu\nu}{1 - nn}}$, et ſemiparameter $= \frac{c(1 - \nu\nu)}{1 + n\nu}$.

Problema 3.

27. Si propoſitae ſint ſequentes aequationes differentio-differentiales;

$$ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{B(y - x\cos.s)}{v^3} + \frac{B\cos.s}{xx}\right) = 0$$

$$2\,dy\,dq + y\,ddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\sin.s}{v^3} - \frac{B\sin.s}{xx}\right) = 0$$

exiſtente $s = q - p$ et

$$ddx - x\,dp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 . \frac{E}{xx} = 0 \text{ et } 2\,dx\,dp + x\,ddp = 0$$

earum integralia inuenire.

Solutio.

Solutio.

Pro relatione quantitatum x et p ad tempus t iam inuenimus:

$$dt = \frac{-x\,dx\sqrt{2a}}{\sqrt{B((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}} \text{ et } dp = \frac{-a\,dx}{x\sqrt{((1+m)\,x-a)(a-(1-m)x)}}$$

qui valores in ipsis propositis aequationibus sunt adhibendi. Quod autem ad has ipsas aequationes attinet, recordandum est iis designari eiusmodi motum corporis C, qui ad punctum B relatus futurus esset regularis. Ducta ergo Bb axi ♈ ♎ parallela si ponamus angulum $CBb = u$, ob $BC = v = \sqrt{(xx + yy - 2xy\,\text{cof.}\,s)}$ habebimus pro hoc motu istas aequationes:

$$dt = \frac{-v\,dv\sqrt{2b}}{\sqrt{B((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}} \text{ et } du = \frac{-b\,dv}{v\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}}.$$

At est $\text{fin.}\,u = \frac{x\,\text{fin.}\,p - y\,\text{fin.}\,q}{v}$ et $\text{cof.}\,u = \frac{x\,\text{cof.}\,p - y\,\text{cof.}\,q}{v}$.

Atque hinc elicitur:

$$du = \frac{xx\,dp + yy\,dq + (y\,dx - x\,dy)\,\text{fin.}\,s - xy(dp + dq)\,\text{cof.}\,s}{vv}$$

vnde nanciscimur:

$$xx\,dp + yy\,dq + (y\,dx - x\,dy)\,\text{fin.}\,s - xy(dp + dq)\,\text{cof.}\,s$$
$$= \frac{-b\,v\,dv}{\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}} = dt\sqrt{\tfrac{1}{2}Bb}.$$

Cum igitur primo x et p deinde etiam v detur per t, ista aequatio $xx - 2xy\,\text{cof.}\,s + yy = vv$, cum hac coniuncta determinabit duas reliquas quantitates incognitas y et q. Verum definito v per t, ex eo primum quaeratur angulus $u = CBb$, quo inuento ob $x\,\text{fin.}\,p - y\,\text{fin.}\,q = v\,\text{fin.}\,u$ et $x\,\text{cof.}\,p - y\,\text{cof.}\,q = v\,\text{cof.}\,u$

Z 2 erit

erit $\text{tang.}\, q = \frac{x\,\text{fin.}\, p - v\,\text{fin.}\, u}{x\,\text{cof.}\, p - v\,\text{cof.}\, u}$; et $y = V(xx + vv - 2xv\,\text{cof.}(p-u))$. Verum inuenimus esse $u = \int \frac{-b\,dv}{v\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}}$, et angulus q etiam facilius ex hac forma, $\text{tang.}(q-p) = \frac{v\,\text{fin.}(p-u)}{x - v\,\text{cof.}(p-u)}$ erui potest, eritque idcirco

$$\text{tang.}\, s = \frac{v\,\text{fin.}(p-u)}{x - v\,\text{cof.}(p-u)} \text{ seu fin.}\, s = \frac{v\,\text{fin.}(p-u)}{y}.$$

Coroll. 1.

28. Pro aequationibus ergo differentio-differentialibus propositis hanc nacti sumus resolutionem. Primo ad datum tempus t quaerantur valores x et p per has formulas:

$$dt = \frac{-x\,dx\sqrt{2a}}{\sqrt{E((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}} \text{ et } dp = \frac{-a\,dx}{x\sqrt{((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}}.$$

Deinde ad idem tempus colligatur valor ipsius v per hanc formulam

$$dt = \frac{-v\,dv\sqrt{2b}}{\sqrt{E((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}}:$$

quo inuento definiatur porro angulus u vt sit:

$$du = \frac{-b\,dv}{v\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}} = \frac{dt}{vv} V \tfrac{1}{2} Bb$$

vnde tandem habebitur $y = V(xx + vv - 2xv\,\text{cof.}(p-u))$ et

$$\text{tang.}\, q = \frac{x\,\text{fin.}\, p - v\,\text{fin.}\, u}{x\,\text{cof.}\, p - v\,\text{cof.}\, u} \text{ seu tang.}(q-p) = \text{tang.}\, s = \frac{v\,\text{fin.}(p-u)}{x - v\,\text{cof.}(p-u)}.$$

Coroll. 2.

29. Si igitur proponantur resoluendae hae aequationes latius patentes

ddy

$$ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{A}{yy} + \frac{B(y - x\cos.s)}{v^3} + \frac{B\cos.s}{xx}\right) = 0$$

$$2dy\,dq + y\,ddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\sin.s}{v^3} - \frac{B\sin.s}{xx}\right) = 0$$

$$ddx - x\,dp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 \cdot \frac{B}{xx} = 0 \quad \text{et} \quad 2dx\,dp + x\,ddp = 0$$

existente $vv = xx + yy - 2xy\cos.s$ et $s = q - p$; solutionem iam inuenimus pro binis casibus extremis, altero quo $B = 0$ (in probl. 2.) altero quo $A = 0$ (in probl. 3.).

Coroll. 3.

30. Ponamus pro casu $B = 0$ prodiisse $y = P$ et $q = Q$ pro casu autem $A = 0$ prodiisse $y = R$ et $q = S$, ac manifestum est solutionem formularum latius patentium, quae sit $y = T$ et $q = V$ ita esse debere comparatam, vt posito $B = 0$ fiat $T = P$ et $V = Q$, posito autem $A = 0$ fiat $T = R$ et $V = S$, vnde iam quodammodo solutionis generalis indolem colligere licet.

Coroll. 4.

31. Solutio autem casus posterioris, quo $A = 0$, etsi rei natura considerata, motuque ad corpus B relato, sit facilis, tamen si aequationes nostras differentio-differentiales spectemus, difficillime constat, quemadmodum solutio inuenta ex iis immediate elicui potuerit. Posito enim $A = 0$, solutio vix minus recondita videri debet, quam si non esset $A = 0$;

Coroll. 5.

32. Pro motu ergo Lunae accurate determinando, atque adeo in genere problemate de motu trium corporum ſe mutuo attrahentium reſoluendo maximum adiumentum inde merito eſt expectandum, vt caſus ille quo $A = o$, ex ſola contemplatione formularum differentio-differentialium euoluatur. Hoc ſaltem eſt certum, niſi hunc caſum expedire valeamus, multo magis de ſolutione generali eſſe deſperandum.

Coroll. 6.

33. Cum igitur pro hoc caſu ſolutio, quam a poſteriori concinnauimus conſtet, methodus tantum Analytica idonea et quaſi ſponte ſe offerens deſideratur, cuius ope eadem illa ſolutio a priori ipſas aequationes differentio-differentiales tractando erui queat. Nullum enim eſt dubium, quin eadem methodus pro ſolutione generali minime ſucceſſu ſit caritura.

Coroll. 7.

34. Quoniam a poſteriori iam valores finitos pro quantitatibus y et q elicuimus, haud abs re erit earum differentialia quoque contemplari; quorum euolutio cum laborem non parum taedioſum requirat, ea hic apponam:

$$dq = \frac{vdu(v - x\cos.(p-u)) - (vdx - xdv)\sin.(p-u) + xdp(x - v\cos.(p-u))}{yy}$$

$$ds = \frac{vdu(v - x\cos.(p-u)) - (vdx - xdv)\sin.(p-u) - vdp(v - x\cos.(p-u))}{yy}$$

$$dy = \frac{dx(x - v\cos.(p-u)) + dv(v - x\cos.(p-u)) + xv(dp - du)\sin.(p-u)}{y}$$

vnde componitur:

$$dy^2 + yydq^2 = dx^2 + xxdp^2 + dv^2 + vvdu^2 - 2dxdv\cos.(p-u)$$
$$- 2xvdpdu\cos.(p-u)$$
$$+ 2xdvdp\sin.(p-u) - 2vdxdu\sin.(p-u).$$

Denique ſi ex aequatione, qua v per t determinatur, conſtantes b et i per integrationem ingreſſae iterum per differentiationem tollantur, prodibit: $d^3v + \frac{2dvddv}{v} + \frac{Bdt^2dv}{2v^3} = 0$, quae propterea aequationibus propoſitis ſatisfacere eſt cenſenda.

Scholion.

35. Hae formulae autem, quarum ope iſta reſolutio aequationum caſu $A = 0$, obtineri poſſet, nimis ſunt complicatae, earumque inuentio ipſa nimis recondita, quam vt Analyſtae occurrere poſſent. Quo autem inueſtigatio directa eſt difficilior, eo magis in eam inquirendum videtur, quoniam inde procul dubio inſignia ſubſidia ad problema generale expediendum merito expectare licet. Cum autem hoc artificium, quo ſolutio caſus $A = 0$, tam facilis euaſit, multo latius pateat, atque ad omnes leges attractionis extendatur, ex contemplatione huius maioris amplitudinis facilius fortaſſe id, quod quaerimus,

mus, elici poterit; vnde idem Problema latissimo sensu acceptum simili modo resolui conueniet.

Problema 4.

36. Si corpora A et C ad corpus B attrahantur in ratione quacunque distantiarum ab eo, eaque in eodem plano vtcunque moueantur, definire motum respectiuum, quo ambo corpora B et C spectatori in A posito circumferri videbuntur.

Solutio.

Quia omnia ad spectatorem in A positum sunt referenda, ponantur, vt ante, distantiae $AB = x$; $AC = y$; $BC = v$; et anguli $\Upsilon AB = p$; $\Upsilon AC = q$ et $BAC = q - p = s$; vt sit $v = \sqrt{(xx + yy - 2xy \cos. s)}$. Tum sit vis acceleratrix qua corpus A ad B trahitur $= X$, et ea qua corpus C ad B attrahitur $= V$; eritque pro puncto A quasi fixo spectato, vis acceleratrix

qua B sollicitatur secundum $BA = X$

qua C sollicitatur secundum $CB = V$

qua C sollicitatur secundum $CN = X$.

Hinc ratiocinium simili modo quo supra instituendo obtinebimus sequentes quatuor aequationes:

I. $ddx - xdp^2 + \frac{1}{2}dt^2 . X = 0$. II. $2dxdp + xddp = 0$

III. $ddy - ydq^2 + \frac{1}{2}dt^2 . (\frac{y - x \cos. s}{v} . V + X \cos. s) = 0$

IV. $2dydq + yddq + \frac{1}{2}dt^2 . (\frac{x \sin. s}{v} . V - X \sin. s) = 0$.

Bina-

Binarum autem priorum ſolutio eſt in promtu, ſecunda enim praebet $xxdp = \alpha dt$, ideoque $dp = \frac{\alpha dt}{xx}$; qui valor in prima ſubditus dat: $ddx - \frac{\alpha\alpha dt^2}{x^3} + \frac{1}{2} X dt^2 = 0$, qui per $2dx$ multiplicatus pro integrali habet:

$$dx^2 + \frac{\alpha\alpha dt^2}{xx} + dt^2 \int X dx = \beta dt^2$$

vnde fit

$$dt = \frac{-x dx}{\sqrt{(\beta xx - \alpha\alpha - xx\int X dx)}} \text{ et } dp = \frac{-\alpha dx}{x\sqrt{(\beta xx - \alpha\alpha - xx\int X dx)}}.$$

Quanquam autem nullus patet modus, quo binae poſteriores aequationes reſolui queant, tamen conſideratio, quod motus corporis C ex B ſpectatus ſit determinabilis, earum ſolutionem largitur, ſi enim ponamus angulum $CBb = u$, ita vt ſit:

$$\text{ſin.}\, u = \frac{x\,\text{ſin.}\,p - y\,\text{ſin.}\,q}{v}; \quad \text{coſ.}\, u = \frac{x\,\text{coſ.}\,p - y\,\text{coſ.}\,q}{v}$$

et $\text{tang.}\, q = \frac{x\,\text{ſin.}\,p - v\,\text{ſin.}\,u}{x\,\text{coſ.}\,p - v\,\text{coſ.}\,u}$; $y = \sqrt{(xx + vv - 2xv\,\text{coſ.}(p-u))}$

hincque $\text{tang.}\, s = \frac{v\,\text{ſin.}(p-u)}{x - v\,\text{coſ.}(p-u)} = \text{tang.}(q-p)$

inter v, V et u ſimiles habebuntur aequationes, atque inter x, X et p, ſicque binae poſteriores aequationes aequiualebunt iſtis:

$$ddv - vdu^2 + \frac{1}{2} dt^2 . V = 0 \text{ et } 2dvdu + vddu = 0$$

vnde ſequentes valores integrales eliciuntur:

$$dt = \frac{-v dv}{\sqrt{(\delta vv - \gamma\gamma - vv\int V dv)}}; \quad du = \frac{-\gamma dv}{v\sqrt{(\delta vv - \gamma\gamma - vv\int V dv)}}$$

quae ſimul aequationibus III et VI. ſuperioribus ſatisfacere ſunt cenſendae.

 Coroll.

Coroll. 1.

37. Si ex aequatione inter v et t constantes δ et γ per differentiationem tollantur, obtinebitur aequatio differentialis tertii gradus:

$$v d^3 v + 3 dv ddv + \tfrac{1}{2} dt^2 (3 V dv + v dV) = 0$$

quae aequatio facile quoque deducitur ex formulis:

$$ddv - v du^2 + \tfrac{1}{2} V dt^2 = 0 \text{ et } 2 dv du + v ddu = 0$$

nam prior dat $du^2 = \frac{ddv}{v} + \frac{1}{2} dt^2 . \frac{V}{v}$, ideoque differentiando:

$2 du ddu = \frac{d^3 v}{v} - \frac{dv ddv}{vv} + \frac{1}{2} dt^2 . \frac{v dV - V dv}{vv}$, qui valores in altera per $2 du$ multiplicata $4 dv du^2 + 2 v du ddu = 0$ substituti praebent aequationem inuentam.

Coroll. 2.

38. Haec quidem sunt facilia, sed cardo rei in hoc versatur, vt certa assignetur methodus, cuius ope inuentae formulae differentiales primi gradus, immediate ex quatuor aequationibus primo inventis erui queant. Atque in hoc negotio eximia Analyseos promotio consistere videtur.

Scholion.

39. Cum autem nulla adhuc pateat via hoc praestandi, ipsa huius defectus commemoratio vtilitate non caritura videtur, qua sagacitas Analystarum incitetur. Quin etiam haud alienum erit problema

blema de tribus corporibus se mutuo attrahentibus, in sensu latissimo euoluere, vt attractio legem distantiarum quamcunque sequatur, saepe numero enim calculi compendia et artificia in problematibus generalioribus facilius inueniuntur, quam in specialioribus, quoniam ipsa limitatio non raro impedit, quominus ratio artificiorum, quae adhiberi queant, perspiciatur.

Problema 5.

40. Si tria corpora A, B, C se mutuo attrahant in ratione quacumque distantiarum, eorumque motus in eodem fiat plano, determinare motum respectiuum, quo corpora B et C spectatori in A posito circumferri videbuntur.

Solutio.

Quia hic corporum actio mutua spectari debet, eorum massae in computum sunt ducendae. Sint igitur vires acceleratrices, quibus corpus A vrgetur ad $B = BX$, et ad $C = CY$, quae in reliqua corpora translatae suppeditabunt cum iis, quibus ea actu sollicitantur sequentes vires acceleratrices:

$$\text{Corpus B sollicitatur secundum} \begin{cases} BA \text{ vi} = (A+B)X \\ BC \text{ vi} = CV \\ BM \text{ vi} = CY \end{cases}$$

 Corpus

Corpus C sollicitatur secundum $\begin{cases} CA \text{ vi} = (A+C)Y \\ CB \text{ vi} = BV \\ CN \text{ vi} = BX \end{cases}$

vbi X, Y et V sunt eae distantiarum $AB = x$; $AC = y$ et $BC = v$ functiones, quibus vires attractiuae praeter massas sunt proportionales. Hinc igitur pro motu corporum sequentes aequationes colligentur.

$$\text{I.}\quad ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left((A+B)X + \frac{C(x - y\cos.s)}{v}V + CY\cos.s\right) = 0$$

$$\text{II.}\quad 2dxdp + xddp + \tfrac{1}{2}dt^2\left(CY\sin.s - \frac{Cy\sin.s}{v}V\right) = 0$$

$$\text{III.}\quad ddy - ydq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left((A+C)Y + B\frac{(y - x\cos.s)}{v}V + BX\cos.s\right) = 0$$

$$\text{IV.}\quad 2dydq + yddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\sin.s}{v}V - BX\sin.s\right) = 0$$

vbi est

$$vv = xx + yy - 2xy\cos.s \quad \text{et} \quad s = q - p.$$

Verum praeter has aequationes aliae exhiberi possunt motum pariter in se continentes, quae oriuntur, si motus corporum A et C relatiuus, quales spectatori in B posito cerneretur, simili modo euolvatur. Posito autem angulo $CBb = u$ vt sit

$$\sin.u = \frac{x\sin.p - y\sin.q}{v} \quad \text{et} \quad \cos.u = \frac{x\cos.p - y\cos.q}{v}$$

obtinebuntur hae aequationes:

$$ddv - vdu^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left((B+C)V + \frac{A(v - x\cos.(p-u))}{y}Y + AX\cos.(p-u)\right) = 0$$

$$2dvdu + vddu + \tfrac{1}{2}dt^2\left(AX\sin.(p-u) - \frac{Ax\sin.(p-u)}{y}Y\right) = 0$$

ddx

$$ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left((A+B)X + \frac{C(x - v\,\mathrm{cos.}(p-u))}{y}Y + CV\,\mathrm{cos.}(p-u)\right) = 0$$

$$2dxdp + xddp + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{Cv\,\mathrm{sin.}(p-u)}{y}Y - CV\,\mathrm{sin.}(p-u)\right) = 0$$

quae duae postremae cum superiorum I et II conueniunt ob

$$y\,\mathrm{sin.}\,s = v\,\mathrm{sin.}(p-u) \text{ et } y\,\mathrm{cos.}\,s = x - v\,\mathrm{cos.}(p-u).$$

Quanquam ergo motus corporum per quatuor aequationes tantum determinatur, iis tamen duae hic inuentae commode adiunguntur, quippe quae non parum ad solutionem idoneam inueniendam conferre posse videntur; sicque habebimus sex sequentes aequationes, quarum autem quaeque quaternae problemati soluendo sufficiunt.

I. $ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left((A+B)X + \frac{x - y\,\mathrm{cos.}\,s}{v}CV + CY\,\mathrm{cos.}\,s\right) = 0$

II. $2dxdp + xddp + \tfrac{1}{2}dt^2\left(CY\,\mathrm{sin.}\,s - \frac{y}{v}.\,CV\,\mathrm{sin.}\,s\right) = 0$

III. $ddy - ydq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left((A+C)Y + \frac{y - x\,\mathrm{cos.}\,s}{v}BV + BX\,\mathrm{cos.}\,s\right) = 0$

IV. $2dydq + yddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{x}{v}.\,BV\,\mathrm{sin.}\,s - BX\,\mathrm{sin.}\,s\right) = 0$

V. $ddv - vdu^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left((B+C)V + \frac{x - y\,\mathrm{cos.}\,s}{v}AX + \frac{y - x\,\mathrm{cos.}\,s}{v}AY\right) = 0$

VI. $2dvdu + vddu + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{y}{v}AX\,\mathrm{sin.}\,s - \frac{x}{v}AY\,\mathrm{sin.}\,s\right) = 0.$

Coroll. 1.

41. Praeterquam quod est $s = q - p$, circa has quantitates notari meretur esse $vv = xx + yy - 2xy\,\mathrm{cos.}\,s$, tum vero $v\,\mathrm{sin.}\,u = x\,\mathrm{sin.}\,p - y\,\mathrm{sin.}\,q$ et $v\,\mathrm{cos}\,u = x\,\mathrm{cos.}\,p - y\,\mathrm{cos.}\,q$; vbi anguli p, q et u inclinationes rectarum AB, AC et BC ad rectam fixam ♈ ♎ denotant.

 Porro

Porro autem est $x:y:v = \text{fin.}(q-u):\text{fin.}(p-u):\text{fin.}\,s$ siue

$$\frac{x}{\text{fin.}(q-u)} = \frac{y}{\text{fin.}(p-u)} = \frac{v}{\text{fin.}\,s} \quad \text{et}$$

$x = y\,\text{cof.}\,s + v\,\text{cof.}(p-u)$; $v = x\,\text{cof.}(p-u) - y\,\text{cof.}(q-u)$; et
$y = x\,\text{cof.}\,s - v\,\text{cof.}(q-u)$.

Coroll. 2.

42. His aequationibus diuerfis modis combinandis aliae non incongruae formari poffunt; imprimis autem duae funt notandae combinationes, quae ad aequationes integrabiles deducunt. Prima oritur

$$\text{II.}\,\frac{x}{C} + \text{IV.}\,\frac{y}{B} + \text{VI.}\,\frac{v}{A} \text{ vnde fit}$$

$$\frac{2xdxdp + xxddp}{C} + \frac{2ydydq + yyddq}{B} + \frac{2vdvdu + vvddu}{A} = 0$$

quae integrata dat:

$$\frac{xxdp}{C} + \frac{yydq}{B} + \frac{vvdu}{A} = \alpha\, dt.$$

Coroll. 3.

43. In altera omnes fex coniunguntur hoc modo:

$$\text{I.}\,\frac{2dx}{C} + \text{II.}\,\frac{2xdp}{C} + \text{III.}\,\frac{2dy}{B} + \text{IV.}\,\frac{2ydq}{B} + \text{V.}\,\frac{2dv}{A} + \text{VI.}\,\frac{2vdu}{A}$$

vnde emergit:

$$\frac{2dxddx + 2xdxdp^2 + 2xxdpddp}{C} + \frac{2dyddy + 2ydydq^2 + 2yydqddq}{B}$$
$$+ \frac{2dvddv + 2vdvdu^2 + 2vvduddu}{A} +$$

$$dt^2\left\{\begin{aligned}&+\tfrac{(A+B)}{C}X\,dx+\tfrac{x-y\cos.s}{v}V\,dx+Y\,dx\cos.s+Yx\,dp\sin.s-\tfrac{xy}{v}V\,dp\sin.s\\&+\tfrac{(A+C)}{B}Y\,dy+\tfrac{y-x\cos.s}{v}V\,dy+X\,dy\cos.s-Xy\,dq\sin s+\tfrac{xy}{v}V\,dq\sin.s\\&+\tfrac{(B+C)}{A}V\,dv+\tfrac{x-y\cos.s}{v}X\,dv+\tfrac{y-x\cos.s}{v}Y\,dv+Xy\,du\sin.s-Yx\,du\sin.s\end{aligned}\right\}=0$$

Coroll. 4.

44. Iam vero est $\frac{x-y\cos.s}{v}dx+\frac{y-x\cos.s}{v}dy+\frac{xyds\sin.s}{v}=dv$ et

$$\frac{x-y\cos.s}{v}dv+dy\cos.s-y(dq-du)\sin.s=dx$$

$$\frac{y-x\cos.s}{v}dv+dx\cos.s+x(dp-du)\sin.s=dy$$

vnde integrando elicitur:

$$\frac{dx^2+xxdp^2}{C}+\frac{dy^2+yydq^2}{B}+\frac{dv^2+vvdu^2}{A}$$

$$+(A+B+C)dt^2\left(\frac{\int X\,dx}{C}+\frac{\int Y\,dy}{B}+\frac{\int V\,dv}{A}\right)=0$$

quae aequatio principium conseruationis virium vivarum in se complectitur.

Coroll. 5.

45. Patet hinc quantae sint vtilitatis binae aequationes postremae V et VI, etiamsi in reliquis iam contineantur. Si enim sit $A=0$, aequationes quatuor priores nullam idoneam determinationem suppeditant; ex illis autem facillime ad datum quodvis tempus tam distantia v quam angulus u assignantur. Atque hinc merito concludere videor, in investigatione perturbationis motus planetarum ab his postremis aequationibus non exiguum fructum iure

spera-

ſperari poſſe, qui iis neglectis vix ac ne vix quidem obtineri queat.

Scholion.

46. Quoniam igitur vidimus, motum lunae, ſi terrae eſſet valde vicina nullo labore definiri poſſe, dum is ad terram referatur, ſin autem luna multo magis a terra diſtaret, vt planetis principalibus eſſet accenſenda, tum eius motum ad ſolem referri conuenire; hinc concludendum videtur pro caſu, quo lunae motus vtriusque naturae eſt particeps, quemadmodum re vera vſu venit, tum eum forte facillime definitum iri ſi neque ad ſolem neque ad terram, ſed ad aliud quodpiam punctum medium certa ratione motum referatur. Hunc in finem ſequens problema adiicio, in quo generatim motum corporis ad datum punctum relatum ad aliud punctum vtcunque motum referre docebo.

Problema 6.

Tab. II. Fig. 2. 47. Motum corporis C ad punctum A relatum, ad aliud punctum O, quod reſpectu puncti A vtcunque moueatur, ita referre, vt is qualis ſpectatori in O conſtituto ſit appariturus, definiatur.

Solutio.

Poſita diſtantia $AC = y$ et angulo $♈AC = q$, binae habentur aequationes differentio-differentiales, quibus

quibus ad quoduis tempus t valores y et q definiuntur, hasque aequationes ita comparatas esse vidimus:

$$2\,dy\,dq + y\,ddq + M\,dt^2 = 0 \quad \text{et} \quad ddy - y\,dq^2 + N\,dt^2 = 0$$

quas obseruo ex his formis esse natas:

$$dd.y\cos.q + dt^2(N\cos.q - M\sin.q) = 0$$

$$dd.y\sin.q + dt^2(N\sin.q + M\cos.q) = 0.$$

Iam pro motu puncti O statuamus distantiam $AO = m$ et angulum $\Upsilon AO = n$; pro dato scilicet tempore t, atque vt motum corporis C ad hoc punctum referamus, vocemus distantiam $OC = z$ et angulum $\Upsilon OC = w$. Cum igitur sit $y\cos.q = m\cos.n + z\cos.w$ et $y\sin.q = m\sin.n + z\sin.w$, his valoribus ibi substitutis habebimus: has duas aequationes.

$$\text{I}^\circ.\ +(ddm - m\,dn^2)\cos.n - (2\,dm\,dn + m\,ddn)\sin.n + dt^2(N\cos.q - M\sin.q) = 0$$
$$+(ddz - z\,dw^2)\cos.w - (2\,dz\,dw + z\,ddw)\sin.w$$

$$\text{II}^\circ.\ +(ddm - m\,dn^2)\sin.n + (2\,dm\,dn + m\,ddn)\cos.n + dt^2(N\sin.q + M\cos.q) = 0$$
$$+(ddz - z\,dw^2)\sin.w + (2\,dz\,dw + z\,ddw)\cos.w$$

vnde combinatio $\text{I}.\cos.w + \text{II}.\sin.w$ praebet

$$ddz - z\,dw^2 + (ddm - m\,dn^2)\cos.(w-n) + (2\,dm\,dn + m\,ddn)\sin.(w-n)$$
$$+ dt^2(N\cos.(w-q) + M\sin.(w-q)) = 0$$

haec vero combinatio $\text{II}.\cos.w - \text{I}.\sin.w$ dat:

$$2\,dz\,dw + z\,ddw - (ddm - m\,dn^2)\sin(w-n) + (2\,dm\,dn + m\,ddn)\cos.(w-n)$$
$$+ dt^2(M\cos.(w-q) - N\sin.(w-q)) = 0$$

 sicque

ſicque pro corporis C motu quaeſito reſpectu puncti O ad quoduis tempus t his binis aequationibus tam diſtantia $OC = z$ quam angulus $\Upsilon OC = w$ definitur. Tum vero quia nunc elementa $AC = y$ et $\Upsilon AC = q$ ex calculo elidi debent, in triangulo ACO notandum, eſſe angulos:

$$AOV = w - n;\ OAC = q - n;\ \text{et}\ ACO = w - q;$$

hincque $yy = mm + zz + 2mz\,\text{coſ.}(w-n)$ atque

$$\text{tang.}(w-q) = \frac{m\,\text{ſin.}(w-n)}{z + m\,\text{coſ.}(w-n)}$$

vnde colligitur:

$$\text{ſin.}(w-q) = \frac{m\,\text{ſin.}(w-n)}{y}\ \text{et}\ \text{coſ.}(w-q) = \frac{z + m\,\text{coſ.}(w-n)}{y}$$

ſimili modo ob $\text{tang.}(q-n) = \frac{z\,\text{ſin.}(w-n)}{m + z\,\text{coſ.}(w-n)}$ erit

$$\text{ſin.}(q-n) = \frac{z\,\text{ſin.}(w-n)}{y}\ \text{et}\ \text{coſ.}(q-n) = \frac{m + z\,\text{coſ.}(w-n)}{y}.$$

Coroll. 1.

48. Cum ergo ante ad quoduis tempus t definiri debuerint quantitates y et q, nunc motus cognitio perducta eſt ad determinationem quantitatum z et w, vbi quantitates m et n arbitrio noſtro relinquuntur.

Coroll. 2.

49. Totum igitur negotium eo reuocatur, quemadmodum quantitates m et n pro quouis tempore t aſſumi oporteat, vt inueſtigatio quantitatum z et w facillima reddatur. His enim inuentis quantitates

titates y et q, motum corporis C ex A visum declarantes, inde facile colliguntur.

Scholion.

50. Operae igitur pretium erit hanc methodum ad motum lunae accommodare, vt pateat, an quicquam lucri inde expectari queat? Facile autem intelligitur punctum O in ipsa recta AB centra solis et terrae iungente assumi conuenire, quia alioquin nimis magna linearum et angulorum multitudo calculum non mediocriter perturbaret. Positis ergo vt supra trium corporum massis A, B, C, distantiis $AB = x$, $AC = y$, $BC = v$, quarum functiones X, Y et V rationem virium in his distantiis exertarum exprimant, et angulis $\Upsilon AB = p$ $\Upsilon AC = q$, $BAC = q - p = s$, vt sit $v = \sqrt{(xx + yy - 2xy \operatorname{cos.} s)}$ in sequente problemate in motum corporis C, quemadmodum spectatori in O posito sit appariturus, inquiram; vbi quidem vocata distantia $AO = m$, angulus $ACO = n$ ipsi $\Upsilon AB = p$ aequalis est statuendus.

Problema 7.

51. Dum terna corpora A, B, C se mutuo in ratione quacunque distantiarum attrahunt, motum corporis C respectu puncti O perpetuo in recta AB vtcunque assumto, definire.

Solutio.

Primum ergo tam diſtantiam $AC = y$ quam angulum $♈AC = q$ ex calculo eliminari oportet; per noua elementa $OC = z$ et $♈OC = w$ ob punctum O introducta; vbi quidem vidimus ob $n = p$, et $q - n = q - p = s$ eſſe:

$$yy = mm + zz + 2mz \operatorname{cof.}(w-p) \text{ et}$$

$$\operatorname{fin.}(w-q) = \frac{m \operatorname{fin.}(w-p)}{y}, \quad \operatorname{cof.}(w-q) = \frac{z + m \operatorname{cof.}(w-p)}{y}$$

$$\operatorname{fin.} s = \frac{z \operatorname{fin.}(w-p)}{y}, \quad \operatorname{cof.} s = \frac{m + z \operatorname{cof.}(w-p)}{y}.$$

Porro cum ſit $OC = z$, $OB = x - m$ et $BOC = w - p$, erit $BC = v = \surd((x-m)^2 + zz - 2(x-m)z \operatorname{cof.}(w-p))$ tum vero $\frac{x - v \operatorname{cof.} s}{v} = \frac{x - m - z \operatorname{cof.}(w-p)}{v}$ et

$$y - x \operatorname{cof.} s = \frac{yy - mx - xz \operatorname{cof.}(w-p)}{y} = \frac{zz - m(x-m) - z(x-2m)\operatorname{cof.}(w-p)}{y}.$$

His ſubſtitutis primo pro elementis x et p has habebimus aequationes:

$$ddx - x\,dp^2 + \tfrac{1}{2}(A+B)X\,dt^2 + \tfrac{1}{2}C\,dt^2\left(\frac{x - m - z \operatorname{cof.}(w-p)}{v}V + \frac{m + z \operatorname{cof.}(w-p)}{y}Y\right) = 0$$

$$2\,dx\,dp + x\,ddp + \tfrac{1}{2}C\,dt^2\left(\frac{z \operatorname{fin.}(w-p)}{y}Y - \frac{z \operatorname{fin.}(w-p)}{v}V\right) = 0.$$

Deinde cum in problemate praecedente poſuerimus:

$$ddy - y\,dq^2 + N\,dt^2 = 0 \text{ et } 2\,dy\,dq + y\,ddq + M\,dt^2 = 0$$

erit comparatione facta:

$$N = \tfrac{1}{2}(A+C)Y + \tfrac{1}{2}B\left(\frac{zz - m(x-m) - z(x-2m)\operatorname{cof.}(w-p)}{yv}V + \frac{m + z \operatorname{cof.}(w-p)}{y}X\right)$$

$$M = \tfrac{1}{2}B\left(\frac{xz \operatorname{fin.}(w-p)}{yv}V - \frac{z \operatorname{fin.}(w-p)}{y}X\right)$$

ſupereſt

superest ergo vt colligamus hinc istos valores: Primo

$$\mathrm{N}\,\mathrm{cos}.(w-q)+\mathrm{M}\,\mathrm{sin}.(w-p)=\frac{\mathrm{N}(z+m\,\mathrm{cos}.(w-p))+\mathrm{M}m\,\mathrm{sin}.(w-p)}{y}$$

$$=\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{C})(z+m\,\mathrm{cos}.(w-p))}{2y}\mathrm{Y}+\tfrac{1}{2}\mathrm{B}(z-(x-m)\,\mathrm{cos}.(w-p))\frac{\mathrm{V}}{v}$$
$$+\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\,\mathrm{cos}.(w-p).\,\mathrm{X}$$

deinde

$$\mathrm{M}\,\mathrm{cos}.(w-q)-\mathrm{N}\,\mathrm{sin}.(w-p)=\frac{\mathrm{M}(z+m\,\mathrm{cos}.(w-p))-\mathrm{N}m\,\mathrm{sin}.(w-p)}{y}$$

$$=-\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{C})m\,\mathrm{sin}.(w-p)}{2y}\mathrm{Y}+\tfrac{1}{2}\mathrm{B}(x-m)\,\mathrm{sin}.(w-p)\frac{\mathrm{V}}{v}-\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\,\mathrm{sin}.(w-p).\,\mathrm{X}.$$

Quocirca pro motu corporis C, quatenus ad punctum O refertur et variabilibus z et w definitur, has adipiscimur aequationes:

$$ddz-zdw^2+(ddm-mdp^2)\,\mathrm{cos}.(w-p)+(2dmdp+mddp)\,\mathrm{sin}.(w-p)$$
$$+\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{C})\,dt^2(z+m\,\mathrm{cos}.(w-p)).\frac{\mathrm{Y}}{y}+$$
$$\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\,dt^2(z-(x-m)\,\mathrm{cos}.(w-p)).\frac{\mathrm{V}}{v}+\tfrac{1}{2}\mathrm{B}dt^2\,\mathrm{cos}.(w-p).\mathrm{X}=0$$

$$2dzdw+zddw-(ddm-mdp^2)\,\mathrm{sin}.(w-p)+(2dmdp$$
$$+mddp)\,\mathrm{cos}.(w-p)$$
$$-\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{C})\,dt^2.m\,\mathrm{sin}.(w-p).\frac{\mathrm{Y}}{y}+\tfrac{1}{2}\mathrm{B}dt^2.(x-m)\,\mathrm{sin}.(w-p)\frac{\mathrm{V}}{v}$$
$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\,dt^2\,\mathrm{sin}.(w-p).\mathrm{X}=0.$$

Coroll. 1.

52. Si distantia $\mathrm{AO}=m$ perpetuo datam teneat rationem ad distantiam $\mathrm{AB}=x$ vt sit $m=\alpha x$, erit:

$$yy=\alpha\alpha xx+zz+2\alpha xz\,\mathrm{cos}.(w-p)\ \text{et}$$
$$vv=(1-\alpha)^2xx+zz-2(1-\alpha)xz\,\mathrm{cos}.(w-p)$$

 vnde

vnde patet existente $\alpha = 0$, fore $y = z$, sin autem sit $\alpha = 1$, esse $v = z$, quemadmodum quidem per se est manifestum.

Coroll. 2.

53. Sumto autem $m = \alpha x$ erit $ddm - mdp^2 = \alpha(ddx - xdp^2)$ ideoque

$$ddm - mdp^2 = -\tfrac{1}{2}\alpha(A+B)Xdt^2 - \tfrac{1}{2}\alpha C(\alpha x + z\cos.(w-p))\tfrac{Y}{y}dt^2 - \tfrac{1}{2}\alpha C((1-\alpha)x - z\cos.(w-p))\tfrac{V}{v}dt^2$$

et $2dmdp + mddp = -\tfrac{1}{2}\alpha Cz\sin.(w-p).\tfrac{Y}{y}dt^2 + \tfrac{1}{2}\alpha Cz\sin.(w-p).\tfrac{V}{v}dt^2$

qui valores in superioribus aequationibus substituti praebent

$$ddz - zdw^2 + \tfrac{1}{2}((1-\alpha)B - \alpha A)\cos.(w-p).Xdt^2 + \tfrac{1}{2}((1-\alpha)C + A)(z + \alpha x\cos.(w-p))\tfrac{Y}{y}dt^2 + \tfrac{1}{2}(B + \alpha C)(z - (1-\alpha)x\cos.(w-p)).\tfrac{V}{v}dt^2 = 0$$

$$2dzdw + zddw - \tfrac{1}{2}((1-\alpha)B - \alpha A)\sin.(w-p).Xdt^2 - \tfrac{1}{2}((1-\alpha)C + A)\alpha x\sin.(w-p)).\tfrac{Y}{y}dt^2 + \tfrac{1}{2}(B + \alpha C)(1-\alpha)x\sin.(w-p).\tfrac{V}{v}dt^2 = 0.$$

Coroll. 3.

54. Nunc ergo esset videndum, vtrum numero α eiusmodi valor tribui posset, vt harum aequationum resolutio facilior euaderet, quam casibus $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, vnde vulgo motus lunae inuestigari solet.

Scho-

Scholion 1.

55. Quanquam de commodis quae hinc forte sperare licet, nihil adhuc pronunciare licet, tamen ex his formulis casus maxime memorabilis deduci potest, quem iam alia occasione euolui. Certum scilicet est lunae initio eiusmodi situm et motum intra terram A et solem B tribui potuisse, vt perpetuo in eadem directione a terra ad solem porrecta fuisset permansura, ideoque soli iugiter coniuncta apparitura. Ad hunc casum inuestigandum, capiamus punctum O in ipso illo lunae loco, ita vt sit $z = 0$, ideoque $y = \alpha x$ et $v = (1-\alpha)x$ atque ambae nostrae aequationes inuentae in hanc vnam coalescunt

$$((1-\alpha)B-\alpha A)X+\alpha((1-\alpha)C+A)x.\tfrac{Y}{y}-(1-\alpha)(B+\alpha C)x.\tfrac{V}{v}=0.$$

Vnde si ponamus $X = x^\lambda$, $Y = y^\lambda$ et $V = v^\lambda$, vt fiat $\frac{xY}{y} = xy^{\lambda-1} = \alpha^{\lambda-1}x^\lambda$ et $\frac{xV}{v} = (1-\alpha)^{\lambda-1}x^\lambda$, haec aequatio in istam abit formam:

$$((1-\alpha)B-\alpha A+\alpha^\lambda((1-\alpha)C+A)-(1-\alpha)^\lambda(B+\alpha C)=0$$

seu $A(\alpha^\lambda-\alpha)-B((1-\alpha)^\lambda-(1-\alpha))+C(\alpha^\lambda(1-\alpha)-\alpha(1-\alpha)^\lambda)=0$

vel $\alpha A(\alpha^{\lambda-1}-1)-(1-\alpha)B((1-\alpha)^{\lambda-1}-1)+\alpha(1-\alpha)C(\alpha^{\lambda-1}$
$-(1-\alpha)^{\lambda-1})=0$

vnde ex data massarum A, B, C ratione valor fractionis α elici, sicque loca illa lunae, quibus soli perpetuo maneret coniuncta definiri possunt; vbi quidem perspicuum est si esset $\lambda = 1$, hoc vbique vsu venire posse.

Scholion.

Scholion 2.

56. Haec ſpeculatio accuratiorem euolutionem meretur, et quia attractio rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum ſequitur, poſito $\lambda = -2$, habebimus:

$$\frac{A(1-\alpha^3)}{\alpha\alpha} - \frac{B(1-(1-\alpha)^3)}{(1-\alpha)^2} + \frac{C((1-\alpha)^3-\alpha^3)}{\alpha^2(1-\alpha)^2} = 0 \text{ ſeu}$$

$$A(1-\alpha)^2(1-\alpha^3) - B\alpha\alpha(3\alpha-3\alpha\alpha+\alpha^3) + C(1-3\alpha+3\alpha\alpha-2\alpha^3) = 0$$

quae ſecundum poteſtates ipſius α diſpoſita praebet

$$(A+B)\alpha^5 - (2A+3B)\alpha^4 + (A+3B+2C)\alpha^3 - (A+3C)\alpha^2 + (2A+3C)\alpha - A - C = 0$$

vbi ſi ſtatuamus $\alpha = \frac{1-u}{2}$ fit

$$\begin{array}{l} (A+B)u^5 - (A-B)u^4 - 2(A+B)u^3 + 10(A-B)uu + 17(A+B)u + 7(A-B) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 8C \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 24C \end{array}$$

ita vt valor fractionis α a reſolutione huius aequationis quinti gradus pendeat. Quodſi bina corpora A et B inter ſe eſſent aequalia foret

$$\begin{array}{l} Au^5 - 2Au^3 + 17Au = 0 \\ \qquad\quad + 4C \quad\;\; + 12C \end{array}$$

hincque vel $u = 0$ et $\alpha = \frac{1}{2}$

vel $uu = \frac{A-2C+\sqrt{(4CC-16AC-16AA)}}{A}$

vnde reliqui pro u valores fiunt imaginarii. Sin autem B repraeſentet ſolem, vt ſit quaſi $B = \infty$, quia tum α fit minimum proxime erit $(A+3B+2C)\alpha^3 - A - C = 0$ ſeu $\alpha = \frac{\sqrt[3]{(A+C)}}{\sqrt[3]{(A+3B+2C)}}$ et accuratius

$$\alpha = \frac{\sqrt[3]{(A+C)}}{\sqrt[3]{(A+3B+2C)}} - \frac{3(A+2C)B - C(5A+6C)}{3(A+3B+3C)\sqrt[3]{(A+C)(A+3B+2C)^2}}$$

Scholion

Scholion 3.

57. Iuuabit forsitan ipsi α hunc valorem in genere tribuisse, ita vt posito $X = \frac{1}{xx}$, $Y = \frac{1}{yy}$ et $V = \frac{1}{vv}$ fit $(1-\alpha)B - \alpha A = \frac{B + \alpha C}{(1-\alpha)^2} - \frac{A - (1-\alpha)C}{\alpha\alpha}$; siquidem eum in lunae motum inquirere velimus, qui ad casum istum memorabilem proxime accederet, ita vt distantia z prae αx maneret minima. Quia enim tum proxime fit $\frac{1}{y^3} = \frac{1}{\alpha^3 x^3} - \frac{3z\cos.(w-p)}{\alpha^4 x^4}$ et $\frac{1}{v^3} = \frac{1}{(1-\alpha)^3 x^3} + \frac{3z\cos.(w-p)}{(1-\alpha)^4 x^4}$, binae aequationes motum exprimentes ad has formas reducuntur:

$$ddz - zdw^2 + \frac{z(1-3\cos.(w-p)^2)}{2x^3} dt^2 \left(\frac{B+\alpha C}{(1-\alpha)^3} + \frac{A+(1-\alpha)C}{\alpha^3}\right) = 0$$

$$2dzdw + zddw + \frac{3z\sin.(w-p)\cos.(w-p)}{2x^3} dt^2 \left(\frac{B+\alpha C}{(1-\alpha)^3} + \frac{A+(1-\alpha)C}{\alpha^3}\right) = 0$$

quae si motus solis pro vniformi et distantia x pro constanti habeatur, ita repraesentari poterunt:

$$ddz - zdw^2 + \gamma z dp^2 (1 - 3\cos.(w-p)^2) = 0$$

$$2dzdw + zddw + 3\gamma z dp^2 \sin.(w-p)\cos.(w-p) = 0$$

quae aequationes, cum z vnam dimensionem non excedat pro simplicioribus sunt habendae.

INVESTIGATIO ACCVRATIOR PHAENOMENORVM QVAE IN MOTV TERRAE DIVRNO A VIRIBVS COELESTIBVS PRODVCI POSSVNT.

Auctore
L. EVLERO.

Motum terrae diurnum a viribus Solis et Lunae ita affici vt inde aequinoxiorum praecessio et axis terrestris nutatio exoriatur *Neutonus* iam erat suspicatus, Acutiss. vero *Alembertus* dilucide demonstrauit. Quod specimen sagacitatis humanae eo pluris est aestimandum, quod illo tempore subsidia dynamica, quibus haec inuestigatio innititur, neutiquam adhuc satis erant euoluta, ex quo summas et grauissimas calculi difficultates superari erat necesse. Principium autem harum perturbationum in eo est situm, quod telluris corpus a figura sphaerica recedit, ac diameter aequatoris aliquantum superat axis quantitatem; quodsi enim eius figura perfecte esset sphaerica, motus vertiginis ipsi semel impressus perpetuo eadem celeritate continuaretur, axisque eandem directionem conseruaret; neque vires externae vllam immutationem in hoc motu efficere valerent. Statim autem ac terrae figura a sphaerica discrepat, ex viribus Solis ac Lunae nascitur momentum ad axem de situ suo deturbandum tendens, quatenus quidem hae vires oblique in axem agunt. Quocirca in hac inuestigatione, postquam vera terrae figura esset constituta, ex lege attractionis vires Solis et Lunae singula terrae elementa sollicitantes definiri, indeque momenta positionem axis afficientia colligi oportuit; tum vero summa adhuc difficultas in effectu determinando residebat, quem illa virium momenta in situm axis exerere debeant, quod sine profundissima cum Dynamicae tum Analyseos scientia nullo modo praestari poterat.

Cum autem non ita pridem haec dynamicae pars maxime abstrusa, quae in motu corporum gyratorio circa axem mobilem definiendo est occupata, a me sit satis prospero successu ita pertractata, vt in genere corporum quacunque figura praeditorum motus dum a viribus quibuscunque sollicitantur, ad formulas analyticas satis simplices reduci queat; haud incongruum fore arbitror, si ope huius methodi omnes inaequalitates, quibus motus terrae diurnus perturbatur, ita accuratius determinauero, vt non solum verus motus, quo terra cietur, inde innotescat, sed etiam inde aliorum motuum, qui in terram cadere potuissent, siquidem initio aliter fuisset impulsa, indolem perspicere liceat. Quae igitur de hoc argumento sum meditatus, sequentibus propositionibus sum complexurus.

I. Quacunque figura terra sit praedita ad praesens institutum non opus est veram compositionis rationem, qua singulae partes inter se sunt distributae et ordinatae, nosse; verum sufficit vt ex principiis, quae circa motum corporum rigidorum in genere stabiliui, terni axes principales se mutuo in centro grauitatis seu potius inertiae normaliter decussantes notentur, momentaque inertiae respectu singulorum explorata habeantur. Hinc posita terrae massa tota $= M$, si ex centro inertiae I educti sint axes principales IA, IB, IC, eorum respectu momenta inertiae his formulis Maa, Mbb, Mcc designabo. His enim tribus momentis inertiae vniuersa internae structurae ratio, quatenus quidem inde motus determinatio pendet, continetur, ita vt iam taediosissimis illis calculis, quos alias figura et structura terrae exigere solet, supersedere queamus.

II. Quodsi haec tria momenta inertiae inter se essent aequalia, omnes plane axes per centrum terrae ducti pari gauderent proprietate, omnesque aeque pro principalibus haberi possent, ita vt terra, circa quemcunque axem initio gyrari coepisset, hunc motum perpetuo sine vlla axis et celeritatis alteratione esset prosecutura, neque etiam a viribus peregrinis vlla perturbatio esset pertimescenda. Perinde scilicet terra se esset habitura, ac si eius figura perfecte esset sphaerica, omnisque materia aequabiliter circa centrum distributa; vbi imprimis est no-

tandum

tandum hanc insignem proprietatem etiam in figuras maxime irregulares competere posse, dummodo terna illa momenta inertiae fuerint inter se aequalia, hoc autem in figuris maxime irregularibus euenire posse minime dubitare licet.

III. Eatenus ergo tantum motus terrae diurnus perturbationes pati potest, quatenus terna eius momenta inertiae principalia inter se non sunt aequalia. Verum etiamsi terra initio fuisset sphaerica statim atque circa certum axem gyrari coepisset, ob fluiditatem circa aequatorem intumescere debuisset, vnde respectu axis gyrationis momentum inertiae incrementum accepisset. In hoc autem negotio fluiditatis rationem minime habere licet, cum principia dynamica neutiquam adhuc ad hunc scopum sint euoluta; ob quem defectum vtique cogimur terram tanquam corpus solidum spectare, cuius figura nullis viribus sollicitantibus cedere queat. Quamobrem quae de eius motu diurno sum traditurus, ita sunt accipienda, vt ob maris mobilitatem, qua actioni virium quodammodo obsequitur, aliquam correctionem admittere intelligantur.

IV. Terram igitur tanquam eiusmodi corpus solidum considero, cuius trium axium principalium vnus puta IA cum eius axe proprie sic dicto, qui ab altero polo ad alterum per centrum porrigitur conueniat, et cuius respectu momentum inertiae sit $= Maa$. Bini ergo reliqui axes principales in

 ipsum

ipsum aequatorem cadent, et quoniam omnium meridianorum par esse ratio videtur, momenta inertiae eorum respectu tanquam inter se aequalia spectari poterunt, ita vt sit $cc = bb$. Hoc autem admisso omnes diametri aequatoris axium principalium proprietate aeque erunt praediti ita vt terra circa vnumquemque eorum libere gyrari posset. Vnde cum puncta B et C in aequatore pro lubitu accipi queant, dum 90° a se inuicem distent, alterum B in eo meridiano, qui pro primo habetur, assumere licebit; ita in superficie terrae arcus AB primum meridianorum designabit.

V. Quoniam motus terrae diurnus potissimum ab eo motu qui terrae initio fuerit impressus, pendet, quanta varietas inde proficisci potuerit, ante omnia perpendi conueniet, ac primo quidem mentem ab actione Solis et Lunae abstrahendo. Iam satis perspicuum est si terrae in rerum principio motus gyratorius vel circa axem vel quempiam diametrum aequatoris fuisset impressus, hunc motum ita perpetuo vniformiter duraturum fuisse, vt axis gyrationis constanter idem coeli punctum respexisset. Sin autem terra circa aliam quamcunque lineam per centrum transeuntem gyrari coepisset, tum motus quidem gyratorius vniformis mansisset, sed ipse axis gyratorius interea circa quodpiam coeli punctum per circulum quendam minorem vniformiter fuisset circumlatus, quemadmodum alibi de huius-

huiusmodi corporibus, quae momentorum inertiae principalium bina habent inter se aequalia, fusius demonstraui et hic nouo modo sum demonstraturus.

VI. Statim autem ac vires perturbatrices siue Solis siue Lunae accedunt, vtrumque motus genus ita afficitur, vt vel gyrationis celeritas immutetur, vel axis, circa quem terra gyratur motu magis irregulari feratur. Ad hanc perturbationem inuestigandam quaestionem latiori sensu acceptam tractari conuenit, vt solutio etiam ad eos casus pateat, quibus forte terrae ab initio motus circa axem a principalibus diuersum fuerit impressus. Cum enim a viribus sollicitantibus axis gyrationis de situ suo deturbetur, omnino necesse est, vt etiamsi hae vires abessent gyratio circa axem mobilem definiri queat. Tum vero etiam ad scientiae incrementum non parum conducere videtur, si etiam indolem eorum motuum, qui in terram cadere possent, etiamsi re vera in ea non insint assignare valeamus. Quocirca formulas generales ita sum instructurus, vt etiam ad casum quo bina momenta inertiae principalia non forent aequalia accommodari queant.

VII. Cum ob vires perturbatrices omnia phaenomena ad coelum immotum referri oporteat, sit circulus ♈ ☊ ♎ ecliptica, et E eius polus; et quo inuestigatio aeque ad lunam ac solem pateat, sit O ☊ R orbita astri perturbantis eclipticam secans in nodo ascendente ☊, et nunc quidem hoc astrum hae- Tab. II. Fig. 3.

haereat in S, per quod punctum ducto latitudinis circulo ESQ erit ♈Q longitudo et QS latitudo astri, tum vero ♈☊ longitudo nodi. Ponamus ergo haec elementa ♈☊ $= \omega$, ang. ♈☊O $= \varepsilon$, arcus ♈☊Q $= q$ et ES $= p$

atque ex trigonometria constat fore cotang. $p =$ tang. ε fin. $(q - \omega)$. Haec proprie ad lunam sunt accommodata, pro sole autem inclinatio seu angulus ♈☊O $= \varepsilon$ euanescens est sumendus, et ob latitudinem nullam arcus ES $= p$ constanter manet 90°.

VIII. Pro actionis autem, quam astrum S in terram exerit, quantitate, sit v eius distantia a centro terrae at e ea distantia in qua astri vis attractrix ipsi grauitati naturali est aequalis ita vt eius vis centrum terrae sollicitans sit ad grauitatem vt $\frac{ee}{vv}$ ad 1. Porro autem sit g altitudo, ex qua grauia in terrae superficie libere delabuntur tempore vnius minuti secundi, quibus positis quantitas actionis astri in terram hac formula $\frac{2gee}{v^3}$ continetur, quam breuitatis gratia littera $V = \frac{2gee}{v^3}$ denotabo. Vbi obseruandum est si corpus ab astro attractum ad distantiam $= v$ in circulo reuolueretur, id singulis minutis secundis angulum esse percursurum, qui sit $= \sqrt{\frac{2gee}{v^3}} = \sqrt{V}$. Ex quo si astrum sit sol $\sqrt{V}$ denotat motum terrae medium vni minuto secundo conuenientem; sin autem astrum fuerit luna, ac massa lunae aequalis statuatur massae telluris, fore $\sqrt{V}$ motum medium lunae vni minuto secundo do conuenientem. Quoties autem massa lunae minor fuerit massa terrae, motum illum medium in ratione subduplicata diminui oportet; vnde ex cognito motu medio valor litterae V facile definitur.

IX. His praemissis teneat iam elapso tempore t in minutis secundis exprimendo terra situm in figura repraesentatum, vt axis eius seu polus boreus sit in A, primus meridianus AB, et BC quadrans aequatoris, vbi B et C spectantur tanquam bini reliqui axes principales terrae. Ponantur ergo arcus et anguli statum terrae definientes:

1°. Distantia poli A a polo eclipticae E seu $EA = l$

2°. Longitudo poli A seu angulus $\Upsilon EA = \psi$

3°. Situs primi meridiani seu angulus $EAB = \Phi$.

Hincque colligantur sequentes arcus:

$$SA = \zeta,\ SB = \eta \ \text{et}\ SC = \theta$$

qui per trigonometriam sphaericam ita definiuntur vt sit:

$$\text{cos.}\,\zeta = \text{sin.}\,p(\text{sin.}\,l\,\text{cos.}\,(q-\psi) + \text{tang.}\,\varepsilon\,\text{cos.}\,l\,\text{sin.}\,(q-\omega))$$

$$\text{cos.}\,\eta = \text{sin.}\,p(-\text{sin.}\,\Phi\,\text{sin.}\,(q-\psi) - \text{cos.}\,l\,\text{cos.}\,\Phi\,\text{cos.}\,(q-\psi) + \text{tang.}\,\varepsilon\,\text{sin.}\,l\,\text{cos.}\,\Phi\,\text{sin.}\,(q-\omega))$$

$$\text{cos.}\,\theta = \text{sin.}\,p(-\text{cos.}\,\Phi\,\text{sin.}\,(q-\psi) + \text{cos.}\,l\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,(q-\psi) - \text{tang.}\,\varepsilon\,\text{sin.}\,l\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{sin.}\,(q-\omega))$$

vbi notetur fore $\text{cos.}\,\zeta^2 + \text{cos.}\,\eta^2 + \text{cos.}\,\theta^2 = 1$.

X. Nunc cum respectu ternorum axium principalium A, B, C momenta inertiae terrae sint Maa, Mbb, Mcc quaerantur primo tres quantitates x, y, z ex his aequationibus:

$$dx + \frac{cc - bb}{aa} dt (yz - 3 V \operatorname{cos}. \eta \operatorname{cos}. \theta) = 0$$
$$dy + \frac{aa - cc}{bb} dt (xz - 3 V \operatorname{cos}. \zeta \operatorname{cos}. \theta) = 0$$
$$dz + \frac{bb - aa}{cc} dt (xy - 3 V \operatorname{cos}. \zeta \operatorname{cos}. \eta) = 0$$

tum vero reliqua elementa situm terrae determinantia ex his aequationibus colligi oportet:

$$dl = -dt(y \operatorname{sin}. \Phi + z \operatorname{cos}. \Phi)$$
$$d\Phi = x dt - \frac{dt(y \operatorname{cos}. \Phi - z \operatorname{sin}. \Phi)}{\operatorname{tang}. l}$$
$$d\psi = \frac{dt(y \operatorname{cos}. \Phi - z \operatorname{sin}. \Phi)}{\operatorname{sin}. l}$$

quarum aequationum ratio ex iis, quae de motu corporum gyratorio circa axem mobilem alibi tradidi, haud difficulter deducitur.

XI. Quoniam vero momenta inertiae pro axibus B et C aequalia statuimus vt sit $cc = bb$, primo quidem ob $dx = 0$ habebimus $x = f$ quantitati nempe constanti; tum vero ponendo breuitatis gratia $\frac{aa - bb}{bb} = \alpha$ seu $\frac{aa}{bb} = 1 + \alpha$, quinque sequentes aequationes resolui oportet:

$$dy + \alpha dt(fz - 3 V \operatorname{cos}. \zeta \operatorname{cos}. \theta) = 0$$
$$dz - \alpha dt(fy - 3 V \operatorname{cos}. \zeta \operatorname{cos}. \eta) = 0$$
$$dl = -dt(y \operatorname{sin}. \Phi + z \operatorname{cos}. \Phi)$$

$d\Phi$

$$d\Phi = f\,dt - \frac{dt(y\,\mathrm{cof}.\Phi - z\,\mathrm{fin}.\Phi)}{\mathrm{tang}.\,l}$$

$$d\psi = \frac{dt(y\,\mathrm{cof}.\Phi - z\,\mathrm{fin}.\Phi)}{\mathrm{fin}.\,l}$$

ex quibus binis posterioribus eliminatis y et z colligitur:

$$d\Phi + d\psi\,\mathrm{cof}.\,l = f\,dt$$

ita vt formula $d\Phi + d\psi\,\mathrm{cof}.\,l$ fit temporis elemento proportionalis.

XII. Quo nunc has aequationes distinctius euoluam, a simplicioribus ad difficiliora ita ordine ascendam, vt primo vires perturbatrices tanquam euanescentes spectans motum terrae diurnum, quomodo tum se esset habiturus, definiam, deinde astrum perturbans in ipsa ecliptica motu vniformi circa terram reuolui assumam, vt eandem perpetuo seruet distantiam v, et V sit quantitas constans. Deinde astrum etiam vniformiter ad distantiam constantem sed in orbita ad eclipticam parumper inclinata circumferri ponam. Denique vero astro motum inaequabilem secundum leges *Keplerianas* tribuam, orbitam vero eius in ipsam eclipticam incidentem considerabo; qui bini posteriores effectus coniuncti ad motum lunae verum accommodari possunt.

I. Euolutio casus, quo vires perturbatrices euanescunt.

XIII. Posito ergo pro hoc casu $V = 0$, binae priores aequationes fiunt:

$$dy + afzdt = 0 \quad \text{et} \quad dz - afydt = 0$$

vnde colligitur $ydy + zdz = 0$, et $yy + zz = bb$, ad quam aequationem cum reliquis commodissime construendam, notari conuenit, in coelo dari punctum fixum L, circa quod polus A vniformiter gyretur, dum interea terra circa hunc polum etiam vniformiter reuoluitur. Hoc ergo punctum L in calculum introducentes ponamus:

$$\Upsilon EL = \gamma, \; EL = m, \; LA = n, \text{ existente } EA = l$$

tum vero etiam angulos in triangulo sphaerico EAL

$$ELA = \lambda, \; EAL = \mu \text{ et } AEL = \nu$$

vt sint elementa γ, m et n constantia, angulus vero $ELA = \lambda$ tempori proportionalis. Vocetur porro etiam angulus $LAB = \sigma$, eritque

$$\Upsilon EA = \psi = \gamma - \nu \text{ et } EAB = \phi = \sigma - \mu.$$

XIV. His positis ex trigonometricis habetur:

$$\cos. l = \cos. m \cos. n + \sin. m \sin. n \cos. \lambda$$

vnde ob m et n constantes differentiatio praebet:

$$dl \sin. l = d\lambda \sin. m \sin. n \sin. \lambda$$

et quia $\frac{\sin. \lambda}{\sin. l} = \frac{\sin. \mu}{\sin. m} = \frac{\sin. \nu}{\sin. n}$ erit

$$dl = d\lambda \sin. n \sin. \mu = d\lambda \sin. m \sin. \nu.$$

Deinde cum sit simili modo:

$$\cos. m = \cos. l \cos. n + \sin. l \sin. n \cos. \mu \text{ et}$$
$$\cos. n = \cos. l \cos. m + \sin. l \sin. m \cos. \nu$$

erit

erit quoque differentiando:

$$0 = -dl\,\sin.l\cos.n + dl\cos.l\sin.n\cos.\mu - d\mu\sin.l\sin.n\sin.\mu$$

$$0 = -dl\,\sin.l\cos.m + dl\cos.l\sin.m\cos.\nu - d\nu\sin.l\sin.m\sin.\nu$$

vnde colligitur:

$$d\mu = \frac{dl(\cos.l\sin.n\cos.\mu - \sin.l\cos.n)}{\sin.l\sin.n\sin.\mu} = \frac{d\lambda}{\sin.l}(\cos.l\sin.n\cos.\mu - \sin.l\cos.n)$$

$$d\nu = \frac{dl(\cos.l\sin.m\cos.\nu - \sin.l\cos.m)}{\sin.l\sin.m\sin.\nu} = \frac{d\lambda}{\sin.l}(\cos.l\sin.m\cos.\nu - \sin.l\cos.m).$$

XV. Ex trigonometria iam recordemur esse:

$$\cos.\mu = \frac{\sin.n\cos.m - \sin.m\cos.n\cos.\lambda}{\sin.l};\quad \cos.\nu = \frac{\sin.m\cos.n - \sin.n\cos.m\cos.\lambda}{\sin.l}$$

similique modo etiam

$$\cos.\mu = \frac{\sin.l\cos.m - \cos.l\sin.m\cos.\nu}{\sin.n};\quad \cos.\nu = \frac{\sin.l\cos.n - \cos.l\sin.n\cos.\mu}{\sin.m}$$

vnde concinnius posteriora differentialia ita definiuntur:

$$d\mu = \frac{-d\lambda\sin.m\cos.\nu}{\sin.l} \quad\text{et}\quad d\nu = \frac{-d\lambda\sin.n\cos.\mu}{\sin.l}$$

sicque pro elementis prius adhibitis habebimus:

$$d\psi = \frac{d\lambda\sin.n\cos.\mu}{\sin.l} \quad\text{et}\quad d\Phi = d\sigma + \frac{d\lambda\sin.m\cos.\nu}{\sin.l}$$

vbi loco $\cos.\mu$ et $\cos.\nu$ priores valores scribi conueniet, vt omnia ad elementa m, n et λ reuocentur:

XVI. Nunc igitur statuamus:

$$y = b\cos.\sigma \quad\text{et}\quad z = -b\sin.\sigma$$

qui valores in prioribus aequationibus substituti dant:

$$-bd\sigma\sin.\sigma - \alpha f b\,dt\sin.\sigma = 0 \quad\text{seu}\quad d\sigma = -\alpha f\,dt.$$

Tum vero ob

$$y \sin.\Phi + z \cos.\Phi = b \sin.(\Phi - \sigma) = -b \sin.\mu \text{ et}$$
$$y \cos.\Phi - z \sin.\Phi = b \cos.(\Phi - \sigma) = b \cos.\mu$$

ternae posteriores aequationes has induent formas:

$$dl = d\lambda \sin.n \sin.\mu = b\,dt \sin.\mu, \text{ seu } d\lambda = \frac{b\,dt}{\sin.n}$$
$$d\Phi = -\alpha f dt + \frac{d\lambda \sin.m \cos.\nu}{\sin.l} = f dt - \frac{b\,dt \cos.\mu}{\text{tang}.l}$$
$$d\psi = \frac{b\,dt \cos.\mu}{\sin.l} = \frac{b\,dt(\sin.n \cos.m - \sin.m \cos.n \cos.\lambda)}{\sin.l^2}.$$

Antepenultima autem ob $d\lambda = \frac{b\,dt}{\sin.n}$ per dt diuisa dat

$$(1+\alpha)f = \frac{b \sin.m \cos.\nu}{\sin.l \sin.n} + \frac{b \cos.l \cos.\mu}{\sin.l} = \frac{b(\cos.l \cos.\mu \sin.n + \sin.m \cos.\nu)}{\sin.l \sin.n}.$$

Verum cum sit $\cos.\mu = \frac{\cos.m - \cos.l \cos.n}{\sin.l \sin.n}$ et $\cos.\nu = \frac{\cos.n - \cos.l \cos.m}{\sin.l \sin.m}$ obtinetur:

$$(1+\alpha)f = \frac{b(\cos.n - \cos.l^2 \cos.n)}{\sin.l^2 \sin.n} = \frac{b \cos.n}{\sin.n}$$

ita vt etiam quantitas $b = (1+\alpha)f \,\text{tang}.n$ determinetur, sitque adeo constans, vt rei natura postulat.

XVII. Ex dato ergo coeli puncto L, ad quod motus terrae est referendus, ab eoque axis distantia $LA = n$, motus terrae ita se habebit, vt primo axis A circa illud punctum L vniformiter reuoluatur celeritate angulari $\frac{d\lambda}{dt} = \frac{b}{\sin.n} = \frac{(1+\alpha)f}{\cos.n}$, quippe qua singulis minutis secundis angulus $= \frac{(1+\alpha)f}{\cos.n}$ absoluitur ita vt hoc motu angulus ELA continuo increscat. Tum vero interea ipsa terra circa axem A gyrabitur

tur celeritate angulari $\frac{d\sigma}{dt} = -\alpha f$, qua angulus LAB continuo imminuetur; vbi notandum, quantitatem f a motu terrae primum impresso perinde atque arcum n pendere, litteram α vero rationem compositionis terrae inuoluere. In motu autem quem terra reuera est initio adepta, arcus $LA = n$ euanescit, sicque sine viribus perturbantibus, ipse arcus LA cum polo A fixus maneret, totusque motus ex angulo $LAB = \Phi$ ita definiretur, vt ob $b = 0$ esset celeritas angularis $\frac{d\Phi}{dt} = f$, vnde patet quantitatem f exprimere celeritatem angularem motus terrae diurni.

XVIII. Si terra eiusmodi motum vertiginis accepisset vt arcus $LA = n$ valorem haberet notabilem, polus A maiori celeritate circa coeli punctum L reuolueretur, siquidem constans f eundem retineret valorem, ipsa vero terra lentissime interea circa axem A in plagam contrariam conuerteretur, ob fractionem α minimam, ita vt hoc motu neglecto terra circa axem per coeli punctum L transeuntem reuolui videretur, spatio saltem temporis non nimis magno tempore autem labente quia sensim alia terrae puncta coeli punctum L subeunt, terra alium axem gyrationis recipere videbitur, ex quo etiam aequator et locorum latitudines mutationem patientur, sicque tam coeli quam terrae phaenomena ingentibus perturbationibus forent obnoxia, etiamsi nullae vires perturbatrices externae accederent.

XIX. Hoc caſu ſi pro quouis tempore t ſitum terrae reſpectu eclipticae definire velimus; primum ad hoc tempus angulum $\lambda = \frac{(1+\alpha)f}{\cos. n} t + \text{Conſt.}$ colligi oportet, pro quo facile tabula conderetur. Tum vero hoc angulo inuento ſtatim habebitur axis A a polo eclipticae E diſtantia $EA = l$ ope formulae $\cos. l = \cos. m \cos. n + \sin. m \sin. n \cos. \lambda$ vbi m et n ſunt certi anguli dati. Porro pro ſitu arcus EA quaeratur angulus ν vt ſit $\text{cotang.}\, \nu = \frac{\sin. m \cos. n - \cos. m \sin. n \cos. \lambda}{\sin. n \sin. \lambda}$, eritque angulus $♈ E A = \psi = \gamma - \nu$, denotante γ angulum quendam conſtantem. Denique pro ſitu primi meridiani AB ſeu angulo $LAB = \phi = \sigma - \mu$, primo angulus σ tempori proportionalis ex formula $\sigma = \text{Conſt.} - \alpha f t$ facile colligitur, tum vero angulus μ ex hac formula capiatur:

$$\text{cotang.}\, \mu = \frac{\sin. n \cos. m - \cos. n \sin. m \cos. \lambda}{\sin. m \sin. \lambda}$$

ſicque ſtatus terrae ad tempus propoſitum erit determinatus omnem autem hunc calculum commode tabulis complecti liceret. Hoc caſu expedito ad vires perturbantes progredior, quae tractatio praeparationem poſtulat, reliquis caſibus quos ſuſcepi praemittendam.

Praeparatio ad effectus virium perturbantium euoluendos.

XX. Quoniam hic effectus eſt minimus, ex caſu praecedente facile intelligitur, quomodo hanc

tracta-

tractationem aptissime suscipi conueniat. Vniuersus scilicet motus quoque ad coeli quoddam punctum L referatur, quod autem non amplius tanquam fixum spectetur, sed ita pro variabili habeatur, vt tam angulus $\Upsilon EL = \gamma$ quam arcus $EL = m$ et $LA = n$ a viribus perturbantibus parumper immutari censeantur, neque etiam anguli $ELA = \lambda$ et $LAB = \sigma$ incrementa tempori exacte proportionalia capere sunt censenda; quamobrem quoque quantitas b tanquam variabilis erit tractanda. Ponamus deinde vt supra; $EA = l$, angulos $EAL = \mu$, $AEL = \nu$ tum vero angulos $\Upsilon EA = \psi$ et $EAB = \Phi$ vt sit $\psi = \gamma - \nu$ et $\Phi = \sigma - \mu$.

XXI. Statuamus ergo etiam nunc quoque

$$y = b\cos.\sigma \quad \text{et} \quad z = -b\sin.\sigma$$

et quia quantitatem b quoque vt variabilem spectamus, binae priores aequationes differentiales fient:

$$db\cos.\sigma - bd\sigma\sin.\sigma - \alpha fbdt\sin.\sigma - 3\alpha Vdt\cos.\zeta\cos.\theta = 0$$
$$-db\sin.\sigma - bd\sigma\cos.\sigma - \alpha fbdt\cos.\sigma + 3\alpha Vdt\cos.\zeta\cos.\eta = 0$$

vnde per combinationem elicimus:

$$-bd\sigma - \alpha fbdt - 3\alpha Vdt\cos.\zeta(\sin.\sigma\cos.\theta - \cos.\sigma\cos.\eta) = 0$$
$$db - 3\alpha Vdt\cos.\zeta(\cos.\sigma\cos.\theta + \sin.\sigma\cos.\eta) = 0.$$

Ponamus breuitatis gratia

$$\cos.\sigma\cos.\eta - \sin.\sigma\cos.\theta = P \quad \text{et} \quad \cos.\sigma\cos.\theta + \sin.\sigma\cos.\eta = Q$$

vt habeamus has aequationes:

$$d\sigma = -\alpha fdt + \frac{3\alpha VPdt\cos.\zeta}{b} \quad \text{et} \quad db = 3\alpha VQdt\cos.\zeta.$$

Verum ex formulis supra §. IX. ob $\Phi = \sigma - \mu$ seu $\sigma - \Phi = \mu$ colligimus:

$$P = \sin. p (\sin. \mu \sin. (q - \psi) - \cos. l \cos. \mu \cos. (q - \psi) + \operatorname{tang}. \varepsilon \sin. l \cos. \mu \sin. (q - \omega))$$

$$Q = \sin. p (-\cos. \mu \sin. (q - \psi) - \cos. l \sin \mu \cos. (q - \psi) + \operatorname{tang}. \varepsilon \sin. l \sin. \mu \sin. (q - \omega))$$

existente $\cos. \zeta = \sin. p (\sin. l \cos. (q - \psi) + \operatorname{tang}. \varepsilon \cos. l \sin. (q - \omega))$.

Reliquae vero aequationes erunt:

$$dl = b\,dt \sin. \mu$$

$$d\Phi = d\sigma - d\mu = f\,dt - \frac{b\,dt \cos. \mu}{\operatorname{tang}. l}$$

$$d\psi = d\gamma - d\nu = \frac{b\,dt \cos. \mu}{\sin. l}.$$

XXII. Haec iam differentialia dl, $d\mu$ et $d\nu$ ad differentialia $d\lambda$, dm et dn reduci oportet; ac primo quidem cum sit $\cos. l = \cos. m \cos. n + \sin. m \sin. n \cos. \lambda$ erit differentiando:

$$dl \sin. l = dm \sin. m \cos. n + dn \cos. m \sin. n + d\lambda \sin. m \sin. n \sin. \lambda - dm \cos. m \sin. n \cos. \lambda - dn \sin. m \cos. n \cos. \lambda$$

quae forma ob

$$\sin. n \cos. m - \sin. m \cos. n \cos. \lambda = \sin. l \cos. \mu \quad \text{et} \quad \sin. m \cos. n - \sin. n \cos. m \cos. \lambda = \sin. l \cos. \nu$$

transit in hanc simpliciorem:

$$dl \sin. l = dm \sin l \cos. \nu + dn \sin. l \cos. \mu + d\lambda \sin. m \sin. n \sin. \lambda$$

seu

seu cum sit $\frac{\sin.\lambda}{\sin.l} = \frac{\sin.\mu}{\sin.m} = \frac{\sin.\nu}{\sin.n}$ in hanc

$$dl = dm\cos.\nu + dn\cos.\mu + d\lambda\sin.n\sin.\mu.$$

XXIII. Deinde vero simili modo elicitur:

$$dm = dl\cos.\nu + dn\cos.\lambda + d\mu\sin.n\sin.\lambda$$

vbi si loco dl valor modo inuentus substituatur, prodit

$$dm = dm\cos.\nu^2 + dn\cos.\mu\cos.\nu + d\lambda\sin.n\sin.\mu\cos.\nu + d\mu\sin.n\sin.\lambda + dn\cos.\lambda.$$

seu ob $\cos.\lambda + \cos.\mu\cos.\nu = \cos.l\sin.\mu\sin.\nu$

$$dm\sin.\nu^2 = dn\cos.l\sin.\mu\sin.\nu + d\lambda\sin.n\sin.\mu\cos.\nu + d\mu\sin.n\sin.\lambda.$$

Est vero $\sin.n\sin.\mu = \sin.m\sin.\nu$ et $\sin.n\sin.\lambda = \sin.l\sin.\nu$, vnde per $\sin.\nu$ diuidendo habetur:

$$dm\sin.\nu = dn\cos.l\sin.\mu + d\lambda\sin.m\cos.\nu + d\mu\sin.l$$

ita vt sit $d\mu = \frac{dm\sin.\nu}{\sin.l} - \frac{dn\cos.l\sin.\mu}{\sin.l} - \frac{d\lambda\sin.m\cos.\nu}{\sin.l}$.

Verum quia elementum dl tam commode exprimitur, vt sit $dl = bdt\sin.\mu$ praestabit hunc valorem statim introduci vnde prodit

$$d\mu = \frac{-bdt\sin.\mu\cos.\nu + dm - dn\cos.\lambda}{\sin.n\sin.\lambda}$$ similique modo

$$d\nu = \frac{-bdt\sin.\mu\cos.\mu + dn - dm\cos.\lambda}{\sin.m\sin.\lambda}.$$

XXIV. Ex prima ergo aequatione adipiscimur:

$$bdt\sin.\mu = dm\cos.\nu + dn\cos.\mu + d\lambda\sin.n\sin.\mu$$

vnde fit $d\lambda = \frac{bdt}{\sin.n} - \frac{dm\cos.\nu - dn\cos.\mu}{\sin.n\sin.\mu}$

at tertia aequatio praebet

$$d\gamma = \frac{b\,dt\,\text{cof.}\,\mu}{\text{fin.}\,l} - \frac{b\,dt\,\text{fin.}\,\mu\,\text{cof.}\,\mu}{\text{fin.}\,m\,\text{fin.}\,\lambda} + \frac{dn - dm\,\text{cof.}\,\lambda}{\text{fin.}\,m\,\text{fin.}\,\lambda}$$

feu $d\gamma = \frac{dn - dm\,\text{cof.}\,\lambda}{\text{fin.}\,m\,\text{fin.}\,\lambda}$

fecunda vero aequatio ad $d\Phi$ fpectans dat

$$d\sigma = fdt - \frac{b\,dt\,\text{cof.}\,\mu\,\text{cof.}\,l}{\text{fin.}\,l} - \frac{b\,dt\,\text{fin.}\,\mu\,\text{cof.}\,v}{\text{fin.}\,n\,\text{fin.}\,\lambda} + \frac{dm - dn\,\text{cof.}\,\lambda}{\text{fin.}\,n\,\text{fin.}\,\lambda}$$

vbi notandum terminos elemento bdt affectos, cum fint

$$- \frac{b\,dt\,(\text{fin.}\,\mu\,\text{cof.}\,v + \text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,\mu\,\text{cof.}\,l)}{\text{fin.}\,l\,\text{fin.}\,v}$$

ob $\text{cot.}\,n = \frac{\text{fin.}\,\mu\,\text{cof.}\,v + \text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,\mu\,\text{cof.}\,l}{\text{fin.}\,l\,\text{fin.}\,v}$ abire in $-\frac{bd\,t\,\text{cof.}\,n}{\text{fin.}\,n}$

ita vt fit

$$d\sigma = fdt - \frac{b\,dt\,\text{cof.}\,n}{\text{fin.}\,n} + \frac{dm - dn\,\text{cof.}\,\lambda}{\text{fin.}\,n\,\text{fin.}\,\lambda} = -\alpha f dt + \frac{3\alpha V P\,dt\,\text{cof.}\,\zeta}{b}$$

hincque $(1+\alpha) f dt - \frac{b\,dt\,\text{cof.}\,n}{\text{fin.}\,n} + \frac{dm - dn\,\text{cof.}\,\lambda}{\text{fin.}\,n\,\text{fin.}\,\lambda} = \frac{3\alpha V P\,dt\,\text{cof.}\,\zeta}{b}$.

XXV. Nunc igitur fumamus $b = (1+\alpha) f\,\text{tang.}\,n$ vt viribus euanefcentibus, arcus m et n prodeant conftantes, et poftrema aequatio dabit

$$dm - dn\,\text{cof.}\,\lambda = \frac{3\alpha V P\,dt\,\text{cof.}\,n\,\text{fin.}\,\lambda\,\text{cof.}\,\zeta}{(1+\alpha) f}$$

arcus vero n ex hac integratione eft definiendus

$$\text{tang.}\,n = \frac{3\alpha}{(1+\alpha)f} \int V Q\,dt\,\text{cof.}\,\zeta$$

feu $dn = \frac{3\alpha V Q\,dt\,\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,n^2}{(1+\alpha) f}$

vnde fit $dm = \frac{3\alpha V\,dt\,\text{cof.}\,n\,\text{cof.}\,\zeta}{(1+\alpha) f} (P\,\text{fin.}\,\lambda + Q\,\text{cof.}\,n\,\text{cof.}\,\lambda)$

hinc-

hincque porro

$$dm \cos.\nu + dn \cos.\mu = \frac{3\alpha V dt \cos.n \cos.\zeta}{(1+\alpha).f} \sin.\lambda (P \cos.\nu + Q \cos.m \cos.n \sin.\nu).$$

Inuentis autem variationibus dm et dn, erit

$$d\lambda = \frac{(1+\alpha) f dt}{\cos.n} - \frac{dm \cos.\nu - dn \cos.\mu}{\sin.n \sin.\mu} \text{ seu}$$

$$d\lambda = \frac{(1+\alpha) f dt}{\cos.n} - \frac{dm(\sin.m \cos.n - \sin.n \cos.m \cos.\lambda)}{\sin.m \sin.n \sin.\lambda} - \frac{dn(\sin.n \cos.m - \sin.m \cos.n \cos.\lambda)}{\sin.m \sin.n \sin.\lambda}$$

et anguli ♈ E L variatio simul innotescit, quae est

$$d\gamma = \frac{dn - dm \cos.\lambda}{\sin.m \sin.\lambda} = \frac{3\alpha V dt \cos.n \cos.\zeta}{(1+\alpha) f \sin.m} (Q \cos.n \sin.\lambda - P \cos.\lambda)$$

substitutis autem pro dm et dn valoribus reperitur

$$d\lambda = \frac{(1+\alpha) f dt}{\cos.n} - \frac{3\alpha V dt \cos.n \cos.\zeta}{(1+\alpha) f \sin.m \sin.n} (P(\sin.m \cos.n - \sin.n \cos.m \cos.\lambda) + Q(\sin.n \cos.m \cos.n \sin.\lambda).$$

Denique pro angulo EAB $= \Phi$ habebimus:

$$d\Phi = f dt - \frac{(1+\alpha) f dt \sin.n \cos.\mu \cos.l}{\cos.n \sin.l} \text{ et } d\psi = \frac{(1+\alpha) f dt \sin.n \cos.\mu}{\sin.l \cos.n}$$

ita vt sit $d\Phi + d\psi \cos.l = f dt$, in quibus integrationibus arcus m et n tanquam constantes spectare licet, simul vero erit proxime $d\lambda = \frac{(1+\alpha) f}{\cos.n} dt$, siquidem perturbatio fuerit minima.

XXVI. Quo haec nunc propius ad praesens institutum accommodemus, obseruandum est in motu vertiginis terrae arcum n quam minimum esse statuendum, ita vt ob $d\Phi = f dt$ iam f denotet angulum vno minuto secundo confectum, et angulus ψ in integrationibus pro constanti haberi poterit.

Deinde ob $\cot.\mu = \frac{n\cos.m - \sin.m\cos.\lambda}{\sin.m\sin.\lambda}$, colligitur fore angulum $\mu = 180^\circ - \lambda + \frac{n\sin.\lambda}{\tang.m}$, ita vt fit.

$$\sin.\mu = \sin.\lambda + \frac{n\sin.\lambda\cos.\lambda}{\tang.m}; \quad \sin.(\lambda+\mu) = \frac{n\sin.\lambda}{\tang.m}$$

$$\cos.\mu = -\cos.\lambda + \frac{n\sin.\lambda^2}{\tang.m}; \quad \cos.(\lambda+\mu) = 1$$

neglectis terminis vbi n ad altiores potestates exsurgit.

Porro ob $\cos.l = \cos.m + n\sin.m\cos.\lambda$ erit $l = m - n\cos.\lambda$ hincque

$$n = \frac{3\alpha}{(1+\alpha)f}\int VQ\,dt\cos.\zeta; \quad m = \frac{3\alpha}{(1+\alpha)f}\int V\,dt\cos.\zeta(P\sin.\lambda + Q\cos.\lambda)$$

$$d\lambda = (1+\alpha)f\,dt - \frac{3\alpha}{(1+\alpha)f}\cdot\frac{V\,dt\cos.\zeta(P\sin.m - n\cos.m(P\cos.\lambda - Q\sin.\lambda))}{n\sin.m}$$

$$= (1+\alpha)f\,dt - \frac{3\alpha VP\,dt\cos.\zeta}{(1+\alpha)nf} - \frac{3\alpha V\,dt\cos.\zeta\cos.m(Q\sin.\lambda - P\cos.\lambda)}{(1+\alpha)f\sin.m}$$

$$d\gamma = \frac{3\alpha}{(1+\alpha)f}\cdot\frac{V\,dt\cos.\zeta(Q\sin.\lambda - P\cos.\lambda)}{\sin.m}$$

$$d\Phi = f\,dt + \frac{n(1+\alpha)f\,dt\cos.m\cos.\lambda}{\sin.m}$$

$$d\psi = \frac{-n(1+\alpha)f\,dt\cos.\lambda}{\sin.m}.$$

XXVII. Cum fit proxime $\mu = 180^\circ - \lambda$, et $l = m$ in quantitatibus P et Q his valoribus vti licet, ex quo erit:

$$P = \sin.p(\sin.\lambda\sin.(q-\psi) + \cos.m\cos.\lambda\cos.(q-\psi) - \tang.\varepsilon\sin.m\cos.\lambda\sin.(q-\omega))$$

$$Q = \sin.p(\cos.\lambda\sin.(q-\psi) - \cos.m\sin.\lambda\cos.(q-\psi) + \tang.\varepsilon\sin.m\sin.\lambda\sin.(q-\omega))$$

existente $\cos.\zeta = \sin.p(\sin.m\cos.(q-\psi) + \tang.\varepsilon\cos.m\sin.(q-\omega))$

vnde

vnde colligitur:

$$P\,\text{fin.}\,\lambda + Q\,\text{cof.}\,\lambda = \text{fin.}\,p\,\text{fin.}\,(q-\psi)$$

$$Q\,\text{fin.}\,\lambda - P\,\text{cof.}\,\lambda = \text{fin.}\,p\,(-\text{cof.}\,m\,\text{cof.}\,(q-\psi) + \text{tang.}\,\varepsilon\;\text{fin.}\,m\,\text{fin.}\,(q-\omega))$$

Hinc totum calculum fatis expedite abfoluere licebit; valor tantum anguli λ moram faceffere videtur, ob terminum $\frac{-3\alpha V P dt\,\text{cof.}\,\zeta}{(1+\alpha) f n}$, quantitatem minimam n in denominatore inuoluentem; quae fi euanefceret, hic terminus adeo in infinitum excrefceret. Quod cum in motu terrae eueniat, manifeftum eft hanc appropinquandi rationem noftro cafu locum habere non poffe ex quo aliam methodum ingredi conueniet, quam nunc accuratius fum expoliturus.

Alia methodus formulas inuentas euoluendi, ad motum vertiginis terrae magis accommodata.

XXVIII. Refumamus noftras formulas pro motu vertiginis fupra expofitas:

1°. $\frac{dy}{dt} + \alpha f z - 3\alpha V\,\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\theta = 0$

2°. $\frac{dz}{dt} - \alpha f y + 3\alpha V\,\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\eta = 0$

3°. $dl = -dt(y\,\text{fin.}\,\Phi + z\,\text{cof.}\,\Phi)$

4°. $d\Phi = f dt - \frac{dt}{\text{tang.}\,l}(y\,\text{cof.}\,\Phi - z\,\text{fin.}\,\Phi)$

5°. $d\psi = \frac{dt}{\text{fin.}\,l}(y\,\text{cof.}\,\Phi - z\,\text{fin.}\,\Phi)$

vbi

vbi primum obſeruo, ſi vires perturbatrices litteris $V = \frac{2gee}{v^3}$ contentae euaneſcerent, binis prioribus aequationibus ſatisfacere has formulas $y = b\,\text{coſ.}\,\alpha f t$ et $z = b\,\text{ſin.}\,\alpha f t$ praeſenti autem caſu quantitatem b euaneſcentem accipi debere. Quare cum ob quantitatem V particulae quaedam ad hos valores y et z accedant, has ipſas particulas inueſtigari conuenit, quibus deinceps reiectis illis membris litteram b inuoluentibus; erit vtendum.

XXIX. Hunc in finem autem opus eſt ante omnia formulas $\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta$ et $\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta$ euolui, vnde facta reductione reperitur:

$$\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,p^2 \left\{ \begin{array}{r} -\text{ſin.}\,l\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,2(q-\psi) - \text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}\,l\,\text{coſ.}\,\Phi - \text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}\,l\,\text{coſ.}\,\Phi \\ \text{coſ.}\,2(q-\psi) \\ +\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,l^2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}(2q-\psi-\omega) + \text{tang.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,l^2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.} \\ (\psi-\omega) + \text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}(2q-\psi-\omega) \\ -\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l^2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}(2q-\psi-\omega) - \text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l^2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.} \\ (\psi-\omega) - \text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}(\psi-\omega) \end{array} \right\}$$

omiſſis terminis quadratum $\text{tang.}\,\varepsilon^2$ implicantibus vtpote minimis; quam ob cauſam pro $\text{ſin.}\,p^2 = \frac{1}{1+\text{tang.}\,\varepsilon^2\,\text{ſin.}(q-\omega)^2}$ etiam vnitatem ſcribere licet. Hinc etiam angulo Φ in ſinus et coſinus ſimplices inuoluto, adipiſcimur:

$$\begin{array}{rlll} 4\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta = & -\text{ſin.}\,2l\,\text{coſ.}\,\Phi & -\text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}(\Phi-2q+2\psi) & +\text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}(\Phi+2q-2\psi) \\ & & -\text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}\,l & -\text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}\,l \\ & -\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,2l\,\text{ſin.}(\Phi+2q-\psi-\omega) & & +\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,2l\,\text{ſin.}(\Phi-2q+\psi+\omega). \\ & +\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l & & +\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l \\ & +\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,2l\,\text{ſin.}(\Phi-\psi+\omega) & & -\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,2l\,\text{ſin.}(\Phi+\psi-\omega) \\ & -\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l & & -\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l \end{array}$$

vbi

vbi notandum eſt ψ eſſe longitudinem puncti ſolſtitialis aeſtiui a termino fixo ♈ puta prima ſtella arietis. Quodſi ergo longitudo primae ſtellae arietis a puncto aequinoctiali verno computata ponatur $=x$, erit $\psi+x=90^\circ$ et $\psi=90^\circ-x$, indeque $q-\psi=q+x-90^\circ$, vbi $q+x$ denotabit aſtri longitudinem a puncto aequinoctiali verno computatam quae ex tabulis habetur. Hinc ergo per meros coſinus erit

$$\begin{aligned}4\cos.\zeta\cos.\eta = &-\sin.2k\cos.\Phi+\sin.l(1+\cos.l)\cos.(\Phi-2q-2x)\\ &-\sin.l(1-\cos.l)\cos.(\Phi+2q+2x)\\ &-\tang.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l)\cos.(\Phi+2q+x-\omega)+\tang.\varepsilon\\ &\quad(\cos.l+\cos.2l)\cos.(\Phi-2q+\omega-x)\\ &+\tang.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l)\cos.(\Phi+\omega+x)-\tang.\varepsilon\\ &\quad(\cos.l+\cos.2l)\cos.(\Phi-\omega-x)\end{aligned}$$

vbi $\omega+x$ denotat longitudinem nodi aſcendentis ☊ a puncto aequinoctiali verno computatam.

XXX. Quodſi ergo pro vſu tabularum q denotet ipſam aſtri perturbantis longitudinem a puncto aequinoctiali verno computatam, ſimilique modo ω longitudinem nodi aſcendentis, erit

$$\begin{aligned}4\cos.\zeta\cos.\eta = &-\sin.2k\cos.\Phi+\sin.l(1+\cos.l)\cos.(\Phi-2q)-\sin.l\\ &\quad(1-\cos.l)\cos.(\Phi+2q)\\ &+\tang.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l)\cos.(\Phi+\omega)-\tang.\varepsilon(\cos.l\\ &\quad+\cos.2l)\cos.(\Phi-\omega)\\ &-\tang.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l)\cos.(\Phi+2q-\omega)+\tang.\varepsilon(\cos.l\\ &\quad+\cos.2l)\cos.(\Phi-2q+\omega)\end{aligned}$$

vbi si loco Φ scribatur $\Phi + 90°$ oritur valor alterius formulae $4 \cos. \zeta \cos. \theta$, quam ergo seorsim euolui non est opus. Deinde obseruo si astrum non in circulo aequabiliter circa terram circumferatur, vt longitudinis q incrementa non sint tempori proportionalia, tamen ex cognita inaequalitate motus, hos cosinus, in cosinus aliorum angulorum tempori proportionalium euolui posse, quod etiam de ipsa forma $V = \frac{2gee}{v^3}$ est intelligendum, quae cum illa coniuncta pariter ad cosinus angulorum tempori proportionalium reuocabitur, quoniam ipse angulus Φ celeritatem angularem motus diurni terrae designans, in his integrationibus vt tempori proportionalis spectari potest. Quocirca certum est has formulas ita semper expressum iri vt sit

$$3\alpha V \cos.\zeta \cos.\eta = A\cos.\Phi + B\cos.(\Phi - \epsilon t) + C\cos.(\Phi - \gamma t) + D\cos.(\Phi - \delta t) + \mathfrak{B}\cos.(\Phi + \epsilon t) + \mathfrak{C}\cos.(\Phi + \gamma t) + \mathfrak{D}\cos.(\Phi + \delta t) \text{ etc.}$$

$$3\alpha V \cos.\zeta \cos.\theta = -A\sin.\Phi - B\sin(\Phi - \epsilon t) - C\sin.(\Phi - \gamma t) - D\sin.(\Phi - \delta t) - \mathfrak{B}\sin(\Phi + \epsilon t) - \mathfrak{C}\sin(\Phi + \gamma t) - \mathfrak{D}\sin.(\Phi + \delta t) \text{ etc.}$$

vbi pro quolibet astro anguli ϵt, γt, δt etc. quotcunque fuerint, cum coefficientibus facile exhibentur.

XXXI. Statuamus iam $d\Phi = m dt$ et $af = n$, sitque pro quantitatibus y et z non omissis partibus ante commemoratis:

$y = b$

$$y = b\cos.nt + O\cos.\Phi + P\cos.(\Phi - \beta t) + Q\cos.(\Phi - \gamma t) + R\cos.(\Phi - \delta t) + \mathfrak{P}\cos.(\Phi + \beta t) + \mathfrak{Q}\cos.(\Phi + \gamma t) + \mathfrak{R}\cos.(\Phi + \delta t) \text{ etc.}$$

$$z = b\sin.nt - O\sin.\Phi - P\sin.(\Phi - \beta t) - Q\sin.(\Phi - \gamma t) - R\sin.(\Phi - \delta t) - \mathfrak{P}\sin.(\Phi + \beta t) - \mathfrak{Q}\sin.(\Phi + \gamma t) - \mathfrak{R}\sin.(\Phi + \delta t) \text{ etc.}$$

ac facta substitutione in prioribus aequationibus fiet

$$\left.\begin{array}{llll} -nb\sin.nt & -mO\sin.\Phi & -(m-\beta)P\sin.(\Phi-\beta t) & -(m+\beta)\mathfrak{P}\sin.(\Phi+\beta t)\text{ etc.} \\ +nb & -nO & -\;nP & -\;n\mathfrak{P} \\ & +A & +B & +\mathfrak{B} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{llll} nb\cos.nt & -mO\cos.\Phi & -(m-\beta)P\cos.(\Phi-\beta t) & -(m+\beta)\mathfrak{P}\cos.(\Phi+\beta t)\text{ etc.} \\ -nb & -nO & -\;nP & -\;n\mathfrak{P} \\ & +A & +B & +\mathfrak{B} \end{array}\right\} = 0$$

quae cum congruant, consequimur has determinationes:

$$O = \frac{A}{m+n};\quad P = \frac{B}{n+m-\beta};\quad Q = \frac{C}{n+m-\gamma};\quad R = \frac{D}{n+m-\delta}\text{ etc.}$$

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{B}}{n+m+\beta};\quad \mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{C}}{n+m+\gamma};\quad \mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{D}}{n+m+\delta}\text{ etc.}$$

sicque quotcunque fuerint termini haec integralia facile formantur.

XXXII. His autem valoribus pro y et z inventis colligimus sequentes formas:

$$y\sin.\Phi + z\cos.\Phi = b\sin.(\Phi + nt) + (P - \mathfrak{P})\sin.\beta t + (Q - \mathfrak{Q})\sin.\gamma t + (R - \mathfrak{R})\sin.\delta t\text{ etc.}$$

$$y\cos.\Phi - z\sin.\Phi = b\cos.(\Phi + nt) + O + (P + \mathfrak{P})\cos.\beta t + (Q + \mathfrak{Q})\cos.\gamma t + (R + \mathfrak{R})\cos.\delta t\text{ etc.}$$

ex quibus primo veram poli aequatoris a polo eclipticae distantiam $EA = l$ elicimus; cum enim sit:

$$dl = -b\,dt\,\text{sin.}(\Phi + nt) - (P - \mathfrak{P})\,dt\,\text{sin.}\,\beta t - (Q - \mathfrak{Q})\,dt\,\text{sin.}\,\gamma t - \text{etc.}$$

si haec distantia media ponatur $= \mathfrak{I}$, erit integrando

$$l = \mathfrak{I} + \frac{b}{m+n}\,\text{cos.}(\Phi + nt) + \frac{P - \mathfrak{P}}{\beta}\,\text{cos.}\,\beta t + \frac{Q - \mathfrak{Q}}{\gamma}\,\text{cos.}\,\gamma t$$
$$+ \frac{R - \mathfrak{R}}{\delta}\,\text{cos.}\,\delta t \text{ etc.}$$

Deinde pro angulo $EAB = \Phi$, quo motus gyratorii celeritas definitur, accuratius cognoscendo habemus:

$$\frac{d\Phi}{dt} = f - \frac{b\,\text{cof.}(\Phi + nt)}{\text{tang.}\,l} - \frac{O}{\text{tang.}\,l} - \frac{(P + \mathfrak{P})}{\text{tang.}\,l}\,\text{cos.}\,\beta t - \text{etc.}$$

vnde per integrationem elicimus:

$$\Phi = ft - \frac{b\,\text{sin.}(\Phi + nt)}{(m+n)\,\text{tang.}\,l} - \frac{Ot}{\text{tang.}\,l} - \frac{(P + \mathfrak{P})\,\text{sin.}\,\beta t}{\beta\,\text{tang.}\,l} - \frac{(Q + \mathfrak{Q})\,\text{sin.}\,\gamma t}{\gamma\,\text{tang.}\,l} - \text{etc.}$$

Denique pro vera longitudine primae stellae arietis $x = 90° - \psi$, colligimus:

$$x = \mathfrak{C} - \frac{b\,\text{sin.}(\Phi + nt)}{(m+n)\,\text{sin.}\,l} - \frac{Ot}{\text{sin.}\,l} - \frac{(P + \mathfrak{P})\,\text{sin.}\,\beta t}{\beta\,\text{sin.}\,l} - \frac{(Q + \mathfrak{Q})\,\text{sin.}\,\gamma t}{\gamma\,\text{sin.}\,l}$$
$$- \frac{(R + \mathfrak{R})\,\text{sin.}\,\delta t}{\delta\,\text{sin.}\,l} \text{ etc.}$$

qua aequatione praecessio aequinoctiorum cum omnibus inaequalitatibus determinatur.

XXXIII. Hic denotat m celeritatem motus diurni, vbi loco vnius minuti secundi aliud quodvis tempus datum accipere licet, dummodo reliquae celeritates ad idem tempus referantur. Sumto ergo tempore vnius diei, erit $m = 360°$ cui etiam littera f aequalis est censenda, tum vero erit $n = am$ vbi

vbi notandum, esse $\alpha = \frac{aa-bb}{bb}$ fractionem minimam ita vt n prae m quasi euanescat. Reliquae celeritates angulares nunc etiam ad tempus vnius diei referendae ex motu et vi astri perturbantis peti debent, cuius locum cum vel Sol vel Luna occupare possit, pro vtroque seorsim has anomalias in motu et axe terrae scrutari conueniet. Vnde mox patebit non opus esse ad horum astrorum inaequalitatem motus respicere cum anomaliae ex eorum motu medio resultantes iam adeo sint exiguae, vt quae insuper ex orbitae excentricitate nascerentur, tuto negligi queant.

De perturbatione motus diurni a vi solis producta.

XXXIV. Pro sole ergo inclinatio ε euanescit, ac posito solis motu diurno $= \mu$ est vt supra vidimus $V = \mu\mu$ et celeritas solis $\frac{dq}{dt} = \mu$; existente q longitudine solis media. Cum ergo sit

$$4 \operatorname{cos.} \zeta \operatorname{cos.} \eta = -\operatorname{sin.} 2l \operatorname{cos.} \Phi + \operatorname{sin.} l (1 + \operatorname{cos.} l) \operatorname{cos.} (\Phi - 2q) \\ - \operatorname{sin} l (1 - \operatorname{cos.} l) \operatorname{cos.} (\Phi + 2q)$$

erit $\mathfrak{C}t = 2q$, et $\mathfrak{C} = 2\mu$ tum vero

$$A = -\tfrac{3}{4} \alpha \mu\mu \operatorname{sin.} 2l, \quad B = \tfrac{3}{4} \alpha \mu\mu \operatorname{sin.} l (1 + \operatorname{cos.} l), \quad \mathfrak{B} = -\tfrac{3}{4} \alpha \mu\mu \\ \operatorname{sin.} l (1 - \operatorname{cos.} l)$$

hineque

$$O = \frac{-3\alpha\mu\mu \operatorname{sin.} 2l}{4(1+\alpha)m}; \quad P = \frac{3\alpha\mu\mu \operatorname{sin.} l (1 + \operatorname{cos.} l)}{4((1+\alpha)m - 2\mu)}; \quad \mathfrak{P} = \frac{-3\alpha\mu\mu \operatorname{sin.} l (1 - \operatorname{cos.} l)}{4((1+\alpha)m + 2\mu)}$$

et ſequentes litterae $\mathfrak{Q}$, Ω etc. euaneſcent:

XXXV. Quare primo pro diſtantia polorum aequatoris et eclipticae $EA = l$, poſita hac diſtantia media $= \mathfrak{l}$, erit

$$l = \mathfrak{l} + \frac{b}{(1+\alpha)m} \operatorname{cof.}(\Phi + \alpha m t) + \frac{P - \mathfrak{P}}{2\mu} \operatorname{cof.} 2q.$$

Deinde pro angulo $EAB = \Phi$ colligimus

$$\Phi = \left(f + \frac{3\alpha\mu\mu \operatorname{cof.} \mathfrak{l}^2}{2(1+\alpha)m}\right) t - \frac{(P+\mathfrak{P}) \operatorname{fin.} 2q}{2\mu \operatorname{tang.} \mathfrak{l}} - \frac{b \operatorname{fin.}(\Phi + \alpha m t)}{(1+\alpha) m \operatorname{tang.} \mathfrak{l}}$$

vbi iam tempus t in diebus eſt exprimendum; eritque $f = m - \frac{3\alpha\mu\mu \operatorname{cof.} \mathfrak{l}^2}{2(1+\alpha)m}$; ſeu potius denotante f motum terrae diurnum primo impreſſum is ob vim ſolis cenſendus eſt acceleratus particula $\frac{3\alpha\mu\mu \operatorname{cof.} \mathfrak{l}^2}{2(1+\alpha)m}$. Denique pro longitudine primae ſtellae arietis obtinemus:

$$x = C - \frac{b \operatorname{fin.}(\Phi + \alpha m t)}{(1+\alpha) m \operatorname{fin.} \mathfrak{l}} + \frac{3\alpha\mu\mu \operatorname{cof.} \mathfrak{l}}{2(1+\alpha)m} t - \frac{(P+\mathfrak{P}) \operatorname{fin.} 2q}{2\mu \operatorname{fin.} \mathfrak{l}}$$

vnde patet primam ſtellam arietis quotidie per ſpatiolum $\frac{3\alpha\mu\mu \operatorname{cof.} \mathfrak{l}}{2(1+\alpha)m}$ promoueri.

De perturbatione motus diurni a vi lunae producta.

XXXVI. Hic conſtat pro ε angulum circiter 5° capi oportere; quodſi iam q denotet longitudinem lunae mediam, ν eius motum diurnum; ω longitudinem nodi aſcendentis et o eius motum diurnum retrogradum et $\frac{dq}{dt} = \nu$ et $\frac{d\omega}{dt} = -o$. Tum vero ſi maſſa lunae aequalis eſſet terrae foret

$V = \nu\nu;$

$V = \nu\nu$; ſi ergo ſtatuatur maſſa terrae ad maſſam lunae vt 1 ad λ, vt poſita terrae maſſa $= M$ futura ſit maſſa lunae $= \lambda M$ erit $V = \lambda\nu\nu$. Conſideremus iam formam:

$$\begin{aligned}4\,\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\eta = &-\text{ſin.}\,2l\,\text{cof.}\,\Phi + \text{ſin.}\,l(1+\text{cof.}\,l)\,\text{cof.}(\Phi-2q) - \text{tang.}\,\varepsilon(\text{cof.}\,l + \text{cof.}\,2l)\,\text{cof.}(\Phi-\omega)\\ &-\text{ſin.}\,l(1-\text{cof.}\,l)\,\text{cof.}(\Phi+2q) + \text{tang.}\,\varepsilon(\text{cof.}\,l - \text{cof.}\,2l)\,\text{cof.}(\Phi+\omega)\\ &+\text{tang.}\,\varepsilon(\text{cof.}\,l + \text{cof.}\,2l)\,\text{cof.}(\Phi-2q+\omega)\\ &-\text{tang.}\,\varepsilon(\text{cof.}\,l - \text{cof.}\,2l)\,\text{cof.}(\Phi+2q-\omega)\end{aligned}$$

atque hinc conſequimur hos valores:

$$A = -\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\,\text{ſin.}\,2l;\quad \left.\begin{aligned}B &= \tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\,\text{ſin.}\,l(1+\text{cof.}\,l)\\ \mathfrak{B} &= -\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\,\text{ſin.}\,l(1-\text{cof.}\,l)\end{aligned}\right\}\ \beta = 2\nu$$

ſicque
$D = -C$

$$\left.\begin{aligned}C &= -\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\,\text{tang.}\,\varepsilon(\text{cof.}\,l + \text{cof.}\,2l)\\ \mathfrak{C} &= +\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\,\text{tang.}\,\varepsilon(\text{cof.}\,l - \text{cof.}\,2l)\end{aligned}\right\}\ \gamma = -o$$

et

$\mathfrak{D} = -\mathfrak{C}$

$$\left.\begin{aligned}D &= +\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\,\text{tang.}\,\varepsilon(\text{cof.}\,l + \text{cof.}\,2l)\\ \mathfrak{D} &= -\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\,\text{tang.}\,\varepsilon(\text{cof.}\,l - \text{cof.}\,2l)\end{aligned}\right\}\ \delta = 2\nu + o$$

XXXVII. Ex his porro ſequentes valores elicientur:

$$O = \frac{-3\alpha\lambda\nu\nu\,\text{ſin.}\,2l}{4(1+\alpha)m};\quad P = \frac{+3\alpha\lambda\nu\nu\,\text{ſin.}\,l(1+\text{cof.}\,l)}{4((1+\alpha)m-2\nu)}$$

$$\mathfrak{P} = \frac{-3\alpha\lambda\nu\nu\,\text{ſin.}\,l(1-\text{cof.}\,l)}{4((1+\alpha)m+2\nu)}$$

$$Q = \frac{-3\alpha\lambda\nu\nu\,\text{tang.}\,\varepsilon(\text{cof.}\,l+\text{cof.}\,2l)}{4((1+\alpha)m+o)}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{+3\alpha\lambda\nu\nu\,\text{tang.}\,\varepsilon(\text{cof.}\,l-\text{cof.}\,2l)}{4((1+\alpha)m-o)}$$

R =

$$\mathrm{R} = \frac{+3\alpha\lambda\nu\nu\,\mathrm{tang.}\,\varepsilon(\mathrm{cof.}\,l + \mathrm{cof.}\,2l)}{4((1+\alpha)m - 2\nu - o)}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{-3\alpha\lambda\nu\nu\,\mathrm{tang.}\,\varepsilon(\mathrm{cof.}\,l - \mathrm{cof.}\,2l)}{4((1+\alpha)m + 2\nu + o)}$$

vnde pro obliquitate eclipticae oritur

$$l = l \ldots + \frac{\mathrm{P}-\mathfrak{P}}{2\nu}\,\mathrm{cof.}\,2q - \frac{\mathrm{Q}+\mathfrak{Q}}{o}\,\mathrm{cof.}\,\omega + \frac{\mathrm{R}-\mathfrak{R}}{2\nu+o}\,\mathrm{cof.}\,(2q-\omega)$$

pro celeritate rotationis feu angulo EAB $= \Phi$ vero

$$\Phi = \ldots\ldots \frac{3\alpha\lambda\nu\nu\,\mathrm{cof.}\,l^2}{2(1+\alpha)m}\,t - \frac{(\mathrm{P}+\mathfrak{P})\,\mathrm{fin.}\,2q}{2\nu\,\mathrm{tang.}\,l} + \frac{(\mathrm{Q}+\mathfrak{Q})\,\mathrm{fin.}\,\omega}{o\,\mathrm{tang.}\,l} - \frac{(\mathrm{R}+\mathfrak{R})\,\mathrm{fin.}\,(2q+\omega)}{(2\nu+o)\,\mathrm{tang.}\,l}$$

et pro longitudine 1 * ♈

$$x = \ldots + \frac{3\alpha\lambda\nu\nu\,\mathrm{cof.}\,l}{2(1+\alpha)m}\,t - \frac{(\mathrm{P}+\mathfrak{P})\,\mathrm{fin.}\,2q}{2\nu\,\mathrm{fin.}\,l} + \frac{(\mathrm{Q}+\mathfrak{Q})\,\mathrm{fin.}\,\omega}{o\,\mathrm{fin.}\,l} - \frac{(\mathrm{R}+\mathfrak{R})\,\mathrm{fin.}\,(2q+\omega)}{(2\nu+o)\,\mathrm{fin.}\,l}$$

ficque a vi lunae motus diurnus primum impreffus terrae augetur particula $\frac{3\alpha\lambda\nu\nu\,\mathrm{cof.}\,l^2}{2(1+\alpha)m}$.

Euolutio numerica harum formularum.

XXXVIII. Primo cum l denotet diftantiam polorum aequatoris et eclipticae, erit nunc quidem eius valor medius $= 23°, 29'$, quo in his formulis vti poterimus. Deinde ex tabulis aftronomicis colligimus:

motum folis diurnum medium $\mu = 3548''$
motum lunae diurnum medium $\nu = 47435$
motum nodorum diurnum medium $o = 190\frac{1}{3}$
inclinationem orbitae lunae mediam $\varepsilon = 5°$

et

et pro motu diurno medio ipsius terrae circa axem sumamus $(1+\alpha)m = 360° = 1296000''$ quandoquidem in terminis minimis valores proxime veros adhibuisse sufficit. Hinc pro formulis ex vi solis natis erit:

$\mathfrak{O} = -7'',2849\,\alpha\,\text{fin.}\,2\,l$; $\frac{\mathfrak{P}}{2\mu} = +0,001032\,\alpha\,\text{fin.}\,l(1+\text{cof.}\,l)$
0,8624235 7,0137954

$\frac{\mathfrak{P}}{2\mu} = -0,0010221\,\alpha\,\text{fin.}\,l(1-\text{cof.}\,l)$
7,0090374.

Pro formulis autem ex vi lunae natis:

$\mathfrak{O} = -1302'',13\,\alpha\lambda\,\text{fin.}\,l$; $\frac{\mathfrak{P}}{2\nu} = +0,014809\,\alpha\lambda\,\text{fin.}\,l(1+\text{cof.}\,l)$
3.1146541 8,1705403

$\frac{\mathfrak{P}}{2\nu} = -0,012777\,\alpha\lambda\,\text{fin.}\,l(1-\text{cof.}\,l)$
8,1064437

$\frac{\mathfrak{Q}}{o} = -0,59792\,\alpha\lambda(\text{cof.}\,l + \text{cof.}\,2\,l)$
9,7766439

$\frac{\mathfrak{Q}}{o} = +0,59811\,\alpha\lambda(\text{cof.}\,l - \text{cof.}\,2\,l)$
9,7767779

$\frac{\mathfrak{R}}{2\nu+o} = +0,00129\,\alpha\lambda(\text{cof.}\,l + \text{cof.}\,2\,l)$
7,1116918

$\frac{\mathfrak{R}}{2\nu+o} = -0,00112\,\alpha\lambda(\text{cof.}\,l - \text{cof.}\,2\,l)$
7,0478673.

XXXIX. Si porro loco l valorem 23°,29′ substituamus hi valores ita se habebunt pro vi solis

$$O = -5'',3249\,\alpha$$
$$\cdot\; 0,7263152$$
$$\frac{P}{2\mu} = +0,0007886\,\alpha$$
$$\frac{\mathfrak{P}}{2\mu} = -0,0000337\,\alpha$$
$$\frac{P-\mathfrak{P}}{2\mu} = +0,0008223\,\alpha$$
$$\frac{P+\mathfrak{P}}{2\mu} = +0,0007549\,\alpha$$

pro vi lunae

$$O = -951'',80\,\alpha\lambda$$
$$2,9785458$$
$$\frac{P}{2\nu} = +0,011313\,\alpha\lambda$$
$$\frac{\mathfrak{P}}{2\nu} = -0,000422\,\alpha\lambda$$
$$\frac{P-\mathfrak{P}}{2\nu} = +0,011735\,\alpha\lambda$$
$$\frac{P+\mathfrak{P}}{2\nu} = +0,010891\,\alpha\lambda$$

$$\frac{Q}{o} = -0,95643\,\alpha\lambda$$
$$\frac{\mathfrak{Q}}{o} = +0,14043\,\alpha\lambda$$
$$\frac{Q-\mathfrak{Q}}{o} = -1,09686\,\alpha\lambda$$
$$\frac{Q+\mathfrak{Q}}{o} = -0,81600\,\alpha\lambda$$
$$\frac{R}{2\nu+o} = +0,00207\,\alpha\lambda$$
$$\frac{\mathfrak{R}}{2\nu+o} = -0,00026\,\alpha\lambda$$
$$\frac{R-\mathfrak{R}}{2\nu+o} = +0,00233\,\alpha\lambda$$
$$\frac{R+\mathfrak{R}}{2\nu+o} = +0,00181\,\alpha\lambda.$$

XL. Quodsi iam longitudinem solis littera p designemus, vt a longitudine lunae q distinguatur, ternae nostrae formulae pro motu terrae diurno inventae ita se habebunt tempore t in diebus expresso:

$$z = 1 + k\,\text{cos.}(\Phi+\alpha mt) + 0,0008223\,\alpha\,\text{cos.}\,2p + 1,09686\,\alpha\lambda\,\text{cos.}\,\omega$$
$$+ 0,011735\,\alpha\lambda\,\text{cos.}\,2q + 0,00233\,\alpha\lambda\,\text{cos.}(2q-\omega)$$

$x = C$

$$x = C - \frac{k\,\text{fin.}(\Phi + \alpha m t)}{\text{fin.}\,l} + \frac{5'',3249\,\alpha t}{\text{fin.}\,l} - \frac{0,0007549\,\alpha}{\text{fin.}\,l}\,\text{fin.}\,2p$$
$$+ \frac{951'',80\,\alpha\lambda t}{\text{fin.}\,l} - \frac{0,010891\,\alpha\lambda}{\text{fin.}\,l}\,\text{fin.}\,2q$$
$$- \frac{0,81600\,\alpha\lambda}{\text{fin.}\,l}\,\text{fin.}\,\omega$$
$$- \frac{0,00181\,\alpha\lambda}{\text{fin.}\,l}\,\text{fin.}(2q+\omega)$$
$$\Phi = ft - \frac{k\,\text{fin.}(\Phi + \alpha m t)}{\text{tang.}\,l} + \frac{5'',3249\,\alpha t}{\text{tang.}\,l} - \frac{0,0007549\,\alpha}{\text{tang.}\,l}\,\text{fin.}\,2p$$
$$+ \frac{951'',80\,\alpha\lambda t}{\text{tang.}\,l} - \frac{0,010891\,\alpha\lambda}{\text{tang.}\,l}\,\text{fin.}\,2q$$
$$- \frac{0,81600\,\alpha\lambda}{\text{tang.}\,l}\,\text{fin.}\,\omega$$
$$- \frac{0,00181\,\alpha\lambda}{\text{tang.}\,l}\,\text{fin.}(2q+\omega).$$

XLI. Quodsi hic coefficientes finuum et cofinuum in minuta fecunda conuertamus reperiemus:

$$l = \text{I} + k\,\text{cof.}(\Phi + \alpha m t) + 170\,\alpha\,\text{cof.}\,2p + 226230\,\alpha\lambda\,\text{cof.}\,\omega$$
$$+ 2421\,\alpha\lambda\,\text{cof.}\,2q + 480\,\alpha\lambda\,\text{cof.}(2q+\omega)$$
$$x = C - \frac{k\,\text{fin.}(\Phi + \alpha m t)}{\text{fin.}\,l} + 13'',363\,\alpha t - 391''\,\alpha\,\text{fin.}\,2p$$
$$+ 2388'',5\,\alpha\lambda t - 5637\,\alpha\lambda\,\text{fin.}\,2q$$
$$- 422383\,\alpha\lambda\,\text{fin.}\,\omega$$
$$- 937\,\alpha\lambda\,\text{fin.}(2q+\omega)$$
$$\Phi = ft - \frac{k\,\text{fin.}(\Phi + \alpha m t)}{\text{tang.}\,l} + 12'',256\,\alpha t - 358''\,\alpha\,\text{fin.}\,2p$$
$$+ 2190,7\,\alpha\lambda t - 5170\,\alpha\lambda\,\text{fin.}\,2q$$
$$- 387400\,\alpha\lambda\,\text{fin.}\,\omega$$
$$- 859\,\alpha\lambda\,\text{fin.}(2q+\omega)$$

 vbi

vbi loco $\frac{b}{(1+\alpha)m}$ ſcripſi k. In ſtatu autem, quo terra verſatur haec conſtans k euaneſcit, quod niſi eueniret, motus quidam oſcillatorius ipſi diurno foret admixtus, cuius oſcillationes abſoluerentur tot diebus, quoties fractio α in vnitate continetur.

De obliquitate eclipticae eiusque variatione.

XLII. Poſito I pro obliquitate eclipticae media, ea erit maxima, ſi longitudines ſolis $=p$ et Lunae $=q$ vel ſint o vel 6 ſignorum, ſimulque nodus aſcendens in ipſum punctum aequinoctiale vernum incidat, vt ſit $\omega=0$; tum enim erit maxima eclipticae obliquitas $=I+170\alpha+229131\alpha\lambda$ min. ſec. Minima autem reperietur, ſi nodus deſcendens incidit in principium arietis vt ſit $\omega=180°$, ſimul vero Sol et Luna in punctis ſolſtitialibus verſentur; tum autem erit minima obliquitas $=I-170\alpha-228171\alpha\lambda$ min. ſec. ſicque tota variatio, quatenus a viribus Solis et Lunae efficitur erit $340\alpha+457302\alpha\lambda$ min. ſec. quae ex obſeruationibus aeſtimatur quaſi 18″.

XLIII. Quo autem hinc veros valores quantitatum α et λ definire queamus perpendamus promotionem mediam primae ſtellae arietis, quae interteruallo vnius diei fit per ſpatiolum $13\frac{1}{3}\alpha + 2388\frac{1}{2}\alpha\lambda$ min. ſec. hincque interuallo vnius anni per $4870\alpha + 872400\alpha\lambda$ min. ſec. quod ex obſeruationibus aeſtimatur $50\frac{1}{3}''$. Prior autem valor $18''$ ob paruitatem non tam certus videtur, vt nulla correctione egeat. Factis ergo aliquot hypotheſibus pro nutatione numeri λ indeque fractionis α valor ita prodit

ſi nutatio	$18''$	$18''\frac{1}{3}$	$18''\frac{1}{2}$	$19''$
erit	$\lambda = \frac{1}{104}$;	$\frac{1}{97}$;	$\frac{1}{91}$;	$\frac{1}{85}$
et	$\alpha = \frac{1}{863}$;	$\frac{1}{875}$;	$\frac{1}{888}$;	$\frac{1}{900}$

vnde patet vt phaenomenis ſatisfiat, maſſam lunae vix maiori terrae parti quam $\frac{1}{85}$ aequari poſſe. Neque ergo ſententia *Neutoni* ſubſiſtere poteſt, qui lunae maſſam parti quadrageſimae terrae aequalem aeſtimauit; et ſententia Cel. *Dan. Bernoulli* multo propius ad veritatem accedere eſt cenſenda, qua lunae tantum pars terrae ſeptuageſima tribuitur. Ac ſi nutationem axis terrae non vltra $19''$ per obſeruationes ſtatuere licet, maſſa lunae adhuc eſt minor, neque partem octogeſimam quintam terrae ſuperare poteſt.

XLIV. Ponamus ergo $\alpha = \frac{1}{300}$ et $\lambda = \frac{1}{85}$, hincque $\alpha\lambda = \frac{1}{25500}$ et variationes in obliquitate eclipticae ita a longitudine ſolis p, longitudine lunae q et longitudine nodi aſcendentis ω pendebunt, vt ſit

$$l = s + 0{,}57 \cos 2p + 0{,}095 \cos 2q + 8{,}87 \cos \omega + 0{,}019 \cos(2q + \omega)$$

 coeffi-

coefficientibus in minutis secundis expressis. Cum igitur secunda et quarta aequatio ne decimam quidem minuti secundi partem conficiant, iis omissis erit

$$l = l + 0,57 \operatorname{cos.} 2p + 8,87 \operatorname{cos.} \omega$$

quarum aequationum prior cosinui duplae longitudinis solis est proportionalis vixque semiminutum secundum superat posterior vero cosinui longitudinis nodi ascendentis est proportionalis, et fere ad $9''$ ascendere potest, quod egregie cum obseruationibus consentire videtur.

De praecessione aequinoctiorum seu longitudine primae stellae arietis.

XLV. Hic primo consideranda est huius stellae longitudo media, quae ad quoduis tempus ex praecessione annua facile determinatur. Sit ergo $\mathfrak{x}$ longitudo media ad datum quoduis tempus, ac pro eius longitudine vera inuenienda, positis ad hoc tempus longitudine solis $= p$, lunae $= q$ et nodi ascendentis $= \omega$ erit eius longitudo vera:

$$x = \mathfrak{x} - 1,30 \operatorname{sin.} 2p - 0,22 \operatorname{sin.} 2q - 16,56 \operatorname{sin.} \omega$$

omissa postrema aequatione, vtpote partem trigesimam minuti secundi non superante. Hinc patet si nodus ascendens fuerit in ♈ 0°, longitudinem mediam imminui $16\frac{1}{2}$ min. sec., sin autem sit in ♎ 0°, tantundem augeri, tum vero si sol versetur in ♉ 15°, vel ♏ 15°, eam minui $1\frac{1}{3}$ sec. tantumdem vero

vero augeri, ſi verſetur in ♌ 15° vel ♒ 15°; correctio a loco lunae pendens negligi poteſt. Ex quo perſpicitur longitudinem veram ſtellarum fixarum a media vsque ad 18″ diſcrepare poſſe.

De inaequalitate in ipſo motu diurno terrae a viribus ſolis ac lunae producta,

XLVI. Haec inaequalitas ab angulo Φ pendet, quem videmus non exacte tempori eſſe proportionalem; cum ſit reuera:

$$\Phi = 360^{\circ} t - 1{,}20 \sin. 2p - 0{,}20 \sin. 2q - 15{,}20 \sin. \omega - 0{,}03 \sin. (2q + \omega).$$

Eſt autem Φ angulus EAB, quo primus meridianus terrae AB a circulo coeleſti AE, qui eſt colurus ſolſtitiorum ab occidente in orientem recedit, quod etiam de quouis alio meridiano terreſtri, et coluró aequinoctiorum eſt intelligendum. Ita ſi ſecundum motum aequabilem colurus aequinoctiorum, ſeu punctum aequinoctiale vernum iam per noſtrum meridianum, occaſum verſus angulo f proceſſiſſet eius vera elongatio a noſtro meridiano eſſet $\Phi = f - 1{,}20 \sin. 2p - 0{,}20 \sin. 2q - 15{,}20 \sin. \omega$ omiſſa vltima inaequalitate vt inſenſibili.

XLVII. Quoniam culminatio puncti aequinoctialis verni in ephemeridibus quotidie aſſignari ſolet,

let, nunc quidem cognoſcimus illis temporis momentis punctum aequinoctiale vernum ſi ſumma harum aequationum ſit negatiua ad meridianum nondum appuliſſe, ſed ab eo etiamnunc eſſe remotum tot minutis ſecundis, quot aequationes illae praebent. Sin autem tota aequatio fiat poſitiua, indicio id eſt punctum aequinoctionale vernum iam per meridianum tranſiiſſe, totidemque minutis ſecundis ab eo occidentem verſus eſſe remotum. Illo igitur caſu ſerius culminabit temporis interuallo, quo per motum diurnum aequatio illa conficitur, hoc vero caſu, iam ante tantum temporis interuallum culminauit.

XLVIII. Manifeſtum autem eſt hanc motus diurni inaequalitatem tantum in punctis aequinoctialibus et ſolſtitialibus cerni, cum ea proxime ſit aequalis inaequalitati in praeceſſione aequinoctiorum; ita vt in ſtellis fixis nulla huiusmodi inaequalitas locum ſit habitura, ſed interualla temporum, quibus eadem ſtella fixa ad meridianum appellit, tuto pro aequalibus haberi queant. Reſpectu ergo ſtellarum fixarum motus vertiginis terrae perfecte eſt aequabilis, neque vllam perturbationem a viribus ſolis et lunae patitur, ſicque illa motus irregularitas vnice ab inaequabili aequinoctiorum praeceſſione proficiſci eſt cenſenda, neque ergo variatio illa in longitudine ſtellarum fixarum effecta vllam variationem in earum culminatione gignit; ex quo neceſſe

necesse est; vt punctorum aequinoctialium culminatio totam illam irregularitatem persentiscat.

XLIX. Hi effectus a viribus solis ac lunae in motu terrae diurno producti probe sunt distinguendi ab iis, quos a viribus planetarum in terram agentibus nasci olim demonstraui, qui etiamsi quoque puncta aequinoctialia et obliquitatem eclipticae afficiant, tamen ex fonte prorsus diuerso promanant, dum iis ipsum planum eclipticae immutatur, aequatore manente inuariato. Atque ex his binis caussis coniunctis omnes irregularitates, quibus stellae fixae obnoxiae videntur, explicari oportet; quae phaenomena nunc quidem ab Astronomis eo maiori cura sunt obseruanda, cum ad ea perpetuo omnes illae minimae aberrationes in coelo, ad quas maxime sunt attenti, referri debeant.

COMMENTATIO
DE VTILISSIMA AC COMMODISSIMA DIRECTIONE POTENTIARVM FRICTIONIBVS MECHANICIS ADHIBENDARVM.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Quoties onera ſuper plano aſpero mouenda occurrunt, fieri id nequit, etiamſi planum perfecte fuerit horizontale, quin onera, pro ratione ponderis, reſiſtentiam manifeſtent, quae Mechanicis frictio vocatur: huiuscemodi reſiſtentiam ſuperare debent traharii iumentaue cum traham prouehunt: alius eſt indolis frictio in curribus, rhedis aliisue machinamentis rotalibus, quae multo minori opera protrahuntur. Cum vero baiuli in ripa incedentes nauem poſt ſe trahunt, hi quidem reſiſtentiam a naue experiuntur aut patiuntur, at haec reſiſtentia nihil commune habet cum frictione. Nullo interim habito diſcrimine, diſputatum fuit, ſub quanam directione potentiae motrices eſſent applicandae vt maximus inde fructus perciperetur; valde paradoxa videtur quaeſtio, an motrix potentia non ſit ſemper directe opponenda reſiſtentiae, ſunt qui

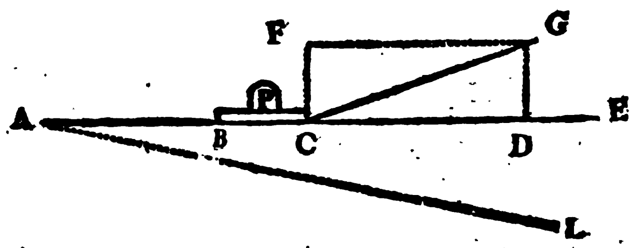
de

de hoc dubitant axiomate; veram autem dubitandi, vel potius negandi, rationem plane intactam, si bene memini, reliquerunt: duobus dicam verbis quod res est; quoties resistentia inuariata manet dum agit potentia mouens, saluum manebit axioma; quandocunque autem resistentia ab actione potentiae variatur, idem fallere poterit axioma. Interim nemo dubitabit quin potentia mouens in ipso plano verticali per directionem motus transeunte locanda sit; quaeritur saltem an directio potentiae ad directionem motus inclinanda sit in praefato plano nec ne.

§. 2. Cum nuperrime hanc praefatam controversiam iterum a viro, cuius merita magni facio, viderem agitatam, eandemque ad normam, quam dixi, perpenderem, non poteram non protinus perspicere, mensuram superandae frictionis pendere ab ipsa directione potentiae onus protrahentis; etenim quando potentia trahens superiora versus dirigitur, tunc ipsum corpus simul protrahitur atque subleuatur; posterior autem actio frictionem diminuit: sic igitur aliquod oritur ab obliquitate potentiae dispendium simulque aliquod lucrum; scilicet potentia protrahens absoluta non tota vtiliter impenditur, sed vicissim ipsa diminuitur resistentia. Iam itaque veram habemus dubitandi causam, num potentia directe num oblique oneri protrahendo sit applicanda; si obliquitas potentiae plus noceat quam diminutio resistentiae prodest, conducet onus directe protrahere; sin minus, praeferenda erit directio potentiae aliquomodo obliqua: haec cum ita sint, tenuis calculus litem diiudicabit; nec iniucundum fuit intelligere praestare potentias obliquas adhibere quam directas, obliquitatem autem suos habere limites, quos vltra citraque nullum lucrum adhuc sperari possit, ipsum vero lucrum alicubi esse maximum. Haec vt tanto planiora fiant paucula quaedam de frictionibus praemonebo.

§. 3. Corpora super plano quiescentia non aliter dici possunt frictionem habere quam *virtualiter* statim vero ac mouentur subito totam suam frictionem manifestant siue lentiori siue velociori motu ferantur, nec enim quicquam velocitates ad frictionem siue augendam siue diminuendam conferre experimentis innotuit. Idem corpus similiter positum alii atque alii plano super incumbens aliam atque aliam frictionem motus opponit, ita quoque idem planum diuersis corporibus suppositum diuersas frictiones producit, etiamsi corpora nec figura, nec situ, nec pondere sint diuersa. Si porro eidem superficiei planum contingenti modo maius modo minus imponatur pondus erit quantitas frictionis semper ponderi poportionalis, perinde quoque est siue partes superficiei vniformiter siue inaequaliter ad planum apprimantur, modo summa appressionum eadem maneat; singula autem corporis puncta motu inter se parallelo moueri hic subintelligendum est: hinc

hinc sequitur frictionem diminui a potentia quae appressionem corporis contra planum suppositum diminuit et esse diminutionem frictionis diminutioni appressionis proportionalem. Sequitur etiam frictionem similis superficiei, cui idem pondus insistit, eandem esse, siue maior siue minor sit superficies planum contingens. His praemonitis rem ipsam aggredior primo autem agam de frictione oneris super plano horizontali promouendi atque inquiram, sub quanam directione potentia oneri sit applicanda, vt minima potentia ad motum requiratur.



§. 4. Sit iam planum horizontale AE, cui incumbit super basi BC pondus P: Putetur puncto C potentia applicata, quae pondus P trahat in directione CE; talem potentiam deinceps vocabo, *directam*, quae est aequalis integrae frictioni, ponderi P super basi BC, debitae, quae cum sit ipsi ponderi proportionalis indicabo potentiam *directam* per $\frac{P}{n}$; pendet autem numerus n a natura superficierum quibus basis corporis et planum suppositum se contingunt ita vt communiter intra 2 et 4 consistat.

 His

His ita definitis ponatur nunc, potentiam aliam applicari sub directione CG sitque angulus inclinationis $GCD = z$ ipsaque potentia corpus protrahens $= \pi$; erit iam potentia obliqua π ita determinanda vt cum potentia directa $\frac{P}{n}$ comparari possit: hunc in finem repraesentabimus potentiam π linea CG eamque resoluemus in verticalem CF atque horizontalem CD, quarum prior, ad protractionem plane inutilis, tota impenditur in subleuandum onus atque diminuendam appressionem eius contra planum suppositum, dum posterior, appressionem nihil mutans, tota impenditur in protractionem. Est autem potentia $CF = \pi \sin. z$; hinc appressio corporis ad planum $= P - \pi \sin. z$ atque adeo frictio $= \frac{P - \pi \sin. z}{n}$, quae frictio facienda est aequalis potentiae $CD = \pi \cos. z$, vnde $\frac{P - \pi \sin. z}{n} = \pi \cos. z$ siue $\pi = \frac{P}{n \cos. z + \sin. z}$.

§. 5. Ex praemissa formula, potentiam CG exprimente, facile intelligitur, si primo angulus z nullus sit posteaque paulatim increscat, fore vt ista potentia sensim decrescat ad certum vsque gradum deindeque iterum augescat: igitur directio erit, qua potentia minima requiritur ad onus promouendum; haec autem directio determinabitur, si denominator $n \cos. z + \sin. z$ quantum fieri potest, maximus accipiatur adeoque differentiale ipsius ponatur $= 0$: sic erit $- n\, dz \sin. z + dz \cos. z = 0$ vel $\frac{\sin. z}{\cos. z} = \frac{1}{n}$ siue $\text{tang.}\, z = \frac{1}{n}$.

Hinc

Hinc etiam $\sin. z = \frac{1}{\sqrt{nn+1}}$ atque $\cos. z = \frac{n}{\sqrt{nn+1}}$ et π, cum est minima, $= \frac{p}{\sqrt{nn+1}}$, vnde sequitur esse potentiam directam ad potentiam minimam vt $\sqrt{nn+1}$ ad n.

Intelligimus iam non parum subleuari iumenta aut baiulos in protrahendis trahis, cum potentiam praefata lege sursum dirigunt; tanto maius autem fore emolumentum, quanto maior sit frictio siue quanto minor assumatur litera n. Haec solo intuitu paruulae subiunctae tabellae apparebunt, vbi pondus ipsum protrahendum indicatur per 1000, intensitas autem frictionis decrescit ab $\frac{1}{2}$ vsque $\frac{1}{10}$.

Intensitas frictionis siue $\frac{1}{n}$	Potentia directa siue $\frac{p}{n}$	Inclinatio Potentiae siue angulus z	Potentia protrahens siue π
0, 5	500	26°. 34′	447
0, 4	400	21. 48	371
0, 3	300	16. 42	288
0, 2	200	11. 19	196
0, 1	100	5. 43	$99\frac{1}{2}$

§. 6. Quum trahae super via silicata sicca trahuntur, puto esse frictionem propemodum aequalem dimidio ponderi siue $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$; igitur theoria nostra docet, funes ad angulum 26 graduum, 34 min. esse dirigendos, hancque regulam aurigas nostros non male obseruare vidi: sic diuturnus rerum

rum vſus apud plebem non raro quidem praeuenit docilem eruditorum ſolertiam, verum inuenta aut obſeruata ſolus nunquam perficit.

At ſi via niue calcata fuerit obtecta, multo fiet minor frictionis intenſitas multoque minus funes ductarii, quibus equi trahae alligantur, erunt inclinandi nec, meo quidem iudicio, vltra duodecim gradus; imo ſi vel omnia recte inſtituantur, parum iuuabit lucellum, vtpote quod cum ipſa frictione decreſcit et quidem propemodum in ratione frictionum quadrata.

§. 7. Quod ſi nunc hancce noſtram theoriam ad machinamenta rotalia, veluti rhedas, currus etc. applicemus, facile intelligimus, nihil aut parum admodum emolumenti ab obliquitate potentiarum ſperari poſſe, praeſertim ſi axes bene fuerint axungia obliniti: ita enim frictiones ſuper axe, non vltra trientem appreſſionum aſſurgent et ab actione rotarum inſigniter porro diminuuntur; ita vt, rebus omnibus bene perpenſis, integram reſiſtentiam non vltra vigeſimam totius ponderis partem communiter aſſurgere credam: ſic foret $\frac{1}{n} = \frac{1}{20} = 0,05$ ipſaque obliquitas debita tres gradus non attingeret nec potentia ipſa vltra vnam octingenteſimam potentiae directae partem diminueretur, cuiusmodi lucellum nemo curabit: tota res paucis expedietur verbis; *vtiliter adhibetur obliquitas potentiae quando reſiſten-*

ſiſtentia directa notabilem ponderis promouendi partem efficit ipſaque reſiſtentia a diminutione vel ſubleuatione ponderis notabiliter diminuitur, haec regula valebit quaecunque ſit reſiſtentiae ſpecies aut quomodocunque oriatur; modo itaque detur relatio inter imminutum pondus oneris horizontaliter promouendi eiusque reſiſtentiam directam imminutam, determinari poterit obliquitas ſub qua potentia vtiliſſime adhibetur. Sic igitur theoria ad alias quoque reſiſtentiae ſpecies adhiberi poterit, veluti ad protrahenda corpora aquis inſidentia.

In his corporibus potentia ſurſum inclinata duplicem habebit effectum; primus erit vt corporis natantis pars ſubmerſa imminuatur atque ſic minorem reſiſtentiam ab aquis patiatur, alter vt poſitio naturalis corporis immutetur, a qua ſitus immutatione reſiſtentia aquarum modo diminui modo augeri poteſt pro configuratione corporis; hic inuariata ſupponitur motus velocitas. Si foret corpus cylindricum aquis innatans in eoque conſtanter ſupponatur axis verticalis, pro tali corpore data velocitate protrahendo eaedem valerent regulae quas dedimus pro frictione corporis ſuper plano horizontali moti ſuperanda. At ſi de nauibus ab hominibus vel equis, in ripa progredientibus, protrahendis quaeſtio ſit, deuoluemur ad caſus, quibus potentia directa fere nulla eſt, ſi cum pondere totius nauis comparetur, ſic vt potentia naui ſit tantum non horizontaliter applicanda atque plane negligi debeat: parum lucelli quod ab obliquitate sperari possit. Male igitur scriptores nullaque ratione innixi huiuscemodi resistentias cum frictionibus immediatis perinde habuerunt, ac si vbique potentiae sub eodem obliquitatis angulo essent applicandae.

§. 8. Quae dixi de directione potentiae in frictiones super plano horizontali superandas adhibendae, egregie confirmantur, si tota res hoc alio modo concipiatur, fingatur nempe catena extensa et vbique in planum suppositum horizontale vniformiter grauitans: tum vero extremitati eius anteriori potentia applicetur, qua catena oblique sursum et antrorsum in directione ipsius catenae protrahatur: sit rursus potentia ista $=\pi$, angulus obliquitatis eius $=z$, pondus catenae $=P$, longitudo eius $=l$, potentia directa in totam catenam protrahendam requisita $\frac{P}{n}$. Nunc autem patet fore vt pars catenae eleuetur atque ab omni frictione liberetur, dum pars reliqua etiamnum humo incumbens frictionem suam retinet; igitur si potentia obliqua π resoluatur in verticalem et horizontalem, tunc verticalis tota impendetur in eleuationem partis eleuatae, horizontalis vero in protractionem partis humo incumbentis; sit pars catenae eleuatae $=x$, pars altera humo incumbens $=l-x$, fiet pondus partis eleuatae $=\frac{x}{l}P$ alteriusque partis $=\frac{l-x}{l}P$, erit autem huius posterioris partis frictio $=\frac{l-x}{nl}P$; hinc sequi-

sequitur fore potentiam verticalem, qua pars catenae eleuatur $=\frac{x}{l}P$ et potentiam horizontalem, qua catena protrahitur $=\frac{l-x}{nl}P$; igitur erit potentia absoluta $\pi = P\sqrt{(\frac{xx}{ll} + \frac{ll-2lx+xx}{nnll})}$, quae cum debet esse minima, facienda erit longitudo $x = \frac{l}{nn+1}$, ergo potentia verticalis extremitati catenae applicata siue $\frac{x}{l}P$ iam erit $= \frac{P}{nn+1}$ atque potentia horizontalis protrahendae catenae dicata siue $\frac{(l-x)P}{nl} = \frac{P}{n} - \frac{P}{n^3+n} = \frac{nP}{nn+1}$; hinc potentia absoluta siue $\pi = P\sqrt{(\frac{1}{(nn+1)^2} + \frac{n^2}{(nn+1)^2})} = P\sqrt{(\frac{1}{nn+1})}$; atque haec quantitas prorsus eadem est cum ea, quam §. 5. alia methodo inuenimus. Est porro potentia horizontalis siue $\frac{nP}{nn+1}$ ad potentiam verticalem siue $\frac{P}{nn+1}$ sicuti sinus totus ad tangentem anguli quaesiti z, vnde tang. $z = \frac{1}{n}$, quod idem pariter §. 5. inuenimus.

§. 9. Huiuscemodi quaestiunculae aliae haud paucae, quae omnes inter se consentiunt, afferri possent; superaddam vnicam; sit scala ex duobus vectibus parallelis et aequilongis constans eique onus super impositum; alterum scalae extremum humo superincumbat horizontali, alterum a iumento vel baiulo gestetur sitque sic scala onusta protrahenda; quaeritur vbinam centrum grauitatis istius systematis locandum sit vt minima potentia absoluta requiratur. Solutio huius quaestionis plane eadem est, quae quaestionis praecedentis, si eaedem accipiantur denominationes, quarum analogismum quisque me non explicante, perspiciet, modo nunc per x intelligatur distantia inter centrum grauitatis et extremitatem scalae posteriorem atque per $l-x$ distantia inter centrum grauitatis atque extremitatem anteriorem sic vt inuertatur ordo, cuius ratio per se patet. Hoc modo fiet iterum $x = \frac{l}{nn+1}$; potentia verticalis extremitati anteriori scalae applicata $= \frac{P}{nn+1}$ atque potentia horizontalis protrahendae scalae onustae dicata $= \frac{nP}{nn+1}$; potentia absoluta $\pi = \frac{P}{\sqrt{nn+1}}$; quae omnia vtut diuersimode ad mechanicam practicam accommodata, egregie, inter se conspirant, ita vt quaecunque fuerit frictionis intensitas indicata per $\frac{1}{n}$, eadem vbique oriatur potentia absoluta, cum est minima, quae §. 5. definita fuit.

Fuerit v. gr. $n=2$, erit catena ita oblique trahenda vt quinta eius pars de humo eleuetur et reliquae quatuor quintae partes eidem porro incumbant. In scala autem ita erit pondus super imponendum vt centrum grauitatis totius systematis quinta parte totius longitudinis ab extremitate posteriori distet, ab altera extremitate quatuor quintis partibus.

Si maior fuerit valor litterae n, id est, si minor ponatur frictionis intensitas, minor etiam catenae portio eleuanda magisque centrum grauitatis scalae onerandae erit ad extremitatem posteriorem appropinquandum.

§. 10. Videamus nunc quoque, quomodo res instituenda sit in via vniformiter accliui: Hunc in finem accipiatur, in figura paragrapho quarta apposita, linea AL pro horizontali, sic vt AE denotet viam accliuem sitque angulus accliuitatis siue angulus $EAL = A$; lineae autem FC et GD non vt verticales sed vt perpendiculares ad lineam AE considerentur. Nunc, praeter frictionem, corpus suo pondere insuper resistit et liquet fore potentiam directam, ad protrahendum corpus requisitam $= P \sin. A + \frac{P \cos. A}{n}$. Quod si vero potentia π obliqua sursum trahat sub directione CG rursusque angulus GCD dicatur z erit nunc potentia

$$\pi = \frac{n \sin. A + \cos. A}{\sin. z + n \cos. z} P.$$

Quoniam in hac expressione numerator constans est, denominator autem variabilis idem qui in fine paragraphi quartae, sequitur potentiam π sub eadem conditione minimam fieri, erit igitur rursus, sicuti in paragrapho quinta $\frac{\sin. z}{\cos. z} = \frac{1}{n}$ siue tang $z = \frac{1}{n}$

ipsaque potentia minima, post substitutionem praefati valoris z congruasque adhibitas expressiones fiet $= \frac{n \sin. A + \cos. A}{\sqrt{(nn+1)}} P$. Indicat haec expressio, esse rursus potentiam directam ad potentiam minimam vt $\sqrt{(nn+1)}$ ad n, quod idem §. 5. inuenimus.

§. 11. Notabilis mihi videtur praefata anguli z, minimae potentiae respondentis, constantia pro quacunque accliuitate aut etiam decliuitate viae vel plani suppositi; constanter enim tangens illius anguli est $= \frac{1}{n}$, sed et alia insuper est eiusdem anguli proprietas, quae, quamuis notissima sit, hic praeprimis notari meretur. Nempe omne planum, cui corpus super imponitur, ad certum et definitum angulum inclinari potest, ante quam ipsum corpus proprio suo pondere frictionem superet ac super plano deuoluatur siue deorsum repat; hicque ipse angulus est, qui in theoria nostra vbique et constanter indicatur. Etenim, posito iterum hoc angulo $= z$, pondere $= P$ et frictione horizontali $= \frac{P}{n}$, erit potentia, corpus deorsum trahens $= P \sin. z$ et frictio $= \frac{P}{n} \cos. z$, vnde rursus tang. $z = \frac{1}{n}$.

Huiuscemodi proprietates haud obscure indicant, inesse aliquid in argumento nostro quod sit ipsi rei naturae accommodum atque essentialiter insitum.

Caeterum patet, si via sit decliuis, fore tunc terminum sin. A, negatiue sumendum atque, si decliuitas tanta sit vt corpus sua sponte descendere incipiat, fore $\pi = 0$, imo potentia ista erit negatiue accipienda, si tang. A simul maior sit quam $\frac{1}{n}$. At huius loci non est his disquisitionibus abstractis, quae nunquam ad praxin applicari possunt, immorari.

§. 12.

§. 12. Diminutiones potentiarum, quas pertractauimus, sunt plane diuersae indolis, a diminutionibus potentiarum quae ab vsu vectis alteriusue machinae simplicis mutuantur. In his enim via, sub *ipsa directione potentiae*, perficienda tantum crescit quantum ipsa potentia decrescit et propterea labor absolutus idem censeri potest, nisi quatenus specialis siue hominum siue animalium laborantium constitutio aliqualem rei diuersitatem iniiciet. In nostro autem argumento tantum abest, vt pro diminuta potentia maior via *in directione potentiae* perficienda sit, quin ipsa quoque via haec simul diminuatur atque adeo nouum superueniat lucrum: est enim motus absolutio ad motum secundum *directionem potentiae*, cui soli potentia applicatur, vt sinus totus ad cosinum obliquitatis et in hac quoque ratione laborem, in protrahendo onere insumtum, iterum diminui aliqua cum ratione affirmare licet, si modo intra certos limites subsistamus. Optandum autem foret vt pro quouis labore, cuiuscunque sit generis, vera defatigationis mensura innotesceret tum de hominibus tum de diuersis animalibus; haec notitia a baiulis, cursoribus peditibus aliisque operariis tum etiam ab aurigis equitibus, stabulariis caeterisque huius ordinis hominibus melius quam ab aliis acquiretur: velim autem vt vbique de penso diurno sermo sit vt sic singula comparari possint cum eo quod iumenta baiuliue perficiunt, cum operam suam totam vnice in pro-

trahen-

trahendum onus locant; isti enim labori quotidie ferendo quid valeant sic satis notum est.

Haec dum explorata habeantur, tutissime hac regula vtemur, laborem quemcunque aestimandum esse ex potentia adhibita et ex motu ad directionem potentiae relato, modo simul defatigationis, quae soli incessui libero debetur, ratio habeatur.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE
AEQVILIBRIO ET MOTV CORPORVM
FLEXVRIS ELASTICIS IVNCTORVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Corpora hic rigida considero, quorum autem duo pluraue ita inter se sint coniuncta, vt separationi quidem resistant, verumtamen in singulis iuncturis inflexionem seu motum gyratorium circa quempiam axem admittant. Iuncturas autem ita comparatas assumo, vt ista inflexio non libere succedat, sed vi inflectenti eo magis reluctetur, quo maior inflexio produci debeat. Datur scilicet in huiusmodi corporibus status naturalis, in quo sine actione cuiusquam vis externae se quasi sponte conseruent; quo magis autem de hoc statu per inflexionem deturbari debeant, vt eo maiori vi sit opus ad eiusmodi effectum producendum. Denique vero his flexuris eiusmodi vim insitam tribuo, vt postquam corpora de situ naturali fuerint depulsa, cessante vi inflectente, ea sponte se in statum naturalem

lem restituant, in quo quippe natura elasticitatis consistit.

2. Ad hanc igitur indolem sunt referenda omnis generis corpora elastica, veluti laminae elasticae, quae incuruatae vi pollent sese in statum naturalem restituendi. Hoc tantum intercedit discrimen, quod in huiusmodi corporibus nullum detur punctum, circa quod inflexio fieri nequeat ita vt ea tanquam ex infinitis elementis, ope flexurarum elasticarum coniuncta spectari oporteat. Hic autem quo latius inuestigationes nostrae pateant, corpora ex finito partium numero conflata contemplabor, quae partes singulae nullius figurae mutationis sint capaces, sed in ipsis tantum iuncturis circa se inuicem elasticitatis resistentia superata inflecti patiantur.

3. Quo autem clarius omnia principia, ex quibus huiusmodi corporum determinatio motus est petenda, perspiciatur, inuestigationes a casu simplicissimo, quo duo tantum corpora huiusmodi flexura elastica sunt coniuncta exordiri conueniet, sic enim omnibus circumstantiis probe perpensis multo tutius ac felicius ad maiorem corporum hoc modo inter se iunctorum numerum progredi licebit. Ante omnia igitur hic in ipsa iunctura axis ille considerandus occurrit circa quem vtrumque corpus moueri potest ita vt altero fixo alterum circa istum axem de situ naturali detorqueri queat, quatenus vis inflectens elasticitati superandae par est. Deinde vero vtrumque

que corpus seorsim est spectandum, quae cum sint rigida, mechanica cognitio ad motum definiendum requisita cum centro inertiae tum vero momentis inertiae continetur.

4. Sit igitur recta Mm axis flexurae, qua ambo corpora sunt coniuncta et dum ea in statu naturali versantur, sit alterius corporis centrum inertiae in A, alterius vero in B, quae quidem in figura ita exhibentur quasi cum axe Mm essent in eodem plano, verum vtique fieri posset vt plana MAm et MBm certum quendam angulum inter se constituerent, quemadmodum etiam rectae normales Aa et Bb ab vtroque centro inertiae ad axem ductae vel in vnum vel diuersa puncta incidere possunt, quae circumstantia si ad motum spectemus, probe est obseruanda. Hinc ergo in quouis statu violento inclinatio planorum MAm et MBm, cum naturali siue sit nulla siue aliqua, comparari debet quoniam a differentia quantitas vis elasticae, quae tum ad restitutionem exeritur, pendet. Tab. III. Fig. 1.

5. Ad vim elasticam autem mente saltem concipiendam, statuatur axis flexurae plano tabulae in L normalis, et sit ALb status naturalis, ita vt tum ambo centra inertiae in planis quae rectis LA et Lb normaliter insistunt, reperiantur. Nunc autem consideretur status quicunque violentus ALB, quo alterius corporis centrum inertiae in planum rectae LB normaliter insistens sit detrusum, ac sta- Fig. 2.

 tus

tus deturbatio ex angulo BLb erit aestimanda, cum tendat ad hunc angulum extinguendum; atque in calculo vis elastica sinui huius anguli proportionalis statui solet, cuius ratio ita exhiberi potest. Vi elasticae reuera insitae substituatur mente filum elasticum Bb, vi praeditum se in ratione longitudinis Bb contrahendi; ponatur $LB = Lb = k$ angulus $BLb = \omega$, vt sit $Bb = 2b\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}\omega$, ideoque ipsa vis $= E\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}\omega$ quae cum punctum B in directione Bb sollicitet, erit eius momentum ratione axis $L = E\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}\omega.\,LB\,\text{sin.}\,LBb = Eb\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}\omega\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}\omega = \tfrac{1}{2}Eb\,\text{sin.}\,\omega$; vnde patet momentum vis elasticae, quod hic est spectandum, non sine ratione sinui anguli inflexionis BLb proportionale statui.

6. Si extremitates A et B filo AB constringantur, euidens est hoc modo corpora in statu violento retineri posse, vbi imprimis tensionem fili ad hoc requisitam notari conuenit. Sit igitur T ista fili tensio restitutionem in statum naturalem coercens, cuius momentum ad inflexionem augendam cum sit $= T.LB.\text{sin.}ABL = T.AL.\text{sin.}BAL$, ob $AB : \text{sin.}ALB = AL : \text{sin.}ABL$, erit id $= \frac{T.LA.LB}{AB}\,\text{sin.}ALB$, momento elasticitatis, quod sit $= E\,\text{sin.}\,\omega$ aequale ponendum vnde positis $LA = a$, $LB = b$, angulo naturali $ALb = \lambda$ vt sit $ALB = \lambda - \omega$, et $AB = \sqrt{(aa + bb - 2ab\,\text{cos.}(\lambda - \omega))}$ erit tensio $T = \frac{E\,\text{sin.}\,\omega.\sqrt{(aa + bb - 2ab\,\text{cos.}(\lambda - \omega))}}{ab\,\text{sin.}(\lambda - \omega)}$. Quodsi ergo in statu naturali partes LA et Lb in directum iaceant, vt sit $\lambda = 180°$ fit $T = \frac{E.AB}{ab}$.

7. Hic

7. Hic casus per se quidem perspicuus eo magis est memorabilis quod ingens paradoxon involuere videtur. Si enim duae virgae rigidae AL, LB in L ita elatere sint iunctae, vt sponte in directum sint extensae, eaeque constrictione fili AB in statu inflexo ALB detineantur, mirum videbitur, quomodo tensio fili quantitati $\frac{E.AB}{LA.LB}$ hoc est ipsi fili longitudini AB proportionalis esse queat, quandoquidem hoc modo ad inflexionem minorem maior fili tensio, ad maiorem autem minor requiritur. Scilicet minuta fili tensione, virgae subito in statum naturalem resilient cum tamen tensio minor maiorem inflexionem sustinere posset. Contra autem aucta fili tensione, inflexio adeo augebitur, cum tamen maior inflexio minorem tensionem exigat. Tab. III. Fig. 3.

8. Quo hoc paradoxon dilucidemus, virgam AL vt fixam spectemus, vt altera BL cum a certa vi secundum BA quae sit $= D$, tum ab elatere Bb sollicitata circa punctum seu axem L fixum moueatur. Cum igitur positis $LA = a$ $LB = b$, $BLb = \omega$, vt sit $AB = \sqrt{(aa + bb + 2ab\cos.\omega)}$, sit vis BA momentum $= \frac{Dab\sin.\omega}{\sqrt{(aa + bb + 2ab\cos.\omega)}}$, elateris autem momentum contrarium $= Eb\sin.\omega$, si virgae BL momentum inertiae respectu axis L statuamus $= Bcc$, erit ex motus principiis $\frac{Bccdd\omega}{2g\,dt^2} = \frac{Dab\sin.\omega}{\sqrt{(aa + bb + 2ab\cos.\omega)}} - Eb\sin.\omega$, denotante g altitudinem lapsus vno minuto secundo, siquidem tempus

pus t in minutis ſecundis exprimere velimus. Multiplicemus per $d\omega$ et integrando obtinebimus

$$\frac{Bccd\omega^2}{4gdt^2} = C + Eb\,\text{coſ.}\,\omega - D\surd(aa + bb + 2ab\,\text{coſ.}\,\omega)$$

ſumamus motum a quiete incepiſſe, cum erat $\omega = \alpha$, vt conſtans C rite determinetur, ac fiet

$$\frac{Bccd\omega^2}{4gdt^2} = Eb(\text{coſ.}\,\omega - \text{coſ.}\,\alpha) + D\surd(aa + bb + 2ab\,\text{coſ.}\,\alpha)$$
$$- D\surd(aa + bb + 2ab\,\text{coſ.}\,\omega).$$

9. Nunc igitur oſtendendum eſt, ſi fuerit vis $D = \frac{E\surd(aa + bb + 2ab\,\text{coſ.}\,\alpha)}{a}$ tum virgam LB in ſtatu initiali, vbi erat angulus $BLb = \alpha$ perpetuo quieſcere, ſin autem vis $BA = D$ fuerit hac quantitate maior, tum virgam LB angulo BLb continuo creſcente verſus LA rotari, contrarium vero euenire, ſi vis illa D fuerit minor, hocque caſu virgam LB ad ſitum Lb acceſſuram eſſe. Primum quidem inde patet quod non ſolum ipſa quantitas, cui quadratum celeritatis angularis $\frac{d\omega^2}{dt^2}$ aequatur, caſu quo $\omega = \alpha$ euaneſcit ſed etiam eius differentiale, ideoque et acceleratio, ita vt virga LB tum perpetuo in ſitu initiali ſit permanſura. Pro reliquis caſibus ſit breuitatis gratia $\surd(aa + bb + 2ab\,\text{coſ.}\,\alpha) = f$ et $\surd(aa + bb + 2ab\,\text{coſ.}\,\omega) = z$, eritque $\frac{Bccd\omega^2}{4gdt^2} = \frac{E(zz - ff)}{2a} - D(z - f) = (z - f)(\frac{E(z + f)}{2a} - D)$. Ponatur iam $D = \frac{nEf}{a}$, vt ſit n modo maius modo minus vnitate fietque $\frac{Bacc\,d\omega^2}{2Eg\,dt^2} = (z - f)(z + f - 2nf)$; et celeritas angularis erit $\frac{d\omega}{dt} = \surd\frac{2Eg}{Bacc}(z - f)(z + f - 2nf)$.

10. Quod-

10. Quodſi iam ſit $n > 1$, ita vt vis BA elaterem ſuperet, primo quidem angulus ω augebitur, et diſtantia $AB = z$ diminuetur, vnde pro motu ſecuturo erit $\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}(f-z)((2n-1)f-z)}$, ex quo euidens eſt ob $2n-1 > 1$, dum angulus BLb creſcit, et z minuitur celeritatem non ſolum nusquam ceſſare, ſed continuo augeri, donec virga LB prorſus in directionem LA reducatur. Sin autem ſit $n < 1$, ſtatim diſtantia $AB = z$ increſcit, vt fiat $z > f$, et $\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}(z-f)(z-(2n-1)f)}$, vbi ob $2n-1 < 1$, euidens eſt creſcente z etiam celeritatem angularem continuo augeri, donec virga in ſitum naturalem Lb reſtituatur, fiatque $z = a+b$. Tum vero hac celeritate, motus angularis in plagam contrariam vertetur, ſiquidem iunctura id permittat qui motus priori omnino erit ſimilis.

11. Tempus autem ipſum huius motus nonniſi per quadraturas ſatis perplexas definiri poteſt, quae difficultas adeo vix minuitur, etiamſi elaſticitas prorſus euaneſcat, et virga LB circa axem L libere ſtatuatur mobilis, a vi conſtante D iugiter ſecundum directionem BA ſollicitata. Poſito enim $E = 0$, habebitur $\frac{Bccd\omega^2}{4Dgdt^2} = f - z$, vnde colligitur

$$dt\sqrt{\frac{4Dg}{Bcc}} = \frac{-2zdz}{\sqrt{(f-z)(a+b+z)(a+b-z)(a+z-b)(b+z-a)}}$$

exiſtente $ff = aa+bb+2ab\cos.\alpha$, ideoque $f < a+b$, quae formula integranda certe maxime eſt complicata, quod in tali caſu tam facile ad praxin reuo-

 cando,

cando, mirum videtur. Neque elasticitate admissa calculus multo fit intricatior cum posito $D = \frac{nEf}{a}$ tum habeatur:

$$dt\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}} = \frac{-2zdz}{\sqrt{(f-z)((2n-1)f-z)(a+b+z)(a+b-z)(a+z-b)(b+z-a)}}$$

quae quidem aequatio si $b = a$ seu $LB = LA$ in hanc simpliciorem formam abit

$$dt\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}} = \frac{-2dz}{\sqrt{(f-z)((2n-1)f-z)(2a+z)(2a-z)}}.$$

12. Vnicus casus occurrit, qui faciliorem integrationem admittit; cum scilicet sit $f < 2a$ ob $ff = 2aa(1+\text{cos}.\alpha)$; numerus n ita accipiatur vt fiat $(2n-1)f = 2a$, seu $2n-1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\text{cos}.\alpha)}} = \frac{1}{\text{cos}.\frac{1}{2}\alpha}$ et cum sit $dt\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}} = \frac{-2dz}{(2a-z)\sqrt{(f-z)(2a+z)}}$ integrale reperitur:

$$t\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}} = \frac{1}{\sqrt{a(2a-f)}}\left(\text{Ang. cos}.\frac{4aa-6af+(6a-f)z}{(2a+f)(2a-z)}\right)$$

quae formula euanescit sumto $z = f$ pro motus initio. In minutis secundis ergo habetur:

$$t = \frac{\sqrt{Bcc}}{\sqrt{2Eg(2a-f)}}\text{Ang. cos}.\frac{4aa-6af+(6a-f)z}{(2a+f)(2a-z)} = \frac{\sqrt{Bcc}}{2\sqrt{(2n-1)Egf}}$$
$$\text{Ang. cos}.\frac{(n-2)(2n-1)f+(3n-2)z}{n((2n-1)f-z)}$$

vnde sequitur tempus quo virga LB in situm LA compellitur fore $= \frac{\sqrt{Bcc}}{2\sqrt{(n-1)Egf}}\text{Ang. cos}.\frac{n-2}{n}$ minutis secundis. Ita si initio motus fuisset $\alpha = 90°$, ideoque $2n-1 = \sqrt{2}$ seu $n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ erit hoc tempus totum $= \frac{\sqrt{Bcc}}{\sqrt{2Egf(\sqrt{2}-1)}}\text{Ang. cos}.\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}}$, qui angulus proxi-

proxime continet 131°, 3 5/7 et in partibus radii 2, 287436.

13. Si virgam LA, quam hic vt fixam ſpectauimus, etiam mobilem faciamus, vt ambae ſimul ſuper plano tabulae, ad quod quippe axis inflexionis ſumitur perpendicularis, moueantur, nullum eſt dubium quin problema multo ſit difficilius, et profundiorem Mechanicae cognitionem poſtulet. Multo porro difficilius fiet problema, ſi hae binae virgae in vacuo vtcunque proiiciantur, vt axis inflexionis non amplius ſitum ſibi parallelum conſeruet, eaeque inſuper extrinſecus a viribus quibuscunque ſollicitentur. Quodſi praeterea corpus ex pluribus conſtet partibus, flexura elaſtica inter ſe coniunctis, neque adeo axes inflexionis in ſingulis flexuris fuerint inter ſe paralleli: neſcio an quis ſolutionem ſaltem tentare auderet. Equidem hic tantummodo eiusmodi plurium partium compagem ſum conſideraturus, vbi omnes axes inflexionis in ſingulis iuncturis inter ſe ſint paralleli, atque motus ita ſit comparatus, vt in eodem plano abſoluatur, ad quod illi axes ſint perpendiculares, et in quo ſimul ſingularum partium centra inertiae ſint ſita, etiamſi methodus, qua ſum vſurus, multo latius pateat.

14. Principium autem primarium, cui omnium huiusmodi motuum determinatio innititur, ex Statica ſeu ea ſcientia, quae circa aequilibrium virium eſt occupata, peti oportet. Niſi enim conſtet, a

 quibus

quibus viribus corpus quodpiam, cuiuscunque indolis fuerit, in aequilibrio contineatur, determinatio motus, ab aliis quibuscunque viribus variati frustra suscipitur. Euolutio autem accuratior huius principii eo magis est necessaria, quod ipsa motus determinatio, vtcunque is fuerit intricatus, semper leui adhibita consideratione ad statum aequilibrii reuocari potest, dum vires ad motus effectionem requisitae viribus quibus corpus actu impellitur aequiualere, ideoque contrarie applicatae cum his in aequilibrio consistere debent, quod adeo etiam in motu fluidorum locum habet. Quocirca inuestigationes a statu aequilibrii incipiam.

Problema I.

15. *Si corpus ex quotcunque partibus compositum, quae flexuris elasticis inter se sint coniunctae, a viribus quibuscunque fuerit sollicitatum, definire conditiones, quibus hae vires se mutuo in aequilibrio coerceant.*

Solutio.

Primum omnium obseruandum est cunctas vires perinde in aequilibrio esse debere, ac si corpus prorsus esset rigidum; si enim singulae flexurae subito rigescerent, inde virium aequilibrium neutiquam turbaretur; quocirca primo quidem in eas conditiones est inquirendum, sub quibus vires corpus

pus ſollicitantes ſe inuicem deſtruerent, ſi totum corpus tanquam rigidum ſpectetur. Hunc in finem ſingulae vires corpus ſollicitantes ita euoluantur, vt quaelibet puncto corporis Z applicata ſecundum ternas directiones fixas Zp, Zq, et Zr, quae ternis axibus inter ſe normalibus IA, IB et IC ſint parallelae reſoluantur. Sit igitur vis $Zp = p$, vis $Zq = q$, vis $Zr = r$, et ponantur ternae coordinatae ſitum puncti Z definientes et iisdem axibus parallelae $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, ac primo quidem conſtat, ſummas omnium harum ternarum virium ſeorſim nihilo aequales eſſe debere, vnde hae tres conditiones colliguntur, vt ſit: Tab. III. Fig. 4.

$$1^\circ.\ \int p = 0;\quad 2^\circ.\ \int q = 0;\quad 3^\circ.\ \int r = 0$$

quibus obtinetur, vt corporis centrum inertiae in aequilibrio conſeruetur.

Verum hae tres conditiones nondum ſufficiunt, etiamſi corpus totum foret rigidum, oportet enim inſuper, vt corpori circa nullum plane axem motus imprimatur; ex quo momenta omnium harum virium reſpectu axis cuiuscunque ſe mutuo deſtruant, neceſſe eſt. At trium virium p, q, r momentum reſpectu axis IA in plagam BC eſt $= ry - qz$; reſpectu vero axis IB in plagam CA eſt $= pz - rx$; et reſpectu axis IC, in plagam AB eſt $= qx - py$, vnde tres ſequentes conditiones prioribus ſunt adiiciendae:

$$4^\circ.\ \int(ry - qz) = 0;\ 5^\circ.\ \int(pz - rx) = 0;\ 6^\circ.\ \int(qx - py) = 0.$$

Facile autem patet, dummodo hae ſex conditiones locum habeant, momenta virium reſpectu omnium plane axium, vtcunque accipiantur, pariter in nihilum abire.

Nunc ſex iſtae conditiones ſufficerent, ſi totum corpus eſſet perfecte rigidum, ſin autem conſtet ex partibus inuicem flexuris iunctis, neceſſe inſuper eſt, vt vires ſollicitantes cum vi elaſtica cuiusque flexurae, in aequilibrio conſiſtant. Sit igitur in N eiusmodi flexura, cuius axis inflexionis ſit recta tu vtcunque ad ternos axes inclinata, et ex ratione iuncturae et quantitate inflexionis dabitur elaſticitatis momentum, quo reſtitutio in ſtatum naturalem circa axem tu intenditur. Sit Eu hoc elaſticitatis momentum, atque ad aequilibrium requiritur vt virium ſollicitantium momenta reſpectu eiusdem axis tu ſumta, ſint vtrinque momento elaſticitatis Eu aequalia. Cum ſcilicet omnia virium momenta reſpectu axis tu ſumta ſe mutuo deſtruant, totum corpus per flexuram tNu in duas partes diſtributum eſt conſiderandum, quarum altera cis altera trans flexuram porrigitur; atque momenta virium alteri parti applicatarum reſpectu axis tu quorum ſumma ſit Vs, momento elaſticitatis Eu ita aequalia ſunt ponenda, vt reſtitutioni in ſtatum naturalem reluctentur; tum autem ſponte ſumma momentorum ex altera parte ſumtorum, quorum ſumma eſt $= -$Vs, etiam momento elaſticitatis Eu erit

erit aequalis pariterque restitutioni aduersabitur. Hinc quaelibet flexura peculiarem suppeditat aequationem, quae omnes cum sex ante exhibitis, conditiones aequilibrii quaesitas complectuntur.

Coroll. 1.

16. Si partium iunctura ita est comparata, vt inflexioni prorsus non resistat, qui est casus corporum perfecte flexibilium, tum pro singulis flexuris vis elastica E*u* euanescit, et ex vtraque parte virium momenta respectu axis inflexionis nihilo aequalia sunt ponenda.

Coroll. 2.

17. Quo haec clariora reddantur, sint duae virgae aequales AC et BC in C ita iunctae, vt inflexae vi quacunque se in directum extendere conentur: quibus in A et B applicatae sint vires aequales A*a*, B*b* parallelae et ad vtramque virgam aeque inclinatae, in C vero applicata sit vis duplo maior C*c* illis item parallela, quae tres vires proinde erunt in aequilibrio si ambae virgae vt vnum corpus rigidum spectentur. Vt autem ob flexuram in C aequilibrium non turbetur, primum virga BC vt fixa spectetur, et vis A*a* momentum exeret ad inflexionem virgae CA augendam, quod ergo vi elasticae flexurae aequale esse debet. Simili modo si virga AC fixa concipiatur, ex vi B*b* nasce- Tab. III. Fig. 5.

nascetur momentum priori aequale et contrarium quod tamen pariter inflexionem augere conabitur, ideoque vi elasticae flexurae aequabitur. Ex quo patet quomodo virium vtrinque agentium momenta se mutuo destruant seorsim vero cum vi elastica flexurae in aequilibrio consistant.

Coroll. 3.

18. Vbicunque ergo datur flexura, ibi corpus necessario in duas partes dirimitur, quarum altera si fixa concipiatur alteri motus circa axem flexurae imprimi queat. Quae partium distinctio pro qualibet flexura quo facilius percipiatur, reliquae flexurae omnes tanquam rigescerent, sunt considerandae. Pro his autem binis partibus virium sollicitantium momenta probe a se inuicem distingui oportet.

Scholion.

19. Ex hoc principio manifesto fluunt, quae iam olim de aequilibrio corporum tam flexibilium quam elasticorum sum commentatus; dum a viribus quibuscunque sollicitantur. Ibi autem omnes flexuras tanquam in eodem plano existentes assumseram, cui simul omnes axes inflexionis essent perpendiculares. Nunc igitur idem principium ad complexum amplissimum extuli, vt ad omnia flexurae genera latissime pateret, quo quidem scientia aequilibrii maxime promota videtur. Verumtamen ipsa

huius

huius principii applicatio saepenumero ingentes adhuc difficultates inuoluit, dum virium sollicitantium momenta respectu axis cuiuscunque oblique siti non sine summa molestia definiuntur, et secundum praecepta vulgaria ad calculum reuocantur. Difficultas scilicet tum potissimum offenditur, quando axis flexurae tu ratione axium IA, IB et IC, secundum quos singulae vires sollicitantes resoluuntur, situm tenet vtcunque obliquum; tum enim nonnisi calculo perquam prolixo et taedioso, eius, respectu virium Zp, Zq et Zr momenta colliguntur, cum tamen negotium satis facile succederet, si axis tu vni principalium IA, IB et IC foret parallelus, similique modo institui posset, quo earundem virium momenta respectu ipsorum axium IA, IB, IC in solutione sunt computata. Egregium igitur subsidium scientiae aequilibrii allatum est censendum sequente propositione, qua ostensurus sum, quomodo ex virium quarumcunque momentis respectu ternorum axium inter se normalium inuentis, facile definiri possit earundem virium momentum respectu alius cuiusque axis obliqui per idem punctum ducti:

Problema 2.

20. *Si dentur virium quarumcunque momenta respectu ternorum axium* IA, IB, IC *inter se normalium in puncto* I, *inuenire earundem virium momentum respectu axis cuiuscunque obliqui* IO *per idem punctum* I *traiecti.* Tab. III. Fig. 6.

Solutio.

Tota haec inuestigatio commodissime ad trigonometriam sphaericam reduci videtur. Centro ergo I radio $= r$ sphaera descripta intelligatur, cuius superficies ab illis ternis axibus traiiciatur in punctis A, B, C, ita vt arcus AB, BC, CA sint quadrantes, in puncto O autem transeat axis obliquus IO, ad quod ducantur arcus circulorum maximorum AO, BO, CO. His positis sint virium sollicitantium momenta respectu

axis $IA = Lr$; in plagam BC

axis $IB = Mr$; in plagam CA

axis $IC = Nr$; in plagam AB.

Iam quaecunque sint istae vires, earum loco hic eiusmodi vires determinatae substituantur, quae eadem momenta gignant, iisque propterea sint aequivalentes. Quare in puncto B applicata concipiatur vis $BL = L$, cuius directio arcum BC in B tangat, quae cum sit normalis in radium BI axi IA perpendicularem, momentum dabit respectu axis $IA = Lr$ in plagam BC tendens, et quia haec vis cum reliquis axibus IB et IC in eodem plano iacet, eorum respectu nulla praebebit momenta. Simili modo in C applicata concipiatur vis $CM = M$ secundum tangentem arcus CA cuius momentum respectu axis IB erit $= Mr$ in plagam CA tendens, respectu reliquorum vero axium nullum producit

ducit momentum. Denique etiam in A concipiatur vis $AN = N$ secundum directionem AB, vnde nascitur momentum respectu axis $IC = Nr$ in plagam AB. Cum igitur hae tres vires $BL = L$; $CM = M$ et $AN = N$ ipsa momenta proposita respectu ternorum axium IA, IB et IC exhibeant, eas loco virium, quaecunque fuerint, vnde ista momenta sunt nata, substituere licebit, ita vt nunc tota quaestio huc redeat, vt harum trium virium momenta respectu axis obliqui IO definiantur. Pro situ igitur axis IO ponantur anguli

$$AIO = \lambda,\ BIO = \mu \text{ et } CIO = \nu$$

qui a se inuicem ita pendent vt sit $\cos.\lambda^2 + \cos.\mu^2 + \cos.\nu^2 = 1$ et cum ratio trium virium sit eadem, vis $BL = L$ ad arcum BO inclinata angulo OBL resoluatur in duas inter se normales et in superficie sphaerae sitas, quarum altera in BO cadat, quae erit $= L \cos. OBL$, altera vero huic normalis $= L \sin. OBL$, quarum illa respectu axis IO nullum praebet momentum quia eius directio cum hoc axe in eodem plano existit, haec vero cum sit ad planum IBO ideoque etiam ad rectam BS ex B in IO normaliter ductam perpendicularis dabit respectu axis IO momentum $= L. \sin. OBL. BS$ in plagam BC. Est vero $BS = r \sin. BIO = r \sin. BO$, sicque istud momentum fit $= Lr \sin. BO. \sin. OBL$. Producatur arcus AO in P, vt sit AP quadrans et in arcum BC normalis; atque in triangulo sphaerico

 rectan-

rectangulo BOP erit $\sin. OP = \sin. BO : \sin. OBL$ hincque momentum illud $= Lr \sin. OP = Lr \cos. AO = Lr \cos. \lambda$. Simili modo ex vi $CM = M$ respectu axis IO colligetur momentum $= Mr \cos. \mu$, in plagam CA, et ex vi $AN = N$ momentum $= Nr \cos. \nu$ in plagam AB. Quae plagae cum ratione motus circa axem IO generandi conueniant, ex viribus sollicitantibus, quarum momenta Lr, Mr, Nr respectu axium IA, IB, IC sunt cognita, concluditur fore momentum respectu axis obliqui IO =

$$Lr \cos. \lambda + Mr \cos. \mu + Nr \cos. \nu$$

in plagam ABC, quod ergo ex momentis datis facili negotio obtinetur.

Coroll. 1.

21. Si axis IO in aliquem principalium veluti IA incidat momentum ipsi Lr fiet aequale, quod inde est manifestum, quia arcus $AO = \lambda$ euanescit, et bini reliqui $BO = \mu$ et $CO = \nu$ euadunt quadrantes.

Coroll. 2.

22. Fieri potest vt momentum respectu axis IO euanescat, idque infinitis modis. Angulo enim $AIO = \lambda$ pro lubitu assumto, reliquos μ et ν ita assumere licet vt fiat $L \cos. \lambda + M \cos. \mu + N \cos. \nu = 0$ manente $\cos. \lambda^2 + \cos. \mu^2 + \cos. \nu^2 = 1$. Cum enim inde sit $\cos. \nu = \frac{-L \cos. \lambda - M \cos. \mu}{N}$ fit $NN \sin. \lambda^2 = (MM + NN) \cos. \mu^2 + 2 LM \cos. \lambda \cos. \mu + LL \cos. \lambda^2$

hinc-

hincque $\cos.\mu = \frac{-LM\cos.\lambda \pm \surd(NN(MM+NN)\sin.\lambda^2 - LLNN\cos.\lambda^2)}{MM+NN}$

vel $\cos.\mu = \frac{-LM\cos.\lambda \pm N\surd((LL+MM+NN)\sin.\lambda^2 - LL)}{MM+NN}$

quod fieri poteſt dum ſit $\sin.\lambda > \frac{L}{\surd(LL+MM+NN)}$, eritque tum $\cos.\nu = \frac{-LN\cos.\lambda \mp M\surd((LL+MM+NN)\sin.\lambda^2 - LL)}{MM+NN}$

et anguli μ et ν prodeunt reales.

Coroll. 3.

23. Caſus deinde imprimis notatu dignus occurrit, quo virium momentum reſpectu axis IO fit omnium maximum; euenit hoc ſi hic axis ita capiatur vt ſit

$\cos.\lambda = \frac{L}{\surd(L^2+M^2+N^2)}$; $\cos.\mu = \frac{M}{\surd(L^2+M^2+N^2)}$; $\cos.\nu = \frac{N}{\surd(L^2+M^2+N^2)}$;
tum enim eius reſpectu erit momentum $= r \surd(L^2 + M^2 + N^2)$.

Coroll. 4.

24. Huius ergo problematis ope momentum virium corpus ſollicitantium reſpectu cuiusque flexurae cuius axis ſitum tenet vtcunque obliquum definire, ideoque ſequens problema reſoluere poterimus.

Problema 3.

25. *Si corpus ex partibus quotcunque, quae flexuris elaſticis ſint coniunctae, compoſitum a viribus* Tab. III. Fig. 7.

 quibus-

quibuscunque sollicitetur, earum momentum respectu vniuscuiusque flexurae N, *cuius axis* tNu *situm tenet vtcunque obliquum inuestigare.*

Solutio.

Locus flexurae N ternis coordinatis inter se normalibus definiatur quae sint $IL = l$, $LM = m$, et $MN = n$ et in N tres concipiantur axes Nl, Nm Nn istis coordinatis paralleli, ad quos axis flexurae tu ita inclinetur, vt sint anguli $lNu = \lambda$, $mNu = \mu$, $nNu = \nu$ ideoque $\text{cof.}\lambda^2 + \text{cof.}\mu^2 + \text{cof.}\nu^2 = 1$, reliquae vero flexurae rigescere concipiantur. Ita corpus in hac flexura in duas partes dispescitur, quarum vtraque circa axem flexurae, motum recipere potest altera manente immota. Virium ergo quae alteri tantum parti sunt applicatae, momentum respectu axis tu indagari oportet. Huius partis sit Z punctum quodcunque coordinatis $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ definitum, cui vires sint applicatae quaecunque, quae ad ternas directiones Zp, Zq, Zr reducantur, sitque vis $Zp = p$, vis $Zq = q$, vis $Zr = r$. Iam primo harum virium momenta colligantur respectu axium fictorum Nl, Nm, Nn, ac manifestum est fore earum momenta

respectu axis $Nl = q(n-z) - r(m-y)$ in plagam mn

respectu axis $Nm = r(l-x) - p(n-z)$ in plagam nl

respectu axis $Nn = p(m-y) - q(l-x)$ in plagam lm.

Quibus

Quibus inuentis ex problemate praecedente earundem virium respectu axis flexurae *tu* momentum concluditur fore in plagam *lmn*:

$$q(n-z)\cos.\lambda - r(m-y)\cos.\lambda + r(l-x)\cos.\mu - p(n-z)\cos.\mu + p(m-y)\cos.\nu - q(l-x)\cos.\nu.$$

Omnia ergo haec momenta per totam corporis partem colligendo ob quantitates l, m, n et angulos λ, μ, ν constantes impetramus totum momentum quaesitum:

$$(m\cos.\nu - n\cos.\mu)\int p + (n\cos.\lambda - l\cos.\nu)\int q + (l\cos.\mu - m\cos.\lambda)\int r + \cos.\lambda\int(ry-qz) + \cos.\mu\int(pz-rx) + \cos.\nu\int(qx-py).$$

Coroll. 1.

26. In statu ergo aequilibrii hoc momentum vi elasticae qua flexura in N est praedita, aequale poni oportet, siquidem vis elastica hanc corporis partem, ex qua momentum est collectum in plagam contrariam *nml* flectere conatur.

Coroll. 2.

27. Cum igitur quaelibet flexura huiusmodi aequationem suppeditet, omnes hae aequationes illis sex, quas supra indicauimus adiunctae statum aequilibrii corporis determinabunt.

Scho-

Scholion.

28. En ergo vera principia, ex quibus status aequilibrii corporum flexuris elasticis praeditorum, dum a viribus quibuscunque sollicitantur, definiri debet. Quae cum latissime pateant, omnia ea quae adhuc de aequilibrio corporum flexibilium et elasticorum sunt inuestigata, in se complectuntur. In his autem inuestigationibus omnium flexurarum axes inter se paralleli sunt assumti, quo calculi euolutio magis plana et facilis redderetur; sin autem isti axes inter se non fuerint paralleli, calculus non solum maiorem molestiam inuoluit, sed etiam summopere difficile est pro omnibus inflexionibus, quae huiusmodi corporibus induci possunt, singularum partium situm ad calculum reuocare, vt principia hic stabilita in vsum vocari queant. Quae difficultas quo clarius perspiciatur, casum satis simplicem euoluam, quo corpus ex tribus tantum constat partibus quarum iuncturae axes habeant inter se normales, et quae statu naturali in directum extendantur.

Problema 4.

Tab. IV. Fig. 8. 29. *Si tres virgae* AB, BC, CD *ita sint iunctae, vt in statu naturali in directum porrigantur, iuncturae autem* B *axis* $b\beta$ *ad planum tabulae sit normalis, iuncturae* C *vero axis* $c\gamma$ *in ipsum planum cadat et ad* BC *sit normalis; inuestigare vires extremitatibus*

tatibus A *et* D *applicandas*, *quae has virgas in statu quocunque inflexo seruare valeant.*

Solutio.

Positis $AB = a$, $BC = b$, et $CD = c$, sint hae virgae per inflexionem redactae in statum ABCD, qui ita repraesentetur, vt virgae AB et BC in plano tabulae iaceant, et BC rectae AG sit parallela, ita vt flexurae B axis Bb ad idem planum sit perpendicularis, flexurae C vero axis Cc in hoc plano ad BC ideoque etiam ad axem AG sit normalis, circa quem tertia virga CD sursum sit flexa, ex cuius termino D in planum demittatur perpendiculum DH, indeque ad AG normalis HG. Sit iam angulus inflexionis in iunctura $B = \zeta$, et elasticitatis momentum $= Ee \sin.\zeta$, inflexionis autem in iunctura $C = \eta$ et elasticitatis momentum $= Ff \sin.\eta$; eritque ob BC ipsi AG parallelam angulus $BAG = \zeta$, hinc $AE = a \cos.\zeta$, et $BE = a \sin.\zeta = CF = HG$, tum vero $EF = BC = b$. Porro habebitur $CH = c \cos.\eta$ et $DH = c \sin.\eta$. Iam vires ad hunc statum conseruandum requisitae sint in A ternae $AP = P$, $AQ = Q$, et $AR = R$ in D vero similiter ternae $Dp = p$, $Dq = q$, et $Dr = r$: vnde si corpus spectetur vt rigidum primo habemus:

Tab. IV. Fig. 9.

1°. $P + p = 0$; 2°. $Q + q = 0$; 3°. $R + r = 0$.

Deinde ob $AG = a \cos.\zeta + b + c \cos.\eta$; $GH = a \sin.\zeta$; et $DH = c \sin.\eta$ erit quoque ex problemate primo:

$4°. ar \sin.\zeta - cq \sin.\eta = 0$; $5°. cp \sin.\eta - (a\cos.\zeta + b + c\cos.\eta)r = 0$

$6°. (a\cos.\zeta + b + c\cos.\eta)q - ap\sin.\zeta = 0$

quia pro viribus in A coordinatae x, y, z euanescunt, vnde hae vires ita debent esse comparatae vt sit

$$p = (a\cos.\zeta + b + c\cos.\eta)s;\quad q = as\sin.\zeta \text{ et } r = cs\sin.\eta$$

et $P = -p$; $Q = -q$; et $R = -r$.

Nunc flexura in B consideretur, et pars BA a viribus sibi applicatis de statu naturali detorquetur momento $= P.BE - Q.AE$, quod elasticitati $Ee\sin.\zeta$ aequale positum dat

$$-ap\sin.\zeta + aq\cos.\zeta = Ee\sin.\zeta$$

seu $-(ab + ac\cos.\eta)s = Ee$; hincque $s = \frac{-Ee}{a(b + c\cos.\eta)}$.

Denique pro flexura C consideretur pars CD, cuius vires praebent momentum de statu naturali detorquens $= r.CH - p.DH$ momento elasticitatis $Ff.\sin.\eta$ aequandum, vnde prodit

$$-c(a\cos.\zeta + b)s = Ff \text{ seu } s = \frac{-Ff}{c(a\cos.\zeta + b)}.$$

Ex quo patet inter ambas inflexiones certam relationem intercedere debere, vt a duabus tantum viribus in terminis A et D applicatis aequilibrium seruari possit: oportet scilicet sit $Eec(a\cos.\zeta + b) = Ffa(b + c\cos.\eta)$; ac tum vires ante assignatae huic statui inflexo conseruando erunt pares.

Coroll.

Coroll. 1.

30. Quia tres vires in A applicatae cum tribus in D applicatis in aequilibrio consistere debent, vna vis illis aequiualens vni his aequiualenti aequalis et contraria esse debet; facile autem intelligitur ambas has vires in rectam AD extremitates iungentem cadere debere.

Coroll. 2.

31. Hoc etiam cum formulis inuentis egregie conuenit, si enim extremitates A et D filo constrictae concipiantur cuius tensio sit $=T$, posita recta $AD=k$, habebimus vires assumtas $P=\frac{a\cos.\zeta+b+c\cos.\eta}{k}T$; $Q=\frac{a\sin.\zeta}{k}T$, et $R=\frac{c\sin.\eta}{k}T$

ideoque $s=\frac{T}{k}$.

Coroll. 3.

32. Hinc ergo interuallum $AD=k$ cum tensione T in computum ducendo erit primo $a(b+c\cos.\eta)=\frac{Eek}{T}$ et $c(a\cos.\zeta+b)=\frac{Ffk}{T}$: deinde vero est

$$kk=aa+bb+cc+2ab\cos.\zeta+2bc\cos.\eta+2ac\cos.\zeta\cos.\eta.$$

Cum ergo sit $\cos.\zeta=\frac{Ffk}{Tac}-\frac{b}{a}$, et $\cos.\eta=\frac{Eek}{Tac}-\frac{b}{c}$, facta hac substitutione prodit:

$$kk=aa-bb+cc+\frac{2EFefkk}{TTac}$$

vnde tenſio ad hanc inflexionem continendam fit

$$T = \frac{k\sqrt{2EFef}}{\sqrt{ac(kk+bb-aa-cc)}}$$

quae ergo per longitudinem fili AD et elaſticitates vtriusque iuncturae determinatur.

Coroll. 4.

33. Ex data ergo longitudine fili ſeu interuallo $AD = k$ cum vtraque elaſticitate non ſolum tenſio T ſed etiam inflexio in vtraque iunctura definitur, dummodo eueniat, vt anguli ζ et η prodeant reales; quod fieri nequit niſi eorum coſinus ſint vnitate minores.

Scholion.

34. Solutio autem hic data maxima incommoda atque adeo contradictionem inuoluere videtur. Cum enim nullum ſit dubium, quin pro qualibet longitudine fili ſeu interuallo AD certa tenſio T requiratur ad virgas in ſtatu inflexo continendas tamen ſi pro T valor inuentus ſubſtituatur, omnino euenire poteſt, vt alterutrius angulorum ζ et η coſinus prodeat vnitate maior, ideoque inflexio impoſſibilis. Conſideremus tantum caſum quo altera elaſticitas puta Ee ſit infinita, quod eodem redit, ac ſi iunctura in E rigeſceret, nullamque plane inflexionem admitteret. Hic ergo caſus vnicam flexuram in F habens conuenire deberet cum eo, qui ſupra §. 6. eſt euolutus, et pro cuius qualibet inflexi-

flexione tensio fili T est assignata. Verum si in forma hic inuenta ponatur $Ee = \infty$, tensio T prodit quoque infinita, hincque $\operatorname{cos}.\zeta = -\frac{b}{a}$ et $\operatorname{cos}.\eta = \infty$, quod manifesto est absurdum, praeterquam quod etiam angulus ζ fieret imaginarius si $b > a$. Hic certe aperta contradictio cernitur quae non solum huic casui, quo altera iunctura rigescit est propria, sed etiam vtraque flexura admissa saepenumero locum habere debet. Nullum tamen hic calculi vitium deprehenditur, ex quo maximi erit momenti in causam huius discrepantiae a veritate diligentius inquirere.

Solutio difficultatis.

35. Analysin autem vniuersam accuratius contemplanti mox patebit solutionem inuentam non esse completam; sed in calculo quasdam solutiones, quae certis casibus solae locum habere possunt, per diuisionem aequationum esse sublatas. Scilicet cum sit $kk = aa + bb + cc + 2ab\operatorname{cos}.\zeta + 2bc\operatorname{cos}.\eta + 2ac\operatorname{cos}.\zeta\operatorname{cos}.\eta$ ob $s = \frac{-T}{k}$, binae reliquae aequationes reuera ita prodierunt expressae:

$$Ta(b + c\operatorname{cos}.\eta)\operatorname{fin}.\zeta = Eek\operatorname{fin}.\zeta \text{ et } Tc(a\operatorname{cos}.\zeta + b)\operatorname{fin}.\eta = Ffk\operatorname{fin}.\eta$$

ita vt illa etiam praebeat $\operatorname{fin}.\zeta = 0$ haec vero $\operatorname{fin}.\eta = 0$, quae quidem ambae solutiones simul consistere nequeunt, nisi sit $k = a + b + c$ hoc est in statu naturali. Verum quoties distantia $AD = k$

 minor

minor est quam $a+b+c$, toties euenire potest, vt sit vel $\zeta=0$ vel $\eta=0$, hoc est vt altera flexura nullam vim patiatur. Quodsi nimirum sit $\zeta=0$, et virgae AB et BC maneant in directum extensae; altera aequatio praebet $Tc(a+b)=Ffk$, ideoque fit tensio $T=\frac{Ffk}{c(a+b)}$; angulus autem η ex prima aequatione $kk=(a+b)^2+cc+2c(a+b)\,\text{cos}.\,\eta$ definitur. Simili modo si $\eta=0$, quo casu in F nulla inflexio oritur, fiet $T=\frac{Eek}{a(b+c)}$ et $kk=(b+c)^2+aa+2a(b+c)\,\text{cos}.\,\zeta$, vnde angulus ζ cognoscitur. Sicque semper pro quolibet interuallo $AD=k$ duae solutiones locum habent, quarum altera inflexione in E caret, altera in F, atque nunc demum intelligere licet, cur aequilibrium plane non detur, quod duplici inflexione gaudeat. Duplex nempe inflexio locum habere nequit, nisi sub conditionibus in solutione contentis, quae huc redeunt, vt cum sit $\text{cos}.\,\zeta<1$ et $\text{cos}.\,\eta<1$, fiat $Eek<Ta(b+c)$ et $Ffk<Tc(a+b)$; Quia vero tum est vti inuenimus $T=\frac{k\sqrt{2EFef}}{\sqrt{ac(kk+bb-aa-cc)}}$, hae conditiones dant $\frac{Ee}{Ff}<\frac{2a(b+c)^2}{c(kk+bb-aa-cc)}$ et $\frac{Ee}{Ff}>\frac{a(kk+bb-aa-cc)}{2c(a+b)^2}$, quorum quidem limitum ille manifesto maior est hoc, cum ex comparatione instituta sequatur

$$4ac(a+b)^2(b+c)^2>ac(kk+bb-aa-cc)^2 \text{ seu}$$
$$2(a+b)(b+c)>kk+bb-aa-cc \text{ hincque}$$
$$(a+b+c)^2>kk \text{ vti rei natura postulat.}$$

Nisi

Nisi ergo pro sumto interuallo $AD = k$ ratio elasticitatum $\frac{Ee}{Ff}$ intra illos limites continteatur, tensione fili AD duplex inflexio produci nequit, vt aequilibrium oriatur.

Coroll. 1.

36. Hae ergo conditiones, ratione elasticitatum $\frac{Ee}{Ff}$ vt data spectata, huc redeunt vt sit

$$1^\circ.\ kk < aa + cc - bb + \frac{2a(b+c)^2}{c} \cdot \frac{Ff}{Ee} \text{ et}$$

$$2^\circ.\ kk < aa + cc - bb + \frac{2c(a+b)^2}{a} \cdot \frac{Ee}{Ff}$$

quarum quantitatum minor si adhuc maior fuerit quam $(a+b+c)^2$, pro quouis interuallo $AD = k$, duplex inflexio in aequilibrium ingredi potest, sin autem ea minor sit quam $(a+b+c)^2$, tantum in maiore fili contractione tale aequilibrium obtineri potest.

Coroll. 2.

37. Quodsi tres virgae sint longitudine aequales, seu $b = c = a$ conditiones illae dant

$$1^\circ.\ kk < aa\left(1 + \frac{8Ff}{Ee}\right);\quad 2^\circ.\ kk < aa\left(1 + \frac{8Ee}{Ff}\right).$$

Quare si ambae elasticitates sint pares, vtraque dat $k < 3a$ et pro omni fili contractione tale aequilibrium dabitur, vnde fit tensio $T = \frac{Eek\sqrt{2}}{a\sqrt{(kk-aa)}}$ ob $Ff = Ee$, et inflexiones $\operatorname{cos}.\zeta = \frac{\sqrt{(kk-aa)}}{a\sqrt{2}} - 1$ et $\operatorname{cos}.\eta = \frac{\sqrt{(kk-aa)}}{a\sqrt{2}} - 1$, vt sit $\eta = \zeta$ seu $\operatorname{cos}.\tfrac{1}{2}\zeta = \operatorname{cos}.\tfrac{1}{2}\eta = \sqrt[4]{\frac{kk-aa}{8aa}}$, et $T = \frac{Eek}{aa(1+\operatorname{cos}.\zeta)}$.

Coroll.

Coroll. 3.

38. Quodsi autem eodem casu $b=c=a$, ambae elasticitates sint inaequales puta $Ee=2Ff$, seu $\frac{Ee}{Ff}=2$, debet esse

$$1^{\circ}.\ kk<aa(1+4) \text{ et } 2^{\circ}.\ kk<aa(1+16)$$

vnde tale aequilibrium non datur nisi sit $k<a\sqrt{5}$. Tum autem erit tensio $T=\frac{2Ffk}{a\sqrt{(kk-aa)}}$ et inflexio vtraque

$$\cos.\zeta=\frac{\sqrt{(kk-aa)}}{2a}-1 \text{ et } \cos.\eta=\frac{\sqrt{(kk-aa)}}{a}-1.$$

Vnde si $k=a\sqrt{5}$, inflexio in F etiamnunc est nulla et $\zeta=90^{\circ}$ ac $T=\frac{Ff\sqrt{5}}{a}$ filo autem magis adstricto vt fiat $k=2a$, tum prodit

$$\cos.\zeta=\frac{\sqrt{3}}{2}-1 \text{ et } \cos.\eta=\sqrt{3}-1, \text{ atque } T=\frac{4Ff}{a\sqrt{3}}.$$

Coroll. 4.

39. Consideremus etiam casum, quo virgae sunt inaequales sitque $a=c$ et $b=2a$, eritque

$$1^{\circ}.\ kk<aa\left(-2+\frac{18.Ff}{Ee}\right) \text{ et } kk<aa\left(-2+\frac{18.Ee}{Ff}\right).$$

Quare si fuerit vel $\frac{Ff}{Ee}<\frac{1}{9}$ vel $\frac{Ee}{Ff}<\frac{1}{9}$ nullo plane modo huiusmodi aequilibrium obtineri potest.

Scholion 1.

40. Euolutio huius casus vsu non carebit, cum inde pateat saepenumero pluribus modis aequilibrium existere posse. Quod cum eueniat in corpo-

corporibus gemina flexura praeditis, id multo magis contingere poterit, vbi adhuc plures flexurae admittuntur, quarum axes inter se non sunt paralleli; haecque circumstantia in doctrina aequilibrii sine dubio maximi est momenti. Etsi autem haec praecepta tantum ad aequilibrium pertinere videntur, tamen etiam ad motum definiendum adhiberi possunt, dummodo iis sequens principium ex natura motus petitum adiungatur.

Ex quotcunque partibus corpus fuerit compositum, vnicuique parti generalissime tribuatur motus quicunque, et inuestigentur vires ad eius variationem producendam requisitae: tum istae vires in contrarium vertantur, haeque cum viribus, quibus corpus actu sollicitatur, in aequilibrio consistere debent, ex quo praecepta pro aequilibrio definiendo tradita certum aequationum numerum suppeditabunt. Deinde vero motus vnicuique parti tributos ita temperari oportet, vt non solum singulae partes maneant contiguae, sed etiam axes iuncturarum debitum situm conseruent. Quae conditiones cum illis aequationibus coniunctae verum motum determinabunt.

Scholion 2.

41. Tametsi autem hac regula totum negotium conficitur, tamen in eius applicatione saepe insignes adhuc difficultates obstant, quo minus calculus expediri queat quod potissimum euenit, quando nec axes iuncturarum inter se sunt paralleli,

 nec

nec motus, quasi in eodem plano fieret, considerari potest. Tum enim cuique parti motum quemcunque tribuendo, praeter motum progressiuum centri grauitatis in calculum induci debet motus gyratorius circa axem quemcunque per id centrum ductum, eumque adeo variabilem; cuiusmodi autem vires ad huiusmodi motum requirantur, nonnisi pluribus formulis non parum complicatis declarari potest. Deinde etiam in tali motu generalissime considerato non facile definitur, quomodo situs axium vtriusque iuncturae, quibus haec pars cum contiguis cohaeret, varietur, quod certe non sine taedioso calculo fieri potest. Ne igitur his tantis difficultatibus hic impediar, quas forte aliquando superare licebit, inuestigationes meas ad eum tantum casum adstringam, quo omnium iuncturarum axes inter se sunt paralleli, totusque motus ad idem planum reuocari patitur, quippe a quo casu semper est exordiendum, antequam difficiliores aggredi conueniat.

Problema 5.

42. *Si corpus quodcunque in eodem plano moueatur motu quomodocunque variato, inuenire vires ad motus variationem requisitas, earumque momentum respectu cuiuscuiusque axis ad idem planum perpendicularis.*

Solutio.

Tab. IV. Fig. 10. Exhibeat tabula id planum, in quo motus fieri concipitur sitque M massa corporis, cuius centrum

trum inertiae iam verſetur in M puncto coordinatis orthogonalibus $IQ = x$ et $QM = y$ determinato; tum vero ſit Mmm momentum inertiae corporis reſpectu axis per ipſum centrum M tranſeuntis et ad planum normalis. Per punctum M ducatur recta EF ad iuncturas, quibus forte hoc corpus cum aliis cohaeret; etiamſi enim fieri poſſet, vt conſtitutis his iuncturis in E et F, recta EF non ſit tranſitura per corporis centrum inertiae, tamen ab hac irregularitate mentem abſtrahamus, quippe cuius ratio facillime in calculum induceretur. Ductis porro per M rectis Mm, $M\mu$ coordinatis x et y parallelis, vocetur angulus $FMm = \mu$. Cum iam quantitates x, y, et μ labente tempore, quod indicetur littera t varientur, quatenus haec variatio non eſt vniformis viribus opus eſt ad hanc motus mutationem in corpore efficiendam. Ac primo quidem pro motu centri inertiae requiruntur vires altera in directione $Mm = \frac{Mddx}{dt^2}$, altera in directione $M\mu = \frac{Mddy}{dt^2}$, ſumto temporis elemento dt conſtante; hic quidem eius quadratum dt^2 ſine coefficiente induco, quia notaſſe ſufficit, ſi tempora in minutis ſecundis exprimere velimus, loco dt^2 ſcribi oportere $2gdt^2$ denotante g altitudinem, ex qua graue vno minuto ſecundo delabitur, ſiquidem maſſae et vires ſollicitantes ad pondera reuocentur. Porro autem pro motu gyratorio corporis circa M requiritur virium momentum $= \frac{Mmmdd\mu}{dt^2}$, in plagam Xx, Yy tendens, quo angulus $FM\mu$ magis aperiatur. Huius ergo momenti loco, si vtrinque capiantur interualla aequalia $MX = MY = m$, iis normaliter substitui possunt vires aequales et contrariae $Xx = Yy = \frac{Mmdd\mu}{2dt^2}$, quippe quae solum motum gyratorium afficiunt, dum in se spectatae se mutuo destruunt.

His viribus inuentis, quae ad motus variationem requiruntur videamus quantum momentum praebeant respectu puncti cuiusque V seu potius axis ad planum motus normalis ibi constituti, qui cum sit axi gyrationis in M considerato parallelus, a viribus Xx et Yy in eum exeretur par momentum $= \frac{Mmmdd\mu}{dt^2}$ in eandem plagam $T\theta$ tendens. Tum vero si pro hoc puncto V statuamus coordinatas $IT = T$ et $TV = V$; a vi $Mm = \frac{Mddx}{dt^2}$ orietur in eandem plagam $T\theta$ momentum $= \frac{Mddx}{dt^2}(V - y)$, a vi autem $M\mu = \frac{Mddy}{dt^2}$ momentum in plagam contrariam $Tt = \frac{Mddy}{dt^2}(T - x)$. Hinc ergo vniuersum momentum respectu axis V in plagam $T\theta$ erit $= \frac{Mmmdd\mu}{dt^2} + \frac{Mddx}{dt^2}(V - y) - \frac{Mddy}{dt^2}(T - x) = \frac{M}{dt^2}(mmdd\mu + xddy - yddx + Vddx - Tddy)$.

Coroll. 1.

43. Notari hic in genere meretur, quod virium momentum respectu axis M inuentum idem maneat pro omnibus aliis axibus illi parallelis; quod eatenus tantum locum habet, quatenus vires illae

Xx

Xx et Yy ſunt aequales, et in contrarium directae. Quemadmodum enim earum momentum reſpectu axis M eſt $= Xx . MX + Yy . MY = Xx . XY$, ita etiam reſpectu axis F momentum in eandem plagam eſt $Xx . FX - Yy . FY = Xx . XY$, quod idem de omnibus aliis valet.

Coroll. 2.

44. Hactenus nulla ratio eſt habita punctorum E et F, vbi hoc corpus forte cum aliis ope flexurae eſt coniunctum; ita hic EF eſt recta quaecunque per M ducta, vt angulus $FMm = \mu$ in computum duci queat, quo quippe ratio motus gyratorii definitur.

Coroll. 3.

45. Quodſi ergo iuncturae E et F cum centro inertiae M non in directum iaceant, alterum tantum angulum FMm in computum expoſitum introduxiſſe ſufficit, quandoquidem alter EMl ab eo, angulo quodam conſtante differt, ita vt ſi ille fuerit $FMm = \mu$, hic futurus ſit $EMl = \mu \pm$ Conſt. et vtriusque differentiale quod in hunc calculum ingreditur, ſit idem.

Problema 6.

46. Si corpus ex tribus partibus AB, BC, CD in B et C flexura elaſtica iunctis compoſitum Tab. IV. Fig. 11.

 ſuper

ſuper plano vtcunque proiectum moueatur, eius motum definire.

Solutio.

Vtriusque flexurae in B et C axis ſit ad planum tabulae perpendicularis vt ratio motus exigit; ſumta in plano directrice IR, in eam tum ex iuncturis B et C, tum ex vniuscuiusque partis centro inertiae L, M, N demittantur perpendicula, ac ponantur coordinatae:

$IP = x$; $PL = y$; $IQ = x'$; $QM = y'$; $IR = x''$; $RN = y''$

ſit porro maſſa partis $AB = L$, partis $BC = M$, partis $CD = N$ et momenta inertiae cuiusque partis reſpectu ſui centri inertiae pro parte $AB = Lll$, parte $BC = Mmm$, parte $CD = Nnn$.

Vocentur etiam anguli $BLl = \lambda$, $CMm = \mu$, $DNn = \nu$ vbi quidem aſſumo rectam BC per ipſum centrum inertiae M partis BC tranſire, et ponantur intervalla:

$AL = a$, $LB = \alpha$, $BM = b$, $MC = \beta$, $CN = c$, $ND = \gamma$

eritque:

$$x' = x + \alpha \operatorname{coſ}.\lambda + b \operatorname{coſ}.\mu; \quad x'' = x' + \beta \operatorname{coſ}.\mu + c \operatorname{coſ}.\nu$$

$$y' = y + \alpha \operatorname{ſin}.\lambda + b \operatorname{ſin}.\mu; \quad y'' = y' + \beta \operatorname{ſin}.\mu + c \operatorname{ſin}.\nu.$$

His poſitis cuiusque partis motus progreſſiuus poſtulat vires vt vidimus ſequentes:

$$L\,l = \frac{L\,ddx}{dt^2};\quad M\,m = \frac{M\,ddx'}{dt^2};\quad N\,n = \frac{N\,ddx''}{dt^2}$$

$$L\lambda = \frac{L\,ddy}{dt^2};\quad M\mu = \frac{M\,ddy'}{dt^2};\quad N\nu = \frac{N\,ddy''}{dt^2}.$$

Quoniam igitur corpus a nullis viribus extrinſecus ſollicitari aſſumitur, primo nanciſcimur has duas aequationes

1°. $L\,ddx + M\,ddx' + N\,ddx'' = 0$; ſeu $L\,x + M\,x' + N\,x'' = A\,t + \mathfrak{A}$

2°. $L\,ddy + M\,ddy' + N\,ddy'' = 0$; ſeu $L\,y + M\,y' + N\,y'' = B\,t + \mathfrak{B}$.

Porro neceſſe eſt vt virium requiſitarum omnium momenta reſpectu axis cuiusque, ideoque etiam pro axe I euaneſcant vbi $T = 0$ et $V = 0$; vnde ſequitur haec tertia aequatio:

3°. $$L\,ll\,dd\lambda + M\,mm\,dd\mu + N\,nn\,dd\nu + L(x\,ddy - y\,ddx) + M(x'ddy' - y'ddx') + N(x''ddy'' - y''ddx'') = 0.$$

Praeterea ad flexuram vtramque eſt reſpiciendum; cum igitur in B ſit inflexio facta per angulum $= \mu - \lambda$ in C vero per angulum $\nu - \mu$, ſiquidem in ſtatu naturali puncta A, B, C, D in directum iaceant, ponatur momentum elaſticitatis in $B = E\,e$ ſin. $(\mu - \lambda)$ et in $C = F\,f$ ſin. $(\nu - \mu)$.

Hinc pro flexura B ex altera totius corporis parte AB naſcitur virium requiſitarum momentum, ob $T = x + a$ coſ. λ et $V = y + a$ ſin. λ ita expreſſum

$\frac{Llldd\lambda}{dt^2}$

$\frac{Llldd\lambda}{dt^2} + \frac{Lddx}{dt^2}.\, \alpha \sin.\lambda - \frac{Lddy}{dt^2}.\, \alpha \cos.\lambda$, in plagam tQ tendens quod negatiue sumtum cum vi elastica iuncturae quae in eandem plagam tendit in aequilibrio esse debet, ex quo obtinetur haec aequatio:

$$4°.\ \frac{Llldd\lambda}{dt^2} + \frac{L\alpha(ddx \sin.\lambda - ddy \cos.\lambda)}{dt^2} = Ee \sin.(\mu - \lambda).$$

Pro iunctura in C vero considerandis viribus ex partibus AB et BC ortis nascitur momentum in plagam cR tendens:

$$\frac{Llldd\lambda}{dt^2} + \frac{Lddx}{dt^2}(Cc - y) - \frac{Lddy}{dt^2} Pc$$

$$\frac{Mmmdd\mu}{dt^2} + \frac{Mddx'}{dt^2}.\, Cm - \frac{Mddy'}{dt^2} Qc$$

vnde colligitur haec aequatio:

$$5°.\ \frac{Llldd\lambda}{dt^2} + \frac{Lddx}{dt^2}(\alpha \sin.\lambda + (b+\beta)\sin.\mu) - \frac{Lddy}{dt^2}(\alpha \cos.\lambda + (b+\beta)\cos.\mu)$$
$$+ \frac{Mmmdd\mu}{dt^2} + \frac{Mddx'}{dt^2} \beta \sin.\mu - \frac{Mddy'}{dt^2}.\, \beta \cos.\mu = Ff \sin.(\nu - \mu).$$

Ex his ergo quinque aequationibus ad quoduis tempus t definiri oportet has quinque quantitates x, y, λ, μ, ν, cum reliquae coordinatae x', y', x'', y'' ex his iam determinentur.

Coroll. 1.

42. Tertia aequatio per se integrabilis praebet hoc integrale:

$$Llld\lambda + Mmmd\mu + Nnnd\nu + L(xdy - ydx) + M(x'dy' - y'dx')$$
$$+ N(x''dy'' - y''dx'') = Cdt$$

prima autem et secunda geminam integrationem admiserunt vbi notandum est, si totius corporis centrum

trum inertiae quiescat, constantes A, B, et 𝔄, 𝔅 euanescere.

Coroll. 2.

48. Si aequatio quinta a tertia auferatur, remanebit:

$$\begin{aligned}&Nnnddv + Lddy(x+\alpha\cos.\lambda+(b+\mathfrak{c})\cos.\mu)+Mddy'(x'+\mathfrak{c}\cos.\mu)\\ &\quad -Lddx(y+\alpha\sin.\lambda+(b+\mathfrak{c})\sin.\mu)-Mddx'(y'+\mathfrak{c}\sin.\mu)\\ &\quad +Nx''ddy''-Ny''ddx''\\ &\qquad = -Ffdt^2\sin.(\nu-\mu)\end{aligned}$$

vbi si loco x, y, x'', y'' valores supra dati substituantur prodit

$$\begin{aligned}&Nnnddv+(Lddy+Mddy'+Nddy'')(x+\mathfrak{c}\cos.\mu)+Ncddy'\cos.\nu\\ &\quad -(Lddx+Mddx'+Nddx'')(y+\mathfrak{c}\sin.\mu)-Ncddx'\sin.\nu\\ &\qquad = -Ffdt^2\sin.(\nu-\mu)\end{aligned}$$

quae ob aequat. n. 1 et 2 contrahitur in hanc

$$Nnnddv - Nc(ddx''\sin.\nu - ddy''\cos.\nu) = -Ffdt^2\sin.(\nu-\mu)$$

quae eadem prodiisset statim, si elasticitatem flexurae in C cum momento virium ad alteram partem CD pertinentium comparauissem.

Coroll. 3.

49. Subtrahamus quartam aequationem a quinta, et fiet:

$$\begin{aligned}&Mmmdd\mu + Lddx(b+\mathfrak{c})\sin.\mu + Mddx'.\mathfrak{c}\sin.\mu\\ &\quad -Lddy(b+\mathfrak{c})\cos.\mu - Mddy'.\mathfrak{c}\cos.\mu\\ &\qquad = +Ffdt^2\sin.(\nu-\mu) - Eedt^2\sin.(\mu-\lambda)\end{aligned}$$

 sub-

substituantur hic isti valores:

$$Mddx' = -Lddx - Nddx'' \quad \text{et} \quad Mddy' = -Lddy - Nddy''$$

ac resultabit

$$Mmmdd\mu + Lb(ddx\,\text{sin.}\,\mu - ddy\,\text{cos.}\,\mu) = +Ffdt^2\,\text{sin.}(\nu-\mu)$$
$$-N\beta(ddx''\,\text{sin.}\,\mu - ddy''\,\text{cos.}\,\mu) - Eedt^2\,\text{sin.}(\mu-\lambda).$$

Coroll. 4.

50. Praeter aequationes ergo iam integratas, vel potius loco aequationum n°. 3. 4 et 5 has euolui conueniet:

$$Llldd\lambda + La(ddx\,\text{sin.}\,\lambda - ddy\,\text{cos.}\,\lambda) = Eedt^2\,\text{sin.}(\mu-\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l} Mmmdd\mu + Lb(ddx\,\text{sin.}\,\mu - ddy\,\text{cos.}\,\mu) \\ \quad -N\beta(ddx''\,\text{sin.}\,\mu - ddy''\,\text{cos.}\,\mu) \end{array}\right\} = \begin{array}{l} +Ffdt^2\,\text{sin.}(\nu-\mu) \\ -Eedt^2\,\text{sin.}(\mu-\lambda) \end{array}$$

$$Nnndd\nu - Nc(ddx''\,\text{sin.}\,\nu - ddy''\,\text{cos.}\,\nu) = -Ffdt^2\,\text{sin.}(\nu-\mu)$$

ex quarum contemplatione insignem analogiam colligere licet.

Scholion.

51. Quodsi scilicet ponamus:

$$\frac{Lddx}{dt^2} = p;\ \frac{Lddy}{dt^2} = q;\ \frac{Nddx''}{dt^2} = -p';\ \frac{Nddy''}{dt^2} = -q' \ \text{hincque}$$

$$\frac{Mddx'}{dt^2} = p' - p \quad \text{et} \quad \frac{Mddy'}{dt^2} = q' - q$$

tres postremae aequationes has induunt formas:

$$\frac{Llldd\lambda}{dt^2} + a(p\,\text{sin.}\,\lambda - q\,\text{cos.}\,\lambda) = Ee\,\text{sin.}(\mu-\lambda)$$

$\frac{Mmmdd\mu}{dt^2}$

$$\frac{Mmm\,dd\mu}{dt^2} + b(p\sin.\mu - q\cos.\mu) = + Ff\sin.(\nu-\mu)$$
$$+ \mathfrak{b}(p'\sin.\mu - q'\cos.\mu) - Ee\sin.(\mu-\lambda)$$
$$\frac{Nnn\,dd\nu}{dt^2} + c(p'\sin.\nu - q'\cos.\nu) = - Ff\sin.(\nu-\mu).$$

Ac ſi in prioribus aequationibus hos valores aſſumtos ſubſtituamus, ſequentes obtinebimus determinationes:

$$p = \frac{-L(M+N)a\,dd.\cos.\lambda - L((M+N)b + N\mathfrak{b})dd.\cos.\mu - LNc\,dd.\cos.\nu}{(L+M+N)dt^2}$$
$$q = \frac{-L(M+N)a\,dd.\sin.\lambda - L((M+N)b + N\mathfrak{b})dd.\sin.\mu - LNc\,dd.\sin.\nu}{(L+M+N)dt^2}$$
$$p' = \frac{-LNa\,dd.\cos.\lambda - N(Lb + (L+M)\mathfrak{b})dd.\cos.\mu - N(L+M)c\,dd.\cos.\nu}{(L+M+N)dt^2}$$
$$q' = \frac{-LNa\,dd.\sin.\lambda - N(Lb + (L+M)\mathfrak{b})dd.\sin.\mu - N(L+M)c\,dd.\sin.\nu}{(L+M+N)dt^2}$$

qui valores ſi ibi ſubſtituantur, ternae tantum erunt variabiles λ, μ, ν quas ad datum tempus t definiri oportet, ad quod tres illae aequationes ſufficiunt. Attendenti autem facile patebit quantitates p et q vires deſignare quibus partes AB et BC in iunctura B praeter elaſticitatem cohaerent, ſeu quae eas a ſe inuicem diuellere conantur.

Alia Solutio eiusdem Problematis.

52. Statim igitur vires, quibus partes in ſe mutuo agunt praeter iuncturae cuiusque elaſticitatem, in calculum introducere licet, vnde hoc commodi aſſequimur, vt motum cuiusque partis ſeorſim definire queamus neque amplius opus ſit, prin-

 cipium

cipium aequilibrii in subsidium vocari. Factis ergo iisdem denominationibus, quibus ante sumus vsi, perpendendum est, binas partes contiguas ob nexum certis viribus in se mutuo agere, quibus efficitur ne a se inuicem diuellantur. In iunctura igitur B sumamus partem AB ob nexum cum parte sequente BC sollicitari binis viribus $Bb' = p$ et $B\mathfrak{G} = q$ secundum directionem coordinatarum, atque ab iisdem viribus pars BC in plagas contrarias afficietur. Simili modo iunctura C exerat in partem BC vires $Cc' = p'$ et $C\gamma = q'$, quae ergo contrario modo agent in partem CD.

53. Iam singularum partium motum seorsim euoluamus, et cum pars prima AB sollicitetur viribus $Bb' = p$ et $B\mathfrak{G} = q$ praeter vim elasticitatis in iunctura B, quae motum progressiuum non afficit. Quare pro motu progressiuo huius partis habebimus:

$$\frac{L\,ddx}{dt^2} = p \quad \text{et} \quad \frac{L\,ddy}{dt^2} = q$$

vbi notandum est, si haec pars AB insuper extrinsecus a viribus quibuscunque sollicitaretur, earum rationem etiam in motus huius determinationem introduci oportere. Quod vero ad motum gyratorium huius partis AB circa suum centrum inertiae L attinet, quo angulum $BLl = \lambda$ augeri sumimus, euidens est virium p et q momentum ad hunc motum accelerandum esse $= aq\,\text{cos}.\lambda - ap\,\text{sin}.\lambda$. Elasticitatis autem in B momentum $Ee\,\text{sin}.(\mu - \lambda)$ solum motum

motum gyratorium afficit, huiusque quidem partis accelerando; dum eo sequentis BC motus gyratorius retardabitur, ex quo pro acceleratione motus gyratorii partis AB obtinemus $\frac{Llldd\lambda}{dt^2} = \alpha(q\,\text{cos}.\lambda - p\,\text{sin}.\lambda) + Ee\,\text{sin}.(\mu-\lambda)$.

54. Secunda iam pars BC sollicitatur in B a viribus $Bb' = -p$, $B\mathfrak{b} = -q$, in C vero a viribus $Cc' = p'$, $C\gamma = q'$ vnde pro motus progressiui acceleratione colligimus:

$$\frac{Nddx'}{dt^2} = p' - p \quad \text{et} \quad \frac{Nddy'}{dt^2} = q' - q.$$

Ex iisdem vero viribus nascitur momentum pro motu gyratorio circa centrum inertiae M accelerando $= \mathfrak{b}q'\,\text{cos}.\mu - \mathfrak{b}p'\,\text{sin}.\mu + bq\,\text{cos}.\mu - bp\,\text{sin}.\mu$; praeterea vero etiam a momento elasticitatis in C, quod est $Ff\,\text{sin}.(\nu-\mu)$ acceleratur, a praecedente autem in B retardatur, vnde colligitur haec aequatio

$$\frac{Nmmdd\mu}{dt^2} = (\mathfrak{b}q' + bq)\text{cos}.\mu - (\mathfrak{b}p' + bp)\text{sin}.\mu + Ff\,\text{sin}.(\nu-\mu) - Ee\,\text{sin}.(\mu-\lambda).$$

55. Tertia pars, quia est vltima, tantum in C sollicitatur a viribus $Cc' = -p'$ et $C\gamma = -q'$, tum vero etiam a momento elasticitatis in $C = Ff\,\text{sin}.(\nu-\mu)$, quo motus tantum gyratorius retardatur. Pro motu ergo progressiuo habebimus:

$$\frac{Nddx''}{dt^2} = -p' \quad \text{et} \quad \frac{Nddy''}{dt^2} = -q'$$

at quia ex his viribus nafcitur momentum ad motum gyratorium circa N accelerandum $= c q' \text{cof.} \nu - c p' \text{fin.} \nu$ ifta elicitur aequatio

$$\frac{Nnnddv}{dt^2} = c(q' \text{cof.} \nu - p' \text{fin.} \nu) - Ff \text{fin.} (\nu - \mu).$$

56. Hae formulae egregie conueniunt cum ante inuentis, ex quo haec methodus foluendi eo maiore attentione videtur digna, quod non folum negotium multo commodius conficit, fed etiam ita eft comparata, vt nifi ante eius confenfum cum praecedente perfpexiffemus, vix audacter affeuerare effemus aufi, ab elafticitate iuncturarum motum centri inertiae fingularum partium prorfus non affici. Aequationibus autem ex his quafi nouis principiis erutis adiungi conuenit hafce

$$x' - x = \alpha \text{cof.} \lambda + b \text{cof.} \mu; \quad x'' - x' = \mathfrak{b} \text{cof.} \mu + c \text{cof.} \nu$$
$$y' - y = \alpha \text{fin.} \lambda + b \text{fin.} \mu; \quad y'' - y' = \mathfrak{b} \text{fin.} \mu + c \text{fin.} \nu.$$

Hincque fimul perfpicitur, fi plures tribus partes inter fe per flexuras elafticas effent coniunctae, atque adeo etiam fingulae inter mouendum a viribus quibuscunque follicitarentur, quomodo motus determinatio ad formulas analyticas perduci debeat.

Euolu-

Euolutio analytica formularum inuentarum.

57. Cum fit ex hoc lemmate:

$$\text{fin.}\,\Phi\, dd.\,\text{cof.}\,\omega - \text{cof.}\,\Phi\, dd.\,\text{fin.}\,\omega = -dd\omega\,\text{cof.}\,(\omega-\Phi) + d\omega^2\,\text{fin.}\,(\omega-\Phi)$$

fi ad contrahendas formulas fupra §. 51. inuentas ponamus:

$$\frac{L(M+N)}{L+M+N} = P;\quad \frac{LN}{L+M+N} = Q \quad \text{et} \quad \frac{N(L+M)}{L+M+N} = R$$

aequationes illae motum continentes has induunt formas:

$$\text{I.}\quad Llldd\lambda + P\alpha\alpha dd\lambda + (Pb+Q\beta)\alpha dd\mu\,\text{cof.}(\mu-\lambda) - (Pb+Q\beta)\alpha d\mu^2\,\text{fin.}(\mu-\lambda) + Q\alpha c dd\nu\,\text{cof.}(\nu-\lambda) - Q\alpha c d\nu^2\,\text{fin.}(\nu-\lambda) = Eedt^2\,\text{fin}\,(\mu-\lambda)$$

$$\text{II.}\quad Mmmdd\mu + (Pbb + 2Qb\beta + R\beta\beta)dd\mu + (Pb+Q\beta)\alpha dd\lambda\,\text{cof.}(\mu-\lambda) + (Pb+Q\beta)\alpha d\lambda^2\,\text{fin.}(\mu-\lambda) + (Qb+R\beta)c dd\nu\,\text{cof.}(\nu-\mu) - (Qb+R\beta)c d\nu^2\,\text{fin.}(\nu-\mu) = Ffdt^2\,\text{fin}\,(\nu-\mu) - Eedt^2\,\text{fin.}(\mu-\lambda)$$

$$\text{III.}\quad Nnndd\nu + Rccdd\nu + Q\alpha c dd\lambda\,\text{cof.}(\nu-\lambda) + Q\alpha c d\lambda^2\,\text{fin.}(\nu-\lambda) + (Qb+R\beta)c dd\mu\,\text{cof.}(\nu-\mu) + (Qb+R\beta)c d\mu^2\,\text{fin}\,(\nu-\mu) = -Ffdt^2\,\text{fin.}(\nu-\mu)$$

quae

quae primum additae integrationem admittunt:

$$(Lll+Paa)d\lambda+(Mmm+Pbb+2Qb\beta+R\beta\beta)d\mu+(Nnn+Rcc)d\nu$$
$$+(Pb+Q\beta)a(d\lambda+d\mu)\operatorname{cof.}(\mu-\lambda)+Qac(d\lambda+d\nu)\operatorname{cof.}(\nu-\lambda)$$
$$+(Qb+R\beta)c(d\mu+d\nu)\operatorname{cof.}(\nu-\mu)=Cdt.$$

Tum si prima per $d\lambda$ secunda per $d\mu$ et tertia per $d\nu$ multiplicetur summa itidem fit integrabilis datque:

$$\tfrac{1}{2}(Lll+Paa)d\lambda^2+\tfrac{1}{2}(Mmm+Pbb+2Qb\beta+R\beta\beta)d\mu^2+\tfrac{1}{2}(Nnn+Rcc)d\nu^2$$
$$+(Pb+Q\beta)ad\lambda d\mu\operatorname{cof.}(\mu-\lambda)+Qacd\lambda d\nu\operatorname{cof.}(\nu-\lambda)+(Qb+R\beta)cd\mu d\nu\operatorname{cof.}(\nu-\mu)$$
$$=Eedt^2\operatorname{cof.}(\mu-\lambda)+Ffdt^2\operatorname{cof.}(\nu-\mu)+Ddt^2.$$

SECTIO

SECTIO PRIMA DE STATV AEQVILIBRII FLVIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

CAPVT I.

DE NATVRA ET VARIETATE FLVIDORVM.

Phaenomenon 1.

1.

Si fluidum a vi quacunque pressum in aequilibrio versetur, tum pressio per totam fluidi massam ita aequaliter diffunditur, vt omnes eius particulae parem vim sustineant.

Illustratio.

Sermo hic est de fluido in aequilibrio existente quod propterea omni motu destituitur, non obstante vi, qua id premi assumimus: vel si primo actionis initio, motus quidam in fluido fuerit excitatus, eo demum cessante hic status fluidi consideratur, ita vt fluidum iam et pressionem sustineat, et in aequilibrio versetur. Quod quo clarius percipiatur, sit fluidum vasi A B C D E F inclusum, in quo ope emboli pO tubo ABb insertae data vi prematur, cuius directio in O ad superficiem fluidi perpendicularis est intelligenda. Nunc igitur quando affirmamus hanc pressionem per totam fluidi massam diffundi, id primo, respectu parietum vasis ita est interpretandum, vt si vspiam esset foramen embolo O aequale et operculo CD claudendum, id parem vim esset sustentaturum, ideoque aequali vi apprimendum, ne a fluido depellatur; cuius quippe vis operculum vrgens nq ipsi vi prementi pO est aequalis. Si aliud simile operculum cd maius minusue concipiatur quam basis emboli O vis id secundum directionem mr vrgens in eadem ratione maior erit minorue quam vis emboli. Vbique ergo vasis parietes intus a fluido pelluntur talibus viribus, quae si spatiola, in quae agunt, basi emboli O sint aequalia, singulae ipsi vi embolum trudenti erunt aequales: deinde vero obseruandum est, singulas has vires in superficiem, quam vrgent, esse perpendiculares, quod quidem ex notione pressionis

Tab. V. Fig. 1.

per

per se est manifestum. Denique haec pressio non solum in latera vasis intus agit, sed etiam per vniuersam fluidi massam aeque viget, in medio namque fluidi si concipiamus molem quamcunque fgh haec a fluido ambiente vndequaque pari vi comprimetur, eamque idcirco sustinere debet, ne in spatium angustius compellatur, vbi quidem pariter liquet, has vires perpetuo in spatia, quibus applicantur esse normales. Hic autem perinde se res habet, siue moles fgh sit corpus peregrinum, siue ipsius fluidi vas implentis pars.

Coroll. 1.

2. Si ergo emboli basis O dicatur $= ff$ et vis embolum vrgens $= p$, tum sumto in vasis lateribus spatiolo $CD = ff$ id extrorsum pelletur vi $nq = p$, sin autem aliud sumatur spatiolum $cd = gg$, id sustinebit vim $nr = \frac{gg}{ff} p$ cum sit haec vis ad illam p vti gg ad ff.

Coroll. 2.

3. Cum virium mensura commodissime a ponderibus petatur, si loco vis p substituamus pondus columnae, basin $= ff$ et altitudinem $= a$ habentis, quae quidem ex nota materia constare est concipienda, tum soliditas aff praebebit mensuram vis p hincque pro alio quocunque spatiolo gg vis id vrgens erit $= agg$.

Coroll. 3.

4. Hic ergo modus vim prementem p exhibendi hoc insigne praestat commodum, vt sola illius columnae altitudo a sufficiat omnibus pressionibus per totam fluidi massam cognoscendis: quodlibet enim spatiolum vim sustinet aequalem ponderi columnae, cuius basis ipsi isti spatiolo aequatur altitudo vero perpetuo est $=a$.

Scholion 1.

5. Hic manifesto assumsimus fluidum a nulla alia vi sollicitari praeter eam qua embolus vrgetur: a grauitate igitur aliisque similibus viribus, quae immediate in singulas fluidi particulas agere solent, hic mentem omnino abstrahi oportet. Fluidum ergo vasi inclusum grauitatis expers concipi debet, et sub hac tantum conditione phaenomenum est accipiendum: si enim fluidum grauitate esset praeditum, partes inferiores praeter pressionem emboli etiam a pondere superiorum deprimerentur, indeque eueniret, vt vasis latera circa fundum maiori vi premerentur, quam in summitate. Quemadmodum autem a grauitate aliisque similibus viribus pressionum aequalitas hic stabilita perturbetur, deinceps tam pro statu aequilibrii quam motus inuestigabimus, hoc loco tantum notasse iuuabit maximum discrimen inter vires externas seu extrinsecus in fluidum agentes, cuiusmodi est haec vis embolo applicata

data, et inter vires grauitati similes, quae quasi intus singulas fluidi particulas sollicitant esse constituendum.

Scholion 2.

6. Mirum omnino videri debet, quod ab vnica vi, eaque quantumuis parua quasi innumerabiles nouae vires quantumuis magnae generari queant. Statim enim ac fluidum in spatiolo O ab embolo premitur, tota simul vasis cauitas interna, quantumuis ea fuerit ampla in singulis elementis a paribus viribus vrgetur, si scilicet elementa basi emboli O aequalia capiantur, ex quo amplitudinem vasis augendo haec multiplicatio in infinitum expandi potest. Deinde etiam eaedem vires subsistere possunt, etiamsi vis embolum premens in infinitum diminuatur, dummodo emboli basis in eadem ratione imminuatur: quem enim effectum producit vis p in spatiolum ff agens, eundem plane effectum producit vis $\frac{1}{1000}p$ spatiolo $\frac{1}{1000}ff$ applicata. Quod etsi summopere est mirandum, tamen neutiquam vt absurdum legibusque naturae contrarium spectari debet, neque enim staticae praecepta ideo in dubium vocari solent, quod vires minimae ope machinarum in immensum augeri posse ostenduntur. Cum legibus autem naturae hoc paradoxon ita conciliare licet, vt dicamus ab his viribus etiam in immensum multiplicatis nullam actionem produci: quandoquidem fluidum in aequilibrio statuitur. Sublato

lato autem aequilibrio simul atque motus exoritur, ab his tot tantisque viribus non maior effectus producitur, quam qui sit illi vi principali embolum sollicitanti consentaneus.

Scholion 3.

7. Quoniam vidimus a sola vi embolum O premente tot vires quasi per vniuersam fluidi massam excitari, eaque duplicata etiam has fieri duplo maiores hinc tuto concludi posse videtur, si eidem vasi duo huiusmodi emboli accommodentur, quorum vterque vi eadem prematur, etiam omnes pressiones in fluido duplicari debere, haec certe conclusio ei canoni inniti videtur, quod causa geminata etiam effectus duplicetur. Nihilo tamen minus haec argumentatio prorsus est fallax: neque duo illi emboli quicquam amplius praestabunt quam vnicus, quod etiam tenendum est, si multo plures eodem modo adhiberentur, quod ingens paradoxon facile diluetur, si circumstantias phaenomeni probe perpendamus. Cum enim vis np in basin nff non maiorem producit pressionem, quam vis p in basin ff agens, euidens est a duabus pluribusue aequalibus viribus, quarum singulae embolos aeque amplos trudant, eandem plane in fluido pressionem oriri debere atque ab vnica: hocque ergo casu falsum est a causa duplicata effectum duplicatum produci. Hoc autem clarius inde intelligitur, quod operculum CD foramen embolo O aequale tegens tanta vi appri-

apprimi debeat, quanta vi embolum agit, si igitur, loco operculi similis embolus adhibeatur, ei quoque aequalis vis applicari debet, eum tantum in finem, vt aequilibrium conseruetur: neque ergo inde noua pressio in fluido generari poterit: sin autem hic alter embolus maiori minoriue vi impellatur, aequilibrium plane tollitur atque effectus inde oriundi determinatio non ad hunc locum pertinet.

Conclusio.

8. Ex hoc phaenomeno colligimus naturam fluidorum aptissime in ea proprietate collocari, quod quaelibet pressio iis applicata per totam eorum massam ita diffundatur vt omnes eorum partes eandem sentiant pressionem, quatenus scilicet fluidum in aequilibrio persistit.

Explicatio.

9. Natura fluidi in eiusmodi proprietate constitui debet, quae non solum omnibus fluidis sit communis, sed etiam vt omnis materia in quam eadem proprietas competit, recte pro fluido habeatur. Aequabilis autem cuiusque pressionis diffusio per omnes fluidi partes vtique eiusmodi est proprietas, quae non solum in omnibus fluidis agnoscitur, sed etiam omnes materiae statim ac proprietate hac fuerint praeditae, merito ad genus fluidorum referuntur; tum vero etiam nulla materia hac proprietate desti-

destituta pro fluida haberi potest. Necessario autem haec proprietas omnia fluidorum attributa inuoluit, quae vulgo tam in particularum summa paruitate, quam cohaesionis defectu constitui solent, vt facillime sibi mutuo cedere et inter se agitari queant, nisi enim particulae essent minimae et dissolutae, perspicuum est nostram proprietatem nullo modo locum habere posse. Praecipuum autem momentum in hoc consistit, quod ex hac proprietate omnia tam aequilibrii, quam motus fluidorum principia planissime deriuari possunt, ita vt quaecunque materia hac proprietate fuerit praedita, ea necessario tam in aequilibrio, quam motu leges istis principiis innixas sequi debeat. Cum igitur huic soli proprietati vniuersa aequilibrii motusque fluidorum doctrina felicissimo successu superstruatur, dubium plane est nullum quin vera fluidorum natura et essentia in ea proprietate constitui debeat.

Scholion I.

10. Primum autem statim hac proprietate corpora fluida maxime distinguuntur a corporibus solidis: quacunque enim vi corpus solidum tabulae apprimitur, eandem praecise vim tabula sustinet idque in eadem directione, neque inde in corpore vlla vis latera versus nascitur. Scilicet si in vase ante considerato A B C D E F, corpus solidum contineretur, vel si fluidum in eo contentum per congelationem in solidum transmutaretur, tum id ab

Tab. V. Fig. I.

embo-

embolo O pressum fundum tantum oppositum E d pari vi vrgeret, multo minus, adeo sursum circa A et B vas impelleret, quemadmodum a fluido fieri obseruauimus. Tum vero etiam haec proprietas fluidum distinguit ab aceruo minimorum corpusculorum solidorum: veluti si idem vas arena esset repletum tum quidem a pressione emboli O non solum fundum, sed etiam latera vasis quampiam vim sentirent, vt foramine pertuso arena erumperet, verum tamen hae vires neutiquam inter se forent aequales, vti fit in fluido, sed fundum embolo oppositum semper maiorem vim sustineret quam latera. Quin etiam vis in latera exerta maxime foret inaequalis, dum a dispositione singulorum granulorum, prouti alia ab aliis impelluntur pendet, quemadmodum ex principiis staticis colligere licet: vix autem arena superne circa A et B, si ibi foramen fieret, esset eruptura.

Scholion 2.

11. Hinc igitur sequi videtur materiam fluidam neutiquam pro congerie plurimorum corpusculorum solidorum minimorum qualem aceruus arenae exhibet haberi posse: quoniam talis congeries nequaquam ea proprietate, in qua fluidorum naturam constituimus, foret praedita: neque etiam perfecta lubricitas his particulis solidis adiecta negotium conficere potest. Si fortasse ipsis insuper motus intestinus tribueretur, qualis a calore oriri concipitur,

etiamsi in sensus non incurrat, phaenomeno proposito satisfieret, cum per experimenta subtilissimus marmoris puluis in vase igni expositus naturam fluidi mentiatur: interim tamen merito adhuc dubitamus, an in tali materia pressiones quaquauersus aequaliter diffundantur? Hinc igitur in physica, quaestio, vtrum vltimae fluidorum particulae pro solidis haberi queant nec ne? minime adhuc confecta est censenda, neque minus dubium etiamnum videtur an vltimae solidorum particulae recte pro solidis habeantur? quoniam enim plurima corpora solida ope caloris fluida reddi possunt; si soliditas minimarum particularum fluiditati aduersaretur, ea etiam in huiusmodi solidis, admitti non posset.

Haud magis etiam liquet, quid de materiis semi-fluidis sit sentiendum, cuiusmodi sunt mel, exangia, aliaque olea crassiora, in quibus non tam particulae solidae implexae, quam nimia cohaesio fluiditati obsistere videtur. Ita etiam cera, quae in frigore est corpus satis durum, calori exposita mox butyri consistentiam adipiscitur, tum instar mellis fit corpus semi fluidum, aucto vero calore tandem ita perfecte fit fluidum, vt minimos corporum poros penetrare valeat, veluti ex iniectionibus anatomicis constat: hoc ergo casu omnes gradus a maxima duritie ad perfectam fluiditatem distinguere licet, qui ita continuo nexu inter se cohaerent, vt difficile sit limites assignare, vbi soliditas desinit et fluidi-

fluiditas incipit. Dum autem aqua congelascens in glaciem conuertitur, haec transmutatio quasi puncto temporis efficitur.

Scholion 2.

12. Non hic locus est super eiusmodi quaestionibus disputandi, neque etiam earum enodatio ad praesens institutum vllam vtilitatem esset allatura. Hic nimirum sufficit ostendisse dari eiusmodi materias, quibus fluidorum definitio hic data conveniat: verum etiamsi tales materiae, quae pro perfecte fluidis haberi queant, in mundo non existerent, nihilo tamen minus scientia cuius fundamenta hic stabilire constitui, subsisteret, summumque adeo vsum esset habitura: perinde ac quae a mechanicis de corporibus vel perfecte duris, vel perfecte elasticis traduntur, summa vtilitate non destituuntur, etiamsi existentia huiusmodi corporum in dubium sit relinquenda. In leges itaque tam aequilibrii quam motus eiusmodi corporum sum inquisiturus, in quae definitio fluiditatis hic data competat, parum sollicitus, vtrum in mundo talia corpora existant nec ne? Interim tamen nullum est dubium, quin aquae natura tam prope ad hanc definitionem accedat, vt nulla aberratio ab hac theoria sit metuenda, quod pariter de aliis materiis aeque liquidis est tenendum. Aer autem multo magis hac fluiditatis proprietate est praeditus; atque in aethere ne minimus quidem perfectae fluiditatis defectus admittendus videtur:

 haec

haec autem diuersa fluida ob alias rationes maxime a se inuicem discrepant, quod discrimen pariter ex phaenomenis accuratius inuestigari conuenit.

Phaenomenon 2.

13. Alia fluida ita comparata deprehenduntur, vt quantumuis magna vi premantur, idem semper volumen retineant: alia vero huius sunt indolis, vt quo maiori vi premantur, in eo minus spatium redigantur, antequam ad aequilibrium perveniant: in vtroque autem genere proprietas fluiditatis ante memorata aeque locum habet.

Illustratio.

Prior indoles, qua fluidum perpetuo idem volumen conseruat quantacunque vi prematur, in aqua aliisque similibus fluidis obseruatur: posterior vero aëri potissimum est propria, qui aucta vi premente continuo in spatium angustius comprimi se patitur. Quodsi nimirum A B C D E F aquam contineat, eaque ope emboli A O B prematur, quantumuis siue magna vi siue parua embolus adigatur, aqua semper idem volumen in vase occupabit, neque embolus etiamsi in infinitum aucta vi premente quicquam vlterius in tubo protrudi potest; verum vas ipsum potius diffringetur. Ponamus autem iam aqua effusa, in vase nihil praeter aërem contineri, eumque iam a data vi embolum vrgente

Tab. V. Fig. 2.

in

in statum aequilibrii esse redactum, vt nunc in vase spatium vsque ad o vbi emboli basis cernitur, occupet; in hocque statu per totam massam eadem illa pressio reperiatur, qua embolus vrgetur, vti natura fluiditatis postulat. Hoc posito si vis in embolum agens augeatur, is simul profundius in vas adigetur, donec in aequilibrium peruenerit et quo magis vis illa intendatur, in eo minus spatium aër comprimetur. Contra vero minuta vi premente, ea non amplius aërem in hoc statu retinere valebit, sed retropelletur aëre se in maius spatium expandente, donec in eum statum perueniat, vbi haec minor vis aequilibrium fuisset productura. Hocque discrimen inter aquam et aërem maxime notari meretur.

Coroll. 1.

14. Aqua igitur perpetuo eandem conseruat densitatem siue a maiore vi comprimatur siue a minore, siue etiam prorsus a nulla: vnde de aqua praedicari potest, quod cuiuis pressioni eadem densitas respondeat.

Coroll. 2.

15. Aëris autem ratio longe aliter est comparata, cum vis maior eum in minus spatium adigendo, ipsi tanto maiorem densitatem inducat. Ad quamuis ergo vim prementem certus densitatis gradus est affectus, et vicissim quaeuis densitas certam vim comprimentem supponit.

Coroll. 3.

16. Si igitur vis premens certae cuidam basi innixa ponatur $=p$ et densitas fluidi $=q$, cum scilicet in aequilibrium fuerit redactum: tum pro aqua q est quantitas constans neutiquam a vi p pendens: pro aëre vero q est certa quaedam functio ipsius p, ita vt data altera, altera simul determinetur.

Scholion 1.

17. Non obstante hac insigni differentia, tam aër quam aqua ad genus corporum fluidorum aeque refertur, propterea quod natura fluiditatis supra stabilita vtrique conuenit, in modo autem tractandi hinc maximum discrimen nascitur, siquidem in motus inuestigatione potissimum ratio densitatis a qua inertia pendit est habenda. Aqua igitur eiusmodi est fluidum, cuius densitas perpetuo manet inuariata, quomodocunque a viribus vrgeatur, quippe a quibus in minus spatium coarctari omnino nequit, ita vt ab actione virium eius densitas nullam mutationem patiatur, ex quo aqua fluidum vocari solet nullius compressionis capax. Aëri autem contra densitas, quae suae naturae sit propria, tribui nequit, quoniam prout a maioribus vel minoribus viribus vrgetur, maxime diuersos densitatis gradus recipere potest. Hinc aër dicitur fluidum compressionis capax, et quoniam cessante vi comprimente sponte se iterum relaxat, et in maius spatium expan-

pandens densitatem imminuit, vis elastica ei tribuitur. Omnino enim quanta vi opus est ad aërem in datum densitatis gradum redigendum, tanta praecise vi pollet se iterum expandendi, quemadmodum aequalitas inter actionem et reactionem postulat. Ex quo patet hanc vim elasticam aëris perpetuo vi comprimenti esse aequalem, neque differre a viribus inde per totam massam diffusis, quibus tam parietes vasis, cui aër est inclusus, quam omnes partes inter se vrgentur. Quamobrem elasticitas aëri tributa ab illa vi pressionis per primum phaenomenon stabilita non est distinguenda, quae cum etiam aquae sit communis, aliud discrimen hic non est admittendum, nisi quod aqua constanti praedita sit densitate, aër autem variabili, quae in omni statu a vi premente determinetur.

Scholion 2.

18. Experimentis autem euinci solet, densitatem aëris proxime esse vi comprimenti proportionalem, facile autem intelligitur hanc proportionalitatem non vltra certos limites locum habere posse. Si enim densitas semper esset vi comprimenti exacte proportionalis, inde sequeretur euanescente hac vi etiam densitatem euanescere debere, ita vt minima aëris portio a nulla vi compressa, se in spatium infinitum esset expansura, quod merito absurdum videtur. Contra autem non minus absurdum foret, vi comprimente in infinitum aucta, etiam densitatem

tem fieri infinite magnam, ficque aëris maffam quantumuis magnam in fpatium euanefcens compelli poffe. Quae ambo incommoda vt euitentur ftatuendum eft pro aëre tam dari denfitatem minimam eamque finitam, quam ceffante vi comprimente recipiat: quam etiam maximam pariter finitam, ad quam non nifi vi infinita redigi poffit. Repraefentet fcilicet recta AB minimam denfitatem, AC vero maximam denfitatem aëris, quarum illi vis comprimens nulla, huic vero infinita refpondeat, atque manifeftum eft, fi denfitas quaecunque media AP aëri inducatur a vi comprimente per applicatam PM repraefentata, quatenus fcilicet datae bafi innititur, tum puncta M, reperiri in eiusmodi linea curua BMV, quae in B axem AC tangat, neque vltra verfus A porrigatur, tum vero ab axe continuo recedat, et rectam CD in C axi normalem habeat pro afymtota neque etiam vltra eam continuetur. Huiusmodi lineae curuae innumerabiles excogitari poffunt, veluti fi pofita denfitate minima $AB = b$ et maxima $AC = c$ vocetur denfitas quaecunque $AP = x$ et preffio ei conueniens $PM = y$ ifta aequatio $yy = nn\frac{(x-b)^3}{c-x}$ feu $y = n(x-b)\sqrt{\frac{x-b}{c-x}}$ his conditionibus fatisfacit, fi enim $x = b$ fit $y = 0$ fi $x = c$ fit $y = \infty$ et vltra hos terminos valor ipfius y prodit imaginarius.

Tab. V. Fig. 3.

Scho-

Scholion 3.

19. Iſta formula analytica rem nobis aperit maximi momenti, cum ea non ſolum aëris indolem nobis illuſtret, ſed etiam ſimul aquae naturam, quamtumuis ea diuerſa videatur in ſe complectatur. Si enim minimam denſitatem $AB = b$ et maximam $AC = c$ inter ſe aequales fieri ponamus, habebimus hanc aequationem $y = n(x - b)\sqrt{\frac{x - b}{b - x}}$ quae neceſſario inuoluit conditionem $x = b$ ita vt denſitas tum perpetuo maneat eadem, quaecunque fuerit preſſio y. Ita aqua et aër hoc tantum a ſe inuicem diſcrepare ſunt cenſendi, quod in aëre maxima et minima denſitas, cuius eſt capax, plurimum a ſe inuicem diſtent, in aqua autem inter ſe conueniant. Quare ſi aliae concipiantur materiae aëri ſimiles, quarum denſitates maximae et minimae continuo propius ad ſe inuicem accedant, ita vt interuallum BC continuo minus ſit accipiendum, hoc modo continuo propius ad naturam aquae accedetur, quippe quae hinc reuera reſultabit interuallo BC penitus euaneſcente. Plurimum autem intererit hanc circumſtantiam probe obſeruaſſe qua tam aëris quam aquae natura eidem formulae analyticae ſubiiciuntur, ita vt haec duo fluida non vniuerſa natura ſed tantum gradu a ſe inuicem diſcrepare ſit iudicandum. Quae ergo in genere de fluido quocunque cuius denſitas maxima et minima quocunque interuallo diſcrepant, tradentur, ea aeque ad aërem atque ad aquam accommodari poterunt.

Conclusio.

20. Praecipua ergo fluidorum varietas in eo discrimine est constituenda, quod inter densitatem minimam et maximam cuius quodque fluidum capax est, intercedit; tum vero etiam in ea lege, qua a quauis pressione fluido certa densitas inducitur.

Explicatio.

21. Quae hic de densitate afferuntur, de fluidis tantum homogeneis sunt intelligenda, quae per totum spatium, quod implere concipiuntur, eadem densitate sint praedita; si enim fluidum ex diuersis materiis constaret, de cuiusque partis densitate iudicium seorsim esset ferendum. Dum autem materia homogenea consideratur, eius densitas ex tota massa per volumen, quod occupat, diuisa aestimari debet, ita vt manente massa eadem, densitas volumini reciproce proportionalis sit censenda. Hinc minima cuiuspiam fluidi densitas ex eo volumine colligi debet, in quod certa eius massa, dum a nullis viribus vrgetur, se expandit, massam scilicet per hoc volumen diuidendo, maxima vero densitas simili modo ex eo volumine, in quod eadem massa a vi infinita coarctatur. Quare aqua eiusmodi fluidum est dicendum, cuius maxima et minima densitas sint inter se aequales, ita vt eius densitas a nullis viribus vllam mutationem patiatur. In aëre autem hae duae densitates maxime discrepant minima enim

certe

certe plus quam millies minor est censenda ea quam sentimus, dum aër a pondere atmosphaerae comprimitur, maxima autem densitas, ad quam viribus non nisi infinitis redigi posset, si auri densitati aequalem aestimemus, quasi quindecies millies statum naturalem superaret; sicque maxima densitas aëris foret ad minimam vt 15000000 ad 1. ex quo immensum discrimen inter aquam et aërem colligere licet.

Scholion 1.

22. Per se manifestum est, quomodo in tanto interuallo inter binas densitates extremas, omnibus pressionibus ab euanescente, ad infinitam vsque, cuique sua definita densitas conuenire possit, cum id ex formula §. 18. exempli loco allata clarissime perspiciatur. Verum quomodo eadem formula ad naturam aquae sit accommodanda, ita vt pro omnibus pressionibus eadem prodeat densitas, non tam perspicue intelligitur, quia posito $c = b$ formulae $y = n(x-b)\sqrt{\frac{x-b}{b-x}}$ valor vel imaginarius vel nullus esse videtur. Ad hoc dubium autem diluendum statuamus differentiam minimam inter densitatem minimam b et maximam c sitque exempli gratia $b = 1000000$ et $c = 1000010$; dum pro omnibus densitatibus vires respondentes ita se habebunt, scilicet cum densitati x conueniat pressio $y = n$ $(x-$

$(x - 1000000) \sqrt{\frac{x - 1000000}{1000010 - x}}$ sequens tabella nodum soluet sumto $n = 100$

densitas x	pressio y
1000000	0
1000001	$33\frac{1}{3}$
1000002	100
1000003	196
1000004	326
1000005	500
1000006	735
1000007	1069
1000008	1600
1000009	2700
1000010	∞

Quia enim hinc patet quomodo pressiones diuersissimae densitates proxime aequales producere possunt, facile intelligitur discrimen in densitate prorsus euanescere posse.

Scholion 2.

23. Non semper vi actuali, qualem supra embolo applicatam sumus contemplati, opus est ad aërem aliaue similia fluida in dato statu pressionis conseruando. Si enim ponamus aërem in vase A B C D E F ope vis embolo O applicatae in statum aequilibrii esse redactum, vt iam vbique quaquaversus eandem vim exerceat, embolum subito vasi agglutinari concipiamus, vt iam perinde sit siue solli-

ſollicitetur nec ne? ac remota vi illa manifeſtum eſt aërem vaſi incluſum in eodem ſtatu perſeuerare, atque easdem preſſiones in latera vaſis exerere, ex quo iam clariſſime intelligitur, has preſſiones vnice denſitati aëris in vaſe incluſi eſſe tribuendas, ita vt quatenus aër ad certum denſitatis gradum fuerit redactus, eatenus etiam quaquauerſus easdem vires exerceat, quibus opus eſt ad iſtam denſitatem aëri inducendam. Ad aquam quidem idem ratiocinium haud transferri poſſe videtur, ſi enim dum aqua in eodem vaſe ab embolo vim quamcunque ſuſtinet, embolus ſubito cum vaſe coaleſcat, aqua etiam ſimul nullam amplius preſſionem ſentire videtur. Verum quia ſtatim ac aquae minimam compreſſionem concedamus, hoc quoque phaenomenon exhiberi debet, dubium nullum eſſe poteſt, quin etiam in vera aqua locum habere debeat, ſed ob aliam rationem effectus mox euaneſcere debet, quantaecunque enim fierent vires quas latera vaſis durante preſſione emboli ſuſtinerent, ſi embolo conglutinato concipiamus latera vaſis his viribus vel minimum cedere, quod reuera fieri tuto aſſumere licet, tum aqua ſimul omnes has vires amittet. Hanc igitur veram cauſam eſſe intelligi oportet, cur embolo vaſi affixo aqua ſubito nullas amplius vires preſſionis exerceat.

Phaenomenon 3.

24. Omnis generis fluida a calore in maius ſpatium expandi, a frigore autem in minus ſpatium

contrahi experientia declarat, quatenus quidem ob vires sollicitantes hoc fieri licet.

Illustratio.

Quae fluida aquae sunt similia quorum densitas a nullis viribus comprimentibus alteratur, ea tamen aucto calore in maius spatium ita expanduntur, vt nulla vis hunc effectum coercere valeat, minuto autem calore effectus contrarius producitur densitas ergo a calore minuitur a frigore augetur. In fluidis autem aëri similibus hoc phaenomenon ita se habet, vt aucto calore ea tantum in maius spatium se expandere conentur, ac tum demum se actu expandunt, quando vires comprimentes hunc effectum non impediunt. Cum igitur ante viderimus, in aëre quemuis densitatis gradum cum certa pressione esse coniunctum, id eatenus tantum est intelligendum, quatenus aër in eodem caloris statu versatur, caloris enim mutatione haec regula vehementer perturbatur. Aucto namque calore dum densitas manet eadem, pressio augetur: dum autem pressio manet eadem, densitas minuitur, contrarium vero euenit calore imminuto, ita vt tum densitate manente eadem pressio debilitetur, pressione autem eadem manente densitas augeatur. Apprime haec conueniunt cum iis quae in physicis tradi solent, si modo loco pressionis elasticitatem substituamus, quoniam enim sub notione pressionis elasticitas commodissime comprehenditur, ideas hic eo minus multi-

plica-

plicare nolo, vt eadem principia tam ad aquam quam aërem accommodari queant.

Coroll. 1.

25. Etsi ergo densitas aquae omni virium comprimentium actioni resistit, tamen non pro constanti est habenda, quia cum calore aliquantillum variatur, ita vt pro quouis caloris gradu peculiaris densitas aquae sit tribuenda.

Coroll. 2.

26. In aëre autem iam non amplius pressio a sola densitate pendet, sed insuper caloris ratio habenda est, quo aucto eadem densitas maiorem pressionem postulat, minuto vero minorem. Pressione autem seu elasticitate eadem manente, calor auctus aërem in maius spatium distendens, eius densitatem diminuit.

Coroll. 3.

27. Si ergo aër non semper vel vbique eodem calore est praeditus, pressio qua pollet, tanquam functio spectari debet tam densitatis quam caloris, ideoque tanquam functio duarum quantitatum variabilium, qua vtraque crescente augeatur, vtraque vero decrescente minuatur.

Scho-

Scholion I.

28. Quod si ergo densitatem littera q calorem vero littera r designemus, pressio autem littera p repraesentetur, qua vel vis in datam basin agens indicetur, vel potius altitudo columnae certae cuiusdam materiae constantis, cuius pondus aequatur, vi prementi quaecunque fuerit basis quandoquidem hoc modo quantitas baseos ex calculo extruditur. His igitur positis quantitas p vt functio binarum q et r est spectanda, de cuius natura hoc tantum nouimus quod crescente vtraque q et r etiam p augeatur. Quomodocunque autem quantitas p ab istis binis q et r pendeat, ea per applicatam cuiusdam superficiei sequenti modo repraesentari poterit. Sumta enim super recta AD portione $AR = r$ et in plano tabulae ordinata illi normali $RQ = q$ ex Q eidem plano perpendicularis erigatur $QP = p$ haec in certa quadam superficie terminabitur, cuius natura si esset perspecta, pro quouis alio calore Ar aliaque densitate rq applicata, ibi ad hanc superficiem erecta qp pressionem veram esset exhibitura. Pro quouis autem calore $AR = r$ in recta ad eam normali tam densitatem minimam RM quam aër tum a nullis viribus pressus induit, quam maximam RN quae ipsi a viribus adeo infinitis inducitur notari conuenit, quoniam applicata $QP = p$ in M euanescit in N vero fit infinita, quod si simili modo in m et n eueniat, superficies in punctis M et m planum tangens inde versus N et n progrediendo conti-

Tab. V. Fig. 4.

continuo eleuabitur, vt in ipsis punctis N et n ad altitudinem infinitam exsurgat: vltra hos terminos autem nusquam porrigetur. In axe A D sine dubio quoque huiusmodi duo termini dantur, quorum alter minimo, alter vero maximo calori respondet, quem quidem aër recipere potest: sicque tota superficies spatio cuidam finito in plano tabulae imminebit.

Scholion 2.

29. Quemadmodum autem supra relationem inter densitatem q et pressionem p dedimus quae non adeo a veritate abhorrere videtur, ita nunc etiam calorem introducendo simili formula rem illustrare poterimus ponendo:

$$p = n(qr - A)\sqrt{\frac{qr - A}{B - qr}}$$

existente B quantitate constante maiore quam A. Hinc enim pro quolibet calore r si densitas fuerit $q = \frac{A}{r}$ pressio p euanescit, eritque adeo haec densitas minima isti gradui caloris conueniens, pro densitate autem $q = \frac{B}{r}$ pressio fiet infinita, haecque propterea densitas maxima eiusdem caloris: tum vero etiam haec formula declarat, quando densitas fuerit calori reciproce proportionalis, vt qr aequetur quantitati constanti mediae inter limites A et B pressionem p fore eandem, veluti experientia postulare videtur. Quod si ergo haec formula phaenomenis aëris satisfaciat, hic imprimis notandum est

 eam

eam quoque ad aquam egregie pertinere, dummodo quantitas constans B ipsi A aequalis statuatur, tum enim perpetuo fit oportet $qr = A$ seu densitas calori reciproce proportionalis, et simul omni pressioni locus conceditur. Ex consideratione vero etiam generali § praec. natura aquae obtinetur, si pro quovis gradu caloris termini densitatis M et N euanescant, tum enim tota superficies fiet cylindrica plano tabulae normaliter insistens, quo indicatur cuique calori determinatam densitatem respondere, cui omnes pressiones ab euanescente vsque ad infinitam aeque conueniunt.

Scholion 3.

30. Pro praxi autem, nisi densitas aëris sit vel nimis magna vel nimis parua, quoniam tum manente calore pressio proxime vt densitas est, manente densitate autem, calori proportionalis aestimari potest, quandoquidem certior ratio calorem metiendi adhuc latet, poni conueniet $p = nqr$ ita vt pressio rationem sequatur compositam densitatis et caloris. Verum vt haec formula etiam ad aquam accommodari possit, generalius poni potest:

$$p = A + m(nqr - A)$$

vnde fit $p = nqr$ si sumatur $m = 1$, qui valor itaque naturae aëris conuenire censendus est. Pro aqua autem hunc numerum m infinitum capi oportet, indeque perspicuum est, nisi pressio p sit infinita, neces-

necessario esse debere $nqr = A$ ita vt pro quouis caloris gradu aqua certam condensationem recipiat: tum vero ob $m = \infty$ et $nqr - A = 0$ valor ipsius p prorsus manet indeterminatus, neque vlla pressio valebit eam aquae densitatem, quae ipsi pro caloris gradu conuenit, vel minimum immutare. Quamcunque autem legem sequi libuerit, id satis iam est perspicuum, naturam aquae non adeo a natura aëris discrepare, vt non commodissime eidem generi subiici queant: quod quidem in sequenti tractatione est maximi momenti, vt quaecunque in genere tam circa aequilibrium, quam motum inuestigauimus, deinceps aeque ad aërem atque ad aquam transferri queant. Nihil igitur hic interest, siue dentur fluida mediae cuiusdam naturae inter aquam et aërem, quae a viribus vrgentibus quodammodo condensari se patiantur siue minus? ac Theoria a praxi remota semper aeque subsistere censenda est. Id tantum tenendum est in sequentibus perpetuo fluida perfecta considerari per quae omnes pressiones quaquauersus aequaliter diffunduntur.

CAPVT II.

DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM REMOTA GRAVITATE ALIISQVE SIMILIBVS VIRIBVS.

Lemma.

31. Si corpus cuiuscunque figurae per totam superficiem vndique normaliter sollicitetur a viribus aequalibus, quatenus in aequalia superficiei elementa agunt, tum omnes hae vires coniunctim se mutuo destruent.

Demonstratio.

Tab. V. Fig. 5. Referatur tota superficies ad ternas coordinatas inter se normales, quae pro puncto superficiei quocunque p sint $AM = x$ $MP = y$ et $Pp = z$, sumtisque elementis $MN = PQ = dx$ et $PR = QS = dy$, vt in plano pro basi assumto AMP habeatur rectangulum elementare $PQRS = dx\,dy$ cui in superficie corporis emineat elementum $pqrs$, in quod normaliter ducta sit recta pO basi in O occurrens. Hoc igitur elementum $pqrs$ per hypothesin secundum directionem pO sollicitatur a vi areae huius ipsius elementi proportionali quae ergo vis commodissime

dissime exhibetur pondere columnae cuiusdam materialis normaliter isti elemento insistentis, et cuius altitudo vbique sit eadem $=p$. Cum iam recta pO normalis sit ad superficiem erit elementum $pqrs$ ad areolam $PQRS=dxdy$ vt recta pO ad $Pp=z$ hincque $pqrs=\frac{pO}{z}dx\,dy$ ex quo pondus illius columnae aestimandum est $=p\frac{pO}{z}dx\,dy$ qua vi elementum $pqrs$ in directione pO vrgetur. Nunc igitur hanc vim secundum directiones ternarum coordinatarum resoluamus, ac pro directione pP quidem vis tota multiplicari debet per $\frac{Pp}{pO}$ vnde vis secundum directionem pP sollicitans prodit $=p\,dx\,dy$ vnde cum coordinatas inter se permutare liceat, vis qua idem elementum secundum directionem AM vrgetur, erit $=p\,dy\,dz$ et secundum directionem $MP=p\,dx\,dz$. Cum harum trium virium similis sit ratio sufficit vnam considerasse, quae sit vis $p\,dx\,dy$ qua elementum $pqrs$ in directione pP sollicitatur: vbi obseruetur, cum corpus vndique sit terminatum, rectas pP, qQ, Rr, Ss productas denuo superficiem alicubi traiicere eiusque elementum abscindere debere, quod cum pari vi vrgeatur secundum eandem directionem Pp sed contrariam, hae vires sibi aequales et contrariae se mutuo destruent. Simili modo pro viribus $p\,dy\,dz$ et $p\,dx\,dz$ quibus elementum $pqrs$ secundum directiones AM et MP vrgetur, dabuntur alia superficiei elementa, quae vires his aequales et directe contrarias sustinent: quod cum in omnibus elementis eueniat, perspicuum est omnes omnino vires iunctim consideratas se mutuo perfecte destruere, et in aequilibrio continere.

Coroll. 1.

32. Duo hic casus occurrunt, prout vires istae aequales vel extrinsecus superficiem introrsum vrgendo agunt, vel intrinsecus superficiem extrorsum distendendo, vtroque autem casu omnes vires iunctim sumtae in aequilibrio versantur.

Coroll. 2.

33. Neque ergo ab huiusmodi viribus corpus ad motum cietur siue id sit solidum siue fluidum, dummodo iis sustinendis par sit, scilicet si vires introrsum vrgeant, corpus in minus volumen coarctare, sin autem extrorsum pellant, in maius distendere conantur. Quare dum corpus huic actioni sufficienter resistat nullus plane effectus ab huiusmodi viribus producetur.

Coroll. 3.

34. Si igitur corpus per totam superficiem ab huiusmodi viribus aequalibus normaliter vrgeatur, siue extrorsum siue introrsum, nulla vi externa opus est, qua id in statu suo contineatur, sed sponte in quiete perseuerabit.

Theo-

Theorema.

35. Dum pressio qua fluidum extrinsecus vrgetur, per totam eius massam aequaliter diffunditur, tam omnes fluidi partes, quam vas in quo continetur, in aequilibrio consistunt.

Demonstratio.

Quoniam per naturam fluiditatis pressio fluidum vrgens aequaliter per totam eius massam diffunditur, latera vasis in quo continetur vbique eiusmodi vires aequales sustinent quales in lemmate praemisso sumus contemplati, ita vt quoduis elementum sustineat vim ipsi proportionalem, quae commodissime per altitudinem certae columnae indicatur, quippe cuius pondus eam vim exhibere censendum est. Quare cum latera vasis ab his viribus normaliter extrorsum vrgeantur, ea se mutuo destruent, et vasi ab illis nulla mutatio inducetur, dummodo distensioni sufficienter resistat. Deinde cum etiam singulae fluidi particulae a paribus viribus quaquauersus comprimantur, in aequilibrio pariter erunt constitutae, dummodo vlteriori compressioni resistant, quod euenit si singulae partes eam habeant densitatem eumque caloris gradum, cui eadem pressio conueniat. At si fluidum aquae sit simile, ne hac quidem conditione est opus, cum in omni statu etiam maximas vires sustinere valeat.

Coroll.

Coroll. 1.

36. Corpus ergo etiam huic fluido immersum, quia vndique a similibus viribus comprimitur, erit in aequilibrio, neque ad vllum motum ab his pressionibus concitabitur. Perindeque hic est, siue hoc corpus fuerit densius siue rarius quam fluidum.

Coroll. 2.

37. Dum fluidum in vase contentum ope emboli vrgetur, et pressio eadem per totum fluidum diffunditur, vires a fluido ipso exercitae se in aequilibrio sustinent: vas autem a vi embolum vrgente perinde ac corpus solidum sollicitatur, et cum fluido incluso promoueretur, nisi vi contraria sustentaretur.

Scholion 1.

38. Cum de ipso vase, in quo fluidum continetur, quaestio est, eae vires quas a fluido incluso patitur, probe sunt distinguendae ab iis viribus,
Tab. V. quae extrinsecus ope emboli in fluidum agunt. Po-
Fig. 2. namus ope emboli pO fluidum in vase ABCDEF contentum vrgeri, et iam in aequilibrio versari, omnes ergo fluidi partes tam inter se quam in latera vasis agent viribus aequalibus, quas vt vidimus certa altitudine $= p$ repraesentare licet, ac per lemma patet singulas fluidi partes vtpote quaquaversus aequaliter pressas in aequilibrio contineri, neque

que in iis vllum motum intestinum generari. Quatenus porro latera vasis ab iisdem viribus extrorsum pelluntur, quoniam hae vires se mutuo destruunt, eatenus etiam ipsum vas in aequilibrio seruatur. Verum praeter has vires, vas etiam sustinet vim qua embolus vrgetur, idque perinde ac si cum fluido vnum corpus solidum constitueret; ne igitur ab hac vi ad motum concitetur, vi contraria et aequali opus est, vt totum vas cum fluido in quiete retineatur. Sin autem embolus vasi affigatur, et iam vis externa tollatur, fluidum quidem in eodem statu perseuerabit, sed vas nullam vim extrinsecus sustinens per se in aequilibrio erit constitutum.

Scholion 2.

39. Quoniam in hoc capite fluida neque grauitati neque aliis similibus viribus subiecta assumimus, quae actione sua corpora quasi penetrant, sed tantum vires extrinsecus in fluida agentes contemplamus, veluti embolorum ope, quarum actio in certam tantum superficiei partem exeritur, haec duo virium genera sollicite a se inuicem distinguere conuenit, quarum illas grauitati similes vires, internas appellare licet, quoniam saltem singulis particulis insitae videntur, etiamsi earum causa extrinsecus sit quaerenda: hae autem vires embolorum ope vrgentes merito externas vocamus. Hoc igitur capite in statum aequilibrii fluidorum inquirimus, quando a nullis viribus internis sollicitantur; vbi inprimis

notandum est, remotis his viribus internis, idcirco pressiones internas, quae a viribus externis per totam fluidi massam diffunduntur, minime tolli, ideoque cum viribus internis minime confundi oportere. Quam confusionem felicissime euitabimus, si vti instituimus, istas pressiones in calculo per altitudines exhibemus, dum vires internas veras grauitati similes more in mechanica recepto exprimimus. Quaecunque scilicet pressio in fluido reperiatur, qua omnes partes tam se mutuo vrgent, quam in latera vasis agunt, ea conuenientissime certa quadam altitudine $= p$ indicatur, vbi quidem certa quaedam materia vniformis grauis assumitur ex qua si formetur columna cylindrica illius altitudinis aequalis p, cuius basis sit aequalis ipsi superficiei pressionem sustinenti, tum huius columnae pondus pressionem sit relaturum. Huius materiae, ex qua istas columnas formamus, densitatem vnitate constanter denotabimus, ita vt earum solid tas simul pondus pressionem referens sit exhibitura, dum cuiusque alius materiae pondus ex volumine in densitatem multiplicato aestimatur. Quando enim etiam grauitatem a fluido excludimus, tamen nihil impedit, quo minus in pressione definienda grauitatem in subsidium vocemus.

Scholion 3.

40. Quodsi fluidum etiam a nullis viribus externis vrgetur, ita vt eius partes nullam plane pres-

pressionem in se mutuo exerceant, tum huiusmodi fluidi massa quaecunque, quomodocunque eius partes inter se fuerint dispositae, semper erit in aequilibrio, neque opus est, ad fluidum in quiete continendum, vt id vasi cuipiam sit inclusum. Hoc ergo casu pressio atque adeo altitudo pressionem metiens vbique erit nulla; etiamsi enim aliquod vas fluidum ambiret, eius tamen latera nullam ab eo vim sustentarent, perinde foret, ac si vas plane abesset, hocque valet, siue fluidum fuerit homogeneum siue heterogeneum siue compressionis capax siue secus. Si fluidum instar aquae nullam compressionem patiatur, singulae partes naturalem suam habebunt densitatem, quae scilicet cuique pro ratione caloris conuenit: sin autem fluidum veluti aër compressionis sit capax, tum quia nullae vires comprimentes adsunt, quaelibet pars se ad minimam suam densitatem componet, quae cum etiam a calore pendere possit, simul huius ratio est habenda, ita vt hoc aequilibrii casu in singulis partibus densitas sit minima, seu volumen, in quod se pro gradu caloris expandere possunt, maximum: quare quo hoc fieri possit, vasis fluidum continentis ideam plane remouemus. At si fluidum a viribus externis vrgeri sumamus, id necessario vase inclusum concipi debet, cuius latera eius pressionem sustineant et diffusionem coerceant: hunc ergo casum prout fluidum compressionis vel sit capax vel secus, accuratius euoluamus.

 Pro-

Problema I.

41. **Si fluidum nullius compressionis capax in vase a vi quacunque ope emboli vrgeatur, definire pressionem, per totam fluidi massam diffusam, seu altitudinem, qua haec pressio repraesentatur.**

Solutio.

Tab. V. Fig. 1. Sit basis emboli O, qua fluidum normaliter premitur $= ff$ vis autem embolum trudens aequetur ponderi P, quandoquidem omnes vires distinctissime per pondera exhibentur. Introducetur iam materia quaedam homogenea, cuius densitas sit cognita, et vnitate expressa, huius quaeratur massa, quae grauitati exposita idem esset habitura pondus P huic autem massae tribuatur figura columnae cylindricae seu prismaticae, cuius basis sit $= ff$, atque altitudo ponatur $= p$, ita vt volumen columnae prodeat $= ffp$ ob densitatem $= 1$ simul pro massa ideoque et pondere habendum, quod ergo illius ponderis P loco adhibeatur. Quoniam igitur quantacunque fuerit emboli basis ff, fluidi pressio semper est eadem, modo altitudo illa p fuerit eadem, haec ipsa altitudo p conuenientissime pro mensura pressionis assumitur? eaque cognita quantitas pressionis facillime cognoscitur. Ac primo quidem si quaeratur quanta vi latera vasis vbique premantur, ea in elementa minima diuisa concipi conuenit, quoniam pressio in singula normaliter agit; si enim maior

portio

portio consideraretur a pluribus discrepans, diuersitas directionis hanc determinationem turbaret. Sit igitur in vasis cauitate interna *c d* eiusmodi spatiolum, quod pro plano haberi queat; eiusque areola $= kk$: atque pressio, quam id sustinet, aequabitur ei ponderi, quod esset habitura massa illius materiae homogeneae densitate $= 1$ praeditae, cuius volumen foret $= kkp$; tantaque vi istud spatiolum *c d* secundum directionem *m r* in id normalem premetur. Hinc ergo omnes vires, quas vasis parietes a fluido sustinent, clarissime agnoscuntur. Pares autem vires etiam omnes fluidi partes *f g h* a circumfluo vndiquaque sustinent, neque tamen de statu suo naturali deturbantur quia nullius compressionis sunt capaces, atque vires ipsae vt vidimus se mutuo in aequilibrio tenent. Quin etiam corpus solidum huic fluido immersum easdem vires esset experturum, ac propterea etiam in quiete perseueraturum. Tum vero aequilibrium aeque locum habebit, siue fluidum fuerit homogeneum siue heterogeneum, singulae enim partes suam quaeque conseruabunt densitatem naturalem, quae cuique cum ratione indolis tum caloris est propria.

Coroll. 1.

42. Quodsi ergo in eodem vase diuersa fluida veluti aqua, spiritus vini, et mercurius, vtcunque fuerint permixta, omnes partes non obstante pressione emboli in perfecto erunt aequilibrio, neque

vlla adest causa, quae singula in vnum locum congregare nitatur.

Coroll. 2.

43. Talia ergo diuersa fluida eam mixtionis rationem, quae ipsis semel fuerit inducta perpetuo conseruabunt, neque in lateribus vasis vllum discrimen reperietur, quippe quae siue a spiritu, siue ab aqua, siue a mercurio tangantur, paribus viribus sollicitabuntur.

Coroll. 3.

44. Quin etiam si in vase tantum aqua contineatur, eaque vero in aliis locis alio caloris gradu fuerit praedita, quaeuis portio densitatem suo caloris gradui propriam habebit: neque ob pressiones internas vlla mutatio in permixtione exorietur. Si enim per communicationem mutuam mox omnis aqua ad eundem calorem reducitur, id ob aliam contingit rationem physicam ad quam hic non attendimus.

Scholion.

45. Quando experientia ostendit in tali diuersorum fluidorum permixtione densiora fundum petere, rariora vero sursum pelli hoc manifesto a grauitate proficiscitur, quae in densioribus maior est, in rarioribus minor. Hic autem omnes cogitationes a grauitate aliisque similibus viribus internis abstrahimus,

himus, vnde etiam illi effectui nullus locus conceditur. Plurimum autem interest nosse, remota grauitate omnem variorum fluidorum permixtionem aeque subsistere posse, neque etiam pressiones externas vllam mutationem efficere valere: ne eos effectus, quos grauitate admissa euenire videmus alii cuipiam causae adscribamus. Simili modo corporum huiusmodi fluidis immersorum ratio est comparata, quae siue sint densiora siue rariora fluida in eodem perpetuo loco perseuerant, neque a viribus vndique aequaliter prementibus vllam impulsionem ad motum recipiunt. Id tantum euenire potest, vt si tale corpus fuerit lagena vitrea caua, ac pressiones eius robur superent, ea diffringatur sicque eius particulae ad motum introrsum concitentur, iste vero effectus neutiquam ad praesens institutum est referendus; aeque parum ac ille, quo fluidum in variis locis vario calore praeditum per communicationem mox ad eundem caloris gradum redigi videmus, qui effectus non tam pressioni internae quam alii causae physicae adscribi debet, etsi negare nolim eum ab maiorem pressionem mutuam accelerari posse. Tum vero hic inprimis tota moles spectari potest, quae si fuerit satis vasta, vtique euenire potest, vt gradus caloris in variis regionibus maxime discrepet, et diutissime sine alteratione conseruetur.

Pro-

Problema 2.

46. Si fluidum compressionis capax in vase contentum a vi quacunque ope emboli comprimatur, praeter pressionem definire densitatem in singulis locis, cum id fuerit in statum aequilibrii redactum.

Solutio.

Tab. V. Fig. 2. Fluidum ergo aeri simile in vase ABCDEF contineri assumimus, quod a data vi, quae pondere $= P$ exhibeatur, embolum pO vrgente eousque iam sit redactum, vt in aequilibrio consistat. Quod cum euenerit pressio perinde se habebit, ac praecedente casu, quia natura fluidi hic nullam diuersitatem parit, ad eam ergo definiendam sit basis emboli $O = ff$ et quaeratur columna eiusdem basis ff et altitudinis $= p$ quae ex materia illa vniformi densitatis $= 1$ constans habitura esset pondus $= P$ atque haec altitudo p tam in ipsa fluidi massa quam in vasis lateribus vbique pressionem mensurabit, prorsus vt in praecedente problemate ostendimus. Quod autem nunc ad densitatem fluidi in singulis punctis attinet, videndum est vtrum vbique idem caloris gradus versetur nec ne? Vtrumuis igitur contigerit, ponamus in Q gradum caloris esse $= r$ et quia fluidi natura certam supponit legem, secundum quam pressio tam a densitate quam calore pendet, ob datam hic pressionem $= p$, ex ea lege, quomodocunque fuerit comparata, determinabitur densi-

densitas fluidi in hoc loco Q; quod si in omnibus punctis fiat, per totam fluidi massam iam innotescet densitas siue ea fuerit vbique constans siue variabilis: neque hic refert, vtrum tota massa sit fluidum eiusdem generis nec ne?

Coroll. 1.

47. Ad aequilibrium igitur producendum embolum eousque adigi oportet, donec ob auctam densitatem, pressio interna aequalis fiat vi embolum vrgenti, quae aequalitas ex altitudine p est aestimanda.

Coroll. 2.

48. Si embolus tum vasi affigatur, vt fluidum in vase vndique clauso contineatur, omnia in eodem statu manebunt, pressio scilicet vbique erit eadem, altitudine $=p$ agnoscenda, et ex hac pressione et calore in singulis punctis Q densitas agnoscetur.

Coroll. 3.

49. Vicissim ergo quoque si huiusmodi fluidum in vase clauso contineatur pressio per totum vas erit eadem, ideoque ex cognita densitate et calore in quouis loco cognoscetur. Simul ergo intelligitur, quanta vi P embolo applicanda, opus foret, ad fluidum in hunc statum compellendum.

Scholion 1.

50. Ex cognita denſitate in ſingulis punctis maſſa totius fluidi definiri poteſt, tota enim maſſa in elementa infinite parua diuiſa, cuiusque volumen multiplicetur per denſitatem, et huius formulae integrale per totum fluidum extenſum dabit maſſam fluidi, ſimulque pondus quod ob grauitatem eſſet habiturum. Quod cum inertiae ſit proportionale, in motus determinatione potiſſimum erit conſiderandum, quia hic autem adhuc circa aequilibrium verſamur, maſſae et inertiae conſideratio nondum in computum venit. Hic tantum monuiſſe ſufficit, quomodocunque eadem fluidi maſſa a viribus externis in maius minusue volumen redigatur, inertiam ſeu materiae quantitatem perpetuo eandem manere: neque etiam ob auctum minutumue calorem vllam alterationem pati.

Scholion 2.

51. Stabilita preſſionis menſura quae ad noſtrum inſtitutum maxime eſt accommodata, eadem ſuppeditat nobis idoneam rationem denſitatem cuiusque fluidi metiendi. Cum enim illa menſura ſit petita a materia quadam homogenea, cuius denſitatem vt cognitam ſpectamus et vnitate deſignamus, cuiuscunque alius fluidi denſitatem certo numero exprimi oportet, qui ſcilicet ſit ad vnitatem vt haec denſitas ad illam: ac ſi fluidi denſitas non vbique

quae ſit eadem, pro quolibet loco numero variabili, qui ſit q eam denotari conueniet. Quod autem ad calorem attinet, cuius ratio etiam eſt habenda, nulla certa menſura eius adhuc eſt cognita, vnde definire liceat, quando alius calor alio ſit duplo maior, thermometra enim nihil aliud declarant, niſi alium caloris gradum alio vel eſſe maiorem vel minorem. Liberum ergo nobis eſt, modo quocunque varios caloris gradus metiendi vti; vnde pro aëre hic modus videtur maxime idoneus, vt ſi pro denſitate data $q = b$ et certo calore $r = c$ preſſio fuerit $p = a$, tum is calor duplus $r = 2c$ cenſeatur, qui pro eadem denſitate aëri preſſionem duplam $p = 2a$ inducat, vnde manente denſitate $q = b$ pro quocunque calore r preſſio erit $p = \frac{ar}{b}$: ſicque viciſſim ex preſſione p gradus caloris r colligi poteſt. Cum deinde praeterea pro eodem calore preſſio ſit denſitati proportionalis, ſiquidem denſitas ab vtroque limite extremo multum diſtet, pro aëre hac formula generali $p = \frac{aqr}{bc}$ vti licebit. Generatim ergo erit calor directe vt preſſio ſeu elaſticitas aëris, ac reciproce vt eius denſitas: quorum elementorum illud ex barometro, hoc vero ex thermometro aëreo cognoſcitur. Pro aqua autem productum qr videtur eſſe quantitas conſtans.

CAPVT III.

DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM A VIRIBVS QVIBVSCVNQVE SOLLICITATORVM IN GENERE.

Problema 3.

52. Si fluidum quodcunque a viribus quibuscunque sollicitetur inuestigare conditiones sub quibus fluidum in aequilibrio consistere possit.

Solutio.

Tab. VI. Fig. 6. Consideretur fluidi particula elementaris quaecunque sub figura parallelepipedi $k\,l\,m\,n\,\varkappa\,\lambda\,\mu\,\nu$ ad ternas coordinatas inter se normales relata, quae sint $AS = x$ $SK = y$ et $Kk = z$, ita vt parallelepipedum ex harum differentialibus sit formatum, ideoque eius volumen $= dx\,dy\,dz$. Statuatur densitas fluidi in puncto $k = q$ posita semper densitate eius materiae, qua ad pressiones definiendas vtimur $= 1$, eritque massa totius elementi $= q\,dx\,dy\,dz$, quae simul si id esset grauitati expositum, eius pondus exprimeret. Iam a quibuscunque viribus hoc elementum sollicitetur, eas semper secundum directiones ternarum coordinatarum seu axes principales AP, AQ, et AR, inter se normales resoluere licet,

cet, sintque hae tres vires in puncto k sollicitantes secundum $kl = P$, secundum $km = Q$ et secundum $kn = R$: quae vires acceleratrices intelligantur, posita grauitatis vi acceleratrice $= 1$ hinc nostrum elementum pro ratione massae $qdxdydz$ ab his viribus acceleratricibus animatum sollicitabitur his tribus viribus motricibus sec. AP vi $= Pqdxdydz$ sec. AQ vi $= Qqdxdydz$ sec. AR vi $= Rqdxdydz$ vbi litterae P. Q. R. numeros denotant vt functiones ternarum variabilium x, y, z spectandos. Cum autem fluidum in aequilibrio consistat, necesse est vt harum virium actio a pressionibus idem elementum vndequaque vrgentibus coerceatur. Hunc in finem sit altitudo pressionem in puncto k exhibens $= p$ quae cum pariter vt functio ternarum variabilium x, y et z considerari debeat, statuamus eius differentiale:

$$dp = L\,dx + M\,dy + N\,dz$$

ita vt sit more signandi recepto:

$$L = \left(\frac{dp}{dx}\right)\ M = \left(\frac{dp}{dy}\right)\ N = \left(\frac{dp}{dz}\right).$$

Perpendantur iam pressiones, quas singulae hedrae nostri parallelepipedi ab his viribus sustinent, ac primo quidem patet pressiones hedrae $ln\lambda\nu$ superare pressiones hedrae $km\varkappa\mu$ in singulis punctis particula $= L\,dx$ quare cum vtriusque harum hedrarum area sit $= dydz$ elementum nostrum secundum directionem PA vrgebitur vi $= L\,dx\,dy\,dz$. Deinde pressiones hedrae $mn\mu\nu$ excedunt pressiones hedrae $kl\varkappa\lambda$ in singulis punctis particula $= M\,dy$ vnde elementum secundum directionem QA vrgetur vi $M\,dx\,dy\,dz$: ac tandem simili modo reperitur elementum nostrum secundum directionem RA vrgeri vi $= N\,dx\,dy\,dz$. Cum nunc hae vires illas, quae ex viribus sollicitantibus nascuntur, continere in aequilibrio debeant, quia directiones sunt contrariae necesse est sit

$$L = Pq, \quad M = Qq \quad \text{et} \quad N = Rq.$$

Quare ex viribus sollicitantibus pressio fluidi in puncto k ita definitur, vt sit

$$dp = q(P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

Denique vero si gradus caloris in puncto k littera r designetur, quem vt cognitum spectare licet, dabitur quoque relatio inter litteras p, q, r ex natura fluidi, ex qua densitas q per p et r determinetur; si ergo haec conditio cum illa aequatione differentiali coniungatur, ex viribus sollicitantibus, quae in singulis punctis agunt vna cum gradu caloris r colligi poterit pressio fluidi p in singulis locis, indeque porro densitas q, vt fluidum in aequilibrio consistere possit.

Coroll. 1.

53. Si vires sollicitantes euanescant vt sit $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, fit $dp = 0$ ideoque p quantitas constans, tum scilicet pressio vbique per totam fluidi

fluidi maſſam eadem eſſe debet, vt aequilibrium locum habere poſſit, prorſus vti in capite praecedente oſtendimus.

Coroll. 2.

54. Ob vires autem ſollicitantes preſſio per fluidi maſſam fit variabilis, eiusque variabilitas cum ab his viribus tum a gradu caloris pendet, ſiquidem denſitas q per preſſionem p et calorem r determinatur. Euenire ergo poterit, vt preſſio alicubi euaneſcat, vel adeo negatiua euadat.

Coroll. 3.

55. Aequilibrium ergo locum habere nequit, niſi aequatio $dp = q(Pdx + Qdy + Rdz)$ ſit poſſibilis: quod cum non niſi ſub certis conditionibus eueniat ob plures variabiles, euidens eſt infinitos dari caſus, quibus aequilibrium ne locum quidem habere poſſit, quos ergo caſus in poſterum ſollicite perſcrutari conueniet.

Scholion 1.

56. Fluidum hic nusquam terminari aſſumſi, quoniam conditio vaſis id continentis nihil ad determinationem preſſionis confert, ſed tantum impedit, ne fluidum diffluat. Pro lubitu ergo fluidum limitibus circumſcribere licet, idque conſiderare, quaſi vaſi eſſet incluſum, tum vero ex ſtatu aequilibrii hic definito patebit, quantam preſſionem latera

ra

ra vasis in singulis punctis a fluido sustineant, vnde vicissim colligere licebit quanta firmitate vas praeditum esse oporteat, vt his pressionibus resistere, fluidumque coercere valeat. Imprimis autem hic inaequalitas pressionum spectari debebit, vt vbi latera vasis maximas vires sustineant, innotescat. Sin autem eueniat, vt alicubi pressio prorsus euanescat, ibi plane non opus est fluidum coerceri, sed sponte in statu suo perseuerabit, etiamsi ibi vas omnino apertum relinquatur. In hac regione fluidum dicitur ad libellam compositum, eiusque superficies vt extrema spectatur, quia etiamsi quicquam fluidi vltra eam existeret, id ob defectum pressionis non cohaereret, et quasi plane abesset, considerari posset. Extrema ergo cuiusque massae fluidae superficies est ea, vbi pressio euanescit, et status aequilibrii sponte conseruatur, vt ibi vase non opus sit ad diffluxum coercendum. Sin autem vasi alicubi apertura tribuatur, hinc patet quanta vi ope emboli haec apertura obstrui debeat ne ibi fluidum effluat, quae vis vtique euanescit, si apertura in extremam fluidi superficiem cadat. Quando fluidum a sola grauitate animatur, haec extrema superficies simul est suprema, ad libellam composita, quod idem euenit si vires sollicitantes ad punctum fixum conuergant, quo casu superficies suprema fit sphaerica.

Scho-

Scholion 2.

57. Quomodo autem pressio seu altitudo eam metiens p in statu aequilibrii fieri possit negatiua, difficulter perspicitur. Cum enim pressio positiua particulas fluidi ita afficiat, vt se mutuo penetrare conentur, isteque effectus tam ob impenetrabilitatem quam ob difficultatem eas in angustius spatium comprimendi irritus reddatur, negatiua pressio in hoc consistet, vt fluidi particulae quasi se mutuo repellant: quoniam autem nisi fluidum vasi sit inclusum, nihil impedit, quo minus partes a se inuicem recedant, continuitas mox dissoluetur, neque ergo aliter aequilibrium adesse potest, nisi quatenus singulae particulae ab omni nexu solutae seorsim quiescant. Hic autem casus non amplius ad mechanicam fluidorum est referendus, quia singulae guttulae tanquam corpuscula solida tractari debent. In vase autem fluidum continente pressio negatiua multo minus locum habere potest, cum fieri nequeat, vt latera a fluido introrsum premantur. Ex quo statuendum est, quoties calculus pressionem declarat negatiuam, toties fluidi continuitatem tolli, idque quasi in guttas separatas dispergi, vt eius consideratio non amplius ad praesens institutum sit referenda: cuius quippe principia huic innituntur fundamento; vt fluidi partes continuae maneant. Hoc autem non solum de aequilibrio sed etiam de motu fluidorum est tenendum, nusquam pressionem fieri

posse negatiuam, quin simul continuitas tollatur. Ac si in motu aquae per tubos, ab auctoribus interdum pressio negatiua fieri asseritur, id ita est accipiendum, eam tantum fieri minorem pressione atmosphaerae, ideoque adhuc esse positiuam. Statim autem ac reuera fit negatiua, dispersio in guttas obseruatur, vti videmus in fontibus salientibus, qui postquam summitatem attigerunt, in guttas disperguntur: ibi igitur pressio negatiua fieri est censenda.

Scholion 3.

58. Circa ipsas porro vires sollicitantes, vnde ternas vires P, Q et R elicuimus, omnino tenendum est, eas neutiquam ad libitum fingi licere, sed ita assumi debere, vti in mundo reuera existunt. Primo ergo occurrit grauitas, quae nisi fluidum, quod consideratur, maximum volumen occupet, quantitatem et directionem constantem habere est censenda, sin autem fluidum maiorem habeat expansionem grauitatis directiones conuergere sunt statuendae, veluti quando totum mare vel atmosphaera aërea examini subiicitur. Deinde etiam attractio vniuersalis, qua non solum corpora coelestia, sed etiam eorum partes se mutuo attrahere deprehenduntur plurimas vires reales suppeditat, quarum actioni fluida subiiciuntur. Hae autem vires omnes hac insigni gaudent proprietate, vt ex iis formula differentialis $Pdx+Qdy+Rdz$ semper euadat ve-

rum

rum differentiale cuiuspiam functionis variabilium x y et z ideoque sit $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$: $(\frac{dP}{dz}) = (\frac{dR}{dx})$ et $(\frac{dQ}{dz}) = (\frac{dR}{dy})$ atque huius functionis indoles eo magis est notatu digna, quod ea in principio minimae actionis ab Ill. Praeside de *Maupertuis* inuento ipsam quantitatem actionis exprimat. Quod si ergo haec quantitas actionis designetur littera V, vt sit $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ habebimus $dp = qdV$, et quia q per p et r determinatur, intelligitur, nisi quantitas r ita sit comparata, vt haec aequatio integrationem admittat, aequilibrium plane locum habere non posse, sin autem vires P, Q, R pro lubitu fingere liceret, vt formula $Pdx + Qdy + Rdz$ integrationem respueret, tum fluidum aequilibrii plane non foret capax, nisi forte in calore eiusmodi variatio statui posset, qua aequatio inuenta fieret integrabilis. Cum igitur huiusmodi casibus aequilibrium nullum plane locum habere posset, fluida perpetuo motu agitari necesse foret.

Problema 4.

59. Si fluidum a viribus quibuscunque sollicitatum in aequilibrio consistat, eique corpus quodcunque solidum sit immersum, inuestigare vires, quas hoc corpus a pressione fluidi ambientis sustinet.

Solutio.

Sit BCDE id corpus solidum, quod ei fluido, cuius statum aequilibrii modo definiuimus, sit Tab. VI. Fig. 7.

 immer-

immerſum, ab eoque circumquaque eas ſuſtinet preſſiones, quas ibidem inuenimus. Ad eas autem euoluendas primum obſeruo hoc corpus easdem pati preſſiones, quas ſuſtineret ea fluidi maſſa, cuius nunc locum corpus obtinet: quo circa in locum corporis mente ſubſtituamus aequale fluidi volumen, quod cum futurum eſſet in aequilibrio, neceſſe eſt, vt preſſiones quas a fluido ambiente ſuſtinet, aequales ſint et contrariae actioni virium P, Q, R idem volumen ſollicitantium. Probe autem hic eſt animaduertendum iſti volumini loco corporis ſubſtituto in ſingulis punctis eam denſitatem tribui oportere, quam aequilibrii conditio ante definita poſtulat, ex quo forte neceſſe eſt vt etiam caloris ratio habeatur. Definito autem effectu, quem hae vires P, Q, R in iſto volumine producunt, ei aequalis erit et contrarius is effectus quem corpus ſolidum propoſitum a preſſionibus fluidi ambientis ſuſtinet.

Coroll. 1.

60. Cognitio ergo ſola virium, quibus fluidum ſollicitatur, non ſufficit ad vim, quam corpus immerſum ſuſtentat, definiendam, ſed inſuper noſſe oportet pro eo loco quem corpus occupat, quamnam ibi fluidum habiturum eſſet denſitatem in ſingulis punctis.

Coroll. 2.

61. Hinc in eodem fluido, prout corpus in alio atque alio loco conſtituitur preſſiones id maxi-

me

me discrepantes sustinere potest, hocque non solum ob variationem virium sollicitantium, sed etiam ob variationem densitatis quae fluido in diuersis locis inest: etiamsi in loco, quem iam corpus occupat, nullum adsit fluidum, ac fortasse densitas huic loco conueniens nusquam alibi in fluido reperiatur.

Coroll. 3.

62. Deinde etiam plurimum interest, cuiusmodi situm idem corpus in fluido teneat: fieri enim potest vt idem corpus si tantillum inuertatur longe alias pressiones sustineat. Quamobrem non solum volumen corporis sed etiam figura cum situ plurimum conferunt ad vim, quam sustinet definiendam: nisi forte fluidum sit homogeneum et graue, quo casu haec vis a solo volumine pendet.

Scholion 1.

63. Hoc ergo casu facillimo excepto, determinatio virium, quas corpus submersum sustinet, calculos saepe vehementer molestos postulat, quoniam omnia elementa fluidi intra volumen corporis concipiendi considerare oportet. Ita si parallelepipedum elementare $klmn\varkappa\lambda\mu\nu$ in loco corporis fuerit, cuius massa est $= q\,dx\,dy\,dz$, singulae hae formulae differentiales $P\,q\,dx\,dy\,dz$, $Q\,q\,dx\,dy\,dz$ et $R\,q\,dx\,dy\,dz$ ope triplicis integrationis per totum corporis volumen extendi debent, cuius figura si fuerit irre- Tab. VI. Fig. 6.

 gula-

gularis, haec inuestigatio valde fit difficilis, neque in genere pro viribus quibuscunque P, Q, R quicquam definire licet. Totum ergo hoc negotium in sequentes tractationes est reseruandum, vbi praecipuos virium sollicitantium casus, qui quidem in mundo locum habent, accuratius euoluemus: hic vero sufficiat, methodos quicque praestandi in genere saltem indicasse.

Scholion 2.

64. Alia autem statim se offert methodus directa hoc idem problema soluendi, dum pressiones, quas corpus in singulis superficiei suae elementis sustinet, perpenduntur, eaeque secundum ternas directiones fixas resolutae per totam superficiem in vnam summam colliguntur. Verum hic antea aequationem differentialem pro pressione p inuentam integrari necesse est, vnde nisi pressio satis simpliciter exprimatur haec methodus in calculos inextricabiles praecipitaret. Id tantum hic commodi eueniret, quod dum pressio p per integrationem definienda constantem quandam arbitrariam recipit per circumstantias fluidi datas definiendam, haec quantitas constans in hoc negotio prorsus non in computum ingrediatur, propterea quod pressiones circumquaque aequales se mutuo destruunt. Eatenus ergo tantum corpus submersum a pressionibus fluidi ad motum impellitur, quatenus hae pressiones non sunt aequales: inuenta autem hac vi, qua corpus impellitur,

litur; si ea cum reliquis viribus, quae in idem corpus agunt, comparatur, facile iudicare licebit, vtrum corpus sit in quiete permansurum, an vero motum impetraturum. Quoniam vero hic tantum de aequilibrio agitur, nisi corpus in fluido sponte quiescat, id vi quacunque in hoc statu conseruari concipiendum est, nisi forte quaestio de primo tantum momento, quo corpus fluido est immissum, instituatur.

Problema 5.

65. Si fluidum quodcunque a viribus quibuscunque sollicitatum fuerit in aequilibrio, eique corpus solidum ex parte tantum immergatur, definire vires, quas eius pars submersa a pressionibus fluidi sustinet.

Solutio.

Ante omnia notandum est hunc casum locum habere non posse, nisi in fluido, in quo datur extrema superficies, in qua pressio prorsus euanescat, quae ergo non indiget vase continente quo coerceatur. Sit ergo F C E G haec superficies fluidi extrema ideoque aperta, dum in reliquis locis vase quocunque continetur, hicque corpus solidum B C D E fluido ita sit immersum vt portio C D E sub fluido versetur, portio vero C B E promineat; quo posito quaestio est quantas vires hoc corpus a pressionibus fluidi sustineat. Primum autem obseruo, si Tab. VI. Fig. 8.

portio

portio prominens C B E secundum ipsam fluidi superficiem extremam C E resecetur, partem reliquam etiamnunc easdem pressiones esse sustentaturam, nunc autem haec pars C D E quasi tota esset fluido immersa considerari poterit, dummodo strato fluidi infinite tenui tegi concipiatur, qua conditione ne opus quidem est, quia per totam superficiem F C E G pressio est nulla. Hinc per Problema praecedens vis, quam haec pars submersa sustinet aequalis et contraria est illi vi, quam vera fluidi portio hunc locum occupans et cum reliquo fluido aequilibrium seruans a viribus sollicitantibus P, Q et R sustineret. Mente ergo spatium C D E fluido repleatur, cuius densitas in singulis punctis, ad aequilibrium requisita per superiora patebit, et virium P, Q et R sollicitatio in hanc massam exquiratur; quae in contrarium versa dabit vim quaesitam, a corporis solidi parte submersa sustentatam.

Coroll. 1.

66. Si haec vis inuenta ab iis, quibus corpus solidum per se sollicitatur perfecte destruatur, id sponte in hoc statu perseuerabit, et fluido insidebit, sin secus eueniat corpus vel maius vel minus immergetur, vel conuertetur, nisi a noua vi aequilibrium conseruetur.

Coroll. 2.

67. Inuentio ergo istius vis eodem modo institui debet, vti in praecedente problemate ostendimus:

mus: praeter volumen ſcilicet partis ſubmerſae eius quoque figuram noſſe oportet, tum vero potiſſimum denſitatem quam fluidum hoc volumen occupans et cum reliqua maſſa in aequilibrio conſiſtens, in ſingulis punctis eſſet habiturum. Quae inueſtigatio ita eſt comparata, vt nonniſi in caſibus particularibus deinceps tractandis ſuſcipi queat.

Scholion.

68. Imprimis autem notandum eſt, non ſemper omnes vires elementares quibus volumen quoddam fluidum a viribus P, Q et R ſollicitatur, ad vnicam vim omnibus aequiualentem reuocari poſſe; ſed quandoque eas vires ad duas, interdum etiam ad tres reduci debere, vt paucioribus non idem effectus obtineri queat. Haec autem virium ſupputatio eodem modo inſtitui debet, quo in corporibus ſolidis a viribus quibuscunque ſollicitatis vti ſolemus, quandoquidem hae vires, poſtquam fuerint inuentae, facta inuerſione ad corpus ſolidum ſunt applicandae. In maſſa ergo fluida, in locum partis ſubmerſae ſubſtituta, primum notetur centrum inertiae, deinde vero etiam per id terni axes inter ſe normales ducti concipiantur, quo facto primum omnes vires ſollicitantes elementares in ipſum centrum inertiae transferantur, earumque vis aequiualens vna quaeratur. Praeterea ſingularum virium elementarium momenta reſpectu ternorum axium colligantur, vt pateat quantum virium momentum

corpus circa ſingulos axes ſuſtineat. Denique eadem illa vis cum his tribus momentis contrario modo corpori ſolido in locum fluidi reſtituto applicetur, ſicque facillime patebit quemnam effectum in eo ſint productura, et quomodo hoc corpus in quiete conſeruari oporteat.

Problema 6.

69. Si fluidum quodcunque a viribus quibuscunque ſollicitatum ſit in aequilibrio et vaſi cuicunque incluſum, inueſtigare vires, quas totum vas a fluidi preſſione in latera exerta ſuſtinet.

Solutio.

Si omnes preſſiones inter ſe eſſent aequales, vas fluidum continens foret in aequilibrio, neque vlla vi externa opus eſſet ad id continendum: Eatenus ergo tantum vi opus eſt ad vas ſuſtentandum, quatenus preſſiones in eius latera non vbique ſunt aequales. Tum autem ſunt inter ſe inaequales, quando fluidum a viribus, quas hic litteris P, Q, R indicauimus, ſollicitatur vnde leui attentione intelligitur, vas omnes eas vires ſuſtentare, quibus ſingula fluidi elementa a viribus P, Q et R ſollicitantur, ſi enim omnis maſſa fluida ſubito in corpus ſolidum concreſceret, easdemque vires ſuſtineret, eae quaſi in ipſum vas immediate agerent, conſiderari poſſent. Eadem autem veritas per ratiocinium ſupra adhibitum confirmari poteſt; concipiantur latera

tera vasis tenuissima, idque fluido quasi infinito immersum spectetur, ita vt fluidum externum cum interno in aequilibrio versetur. Hoc posito euidens est pressiones, quas vas a fluido externo sustinet, praecise aequales et contrarias esse iis viribus, quibus a fluido interno vrgetur, et quas hic inuestigamus. Verum pressiones externae, quoniam totum vas vt solidum corpus fluido immersum spectari potest, aequales sunt et contrariae, viribus quibus fluidum vasi inclusum actu sollicitatur; denuo igitur conuersione facta, et fluido externo penitus remoto, perspicuum est totum vas omnes sustinere vires, quibus fluidum inclusum sollicitatur.

Coroll. 1.

70. Vas igitur totum perinde vrgetur, ac si fluidum vna cum vase corpus solidum constitueret, quod ab iisdem viribus sollicitaretur. Interim tamen in pressione quam latera sustinent ingens erit discrimen, quia in corpore solido pressiones longe aliter propagantur atque in fluido.

Coroll. 2.

71. Vt ergo non solum fluidi aequilibrium, sed etiam ipsum vas cum fluido in quiete conseruetur, necesse est vt vas extrinsecus a viribus idoneis sustentetur; et quantis viribus ad hoc opus sit ex principiis positis determinari oportet.

Scholion.

72. Hic fluidum a vase vndequaque includi et compesci assumimus, nisi forte in ea regione, vbi pressio est nulla, vas sit apertum et fluidi superficies haec extrema nuda appareat. Sin autem alio loco fuerit foramen, idque ad eruptionem impediendam ope emboli debita vi intrusi obturetur, tum vas praeter illas vires fluidum sollicitantes, etiam hanc emboli vim sustinebit, quae cum pro emboli basi maior minorue esse possit, diuersissimis viribus idem vas subiectum esse potest. Statim vero atque embolus vasi affigatur seu agglutinetur, hae nouae vires subito euanescunt, ac vas solas priores sustinet.

CAPVT IV.

DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM A SOLA GRAVITATE SOLLICITATORVM.

Problema 7.

73.

Si fluidum quodcunque a sola grauitate deorsum sollicitetur quae concipiatur vt vis constantis magnitudinis, cuius directiones sint inter se parallelae omnia

omnia momenta ad ſtatum aequilibrii requiſita exponere, et principia ante ſtabilita in genere ad hunc caſum accommodare.

Solutio.

Spectetur planum tabulae vt horizontale, cui ergo directio vis ſollicitantis vbique ſit normalis, quantitatem autem huius vis acceleratricis littera g deſignemus, ipſa grauitate naturali exiſtente $= 1$, vt pateat quomodo phaenomena ſe eſſent habitura, ſi grauitas foret vel maior vel minor. Concipiatur nunc fluidi elementum quodcunque in Z, vnde ad planum horizontale demiſſo perpendiculo ZY, et ab Y ad rectam fixam AP ducta normali YX, ſint ternae coordinatae locum puncti Z definientes $AX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$. In Z porro ſit gradus caloris $= r$, denſitas fluidi $= q$, et altitudo preſſionem metiens $= p$, ita vt relatio inter p, q, r per fluidi naturam ſit data. Cum nunc elementum in Z deorſum ſecundum ZY ſollicitetur vi acceleratrice $= g$, pro ſolutione generali capitis praecedentis hic habebimus $P = 0$, $Q = 0$ et $R = -g$, vnde aequatio differentialis conditionem aequilibrii exprimens erit $dp = -gq\,dz$, quae niſi denſitas q ita ſit comparata, vt integratio ſuccedat, aequilibrium omnino locum habere nequit. Dato autem aequilibrio reliqua problemata in cap. praec. tractata facilem ſolutionem admittunt: Si enim corpus ſolidum BCDE fluido ſit ſubmerſum, id ſurſum vrgebitur

Tab. VI. Fig. 9.

Tab. VI. Fig. 7.

 tanta

tanta vi, quanta fluidi massa eius locum occupans et cum reliquo fluido in aequilibrio consistens a grauitate g deorsum pelleretur, quae ergo vis huius massae fluidae ponderi aequabitur et per eius centrum inertiae erit directa. In ipso ergo corpore BCDE notetur hoc punctum G quod massae fluidae in eius locum substitutae foret centrum inertiae, toto huius massae pondere existente $= G$, et hoc corpus fluido submersum sursum pelletur vi $= G$, cuius directio per punctum G transibit. Simili modo res se habebit si tantum portio corporis CDE
Tab. VI. Fig. 8. fluido immergatur, pro quo casu, quae modo de toto corpore sunt dicta, hic tantum de parte submersa sunt intelligenda.

Si denique fluidum fuerit vasi inclusum, totum vas inde eandem vim sustinet, ac si fluidum in solidum concresceret, pondere scilicet totius massae fluidae deorsum premetur, cuius directio transibit per centrum inertiae totius massae fluidae in vase contentae.

Coroll. 1.

74. Duo igitur casus hic sollicite sunt distinguendi, prout variabilitas densitatis q aequilibrium admittat vel minus. Si enim aequilibrium excludatur, fluidum perpetuo motu agitabitur, neque ea quae de statu aequilibrii sunt tradita, vllo modo locum habere possunt.

Coroll.

Coroll. 2.

75. Cum autem ex fluidi natura relatio detur inter pressionem p densitatem q et calorem r, densitas q vt functio ipsarum p et r spectari poterit; nisi ergo calor r qui a loco pendere censendus est, a sola altitudine $YZ = z$ pendeat, aequilibrium plane locum inuenire non poterit.

Coroll. 3.

76. Hinc sequitur aequilibrium tum solum existere posse, cum gradus caloris in eadem altitudine per totam fluidi massam fuerit idem. Sin autem in paribus altitudinibus calor fuerit diuersus, fluidum nullo modo se ad aequilibrium componere poterit.

Scholion 1.

77. Fluidum hic in genere sum contemplatus, ita vt hae conclusiones tam ad fluida aquae similia, quam quae veluti aër compressionem et rarefactionem admittunt, accommodari queant. Quare quo natura aequilibrii accuratius perspiciatur, vtrumque fluidorum genus seorsim euoluemus; in priori quidem discrimen probe est notandum, prouti fluidum per totam massam fuerit homogeneum nec ne? cuius quidem casus, quo fluidum vbique eadem gaudet densitate, totam hydrostaticam vulgarem complectitur. Sin autem sit heterogeneum, siue id fiat permixtione diuersorum fluidorum, siue idem

tanta vi, quanta fluidi massa eius locum occupans et cum reliquo fluido in aequilibrio consistens a grauitate g deorsum pelleretur, quae ergo vis huius massae fluidae ponderi aequabitur et per eius centrum inertiae erit directa. In ipso ergo corpore BCDE notetur hoc punctum G quod massae fluidae in eius locum substitutae foret centrum inertiae, toto huius massae pondere existente $= G$, et hoc corpus fluido submersum sursum pelletur vi $= G$, cuius directio per punctum G transibit. Simili modo res se habebit si tantum portio corporis CDE fluido immergatur, pro quo casu, quae modo de toto corpore sunt dicta, hic tantum de parte submersa sunt intelligenda.

Tab. VI. Fig. 8.

Si denique fluidum fuerit vasi inclusum, totum vas inde eandem vim sustinet, ac si fluidum in solidum concresceret, pondere scilicet totius massae fluidae deorsum premetur, cuius directio transibit per centrum inertiae totius massae fluidae in vase contentae.

Coroll. 1.

74. Duo igitur casus hic sollicite sunt distinguendi, prout variabilitas densitatis q aequilibrium admittat vel minus. Si enim aequilibrium excludatur, fluidum perpetuo motu agitabitur, neque ea quae de statu aequilibrii sunt tradita, vllo modo locum habere possunt.

Coroll.

Coroll. 2.

75. Cum autem ex fluidi natura relatio detur inter pressionem p densitatem q et calorem r, densitas q vt functio ipsarum p et r spectari poterit; nisi ergo calor r qui a loco pendere censendus est, a sola altitudine $YZ = z$ pendeat, aequilibrium plane locum inuenire non poterit.

Coroll. 3.

76. Hinc sequitur aequilibrium tum solum existere posse, cum gradus caloris in eadem altitudine per totam fluidi massam fuerit idem. Sin autem in paribus altitudinibus calor fuerit diuersus, fluidum nullo modo se ad aequilibrium componere poterit.

Scholion 1.

77. Fluidum hic in genere sum contemplatus, ita vt hae conclusiones tam ad fluida aquae similia, quam quae veluti aër compressionem et rarefactionem admittunt, accommodari queant. Quare quo natura aequilibrii accuratius perspiciatur, vtrumque fluidorum genus seorsim euoluemus; in priori quidem discrimen probe est notandum, prouti fluidum per totam massam fuerit homogeneum nec ne? cuius quidem casus, quo fluidum vbique eadem gaudet densitate, totam hydrostaticam vulgarem complectitur. Sin autem sit heterogeneum, siue id fiat p[illegible]xtione diuersorum fluidorum, siue idem

et profunditati E Z infra supremam superficiem F G proportionalis, praeterea vero sequitur rationem grauitatis g et densitatem fluidi b. Quodsi nunc hic perinde atque in pressionis euolutione grauitatem g vnitate indicemus et pro materia vniformi, ex qua pressio definitur, hoc ipsum fluidum substituamus vtpote etiam homogeneum; fiet altitudo pressionem metiens $p=b-z=EZ$, ita vt iam in loco quouis Z pressio p aequetur ipsi profunditati E Z infra supremam superficiem; et corpus quoduis huic fluido immersum sursum vrgebitur vi, quae ponderi aequalis voluminis fluidi est aequalis, quod cum sit homogeneum, eius media directio per corporis centrum magnitudinis transibit. Vas autem totum fluidi quod continet pondus sustinebit.

Coroll. 1.

Tab. VI. Fig. 11. 80. Quamcunque igitur vas tale fluidum continens habuerit figuram, suprema fluidi superficies F f, E e, G g in idem planum horizontale cadit; in qua pressio vbique est nulla. Infra autem hanc superficiem pressio vbique profunditati erit aequalis, siquidem hoc ipsum fluidum loco materiae illius homogeneae grauis, ex qua pressio definitur, in vsum vocetur.

Coroll. 2.

81. Circa latera ergo huius vasis in T pressio aequatur altitudini T V, ita vt spatiolum ad T norma-

normaliter prematur a vi aequali ponderi columnae ex eodem fluido formatae, cuius altitudo est T V et basis ipsum illud spatiolum. Similique modo ad t pressio altitudini t V aequabitur.

Coroll. 3.

82. Quod ad corpus solidum quodcunque immersum B C D attinet quoniam tam densitas quam grauitas fluidi vbique est eadem, perinde est in quonam loco intra fluidum id sit collocatum, semper enim sursum pelletur vi aequali ponderi paris voluminis B C D fluidi, cuius media directio per eius centrum magnitudinis transit.

Scholion.

83. Haec sunt principia vniuersae hydrostaticae, ex quibus omnia, quae in hac disciplina tradi solent, facillime deducuntur, quae cum satis superque iam ab Auctoribus sint exposita, iis plenius euoluendis hic non immoror. Ad maiora potius pergo, quae vulgo minus accurate tractari solent, quando scilicet fluidum ex partibus heterogeneis est compositum, quorsum referendus quoque est casus, quo idem fluidum diuersis caloris gradibus est praeditum, quoniam tum etiam eius densitas est diuersa: vbi imprimis animaduerti oportet his casibus fieri posse, vt aequilibrium nullum prorsus locum inueniat, ideoque fluidum continuo motu agitari

necesse sit. Cuius motus determinatio etiamsi huc non pertineat, tamen quodammodo eius rationem perspicere licebit, vnde plurima phaenomena naturae satis feliciter explicari poterunt.

Problema 9.

84. *Si fluidum nullam compressionem patiens fuerit heterogeneum, seu ex diuersis materiis fluidis mixtum, definire rationem permixtionis vt aequilibrium subsistere possit, simulque aequilibrii phaenomena.*

Solutio.

Tab. VI. Fig. 9. Denotante littera g vim acceleratricem grauitatis, sit q densitas fluidi in puncto Z, cuius locus per ternas coordinatas $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ determinatur. Si igitur altitudo p ibidem pressionem exhibeat, pro aequilibrio hanc habemus aequationem $dp = -gqdz$, quae nisi integrationem admiserit, aequilibrium oriri nequit. Necesse ergo est vt densitas q a sola variabili z pendeat, quia alioquin integratio excluditur; si enim forte obiiciatur, hoc fieri posse, dummodo quantitas q fuerit functio binarum variabilium p et z, euidens est, quia tum altitudo p functioni ipsius z aequalis inueniretur, etiam q per certam functionem ipsius z expressum iri. Quare ad aequilibrium necessario requiritur vt densitas q a sola variabili z pendeat; quae conditio eo redit vt in aequalibus altitudinibus

bus z, seu in qualibet sectione horizontali eadem vbique densitas reperiatur. Diuersa ergo fluida planis horizontalibus a se inuicem separata esse oportet, ita vt si F G sit superficies suprema, vbi pressio euanescit, per eam vbique fluidum eiusdem densitatis expandatur, quod infra iterum plano horizontali H I terminetur: vbi si aliud fluidum incipiat, id quoque vsque ad planum quoddam horizontale inferius extendatur, sicque porro si plura fluida diuersa sequantur. Quodsi in tali fluido corpus solidum B C D E sit immersum, eius loco fluidum, quod cum reliquo foret in aequilibrio consideretur, eiusque tam pondus quam centum inertiae O notetur, quo facto hoc pondus dabit vim, qua corpus B C D E a pressionibus fluidi sursum pelletur, cuius directio per punctum O transire est concipienda. Denique si casu figurae densitas supremi strati F I sit $= l$, sequentis H L $= m$, et infimi K N $= n$, pressio in loco Z erit $= g(\mathrm{GI}.\,l + \mathrm{IL}.\,m + \mathrm{LZ}.\,n)$. Tab. VII. Fig. 12.

Coroll. 1.

85. Plura ergo diuersae densitatis fluida in aequilibrio consistere nequeunt, nisi secundum strata horizontalia inter se fuerint disposita. Ac si initio alium situm habuerint, vel ad istum se component, vel se intime miscendo fluidum homogeneum constituent, vel nunquam ad aequilibrium peruenient.

corpus circa ſingulos axes ſuſtineat. Denique eadem illa vis cum his tribus momentis contrario modo corpori ſolido in locum fluidi reſtituto applicetur, ſicque facillime patebit quemnam effectum in eo ſint productura, et quomodo hoc corpus in quiete conſeruari oporteat.

Problema 6.

69. Si fluidum quodcunque a viribus quibuscunque ſollicitatum ſit in aequilibrio et vaſi cuicunque incluſum, inueſtigare vires, quas totum vas a fluidi preſſione in latera exerta ſuſtinet.

Solutio.

Si omnes preſſiones inter ſe eſſent aequales, vas fluidum continens foret in aequilibrio, neque vlla vi externa opus eſſet ad id continendum: Eatenus ergo tantum vi opus eſt ad vas ſuſtentandum, quatenus preſſiones in eius latera non vbique ſunt aequales. Tum autem ſunt inter ſe inaequales, quando fluidum a viribus, quas hic litteris P, Q, R indicauimus, ſollicitatur vnde leui attentione intelligitur, vas omnes eas vires ſuſtentare, quibus ſingula fluidi elementa a viribus P, Q et R ſollicitantur, ſi enim omnis maſſa fluida ſubito in corpus ſolidum concreſceret, easdemque vires ſuſtineret, eae quaſi in ipſum vas immediate agerent, conſiderari poſſent. Eadem autem veritas per ratiocinium ſupra adhibitum confirmari poteſt; concipiantur latera

tera vasis tenuissima, idque fluido quasi infinito immersum spectetur, ita vt fluidum externum cum interno in aequilibrio versetur. Hoc posito euidens est pressiones, quas vas a fluido externo sustinet, praecise aequales et contrarias esse iis viribus, quibus a fluido interno vrgetur, et quas hic inuestigamus. Verum pressiones externae, quoniam totum vas vt solidum corpus fluido immersum spectari potest, aequales sunt et contrariae, viribus quibus fluidum vasi inclusum actu sollicitatur; denuo igitur conuersione facta, et fluido externo penitus remoto, perspicuum est totum vas omnes sustinere vires, quibus fluidum inclusum sollicitatur.

Coroll. 1.

70. Vas igitur totum perinde vrgetur, ac si fluidum vna cum vase corpus solidum constitueret, quod ab iisdem viribus sollicitaretur. Interim tamen in pressione quam latera sustinent ingens erit discrimen, quia in corpore solido pressiones longe aliter propagantur atque in fluido.

Coroll. 2.

71. Vt ergo non solum fluidi aequilibrium, sed etiam ipsum vas cum fluido in quiete conseruetur, necesse est vt vas extrinsecus a viribus idoneis sustentetur; et quantis viribus ad hoc opus sit ex principiis positis determinari oportet.

Scholion.

72. Hic fluidum a vase vndequaque includi et compesci assumimus, nisi forte in ea regione, vbi pressio est nulla, vas sit apertum et fluidi superficies haec extrema nuda appareat. Sin autem alio loco fuerit foramen, idque ad eruptionem impediendam ope emboli debita vi intrusi obturetur, tum vas praeter illas vires fluidum sollicitantes, etiam hanc emboli vim sustinebit, quae cum pro emboli basi maior minorue esse possit, diuersissimis viribus idem vas subiectum esse potest. Statim vero atque embolus vasi affigatur seu agglutinetur, hae nouae vires subito euanescunt, ac vas solas priores sustinet.

CAPVT IV.

DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM A SOLA GRAVITATE SOLLICITATORVM.

Problema 7.

73.

Si fluidum quodcunque a sola grauitate deorsum sollicitetur quae concipiatur vt vis constantis magnitudinis, cuius directiones sint inter se parallelae omnia

omnia momenta ad ſtatum aequilibrii requiſita exponere, et principia ante ſtabilita in genere ad hunc caſum accommodare.

Solutio.

Spectetur planum tabulae vt horizontale, cui ergo directio vis ſollicitantis vbique ſit normalis, quantitatem autem huius vis acceleratricis littera g deſignemus, ipſa grauitate naturali exiſtente $=1$, vt pateat quomodo phaenomena ſe eſſent habitura, ſi grauitas foret vel maior vel minor. Concipiatur nunc fluidi elementum quodcunque in Z, vnde ad planum horizontale demiſſo perpendiculo ZY, et ab Y ad rectam fixam AP ducta normali YX, ſint ternae coordinatae locum puncti Z definientes $AX=x$, $XY=y$, et $YZ=z$. In Z porro ſit gradus caloris $=r$, denſitas fluidi $=q$, et altitudo preſſionem metiens $=p$, ita vt relatio inter p, q, r per fluidi naturam ſit data. Cum nunc elementum in Z deorſum ſecundum ZY ſollicitetur vi acceleratrice $=g$, pro ſolutione generali capitis praecedentis hic habebimus $P=0$, $Q=0$ et $R=-g$, vnde aequatio differentialis conditionem aequilibrii exprimens erit $dp=-gqdz$, quae niſi denſitas q ita ſit comparata, vt integratio ſuccedat, aequilibrium omnino locum habere nequit. Dato autem aequilibrio reliqua problemata in cap. praec. tractata facilem ſolutionem admittunt: Si enim corpus ſolidum BCDE fluido ſit ſubmerſum, id ſurſum vrgebitur tanta

Tab. VI. Fig. 9.

Tab. VI. Fig. 7.

tanta vi, quanta fluidi massa eius locum occupans et cum reliquo fluido in aequilibrio consistens a grauitate g deorsum pelleretur, quae ergo vis huius massae fluidae ponderi aequabitur et per eius centrum inertiae erit directa. In ipso ergo corpore BCDE notetur hoc punctum G quod massae fluidae in eius locum substitutae foret centrum inertiae, toto huius massae pondere existente $= G$, et hoc corpus fluido submersum sursum pelletur vi $= G$, cuius directio per punctum G transibit. Simili modo res se habebit si tantum portio corporis CDE fluido immergatur, pro quo casu, quae modo de toto corpore sunt dicta, hic tantum de parte submersa sunt intelligenda.

Tab. VI. Fig. 8.

Si denique fluidum fuerit vasi inclusum, totum vas inde eandem vim sustinet, ac si fluidum in solidum concresceret, pondere scilicet totius massae fluidae deorsum premetur, cuius directio transibit per centrum inertiae totius massae fluidae in vase contentae.

Coroll. I.

74. Duo igitur casus hic sollicite sunt distinguendi, prout variabilitas densitatis q aequilibrium admittat vel minus. Si enim aequilibrium excludatur, fluidum perpetuo motu agitabitur, neque ea quae de statu aequilibrii sunt tradita, vllo modo locum habere possunt.

Coroll.

Coroll. 2.

75. Cum autem ex fluidi natura relatio detur inter pressionem p densitatem q et calorem r, densitas q vt functio ipsarum p et r spectari poterit; nisi ergo calor r qui a loco pendere censendus est, a sola altitudine $YZ = z$ pendeat, aequilibrium plane locum inuenire non poterit.

Coroll. 3.

76. Hinc sequitur aequilibrium tum solum existere posse, cum gradus caloris in eadem altitudine per totam fluidi massam fuerit idem. Sin autem in paribus altitudinibus calor fuerit diuersus, fluidum nullo modo se ad aequilibrium componere poterit.

Scholion 1.

77. Fluidum hic in genere sum contemplatus, ita vt hae conclusiones tam ad fluida aquae similia, quam quae veluti aër compressionem et rarefactionem admittunt, accommodari queant. Quare quo natura aequilibrii accuratius perspiciatur, vtrumque fluidorum genus seorsim euoluemus; in priori quidem discrimen probe est notandum, prouti fluidum per totam massam fuerit homogeneum nec ne? cuius quidem casus, quo fluidum vbique eadem gaudet densitate, totam hydrostaticam vulgarem complectitur. Sin autem sit heterogeneum, siue id fiat permixtione diuersorum fluidorum, siue idem

idem fluidum in diuerſis locis diuerſo caloris gradu fuerit praeditum, hic imprimis quaeſtio euoluenda occurret, quando aequilibrium ſit poſſibile et ſub quibus conditionibus. Altera autem huius capitis pars circa fluida compreſſionis capacia verſabitur, vbi etiam plures caſus tam pro permixtione, plurium huiusmodi fluidorum diuerſorum quam pro variatione caloris expediri conueniet.

Scholion 2.

78. Vbique autem cum ſtatus aequilibrii fuerit definitus, etiam inueſtigabimus, quomodo corpora ſolida ipſis immerſa ſe ſint habitura, vbi imprimis notandum eſt, niſi fluidum ſit homogeneum ſeu vbique eandem habeat denſitatem, regulas vulgares de vi, quam corpora ſubmerſa ſuſtinent, non amplius eſſe veritati conſentaneas. Quodſi enim denſitas fluidi fuerit variabilis pro loci diuerſitate, tum etiam locus, vbi corpus ſolidum fluido immergitur, conſiderari debet: ſiquidem pro eo loco, quem corpus ſolidum in fluido occupat, etiamſi fluidum inde iam ſit expulſum, tamen diligenter perpendi oportet, quantam denſitatem fluidum, mente ſaltem in locum ſolidi ſubſtitutum, in ſingulis punctis eſſet habiturum, id quod ex conditione aequilibrii eſt definiendum. Non ſolum enim tum pondus huius maſſae fluidae quaeri debet, ſed etiam eius centrum inertiae, cuius locus potiſſimum a variatione denſitatis

tatis pendebit. Nisi enim hoc punctum exacte fuerit cognitum, media directio vis, qua solidum a fluido vrgetur, assignari non potest.

APPLICATIO
ad fluida omnis compressionis expertia.

Problema 8.

79. Si fluidum fuerit homogeneum, eiusque densitas q vbique eadem seu constans, statum aequilibrii assignare, et quantas vires tam vas continens quam corpora immersa sustineant, definire.

Solutio.

Cum densitas vbique sit eadem ponatur $q=b$ et solutio superior praebet $dp=-gbdz$, vnde integrando elicimus $p=gb(h-z)$, existente h constante per integrationem ingressa. In eleuatione igitur super plano horizontali, a quo altitudinem z sumsimus, facta ea $z=h$ pressies euanescit, ibique ergo existit extrema fluidi superficies quae propterea etiam est horizontalis. Sit ergo F E G haec suprema superficies ad libellam composita, et C Y D planum horizontale pro basi assumtum, vt illius eleuatio sit $EY=h$ atque in altitudine quacunque minore $YZ=z$, pressio erit $p=gb(h-z)=gb.EZ$. In eadem ergo altitudine YZ pressio vbique est eadem, Tab. VI. Fig. 10.

 et

et profunditati E Z infra ſupremam ſuperficiem F G proportionalis, praeterea vero ſequitur rationem grauitatis g et denſitatem fluidi b. Quodſi nunc hic perinde atque in preſſionis euolutione grauitatem g vnitate indicemus et pro materia vniformi, ex qua preſſio definitur, hoc ipſum fluidum ſubſtituamus vtpote etiam homogeneum; fiet altitudo preſſionem metiens $p = h - z = EZ$, ita vt iam in loco quouis Z preſſio p aequetur ipſi profunditati E Z infra ſupremam ſuperficiem; et corpus quoduis huic fluido immerſum ſurſum vrgebitur vi, quae ponderi aequalis voluminis fluidi eſt aequalis, quod cum ſit homogeneum, eius media directio per corporis centrum magnitudinis tranſibit. Vas autem totum fluidi quod continet pondus ſuſtinebit.

Coroll. 1.

Tab. VI. Fig. 11. 80. Quamcunque igitur vas tale fluidum continens habuerit figuram, ſuprema fluidi ſuperficies Ff, Ee, Gg in idem planum horizontale cadit, in qua preſſio vbique eſt nulla. Infra autem hanc ſuperficiem preſſio vbique profunditati erit aequalis, ſiquidem hoc ipſum fluidum loco materiae illius homogeneae grauis, ex qua preſſio definitur, in vſum vocetur.

Coroll. 2.

81. Circa latera ergo huius vaſis in T preſſio aequatur altitudini T V, ita vt ſpatiolum ad T norma-

normaliter prematur a vi aequali ponderi columnae ex eodem fluido formatae, cuius altitudo est T V et basis ipsum illud spatiolum. Similique modo ad t pressio altitudini t V aequabitur.

Coroll. 3.

82. Quod ad corpus solidum quodcunque immersum B C D attinet quoniam tam densitas quam grauitas fluidi vbique est eadem, perinde est in quonam loco intra fluidum id sit collocatum, semper enim sursum pelletur vi aequali ponderi paris voluminis B C D fluidi, cuius media directio per eius centrum magnitudinis transit.

Scholion.

83. Haec sunt principia vniuersae hydrostaticae, ex quibus omnia, quae in hac disciplina tradi solent, facillime deducuntur, quae cum satis superque iam ab Auctoribus sint exposita, iis plenius euoluendis hic non immoror. Ad maiora potius pergo, quae vulgo minus accurate tractari solent, quando scilicet fluidum ex partibus heterogeneis est compositum, quorsum referendus quoque est casus, quo idem fluidum diuersis caloris gradibus est praeditum, quoniam tum etiam eius densitas est diuersa: vbi imprimis animaduerti oportet his casibus fieri posse, vt aequilibrium nullum prorsus locum inueniat, ideoque fluidum continuo motu agitari

necesse sit. Cuius motus determinatio etiamsi huc non pertineat, tamen quodammodo eius rationem perspicere licebit, vnde plurima phaenomena naturae satis feliciter explicari poterunt.

Problema 9.

84. *Si fluidum nullam compressionem patiens fuerit heterogeneum, seu ex diuersis materiis fluidis mixtum, definire rationem permixtionis vt aequilibrium subsistere possit, simulque aequilibrii phaenomena.*

Solutio.

Tab. VI. Fig. 9. Denotante littera g vim acceleratricem grauitatis, sit q densitas fluidi in puncto Z, cuius locus per ternas coordinatas $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ determinatur. Si igitur altitudo p ibidem pressionem exhibeat; pro aequilibrio hanc habemus aequationem $dp = -gqdz$, quae nisi integrationem admiserit, aequilibrium oriri nequit. Necesse ergo est vt densitas q a sola variabili z pendeat, quia alioquin integratio excluditur; si enim forte obiiciatur, hoc fieri posse, dummodo quantitas q fuerit functio binarum variabilium p et z, euidens est, quia tum altitudo p functioni ipsius z aequalis inveniretur, etiam q per certam functionem ipsius z expressum iri. Quare ad aequilibrium necessario requiritur vt densitas q a sola variabili z pendeat; quae conditio eo redit vt in aequalibus altitudinibus

bus z, ſeu in qualibet ſectione horizontali eadem vbique denſitas reperiatur. Diuerſa ergo fluida planis horizontalibus a ſe inuicem ſeparata eſſe oportet, ita vt ſi F G ſit ſuperficies ſuprema, vbi preſſio euaneſcit, per eam vbique fluidum eiusdem denſitatis expandatur, quod infra iterum plano horizontali H I terminetur: vbi ſi aliud fluidum incipiat, id quoque vsque ad planum quoddam horizontale inferius extendatur, ſicque porro ſi plura fluida diuerſa ſequantur. Quodſi in tali fluido corpus ſolidum B C D E ſit immerſum, eius loco fluidum, quod cum reliquo foret in aequilibrio conſideretur, eiusque tam pondus quam centum inertiae O notetur, quo facto hoc pondus dabit vim, qua corpus B C D E a preſſionibus fluidi ſurſum pelletur, cuius directio per punctum O tranſire eſt concipienda. Denique ſi caſu figurae denſitas ſupremi ſtrati F I ſit $= l$, ſequentis H L $= m$, et infimi KN $= n$, preſſio in loco Z erit $= g(GI.\,l + IL.\,m + LZ.\,n)$. Tab. VII. Fig. 12.

Coroll. 1.

85. Plura ergo diuerſae denſitatis fluida in aequilibrio conſiſtere nequeunt, niſi ſecundum ſtrata horizontalia inter ſe fuerint diſpoſita. Ac ſi initio alium ſitum habuerint, vel ad iſtum ſe component, vel ſe intime miſcendo fluidum homogeneum conſtituent, vel nunquam ad aequilibrium peruenient.

Coroll. 2.

86. Cum idem fluidum pro diuerſo caloris gradu variam denſitatem recipiat, perſpicuum eſt, etiam fluidum alias homogeneum ſe ad aequilibrium componere non poſſe, niſi per quamlibet ſectionem horizontalem calor vbique fuerit idem.

Scholion 1.

87. Vt plura fluida heterogenea in aequilibrio conſiſtant, ſufficiat ea ſecundum ſtrata horizontalia inter ſe eſſe diſpoſita, vt per quamlibet ſectionem horizontalem per totam fluidi maſſam factam denſitas vbique ſit eadem, neque ad hoc abſolute requiritur, vt ſpecifice grauiſſimum locum infimum, leuiſſimum vero ſupremum occupet. Ita aequilibrium daretur etſi ſupremum ſtratum FI argentum viuum, medium HL aquam et infimum KN oleum contineret; verum hoc aequilibrium minime eſſet ſtabile; quoniam leuiſſima facta concuſſione, ſtatim ac grauioris fluidi particula in inferius leuius cederet, aequilibrium ita perturbaretur, vt grauiſſimum fundum eſſet petiturum, leuiſſimum vero in ſupremum ſtatum ſe recepturum, quandoquidem haec tria fluida ab intima permixtione, qua fluidum homogeneum oriretur abhorrent Quamobrem vt aequilibrium perenne obtineatur, variorum fluidorum ſtrata ita diſponi debent, vt deorſum deſcendendo continuo grauiora ſeu denſiora occur-

currant. At si fluida etsi densitate differentia, facile permisceri patiantur, aequilibrium vix obtineri potest, nisi ea ita confundantur, vt fluidum homogeneum mentiantur. Vtcunque ergo fluida densitate differant, tamen per agitationem ita se tandem disponent, quemadmodum status aequilibrii postulat.

Scholion 2.

88. Fieri autem potest, vt fluidum adeo homogeneum nunquam in aequilibrium perueniat, quando scilicet causa externa adest, qua fluido in vna vasis parte continuo maior caloris gradus imprimitur, veluti si vasis F N aquam continentis lateri G N ignis sit appositus, quo aqua in regione E N contenta multo calidior conseruatur, et vas in alteram partem F M satis protensum sit, vt idem caloris gradus eousque propagari nequeat, ac circa F M aqua perpetuo sit multo frigidior. Cum igitur in parte igni vicina E N aquae densitas sit minor, in opposita vero F L maior, aequilibrium nullo modo locum inuenire potest, cuiusmodi autem motus in eo sit futurus, ex sequenti ratiocinio coniici poterit: Concipiamus diaphragma verticale E L aquam calidiorem a frigidiori separans, atque vt in eius ima parte Z pressio vtrinque existat aequalis, necesse est aquae calidioris altitudinem E Z superare altitudinem frigidioris *e* Z. Hoc ergo modo impedietur ne particula in foraminulo Z *z* ad motum incitetur, at in locis altioribus versus *e* sumtis

Tab. VIII. Fig. 13.

ſumtis preſſio aquae calidae ſine dubio ſuperabit preſſionem frigidae, ex quo ſi totum diaphragma foraminibus pertuſum concipiatur, per ſuperiora aqua calida effluet in regionem frigidae. Qui fluxus ſimul ac inceperit ob auctam altitudinem aquae frigidae eius preſſio circa fundum in Z augebitur contraria vero calidae minuetur, ſicque aqua frigida hic in locum calidae pelletur ac ſimul prior cauſa aquam calidam in regione ſuperiori verſus F vrgens denuo vigebit. Qui vterque fluxus cum perpetuo continuari debet, etiam penitus ſublato diaphragmate EL, euidens eſt hoc caſu quo aqua in regione EN iugiter maiori calore praedita eſt quam in regione oppoſita FL eiusmodi motum perennem in aqua ineſſe debere, vt ſuperne circa GF fluxus fiat ab G ad F aquae calidae in locum frigidae, inferne autem contra ab M ad N aquae frigidae in locum calidae; niſi forte amplitudo vaſis NM ita ſit parva, vt tandem aquae per totam extenſionem idem caloris gradus induci queat.

Scholion 3.

89. Haec concluſio ex theoria deducta, quod fluidum nunquam in ſtatum aequilibrii peruenire poſſit, niſi in aequalibus altitudinibus vbique idem reperiatur caloris gradus, maximi eſt momenti, ac ratio etiam huius phaenomeni nunc perſpicue cognoſcitur quae in eo eſt ſita, quod ſi fluidum ita ſit diſpoſitum, vt circa fundum aequilibrium detur, id

id prope ſupremam ſuperficiem prorſus excludatur. Ex quo intelligitur, quo profundius ſit huiusmodi fluidum, quo in maius ſpatium id extendatur, et quo maius fuerit discrimen in gradu caloris, eo fortiorem eſſe debere iſtum fluxum internum, quo circa ſuperficiem aqua calida in locum frigidae, circa fundum autem contra aqua frigida in locum calidae continuo fertur. Si ergo in mari eiusmodi locus detur, vel lacus quidam ita ſit comparatus, vt in altero termino aqua perpetuo ſit magis calida quam in termino oppoſito, hoc phaenomenum imprimis cerni debebit, vt in ſuperficie aqua continuo a loco calidiori in frigidiorem defluat, circa fundum autem fluxus contrarius obſeruetur. His perpenſis ſatis veriſimile videtur, oceani fluxum intra tropicos ab oriente in occidentem ab hac cauſa potiſſimum oriri, quandoquidem a ſole mare in locis orientalioribus multo magis caleſit, quam in occidentalioribus, qui effectus inſuper a continuo ſolis progreſſu ab oriente in occidentem haud mediocriter augetur.

APPLICATIO
ad fluida compreſſionis et rarefactionis capacia.

Problema 10.

90. *Si fluidum aëri ſimile a grauitate animatum vbique eodem caloris gradu ſit praeditum, ſtatum aequilibrii definire et preſſionem in ſingulis locis.*

 Solu-

Solutio.

Tab. VI. Fig. 9. Assumto quodam plano horizontali AXY supra quod altitudines huius fluidi mensurentur, sit in Z eius particula quaecunque, eiusque altitudo super isto plano $YZ = z$. Densitas porro ibi sit $= q$, et altitudo pressionem metiens $= p$; et quoniam gradus caloris vbique idem statuitur, densitas q a sola pressione p pendebit eiusque certa erit functio ex natura fluidi definienda. Grauitatis nunc vi acceleratrice posita $= g$, pro qua in mensura pressionis vnitate vtimur, status aequilibrii hac aequatione differentiali $dp = -gqdz$ definitur, quae cum q sit functio ipsius p semper integrationem admittit, et integrata praebet $\int \frac{dp}{q} = g(b-z)$, vnde primo intelligimus, aequilibrium semper locum habere, et eum in eum statum peruenerit, pressionem in singulis locis assignare poterimus. Patet autem pressionem p per solam altitudinem z determinari, ita vt vbique ad aequales altitudines eadem futura sit pressio p. Cum igitur euolutio huius formulae pendeat a ratione, qua densitas q per pressionem p determinatur, aliquot hypotheses percurramus.

I. Sit primo $p = \frac{aq}{b}$, ita vt densitati b conueniat pressio a, et generatim pressio densitati sit proportionalis. Quare ob $q = \frac{bp}{a}$ habebimus $\frac{a}{b} lp = g(b-z)$, ac si sumamus in plano horizontali AXY densitatem

tem esse $=b$, et pressionem $=a$, fiet $\frac{a}{b}\,la=gb$, ideoque $\frac{a}{b}\,lp=\frac{a}{b}\,la-gz$ seu $l\frac{a}{p}=\frac{gb}{a}\,z$.

II. Loco alterius hypothesis supra ex aëris maxima et minima densitate stabilitae quia ad integrationem minus est idonea, sequente vtamur ad phaenomena egregie accommodata. Posita densitate minima $=m$, maxima vero $=n$ statuamus $q=\frac{mk+np}{k+p}$, vbi k denotet pressionem valde magnam, quam experimentis vix attingere liceat, verumtamen talem, vt pro pressionibus mediocribus, mk prae np quasi euanescat, quod cum densitas minima m prae maxima n vix pars $\frac{1}{10000000}$ aestimari queat, facile efficitur, si verbi gratia pressione atmosphaerae in plano horizontali AXY posita $=a$ sumatur $k=100\,a$ vel etiam $k=1000\,a$; hoc autem modo si pressio mediocris non vehementer ab a abhorreat, in illius formulae numeratore pars mk prae np, in denominatore vero pars p prae k negligi poterit vt prodeat $q=\frac{np}{k}$, seu densitas pressioni proportionalis, vt aëris indoles postulat. Hinc ergo nostra aequatio differentialis erit $\frac{k+p}{mk+pn}\,dp=-g\,dz$, vnde si in ipso plano horizontali AXY fuerit pressio $=a$, integratio praebet

$$\frac{a-p}{n}+\frac{(n-m)k}{nn}\,l\,\frac{mk+na}{mk+np}=g\,z.$$

Quodsi densitatem in eodem plano horizontali vocemus $=b$ ob $b=\frac{mk+na}{k+a}$ erit $k=\frac{(n-b)a}{b-m}$ ideoque in genere $q=\frac{m(n-b)a+n(b-m)p}{(n-b)a+(b-m)p}=m+\frac{(n-m)(b-m)p}{(n-b)a+(b-m)p}$,

 ex

ex quo aequatio nostra statum aequilibrii definiens erit:

$$\frac{a-p}{n} + \frac{(n-m)(n-b)a}{nn(b-m)}\, l\, \frac{(n-m)\,b\,a}{m(n-b)a+n(b-m)p} = g\,z.$$

Cum igitur sursum ascendendo pressio p continuo diminuatur pro eius quauis diminutione infra a altitudo z hinc facile definitur, ac pressio p plane euanescet in altitudine, quae est $= \frac{a}{ng} + \frac{(n-m)(n-b)a}{nn(b-m)g}\, l\, \frac{(n-m)b}{m(n-b)}$, vbi densitas fiet $= m$, et atmosphaera penitus desinere est censenda. Quantam pressionem solida huiusmodi fluido immersa sustineant, ex praecedentibus satis intelligitur.

Coroll. 1.

91. Quia pressio atmosphaerae per altitudines mercuriales mensurari solet, densitas mercurii vnitate est denotanda; vnde parum a scopo aberrabimus, si maximam aëris densitatem n etiam vnitate designemus: tum autem denotante iam a altitudinem barometri in superficie terrae erit propemodum densitas ibi $b = \frac{1}{10000}$, minima vero densitas m minimum adhuc millies minor est aestimanda.

Coroll. 2.

92. Quodsi porro grauitatem g vnitate designemus aequatio inuenta erit:

$$z = a - p + \frac{9999(1-m)a}{1-10000\,m}\, l\, \frac{(1-m)a}{9999\,m\,a + (1-10000\,m)p},$$

vnde:

vnde tota atmoſphaerae altitudo facta preſſione $p = 0$ reperitur $= a + \frac{9999(1-m)a}{1-10000m} l \frac{1-m}{9999m}$. Quare poſito $m = 10^{-\mu}$ quia exponens μ eſt valde magnus, erit proxime:

$$z = a - p + 10000 \, l \frac{10^{\mu-4} a}{a + 10^{\mu-4} p},$$

hincque altitudo atmoſphaerae $= a + 10000 \, a. (\mu - 4) \, l \, 10$.

Coroll. 3.

93. Cum igitur ſit $a = 2\frac{1}{2}$ ped. et $l10 = 2.30258$ ſi altitudo atmoſphaerae ſtatuatur $= \lambda a$, vt λ ſit numerus maximus, fiet hinc $\lambda - 1 = 23026 (\mu - 4)$. Quare ſi modo ſit $\mu = 6$ ſeu $m = \frac{1}{1000000}$, fit $\lambda = 2.23026$, et 23026 ped. pro milliari germanico aeſtimatis altitudo atmoſphaerae ad quinque milliaria aſſurget, ſumtoque $\mu = 8$ ad decem milliaria.

Coroll. 4.

94. Si ergo altitudo atmoſphaerae aeſtimetur 5 milliarium erit aeris denſitas minima $m = \frac{1}{1000000}$, qui valor cum tantum centies ſit minor denſitate, quam ſentimus, experimenta pneumatica vtique ſuadent vt ſtatuamus $m = \frac{1}{100000000}$, et altitudinem atmoſphaerae 10 milliarium vnde pro quauis altitudine z erit $z = a - p + 10000 \, a \, l \frac{10000 \, a}{a + 10000 \, p}$ ibique erit

densitas aeris $q = \frac{1}{13000000} + \frac{p}{10000\,a + p}$ densitate mercurii existente $= 1$.

Scholion.

95. Hae duae hypotheses etsi natura prorsus diuersae tamen inter se vix discrepant, nisi pressio sit vel nulla vel adeo infinita. Quando autem pressio nulla statuitur, discrimen cernitur maximum, cum prior hypothesis, atmosphaerae altitudinem infinitam tribuat altera vero finitam, antequam autem ascendendo ad hanc peruenitur, ratio qua et densitas q et pressio p decrescit, ex vtraque hypothesi eadem fere prodit. Ac si liceret infra planum AXY in viscera terrae descendere, vix vlla differentia perciperetur, nisi ad maximam profunditatem fuerit deuentum, quanquam in descensu differentia sensibilior fieri debet quam in ascensu, ex his formulis autem tabula condi solet ostendens quantum in ascensu ad quamuis altitudinem pressio cum densitate minuatur, in descensu vero augeatur, quae autem ab experientia haud mediocriter abludere deprehenditur. Cuius rei causa non in eo sita est putanda, quod hic non veram relationem inter densitatem et pressionem simus secuti, quomodocunque enim ea fuerit comparata, semper pro iis altitudinibus ad quas nobis ascendere licet, eadem lex prodire debet, propterea quod in his variationibus densitas satis exacte pressioni est proportionalis. Vera autem huius aberrationis causa sine dubio in eo est quae-

quaerenda, quod hic toti atmoſphaerae vbique eundem calorem tribuimus, cum tamen experientia longe aliud declaret, qua nouimus aſcendendo gradum caloris continuo diminui, ita vt ad certam altitudinem ſub aequatore aeque ac ſub polis vbique terrarum frigus intenſiſſimum fere in eodem gradu reperiatur, atque tota caloris et frigoris variatio et viciſſitudo tantum circa terrae ſuperficiem obſeruetur, cum etiam in terrae interiora penetrando continuo magis ad aequalitatem componatur. Lex vero, qua calor ſurſum aſcendendo diminuitur, nullam certam regulam ſequitur, ſed pro variatione climatum et tempeſtatum maxime eſt irregularis; vnde in ſequente problemate rem ita generaliter ſum complexurus, vt ad omnes caſus accommodari queat; pro ſcala nempe caloris in quauis altitudine lineam curuam quamcunque adhibebo; vbi autem hoc perpetuo eſt tenendum, niſi vbique in aequalibus altitudinibus idem ſit caloris gradus, aequilibrium plane dari non poſſe.

Problema II.

95. Data ſcala caloris pro qualibet altitudine ſuper plano horizontali, definire ſtatum aequilibrii atmoſphaerae et preſſionem cum denſitate aeris in quauis altitudine.

Solutio.

A plano horizontali C A D aſcendendo per altitudinem verticalem $AZ = z$ ſit ibi gradus caloris Tab. VII. Fig. 14.

ris $= r$ repraesentatus applicata ZR curuae cognitae CRr, quae est scala caloris; tum vero in eadem altitudine sit densitas aëris $= q$ et pressio $= p$, quae simul denotet altitudinem mercurii in barometro ad Z constituto, ita vt hic densitas mercurii vnitate exprimatur, ideoque q sit fractio valde exigua. In ipso autem plano horizontali CAD sit gradus caloris AC$= c$, densitas aeris $= b$ et pressio seu altitudo barometri in A $= a$. Iam pro altitudinibus ad quas ascendere licet, ante vidimus pressionem densitati proportionalem statui posse, siquidem calor fuerit idem; calore ergo variabili assumto si eius mensura adhuc incerta ita determinetur, vt manente densitate eadem calor pressioni proportionalis aestimetur, habebimus $p = \frac{aqr}{bc}$, vnde fit $q = \frac{bcp}{ar}$. Quare cum status aequilibrii hac aequatione differentiali contineatur $\frac{dp}{q} = -dz$, posita vi grauitatis acceleratrice $g = 1$ erit $\frac{dp}{p} = \frac{-bcdz}{ar}$, quae aequatio cum r sit functio ipsius z vtique integrationem admittit, simulque indicat hoc casu aequilibrium locum habere, quo cum atmosphaera peruenerit fiet integrando $lp = \text{Const.} - \frac{bc}{a}\int\frac{dz}{r}$. Ex scala caloris CR$r$ construatur alia curua DSs, vt sit vbique $ZS = \frac{c}{r} = \frac{AC}{ZR}$, ideoque AD $= 1$, et per quadraturam huius curuae habebimus $l\frac{a}{p} = \frac{b}{a}.ADZS$, vnde definita pressione p pro altitudine AZ$= z$, erit ibidem densitas $q = \frac{bcp}{ar} = \frac{bcp}{a.ZR}$. Vel si loco caloris r ipsam aream curuae DSs in calculum introducere

ducere velimus ponendo $\int \frac{c\,dz}{r} = s$, ita vt s sit certa functio ipsius z euanescens posito $z = 0$, erit $l\frac{a}{p} = \frac{bs}{a}$ seu $p = a e^{\frac{-bs}{a}}$, et ob $r = \frac{c\,dz}{ds}$, habebitur $q = \frac{bp\,ds}{a\,dz} = \frac{b\,ds}{dz} e^{\frac{-bs}{a}}$ vbi notetur, si calor per totam altitudinem esset idem fore $s = z$, sin autem calor decrescat functionem s in maiore ratione crescere debere quam z, ita tamen vt posito $z = 0$ fiat $s = 0$ et $\frac{ds}{dz} = 1$, vnde statui conueniet $s = z + \alpha z^{\lambda}$ existente $\lambda > 1$. Quo facto erit $r = \frac{c}{\alpha\lambda z^{\lambda-1} + 1}$, et $q = \frac{bp}{a}(1 + \alpha\lambda z^{\lambda-1})$.

Coroll. 1.

97. Quodsi scala caloris C R r sit linea recta verticalem A Z in altitudine $z = b$ secans, ita vt ibi calor prorsus euanescat; pro hoc casu habebimus $r = c(1 - \frac{z}{b})$ tum vero $p = a(1 - \frac{z}{b})^{\frac{bb}{a}}$ et $q = b(1 - \frac{z}{b})^{\frac{bb}{a} - 1}$. Hinc posito $z = b$ pressio ibi euanescet, densitas vero q vel euanescet si $b > \frac{a}{b}$ vel erit $= b$ si $b = \frac{a}{b}$ vel adeo infinita euadet si $b < \frac{a}{b}$.

Coroll. 2.

98. Si scala caloris sit logarithmica sursum cum verticali A Z z conuergens, seu $z = b\,l\frac{c}{r}$ erit

 $r = ce$

$r = c e^{\frac{-z}{b}}$, hinc $q = \frac{bp}{a} e^{\frac{z}{b}}$, ideoque $\frac{dp}{p} = -\frac{b}{a} e^{\frac{z}{b}} dz$, vnde integrando colligitur $l\frac{a}{p} = \frac{bb}{a}(e^{\frac{z}{b}} - 1)$, ex qua aequatione pro quauis eleuatione z pressio p assignari poterit. Hoc casu in altitudine infinita tam pressio p quam densitas q cum calore r euanescet.

Coroll. 3.

99. Si calor etiam descendendo decrescat formula $r = \frac{c}{1 + \alpha\lambda z^{\lambda-1}}$ ad hunc casum accommodari potest sumendo pro λ numerum imparem vnitate semper maiorem. Veluti posito $\lambda = 3$, habebimus $r = \frac{c}{1 + 3\alpha zz}$, $s = z + \alpha z^3$, hinc $p = a e^{\frac{-bz}{a}}(1 + \alpha zz)$ atque $q = \frac{bp}{a}(1 + 3\alpha zz)$. Hic si ponatur $z = \infty$, cum calore etiam pressio cum densitate euanescet.

Scholion 1.

100. Relatio inter pressionem, densitatem et calorem, etiam generalior in calculum introduci potest, ei qua supra sumus vsi conformis, vbi densitatem minimam $= m$, maximam vero $= n$ statuimus. Sit enim hic ob calorem variabilem $\frac{qr}{c} = \frac{mk + np}{k + p}$ seu $q = \frac{mk + np}{k + p} \cdot \frac{c}{r}$ et sumto $g = 1$ aequatio differentialis $\frac{k + p}{mk + np} dp = \frac{-c\,dz}{r}$ integrata dat $\frac{a - p}{n} + \frac{(n - m)k}{nn} l \frac{mk + na}{mk + np} = \int \frac{c\,dz}{r}$. Pro casu ergo praesenti, vbi densitas in superficie terrae $= b$ fit $k = \frac{(n - b)a}{b - m}$ et

et $q = \left(m + \frac{(n-m)(b-m)p}{(n-b)a+(b-m)p}\right)\frac{c}{r}$ hincque $\frac{a-p}{n} + \frac{(n-m)(n-b)a}{nn(b-m)}$
$l\,\frac{(n-m)ba}{m(n-b)a+n(b-m)p} = \int\frac{c\,dz}{r}$.

Cum autem ob densitatem mercurii $= 1$ statui queat $n = 1$, ac tam b prae n, quam m prae b sit fractio minima, satis exacte habebimus:

$$q = \left(m + \frac{bp}{a-b(a-p)}\right)\frac{c}{r} \text{ et}$$
$$a - p + \frac{a}{b}\,l\,\frac{ba}{bp+m(a-p)} = \int\frac{c\,dz}{r}.$$

Hic si vtamur hypothesi $r = \frac{c}{1+3\alpha zz}$ obtinebimus

$$q = \left(m + \frac{bp}{a-b(a-p)}\right)(1+3\alpha zz) \text{ et}$$
$$a - p + \frac{a}{b}\,l\,\frac{ba}{bp+m(a-p)} = z + \alpha z^3$$

vnde posito $p = 0$ tota atmosphaerae altitudo, quae sit $= b$ ita definitur, vt sit $a + \frac{a}{b}\,l\,\frac{b}{m} = b + \alpha b^3$; ex quo patet α ita exiguam fractionem esse debere vt etiamsi b sit altitudo aliquot milliarium, tamen αbb non fiat numerus praemagnus. Ponamus ergo $\alpha bb = \lambda$, eritque $r = \frac{cbb}{bb+3\lambda zz}$; $q = \left(m + \frac{bp}{a-b(a-p)}\right)$ $\frac{bb+3\lambda zz}{bb}$ et $a - p + \frac{a}{b}\,l\,\frac{ba}{bp+m(a-p)} = \frac{z(bb+\lambda zz)}{bb}$ vnde facto $p = 0$, ob $z = b$ erit $a + \frac{a}{b}\,l\,\frac{b}{m} = (1+\lambda)b$, et $q = m(1+3\lambda)$. Verum quia ob maximas atmosphaerae mutationes hic nihil est certum vel constans, vberior euolutio huius hypothesis prorsus foret inutilis.

 Scho-

Scholion 2.

101. Quascunque autem conclusiones hinc inferre licet, probe semper est tenendum, eas locum non habere, nisi atmosphaera fuerit in aequilibrio; statim enim atque ea ventis agitatur, omnia quae hinc de pressione et altitudine barometri tradi solent, maxime perturbantur, neque amplius quicquam certi statui potest, cuius circumstantiae imprimis ratio est habenda, quando altitudo barometrica in diuersis altitudinibus et profunditatibus obseruatur etiamsi enim status caloris perfecte esset cognitus, nihil tamen inde colligere liceret, nisi atmosphaera prorsus esset tranquilla. Vt autem atmosphaera in aequilibrio consistere possit, omnino necesse est, vt in aequalibus altitudinibus, seu per quoduis eius stratum horizontale densitas vbique sit eadem, vnde etiam eadem pressio consequitur. Vidimus autem hoc neutiquam euenire posse, nisi simul in aequalibus altitudinibus vbique idem caloris gradus vigeat, ex quo sequitur, quoties in vna terrae regione ad eandem altitudinem aër fuerit calidior vel frigidior quam in alia, aequilibrium nullo modo subsistere posse, sed ventum necessario exoriri debere non ante cessaturum quam per ingentem saltem terrae tractum in quouis strato horizontali aër sese ad eundem caloris gradum composuerit. Quod cum rarissime eueniat, mirum non est, atmosphaeram vix vnquam prorsus esse tranquillam, ideoque dubium est nullum, quin haec praecipua ventorum causa sit statuenda.

tuenda. Cuiusmodi autem motus in aëre oriri debeat, quando in aequalibus altitudinibus gradu caloris discrepat, tametsi haec quaestio ad theoriam motus fluidorum pertinet, tamen simili modo, quo supra vsi sumus, quodammodo colligere licet, quantum quidem ad praesens institutum sufficit; atque hinc plurimorum phaenomenorum causam intelligere licebit.

Problema 12.

102. Si calor atmosphaerae in vna regione multum discrepet ab eo, quem in alia regione ad eandem altitudinem habet, ita vt aequilibrium locum habere nequeat, motum aëris hinc oriundum praeterpropter saltem definire.

Solutio.

Sit aër regioni A B imminens maiore calore praeditus, quam qui regioni C D imminet; concipiamus primo prope terram tubum horizontalem bc a regione calida in frigidam porrigi, et atmosphaeram in eo statu esse, vt pressio in b aequalis sit pressioni in c, ideoque aër in tubo bc quiescat. Ob calorem ergo circa b maiorem quam circa c, densitas ad b minor erit quam ad c, hincque par aëris volumen ibi minus habebit pondus quam hic. Nunc similem tubum horizontalem $\beta\gamma$ altius situm consideremus, ac manifestum est pressionem ad β minorem esse pressione ad b pondere columnae Tab. VII. Fig. 15.

 aëris

aëris a b ad β protensae; similique modo pressionem ad γ deficere a pressione ad c pondere columnae aëris a c ad γ protensae, at haec columna ob densitatem maiorem per $c\gamma$ grauior est illa; vnde cum pressiones ad b et c sint aequales, pressio ad γ vtpote maiore parte minuta minor erit pressione ad β, quippe quae minore parte mulctatur. Ex quo necesse est aërem in superiori tubo a regione calidiore in frigidiorem propelli; qui fluxus cum aëris molem in regione frigida augeat, in calida vero minuat, etiam circa tubum inferiorem bc aequilibrium mox turbabitur, et aër hic a regione frigida in calidam propelletur. Idem eueniet si aërem primum circa tubum superiorem $\beta\gamma$ in aequilibrio fuisse statuamus, ita vt tum pressiones ad β et γ fuerint aequales, tum enim a β ad b descendendo pressio minus accipiet augmentum quam a γ ad c descendendo, quia ibi aëris densitas minor est quam hic, ex quo in c pressio erit maior quam in b et aër frigidior per hunc tubum in locum calidiorem propelletur, quo fluxu etiam aequilibrium superne ita turbabitur, vt iam aër calidior per tubum $\beta\gamma$ in locum frigidiorem deferatur. Hinc ergo remotis his tubis tuto pronunciare possumus, si aër regioni AB imminens calidior sit aëre regioni CD imminente, tum infra ventum oriri a regione frigida in calidam, supra autem contra ventum a regione calida in frigidam spirantem. Tum vero de vi huius venti duplicis, in genere sequentia notari

tari licet. Primo quo maius fuerit difcrimen inter calorem et frigus, eo hunc ventum fortiorem effe debere. Secundo quo maior fuerit altitudo $b\,\mathfrak{G}$, per quod hoc difcrimen porrigitur, ob maiorem aequilibrii perturbationem etiam ventum accelerari oportere. Tertio vero quo minus regio frigida a calida diftet, eo magis etiam ventum augeri, quia tum minor aëris maffa ab iisdem viribus per tubos $c\,b$ et $\mathfrak{G}\,\gamma$ eft propellenda, dum contra fi hae regiones maxime diftent, fluxus aëris admodum lenis oriri debet ob infignem maffam mouendam.

Coroll. 1.

103. Si ergo duo conclauia vicina per ianuam inuicem communicent et alterum fuerit calefactum, alterum frigidum, tum infra aër ex conclaui frigido in calidum intrabit, fupra autem habebit fluxum contrarium, vti experientia oftendit.

Coroll. 2.

104. In eodem porro conclaui, quod ope fornacis eft calefactum in regione inferiori aër ad fornacem accedit, in fuperiori vero inde recedit, ficque prope fornacem continuo furfum afcendet, et motu fuo exiles machinas agitare valet; prouti experientia declarat.

Coroll. 3.

105. Si in foco camini ignis accendatur, ftatim atque aër ei imminens calorem concipit, in regione

gione inferiori aër vndequaque ad ignem propellitur, et cum fumo per caminum egreditur, dum eius locum aër exterior per rimas conclauis intrans supplere valeat.

Coroll. 4.

106. Haec etiam causa est, quod in Africae littoribus quae interdiu ab imminente sole maxime vruntur, continuus ventus ab oceano afflet in regionibus scilicet humilioribus, dum is sine dubio in sublimi cursum tenet contrarium.

Scholion 1.

107. Hinc igitur perspicuum est quantum iste fluxus aëris ad ignem super focis et in fornacibus suscitandum conferat, dum continuo motu ad ignem appellens per caminum ascendit, ac phaenomena notissima producit. Id tantum dubium hic exoritur, quod exempla eiusmodi caminorum non desint, quibus iste aëris fluxus minime conspiciatur ac potius fumus a fluxu contrario in conclaue depelli videatur. Quanquam autem vitium plerumque in eo est positum, quod vel ob angustiam vel alia impedimenta camini liber aëris ascensus coërceatur, tamen haec sola causa huiusmodi aduersis phaenomenis explicandis haud sufficere videtur. Ad fumum autem sese aëri admiscentem hic quoque est attendendum, quo sine dubio densitas aëris haud mediocriter

criter augetur; cum enim affluxus aëris fupra explicatus inde oriatur, quod a calore denfitas aëris diminuitur, fi eueniat, vt ob fumum tantundem augeatur, ille effectus prorfus ceffare debet, quin etiam ob maiorem denfitatem curfus contrarius per caminum defcendens fumum in conclaue expellere poterit. Quare ne hoc incommodum vfu veniat, imprimis curandum eft, vt fumus liberrimum exitum per caminum inueniat, hocque modo eius quantitas prope ignem ita diminuatur, vt aër inde vix maiorem denfitatem adipifcatur.

Scholion 2.

108. Num autem ventus ille perennis orientalis, qui inter tropicos obferuatur, ab eadem caufa oriatur? haud fatis liquet, quoniam in locis magis ad occidentem fitis, ad quae fol curfum fuum dirigit, calor atmofphaerae maior certe non eft, quam in iis quibus fol imminet. Et cum poft meridiem demum calor fentiatur maximus, hinc potius fequi videtur, a regionibus occidentalioribus aerem affluere debere. Quo autem hic aliquid certius ftatuere queamus repraefentet circulus A B D C globum terraqueum, in quo fit A locus, cui iam vel fol immineat, vel vbi calor fit maximus, ita vt tam in regione occidentaliori B quam orientaliori C gradus caloris fit multo minor. Hoc pofito certo affirmare licet, fi fol perpetuo eidem loco A immi- Tab. VII. Fig. 16.

 neret,

neret, vel calor maximus ibi perennis foret, tum vndequaque perinde aërem prope ſuperficiem ad locum A delatum iri, ita vt in B ventus occidentalis, in C vero orientalis ſentiri deberet; dum in regione ſublimi aër vbique curſum contrarium eſſet habiturus. Nunc autem ponamus maximum calorem ab A continuo occidentem verſus proferri, ac manifeſtum eſt inde affluxum ab oriente intendi, ab occidente autem debilitari debere. Si enim haec promotio caloris ſatis eſſet rapida, facile intelligitur motum ab occidente prorſus extinctum iri, atque vniuerſam atmoſphaeram fere vniformiter ab oriente in occidentem conuerti debere; quae cum quaſi ſponte ſe ad talem motum componat impetu ſemel accepto, vix opus eſſe videtur, vt in ſuprema regione motus exiſtat contrarius, quo iactura retro facta compenſetur; vel ſi adſit talis motus, multo erit debilior. Neque ergo dubito cauſam euri perennis in zona torrida principio hic ſtabilito et cum motu telluris diurno coniuncto attribuere.

CAPVT

CAPVT V.

DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM AD CENTRA VIRIVM FIXA SOLLICITATORVM.

Problema 13.

109.

Si vis acceleratrix, qua ſingulae fluidi particulae ad centrum virium vrgentur, ſit functioni cuicunque diſtantiae ab hoc centro proportionalis, definire fluidi ſtatum aequilibrii.

Solutio.

Sit A centrum virium per quod tranſeat planum illud fixum AXY, ad quod ſitum ſingularum fluidi particularum Z referamus per ternas coordinatas $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ ſitque in Z preſſio $= p$ et denſitas fluidi $= q$. Statuatur nunc puncti Z a centro virium diſtantia $AZ = v$, vt ſit $vv = xx + yy + zz$, et ſit V ea functio diſtantiae v, quae vim acceleratricem in Z ſecundum ZA exprimit. Haec vis ſecundum ternas coordinatas reſoluta dat vires ſequentes: Tab. VII. Fig. 17.

fec. direct. XA vim $=\frac{Vx}{v}$ vt fit $P=-\frac{Vx}{v}$

fec. direct. YX vim $=\frac{Vy}{v}$ vt fit $Q=-\frac{Vy}{v}$

fec. direct. ZY vim $=\frac{Vz}{v}$ vt fit $R=-\frac{Vz}{v}$.

Quocirca ex probl. 3. pro ftatu aequilibrii fluidi hanc habebimus aequationem

$$dp=-\frac{qV}{v}(xdx+ydy+zdz)$$

quae ob $vdv=xdx+ydy+zdz$ contrahitur in hanc:

$$dp=-qVdv.$$

Quod fi iam denfitas q ita fit comparata, vt haec aequatio integrationem admittat, quod non euenit, nifi q fit functio binarum quantitatum p et v, ftatus aequilibrii locum habet, eiusque natura per integralem huius aequationis exprimetur.

Coroll. 1.

Tab. VII. Fig. 18 110. Vt ergo fluidum ad aequilibrium fe componat, denfitas q tantum a diftantia a centro virium $AZ=v$ et a preffione p in loco Z pendere debet; quia autem tum ex aequatione $dp=-qVdv$ preffio p per folam diftantiam v determinatur, etiam denfitas per folam diftantiam v determinabitur.

Coroll. 2.

111. Si ergo fluidum fuerit in aequilibrio, tum in aequalibus a centro A diftantiis hoc eft per totam

totam superficiem sphaerae radio $AZ = v$ circa centrum descriptae vbique eadem pressio p eademque densitas q reperietur, id quod de omnibus superficiebus sphaericis concentricis est intelligendum.

Coroll. 3.

112. Quod si igitur in distantia $AC = b$ pressio euanescit, per totam quoque superficiem sphaericam CEGF euanescat necesse est, haecque superficies fluidi suprema est censenda. Vnde patet fluidum in aequilibrio constitutum necessario figuram sphaericam induere, in cuius centro positum sit centrum virium.

Coroll. 4.

113. Si pressio in C euanescat, erit in loco centro propiore Z, posito interuallo $CZ = b - v = u$, pressio $p = \int qV du$, integrali hoc ita accepto, vt euanescat posito $u = 0$, hoc autem integrale, exprimit pondus columnae fluidae ex C in Z protensae, quo ea a vi centripeta ad Z vrgetur: Quare ad centrum A accedendo pressio p continuo augebitur.

Scholion 1.

114. Ratiocinium hoc clarius reddetur, si columnae cylindricae CZ basin tribuamus $= ff$, vt eius volumen ob altitudinem $CZ = u$ sit ffu, et incrementum eius, dum altitudo elemento du auge-

 tur,

tur, $=ff\,du$; massae ergo elementum ob densitatem in $Z=q$ erit $=ffq\,du$, quod in vim acceleratricem V, qua deorsum sollicitatur ductum, dabit ponderis incrementum $=ffqV\,du$; ex quo totius columnae CZ pondus erit $=ff\int qV\,du$, quod si ponatur $=P$, pressio in Z erit $p=\frac{P}{ff}$; vnde perspicuum est pressionem in Z ponderi columnae fluidae CZ esse proportionalem, siquidem haec columna a suprema fluidi superficie capiatur. Quoniam igitur haec columna quo magis versus centrum A extenditur eo fit necessario ponderosior, simul intelligitur, quo propius ad centrum A accedatur, eo magis pressionem p augeri debere. Atque hinc etiam vis, quam quoduis corpus solidum fluido immersum ab eius pressionibus sustinet, colligi debet, quippe quae aequalis et contraria est ei vi, qua massa fluida in locum corporis solidi substituta a vi centripeta vrgetur. Hincque ex vi, qua corpus solidum ipsum a vi centripeta sollicitatur, iudicare licebit, vtrum id in fluido sit quieturum, an vero vel sursum vel deorsum pellatur? prouti haec vi illi fuerit vel aequalis; vel ea minor maiorue: quin etiam fieri potest, si ambae vires non per idem corporis punctum transeant, vt ei interea motus quoque gyratorius imprimatur.

Scholion 2.

115. Si ergo densitas in locis a centro A aeque remotis non sit aequalis status aequilibrii locum

eum habere nequit, qualem autem tum motum adipiſcatur fluidum, ſequenti modo colligere licebit. Ponamus in locis *b* et *ϐ* denſitatem minorem eſſe quam in locis *c* et *γ*, fluidum autem ita eſſe diſpoſitum, vt in *b* et *c* preſſiones ſint aequales, ideoque fluidum in tubo *bc* in aequilibrio verſetur; quo poſito preſſio ad *ϐ* maior erit preſſione ad *γ*, quoniam pro illa obtinenda a preſſione in *b* pondus columnae rarioris *ϐb* ſubtrahi debet, pro hac vero denſioris *γc*. Fluidum ergo per tubum ſuperiorem *ϐγ* a loco, vbi denſitas eſt minor defluet in locum, vbi denſitas eſt maior, qui fluxus ſimul ac inceperit aequilibrium in tubo inferiori *bc* turbabitur, hicque fluidum denſius ad rarius fluere incipiet. Idem motus prodibit ſi primum fluidum in tubo ſuperiori *ϐγ* in aequilibrio fuiſſe aſſumamus. Quocirca tuto concludimus, ſi in regione *ϐb* denſitas minor fuerit quam in regione *γc*, tum infra fluidum ex *c* in *b* ſupra autem contra ex *ϐ* in *γ* fluere debere; qui motus tamdiu durabit, quoad aequilibrium locum inuenire queat; ac ſi ob calorem ad *bϐ* minorem denſitas ibi conſtanter ſit maior quam ad *cγ* hic motus perpetuo durabit, qui caſus omnino conuenit cum illo, quem ſupra euoluimus.

Scholion 3.

116. Pro diuerſa ergo fluidi indole circa aequilibrium ſequentia ſunt notanda. Primo ſi fluidum

dum ſit homogeneum denſitatem habens inuariabilem, veluti aqua eodem vbique caloris gradu praedita, cum ſe ad aequilibrium compoſuerit, in aequalibus a centro virium diſtantiis preſſio vbique eſt eadem: ſin autem fluidum ſit heterogeneum, cuius tamen ſingulae partes nullam denſitatis mutationem patiuntur, aequilibrium ſubſiſtere nequit, niſi in aequalibus a centro virium diſtantiis denſitas vbique ſit eadem, at tum etiam preſſio ibidem aequalis ſit neceſſe eſt. Idem tenendum eſt, ſi idem fluidum ob diuerſos caloris gradus ratione denſitatis diſcrepet, tum enim ad aequilibrium requiritur, vt in aequalibus a centro virium diſtantiis vbique idem reperiatur caloris gradus, quod niſi eueniat, aequilibrium locum habere nequit, ſed in regionibus inferioribus fluxus dabitur perpetuus a loco frigidiori in calidiorem, in ſuperioribus vero contra a loco calidiore in frigidiorem. Quod ſi fluidum aëri ſit ſimile et denſitatem habeat variabilem non ſolum a gradu caloris ſed etiam a preſſione pendentem; tum aequilibrium dari nequit, niſi per ſingulas ſuperficies ſphaericas circa centrum virium deſcriptas vbique idem caloris gradus regnet; tum vero etiam per totam cuiusque harum ſuperficierum expanſionem et denſitas et preſſio eadem deprehendetur. In his igitur omnibus caſibus maxime intereſt fluidi maſſam in eiusmodi ſtrata diuidi, quae a centro virium aeque diſtent, ideoque figuram habeant ſphaericam, quae ſtrata aequilibrata vel libellata vocare eare licet; ſimili modo quo caſu ante tractato, vbi directiones grauitatis inter ſe erant parallelae, haec ſtrata plana et horizonti parallela accipi debebant.

Problema 14.

117. Si ſingulae fluidi partes ad duo pluraue centra virium ſimul ſollicitentur viribus acceleratricibus, quae vtcunque a diſtantiis pendeant, conditiones inueſtigare, ſub quibus fluidum in aequilibrio conſiſtere queat.

Solutio.

Sint plura centra virium fixa C, C′, C″ vtcunque diſpoſita ſiue in eodem plano ſiue ſecus; ac fluidi conſideretur elementum quodcunque in Z ſitum, vbi denſitas ſit $= q$, et preſſio $= p$. Ponantur huius puncti Z diſtantiae a ſingulis virium centris; Tab. VIII. Fig. 19.

$$CZ = v;\ C'Z = v';\ C''Z = v''$$

et vires acceleratrices, quibus ad ea ſeorſim ſollicitatur, ſint V, V′, V″. Harum autem virium effectus ratione aequilibrii ſeorſim definire licet, quoniam ſupra vidimus in genere pro aequilibrio eſſe debere $\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, vbi ſingulae vires reſolutae in P, Q, R partes peculiares inducunt. Calculo ergo vt ante ſubducto pro ſingulis viribus ternae coordinatae ex calculo excedent, et ad hanc aequationem peruenietur:

$$\frac{dp}{q} = -V\,dv - V'\,dv' - V''\,dv''$$

vnde patet si densitas q fuerit vel constans, vel a sola pressione p pendeat, integrationem succedere, ideoque aequilibrium locum habere, cuius indoles hac aequatione exprimetur:

$$\int \frac{dp}{q} = \text{Const.} - \int V\,dv - \int V'\,dv' - \int V''\,dv''$$

vbi notari meretur formulam integralem $\int V\,dv$ repraesentare actionem vis V; quare si omnium virium iunctim consideratarum actio tota statuatur $= W$, vt sit

$$W = \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$$

habebitur $\int \frac{dp}{q} = \text{Const.} - W$. Notio autem huius actionis ita est stabilienda, vt pro quouis spatii puncto, quod virium actioni subiicitur, certum sortiatur valorem longitudine seu altitudine quadam exprimendum, siquidem vires acceleratrices V, V', V'' grauitati homogeneae numeris absolutis indicantur; ita vt actio virium in quouis puncto euadat pressioni homogenea, quippe quam etiam certa altitudine repraesentamus. Actione ergo in calculum introducta erit aequatio differentialis pro statu aequilibrii $dp = -q\,dW$, vnde si densitas q non solum a pressione p sed etiam a loco pendeat, veluti si cuilibet loco certus caloris gradus conueniat, tum aequilibrium locum habere nequit, nisi calor vnice ab actione virium W pendeat, ita vt in omnibus punctis, vbi eadem actio viget, ibi etiam calor sit idem; tum autem in iisdem locis quoque densitas et pressio in aequilibrio fiet eadem.

Coroll. 1.

118. Totum ergo negotium eo redit, vt omnia puncta, vbi actio virium est eadem probe notentur, quae cum pro quauis actionis quantitate W in certam quandam superficiem cadant, talis superficies stratum aequilibratum repraesentabit; ita vt in quolibet strato aequilibrato actio virium vbique sit eadem.

Coroll. 2.

119. Ad aequilibrium igitur id maxime requiritur, vt per singula strata aequilibrata fluidum vbique eandem habeat densitatem, tum vero etiam pressio vbique erit eadem in quolibet scilicet strato aequilibrato. Vnde perspicuum est extremam seu supremam fluidi superficiem secundum huiusmodi stratum aequilibratum se componere debere; ex quo haec strata ad libellam disposita sunt censenda.

Coroll. 3.

120. Si vnicum sit centrum virium, omnia strata aequilibrata figuram habent sphaericam centro virium descriptam, ideoque inter se erunt parallela. Sin autem duo pluraue adsint centra virium, figura singulorum stratorum aequilibratorum admodum fit plerumque irregularis, neque ea amplius inter se erunt parallela, sed potius crassitie inaequabili praedita.

Scholion 1.

121. Duae hic occurrunt notiones maxime notatu dignae, quarum prior est notio actionis virium, quae in quoduis punctum agunt, atque alibi ostendi hanc notionem in principio minimae actionis, maximi esse momenti, ex quo si forte ea quibusdam geometris vel nimis metaphysica vel adeo nimis sterilis fuerit visa, hic certe summam eius vtilitatem agnoscent. Dum enim vires quaecunque acceleratrices in punctum definitum agunt, ibi certam exerunt actionem quae conuenientissime eo modo, quo hic vsus sum, repraesentatur, dum scilicet quaelibet vis per differentiale directionis suae multiplicata integratur, et haec integralia ex singulis viribus nata in vnam summam colliguntur; vnde conceptus metaphysicus formari poterit. Ita hic littera W dum exprimit summam formularum $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ designabit actionem virium V, V', V'' punctum Z, in quo fluidi elementum concipimus, sollicitantium. Parum autem refert, quantam constantem ob integrationes introducamus, quoniam hanc notionem eo dirigimus, vt omnia loca, in quibus eadem inest actio definiamus; interim tamen cum elicuerimus $\int \frac{dp}{q} = \text{Const.} - W$ pro quolibet casu haec constans facile determinatur. Hinc igitur nata est altera notio stratorum aequilibratorum, quorum quoduis eam vniuersam superficiem complectitur, cuius omnibus punctis eadem actio

actio conuenit; quantae autem ſit vtilitatis haec notio in aequilibrio fluidorum definiendo, hic iam ſatis copioſe eſt declaratum: at vero etiam in motu fluidorum inueſtigando aeque eſt neceſſaria, vti ex ſequentibus patebit. Determinatio autem horum ſtratorum aequilibratorum pro qualibet virium ſollicitantium hypotheſi, ad problema geometricum reducitur, cuius ſolutio autem plerumque ita ſit difficilis, vt ſtratorum horum figura inde difficulter cognoſci queat. Quoniam vero huiusmodi caſus vix in rerum natura occurrunt, operae haud eſt pretium hunc laborem ſuſcipere; quin potius vires reales, quae in fluida terreſtria agunt, eorumque ſtatum aequilibrii afficiunt, ſum exploraturus.

Scholion 2.

122. Cum ſcilicet omnia, quae nobis circa aequilibrium et motum fluidorum explorare licet, potiſſimum ad fluida ſuper terra conſtituta referri conueniat, aquam nimirum et aërem, perpendendum eſt a cuiusmodi viribus haec fluida praeter grauitatem ſollicitentur. Ac primo quidem occurrit vis centrifuga, qua haec fluida ob motum vertiginis terrae, ab eius axe repelluntur, quam ipſis ab axe diſtantiis proportionalem eſſe conſtat. Etſi enim conſideratio huius vis, ob motum vnde naſcitur neutiquam ad theoriam aequilibrii pertinet; tamen quia eius actio eſt perennis, ſtatim ac fluida ſeſe in certum ſtatum compoſuerint, hic ſtatus vt

 aequi-

aequilibrium ſpectari poteſt, ſiquidem is perfecte cum eo conuenire cenſendus eſt, quem eadem fluida induerent, ſi terra quieſcente ſingula fluidorum elementa praeter grauitatem continuo a viribus illis ab axe repellerentur. Quamobrem quomodo ſtatus aequilibrii in hac hypotheſi comparatus eſſe debeat, plurimum intererit hic inueſtigare, cum concluſiones etiamſi fictioni innitantur, tamen minime a veritate aberrare ſint putandae. Deinde etiam conſtat tam ſolem quam lunam vi ſua attractrice in fluida terrae effectum ſatis notabilem exſerere; qui etiamſi cum continuo motu ſit coniunctus, tamen ita ad ſtatum aequilibrii reuocari poteſt, vt concluſiones vel non multum a veritate abhorreant vel ſaltem ad motus cognitionem deinceps inueſtigandam maxime ſint neceſſariae. Quare etſi ſol et luna quotidie circa terram circumferantur, conueniet quaeſtionem ita conſtitui, vt terra in quiete ſpectata, ſol vel luna perpetuo eidem terrae puncto imminere concipiatur, et ſtatus aequilibrii fluidorum ab hac vi cum grauitate coniuncta productus definiatur. Tum enim his aſtris etiam procedentibus intelligetur, quemnam ſtatum fluida quouis momento induere conentur; tametſi enim nunquam in aequilibrium ſint peruentura, tamen cognitio aequilibrii quod quaſi affectant, maximam habebit vtilitatem.

Pro-

Problema 15.

123. Si praeter vim centripetam, qua fluidum ad punctum fixum C vrgetur, singulae particulae Z ab axe fixo A B per centrum C transeunte repellantur viribus distantiae X Z ab axe proportionalibus definire statum aequilibrii, fluidi cuiuscunque. Tab. VIII. Fig. 20.

Solutio.

Sit fluidi elementum quodcunque in Z, cuius densitas sit $= q$ et pressio $= p$; ponatur eius distantia a centro C Z $= v$, cuius functioni V aequalis sit vis acceleratrix, qua id elementum ad C vrgetur, huius ergo vis actio in punctum Z erit $= \int V dv$, partem constituens actionis totius ante littera W indicatae. Altera vero pars oritur ex vi qua elementum Z ab axe A B repelli assumimus, sit ergo perpendiculum ex Z ad axem ductum Z X $= x$, et vis ipsa acceleratrix repellens $= \frac{x}{f}$, quoniam distantiae x proportionalis statuitur. Iam ex praecedentibus perspicuum est, si haec vis contrariam haberet directionem Z X, eam spectari posse vt vim centripetam ad centrum in directione Z X infinite remotum tendentem, sicque eius actio foret $= \int \frac{x\,dx}{f} = \frac{xx}{2f}$: nunc igitur quia vis ab axe repellit, actio statuenda est $= -\frac{xx}{2f}$, ita vt actio tota pro elemento in Z sit $= \int V dv - \frac{xx}{2f}$ loco litterae W substi-

ſubſtituenda, ex quo pro ſtatu aequilibrii haec habetur aequatio

$$\int\frac{dp}{q} = \text{Conſt.} - \int V\,dv + \frac{xx}{2f} \quad \text{ſeu } dp = q\left(\frac{x\,dx}{f} - V\,dv\right)$$

vnde patet niſi denſitas q ſit conſtans vel a ſola preſſione p pendens, eam inſuper ipſam actionem W inuoluere debere cum alioquin aequilibrium ſubſiſtere non poſſit. Pro aequilibrio ergo neceſſe eſt, vt denſitas q ſit vel conſtans, vel functio ſolius preſſionis p, vel functio duarum quantitatum p et $W = \int V\,dv - \frac{xx}{2f}$. Si ergo calor ſit variabilis, eum functionem ipſius W eſſe oportet, ita vt in omnibus locis, vbi actio W eſt eadem, hoc eſt in quolibet ſtrato aequilibrato, ſit idem. Tum vero ibidem et denſitas et preſſio eadem ſit oportet; ac ſuprema fluidi ſuperficies ſecundum tale ſtratum aequilibratum ſemper erit diſpoſita. Pro grauitate hic functionem quandam V diſtantiae $CZ = v$ introduxi quia eius indoles eſt ambigua; ſi enim in viſcera terrae deſcendimus, haec vis ipſi diſtantiae proximae cenſetur proportionalis, ſin autem ſupra terram per atmoſphaeram aſcendimus, quadrato diſtantiae reciproce proportionalis aeſtimatur: ex quo coniicere licet prope ſuperficiem quousque vel aſcendere vel deſcendere datur, grauitatem recte conſtantem et vnitati aequalem poni, vnde erit $dp = q\left(\frac{x\,dx}{f} - dv\right)$, pro ſtratis autem aequilibratis habebitur haec aequatio $v = \text{Conſt.} + \frac{xx}{2f}$, quae ergo exprimit naturam ſupremae ſuperficiei fluidorum. Ita

ſi

si semiaxis totius superficiei sit $CA = k$ vbi $x = 0$, semidiameter aequatoreus vbi $v = x$, ex hac aequatione $x = k + \frac{xx}{2f}$, definitur $x = f - \sqrt{(ff - 2fk)}$ vbi notetur f esse quantitatem maximam.

Coroll. 1.

124. Si ergo quaestio sit de figura oceani terram cingentis, posita densitate $q = 1$, erit pro loco sub oceano quocunque Z pressio $p = k + \frac{xx}{2f} - v$ vnde pro suprema superficie erit $k + \frac{xx}{2f} - v = 0$, vnde vt supra fit semiaxis $CA = k$ et semidiameter aequatoris $= f - \sqrt{(ff - 2fk)} = k + \frac{kk}{2f} + \frac{k^3}{2ff}$ siquidem f multum superet k.

Coroll. 2.

125. Cum reuolutio terrae circa axem absoluatur tempore $23^h, 56', 45'' = 86205''$, pro quo numero si scribamus ν, et altitudinem lapsus vno minuto secundo facti ponamus $= g$ erit quantitas illa $f = \frac{\nu\nu g}{2\pi\pi}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$; ex quo colligitur $f = 376474180.g$ et ob semiaxem terrae $k = 19601352$ ped. paris. fit $f = 289,95\,k$, ex quo semidiameter aequatoris prodit $= k(1 + \frac{1}{579,9}) = \frac{581}{580}k$.

Coroll. 3.

126. Pro pressione autem atmosphaerae, si in terrae superficie sub polo ponatur altitudo barome-

tri $= a$, densitas aëris $= b$, existente densitate mercurii $= 1$, ob $q = \frac{bp}{a}$ erit $l\frac{q}{a} = \frac{b}{a}(k - v + \frac{xx}{2f})$; et vbique in superficie maris ob $k + \frac{xx}{2f} - v = 0$ altitudo barometri p erit eadem $= k$. Sub aequatore autem ob strata crassiora atmosphaera altius assurgit quam sub polis.

Scholion.

127. Mirum hic videri non debet quod semidiameter aequatoris parte tantum $\frac{1}{580}$ superare inventus sit semiaxem terrae, cum tamen experientia iam constet excessum ad partem $\frac{1}{200}$ assurgere. Ratio huius discriminis in eo latet, quod hic grauitatem perpetuo ad centrum directam et a sola distantia ab eo pendentem assumsimus, ita vt quomodocunque terrae figura mutetur, grauitatis tamen eadem esset mensura. Verum nunc satis euictum est grauitatem ab attractione omnium terrae partium proficisci, ideoque statim atque terrae figura sphaerica alteretur, ipsam quoque grauitatem mutationem pati, atque haec grauitatis mutatio in causa est, quod ob motum vertiginis terrae aberratio a figura sphaerica multo maior existat. Hugenius quoque qui primus figuram terrae definire ex theoria est conatus, dum ad solam vim centrifugam respexit, grauitate vt inuariabili spectata eandem rationem inter axem terrae et diametrum aequatoris scilicet fere 580 : 581 elicuit, ex quo calculus hic adhibitus minime suspectus videri debet. Hic autem

locus

locus non est, vt ex vera attractionis indole calculum propius ad veritatem accommodemus, dum pro aequilibrio tam aquae quam aëris cognoscendo haec allata abunde sufficiunt. Neque etiam ei casui quo in iisdem stratis caloris gradus discrepat, immoror, cum satis constet ex superioribus, cuiusmodi motus tum oriri debeat.

Problema 16.

128. Si terrae centro C immineat in E siue sol siue luna siue aliud corpus attrahens in ratione reciproca duplicata distantiarum definire statum aequilibrii fluidorum circa terrae superficiem sitorum, hoc est oceani et atmosphaerae, dum tam terra quam corpus in E sine motu spectantur. Tab. VIII. Fig. 21.

Solutio.

Posita distantia $CE = b$, sit massa terrae $= C$, corporisque $E = E$ ita vt in distantia quacunque $= d$, sit vis attrahens terrae $= \frac{C}{dd}$ corporis vero $E = \frac{E}{dd}$. Consideretur iam fluidi elementum quodcunque in Z, cuius densitas sit $= q$ et pressio $= p$; ac vires acceleratrices quibus hoc elementum vrgetur perpendi oportet. Vocentur distantiae $CZ = v$ et $EZ = u$, vt posito angulo $ECZ = \Phi$, sit $uu = bb - 2bv \operatorname{cos}.\Phi + vv$, ac primo punctum Z sollicitatur ad centrum C vi $= \frac{C}{vv}$, quae abit in vnitatem si Z in superficie terrae ipsa capiatur; huius ergo vis actio est $= \int \frac{C dv}{vv} = \frac{-C}{v}$ partem totius actionis

W constituens. Tum vero idem elementum Z ad E vrgetur vi $= \frac{E}{uu}$, cuius propterea actio est $= \int \frac{E\,du}{uu} = \frac{-E}{u}$. Quoniam vero centrum terrae quod ad E incitatur vi $= \frac{E}{bb}$, in quiete spectatur, tanta vi singula puncta terrae in directionem contrariam vrgeri sunt censenda, hinc ducta ZY ipsi EC parallela, seu ZX ad EC normali, vt sit $ZY = CX = v \cos.\Phi$, punctum Z insuper sollicitari statuendum est secundum ZY vi $= \frac{E}{bb}$, cuius ergo actio est $= \int \frac{E\,d.v\cos.\Phi}{bb} = \frac{E\,v\cos.\Phi}{bb}$. Quamobrem tota actio in puncto Z erit $W = \frac{-C}{v} - \frac{E}{u} + \frac{E\,v\cos.\Phi}{bb}$, sicque pro statu aequilibrii habebitur haec aequatio:

$$dp = -q\left(\frac{C\,dv}{vv} + \frac{E\,du}{uu} + \frac{E\,d.v\cos.\Phi}{bb}\right)$$

vbi notandum aequilibrium locum habere non posse nisi densitas q sit vel constans vel a sola pressione p pendeat, vel functio sit binarum quantitatum p et W; tum igitur etiam tam densitas q quam pressio p certis functionibus actionis W aequabuntur. Pro stratis autem aequilibratis aequatio generalis erit $\frac{C}{v} + \frac{E}{u} - \frac{E\,v\cos.\Phi}{bb} = \text{Const.}$ Cum autem distantia b prae v valde sit magna, erit per approximationem

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{b} + \frac{v\cos.\Phi}{bb} + \frac{vv(3\cos.\Phi^2 - 1)}{2b^3} + \frac{v^3\cos.\Phi(5\cos.\Phi^2 - 3)}{2b^4} + \frac{v^4(35\cos.\Phi^4 - 30\cos.\Phi^2 + 3)}{8b^5}$$

hincque colligitur actio tota omissis constantibus:

$$W = \frac{-C}{v} - \frac{Evv(3\cos.\Phi^2 - 1)}{2b^3} - \frac{Ev^3\cos.\Phi(5\cos.\Phi^2 - 3)}{2b^4} - \frac{Ev^4(35\cos.\Phi^4 - 30\cos.\Phi^2 + 3)}{8b^5}$$

existente $dp = -q\,dW$. Notandum autem est si se-

midia-

midiameter terrae vocetur $= k$, fore $\frac{C}{kk} = 1$, ideoque $C = kk$, tum vero ſi in E ſit luna haberi proxime $E = \frac{1}{80} C = \frac{kk}{80}$, ſin autem E ſit ſol eius diſtantia media a terra exiſtente $= b$, fore $E = \frac{16\, b^3}{290 \cdot 1465^2 \cdot k^3} C = \frac{C\, b^3}{38894140\, k^3}$ ideoque $\frac{E}{b^3} = \frac{1}{38894140\, k}$ ob $C = kk$, dum pro luna ſi eius diſtantia a terra media ponatur $= b = 60\, k$ eſt $\frac{E}{b^3} = \frac{1}{17280000\, k}$.

Coroll. 1.

129. Siue ergo in E conſideremus ſiue ſolem ſiue lunam, poſito $\frac{E}{b^3} = \frac{1}{nk}$ exiſtente pro luna $n = 17280000$, at pro ſole $n = 38894140$, erit actio $W = \frac{-kk}{v} - \frac{vv(3\cos.\Phi^2 - 1)}{2nk} - \frac{v^3 \cos.\Phi (5\cos.\Phi^2 - 3)}{2nbk}$ et pro aequilibrio habebitur haec aequatio $dp = -q\,dW$.

Coroll. 2.

130. Pro mari ergo ſi eius denſitatem ſtatuamus conſtantem $q = 1$, vt preſſio p definiatur per altitudinem columnae aqueae, fit $p = \text{Conſt.} + \frac{kk}{v} + \frac{vv(3\cos.\Phi^2 - 1)}{2nk} + \frac{v^3 \cos.\Phi (5\cos.\Phi^2 - 3)}{2nbk}$; qui poſtremus terminus tuto omitti poteſt, vnde pro ſuperficie maris vbi $p = 0$, poſito ſemidiametro $CA = k$ vbi $\Phi = 0$, habebitur aequatio $k + \frac{k}{n} + \frac{kk}{nb} = \frac{kk}{v} + \frac{vv(3\cos.\Phi^2 - 1)}{2nk} + \frac{v^3 \cos.\Phi (5\cos.\Phi^2 - 3)}{2nbk}$, vnde colligitur proxime $v = k - \frac{3k\sin.\Phi^2}{2n}$, ita vt ſit $CD = k - \frac{3k}{2n}$ exiſtente pro luna $\frac{3k}{2n} = 1\frac{2}{3}$ ped. pro ſole vero $\frac{3k}{2n} = \frac{3}{4}$ ped. paris.

Coroll. 3.

131. Pro atmosphaera autem, si in A sit altitudo barometri $= a$ et densitas aëris $= b$ ob $q = \frac{bp}{a}$ fit $l\frac{p}{a} = \text{Const.} - \frac{bw}{a}$ seu $\frac{a}{b}\, l\frac{p}{a} = \frac{kk}{v} + \frac{vv(3\cos.\Phi^2 - 1)}{2nk} - k - \frac{k}{n}$. Vbique ergo in superficie terrae vbi $v = k$ erit $\frac{a}{b}\, l\frac{p}{a} = \frac{-3k\sin.\Phi^2}{2n}$ seu $p = a - \frac{3bk\sin.\Phi^2}{2n}$. Quare in A et B barometrum tenebit maximam altitudinem in D vero minimam, differentia existente $= \frac{1}{8000}$ ped. pro luna, at $= \frac{1}{33333}$ ped. pro sole, quae ergo sentiri nequit.

Scholion 1.

132. Sole ergo vel luna in E versante mare tam in A quam e regione in B intumescit, in D vero subsidit, neque tamen differentia maior foret quam $1\frac{2}{3}$ ped. pro luna et $\frac{3}{4}$ ped. pro sole, siquidem haec luminaria perpetuo eidem loco A imminerent vnde si coniunctim agerent, quod fit tam in coniunctione quam in oppositione, maxima maris altitudo superaret minimam fere $2\frac{1}{3}$ ped. Cum autem ambo luminaria continuo ab oriente in occidentem progrediantur, facile intelligitur antequam aquae in A et B confluere queant, luminaria iam vlterius esse promota, vnde fit vt in quoque loco aqua tardius intumescat, quam sol vel luna per eius zenith vel nadir transierit, idque eo magis, quo maiora impedimenta affluxui obstent, veluti si per freta vel loca minus profunda transire cogatur. Tum vero vbi

vbi affluxus iste maiori celeritate contingit, ob impetum conceptum fieri potest, vt aqua ad multo maiorem altitudinem eleuetur, quam pro ratione aequilibrii: cum enim tantum aquae affluat, quantum ad insignem maris tractum tumefaciendum sufficeret, si mare subito littoribus in angustum spatium coarctetur, omnis aqua eo affluens ad insignem altitudinem ascendere debebit, quemadmodum satis nota aestus marini phaenomena declarant.

Scholion 2.

133. Videamus etiam accuratius, quemadmodum atmosphaera a tali actione afficiatur, et quanta in ea ascendendo vbique densitas et pressio sit futura. Terrae igitur superficiem sphaericam assumentes, cuius radius sit $=k$, si in loco quocunque a recta CE angulo $=\Phi$ remoto per altitudinem $=s$ ascendamus vt sit $v=k+s$, ex aequatione supra inventa colligimus fore proxime $p=a-bs-\frac{3bk\,\text{fin.}\,\Phi^2}{2n}$, dum scilicet altitudo barometri in A statuitur $=a$, et aëris densitas $=b$, mercurii densitate existente $=1$. In altitudine ergo ista s densitas aëris erit $q=\frac{bp}{a}=b-\frac{bbs}{a}-\frac{3bbk\,\text{fin.}\,\Phi^2}{2na}$, vnde si in hoc loco columnam aeream consideremus cuius basis sit $=ff$, massa aëris in ea contenta erit $=ff\int q\,ds=ff(bs-\frac{bbss}{2a}-\frac{3bbks\,\text{fin.}\,\Phi^2}{2na})$. Talis ergo columna in A vel B constituta continebit quantitatem aëris $=ff(bs-\frac{bbss}{2a})$, at

at ſimilis columna in D quantitatem aëris $= ff(bs - \frac{bbst}{2a} - \frac{3bbks}{2na})$ ex quo illa hanc ſuperat quantitate $= \frac{3bbffks}{2na}$. Quare neceſſe eſt vt inſignis portio aëris in loca A et B affluat, in regionibus D autem atmoſphaera minuatur, vnde in aere ſimilis motus reciprocus atque in mari oriri debebit neque tamen barometrum in A vel B hoc aëris augmentum indicabit, propterea quod ob vim ad E vrgentem grauitas aëris eo congeſti diminuitur. Quanta autem celeritate aër verſus loca A et B affluat, dum luminaria ab E promouentur, hinc minime definire, neque etiam probabili modo coniectare licet, cum iſta quaeſtio theoriam aequilibrii longe tranſcendat. Quae autem hactenus de aequilibrio fluidorum ſunt tradita omnino ſufficere videntur omnibus quaeſtionibus huc ſpectantibus euoluendis: neque propterea vlteriori explicationi immoror ſed potius progredior ad principia motus fluidorum ſtabilienda, quae multo maiorem curam ac diligentiam requirunt.

PHYSICA.

PHYSICA.

DE CALORE ANIMALIVM DISSERTATIO PHYSICA EXPERIMENTALIS.

Auctore

I. A. BRAVNIO.

Habent corpora terrestria suum calorem, qui per orbem terrarum distributus, vti per totum Planetarum systema est, ita vt nullus locus et nullum corpus, quod omni calore et igne careat, esse videatur. Facile hinc iudicari potest, quid de frigore absoluto, quod nonnulli somniant, sit habendum. Fac dari eiusmodi locum et corpus quod omni calore et igne plane careat, quomodo igitur eiusmodi frigus absolutum cognosci potest et determinari? Summum frigus, quod in his terris adhuc innotuit, est illud, quod ego primus arte produxi, dum hydrargyrum congelare animum induxi, et reuera congelaui, non multum vltra sexcentos gradus scalae Delilianae haberi potest; sed multo maiorem frigoris gradum esse possibilem, nemo facile dubitabit, qui vero determinabilis non videtur. Eodem modo summi caloris et ignis gradus determinatio non est in potestate, sed de hoc alias. Ceterum corpora orbis terrarum non aequalem habent calorem. Huc sunt referenda corpora vita praedita, praecipue corpora animalia. Habent enim animalia, si non omnia, pleraque tamen, calorem quendam additiuum seu addititium, quem quoque vitalem, insitum et innatum vocare solent. Hic calor omnino mirabilis, et omni attentione dignus merito reputandus est, vti quoque semper a viris eruditissimis est reputatus. Nam in diuersis animalibus deprehenditur diuersus, maior, minor et vix ac ne vix quidem sensibilis. Deinde hic calor admiratione et consideratione dignus est quod constans sit, scilicet idem caloris gradus diuerso tempore et loco; cum hac tamen restrictione vt corpus animale sanum sit et maneat. Nam calor animalis non manet constans, si corpus in morbum et statum praeternaturalem incidit, et extraordinarium. In animi deliquiis vix ac ne vix quidem calor est sensibilis, contra ea in febribus ardentibus calor hic incrementa maiora et minora sumere solet, vt experimenta demonstrarunt, vt alia attentione digna nunc taceamus. Progrediamur igitur ad ipsa experimenta, quae animalium calorem addititium demonstrant. Hunc calorem esse exploratum thermometris ordinariis facile adparet, quum gradus caloris tanti non sit, vt aliis instrumentis opus sit, qualia sunt Pyrometra, Machina Mortimeri, qua constat multo maiores caloris gradus metiri, quam thermometris ordinariis, quae praeterea etiam ad huius

ius generis experimenta instituenda non apta et accommodata sunt. Vsi sumus thermometris vtplurimum Delilianis, in quibus vti constat o siue ziphra indicat aquae bullientis calorem, et numerus 150. punctum congelationis aquae. Longitudo thermometri erat mediocris, scilicet octo aut nouem pollices parisienses vix excedens, longiores enim minus commode tractari possunt. Bulbus thermometri erat sphaericus, vt commode inferi in cauitatem animalis factam posset, et generatim melius adplicari. Plerumque vno eodemque thermometro vsi sumus, nisi necessitas illud mutare coegerit, v. c. dum fractum fuit, aut aliud vitium contraxit. Quum constet thermometra ceteris paribus sub eadem barometri altitudine impleri debere si concordare debent; quae adhibui omnia, impleta sunt sub altitudine fere media 28. st. pollicum parisiensium. Porro et haec cautio in explorando animalium calore est obseruanda, vt sufficiens adhibeatur tempus. Sin minus, gradus caloris quoque erit minor. Sufficiens tempus illud erit iudicandum, si mercurius non amplius adscendat, sed subsistat, qua cautela neglecta experimenta non possunt non fieri vitiosa, vti iam multa id genus vitia in obseruationes et experimenta irrepsere, et dissensum in experimentis fecere.

Situs oculi quoque recte comparatus esse debet i. e. ne supra et infra punctum thermometri obseruandum sit constitutus. Alias facile vnius alteriusque gradus error, vel in defectu committi potest, vel in excessu. Quam exactissime igitur fieri potest, situs oculi cum puncto thermometri conuenire debet. His cautelis obseruatis experimenta mea thermometro Delisliano rite constructo institui. Notaui gradum, vbi subsistebat mercurius in thermometro, qui igitur summus caloris gradus caloris animalis erat. Primum experimenta fecimus ad hominis sani calorem explorandum quam adcuratissime. Inserui vtplurimum thermometrum vel in os meum vel in os aliorum, et tam diu ibi detinui, donec hydrargyrus in thermometro non amplius adscenderet; quo facto obseruaui mercurium circa numerum 96, et 95 stetisse scalae Delilianae. Conuenit numerus hic 95 cum numero 98, et 96 cum numero $97\frac{1}{3}$ scalae *Fahrenheitianae.*

Fahrenheitius iam calori humano attribuit sc. 96° scalae thermometri sui. Conuenit hic numerus cum gradu $96\frac{2}{5}$ thermometri Delisliani. Differentia igitur inter obseruata mea et inter *Fahrenheitiana* non magna est, scilicet vnius gradus aut ad summum duorum graduum. Multo maior vero differentia reperitur inter mea et aliorum nonnullorum obseruata, dum 91. 92. 93. 94 et 95. scalae *Fahrenheitianae* calori humano adsignarunt. Quum igitur hi gradus omnes multo minores sint his, quos ego per innumera reperi experimenta: facile iudicari potest, tempus non sufficiens esse adhibitum donec sc. mercurius non amplius adscenderet, et mercurius calorem perfecte adsumeret. Calor vrinae fere con-

conuenit, debitis cautelis adhibitis, cum calore indicato, vnum tamen gradum et ad ſummum $1\frac{1}{2}$ hic calor vrinae maior obſeruatus mihi eſt, qui gradus ſine dubio gradus caloris viſcerum adiacentium eſt. Nam a calore ſanguinis procul dubio pendet calor partium corporis humani et animalium calidorum; hinc mirum non eſt omnes corporis humani partes et animalium fere aequalem habere calorem. Cautio in calore vrinae explorando haec inprimis eſt neceſſaria, vt vitrum ſeu vas calorem vrinae iam fere poſſideat, vas enim nondum ſat calidum ſiſtit gradum caloris minorem. Obtinetur autem haec temperies optime, ſi experimentum demum inſtituatur, poſtquam iam vitrum ſemel vel aliquoties vrina recens miſſa, fuit imbutum. Quodſi igitur vrina animalis recens tam facile haberi poſſet, quam hominis, expedita eſſet methodus calorem viſcerum animalium accurate explorandi. In quibusdam difficultas non adeo magna reperitur. Sunt haec experimenta inſtituta tempore diuerſiſſimo et loco in diuerſiſſimis ſubiectis; pueris, puellis, adultis, et ſemper calorem fere eundem obſeruaui, ſi vnum et ad ſummum $1\frac{1}{2}^{\circ}$ gradum ſed raro, excipias, poſita ſcilicet ſanitate hominis. Hoc quoque de diuerſo ſexu intelligi debet. Nam differentia tam in ore, quam in vrina ſaepius vix ſenſibilis deprehendebatur. Eſt hic gradus caloris corporis humani minimus inter corpora animalia quadrupedia, vti experimenta mox adducenda demonſtrabunt. Calo-

 rem

rem animalium quadrupedum frequentius fere exploravimus. Calorem vituli et bouis; porcelli et suis; capellae et caprae; agni et ouis; canis, felis etc.

Ad calorem vituli quod attinet vt ab eo incipiam, eum reperimus 90. graduum thermometri nostri seu scalae delilianae, tam in sanguine recens effluente, quam in abdomine secto. Hic gradus 90. conuenit cum numero 104. scalae *Fahrenheitianae*. Quod si igitur calor hominis ponatur aequalis 96. *Fahrenheitii*: sequitur, vt hic gradus caloris superet calorem hominis 8. gradibus, vel si ponatur 97. septem gradibus maior erit calor vituli quam hominis.

Eundem caloris gradum quoque reperi in porcello scilicet aequalem 90° nostrae scalae. Ergo et hic gradus caloris maior erit 8 vel 7 gradibus caloris hominis.

Calorem capellae tam in sanguine recens effluente, quam in abdomine secto reperi = 92° scalae nostrae, qui gradus conuenit cum numero 101; scalae *Fahrenheitii*. Est igitur hic caloris gradus minor, quam antecedens vituli et porculi, maior tamen humano 4½ gradibus Fahr. Calor agni et ouis a calore capellae et caprae parum aut nihil omnino differebat. Calorem canium et felium non exploraui per sectionem viuam, vti in antecedentibus animalibus feci, sed tantum inter femora. Inveni

veni calorem felis $= 92$ ſcalae noſtrae eoque $= 101\frac{1}{2}$ Fahr. Eſt igitur et hic calor, vti capellae, $4\frac{1}{2}°$ Fahr. maior humano. Sed ſolet calor internus viſcerum et ſanguinis 2. gradibus maior eſſe, ſi ſecentur; addendi igitur adhuc erunt duo gradus, ita vt calor ſanguinis et viſcerum felis maior humano cenſendus ſit $6\frac{1}{2}$.

Calorem canis vel canum inter femora reperi $= 93$. thermometri noſtri, qui caloris gradus conuenit numero ſcalae Fahrenheitianae $100\frac{1}{8}$. Quodſi et hic duo gradus addantur, calor internus viſcerum et ſanguinis canum erit cenſendus $= 102\frac{1}{8}$ ideoque maior humano $6\frac{1}{8}$ vel certe $5\frac{1}{8}°$.

Haec hic ſufficiant de animalibus quadrupedibus, quorum calorem exploraui et explorandi occaſionem habui; alia alio tempore.

Quodſi haec experimenta recte conſiderentur, et comparentur, patebit primum calorem hominis omnium quadrupedum exploratorum eſſe minimum. Nam minor gradus quam 96. et noſtri thermometri, et Fahrenheitii, calor horum animalium non eſt deprehenſus, ideoque non minor calore humano. a). Porro gradum 90. noſtri thermometri eſſe maximum in animalibus quadr. quorum calor mihi exploratus eſt $=$ ſcilicet 104. ſcalae Fahrenheitianae. Non autem exiſtimandum eſt hunc gradum 90. ſiue 104. Fahr. caloris, eſſe maximum omnium quadrupedum, neutiquam, dantur ſine dubio maiores;

qui vero adcurate explorati non ſunt, vti quoque qui ſit maximus, nondum conſtat. Sed de his alias. Differentia caloris inter haec animalia non adeo magna eſt, ſcilicet tantum graduum 8. Fahr. a 96 ad 104. f.

At enim vero differentia caloris multo maior eſt in auibus. Hae enim ſuperant calorem quadrupedum, vti ex ſequentibus patebit experimentis. Aues varii ſunt generis, quarum calorem exploraui, vt anſeres, gallinae noſtrae et indicae, gallopaui, anates, columbae et varii generis aues minores. Calorem anſerum inueni in abdomine ſecto et ſanguine = 87 ſcalae noſtrae, qui numerus conuenit cum numero $107\frac{5}{7}$ ſcalae Fahr. Eſt igitur hic gradus caloris maior $10\frac{1}{2}^{\circ}$ F. calore humano, et calore quadrupedum, quos exploraui, maior $3\frac{1}{2}$ Fahrenh. Nam 104° F. maximus caloris gradus eſt, quem deprehendi inter animalia quadrupedia, qui numerus conuenit cum 90. ſcalae noſtrae. Eundem caloris gradum quoque inueni in diuerſis aliis ad auium genus pertinentibus, vt gallinis et gallis gallinaceis in abdomine ſecto et ſanguine.

Eundem quoque caloris gradum conuenire obſeruaui anatibus, gallopauis et gallinis indicis ſeu Africanis, columbis, ſcilicet in abdomine ſecto et ſanguine. Parua enim aut nulla differentia reperta eſt mihi inter calores harum auium maiorum. At enim vero mirandum videtur aues minores maiorem

rem poſſidere caloris gradum vtplurimum. Reperi nempe in duabus auibus minoribus rubeculis dictis, gradum caloris = 84 noſtri thermometri.

Conuenit hic numerus cum numero 111 ſcalae Fahr. aut propius $111\frac{1}{5}$. qui eſt maximus caloris gradus, quem inter aues adhuc obſeruaui. Superat igitur hic caloris gradus calorem humanum 15 fere gradibus, et quadrupedum qui eſt = 90 = 104 ſeptem gradibus. Sub alis auium duorum graduum minorem reperi, vtplurimum calorem, quam in ſanguine et abdomine ſecto, vti inter femora quadrupedum eſſe quoque ſolet.

Eſt igitur differentia caloris inter ipſas aues ſat parua, ſcilicet trium graduum noſtri thermometri, et inter aues maiores fere nulla, licet hic calor, ſi cum calore hominum et animantium quadrup. comparetur, omnium ſit maximus.

Sed veniendum nunc eſt ad animalia frigida ſic dicta, quae ſecundum experimenta noſtra, omni calore additiuo carent, ſed tantum calorem habent medii ambientis, fluidi aquae et aëris. Huc pertinent primum potiſſimum piſces branchias agitantes, et pulmone carentes.

Piſces varii generis fuere, circa quos cepi experimenta, vt lucii, anguillae, bramae (Braxen) carpiones ſiue cyprini, lampretae et alii. Omnes hos piſces calore additiuo carere, innumeris reperi experimentis, adcuratiſſime inſtitutis. Immiſi piſces in

Hhh 2 diuer-

diuerſas aquas, diuerſae temperiei, et ſemper obſeruaui piſcem eam temperiem aquae adſumſiſſe, in qua ſatis diu fuit detentus, quamuis differentia temperiei ſat magna erat.

Summa cautio eſt adhibita, quum piſces aperirentur, ne calor manus afficeret thermometrum; foramen feci tantum in ventre piſcium, vt bulbus thermometri inſeri poſſit, quo facto ſemper obſeruaui eundem caloris gradum fuiſſe piſcis, ac aquae ambientis.

Non igitur videtur dubitandum, quin ſi piſces dicto calore interno plane non careant, is tamen certe non ſit ſenſibilis et obſeruabilis, vti in plantis, arboribus et ſucco arborum. Diuerſa autem ratio caloris animalium marinorum et piſcium pulmones habentium eſt. Haec enim aeque ac animalia terreſtria ſuum habent calorem addititium, vti delphinus, canis marinus. Phocae enim calor 103 tribuitur, ideoque 7 gradibus F. maior humano. Par eſt ratio inſectorum, licet congregata calorem quendam efficere poſſint, qui tamen ad calorem internum referendus proprie non eſt. Porro ad animalia calore additiuo carentia quoque pertinent ranae quas exploraui.

Circa ranas quoque plurima cepi experimenta, quae eodem modo inſtitui, quo circa piſces. Scilicet, aqua in quam immiſi ranas, erat diuerſae temperiei. Pro hac diuerſitate temperiei et caloris, ranae quoque diuerſum poſſidebant calorem, et ad-

adſumebant. Sed et hic, vti in piſcibus, magna opus eſt cautione, ne quid alieni caloris immiſceatur, et vitium ſubreptionis committatur, a quo procul dubio non ſunt immunes, qui ranis aliquot caloris interni gradus tribuere, independentes a fluido vel generatim medio ambiente, aëre et aqua etc.

Denique ad animalia calore additiuo carentia ſunt referenda animalia alias calida, ſed hieme ſomno ſepulta, eoque vita minima tantum praedita. Mures alpini, vti marmora hieme iacent. Sic in aliis quoque animalibus hieme dormientibus, nullum calorem vitalem obſeruare licet. Nullam hic quidem propriam experientiam et propria experimenta ſequi poſſum; ſtudebo tamen et meis obſervationibus et experimentis, ſi fieri poterit, haec confirmare. Alia nunc praeterimus, quae in poſterum forſitan addemus et cum aliorum obſeruatis, adcurate comparabimus. Nam facile intelligitur haec experimenta a me facta et recenſita, omnia plane noua, et primum a me inſtituta non eſſe.

Inſeruient tamen etiamſi antea facta, vti generatim experimenta de nouo inſtituta ſeu repetita 1) ad confirmanda antecedentia; 2) vel ad corrigenda et emendanda; 3) ad perficienda; 4) falſa et erronea refutanda, et infirmanda; 5) dubia et controuerſa certa reddenda, et decidenda, quaeque ſibi contraria, concilianda. Experimenta vero non repetita, ſemper minorem habere fidem quam repetita cenſentur, idque iure meritoque.

Quae in antecedentibus adduxi experimenta, potiſſimum pertinebant ad hominem animaliumque ſanorum calorem internum inuariabilem. Calor vero eſt variabilis et diuerſus in hominum et animalium morbis, maior ſcilicet et minor pro varietate morborum; maior in febribus ardentibus, minorque in animi deliquiis. Hinc thermometra iam ab antiquis inde temporibus ad ſtatum valetudinis explorandum ſunt adhibita, vt a Sanctorio et aliis; variabilis tamen hic calor praeternaturalis ad certum tantum terminum deprehenditur adſcendere; praeſertim in febribus ſcilicet ad gradum 105 et 106. 7 et 8. thermometri Fahr. Hic notatu dignum eſt, in febribus exiſtente etiam paroxiſmo frigoris duos et tres caloris gradus reperiri plures, quam in ſtatu ſanitatis hominis. Sed haec ſunt diligentius adhuc excutienda, pauca enim adhuc ſunt huius generis experimenta genuina, in pleriſque ingentia ſubreptionis vitia commiſere, dum non ad legem thermometri, ſed ad ſenſum, calorem determinare conati ſunt. Hinc gradus caloris tradidere tam magnos, vt manifeſto viuere homines et animalia non poſſent amplius.

Suntne igitur certi determinatique gradus caloris, quos tolerare poſſunt homines et animalia, et quos ferre nequeunt ſed moriuntur et pereunt calore

calore vel frigore? Sunt omnino; sed in diuersis subiectis diuersi. Hominum alii maiores, alii minores caloris et frigoris gradus sustinere possunt, prouti consuetudo, altera natura vel suffragatur, vel minus.

Vtplurimum tanti caloris gradus tolerantia illis tribui solet, quantus est ille, qui eorum sanguini conuenit.

At enim vero multo maiorem caloris gradum homines et animalia perferre possunt, certe ad breue tempus, et pro consuetudine maiore et minore, tam in balneis, quam in locis calidioribus. *Richmannus* pro sua consuetudine ferre potuit in tepidariis gradum 125. Fahr. vti et mihi, quum hoc experimentum faceret dixit, et scripto quoque annotauit.

Calor in tepidariis rusticis ordinarie esse solet 88 nostri thermometri, qui est aequalis $106\frac{1}{2}$ Fahr. Et si sunt calidissima calor deprehendi solet 80°, est hic gradus aequalis 116 Fahr. Gradus igitur caloris, quem *Richmannus* sustinuit, maior adhuc est nouem gradibus. In calore tepidariorum recte indicando respiciendum est ad altitudinem, in quo thermometrum est suspensum. Nam quo maior haec est, eo maior quoque esse solet et debet caloris gradus, quum sursum tendat calor, vti constat. Bene tolerari saepius potest calor inferior, quum paullo supe-

ſuperior ſuſtineri nequeat vti ipſe expertus in caſis ruſticorum in Liuonia ſum. Non potui ibi erectus ſtare, ſed ſedere debui, quo modo calorem alias mihi intolerabilem facile toleraui. Par eſt ratio animalium. Poſſunt et haec maiorem caloris gradum perferre, quam eſt calor ſanguinis eorum. Canes in vaporariis incluſi vario caloris gradu periere 115. 120. 146. Cyprini viuere poſſunt in aqua calida 92 et 94. In gradu 111. Fahr. piſces mortui, ranae tamen adhuc viuere poſſunt.

In calore = 146. Fahr. paſſer mortuus eſt intra ſeptem minuta, et in eodem calore paullo poſt periere canis et felis. Multa hic ſuperſunt vel plane non determinata vel non adcurate. Difficilius multo determinari poteſt gradus frigoris, quem homines ferre poſſunt et animalia et quibus frigoris gradibus moriuntur et pereunt. Et hic conſuetudo multum facit. Pueri ruſticorum hic maiorem frigoris gradum facile ferre poſſunt, quam alibi. Diverſo frigoris gradu et homines et animalia moriuntur et pereunt, et ſub diuerſis circumſtantiis, quarum omnino ratio eſt habenda. Aues migratoriae et quae ſe occultant cum allis animalibus hieme dormientibus, minimum frigoris gradum ſuſtinere poſſe videntur; id quod etiam de inſectis valet, quae quidem maximum caloris, ſed minimum frigoris gradum ferre poſſunt. Eſt et hic magnus campus nondum cultus et excultus. Pereunt plantae diuerſo ſo frigoris gradu, pereunt homines et animalia, itidem diuerſo frigoris gradu, qui gradus aut nondum, aut non ſatis adcurate ſunt determinati, vti quoque re vera tam facile determinari non poſſunt. Plantae quoque poſſunt maiorem et minorem frigoris gradum ſuſtinere. Vnde diuiſio inter plantas calidas et frigidas nata eſt.

Denique quaeritur, vnde ſit hic animalium calor internus, additiuus, quum non pendeat a mediis ambientibus et circumſtantiis? Sententiae hic in magna ſunt poſitae varietate, quarum nulla ſua caret difficultate, hinc haec quaeſtio ſemper pro difficillima enodatu eſt habita. Alii potiſſimum ad fermentationem quandam in ſanguine prouocant, alii ad electricitatem, alii ad motum ſanguinis progresſiuum. Alii ſufficere hic putant hunc animalium calorem addititium adpellare innatum, quaſi hac ratione intelligerentur ortus et geneſis caloris in ſanguine et partibus animalium. Eſt qualitas hoc ſenſu obſcura Scholaſticorum calor innatus.

Qui ad fermentationem prouocant ſibi videntur actionem caloris in efferueſcentia et conflictu partium ſanguinis potiſſimum inuenire. Philoſophari hi quidem non male viderentur, modo eiusmodi motus inteſtinus demonſtrari poſſet. Hunc vocare occultum rem non conficit, et decidit vtrum eiusmodi motus fictus ſit an realis.

Non melius hic philoſophari videntur, qui cauſſam caloris huius in electricitate poſitam exiſtimant. Sed et hoc gratis aſſeri videtur, quod verum pluribus oſtendi poſſet, ſi ſpatium et ſcopus hic permitteret. Alias hypotheſes lubens praetereo.

Optime igitur omnium omnino philoſophari cenſendi ſunt, qui rationem caloris animalium in motu ſanguinis progreſſiuo quaerunt, attritu et frictione. Nam diminuto motu ſanguinis, diminuitur quoque calor ſanguinis et animalis partium, vti euidentiſſime, animae deliquia hominum, et, illa animalia oſtendunt et demonſtrant, quae hyeme dormire et ſomno ſepeliri ſolent. Nam in his vita minima tantum ineſt, et motus ſanguinis minimus, vix ac ne vix quidem ſenſibilis. Iacent enim quaedam, vt mures alpini ad inſtar marmorum. Par ratio eſt omnium aliorum in hibernaculis ſuis dormientium et ſomno ſopitorum animalium. Concludendum hinc omnino videtur, vt alias; ceſſante cauſſa caloris animalium interni, ceſſare et ipſum calorem tanquam effectum et ceſſante effectu, ipſam quoque cauſſam ceſſare debere. Si motus aquae celeris et aliorum fluidorum per canales ſenſibilem caloris effectum non producunt, videtur potiſſimum hoc inde eſſe, quod non ſatis ſint heterogenea, vti ſanguis animalium eſt, quae attritum et frictionem ſatis validam efficere queant. Sed ſubſiſtendum hic mihi eſt, plura et ſupple-

supplementa dabo in posterum. Ceterum, vti in tota structura et conformatione machinae hominum et animalium, Dei omnipotentia, sapientia, et bonitas est admiranda, sic inprimis quoque in hoc, quod vitam, sanitatem, quin suauitatem vitae dependentem a calore interno et motu sanguinis per cor aequabili fecerit, turbato enim hoc motu, animi quoque tranquillitas turbari solet.

DE
OSSIBVS SIBIRIAE FOSSILIBVS
CRANIIS PRAESERTIM RHINOCEROTVM ATQVE BVFFALORVM, OBSERVATIONES.

Auctore

P. S. PALLAS.

Quamprimum Musei Ill. Academiae curam gerere atque diuitias perlustrare coepi, statim adtentiore examine digna mihi visa sunt *ossamenta fossilia* animalium exoticorum, quae ex omnibus Imperii Ruthenici, praesertim e borealibus Sibiriae regionibus aduecta, maximo hodie numero et infinita paene varietate Museum illud ornant. Sunt ea maximam partem Elephantorum variae magnitudinis ac aetatis reliquiae, numeroque satis probant immensam horum animalium copiam, quae per vniversam borealem Asiam, a patria elephantorum hodierna remotissimam, sparsim defossa iacent. Quanquam enim, posterioribus maxime saeculis, increbrescente curiosorum in conquirendis naturae miraculis industria, in Germania (*a*), Italia (*b*), Gallia

(*a*) Sic inclaruerunt ossa fossilia prope Canstadium in Sueuia reperta, de quibus egerunt *Dav. Spleissius* in *Oedipo osteologico. Scaphus.*

lia (*c*), Anglia (*d*), Polonia (*e*), imo extrema quoque Islandia (*f*) vario tempore variisque in lo-

---

Scaphus. 1701. 4. Io. Chr. Harenberg in tractatione *de Lilio lapideo s. Encrino Guelpherbit.* 1729. 4. c. f. et I. Sam. Carl in *Lapide Lydio philosophico-pyrotechnico ad ossium fossilium docimasiam analytice demonstrandam adhibito. Franc. ad M.* 1704. Dein famosum est sceleton elephantinum in collis arenosi intemeratis stratis repertum prope *Bergtonna* inter Erfurtum et Longosalissam Thuringiae; de quo consule I. Geo. Hogervm in *Miscell. Nat. Cur. dec.* 3. *an.* 7, 8. *p.* 294. *obs.* 175. praesertim vero Gvil. Ern. Tentzelivm in *epistola ad Anton. Magliabecchium Goettingae* 1696. 4. posteaque *Ienae* 8. germanico idomate edita; vt et in *Act. anglic. vol.* 24. *n.* 234. Vt alia praeteream, v. gr. ossa et dentes verosimillime elephantina Manhemii ex antiqua ripa Nicri fluuii effossa, de quibus Ioh. Dan. Geyer. in *Misc. N. C. dec.* 2. *an.* 6. *p.* 176. *obs.* 85. et imprimis celebrem cauernam syluae Hercyniae, prope Elbingerodam, cui Bavmannianae nomen, de qua Conr. Gesnervs in libello *de figuris lapidum p.* 155. 157. aliique.

(*b*) In Italia Auctores perpauci ossium fossilium memorias suppeditant; aliqua tamen habent recentiorum nonnulli, qui nunc ad manus non sunt, et Hier. Ambr. Langemantel in *Misc. N. cur. dec.* 2. *an.* 7. *p:* 466. *obs.* 234.

(*c*) Carolo VII. imperante, circa an. 1456. reliquias elephanti in Gallia effossas, aliaque Gallorum de ossibus gigantum prodita eodem referenda, asserit Moanevs in *Act. angl. vol.* 34. *n.* 403. Recentiora Eboris in Gallia effossi, etiam in Turchesiam mutabilis, exempla vide apud Ill. Bvffonivm *hist. nat. vol.* XI. *ed. min* XXII. *p.* 209. *seqq.* et ossium aliorum *p.* 208. 227.

(*d*) In ducatu Northamptoniensi ex argilla effossa fragmina dentium elephantinorum exsertorum, nec longe ab eo loco inventum cis eruta fuerint sceleti elephantini, gigantea fragmenta et ebur fossile in omnibus fere apud exteros Museis occurrat, nulla tamen vnquam regio tot tanta-

ventum molarem MORTONVS habet *nat. hist. of Northamptonf. p. 252.* Et in Staffordiae comitatu in marga repertam maxillam elephanti ROB. PLOT *nat. hist. of Staffordf. p. 78.* Vnaque cum istis Glocestriae et Londini repertas reliquias eiusdem belluae, e proprio Museo recenset Ill. SLOANE l. c. In Hybernia quoque occidentali, quatuor pedibus sub terra profunditate, supra stratum e ramis et herbis reperta fuerunt ossa magna, friabilia, cum quatuor maximis dentibus verosimillime elephantinis; obseruantibus NEVILLE et TH. MOLINEUX in *nat. hist. of Ireland Dublin. 1726. 4. p. 128.*

(*e*) In Polonia lectum Ebur fossile memorat CONR. GESNER *de fig. lapid. p. 157.* et circa Gedanum KLEIN *hist. nat. piscium Miss. II. p. 29-32.* ad Vistulam haud procul a Varsauia RZACZINSKI *hist. nat. cur. Polon. p. 1, 8.* qui etiam varia ex aliis auctoribus collegit, praesertim circa antra sic dicta draconum Liptoviensia Hungariae, ossibus variis, etiam elephantinis, sparsa, de quibus autopta narrat, et dentes ibi lectos vrsi vel leonis caninos celebrat BRVCKMANNVS *epist. itiner. cent. I. ep. 77. p. 12. seq.* Aliis quoque Pannoniae in locis reperta varia ex elephanto, costas, vertebras, dentes exsertos atque molares, tibiam, maxillam, recenset et partim delineat, Ill. Comes MARSILLI in *Danub. Pannon. Mysici vol. II. Part. I. p. 73. tab. 28-31.* Contra *quem* vero et GOROPIVM in Belgio a Romanis elephantorum reliquias deriuantes pugnat, et diluuiana esse mauult SLOANEVS *l. c. p. 510. seq.*

(*f*) Exemplum rarissimum reperti in Islandia molaris elephantini prodidit BARTHOLINVS *Actor. Hafniens. vol. I. p. 83. obs. 43.* Forsan et huc aliqua faciunt ab OLIG. IACOBAEO recensita.

tantaque in hoc genere grauissimarum et antiquissimarum telluris mutationum monumenta prodidit, ac Sibiria nostra, cuius subterraneum Ebur, quamquam hodienum nonnisi casu riparumque ad maiora flumina ruinis detegi solaet, ea tamen sic quoque copia legitur, vt inter merces indigenas non vltimum obtineat locum, illud praesertim, quod in terris hyperboreis aeterno gelu rigentibus repertum, plane incorruptum et tornatili operi adhuc aptum est.

Miraretur nemo, si in Italia, Hispania, Galliisque solis inuenta fuerint elephantina ossa, quum in has regiones Punicis maxime bellis, et in Italiam Tarentino quoque, imo et ad luxuriam spectaculorum, insignes horum animalium greges adductos fuisse, ibique periisse, ex historiis constet. Ad similes itaque casus, post explosam vulgi in Sibiria de bellua subterranea maxima (*Mamont*) fabulam (g), multi etiam docti viri ossamenta elephantorum Sibirica referre haud dubitarunt: animalia illa modo a Iudaeis, quos *Rudbeckius* in borealem Asiam migrasse

(g) De his vulgi in Sibiria ineptiis imprimis euoluendi sunt Ill. Basil. Nicetae fil. Tatischtschew in *Actis Upsaliensibus* et Gmelinvs in *Itinerario Sibirico*. Deinde vero Ysbrandvs Ides atque Strahlenbergivs. Vocabulum *Mamont*, quod Belluae fabulosae tribuitur, et vnde Russi ossa fossilia *Mamontouaia kost* appellarunt, verosimillime Tataricae originis est, quorum lingua: *mama* terram significare accepi.

grasse somniauerat, modo ab Alexandro M. imo a recentioribus quoque Asiae domatoribus, Tschingis-chano et reliquis Mongalorum imperatoribus (*h*) in longe dissitas hasce regiones deducta fuisse perhibentes; quorsum tamen illorum neminem vnquam penetrasse, multoque minus tot Elephantos viuos deducere potuisse, satis constat. Quandoquidem vero in media Italia, vbi tot circensibus maxime ludis elephantos periisse scimus (*i*), subterranea eorundem vestigia nonnisi rarissime detecta fuerint; contraque elephantina, cum ipso, apud omnes tamen facile populos pretioso, adeoque non defodiendo aut temere abiiciendo ebore, saeculi iam fere spatio, per vniuersam, qua ad extremum orientem atque boream

---

(*h*) Cel. BAYERVS hanc viam multis argumentis munire adlaborauit, et in Mungalorum quidem patriam et australiorem Sibiriam elephantos facile perducit, per bella Mungalorum, si fides historiis, cum Indis et Tataris gesta. Conf. *Petersburg. Anmerk. über die Zeitungen an. 1730. n. 90. p. 359. seq.* Vbi tamen simul improbatur haec quoque sententia, ob immensum dentium eburneorum in Sibiria iam ab vltimo inde saeculo quotannis lectorum, cui numero elephantorum bellicorum vniuersae Indiae exercitus sufficere haud potuisset; nedum si perpendas multo maiorem ossium vim in terris intactis vastissimis adhuc latere, quae posteros manet, imo forte nunquam exhaurietur.

(*i*) Testis praesertim PLINIVS *hist. nat. lib. VIII. cap. 6.* vbi L. Metelli pontificis victoria 142. elephantos in Sicilia de Poenis captos et in Italiam transuectos, ibique periisse narrat; cap. 7. variis temporibus in circo exhibitos et confectos enumerans.

ream latissime patet, Sibiriam sese magna copia manifestauerint, longeque maiorem vim, non tantum prope flumina, vbi casu, vti dictum, deteguntur, sed per totam illam continentem terram latere credibile sit; tantum belluarum exercitum in regiones illas inhospitas humana opera deductum non fuisse, sed elephantinum forte genus, temporibus omni traditione humana anterioribus, in his ipsis terris, mitiore tunc certe coelo gaudentibus, atque, si dicere fas sit, soli magis obuersis, diu vixisse multiplicasse, et pereuntium cadauerum ossibus solum ditasse, quidni potius concludamus? Nihil enim nunc moror sententias eorum, qui vel voluntaria obcoecatione miraque pertinacia intra terram genita, cum petrefactis vulgo dictis omnibus, ossa Sibirica putarunt, vel sub diluuii, vniuersalis aliusue globi catastrophes tempus, profugos Elephantas, cum reliquis calidioris coeli animalibus, in has terras, ad aliquot millenas leucas ab eorum patria distantes, incredibili cursu contendisse, ibique mersos tandem periisse existimarunt. Cui vltimae opinioni imprimis *I. G. Gmelinus* olim noster fauisse videtur (*k*).

Et tale quidem fuisse quondam borealium regionum, imprimis Sibiriae clima, vt Elephas calidissi-

(*k*) Gmelinvs in *Itinerar. Sibirica vol. I. p.* 157. a cuius opinione haud plane alienus videtur Ill. Bvffonivs.

diſſimi coeli alumnus, et temperatius quoque clima nonniſi aegrius, cum plenaria foecunditatis exſtinctione ferens, ibi viuere atque multiplicare non recuſauerit, praeter eorum numerum hac terra obrutorum, de quo apud omnes conſtat, porro probat elegans BARTRAMII obſeruatio (*l*) de teſtaceis marinis nonniſi calidioris zonae in borealibus hodie terris petrificatorum ſtrata conſtituentibus, quam vndique confirmatam videmus; probant aut probare videntur, elephantina ſceleta et hippopotamorum dentes noſtris temporibus in America ſeptentrionali non tantum a Gallico quodam duce (*m*), ſed nuperrime etiam ab Anglis (*n*) lecta. Quum enim certo ſciamus

(*l*) Nempe teſtacea petrefacta in ſeptentrionalis Americae montanis copioſe reperiunda, non ea eſſe, quae hodie in mari alluente ſub eodem latitudinis gradu viuunt, ſed in multo calidiore demum tractu, verſus auſtraliorem Carolinam et Floridam demum occurrere, obſeruauit Acutiſſ. *Barramius* eoque argumento, et repertis in Sibiria oſſibus elephantinis *Burneti* theoriam, de diuerſis antiquae terrae climatibus, confirmari putauit; teſte *Kalmio* in *Itinerar. Americ.* (ed. germ.) *vol. 2. p. 281.*

(*m*) Femur elephantinum maximae molis, in Canada repertum deſcribit, et plurimum ſimul ibi repertorum oſſium, interque alia molaris Hippopotami meminit BVFFONIVS *l. c. p. 230 - 233.*

(*n*) De ſceletis complurium elephantorum in montibus Americae borealis ab Anglis nuper inuentis relationem optimi COLLINSONI ad Amiciſſimum SCHLOSSERVM nuper accepi, et vt accurata oſſium in Angliam delatorum detur deſcriptio, valde opto. Famam de oſſibus gigantum immenſae ſtaturae in Penſyluania effoſſis iam acceperat KALM. *l. c. p. 250.*

mus Elephanti atque Hippopotami genus in tota hodie America non reperiri, neque magis, quam reliqua calidiorum Asiae et Africae regionum animalia, nouo orbi communia esse; nulla alia via in Canadam animalia ista transire potuisse video, quam ab extrema Asiae orienti obuersa extremitate, quam totam eorum pariter ossamentis sparsam esse videmus, quaeque olim minus forte lato ab America freto diremta fuit. Fateor tamen, rationem non posse reddi, quare nec Elephanti, quos in Americam vere transfretasse reperta ibi ossa argumento sunt, neque alia aestuantis zonae, quibus aeque facilis, atque illis erat transitus, animalia, frigescentibus Americae septentrionalibus, in meridionales plagas recesserint, ibique speciem propagauerint, vt eorum saltem aliqua nouo orbi cum Asia atque Africa inter tropicos comprehensis communia hodie obseruarentur, quod tamen secus se habet. Lubenter etiam fateor, neque in his, neque circa marina petrefacta per totam continentem terram copiosissime disseminata, nos certi vnquam quidquam asserere posse, imo ne hypothesin quidem vllam fingere, nisi Deum e machina excitando, aut ingeniosa *Burneti*, *Whistoni*, *Buffonii* aliorumque de globi nostri fatis commenta adoptando et ornando.

Ego illa acutioribus ingeniis enodanda relinquo. Ad retractandam vero materiam, a multis auctoribus diligenter agitatam, impulerunt me reliquiae in intima Sibiria repertae et in Museo nostro depositae *Rhinocerotum*, *Gazellae* indicae, atque immensae staturae *Buffalorum*, quantos hodie nec Africa, neque calidissima India gignit, quique Tauroelephantum nomen, ab antiquis Zoologis immani Aethiopiae ferae tributum, iure sibi poscere videntur. Et has quidem exuuias descriptione tanto magis dignas esse credidi, quo luculentius id saltem euincunt, non elephantas modo, sed alia quoque calidiorum regionum, etiam fera ac indomita, adeoque certe non humanis viribus adducta animalia in his olim terris, vbi nunc eorum ossa supersunt, vixisse et multiplicasse; vt dolendum omnino sit nonnisi magnae molis ossa hucusque per Sibiriam collecta fuisse, multoque maiorem minorum sceletorum copiam forte negligi, quibus lites in hac re omnes dirimi dudum potuissent. Auctores certe, qui Elephantos, vt dixi, bello per Sibiriam sparsos fuisse crediderunt, et tempus, ducem, exercitum, quibus deduci potuerint, adeo anxie quaesiuerunt, vano destitissent labore, si praeter prius exposita non ignorassent plurimorum calidissimi coeli animalium reliquias, in eadem Sibiria pariter reperiri (*o*). Sed praeter elephantina ossa nihil adferri vide-

(*o*) De ossibus Sibiriae fossilibus, Mamonteis dictis, praesertim egit Ill. TATISCHTSCEV in *Act. Vpsaliensibus*; Cf. etiam *Petersb. Anmerk. zu den Zeitungen* l. c. Dein e MESSERSCHMI-DIO viderunt, imo hodiernis quoque auctoribus vix alia innotuerunt. Nempe negliguntur a barbaris harum rerum collectoribus minorum animalium ossa, et ea solum mittuntur, quorum istis moles mira et commendabilis videtur. Non tamen dubium est innumera alia minoris magnitudinis ossa exoticorum animalium ibi passim superesse, quibus nobis ob inscitiam atque supinam incuriam plebeculae carendum est; idque solo ossium in Sueuia canstadiensium exemplo discimus, vbi omnigena diuersissimae staturae animalium extraneorum ossa, elephantinis immixta fuisse dicuntur, vt antra draconum dicta Liptouiensia, et in Hercynia celebrem speluncam *Baumannianam* nunc non memorem.

De fossilibus *Rhinocerotum* in calidissimas Indiae atque Africae tractus hodie relegatorum, per aquilonares terras sparsis reliquiis, nemo, quod mirum, hactenus satis expressi quidquam memoriae prodidit. Refert quidem in itinerario suo Cel. *Gmelinus* (*) circa Lenam flumen inuentum aliquando

 fuisse

---

dio Breynivs in *Act. angl. vol. 40. n. 446.* Sloanevs l. supra citato, Ides, Stralenberg, Lavr. Lange, Le Brvn, Ioh. Bell. anglus, et Gmelinvs in suis itinerariis, tandemque, cum Bvffonio, D'Avbentonvs *l. c.*

(*) *Itinerar. vol. 3. p. 148.* Nempe miles *Spiridon Portniagin*, ad ossa mamontea conquirenda missus, 200 circiter stadiis russicis a promontorio sacro (*Swiatoi noss*) versus *Vstianskoi* hyberculum, fuisse ignoti animalis caput, bouino sub simile, cornua tamen supra nares gerens. Verum praeterquam quod illud non viderit ipse, eiusque relatio e diuersis videatur circa Taurorum atque Rhinocerotum reperta crania, relationibus coaluisse, ne in suspicionem quidem Rhinocerotis ipsum peruenisse apparet. Distertius quidem, et iure credo, ad Rhinocerotem refert maxillae portionem cum molaribus, haud procul a Cantabrigia repertam *Grewius* (*p*); sed tamen is quoque, incredulis, sola dentium comparatione fretus, minime persuasit. Certiora igitur hoc loco dabimus et minus ambigua futura. Habemus enim quatuor vera et satis integra *Rhinocerotum* in Museo *crania*, habemus quinque genuina, variae molis *cornua* eiusdem animalis. Eaque omnia in media Sibiria reperta fuisse certum est; quamquam locos, vbi singula inuenta fuere, non accurate consignatos inuenerim, neque affirmare possim cornua iisdem cum craniis in regionibus eruta fuisse; cum de vnico tantum craniorum ex affixa schedula liquido constet, illud vna cum maiore, quod integrum habemus

naculum, circa Lenam in terra turfosa reperit cranium elephantis cum cornibus, nec longe ab eo loco *animalis ignoti cranium* cet. — Videntur etiam Rhinocerotis ossa fuisse, quae GMELINVS *p. 153.* vna cum craniis Tauro-Elephantis infra describendis, reperiri dicit ad *Nischnaia-Tunguska;* e quibus sibi visa, tibias, femora, in summa breuitate scribit crassissima fuisse.

(*p*) *Musei regal. Societat. pag. 32. tab. 16.*

mus cornu (fig. 4.) in tractu Iacutensi anno 1727. oblatum fuisse. Quia sceleton Rhinocerotis vllamue eius partem nondum ab vllo auctore descriptam invenio, in exponenda singulari fabrica cranii huius animalis paulo verbosiorem esse liceat. Tab. X. Fig. 4.

Rhinoceros, prouti ordine naturali proxime ad suillum genus collocari debet, eidemque multis structurae momentis pariter ac vitae genere, moribusque affinis est, imo apri quandam speciem africanam, quae nuperrime innotuit (q) dentium quoque primorum defectu, corii natura, rostrique cornea duritie proxime refert: ita et cranii conformatione nulli quadrupedum generi aptius conferri posse videtur. Ea tamen cranii pars, quae cornu Rhinocerotis sustinet, cuius ille situ pariter atque natura ab animalibus cognitis omnibus differt, ipsa quoque structurae et figurae plane peculiaris est, neque vlli inter reliquas quadrupedes exemplo comparabilis. Scilicet omnem vim animalis robustissimi in haec eius arma dum dirigeret natura, rostrum, cui extremo innatum est eorum primarium, ossea compage validissima ita firmandum erat, vt immanes indomiti animalis inque omnia coeca rabie ruentis impetus sustinere queat. Hinc totum primo cranium, quod exserendis belluae viribus quasi vectem praebet

(q) Aper aethiopicus, quem in *Miscellaneis Zoologicis*, et nuper, addita icone castigata, nouisque obseruationibus in *Spicilegiorum Zoologicorum Fascic. II.* nuper descripsi.

praebet, e ſolido fere oſſe robuſtiſſime fabrefactum eſt. Nulla enim, inaudito fere exemplo, apparent ſuturarum veſtigia; totaque cranii ſubſtantia, vbique craſſiſſima, parum intus raritatis, quam diploën dicunt, habet, imo per anguſta quoque et oblonga, pro encephalo recipiendo, olla cauatur. Nihil porro zygomatibus et illa quae inter roſtrum et ollam cranii comprehenditur, portione robuſtius eſſe poteſt. Deinde quum in animalibus reliquis omnibus oſſa naſi et maxillaria in regione hiatus naſalis late deficiant, et extrema roſtri mera cartilagine perficiantur, (quam in ſolo affini genere ſuillo, cui pariter inſignior promuſcide vis erat exſerenda, oſſiculum columnare fulcit,) Rhinocerotis contra cranium ſupra narium caua craſſo fornicatoque oſſe luxuriat, et hoc inſuper ſepto inter duo narium caua perpendiculari, craſſiſſimo, longitudinaliter ſuffulcitur. Si denique retro productum occipitis latum cacumen firmandis muſculis ceruicalibus, cranii leuatoribus, deſtinatum; ſi condylos maximos, fere ginglymoideos, capiti ſupra columnam vertebralem valide iactando, tanquam trochleas, deſtinatos conſideraueris, conſtans apparebit naturae ſollertia inſtrumenta vbique actioni et viribus exſerendis adaptantis.

Tab. IX. Fig. 1-3. *Olla* ſiue poſterior pars cranii, vt modo dictum eſt, irregulari ſubtetraëdra pyramide ſeu potius cuneiformi pecctine (vt in ſuillo maxime genere) retrorſum adſurgit, quam circumſcribunt ſuperficies

ficies superne tres, cum postica latis crassisque marginibus concurrentes. *Superficies* haecce *posterior*, inferne in medio *foramine occipitali* magno, superius inciso, et vtrinque *condylis* inde a foramine transversis, subsemicylindraceis, extrorsum adscendente conuexitate auctis praefinita, planiuscula est, ita tamen, vt supra foramen occipitale leui conuexitate tumescat, hinc *foraminulo* sursum obliquo perforetur, et supra illud leuiter, at lateribus, supra condylos insigniter deuexa cauetur. *Superiorum* facierum *media* plana fere est; posteriusque latior in transuersum occipitis pectinem desinit, anterius autem decliuis et denuo latescens, in conuexiorem frontem sensim euanescit. Superficies *laterales* obliquiores, versus orbitas sensim insigniter cauatae descendunt, et plerumque, incerto quamuis loco, circa medium geminis *foraminibus*, calamum scriptorium admittentibus pertusae sunt, quorum ab altero latere in vno craniorum nostrorum solitarium superest; et in alio vtrinque ambo oblitterata vix apparent. Non praetereunda quoque sunt insignia *foramina*, quae condylorum occipitalium basin permeant, et digitum minorem facile transmittunt, arteriis vertebralibus verosimillime destinata, introrsum versus cranii cauum paulo angustiora, extrorsum et deorsum in semicanalem processuum adstantium effusa.

Praeter *hos* ipsos *processus*, qui mastoideorum loco sunt, *alii* habentur subter cranii ollam minores et anteriores, adeoque ſtyloideis ſitu comparandi, figura autem, vti priores, pyramidati, et longitudine quoque iisdem ſubaequales. Supra geminos vtrinque proceſſus *meatus auditorius* patet, ſubtus et poſtice tubere angulato oſſeo munitus. Intra eosdem vero proceſſus notabilis vtrinque eſt *oſſis petroſi* anguloſa difformitas, in *hiatu* lacero vndique fere libere et abrupte prominentis. Medius inter foramina lacera *iſthmus* cranii inſigniter carinatus eſt, obſoleſcente tamen verſus palatum iugo.

Quanquam ipſa cranii olla antrorſum vere coarctetur, oſſea tamen eius ſubſtantia imis lateribus, mox ante meatus auditiuos lateſcit et in *zygomata* aſſurgit, poſtice depreſſo-ancipitia, dein per maiorem longitudinis partem triquetra, antice vero, vbi ſupra molarium baſin implantantur, obſoletius tetraëdra, atque extrorſum tuberculoſo-prominula.

Orbitarum cauitas perampla, vndique aperta, neque margine fere, niſi anterius, verſus zygomatis radicem *ſuggrundio* deſuper limitata tuberculoſiſſimo, quaſi lacero, et duplici plerumque foramine peruio. Vbi deficit ſuggrundium, notabilis eſt *ſpina* prominens, ſed magis introrſum poſita. *Foramen opticum* poſterius in fundo orbitae latum, antrorſum ſpectans, exterius veluti oſſea lamina valuatum, pollicem facile admittit. Anterius ex aduerſo optici foraminis ex orbita continuatur canalis digiti medii capax, magno *foramine zygomatico* paulo pone hiatum narium effuſus.

Frons

Frons inter orbitas atque antica crura zygomatum latiuſcula, tota, imprimis verſus latera, tuberculis crebra, ſcaberrima, et in vno praeſertim ſpecimine quam maxime hiulca; in omnibus vero *ſulcis* ramoſis, arteriarum, per foramina ſupraciliaria eſcendentium, et calamos ſcriptorios aequantium, veſtigiis, arata eſt. Videtur haecce frontis in antiquiore ſpecimine notabilior inaequalitas orta fuiſſe ab incremento et ortu cornu ſecundarii, quod ſenioribus Rhinocerotum pleriſque adeſſe arbitror, quodque, ſaltem in africanis (*r*), adoleſcentulis iamiam propullulat. Huius enim baſis totam ferme frontis aream paulo ante medias orbitas occupare ſolet.

(*r*) Vana eſt Rhinocerotum in vnicornes et bicornes diſtinctio. Vnicornes enim ſpecie diuerſi eſſe non videntur, quamquam re vera exiſtant, longiore et magis ſubulato cornu, ſaltem in Aſia. Cornua duplicia innumera vidi, et in tenera iam aetate, fere ſimul prorumpunt. In quinquennis capite Promontorio B. Spei ad Muſeum *Sereniſſ. Principis Auriaci* miſſo, ſecundarium iam inſigniter protuberabat, quamuis primarium palmo vix eſſet altius. Vidi, raro exemplo, *cornu ſecundarium* Rhinocerotis, ſemipedale, a baſi poſtice *apophyſin* acutam, conicam, ſeſquipollicarem exſerens, ſimillimum illi, quod GLEDITSCHIVS in *Materia Medica* celebrat, quodque pariter ſecundarium fuiſſe autumo. Per huiusmodi credo luſum explicandus erit locus ALEX. HAMILTON in *Account of the Eaſt-Indies (Edinb. 1727. 8.) vol. 1. p. 7.* vbi cornu Rhinocerotis africani triplex deſcribit, e quibus primarium erat 18 vnciarum, proximum 12″ et poſtremum 8″. — In capite Rhinocerotis capenſis cornu ſecundarium baſi vsque in frontem, inter oculos, extenditur, adeoque recte a *Kolbio* frontale dicitur.

Venio nunc ad extremitatem cranii, seu *rostrum*, ad basin, inter zygomata crassissimum, et subtus aluearibus molarium dentium posterius amplissimis auctum. Haec ipsa vero *aluearia* antrorsum sensim angustiora rostri molem subtus paulatim contrahunt.

Palatum inter alueolares veluti vallos aequabile, leuiter excauatum, prope molares posteriores vtrinque *foramine* pennam minorem vix admittente, et aliquot minoribus peruium, ad fauces deficit margine obtuso, qui medio tuberculo, ad instar valuularum cordis lunarium, intercipitur. *Cristae pterygoideae* a palato retrorsum clementer decrescunt; et vbi fere euanescunt, adest vtrinque *foramen* insigne, quod digitum minimum vix non admittit. Anterius sub extremo rostro, loco foraminum palatinorum plerisque animalibus solemnium, dehiscit palatum *hiatu* triangulari, postice acutissimo, quem septum nasale introrsum bipertit, et cuius postico angulo foraminulum adstat solitarium, fere coecum.

Latera extremi rostri vtrinque amplissima *narium* cauitate, antrorsum effusa, late patent. Has interstinguit *septum* continuum, solidissimo et digitum fere, praesertim versus anteriora, crasso osse constans, versus fauces margine conuexe tumidulo praefinitum, marginem vero palati non exaequans, sed citra eundem terminatum. Narium aperturas desuper late obumbrat et rostrum obtuse terminat

testudo

teſtudo ſubouales, conuexa, e craſſiſſimo oſſe facta et robuſta ſepti pariete longitudinaliter ſuffulta. Huius externa tota facies tuberculis longe, quam in fronte, prominentioribus exaſperata eſt et confragoſa, in medio tamen longitudinaliter laeuigata magis, et veluti *raphe* quadam inſcripta; margines iiſdem tuberculis quaſi laceri apparent. Camerae narium compreſſae ſunt et retrorſum maxime verſus ethmoideos anfractus dilatantur, quorum tamen minime inſignis eſt apparatus. Prope aperturam narium anteriorem intrinſecus e ſuperiore cuiusuis camerae fornice deſcendit lamina oſſea craſſa, inuoluta, ſiue *os conchoideum* ſpongioſum.

Ex alueolorum reliquiis apparet, animalia quorum foſſilia deſcribimus crania, *molares* ſuperioris maxillae *dentes* vtrinque habuiſſe ſenos, ſeu forte ſeptenos: adeſt enim in vno ſpecimine dens ante alueolorum ſeriem minutus, a quo reliquorum, qui in omnibus noſtris ſpeciminibus deſunt ſolis radicum veſtigiis relictis, moles ſenſim creſcebat, ita vt poſtremi omnium maximi fuiſſe videantur; penultimorum vero aliquem eſſe a *Grewio* delineatum ex illius cum alueolis craniorum noſtrorum comparatione ſatis fit veroſimile.

Non parum miratus ſum, in omnibus quatuor craniis nullum omnino ſupereſſe veſtigium *dentium primorum*, quos grauiſſimi auctores, *Parſonius*,

 et

et cum eo *Linnaeus*, *Buffonius*, *Chardin* (*s*) aliique Rhinoceroti tribuunt, a molaribus remotos et in vtraque maxilla ſolitarios. Quamquam enim nullos huiusmodi dentes olim in ſiccato capite Rhinocerotis circiter quinquennis, Promontorio Bonae Spei in Muſeum *Sereniſſimi Arauſionis Principis* miſſo, deprehendiſſem, tamen ſubdubitabam, et aetate provectioribus demum erumpere putabam. Poſteaquam vero in ſpeciminibus adultis Muſei noſtri ne veſtigium quidem apparere video, vbi dens talis inſitus fuiſſe, vel firmari poſſe credatur, non poſſum non ſuſpicari, auctores qui primores dentes Rhinoceroti tribuunt omnes, hallucinatos fuiſſe, et primum e molaribus conoideum voluiſſe: Idque tanto magis credibile erit, ſi perpendamus, qui Rhinocerotis hiſtoriam dederunt, omnes nonniſi viuum animal examinaſſe, in quo difficile ſane et fallax eſſe debet dentium ſcrutinium. Accedit, quod interuallum inter primos molares et apicem maxillae ſuperioris in craniis non admodum prolixum ſit, quodque palatum mox ante molarium alueolos in anguſtum iugum et veluti carinam ſenſim contrahatur, vt nec alueolo locus ſit vllus, neque dentes illi primores, ſi adfuiſſent, tam magno ſpatio, quam auctores illi dicunt, ab inuicem diſtarent. Adde etiam, quod

(*s*) *Chardin voyage en Perſe (edit. 8va Pariſ. 1723.) vol. 8. p. 132.* Bouffon. *l. cit. p. 241. et 275.* Parsons in *Act. angl. n. 470.*

quod Rhinoceros, cui accuratiſſimus alias *D'Aubentonus* primores dentes fuiſſe ſcripſit, e data magnitudine etiam iunior videatur fuiſſe illo, cuius ipſe ſiccatum cum pelle caput diligenter in *Muſeo Auriaco* luſtraui, et cui itaque dentes illi per aetatem adeſſe omnino debuiſſent. E quibus omnibus iure concludi poſſe credo Rhinocerotem conformatione dentium cum Bradypode atque Daſypode conuenire. Neque ſolum hoc eſt affinitatis, praeſertim cum Daſypode momentum; namque huius cutis pariter atque pedes non exiguam ſtructurae ſimilitudinem cum Rhinocerote produnt, quanquam hunc nihilominus ſuillae genti magis propinquum eſſe putem.

Crania illa Muſei noſtri, etſi vix determinandae antiquitatis dicenda ſint, et monumentis humanis forte omnibus anteriora, tamen corruptionem tanto temporis ſpatio, etiam in ſpongioſiore parte, vbi molares fuerant infixi, parum ſenſerunt. Nempe, vt ſupra de Ebore foſſili monuimus, glacies regiones illas continuo adſtringens, neque per aeſtatem in terrae profundo reſoluenda, animales haſce reliquias contra edacis aeui dentem quaſi loricat atque firmat. Itaque craniorum etiam, quae deſcripſimus, ſubſtantia fuſca quidem, ſed praedura adhuc eſt, nec niſi in ſuperficie calcinata atque ochraceo vel limoſo terrae, in qua ſepulta iacuerunt, colore inquinata atque imbuta. Imo in vno nitor etiam et odor, quum raditur, oſſeus paſſim ſupereſt. Illud vero, quod antiquiſſimum, hiulca fronte prae-

praeſigne ſupra memorauimus, corruptius eſt et tota ſuperficie ad inſignem ſatis profunditatem calcinatum, vngue facile raditur. Duo alia paſſim in ſuperficie leues ſecuris, vt videtur, ictus paſſa ſunt, iis maxime in locis, vbi cornua haeſerunt; non autem affirmauerim cornuum adhaeſionem hiſce ictibus anſam repertoribus dediſſe. In horum tandem vno frons a dextro latere, proxime ſupra oculum, maiuſculo foramine, ſed rotundato perrupta eſt, quod viuo animali inflictum fuiſſe videtur.

Vt aliqua proſtet craniorum noſtrorum menſura, liceat hic inſerere tabulam comparatiuam omnium ſpeciminum, ſecundum menſurae Pariſinae normam expreſſam; in qua notari velim terminos omnes filo, ſecundum ſuperficiem adplicato exploratos fuiſſe:

	poll. lin.	poll. lin.	poll. lin.	poll. lin.
Longitudo tota ab extremo roſtro, ad prominentiſſimam partem occipitis - - - - - - -	33. 0	31. 3	30. 9	29. 5
—— palati inde ab angulo carinae ante hiatum palatinum notabil:	12. 0	8. 0		
—— aluearium pro dentibus -	9. 3	0. 0	11. 3	0..0
—— tuberis corniger ſupra nares		10. 6	10. 6	0. 0
circiter - - - - - -	11. 3	7. 10	9. 8	10. 0
—— hiatus narium - - -	8. 3		7. 0	7. 0
—— zygomatis a meatu auditorio ad foramen zygomaticum exteriorem arcum menſurando	9. 9	9. 6	8. 9	9. 9

Longi-

	poll. lin.	poll. lin.	poll. lin.	poll. lin.
Latitudo ſumma cranii inter tuberoſitates zygomatum anteriores	11. 9	10. 6	10. 3	11. 5
—— inter proceſſus orbitales -	11. 4	0. 0	11. 1	10. 3
—— tuberis cornigeri - - - -	7. 9	7. 6	6. 6	7. 6
Profunditas ollae cerebri ſtylo explorata - - - - - - -	7. 0	6. 10	6. 9.	6. 6

Procedo nunc ad *Cornua Rhinocerotum* Sibirica, quorum, vt monui, quina in promptu ſunt. Et haec quidem omnia primaria fuiſſe e magnitudine, proportione et figura facile apparet. Minora ſiue frontalia cornua vel ob minus inſignem molem a collectoribus neglecta, vel Rhinocerotes qui haſce plagas quondam occupabant vnicornes fuerunt, quod in Aſiaticis hodienum frequenter obſeruari auctorum aliqui aſſeruerunt. Duo e quinis Muſei noſtri cornibus foſſilibus integerrima ſunt; eaque mole, figura et proportione nihil inſoliti habent. *Vnius* nempe longitudo eſt 33″. 3‴, circumferentia imae baſeos, quae tamen filorum extimorum et breuiſſimorum ſtratum amiſit, 23″. 6‴. et paulo ſupra baſin 17″. 6‴ vnde ſenſim in ſubulatum acumen adtenuatur, retrorſum clementer curuatum. *Alterius* longitudinem deprehendi 2′. 1″. 4‴ circumferentiam infimam 1′. 7″. 9‴ et quinorum pollicum ſupra baſin diſtantia 1′. 2″. 6‴ figuram autem omnino priori ſimilem. Vtriusque ſubſtantia nonniſi in ſuperficie antiquata fiſſuris hinc inde fatiſcit, qua- Tab. X. Fig. 4.

 les

les. et recentia ſpecimina ſiccatione non raro contrahunt.

Dolendum eſt in tribus reliquis cornibus e Sibiria miſſis, quorum vel figura vel magnitudo minus vulgaris fuit, ab ignaro et rudi populo ſecuri, vt videtur, ablatam fuiſſe ab vtroque latere ſubſtantiam; cuius rei nullam aliam mihi fingere poſſum rationem, niſi hanc, quod vel ea ſubſtantia corrupta atque in fibras ſuas reſoluta fuerit, vel ſimilitudinem acicis, cornuumue caprinorum conciliare iis voluerit vulgus. *Vnum* ex his mutilatis et cornuum Ibicis ad inſtar planis cornibus longitudinem aequat 4 pedum et vnius fere pollicis. Curvatur illud arcu inſigni, et maiore quam hactenus in Rhinocerote obſeruatum eſt. *Alterum*, quod itidem, ob ſingularem circumcaeſuram, icone expreſſum eſt, altitudine eſt 2′. 8″ rectiuſculum; ſingulari autem ratione anterius verſus baſin craſſeſcit, ſituque magis reclinato conſtitutum fuiſſe videtur; ita vt tota figura a ſolita inſigniter abludat. *Tertium*, cuius icon minus neceſſaria viſa eſt, vti primum, paulo magis, quam vulgaria, incuruatur, et arcuatam fere figuram vnguis Ardeae exprimit, longitudine 2′. 11″. 6‴ proportione fere eadem, quae in cornibus integris ſupra indicata eſt.

Tab. X. Fig. 6.

Subſtantia horum cornuum duriſſima quamuis et rigida, adhuc, tamen ita in ſuperficie praeſertim reſoluta eſt, vt *fila* cornea longitudinalia, paral-

parallela, quae in recentibus firmiter compacta aegerrime apparent, egregie conspiciantur et facili opera separari queant. Itaque cornu Rhinocerotis e talibus filamentis siue setis corneis totum compositum esse, longeque alia structura gaudere, atque cornua persistentia, lamellata animalium plerorumque ruminantium, recte D'AUBENTONUS exposuit. Similem fere crassissimae epidermidis constitutionem, e fibris ad cutem perpendicularibus, in Manato s. Vacca marina STELLERVS olim noster descripsit. Subsimilem etiam structuram inuenias testarum Mytuli margaritiferi sole vel igne calcinatarum. Verum in Rhinocerotis cornu hoc praesertim mirabile est, quod media praesertim substantia adultioribus excrescat. Figura enim cornuum adtenuata imprimis debetur numero fibrarum superiora versus imminuto: extimae scilicet varia a basi distantia veluti praetritae et senescentes desinunt; vnde in plerisque recentibus Rhinocerotum cornibus superficies versus basin muscosa quadam hispiditate horret. Hoc autem phaenomenon a sola belluae actione, cornu ad arbores continuo adterentis, deriuari haud poterit; sic enim cornuum cacumen, quod maiorem vim patitur, minus cresceret, parique modo detritum et senio quasi consumtum obseruaretur; quod secus euenit. Extremitas enim cornuum semper solidissima ac sanissima deprehenditur; et natura animalium partes exterius iniuriis praecipue obnoxias, cornua, vngues, rostro auium

 (prae-

(praesertim Picorum), insita vi quadam vegetatiua, iis maxime in locis vbi maiorem adtritum patiuntur, continuo supplet, nec senescere patitur. Hinc necessario statuendum est, fibras in cornu Rhinocerotis extimas, succrescentibus e nucleo sensim interioribus, inutiles et effoetas non amplius crescere, sed velut emortuos capillos apicibus deteri atque resolui.

Praeterquam quod in cornibus Rhinocerotum fossilibus structuram fibrosam confirmatam inuenerim, singularem quoque obseruaui fibrarum per interualla coalescentiam quandam, in iis maxime speciminibus, quorum substantia lateralis securi dedolata est, conspicuam. Haec ideo quasi articulata aut inscriptionibus transuersis solidioris texturae vndata diceres; neque aptius comparari potest huius structurae ratio et adspectus, quam cum musculis rectis abdominis in humano cadauere, quorum laxiores fibrae musculosae, inscriptionibus transuersis in tendineam albedinem et substantiam densatis, interruptae sunt. Atque vti hos musculos per tendinea interualla firmari intelligimus, ita quoque cornuum substantiam compactioribus illis spatiis insigniter contineri, nemo non videt.

Post descriptas Rhinocerotum reliquias praecipuam in Osteophylacio nostro adtentionem merentur

tur *crania Buffalorum* gigantea, quorum integrum vnum et complurium fragmenta e Sibiria adlata habemus. Gigantea dico, quum maxima vrorum nostratium in Museo seruata crania, omnesque Buffali Capensis aut Indici, quas viderim aut descriptas inuenerim, reliquias tantum superent, quantum illa a craniis boum domesticorum, ista a Buffalorum Italicorum mole distant, quae prioribus collata pygmaea certe dicenda sunt. Animalia, quorum crania illa fuere, hodie tanta, in rerum natura, quod sciam, nullibi exstant. Neque enim Buffali calidissimarum regionum, quibus hocce animal natura destinatum est, nec vri nostro aeuo maximi, armenta Hungarica atque Podolica istis saepe vix minora, et vastior iisdem Bison Americae septentrionalis, qui post Rhinocerotem et Hippopotamum quadrupedum omnium certe maximum est (*t*), ad Buffa-

 lorum

(*t*) Ill. BVFFONIVS, nescio quo argumento, Bisontem Americanum minorem esse credidit, quam sunt Asiae atque contterminae Europae feri Tauri (*hist. nat. vol. XI. edit. min. XXIII. p. 104.*) a quibus tamen istius originem iure deducit. Putauit scilicet, Vir Illustrissimus, omnia animalia, quae ex antiquo orbe in Americam transmigrauarint, minora et debiliora euasisse. Et tamen Alcem, Rhangiferum, Damam, Leporem, Vulpem nigram (quae est Lupus niger BVFFONII), in America boreali potius maiora esse, quam in Asia orientali, certis mihi constat documentis. Similiter BISON americanus, quem secundum praeconceptam hypothesin et ex male intellectis, vt videtur, itineratorum relationibus, minorem Asiatico statuit, re vera Vris vel lorum, quos frigidam nunc totam Sibiriam olim aluiſſe e lectis oſſibus conſtat, molem nequaquam adtingunt.

Loca in quibus huiusmodi crania reperta fuere *Cel.* GMELINVS in *itinerario* ſuo nominat: extremam Sibiriam, circa Anadyr fl. et regiones ad Neo-Tunguskam. Integrum vero, quod Muſeum noſtrum ornat, cranium illud eſt, cuius ad Ilgenſe munimentum (*Ilginskoi Oſtrog*) effoſſi meminit idem (*itinerar. vol.* 3. *p.* 753.). Idque *Celeberr.* MVLLERO noſtro deberi, qui illud a ſacerdote illius loci acceperat, in catalogis rerum naturalium a GMELINO transmiſſarum inuenio. Fuit autem in ripa Ilgae fluminis vernalibus aquis ſubruta inuentum; nec alia prope oſſa adfuiſſe dicuntur. Extra Sibiriam inuentorum craniorum taurinorum tam vaſtae magnitudinis duo tantum exempla habemus; quorum alterum in *Actis anglicis vol.* 37. *pag.* 427. *tab.*) KLEINIVS, alterum *Ill.* BVFFONIVS in aureo ſuo opere (*hiſt. natur. ed. minor. vol.* 23. *p.* 261.) communicarunt. Prior deſcribit atque delineat occiput tauri, vel potius *Buffali*, cum cornibus deter-

vel maximis vaſtior eſt et procerior; vti ex viſis adultorum craniis, et viuo Biſonte, Philadelphico, an. 1766. in Belgio exhibito didici, quem nondum ad adultam tamen aetatem perueniſſe cornuum paruitas arguebat, etſi mole iam Vrum inſigniter ſuperaret. Neque ſane vllam inuenio rationem, quae in pinguiſſimis feliciſſimae Americae paſcuis, armenta fera minuere debuiſſet.

detruncatis, vix inferius nostris magnitudine, et figura iisdem simillimum, prope *Dirschau* in Gedanensi regione effossum; in eoque distantiam inter bases cornuum 1 pedis et $1\frac{1}{3}$ pollic. latitudinem inter orbitarum margines 1'. 4'' et circumferentiam cornuum ad basin 1'. 6'' posuit. E paulo minore animale fuit nucleus cornu bouilli, quem in Galliae quodam flumine inuentum recensuit BVFFONIVS, cuiusque circumferentiam 1'. 1''. 8''' esse scripsit.

Crania *nostra*, cum quibus KLEINIANVM cornibus et orbitarum conformatione omnino conuenit, Vri vel Bisontis non fuisse, sed ad Buffali genus, hodie calidioris Indiae inquilinum, referri debere insignis latitudo et conuexiuscula planities frontis atque bregmatum, prominentia orbitarum tubuliformis, latitudo ossium maxillae superioris, et situs denique cornuum magis, quam in Vro, transversus et reclinatus, neque non corneae vaginae figura externe angulata, atque insigniter rugosa, arguunt. Quae discriminis momenta vt melius appareant, in tabula nostra altera, praeter integrum illud cranium e Sibiria fossile a fronte et a latere expressum (fig. 1. 2.) etiam vri maximi nostratis cranium duplici item icone exposui (fig. 3. 4.). Quae cum icones summa cura, seruatis, ad appositam diminutam mensurae in pollices diuisae scalam, cunctis proportionibus, exactissime delineatae fuerint, sine vlteriore verborum apparatu inde et vera

Tab. XI. XII. Fig. 1. 2. 3. 4.

vera vtriusque forma, et differentiae, atque insignis cranii fossilis magnitudo satis superque intelligi poterunt. Adferam tamen mensuras vtriusque generaliores, filo exploratas; quamquam et haec opera, ob iconum perfectionem superflua fere videatur.

	In Buffali Cranio foss. poll. lin.	In Vri cranio. poll. lin.
Longitudo cranii a fine ossium nasi, qua fronti committuntur ad cristam transuersam occipitalem -	21. 0	16. 6
Longitudo ossium nasi, quorum in cranio fossili dextrum breuius 3‴	9. 0	
Longitudo aluearium pro molaribus, quae in cranio fossili, ob defectus, satis accurate mensurari haud potuere - - -	7. 6	10. 3 5. 9
Eadem ratio impedimento fuit, quo minus longitudo ossium maxillae superioris comparari potuerit -	— —	— —
Longitudo nuclei cornuum ossei, exterius secundum arcum adplicato filo, a corona baseos ad apicem - - - - - -	13. 6	6. 3
Latitudo summa occipitis inter angulos mastoideos, vt ita dicam,	11. 3	9. 9
Circumferentia arcus occipitalis, inter hos ipsos angulos mastoideos	18. 9	15. 6

Alti-

	In Buffali Cranio foss. poll. lin.	In Vri cranio. poll. lin.
Altitudo occipitis a margine foraminis occipitalis ad cristam transversam seu arcum occipitalem -	4. 2	3. 9
Latitudo cranii inter cornuum radices - - - - -	13. 11	10. 0
Latitudo inter extremas orbitarum oras - - - - - -	14. 1	11. 9
Latitudo inter foramina supra orbitalia - - - - -	8. 9	6. 2
Latitudo maxillae superioris ad molares postremos. - - -	8. 0	2. 2

Nucleus cornuum osseus in giganteo nostro Buffali cranio 14 pollices circumferentia explet, quum in maximo Vro vix 8 poll. excedat. Corneae vaginae, quae nucleos osseos loricat, crassities, in vtroque cranio non potuit exacte comparari. Quod in fossili cranio superest corneae substantiae, nouem, vbi media crassities, lineas aequat. Dextrum *huius* cornu, (cui fere integra superest vagina, externe longitudinaliter angulata et versus basin rugosissima,) cum corneo inuolucro commensuratum vix 15 poll. crassitiem dedit; quum in Vri cornibus eadem deprehensa fuerit 10″. 2‴. Vnde maius corneae substantiae in Vro volumen apparet. Vaginae istae corneae, in cranio fossili antiquitate in lamellas resolutae, structuram cornu bouilli per strata accrescentem et a textura cornu Rhinocerotis supra exposita diuersissimam elegantes exhibent. Illam autem corneam substantiam, quae alias facillime putrescit, in cranio per tot secula solo, sed frigore adstricto, condita magna pro parte adhucdum superesse mirum videri non debet, cum ipsum quoque cranium passim nitorem osseum seruauerit.

Praeter cranium istud integrum dicendum, habemus ex tribus aliis fragmenta; occipitis nempe portiones, cum vno alteroue cornu superstite. Horum vnum, quamuis quibusdam mensuris priori cedat, (interualla cornuum 12″. 3‴ et longitudinem nuclei ossei 21″. 8‴ praebens,) ob latitudinem tamen occipitis inter angulos mastoideos mensurati maiorem (12″. 10‴) et insigniorem nuclei cornuum crassitiem seu circumferentiam (13″.) senioris animalis videtur fuisse. Fragmenta illa, sub mitiore forte coelo e terra eruta, corruptionem multo magis senserunt.

Tantos olim Buffalos (u) in Sibiria vixisse ex eorum reliquiis videmus. Hodie vero ne in Indiis quidem pares gigni minus habebit miraculi, si ponderaueris, quantum nostris sub oculis passim addant anima-

(u) Posset huc referri locus Plinii *hist. nat. lib. VIII. cap. 37.* „Vrorum cornibus barbari *septentrionales* potant: vrnasque binas capitis vnius cornua implent.

animalibus domesticis incrementum clima et pabuli largioris atque pinguioris qualitas, quantulosque eaedem caussae alibi producant earundem specierum pygmaeos. Quis non nouit insignem inter armenta Podoliae et macros ericetorum boues, quis inter pusillos arietes septentrionalium regionum et Indicos vel Capenses proceros ignorat differentiam. Imo maior adhuc est inter pygmaeos Indiae orientalis vel Insularum septentrionalium equos, illosque quos Frisia aut Anglia generat; maior inter Vrum aut Bisontem Americes, et bouem paruulum, gibbosum, Zebu dictum Africae et Indiae. Et vt propius ad effectus climatis Sibirici etiam hodiernos accedamus, quantum non distant Musmones Corsicae ab ariete fero seu Argali orientalioris Sibiriae, quamquam hic vere sit vnum idemque cum istis animal. Si vero olim calidiorem fuisse Sibiriam et feliciore coelo gaudentem insuper statuamus, sine qua conditione frigoris impatientissimi Buffali ibi viuere haud potuissent, ratio in propatulo est, quae eosdem in pinguissimis tunc pascuis ad tantam molem potuit auxisse, quam fossilibus craniis videmus; quum etiam hodie Americae septentrionalis, quam magnam cum Sibiria similitudinem habere omnes fatentur, mitiore in climate, Virginiae, Pensyluaniae Canadae in syluis, Bisontes cum Europaeis et Asiaticis certe congeneres, et ex antiquo in nouum orbem olim migrasse credendos, in stupendam excrescere molem certo constet.

 Cre-

Credo fic etiam climatis habendam effe rationem in explicanda gigantea ftatura *ceruorum*, quorum in Hybernia praefertim effoffa miramur cum vaftiffimis cornibus bipedalia crania. Quamquam enim aliqua ex illis alcium et tarandorum fuiffe concedam, imo affirmem; vidi tamen et ab auctoribus nonnullis memorantur reliquiae, quae ad giganteam quandam, hodie nullibi reperiundam cerui vel fpeciem vel varietatem pertinuerunt; idque praefertim de eo affirmare aufim cranio, cuius meminit TH. MOLYNEUX (*v*).

* *

Supereft animalium exoticorum calidi climatis in Sibiria olim viuentium tertium monumentum, nempe cornu foffile *Gazellae recticornis* (*x*), quam hodie

(*v*) De cornibus ceruinis maximis in Hybernia frequenter effoffis euolue TH. MOLINEUX *nat. hift. of Ireland p.* 137. vbi cranium praefertim defcribit 2′. longitudine, cuius cornua in latitudinem 10′. 10. fpargebantur, ramis lateralibus duobus inftructa et extremitate latiffima, palmata. Conf. etiam TH. KNOWLTON in *Actis Anglic. vol.* 44. *p.* 124. *tab.* 1. et I. HOPKINS *Act. Angl. n.* 472. *p.* 257. Quae autem defcribit IAC. KELLY *ib. n.* 394. *p.* 122. vera Alces cornua funt, et Rhangiferorum quoque cornua in Hybernia reperiri monet CR. MORTIMER *id. n.* 444. *p.* 389. Quae vero MOLYNEUX obferuauit ob cranii magnitudinem, ad Rhangiferum referri nequeunt.

(*x*) Volo Antilopen bezoarticam *Spicil. Zoolog. Fafcic. I. p.* 14. quae eft Capra Gazella LINNAEI, et l'Pafan BVFFONII, In huius hodie sola, quantum scimus, Africa alit, quaeque mihi, posterioribus curis, nomen *Orygis* antiquorum, ad aliam olim Gazellae Afrae speciem a me relatum, merere videtur. Conuenit enim huic, quod de *pilo contrario* Orygis PLINIVS refert; cuiusmodi miram velleris constitutionem in nulla huc vsque animalium specie, praeter Gazellam istam et Zebram africanam obseruare potui. Conuenit etiam quod de cornibus Orygis, apud nonnullos Africae populos hastarum loco vsitatis prodiderunt AGATHARCHIDES, STRABO, et LAMPRIDIVS. — Cornu istius fossilis rectissimi, 27″. 6‴ longi et valde corrupti figuram ideo adponere non placuit, quia nullo modo a vulgaribus huius speciei, plerumque item rectissimis cornibus, in curiosorum museis passim oc-

 curren-

ius nuper pelle eleganter seruata, miram illam obseruaui pilorum dispositionem. Nempe in lumbis *vortex* est pilorum, proxime ante maculam quandam rhombeam nigram, quae caudae basin stipat; ab hoc vortice per spinam longitudinaliter pilus antrorsum tendit, vsque ad verticem capitis, a media vero spina vtrinque transuersim defluit, versus abdomen et imprimis hypochondria sensim refluus, ita vt pilis ab inguine adscendentibus occurrens in imo vtrinque hypochondrio alium efficiat insignem vorticem. Idem fere notatur in *Zebra* africana, sed minore gradu, etenim vortex lumbaris longius a cauda remotus est, neque reflui per latera pili vorticem in hypochondriis constituunt, sed versus aluum aequaliter deorsum tendunt, secundum directionem fasciarum. Singulari autem modo vtrinque ad spinam vndulati huic sunt pili, maxime versus iubam.

currentibus differunt, horumque optimas icones proposuit Ill. BVFFONIVS (y). Nolui autem hac occasione praeterire aliud *Gazellae* cuiusdam *Indicae*, quae apud Zoologos plane non occurrit, cornu singulare, generali quidem forma prioris cornibus persimile, gracilitate vero, annulorumque conuexitate ac glabritie diuersissimum, cuius ideo iconem in Tabula X. adiiciendam curaui.

Tab. X. Fig. 5.

Hoc itaque *cornu* longissima quae viderim Gazellae prioris cornua proceritate superat, etsi longe tenuius sit, maxime ad basin. Quum nempe vulgaria Gazellarum cornua tantum 25 ad 30 pollicum longitudine, circumferentia vero ad basin 5″ plus minus vulgo inueniantur, nostrum contra in longitudine 33 proxime pollicum, circumferentia ad basin seu crassitie vix 3″. 7‴ explet. Deinde non, vt vulgaria, rugis acutis, inaequalibus, postice veluti sursum tersis annulosum est; sed *annulis* aequalibus, connexis, distinctis, 3‴ circiter latis, subarticulatum, quorum inferiores paulo latiores, summi sensim obsoletiores sunt, vt tandem vltimus seu quadragesimus versus extremitatem cornu laeuissimam prorsus euanescat. Horum annulorum *primus et vicesimus* ad posterius cornu nostri latus in duos aequales annulos discedit. Inter singulos annulos inferiores, apparet *stria* gemina eleuata, obsoletissima.

(y) BVFFON. *hist. nat. XII. t. 33. f. 3.*

ma. Notandum quoque eſt non omnino rectum eſſe cornu illud, ſed verſus extremitatem leuiſſime falcatum; ſubſtantiam autem eſſe nigerrimam, et extus glabram, quamuis nulla certiſſime arte polita. Apparet ex his cornu noſtrum etiam ab iis differre, quae Ill. BVFFONIVS tabulae ſupra citatae fig. 1. et 2. tamquam diuerſa a vulgaribus, expreſſit.

Expoſita iam ſunt, quae huic commentationi anſam dederunt. Antequam vero coronidem ſcripto imponam, liceat ditiſſimam *oſſamentorum* et *dentium elephantinorum foſſilium* ſeriem, qua muſeum noſtrum exterorum vniuerſa cimelia longe ſuperat, breuiter exponere. Loca vbi iſta omnia reperta fuerint prodere neque poſſum, neque noſtra intereſt. Sufficit noſſe, non tantum ad omnia fere Imperii Ruſſici maiora flumina aliquando lectas fuiſſe elephantorum reliquias, et Tanaim, Volgam, Iaikum, Dvinam, Obyum, cum Tobolio, Tom et Irtiſch fl. neque non vlterioris Sibiriae Ieniſeam, Angaram, Chatangam, Lenam, Indigirkam, Kolymam, imo verſus extremum orientem effuſum quoque Anadyr fluuium, ripas ſuas lambendo atque cauando gigantea paſſim detexiſſe ſceleta; ſed paſſim etiam in locis ab omni fluento remotis, occaſione puteorum aut fundamentorum pro aedificiis, complura paſſim eruta fuiſſe, magno teſtimonio totam hanc telluris partem innumeris elephantorum reliquiis ſcatere. Reperiuntur oſſa illa vsque ad ipſa oceani glacialis littora, et

ibi

ibi praesertim integerrimum et ab omni corruptione seruatum eruitur Ebur, quod alibi vel calcinatum, exesum, et in lamellas cretaceas resolutum, vel saltem tinctura terrae flauescente, castanea, imo livido-coerulescente inquinatum offendunt.

Habemus in Museo *tria* integra elephantorum fossilia *crania*, quorum et aliquot dentes simul adlati, et vnius maxilla adsunt, praeter sex alias, quarum crania non habentur, maxillas. E craniis vnum permagni elephantis fuit; quippe quod parcissimo modulo, ab occipitis incisura media, ad alveolorum marginem 3′. 5″. 6‴ aequare inueni; quum in maximis Petropolin olim adductorum cranium vix 2′. 10″ excedat. Alueolorum singulorum rostri diameter in eodem cranio est 5″. 10‴ et ebur vnius lateris, quod in Museo simul adest, in longitudinem curuatur 8′. 11″ solidissimum atque ex albo flauicantis coloris. Repertum fuit hocce cranium in arenoso, montis cliuo, ad ripam orientalem Indigirkae fluuii praeruptam, ex aduerso ripae quam *Sztanoi-jabr* vocant, et ab accuratissimo MESSERSCHMIDIO olim Petropolin missum. Plura ibi simul sceleti ossa occurrebant, quorum et aliqua simul aduecta sunt; praesertim *femur*, quod inter cuncta Musei nostri fossilia ossa eminet, et longitudinem, quamuis carie temporis absumto capite, 40 pollicum excedit; itemque humerum sinistrum 2′. 11″. 6‴ longum.

Alterum

Alterum ex istis craniis, curante item MESSERSCHMIDIO Petropolin delatum, haud insolitae molis est, et cum plerisque sceleti ossibus, costis etiam, scapulis et vertebris, e ripa Lenae fluuii, non longe ab eiusdem ostio effossum fuerat. Vnde *tertium* erutum sit, non satis constat.

Longum esset innumeros Musei nostri *dentes fossiles eburneos* variae molis atque curuaturae, secundum figurae et magnitudinis singula momenta prosequi. Dextri partim sunt, partim sinistri lateris. Quidam, praeter colorem, quem flauum, ferrugineum, fuscumue contraxerunt, ebori recenti soliditate similes; alii vel tota substantia, vel aliqua sui parte calcinati sunt, vt pulchre appareat lamellosa, et simul a centro radiatim fibrosa eboris textura. Duos solummodo ex his adtingam, quorum *alter* ob insignem molem notabilis, octopedalis fere, quanquam alueolari portione atque mucrone orbatus, circumferentia explet ad basin 1'. 7''. 6''' et in medio 1'. 7''. *Alter* Archangelopoli in Museum missus et solidissimus non modo pro insigni longitudine gracillimus est (longit. 4'. 10'' circumferentia in medio maiore 9''. ad alueolum 7''. 3'''), sed etiam miro modo in laxam spiram veluti manibus tortus, accedit ad dentem elephantinum recentem a GREWIO (musf. regal. societ. tab. 4.) delineatum.

Praetereo plurimos *molares* elephantinos vario tempore e Sibiria aduectos. Innumera praeterea

 con-

confractorum ossium fragmenta. Integros vero *humeros* octo habemus, *vlnas* quatuor, *scapulas* fractas tres *ossa*, *peluis* duo, *femora* integra quinque; sed *vertebras* tantum binas fossiles. Haec omnia, vna cum craniis, aliquam quidem intra terram superficietenus calcinationem passa sunt, et linguae acriter adhaerescunt, osseum tamen etiamnum rasa odorem, imo quaedam passim et nitorem seruarunt; colorem vero plane sordidum, fuscum vel buxeum, ocreolimosum, acquisiuerunt.

Ex enumeratis ossibus (quae ad elephantos pertinere dudum, ante D'AUBENTONUM, cui hoc tribuit BVFFONIVS, accurata eorum secundum figuram et proportionem, cum sceleto elephantino recenti comparatione demonstrarunt e nostris Celeberrimi Viri MESSERSCHMIDIVS, DVVERNOY, GMELINVS,) egregie confirmatur D'AUBENTONI obseruatio circa incrementum ossium in iunioribus animalibus maxime in longitudinem, post adultam vero aetatem magis in crassitiem luxuriantium. Didici etiam e numerosis Musei nostri craniis et maxillis elephantinis, varietatem aliquam in situ dentium exsertorum obseruabilem, quorum alueoli modo tota longitudine paralleli et arcte contigui sunt, modo leuiter diuergunt, vel tandem paralleli inter se distant, spatio saepe quatuor aut quinque vnciarum; et tunc interiecto pariete osseo et cellulositate coadunantur. — Demum

ex

ex iisdem craniis et maxillis apparuit vera dentium molarium conditio, quos modo ſolitarios, modo geminos elephanto tribuerunt auctores, in vtroque veraces. Iuniores enim elephanti molares quidem extus in qualibet maxilla habent vtrinque ſolitarios, oblonga atque detrita corona prominentes; verum adſunt ſimul intra cauernas maxillarum, in imis faucibus repoſtas, latentia ſingula germina. Eaque ſucceſſu temporis excreſcunt, e cellulis ſuis oblique antrorſum prorumpunt, antiquorum dentium faciem poſticam planam trudunt, eosdemque loco ſuo ſenſim depellunt, vt hi tandem toti extra ſenſim obſoleſcentes alueolos aſſurgant et denique ſponte excidant. Tunc iam anteriore ſui parte, quae latior eſt et prominentior, exſurgunt noui illi molares, atque manducatione conuexum primo eorum iugum in planitiem ſenſim adteritur; creſcunt dein praeſertim ſecundum diametrum longiorem, dumque ex antiqua ſede antrorſum veluti progerminant et protruduntur, priorum molarium alueolos, quaeque horum ſuperſunt veſtigia, comprimunt, obruunt et oblitterant; acquiſitaque demum per totam longitudinem area molari plana, oblonga, in feram animalis aetatem perſiſtunt. Omnes fere huius incrementi gradus in Muſeo noſtro demonſtrari poſſunt, vbi ſimul apparet conſtans haec, inter molares primae aetatis et ſuccedentes illos, diſtinctio, quod priores non ſolum multo minus in longitudinem exporrecti ſint, ſed et complures habeant radices

 coni-

conicas; cum secundarii contra toto corpore in longitudinalem carinam et veluti cuneum coarctentur, quo alueolo suo inhaerent; vnde extra alueolos etiam figura tota facillime distinguuntur.

Quum supra probabiliorem esse dixerim sententiam illorum, qui elephantos olim in Sibiria multiplicasse statuunt, ne huic opinioni soli fauisse dicar, pro coronide adiiciam obseruationem primo Ill. TATISTSCHEV, qui maxillam elephantinam, vna cum *Ammonitis* et *Belemnitis*, prope pagum Woldina repertam in Museo nostro deposuit; aliamque STELLERI, qui reliquias elephantinas, et simul Ichthyodontes seu vulgo dictas *Glossopetras* in Tura fluuio reperta memorat. Nonne haec autem iis seruiunt, qui omnia diluuio tribuere auent. Sed quis non potius credat petrefacta illa marinorum corporum, in verum lapidem mutata, ossibus elephantinis, quibuscum reperta sunt, quorum tamen natura alterata non est, longe antiquiora esse, atque tum iam iis in locis sparsa iacuisse, vbi natus forte et educatus occubuit tandem elephas. Quicquid sit, non disputo, neque vllam hypothesin tenaciter defendo. Qui vero omnia explicare amant, quantum lubet hypothesibus indulgeant, atque ante omnia explicent, quanam ratione *maxilla Rosmari* a IOSEPHO MONTI obseruata in agrum Boniensem, cornua monodontis seu Monocerotis marini in mediam passim Sibiriam, immensa vis coralliorum exoti-

exoticorum et magna pro parte incognitorum in Gothlandiam eique vicinos maris balthici tractus, aut in montem S. Petri prope Traiectum ad Mosam, itemque conchylia marina indica in elatas mediterraneas regiones, et in montes sub ipsa arcto mari glaciali vicinos, inter Piasidam et Ieniseam fluuios, vbi ista corpora hodie petrefacta reperiuntur, delata fuerint?

DE FORMATIONE INTESTINORVM OBSERVATIONES IN OVIS INCVBATIS INSTITVTAE.

Pars III.

Phaenomena amnii ſpurii interna, vbi ſimul de formatione Meſenterii, Thoracis, Abdominis, Alarumque et Pedum agitur.

Auctore

C. F. WOLFF.

§. 119.

Primordium canalis inteſtinorum in Diſſertationibus, praecedenti Commentariorum Tomo inſertis, ita comparatum eſſe dixi, vt ſit tubus ſimplex, rectilineus, anterius apertus, cuius membranae, vtrinque reflexae, continuarent in amnium ſpurium, quod amnium verum, ex embryonis abdomine continuatum, aeque ac embryonem ipſum, includit. Inteſtina igitur exterius in amnio ſpurio integro in conſpectum veniunt, adeo tamen, vt ſola eorum ſuperficies interna ſeu cauitas ſub ſpecie qui-

quidem foueae cardiacae, rimae et foueolae inferioris appareat. Si igitur externam confiderare velis fuperficiem, quo ex habitu, figura et connexione inteftina cognofcantur; amnium fpurium aperiendum eft. Phaenomena igitur, quae intra hoc apparent, quae interna appello, huius Differtationis obiectum conftituent. Vt, quantum fieri poteft, breuiffime ad demonftrationem eorum peruenıam, quae in fuperioribus differtationibus adfirmaui; foueam cardiacam ventriculi cauitatem, rimam inteftini medii et foueolam inferiorem inteftini recti cauitatem effe; primum exponam fubiectum III. dies duodecimque horas incubatum, quod autem non minus in omnibus fuis partibus perfectum eft, quam embryones effe folent IV. dies incubati. Hac enim aetate inteftina adhuc in illo ftatu primordiali funt, et ita tamen fimul comparata funt, vt pro inteftinis facile agnofcantur. In embryonibus aetate fuperioribus ftatus ille et phaenomena iam euanefcunt; in inferioribus inteftinorum primordia, nifi ex perfectioribus fubiectis iam nota fuerint, vix cognofcuntur.

§. 120. In embryonibus igitur, quatuor dies incubatis, vel in fubiecto praefenti (Tab. XIII. Fig. 1. 2.), perfectione illis aequali, fi membrana areae inferior (fig. 1. *r*) quae bullam (fig. 1. *a. b. c.*) producit, a fuperiori membrana (fig. 1. *r.*) foluitur et ad anteriorem partem embryonis reflectitur, quo ipfo fcilicet facto bulla deftruitur, amnium verum in con- Embryo IV. dierum. Limbus et apertura abdominis; primordium vmbilici. Tab. XIII. Fig. 2. *i. i. i.*

fpectum

ſpectum venit (fig. 2. *b. b.*) quod, niſi laeſum eſt, ſubtiliſſimae veſiculae inſtar expanſum et pellucidiſſimo humore repletum apparet, in praeſenti vero ſubiecto collapſum erat. Primum, quod hic notabile occurrit, limbus abdominis eſt, (fig. 2. *i. i. i.*) ex quo amnium verum continuatur, cuiusque in ſuperioribus mentionem iam feci. Ille a regione pubis anterius incipit, inde retrorſum vtrinque recta procedit ad paruam a ſpina dorſali diſtantiam vsque. Tum incipit adſcendere parallelus ſpinae dorſali, quacum faſciam ſeu laminam intercipit abdominis lateralem (H. H.) ſatis anguſtam adhuc, quae vix quartam partem exhibet abdominis perfecti et integri. Ad regionem cardiacam vel paulo ſuper hanc regionem limbus antrorſum curuatur et cum limbo alterius lateris coniungitur. Limbus iſte oram conſtituit cauitatis totius, quae abdomen, peluim et thoracem complectitur, quae ſatis longa et lata, ſed minus profunda eſt propter anguſtiam laminae lateralis abdominis (H. H.). Apertura huius cauitatis, quae non minor eſt, quam cauitas ipſa in ſuo ambitu, primordium eſt vmbilici; ea enim, prout parietes cauitatis, praecipue lamina (H. H.), increſcunt, imminuitur et conſtringitur; donec vltimum paruum inde orificium pro largiſſimo ſacco abdominis euadit, quod auibus pro vmbilico eſt. Hoc tempore de toto ſacco abdominali ſola regio lumbaris, quam lamina (H. H.) exhibet, et aliqua pars regionis hypochondriacae vtrinque adeſt.

§. 121.

Amnium verum Fig. 2. b. b. b.

§. 121. Ex ipfo hoc limbo membrana amnii veri continuatur, fed aliter, quam in quadrupedibus hoc fieri folet. In his enim abdominis cutis ad regionem vmbilicalem in longum funiculum vmbilicalem producitur, qui vafa vmbilicalia continet, et ex eius funiculi fine demum membrana reflexa amnium conftituere incipit. In auibus nullus vnquam funiculus exiftit; femper mera eft apertura abdominis loco vmbilici, maior priori tempore, deinde anguftior, et ex huius aperturae limbo membrana orta continuo retrorfum flectitur et amnium verum conftituit, quo ergo caput, dorfum, cauda et tubercula alarum pedumque teguntur. Loco ventris magna, quam dixi, apertura eft, quam ergo non modo abdominis fed fimul ipfius amnii veri quoque aperturam effe, facile intelligitur.

Rimam, exterius in amnio fpurio apparentem, cauitatem inteftini medii; futuram ipfum marginem inteftini mefenterícum; foveolam inferiorem cauitatem

§. 122. Ante hunc limbum abdominis membrana apparet; ex inteftinis continuata, refecta in hac figura ad aliquam vsque partem (*n.*) quae furfum et retrorfum reflexa in ftatu naturali amnium fpurium producebat (fig. 1. *a. b. c.*), quae etiam nunc in hoc praeparato, vbi reflexa in fitum naturalem reftituitur, eadem rurfum phaenomena, foveam cardiacam, rimam foueolamque inferiorem offert. (fig. 1. *f.* N.) Idem quoque limbus inteftinalis in hac interiori membranae bullae fuperficie apparet (fig. 2. *k. k.*) quo exterius in bulla integra fouea et rima cingebantur (fig. 1. *e.*) adeo, vt facile recti esse, ostenditur. Fig. 2. et 3.

cile sit easdem membranae huius partes, quas exterius in bulla integra vidimus, interius quoque, in huius membranae superficie interna recognoscere. Quodsi nunc examinare velis, quaenam partes sint, quae retro limbum intestinalem sequuntur, quae exterius in bulla integra foueam cardiacam, rimam et foueolam inferiorem constituebant, quas cauitatem intestinorum esse dixeram; nihil opus est, quam vt limbum abdominis, vna cum eo, quod de abdomine et de thorace adest, simulque pedem et alam remoueas, quo hae membranae partes, tum quatenus extra abdominis cauitatem eminent, tum quatenus intus reconduntur, plenius in conspectum veniant, quo facto hae partes ita apparent, quemadmodum in figura 3. delineatae sunt, vbi vides, immediate post limbum intestinalem intestinum ipsum sequi, adeo vt, si nunc membrana (*n.*) in pristinum situm naturalem reflectitur, ita quidem, vt limbus ipse vna cum membrana reuoluatur, quemadmodum in situ naturali se habet, manifesto appareat, labium marginis rimae exterius (fig. 1. *e.*) a limbo; interius a parte intestini (fig. 3. M. *m.*) anteriori formari; rimae cauitatem reliquam esse ipsius intestini cauitatem, et formari a media posteriori parte intestini (fig. 3. M. *m.*); futuram autem, siue fundum rimae esse postremum intestini marginem, quo laminae vtriusque lateris cohaerere et mesenterium constituere incipiunt. Saepius et variis in subiectis hoc experimentum institui; neque aliter, quam vti dixi,

dixi, se rem habere, inuenire potui. Dum in tali praeparato, quod figura 3 exhibet, membrana (*n.*) antrorsum reflexa est, ventriculum vides (*i.*) intestinum medium (*m.* M.) et rectum (*p. q.*); vbi hanc membranam reuoluis, vti est in situ naturali; in loco intestini medii rimam vides pristinam, in amnio spurio integro visam, superius in loco pylori fere, ex quo duodenum descendit, fouea nunc cardiaca apparet, et inferius loco principii intestini recti foveola est. Caeterum de figura, quam consideramus secunda notandum est, videri, quasi limbus intestinalis (*k. k*) in parte media ab omni retro continuatione liber esset et separatus a partibus, quae itidem extra abdomen eminent, (*m.*) quae partes eleuatiores ipsius intestini medii sunt. Hoc inde euenit, quod intestinum medium, maxime in parte sua media valde depressum situm, et versus latus embryonis dextrum inclinatum est. Dum modo autem membrana (*n.*) antrorsum paulisper trahitur, vt intestinum plicatum extendatur, totum intestinum a parte suprema (*o.*) vsque ad rectum (*p.*) tanquam vnum cum limbo continuum, quemadmodum in figura 3 apparet (fig. 3. *o. m. p.*), in conspectum venit. Malui tamen phaenomena, vti sponte apparent, et partes maxime in suo situ naturali delineare. Licet enim ruditer satis meas delineationes sculptor reddiderit, accurate tamen reddidit vt explicationi phaenomenorum et descriptioni sufficiant, neque quidquam veritati detrahant. Caeterum inteſtinum medium accuratius, quomodo ſe habeat in huius aetatis embryonibus ad §. 126. et inteſtinum rectum ad §. 127. definietur; fouea autem cardiaca quod cauitas ſit ventriculi certo tempore in explicatione embryonis trium dierum ad §. 146. demonſtrabitur.

Scholium de ſitu cordis in huius aetatis embryonibus. Fig. 1. 2. 3.

§. 123. Caeterum inteſtinum hoc medium extra abdomen non modo ſed etiam extra amnium prominere totum, ſatis manifeſtum eſt et ex ſola conſideratione figurae patet. Quod cor autem attinet, non negauerim, hoc tectum eſſe in huius quidem aetatis embryonibus. Apparet interim in figura 1. vbi partes omnes in ſitu naturali, et embryo totus valde compreſſus per membranam bullae, qua includuntur, transparent, limbum abdominis, eundemque amnii veri limbum (C.) accurate tangere marginem inferiorem auriculae ſiniſtrae (*k.*). Quodſi ergo cor hoc tempore ita ſitum eſt vt ventriculo ſuo recta deorſum et potius paulum retrorſum (in figura 3 enim ſpina dorſalis extenſa eſt) ſpectet, neceſſe eſt, vt totus ventriculus cum canale auriculari (fig. 3. *a. b.*) extra thoracem, abdomen et amnium verum promineat, et in interſtitio illo (fig. 1. *m.*) inter amnium verum et ſpurium ſitus ſit, tectus in hac figura a parte ſuperiori transparente inteſtini (fig. 1. *d*). In figura 2 vbi embryo amnio ſpurio exutus, erectus eſt, auricula (*g.*) vna cum corde ſurſum ſe retraxit. Verum cum tamen thoracis primordium hac aetate adſit, quod auricu-

las

las anterius et lateraliter tegit, et ad eorundem marginem inferiorem in amnium verum reflectitur; hoc sufficit, vt aliquatenus cor thorace tectum esse hac aetate dici possit. In iunioribus autem embryonibus aliter comparatum est; quemadmodum in inferioribus patebit.

§. 124. Detectis autem visceribus ad modum fig. 3. in suprema et anteriori regione thoracis cor se offert, adeo situm, vt apice suo obtuso deorsum, basi sursum respiciat. In eo in hoc latere sinistro ventriculus sinister (*a.*) auricula sinistra (*c.*) et arcus aortae (*d.*) apparent. Ventriculi sinistri pars inferior dilatata et rotunda, superior (*b.*) versus auriculam angustior est, quam partem Perill. *Hallerus* primus, ni fallor, distinxit et canalem auricularem merito vocauit. Auricula sinistra, dextra maior, collapsa et corrugata tenuibus plicis fere circularibus apparet, et in media sui parte fere semper guttam sanguinis coagulatam, per tenuem auriculae membranam transparentem fouet. Aortae principium in hoc latere non apparet; emergit in latere dextro cordis; inde antrorsum adscendit et retrorsum porro curuatur, arcumque producit descendendo. Retro auriculam sinistram appendix quasi apparet (*e.*) vtriusque auriculae, ex qua vena caua descendit, quae collapsa plicas itidem producit varias. Vena caua se in hepar immergit, cuius lobus sinister (*f.*) in hoc latere apparet, angustus, ventriculo et duodeno in-

Tab. XIII. Viscera in latere sinistro. Fig. 3. Cor *a.b.c.d.*

Hepar (*f.*)

ſtinum medium accuratius, quomodo ſe habeat in huius aetatis embryonibus ad §. 126. et inteſtinum rectum ad §. 127. definietur; fouea autem cardiaca quod cauitas ſit ventriculi certo tempore in explicatione embryonis trium dierum ad §. 146. demonſtrabitur.

Scholium de ſitu cordis in huius aetatis embryonibus. Fig. 1. 2. 3.

§. 123. Caeterum inteſtinum hoc medium extra abdomen non modo ſed etiam extra amnium prominere totum, ſatis manifeſtum eſt et ex ſola conſideratione figurae patet. Quod cor autem attinet, non negauerim, hoc tectum eſſe in huius quidem aetatis embryonibus. Apparet interim in figura 1. vbi partes omnes in ſitu naturali, et embryo totus valde compreſſus per membranam bullae, qua includuntur, transparent, limbum abdominis, eundemque amnii veri limbum (C.) accurate tangere marginem inferiorem auriculae ſiniſtrae (*k.*). Quodſi ergo cor hoc tempore ita ſitum eſt vt ventriculo ſuo recta deorſum et potius paulum retrorſum (in figura 3 enim ſpina dorſalis extenſa eſt) ſpectet, neceſſe eſt, vt totus ventriculus cum canale auriculari (fig. 3. *a. b.*) extra thoracem, abdomen et amnium verum promineat, et in interſtitio illo (fig. 1. *m.*) inter amnium verum et ſpurium ſitus ſit, tectus in hac figura a parte ſuperiori transparente inteſtini (fig. 1. *d*). In figura 2 vbi embryo amnio ſpurio exutus, erectus eſt, auricula (*g.*) vna cum corde ſurſum ſe retraxit. Verum cum tamen thoracis primordium hac aetate adſit, quod auricu-

las

las anterius et lateraliter tegit, et ad eorundem marginem inferiorem in amnium verum reflectitur; hoc sufficit, vt aliquatenus cor thorace tectum esse hac aetate dici possit. In iunioribus autem embryonibus aliter comparatum est; quemadmodum in inferioribus patebit.

§. 124. Detectis autem visceribus ad modum fig. 3. in suprema et anteriori regione thoracis cor se offert, adeo situm, vt apice suo obtuso deorsum, basi sursum respiciat. In eo in hoc latere sinistro ventriculus sinister (*a.*) auricula sinistra (*c.*) et arcus aortae (*d.*) apparent. Ventriculi sinistri pars inferior dilatata et rotunda, superior (*b.*) versus auriculam angustior est, quam partem Perill. *Hallerus* primus, ni fallor, distinxit et canalem auricularem merito vocauit. Auricula sinistra, dextra maior, collapsa et corrugata tenuibus plicis fere circularibus apparet, et in media sui parte fere semper guttam sanguinis coagulatam, per tenuem auriculae membranam transparentem fouet. Aortae principium in hoc latere non apparet; emergit in latere dextro cordis; inde antrorsum adscendit et retrorsum porro curuatur, arcumque producit descendendo. Retro auriculam sinistram appendix quasi apparet (*e.*) vtriusque auriculae, ex qua vena caua descendit, quae collapsa plicas itidem producit varias. Vena caua se in hepar immergit, cuius lobus sinister (*f.*) in hoc latere apparet, angustus, ventriculo et duodeno incum-

Tab. XIII. Viscera in latere sinistro. Fig. 3. Cor *a. b. c. d.*

Hepar (*f.*)

Ren (*s. s.*) cumbens. Miram figuram renes habent, qui proxime ad ſpinam dorſalem vtrinque ſiti ſunt, eiusque ductum ſequuntur. Lineares fere ſunt et longiſſimi; incipiunt in regione thoracis retro pulmones et deſcendunt ad infimam inteſtini recti extremitatem vsque, cui vtrinque inſeruntur. Neque vretheres diſtinguuntur neque in parte ſuperiori vaſorum conglomeratorum quid ſimile obſeruatur, ſed toti reni vniformis, eaque aliena a ſolita, ſtructura eſt, lamellata ſcilicet, lamellis transuerſaliter poſitis diſtinctis et vere ſeparatis, quae praeſertim in anteriori ſuperficie diſtincte euolui poſſunt, in parte poſteriori vero quaſi funi cuidam affiguntur. Poſt diem ſeptimum denique et octauum ex his lamellis glomeres vaſorum complicatorum euadunt.

Ventriculus Fig. 3. I *i.* et Duodenum *i. l.*

§. 125. Inter renem et hepatis lobum ventriculus ſitus eſt, qui ex loco, connexione aliisque ſignis non agnoſci non poteſt (fig. 3. I. *i.*). Ille ex oeſophago ortus recta deſcendit in duodenum (*i. l*), quod retro membranae partem (*o.*) porro in inteſtinum medium (*m.*) tranſit. Adeoque hac aetate ventriculus ipſe non apertus, ſed integer iam eſt et quod (fig. 1.) adhuc ſupereſt foueae cardiacae veſtigium non immediate in ventriculum ſed in duodenum et inde in ventriculum ducit, huiusque igitur duodeni cauitas eſt. Tertio autem die finito, quo tempore fouea cardiaca in ſuo ſtatu perfectionis eſt, eadem ipſius ventriculi cauitas eſt, vti ad

§. 146.

§. 146. videbimus. Quae ſub ventriculo et duodeno ſequitur membranae pars (*o.*) ea eſt, in qua venae adſcendentis, idemque vitellariae vtriusque truncus haeret, qui ſi ſanguine depletus eſt, vti hic contigit, quaſi limbis vtrinque cinctus et tenuiori membrana factus eſſe videtur. Ad inteſtinum tamen pertinet, idemque ſupplet in hac facie laterali ſiniſtra.

§. 126. A duodeno (*l.*) inteſtinum medium incipit et deſcendit vsque ad rectum (*p.*). Hoc medium comprehendit in ſe rudimentum totius inteſtinorum tractus, qui in adulto corpore duodeno et principio recti, vbi caeca oriuntur, intereſt. Efficitur, quemadmodum §. 120. iam dixi, a membrana partium bullae lateralium, eaque eius parte, qua rima formatur, vtpote quae ipſa inteſtini medii cauitas eſt. Vidi in aliis ſubiectis, non totum inteſtinum intra rimam reconditum fuiſſe, ſed eius partem tantum poſteriorem, minorem; anteriorem, eamque maiorem partem reuolutam fuiſſe et contribuiſſe ad formandum limbum, qui exterius in bulla integra apparet (fig. 1. *e.*). Vidi inteſtinum eo vsque reuolutum, vt totum dicas inteſtinum medium inuerſum fuiſſe. Tum rima eo anguſtior eſt et minus profunda, et limbus eo latior. Quo autem rima profundior eſt, eo quoque limbus ſemper anguſtior, eoque pars minor de inteſtino reuoluta eſt, quod facile intelligitur. In ipſo quoque hoc ſubiecto aliqua omnino pars de inteſtino reuoluta eſt. Quantum

Inteſtinum medium quomodo in huius aetatis embryonibus comparatum ſit accuratius deſcribitur (*l.m.*M.*p.*)

tum enim limbus (fig. 1. *e.*) latior eſt limbo (fig. 3. *k.*), tantum illi de inteſtino acceſſit. Conſiſtit igitur inteſtinum medium totum in duabus laminis, in marginibus ſuis poſterioribus coniunctis et in meſenterium continuatis, marginibus autem anterioribus ſeparatis reuolutis et in bullae partes laterales continuatis.

Inteſtinum rectum quomodo ſit comparatum in embryonibus 4 dierum accuratius exponitur. Fig. 3. *p. q.*

§. 127. Inteſtinum rectum (fig. 3. *p. q.*) integrum eſt, infundibuliforme, vtrinque complanatum. Incipit ſuperius hiatu ſurſum oblique et antrorſum ſpectante; inde curuatum retrorſum deorſum in cylindricam partem verſus anum excurrit. Eius laterales partes planiores (*p.*) continuationes ſunt laminarum (M) ex quibus inteſtinum medium conſtat. Hiatus limbo cingitur, a limbo inteſtini medii deriuato. Pars anterior immediate ex ea membranae bullae parte continuatur, quae inuolucrum caudae conſtituit. Margo poſterior eſt continuatio ſuturae inteſtini medii, quae in hoc quidem inteſtino exterius in amnio ſpurio integro obſeruatur, in inteſtino recto vero apparet, dum anterior eius pars ſectione longitudinali aperitur, quod non difficile experimentum aliquoties inſtitui. Hiatus inteſtini recti in praeparato huius figurae patet, dum membrana (*k k.*) in ſitum naturalem reflectitur, et eſt ipſa foueola inferior (fig. 1. N.). Margo nempe hiatus limbo cinctus ora eſt foueolae; cauitas inteſtini recti pro eadem foueolae cauitate facillime et manifeſto recognoſcitur. Atque hic quoque idem, quod

quod de inteſtino medio notaui, obtinet; non totum inteſtinum rectum intra foueolam reconditum eſſe, ſed partem eius ſuperiorem (fig. 3. p.) quae prope oram eſt, reuolui in ſitu naturali vna cum membrana (k.) et contribuere multum ad augendum foueolae limbum (fig. 1. N.).

§. 128. In dextro latere remotis membranis et partibus thoracis abdominisque lateralibus vna cum ala et pede, viſcera huius conditionis in conſpectum veniunt. In ſuprema et anteriori thoracis regione cor apparet, eiusque quidem ventriculus ſiniſter maior, minor dexter, arcus aortae et auricula dextra. Ventriculus ſiniſter (a.) dextro longe maior, neque ideo tectus ab hoc, figurae globoſae eſt, cum in latere ſiniſtro ob canalem auricularem, in quem ille abit, oblongior eſſe videretur. In eius dextra ſuperficie paulo ſuperius ventriculus dexter ſub ſpecie protuberantiae ei adhaeret (b.) qui fere ſemigloboſam figuram habet, tamen verſus aortam paulo longior excurrit. Ex hoc aortae arcus (c.) adeo oriri videtur, vt non mirum ſit, ſi *Malpighius* hoc phaenomenon pro veritate accepit, quem *Malpighii* errorem Perill. *Hallerus* correxit. Retro arcum aortae auricula dextra ſita eſt. Haec vti ſiniſtra ſaepe ſanguine diſtenta, ſaepe tamen collapſa inuenitur, ſoletque figura eſſe fere rotunda et ſuperficie gaudere leuiter conuexa, margineque anteriori crenato incumbere ventriculo dextro et aortae. Pone hanc pulmo

Viſcera in latere dextro. Fig. 4.

Ventriculi cordis (a.b.)

Aorta (c.)

Auricula dextra (d.)

Pulmo (e.)

pulmo apparet (*e.*); corpusculum oblongum fere cylindricum. Tenerrima inter omnes partes substantia gaudent pulmones fere pellucida. Inferior pars mammillaris subtilissimae vesiculae instar primum in conspectum venire solet. Inter cor et pulmonem

Hepar (*f.f.*) sub ipsa auricula hepatis lobus dexter situs est (*f. f.*) oblongus curuatus superficie anteriori concaua, cui cor incumbit; a parte eius superiori vena caua recipitur.

Ren (*g. g.*) Ren (*g. g.*) consueta sua figura lineari iuxta spina dorsalem decurrit, in rectum intestinum inseritur.

Arteria vitellaria (*h. h.*) Sub ipso pulmone arteria vitellaria dextra prodit, descendit, in membrana bullae continuat. Vena vitellaria ex trunco venoso communi (fig. 3. *o.*) orta descendit similique modo in membrana continuat.

Lamina intestini medii dextra (Fig. 4. *i. i.*) §. 129. Lamina intestini medii dextra, ab extremitate inferiori duodeni (fig. 3. *l.*) orta, a primo hoc ortu in latere dextro apparet (*i.*) sub ipso lobo hepatis dextro (*f.*) inde aequali latitudine descendit. In hoc autem latere dextro nullo limbo anterius lamina intestinalis a reliqua membrana bullae separatur, distinguitur autem ab eadem vti et a posteriori membranae parte, quae mesenterium constituit, maiori aliqua crassitie et opacitate. Intestinum rectum nulla alia phaenomena offert in hoc latere, quam quae in latere sinistro iam obseruata sunt.

Embryo II dies incubatus. Fig. 5. Caput cor. §. 130. Consideratis hactenus intestinorum primordiis quomodo se habeant in embryonibus IV. dierum,

dierum; eadem primordia nunc repetenda sunt ex primis, quantum fieri potest, embryonibus, vt, vnde haec quoque, quae hactenus vidimus, primordia suum ortum duxerint, patescat. Primum in hunc finem inquiramus subiectum illud idem, quod in prioribus dissertationibus in figura 6. quoad externum habitum integrum et amnio spurio inclusum exposui; nam in iunioribus nihil aliud de intestinis intus deprehenditur, quam quod etiam in integra bulla sponte in conspectum venit. In hoc subiecto igitur bullam aperui, vaginam capitis a parte embryonis supracardiaca detraxi omnemque membranam bullae ad interiores sui limites prope limbum resecui, ipsamque, quae adest de amnio vero, partem supracardiacam remoui, vt nudus embryo remaneret. Tum iste apparuit ad modum figurae 5. In eo notari merentur syncipút (*a.*) ex lobis anterioribus cerebri compositum, permagnum; deinde occiput (*b.*) et pone illud medullae oblongatae tubercula (*c. d.*) quae partes sub specie quator vel quinque tuberculorum in vnam seriem dispositorum in primis embryonibus XXIV. horarum, qui plane erecti sunt et proni cubant, iam obseruari solent. Deinde cor singulari situ se offert, quod basi retrorsum et ea parte in qua apex post haec oritur, antrorsum recta respicit. In eo corde auricula sinistra (*b.*) massulam sanguinis coagulati in sua cauitate habet; figurae fere rotundae est; tenuissima membranula constat. Inde canalis auricularis (*i.*) breuis antrorsum et paulo sursum producitur, qui magis dilatatus in ventriculum sinistrum (k.) vnum nempe eundemque canalem continuatum abit, tum iste curvatur paulum deorsum, et maxime simul dextrorsum; iterumque ad locum (l.) retrorsum et sursum curvatur et nunc ab ipso termino (l.) aorta esse incipit.

Lamina abdominalis, primordium abdominis. Fig. 5.

§. 131. In parte embryonis infracardiaca lamina exterior (o. p. q. s. t. z.) rudimentum abdominis exhibet, quod autem magis multo distare a perfecto abdomine, quam illud in subiecto IV. dierum (fig. 2.), facile patet. Mera siquidem lamina est oblonga, angusta, leuiter concaua, neque cum sacco abdominis, qui largiori cauitate, angustiori orificio gaudet, vllam similitudinem habet. In subiecto quatuor dierum ambitus cauitatis, nisi maior ambitu aperturae, aequalis saltem erat eidem. In hoc embryone leuior concauitas laminae pro cauitate abdominis et peripheria laminae seu margo loco aperturae est. Haec caeterum peripheria limbo instructa est tenuissimo, qui limbo (fig. 2. i. i.) respondet. Partes vtrinque laterales laminae (u. u. v. v.) referunt laminas (fig. 2. H. H.) quae regionem abdominis lumbarem constituunt. De tota regione epigastrica, de vmbilicali, de toto hypogastrio, de ipsa pelui nihil adest. Probe enim notandum est, partes, quae in adulto corpore in postremis locis abdominis reconduntur, renes, laminas mesenterii, et mesorecti, in hoc embryone nudas eminere ante

oram

oram laminae abdominalis. Laminae scilicet interiores (*f. f. r. r.*) laminas mesenterii repraesentant, quae renes sibi exterius applicatos habent, adeo vt ren a lamina mesaraica distingui nequeat. Pars autem harum laminarum infima mesorectum exhibet. Quodsi igitur nihil est, quod mesorectum aut locum futuri intestini recti, neque coccygis rudimentum anterius tegit, peluim adesse dici non potest. Ex marginibus lateralibus laminae abdominalis, (*s. t.*) ex quibus in subiecto quatuor dierum (fig. 2.) nec minus in embryone trium dierum (fig. 6.) amnium verum continuatur, quod in praesenti subiecto II dierum in tota regione infracardiaca deficit, membranula continuatur tenuissima, quae se applicat ad membranam areae inferiorem, ex laminis (*f. f. r. r.*) continuatam, et tanquam huius membranae lamella superior seu exterior consideranda est.

§. 132. Partes laminae abdominalis laterales (*u. u. v. w.*) superius ad regionem (*p. q*) vbi lamina magis, quam in parte inferiori concaua est, angustiores euadunt et deuique in regione cardiaca ipsa plane euanescunt, adeo vt margines laminae abdominalis sursum in immediatos spinae dorsalis margines anteriores (*b. f.*) transeant, valde sibi propinquos, et faciem spinae anteriorem angustissimam inter se includentes; pars enim spinae dorsalis (*f. d. e.*) regionem eius thoracicam refert. Ex his marginibus spinae dorsalis anterioribus (*b. f.*) vtrinque mem- Quid loco thoracis fit? Thorax ipse deficit.

 brana

brana amnii veri oritur supracardiaci, quae, dum oritur, ilico retrorsum reflectitur circa spinam thoracicam, eiusque vaginam, ipsi spinae conformem, cylindricam, constituit. Membranae autem amnii veri superior pars, quae caput inuoluit, ex processibus (*g. f.*) oritur et actutum inde circa syncipur (*a.*) reflectitur et super occiput porro in partem amnii dorsalem continuat. Amnium hoc supracardiacum, angusta capitis et spinae dorsalis thoracicae vagina est, quae in dorso ad regionem cardiacam terminatur plica semilunari. Ex quibus nunc facile patet, nullas hoc tempore thoracis partes laterales, quae in adulto a costis efficiuntur neque partem eius anteriorem, quae a sterno formatur, generatim nullum thoracem adesse. Nimirum in foetu, propediem in lucem prodituro, amnium oritur ex apertura vmbilicali abdominis et continuatur ex cute, quae prius pectoris faciem anteriorem, deinde abdominis regionem epigastricam, et vmbilicalem denique, obduxerat. In quadrupedibus quidem cutis, ex apertura continuata, in longam prius funiculi vmbilicalis vaginam, attenuata, producitur, et tum demum in amnium abit. In auibus vero immediate ex apertura vmbilicali in amnium cutis reflectitur. In auibus igitur in ipsa apertura vmbilicali, vbi cutis in amnium reflectitur, finis abdominis simulque principium amnii ponendum est. Nunc in embryone IV. dierum (fig. 2.) iam vidimus, aperturam vmbilicalem maiorem esse quam in foetu;

tu; extendere ſe ſurſum ad regionem vsque circiter cardiacam. Ibi ergo immediate ex fine thoracis amnium oriebatur in parte ſuperiori; et regio de abdomine epigaſtrica nulla aderat. Lateraliter amnium oriebatur ex parte abdominis lumbari; pars iliaca et vmbilicalis ſimiliter deficiebant. In praeſenti denique embryone II. dierum apertura vmbilicalis iterum maior eſt; extendit ſe ſurſum ad regionem primae vertebrae dorſi vsque (fig. 5. *f.*) quae eadem ſimul regio maxillae inferioris (*g.*) eſt; (nam quae pro collo ſumatur, pars ſpinae dorſalis, non datur hactenus; circa diem octauum illa in collum elongatur). Atque in eodem hoc loco ad regionem primae vertebrae dorſi amnium quoque oritur immediate, et reflectitur, vbi ortum eſt, immediate circa ſyncipur embryonis. Lateraliter autem oritur vtrinque ex marginibus anterioribus ſpinae dorſalis et ſimiliter actutum reflectitur. Oritur ergo amnium in ipſis iis locis, vbi thorax oriri deberet; idemque in parte ſuperiori punctum (fig. 5. *f.*), prima ſcilicet vertebra dorſi et eadem linea lateraliter (*b f.*), latus vertebrarum dorſalium, quae in corpore adulto principium thoracis exhibent, in hoc embryone principium amnii veri, adeoque finem thoracis ſuppeditant, id eſt, vt paucis, quod res eſt, dicam verbis, thorax hactenus nullus adeſt; nam ſi quis diceret, thoracem tamen adeſſe, ſed inuiſibilem, ſed pellucidum &c. eum alias res agere, facile patet.

§. 133.

Et cor nudum est, nec, nisi extimo embryonis inuolucro tegitur.

§. 133. Cor, quod ad faciem anteriorem spinae dorsi thoracicae situm est, nullo thorace hactenus tectum esse hoc tempore, non opus est, vt moneam, siquidem thorax hoc tempore nullus adest. Sed neque amnio vero tegitur, nisi in postrema forte sui parte, adeo nempe, vt dimidia circiter posterior auriculae (*h.*) pars vtrinque ab oriente membranae amnii parte laterali tangatur, anterior vero eius dimidia pars, porro canalis auricularis (*i.*) totus, et totus ventriculus (*k.*) nec non aorta (*l.*) nudae promineant extra hoc amnium thoracicum. Hoc enim dum lateraliter ex marginibus anterioribus spinae (*h. f.*) oritur, vix antrorsum producitur, quin acutum reflectitur retrorsum ad formandam vaginam cylindricam circa spinam dorsi. Superius autem membrana amnii orta ex processibus (*g. f.*) multo minus cor tangit. Atque hoc valet de corde dum in systole est et contractum. Vbi vero idem in area viua, sanguine in ventriculum impulso, distenditur, saltim ad alteram tantam, quam nunc in hac figura habet, longitudinem antrorsum sagittae instar prosilit. Sic igitur cor nullo thorace, nullo amnio vero, sed solo spurio, et quidem ea eius parte, quam vaginam capitis dixi, immediate tegitur. Ita ergo omnino mirum est, cor non modo intra embryonem non existere, sed neque eius proximo inuolucro, amnio vero contineri, sed solo exteriori demum inuolucro, amnio spurio nempe, includi. Quod quidem eo magis notan-

notandum mihi fuit, cum Perill. *Hallerus*, princeps harum inquisitionum Autor, cor omni tempore a thorace tectum esse, adfirmauerit (Phys. Tom. VIII. pag. 364.).

§. 134. Si haec lamina abdominalis (§. 131.), rudimentum sacci abdominis in embryone duorum dierum, cum abdomine in embryone IV. dierum, et cum adulto sacco abdominis, comparatur; facile apparet, quomodo successiue eiusmodi perfectum abdomen formetur. In primis, qui obseruati sunt, embryonibus lamina abdominalis plana est, caeterum longa et angusta. Inde incipit marginibus suis lateralibus adeo antrorsum curuari, vt lamina fiat concaua, qualem in praesenti subiecto habemus. Denique margines contrahuntur magis magisque et parietes contra increscunt. Sic species sacci nunc primum oritur, orificio in parte anteriori magno instructi; quae fere conditio est in embryone (fig. 2.). Denique auctis magis continuo sacci, aut conuolutae laminae, lateribus, marginibusque continuo magis constrictis, tandemque concretis, perfectum inde et clausum abdomen euadit. Schol. de formatione abdominis.

§. 135. Thoracem autem oriri, manifestum est, dum membrana quam ex marginibus vtrinque spinae dorsalis thoracicae (*h. f.*) et superius ex processibus (*g. f.*) continuari, et ad amnium verum pertinere dixi, incipit adeo prolongari, vt a processibus (*g. f.*) versus cor descendat, a marginibus Scholium de formatione thoracis.

vero (*h. f.*) antrorsum versus idem producatur, prius quam sursum super caput et retrorsum super spinam dorsalem reflectitur. Tum ea membranae pars, quae a processibus et marginibus versus cor producitur, quaeque interior est, ad thoracem pertinet, eiusque primum rudimentum refert; illa vero, quae post reflexionem sursum et retrorsum continuat, quaeque exterior est, ad amnium pertinet et ipsa membranae reflexione superior thoracica pars aperturae vmbilicalis efficitur. Quo igitur longius membrana, prius quam reflectitur, deorsum et antrorsum producitur, eo maior de thorace pars adest. In praesenti embryone a primo ortu immediate reflectitur; ideoque nullus thorax adest, et tota membrana ad amnium pertinet. In embryone trium dierum (fig. 6.) ad notabilem iam longitudinem illa descendit tum in parte anteriori (fig. 6. *m.*) quae sterni primordium refert, tum etiam in parte laterali (fig. 6. *n.*) cuius aliquam in hac figura partem resecui, vt auricula cordis detegatur. Sic successiue descendit haec membrana per regionem thoracis, per epigastricam regionem ad regionem vmbilicalem vsque, et formatur ea ratione paullatim thorax, regio abdominis epigastrica et vmbilicalis. Videtur autem constrictio embryonis et capitis depressio aliquid ad hunc descensum membranae et formationem thoracis contribuere. Semper enim superior membranae pars, quae ex processibus (fig. 5. g. f.) continuatur, syncipat (*a.*), circa quod illa

adscen-

adscendit, tangit. Dum igitur embryo constringitur, et caput deprimitur, necesse est, vt membrana simul deprimatur. Tamen non vnicam, neque praecipuam causam esse, quin, etiamsi caput erectum teneretur, tamen thoracem forte productum iri, facile largior. Siquidem mechanicis eiusmodi causis parum tribuo in formandis corporibus organicis, quae viribus potius, materiae inditis, mea quidem sententia debentur.

Aperturae amnii spurii die II. exterius apparentis explicatio. Primordium mesenterii ex duabus laminis distantibus constans.

§. 136. In anteriori laminae abdominalis facie concaua similis fere continetur lamina angustior et magis conuoluta (*f. f. r. r.*) cuius in descriptione aperturae amnii spurii (§. 100.) sub nomine fistulae intestinalis mentionem iam feci. Ea vero non intestini primitiui ipsius sed mesenterii primordium est, huiusque duas laminas, a se inuicem adhuc dum separatas, et late patentes, exhibet, adeo vt inter vtrasque has lamellas, quae fistulae parietes constituunt, nuda spinae dorsalis facies anterior appareat, fundumque fistulae huius seu laminae concauae efficiat. Vti igitur fouea cardiaca suo tempore, die scilicet tertio finito, ventriculum; vti rima post diem tertium intestinum medium; vti denique foveola inferior die tertio finito intestinum rectum refert; ita apertura amnii spurii seu fistula intestinalis mesenterii primordium exhibet. Margines conuolutae huius laminae anteriores limbi illi sunt (Diss. prior. fig. 60. *n. n. m. m.*) interiores seu intestinales, qui, dum successiue constringuntur, futuram

 effi-

efficiunt (Tab. prior. Diss. fig. 7. *l.*). Hinc ergo patet, suturam proprie esse marginem posteriorem intestini medii, seu coniunctionem posteriorem laminarum intestinalium (fig. 3. *m.* M.) vbi hae laminae coniunctae incipiunt mesenterium constituere. Dum igitur sutura formatur, partes huius laminae laterales vniuntur, et mesenterium hac ratione oritur, simulque intestinum medium formari incipit. Illud ergo simili fere modo, vt intestinum, fit, dum duae laminae, quae separatae prius fuerunt, coniunguntur et concrescunt. Et patet igitur, si ad formationem intestinorum respicimus, ea non modo laminas fuisse meras planas certo tempore die scilicet quarto, quae marginibus anterioribus separatis reuolutisque pateant, solisque posterioribus in mesenterii laminas continuatis, cohaereant, sed adeo fuisse repraesentata, prius quam ad hunc statum perveniunt, scilicet secundo die finito, per laminas, quae neque marginibus posterioribus cohaerent, sed a primo principio separatae sunt et late a se inuicem distant. Hoc modo de his laminis mesenterii separatis notandum est, eas adhuedum renes sibi exterius adiectos vtrinque habere, adeo vt laminae (*s. s. r. r.*) renum aeque ac mesenterii primordia referant.

Quid loco intestini medii hoc tempore sit. Nullum eius

§. 137. Quid nunc de intestini medii, primordio hoc tempore sentiendum sit, facile patet. Cum margo fistulae apertae margo intestinalis mesenterii sit, et intestinum igitur in parte membranae

nae exteriori quaerendum ſit; ea membrana vero ab ipſo margine fiſtulae immediate extrorſum reflectatur, adeoque bullam conſtituere incipiat et ab eo termino igitur ad bullam ipſam pertineat; nullus locus et nulla particula in hac membrana ſupereſt, quae pro inteſtini primordio haberi poſſit; conſequenter nullum hoc tempore inteſtini primordium adeſt. In embryone IV. dierum (fig. 3) inteſtinum pars quidem eſt membranae bullae, ſed diſtincta tamen a reliqua bullae membranaa aliqua opacitate, cum reliqua membrana tenuior et pellucidior ſit. In hoc autem embryone nullum non modo ſignum datur, quo interior huius membranae pars, quae inteſtinum referat, ab exteriori diſtinguatur, quae ad bullam pertinet; ſed neque locus datur, vbi inteſtinum exiſtere dici poſſit, neque particula in membrana eſt, quam ad laminam inteſtini referre, vel pro ea ſumere liceret. Eſtque accurate cum inteſtino medio, veluti cum thorace hoc tempore comparatum. Producitur autem lamina inteſtinalis, quemadmodum de thorace dictum fuit, dum membrana bullae proxime ad terminum laminae meſaraicae per nutritionem augetur, et ſic noua membranae pars inter laminam meſenterii et eam membranae partem, quae ad bullam pertinet, producitur. Hoc vero poſt diem tertium denique fit, quando laminae meſenterii iam vnitae ſunt. Diſtinguendum igitur eſſe, videmus, inter productionem et formationem inteſtini medii. In embryone quatuor

rudimentum hactenus adeſt.

tuor dierum vidimus illud inteſtinum nondum formatum eſſe. Erant enim loco inteſtini duae laminae marginibus poſterioribus cohaerentes, anterioribus autem patentes et reuolutae. Dum poſthaec hae laminae etiam anterius coniunguntur; inteſtinum ex his laminis formatur. Hactenus ergo nondum formatum eſt in embryone IV. dierum. Sed laminae tamen adſunt, ex quibus formatur. In praeſenti embryone II. dierum iſtae laminae nondum adſunt. Ergo prius laminae producuntur; deinde ex iis inteſtinum formatur.

Primordii ventriculi conditio. (Fig. 5. *n*.)

§. 138. Ventriculum non ſatis diſtincte vidi quidem in hoc embryone; aliquid tamen reperi membranae (*n*) quod eius locum occupabat, ſed ita non erat comparatum, vt pro eiusmodi ventriculo, qualem in embryonibus, aetate ſuperioribus inueni, haberi potuiſſet. Figura conſueta deerat. Erat autem (*n*) membranula ſimplex transuerſa, ex ſuperiori laminarum meſenterii parte continuata. Sicuti laminae meſenterii in partes bullae laterales, ita haec membranula in vaginam capitis producebatur, quemadmodum hoc ipſum in externa bullae facie (Tab. Diſſ. prior. fig. 6.) apparet. Haec itaque cum primordii ventriculi ſit conditio, pro vero quoque primordio eius hanc membranulam agnoſco, ſed tamen diuerſo ab illis (fig. 3 et 6.) et gradu perfectionis inferiori ideo, quod ſolita figura externa conoidea non gaudebat.

§. 139.

§. 139. Euidentius autem inteſtini recti primordium, quomodo comparatum ſit hac aetate, conſtat. Laminae meſaraicae, quae ſuperius latiores ſunt, deorſum continuo anguſtiores euadunt, donec in regione (y.) praeter limbum nihil adſit. Hic ſolus limbus ergo ad finem vsque extremitatis medullae vtrinque decurrit, ibique ex vtroque latere coniungitur (z) extremitatemque globoſam ſpinae dorſalis (y.) cingit. Haec inferior itaque limborum coniunctio (z.) primordium inteſtini recti eſt. Ex comparatione enim non modo cum embryone ſequenti (fig. 6.) vbi huius inteſtini primordium infundibili forme iam eſt, ſed etiam ex connexione partium facile patet, hanc limborum coniunctionem eſſe marginem illius inteſtini, quale (fig. 6) exiſtit, ſuperiorem, ſeu oram, qua id terminatur, et quae ſimul limbum foueolae inferioris in bulla efficit, quae quidem non meſorectum ſed ipſum inteſtini primordium eſt.

Quid loco primordii inteſtini recti adſit. Sola limborum interiorum coniunctio. (Fig. 5. z.)

§. 140. Inteſtinum rectum igitur primam ſuam originem inuolucro caudae debet et inde formandae foueolae inferiori; quemadmodum thoracem vidimus pendere a parte ſuperiori amnii veri, qua vagina circa caput formatur; vtrique enim ſimilem eſſe rationem facile patet. Dum membrana areae inferior circa extremitatem embryonis inferiorem in ſpeciem bullae eleuatur, quae inuolucrum caudae conſtituit, huius bullae margo ſuperior ipſa haec

De formatione inteſtini recti Scholium.

haec pars limbi est, vel coniunctio limborum, quam pro recti primordio agnoscimus. Margo nempe ille superior inuolucri efficitur, dum membrana ad hunc locum reflectitur et rugam producit, cuius lamina interior adscendens intestini recti primordium est, exterior descendens ad inuolucrum pertinet. Simili modo vidimus thoracem fieri, dum membrana a processibus (*g. f.*) descendens primordium thoracis, saltem aetate paullulo superiori, eademque reflexa adscendens amnium verum referret, eaque ratione similem rugam produceret. Deinde tota haec ruga dum per nutritionem pars interior aeque ac exterior elongatur, magis magisque adscendit ad regionem pubis vsque; sic lamina interior, quae intestini recti paries anterior est, perficitur; simulque eiusdem parietes laterales et posterior crescunt et intestinum infundibuliforme oritur.

De formatione pelvis Schol. §. 141. Hinc peluis ortus intelligitur, cui omnino iterum eadem intestini recti et thoracis conditio est. Quemadmodum intestinum continuatio inuolucri caudae est, et cum eo inuolucro rugam producit, ita peluis primordium, vti thorax, amnii veri continuatio est, et similem rugam cum eo constituit, quae inter vtrasque laminas rugae intestini recti continetur, simulque cum hac ruga crescit et adscendit in solitam foueolae inferioris altitudinem. In hoc quidem embryone peluis nondum obseruatur, sed in adultioribus eius primordium sub

similis

ſimilis limborum abdominalium coniunctionis ſpecie primum apparet; qui limbus marginem oſſium pubis tum in ſpecie refert. Iſte ſenſim eleuatur et in eam denique formam abit, quam in figura ſequenti conſiderabimus.

Scholium de Analogia inter truncum embryonis in ſtatu primordiali et tubum cibarium.

§. 142. Generatim, quemadmodum in Diſſertatione praecedenti, analogiam eſſe vidimus in ſtatu embryonis primordiali inter totum truncum, tubum cibarium, ſyſtema nerueum areolamque pellucidam; ſingularem magis ſimilitudinem obtinere facile patet, inter truncum embryonis in ſpecie et tubum cibarium. Thoraci quippe ventriculus, abdomini inteſtinum medium, peluique inteſtinum rectum reſpondet. Tubus cibarius in amnium ſpurium continuatur, eiusque principium eſt, adeo vt ex ventriculo in ſpecie vagina capitis, ex inteſtino medio partes bullae laterales, et inuolucrum caudae ex inteſtino recto propagentur. Similis conditio trunco eſt reſpectu amnii veri, in quo easdem facile, quas in ſpurio notaui, partes diſtinguas, vaginam capitis, partes laterales, et inuolucrum caudae. Simili igitur modo analogae trunci partes in analogas partes amnii veri continuantur, iisque principia ſuppeditant. Ex thorace, vel in iuniori embryone ex radice thoracis vagina capitis in amnio vero oritur. Ex faſciis abdominalibus, quae regionem lumbarem referunt, partes laterales amnii veri, ex pelui inuolucrum caudae in amnio vero producitur. Porro autem vidimus (§. 135.) in exemplo thoracis et et in peluis exemplo, ita esse cum harum partium trunci formatione comparatum, vt prius existat amnium verum, quod in ipsis iis locis, ad spinam nempe dorsalem immediate, oritur, in quibus partes illae trunci, si adessent, oriri deberent. Tum ipsum harum partium amnii veri principium ad spinam dorsalem prolongatur, et hac ratione partibus trunci, veluti thoraci, pelui, formandis ansa praebetur. Eandem vero conditionem respectu formationis vidimus quoque in intestino medio (§. 137.) cuius locum in embryone duorum dierum (vbi amnium verum quoque thoracis locum occupat,) partes bullae laterales occupabant, adeo vt hae immediate ex marginibus anterioribus laminarum mesaraicarum orirentur, vbi laminae intestini medii oriri debuissent. Similem quoque in intestino recto conditionem vidimus (§. 139.). In ventriculo (§. 138.) non ita distincte quidem vidi, sed nullum dubium est, simili quoque modo cum hoc esse comparatum. Denique abdomen in primo initio lamina explanata est, quae sensim conuoluitur, marginibusque constrictis et lateribus auctis in saccum mutatur, tandemque clauditur (§. 134.). Idem de intestino medio valet. Imo de toto trunco affirmare licet, eum fuisse laminam planam, quae margine superiori deorsum voluto thoracem, margine inferiori sursum curuato peluim, et marginibus lateralibus ad se inuicem antrorsum conniuentibus abdomen producat. Atque idem omnino de tubo cibario valet.

let. Neque negligendum eſt, ſicuti caput embryonis depreſſum formationem thoracis adiuuat (§. 135.), ita ſimili modo, conſtricto rurſum per thoracem corde, et deorſum compreſſo, adiuuari formationem ventriculi; cui formando vagina capitis ſimili modo, ac amnium verum thoraci, anſam praebet.

§. 143. Dum lamina abdominalis, conuoluta, marginibus conſtrictis, tandemque concretis in ſaccum vltimum abit clauſum, et eam formam perpetuo retinet; lamina vero inteſtinalis conuoluta cylindricum tubum apertum prius, deinde marginibus conſtrictis clauſum efficit, et denique, formam tubi retinendo, in longiſſimum canalem extenditur, multifariam curuatum et complicatum: an diuerſi huius euentus phaenomenorum, in ſtatu primordiali ſimilium, cauſa, vel aliquid cauſae in eo conſiſtit, vt abdomen inteſtinum continens, ab eo dilatetur in latum ſaccum? inteſtinum vero in abdomine contentum, non dilatatum retineat ideo tubi ſpeciem, et cogatur, dum in minori ſpatio comprimitur, in plexus ſe complicare? Non multum me credere his explicationibus mechanicis, ſuperius iam dixi. Thoracem, abdomen, peluim, ventriculum, inteſtina, formari, non perpetuo adfuiſſe, id vidimus. Qua ratione formentur, id vidimus quoque; cauſas efficientes non vidimus, neque de iis ſermo mihi eſt in his diſſertationibus. Scholion. De cauſa differentiae inter abdomen et tubum cibarium in adulto.

Renum primordia (*f. f. r. r.*) §. 144. Denique renes quoque laminis mesenterii adhaerere, iam monui, quibus igitur non solum mesenterii, sed renum quoque primordium repraesentatur, adeo, vt interior superficies laminas mesenterii, exterior renes exhibeat. Non quidem separaui has partes a se inuicem, vt vtraque haec primordia distincta viderim; sed multa tamen sunt, quae de vera existentia renum, his laminis applicatorum, dubitare non sinunt.

Phaenomena interna in embryone III. dies incubato. fig. 6. Caput (*a. b. c.*) § 145. Ad subiectum denique transeo, cuius in prioribus dissertationibus externa inuolucra exposui, vltimum, quod in figura septima ibidem delineaueram, quod nonnisi duos dies duodecimque horas incubatum quidem fuit, sed subiecto tres dies incubato facile tamen aequale erat. Inuolucris itaque omnibus exutis, praeterea laminis abdominalibus lateralibus, inferiorique parte laterum thoracis remotis partes interiores secundum fig 6. in latere sinistro hoc modo in conspectum veniunt. Caput, quod eleuaui, vt cor et ventriculus distincte videri possint, adeo erat positum, vt occiput (*b.*) antrorsum, synciput (*a.*) versus cor prospiceret. Cor *o. p. q.* In anteriori parte thoracis cor, vt solet, comparet, adeo situm, vt ventriculo suo, qui die secundo (fig. 5.) antrorsum directus erat, oblique deorsum nunc prospiciat, quemadmodum die quarto finito idem ventriculus recta deorsum et potius retrorsum paulisper spectat (fig. 3). Egregie hanc situs cordis mutatiotationem intelligere licet ex incremento thoracis (§. 135.) explicato. Cum die secundo nullus adsit thorax, qui possit cor continere et comprimere, ventriculus sanguine dilatatus recta antrorsum prosilit, eundemque situm in statu, vbi neque agit, neque patitur, inter systolen et diastolen medio, conseruat (fig. 5.). Tertio autem die finito dum thorax in parte superiori formari incipit, cor ex priori situ deorsum paullatim premitur; denique die quarto, vbi thorax magis increuit illud magis quoque versus corpus embryonis coercetur. Ex solis his phaenomenis, nisi loco thoracis amnium verum a spina dorsali oriri et sursum abire vidissem die secundo, colligeret forte, nullum thoracem existere, Perillustris Vir, qui cor nudum esse negat. Auricula sinistra (*o.*) massulam sanguinis fouet, vt solet, coagulati, tenuisque vesiculae instar transparens est, et figuram globosam habet. Inde paulo angustior canalis auricularis (*p.*) oblique antrorsum descendit et in protuberantem ventriculum sinistrum (*q.*) dilatatur, ex quo canalis cordis in dextrum latus curuatur ibique in arcum aortae adscendit. Retro cor hepatis lobus sinister apparet oblongus, tenuis, deorsum in membranam (*r.*) continuatus et retro hunc lobum hepatis ventriculus (*s.*). Hepar.

§. 146. Iste nunc iam ea figura et habitu gaudet, quo satis manifesto cognosci possit, figura nempe oblonga, fere conoidea, extremitate superiori angu- Ventriculus cuius cauitatem foueam cardiacam esse in hoc embryone ostenditur.

angustiori, ex oesophago continuata, quae rudimentis pulmonum tegitur. Inde paulo antrorsum curvatus descendit et apertura inferiori denique terminatur. Haec apertura ventriculi (*v*), quae eadem fouea cardiaca est, tenero limbo cingitur, qui deorsum in limbum intestini continuat, et sicuti in facie externa bullae vena adscendens recta in foueam cardiacam intrare obseruatur, ita in hac quoque superficie interna haec vena egregie apparet (*t.*), sanguine distenta, quae adeo in ventriculi cauitatem recta intrat, vt totam hanc cauitatem occupet, et ventriculus sanguine venae turgere, eique quasi externum inuolucrum seu vaginam praebere videatur. Tamen proprie non in cauitatem ventriculi, sed potius in eius membranam transire dicenda est haec vena, licet totam cauitatem fere occupet. Ventriculus enim continuatio est membranae bullae; iam vero hactenus in ea membrana intraque eius substantiam, quasi inter duas laminas vena processit; ergo in ventriculo quoque in ipsa eius membrana procedere pergit. Videtur autem in cauitatem introire, quia vena sanguine turget et super parietem internum ventriculi tantum eminet vt parua ventriculi cauitas ea occupetur. In aliis subiectis, vbi vena sanguine minus distenta fuit, vena quoque minus cauitatem ventriculi tenere visa est. Caeterum, foueam cardiacam esse cauitatem ventriculi in hoc embryone, ex sola consideratione huius figurae eiusque comparatione cum (fig. 7. Diss. praec.) patet.

tet. Vidimus exterius in amnio ſpurio integro (fig. cit.) venam adſcendentem in foueam cardiacam intrare et ſe abſcondere. In membranae ſuperficie interna (fig. 6.) recognoſcimus eandem venam in eodem loco, vbi exterius in foueam cardiacam intrabat, in ventriculum intrare. Orificium igitur foueae cardiacae orificium ventriculi, illius cauitas huius cauitas fuit. In ſubiecto illo IV. dierum (fig. 3.) quod aptum quidem erat ad demonſtrandum primordium inteſtini medii, eiusque ortum, non adeo euidenter conditio ventriculi apparebat, qui hoc tempore cum parte inteſtini duodeni integer iam eſt et perfectus. Rima nimis iam conſtricta et orificium foueae cardiacae a ventriculo remotum eſt; adeoque fouea cardiaca ad ventriculi cauitatem ducit quidem in illo IV. dierum embryone, non autem ad ipſum ventriculum pertinet, ſed ad duodenum potius. In hoc autem III. dierum embryone fouea cardiaca ab ipſo ventriculo efficitur.

§. 147. Retro ventriculum meſenterium incipit et deorſum inter limbum inteſtinalem et renem ad inteſtinum rectum vsque continuat (*y.*). Hoc nunc idem eſt, quod (fig. 5.) laminis, ex quibus conſtat, ſaparatis a ſe inuicem et patentibus fiſtulae apertae ſpeciem prae ſe ferebat, et cuius laminae anguſtiores renibus tegebantur, quod nunc laminis extenſis et vnitis membranam vnam refert. Ad limbum ſcilicet inteſtinalem (*w.*) vsque laminae cohaerent, et

Meſenterium nunc formatum integrum (fig. 6. *y.*)

et idem locus futurum arcum minorem inteſtini, vel marginem poſteriorem laminarum inteſtinalium refert; cum ipſo vero limbo illae laminae incipiunt ſeparari et in bullam reflecti. Caeterum arteria (B) inter renem et meſenterium prodit et in membrana bullae porro continuat.

Laminae inteſtini medii, vix inchoatae. (*v. w. z.*)

§. 148. De inteſtino medio nihil praeter limbum (*w*) adeſt, qui adeo tenuis et debilis quidem eſt, vt vix diſtinguntur. Incipit a limbo aperturae ventriculi, continuat deorſum et in inteſtinum rectum abit. Hic ergo ſola membranae pars eſt, quae ad inteſtinum pertinet, eiusque primordium refert. Quicquid retro hunc limbum eſt ad meſenterium, quicquid ante eundem eſt ad membranam bullae pertinet. Laminae enim a ſpina dorſali vsque ad limbum connexae ſunt et meſenterium igitur referunt. Limbum autem marginem anteriorem eſſe laminae inteſtinalis patet ex comparatione figurae tertiae, et quae anterius ſequitur membrana (*x.*) manifeſto eadem eſt (fig. 3. *n.*). Pro lamina igitur inteſtinali nihil reſtat praeter ipſum limbum. Caeterum limbum hunc eundem eſſe qui (Diſſ. praec. fig. 7. *n.*) exterius apparebat et futuram igitur marginem poſteriorem eſſe inteſtini medii, quilibet facile videt, adeo, vt de laminis inteſtini medii hoc etiam tempore nihil adſit praeter marginem eorum poſtremum, quo illae coniunctae meſenterium conſtituere incipiunt.

§. 149.

Inteſtinum rectum eiusque formatio (z. l.)

§. 149. Inteſtinum rectum in latere hoc ſiniſtro infundibuliforme (z. l.) apparet, apice oblique deorſum retrorſum, hiatu ſurſum antrorſum poſito. Ille in anum abit; hic aperturam et foueolam inferiorem conſtituit. Dum enim membrana (x.) reflectitur; in eo loco, vbi nunc inteſtinum eſt (z. l.) foueola apparet, adeo vt foueola ſit inteſtini recti cauitas. Ex comparatione autem huius cum priori figura apparet, quomodo inteſtinum rectum increſcat. Dum ſutura formatur, laminae meſenterii a renibus vtrinque ſoluuntur, vniuntur et conſtituunt meſenterium. Interim limbus ille inuolucri caudae et rudimentum inteſtini recti (fig. 5. z.) dum nutritur et increſcit, adſcendit, et euadit ex ſimplici ruga paries inteſtini anterior; ſic tubus hic infundibuliformis oritur.

Peluis (l. i.) eiusque formatio.

§. 150. Similis inteſtini recti conditio pelui (l. i.) eſt. Hic priori tempore ſimiliter ſub plicae ſpecie, exterius circa plicam inteſtinalem (fig. 5. z.) poſitae, apparet et coniunctio inferior limborum abdominalium eſt, marginemque pubis refert. Tum ſimili modo iſte margo nutritione auctus adſcendere, globoſamque extremitatem ſpinae dorſalis, quam haſtenus cingebat (fig. 5. y.) inuoluere incipit (fig. 6. k.). Deinde porro vsque in regionem foueolae inferioris adſcendit (fig. 6. i.). Sic paries anterior peluis, ſimulque craſſum inuolucrum producitur, quo inteſtinum rectum, interea formatum, aeque ac finis globoſus (k.) includitur, quodque peluim conſtituit.

stituit. Hoc peluis primordium in media parte constringitur ibique regionem perinaei efficit. Inferius eadem, adhuc spinae dorsalis extremitas globosa sed inuoluta carne peluis apparet (k) et primordium uropygii constituit, soletque cauda vel apex caudae uocari. Superius idem adhuc (fig. 5. z.) mar.io sed crassior ex quo amnium verum deriuatur, et qui regionem pubis nunc refert, apparet (fig. 6. l. i.).

Renes (A). §. 151. Renes sub solita figura laminarum angustarum longitudinalium apparent (A.) soluti autem sunt a laminis mesenterii, quibus hactenus adhaerebant.

De pedibus et alis. §. 152. De pedibus et alis quaedam adhuc addam. Apparere eas primum sub tuberculorum figura in theoria generationis dixeram. Videmus haec tubercula in embryone IV. dierum (fig. 2) per amnium verum transparentia. Ala (fig. 2. f.) superficie externa conuexa glabra gaudet. Superficies interior, quae ad thoracem applicata est, plana est, glabra, inaequalis, impressionibus, eminentiisque instructa. Ad marginem posteriorem, quae pars crassissima totius tuberculi est, qua idem corpori adhaeret, superius inferiusque productiones carneae excurrunt, quibus similiter ala corpori adfigitur. In pede similes sunt superficies; margo vero qui in hoc situ inferior esse videtur, embryone extenso, posterior est, quo pes corpori adhaeret, ex quo similes quoque productiones excurrunt. Margo anterior,

rior, in hoc situ superior, acutus est. Sic quarto die finito haec rudimenta se habent. In praesenti embryone aliter comparata sunt, vti ex solo pede (fig. 6. *h*.) patet. Totum abdomen hoc tempore apertum est et limbo crassiusculo terminatur. In ipso hoc limbo ad solita loca superius alarum, inferius pedum tubercula propullulare incipiunt vtrinque. In embryonibus (Diss. praec. fig. 5 et 6.) nulla prorsus in limbis tubercula distinguebantur. In illo quidem (fig. cit. 5.) lamina abdominalis a lamina intestinali nondum plane separata erat; limbi tamen in regione alarum separari incipiebant. In hoc (fig. cit. 6.) limbi abdominis toti separati sunt, sed nulla vestigia tuberculorum in iis deprehenduntur. Quando haec primum apparent, vix a limbo ipso distinguuntur et merae eius incrassationes sunt, quae pedum et alarum prima rudimenta referunt. Postea vero, dum ex labio interiori limborum lamina abdominalis antrorsum prolongatur, tuberculum in superficie exteriori abdominis existere incipit, quod hactenus in ipso margine eius seu limbo collocatum erat. Interim continuo figuram meri tuberculi, qualem in praesenti quoque subiecto (fig. 6. *h*) habent, conseruant; denique die quarto fere finito eam singularem formam induunt, (fig. 2.) quam descripsi.

§. 153. Dixeram in libro, germanico sermone scripto, de generatione (§. 70.), quo tempore prima *Scholion. De primis rudimentis digitorum.*

prima rudimenta digitorum nondum videram, fore, vt haec, si deprehenderentur, simili tuberculorum sub specie in conspectum venirent. Saepe post haec embryones eius aetatis offendi, vbi prima digitorum initia videre licuit. Recte quidem tubercula dixi esse. Nam vidi vbi vix eminebant; vidi vbi successiue magis protuberabant, accurate rotunda in ambitu suo. Eatenus vero erraui, quod credidi, ex margine anteriori acuto ipso fore vt prodeant, quae potius in superficie interiori prodeunt prope marginem anteriorem, et repraesentant in specie extremos apices digitorum. Retro haec tubercula rotunda longitudinales totidem eminentiae in hac interiori superficie apparent, ex anterioribus rotundis versus marginem pedis posteriorem deriuatae, quae digitorum phalanges referunt. Vix eminent in superficie interiori, quae inferior pedis futura est, et marginem anteriorem non attingunt; successiue autem elongantur, vt ante marginem prominere incipiant, tandemque in digitos excrescunt. Margo vero ille pedis anterior acutus; in plicam paruam cutaneam abit, quae in adultiori pede supremam articulationem digitorum tegit partimque in eam, quae digitis intermedia est. Facile patet, in auibus aquaticis fore, vt idem margo in illam similem sed longe maiorem plicam interdigitalem natatoriam abeat, quae his animalibus propria est.

§. 154.

§. 154. Ex hoc statu embryo in illum, quem sub initio huius dissertationis descripsi, (fig. 2. 3.) solo partium incremento transit. Pars membranae, quae oram foueae cardiacae eandemque ventriculi efficit, increscit. Sic orificium descendit, ventriculo permanente in suo loco; oritur ergo hac ratione pars duodeni. Limbus intestini medii, contiguus in hoc embryone margini mesenterii, per incrementum membranae ab eodem antrorsum remouetur; oritur ergo inter limbum et marginem mesenterii pars membranae noua, quae laminam intestini medii constituit. Denique, dum intestinum rectum crescit, eius orificium adscendit, adeo, vt totum intestinorum orificium, fouea nempe cardiaca, rima et foueola contrahantur magis magisque, et ventriculus contra et intestina interius increscant. Sic status (fig. 2. 3.) oritur. Idem hoc negotium nunc porro continuatur. Fouea cardiaca exterius et rima magis constringuntur, adeo, vt denique ad paruum orificium redeat haec intestinorum apertura; sicuti in prioribus dissertationibus iam dixi; quo ipso effici, facile patet, vt totum intestinum medium denique in integrum tubum transmutetur, relicto tantummodo paruo foraminulo in parte eius media anteriori, ex quo membrana areae inferior, seu interior vitelli tunica, continuatur. Pars huius tunicae, quae angustum illud orificium constituit, ipsa denique elongatur et in ductum abit breuem, qui ductus communicatorius est inter saccum vitelli et

Quomodo intestina ex hoc statu, quo II. die gaudeat in illum transeant in quo sunt die IV. Qua ratione porro perficiantur.

intestina. Interim, dum haec exterius aguntur, dum intestinum clauditur, hoc quoad longitudinem, figuram et situm interius simul mutatur. Ventriculus, hactenus perpendiculariter situs, vt cardia sursum, pylorus deorsum spectet, in situm transversalem transit. Duodenum (fig. 8. *i. l.*) in arcum incipit intumescere, anterius versum, qui intestini arcus superior et minor eo tempore est. Tota media et inferior intestini portio (*m.* M.) secundum maiorem arcum producit, antrorsum spectantem, sed adeo situm, vt superior eius pars, a portione (*m.*) formata in latere embryonis dextro in conspectum veniat, in sinistro se fere subducat; inferior autem arcus pars, a portione (M.) producta magis in sinistra regione versetur, et minus inde in dextro latere appareat. Haec die sexto et septimo fiunt. Denique plures eiusmodi arcus et flexiones canalis intestinalis producuntur.

§. 155. Loco plurium corollariorum, quae ad dilucidandam theoriam generationis spectarent, vnum tantummodo subiungam, quod epigenesin confirmet. Vidimus varias corporis partes, veluti thoracem (§. 132.) certo tempore nondum existere, et existere eo tempore non posse; neque concludimus, thoracem non existere, eo argumento, quod obseruatus non est; sed vidimus in eo loco, vbi thorax oriri deberet, oriri amnium verum, quo notum est, terminari in foetu anterius totum truncum;

cum, atque hinc concludimus, quod iste thorax, qui non apparet, non existere possit, adeoque non existat. Idem de pelui obseruatum est, cuius locum pars inferior amnii occupat (§. 141.) similiter vidimus in eo loco, vbi lamina intestini medii vtrinque incipere deberet, aut limbum intestinalem, qui terminus huius laminae anterior est, (§. 148.) aut immediate partes bullae laterales incipere (§. 137.) certo testimonio, has laminas intestini medii hoc tempore adesse non posse. Idem de intestino recto valet (§ 139.). Hoc primum argumentum esse puto epigeneseos; vnde nempe colligi potest, partes corporis non semper exstitisse sed successiue productas esse; quomodocunque caeterum haec productio fiat; nam non dico per concursum particularum; per modum fermentationis; per caussas et rationes mechanicas; per vires animae partes produci; produci vero dico. Si illae partes in statu paulo adultiori considerantur, nouo argumento ansam praebent. Nunc primordia earum adsunt, sed ita comparata, vt facile cognoscas, nondum esse partes integras, iamiam formatas, sed talia rudimenta, quae in eiusmodi partes transformanda sunt. Loco intestini medii, id est totius tractus intestinorum, quae intestino duodeno et recto interest, duas simplices laminas vides, marginibus anterioribus reuolutas, caeterum planas, separatas et distantes a se inuicem (§. 126.), immo priori tempore per totum mesenterium separatas (§. 136.). Quaero igitur, an hae

lami-

laminae sint integrum intestinum? Nemo sane affirmabit. Hinc concludo igitur, partes integras et formatas non semper exstitisse, sed certo tempore post conceptionem formatas esse. Nolo vberius loqui de statu embryonis XXIV. horarum, vbi simpliciora multum omnia sunt; nam non credo, validiora his, quae iam dixi, dici posse.

Explicatio Tabulae.

Fig. 1. Pars areae, cui embryo inhaeret, exscissa, in superficie inferiori; quo amnium spurium cum transparente embryone appareat, ex ouo IV. dies incubato. Pertinet haec figura ad seriem obseruationum in dissertationibus prioribus descriptarum, quibus amnium spurium eiusque phaenomena externa exponuntur; sequitur immediate post VII. figuram Tabulae prioris et explicatur §. 113. 114.

r. r. Pars areae vasculosae exscissa, inuersa, cui bulla incumbit.

a. b. c. Bulla siue amnium spurium curuatum fere reniforme.

g. h. i. l. Embryo similiter contractus transparens. *h.* occiput. *g.* synciput. *i.* spina dorsalis. *l.* ala sinistra.

k. Au-

k. Auricula cordis ſiniſtra, in qua maſſula ſanguinis coagulati.

B. Thoracis pars lateralis ſiniſtra.

C. C. Limbus orificii abdominis, idemque orificii amnii veri limbus (fig. 2. *i. i.* Tab. prior. Diſſ. fig. 7. *x. x.*).

e. Limbus inteſtinalis, idemque orificii amnii ſpurii limbus (Tab. prior. Diſſ. fig. 7. *n. n.*).

m. Spatium in regione abdominali inter amnium ſpurium et verum, vt quae partes in eo continentur, extra abdomen vel thoracem et extra amnium verum ſitae ſint. Sunt autem ſitae in eo ſpatio inferior pars cordis, totum inteſtinum medium et ſuperior pars recti.

d. De inteſtino medio aliquid transparens. Reliquae partes, compreſſae, non diſtincte transparent.

f. Fouea ſubrotunda; ex fouea cardiaca, rima et foueola inferiori orta, adeo tamen comparata, vt in parte eius ſuperiori fouea cardiaca, in media rima in inferiori foueola ſatis diſtincte adhuc cognoſcantur.

N. Foueola inferior cum ſuo limbo.

p. Vena vitellaria dextra. *o*. arteria eiusdem lateris. *n*. arteria vitellaria ſiniſtra. *s*. vena adſcendens.

q. Veſicula vmbilicalis, a membrana areae tecta.

 Fig.

Fig. 2. Idem subiectum, in eodem situ, membrana amnii spurii a superiori areae membrana soluta, antrorsum reflexa, resecta ad partem vsque *n.* relictam (vid. §. 120.) quo embryo apparet solo amnio vero inuolutus.

a. Particula membranae areae superioris, in solo hoc loco amnio vero adhaerentis.

b. b. b. amnium verum collapsum. (§. 121.).

c. Embryonis occiput. (*d.*) Sinciput. D. Tuberculum medium, quod post diem VI. euanescit.

e. e. Spina dorsalis E regio ossis coccygis.

f. Ala sinistra. F. pes sinister (§. 152.).

g. Auricula sinistra cordis (§. 123.).

h. Thoracis pars lateralis. Rugae et plicae ab amnio vero productae.

i. i. i. Limbus orificii abdominis, ex quo membrana amnii veri continuata immediate reflectitur ad amnium formandum, adeoque aperturam relinquit in abdomine (*i. i. i.*) ambitu abdominis ipso non minorem (§. 120.).

H. H. Regio abdominis lumbaris, quae sola fasciae longitudinalis instar spinae dorsi vtrinque adhaerens de abdomine adest, et anterius limbo terminatur (§. 120.)

I. Huius fasciae posterior pars gibba, a subiecto rene (fig. 3. *s. s.*).

k. l. m. n. o. p. partes extra abdominis cauitatem prominentes.

k. k.

k. k. Limbus inteſtinalis (fig. 1. *k.*) ex quo membrana amnii ſpurii *n.* continuata ilico reflectitur ad formandum amnium ſpurium relinquendo tanquam orificium eiusdem foveam illam (fig. 1. *n.*) (§. 122.).

l. Quod videtur eſſe interſtitium inter limbum (*k.*) et partes (*m.*) eſt profundior inteſtini plica (vid. §. 122.).

m. Inteſtini medii, paulum complicati partes eminentiores eaedem, quae transparebant per membranam amnii ſpurii (fig. 1. *m.*) (§. cit.)

n. Pars membranae amnii ſpurii antrorſum reflexa plicata (§. cit.).

o. Eiusdem membranae pars quae verſus ventriculum continuat per foueam cardiacam, quae truncum venoſum continet (§. 125.).

p. Superior pars inteſtini recti ipſius (fig. 3. *p.*).

Fig. 3. Idem ſubiectum; deſtructo amnio; remotis partibus lateralibus thoracis, faſciisque abdominalibus vna cum limbo, cum alis pedibusque et capite; remanente ſola de trunco ſpina dorſali; quo viſcera in conſpectum veniant (§. 124.).

a. Ventriculus ſiniſter cordis. *b.* canalis auricularis. *c.* auricula ſiniſtra. *d.* arcus aortae (§. 124.).

e. Saccus venarum, in quo orificium venae abſciſſae. (ibid.).

f. Hepatis lobus finifter. (ibid.) *g.* membrana inde deducta ad membranam amnii fpurii applicata; membranofi, quod auibus eft, diaphragmatis primordium.

h. Oefophagus. *i.* ventriculus. (§. 125.)

k. k. Limbus inteftinalis, quo membrana amnii fpurii (*n.*) ab inteftinali lamina (*m.* M,) cuius illa continuatio eft, diftinguitur, qui, fi una cum membrana (*n.*) conformiter fitui naturali reflectitur, foueam illam (Fig. 1. *n.*) eandemque cauitatem inteftini reftituit. (§. 122.)

l. Duodenum, retro membranae partem (*o.*), cui adhaeret, defcendens (§. 125.).

m. M. Inteftinum medium. Eft mera lamina inteftinalis finiftra, quae cum fimili, dextra, fibi contigua, inteftinum medium refert (§. 126.).

n. Pars membranae amnii fpurii, ex lamina inteftinali continuata, plicata.

o. Huius membranae pars oblique furfum fuper inteftina decurrens, quae truncum venofum continet (§. 2. *o.*).

p. Pars fuperior inteftini recti infundibuliformis; eadem, quae (fig. 2. *p*) extra peluim et extra amnium eminebat, quae in fubiecto integro fig. 1. foueolam inferiorem conftituit (§. 127.).

q. In-

q Inteſtini recti pars inferior integra cylindrica, vt ipſe ventriculus hac aetate eſt, reliquo inteſtini tubo, his intermedio, toto anterius aperto. (ibid.)

r. r. Meſenterium; eadem membranae amnii ſpurii (*n.*) et inteſtinalium laminarum continuatio, in quo vero ambae laminae cohaerent, quae huc vsque ſeparatae ſunt.

s. s. Ren ſiniſter (§. 124.) *t. t.* ſpinae dorſalis pars.

u. Arteria vitellaria ſiniſtra.

Fig. 4. Idem praeparatum figurae 3. in latere dextro. (§. 128.).

a. Ventriculus cordis ſiniſter. *b.* dexter. *c.* Aorta (ibid.).

d. Complectitur hic ab arcu aortae auricula dextra, quae in hoc ſubiecto depleta non diſtincte apparet. (ibid.)

e. Pulmonis dextri primordium *f. f.* hepatis lobus dexter (ibid.) *g. g.* Ren dexter (ibid.).

h. h. Arteria vitellaria dextra (ibid.).

i. i. Lamina inteſtinalis ad inteſtinum medium formandum dextra. (§. 129.).

k. Inteſtinum rectum. *l.* meſenterium.

m. m. Lamina dextra membranae amnii ſpurii.

n. Vena vitellaria dextra. N. truncus venoſus.

o. o. Spina dorſalis.

Fig. 5. Idem subiectum, quod priori tabula fig. 6. integrum exhibitum erat; amnio spurio et membranis reliquis exutum, extensum. (§. 130.).

a. Synciput, lobos cerebri anteriores continens.

b. Occiput, quod lobos cerebri posteriores continet. (ibid.)

c. d. Regio nuchae, ex tuberculis similibus compositae. d. e. Regio thoracis e. z. reliqua spina dorsalis, regionem abdominis exhibens.

g. Pars maxillae inferioris sinistra.

f. Processus; an prima costa? Inter hanc et maxillam (g) anterius amnii veri membrana oritur, et immediate circa synciput adscendit. (§. 132.).

h. Auricula sinistra cordis i. canalis auricularis (§. 130.).

k. Ventriculus cordis vnicus sinister. l. Aorta (ibid.).

m. Membranula eadem, quae (g. fig. 3.).

n. Pars membranae amnii spurii ea, qua fouea cardiaca formatur, idemque ventriculus. (§. 138.)

v. p. q. s. t. z. Rudimentum abdominis. Mera lamina concaua, a spina dorsali et lamellis lateralibus (v. v. u. u.) formata (§. 131.).

o. Pars laminae abdominalis superior concaua dextra (ibid.).

p. s. Margo laminae abdominalis superius introrsum, inferius paullatim extrorsum vergens,

gens, acutus adhuc, deinde in limbum intumescens (fig. 2. *i. i.*) idem, qui Tab. prior. (fig. 6. *l. l.*) (ibid.

q. Pars laminae abdominalis superior, sinistra maxime concaua. In hoc loco tuberculum alae propullulat.

t. Margo laminae abdominalis, vbi haec magis patet et planior est, crassior dextro margine; idem (Tab. prior. fig. 6. *q.*); rudimentum illius (fig. 2. *i. i.*).

v. v. Lamella abdominis lateralis dextra (ibid.).

u. u. Eadem in latere sinistro. Efficiunt hae lamellae, limbis vel marginibus suis terminatae fossas illas laterales (Tab. prior. fig. 6. *r. q.*) (§. 100.) et sunt primordia fasciarum, quae quarto die abdomen constituunt (fig. 2. H. H.) (§. 131.).

s. s. r. r. r. z. Fistulam intestinalem dixi (Diss. prior. §. 100.) Proprie mesenterii rudimentum exhibet, cuius laminae separatae sunt, et late patent, exterius autem renes sibi applicatos habent. (§. 136.) (144.) *s. s.* Lamina mesaraica dextra cum rene dextro. *r. r. r.* sinistra. Horum margines anteriores iidem (Tab. prior. fig. 6. *n. n. m. u*) et primordia limborum (fig. 2. *k. k.*).

w. Interstitium inter vtramque laminam mesenterii, in quo nuda spina dorsalis in conspectum

spectum venit; idem (Tab. prior. fig. 6. *p.*) (§. 136.).

x. Spina dorsalis.

y. Vropygii seu coccygis primordium.

z. Peluis primordium quod distinctum esse debet a simili interiori intestini recti primordio (vid. Tab. prior. fig. 6. *u.*) (§. 139. 140. 141.).

Fig. 6. Idem subiectum, quod (Tab. prior. fig. 7.) integrum in parte areae vasculosae exhibetur, membranis exutum (§. 145.).

a. Synciput *b.* tuberculum illud (fig. 2. D.) (ibid.).

c. Occiput. *d.* principium amnii veri, quod circa caput reuoluitur.

e. Spina dorsalis thoracica. *f.* Rudimenta costarum ?

g. Pars thoracis. *h.* auricula cordis sinistra.

i. Canalis auricularis. *k.* Ventriculus cordis (§. 145.).

l. Lobus sinister hepatis (ibid.) *m.* Ventriculus (§. 146.).

n. Limbus ventriculi, quo iste a reliqua, quae ex eo continuatur, membrana amnii spurii (*p. q.*) distinguitur, idemque ipse limbus foueae cardiacae (Tab. prior. fig. 7. *k.*) in superficie posteriori visus (confer. §. 146.).

o. Membrana phraenica, eadem (fig. 5. *k.* fig. 3. *l.*).

p. Vena

p. Vena adſcendens (Tab. prior. fig. 7. *q.*) deorſum reflexa (§. 146.).

q. Pars vaginae capitis in eaque furculi venoſi (Tab. prior. fig. 7. *r. r.*) deorſum reflexa.

Fig. 6. Idem ſubiectum, quod (tabul. prior. fig. 7.) integrum in parte areae vaſculoſae exhibetur, membranis exutum (§. 145.).

a. Synciput. *b.* occiput. *c.* tuberculum illud (fig. 2. D.) (ibid.).

d. Spina dorſalis thoracica. *e.* regio nuchae.

f. Rudimenta coſtarum?

g. Alae primordium reclinatum.

h. Primordium pedis (§. 152.).

i. Regio pubis. *k.* vropygium.

l. Cauitatis peluis primordium (§. 150.).

m. Principium amnii veri, quod circa caput reuoluitur.

n. Pars thoracis. *o.* auricula cordis ſiniſtra.

p. Canalis auricularis. *q.* Ventriculus cordis (§. 145.).

r. Membrana phraenica, eadem (fig. 5. *m.* fig. 3. *g.*) ex lobo hepatis ſiniſtro continuata.

ſ. Oeſophagus a pulmone tectus.

s. Ventriculus (§. 146.).

t. Vena adſcendens (Tab. prior. fig. 7. *q.*) deorſum reflexa (§. 146.).

u. Pars vaginae capitis in eaque furculi venoſi (Tab. prior. fig. 7. *r. r.*) deorſum reflexa.

v. Limbus ventriculi, quo iste a reliqua, quae ex eo continuatur, membrana amnii spurii (t. u.) distinguitur, idemque ipse limbus foueae cardiacae (Tab. prior. fig. 7. k.) in superficie posteriori visus (confer. §. 146).

w. Limbus intestinalis idem, qui (Tab. prior. fig. 7. n) et primordium ipsius (fig. 2. k. k.) (§. 146.).

x Pars membranae amnii spurii, antrorsum reflexa, quae, si vna cum limbo in situm naturalem reflectitur, suturam restituit. (Tab. prior. fig. 7. l.) (§. 148.).

y. Mesenterium, nunc formatum (§. 147.).

z. Superior pars intestini recti, infundibuli formis, quae, reflexa membrana in situm naturalem, foueolam inferiorem restituit (Tab. prior. fig. 7. m.)(§. 149.).

A. Ren sinister, a mesenterio nunc separatus.

B. Arteria vitellaria.

DE-

DESCRIPTIO
LEPORIS PVSILLI.

Auctore
P. S. PALLAS.

Multa dantur in Imperio Rutheno, eiusque vaſtiſſima praeſertim parte Aſiatica, quadrupedum e cenſu animalia, quorum notitia hactenus vel plane caruit naturalis hiſtoria, vel quae, poſt celeberrimorum etiam virorum *Meſſerſchmidii*, *Gmelini*, *Stelleri*, in his labores, obſcura tamen, nec rite illuſtrata eſſe Zoologi conqueruntur. Sufficiat pro exemplis nominaſſe Moſchum, Antilopen orientalem, (джерень). Ferorum in deſertis Mungalicis et Translaicenſibus Equorum ſpecies, Canem Alopecem (карсакъ), et Melanotum (караганъ), Muſtelam lutreolam (норка); Tandemque Murino e genere Citillum, Murem leucoſtictum (сусликъ), et Iaculum Aſiaticum (землянo зайцъ); vt reliqua mira, tenebriſque praeſertim condita Orientalioris Sibiriae atque Camtſchatcae animalia taceam, quae vtinam in natali ſolo ſcrutari poſſe olim largiatur fortuna. Ne igitur poſt peracta, quae diuinus AUGVSTISSIMAE in ſcientias amor per vaſtiſſimi Imperii feliciſſimas prouincias inſtitui iuſſit, itinera phyſica, horum maxime animalium in hiſtoria deſiderari quidquam poſſit, mihi praeſertim ſedulo curandum eſſe duco, omnique deligentia adlaboro.

Neque ſucceſſu hactenus caruiſſe me, curioſi gaudeant. Vix enim Trans-volgenſes modo campos attigi, et iam plus multo, quam ſperaueram, in Zoologicis noui et notatu digni occurrit. Obſeruaui hac ipſa hyeme, et *auium* aliquas pulcerrimas, incognitas, neque deſcriptas antea ſpecies, et *quadrupedia* varia, parum vel plane non Zoologis nota: quae praeſertim hyberno ſubinde otio illuſtrare animus eſt.

Primum erit ex his, quod *Leporem pusillum* appello, animalculum, quale in rerum natura dari ne quidem ſomniaſſem vnquam: vera *leporini generis* ſpecies, ſed minutiſſima, variisque externae et internae ſtructurae momentis admiranda. In campis circa volgam, imo et vltra Rhymnum ſiue Iaicum diſſitis minime infrequentem illam eſſe audio, ita, vt etiam vulgari nomine et peculiari inter Tataros nota ſit, quorum a pleriſque vocatur *Sulgan*, aliis, communi fere cum muribus Campeſtribus nomine, *Kir-ſickan*. Apertos campos (степь) ſolitaria colit, ibique, vti Citillus et mus leucoſtictus, cuniculis ſub terra latet, quibus plerumque noctu exire conſueuit. Hanc ob cauſam, et quod etiam hyeme vagatur, ſeſeque veſtigiis pariter, cuniculique apertura ſupra niuem prodit, haud raro capitur decipulis, quas illo ipſo tempore venatores, ſupra eiusmodi

modi antra, Ermineis vulgo habitata, statuunt. Infestatur tunc et a feris minutis campestribus, Putorio, Ermineo, Mustela, quibus hyeme, ob torpidas in cuniculis Murium campestrium varias species, parcior praeda venit, facilisque est de imbelli animalculo victoria.

Aestate variis herbis succulentis pasci solet animalculum; vbi vero has oppressit hyems, et omnia niue tecta sunt, excrementis animalium maiorum phytiuororum, praesertim equorum et ouium, contentum victitat, quibus ventriculum quoque in dissecto specimine repletum inueni. De prolificationis et gestationis tempore, deque catulorum numero nondum constat; ea vero vernis mensibus suppleri poterunt. Digna interim visa est structura *Leporis pusilli*, quae Zoologis citius communicetur.

Dentium superiorum duplicatione et figura, *digitorum* numero quinario in palmis, et in plantis quaternario, *hirsutie* pedum, *velleris* colore et indole, *internaque* partim *structura*, cum congeneribus, Lepore vulgari atque cuniculo, conuenit illi. Contra: *Capitis* figura, breuitate *auricularum* et *artuum* posteriorum, *caudae* vero plenario defectu ab vtroque insigniter discrepat. *Coli* structura varia non minus, quam in lepore vulgari admiranda est; et numero *costarum* lepus pusillus omnia nota animalia, superat praeter Cauiam Capensem a me primum descriptam in *Miscellaneis Zoologicis* et *Spicile-*

giorum Zoologicorum fecundo fasciculo; cuius animalis folum cranium in fonte quodam Sidonis antiquae repertum nuper memorauit *Illuſtr.* BVFFONIVS in hiſt. natur. vol. XV. pag. 205. Huic 22. enim ab vtroque latere numerantur, Lepori puſillo tantum 17.

Tab. XIV. Fig. 2. In craſſo inteſtino diſſecti ſpeciminis *Aſcarides* circiter decem inueni praeciſe tales, quales in equis, ſed triplo vel quadruplo maiores, plerumque ſesquipollicares inueniuntur, quae tamen figura et, ni fallor, ſpecie conueniunt cum minutis Aſcaridibus hominum inteſtina infeſtantibus, inque gallinis, quae ſtimeta frequentant, vulgaribus. Vix dubium eſt, has ex ouulis vel vermiculis cum Equino ventre ab animalculo comeſtis natas, ideo parentum fere in magnitudinem excreuiſſe; nullam enim aliam cauſam video, quare in tantillo animalculo vermiculus ille in tantum luxuriauerit, quum tamen in ipſo homine ſemipollicarem longitudinem vix vnquam attingere obſeruetur. Aſcarides iſtae omnes in parte coli coeco proxima et trifariam celluloſa haerebant.

Vellus *Leporis puſilli* noſtri ad tolerandam hyemem ſatis largum eſt, et e praelongis pilis compoſitum, lanugine etiam corpus molliter fouente. Quamquam omnium fere animalium recentia maxime vellera, calido loco ſiccata, frictione electrica fiant, in nullo tamen phaenomenon iſtud facilius, leuiſſimoque adeo tactu effici, et pilos verſus ap-

pro-

propinquantem digitum promptius assurgere vidi, quam in hoc et vulgari Sorice. Imo in Lepore minuto, fortiori frictione, nuda manu instituta, in loco tenebroso copiosae etiam scintillae eliciuntur; quod in Erminei quoque cauda obtineri potest.

Descriptio.

Magnitudo Ratti; Habitus singularis. Tab. XIV. Fig. 1.

Caput oblongius, quam in Lepore vulgari, vellere largiter vestitum.

Nasus Leporinus, totus villosissimus, vix angulo inter nares nudiusculo.

Labium superius bilobum, ad septum narium vsque obsolete bipartitum, *inferius* dentes vaginans, vt in congeneribus, gliribusque omnibus.

Dentes primores (Tab. XIV. fig. 3. 4. quae sunt naturali magnitudine) albi, *superiores* duplicati; horum *exteriores* sulco canaliculati, extremoque argute emarginati, ita tamen, vt communis acies tantummodo sit tridentata, interiori nempe vtriusque dentis angulo contiguo et quasi coadunato. Fig. 3. 4. *Denticuli pone* basin maiorum minuti, obtusi (Fig. 4. a.). *Inferiores* dentes simplices, oblique truncati, plani.

Mystaces per rostri tumidula latera sparsi, pilis superioribus nigricantibus, inferioribus reclinatis, praelongis, albidis (Fig. 3. 4.) *Verruca* supra-ocularis tripilis, *parotica* vnipilis.

Oculi

Oculi mediocres, obſcuri. *Auriculae* rotundatae, latae, vellere ſemilatentes, intus gryſeo-villoſae, verſus marginem fuſceſcentes, ipſoque limbo tenerrime piloſo, albidae.

Truncus gracilis, abdomine ſubuentricoſo; *Cauda* nulla; *Artus* breues, etiam poſtici.

Palmae pentadactylae, *pollice* remoto, breui, digitis duobus exterioribus degradatis (fig. 5. *a.* 6. vbi dextra). *Plantae* tetradactylae, extimo praeſertim breuiore (fig. 6. *a. b.*). *Volae* ſiue ſoleae pedum, vt in lepore, pilis horrentibus, confertis hirſutiſſimae; poſticorum vsque ad calcaneos, villoque ſubreflexo, fuſceſcente; anticorum villo albido verſus digitos vergente, (fig. 5. 6. *b b.*).

Vellus largum, proque tantillo animalculo prolixum. *Lanugo* vbique denſa, tenerrima, fuſca. *Pili* recti, praelongi, (praeſertim in dorſo ſubpollicares), extremitate gryſeo nigroque varii, vnde oritur *color* corporis fere leporinus. Ambitus oris, gula et pectus albent; corpus ſubtus reliquum, et pedes ſupra e gryſeo-luteſcente albicant.

Menſurae.

Pondus animalculi integri aequat vnciam vnam medicam, cum ſeptem circiter drachmis.

Longitudo animalculi ab apice naſi ad coccygem Pariſinae menſurae - - 5″. 6‴.

Eadem ab apice naſi ad vngues extenſorum pedum anteriorum - - - - 3. 9.

Item

Item ad vngues extremos plantarum extensis artubus posticis - - - - -	7.	6.
Longitudo capitis a nucha - - - -	1.	6.
——— ——— antibrachii - - - - - -	1.	0.
——— ——— palmae ab articulo carpi ad extremos vngues - - - - - - -	0.	$6\frac{1}{3}$.
——— ——— Femorum - - - - - -	0.	9.
——— ——— Tibiarum - - - - - - -	1.	0.
——— ——— Plantae a calcaneo ad extremos vnguiculos - - - - - - - - -	0.	$11\frac{1}{3}$.
——— ——— Auricularum - - - - - -	0.	5.
Earumdem latituto - - - - - - -	0.	$5\frac{1}{3}$.
Circumferentia capitis ante auriculas -	2.	5.
——— ——— Thoracis pone pedes anticos -	3.	1.
——— ——— Abdominis - - - - - -	3.	8.

Zootomica.

Hepar septemlobatum, *ventriculus* arcuatus, sinistrorsum gibbus, fundo secundum cardiam (Tab. XIV. fig. 7. *a.*) in secessum siue sinum rotundatum (Litt. *c.*) adsurgente.

Intestinum a Pyloro (Litt. *b.*) ad crassum vsque subaequabile, ad summum calami cygnei amplitudine, minore autem versus duodenum, et extremo ileo (fig. 8. A.). Longitudine tripedale.

Coecum (fig 8. *a*—*b.*) sesquipollicare, calami scriptorii capax, teretiusculum, apice obtuso incurvatum, versus ilei insertionem (Litt. *b.*) sensim ampliatum atque cellulosum.

Colon per longitudinem quinque cum dimidio pollicum, (Litt. *b—d.*) digiti minimi amplitudine, imo ex parte (*c—d.*) capacius, ligamento fecundum mefenterii infertionem decurrente crifpatum, in *cellulas* transuerfas integras. *Hinc* 1 poll. et 3 lin. longitudine aequabile (Litt. *d—e.*) teres, calamo fcriptorio craffius. *Tunc* longitudine itidem 1″. 3‴. denuo exampliatum (Litt. *e—f*) tribusque ligamentis longitudinalibus, mefenterico vno, duobusque planis inftar coli humani in cellulas trifariam difpofitas, transverfas concameratum, quae in feriebus binis anguftae funt, et transuerfim lineares, in tertia ampliores.

Sequitur *tandem* inteftinum calamo fcriptorio vix capacius (Litt. *f—g.*) cellulis oualibus excrementa formantibus moniliforme, adtenuatumque in *inteftinum vltimum*, excretorium, trium et dimidii pollicum longitudine.

Afcarides (fig. 2.) in priore parte coli (fig. 8. *b—d.*) latebant, octo vel decem.

Diaphragma centro tendineo, fagittato, ampliffimo. *Ren* dexter fitu altior, magnitudine fabae; finifter paulo minor. *Vefica* pifo amplior; *teftes* exiliffimi. *Cor* magnitudine dupla fabae.

In *fceleto*: clauiculae arcuatae, magnae, (cum fint in lepore rectae, minutae, et inutiles,) humero laxe cohaerentes. *Coftae* ab vtroque latere feptemdecim, quarum denae fpuriae. *Sternum* quinque articulorum.

Coccygis os ifchia paulo ex fuperans, planiufculum, articulorum quatuor, longitudine 5 linearum.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

EXPOSITIO
VTRIVSQVE OBSERVATIONIS
ET
VENERIS ET ECLIPSIS SOLARIS
FACTAE PETROPOLI IN SPECVLA ASTRONOMICA.

Auctore

CHRISTIANO MAYER.

Altitudines Solis correspondentes.

Die 18. Maii captae quadrante $2\frac{1}{2}$ pedum.

T. P. ad ortum			Alt. limbi ⊙ app. super.			T. P. ad occas			Meridies medius		
H.	M.	S.	G.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S
8	33	29	36	24	45		31	27	0	2	28.
	37	5	36	49	20		27	56	0	2	30, 5
	39	16	37	4	10		25	44	0	2	30
	42	16	37	24	40		22	44	0	2	30
	44	32	37	40	0		20	$26\frac{1}{2}$	0	2	29, 25
	52	$32\frac{1}{2}$	38	34	0	3	12	23	0	2	27, 75
9	17	46	41	16	10		47	14	0	2	30
	19	$26\frac{1}{2}$	41	27	5	2	45	29	0	2	27. 7
						Ex his fit merid. med.			0	2	29, 15
						Aequatio					8, 25
						Meridies verus . .			0	2	20, 50
						Temp. med. mer. veri			11	56	59, 5

 Altitu-

Altitudines Solis correſpondentes.

Die 19. Maii.

T. Pend. ad ortum			Alt. limbi Solis app. ſuper.			T. P. ad occaſum.			Meridies medius.		
H.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.
8	59	$29\frac{1}{2}$	39	28	12		5	$23\frac{3}{4}$	0	2	26, 62
9	2	49	39	49	27	3	2	$11\frac{1}{2}$	0	2	30, 25
	5	30	40	7	12		59	22	0	2	26
	7	$41\frac{1}{2}$	40	21	15		57	10	0	2	25, 75
	10	11	40	37	26		54	46	0	2	28, 5
	13	$44\frac{1}{2}$	40	59	48		51	8	0	2	27, 2
	17	49	41	25	20		47	$4\frac{1}{2}$	0	2	26, 75
	19	$28\frac{1}{2}$	41	36	0		45	$26\frac{1}{2}$	0	2	27, 5
	22	3	41	51	40		42	49	0	2	26
	4	45	42	7	36	2	40	$8\frac{1}{2}$	0	2	26, 75
						Meridies ex his med.			0	2	27, 08
						Aequatio . . .					8, 0
						Meridies verus .			0	2	19, 08
						Temp. med. mer. veri			11	57	7, 5

Die 20. Maii.

T. Pend. ad ortum			Altit. limbi ☉ app. ſuper.					T. P. ad occaſum.			Meridies medius.		
H.	M.	S.		G.	M.	S.		H.	M.	S.	H.	M.	S.
9	0	23		39	41	28		3	4	36	0	2	29, 5
	5	7		40	13	0			59	42	0	2	24, 5
	10	4	limb.	41	26	20	inferior.		54	56	0	2	30
	12	37		41	0	58			52	9	0	2	23
	17	$11\frac{3}{4}$		41	29	28			47	42	0	2	26, 87
	18	32		41	37	40			46	20	0	2	26
	20	$47\frac{1}{2}$		41	51	20		2	44	7	0	2	27
								Meridies med. ex his			0	2	26, 69
								Aequatio . . .					7, 76
								Meridies verus .			0	2	18, 93
								Temp. med. mer. veri			11	57	16, 0

Altitu-

Altitudines Solis correſpondentes.

Die 23. Maii.

T. Pend. ad ortum.			Altit. limbi ☉ app. ſuper			T. Pend. ad occaſ.			Meridies medius.		
H.	M.	S.	G	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.
8	42	20	38	2	45		22	27	0	2	23, 5
	46	56	38	33	22		17	51	0	2	23, 5
	54	8	39	22	18		10	$39\frac{1}{2}$	0	2	23, 75
9	0	54	40	6	29	3	3	57	0	2	25, 5
	19	$43\frac{1}{2}$	42	6	10		45	6	0	2	24, 75
	28	39	43	1	0		36	$3\frac{1}{2}$	0	2	21. 25
	30	19	43	11	15	2	34	24	0	2	21, 5
						Merid. ex his med.			0	2	23, 40
						Aequatio . . .					7, 07
						Meridies verus .			0	2	16, 33
						T. med. merid. veri			11	57	43, 6

Ex comparatione meridiei veri	Sec.
Diei 18. cum 19. quantitas diurnae retardationis penduli erit	9″, 42
cum 20 - - - - - - - - - - - - -	9, 07
cum 23 - - - - - - - - - - - - -	9, 63
Diei 19. cum 20 - - - - - - - - - - - - -	8, 65
cum 23 - - - - - - - - - - - - -	9, 71
Diei 20. cum 23 - - - - - - - - - - - - -	10, 06

Reiicimus quantitatem 8″, 65, quod haec differentia manifeſte tabulis debeatur, plus minus incremento diurno motus medii Solis ex ſola interpolatione atque in ſolis primis decimarum notis appropinquantibus, vt manifeſtum eſt comparanti plures eiusmodi tabulas. Eum vero errorem nouis ac prolixis

lixis calculi laboribus nunc velle detegere, prorſus inutile foret huic noſtro inſtituto. Sumpto autem ex 5 reliquis penduli retardationibus medio, retardatio diurna eiusdem eſt $9''$, 57, quae obſeruationibus omnibus ſatisfacit.

Ita enim ex datis meridierum momentis euidens eſt primo, tempus meridiei veri die 24. Maii ad pendulum fuiſſe $0^h, 2', 16'', 21$. dein euidens quoque eſt, pendulum hoc non ſequi tempus medium, neque accelerationem habere reſpondentem huic motui Solis medio, cum nulla ſit neque acceleratio, neque retardatio eiusdem reſpectu motus veri ſolaris, niſi vnius circiter decimae, quo centrum Solis ſequenti die v. g. 24 tardius appulit ad meridianum noſtrum, quam die 23, quae tamen acceleratio iuxta motum medium Solis deberet eſſe $9''$, 8. Nulla ergo pro tempore obſeruationis veſpertinae ſeu matutinae diei 23 pars proportionalis accelerationis aut retardationis horologii quaerenda eſt, et ad tempus meridiei aequatione correctum addenda, vel ab eo ſubtrahenda, vt habeatur tempus verum factae obſeruationis; ſed a tempore obſeruato ſubtrahenda ſolum ſunt $2', 16''$, eo quod tempus verum in meridie ſemper ſit $0^h, 0', 0''$ et horologium die 23 Maii ſupra t. v. indicauerit $2', 16''$, 33.

Placet rem exemplo declarare, quamuis id Aſtronomis notiſſimum ſit. Itaque ſi pendulum motum

motum medium Solis exacte ſequeretur, et meridiem oſtendiſſet v. g. die 18, quam inuenimus 0′, 2′, 20″, 50, ob incrementum diurnum accelerationis motus medii Solis = 8″; die 19 profecto oſtendere debebat 0^h, 2′, 28″, 50; oſtendit autem ex obſeruatis Solis altitudinibus correſpondentibus correctis 0^h, 2′, 19″: ergo a die 18 ad 19 retardatio diurna penduli mei ſupra motum medium Solis fuit, vt ſupra dixi, 9″, 42; ſupra motum autem verum Solis fuit nulla.

Id ipſum alia ratione clariſſime oſtendi poteſt, conuertendo tempus verum factae cuiusuis obſeruationis in tempus medium, idque comparando tempori penduli. Ita tempore contactus interioris in egreſſu Veneris a me obſeruato pendulum meum oſtendit 15^h. 28′, 0″, a quo ſubtractum tempus meridiei eius diei 0^h, 2′, 16″, 33

	h.	m.	s.
relinquit tempus verum	15	25	43,7
inde ſubtracto tempore medio meridiei veri	11	57	43,6
Reſiduum eſt tempus medium non correct	15	28	0,1

Acceleratio diurna motus medii Solis ſupra motum verum a die 23. ad 24. eſt 9″, 8, ergo pars proportionalis debita interuallo 15^h, 28′ erit 5″, 91, quae addita tempori medio non correcto 15^h, 28′, 0″, 1, producit tempus medium factae obſeruationis 15^h, 28′, 6″. Sed enim pendulum meum a die 23 in 24 defecit a motu medio Solis quantitate 9″, 93. quare vt tempus medium reducatur

 ad

ad tempus penduli, pars proportionalis, interuallo 15 horarum, 28′, 6″ debita, (quae est 5″, 98) auferenda est a tempore medio dato 15^b, 28′, 6″, et residuum 15^b, 28′, 0″, 02, satis ostendit, tempus obseruatum penduli congruere tempori medio, neque vlli alteri reductioni locum esse posse.

Atque hinc patet, statum penduli et temporis veri ad praecisionem vnius secundi exacte cognitum fuisse. Ceterum, ne quis casus pendulo accidens obseruationem turbaret, duo reliqua pendula Londinensia, virgis quoque metallicis instructa, quae biduo ante Illustrissimum Collegium Marinum submiserat, et quorum acceleratio diurna vnius, et retardatio alterius a pendulo normali 5″ non superabat, duo item reliqua Parisina praestantissimi artificis le Paute, et tertium D. Charost per eos dies frequenter cum normali collata et explorata sunt.

Instrumenta ita diuisa, vt mihi pro obseruando contactu Veneris tubus achromaticus Londinensis 18. pedum insignis bonitatis: alter 7. pedum pariter achromaticus Praenobili D. Professori *Euler*, qui est Academiae a Secretis: telescopium catoptricum *Schortii* $2\frac{1}{2}$ pedum Cl. Dno Adiuncto *Lexell*: alterum maius 3 pedum 6 digitorum eiusdem celeberrimi artificis Dno *Stahl*, expeditionis meae Socio, seruiret.

Quod

Quod in inferiori Speculae conclaui non ita commodus in orientem prospectus pateret, placuit obseruandae Veneri supremum eligere tabulatum, locum, si quis vnquam, solidum ac fornice et cupro clausum. Figuram is refert circularem, cuius extimam oram ambit murus $2\frac{1}{2}$ pedes crassus et 4. fere pedes altus; huic ferramenta complura circum ad perpendiculum insistunt, quibus cylinder ligneus annulis ferreis armatus cum reliquo machinamento inductus est pro facili tubi maioris motu horizontali et verticali. Praeterea tubus 18 pedum clatris inclusus atque ita in aequilibrio positus est, vt vix manu Obseruatoris indigeret; transmisso per annulum ferreum humi fixum fune vacillationi tubi satis cautum erat. Simili apparatu regebat in omnem partem suum quoque tubum Praenobilis D. Professor *Euler*. Sociorum duo reliqui isto minime indigebant pro suis telescopiis supra separata fulcra commode insistentibus. E tribus, ad numerandas vibrationes penduli constitutis, alterni minuta secunda numerare, tertius numerantibus prope pendulum, ne quis error irreperet, inuigilare assueuerant. Collocatum insuper pone Obseruatores pendulum Parisinum, quod ipso die 23. hora 5. vesperi ad idem secundum temporis cum normali compositum est, a quo die 24. hora 4 matutina nonnisi 5″ aberrabat, vt Obseruatores suis ipsi oculis minuta prima temporis expedite viderent.

De obseruatione Veneris vespertina die 23. Maii.

Isto apparatu iam inde ab hora 5 et dimidia vesperi diei 23 fixo in Solem obtutu intuebamur. Caelum erat serenum, limbus Solis constanter bene terminatus, nisi tum, quod quidem vnus ego tubo 18. pedum notaui, cum tenuissima incisura maculae nigricantis extimam oram et orientalem et occidentalem Solis subinde perstringeret; indicium id fuit emergentis et immergentis maculae. Fuit, cum de hoc spectaculo ob suspicionem satellitis Veneris Socios admonerem; sed quod huiusmodi marginales lunulae, quarum omnino 4 successiue obseruaui, et figuram referrent irregularem, et post duas horas magis increscerent vel euanescerent, facile eam suspicionem dimisi.

Ita caelo constanter sereno certi omnino sumus, ad horam vsque 9. 5′ T. V. nullum vestigium Veneris aut eius satellitis apparuisse, a quo tempore ob viciniam horizontis vaporosi limbus solis semper magis vndulare, atque etiam istis vaporibus aliquantum tegi, videbatur. Cum ecce centro solis iam infra horizontem depresso, (nam occasum totalem apparentem eo die circa horam 9. 10′, 40″ T. V. obseruaueramus) repente Venerem omnino nigram, atque eiusdem apparentis magnitudinis, qualem postridie conspexeram, intueor hora 9. 9′. 39″ T. V.

Illu-

Illuſionem fuiſſe opticam, eo minus perſuadere mihi poſſum, quod eo momento iisque circumſtantiis temporis de Venere videnda ſpem fere omnem abieceram. Ipſo autem momento penduli $9^h. 11'. 55''$. id phaenomenon me conſpexiſſe, ex repentina mea vociferatione teſtes habeo obſeruationum Socios. Porro cenſeo, refractione fieri potuiſſe, vt Venerem omnino nigram, id eſt luce orbatam poſt occaſum centri ſolis, atque limbo boreali ſolis ita nube temperato, prope contactum exteriorem viderem. Conſonat locus in ſole per tubum Aſtronomicum apparens ad occaſum, ſiue ex parte limbi Solis apparenter occidentalis, conſonat tempus et calculis et egreſſui Veneris reſpondens; quod tamen aliarum obſeruationum deciſioni relinquendum eſt.

Quidquid autem ſit de obſeruatione veſpertina, meum iam eſt, obſeruationem matutinam Illuſtriſſimae Academiae exponere, eamque primum admonere, nos omnes vno circiter quadrante horae ante ortum Solis ſtetiſſe eodem loco ad obſeruandum paratos.

Obſeruatio Egreſſus Veneris die 23 Maii.

Temp. Pend.			Temp. Ver.			
H.	M.	S.	H.	M.	S.	
14	52	15	14	49	58	Venus oriente Sole in parte limbi borealis videtur, limbo Solis et Veneris vndulante, maleque terminato.
	54	42		52	26	Videtur centrum Solis eſſe in horizonte. Venus verſicolor, nam limbus eius borealis ruber, auſtralis caeruleſcens, medium nigrum Obſeruatoribus omnibus apparet.
15	25	59	15	23	43	Venus melius terminatum limbum habere videtur et colores diſparent, vndulatio tamen adhuc notabilis. Contactus interior certo necdum contigit.
	27	50		25	33,7	Domino *Stahl* contactus interior eſſe videtur, limbo Solis necdum inciſo.
	27	57		25	40,7	Cl. D. Adiunctus *Lexell* eundem contactum videt.
	28	0		25	43	Idem contactus Profeſſori *Mayer* videtur accidere.

Temp.

Temp. Pend.			Temp. Ver		
H.	M.	S.	H.	M.	S.
	28	3		25	46, 7
	28	4		25	47, 7
15	41	0	15	38	44

Contactus internus ob sensibilem incisionem et curuaturam limbi solis Professori *Mayer* praeteriisse videtur.

Eandem limbi incisionem proxime a contactu notat Praenobilis D. Professor *Euler*.

Dein micrometro obiectiuo distantiam Veneris a limbo Solis australi metiri aggressus sum, vt locum Veneris in limbo occidentali Solis quam proxime determinarem. Chorda verticalis obseruatione inuenta est in partibus diametri Solis = 3 dig. 5. lin. 45, 3 particul. seu 31′, 36″, 734, vt sequitur:

dig. lin. part.

2. 4. 10 = 21′, 8″, 365; quae fuit distantia Veneris a limbo Solis australi. Subtracta quantitate ista 21′, 8″, 365 ex diametro Solis in ipsa eclipsi obseruata 31′, 36″, 734 sequeretur, centrum Veneris a proximo limbo boreali in egressu remo-

Temp.

tum fuisse 10′, 28″, 369. Sed enim centrum Veneris egressium erat $15^h, 34', 39''$, id est $4', 5''$ ante hanc dimensionem institutam; igitur supputanda est pars illa exigua proportionalis in partibus circuli maximi, et per eam distantia haec 10′, 28″, 369 obseruatione inventa minuenda est. Plures dimensiones ob viciniam temporis contactus exterioris capere non potui. Is ita habet:

Temp. Pend.			Temp. Ver.				
H.	M.	S.	H.	M.	S.		
15	45	30	15	43	13,7	D. *Stahl*	contactum exteriorem vident.
	45	40		43	23,7	Cl. D. Adiunctus *Lexell*	
	45	47		43	30,7	Praenobilis D. Professor *Euler*	
	45	57		43	40,7	Professor *Mayer*	

Ex contactu dubio exteriore a me pridie viso - - - - - - - - - $9^h, 9', 39''$,

Et contactu vltimo - - - - - - - 15, 43, 40, 7

Sequitur I. durationem totius transitus fuisse - - - - - - 6, 34, 1, 7

II.

II. Moram inter contactum interiorem et exteriorem obſeruatam

	H.	M.	S.
a D. *Stahl*	0	17	40
a Praen. D. Prof. *Euler*	0	17	43
a Cl. D. *Lexell*	0	17	43
a Prof. *Mayer*	0	17	57

Conſtitueram primum, omnino ſupprimere dimenſionem diametri Veneris, a me micrometro obiectiuo, tubo Palatino 7. pedum adhaerente, factam hora Penduli 15, 7′, 48″, ſeu 15^h, 5′, 32″ T. V. eamque a me inuentam 1. lin. 4. particul., id eſt 57″; eoquod in annotanda hac obſeruatione, omiſſa linea, particulas tantum fuiſſe notatas inuenerim; ſed, re melius conſiderata, viſum eſt, rem, vt acciderat, communicare.

Atque talis quidem fuit obſeruatio celeberrimi huius phaenomeni, caelo non vsque adeo iniquo, vt non potius confidam, eam plurimum profuturam ad veram parallaxeos inquiſitionem, ſi eum laborem in ſe ſuſceperit Illuſtriſſimus, et toto orbe notiſſimus Dominus Profeſſor *Leonardus Euler*. Id certum, paucis poſt egreſſum Veneris minutis vndulationem limbi Solaris omnem ſublatam, nobis pulcherrimam occaſionem praebuiſſe faciendae bonae obſeruationis eclipſis Solaris inſtantis, quo toto tempore nulla in caelo nubecula apparuit, barometro ſtante ad altitudinem 28. dig. 2 linearum.

Et ego quidem tubo 7. pedum achromatico ope micrometri obiectiui phases huius eclipsis metiebar: Praenobilis D. Professor *Euler* tubo dioptrico 9. pedum, habente micrometrum ordinarium, macularum immersiones et emersiones: Cl. D. Adiunctus *Lexell* eodem, quo mane vsus erat, telescopio Schortii distantiam cornuum: D. *Stahl* altitudines Solis obseruandas susceperant, quamuis illi ab hoc negotio fuerit abstinendum, quod eius opera in dirigendo micrometro et notandis particulis maxime indigerem.

Quod ad valorem partium micrometri pertinet, eum ex assumpta diametro Solis pluribus ante diebus conclusimus. Captis enim plus quam 40. eiusmodi obseruationibus prope meridianis id tandem deduximus, particulam vnam micrometri mei proxime aequalem esse 1″, 0565, vnde lineam aequiualere 52″, 8250, atque decem eiusmodi lineas, i. e. digitum 8′, 48″, 2500, cui basi innititur tabula micrometri huius Palatini.

Neque minus inde constat, isto micrometro in 5. digitos Londinenses diuiso, quorum singuli continent 10. lineas, angulum subtendi posse 44′, 1″, 2500, magno sane Astronomicarum obseruationum commodo; siquidem huiusmodi instrumento coniunctiones omnes fixarum cum planetis et praecipue cum luna multo quidem exactius, quam micrometris ordinariis, determinari possunt. Sed enim de vsu huius micrometri atque eius praestantia non

est

eſt hic dicendi locus. Mihi nunc ſatis eſt oſtendere, me ex dimenſione diametri Solaris, per eos dies quotidie variantis, variata quoque menſura micrometri, ſumpto ſemper ex pluribus obſeruationibus arithmetice medio, veritatem proxime attigiſſe, vt reductio particularum eiusdem in obſeruatione eclipſis Solaris omnino pro iuſta et exacta aſſumenda videatur.

Obſeruatio Eclipſis Solaris

Petropoli in ſpecula Aſtronomica die 23. Maii 1769. Tubo achromatico *Dollondi* 7. pedum, micrometrum obiectiuum habente, facta a *Chriſtiano Mayer*, Sereniſſimi Electoris Palatini Aſtronomo.

Temp. Pend.			Temp. Ver.				Immerſiones.								
							Partes Microm.			Minuta reducta.			Minuta reducta.		
H.	M.	S.	H.	M.	S.		Dig.	lin.	partic.	M.	S.	Decim.	M.	S.	Decim.
							Partes lucidae.						Partes obſcuratae		
21	12	45	9	10	28, 7	initium									
	17	0		14	54		3	3	38	29	43	37	1	53	36
	21	7		18	51		3	1	46	28	6	17	3	30	56
	24	50		22	34		3	0	8	26	33	20	5	3	53
	27	48		25	32		2	8	37	25	18	19	6	18	18
	33	6		30	50		2	6	29, 9	23	25	03	8	11	69
	36	46		34	30		2	5	7, 3	22	8	33	9	28	39
	39	37		37	21		2	4	5, 8	21	13	92	10	22	80
	42	50		40	34		2	2	47	20	11	80	11	24	92
	45	35		43	19		2	1	49	19	21	09	12	15	64
	48	4		45	48		2	1	12, 3	18	42	31	12	54	41
	54	1		51	45		1	9	37	17	22	76	14	13	96
	57	47		55	31		1	9	2, 3	16	46	10	14	50	62
22	1	42		59	26		1	8	17	16	8	81	15	27	92
	11	3	10	8	47		1	7	45, 4	15	45	99	15	50	74

T. Penduli			Temp. Verum.				Emersiones.								
							Partes microm.			Minuta reducta.			Minuta reducta.		
H.	M.	S.	H.	M.	S.		Dig.	lin.	partic.	M.	S.	Decim.	M.	S.	Decim.
							Partes lucidae.						Part. obscuratae		
22	17	26	10	15	10		1	8	19	16	10	92	15	25	81
	21	14		18	58		1	8	47	16	40	50	14	56	22
	24	29		22	13		1	9	26, 6	17	11	77	14	24	95
	27	7		24	51		2	0	10, 5	17	47	59	13	49	14
	30	46		28	30		2	1	6	18	35	66	13	1	07
	35	22		33	6		2	2	27, 2	19	50	88	11	45	84
	39	41		37	25		2	3	45, 5	21	3	04	10	33	68
	42	54½		40	38		2	5	5, 3	22	6	22	9	30	51
	45	41		43	25		2	6	0, 9	22	54	40	8	42	33
	55	50		53	34		3	0	10, 3	26	35	63	4	1	10
	59	45		57	29		3	2	7, 2	28	8	00	3	18	72
23	3	34	11	1	18		3	3	40	29	45	48	1	51	24
	6	7		3	51		3	4	40, 2	30	38	52		58	21
	8	30		6	14	Finis.									
	9	56		7	40	Diameter ☉ capta microm. obiectiuo	3	5	45, 3	31	36	7344			

Ex distantia cornuum heliometro a Cl. D. *Lexell* dimensa diam. lunae fuit 33′. 50″. 47.

Ex initio et fine medium huius eclipseos eruitur hora 10. 8′, 20″, 2 T. V. Duratio tota 1^h, 55′, 44″, 3.

Cl. D. Adiunctus *Lexell* initium eodem prorsus momento temporis, quo ego, 9^h, 10′, 28″, 7 obseruauit: finem 11^h, 6′, 9″ T. V. hinc duratio tota fit 1^h, 55′, 40″ medium eclipseos 10^h, 8′, 18″, 8, T. V.

D.

D. *Stahl* initium 4. Secundis nobis citius vidit tubo quadrantis Palatini, nempe $9^h, 10', 24'', 7$, cuius etiam obseruationi pro vero contactu limbi lunae ita deferendum esse puto, vt detractis adhuc $2''$, initium verum huius eclipseos ponendum esse censeam $9^h, 10', 23$. T. V. qua correctione adhibita medium eclipseos fit $10^h, 8', 18'', 5$, et duratio tota $1^h, 55', 51''$, nempe $6''$ et 7 decimis maior, quam immediate ex ipsa obseruatione a me facta eruitur.

Impeditus accommodando micrometro suo Praenob. D. Professor *Euler* initium quidem non obseruauit, sed finem in proiectione Camerae obscurae notauit $11^h, 6', 5''$, T. V.

Eundem quoque finem in inferiori conclaui speculae Astronomicae obseruauit Praenob. D. Professor *Kotelnikow* tubo suo achromatico $11^h, 12', 42$ vel $43''$ sui penduli, quod factis plurimis comparationibus spatio 24 horarum accelerabat supra pendulum Londinense $55''$. Aliunde tamen constabat, indicem eiusdem penduli praecedere $4', 2''$ pendulo Londinensi; vnde hac quantitate $4', 2''$, a tempore obseruato subtracta, tempus huius obseruationis incidit in $11^h, 8', 40''$ penduli Londinensis, seu in $11^h, 6', 24''$ T. V. atque hinc iterum sublatis $18''$, quanta fuit acceleratio penduli Praen. D. Prof. *Kotelnikow* ab hora 3. matutina vsque ad horam 11, contingit tempus verum

 finis

finis huius eclipseos a Praen. D. Professſ. *Kotelnikow* obſeruati $11^h, 6', 6''$, quod proxime coincidit cum tempore a Praen. D. Professore *Euler* in proiectione obſeruato.

Quantitas obſcurationis ex mea obſeruatione erat 6 dig. 065: ſeu $15', 50'', 744$ eiusmodi partium, quarum diameter Solis hora 11. $7', 40''$, eodem micrometro dimenſa capiebat $31', 36'', 7344$.

Quantum ad dimenſionem diametri lunaris, ex repetita dimenſione diſtantiae cornuum lunae, capta a Cl. D. *Lexell* ope alterius heliometri, teleſcopio catoptrico Schortii adhaerentis, eius quoque valorem partium ſcalae ex comparatione dimenſionum diametri Solis conſecuti ſumus. Nam cum paulo ante et poſt tempus huius eclipſeos diametrum Solis apparentem vtroque heliometro dimenſi eſſemus, Cl. D. Adiunctus *Lexell* eam inuenit $4^{dig.}\ 1^{lin.}\ 19^{part.}$ ope ſui micrometri, qualem ego in meo, tubo 7. pedum achromatico *Dollondi* accommodato, deprehendi $3^{dig.}\ 5^{lin.}\ 45^{part.}\ 3$. Hinc facta reductione vtriusque micrometri ad eundem valorem partium, apparentem diſtantiam cornuum, atque inde apparentem diametrum lunae ſupputauimus.

De

De Maculis in Eclipſi hac obſeruatis, earumque poſitione.

Maculae in Sole erant omnino 6. Earum immerſio et emerſio a Praen. D. Profeſſore *Euler* ita obſeruatae ſunt.

		Temp. Pend. H.	M.	S.	Temp. Ver. H.	M.	S.
Maculae maioris immerſio	Limb. dext. - - -	9	38	5	9	35	49
	Limb. ſiniſt. - - -	9	39	40	9	37	24
Maculae I.	Immerſio -	9	49	19	9	47	3
	Emerſio - -	10	38	40	10	36	24
Maculae II.	Immerſio -	9	51	42	9	49	26
	Emerſio - -	10	36	20	10	34	4
Maculae III.	Immerſio -	9	53	32	9	51	16
	Emerſio - -	10	36	20	10	34	4
Mac. paruae	Immerſio -	10	0	25	9	58	9
	Emerſio - -	10	52	41	10	50	25
Mac. in margine	Immerſio	10	10	26	10	8	10
	Emerſio	11	5	12	11	2	56

Finita obſeruatione poſitionem macularum micrometro obiectiuo determinaui, ſed earum duntaxat, de quibus ſuſpicio eſſe poterat, vel eſſe, vel ſaltem propinquas eſſe ſatelliti Veneris, cui obſeruando iam pridie et triduo poſt toti eramus intenti: in his ſuſpicionem praebuit macula tertia, mole valde exigua et magis ceteris rotunda; quamuis et ipſa in limbo inferiore irregularis appareret.

Poſitio

Poſitio Macularum

Intuitu diametri Solaris verticalis et horizontalis.

	Temp. Pend.			T. Verum.			dig.	lin.	part.
Maculae mai. Poſitio horiz. margo ſiniſter -	11^{h}	$48'$	$13''$	11^{h}	$45'$	$57''$	1	$1\frac{1}{2}$	8, 5
margo dexter -	11	51	16	11	49	0	1	$2\frac{1}{2}$	9
Eiusdem Poſitio vertical. -	11	57	30	11	55	14	1	$3\frac{1}{2}$	10
Mac. III. Poſitio vertic. -	12	11	53	12	9	37	1	$2\frac{1}{2}$	1
Mac. III. Poſit. horizont -	12	18	39	12	16	23	1	$4\frac{1}{2}$	16
Mac. in margine poſit. horizont	12	24	21	12	22	5	0	1	17
poſit. vertic. -	12	29	43	12	29	27	0	2	17

Ex his obſeruationibus apparentem trium macularum ſitum in ſchema coniecimus, aſſumpta diametro Solis 359 partium decimalium, ſeu 3 dig. 5 lin. 45 particularum, quo poſito.

Maculae maioris diſtantia a limbo occidentali Solis ſit 131.
a limbo auſtrali - - - - 137.
Maculae 3^{tiae} diſtantia a limbo occidentali - - - - 148.
a limbo auſtrali - - - 125.
Maculae marginalis diſtant. a limbo orientali - - - 013.
ab eodem limbo verſus auſtrum - 023.

Simili ratione et trium reliquarum macularum, et plurium huiusmodi poſitiones ſequentibus diebus a me determinatae ſunt, quarum hic vnum duntaxat exemplum ad eiusdem diei obſeruationes pertinens dedimus.

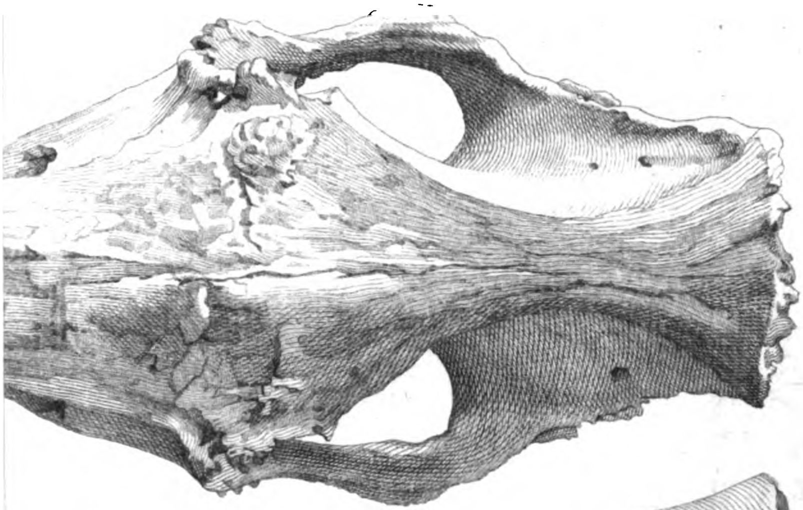


Fig. 2.

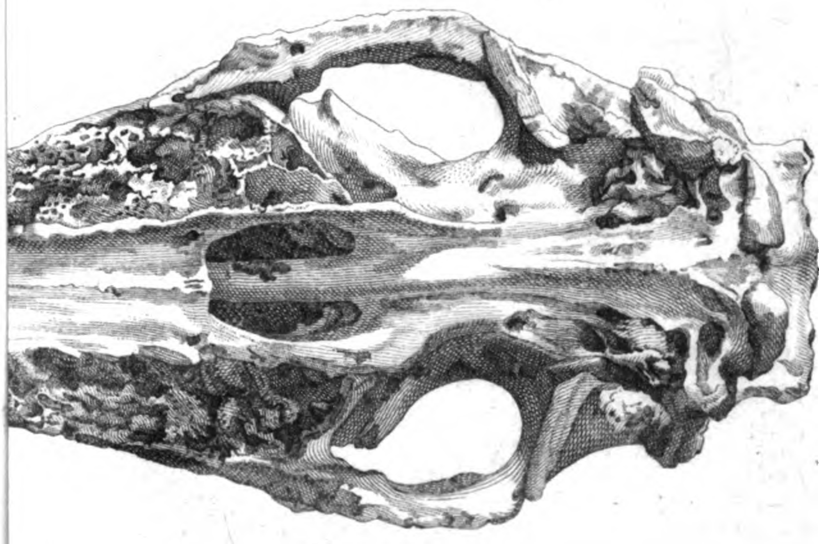


Fig. 2

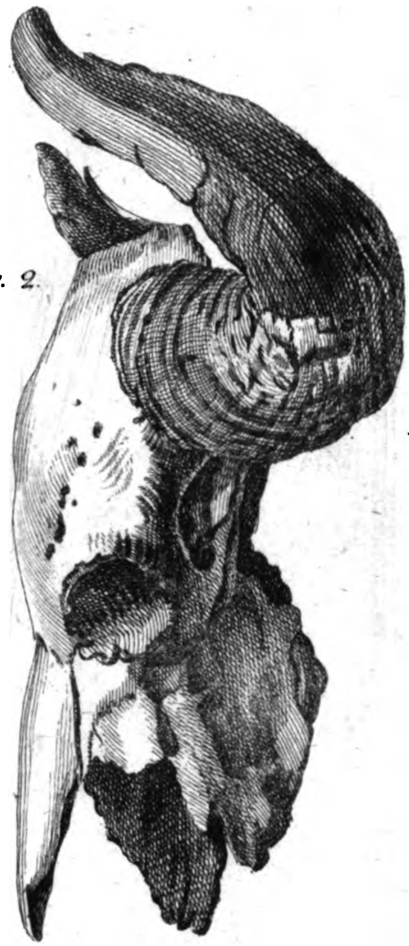


Fig. 2.

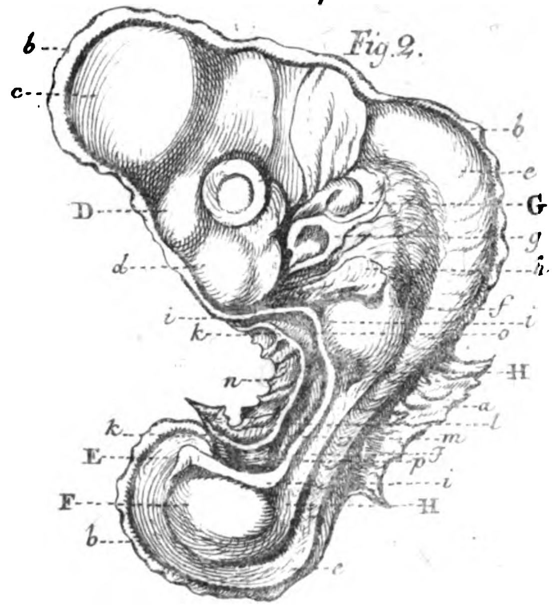


Fig. 4.

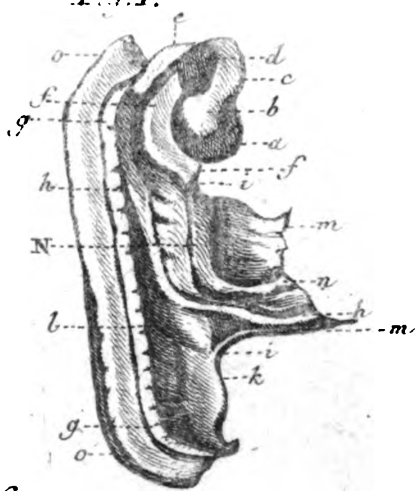
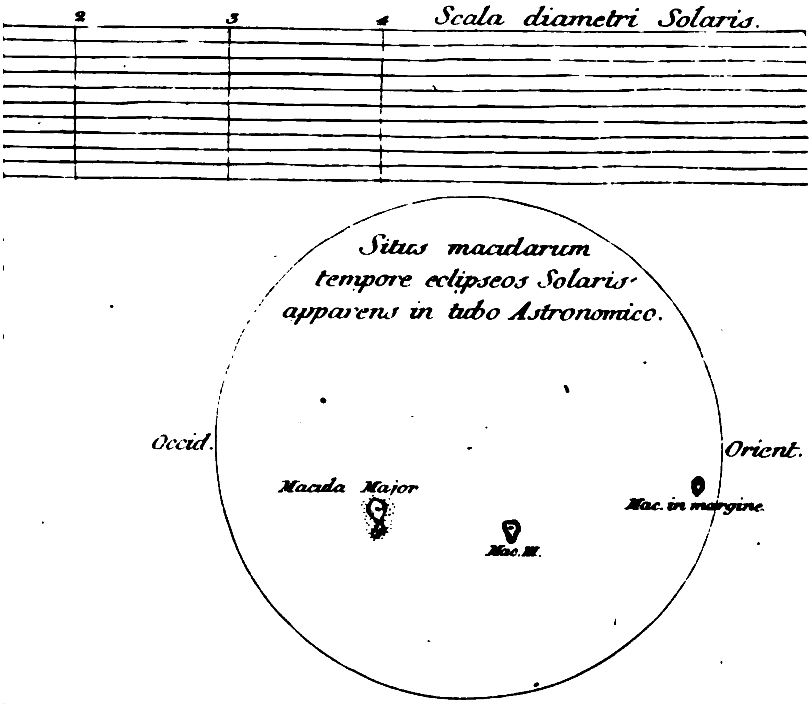


Fig. 6.


2
3
4
Scala diametri Solaris.
Situs macularum
tempore eclipseos Solaris
apparens in tubo Astronomico.
Occid.
Orient.
Macula Major
Mac. in margine.
Mac. III.