NOVI
COMMENTARII
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOM. XI.
pro Anno MDCCLXV.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXVII.

SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XI.

MATHEMATICA.

I.

De vſu functionum diſcontinuarum in Analyſi.

Auctore L. Eulero pag. 3.

Qui problematis de motu cordarum vibratorio ſolutiones dederunt Geometrae, non niſi illum caſum contemplati ſunt, quo figura, cordae ab initio motus impreſſa, regularis et certa quadam aequatione comprehenſa eſſe ſupponitur; alterum vero caſum, ſi haec figura fuerit diſcontinua ſiue irregularis, negarunt ad Analyſin pertinere aut motus inde ſecuturos poſſe vlla ratione definiri. Quae quidem inueſtigatio cum non tantum ex Analyſi minime proſcribenda, ſed ad eam potius nouis inſignibus ſubſidiis ditandam inprimis apta videatur: iam pridem Illuſtris huius diſſertationis Auctor motum cordarum vibrantium generaliſſime ita definiuit, vt ea ſolutio ad omnes motus et figuras, cordae in ſtatu initiali impreſſas, pateret. Statim vero perſpexit Illuſtris Vir, problematis difficultates ſuperare Analyſeos adhuc excultae vires nouamque ad id ſoluendam calculi integralis partem requiri,

 quiri,

quiri, cuius non complura modo in his Commentariis ſpecimina dedit, ſed plenam quoque eius tractationem abſoluto Operi de Calculo integrali, quod typis nunc hic exſcribitur, inſeruit.

Concipiatur ſcilicet corda aliqua tenſa, eique arbitraria quaeuis figura et in ſingulis ſimul ipſius punctis arbitraria imprimatur celeritas. Ductis igitur coordinatis x et y, euidens eſt, adplicatam non pro diuerſis ſolum ipſius curuae punctis, ſed etiam in eodem curuae puncto pro ſingulis temporum momentis variare; adeoque y fore functionem duarum variabilium x et t ſimul, quarum neutra per alteram determinatur. Vt porro in aequatione pro cordae huius motu inuenta ſtatus initialis exprimatur; poſito $t = 0$ relatio inter x et y inde orta figuram cordae initialem repraeſentare debebit, quae cum libero manus ductu formata ſupponatur, functio quaedam diſcontinua aequationem ingredietur, atque ſimiliter, vt ſecundae problematis conditioni ſatisfiat, alia adhuc arbitraria functio, ex motu initiali cuilibet puncto impreſſo definienda, accedat neceſſe eſt. En igitur duas rationes, ob quas propoſitum problema per regulas vſitati calculi integralis reſolui non poteſt; in hoc enim non niſi functiones vnius variabilis pertractantur, cum, etſi plures variabiles aequationibus ineſſe videantur per ſubſtitutiones aut transformationes introductae, eae tamen ita a ſe pendeant, vt omnes per vnam poſſint determinari; deinde quae in calculo

culo integrali communi per integrationes inuehuntur nouae quantitates, non nisi quantitates constantes sunt, minime vero functiones vnius pluriumue variabilium eaeque adeo discontinuae. Huius igitur nouae Analyseos vim et proprium characterem Ill. Auctor clarissime et ex primis principiis exposuit, et cum functionum diuersae classes commodissimam totius calculi integralis diuisionem suppeditent, ex hoc fundamento partes amplissimae huius scientiae distinxit et definiuit, vsumque functionum discontinuarum in Analysi exemplis confirmauit. En igitur campum nouum eumque latissime patentem, in quo summa ingenia ad Analyseos incrementa atque feliciores subinde in naturae scrutinio successus vires suas exercere possunt.

II.

De vsu noui Algorithmi in soluendo problemate Pelliano.

Auctore L. Eulero pag. 28.

In Arithmetica indefinita, quae Diophantea adpellari solet, saepe numero problematum resolutio eo nititur, vt expressiones sub hac forma $lxx+mx+n$ contentae quadrata sint efficiendae; quod,

quod, simulac vnus ipsius x valor quaesito satisfaciens fuerit cognitus, infinite multis modis etiam in integris ipsius x valoribus praestari potest, quicunque etiam pro l, m et n numeri integri ponantur, modo l sit numerus positiuus non quadratus. Atque solutionum harum innumerabilium insigne compendium ex eo petitur, quod constet, omnes istos ipsius x valores idoneos secundum seriem recurrentem progredi, cuius singuli termini ex binis praecedentibus certa et constanti lege determinantur. Semper autem huius generis resolutiones ad hoc redeunt, vt proposito numero quocunque l inueniatur numerus quadratus qq, qui per illum multiplicatus, adscita vnitate, iterum fiat quadratus, siue vt $lqq+1$ fiat $=pp$; quod quidem in fractis atque paucis quibusdam casibus obuiis facile expeditur, verum, si pro quouis valore ipsius l valores ipsius q integri desiderentur, multum difficultatis habet, adeoque dignum omnino est, in quo Geometrarum se exerceat industria. Quam Pellius olim dedit, in se ingeniosissima est solutio; ad quam taediosos autem et molestos calculos, cum continuis radicum extractionibus absoluatur, ea deducat, tentanti mox patebit. Hic igitur Ill. Auctor nouum quoddam Algorithmi genus, cuius vim et naturam iam pridem in his Commentariis demonstrauit, huic problemati adplicuit atque pro omnibus valoribus ipsius l centenarium non superantibus idoneos valores

res q methodo maxime concinna et facili actu computauit. Scilicet vt sit $lqq + 1 = pp$; euidens est, esse proxime $\sqrt{l} = \frac{p}{q}$, quae fractio valorem irrationalem $\sqrt{l}$ tam prope exprimit, vt id, nisi adhibendo maiores numeros, adcuratius fieri nequeat. Ante omnia igitur Ill. Auctor methodum exposuit, ope fractionum continuarum radices quadratas euolvendi; atque tum, adhibitis noui Algorithmi subsidiis, pro quolibet casu p et q ita definire docuit, vt $lqq + 1$ quadratum fieret ipsamque methodum, euolutis multis exemplis, stabiliuit atque illustrauit, idque potissimum in numeris admodum magnis; si enim verbi gratia assumatur $l = 61$; reperitur valor ipsius $q = 226153980$; atque ipsius $p = 1766319049$, vbi simul certum est, non dari numeros minores casui satisfacientes; ad quos numeros cum methodo Pelliana non nisi per taediosissimos calculos peruenire licuisset; non solum huius solutionis praestantia inde demonstratur, sed vix etiam aliud dari potest praeclarius specimen, quo Algorithmi istius noui, ab Ill. Auctore inuenti, egregius vsus Geometris possit commendari.

III.

Proprietates triangulorum, quorum anguli certam inter ſe rationem tenent.

Auctore L. Eulero pag. 67.

Inter elementares triangulorum proprietates ea fere primo loco tradi ſolet, qua, ſi duo anguli in dato quodam triangulo fuerint aequales, etiam duo latera ipſis oppoſita fore inter ſe aequalia demonſtratur. Si igitur, ſpeculatione hac latius extenſa, rationi aequalitatis aliam quamcunque duorum angulorum rationem ſubſtituamus: evidens eſt, etiam inter latera huius trianguli certam et determinatam relationem locum eſſe habituram.

Neque igitur mediocriter doctrina triangulorum amplificari videtur, inuenta certa et facili methodo, ſimul ac in dato quodam triangulo ratio inter binos eius angulos fuerit cognita, relationem inter ipſius latera intercedentem exhibendi; atque hoc ipſum eſt problema, cuius analyticam reſolutionem in praeſenti diſſertatione III. Auctor exhibet, quodque geometrarum ſtudio eo magis commendari meretur, quia ad earum veritatum geometricarum claſſem pertinet, ad quas Analyſis non per-

perducit, fed quibus potius ad altiora tendens ea eft fuperftruenda.

Si igitur ponamus binos trianguli angulos α et β effe inter fe, vti $m:n$; intricatos calculos, ad quos, fimulac ratio $m:n$ vel tantillum affumitur complicata, problema deducit, nullo feliciori compendio fuperare licuit, quam incipiendo a cafu fimpliciffimo atque hinc ad magis compofitos ordine progrediendo. Principio itaque exhibet Ill. Auctor refolutiones illorum cafuum, quibus, pofito $m = 1$, pro n valores 2, 3, 4, 5, 6. fucceffiue affumuntur. Quibus expeditis ex contemplatione formularum pro his cafibus erutarum infignem prorfus et attentione quam maxime dignam legem progreffionis detegere Ill. Auctori contigit; quodfi enim ii cafus, in quibus n valores pares obtinet, ab iis, in quibus n eft impar, feparentur et finguli cafus feorfim inter fe conferantur: admiratione omnino dignum eft, formulas memoratas feriem recurrentem conftituere, cuius et fcala relationis et terminus generalis poffit exhiberi, quae egregia proprietas cum initio non nifi per inductionem fuerit detecta; ne huic nimium tribui videatur, etiam analyticis principiis pro vtraque cafuum claffe ab Ill. Auctore ea ftabilita adeoque inductionis huius cum veritate confenfus rigide eft demonftratus.

In adplicatione huius inueftigationis ad cafus fpeciales triangula potiffimum ifofcelia confiderari merentur; in his enim pro deſcribendis polygonis regularibus ſaepe numero ratio inter angulum verticalem et angulos ad baſin praeſcribi ſolet; atque hic quidem duo caſus diuerſi, prouti angulus verticalis vel multiplum vel ſubmultiplum anguli ad baſin eſt, ſeorſim euoluuntur; ita, vt haec disquiſitio non ad amplificandam modo triangulorum theoriam, ſed in ipſa quoque praxi geometrica inſignem vſum habere ſit exiſtimanda.

IV.

Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum.

Auctore L. Eulero pag. 103.

Speculatio haec circa certa puncta verſatur, quae in quouis triangulo Geometrae contemplari ſunt ſoliti. Primum horum punctorum eſt id, in quo terna perpendicula, quae ex ſingulis angulis in oppoſita latera demittuntur, ſeſe mutuo interſecant, quod punctum in adiectis figuris littera E deſignatur. Secundum punctum, littera F notatum, eſt centrum grauitatis trianguli, quod obtinetur, ſi ex ſingulis angulis rectae latera oppoſita biſecantes ducantur, quippe quae ſe mutuo in hoc puncto interſecant. Tertium punctum G eſt centrum circuli in-

inſcripti, in quo rectae ſingulos angulos biſecantes ſibi mutuo occurrunt. Quartum denique punctum H eſt centrum circuli circumſcripti, quod obtinetur, erectis ad quodlibet latus ex puncto eius medio perpendiculis iisque donec ſeſe mutuo interſecent, prolongatis. Quatuor igitur horum punctorum poſitionem Ill. Auctor generatim pro quouis triangulo definit, vbi ſequentia potiſſimum hic obſeruari merentur: 1^{mo} in triangulo aequilatero haec quatuor puncta in vnum coire 2^{do}. Si triangulum ſit iſosceles, ea puncta in linea recta fore diſpoſita, quae ex angulo verticali perpendiculariter in baſin ducta eſt. 3^{tio} in triangulis acutangulis omnia illa quatuor puncta intra triangulum cadere. 4^{to} in triangulis vero obtuſangulis tantum duo eorum, ſcilicet centrum grauitatis et circuli inſcripti intra triangulum; reliqua autem duo puncta E et H extra triangulum fore ſita; illud ſcilicet E vltra angulum obtuſum, hoc vero H vltra latus ei angulo oppoſitum.

Inprimis vero notatu dignum eſt, quod Ill. Auctor oſtendit, tria horum punctorum E, F et H ſemper in eadem linea recta fore ſita atque adeo punctum F ita fore intra E et H conſtitutum, vt interuallum EF duplo ſit maius interuallo FH; quare cum punctum H ex punctis E et F ſponte determinatur: Ill. Auctor ſequens problema reſoluit; vt ſumtis pro lubitu ternis punctis E, F et G,

 ipſum

ipſum triangulum, ad quod pertinent, conſtruere doceat; id quod commodiſſime ad reſolutionem aequationis cubicae perduxit, cuius ternae radices latera trianguli quaeſiti exprimant. Inprimis autem memorata haec circa poſitionem punctorum E, F et H, obſeruatio Geometrarum attentione digna eſt, quam ſequenti theoremate complecti licet: Si triangulo cuicunque circulus circumſcribatur et a centro circuli per centrum grauitatis trianguli linea recta producatur, donec pars producta duplo maior fiat interuallo inter haec ambo centra: tum eius terminus in eo ipſo puncto erit ſitus, vbi terna perpendicula ex ſingulis trianguli angulis in latera oppoſita demiſſa ſeſe mutuo interſecant.

V.

Obſeruationes Analyticae.

Auctore L. Eulero pag. 124

In praeſenti diſſertatione Ill. Auctor legem et naturam memorabilis cuiusdam ſeriei indagat, quae non ob reconditum modo, quo ipſius termini progrediuntur, ordinem, ſed ob eam quoque rationem peculiari attentione digna eſt, quod varias easque in Analyſi magni momenti obſeruationes faciendi commodam ſuppeditat occaſionem. Inter coeffi-

coefficientes numericos, quibus termini trinomii $1+x+xx$ ad poteſtatem quamcunque eleuati adficiuntur, hic ille tantum conſideratur, qui ad medium terminum pertinet et omnium maximus eſt. Eiusmodi igitur trinomio ordine ad omnes poteſtates exponentium ſecundum numeros naturales progredientium eleuato, ſi ex ſingulis his dignitatibus excerpatur coefficiens termini medii; ſeries inde formata 1, x, $3x^2$, $7x^3$ . . ea eſt, in cuius lege progreſſionis et ſumma indagandis praeſens diſſertatio verſatur.

Atque hic quidem initio, ſi eleuetur trinomium ad poteſtatem indefinitam exponentis n, colligendis in vnam ſummam omnibus iis coefficientibus, qui ad terminum x^n pertinent, haud difficulter terminus ſeriei noſtrae generalis eruitur. Huius igitur ope ſerie ad ſufficientem vsque terminorum numerum continuata, ex intuitu decem priorum terminorum ſeries hanc ſingularem proprietatem prae ſe ferre videtur, vt, ſubtractis ſingulis terminis a triplo praecedentis, differentiae numeros praebeant pronicos, quorum radices ita ſunt comparatae, vt ſeriem conſtituant recurrentem; vnde, et ipſam noſtram ſeriem eſſe talem, concludi et ſcala relationis determinari poſſet. Enim vero cum ſtatim in termino vndecimo cuius a triplo praecedentis differentia ne numerus quidem pronicus eſt, multo

multo minus radicem habet pronicum, haec obſervatio fallat: ſeries noſtra admodum memorabili exemplo inductionis valde probabilis et tamen fallacis, quam caute ei ſit in Analyſi indulgendum, aperte declarat. Miſſa igitur inductione, ex ſolidis Analyſeos principiis lex progreſſionis ab Ill. Auctore ſtabilita et relatio, quae inter ternos terminos contiguos intercedit, detecta eſt, quam quia ipſe exponens n ingreditur, ſeriem noſtram ad genus recurrentium non pertinere, manifeſtum eſt. Definita itaque cuiusque termini ad binos antecedentes relatione; ope cuiusdam integrationis ſumma quoque ſeriei in infinitum continuatae inueſtigatur, quam obſeruamus, fore imaginariam, ſi ſit $x > \frac{1}{3}$ vel ipſi x negatiuos valores tribuendo ſi ſit $x = -y$ et $y > 1$; infinitam vero eſſe caſu, quo $x = \frac{1}{3}$ vel $y = 1$. Ex inuentis hoc modo formulis analyticis methodum multo latius patentem deriuauit Ill. Auctor, cuius ope adeo haec poteſtas multo generalior $(a + bx + cxx)^n$ ita euolui poteſt, vt non medii tantum ſingularum poteſtatum termini, ſed ii quoque, qui vtrinque a mediis aeque diſtant, aſſignari eorumque natura et ſumma facili calculo poſſit inueſtigari.

VI.

VI.

De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium.

Auctore L. Eulero pag. 144.

VII.

De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti.

Auctore L. Eulero pag. 152.

Ex quo corporum coeleſtium leges motus a *Newtono* detectae ſunt, Aſtronomiae ad ſummum faſtigium euehendae ſpes omnis in celebratiſſimi de motu trium corporum ſe ſecundum iſtas leges attrahentium problematis perfecta reſolutione ponenda eſt. Quanquam enim numerus corporum in planetari noſtro ſyſtemate ſeſe mutuo attrahentium maximus imo infinitus ſit; tamen, cum euolutio motus plurium corporum, niſi motu trium expedito, ſperari non poſſit: hic caſus tanquam fons et fundamentum perficiendae ſiderum ſcientiae ſpectari debet. Verum hoc ipſum de tribus corporibus ſecundum leges *Newtoni* ſeſe attrahentibus problema cum ſenſu generali acceptum vires ingenii

 huma-

humani fere tranſcendere videatur; eius ſolutionem ita tentarunt Geometrae, vt illud ſub variis ad minimum reſtrictionibus expedire viamque hoc modo ad ſolutionem generalem munire annitерentur. In binis igitur praeſentibus diſſertationibus Ill. Auctor eiusmodi duo reſoluit problemata, quae illi tam ſunt affinia, vt, his non expeditis, de illo reſoluendo ne cogitari quidem poſſit. In priori ſcilicet eum problematis iſtius celebratiſſimi caſum examini Ill. Auctor ſubiecit, quo tria corpora ſeſe mutuo attrahentia rectilineo motu feruntur, qui, quanquam primus eſt et omnium facillimus, tamen hucusque perfecte reſolui non potuit, hic vero iam ad aequationes differentiales primi gradus inter ternas variabiles ſingularibus quibusdam artificiis eſt reductus. In poſteriori autem diſſertatione Ill. Auctor motum corporis ad duo centra virium fixa in ratione reciproca duplicata diſtantiarum attracti inveſtigauit; atque huius quidem argumenti primam partem, cum ſcilicet motus in eodem cum binis virium centris plano fieri ſupponitur, in ſuperiori Comment. Tomo ita euoluit, vt non ſolum orbitae deſcriptae conſtructionem ope quadraturae curuae cuiusdam admodum ſimplicis exhibuerit, ſed etiam in alia diſſertatione Comment. Acad. Berolin. inſerta infinite multos caſus detexerit quibus curua deſcripta futura ſit algebraica. Quo igitur propoſitae quaeſtioni plene ſatisfiat, in hac diſſertatione Ill. Auctor etiam illum

illum casum resoluit, quo corpus non in eodem plano, in quo centra virium fixa sunt, mouetur; et hic quidem peculiaribus quibusdam artificiis aequationes differentiales ex principiis motus petitae statim ad primum gradum reductae sunt; ternae vero variabiles ita erant inter se complicatae, vt eas resoluendi methodus nulla patuisset, nisi substitutione quadam prorsus singulari non concinnam modo aequationem, sed et a variabilium permixtione immunem elicere Ill. Auctori licuisset; ad quem scopum cum initio per ambages is peruenisset; postea methodum multo breuiorem adeptus est, cuius beneficio vnica substitutione variabilium separatio commodissime obtinetur. Formulas hoc modo inuentas Ill. Auctor etiam ad motus in eodem cum centris virium plano absoluti determinationem adplicat, ostendit que, corpus tali motu delatum non in curuis modo algebraicis, sed sectionibus adeo conicis moueri posse, quarum foci in binis istis virium centris sint constituti.

Quodsi vero corpus non in eodem plano moveatur, notatu quam maxime digna obseruatio est, fieri posse, vt corpus describendo curuam duplicis curuaturae in superficie sphaeroidis elliptici vel conoidis hyperbolici moueatur. Denique etiam hoc notari meretur, ex his formulis casum omnium facillimum difficillime deriuari; adplicatis enim iis ad casum, quo virium attrahentium alterutra euanescit,

nescit, tam prodeunt complicatae aequationes, vt non nisi peculiaribus atque insignibus quibusdam artificiis ab Ill. Auctore adhibitis potuerint resolui; cuius difficultatis ratio vt quodammodo adpareat, perpendendum est, etiamsi in formulis inuentis massam A vel B ponamus minimam et euanescentem, tamen, si corpus satis prope ad eam accesserit, ob distantiam iam euanescentem attractionem inde oriri posse finitam, cuius quasi vestigia quaedam in istis formulis ad hunc casum adcommodatis remanere videantur.

VIII.
De phaenomenis coeli per segmenta sphaerica diaphana spectati.

Auctore L. Eulero pag. 158. (185)

Cum radii a corporibus coelestibus ad oculum propagati atmosphaeram peragrare ibique varias perpeti refractiones debeant; manifestum est, visionis naturam atque omnia coeli phaenomena a medii, per quod radii lucis transire debent, constitutione maxime pendere eaque sub alia prorsus forma fore adparitura, si loco atmosphaerae nostrae aliud quoddam alius materiae medium diaphanum substituatur. Atque hic quidem singularia et notatu quam maxime

xime digna ſe offerunt phaenomena, ſi coelum per ſegmenta ſphaerica vitrea, oculo in axe, ſed extra centrum ſphaerae conſtituto, contueamur, cum ſtellae non de loco ſolum ſuo depulſae conſpiciantur, verum quaedam etiam penitus diſpareant, aliae vero geminatae in diuerſis coeli locis ſint conſpiciendae. Hic vero facile intelligitur, phaenomena coeli hoc modo ſpectati eo magis a veritate diſcrepare, quo maior eſt ſiderum ab axe viſionis elongatio et quo magis oculus a centro ſphaerae remouetur; contra vero omnia perinde, ac nudis oculis, iri conſpectum, ſi ad ipſum centrum ſphaerae adplicetur oculus. Quodſi enim oculi a centro ſphaerae diſtantia ponatur $=d$; radius ſphaerae $=a$; diſtantia ſtellae ab axe $=\Phi$; angulus incidentiae ζ ita per has quantitates determinatur, vt, poſita ratione refractionis $n:1$, fiat $\sin.\zeta = \frac{nd}{a}.\sin.\Phi$; vnde manifeſtum eſt, Φ et d ita augeri poſſe, vt fiat $\sin.\zeta > 1$ adeoque imaginarius; vnde certa quaedam coeli regio vacua et obſcuriſſima adpareat neceſſe eſt, quae maxima euadit, poſito $d=a$, quo caſu ſegmentum ſphaerae in integram ſphaerae ſuperficiem abit. Pro hoc igitur caſu Ill. Auctor in hac diſſertatione primo loco praecipua phaenomena expoſuit atque ex optices principiis demonſtrauit, quomodo ſtella per integram ſphaeram vitream ſpectata ita poſſit adparere, vt circulum quendam lucidum formet et ſimul quoque in ipſius centro conſpicua ſit immo et triplicata videatur; computatur dein ex inuentis formulis tabula, vnde pro ſingulis elongationibus terna eiusmodi loca ſideris adparentia poſſint determinari. Oculo iam porro centro ſphaerae propius admoto, hi inprimis ipſius d valores attentione digni videbantur, quo $d = \frac{a}{n}$ vel $d = a.\sqrt{\frac{1}{n}}$, vbi quidem, cum per hunc oculi ſitum ſphaera in duo ſegmenta, alterum hemiſphaerio maius, alterum minus, diuidatur; pro vtroque ſegmento ſingularia quaedam annotata ſunt phaenomena. Denique cum expreſſionem modo allatam ratio quoque refractionis ingrediatur, facile colligitur, hanc viſionem ſe multo aliter habituram, ſi ſphaerae vitreae globus aqueus ſubſtituatur, cuius caſus expoſitio digna Ill. Auctori viſa eſt, quae ex iisdem principiis deriuetur, et argumentum in dioptricis minime contemnendum conſtituere iure meritoque eſt aeſtimanda.

PHYSICO-

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

Supplementum de figura dentium rotarum.

Auctore L. Eulero pag. 207.

Constat ex principiis mechanicis, quantum pro machinarum constructione in eo momenti situm sit, vt vniformitas motus in omnibus earum partibus, quantum fieri potest, obtineatur, siquidem hoc modo maximus a viribus agentibus effectus exspectari potest; si enim vel tota machina vel tantum partes eius modo celerius, modo tardius, moueantur; hae ipsae accelerationes et retardationes non contemnendam virium agentium partem consumunt; quo ipso effectus, cui producendo machina destinata est, non mediocriter imminuitur. Cum igitur Ill. Auctor iam in IV. volumine horum Commentariorum hoc argumentum tractauisset; iam ibi, quomodo rotarum dentes ad obtinendam in omnibus rotis vniformitatem motus formari oporteat, calculis satis prolixis inuestigauit; nunc vero methodo multo faciliori constructionem geometricam ipsi elicere licuit pro dentibus rotae impulsae ex data

data dentium rotae impellentis figura ita defcribendis, vt vtrinque motus vniformis oriatur et quae vis ad alteram rotandam impenditur, ea perpetuo aequale momentum ad alteram circumagendam exerceat; et ex infinitis modis, quibus hic fcopus obtineri poteft, Ill. Auctor ad eos inprimis attentus fuit, qui ad ipfam praxin maxime accommodati funt vifi; atque grauiffimi huius argumenti, cuius tam praeclarus in mechanicis vfus eft, tractationem non folidiffimis modo principiis fuperftruxit, fed variis quoque exemplis ipfum illius vfum dilucide expofuit.

II.

De motu fluidorum a diuerfo caloris gradu oriundo.

Auctore L. Eulero p. 232.

Argumentum, quod Ill. Auctor in hac differtatione pertractat, non modo prorfus nouum eft, cum nemo adhuc motum fluidorum a calore oriundum geometrice determinare conatus fit, fed ad eam quoque Analyfeos partem eft referendum, quae non ita pridem tractari coepta eft. Hic quidem neutiquam de inteftino illo motu, in quo ex philofophorum fententia caloris caufa ponitur, quae-

ftio

ſtio eſt; ſed eatenus tantum in theoria motus fluidorum caloris ratio habenda eſt, quatenus a calore in maius ſpatium expanduntur fluida, vnde eorum denſitas, a qua potiſſimum motus determinatio pendet, imminuitur. Simulac enim in tubi communicantis vno crure caleſiat aqua ſicque eius denſitas imminuatur: non iam ea cum aqua altero crure contenta in aequilibrio conſiſtet, niſi illius altititudo vltra libellam aliquantillum augeatur. Atque ex his ipſis principiis iam pridem ab Ill. Auctore oſtenſum eſt, non ad aquam modo, ſed et aërem in aequilibrio conſeruandum vbique ad aequales altitudines aequalem quoque denſitatem ideoque etiam aequalem caloris gradum requiri. Qualis vero, ſublato per caloris diuerſos gradus aequilibrio, ſubſecuturus ſit fluidorum motus, Ill. Auctor, noua illa Analyſi a ſe vberius exculta, nunc demum inueſtigare inſtituit, atque, vnde vires huiusmodi motum generantes petendae ſint, qualisque ſit motus ille ex iis oriundus, clariſſime in praeſenti diſſertatione demonſtrat, et facili ratiocinio euincit, ſi in vaſe ſatis amplo aqua ex vna parte admoti ignis ope reddatur calidior, quam in altera, non modo aequilibrium iri ſublatum, ſed aquam quoque in regione infima a parte frigida ad calidam continuo aſcendere, contra vero in regione ſumma a parte calida ad frigidam deferri debere; id quod et obſeruationes vbiuis obuiae luculenter declarant. His in genere obseruatis Ill. Auctor tubum cuiuscunque figurae in se redeuntem contemplatur, cuius alterum latus admoto igne calefiat continuo, dum opposita vasis pars maneat frigida. In hunc igitur tubum si aqua infundatur, ea quidem, dum in calido crure maiorem, quam in frigido, altitudinem occupat, ad aequilibrii statum se componere poterit. Interim tamen, aucta aquae infusae quantitate, aequilibrium iam non habebit locum, sed simulac aqua in tubo contenta certum superauerit terminum, motus ibi perpetuus generabitur; id quod inprimis euenit, quando tubus fluido penitus impletur, quem casum Ill. Auctor praecipuo examini submittit, vbi ex solidissimis Hydrodynamices principiis per calculos satis operosos tandem inuenit, aquam hoc casu per crus infimum continuo ad locum tubi calidissimum adfluere, indeque per crus supremum iterum ad regionem calidam defluere debere, atque adeo huius motus celeritatem in singulis tubi punctis ad quoduis tempus definiuit. In quo inprimis notari meretur, quod hic motus eo magis accelerctur, quo angustior tubus in parte suprema fuerit prae parte infima. Neque dubitat Ill. Auctor, quin inde ad vsum communem plurima insignia subsidia hauriri queant, inter quae maxima fortasse attentione dignus videtur huiusmodi tubus, quem Ill. Auctor ad calefacienda conclavia proponit, quique id praestet commodi, vt in ipso

ipſo tubo ignis ſuſcitari queat, quandoquidem aër in tubo contentus perinde, ac aqua, continuo per tubum motu circulari ſit defluxurus ignemque ſuſtentaturus.

III.

De Admirando Frigore Artificiali quo Mercurius, ſiue Hydrargyrus eſt congelatus Diſſertatio.

Auctore I. A. Braunio pag. 268.

Hoc egregium Inuentum de Congelatione Mercurii ope admirandi frigoris artificialis a V. Cl. Braunio detectum, merito attentionem orbis eruditi et totius Europae excitauit. Nemo enim ante haec experimenta credidit fieri poſſe, vt Hydrargyrus in corpus ſolidum et firmum frigore abeat, aut congeletur. Quoniam igitur ante hoc tempus Mercurius nunquam, vti reliqua metalla, in forma ſolida adparuit, donec Auctor eum adparere in ea coëgerit: multi Mercurio locum inter metalla adſignare dubitarunt; nonnulli tamen locum inter ſemimetalla ei conceſſere. Nunc igitur dubitare non licet, quin Mercurius ſeu Hydrargyrus omnino metallis iisque perfectis ſit adnumerandus.

Adparet enim in forma fluida ob nullam aliam rationem, quam quia fusus est. Non differt igitur ab aliis metallis fusis Plumbo, Stanno, Argento Auro et reliquis, nisi in hoc, quod minimum calorem ad sui fusionem requirat. Ceterum omnium metallorum est mollissimum, ita vt, si clangor ei est tribuendus, tantum obscurus et obtusus tribui debeat, vix vt plumbi et auri puri.

Ceterum malleabilis aeque est, ac metalla reliqua perfecta, et ductilitas quoque ei denegari non potest, vt experimenta docuere, quamuis haec extensio magna esse nequeat, quoniam Mercurius breve tantum tempus solidus manere solet et potest.

Habet igitur Hydrargyrum proprietatem metalli perfecti, sed firmum et in forma solida, vti reliqua metalla, in hoc terrarum orbe adparere nequit, nisi quasi vi, frigore scilicet artificiali cogatur. Errant igitur toto coelo, qui existimant Mercurium ob aquam intermixtam congelari, et in corpus solidum abire, fere, vt lutum molle aqua temperatum conglaciari solet et corpus durum fieri. Nam quemadmodum reliqua metalla, quam primum sufficiens ad fusionem gradus cessat, fiunt solida; et quam primum sufficiens ad fusionem gradus caloris adest, fluida fieri incipiunt; sic Mercurius eodem modo calore quidem exiguo funditur, sed ingenti frigore, maiore quam in omnibus reliquis metallis, in corpus solidum abire solet.

Non

Non defuere, qui exiſtimarent aquam miſceri Hydrargyro in Recipiente dum deſtillatur, et hinc forſitan oriri congelationem. Vt igitur et hoc dubium remoueretur, Cl. Auctor Mercurio ſine aqua deſtillato vſus eſt, qui aeque gelatus et regelatus erat, ac alius. Non opus eſt in re manifeſtiſſima diutius morari.

Ceterum de hoc metallo multi, inprimis Alchemici ſeu Alchemiſtae multas alias fouiſſe opiniones erroneas, conſtat: e. g. quod ſit v. g. baſis metallorum reliquorum etc. At enim vero haec commenta omnia delentur, quam primum intelligitur, Mercurium eſſe metallum idque perfectum.

Hydrargyrum ſub quibusdam circumſtantiis congelari ſolet. Congelatio fit mox completa, mox incompleta et partialis. Si completa fit, bulbus thermometri ordinarie frangitur, quod ſecus eſt, ſi congelatio fit ex parte eoque incompleta.

Porro Mercurius ſi congelari incipit primum regulariter ad certos terminos deſcendit, dein cum ſaltu et motu praecipiti, donec ſubſiſtat. Hi termini ſunt vagi, modo enim profundius, modo minus profunde regulariter deſcendere ſolet, prius quam ſaltus incipit. Eſt hic motus praeceps et ſaltus Mercurio, dum gelaſcit, proprius, in nullo alio fluido ſimile phaenomenum obſeruare licet, dum in glaciem abit, ſeu congelatur. Porro tetminus vltimus ad quem in congelatione dèſcendere ſolet Mercurius,

curius, non est semper vnus idemque, sed vagus. Nam facile intelligitur Mercurium minus profunde descendere, et ad numerum minorem scalae subsistere, si congelatio tantum ex parte facta est, ita vt pars media fluida remanserit, quam si totus solidus factus sit Hydrargyrus. Sed hic terminus in congelatione completa difficilis est determinatu, et ad desiderata cum aliis quibusdam pertinet, quoniam in completa congelatione ordinarie bulbus, cuiuscunque sit figurae, frangi solet. Probabiliter tamen, vt ex variis phaenomenis colligi potest, terminus 650 scalae nostrae adsumi potest.

Sunt alia adhuc desiderata, et aliae quaestiores, quibus A. in altera dissertatione quae supplementa continet satisfacere studuit nouis institutis experimentis. Ceterum methodus ita simplex est congelandi Mercurium, vt quilibet eam, modo sufficiens frigoris naturalis gradus in aëre sit, facile imitari queat.

Hanc dissertationem iam in Conuentu publico Academiae Scientiarum esse praelectam constat, scilicet Sept. 6. MDCCLX, vti quoque fere in omnibus Europae diariis iam est recensita; praeterea quoque integra diuersis diariis est inserta, vt Actis Eruditorum, Transactionibus Anglicanis versa in linguam anglicam. Legitur quoque translata in linguam germanicam in diario germanico quod vocatur, Neue gesellschaftliche Erzählungen p. 24. des IVten Theils

Theils et alibi. Conferri quoque potest Vol. X. P. II. p. 212. Commentariorum Lipsiensium de rebus in Scientia Naturae et Medicina gestis.

IV.

Dissertatio continens partim Additamenta noua et Supplementa ad Dissertationem de Congelatione Mercurii siue Hydrargyri, partim in alia corpora Frigoris artificialis insignioris Nouos Effectus.

Auctore I. A. Braunio pag. 302.

Ex quo tempore dissertatio de congelatione Hydrargyri seu Mercurii est euulgata, inuentor congelationis Mercurii Braunius, experimenta quauis hieme instituere perrexit ad supplenda desiderata, quae in dissertatione priore indicauit.

Quae praestiterit et praestare potuerit Auctor in hac dissertatione indicantur. Non omnia experimenta spei et voto perfecte satisfecere, vti ex sequentibus patebit.

Fuit desideratum praecipuum, ad quem terminum in congelatione perfecta et completa Mercurius descenderet? An non hic terminus nouis experimentis figi posset? Varia, quin innumera experiperimenta noua ab Auctore sunt instituta, quae vero successum optatum omnino non habuere, quoniam omnes thermometrorum bulbi fracti sunt, si Mercurius totus erat congelatus. Tandem thermometra duo sunt adhibita, quorum bulbus sphaericus diametrum $1\frac{1}{2}$ lin. maiorem non habebant. Hi duo bulbi fracti non sunt sed integri perstitere et sine dubio congelatio fuit completa in illis, vel certe proxima perfectae congelationi. Descendit enim Mercurius in vno thermometro ad 630. in alteroad 640.

Quum ob varias rationes in priore dissertatione ab A. adductas, punctum congelationis Mercurii, non vt punctum congelationis aquae, perfecte figi possit: numerus 650 in priore dissertatione iam indicatus tanquam numerus medius pro puncto congelationis completae retineri potest.

Quod ad terminum alterum attinet, ad quem, antequam cum saltu moueri praeceps incipiat; multis nouis experimentis captis compertum est, eum manere vagum. Modo enim regulariter descendit tantum ad 350, prius quam cum impetu moueri inciperet, modo ad 400. modo ad 500. 530. et denique ad 550. Hic terminus maximus est, ad quem Mercurius regulariter descendit ante saltum. Hic terminus confirmare videtur punctum congelationis Mercurio positum 650. Nam a saltu ad terminum vltimum congelationis omnino poni posse sine errore notabilili 100. gradus videtur.

Varia

Varia alia in dissertatione priore proposita sunt confirmata. Certum est thermometra Mercurialia et Spiritu, item Oleis essentialibus repleta in maioribus frigoris gradibus non amplius concordare, quamuis in minoribus perfecte concordauerint. Nam Spiritus vini et olea essentialia vltra 300. vix descenderunt, quum tamen in aliis thermometris Mercurio repletis Mercurius esset gelatus. Habent sine dubio et fluida suos contractionis terminos et limites; qui pro diversitate fluidorum sunt diuersi.

In descensu praecipiti Mercurius mensuram frigoris adcuratam amplius non exhibere et exhibere posse omnino videtur.

Si Mercurius congelatus digito tangitur, statim in eo loco, vbi contactus factus est, caro gelatur.

Confirmatum porro est, quo frigus naturale maius est, eo melius congelationem procedere, minimus gradus est 175. sed tamen congelatio sub hoc frigoris gradu non fit completa, sed ad completam congelationem minimum frigus 185° requiritur, ceteris paribus.

Spiritus nitri *Glauberianus* et Aqua fortis fumans optima fluida manent ad frigus artificiale insigne excitandum.

Confirmatum est etiam Mercurium purissimum paullo difficilius gelascere. Porro nix recens lapsa semper praeferenda est alii et vetustiori, quemadmodum quoque ſpiritus nitri recens melior eſt vetuſtiori.

Ceterum mirabile omnino eſt Spiritum vini rectificatiſſimum congelationem Hydrargyri, licet incompletam quoque produxiſſe.

Reliqua minoris momenti praeterimus. Promiſit Auctor, ſi quid noui adhuc detegere poteſt, in poſterum fauente hieme et occaſione, cum Academia ſe communicaturum.

V.

Obſeruationes Meteorologicae etc.

pag. 320. et ſqq.

Sunt quatuor Commentationes, quae de Obſeruationibus meteorologicis agunt. Tres pertinent ad Petroburgenſes a *Braunio* inſtitutis, annorum MDCCLXI. MDCCLXII. MDCCLXIII; vna vero ad obſeruationes anni MDCCXLII. in itinere ex Sibiria Petropolin verſus a. *I. G. Gmèlino* inſtitutas, in ordinem vero a *Braunio* redactas. Quia hae vltimae obſeruationes in itinere ſunt factae, facile intelligitur in diuerſis locis eas eſſe factas, hinc corollaria omnia inde deduci non poſſe, quae alias ex obſeruationibus in vno loco factis, deduci poſſunt. Notatu tamen digna non pauca conti-

continent. Pertinet huc praecipue Halonum frequentia et ſingularitas. Inprimis illa halo lunae ſingularis eſt notanda, quae Decembris 1^{mo} huius anni Werchoturiae eſt conſpecta, cuius icon eſt adiecta. Porro notatu digni ſunt quidam frigoris inſignioris gradus, vt 238. 260. et vltra. Nam Mercurius omnis in bulbum deſcendit, licet diuiſio ſcalae eſſet 260. Frigus hoc intenſiſſimum perpetua tenui nebula, quaſi aëre congelato, erat comitatum, quae nebula omnino memorabilis eſt. Calor maximus harum obſeruationum eſt 109. non inſignis Huc etiam referenda aurorarum borealium frequentia eſt. Alia phaenomena notabiliora praeterimus, et lectorem ad ipſas obſeruationes remittimus.

Remittimus quoque ad ipſas obſeruationes petropolitanas, quae 1761. 1762 et 1763. ibi ſunt factae, ſi prius ſequentia monuerimus. Frigus maximum fuit 1761. graduum 193. et calor maximus = 105. 1762. frigus maximum = 195. et calor maximus 109. A. 1763. Frigus maximum = 204. Calor maximus = 100.

Item altitudines Bar. maximae et minimae his tribus annis 1761. 1762 et 1763. fuere ſequentes. A. 1761. maxima 28. 95 et minima 26. 85. 1762. maxima = 29. 03. minima 27. 10. A. 1763. maxima = 28. 92. minima 26. 53.

In obſeruationibus vero Sibiricis A. 1742. barometri alt. non occurrit maior quam 28. 28.

Minima vero eſt = 25. 32. Haec igitur multo minor eſt, minima Petropoli obſeruata 26. 41. Maxima quoque 28. 28. minor eſt maxima 29. 12. Petropoli alias aduotata.

Notamus adhuc frequentiam aurorarum borealium anni 1762. Numeratae et notatae ſunt 18. Ceterum, aurorae boreales hic modo frequentes, modo paucae, modo nullae, certe inſigniores adparere ſolent certis et diuerſis annis, vti obſeruationes docuere. In reliquis ad ipſas obſeruationes remittimus.

PHY-

PHYSICA.

I.

Descriptiones Insectorum atque Auium Indicarum Musei Petropolitani, ut et Fuci foliacei noui.

Auctore I. T. Koelreuter p. 401.

Quam in describendis rarioribus Musei nostri piscibus, eandem Cel. *Koelreuter*, tempore quo apud nos vixit, in selectis ex eodem Museo insectorum atque auium speciebus diligentiam praestitit, quorum laboriosissimae eius hoc volumine proponuntur adumbrationes. Et quamuis non omnia ex iis, quae prosecutus est, plane noua sint, sed pleraque passim apud auctores nominata atque verbis descripta, imo depicta quoque occurrant: Digna tamen ea quoque visa sunt quae retractarentur atque accuratioribus, quam factum est, iconibus illustrarentur.

E quinis Scarabaeorum Americanorum speciebus, quas priori loco describit noster, seriem orditur nota species, Scarabaeus Actaeon *Linnaeo* dictus, cuius variabiles formae quinis e speciminibus verbis partim et iconibus exponuntur. Altera, S. Simsoni

Linnaei affinis, vt et tertia, quarum a nullo vſpiam auctore diſtincte facta eſt mentio, pro novis haberi poſſunt. In quarta ſpecie tantum monentur varia, imprimis colorem elytrorum fugacem, a cruſta tenuiſſima liueſcente deriuandum, levesque in forma ſeptenorum Muſei ſpeciminum luſus concernentia. Demum in quinta, praeter brevem deſcriptionem, vendicatur ſynonymon *Swammerdamii* a *Linnaeo* perperam ad quartam noſtram citatum.

Auium a Clariſſ. Auctore deſcriptarum prima, a *Linnaeo* olim inter Meropes, in nuperrimo vero Syſtemate ad Vpupas relata, etiam in *Sebae* theſauro ruditer depicta exſtat; meliorem eius dedit iconem *Briſſonius* atque Promeropem vocauit, (ornith. vol. 2. p. 461. tab. 43. f. 2.) quae tamen inter Certhias et Vpupas media, priori potius generi relinquenda videtur.

Etiam in reliquis auiculis, quas pulcherrimas deſcripſit noſter, notandum eſt, easdem pariter in ditiſſima *Briſſonii* ornithologia deſcriptas atque delineatas fuiſſe, illud vero opus tunc, cum obſeruationes ſuas Academiae traderet noſter (A. 1760. menſ. Octobr. XX.), nondum in publicum editum fuiſſe. Hinc neceſſarium viſum eſt de ſingulis ad *Briſſonium* referre, vt eum, qui velint, ſine taedioſo conferendarum ſpecierum labore adire poſſint.

Itaque

Itaque Certhia, quae inter auiculas noſtras ſecunda eſt, a *Briſſonio* oper. cit. vol. 3. p 636. tab. 23. fig. 2. nomine: Certhiae cayennenſis viridis, propoſita eſt. Tertia et quarta noſtrarum, ab eodem ad peculiare genus, quod Tangaras ille (et ex eo *Linnaeus* Tanagras) appellauit, referuntur, vocanturque prior: Tangara braſilienſis nigro-lutea ornith. vol. 3. p. 31. tab 2. f. 2, 3; poſterior: Tangara peruuiana viridis l. c. p. 23. tab. 4. f. 1. Quinta e noſtris eſt, quam *Briſſonius* Manacum albifrontem ornith. vol. 4. p. 457. tab. 36. f. 2., *Linnaeus* mutato, vt ſolet, nomine Pipram ſerenam, compellarunt. Sextae conuenit Certhia braſilienſis coerulea ornith. vol. 3. p. 626. tab. 3. f. 4. a *Linnaeo* iam antea ex optimi *Edwardſii* icone dicta. Septima eſt Icterus ſeu Xanthornus icterocephalus ornith. vol. 2. p. 124. tab. 12. f. 4. idemque Sturnus flauiceps *Edwardſii* et Oriolus icterocephalus *Linnaei*. Octaua apud *Briſſonium* proſtat nomine Trogonis cayennenſis viridis ſeu Curucui *Marcgrafii* ornith. vol. 4. p. 168. tab. 17. f. 1. Nona titulo Fringillae capenſis ornith. vol. 3. p. 171. tab. 16. f. 1. quem cum Loxiae capenſis nomine *Linnaeus* commutauit. Et decima tandem Muſcicapa tyrannus *Briſſonio* audit ornith. vol. 2. p. 391. *Catesbaeo* Muſcicapa corona rubra, et Lanius tyrannus *Linnaeo*.

Lau-

Laudanda etiam eſt induſtria, quam in deſcribendo nouo et ſingulari Fuco collocauit noſter, eoque magis commendanda, quod nulla huius fuci vel apta icon vel mentio certa apud Botanicos facta occurrat; quum etiam ſynonyma, quae huc vtcunque facere videbantur et citata ſunt, certiſſime aliam, in Mari Germanico ſatis vulgarem ſpeciem ſignificent. E Mari Albo plantam ſuam habuit noſter; ſed et Mediterraneo communis eſt, et congenerum omnium maxime ſimilis videtur Lichenibus ſic dictis foliaceis.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

I.

Expoſitio obſeruationum occaſione tranſitus Veneris per diſcum Solis in vrbe Selenginsk inſtitutarum.

Auct. Steph. Rumovski p. 443.

Diſſertatio iſta, aeque ac ſequens poſt reditum auctoris ex Sibiria, quo ablegatus fuerat ad Venerem in Sole obſeruandam, typis iam excuſae ſunt; locum tamen iis Academia Scientiarum in Commentariis concedendum eſſe ideo duxit, quod numerus exemplarium tunc excuſorum fuerit exiguus.

Praecipuus finis, quem Cl. Auctor diſſertatione hac intendit, is eſt, vt ob oculos ponat obſervationes, quas ille hac occaſione in vrbe Selenginsk inſtituit: id circo ſollicite perſequitur omnes circumſtantias, ſub quibus illae peractae ſunt. Obſervationibus, pro definienda Latitudine obſeruatorii ſui inſtitutis, praemittit verificationem quadrantis ad horizontem, et pro determinando valore partium micrometri quadranti affixi, obſeruationes ſuper diame-

diametro Solis Petropoli captas, ac tandem ſiſtit ipſas obſeruationes Latitudinem ſpectantes, ex quibus concludit illam $51^{\circ}.6'.6''$.

Tranſitum Veneris per diſcum Solis praeceſſit Eclipſis Solis incidens in diem 23. Maii, cuius finem tantum Auctori obſeruare licuit.

Iam a longo tempore ante tranſitum Veneris per Solem Cl. Auctor ad examen reuocare cepit motum horologii ſui per altitudines Solis correſpondentes, et ope tranſitus ſtellarum fixarum; appropinquante tamen tranſitu Veneris ſumſit die 24 Maii altitudines Solis correſpondentes, et poſt eum die 19. Maii; ex quibus, aeque ac ex praecedentibus obſeruationibus, reperit motum horologii ita fuiſſe vniformem, vt inde ne minimus quidem error fuerit pertimeſcendus. Ipſa vero dies, qua tranſitus Veneris euenit, ita cecidit aduerſa, vt parum ab fuerit, quin incaſſum ceciderint ſumtus et opera in expeditionem impenſa: nec niſi fine huius phaenomeni obſeruatori frui quodammodo licuit. Contactus internus limborum Solis et Veneris, facta debita reductione, per nubem obſeruatus fuit $3^{h}.21'.36''$ quam proxime, et externus $3^{h}.39'.42''$, ita vt mora Veneris in limbo Solis ſit $18'.6''$. Obſeruatio peracta eſt tubo 15 pedes longo.

Abſo-

Abſolutis iis, quae ſpectant obſeruationem Veneris in Sole, procedit Auctor ad expoſitionem obſeruationum definiendae Longitudini Vrbis Selenginsk inſeruientium: Inter eas occurrunt quinque obſeruationes ſuper eclipſes Satellitum Iouis, et duae ſuper occultationes ſtellarum fixarum a Luna; quarum altera eſt φ ſagittarii, altera *k* Tauri. Interea vero, dum phaenomena haec operiretur, incubuit definiendae longitudini penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda Selenginski oſcillantis. Ope authomati pendulo inuariabili inſtructi reperit illam $36^{dig.} 8^{lin.}, 56$; per experimenta vero ope penduli ſimplicis inſtituta $36^{dig.} 8^{lin.}, 62$.

Determinationes iſtae ſupponunt longitudinem penduli ſimplicis Pariſiis ad ſingula minuta ſecunda in temperie aëris 12°. ſupra 0, oſcillantis $36^{dig.} 8^{lin.}, 55$; quodſi alia Pariſiis ſtatuatur, Selenginskenſis quoque aliquam mutationem ſubeat neceſſe eſt.

Ex obſeruationibus authomato pendulo inuariabili inſtructo inſtitutis per quam vtile corollarium, idemque quod *Griſchouius* ex ſuis experimentis, in Tomo VII. Commentariorum relatis, deduxerat, elicit Cl. Auctor: nempe variationem vnius gradus thermometri Reaumuriani ſpatio diei ſolaris medii producere variationem vnius quam proxime oſcillationis in motu penduli inuariabilis.

His ſubiungit obſeruationes metheorologicas, quas in vrbe Selenginsk inſtituit. Inde rediens, dum in vrbe Irkutsk commoraretur, operam dedit, vt Latitudinem illius definiret. Ex obſeruationibus Lucidae Aquilae, quas pro exactis habere non dubitat Cl. Auctor, concludit illam $52°.18'.15''$.

II.

Inueſtigatio parallaxeos Solis ex obſeruatione Tranſitus Veneris per diſcum Solis Selenginski habita, collata cum obſeruationibus alibi inſtitutis.

Auct. Steph. Rumovski p. 487.

Poſt quam obſeruationes tranſitus Veneris per diſcum Solis in diuerſis locis peractae in lucem prodierunt, conſtituit Cl. Auctor indagare quantam illae inter ſe collatae praebeant Solis Parallaxin. Combinatio iſta tuto inſtitui nequit, niſi certiſſime conſtet poſitio locorum, in quibus obſeruationes peractae ſunt, praeſertim eorum Longitudo, ſi ex vnico contactu quantitas parallaxeos Solis ſit indaganda. Breuibus id circo ex diſſertatione praecedente repetit

tit Cl. Auctor, quae ibi de Latitudine vrbis Selenginsk commentatus eſt. Poſtmodum accingit ſeſe ad definiendam Longitudinem obſeruatorii ſui; et primum quidem ex fine Eclipſeos Solis, nulla Tabularum adhibita correctione, eruit illam $6^h. 57'. 30''$. Obſeruationes Satellitum Iouis collatae cum momentis ex Tabulis Cel. *Wargentini* elicitis, ac ad mentem eius correctis, diuerſam ab hac praebuerunt Longitudinem, exiſtente maxima $6^h. 57'. 21''$ et minima $6^h. 56'. 49''$. Omnium vero media $6^h. 57'$ $8''$ etſi concordat cum ea, quae immediate ſequitur ex Immerſione I. Sat. in Inſula Rodrigues et Selenginski obſeruata, verum notandum eſt Longitudinem Rodrigues maiorem hic aſſumtam fuiſſe, quam a Cel. *Pingre* ſtatuitur.

Conſtituta iam Latitudine Selenginsk $51°. 6'.$ $6''$ et Longitudine a meridiano Pariſino computata $6^h. 57'. 8''$ progreditur ad determinandam ex mutua obſeruationum combinatione parallaxin. Aſſumto momento coniunctionis et Latitudine Veneris apparente, qualem praebuerunt obſeruationes a *Bliſſ* peractae, reliqua elementa ſcopo ſuo neceſſaria depromit ex tabulis *Halleianis*; ac poſita parallaxi Solis $8\frac{1}{2}''$ ſemitam Veneris apparentem Grenovici viſam reducit ad centrum telluris: vbi inueſtigat momentum contactus interni in exitu ad meridianum Grenouicenſem. Hoc inuento dataque differentia meridianorum Grenouicenſis et loci cuiusdam, vbi obſeruatio eſt peracta, reperit momentum contactus veri ad meridianum illius loci, ac pro eodem computat effectum parallaxeos, ſiue tempus quo citius aut tardius ex eo loco quam ex centro telluris contactus ſpectaretur, ſi parallaxis ſolis foret $8\frac{1}{2}''$.

In peculiari Tabula exhibentur loci et obſervationes, ex quibus per mutuam combinationem quantitatem parallaxeos Solis inueſtigare annifus eſt. Obſeruationem Capitis Bonae Spei combinauit cum decem aliis; ſuam vero non niſi cum iis, in quibus differentia effectuum a parallaxi proficiſcentium non minor eſt quatuor minutis primis. Omnes iſtae combinationes egregie inter ſe conſentiunt, et parallaxin Solis non minorem 8″ nec maiorem $8\frac{1}{2}''$ ſtatuendam eſſe indigitant.

Diſſertationi huic ſubiungitur additamentum, cui anſam praebuit obſeruatio Rodriguenſis. Cel. *Pingre* in diſſertatione Commentariis Academiae Scientiarum Pariſinae in annum 1761. editis inſerta, ex contactu interno in Inſula Rodrigues obſervato, collato cum obſeruationibus in Europa peractis, parallaxin Solis horizontalem concludit 10″, 4. Obſeruationes in Suecia et Tobolii peractae collatae cum Rodriguenſi diuerſam equidem praebuerant illi parallaxin; verum aucta Longitudine Stockholmiae ac proinde Tobolii, Torneae, Caiane-
burgi

burgi et Vpſaliae 21″, eandem quam proxime obtinet parallaxin. Vnica itaque Selenginskenſis ſupererat, quae cum Rodriguenſi collata parallaxin Solis non niſi 9″, 38 praeberet. His permotus Cl. Auctor examen inſtituit obſeruationis ſuae, vtrum ob nubilam caeli faciem, aliasue circumſtantias momentum contactus interni in exitu Selenginski obſeruati, integro fere minuto primo minui poſſit, vt collatum cum momento Rodriguenſi 10″, 4 praebeat Solis parallaxin: ac perpenſis omnibus rationibus oſtendit, nullatenus tantum errorem in obſeruationem illius irrepere potuiſſe; quin potius error, ſi quis ex nubila caeli facie originem traxerit, ad diminuendam, non vero ad augendam parallaxin Solis fecerit neceſſe eſt.

Obſeruatio Rodriguenſis collata cum Selenginskenſi dabit quoque parallaxin Solis 10″, 4, ſi Longitudo Selenginski augeatur integro minuto primo. Ad examen igitur reuocans et Longitudinem obſeruatorii ſui antea ſtabilitam inquirit Cl. Auctor, quousque illa augeri poſſit; ac oſtendit, ex obſeruationibus Satellitum Iouis, vtrouis modo Longitudinem inueſtigare placuerit, ſiue conferendo illas cum momentis e Tabulis depromtis, ſiue cum obſeruationibus in aliis locis peractis, et paucis diebus a Selenginskenſibus remotis, eandem quam proxime reſultare Longitudinem.

Occul-

Occultatio ϕ ſagittarii a Luna ex obſeruationibus Satellitum Iouis deductam Longitudinem optime confirmat: Si computus ſuperſtruatur Tabulis *Maieri* ad mentem Cel. *Pingre* correctis, Longitudo Vrbis Selenginsk prodit $6^h.57'.13''$ aut $15''$. Vnde non ſine ratione concludit Cl. Auctor Longitudinem Selenginski non maiorem $6^h.57'.14''$ ſtatui, et obſeruationem Rodriguenſem collatam cum Selenginskenſi nullatenus parallaxin Solis $10'',4$ praebere poſſe.

Abſoluto examine Longitudinis Selenginski et obſeruationis ibidem habitae, ſiſtit obſeruationem Pekini peractam, ac Longitudinem illius nouiſſimis obſeruationibus ſuperſtruit. Ex plurimis obſeruationibus Satellitum Iouis vndique collectis, et ex tranſitu Mercurii Parſiis et Pekini anno 1753. die $\frac{25.\ Apr.}{5.\ Maii}$ obſeruato, tandem concludit Longitudinem obſeruatorii Ieſuitarum Gallorum, vbi obſervatio Veneris peracta eſt, non minorem $7^h.35'.45''$ ſtatui debere. Cel. *Monnier* in Commentariis Academiae Scientiarum Pariſinae in annum 1763. editis eandem fere aſſumit Pekini Longitudinem: nempe $7^h.35'.40''$; id quod egregie concordat cum determinatione Cl. Auctoris. Quibus vero rationibus fultus Longitudinem iſtam aſſumſerit Cel. *Monnier*, nulla fit mentio.

Statu-

Statuta iam Longitudine obſeruatorii, vbi obſeruatio Veneris eſt peracta, inquirit Cl. Auctor quanta ex obſeruatione Pekinenſi cum aliis collata reſultet Solis parallaxis: et cum ex combinatione illius cum aliis eandem circiter reperiſſet, quam praebuerunt obſeruationes ad Caput Bonae Spei et Selenginski peractae, concludit, obſeruationem Rodriguenſem nullatenus conſiſtere poſſe: praeſertim cum Cel. *Wargentinus* ſe per nouiſſimas obſeruationes comperiſſe teſtetur, Longitudinem Stockholmiae non maiorem $1^h.2'.52''$ ſtatui debere.

Ad calcem diſſertationis vno laterculo complectitur Cl. Auctor quantam dent Solis parallaxin obſeruationes ad Caput Bonae Spei, Pekini, Selenginski et in inſula Rodrigues peractae. Poſt quam vero diſſertatio iſta anno 1764. typis excuſa eſt, Longitudines quorundam locorum in laterculo nominatorum certius ſunt definitae, idcirco nonnullae parallaxeos determinationes ibi exhibitae immutari debuiſſent; Verum Academia Scientiarum ſatius eſſe duxit, prout impreſſa eſt, ita et hic eam excudere, diſcrimen vero ex Longitudinibus correctis oriundum hic peculiari exhibere laterculo.

Nomina Locorum	Longitudo eorum	Parallaxis Solis horizont. reſultans comparatione obſeruat habitae.			
		ad C. B. S.	Pekini	Seleng.	in Rodrig.
Rodrigues	$4^h. 3'. 26''$	$5'',89$			
Pekin	7. 35. 45	$8''.51$			$9''.39$
Selenginsk	6. 57. 14	8. 46			9. 49
Tobolsk	4. 23. 51	8. 60	$7''.73$	$7''.34$	9. 92
Tornea	1. 27. 49	8. 53	8. 43	8. 13	9. 95
Caianeburg	1. 41. 40	8. 64	8. 05	7. 75	10. 13
Vpſala	1. 1. 12	8. 61	8. 17	8. 00	10. 26
Stockholm	1. 2. 52	8. 35	8. 96	8. 76	9. 88
Göttinga	0. 30. 16	8. 50	8. 57	8. 42	10. 48
Grenouicum	0. 9. 16 oc.	8. 51	8. 50	8. 42	10. 54
Pariſii	0. 0. 0	8. 53	8. 47	8. 39	10. 74
Bononia	0. 36. 5	8. 58	8. 44	8. 30	11. 00
Roma	0. 40. 40	8. 62	8. 46	8. 27	11. 35

Longitudo Capitis Bonae Spei a meridiano Pariſino computata ſtatuitur hic $1^h.4'.15''$.

III.

III.

Eclipſis Solis inſignis d. 1. Apr. an. 1764. Styl. Nov. temp. civ. obſeruatio Lipſiae habita.

Auctore G. Heinſio pag. 539.

IV.

Obſeruationes aliquot coeleſtes ann. 1765 et 1766. Lipſiae habitae.

Auctore G. Heinſio pag. 557.

Eclipſis ſolaris, quae d. 1. April. an. 1764. ſt. n. contigit et cuius potiora momenta in hac diſſertatione recenſentur, obſeruatio ita a Cel. Auctore Lipſiae inſtituta eſt, vt non per tubum modo aſtronomicum optimae notae ſolem immediate contemplaretur, ſed etiam in imagine ſolari, per machinam helioſcopicam repraeſentata, phaenomena obſervaret; cumque non ipſi ſolum obſeruationi, ſed praeuio etiam ſtatus horologiorum examini plena fauiſſet coeli ſerenitas, has ipſas obſeruationes inprimis aptas eſſe cenſuit, in quibus, quid de pretio methodi phaenomena eclipſium ſolarium ope machinae helioſcopicae obſeruandi ſtatuendum ſit, data opera inueſtigaret. Repraeſentauit haec machina diametrum Solis ſub magnitudine 4 dig. $2\frac{2}{3}$ lin.

 menſ.

menf. Parif. duodec. in qua Cel. Auctor ope circini et fcalae geometricae pro compluribus Eclipfeos momentis diftantiam cornuum feu chordam defectus et latitudinem maximam partis lucidae determinauit. Iam quidem ex ipfa rei natura manifeftum eft, cum in repraefentatione Solis per machinam heliofcopicam initium eclipfeos tum demum fub fenfus cadere poffit, cum luna limbum imaginis folaris iam aliquantillum penetrauit; finis autem, cum limbus lunae adhuc cum margine imaginis folaris confunditur, obferuationes hac methodo inftitutas ab iis, quae per tubos aftronomicos immediate fiunt, non nihil difcrepare debere; quo tamen difcrimine non obftante, deducendo ex obferuationibus vtriusque claffis tempus obfcurationis maximae, Cel. Auctor tam exiguam deprehendit differentiam, vt methodum hanc conclufiones fufficienter inter fe confentientes fubminiftrare, et machinam heliofcopicam non fine fructu in obferuationibus eclipfium folarium adhiberi, ftatuendum fit. Praecipua autem, qua haec methodus premitur, difficultas in eo pofita eft, quod ad determinandum tempus maximae obfcurationis partes lucidae ante et poft obfcurationem maximam *aequales* ab eaque non nimis remotae vna cum temporibus ipfis refpondentibus cognitae requirantur; quae fi non habeantur, (vt plerumque fit) partis lucidae ex vno latere refpondentis defectus ope interpolationis fupplendus eft; hoc igitur graui incommodo methodum, quae fua fe vtilitate iure commendat, Cel. Auctor feliciter libe-

liberauit, modum ostendendo, ex tribus partibus lucidis quomodocunque inaequalibus in vicinia obscurationis maximae sumtis vna cum temporibus ipsis respondentibus tres distantias centrorum Solis et lunae inueniendi; quibus praemissis problema resoluit, cuius in aliis quoque obseruationibus congressus duorum corporum coelestium, v. g. transitus Veneris vel Mercurii per Solem insignis vsus est, vt scilicet datis tribus centrorum ☉ et ☽ distantiis cum temporum respondentium interuallis distantia centrorum minima et tempus obscurationis maximae calculis admodum concinnis inueniatur; quae vero methodus cum diametrum Lunae cognitam atque in partibus scalae supra memoratae expressam supponat; haec quidem diameter ex cognitis chorda defectus, parte lucida et radio imaginis solaris inueniri posset; cum vero chordae defectus, et partes lucidae alternis tantum vicibus obseruari possint, interpolatione hic opus foret, vnde, in eo casu, quo immediata diametri lunaris dimensio non conceditur, eam ex calculo petere, et parte aliqua ob repraesentationem in fundo lucido minuere, Cel. Auctor, tacto periculo, deprehendit esse consultius. In altera dissertatione praeter *Initium Eclipsis* solaris partialis d. 16. Aug. 1765. celebratae, quod Cel. Auctori obseruare licuit, duae obseruationes transitus Lunae per Pleiades annis 1765. d. 13. Iulii et 1766. d. 22. Septemb. ab ipso institutae recensentur. In priore harum obseruationum Cel. Auctor

ad

ad acceſſum Lunae ad Lucidam Pleiadum, quam a Lunae limbo lucido occultatum iri ſuſpicabatur, inprimis attentus fuit. Quod etſi non accidit, cum Luna Lucidam Pleiadum in certa aliqua diſtantia praeteriret; tamen Cel. Auctor verum tempus coniunctionis, id eſt, illius poſitionis, in qua linea recta ſtellam et cuſpidem Lunae inferiorem iungens perpendicularis ad proximam Lunae marginem viſa eſt, ad pauca minuta ſecunda exacte determinauit; inopinato alius quoque ſtellulae, Lucidae Pleiadum admodum vicinae, et a *Flamſteedio* in Catal. Brittan littera P notatae, emerſionem obſeruauit eiusque tempus verum adcurate definiuit: In posteriori obſeruatione Cel. Auctor primum ſemitam centri Lunae, habita ratione parallaxeos, ad *Maiam* einsque circulum latitudinis ex elementis in Ephemerid P. *Hellii* obuiis in ſchemate repraeſentauit, eique inſigniores in conſtellatione Pleiadum ſtellas per differentias longitudinum et latitudinum, quales a *Flamſteedio* ſuppeditantur, inſeruit; eoque id conſecutus eſt, vt, quas vel occultationes vel incidentias harum ſtellarum in lineam cuſpidum obſeruauerat, diſtincte recenſere potuerit. Inprimis vero ex obſeruatione circa occultationem *Maiae* habita id Cel. Auctor animaduertit, poſitionem *Maiae* a P. *Hellio* determinatam, quae a poſitione per alios Aſtronomos, *Flamſteedium*, *Caſſini*, *Maraldi*, de la *Hire* definita, inſigniter diſcrepat, eſſe erroneam, hancque cum veritate, obſeruationibus confirmata, propius conſentire.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE
VSV FVNCTIONVM
DISCONTINVARVM IN ANALYSI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae in Analysi de functionibus, seu quantitatibus per quampiam variabilem vtcunque determinatis, tradi solent, ad eas tantum functiones restringuntur, quae continuae vocantur, et quarum formatio certa quadam lege continetur. Ex doctrina linearum curuarum hoc maxime illustratur, vbi applicatae, quatenus per abscissas determinantur, vicem gerunt functionum, ita vt indoles omnium functionum aptissime per lineas curuas repraesentari possit. Ita quomodocunque quantitas y per x determinatur, seu quaecunque functio fuerit y ipsius x, semper curua describi potest, cuius abscissae cuicunque x conueniat ea ipsa applicata y, haecque linea curua congrue naturam illius functionis repraesentare aestimatur. Hinc etiam vicissim proposita linea curua quacunque, eius applicatae certas quasdam functiones abscissarum exhibent, quarum

 natura

natura in ipſa lineae curuae natura inuoluitur, dum ſcilicet cuique abſciſſae certa reſpondet applicata, huius valor tanquam functio quaedam abſciſſae recte ſpectatur, et quando applicata vel fit imaginaria, vel ſimul plures valores ſortitur, haec ipſa varietas luculentiſſime ex natura functionis perſpicitur.

2. Iam vero notiſſimum eſt, in Geometria ſublimiori alias lineas curuas conſiderari non ſolere, niſi quarum natura certa quadam relatione inter coordinatas, per quampiam aequationem expreſſa definiatur, ita vt omnia eius puncta per eandem aequationem tanquam legem determinentur. Quae lex cum principium continuitatis in ſe complecti cenſeatur, quippe qua omnes curuae partes ita vinculo arctiſſimo inter ſe cohaerent, vt nulla in illis mutatio ſaluo continuitatis nexu locum inuenire poſſit; hanc ob rem iſtae lineae curuae continuae appellantur, nihilque intereſt, ſiue aequatio illarum naturam continens ſit algebraica ſiue tranſcendens, ſiue cognita ſiue etiamnum incognita, dummodo intelligamus dari quandam aequationem, qua natura huiusmodi linearum curuarum exprimatur. Hoc loco non ſpectatur continuitas tractus, quo rami curuarum porriguntur: ac binae hyperbolae coniugatae aeque lineam curuam continuam conſtituunt, ac parabola vel ellipſis, etiamſi bini eius tractus penitus a ſe inuicem ſint ſeiuncti. Ob eam enim cauſam his ſeparatis hyperbolis continuitas tribuitur, quod ambae in vna eademque aequatione contineantur, ex

eaque

eaque formari possint. Atque ex hoc fonte, quae vulgo vage de lege continuitatis disputari solent, interpretari atque ad determinatum significatum revocari conueniret.

3. Constituto continuitatis criterio sponte patet, quid sit functio discontinua, seu lege continuitatis destituta: omnes enim lineae curuae per nullam certam aequationem determinatae, cuiusmodi libero manus tractu delineari solent, tales functiones discontinuas suppeditant, quandoquidem in iis valores applicatarum nulla certa lege abscissis definire licet. Huiusmodi lineae curuae, quatenus superiori generi continuitatis lege definito opponuntur, vulgo mechanicae, aptius vero discontinuae, seu continuitatis lege carentes vocantur: idque non quod earum partes non inter se cohaereant, sed quoniam nulla certa aequatione determinantur. Ita quicunque tractus libera manu super charta ducuntur, etiamsi continuo procedant, tamen secundum hanc definitionem pro discontinuis sunt habendae, siquidem profecto nunquam eueniet, vt huiusmodi tractus certa quadam aequatione contineatur. Atque huc etiam referri convenit lineas vulgo mixtas vocatas, quando partes ex diuersis lineis curuis desumtae inter se coniunguntur, vel etiam partes eiusdem lineae alio modo vniuntur. Ita perimeter polygoni ex meris lineis rectis constans aeque huc pertinet, ac lineae ex rectis et arcubus circularibus, vel aliarum quarumcunque curvarum formatae. Etsi enim hic quaeuis portio

certa quadam aequatione continetur, pro toto tamen tractu nulla aequatio vnica, in quo character continuitatis est statuendus, exhiberi potest, quo circa omnes huiusmodi tractus pro lineis discontinuis sunt habendi, perinde ac ii, qui libera manu ducuntur.

4. Iam omnibus huiusmodi lineis et functionibus discontinuis in Analysi geometrica nullum locum concedi, per se est manifestum, cum vniversa haec speculatio in linearum, quae considerantur, proprietatibus inuestigandis sit occupata, quod negotium nullo modo suscipi posset, nisi natura linearum certa quadam lege et aequatione contineretur. Hinc plerique Geometrae hac ratione inducti non dubitauerunt, omnes lineas et functiones discontinuas, tam ex Geometria, quam vniuersa Analysi, penitus proscribere, et inter obiecta, a quibus haec scientia abhorreat, detrudere. Hanc sententiam certe palam est professus Celeb. *Alembertus*, cum ego motus cordarum vibrantium ita in genere determinauissem, vt solutio ad omnes motus et figuras, quae cordae initio fuerint impressae, pateret. Mox enim Vir excellentissimus mihi obiecit, motum plane definiri non posse, nisi figura cordae initio impressa fuerit continua ac certa quadam aequatione comprehensa, si secus acciderit, et cordae figura initio fuerit discontinua, tum motus secuturi determinationem nullo modo ad Analysin pertinere, atque adeo nefas esse illam inuestigare velle. Cui obiectioni equidem satis respondi, ac nuper Cel. *La Grange* in Actis Taurinensi-

rinenſibus meam ſolutionem ita ſolide propugnauit, vt nulli amplius dubio locus ſit relictus.

5. Grauiſſimi ergo momenti quaeſtio hic exoritur, quid de functionibus diſcontinuis, vel lineis ſine vlla certa lege deſcriptis, ſit iudicandum, et num et quatenus illis locus in Analyſi concedi poſſit? In problemate certe modo memorato nullum eſt dubium, quin corda, quae initio ita fuerit diducta, vt eius figura nulla aequatione comprehendi poſſit, motum ſit conſecutura, eoque durante ſingulis momentis ea ſit certam figuram et motum receptura, cuius determinatio ſane ad Analyſin motusque ſcientiam eſt referenda, ſiue fines cognitioni noſtrae praeſcripti huic quaeſtioni ſoluendae ſufficiant, ſiue ſecus. Vtroque caſu quaeſtio ſemper foret omni noſtra attentione digna, et cum circa quantitates verſetur, ad Analyſin certe pertinere eſt cenſenda; neque hic quaeritur, quousque ſagacitas noſtra pateat, cum vix quisquam ſit Geometrarum, qui non ſaepius in quaeſtionibus vires ſuas ſuperantibus deſudauerit. Neutiquam igitur nefas eſt putandum, huiusmodi quaeſtiones attingere; quin potius eo maiori ſtudio in iis eſſet elaborandum. Omnibus autem difficultatibus diligenter perpenſis, etiamnum aſſeuerare audeo, ſolutionem meam problematis de cordis vibrantibus latiſſimo ſenſu accepti recte ſe habere, in eaque felici ſucceſſu functionum diſcontinuarum rationem eſſe habitam. Verum etiam agnoſco, hoc problema ad peculiare Analyſeos,

lyſeos genus adhuc parum excultum, eſſe referendum, cuius generis adeo vis et natura in hoc conſiſtat, vt functiones etiam diſcontinuas neceſſario in ſe complectatur.

6. Ad litem hanc componendam obſeruo, neque in Algebra communi, neque in ea Analyſeos infinitorum parte, quae adhuc potiſſimum eſt tractata, functiones diſcontinuas admitti poſſe. Multo latius autem Analyſis infinitorum patere, atque eiusmodi partes complecti eſt iudicanda, quae a functionibus diſcontinuis non ſolum non abhorreant, ſed eas adeo ita natura ſua inuoluant, vt nullum problema eo pertinens rite ſolutum ſit cenſendum, niſi functiones prorſus arbitrariae, hincque etiam diſcontinuae, in ſolutionem fuerint introductae. Iſtae quidem Analyſeos partes etiamnum parum ſunt excultae, etiamſi egregia ſpecimina paſſim reperiantur; neque etiam earum vera indoles ſatis perſpecta videtur. Quare quo hanc indolem luculenter exponam, neceſſe eſt, vt varias iſtas ac diuerſas Analyſeos partes accuratius deſcribam, et pro cuiusque indole a ſe inuicem diſtinguam. Quemadmodum enim vulgo Analyſis infinitorum definiri ſolet, inde vix quicquam lucis ad hoc argumentum illuſtrandum peti poteſt, cum pleraeque definitiones maxime ſint vagae et confuſae, neque ſubiecti, de quo agitur, naturam ſatis dilucide ac diſtincte explicent. Ex quo frequentiſſimae querelae, quod idea Analyſeos infinitorum nusquam accurate deſcripta ac ſtabilita reperia-

periatur, fundamento non carent, hic autem illi vitio imprimis eſt occurrendum, quo diuerſae huius ſcientiae partes non ſatis diligenter a ſe inuicem diſtinguuntur.

7. Tota autem vis Analyſeos infinitorum conuenientiſſime ex notione et indole functionum explicatur, quae commodiſſime pro numero quantitatum variabilium, per quas certo quodam modo determinantur, in claſſes diſtinguuntur. Sic prima claſſis continebit functiones vnicae quantitatis variabilis. Tales functiones ſunt applicatae quarumuis linearum, reſpectu abſciſſarum. Ita poſita abſciſſa $= x$ et applicata $= y$, erit y functio variabilis x, cuius natura per lineam curuam, ſeu aequationem, quae inter x et y datur, exprimitur; qua fit, vt ſtatim atque abſciſſae x determinatus valor tribuitur, etiam applicata y valorem determinatum conſequatur, ſiue is fuerit ſimplex, ſiue etiam multiplex, ſiue etiam imaginarius; vnde intelligitur etiam viciſſim abſciſſam x tanquam functionem applicatae y ſpectari poſſe. Simili modo ſi corpus per quampiam lineam moueatur, eius celeritas in ſingulis locis etiam ad functiones vnicae variabilis eſt referenda; eſt quippe functio eius quantitatis variabilis, qua eius lineae puncta continuo determinantur. In hac claſſe pleraeque quaeſtiones adhuc tractatae ſunt collocandae, etiamſi ſaepius plures variabiles in computum ingrediantur, ſiquidem cunctae tandem per vnicam determinantur. Veluti ſi motus lunae inueſtigatur, ad

quoduis tempus eius longitudo, latitudo, ac diſtantia a terra quaerenda proponitur; cum autem haec ſingula elementa tandem per ſolum tempus determinari debeant, tam longitudo, quam latitudo et diſtantia, quaeque per ſe tanquam functio temporis, ideoque vnica variabilis ſpectari poterit.

8. At functiones binarum pluriumue variabilium per eiusmodi binas pluresue variabiles determinantur, quae a ſe inuicem nullo modo pendent, ſed cuique ſeorſim omnes prorſus valores tribuere licet. Tales functiones occurrunt, quando natura ſolidorum ac ſuperficierum expenditur. Fieri hoc ſolet per ternas coordinatas x, y et z, quarum binae x et y in plano quodam accipiuntur, tertia vero z, huic plano perpendicularis ad ſuperficiem porrigitur. Cum igitur cuique baſeos puncto, quod per binas variabiles x et y definitur, certa perpendicularis z immineat, erit vtique z functio binarum variabilium x et y a ſe inuicem neutiquam pendentium. Quodſi enim omnia ſuperficiei puncta aſſignare velimus, tam ipſi x quam ipſi y ſeorſim omnes prorſus valores tribui oportet, vt hoc modo pro omnibus baſis punctis perpendicula illa obtineantur. Deinde ſi corpus ex particulis heterogeneis ſit compoſitum, vt cuique puncto intra corpus accepto ſua peculiaris denſitas conueniat, primo quidem ſitus cuiusque puncti ternis coordinatis x, y et z definitur, nullo modo a ſe inuicem pendentibus, quoniam vt omnia puncta intra corpus obtineantur,

his

his tribus coordinatis omnes plane valores ſucceſſiue aſſignari debent. Quare ſi denſitas in quouis puncto quantitate v deſignetur, ea tanquam functio ternarum variabilium x, y et z ſpectari debet. Ac ſi particulae huius corporis motu quocunque agitentur, cuiusque puncti motus non ſolum ab eius ſitu ternis coordinatis determinando, ſed etiam a tempore pendebit, vnde motus tanquam functio quatuor variabilium ſpectari debebit.

9. Conſtituta hac functionum notione ac diviſione, fundamenta Analyſeos infinitorum clariſſime tradi poterunt, quae diſciplina commodiſſime in tot partes diſtribuitur, quot dantur functionum claſſes, propterea quod ſingulae peculiaribus principiis ac praeceptis ſunt ſuperſtruendae. Prima igitur pars, quae fere ſola adhuc eſt exculta, et ad quam principia calculi differentialis et integralis potiſſimum ſunt accommodata, circa functiones vnicae variabilis verſantur. Primo ergo ſi y fuerit functio quaecunque vnius variabilis x, conſiderari ſolent incrementa vel decrementa illius functionis y, dum quantitas x quocunque augmento increſcit. Deinde hoc augmentum continuo imminui concipitur, donec tandem prorſus euaneſcat, quo quidem caſu etiam incrementum functionis y in nihilum abit, quae augmenta euaneſcentia cum differentialia vocentur, euidens eſt, ea omnia quantitate eſſe deſtituta, nihiloque adeo aequalia, ita vt de eorum quantitate nulla quaeſtio inſtitui poſſit. Neque etiam calculus differentialis in

 quan-

quantitate differentialium, quae nulla est, indaganda occupatur, sed in eorum ratione mutua definienda; quae ratio vtique certam obtinet quantitatem. Functionis scilicet y non tam ipsum differentiale dy, quam eius ratio ad differentiale dx, inuestigatur, valor nimirum fractionis $\frac{dy}{dx}$, qui quouis casu determinatam quantitatem sortitur, et ipse tanquam noua functio ipsius x spectari potest.

10. Cum plerisque haec differentialium notio, et rationis, quae inter quantitates euanescentes intercedit, inuestigatio, maxime suspecta videri soleat, vnico exemplo omnia dubia euanescent. Proposita igitur sit talis functio $y = axx + bx + c$, ac primum videamus, quantum incrementum haec functio capiat, dum quantitati x augmentum quodcunque ω tribuitur; posito autem $x + \omega$ loco x, functio nostra abit in $axx + 2ax\omega + a\omega\omega + bx + b\omega + c$, ideoque incrementum accipit $= 2ax\omega + a\omega\omega + b\omega$, quod hoc charactere Δy designemus, et ad similitudinem quantitas ω, tanquam augmentum ipsius x, etiam hoc signo Δx denotetur. Cum igitur sit

$$\Delta x = \omega \text{ et } \Delta y = 2ax\omega + a\omega\omega + b\omega$$

$$\text{erit } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax\omega + a\omega^2 + b\omega}{\omega} = 2ax + a\omega + b$$

sicque habetur ratio inter incrementa Δx et Δy, quae vera est, quantumuis augmentum ω quantitas x capiat; eadem ergo ratio etiam veritati erit consentanea, si augmentum ω plane euanescens accipiatur, quo casu incrementa illa Δx, Δy his signis dx et dy denotari et differentialia vocari solent: vnde perspicuum

cuum eſt, poſito $\omega = 0$ prodire $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$, hancque rationem veram eſſe, etiamſi termini, inter quos ſubſiſtit, ſint euaneſcentes. Solum hoc exemplum ſufficere videtur omnibus dubiis, quibus vulgo notio infinite parui in Analyſi vſurpata impugnari ſolet, diluendis, huicque calculo ab omni ſuſpicione vindicando.

11. Quia haec differentialium ratio $\frac{dy}{dx}$ denuo eſt functio ipſius x, ſi ea littera p indicetur, ratio eius differentialis dp ad dx, ſeu fractio $\frac{dp}{dx}$ ſimili modo definiri poteſt, quae, ne opus ſit nouam litteram in calculum inducere, ob $p = \frac{dy}{dx}$ tali ſcriptione $\frac{ddy}{dx^2}$ deſignari ſolet, quae differentialia ſecundi gradus inuoluere dicitur; atque ita porro progrediendo differentialia in has formulas $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ etc. ingredientia tertii, quarti altiorumque ordinum vocantur, quorum ſignificatus, quemadmodum de primo ordine oſtendi, ſemper ad rationem inter differentialia binarum quantitatum, quarum altera alterius eſt functio, reducitur. Hocque modo omnes controuerſiae, quae olim circa differentialia omnium ordinum eorumque naturam ſunt motae, ſponte concidunt, cum quicquid in hoc calculo definitur, ſemper ad proportionem differentialium, cuius realitas nulli dubio eſt ſubiecta, reuocetur, neque amplius veritates per hunc calculum erutae Geometricis vllo pacto poſtponendae videbuntur. Equidem non diffiteor, eiusmodi rationes loquendi in hac diſciplina eſſe receptas, quae differentialibus quantitatem quampiam

valde exiguam tribuere videantur, ſed cum earum ſignificatio ſemper ex ſtabilitis principiis ſit interpretanda, tales loquendi formulas, etſi minus congruas, tolerari conuenit. Quin etiam cum expreſſio $p = \frac{dy}{dx}$, prorſus ſit realis, etiam haec aequalitas $dy = p\,dx$ merito admittitur, tametſi in neutro membro vlla quantitas agnoſcitur.

12. Haec igitur definitio calculi differentialis nullis amplius tenebris eſt inuoluta, qua is vocatur methodus, propoſita quacunque functione vnius pluriumue variabilium, rationes, quae inter differentialia tam primi quam altiorum ordinum intercedunt, inueſtigandi. De functionibus quidem vnius variabilis, ad quas ſolas hic etiamnum reſpicio, iſta definitio maxime eſt perſpicua: ſi enim y fuerit functio quaecunque ipſius x, calculus differentialis docet, quomodo valor fractionis $\frac{dy}{dx}$ ſit eliciendus: eademque regula, qua hoc praeſtatur, valet quoque pro differentialibus altioribus: cum poſito $\frac{dy}{dx} = p$, ex hac etiam functione ipſius x eadem methodo valor $\frac{dp}{dx}$ ſeu $\frac{ddy}{dx^2}$ obtineatur: ac ſi vlterius ſtatuatur $\frac{dp}{dx} = \frac{ddy}{dx^2} = q$ item $\frac{dq}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = r$, tum $\frac{dr}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4} = s$ etc. eadem methodus ſufficit his omnibus valoribus q, r, s etc. inueniendis: atque huc ſunt trahenda, quae vulgo de calculo differentio - differentiali et differentialibus altiorum ordinum tradi ſolent, quae, ſi rite intelligantur, nihil ſane continent, quod primis noſtrae cognitionis principiis aduerſetur. Quando etiam in elemen-

elementis calculi differentialis ſaepe plures quantitates variabiles occurrunt, et praecepta ad eas partes, quas conſtituo ſequentes, referenda videantur, tamen ſemper in eas certus quidam nexus admittitur, vt tandem omnes tanquam functiones vnius variabilis ſpectari queant. Interim tamen regulae differentiandi ſequentium partium a prima non diſcrepant.

13. Calculum autem integralem in genere ita definio, vt ſit methodus inueniendi indolem functionum ex data quacunque differentialium relatione; quam definitionem pro caſu functionum vnicae variabilis ante clarius euoluam, quam ad functiones plurium variabilium ſum progreſſurus. Poſito ſcilicet pro functione vnius variabilis $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$ etc. Si aequatio proponatur quaecunque, in quam, praeter quantitates x et y, etiam iſtae p, q, r etc. ex differentialibus ortae, ingrediantur, in hoc officium calculi integralis verſatur, vt ex iſta aequatione ſeu relatione differentialium data natura functionis y, quemadmodum ſcilicet per x determinatur, eliciatur; quae operatio vocari ſolet integratio. Plurimum autem abeſt, quo minus haec methodus adhuc ſatis ſit elaborata, et ſi omnes quaeſtiones in eam cadentes perpendamus, pauciſſimas eius ope reſoluere licet; variis autem ea, quatenus eſt exculta, continetur praeceptis pro ordine differentialium, quae in relationem datam ingrediuntur. Ita ſi proponatur relatio quaecunque inter quantitates x, y

et

et $p = \frac{dy}{dx}$, quae aeqnatio primi gradus differentialis vocatur, pluribus quidem casibus integratio succedit; sin autem ea relatio insuper quantitatem q inuoluat, aequatio vocatur differentialis secundi gradus, duplicique integratione opus est, antequam ad desideratam relationem inter x et y, vnde ratio istius functionis y innotescat, perueniatur. Hic multo pauciores sunt casus, quibus ad scopum pertingere licet; simulque patet, quid de aequationibus differentialibus tertii altiorumque ordinum sit iudicandum.

14. Verum circa has integrationes, quae functionibus vnius tantum variabilis inuestigandis inseruiunt, singularis quaedam affectio, qua istius methodi praecipua indoles continetur, probe est obseruanda. Affectio autem ista in hoc consistit, quod aequatio integrata semper nouam quandam constantem quantitatem recipiat, cuius in aequatione differentiali ne vestigium apparet, hancque quantitatem constantem prorsus arbitrio nostro relinqui. Ita si habeatur ista aequatio differentialis $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$, seu $dy = 2axdx + bdx$, vbi quidem litterae a et b denotant quantitates constantes datas, aequatio integralis in omni extensione ita se habet: $y = axx + bx + C$, vbi C designat quantitatem constantem a praecedentibus minime pendentem, et cuius valor penitus arbitrio nostro relinquitur, neque integratio cuiusquam aequationis differentialis pro completa et perfecta est habenda, nisi huiusmodi quantitas constans arbitraria fuerit introducta.

ducta Simili modo ſi relat'o propoſita inuoluat differentialia ſecundi gradus, quoniam duplici opus eſt integratione, ſolutio completa duas eiusmodi conſtantes arbitrarias complecti debet; tres vero eiusmodi conſtantes requiruntur, ſi aequationes differentiales tertii gradus perfecte reſoluuntur. De his autem conſtantibus id praecipue eſt notandum, quod cum natura problematum arctiſſimo nexu cohaereant, atque omnia problemata, quorum reſolutio ad aequationes differentiales perducitur, ita ſint comparata, vt poſt peractam integrationem conſtantes illae ingreſſae ex ipſa rei natura et circumſtantiis adiunctis determinationem ſuam adipiſcantur.

15. His igitur conſtat prima pars Analyſeos infinitorum, quae circa functiones vnius tantum variabilis verſantur, atque ex his multo facilius intelligetur, quid de reliquis partibus, in quibus functiones duarum pluriumue variabilium, ſit tenendum. In differentialibus autem iam d'uerſa deprehenditur ratio, cum ea hic non abſolute inter ſe comparare L.ceat. Si enim z fuerit functio quaecunque binarum variabilium x et y, circa differentiationem quaeſtio bipartita eſt ſtatuenda: primo ſcilicet quaeritur differentiale ipſius z, dum ſeruante y eundem valorem, altera variabilis x differentiali ſuo dx augetur, vt inde valor fractionis $\frac{dz}{dx}$ obtineatur. Simili modo tractata x vt conſtante, altera y incrementum dy capere aſſumitur, et collecto inde incremento dz, quo functio z augetur, fractio $\frac{dz}{dy}$ rationem differentia-

 lem

lem ex variabilitate ſolius quantitatis y natam exprimit. Vtraque autem haec fractio $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, vti caſu praecedente, meris terminis finitis continebitur, et ambae tanquam nouae functiones binarum variabilium x et y ſpectari poterunt. Inuentis autem his binis valoribus vera ratio differentialis functionis propoſitae z perſpicitur; ex iis enim coniunctis demum patet, quomodo differentiale ipſius z ratione variabilitatis vtriusque quantitatis x et y ſe habeat. Hanc diſtinctionem ipſa rei natura poſtulat, ſine qua ratio differentiationis huiusmodi functionum ne intelligi quidem poſſet, quae autem nunc per ſe eſt manifeſta.

16. Quicquid igitur ad differentiationem functionum duarum variabilium ſpectat, id totum ad binas iſtas formulas $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ reducitur, quarum valores quouis caſu terminis finitis per ambas variabiles x et y exprimuntur. Ne autem huiusmodi fractiones cum praecedentibus confundantur, vncinulis includi, hocque modo $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ ſcribi ſolent. Quodſi has fractiones litteris p et q deſignemus, erit vtique $dz = pdx + qdy$ differentiale completum functionis z: et quoniam p et q iterum vt functiones ipſarum x et y ſpectari poſſunt, intelligitur etiam, quid ſibi velint hae formulae $\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$; $\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$ et $\left(\frac{dq}{dy}\right) = \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, quae differentialia ſecundi gradus in ſe complectuntur, ſimilique modo progreſſio fit ad differentialia altiorum graduum. Propoſita ergo functione quacunque z binarum variabi-

riabi-

riabilium x et y, calculus differentialis regulas praescribit, quibus valores omnium istarum formularum differentialium inueniri queant: primo scilicet primi gradus, quae sunt $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, tum secundi gradus, quae sunt $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)$ et $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, porro tertii gradus, quae sunt

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right),\ \left(\frac{d^3 z}{dx^2\,dy}\right),\ \left(\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\right),\ \left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right)$$

et sic deinceps. Vbi quidem notandum, ipsam methodum, has formulas definiendi, a prima parte non discrepare, cum in qualibet differentiatione vnica tantum quantitas pro variabili habeatur. Superfluum foret, haec eadem momenta de functionibus trium pluriumue variabilium exponere, quippe quae ex allatis iam satis sunt perspicua.

17. Integralis autem calculi munus in hoc consistit, vt proposita relatione quacunque inter quantitates x, y, z et formulas differentiales modo allatas, inde natura functionis z, quemadmodum ex variabilibus x et y conflatur, inuestigetur. Relatio vero illa data per aequationem exprimitur, quae si tantum formulas differentiales primi ordinis $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ praeter quantitates ipsas x, y, et z complectitur, aequatio differentialis primi gradus vocatur; sin autem in eam insuper formulae differentiales secundi ordinis $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, vel porro tertii altiorumue ordinum ingrediantur, tum aequatio illa eiusdem ordinis differentialis dicitur. Haecque est forma generalis calculi integralis, quatenus circa

functiones duarum variabilium eſt occupatus; ex quo ſimul intelligitur, quomodo reliquae partes Analyſeos infinitorum, in quibus functiones trium pluriumue variabilium tractantur, ſint definiendae. At calculus integralis ad functiones duarum variabilium accommodatus, plurimum differt a calculo integrali communi, vbi non niſi functiones vnius variabilis occurrunt, et praecepta omnino ſingularia poſtulat, praeterquam quod in eo omnia quoque artificia prioris partis ſint in vſum vocanda. Verum haud diu eſt, ex quo haec pars Analyſeos coli eſt coepta, ita vt vix adhuc prima eius elementa ſatis ſint euoluta. Eximia quidem huius calculi ſpecimina iam paſſim reperiuntur, quorum tractatio autem minus ad praecepta calculi communis eſt adſtricta; vnde latiſſimus campus aperitur, in quo ſumma ingenia ad maximum ſcientiae incrementum vires ſuas exercere poterunt.

18. Huius autem noui calculi vis et quaſi proprius character minime adhuc ſatis perſpectus videtur. Quemadmodum enim calculi integralis communis vis in eo conſiſtit, vt qualibet integratione noua quantitas conſtans arbitrio noſtro permiſſa in calculum introducatur: ita in hac parte, circa functiones binarum variabilium occupata, ſingulis integrationibus, non ſolum noua quantitas conſtans, ſed adeo noua functio cuiuspiam variabilis prorſus indeterminata, in calculum inuehitur, quae ita ab arbitrio noſtro pendet, vt eius loco etiam functiones diſcon-

diſcontinuae aſſumi queant. Quare functionum diſcontinuarum vſu ab hoc fere nouo calculi genere nonſolum non excluditur, ſed etiam quaſi eſſentialiter ad eius naturam pertinere ſit iudicandus; neque etiam vlla integratio in hoc calculo pro completa et abſoluta eſt habenda, niſi in aequationem integralem huiusmodi functio prorſus arbitraria fuerit introducta: ac ſi aequatio differentialis propoſita fuerit ſecundi altiorisue gradus, ita vt binis pluribus ve integrationibus ſit opus, neceſſe eſt, totidem functiones arbitrariae in vltima aequatione integrali reperiantur, quod niſi eueniat, integrale non magis pro completo haberi poteſt, quam in calculo integrali ordinatio, vbi introductio conſtantium arbitrariarum negligitur. Quando autem de functionibus trium variabilium agitur, qualibet integratione functio arbitraria binarum variabilium in calculum introducitur; qua circumſtantia iſte calculus a praecedentibus ita diſtinguitur, vt genus peculiare conſtituere ſit cenſendus, cum natura cuiusque generis, ex indole quantitatis arbitrariae per integrationem inuectae, conuenientiſſime diiudicetur. Tum vero ſi quaeſtio circa functiones quatuor variabilium verſatur, haec quantitas arbitraria quauis integratione introducenda ſit functio trium variabilium et ita porro.

19. Haec autem neutiquam calculi cuipiam moroſitati ſunt tribuenda, quae omni vſu deſtituantur, et inani ſpeculationi tantummodo inſeruiant, ſed potius naturae rerum maxime innituntur, et

cum veritatum concatenatione pulcherrime cohaerent. Quemadmodum enim omnia problemata circa functiones vnicae variabilis, cuiusmodi sunt fere omnia, quae adhuc in Analysi sunt tractata, perfecte non soluuntur, nisi qualibet integratione noua quantitas constans inferatur, quam deinceps ex circumstantiis problematis determinari oportet: ita etiam omnia problemata, quorum solutio ad functiones binarum variabilium perducitur, natura sua ita sunt comparata, vt, nisi quauis integratione noua functio arbitraria, seu indefinita vnius variabilis, induceretur, omnibus conditionibus problema determinantibus nullo modo satisfieri posset. Eximium huius rei specimen cernitur in problemate de cordis vibrantibus; si enim cuiusque cordae puncti, quod ab altero termino distat interuallo $= x$, pro tempore elapso $= t$, elongatio ab axe, seu statu aequilibrii, ponatur $= z$, euidens est, z esse functionem duarum variabilium t et x, quoniam vtique ista elongatio, tam pro diuersis cordae punctis, quam pro temporis fluxu, variatur. Cum igitur posito tempore $t = 0$ is cordae status prodire debeat, qui ipsi initio fuerit inductus, et vbi elongatio z functioni cuidam datae interualli x erat aequalis, solutio perfecta esse nequit, nisi huiusmodi functionem indefinitam complectatur, quae deinceps ex statu cordae initiali definiri queat; et quoniam iste status ab arbitrio nostro ita pendet, vt cordae figura quaecunque irregularis et discontinua induci potuerit, etiam functio illa per Analysin introducta ita late patere debet, vt etiam discontinua,

seu

ſeu a continuitatis lege abhorrentia, in ſe complectatur.

20. Ne autem hic vlli dubio locus relinquatur, eiusmodi problema euoluam, cuius ſolutio adeo ex elementis facile deducitur, et quae ita eſt comparata, vt in ea functiones diſcontinuae, ſeu lineae curuae pro lubitu ductae, neceſſario admitti debeant; deinde idem problema analytice expediam, quo clarius neceſſitas functionum arbitrariarum, quae integratione introducuntur, ex conſenſu cum priori ſolutione, eluceſcat. Problema autem ita ſe habet: *vt omnia ſolida, ad quorum ſuperficiem in ſingulis punctis normales ductae, eiusdem ſint quantitatis.* Quando de lineis agitur, notum eſt, praeter circulum nullam dari lineam curuam, cuius omnes normales ſint inter ſe aequales; at ſi haec aequalitas normalium ad ſolida extenditur, vt omnes rectae, a dato plano tanquam baſi ad ſuperficiem normaliter ductae, debeant eſſe inter ſe aequales, infinita exhiberi poſſunt ſolida, in quae haec proprietas competit. Primo ſcilicet hoc manifeſto euenit in hemisphaerio, vel etiam ſphaera, cuius centrum in plano illo ſeu baſi eſt ſitum, dum omnes rectae normales ſimul ſunt radii ſphaerae. Deinde ſi cylindrus ita collocetur, vt eius axis in baſem incidat, omnes quoque normales inter ſe aequales habentur. Hinc autem colligitur ſolutio multo latius patens, quoniam ſalua hac proprietate axis cylindri quomodocunque incurvari poteſt, quam ſolutionem generalem ita enunciare licet. Deſcripta ſuper plano fixo linea quacunque

cunque curua, ſiue continua ſiue diſcontinua, eiusmodi ſolidum ſuper ea exſtruatur, cuius omnes ſectiones, ad illam lineam normaliter factae, ſint ſemicirculi, quorum centra in eam lineam incidant. Niſi ergo ſolutio analytica pariter ita late pateat, vt lineam pro lubitu ductam, ſeu, quod eodem redit, functionem indefinitam in ſe contineret, ea certe pro perfecta et abſoluta haberi non poſſet.

21. Poſitis igitur binis coordinatis in plano fixo aſſumtis x et y, perpendiculo autem inde ad ſuperficiem quaeſitam pertingente $= z$, quia z conſideratur vt functio binarum variabilium x et y, ſtatuantur formulae differentiales $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$, vt ſit $dz = p\,dx + q\,dy$. Hinc autem normalis in ſuperficiem ad planum vsque fixum porrecta colligitur $= z\sqrt{(1 + pp + qq)}$; quae quia debet eſſe conſtantis magnitudinis, ponatur $z\sqrt{(1 + pp + qq)} = a$ et pro z eiusmodi inueſtigari oportet functionem binarum variabilium x et y, vt haec conditio, quae eſt aequatio differentialis primi gradus, impleatur. Quo facilius autem ad reſolutionem per integrationem perueniamus, his vtamur ſubſtitutionibus: ſit $p = \frac{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{coſ.}\,\Phi}$ et $q = \frac{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\omega}{\text{coſ.}\,\Phi}$, vt fiat $pp + qq = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^2}{\text{coſ}\,\Phi^2}$, hincque $\frac{z}{\text{coſ.}\,\Phi} = a$, ſeu $z = a\,\text{coſ.}\,\Phi$, vnde aequatio differentialis aſſumta transformatur in hanc: $-a\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi}(dx\,\text{coſ.}\,\omega + dy\,\text{ſin.}\,\omega)$ ſeu $-a\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = dx\,\text{coſ.}\,\omega + dy\,\text{ſin.}\,\omega$, vbi cum pars prior integrationem admittat, etiam pars poſterior in-

integrabilis est reddenda, qua conditione certa relatio inter variabiles x, y et ω stabilitur. Cum igitur integrando obtineamus:

$$-a\sin.\Phi = x\cos.\omega + y\sin.\omega - \int d\omega(y\cos.\omega - x\sin.\omega)$$

euidens est, hoc integrale exhiberi non posse, nisi formula $y\cos.\omega - x\sin.\omega$ fuerit functio vnius variabilis ω. Statuatur ergo: $y\cos.\omega - x\sin.\omega = F':\omega$, vt fiat $\int d\omega(y\cos.\omega - x\sin.\omega) = F:\omega$, eritque $-a\sin.\Phi = x\cos.\omega + y\sin.\omega - F:\omega$. Vel denotet Ω functionem quamcunque ipsius ω vtcunque indefinitam, vt etiam functiones discontinuae inde non excludantur, et posito $F':\omega = \Omega$, erit $F:\omega = \int \Omega d\omega$, et problematis solutio ob $a\sin.\Phi = \sqrt{(aa-zz)}$ his aequationibus continetur:

$$y\cos.\omega - x\sin.\omega = \Omega \text{ et } \sqrt{(aa-zz)} = \int \Omega d\omega - \cos.\omega - y\sin.\omega$$

vbi quidem signum radicale aeque negatiue ac positiue capi potest.

22. Videamus iam, quomodo hae formulae ad constructionem perduci queant. Referat ipsa tabula planum illud, fixam basin corporis quaesiti constituens, in quo sint binae coordinatae $AX = x$ et $XY = y$, ita vt puncto Y perpendiculariter immineat tertia coordinata z. In ipso isto plano axi AX, normaliter iungatur recta AO, ducaturque recta AP, ita vt sit angulus $OAP = \omega$, ad hanc ex Y agatur normalis YP, eritque $AP = y\cos.\omega - x\sin.\omega$ et $PY = y\sin.\omega + x\cos.\omega$. Quibus lineis in calculum introductis ambae nostrae aequationes ita se habebunt: Tab. I. Fig. 1.

$$AP = \Omega \text{ et } PY + \sqrt{(aa-zz)} = \int \Omega d\omega.$$

Producatur ergo recta PY in M, vt ſit $YM = \sqrt{(aa-zz)}$, fiatque propterea $PM = \int \Omega\, d\omega$, quae relatio inter lineas AP et PM probe eſt perpendenda. Cum iam in ſitu proximo, angulo ſcilicet OAP aucto ſuo differentiali $PAp = d\omega$, ſit arculus radio AP deſcriptus $Pp = \Omega\, d\omega$, hic arculus ſimul differentiale lineae MP exhibebit, ita vt ſit $pm = PM + Pp$, ex quo intelligitur, rectam PM altero termino M in eiusmodi curua EMF terminari, in quam ea iugiter ſit normalis, qua proprietate tota noſtra ſolutio analytica continetur. Quocirca conſtructio quaeſita ita erit comparata: Deſcripta pro lubitu curua quacunque EMF, quae ſiue ſit continua ſiue ſecus nihil refert, ad ſingula eius puncta M ducantur normales MP, vtrinque producendae, et ex harum rectarum ſingulis punctis Y verticaliter erigantur perpendicula $YZ = z$, vt ſit $YZ^2 + MY^2 = aa$, quod praeſtabitur, ſi ſingulis centris M radio $= a$, cui normales debent eſſe aequales, deſcribantur circuli in planis ad baſin ipſamque curuam EMF normalibus; horum enim circulorum peripheriae in ipſa ſuperficie corporis quaeſiti erunt poſitae, et rectae in hanc ſuperficiem normales omnes erunt $= a$, et in lineam EMF pro lubitu ductam incident.

23. Leuiſſima autem attentione adhibita perſpicuum eſt, hanc conſtructionem ex ſolutione analytica petitam prorſus congruere cum ſuperiori conſtructione, quam ſola elementorum conſideratio ſuppeditauerat. Manifeſtum enim eſt, corpus ita fore com-

comparatum, vt omnes eius fectiones ad lineam EMF normaliter factae fint circuli inter fe aequales, centra fua in ipfa hac linea habentes. Ob vtriusque autem folutionis confenfum hoc imprimis notandum eft, folutionem analyticam non futuram effe completam, nifi functio Ω per integrationem ingefta latiffime pateret, atque adeo omnes omnino valores, tam continuos, quam difcontinuos, in fe complecteretur, quandoquidem linea illa EMF, functioni Ω refpondens, penitus arbitrio noftro relinquitur, vt etiam lineas libero manus tractu ductas in vfum vocare liceat. Quod autem de hoc problemate eft oftenfum, fimul de omnibus aliis eiusdem generis valet, quorum fcilicet folutio functiones binarum variabilium implicat, ex quo quaeftio initio propofita de vfu functionum difcontinuarum in Analyfi ita eft refoluta, vt in Analyfi quidem communi, quae circa functiones vnius variabilis tantum verfatur, huiusmodi functionibus nullus locus fit concedendus, in fublimioribus autem Analyfeos partibus, vbi functiones binarum plurium ve variabilium tractantur, tales functiones ita neceffario ad calculi effentiam pertinere fint cenfendae, vt nulla integratio pro abfoluta et completa haberi queat, nifi fimul functio maxime indefinita, atque adeo etiam difcontinua, in calculum introducatur.

DE VSV NOVI ALGORITHMI IN PROBLEMATE PELLIANO SOLVENDO.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quicunque numeri integri pro litteris l, m et n assumantur, innumerabiles quoque numeri integri pro x inueniri possunt, quibus haec formula:

$lxx + mx + n$ reddatur quadratum;

siquidem sequentes conditiones habeant locum:

1. vt l sit numerus positiuus non quadratus.
2. vt pro x vnus saltem valor sit cognitus.

Nam si l est numerus, vel negatiuus, vel quadratus, manifestum est, infinitas solutiones in numeris integris exhiberi non posse, etiamsi vna innotuerit. Tum vero etiam euenire potest, vt formula $lxx + mx + n$ naturae quadrati prorsus aduersetur, vti fit hoc casu $3xx + 2$. Verum statim atque vnica solutio habetur, semper innumerabiles inuenire licet.

2. Quare si statuamus:

$lxx + mx + n = yy$,

vnus-

vnusque caſus conſtet, quo huic conditioni ſatisfiat, ita vt poſito $x=a$, prodeat

$$laa+ma+n=bb$$

ſicque ſumto $x=a$ obtineatur $y=b$; regula, cuius ope plures imo infinitae ſolutiones elici poſſunt, ita ſe habet:

Primo ex dato numero l duo huiusmodi numeri p et q inueſtigentur, vt ſit

$$pp=lqq+1, \text{ ſeu } p=\sqrt{(lqq+1)}$$

quibus inuentis ex ſolutione primo cognita ſtatim eruitur haec noua:

$$x=pa+qb+\frac{m(p-1)}{2l}, \text{ vnde fit}$$

$$y=pb+lqa+\frac{mq}{2}$$

ex qua deinceps ſimili modo aliae deriuantur. Si enim hos valores loco a et b ſubſtituamus, naſcitur tertia ſolutio iſta:

$$x=(2pp-1)a+2pqb+mqq, \text{ et}$$

$$y=(2pp-1)b+2lpqa+mpq$$

quae certe eſt in numeris integris, ſi forte praecedentes adhuc fuerint fracti.

3. Cum igitur hoc modo continuo nouae ſolutiones inueniri queant, ad calculi compendium plurimum iuuat notaſſe, continuos iſtos valores, tam ipſius x, quam ipſius y, ſecundum ſeriem recurrentem progredi, cuius ſinguli termini per binos praeceden-

cedentes certa et conſtante lege determinentur. Scilicet ſi fuerint valores hi continuo progredientes:

ipſius x . . . a . . . . P, Q, R, S etc.

ipſius y . . . b . . . . $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ etc.

erit per legem ſeriei recurrentis:

$$R = 2pQ - P + \frac{m(p-1)}{l};\quad \mathfrak{R} = 2p\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}$$

$$S = 2pR - Q + \frac{m(p-1)}{l};\quad \mathfrak{S} = 2p\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}.$$

Atque hinc iſti valores expreſſionibus generalibus comprehendi poſſunt, quae ita ſe habent:

$$x = \frac{2la + m + 2b\sqrt{l}}{4l}(p + q\sqrt{l})^{\mu} + \frac{2la + m - 2b\sqrt{l}}{4l}(p - q\sqrt{l})^{\mu} - \frac{m}{2l}$$

$$y = \frac{2la + m + 2b\sqrt{l}}{4\sqrt{l}}(p + q\sqrt{l})^{\mu} - \frac{2la - m + 2b\sqrt{l}}{4\sqrt{l}}(p - q\sqrt{l})^{\mu}$$

vnde quicunque numeri integri exponenti μ tribuantur, ſemper valores rationales pro x et y reſultant.

4. Haec autem inueſtigatio multo latius ita poteſt extendi, vt propoſita inter binos numeros x et y huiusmodi aequatione:

$$Axx + 2Bxy + Cyy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

omnes ſolutiones in numeris rationalibus et integris ſint eruendae. Hic quidem pariter neceſſe eſt, vnam ſolutionem eſſe cognitam, quae ſit $x = a$, et $y = b$, ita vt ſit

$$Aaa + 2Bab + Cbb + 2Da + 2Eb + F = 0.$$

Tum vero quaerantur bini numeri p et q, vt ſit

$$pp = (BB - AC)qq + 1$$

quod

quod quidem fieri nequit, nisi sit $BB > AC$. Atque noua solutio ita erit comparata:

$$x = a(p + Bq) + bCq + Eq + \frac{BE - CD}{BB - AC}(p - 1)$$
$$y = b(p - Bq) - aAq - Dq + \frac{BD - AE}{BB - AC}(p - 1)$$

vnde per eandem legem continuo plures elicere licet.

5. Haec ideo in medium afferre est visum, vt intelligatur, ad omnes huius generis resolutiones id omnino requiri, vt proposito quocunque numero integro positiuo non quadrato l, eiusmodi binos numeros pariter integros p et q inueniri oporteat, vt sit $pp = lqq + 1$, seu $p = \sqrt{(lqq + 1)}$. Atque hoc est illud problema olim quidem maxime celebratum a solutionis ingeniosissimae auctore *Pellianum* vocatum, quo pro quouis huiusmodi numero l numerus quadratus qq requiritur, qui per l multiplicatus adiuncta vnitate fiat quadratus. In fractis quidem haec quaestio nullam haberet difficultatem, cum sumto $q = \frac{2rs}{lss - rr}$, fiat $p = \frac{lss + rr}{lss - rr}$: verum quia numeri integri desiderantur, negotium iterum eo reuocatur, vt denominator $lss - rr$ in vnitatem abeat.

6. Etiamsi autem solutio *Pelliana* huius problematis sit elegantissima, tamen saepenumero tam operosis calculis implicatur, qui non minus taedii quam laboris creare solent. Cum igitur obseruassem, algorithmum illum nouum, cuius nuper indolem exposui, ad hos calculos, quibus hic est opus, contrahendos, insignia subsidia suppeditare, praeclarius certe

c rte specimen exhibere vix licebit, quo vsus istius algorithmi illustretur et commendetur. Vbi id imprimis notatu dignum occurrit, quod totum compendium inde subministratum potissimum idoneorum signorum vsu contineatur.

7. Operationes, quibus *Pellius* est vsus, aliunde quidem satis sunt notae, egoque iam eas alia occasione fusius descripsi; ex quo eo minus opus est, vt iis denuo explicandis hic immorer, cum totam Analysin hic longe alia ratione sim institurus. Eius scilicet principium ex hoc fonte haurio, quod cum sit $pp = lqq + 1$, proxime fiat $\frac{p}{q} = \sqrt{l}$, ex quo manifestum est, $\frac{p}{q}$ eiusmodi esse fractionem, quae valorem irrationalem $\sqrt{l}$ tam prope exprimat, seu eum tam parum excedat, vt id, nisi maioribus numeris adhibendis, accuratius fieri nequeat. Quod problema, olim feliciter a *Wallisio* solutum, equidem quoque iam dudum per fractiones continuas multo commodius expediui.

8. Quo ergo hoc argumentum luculentius et ordine pertractem, primum radicem quadratam ex quouis numero in fractionem continuam euoluere docebo, idque methodo quam minime molesta. Deinde ostendam, quomodo inde fractiones $\frac{p}{q}$ valorem irrationalem $\sqrt{l}$ proxime exprimentes formari debeant, in subsidium vocato Algorithmo nouo supra explicato. Tum vero facile patebit, quomodo hinc nume-

numeros p et q definiri oporteat, vt fiat $pp = lqq + 1$. Denique tabulam ſubiungam, in qua pro omnibus numeris l, centenarium non ſuperantibus, numeri bini p et q exhibentur.

De euolutione radicum quadratarum per fractiones continuas.

9. Operationes in hunc finem conſtituendae in exemplo facillime explicabuntur. Sit igitur propoſita radix quadrata ex numero 13, et cum radix rationalis proxime minor ſit 3, ſtatuo $\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{a}$. Hinc colligitur

$$a = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4}$$

cuius valor in integris proxime minor eſt 1, quod inde patet, ſi 3 loco $\sqrt{13}$ ſcribatur. Pono itaque

$$a = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} = 1 + \frac{1}{b}, \text{ hincque}$$

$$b = \frac{4}{\sqrt{13} - 1} = \frac{4(\sqrt{13} + 1)}{12} = \frac{\sqrt{13} + 1}{3} = 1 + \frac{1}{c}$$

Ergo $c = \frac{3}{\sqrt{13} - 2} = \frac{3(\sqrt{13} + 2)}{9} = \frac{\sqrt{13} + 2}{3} = 1 + \frac{1}{d}$.

Ergo $d = \frac{3}{\sqrt{13} - 1} = \frac{3(\sqrt{13} + 1)}{12} = \frac{\sqrt{13} + 1}{4} = 1 + \frac{1}{e}$

Ergo $e = \frac{4}{\sqrt{13} - 3} = \frac{4(\sqrt{13} + 3)}{4} = \sqrt{13} + 3 = 6 + \frac{1}{f}$

Ergo $f = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} = 1 + \frac{1}{g}$

atque hic operationem abrumpere licet, quia valor f ipſi a aequalis prodiit, ideoque ſequentes eodem ordine repetuntur. Sicque inuenimus eſſe

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

10. Quo indoles harum operationum melius perſpiciatur, aliud exemplum, prolixiorem calculum poſtulans, adiungam. Propoſita ſcilicet ſit $\sqrt{61}$, cuius valor proxime minor cum ſit 7, pono $\sqrt{61} = 7 + \frac{1}{a}$, et operationes ſequenti modo erunt inſtituendae:

I. $a = \frac{1}{\sqrt{61} - 7} = \frac{\sqrt{61} + 7}{12} = 1 + \frac{1}{b}$

II. $b = \frac{12}{\sqrt{61} - 5} = \frac{12(\sqrt{61} + 5)}{36} = \frac{\sqrt{61} + 5}{3} = 4 + \frac{1}{c}$

III. $c = \frac{3}{\sqrt{61} - 7} = \frac{3(\sqrt{61} + 7)}{12} = \frac{\sqrt{61} + 7}{4} = 3 + \frac{1}{d}$

IV. $d = \frac{4}{\sqrt{61} - 5} = \frac{4(\sqrt{61} + 5)}{36} = \frac{\sqrt{61} + 5}{9} = 1 + \frac{1}{e}$

V. $e = \frac{9}{\sqrt{61} - 4} = \frac{9(\sqrt{61} + 4)}{45} = \frac{\sqrt{61} + 4}{5} = 2 + \frac{1}{f}$

VI $f = \frac{5}{\sqrt{61} - 6} = \frac{5(\sqrt{61} + 6)}{25} = \frac{\sqrt{61} + 6}{5} = 2 + \frac{1}{g}$

VII. $g = \frac{5}{\sqrt{61} - 4} = \frac{5(\sqrt{61} + 4)}{45} = \frac{\sqrt{61} + 4}{9} = 1 + \frac{1}{h}$

VIII.

VIII. $b = \frac{9}{\sqrt{61}-5} = \frac{9(\sqrt{61}+5)}{36} = \frac{\sqrt{61}+5}{4} = 3 + \frac{1}{i}$

IX. $i = \frac{4}{\sqrt{61}-7} = \frac{4(\sqrt{61}+7)}{12} = \frac{\sqrt{61}+7}{3} = 4 + \frac{1}{k}$

X. $k = \frac{3}{\sqrt{61}-5} = \frac{3(\sqrt{61}+5)}{36} = \frac{\sqrt{61}+5}{12} = 1 + \frac{1}{l}$

XI. $l = \frac{12}{\sqrt{61}-7} = \frac{12(\sqrt{61}+7)}{12} = \sqrt{61}+7 = 14 + \frac{1}{m}$

XII. $m = \frac{1}{\sqrt{61}-7}$ ergo $m = a$, hincque porro $n = b$, $o = c$. etc. Ex quo indices pro fractione continua erunt:

7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14, 1, 4, 3, 1, 2, etc. neque opus eſt, ipſam fractionem continuam hic exhibere.

11. Adhuc aliud exemplum adieciſſe iuuabit, vbi indicum numerus, antequam iidem recurrunt, fit impar. Eſto hoc exemplum: $\sqrt{67} = 8 + \frac{1}{a}$, et operationes ſequentes inſtitui oportebit:

I. $a = \frac{1}{\sqrt{67}-8} = \frac{\sqrt{67}-8}{3} = 5 + \frac{1}{b}$

II. $b = \frac{3}{\sqrt{67}-7} = \frac{3(\sqrt{67}+7)}{18} = \frac{\sqrt{67}+7}{6} = 2 + \frac{1}{c}$

III. $c = \frac{6}{\sqrt{67}-5} = \frac{6(\sqrt{67}+5)}{42} = \frac{\sqrt{67}+5}{7} = 1 + \frac{1}{d}$

IV. $d = \frac{7}{\sqrt{67}-2} = \frac{7(\sqrt{67}+2)}{63} = \frac{\sqrt{67}+2}{9} = 1 + \frac{1}{e}$

V. $e = \frac{9}{\sqrt{67}-7} = \frac{9(\sqrt{67}+7)}{18} = \frac{\sqrt{67}+7}{2} = 7 + \frac{1}{f}$

VI. $f = \frac{2}{\sqrt{67}-7} = \frac{2(\sqrt{67}+7)}{18} = \frac{\sqrt{67}+7}{9} = 1 + \frac{1}{g}$

VII. $g = \frac{9}{\sqrt{67}-2} = \frac{9(\sqrt{67}+2)}{63} = \frac{\sqrt{67}+2}{7} = 1 + \frac{1}{h}$

VIII. $h = \frac{7}{\sqrt{67}-5} = \frac{7(\sqrt{67}+5)}{42} = \frac{\sqrt{67}+5}{6} = 2 + \frac{1}{i}$

IX. $i = \frac{6}{\sqrt{67} - 7} = \frac{6(\sqrt{67} + 7)}{18} = \frac{\sqrt{67} + 7}{3} = 5 + \frac{1}{k}$

X. $k = \frac{3}{\sqrt{67} - 8} = \frac{3(\sqrt{67} + 8)}{3} = \sqrt{67} + 8 = 16 + \frac{1}{l}$

XI. $l = \frac{1}{\sqrt{67} - 8}$, ergo $l = a$, indeque indices b, c, d etc. ordine recurrunt: quare indices fractionis continuae quaesitae sunt:

8, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16 etc.

12. His exemplis probe perpensis, poterimus iam in genere operationes describere, quibus pro cuiusuis numeri radice quadrata fractio continua ipsi aequalis, seu indices eam constituentes, inueniuntur. Sit scilicet numerus propositus $= z$, eiusque radix integra proxime minor $= v$, vera autem hac fractione continua exprimatur:

$$\sqrt{z} = v + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}}$$

cuius indices a, b, c, d etc. post primum v, per se cognitum, sequentibus operationibus reperiuntur:

Capiatur	tum vero	eritque
I. $A = v$:	$\alpha = z - AA = z - vv$	$a < \frac{v + A}{\alpha}$
II. $B = \alpha a - A$	$\beta = \frac{z - BB}{\alpha} = 1 + a(A - B)$	$b < \frac{v + B}{\beta}$
III. $C = \beta b - B$	$\gamma = \frac{z - CC}{\beta} = \alpha + b(B - C)$	$c < \frac{v + C}{\gamma}$
IV. $D = \gamma c - C$	$\delta = \frac{z - DD}{\gamma} = \beta + c(C - D)$	$d < \frac{v + D}{\delta}$
V. $E = \delta d - D$	$\varepsilon = \frac{z - EE}{\delta} = \gamma + d(D - E)$	$e < \frac{v + E}{\varepsilon}$

etc.

vbi

vbi in poſtrema columna ſignum $<$ indicat, pro litteris a, b, c, d etc. ſumi debere numeros integros proxime minores fractionibus adiectis, niſi hae fractiones ipſae in numeros integros abeant, quo caſu hi ipſi erunt indices.

13. Pro indicibus igitur a, b, c, d etc. eliciendis binas alias numerorum ſeries inueſtigari oportet, quarum priorem litteris maiuſculis A, B, C, D etc. poſteriorem vero graecis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. deſignaui. Circa priores numeros obſeruo, eos numerum v nunquam ſuperare poſſe, eorum quidem primus eſt $A = v$, at cum ſit $a < \frac{v + A}{\alpha}$, erit $a\alpha - A < v$, ideoque $B < v$, vel ad ſummum $B = v$, quo caſu fit $\beta = 1$, et $b = 2v$. Deinde ob $b < \frac{v + \beta}{\beta}$ eſt $\beta b - B = C < v$, ſimilique modo $D < v$, $E < v$ etc. ita vt horum numerorum nullus ipſo v maior prodire poſſit. Deinde patet, praeter caſus, quibus graecarum litterarum quaepiam fit vnitas, indices a, b, c, etc. omnes ipſo v maiores eſſe non poſſe, quandoquidem in fractionibus $\frac{v + B}{\beta}$, $\frac{v + C}{\gamma}$ etc. numeratores non excedere poſſunt $2v$, denominatores vero ad minimum ſint $= 2$. Denique cum fuerit perventum ad indicem $= 2v$, ſequentes iterum prodeunt a, b, c, d etc.

14. Illuſtremus etiam has operationes nonnullis exemplis.

I. Sit $z = 31$, erit $v = 5$

$A = 5$	$\alpha = 6$	$a \lesssim \frac{10}{6} = 1$
$B = 6 - 5 = 1$;	$\beta = 1 + 1.4 = 5$;	$b \lesssim \frac{6}{5} = 1$
$C = 5 - 1 = 4$;	$\gamma = 6 - 1.3 = 3$;	$c \lesssim \frac{9}{3} = 3$
$D = 9 - 4 = 5$;	$\delta = 5 - 3.1 = 2$;	$d \lesssim \frac{10}{2} = 5$
$E = 10 - 5 = 5$;	$\varepsilon = 3 - 5.0 = 3$;	$e \lesssim \frac{10}{3} = 3$
$F = 9 - 5 = 4$;	$\zeta = 2 + 3.1 = 5$;	$f \lesssim \frac{9}{5} = 1$
$G = 5 - 4 = 1$;	$\eta = 3 + 1.3 = 6$;	$g \lesssim \frac{6}{6} = 1$
$H = 6 - 1 = 5$;	$\theta = 5 - 1.4 = 1$;	$h \lesssim \frac{10}{1} = 10$.

II. Sit $z = 46$, erit $v = 6$

$A = 6$;	$\alpha = 10$	$a = \frac{12}{10} = 1$
$B = 10 - 6 = 4$;	$\beta = 1 + 1.2 = 3$;	$b = \frac{10}{3} = 3$
$C = 9 - 4 = 5$;	$\gamma = 10 - 3.1 = 7$;	$c \lesssim \frac{11}{7} = 1$
$D = 7 - 5 = 2$;	$\delta = 3 + 1.3 = 6$;	$d \lesssim \frac{8}{6} = 1$.
$E = 6 - 2 = 4$;	$\varepsilon = 7 - 1.2 = 5$;	$e \lesssim \frac{10}{5} = 2$
$F = 10 - 4 = 6$;	$\zeta = 6 - 2.2 = 2$;	$f \lesssim \frac{12}{2} = 6$
$G = 12 - 6 = 6$;	$\eta = 5 - 6.0 = 5$;	$g \lesssim \frac{12}{5} = 2$
$H = 10 - 6 = 4$;	$\theta = 2 + 2.2 = 6$;	$h \lesssim \frac{10}{6} = 1$
$I = 6 - 4 = 2$;	$\iota = 5 + 1.2 = 7$;	$i \lesssim \frac{8}{7} = 1$
$K = 7 - 2 = 5$:	$\varkappa = 6 - 1.3 = 3$;	$k \lesssim \frac{11}{3} = 3$
$L = 9 - 5 = 4$;	$\lambda = 7 + 3.1 = 10$;	$l \lesssim \frac{10}{10} = 1$
$M = 10 - 4 = 6$;	$\mu = 3 - 1.2 = 1$;	$m \lesssim \frac{12}{1} = 12$.

III. Sit $z = 54$, erit $v = 7$;

$A = 7$;	$\alpha = 5$;	$a \lesssim \frac{14}{5} = 2$
$B = 10 - 7 = 3$;	$\beta = 1 + 2.4 = 9$;	$b \lesssim \frac{10}{9} = 1$
$C = 9 - 3 = 6$;	$\gamma = 5 - 1.3 = 2$;	$c \lesssim \frac{13}{2} = 6$
$D = 12 - 6 = 6$;	$\delta = 9 + 6.0 = 9$;	$d \lesssim \frac{13}{9} = 1$
$E = 9 - 6 = 3$;	$\varepsilon = 2 + 1.3 = 5$;	$e \lesssim \frac{10}{5} = 2$
$F = 10 - 3 = 7$;	$\zeta = 9 - 2.4 = 1$;	$f \lesssim \frac{14}{1} = 14$.

15.

15. Tabulam ergo hic ſubiungam, pro ſingulorum numerorum radicibus quadratis indices continentem, ex quibus fractiones continuae ipſis aequales formari queant. Simul vero litterarum graecarum ſingulis conuenientium valores ſubſcripti reperiuntur.

Numeri ſurdi.	Indices.
$\sqrt{2}$	1, 2, 2, 2 etc. 1 1 1 1
$\sqrt{3}$	1, 1, 2, 1, 2, 1, 2 etc. 1 2 1 2 1 2 1
$\sqrt{5}$	2, 4, 4, 4 etc. 1 1 1 1
$\sqrt{6}$	2, 2, 4, 2, 4, 2, 4 etc. 1 2 1 2 1 2 1
$\sqrt{7}$	2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4 etc. 1 3 2 3 1 3 2 3 1
$\sqrt{8}$	2, 1, 4, 1, 4, 1, 4 etc. 1 4 1 4 1 4 1
$\sqrt{10}$	3, 6, 6, 6 etc. 1 1 1 1
$\sqrt{11}$	3, 3, 6, 3, 6, 3, 6 etc. 1 2 1 2 1 2 1
$\sqrt{12}$	3, 2, 6, 2, 6, 2, 6 etc. 1 3 1 3 1 3 1
$\sqrt{13}$	3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 4, 6 etc. 1 4 3 3 4 1 4 3 3 4 1
$\sqrt{14}$	3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6 etc. 1 5 2 5 1 5 2 5 1
$\sqrt{15}$	3, 1, 6, 1, 6, 1, 6 etc. 1 6 1 6 1 6 1
$\sqrt{17}$	4, 8, 8, 8, 8 etc. 1 1 1 1 1
$\sqrt{18}$	4, 4, 8, 4, 8, 4, 8, 4, 8 etc. 1 2 1 2 1 2 1 2 1

4, 2,

Numeri surdi.	Indices.
$\sqrt{19}$	4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8 etc.
	1 3 5 2 5 3 1 3 5 2 5 3 1
$\sqrt{20}$	4, 2, 8, 2, 8, 2, 8, 2, 8 etc.
	1 4 1 4 1 4 1 4 1
$\sqrt{21}$	4, 1, 1, 2, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 1, 8 etc.
	1 5 4 3 4 5 1 5 4 3 4 5 1
$\sqrt{22}$	4, 1, 2, 4, 2, 1, 8, 1, 2, 4, 2, 1, 8 etc.
	1 6 3 2 3 6 1 6 3 2 3 6 1
$\sqrt{23}$	4, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8 etc.
	1 7 2 7 1 7 2 7 1
$\sqrt{24}$	4, 1, 8, 1, 8, 1, 8 etc.
	1 8 1 8 1 8 1
$\sqrt{26}$	5, 10, 10, 10 etc.
	1 1 1 1
$\sqrt{27}$	5, 5, 10, 5, 10, 5, 10 etc.
	1 2 1 2 1 2 1
$\sqrt{28}$	5, 3, 2, 3, 10, 3, 2, 3, 10 etc.
	1 3 4 3 1 3 4 3 1
$\sqrt{29}$	5, 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, 2, 10 etc.
	1 4 5 5 4 1 4 5 5 4 1
$\sqrt{30}$	5, 2, 10, 2, 10, 2, 10, 2, 10 etc.
	1 5 1 5 1 5 1 5 1
$\sqrt{31}$	5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10 etc.
	1 6 5 3 2 3 5 6 1
$\sqrt{32}$	5, 1, 1, 1, 10, 1, 1, 1, 10 etc.
	1 7 4 7 1 7 4 7 1
$\sqrt{33}$	5, 1, 2, 1, 10, 1, 2, 1, 10 etc.
	1 8 3 8 1 8 3 8 1
$\sqrt{34}$	5, 1, 4, 1, 10, 1, 4, 1, 10 etc.
	1 9 2 9 1 9 2 9 1
$\sqrt{35}$	5, 1, 10, 1, 10, 1, 10 etc.
	1 10 1 10 1 10 1
$\sqrt{37}$	6, 12, 12, 12 etc.
	1 1 1 1
$\sqrt{38}$	6, 6, 12, 6, 12, 6, 12 etc.
	1 2 1 2 [illegible] 2 1

6, 4,

1 [illegible]

Numeri surdi.	Indices.
$\sqrt{39}$	6, 4, 12, 4, 12, 4, 12 etc. 1 3 1 3 1 3 1
$\sqrt{40}$	6, 3, 12, 3, 12, 3, 12 etc. 1 4 1 4 1 4 1
$\sqrt{41}$	6, 2, 2, 12, 2, 2, 12 etc. 1 5 5 1 5 5 1
$\sqrt{42}$	6, 2, 12, 2, 12, 2, 12 etc. 1 6 1 6 1 6 1
$\sqrt{43}$	6, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12 etc. 1 7 6 3 9 2 9 3 6 7 1
$\sqrt{44}$	6, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12 etc. 1 8 5 7 4 7 5 8 1
$\sqrt{45}$	6, 1, 2, 2, 2, 1, 12, 1, 2, 2, 2, 1, 12 etc. 1 9 4 5 4 9 1 9 4 5 4 9 1
$\sqrt{46}$	6, 1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12 etc. 1 10 3 7 6 5 2 5 6 7 3 10 1
$\sqrt{47}$	6, 1, 5, 1, 12, 1, 5, 1, 12 etc. 1 11 2 11 1 11 2 11 1
$\sqrt{48}$	6, 1, 12, 1, 12, 1, 12 etc. 1 12 1 12 1 12 1
$\sqrt{50}$	7, 14, 14, 14 etc. 1 1 1 1
$\sqrt{51}$	7, 7, 14, 7, 14, 7, 14 etc. 1 2 1 2 1 2 1
$\sqrt{52}$	7, 4, 1, 2, 1, 4, 14, 4, 1, 2, 1, 4, 14 etc. 1 3 9 4 9 3 1 3 9 4 9 7 1
$\sqrt{53}$	7, 3, 1, 1, 3, 14, 3, 1, 1, 3, 14 etc. 1 4 7 7 4 1 4 7 7 4 1
$\sqrt{54}$	7, 2, 1, 6, 1, 2, 14, 2, 1, 6, 1, 2, 14 etc. 1 5 9 2 9 5 1 5 9 2 9 5 1
$\sqrt{55}$	7, 2, 2, 2, 14, 2, 2, 2, 14, 2, 2, 2, 14 etc. 1 6 5 6 1 6 5 6 1 6 5 6 1
$\sqrt{56}$	7, 2, 14, 2, 14, 2, 14 etc. 1 7 1 7 1 7 1
$\sqrt{57}$	7, 1, 1, 4, 1, 1, 14 etc. 1 8 7 3 7 8 1

Numeri surdi.	Indices.
√58	7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 14 etc. 1 9 6 7 7 6 9 1
√59	7, 1, 2, 7, 2, 1, 14 etc. 1 10 5 2 5 10 1
√60	7, 1, 2, 1, 14 etc. 1 11 4 11 1
√61	7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14 etc. 1 12 3 4 9 5 5 9 4 3 12 1
√62	7, 1, 6, 1, 14 etc. 1 13 2 13 1
√63	7, 1, 14, 1, 14 etc. 1 14 1 14 1
√65	9, 16, 16 etc. 1 1 1
√66	8, 8, 16, 8, 16 etc. 1 2 1 2 1
√67	8, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16 etc. 1 3 6 7 9 2 9 7 6 3 1
√68	8, 5, 16, 4, 16 etc. 1 4 1 4 1
√69	8, 3, 3, 1, 4, 1, 3, 3, 16 etc. 1 5 4 11 3 11 4 5 1
√70	8, 2, 1, 2, 1, 2, 16 etc. 1 6 9 5 9 6 1
√71	8, 2, 2, 1, 7, 1, 2, 2, 16 etc. 1 7 5 11 2 11 5 7 1
√72	8, 2, 16, 2, 16 etc. 1 8 1 8 1
√73	8, 1, 1, 5, 5, 1, 1, 16 etc. 1 9 8 3 3 8 9 1
√74	8, 1, 1, 1, 1, 16 etc. 1 10 7 7 10 1
√75	8, 1, 1, 1, 16 etc. 1 11 6 11 1
√76	8, 1, 2, 1, 1, 5, 4, 5, 1, 1, 2, 1, 16 etc. 1 12 5 8 9 3 4 3 9 8 5 12 1

8, 1,
1 15

Numeri surdi.	Indices.
$\sqrt{77}$	8, 1, 3, 2, 3, 1, 16 etc. 1 13 4 7 4 13 1
$\sqrt{78}$	8, 1, 4, 1, 16 etc. 1 14 3 14 1
$\sqrt{79}$	8, 1, 7, 1, 16 etc. 1 15 2 15 1
$\sqrt{80}$	8, 1, 16, 1, 16 etc. 1 16 1 16 1
$\sqrt{82}$	9, 18, 18, 18 etc. 1 1 1 1
$\sqrt{83}$	9, 9, 18, 9, 18 etc. 1 2 1 2 1
$\sqrt{84}$	9, 6, 18, 6, 18 etc. 3 3 1 3 1
$\sqrt{85}$	9, 4, 1, 1, 4, 18 etc. 1 4 9 9 4 1
$\sqrt{86}$	9, 3, 1, 1, 1 8, 1, 1, 1, 3, 18 etc. 1 5 10 7 11 2 11 7 10 5 1
$\sqrt{87}$	9, 3, 18, 3, 18 etc. 1 6 1 6 1
$\sqrt{88}$	9, 2, 1, 1, 1, 2, 18 etc. 1 7 9 8 9 7 1
$\sqrt{89}$	9. 2, 3, 3, 2, 18 etc. 1 8 5 5 8 1
$\sqrt{90}$	9, 2, 18, 2, 18 etc. 1 9 1 9 1
$\sqrt{91}$	9, 1, 1, 5, 1, 5, 1, 1, 18 etc. 1 10 9 3 14 3 9 10 1
$\sqrt{92}$	9, 1, 1, 2, 4, 2, 1, 1, 18 etc. 1 11 8 7 4 7 8 11 1
$\sqrt{93}$	9, 1, 1, 1, 4, 6 4, 1, 1, 1, 18 etc. 1 12 7 11 4 3 4 11 7 12 1
$\sqrt{94}$	9, 1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18 etc. 1 13 6 5 9 10 3 15 2 15 3 10 9 5 6 13 1
$\sqrt{95}$	9, 1, 2, 1, 18 etc. 1 14 5 14 1

Numeri surdi.	Indices.
$\sqrt{96}$	9, 1, 3, 1, 18 etc. 1 15 4 15 1
$\sqrt{97}$	9, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18 etc. 1 16 3 11 8 9 9 8 11 3 16 1
$\sqrt{98}$	9, 1, 8, 1, 18 etc. 1 17 2 17 1
$\sqrt{99}$	9, 1, 18, 1, 18 etc. 1 18 1 18 1
$\sqrt{101}$	10, 20, 20 etc. 1 1 1
$\sqrt{102}$	10, 10, 20, 10, 20 etc. 1 2 1 2 1
$\sqrt{103}$	10, 6, 1, 2, 1, 1, 9, 1, 1, 2, 1, 6, 20 etc. 1 3 13 6 9 11 2 11 9 6 13 3 1
$\sqrt{104}$	10, 5, 20, 5, 20 etc. 1 4 1 4 1
$\sqrt{105}$	10, 4, 20, 4, 20 etc. 1 5 1 5 1
$\sqrt{106}$	10, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 20 etc. 1 6 7 10 9 9 10 7 6 1
$\sqrt{107}$	10, 2, 1, 9, 1, 2, 20 etc. 1 7 13 2 13 7 1
$\sqrt{108}$	10, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 20 etc. 1 8 9 11 4 11 9 8 1
$\sqrt{109}$	10, 2, 3, 1, 2, 4, 1, 6, 6 1, 4, 2, 1, 3, 2, 20 etc. 1 9 5 12 7 4 15 3 3 15 4 7 12 5 9 1
$\sqrt{110}$	10, 2, 20, 2, 20 etc. 1 10 1 10 1
$\sqrt{111}$	10, 1, 1, 6, 1, 1, 20 etc. 1 11 10 3 10 11 1
$\sqrt{112}$	10, 1, 1, 2, 1, 1, 20 etc. 1 12 9 7 9 12 1
$\sqrt{113}$	10, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 20 etc. 1 13 8 11 7 7 11 8 13 1
$\sqrt{114}$	10, 1, 2, 10, 2, 1, 20 etc. 1 14 7 2 7 14 1

10, 1,
1 15

Numeri ſurdi.	Indices.
$\sqrt{115}$	10, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 20 etc.
	1 15 6 11 9 10 9 11 6 15 1
$\sqrt{116}$	10, 1, 3, 2, 1, 4, 1, 2, 3, 1, 20 etc.
	1 16 5 7 11 4 13 7 5 16 1
$\sqrt{117}$	10, 1, 4, 2, 4, 1, 20 etc.
	1 17 4 9 4 17 1
$\sqrt{118}$	10, 1, 6, 3, 2, 10, 2, 3, 6, 1, 20 etc.
	1 18 3 6 9 2 9 6 3 18 1
$\sqrt{119}$	10, 1, 9, 1, 20 etc.
	1 19 2 19 1
$\sqrt{120}$	10, 1, 20, 1, 20 etc.
	1 20 1 20 1

16. In omnibus his indicum ſeriebus periodi deprehenduntur modo ſtrictiores modo largiores, quae indicibus iis, qui primo duplo ſunt maiores, includuntur, atque hae periodi eo clarius in oculos incidunt, ſi primi indices cuiusque ſeriei duplicantur. Deinde in qualibet periodo idem indicum ordo, ſiue antrorſum, ſiue retrorſum, obſeruatur: ex quo in qualibet periodo vel vnus datur index medius, vel duo, prout terminorum numerus fuerit par vel impar. In litteris vero etiam graecis ſimiles periodi obſeruantur, vbi imprimis animaduertendum, pro omnibus indicibus $2v$ litteram graecam in vnitatem abire. Hanc proprietatem inſignem, quae in ipſis operationibus facilius perſpicitur, quam verborum ambage demonſtratur, probe notaſſe in ſequentibus plurimum intererit.

17. Ex his autem exemplis formas quasdam generales colligere licet, quae ita se habent:

I. Si $z = nn + 1$ erunt indices $\frac{n}{1}, \frac{2n}{1}, \frac{2n}{1}, \frac{2n}{1}$ etc.

II. Si $z = nn + 2$ erunt indices $\frac{n}{1}\ \frac{n}{2}\ \frac{2n}{1}\ \frac{n}{2}\ \frac{2n}{1}$ etc.

III. Si $z = nn + n$ erunt indices $\frac{n}{1}, \frac{2}{n}, \frac{2n}{1}, \frac{2}{n}, \frac{2n}{1}$ etc.

IV. Si $z = nn + 2n - 1$ erunt indices $\frac{n}{1}, \frac{1}{2n-1}, \frac{n-1}{2}, \frac{1}{2n-1}\ \frac{2n}{1}$ etc.

V. Si $z = nn + 2n$ erunt indices $\frac{n}{1}, \frac{1}{2n}, \frac{2n}{1}\ \frac{1}{2n}, \frac{2n}{1}$ etc.

Ac fractionum quidem continuarum ex his indicibus formatarum valor in genere facile definitur, idemque, quem hic assignauimus, deprehenditur. Tum vero etiam patet

VI. Si fit $z = 4nn + 4$ fore indices $\frac{2n}{1}, \frac{n}{4}, \frac{4n}{1}, \frac{n}{4}, \frac{4n}{1}$ etc.

VII. Si fit $z = 9nn + 3$ fore indices $\frac{2n}{1}, \frac{2n}{3}, \frac{6n}{1}, \frac{2n}{3}, \frac{6n}{1}$ etc.

VIII. Si fit $z = 9nn + 6$ fore indices $\frac{3n}{1}, \frac{n}{6}, \frac{6n}{1}\ \frac{n}{6}, \frac{6n}{1}$ etc.

De resolutione formulae $p = \sqrt{(lqq + 1)}$ in numeris integris.

18. Inuentis indicibus pro radice quadrata numeri cuiusuis z, ea hoc modo per fractionem continuam exprimitur:

$$\sqrt{z} = v + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}}$$

atque

atque ex his indicibus v, a, b, c, d etc. fractiones $\frac{x}{y}$ formari possunt, quae tam prope ad $\sqrt{z}$ accedunt, vt nonnisi maioribus numeris adhibendis, eius valor accuratius exhiberi possit. Hae fractiones autem ita formantur:

$$\begin{array}{llllll} \text{Indices } v, a, & b & c & \ldots m, & n, & \\ \frac{x}{y} \quad \frac{1}{0}, \frac{v}{1}, & \frac{av+1}{a}, & \frac{(ab+1)v+b}{ab+1} & \ldots \frac{M}{P}, & \frac{N}{Q}, & \frac{nN+M}{nQ+P} \end{array}$$

quae continuo propius valorem irrationalem $\sqrt{z}$ exprimunt.

19. Nouus autem algorithmus succinctum modum suppeditat, has fractiones commode per indices repraesentandi, quae ita se habent:

$$\frac{1}{0}, \frac{(v)}{1}, \frac{(v,a)}{(a)}, \frac{(v,a,b)}{(a,b)}, \frac{(v,a,b,c)}{(a,b,c)}, \frac{(v,a,b,c,d)}{(a,b,c,d)} \text{ etc.}$$

vbi cum ex natura progressionis sit:

$$(v,a)=a(v)+1;\ (v,a,b)=b(v,a)+(v);\ (v,a,b,c)=c(v,a,b)+(v,a);$$

$$(a)=a1+10;\ (a,b)=b(a)+1;\ (a,b,c)=c(a,b)+(a);$$

erit etiam ex natura harum formularum:

$$(v,a)=v(a)+1;\ (v,a,b(=v(a,b,)+b;\ (v,a,b,c)=v(a,b,c)+(b,c)$$

deinde etiam sequentes transformationes demonstraui:

$$(v,a,b,c,d,e)=v(a,b,c,d,e)+(b,c,d,e)$$

$$(v,a,b,c,d,e)=(v,a)(b,c,d,e)+v(c,d,e)$$

$$(v,a,b,c,d,e)=(v,a,b)(c,d,e)+(v,a)(d,e)$$

$$(v,a,b,c,d,e)=(v,a,b,c)(d,e)+(v,a,b)(e)$$

quas probe notasse in sequentibus plurimum iuuabit.

20. Videamus iam, quam prope ſingulae iſtae fractiones ad valorem $\sqrt{z}$ accedant, quod pro inſtituto noſtro luculentiſſime inde patebit, ſi ex quaque fractione $\frac{x}{y}$ valorem $xx - zyy$ colligamus, quippe qui quo minor fuerit prae ipſis numeris x et y, eo exactius fractio $\frac{x}{y}$ valori $\sqrt{z}$ aequabitur. Ac primo quidem ſi $\frac{x}{y} = \frac{1}{0}$, erit $xx - zyy = 1$. Deinde ſumto $\frac{x}{y} = \frac{v}{1}$, fit $xx - zyy = vv - z$, quae differentia per operationes ſupra expoſitas (12) prima littera graeca negatiue ſumta $-\alpha$ deſignatur. Porro poſito $\frac{x}{y} = \frac{(v,a)}{(a)} = \frac{va+1}{a}$, colligitur

$$xx - zyy = (vv - z)aa + 2va + 1 = -\alpha aa + 2va + 1$$

ergo $xx - zyy = 1 + a(2v - \alpha a) = 1 + a(A - B) = \beta$

ob $v = A$, et $\alpha a = A + B$.

Quocirca hoc caſu fit $xx - zyy = \beta$.

21. Cum igitur nacti ſimus:

$$vv - z = -\alpha \text{ et } (v,a)^2 - z(a)^2 = \beta$$

hinc vlterius progredi poterimus. Sit igitur

$$\frac{x}{y} = \frac{(v,a,b)}{(a,b)} = \frac{b(v,a) + v}{b(a) + 1}$$

atque adhibitis illis reductionibus obtinebimus

$$xx - zyy = \beta bb + 2vb(v,a) - 2zb(a) - \alpha$$

ergo ob $(v,a) = v(a) + 1$, erit

$xx - zyy = \beta bb - 2\alpha ab + 2vb - \alpha = -\alpha - b(2\alpha a - \beta b - 2v)$

at eſt $v = A$, $\alpha a = A + B$ et $\beta b = B + C$

ideoque $xx - zyy = -\alpha - b(B - C) = -\gamma$

ita vt ſit $(v,a,b)^2 - z(a,b)^2 = -\gamma$.

22. Consideremus nunc fractionem sequentem:

$$\frac{x}{y} = \frac{(v,a,b,c)}{(a,b,c)} = \frac{c(v,a,b)+(v,a)}{c(a,b)+a}$$

ex qua colligitur:

$$xx - zyy = -\gamma cc + 2c(v,a,b)(v,a) + \beta \\ -2zca(a,b)$$

cuius pars media reducitur ad

$$2c(\beta b - \alpha a + v)$$

vnde ob $v = A$, $\alpha a = A + B$; $\beta b = B + C$, $\gamma c = C + D$ resultat $xx - zyy = \beta + c(C - D) = \delta$ ita vt sit $(v,a,b,c)^2 - z(a,b,c)^2 = \delta$, vnde per inductionem sequentes valores facile colliguntur.

23. Ne autem hic inductioni nimium videar tribuisse, sequenti modo haec inuestigatio institui potest:

$$\begin{aligned}
\text{sit } (v)^2 \quad & - z1^2 && = \mathfrak{A} \\
(v,a)^2 \quad & - z(a)^2 && = \mathfrak{B} \\
(v,a,b)^2 \quad & - z(a,b)^2 && = \mathfrak{C} \\
(v,a,b,c)^2 \quad & - z(a,b,c)^2 && = \mathfrak{D} \\
(v,a,b,c,d)^2 & - z(a,b,c,d)^2 && = \mathfrak{E}
\end{aligned}$$

etc.

vbi quidem iam vidimus esse $\mathfrak{A} = -\alpha$, $\mathfrak{B} = \beta$, $\mathfrak{C} = -\gamma$ etc. Cum vero sit

$$\begin{aligned}
(v,a) &= a(v) + 1 & (a) &= a \\
(v,a,b) &= b(v,a) + (v) & (a,b) &= b(a) + 1 \\
(v,a,b,c) &= c(v,a,b) + (v,a); & (a,b,c) &= c(a,b,) + (a) \\
(v,a,b,c,d) &= d(v,a,b,c) + (v,a,b); & (a,b,c,d) &= d,(a,b,c) + (a,b)
\end{aligned}$$

etc.

habebimus:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}aa + 1 + 2a, v$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B}bb + \mathfrak{A} + 2b((v,a)(v) - z(a))$$
$$\mathfrak{D} = \mathfrak{C}cc + \mathfrak{B} + 2c((v,a,b)(v,a) - z((a,b)(a))$$
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{D}dd + \mathfrak{C} + 2d((v,a,b,c)(v,a,b) - z(a,b,c)\,a,b))$$
$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E}ee + \mathfrak{D} + 2e((v,a,b,c,d)(v,a,b,c) - z(a,b,c,d)(a,b,c))$$

etc.

24. Statuamus iam breuitatis gratia:

$$\mathfrak{B} = 1 + \mathfrak{A}aa + 2a.\mathrm{O}$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}bb + 2b.\mathrm{P}$$
$$\mathfrak{D} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}cc + 2c.\mathrm{Q}$$
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{C} + \mathfrak{D}dd + 2d.\mathrm{R}$$
$$\mathfrak{F} = \mathfrak{D} + \mathfrak{E}ee + 2e.\mathrm{S}$$

etc.

et ex superioribus reductionibus colligemus:

$$\mathrm{P} - \mathrm{O} = a(v)^2 - za = \mathfrak{A}a$$
$$\mathrm{Q} - \mathrm{P} = b(v,a)^2 - zb(a)^2 = \mathfrak{B}b$$
$$\mathrm{R} - \mathrm{Q} = c(v,a,b)^2 - cz(a,b)^2 = \mathfrak{C}c$$
$$\mathrm{S} - \mathrm{R} = d(v,a,b,c)^2 - dz(a,b,c)^2 = \mathfrak{D}d$$

etc.

sicque fiet

$$\mathrm{O} = v$$
$$\mathrm{P} = v + \mathfrak{A}a$$
$$\mathrm{Q} = v + \mathfrak{A}a + \mathfrak{B}b$$
$$\mathrm{R} = v + \mathfrak{A}a + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}c$$
$$\mathrm{S} = v + \mathfrak{A}a + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}c + \mathfrak{D}d$$

etc.

25.

25. Formulae autem supra vsurpatae praebent

$$A = v$$
$$B = -v + \alpha a$$
$$C = v - \alpha a + \beta b$$
$$D = -v + \alpha a - \beta b + \gamma c$$
$$E = v - \alpha a + \beta b - \gamma c + \delta c$$

vnde patet esse $O = A$ et $P = -B$ ob $\mathfrak{A} = -\alpha$. Cum iam sit $\mathfrak{B} = 1 - \alpha aa + 2av = 1 + a(A - B)$ erit vtique $\mathfrak{B} = \beta$, hincque $Q = C$, ex quo porro colligitur:

$$\mathfrak{C} = -\alpha + \beta bb - 2bB = -\alpha - b(2B \;\; \beta b) = -\alpha - b(B - C)$$

sicque est $\mathfrak{C} = -\gamma$ et $R = -D$; simili modo

$$\mathfrak{D} = \beta - \gamma cc + 2cC = \beta + c(2C - \gamma c) = \beta + c(C - D)$$

ideoque est $\mathfrak{D} = \delta$ et $S = E$. Tum vero porro

$$\mathfrak{E} = -\gamma + \delta dd - 2dD = -\gamma - d(2D - \delta d)$$
$$= \gamma - d(D - E)$$

ac propterea $\mathfrak{E} = -\varepsilon$, vnde superior inductio satis confirmatur.

26. Pro fractionibus ergo $\frac{x}{y}$ formulae radicali $\sqrt{z}$ proxime aequalibus sequentes adipiscimur relationes:

Si sumatur

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ erit $xx = zyy + 1$

$\begin{cases} x = (v) \\ y = 1 \end{cases}$ erit $xx = zyy - \alpha$

$$\left\{\begin{array}{l} x = (v,a) \\ y = (a) \end{array}\right. \text{ erit } xx = zyy + \beta$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = (v,a,b) \\ y = (a,b,) \end{array}\right. \text{ erit } xx = zyy - \gamma$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = (v,a,b,c) \\ y = (a,b,c) \end{array}\right. \text{ erit } xx = zyy + \delta$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = (v,a,b,c,d) \\ y = (a,b,c,d) \end{array}\right. \text{ erit } xx = zyy - \varepsilon$$

etc.

vnde problema *Pellianum* ſoluetur, quoties litterarum graecarum per ſaltum excerptarum β, δ, ζ etc. quaepiam in vnitatem abit.

27. Vidimus autem ſupra, nonniſi iis indicibus, qui ſunt $2v$, reſpondere litteram graecam in vnitatem abeuntem; cum igitur quaelibet periodorum, quas in indicum ordine obſeruauimus, indice $2v$ inchoetur, perſpicuum eſt, ſi numeros x et y per indices primae periodi definiamus, fore vel $xx = zyy - 1$, vel $xx = zyy + 1$; ac prius quidem euenit, ſi indicum ſingulas periodos conſtituentium numerus fuerit impar, poſterius vero ſi is fuerit par. Hoc igitur caſu ſtatim habetur ſolutio problematis *Pelliani*, quo requiritur, vt ſit $pp = zqq + 1$, quandoquidem capi oportet $p = x$ et $q = y$.

28. At ſi ex prima periodo prodeat $xx = zyy - 1$, quod euenit ſi indicum numerus eſt impar, tum indices vsque ad initium tertiae periodi ad definiendos nume-

numeros x et y capi poſſent, quorum numerus cum ſit par, hoc modo idonei numeri pro p et q obtinerentur. Verum caſu inuento, quo fit $xx = zyy - 1$, multo facilius inde numeri p et q reperiri poſſunt, vt ſit: $pp = zqq + 1$. Sumatur enim $p = 2xx + 1$ et $q = 2xy$, eritque $pp - zqq = 4x^4 + 4xx + 1 - 4zxxyy = 1 + 4xx(xx - zyy + 1)$, at $xx - zyy + 1 = 0$, ideoque $pp - zqq = 1$ ſeu $pp = zqq + 1$, quemadmodum problema *Pellianum* poſtulat. Videamus igitur, quomodo pro quouis numero z ex indicibus inde natis numeri p et q ſint definiendi, vt fiat $pp = zqq + 1$, vbi quidem caſus ſecundum periodos percurramus.

I. Caſus, quo pro numero z indices ſunt v, $2v$, $2v$, etc.

29. Hic ſingulae periodi vnicum indicem continent, ſumto ergo $x = (v)$ et $y = 1$, erit $xx = zyy - 1$. Quamobrem, vt fiat $pp = zqq + 1$, capiatur:

$$p = 2xx + 1 = 2vv + 1 \text{ et } q = 2xy = 2v.$$

Hic caſus, vt ſupra vidimus, locum habet, ſi ſit $z = vv + 1$, ſeu quo numerus z vnitate ſuperat quadratum; tum igitur capi debet $p = 2vv + 1$ ſeu $p = 2z - 1$ et $q = 2v$, quo pacto problemati *Pelliano* ſatisfit, vt ſit $p = \sqrt{(zqq + 1)}$. Ita ſi ſit

$z = 2$ erit $p = 3$ et $q = 2$ ſicque $p = \sqrt{(2qq + 1)}$
ſi $z = 5$ erit $p = 9$ et $q = 4$ ſicque $p = \sqrt{(5qq + 1)}$
ſi $z = 10$ erit $p = 19$ et $q = 6$ ſicque $p = \sqrt{(10qq + 1)}$
ſi $z = 17$ erit $p = 33$ et $q = 8$ ſicque $p = \sqrt{(17qq + 1)}$
etc.

II. Casus, quo pro numero z indices sunt $v, a, 2v, a, 2v$ etc.

30. Prima periodus constat binis numeris v, a, vnde sumtis $x = (v, a) = va + 1$ et $y = (a) = a$, habebitur $xx = zyy + 1$. Vt igitur pro problemate *Pelliano* fiat $pp = zqq + 1$, capi oportet:

$p = va + 1$ et $q = a$.

Ex indicibus autem patet, hunc casum locum habere, quoties fuerit numerus $z = vv + \frac{2v}{a}$, vnde intelligitur, hunc casum in integris, de quibus hic agitur, existere non posse, nisi sit a diuisor ipsius $2v$, vbi duo casus sunt considerandi:

1. si $a = 2n$, erit $v = mn$ et $\frac{2v}{a} = m$
2. si $a = 2n + 1$, erit $v = m(2n + 1)$ et $\frac{2v}{a} = 2m$.

III. Casus, quo pro numero z indices sunt $v, a, a, 2v, a, a, 2v$ etc.

31. Ex prima periodo, sumtis numeris x et y, ita vt sit $x = (v, a, a)$ et $y = (a, a)$, erit $xx = zyy - 1$; vnde vt fiat $pp = zqq + 1$, sumi debet

$p = 2xx + 1$ et $q = 2xy$.

Hic vero est $y = aa + 1$, et $x = vy + a$, vnde numeri p et q facillime definiuntur. Ex indicibus autem numerus z eiusmodi habebit formam:

$z = vv + u$, existente $u = \frac{2av + 1}{aa + 1}$

vnde

vnde patet numerum a esse debere parem. Si ergo statuatur $a = 2n$, necesse est sit

$v = n + m(4nn + 1)$ tumque fit $u = 1 + 4mn$

IV. Casus, quo pro numero z indices sunt $v, a, b, a, 2v, a, b, a, 2v$ etc.

32. Quia numerus indicum in quaque periodo est par, si sumatur:

$x = (v,a,b,a)$ et $y = (a,b,a)$

erit $xx = zyy + 1$, ideoque $p = x$ et $q = y$.

Per transformationes autem supra ostensas duplicatio indicum tolli potest hoc modo:

$x = (a)(v,a,b) + (v,a)$ et $y = (a)(a,b) + (a)$.

Hinc si ex indicibus v, a, b sequentes fractiones formentur:

indic. v, a, b

fract. $\frac{1}{0}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$, $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{c}}$

ob $\mathfrak{A} = (v)$, $\mathfrak{B} = (v,a)$, $\mathfrak{C} = (v,a,b)$

et $\mathfrak{a} = 1$, $\mathfrak{b} = (a)$, $\mathfrak{c} = (a,b)$

erit $x = \mathfrak{b}\mathfrak{C} + \mathfrak{a}\mathfrak{B}$ et $y = \mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

Ex indicibus autem fit $z = vv + u$, existente

$2v = m(a,b,a) - b(a,b)$

et $u = m(a,b) - b(b)$

V. Casus, quo pro numero z indices sunt $v, a, b, b, a, 2v$ etc.

33.

33. Ob indicum cuiusque periodi numerum imparem, ſi capiamus

$$x = (v, a, b, b, a,) \text{ et } y = (a, b, b, a)$$

erit $xx = zyy - 1$; hinc pro problemate *Pelliano*, vt fiat $pp = zqq + 1$, ſtatui oportet:

$$p = 2xx + 1 \text{ et } q = 2xy.$$

Quo autem numeri x et y facilius inueniri queant, ſequentes transformationes inſtituantur:

$$x = (a, b)(v, a, b) + (a)(v, a) \text{ et}$$
$$y = (a, b)\ (a, b)\ + (a)(a)$$

qui ergo per ſolos indices v, a, b fractionibus inde formandis difinientur:

Ind. v, a, b

Fract. $\frac{1}{0}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$, $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{c}}$

vbi $\mathfrak{A} = v$, $\mathfrak{B} = a\mathfrak{A} + 1$; $\mathfrak{C} = b\mathfrak{B} + \mathfrak{A}$

et $\mathfrak{a} = 1$, $\mathfrak{b} = a\mathfrak{a} + 0$; $\mathfrak{c} = b\mathfrak{b} + \mathfrak{a}$

tum enim capi oportet

$$x = \mathfrak{c}\mathfrak{C} + \mathfrak{b}\mathfrak{B} \text{ et } y = \mathfrak{c}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{b}.$$

Hic autem caſus locum habet, quoties poſito $z = vv + u$ fuerit

$$2v = m(a, b, b, a) + (b, b)(a, b, b) \text{ et}$$
$$u = m(a, b, b) + (b, b)(b, b)$$

VI. Caſus, quo pro numero z indices ſunt v, a, b, c, b, a, $2v$ etc.

34. Quoniam hic numerus indicum in qualibet periodo eſt par, ſi ſumamus

$$x = (v, a, b, c, b, a) \text{ et } y = (a, b, c, b, a)$$

erit

erit $xx = zyy + 1$., ideoque pro *Pelliano* problemate ſtatim habetur $p = x$ et $q = y$. Facilius autem numeri x et y his transformationibus adhibitis inuenientur:

$$x = (a,b)(v,a,b,c) + (a)(v,a,b) \text{ et}$$
$$y = (a,b)(a,b,c) + (a)(a,b)$$

vnde ſi ex indicibus, v, a, b, c, more expoſito, fractiones formentur:

Ind. v, a, b, c

Fract. $\frac{1}{0}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$, $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{c}}$, $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{d}}$

ſumi oportet

$$x = \mathfrak{c}\mathfrak{D} + \mathfrak{b}\mathfrak{C} \text{ et } y = \mathfrak{c}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

At hic caſus locum habet, quoties poſito $z = vv + u$ fuerit

$$2v = m(a,b,c,b,a) - (b,c,b)(a,b,e,b) \text{ et}$$
$$u = m(a,b,c,b) - (b,c,b)(b,c,b)$$

VII. Caſus, quo pro numero z indices ſunt v, a, b, c, c, b, a, $2v$ etc.

35. Hic iterum indicum numerus in qualibet periodo eſt impar, ideoque ſi ponamus

$$x = (v,a,b,c,c,b,a) \text{ et}$$
$$y = (a,b,c,c,b,a)$$

erit $xx = zyy - 1$, ex quo vt fiat $pp = zqq + 1$, ſumi oportet $p = 2xx + 1$, et $q = 2xy$.

Pro faciliori autem numerorum x et y inuentione ex indicibus v, a, b, c formentur fractiones:

Ind. v, a, b, c

Fract. $\frac{1}{0}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$, $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{c}}$, $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{d}}$

hincque erit

$$x = \mathfrak{d}\mathfrak{D} + \mathfrak{c}\mathfrak{C} \text{ et } y = \mathfrak{d}\mathfrak{d} + \mathfrak{c}\mathfrak{c}.$$

At hic casus locum habebit, quoties posito $z = vv + u$ fuerit:

$$2v = m(a,b,c,c,b,a) + (b,c,c,b)(a,b,c,c,b) \text{ et}$$
$$u = m(a,b,c,c,b) + (b,c,c,b)(b,c,c,b)$$

VIII. Casus, quo pro numero z indices sunt $v, a, b, c, d, c, b, a, 2v$.

36. Hic quaelibet periodus octo continet indices, ideoque si ponamus:

$$x = (v,a,b,c,d,c,b,a) \text{ et}$$
$$y = (a,b,c,d,c,b,a)$$

erit $xx = zyy + 1$, et problemate *Pelliano* capi oportet $p = x$, et $q = y$, vt fiat $pp = zqq + 1$. Transformationibus autem adhibitis, numeros x et y per solos indices v, a, b, c, d definire licet. Formatis enim inde fractionibus:

Ind. v, a, b, c, d

Fract. $\frac{1}{0}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$, $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{c}}$, $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{d}}$, $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{e}}$

fiet: $x = \mathfrak{d}\mathfrak{E} + \mathfrak{c}\mathfrak{D}$, et $y = \mathfrak{d}\mathfrak{e} + \mathfrak{c}\mathfrak{d}$.

Hic vero casus locum habet, quoties posito $z = vv + u$ fuerit:

$$2v = m(a,b,c,d,c,b,a) - (b,c,d,c,b)(a,b,c,d,c,b)$$
$$\text{et } u = m(a,b,c,d,c,b) - (b,c,d,c,b)(b,c,d,c,b).$$

Ex-

Expoſitio calculi pro quolibet numero z, vt fiat $pp = zqq + 1$.

37. Primum igitur methodo ſupra expoſita pro numero z, ex eius radice quadrata indices inveſtigari oportet, quam operationem autem vlterius continuari non eſt opus, quam donec indices ordine retrogrado prodire incipiant, quo pacto ſemiſſi laboris ſupra explicati ſuperſedere poterimus. Cum autem in prima periodo vel vnus index medius occurrat, vel bini, hi caſus probe ſunt diſtinguendi, cum ſi vnicus medius affuerit, inuentio numerorum p et q modo in caſibus II, IV, VI et VIII tradito inſtitui debeat: ſin autem bini fuerint medii, eo modo, qui in caſibus I, III, V et VII eſt deſcriptus. Scilicet ſi prius eueniat, numeri p et q numeris x et y aequales ſumuntur, ſin autem poſterius, vti vidimus, ſtatui oportet $p = 2xx + 1$, et $q = 2xy$, ita vt his caſibus numeri p et q caeteris paribus multo grandiores reperiantur.

38. En igitur exempla prioris generis, quo in qualibet periodo vnus datur index medius:

I. Si $z = 6$, ſunt indices 2, 2, 4, hinc operatio

$$\begin{array}{llll} 2 & 2 & & \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2}, & \begin{array}{l} x = 1.5 + 0.2 \\ y = 1.2 + 0.1 \end{array} \text{ ergo } \begin{array}{l} p = 5 \\ q = 2 \end{array} \end{array}$$

II. Si $z = 14$, ſunt indices 3, 1, 2, 1, 6

$$\begin{array}{lllll} 3 & 1 & 2 & & \\ \frac{1}{0}, & \frac{3}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{11}{3}; & \begin{array}{l} x = 1.11 + 1.4 \\ y = 1.3 + 1.1 \end{array} \text{ ergo } \begin{array}{l} p = 15 \\ q = 4 \end{array} \end{array}$$

III. Si $z = 19$, ſunt indices $4, 2, 1, 3, 1, 2, 8$

$4 \quad 2 \quad 1 \quad 3$

$\frac{1}{0}, \frac{4}{1}, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{48}{11};\ \begin{matrix} x = 3.48 + 2.13 \\ y = 3.11 + 2.3 \end{matrix}$ ergo $\begin{matrix} p = 170 \\ q = 39 \end{matrix}$

IV. Si $z = 31$, ſunt indices $5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10$

$5 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 5$

$\frac{1}{0}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{11}{2}, \frac{39}{7}, \frac{206}{37}$

hinc $\begin{matrix} x = 7.206 + 2.39 \\ y = 7.\ 37 + 2.\ 7 \end{matrix}$ ergo $\begin{matrix} p = 1520 \\ q = 273 \end{matrix}$

V. Si $z = 44$, ſunt indices $6, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12$

$6 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2$

$\frac{1}{0}, \frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{13}{2}, \frac{20}{3}, \frac{53}{8}$

hinc $\begin{matrix} x = 3.53 + 2.20 \\ y = 3.\ 8 + 2.\ 3 \end{matrix}$ ergo $\begin{matrix} p = 199 \\ q = 30 \end{matrix}$

VI. Si $z = 55$, ſunt indices $7, 2, 2, 2, 14$

$7 \quad 2 \quad 2$

$\frac{1}{0}, \frac{7}{1}, \frac{15}{2}, \frac{37}{5}$

hinc $\begin{matrix} x = 2.37 + 1.15 \\ y = 2.\ 5 + 1.\ 2 \end{matrix}$ ergo $\begin{matrix} p = 89 \\ q = 12 \end{matrix}$

39. Alterius vero generis, quo bini dantur indices medii in qualibet periodo, haec adiungo exempla.

I. Si $z = 13$, ſunt indices $3, 1, 1, 1, 1, 6$

$3 \quad 1 \quad 1$

$\frac{1}{0}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{7}{2}$ hinc $\begin{matrix} x = 2.7 + 1.4 = 18 \\ y = 2.2 + 1.1 = 5. \end{matrix}$

Ergo $p = 2xx + 1 = 649$

$\quad\ \ q = 2xy \qquad = 180$

II.

II. Si $z = 29$, ſunt indices $5, 2, 1, 1, 2, 10$

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & 2 & 1 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{5}{1}, & \frac{11}{2}, & \frac{16}{3} & \end{array} \text{ hinc } \begin{array}{l} x = 3.16 + 2.11 = 70 \\ y = 3.\ 3 + 2.\ 2 = 13. \end{array}$$

Ergo $p = 2xx + 1 = 9801$

$q = 2xy \qquad = 1820$

III. Si $z = 58$, ſunt indices $7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 14$

$$\begin{array}{cccccc} & 7 & 1 & 1 & 1 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{7}{1}, & \frac{8}{1}, & \frac{15}{2}, & \frac{23}{3} & \end{array} \text{ hinc } \begin{array}{l} x = 3.23 + 2.15 = 99 \\ y = 3.\ 3 + 2.\ 2 = 13. \end{array}$$

Ergo $p = 2xx + 1 = 19603$

$q = 2xy \qquad = 2574$

IV. Si $z = 61$, indices ſunt $7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14$

$$\begin{array}{cccccccc} & 7 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{7}{1}, & \frac{8}{1}, & \frac{39}{5}, & \frac{125}{16}, & \frac{164}{21}, & \frac{453}{58} & \end{array}$$

hinc fit $x = 58.453 + 21.164 = 29718$

$y = 58.\ 58 + 21.\ 21 = 3805.$

Ergo $p = 2xx + 1 = 1766319049$

$q = 2xy \qquad = 226153980.$

40. Quodſi pro maioribus numeris z, quam ante ſunt euoluti, quaeri debeant numeri p et q, vt ſit $pp = zqq + 1$, primum methodo ſupra expoſita (§. 12.) indices v, a, b, c, d etc. quaeri oportet, quos autem vlterius continuari non eſt opus, quam donec ad indicem medium, vel binos medios, primae periodi perueniatur; tum vero ex iis per

operationes hic descriptas primo numeri x et y, tum vero ipsi quaesiti p et q determinabuntur. Id quod aliquibus exemplis illustrari conueniet.

I. Quaerantur numeri p et q, vt sit $pp = 157qq + 1$.

41. Cum hic sit $z = 157$, erit $v = 12$, et $\alpha = 13$, vnde indicum inuentio ita se habebit:

$$\begin{array}{lll} A = 12, & \alpha = 13, & a = 1 \\ B = 1, & \beta = 12, & b = 1 \\ C = 11, & \gamma = 3, & c = 7 \\ D = 10, & \delta = 19, & d = 1 \\ E = 9, & \varepsilon = 4, & e = 5 \\ F = 11, & \zeta = 9, & f = 2 \\ G = 7, & \eta = 12, & g = 1 \\ H = 5, & \theta = 11, & h = 1 \\ I = 6, & \iota = 11, & i = 1 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{medii.}$$

Hinc ob binos medios exemplum ad genus secundum pertinet, et operationes ita sunt instituendae:

$$\begin{array}{cccccccccc} 12 & 1 & 1 & 7 & 1 & 5 & 2 & 1 & 1 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{12}{1}, & \frac{13}{1}, & \frac{25}{2}, & \frac{188}{15}, & \frac{213}{17}, & \frac{1253}{100}, & \frac{2719}{217}, & \frac{3972}{317}, & \frac{6691}{534} \end{array}$$

Hinc erit $x = 534 \cdot 6691 + 317 \cdot 3972 = 4832118$

et $y = 534 \cdot 534 + 317 \cdot 317 = 385645$.

Quocirca $p = 2xx + 1 = 46698728731849$

et $q = 2xy \quad = 3726964292220$

atque hi adeo sunt minimi numeri integri formulae $p = \sqrt{(157qq + 1)}$ satisfacientes.

II.

II. Quaerantur numeri p et q, vt ſit $pp = 367qq + 1$.

42. Hic ergo eſt $z = 367$, $v = 19$, hincque

$$\begin{array}{lll}
A = 19, & \alpha = 6, & a = 6 \\
B = 17, & \beta = 13, & b = 2 \\
C = 9, & \gamma = 22, & c = 1 \\
D = 13, & \delta = 9, & d = 9 \\
E = 14, & \varepsilon = 19, & e = 1 \\
F = 5, & \zeta = 18, & f = 1 \\
G = 13, & \eta = 11, & g = 2 \\
H = 9, & \theta = 26, & h = 1 \\
I = 17, & \iota = 3, & i = 12 \\
K = 19, & \varkappa = 2, & k = 19 \text{ medius} \\
L = 19, & \lambda = 3, & l = 12
\end{array}$$

hoc ergo exemplum ad genus primum pertinet.

$$\begin{array}{cccccccc}
19 & 6 & 2 & 1 & 9 & 1 & 1 & 2 \\
\frac{1}{0}, & \frac{19}{1}, & \frac{115}{6}, & \frac{249}{13}, & \frac{364}{19}, & \frac{3525}{184}, & \frac{3889}{203}, & \frac{7414}{387}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
1 & 12 & 19 & \\
\frac{18717}{977}, & \frac{26131}{1364}, & \frac{332289}{17345}, & \frac{6339625}{330919}.
\end{array}$$

Hinc erit $x = 17345.6339622 + 1364.332289$

et $y = 17345.\ 330919 + 1364.\ 17345.$

ex quo minimi numeri ſatisfacientes ſunt:

$p = 110413985786$

$q = 5763448635.$

Tabula

Tabula numerorum p *et* q, *quibus fit* $pp = lqq + 1$ *pro omnibus valoribus numeri* l *vsque ad* 100.

l	*q*	*p*	*l*	*q*	*p*
2	2	3	30	2	11
3	1	2	31	273	1520
5	4	9	32	3	17
6	2	5	33	4	23
7	3	8	34	6	35
8	1	3	35	1	6
10	6	19	37	12	73
11	3	10	38	6	37
12	2	7	39	4	25
13	180	649	40	3	19
14	4	15	41	320	2049
15	1	4	42	2	13
17	8	33	43	531	3482
18	4	17	44	30	199
19	39	170	45	24	161
20	2	9	46	3588	24335
21	12	55	47	7	48
22	42	197	48	1	7
23	5	24	50	14	99
24	1	5	51	7	50
26	10	51	52	90	649
27	5	26	53	9100	33125
28	24	127	54	66	485
29	1820	9801	55	12	89

l	q	p	l	q	p
56	2	15	78	6	53
57	20	151	79	9	80
58	2574	19603	80	1	9
59	69	530	82	18	163
60	4	31	83	9	32
61	226153980	1766319049	84	6	55
62	8	63	85	30906	285769
63	1	8	86	1122	10405
65	16	129	87	3	28
66	8	65	88	21	197
67	5967	48842	89	53000	500901
68	4	33	90	2	19
69	936	7775	91	165	1574
70	30	251	92	120	1151
71	413	3480	93	1260	12151
72	2	17	94	221064	2143295
73	267000	2281249	95	4	39
74	430	3699	96	5	49
75	3	26	97	6377352	62809633
76	6630	57799	98	10	99
77	40	351	99	1	10

Exempla denique quaedam numerorum maiorum pro l assumtorum adiungam:

si erit

$$l=103\begin{cases}p=227528\\ q=\ \ 22419\end{cases}$$

 $l=109$

si erit

$$l=109\begin{cases}p=15807067198624 9\\ q=\ \ 1514042445510 0\end{cases}$$

$$l=113\begin{cases}p=1204353\\ q=\ \ 113296\end{cases}$$

$$l=157\begin{cases}p=46698728731849\\ q=\ \ 3726964292220\end{cases}$$

$$l=367\begin{cases}p=110413985786\\ q=\ \ 5763448635.\end{cases}$$

PROPRIE-

PROPRIETATES TRIANGVLORVM, QVORVM ANGVLI CERTAM INTER SE TENENT RATIONEM.

Auctore

L. EVLERO.

Inter veritates geometricas eae potiſſimum attentione ſunt dignae, quarum demonſtratio ita eſt recondita, vt analyticae inueſtigationi vix vllus locus relinqui videatur. Quae enim ita ſunt comparatae, vt formula analytica facile comprehendi queant, omnino ſuperfluum foret, memoriam earum recordatione fatigare: ad quod genus plurimae ſectionum conicarum proprietates ſunt referendae, quarum plerumque ingens multitudo vnica formula analytica includi poteſt. Elementares autem figurarum proprietates eo maiori cura memoriae ſunt mandandae, quod analyſis ad eas non perducat, ſed iis potius ad altiora tendens ſuperſtrui debeat. Neſcio, an proprietates triangulorum, quas hic euoluere conſtitui, elementaribus ſint annumerandae, nec ne? Si enim ad earum demonſtrationes geometricas ſpectemus, eae ita fiunt intricatae, vt in elementis locum vix inuenire queant: tum vero etiam, quod hic imprimis eſt obſeruandum, ne analyſis quidem ſatis videtur idonea, ad earum veritatem ſtabiliendam;

dam ; quamobrem hanc ſpeculationem attentioni geometrarum commendare non dubito.

Occaſionem autem, haec perſcrutandi, mihi praebuit prima quaſi triangulorum proprietas elementaris, qua nouimus, ſi duo anguli fuerint inter ſe aequales, etiam duo latera, ipſis ſcilicet oppoſita, inter ſe aequalia eſſe futura. Quemadmodum ergo hoc caſu ex data angulorum conditione certa relatio laterum ſequitur, ita generatim affirmare licet, quoties in triangulo certa quaedam ratio inter duos angulos datur, inde neceſſario quoque certam quandam relationem inter latera determinari. Ex quo haec naſcitur quaeſtio: *Si in triangulo, cuius anguli ſint* α, β, γ, *latera iis oppoſita litteris* a, b, c *deſignentur, haecque conditio detur, vt ſit* $\alpha:\beta = m:n$: *relationem inter latera* a, b, c *inde ortam inueſtigare?* Problema hoc ſtatim ac ratio data $m:n$ tantillum aſſumitur complicata, analytice tractatum in taedioſiſſimos calculos praecipitare tentanti mox patebit: ſin autem a caſu ſimpliciſſimo, quo $\beta = \alpha$, et $b - a = 0$, incipientes, continuo ad magis compoſitos ordine progrediamur, egregiam tandem progreſſionis legem obſeruare licebit, quae eo magis eſt notatu digna, quod per ſolam inductionem ſit inuenta, vixque demonſtrationem admittere videatur.

Problema 1.

Tab. I. Fig. 2. 1. Si in triangulo ABC fuerit ang. B = 2 ang. A, inter eius latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ relationem inde oriundam inueſtigare.

Solutio.

Solutio.

Angulo B per rectam BD bisecto, erit triangulum ADB isosceles, et triangulum BCD toti ACB simile,

vnde fit $AC:BC=AB:BD=BC:CD$,

seu $b:a=c:\frac{ac}{b}=a:\frac{aa}{b}$.

Ergo $BD=\frac{ac}{b}$ et $CD=\frac{aa}{b}$; hinc $AD=b-\frac{aa}{b}$.

At ob $BD=AD$ habebimus $ac=bb-aa$, qua ergo aequatione continetur relatio quaesita inter latera trianguli, quae est vel $(AC+BC)(AC-BC)=AB.BC$ vel $AC^2=BC(AB+BC)$.

Coroll. 1.

2. Vltima aequatio facilem hanc suppeditat demonstrationem formulae inuentae; producto enim latere AB in C, vt sit $BE=BC$, erit angulus E semissis ipsius ABC, ideoque ipsi A aequalis, vnde triangula isoscelia ACE et CBE erunt similia; hinc $AE:AC=CE:BC$, seu $AB+BC:AC=AC:BC$.

Coroll. 2.

3. Vicissim ergo, quoties inter latera trianguli ABC haec relatio deprehenditur, vt sit $AC^2=BC.(AB+BC)$ seu $bb=aa+ac$, toties concludi oportet, angulum ABC esse duplum anguli BAC.

Scholion.

4. Haec inuerſa propoſitio, etſi eius veritas ex praecedente neceſſario ſequitur, tamen non ita facile geometrice demonſtratur. Si ſcilicet fuerit $AC^2 = AB.BC + BC^2$, oſtendendum eſt, fore angulum A ſemiſſem anguli ABC. Hunc in finem demiſſo ex C in AB perpendiculo CP, ex elementis conſtat, eſſe $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BP$; cum igitur ſit $AC^2 = AB.BC + BC^2$, erit BC^2 vtrinque auferendo $AB^2 - 2AB.BP = AB.BC$, et per AB dividendo $AB - 2BP = BC$. Capiatur $PQ = BP$, vt ſit $CQ = BC$, eritque $AQ = BC$ ſeu $AQ = CQ$, vnde angulus BQC, cui aequalis eſt ABC, duplus eſt anguli A, quae eſt demonſtratio propoſitionis inverſae.

Problema 2.

Tab. I. fig. 3. 5. Si in triangulo ABC angulus ABC fuerit triplus anguli A, relationem, quae hinc in latera trianguli redundat, $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ definire.

Solutio.

Ex angulo B recta Bc ita ducatur, vt angulus CBc aequalis ſit angulo A, ideoque angulus ABc eius duplus, ſicque triangulum ABc ad caſum praecedentis problematis pertineat. At triangulum BCc ſimile eſt triangulo ACB, vnde fit

$$AC : BC = AB : Bc = BC : Cc$$
$$b : a = c : \tfrac{ac}{b} = a : \tfrac{aa}{b}.$$

Ergo

Ergo $Bc = \frac{ac}{b}$, et $Cc = \frac{aa}{b}$, hincque $Ac = \frac{bb-aa}{b}$.

Iam in triangulo ABc ad analogiam ponantur latera

$$AB = \gamma,\ Ac = \beta,\ \text{et}\ Bc = \alpha$$

et ex problemate praecedente habetur pro hoc triangulo iſta proprietas:

$$\beta\beta - \alpha\alpha - \alpha\gamma = 0.$$

Ex modo inuentis autem nouimus eſſe

$$\gamma = c;\ \beta = \frac{bb-aa}{b};\ \text{et}\ \alpha = \frac{ac}{b}$$

qui valores in illa aequatione ſubſtituti praebent:

$$\frac{(bb-aa)^2}{bb} - \frac{aacc}{bb} - \frac{acc}{b} = 0,\ \text{ſiue}$$

$$(bb-aa)^2 - acc(a+b) = 0$$

quae aequatio per $a+b$ diuiſa abit in hanc:

$$(bb-aa)(b-a) - acc = 0$$

qua character indolis propoſitae continetur, quod angulus ABC ſit triplus anguli A.

Coroll. I.

6. Quando ergo in triangulo ABC angulus ad B triplus eſt anguli A, tum inter eius latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ haec datur relatio, vt ſit $(bb-aa)(b-a) - acc = 0$, ſeu $(b-a)^2(b+a) - acc = 0$, quae euoluta fit

$$b^3 - abb - aab + a^3 - acc = 0.$$

Coroll. 2.

Coroll. 2.

7. Ad hanc proprietatem geometrice enunciandam centro C radio $CB = a$ deſcribatur circulus, latus AC productum ſecans in D et E, latus vero AB in F. Iam cum ſit $AD = b + a$, et $AE = b - a$, erit $AD.AE^2 = BC.AB^2$. Ex elementis vero eſt $AE.AD = AF.AB$, vnde fit $AE.AF = BC.AB$, ideoque $AE:CE = AB:AF$, quam proportionem geometrice demonſtrari oportet.

Coroll. 3.

8. In eadem figura cum ſit angulus $CFB = ABC = 3A$, erit angulus $ACF = 2A$, et $BCD = ABC + A = 4A$, vnde arcus BD eſt duplus arcus EF. Ducta ergo recta BE, erit ang. $EBF = \frac{1}{2}ECF = A$, ideoque $BE = AE$. Simili modo ducta recta DF, angulus ADF quoque aequatur angulo A, ex quo fit $DF = AF$.

Coroll. 4.

9. Hinc analogia ante inuenta $AE:CE = AB:AF$ abit in iſtam $BE:CE = AB:DF = DF + BF:DF$ ſeu $BE.DF = CE.AB = BC(BF + DF)$. Quae proprietas geometrice ita oſtenditur: Sumto arcu $EG = EF$, ductisque AG et BG, erit $AG = AF$ et $BG = DF$, ob arcum $FG = BD$, ideoque $BFG = BDF$ et $AG = BG$, ob $AF = DF$. Nunc vero ambo triangula iſoſcelia AGB et BCE ſunt ſimilia, quia ang. $CEB = 2A = BAG$; vnde ſequitur:

AB:

$AB : AG = BE : CE$, seu $AB : AF = AE : BC$, vel $BC.AB = AE.AF$, quae est proprietas supra eruta.

Scholion.

10. Inuenta ergo proprietas concinnius hoc modo geometrice demonstrabitur:

Centro C radioque CB descripto circulo latus AC in D et E, latus vero AB in F secante, ductisque BE et CF, ob angulum $CFB = CBF = 3A$, erit angulus $CEB = 2A = CBE$, et quia angulus $ABE = A$, erit $BE = AE$. Tum sumto arcu $EG = EF$, ductisque AG et BG, erit vtique $AG = AF$, et tam $BAG = 2A$, quam $ABG = 2A$, ideoque $BG = AG = AF$. Simile ergo erit triangulum AGB triangulo BEC, vnde fit $AB : AG = BE : BC$, et quia $AG = AF$, et $BE = AE$, erit $AB : AF = AE : BC$. Ex elementis vero est $AF : AE = AD : AB$, vnde fit componendo

$AB : AE = AE.AD : BC.AB$, seu $AE^2.AD = BC.AB^2$ quae aequatio dat $(AC - BC)^2(AC + BC) = BC.AB^2$, quae est proprietas supra inuenta, et nunc geometrice demonstrata.

Problema 3.

11. Si in triangulo ABC angulus ABC fuerit quadruplus anguli A, inter eius latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, relationem illa conditione determinatam inuestigare. Tab. I. Fig. 4.

 Solutio.

Solutio.

Ex angulo quadruplo B ducatur recta Bc abſcindens angulum $CBc = A$, vt in triangulo ABc angulus ad B triplus ſit anguli A, hocque triangulum ad caſum problematis praecedentis pertineat. Triangulum autem BCc ſimile erit triangulo ACB, vnde colligitur vt ante:

$$Bc = \frac{ac}{b}. \quad Cc = \frac{aa}{b}, \text{ hincque } Bc = \frac{bb-aa}{b}.$$

Ponantur iam pro triangulo ABc latera $AB = \gamma$, $Ac = \beta$ et $Bc = \alpha$, et inter haec latera per problema praecedens haec relatio intercedet, vt ſit:

$$\beta^3 - \alpha\beta\beta - \alpha\alpha\beta - \alpha(\gamma\gamma - \alpha\alpha) = 0.$$

Hic igitur loco α, β, γ valores illi $\frac{ac}{b}$, $\frac{bb-aa}{b}$ et c ſubſtituantur, ſeu ad fractiones tollendas, quia ibi dimenſionum numerus vbique eſt idem, hi valores per b multiplicati, quaſi eſſet $\alpha = ac$, $\beta = bb - aa$ et $\gamma = bc$, ſcribantur; ſicque exorietur haec aequatio:

$$(bb-aa)^3 \; ac(bb-aa)^2 - aacc(bb-aa) - ac^3(bb-aa = 0$$

quae cum manifeſto diuiſorem habeat $bb-aa$, erit aequatio relationem quaeſitam exprimens:

$$(bb-aa)^2 - ac(bb-aa) - aacc - ac^3 = 0.$$

Coroll.

12. Aequatio haec euoluta, et ſecundum poteſtates ipſius b diſpoſita, abit in hanc formam:

$$b^4 - a(2a+c)bb - a(ac-aa)(a+c) = 0$$

qua deinceps erit vtendum.

Pro-

Problema 4.

13. Si in triangulo ABC angulus ABC fuerit quintuplus anguli A, inter eius latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ relationem ista conditione determinatam inuestigare.

Solutio.

Ducta iterum recta Bc, angulum CBc ipsi A aequalem abscindente, vt triangulum BCc toti ACB simile fiat, triangulum vero ABc ad casum praecedentem sit referendum, pro quo si ponamus latera $AB = \gamma$, $Ac = \beta$ et $Bc = \alpha$, erit vti modo inuenimus:

$$\beta^4 - \alpha(2\alpha + \gamma)\beta\beta - \alpha(\gamma\gamma - \alpha\alpha)(\alpha + \gamma) = 0$$

At vero hic, vti ante ostendimus, has substitutiones fieri oportet: $\alpha = ac$, $\beta = bb - aa$, et $\gamma = bc$, vnde oritur haec aequatio:

$$(bb-aa)^4 - acc(2a+b)(bb-aa)^2 - ac^4(bb-aa)(a+b) = 0$$

quae diuisa per $(bb-aa)(b+a)$ induit hanc formam:

$$(bb-aa)^2(b-a) - acc(2a+b)(b-a) - ac^4 = 0$$

et facta euolutione prodit

$$b^5 - ab^4 - 2aab^3 - a(cc-2aa)bb - aa(cc-aa)b - a(cc-aa)^2 = 0.$$

Problema 5.

14. Si in triangulo ABC angulus ABC fuerit sextuplus anguli A, inter eius latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ relationem ista conditione determinatam inuestigare.

Solutio.

Ex ſuperioribus ſatis iam eſt perſpicuum, hanc relationem inueniri, ſi in ea, quam modo ſumus adepti, loco litterarum a, b, c ſcribamus has formulas: ac, $bb-aa$, et bc; ſicque prodit:

$$(bb-aa)^5 - ac(bb-aa)^4 - 2aacc(bb-aa)^3 - ac^3(bb-2aa)(bb-aa)^2 - aac^4(bb-aa)^2 - ac^5(bb-aa)^2 = 0$$

quae aequatio per $(bb-aa)^2$ diuiſa induit hanc formam:

$$(bb-aa)^3 - ac(bb-aa)^2 - 2aacc(bb-aa) - ac^3(bb-2aa) - aac^4 - ac^5 = 0$$

euolutione autem facta obtinet

$$b^6 - a(3a+c)b^4 + a(3a^3+2aac-2acc-c^3)bb - a(cc-aa)^2(c+a) = 0 \text{ ſeu}$$

$$b^6 - a(c+3a)b^4 - a(c+a)(cc+ac-3aa)bb - a(cc-aa)^2(c+a) = 0.$$

Coroll. 1.

15. Si hic ſimili modo fiat ſubſtitutio $a = ac$, $b = bb-aa$ et $c = bc$, oritur aequatio pro triangulo ABC, in quo angulus ad B eſt ſeptuplus anguli A, quae ergo erit:

$$(bb-aa)^6 - acc(b+3a)(bb-aa)^4 - ac^4(b+a)(bb+ab-3aa)(bb-aa)^2 - ac^6(bb-aa)^2(b+a) = 0$$

quae iam per $(bb-aa)^2(b+a)$ diuiſionem admittit, et dat

$$(bb-aa)^3(b-a) - acc(b+3a)(bb-aa)(b-a) - ac^4(bb+ab-3aa) - ac^6 = 0$$

ſeu

ſeu

$$b^7 - ab^6 - 3aab^5 - a(cc-3aa)b^4 - aa(2cc-3aa)b^3 - a(cc-aa)$$
$$(cc-3aa)bb - aa(cc-aa)^2 b - a(cc-aa)^3 = 0.$$

Coroll. 2.

16. Ope eiusdem ſubſtitutionis hinc obtinetur aequatio pro triangulo ABC, in quo angulus ad B eſt octuplus anguli A; ſcilicet:

$$(bb-aa)^7 - ac(bb-aa)^6 - 3aacc(bb-aa)^5 - ac^3(bb-3aa)(bb-aa)^4$$
$$-aac^4(2bb-3aa)(bb-aa)^3 - ac^5(bb-aa)(bb-3aa)(bb-aa)^2$$
$$-aac^6(bb-aa)^2(bb-aa) - ac^7(bb-aa)^3 = 0$$

quae aequatio per $(bb-aa)^3$ diuiſa praebet:

$$(bb-aa)^4 - ac(bb-aa)^3 - 3aacc(bb-aa)^2 - ac^3(bb-3aa)(bb-aa)$$
$$-aac^4(2bb-3aa) - ac^5(bb-3aa) - aac^6 - ac^7 = 0$$

ex cuius euolutione naſcitur haec forma:

$$b^8 - a(c+4a)b^6 - a(c^3+3acc-3aac-6a^3)b^4 - a(c+a)(cc-aa)(cc+ac$$
$$-4aa)b^2 - a(c+a)(cc-aa)^3 = 0.$$

Scholion.

17. Nunc igitur rem in genere conſiderando, ſi angulus ABC ad angulum A teneat rationem $= n:1$, vt ſit $ABC = n.BAC$, poſitis lateribus $AB = c$, $AC = b$, et $BC = a$, contemplemus aequationes pro caſibus ſimplicioribus hactenus inuentas, quas propterea ita ordine exhibeamus, litterisque maiuſculis deſignemus:

si	erit
$n=1$	$b-a=0\ ..\ A$
$n=2$	$bb-a(a+c)=0\ ..\ B$
$n=3$	$b^3-abb-aab-a(cc-aa)=0\ ..\ C$
$n=4$	$b^4-a(c+2a)bb-a(c+a)(cc-aa)=0\ ..\ D$
$n=5$	$b^5-ab^4-2aab^3-a(cc-2aa)bb-aa(cc-aa)b-a(cc-aa)^2=0\ ..\ E$
$n=6$	$b^6-a(c+3a)b^4-a(c+a)(cc+ac-3aa)bb-a(c+a)(cc-aa)^2=0\ ..\ F$
$n=7$	$b^7-ab^6-3aab^5-a(cc-3aa)b^4-aa(2cc-3aa)b^3-a(cc-aa)(cc-3aa)bb$ $-aa(cc-aa)^2b-a(cc-aa)^3=0\ ..\ G$
$n=8$	$b^8-a(c+4a)b^6-a(c^3+3acc-3aac-ba^3)b^4-a(c+a)(cc-aa)(cc+ac$ $-4aa)b^2-a(c+a)(cc-aa)^3=0\ ..\ H.$

Hic igitur ſtatim conſtat, has formulas nonniſi alternatim ſumtas commode inter ſe comparari poſſe; quandoquidem in iis, quae numeris paribus reſpondent, littera b tantum pares habet dimenſiones, in imparibus autem eiusdem litterae b, praeter pares, etiam impares dimenſiones occurrunt, dum contra hoc caſu littera c tantum pares dimenſiones obtinet. Hinc iſtas formulas, prouti n eſt numerus vel par vel impar, ſeorſim percurramus, in legem progreſſionis inquiſituri, vbi quidem primo oſtendam, vtroque caſu has formulas ſeriem recurrentem conſtituere, cuius quisque terminus per binos praecedentes determinatur; deinde vero etiam formam generalem exhibere conabor.

Problema 6.

18. Si in triangulo ABC fuerit angulus $B=2iA$, denotante $2i$ numerum integrum parem quem-

quemcunque, naturam relationis, quae inter trianguli latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ intercedit, inuestigare.

Solutio.

Hic igitur considerari oportet progressionem earum alternarum formularum, quas ante litteris B, D, F, H etc. designauimus, quae ita se habent:

si	inuenta est formula
$i = 1$	$B = bb - a(c + a) = 0$
$i = 2$	$D = b^4 - a(c + 2a)bb - a(c + a)(cc - aa) = 0$
$i = 3$	$F = b^6 - a(c + 3a)b^4 - a(c + a)(cc + ac - 3aa)bb$ $- a(c + a)(cc - aa)^2 = 0$
$i = 4$	$H = b^8 - a(c + 4a)b^6 - a(c^3 + 3acc - 3aac - 6a^3)b^4$ $- a(c + a)(cc - aa)(cc + ac - 4aa)bb - a(c + a)(cc - aa)^3 = 0$

quarum formularum lex quo facilius obseruetur, eas etiam secundum potestates litterae c disponamus:

si	erit
$i = 1$	$B = (bb - aa) - ac = 0$
$i = 2$	$D = (bb - aa)^2 - ac(bb - aa) - aacc - ac^3 = 0$
$i = 3$	$F = (bb - aa)^3 - ac(bb - aa)^2 - 2aacc(bb - aa)$ $- ac^3(bb - 2aa) - aac^4 - ac^5 = 0$
$i = 4$	$H = (bb - aa)^4 - ac(bb - aa)^3 - 3aacc(bb - aa)^2$ $- ac^3(bb - 3aa)(bb - aa) - aac^4(2bb - 3aa)$ $- ac^5(bb - 3aa) - aac^6 - ac^7 = 0.$

Hic primum obseruo, si a quauis formula praecedens per $bb - aa$ multiplicata subtrahatur, residua multo simpliciora esse proditura; erit enim:

D–B:

$$D - B(bb-aa) = -aacc - ac^{3}$$
$$F - D(bb-aa) = -aacc(bb-aa) + a^{3}c^{3} - aac^{4} - ac^{5}$$
$$H - F(bb-aa) = -aacc(bb-aa)^{2} + a^{3}c^{3}(bb-aa) - aac^{4}(bb-2aa) + 2a^{3}c^{5} - aac^{6} - ac^{7}$$

subtrahatur insuper a qualibet praecedens per cc multiplicata, reperieturque:

$$D - B(bb-aa+cc) = -bbcc$$
$$F - D(bb-aa+cc) = -bbcc(bb-aa) + abbc^{3}$$
$$H - F(bb-aa+cc) = -bbcc(bb-aa)^{2} + abbc^{3}(bb-aa) + aabbc^{4} + abbc^{5}$$

quae formae per $-bbcc$ diuisae praebent

$$\frac{B(bb-aa+cc)-D}{bbcc} = 1$$
$$\frac{D(bb-aa+cc)-F}{bbcc} = bb-aa-ac = B$$
$$\frac{F(bb-aa+cc)-H}{bbcc} = (bb-aa)^{2} - ac(bb-aa) - aacc - ac^{3} = D$$

vbi profecto casu non euenire videtur, vt primo quidem vnitas, tum vero ipsae litterae B et D prodeant; pro inductione quidem hinc stabilienda hi duo casus certe minime sufficerent, verum calculo ad sequentem formulam K continuato, nonsolum idem contingit, sed etiam pro formulis ordine imparibus A, C, E, G deinceps eadem lex progressionis deprehendetur. Quam ob rem non dubito, huic inductioni innixus pronunciare, formulas has B, D, F, H etc. seriem constituere recurrentem, cuius scala relationis $bb-aa-cc$, $-bbcc$, hincque terminum antecedentem ipsi $i=0$ respondentem esse vnitatem. Ita his formulis ita dispositis:

i ...	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7
	1,	B,	D,	F,	H,	K,	M,	O etc.

erit

erit primo quidem $B = bb - aa - ac$, tum vero fecundum legem feriei recurrentis:

$$\begin{aligned}
D &= (bb - aa + cc)B - bbcc.1 && \text{pro } n = 4\\
F &= (bb - aa + cc)D - bbcc\,B && \text{pro } n = 6\\
H &= (bb - aa + cc)F - bbcc\,D && \text{pro } n = 8\\
K &= (bb - aa + cc)H - bbcc\,F && \text{pro } n = 10\\
M &= (bb - aa + cc)K - bbcc\,H && \text{pro } n = 12\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

vnde has formulas, quousque lubuerit, continuare licet.

Coroll. 1.

19. Si ergo haec feries formetur: $1 + Bz + Dz^2 + Fz^3 +$ etc. ea ex euolutione huiusmodi fractionis:

$$\frac{1 + \Delta z}{1 - (bb + aa + cc)z + bbcczz}$$

nafcitur, vbi quidem eft $\Delta = -ac - cc$, haecque fractio adeo illius feriei in infinitum prolatae fummam exhibet.

Coroll. 2.

20. Hinc porro in genere formulam indefinite numero i conuenientem exhibere licet, quippe quae ita exprimetur:

$$\mathfrak{A}\left(\frac{bb - aa + cc + \sqrt{(a^4 + b^4 + c^4 - 2aabb - 2aacc - 2bbcc)}}{2}\right)^i$$
$$\mathfrak{B}\left(\frac{bb - aa + cc - \sqrt{(a^4 + b^4 + c^4 - 2aabb - 2aacc - 2bbcc)}}{2}\right)^i$$

 vbi

vbi quidem, applicatione ad duas primores facta, fit
$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=1$
et $\frac{bb-aa+cc}{2}+\frac{1}{2}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\surd\ldots\ldots=bb-aa-ac$
seu $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\frac{bb-(a+c)^2}{\surd\ \ldots}=-\surd\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{(a+b-c)(b+c-a)}$;

Scholion.

Tab. I. Fig. 5. 21. Formula haec generalis eo maiori cura euolui meretur, quod adhuc soli inductioni innititur, ideoque vberiori confirmatione indiget. Sint igitur trianguli ABC latera $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, et anguli $A=\alpha$, $B=\beta$, $C=\gamma$, vbi quidem assumimus esse $\beta=2i\alpha$. Nunc vero est
$\text{cos}\,\alpha=\frac{bb-aa+cc}{2bc}$ et $\text{sin}.\,\alpha=\frac{\surd(2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4)}{2bc}$.
ex quo formula nostra inuenta induet hanc formam:

$$\mathfrak{A}(bc\,\text{cos}.\alpha+bc\surd-1\,\text{sin}.\alpha)^i+\mathfrak{B}(bc\,\text{cos}.\alpha-bc\surd-1\,\text{sin}.\alpha)^i$$

quae per principia nota transfunditur in hanc:

$$\mathfrak{A}b^ic^i(\text{cos}.i\alpha+\surd-1\,\text{sin}.i\alpha)+\mathfrak{B}b^ic^i(\text{cos}.i\alpha-\surd-1\,\text{sin}.i\alpha)$$

Cum vero sit $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=1$, et $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\frac{bb-(a+c)^2}{2bc\surd-1.\text{sin}.\alpha}$, ex formula $\text{cos}.\beta=\text{cos}.2i\alpha=\frac{aa+bc-bb}{2ac}$, sequitur fore

$$1+\text{cos}.2i\alpha=\frac{(a+c)^2-bb}{2ac}, \text{ ideoque } \mathfrak{B}-\mathfrak{A}=\frac{a(1+\text{cos}.2i\alpha)}{b\surd-1\,\text{sin}.\alpha}$$

at $\text{sin}.\alpha:\text{sin}.2i\alpha=a:b$, vnde $\mathfrak{B}-\mathfrak{A}=\frac{1+\text{cos}.2i\alpha}{\surd-1.\text{sin}.2i\alpha}$, seu $\mathfrak{B}-\mathfrak{A}=\frac{\text{cos}.i\alpha}{\surd-1.\text{sin}.i\alpha}$. Quo circa habebitur:

$$\mathfrak{A}=\frac{-\text{cos}.i\alpha+\surd-1.\text{sin}.i\alpha}{2\surd-1.\text{sin}\,i\alpha}, \text{ et } \mathfrak{B}=\frac{\text{cos}.i\alpha+\surd-1.\text{sin}.i\alpha}{2\surd-1\,\text{sin}.i\alpha}.$$

sicque

sicque formula inuenta fit

$$\frac{b^i c^i}{2\sqrt{-1}.\,\text{sin}.\,i\alpha}\left((\text{cos}.\,i\alpha+\sqrt{-1}.\,\text{sin}.\,i\alpha)(-\text{cos}.\,i\alpha+\sqrt{-1}.\,\text{sin}.\,i\alpha)\right.$$
$$\left.+(\text{cos}.\,i\alpha-\sqrt{-1}.\,\text{sin}.\,i\alpha)(\text{cos}.\,i\alpha+\sqrt{-1}.\,\text{sin}.\,i\alpha)\right)$$

quae cum sponte in nihilum abeat, euidens est, casu, quo angulus $\beta = 2i\alpha$, formulam inuentam nihilo esse aequalem, ideoque inductionem veritati consentaneam.

Problema 7.

22. Si in triangulo ABC fuerit angulus $\beta = (2i+1)\alpha$, existente $2i+1$ numero impare quocunque integro, naturam relationis, quae hinc inter latera trianguli a, b, c intercedit, inuestigare.

Solutio.

Ex serie ergo formularum supra (17) exhibita, eas alternas considerari oportet, quae litteris A, C, E, G etc. sunt designatae, et ordine expositae, ita se habent:

si	formula inuenta est
$i=0$	$A = b - a = 0$
$i=1$	$C = b^3 - abb - aab - a(cc-aa) = 0$
$i=2$	$E = b^5 - ab^4 - 2aab^3 - a(cc-2aa)bb - aa(cc-aa)b - a(cc-aa)^2 = 0$
$i=3$	$G = b^7 - ab^6 - 3aab^5 - a(cc-3aa)b^4 - aa(2cc-3aa)b^3 - a(cc-aa)(cc-3aa)bb - aa(cc-aa)^2 b - a(cc-aa)^3 = 0$

 quae

quae eaedem ſecundum poteſtates ipſius c diſpoſitae ita repraeſententur:

ſi	erit
$i=0$	$A=(b-a)=0$
$i=1$	$C=(b-a)(bb-aa)-acc=0$
$i=2$	$E=(b-a)(bb-aa)^2-acc(bb+ab-2aa)-ac^4=0$
$i=3$	$G=(b-a)(bb-aa)^3-acc(bb-aa)(bb+2ab-3aa)$
	$-ac^4(bb+ab-3aa)-ac^6=0.$

Atque ex his colligimus primo:

$$(bb-aa)A-C=acc$$
$$(bb-aa)C-E=aacc(b-a)+ac^4$$
$$(bb-aa)E-G=aacc(bb-aa)(b-a)+aac^4(b-2a)+ac^6.$$

tum vero porro:

$$(bb-aa+cc)A-C=bcc$$
$$(bb-aa+cc)C-E=bbcc(b-a)=bbccA$$
$$(bb-aa+cc)E-G=bbcc(b-a)(bb-aa)-abbc^4=bbccC.$$

Vnde iam multo maiori fiducia concludimus, has formulas A, C, E, G etc. ſeriem recurrentem conſtituere, cuius ſcala relationis ſit $bb-aa+cc$, et terminum primo A praecedentem cenſendum eſſe $=\frac{1}{b}$. Quare ex cognitis duobus primis $A=b-a$ et $C=(b-a)(bb-aa)-acc$ ſequentes hac lege formantur.

$E=(bb-aa+cc)C-bbccA$ pro $n=5$
$G=(bb-aa+cc)E-bbccC$ pro $n=7$
$I=(bb-aa+cc)G-bbccE$ pro $n=9$
$L=(bb-aa+cc)I-bbccG$ pro $n=11$
$N=(bb-aa+cc)L-bbccI$ pro $n=13$
etc.

Coroll.

Coroll. 1.

23. His igitur formulis ita secundum numeros i dispositis, erit

i 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

formula A, C, E, G, I, L, N etc.

et terminus indefinite numero i conueniens erit, vt ante, huius formae:

$$\mathfrak{A}\left(\frac{bb-aa+cc+\sqrt{(a^4+b^4+b^4-2aabb-2aacc-2bbcc)}}{2}\right)^i$$
$$+\mathfrak{B}\left(\frac{bb-aa+cc-\sqrt{(a^4+b^4+c^4-2aabb-2aacc-2bbcc)}}{2}\right)^i.$$

Coroll. 1.

24. Coefficientes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ex binis terminis initialibus A et C ita definiuntur, vt primo sit $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathrm{A}=b-a$, tum vero $\frac{(b-a)(bb-aa+cc)}{2}+\frac{1}{2}$ $(\mathfrak{A}\ \mathfrak{B})\sqrt{(\ldots)}=(b-a)(bb\ aa)-acc$

ergo $(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\sqrt{(\ldots)}=(b-a)(bb-aa-(b+a)cc$

$$=(b+a)(bb\ 2ab+aa-cc$$

hincque $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\frac{(b+a)((h-a)^2-cc)}{\sqrt{(a^4+b^4+c^4-2aabb-2aacc-2bbcc)}}.$

Scholion.

25. Euoluamus hanc formulam generalem pari modo, quo ante fecimus (21), eritque prorsus vt ante forma nostra generalis:

$$\mathfrak{A}(bc\,\mathrm{cos}.\alpha+bc\sqrt{-1}.\,\mathrm{fin}.\alpha)^i+\mathfrak{B}(bc\,\mathrm{cos}.\alpha-bc\sqrt{-1}.\,\mathrm{fin}.\alpha)$$

quae pariter in hanc abit:

$$\mathfrak{A}b^ic^i(\mathrm{cos}.i\alpha+\sqrt{-1}.\,\mathrm{fin}.i\alpha)+\mathfrak{B}b^ic^i(\mathrm{cos}.i\alpha-\sqrt{-1}.\,\mathrm{fin}.i\alpha)$$

vbi eſt $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=b-a$, et $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\frac{(b+a)((b-a)^2-cc)}{2bc\sqrt{-1}.\sin.\alpha}$.
Nunc vero, ob ang. $\gamma=180^\circ-2(i+1)\alpha$, erit
$\cos.2(i+1)\alpha=\frac{cc-aa-bb}{2ab}$ et $1+\cos.2(i+1)\alpha=\frac{cc-(b-a)^2}{2ab}$
vnde $\mathfrak{B}-\mathfrak{A}=\frac{a(b+a)(1+\cos.2(i+1)\alpha)}{c\sqrt{-1}.\sin.\alpha}$.
At eſt $a:c=\sin.\alpha:\sin.2(i+1)\alpha$, ideoque $\mathfrak{B}-\mathfrak{A}$ $=\frac{(b+a)\cos.(i+1)\alpha}{\sqrt{-1}.\sin.(i+1)\alpha}$, vnde colligimus

$$\mathfrak{A}=-\frac{(b+a)\cos.(i+1)\alpha+(b-a)\sqrt{-1}.\sin.(i+1)\alpha}{2\sqrt{-1}.\sin.(i+1)\alpha} \text{ et}$$

$$\mathfrak{B}=\frac{(b+a)\cos.(i+1)\alpha+(b-a)\sqrt{-1}.\sin.(i+1)\alpha}{2\sqrt{-1}.\sin.(i+1)\alpha}.$$

Quoniam latera a et b ſunt ſinibus angulorum oppoſitorum proportionalia, ſtatuamus $a=2f\sin.\alpha$, et $b=2f\sin.(2i+1)\alpha$, eritque

$$a\cos.(i+1)\alpha=f(\sin.(i+2)\alpha-\sin.i\alpha);\ a\sin.(i+1)\alpha$$
$$=f(\cos.i\alpha-\cos.(i+2)\alpha)$$
$$b\cos.(i+1)\alpha=f(\sin.(3i+2)\alpha+\sin.i\alpha);\ b\sin.(i+i)\alpha$$
$$=f(\cos.i\alpha-\cos.(3i+2)\alpha)$$

vnde colligimus:

$(a+b)\cos.(i+1)\alpha=f(\sin.(i+2)\alpha+\sin.(3i+2)\alpha)$ et
$(b-a)\sin.(i+1)\alpha=f(\cos.(i+2)\alpha-\cos.(3i+2)\alpha)$.
Quare cum ſit generatim

$$\sin.\mu+\sin.\nu=2\sin.\tfrac{\mu+\nu}{2}\cos.\tfrac{\nu-\mu}{2} \text{ et}$$
$$\cos.\mu-\cos.\nu=2\sin.\tfrac{\mu+\nu}{2}\sin.\tfrac{\nu-\mu}{2}$$

habebimus:

$$(a+b)\cos.(i+1)\alpha=2f\sin.(2i+2)\alpha\cos.i\alpha \text{ et}$$
$$(b-a)\sin.(i+1)\alpha=2f\sin.(2i+2)\alpha\sin.i\alpha$$

ac propterea adipiscimur:

$$\mathfrak{A} = \frac{f\,\text{sin.}(2i+2)\alpha}{\sqrt{-1}.\text{sin.}(i+1)\alpha}(-\text{cos}.i\alpha + \sqrt{-1}.\text{sin}.i\alpha) \text{ et}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{f\,\text{sin.}(2i+2)\alpha}{\sqrt{-1}.\text{sin.}(i+1)\alpha}\quad(\text{cos}.i\alpha + \sqrt{-1}.\text{sin}.i\alpha)$$

vnde perspicuum est, fore

$$\mathfrak{A}(\text{cos}.i\alpha + \sqrt{-1}.\text{sin}.i\alpha) + \mathfrak{B}(\text{cos}.i\alpha - \sqrt{-1}.\text{sin}.i\alpha) = 0,$$

quo ipso veritas inductionis nostrae euincitur. His autem obseruatis, nunc demum solutionem nostri Problematis directe aggredi licet.

Problema 8.

26. Si in triangulo ABC angulus B ad angulum A rationem teneat quamcunque multiplam, vt n ad 1, relationem, quae inde inter latera trianguli $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ intercedit, analytice inuestigare.

Solutio.

Posito angulo $A = \alpha$, vt sit angulus $B = n\alpha$, erit, vti ex angulorum doctrina constat:

$$\text{cos}.n\alpha + \sqrt{-1}.\text{sin}.n\alpha = (\text{cos}.\alpha + \sqrt{-1}.\text{sin}.\alpha)^n \text{ et}$$

$$\text{cos}.n\alpha - \sqrt{-1}.\text{sin}.n\alpha = (\text{cos}.\alpha - \sqrt{-1}.\text{sin}.\alpha)^n, \text{ ideoque}$$

$$\frac{\text{cos}.n\alpha + \sqrt{-1}.\text{sin}.n\alpha}{\text{cos}.n\alpha - \sqrt{-1}.\text{sin}.n\alpha} = \left(\frac{\text{cos}.\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sin}.\alpha}{\text{cos}.\alpha - \sqrt{-1}\,\text{sin}.\alpha}\right)^n.$$

Iam prout n est numerus par vel impar, duo casus sunt euoluendi

Sit primo $n = 2i$, et vtrinque radix quadrata extrahatur, fietque:

$$\frac{\text{cos}.i\alpha + \sqrt{-1}.\text{sin}.i\alpha}{\text{cos}.i\alpha - \sqrt{-1}\,\text{sin}.i\alpha} = \left(\frac{\text{cos}.\alpha + \sqrt{-1}.\text{sin}\,\alpha}{\text{cos}.\alpha - \sqrt{-1}.\text{sin}.\alpha}\right)^i$$

nunc

nunc vero eſt $\text{coſ.}\,2i\alpha = \frac{aa+cc-bb}{2ac}$, ideoque

$\text{coſ.}\,i\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+c)^2-bb}{ac}}$ et $\text{ſin.}\,i\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bb-(c-a)^2}{ac}}$

deinde $\text{coſ.}\,\alpha = \frac{bb-aa+cc}{2bc}$ et $\text{ſin.}\,\alpha = \frac{\sqrt{(2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4)}}{2bc}$.

Sit breuitatis gratia

$$\Delta = \sqrt{(a^4+b^4+c^4-2aabb-2aacc-2bbcc)}$$

et noſtra aequatio fit

$$\frac{(a+c)^2-bb+\Delta}{(a+c)^2-bb-\Delta} = \left(\frac{bb-aa+cc+\Delta}{bb-aa+cc-\Delta}\right)^i \text{ ſeu}$$

$$((a+c)^2-bb-\Delta)(bb-aa+cc+\Delta)^i-((a+c)^2 \\ -bb+\Delta)(bb-aa+cc-\Delta)^i = 0$$

quae per 2Δ diuiſa conuenit cum forma ſupra inuenta. Sit deinde $n = 2i+1$, et multiplicando aequationem per $\frac{\text{coſ.}\,\alpha-\sqrt{-1}.\text{ſin.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\alpha+\sqrt{-1}.\text{ſin.}\,\alpha}$ orietur,

$$\frac{\text{coſ.}\,2i\alpha-\sqrt{-1}.\text{ſin.}\,2i\alpha}{\text{coſ.}\,2i\alpha-\sqrt{-1}.\text{ſin.}\,2i\alpha} = \left(\frac{\text{coſ.}\,\alpha+\sqrt{-1}.\text{ſin.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\alpha-\sqrt{-1}.\text{ſin.}\,\alpha}\right)^{2i}$$

et quadratam radicem extrahendo:

$$\frac{\text{coſ.}\,i\alpha+\sqrt{-1}.\text{ſin.}\,i\alpha}{\text{coſ.}\,i\alpha-\sqrt{-1}.\text{ſin}\,i\alpha} = \left(\frac{\text{coſ.}\,\alpha+\sqrt{-1}.\text{ſin.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\alpha-\sqrt{-1}.\text{ſin.}\,\alpha}\right)^i.$$

Cum nunc ſit $\gamma = 180^\circ - 2(i+1)\alpha$, erit

$\text{coſ.}\,2(i+1)\alpha = \frac{cc-bb-aa}{2ab}$ hincque

$\text{coſ.}\,(i+1)\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{cc-(b-a)^2}{ab}}$ et $\text{ſin.}\,(i+1)\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+a)^2-cc}{ab}}$.

Eſt vero $\text{coſ.}\,\alpha = \frac{bb-aa+cc}{2bc}$ et $\text{ſin.}\,\alpha\sqrt{-1} = \frac{\Delta}{2bc}$ ſeu $\text{ſin.}\,\alpha = \frac{\Delta}{2bc\sqrt{-1}}$, vbi notetur eſſe $\frac{\Delta}{\sqrt{-1}} = \sqrt{(cc-(b-a)^2((b+a)^2-cc)}$; quamobrem elicietur

$$\text{coſ.}\,i\alpha = \frac{1}{4bc\sqrt{ab}}((bb-aa+cc)\sqrt{(cc-(b-a)^2)}+((b+a)^2 \\ -cc)\sqrt{(cc-(b-a)^2)}$$

ſeu

seu $\cos. i\alpha = \frac{b+a}{2c\sqrt{ab}} \sqrt{(cc-(b-a)^2)}$, tum vero

$$\sin. i\alpha = \frac{1}{4bc\sqrt{ab}}((bb-aa+cc)\sqrt{((b+a)^2-cc)} - (cc-(b-a)^2)\sqrt{((b+a)^2-cc)})$$

seu $\sin. i\alpha = \frac{b-a}{2c\sqrt{ab}} \sqrt{((b+a)^2-cc)}$. Quibus substitutis erit:

$$\frac{(b+a)(cc-(b-a)^2)+(b-a)\Delta}{(b+a)(cc-(b-a)^2)-(b-a)\Delta} = \left(\frac{bb-ae+cc+\Delta}{bb-aa+cc-\Delta}\right)^i$$

et aequatio hinc supra inuenta colligitur:

$$\left(b+a-\frac{(b-a)\Delta}{cc-(b-a)^2}\right)(bb-aa+cc+\Delta)^i - \left(b+a + \frac{(b-a)\Delta}{cc-(b-a)^2}\right)(bb-aa+cc-\Delta)^i = 0$$

dummodo haec ducatur in $\frac{cc-(b-a)^2}{-2\Delta}$, atque ex hac forma simul natura seriei recurrentis intelligitur.

Coroll. 1.

27. Pro casu ergo quo in triangulo ABC angulus $B = 2iA$ aequatio laterum relationem exprimens est:

$$\left(1+\frac{bb-(a+c)^2}{\Delta}\right)(bb-aa+cc+\Delta)^i + \left(1-\frac{bb+(a+c)^2}{\Delta}\right)(bb-aa+cc-\Delta)^i = 0$$

pro casu autem, quo angulus $B = (2i+1)A$, habetur:

$$\left(b-a-\frac{(b+a)(cc-(b-a)^2)}{\Delta}\right)(bb-aa+cc+\Delta)^i + \left(b-a+\frac{(b+a)(oc-(b-a)^2)}{\Delta}\right)(bb-aa+cc-\Delta)^i = 0.$$

Coroll. 2.

28. Quodsi ergo has constituamus formas:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{bb-aa+cc+\Delta}{2}\right)^i+\tfrac{1}{2}\left(\frac{bb-aa+cc-\Delta}{2}\right)^i=\mathrm{V}$$

$$\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{bb-aa+cc+\Delta}{2}\right)^i-\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{bb-aa+cc-\Delta}{2}\right)^i=\mathrm{W}$$

quarum vtraque est rationalis non obstante formula irrationali:

$$\Delta=\sqrt{}(a^4+b^4+c^4-2aabb-2aacc-2bbcc)$$
$$=\sqrt{}((bb-aa+cc)^2-4bbcc)$$

pro casu $\mathrm{B}=2i\mathrm{A}$ erit

$$\mathrm{V}+(bb-(a+c)^2)\mathrm{W}=0$$

pro casu vero $\mathrm{B}=(2i+1)\mathrm{A}$ erit

$$(b-a)\mathrm{V}+(b+a)((b-a)^2-cc)\mathrm{W}=0.$$

Coroll. 3.

29. Quodsi pro singulis valoribus numeri integri i ambae formae V et W euoluantur, binae exorientur series recurrentes per eandem scalam relationis $bb-aa+cc$, $-bbcc$ continuandae, ex quibus deinceps ambae illae triangulorum proprietates facile exhibentur.

Scholion.

30. Quo has series succinctius exprimamus sit breuitatis gratia $bb-aa+cc=ff$, et pro serie priori $\mathrm{V}=\left(\frac{ff+\Delta}{2}\right)^i+\left(\frac{ff-\Delta}{2}\right)^i$

Ob

Ob $\Delta = \sqrt{(f^4 - 4bbcc)}$ et ſcalam relationis $ff, -bbcc$ inueniemus:

ſi	valores ipſius V
$i=0$	2
$i=1$	ff
$i=2$	$f^4 - 2bbcc$
$i=3$	$f^6 - 3bbccff$
$i=4$	$f^8 - 4bbccf^4 + 2b^4c^4$
$i=5$	$f^{10} - 5bbccf^6 + 5b^4c^4ff$
$i=6$	$f^{12} - 6bbccf^8 + 9b^4c^4f^4 - 2b^6c^6$
$i=7$	$f^{14} - 7bbccf^{10} + 14b^4c^4f^6 - 7b^6c^6f^2$

vnde generatim colligitur fore . . . . . $V =$
$f^{2i}\; ibbccf^{2i-4} + \frac{i(i-3)}{1.\,2} b^4c^4f^{2i-8} - \frac{i(i-4)(i-5)}{1.\,2.\,3} b^6c^6f^{2i-12} + \text{etc.}$

Deinde pro altera forma $W = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{ff+\Delta}{2}\right)^i - \frac{1}{\Delta}\left(\frac{ff-\Delta}{2}\right)^i$ ſequens naſcetur ſeries:

ſi	valores ipſius W
$i=0$	0
$i=1$	1
$i=2$	ff
$i=3$	$f^4 - bbcc$
$i=4$	$f^6 - 2bbccff$
$i=5$	$f^8 - 3bbccf^4 + b^4c^4$
$i=6$	$f^{10} - 4bbccf^6 + 3b^4c^4ff$
$i=7$	$f^{12} - 5bbccf^8 + 6b^4c^4f^4 - b^6c^6$

vnde in genere haec forma erit . . . . $W =$

$$f^{2i-2} - (i-2)bbccf^{2i-6} + \frac{(i-3)(i-4)}{1.\,2} b^4c^4f^{2i-10} - \frac{(i-4)(i-5)(i-6)}{1.\,2.\,3} b^6c^6f^{2i-14} + \text{etc.}$$

M 2 vbi

vbi probe notandum eſt, has ambas expreſſiones generales tantum vsque ad terminos euaneſcentes proferri debere, etiamſi deinceps denuo termini finiti redeant. Caeterum hinc patet, fore . $\frac{1}{2}(V + ffW) =$

$$f^{2i} - (i-1)bbccf^{2i-4} + \frac{(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2} b^4 c^4 f^{2i-8} - \frac{(i-3)(i-4)(i-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^6 c^6 f^{2i-12} + \text{etc.}$$

atque . . . . $\frac{1}{2}(V - ffW) =$

$$-bbccf^{2i-4} + (i-3)b^4 c^4 f^{2i-8} - \frac{(i-4)(i-5)}{1 \cdot 2} b^6 c^6 f^{2i-12} + \frac{(i-5)(i-6)(i-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^8 c^8 f^{2i-16} - \text{etc.}$$

Hinc iam pro caſu triangulorum, vbi angulus $B = 2iA$, ob $bb = ff + aa - cc$, aequatio laterum relationem exprimens erit:

$$\tfrac{1}{2}(V + ffW) - c(a+c)W = 0$$

pro altero autem caſu, vbi angulus $B = (2i+1)A$, poſito hic $cc = ff - bb + aa$, aequatio laterum relationem exprimens erit:

$$\tfrac{1}{2}b(V - ffW) - \tfrac{1}{2}a(V + ffW) + b(bb-aa)W = 0.$$

Verum etiam alio modo hae expreſſiones generales absque introductione quantitatis $ff = bb - aa + cc$ repraeſentari poſſunt, vti in ſequenti problemate videbimus.

Problema 9.

31. Si in triangulo ABC angulus B ad angulum A rationem teneat quamcunque multiplam, vt n ad 1, aequationem, qua relatio inter latera

AB

AB $=c$, AC $=b$ et BC $=a$ exprimitur, in genere exhibere.

Solutio.

Si aequationes pro ſingulis caſibus ſupra inventas attentius conſideremus, haud difficulter legem certam in terminorum progreſſu obſeruabimus, ex indole progreſſionis demonſtrata facile confirmandam. Duos autem caſus hic diſtingui oportet, prout numerus ille n fuerit par, vel impar. Pro vtroque autem caſu aequatio quaeſita ſequenti modo exhiberi poterit:

Pro caſu, quo $n=2i$.

aequatio laterum relationem exprimens ita ſe habet:

$$\frac{b^{2i}}{a}=\begin{array}{l}+cb^{2i-2}+c(cc-(i-1)aa)b^{2i-4}+c\left(c^4-2(i-2)aacc+\frac{(i-2)(i-1)}{1.\ 2}a^4\right)b^{2i-6}\\+iab^{2i-2}+a\left((i-1)cc-\frac{(i-1)i}{1.\ 2}aa\right)b^{2i-4}+a\left((i-2)c^4-\frac{2(i-2)(i-1)}{1.\ 2.}a^2c^2+\frac{(i-2)(i-1)i}{1.\ 2.\ 3}a^4\right)b^{2i-6}\end{array}$$

$$+c\left(c^6-3(i-3)a^2c^4+\frac{3(i-3)(i-2)}{1.\ 2}a^4c^2-\frac{(i-3)(i-2)(i-1)}{1.\ 2.\ 3}a^6\right)b^{2i-8}$$

$$+a\left((i-3)c^6-\frac{3(i-3)(i-2)}{1.\ 2}a^2c^4+\frac{3(i-3)(i-2)(i-1)}{1.\ 2.\ 3}a^4c^2-\frac{(i-3)(i-2)(i-1)i}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^6\right)b^{2i-8}$$

$$+c\left(c^8-4(i-4)a^2c^5+\frac{6(i-4)(i-3)}{1.\ 2}a^4c^4-\frac{4(i-4)(i-3)(i-2)}{1.\ 2.\ 3}a^6c^2+\frac{(i-4)(i-3)(i-2)(i-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^8\right)b^{2i-10}$$

$$+a\left((i-4)c^8-\frac{4(i-4)(i-3)}{1.\ 2.}a^2c^6+\frac{6(i-4)(i-3)(i-2)}{1.\ 2.\ 3.}a^4c^4-\frac{4(i-4)(i-3)(i-2)(i-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}a^6c^2\right.$$

$$\left.+\frac{(i-4)(i-3)(i-2)(i-1)i}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^8\right)b^{2i-10}$$

cuius lex continuationis ſatis eſt manifeſta.

Pro caſu, quo $n = 2i + 1$.

aequatio laterum relationem exprimens ita ſe habet:

$$\frac{b^{2i+1}}{a} = \begin{matrix} + b^{2i} + (cc - iaa)b^{2i-2} + (c^4 - 2(i-1)aacc + \frac{(i-1)i}{1\cdot 2}a^4)b^{2i-4} \\ + iab^{2i-1} + a((i-1)cc - \frac{(i-1)}{1\cdot 2}aa)b^{2i-3} + a((i-2)c^4 - \frac{2(i-2)(i-1)}{1\cdot 2}a^2c^2 + \frac{(i-2)(i-1)i}{1\cdot 2\cdot 3}a^4)b^{2i-5} \end{matrix}$$

$$+ (c^6 - 3(i-2)a^2c^4 + 3\frac{(i-2)(i-1)}{1\cdot 2}a^4c^2 - \frac{(i-2)(i-1)i}{1\cdot 2\cdot 3}a^6)b^{2i-6}$$

$$+ a((i-3)c^6 - 3\frac{(i-3)(i-2)}{1\cdot 2}a^2c^4 + 3\frac{(i-3)(i-2)(i-1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^4c^2 - \frac{(i-3)(i-2)(i-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^6)b^{2i-7}$$

etc.

quae aequatio commodius hac forma, ſecundum poteſtates ipſius c diſpoſita, repraeſentari poteſt:

$$\frac{b^{2i+1}}{a} = c^{2i} + c^{2i-2}\left\{\begin{matrix} bb - iaa \\ + ab \end{matrix}\right\} + c^{2i-4}\left\{\begin{matrix} b^4 - 2(i-1)aabb + \frac{(i-1)i}{1\cdot 2}a^4 \\ + 2ab^3 - (i-1)a^3b \end{matrix}\right\}$$

$$+ c^{2i-6}\left\{\begin{matrix} b^6 - 3(i-2)a^2b^4 + \frac{3(i-2)(i-1)}{1\cdot 2}a^4b^2 - \frac{(i-2)(i-1)i}{1\cdot 2\cdot 3}a^6 \\ + 3ab^5 - 3(i-2)a^3b^3 + \frac{(i-2)(i-1)}{1\cdot 2}a^5b \end{matrix}\right\}$$

$$+ c^{2i-8}\left\{\begin{matrix} b^8 - 4(i-3)a^2b^6 + \frac{6(i-3)(i-2)}{1\cdot 2}a^4b^4 - \frac{4(i-3)(i-2)(i-1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^6b^2 + \frac{(i-3)(i-2)(i-1)i}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^8 \\ + 4ab^7 - 6(i-3)a^3b^5 + \frac{4(i-3)(i-2)}{1\cdot 2}a^5b^3 - \frac{(i-3)(i-2)(i-1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^8 \end{matrix}\right\}$$

etc.

Scholion.

32. His conſiderationibus doctrina triangulorum non mediocriter amplificari videtur, dum ſtatim atque in quopiam triangulo ratio inter binos eius angulos innoteſcit, ſimul relatio certa inter eius latera exhiberi poteſt. Cum autem haec nimis ſint generalia, quandoquidem ex hac relatione vnicum

cum latus per bina reliqua determinatur, conueniet, has proprietates generales inuentas ad certam triangulorum ſpeciem accommodari, vbi quidem triangula iſoſcelia prae caeteris ſunt notatu digna, quia in iis ſaepenumero ratio inter angulum verticalem et angulos ad baſin praeſcribi ſolet, quoties ſcilicet polygona regularia ſunt conſtruenda. Duo autem caſus hic euoluendi occurrunt, prout vel angulus ad baſin eſt multiplus anguli verticalis, vel angulus verticalis multiplus anguli ad baſin; quos ambos in ſequentibus problematibus ſum expediturus.

Problema 10.

33. Si in triangulo iſoſcele BAC angulus ad baſin fuerit multiplus anguli verticalis A in ratione $n:1$, inueſtigare relationem inter baſin $BC = a$ et latera $AB = AC = b$. Tab. I. Fig. 6.

Solutio.

Primum obſeruandum eſt, ob hanc rationem ipſos angulos dari; poſita enim menſura duorum angulorum rectorum $= \pi$, et angulo verticali $A = \alpha$, ob $\alpha + 2n\alpha = \pi$, fit $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}$. Iam formulis ante inuentis huc transferendis, erit $c = b$, et binis caſibus ſeorſim tractatis, prout n eſt numerus vel par vel impar, quorum vtroque formulae ſeriem recurrentem conſtituunt, cuius ſcala relationis eſt $2bb-aa, -b^4$, primo ponendo $n = 2i$, habebimus:

ſi

si	has aequationes
$i=0$	$1=0$
$i=1$	$B=bb-ab-aa=0$
$i=2$	$D=b^4-2ab^3-3aabb+a^3b+a^4=0$
$i=3$	$F=b^6-3ab^5-6aab^4+4a^3b^3+5a^4bb$ $-a^5b-a^6=0$
$i=4$	$H=b^8-4ab^7-10aab^6+10a^3b^5+15a^4b^4$ $-6a^5b^3-7a^6b^2+a^7b+a^8=0$

vnde concludimus, in genere fore:

$$0=b^{2i}-iab^{2i-1}-\frac{i(i+1)}{1.2}a^2b^{2i-2}+\frac{i(ii-1)}{1.2.3}a^3b^{2i-3}+\frac{i(ii-1)(i+2)}{1.2.3.4}a^4b^{2i-4}$$
$$-\frac{i(ii-1)(ii-4)}{1.2.3.4.5}a^5b^{2i-5}-\frac{i(ii-1)(ii-4)(i+3)}{1.2.3.4.5.6}a^6b^{2i-6}\text{ etc.}$$

Pro altero casu, quo $n=2i+1$, habebimus:

si	has aequationes
$i=0$	$A=b-a=0$
$i=1$	$C=b^3-2abb-aab+a^3=0$
$i=2$	$E=b^5-3ab^4-3aab^3+4a^3b^2+a^4b-a^5=0$
$i=3$	$G=b^7-4ab^6-6aab^5+10a^3b^4+5a^4b^3-6a^5b^2$ $-a^6b+a^7=0$

vnde concludimus in genere fore:

$$0=b^{2i+1}-(i+1)ab^{2i}-\frac{i(i+1)}{1.2}a^2b^{2i-1}+\frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3}a^3b^{2i-2}$$
$$-\frac{(i-1)i(i+1)(i+2)}{1.2.3.4}a^4b^{2i-3}$$
$$-\frac{(i-1)i(i+1)(i+2)(i+3)}{1.2.3.4.5}a^5b^{2i-4}+\frac{(i-2)(i-1)(i+1)(i+2)(i+3)}{1.2.3.4.5.6}a^6b^{2i-5}\text{ etc.}$$

quae forma, si ponamus $n=2i-1$, commodius ita exhibetur:

$$0=b^{2i-1}-iab^{2i-2}-\frac{i(i-1)}{1.2}a^2b^{2i-3}+\frac{i(ii-1)}{1.2.3}a^3b^{2i-4}+\frac{i(ii-1)(i-2)}{1.2.3.4}a^4b^{2i-5}$$
$$-\frac{i(ii-1)(ii-4)}{1.2.3.4.5}a^5b^{2i-6}-\frac{i(ii-1)(ii-4)(i-3)}{1.2.3.4.5.6}a^6b^{2i-7}\text{ etc.}$$

Coroll.

Coroll. 1.

34. Cum in formulis generalibus supra exhibitis poni debeat $c=b$, erit pro casu $n=2i$ aequatio generalis:

$$\mathfrak{A}\left(\frac{2bb-aa+a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i+\mathfrak{B}\left(\frac{2bb-aa-a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i=0$$

existente $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=1$ et $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\frac{-a-2b}{\sqrt{(aa-4bb)}}$, hincque aequatio nostra:

$$\left(\frac{a+2b}{\sqrt{(aa-4bb)}}-1\right)\left(\frac{2bb-aa+a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i=\left(\frac{a+2b}{\sqrt{(aa-4bb)}}+1\right)\left(\frac{2bb-aa-a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i$$

Coroll. 2.

35. Pro casu autem $n=2i+1$, ob $c=b$, ex §. 23. adipiscimur hanc aequationem:

$$\mathfrak{A}\left(\frac{2bb-aa+a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i+\mathfrak{B}\left(\frac{2bb-aa-a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i=0$$

vbi est $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=b-a$ et $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\frac{(b+a)(a-2b)}{\sqrt{(aa-4bb)}}$: ideoque

$$\left(b-a+\frac{(b+a)(a-2b)}{\sqrt{(aa-4bb)}}\right)\left(\frac{2bb-aa+a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i=$$
$$\left(\frac{(b+a)(a-2b)}{\sqrt{(aa-4bb)}}-b+a\right)\left(\frac{2bb-aa-a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i.$$

Coroll. 3.

36. Si pro i scribamus $i-1$, vt sit $n=2i-1$, haec oritur aequatio:

$$\left(\frac{a-2b}{\sqrt{(aa-4bb)}}+1\right)\left(\frac{2bb-aa+a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i=\left(\frac{a-2b}{\sqrt{(aa-4bb)}}-1\right)\left(\frac{2bb-aa-a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i$$

 hinc

hinc autem prodeunt superiores aequationes per $2b$ multiplicatae.

Scholion.

37. Formae generales hic exhibitae a summa potestate ipsius b incipiunt; eaedem vero etiam ita inuersae repraesentari possunt, vt a summa potestate ipsius a incipiant. Ita pro casu priori, quo $n = 2i$, colligimus hanc aequationem:

$$0 = a^{2i} - (2i-1)a^{2i-2}b^2 + \frac{(2i-2)(2i-3)}{1 \cdot 2}a^{2i-4}b^4 - \frac{(2i-3)(2i-4)(2i-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{2i-6}b^6 \text{ etc.}$$
$$+ a^{2i-1}b - (2i-2)a^{2i-3}b^3 + \frac{(2i-3)(2i-4)}{1 \cdot 2}a^{2i-5}b^5 - \frac{(2i-4)(2i-5)(2i-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{2i-7}b^7 \text{ etc.}$$

Pro casu autem posteriori, quo $n = 2i + 1$, istam:

$$0 = \begin{cases} + a^{2i+1} - 2ia^{2i-1}b^2 + \frac{(2i-1)(2i-2)}{1 \cdot 2}a^{2i-3}b^4 - \frac{(2i-2)(2i-3)(2i-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{2i-5}b^6 \\ - a^{2i}b + (2i-1)a^{2i-2}b^3 - \frac{(2i-2)(2i-3)}{1 \cdot 2}a^{2i-4}b^5 + \frac{(2i-3)(2i-4)(2i-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{2i-6}b^7 \text{ etc.} \end{cases}$$

Verum notandum est, has expressiones tantum eo vsque continuari debere, quoad ad terminum euanescentem perueniatur, et sequentes, etiamsi non euanescant, tamen reiici oportere, cui cautioni formae superiores non sunt obnoxiae, ex quo eae quoque ad casus, vbi i non est numerus integer, extendi possunt, vbi quidem aequatio serie infinita constabit.

Proble-

Problema II.

38. Si in triangulo isoſcele ABC angulus verticalis B ſit multiplus anguli ad baſin A in ratione $n:1$, vt ſit $B = nA$, inueſtigare relationem inter baſin $AC = b$ et latera $BA = BC = a$. Tab. I. Fig. 7.

Solutio.

Poſitis angulis ad baſin $A = C = \alpha$, vt ſit verticalis $B = n\alpha$, erit $(n+2)\alpha = \pi$, ideoque $\alpha = \frac{\pi}{n+2}$ et $B = \frac{n\pi}{n+2}$. In formulis ergo ſupra inuentis poni debet $c = a$, ita vt iam ſcala relationis ſit $bb, -aabb$. Quare caſus iterum binos diſtinguendo, prout n fuerit numerus par vel impar, habebimus:

Pro caſu $n = 2i$.

ſi	has aequationes
$i=0$	$1=0$
$i=1$	$B = bb - 2aa = 0$
$i=2$	$D = b^4 - 3aabb = 0$
$i=3$	$F = b^6 - 4aab^4 + 2a^4bb = 0$
$i=4$	$H = b^8 - 5aab^6 + 5a^4b^4 = 0$
$i=5$	$K = b^{10} - 6aab^8 + 9a^4b^6 - 2a^6b^4 = 0$
$i=6$	$M = b^{12} - 7aab^{10} + 14a^4b^8 - 7a^6b^6 = 0$
$i=7$	$O = b^{14} - 8aab^{12} + 20a^4b^{10} - 16a^6b^8 + 2a^8b^6 = 0$
$i=8$	$Q = b^{16} - 9aab^{14} + 27a^4b^{12} - 30a^6b^{10} + 9a^8b^8 = 0$

etc.

quae ad has formas ſimpliciores reducuntur:

$i=1$	$bb-2aa=0$
$i=2$	$bb-3aa=0$
$i=3$	$b^4-4aabb+2a^4=0$
$i=4$	$b^4-5aabb+5a^4=0$
$i=5$	$b^6-6aab^4+9a^4b^2-2a^6=0$
$i=6$	$b^6-7aab^4+14a^4b^2-7a^6=0$
$i=7$	$b^8-8aab^6+20a^4b^4-16a^6bb+2a^8=0$
$i=8$	$b^8-9aab^6+27a^4b^4-30a^6bb+9a^8=0$

etc.

Hic ergo iterum duos caſus diſcerni conuenit, prout numerus i ſit par vel impar.

Si ſit $i=2\lambda-1$ et $n=4\lambda-2$ erit aequatio:

$$0=b^{2\lambda}-2\lambda aab^{2\lambda-2}+\frac{2\lambda(2\lambda-3)}{1.\ 2}a^4b^{2\lambda-4}-\frac{2\lambda(2\lambda-4)(2\lambda-5)}{1.\ 2.\ 3}a^6b^{2\lambda-6}$$
$$+\frac{2\lambda(2\lambda-5)(2\lambda-6)(2\lambda-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^8b^{2\lambda-8}-\text{etc.}$$

et ordine inuerſo ita ſe habebit:

$$0=a^{2\lambda}-\frac{\lambda\lambda}{1.\ 2}a^{2\lambda-2}b^2+\frac{\lambda\lambda(\lambda\lambda-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{2\lambda-4}b^4-\frac{\lambda\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda\lambda-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}a^{2\lambda-6}b^6+\text{etc.}$$

Sin autem ſit $i=2\lambda$, et $n=4\lambda$, erit aequatio:

$$0=b^{2\lambda}-(2\lambda+1)aab^{2\lambda-2}+\frac{(2\lambda+1)(2\lambda-2)}{1.\ 2}a^4b^{2\lambda-4}-\frac{(2\lambda+1)(2\lambda-3)(2\lambda-4)}{1.\ 2.\ 3}a^6b^{2\lambda-6}$$
$$+\frac{(2\lambda+1)(2\lambda-4)(2\lambda-5)(2\lambda-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^8b^{2\lambda+8}-\text{etc.}$$

quae ordine inuerſo ita ſe habebit:

$$0=(2\lambda+1)a^{2\lambda}-\frac{(2\lambda+1)\lambda(\lambda+1)}{1.\ 2.\ 3}a^{2\lambda-2}b^2+\frac{(2\lambda+1)\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda+2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^{2\lambda-4}b^4$$
$$-\frac{(2\lambda+1)\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda\lambda-4)(\lambda+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}a^{2\lambda-6}b^6\ \text{etc.}$$

ſeu

seu per $2\lambda+1$ diuidendo hoc modo:

$$0 = a^{2\lambda} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2.\ 3} a^{2\lambda-2} b^2 + \frac{\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda+2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5} a^{2\lambda-4} b^4 - \frac{\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda\lambda-4)(\lambda+3)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} a^{2\lambda-6} b^6$$
$$+ \frac{\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda\lambda-4)(\lambda\lambda-9)(\lambda+4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9} a^{2\lambda-8} b^8 - \text{etc.}$$

Nunc igitur ad alterum casum progrediamur.

Pro casu $n = 2i+1$.

si	erit aequatio
$i=0$	$b-a=0$
$i=1$	$b^3-abb-aab=0$
$i=2$	$b^5-ab^4-2aab^3+a^3bb=0$
$i=3$	$b^7-ab^6-3aab^5+2a^3b^4+a^4b^3=0$
$i=4$	$b^9-ab^8-4aab^7+3a^3b^6+3a^4b^5-a^5b^4=0$
$i=5$	$b^{11}-ab^{10}-5aab^9+4a^3b^8+6a^4b^7-3a^5b^6-a^6b^5=0$

quae reducuntur ad has formas simpliciores:

$i=0$	$b-a=0$
$i=1$	$bb-ab-aa=0$
$i=2$	$b^3-abb-2aab+a^3=0$
$i=3$	$b^4-ab^3-3aabb+2a^3b+a^4=0$
$i=4$	$b^5-ab^4-4aab^3+3a^3bb+3a^4b-a^5=0$
$i=5$	$b^6-ab^5-5aab^4+4a^3b^3+6a^4b^2-3a^5b-a^6=0$

vnde in genere concluditur fore:

$$0 = \begin{array}{l} +b^{i+1} - ia^2b^{i-1} + \frac{(i-1)(i-2)}{1.\ 2}a^4b^{i-3} - \frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{1.\ 2.\ 3}a^6b^{i-5} \\ -ab^i + (i-1)a^3b^{i-2} - \frac{(i-2)(i-3)}{1.\ 2}a^5b^{i-4} + \frac{(i-3)(i-4)(i-5)}{1.\ 2.\ 3}a^7b^{i-6}\ \text{etc.} \end{array}$$

Inuerſe autem duos caſus contemplari conuenit:

I. Si $i = 2(\lambda - 1)$, et $n = 4\lambda - 3$, erit

$$0 = a^{2\lambda - 1} - \frac{\lambda}{1} a^{2\lambda - 2} b^2 - \frac{\lambda(\lambda - 1)}{1 \cdot 2} a^{2\lambda - 3} b^2 + \frac{\lambda(\lambda\lambda - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{2\lambda - 4} b^3 + \frac{\lambda(\lambda\lambda - 1)(\lambda - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{2\lambda - 5} b^4 \text{ etc.}$$

II. Si $i = 2\lambda - 1$, et $n = 4i - 1$, erit

$$0 = a^{2\lambda} + \frac{\lambda}{1} a^{2\lambda - 1} b - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{1 \cdot 2} a^{2\lambda - 2} b^2 - \frac{\lambda(\lambda\lambda - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{2\lambda - 4} b^4 + \frac{\lambda(\lambda\lambda - 1)(\lambda + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{2\lambda - 6} b^6 \text{ etc.}$$

ſicque pro omnibus caſibus, quibus n eſt numerus integer, aequationes inter latera a et b eruimus.

SOLV-

SOLVTIO FACILIS

PROBLEMATVM QVORVMDAM GEOMETRICORVM DIFFICILLIMORVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

In omni triangulo quatuor potiſſimum dantur puncta, quae in Geometria conſiderari ſolent.

1. Interſectio ternorum perpendiculorum, quae ex ſingulis angulis in latera oppoſita demittuntur.

2. Interſectio ternarum rectarum, quae ex ſingulis angulis ductae latera oppoſita biſecant; quod punctum ſimul eſt centrum grauitatis trianguli.

3. Interſectio ternarum rectarum, quae ſingulos angulos bifariam ſecant, in quod punctum incidit centrum circuli triangulo inſcripti.

4. Interſectio ternarum rectarum ad ſingula latera normalium eaque biſecantium, in quo puncto reperitur centrum circuli triangulo circumſcripti.

2. Ex his quatuor punctis, ſi dentur poſitione terna quaecunque, euidens eſt, triangulum inde determinari, niſi forte illa puncta in vno coaleſcant, quod cum eueniat in triangulo aequilatero, hoc caſu omnia triangula aequilatera problemati aeque ſatisfa-

tisfacient. Hinc igitur quatuor nascentur problemata, prout quodque eorum quatuor punctorum, pro trianguli determinatione praetermittitur, quae quemadmodum commodissime resolui queant, hic ostendere constitui.

3. Problemata autem haec solutu esse difficillima, mox experietur, quicunque ea fuerit aggressus, cum vix perspiciatur, cuiusmodi quantitates incognitas in calculum introduci oporteat, vt saltem ad aequationes solutionem continentes perueniatur. Totum ergo negotium ad idoneam quantitatum incognitarum electionem reducitur, in quo id imprimis est cauendum, ne in calculos taediosissimos et omnino inextricabiles delabamur. Tum vero omnibus difficultatibus feliciter superatis insignes quaedam affectiones inter illa quatuor puncta se prodent, quarum cognitio in Geometria haud leuis momenti est censenda.

Tab. II. Fig. 1. 2. 3. 4. 4. Ne figurae nimia linearum in iis ducendarum multitudine onerentur, idem triangulum ABC quater exhibeo, in primo scilicet (fig. 1.) rectae AM, BN et CN in latera opposita sunt normales, earumque intersectionem littera E designo, vbi primum situm est punctum eorum quatuor, quae commemoraui. In secunda figura rectae A*a*, B*b* et C*c* latera opposita bisecant, quarum intersectionem indicat punctum F secundum, de quatuor illis punctis memoratis et centrum grauitatis trianguli.

guli. In tertia figura rectae $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ angulos A, B, C bisecant, earumque intersectio G praebet tertium punctum ante memoratum, nempe centrum circuli inscripti. Tandem in quarta figura ex singulorum laterum punctis mediis S, T, V erectae sunt perpendiculares SH, TH et VH sua intersectione H centrum circuli circumscripti exhibentes.

5. Quo horum quatuor punctorum positionem facilius definire eaque deinceps inter se comparare queam, ex singulis in latus AB pro basi assumtum demitto perpendicula EP, FQ, GR et HS, quorum quidem primum et quartum iam in constructione ipsa occurrunt. Tum vero voco terna trianguli latera:

$$AB = c;\ AC = b \text{ et } BC = a$$

praeterea vero etiam aream trianguli in computum duci decet, quae sit $= A$, eritque vti constat:

$$AA = \tfrac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

seu $AA = \frac{1}{16}(2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4)$

Hinc igitur situm cuiusque horum quatuor punctorum respectu basis AB seorsim inuestigo sequenti modo. Tab. II. Fig. 1.

I. *Pro intersectione perpendiculorum* E.

6. Primo ex elementis constat fore:

$AP = \frac{cc+bb-aa}{2c}$, similique modo $BM = \frac{aa+cc-bb}{2a}$.
Deinde vero ob $\frac{1}{2}AM.BC = A$ erit $AM = \frac{2A}{a}$,

 vnde

vnde ſimilitudo triangulorum ABM et AEP praebet

$$AM : BM = AP : EP$$

hincque fit $EP = \frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8cA}$.

Quocirca ſitus puncti E reſpectu baſis AB ita definitur vt ſit

$$AP = \frac{cc+bb-aa}{2c} \text{ et } PE = \frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8cA}.$$

II. *Pro centro grauitatis* F.

Tab. II. Fig. 2. 7. Demiſſo ex angulo C in baſin AB perpendiculo CP habemus vt ante $AP = \frac{cc+bb-aa}{2c}$ et $CP = \frac{2A}{c}$.

Iam vero ex elementis conſtat eſſe $FQ = \frac{1}{3}CP = \frac{2A}{3c}$ et $cQ = \frac{1}{3}cP$. Cum autem ſit $Ac = \frac{1}{2}c$ erit $cP = \frac{bb-aa}{2c}$ ideoque $cQ = \frac{bb-aa}{6c}$, et conſequenter $AQ = \frac{3cc+bb-aa}{6c}$. Quam ob rem ſitus puncti F reſpectu baſis AB ita definitur, vt ſit:

$$AQ = \frac{3cc+bb-aa}{6c} \text{ et } QF = \frac{2A}{3c}.$$

III. *Pro centro circuli inſcripti* G.

Fig. 3. 8. Cum GR ſit radius circuli inſcripti, erit $\frac{1}{2}GR(a+b+c)$ area trianguli $= A$ vnde fit $GR = \frac{2A}{a+b+c}$. Tum vero poſito ſegmento $AR = x$, ſi ab AC ex A par portio reſcindatur, habebitur ibi punctum contactus, a quo proinde punctum C diſtat interuallo $= b-x$. Deinde ob $BR = c-x$ ſi a latere BC ex A aequale interuallum $c-x$ reſcindatur,

datur, ibi hoc latus a circulo tangetur, vnde punctum C ab isto puncto distabit interuallo $= a - c + x$, quod cum ex circuli natura illi $b - x$ sit aequale, erit $x = \frac{c + b - a}{2}$. Quare hoc punctum G respectu basis AB ita definitur vt sit:

$$AR = \frac{c + b - a}{2} \text{ et } RG = \frac{2A}{a + b + c}.$$

IV. *Pro centro circuli circumscripti* H. Tab. II. Fig. 4.

9. Hic quidem statim est ex constructione $AS = \frac{1}{2}c$. Tum vero ex A in BC ducto perpendiculo AM, erit $AM = \frac{2A}{a}$ et $CM = \frac{aa + bb - cc}{2a}$. Iuncta autem recta AH ex natura circuli liquet fore angulum AHS aequalem angulo ACB, ideoque triangulum AHS simile erit triangulo ACM vnde fit;

$$AM : CM = AS : HS$$

sicque colligitur $HS = \frac{c(aa + bb - cc)}{8A}$.
Quare situs puncti H respectu basis AB ita definitur vt sit:

$$AS = \frac{1}{2}c \text{ et } SH = \frac{c(aa + bb - cc)}{8A}.$$

10. Hinc iam definire poterimus distantias inter haec quaterna puncta, si quidem in eadem figura exprimerentur, erit enim;

$$EF^2 = (AP - AQ)^2 + (PE - QF)^2$$
$$EG^2 = (AP - AR)^2 + (PE - RG)^2$$
$$EH^2 = (AP - AS)^2 + (PE - SH)^2$$

O 2 FG

$$FG^2 = (AQ-AR)^2 + (QF-RG)^2$$
$$FH^2 = (AQ-AS)^2 + (QF-SH)^2$$
$$GH^2 = (AR-AS)^2 + RG-SH)^2.$$

Haec autem interualla ideo colligi oportet, quod ſi proponantur terna horum quatuor punctorum quaeque tanquam data, nihil aliud praeter eorum mutuas diſtantias pro cognito aſſumatur, vnde deinceps latera trianguli ſint inueſtiganda.

11. Hic autem imprimis eſt obſeruandum diſtantias illas inter quatuor noſtra puncta neceſſario ita exprimi debere, vt tria trianguli latera in expreſſiones aequaliter ingrediantur, cum nulli lateri prae reliquis reſpectu harum diſtantiarum vlla praerogatiua tribui queat. Quam ob cauſam latera trianguli ſine vllo diſcrimine contemplaturus ponam:

$$a+b+c=p;\ ab+ac+bc=q \text{ et } abc=r$$

ita vt loco laterum iam iſtas ternas quantitates p, q et r ad ſingula aeque relatas in calculum ſim introducturus. Hinc cum ſit:

$$aa+bb+cc=pp-2q;\ aabb+aacc+bbcc=qq-2pr$$
$$a^4+b^4+c^4=p^4-4ppq+2qq+4pr$$

area A ita exprimitur vt ſit:

$$AA=\tfrac{1}{16}p(-p^3+4pq-8r)=\frac{-p^4+4ppq-8pr}{16}.$$

Hoc notato ſuperiores ſex diſtantias ad has nouas quantitates ſeorſim ſum reuocaturus.

I. *In-*

I. *Inuestigatio distantiae punctorum* E *et* F.

12. Hic primo habemus:

$$AP - AQ = \frac{cc + bb - aa}{2c} - \frac{3cc - bb + aa}{6c} = \frac{bb - aa}{3c}$$

$$PE - QF = \frac{(cc + bb - aa)(aa + cc - bb)}{8cA} - \frac{2A}{3c}$$

$$= \frac{3(cc + bb - aa)(aa + cc - bb) - 16AA}{24cA}$$

quae expressiones ad communem denominatorem reductae, fiunt:

$$AP - AQ = \frac{(bb - aa)\sqrt{(2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4)}}{12cA}$$

$$PE - QF = \frac{2c^4 - a^4 - b^4 + 2aabb - bbcc - aacc}{12cA}$$

quarum quadrata addita praebent:

$$EF^2 = \frac{1}{16AA}\left\{\begin{array}{l} +a^6 + b^6 + c^6 \\ -a^4bb - aab^4 - a^4cc - aac^4 - b^4cc^4 - bbc^4) \\ +3aabbcc \end{array}\right.$$

vbi vtque litterae a, b, c aequaliter insunt. Est vero:

$$a^4bb + aab^4 + \text{etc.} = ppqq - 2q^3 - 2p^3r + 4pqr - 3rr$$

$$a^6 + b^6 + c^6 = p^6 - 6p^4q + 9ppqq - 2q^3 + 6p^3r$$
$$- 12pqr - 3rr$$

ex quo obtinemus:

$$EF^2 = \frac{1}{36AA}(p^6 - 6p^4q + 8ppqq + 8p^3r - 16pqr + 9rr)$$

quae expressionem ad hanc formam reducere licet:

$$EF^2 = \frac{rr}{4AA} = \frac{4}{9}(pp - 2q).$$

II. *Inueſtigatio diſtantiae punctorum* E *et* G.

13. Hic habemus:

$$AP-AR=\frac{cc+bb-aa}{2c}-\frac{c-b+a}{2}=\frac{bb-bc-aa+ac}{2c}$$

$$PE-RG=\frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8cA}-\frac{2A}{a+b+c}\ \text{ſeu}$$

$$PE-RG=\frac{c^4-a^4-b^4+2aabb}{8cA}+\frac{p^3-4pq+8r}{8A}$$

atque ad communem denominatorem reducendo:

$$AP-AR=\frac{bb-bc-aa+ac)\sqrt{(2aabb+aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4)}}{8cA}$$

$$PE-RG=\frac{2c^4-(a+b)c^3-(a-b)^2cc+(a+b)(a-b)^2c-(aa-bb)^2}{8cA}$$

quorum quadratorum ſumma per $4cc$ diuiſa ad hanc formam redit:

$$EG^2=\frac{1}{16AA}\left\{\begin{array}{lll}+a^6-a^5b-a^4bb+3a^4bc-2a^3bbc+2a^3b^3 & & \\ +b^6-ab^5-aab^4+3ab^4c-2a^3bcc+2a^3c^3 & & \\ +c^6-a^5c-a^4cc+3abc^4-2aab^3c+2b^3c^3 & +6aabbcc) & \\ \quad -ac^5-aac^4 \qquad -2ab^3cc & & \\ \quad -b^5c-b^4cc \qquad -2aabc^3 & & \\ \quad -bc^5-bbc^4 \qquad -2abbc^3 & & \end{array}\right.$$

Antequam hanc expreſſionem ad litteras p, q et r reduco, obſeruo eſſe:

$$EG^2\begin{array}{l}+aa-ab\\+bb-ac\\+cc-bc\end{array}=\frac{abc}{4AA}\left\{\begin{array}{lll}+a^3 & -aab & +3abc\\+b^3 & -abb & \\+c^3 & -aac & \\ & -acc & \\ & -bbc & \\ & -bcc & \end{array}\right\}$$

$$=\frac{abc(aa+bb+cc-2ab-2ac-2bc)(a+b+c)}{4AA}$$

$$+\frac{9aabbcc}{4AA}.$$

Iam

Iam cum ſit $aa+bb+cc=pp-2q$ reductio eſt facilis, quippe prodit:

$$EG^2+pp-3q=\frac{pr(pp-4q)+9rr}{4AA}$$

ſicque haec diſtantia ita definitur vt ſit:

$$EG^2=\frac{r(p^3-4pq+9r)}{4AA}-pp+3q=\frac{rr}{4AA}-\frac{4r}{p}-pp+3q.$$

III. *Inueſtigatio diſtantiae punctorum* E *et* H.

14. Cum hic ſit:

$$AP-AS=\frac{cc+bb-aa}{2c}-\tfrac{1}{2}c$$

$$PE-SH=\frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8cA}-\frac{c(aa+bb-cc)}{8A}$$

habebimus:

$$AP-AS=\frac{bb-aa}{2c} \text{ et } PE-SH=\frac{2c^4-(aa+bb)cc-(aa-bb)^2}{8cA}$$

et quadratis addendis diuiſione facta per $4cc$ obtinetur:

$$EH^2=\frac{1}{16AA}\left\{\begin{array}{l}+a^6-a^4bb-aac^4+3aabbcc\\+b^6-a^4cc-b^4cc\\+c^6-aab^4-bbc^4\end{array}\right\}$$

quae ob $16AA=-a^4-b^4-c^4+2aabb+2aacc+bbcc$ reducitur ad hanc formam:

$$EH^2=\frac{9aabbcc}{16AA}-aa-bb-cc$$

vbi ſubſtitutio facile conficitur, reſultat enim:

$$EH^2=\frac{9rr}{16AA}-pp+2q.$$

IV.

IV. *Inuestigatio distantiae punctorum* F *et* G.

15. Ex formulis supra inuentis habemus hic:

$$AQ-AR = \frac{3cc+bb-aa}{6c} - \frac{c-b+a}{2} = \frac{3(a-b)c-aa+bb}{6c}$$

$$GF-RG = \frac{2A}{3c} - \frac{2A}{a+b+c} = \frac{2A(a+b-2c)}{3c(a+b+c)}$$

quorum quadratorum summa reducitur ad hanc formam:

$$FG^2 = \frac{1}{9(a+b+c)^2}\left\{\begin{array}{l} -a^4+a^3b+4aabb-5abcc \\ -b^4+ab^3+4aacc-5abbc \\ -c^4+a^3c+4bbcc-5aabc \\ \quad +ac^3 \\ \quad +b^3c \\ \quad +bc^3. \end{array}\right.$$

Cum nunc sit:

$$a^4+b^4+c^4 = p^4-4ppq+2qq+4pr$$

$$aabb+aacc+bbcc = qq-2pr$$

$$a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+b^3c+bc^3 = ppq-2qq-pr$$

$$abcc+abbc+aabc = pr$$

expressio inuenta hanc induit formam:

$$FG^2 = \frac{1}{9pp}(-p^4+5ppq-18pr) = \frac{-p^3+5pq-18r}{9p}$$

V. *Inuestigatio distantiae punctorum* F *et* H.

16. Pro hoc casu habemus:

$$AQ-AS = \frac{3cc+bb-aa}{6c} - \tfrac{1}{2}c = \frac{bb-aa}{6c}$$

$$QF-SH = \frac{2A}{3c} - \frac{c(aa+bb-cc)}{8A} = \frac{2c^4-(aa+bb)cc-(aa-bb)^2}{24cA}$$

Quod-

Quodſi has formulas cum caſu primo comparemus, deprehendimus eſſe:

$$AQ - AS = \tfrac{1}{2}(AP - AQ) \text{ et } QF - SH = \tfrac{1}{2}(PE - QF)$$

vnde manifeſtum eſt fore $FH = \frac{1}{2}EF$ ideoque $FH^2 = \frac{rr}{16\,AA} - \frac{1}{9}(pp - 2q)$.

VI. *Inueſtigatio diſtantiae punctorum* G *et* H.

17. Pro hoc caſu poſtremo habetur:

$$AR - AS = \frac{c + b - a}{2} - \tfrac{1}{2}c = \frac{b - a}{2}$$

$$RG - SH = \frac{2\,A}{a+b+c} - \frac{c(aa+bb-cc)}{8\,A} = \frac{(a+b)c^3 + (aa+bb)cc - (a+b)(aa+bb)c - (aa-bb)^2}{8\,(a+b+c)\,A}$$

quarum binarum formularum quadrata ſi addantur reperitur ſequens expreſſio:

$$GH^2 = \frac{abc}{16\,(a+b+c)^2\,AA}\left\{\begin{array}{l} +a^5 + a^4b + ab^4 + abc^3 - 2a^3bb - 2aab^3 \\ +b^5 + a^4c + ac^4 + ab^3c - 2a^3cc - 2aac^3 \\ +c^5 + b^4c + bc^4 + a^3bc - 2b^3cc - 2bbc^3 \end{array}\right\}$$

quae per $a + b + c$ reducta abit in hanc:

$$GH^2 = \frac{abc}{16\,(a+b+c)\,AA}\left\{\begin{array}{l} +a^4 + aabc - 2aabb \\ +b^4 + abbc - 2aacc \\ +c^4 + abcc - 2bbcc \end{array}\right\}$$

vnde facta ſubſtitutione colligitur

$$GH^2 = \frac{r}{16\,pAA}(p^4 - 4ppq + 9pr) - \frac{r(p^3 - 4pq + 9r)}{16\,AA}$$

ſeu $GH^2 = \frac{rr}{16\,AA} - \frac{r}{p}$.

18. En ergo ſub vno conſpectu quadrata ſex horum interuallorum:

$$\text{I. } EF^2 = \frac{rr}{4AA} - \tfrac{4}{9}(pp - 2q)$$
$$\text{II. } EG^2 = \frac{rr}{4AA} - pp + 3q - \frac{4r}{p}$$
$$\text{III. } EH^2 = \frac{9rr}{16AA} - pp + 2q$$
$$\text{IV. } FG^2 = -\tfrac{1}{9}pp + \tfrac{5}{9}q - \frac{2r}{p}$$
$$\text{V. } FH^2 = \frac{rr}{16AA} - \tfrac{1}{9}(pp - 2q)$$
$$\text{VI. } GH^2 = \frac{rr}{16AA} - \frac{r}{p}$$

Tab. II. Fig. 5. vbi euidens eſt, eſſe $EH = \frac{3}{2}EF$ et $FH = \frac{1}{2}EF$, ſicque punctum H per puncta E, F ſponte determinatur, ſcilicet ſi tria puncta E, F, G forment triangulum EFG tum quartum punctum H ita in recta EF producta erit ſitum vt ſit $FH = \frac{1}{2}EF$ ideoque $EH = \frac{3}{2}EF$. Hinc vero deducitur $4GH^2 + 2EG^2 = 3EF^2 + 6FG^2$, quod cum valoribus inventis apprime congruit.

19. Quo nunc has formulas ad maiorem ſimplicitatem reuocemus, ponamus $4pq - p^3 - 8r = 4s$ vt ſit $4AA = ps$ et $4q = pp + \frac{8r}{p} + \frac{4s}{p}$; tum vero faciamus:

$$\frac{rr}{ps} = R,\ \frac{r}{p} = Q \text{ et } pp = P$$

ita vt P, Q, R ſint quantitates duas dimenſiones involuentes. Quoniam igitur hinc eſt $\frac{s}{p} = \frac{QQ}{R}$ erit $p = \sqrt{P}$; $q = \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{QQ}{R}$, et $r = Q\sqrt{P}$, atque

que $4AA = \frac{PQQ}{R}$ et interualla noſtra ita exprimentur:

$$\text{I.}\quad EF^2 = R - \tfrac{2}{9}P + \tfrac{16}{9}Q + \frac{8QQ}{9R}$$
$$\text{II.}\quad EG^2 = R - \tfrac{1}{4}P + 2Q + \frac{3QQ}{R}$$
$$\text{III.}\quad EH^2 = \tfrac{9}{4}R - \tfrac{1}{2}P + 4Q + \frac{2QQ}{R}$$
$$\text{IV.}\quad FG^2 = \quad + \tfrac{1}{36}P - \tfrac{8}{9}Q + \frac{5QQ}{9R}$$
$$\text{V.}\quad FH^2 = \tfrac{1}{4}R - \tfrac{1}{18}P + \tfrac{4}{9}Q + \frac{2QQ}{9R}$$
$$\text{VI.}\quad GH^2 = \tfrac{3}{4}R - Q.$$

20. Cum igitur horum quatuor punctorum terna niſi capiantur haec tria E, F et H iam contineant determinationem quarti, vnicum reſultat problema, quod ita ſe habet.

Problema.

Datis poſitione his quatuor punctis in quolibet triangulo aſſignabilibus 1°. Interſectione perpendicularium ex ſingulis angulis in latera oppoſita ductarum E, *2°. Centro grauitatis* F, *3°. Centro circuli inſcripti* G *et 4° centro circuli circumſcripti* H; *conſtruere triangulum.* Tab. II. Fig. 5.

Quod problema ex hactenus erutis horum punctorum affectionibus ſatis concinne reſoluere licebit.

Solutio.

21. Cum poſitio horum quatuor punctorum per eorum diſtantias detur, vocemus:

P 2 GH = f,

$$GH = f,\ FH = g \text{ et } FG = h$$

nouimusque fore $EF = 2g$ et $EH = 3g$, itemque

$$EG = \sqrt{(6gg + 3hh - 2ff)}.$$

Nunc igitur ſtatim habemus has tres aequationes

$$\text{I. } ff = \tfrac{1}{4}R - Q$$

$$\text{II. } gg = \tfrac{1}{4}R - \tfrac{1}{18}P + \tfrac{4}{9}Q + \tfrac{2QQ}{9R}$$

$$\text{III. } hh = \tfrac{1}{36}P - \tfrac{8}{9}Q + \tfrac{6QQ}{9R}$$

ex quarum reſolutione colligimus:

$$R = \frac{4f^4}{3gg + 6hh - 2ff};\ Q = \frac{3ff(ff - gg - 2hh)}{3gg + 6hh - 2ff}$$

$$\text{et } P = \frac{27f^4}{3gg + 6hh - 2ff} - 12ff - 15gg + 6hh$$

vnde fit $\frac{QQ}{R} = \frac{9(ff - gg - 2hh)^2}{4(3gg + 6hh - 2ff)}$.

22. His valoribus inuentis inueſtigentur tres ſequentes expreſſiones:

$$p = \sqrt{P},\ q = \tfrac{1}{4}P + 2Q + \tfrac{QQ}{R},\ \text{et } r = Q\sqrt{P}$$

indeque formetur haec aequatio cubica:

$$z^3 - pzz + qz - r = 0$$

cuius tres radices dabunt tria latera trianguli quaeſiti, quo pacto eius conſtructio facillima habetur.

Exemplum.

23. Sumtis lateribus trianguli $a = 5$, $b = 6$ et $c = 7$, vt ſit area $A = 6\sqrt{6}$, inde colliguntur diſtantiae quaternorum punctorum:

EF²

$EF^2 = \frac{155}{72}$; $EG^2 = \frac{11}{8}$; $EH^2 = \frac{155}{32}$; $FG^2 = \frac{1}{9}$; $FH^2 = \frac{155}{288}$;
$GH^2 = \frac{35}{32}$

vnde ſitus horum punctorum talis prodit vti in fig. 6. repraeſentatur. Cum igitur habeamus: Tab. II. Fig. 6.

$$ff = \tfrac{35}{32};\ gg = \tfrac{155}{288} \text{ et } hh = \tfrac{1}{9}$$

videamus num ſolutio inuenta ad triangulum aſſumtum perducat.

24. Hinc autem fit $3gg + 6hh - 2ff = \frac{3}{32}$, tum vero $ff - gg - 2hh = \frac{1}{3}$; $4ff + 5gg - 2hh = \frac{219}{32}$; colligitur

$$R = \tfrac{1225}{24};\ Q = \tfrac{35}{3};\ P = 324 \text{ et } \tfrac{QQ}{R} = \tfrac{24}{9} = \tfrac{8}{3}$$

vnde nanciſcimur:

$$p = \sqrt{P} = 18;\ q = 107 \text{ et } r = \tfrac{35}{3}.\,18 = 5.6.7 = 210$$

et aequatio cubica hinc oritur:

$$z^3 - 18zz + 107z - 210 = 0$$

cuius tres radices manifeſto ſunt 5, 6, 7 quae ſunt ipſa tria latera trianguli ſatisfacientis.

Caſus quo quatuor puncta in directum ſunt ſita.

25. Hoc ergo caſu cum ſit: Fig. 7.

$FH = g$; $FG = h$; $GH = f$; $EF = 2g$; $EH = 3g$
et $EG = 2g - h$

erit $g = f - h$, vnde facta hac substitutione colligimus:

$$R = \frac{4f^4}{(3h-f)^2};\ Q = \frac{3ffh(2f-3h)}{(f-3h)^2};\ P = \frac{3h(4f-3h)^2}{(f-3h)^2}$$

ideoque $\frac{QQ}{R} = \frac{9hh(2f-3h)^2}{4(f-3h)^2}$.

Ex his vero porro elicimus:

$$p = \frac{(4f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h}$$

$$q = \frac{3fh(4f-3h)(5f-6h)}{(f-3h)^2}$$

$$r = \frac{3ffh(2f-3h)(4f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}{(f-3h)^3}.$$

26. Cum iam radices huius aequationis cubicae:

$$z^3 - pzz + qz - r = 0$$

praebeant tria latera a, b, c trianguli quaesiti, ponamus ad eam concinniorem reddendam

$$z = \frac{y\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h}$$

et prodibit haec aequatio:

$$y^3 - (4f-3h)yy + f(5f-6h)y - ff(2f-3h) = 0$$

cuius radices manifesto sunt

$$f,\ f,\ \text{et}\ 2f-3h.$$

Quocirca trianguli quaesiti, quod sit isosceles, latera erunt:

$$a = b = \frac{f\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h};\ \text{et}\ c = \frac{(2f-3h)\sqrt{3h(4f-3h)}}{f-3h}.$$

27 Hic autem casus per se solutu et facilis, cum recta illa, in qua sunt puncta data triangulum

lum in duas partes ſimiles neceſſario ſecet, ideoque triangulum ſit iſoſceles. Poſito autem ſtatim a principio $b = a$, fit $A = \frac{1}{4}c\sqrt{(4aa-cc)}$ et $AP = AQ = AR = AS = \frac{1}{2}c$, tum vero

$$PE = \frac{c^3}{4A};\ QF = \frac{2A}{3c};\ RG = \frac{2A}{2a+c};\ SH = \frac{c(2aa-cc)}{8A}$$

vnde ob puncta P, Q, R, S coincidentia in baſis puncto medio, quod ſit O, interualla inter haec puncta erunt:

$$OF - OE = \frac{2(aa-cc)}{3\sqrt{(4aa-cc)}};\ OG - OE = \frac{c(a-c)}{\sqrt{(4aa-cc)}};$$
$$OH - OE = \frac{aa-cc}{\sqrt{(4aa-cc)}}$$
$$OF - OG = \frac{(a-c)(2a-c)}{3\sqrt{(4aa-cc)}};\ OH - OF = \frac{aa-cc}{3\sqrt{(4aa-cc)}};$$
$$OH - OG = \frac{a(a-c)}{\sqrt{(4aa-cc)}}.$$

28. Hic duos caſus contemplari conuenit prout fuerit vel $a > c$ vel $a < c$, nam ſi $a = c$, ſeu triangulum aequilaterum, omnia quatuor puncta in vnum coaleſcunt;

I. Si $a > c$ puncta erunt diſpoſita vti fig. 8. refert, vbi eſt $HF = \frac{1}{3}EH$ ſeu $EF = \frac{2}{3}EH$ et $EG < \frac{1}{2}EH$ hocque caſu punctum baſis medium O in recta HE producta vltra E cadit: vt ſit $OE = \frac{cc}{2\sqrt{(4aa-cc)}}$. Tab. II. Fig. 8.

II. Si $a < c$, puncta erunt diſpoſita vti fig. 9. refert, vbi eſt iterum $HF = \frac{1}{3}EH$ ſeu $EF = \frac{2}{3}EH$ at $EG > \frac{1}{2}EH$ Hoc autem caſu punctum baſis medium O in recta EH producta vltra H cadit; vt ſit Fig. 9.

HO

$HO = \frac{2aa - cc}{2\sqrt{(4aa - cc)}}$, vnde ſi $2aa < cc$ punctum O adeo intra H et E cadit.

29. Datis ergo in recta punctis tribus E, G et H, ita vt G intra extrema E et H ſit ſitum; videndum eſt vtrum ſit $EG < \frac{1}{2}EH$ an $EG > \frac{1}{2}EH$.

Tab. II. Fig. 8. Priori caſu quo $EG < \frac{1}{2}EH$ ſolutio ita ſe habet. Sit $EH = 2d$ et $EG = d - e$, hincque reperitur

$$a = b = \frac{(d+e)}{2e}\sqrt{(d+3e)(3d+e)}$$
$$c = \frac{d-e}{2e}\sqrt{(d+3e)(3d+e)}, \text{ et } OE = \frac{(d-e)^2}{4e}.$$

Fig. 9. Poſteriori caſu $EG > \frac{1}{2}EH$ ſolutio erit haec: ſit $EH = 2d$ et $EG = d + e$, hincque colligitur

$$a = b = \frac{d-e}{2e}\sqrt{(d-3e)(3d-e)}; \quad c = \frac{d+e}{2e}\sqrt{(d-3e)(3d-e)}$$

et $OE = \frac{(d+e)^2}{2e}$, vnde patet hunc caſum locum habere non poſſe, ſi d intra limites $3e$ et $\frac{1}{3}e$ contineatur. Cum enim eſſe debet $2a > c$ neceſſe eſt ſit $d > 3e$.

Fig. 5. 30. Ex hoc caſu colligere licet, etiam in genere ſolutionem concinniorem eſſe prodituram, ſi omiſſo puncto F tria puncta E, G et H conſiderentur. Ponamus ergo:

$$EG = e, \; GH = f \text{ et } EH = k$$

eritque $FH = g = \frac{1}{3}k$, $EF = \frac{2}{3}k$ et $FG = h = \sqrt{(\frac{1}{3}ee + \frac{2}{3}ff - \frac{2}{9}kk)}$

hincque adipiſcimur $R = \frac{4f^4}{2ff + 2ee - kk}$, $Q = \frac{ff(kk - ff - 2ee)}{2ee + 2ff - kk}$ et

et $P = \frac{27f^4}{2ee-2ff-kk} + 2ee - 8ff - 3kk = \frac{4e^4+11f^4+3k^4-12eeff+2ffkk-8eekk}{2ee+2ff-kk}$
tum vero $\frac{QQ}{R} = \frac{(kk-ff-2ee)^2}{4(2ee+2ff-kk)}$, vnde fit
$p = \sqrt{P}$, $q = \frac{2e^4+f^4+k^4-6eeff-3eekk+2ffkk}{2ee+2ff-kk}$ et $r = Q\sqrt{P}$
et aequationis $z^3 - pzz + qz - r = 0$ radices dant latera trianguli quaeſiti: quae aequatio poſito $z = y\sqrt{P}$ abit in hanc:

$$y^3 - yy + \frac{(2e^4+f^4+k^4-6eeff+3eekk+2ffkk)y - ff(kk-2ee-ff)}{4e^4+11f^4+3k^4-12eeff-8eekk+2ffkk} = 0.$$

31. Hic autem obſeruo quantitates has datas e, f, k non ſolum ita aſſumi oportere, vt triangulum conſtituant, ſed quoniam latera trianguli quaeſiti a, b, c tanquam poſitiua ſpectari poſſunt, etiam tam P quam Q et R valores poſitiuos recipere debent. Non ſolum ergo eſſe debet $kk < 2ee + 2ff$ ſed etiam $kk > 2ee + ff$, tum vero vt P fiat poſitiuum, neceſſe eſt

ſit $3kk > 4ee + ff + 2\sqrt{(e^4 + 11eeff - 8f^4)}$

qua conditione cum illis collata ſequitur eſſe debere

$$ff > \tfrac{8}{19}ee \text{ et } ff < \frac{11+\sqrt{153}}{16}ee \text{ ſeu } ff < \tfrac{19}{13}ee$$

alioquin problema nullam admitteret ſolutionem.

32. *Exempl.* Sit $ee = ff$ erit $R = \frac{4f^4}{4ff-kk}$; $Q = \frac{ff(kk-3ff)}{4ff-kk}$
et $P = \frac{27f^4}{4ff-kk} - 6ff - 3kk = \frac{3(kk-ff)^2}{4ff-kk}$; atque $\frac{QQ}{R} = \frac{(kk-3ff)^2}{4(4ff-kk)}$
ideoque $p = \frac{(kk-ff)\sqrt{3}}{\sqrt{(4ff-kk)}}$; $q = \frac{k^4-ffkk-3f^4}{4ff-kk}$; et $r = \frac{ff(kk-3ff)(kk-ff)\sqrt{3}}{4(ff-kk)\sqrt{(4ff-kk)}}$

fit iam $ee = ff = 2$ et $kk = 7$; fictque

$$p = 5\sqrt{3}\,;\; q = 23\,,\;\text{et}\; r = 10\sqrt{3}$$

et latera trianguli quaesiti erunt radices huius aequationis cubicae $z^3 - 5zz\sqrt{3} + 23z - 10\sqrt{3} = 0$, quae posito;

$$z = \frac{y}{\sqrt{3}} \text{ abit in } y^3 - 15yy + 69y - 90 = 0$$

cuius vna radix est $y = 6$, vnde binae reliquae sunt

$$y = \frac{9 + \sqrt{21}}{2} \quad \text{et } y = \frac{9 - \sqrt{21}}{2}$$

sicque trianguli quaesiti latera sunt:

$$a = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}\,;\; b = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}\,;\; c = 2\sqrt{3}.$$

33. Verum etiam generalius manente $ee = ff$ quomodocunque accipiatur k, si ponatur $z = \frac{y}{\sqrt{3(4ff-kk)}}$ habetur haec aequatio resoluenda:

$$y^3 - 3(kk - ff)yy + 3(k^4 - ffkk - 3f^4)y$$
$$- 9ff(kk - 3ff)(kk - ff) = 0$$

cui primo satisfacit $y = 3ff$, et duae reliquae radices ex hac aequatione

$$yy - 3(kk - 2ff)y + 3(kk - 3ff)(kk - ff) = 0$$

quae sunt $y = \frac{3(kk - 2ff) \pm k\sqrt{3(4ff - kk)}}{2}$

sicque tria latera trianguli quaesiti fiunt:

$$a = \frac{(kk - 2ff)\sqrt{3}}{2\sqrt{(4ff - kk)}} + \tfrac{1}{2}k$$

$$b = \frac{(kk - 2ff)\sqrt{3}}{2\sqrt{(4ff - kk)}} - \tfrac{1}{2}k$$

$$c = \frac{ff\sqrt{3}}{\sqrt{(4ff - kk)}}.$$

34. Re-

34. Reliquis casibus negotium non tam facile expeditur, quia aequatio cubica factores non admittit. Quod vt exemplo ostendatur sit $ee = 3$, $ff = 2$ et $kk = 9$; vnde trianguli latera sunt radices huius aequationis cubicae $z^3 - zz\sqrt{71} + 22z - 2\sqrt{71} = 0$; ad quam resoluendam quaeratur angulus α, cuius cosinus sit $= + \sqrt{\frac{71}{75}}$, qui erit acutus, quo inuento latera trianguli eruat:

$$a = \tfrac{1}{3}\sqrt{71} + \tfrac{2}{3}\sqrt{5}.\mathrm{cos.}(60^\circ - \tfrac{1}{3}\alpha) \text{ et } c = \tfrac{1}{3}\sqrt{71} - \tfrac{2}{3}\sqrt{5}.\mathrm{cos.}\tfrac{1}{3}\alpha$$

$$b = \tfrac{1}{3}\sqrt{71} + \tfrac{2}{3}\sqrt{5}.\mathrm{cos.}(60^\circ + \tfrac{1}{3}\alpha) \text{ vbi est proxime } \alpha = 11^\circ.\ 32'.\ 13''$$

sicque per anguli trisectionem problema semper satis expedite resoluetur.

OBSERVATIONES ANALYTICAE.

Auctore

L. EVLERO.

Confideranti poteftates, quae ex eleuatione huius formae trinomiae $1+x+xx$ nafcuntur, termini medii maximis coefficientibus numericis deprehenduntur affecti, quorum ordo progreffionis cum non parum fit reconditus, omni attentione dignus videtur; praecipue quoniam huiusmodi fpeculationes plerumque fructum haud fpernendum in Analyfi afferre folent. Primum ergo harum poteftatum fimpliciores confpectui exponam:

Exponens poteftatis	Poteftates euolutae
0	1
1	$1+x+x^2$
2	$1+2x+3x^2+2x^3+x^4$
3	$1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$
4	$1+4x+10x^2+16x^3+19x^4+16x^5+10x^6+4x^7+x^8$
5	$1+5x+15x^2+30x^3+45x^4+51x^5+45x^6+30x^7+15x^8+5x^9+x^{10}$
	etc.

hinc fi termini medii ex fingulis poteftatibus ordine repraefententur, haec exoritur progreffio:

$$1,\ 1x,\ 3x^2,\ 7x^3,\ 19x^4,\ 51x^5,\ 141x^6 \text{ etc.}$$

qui

qui numeri, quanam lege progrediantur, haud immerito indagari videtur, vt non ſolum inde terminus generalis ſeu coefficiens dignitati indefinitae x^n conueniens innoteſcat, ſed etiam inſignes huius ſeriei proprietates explorentur. Hunc in finem ſequentia problemata proponam, quorum reſolutio deinceps ad alias ſpeculationes non parum curioſas manuducet.

Problema 1.

1. Euoluta hac poteſtate indefinita $(1+x+xx)^n$ coefficientem termini medii ſeu dignitatis x^n definire.

Solutio.

Poteſtas propoſita ita ſub forma binomii repraeſentetur $(x(1+x)+1)^n$, quae more ſolito euoluta praebet:

$$x^n(1+x)^n+\tfrac{n}{1}x^{n-1}(1+x)^{n-1}+\tfrac{n(n-1)}{1.\,2}x^{n-2}(1+x)^{n-2}$$
$$+\tfrac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}x^{n-3}(1+x)^{n-3} \text{ etc.}$$

ex cuius ſingulis membris, ſi vlterius euoluantur, terminos formae x^n elici oportet. Ac primum quidem membrum praebet x^n, cum reliquae poteſtates omnes ipſius x ex eius euolutione ortae futurae ſint altiores. Ex ſecundo autem membro pro hac dignitate x^n oritur:

$$\tfrac{n}{1}x^{n-1}.\tfrac{n-1}{1}x=\tfrac{n(n-1)}{1.\,1}x^n$$

ex tertio membro ſimili modo conſequimur:

$$\frac{n(n-1)}{1.\,2}x^{n-2}.\frac{(n-2)(n-3)}{1.\quad 2}x^2 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\quad 1.\ 2}x^n$$

quas cunctas partes ſi in vnam ſummam colligamus obtinetur dignitatis x^n coefficiens quaeſitus:

$$1+\frac{n(n-1)}{1.\ 1}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 1.\ 2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 1.\ 2.\ 3}\ \text{etc.}$$

Coroll. 1.

2. Haec ergo series, quae quoties n eſt numerus integer abrumpitur, coefficientem praebet dignitatis x^n pro ſerie propoſita $1+x+3x^2+7x^3+19x^4+$ etc. ſicque eius ope terminus quantumuis ab initio remotus ſtatim ſine praecedentibus inueniri poteſt.

Coroll. 2.

3. Quod ſi pro n ſucceſſiue numeros 1, 2, 3 etc. ſubſtituamus, ſequentes valores reperiuntur:

n	coefficiens ipſius x^n
0	1
1	1
2	$1+2=3$
3	$1+6=7$
4	$1+12+6=19$
5	$1+20+30=51$
6	$1+30+90+20=141$
7	$1+42+210+140=393$

n | coe-

n	coefficiens ipsius x^n
8	$1+56+420+560+70=1107$
9	$1+72+756+1680+630=3139$
10	$1+90+1260+4200+3150+252=8953$
11	$1+110+1980+9240+11550+2772=25653$
12	$1+132+2970+18480+34650+16632+924=73789$

etc.

Coroll. 3.

4. Series horum numerorum ita eſt comparata, vt quisque terminus cum triplo praecedentis commode conferri poſſe videatur, ex qua comparatione ſequentes differentiae naſcuntur:

$$\begin{array}{l} 1,\ 1,\ 3,\ 7,\ 19,\ 51,\ 141,\ 393,\ 1107,\ 3139 \\ \quad\ \ 3,\ 3,\ 9,\ 21,\ 57,\ 153,\ 423,\ 1179,\ 3321 \\ \hline \quad\ \ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 6,\ 12,\ 30,\ 72,\ 182 \end{array} \text{ etc.}$$

Scholion 1.

Exemplum memorabile inductionis fallacis.

5. Si has differentias accuratius contemplemur, non ſine ratione euenire videtur, quod eae ſint numeri pronici, ſeu trigonales duplicati in forma $mm+m$ contenti, ac ſi ad iſtorum pronicorum numerorum radices ſpectemus, quae hanc ſeriem conſtituunt:

1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 etc.

ea manifeſto eſt recurrens, cuius quisque terminus eſt ſumma binorum praecedentium. Qui ordo cum in in decem primoribus terminis deprehendatur, quis dubitauerit eundem vniuerſae ſeriei tribuere? ſaepe profecto inductiones minus certae ſucceſſu non fuerunt deſtitutae. Operae ergo pretium erit hanc rationem accuratius perpendere, ſcilicet cum numerus 13 conueniat ſeriei termino x^9, in genere dignitati x^n reſpondebit numerus:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

cuius numerus pronicus eſt:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-4} + \frac{1}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-4} - \frac{2}{5}(-1)^{n-2}.$$

Quare ſi in ſerie propoſita bini termini contigui generatim ita exhibeantur:

$$1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 10x^4 \ldots Px^n + Qx^{n+1}$$

erit $3P - Q =$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} + \frac{1}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} - \frac{2}{5}(-1)^{n-1}$$

vnde concluditur fore:

$$P = \frac{3^n + (-1)^n}{10} + \frac{1}{5}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{5}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ita vt ipſa quoque ſeries propoſita foret recurrens ſcala relationis exiſtente:

$$6, -8, -8, 13, 4, -3$$

ſecun-

ſecundum quam erit:

$$3139 = 6.1107 - 8.393 - 8.141 + 14.51 + 4.9 - 3.7.$$

Scholion 2.

6. Verum quantumuis probabili inductione haec lex progreſſionis inniti videatur, dum adeo in decem primoribus terminis locum habet; tamen ea fallax deprehenditur, dum iam in termino vndecimo 8953 fallit; hoc enim a triplo praecedentis 9117 ſublato reſiduum 464 ne numerus quidem pronicus eſt, multo minus radicem pronicam habet $21 = 13 + 8$, eſt enim $21^2 + 21 = 462$, qui numerus binario deficit ab eo 464, qui ſecundum legem obſeruatam reſultare debebat. Quam ob cauſam nunc quidem in veram progreſſionis legem huius ſeriei ſum inquiſiturus, vt pateat quomodo quisque terminus per aliquot praecedentes reuera determinetur.

Problema 2.

7. Pro ſerie propoſita

$$1,\ x,\ 3x^2,\ 7x^3,\ 19x^4,\ 51x^5 \text{ etc.}$$

inueſtigare legem, qua quisque terminus per aliquot praecedentes determinatur.

Solutio.

Conſiderentur generatim aliquot huius ſeriei termini ſe mutuo ſequentes:

$$1,\ x,\ 3x^2,\ 7x^3 \ldots\ldots\ Px^n,\ Qx^{n+1},\ Rx^{n+2}$$

et quoniam in problemate praecedente vidimus esse:

$$P = 1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \text{ etc.}$$

erit simili modo:

$$Q = 1 + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 1} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \text{ etc.}$$

$$R = 1 + \frac{(n+2)(n+1)}{1 \cdot 1} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \text{ etc.}$$

vnde quamlibet a sequente subtrahendo colligimus:

$$Q - P = \frac{2n}{1} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} \text{ etc.}$$

$$R - Q = \frac{2(n+1)}{1} + \frac{2(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{2(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} \text{ etc.}$$

hinc capiamus hanc formam:

$$\frac{n+2}{n+1}(R-Q) = \frac{2(n+2)}{1} + \frac{2(n+2)n(n-1)}{1 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{2(n+2)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} \text{ etc.}$$

a qua illa $Q - P$ subtrahatur vt fiat:

$$\frac{n+2}{n+1}(R-Q) - (Q-P) = 4 + \frac{4n(n-1)}{1 \cdot 1} + \frac{4n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} + \text{ etc.}$$

quae series cum sit $= 4P$, habebimus:

$$R = Q + \frac{(n+1)(Q-P)}{n+2} + \frac{4(n+1)P}{n+2} \text{ seu}$$

$$R = \frac{(2n+3)Q + 3(n+1)P}{n+2}.$$

Coroll. 1.

8. En ergo legem qua quisque seriei terminus per binos praecedentes determinatur, quae ita se habet:

$$R = Q + \frac{n+1}{n+2}(Q + 3P)$$

vnde etiam ex binis sequentibus Q et R praecedens P ita definitur:

$$P = \frac{(n+2)R - (2n+3)Q}{3(n+1)}.$$

Coroll.

Coroll. 2.

9. Quo appareat, quomodo haec lex in ſerie propoſita locum habeat, per caſus aliquot eam illuſtremus:

ſi $n=0$, $3 = 1 + \frac{1}{2}(1 + 3.1)$

ſi $n=1$, $7 = 3 + \frac{2}{3}(3 + 3.1)$

ſi $n=2$, $19 = 7 + \frac{3}{4}(7 + 3.3)$

ſi $n=3$, $51 = 19 + \frac{4}{5}(19 + 3.7)$

ſi $n=4$, $141 = 51 + \frac{5}{6}(51 + 3.19)$

etc.

Coroll. 3.

10. Quoniam igitur in relationem, quae inter ternos terminos contiguos intercedit, ipſe exponens n ingreditur, hinc facile colligitur hanc ſeriem non ad genus recurrentium eſſe referendam.

Coroll. 4.

11. Inter quatuor autem continuos terminos P, Q, R et S relatio ab exponente n libera exhiberi poteſt, cum enim ex ternis prioribus ſit

$n = \frac{2R - 3Q - 3P}{3P + 2Q - R}$

erit ſimili modo $n + 1 = \frac{2S - 3R - 3Q}{3Q + 2R - S}$

vnde concludimus fore

$$S = R + Q + \frac{3P(Q + R) + 2QR}{6P + 3Q - R}$$

quae

quae eſt relatio conſtans, qua per ternos quosque terminos contiguos ſequens definitur.

Scholion 1.

12. Inuenta lege, qua noſtrae progreſſionis quisque terminus a binis praecedentibus pendet, iam multo facilius hanc progreſſionem quousque lubuerit continuare licet. Ita cum dignitates x^{11} et x^{12} affectae ſint numeris 25653 et 73789, ſequentis x^{13} ob $n = 11$ coefficiens erit:

$$73789 + \tfrac{12}{13}(73789 + 3 \cdot 25653) = 212941$$

et dignitatis x^{14}

$$212941 + \tfrac{13}{14}(212941 + 3 \cdot 73789) = 616227$$

vnde noſtra progreſſio ad dignitatem viceſimam vsque continuata ita ſe habebit:

1	
$1x$	$25653x^{11}$
$3x^2$	$73789x^{12}$
$7x^3$	$212941x^{13}$
$19x^4$	$616227x^{14}$
$51x^5$	$1787607x^{15}$
$141x^6$	$5196627x^{16}$
$393x^7$	$15134931x^{17}$
$1107x^8$	$44152809x^{18}$
$3139x^9$	$128996853x^{19}$
$8953x^{10}$	$377379369x^{20}$

circa

circa quos numeros obſeruo nullum eorum eſſe per 5 diuiſibilem, dignitatum vero $x^{3\alpha+2}$ coefficientes eſſe per 3. diuiſibiles, dignitatum $x^{7\alpha+3}$ per 7. neque vero hinc quicquam circa indolem horum numerorum concludere licet. Verum ex lege progreſſionis hic inuenta eius ſummam, ſiquidem in infinitum continuetur, definire poterimus, cui fini ſequens problema deſtinatur.

Scholion 2.

13. Si noſtrae progreſſionis quilibet terminus a triplo antecedentis ſubtrahatur, differentiae talem progreſſionem conſtituunt:

1. 2; 2. 1; 3. 2; 4. 3; 5. 6; 6. 12; 7. 26; 8. 58; 9. 134; 10. 317; 11. 766; 12. 1883; 13. 4698; 14. 11871; 15. 30330; 16. 78249; 17. 203622; 18. 533955

pro qua generatim ſtatuamus:

$$mp;\quad (m+1)q;\quad (m+2)r$$

vbi primum notatu dignum occurrit, quod horum terminorum factores priores in ſerie numerorum naturali progrediantur, poſteriores vero ita ſint comparati, vt quilibet ex binis praecedentibus hoc modo conficiatur:

$$r = \frac{3mp + 2(m+1)q}{m+4}.$$

Problema 3.

14. Si ſeries noſtra

$$1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 19x^4 + \text{etc.}$$

in infinitum continuetur, eius ſummam inueſtigare:

Solutio.

Cum relatio cuiusque termini ad binos antecedentes ſit definita, ſtatuamus:

$s = 1 + x + 3x^2 + \ldots + Px^n + Qx^{n+1} + Rx^{n+2} + \text{etc.}$

vbi notetur eſſe $(n+2)R - (2n+3)Q - 3(n+1)P = 0$ cui conditioni vt ſatisfaciamus, ſumamus differentiale:

$$\frac{ds}{dx} = 1 + 6x + \ldots + nPx^{n-1} + (n+1)Qx^n + (n+2)Rx^{n+1} \text{ etc.}$$

quod multiplicatum per $1 - 2x - 3xx$ praebet:

$$\frac{ds}{dx}(1 - 2x - 3xx) =$$

$$\begin{array}{llllll} 1 + 6x + 21xx & \ldots & + nPx^{n-1} & + (n+1)Qx^n & + (n+2)Rx^{n+1} \\ - 2 - 12 & & & - 2nP & - (2n+2)Q \\ - 3 & & & & - 3nP \end{array}$$

quae ſeries reducitur ad hanc:

$$1 + 4x + 6xx \ldots (Q + 3P)x^{n+1} + \text{etc.}$$

At ipſa ſeries propoſita per $1 + 3x$ multiplicata dat $s(1 + 3x) = 1 + 4x + 6xx \ldots (Q + 3P)x^{n+1}$ vnde manifeſtum eſt fore:

$$\frac{ds}{dx}(1 - 2x - 3xx) = s(1 + 3x) \text{ ideoque}$$

$\frac{ds}{s}$

$\frac{ds}{s} = \frac{dx(1+3x)}{1-2x-3xx}$, cuius integratio praebet

$$s = \frac{1}{\sqrt{(1-2x-3xx)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-3x)}}$$

quae est ipsa summa seriei propositae in infinitum continuatae.

Coroll. 1.

15. Liquet ergo seriei huius summam esse imaginariam nisi sumatur $x < \frac{1}{3}$, casu autem $x = \frac{1}{3}$ fieri infinitam. At ipsi x valores negatiuos tribuendo, puta $x = -y$, summa fit finita sumendo $y < 1$, at casu $y > 1$ imaginaria euadit. Ita statuendo $x = -\frac{1}{2}$ fit

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8} + \frac{19}{16} - \frac{51}{32} + \frac{141}{64} - \text{etc.}$$

Coroll. 2.

16. Nunc ergo nouimus seriem nostram quoque resultare si formula irrationalis $(1-2x-3xx)^{-\frac{1}{2}}$ more solito in seriem euoluatur: quae formula cum ita repraesentari possit $s = ((1-x)^2 - 4xx)^{-\frac{1}{2}}$, prodit:

$$s = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1} \cdot \frac{xx}{(1-x)^3} + \frac{2 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^4}{(1-x)^5} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^6}{(1-x)^7} + \text{etc.}$$

ex cuius vlteriori euolutione oritur:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
s = 1 & +x & +x^2 & +x^3 & +x^4 & +x^5 & +x^6 & +x^7 & +x^8 & +x^9 & +x^{10} \\
 & & +2.1 & +2.3 & +2.6 & +2.10 & +2.15 & +2.21 & +2.28 & +2.36 & +2.45 \\
 & & & & +6.1 & +6.5 & +6.15 & +6.35 & +6.70 & +6.126 & +6.210 \\
 & & & & & & +20.1 & +20.7 & +20.28 & +20.84 & +20.210 \\
 & & & & & & & & +70.1 & +70.9 & +70.45 \\
 & & & & & & & & & & +252.1
\end{array}$$

Coroll.

Coroll. 3.

17 Hinc colligimus in genere dignitatis x^n coefficientem numericum ita expressum iri:

$$+\frac{2}{1}.\frac{n(n-1)}{1.\ 2}+\frac{2.\ 6}{1.\ 2}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}+\text{etc.}$$

quae forma non discrepat ab ea, quam problemate primo inuenimus.

Scholion.

18. Quodsi formam huius summae accuratius perpendamus, haud difficulter inde methodum multo latius patentem elicimus, cuius ope adeo haec potestas generalior $(a+bx+cxx)^n$ ita pertractari poterit, vt non solum termini medii singularum potestatum sed etiam termini a mediis vtrinque aequidistantes assignari queant. Hanc ergo methodum in sequente problemate sum expositurus.

Problema 4.

19. Si trinomii $a+bx+cxx$ singulae potestates euoluantur, indeque tam termini medii, quam a mediis aequidistantes seorsim in series disponantur, singularum harum serierum naturam et summam inuestigare.

Solutio.

Consideretur formula ista $\frac{1}{1-y(a+bx+cxx)}$ quae euoluta praebet:

$$1+y(a+bx+cxx)+yy(a+bx+cxx)^2+y^3(a+bx+cxx)^3\ \text{etc.}$$

vbi

vbi cum trinomii propositi singulae potestates occurrant, a explicatis orietur:

$$1$$
$$y(a + bx + cxx)$$
$$y^2(a^2 + 2abx + 2acx^2 + 2bcx^3 + ccx^4)$$
$$+ bb$$
$$y^3(a^3 + 3a^2bx + 3a^2cx^2 + 6abcx^3 + 3bbcx^4 + 3bccx^5 + c^3x^6)$$
$$+ 3ab^2 + b^3 + 3acc$$
etc.

hinc si primo termini medii, tum vero termini a mediis vtrinque aequidistantes capiantur, nascentur sequentes series:

$$1 + bxy + (2ac + bb)xxyy + (6abc + b^3)x^3y^3 + \text{etc.}$$
$$y(a + cxx)(1 + 2bxy + (3ac + 3bb)xxyy + \text{etc.})$$
$$y^2(a^2 + c^2x^4)(1 + 3bxy + \text{etc.})$$
$$y^3(a^3 + c^3x^6)(1 + 4bxy + \text{etc.})$$
$$y^4(a^4 + c^4x^8)(1 + 5bxy + \text{etc.})$$
etc.

Omissis ergo his multiplicatoribus, quia in seriebus ipsis adsunt potestates producti xy, ponamus $xy = z$ et indicemus istas series hoc modo:

$$1 + bz + (2ac + bb)zz + (6abc + b^3)z^3 = P$$
$$1 + 2bz + (3ac + 3bb)zz + \text{etc.} = Q$$
$$1 + 3bz + \text{etc.} = R$$
$$1 + 4bz + \text{etc.} = S$$
etc.

 ita

ita vt iam ob $y = \frac{z}{x}$, habeamus:

$$\frac{1}{1 - bz - z(\frac{a}{x} + cx)} = P + z(\frac{a}{x} + cx)Q + zz(\frac{aa}{xx} + ccxx)R$$
$$+ z^3(\frac{a^3}{x^3} + c^3x^3)S + \text{etc.}$$

multiplicetur vtrinque per $1 - bz - z(\frac{a}{x} + cx)$, et quoniam quantitates P, Q, R etc. a ſola z pendent, omnia membra ſecundum poteſtates ipſius x tam poſitiua quam negatiua diſponantur: quo facto obtinebimus:

$$\begin{array}{llll} 1 = P(1-bz) & + Qz(1-bz)cx & + Rzz(1-bz)c^2x^2 & + Sz^3(1-bz)c^3x^3 \\ -2Qaczz & -Pz.cx & -Qzz.ccx^2 & -Rz^3c^3x^3 \\ & -Rz^3.accx & -Sz^4.ac^3x^2 & -Tz^5ac^4x^3 \\ & + Qz(1-bz)\frac{a}{x} & + Rzz(1-bz)\frac{a^2}{x^2} & + Sz^3(1-bz)\frac{a^3}{x^3} \\ & -Pz.\frac{a}{x} & -Qzz.\frac{aa}{xx} & -Rz^3.\frac{a^3}{x^3} \\ & -Rz^3ac.\frac{a}{x} & -Sz^4ac.\frac{aa}{xx} & -Tz^5ac.\frac{a^3}{x^3} \end{array}$$

vbi euidens eſt poteſtates negatiuas ipſius x iisdem conditionibus ad nihilum redigi ac poſitiuas. Hinc ergo ſequentes determinationes adipiſcimur:

$$Q = \frac{P(1-bz)-1}{2aczz}$$
$$R = \frac{Q(1-bz)-P}{aczz}$$
$$S = \frac{R(1-bz)-Q}{aczz}$$
$$T = \frac{S(1-bz)-R}{aczz}$$
etc.

Vide-

Videmus ergo quantitates P, Q, R, S etc. secundum seriem recurrentem progredi, cuius scala relationis est:

$$\frac{1-bz}{aczz}; \quad -\frac{1}{aczz}$$

hinc si illis quantitatibus indices tribuantur:

$$\overset{0}{P}, \overset{1}{Q}, \overset{2}{R}, \overset{3}{S} \ldots\ldots \overset{n}{Z}$$

ita vt Z sit ea, quae indici n conuenit, ex natura recurrentiae erit:

$$Z = A\left(\frac{1-bz-\surd((1-bz)^2-4aczz)}{2aczz}\right)^n + B\left(\frac{1-bz+\surd((1-bz)^2-4aczz)}{2aczz}\right)^n$$

vbi cum constet quantitatem Z eiusmodi serie exprimi, vt sit:

$$Z = 1 + (n+1)bz + \ldots zz + \ldots z^3 + \ldots z^4 \text{ etc.}$$

vnde manifestum est necessario esse debere $B = 0$, quia alioquin termini ex posteriori membro orientur potestatibus negatiuis ipsius z affecti. Facto ergo $B = 0$, erit:

$$Z = A\left(\frac{1-bz-\surd(1-2bz+(bb-4ac)zz)}{2aczz}\right)^n$$

Iam fiat $n = 0$, ac necesse est prodire $A = P$, posito autem $n = 1$, effici debet:

$$A. \frac{1-bz-\surd(1-2bz+(bb-4ac)zz)}{2aczz} = Q.$$

Cum igitur sit $A = P$ et $2aczzQ + 1 = P(1-bz)$ sequitur fore:

$$P(1-bz)-P\surd(1-2bz+(bb-4ac)zz) = P(1-bz)-1$$

 ideoque

ideoque $P = \frac{1}{\sqrt{(1-2bz+(bb-4ac)zz)}}$.

Quocirca feriei noftrae P, Q, R, S . . . Z terminus generalis eft:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{(1-2bz+(bb-4ac)zz)}}\left(\frac{1-bz-\sqrt{(1-2bz+(bb-4ac)zz)}}{2aczz}\right)^n.$$

Pofito ergo $y=1$ vt fit $x=z$, fi omnes poteftates trinomii $a+bz+czz$ euoluantur, feries terminorum intermediorum $1+bz+(2ac+bb)zz$ etc. erit $=P$

terminorum autem a mediis, n locis in antecedentia remotorum fumma eft $=a^nZ$, totidem vero locis in confequentia remotorum fumma $=c^nz^nZ$. At omnium harum ferierum iunctim fumtarum fumma eft $= \frac{1}{1-a-bz-czz}$.

Coroll. 1.

20 Quantitates ergo P, Q, R, S etc. progreffionem geometricam conftituunt, cuius primus terminus eft $P = \frac{1}{\sqrt{(1-2bz+(bb-4ac)zz)}}$, et denominator progreffionis:

$$\frac{1-bz-\sqrt{(1-2bz+(bb-4ac)zz)}}{2aczz}.$$

Coroll. 2.

21. Si fumamus $a=1$, $b=1$ et $c=1$, prodit cafus ante tractatus quo poteftates trinomii

$1+z$

$1+z+zz$ conſiderauimus, quarum termini medii ſeriem conſtituunt, cuius ſumma eſt $=\frac{1}{\sqrt{(1-2z-3zz)}}$, vti ſupra inuenimus.

Problema 5.

22. Formulam in praecedente problemate inventam:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2bz+(bb-4ac)zz)}}\left(\frac{1-bz-\sqrt{(1-2bz+(bb-4ac)zz)}}{2aczz}\right)^n$$

in ſeriem conuertere, cuius termini ſecundum dignitates ipſius z procedant.

Solutio.

Sit breuitatis gratia $bb-4ac=e$, ac ponatur

$$s=\frac{1}{\sqrt{(1-2bz+ezz)}}\left(\frac{1-bz-\sqrt{(1-2bz+ezz)}}{2aczz}\right)^n$$

quam relationem inter z et s per differentiationem ab irrationalitate liberari oportet. Hunc in finem ſtatuatur:

$\frac{1-bz-\sqrt{(1-2bz+ezz)}}{2aczz}=v$ vt ſit $acvvzz-(1-bz)v+1=0$

vnde differentiando fit:

$$dv(2acvzz-1+bz)+vdz(2acvz+b)=0 \text{ ſeu}$$

$$dv\sqrt{(1-2bz+ezz)}=\frac{vdz}{z}(1-\sqrt{(1-2bz+ezz)})$$

ideoque $\frac{dv}{v}=\frac{dz}{z\sqrt{(1-2bz+ezz)}}-\frac{dz}{z}$.

Hinc illa aequatione logarithmice differentiata prodit

$$\frac{ds}{s}=\frac{dz(b-ez)}{1-2bz+ezz}-\frac{ndz}{z}+\frac{ndz}{z\sqrt{(1-2bz+ezz)}}.$$

Ponamus tantisper $\frac{dt}{t} = \frac{ds}{s} + \frac{ndz}{z} - \frac{dz(b-ez)}{1-2bz+ezz}$, vt sit $\frac{dt}{t} = \frac{ndz}{z\sqrt{(1-2bz+ezz)}}$, vnde quadrata sumendo colligimus: $zzdt^2(1-2bz+ezz) = nn\mathrm{H}dz^2$, quae aequatio denuo differentiata posito elemento dz constante dat:

$$zzddt(1-2bz+ezz) + zdtdz(1-3bz+2ezz) = nntdz^2$$

seu $\frac{ddt}{t} + \frac{dz(1-3bz+2ezz)}{z(1-2bz+ezz)} \cdot \frac{dt}{t} - \frac{nndz^2}{zz(1-2bz+ezz)} = 0.$

Iam cum sit $\frac{ddt}{t} = d.\frac{dt}{t} + \frac{dt^2}{tt}$ erit

$$\frac{ddt}{t} = \frac{dds}{s} - \frac{ds^2}{ss} - \frac{ndz^2}{zz} + \frac{dz^2(e-2bb+2bez-eezz)}{(1-2bz+ezz)^2} + \frac{nndz^2}{zz} - \frac{2ndz^2(b-ez)}{z(1-2bz+ezz)}$$
$$+ \frac{ds^2}{ss} + \frac{2ndzds}{sz} - \frac{2dzds(b-ez)}{s(1-2bz+ezz)} + \frac{dz^2(bb-2bez+eezz)}{(1-2bz+ezz)^2}.$$

Facta ergo substitutione superior aequatio in hanc abit formam:

$$\frac{dds}{s} + \frac{2ndz}{z}\cdot\frac{ds}{s} - \frac{2dz(b-ez)}{1-2bz+ezz}\cdot\frac{ds}{s} + \frac{n(n-1)dz^2}{zz} - \frac{2ndz^2(b-ez)}{z(1-2bz+ezz)} + \frac{dz^2(e-bb)}{(1-2bz+ezz)^2}$$
$$+ \frac{dz(1-3bz+2ezz)}{z(1-2bz+ezz)}\cdot\frac{ds}{s} + \frac{ndz^2(1-3bz+2ezz)}{zz(1-2bz+ezz)} - \frac{dz^2(b-(e+3bb)z+5bezz-2eez^3)}{z(1-2bz+ezz)^2}$$
$$- \frac{nndz^2}{zz(1-2bz+ezz)} = 0$$

vbi si termini per $(1-2bz+ezz)^2$ diuisi in vnam summam colligantur, fractio per $1-2bz+ezz$ deprimi poterit, vnde facta reductione adipiscimur:

$$\frac{dds}{s} + \frac{2ndz}{z}\cdot\frac{ds}{s} + \frac{dz(1-5bz+4ezz)}{z(1-2bz+ezz)}\cdot\frac{ds}{s} - \frac{nndz^2(2b-ez)}{z(1-2bz+ezz)} - \frac{3ndz^2(b-ez)}{z(1-2bz+ezz)}$$
$$- \frac{dz^2(b-2ez)}{z(1-2bz+ezz)} = 0$$

quae ordinata euadit:

$$zdds(1-2bz+ezz) + dzds(2n+1-(4n+5)bz+2(n+2)ezz)$$
$$-sdz^2((n+1)(2n+1)b-(n+1)(n+2)zz) = 0.$$

Cum

Cum nunc conſtet poſito $z=0$ fieri $s=1$, fingamus hanc ſeriem :

$$s=1+Az+Bzz+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\text{etc.}$$

qua ſerie ſubſtituta ſequens forma ad nihilum eſt redigenda :

$$\begin{array}{lllll}
 & 2Bz+6Czz & +12Dz^3 & +20Ez^4 & \\
 & \quad -4Bb & -12Cb & -24Db & \\
 & & +2Be & +6Ce & \\
(2n+1)A & +2(2n+1)B & +3(2n+1)C & +4(2n+1)D & +5(2n+1)E \\
 & -(4n+5)A & -2(4n+5)Bb & -3(4n+5)Cb & -4(4n+5)Db \\
 & & +2(n+2)Ae & +4(n+2)Be & +6(n+2)Ce \\
-(n+1)(2n+1)b & -(n+1)(2n+1)Ab & -(n+1)(2n+1)Bb & -(n+1)(2n+1)Cb & -(n+1)(2n+1)De \\
 & +(n+1)(n+2)e & +(n+1)(n+2)Ae & +(n+1)(n+2)Be & +(n+1)(n+2)Ce
\end{array}$$

vnde colligimus has determinationes :

$$A=(n+1)b$$

$$B=\frac{(n+2)((2n+3)Ab-(n+1)e)}{2(2n+2)}$$

$$C=\frac{(n+3)((2n+5)Bb-(n+2)Ae)}{3(2n+3)}$$

$$D=\frac{(n+1)((2n+7)Cb-(n+3)Be)}{4(2n+4)}$$

$$E=\frac{(n+5)((2n+9)Db-(n+4)Ce)}{5(2n+5)}$$

etc

vbi notetur eſſe $e=bb-4ac$. Sicque ſeriei quaeſitae ſinguli termini per binos praecedentes determinantur.

DE

DE MOTV RECTILINEO
TRIVM CORPORVM SE MVTVO ATTRAHENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Sint A, B, C massae trium corporum eorumque distantiae a puncto fixo O ad datum tempus t ponantur

$$OA = x, \quad OB = y \quad \text{et} \quad OC = z$$

vbiquidem sumitur $y > x$ et $z > y$. Hinc motus principia praebent has tres aequationes:

$$\text{I.} \quad \frac{ddx}{ds^2} = \frac{B}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-x)^2};$$

$$\text{II.} \quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{-A}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-y)^2}$$

$$\text{III.} \quad \frac{ddz}{dt^2} = \frac{-A}{(z-x)^2} - \frac{B}{(z-y)^2}$$

vnde facile deducuntur binae aequationes integrabiles: prior $A dx + B dy + C dz = E dt$ et $Ax + By + Cz = Et + F$ posterior $\frac{A dx^2 + B dy^2 + C dz^2}{dt^2} = G + \frac{2AB}{y-x} + \frac{2AC}{z-x} + \frac{2BC}{z-y}$. Hinc autem ob defectum tertiae aequationis integralis parum ad motus cognitionem concludere licet.

2. Sta-

2. Statuamus $x = y - p$ et $z = y + q$, vt p et q ſint quantitates poſitiuae: et prima integralis praebet:

$$(A+B+C)y - Ap + Cq = Et + F \text{ ideoque}$$

$$y = \frac{Ap - Cq + Et + F}{A+B+C}; \quad dy = \frac{A\,dp - C\,dq + E\,dt}{A+B+C}$$

$$x = \frac{-(B+C)p - Cq + Et + F}{A+B+C}; \quad dx = \frac{-(B+C)\,dp - C\,dq + E\,dt}{A+B+C}$$

$$z = \frac{Ap + (A+B)q + Et + F}{A+B+C}; \quad dz = \frac{A\,dp + (A+B)\,dq + E\,dt}{A+B+C}.$$

Hinc integralis ſecunda hanc induit formam:

$$\frac{A(B+C)dp^2 + C(A+B)dq^2 + 2AC\,dp\,dq + EE\,dt^2}{(A+B+C)\,dt^2} = G + \frac{2AB}{p} + \frac{2AC}{p+q} + \frac{2BC}{q}$$

3. Faciamus vero easdem ſubſtitutiones in primis aequationibus differentio-differentialibus, quae iam ad duas reuocabantur:

$$\frac{-(B+C)\,ddp - C\,ddq}{(A+B+C)\,dt^2} = \frac{B}{pp} + \frac{C}{(p+q)^2}$$

$$\frac{A\,ddp + (A+B)\,ddq}{(A+B+C)\,dt^2} = \frac{-A}{(p+q)^2} - \frac{B}{qq}$$

vnde colligitur: $\frac{ddp + ddq}{dt^2} = \frac{-A-C}{(p+q)^2} - \frac{B}{pp} - \frac{B}{qq}$.

Deinde vtrumque elementum ddp et ddq ſeorſim ita exprimitur:

$$1^\circ.\ \frac{ddp}{dt^2} = \frac{-A-B}{pp} - \frac{C}{(p+q)^2} + \frac{C}{qq}$$

$$2^\circ.\ \frac{ddq}{dt^2} = \frac{A}{pp} - \frac{A}{(p+q)^2} - \frac{B-C}{qq}$$

vnde oritur vna aequatio integralis ad hanc formam perducta:

$$\frac{B(A\,dp^2 + C\,dq^2) + AC(dp+dq)^2}{(A+B+C)\,dt^2} = G + \frac{2AB}{p} + \frac{2AC}{p+q} + \frac{2BC}{q}$$

quandoquidem in G poſtremus ille terminus EE comprehenditur.

 4. Cum

4. Cum igitur ſolutio ſit perducta ad duas aequationes differentio-differentiales inter p, q et t; inſigne lucrum obtineri eſt cenſendum, ſi has aequationes ad duas alias primi tantum gradus differentiales reuocare liceret. Hoc autem ſingulari artificio ſequentem in modum praeſtari poſſe comperi. Statuo $q = pu$, et binae aequationes differentio-differentiales ita repraeſententur:

$$d.\frac{dp}{dt} = \frac{dt}{pp}\left(-A - B - \frac{C}{(u+1)^2} + \frac{C}{uu}\right)$$
$$d.\frac{udp + pdu}{dt} = \frac{dt}{pp}\left(A - \frac{A}{(u+1)^2} - \frac{B - C}{uu}\right).$$

Iam artificium in hac ſubſtitutione conſiſtit, vt ponam $\frac{dp}{dt} = \frac{r}{\surd p}$ et $\frac{dq}{dt} = \frac{udp + pdu}{dt} = \frac{s}{\surd p}$; mox enim patebit his ſubſtitutionibus binas variabiles p et t ex calculo elidi poſſe ita vt tantum hae tres r, s et u relinquantur, per prima differentialia determinandae. Statim vero aequatio illa integralis ſupra inuenta adeo ad formam finitam redit hanc $\frac{B(Arr + Css) + AC(r+s)^2}{A + B + C} = Gp + 2AB + \frac{2AC}{u+1} + \frac{2BC}{u}$ quae inſignem vſum afferre poterit.

5. Cum ſit $\frac{dp}{dt} = \frac{r}{\surd p}$ erit $dt = \frac{dp\surd p}{r}$, vnde noſtrae aequationes differentio-differentiales praebent:

$$\frac{dr}{\surd p} - \frac{rdp}{2p\surd p} = \frac{dp}{pr\surd p}\left(-A - B - \frac{C}{(u+1)^2} + \frac{C}{uu}\right)$$
$$\frac{ds}{\surd p} - \frac{sdp}{2p\surd p} = \frac{dp}{pr\surd p}\left(A - \frac{A}{(u+1)^2} - \frac{B - C}{uu}\right)$$

vnde fit:

$$dr = \frac{rdp}{2p} + \frac{dp}{pr}\left(-A - B - \frac{C}{(u+1)^2} + \frac{C}{uu}\right)$$
$$ds = \frac{sdp}{2p} + \frac{dp}{pr}\left(A - \frac{C}{(u+1)^2} - \frac{B - C}{uu}\right).$$

Praeterea

Praeterea vero habebitur:

$$udp + pdu = \frac{sdt}{\sqrt{p}} = \frac{sdp}{r}$$

sicque fit $\frac{dp}{p} = \frac{rdu}{s - ru}$, quo valore ibi substituto fit

$$dr(s-ru) = \tfrac{1}{2}rrdu + du\left(-A - B - \frac{C}{(u+1)^2} + \frac{C}{uu}\right)$$

$$ds(s-ru) = \tfrac{1}{2}rsdu + du\left(A - \frac{A}{(u+1)^2} - \frac{B-C}{uu}\right)$$

ex quarum combinatione nascitur:

$$\tfrac{1}{2}r(rds - sdr) + ds\left(-A - B - \frac{C}{(u+1)^2} + \frac{C}{uu}\right)$$
$$-dr\left(A - \frac{A}{(u+1)^2} - \frac{B-C}{uu}\right) = 0.$$

6. En ergo duas aequationes simpliciter differentiales inter ternas variabiles r, s et u, vnae si liceret r et s per u determinare, haberetur solutio problematis completa. Inde enim primo innotesceret quantitas p ex formula $\frac{dp}{p} = \frac{rdu}{s-ru}$ hincque porro $q = pu$. Deinde vero tempus t daretur ex aequatione $dt = \frac{dp\sqrt{p}}{r} = \frac{pdu\sqrt{p}}{s-ru}$; Ex quibus tandem pro dato tempore t colligerentur distantiae x, y, z ex formulis §. 2 datis.

7. Cum binae aequationes differentiales inuentae sint:

$$dr(s-ru) = \tfrac{1}{2}rrdu + du\left(-A - B\frac{C}{(u+1)^2} + \frac{C}{uu}\right)$$

$$ds(s-ru) = \tfrac{1}{2}rsdu + du\left(A - \frac{A}{(u+1)^2} - \frac{B-C}{uu}\right).$$

statim patet ambabus satisfieri sumendo quantitatem u constantem et $s - ru = 0$, vnde solutio obtinetur

 parti-

Solutio particularis. Sit ergo $u = \alpha$ et $s = \alpha r$, et aequatio ex combinatione nata praebet:

$$-(A+B)\alpha - \frac{C\alpha}{(\alpha+1)^2} + \frac{C}{\alpha} = A - \frac{A}{(\alpha+1)^2} - \frac{B-C}{\alpha\alpha} \text{ vel}$$

$$0 = A\left(\alpha + 1 - \frac{1}{(\alpha+1)^2}\right) + B\left(\alpha - \frac{1}{\alpha\alpha}\right) + C\left(\frac{\alpha}{(\alpha+1)^2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha\alpha}\right)$$

$$\text{seu } 0 = \frac{A((\alpha+1)^3 - 1)}{(\alpha+1)^2} + \frac{B(\alpha^3-1)}{\alpha\alpha} + \frac{C(\alpha^3 - (\alpha+1)^3)}{\alpha\alpha(\alpha+1)^2}$$

ideoque

$$C(1 + 3\alpha + 3\alpha\alpha) = A\alpha^3(\alpha\alpha + 3\alpha + 3) + B(\alpha+1)^2(\alpha^3 - 1).$$

Quare quantitatem α ex hac aequatione quinti gradus definiri oportet:

$$(A+B)\alpha^5 + (3A+2B)\alpha^4 + (3A+B)\alpha^3 - (B+3C)\alpha^2$$
$$-(2B+3)\alpha - B - C = 0.$$

Deinde vero relatio inter r et p ex hac aequatione est definienda:

$$dr = \frac{r\,dp}{2p} + \frac{dp}{pr}\left(-A - B - \frac{C}{(\alpha+1)^2} + \frac{C}{\alpha\alpha}\right)$$

seu posito $A + B + \frac{C}{(\alpha+1)^2} - \frac{C}{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}D$ ex hac

$$2\,dr = \frac{dp}{p}\left(r - \frac{D}{r}\right) \text{ seu } \frac{dp}{p} = \frac{2r\,dr}{rr - D} \text{ ita vt sit}$$

$$p = \mathfrak{C}(rr - D), \text{ tum vero } q = \alpha\beta(rr-D) \text{ et } dt = \frac{dp\sqrt{p}}{r}$$

seu $dt = 2\mathfrak{C}\,dr\sqrt{\mathfrak{C}(rr-D)}$ hinc

$$t = \mathfrak{C}r\sqrt{\mathfrak{C}(rr-D)} - \mathfrak{C}^2 D \int \frac{dr}{\sqrt{\mathfrak{C}(rr-D)}}.$$

8. Casus hic particularis, quo solutio succedit euolutionem diligentiorem meretur. Primum ergo obseruo ex aequatione illa quinti gradus pro α semper valorem realem positiuum, eumque vnicum elici, cum vnica signorum variatio occurrat, neque igitur

igitur hic vlla ambiguitas locum habet, ſed valor ipſius α tanquam determinatus ſpectari poteſt, pendens a maſſis trium corporum A, B, C. Inuento autem numero α colligitur quantitas $D = 2(A+B) - \frac{2C(2\alpha+1)}{\alpha\alpha(\alpha+1)^2}$, vbi animaduerto quantitatem D nunquam euaneſcere poſſe. Si enim eſſet $D = 0$ foret $B = \frac{C(2\alpha+1)}{\alpha\alpha(\alpha+1)^2} - A$ quo valore ſubſtituto prodiret:

$$C(1+3\alpha+3\alpha\alpha) = A\alpha^3(\alpha\alpha+3\alpha+3) + \frac{C(2\alpha+1)(\alpha^3-1)}{\alpha\alpha} - A(\alpha+1)^2(\alpha^3-1)$$

ſeu $\frac{C}{\alpha\alpha}(\alpha^4+2\alpha^3+\alpha\alpha+2\alpha+1) = A(\alpha^4+2\alpha^3+\alpha\alpha+2\alpha+1)$

ideoque $C = A\alpha\alpha$ et $B = \frac{A(2\alpha+1)}{(\alpha+1)^2} - A = \frac{-A\alpha\alpha}{(\alpha+1)^2}$

foretque adeo maſſa B negatiua, quod eſt abſurdum. Multo minus quantitas D vnquam fieri poteſt negatiua. Poſito enim:

$$B = \frac{C(2\alpha+1)}{\alpha\alpha(\alpha+1)^2} - A - \Delta, \text{ proueniret}$$

$$\frac{C}{\alpha\alpha} = A - \frac{\Delta(\alpha+1)^2(\alpha^3-1)}{\alpha^4+2\alpha^3+\alpha^2+2\alpha+1} \text{ hincque}$$

$$B = \frac{C(2\alpha+1)}{\alpha\alpha(\alpha+1)^2} - \frac{C}{\alpha\alpha} - \frac{\Delta(\alpha^5+3\alpha^4+3\alpha^3)}{\alpha^4+2\alpha^3+\alpha\alpha+2\alpha+1}$$

ſeu B multo magis eſſet quantitas negatiua, cum valor ipſius α neceſſario ſit poſitiuus.

9. Cum ergo D neceſſario ſit quantitas poſitiua, ponatur $D = aa$, ſi etiam numerus α ſpectetur vt datus, maſſae trium corporum ita ſe habebunt, vt ſit:

$$\mathfrak{B} = \frac{\alpha^3(\alpha\alpha + 3\alpha + 3)aa}{2(\alpha^4 + 2\alpha^3 + \alpha\alpha + 2\alpha + 1)} - \frac{C}{[\alpha+1]^2} \text{ et}$$

$$A = \frac{C}{\alpha\alpha} - \frac{(\alpha+1)^2(\alpha^3-1)aa}{2(\alpha^4 + 2\alpha^3 + \alpha\alpha + 2\alpha + 1)}$$

ex quo necesse est vt quantitas $\frac{2C(\alpha^4 + 2\alpha^3 + \alpha\alpha + 2\alpha + 1)}{\alpha\alpha(\alpha+1)^2 aa}$ intra hos limites $(\alpha+1)^3 - 1$ et $\alpha^3 - 1$ contineatur. Introducta ergo quantitate aa cum numero α in calculum, duo casus sunt perpendendi, prout $\mathfrak{C}$ fuerit quantitas positiua vel negatiua, quos seorsim euoluamus.

Casus I. 10. Sit primo $\mathfrak{C} = + nn$, erit $p = nn(rr - aa)$ et $q = \alpha nn(rr - aa)$, vnde cum constantes, E et F nihilo aequales statuere liceat, loca trium corporum A, B, C, quorum iam centrum grauitatis in O existit, ita per r definiuntur, vt sit:

$$x = OA = \frac{-nn(rr-aa)}{A+B+C}(B + C + C\alpha)$$
$$y = OB = \frac{nn(rr-aa)}{A+B+C}(A - C\alpha)$$
$$z = OC = \frac{nn(rr-aa)}{A+B+C}(A + (A+B)\alpha).$$

At relatio inter r et tempus t ita se habet:

$$t = n^3 r\sqrt{(rr-aa)} - n^3 aa \int \frac{dr}{\sqrt{(rr-aa)}} \text{ seu}$$
$$t = n^3 r\sqrt{(rr-aa)} - n^3 aa\, l\frac{r+\sqrt{(rr-aa)}}{\Delta}.$$

sumta constante $\Delta = a$, tempore $t = 0$, erat $r = a$, tumque omnia corpora in centro grauitatis erant coniuncta, vnde quasi celeritatibus infinitis erant explosa, vt eae fuerint inter se vt quantitates $-B - C - C\alpha$, $A - C\alpha$, $A + (A+B)\alpha$ tum vero labente tempore t quantitas r continuo magis increscit; quouis

quouis autem tempore celeritas cuiusque corporis ex formula $\frac{dt}{dr} = 2n^3\sqrt{(rr-aa)}$ innotescit. Notandum autem distantias corporum perpetuo inter se eandem proportionem conseruare.

11. Sit nunc $\mathfrak{C} = -nn$ erit $p = nn(aa-rr)$ et $q = \alpha nn(aa-rr)$ et per r loca corporum vt ante ita determinantur, vt sit: Casus II.

$$x = \mathrm{OA} = \frac{-nn(aa-rr)}{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}(\mathrm{B}+(1+\alpha)\mathrm{C})$$
$$y = \mathrm{OB} = \frac{nn(aa-rr)}{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}(\mathrm{A}-\mathrm{C}\alpha)$$
$$z = \mathrm{OC} = \frac{nn(aa-rr)}{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}(\mathrm{A}(\alpha+1)+\mathrm{B}\alpha).$$

Pro tempore autem t obtinetur, $dt = 2n^3 dr\sqrt{(aa-rr)}$ seu $t = n^3 r\sqrt{(aa-rr)} + n^3 aa\int\frac{dr}{\sqrt{(aa-rr)}}$ hinc $t = n^3 r\sqrt{(aa-rr)} + n^3 aa\,\mathrm{Ang.\,fin.}\frac{r}{a}$.
Quodsi ergo ponatur $\mathrm{Ang.\,fin.}\frac{r}{a} = \Phi$, vt sit $r = a\,\mathrm{fin.}\,\Phi$ erit $t = n^3 aa(\Phi + \mathrm{fin.}\,\Phi\,\mathrm{cof.}\,\Phi)$, et distantiae inter se proportionales ad quoduis tempus sunt vt $\mathrm{cof.}\,\Phi^2$. Vnde si initio quo $t = 0$ fuerit $\Phi = 0$, sicque $r = 0$, et $\frac{dt}{dr} = 2n^3 a$, erant tum distantiae:

$$x = \frac{-nnaa}{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}(\mathrm{B}+(1+\alpha)\mathrm{C})$$
$$y = \frac{nnaa}{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}(\mathrm{A}-\mathrm{C}\alpha)$$
$$z = \frac{nnaa}{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}(\mathrm{A}(\alpha+1)+\mathrm{B}\alpha)$$

ibique corpora in quiete. Sumto autem $\Phi = 90°$, seu elapso tempore $t = n^3 aa.\,90°$, corpora in centro grauitatis conueniunt celeritate infinita.

DE

DE
MOTV CORPORIS
AD DVO CENTRA VIRIVM FIXA ATTRACTI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quaeſtionem hic tractare aggredior, quae ab omnibus, qui adhuc in determinatione motuum a viribus centripetis genitorum operam ſuam conſumſerunt, fruſtra tentata vires adeo Analyſeos ſuperare videbatur. Quanquam enim ſummo *Neutono* motus corporum ad vnicum virium centrum attractorum felici ſucceſſu eſt definitus, quippe quem in ſectione conica fieri demonſtrauit, ſi vis centripeta rationem duplicatam inuerſam diſtantiarum ſequatur, tamen ſtatim atque haec quaeſtio ad duo virium centra extenditur, nulla via patere eſt viſa ad ſolutionem perueniendi. Ad formulas quidem analyticas quaeſtio facile deducitur, quae cum differentialia ſecundi gradus inuoluant, primo per integrationem ad differentialia primi gradus eſt aſcendendum, quod negotium iam inſignibus difficultatibus implicatur; atque his etiam ſuperatis, tum demum

demum quantitatum variabilium multitudo et complicatio vix vllam ſpem ad earum ſeparationem pertingendi relinquit, vnde lineam curuam a corpore deſcriptam aſſignare liceret.

2. Cum autem ſemper cuiusquam problematis, quod a ſummis ingeniis fruſtra eſt tentatum, ſolutio maximi eſt momenti, tum vero haec quaeſtio ad eam Analyſcos partem pertinet, ex qua ſola nunc quidem omnia Aſtronomiae incrementa ſunt expectanda; quam ob cauſam, ſolutionem iſtius quaeſtionis eo confidentius iactare non dubito, quod ad eam nonniſi grauiſſimis impedimentis remotis tandem mihi quidem penetrare contigerit. Minime etiam eſt dubitandum, quin artificia analytica, quibus in hoc negotio ſum vſus, ad enodationem aliorum problematum huius generis, plurimum lucis ſint allatura.

3. Conſidero igitur duo centra virium, quorum vtrumque attrahat in ratione duplicata diſtantiae reciproca, quandoquidem aliae virium attrahentium hypotheſes omni vſu deſtituuntur: ac ſi corpus quodpiam initio vtcunque fuerit proiectum, eius motum ſecuturum viamque in qua incedet, inueſtigare conſtitui. Hic quidem primum obſeruo ſi motus directio ſemel fuerit cum binis virium centris in eodem plano, vniuerſum motum, in eodem plano abſolutum iri. Atque hunc caſum iam

 aliquot

aliquot ab hinc annis ita expediui, vt non solum pro curua a corpore descripta constructionem ope quadraturae curuae satis simplicis exhibuerim, verum etiam innumerabiles casus elicuerim, quibus haec curua adeo algebraica euadat. Nunc igitur vt huic quaestioni plene satisfaciam, inuestigationem meam quoque ad eos casus extendam, quibus corporis motus non in eodem plano cum binis centris virium absoluitur; vbi quidem nouae eaeque maximae difficultates successui aduersantur, quas superari oportet.

Status Quaestionis.

Tab. III. Fig. 1. 4. Sint igitur A et B centra virium, seu duo corpora in his punctis fixa, quae attrahant in ratione reciproca duplicata distantiarum secundum massas, quae iisdem litteris A et B denotentur; Statuaturque distantia $AB = a$.

Tum vero vtcunque aliud quoddam corpus initio fuerit proiectum, id nunc quidem elapso tempore $= \tau$ versetur in Z vnde ad planum quodpiam fixum per puncta A et B ductum demittatur perpendiculum ZY, ductaque ex Y ad rectam AB normali YX, vocentur lineae:

$$ZY = z;\ YX = y;\ AX = x;\ BX = t$$

ita vt sit $t + x = a$, ideoque $dt + dx = 0$.

Ad motus igitur cognitionem requiritur, vt ad quoduis tempus hae quantitates determinari queant.

5. Vocentur porro distantiae $AZ = v$ et $BZ = u$ vt sit $vv = xx + yy + zz$ et $uu = tt + yy + zz$. Iam quia corpus Z vrgetur ad centra virium A et B viribus $\frac{A}{vv}$ et $\frac{B}{uu}$; hinc motus principia sequentes suppeditant formulas differentio-differentiales sumto temporis elemento $d\tau$ constante:

$$\text{I. } \frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{Ax}{v^3} + \frac{Bt}{u^3} \text{ seu } \frac{ddt}{d\tau^2} = +\frac{Ax}{v^3} - \frac{Bt}{u^3}$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{Ay}{v^3} - \frac{By}{u^3} \text{ et}$$

$$\text{III. } \frac{ddz}{d\tau^2} = -\frac{Az}{v^3} - \frac{Bz}{u^3},$$

ex quibus tribus aequationibus omnia motus phaenomena sunt deducenda. Nihil autem inde concludere licet nisi ante omnia totidem aequationes differentiales primi gradus inde per integrationem eliciantur.

Inuestigatio aequationum differentialium primi gradus motum corporis quaesitum determinantium.

6. Ex aequationibus quidem II et III statim vna aequatio differentialis primi gradus obtinetur; illa enim per z haec vero per y multiplicata, differentia dat:

$\frac{yddz - zddy}{d\tau^2} = 0$, vnde colligitur $d\tau = \alpha(ydz - zdy)$, ex qua difcimus, fi motus corporis in planum ad rectam AB normale proiiciatur, areas in hoc plano circa punctum quo a recta AB traiicitur defcriptas effe tempori proportionales; quod quidem ex prima indole motuum a viribus centripetis oriundorum per fe eft manifeftum.

7. Alia etiam aequatio integralis haud difficulter eruitur multiplicando aequationem I per $dx = -dt$; II per dy, et III per dz; tum enim his aequationibus in vnam fummam collectis, ob

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv \quad \text{et} \quad t\,dt + y\,dy + z\,dz = u\,du$$

habebimus hanc aequationem:

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz}{d\tau^2} = \frac{-A\,dv}{vv} - \frac{B\,du}{uu}$$

quae integrata praebet:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,d\tau^2} = \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}$$

ita vt iam duas aequationes differentiales primi gradus fimus adepti; tertia autem qua adhuc indigemus, maiorem fagacitatem poftulat.

8. Ex prima, quatenus duplici forma exhibetur, et fecunda geminas aequationes elicimus iftas:

$$\frac{x\,ddy - y\,ddx}{d\tau^2} = \frac{-By(x+t)}{u^3} = \frac{-Bay}{u^3} \quad \text{et}$$

$$\frac{t\,ddy - y\,ddt}{d\tau^2} = \frac{-Ay(x+t)}{v^3} = \frac{-Aay}{v^3}$$

fimili

ſimili modo prima aequatio cum tertia combinata ſequentes nobis ſuppeditat:

$$\frac{x\,ddz - z\,ddx}{d\tau^2} = \frac{-Bz(x+t)}{u^3} = \frac{-Baz}{u^3}$$

$$\frac{t\,ddz - z\,ddt}{d\tau^2} = \frac{-Az(x+t)}{v^3} = \frac{-Aaz}{v^3}$$

vnde quidem parum lucri redundare videtur. Has autem quatuor aequationes ſequenti modo repraeſentari plurimum intererit:

$$\text{I.}\ \frac{d.(xdy - ydx)}{d\tau^2} = \frac{-Bay}{u^3};\quad \text{III.}\ \frac{d.(xdz - zdx)}{d\tau^2} = \frac{-Baz}{u^3}$$

$$\text{II.}\ \frac{d.(tdy - ydt)}{d\tau^2} = \frac{-Aay}{v^3};\quad \text{IV.}\ \frac{d.(tdz - zdt)}{d\tau^2} = \frac{-Aaz}{v^3}.$$

9. Ex harum prima et ſecunda formemus aequationem iſtam:

$$\frac{(tdy-ydt)d.(xdy-ydx)}{d\tau^2} + \frac{(xdy-ydx)d.(tdy-ydt)}{d\tau^2} = \frac{-Aay(xdy-ydx)}{v^3} - \frac{Bay(tdy-ydt)}{u^3}$$

ſimilique modo ex tertia et quarta hanc:

$$\frac{(tdz-zdt)d.(xdz-zdx)}{d\tau^2} + \frac{(xdz-zdx)d.(tdz-zdt)}{d\tau^2} = \frac{-Aaz(xdz-zdx)}{v^3} - \frac{Baz(tdz-zdt)}{u^3}$$

vbi prius membrum vtriusque aequationis eſt integrabile, ibi ſcilicet integrale eſt $= \frac{(xdy-ydx)(tdy-ydt)}{d\tau^2}$, hic vero $= \frac{(xdz-zdx)(tdy-ydt)}{d\tau^2}$; poſteriora vero membra in neutra integrationem admittunt At vero hic commode vſu venit, vt ambo poſteriora membra in vnam ſummam collecta integrationem admittant.

10. Cum enim ſit:

$$d.\frac{x}{v} = d.\frac{x}{\sqrt{(xx+yy+zz)}} = \frac{y(ydx - xdy) + z(zdx - xdz)}{v^3}\ \text{et}$$

$$d.\frac{t}{u} = d.\frac{s}{\sqrt{(tt+yy+zz)}} = \frac{y(ydt - tdy) + z(zdt - tdz)}{u^3}$$

 euidens

euidens eſt, illorum poſteriorum membrorum iunctim ſumtorum integrale fore $= \frac{A\alpha x}{v} + \frac{B\alpha t}{u} +$ Conſt. Quocirca hinc ſequentem aequationem integratam nanciſcimur:

$$\frac{(xdy - ydx)(tdy - ydt) + (xdz - zdx)(tdz - zdt)}{d\tau^2} = \frac{A\alpha x}{v} + \frac{B\alpha t}{u} + D\alpha.$$

11. En ergo tres aequationes differentiales primi gradus, quibus motus corporis quaeſitus continetur, ſcilicet:

I. $d\tau = \alpha(ydz - zdy)$

II. $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2d\tau^2} = \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}$

III. $\frac{(xdy - ydx)(tdy - ydt) + (xdz - zdx)(tdz - zdt)}{d\tau^2} = \alpha\left(\frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D\right)$

in quas tres nouae conſtantes arbitrariae ſunt ingreſſae. Hinc autem iam facile tempus τ exterminatur, quo facto via a corpore deſcripta binis ſequentibus aequationibus determinatur:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\alpha\alpha(ydz - zdy)^2} = \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}$$

$$\frac{(xdy - ydx)(tdy - ydt) + (xdz - zdx)(tdz - zdt)}{\alpha\alpha(ydz - zdy)^2} = \alpha\left(\frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D\right)$$

ad quarum reſolutionem totum negotium eſt perductum.

12. In his aequationibus ternae adhuc inſunt variabiles x, y et z, dum reliquae t, v et u per eas dantur; quae autem tantopere ſunt inter ſe permixtae, vt nulla methodus eas reſoluendi tentari queat. Omnino autem neceſſe eſt, vt vna variabili eliſa, ex his binis aequationibus vna eliciatur

duas

duas tantum variabiles inuoluens; ad hoc autem vtique idonea transformatio requiritur, cum ſatis ſit perſpicuum nullam harum trium x, y, z eliminari poſſe, praeter quam quod nulla foret ratio, cur vna potius quam reliquae ad hoc eligeretur.

Reductio aequationum inuentarum ad vnicam binas tantum variabiles continentem.

13. Ad hunc ſcopum perueniemus, ſi loco veriabilium y et z in calculum introducamus rectam ZX a puncto Z ad rectam AB normaliter ductam vna cum angulo ZXY, quem haec recta cum plano aſſumto ABY facit. Sit ergo

recta $ZX = w$ et angulus $ZXY = \Phi$

erit $z = w \,\text{ſin.}\, \Phi$ et $y = w \,\text{coſ.}\, \Phi$, tum ob $yy + zz = ww$ habebitur $v = \sqrt{(xx + ww)}$ et $u = \sqrt{(tt + ww)}$.

Porro vero ob $dz = dw \,\text{ſin.}\, \Phi + w d\Phi \,\text{coſ.}\, \Phi$ et $dy = dw \,\text{coſ.}\, \Phi - w d\Phi \,\text{ſin.}\, \Phi$ hinc colligimus $y dz - z dy = ww d\Phi$, ita vt iam prodeat elementum temporis $d\tau = a ww d\Phi$.

14. Deinde vero cum ſit $dy^2 + dz^2 = dw^2 + ww d\Phi^2$, prior aequatio induit hanc formam:

$$\frac{dx^2 + dw^2 + ww d\Phi^2}{2 aa w^4 d\Phi^2} = \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}.$$

Pro altera vero aequatione euoluatur primo numerator membri antecedentis, et quia fit:

$(x dy$

$$(xdy - ydx)(tdy - ydt) = txdy^2 - xydtdy - tydxdy + yydtdx$$
$$(xdz - zdx)(tdz - zdt) = txdz^2 - xzdtdz - tzdxdz + zzdtdx$$

ob $dy^2 + dz^2 = dw^2 + wwd\Phi^2$; $ydy + zdz = wdw$ et $yy + zz = ww$ erit hic numerator

$$tx(dw^2 + wwd\Phi^2) - (xdt + tdx)wdw + wwdtdx$$

ex quo altera aequatio transformabitur in hanc:

$$\frac{txdw^2 + txwwd\Phi^2 - (xdt + tdx)wdw + wwdtdx}{\alpha\alpha w^4 d\Phi^2} = a\left(\frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D\right).$$

15. Iam ex binis hisce aequationibus facile eliminatur elementum $d\Phi^2$, ſiquidem hac ſubſtitutione id ſumus lucrati vt ipſe angulus Φ exceſſerit. Prior autem aequatio dat:

$$d\Phi^2 = (dx^2 + dw^2) : \left(2\alpha\alpha w^4\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - ww\right)$$

poſterior vero:

$$d\Phi^2 = \frac{(txdw^2 - (xdt + tdx)wdw + wwdtdx)}{\alpha\alpha a w^4\left(\frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D\right) - txww}$$

vbi pro analogia obſeruanda notetur ob $dt = -dx$ eſſe $dx^2 = -dtdx$. His igitur valoribus inter ſe aequatis reſultabit aequatio binas tantum variabiles x ſeu t et w inuoluens.

16. Ad calculum contrahendum ſtatuamus:

$$\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} = \frac{P}{a} \quad \text{et} \quad \frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D = Q$$

atque reperimus:

$$(-dxdt + dw^2)(\alpha\alpha a Qww - tx) =$$
$$(txdw^2 - (xdt + tdx)wdw + wwdtdx)\left(\frac{2\alpha\alpha}{a}Pww - 1\right)$$

vnde

vnde euoluendo concludimus:

$$dt\,dx\left(\tfrac{2\alpha\alpha}{a}Pw^4+\alpha\alpha a Q ww-tx-ww\right)$$
$$-(x\,dt+t\,dx)w\,dw\left(\tfrac{2\alpha\alpha}{a}Pww-1\right)$$
$$+ww\,dw^2\left(\tfrac{2\alpha\alpha}{a}Ptx-\alpha\alpha a Q\right)=0$$

quae aequatio adhuc ingentibus difficultatibus laborat cum ob variabilium confusam permixtionem, tum vero ob valores irrationales quantitatum v et u.

Transformatio aequationis modo inuentae.

17. Cum introductio angulorum saepenumero calculos mirifice contrahere soleat, idem hic faciamus, vocemusque angulos:

$BAZ=\eta$ et $ABZ=\theta$, eritque hinc

$AX=x=w\cot.\eta$ et $BX=t=w\cot.\theta$

vnde ob $x+t=a$ deducimus statim:

$$w=\frac{a}{\cot.\eta+\cot.\theta}=\frac{a\sin.\eta\sin.\theta}{\sin.(\eta+\theta)}$$ et differentiando

$$dw=a\left(\frac{d\eta}{\sin.\eta^2}+\frac{d\theta}{\sin.\theta^2}\right):(\cot.\eta+\cot.\theta)^2=\frac{a(d\eta\sin.\theta^2+d\theta\sin.\eta^2)}{\sin.(\eta+\theta)^2}$$

Deinde oritur $x=\frac{a\cot.\eta}{\cot.\eta+\cot.\theta}=\frac{a\cos.\eta\sin.\theta}{\sin(\eta+\theta)}$ hincque

$$dx=a\left(\frac{d\theta\cot.\eta}{\sin.\theta^2}-\frac{d\eta\cot.\theta}{\sin.\eta^2}\right):(\cot.\eta+\cot.\theta)^2=\frac{a(d\theta\sin.\eta\cos.\eta-d\eta\sin.\theta\cos.\theta)}{\sin(\eta+\theta)^2}$$

et $dx^2+dw^2=\frac{aa(d\eta^2\sin.\theta^2+d\theta^2\sin.\eta^2-2\,d\eta\,d\theta\sin.\eta\sin.\theta\cos.(\eta+\theta))}{\sin.(\eta+\theta)^4}$

pro priore valore ipsius $d\Phi^2$.

18. Pro altero valore notetur esse numeratorem:

$(t\,dw-w\,dt)(x\,dw-w\,dx)$

cuius valor facillime elicitur ex formulis:

$$\frac{t}{w} = \cot.\theta \quad \text{et} \quad \frac{x}{w} = \cot.\eta \quad \text{vnde fit}$$

$$\frac{t\,dw - w\,dt}{ww} = \frac{d\theta}{\sin.\theta^2} \quad \text{et} \quad \frac{x\,dw - w\,dx}{ww} = \frac{d\eta}{\sin.\eta^2}$$

ſicque numerator ille fit:

$$\frac{w^4\,d\eta\,d\theta}{\sin.\eta^2 \sin.\theta^2} = \frac{a^4\,d\eta\,d\theta \sin.\eta^2 \sin.\theta^2}{\sin.(\eta+\theta)^4}.$$

Porro autem eſt $v = \frac{w}{\sin.\eta} = \frac{a\sin.\theta}{\sin.(\eta+\theta)}$ et $u = \frac{a\sin.\eta}{\sin.(\eta+\theta)}$.

Ergo $\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} = \frac{A\sin.(\eta+\theta)}{a\sin.\theta} + \frac{B\sin.(\eta+\theta)}{a\sin.\eta} + \frac{C}{a}$.

et $\frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D = A\cos.\eta + B\cos.\theta + D$.

19. Sit inſuper $\alpha\alpha = \frac{m}{a}$, eritque pro priore valore ipſius $d\Phi^2$ denominator $= 2maa\left(\frac{A\sin.(\eta+\theta)}{\sin.\theta} + \frac{B\sin.(\eta+\theta)}{\sin.\eta} + C\right)\frac{\sin.\eta^4 \sin.\theta^4}{\sin.(\eta+\theta)^4} - \frac{aa\sin.\eta^2\sin.\theta^2}{\sin.(\eta+\theta)^2}$

et pro poſteriori $= m(A\cos.\eta + B\cos.\theta + D)\frac{a^4\sin.\eta^4\sin.\theta^4}{\sin.(\eta+\theta)^4} - \frac{a^4\sin.\eta^3\sin.\theta^3\cos.\eta\cos.\theta}{\sin.(\eta+\theta)^4}$.

Quocirca ambo valores ita ſe habebunt:

$$d\Phi^2 = \frac{d\eta^2\sin.\theta^2 + d\theta^2\sin.\eta^2 - 2\,d\eta\,d\theta\sin.\eta\cos.\theta\cos.(\eta+\theta)}{2m\sin.\eta^3\sin.\theta^3(A\sin.\eta\sin.(\eta+\theta) + B\sin.\theta\sin.(\eta+\theta) + C\sin.\eta\sin.\theta) - \sin.\eta^2\sin.\theta^2\sin.(\eta+\theta)^2}$$

$$d\Phi^2 = \frac{d\eta\,d\theta}{m\sin.\eta^2\sin.\theta^2(A\cos.\eta + B\cos.\theta + D) - \sin.\eta\sin.\theta\cos.\eta\cos.\theta}.$$

His binis valoribus coaequatis, aequatio oritur primo quidem ſatis intricata, quae autem notis angulorum proprietatibus in ſubſidium vocatis, ad ſequentem formam reducitur:

$$d\eta^2\sin.\theta^2 + d\theta^2\sin.\eta^2 = \frac{d\eta\,d\theta\sin.\eta\sin.\theta(2m(A\cos.\theta + B\cos.\eta + C\sin.\eta\sin.\theta + D\cos.(\eta+\theta)) - \cos.\eta^2 - \cos.\theta^2)}{m\sin.\eta\sin.\theta(A\cos.\eta + B\cos.\theta + D) - \cos.\eta\cos.\theta}$$

20. Parum equidem hac ſubſtitutione profeciſſe videor, cum in hac aequatione non ſolum binae varia-

variabiles η et θ maxime ſint inter ſe permixtae, ſed etiam adhuc neceſſe ſit per radicis extractionem ipſam differentialium $d\eta$ et $d\theta$ rationem elicere, quo quidem ad formulam irrationalem maxime intricatam peruenitur. Quo minus ergo reſolutio huius aequationis ſperanda videtur, eo magis mirari oportet ſequentem ſubſtitutionem, cuius beneficio adeo ad aequationem, in qua variabiles admittunt ſeparationem deducimur.

Conſtructio huius aequationis per ſeparationem variabilium.

21. Singulari prorſus ſubſtitutione inopinato hunc ſcopum ſum aſſecutus, poſui enim tang. $\frac{1}{2}\eta = \sqrt{pq}$ et tang. $\frac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, vnde ſequentes promanant determinationes:

$$\text{ſin.}\,\eta = \frac{2\sqrt{pq}}{1+pq};\quad \text{coſ.}\,\eta = \frac{1-pq}{1+pq};\quad \text{ſin.}\,\theta = \frac{2\sqrt{pq}}{p+q};\quad \text{coſ}\,\theta = \frac{q-p}{p+q}$$

$$\text{ſin.}(\eta+\theta) = \frac{2(1-p)(1+q)\sqrt{pq}}{(p+q)(1+pq)};\quad \text{coſ.}(\eta+\theta) = \frac{(q-p)(1-pq)-4pq}{(p+q)(1+pq)}$$

$$x = \frac{a(1-pq)}{(1-p)(1+q)};\quad t = \frac{a(q-p)}{(1-p)(1+q)};\quad w = \frac{2a\sqrt{pq}}{(1-p)(1+q)};$$

$$v = \frac{a(1+pq)}{(1-p)(1+q)};\quad u = \frac{a(p+q)}{(1-p)(1+q)},$$

hincque differentiando elicimus:

$$d\eta = \frac{pdq+qdp}{(1+pq)\sqrt{pq}};\quad d\theta = \frac{qdp-pdq}{(p+q)\sqrt{pq}}$$

$$d\eta\,\text{ſin.}\,\theta = \frac{2(pdq+qdp)}{(p+q)(1+pq)};\quad d\theta\,\text{ſin}\,\eta = \frac{2(qdp-pdq)}{(p+q)(1+pq)}$$

$$d\eta^2\,\text{ſin.}\,\theta^2 + d\theta^2\,\text{ſin.}\,\eta^2 = \frac{8(qqdp^2+ppdq^2)}{(p+q)^2(1+pq)^2};\quad d\eta\,d\theta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta = \frac{4(qqdp-ppdq^2)}{(p-q)^2(1+pq)^2}.$$

 22. Si

22. Si iam has expreſſiones in binis pro $d\Phi^2$ inuentis valoribus ſubſtituamus, reperiemus:

$$\text{I. } d\Phi^2 = \frac{(p+q)(1+pq)}{4ppqq} \cdot \frac{qdp^2(1+q)^2 + pdq^2(1-p)^2}{8mpq\left(\frac{A(1-p)(1+q)}{1+pq} + \frac{B(1-p)(1+q)}{p+q} + C\right) - (1-p)^2(1+q)^2}$$

$$\text{II. } d\Phi^2 = \frac{(p+q)(1+pq)}{4ppqq} \cdot \frac{qqdp^2 - ppdq^2}{4mpq\left(\frac{A(1-pq)}{1+pq} + \frac{B(q-p)}{p+q} + D\right) - (q-p)(1-pq)}$$

quibus inuicem coaequatis per operoſos admodum ac taedioſos calculos tandem adipiſcimur hanc aequationem:

$$dp^2(4m(B-A)q(1-qq) + 8mCqq - 4mDq(1+q)^2 - (1-qq)^2) = dq^2(4m(A+B)p(1-pp) + 8mCpp + 4mDp(1-p)^2 - (1-pp)^2)$$

in qua ambae variabiles p et q manifeſto a ſe inuicem ſeparari poſſunt.

23. Cum autem huc per tantas ambages peruenerim, dubium eſt nullum, quin via planior eodem perueniendo pateat, quam quidem ſine hac preuia euolutione vix ſuſpicari licuiſſet. Nunc autem cum ſubſtitutiones hic in vſum vocatae praebeant $v+u = \frac{a(1+p)}{1-p}$ et $v-u = \frac{a(1-q)}{1+q}$, facile colligitur, ſi $v+u$ et $v-u$ pro binis nouis variabilibus introducantur, inde tandem aequationem, in qua variabiles a ſe inuicem ſint ſeparatae, reſultare debere. Cum igitur pulchrius ſit vnica ſubſtitutione hunc ſcopum attingere, iam totum negotium ſequenti modo ſum expediturus.

Metho-

Methodus ſuccinctior ad aequationem ſeparabilem perueniendi.

24. Poſito igitur ſtatim $\alpha\alpha = \frac{m}{a}$, et introducendo rectam $ZX = w$ cum angulo $YXZ = \Phi$, vt ſit $y = w \operatorname{coſ}.\Phi$ et $z = w \operatorname{ſin}.\Phi$, habemus primo elementum temporis $d\tau = wwd\Phi\sqrt{\frac{m}{a}}$; et aequationes reſoluendae erunt:

I. $dx^2 + dw^2 + wwd\Phi^2 = \frac{2m}{aa} w^4 d\Phi^2 (\frac{Aa}{v} + \frac{Ba}{u} + C)$

II. $(xdw \cdot wdx)(tdw \cdot wdt) + txwwd\Phi^2 = mw^4 d\Phi^2 (\frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D)$

Nunc ergo ſequenti ſubſtitutione vtamur:

$$v = \tfrac{1}{2}a(r+s) \quad \text{et} \quad u = \tfrac{1}{2}a(r-s)$$

vt ſit $v + u = ar$ et $v - u = as$

indeque colligimus:

$$x = \frac{aa + vv - uu}{2a} = \tfrac{1}{2}a(1+rs) \text{ et } t = \tfrac{1}{2}a(1-rs)$$

atque $w = \sqrt{(vv - xx)} = \frac{1}{2}a\sqrt{(rr-1)(1-ss)}$.

25. Differentialibus ergo ſumendis reperimus:

$$dx = \tfrac{1}{2}a(rds + sdr); \quad dt = -\tfrac{1}{2}a(rds + sdr)$$

atque $dw = \frac{a(rdr(1-ss) - sds(rr-1))}{2\sqrt{(rr-1)(1-ss)}}$.

vnde fit:

$$dx^2 + dw^2 = \frac{aa(rr-ss)(dr^2(1-ss) + ds^2(rr-1))}{4(rr-1)(1-ss)}$$

ſeu $\frac{dx^2 + dw^2}{ww} = \frac{(rr-ss)(dr^2(1-ss) + ds^2(rr-1))}{(rr-1)^2(1-ss)^2}$.

Tum vero:

$$x\,dw - w\,dx = \frac{aa(r+s)(dr(1-ss) - ds(rr-1))}{4\sqrt{(rr-1)(1-ss)}}$$

$$t\,dw - w\,dt = \frac{aa(r-s)(dr(1-ss) + ds(rr-1))}{4\sqrt{(rr-1)(1-ss)}} \quad \text{hincque}$$

$$\frac{(x\,dw - w\,dx)(t\,dw - w\,dt)}{ww} = \frac{aa(rr-ss)(dr^2(1-ss)^2 - ds^2(rr-1)^2)}{4(rr-1)^2(1-ss)^2}.$$

26. His valoribus ſubſtitutis noſtrae aequationes in ſequentes transformabuntur:

$$\text{I.}\quad \frac{(rr-ss)(dr^2(1-ss)+ds^2(rr-1))}{(rr-1)^2(1-ss)^2} + d\Phi^2 = \frac{2m}{aa}w^2\,d\Phi^2\left(\frac{2A}{r+s} + \frac{2B}{r-s} + C\right)$$

$$\text{II.}\quad \frac{aa(rr-ss)(dr^2(1-ss)^2 - ds^2(rr-1)^2)}{4(rr-1)^2(1-ss)^2} + \tfrac{1}{4}aa(1-rrss)\,d\Phi^2 = m w^2\,d\Phi^2\left(\frac{A(1+rs)}{r+s} + \frac{B(1-rs)}{r-s} + D\right)$$

ſeu vtramque adhuc per $ww = \frac{1}{4}aa(rr-1)(1-ss)$ diuidendo:

$$\text{I.}\quad \frac{2(rr-ss)(dr^2(1-ss)+ds^2(rr-1))}{(rr-1)^3(1-ss)^3} = m\,d\Phi^2\left(\frac{2A}{r+s} + \frac{2B}{r-s} + C\right) - \frac{2\,d\Phi^2}{(rr-1)(1-ss)}$$

$$\text{II.}\quad \frac{(rr-ss)(dr^2(1-ss)^2 - ds^2(rr-1)^2)}{(rr-1)^3(1-ss)^3} = m\,d\Phi^2\left(\frac{A(1+rs)}{r+s} + \frac{B(1-rs)}{r-s} + D\right) - \frac{(1-rrss)\,d\Phi^2}{(rr-1)(1-ss)}.$$

27. Hinc iam vtriusque differentialis dr et ds ratio ad $d\Phi$ definiri poteſt; ſcilicet

haec combinatio I. $(rr-1)$ + II. 2 dat

$$\frac{2(rr-ss)^2(1-ss)dr^2}{(rr-1)^3(1-ss)^3} = m\,d\Phi^2(2Ar + 2Br + C(n-1) + 2D) - \frac{2rr\,d\Phi^2}{rr-1}$$

haec vero I. $(1-ss)$ + II. 2 dat

$$\frac{2(rr-ss)^2(rr-1)ds^2}{(rr-1)^3(1-ss)^3} = m\,d\Phi^2(-2As + 2Bs + C(1-ss) - 2D) - \frac{2ss\,d\Phi^2}{1-ss}.$$

Nunc illam per hanc diuidendo efficitur:

$$\frac{(1-ss)dr^2}{(rr-1)ds^2} = \frac{2m(B+A)r + mC(rr-1) + 2mD - \frac{2rr}{rr-1}}{2m(B-A)s + mC(1-ss) - 2mD - \frac{2ss}{1-ss}}$$

Conſe-

Consequenter aequatio separata ita erit comparata:

$$\frac{dr}{\surd(m(rr-1)(2(B+A)r+C(rr-1)+2D)-2rr)}=\frac{ds}{\surd(m(1-ss)(2(B-A)s+C(1-ss)-2D)-2ss)}$$

vnde per quadraturas relatio inter binas variabiles r et s definiri potest.

28. Statuamus breuitatis gratia:

$$\surd(m(rr-1)((B+A)r+\tfrac{1}{2}C(rr-1)+D)-rr)=R$$
$$\surd(m(1-ss)((B-A)s+\tfrac{1}{2}C(1-ss)-D)-ss)=S$$

vt aequatio nostra separata sit; $\frac{dr}{R}=\frac{ds}{S}$,

et binae praecedentes aequationes fient:

$$\frac{(rr-ss)^2dr}{(rr-1)^2(1-ss)^2}=RRd\Phi^2 \text{ seu } d\Phi=\frac{(rr-ss)dr}{(rr-1)(1-ss)R}$$
$$\frac{(rr-ss)^2ds^2}{(rr-1)^2(1-ss)^2}=SSd\Phi^2 \text{ seu } d\Phi=\frac{(rr-ss)ds}{(rr-1)(1-ss)S}$$

hincque elementum temporis ob

$$\alpha ww=\tfrac{1}{4}a\surd am.(rr-1)(1-ss)$$

ita exprimetur:

$$d\tau=\tfrac{1}{4}a\surd ma.\frac{(rr-ss)dr}{R} \text{ vel } d\tau=\tfrac{1}{4}a\surd ma.\frac{(rr-ss)ds}{S}.$$

29. Vt etiam angulus Φ per formulas simpliciter integrales exhiberi possit, binarum formularum differentialium pro $d\Phi$ inuentarum prior multiplicetur per $\frac{1-ss}{rr-ss}$ posterior vero per $\frac{rr-1}{rr-ss}$, et productorum summa dabit:

$$d\Phi=\frac{dr}{(rr-1)R}+\frac{ds}{(1-ss)S} \text{ ideoque } \Phi=\int\frac{dr}{(rr-1)R}+\int\frac{ds}{(1-ss)S}$$

simili modo ob $\frac{dr}{R}=\frac{ds}{S}$ pro tempore fiet:

$$d\tau=\frac{a\surd ma}{4}\left(\frac{rrdr}{R}-\frac{ssds}{S}\right) \text{ ideoque } \tau=\frac{a\surd ma}{4}\left(\int\frac{rrdr}{R}-\int\frac{ssds}{S}\right)$$

quae

quae eſt problematis ſolutio aequae ſimplex ac perfecta, cum hinc ad quoduis tempus τ ex conſtructa aequatione $\int \frac{dr}{R} = \int \frac{ds}{S}$ non ſolum vtraque variabilis r et s, indeque diſtantiae v et u ſed etiam angulus Φ aſſignari poſſint.

30. Eo maiore autem haec ſolutio attentione digna eſt, quod non ſolum motum corporis in eodem plano, quem caſum equidem iam ante aliquot annos euolui, complectatur, ſed etiam ad omnes plane motus, qui quidem in corpus pro motus ipſi initio impreſſi ratione cadere poſſunt extendatur. Quare quo vis huius ſolutionis clarius perſpiciatur, primo quidem eam ad caſum, quo motus corporis in eodem plano abſoluitur, in quo bina virium centra ſunt ſita, accommodabo; vbi ſimul inſignia quaedam huius motus phaenomena annotabo, dum fieri poteſt, vt corpus adeo in ſectione conica, circa bina virium centra tanquam focos deſcripta moveatur, de quo quidem caſu non dubito, quin iam ab aliis ſit obſeruatus. Deinde vero imprimis docebo ſimile phaenomenon etiam in motu non ad idem planum relato, contingere poſſe, vt corpus in ſuperficie ſphaeroidis elliptici vel conoidis hyperbolici circumferatur.

I. Caſus,

I. Caſus, quo corpus in eodem plano motum ſuum peragit.

31. Eiusmodi ſcilicet hic planum intelligitur, in quo ſimul ambo virium centra A et B ſint ſita. Cum igitur angulus Φ ſit conſtans, ideoque nihilo aequalis aſſumi poſſit, vt motus in ipſo tabulae plano fieri concipiatur, ſitque perpendiculum ZY $= z = 0$; ob $d\Phi = 0$ neceſſe eſt vt tam R quam S fiat quantitas infinita. Ne autem ſimul temporis elementum $d\tau$ euaneſcat, manifeſtum eſt quantitatem m infinitam ſtatui debere. Si enim altera conſtantium C et D infinita ſumeretur, celeritas corporis fieret infinite magna, quem caſum vtique hinc excludi conuenit.

32. Hunc ergo caſum adipiſcimur ponendo $m = \infty$ tum vero poſito ad abbreuiandum:

$$\sqrt{(rr-1)}((B+A)r+\tfrac{1}{2}C(rr-1)+D) = P$$

$$\sqrt{(1-ss)}((B-A)s+\tfrac{1}{2}C(1-ss)-D) = Q$$

erit aequatio noſtra principalis $\int\frac{dr}{P} = \int\frac{ds}{Q}$, qua natura curuae a corpore deſcriptae determinatur, et quae non diſcrepat ab ea, quam iam pridem inueneram. Pro ipſo autem motu cognoſcendo prodit haec temporis determinatio; $\tau = \frac{a\sqrt{a}}{4}\left(\int\frac{rrdr}{P} - \int\frac{ssds}{Q}\right)$: quam quidem formulam tum temporis per plures ambages eram conſecutus. Ibi quidem innumerabiles casus, quibus curua adeo fit algebraica, assignavi, quibus hic idcirco non immoror, verum hic casus multo simpliciores expendam, quibus corpus adeo vel in ellipsi vel hyperbola promouetur.

De motu corporis in ellipsi.

33. Cum pertigerimus ad hanc aequationem $\frac{dr}{P} = \frac{ds}{Q}$ seu $Qdr - Pds = 0$, euidens est huic aequationi satisfieri si sit r eiusmodi quantitas constans, quae simul reddat $P = 0$. Cum autem P binas constantes arbitrarias C et D contineat, pro lubitu ipsi r valor constans puta $r = n$ tribui potest, indeque statui oportet:

$$(nn-1)((B+A)n+\tfrac{1}{2}C(nn-1)+D)=0$$

vnde constans D ita definitur, vt sit:

$$D=-(B+A)n-\tfrac{1}{2}C(nn-1)$$

altera autem C adhuc indeterminata manere videtur, cum tamen hoc casu, quo curua per aequationem $r = n$ seu $v + u = na$ determinatur, etiam in motu nihil indeterminati relinqui possit.

34. Iam dudum autem obseruaui, huiusmodi aequatione differentiali $Qdr - Mds(r-n)^{\lambda} = 0$, proposita, valorem $r = n$ minime pro integrale haberi posse, nisi exponens λ sit vnitati aequalis vel ea maior. Quare vt nostro casu valor $r = n$ locum habeat, non sufficit vt formula

$(rr-1)$

$$(rr-1)((B+A)r+\tfrac{1}{2}C(rr-1)+D)$$

factorem habeat $r-n$ quia inde quantitatis P factor tantum esset $(r-n)^{\frac{1}{2}}$, sed necesse est, vt etiam $(r-n)^2$ eius sit factor, seu quod idem est, vt illius formulae differentiale:

$$2rdr((B+A)r+\tfrac{1}{2}C(rr-1)+D)+dr(rr-1)(B+A+Cr)$$

factorem habeat $r-n$. Hinc igitur facto $r=n$ fit

$$C=-\tfrac{1}{n}(B+A), \text{ ideoque } D=-\tfrac{(B+A)(nn+1)}{2n}.$$

35. His iam valoribus substitutis concluditur:
$Q=V(1-ss)((B-A)s-\frac{(B+A)(1-ss)}{2n}+\frac{(B+A)(nn+1)}{2n})$ seu
$Q=V(1-ss)((B-A)s+\frac{(B+A)(nn+ss)}{2n})$

vnde pro motu corporis in ellipsi elementum temporis ita exprimitur, vt sit:

$$d\tau=\frac{+aVa}{4}\cdot\frac{(nn-ss)dsV2n}{V(1-ss)(2n(B-A)s+(B+A)(nn+ss))}$$

quod cum elemento curuae comparatum:

$$V(dx^2+dw^2)=\frac{adsV(nn-ss)}{2V(1-ss)}$$

praebet celeritatem corporis in puncto Z:

$$\frac{V(dx^2+dw^2)}{d\tau}=\frac{2V(2n(B-A)s+(B+A)(nn+ss))}{V2na(nn-ss)} \text{ seu}$$

$$\frac{V(dx^2+dw^2)}{d\tau}=\frac{2V(A(n-s)^2+B(n+s)^2)}{V2na(nn-ss)}.$$

36. Curua igitur a corpore descripta est ellipsis, cuius bini foci in ipsis virium centris A et B existunt, et axis transuersus est $v+u=na$, et coniugatus $=aV(nn-1)$. Atque in huiusmodi el-

lipſi corpus ad vtrumque focum attractum libere moueri poteſt, dummodo ipſi initio eiusmodi celeritas fuerit impreſſa, vt deinceps pro quouis loco Z eius celeritas prodeat $= \frac{2\sqrt{(A(n-s)^2 + B(n+s)^2)}}{\sqrt{2na(nn-ss)}}$, ſeu $= \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \frac{Auu + Bvv}{vu(v+u)} = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \frac{vu}{v+u}\left(\frac{A}{vv} + \frac{B}{uu}\right)$.

In vertice ergo foco A propiore, vbi $s = 1$, eſt celeritas $= \sqrt{\frac{2}{na}}\left(\frac{n-1}{n+1}A + \frac{n+1}{n-1}B\right)$, in altero vero vertice foco B propiori vbi $s = -1$, eſt celeritas $= \sqrt{\frac{2}{na}}\left(\frac{n+1}{n-1}A + \frac{n-1}{n+1}B\right)$.

Ad axem vero coniugatum celeritas eſt $= \frac{2n\sqrt{(A+B)}}{n\sqrt{2na}} = \sqrt{\frac{2(A+B)}{na}}$.

De motu corporis in Hyperbola.

37. Hyperbola oritur, ſi s conſtans aſſumatur. Sit ergo $s = n$ ſeu $v - u = na$, atque vt hic valor ſatisfaciat tam haec formula:

$$(1-ss)((B-A)s + \tfrac{1}{2}C(1-ss) - D)$$

quam eius differentialis, ita debet eſſe comparata vt poſito $s = n$, in nihilum abeat. Primo ergo erit $(B-A) - Cn = 0$ ſeu $C = \frac{B-A}{n}$, tum vero $D = (B-A)n + \frac{(B-A)(1-nn)}{2n}$ ſeu $D = \frac{(B-A)(1+nn)}{2n}$; vnde conficitur $P = \sqrt{(rr-1)}\left((B+A)r + \frac{(B-A)(nn+rr)}{2n}\right) = \sqrt{(rr-1)} \cdot \frac{B(r+n)^2 + A(r-n)^2}{2n}$ hincque $d\tau = \frac{a\sqrt{a}}{4}\int\frac{(rr-nn)dr\sqrt{2n}}{\sqrt{(rr-1)}(A(r-n)^2 + B(r+n)^2)}$ vnde motus ratio facile colligitur, quoniam haec formu-

la

la ex praecedente nafcitur fi loco n et r fcribantur $-n$ et $-s$.

Axis quidem transuerfus huius hyperbolae eft $u-v = na$ exiftente $n < 1$, et puncto A et B funt eius foci.

II. Cafus quo corpus non in eodem plano mouetur.

Ac primo quidem de motu in fphaeroide elliptico.

38. Simili modo circa formulas generales fupra inuentas eft operandum; ac primo aequationi $\frac{dr}{R} = \frac{ds}{S}$ fatisfieri poteft ponendo $r = n$, vt fit $v + u = na$, ideoque punctum Z perpetuo verfetur in fuperficie fphaeroidis elliptici ex rotatione ellipfis circa axem maiorem, in quo puncta A et B funt foci geniti. Tum autem facto $r = n$ non folum quantitas R fed etiam eius differentiale euanefcere debet, vnde fequentes duae aequationes nafcuntur.

$$\text{I. } m(nn-1)((B+A)n + \tfrac{1}{2}C(nn-1) + D) - nn = 0$$

$$\text{II. } 2mn((B+A)n + \tfrac{1}{2}C(nn-1) + D) + m(nn-1)((B+A) + Cn) - 2n = 0$$

quae altera ex prima per eliminationem quantitatis D praebet:

$$\frac{2n^3}{nn-1} - 2n + m(nn-1)(A+B+Cn) = 0$$

feu $\frac{2n}{m(nn-1)^2} + A + B + Cn = 0$.

Ergo

Ergo $C = -\frac{1}{n}(A+B) - \frac{2}{m(nn-1)^2}$; tum vero est
$$D = -\frac{(A+B)(nn+1)}{2n} + \frac{nn+1}{m(nn-1)}.$$

39. Definitis his binis constantibus C et D et facta substitutione tandem nanciscimur:

$$S = \sqrt{\left(\frac{m(1-ss)}{2n}\left(A(n-s)^2 + B(n+s)^2\right) - \frac{(nn-ss)^2}{(nn-1)^2}\right)}$$

ex quo angulus $ZXY = \Phi$ ex hac formula differentiali definiri debet $d\Phi = \frac{(nn-ss)ds}{(nn-1)(1-ss)S}$ siue hac
$$d\Phi = \frac{ds}{(nn-1)(1-ss)} : \sqrt{\left(\frac{m(1-ss)}{2n}\left(\frac{A}{(n+s)^2} + \frac{B}{(n-s)^2}\right) - \frac{1}{(nn-1)^2}\right)} \text{ seu}$$
$$d\Phi = \frac{ds}{1-ss} : \sqrt{\left(\frac{m(nn-1)^2(1-ss)}{2n}\left(\frac{A}{(n+s)^2} + \frac{B}{(n-s)^2}\right) - 1\right)}.$$

Pro tempore autem habetur:
$$d\tau = \tfrac{1}{4}a\sqrt{ma}.\frac{(nn-ss)ds}{S} \quad \text{seu}$$
$$d\tau = \tfrac{1}{4}a\sqrt{ma}.(nn-1)ds : \sqrt{\left(\frac{m(nn-1)^2(1-ss)}{2n}\left(\frac{A}{(n+s)^2} + \frac{B}{(n-s)^2}\right) - 1\right)}.$$

De motu super conoide hyperbolico.

40. Hic casus ex formulis generalibus deducitur ponendo $s = n$ vt sit $v - u = na$, proditque hyperbola circa ambos focos A et B descripta cuius axis transuersus est $= na$, existente $n < 1$, tum vero haec hyperbola circa axem reuoluta id conoides generabit, in cuius superficie corpus Z mouebitur: Perspicuum autem est formulas praecedentes ad hunc casum transferri, si ibi loco n et s scribatur $-n$ et $-r$. Quare posito
$$R = \sqrt{\left(\frac{m(rr-1)}{2n}\left(A(r-n)^2 + B(r+n)^2\right) - \frac{(rr-nn)^2}{(1-nn)^2}\right)}$$

pro

pro angulo Φ obtinetur:

$$d\Phi = \frac{(rr - nn)dr}{(1 - nn)(rr - nn)R}$$

pro tempore vero τ:

$$d\tau = \frac{a\sqrt{ma}}{4} \cdot \frac{(rr - nn)dr}{R}.$$

41. Etsi autem his duobus casibus superficies, in qua corpus motum suum peragit facillime assignatur, eius tamen vera via, quam percurret, vix algebraice definiri posse videtur, propterea quod anguli Φ sinum ex formulis inuentis algebraice exprimere non licet: neque tamen adhuc asseuerare ausim, hoc nonnisi transcendenter praestari posse. Pro motu quidem in elliptoide si ponamus $\frac{an}{m(nn-1)} = M$, angulus Φ ita simplicius exprimitur vt sit:

$$d\Phi = \frac{ds(nn - ss)\sqrt{M}}{(1-ss)\sqrt{(A(1-ss)(n-s)^2 + B(1-ss)(n+s)^2 - M(nn-ss)^2)}}$$

vbi quidem obseruo si sit $B = 0$, quo quidem casu integrale aliunde patet fore:

$$\frac{A}{M}\cos.(\zeta - \Phi)^2 + (nn - 1)\sin(\zeta - \Phi)^2 = \frac{(n+s)^2}{1 - ss} \text{ seu}$$

$$\cos.2(\zeta - \Phi) = \frac{M((nn+1)(1+ss) + 4ns) - A(1-ss)}{(A - (nn-1)M)(1-ss)} \text{ siue}$$

$$\cos.(\zeta - \Phi) = \frac{(1+ns)\sqrt{M}}{\sqrt{(A-(nn-1)M)(1-ss)}} \text{ et } \sin.(\zeta - \Phi) = \frac{\sqrt{(A(1-ss) - M(n+s)^2)}}{\sqrt{(A-(nn-1)M)(1-ss)}}.$$

42. In genere etiam, si fuerit vel $A = 0$ vel $B = 0$, quoniam motus corporis ad vnicum centrum virium attracti algebraice assignari potest, necesse est vt formulae nostrae integrationem admittant, etiamsi ratio integrandi minus perspiciatur. Quam ob rem hic ipse casus haud contemnendum vsum in-

in Analysi praestare est censendus, cum inde formularum, quae primo intuitu integrationi vehementer aduersari videntur, integralia tamen commode exhiberi queant. Haud ergo abs re fore arbitror si hos casus accuratius examini subiecero.

Applicatio formularum inuentarum ad casum, quo altera virium centripetarum euanescit.

43. Statuamus ergo $B = 0$, ita vt sit:

$$R = \sqrt{(m(rr-1)(Ar + \tfrac{1}{2}C(rr-1) + D) - rr)} \text{ et}$$
$$S = \sqrt{(m(1-ss)(-As + \tfrac{1}{2}C(1-ss) - D) - ss)}$$

atque ad motum corporis definiendum sequentes aequationes resolui oportet:

$$\text{I.} \quad \frac{dr}{R} = \frac{ds}{S}$$
$$\text{II.} \quad d\Phi = \frac{(rr-ss)dr}{(rr-1)(1-ss)R} \text{ seu } \Phi = \int \frac{dr}{(rr-1)R} + \int \frac{ds}{(1-ss)S}$$
$$\text{III.} \quad d\tau = \frac{a\sqrt{ma}}{4} \cdot \frac{(rr-ss)dr}{R} \text{ seu } \tau = \frac{a\sqrt{ma}}{4}\left(\int \frac{rrdr}{R} - \int \frac{ssds}{S}\right)$$

vbi certe nulla methodus est obuia has aequationes tractandi, cum tamen aliunde earum integralia innotescant, quae igitur considerasse plurimum intererit.

44. Quoniam vis centripeta in B euanescit, tam rectae AB positio, quam quantitas $AB = a$, precario in calculum inducitur, et corpus mouebitur in

in plano per centrum virium A transeunte. Sit ergo recta AP intersectio huius plani cum plano tabulae, et quia punctum Z in illo existit plano, si ab Y ad rectam AP ducatur normalis YP, iungaturque recta ZP pariter ad AP normalis angulus ZPY erit inclinatio orbitae descriptae ad planum tabulae, ideoque constans. Statuamus ergo angulos constantes; $BAP = \gamma$ et $ZPY = \delta$. Tum sit orbitae semiparameter $= b$, et excentricitas $= e$, ob $AZ = v$ erit ex natura sectionum, $v = \frac{b}{1 + e\cos. w}$ denotante w anomaliam veram. Sit ergo AE linea absidum et angulus $PAE = \zeta$ erit $w = PAZ - \zeta$, ideoque $\cos. w = \frac{AP.\cos.\zeta + PZ\sin.\zeta}{v}$ vnde fit $v + e.AP\cos.\zeta + e.PZ\sin.\zeta = b$, hincque Tab. III. Fig. 2.

$$AP = \frac{(b - v)\cos.\zeta \pm \sin.\zeta.\sqrt{(eev^2 (b - v)^2)}}{e}$$

et $$PZ = \frac{(b - v)\sin.\zeta - \cos.\zeta\sqrt{(eevv - (b - v)^2)}}{e}.$$

45. His binis valoribus inuentis ex posteriori cum angulo $ZPY = \delta$ erit

$$PY = PZ\cos.\delta \text{ et } ZY = PZ\sin.\delta$$

deinde ex illo cum angulo $BAP = \gamma$ colligitur:

$$AX = AP\cos.\gamma + PY\sin.\gamma \text{ et } XY = AP\sin.\gamma - PY\cos.\gamma,$$

ideoque ob angulum $ZXY = \phi$ erit:

$$\tang.\phi = \frac{PZ\sin.\delta}{AP\sin.\gamma - PY\cos.\gamma} = \frac{PZ\sin.\delta}{AP\sin.\gamma - PZ\cos.\gamma\cos.\delta}.$$

Temporis autem elementum $d\tau$ est proportionale formulae:

$$AP.d.PZ - PZ.d.AP = \frac{-bvdv}{\sqrt{(eevv - (b - v)^2)}}$$

 ita

ita vt ſit $d\tau = \frac{\alpha b v dv}{\sqrt{(eevv - (b-v)^2)}}$

at pro angulo Φ habetur:

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{(b-v)\,\text{ſin.}\,\delta\,\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\delta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\sqrt{(eevv-(b-v)^2)}}{(b-v)(\text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta - \text{coſ.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta) + (\text{ſin.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta + \text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta)\sqrt{(eevv-(b-v)^2)}}$$

vnde etiam valor ipſius $d\Phi$ per dv exprimi poteſt.

46. Porro ob $AX = AP\,\text{coſ.}\,\gamma + PZ\,\text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\delta$ erit:

$$BX = a - AP\,\text{coſ.}\,\gamma - PZ\,\text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\delta$$

hincque $BZ^2 = uu = BX^2 + vv - AX^2 = vv + a(BX - AX)$ ſeu $uu - vv = aa - 2a(AP\,\text{coſ.}\,\gamma + PZ\,\text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\delta)$ hincque

$$\frac{e}{2a}(aa + vv - uu) = (b-v)(\text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta)$$
$$+ (\text{coſ.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta)\sqrt{(eevv - (b-v)^2)}$$

ſit iam $v = \frac{1}{2}a(r+s)$ et $u = \frac{1}{2}a(r-s)$ eritque

$$\tfrac{1}{2}ea(1 + rs) = (b - \tfrac{1}{2}a(r+s))(\text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta)$$
$$+ (\text{coſ.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta)\sqrt{(\tfrac{1}{4}eeaa(r+s)^2 - (b - \tfrac{1}{2}a(r+s))^2)}$$

47. Quo hanc aequationem facilius euoluamus, ponamus breuitatis gratia:

$$\text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta = \mu \text{ et } \text{coſ.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta = \nu$$

et aequatio ad rationalitatem perducta huiusmodi formam induet:

$$E + 2Frs + Grrss + 2H(r+s) + 2Irs(r+s) + K(rr+ss) = 0$$

exiſtente:

$$E = \tfrac{1}{4}eeaa - \mu eab + (\mu\mu + \nu\nu)bb$$
$$F = \tfrac{1}{4}(\mu\mu + \nu\nu)aa - \tfrac{1}{2}\mu eab$$

G $=\frac{1}{4}$

$$G = \tfrac{1}{4} eeaa$$
$$H = \tfrac{1}{4} \mu eaa - \tfrac{1}{2}(\mu\mu + \nu\nu)\, ab$$
$$I = \tfrac{1}{4} \mu eaa$$
$$K = \tfrac{1}{4}(\mu\mu + \nu\nu) aa - \tfrac{1}{4} \nu\nu eeaa$$

et haec aequatio pro integrali completo formulae differentialis $\frac{dr}{R} = \frac{ds}{S}$ haberi debet.

48. Mirum omnino hoc videretur, nisi jam dudum huiusmodi aequationum differentialium integralia inueniendi methodum tradidissem. Methodus quidem, qua hoc praestiti nondum ita est perfecta, vt a priori procedat, sed proposita eiusmodi aequatione differentiali $\frac{dr}{R} = \frac{ds}{S}$, vbi quidem formulae irrationales R et S simili modo per r et s determinantur, assumere cogor aequationem algebraicam generalem eiusdem formae ac supra exposita, in qua litteras constantes E, F, G etc. deinceps ita definio, vt inde ipsa aequatio differentialis conficiatur. Istam ergo methodum ad hunc casum insignem, qui praeter expectationem hic se offert, accommodabo; siquidem inde eadem integratio, quae iam aliunde constat, obtinebitur.

49. Primum igitur ex aequatione algebraica assumta definio valorem ipsarum s et r seorsim:

$$s = \frac{-Irr - Fr - H + \sqrt{((Irr + Fr + H)^2 - (Grr + 2Ir + K)(Krr + 2Hr + E))}}{Grr + 2Ir + K}$$

$$r = \frac{-Iss - Fs - H \sqrt{((Iss + Fs + H)^2 - (Gss + 2Is + K)(Kss + 2Hs + E))}}{Gss + 2Is + K}$$

atque formularum radicalium illam ipsi R hanc vero ipsi S ex §. 43. aequalem facio, vnde fit:

$$r^4 \mid II - GK = \tfrac{1}{2}mC$$
$$r^3 \mid 2FI - 2IK - 2GH = mA$$
$$r^2 \mid 2HI + FF - EG - 4HI - KK = -mC + mD - 1$$
$$r^1 \mid 2FH - 2EI - 2HK = -mA$$
$$r^0 \mid HH - EK = \tfrac{1}{2}mC - mD.$$

50. Hinc aequationum secundae et quartae summa dat:

$$FI + FH - IK - EI - GH - HK = 0$$

vnde fit $\frac{H}{I} = \frac{E+K-F}{F-K-G}$. Statuatur ergo

$$H = n(E+K-F) \text{ et } I = -n(G+K-F)$$

qui valores in alterutra substituti praebent:

$$\frac{mA}{2n} = (K-F)^2 - EG$$

Porro primae, tertiae et quintae summa suppeditat:

$$(I-H)^2 + FF - (E+K)(G+K) = -1 \text{ seu}$$
$$nn(E+G+2K-2F)^2 = (E+K)(G+K) - FF - 1.$$

Hoc autem modo calculus fit nimis intricatus; ex quo expediet determinationem coefficientium in genere suscipere.

51. Considerentur ergo sequentes formulae:

I. $II - GK = a = \tfrac{1}{2}mC$
II. $I(F-K) - GH = b = \tfrac{1}{2}mA$
III. $FF - KK - EG - 2HI = c = -mC + mD - 1$
IV. $H(F-K) - EI = d = -\tfrac{1}{2}mA$
V. $HH - EK = e = \tfrac{1}{2}mC - mD,$

vnde

vnde ex prima et quinta statim elicimus:

$$G = \frac{II - a}{K} \quad \text{et} \quad E = \frac{HH - e}{K}.$$

Deinde ex II et IV est

primo $bH - dI = EII - GHH = \frac{aHH - eII}{K}$

tum $bEI - dGH = (EII - GHH)(F - K) = \frac{(F-K)(aHH - eII)}{K}$

seu $HI(bH - dI) + adH - beI = (F - K)(aHH - eII)$

vnde colligitur:

$$K = \frac{aHH - eII}{bH - dI} \quad \text{et} \quad F = K + \frac{HI(bH - dI) + adH - beI}{aHH - eII}.$$

Ergo $G = \frac{(bH - dI)(II - a)}{aHH - eII}$ et $E = \frac{(bH - dI)(HH - e)}{aHH - eII}$.

52. Cum igitur sit:

$$F = K + \frac{bI(HH - e) - dH(II - a)}{aHH - eII}$$

facta substitutione in tertia fiet

$$\begin{array}{r|l}
FF & KK + \frac{2bI(HH-e) - 2dH(II-a)}{bH - dI} + \frac{bbII(HH-e)^2 + ddHH(II-a)^2}{(aHH - eII)^2} \\
 & \qquad - \frac{2bdHI(HH-e)(II-a)}{(aHH - eII)^2} \\
-KK & -KK \\
-2HI & \qquad -2HI \\
-EG & \quad - \frac{(bbHH + ddII)(II-a)(HH-e)}{(aHH - eII)^2} + \frac{2bdHI(HH-e)(II-a)}{(aHH - eII)^2} \\
= & = \\
c & c
\end{array}$$

quae aequatio reducitur ad hanc formam:

$$c = \frac{2adH - 2beI}{bH - dI} + \frac{bb(HH - e) - dd(II - a)}{aHH - eII}$$

 ex

ex qua binas litteras H et I definiri oportet, ita vt altera maneat indeterminata, atque aequatio assumta vna littera abundet prae differentiali, quod est criterium aequationis integralis completae.

53. Quo haec aequatio facilius resoluatur, ratio inter binas litteras H et I nostro arbitrio relinquatur, sitque $I = nH$ vnde obtinemus:

$$c = \frac{2ad - 2ben}{b - dn} + \frac{bb - ddnn}{a - enn} + \frac{add - bbe}{a - enn} \cdot \frac{1}{HH}$$

sicque littera H definitur per simplicem extractionem radicis quadratae; qua inuenta erit $I = nH$; et reliquae litterae:

$$K = \frac{a - enn}{b - dn} \cdot H;\ F = K + \frac{n(b - dn)}{a - enn} H + \frac{ad - ben}{a - enn} \cdot \frac{1}{H}$$

$$G = \frac{nnHH - a}{K} \quad \text{et} \quad E = \frac{HH - e}{K}.$$

54. Pro casu ergo oblato, si loco litterarum a, b, c, d, e valores debiti substituantur, quantitatem H ex hac aequatione definiri oportet:

$$-mC + mD - 1 = \frac{-mC - mn(C - 2D)}{1 + n} + \frac{\frac{1}{2} mAA(1 - nn)}{C(1 - nn) + 2Dnn}$$
$$+ \frac{\frac{1}{2} mmAAD}{C(1 - nn) + 2Dnn} \cdot \frac{1}{HH}$$

$$\text{seu } -1 + \frac{mD(1 - n)}{1 + n} - \frac{\frac{1}{2} mAA(1 - nn)}{C(1 - nn) + 2Dnn} = \frac{\frac{1}{2} mmAAD}{C(1 - nn) + 2Dnn} \cdot \frac{1}{HH}$$

vnde colligitur:

$$H = mA : \sqrt{\left(2\left(\frac{C}{D}(1 - nn) + 2nn\right)\left(\frac{mD(1 - n)}{1 + n} - 1\right) - \frac{mAA(1 - nn)}{D}\right)}$$

hincque

hincque porro:

$$I = nH;\ K = \frac{C(1-nn)+2Dnn}{A(1+n)}H;$$

$$F = K + \frac{nHH}{K} - \frac{\frac{1}{2}mA(C(1+n)-2Dn)}{C(1-nn)+2Dnn}\cdot\frac{1}{H}$$

$$G = \frac{nnHH}{K} - \frac{mC}{2K} \text{ et } E = \frac{HH}{K} - \frac{m(C-2D)}{2K}.$$

55. His iam valoribus definitis aequationis nostrae primae $\frac{dr}{R} = \frac{ds}{S}$ aequatio integralis completa est:

$$E+2Frs+Grrss+2H(r+s)+2Irs(r+s)+K(rr+ss)=0$$

in qua littera n est constans per integrationem ingressa.

Deinde vero est:

$$s = \frac{-Irr-Fr-H+R}{Grr+2Ir+K} \text{ vel } r = \frac{-Iss-Fs-H-S}{Gss+2Is+K}$$

vnde habemus:

$$R = Grrs+2Irs+Ks+Irr+Fr+H \text{ et}$$
$$S = -Grss-2Irs-Kr-Iss-Fs-H$$

tum enim aequatio nostra differentiata dat:

$$2ds.\ R - 2dr.\ S = 0 \text{ seu } \frac{dr}{R} = \frac{ds}{S},$$

quae erat prima aequatio in §. 43. integranda.

56. Cum

56. Cum nunc inuenta ſit aequatio inter r et s vnde ob $x = \frac{1}{2}a(1 + rs)$ et $v = \frac{1}{2}a(r + s)$ relatio algebraica inter x et v facile elicitur; hinc calculo quidem prolixo tam angulus Φ quam tempus τ, artificia alibi expoſita in ſubſidium vocando, definiri poterit; quam euolutionem, cum ad quaeſtionem hic tractatam minus pertineat, praetermitto, contentus viam eo perueniendi indicaſſe.

DE

DE PHAENOMENIS COELI PER SEGMENTA SPHAERICA DIAPHANA SPECTATI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si coelum ſpectatur per hemisphaerium vitreum oculo ad eius centrum applicato, omnes ſtellae quaeque in ſuo loco conſpicientur, perinde ac ſi nudo oculo cernerentur; propterea quod radii ad oculum pertingentes in ſuperficiem vitri normaliter ingrediuntur, ideoque nullam refractionem patiuntur. Sin autem vitri figura ſit ſegmentum ſphaerae ſiue minus ſiue maius haemiſphaerio, eique oculus in ipſo axe applicetur, ſtellae extra axem ſitae non ſolum de loco ſuo depulſae apparebunt, ſed etiam euenire poteſt, vt quaedam plane non fiant conſpicua, aliae geminatae in diuerſis coeli punctis videantur, atque aliqua coeli regio omnino vacua ſpectetur. Quae phaenomena ſingularia digna videntur vt accuratius euoluantur.

2. Quae autem ad ſegmenta ſphaerae tam maiora quam minora ſpectant, ea vna inueſtigatione

complecti licet, si sphaeram vitream integram contemplemur, in qua alicubi oculus sit constitutus. Sit igitur proposita sphaera reuolutione semicirculi APB circa diametrum AB genita, in cuius puncto O constitutus sit oculus, extra centrum C, vnde coelum spectetur. Quod si iam secundum OP plano ad diametrum AB normali sphaera secetur, bina segmenta alterum minus APO, alterum maius BPO obtinebimus, per quae separata oculus vtrique in O applicatus coelum intueatur. In calculo autem instituendo nihil impedit, quo minus haec segmenta coniuncta consideremus et oculum in O intra sphaeram quasi inclusum assumamus, vt hoc modo vtrique casui satisfiat, simulque ratio continui habeatur.

Tab. IV. Fig. 1.

3. Iam primum obseruo stellas E et F in ipso sphaerae axe AB sitas sine vlla loci mutatione conspici, quia radii inde ad oculum O pertingentes normaliter in sphaeram intrant. At si extra axem stella nobis in V sita appareat, quam scilicet per radium MO spectemus, haec stella re vera non in V haerere est censenda, sed ad eius locum verum, vbi nudo oculo conspiceretur, explorandum ex centro C per punctum M agatur recta CMN, vtpote normalis in superficiem sphaerae, et constituatur angulus NMS, cuius sinus sit ad sinum anguli NMV in ratione refractionis ex aëre in vitrum, ac verus stellae locus alicubi in recta MS reperietur,

tur, cuius diſtantia cum ſit quaſi infinita, ex O ducatur Os ipſi MS parallela, et a nudo oculo ſtella in directione Os cerneretur, quae nunc per vitrum in directione OV conſpicitur, ita vt ob refractionem angulo sOV de ſuo loco vero deturbetur.

4. Hanc viſionis mutationem in vtroque ſegmento in figura expreſſi, vnde colligere licet per ſegmentum minus AOP ſtellam in directione Os verſantem propius ad axem vitri OE admoueri, ſicque ſpatium coeli Es ob refractionem ſub minore angulo EOV apparere, vnde magnitudo ſtellarum imminuetur. Contra autem per ſegmentum maius BOP ſtella in directione Os ſita et angulo FOs ab axe remota in directione OV ſub maiore angulo FOV ab axe videbitur vnde etiam ſtellae magnitudo aucta prodibit. Atque haec potiſſimum de ſtellis axi vtrinque proximis ſunt intelligenda, in maioribus enim elongationibus ſingularia phaenomena, quorum initio mentionem feci, locum habere poſſunt.

5. Ad haec diligentius inueſtiganda, ponamus:

radium ſphaerae $CA = CB = CM = a$

diſtantiam oculi O a centro ſphaerae, $CO = d$

Diſtantiam apparentem ſtellae ab axe, ſeu angulum $AOV = \Phi$

angulum refractionis $OMC = \eta = NMV$
angulum incidentiae $NMS = \zeta$
rationem refractionis $\sin.\zeta : \sin.\eta = n : 1$.

Hinc erit angulus $VMS = \zeta - \eta$, cui cum ſit angulus VOs aequalis, erit diſtantia vera ſtellae ab axe OAE, hoc eſt ang. $AOs = \Phi + \zeta - \eta$, ideoque definiri oportet, quomodo ex diſtantia apparente ſeu angulo $AOV = \Phi$, diſtantia vera ſeu angulus $AOs = \Phi + \zeta - \eta$ ac viciſſim determinetur. Hic quidem nulla difficultas occurrit, verum euolutio ſingulorum phaenomenorum eo maiorem diligentiam ac circumſpectionem requirit.

6. Conſideremus angulum $AOV = \Phi$ tanquam datum, qui cum ſit externus trianguli OMC, in quo dantur duo latera $CM = a$ et $CO = d$, erit $\sin.\Phi : \sin\eta = a : d$, ideoque $\sin.\eta = \frac{d}{a}\sin.\Phi$; vbi obſeruo angulum η ſemper eſſe acutum, etiam ſi angulus Φ euadat obtuſus, ita vt haec determinatio nullam ambiguitatem implicet inde oriundam, quod eidem ſinui gemini anguli conueniant. Cum nunc ſit $\sin.\zeta = n\sin.\eta$, inuento angulo η erit $\sin.\zeta = \frac{nd}{a}\sin\Phi$, qui angulus pariter nunquam obtuſus eſſe poteſt. Ad rectum poteſt increſcere, ſi $nd = a$ vel $nd > a$. Inuentis ergo his binis angulis η et ζ ex formulis $\sin.\eta = \frac{d}{a}\sin.\Phi$ et $\sin.\zeta = \frac{nd}{a}\sin.\Phi$, colligitur elongatio vera ab axe $AOs = \Phi + \zeta - \eta$, ita vt $\zeta - \eta$ ſit effectus refractionis.

7. Quem-

7. Quemadmodum nulla turbatio oritur, si oculus in centro C teneatur seu $d = 0$, ita si interuallum $CO = d$ prae radio sphaerae a sit valde exiguum, turbatio parum sentitur. Quo magis autem locus oculi a centro C remouetur, eo magis phaenomena a veritate discrepant, quae tum imprimis prorsus fiunt singularia, quando $d > \frac{a}{n}$. Tum enim angulo Φ eo vsque aucto vt sit $\sin.\Phi > \frac{a}{nd}$, ob $\sin.\zeta > 1$, fit angulus ζ imaginarius, neque ergo sub his angulis Φ vllum obiectum apparere potest. Sit $\frac{a}{nd} = \sin.\alpha$, et quamdiu angulus Φ inter limites α et $180^\circ - \alpha$ continetur, in hoc interuallo visionis nulla prorsus stella videbitur: et quoniam nullus radius in oculum ingreditur, tota regio intra angulos α et $180^\circ - \alpha$ contenta obscurissima et nigra apparebit, omnes autem stellae, quas quidem videre licet extra istos limites conspicientur.

8. Interuallum hoc obscurum euanescit, si capiatur $d = \frac{a}{n}$ oculusue adhuc propius centro C admoueatur; quo magis autem a centro remoueatur, interuallum illud obscurum amplificatur, fit maximum sumto $d = a$, quo casu segmentum sphaericum in integram sphaeram abit, cui oculus in A applicatur, interuallo AO euanescente. Hi ergo duo casus $d = a$ et $d = \frac{a}{n}$ sunt quasi praecipui, qui seorsim euolui merentur, ac postquam aspectum siderum pro his casibus definiuerimus, quoniam ca-

ſus $d=0$ per ſe eſt perſpicuus, inde facile, qua ratione coelum reliquis caſibus ſit appariturum, colligere licebit.

I. De aſpectu coeli per ſphaeram diaphanam integram.

Tab. IV. Fig. 2. 9. Oculo O ſphaerae in A applicato appareat ſtella in directione OM quaſi eſſet in V ſita, quae reuera exiſtit in directione $O\sigma$. Referantur haec loca ad directionem fixam ABF, ſitque hinc elongatio ſtellae apparens, ſeu angulus $BOV=\psi$, poſitisque vt ante angulis $OMC=\eta$ et $SMN=\zeta$ ob $d=a$ erit $\text{ſin.}\,\eta=\frac{d}{a}\,\text{ſin.}\,\psi=\text{ſin}\,\psi$ et $\text{ſin.}\,\zeta=\frac{nd}{a}\,\text{ſin.}\,\psi$ $=n\,\text{ſin.}\,\psi$ vnde fit elongatio vera ſeu angulus $BO\sigma=\psi-\zeta+\eta$. Cum igitur ſit $\text{ſin.}\,\eta=\text{ſin.}\,\psi$, et ψ angulus acutus, erit $\eta=\psi$, ideoque elongatio vera $BO\sigma=2\psi-\zeta$. Hic primo apparet angulum ψ maiorem eſſe non poſſe, quam vt ſit $\text{ſin.}\,\psi=\frac{1}{n}$. Ducatur ergo recta AG vt ſit $\text{ſin.}\,BAG=\frac{1}{n}$ ſeu AB ad cordam BG in ratione refractionis $n:1$, eritque totus arcus AG obſcurus, omnesque ſtellae intra angulum BOG conſpicientur.

10. Sit angulus $BOG=\alpha$ ſeu $\text{ſin.}\,\alpha=\frac{1}{n}$, ita vt angulus ψ hunc limitem α transgredi nequeat, vera autem elongatio $BO\sigma$ apparenti $BOV=\psi$ reſpondens, ponatur $=\omega$, erit vt vidimus $\omega=2\psi-\zeta$, exiſtente $\text{ſin.}\,\zeta=n\,\text{ſin.}\,\psi$. Hinc primo patet ſi ſit

angulus

angulus ψ quam minimus, ob $\zeta - \frac{1}{6}\zeta^3 = n\psi - \frac{n}{6}\psi^3$, ſeu $\zeta = n\psi + \frac{n(nn-1)}{6}\psi^3$, fore $\omega = (2-n)\psi - \frac{n(nn-1)}{6}\psi^3$, ſeu proxime $\omega = (2-n)\psi$, quare cum ſit $n > 1$, neque vero vnquam n ad 2 increſcere queat, erit vtique $\omega < \psi$, ſeu ſtellae prope F apparentes, revera puncto F ſunt propiores, refractio ſcilicet ſtellas axi proximas magis inde deducit, quo maior fuerit ſphaerae refractio.

11. Conſideremus nunc ſtellam in directione extrema OG apparentem, vbi $\psi = \alpha$, et ob ſin. $\zeta = n$ ſin. $\alpha = 1$ ſeu $\zeta = 90°$, erit huius ſtellae elongatio vera ab axe $= 2\alpha - 90°$, ideoque ſi $\alpha < 45°$ ſeu $n > \sqrt{2}$, ſtella adeo ad alteram axis AF partem erit ſita. Sit nunc $\psi = \alpha - \delta$, exiſtente angulo δ minimo, ob ſin. $\zeta = n$ ſin. $\alpha - n\delta$ coſ. $\alpha = 1 - n\delta$ coſ. α ponatur $\zeta = 90 - \varepsilon$, vt ſit coſ. $\varepsilon = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon = 1 - n\delta$ coſ. α, et colligitur $\varepsilon = \sqrt{2n\delta \text{ coſ.}\alpha}$, ex quo elongatio vera ſtellae ab axe erit $\omega = 2\alpha - 90° - 2\delta + \sqrt{2n\delta \text{ coſ.}\alpha}$ ſeu

$$\omega = 2\alpha - 90° + \sqrt{2n\delta \text{ coſ.}\alpha}$$

quandoquidem particula 2δ prae $\sqrt{2n\delta \text{ coſ.}\alpha}$ euaneſcit; ita vt minimae mutationi in loco apparente reſpondeat maxima mutatio in loca ſtellae vero.

12. Quoniam ſtella in ipſo axe viſa, ibidem quoque ſita eſt, et quae in directione extrema OG conſpicitur, parum ab axe diſtat, videamus quanta ſit maxima diſtantia vera ω, ad quam ſtellae etiam

nunc

nunc fiat confpicuae. Cum igitur poni oporteat $2d\psi - d\zeta = 0$ ob $d\zeta \operatorname{cof.}\zeta = n d\psi \operatorname{cof.}\psi$ fit $2\operatorname{cof.}\zeta = n \operatorname{cof.}\psi$, ideoque $4 - 4nn \operatorname{fin.}\psi^2 = nn - nn \operatorname{fin}\psi^2$ vnde colligitur $\operatorname{fin.}\psi = \frac{\sqrt{(4-nn)}}{n\sqrt{3}}$, hinc $\operatorname{cof.}\psi = \frac{2\sqrt{(nn-1)}}{n\sqrt{3}}$ et $\operatorname{cof.}\zeta = \frac{\sqrt{(nn-1)}}{\sqrt{3}}$ ac $\operatorname{fin.}\zeta = \sqrt{\frac{4-nn}{3}}$. His ergo valoribus elongatio vera $\omega = 2\psi - \zeta$ fit maxima, eiusque finus et cofinus ita determinantur:

$$\operatorname{fin.}\omega = \frac{(4-nn)\sqrt{(4-nn)}}{3nn\sqrt{3}}, \text{ et } \operatorname{cof.}\omega = \frac{(nn-8)\sqrt{(nn-1)}}{3nn\sqrt{3}}$$

nullae ergo ftellae per fphaeram fpectanti apparebunt, nifi quae axi fuerint propiores, et quae fatis modico interuallo continentur.

13. Dum igitur angulus ψ ab axe OB vsque ad limitem α digreditur, vt fit $\operatorname{fin.}\alpha = \frac{1}{n}$ angulus ω primo quoque ita crefcit, vt quamdiu angulus ψ eft minimus, fit $\omega = (2-n)\psi - \frac{n(nn-1)}{6}\psi^3$ tum vero angulus ω maximum valorem attingit, vbi fit $\operatorname{fin.}\psi = \frac{\sqrt{(4-nn)}}{n\sqrt{3}}$, ibique eft $\operatorname{fin.}\omega = \frac{(4-nn)\sqrt{(4-nn)}}{3nn\sqrt{3}}$, vlteriusque aucto angulo ψ ad limitem α vsque, angulus ω iterum decrefcit, donec tandem fiat $\omega = 2\alpha - 90$. Vltimus hic valor ipfius ω fit negatiuus fi $n > \sqrt{2}$ quemadmodum euenit in vitro, ideoque antequam eo pertingit, denuo euanuerit neceffe eft, quod fcilicet fit vbi $2\psi = \zeta$, ideoque $\operatorname{fin.}\zeta = n \operatorname{fin.}\psi = 2\operatorname{fin.}\psi \operatorname{cof.}\psi$, feu $\operatorname{cof.}\psi = \frac{n}{2}$. In vitro igitur vbi $n > \sqrt{2}$, ftella in axe OF fita non folum per fphaeram ibidem cernitur, fed etiam eadem

dem in elongatione ab axe ad angulum ψ vt fit cof. $\psi = \frac{n}{4}$ apparet, quod cum quaqua verfus in omnibus meridianis contingat, eadem ftella inftar circuli lucidi polum B ambientis fpectabitur, in cuius quoque centro fimul videbitur.

14. Per fphaeram ergo pellucidam ftellae tantum circum axem OF fitae, quarum diftantia non fuperat angulum, cuius finus eft $= \frac{(4-nn)\surd(4-nn)}{3nn\surd 3}$, funt confpicuae, nifi forte diftantia negatiua $2\alpha - 90°$, cafu $n > \surd 2$ illa fit maior; tum enim etiam has remotiores cernere liceret. Operae igitur pretium erit inueftigare, quo cafu angulus $90° - 2\alpha$ illi diftantiae, cuius finus eft $\frac{(4-nn)\surd(4-nn)}{3nn\surd 3}$ fiat aequalis. Aequato autem hoc finu ipfi fin. $(90 - 2\alpha)$ feu cof. $2\alpha = 1 - \frac{2}{nn}$, prodit aequatio $(4-nn)\surd(4-nn) = 3(nn-2)\surd 3$, qua euoluta, et diuifione per $nn-1$ facta, obtinetur $n^4 + 16nn - 44 = 0$, vnde elicitur $nn = 6\surd 3 - 8$, et vero proxime $n = 1,5467$.

15. Cum in vitro refractio ita fit comparata, vt pro radiis rubris fit $n = 1,54$, et pro violaceis $n = 1,56$, valor inuentus $n = 1,5467$ vtique in vitro locum habet, quae proprietas haud parum notatu digna videtur. Per huiusmodi ergo fphaeram vitream fingulae ftellae, quae quidem funt confpicuae neque vltra angulum $90° - 2\alpha$ ab axe remotae, triplicatae feu in ternis diuerfis coeli punctis confpicientur; ac praeterea ftella quidem in ipfo axe fita per totum quendam circulum diffufa fpectabitur.

Pro hoc ergo casu tabulam adiungam, in qua pro singulis elongationibus ab axe apparentibus ψ, elongationes verae exhibentur; vnde deinceps cuiuslibet stellae conspicuae terna loca apparentia colligere licebit.

ψ	ω	ψ	ω
0°, 0′, 0″	0°, 0′, 0″	23°, 0′, 0″	8°, 49′, 2″
1, 0, 0	0, 27, 12	24, 0, 0	9, 0, 58
2, 0, 0	0, 54, 21	25, 0, 0	9, 10, 49
3, 0, 0	1, 21, 25	26, 0, 0	9, 18, 36
4, 0, 0	1, 48, 22	27, 0, 0	9, 23, 44
5, 0, 0	2, 15, 10	28, 0, 0	9, 26, 12
6, 0, 0	2, 41, 45	28, 14, 55	9, 26, 19
7, 0, 0	3, 8, 5	29, 0, 0	9, 25, 10
8, 0, 0	3, 34, 9	30, 0, 0	9, 20, 38
9, 0, 0	3, 59, 42	31, 0, 0	9, 11, 29
10, 0, 0	4, 25, 12	32, 0, 0	8, 57, 42
11, 0, 0	4, 50, 7	33, 0, 0	8, 36, 26
12, 0, 0	5, 14, 30	34, 0, 0	8, 7, 40
13, 0, 0	5, 38, 18	35, 0, 0	7, 27, 49
14, 0, 0	6, 1, 31	36, 0, 0	6, 36, 52
15, 0, 0	6, 24, 3	37, 0, 0	5, 23, 9
16, 0, 0	6, 45, 55	38, 0, 0	3, 46, 40
17, 0, 0	7, 6, 51	39, 0, 0	1, 15, 5
18, 0, 0	7, 26, 52	39, 20, 39	0, 0, 0
19, 0, 0	7, 45, 49	40, 0, 0	−3, 49, 41
20, 0, 0	8, 3, 42	40, 16, 0	−8, 4, 5
21, 0, 0	8, 20, 15	40, 16, 51	−9, 26, 18
22, 0, 0	8, 35, 28	limes vltimus.	

16. Re-

16. Relatio inter hos binos angulos ψ et ω quorum ille diſtantiam ſtellae apparentem, hic vero diſtantiam eius veram ab axe ſphaerae OF deſignat, commodiſſime linea curua repraeſentari poteſt; ſumtis enim in directrice FG abſciſſis FV diſtantiae apparenti ψ proportionalibus, ad ſingulas conſtituantur applicatae VS diſtantiam veram referentes, ſicque formabitur linea curua FSQRH, primo quidem a recta vix differens, tum vero ad axem ſe magis inflectens, vt abſciſſae $FP = 28°, 14', 55''$ conueniat applicata maxima $PQ = 9°, 26', 19''$. Inde vero ſatis ſubito ad axem vergit, eum ſecans in R vt ſit $FR = 39°, 20', 39''$, hincque in alteram partem porrigitur fere normaliter ad axem, vbi denique in puncto H terminatur, cuius abſciſſa $FG = 40°, 16', 51''$ et applicata $GH = 9°, 26', 18''$ illi maximae PQ aequali. Tab. IV. Fig. 3.

17. Si axis FG retro vltra F continuetur ei ſimilis curua inuerſa conueniet, applicatis in partem contrariam cadentibus; quandoquidem ſumto angulo ψ negatiuo alterius anguli ω ſignum tantum mutari oportet; vnde cum vtrinque ſit $GH = PQ$, omnes rectae axi FG parallelae has binas curuas iunctim ſumtas in tribus punctis interſecabunt, niſi earum diſtantia ab axe maior ſit quam PQ. Quare vnicuique ſtellae, non vltra $9°, 26', 18''$ ab axe ſphaerae remotae, terni conueniunt anguli apparentes ψ, totidem in coelo loca denotantes,

tes, vbi eadem ſtella ſimul conſpicietur. Stella autem in ipſo axe ſita, primo quidem in loco vero apparebit, ſimul vero ſub figura annuli lucidi conſpicietur, cuius ab axe diſtantia $= 39°, 20', 39''$, vti iam ſupra obſeruaui.

18. Ex tabula data ſequentes concluſiones deduxiſſe iuuabit. Primo omnes ſtellae ab axe F ad elongationem $9°, 26', 19''$ in coelo ſitae per ſphaeram hanc vitream ſimili fere ordine per ſpatium $28°, 14', 55''$ ideoque fere triplo maius diſperſae conſpicientur; deinde eaedem ſtellae ſed ordine inuerſo a diſtantia $28°, 14', 55''$ vsque ad diſtantiam $39°, 20', 39''$ ab axe denuo apparebunt. Tertio vero ad alteram axis partem eaedem ſtellae in exiguo ſpatio intra $39°, 20', 39''$ et $40°, 16', 51''$ comprehenſo iterum inuerſo ordine ſpectabuntur, ita vt ſingulae ſtellae in ternis coeli locis per huiusmodi globum vitreum repraeſententur. Hic autem de repraeſentatione qualicunque loquor; quippe quae minime erit diſtincta, cum ſingulae imagines pone oculum cadant. Sin autem globus fuerit maximus, oculis presbytis haec apparentia ſatis erit diſtincta.

19. Multo aliter autem viſio ſe habebit, ſi coelum per globum aqueum, ſeu quod eodem redit, per ſphaeram vitream cavam aqua repletam intueamur, ſi modo vitrum ſit tenuiſſimum, vt eius refractionem negligere liceat. Hic enim cum ſit $n = \frac{4}{3}$

ideoque

ideoque $n < \sqrt{2}$, non ſolum nulla ſtella triplicata apparebit, ſed etiam quaedam ſemel tantum repraeſentabuntur. Similem ergo tabulam pro tali ſphaera adiiciam, ex his elementis computatam, quod ſi diſtantia ab axe apparens vocetur $= \psi$ indeque angulus colligatur ζ, vt ſit $\sin.\zeta = \frac{4}{3}\sin.\psi$ eius ſtellae diſtantia vera ab axe futura ſit $= 2\psi - \zeta = \omega$. Patet autem maximum valorem anguli apparentis ψ eſſe $48^\circ, 35', 25''$, anguli autem veri $= 21^\circ, 0', 53''$, qui reſpondet angulo $\psi = 40^\circ, 12', 11''$ ita vt hic maius ſpatium aperiatur, maiorque coeli portio offeratur.

ψ	ω	ψ	ω
0°, 0′, 0″	0°. 0′, 0″	14, 0, 0	9°, 10′, 47″
1, 0, 0	0, 40, 6	15, 0, 0	9, 48, 45
2, 0, 0	1, 20, 6	16, 0, 0	10, 26, 11
3, 0, 0	2, 0, 1	17, 0, 0	11, 3, 11
4, 0, 0	2, 39, 51	18, 0, 0	11, 39, 41
5, 0, 0	3, 19, 36	19, 0, 0	12, 16, 12
6, 0, 0	3, 59, 14	20, 0, 0	12, 52, 8
7, 0, 0	4, 38, 46	21, 0, 0	13, 27, 24
8, 0, 0	5, 18, 12	22, 0, 0	14, 2, 5
9, 0, 0	5, 57, 32	23, 0, 0	14, 36, 10
10, 0, 0	6, 36, 46	24, 0, 0	15, 9, 31
11, 0, 0	7, 15, 35	25, 0, 0	15, 42, 9
12, 0, 0	7, 54, 11	26, 0, 0	16, 13, 57
13, 0, 0	8, 32, 35	27, 0, 0	16, 44, 53

ψ	ω	ψ	ω
27°,0′,0″	16°,44′,53″	40°,12′,11″	21°, 0′,53″
28, 0, 0	17, 14, 50	41, 0, 0	20, 59, 6
29, 0, 0	17, 43, 42	42, 0, 0	20, 51, 9
30, 0, 0	18, 11, 23	43, 0, 0	20, 35, 13
31, 0, 0	18, 37, 49	44, 0, 0	20, 8, 54
32, 0, 0	19, 2, 40	45, 0, 0	19, 28, 16
33, 0, 0	19, 25, 57	46, 0, 0	18, 26, 22
34, 0, 0	19, 47, 25	47, 0, 0	16, 48, 11
35, 0, 0	20, 6, 49	48, 0, 0	13, 45, 8
36, 0, 0	20, 23, 53	48, 30, 0	10, 1, 27
37, 0, 0	20, 38, 19	48, 35, 0	8, 0, 37
38, 0, 0	20, 49, 36	48, 35, 25	7, 10, 50
39, 0, 0	20, 57, 19	limes	vltimus
40, 0, 0	21, 0, 47		

20. Per ſphaeram ergo vitream ſpatium lucidum ab axe ad angulum 48°,35′,25″ extenſum conſpicitur, in quo autem ſtellae ab axe non vltra 21°,0′,53″ remotae conſpiciuntur; ſtella quidem in ipſo axe ſita ibidem ac ſemel tantum apparet, ſicuti etiam eae, quae minus quam 7°,10′,50″ ab axe diſtant: remotiores vero ſingulae bis cernuntur, et ea, cuius diſtantia eſt 21°,0′,53″ in diſtantia 40°,12′,11″ quaſi duplicata ſpectatur. Quae vero ſtellae vltra 40°,12′,11″ ab axe videntur, eaedem iam in minoribus interuallis erant conſpicuae, nunc autem ordine inuerſo exhibentur.

II. De

II. De Aſpectu coeli per ſegmenta diaphana ſphaerica caſu quo $d = \frac{a}{n}$.

21. Loco igitur oculi O intra ſphaeram aſſumto, vt ſit $d = \frac{a}{n}$, ſeu CB : CO in ratione refractionis $n : 1$, aſpectum coeli per ambo ſegmenta ſimul definire licet. Pro minore ſcilicet ſegmento, poſito angulo apparente EOV $= \Phi$, cum ſit ſin. $\zeta = $ ſin. Φ et ſin. $\eta = \frac{1}{n}$ ſin. Φ, ideoque $\zeta = \Phi$ angulus ab axe verus EOS erit $= 2\Phi - \eta$. Pro maiore autem ſegmento poſito angulo apparente FOV $= \psi$ ob ſin. $\zeta = $ ſin. ψ ideoque $\zeta = \psi$ et ſin. $\eta = \frac{1}{n}$ ſin. ψ, erit angulus ab axe verus FO$s = \psi - \zeta + \eta = \eta$, vnde idem calculus, quo anguli η determinantur, vtriusque ſegmenti phaenomena patefaciet, etiamſi ea non continuitatis lege inter ſe cohaereant. Calculum ergo hunc pro vitro quo $n = 1{,}5467$ inſtituamus Fig. 1.

22. Pro vitro et ſegmento minore

ang. ap. EOV	ang. verus EOs	ang. ap. EOV	ang. verus EOs
0°	0°, 0′, 0″	45°	62°, 47′, 43″
5	6, 46, 11	50	70, 18, 43
10	13, 33, 14	55	78, 1, 14
15	20, 22, 1	60	85, 56, 59
20	27, 13, 29	65	94, 7, 44
25	34, 8, 34	70	102, 35, 15
30	41, 8, 21	75	111, 21, 13
35	48, 13, 57	80	120, 27, 9
40	55, 26, 37	85	129, 54, 12
45	62, 47, 43	90	139, 43, 8

Pro-

Pro vitro et segmento maiore.

ang. app. FOV	ang verus FOr	ang. app. FOV	ang. verus FOr
0°	0°, 0′, 0″	45°	27°,12′,17″
5	3, 13, 49	50	29, 41, 17
10	6, 26, 46	55	31, 58, 46
15	9, 37, 59	60	34, 3, 1
20	12, 46, 31	65	35. 52, 16
25	15, 51, 26	70	37, 24, 45
30	18, 51, 39	75	38, 38, 47
35	21, 46, 3	80	39, 32, 51
40	24, 33, 23	85	40, 5, 48
45	27, 12, 17	90	40, 16, 52

23. Hic ergo nulla ſtella bis ſpectatur, neque etiam vlla conſpectui ſubtrahitur, et tota ſphaera radiis ad oculum directis impletur, ita vt nulla portio obſcura relinquatur. Per ſegmentum vero minus multo maior coeli portio detegitur, ad gradus 279 expanſa dum ea quae per ſegmentum maius cernitur, non vltra 80°,33′,44″ patet. Coelum igitur per ſegmentum minus intuentibus interualla ſtellarum contrahuntur, et quidem maxime circa oras vbi ad ſemiſſem rediguntur. Contra autem per ſegmentum maius ſtellarum interualla amplificantur, atque adeo maxime earum, quae ab axe ad 90° remotae apparent. Ac ſi centrum ſolis ab axe diſtet 139°,43′,8″ ſemiſſis per ſegmentum minus conſpicuus tantum 8′, alter vero per ſegmentum

tum maius viſus propemodum 7 gradus in coelo occupare videbitur, ita vt hoc loco aſpectus maximus maxime turbetur, et continuitatis legi aduerſetur.

24. Similia erunt phaenomena in ſphaera aquea, vbi cum refractio n ſit minor, diſtantia oculi a centro maior eſt capienda, vt inter ambo ſegmenta maior inaequalitas intercedat, contra vero portiones coeli per vtrumque ſeorſim ſpectabiles magis ad aequalitatem reducantur, ſicque perturbatio viſionis imminuatur. Quam ob rem ſuperfluum foret huiusmodi tabulam quoque pro aquae refractione computare; cum autem ſphaera vitrea integra ſingulas ſtellas, quae quidem ſunt conſpicuae, in ternis diuerſis locis ſpectandas exhibeant, dum hoc caſu quo $d=\frac{a}{n}$ ſubito vnica repraeſentatio locum habeat, haud abs re erit caſum quendam intermedium euoluere, quo facilius intelligatur, quomodo ſaltus a caſu priori ad poſteriorem progrediatur; ex quo caſum quo $\frac{d}{a}=\sqrt{\frac{1}{n}}$ examini ſubiiciam.

III. De aſpectu coeli per ſegmenta ſphaerica diaphana caſu quo $d=a\sqrt{\frac{1}{n}}$.

25. Sumto ergo interuallo $CO=CA\sqrt{\frac{1}{n}}$, pro ſegmento minore AOP ſi angulus apparens EOV vocetur $=\Phi$, indeque definiantur anguli acuti ζ et η vt ſit $\sin.\zeta=\sqrt{n}\,\sin.\Phi$ et $\sin\eta=\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\Phi$, erit angulus verus $EOs=\Phi+\zeta-\eta$. At pro ſegmen- Tab. IV. Fig. 1.

 to

to maiore BOP, vocato angulo apparente $FOV = \psi$ indeque deductis angulis pariter acutis ζ et η, vt sit $\sin.\zeta = \sqrt{n}\sin.\psi$ et $\sin.\eta = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin.\psi$, erit angulus verus $FOs = \psi - \zeta + \eta$. Quodsi iam sphaeram statuamus vitream et $n = 1,5467$, erit $\sqrt{n} = 1,24366$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,804078$ vnde ne angulus ζ fiat imaginarius, angulum Φ vel ψ non vltra $53°, 31', 16''$ augere licet; sicque in vtroque segmento illuminatio, vlterius non porrigetur, ita vt vtrinque circa rectam OP spatium $36°, 28', 44''$ obscurum relinquatur, vnde nulli radii ad oculum pertingant.

Pro segmento minore		Pro segmento maiore	
ang. app. EOV	ang. verus EOs	ang. app. FOV	ang. verus FOs
0°	0°, 0', 0''	0°	0°, 0', 0''
5	7, 12, 13	5	2, 47, 47
10	14, 26, 46	10	5, 33, 14
15	21, 45, 55	15	8, 14, 5
20	29, 12, 39	20	10, 47, 21
25	36, 50, 34	25	13, 9, 26
30	44, 34, 40	30	15, 25, 20
35	53, 2, 33	35	16, 57, 27
40	61, 57, 9	40	18, 2, 51
45	71, 55, 12	45	18, 4, 48
50	84, 17, 8	50	15, 42, 52
52	91, 12, 31	52	12, 47, 29
53	96, 22, 37	53	9, 37, 23
53, 31'	102, 36, 48	53, 31'	4, 25, 12
53, 31, 16''	103, 14, 24	53, 31, 16''	3, 48, 8

26. Hic

26 Hic circa ſegmentum minus nihil admodum notatu dignum occurrit, niſi quod, quo magis oculus O a centro C remouetur, tam ſpatium illuminatum quam campus coeli in eo conſpicuus magis contrahatur, ideoque ſtellarum interualla minuantur, ordine ſeruato. In ſegmento autem maiore haec interualla dilatantur, donec perueniatur ad diſtantiam maximam ab axe, quae colligitur 18°, 14′. 37″ et reſpondet angulo apparenti FOV = 42°, 46′, 40″ neque enim ſtellas magis remotas cernere licebit, apparebunt in maioribus ab axe diſtantiis eaedem ſtellae, quae propius conſpiciebantur, ſed ordine inuerſo, quoad recurrat ſtella ab axe 3°, 48′, 8″ remota, quae in extremitate conſpicietur, ita vt omnes ſtellae magis remotae bis repraeſententur; propiores vero tantum ſemel. Vnde colligere licet, ſi oculus magis a centro remoueatur, mox ipſam ſtellam in F ſitam dupliciter conſpici, tum vero etiam quasdam ſtellas triplicari.

27. Haud facile hic pro ſegmento maiore definitur locus, vbi angulus $FOs = \psi - \zeta + \eta$ fit maximus. Cum enim ſit $\text{ſin.}\,\zeta = \frac{nd}{a}\,\text{ſin.}\,\psi$ et $\text{ſin.}\,\eta = \frac{d}{a}\,\text{ſin.}\,\psi$, ob $d\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta = \frac{nd}{a}\,d\psi\,\text{coſ.}\,\psi$ et $d\eta\,\text{coſ.}\,\eta = \frac{d}{a}\,d\psi\,\text{coſ.}\,\psi$, pro hoc loco habetur:

$$0 = 1 - \frac{n\,d\,\text{coſ.}\,\psi}{a\,\text{coſ.}\,\zeta} + \frac{d\,\text{coſ.}\,\psi}{a\,\text{coſ.}\,\eta}.$$

Cum nunc ſit $\frac{nd}{a} = \frac{\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi}$ et $\frac{d}{a} = \frac{\text{ſin.}\,\eta}{\text{ſin.}\,\psi}$, aequatio haec iſtam induet formam:

$$0 = 1 - \frac{tang.\,\zeta}{tang.\,\psi} + \frac{tang.\,\eta}{tang.\,\psi} \text{ ſeu } tang.\,\psi = tang.\,\zeta - tang.\,\eta$$

ita vt angulus FOs ibi ſit maximus, vbi fit tang ψ $=$ tang $\zeta -$ tang. η. Verum ſi hinc angulum ψ definire velimus, ad aequationem quarti ordinis delabimur, quam nonniſi operoſa illa methodo *Carteſiana* reſoluere licet.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

SVPPLEMENTVM.

DE FIGVRA DENTIVM ROTARVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae in volumine quarto nouorum Commentariorum Academiae Petropolitanae de figura dentium rotarum ſum commentatus, calculos ſatis prolixos ſequenti modo contrahi indeque concluſiones ad praxin accommodatas deduci poſſe obſeruaui. Cum igitur ibi oſtendiſſem fieri omnino non poſſe, vt in dentium apprehenſione omnis affrictus tollatur, in id erit incumbendum, vt dum altera rota vniformiter circumagitur, alteri ſimul motus vniformis imprimatur: quo ſimul hoc obtinetur, vt quae vis ad alteram rotandam impenditur, ea perpetuo aequale momentum ad alteram circumagendam, exerceat. Cuiusmodi igitur figuram dentibus vtriusque rotae tribui oporteat, vt hunc ſcopum obtineamus, ſequenti modo ſum inveſtigaturus, et quoniam hoc infinitis modis praeſtari poterit, inde quouis caſu eum, qui ad praxin maxime accommodatus videbitur, eligere licebit.

2. Sint

Tab. V. Fig. 1. 2. Sint igitur A et B centra binarum rotarum ſe mutuo impellentium, quorum diſtantia ponatur $AB = c$; illius autem rotae circa A mobilis dens ſit EOM, huius vero quae circa B eſt mobilis dens ſit FON, qui nunc quidem ab illo in puncto O contingatur. Ad planum contactus in O producatur recta normalis ſecans radium prioris rotae AE in P, radium alterius rotae BF in Q, ipſam vero rectam AB centra rotarum iungentem in T; puncta ſcilicet E et F in apicibus vtriusque dentis aſſumo. His conſtitutis manifeſtum eſt dum rota prior circa A ita circumuertitur, vt angulus BAE augeatur, alteram rotam circa B ita conuerſum iri, vt angulus ABF increſcat, atque ex incrementis horum angulorum vtriusque rotae motus angularis aeſtimabitur, quorum ergo ratio perpetuo conſtans eſſe debet.

3. Ponamus angulos, vti in figura ſunt notati:

$$BAE = \zeta;\ ABF = \eta;\ EPO = \phi;\ FQO = \psi \text{ et } BTO = \omega$$

eritque $\zeta = \omega - \phi$ et $\eta = \psi - \omega$.

Tum vero poſita diſtantia $AB = c$ ſint reliquae lineae in computum ducendae:

$$AP = p;\ BQ = q;\ PO = r;\ QO = s.$$

Hinc erit per reſolutionem triangulorum APT et BQT

ſin.

$\sin.\omega : p = \sin.\zeta : PT = \sin.\Phi : AT$ et

$\sin.\omega : q = \sin.\eta : QT = \sin.\psi : BT$ vnde colligitur

$PT = \frac{p\sin.\zeta}{\sin.\omega}$; $QT = \frac{q\sin.\eta}{\sin.\omega}$; $AT = \frac{p\sin.\Phi}{\sin.\omega}$; $BT = \frac{q\sin.\psi}{\sin.\omega}$.

Cum igitur sit $QT - PT = r + s$ et $AT + BT = c$ erit

$$\frac{q\sin.\eta - p\sin.\zeta}{\sin.\omega} = r + s \text{ et } \frac{p\sin.\Phi + q\sin.\psi}{\sin.\omega} = c.$$

Vnde elicitur:

$$p = \frac{(c\sin.\eta - (r+s)\sin.\psi)\sin.\omega}{\sin.\zeta\sin.\psi + \sin.\eta\sin.\Phi} \text{ et } q = \frac{(c\sin.\zeta + (r+s)\sin.\Phi)\sin.\omega}{\sin.\zeta\sin.\psi + \sin.\eta\sin.\Phi}$$

at est $\sin.\zeta\sin.\psi + \sin.\eta\sin.\Phi = \sin.\omega\sin.(\psi - \Phi)$; ita

$$p = \frac{c\sin.\eta - (r+s)\sin.\psi}{\sin.(\psi - \Phi)} \text{ et } q = \frac{c\sin.\zeta + (r+s)\sin.\Phi}{\sin.(\psi - \Phi)}.$$

4. Sit nunc Π pressio, qua dentes in O se mutuo impellunt, cuius directio cum vtrinque in rectam PQ incidat, erit eius momentum in rotam $A = \Pi p\sin.\Phi$, in rotam vero $B = \Pi q\sin.\psi$. Quare si M sit momentum, qua rota A circumagitur in eum sensum, quo angulus ζ augetur, ob $\Pi = \frac{M}{p\sin.\Phi}$, erit momentum, quo inde altera rota ad motum impelletur circa $B = \frac{q\sin.\psi}{p\sin.\Phi}.M$, hocque fiet in eum sensum, quo angulus η augetur. Quare si rota B continuo ab eodem momento virium sollicitari debeat, dum rota A dato momento M circumagitur, fractio $\frac{q\sin.\psi}{p\sin.\Phi}$ valorem constantem habere debet. Tum autem quoque ratio segmentorum AT et BT constans manere debet, cum sit $AT:BT = p\sin.\Phi : q\sin.\psi$. Ex quo punctum T erit invariabile seu fixum, ita vt sit AT ad BT vt mo-

mentum rotam A circumagens ad momentum rotam B circumagens.

5. Cum ſit vti inuenimus:

$$p\,\text{ſin.}\,\phi + q\,\text{ſin.}\,\psi = c\,\text{ſin.}\,\omega \quad \text{et} \quad q\,\text{ſin.}\,\eta - p\,\text{ſin.}\,\zeta = (r+s)\,\text{ſin.}\,\omega$$

ſi rationem habeamus relationis angulorum:

$$\zeta = \omega - \phi \quad \text{et} \quad \eta = \psi - \omega$$

hosque valores in poſteriori aequatione ſubſtituamus, erit:

$$q\,\text{ſin.}\,\psi\,\text{coſ.}\,\omega - q\,\text{coſ.}\,\psi\,\text{ſin.}\,\omega - p\,\text{coſ.}\,\phi\,\text{ſin.}\,\omega + p\,\text{ſin.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\omega = (r+s)\,\text{ſin.}\,\omega$$

hincque ob $q\,\text{ſin.}\,\psi\,\text{coſ.}\,\omega + p\,\text{ſin.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\omega = c\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega$, diuidendo per ſin. ω adipiſcimur:

$$c\,\text{coſ.}\,\omega - q\,\text{coſ.}\,\psi - p\,\text{coſ.}\,\phi = r + s \quad \text{ſeu}$$

$$p\,\text{coſ.}\,\phi + q\,\text{coſ.}\,\psi = c\,\text{coſ.}\,\omega - r - s$$

ſimili modo ſi hos valores $\phi = \omega - \zeta$ et $\psi = \omega + \eta$ in priori aequatione ſubſtituamus, prodit

$$p\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\omega - p\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\omega + q\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\omega + q\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\omega = c\,\text{ſin.}\,\omega$$

quare cum ſit $q\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\omega - p\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ}\,\omega = (r+s)\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega$, habebimus per ſin. ω diuidendo:

$$p\,\text{coſ.}\,\zeta + q\,\text{coſ}\,\eta + (r+s)\,\text{coſ.}\,\omega = c \quad \text{ſeu}$$

$$p\,\text{coſ.}\,\zeta + q\,\text{coſ.}\,\eta = c - (r+s)\,\text{coſ.}\,\omega.$$

Tab. V. Fig. 2. 6. Praeter has determinationes ſatis obuias notari oportet pro curua EOM dari certam relationem inter ternas variabiles $AP = p$, $PO = r$ et angulum

gulum $EPO = \Phi$, quam hic imprimis inuestigari oportet. Consideremus ergo statum proximum in quo $Ap = p + dp$; $po = r + dr$, et $Epo = \Phi + d\Phi$; vnde productis normalibus OP, op ad concursum V, erit VO radius osculi curuaturae dentis in O. Centro V insuper ducatur arculus Pr et cum sit $Pp = -dp$; $pr = dr$; ang. $Ppr = \Phi + d\Phi$, et $OVo = d\Phi$ colligimus:

$$pr = dr = -dp\,\text{cos.}\,\Phi,\quad Pr = -dp\,\text{sin.}\,\Phi;\ \text{et}\ PV = \frac{-dp\,\text{sin.}\,\Phi}{d\Phi}$$

hincque radium osculi $VO = r - \frac{dp\,\text{sin.}\,\Phi}{d\Phi} = r + \frac{dr\,\text{sin.}\,\Phi}{d\Phi\,\text{cos.}\,\Phi} = \frac{d.r\,\text{sin.}\,\Phi}{d\Phi\,\text{cos.}\,\Phi}$ tum vero elementum curuae $Oo = rd\Phi + \frac{dr\,\text{sin.}\,\Phi}{\text{cos.}\,\Phi} = \frac{d.r\,\text{sin.}\,\Phi}{\text{cos.}\,\Phi}$. Quod cum simili modo se habeat pro altero dente habebimus has nouas determinationes:

$dr = -dp\,\text{cos.}\,\Phi$; rad. osc. curuae EM in $O = \frac{d.r\,\text{sin.}\,\Phi}{d\Phi\,\text{cos.}\,\Phi}$;
elementum $Oo = \frac{d.r\,\text{sin.}\,\Phi}{\text{cos.}\,\Phi}$

$ds = -dq\,\text{cos.}\,\psi$; rad. osc. curuae FN in $O = \frac{d.s\,\text{sin.}\,\psi}{d\psi\,\text{cos.}\,\psi}$;
elementum $O\omega = \frac{d.s\,\text{sin.}\,\psi}{\text{cos.}\,\psi}$.

7. Cum igitur nunc dentes se mutuo in puncto O contingant, elapso autem temporis elemento puncto o et ω inuicem applicentur, euidens est interea affrictum fieri per spatiolum $oO + \omega O$ ita vt totum spatiolum affrictus sit $= \frac{d.r\,\text{sin.}\,\Phi}{\text{cos.}\,\Phi} + \frac{d.s\,\text{sin.}\,\psi}{\text{cos.}\,\psi}$; quod si ad nihilum redigi posset, omnis frictio tolleretur. At in superiori dissertatione ostendi hoc fieri non posse: semper ergo aderit frictio, quae in

eo maius ſpatium excretur, quo maiorem valorem obtinuerit formula $\frac{d.\,r\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi} + \frac{d.\,s\,\text{ſin.}\,\psi}{\text{coſ.}\,\psi}$. Quod enim ipſam frictionis quantitatem attinet, ea eſt preſſioni mutuae proportionalis, quae preſſio fuerit $= \Pi$, frictio certae cuipiam eius parti $\delta\Pi$ aequabitur, cuius directio cum ſit normalis ad OP, erit eius momentum in rotam $A = \delta\Pi(r + p\,\text{coſ.}\,\Phi)$, in rotam vero $B = \delta\Pi(s + q\,\text{coſ.}\,\psi)$, quorum momentorum ſumma eſt $= \delta\Pi(r + s + p\,\text{coſ}\,\Phi + q\,\text{coſ.}\,\psi) = \delta\Pi c\,\text{coſ.}\,\omega$. Vnde momentum vis rotam A circumagentis, quod ponimus $= M$ debet eſſe $M = \Pi p\,\text{ſin.}\,\Phi + \delta\Pi(r + p\,\text{coſ.}\,\Phi)$.

8. His expoſitis perpendamus ipſum motum rotarum, et dum angulus ζ elemento $d\zeta$ augetur, videamus quantum angulus η interea creſcat. Commodiſſime hoc colligimus ex aequatione $c\,\text{coſ.}\,\omega = r + s + p\,\text{coſ.}\,\Phi + q\,\text{coſ.}\,\psi$, quae differentiata dat

$$-c\,d\omega\,\text{ſin.}\,\omega = dr + ds + dp\,\text{coſ.}\,\Phi - p\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + dq\,\text{coſ.}\,\psi - q\,d\psi\,\text{ſin.}\,\psi$$

at $dr = -dp\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $ds = -dq\,\text{coſ.}\,\psi$ vnde fit

$$c\,d\omega\,\text{ſin.}\,\omega = p\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + q\,d\psi\,\text{ſin.}\,\psi$$

quare cum ſit $c\,\text{ſin.}\,\omega = p\,\text{ſin.}\,\Phi + q\,\text{ſin.}\,\psi$ erit

$$0 = (d\Phi - d\omega)\,p\,\text{ſin.}\,\Phi + (d\psi - d\omega)\,q\,\text{ſin.}\,\psi$$

verum eſt $d\omega - d\Phi = d\zeta$ et $d\psi - d\omega = d\eta$, vnde ſequitur:

$$p\,d\zeta\,\text{ſin.}\,\Phi = q\,d\eta\,\text{ſin.}\,\psi \text{ ideoque } \frac{p\,\text{ſin.}\,\Phi}{q\,\text{ſin.}\,\psi} = \frac{d\eta}{d\zeta}.$$

Angu-

Angulorum ergo ζ et η mutationes eandem inter se tenent rationem quam momenta ex pressione Π nata.

9. Nunc igitur effici debet, vt haec ratio perpetuo sit constans, seu vt motus angularis rotae A ad motum angularem rotae B constanter eandem seruet rationem. Cum igitur ratio $p\,\text{fin.}\,\Phi : q\,\text{fin.}\,\psi$ constans esse debeat, erit punctum T fixum. Statuamus ergo $AT = a$ et $BT = b$ vt fit $c = a + b$, eritque $p\,\text{fin.}\,\Phi = a\,\text{fin.}\,\omega$ et $q\,\text{fin.}\,\psi = b\,\text{fin.}\,\omega$; hinc neglecta frictione, si virium momentum rotam A circumagens sit $= M$ altera rota circumagetur momento $= \frac{b}{a} M$. Tum vero ratio motuum angularium erit $\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{a}{b}$, seu $a\,d\zeta = b\,d\eta$, hincque $a\zeta = b\eta$: vnde dum rota A integram reuolutionem absoluit, vt sit $\zeta = 360°$ altera rota circumagetur angulo $= \frac{a}{b} \cdot 360°$, scilicet dum rota A facit b reuolutiones rota B faciet interea a, sumtis pro a et b numeris, qui his lineis $AT = a$ et $BT = b$ sint proportionales.

10. Hinc data figura dentis EOM dentis alterius rotae FON figura et positio determinari poterit. Pro figura enim dentis EOM ponamus dari aequationem inter distantiam $AP = p$ et angulum $EPO = \Phi$, vnde erit $PO = r = h - \int dp\,\text{cof.}\,\Phi$: hincque statim reperitur angulus ω cum sit $\text{fin.}\,\omega = \frac{p \cdot \text{fin.}\,\Phi}{a}$; scilicet ad rectam OP productam applicetur $AT = a$,

quod cum duplici modo fieri possit, duplex valor pro angulo ω obtinetur, alter acutus alter obtusus, quo inuento erit angulus $\zeta = \omega - \Phi$. Tum ex positione rectae AT innotescit, sumta $AB = a + b = c$, centrum alterius rotae B, hincque porro $q\,\text{sin.}\,\zeta = b\,\text{sin.}\,\omega = \frac{bp\,\text{sin.}\,\Phi}{a}$. Verum etiam esse debet $q\,\text{cos.}\,\psi = c\,\text{cos.}\,\omega - r - s - p\,\text{cos.}\,\Phi$, existente $ds = -dq\,\text{cos.}\,\psi$. Vel cum sit $ad\zeta = bd\eta$ seu $cd\omega = ad\Phi + bd\psi$ ob $\zeta = \omega - \Phi$ et $\eta = \psi - \omega$, erit $a\Phi + b\psi = c\varepsilon + c\omega$ denotante ε angulum quendam constantem pro lubitu accipiendum: vnde definitur angulus $FQO = \psi = \frac{c\varepsilon + c\omega - a\Phi}{b}$, seu $\eta = \frac{c\varepsilon + a\omega - a\Phi}{b} = \frac{c\varepsilon + a\zeta}{b}$; sicque habetur positio rectae BF, in qua capiatur $BQ = q = \frac{bp\,\text{sin.}\,\Phi}{a\,\text{sin.}\,\psi}$. Ex puncto autem Q, quod etiam recta TPO producta indicat, cognoscitur dentis FON punctum O.

11. Hinc ergo ex quolibet dentis EOM puncto O definitur punctum respondens O dentis alterius FON. Cum autem actio huiusmodi binorum dentium per breue temporis spatium durare soleat, sufficiet pro elemento Oo prioris dentis Oo conueniens elementum alterius dentis $O\omega$ determinare. Hunc in finem quaeri oportet radium curuedinis elementi $O\omega$, qui iam supra inuentus est $= \frac{d.\,s\,\text{sin.}\,\psi}{d\psi\,\text{cos.}\,\psi} = s + \frac{d\,s\,\text{sin.}\,\psi}{d\psi\,\text{cos.}\,\psi} = s - \frac{dq\,\text{sin.}\,\psi}{d\psi}$. Cum autem sit $q\,\text{sin.}\,\psi = \frac{b\,p\,\text{sin.}\,\Phi}{a}$ erit $d\eta\,\text{sin.}\,\psi = \frac{b}{a}d.\,p\,\text{sin.}\,\Phi - qd\psi\,\text{cos.}\,\psi$ ita vt sit iste radius curuedinis $= s + q\,\text{cos.}\,\psi - \frac{bd.\,p\,\text{sin.}\,\Phi}{a\,d\psi}$.

Verum

Verum quia $d\psi = \frac{c\,d\omega - a\,d\Phi}{b}$ et $d\omega \operatorname{cos}.\omega = \frac{d.\,p\operatorname{sin}.\Phi}{a}$ habebimus; $d\psi = \frac{c\,d.\,p\operatorname{sin}.\Phi}{ab\operatorname{cos}.\omega} - \frac{a\,d\Phi}{b} = \frac{c\,d.\,p\operatorname{sin}.\Phi - aa\,d\Phi\operatorname{cos}.\omega}{ab\operatorname{cos}.\omega}$, ideoque radium curuedinis quaesitum $= s + q\operatorname{cos}.\psi - \frac{bb\operatorname{cos}.\omega\, d.\,p\operatorname{sin}.\Phi}{c\,d.\,p\operatorname{sin}.\Phi - aa\,d\Phi\operatorname{cos}.\omega}$. At curuae datae EOM radius curuedinis in O est $= r - \frac{dp\operatorname{sin}.\Phi}{a\Phi} = r + p\operatorname{cos}.\Phi - \frac{d.\,p\operatorname{sin}.\Phi}{d\Phi}$, vnde ob $r + s + p\operatorname{cos}.\Phi + q\operatorname{cos}.\psi = c\operatorname{cos}.\omega$, summa horum duorum radiorum curuedinis est $= c\operatorname{cos}.\omega - \frac{bb\operatorname{cos}.\omega.\, d.\,p\operatorname{sin}.\Phi}{c\,d.\,p\operatorname{sin}.\Phi - aa\,d\Phi\operatorname{cos}.\omega} - \frac{d.\,p\operatorname{sin}.\Phi}{d\Phi}$.

12. Quia positio rectae BF ad dentis figuram non pertinet, sed data figura pro arbitrio assumi potest, quemadmodum etiam ex constante angulo ε arbitrario intelligitur, sufficiet remota penitus ex calculo recta BF quantitatem radii osculi OQ notasse, vnde etiam ob $s + q\operatorname{cos}.\psi = c\operatorname{cos}.\omega - r - p\operatorname{cos}.\Phi$, quantitates q, s cum angulo ψ ex calculo euanescunt, ita vt sit iste radius osculi:

$$c\operatorname{cos}.\omega - r - p\operatorname{cos}.\Phi - \frac{bb\operatorname{cos}.\omega.\, d.\,p\operatorname{sin}\,\Phi}{c\,d.\,p\operatorname{sin}.\Phi - aa\,d\Phi\operatorname{cos}.\omega}$$

cuius quantitate cognita, quoniam rectae TPO positio constat in ea vltra O producta capiatur OQ aequalis illi quantitati eritque Q centrum; ex quo exiguus arcus circularis radio QO descriptus dabit conuenientem figuram dentis FON. In sequentibus igitur exemplis constructionem horum dentium accuratius perpendamus et describamus.

Exem-

Exemplum I.

13. Pro rota priori circa A mobili fiat contactus in plano per A transeunte, seu curua EM in ipsum radium AE et punctum contactus O in punctum P incidat. Cum ergo recta TP ad radium AE erit normalis, erit $\Phi = 90°$ et $r = 0$, vnde $\sin.\omega = \frac{p}{a}$; et $\zeta = \omega - 90°$, atque pro altero dente ob $d\Phi = 0$ erit radius curuedinis:

$$OQ = c\cos.\omega - \frac{bb\cos.\omega}{c} = \frac{cc-bb}{c}\cos.\omega.$$

Primum ergo patet distantiam $p = AP$ maiorem accipi non posse quam $AT = a$, sin autem capiatur $p = a$, fit $\omega = 90°$, $\zeta = 0$, et $OQ = 0$, ita vt dens FON curuaturam infinite magnam habere debeat, quod cum non conueniat, necesse est vt distantia $AP = p$ minor accipiatur quam a. Vnde si pro momento actionis medio statuatur $p = f$, vt sit $\sin.\omega = \frac{f}{a}$ fiet $OQ = \frac{cc-bb}{c}.\frac{\surd(aa-ff)}{a} = \frac{c+b}{c}\surd(aa-ff)$.

Tab. V. Fig. 3. 14. Constructio ergo ita se habebit; sumto rotae prioris radio $AE = a$, capiatur in eo punctum P centro A propius, indeque erecto perpendiculo PTQ ex A applicetur $AT = AE = a$, eaque producatur in B vt sit $BT = b$ erit B centrum alterius rotae. Tum ob $AP = f$, et $AT = a$, erit $PT = \surd(aa-ff)$; hinc capi oportet $PQ = \frac{c+b}{c}.PT = PT + \frac{BT}{AB}.PT$. Quare ducta ad EA in A perpendipendiculari $AD = PT$, recta BD ipſum punctum Q indicabit, ex quo radio QP arcus circularis FPN deſcriptus dabit figuram dentis ad alteram rotam B pertinentis. Hunc autem arcum valde paruum eſſe oportet, neque maiorem, quam vt dum dentes ſequentes ſe mutuo apprehendunt, hic omnis actio ceſſet; quem in finem ſi F et N ſint termini iſtius dentis, vltra eos arcum continuari non conuenit, ſed potius dentem vltra F et N ita excidi oportet, vt nullus amplius contactus hic fiat, cum ſequentes dentes ſe mutuo prehendere coeperint.

Exemplum 2.

15. Sit pro rota A figura dentis iterum plana, neque vero per centrum rotae A tranſiens. Ex A ducatur radius APe illi plano parallela, eritque ϕ angulus rectus, et $PO = r$ quantitas conſtans $= h$, vnde erit $\text{ſin.}\,\omega = \frac{p}{a}$, ita vt p maior quam a capi nequeat. Tum vero ob $\phi = 90^\circ$, et $d\phi = 0$, reperitur radius oſculi $OQ = c\,\text{coſ.}\,\omega - h - \frac{bb\,\text{coſ.}\,\omega}{c}$ $= \frac{cc - bb}{c}\text{coſ.}\,\omega - h$. Cum autem ſit $\text{coſ.}\,\omega = \frac{\sqrt{(aa - pp)}}{a}$, erit $OQ = \frac{c + b}{c}\sqrt{(aa - pp)} - h$, vnde haec conſtructio fluit: ſi EOM ſit figura dentis rotae A, et in medio actionis contactus fiat in O, ducatur recta QOP ad EM normalis in eamque ex A demittatur perpendiculum AP; tum applicetur $AT = a$, et producatur in B, vt ſit $TB = b$, erit B centrum al- Tab. VI. Fig. 4.

 terius

terius rotae. Ad AP in A conſtituatur perpendicularis AD=PT, iunctaque BD dabit punctum Q ex quo radio =QO deſcribatur arcus circuli FON, hicque praebebit figuram dentis pro rota B. Si PO euaneſcat, habetur caſus exempli praecedentis: ſiue autem PO maior fuerit minorue, ſiue etiam negatiua conſtructio eadem manet.

Exemplum 3.

16. Si pro rota A figura dentis ſit arcus circuli EOM centro P deſcripti, ex A ducatur per P radius APe ſitque AP$=f$, et radius circuli PO$=r=h$. Erit ergo $\text{ſin.}\,\omega = \frac{f\,\text{ſin.}\,\Phi}{a}$, et $d.p\,\text{ſin.}\,\Phi = d.f\,\text{ſin.}\,\Phi = fd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$ pro altera rota inuenitur radius curuedinis $OQ = c\,\text{coſ.}\,\omega - h - f\,\text{coſ.}\,\Phi - \frac{bbf\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\omega}{cf\,\text{coſ.}\,\Phi - aa\,\text{coſ.}\,\omega}$.
Tab. VI. Fig. 5. Sumto ergo radio AP$=f$, angulo ePO$=\Phi$, et PO$=h$, vt ſit arcus EOM centro P deſcriptus figura dentis rotae A, iungatur AT$=a$, ſumaturque TB$=b$, erit B centrum alterius rotae. In PO productam ex A et B demittantur perpendicula AR et BS erit $PR = f\,\text{coſ.}\,\Phi$; $TR = a\,\text{coſ.}\,\omega$, $TS = b\,\text{coſ.}\,\omega$; et $RS = c\,\text{coſ.}\,\omega$; vnde conficitur

$$OQ = RS - PO - PR - \frac{BT.PR.TS}{AB.PR - AT.TR} \text{ ſiue}$$

$$OQ = SO - \frac{BT.PR.TS}{AB.PR - AT.TR} \text{ hincque}$$

$$SQ = \frac{BT.PR.TS}{AB.PR - AT.TR}$$

vnde

vnde per constructionem geometricam definitur punctum Q quod est centrum arcus FON figuram dentis rotae B repraesentantis.

17. Ex his perspicuum est amborum dentium EOM et FON descriptionem pendere a punctis P et Q in recta RS accipiendis, quae si fuerint debite inuenta, punctum O pro lubita assumere licet, per quod centris P et Q arcus illi EOM et FON ducantur. Quare posita recta AB rotarum centra A et B iungente, eaque in T diuisa, vt sit $AT = a$, $BT = b$, primo per T pro lubitu ducatur recta RS, in eamque ex A et B demittantur perpendicula AR et BS, ac tum vti vidimus puncta P et Q ita capi necesse est, vt sit

$$AB.\,RP.\,SQ = AT.\,RT.\,SQ + BT.\,RP.\,ST.$$

Vel cum sit $AB : AT : BT = RS : RT : ST$ erit

$$(RT+ST)RP.\,SQ - RT.\,RT.\,SQ - ST^2.\,RP = 0$$

vel $-RT.\,SQ.\,TP - ST.\,RP.\,RQ = 0$

hincque $\frac{RT.\,TP}{RP} + \frac{ST.\,TQ}{SQ} = 0.$

Vnde patet si punctum P intra TR cadat, punctum Q extra rectam TS capi debere, secus ac figura ostendit.

18. Pro situ ergo binorum huiusmodi punctorum P et Q sequens constructio negotium facillime conficere videtur: Tab. VI. Fig. 6.

Ad rectam RS in T normaliter constituatur recta ipsi aequalis rs, vt sit $Tr = TR$ et $Ts = TS$: tum per T ducatur recta indefinita GTH angulos rectos RTs, STr bisecans, in qua sumto pro lubitu puncto V, si per id ex punctis r et s agantur rectae rV et sV, eae in recta RS producta si opus fuerit, dabunt bina puncta P et Q. Analytice autem haec puncta ita definiri possunt, cum sit $TR = a \operatorname{cof.} \omega$, et $TS = b \operatorname{cof.} \omega$, ponatur $TP = x$ et $TQ = y$, eritque ex superiori aequatione $\frac{a x \operatorname{cof.} \omega}{a \operatorname{cof.} \omega - x} + \frac{b y \operatorname{cof.} \omega}{b \operatorname{co.} \omega - y} = 0$, seu $\frac{a x}{a \operatorname{cof.} \omega - x} = \frac{b y}{y - b \operatorname{cof.} \omega}$. Statuatur vtrumque membrum $= u$, et sumta hac linea u pro lubitu, ambae distantiae x et y ita definientur, vt sit:

$$TP = x = \frac{a u \operatorname{cof.} \omega}{a + u} \text{ et } TQ = y = \frac{b u \operatorname{cof.} \omega}{u - b}$$

suntque P et Q centra, ex quibus arcus circulares EOM et FON per idem punctum O etiam pro lubitu assumendum duci debent.

Constructio generalis Figurae binorum dentium se mutuo prehendentium.

Tab. VII. Fig. 7. 19. Sint A et B centra binarum rotatum se mutuo impellentium, quorum distantia AB ita secetur in C, vt AC ad BC sit in ratione reciproca motuum angularium, et vocetur $AC = a$ et $BC = b$. Tum per C sub angulo quocunque $ACP = BCQ = \omega$ agatur

agatur recta GH, in qua capiantur puncta P et Q, vt sit:

$CP = \frac{au \cos.\omega}{a+u} = a\cos.\omega - \frac{aa\cos.\omega}{a+u}$ et $CQ = \frac{bu\cos.\omega}{u-b} = b\cos.\omega + \frac{bb\cos.\omega}{u-b}$

sumta etiam pro lubitu quantitate u. Denique in eadem recta GH sumto etiam pro lubitu puncto O, centris P et Q per O describantur arcus circulares EOM et FON, quorum ille dabit figuram dentis rotae A, hic vero figuram dentis rotae B. Hic igitur tres res arbitrio nostro relinquuntur, primo scilicet angulus ACG sub quo recta GH per punctum C ducitur, secundo quantitas u: ac tertio punctum O, in quo fit contactus, medio actionis momento, dum hi duo dentes se mutuo impellunt. Vnde patet infinities infinitis modis conditiones praescriptas obtineri posse, vt ambo motus aeque ac vis impellentis momenta perpetuo eandem inter se seruent rationem.

20. Circa haec autem, quae arbitrio nostro relinquuntur primum obseruo angulum $ACG = \omega$ rectum statui non posse quia alio, quin vel ambae distantiae CP et CQ euanescunt, vel alterutra saltem, vnde alter dens vel ambo figuram nimis curuam habere deberent, quam vt amplitudo tota, per quam fit contactus durante actione pro arcu circulari haberi possit; ex quo angulum ACG vel modice acutum vel obtusum capi oportet. Deinde obseruo ob eandem rationem quantitatem u neque

 eua-

euanefcentem neque nimis paruam affumi poffe: modice igitur magnam fiue pofitiuam fiue negatiuam capi conueniet; vbi imprimis notari meretur cafus, quo capitur $u = \infty$, quia fit $CP = a \cos. \omega$ et $CQ = b \cos \omega$, ita vt puncta P et Q fint ea ipfa, in quae perpendicula ex A et B in rectum GH demiffa cadunt; tum enim erit CP ad CQ vt AC ad BC. Denique punctum O non longe a puncto C accipi conuenit; ac fi cafu modo memorato $u = \infty$ in ipfo puncto C capiatur, dentes ipfis radiis rotarum fient proportionales et inter fe fimiles.

De amplitudine dentium eorumque actione mutua tota.

21. Dum rota A momento virium $= M$ in gyrum agitur, inter dentes fe mutuo impellentes oritur preffio $\Pi = \frac{M}{p \sin. \Phi} = \frac{M}{a \sin. \omega}$, vbi $a \sin. \omega$ eft perpendiculum ex A in rectam GH demiffum. Haec ergo preffio foret minima, fi angulum ω rectum accipere liceret, vnde ne preffio fiat nimis magna, angulum ω tam parum a recto difcrepare conuenit; quantum praecedentes conditiones permittunt. Deinde cum in medio actionis contactus fiat in puncto O, ex dentium numero iudicari poteft, quamdiu bini dentes in fe mutuo agere debeant, vt inde amplitudo vtriusque arcus EOM et FON definiatur. Sit ergo m numerus dentium in rota A et n numerus

merus dentium in rota B, ac primo quidem necesse est vt sit $m:n = a:b$. Iidem ergo bini dentes tamdiu in se mutuo agunt, quoad rota B motu angulari absoluerit angulum $= \frac{360^\circ}{m}$, seu rota B angulum $= \frac{360^\circ}{n}$ Statuamus ergo $d\zeta = \frac{180}{m}$, et elementum curuae EOM huic differentiali $d\zeta$ conueniens, dabit dimidium arcum circularem EOM; similique modo ex differentiali $d\eta = \frac{180}{n}$ dimidius arcus FON innotescet.

22. Cum nunc in figura 1. si P sit centrum arcus EOM, et $PO = r$ radius, dum angulus Φ incrementum $d\Phi$ capit, punctum contactus O in o transfertur, vt sit $Oo = r\,d\Phi$. Tum vero notetur esse $d\zeta = d\omega - d\Phi$, et ob $\sin.\omega = \frac{p \sin.\Phi}{a} = \frac{f \sin.\Phi}{a}$ posito $AP = f$, erit $d\omega \cos.\omega = \frac{f\,d\Phi \cos.\Phi}{a}$ et $d\omega = \frac{f\,d\Phi \cos.\Phi}{a \cos.\omega}$, vnde colligitur $d\zeta = \frac{f\,d\Phi \cos.\Phi}{a \cos.\omega} - d\Phi$ et $d\Phi = \frac{a \cos.\omega}{f \cos.\Phi - a \cos.\omega}\, d\zeta$. Quocirca erit elementum arcus $Oo = \frac{a\,r \cos.\omega}{f \cos.\Phi - a \cos.\omega}\, d\zeta$. Scribamus iam $\frac{180^\circ}{m}$ loco $d\zeta$, et pro dente EOM habebimus dimidiam amplitudinem $OE = OM = \frac{a \cos.\omega}{f \cos.\Phi - a \cos.\omega} \cdot \frac{180}{m} \cdot r$: ideoque pro fig. 5. adipiscimur $OE = OM = \frac{TR}{TP} \cdot PO \cdot \frac{180^\circ}{m}$, simulque intelligimus punctum M initio actionis fuisse in contactu, punctum E vero in fine. Simili modo pro altero dente erit $OF = ON = \frac{TS}{TQ} \cdot QO \cdot \frac{180^\circ}{n}$; atque initio actionis puncta M et N in fine autem puncta E et F sibi mutuo applicantur.

Con-

Constructio dentium.

Tab.VII. Fig. 8.

23. Definita arcuum circularium, quibus dentes formari conuenit, amplitudine, facile erit singulos dentes exscindere. Cum autem punctum O vbi in media binorum dentium actione fit contactus, arbitrio nostro relinquatur, commodissime id in ipsa recta AB ideoque in eius puncto C capitur, vt actio, in vtrumuis sensum rotae agantur, maneat similis. Quare si A et B sint centra rotarum, ac rota A habere debeat m dentes, rota vero B, n dentes, secetur recta AB in C, vt sit $AC:BC = m:n$, et centris A et B per C ducantur circuli, quorum illius periphaeria in m partes aequales in punctis C, a, a', α, α', huius vero in n partes aequales in punctis C, b, b', β, β' diuidatur, vt sint arcus $Ca = C\alpha = \frac{360}{m}$ graduum et $Cb = C\beta = \frac{360}{n}$ graduum. Seu positis interuallis $AC = a$, $BC = b$ et ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, erunt ipsi arcus $Ca = C\alpha = \frac{2\pi a}{m}$ et arcus $Cb = C\beta = \frac{2\pi b}{n}$, qui ob $a:b = m:n$ sunt inter se aequales.

24. Deinde per C vtcunque oblique agatur recta RS in quam ex A et B demittantur perpendicula AR et BS, atque vt vidimus haec ipsa puncta R et S pro centris arcuum dentes formantium accipi possunt, quem casum vtpote simplicissimum merito potissimum consideramus. Centro igitur

igitur R per C describatur arcus ECM, vt sit $EC = CM = CR.\frac{180^\circ}{m}$, et totus arcus $ECM = CR.\frac{360^\circ}{m}$ qui ergo se habebit ad arcum Ca vt $CR : CA$, seu totidem erit graduum. Simili modo centro S per C ducatur arcus FCN vt sit $CF = CN = CS.\frac{180^\circ}{n}$, et totus arcus $FCN = CS.\frac{360^\circ}{n}$, qui ergo ad arcum Cb eandem habet rationem; vnde cum sit $Cb = Ca$, etiam arcus ECM et FCN magnitudine erunt aequales. Addatur vtrique arcui vtrinque particula Ee, Mm et Ff, Nn, quae autem intra vtriusque arcus continuationes cadant, vt nunquam ad contactum perueniant, dabuntque ductis eA et fB figurae $eECMmp$ et $fFCNnq$ semisses vtriusque dentis; quae ad alteram partem rectarum ep et fq similiter descriptae dentes integros referent.

25. Verum hic imprimis obseruandum est totam vtriusque dentis crassitiem non superare debere semissem interualli Ca vel Cb, quia inter binos dentes vnius rotae tantum spatii relinqui debet, cui dens alterius rotae inseri queat. Quare si quantitatem arcuum $Ca = Cb$ ponamus $= e$, crassities vnius dentis non superare debet $\frac{1}{2}e$. Ponamus ergo angulum $ACR = BCS = \omega$ et cum sit arcus $ECM = e\cos.\omega$, eiusque semissis $CE = CM = \frac{1}{2}e\cos.\omega$, punctorum extremorum E et M neglecta curuatura distantiae ab axe AB erunt $= \frac{1}{2}e\cos.\omega^2$, quarum summa $e\cos.\omega^2$ dabit dimidiam crassitiem vnius den-

 tis,

tis, vnde tota craſſities erit $= 2e \cos \omega^2$, quae autem ob adiectam particulam Ee aliquantillum erit maior: ex quo quantitas $2e \cos.\omega^2$ minor eſſe debet quam $\frac{1}{2}e$, ideoque $\cos \omega^2 < \frac{1}{4}$, et $\cos.\omega < \frac{1}{2}$, quocirca angulum $ACR = \omega$ maiorem $60°$ capi oportet, neque ergo hic arcus amplius arbitrio noſtro relinquitur.

26. Perinde ſe res habet quando arcus ECM et FCN non ex centris R et S ſed ex aliis punctis P et Q ſupra definitis deſcribuntur. Sumta enim littera u negatiua, ſit

$$CP = a \cos.\omega + \frac{aa \cos.\omega}{u - a} = CR\left(1 + \frac{a}{u - a}\right) \quad \text{et}$$
$$CQ = b \cos.\omega - \frac{bb \cos.\omega}{b + u} = CS\left(1 - \frac{b}{b + u}\right)$$

ac centris P et Q deſcriptis arcubus ECM et FCN pro eorum amplitudine eſſe debet:

$$CE = CM = CR \cdot \frac{180°}{m} = \tfrac{1}{2}e \cos.\omega \quad \text{et}$$
$$CF = CN = CS \cdot \frac{180°}{n} = \tfrac{1}{2}e \cos.\omega$$

ob $Ca = Cb = e = a \cdot \frac{360}{m} = b \cdot \frac{360}{n}$ et $CR = a \cos.\omega$ atque $CS = b \cos.\omega$. Hinc vbicunque puncta P et Q ſuperiori determinationi conformiter accipiantur, arcus ECM et FCN eandem magnitudinem $= e \cos.\omega = \frac{CR}{CA} \cdot Ca$ habere debent ex quo vti caſu praecedente craſſities ſingulorum dentium prodit $= 2e \cos.\omega^2$ neglectis particulis Ee et Ff, vnde vt ibi angulus ω maior eſſe debet quam $60°$. Tum

vero

vero longitudo dentis cuiusque ep maior esse debet quam $e\cos.\omega\sin.\omega = \frac{1}{2}e\sin.2\omega$.

27. Quantitatem u ita accipere licet, vt ambo centra P et Q a puncto C aequaliter remoueantur, radiique CP et CQ fiant inter se aequales, vnde commodissima dentium constructio peti videtur, propterea quod, dum ambo arcus ECM et FCN aeque fiunt curui, neuter nimis erit curuus quod eueniret, si radii CP et CQ essent inaequales; tum enim alteruter necessario foret minor. Statuamus ergo $CP = CQ$ seu $\frac{au\cos.\omega}{u-a} = \frac{bu\cos.\omega}{b+u}$, erit $u = \frac{2ab}{b-a}$, et $u-a = \frac{a(a+b)}{b-a}$, vnde $CP = CQ = \frac{2ab\cos.\omega}{a+b}$ seu $CP = CQ = \frac{2CR.CS}{CR+CS}$. Quare super recta RS in I bisecta describatur circulus, et ex C applicetur recta CK ipsius radio aequalis, qua in L producta, capiatur $CP = CQ = CL$, atque centris P et Q per punctum C describantur arcus ECM et FCN, ex quibus vt ante dentes vtriusque rotae formabuntur, qui inter se erunt aequales, quantum quidem rotarum inaequalitas permittit. Tab. VIII. Fig. 9.

28. Hinc nanciscimur istam constructionem dentium: Recta iungente rotarum centra AB ita in C diuisa, vt sit AC ad BC vt dentium numerus rotae A ad dentium numerum rotae B, per C centris A et B describantur circuli, qui in punctis C, a, a', α, α' et C, b, b', β, β' pro numero dentium in partes aequales diuidantur. Tum per C Fig. 10.

 agatur

agatur recta RS cum AB angulum 60° vel aliquanto maiorem constituens, in quam ex A et B demissis perpendiculis AR et BS, capiatur $CP = CQ = \frac{2CR.CS}{RS}$, et centris P et Q per C describantur arcus circulares ECM et FCN, in C bisecti, vt sit vterque totus arcus ECM vel FCN ad arcum C*a* vel C*b* vt CR ad CA seu in ratione subdupla, si quidem angulus ACR sit 60°. Vtrinque adiiciatur exigua particula, quae nunquam ad contactum perueniat, et circa EA et FB ad alteram partem similes figurae describantur, eritque MCEM dens rotae A et NCFN dens rotae B, tum igitur nil aliud restat, nisi vt in singulis punctis a, a', α, α' itemque b, b', β, β' similes figurae extruantur, hocque modo vtraque peripheria dentibus compleatur.

Accuratior determinatio figurae dentium.

29. Praecedens figurae dentium determinatio proxime tantum satisfacit, quoniam vtrinque figuram circularem assumsimus, perspicuum autem est, si altera sit arcus circularis, alteram re vera fore curuam satis complicatam, cuius loco arcum circuli osculantis assumsimus. Quo igitur hoc negotium accurate prosequamur, ex praecedentibus repetamus formulas principales, quae sunt p sin. $\phi = a$ sin. ω et

Tab. V. et VI. Fig. 1. et 5.

et $q\,\text{ſin.}\,\psi = b\,\text{ſin.}\,\omega$, ſeu $AR = a\,\text{ſin}\,\omega$ et $BS = b\,\text{ſin.}\,\omega$ tum vero $r + s + p\,\text{coſ.}\,\phi + q\,\text{coſ.}\,\psi = (a+b)\,\text{coſ}\,\omega$, ſeu $RS = (a+b)\,\text{coſ.}\,\omega$ quae formulae etiam immediate ex figura conſequantur, cum AR et BS ſint perpendicula ex punctis A et B in rectam RS per T pro libitu ductam demiſſa, OR autem et OS ſunt rectae ad curuas ambas normales. Quodſi iam angulus ω ſtatuatur conſtans, erunt quoque perpendicula AR et BS conſtantia, ideoque vtraque curva EOM et FON ex euolutione circuli nata, illa nempe ex circulo, qui centro A radio AR, haec vero ex circulo qui centro B radio BS deſcribitur, quae curuae cum ſint deſcriptae facillime, ſolutionem commodiſſimam praebere videntur.

30. Sumto autem angulo ω conſtante erit differentiando:

$$dp = \frac{-p\,d\phi\,\text{coſ.}\,\phi}{\text{ſin.}\,\phi} \text{ et } dq = \frac{-q\,d\psi\,\text{coſ.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\psi}, \text{ tum vero}$$

$$dr + ds - \frac{p\,d\phi\,\text{coſ.}\,\phi^2}{\text{ſin.}\,\phi} - \frac{q\,d\psi\,\text{coſ.}\,\psi^2}{\text{ſin.}\,\psi} - p\,d\phi\,\text{ſin.}\,\phi - q\,d\psi\,\text{ſin.}\,\psi = 0.$$

At eſt $dr = -dp\,\text{coſ.}\,\phi$ et $ds = -dq\,\text{coſ}\,\psi$, vnde $p\,d\phi\,\text{ſin.}\,\phi + q\,d\psi\,\text{ſin.}\,\psi = 0$, ſeu $a\,d\phi + b\,d\psi = 0$, quod quidem per ſe patet. Tum vero eſt $d\zeta = -d\phi$. Iam dum rota A angulo $d\zeta$ gyratur, in dente eius punctum contactus ex O in o tranſit, vt ſit $Oo = r\,d\phi + \frac{dr\,\text{ſin.}\,\phi}{\text{coſ.}\,\phi} = r\,d\phi - dp\,\text{ſin.}\,\phi = r\,d\phi + p\,d\phi\,\text{coſ.}\,\phi = d\phi.\,RO = -RO.\,d\zeta$. In dente autem alterius rotae punctum contactus ex O in ω transfertur, vt

 ſit

ſit $O\omega = -SO.\,d\eta$, eſtque $a\,d\zeta = b\,d\eta$. Vnde ſi $a\,d\zeta$ denotet diſtantiam dentium in vtraque rota, magnitudo arcus dentem rotae A conſtituentis erit $= RO.\,d\zeta$ et magnitudo arcus dentem rotae B conſtituentis $= SO.\,d\eta$, vnde magnitudo dentium definitur, vbi notari oportet, angulum ω tantum accipi debere, vt craſſities vnico dentis dimidium interuallum duorum dentium non ſuperet.

Tab. VIII. Fig. 11. 31. Hoc modo adhuc iſtud lucramur, vt vtriusque rotae dentes ſeorſim delineare poſſimus. Diuiſa enim centrorum diſtantia AB in ratione reciproca motuum angularium in C, radio AC deſcribatur circulus ſecundum dentium numerum in partes aequales diuidendus, cuiusmodi pars vna ſit CC′, tum ſub dato angulo ω, quo etiam in altera rota eſt vtendum, ducatur recta CR, in eamque ex A demittatur perpendiculum AR, quo tanquam radio nouus circulus illi concentricus deſcribatur, pariter ab R vtrinque ſecundum dentium numerum diuidendus, cuiusmodi pars ſit RR′, quae autem ſingulae denuo biſecentur in r, r'. Deinde recta RC cum ad circulum interiorem inuoluatur vsque ad r, tum vero euoluatur vsque ad r', quo pacto altera facies dentis ECM deſcribitur, ſimilique modo per C′ dentis ſequentis E′ C′ M′. Denique ſumto arcu Cc minore ſemiſſe arcus CC′ per c modo inverſo ducatur curua $e\,c\,m$, itemque $e'\,c'\,m'$, ſicque

niſi

nisi binae curuae se decussent clausis spatiolis E e, E$'$ e' habebitur integri dentis figura MEem: ab m ad M$'$ autem rotam profundius incidi conuenit. Ceterum ne punctum e in E incidat, vel adeo praetereat, cauetur angulum ACR satis magnum accipiendo; quo maior enim assumitur, eo minorem profunditatem dentes obtinebunt.

DE

DE MOTV FLVIDORVM A DIVERSO CALORIS GRADV ORIVNDO.

Auctore

L. EVLERO.

I.

A calore in fluidis certum quendam motum inteſtinum generari, a naturae ſcrutatoribus ſatis probabili ratione oſtendi ſolet; cum autem hic motus in minimis tantum elementis ſubſiſtat, neque in vniuerſa fluidi maſſa cernatur, eius ratio in Theoria motus fluidorum neutiquam habetur, ſed fluida omni motu in ſenſus incurrente deſtituta in aequilibrio verſari cenſentur, etiamſi minimae particulae, quibus ſunt compoſita, motu quocunque inter ſe agitentur. Neque ergo hic de motu illo inteſtino, qui fluidorum elementis a calore inducitur, hic ſum acturus, ſed Mechanicae principiis inhaerens in eos fluidorum motus ſum inquiſiturus, qui in eorum tota mole a diuerſo caloris gradu, quo eius partes ſunt affectae, produci debet. Quae motus cauſa cum vix adhuc ſit cognita, tametſi plurima phaenomena inde originem ſuam trahunt, eius accuratior

curatior euolutio non ſolum mathematicam fluidorum cognitionem, ſed etiam phyſicam maxime amplificabit.

2. Cum olim Theoriam aequilibrii fluidorum accuratius perſcrutarer, luculenter oſtendi neque atmoſphaeram neque vllum aliud fluidum in aequilibrio conſiſtere poſſe, niſi in paribus altitudinibus vbique idem caloris gradus deprehendatur. Quodſi enim de fluido graui quaeſtio inſtituitur, ad ſtatum aequilibrii abſolute requiritur, vt in aequalibus altitudinibus non ſolum preſſio ſed etiam denſitas fluidi vbique ſit eadem. Quoniam igitur fluidorum denſitas a calore variatur, ſiquidem a frigore in minus ſpatium conſtringuntur, a calore vero in maius expanduntur: ſimul eſt euictum, niſi in paribus altitudinibus vbique idem caloris gradus vigeat, aequilibrium omnino locum habere non poſſe. Atque in hoc principio non dubitaui praecipuam ventorum cauſam conſtituere, cum ſtatim atque atmoſphaera in quapiam regione maiorem calorem concipit quam in finitimis, ob ſublatum aequilibrium neceſſario ventus debeat oriri.

3. Cuiusmodi autem motus in fluido, cuius partes aeque eleuatae diuerſo caloris gradu perfunduntur, ab hac ipſa cauſa produci debeat, tum temporis definire non ſum auſus; quandoquidem haec inueſtigatio vberiorem motus cognitionem po-

 ſtulare

ſtulare videbatur. Poſtquam autem hoc argumentum denuo examini ſubieciſſem, inſignem hanc proprietatem ſemper locum habere debere deprehendi, vt quoties maſſa fluida ad pares altitudines in vno loco fuerit calidior, quam in alio, tum perpetuo in regione inferiori fluidum a loco frigidiore in calidiorem, contra vero in regione ſuperiori a calidiore in frigidiorem ferri debere. Quae concluſio cum per experientiam mirifice confirmetur, quoniam talem motum in caminis et hypocauſtis calefactis clariſſime obſeruamus, omnino digna videtur, vt eam accuratius euoluam, atque adeo ipſam huius motus generationem, quatenus quidem licet, diſtincte exponam.

Tab. IX. Fig. 1. 4. Conſideremus ergo vas ſatis amplum ABCD fluido quocunque repletum, in cuius parte ABEF ope ignis ſubiecti multo maior caloris gradus ſuſtineatur, quam in parte reliqua EFCD, ita vt fluidum in illa parte ob maiorem calorem minore praeditum ſit denſitate quam in hac, vbi frigidum aſſumitur. Concipiamus primo has duas partes pariete verticali EF a ſe inuicem ſeparari, huncque parietem inferius in f exiguo foramine eſſe pertuſum; atque vt iam fluidum in aequilibrio exiſtat, ideoque preſſio in foramine f vtrinque aequalis habeatur, euidens eſt fluido in parte ABFE maiorem altitudinem BK$=$FL tribui debere, quam in in altera parte EFCD vbi altitudo fluidi fit FM $=$ CN; vt scilicet quantum fluidi densitas in illa parte minor est, defectus pressionis inde in foramine f natae excessu altitudinis LM compensetur.

5. Cum igitur hoc modo fluidum ad aequilibrium fuerit perductum, eiusque particula in foraminulo f vtrinque parem vim sustineat, ponamus parietem in loco altiori quoque foraminulo e perforari. Atque iam manifestum est particulam fluidi in e haerentem a fluido in parte calidiori contento ob maiorem altitudinem Le multo magis vrgeri, quam a fluido partis frigidioris; etsi enim illud minorem habet densitatem, altitudo tamen fluidi calidioris Le prae altitudine frigidioris Me multo maior est quam hic ad aequilibrium requireretur. Quo hoc clarius perspiciatur, sit densitas fluidi frigidi $=d$, calidi vero $=d-\delta$, atque pro aequilibrio in foraminulo f necesse est sit $(d-\delta)Lf=d.Mf$ seu $d.LM=\delta.Lf$. Pro foraminulo autem e pressio fluidi calidi est $=(d-\delta)Le$ frigidi vero $=d.Me$, illa igitur hanc superat parte $d.LM-\delta Le$. Quia vero est $d.LM=\delta.Lf$, hic excessus fit $=\delta.Lf-\delta.Le$ $=\delta.ef$, vnde patet, quo magis foramen e supra f fuerit eleuatum, eo magis ibi pressionem a fluido calido ortam superaturam esse pressionem alteram a frigido ortam.

6. Ab excessu ergo hoc particula fluidi in foramine e versans ad motum concitabitur, fluidum-

que ex vaſis parte calidiori ABEF per foramen *e* in partem frigidam propelletur: ſicque manifeſtum eſt hoc caſu per foramen ſuperius *e* fluido neceſſario motum e loco calido in frigidum impreſſum iri. Statim autem ac propter hunc fluxum altitudo fluidi frigidi creſcit, calidi vero decreſcit, aequilibrium ad foramen inferius *f* tollitur, et ob auctam preſſionem in vaſis parte frigida fluidum ibi hinc in partem calidam tranſibit. Si prius fluido eiusmodi ſtatum tribuiſſemus, vt aequilibrium circa foramen ſuperius *e* fuiſſet, tum quoque fluxus per foramen inferius *f* e loco frigidiori in calidiorem eueniſſet; ex quo concludere licet, etiam ſublato pariete EF fluxum perennem in fluido generari, quo interne fluidum ex parte frigida in calidam, ſuperne vero ex calida in frigidam promoveatur, quamdiu ſcilicet diſcrimen caloris durat.

7. Idem hoc etiam ita oſtendi poteſt, vt neque diaphragmate opus ſit, neque ſuperna fluidi ſuperficie; hocque ratiocinium idcirco quoque ad atmoſphaeram traduci poſſit. Sumamus ergo in regione ABF inſignem caloris, in regione vero DCG inſignem frigoris gradum adeſſe: tum vero huic fluido alioquin continuo duos tubos horizontales immerſos concipiamus, alterum *ad* in regione ſuperiori, alterum vero *bc* in regione inferiori, quorum vterque e regione calida in frigidam porrigatur. Fingamus nunc fluidum in eiusmodi ſtatu, vt pro tubo inferiori *bc* preſſio fluidi vtrinque ſit eadem,

Tab. IX. Fig. 2.

eadem, ac perſpicuum eſt in tubi ſuperioris *ad* termino *a* preſſionem maiorem eſſe futuram quam in termino *d*. Quam ob rem fluidum per ſuperiorem *ad* ex regione calida in frigidam moueri incipiet; Sin autem initio pro tubo ſuperiori *ad* presſio vtrinque par eſſet, tum fluidum per inferiorem *cb* ex regione frigida in calidam tranſibit. Ex quibus colligitur, quomodocunque fluidum fuerit diſpoſitum, ſemper in regione ſuperiori fluxum ex parte calida in frigidum, in regione inferiori autem fluxum contrarium ex calida parte in frigidam oriri debere.

8. Egregie haec cum experientia conueniunt; ſi enim vas huiusmodi ſatis amplum aqua repletum altero tantum latere AB igni admoueatur, vt aquae pars huic lateri vicina calorem adipiſcatur, in oppoſita autem parte CD frigida maneat, tum mox obſeruare licet in ſuperficie ſuprema aquam continuo a parte calida in frigidam proferri; quod fieri non poſſet niſi ſimul circa fundum fluxus contrarius oriretur. Si hoc modo piſa vel lentes in aqua coquantur, dum vas ex vna tantum parte vim ignis experitur, iſte motus multo facilius agnoſcitur. Tum etiam idem phaenomenum in aëre maxime cernitur; dum enim conclauis calefacti ianua in conclaue frigidum aperitur, mox aëris motus per aperturae partem ſummam, ex conclaui calido in frigidum, per infimam autem ex frigido

in calidum ſentitur. Quin etiam aſcenſus aeris per caminum, vi ignis vulgo tributus, eidem cauſae debetur, dum in regione inferiori aër continuo ad ignem affluit; ac prope fornacem calefactum in hypocauſto aër continuo aſcendere obſeruatur, in locis frigidioribus iterum deſcenſurus.

9. Nullum etiam eſt dubium, quin ex hoc principio venti conſtanter ab oriente ſpirantes ſub zona torrida explicari queant, verum ne coniecturis atque adeo determinationibus quodammodo vagis nimis tribuere videar, ipſam horum motuum generationem et celeritatem ex primis mechanicae principiis definire conabor. Quod cum in genere pro fluido quaqua verſus expanſo praeſtare non liceat, inueſtigationes meas ad motum fluidorum in tubis cuiuscunque figurae adſtringam, quae quidem limitatio veritati concluſionum inde deducendarum nullam vim afferet; cum quomodocunque etiam motus fuerit comparatus, via qua quaelibet particula promouetur, mente ſaltem vt tubus conſiderari poſſit. Hos igitur tubos ita anguſtos aſſumo vt in qualibet ſectione ad eorum directionem normaliter facta nulla motus inaequalitas locum habere poſſit, ſed tota maſſa huiusmodi ſectionem implens communi motu proferatur. Quantumuis autem haec hypotheſis limitata videatur, tamen probe notandum eſt fere omnia quae adhuc circa motum flui-

dorum

dorum ſunt inueſtigata, ex hac hypotheſi eſſe deriuata; quae cum egregie cum experientia conſentiant, eo minus verendum eſt, ne ei innixi in errorem praecipitemur.

10. Sit igitur AB huiusmodi tubus, figurae cuiuscunque, et cuius amplitudo vtcunque ſit variabilis; in quo fluidum indolis cuiuscunque moueatur. Ad hunc motum definiendum ad duas quantitates variabiles principales ſpectari oportet, quarum altera loci in tubo, altera vero temporis determinationem contineat. Pro priori ſumto in tubo loco fixo A, ſtatuamus puncti cuiuscunque S ab eo diſtantiam ſeu arcum $AS = s$, curuaminis ſcilicet tubi ſimul ratione habita; tum vero pro poſteriori epocha quaedam fixa ſtabiliatur, a qua tempora deinceps computentur; et nunc quidem ponamus tempus inde elapſum eſſe $= t$, quod in minutis ſecundis exprimamus, ad quod propterea calculum ſequentem accommodari conueniet. Quaecunque iam ad motum pertinent, ea per has duas variabiles exprimi oportebit, vt intelligatur, quomodo fluidi ſtatus tam in quouis tubi loco, quam ad quoduis tempus futurus ſit comparatus. Tab. IX. Fig. 3.

11. Nunc igitur, hoc eſt elapſo ab illa epocha tempore $= t$ ſec. ponamus fluidi particulae in S haerentis denſitatem eſſe $= q$, preſſionem $= p$ et celeritatem qua verſus B progreditur $= v$; tum vero

vero ſit amplitudo tubi ad S $= rr$, eiusque altitudo ſuper quodam plano horizontali $= z$ quae duae poſteriores quantitates cum a ſolo tubi loco S pendeant, vt functiones ſolius variabilis s ſunt ſpectandae. Praecedentes vero tres quantitates q, p, v, quoniam in eodem loco ſucceſſu temporis variationes recipere poſſunt, vt functiones ambarum variabilium s et t conſiderari, et in calculo conformiter tractari debent. Celeritatis autem v ſignificatum ita definio, vt hac littera ſpatium, quod iſta celeritate vniformiter vno minuto ſecundo percurreretur. Tum vero certa quadam denſitate per vnitatem expreſſa, littera q numerum quendam denotabit; at littera p altitudinem quandam exhibet, columnae ſcilicet ex materia illa, cuius denſitas vnitate deſignatur, conſtantis, et pondere ſuo preſſionem in S referentis.

12. His poſitis euidens eſt, cum quantitates rr et z vt functiones cognitae variabilis s ſpectari queant, totum negotium huc reuocari, vt cuiusmodi tres illae quantitates q, p et v ſint functiones binarum noſtrarum variabilium s et t definiatur, in quem ſcopum omnes vires calculi ſunt intendendae; ex quo intelligitur tribus opus eſſe aequationibus ad illas quantitates determinandas; pro noſtro autem inſtituto duae ſufficiunt, quandoquidem in quouis tubi loco gradum caloris, a quo denſitas pendet, vt cognitum aſſumimus. Si enim fluidum ſit aqua, ex calore immediate denſitas innoteſcit;

ſin

An autem sit aër, pressio insuper in computum duci debet, quae hoc casu elasticitatem repraesentat, ideoque recte densitati et calori coniunctim proportionalis aestimatur. Quemadmodum igitur praeterea duas aequationes obtinere liceat, accuratius inuestigabo.

13. Primum igitur obseruo per assumta elementa moleculae fluidi cuiusque Ss promotionem tempusculo infinite paruo dt factum assignari posse; quam ergo si in $S's'$ peruenisse sumamus, quia etiam hic densitas definitur, necesse est vt massa $S's'$ praecise aequalis sit massae Ss, vnde vnam aequationem eliciemus. Posito igitur elemento $Ss = ds$, erit moleculae Ss volumen $= rrds$, quod in densitatem q ductum dabit eius massam $= qrrds$. Cum iam puncti S celeritas sit $= v$ ea hoc punctum tempusculo dt proferetur per spatiolum $SS' = vdt$; puncti vero s nunc celeritas est $= v + ds(\frac{dv}{ds})$, qua eodem tempusculo dt proferetur per spatiolum ss' $= vdt + dsdt(\frac{dv}{ds})$: vnde fit $S's' = Ss + ss' - SS'$ $= ds + dsdt(\frac{dv}{ds})$. Quaeratur amplitudo tubi in S', quae ob $SS' = vdt$ erit $= rr + vdt.\frac{d.rr}{ds}$, ex quo volumen particulae $S's'$ erit $= rrds + rrdsdt(\frac{dv}{ds})$ $+ vdtds.\frac{d.rr}{ds}$ vbi notandum est $\frac{d.rr}{ds}$ esse functionem datam ipsius s. At densitas quae in S erat $= q$, nunc post tempusculum dt et per spatiolum $SS' = vdt$ progrediendo colligitur $= q + dt(\frac{dq}{dt})$ $+ vdt$

$+vdt(\frac{dq}{ds})$, hincque massa particulae in $S's'$ translatae:

$$=qrrds+qrrdsdt(\frac{dv}{ds})+qvdtds.\frac{d.rr}{ds}+rrdsdt(\frac{dq}{dt})+rrvdsdt(\frac{dq}{ds})$$

neglectis scilicet terminis, in quibus differentialia secundum gradum essent superaturae.

14. Quoniam itaque haec massa praecedenti $qrrds$ debet esse aequalis facta diuisione per $ds\,dt$ hanc consequimur aequationem, qua iam vna motus conditio determinatur:

$$qrr(\frac{dv}{ds})+qv\frac{d.rr}{ds}+rrv(\frac{dq}{ds})+rr(\frac{dq}{dt})=0$$

cuius tria membra priora manifesto in hoc vnum coëunt $(\frac{d.qrrv}{ds})$, ita vt nostra aequatio in hanc formam contrahatur:

$$(\frac{d.qrrv}{ds})+rr(\frac{dq}{dt})=0$$

cuius prius membrum ex sola variabilitate ipsius s, posterius vero ipsius t tantum est repetendum, quemadmodum motus signandi iam satis receptus declarat, quam ob rem eius vlteriori explicationi supersedeo. Quia amplitudo tubi est data, hac aequatione certa relatio inter densitatem et celeritatem exprimitur.

15. Altera aequatio qua adhuc indigemus, ex acceleratione concludi potest. Scilicet cum celeritas nunc in S sit v, haecque particula tempusculo dt per spatiolum $SS'=vdt$ promoueatur, hic eius cele-

celeritas erit $v + vdt\left(\frac{dv}{ds}\right) + dt\left(\frac{dv}{dt}\right)$, ideoque acceleratio $= v\left(\frac{dv}{ds}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right)$, quae vi acceleranti eſt proportionalis ſtatuenda. Conſideremus ergo particulam Ss, cuius maſſa $= qrrds$, quae primo ob grauitatem ſecundum Ss' vrgetur vi acceleratrice $= -\frac{dz}{ds}$, tum vero ob preſſionem in S vi motrice $= prr$, ab altera vero parte s contra vi $= rr(p + ds\left(\frac{dp}{ds}\right))$ hinc ergo naſcitur vis motrix $= -rrds\left(\frac{dp}{ds}\right)$ et vis acceleratrix $= -\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{ds}\right)$ in eandem directionem. Quodſi iam g denotet altitudinem, ex qua grauia tempore vnius minuti ſecundi delabuntur, nouimus poni debere:

$$v\left(\frac{dv}{ds}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right) = -\frac{2g\,dz}{ds} - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{ds}\right) \text{ ſeu}$$

$$\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{ds}\right) + \frac{2g\,dz}{ds} + v\left(\frac{dv}{ds}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$$

quae ergo eſt altera aequatio deſiderata et priori adiuncta omnes fluidorum motus in tubis complectitur.

16. Vt nunc has formulas ad caſum propoſitum accommodemus, ſumamus tubum in ſingulis punctis tam efficaci caloris gradu eſſe praeditum, vt ſimulac fluidum eo peruenit cum eo idem caloris gradus communicetur, quod quidem ſi tubus ingentem habeat extenſionem ſimulque fuerit valde anguſtus, etiam in praxi facile obtinetur, quandoquidem tum per inſignem tractum caloris gradus parum immutatur, fluidoque transfluenti eadem

mutatio mox inducitur, nisi forte eius motus vehementer fuerit rapidus Quia autem hic ad primam motus generationem potissimum spectamus, hic casus nostram inuestigationem haud perturbabit. Tubi ergo loco cuique S eiusmodi tribuo calorem, eumque perennem, vt fluidi eo versantis densitas sit $=q$, quae cum in eodem tubi loco semper sit eadem, neque successu temporis varietur, erit haec quantitas q functio solius variabilis s ab altera t neutiquam pendens, ideoque $\left(\frac{dq}{dt}\right)=0$.

17. Cum igitur sit $\left(\frac{dq}{dt}\right)=0$, prima aequatio pro motu definiendo inuenta hanc habebit formam $\left(\frac{d.qrrv}{ds}\right)=0$ ita vt quantitatis $qrrv$ differentiale ex solius s variabilitate ortum sit nullum; ex quo sequitur istam quantitatem plane non ab s pendere, sed vel esse constantem vel functionem solius temporis t, ex quo deducimus hanc aequationem integratam $qrrv=\Gamma:t$, hincque $v=\frac{\Gamma:t}{qrr}$ ita vt eodem tempore per totum tubum celeritas sit reciproce vt tubi amplitudo in densitatem ducta. Cum iam quantitates q et rr non a tempore t pendeant erit $\left(\frac{dv}{dt}\right)=\frac{\Gamma':t}{qrr}$ ex quo altera aequatio fit $\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{ds}\right)+\frac{2g\,dz}{ds}$
$+v\left(\frac{dv}{ds}\right)+\frac{1}{qrr}\Gamma':t=0$

multiplicetur ea per qds, et tempus t pro constante habetur, vt haec prodeat aequatio:

$$2g\,dp+2gq\,dz+qv\,dv+\frac{ds}{rr}\Gamma':t=0$$

quae

quae ergo integrata praebet:

$$2gp + 2g\int q\,dz + \int qv\,dv + \Gamma' : t \int \frac{ds}{rr} = \Delta : t.$$

18. In hac aequatione quia q, rr et z sunt functiones ipsius s tantum, integralia $\int q\,dz$ et $\int \frac{ds}{rr}$ nullam habent difficultatem; at cum sit $\int qv\,dv = \frac{1}{2}qvv - \frac{1}{2}\int vv\,dq$ ob $v = \frac{\Gamma : t}{qrr}$ erit

$$\int qv\,dv = \frac{(\Gamma : t)^2}{2qr^4} - \frac{1}{2}(\Gamma : t)^2 \int \frac{dq}{qqr^4}$$

sed est $\int \frac{dq}{qqr^4} = -\frac{1}{qr^4} - 4\int \frac{dr}{qr^5}$ vnde fit

$$\int qv\,dv = (\Gamma : t)^2 \left(\frac{1}{qr^4} + 2\int \frac{dr}{qr^5}\right)$$

vnde etiam haec integratio quouis casu facile expeditur. Ponamus breuitatis gratia $\Gamma : t = T$ vt sit $v = \frac{T}{qrr}$ denotante littera T functionem ipsius t tantum, et quia est $\Gamma' : t = \frac{dT}{dt}$ altera aequatio motum determinans erit:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{TT}{qr^4} - 2TT\int \frac{dr}{qr^5} - \frac{dT}{dt}\int \frac{ds}{rr},$$

vbi notetur litteram T exhibere celeritatem fluidi in eo tubi loco vbi est $qrr = 1$.

19. Quia hic assumsimus densitatem fluidi vnice a calore pendere, perspicuum est hanc hypothesin ad eiusmodi fluida esse restrictam, quae a viribus comprimentibus nullam mutationem patiuntur, cuiusmodi est aqua; neque ergo has aequationes ad aërem transferre licet, quippe cuius densitas insuper a pressione seu elasticitate determinatur. Interim

terim autem facile intelligitur, si motum aquae in tubis diuerso calore affectis definire nouerimus, aëris motum haud multo fore absimilem, easdemque fere leges esse secuturum. Quam ob rem quaestionem resoluendam ita constituam:

Tab. IX. Fig. 4. *Si habetur tubus in se rediens figurae cuiuscunque* ACBD *et amplitudinis vtcunque variabilis, in cuius singulis locis certus caloris gradus vigeat cum fluido ibi transfluente mox communicandus; hicque tubus aqua repleatur, quae primo ope diaphragmatis* Aa *tubo alicubi inserti in quiete seruetur; tum vero diaphragmate remoto quaeritur motus, qui aquae ob diversam caloris temperiem inducetur.*

20. Sumto pro lubitu in tubo puncto fixo A, ab eo vocetur puncti cuiusuis S distantia seu arcus $AS = s$, amplitudo tubi ibidem $= rr$, et gradus caloris tantus, vt aqua ibi versans densitatem obtineat $= q$; tum vero puncti huius S altitudo super certo quodam plano horizontali sit $= z$, ita vt hae tres quantitates rr, q et z tanquam functiones datae ipsius s spectari queant. Deinde elapso tempore $= t$ min. sec. sit aquae celeritas in loco $S = v$ in plagam SCB tendens, ibique statuatur pressio $= p$. His positis pro motu cognoscendo habebimus primo $v = \frac{T}{qrr}$, existente T certa functione temporis T deinceps definienda, tum vero insuper hanc aequationem:

$$2gp = \Delta : t - 2g \int q\,dz - \frac{TT}{qr^4} - 2TT \int \frac{dr}{qr^5} - \frac{dT}{dt} \int \frac{ds}{rr}$$

vbi

vbi g denotat altitudinem, ex qua grauia vno minuto fecundo delabuatur, quam nouimus esse 15, 625 ped. Rhen.

21. Tota quaeftio ergo huc reducitur; quomodo hinc temporis functionem T definiri oporteat, quandoquidem ea cognita motus aquae in toto tubo ad quoduis tempus innotefcit, dum altera temporis functio $\Delta : t$ tantum in preffionis p determinationem ingreditur, atque adeo a lubitu noftro pendet, quia quouis tempore tubum conftringendo preffionem vel intendere vel remittere licet. Ex rei autem natura functio illa temporis T fequenti ratiocinio elici debet: ponatur primo arcus $AS = s = 0$, tempore vt conftante fpectato, vt p praebeat pressionem in loco A; tum ipfi s detur valor toti tubi longitudini ACBDA aequalis, vt in eundem locum A reuertamur, atque valor pro p hinc refultans neceffario praecedenti aequalis effe debet: atque ex hac aequatione functionem illam T determinare licebit; quae quoniam per integrationem elicitur, ita debet effe comparata, vt pofito tempore $t = 0$ ea euanefcat, quia initio omnis aqua in quiete fuiffe affumitur. Quare fi tempore fuccedente quantitas T non amplius fuerit nulla, hinc concludendum erit, aquam deinceps non amplius in quiete permanere poffe.

22. Quo autem clarius perfpiciatur a quanam caufa aqua primum ad motum concitetur, ponamus

feptum

ſeptum Aa, quo omnis motus coerceetur, adhuc adeſſe et quia in hoc ſtatu quantitas T neceſſario eſt nulla, pro preſſione in ſingulis punctis S altera noſtra aequatio praebet $2gp = \Delta : t - 2g\int q dz$ ſeu $p = f : t - \int q dz$, vnde ſi integrale $\int q dz$ ita capiatur vt euaneſcat ſumto arcu $AS = s = 0$, functio $f : t$ dat preſſionem aquae ſupra ſeptum Aa. Quodſi iam integrale $\int q dz$ per totum tubum ACBDA extendatur, eiusque valor tum fiat $= k$, infra ſeptum preſſio erit $= f : t - k$; vnde patet ſublato ſepto Aa guttulam aquae ibi deorſum vrgeri preſſione $f : t$, ſurſum vero preſſione $f : t - k$, ideoque deorſum preſſione k, cui cum iam nihil obſiſtat, manifeſtum eſt totam aquam in tubo ad motum concitatum iri. Quare niſi ille integralis $\int q dz$ per totum tubum extenſi valor k euaneſcat, ſublato ſepto fieri nequit, vt aqua in quiete perſeueret; ſimul vero etiam hinc cauſa perſpicitur motum producens, quae vbicunque ſeptum Aa concipiatur, eadem prodire debet ita vt omnia aquae elementa in toto tubo ſimul ad motum pari vi impellantur.

23. Hinc autem primo perſpicuum eſt, ſi denſitas q vbique eſſet eadem, ſeu $q = b$, ob $\int q dz = bz$, ſiquidem planum horizontale, a quo altitudinem z metimur, per ipſum locum A ducamus, reuerſione per totum facta, altitudinem z iterum euaneſcere, ideoque fore $k = 0$; quo ergo caſu etiam remoto ſepto Aa aequilibrium conſeruabitur. Idem

quoque

quoque innumerabilibus aliis casibus, quibus densitas q est variabilis euenire potest, veluti si fuerit $q = A + Bz^{\alpha} + Cz^{\beta} + Dz^{\gamma}$ etc. quoniam integrale $\int q\,dz = Az + \frac{B}{\alpha+1} z^{\alpha+1} + \frac{C}{\beta+1} z^{\beta+1} + \frac{D}{\gamma+1} z^{\gamma+1}$ etc. ita sumtum vt euanescat posito $z = o$, facta integra reuolutione, vbi fit iterum $z = o$ denuo euanescit. Atque in genere hoc euenire debere perspicuum est, quoties densitas q a sola altitudine z pendet, ita vt vbique in paribus altitudinibus densitas sit eadem; quam conditionem ad aequilibrium absolute necessariam esse iam olim demonstraui.

24. Eatenus autem quantitas k non euanescit, quatenus in aequalibus altitudinibus non eadem densitas deprehenditur, id quod sequenti modo luculentissime ostenditur. Ponamus in A densitatem esse minimam, indeque per C vsque ad B progrediendo continuo augeri, vt in B sit maxima, hinc vero per D a A reuertendo iterum diminui; iam ducta recta verticali CABD, cuius puncta A, C, B, D altitudines eorundem tubi locorum referant, ad quae constituantur applicatae Aa, Cc, Bb, Dd densitates aquae in his locis repraesentantes; eorumque puncta a, c, b, d, in curua quadam in se redeunte $acbda$; ac si punctum S altitudini loci in tubo S respondeat, vt sit $AS = z$, erit hic applicata $Ss = q$, ideoque integrale $\int q\,dz$ exprimit aream AaSs; vnde si punctum S vsque ad summum C promoueamus, area habebitur AaCc: hinc autem vlterius vsque Tab. X. Fig. 5.

ad B progrediendo, quia areae per altitudines imminutas negatiue capi debent, pro hoc loco B integrale $\int qdz$ erit $AaCc - CcbB$ pro puncto autem imo D erit $= AaCc - CcbdD$. Atque iterum a D ad A ascendendo fit id $AaCc - CcbdD + DdaA$, quod cum det valorem ipsius k erit $k =$ areae $acbda$, vnde patet littera k designari aream a linea $acbda$ in se redeunte inclusam.

Tab. X. Fig. 6. 25. Hic obseruo fieri posse, vt aqua in tubo quiescat, etiamsi in paribus altitudinibus eius densitas non sit eadem. Euenit hoc si curua illa in se rediens eiusmodi lemnisci $Oasc\sigma\alpha O\delta dbO$ habeat figuram, vt areae a nodo O separatae inter se sint aequales; quia enim hoc casu altera area negatiue accipi debet, area tota k in nihilum abire est censenda. Hic ergo casus locum habet, si a puncto imo D sinistrorsum per A ad summum C ascendendo scala densitatum q sit curuae ramus $dbOasc$, tum vero a puncto summo C ad infimum D dextrorsum per B descendendo scala densitatum sit ramus $c\sigma\alpha O\delta d$. Etsi ergo in aequalibus altitudinibus AS densitates sunt inaequales in altero loco scilicet sinistro Ss dextro vero $S\sigma$, tamen haec inaequalitas non obstat quo minus aqua in tubo contenta statum aequilibrii seruare possit; dummodo ambo illi rami eiusmodi lineam in se redeuntem constituant cuius tota area ad nihilum reducatur.

26. Ne-

26. Nequaquam autem hi casus Theoriae iam olim stabilitae, qua ad aequilibrium in altitudinibus paribus aequales densitates requiruntur, aduersatur; namque Theoria illa in genere ad fluida quaqua versus patentia et secum communicantia est accommodata, in quibus vtique nullum aequilibrium sine ista conditione dari potest. Quando autem fluida tubis sunt inclusa, ita vt diuersae fluidi partes non aliter nisi per tubum inter se communicare queant, tum illa conditio vehementer restringitur, vt non amplius absolute sit necessaria. Atque adeo iam insignem exceptionem hic notatuimus, dum tubi continuitate septo interclusa fluidum semper necessario in aequilibrio coercetur quantumuis etiam densitates in paribus altitudinibus fuerint diuersae. Deinde vero etiam remoto septo, dummodo tubus non prorsus aqua sit plenus, sed portio quaedam eius vacua relinquatur, iam dudum constat semper aequilibrium existere posse, etiamsi in paribus altitudinibus non aequalis fluidi densitas reperiatur. Quare eo magis mirum videri debet, hoc non semper euenire posse, quando tubus in se rediens omnino fluido est repletus, adhuc magis autem hoc paradoxum augebitur, quando ostendero ad id vt aequilibrium certo obtineri queat, requiri vt ad minimum certum aliquod spatium vacuum relinquatur, cuius adeo quantitatem quouis casu assignare licet.

 27. His

Tab. X. Fig. 7. 27. His praemissis, vt tandem quaestionis principalis §. 19. propositae solutionem determinatam exhibeam, ne vniuersalitas calculum impediat, tubo primum figuram circularem tribuam eumque in plano verticali constitutum considerabo; tum vero etiam quo facilius calculi difficultates superem, amplitudinem eius vbique eandem statuam, vt quantitas rr sit constans. Deinde ducto diametro horizontali AB, in eius termino A calorem maximum in B vero minimum esse assumam, vt aquae densitas in A sit minima in B vero maxima, in loco autem summo C et imo D valorem quendam medium teneat. Parum autem referet, quomodo variatio densitatis constituatur, igne autem ad A suscitato quia calor in ratione duplicata distantiarum decrescere aestimatur, pro quouis autem tubi puncto S distantiae seu cordae AS quadratum sinui verso AZ est proportionale, posito angulo $AOS = \Phi$ statuamus aquae in S densitatem $q = 1 - \alpha \cos. \Phi$, vt densitas minima in A sit $= 1 - \alpha$ maxima in $B = 1 + \alpha$, et media in C vel $D = 1$. Tum vero posito circuli radio $OA = a$, erit arcus $AS = s = a\Phi$, et puncti S altitudo $sZ = z = a \sin. \Phi$.

28. Sit porro amplitudo tubi constans $rr = ff$, et elapso tempore $= t$ celeritas aquae in C vel $D = u$, vt sit $T = ffu$, celeritas vero in $S = \frac{ffu}{qrr} = \frac{u}{1 - \alpha \cos. \Phi} = v$, quam in plagam ACBD dirigi assumo. Iam singula

gula membra aequationis §. 20. exhibitae seorsim euoluamus, et primo ob $dz = a d\Phi \operatorname{cos}.\Phi$ habebimus
$\int q dz = a \int d\Phi \operatorname{cos}.\Phi (1 - \alpha \operatorname{cos}.\Phi) =$
$a \int d\Phi (\operatorname{cos}.\Phi - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha \operatorname{cos}.2\Phi)$ vnde fit:

$$\int q dz = a \operatorname{sin}.\Phi - \tfrac{1}{2}\alpha a \Phi - \tfrac{1}{4}\alpha a \operatorname{sin}.2\Phi.$$

Deinde est $\frac{TT}{q r^4} = \frac{uu}{1 - \alpha \operatorname{cos}.\Phi}$, et $\int \frac{dr}{q r^4} = 0$ ob rr constans, ac denique $\frac{dT}{dt} \int \frac{ds}{rr} = \frac{s du}{dt} = \frac{a \Phi du}{dt}$
vnde aequatio pro motu determinando colligitur:
$$2gp = \Delta : t - 2ga(\operatorname{sin}.\Phi - \tfrac{1}{2}\alpha\Phi \;\; \tfrac{1}{4}\alpha \operatorname{sin}.2\Phi) - \frac{uu}{1-\alpha \operatorname{cos}.\Phi} - \frac{a\Phi du}{dt}$$
nunc posito angulo $\Phi = 0$ pro pressione in puncto A nanciscimur: $2gp = \Delta : t - \frac{uu}{1-\alpha}$, at posito $\Phi = 2\pi$ seu 4 angulis rectis pro eodem loco consequimur:

$$2gp = \Delta : t + 2\pi\alpha g a - \frac{uu}{1-\alpha} - \frac{2\pi a du}{dt}$$

qui duo valores aequales positi praebent:

$$\alpha g - \frac{du}{dt} = 0 \text{ et integrando } u = \alpha g t.$$

29. Hinc intelligimus, cum primo instanti quo septum remouetur, vniuersa aqua fuisset in quiete, dehinc eam mox motum esse concepturam eumque vniformiter acceleratum, ita vt celeritas in ipsa temporis ratione increscat. Videmus quoque motum fore eiusmodi, vti initio dixi, scilicet in parte inferiori e loco frigido B per D ad locum calidum A accedentem, supra vero hinc per C ad frigidum B recedentem. Deinde etiam perspicimus

hunc motum eo fore vehementiorem, quo maior fuerit littera α, seu quo magis densitas aquae in B superet densitatem in A. Cum igitur quo maior fuerit tubi diameter AB refrigeratio in B quasi in ratione fiat duplicata, manifestum est, quo maior fuerit tubus eo celeriorem motum generatum iri. Perpetuo autem ex discrimine quo calor in A excitatus superat caloris vel frigoris gradum in B, motus acceleratio est iudicanda.

30. Primo quidem initio satis tuto colligere possumus, celeritatem motus in ratione temporis increscere, statim autem ac motus tam velox euaserit, vt aquae calor se ad tubi temperaturam componere nequeat, ideoque iam in B aqua multo calidior, in A vero frigidior reperiatur quam in calculo assumsimus, mirum non est si acceleratio mox multo minorem rationem sequatur, ac tandem ad certum vniformitatis gradum sit peruentura, quod autem fieri nequit nisi aqua vel ad eundem caloris gradum vbique fuerit perducta vel saltem in locis aeque altis eundem gradum conceperit. Ad quietem autem nunquam redigi poterit, quoniam simul ac paulisper quieuerit, ignisque effectum in A senserit, contra vero ad B fuerit refrigerata, motus de nouo instauraretur. Ex quo quamdiu tubus in A calidior fuerit quam in B, motus aquae continuo debet durare. Ceterum facile intelligitur ad motum producendum hunc casum, quo gradus maxi-

maximi minimique caloris in diametro horizontali sibi oppositos assumimus maxime esse efficacem, lentioremque motum esse futurum, si haec oppositio in diametro obliquo fieret quod ostendisse operae erit praetium.

31. Ponamus ergo maximum calorem in A minimum in B, vt diameter AB ad horizontalem HK inclinatus sit angulo $HOA = \zeta$, sit vt ante angulus $AOS = \Phi$, radius $AO = a$, hinc arcus $AS = s = a\Phi$ et densitas in S nempe $q = 1 - \alpha \operatorname{cos.} \Phi$; atque omnia se habebunt vt ante nisi quod altitudo SZ sit hic $z = a \operatorname{sin.}(\Phi - \zeta)$, vnde ob $dz = a d\Phi \operatorname{cos.}(\Phi - \zeta)$ erit

$$\int q dz = a \int d\Phi (\operatorname{cos.}(\Phi - \zeta) - \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{cos.} \zeta - \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{cos.}(2\Phi - \zeta))$$

seu $\int q dz = a \operatorname{sin.}(\Phi - \zeta) - \frac{1}{2}\alpha a \Phi \operatorname{cos.} \zeta - \frac{1}{4}\alpha a \operatorname{sin.}(2\Phi - \zeta)$

ita vt iam habeamus:

$$2gp = \Delta : t - 2ga(\operatorname{sin.}(\Phi - \zeta) - \tfrac{1}{2}\alpha \Phi \operatorname{cos.} \zeta - \tfrac{1}{4}\alpha \operatorname{sin.}(2\Phi - \zeta)) - \frac{uu}{1 - \alpha \operatorname{cos.} \Phi} - \frac{a \Phi du}{dt}$$

quae cum eadem esse debeat siue ponatur $\Phi = 0$ siue $\Phi = 2\pi$ oportet esse: $2\pi \alpha g a \operatorname{cos.} \zeta - \frac{2\pi a du}{dt} = 0$ ideoque $u = \alpha g t \operatorname{cos.} \zeta$, vnde discimus motum etiam fore vniformiter acceleratum, sed minus quam ante in ratione cosinus anguli AOH, ita vt si hic angulus fuerit rectus, motus plane nullus sit oriturus. Euenit ergo hoc si maximus calor in tubi loco siue summo siue imo excitetur, minimusque e regione

gione reperiatur; tum enim vtique in paribus altitudinibus denſitas erit eadem.

Tab. X. Fig. 7. 32. Maneat autem vt ſupra maximus calor in A minimusque in B vt diameter AB ſit horizontalis; tum vero etiam ſit aquae in S verſantis denſitas $q = 1 - \alpha \cos. \Phi$ exiſtente angulo $AOS = \Phi$, ideoque arcu $AS = s = a\Phi$ ob radium $OA = a$; et altitudo $sZ = z = a \sin. \Phi$. At amplitudo tubi iam non amplius vbique ſit eadem, ſed eam ita variari aſſumamus, vt ſit $rr = \frac{ff}{1 + \beta \cos. \Phi + \gamma \sin. \Phi}$, ponamusque iterum $T = ffu$, vt ſit $v = \frac{ffu}{qrr} = \frac{u}{q}(1 + \beta \cos. \Phi + \gamma \sin. \Phi)$. His poſitis habebimus vt ante:

$$\int q\,dz = a \sin. \Phi - \tfrac{1}{2}\alpha a \Phi - \tfrac{1}{4}\alpha a \sin. 2\Phi.$$

Verum pro hoc caſu adipiſcimur:

$$\frac{TT}{qr^4} = \frac{uu(1 + \beta \cos. \Phi + \gamma \sin. \Phi)^2}{1 - \alpha \cos. \Phi}$$

et ob $d.\frac{1}{r^4} = \frac{1}{f^4} d.(1 + \beta \cos. \Phi + \gamma \sin \Phi)^2 = \frac{-4dr}{r^5}$ erit $\frac{-\beta d\Phi \sin. \Phi + \gamma d\Phi \sin. \Phi}{f^4}(1 + \beta \cos. \Phi + \gamma \sin \Phi) = \frac{-2dr}{r^5}$ hincque

$$2TT\int \frac{dr}{qr^5} = uu\int \frac{d\Phi(\beta \sin. \Phi - \gamma \cos. \Phi)(1 + \beta \cos. \Phi + \gamma \sin. \Phi)}{1 - \alpha \cos. \Phi}.$$

Quia vero fractio α vt valde parua ſpectari poteſt, loco $\frac{1}{1 - \alpha \cos. \Phi}$ ſcribendo $1 + \alpha \cos. \Phi$ prodibit integrando:

$$2TT\int \frac{dr}{qr^5} = uu \left\{ \begin{array}{l} -\beta \cos. \Phi - \gamma \sin. \Phi - \tfrac{1}{4}(\beta\beta - \gamma\gamma)\cos. 2\Phi - \tfrac{1}{2}\beta\gamma \sin. 2\Phi - \tfrac{1}{4}\alpha\beta \cos. 2\Phi \\ -\tfrac{1}{2}\alpha\gamma\Phi - \tfrac{1}{4}\alpha\gamma \sin. 2\Phi - \tfrac{1}{4}\alpha(\beta\beta - \gamma\gamma)\cos. \Phi - \tfrac{1}{2}\alpha\beta\gamma \sin. \Phi \\ \qquad\qquad -\tfrac{1}{12}\alpha(\beta\beta - \gamma\gamma)\cos. 3\Phi - \tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma \sin. 3\Phi) \end{array} \right.$$

ac

ac denique $\frac{dT}{dt}\int\frac{ds}{rr} = \frac{adu}{dt}\int d\Phi(1+\beta\,\text{cof.}\,\Phi+\gamma\,\text{fin.}\,\Phi)$ $= \frac{adu}{dt}(\Phi+\beta\,\text{fin.}\,\Phi-\gamma\,\text{cof.}\,\Phi)$. Quare cum valor ipfius p idem prodire debeat fiue ponatur $\Phi=0$ fiue $\Phi=2\pi$, peruenimus ad hanc aequationem:

$$2\pi\alpha g a+\pi\alpha\gamma uu-\frac{2\pi adu}{dt}=0$$

$$\text{feu } dt=\frac{2adu}{\alpha(2ga+\gamma uu)} \text{ feu } \alpha g dt=\frac{du}{1+\frac{\gamma uu}{2ga}}.$$

33. Hic ergo primum obferuo, fi fuerit $\gamma=0$, feu amplitudo $rr=\frac{ff}{1+\beta\,\text{cof.}\,\Phi}$, fore vt ante pro tubo aequaliter vbique amplo $u=\alpha g t$; hoc igitur euenit fi in aequalibus a puncto A distantiis tam fupra diametrum AB quam infra amplitudo fuerit eadem, fiue in A amplitudo fit maxima fiue in B. Cum igitur ob quantitatem β nulla mutatio in motu oriatur, nifi quatenus celeritas $v=\frac{u}{1-\alpha\,\text{cof.}\,\Phi}(1+\beta\,\text{cof.}\,\Phi+\gamma\,\text{fin}\,\Phi)$ ab ea pendet, dum celeritas media u eadem manet; ponamus $\beta=0$, vt fit $rr=\frac{ff}{1+\gamma\,\text{fin.}\,\Phi}$; ac fi γ habeat valorem pofitiuum, amplitudo tubi in loco fummo C fit minima $=\frac{ff}{1+\gamma}$ in imo vero D maxima $\frac{ff}{1-\gamma}$; at contra fi γ valorem habeat negatiuum puta $\gamma=-\delta$ tubi amplitudo in C fit maxima $\frac{ff}{1-\delta}$ in D vero minima $=\frac{ff}{1+\delta}$. Perfpicuum eft autem hos duos cafus probe a fe inuicem diftingui oportere, cum aequationis inuentae integratio priori cafu per loga-

rithmos, posteriori vero per arcus circulares absolui debeat; quam ob rem vtrumque casum seorsim euolui operae erit pretium, quo deinceps in genere facilius iudicare queamus, quantum motus aquae in tubo immutetur, si tubus in parte superiori fuerit vel amplior vel tenuior quam in parte inferiori.

34. Sit γ quantitas positiua seu tubus in C angustior quam in D, ponaturque $\gamma = \frac{2ga}{cc}$ vt sit $rr = \frac{ccff}{cc + 2ga\,\sin.\Phi}$ eritque $\alpha g\,dt = \frac{cc\,du}{cc+uu}$ et $\alpha g t = c$ Ang tang $\frac{u}{c}$ seu $u = c$ tang $\frac{\alpha g t}{c}$ vnde patet celeritatem u iam fieri infinitam elapso tempore finito $t = \frac{\pi c}{2\alpha g}$; hoc ergo casu motus aquae multo magis acceleratur, quam casu, quo tubus vtique est aeque amplus, quia vt vidimus tum elapso demum tempore infinito celeritas fit infinita. Contrarium euenit quando $\gamma = -\frac{2ga}{cc}$ seu $rr = \frac{ccff}{cc - 2ga\,\sin.\Phi}$, ideoque tubus in superiori parte C amplior est quam in parte inferiori D, cum enim tum sit $\alpha g\,dt = \frac{cc\,du}{cc-uu}$ erit $\alpha g t = \frac{1}{2} c\, l \frac{c+u}{c-u}$, vnde patet elapso tempore infinito celeritatem u non vltra terminum c crescere posse. Hoc ergo casu motus aquae multo minus acceleratur, quam si tubus esset vbique aeque amplus. Quam ob rem in genere affirmare licet, quoties tubi pars superior ad C angu-tubo stior fuerit quam inferior ad D tum motum aquae in tubo magis accelerari, minus vero, si superior pars fuerit amplior inferiori.

35. Quae-

35. Quae hactenus de tubo circulari sunt inventa ad tubos figurae cuiuscunque haud difficulter extenduntur. Quomodocunque enim figura et amplitudo tubi fuerit comparata, formulam generalem § 20. traditam facile simili modo tractare licet. Ponatur enim $T = ffu$, vt u denotet aquae celeritatem in eo tubi loco, vbi amplitudo est $= ff$. et densitas aquae $= 1$, tum vero sit $rr = \frac{ff}{\omega}$ vt in loco quouis S sit celeritas $v = \frac{\omega u}{q}$; quia nunc est $\frac{1}{r^4} = \frac{\omega\omega}{f^4}$ erit $-\frac{2dr}{r^5} = \frac{\omega d\omega}{f^4}$, vnde haec habebitur aequatio: Tab. IX. Fig. 4.

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{\omega^2 uu}{q} + uu\int\frac{\omega d\omega}{q} - \frac{du}{dt}\int\omega ds$$

sumantur iam haec integralia ita vt euanescant posito $s = 0$, tum vero loco s scribatur tota tubi longitudo ASCBDA, fiatque

$$\int q\,dz = A; \quad \int\frac{\omega d\omega}{q} = B \text{ et } \int\omega ds = C.$$

Atque tum necesse est vt sit:

$$-2gA + Buu - \frac{C\,du}{dt} = 0 \text{ seu } dt = \frac{C\,du}{Buu - 2gA}$$

vnde ad quoduis tempus celeritas u facile definitur.

36. Iam supra obseruaui eatenus tantum in tubo, qui ex vna parte A calidior est quam e regione B, fluidum necessario ad motum concitari, quatenus tubus vel prorsus vel propemodum plenus statuatur; si enim ex parte tantum plenus assumatur, semper eiusmodi fluidi situs assignari poterit,

 in

in quo aequiescat. Quocirca hunc statum aequilibrii quoties locum habere potest, ex formulis nostris ita definiam, vt inde pateat, quousque aquae infusae quantitatem augere liceat, antequam status aequili-
Tab. X. Fig. 9. brii penitus excludatur. Consideremus in hunc finem iterum tubum circularem aequaliter amplum in plano verticali constitutum in quo diuersus caloris gradus ita sit distributus, vt in A sit maximus in B vero minimus existente AB diametro horizontali; iterumque hypothesi vtamur, vt sumto angulo $AOS = \Phi$ densitas aquae ibi versantis sit $q = 1 - \alpha \cos \Phi$. Radius quoque sit vt ante $OA = a$, et arcus $AS = s = a\Phi$, hincque altitudo $sZ = z = a \sin. \Phi$. Amplitudo porro tubi sit $rr = ff$; atque cum aequilibrium adesse ponamus, ob celeritatem $u = 0$, nostra aequatio hanc induet formam:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz = \Delta : t - 2ga(\sin. \Phi - \tfrac{1}{2}\alpha\Phi - \tfrac{1}{4}\alpha \sin. 2\Phi)$$

37. Ponamus nunc in statu aequilibrii aquam ex vna parte ad Mm pertingere ex altera vero ad Nn, sintque arcus $AM = m$, $BN = n$, et anguli $AOM = \mu$ et $BON = \nu$ vt sit $m = a\mu$ et $n = a\nu$, atque tubi spatium vacuum $MN = a(\pi - \mu - \nu)$ quod siue sit prorsus vacuum siue aërem contineat, necesse est vt pressio ad M praecise sit aequalis pressioni ad N. At pro pressione ad M ponendo $\Phi = \mu$ habebimus:

$$2gp = \Delta : t - 2ga(\sin. \mu - \tfrac{1}{2}\alpha\mu - \tfrac{1}{4}\alpha \sin. 2\mu)$$

pressio-

pressionem vero ad N obtinebimus si ab A retrocedendo pro Φ ponamus $-\pi-\nu$, vt sit $\text{sin.}\,\Phi = \text{sin.}\,\nu$, et $\text{sin.}\,2\Phi = -\text{sin.}\,2\nu$, vnde fiet:

$$2gp = \Delta : t - 2ga(\text{sin.}\,\nu + \tfrac{1}{2}\alpha(\pi+\nu) + \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{sin.}\,2\nu).$$

Pro aequilibrio ergo requiritur vt sit:

$$\text{sin.}\,\mu - \tfrac{1}{2}\alpha\mu - \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{sin.}\,2\mu = \text{sin.}\,\nu + \tfrac{1}{2}\alpha(\pi+\nu) + \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{sin.}\,2\nu$$

vnde patet si esset $\alpha = 0$, seu idem caloris gradus per totum tubum regnaret, tum vtique fore $\nu = \mu$; terminosque M et N ad libellam dispositos, quemadmodum notissima aequilibrii natura postulat.

38. Nisi autem spatium vacuum $MN = a(\pi-\mu-\nu)$ sit minimum ob α fractionem semper valde exiguam, perspicuum est ex nostra aequatione semper situm ita definiri posse, vt aequilibrium resultet. Ponamus enim esse $\pi-\mu-\nu = \omega$ seu $\nu = \nu-\mu-\omega$, hincque $\text{sin.}\,\nu = \text{sin.}(\mu+\omega) = \text{sin.}\,\mu\,\text{cos.}\,\omega + \text{cos.}\,\mu\,\text{sin.}\,\omega$ et $\text{sin.}\,2\nu = -\text{sin.}\,2\mu\,\text{cos.}\,2\omega - \text{cos.}\,2\mu\,\text{sin}\,2\omega$, eritque nostra aequatio $\text{sin.}\,\mu - \tfrac{1}{2}\alpha\mu - \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{sin.}\,2\mu = \text{sin.}\,\mu\,\text{cos.}\,\omega + \text{cos.}\,\mu\,\text{sin.}\,\omega + \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi-\mu-\omega)$
$- \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{sin.}\,2\mu\,\text{cos.}\,2\omega - \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{cos.}\,2\mu\,\text{sin.}\,2\omega$

seu

$$\text{sin.}\,\mu(1-\text{cos.}\,\omega) - \text{cos.}\,\mu\,\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{sin.}\,2\mu(1-\text{cos.}\,2\omega) + \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{cos.}\,2\mu\,\text{sin.}\,2\omega = \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi-\omega)$$

cui aequationi non amplius satisfieri potest, si capiatur $\omega = 0$, quia tum prius aequationis membrum euanescit, posteriori manente $\alpha\pi$. Statuamus

 ergo

ergo ω valde paruum et ob $\sin.\omega = \omega$, $1 - \cos.\omega = \frac{1}{2}\omega\omega$ fiet:

$$\tfrac{1}{2}\omega\omega \sin.\mu - \omega \cos \mu - \tfrac{1}{2}\alpha\omega\omega \sin.2\mu + \tfrac{1}{2}\alpha\omega \cos.2\mu = \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi - \omega)$$

vnde proxime colligitur $\cos \mu = \frac{-\alpha\pi}{\omega}$, sicque patet statim atque ω minus sit quam $\alpha\pi$, tum hanc aequationem ac proinde etiam aequilibrium nullum amplius locum habere posse Extremo autem casu quo aequilibrium adhuc est possibile, fit $\mu = \pi$ hincque;

$$\omega + \tfrac{1}{2}\alpha\omega = \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi - \omega) \text{ seu } \omega = \frac{\alpha\pi}{1+\alpha}.$$

39. Quamdiu ergo spatium vacuum $MN = a\omega$ maius est quam $\frac{\alpha}{1+\alpha}\pi a$, tamdiu aqua eiusmodi situm recipere potest, in quo acquiescat, ac si fuerit $MN = \frac{\alpha}{1+\alpha}\pi a$ seu $MN = \alpha\pi a$, (quoniam α est fractio valde parua), hic casus erit aequilibrii postremus in quo spatium vacuum MN circa locum maxime frigidum B versabitur. Sin autem hoc spatium adhuc sit minus, tum nullum aequilibrium amplius locum habere poterit, sed vtcunque aqua in tubo fuerit disposita, necessario ad motum concitabitur. Quodsi tubus loco aquae contineat aërem, ob analyseos defectum motus simili modo determinari nequit; necessario autem motum oriri debere sequenti ratione demonstrabitur.

Tab. X. Fig. 7. 40. Aërem igitur tantum tubus noster contineat, cui figuram circularem et amplitudinem vni-

vniformem tribuamus, ſitum autem teneat verticalem, et ita calore diuerſo ſit affectus, vt in A ſit calor maximus $= 1 + \alpha$, in B vero minimus $= 1 - \alpha$, in loco autem quouis medio S poſito angulo $AOS = \Phi$ ſit caloris gradus $= 1 + \alpha \cos. \Phi$, exiſtente diametro AB horizontali. Vnde ſi in S denſitas aëris ſit $= q$, et preſſio ſeu elaſticitas $= p$, experientia nouimus preſſionem p eſſe in ratione compoſita denſitatis q et caloris $1 + \alpha \cos. \Phi$, vnde ponamus $p = hq(1 + \alpha \cos. \Phi)$. Iam cum motum ipſum determinare non liceat, ſtatuamus in A ſeptum, quo omnis motus compeſcatur, et ob $v = 0$ aequatio ſtatum aëris exprimens erit:

$$\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{ds}\right) + \frac{2g\,dz}{ds} = 0 \quad \text{ſeu} \quad \frac{dp}{q} + dz = 0$$

vbi z denotat altitudinem $sZ = a \sin. \Phi$ poſito radio circuli $= a$.

41. Cum nunc ſit $q = \frac{p}{h(1 + \alpha \cos. \Phi)}$, aequatio noſtra hanc induet formam:

$$\frac{h\,dp}{p} + \frac{dz}{1 + \alpha \cos. \Phi} = 0 \quad \text{ſeu} \quad \frac{h\,dp}{p} + \frac{a\,d\Phi \cos. \Phi}{1 + \alpha \cos. \Phi} = 0$$

vel $\frac{\alpha h\,dp}{a p} + d\Phi - \frac{d\Phi}{1 + \alpha \cos. \Phi} = 0$

cuius integrale reperitur:

$$\frac{\alpha h}{a} lp + \Phi - \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha\alpha)}} \text{Ang. ſin.} \frac{\sin. \Phi \sqrt{(1 - \alpha\alpha)}}{1 + \alpha \cos. \Phi} = C$$

vnde pro preſſione ſupra ſeptum Aa ponendo $\Phi = 0$ prodit pro preſſione $\frac{\alpha h}{a} lp = C$ ſeu $p = e^{\frac{Ca}{\alpha h}}$.

Facia-

continuo inferne ad ignem reducatur, ibique quasi destruatur, ac simul ignis ab hac continua aeris
Tab. X. circulatione sustineatur. Huiusmodi fornacem fig. 10
Fig. 10. repraesentat vbi A est fornax proprie sic dicta et craticula instructa, super qua ignis suscitatur. Haec fornax iuxta parietem conclauis construatur, et tam superne ad E quam inferne ad G in tubum desinat in se redeuntem ECFBHDG, et parieti affixum, in quo aer libere circulari, et per tubi partem inferiorem D continuo ad ignem reuerti queat. Sic enim eadem aeris copia in tubo contenta motu suo ignem conseruabit, ac si forte nouo subinde aëre fuerit opus, is facile per ostiolum fornacis intromittetur.

45. Quo haec constructio facilius succedat, conueniat vt tubus EFHG ita totum parietem occupet, vt tam altitudo CD, quam distantia AB tanta fiat, quantum circumstantiae admittunt. Quo enim maior fuerit altitudo CD, eo maiori vi aër ad motum impelletur, tum vero maior distantia AB plurimum conferet ad motum accelerandum; quoniam quo magis tubus FH a fornace est remotus, eo magis aër eo delatus refrigerabitur, motusque causa intendetur. Deinde vero etiam supra vidimus, si tubus supremus C angustior fuerit infimo D, hinc quoque motum rapidiorem generari. Quodsi talis fornax successu non careat nullum est dubium, quin hoc modo conclauia minimo ligni dispendio calefieri queant,

queant, quoniam nulla caloris pars per caminum vti in vulgaribus fornacibus abigitur, ſed potius tota vis calefaciendi in conclaui conſeruatur. Aër quoque per tubum circulans et calorem ab igne conceptum ſecum ferens non parum ad calefaciendum conferet. Quin etiam iuxta hunc tubum alium pariter in ſe redeuntem et aqua repletum conſtrui erit conſultum; tum enim etiam aqua ſimilem motum concipiet, et continuo prope fornacem praeteriens mox tantopere calefiet vt ab hac cauſa calor conclauis haud parum augeatur. Alia ſubſidia ad hanc conſtructionem perficiendam ipſa experientia ſuppeditabit.

continuo inferne ad ignem reducatur, ibique quasi destruatur, ac simul ignis ab hac continua aeris
Tab. X. Fig. 10. circulatione sustineatur. Huiusmodi fornacem fig. 10 repraesentat vbi A est fornax proprie sic dicta et craticula instructa, super qua ignis suscitatur. Haec fornax iuxta parietem conclauis construatur, et tam superne ad E quam inferne ad G in tubum desinat in se redeuntem ECFBHDG, et parieti affixum, in quo aer libere circulari, et per tubi partem inferiorem D continuo ad ignem reuerti queat. Sic enim eadem aeris copia in tubo contenta motu suo ignem conseruabit, ac si forte nouo subinde aëre fuerit opus, is facile per ostiolum fornacis intromittetur.

45. Quo haec constructio facilius succedat, conueniat vt tubus EFHG ita totum parietem occupet, vt tam altitudo CD, quam distantia AB tanta fiat, quantum circumstantiae admittunt. Quo enim maior fuerit altitudo CD, eo maiori vi aër ad motum impelletur, tum vero maior distantia AB plurimum conferet ad motum accelerandum; quoniam quo magis tubus FH a fornace est remotus, eo magis aër eo delatus refrigerabitur, motusque causa intendetur. Deinde vero etiam supra vidimus, si tubus supremus C angustior fuerit infimo D, hinc quoque motum rapidiorem generari. Quodsi talis fornax successu non careat nullum est dubium, quin hoc modo conclauia minimo ligni dispendio calefieri queant,

queant, quoniam nulla caloris pars per caminum vti in vulgaribus fornacibus abigitur, sed potius tota vis calefaciendi in conclaui conseruatur. Aër quoque per tubum circulans et calorem ab igne conceptum secum ferens non parum ad calefaciendum conferet. Quin etiam iuxta hunc tubum alium pariter in se redeuntem et aqua repletum construi erit consultum; tum enim etiam aqua similem motum concipiet, et continuo prope fornacem praeteriens mox tantopere calefiet vt ab hac causa calor conclauis haud parum augeatur. Alia subsidia ad hanc constructionem perficiendam ipsa experientia suppeditabit.

DE ADMIRANDO FRIGORE ARTIFICIALI QVO MERCVRIVS SEV HYDRARGYRVS EST CONGELATVS DISSERTATIO (*).

Auctore

I. A. BRAVNIO.

Cuique tempori ſua inuenta, et quaſi ſuis perſonis reſeruata videntur. Hiſtoria Scientiarum omnium ſaeculorum, praecipue vero ſuperioris et huius, ſatis ſuperque hoc poteſt probare, inuentionibus Antliae pneumaticae, Barometrorum, Thermometrorum, Tuborum opticorum, Electricitatis, praecipue naturalis, Magnetis artificialis, Phosphori, aberrationis Stellarum fixarum, et multarum aliarum rerum teſtantibus. Nescio an non admiranda Mercurii congelatio, quam nuper detégere mihi contigit, huc quoque pertineat. Quis enim Mercu-

(*) Eſt quidem haec diſſertatio iam praelecta Septemb. VI. MDCCLX. in Conuentu Academiae ſolemni, et tunc quoque ſimul typis exſcripta; quoniam tamen Commentarii Academiae ſedes ſunt nouorum inuentorum, in illis omnino locus huic diſſertationi adſignari debuit vti quoque eo fine fuit confecta, vt commentariis insereretur.

Mercurium non habuit pro fluido perpetuo, in omni frigore perseuerante et perseueraturo? Nec iudicium et ratiocinium hoc fundamento suo destituitur, si de frigore naturali intelligatur in hoc Terrarum orbe. Quod si enim contingere posset, vt frigus naturale tantum in tellure nostra oriretur et regnaret; vastitas illius continuo futura esset et inanitas, dum homines, animalia, plantae, necessario peritura essent, et alium plane statum orbis Terrarum accepturus esset aliamque faciem. Equidem iam in dissertatione de gradibus caloris, quos certi liquores et certa fluida ferre possunt ad ebullitionem vsque, atque de gradibus frigoris, quos pati possunt et solent, donec in glaciem abeant, indicaui, suspicionem fuisse, Mercurium in Barometris et Thermometris quibusdam in Sibiria congelatum fuisse; sed quum in maioribus frigoris gradibus Mercurius fluidus permanserit in aliis Barometris et Thermometris: hanc immobilitatem et duritiem obseruatam, Mercurio plumbo, vel Bismutho adulterato verisimiliter tribuimus, adeo vt pro vera congelatione Mercurii haberi non posset; sed hoc nunc extra omne dubium positum est, postquam purum Mercurium sub tam paruis frigoris gradibus, etsi naturaliter magnis, congelari nequire certo constat. Experimenta, quae cepimus ad conglaciationem Mercurii producendam, hoc quam euidentissime monstrabunt, quae nunc fideliter proponemus,

nemus, non omnia quidem, ſed ea, quae momentum aliquod trahunt, et noua Phaenomena monſtrant.

Erat Decembris 14. 1759 quo frigus inſigne incidit, cui aequale, certe eo maius, nunquam antea hic Petroburgi, in Academia obſeruatum. Nam inter horam nouam et decimam a. m. frigus ad 205. ſcalae Delilianae auctum eſt, quum hora 7. antea fuerit 201, qui gradus frigoris ſummus ad hoc vsque tempus ſecundum obſeruationes *Kraftii* et meas fuerat. (*) H. 1. p. m. autem 197 rurſus Thermometrum monſtrabat. Occupatus iam a Decembris ſeptimo eram in explorandis frigoris gradibus, quos certa fluida ferre poſſunt, donec in glaciem abeant, partim ad ea confirmanda, quae in citata diſſertatione Academiae tradita, propoſui, partim vt fluida noua, in quibus experimenta nondum a me capta erant, explorarem, quum a die dicto iam inſigniores frigoris gradus ſint obſeruati, vt d. 7. 189. d. 8. 188. et 189. d. 12. 193. et 195. d. 13. 181. et 191.

Hunc inſignem frigoris gradum 205. in aëre regnantem aptiſſimum iudicabam ad explorandum vna, quo vsque arte hoc frigus naturale augeri poſſet,

(*) Quamuis Delilius iam 1733. Menſe Ianuario in vno Thermometro gradum frigoris 204. obſeruauerit, tamen eodem tempore alterum Thermometrum tantum 202. monſtrauit. Vid. illius Memoires pag. 274.

poſſet, non dubitaris, eo maius frigus artificiale futurum, quo maius frigus naturale eſſet, quod et quaedam experimenta antea capta iam docuerant, teſtante diſſertatione citata. Aqua fortis ſub gradu 204. quem teſtante Thermometro immerſo adſumſerat, erat maiorem partem gelata, glacies ſub ſpecie cryſtallorum nitri adparebat, quae vero in calore, continuo rurſus reſoluebantur. Hanc aquam fortem, cuius media pars adhuc, vt in congelatione ſolet, fluida erat, cepi, captam infudi in glaciem contuſam, portionem ſcilicet circiter tantam, quantam *Fahrenheitius*, auctor frigoris artificialis ſpiritus nitri, requirebat; antea vero exploraui vtrum Thermometrum, glacies contuſa et aqua fortis eandem temperiem haberent, quam perfecte eandem, ſcilicet 204. deprehendi, qui gradus frigoris nunc in aëre obſeruabatur. In prima infuſione Mercurius ad 20 gradus circiter deſcendit, effudi ſpiritum ſecundum Methodum vulgarem, id quod aliquoties repetii, ſed vltra triginta gradus frigus naturale augere non potui, ita vt Mercurius vltra 234. gradus ſcalae noſtrae deſcendere non viſus eſſet. Dum igitur *Fahrenheit* frigus artificiale vltra 40. infra ciphram, nullitatis notam ſcalae ſuae, qui gradus cum 210 Thermometri noſtri conuenit, producere non potuit, neque alii, qui haec experimenta repetiere, inter quos, viros celeberrimos *Reaumurium* et *Muſchenbroekium* honoris cauſſa nominare

nare liceat, vlterius frigus artificiale augere potuere: parum aberat, quin contentus fuissem his experimentis, (*) et satis habuissem, viginti gradibus magis auxisse frigus artificiale, quam alii ante me producere potuerunt.

At enim vero quoniam fructum hunc experimentorum meorum nimis exiguum reputaui; mecum constitui experimenta haec, sed alio modo continuare, et tentare an non frigus artē ad superiorem gradum perducere, eoque ampliorem laboris mei et tolerati frigoris fructum consequi possem. Sumsi niuem loco glaciei contusae, quae vti dixi, iam consumta erat, quam in vitrum aliud mundum indidi, illudque fere ad summum impleui, ita tamen vt niuem simul leuiter comprimerem; antea autem niuis frigus Thermometro exploraui, quod perfecte idem erat, ac aëris ambientis, nunc 203. graduum. Quum igitur nix, aqua fortis et Thermometrum eandem temperiem haberent; immersi Thermometrum in niuem vitro contentam, et primum aliquot guttas tantum, vbi Thermometrum

(*) Imprimis quum glacies contusa deficeret. De experimentis huc pertinentibus a Reaumurio factis vid. Historiam Academiae Scientiarum Parisinae Anni MDCCXXXIV, et quae Muschenbroeckius ceperat ad hunc finem experimenta vid. in Tentaminibus Academiae del. Cimento pag. 174. P. 1.

trum immerſum erat, inſtillaui, quo facto obſeruaui Mercurium ad 260 in Thermometro noſtro deſcendiſſe. Gauiſus hoc ſucceſſu egregio, ſpem concepi maiorem, fore, vt, ſi porro experimentum vrgerem, frigus artificiale vlterius promoueri poſſit, nec euentus ſpem feſellit. Nam repetito experimento eadem Methodo ſimplici, tantum paullo maiorem aquae fortis quantitatem infudi, et ſtatim Mercurium ad 380 deſcendiſſe vidi, quo facto Thermometrum in aliud vitrum niue repletum, antequam hos frigoris gradus plane amitteret, immerſi, et tandem hoc tertio experimento Mercurius ad 470. gradus ſcalae noſtrae deſcendit. Quum tam ſtupendum frigoris gradum obſeruarem, oculis vix fidem habere potui, quin credidi bulbum Thermometri eſſe fractum. Sed laetus vidi Thermometrum extractum illaeſum quidem, at Mercurium plane immobilem, quamuis vltra 12. minuta iam in aëre libero eſſet. Portaui hoc Thermometrum in conclaue 125 graduum calidum, et poſt aliquot minuta Mercurius rurſus mobilis factus, adſcendere coepit. Vt certus fierem an non Thermometrum detrimenti quid cepiſſet, et an cum Thermometro meo ordinario, quo obſeruationes inſtituo, adhuc perfecte concordaret; ſuſpendi hoc Thermometrum in eodem loco, vbi Thermometrum meum ordinarium ſuſpenſum erat, et poſt 20. circiter minuta Mercurius temperiem aëris ambientis rurſus adſum-

 ſerat,

ſerat, ita vt perfecte ambo Thermometra concordare conſpicerentur.

Thermometrum, quo vſus fui, bulbum habebat ſphaericum, et ſcala diuiſa erat in 1200. partes, quarum 600 ſupra ciphram, calorem aquae bullientis notantem, et 600 infra eam numerabantur. Vſus eram iam hoc Thermometro in explorando calore Mercurii ebullientis et oleorum. Erat alterum Thermometrum ad manus, cuius ſcala infra o tantum capiebat 360 partes. Repetii et cum hoc idem experimentum, et ſtatim Mercurius ita deſcendit, vt totus intra bulbum eſſet, quem tamen perfecte non implebat. Mercurius et in hoc bulbo ſphaerico immobilis conſpiciebatur, et licet Thermometrum concuterem, nullus tamen motus obſeruari potuit, donec poſt 15. circiter minuta in aëre libero rurſus adſcendere coepit. Adſcendere perrexit in hoc Thermometro Mercurius ad multo maiorem altitudinem, quam aëris ambientis temperies requirebat. Miratus hoc Phaenomenon paradoxum, Thermometrum adcuratius conſideraui, et inueni bullulas quasdam aëreas Mercurio fuiſſe interſperſas, quod in priori Thermometro non contigerat. Ex his et quibusdam aliis experimentis, (omnia enim enarrare nihil attinet) ſatis certus factus fui, Mercurium in Thermometris ſolidum et fixum frigore factum fuiſſe eoque congelatum. Enim vero, quoniam Mercurium ſolidum et fixum

extra

extra Thermometrum non videram et examinare potueram, quoniam bulbos Thermometrorum frangere nolebam, quum alia ad manus non essent: congelationem Mercurii tantum tanquam veritatem probabilem ex Phaenomenis conclusam proposui in proximo ordinario conuentu Academico, die 17. Decembris habito, quo inuentum meum vna cum Methodo mea simplicissima, qua vsus sum, fideliter communicaui, vti quoque in Nouell s Petroburgensibus No. 102. congelatio Mercurii, tanquam veritas quam verisimillime ex Phaenomenis collecta, tantum est proposita. Vt igitur conglaciationem Mercurii per claram et indubiam experientiam quam certissimam redderem; mecum constitui, Thermometra in proximis experimentis capiendis frangere, quo indoles Mercurii congelati propius examinari posset, et explorari. Exsequi hoc consilium non prius poteram, quam Decembris 25. quoniam Thermometra plura citius parata non erant. Frigus naturale, quod in aëre regnabat, erat inter horam 9. et 10 a. m. quo tempore experimenta noua institui, secundum Thermometrum meum scalae Delilianae 199. Vsus sum eadem Methodo simplici, cum variatione tamen quadam: scilicet modo Thermometrum prius immersi in vitrum niue leviter compressa impletum, quam aquam fortem instillabam, et superinfundebam, modo in niuem prius infudi aquam fortem, quam Thermometrum indidi, modo ſpiritum infudi primum, nam rem ſemper eodem redire, quis non perſpicit? quoniam omnia ad ſolutionem niuis ab aqua forti redeunt, quam contingere eodem modo debere, ſiue ſpiritus nitri primum infundatur, et deinde nix ſuperaddatur, per ſe quilibet facile intelligit, quamquam interdum alterum altero eſt commodius, et ad ſcopum ſpecialem adcommodatius. Quum itaque Mercurius deſcendiſſet, ita vt immobilis ſtaret, fregi bulbum Thermometri, qui aliquot rimas iam ceperat, adhuc tamen cohaerebat, quo facto obſeruaui Mercurium ſolidum, non tamen ex toto, nam in media globi parte portio quaedam fluida deprehendebatur. Superficies conuexa externa perfecte continua adparebat, interna vero concaua, quam portio fluida egreſſa reliquerat, admodum aſpera conſpiciebatur ita, vt ex paruis globulis compoſita videretur. Tutudi tudite mortarii, quod ad manus erat, Mercurium; ſolidus et extenſus erat, durities vero illius, vti fere plumbi, aut paullo minor mihi videbatur, cuius etiam clangorem percuſſus edebat. Lamellas Mercurii ſolidi dicto inſtrumento extenſas ſcalpello ſecui facile, et nunc molior iam Mercurius ſenſim fieri coepit, poſt 12. autem et quod excurrit, minuta prima in aëre libero priſtinam fluiditatem recuperauit; temperies autem aëris nunc 197. erat. Color Mercurii congelati a fluido vix differebat, adparebat vt argentum politiſſimum

tam

tam in ſuperficie conuexa, quam vbi ſectus erat Mercurius.

Sequenti die 26. frigus ad 212. creuit inter h. 9. et 10. a. m. antea h. 8. erat 208. Hic frigoris gradus igitur tantus eſt, vt ſuperet ſummum antea obſeruatum 7. partibus. Quum ita frigus faueret, iteranda et continuanda experimenta et hoc die duxi, ad confirmanda partim antecedentia, partim ad noua Phaenomena detegenda. In duobus Thermometris ratione Mercurii congelati, idem obſeruaui, quod die antecedenti, et hic Mercurius in bulbis, quos fregi, totus ſolidus non erat, licet portio admodum exigua tantum, multo minor, quam die antecedenti, ſupereſſet, quae fluida manſit; ceterum eodem Modo Mercurium tractaui, ac die antecedenti, malleo tutudi, ſecui, et omnia hoc reſpectu eadem quidem obſeruaui; at differentia haud exigua ſe conſpiciendam praebuit reſpectu deſcenſus Mercurii, qui nunquam a me perfecte idem eſt deprehenſus, neque in his experimentis, neque in antecedentibus et ſequentibus. Ex ſuperioribus iam patet, Mercurium in primo experimento tantum deſcendiſſe ad 470, donec immobilis ſteterit, bulbo tamen illaeſo; in experimento die 25 capto ad 530, et in duobus Thermometris die 26 ad 650 deſcendit. Aſt tam in thermometro, quo vſus ſum d. 25, quam in duobus, quae adhibui d. 26 bulbi rimas quasdam habebant; cohaerebant tamen adhuc, nec minima pars vitri bulbi ſeparata erat, et Mercurius congelatus arcte omnibus bulbi partibus adhaerere videbatur. In ſequentibus experimentis multis praecipue ad hunc ſcopum captis obſeruaui, Mercurium ſemper profundius deſcendiſſe, ſi plane et totus congelatus erat, quam ſi portio quaedam fluida maneret. Deſcendebat autem vt plurimum ad 680 et 700, tamen bulbi nunquam ſine rimis erant, quin deſcendit ad 800 et vltra ad 1500, ſed in hoc poſteriori experimento bulbus plane fractus erat, ita vt globus Mercurii plane congelatus excideret, quo lapſu 3 circiter pedes alto, globus Mercurii perfecte congelatus paullum compreſſus factus eſt; in priori vero partes quaedam bulbi tantum exciderant. Ceterum ſemper quo frigus naturale erat maius, eo facilius, ceteris paribus, et celerius experimenta mihi ſucceſſere.

Ceterae conditiones omnino pares ſint, eſt neceſſe, inprimis, vt idem ſpiritus nitri adhibeatur. Quo fortior enim hic ſpiritus, eo melior quoque effectus erat, hinc ſpiritus nitri purus ſimplex minorem ſemper effectum praeſtitit, quam aqua fortis, fortior ſpiritu nitri ſimplici, maiorem autem ſpiritus nitri fumans, quippe fortior aqua forti, quamquam, ſi verum fatendum eſt, haec poſterior differentia effectuum, reſpectu aquae fortis, ſi bonae erat notae, et ſpiritus nitri fumantis ſaepius non admodum notabilis mihi videbatur. Interim

ſpiri-

ſpiritus nitri ſimplex ſuum quoque effectum mihi praeſtitit, et congelationem Mercurii produxit, artificio quodam a me adhibito. Quum ſpiritus hic nitri ſimplex niui mixtus deſcenſum Mercurii tantum ad 300. deprimeret, et paullo vlterius diuerſis tentaminibus; impleui ſex vitra niue more conſueto, et poſtquam Thermometrum in primum immerſeram, ſtatim in ſecundum, tertium et quartum ſucceſſiue immerſi, antequam gradum frigoris acceptum notabiliter amitteret; in quarta immerſione, Mercurius erat congelatus, quum in qualibet noua immerſione deſcenſum Mercurii profundiorem obſeruaſſem. Aqua fortis, quae in capiendis experimentis ſaepius gelata fuit, regelata eundem effectum praeſtitit, quam portio fluida in medio non gelata relicta.

Alia Phaenomenorum differentia ſe manifeſtabat in diuerſis experimentis reſpectu modi deſcenſus Mercurii. Conſtans ac perpetuum ſemper mihi obſeruatum, quod Mercurius primo lentius, deinde cum ſummo impetu in Thermometro deſcenderit, non videtur autem certum eſſe illud punctum, vbi impetus incipiat, quoniam obſeruauimus initium huius celeritatis circa diuerſos Thermometri gradus, circa 300. 350. et vltra, quin in citato experimento, quo Mercurius ad 800. deſcenderat, vsque ad 600. fore regulariter ſatis deſcendit, quo gradu cum maximo impetu deſcendere demum coepit, quo

bulbus

bulbus Thermometri fractus eſt, Mercurius autem perfecte totus congelatus erat. Alia differentia notanda quoque eſt, ſaepius mihi obſeruata, quod, dum ſpiritus nitri infuſus eſt, primum adſcendere coeperit Mercurius, quamuis ſpiritus nitri, nix et Mercurius in Thermometro ad eandem temperiem antea eſſent redacta. Quia hoc Phaenomenum nonnunquam tantum contigit, attendi adcuratius ad omnes circumſtantias; et contigiſſe hoc viſum eſt, quoties infudi aquam fortem in bulbum Thermometri non perfecte niue ſepultum adeoque in bulbum Thermometri a niue vacuum directe. Differentia porro notatu digna eſt, quam bis videre mihi contigit, quod Thermometrum ex mixtura niuis et aquae fortis iam extractum, tamen in aëre libero vlterius deſcenderit, quin ad punctum conglaciationis Mercurii vsque.

Reſpectu diuerſorum Thermometrorum, nullum phaenomenorum differentiam obſeruare potui, ſiue enim longiora, ſiue breuiora Thermometra adhibuerim, ſiue tubi Thermometri ex vitro bohemico, ſiue huius loci, viliori et meliori conſtiterint, ſub iisdem circumſtantiis eadem phaenomena et eundem effectum praeſtitere ſemper Thermometra, quamuis pro diuerſitate vitri, diuerſa eius contractio, quam ſummam in tanto frigore pati debet, quoque fiat neceſſe eſt. Quod ſi vero haec impleui diuerſo Mercurio, diuerſitas quaedam omnino adparebat. Nam

Nam vſurpauimus partim Mercurium ordinarium tam purum tamen, quam haberi potuit, quem ipſi quoque more conſueto, preſſione per corium, et filtratione per tubos capillares purificauimus ita, vt puriſſimus videretur, partim vero vſi ſumus Mercurio reuiuificato ex ſublimato. Hic poſterior procul dubio priori purior, quum puriſſimus haberi ſoleat, inertiam tamen quandam monſtrare mihi viſus eſt, certe tardius, lentius deſcendere videbatur in Thermometris Mercurio reuiuificato repletis, quam in aliis, quin in Thermometro quodam eiusmodi Mercurio repleto, non ſolum deſcenſus fuit lentiſſimus, ſed frigus vltra 300 augere non potui, quamuis in aliis Mercurius ad conglaciationem ſub iisdem circumſtantiis deſcendiſſet, in minoribus tamen Thermometris haec differentia tam notabilis mihi non eſt obſeruata Obſeruata haec mea tamen vix mihi ſufficere videntur ad ſtabiliendum, quod haec differentia conſtans atque perpetua ſit, pluribus opus eſſe videtur experimentis in poſterum inſtituendis. In omnibus tamen Thermometris Mercurio reuiuificato a me impletis ad vitrum Thermometri adhaeſionem obſeruaui quandam, ita vt quaſi vnguinoſus videretur. Vix tamen a vero aberrare exiſtimandus erit, qui contendat, generatim et vniuerſe congelationem Mercurii eo fieri faciliorem, quo Mercurius impurior, adeoque e contrario difficiliorem, quo purior fuerit. Hae ſunt potiores differentiae phaenomenorum, quas mihi in captis cum Thermometris experimentis obseruare licuit. Sed instituimus quoque alia, vbi vt Thermometra adhiberem, scopus non permittebat. In congelationibus liquorum aquosorum superficiem fieri conuexam vulgari experientia cui non constat? quod tamen secus est in liquoribus oleosis, qui, si ex statu fluiditatis in statum soliditatis frigore abeunt; superficiem non conuexam sed paullo concauam habent, vt et sebum, cera et alia monstrant, et quod experientia vulgaris et artificialis satis docuit, sulphure excepto. A priori per rationes satis certum iam esse poterat, Mercurium superficiem concauam esse in congelatione induturum propter condensationem tam insignem, quam patitur, vti metalla reliqua fusa, si ferrum, bismuthum et antimonium exceperis, quando rursus ex statu fluiditatis in statum firmitatis certo frigoris gradu transeunt, superficiem concauam induere solent, et propter maiorem contractionem et condensationem debent. Cepi tubum communicantem primum, cuius diameter duarum linearum erat, in quem Mercurium infudi, vt altitudo duarum linearum esset, quem quum immersissem in mixturam niuis et spiritus nitri; obseruaui in vna Mercurii extremitate Mercurium plane fuisse congelatum, et superficiem fuisse concauam, quum in altera extremitate Mercurius tantum ita gelatus esset, vt media pars adhuc fluida esset.

Effe-

Effeci, vt effluеret pars liquida inclinatione tubi, quo facto Mercurius congelatus in hac parte tubulum repraesentabat intus cauum, et asperum, effluxu autem Mercurii altera extremitas nihil patiebatur, quoniam plane solida erat. Eadem euenta obseruauimus saepe aliis instrumentis, tubis simplicibus et globis vitreis Mercurio semiplenis.

Phaenomena hactenus recensita nunc adhuc adcuratius consideranda erunt, et quantum fieri potest explicanda, atque quae inde sequantur, expendendum Primum satis manifestum est, solum calorem esse caussam fluiditatis Mercurii, vti aquae aliorumque fluidorum. Quod si igitur corpus mundi existat, vbi tantus frigoris gradus regnat, qui Mercurium solidum facit, dubium esse non potest, quin Mercurius aeque firmum corpus, ac metalla reliqua in tellure nostra, adparere debeat. Deinde patet Mercurium vere et proprie congelascere, et in glaciem propriam abire, quamuis glacies mercurialis a glacie aquae, liquorumque aqueorum quodammodo differat. Idea congelationis certe nihil aliud inuoluit, et inuoluere potest, quam transitum fluidorum ex statu fluiditatis in statum firmitatis siue soliditatis solo frigore effectum, quod ex omnibus casibus specialibus et exemplis manifestum est, vnde idea glaciei est abstracta. Aquae et liquores aquei an aliam ob rationem congelata et glacies dicuntur, quam quod frigore ſolida, firma et dura corpora facta ſunt? Recte igitur omnibus fluidis, cuiuscunque ſint generis, ob eandem rationem conglaciatio vera et propria tribuenda erit, ſi frigore fiant firma atque dura, cui enim competit definitio, eidem definitum quoque erit tribuendum. Sed prouti fluida ipſa ſunt diuerſa, diuerſa quoque eorum glacies fieri ſolet et debet, hinc oleoſa corpora frigore indurata, diuerſam glaciem a glacie aquarum repraeſentant, quae quoque diuerſa phaenomena exhibere ſolet; vti glacies diuerſae diuerſorum ſpirituum, diuerſarum ſolutionum ſalinarum et aliarum teſtari quoque poſſunt. Sed videtur eſſe attributum proprium glaciei, natare in fluido, ex quo nata eſt, item fragilem eſſe, non ductilem. Si de aquarum glacie intelligatur prius, concedi in tantum poteſt, in quantum nulla glacies ex aqua nata vel naturaliter, vel arte producta, ad hoc vsque tempus reperta, quae non aquis ſuis ſupernatauerit, ſed ad eſſentiam glaciei non ſpectat; poteſt natare et non natare, eſt et manet glacies, neque deſperandum puto fore, vt ipſa glacies aquae non ſupernatans reperiatur arte maiore, quam adhuc, adhibita. Neque igitur glaciei aquarum attributum, ſed modus eſt, et accidens natare in aquis ſuis. Idem valere quoque debet de fragilitate, quae quidem proprietas glaciei aquarum, ſed modus et extraeſſentiale reſpectu glaciei generatim

tantum

tantum esse potest. Esse igitur glacies potest, siue ductilis sit, vt in Mercurio, siue non, vt in aliis fluidis. Omnia metalla qua solida glaciem constituunt, item cera, sebum, vitrum et alia, generatim omnia corpora solida et dura, quae calore fluida fieri possunt, nihil sunt, nisi species glaciei.

Quemadmodum igitur aqua recte glacies fusa dicitur, quum reuera nil aliud sit; sic Mercurium viuum et fluidum esse glaciem Mercurii fusam, recte dubitari non potest. Status igitur illius naturalis, firmitas, non fluiditas sit oportet, quum actione ignis et calore haec efficiatur, vti in reliquis fluidis quorum haud dubie nullum est, quod sua natura sit fluidum. Funditur igitur Mercurius aeque, ac alia metalla, calore, vt fluat viuusque fiat, sed hoc tantum cum discrimine, vt gradus admodum paruus caloris ad illius fusionem requiratur. Constat metalla sub certo et determinato caloris gradu fundi fluereque incipere, diuerso tamen in diuersis metallis, vt sub gradu 420. stannum purum; 550. plumbum purum: 470. bismuthum purum scalae *Fahrenheitianae*, vel secundum nostra obseruata plumbum liquefit sub gradu 320. supra 0 nostrae scalae, qui conuenit cum gradu 596. scalae *Fahrenheitii*; stannum 170 = 416 *Fahrenh.* bismuthum 235 = 494 Zincum vero maiorem caloris gradum requirere, quam habet Mercurius

 bulli-

bulliens, experti ſumus. Quod ſi igitur exacte conſtaret, ſub quo gradu Mercurius gelaſceret, adeoque ſolidus fieri inciperet; ſciri quoque poſſet, ſub quo gradu rurſus fluidus, et quaſi ex morte rediuiuus fieret. Nam vti aqua ſub gradu 150. in glaciem abit, ſic rurſus regelaſcit ſub eodem fere gradu caloris, et metalla rurſus ſolida fieri incipiunt, ſub gradu caloris fere eodem, quo fundi incipiunt. At enim vero ex ſuperioribus patet latitudinem hic eſſe maiorem, quam vt grádus talis determinari poſſit, non maiorem tamen calorem, quam 465. graduum ſecundum ſcalam noſtram, requiri, dubio carere videtur, quum nunquam ſub hoc gradu veſtigium congelationis Mercurii mihi quidem detegi potuerit. Inde porro fluit condenſationem, ſiue contractionem, adeoque diminutionem voluminis Mercurii, eſſe quidem ingentem, id quod ex profundo Mercurii deſcenſu in Thermometro in congelatione illius ſatis ſuperque intelligitur, quanta tamen ſit haec voluminis Mercurii diminutio, exacte determinari nequit, ob latitudinem dictam, et hinc quoque grauitas, ſeu pondus eius ſpecificum, adcurate determinari non poteſt.

Quum quo maior voluminis Mercurii diminutio fit, eo maius pondus eius ſpecificum fiat oporteat: patet, propius Mercurii pondus ſpecificum in eius congelatione adpropinquare debere ad aurum, quum iam in ſtatu fluiditatis omnium metellotellorum proxime ad illud accedat, ſi a Platina, ſemimetallo, abhinc paucis annis in America invento diſceſſeris, cuius pondus ſpecificum ad aquam eſſe dicitur vt $182 : 10 = 18\frac{1}{5} : 1$. Quodſi numerus medius pro puncto congelationis Mercurii ſumatur 650, erit voluminis diminutio facta $\frac{1}{15} + \frac{5}{13}$. ſui parte, adeoque pondus eius ſpecificum auctum quoque $\frac{1}{15} + \frac{5}{13}$ ſui parte erit, ſcilicet ab ea extenſione ſeu volumine, quod habet in calore aquae bullientis; ſed a volumine temperici aquae in glaciem abeuntis $\frac{1}{20}$. Concipitur et ſupponitur nimirum in Thermometro tota maſſa Mercurii diuiſa in 10000, hinc gradus Thermometri ſunt partes decies milleſimae contractionis et condenſationis Mercurii, ita vt e. g. gradus 200. indicet condenſationem eſſe factam $\frac{1}{50}$. Nam $\frac{200}{10000} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ (*).

Merito hic quaeritur, vnde tanta ſit latitudo, quae illius ratio? forſitan non vna eſt, ſed plures concurrunt. Nam primum ex ſuperioribus manifeſtum eſt, Mercurium non ſemper integrum fuiſſe congelatum, ſed partem maiorem, minoremue fluidam perſtitiſſe. Maior igitur condenſatio et voluminis Mercurii diminutio facta ſit neceſſe eſt in congelatione plena, quam in partiali, Mercurius igitur in partiali congelatione tam profunde deſcendere non potuit quam in totali. Deinde in totali quo-

(*) Vid. Memoires de M. De L'Isle pag. 267. et ſeqq.

quoque congelatione differentia cogitari et concipi potest, et debet. Metalla pleraque, vti calore eo magis extenduntur, quo calor maior est, donec in statu fluiditatis summam nanciscantur extensionem, ita quoque, quo maius est frigus, cui metalla sunt exposita, eo magis quoque contrahuntur et condensantur. Iam vero in mixtura niuis et spiritus nitri modo maius, modo minus frigus esse potest, et reuera esse solet. Fac igitur frigus esse multo maius, quam ad congelationem etiam totalem requiritur, eiusmodi frigus Mercurium non solum gelabit, sed excessu suo quoque gelatum Mercurium magis condensabit, adeoque volumen minuet. Haec tamen differentia adeo notabilis in Thermometro esse non potest.

Multo autem notabilior differentia fieri debet, si contingat, vt pars superior primum incipiat congelari, ita vt simul tubum capillarem Thermometri obstruat. Contigit mihi bis, quum Thermometrum prius niue sepeliuerim, et deinde in niuem super bulbum Thermometri spiritum acidum infuderim, contigit mihi inquam, vt pars superior plane esset gelata, inferiore maiorem partem fluida existente. In hoc casu, igitur Mercurius profundius, et minus profunde descendat necesse est, prouti congelatio in tubo capillari citius, tardius contingit. Ergo pro diuersa ratione congelascendi, et diuerso frigore non potest non semper differentia

quae-

quaedam in descensu Mercurii nasci, quae exactissimam puncti congelationis determinationem impedit. Diximus dubio procul interdum oriri in mixtura frigorifica maius frigus, quam ad congelationem Mercurii necessarium sit. Hoc quidem a posteriori per experientiam ostendi nondum potest, quoniam Thermometra solida, quae hic adhiberi possint, adhuc in desideratis numerantur; probabilissime tamen ex phaenomenis concludi posse, vel ex celeritate descensus maiore et minore videtur

Mercurius solidus congelatus, vti per se patet, non potest non desinere esse mensura caloris in Thermometris, quia desinit se debite contrahere et dilatare, quum gradus caloris et frigoris nihil aliud sint, nisi gradus dilatationis et contractionis Mercurii et aliorum fluidorum, inter quae praecipue spiritus vini eminet. Requiritur, vt haec contractio, et dilatatio Mercurii, aliorumque fluidorum fiat proportionaliter, quod semper in conficiendis scalis Thermometrorum supponitur, alias in partes aequales diuidi non possent; vtrum vero in tam insigni frigore contractio et dilatatio fiat adhuc regulariter, proportionaliter, non sine ratione dubitari posse existimo, certe spiritus vini contractionem et dilatationem, cum contractionibus et dilatationibus Mercurii in gradibus maioribus plane non convenire expertus sum. Tria Thermometra, spiritu vini rectificatissimo repleta, cum Mercurialibus

Thermometris alias satis exacte concordantibus sumsi, et in materiam nostram frigorificam immersi simul cum Thermometro Mercurio semipleno; quo facto obseruaui, Mercurium fuisse congelatum, quum contra spiritus vini rectificatissimus vix ad 300. descendisset.

Videtur igitur descensus Mercurii, inprimis quando cum impetu fieri coepit, nullam amplius proportionem in contractione sua seruare; hoc saltem certum est ex obseruatis, harmoniam et concordantiam Thermometrorum Mercurialium in profundioribus frigoris gradibus plane desinere cum Thermometris spiritu vini repletis. Ex obseruatis his allatis porro perspicitur, frigus ad gelandum Mercurium sufficiens, non continuo esse sufficiens ad congelandum spiritum vini rectificatissimum, quum tamen Mercurius omnium fluidorum maximum frigus ad congelationem requirere videri possit. Inde concludi amplius potest, Thermometra spiritu vini rectificatissimo repleta, inseruire posse indicationi diuersi frigoris maioris et minoris in massa frigorifica, quamuis mensuram frigoris non determinent; possunt igitur loco Thermometrorum solidorum interim esse, et adhiberi, donec idonea solida et ad hunc scopum apta habeamus.

Phaenomenum supra indicatum de continuato descensu Mercurii in Thermometris in aëre libero, para-

paradoxum omnino videtur, quum frigus in aëre libero regnans semper multis gradibus a frigore materiae nostrae frigorificae superetur. Ratio non alia videtur, quam duratio solutionis niuis, quae Thermometro adhaeret. Nam quum frigus a materia frigorifica non producatur, nisi in quantum solutio et mixtio materiarum contingit: sane eiusmodi frigus insigne, quod Mercurium adhuc in aëre libero deprimit, aliunde esse posse non videtur, quam a continuata solutione niuis a spiritu nitri, Thermometro adhaerentis. Magis adhuc paradoxum videtur phaenomenum, quod interdum Mercurius prius adscendat, et deinde demum descendere incipiat, vsque dum Mercurius fiat congelatus, quin non semel quoque expertus sum in noua infusione et instillatione spiritus Mercurium rursus adscendere coepisse, quamuis iam prope ad punctum congelationis antea descendisset. Cur hoc fiat, quaeritur: accidisse vt plurimum hoc mihi visum est, quoties paullo maiorem quantitatem spiritus infudi, ita vt Thermometri bulbum immediate attingeret. Aqua adhaerens bulbo Thermometri in caussa primum esse videtur, quoniam constat spiritum nitri aquam calefacere, et niuem frigefacere Quod si igitur secunda infusio in eandem materiam frigorificam fit, a niue fusa; massa aquosa iam est. Deinde quando immediate attingit spiritus nitri bulbum Thermometri iam insigniter frigefactum, in secunda vel tertia infusione, Mercurium adscendere debere facile conspicitur, quum hic spiritus, qui de nouo infunditur, multo minus frigidus sit, quam Mercurius in Thermometro iam frigefactus. Supra monuimus aquam fortem et spiritum nitri fumantem esse aptiora ad frigus producendum insigne et tale, quo Mercurius congelatur, cui hic addimus nos spiritum nitri fumantem, et aquam fortem esse omnium spirituum, quin omnium materiarum, frigus artificiale producere valentium, praestantissima deprehendisse. Multis experimentis aliorum spirituum acidorum vim explorauimus. Cepimus primum oleum vitrioli, quod satis constat esse omnium acidorum fortissimum. Quum aqua fortis aliam ob rationem spiritui nitri simplici non videatur praeferenda in producendo frigore artificiali, quam quod sit fortior; videtur oleum vitrioli omnium acidorum fortissimum et praestantissimum in producendo frigore artificiali, ad Mercurium gelandum effectum edere debere quoque fortissimum. Sed euentus spei non respondit, nunquam enim oleo vitrioli congelationem Mercurii producere potui, et semper massam frigorificam cum oleo vitrioli factam, minus produxisse frigus expertus sum, quam massa frigorifica ope aquae fortis facta effecit.

Obseruatur quidem oleum vitrioli in niuem quam fortissime agere, dum momento niuem, quam

attin-

attingit ita solu't, vt in nihilum redacta videatur, sed haec ipsa solutio, quasi in instanti, videtur esse caussa, quare tam insigne frigus non producatur, quam ope aquae fortis, vbi lentior videtur solutio, dum communicatio frigoris cum vitro Thermometri, et ipso Mercurio tam cito fieri non potest; frigoris enim gradus maximi diutius, quam solutio maxima, durare nequeunt. Hic massa frigorifica diu quidem maiorem frigoris gradum, quam in aëre regnantem retinere potest et solet, sed summum frigus mox perire solet. Praeter oleum vitrioli alios spiritus acidos, et non acidos exploraui, vt effectum cognoscerem, quem in producendo frigore praestarent. Nominatim adhibui spiritum salis marini, spiritum salis ammoniaci, spiritum vitrioli dulcem, *Hoffmanni* liquorem anodynum, liquorem *Bestuschevi*, vel *de la Motte* dictum, spiritum aceti, spiritum sulphuris, spiritum vini rectificatissimum, spiritum cornu cerui. His liquoribus omnibus vim inesse producendi frigus niui admistis mirum omnino videri potest et debet, reuera tamen in iis eiusmodi vim maiorem et minorem inesse, experimenta indubia docuere, quae ad hunc scopum a me sunt capta.

Quoniam scopus hic erat tantum diuersam vim horum fluidorum explorare, quam habeant in producendo frigore; mediocris frigoris gradus in aëre ad hunc finem sufficiebat. Thermometrum monſtrabat 159, et variabatur durantibus experimentis 4. gradibus, dum in fine experimentorum oſtendebat in aëre libero 155. Summa experimentorum huc redit: Spiritus ſalis marini, niui adfuſus, auxit frigus naturale 30 gradibus. Spiritus ſalis ammoniaci 10 gradus frigoris produxit. Oleum vitrioli 35; Spiritus nitri fumans 58, Aqua fortis 40, Spiritus nitri ſimplex 30. Spiritus aceti, vti quoque ſuccus citri non notabilem differentiam. Spiritus vitrioli dulcis 20, Liquor anodynus *Hoffmanni* 32, Liquor *Beſtuſcheuii* dictus etiam 32, Spiritus cornu cerui 10, Spiritus ſulphuris 10, Spiritus vini rectificatiſſimus 20, camphoratus 15, Spiritus vini Gallicus 12. Quin etiam vina producere ſolebant frigus, 6. 7. 8. graduum et plurium. Spiritus inflammabiles producere frigus poſſe, et ſolere mirum omnino videri poteſt, quum ſpiritus vini rectificatiſſimus ipſe ignis liquidus videatur. At enim vero mirari deſinemus, ſi in animum reuocauerimus, cauſſam frigoris artificialis a nobis ſupra allatam, ſcilicet ſolutionem niuis a menſtruo, eiusque mixtionem. Quum igitur ſpiritus vini, et ipſa vina niuem ſoluere poſſint, et cum ea miſceri; mirandum amplius non eſt, nouum frigus ea producere valere.

Ergo quidquid ſpirituum niuem ſoluere eique miſceri poteſt, ita vt tertium fluidum conſtituat, illud

illud quoque nouum frigus producere valere, erit censendum. Est autem mixtio aeque essentialis, ac solutio. Nam sunt fluida sulphurea alia, vt olea essentialia, quae quidem niuem soluere, sed solutae misceri non possunt, et hinc quoque nullum effectum in producendo frigore praestare queunt. Instituimus ea fini experimenta cum oleo menthae, serpilli, terebinthinae, succini quoque et aliis; obseruauimus quidem aliquam niuis solutionem, sed nihil plane frigoris, quod non aliam ob caussam contigit, et contingere potuit, quam quod haec olea niui solutae misceri, adeoque tertium quoddam fluidum constituere non potuerint. Quod si paradoxum videtur, quod haec fluida, inprimis inflammabilia, et spiritus fermentati producere possint ac soleant frigus; multo magis paradoxum videri potest et debet, quod pleraque horum fluidorum aquae infusa, non frigus, vt in niue, sed calorem efficiant, adeoque contrarios et oppositos effectus in eadem materia producant: quid enim aqua aliud, quam nix liquefacta et fusa est? Sic vna eademque caussa effectus oppositos producit, pro diuersa eiusdem obiecti receptiuitate, vti loqui consueuere. Receptiuitas autem diuersa vnius eiusdemque obiecti et materiae, non nisi a diuersa eius textura pendere potest, vti hic a diuersa niuis et aquae textura, ita vt in productione frigoris solutio, contra in productione caloris efferuescentia quaedam locum habere

habere possit. Ac ne forsitan suspicio oriri possit, in niue adhuc aliud latere posse, praeter aquam simplicem, cum ipsa niue liquefacta experimenta institui. De spiritu nitri, adeoque aqua forti et spiritu nitri fumante iam constat, quod niuem frigefaciant, eiusque aquam calefaciant, et de paucis aliis; sed vtrum quoque in aliis fluidis pluribus mihi exploratis haec contraria phaenomena sint obseruata atque descripta, mihi quidem cognitum non est. Obseruata mea hic tantum summatim indicabo, quia huius loci proprie non sunt, specialiora et alia huius generis obseruata alii tempori reseruamus. Postquam aqua, et spiritus ad eandem temperiem cum Thermometro erant redacta, scilicet ad 128 gradus in museo meo, obseruaui 1) Oleum vitrioli aquae instillatum produxisse calorem 35 graduum, 2) Spiritum salis marini 10, 3) Spiritum Vitrioli dulcem 15, 4) Liquorem anodynum *Hoffmanni* 10 5) Eundem gradum produxit Liquor *Bestuscheuianus* scilicet vltra temperiem 128, 6) Spiritus vini rectificatissimus 10°. Contra ea in spiritu salis ammoniaci, in spiritu sulphuris, in spiritu cornu cerui nihil mutationis temperiei aquae infusis obseruare potui, nihil producti caloris, quae omnia hic generatim indicasse sufficiat. Olea etiam subtilissima aquae infusa, et hic quoque nullum effectum caloris, vti in niue nullum effectum frigoris producere posse, per eandem rationem supra datam, quod scilicet nulla

mistio,

miſtio, neque cum niue, neque cum aqua locum habeat, facile intelligi, praeuideri et praedici poterat. Nihilo minus de oleo ſuccini, terebinthinae, menthae et ſerpilli tentamina fecimus, vt et per experientiam res ab omni dubio liberaretur: Obiter notamus, perhiberi quidem olea eſſentialia, ſpiritui vini rectificatiſſimo mixta, frigus aliquot graduum producere, ſed nihil tale obſeruare potuimus, quamvis diutius quam horam dimidiam expectauerimus effectum, moram enim dimidiae horae requirunt, vti Diſſertatione peculiari mihi demonſtratum eſt, vitium hoc eſſe ſubreptionis.

Ergo ex dictis ſatis patet, quod diximus, quamuis multa ſint fluida frigus artificiale producere valentia, omnium tamen praeſtantiſſimum eſſe ſpiritum nitri cum ſuis ſpeciebus, eoque ſufficientiſſimum ad Mercurium ſolidum fixumque reddendum, ita vt quilibet Methodo mea ſimplici adhibita, ſufficienti frigoris naturalis gradu, minimum 175 exiſtente, experimenta mea ad congelationem Mercurii producendam, facile imitari poſſit, vti quoque, communicata mea methodo, optimo ſucceſſu iam hic Petroburgi ſunt iterata a diuerſis, inter quos *V. C. Lomonoſouium* Conſiliarium, *Zeiherum*, *Aepinum*, *Modelium* nominaſſe ſufficiat. Proportionem niuis et acidi nitri nullam determinatam adhibui, modo inſtillatis paucis tantum guttis in niuem experimentum ſucceſſit, modo maiorem portionem

tionem infudi. Niuem glaciei contusae esse praeferendam, vel ex eo concludi posse videtur, quod nix ob texturam suam raram ad solutionem aptior deprehendatur adcommodatiorque. Deinde effusio spiritus a *Fahrenheitio* et aliis eum imitatis adhibita plus obesse, quam prodesse videtur. Quod si obseruata et obseruanda diuersorum in posterum conferentur, dubium esse non potest, quin egregia incrementa haec de Mercurio frigore fixando doctrina sit captura, aliisque inuentis ansam suppeditatura. Porro ex dictis satis quoque patet, Mercurium non tam loco numeroque Semi-Metallorum, sed perfectorum esse habendum, quod vero minimo omnium Metallorum gradu caloris fluat. Nam fusa Metalla cum Mercurio viuo seu fuso conueniunt quoque, quod partes eorum mutuo se trahant, in globulos se colligant, item ex statu fluiditatis, non in instanti, sed successiue in statum soliditatis transeant, et vice versa. Quaeri potest, an non hoc Metallum, quod omnes aliorum proprietates habet in statu soliditatis et fluiditatis, hoc sibi tamen proprium habeat, quod ad ebullitionem certo caloris gradu redigi possit, quod neutiquam vero in reliquis metallis obseruare licet. Sed esse et alia metalla bullitionis sub certa conditione capacia, quin ipsius quoque volatilitatis, iam ab aliis ostensum est, quod in praesenti disquirere pluribus non licet. Gradum autem caloris, sub quo Mercurius ebullire incipiat,

non.

non esse 600 scalae *Fahrenheitianae*, vti vulgo traditur, sed minimum 709 eiusdem scalae, siue 414 nostrae supra o calorem aquae bullientis, (nam et hic punctum ebullitionis tam adcurate determinari nequit, vti punctum congelationis Mercurii ob phaenomenorum differentiam), multis experimentis iam alias ostendi, et probatum dedi; Error igitur maior, quam centum graduum committitur, si punctum ebullitionis ponatur 600, scalae *Fahrenheitianae*, qui numerus cum $323\frac{1}{3}$ nostrae scalae conuenit supra punctum ebullitionis aquae. Habent ceterum phaenomena ebullitionis et congelationis Mercurii hoc commune, vt quando ebullire incipit, cum impetu adscendere, vti cum impetu descendere incipiat, quando congelascere incipit. Porro motum vibratorium saepius ante descensum illum celerem in congelatione Mercurii obseruaui, qui etiam contingere solet paullo ante initium ebullitionis illius. Quod si igitur ponere lubeat terminum congelationis Mercurii 650. tanquam medium quendam secundum obseruata nostra, et terminum ebullitionis 414 supra o: conspicitur a summa contractione ad summam dilatationem esse distantiam 1064 graduum scalae nostrae, et *Fahrenheitianae* 1237, si scilicet ponatur, vti ponendum est, numerum 212 scalae *Fahrenheitianae* esse aequalem ciphrae ebullitionis aquae notae, et $32 = 150$. scalae nostrae. Hinc quanta ponderis specifici mutatio a termino ebullitionis ad terminum congelationis Mercurii fiat, nemo non intelligere facile poteſt. Diminuitur ſcilicet volumen, quod Mercurius ad initium ebullitionis habet, plus quam decima ſui parte. Nam ſi ſupponatur vt ſupra, totum volumen, quod Mercurius in ſumma ſua extenſione habet, eſſe 10000, erit diminutio $= \frac{1064}{10000} = \frac{1}{9} + \frac{53}{133}$; Siue ſi extenſio ſumma ab initio ebullitionis Mercurii ad illius congelationem ponatur rotunde tantum 1000, adcurate diminutio volumis a ſumma extenſione ad ſummam contractionem erit $\frac{1}{10}$. Ergo quoque grauitas ſpecifica a ſumma dilatatione decima ſui parte augeatur oportet ad ſummam condenſationem et contractionem, quae in illius congelatione contingit.

Quaeri adhuc poteſt, cur mixtura niuis et acidi nitri in maſſam ſolidam non abeat, glaciemque formet, ſed mollioris conſiſtentiae maneat, quamuis multo maiorem frigoris gradum poſſideat, quam ad congelationem aquae fortis requiratur? Aquam fortem, vt ſupra iam monuimus, frigoris gradus 204, ſiue 34. *Fahrenheitianae* ſcalae infra 0. gelauit. Maſſa noſtra frigorifica ſaepius 250 et vltra, gradus tenuit, et mollis inſtar pultis permanſit. Cauſſa huius Phaenomeni paradoxi non alia eſſe videtur, quam continuatio ſolutionis niuis et mixtionis quaedam. Nam quum frigoris productio a ſolutione et mixtione vnice pendeat; fieri non poteſt, vt maſſa haec, quae fluidum tertii generis conſtituit,

tuit, in glaciem perfectam abeat, dum eam ſolutio et mixtio perſeuerans non poteſt non impedire, quae in puncto maximi frigoris perfectiſſima ſit oportet.

Poſſunt adhuc aliae quaeſtiones, tam de natura Metallorum, quam frigoris artificialis indole inſtitui, et quae partim ex ſuperioribus ſolui poſſunt, quas autem in praeſenti lubens praetereo.

Haec habui in praeſenti de hoc meo inuento nouo dicere; quae deſiderari hic adhuc poſſunt, ſupplere et ipſi ſtudebimus, nec alii, quod ſperamus, deerunt, qui vna ſtudebunt.

DISSERTATIO

CONTINENS PARTIM ADDITAMENTA NOVA ET SVPPLEMENTA AD DISSERTATIONEM DE CONGELATIONE MERCVRII SIVE HYDRARGYRI, PARTIM IN ALIA CORPORA FRIGORIS ARTIFICIALIS INSIGNIORIS NOVOS EFFECTVS.

Auctore

I. A. BRAVNIO.

Ex quo tempore de congelatione Mercurii siue hydrargyri a me detecta dissertationem euulgavi, nullam praeterire hyemen passus sum, quin experimenta huc spectantia instituerem ad supplenda et perficienda, quae in dissertatione nostra dicta desiderauimus.

Existimauimus quidem tunc temporis eruditos in aliis regionibus quoque ad haec desiderata supplenda suum esse collaturos; sed spes nos fefellit, neque nunc speramus vmquam facile hoc fore. Nam requiritur omnino insignis quidam frigoris gradus naturalis in aëre ad congelandum Mercurium, tanquam conditio sine qua non, qui in regionibus minus borealibus eoque calidioribus raro, aut plane non existere solet. Gradus frigoris minimus naturalis,

ralis, ſub quo hydrargyrum in forma ſolida, arte coëgi adparere, vti reliqua metalla adparere ſolent, fuit 175. ſcalae a nobis adhibitae Delilianae, neque hoc frigoris gradu Mercurium vnquam ad perfectam congelationem perducere potuimus, ſed tantum ad parietes vitri lamellas adhaerentes vidimus. Vbi igitur maiores eo frigoris naturalis gradus exiſtere non ſolent, ibi vix ac ne vix quidem voluptate vnquam fruentur alii Mercurium, vti reliqua metalla in forma firma et ſolida perfecte videndi, ſed ſpectabunt tantum eum, vt metallum fuſum in forma fluidi corporis. Hinc ſequitur innanem operam impendi, ſi quis animum inducat, arte rem eo perducere, vt aeſtate quoque Mercurius congeletur, et formam ſolidi corporis induat. Quum igitur eo felicius capiantur huius generis experimenta, quo regio frigidior eſſe ſolet: dubitari nequit, quin in Sibiria, vbi inſigniores frigoris gradus regnare ſolent, ſucceſſu egregio gauiſura ſint huius generis experimenta, modo ſatis periti ibi adeſſent, qui ea inſtituere debite poſſent. Interim deſperare plane non debemus; forſitan cum tempore, naſcetur quoque occaſio.

Habent igitur regiones borealiores, altiores eoque frigidiores prae reliquis hanc praerogatiuam, vt multa experimenta, et multae obſeruationes inſtitui eoque multa noua detegi queant, quae in aliis minus borealibus et minus altis locis obſeruari

non

non poſſunt, quo inter alia pertinent frequentes aurorae boreales, frequentes halones ſolis et lunae, Parelii, Paraſelenae, et alia. Quae nos praeterea noua circa congelationem Mercurii a tempore primae detectionis a nobis factae reperimus et deteximus hic Petroburgi, nouis multis experimentis captis, nunc indicare breuiter animum induximus. Interim praemoneamus neceſſe eſt, labores noſtros multos et moleſtiſſimos ſpei et votis noſtris minus ſatisfeciſſe, quam exiſtimauimus, vti ex ſequentibus patebit.

Certum frigoris gradum in aëre requiri naturalem, ſi congelatio Mercurii bene ſuccedere debet, generatim iam antea monui. Scilicet multis ad hunc finem nouis inſtitutis experimentis reperi gradum 175 ſcalae Delilianae eſſe minimum, ſub quo aliqua Mercurii congelatio produci arte poſſit. Sed ſimul quoque cognoui, congelationem Mercurii ſub hoc frigoris gradu ſaepius vix ac ne vix quidem ſuccedere, et ſi ſuccedit, eam admodum eſſe imperfectam. Nam tantum circa parietes bulbi Thermometri tenues laminae adparere ſolent, ita vt reliqua Mercurii pars plane fluida permaneat. Hoc experimentorum genus optime inſtituitur vitris Thermometricis ex parte tantum Mercurio repletis, ita quam diſtinctiſſime laminae ad parietes adhaerentes conſpici poſſunt.

Quam-

Quamuis igitur partialis quaedam congelatio ſub dicto frigoris gradu obtineri queat; nunquam tamen ſecundum experimenta mea, totalis Mercurii congelatio obtinebitur. Nam haec maiorem frigoris gradum in aëre regnantem poſtulat, gradum ſcilicet ad minimum 185, melius 190, 195, 200 etc. Semper ceteris paribus, ſucceſſus eſt eo melior, quo gradus frigoris naturalis eſt maior, quod experimentis innumeris compertum habeo, et confirmatum.

Ad ſucceſſum optimum et ſpiritus nitri optimae notae requiritur, ſcilicet vel ſpiritus nitri fumans *Glauberi*, vel aqua fortis optima. Differentiam ſaepe vix inter ſpiritum nitri *Glauberianum* et aquam fortem optimae notae deprehendere potui. Quia tamen aqua fortis optimae notae non ſemper haberi poteſt; ſpiritus nitri fumans *Glauberi* praerogatiuam mereri omnino videtur.

Ceterum, quamuis multis captis experimentis, oleo vitrioli, et ſpiritu ſalis nunquam congelationem producere potuerim, (vti iam in diſſertatione mea priori monui, et hic nouis experimentis factis confirmare poſſum): tamen mihi ſemel contigit, vt frigoris naturalis gradu inſigniori in aëre exiſtente ſcilicet 200; Mercurius licet imperfecte et ex parte, maſſa frigorifica ex ſpiritu vini rectificatiſſimo et niue adhibita recenti, congelaretur. Nix recens lapſa praeferenda omnino eſt niui veteri, quemadmodum ſpiritus recens prae veteri omnino praerogatiuam habet. Nam ſi ſpiritus vetuſtior eſt, e, gr. ante annum vel dimidium anni confectus, multo difficilius effectus obtineri ſolet, quae omnia multis experimentis factis ſunt confirmata. Si ſpiritus nitri *Glauberi* eſt recens, niuem colore viridi, ſi vetuſtus, coeruleo colore tingere ſolet. De oleo vitrioli ſequens phaenomenum eſt adhuc notandum paradoxum, quod portione glaciei in illud iniecta fiat calidius, vti iam *Hoffmannus* adnotauit in obſeruationibus Phyſico - Chemicis ſelectioribus pag. 136, quum tamen ſi ſuperfundatur glaciei eam ſoluat atque frigus perducat. Scilicet portio non magna glaciei ſtatim ſoluitur et in aquam mutatur, quae oleo vitrioli miſta calorem producere ſolet. Male hinc nonnulli concluſere, oleum vitrioli omnia corpora et ipſam glaciem calefacere, et hinc menſuram caloris in corporis omnibus contenti praebere poſſe. Sic Thumigius Philoſophiae experimentalis pag. 293. ipſa glacies, inquit, oleo vitrioli adfuſo calorem gignit. Ceterum ſunt haec phaenomena theoriae, quam in priore diſſertatione dedi, omnino conſentanea. Nam cum frigus oriatur ex ſolutione; dubitari non poteſt, quin ſolutio eo melius ſuccedat, quo niues ſunt recentiores, atque ſpiritus; quum niues recentes et puriores ſint et rariores, ſpiritus autem recentes maiorem poſſideant vim ſoluendi, quia euaporatio nulla, aut parua adhuc

adhuc facta eſt, aut aliqua corruptio. Frigus artificiale per miſtionem ſalium cum niue ſoli quoque ſolutioni eſſe tribuendum per ſe intelligitur. Quod ad Mercurii indolem attinet, etiam puriſſimus congelari ſolet, quod etiam in diſſertatione iam monui, et multis experimentis captis nunc confirmo. Adhibui enim Mercurium non ſolum reuiuificatum ex ſublimato, ſed etiam ex cinnabari deſtillatum. Ex omnibus autem captis experimentis mihi innotuit, differentiam illam eſſe perpetuam, qua Mercurius puriſſimus paullo difficilius congeletur, quam ordinarius. Quamuis hanc differentiam etiam iam in mea priore diſſertatione indicauerim; tamen tunc temporis nondum certus eram, vtrum haec differentia eſſet perpetua, an non. Perpetuam autem eſſe, multis experimentis nunc eſt confirmatum. Forſitan propter maiorem denſitaten calor in Mercurio puriſſimo tam cito diminui nequit et amitti. Cogitarunt quidam Mercurium forſitam vel ob impuritatem, vel ob admixtam Mercurio aquam congelari, ſed hypotheſis, quam quidam ſumſerunt, eſt falſiſſima, omnem in corporibus fieri congelationem ob aquam contentam. Nam Mercurius quamdiu fluidus eſt, eſt pro fuſo metallo habendus, vti aqua pro glacie fuſa. Vti igitur reliqua metalla fuſa, neque ob impuritatem quandam, neque ob aquam iis admiſtam ſed ſola caloris diminutione rurſus firma fiunt; ſic quoque Mercurium frigore insigniori firmum fieri metallum, vti reliqua, omnino existimandum est, et omnia metalla in statu soliditatis vel firmitatis esse, ob eandem rationem ac Mercurium congelatum corpora que congelata alia, iam in dissertatione priori demonstraui, quod nemini dubium esse potest, qui ad genuinam congelationis notionem attendit. Aqua, glacies fusa in glaciem abit, et fit corpus firmum frigore solo seu diminutione caloris, sic omnia fluida, metalla fusa et alia, vt vitrum fusum etc. dum diminutione caloris firma fiunt, in speciem quandam glaciei abire sunt censenda.

De proportione niuem inter et spiritum, parum aut nihil omnino habeo quod addam. Nam aut spiritus niui superfunditur, aut nix spiritui infuso additur. In casu priori proportio niuis et spiritus in censum plane non venit et venire potest. Infunditur enim niui spiritus, vbi vel Thermometrum niui immersum est, vel, infusione facta illi immergitur. Quod si vero spiritus prius infundatur, tanta niuis copia est addenda, vt eiusmodi massa frigorifica fiat instar pultis mollioris. Superflua hic esset adcuratior mensio et ponderatio miscendorum, scilicet niuis et spiritus nitri.

Porro desideratis adnumeraui praecipue quoque determinationem duorum terminorum, qui adhuc vagi et incerti erant, scilicet terminus, vbi Mercurius cum saltu et impetu moueri et descendere

dere incipit, et terminus, ad quem descendit, vel vbi descendere in congelatione desinit. Ingens experimentorum numerus est, quae ad hunc scopum obtinendum, scilicet ad determinandos terminos dictos cepi, quae tamen spei et votis meis non omnino responderunt. Quod ad priorem terminum attinet, illum experimentis plurimis institutis admodum vagum inueni, modo enim profundius regulariter descendit Mercurius, antequam impetus inciperet, modo minus profunde, porro modo, dum Thermometrum in materia frigorifica adhuc erat immersum, modo in aëre libero, dum iam extractum erat, saltus praeceps coepit. Descendit Mercurius regulariter ad terminos, qui sequuntur; ad 350. frigus naturale erat 177. ad 400 frigore naturali 193. ad 500 et 530. descensus regularis obseruabatur frigore naturali 193 existente. Thermometrum in vltimo experimento erat cylindricum, et Mercurius reuiuificatus. Cera hispanica Thermometrum erat munitum in loco, vbi bulbus cylindricus tubo adhaerebat, ne congelatio Mercurii in eo loco, impediret descensum plenum. Congelatio Mercurii erat perfecta et Mercurius solidus cylindrum perfectum repraesentabat. Bulbus autem Cylindraceus fractus est, dum fiebat impetus, ita vt pars dimidia ex fracto cylindro promineret. Cylindrus Mercurii congelatus magis flexilis, quam plumbum et aurum purum, mihi visus est. Potest igitur Mercurius firmus iure pro molliſſimo omnium metallorum in ſtatu firmitatis conſtitutorum haberi; hinc clangor quoque, ſi modo clangor dicendus eſt, obtuſiſſimus eſſe ſolet. Digito quoque tetigi hunc cylindrulum, et vltra tria minuta ſecunda ſuſtinere frigus non potui; locus digiti vbi congelatum Mercurium tangebam, erat albus vt ſolet, ſi corporis humani pars gelatur, frictione vehementiore cum niue, more hic conſueto, digitum reſtitui. Deſcendit porro Mercurius regulariter aliquoties ad 550. frigus naturale erat 192; Mercurius etiam ex cinnaberi deſtillatus; vltra hunc terminum nunquam deſcendit regulariter ante impetum. Nonnunquam ad hunc terminum quoque regulariter deſcendit Mercurius ita, vt ibi ſtaret, impetu facto nullo, quod vero rarius contigit. De deſcenſu in aëre iam in diſſertatione priore expoſui et nulla alia omnino videtur ratio quam ſolutio continuata. Eſt hic impetus, vel praeceps ſaltus in congelatione, Mercurio plane proprius. In nullo alio fluido, quod frigore vel diminutione caloris firmum fit, ſimile phaenomenum, quod ſciam, obſeruari ſolet, certe ego non obſeruaui. Sed cur Mercurius ſolus dum ex ſtatu fluiditatis in ſtatum firmitatis tranſit eiusmodi phaenomenum motus praecipitis monſtret, tam facile dictu non videtur. Ratio tamen huius phaenomeni nulla alia mihi quidem videtur, niſi quod congelatio Mercurii fiat quaſi in inſtanti et mo-

momento, non ſucceſſiue, hinc non poteſt non Mercurii deſcenſus cum ſaltu praecipiti ſequi. Modus igitur congelaſcendi diuerſus in diuerſis fluidis eſt, dum in aliis quaſi in inſtanti, in aliis vero ſucceſſiue fieri ſolet. Quis enim ignorat congelationis modum eſſe alium in ſpiritibus et vinis, alium in oleis et aquis, alium in metallis etc. Eodem modo et regelatio in diuerſis congelatis eſt diuerſa, modo ſucceſſiua, tardior, celeriorue, modo quaſi in inſtanti. Certe Mercurius, ſi incipit regelari, vel rurſus fundi, momento et quaſi in inſtanti contingere hoc ſolet. Poteſt hoc oculis cerni et inde quoque colligi, quod Mercurius interdum celerrime rurſus aſcendat, licet iam, etiam poſt ſaltum, ad terminum fere vltimum deſcenderit.

Non minori difficultati obnoxia eſt determinatio termini alterius ſcilicet puncti congelationis Mercurii. Experimenta noua innumera ſunt, quae ad hunc ſcopum obtinendum cepi, ſed ſucceſſus ſpei et voto meo, non plane reſpondit. Nam fere omnia Thermometra, ſiue bulbus ſphaericus, ſiue cylindraceus, ſiue conicus fuerit, fracta ſunt, ita vt vel plane diſſiluerint, vel rimas egerint et fiſſuras, ſi ſcilicet Mercurius ex toto in bulbo contento congelatus erat. Vnde haec fractio pendeat, facile explicari non poteſt. Coniuncta haec fractio ſemper mihi obſeruata eſt cum impetu deſcendendi, ita vt videa-

videatur saltus hic praeceps et concussio bulbi, esse ratio cur bulbus Thermometri frangatur, et aliquid Mercurii non gelati ex bulbo vel plane fracto, vel ex fissuris et rimis effluat, eoque terminum descensus vltimum incertum reddat. At enim vero difficile est conceptu quomodo ex fissuris et rimis bulborum, portio Mercurii effluere possit, cum congelatio a peripheria ad centrum tendat, eoque parietes bulborum primi congelentur. Videtur igitur necesse, vt, dum ex tubo Mercurius fluidus adhuc descendit, portio quaedam huius Mercurii inter Mercurium congelatum et parietes bulbi interfluat, et per fissuras penetret, vel si parietes ex parte iam ablati sunt, libere defluat. Forsitan ad hanc expansionem subitam et fractionem concurrere potest aër contentus et conclusus in Mercurio, dum subito congelatione exprimitur et liberatur. Certe si Thermometrum ordinarium adhibetur, in quo bulbus nunquam frangi solet, cum Mercurius omnis in bulbum intret, ita vt spatium vacuum relinquatur: si Mercurius regelatus rursus in tubum ascendit, bullae aëreae paruae, quas forsitan aër expressus constituit, Mercurio interspersae conspiciuntur, cum ante congelationem fuerint nullae. Contractio bulbi vitrei subita ad fractionem parum aut nihil conferre videtur, alias bulbi Mercurio non plene repleti, vel bulbi Thermometrorum ordinariorum in congelatione Mercurii plena frangi quoque

que debere videntur. Cur bulbi non frangantur, si Mercurius tantum ex parte, non ex toto gelatus eſt, facilius intelligitur. Impetus enim, qui omnino cauſa fractionis principalis videtur, non tantus eſt, quantus in congelatione plena, eoque minor Mercurii copia in bulbum intrare ſolet, cedere quoque facilius poſſunt parietes et laminae Mercurii congelati.

Poſt innumera tentamina ad determinandum terminum vltimum deſcenſus Mercurii in congelatione eiusdem fruſtra facta, adhibui duo Thermometra, quorum bulbus ſphaericus diametrum $1\frac{1}{2}$ linea maiorem non habebat. Bulbi hi fracti non ſunt, ſed integri in congelatione perſtitere. Deſcendit Mercurius ad 630 et 640. et videtur omnino congelatio vel perfecta vel proxime perfecta fuiſſe. Frigus naturale fuit = 190. Cera hiſpanica tubulus, vbi bulbo adhaerebat, erat circumdatus, ne congelatio in ipſo tubulo deſcenſum vlteriorem impediret et bulbum obſtruere poſſet. Hic terminus parum differt a termino, quem in diſſertatione mea priore poſui, ſcilicet 650. et quum adcuratiſſima puncti congelationis ſeu termini ad quem Mercurius in congelatione deſcendat, determinatio locum habere nequeat, ita vt ſemper idem punctum, idem terminus, vti in puncto congelationis aquae poni poſſit, ob diuerſas rationes potiſſimum cum maior frigoris gradus quam ad congelandum Mercurium requiritur adesse possit, eoque densiorem Mercurium faciat, vti in aëre saepius maior, quam ad congelationem aquae requiritur, adesse solet; vti in dissertatione mea priori iam monui: sine errore terminus medius, quem in dissertatione mea posui 650. retineri potest, quum et alia experimenta sint, qui hunc terminum indicare videntur. Nam ad 550. saepius descensus regularis est mihi obseruatus ante saltum, quin semel quoque ad 600 visus est, quae tamen vltima obseruatio dubia videri potest, quoniam vnica est. Non igitur videtur hic terminus minor statui, neque etiam multo maior quam 650. Nam pro descensu irregulari post saltum praecipitem iure centum gradus numerari possunt. Sed vtrum hic terminus descensus vltimus gradum frigoris quoque indicet Mercurii gelati et firmi, quaeri potest et dubitari, vti iam in dissertatione priore quoque monui. Contractionem Mercurii non amplius frigoris mensuram esse posse, quam primum irregulariter et cum saltu praecipiti descendere incipit, per se patet. Tamdiu igitur tantum Mercurii descensus mensuram frigoris certam constituere censendus est, quam diu est regularis. Ergo gradus 550 certissime mensuram frigoris praebere potest, quoniam saepius in experimentis meis Mercurium ad hunc terminum regulariter descendisse ante

impe-

impetum vidi. Habet igitur Mercurius ſuum contractionis terminum, vltra quem ſua contractione frigus indicare amplius non valet. Hinc ſequitur, ſi etiam Mercurii deſcenſus vsque ad hunc terminum vltimum regulariter etiam deſcenderet, tamen pro menſura certa frigoris haberi non poſſe, quoniam ſi frigus maius eſſet, vlteriore ſui contractione indicare illud tamen non poſſet, quamuis et firmus Mercurius ſe contrahere adhuc, vt reliqua metalla, queat. Habent ſine dubio et reliqua fluida ſuos per frigus contractionis terminos maiores et minores, vbi deſinunt gradus frigoris indicare. Hinc eſſe videtur, quod in gradibus frigoris maioribus Thermometra diuerſis fluidis repleta non amplius concordent, quamuis in minoribus frigoris gradibus optime concordauerint. Qui de frigore abſoluto loquuntur, aut eiusmodi frigus intelligere debent, quod inſtrumenta indicare amplius nequeunt propter terminos contractionis, ſiue ſint Thermometra fluidis repleta ſiue ſint ſolida: aut frigus intelligere debent, vbi omnis in corpore calor abeſt. Eiusmodi dari frigus in vllo corpore probari poterit nunquam, neque in hoc mundo eiusmodi corpus exiſtere poſſe videtur. Ergo eiusmodi frigoris per ſe abſoluti terminus ſtatui nullus poteſt. Concedi tamen poteſt frigus quoddam abſolutum, quatenus contractio fluidorum et ſolidorum ad certum

 ter-

terminum locum habet, vltra quem instrumenta, quae ad determinandos gradus frigoris adhibere solemus indicare frigoris gradus amplius nequeunt. Si corpora fluida et solida darentur, quae quasi in infinitum contrahere se possent; aptam instrumentis materiam praebere possent ad gradus frigoris summos et ad frigus, si quod daretur, absolutum, indicandum. Ceterum vti nullum frigus per se absolutum, ita multo minus calor absolutus statui potest, id est talis caloris gradus, qui augeri, et quo maior concipi nequeat, quamuis corpora quaedam tantum certum caloris gradum assumere queant. Monui iam in dissertatione mea priore, frigus quod Mercurium gelauit, spiritum vini rectificatissimum vltra 300. gradus non depressisse in Thermometris, quae illo erant repleta. Confirmatum multis experimentis de nouo captis hoc vidi. Confirmarunt eiusmodi differentiam et alia mihi instituta experimenta. Impleui tria Thermometra oleis essentialibus, quae satis accurate inter se et cum Thermometris mercurialibus in gradibus frigoris, non insigniter magnis, concordabant. Olea nominatim erant, ligni Sasafras, Chamaemeli et Serpilli. Haec olea incongelabilia ante repereram non solum frigoris naturalis gradibus summis, qui hic Petroburgi existere solent, sed etiam frigore artificiali, quod Mercurium congelauit. Descendit in in Thermometris his oleis repletis fluidum non facile infra gradum 260. 270. 280. in massa frigorifica, licet Mercurius in aliis Thermometris gelatus fuerit. Frigus naturale erat 190 et 192. Praeter haec tria olea multa alia quoque tam in frigore naturali summo quam artificiali incongelabilia reperi; et praeter haec etiam aliud fluidum, lixiuium scilicet vltimum muriae (Mutterlauge) quod ex Stararussa est allatum. Dubium non videtur, quin alia quoque lixiuia eius generis vltima muriae congelationi non minus resistant. Sed de his experimentis fusius hic agere non licet, agam autem pluribus in posterum. An vllum in rerum natura detur fluidum calori suam debens fluiditatem, quod per se sit incongelabile, quaeri potest et solet. Non videtur dari eiusmodi fluidum per se et absolute incongelabile. Nam cessante tantum calore ad fluiditatem requisito, ipsa quoque fluiditas cessare debet. Aërem igitur quin ipsum Aetherem per se incongelabilem haberi posse non videtur. Cogitare licet, omni in rerum natura calore cessante, tunc certe nullum corpus fluidum, sed omnia corpora rigida, firma et solida haud dubia futura esse. Ceterum me non monente apparet, pleraque olea essentialia optimae notae ad Thermometra conficienda adhiberi posse aeque ac spiritum vini rectificatissimum, quoniam scilicet sunt incongelabilia pleraque. Feci iam periculum et Thermometra optime concordantia obtinui.

Haec fere ſunt, certe potiora, quae ad diſſertationem meam priorem in praeſenti addere poſſum. Deſideratis omnibus perfecte ſatisfactum non eſſe, neque forſan ſatisfieri facile poſſe, ex dictis iuxta mecum intelligent omnes. Quod ſi tamen fauentibus circumſtantiis peculiaribus aliquid noui adhuc detegere poſſum, id communicare cum Academia non intermittam. Ceterum modum quem deſcripſi, Mercurium congelandi alium, eſſentialiter ab hoc differentem non noui, neque dari poſſe facile exiſtimauerim. Neſcio igitur quid ſibi velit modus congelandi Mercurium per euaporationem, qui deſcribitur in Diario Anglico The *Gentlemans* Magazine dicto pro menſe Septembri 1761. pag. 403. Nam aut per iocum de hoc congelationis modo ibi dictum eſt, aut ſi ſerio, vti videtur, ſumma et craſſa indicatur ignorantia. Scilicet ibi praecipitur repetita immerſio Thermometri in ſpiritum aethereum, qua facta frigus ita augeri dicitur, vt tandem Mercurius congelaſcat. Quod ad experimentum hoc attinet, verum quidem eſt, productionem frigoris per euaporationem vel exſiccationem bulbi oriri poſſe et ſolere, ſed hoc frigus productum vltra 15 gradus non facile augeri poteſt, certe

certe ego nunquam augere potui. Ceterum de hac frigoris productione in peculiari egi dissertatione, Commentariis Academiae inserta. Per calorem quoque firmum fieri posse Mercurium, constat, scilicet si per plumbum calidum, quod adhuc molle est Mercurius figatur. Cum autem hic modus figendi Mercurium per amalgamationem Mercurii et plumbi fiat, eum huc non pertinere, facile intelligitur.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE

ANNI MDCCXLII. TIVMENI, TVRINII, WERCHOTVRIAE ET SOLIKAMII IN ITINERE POTISSIMVM A GMELINO INSTITVTAE. POTIORA MOMENTA EXCERPSIT ET IN ORDINEM REDEGIT.

I. A. BRAVNIVS.

Obſeruationum Meteorologicarum, quas in diuerſis Sibiriae locis inſtituit Gmelinus, ſumma capita methodo noſtra, qua in obſeruationibus Petropolitanis vtimur, et adhuc vſi ſumus, propoſuimus Tom. VI. Nouorum Academiae Scientiarum Commentariorum. Praeter eas repertae adhuc ſunt quaedam, quas fecit Gmelinus in itinere ex Sibiria Petropolin. Quum et hae quaedam notatu haud indigna contineant; operae pretium me factuurum arbitratus ſum, ſi et eas communes hic facio. Methodus eadem hic eſt adhibita, quae alias et in antecedentibus. Nimirum in ſummis et infimis altitudinibus barometricis numeri ante punctum pollices duodecimales pedis Pariſienſis, poſt punctum, partes eiusdem pollicis centeſimas ſignificant. Maximus et minimus calor ſecundum ſcalam thermomemometricam Delilianam eſt notatus. Praeter altitudines barometri ſummas et infimas, calorisque gradus minimos et maximos per ſingulos anni menſes, Meteora potiora ſunt adnotata.

Obſeruationes primae Tiumeni factae incipiunt a Februarii 1^{mo} et pertingunt ad Martii 3. Quae Turinii ſunt inſtitutae, initium capiunt a Martii 7^{mo} ad Iulii 4^{tum} vsque pertinentes. Et rurſus ab Oct. 1 ad Nov. 11. Werchoturienſes ſunt a Iul. 9 ad Dec. 8. Solicamienſes a Dec. 17 ad 31. eiusdem conſignatae.

Obſeruationes ipſae ſunt, quae ſequuntur, et primum Barometricae Tiumenii a Febr. 1 ad Martii 3. adnotatae.

Menſe igitur Februario Tiumeni Barometri altitudo maxima fuit = 28. 28, quae obſeruata eſt d. 23. Minima = 27. 24. d. 28. notata. Eſt igitur differentia, ſiue variatio altitudinis hydrargyri in tubo Torricelliano = 1. $\frac{4}{100}$. adeoque media altitudo barometrica 27. 76. medium arithmeticum ſumendo.

Maxima haec altitudo contigit ſub ſequentibus circumſtantiis: Coelum a meridie erat ſerenum vti quoque dies aliquot antecedentes et conſequentes fuere ſereni. Ventus SSW 3, proxime antecedens O 1 et W 2; ſequens SSW 3 et 4 per aliquot dies, ſequente demum SSW 1.

Frigus tempore obſeruationis nocte h. 12. Thermometrum monſtrabat 170. antecedens mane 165. ſequens 176. mane ſequenti die. Antecedens altitudo barometrica 28. 26. ſequens 28. 18.

Minima altitudo accidit ſub his circumſtantiis. Antecedens altitudo erat = 27. 26. ad quam nocte antecedenti a 27. 48 celeriter deciderat.

Sequens d. 1. Martii 27. 20 et denique 27. 13. h. 12. nocte.

Per diem nix larga cecidit, tempore obſeruationis h. 11. nocte coelum ſubſerenum. Die antecedenti coelum tenuibus nubibus erat obductum, ſequenti vero ſerenum. Ventus SSW 1 antecedente SSO 2. et ſequente SW 3 et 4 Thermometrum indicabat frigus = 169. Antecedens frigus = 172 et ſequens 174.

Frigus maximum fuit = 182. et minimum 146. variatio igitur = 36.

Maximum frigus notatum d. 27. et minimum d. 6.

Maximum frigus contigit vento SSO 2, antecedente SSW 2. 3. 4. et ſequente SSW 1. Antecedens frigus = 171 et ſequens 172.

Coelum erat fere ſerenum, vti quoque diebus antecedentibus et die ſequenti. Altitudo barometrica = 27. 67 antecedens 27. 80 ſequens 27. 46.

Mini-

Minimum frigus 146. h. 12 nocte consignatum est, mane erat =173 et sequenti die mane 162. ventus NW 2 antecedente SSW 3 et 4. sequente NO 1 et 00. Coelum serenari incipiebat ante nubilum sequente serenitate.

Altitudo barometrica = 27. 76 antecedens 27. 59 sequens 27. 95 quae porro creuit.

Meteora potiora huius mensis huc redeunt. Venti vehementiores d. 1. WSW 3 et 4. d. 2 S et SW 4. d. 3 SW 4. d. 4. 5. 6 SSW 3 et 4. sequenti die 8 malacia d. 11. N 3 et 4 d. 12. W 3 et 4. d. 13. 14 W 4 sequente d. 17 tranquillitate d. 24 SW 3 et 4 sequente d. 27. W 1. Ceterum regnavit ventus S et W.

Nebula d. 8. non admodum spissa h. 7. a. m. quae circa h. 10. dissipata est sequente serenitate.

Lux borealis tranquilla, quae arcus lucidi specie ad horizontem adparebat d. 20. h. 10 et seq. vento N 1 coelo sereno, Barometro 28. 07 Thermometro 168. sequente frigore 174.

Cometa huius anni et hic spectatus est, et quidem primum d. 28 quamuis iam ante 8 dies eum alii conspexerint. Cauda meridiem versus extensa orgyiam circiter longa adparebat.

Tota mense Catarrhi, tusse, rheumate, tonsillarum, vuulae et gutturis inflammationibus comitati, regnabant, vti quoque Tobolii et Ircuti grassati sunt.

Menſis Martius.

Obſeruationes huius menſis Turini (Turinsk) factae ſunt, exceptis tribus diebus primis, quae adhuc Tiumeni ſunt conſignatae. Incipiunt a d. 7mo.

Altitudo Barometri ſumma huius menſis Turini $= 27.85$. Minima $= 26.95$. Ergo variatio $= \frac{90}{100}$ ſiue circiter lin. 11 Paris.

Summa altitudo d. 18. ad h. 4. a. m. ſub ſequentibus circumſtantiis eſt notata. Antecedens altitudo $= 27.80$ et ſequens 27. 80 et porro 27. 62. Coelum nubilum et niuoſum vti die antecedenti et conſequenti fuit. Ventus ONO 1. antecedens N 1 ſequens OSO 1. Calor $= 160$. antecedens 157. ſequens 157 mane ſcilicet.

Minima altitudo notata d. 10. h. 8. a. m. et 4. p. m.

Antecedens erat $= 27.00$ et ſequens 27. 05. Ventus NW 2 antecedens SSO 2 ſequens W 1. Mane nix minuta iugiter cadebat ad h. 10. dein coelum hinc inde ſerenari coepit. Dies antecedens nubilus et niuoſus niue humida maiorum floccorum cadente, ſequens ſerenus cum aliquot ſequentibus. Thermometri gr. $= 157$. antecedenti die mane 167 et ſequenti 171.

Frigus maximum hoc menſe Turinii fuit $= 179$ et minimum $= 135$. Eſt igitur variatio caloris $= 44°$.

Frigus maximum contigit d. 7. h. 7. a. m. vento O 1. coelo ſereno, Barometro 27. 50.

Calor maximus d. 31. h. 5. p. m. notatus eſt vento N g. W 2. coelo ſpiſſis nubibus obducto. Ventus antecedens W et W S W 3 et 4. ſequens O S O 1 Barometri altitudo = 27. 55 antecedens 27. 36. ſequens 27. 60.

Meteora huius menſis haec fere ſunt Turinii notata.

D. 8. O 3 et S O 4 nocte, barometri altitudine per totum diem inuariata = 27. 30. antecedens 27. 43 et ſequens 27. 20. D. 9. S O 3. d. 14. S W 4 antecedente S 2 et ſequente quoque S 2. Altitudo Barometri = 27. 46. antecedens 27. 36 ſequens 27. 45. D. 15. W S W 3 et 4. altitudo barometri = 27. 36 anteced. 27. 40 ſequens 27. 60. Adſcenſus hic fuit celerrimus interuallo 8 horarum. D. 20. W 3 et 4 coelo ſereno, altitudine barometrica = 27. 25. antec. 27. 35 et ſequens continuante procella 27. 35 et dein 27. 50. D. 21. nocte S W 3 et 4. ſub altit. barometrica 27. 55. anteced. = 27. 50 ſequens 27. 40. D. 28. W 3. Altitudo barometri = 27. 32. antecedens 27. 35. ſequens 27. 60. D. 30. W S W 4. Altitud. bar. = 27. 45. antec. 27. 55. ſequens 27. 36. vento W et W S W 3 et 4 d. 31. continuante.

Aurora borealis d. 22. adparuit, primum intense rubrae nubis, dein trabium rubrarum trium et quatuor specie, quae paullatim rubedinem ammittentes euanuere tandem penitus. Coelum serenum, ventus W N W 2. Calor 152. Altitudo bar. 27. 60 antecedens 27. 42. sequens 27. 74.

Lux rubra columnae specie ab horizonte ad 15°. circiter eleuata SO versus inter 7 et 8. d. 24.

Segmentum fere atrum septentriones versus adparuit d. 26. media nocte. Sub eo lux quaedam debilis et super eo nubeculae quasi igneae disponebantur, dein N N W versus permagnum spatium irregulare proxime ad horizontem viuida et eximie coruscante luce per ½ h. conspiciebatur.

Halo circa lunam h. 7. p. m. d. 7. notata coelo tenuissimis nubibus obducto vento O 1.

Halo porro circa Lunam d. 8. inter h. 7 et 11. comparuit coelo tenuissimis nubibus obducto. Ventus h. 12. p. m. sequutus SO4 antea OSO 2 et 3.

D. 31. Turae fluuii glacies hinc inde soluta est, et Ialinka amnis a glacie penitus liber. Hoc die quoque Papiliones visi sunt.

Iidem morbi hoc mense grassati sunt ac mense antecedenti Februario, malignioris tamen erant naturae et sanguinis insignibus inflammationibus stipati.

Mensis

Menſis Aprilis.

Obſeruationes huius menſis Turinii ſunt continuatae, et ſunt quae ſequuntur.

Altitudo Barometri maxima $=$ 28. 05.

Minima $=$ 27. 00. Ergo fuit differentia $=$ 1 poll. $\frac{5}{100}$ et media ſenſu ſupra indicato, medium ſcilicet arithmeticum ſumendo, vt in Aſtronomia ſolet, $=$ 27. 52$\frac{1}{2}$. Maxima notata eſt d. 14. h. 8. a. m. ſub ſequentibus circumſtantiis. Antecedens altitudo diei antecedentis eadem hora erat $=$ 27. 94. et ſequentis diei eodem tempore $=$ 27. 87. Coelum erat ſerenum, vti quoque diebus aliquot antecedentibus, ſequens dies primum nubilus, dein p. m. ſerenus. Ventus O & S 2, antecedens O 2 et ſequens S 2. 3. Thermometri gradus $=$ 149. die antecedenti eadem hora 149 quoque et ſequenti 143 eadem h.

Minima obſeruata eſt d. 3. h. 8. a. m. Antecedens $=$ 27. 30. et ſequens, diei ſcilicet ſequentis eodem tempore 27. 62. Coelum ſpiſſis nubibus obductum, duobus diebus antecedentibus ſerenum, ſequenti nubilum et pluuium quoque, ventus SSW 4 die antecedenti S 3 et SO 3 et 4. Aquae Turae Fluuii hoc vento valde intumuere. Die ſequenti W 1.

Gradus caloris 141. antec. 146. ſequens 145.

Fri-

Frigus maximum huius menſis erat $=155$. et calor maximus 119. Fuit igitur differentia et variatio caloris $=36°$.

Maximum frigus notatum eſt d. 29. nocte h. 12. anteced. 146. ſequens 148. Ventus N 1 anteced. O 2 ſequens W 2. Coelum a crepuſculo ſerenum, per diem tenuibus nubibus obductum. Barometri altitud. $=27.68$. mane h. 8. 27. 57 et ſequenti die mane eadem hora 8. 27. 75.

Calor maximus contigit d. 22. h. 5. p. m. Mane erat h. 7. $=132$. nocte h. 12. 127. Ventus S W 3 et 4. antecedente malacia ſiue vento 00 et ſequente; die ſequenti W 3 et N 3. Coelum erat nub. et pluuia cadere incipiebat breuiſſimae durationis, antea aër tenuiſſimis vaporibus repletus erat, vti quoque nocte ſequenti.

Barometri altitudo $=27.58$. anteced. proxime 27. 63. et ſequens h. 12. nocte 27. 28. ita vt ab h. 5 ad 12. adeoque interuallo 7 horarum $\frac{30}{100}$ ſiue $2\frac{1}{2}$ lin. diminuta fuerit, vento S W 3 continuante.

Meteora huius menſis huc redeunt. Venti vehementiores d. 1. SO et S W 3 et 4. d. 2. S et O 3 et 4. d. 3. S W 4. per totum diem. Barometri altitudo decreuit his tribus diebus ventoſis a 27. 60 ad 27. 00. dein celerrime rurſus adhuc creuit ad 27. 20. 27. 50. quamuis W 4. continuerit.

Porro

Porro d. 5. W4 breuis durationis, d. 7. N et NO3; d. 9. O3 altitudine barometrica inuariata; d. 14. S3; d. 17. et 18 S3 et 4. barometri altitudine decrefcente a 27. 78 ad 27. 55 durante vento; d. 22. SW3; d. 23. W et N3; d. 24. N3. Altitudo bar. decreuit a 27. 63 ad 27. 23. fed N3 flare incipiente rurfus aucta ad 27. 57. d. 25. nocte W3. d. 27. S et SO et SW3 et 4. d. 28. W4 decrefcente altitudine barometri a 27. 62 ad 27. 23. d. 29. N3. crefcente altitudine bar.

Grando minuta d. 27. cecidit, et d. 15. Tusfilago florens adportata eft, et d. 5. Anates, Cygni et Grues vifi funt.

Halones circa Lunam et Solem fuerunt fequentes obferuatae.

Halo circa Lunam d. 1. inter h. 8 et 11. p. m. coelo tenuibus nubibus obducto, vento SSW4. Item d. 11. circa h. 12. nocte cum duabus parafelenis ex vtroque Lunae latere et columna iridis coloribus praedita in rectum horizontem verfus protenfa. Coelo tenuibus nubibus obducto, vento W2. Halo circa folem cum pareliis ex vtroque latere folis vna d. 22. h. 7. a. m. confpecta eft, aëre tenuiffimis vaporibus repleto, vento SW2. D. 6. paullo ante occafum folis columna iridis coloribus corufcans ex finiftro folis latere in diftantia circiter 15. diametrorum folis eleuata ad 8. circiter gradus, horizontem non tangens obferuata eft.

Lux borealis tranquilla inter h. 10 et 11. d. 12. conſpecta eſt columnarum in altum ſurgentium ſpecie, coelo ſereno, vento WNW 1. D. 13. Glacies Turae fluuii rumpi coepit, et ſequenti die fluuius a glacie e regione vrbis liber erat.

Menſis Maius.

Eodem in loco, nimirum Turinii (Turinsk) obſeruationes menſis Maii ſunt inſtitutae. Erat ſumma altitudo Barometri $= 27.85$. et infima $= 27.12$. Ergo differentia $= \frac{73}{100}$ hinc media $= 27.48\frac{1}{2}$. Maxima altitudo contigit d. 21. h. 12 nocte. Proxime antecedens $= 27.80$. et proxime ſequens etiam $= 27.80$. Ventus NO 1, antecedens, O 1, ſequens ONO 2. Coelum erat fere ſerenum vti quoque diebus duobus antecedentibus, diebus vero ſequentibus maiorem partem nubilum et pluuium. Gradus Thermometri $= 130$. poſt meridiem h. 3. 126. et mane ſequenti die 134.

Minima altitudo notata eſt d. 7. h. 7. a. m. pluuia larga cadente, vti quoque die antecedenti, ſequens autem dies ab initio ſubnubilus, dein ſerenus. Ventus W 2 vti quoque duobus diebus antecedentibus, veſperi mutatus in W 3 et 4. qui magnam niuium copiam ſecum tulit in pluuiam tandem reſolutam, Thermometro 142 monſtrante. Mane Thermometri gradus $= 135$ et p. m. 137. Antecedens alti-

altitudo barometrica = 27. 23. et ſequens 27. 15 et dein 27. 34. ſaeuiente procella.

Maximum frigus = 151 et maximus calor 115. Ergo variatio caloris = 36.

Maximum frigus notatum d. 1. h. 7. a. m. mane, die antecedenti 154. et ſequenti 149. Ventus O 2, antecedens, OSO 1. ſequens NNO 2. Coelum ſerenum, et die antecedenti, ſequente nubilo.

Altitudo barometrica = 27. 62. anteced. = 27. 75 et ſequens 27. 46.

Calor maximus notatus d. 18. h. 5. p. m. vento S 4. pluuia cadere incipiente, coelo antea ſereno. Mane calor = 127 et nocte h. 12. 123. Altitudo barometrica = 27. 36. antec. 27. 42. ſequens 27. 45.

Meteora potiora ſunt ſequentia.

Venti vehementes d. 1. NO 3 et 4. altitudo barom. decreuerat ab h. 7. a. m. ad h. 5. p. m. a 27. 62 ad 27. 46. d. 3 S 4. et W 3 et 4 decreſcent. Altitud. barometr. 27. 48 ad 27. 28. creſcente rurſus altitudine bar. ventus ad huc continuauit. D. 4. W 3 et 4. altitudine bar. non imminuta ſed aucta a 27. 34 ad 27. 40. d. 7. W 3 et 4. nocte altit. baromet. ab h. 7. a. m. a 27. 12 ad 27. 34. creverat, d. 10. W 3 et 4. Alt. bar. a 27. 40 ad 27. 28. decreuerat, ſed orto vento iam ad 27. 38 rurſus adſcenderat. D. 18. SO et S 3 et 4. altitu-

Tt 2 dine

dine bar. tantum $\frac{10}{100}$ mutata, praecedente S 2 et ſequente W 1; d. 26. SO 3 altitud. bar. nihil mutata.

Grando cecidit d. 3. circa h. 7. p. m. flante W 4. Thermometri gradus $=$ 142 et altitud. bar. $=$ 27. 32.

Nebula d. 11. nocte, Therm. 139. Barom. 27. 48. vento W 1 et d. 29. ſub ortum Solis Tonitru primum; d. 29. altitudine bar. 27. 35. gradu therm. 121. vento S 2.

Halo circa lunam d. 2. inter h. 11 et 12, p. m. coelo hinc inde nubilo. Vento S 2 gradu therm. $=$ 144 et barometri alt. 27. 48.

Menſis Iunius.

Et huius menſis obſeruationes Turinii ſunt continuatae.

Altitudo barometri maxima erat $=$ 27. 85. vt in menſe praecedenti; minima autem 27, 05. Ergo differentia ſiue variatio altitudinis $= \frac{80}{100}$ et media ſenſu vt ſupra $=$ 2. 45.

Maxima eſt notata d. 15. antecedens $=$ 27. 83 et ſequens 27. 80. Gradus caloris $=$ 110. antecet. 116 et ſequens 112. Ventus 0 0 ſequente SSW 1, antecedente W 1. Coelum ſerenum, vti quoque diebus aliquot ſequentibus, die antecedenti maiorem partem ſerenum erat.

Mini-

Minima obferuata eft d. 5. coelo pluuio, vento NW4, thermometro 129. Altitudo antecedens = 27. 35 et fequens 27. 20.

Calor maximus = 109. Minimus = 139. Ergo differentia fiue variatio caloris = 30°.

Calor maximus contigit d. 17 et 19. d. 17. vento SW1 coelo mixto, barometro 27. 70. die vero 19. coelo fereno, vento NW1 altitudine bar. 27. 50.

Minimus notatus d. 7. altit. bar. 27. 35, vento WNW2, coelo fereno cum tempeftate pluuiofa et ventofa variante. Pruina in gramine eft obferuata.

Meteora praecipua funt quae fequuntur.

Venti vehementes d. 3 et 4 WSW3, et WNW3 decrefcente altitudine bar. duobus his diebus a 27. 40 ad 27. 25. durante vento d. 5. WgN4. antecedente malacia et barometro defcendente a 27. 35 ad 27. 05 interuallo 8. horarum. Reliquis diebus venti admodum debiles, quin maiorem partem tranquillitas aëris fiue ventus oo. fuit.

Tonitrua fuere d. 2. quum ex denfa nube occidentem verfus inconcinnus fonus femel auditus eft, pluuia mox ceffante, et vento remiffiori facto; item d. 18. 19. 27. Poftremum grauiffimum, alt. bar. = 27. 43. Therm. gr. = 116. ventus WNW.

Fulgurum lusus S et W versus ad horizontem conspiciebantur d. 17. nocte h. 12.

Mensis Iulius.

Huius mensis obseruationes Werchoturiae factae sunt, exceptis 4 primis diebus, quae Turinii adhuc sunt institutae. Incipiunt a d. 9.

Altitudo barometra maxima = 27. 50. Minima 26. 93. Ergo differentia et variatio altitudinis = $\frac{57}{100}$ siue lin. 7. fere paris. et altitudo media = 27. 21$\frac{1}{2}$.

Maxima altitudo obseruata est d. 30. antecedens = 27. 47. consequens 27. 45. eadem altitudo per duos dies. Coelum erat serenum vti diebus aliquot antecedentibus; sequente tempestate nubila et pluuiosa. Ventus oo. antec. O 1. sequens WNW2 et 3. d. 1. August Gradus thermometri mane 134. p. m. 117.

Minima accidit d. 14. h. 7. a. m. Antecedens = 27. oo. consequens rursus 27. oo. Ventus oo. antecedente quoque oo. sequente W 2. Coelum pluviosum, pluuia minuta per totum diem cadente. Calor = 124. Antecedens 122 et sequens mane die sequenti 130. Calor maximus = 111. d. 31. Minimus = 134. d. 30. Ergo variatio = 23. Calor maximus vento oo. bar. 27. 45. coelo sereno contigit. Antec. = 131 mane, sequens 120 nocte.

Mini-

Minimus vento itidem oo. coelo ſereno, altitudine bar. 27. 50. Antecedens calor 126. ſequens 131 die ſequenti mane.

Meteora. Nullus ventus vehemens, vtplurimum W flauit debilis, ſaepius tranquillitas aëris ſiue ventus oo.

Tonitru d. 20. h. 3. p. m. therm. 115. barometr. 27. 30. vento inter W et NW. Praeterea nullum meteorum notatu dignum hic contigit, Turinii vero d. 3. huius menſis h. 11. p. m. ſtriae quaedam luminoſae conſpectae ſunt, aliae horizontales, et in arcum incuruatae, aliae perpendiculares, aliae inclinatae, omnes ſplendore vibrante gaudentes, vti ſolet in luce boreali. Ad horizontem nulla obſcuritas. In eleuatione 45° circiter initium ceperunt ad verticem vsque fere extenſae. Splendor ſenſim imminutus eſt et poſt h. 12. euanuit.

Menſis Auguſtus.

Huius menſis obſeruationes Werchoturiae ſunt continuatae.

Altitudo maxima barometrica erat $=27.77$. Minima 26. 95. hinc variatio $=\frac{82}{100}$ ſiue fere 10 lin. Media altitudo $=27.36$.

Maxima altitudo notata eſt d. 21. h. 8. a. m. Antecedens erat $=27.65$. et ſequens 27. 75. Ventus NO 1. ſequente aëris tranquillitate. Coelum nubi-

nubilum, vesperi serenum, die antecedenti subnubilum. Thermometrum monstrabat 129. p. m. 118.

Minima contigit d. 29. h. 7. a. m. vento oo. antecedente O 2 et sequente S 1 et SW 3. Antecedens alt. bar. = 27. 08. et sequens 27. 10. Coelum nubibus variegatum, die antecedenti serenum et die sequenti primum serenum, dein vesperi tenuis pluuia cecidit.

Calor = mane 127. post meridiem 119.

Calor maximus obseruatus est d. 23. 113. Minimus d. 19. 143. hinc differentia et variatio = 30.

Calor maximus contigit h. 4. p. m. vento SO 1 alt. bar. 27. 50. coelo sereno.

Minimus h. 6. a. m. vento oo. coelo sereno, barometro 27. 45. Plerisque diebus aër sat calidus alias fuit.

Venti vehementiores nulli sunt obseruati, omnes debiles vt plurimum ex S et W spirarunt. Dies plerique fuere sereni.

Tonitru nocte inter 3 et 4 auditum fuit, d. 4. h. 4. p. m. cum largo imbre et grandine, thermometro 116. Bar. 27. 20. vento WNW.

Lux borealis d. 16. conspecta fuit, sub initium h. 9. p. m. multis striis lucide nitentibus constabat ab horizonte perpendiculariter exsurgentibus ad vrsam maiorem vsque pertingentibus, circa h. 10. hac phaeno-

phaenomenum periit. Accidit vento NN 1, calore 137. alt. bar. 27. 60.

Eodem die pruina hinc inde eſt obſeruata mane h. 6. thermometri gradus erat = 141.

Menſis September.

Et huius menſis obſeruationes Werchoturiae ſunt factae.

Maxima barometri altitudo erat = 27. 90. Minima 26. 55. Ergo fuit variatio = 1. 90. Media 27. $22\frac{1}{2}$.

Maxima notata d. 24. h. 6. a. m. Antecedens = 27. 82. ſequens 27. 80. Ventus SO 2. antecedente malacia et ſequente. Coelum ſerenum, vt diebus antecedentibus aliquot, ſequente proxime tempeſtate nubila. Calor = 155. p. m. h. 3. 145.

Minima obſeruata d. 2. h. 7. a. m. anteced. = 26. 95. et ſequens 26. 80. Ventus SW 2. antecedens NO 2. ſequens WSW 2. 3. 4. Calor = 142. p. m. 137. Coelum pluuioſum, vti quoque die antecedenti, et ſequenti ad h. 5. a. m. dein nubilum, et ſerenum nocte.

Calor Minimus fuit = 155 et Maximus 119. hinc variatio = 36.

Minimus obſeruatus d. 24. h. 6. a. m. Vento 00. Coelo ſereno, alt. bar. 27. 90. antec. 27. 82 ſequens 27. 80.

Maximus d. 14. h. 3. p. m. Mane h. 8. = 139. Ergo differentia diurna = 20. Ventus 00, et die antecedenti, sequente W 1. Coelum serenum, alt. bar. 27. 87.

Meteora. Venti vehementes d. 20 et 21 W et SW 3. Ceterum aër satis tranquillus, saepius Vent. 00.

Nebulae d. 25 et 26. mane, vento S 1 et 00 calore 140 et 144. sequente serenitate. Bar. 27.70 vtroque die.

Pruina copiosa d. 1. obseruata quae per noctem cecidit, partim vt solet, comparata, partim globulis constans grandinem forma et consistentia ferentibus. Calor = 141. nocte 136. Ventus SW et S 1, tempestate serena. Alt. bar. nocte 27. 25 et mane 27. 32. Porro pruia copiosa d. 8. per noctem, vento ONO 1 et 00. Bar nocte 27. 55. mane 27. 75. therm. 149. h. 10. antec. diei 139. coelo sereno.

Prima congelatio leuis d. 8. monstrante thermometro 149, pruina nocte ceciderat.

Mensis October.

Huius mensis obseruationes, Werchoturiae adhuc factae, sunt sequentes.

Altitudo barometrica summa erat vt in mense praecedenti = 27. 90. Infima autem 26. 70. Ergo go variatio = 1. 20. hinc media ſenſu vt ſupra 27. 30.

Maxima d. 1. h. 11. p. m. eſt obſervata, antecedens 27. 85. ſequens 27. 80. Ventus oo. anteced. O g N 1. ſequens SW 1. Coelum ſerenum, vti quoque per totum diem et fere die ſequenti. Calor = 150. h. 3. p. m. 144.

Minima contigit d. 24. h. 3. p. m. vento N 1. antecedente, O 1. ſequente WSW 2. Calor 148. mane $150\frac{1}{2}$. Nix per totum diem cecidit madida, et dies antecedens nubilus et niuoſus, ſequente nocte et die ſequenti tempeſtate ſerena.

Calor maximus = $128\frac{1}{2}$ frigus maximum $164\frac{1}{2}$ hinc variatio = 36^{0}.

Frigus maximum obſeruatum d. 21. h. 7. a. m. h. 3. p. m. = 156. Ventus erat oo. Alt. bar. 27. 35. coelum ſerenum.

Calor maximus d. 8. h. 3. p. m. coelo ſereno, vento SSW 1 alt. bar. = 27. 82. Mane calor = 139 erat.

Aër et hoc menſe ſatis tranquillus fuit, vnicus ventus W 3 d. 10. h. 3. p. m. obſeruatus eſt altitudine bar. a 27 65 ad 27. 60 ante deſcendente. Nix prima d. 16. cecidit, et nocte inter 19 et 20 glacies Turam fluuium in vicinia vrbis vbique occupauit. Ceterum maior menſis pars ſatis ſerena

 fuit.

fuit. Thermometra fluuio immerſa modo aequalem modo diuerſam temperiem in exceſſu et defectu monſtrabant.

Huius menſis obſeruationes et Turinii factae ſunt, vt ſupra monuimus, quas hic adiiciemus.

Altitudo bar. maxima fuit = 28. 17. d. 1. h. 11. p. m. Minima = 26. 87 notata d. 24. h. 3. p. m. Hinc variatio = 1. 30. et Media = 27. 52.

Maxima ſequentibus circumſtantiis eſt comitata.

Antecedens erat 28. 10. ſequens 28. 15. Ventus O 2. ſequens W 2, antecedente N et NO 3. Calor 157. mane 153 et p. m. 152. Coelum ſerenum, vti quoque per totum diem, ſequenti vero die nubilum.

Minima 26. 87 contigit ſub his circumſtantiis Antecedens erat 27. 12. ſequens 27. 04. Calor 155, ventus S et WSW 3. antecedens S 2 et ſequens WSW 2 die 25. h. 3. p. m. Nix admodum humida minutiſſimis floccis cadebat. Dies antec nubilus, nox ſequens autem ſerena, et dies ſequens fere ſerenus.

Frigus maximum = 168 et minimum = 134. Ergo variatio = 34.

Minimum notatum d. 9. h. 3. p. m. antecedens mane 143 et ſequens nocte h. 12 = 138. Ventus W 2, qui et antecedebat et ſequebatur. Alt. bar. 27. 85. antec. 28. 00. et ſequens 27. 80. Coelum

lum ſerenum, vti quoque diebus antecedentibus, ſequente die ſequenti tempeſtate nubila et pluuia.

Maximum frigus d. 25 nocte h. 12 et d. 28. h. 7. a m. accidit. Die 25 antecedens frigus erat = 164. h. 3. p. m. vento WSW 2. barometri alt. 27. 70. antec. 27. 58. ſequens 27. 65. Coelum maiorem partem nubilum erat.

D. 28. ventus 00, bar. 27. 53. coelum nubilum erat frigore hoc ſummo exiſtente.

Meteora, primum venti vehementes d. 5. W 3 nocte d. 9. W 3. p. m. d. 24 et 25. S et W 3. d. 26. S 4 nocte d. 28. h. 3 ſequente malacia et antecedente.

Tura fluuius nocte inter 26 et 27. glacie coiuit ex aduerſo vrbis.

Primi dies vsque ad 10 erant ſereni, ceteri plerique nubili, et niuoſi.

Hactenus de obſeruationibus menſe Octobri Turinii inſtitutis; nunc ad Werchoturienſes menſis Novembris progrediendum eſt.

Menſis Nouember.

Summa altitudo barometrica huius menſis erat = 28. 12. Minima 26. 85. Hinc differentia ſiue variatio = 1. 27 et media 27. 48½.

Altitudo maxima notata eſt d. 27. h. 12. nocte. Anteced. erat = 28. 10 et ſequens quoque

 28. 10.

28. 10. Ventus oo. per totum diem et toto die antecedenti, ſequenti autem die NO3. Coelum ſubnubilum, die antec. ſerenum ſequenti tempeſtas turbida.

Minima contigit d. 1. h. 8. a. m. Praecedens $=26.95$ et ſequens quoque 26.95. Ventus W1 antec. OSO1. ſequens NW2. Coelum nubilum et niuoſum niuibus copioſis floccis minoribus cadentibus. Calor $=147\frac{1}{2}$. p. m. $156\frac{1}{2}$.

Obſeruationes therm. ob fractum thermometrum tantum pertingunt ad d. 4. D. 3. frigus erat $=185\frac{1}{2}$. quod maximum interuallo horum 4 dierum fuit.

Venti vehementiores d. 4. N3. altitudine barometrica inuariata, ſequente O1. d. 12 WSW3. d. 22. W 3. nocte. Altitudo bar. mane erat $=27.47$. ad quam a 27. 55 deſcenderat, h. 3. p. m. rurſus 27. 55 ad tempus obſeruationis.

Parelii ex vtroque latere ſolis occaſui proximi d. 3. vento N2. frigore 171. alt. bar. 27. 70. Coelo ſatis ſereno.

Halo circa lunam eodem die h. 10. p. m. conſpecta, vento NO2. eadem altitudine bar. coelo ſereno, hinc inde ſtriis albicantibus diſtincto. Item halones d. 26 et 27. Prior conſpecta h. 12. nocte vento oo. altitudine bar. 28. 00. coelo ſereno; po-

ſterior

ſterior coelo ſubnubilo, vento oo. Alt. bar. 28. 12 h. 12. nocte, quae iam veſperi adparere coepit.

Huius menſis obſeruationis Turinii quoque vsque ad d. 11. ſunt continuatae. Interuallo horum dierum maxima altitudo barometri fuit = 27. 99 d. 5. et Minima 27. 05. d. 1. Frigus maximum = 193 d. 4. Minimum 157. d. 10. Venti vehementes d. 1. W 3 et 4. d. 2. WNW 3 et 4. d. 3 et 4. N 3. d. 6. S 3. d. 9. SW 3. d. 10. W 3. Ergo 7. diebus, ſpatio 11. dierum.

Menſis December.

Huius menſis obſeruationes Werchoturienſes ad 8. vsque tantum pertingunt, reliquae a d. 17 ad finem, Solikamii ſunt inſtitutae.

Interuallo horum 8. dierum altitudo barometri ſumma Werchoturiae fuit = 28. 08 d. 2. et Minima = 26. 78. d. 7. Frigus maximum = 200 d. 3. et Minimum 182 d. 1. Aër tranquillus ſatis fuit ita vt nullus ventus vehementior ſpirauerit.

Trabes luminoſa a luna ad diſtantiam 12 circiter graduum recta in altum ſurrexit h. 12. nocte, coelo tenuibus nubibus obtecto.

Singulare phaenomenum lunare conſpectum fuit d. 1. inter h. 5 et 7. p. m. Scilicet circa h. 5. duae paraſelenae (*aa*) adparuere, vna ex vtroque lunae latere quarum ea, quae a dextris ſpectatoris

toris erat, luce multo viuidior erat, finiſtra, et iridis coloribus coruſcabat, faſciamque bene lucidam ab externo latere perquam longe in directum de ſe emittebat; ſiniſtra obſcurior faſciam eodem modo ſparſit, ſed adeo obſcurae lucis, vt vix diſtingui potuerit. Eo ipſo tempore in diſtantia viginti circiter diametrorum lunarium ab halone, ſegmentum halonis lucidae, cornubus ſurſum verſis in conſpectum veniebat. Hac facie phaenomenum per tres horae quadrantes adparuit, luce tamen vtriusque paraſelenes viuidiſſima facta hac ratione, vt dextra perpetuo lucidior eſſet, et tandem viuidiſſimis iridis coloribus coruſcaret, quos et faſciae lucidae eius lateris in ſatis longam diſtantiam impertiuit. Tunc et in ſuperiore halonis parte e directo lunae halonis maioris arcus debili tamen luce conſpicuus, conuexa ſui parte haloni contiguus prodibat. Faſciae lucidae paraſelenes vtriusque lateris longiſſime protendebantur, et totum coelum cingentes, halonem denique alteram formabant, in qua duae paraſelenae (*bb*) a prioribus diſtinctae iisque ex aduerſo ſitae conſpiciebantur, ea quidem multo lucidiore, quae prius nominatae lucidiori proprior erat, quod et de halone eas includente tenendum, regionem lucidae paraſelenae propiorem multo altera lucidiorem, alteram autem vix conſpicuam. Haec per integram horam conſpici poterant, donec omnia praeter halonem lunae concentricam, paullatim euaneſcerent,

quae

quae pallidiſſima tamen h. 11. p. m. ſpectari adhuc poterat. Altitudo bar. erat = 28. 05. antec. 27. 90 ſequens 28. 02. Frigus = 18 5. vente N 1. Coelum fere ſerenum, ſiue vaporoſo ſerenum.

Hactenus de obſeruationibus Werchoturienſibus, quae ſunt inſtitutae in altitudine $6\frac{1}{2}$ circiter orgyiarum a media ſuperficie aquarum Turae fluuii, qualis aeſtate eſſe ſolet. Altitudo ſcilicet ſoli = 6 orgyiarum et altitudo domus = $\frac{1}{2}$ org. ſupra ſolum, vbi barometrum erat ſuſpenſum.

Notandum adhuc eſt poſt diem 8. frigus intenſiſſimum ſequuntum eſſe perpetua tenui nebula, quaſi aëre gelato comitatum. Maximum fuiſſe videtur diebus 12 et 13. D. 12. frigus = 238 a meridie ad h. 4. in Koswa pago eſt notatum, et d. 13. omnis Mercurius in bulbum thermometri deſcendit, licet diuiſio 260 graduum eſſet, quod in pago Tſchikman eſt obſeruatum. Ob magnam aëris copiam inſigni hoc frigore in bulbo thermometri collectam altitudo vera aliquantum minor fuiſſe videtur.

Obſeruationes Solikamii factae incipiunt a d. 17. et finiuntur cum fine menſis.

Altitudo maxima bar. Solikamii a. d. 17 ad finem menſis fuit = 27. 73. d. 22. h. 12 nocte frigore 193. coelo ſereno. Venti in his obſeruationibus non ſunt conſignati.

Minima notata eſt d. 27. h. 8. a. m. = 26. 80. Ergo differentia = $\frac{93}{100}$.

Frigus maximum 238 et 260 et maius fuit d. 20. et h. 3. p. m. et d. 21. Nam mercurius omnis in bulbo thermometri erat d. 20. ab h. 11. p. m. vsque ad meridiem diei 21. Frigus antecedens d. 20. mane h. 9. = 231 et h. 3. d. 21. p. m. 138. h. 3. p. m. 208. Alt bar. erat die 20 mane h. 9. = 27. 47. et d. 21. h. 8. a. m. 27. 70. Coelum ſerenum cum tenui nebula vtroque die. Inſigniores porro frigoris gradus fuere d. 19 mane = 203 et h. 11. p. m. 211. d. 21. nocte 204.

Minimum frigus = 157. d. 27. h. 8. a. m. antec. = 163. ſequens 161. Altitudo bar. = 26. 80 antecedens 26. 90. et ſequens quoque 26. 90.

Halo circa lunam d. 25. ab h. 7 ad 12. coelo fere ſereno, altitudo bar. 26. 95. antecedens 26. 90. ſequens 27. 10.

Inter omnes totius huius anni obſeruationes maior altitudo barometrica non occurrit quam 28. 28. et nulla minor, quam 26. 55. Illa maxima Tiumeni Febr. 23. Haec minima Werchoturiae Septembris 2do eſt notata, vti ex comparatione patet.

Nam Tiumeni menſe Febr. erat Maxim. = 28. 28. Minim. 27. 24.

Menſa

Menſe Mart. Turinii	Maxima	$=27.85$	Minima	$=26.95$
Apr. - - -		28.05	- -	27.00
Maio - - -		27.85	- -	27.12
Iun. - - -		27.85	- -	27.05
Iul. Werchoturiae		27.50	- -	26.93
Aug. - - -		27.77	- -	26.95
Sept. - - -		27.90	- -	26.55
Oct. - - -		27.90	- -	26.70 d. 24.
Nov. - - -		28.12	- -	26.85
Dec. Solikamii		27 73	- -	26.80.

Differt igitur haec Maxima huius anni a Maxima Petropolitana $= 29.12$ adeoque $\frac{84}{100}$ ſiue lin. paris. 10 et quod excurrit, minor eſt.

Minima quoque maior eſt noſtra Minima Petropolitana quae eſt $= 26.41$ adeoque $\frac{14}{100}$ maior.

Differentiae et variationes altitudinum barometricarum et hic, vt alias, primis et vltimis anni menſibus maiores, quam mediis deprehenduntur, licet in diuerſis locis obſeruatae.

Nam variatio Menſis Februarii	$= 1.04$
- - - Martii	$= - 90$
- - - Aprilis	$= 1.05$
- - - Maii	$= - 73$
- - - Iunii	$= - 80$
- - - Iulii	$= - 57$
- - - Auguſti	$= - 82$
- - - Sept.	$= 1.35$
- - - Octobris	$= 1.20$
- - - Nov.	$= 1.27$
- - - Decembris	$= - 93.$

Calor maximus fuit $=109$ menſe Iunio Turinii obſeruatus; frigus maximum vltra 260 Solikamii Decembri notatus. Vti frigus maximum noſtrum Petropolitanum, quod eſt $=212$ ſuperat plus quam 48 gradibus, ſic calor maximus a noſtro Petropolitano maximo, qui eſt $=97^{\circ}$. ſuperatur 12 gradibus.

Nam per antecedentia Tiumeni menſe Februario erat frigus Maximum $=182$ Minimum $=146$

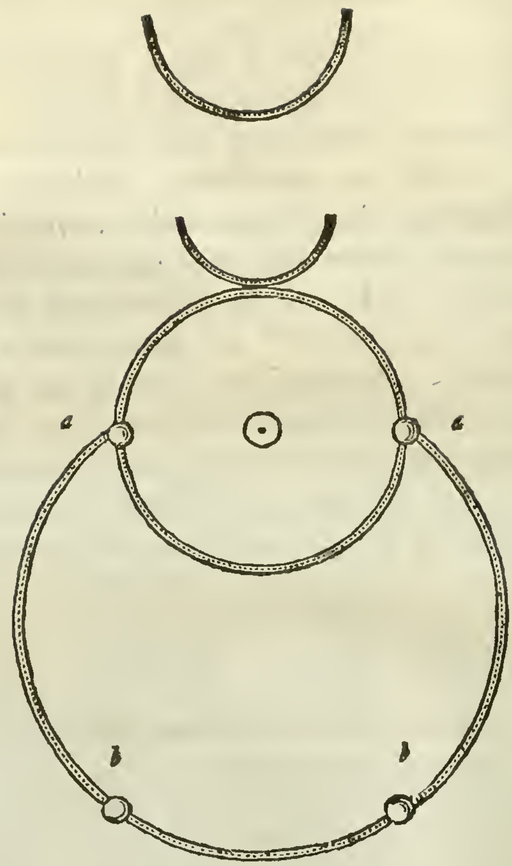
Turinii menſe	Martio	$=179$	- -	$=135$
- - -	Aprili	$=155$	- -	$=119$
- - -	Maio	$=151$	- -	$=115\frac{1}{2}$
- - -	Iunio	$=139$	- -	$=109$
Werchoturiae	Iulio	$=134$	- -	$=111\frac{1}{2}$
- - -	Auguſto	$=143$	- -	$=113$
- - -	Septembri	$=155$	- -	$=119$
- - -	Octobri	$=164\frac{1}{2}$	- -	$=128\frac{1}{2}$
- - -	Nouembri	$=185$		
Solikamii	Decembri	$=260$	et vltra	$=157$
Turinii adhuc menſe Oct.		$=168.$	- -	$=134.$

Diuerſis igitur diebus frigus maximum et calor maximus contigit Turinii et Werchoturiae. Nam frigus maximum Turinii d. 28. Werchoturiae autem d. 21. Calor maximus Turinii d. 7 et 9. Werchoturiae d. 8. vti quoque gradus inter ſe differunt.

Deni-

Denique adiiciemus aliquot obſeruationes barometricas quae in itinere Werchoturia Solikamium in locis, Riphaeis montibus vicinis factae ſunt.

Decembris 4^{to} ab h. 8. a. m. ad 2^{am} p. m. in vico Kyria ad amnem eiusdem nominis ex occidente Riphaeorum montium ſito altitudinem barometricam = 26. 20 obſeruauit *Mullerus* Vir Cl. Dec. 10 *Gmelinus* in Spaskoe Selo altitudinem bar. 26. 95 notauit, quae toto die ad mediam noctem eadem manebat. D. 11. in hibernaculo Podpaudenſi ab h. 4. a. m. ad 6^{tam} a. m. altitudo 26. 83. eſt deprehenſa. Eodem die ab h. 9 ad 11. a. m. in ſumma altitudine Raudae montis, ad quam via ducit, quae eſt tertia circiter totius montis altitudinis pars, fuit alt. bar. = 25. 32. In Kyria vico eodem die ab h. 4. p. m. ad h. 10. p. m. = 26. 02.


a
a
b
b

EPITOME OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM ANNO MDCCLXI. PETROPOLI INSTITVTARVM CVM CONSECTARIIS.

Auctore

I. A. BRAVNIO.

Eadem methodo in hac epitome obſeruationum meteorologicarum a nobis factarum vſi ſumus, ac in antecedentibus. Scilicet 1) exhibemus Altitudines Barometri maximas et minimas per ſingulos anni menſes cum differentiis 2) ſummos et infimos caloris gradus cum differentiis per ſingulos anni menſes. 3) Meteora potiora, quae ſingulis anni menſibus contigere.

Eadem quoque inſtrumenta ſunt adhibita in obſeruationibus barometricis et thermometricis. Nimirum barometrum ſimplex, et thermometrum ſcalae Delilianae. In obſeruationibus barometri numeri priores indicant pollices duodecimales pedis regii pariſienſis, numeri vero poſteriores partes centeſimas eiusdem pollicis. En ipſas obſeruationes.

Alti-

Altitudines Barometricae

per ſingulos menſes, ſummae et infimae cum differentiis, in altitudine ſupra flumen Neuam 15 ped. paris.

	Summa	- Infima	- - - - Differentia
Ian. 18. h. 8. a. m.	28.65	- 26.98. d. 23. h. 7. a. m.	- 1.77
Febr. 28. h. 11. p. m.	28.60	- 26. 85. d. 15. 2. p. m.	- 1.75
Mart. 14. h. 2. p. m.	28.95	- 27.72. d. 21. h. 6. a. m.	- 1.23
Apr. 14. h. 11. p. m.	28.55	- 27.65. d. 8. h. 6. a. m. et d. 18.	- 0.90
Maii 20. h. 7. a. m.	28.53	- 27. 75. d. 11. h. 2. p. m.	- 0.78
Iunii 18. 6. a. m.	28.35	- 27. 85. d. 13. h. 2.	- 0.50
Iulii 26. h. 2. p. m.	28. 35	- 27.55. d. 8. toto	- 0.80
Aug. 28. 11. p. m.	28. 39	- 27.90. d. 24 et 27	- 0. 49
Sept. 25. h. 6. a. m.	28.92	- 27.85. d. 1. h. 11. p. m.	- 1.07
Oct. 12. h. 11. p. m.	28.62	- 27. 50 d. 7. h. 2. p. m.	- 1. 12
Nov. 30. h. 2. p. m.	28.65	- 27. 30. d. 11. h. 8. a. m.	- 1.35
Dec. 9 toto die	28.65	- 27.75. d. 28. h. 9. a. m.	- 0.90.

Ergo maxima altitudo barometrica per totum annum fuit =28. 95 Martii 14. et minima =26.85 Febr. 15. Differentia igitur maxima =2. 10.

Si haec altitudo maxima 28 pollicum et 95 partium centeſimarum pollicis pariſienſis ſiue $11\frac{1}{2}$ linearum conferatur cum maxima alias hic loci obſeruata: patet hanc eſſe minorem partibus centeſimis pollicis 17. ſiue 2 lineis. Nam ex antecedentibus obſeruationibus conſtat ſummam barometri altitudinem nunc hic loci eſſe 29. 12. obſeruatam nobis

1757.

1757. Manet igitur haec ſumma, vti quoque infima manet eadem 26. 41, quum huius anni altitudo minima $=$ 26. 85 maior ſit hac partibus centeſimis 44. ſiue $4\frac{1}{2}$ lineis. Idem igitur quoque ſpatium variationis barometricae permanet, ſcilicet 2. 71 ſeu duorum pollicum $8\frac{1}{2}$ linearum, quum ſpatium variationum barometricarum huius anni $=$ 2 10. ſit minus partibus centeſimis 61 ſiue paullo plus, quam 7 lineis. Ceterum ſummas et infimas altitudines barometri certis anni menſibus non euenire ex antecedentibus obſeruationibus iam ſatis conſtat.

Quod ſi differentiae menſtruae porro conſiderentur variationum barometri, et hoc anno lex illa in antecedentibus ſtabilita valet, ſecundum quam differentiae et variationes primis et vltimis menſibus, quam mediis ſunt maiores. Differentia menſis Decembris minor quidem ſolita eſt, ſed procul dubio hoc erit tribuendum frequentiori tranquillitati aëris, et ventis lenibus huius menſis vt ex ſequentibus patebit. Ceterum differentiam maximam menſe Ianuario, et minimam Auguſto eueniſſe, comparatio porro docet. Nam menſe Ianuario variatio fuit 1. 77 et Auguſto tantum $\frac{49}{100}$ ſiue fere 6 linearum. Reſtat vt more noſtro circumſtantias adiiciamus, ſub quibus maximae et minimae altitudines barometricae huius anni ſunt adnotatae.

Maxima igitur altitudo barometri 28. 95 Martii 14. h. 2. p. m. ſub ſequentibus circumſtantiis eſt notata; antecedens erat 28. 90 et ſequens 28. 93. Ventus erat S 2 et veſperi 00. antecedente et conſequente S 1 et 2 aliquot diebus. Calor 144 veſperi 154. Coelum ſerenum tam 3 diebus antecedentibus quam ſequentibus. Ceterum vt plurimum hoc menſe altitudines barometricae fuere inſignes. Altitudo proxime ad maximam huius menſis accedens fuit 28. 92, quae menſe Septembri d. 25. h. 6. a. m. eſt adnotata antecedente et ſequente tempeſtate ſerena; vento O leni, qui quoque antecedebat et ſequebatur.

Altitudo barometrica minima 26. 85 contigit Februarii 15. h. 2. p. m. Antecedens 27. 55, ſequens 27. 40 erat altitudo. Magna niuis copia hoc die cecidit Dies antecedens erat nubilus et nix quoque cecidit, die ſequenti coelum rurſus ſerenari coepit. Ventus erat N 2 antecedente SW 3 et 4 et ſequente W $2\frac{1}{2}$. Thermometrum monſtrabat 151, mane 153, veſperi 168. Die antecedenti mane 167, poſt meridiem 159 et veſperi 155. Hactenus de obſeruationibus barometricis, ſequitur vt progrediamur ad thermometricas. Frigoris et caloris gradus maximi et minimi per ſingulos menſes, ſunt qui ſequuntur cum differentiis.

Caloris

Caloris diminutiones.

	Maximae		Minimae		Differentiae
Ianu. 3 h. 8. a. m.	190	-	145. d. 13. h. 2. p. m.	-	45
Febr. 2. h. 8. a. m.	190	-	144. d. 28. h. 2. p. m.	-	46
Mart. 24. h. 5. a. m.	168	-	130. d. 31. h. 2. p. m.	-	38
Apr. 9. h. 11. p. m.	160	-	120. d. 25. h. 2. p. m.	-	40
Maii 12. h. 11. p. m.	148	-	110. d. 26. h. 2. p. m.	-	38
Iun. 19. h. 3. a. m.	138	-	105. d. 23. h. 2. p. m.	-	33
Iulii 12. h. 11. p. m.	139	-	106. d. 4. h. 2. p. m.	-	33
Aug. 21. h. 5. a. m.	136	-	106. d. 4. h. 2. p m.	-	30
Sept. 20. h. 11. p. m.	154	-	120. d. 1. h. 2. p. m.	-	34
Oct. 17. h. 7 a. m.	162	-	132. d. 10. h. 2. p. m.	-	30
Nov. 30. h. 8. a. m.	183	-	141. d. 5. h. 11. p. m.	-	42
Dec. 10. h. 11. p. m.	193	-	149. d. 29 et 30. h. 2. p. m.	-	44.

Ergo frigus maximum per totum annum fuit = 193
et calor maximus = 105
Maxima igitur differentia = 88.

Maximum frigus 192 huius anni minus est maximo alias hic obseruato 19 gradibus. Nam ab anno 1759. frigus maximum hic loci est = 212, vt ex obseruationibus nostris anni dicti patet. Ergo manet hic gradus frigoris adhuc maximus 212. Calor maximus 105 minor quoque est calore maximo alias hic obseruato 8 gradibus. Nam 1757. notauimus gradum caloris maximum 97. id quod ex obseruationibus huius anni conspicitur, hinc et gradus 97 caloris maximus gradus hic loci manet, vti quoque differentia omnium maxima permanet 115.

Si differentiae et variationes caloris menſtruae conſiderentur; patet maximas fuiſſe menſe Ianuario et Decembri, illo 45 hoc 44. minimas autem menſibus Auguſto et Octobri in vtroque ſcilicet = 30. Ceterum has caloris variationes, certam legem non ſequi, vt variationes barometri, ex antecedentibus obſeruationibus iam ſatis intellig tur vti differentia per diem nonnumquam = 00, id quod tamen rariſſime accidit, ſic ſaepius tempore aeſtatis aeque ac hiemis ea aſſurgit ad 24 et amplius praecipue ab ortu ſolis ad h. 2. p. m. circiter quo interuallo, ceteris paribus termini caloris minimi et maximi continentur. Minimus enim calor eſt circa ortum ſolis, inde creſcit ad h. 2. p. m. circiter hic loci, decreſcere dein incipit ad ortum ſolis ſi ſcilicet reliqua ſint paria et tempeſtatis mutationes non eueniant.

Maxima differentia diurna hoc anno fuit = 24 Iunii 19. Nam mane circa ortum ſolis thermometrum monſtrabat 138 et h. 2. p. m. 114. Ceterum per ſe intelligitur differentias caloris magnas quoque oriri debere in mutationibus tempeſtatis ſubitis, quae hic loci inter 24 horas ſatis ſunt frequentes, easque generatim maxime inaequales. Ordinarie differentiae diurnae hieme hic loci ſecundum

dum obſeruationes noſtras quam aeſtate minores eſſe ſolent.

Conſiderandae et nunc porro ſunt circumſtantiae ſub quibus frigus maximum et calor maximus euenere hoc anno, vt pateat et hic, non ſub iisdem, ſed diuerſiſſimis haec accidere ſolere, vti quoque hi termini caloris maximi et minimi non iisdem menſibus contingere ſolent.

Maximum igitur frigus huius anni 193. Decembris 10. h. 11. p. m. eſt adnotatum, vento plane ſilente, tempeſtate ſerena, luce boreali inſigni, barometro 28. 44. monſtrante. Die antecedenti ventus quoque erat 00. vti quoque ſequenti. Veſperi 28. 53. diei antecedenti et ſequenti veſperi 28. 35. erat altitudo barometrica. Dies antecedens et ſequens fuit nubilus.

Maximus calor 105. Iunii 23. h. 2. p. m. accidit, vento S 2 antecedente 00 et ſequente S g O 2. coelo e longinquo tonante, ante meridiem ſereno, barometro 27. 98 antea 27. 95, poſtea 28. 02. Antecedens calor 122 et ſequens 120.

Conſideratis caloris variationibus huius anni, progrediendum nobis eſt ad meteora proponenda, quae ſingulis anni menſibus nobis ſunt adnotata.

Menſis Ianuarius. Ad ventos quod attinet, vehementiores fuere hoc menſe d. 13. W 3 et 4.

 d. 15.

d. 15 et 16. W 3 et 4. Ventus W regnauit scilicet per 20. dies flauit, reliqui ex diuersis plagis. Altitudo aquae niuis liquefactae = 16 lin. siue 1. pollici pariensi et 4 lin.

Dies sereni fuere 9. d. 1. 2. 3. 6. 8. 9. 10. 15. 25. reliqui vel nubili vel niuosi.

Februarius. Venti vt plurimum ex occidente et meridie spirarunt, inter quos vehementiores fuere d. 6. W 3 et 4. d. 14. SW 3 et 4. d. 16. W 3. d. 22. W 3 et 4.

Dies sereni erant 10. Nempe d. 1. 2. 6. 12. 13. 16. 17. 19. 24. 28. d. 25. pluebat.

Altitudo aquae 1 poll. 2 lin.

Nebula densa a. m. d. 2.

Aurorae boreales 3. fuere d. 15. completa cum radiis eumbratis coloratis, praecipue rubris. Placida et incompleta d. 16. Rursus insignis et completa d. 17.

Martius. Venti fere omnes hoc mense fuere lenes, et saepius quoque tranquillitas. Ventus S potissimum spirauit. Vehementiores tantum d. 19. W 3 et nocte inter 20 et 21. W 3 et 4.

Plerique dies erant sereni, numerabantur tantum 6 non sereni. Scilicet 4^{tus} nubilus et 9. dies 19. pluuius cum inter mixta niue; d. 21. copiosa nix cecidit. Dies 23. 25. 26. nubili.

Nebula

Nebula d. 10. a. m.

Altitudo aquae 3 lin. tantum.

Aprilis. Venti hoc menſe, vt ſolet, admodum variabiles fuerunt, omnes tamen fere lenes, tantum d. 6. nocte, et d. 17. p. m. W 3 et 4. breuis durationis fuere.

Dies ſereni vltra menſem dimidium, ſcilicet 19. d. 2. 3. 7. 10. 12. 13. 14. 15. 16. 18. 19. 20. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. iidem ſatis amoeni.

Grando cecidit d. 17. 18.

Altitudo aquae 1 poll. 6. lin.

Nebula d. 23. a. m.

Maius. Venti et hoc menſe fuere lenes, et frequenter ventus ſiluit, tantum W 3 et 4. d. 15. Ceterum ventus O potiſſimum ſpirauit.

Pluuia cecidit nocte inter 8 et 9. = 1 poll. d. 12. 7½ lin. porro d. 30 et 31. cuius altitudo = 8. lin. Ergo pluuiae altitudo totius menſis 2 poll. 3½ lin. Ceterum dies plerique ſereni ſcil. 21 nominatim 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 10. 13. 15. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27.

Iunius. Venti omnes nullo excepto hoc menſe fuere lenes graduum 1 et 2. ſaepius quoque 00. Venti O et W potiſſimum ſpirarunt.

Dies

Dies ſereni fuere plerique, exceptis 6. nominatim d. 10. 13. 14 15. 23. 30. qui fuerunt nubili, vel parum pluuii, coelo tonante.

Tonitrua hoc menſe euenerunt 5. Primum omnium d. 2. h. 4. p. m. 2^{dum} d. 12, quod prope acceſſit 3^{tium} d. 14. 4^{tum} d. 22. tonuit tantum e longinquo, denique 5^{tum} d. 30. quod quoque non prope acceſſit.

D. 24. veſperi valde fulgurauit.

Altitudo aquae pluuiae admodum exigua trium tantum linearum.

Iulius. Et hoc menſe venti fere omnes fuere lenes, excepto d. 9. quo W 3 et 4. ortus eſt qui fere per totum diem ſequentem durauit. Ceterum ventus ex plaga orientali potiſſimum ſpirauit.

Dies ſereni 13. nominatim 2. 3. 4. 13. 14. 19. 22. 23. 24. 27. 28. 29. 31.

Tempeſtates fulmineae et hoc menſe, vti praecedenti fuere 5. d. 1. 4. 5. 6. 9. Illa, quae d. 4. euenit, feriit templum St. Andreae, quod combuſtum eſt. Pluuia cecidit d. 1. cuius altitudo $=$ 5 lin. d. 6. $=$ 3 lin. d. 7. 3. lin. d. 10. 8 l. d. 11. $=$ 3 lin. d. 16. $= 4\frac{1}{2}$ lin. d. 17. $= 2\frac{1}{2}$ lin. Ergo tota altitudo menſtrua $=$ 29 lin. 2 poll. paris. et 5. lin.

Augu-

Auguſtus. Ventus W potiſſimum flauit, ſcilicet per 20. dies, inter quos duo fuere vehementiores d. 13 et 16. W 3 et 4.

Dies ſereni 18. nominatim 1. 2. 3. 4. 6. 9. 10. 12. 13. 14. 20. 21. 22. 23. 25. 26. 28. 30. et iidem quoque ſat amoeni. Altitudo aequae pluuiae 2 poll. $6\frac{1}{5}$ lin.

Tonitrua erant quatuor d. 5. e longinquo, itidem d. 7. 16. 24.

Fulgurauit nocte d. 24. 26. 29.

Nebula d. 3 et 7. a. m.

Grando cecidit d. 5. cuius magnitudo piſo maiori aequalis, et d. 17. Magnitudo nuci auellanae fere aqualis fuit.

Aurorae boreales d. 18. quae erat placida, porro d. 30. h. 2. a. m. obſeruata, et h. 10. p. m. quae per totam noctem durabat, et completa cum radiis ſurgentibus coloratis maxime rubris.

September. Hoc menſe venti admodum variabiles, maiorem tamen partem S et O. inter quos nullus vehementior, quod raro contingit. Saepius quoque ventus ſilebat.

Dies plerique nubili et pluuii, ita vt tantum ſex numerarentur ſereni d. 4. 5. 6. 9. 15. 20

Altitudo aquae = 3 poll. 4. lin.

Prima nix cecidit iam d. 18. et pruina erat d. 21. 26. 27.

Lucis borealis veſtigia d. 14. h. 11. p. m. die autem ſequenti 15. h. 10. p. m. completa conſpiciebatur.

October. Venti huius menſis quoque, vti menſis antecedentis, variabiles, et ex diuerſis plagis ſpirantes erant, maxime tamen flauit ventus S dein O. Inter hos ſolus d. 23. erat vehemens, nimirum SW 3. Plerique dies quoque nubili, pluvii et niuoſi, ita vt 4 tantum ſint excipiendi, qui erant ſereni, ſcil. d. 2. 13 17. 20.

Altitudo aquae = 1. poll 2 lin.

Nebula d. 25. h. 8. a. m. et d. 24. h. 5. p. m.

Aurorae boreales duae, altera d. 11. altera d. 20. vtraque imperfecta et placida.

Nouember. Venti hoc menſe admodum variabiles, interdum tamen ventus nullus. Vehementiores fuere d. 9. W 3 et 4. d. 16. S 3 et 4. vterque durationis breuis.

Dies ſereni 8. Nimirum d. 12. 13. 21. 22. 24. 26. 29. 30. plerique non admodum frigidi.

Nebula d. 3. 4. 20.

Altitudo aquae = 1 poll.

Decem-

December. Venti admodum variabiles, inter quos d. 25. ſolus erat vehementior S 3 breuis durationis, non infrequenter quoque ventus ſilens.

Dies ſereni 7. d. 1. 2. 3. 4. 10. 20. 21. plurimi frigidiores.

Altitudo aquae = 2 poll. 5. lin.

Nebula d. 10. 11. 17. a. m.

Duae aurorae boreales et hoc menſe mihi ſunt obſeruatae, altera d. 10. d. 21. altera. Illa erat perfecta, haec autem imperfecta.

Ergo, vt ex hactenus dictis patet per totum annum venti vehementiores ſpirarunt 20. tres menſe Ianuario, ſcilicet d. 13. W 3 et 4 d. 15 et 16. W 3 et 4. Februario quatuor d. 6. W 3 et 4. d. 14. S W 3 et 4. d. 16. W 3 d. 22. W 3 et 4.

Martio. Duo d. 19. W 3. Nocte inter 20 et 21. W 3 et 4.

Aprili duo d. 6. nocte et 17. p. m. W 3 et 4.

Maio 1. d. 15. W 3 et 4. Iunio nullus. Iulio, duo veſperi d. 9 et 10. fere per totum diem. Auguſto duo d. 13 et 16. W 3 et 4. Septembri 00. Octobri vnus d. 23. SW 3. Nouembri duo d. 9. W 3 et 4. d. 16. S 3 et 4. Decembri vnus d. 25. S 3. Omnes fere ex occidente, vt hic ventus hic loci quoque per annum vt plurimum regnare h. e. maiorem partem ſpirare ſolet.

Menſe Ianuario et Februario plurimi venti vehementiores ſpirarunt, illo ſcil. 3 et hoc 4. Pauciſſimi aut potius nulli, Iunio et Septembri.

Dies ſereni per totum annum, mixtis incluſis erant 162.

Altitudo aquae = 19 poll. 8. lin. Nimirum Ianuario 1 poll. 4. lin. Febr. 1 poll. 2 lin. Mart. 3 lin. Apr. 1″. 6‴. Maio 2″. 3½‴. Iunio 3‴. Iulio 2″. 5‴. Auguſto 2″. 6½‴. Sept. 3″. 4‴ Oct. 1″. 2‴. Nov. 1″. Decembri 2″. 5‴. Ergo menſe Septembri pluebat maxime ſcil. 3 poll. 4 lin. e contrario minime Martio et Iunio nempe tantum 3 lin. Ceterum notandum hanc aquae altitudinem ſolito eſſe minorem.

Tempeſtates fulmineae et tonitrua hoc anno fuere numero 14. Scilicet 5. Iunio. Primum omnium d. 2. porro d. 12. 14. 22. 30. Iulio quoque quinque d. 1. 4. 5. 6. 9.

Menſe Auguſto quatuor d. 5. 7. 16. 24. Ergo primum Iunii 2^do^ et vltimum Auguſti 24.

Illa tempeſtas fulminea, quae Iulii 4^to^ euenit, memorabilis, eſt quod templum St. Andreae fulmine eius tactum conflagrauit.

Ceterum adhuc circa tempeſtates fulmineas notandum eſt, et hoc anno confirmari, quod in antecedentibus monuimus, eas ſcilicet requirere certos terminos altitudinum barometricarum et thermome-

 trica-

tricarum, vt euenire queant, et prope accedere. In prima tempestate Iunii 2. Altitudo barometri maior quidem fuit, quam vt tonare soleat, sed notandum tonitru tantum aliquoties e longinquo esse auditum. Illa quae Iunii 12. accidit, proxime accessit et altitudo barometri tantum 27. 90. erat. therm. 120. h. 2. p. m. 117. Interim et hoc notandum tempestatem fulmineam non necessario prope accedere debere, si altitudo barometri infra terminum est, vti e longinquo tantum tonuit Iunii 22. licet altitudo barometrica esset tantum 27. 92 et thermometrum h. 2. p. m. 117. adeoque omnes conditiones adessent, vt propius accedere potuisset. Tempestas Iulii 4to, quae templum St. Andreae incendit, euenit sub altitudine barometrica 27. 94 et thermometrica 117. sed h. 2. p. m. 106. Tonitrua Augusti 5. audita quidem sunt sub altitudine barometrica 28. 23. adeoque multo supra terminum, quo tonare possit. Sed tonitru tanquam murmur e longinquo tantum est auditum. Idem notandum quoque de illa, quae Augusti 7. sub altitudine bar. 28. 19. euenit, et d. 17. altitudine bar. 28. 20. Sed hi termini altitudinum barometricarum et thermometricarum, inter quos hic loci et forsitan etiam alibi tonitrua fieri possunt et solent, paullo adcuratius figendi et determinandi sunt. Nimirum si Mercurius in barometro in adscendendo versatur, et adscendere pergit, incipiente et durante tempestate, terminus vltra quem tonitru non euenit eſt circiter 28 pol. pariſienſes et $\frac{1}{2}$ lin. omnia infra hunc terminum gradu caloris conuenienti accidere ſolent, ſi propius accedant. Secus ſi barometrum in deſcendendo verſatur et deſcendere pergit, tunc enim ſupra terminum adſignatum incipere poteſt, deſcendente interim Mercurio ad terminum et infra eum. Omnia ſunt intelligenda de tempeſtate ſulminea, quae propius accedere ſolet. Terminus caloris vltra quem tonitrua non fiunt eſt 130 et terminus infra quem euenire non ſolent eſt 112 dum incipiunt. Calor antecedens multo maior 105 et 106. eſſe poteſt. Si quas exceptiones deprehenderimus, in poſterum indicabimus.

Aurorae boreales per totum annum mihi notatae ſunt 12. Scilicet menſe Februario 3. d. 15. completa, d. 16. placida et imperfecta d. 17. rurſus perfecta. Menſe Auguſto 3. Nimirum d. 18. imperfecta d. 30. h. 2. a. m. completa et nocte h. 10. obſeruata itidem completa. Septembri 2. d. 14. veſtigia tantum lucis borealis d 15. autem perfecta. Menſe Octobri rurſus 2. d. 11. altera et altera d. 20. vtraque placida et imperfecta. Denique 2. menſe Decembri d. 10 et 21. Illa perfecta, haec imperfecta.

Nebulae erant 13. ſcilic. Februarii 2. a. m. Martii 10. a. m. Aprilis 23. a. m Auguſti 3 et 7. Octobris 24. h. 5. p. m. et 25. a. m. h. 8. Nov.

Nov. 3. 4. 20. a. m. Decembris 10. 11. 17. a. m.

Grando cecidit hoc anno quater. Nimirum menſe Aprili d. 17 et 18 et Auguſto d. 5 et 17. Grando huius menſis ſat magna, quae d. 5. cecidit aequalis fere fuit nuci auellanae, ſaltim quaedam, quae d. 17. inſtar piſi maioris, coelo e longinquo tonante, ſequente pluuia ingenti. Aprilis 16. nix vltima cecidit, et d. 23. vltima congelatio. In adſignanda vltima congelatione cautio eſt adhibenda. Nam aqua in ſuperficie terreſtri propter frigus adhuc durans, congelari ſolet, quamuis aqua aëri libero expoſita non geletur. De congelatione aquae aëri libero expoſitae hic ſermo eſt, adeoque de puncto congelationis ſeu gradu 150, quem thermometrum noſtrum monſtrare debet in aëre.

Prima nix cecidit rurſus Septembris 18. et congelatio hoc die quoque prima fuit, adeoque ab vltima congelatione ad primam interuallum fere eſt 5 menſium, quodſi pro aeſtate reputetur, hiems fuit 7 menſium. Glaciei Nevae fluminis craſſities erat maxima $=$ 28 poll. lond. fluuius a glacie liberatus Apr. 4. h. 5. p. m. et rurſus glacie obductus Nov. 16. h. 7. a. m.

OBSER-

OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM ANNI MDCCLXII. ST. V. EPITOME, CVM CONSECTARIIS INDE DEDVCTIS.

Auctore

I. A. BRAVNIO.

Ex obſeruationibus ſuperioribus a me communicatis Methodus mea ſatis patet. Exhibemus ſcilicet primum ſummas et infimas altitudines barometricas per ſingulos anni menſes cum earum differentiis, deinde Maximos et Minimos caloris gradus itidem per ſingulos anni menſes cum earum differentiis. In obſeruationibus barometricis vtimur Barometro ſimplici debitae diametri ſcilicet fere trium linearum, iuxta quod adhuc tria alia collocata habemus, vt ſi qua differentia altitudinis occurrat, ſpectare ſimul queamus. In obſeruationibus thermometricis adhibemus ſcalam Delilianam ſatis iam notam. Numeros priores ante punctum in altitudinibus barometri notatis ſignificare pollices pariſienſes, duodecimales; poſteriores poſt punctum, eorum partes centeſimas, notius iam eſt, quam vt monere neceſſe ſit. Denique ſequuntur ipſa Meteora per ſingulos anni menſes, et conſiderationes

rationes cum consectariis, potissimum ex variis comparationibus resultantes.

His paucis praemissis statim ad ipsas obseruationes exhibendas progredimur. Repraesentabimus autem primum, vt alias, barometricas, in altitudine 15 pedum parisiensium circiter supra Neuam flumen factas. En ipsas,

Altitudines Barometricae

summae et infimae cum differentiis per singulos menses totius anni.

Mensis	Maxima		Minima	Diff.
Ian. 22. h. 11. p. m.	28. 66	-	27. 10. d. 27.	- 1.56
Febr. 18.	28. 48	-	27. 25. d. 10 et 23	- 1.23
Mart. 28. h. 2. p. m.	28. 73	-	27. 35. d. 18. h. 2. p. m.	- 1.38
Apr. 10. h. 2. p. m.	28. 40	-	27. 65. d. 6. h. 2. p. m.	- 0.75
Maii 13. h. 6 a. m.	28. 45	-	27. 68. d. 16	- 0.77
Iun. 7. h. 2. p. m.	28. 27	-	27. 81. d. 21	- 0.46
Iul. 7. h. 2. p. m.	28. 35	-	27. 40. d. 14. h. 7. a. m.	- 0.95
Aug. 1. h. 6. a. m.	28. 27	-	27. 35. d. 9. h. 11. p. m.	- 0.92
Sept. 6. h. 7.	28. 55	-	27. 65. d. 27. h. 11. p. m.	- 0.90
Oct. 7	28. 36	-	27. 15. d. 28. h. 2. a. m.	- 1.21
Nov. 18. h. 11. p. m.	28. 45	-	27. 47. d. 23. h. 8. a. m.	- 0.98
Dec. 15. h 2. p. m.	29. 03	-	27. 53. d. 10. h. 9. a. m.	- 1.50

Ergo maxima totius anni = 29. 03. minima 27. 10 differentia et variatio 1. 93. Ergo media altitudo 28. $06\frac{1}{2}$.

Si differentiae altitudinum barometricarum vel variationes Mercurii menſtruae conſiderantur; adparet, et hoc anno variationes primis et vltimis anni menſibus eſſe maiores, quam mediis.

Poteſt igitur haec lex per inductionem ſufficientem in antecedentibus ſtabil tam pro vniuerſali omnino haberi. Minima variatio fuit menſe Iunio $\frac{46}{100}$ pollicis pariſienſis Maxima 1. 56 menſe Ianuario.

Altitudo maxima 29. 03 ſatis quidem per ſe magna eſt, non tamen adaequat maximam alias hic obſeruatam, quae eſt = 29. 12. vt ex antecedentibus obſeruationibus patet. Minor igitur eſt $\frac{9}{100}$ ſiue 1 lin. et quod excurr t. Contigit autem haec Dec. 15. h. 2. p. m. ſub circumſtantiis ſequentibus. Antecedens obſeruatio erat = 28. 98. h. 8. a. m. et ſequens h. 10. p. m. 28. 97. Ventus nullus ſpirauit, antecedebat leniſſimus S et ſequebatur lenis W. Thermometrum monſtrabat 183. dies erat ſerenus, vti quoque aliquot antecedentes, ſequentes autem erant nubili. Nocte antecedenti lux borealis inſignis erat cum radiis euibratis albis.

Minima 27. 10 accidit menſe Ianuario d. 27. quae per totum diem eſt obſeruata. Antecedens obſeruatio erat = 27. 23. et ſequens 27. 17. Calor erat 151 et 154. mane ventus W qui mane paullo fortior, deinde vero lenis euadebat; antecedebat

W et

W et ſequebatur quoque. Dies erat nubilus, vti quoque dies multi antecedentes, ſequebantur autem aliquot ſereni. Minima alias hic obſeruata ſecundum obſeruationes antecedentes 26. 41. manet adhuc minima, minima enim huius anni maior eſt illa $\frac{60}{100}$ ſiue $\frac{1}{2}''$ $2\frac{1}{4}'''$. Neque quidquam eſt mutandum in ſpatio variationum barometricarum, quod manet $=$ 2. 71. ſiue $2''$. $8\frac{1}{2}'''$ fere. Alias iam conſtat ſpatium variationum barometricarum in locis borealioribus, quam in minus borealibus, eſſe maius. Haec hactenus de Barometricis, venimus ad Thermometrica. Infimi et ſummi caloris gradus per ſingulos anni menſes cum differentiis fuere, qui ſequuntur.

Caloris Diminutio.

	Maxima.		Minima.	Differentia.
Ian. 31 mane h. 8	169	-	148. d. 5	- 21
Febr. 26. h. 7. a. m.	175	-	145. d. 7 et 13. h. 2. p. m.	- 30
Mart. 20. h. 7 a m.	176	-	137. d 21. h. 7 p. m.	- 39
Apr. 7 h 6. a. m.	160	-	113 d. 18 et 19 h. 2. p. m.	- 47
Maii 2. h. 6. a. m.	148	-	110. d 28. h. 2. p. m.	- 38
Iun. 28. h. 11 p m.	135	-	109. d. 18 h 2. p m.	- 26
Iul. 2. h. 4. a m.	140	-	110. d. 10 h. 8. a. m.	- 30
Aug. 28. h. 6. a. m.	146	-	118. d. 1. h. 2. p m.	- 28
Sept. 26. h. 7. a. m.	152	-	130 d. 1. h. 3. p. m.	- 22
Oct. 15. h. 7. a. m.	170	-	141. d. 24. h. 2. p. m.	- 29
Nov. 19. h 8 a. m.	167	-	138. d. 4.	- 29
Dec. 13. h. 8. a. m.	195	-	147. d. 4. h. 2. p. m.	- 48.

Frigus maximum $=195$ et calor maximus 109.

Hinc variatio maxima $=86°$. Et variatio maxima menſtrua 48. et minima 21 grad. Calor medius, ſi ſumma maximi et minimi gradus diuidatur p. 2. vel medium arithmeticum capiatur inter ſummum et infimum caloris gradum $=152$. qui parum differt ab illo medio, quod oritur, ſi ſumma caloris gradu diuidatur per numerum obſeruationum, vti alias fieri ſolet.

Frigus maximum huius anni, quod Dec. 13. h. 8. a. m. contigit, circumſtantiis ſequentibus fuit comitatum. Ventus S1. vti quoque die antecedenti, et ſequenti. Tempus ſerenum et antecedenti et ſequenti die. Antecedens obſeruatio $=193$. ſequens p. m. 189. et veſperi rurſus 193. Barometrum 28. 65. quod ſequentibus diebus adſcendere perrexit ad 29. 03. ſummam huius anni altitudinem barometricam. Hoc frigus maximum non ſuperat frigus maximum alias hic obſeruatum $=212$. Manet igitur hic frigoris gradus adhuc maximus, dum 17°. maior eſt maximo, qui hoc anno eſt obſeruatus.

Calor maximus huius anni $=109$. qui accidit Iunii 18. h. 2. p. m. comitatus fuit circumſtantiis ſequentibus. Ventus fuit W debilis, ſequentibus quoque diebus, antecedente N et O debili

bili, et dies ſerenus, vti quoque aliquot antecedentes et conſequentes. Barometrum 28. 08. quod nunc deſcendere coepit vsque ad 27 83.

Ceterum hic calor maximus huius anni, quum non exaequet gradum caloris maximum 97. alias hic obſeruatum; manet hic ad hoc tempus maximus. Et ſpatium quoque variationum thermometricarum manet inuariatum = 115 graduum.

Sed de Calore et Frigore ſatis, veniendum eſt ad Meteora, quae ſingulis anni menſibus contigerunt. Sunt autem ea, quae ſequuntur.

Menſis Ianuarius.

Omnes dies nubili et niuoſi fuere praeter 29. qui clarus fuit.

Venti vehementiores fuere hoc menſe 4. d. 10. W 3. d. 24. W 3 et 4. d. 25. W 3. d. 26. W 3 et 4. Ceterum ventus ex occidente et meridie ſolum ſpirauit, W per dies 20. et S per dies 11. d. 2. 3. 6. 7. 15. 17. 18. 19. 30. 31.

Altitudo aquae ex niue liquefacta = 4 lin. par.

Nebula denſa d. 12. a. m.

Lux borealis placida d. 12.

Februarius.

Plerique dies et hoc menſe fuere nubili et niuoſi, 9 tamen inter ſerenos numerari poſſunt.

Nimirum dies 11. 12. 14. 15. 16. 19. 24. 25. 27.

Ventus vehemens vnus d. 6. nocte S 3 et 4.

Ceterum potissimum spirauit S. scilicet per 16. dies, vt 1. 2. 3. 4. 5. 6. 8. 9. 10. 12. 13. 14. 23. 26. 27. 28.

Nebula densa d. 19. a. m. h. 7.

Altitudo aquae pluuiae siue ex niue liquefacta = poll. 1. lin. 1.

Martius.

Serenitas fuit coeli per 17. dies, vt 3. 6. 8. 11. 12. 13. 20. 21. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. Ventus vehementior d. 21. S 3. Ceterum ex occidente plurimum spirauit ventus, nimirum per dies 15. vt d. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 15. 16. 19. 27. 28. 29. 30. 31.

Nebula mane d. 20.

Aquae pluuiae altitudo 5 lin.

Aurorae boreales 5. vt d. 3. 4. 5. 31. quae placidae, et incompletae, d. 30. autem insignis et completa adparuit.

Aprilis.

Coelum amplius dimidia mensis parte fuit serenum, scilicet per 18. dies, vt 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 12. 14. 15. 17. 18. 19. 20. 21. 22.

Venti

Venti vehementiores 3. vt d. 2. W 3 et 4. d. 4. W 3. d. 11. W 2 et 3. Regnauit W vtpote qui per 20. dies ſpirauit, nimirum d. 1. 2. 4. 5. 6. 7. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 23. 26. 27. 28.

Nebula denſa d. 12. a. m.

Altitudo aquae pluuiae $7\frac{1}{2}'''$.

Lux borealis ter conſpecta eſt, vt d. 7. 16. 21. placida et debilis ſemper.

Maius.

Maior dierum huius menſis pars fuit ſerena videlicet 19. vt. 1. 3. 6. 7. 8. 9. 10. 13. 14. 18. 21. 24. 25. 25. 27. 28. 29. 30. 31.

Venti vehementiores 3. vt d. 8. W 3. d. 11. NW 3 d. 14. W 3 et 4. Ceterum et hoc menſe W plurimum flauit, ſcilicet per 16. dies, vt 1. 2. 4. 5. 8. 9. 10. 11, 14. 18. 20. 21. 24. 27. 2[illegible]. 30.

Nebula d. 3. a. m.

Grandinauit d. 16.

Altitudo aquae pluuiae 1''. 2'''.

Iunius.

Et hic menſis ſatis ſerenus fuit, cum 17. dies in ſerenis numerari potuerint, vt 1. 2. 3. 5.

7. 11.

7. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 29. 30.

Tonitrua 3. d. 1. quod fuit primum, d. 2 et 6. omnia e longinquo tantum.

Altitudo aquae pluuiae = 1. poll.

Ventus vnicus vehemens d. 26. W 3 et 4.

Ceterum ventus W et hoc mense regnauit, dum flauit per dies 22. vt 1. 2. 4. 5. 6. 7. 10. 12. 13. 14. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 26. 27. 29. 30.

Iulius.

Vndecim tantum dies per hunc mensem inter serenos numerari possunt, videlicet 5. 6. 7. 8. 9. 11. 17. 21. 26. 27. 29.

Venti vehementiores 3. vt d. 2. N 2 et 3. d. 20. W 3 et 4. d. 21. W 2 et 3. Ventus W maxime regnauit, nimirum per dies 26. vt 3. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 29. 30. 31.

Tempestates fulmineae 4. d. 9. 10. 12. 30. quae vltima, et hoc anno vltima fuit.

Altitudo aquae pluuiae = 4 pol. 2 l.

Grando cecidit ter d. 3. 12. 23.

Augustus.

Numerus dierum serenorum idem hoc mense fuit, qui antecedenti nempe 11. d. 1. 2. 3. 7. 13. 14. 15. 20. 21. 24. 28.

Venti

Venti fortiores 3. d. 6. SW 2 et 3. d. 9 et 10. W 3 et 4. cum aqua Neuae altiore. Ventus ex occidente et nunc plurimum fpirauit, nimirum per dies 18. d. 1. 2. 3. 7. 8. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 18. 22. 23. 24. 30. 31.

Altitudo aquae pluuiae $=3''. 11'''$.

Prima pruina d. 27, et 29. ningebat paullum.

Lux bor. incompleta d. 20 et d. 1 et 2. veftigia lucis bor. obferuabantur.

September.

Dies tantum octo funt huius menfis, qui inter ferenos locum inueniunt, vt 4. 6. 7. 14. 15. 19. 20. 22.

Venti vehementiores 3. et hoc menfe d. 27. O 3 et 4. d. 28. W 3. d. 18. W 3. Ceterum venti fuere variabiles, W flauit per dies 12. d. 1. 2. 3. 4. 5. 9. 11. 18. 19. 20. 21. 22. S autem per 6. dies d. 15. 16. 17. 28. 29. 30. O. quoque per 6. dies d. 8. 13. 14. 23. 24. 27. N. denique etiam per fes diex 6. 7. 10. 12. 25. 26.

Altitudo aquae pluuiae 3. poll. 7. lin.

Pruina copiofa d. 5. Pruina et Congelatio fat fortis d. 15. Nix copiofa d. 27. cecidit.

Lux borealis cum columnis furgentibus fere completa d. 14. et veftigia lucis borealis d. 4 et 5. confpiciebantur.

October.

Dies sereni decrescunt; sex enim tantum dies numerari possunt sereni, vt 7. 11. 14. 15. 20. 21.

Fortiores venti 4. d. 16. S3. d. 17. SW3 et 4. d. 22. W2 et 3. d. 24. W3 et 4. W. potissimum spirauit, scilicet per dies 21. vt 1. 2. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 17. 18. 19. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30.

Altitudo aquae pluuiae 1″. 1‴.

Aqua Neuae altior d. 24. 28. 29. ita vt duas et tres d. 29. vlnas russicas (Arschinen) supra altitudinem ordinariam fuerit obseruata. Est autem haec vlna = 28 poll. lond.

Grandinauit d. 16. et glacies iam d. 15. in flumine natare coepit, quamuis demum Nov. 19. glacie coierit Neua flumen.

Lux borealis placida d. 8. et vestigia d. 3.

Nouember.

Quatuor tantum dies fuere hoc mense sereni, d. 3. 11. 27. 29.

Venti vehementes erant 7. d. 6. nocte W2 et 3. d. 7. nocte W2 et 3. d. 9 et 10. W3 et 4, cum aqua fluminis altiore, vt mense praecedenti: d. 11. W2 et 3. d. 20. W2 et 3. d. 26. W2 et 3. W flauit et hoc mense plurimum, nempe per

per 15. dies d. 4. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 20. 26. 28. 29. 30. S ſpirauit per dies 5. O per 4. N per 6. dies.

Altitudo aquae pluuiae = 1''. 8'''.

Aurorae boreales tres debiles d. 5. 8. 12.

December.

Hic menſis 9. dies ſerenos habebat, vt 3. 5. 6. 12. 13. 14. 15. 22. 23.

Venti vehementiores 5. vt d. 3 et 4. W 3 et 4. d. 8. nocte W 3 et 4. d. 9. W 3 et 4. d. 31. W 2 et 3. Ceterum et hoc menſe W regnavit, ſpirauit enim per dies 23. nominatim d. 1. 2. 3. 4. 8. 9. 10. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 26. 27. 28. 29. 30. 31.

Altitudo aquae ex niue liquefacta 4'''. deprehendebatur.

Aurorae boreales duae completae, priorem d. 8. inter h. 3 et 4. a. m. obſeruaui cum radiis coloratis, poſterior d. 14. Radii hic non erant colorati. Incompeta d. 6. et veſtigia d. 4.

Ex dictis adhuc ſequentia corollaria fluunt. Ergo fuit ſerenitas dierum amplius tertia anni parte, proprie per 130. dies. Nimirum Ian. 1. Febr. 9. Mart. 17 Apr. 18. Maio 19. Iun. 17. Iul 11. Aug. 11. Sept. 8. Octob. 6. Nov. 4. Decembri 9. dies.

Ventus W ſpirauit per dies 212. S 67. O 27. N 57. Declinatione a plagis cardinalibus non attenta. Scilicet Ianuario W per dies 20. S 11. O 00. N 00.

Febr. W. 5. S. 16. O. 4. N. 3.
Mart W. 15. S. 6. O. 4. N. 4.
Apr. W. 21. S. 1. O. 2. N. 6.
Maio W per dies 16. S. dies 4. O. dies 4. N. 6.
Iunio W. 22. S. 1. O. 2. N 5.
Iulio W. 26. S. 2. O o. N. 3.
Aug. W. 18. S. 6. Oo. N. 7.
Sept. W. 12. S. 6. O. 6. N. 6.
Oct. W. 21. S. 4. O. o. N. 6.
Nov. W. 15. S. 5. O. 4. N. 6.
Dec. W. 21. S. 5. O. 1. N. 4.

Venti vehementes ſpirarunt per dies 38. vt Ian. 4. Febr. 1. Mart. 1. Apr. 3. Maio 3. Iun. 1. Iul. 3. Aug. 3. Sept. 3. Oct. 4. Nov. 7. Decembri 5.

Altitudo aquae pluuiae et ex niue liquefactae = 21 poll. ſcil. Ian. 4. lin. Febr. 1. poll. $9\frac{1}{2}$ lin. Mart. $5'''$. Apr. $7\frac{1}{2}$. lin. Mai 1. poll. Iun. 1. poll. Iulius 4. poll. 2. lin. Aug. 3. poll. 11. lin. Sept. $4''. 9'''$. Oct. $1''. 1'''$. Nov. 1. poll. 8. lin. Dec. 4 lin. Ergo menſibus Iulio, Auguſto et Septembri maxima pluuiae copia cecidit, Septembri tamen omnium maxima, et Ian. minima.

Gran-

Grandinauit toto anno quinquies. Menſe Maio ſemel d. 16. Iulio ter, d. 3. 12. 23. Octobri ſemel d. 6.

Tonitrua vel tempeſtates fulmineae 7. fuere Iunio 3 et Iulio 4. omnes mitiores, quae non prope ad nos acceſſerunt.

Aqua fluminis altior ſolita Aug. 9 et 10. Oct. 24. 28. 29. Nov. 9 et 10. Maxima altitudo amplius tres vlnas ruſſicas continebat.

Aurorae boreales 18. obſeruabantur (veſtigiis non numeratis), inter quas tantum 4. erant completae, vt vna Martii 30. vna Sept. 14. et duae Decembris 8 et 14. Reliquae placidae et incompletae Ian. 12. Mart. 3. 4. 5. 31. Apr. 7. 16. 21. Aug. 20. Oct. 8. Nov. 5. 8. 12. Dec. 6.

Nebulae denſae 6. vt Ian. 12. Febr. 19. Mart. 20. Apr. 12. Maii 3. Dec. 21. ſunt obſeruatae.

OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM

PETROPOLI FACTARVM EPITOME PER SINGVLOS MENSES ANNI MDCCLXIII. ST. V. CVM CONSECTARIIS, ET IN EAS CONSIDERATIONIBVS.

Auctore

I. A. BRAVNIO.

Harum obſeruationum meteorologicarum epitome eodem modo eſt confecta, vti antecedentes. Praemonere igitur multa de Methodo et ordine quem in hiſce obſeruationibus conſignandis tenuimus, ſuperuacaneum omnino eſſet cenſendum. Idem Barometrum ſimplex adhibitum eſt, cuius altitudines in pollicibus pedis pariſienſis adnotatae, eiusdemque pollicis partibus centeſimis ſunt. Priores numeri ante punctum poſiti pollices; et poſteriores poſt punctum, partes pollicis centeſimas indicant. Thermometro quoque eodem vſi ſumus deliliano, cuius ſcala ſatis nota, in qua ſcilicet calor aquae bullientis per Ciphram, et Punctum congelationis per numerum 150. indicantur. Obſeruationes barometricae et thermometricae eodem diei tempore factae ſunt, et in eadem altitudine, quae fuit circiter 20. pedum

pedum ſupra Neuam flumen, et mare balticum. Tria ſunt tempora, quae per ſingulas dies in adnotandis noſtris obſeruationibus eleg mus, mane paullo ante aut ſub ſolis ortum, quantum fieri potuit, poſt meridiem circa horam tertiam, et veſperi hora fere vndecima. Horum temporum electionis cauſſa non obſcura eſſe poteſt. Nam mane ſub ſolis ortum frigus maximum, vel calor minimus, et hora circiter tertia pomeridiana Calor maximus, ceteris paribus, obſeruari ſolent, quis autem ignoret huius generis obſeruationes praecipue ſpectari et attentione dignas haberi, quum maioris momenti ſint prae ceteris. Et veſpertinae obſeruationes ſua vtilitate non deſtituuntur, tam barometricae, quam praecipue thermometricae. Quum enim ſaepius aeſtatis tempore hic Petroburgi mane ſub ſolis ortum obſeruationes propter ortum illius maturum, inſtitui vix ac ne vix quidem queant; obſeruationes veſpertinae matutinarum loco ſine errore ſenſibili adhiberi poſſunt, quum fere eundem caloris gradum indicare ſoleant. Indicabimus more noſtro obſeruationes barometricas primum cum differentiis ſuis et cum conſectariis, potiſſimum ex earum inter ſe comparatione, deductis, deinde obſeruationes thermometricas itidem cum ſuis differentiis et conſectariis, denique Meteora potiora ſingulorum menſium et in ea conſiderationes. En obſeruationes barometricas, quae maximas et minimas barometri altitudines

dines per ſingulos anni menſes quaſi in tabula ſiſtunt, vt vno obtutu conſpici queant.

Altitudinum Barometricarum.

Menſis	D.	Maxima	Minima	Differentia.
Ian.	2 et 15.	28.40	27.43. d. 29. h. 2. p. m.	$0''.\frac{97}{100}$
Febr.	28. h. 6. a. m.	28.65	27. 25. d. 19. h. 11. p. m.	1. 31
Mart.	19. h. 2. p. m.	28.50	27. 28. d. 27. h. 7. a. m.	1. 22
Apr.	2. h. 11. p. m.	28. 36	27. 54. d. 13. h. 2. p. m.	0. 92
Maii	28. h. 11 p. m.	28. 23	27. 78. d. 31. h. 5. a. m.	0. 95
Iun.	24 ab h. 7 ad 2	28. 33	27. 68. d. 15. h. 7. a. m	0. 65
Iulii	1. 8. 9	28. 10	27. 60. d. 5. h. 7. a. m.	0. 50
Aug.	8. h. 7. a. m.	28. 50	27. 38. d. 13. h. 10. p. m.	1. 12
Sept.	20. h. 2. p. m.	28 23	27. 30. d. 5. h. 2. p. m.	0. 93
Oct.	14. h. 11. p. m	28. 30	27 18 d 21. h. 2. p. m.	1. 12
Nov.	26. h. 9. a. m.	28. 52	27. 15. d. 6. h. 7. a. m.	1. 37
Dec.	11. h. 9. a. m.	28. 92	26 53. d. 20. h. 6. p. m.	2. 39

Ergo maxima totius anni = 28. 92. minima = 26. 53. et differentia maxima = 2. 39.

Singulare eſt, et quod rariſſime occurrit, Maximam totius anni altitudinem et Minimam vno eodemque menſe, videlicet Decembri contigiſſe. Eſt maxima = 28. 92. Eſt haec altitudo ſatis quidem magna, ſed tamen minor maxima, ſcilicet 29. 12. alias mihi hic Petroburgi 1757. obſeruata. Nimirum vsque ad annum 1750. altitudo maxima erat = 29. 01. dein 1750. = 29. 10. denique 1757.

= 29.

=29. 12. quae igitur ad huc eſt maxima. Minima hoc anno eſt aequalis 26. 53. maior igitur et minima alias hic notata, ſcilicet 26. 41.

Altitudo huius anni maxima eſt Decembris 11. h. 9. a. m. obſeruata ſub circumſtantiis ſequentibus.

Antecedens obſeruatio barometrica = 28. 85. et ſequens 28. 91, vento O $2\frac{1}{2}$. Frigus = 179. coelo ſereno vaporoſo. Dies aliquot antecedentes, et ſequentes, vti fere ſolet, erant ſereni.

Minima huius anni altitudo barometrica 26. 53. contigit d. 20. h. 6. p. m. et circumſtantiae erant, quae ſequuntur. Obſeruatio barometrica antecedens = 26. 55. et ſequens 26. 68. Frigus = 157, antecedens 158. et ſequens 163. Coelum nubilum et niuoſum, quale quoque, vt fere ſolet, diebus aliquot antecedentibus fuit et conſequentibus, vento NW 1. ventus antecedens O 1 et ſequens NW 2.

Differentia igitur huius anni maxima, ſiue ſpatium variationum barometricarum fuit = 2. 39. Maximum huc vsque fuit 2. 71. quod igitur inuariatum manet.

Differentiae altitudinum barometricarum menſtruae et hoc anno demonſtrant; variationes barometricas primis et vltimis anni menſibus, quam mediis, eſſe maiores, quamquam reſpectu menſis Maii et Septembris irregularitas quaedam parua occurrere videtur.

Hactenus de obseruationibus barometricis, sequuntur obseruationes thermometricae variationem caloris annuam per singulos anni menses indicantes.

	Calor Minimus.		Maximus.		Differentia
Ian.	10. h. 9. a. m.	193 -	148. d. 28. h. 2. p. m.	-	45
Febr.	12. h. 7. a. m.	204 -	142. d. 17. h. 2. p. m.	-	62
Mart.	1. h. 7. a. m.	185 -	139. d. 29. h. 2. p. m.	-	46
Apr.	16. h. 11. p. m.	163 -	120. d. 20. h. 2. p. m.	-	42
Maii	14. h. 4. a. m.	151 -	116. d. 10. h. 2. p. m.	-	35
Iun.	5. h. 11. p. m.	138 -	100. d. 27. h. 2. p. m.	-	38
Iulii	31. h. 11. p. m.	130 -	108. d. 1. h. 2. p. m.	-	22
Aug.	26. h. 7. a. m.	139 -	110. d. 10. h. 3. p m.	-	29
Sept.	28. h. 7. a. m.	152 -	125. d. 4. h. 2. p. m.	-	27
Oct.	19. h. 7. a. m.	157 -	140. d. 22. h. 2. p. m.	-	17
Nov.	26. h. 9. a. m.	185 -	144. d. 5. h. 8. a. m.	-	41
Dec.	16. h. 10. p. m.	198 -	148. d. 5. h. 2. p. m.	-	50.

Ergo frigus maximum per totum annum = 204,
et Calor maximus = 100.
Differentia maxima = 104°.

Ex comparatione graduum caloris huius anni patet calorem maximum 100°. euenisse Iunii 27. et minimum seu frigus maximum 204. Februarii 12. Calorem maximum et minimum non semper iisdem mensibus euenire, ex antecedentibus obseruationibus satis manifestum est, vti quoque non sub iisdem circumstantiis accidere solent.

Frigus maximum Febr. 12. sub sequentibus circumstantiis adnotatum est.

Baro-

Barometrum monſtrabat 28. 42. antea 28 46. Ventus vix erat ſenſibilis antecedentibus aliquot diebus erat N fere 2. Coelum ſereno vaporoſum, vti quoque die antecedenti et ſequenti. Ceterum frigus maximum huius anni 204. differt a frigore maximo alias mihi obſeruato 212. gradibus 8. Calor maximus ſub his, quae ſequuntur, circumſtantiis, eſt notatus. Barometrum erat 28. 23. antea 28.25. Ventus S 1. antecedebat O et ſequebatur S aliquot diebus. Coelum ſerenum, vti quoque diebus aliquot antecedentibus et ſequentibus. Ceterum hic menſis admodum calidus fuit, quum vt plurimum maiores caloris gradus regnarent, differt a gradu caloris maximo alias mihi obſeruato 97°. tribus gradibus. Manent igitur et ſummus caloris gradus et infimus hic Petroburgi obſeruatus idem per obſervationes huius anni. Variationes thermometricas non, vti barometricas, certam obſeruare legem, comparatio luculenter monſtrare poteſt.

Variatio maxima menſtrua hoc anno caloris erat $=62°$ menſe Februario, variatio minima $=17$. menſe Octobri. Vti magnitudo variationum thermometricarum ſiue differentiarum menſtruarum diverſis annis eſt diuerſa, ſic quoque maximae et minimae variationes non iisdem menſibus euenire ſolent.

Differentia ſeu variatio caloris huius totius anni eſt = 104. differens a ſumma alias hic obſervata 115. gradibus 11.

Ceterum ſolet vt plurimum eſſe 100. graduum.

Haec hactenus et de Caloris variationibus huius anni. Sequitur, vt ad Meteora potiora hoc anno obſeruata recenſenda et exponenda pergamus, idque per ſingulos anni menſes.

Menſis Ianuarius.

Coelum paucis tantum diebus fuit ſerenum hoc menſe, ſcilicet ſex. 2. 9. 10. 15. 17. 31.

Halo circa lunam adparuit d. 15. h. 11. p. m. Barometro 28. 38. Thermometro 182. Vento 00. Coelo vaporoſo.

Altitudo aquae ex niue liquefacta = 1 poll. 2 lin. Venti W ſiue ex occidente ſpirabant diebus 14. Nimirum d. 1. 8. 11. 12 13. 14. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 25. 26, inter quos ille d. 11. fuit vehementior 3°.

Ex meridie ſeu S 11. diebus, ſcilicet d. 3. 4. 5. 6. 7. 22. 23. 24. 27. 28. 29. Ille qui nocte inter 7 et 8. flauit, fuit vehementior 3°.

Ex ſeptentrione ſeu N 6. d. 2. 9. 10. 15. 30. 31.

Ex oriente flauit hoc menſe nullus.

Regna-

Regnarunt igitur venti W et S, et vehementiores fuere 2. vnus W d. 11. et alter S inter 7 et 8.

Menſis Februarius.

Dies ſereni hoc menſe numerabantur 10. ſcilicet 2. 4. 10. 11. 12. 22. 23. 24. 27. 28.

Venti ex plagis tribus W. N et S. ſpiravere; ex O et hoc menſe nullus. Ventus N et NW frequentius, nempe per 11. dies 2. 3. 4. 8. 9. 10. 11. 22. 25. 27. 28. Ex W diebus 8. ſcilicet d. 5. 15. 16. 17. 20. 21. 23. 24. Venti S fuere 7. nimirum d. 1. 7. 12. 13. 14. 18. 19.

Inter hos ventos fuere vehementiores 4. nempe d. 7. S 3. d. 13. S 2 et 3. d. 20. W 3 d. 22. W 2 et 3.

Altitudo aquae ex niue liquefacta = 2 poll. $4\frac{1}{2}$ lin.

Menſis Martius.

Menſis fere dimidius erat ſerenus, ſcilicet per dies 14. d. 1. 2. 3. 4. 5. 11. 12. 13. 14. 18. 19. 20. 21. 31.

Venti N et NW et hoc menſe regnarunt, dum per 14. dies ſpirauere, nempe d. 1. 2. 3. 4. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 19. 24. W et SW per dies octo d. 5. 6. 7. 16. 17. 26. 30. 31.

Ventus S quoque per dies 8. d. 18. 22. 23. 25. 26. 27. 28. 29.

Ventus O nullus et hoc menſe.

Inter hos duo venti vehementiores d. 16 et 17. S W 3.

Altitudo aquae pluuiae = 4 lin.

Nebulae denſae d. 19 et 28. manc.

Craſſities glaciei Neuae fluminis maxima hoc anno reperiebatur = 26 poll. Lond. ordinaria eſt fere 28.

Menſis Aprilis.

Venti vtplurimum ſpirauere ex S et N. Ventus S fuit per 12. dies nempe 2. 3. 6. 7. 11. 12. 19. 20. 21. 22. 23. 24.

N et NW per 10. dies d. 9. 10. 15. 16. 17. 18. 27. 28. 29. 30.

W d. 1. 4. 5. 8. 13. 14. 25. 26. Ergo 8. d.

Inter hoc vehementiores duo erant d. 4. W 3 d. 13. W 3.

Dies ſereni erant 18. ſcilicet 1. 2. 3. 5. 6. 7. 10. 11. 14. 15. 16. 19. 20. 21. 22. 24. 26. 30. ideoque vltra menſem dimidium coelum erat ſerenum.

Primum tonitru d. 28.

Nebu-

Nebulae 3. d. 5. vesperi; 7. 28. mane.

Grando cecidit d. 14.

Altitudo aquae pluuiae = 12 lin. seu 1 poll.

Lux borealis placida d. 5 et 6. Vestigia lucis borealis d. 10 et 20.

Glacies Neuae fluminis solui coepit d. 23. h. 6. a. m.

Mensis Maius.

Venti N et NW hoc mense regnarunt per dies 21. d. 1. 2. 5. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 25. 26.

O per dies 4. d. 27. 28. 29. 30.

S d. 3. 4 et SO d. 31.

W semel d. 6. quos inter vehementiores fuere d. 22. NW3. d. 29. O3.

Coelum maiorem mensis partem erat serenum scilicet per dies 22. d. 1. 2 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 23. 25. 26. 27. 28. 29. Altitudo barometrica vtplurimum satis alta erat.

Altitudo aquae pluuiae = 5 lin.

Niues adhuc cecidere d. 15; et d. 17. adhuc, idque vltimum gelauit.

Nullum per totum mensem tonitru.

Mensis

Menſis Iunius.

Venti N et NO hoc menſe maxime ſpirauere, videlicet per dies 12. D. 5. 6. 7. 8. 10. 12. 16. 17. 18. 19. 20. 23.

O per dies 6. D. 13. 14. 21. 25. 26. 30.

S per dies 5. D. 1. 2. 27. 28. 29. W d. 3. 4. 9.

Dies ſereni hoc menſe fuerunt 25. D. 1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30.

Tonitrua erant tria, d. 22. h. 4. p. m. et 23. h. 6. a. m. et. p. m et 30. h. 3 et 5. p. m. ſed omnia tria e longinquo.

Fulgurauit vehementer d. 6.

Altitudo aquae pluuiae = 8 lin.

Menſis Iulius.

Ventus auſtralis hoc menſe prae ceteris flauit ſcilicet per dies 12. Ventus W per octo, N et NO per 6 O 5 dies.

Nimirum ventus S et SW et SO D. 4. 6. 7. 10. 11. 12. 13. 15. 24. 25. 26. 27.

W d. 2. 3. 5. 8. 16. 30. 31. 32.

N et NO 17. 18. 19. 20. 21. 22.

O. D. 1. 9. 23. 28. 29.

Venti

Venti. Inter hos vehementiores fuere 4. D. 2. W 3. d. 25. S et W 3 d. 26. S 3. d. 31. W 3.

Dies fereni tantum 8 numerabantur. D. 2. 5. 6. 7. 8. 15. 17. 28.

Altitudo aquae pluuiae = poll. 3. lin. 9.

Tonitrua 7. D. 1. 4. 7. 10. 26. 27. 31.

Menfis Auguftus.

Nullus ventus hoc menfe praecipue regnauit, fpirauit tamen W per 11. et O per 10. dies. Ceterum S per 4 et N per 2. Nimirum W d. 1. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11. 12. 14. 15.

O 19. 20. 22. 23. 24. 25. 26. 28. 30. 31. S d. 2. 3. 10. 13.

N d. 16. 18.

Hos inter vehementiores fuerunt 4. d. 1. W 3 d. 4. W 2 et 3. d. 12. W 3 et 4. die 13. S 2 et 3.

Coelum per dimidium menfem fuit ferenum fcilicet per dies 15. D. 1. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 15. 16. 17. 18. 19. 25. 31.

Nebulae denfae d. 2. h. 7. a. m. fequente pluuia et d. 31. mane fequente ferenitate.

Tonuit bis fcil. d. 11 et 12. fed e longinquo.

Altitudo aquae pluuiae = 1 poll. 4 lin.

Lux borealis incompleta d. 10. h. 2. a m. adparuit.

Menſis September.

Ex plagis 4. cardinalibus omnibus ſpirauere venti ita, vt et hoc menſe nullus praecipue regnaret. Ventus W per 10. dies. Ventus O per 8. Ventus S per 6. V. N. per 4. dies flauere. Scilicet W d. 2. 3. 6. 9. 15. 16. 17. 18. 26. 27.

O d. 1. 5. 7. 8. 10. 22. 23. 29.

S d. 19. 20. 21. 24. 25. 30.

N d. 11. 12. 13. 14.

Inter hos fuere vehementes 4. Scilicet d. 5. O 3 et 4. d. 20. S 3 d. 25. S 3 et 4. d. 26. W 3.

Dies ſereni erant 9. D. 2. 3. 4. 13. 14. 19. 26. 27. 28.

Altitudo aquae pluuiae = 4 poll.

Grandinauit d. 13. h. 4. p. m.

Iris elegantiſſima ſole nondum plane orto adparuit d. 23.

Menſis October.

Ventus W praecipue hoc menſe ſpirauit, ſcilicet per dies 18. Ceterum flauit O per 4. N per 3 et S quoque per 3 dies.

Nimirum W d. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 14. 15. 16. 17. 23. 25. 26. 27. 28.

O d. 19. 20. 21. 31. N d. 11. 18. 22. S 12. 13. 30.

Vehe-

Vehementia 3 et 4. fuerunt inter hos per feptem dies. D. 6. W3 d. 7. W3 d. 8. W3 et 4. d. 15. W3 d. 16. W3 d. 27. W3 et 4.

Serenus fuit nullus dies hoc menfe.

Altitudo aquae pluuiae = 5 poll. 1 lin.

Nebulae tres d. 17. 24. 29.

Lux borealis infignis et completa adparuit d. 6. inter h. 6 et 7. p. m.

Menfis Nouember.

Venti flauerunt ex plagis fequentibus.

Ex occidente per dies 14; ex feptentrione per dies 10, ex oriente per 3. et ex meridie per 2. dies.

Scilicet W d. 1. 3. 4. 5. 6. 12. 13. 14. 15. 22. 23. 24. 28. 29.

N et NO et NW. d. 7. 8. 9. 10. 11. 16. 19. 25. 26. 30.

O 18. 20. 27. S d. 17 et 21.

Fuerunt inter hos vehementes tres d. 1. W3 et 4. d. 5. W3 et 4. d. 15. W3.

Dies fereni nouem numerari poffunt. D. 1. 2. 3. 8. 9. 23. 25. 26. 27.

Altitudo aquae pluuiae 1 poll. 10 lin.

Halones circa lunam d. 6 et 11. inter h. 10 et 11.

Lux borealis debilis d. 16. h. 10. p. m.

Glacies in Neua flumine ſtetit d. 8. circa h. 9. a. m.

Menſis December.

Ventus O dominatus hoc menſe eſt, flauit enim per 13. dies. Ceterum N. per 8. et S. per 6. dies.

Nimirum O d. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 17. 25. 30. 31.

N. d. 15. 16. 18. 21. 22. 26. 28. 29.

S. d. 1. 2. 3. 4. 19. 20.

W nullus.

Fuerunt inter hos venti vehementiores d. 10. O 3. d. 19. S 3 et 4.

Diebus ſerenis 12. adnumerari poſſunt vt 10^{mus} 11. 12. 13. 14. 16. 18. 23. 24. 26. 27. 28.

Nebulae denſae d. 24 et 27.

Altitudo aquae pluuiae 1 poll.

Lux borealis mediocris d. 28.

Ex his omnibus patent ſequentia.

1. Ventus W et hoc anno dominatus eſt, ſpirauit enim per dies 104. Ceterum N. per dies 96. S. 78. et O 53.

Venti vehementiores 3 et 4°. inter hos erant per 30. dies, vt Ian. 11. W 3. Februarii 20. 23. W 3.

W 3. d. 7. S 3. d. 13. S 3. Martii 16. W 3. d. 17. W 3. d. 17. W 3. Aprilis 4. W 3. d. 13. W 3. Maii 29. O 3. d. 22. NW 3. d. 15. S 3 et 4. Iunio nullus. Iulii 2. W 3. d. 25. W 3. Augusti 12. W 3 et 4. Sept. 26. W 3. d. 5. O 3 et 4. Oct. 6. W 3. d. 7. W 3. d. 8. 15. 16. W 3. d. 27. W 3 et 4.

Nouembris 1. W 3 et 4. d. 5. W 3 et 4. d. 15. W 3.

Decembris 9. O 3. d. 10. O 3. d. 19. S 3 et W. deinde 4.

Venti igitur vehementiores plerique fuere W, vt alias quoque solet.

Dies sereni per totum annum numerari possunt 149.

Nebulae densae obseruatae 12. vt Martii 1. 19. 29. Apr. 5. 8. 28. Augusti 2 et 31. Octobris 17. 24. 29. Dec. 27.

Tonitrua 12. primum Aprilis 28. Porro Iunii 22 et 30. Iulii 1. 4. 7. 10. 26. 27. 31. Augusti 11 et 12.

Fulgurauit Iunii 22 et 30.

Grando cecidit Apr. 14. Sept. 13.

Altitudo aquae pluuiae 22 poll. 7 lin.

Aurorae boreales 4. sunt notatae, vt Augusti 10. Octobris 6. Nou. 16 et Dec. 28. quas inter, quae Oct. 6. contigit, completa et admodum notatu digna erat, propter colores suos varios.

Halones circa lunam 3. Ian. 15. Nov. 6 et 11. Nulla vero hoc anno circa ſolem mihi obſervata.

Denique Altitudines aquae Neuenſis ſolito altiores et profundiores notatae ſunt ſequentes. Scilicet Iulii 2. 1 Arſchin $\frac{4}{64}$ ſupra altitudinem ordinariam, ſeu mediam. Notandum Arſchin ſeu vlnam ruſſicam eſſe $=$ 28 pollicibus londinenſibus.

D. 5. $=$ 1 vlnae $\frac{40}{64}$.

Auguſti 14. $=$ 1 vlnae ruſſ. $\frac{12}{64}$.

Sept. 25. $1\frac{12}{64}$.

Oct. 8. 2. vln. $\frac{56}{64}$.

Nov. 5. $2\frac{8}{64}$. d. 12. $2\frac{4}{16}$.

Ergo per dies ſeptem, aqua altior, et per vnum diem profundior, ſcilicet infra altitudinem ordinarium Maii 25. $=$ $\frac{22}{64}$.

PHYSICA.

PHYSICA.

INSECTO-

INSECTORVM

MVSEI PETROPOLITANI RARIORVM, AMERICAE POTISSIMVM MERIDIONALIS INCOLARVM, DESCRIPTIONES.

Auctore
I. T. KOELREVTER.

I.

Scarabaeus, thorace vtrinque in cornu antrorſum productum, capite in cornu recuruatum ac tridentatum deſinente.

Marcgr. braſ. p. 246. Enena ſ. Taurus volans.
Mouff. ſp. 2. p 152. cum fig. Scarabaeus naſicornis buceros.
Olear. Muſ. Gottorp. p. 25. Tab. XVI. fig. 2. Taurus volans.
Merian. ſurin. Tab. 72.
Hoffn pict. 1. t. 1. in medio.
Roeſ. ſcar. T. II. tab. A. fig. 2.
Scarabaeus thorace bicorni, capitis cornu tridentato: apice bifido. *Linn.* ſyſt. nat. p. 345. no. 2. edit. dec. (Actaeon).

DESCRIPTIO.

Longitudo indiuidui, cuius nunc ſequitur deſcriptio, ab extremitate cornu capitis ad anum quatuor eſt pollicium, triumque linearum. Prona corporis ſuperficies glabra ſatis eſt;

coloris e caſtaneo nigricantis, vel plane nigri in nonnullis, absque eximio ſplendore, quo non niſi capitis cornu, et quidem facies ipſius ſupina potiſſimum, diſtinguitur. Supina vero corporis ſuperficies prona obſcurior, vt et auerſa elytrorum facies, duoque maiora abdominis proni ſegmenta poſtica villis ſunt obſita breuiſſimis, teſtaceis; rarius tamen iidem, vel plane nulli in capitis cornu, antica cornuum thoracis parte, corporis medio pedibusque occurrunt, vbi vel ob frictionem continuam patiuntur defluuia, vel quod etiam hiſce partibus eorum prouentum denegauerit natura. Praeter iſtos villos pili adſunt e rufo ſpadicei, quibus os, antennae, margo thoracis anterior circa collum, eiusdemque poſterior, maxima ex parte, ornantur.

Caput pro mole corporis paruum, demiſſum, et cornu fere totum eſt: Prona nempe capitis ſuperficies cornu longioris recuruati ac tridentati baſis eſt, quod ſurſum leuiter flexum, e latiori baſi mox anguſtatur, ad dentem ſolitarium, e prona ipſius facie, parum eleuata, prodeuntem, anterioraque ſpectantem, ad eundemque horizontaliter deprimitur, abhinc vero aliquanto latius factum ac planiuſculum, magis ſc. latum, quam craſſum, eandem ad extremitatem bifurcatam fere vsque ſeruat latitudinem, vbi in dentes duos diuergentes terminatur. Ad eiusdem cornu baſin quatuor notandi

tandi

tandi ſunt denticuli, quorum vnus, ab vtroque latere retrorſum ſpectans, in oculum excurrit, duo alii ad oris angulos antrorſum ducti, ſubtriangulares, ſupra et intra quos cornu quaſi exalcatum, marginibusque, hinc et inde, acutis eſt diſtinctum. Antennae, ſub baſi denticuli in oculos excurrentis, prouenientes, e ſeptem conſtant articulis, quorum infimus reliquis longe maior et clauatus, ſubſequentes ſex vero ſubrotundi ſunt, horum extimo inſiſtunt, ope articuli, lamellae tres oblongae, ſibique inuicem proxime adſtantes. Antennulae oris, quae a Cel. *Linnaeo* palpi nouiſſime dicuntur, quatuor, quarum exteriores interioribus parum longiores, e quatuor, interiores e tribus tantum conſtruuntur articulis. Ad oris latera, iuxta antennulas, ex inferiore capitis parte, vtrinque porrigitur furca quaedam, antrorſum parumque ſurſum ſpectans, immobilis; dente exteriore interiore maiore, obtuſo, in aduerſa facie plano, in auerſa conuexo, altero ſeu interiore minore et acutiore. Inter duas haſce furcas collocati ſunt dentes duo ſubarcuati, acuti et conniuentes, qui, cum mobiles ſint, pro oris dentibus proprie haberi poſſent. Scutum illud, quod ante colli partem laeuigatam, in Ceruo volante ſpeculum vulgo dictam, ſitum obtinet, ouatum eſt ac planiuſculum, in extremo bi-vel tridentatum; ſi tres adſunt denticuli, duo ſibi inuicem opponuntur, anteriora ſpectantes, tertius autem, iſtis breuior, deorſumque magis vergens, tanquam ſolitarius, in media et ſumma huius ſcuti parte ponitur. Interdum etiam hic tertius plane deficit. Oculi prominentes, e griſeo fuſci, piſi maioris magnitudine. Thorax capite multo maior, valde conuexus, in medio in tuber mediocre eleuatus, margine antico, quo caput excipit, late prominente, lateribus itidem marginatis, ſed anguſtius, margine poſtico vix notabiliter diſtincto. Thoracis cornua, quae ad latera ſunt, antrorſum porrecta, e latiori baſi in obtuſum apicem terminata, diuergentia, lata magis, quam craſſa, et ab vtroque latere in margines adtenuata, quorum exterior ductum ſequitur leuiter conuexum, interior concauum. Deſuper prona cornuum ſuperficies ſubconvexa, ſupina planiuſcula eſt. Scutellum triangulare, ad baſin veſtitum pilis, apicem verſus laeue.

Elytra ſubconuexa, marginata, longitudine abdominis, ad baſin, iuxta angulum ipſorum externum in tuber parum elongatum eleuata, tubere illo, quod in thoracis medio eſt, maius quidem, elytri tamen marginem lateralem haud adtingens. Sic quoque aliud, verſus elytrorum extremitates, iuxta commiſſuram, interno margini propius, quam externo, e planitie ſenſim adſurgit tuber, illo tamen, quod ad elytrorum baſin eſt, minus prominens, minusque diſtinctum. Pro recipiendo ſcutel-

lo,

lo, internoque elytrorum margine inflexo, abdominis parti anticae mediae, quam thoracem secundarium vocare placet, secundum totam eius longitudinem insculptus est sinus, qui e lata et triangulari ad anteriora superficie in canaliculum abit, ad oram thoracis secundarii posticam truncatum. Prona abdominis in octo distributa sunt segmenta, quorum sex anteriora respectu insequentium, glabra et castanei coloris; intermediis quatuor primo et sexto latioribus; septimum prioribus quadruplo maius, pilis testaceis breuissimis, quibus et abdominis latera tecta sunt, obsitum; octauum, quod ano, seu vltimo abdominis supini segmento contiguum est, septimo fere dimidio minus, eiusdemque generis pilis, quo prius, vestitum. Supina abdominis e sex segmentis constant, quorum quatuor anteriora in medio angustiora; quintum reliquis duplo maius, et in sui medio latius, quam in lateribus; sextum latitudine anteriorum, ad marginem posticum, quo ano proximum est, exscissum.

Femora omnia inermia: quatuor anticis in pronae faciei medio serie punctorum excauatorum longitudinali notatis. Tibiae primi pedum paris ad marginem externum acutae, et parte sua inferiore septem dentibus instructae, quorum duo forma subtriangulares, maiores ac latiores reliquis, sub angulo recto cum tibiae margine externo procedunt;

horum inferior alium ſibi iunctum habet, antrorſum porrectum, acutiorem, ad tibiae extremum, cui ex interno tibiae extremitatis latere dens reſpondet hamatus, deorſum incuruatus, tibiae, vt videtur, per gomphoſin iunctus; mox retro hunc iterum alius, ex ipſa tibiae ſubſtantia pronatus, deorſum ſpectans, et ſubtriangularis; tandem in ſupina tibiarum anticarum facie inter duos iſtos, qui ſub angulo recto egrediuntur, duo alii, reliquis longe minores. Pars ſupina lateralis tibiarum anticarum exterior punctis plurimis excauata.

Tibiarum mediarum, vt et poſticarum latus externum dentibus tribus, retrorſum parum ſpectantibus, et acutis eſt armatum: primo breuiſſimo, 2do et 3tio longioribus; omnibus aliquali diſtantia a ſe inuicem remotis. Sub horum infimo ipſa inferior tibiae extremitas in denticulum terminatur obtuſum ac breuem, et praeter iſtum armata eſt introrſum duobus aliis, per gomphoſin ſibi iunctis, longioribus: interiore recto, minore; exteriore introrſum incuruato, maiore. Ceterum tibiarum mediarum poſticarumque ſuperficies punctis vndique excauata cernitur. Pedes extremi e quinque conſtructi articulis, proportionem, qualis inter Scarabaeos obtinet, ſeruantibus: primo inferne in facie prona in dentem acuminatum terminato; extremo duobus vncis, auium vngues aemulantibus, armato,

armato, et praeter hos aculeo ſetiformi, recto, vncis breuiore, inferius ſub iisdem ſito. Supina articulorum pedum extremorum facies tuberculis minoribus, ſeu verrucis aculeatis exaſperata.

Maiorem, ratione magnitudinis et proportionis, differentiam in vllo, quod vnquam vidi, Inſecto, quam in hoc, vidiſſe vix memini; dantur enim indiuidua a 3 ad 4 poll. longa, et, quod ad proportionem ac ſitum adtinet, capitis cornu non ſolum, verum etiam thoracis cornua, ſolito minora, corporis magnitudini interdum non ſunt proportionata, interdum et magnitudo eorum maior eſt, quam corporis moles poſceret; imo thoracis cornua modo diuergunt, modo conuergunt, modo parallela ſunt. Verum haec omnia, recenſitis prius ſingulorum differentiis, clarius patebunt:

α) Long. 3 poll. 10 lin. Capitis cornu huic ab extremitate ad marginem oculorum anticum 1 poll. $1\frac{1}{2}$ lin. longum, ſurſum magis recuruatum, tenuius, pronaque in facie conuexum magis, quam ſuperius deſcripto. Thoracis cornua baſi latiora, ad internum marginem magis exſciſſa, ſituque parallela. Huius iconem vid. Tab. XI. fig. 1. Tab. XI. Fig. 1.

β) Long. 4 poll. 1 lin. Capitis cornu huic, ab extremitate ad marginem oculorum anticum, $9\frac{1}{2}$ lin. longum, adeoque minus, quam

quam praecedenti, licet hunc corporis magnitudine antecellat; tenuius quoque est, minoribusque instructum dentibus, nec sursum valde recuruatum; ast, thoracis cornua ad internum marginem valde exscissa, hinc arcuata, et extremitatibus suis conuenientia. Tuber thoracis insignius quam priori et descripto, inque medio secundum longitudinem in marginem acutiorem contractum.

γ) Long. 3 poll. 7 lin. Licet praecedenti (β) multo minus sit, cornu tamen in capite maius gerit, sc. ab extremitate ad marginem oculi anticum 1 poll. $\frac{2}{3}$ lin. longum; verum thoracis cornua longe minora, parallela, eiusdemque tuber minus insigne ac in summitate obtusius, quam in β. Ceterum thoracis cornuum magnitudo magnitudini corporis videtur esse proportionata. Denticulos in supina tibiarum anticarum facie, in vicinia duorum maiorum, subtriangularium, extrorsumque spectantium constitutos earundem sinistra quatuor, dextra tres ostendit.

δ) Long. 3 poll. adeoque omnium minus. Capitis cornu ab extremitate ad marginem oculorum anticum $7\frac{1}{2}$ lin. longum, parum recuruatum, late tamen, imo latius in extre-

Tab. XI.
Fig. 2.

extremitate bifurcatum, quam in quibusdam ex praecedentibus. Thoracis cornua corporis magnitudini proportionata, parte antica leuiter intorta, extremitatibus suis conuenientia. Tuberis loco in thorace denticulum habet bifidum, $1\frac{1}{2}$ lin. longum, et erectum. Huius iconem exhibui Tab. XI. fig. 2.

ı) Long. 3 poll. $9\frac{1}{2}$ lin. Proni corporis color, praesertim elytrorum, puniceus. Capitis cornu ab extremitate ad marginem oculorum anticum 1 poll. 2 lin. longum, rectius, quam in plerisque praecedentium, et angustius, pro corporis magnitudine longum, basi compressum, ad eandemque pilis e ruso testaceis vestitum; ceterum a baseos dente solitario, qui solito maior, magisque incuruatus et antrorsum porrectus est, ad extremum vsque, modice bifidum, sensim fit angustius. Tab XI. Fig. 3.

Thorax antice valde conuexus, hinc ad cornuum latus internum impressus, in medio in tuber assurgit notabile, planiusculum. Cornua thoracis oblique extrorsum et antrorsum, parumque deorsum flexa, recta, in prona facie ad radicem tumida quasi, et, respectu ad corporis magnitudinem habito, minora solito, acutioraque. Thorax quoque,

que, praesertim antice, villo testaceo, breuissimo obsitus est. Tibiae anticae huic magis arcuatae, quam omnibus aliis ex prioribus, et, respectu mediarum posticarumque, quae solito breuiores sunt, satis longae, denticulisque istis minoribus, qui ex opposito duorum dentium maiorum, subtriangularium, extrorsumque spectantium, alias solent esse collocati, destitutae sunt. Prona femorum tibiarumque medii ac postici paris facies pilis e ruso testaceis longioribus hirta est. Vid. Icon Tab. XII. fig. 3. Conferatur etiam *Olearii* fig. supra citata, qua eiusmodi varietas expressa sistitur.

* * *

II.

Scarabaeus, thorace tricorni; intermedio longiore, subtus barbato; capite in cornu bifurcatum desinente.

DESCRIPTIO.

Tab. XII. Fig. 1. Longitudo tota, sc. a capitis cornu apicibus ad extremum abdominis marginem 3 poll. 1 lin. exaequabat. Totum corpus nigricans, et pilis pallide rufis, seu testaceis vestitum est, excepto capitis

pitis cornu, mediique thoracis cornu ſupina et laterali facie, vt et extremitatibus cornuum thoracis lateralium, omnino glabris. Ratione conformationis partium plurimum cum priore ſpecie conuenit. Caput cornutum in prona ſuperficie ſeu in fronte, eminentiam exhibet paruam, ceu dentis cuiusdam, qualem in praecedente ſpecie, eumque ſolitarium, vidimus, rudimentum. Idem abhinc in cornu abit, $7\frac{1}{2}$ lin. longum, parumque ſurſum recuruatum, prona facie ſubconuexum, ſupina planiuſculum, et in extremo in dentes duos longos ac divergentes fiſſum. Hoc latum magis, quam craſſum eſt, et a baſi extremitatem verſus biſurcatam latitudinis etiam ſenſim capit augmentum. Thorax tricornis: duo lateralia, antice e laterali margine producta antrorſum, ſubacuta, inter ſe diuergentia, internoque latere a medietate vsque ad apicem leviter exaſciata, tertium in ſumma mediaque thoracis parte recta fere antrorſum extenſum et horizontaliter compreſſum cornu eſt, quod lata ortum baſi, mox attenuatur, et, qua prominet, parte deorſum leuiter incuruatur: glabrum ceterum prona in facie ac lateribus, ſubtus vero barbatum, pilis ſc. rufis, denſis, rigidiuſculis, deorſum ſpectantibus obſitum, apiceque truncato quaſi, modiceque emarginato interſtinctum.

* * *

III.

Scarabaeus thorace turrito, inclinato, bicorni; capite in cornu modice recuruatum ac bidentatum desinente.

DESCRIPTIO.

Tab. XII. Fig. 2. Longitudo huius Scarabaei, qui singulari sua forma ab omnibus aliis facile distinguitur, a capitis cornu summitate ad corporis extremum 2 poll. 10 lin. Totum corpus nigrum, prona facie glaberrimum, supina pilis obscure rufis instructum est, qui non tantum ex omnibus oris partibus, sed e pedum etiam sulcis, abdominaliumque segmentorum marginibus sat copiose proueniunt. Caput in cornu, 1 poll. 2 lin. longum, antrorsum sursumque exporrectum, modice recuruatum, validum, quadrilaterum, duobusque in summitate dentibus obtusis, breuibus ac leuiter diuergentibus donatum, terminatur. Idem cornu a basi summitatem versus, inprimis si ad latera eius respicias, sensim fit angustius, crassitiem vero, quae a diametro horizontali desumitur, latitudine, diametro perpendiculari mensuranda, minorem, immo et eandem fere vbique habet, si modo basin eius excipias, quam paullo crassiorem, quam reliquum eius tractum, deprehendes. Latera cornu plana; supina eiusdem facies

facies in medio leniſſime conuexa, baſin et ſummitatem verſus planiuſcula, prona vero carinis duabus contiguis, quarum inferior in aliquot linearum a baſi interuallo incipit, et paullo ſupra cornu medietatem deſinit, ſuperior ab eiusdem ſummitate ad prioris finem vsque extenſa, vtraque vero e latiori principio in anguſtiorem finem terminata eſt, leuiter excauata conſpicitur; Hinc pronae huius faciei margines, quatenus ad formandas carinas neceſſarii ſunt, prominent, et, vbi ad vtriusque carinae finem anguſtiorem confluunt, leuem quandam in cornu ſiſtunt eminentiam. Apophyſis iſta, quae, ſolito more, ad cornu baſin orta, dentis recuruati ſimilitudinem prae ſe fert, ſuper oculum eo vsque extenſa eſt, vt apice ſuo anticum thoracis marginem attingat. Limbus, ad cornu baſin, inter vtramque apophyſin et antennas conſpiciendus, marginatus, conuexus, duabusque in medio crenis minoribus inciſus, vel etiam integer eſt. Quod ad reliquas capitis partes attinet, cum praecedentibus fere in omnibus conuenit hic Scarabaeus.

Thorax, mole ſua inſignis, e lata baſi in altum aſſurgit, turrim mentiens ſubteretem, antrorſumque inclinatam, et in ſummo in duo cornua, eiusdem directionis, parum inflexa et obtuſa, quaſi in totidem pinnas, deſinit. Intercapedo, quam inter ſe relinquunt cornua, ſemicircularis et tam larga eſt, vt digiti auricularis apicem commode recipiat. Ad thoracis latera, iuxta eius baſin, area magna rugoſa. Limbus thoracis tam antice, quam ad latera notabiliter productus, et ad haec ſub angulo acuto inflexus eſt: parte inflexa plana, et anteriora verſus ſenſim anguſtata. Scutellum, $1\frac{1}{2}$ lin. longum: apice obtuſo.

Elytra conuexa, parum marginata et inflexa, baſi ad angulum externum leui protuberantia, proxime ad commiſſuram linea longitudinali inſignita. Femora ex ouato oblonga, pilorum e poris contiguis prouenientium aliquot ſeriebus, ceu ſulcis longitudinalibus, inſtructa. Tibiae anticae, externo margine tridentatae, interno verſus extremitatem quarto dente, anguſtiore, acceſſorio terminatae. Faciem earum pronam, eiusdemque medium, longitudinalis pilorum ſeries, ſupinaeque latera duae aliae, medium vero linea eminens diſtinguit. Intermediae ac poſticae tibiae facie exteriore articulatim quaſi bis oblique inciſae, extremitate inferiore in dentem deſinunt, duobusque, praeter hunc, acceſſoriis inſtruuntur: exteriore breuiore, paululumque latiore, interiore longiore et anguſtiore. Inciſurarum, articulos mentientium, margines, vt et lineae quaedam ſcrobiculatae, pilos ſuſtinent. Pili hi, quibus et pedes exornantur, ceteris in abdomine diſtributis, longiores et craſſiores ſunt; omnes autem rigiditate ſuperant ii, quos in inciſurarum margi-

marginibus difpofitos effe diximus. Pedum extremorum, tam mediorum, quam pofticorum, articulus primus fatis longus, inferne latus, et in dentem extrorfum fpectantem terminatus; fecundus priore longe breuior ac minor, clauatus. Reliqui erant deperditi.

Scarabaei huius mentionem a folo, quantum mihi conftat, *Swammerdammio* in Bibl. Nat. p. 143. verf. germ. breuiffimis tantum factam, iconemque non fatis accurate elaboratam Tab. XXX. fig. 11, qua eius thorax et capitis cornu repraefentantur, datam effe inuenio. Striae, quas lit. a. denotauit, et pro thoracis ornatu habuit, peffime, fub lacunarum forma, funt expreffae, iisque nihil aliud, quam aream iftam rugofam, de qua fupra dixi, exprimere Auctor voluit.

* * *

IV.

Scarabaeus thoracis cornu incuruo, maximo, fubtus barbato; capitis cornu recuruato: fupra dentato. *Linn.* Syft. Nat. edit. dec. p. 345. no. 1. (Hercules).

Marcgr.

Marcgr. p. 246, et 247. f. 3. Enena f. Taurus volans IV.
Olear. Muf. tab. XVI. f. 1. Scarabaeus buceros naficornis.
Grew. Muf. p. 162. The Toddy-Fly.
Petiv. gaz. tab. LXX. f. 1. Rhinoceros Amer. ciner. roftro nigro, nitente.
Roef. fcarab. tom. II. tab. A. f. 1.

OBSERVATIO.

Licet hic Scarabaeus fatis iam cognitus, et a Cel. Roefelio inprimis optime fit defcriptus, quaedam tamen, quae digna mibi vifa funt, vt innotefcant, momenta in medium proferre, eo magis neceffarium duxi, quo plus ad Infecti hiftoriam, et ad dubium quoddam refoluendum, hancque fpeciem ab alia, cum qua confunditur, facilius diftinguendam conferre poffunt.

Septem in Muf. Petrop. afferuata indiuidua quaedam inter fe habent communia, in quibusdam vero partibus vnum ab altero eft diuerfum. In refpectu ad prius valde miratus fum, pronam a Roefelio defcripti ac delineati exemplaris faciem vnicolorem, e puniceo nempe nigricantem, cum omnium feptem, modo memoratorum, thoracis aeque ac capitis cornu nigrum, glabrum, fplendensque, elytra vero coloris oliuarum, modo intenfioris, modo diluti magis, maculisque minoribus, fubrotundis, a mufcis veluti confpurcata, ftriis etiam vagis, lineisque nigricantibus confpurcata quafi viderim; qua de re *Marcgrafium* etiam confentientem habeo, omnes-

omnesque alii, quotquot de hoc Insecto scripserunt, eidem taciti assentiuntur. Momentum itaque hoc perpendens, elytra praeprimis accuratius adspicere constitui, eaque, quae inuestigatio mihi foret oblatura, Lectori communicare. Deprehendi autem, vernice, qua conseruationis causa totum corpus erat obductum, separata, pigmentum illud, colore fructus oliuarum, stratum esse tenuissimum materiae impellucidae, albicantis, cultelli apice facile abradendum, coloremque naturalem, quo ipsa elytrorum substantia erat imbuta, sub eodem recondi, nec eius quicquam nisi ad maculas, strias et lineas, vbi pigmentum illud deficit, apparere. Sic, abraso omni pigmento, varietas ista, a Roeselio descripta, arte etiam producitur. Num autem elytra materiam istam albicantem sub ipsa animalis metamorphosi, vel postea demum exsudent, calore forte, dissipata prius aquosa parte, consistentem, an artificium dolose subsit, quaeritur? Posterius vix credam, prius potius innumera probant puncta seu foraminula minima, quibus vndique pertusum quasi erat pigmentum, quaeque, abraso hoc, ipsi etiam elytrorum substantiae impressa vidi. Ast, vnde istae lineae, secundum elytrorum longitudinem plerumque ductae, et ad latera hinc et inde ramos de se spargentes? forsan substratis foraminulorum seriebus suam debent originem. Maculae vero subrotundae, vnde? an ab exsudantibus olei guttulis pigmentum

 Ggg illud,

illud, fluidum adhuc, et aquosum forte respuentibus; an ab acri stirpis cuiusdam succo adsperso, v. g. arboris Todday s. Mammei dictae, cuius corticem cornubus perterebrare, succoque eius e vulnere stillante hausto inebriari Insectum dicitur? Inde etiam forsan posset explicari, quam ob rem nonnulla indiuidua tota nigricent, si nempe larga eiusmodi dissoluentis liquoris copia perfusa fuissent elytra, qua pigmentum solutum, vel difflueret, vel, friabile factum, sensim detereretur. An ab Insecti cuiusdam, e. g. Muscae, faecibus liquidis, pigmentum dissoluentibus? Et striae vagae, vnde? an a quibuscunque corporibus acutis, v. g. plantarum spinis foliisue pungentibus, quibus in cursu elytra sua forsan adfricat Scarabaeus, quorumque vestigia, pigmento nondum indurato denuoue emollito impressa, postea remanent. Vtut sit, paradoxi huius rationem in vna alteraue adlatarum causa esse quaerendam, adeo persuasus sum, vt opinionem, qua quis credere posset, dari inter Scarabaeos, vt inter homines, aethiopes aeque ac alios, nulla in ratione fundatam esse contendam. Obseruaui enim, et obseruare omnibus datur, simile quid in Insectis nonnullis Europaeis, ex Coleopterorum classe, quorum vel vniuerso corpori, vel elytris tantum farina quaedam, modo laxius, modo tenacius adhaeret, temporis successu disparitura; ita, vt pristinum cum alio colorem mutasse ea facile quis crederet. Saepius

pius adeo leuiter adglutinata eſt corpori iſta farina, vt vel digito eam abſtergere poſſis.

Scarabaeum, vt vnicum tantum exemplum proferam, in Ducatu Würtembergenſi, Patria mea, copioſiſſimum, et Roſarum flores praecipue frequentantem vidi, cuius totum vere corpus farina ex virideſcenti-argentea erat obductum, qua ſenſim ſenſimque deperdita, caput et thorax obſcure viridi, nitente, elytra vero caſtaneo colore, tanquam naturali et immutabili, imbuta conſpiciebantur. Nec raro vno eodemque die plurima vtriusque varietatis exempla mihi obuenerunt. Fucatam etiam, detergendo farinam, in alteram extemplo transformare potui. Sed redeamus ad rem, circa quam omne ſoluant dubium ii, quibus Inſecta haecce vaſtiſſima in patrio ſolo, America nempe meridionali, videre continget. Sunt equidem, quas ſupra feci, merae coniecturae, quae, ſiue iis rem tetigerim, ſiue non, alios ſaltem ad vlteriorem disquiſitionem invitabunt.

Tranſeo nunc ad ea, quae cuique peculiaria ſunt: Septem enim huius ſpeciei indiuidua non minorem, ac prima ſpecies, in magnitudine, et capitis cornu forma potiſſimum, offerunt differentiam:

Primus et maximus omnium, Roeſelianum adhuc ſuperans, a thoracis cornu extremitate ad poſticum corporis ambitum, 5 poll. 10 lin. longus;

gus; dentes, in capitis cornu medietate positi; tres: postico latissimo, et e duobus quasi coalito; anterioribus duobus paruulis, 2½ lin. inter se distantibus.

Secundus primo paullo minor; dentes tres: duo maiores, solitae magnitudinis, et proxime ante hos tertius, minimus.

Tertius, secundo magnitudine aequalis; dentes duo: posticus minor, maior anticus.

Quartus 5 poll. 4 lin. longus; dentes duo, sibi satis vicini, mediae magnitudinis: posterior anteriore paullo maior.

Quintus 5 poll. 1 lin. longus; Dentes duo, aequales, solitae magnitudinis et distantiae inter se inuicem.

Sextus 4 poll. 3 lin. longus; Dentes tres: duobus solitae magnitudinis, et vnico proxime ad istorum anteriorem, minimo.

Septimus et omnium minimus, vtpote 2 poll. 10 lin. tantum longus, tam in respectu ad thoracis, quam capitis cornu a caeteris omnibus non parum abludit: dentes enim bini, qui alias circa cornu thoracis medietatem suum tenere locum solent, eius principio seu anteriori thoracis parti proximi et minimi sunt. Ceterum idem cornu, vt in omnibus, subtus barbatum, inque extremo emarginatum est, hoc tamen cum discrimine, vt pili nusquam

quam ſint interrupti, cuiusmodi tamen veſtigium in reliquis omnibus, ab impreſſione capitis cornu ortum, videre licuit, certo indicio, modo dictum cornu barbatam thoracis cornu ſuperficiem nunquam attigiſſe; Nec attingere eam ob nimiam breuitatem potuit; eſt enim $4\frac{1}{2}$ lineas tantum longum, vnico dente, ſatis quidem notabili, in medio inſtructum, et in ſimplicem pariter apicem, vt ceterorum omnia, deſinit, licet dente, quem prope cornu extremitatem omnia habebant indiuidua, plane careat. Vid. ic. Tab. III. f. 1.

Denique amice monere mihi liceat, Cel. *Linnaeum* in citandis huius ſpeciei ſynonymis leuiter erraſſe, quod in Syſt. Nat. edit. dec. p. 345. no. 1. ex *Swammerdammii* Bibl. Nat. iconem huc retulerit; hac enim ſequentis, et diuerſiſſimae a praeſenti, ſpeciei imago exprimitur. Scarabaeum tamen, de quo nunc agitur, cognitum fuiſſe *Swammerdammio* ex Hiſt eius Inſ. generali (*a*) elucet, in qua p. 105. §. XXV. ſequentia legimus: „alia quaedam eorum ſpecies nobis —— eſt, quae verſus humeros deorſumque arcuata oſtendit naſi cornua, ſed intus quatuor dentatis eminentiis dotata, cuiusmodi quoque inſecta prominulum habent longiſſimum cornu ex oſſe humeri, lumborum et thoracis promiſ-

 ſum,

(*a*) edit. ſec. Vltraiect. 1693.

ſum, quod in interiore ſinuatione pilis ſetoſis aureum colorem aemulantibus inſtar panni heteromalli lanei tangentis manum adficit. Eadem in Bibl. Nat. germ. verſ. p. 118. repetit Auctor, et p. 119. „maximum Naſicornuum ſex pollices eſſe longum, vnumque cum dimidio latum„ ſuperaddit; iconem autem eius tradidiſſe, non inuenio.

* * *

V.

Scarabaeus thorace in cornu imberbi, ſubincuruum, antrorſum prolongato; naſi cornu vnidentato, ſubrecuruo; extremitate vtriusque bifida

Swamm. Bibl. Nat. Tab. XXX. f. 2.
Roeſ. Scarab. Tom. II. p. 17. Tab. A. f. 5.

OBSERVATIO.

Superfluum foret, integram huius Scarabaei concinnare deſcriptionem, quum in ea, quam Roeſelio debemus, nihil ſit, quod deſideretur. Quatuor equidem poſſidemus indiuidua, quorum tria inſoliti nihil prae ſe ferunt, quartum autem, quod ratione cornuum a ceteris multum differt, leui adumbravmbratione dignum mihi viſum eſt; Thoracis enim cornu breuiſſimum, et in extremitate leuiſſime tantum ſinuatum; capitis cornu ſolito etiam breuius, bifidum tamen in extremo, denteque in medio, vt cetera, eſt inſtructum, vti ex figura apparet luculenter. Magnitudo etiam huius indiuidui 1 poll. 8 lin. tantum exaequat, cum ex illis maximum a thoracis cornu extremo ad poſticum corporis ambitum 2 poll. 4 lin. longum ſit. Tab. XII Fig. 4.

DE-

DESCRIPTIO
FVCI FOLIACEI,
FRONDIBVS FRVCTIFICANTIBVS PAPILLATIS.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Quum in hiſtoria Fucorum plurima, quae ad partes fructificationis eorumque propagationem pertinere videntur, in hunc vsque diem oculatiſſimos etiam lateant Botanicos; operae pretium eſſe duxi, vt ſpeciem huius generis plantarum minus cognitam et ſtructura maxime ſingularem, quam VIR PERILLVSTRIS, Baro de STROGANOFF, vt omnium ſcientiarum, ita et Hiſtoriae naturalis inprimis ſummus cultor et maecenas omnium maxime depraedicandus, ex Mari albo ad locupletiſſimum ſuum rerum naturalium theſaurum miſſam accepit, acceptamque pro eo, quo eruditos amplecti aſſolet, fauore mecum communicauit, non tantum accuratius deſcriberem, quam a *Moriſono* olim et inter recentiſſimos Hiſtoriae naturalis ſcriptores ab Ill. *Linnaeo*, quorum vterque breuiſſimis tantum verbis eam deſcripſit, factum eſſe ex integra, ab vtroque data, deſcriptione hic expoſita videre eſt, verum

rum etiam meliorem eius delineationem, quam *Morisonus* exhibuerat, suppeditarem. Est autem haec planta:

Fucus foliaceus, frondibus fructicantibus papillatis.

Tab.XIII. Fig. 1.

Fucus fronde dichotoma plana integra: apicibus bifidis vesiculosis. *Linn.* Fl. Lapp. 465. Fl. Suec. 1005. Spec. Pl. T. II. p. 1157. no. 3. (ceranoides).

Fucus humilis dichotomus ceranoides, latioribus foliis, vtplurimum verrucosis. *Moris.* hist. III. p. 646. f. 15. t. 8. f. 13.

DESCRIPTIO.

Tab.XIII. Fig. 1.

Caulis † perbreuis (sine dubio mutilatus), † *a.* tenuis, teres, obscure fuscus, in frondes † desinens. † *b. b. b.* etc. *Frondes* e caule promissae circiter tredecim, valde sibi approximatae, foliaceae, rigidae, fragiles, aetatis et magnitudinis diuersae, coloris e fusco nigricante et e bruno flauescente variegati. Color e fusco nigricans in planta luci obuersa hinc et inde sub violaceo purpurascente apparet. Quaelibet illarum e petiolo †, cauli crassitie non multum ceden- † *c.* te, subtereti, sensim latescit, inque foliaceam formam expanditur, plus minusue regularem. Diuidi possunt hae frondes in duo potissimum genera: alterum tenellarum, *glabrarumque* †, alterum adulta- † *d. d.* rum,

† e. f. rum, papillis conicis obſitarum, *fructificantium* †.
Illarum vndecim ſunt, a duarum linearum ad duorum fere pollicum longitudinem accedentes, integerrimae. Harum duae, tenellis multo maiores, tres quatuorue ſc. pollices longae, et circa maximam ipſarum latitudinem vnum pollicem latae, ab
† g. g. vtraque facie *papillis* † conicis, plurimis, ſub angulo fere recto prominentibus, maximam partem impellucidis et ab ipſa frondium ſubſtantia, vtpote rariore et ſubpellucida, facile diſtinguendis, praeditae.
† h. Petiolum verſus † rariſſime occurrunt iſtae papillae,
† g. g. circa inferiorem vero frondis partem † omnium
† e. maxime confectae ſunt. Differt tamen vna † harum
† f. frondium ab altera † 1) papillis longioribus, lineam fere aequantibus, inter ſe ſatis aequalibus, et per
† f. omnem folii ambitum diſtributis, cum in altera † vix dimidiam lineam attingant maximae, in inferiore folii parte locatae, eaeque denſius ſtipatae,
† i. quam in ſuperiore †, in qua parciori numero ex-
† l. ſtant, leuesque tantum referunt et in rugas † quaſi confluentes prominentias; 2) *punctis* minimis, plurimis, obſcurioribus, quae per ipſam folii, nec non papillarum ſubſtantiam hinc et inde ſunt diſ-
† f. perſa; his enim altera † frons penitus carere videtur; 3) margine integerrimo, qui in altera vnica
† m. lacinia † grandiore inciſus eſt. Forſan autem haec inaequali frondis ſicceſcentis contractioni ſuam debet originem.

Ita

Ita se habuit planta in ficco statu. Mutationes autem, quas frons altera † fructificans, punctis praedita, in aquam immersa passa est, hae sunt: breui scilicet intumescebat, tam ambitu quam crassitie insigniter aucta. Substantia, antea rigida et fragilis, elastica euadebat et flexilis, gelatinae instar concretae. Colores obscuriores prius in dilutos valde mutati. Quo antea penitus priuata erat planta, nunc odorem spargebat musci corallini. Lentor magna in copia defluebat ab omni superficie, aquam viscositate sua imbuebat omnem, eandemque turbulentam reddebant ramenta variae magnitudinis herbacea, *corpusculorum ellipticorum* †, minimorum, innumerorum, *fibrillarumque* tenuissimarum † soluta congeries. Vna cum his ramentis punctorum istorum, in ficco statu obscuriorum, nunc vero purpurascentium, etiam nonnulla defluebant, plurima tamen substantiae arcte inhaerentia persistebant, nec ab ea, nisi vi aliqua adhibita, auelli aut rescindi patiebantur. Sunt autem haec puncta nihil aliud, quam *corpusculorum oblongorum* †, purpurascentium, corpuscula ista elliptica, quibus immersa ac permixta sunt, magnitudine longe excedentium congregationes. Numerus eorum in singulo puncto haud exiguus est, sc. ad 300 aut 400 circiter accedens. An corpuscula haec oblonga ipsa plantae semina, an vero puluis masculus, foecundans? et, an in lentore isto corpusculisue ellipticis vis lateat

† ε.

Tab XIII. Fig. 2.

† η.

† θ.

† γ.

 semi-

ſeminalis, impraegnans? anceps valde et difficilis eſt controuerſia; detexiſſe haec omnia in praeſens ſufficiat.

Explicatio Figurarum.

Fig. I. Planta in naturali magnitudine.

Fig. II. Punctum, corpuſculorum oblongorum, purpuraſcentium congregationem ſiſtens, lente microſcopii Cuffiani ſimplicis No. 3. auctum.

AVES

AVES INDICAE RARISSIMAE ET INCOGNITAE.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

I.

Merops fuſcus; ani regione flaua; cauda ex incano nigricante, longiſſima. Tab. XIV. Fig. 1.

An? Merops griſeus, ani regione flaua, cauda longiſſima. *Linn.* ſyſt. nat. edit. dec. Holm. 1758. p. 117. no. 4. (cafer.).

DESCRIPTIO.

Corporis magnitudine ad Turdum *muſicum* accedit. Roſtrum modice arcuatum, 1 poll. 2 lin. longum, in transuerſum ad baſin $2\frac{1}{2}$ lin. latum, nigrum: mandibulis aequalibus. Carina vtrinque ad mandibulae ſuperioris baſin, vltra 3 lin. extenſa, nares lineares includit. Caput, dorſum et alae fuſci coloris: pennularum oris ſubteſtaceis, remigumque ſcapis e bruno ruſeſcentibus. Frontis pennulae pallide teſtaceae, ſcapis nigricantibus. Mentum, gula et pectus, teſtacea ſiue e luteſcente pallide brunnea, extre-

extremitatibus pennularum, pectoralium praesertim, albentibus. Pennulae abdominis fuscae in medio, ad oras albae. Ani regio flaua, citrina. Cauda corpore duplo fere longior, nouem sc. poll. parisinorum, rectricibus duodecim composita, quarum sex longissimae, flexiles, eiusdem fere inter se longitudinis, ex incano nigricantes; ceterae his breuiores inaequales, 2, 3 et $4\frac{1}{2}$ poll. longae, fuscae. Pedes nigricantes, squamosi, vt in Turdis. Tibiae nouem lin. longae. Digiti fissi: tres antici, pone vnus, vnguibus aduncis instructi.

* * *

II.

Tab. XIV. Fig. 2. *Certhia* corpore supino viridi; gula lutea; pectore abdomineque ex viridi et luteo variegatis.

DESCRIPTIO.

Magnitudine Certhiam *Europaeam* parum superat. Rostrum ab angulo oris ad apicem 9. lin. longum, ad frontem duas lin. latum, modice incuruum, fuscum. Totum supinum corpus, sc. frons, vertex, occiput, collum, dorsum et vropygium viridis psittacei coloris. Spatiolum istud mandibulae

dibulae superioris basin siue nares inter et oculos, vt et mentum, gula, infimumque abdomen, lutea. Regio supra - et infraorbitalis, temporum auriumque ambitus coloris e pallide luteo et fusco mixti, striati. Plumularum linea, vtrinque ab angulo oris retrorsum ducta, coerulea. Pectus et abdomen ex luteo et viridi variegata, striata. Alae cum suis tectricibus maxima ex parte virides. Remiges fuscae, margine exteriore plus minusue viridi sordidiore colore tinctae. Tectrices supra caudam totae virides. Cauda breuis, versus extremitatem modice diuisa: rectricibus in supina facie viridibus externa parte apicibusque, interna fuscis; in prona vero subincanis, leuique virore renitentibus. Pedes cum vnguibus fusci.

* * *

III.

Passer e violaceo nigricans, fronte, mento, gula, pectore abdomineque saturate flauis. Tab. XIV. Fig. 3.

An? Fringilla violacea, fronte subtusque flauissima. *Linn.* syst. nat. edit. dec. Holm. 1758. pag. 182. no. 25.

DESCRIPTIO.

Passere *domestico* paulo minor. Rostrum nigricans: mandibula superior modice arcuata et angulata

gulata in medio, margine laterali ad baſin protuberante, hinc vero ad apicem incuruum vsque inflexo; mandibula inferior recta, margine non niſi infra medietatem quadantenus impreſſo.

Totum caput, excepta fronte, collum deorſum, tectrices alarum et vropygium coloris e violaceo nigricantis, qualis v. g. hirundinis domeſticae. Remiges e fuſco nigricantes, margine exteriore maximam partem e violaceo virideſcente, ſummo autem extremitatem pennarum ſecundariarum verſus pallide flaueſcente. Flauo colore, eoque ſaturatiore, in aurantium inclinante, frons, mentum, gula, pectus, minus ſaturato, ex aurantio in citrinum ſenſim mutato, abdomen et tectrices ſub cauda, tincta ſunt. Cauda breuis: rectricibus nigricantibus, margine exteriore e violaceo virideſcentibus; harum duae infimae interiore parte albae, exteriore vero et apicibus pariter nigricantes. Pedes e fuſco nigricantes. Vngues brunnei.

* * *

IV.

Tab. XV. Fig. 4. *Fringilla* viridis, capite ſpadiceo, pectore abdomineque cyaneis; baſi alarum flaua.

An? The Red-headed Green-Finch. *Edward.* Tom. 1. p. 23. tab. 23.

DE-

DESCRIPTIO.

Magnitudo Alaudae *pratensis.* Roſtrum fuſcum. Caput totum vna cum mento ſaturate ſpadiceum. Vltimas occipitis plumas ſpadiceas anguſta ſequitur ſeries flaueſcentium, illis et colli viridibus plumis interpoſitarum. Collum, dorſum, pectoris et abdominis latera, alae, vropygium, ani regio, et cauda, viuide viridi ſeu pſittaceo colore refulgent, Pectoris et abdominis medium cyaneum. Baſis alarum flaua. Remiges primores maxima ex parte nigricantes, nec niſi exteriore, eoque anteriore margine viridi colore tinctae. Ita etiam cum rectricibus lateralibus comparatum eſt, quarum exterior tantum pars viret, interiore in nigricantem vergente. Interior alarum ſuperficies ſubfuſca, caudae inferior incana, diluto valde virore renitens. Plumae femora ad genua vsque inueſtientes dilute ſpadiceae. Pedes cum vnguibus pallide brunnei. Quibus praecipue notis haec auis differat ab iſta *Edwardi*, e deſcriptione ſatis patet. An ſexus varietas? an vero colores capitis et femorum in noſtrate caſu mutati?

* * *

V.

Curruca nigra, fronte alba; abdomine croceo; vropygio cyaneo. Tab. XV. Fig. 5.

DESCRIPTIO.

Inter Currucam *fuscam* et Lusciniam *salicariam* mediae circiter magnitudinis. Rostrum nigrum: mandibula superior angulata, apice incuruo. Frons late alba; areae huius margo vertici nigro contiguus coerulescens. Ceterum totum caput, collum, mentum, gula, pectus, dorsum, alae et cauda, fuliginis instar nigra. Imum abdomen saturate flauum, et croceum fere. Vropygium, seu tectrices supra caudam, coloris cyanei siue vltramarini. Cauda breuis, super alarum compositarum extremitates vix eminens. Pedes et vngues e brunneo fusci. Medius horum lateralibus duplo fere maior, posticoque aequalis est.

* * *

VI.

Tab. XV. Fig. 6. *Fringilla* coerulea, mento, gula, alarum basi, dorsique parte antica nigris.

DESCRIPTIO.

Magnitudo Linariae *maioris*. Rostrum fuscum, subulato-conicum, acutum, ab oris angulo ad ipsius apicem $5\frac{1}{2}$ lin. longum; hinc longius et tenuius, quam

quam in plerisque huius generis speciebus. Caput coeruleum, excepta stria latiore, inter oculos et nares, nigra. Collum coeruleum, mentum vero et gula nigra. Anterior dorsi pars plagam exhibet semicircularem nigram, vtrinque crure quasi concolore antrorsum producto confluentem cum nigredine basis alarum latiore. Plagam istam arcus sequitur latus coeruleus, eidemque parallelus, media sui parte cum reliquo dorsi et vropygio, quae pariter coerulea sunt, confluens. Pectus, abdomen, ani regio et tectrices sub cauda coerulea. Remiges e fusco nigricantes, margine exteriore coeruleo colore imbutae, eodemque latius extenso in secundariis, quam in primariis. Quicquid autem in hac auicula coeruleum vel vltramarinum est, sub alia radiorum reflexione viridis aeris colorem refert. Cauda aequalis, e fusco nigricans. Pedes et vngues pallide brunnei.

* * *

VII.

Cornix atra; capite, collo pectoreque, flauis. Tab. XV. Fig. 7.

DESCRIPTIO.

Magnitudine ad Loxiam *curuirostram* circiter accedit. Rostrum satis productum, forte e fusco

 nigri-

nigricans: margine mandibulae fuperioris marginem interioris recipiente. De extremitate roftri, quae in hoc indiuiduo mutilata eft, non conftat, an recta et acuta fuerit, an vero incurua obtufaue. Omnem fere roftri bafin et ambitum circa caput, excepta parte fronti proxima, plumae nigrae rariores occupant, iisdemque interftitium etiam, quod inter roftri angulum et oculos occurrit, obfitum eft. Totum caput, collum et pectus flauo, citrino, reliqua vero corporis omnia atro colore tincta. Vropygii pennulae, caudaeque fuperior fuperficies prae ceteris hoc habent fingulare, quod ex atro fplendorem emittant violaceum. Inferior caudae fuperficies ex incano pallide nigricans; ceterum cauda aequalis. Pedes e fufco nigricant, vti et vngues; pofticus horum, refpectu anticorum, folito maior.

* * *

VIII.

Tab. XVI. Fig. 8. *Lanius* capite, collo pectoreque e violaceo nigricantibus; digitis duobus anticis, totidemque pofticis.

DESCRIPTIO.

Lanio *cinereo maiore* paulo maior. Roftrum albicans, verfus nares plumbeum, apice angulato adunco

adunco mandibulae superioris obtusiore, super exscissum sursumque flexum mandibulae inferioris apicem deflexo. Longitudo eius ab oris angulo ad apicem 10 lin. Latitudo ad radicem frontalem nudam (omni nempe cera caret) 6 lin. ab vno vero ori angulo ad alterum 9 linearum; hinc rostrum subtriangulare, robustum, rictusque oris capax. Nares pennulis setaceis, rigidis, nigris obtectae. Setae etiam eiusmodi, sed longiores, ad mandibulae inferioris basin. Frons, oculorum auriumque ambitus, nigricant; reliquum vero capitis, collum ac pectus, e saturate violaceo nigricantia. Palpebrae luteae. Totum dorsum cum vropygio viride, saturatum, splendore aureo refulgens. Alae fuscae: remigibus primariis immaculatis, secundariis parte exteriore punctis minimis albentibus, plurimis et haud raro confluentibus conspersis; similibus etiam punctis tectrices notatae. Abdomen totum, vt et tectrices sub cauda viridi aurantii coloris. Tectrices supra caudam e coerulescenti virides, deauratae. Cauda longa, aequalis, mollis, rectricibus duodecim composita, quarum sex superiores, eiusdem inter se longitudinis, e coerulescenti virides partim, partim nigricantes: sc. supremae duae pennae illo totae imbutae colore, exceptis extremitatibus, nigris; reliquae vero quatuor exteriore tantum parte vel margine, ceterum totae nigricantes; substratae vero his aliae sex, nigrae, extremitatibus et zonis

 pluri-

plurimis transuerſis albis notatae, illis breuiores, et inter ſe, per paria, longiores. Pedes, habito ad auis magnitudinem reſpectu, parui admodum, et, quod maxime ſingulare, picorum pedibus ſimillimi: tibiae ſc. perbreues, pennulis nigris, ad imum fere vsque, veſtitae; digiti tenues, vnguibus breuibus et modice incuruis muniti, duo antici, totidemque poſtici. Illi a baſi ad duas vsque lineas inter ſe concreti, exteriore interiorem longitudine parum ſuperante; hi vero diſtincti, illis breuiores: exteriore maiore, interiorem notabiliter excedente.

* * *

IX.

Tab. XVI. Fig. 9. *Loxia* atra; vropygio flauo.

DESCRIPTIO.

Magnitudine Loxiam *curuiroſtram* fere exaequat. Roſtrum aequale: mandibula ſuperiore nigricante, inferiore ſordide albicante. Caput, collum, dorſi maxima eaque anterior pars, gula, pectus, abdomen, ani regio, cauda et tectrices ſub cauda, atra. Plumae capitis et colli a reliquis ſe diſtinguunt, quod laxius ſibi inuicem incumbant, firmioris ſint ſubſtantiae, et, cincinnatae leuiter, reuolutas quaſi et transuerſim reſciſſas habeant extremitates.

mitates. Splendore quodam renitent omnes, exceptis dorſualibus, quae eo carent, nigrae potius quam atrae dicendae. Alae fuſcae: tectrices omnem alarum baſin, crepidinem, internamque earum faciem circa baſin obtegentes, flauae ſeu citrinae; ceterae tectrices maiores, at pauciores numero, fuſcae vel totae, vel margine tantum extremo pallide flaveſcentes, partim alarum baſi flauae ſuperſtratae, partim medium earum occupantes. Remigum extremus margo pariter flaueſcens. Extremum dorſum, et vropygium flaua ſiue citrina tota. Plumae inferiorem femorum extremitatem inueſtientes pallide fuſcae; vt et pedes vnguesque. Medius horum lateralibus duplo maior; poſticus vero omnium maximus, ſatis arcuatus, tenuis et acutus.

* * *

X.

Turdus niger; faſcia capitis longitudinali, vropygioque luteis; baſi alarum alba. Tab. XVI. Fig. 10.

DESCRIPTIO.

Magnitudo Turdi *muſici*. Roſtrum nigrum, ab angulo oris ad apicem $6\frac{1}{2}$ lin. longum. Faſcia capitis longitudinalis lata, a media fronte, per verticem

ticem, ad occiput vsque ducta, lutea, antice flauescens. Caput, mentum, gula, collum, pectus, dorsum, alarumque tectrices maiores atra, nitida. Zona lata, per alarum basin oblique ducta, e tectricibus minoribus composita, alba. Remiges omnes, abdomen, tectrices sub cauda, et ipsa cauda nigra; exceptis huius scapis, subtus e rufo brunneis. Vropygium late luteum. Pennulae abdominis laterales nonnullae, in femorum regione, e flauescenti ferrugineae; ipsa vero femora ad genua vsque pennulis nigris obtecta. Pedes et digiti cum vnguibus pallide fusci. Vngues tres antici minimi, vix incurui; posticus satis magnus et arcuatus.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

BREVIS EXPOSITIO OBSERVATIONVM OCCASIONE TRANSITVS VENERIS PER SOLEM IN VRBE SELENGINSK AN. 1761. INSTITVTARVM.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKY.

Quanta auiditate expectauerint Aſtronomi memorabilem illam diem, qua Venerem in Sole conſpicuam Tabulae annunciabant, quanta ſe praeparauerint diligentia ad inſtituendam ipſius obſeruationem, quantosque in eam ſumtus Europae Principes impenderint; ſatis notum eſt. Permotus grauitate rei, Illuſtriſſimus Academiae Praeſes quoque voluit, vt in Ruſſici Imperii partibus Orientalibus phaenomeni huius obſeruationes inſtituerentur, eoque fine praeter Cl. *Popouium*, Conſiliarium Aulicum et Aſtronomiae Profeſſorem, et ego juſſus ſum, in Sibiriam proficiſci, vt in vrbe *Nertſchinsk*, aut ſi fieri poſſet, in vrbe *Jakutsk*, memorabilem hanc obſeruationem perficerem.

Munitus, quibus opus erat, inſtrumentis, Petropolin relinquebam d. 14. Ianuarii. Cum vero

d. 16.

d. 16. Martii itinere hactenus ſatis felici in vrbem *Irkutsk* perueniſſem, dubitare incepi, an in poteſtate foret, vrbem *Nertſchinsk* attingere; niues enim iam fundebantur, atque vlterius iter proſequi, niſi et me et inſtrumenta certo periculo exponere vellem, vix licebat. Neque tamen in vrbe *Irkutsk* ſubſiſtere poteram, cum ſcirem, hunc locum elegiſſe ſibi Cl. *Popouium*, cuius aduentus quotidie expectandus erat. Periculum tamen facturus, an vrbem *Nertſchinsk* adhuc attingere liceret, ſine mora iter ingrediebar. Aſt montes et deſerta arenoſa traiicienda a propoſito me deſiſtere cogebant. Mutato itaque conſilio, in vrbem *Selenginsk* proficiſcebar, quo non ſine periculo tandem d. 25. Martii perveniebam.

Perhibebant vrbis incolae, et breui tempore propria experientia me docebat, locum, vbi neceſſitas pedem figere me adegerat, ob inconſtantiam tempeſtatis inſtituendis obſeruationibus aſtronomicis parum aptum eſſe: verum id ſolatio mihi erat, quod longe adhuc huic fini ineptiorem aſſererent omnes vrbem *Nertſchinsk*, quo proficiſci primum mihi propoſueram. Sine mora itaque de Obſeruatorio in colle, cui arx inaedificata eſt, quam citisſime exſtruendo cogitabam, quod d. 13. April abſoluebatur, ac etſi ex ligno, ſatis tamen ſolide, conſtructum erat. Pars pauimenti ea, vbi quadrans aliaque inſtrumenta locanda erant, lateribus ſternebatur,

batur, et ad horologia ſuſpendenda infigebantur terrae trabes duae ad profunditatem aliquot vlnarum, nullam cum aedificio connexionem habentes. Eodem tempore machinam parallacticam conſtruendam curabam, qua pro obſeruationibus, quas inſtituturum me ſperabam, opus erat.

In obſeruatorium hoc d. 16. Aprilis transportabam inſtrumenta ſequentia:

1) Quadrantem Aſtronomicum micrometro inſtructum radii duorum circiter pedum, a perito Artifice *L'Anglois* Pariſiis magna diligentia elaboratum.

2) Horologia pendula bina, quorum id, quod praecipue in vſum vocaui, a Dn. *Julien Le Roi* elaboratum eſt.

3) Machinam parallacticam et cum aliis tubis tubum dioptricum, cuius lens obiectiua, Londini elaborata, diſtantiam focalem habet 15. ped. Lond. Tres ad manus erant lentes oculares, quarum ea in omnibus obſeruationibus vſus ſum, quae meliorem effectum praeſtare mihi viſa eſt, et cuius diſtantia focalis erat 2. 52. dig. Lond. et a. d. 18. Apr.l. labores meos incipiebam, quos breuiter iam enarrabo, iunctis tamen omnibus circumſtantiis, quo eo ſecurius lectores de fide, quam obſeruationes meae merentur, iudicare queant.

OBSERVATIONES Pro determinanda Latitudine Vrbis Selenginsk inſtitutae.

D. 18 April. inſtituebam quadrantis verificationem ad horizontem. Reducto quadrante in ſitum verticalem, obiecti ad 1750. ped. Lond. circiter diſtantis altitudinem inueniebam, ſumendo ex pluribus medium 90° —— 2 Reu. 81½. par. cent. Dein quadrante inuerſo, ac ope menſulae, cuius altitudo circiter quadrantis radium aequabat, eleuato, eiusdem obiecti altitudinem reperiebam 90° —— 2. Reu. 95. p. cent. vnde pro corrigendo errore filum micrometri fixum 6½. p. cent. deprimebam. Quoniam obiectum, quod pro verificando quadrante elegeram, propinquius erat, quam vt pro infinite diſtante haberi poſſet; operam dedi, vt centrum lentis obiectiuae in ſitu inuerſo quadrantis aequaliter a pauimento diſtaret, ac in ſitu recto, quod ope menſulae antea commemoratae ſufficiente cum exactitudine obtinui: ad ſummum enim in ſitu inuerſo dimidio pollice magis eleuata erat lens obiectiua, quam in ſitu recto fuerat; aſt error inde oriundus ad ſummum 2″½. efficere, atque hic contemni poteſt.

Valorem partium micrometri, quadranti affixi, determinaueram Petropoli, antequam iter ingrederer. Anno namque 1760, collocato quadrante in in meridiano, menſurataque Diametro Solari, inveneram

	Part. micrometri.	Diam. ☉lis in Cal. Aſtron. Pariſino
d. $\frac{30}{11}$ Sept. Oct.	10 Reu. 33. part. cent.	32′. 11″.
d. $\frac{20}{31}$ Oct.	10 — 36½ - -	32. 19.
d. $\frac{21}{1}$ Oct. Nov.	10 — 38 - -	32. 22.

Hinc valor vnius partis centeſimae colligitur ex obſeruatione

Ima	. . .	1″. 52‴. 1.
IIda	. . .	1. 52. 7.
IIItia	. . .	1. 51. 2.
Medium	. . .	1. 52.

D. $\frac{21}{2}$ April Maii altitudinem Spicae Virginis meridianam inueniebam 28°. 50′. + 3. Reu. 58. part. cent.

	29°. 1′. 8″. ⅓.
Refractio . . .	1. 56.
Altitudo refract. correcta . .	28. 59. 12. ⅓.

Declinatio Spicae Virginis

ineunte A 1761. Auſtr. .		9°. 54′. 20″. 2.
* Deuiatio	+	7. 9.
Praeceſſio	+	5. 3.
Aberratio	+	7. 6.

Declin.

* Correctiones has, ex Deuiatione, Praeceſſione et Aberratione oriundas, elicui ex Tabulis, quas Cel. de la Caille in *Aſtronomiae fundamentis* ſuppeditauit.

Declin. Spicae Virg. app. ad 21. April.	+	9. 54. 41.
Complementum altitud. Poli		38. 53. 53. $\frac{1}{3}$.
Latitudo vrbis *Selenginsk*		51. 6. 6. $\frac{2}{3}$.

Eadem die altitudo Arcturi meridiana erat 59°. 20′.

+ o Reu 22. part cent.	59°. 20′. 41″.
Refractio . . .	38.
Altitudo refractione correcta . .	59. 20. 3.

Declinatio Arcturi ineunte Ann. 1761. Borealis . .		20°. 26′. 31″. 2.
Deuiatio	—	5. 2.
Praecessio	—	5. 3.
Aberratio	—	11. 7.

Declinatio Arcturi appar. ad 21. April.	—	20. 26. 9.
Complementum altitudinis Poli		38. 53. 54.
Altitudo Poli quaesita		51. 6. 6.

D. $\frac{22}{3}$ $\frac{April}{Maii}$ micrometrum tractans sentiebam, cochleam micrometri non satis libere circumagi, ac intus puluisculos haerere: quam ob rem soluto purgatoque micrometro, eadem die denuo quadrantis verificationem instituere opus erat. Faciebam hoc dirigendo tubum in idem obiectum ad horizontem, quo d. 18. April. vsus eram. In situ recto quadrantis altitudinem eius inueniebam 90°. — 2 Reu. 82$\frac{1}{3}$, p. cent in situ inuerso autem 90°. — 2 Reu. 94$\frac{1}{3}$, p. cent. Depresso igitur filo immobili micrometri ad 5$\frac{1}{2}$, p. cent.

D. $\frac{26}{7}$ $\frac{Apr.}{Maii}$

D. $\frac{26\ April}{7\ Maii}$ rurſum capiebam altitudines meridianas Spicae Virginis ac Arcturi.

Illius altitudinem reperiebam $29°. + 0.$ Reu. $36\frac{1}{2}$. p. c.	
	$29°.\ 1'.\ 8''.$
Huius autem $59°. 20' + 0$: Reu. 28 p. cent.	$59.\ 20.\ 52.$
Vnde ex prima obſerv. alt. Poli colligitur	$51.\ 6.\ 7.$
Ex altera vero . . .	$51.\ 5.\ 55.$

Quo certior euaderem de ſtatu quadrantis, d. 5. Maii denuo verificationem illius ad horizontem repetebam. Obiectum, quod in vſum vocabam, ſemper mihi erat idem, cuius altitudinem in ſitu recto quadrantis inueniebam $90°. - 2.$ Reu. $85\frac{2}{3}$. p. cent. in ſitu autem inuerſo $90°. - 2.$ Reu. $87\frac{2}{5}$. p. cent. vnde, ſi quis fuit, in verificatione error, contemni potuit.

D. $\frac{1}{12}$. Iunii altitudinem meridianam Arcturi inveniebam $59°. 30' - 2$. Reu. $99\frac{1}{2}$. p. cent. $= 59°\ 20'. 41''$.

Vnde adhibitis iisdem in declinationem correctionibus, vt ſupra, altitudo Poli quaeſita prodit . . . . . $51.\ 6.\ 6.$

Obſeruationem hanc omnibus reliquis praeferendam cenſeo. Arcturus enim culminabat hac die, tempore crepuſculi veſpertini, paulo poſt Solis occaſum, vnde in obſeruatione inſtituenda, neque filum micrometri, neque filum penduli, ex quadrantis centro pendentis illuminari opus erat.

Cepi quoque aliquas Solis altitudines meridianas, et ex ipsis Latitudinem Obſeruatorii mei elicui: d. nempe $\frac{22}{2}\frac{Iulii}{Aug.}$ altitudinem meridianam limbi Solis ſuperioris inueniebam $57° — 0$. Reu. 19. part. cent. ſeu $56°.56'.27''.40'''$. Poſita autem Semidiametro Solis $15'.50''.10'''$. ac refractione — parallax. $32''.12'''$.

Altitudo centri Solis fit .	$56°.40'.5'',3$
Declinatio Solis Borealis .	$-17.46.18.+$
Complement. altitud. Poli	$38.53.47.$
Hinc altitudo Poli . .	$51°.6'.13''.$

D. $\frac{2}{13}$. Aug. altitudinem meridianam limbi Solis ſuperioris inueniebam $54°. - 3$. Reu. $10\frac{1}{2}$. p. cent. $=53°.50'.20''.17'''$. Poſita autem Semidiametro Solis $15'.52''.15'''$. ac refr. — par. $38''.30'''$.

Altitudo centri Solis fit .	$33°.33'.49'',4$
Declinatio Solis Borealis —	$14.39.58,5$
Complementum altit. Poli .	$38.53.51.$
Altitudo Poli	$51.6.9.$

Sumendo autem medium omnium ſupra recenſitarum altitudo Poli quaeſita prodit $51°.6'.6''$.

Ad definiendam Declinationem Solis pro meridie Obſeruatorii mei ſuppoſui differentiam Meridianorum Pariſienſis et Selenginskenſis 7. hor. praeciſe, qua ſuppoſitione in ſequentibus quoque vtar, donec

donec veram ex obſeruationibus meis reſpondentibus eliciam.

Obſeruatio Eclipſeos Solaris d. $\frac{22}{3}$ Maii/Iun.

Ex quo Horologia pendula in Obſeruatorium transportaueram, tam ope altitudinum Solis correſpondentium, quam ope tranſitus ſtellarum quarundam, per tubum immobiliter trabi affixum, motum ipſorum ſolerter examinabam, ac Horologii a Dn. *Iulien Le Roi* conſtructi motum admodum vniformem inueniebam: conſtanter enim interuallo diei ſolaris medii 23″. accelerabat. Superfluum fore exiſtimo, ſi integrum hoc examen apponere vellem; ſufficiet, eas tantum altitudines Solis correſpondentes recenſere, quas immediate ante Eclipſin Solarem et poſt eam obſeruaui. In capiendis iis pro multiplicando numero obſeruationum, dimoui filum mobile a filo immobili micrometri, ac quoties circumſtantiae permittebant notaui ad horologium appulſum vtriusque limbi Solis ad vtrumque filum. Vnde facile colligi poteſt, quid in ſequentibus voces *fil. mob. fil. immob.* indicent.

D. $\frac{22}{2}$ $\frac{\text{Maii}}{\text{Iun.}}$ cepi altitudines Solis correſpondentes:

Ante merid.			Altit. ☉lis.	Poſt merid.	Merid. ad Hor.
Therm. Reaum. 15°.			- - - -	19°½. ſupra o	
fil. mob.	ſup.	11h.48′.58″.	54°.	3h.39′.3″.	1h.44′.0″½.
- immob.	ſup.	50. 49.		37. 14.	1. 44. 1½.
fil. mob.	ſup.	11. 53. 20.	54°. 30′.	34. 44.	1. 44. 2.
- immob.	ſup.	55. 11.		32. 53.	1. 44. 2.
fil. mob.	ſup.	11. 57. 43.		30. 21.	1. 44. 2.
	inf.	12. 2. 31.	55°.	25. 34.	1. 44. 2½.
- immob.	ſup.	11. 59. 38.		28. 25.	1. 44. 1½.
	inf.	12. 4. 29.		23. 34.	1. 44. 1½.

Medium 1h.44′.1″,7
Correctio merid. — 4, 5
Meridies vera 1. 43. 57, 2
Temp. med. inſtante merid. vera eſt 11h.57′.28″, 1

D. $\frac{23}{3}$ $\frac{\text{Maii}}{\text{Iun.}}$ circa horam ſextam matutinam Therm. Reaum. 7°. ſupra o. Coelum erat totum nubibus obductum; vnde non ſolum initium Eclipſis Solaris non obſeruare poteram, ſed et de fine videndo deſperabam. Aſt inopinato accidebat, vt nubes diſcederent, Solque per vices conſpiceretur. Eripuiſſet nihilominus exigua at ſpiſſa nubecula finis videndi copiam, niſi continuo tubo adſtitiſſem, eumque coeli locum attente contemplatus eſſem, vbi Solis ex nube emerſuri aliqua ſpes erat. Subito namque et praeter expectationem Sol prodibat in conſpectum pleno ſplendore fulgens, paucis ſecundis prius, quam Eclipſis finiebatur, quod accidebat, cum

cum Horologium meum indicaret $10^h.7'.26''$. Ad inſtituendam hanc obſeruationem adhibebam tubum quindecim pedum, de quo ſupra locutus ſum. Eadem die capiebam altitudines Solis correſpondentes

Ante merid.			Altit. ☉lis.	Poſt merid.	Merid. ad Horol.
fil. mob.	ſup.	$11^h.13'.20''$.		$4^h.15'.49''$.	$1^h.44'.34''\frac{1}{2}$.
	inf.	17. 12.	$49°.30'$.	11. 56.	1. 44. 34.
- immob.	ſup.	14. 53.		14. 14.	1. 44. 33½.
	inf.	18. 48.		10. 19.	1. 44. 33½.
fil. mob.	ſup.	11. 20. 47.		4. 8. 22.	1. 44. 34½.
	inf.	24. 48.	$50.30'$.	4. 22.	1. 44. 35.
- immob.	ſup.	22. 23.		6. 45½.	1. 44. 34½.
	inf.	26. 26.		2. 44.	1. 44. 35.

Therm. Reaum. 15°. ſupra o.

Medium	$1^h.44'.34'',3$
Correctio merid.	− 4, 9
Meridies vera	1. 44. 29, 4

Tempus medium, inſtante merdie vera $11^h.57'.37''$, 4.

Vnde acceleratio Horologii ſpatio diei Solaris medii colligitur $23''$. Quoniam iam d. 22. Maii meridies vera ad Horol. euenit ad $1^h.43'.57''$, 2.
d. 23. Maii autem 1. 44. 29, 3.
acceleratio Hor. ſpatio diei Solaris veri erit - 32, 1.

A meridie ergo 22. Maii ad tempus obſeruationis acceleratio reperitur $27''$, 2. Hinc tempus verum, quo finis Eclipſis euenit, prodibit ſi de $22^h.7'.26''$. dematur $1^h.43'.57''$, 2 + $27''$, 2 $= 1^h$.

$= 1^h.44'.24'',4$. Conſequenter tempus verum, in quod finis Eclipſis incidit, erit $20^h.23'.1''\frac{2}{3}$. Obſeruationem hanc admodum exactam et certam praedicare nullus dubito.

Obſeruatio Tranſitus Veneris ſub Sole.

In hac obſeruatione inſtituenda non aeque felix fui, ac in antecedente; quid vero egerim, quidque obſeruauerim, fideliter enarrabo.

D. $\frac{24}{4}$ $\frac{\text{Maii}}{\text{Iunii}}$ capiebam altitudines Solis correſpondentes.

Ante merid.			Alt. ☉lis	Poſt merid	Merid. ad Hor.
Therm. Reaum. $11\frac{1}{2}^{\circ}$.			- - -	$9\frac{3}{4}^{\circ}$. ſupra o	
fil. mob.	ſup.	$10^h.14'.27''$		$5^h.15'.43''$.	$1^h.45'.5''$.
	inf.	17. $57\frac{1}{2}$.	41°.	12. $12\frac{1}{2}$.	1. 45. 5.
- immob.	ſup.	15. $53\frac{1}{2}$.		14. 18.	1. 45. $5\frac{3}{4}$.
	inf.	19. 23.		10. 48.	1. 45. $5\frac{1}{2}$.
fil mob.	ſup.	10^h.21. 5.		5. 9. 5.	1. 45. 5.
	inf.	24. 36.	42.	5. 33.	1. 45. $4\frac{1}{2}$.
- immob.	ſup.	22. 30.		7. 39.	1. 45. $4\frac{1}{2}$.
	inf.	26. 2.		4. 6.	1. 45. $4\frac{1}{4}$.

Medium $1^h.45'.4'',9$.

Correctio meridiei — 4, 7.

Meridies vera 1. 45. 0, 2.

Temp. med. inſtante merid. vera, 11. 57. 47.

Vnde adhuc colligitur, Horologium ſpatio diei Solaris medii accelerare $23''$.

Sequen-

Sequenti die, coelum per integram diem ſparſis nubibus inquinatum erat, quapropter altitudines Solis correſpondentes capi non potuere. Therm. Reaum. ante merid. circa hor decimam 16°. poſt merid. circa hor. quartam $15\frac{1}{4}^{\circ}$. ſupra o.

D. $\frac{26}{6}$ $\frac{\text{Maii}}{\text{Iunii}}$ in quam Veneris tranſitus incidit, mane caelum prorſus nubibus tectum erat, aëre quieto. Circa horam octauam matutinam ex improuiſo vehementiſſimus ex Septentrione oriebatur ventus Circa horam decimam larga decidebat pluvia; verſus vndecimam vero, Sol per nubes atque Venus a limbo Solis per ſuam Diametrum remota conſpici aliquoties poterat: poſt 13 vero aut 15 minuta Sol nubibus denſiſſimis denuo e conſpectu eripiebatur, et poſt meridiem hora prima rurſum pluebat. Tandem circa horam tertiam caelum tegentes nubes diſrumpebantur, ſic vt Sol per vices in conſpectum prodiret, Venus autem tum emerſioni iam propinqua erat. Spes proinde aliqua erat contactum limborum Veneris atque Solis obſeruandi; quapropter oculum continuo tubo applicatum tenebam, mutans vitra colorata, prout varius ſplendor Solis, mox denſis, mox tenuioribus nubibus tecti, exigebat, ac limbi Solis, qui modo fluctuans, modo bene terminatus apparebat, eam partem, vbi Venus emerſura erat, in medio tubi, quantum vehementia venti permittebat, retinere operam dabam. Oculo tandem hebeſcente, vento tubum aliquantum agitan-

agitante, limbo Solis tantiſper fluctuante et tenui nubecula obducto, appulſum limbi Veneris praecedentis ad limbum Solis ſecundum Horologium meum ad $5^h. 7'. 49''$. euenire iudicabam. In contactu limborum id ſingulare obſeruabam, quod filum lucidum inter Planetae et Solis limbum interceptum ante expectationem euaneſceret, ac ſubito quaſi exigua guttula nigra (*) e Venere procedere, limbumque Solis limbo Veneris iungere videretur. Cum Horologium $5^h. 8'. 8''$. indicaret, Sol per aliquot minuta ſecunda pleno fulgore radiabat, tumque limbus Veneris praecedens vltra Solem prominens lucido annulo cinctus mihi videbatur; attentius vero conſiderare ac examinare hoc phaenomenon non licebat, Sol enim ſubito per nubem intercurrentem ex conſpectu eripiebatur.

In contactu exteriori obſeruando eadem, imo et maiora aderant impedimenta, quae in contactu interiori expertus ſum; accidere vero contactum exterio-

(*) Vt clariorem ideam de guttula nigra lectores concipiant, inſtituant velim ſequens experimentum. Remoto ab oculo vnius manus digito per vnum circiter pedem, et digito alterius paulo plus, promoueantur in directum alter ad alterum, vt ſeſe inuicem contingere appareant; tunc ante mutuum contactum ſubito inter eos naſcitur guttula nigra, quae eo magis ampliatur, quo magis digiti ad mutuum contactum deducuntur, ſimile huic erat phaenomenon, quod in contactu interiori obſeruabam.

teriorem limborum Veneris atque Solis iudicabam, cum Horologium indicaret $5^h. 25'. 55''$.

Enarro, quae obſeruaui, neque, quae forte fuerit cauſa phyſica, apparentiam guttulae nigrae limbum Solis ac Veneris iungentis, annuli ve lucidi Veneris limbum cingentis producens, inquiro.

Conſtitueram ſemitam Veneris apparentem et Diametrum eius conſuetis methodis obſeruare, eoque fine machinae parallacticae tubum octo pedum, micrometro Grahamiano inſtructum, impoſueram, at irritos reddidiſſe conatus hos meos tempeſtatis inclementiam facile iudicabunt lectores.

Binis ſequentibus diebus capiebam ante meridiem altitudines Solis, verum poſt meridiem correſpondentes ob caelum nubilum non obtinebam. Tandem d $\frac{29}{9}$ $\frac{\text{Maii}}{\text{Iun.}}$ ſequentes capiebantur:

Ante merid.		Alt. ☉lis	Poſt. merid.	Merid. ad Horol.
Therm. Reaum. $6\frac{3}{4}°$.			$16\frac{1}{2}°$. ſupra o.	
fil. mob.	ſup. $10^h. 18'. 9''$		$5^h\ 17'. 45\frac{1}{2}''$	$1^h. 47'. 57\frac{1}{4}''$.
	inf. 21. 40.	41°. 30′.	5. 14. 14.	1. 47. 57.
- immob	inf. 23. $4\frac{1}{2}$		5. 12. 50.	1. 47. $57\frac{1}{4}$.
fil. mob.	ſup. $10^h. 54. 8.$		4. 41. 46.	1. 47. 57.
	inf. 57. 51.	4°.	38. 4.	1. 47. $57\frac{1}{2}$.
- immob.	ſup. 55. 38.		40. 17.	1. 47. $57\frac{1}{2}$.

Medium 1. 47. 57, 3.
Correct. merid. — 3, 6.

Meridies vera 1. 47. 53, 7.

Tempus medium, inſtante meridie vera 11. 58. 40, 5.

 Hinc

Hinc acceleratio penduli ſpatio diei Solaris medii per obſeruationes d. 22 et 29. Maii colligitur 23½″. Sumta autem pro termino comparationis obſeruatione d. 24. Maii, acceleratio reperitur 24″. Vnde patet, motum Horologii intra hos dies fuiſſe ſatis vniformem. Poſita proinde acceleratione penduli ſpatio diei Solaris medii 23½″, inuenitur

d. 26 Maii / 6 Iunii meridies vera ad Horolog.	-	$1^h. 46'. 7'', 8$
d. 27 Maii / 7 Iunii	- - - - - -	1. 46. 42, 1
Acceleratio Horologii ſupra diem Solarem erit	- - - - -	34″, 3

et a meridie 26. Maii ad tempus contactus interioris acceleratio reperitur 4″, 8, ad momentum autem contactus exterioris 5″, 3. Hincque concluditur

	Tempus verum
Contactus interior limborum ♀ et ☉lis	$3^h. 21'. 36'', 4.$
Contactus exterior - - -	3 39. 42, 1.

Quantum pretium huic obſeruationi ſtatuendum ſit, et num alicuius poſſit eſſe vſus, ex circumſtantiarum deſcriptione Aſtronomiae periti iudicabunt lectores.

OBSERVATIONES
pro ſtabilienda Longitudine Vrbis Selenginsk.

Determinata Latitudine vrbis *Selenginsk* definienda ſupererat ipſius Longitudo. Expectans huc facien-

facientia phaenomena, operam interea dabam longitudini penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda in vrbe *Selenginsk* oſcillantis definiendae, et cum ſufficientem numerum obſeruationum, cum automato, pendulo inuariabili inſtructo, inſtitutarum, collectum haberem, ſatagebam per experimenta ope penduli ſimplicis inſtituenda in eandem rem inquirere. Quam ob rem Horologium Aſtronomicum in talem ſtatum redigebam, vt intra breue temporis interuallum multos concurſus penduli ſimplicis cum pendulo Horologii Aſtronomici obſeruare poſſem; indeque oritur, quod Horologium pendulum, prouti in ſequentibus videbunt lectores, tantopere retardauerit.

D. $\frac{4}{15}$. Iulii capiebam altitudines Solis correſpondentes.

Ante merid.		Alt. ☉lis	Poſt merid.	Merid. ad Horol.
fil. mob. ſup.	$8^h.22'.27''$.	41°.	$3^h.12'.\ 4''$.	$11^h.47'.15\frac{1}{2}''$.
inf.	25. 58.		8. 22.	11. 47. 15.
- immob. ſup.	24. 6.		10. 25.	11 47. 15½.
inf.	27. 36.		3. 6. 54.	11. 47. 15.
	8 35. 45½.	43°.	2. 58. 41½.	11. 47. 13½.

Medium 11. 47. 14, 9.
Correctio meridiei + 7. 0.
Meridies vera 11. 47. 21, 9.
Tempus medium, inſtante meridie vera, 0. 5. 22, 2.

Eadem die tubo quindecim pedum obſeruabam Immerſionem Φ Sagittarii ſub Luna, quam iuxta Horologium meum ad $11^h.7'.54''$. circiter eueniſſe aeſtimaui. Circiter inquam, quia ob coelum nubilum hoc momentum praeciſe obſeruare non poteram. Error tamen, ſi quis eſt, non plurium, quam duorum ſecundorum eſſe potuit. Emerſio ſtellae prorſus erat inconſpicua.

D. $\frac{6}{17}$. Iulii rurſum capiebam altitudines Solis correſpondentes.

Ante merid.			Alt. ☉lis	Poſt merid.	Merid. ad Hor.
fil. mob.	ſup.	$9^h.15'.34''\frac{1}{2}$.	$50°.50'$.	$1^h.42'.36''$	$11^h.29'.5\frac{1}{4}''$.
	inf.	19. 49.		38. 23.	11. 29. 6.
- immob.	ſup.	17. 42.		40. 29.	11. 29. $5\frac{1}{2}$.
	inf.	21. 57.		36. 14.	11. 29. $5\frac{1}{2}$.
fil. mob.	inf.	29. 19.	52°.	28. 53.	11. 29. 6.
- immob.	inf.	9. 31. 34.		1. 26. $37\frac{1}{2}$.	11. 29. $5\frac{3}{4}$.

Medium 11. 29. 5, 7.
Correctio merid. + 6, 1.
Meridies vera 11. 29. 11, 8.
Tempus medium, inſtante meridie vera 0. 5. 33, 7.

Vnde retardatio Horologii ſpatio diei Solaris medii colligitur $9'.10\frac{3}{4}''$. Quo autem magis certus fierem de motu Horologii, ſequenti quoque die ſumebam altitudines Solis correſpondentes, quarum ope meridiem veram ad Horologium reperiebam $11^h.20'.6'',5$.

Tem-

Tempus autem medium, inſtante meridie vera, hac die eſt $0^h. 5'. 38'', 7$. Vnde retardatio Horologii colligitur $9'. 10\frac{1}{3}''$. ac motum horologii fuiſſe vniformem. Quam ob rem reperitur

d. $\frac{5}{16}$. Iulii meridies vera ad Horol.	$11^h. 38'. 17'', 3$.
d. $\frac{4}{15}$. autem erat - -	11. 47. 21, 9.

Retardatio igitur Horologii die Solari eſt $9'. 4'', 6$, ac ad meridianum Obſeruatorii mei tempus verum, quo Luna ⏀ Sagittarii occultauit, reperitur $11^h. 24'. 51''$.

D. $\frac{11}{22}$. Iulii motus Horologii Aſtronomici inanimaduertentia erat turbatus, quam ob rem, vt paratum illud haberem ad obſeruationes, d. $\frac{13}{24}$. Iulii capiebam ſequentes altitudines Solis correſpondentes:

Ante merid.		Alt. ☉lis.	Poſt merid.	Merid. ad Horol.
fil. mob.	inf. $7^h. 20'. 30''$.		$1^h. 30'. 10''$.	$10^h. 25'. 20''$.
- immob.	ſup. 18. $42\frac{1}{2}$.	42°. 10'.	31. 58.	10. 25. 20.
	inf. 22. $20\frac{1}{2}$.		28. $19\frac{1}{2}$.	10. 25. 20.
fil. mob.	ſup. 7. 28. 23.	43°.	22. 18.	10. 25. $20\frac{1}{2}$.
	inf. 32. $5\frac{1}{2}$.		18. 35.	10. 25. $20\frac{1}{4}$.
- immob.	ſup. 30. $16\frac{1}{2}$.		20. 25.	10. 25. $20\frac{3}{4}$.
			Medium	10. 25. 20, 2.
			Correctio merid.	+ 8, 8.
			Meridies vera	10. 25. 29.
Tempus medium, inſtante meridie vera				0. 5. 56, 9.

D. $\frac{17}{28}$. Iulii

D. $\frac{17}{28}$. Iulii per altitudines Solis correſpondentes meridiem veram reperiebam $9^h.48'.50'',6$. habita ratione correctionis meridiei $+11'',5$. Tempus autem medium, inſtante meridie verà, eſt $0^h.5'.57'',4$. hinc retardatio Horologii intra hos dies colligitur $9'.9\frac{3}{4}''$.

D. $\frac{20}{31}$. Iulii Immerſionem ſecundi Satellitis Iovis tubo 15 pedum obſeruabam horologio meo monſtrante $12^h.12'.40''$. ſtatus autem Horologii ex ſequentibus colligi poterit

D. $\frac{20}{31}$. Iulii Ante merid.			Alt. ☉lis.	Poſt merid.	Merid. ad Hor.
Therm. Reaum. 20°.				$25\frac{1}{2}$°. ſupra o.	
fil. mob.	ſup.	6^h. 3′. 4″.		0^h. 38. 48.	9^h. 20′. 56″.
	inf.	6. 40.		35. 12.	9. 20. 56.
-immob.	ſup.	4. 45.	39°. 30′.	37. $7\frac{1}{2}$.	9. 20. $56\frac{1}{4}$.
	inf.	8. 20.		33. 31.	9. 20. $55\frac{1}{2}$.
fil. mob.	ſup.	6. 13. $20\frac{1}{2}$.		0^h. 28. 32.	9. 20. $56\frac{1}{4}$.
	inf.	17. $1\frac{1}{2}$.		24. 51.	9. 20. $56\frac{1}{4}$.
-immob	ſup.	15. 3.	41°.	26. 50.	9. 20. $56\frac{1}{2}$.
	inf.	18. 43.		23. 8.	9. 20. $55\frac{1}{2}$.

Medium	9. 20. 56.
Correctio meridiei	+ 10. 8.
Meridies vera	9. 21. 6, 8.
Tempus medium, inſtante meridie vera,	0. 5. 51, 6.

D. $\frac{21}{1}$ Iul. Aug.

D. $\frac{2}{7}$. $\frac{\text{Iul.}}{\text{Aug.}}$ capiebam altitudines Solis correſpondentes

Ante merid.		Alt. ☉lis.	Poſt. merid.	Merid. ad Hor.
Therm. Reaum. 20.		- - -	$27\frac{1}{2}$. ſup. 0	
fil. mob. ſup	$6^h. 11'. 15\frac{1}{2}$	$41°. 50'$.	$0^h. 12. 4\frac{1}{2}$.	$9^h. 11'. 40''$.
fil. mob. inf	$15. 0\frac{1}{2}$		$0. 8. 19\frac{1}{2}$	9. 11. 40.
- immob ſup.	13. 1.		10. 20.	$9. 11. 40\frac{1}{2}$.
fil. mob. ſup.	6. 20. 44	$43. 10'$.	$0. 2. 36\frac{1}{2}$.	$9. 11. 40\frac{1}{4}$.
fil. mob. inf.	24. 33.		11. 58 47.	9. 11. 40.
- immob. ſup.	22. 31.		$0. 0. 49\frac{1}{2}$.	$9. 11. 40\frac{1}{4}$.

Medium $9^h. 11'. 40, 1$.
Correctio meridiei + 10, 7.
Meridies vera $9^h. 11'. 50, 8$.
Tempus medium, inſtante meridie vera, 0. 5. 48, 5.

Hinc retardatio Horologii ſpatio diei Solaris medii eſt $9'. 13''$, ac tempus verum Immerſionis ſecundi Satellitis Iouis prodit $14^h. 58'. 35''$.

D. $\frac{28}{8}$ $\frac{\text{Aug.}}{\text{Sept.}}$ meridiem veram ad Horologium per altitudines Solis correſpondentes reperiebam $8^h. 6'. 46'', 3$, habita ratione correctionis meridiei $+ 12'', 4$. Tempus autem medium, inſtante meridie vera, hac die eſt $0^h. 5'. 10'', 2$. Vnde rurſum retardatio Horologii diurna eſt $9'. 12\frac{1}{2}''$.

Cum interea ſufficientem numerum obſeruationum cum pendulo ſimplici ſub hoc ſtatu Horologii inſtitutum obtinuiſſem, e re eſſe iudicabam, ob nimiam Horologii retardationem ſtatum eius immuta-

re,

re, id quod ſimulac effeceram, d. $\frac{5}{16}$. Aug. ſequentes captae ſunt altitudines Solis:

Ante merid.	Alt. ☉bs.	Poſt. merid.	Merid. ad Hor.
Therm. Reaum 14°.		20. ſupra o.	
fil. mob. inf. $9^h.11'.16''$.	39°. 30'.	$2^h.49'.9\frac{1}{2}$.	$0^h.0'.12\frac{3}{4}$.
- immob. ſup. 9. 57.		2. 51. $29\frac{1}{2}$.	0. 0. $13\frac{1}{4}$.
inf. 12. 56.		47. 30.	0. 0. $13\frac{1}{4}$.
fil. mob. ſup. 14. 49.	40. 30.	45. 38.	0. 0. $13\frac{3}{4}$.
- immob. ſup. 9. 16. 30.		43. 56.	0. 0. 13.

Medium $0^h.0'.13'',2$.
Correctio meridiei $+14,1$.
Meridies vera 0. 0. 27, 3.
Tempus medium, inſtante meridie vera $0^h.3'.51,9$.

D. $\frac{10}{21}$. Aug. hora nona matutina thermometro Reaum. monſtrante 8°. hora autem quarta pomeridiana 15°. ſupra o, meridiem veram ad Horologium per altitudines correſpondentes reperiebam $0^h.4'.21'',9$. habita ratione correctionis meridiei $+15'.5$. Tempus autem medium, inſtante meridiei vera, hac die eſt $0^h.2'.45'',5$. Hinc ſumta, pro termino comparationis, meridie diei 5. Aug. acceleratio Horologii diurna 1'.

D. $\frac{14}{25}$. Immerſionem I. Satellitis Iouis ad Horologium meum tubo 15. pedum $10^h\,54'\,15''$. et Immerſionem II. Satellitis Iouis tubo $8\frac{1}{2}$. pedum obſeruabam ad $12^h.22'.58''$.

D. $\frac{16}{27}$. Aug.

D. $\frac{16}{27}$. Aug. ſequentes altitudines Solis correſpondentes capiebam :

Ante merid.			Alt. ☉lis	Poſt. merid.	Merid. ad Hor.
Therm. Reaum. $6\frac{1}{2}^{\circ}$.				8°. ſupra o.	
fil. mob. ſup.		$8^{h}. 29'. 52''$.	$29^{\circ}. 50'$.	3. 47. 37	$0^{h}. 8'. 44\frac{1}{2}''$.
- mob.	—	32. 20.	30. 20.	45. 9.	0. 8. $44\frac{1}{2}$.
- immob.	—	33. 21.		44. 9.	0. 8. 45.
fil. mob.	—	36. 58.		40. 32	0. 8. 45.
- immob.	—	37. 59	31°.	39 31.	0. 8. 45.
	inf.	8. 41. 42.		3. 35. 48.	0. 8. 45.

Medium $0^{h}. 8'. 44'', 8$.
Correctio merid. + 17, 5.
Meridies vera 0. 9. 2, 3.
Tempus medium, inſtante meridie vera, 0. 1. 11, 2.

Hinc, ſumto remotiſſimo termino comparationis, acceleratio Horologii ſpatio diei Solaris medii prodit $1'. 1\frac{2}{5}''$. ſumta autem meridie d. 10. Aug. acceleratio reperitur $1'. 2\frac{1}{3}''$. id quod, me iudice, manifeſte abbreuiationi penduli a frigore ortae adſcribendum eſt, nam a die 5. Aug. ad 16. calorem ſenſibiliter remiſiſſe obſeruabam. Poſita itaque acceleratione Horologii diurna $1'. 2\frac{1}{3}''$. inuenitur.

d. $\frac{11}{23}$. Aug. merid. vera ad Horol. $0^{h}. 7'. 30''$.
d. $\frac{15}{26}$. Aug. - - - - $0^{h}. 8'. 16'', 3$

Acceleratio igitur Horologii die Solari vero erit $46'', 3$, ac tempus verum Immerſionis I. Satellitis erit $10^{h}. 46'. 24''$, et tempus verum Immerſionis II. Satellitis $12^{h}. 15'. 4\frac{1}{2}''$.

D. $\frac{21}{1}$. $\frac{\text{Aug.}}{\text{Sept.}}$ obſeruabam tubo quindecim pedum Immerſionem primi et ſecundi Satellitis Iouis, verum obſernationes has ſubdubias reddidit ros, qui lenti obiectiuae tempore obſeruationis adhaeſerat, ad magis tamen confirmandam differentiam meridianorum, non prorſus inutiles exiſtimo: Nam ſi momenta obſeruationum cum momentis ex Tab. Cel. *Wargentini* deductis comparem, non multum abludentem differentiam meridianorum ſuppeditant, ac obſeruationes praecedentes. Manente eodem ſtatu Horologii.

D. $\frac{6}{17}$. Sept. capiebam altitudines Solis correſpondentes:

Ante merid.	Alt. ☉lis	Poſt merid.	Merid. ad Hor.
Therm. Reaum. 5°.		10°. ſupra 0.	
mob. ſup. $9^h.25'.50''$	39°.	$3^h.21'.\ 6''$.	$0^h.23'.28''$.
immob. — 26. 51.		3. 20. $5\frac{1}{2}$.	0. 23. 28.
mob. — 28. $31\frac{1}{2}$.	29. 20.	3. 18. 24.	0. 23. $27\frac{1}{2}$.
immob. — 29. 34.		3. 17. $21\frac{1}{2}$.	0. 23. $27\frac{3}{4}$.
mob. — 31. 15.	29. 40.	3. 15. $41\frac{1}{2}$.	0. 23. $28\frac{1}{4}$.
immob. — 9^h.32. 17.		3. 14. 40.	0. 23. $28\frac{1}{2}$.

Medium $0^h.23'.27'', 7$.
Correctio meridiei + 20, 6.
Meridies vera 0. 23. 48, 3.
Tempus medium, inſtante meridie vera, 11. 54. 20, 1.

Hinc colligitur a d. 16. Aug. ad 6. Sept. Horologii motum fuiſſe ſat vniformem.

D. $\frac{8}{19}$. Sept.

D. $\frac{8}{19}$. Sept. obſeruabam occultationem *k* Tauri a Luna tubo octo pedum cum dimidio. Immerſio eius eueniebat Horologio meo praeciſe monſtrante $16^h. 37'. 42''$. Emerſio autem cum debita praeciſione ob nebulam obſeruari non poterat; prodibat autem in conſpectum ſtella, cum Horologium indicaret $17^h. 47'$. et $6''$. circiter.

D. $\frac{9}{20}$. Sept. capiebam altitudines Solis correſpondentes.

Ante merid.	Alt. ☉lis.	Poſt merid.	Merid. ad Hor
ſup. $10^h. 9'. 2''$.	$32°. 41'$.	$2^h. 41'. 59''$.	$0^h. 25'. 30\frac{1}{2}''$.
— 10. 2.		40. 59.	0. 25. $30\frac{1}{2}$.
— 12. 16.	33.	38. 46.	0. 25. 31.
— 13. 18.		37. 44.	0. 25. 31.
— 15. $34\frac{1}{2}$.	33. 20.	35. 28.	0. 25. $31\frac{1}{4}$.
ſup. 10. 16. 37.		2. 34. $24\frac{1}{2}$.	0. 25. $30\frac{3}{4}$.

Medium $0.^h 25'. 30'', 8$.
Correctio merid. + 19, 2.
Meridies vera 0, 25. 50.

Tempus medium, inſtante meridie vera, hac die eſt $11^h. 53'. 17'', 4$. a d. 6. itaque Septembris ad d. 9. Sept. Horologium ſpatio diei Solaris medii accelerabat $1'. 1\frac{2}{3}''$. quapropter meridies vera d. 8. Sept. erit Horologio monſtrante $0^h. 25'. 9'', 2$. Vnde acceleratio Horologii ſpatio diei Solaris veri colligitur $40'', 8$, ac tempus verum, quo Im-

 merſio

mersio *k* Tauri ad meridianum Selenginskensem euenit $16^h. 12'. 5''$. Emersionem tanquam non satis exactam, quae determinandae differentiae meridianorum inseruire queat, hic non moror.

EXPERIMENTA,

circa longitudinem penduli simplicis minuta secunda oscillantis in Vrbe Selenginsk instituta.

Ad instituendas huc spectantes obseruationes, apportaueram mecum Petropoli Horologium, pendulo inuariabili instructum, nec non pondusculum biconicum vna cum virga ferrea a Cel. *de la Caille* ad b. *Grischouium* transmissa. Duplicia ergo mecum habens instrumenta, disquisitionibus his instituendis apta, duplici modo in longitudinem penduli inquisiui. Cunctas hunc in finem institutas obseruationes hic commemorare animus non est; easdem etenim cum omnibus circumstantiis peculiari et ampliori scripto Academiae communicandas reseruo.

Incipiens hunc laborem, automaton pendulo inuariabili instructum suspendebam prope Horologium Astronomicum, ita vt pulsus vtriusque penduli optime exaudiri possint, et inter vtrumque Horologium collocabam thermometrum Reaumurianum.

EXPE-

EXPERIMENTVM I.

D. $\frac{13}{24}$. Iulii, cum Horologium Aſtronomicum ſpatio diei Solaris medii retardaret $59\frac{1}{2}''$, ſequentia inſtituebam experimenta:

	Hor. Aſtronom.	Therm. Reaum.	Pend. inuar.	Num. oſc. ſpat. diei Sol. med. confectarum.	
I	$12^h. 47'. 14''$.	18°. ſupra o.	19063. oſc.	I et II	98895. 6.
II	1 43. 10.		22907. -		
II	1. 45. 7.	18. — -	23041. -	I et III	98895. 0.
IV	1. 59. 33.		24033. -	I et IV	98896. 8.
V	2. 21. 27.		25538. -	I et V	98895. 2.
VI	32. 55.	$18\frac{3}{4}$. — -	26326. -	I et VI	98894. 7.
VII	52. 24.		27665. -	I et VII	98894. 9.
VIII	58. 49.		28106. -	I et VIII	98895. 1.
IX.	3. 4. 5.	19. — -	28468. -	I et IX	98895. 6.
				Medium	98895. 3.

Cel. *de la Caille* Pariſiis in temperie aeris $6\frac{1}{2}$°. therm. Reaumuriani ſupra o. inſtituens experimenta, reperit idem pendulum ſpatio diei Solaris medii conficere 98908. oſc. Ex experimentis autem Cl. *Griſchouii*, in inſula Oeſelia inſtitutis, patet, variationem vnius gradus therm. Reaum. producere variationem vnius quam proxime oſcillationis in motu penduli inuariabilis: Quare, vt noſtra experimenta ad eandem temperiem reducantur, numerus oſcillationum 98895. 3. augendus eſt 12. 2. oſcillationibus. Hinc idem pendulum in vrbe *Se-*

lenginsk in temperie aeris $6\frac{1}{2}^{\circ}$. ſupra o. ſpatio diei Solaris medii conficit 98907. 5. oſc.

Vt experimenta, de quibus hic agitur, maiori certitudine gauderent, deturbabam automaton ex priſtino ſtatu, quotiescunque ad noua memet accingebam, ac denuo in talem, qui mihi optimus viſus eſt, redigebam; id quod eo conſilio efficiebam, vt ſequentia experimenta nihil commune cum praecedentibus haberent.

EXPERIMENTVM II.

Calore increſcente Horologii retardationem a d. 16. ad d. 17. per altitudines Solis correſpondentes reperiebam $1'. 1\frac{1}{2}''$. ac d. $\frac{16}{27}$. Iunii ſequentes capiebam obſeruationes:

	Horol. Aſtron.	Therm. Reaum.	Pend. inuar.	Num. oſc. ſpat. diei Sol med. confectarum	
I	11^h. 3′. 18″.	$18\frac{1}{2}$. ſupra o.	53523. oſc.	I et VII	98896. o.
II	11. 4. 54.		53633. -	II et VIII	98895. 9.
III	1. 41. 54.	19. — -	64423. -	I et III	98896. 6.
IV	1. 43. 31.		64534. -	I et IV	98895. 6.
V	1. 52. 41.		65164. -	I et V	98895. 8.
VI	2. 25. 34.	$19\frac{1}{2}$. — -	67424. -	II et VI	98896. o.
VII	3. 41. 26.	$20\frac{1}{2}$. — -	72638. -	III et VII	98895. 5.
				Medium	98895. 9.

Aucto

Aucto autem hoc numero pro ratione temperiei aeris 13. osc. numerus oscillationum, spatio diei Solaris medii in vrbe *Selenginsk* in temperie aeris $6\frac{1}{2}^{\circ}$. confectarum, erit 98908. 9. osc.

EXPERIMENTVM III.

Ex captis d. 17 et 18. Iunii altitudinibus Solis correspondentibus reperiebam, retardationem Horologii Astronomici prorsus eandem mansisse, nempe $1'.1\frac{1}{2}''$, ac d. $\frac{17}{28}$. Iunii sequentia instituebam experimenta:

	Hor. Astron.	Therm. Reaum.	Pend. inuar.	Num. osc. spat. diei Sol. med. confectarum.	
I	$1^h.52'.23''$.	$20\frac{1}{2}$. supra o.	17452. osc.	I et VIII	98894. 6.
II	1. 55. 49.		17688. -	II et VIII	98894. 4.
III	5. 21. 25.		31818. -	I et III	98894. 8.
IV	5. 38. 57.	21. — -	33023. -	II et IV	98894. 8
V	6. 6. 34.		34921. -	I et V	98894. 9.
VI	6. 7. 36.	$21\frac{1}{2}$. — -	34992. -	II et VI	98894. 6.
VII	9. 30. 21.		48926. -	III et VII	98894. 0.
VIII	9. 31. 36.	$21\frac{1}{2}$. — -	49012. -	IV et VIII	98894. 4.
				Medium	98894. 5.

Quod ad temperiem Parisinam reductum, fit 98909. 5.

EXPE-

EXPERIMENTVM IV.

Per altitudines Solis d. 21. Iunii captas patebat, Horologium Aſtronomicum a d. 18. vsque ad d. 21. prorſus in eodem ſtatu manſiſſe, nempe ſpatio diei Solaris medii retardationem fuiſſe $1'.1\frac{1}{2}''$. d. vero $\frac{20}{1}$ $\frac{Iunii}{Iulii}$ ſequentia obſeruabam:

	Hor. Aſtron.	Therm. Reaum.	Pend. inuar.	Num. oſc ſpat diei Sol. med. confectarum.	
I	$3^h.34'.51''$.	20. ſupra o.	74159. oſc.	I et VIII	98895. 6.
II	3. 41. 9.		74592. -	II et VII	98895. 4.
III	4. 2. 35.		76065. -	III et VIII	98895. 2.
IV	4. 4. 52.	$20\frac{1}{2}$. — -	76222. -	IV et VI	98895. 2.
V	7. 20. 43.		89682. -	IV et V	98895. 1.
VI	7. 26. 13.		90060. -	III et VI	98895. 6.
VII	9. 12. 20.		97353. -	V et VII	98895. 4.
VIII	9. 15. 33.	20. — -	97574. -	VI et VIII	98895. 7.
				Medium	98895. 4.

In eadem ergo temperie, in qua Pariſiis experimenta ſunt capta, pendulum inuariabile ſpatio diei Solaris medii conficere debuiſſet 98909. 4.

EXPERIMENTVM V.

Manente eodem ſtatu Horologii Aſtronomici d. $\frac{21}{4}$ $\frac{Iunii}{Iulii}$ ſequentia inſtituta fuere experimenta:

Horol.

	Hor. Aſtron.	Therm. Reaum.	Pend. inuar.	Num. oſc. ſpat. diei Sol med. confectarum.	
I	$0^{h}. 27'. 13''$.	19°. ſupra o.	78038. oſc.	I et IX	98895. 8.
II	0. 28. 29.		78125. -	II et IX	88895. 9.
III	0. 35. 1.		78574. -	III et VIII	98895. 6.
IV	3. 29. 5.	19½. — -	90537. -	I et IV	98895. 4.
V	3. 30. 55.		90663. -	V et VIII	98896. 3.
VI	3. 31. 36.		90710. -	I et VI	98895. 8.
VII	6. 46. 45.	20½. — -	104122. -	II et VII	98896. 0.
VIII	9. 0. 29.		113313. -	VI et VIII	98895. 7.
IX	9. 2. 5.	19½. — -	113423. -	V et IX	98896. 0.
				Medium	98895. 9.

Quod pro ratione temperiei aeris 13. 5 oſc. augendo, numerus oſcillationum ſpatio diei Solaris medii a pendulo inuariabili in temperie aeris 6½°. therm. Reaum. confectarum prodibit 98909. 3.

Collatis his meis obſeruationibus, d. 17. 20 et 23. Iunii inſtitutis, patet quodam modo idem, quod Cel. *Griſchouius* ex ſuis experimentis deduxerat: Variationem nempe vnius gradus thermometri Reaumuriani producere variationem vnius quam proxime oſcillationis in motu penduli inuariabilis.

Eſt iam ex obſeruationibus,

d. 13. Iunii inſtitutis, numerus oſcillationum, ſpatio diei Solaris medii in tem-

 perie

perie aëri $6\frac{1}{2}°$. ſupra o. a pendulo inuariabili in vrbe *Selenginsk* contectarum -	98907. 5.
16. Iunii - - - -	98908. 9.
17 - - - - -	98909. 5.
20 - - - -	98909. 4.
23 - - -	98909. 4.

Medium omnium erit 98908. 9 + vel ſi numero rotundo vti velimus - - - - 98909.

Cum vero idem pendulum, in eadem temperie aeris Pariſiis conficiat 98908. oſc. et longitudo penduli, ſingula minuta ſecunda oſcillantis, ibidem ex accuratiſſimis Cel. *de la Caille* experimentis ſit 440. 55. lin. longitudo penduli, ſingula minuta ſecunda in vrbe *Selenginsk* oſcillantis, erit $= \frac{440.55 \times (98909.)^2}{(98908)^2} = 440.56.$ lin.

Poſt peractas has, cum automato pendulo invariabili inſtructo, obſeruationes, volui deductam ex iis longitudinem penduli ſimplicis, minuta ſecunda oſcillantis, per experimenta pendulo ſimplici inſtituenda comprobare. Cum per aliquot inſtituta tentamina viderem, pendulum ſimplex ſub eodem ſtatu Horologii Aſtronomici, qui hactenus fuerat, non niſi poſt longum tempus vnam duasue prae pendulo Aſtronomico lucrari oſcillationes, deprimebam lentem, vt plures concurſus pendulorum intra breue temporis ſpatium obſeruare poſſem. Nolo hic de cautelis, quas huiusmodi obſeruationes poſcunt, diffe-

differere; ample et luculenter expositae ipsae leguntur in Commentariis Academiae Parisiensis ad An. 1735, et, quantum in potestate erat, eas accrrime obseruaui; Id monuisse sufficiat: Ad suspendendum ponduſculum biconicum vſum me fuiſſe ſubtili filo aloes (*fil. de pite*), et forcipe, quali *Bouguerus* vſus eſt, ad ſuſtinendam autem virgam ferream, adhibuiſſe me machinam a *Grisibouio* excogitatam. Breuitati ſtudens, ex multis, quas cepi, obſeruationibus eas tantum hic apponam, quae ſub ſtatu Horologii facile deducendo ex ſupra iam memoratis altitudinibus Solis correſpondentibus, quas conſulto in obſeruationibus, longitudinem vrbis *Selenginsk* ſpectantibus, inſerui, inſtitutae ſunt.

EXPERIMENTVM I.

D. $\frac{7}{18}$. Iulii Thermometro Reaumuriano monſtrante 17°. ſupra 0. mercurio in barometro ad 27. 8. dig. menſ. Lond. haerente, Horologio Aſtronomico ſpatio diei Solaris medii 85849. 6. oſc. conficiente, incitabam ad motum pendulum ſimplex, cuius oſcillationes, licet initio tantillum diſcordarent ab oſcillationibus Horologii Aſtronomici, perfecte tamen concordantes erant Horologio monſtrante

 Poſtea

	Obs.	Num. osc. spat. diei Sol. med. confectarum
$11^h. 33'. 12''$.	I	I et II 86460. 6.
Postea vero pendula denuo ad eandem partem concurrebant et pend. simplex lucratum erat		I et VI 86462. 2.
II osc. 11^h. 37. 53.	II	II et VI 86462. 1.
IV - 11. 42. 31.	III	I et III 86463. 7.
VIII - 11. 51. 59.	IV	I et IV 86459. 0.
XIV - 12. 5. 55.	V	II et V 86462. 0.
XXII - 12. 24. 36.	VI	V et VI 86462. 0.

Ex prima itaque et secunda obseruatione concluditur, pendulum simplex interuallo $4'. 41''$. lucrari 2. osc. ac die Solari medio, seu dum Horologium Astronomicum 85849. 6. osc. conficit, pendulum simplex prae Horologio Astronomico lucraturum fore 611. osc. Quare numerus oscillationum, spatio diei Solaris medii a pendulo simplici confectarum, erit 86460. 6. Pari modo deducti sunt reliqui numeri ad dextram in capite verba *num. oscil spat.* etc. gerentes. Omnium vero medium est 86461. 6.

Per exactissima a Cel. *de la Caille* Parisiis instituta experimenta constat, pendulum simplex in temperie aëris 12°. supra 0. spatio diei Solaris medii conficere 86454. osc. *Grischouius* autem ex suis expe-

experimentis deduxit variationem trium graduum thermometri Reaumuriani, producere variationem vnius quam proxime oscillationis in motu penduli simplicis. Hinc idem pendulum in eadem temperie eodem temporis spatio in vrbe *Selenginsk* conficiet 86463. 2. osc.

EXPERIMENTVM II.

D. $\frac{8}{19}$. Iulii post meridiem thermometro Reaumuriano monstrante 15°. supra 0, mercurio in Barometro ad 27. 9. dig. Lond. haerente, statu Horologii manente eodem, pendulum simplex cum Horologio Astronomico concordasse obseruabam ad

				Obs.	Num. osc. spat. diei Sol. med confectarum.	
			$7^h.41'.36''.$	I	I et II	86462. 8.
post modum pend. simplex lucratum esse					I et III	86461. 7.
II	osc.	7.	46. 16.	II	II et VI	86461. 8.
IV	-		50. 57.	III	II et III	86460. 6.
VIII	-	8.	0. 17.	IV	I et IV	86462. 2.
X	-	8.	4. 58.	V	IV et V	86460. 6.
XII	-	8	9. 38.	VI	I et VI	86462. 0.
					Medium	86461. 6.
Quod pro rat. temp. vna osc. augendo fit						86462. 6.

EXPERIMENTVM III.

D. $\frac{16}{27}$. Iulii Horologio Aſtronomico per diem $9'.9\frac{3}{4}''$. retardante, thermometro Reaumuriano monſtrante 17°. ſupra 0, barometro ad 28. 1. dig. Lond. haerente, incitabam ad motum pendulum ſimplex, ac oſcillationes eius cum oſcillationibus Horologii Aſtronomici concordaſſe obſeruabam Horologio monſtrante

	Obſ.	Num. oſc. ſpat. diei Sol. med. confectarum.
$5^h. 27'. 0''$.	I	I et VI 86459. 6.
Dein pend. ſimplex ad eandem partem concurrendo lucratum erat		I et V 86461. 3.
II oſc. 5. 31. 45.	II	II et VI 86460. 3.
IV - 5. 36. 25.	III	I et III 86458. 3.
VIII - 5. 45. 52.	IV	I et IV 86457. 0.
XII - 5. 55. 6.	V	V et VI 86457. 0.
XX - 6. 13. 58.	VI	III et VI 86459 9.

Medium 86459. 1.

Quod pro rat. temp. 1. 6. oſc. auctum dat 86460. 7.

EXPERIMENTVM IV.

Calore in dies increſcente, die vero 23. Iulii Horologio per diem retardante $9'.12\frac{1}{2}''$. thermometro Reaumuriaoo $23\frac{1}{2}$°. monſtrante, mercurio in baro-

barometro ad 27. 8. dig. Lond. haerente, penduli ſimplicis oſcillationes cum oſcillationibus Horologii concordabant, Horologio monſtrante

	Obſ.	Num. oſc. ſpat. diei Sol. med. confectarum.
$2^h.21'.30''$.	I	I et V 86456. 8.
Dein pend. ſimplex ad eandem partem concurrendo lucratum erat		II et V 86457. 0.
II oſc. 2. 26. 12.	II	I et II 86456. 3.
IV - 2. 30. 53.	III	I et III 86457. 4.
VI - 35. 34.	IV	III et IV 86458. 5.
VIII - 40. 17.	V	IV et V 86454. 2.
		Medium 86456. 7.

Vlterius continuare ob filum ruptum non licuit; quodſi vero inuentus numerus oſcillationum pro temperie aëris augeatur 3. 8. oſc. prodit 86460. 5.

Eſt iam ex obſeruationibus,

d. 7. Iulii captis, numerus oſcillationum, ſpatio diei Solaris medii a pendulo ſimplici in temperie aëris 12°. ſupra o. in *Selenginsk* confectarum 86463. 2.
d. 8. Iulii - - - - - - 86462. 6.
d. 16. - - - - - - 86460. 7.
d. 23. - - - - - - 86460. 7.
Medium 86461. 7.

Idem

Idem autem pendulum Parisiis, in eadem temperie aëris, spatio diei Solaris medii conficit 86454. osc. ac longitudo penduli simplicis, singula minuta secunda oscillantis, ibidem, vt supra monui, est 440. 55, Longitudo penduli simplicis, singula minuta secunda in vrbe *Selenginsk* oscillantis, prodibit $\frac{440.55 \times (86461.7)^2}{(86454)^2} = 440.62$, quae a prius inuenta non nisi 0. 06. discrepat, media hinc longitudo quaesita erit 440. 59. Quo certus euadam de statu organorum, ad haec experimenta adhibitorum, in longitudinem penduli, Petropoli singula minuta secunda oscillantis, inquirerecurabo.

OBSERVATIONES
Meteorologicae, in vrbe Selenginsk habitae.

Ad grauitatem aëris explorandam tubum barometri mercurio, quanta potui diligentia, replebam in aedibus meis 1 Apr. therm. De l'Isliano monstrante 117°. Scalam tubo applicabam mensurae Londinensis, quam Petropoli mecum adportaueram, et barometrum suspendebam in loco, supra fluuii *Selenga* superficiem 5 aut 6. perticas Russicas eleuato. Ad mensurandam temperiem aëris diuersa possidebam thermometra, bina, Reaumurianum nempe et Farenheitianum, Parisiis, et bina De l'Isliana Petro-

Petropoli elaborata Thermometrum Reaumurianum in obſeruatorio iuxta Horologium Aſtronomicum ſuſpenſum, Farenheitianum et De l'Islianum extra aedes meas ſuſpenſa erant in loco vmbroſo, ad quae minimum bis quotidie notabam temperiem aëris. Non praetermittebam quoque ſimul annotare ſtatum barometri, atque ita a 1 Aprilis vsque ad menſem Octobrem ſeriem obſeruationum meteorologicarum obtinebam, quam integram hic communicare nullius fore vſus exiſtimo; ſatis erit, ſi pro quolibet Menſe maximam et minimam altitudinem barometri et thermometri apponam.

	Bar. menſ. Londinenſis.		Therm. De l'Islianum	
	Alt. maxima	Alt. minima	Calor max.	Frig. max.
April	d. XXIX. 28. 30.	d. XXIV. 27. 40.	d. XXVII. 124.	d. V. 165.
Maius	d. X. XI. XII. 28. 25.	d. XXI. 27. 50.	d. III. 103.	d. XVII. 149.
Iun.	d. VII. XIX. XX 28 00.	d. XIII. XXII. 27. 60.	d. XXIIX. XXIX. 92. 96.	d. III. 136.
Iul.	d. IV. V. XII. 28 00.	d. XIII. 27. 70.	d. XXI. XXII. 94	d. III. 124.
Aug.	d. XV. 28 15.	d. VII. 27. 65.	d. V. 108.	d. XXIX. 141.
Sept.	d. VII. 28. 40.	d. V. 28. 00.	d. IX. 115.	d. XXX 164

Die 29. Iunii circa horam quartam pomeridianam motus terrae a quibusdam eſt obſeruatus. Sub Solis occaſum coelum atrocibus tegebatur nubibus, ad mediam vsque noctem tonabat et fulgurabat, tandem larga decidebat pluuia.

Non obſtante ingenti caloris gradu d. 28 et 29. Iunii obſeruato, in omnibus puteis, qui ordinarie ad profunditatem 6 aut 7. perticarum Ruſſicarum effodiuntur, per integram aeſtatem glaciem conſeruari, ac habitatores frigida ex iis hauſta aqua cum delectatione ſitim reſtringuere, et vires ſuas reficere obſeruabam.

Omnium maxima altitudo barometri fuit d. 7. Sept. 28. 40. minima vero 27. 40. Apr. d. 24. ac limites variationum barometricarum a me obſeruatarum continentur intra 1. dig. Lond. Cum Petropoli minima altitudo barometri obſeruata ſit 26. 41. poll. menſ. Pariſ. ſeu 28. 10. dig. Lond. patet, altitudinem mercurii maximam in vrbe *Selenginsk* vix ſuperare minimam Petropoli obſeruatam. Prona hinc eſt concluſio, vrbem *Selenginsk* magis eleuatam eſſe ſupra ſuperficiem maris, quam Petropolin. Huius rei luculenta quoque praebebant mihi indicia vertices montium non admodum excelſorum vrbem *Selenginsk* cingentium, ac fluuii *Selengae* litora includentium. Vt taceam nempe de aliis anni tempeſtatibus, menſe Maio et Auguſto, interdum etiam Iunio, dum in vrbe plueret, in montibus niuem

niuem obſeruabam. Notatu digna quoque eſt magna variatio, quam thermometrum, menſe Aprili et Maio praeſertim, interuallo vnius diei patiebatur, quam interdum ad 28°. therm. De l'Isl. aſcendere obſeruabam.

Miranda quoque eſt ibi locorum inconſtantia tempeſtatum atmoſphaerae. Coelum ſerenum in nubilum, et nubilum in ſerenum vna eademque die multoties et celerrime mutatur, nubes absque omni motu aëris generantur et euaneſcunt, venti turbidi ſubito e diuerſis regionibus exoriuntur, et vires ſuas rurſum deponunt. Ventorum ii, qui directionem ſuam pertinacius aliis ſeruant, ſunt S et SSW, hos excipiunt, qui inter NW et NO continentur, hanc etenim rapidiſſimus fluuius *Selenga* vrbem alluens habet directionem, et montes ſecundum ripas eius extenſi, quaſi alueum praebent aëri fluenti. Caeterum tanta eſt inconſtantia atmoſphaerae, vt, ſi omnes eius viciſſitudines accurate obſeruandae et notandae ſint, Obſeruator huic ſolum rei intentus ſit neceſſe eſt.

OBSERVATIONES
pro Latitudine vrbis Irkutsk.

Relicta vrbe *Selenginsk* in vrbem *Irkutsk* d. 16. Octobris perueni. Ibi ne fruſtra tempus expectando iter hiemale perderem, in Latitudinem et

Longitudinem inquirere apud me constitueram. Commode id facere poteram, de Obseruatorio etenim exstruendo cogitare, opus non habebam. Cl. *Popovius*, qui in hac vrbe transitum Veneris obseruauerat, duo exstrui curauerat Obseruatoria, quorum vnum sub aduentum meum vacuum erat. Quam ob rem transportabam eo quadrantem meum et Horologium Astronomicum, aliaque, quibus opus habebam, instrumenta. Primus, quem suscipiebam, labor erat verificatio quadrantis ad horizontem, quam d. 26. Oct. instituebam. Obiectum, in quod tubum direxi, distabat ad 3000 circ. ped. Lond. cuius altitudinem in situ recto, sumendo ex pluribus medium, reperi 90°. — 0. Reu. 41¼. p. c. Dein quadrante inuerso, ac in eadem, cuius supra mentionem feci, mensula collocato, eiusdem obiecti altitudinem reperiebam 90°. — 0. Reu. 42¾. p. c. Vnde colligere facile erat, quadrantem in itinere, quod nauigando perfeceram, nullam mutationem esse passum. Post haec, ope altitudinum Solis correspondentium inquirebam in statum Horologii Astronomici, quo cognito d. $\frac{6}{17}$. Nou. capiebam altitudinem Solis meridianam, limbique superioris altitudinem reperiebam 19°. — 1. Reu. 1. par. cent. sc. 18°. 56′. 51″,5.

Refractio — parallaxi	- -	— 2. 53, 5.
Altitudo refractione correcta	-	18°. 53. 58.
Semidiameter Solis	- -	16. 15.

Alti-

Altitudo centri Solis - -		18.	37.	43.
Declinatio Solis Auſtralis -	+	19.	4.	17.
Complementum altitudinis Poli		37.	42.	0.
Altitudo Poli - - -		52.	18.	0.

D. $\frac{7}{18}$. Nou. altitudo limbi Solis inferioris erat 18°. + 3 Reu. 13½. p. c. ſcilicet 18°. 9′. 45″. 31‴. Poſita refractione — parallaxi 2′. 57″. 30‴. ac ſemidiametro Solis 16′. 16″. alt. Solis fit 18°. 23′. 4″.

Declinatio eius auſtralis -	19.	18.	47.
Complementum altitudinis Poli	37.	41.	51.
Altitudo Poli - - -	52.	18.	9.

Captae quoque ſunt diebus 8 et 9. Nou. altitudines Solis meridianae, quas, quia nihil diuerſas ab his praebent determinationes, et refractio in tam parua altitudine nimium eſt variabilis, hic praetermitto. Communicabo autem obſeruationes, quas ſuper Lucida Aquilae inſtitui, quasque pro exactis habere non dubito. Nam Lucida Aquilae ante occaſum Solis in tanta altitudine culminabat, in qua refractio non tantae variationi eſt obnoxia. D. $\frac{9}{23}$. Nou. altitudinem meridianam Lucidae Aquilae inueniebam 46°. — 0. R. 50$\frac{5}{8}$ p. c. 45°. 58′. 25″, poſita refractione 1′. 4″, altitudo refractione correcta erit 45°. 57′. 21″. Declinatio Lucidae Aquilae Borealis ineunte An. 1761. eſt 8°. 15′. 16″, Deuiatio + 5″. 2. Praeceſſio + 7″. 4. Aberratio + 7″. 7. Hinc declinatio eius apparens ad 9. Nou. erit 8°. 15′. 36″,

 ac

ac complementum altitudinis Poli 37°.41′.45″, altitudo vero Poli eſt 52°.18′.15″. Die ſequenti altitudinem meridianam Lucidae Aquilae prorſus eandem reperiebam, vnde altitudo Poli *Irkutsk* ſtatui poterit 52°.18′.15″.

Multis vicibus praeparaueram me ad Obſeruationes, Longitudinem ſpectantes. Verum vapores, a Sole occiduo per integram noctem ex *Angara* aſcendentes, conatus meos irritos reddidere, cumque ab expertis acceperim, hoc incommodi eo vsque duraturum, quoad fluuius glacie tegatur: compoſitis inſtrumentis in vrbem *Jeniſeisk* proficiſcebar; vbi diuerſis temporibus, diuerſarum ſtellarum capiebam, quadrante non verificato, altitudines meridianas, quae omnes dedere altitudinem Poli, non niſi aliquot ſecundis differentem, atque inde ſumendo medium, altitudinem Poli vrbis *Jeniſeisk* 58°.27′.17″. concludo.

INVESTI-

INVESTIGATIO
PARALLAXEOS SOLIS
EX OBSERVATIONE TRANSITVS VENERIS PER DISCVM SOLIS SELENGINSKI HABITA, COLLATA CVM OBSERVATIONIBVS ALIBI INSTITVTIS.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKY.

Transitus Veneris per discum Solis non raritate solum, verum etiam vtilitate sua, omnium scientiae sideralis cultorum animos in se conuertit: nobilissimi enim ac subtilitate sua omnes ipsorum conatus hactenus eludentis elementi veram quantitatem ex obseruatione hac eruere sibi pollicebantur astronomi. Non vanam fuisse ipsorum spem, nec inutiliter collocatos in strenue peragenda obseruatione labores, euentus monstrauit. Comparatis etenim inter se melioris notae obseruationibus, summa cum certitudine nunc pronunciare valemus, parallaxin Solis duobus fere minutis secundis minorem esse ea, quam hucusque Astronomi statuerunt.

Cum Academia Scientiarum Parisiensis et Societas Londinensis in remotissimas mundi partes diuersos versos ablegarent astronomos ad hoc phaenomenon obseruandum, ab Academia Scientiarum Imperiali mandatum mihi dabatur, vt eodem fine in Sibiriam proficiscerer. Inde redux communicaui cum publico, anno praeterito obseruationes, quas hac occasione in vrbe *Selenginsk* institui. Nunc vero cum obseruationes, in aliis locis habitae, praesertim Africanae, in publicum prodierint, in vsum conuertere obseruationes meas, et quantam cum aliis collatae praebeant Solis parallaxin, disquirere in potestate est.

Ad eam ex comparatione obseruationum super transitu Veneris per discum Solis institutarum eruendam, ante omnia necesse est nosse situm respectiuum locorum, in quibus obseruationes peractae sunt. Id circo Latitudo et Longitudo vrbis *Selenginsk* mihi stabiliendae erunt. Obseruationes huc spectantes ample expositae sunt in dissertatione, quam post reditum ex Sibiria in publicum edidi, nexus tamen exigit, vt breuibus hic praecipua momenta Latitudinem spectantia ex dissertatione mea repetam.

INQVISITIO
In Latitudinem Vrbis Selenginsk.

Ad determinandam Latitudinem quadrante radii duorum circiter pedum a perito artifice l'Anglois Parisiis magna diligentia elaborato, captae sunt

altitu-

altitudines meridianae Arcturi, Spicae Virginis et Solis, verificatione quadrantis ad horizontem aliquoties repetita. Valorem partium micrometri quadranti affixi, quanta potui diligentia determinaui Petropoli. Collocato nempe quadrante in meridiano ope micrometri menſuraui diametrum Solis, cumque d. $\frac{30.}{11.}\frac{Sept.}{Oct.}$ Anno 1760. inueni aequalem eſſe 10 Reu. 33 part. cent d. $\frac{20}{31}$. Oct. 10 Reu. $36\frac{1}{2}$ part. cent. ac denique d. $\frac{21.}{1.}\frac{Octob.}{Nov.}$ 10 Rev. 38 part. cent. micrometri Diametro Solis reſpondebant. Sunt autem Diametri pro his diebus, vti in Calendario Aſtronomico Pariſino exhibentur reſpectiue $32'.11'',3$: $32'.21'',5$: $32'.22''$: qui differentia refractionum diuerſis altitudinibus limborum Solis competente correcti, prodeunt $32'.9'',8$: $32'.14'',5$: $32'.15''$. Quare ex obſeruatione prima valorem vnius partis centeſimae micrometri colligimus $1''.51''',9$ ex ſecunda $1''.51'''.9$ ex tertia $1''.51''',3$ et medius valor vnius partis centeſimae micrometri erit $1''.51'''.8$.

D. $\frac{21.}{2.}\frac{April}{Maii}$ Altitudinem Spicae Virginis meridianam inueniebam $28°.50' + 3$ Reu. part. cent. ſcilicet $29°.1'.8''$. Poſita refractione $1'.56''$ altitudo meridiana refractione correcta erit $58°.59'.12''$. Declinatio Spicae Virginis ineunte anno 1761. auſtralis eſt $9°.54'.20''.2$: adhibitis autem correctionibus ex deuiatione $+7''.9$ praeceſſione $+5''.3$ et aberratione $+7''.6$ oriundis, declinatio Spicae

Virginis apparens ad 21. Aprilis erit $9°.54'.41''$. Vnde altitudo Poli prodit $51°.6'.6''$.

Eadem die altitudinem Arcturi meridianam inueniebam $59°.20' + 0$ Reu. 22. part. cent. scilicet $59°.20'.41''$ quae refractione $38''$ altitudini huic competente, correcta fit $59°.20'.3''$. Declinatio Arcturi ineunte anno 1761 est $20°.26'.31''.2$ bor. quae applicata correctione, ex deuiatione $-5''.2$ praecessione $-5''.3$ et aberratione $-11''.7$ oriunda, fit $20°.26'.9''$. Vnde altitudo Poli concluditur denuo $51°.6'.6''$.

D. $\frac{26.\ April}{7.\ Maii}$ earundem stellarum capiebam altitudines meridianas, quarum Spicae Virginis altitudinem reperiebam $29° + 0$ Reu. $36\frac{1}{2}$. part. cent. $= 29°.1'.8''$. Arcturi vero $59°.20'. + 0$ Reu. 28 part. cent. $= 59°.20'.52''$. Vnde ex prima obseruatione Latitudo Selenginsk colligitur $51°.6'.6''$ ex altera vero $51°.5'.56''$.

D. $\frac{1}{12}$. Iunii Altitudinem meridianam Arcturi inueniebam $59°.20' - 2$ Reu. $99\frac{1}{2}$. part. cent. $= 59°.20'.41''$. Vnde adhibitis similibus correctionibus altitudo Poli eruitur $51°.6'.4''$.

Parum ab his abludentem Latitudinem obseruatorii mei, praebent altitudines Solis meridie captae. D. $\frac{22.\ Iulii}{2.\ Aug.}$ altitudinem meridianam limbi borealis inueniebam $57° - 0$ Reu. 19 part. cent. $= 56°.56'.27''.40'''$. Sumta semidiametro Solis $15°.50''.$

10'''

10‴ ac refractione − parallaxi 32″.12‴, altitudo centri Solis fit 56°.40′.5″. Differentia meridianorum Parisiensis et Selenginskensis cum sit $6^h.57'$ quam proxime, declinatio Solis pro meridie Selenginskensi reperitur 17°.46′ 16″ bor. ac altitudo Poli 51°.6′.11″.

D. $\frac{2}{13}$. Aug. Altitudinem meridianam eiusdem limbi reperiebam 54°. − 3 Reu. $10\frac{1}{2}$ part. cent. = 53°.50′.20″.17‴. Posita semidiametro Solis 15′.52″.15‴. refractione − parallaxi 38″.30‴ altitudo centri Solis prodit 53°.33′.49″. Declinatio autem Solis reperitur 14°.39′.56″. Vnde altitudo Poli resultat 51°.6′.7″.

Omnium media altitudo Poli erit 51°.6′.6″.

INQVISITIO
In Longitudinem Vrbis Selenginsk.

Pro Longitudine vrbis Selenginsk inuenienda, octo in vniuersum institutae sunt a me obseruationes; primum inter eas locum tenet obseruatio Eclipseos Solaris, quae contigit d. $\frac{23.\ Maii}{3.\ Iun.}$, a qua, in stabilienda Longitudine, initium ducam.

Ob coelum nubilum non nisi finem ipsius obseruare potui, qui ad meridianum Selenginskensem euenit $20^h.23'.1''$. t. v. Obseruatio instituta est tubo, cuius lens obiectiua distantiam focalem habet 15 ped. et ocularis 2. 52. dig. Lond.

Quantumuis obseruatio haec certa mihi visa fuerit, de exacte tamen definienda Longitudine obseruatorii mei sollicitus, rogaui Cel. *Wargentin* vt mihi copiam faceret obseruationum in Suecia institutarum. Vir humanissimus precibus meis morem gerens, transmisit ad me obseruationes eiusdem deliquii Torneae et Caianeburgi habitas, ex quibus Tabularum a coelo aberrationes eruere eo lubentius memet accinxi, quod eiusdem Eclipseos finis Petropoli obseruatus sit. Verum facta comparatione harum obseruationum, tum inter se, tum cum Petropolitana, intellexi eas vitio quodam laborare. Nam diuersae comparationes diuersos Tabularum errores, et tantos praebuerunt, qui cum exactitudine Tabularum *Maieri* alias cognita neutiquam consistere possunt. Obseruationem Petropoli habitam, ob vapores in horizonte pendulos et limbum Solis fluctuantem, ipse obseruator dubiam esse pronunciat; et cum ad momentum finis Eclipseos Torneae et Caianeburgi, altitudo centri Lunae non maior fuerit 7°, credibile mihi videtur similes circumstantias in obseruationes Suecicas se se implicuisse, easque incertas reddidisse. His perpensis tutius esse duxi Tabulis *Maieri*, quas parum, praesertim in Sizygiis aberrare a coelo, compertum est; computum Longitudinis superstruere.

Nego-

Negotium hoc aggressurus, inquisiui in aequationem temporis ex Tabulis solaribus *de la Caille* — 2′.25″, ac tempus medium obseruationis obtinui 20^h.20′.36″. Dein pro differentia meridianorum Parisiensis et Selenginskensis assumsi binas sequentes hypotheses.

	Hypoth. I	Hypoth. II.
	7^h. 0′.36″	6^h.50′.36″
Mom. obs. ad mer. Par. red.	13. 20. 0	13. 30. 0

Ad haec bina momenta locum Solis verum secundum Tabulas *de la Caille* Lunae autem cum eius diametro horizontali et parallaxi aequatorea secundum Tabulas *Maieri*, quam accuratissime supputaui, ac inueni

Longitud. Solis veram	72°.33′.18″.1	72°.33′.42″.6
Longit. Lunae veram	72. 19. 14. 8	72. 25. 30. 7
Latitudinem - -	1. 7. 36. 3	1. 8. 12. 3
Diametrum Lunae	33. 21. 5	
Parallaxin aequatoream	61. 9. 5	

Ad supputandas parallaxes Lunae in Longitudinem et Latitudinem, quales sub hypothesi figurae terrae sphaeroidicae statuere oportet, adhibui formulas a *Maiero* in Tomo II. Commentariorum Göttingensium expositas. Sumta vero altitudine Poli Selenginskensi 51°.6′.6″, qualem supra definiuimus, et obliquitate eclipticae 23°.28′.18″. secundum praecepta ibi tradita reperitur.

Nonagesimus Eclipticae	38°. 16′. 26″	38°. 16′. 35
Altitudo nonagesimi	50. 19. 42	50. 19. 52
Distantia Lunae a non.	34. 2. 48	34. 8. 35

Posita parallaxi Solis 8″.5 et parallaxi Lunae a Sole 61′.1″, ad eadem momenta sequentes numeros pro parallaxi Lunae in Longitudinem et Latitudinem obtinui.

Parallaxis Lunae in Longit.	+ 26′. 30″. 9	+ 26′. 34″. 2
Parallaxis in Latitudinem	— 38. 31. 2	— 38. 30. 9
Quare Long. Lunae apparens	72°. 45′. 45″. 8	72°. 52′. 4. 9
Latitudo eius apparens	29. 5. 1	29 41. 4
Differ. Long. Sol. et Lunae	12. 27. 7	18. 54. 8
Distantia Centrorum appar.	31. 38. 5	34. 54. 8

Altitudo Lunae apparens supra horizontem ad finem Eclipseos reperitur $39\frac{1}{2}°$, vnde incrementum diametri Lunae emergit 22″.9, ac posita diametro Solis 31′.34″, summa semidiametrorum Solis et Lunae prodit 32′.39″,2.

Ex hoc calculo perspicimus Solem et Lunam ex Selenginsk spectatos interuallo 10′ per 3′.16″,3 a se se inuicem discessisse; momento autem, quo finis eclipseos accidere obseruatus est, distantia centrorum aequare debuit summam semidiametrorum antea repertam. Vnde inuenitur vrbem Selenginsk occidentaliorem esse debere 3′.6″ ac in prima hypothesi statutum est. Proinde Longitudo vrbis Selenlenginsk a meridiano Pariſino verſus ortum numerata prodit $6^h.57'.30''$.

Secunda obſeruatio, quam pro definienda Longitudine Selenginski inſtitui, erat occultatio φ ſagittarii a Luna, quae contigit d. $\frac{4}{15}$. Iulii ad meridianum Selenginskenſem $11^h.24'.51''$ vel $53''$. t. v. Miſſa tamen ea, donec, quantus ſit Tabularum error, erutum fuerit, ad inueſtigandam Longitudinem ex obſeruationibus eclipſium Satellitum Iouis progredior.

D. $\frac{20}{31}$. Iulii Immerſio II. Satellitis tubo 15 pedum obſeruata - - - $14^h.48'.35''$. t. v.

D. $\frac{14}{25}$. Aug. Immerſio I. Satellitis eodem tubo obſeruata - - - 10. 46. 24

\- - - - Imm. II. Sat. 12. 15. 4.

Immerſio ſecundi Satellitis capta eſt exquiſitiſſimo tubo octo pedum cum dimidio, et admodum certa mihi viſa eſt.

D. $\frac{21.}{7.}$ $\frac{Aug.}{Sept.}$ Imm. I. Sat. tubo 15 ped. obſ. $12^h.43'.9''$.

\- - - Imm. II. Sat. eodem tubo obſ. 14. 53. 50.

De binis vltimis obſeruationibus monui, in expoſitione obſeruationum mearum, eas eſſe ſubdubias, ob rorem, qui lenti obiectiuae tempore obſeruationis adhaeſerat; aſt cum tubus ad Immerſionem primi ſatellitis per aliquot ſolum minuta prima, ad Immerſionem autem ſecundi per bihorium

fere

ſere aëri libero expoſitus fuiſſet, prior non nonniſi paucis ſecundis a vera Immerſione diſcedere, aſt vltima pro dubia aut erronea habenda eſt.

Cel. *Wargentin* promouendis rebus aſtronomicis ſtudens, communicauit mecum ſeriem obſeruationum in diuerſis locis ſuper Eclipſes Satellitum Iouis menſibus Iunio, Iulio, Auguſto et Septembri habitarum, ex quibus maximum fructum in praeſenti negotio percepiſſe me fateor. Nam eae non tantum binis vltimis correſpondentes continebant, verum etiam diſſenſum Tabularum Cel. Viri a caelo, patefaciebant, ſic vt omnes reliquas ſecure ad definiendam Longitudinem obſeruatorii mei adhibere potuerim. Ex iis de primo Satellite conſtitit, Immerſiones eius menſe Auguſto, vt plurimum contigiſſe 40″ citius, quam calculus indicat, de ſecundo autem momenta Immerſionum non niſi paucis ſecundis vtrinque a calculo diſceſſiſſe, ſic vt in eruenda differentia meridianorum, momenta Immerſionum ſecundi Satellitis e tabulis depromta, pro veris cum ipſo *Wargentino* ſtatuere non dubitem.

$\frac{20}{31}$. Iulii Imm. II. Sat ex Tab. ad mer. Par.		8^h.	$1'$.	$53''$.
Imm. eiusdem Selenginski obſ.		14.	58.	35.
Differentia meridian. prodit	I.	6.	56.	42.
$\frac{14}{25}$. Aug. Imm. I. Sat. ad Merid. Pariſ.		3^h.	$50'$.	$25''$.
Error Tabularum				-40.

Immer.

		Immer. vera ad Merid. Parif.	3. 49. 45.
		Eadem Selenginski obferuata	10. 46. 24.
		Differentia meridianorum II.	6 56. 39.
-	-	Imm. II. Sat. ad. mer. Par. ex Tab.	$5^h. 18'. 8''.$
		Eadem Selenginski obferuata	12. 15. 4.
		Differentia meridianorum III.	6. 56. 56.
21. / 1.	Aug. / Sept.	Imm. I. Sat. ex Tab. deducta	$5^h.46'.38''.$
		Error Tabularum	— 40.
		Imm. vera ad merid. Parif	5. 45. 58.
		Eadem Selenginski obferuata	12. 43. 9.
		Differentia meridianorum IV.	6. 57. 11.
-	-	Imm. II. Sat. ad merid. Parif.	7. 58. 11.
		Selenginski obferuata	14. 53. 50.
		Differentia meridianorum V.	6. 55. 39.

Reiecta vltima vtpote dubia ob rationem fupra allatam, mediam meridianorum differentiam ftatuerem $6^h.56'.52''$, nifi diuerfitatis tuborum, quibus obferuationes in aliis locis peractae funt, ratio habenda effet. Obferuationes nempe, ex quibus correctiones momentis Immerfionum tabularibus adhibendas deduxi, vt plurimum peractae funt Telefcopiis 80-100 vicibus obiecta amplificantibus. Quam ob rem quaelibet mearum determinationum $10''$. aut $15''$. augenda erit, atque fic differentiam meridianorum Parifienfis et Selenginskenfis dabit

I. obſeruatio - - -	$6^h.56'.52''$.	
II. - - - - - - - -	6. 56	49.
III. - - - - - - - -	6. 57.	11.
IV. - - - - - - - -	6. 57.	21.
Supra vero inuenimus -	6. 57.	30.
Hinc media omnium reſultat	6. 57.	8.

D. $\frac{21.}{1.}$ $\frac{\text{Aug.}}{\text{Sept.}}$ Dominus *Pingre* in inſula Rodrigues Immerſionem I. Satellitis Iouis tubo 18 pedes longo obſeruauit $9^h.49'.40''$. Hinc differentia meridianorum inſulae Rodrigues et Selenginski eruitur $2^h.53'.29''$. At aliae in inſula Rodrigues factae obſeruationes euincunt Longitudinem eius a meridiano Pariſino verſus ortum numeratam eſſe $4^h.3'.40''$. circiter. Vnde differentiam meridianorum Pariſienſis et Selenginskenſis denuo nanciſcimur $6^h.57'.9''$. non habita ratione diuerſitatis tuborum.

Eadem die Immerſio II. Satellitis Stockholmiae, Vpſaliae et ad Caput Bonae Spei obſeruata eſt, verum cum Selenginskenſis ſit dubia, definiendae hinc differentiae meridianorum ſuperſedeo, contentus ſupra allatis determinationibus.

INQVISITIO
In Parallaxin Solis.

Antequam ipſam inueſtigationem aggrediar, paucis enarrabo circumſtantias, ſub quibus obſeruationem

tionem tranſitus Veneris per diſcum Solis inſtitui. De vniformi motu horologii, ad quod obſeruationem hanc peregi, a longo tempore conuictus eram, proximis tamen ante et poſt obſeruationem diebus, quotiescunque coelum fauit, non praetermiſi capere altitudines Solis correſpondentes, ex quibus aeque ac ex praecedentibus compertum habui, horologium ſpatio diei Solaris medii conſtanter accelerare $23''$.

D. $\frac{24.\ Maii}{4.\ Iunii}$ Quadrante meo bipedali cepi altitudines Solis correſpondentes.

		Ante merid.	Alt. Solis.	Poſt merid.	Mer. ad hor.
fil. mob.	m. ſup.	$10^h. 14'. 27''$	$41°$	$5^h. 15'. 43''$	$1^h. 45'. 5''$
	m. inf.	$17. 57\frac{1}{2}$		$12. 12\frac{1}{2}$	$1. 45. 5$
imm.	m. ſup.	$15. 53\frac{1}{2}$		$14. 18$	$1. 45. 5\frac{3}{4}$
	m. inf.	$19. 23$		$10. 48$	$1. 45. 5\frac{1}{2}$
fil. mob.	m. ſup.	$10. 21. 5$	$42°$	$5. 9. 5$	$1. 45. 5$
	m. inf.	$24. 36$		$5. 33$	$1. 45. 4\frac{1}{2}$
imm.	m. ſup.	$22. 30$		$7. 39$	$1. 45\ 4\frac{1}{2}$
	m. inf.	$26. 2$		$4. 6\frac{1}{2}$	$1. 45. 4\frac{1}{4}$

Medius itaque meridies ad horologium erit $1^h.45'.4''.56'''$, vnde ſubtractis $4''.43'''$ ob variatam Solis declinationem meridies verus proueniet $1^h.45'.0''.12'''$.

D. 26. Maii ab ipſo ortu Solis vltra meridiem coelum, varias ſubiens mutationes, tam denſis nubibus erat obuolutum, vt omnem ſpem videndae

 Vene-

Veneris in Sole perderem. Tandem circa horam tertiam cum Venus emersioni propinqua esset, vehementi vento discussis nubibus, Sol intra hiatus eorum subinde in conspectum prodire inciepiebat. Spes proinde affulgebat contactus limborum saltem in exitu obseruandi, idcirco missis aliis, quas instituere animus fuerat obseruationibus, ad Venerem prosequendam tubo quindecim pedes longo memet accingebam. Appropinquantibus ad sese inuicem limborum extremitatibus, cum adhuc inter eas lucidum filum satis sensibile conspiceretur, subito e Venere quasi guttulam nigram horologio monstrante $5^h.7'.49''$ procedere, et limbum Solis limbo Veneris iungere obseruabam. Hebescenti oculo, et nubeculae tenui, qua Sol tunc fuerat obductus, phaenomenon hoc adscribendum esse existimabam: verum cum multos alios obseruatores coelo sereno eandem apparentiam vidisse postea didicissem, aliam eius rationem quaerendam esse existimo.

Sub iisdem imo deterioribus circumstantiis limbum Veneris derelinquere limbum Solis iudicabam, cum horologium indicaret $5^h\ 25'.55''$, ita vt mora Veneris in limbo Solis per obseruationem meam sit $18'.6''$.

Binis sequentibus diebus capiebam ante meridiem altitudines Solis, verum post meridiem iis corresponreſpondentes non obtinebam. Tandem d. 29. Maii ſequentes capiebantur :

		Ante merid.	Alt. Solis.	Poſt merid.	Mer. ad hor.
fil. mob.	m. ſup.	$10^h.18'.9''$	$40°.30'.$	$5^h.17'.45''\frac{1}{2}$	$1^h.47'.57''\frac{1}{4}$
	m inf.	21. 40		14. 14	1. 47. 57
immob.	m. inſ.	23. $4\frac{1}{2}$		5. 12. 50	1. 47. $57\frac{1}{4}$
fil. mob.	m. ſup.	10. 54. 8	$44°$	4. 41. 46	1. 47. 57
	m. inf.	57. 51		38. 4	1. 47. $57\frac{1}{2}$
immob.	m. ſup.	55. 38		40. 17	1. 47. $57\frac{1}{2}$

Meridies medius hinc deducitur $1^h.47'.57''.15'''$. Applicata autem debita correctione $-3''.35'''$, meridies verus ad horologium prodit $1^h.47'.53''.40'''$, vnde acceleratio horologii ſpatio diei ſolaris medii colligitur $23''\frac{1}{2}$, ac ſubducto calculo tempus verum contactus interni prodit $3^h.21'.36''$, et contactus externi $3^h.39'.42''$.

Ex deſcriptione circumſtantiarum, ſub quibus obſeruationem Veneris ſub Sole inſtitui, iudicabunt lectores, non in poteſtate mea fuiſſe, ſemitam Veneris apparentem definire, quam ob rem mutuanda mihi ſunt elementa eo ſpectantia ab aliis Aſtronomis. Commendat ſe, non minus exactitudine ſua quam conſenſu cum aliis, habita Grenouici ab Aſtronomo Regio *Bliss* obſeruatio: idcirco liceat mihi in eruenda parallaxi Solis ab ipſo ſtatuta elementa ex Transactionibus Anglicanis Vol. LII deſumere.

Temp. Coniunct. app. ad mer. Grenou. $17^h.45'.\ 3''$ t.v.
Latitudo Veneris app. temp. coniunct. $9.\ 56.\ 3$ Austr.

Porro ex Tabulis *Halleianis* deducitur motus horarius Solis $2'.23''.45$. Motus horarius Veneris a Sole sit $3'.57''.13$, motus horarius Veneris in Latitudinem $35''.46$, et denique motus horarius in orbita $3'.59''.77$.

Ex iisdem Tabulis ad momentum coniunctionis distantia Telluris a Sole elicitur 101552. 1, distantia Veneris a Sole 72643. 5. Quare posita parallaxi Solis horizontali $8''.5$ parallaxis Veneris prodit $29''.83$ et parallaxis Veneris a Sole $21''.33$.

Parallaxi Solis $8''.5$ assumta tanquam vera, conatus sum semitam apparentem Veneris reducere ad centrum Telluris, supputando parallaxin Veneris in Longitudinem et Latitudinem ad momentum coniunctionis apparentis Grenouici obseruatum. Peracto calculo inueni parallaxin Veneris in Longitudinem $11''.49$, qua Longitudo Veneris tunc aucta apparere debuit, parallaxin autem in Latitudinem $-17''.09$. Parallaxin Veneris in Longitudinem conuertendo in tempus ope motus horarii Veneris a Sole, obtinui tempus coniunctionis verae e centro Telluris spectatae ad meridianum Grenouicensem $17^h.42'.8''$, pro quo momento Longitudo Solis vera ex Tabulis de la *Caille*, eademque et Veneris repe-

reperitur 75°.36′.14″.33, Latitudo Veneris vera 9′.37″.49 auſtr.

Ad determinandum momentum contactus interni veri opus erat quantitate diametrorum Solis et Veneris, quos tales aſſumſi, quales pleraeque obſeruationes in Europa a Cel. Aſtronomis peractae ſuppeditant. Semidiameter Solis inpoſterum mihi erit 15′.46″, et ſemidiameter Veneris 29″.5. His datis, nec non inclinatione orbitae Veneris apparentis ad Eclipticam aſſumta 8°.30′.10″, diſtantia minima centrorum deducitur 9′.31″.14. Tempus contactus interni veri in exitu ad meridianum Grenouicenſem reperio 20^h.20′.8″, pro quo diſtantia Veneris a Sole ſecundum Longitudinem reperitur 10′.24″.45, et Latitudo eius 11′.10″.84.

Reducta ſic orbita Veneris ex ſuperficie Telluris viſa ad centrum Telluris, ſi detur differentia meridianorum Grenouicenſis et loci cuiusdam, facili negotio reperitur momentum contactus interni veri ad meridianum eius loci. Sequens Tabula ſiſtit Longitudinem a meridiano Pariſino numeratam, et Latitudinem eorum locorum, in quibus peractae ſunt obſeruationes, quas ad parallaxin Solis inueſtigandam adhibui.

Nomi-

Nomina Locor.	Obseruat.	Latitudo	Longitudo	cont. inter.	cont. exter.
Parisiis	De la Lande	48°. 15′. 14″	0h. 0′. 0″	8h. 28′. 26″	8h. 46′. 54″
	Clouet	- - -	- - - -	8. 28. 27	8. 46. 55
	Fouchy	- - -	- - - -	8. 28. 27	8. 46. 41
	Messier	- - -	- - - -	8. 28. 29	8. 46. 43
	De la Caille	- - -	- - - -	8. 28. 37	8. 46. 49
	Maraldi	- - -	- - - -	8. 28. 42	8. 46. 54
Grenouici	Bliss	51. 28. 30	0h. 9′. 10″ oc.	8. 19. 0	8. 37. 9
	Bird			8. 19. 0	8. 37. 9
	Green			8. 19. 0	8. 37. 10
Göttingae	Maier	54. 31. 54	0. 30. 11 or.	8. 58. 26	9. 16. 54
Bononiae	Frisius	44. 29. 30	0. 36. 5. or.	9. 4. 56	9. 22. 59
	Marinus			9. 4. 58	9. 23. 0
	Matheucius			9. 4. 58	9. 23. 7
Romae	PP. Domin.	41. 53. 54	0. 40. 30	9. 9. 36	9. 28. 7
Vpsaliae	Stroemer	59. 51. 50	1. 1. 12	9. 28. 0	- - -
	Mallet			9. 28. 2	9. 46. 29
	Bergman			9. 28. 9	9. 46. 30
Stockholmiae	Wargentin	59. 29. 30	1. 2. 52	9. 30. 8	9. 48. 9
	Klingenst.	- - -	- - - -	9. 30. 11	9. 48. 8
ad C. B. Spei	Mason	33. 55 42. A	1. 4. 24	9. 39. 52	9. 57. 21
	Dixon			9. 39. 48	9. 57. 21
Torneae	Hellant	65. 50. 50	1. 27. 37	9. 54. 8	10. 12. 22
	Lagerbohm			9. 54. 22	10. 12. 14
Caianeburg	Planman	64. 13. 13	1. 41. 30	10. 7. 59	10. 26. 22
Tobolsk	Chappe	58. 22. 12	4. 23. 45	12. 49. 23	13. 7. 42
Selenginsk	Rumowski	51. 6. 6	6. 57. 8	13. 21. 46	15. 39. 42

Inuento ope huius laterculi pro meridiano cuiusuis loci momenta contactus veri siue ex centro Telluris spectati, et computatis pro eodem momenmento parallaxibus in Longitudinem et Latitudinem, patet, quantum distantia centrorum ex dato loco visa

visa differentiam semidiametrorum Solis et Veneris superet, vel ab ea deficiat. In priori casu assumto alio momento praecedente, in secundo autem sequente, computo denuo parallaxin Veneris in Longitudinem et Latitudinem, ac denuo distantiam centrorum apparentem obtineo. Vnde interpolando tempus contactus apparentis eruitur, quod collatum cum momento contactus ex centro Telluris spectati effectum parallaxeos patefacit.

Cum obseruationes ad Caput Bonae Spei et Selenginski habitae prae reliquis omnibus maximi sint momenti, quippe quae inter se collatae effectum parallaxeos maiorem sistunt, quam reliquae obseruationes, pro istis binis locis praecipua elementa, prout a me sunt computata, apponere hic liceat.

Tempus contactus interni ad meridianum Grenouicensem est $20^h.20'8''$, idem ad meridianum Capitis Bonae Spei erit $21^h.33'.43''$ t. v. Differentia Longitudinum Solis et Veneris, cum eiusdem Latitudine vera, huic tempori competentes, supra iam sunt exhibitae. Eodem temporis momento per aequationem temporis $-1'.51''$ in medium conuerso, quaesiui punctum aequatoris, quod tunc meridiano Capitis Bonae Spei respondebat. Dein posita obliquitate Eclipticae $23°.28'.18''$, inuestigaui necessaria elementa ad parallaxin Veneris in Longitudinem et Latitudinem eliciendam, et tandem per cognitas formulas parallaxium reperi parallaxin Veneris in Longitudinem $+ 12''.01$, parallaxin in Latitudinem $- 15''.67$. Vnde differentia Longitudinum apparens $10'.12''.44$, Latitudo Veneris apparens $10'.55''.17$ ac distantia centrorum $896''.84$. Ex quo apparet obseruatori ad Caput Bonae Spei locato, distantiam centrorum nondum differentiae semidiametrorum aequalem apparuisse. Quaesiui ergo situm Veneris apparentem respectu Solis ad $21^h.43'.43''$. t. v. pro quo momento primum reperi differentiam Longitudinum Solis et Veneris veram $11'.3''.97$, et Latitudinem Veneris $11'.16''.75$. Calculo parallaxium expedito, parallaxin Veneris in Longitudinem pro hoc momento obtinui $+ 11''.42$ in Latitudinem $- 15''.90$ pro conuenterdis Longitudine et Latitudine veris in apparentes, et distantiam centrorum apparentem $928''.81$. Vnde tempus contactus pro obseruatore ad Caput Bonae Spei constituto prodit $21^h.39'.51''.9$, effectu parallaxeos existente $6'.8''.9$, tot scilicet minutis temporis obseruator ad Caput Bonae Spei locatus, tardius videret contactum, ac idem ex centro Telluris spectaretur, si parallaxis Solis foret $8''.5$.

Similem in modum indagaui effectum parallaxeos pro obseruatore Selenginskensi. Tempus contactus veri ad meridianum Selenginskensem reductum $3^h.26'.26''$. Computo parallaxium peracto, parallaxin Veneris in Longitudinem inueni $-11''.76$,

in

in Latitudinem + 10'.95. Quare differentia Longitudinum apparens fit 10'. 36''.21. Latitudo apparens 11'.21''.79, ac diſtantia centrorum 932''.52. Contactum itaque ſpectatori Selenginskenſi iam contigiſſe apparuit. Pro momento ergo anteriori, quale eſt $3^h.16'.35''$, quaeſiui denuo ſitum Veneris apparentem reſpectu Solis, pro quo primum inueni differentiam Longitudinum Solis et Veneris veram 9' 44''.93 et Latitudinem eius 11'.4''.94, ac porro parallaxin Veneris in Longitudinem − 11''.36 in Latitudinem + 10''.82; vnde diſtantia centrorum apparens 901''.22 ac momentum contactus ex Selenginsko ſpectati $3^h.21'.19''.3$ ſc. obſeruator Selenginskenſis videre deberet 5'.6''.7 citius quam ſi idem ex centro telluris ſpectaretur. Vnde colligimus, poſita parallaxi Solis 8''.5 obſeruatorem ad Caput Bonae Spei tardius contactum internum videre debuiſſe 11'.15''.6, quam obſeruator Selenginskenſis.

Cum momentum contactus interni ad Caput Bonae Spei obſeruatum fuerit $9^h.39'.50''$, idem Selenginski obſeruari debuiſſet 3^h 32'.33'' poſt meridiem, ſi Venus nullam haberet parallaxin. Verum per obſeruationem habemus momentum contactus interni Selenginski $3^h.21'.36''$, vnde effectus parallaxeos erit per obſeruationem 10'.57''. Poſita vero parallaxi Solis 8''.5 effectus parallaxeos inuentus eſt 11'.15''.6: quare inferendo 11'.15''.6:

 8''.

8″.5 = 10′.57″ ad quartum proportionalem, obtinetur vera quantitas parallaxeos Solis 8″.26.

Simili ratione obseruationis Selenginski habitae comparationem institui cum aliis, et iis praecipue, in quibus differentia effectuum a parallaxi proficiscentium non minor est quatuor minutis primis, ne scilicet ineuitabiles obseruationum errores valde sensibilem in parallaxi Solis differentiam producere valeant. Tabula hic subiuncta exhibet quantitatem parallaxeos Solis, quae ex his comparationibus resultat.

9ʰ. 39′. 50″	Cap. B. S.	+ 0′. 8″ 9	8ʰ. 19′. 0″	Gren.	— 1′. 9″. 5
5. 52. 43	Diff. mer.	+ 5. 6. 7	7. 6. 18	Diff. mer.	5. 6. 7
15. 32. 33		11. 15. 6	15. 25. 18		3. 57. 1
15. 21. 36	Seleng.	— 18″. 6	15. 21. 36	Seleng.	— 15″. 2
10. 57	Parall. Solis	8″ 26	3. 42	Parall. Solis	7″. 96
8. 28. 31	Paris.	— 0′. 53″. 5	9. 4. 58	Bon.	— 0′. 29″. 4
6. 57. 8	Diff. mer	+ 5. 6. 7	6. 21. 3	Diff. mer	5. 6. 7
15. 25. 39		4. 13. 2	15. 26. 1		4. 37. 3
15. 21. 36	Seleng.	— 10″. 2	15. 21. 36	Seleng.	— 12″. 3
4. 3	Parall. Solis	8″. 11	4. 25	Parall. Solis	8″. 13
8. 58. 26	Götting.	— 1′. 16″. 3	9. 9. 36	Rom.	— 0′. 14″. 8
6. 26. 57	Diff. mer.	+ 5. 6. 7	6. 16. 38	Diff. mer.	+ 5. 6. 7
15. 25. 23		3. 50. 4	15. 26. 14		4. 51. 9
15. 21. 36	Seleng.	— 3″. 4	15. 21. 36	Seleng.	— 13″. 9
3. 47	Parall. Solis	8″. 45	4. 38	Parall. Solis	8″. 09

Parallaxis Solis ex comparatione obseruationis Grenouicensis resultans non nihil dissentit a reliquis; verum si differentiam Meridianorum Parisiensis et Grenouicensis ponamus 9′.17″, prout a quibusdam statuitur, parallaxis Solis prodibit 8″.20.

Cum

Cum obſeruatio ad Caput Bonae Spei habita ea gaudeat commoditate, quod, comparata cum obſeruationibus Europaeis, maiorem ſiſtat parallaxeos effectum ac mea Selenginskenſis: non ingratum fore puto, ſi, quanta ex his comparationibus prodeat parallaxis Solis, ſequenti Tabula indicem.

$9^{h}.39'.50''$	Cap. B. S.	$+6'. 8''.9$	$9^{h}.39'.50''$	Cap. B. S.	$+6'. 8''.9$
3. 10. 20	Diff. mer.	$+3. 45. 7$	0. 23. 12	Diff. mer.	$+3. 4''.4$
0. 59. 10		9. 54. 0	10. 3. 2		9. 13. 3
0. 49. 23	Tobolsk	$-$ $7''.6$	9. 54. 8	Torn.	$-$ $19''.3$
9. 47	Parall. Solis	$8''.39$	8. 54	Parall. Solis	$8''.20$
$9^{h}.39'.50''$	Cap. B. S.	$+6'. 8''.9$	$9^{h}.39'.50$	Cap. B. S.	$+6'. 8''.9$
0. 37. 5	Diff. mer.	$+2. 58. 0$	0. 3. 13	Diff. mer.	$+2. 22.0$
10. 16. 55		9. 6. 9	9. 36. 37		8. 30. 9
10. 7. 59	Caian.	$-$ $10''.9$	9. 28. 9	Vpſal.	$-$ $2''.9$
8. 56	Parall. Solis	$8''.36$	8. 28	Parall. Solis	$8''.45$
$9^{h}.39'.50''$	Cap. B. S.	$+6'. 8''.9$	$9^{h}.39'.50''$	Cap. B. S.	$+6'. 8''.9$
0. 1. 33	Diff. mer.	$+2. 16. 9$	0. 34. 14	Diff. mer.	$+1. 16. 3$
9. 38. 17		3. 25. 8	9. 5. 30		7. 25. 2
9. 30. 9	Stockholm	$-$ $17''.8$	8. 58. 26	Götting.	$-$ $15''.2$
8. 8	Parall. Solis	$8''.20$	7. 10	Parall. Solis	$8''.23$
$9^{h}.39'.50''$	Cap. B. S.	$+6'. 8''.9$	$9^{h}.39'.50''$	Cap. B. S.	$+6'. 8''.9$
1. 13. 35	Diff. mer.	$+1. 9. 5$	1. 4. 25	Diff. mer.	$+0. 53. 5$
8. 26. 15		7. 18. 4	8. 35. 25		7. 2. 4
8. 19. 0	Grenou.	$+$ $3''.4$	8. 28. 31	Paris.	$-$ $8''.4$
7. 15	Parall. Solis	$8''.43$	6. 54	Parall. Solis	$8''.33$
$9^{h}.39'.50''$	Cap. B. S.	$+6'. 8''.9$	$9^{h}.39'.50''$	Cap. B. S.	$+6'. 8''.9$
0. 28. 20	Diff. mer.	$+0. 29. 4$	0. 23. 55	Diff. mer.	$+0. 14. 8$
9. 11. 30		6. 38. 3	9. 15. 55		6. 23. 7
9. 4. 58	Bonon.	$-$ $6''.3$	9. 9. 36	Rom.	$-$ $4''.7$
6. 32	Parall. Solis	$8''.36$	6. 19	Parall. Solis	$8''.39$

Omnes itaque obſeruationes a me in computum ductae, eo gradu in ſtatuenda Solis parallaxi conſentiunt, vt pleraeque non niſi in centeſimis minuti ſecundi partibus diſcrepent, atque minima a maxima non niſi 0″.36 i. e. tertia circiter minuti ſecundi parte ſuperetur. Mediam itaque ex his determinationibus quantitatem 8″.33 pro vera magnitudine parallaxeos aſſumere iure poſſumus: atque cum nullum ſit in tota Aſtronomia elementum, de cuius quantitate vel ad vnum minutum ſecundum certo conſtet, gratulari nobis debemus, quod, in tam ardua re, ad tam incredibilem exactitudinem noſtris temporibus eniti licuerit.

ADDITAMENTVM.

Praeter obſeruationem tranſitus Veneris per diſcum Solis, ab aſtronomis Anglis ad Caput Bonae Spei peractam, datur adhuc alia in parte Telluris auſtrali a Cel. *Pingre* in inſula Rodrigues inſtituta: comparationem cuius cum Europaeis aliisque in parte Telluris boreali peractis in inueſtigatione mea parallaxeos Solis, anno praeterito Academiae tradita, ideo potiſſimum non inſtitui, quod Longitudo inſulae huius tunc liquido non conſtabat. Perlecta vero erudita diſſertatione Cel. *Pingre*, quae comparet in Commentariis Academiae Regiae Scientiarum Pariſinae in annum 1761 editis, non Longitudinem ſolum

ſolum veram inſulae Rodrigues, verum etiam, quantum Tabulae *Maieri* d. $\frac{4}{15}$. Iulii a coelo aberrauerint, didici. Secure igitur nunc obſeruationem iſtam cum aliis conferre, et Longitudinem vrbis Selenginsk ex occultatione ſtellae ф ſagittarii a Luna eruere poterimus.

Latitudo inſulae Rodrigues, media ex pluribus ſumta, prodit 19°. 40′. 40″. auſtr. Longitudo eiusdem a meridiano Pariſino verſus ortum numerata, e diuerſis obſeruationibus, optimae inter ſe conſentientibus, deducta a Cel. *Pingre* ſtatuitur 4^h. 3′. 26″.

Coelum nubilum impediit, quominus in introitu contactus limborum Solis et Veneris obſeruare potuerit Vir Celeberrimus: durante vero tranſitu, quam plurimas eorundem diſtantias menſurauit. Referendis iis, vtpote ad inſtitutum meum nihil facientibus, ſuperſedeo: contactus autem in exitu, in diſſertatione memorata pag. 443., ſequentem in modum relatos legimus:

Temps de la pendule	*Temps vrai*	*Remarques ſur les obſeruations*
0^h.35′.44″	0^h.36′.49″	*Attouchement certain et inſtantanée des bords*
0. 53. 3	0. 54. 9	*Venus presque ſortie, eſt couverte d'une nuage*
0. 53. 21	54. $27\frac{1}{2}$	*Je la vois encore, mais bien prete de quitter.*

Vt obſeruationem hanc in vſum conuerterem, aſſumtis iisdem, quibus ſupra vſus ſum elementis, compu-

computaui effectum parallaxeos pro obferuatore in Rodrigues locato, qui prodiit 2′. 57″. 6: tot fcilicet minutis temporis contactus internus tardius euenire debuit, quam fi idem ex centro Telluris fpectaretur. Vnde obferuationem Rodriguenfem conferendo cum aliis fequentem nancifcimur Solis parallaxin:

Nomina Locorum	Differentia Meridian	Sum. effect. computata	Sum. effect. ex obf. ref.	Parallaxis Sol. horiz.
Selenginsk	$2^h. 53'. 42''$	$8'. 4''. 3$	$8'. 55''$	$9''. 38$
Tobolsk	0. 20. 19	6. 43. 3	7. 45	9. 80
Tornea	2. 35. 48	6. 2. 0	6. 53	9. 97
Caianeburg	2. 21. 56	5. 55. 6	6. 54	9. 89
Vpfala	3. 2. 14	5. 19. 6	6. 26	10. 26
Stockholm	3. 0. 34	5. 14. 5	6. 6	9. 89
Göttinga	3. 3. 15	4. 13. 9	5. 8	10. 31
Grenouicum	4. 12 36	4. 7. 1	5. 13	10. 76
Parifiis	4. 3. 36	3. 51. 1	4. 52	10. 73
Bononia	3: 27. 21	3. 27. 0	4. 28	11. 00
Roma	3. 22. 56	3. 12. 4	4. 17	11. 35.

Cel. *Pingre* miratur confenfum, qui cernitur in parallaxi Solis ex combinatione diuerfarum obferuationum cum obferuatione Capitis Bonae-Spei refultante, atque vt fimilem ex comparatione fuae cum aliis obtineat, ex contactu interno Veneris in introitu, ftabilita iam antea Longitudine Tobolii, Torneae, Caianeburgi et Vpfaliae, a meridiano Stock-

Stockholmiae numerata, auget Longitudinem Stockholmiae 21″, fultus auctoritate abbatis *de la Caille*. Posita iam Longitudine Stockholmiae $1^h.3'.13''$, immutat quoque omnium locorum a Longitudine Stockholmiae pendentium, sc. Longitudinem Tobolii a meridiano Parisino numeratam statuit $4^h.24'.14''$, Caianeburgi $1^h.42'.1\frac{1}{4}''$. Torneae $1^h.28'.11\frac{1}{2}''$ et Vpsaliae $1^h.1'.30''$. Vnde per computum meum parallaxis Solis prodit ex obseruatione Rodriguensi collata cum

Toboliensi - - - - -	10″.41
Tornensi - - - - -	10. 47
Caianeburgensi - - - -	10. 63
Vpsaliensi - - - - -	10. 74
Stockholmiensi - - - - -	10. 45.

Reductis hunc in modum ad mutuum consensum omnibus fere grauioris momenti obseruationibus, quae a reliquis dissentiebant, Cel. *Pingre* parallaxin Solis horizontalem 10″.42 statuendam esse pronunciat.

Ex obseruationibus itaque in parte Telluris boreali captis restat vnica Selenginskensis, quae conclusioni Pingreanae aduersatur; Bononiensem enim et praesertim Romanam inter dubias referre videtur. Studio veritatis ductus cuperem equidem, vt et mea aeque facile ac aliae cum obseruatione Cel.

 Pingre

Pingre conciliari queat; verum id nulla ratione praestari posse, ex sequentibus colligere poterimus.

EXAMEN
obseruationis Selenginskensis.

Vt ex comparatione obseruationis meae cum Rodriguensi parallaxis Solis prodeat 10''.42, necesse est, vel momentum contactus interni integro fere minuto primo diminuere, vel Longitudinem obseruatorii eadem quantitate augere. Videamus ergo, vtrum tantus error vel in ipsam meam obseruationem, vel in differentiam Meridianorum obseruatorii Selenginskensis, cadere possit.

In obseruatione ipsa error, si quis est, vel ex motu horologii, vel ex ipso momento male obseruato, originem trahat necesse est. Quod ad primum fontem, errorem ex eo non vltra 2'' ascendere posse, facile conuincimur, si tam multiplices obseruationes ad motum horologii cognoscendum institutas perpendimus. Verosimilius dixerit quis, inclementiam tempestatis obseruationem meam erroneam redidisse. Neque ego sustinere audeo, hac ex parte obseruationem Selenginskensem ab omni errore esse liberam: ast vno minuto primo eum longe minorem existere debuisse, contactus limborum repentinus et inexspectatus certissimo indicio est. Quantuscuntuscunque ille demum ſit, iure quaeſtionem hanc mouere poſſe mihi videor: vtrum error ex nubila coeli facie originem trahens ad accelerandum, an vero ad retardandum contactum fecerit?

Credo ego, et rei natura id ſuadere videtur, inclementiam tempeſtatis contactum internum accelerare potius, minime vero retardare potuiſſe, atque idcirco momentum contactus interni Selenginski obſeruatum hac ex parte non minuendum, verum augendum eſſe aliquot ſecundis, palam eſt. Si itaque obſeruationem Selenginskenſem errore quodam laborare ſtatuere velimus, cum ita comparatum eſſe oportet, vt correctione inducenda parallaxis Solis, ex combinatione obſeruationum Rodriguenſis et Selenginskenſis reſultans, non incrementum, verum decrementum captura ſit.

Terminum autem, vltra quem momentum contactus interni augeri nequit, figit nobis phaenomenon illud, quod poſt celebratum iam limborum contactum obſeruaui. Sole pleno fulgore radiante, et horologio $5^h. 8'. 8''$ monſtrante, limbi Veneris minima pars, vltra limbum Solis iam promota, lucida annulo cincta mihi apparuit. Cum itaque interuallum temporis, quod contactum limborum inter, ac apparentiam hanc intercedit, non maius ſit $19''$: certiſſime hinc coniectamur, momentum contactus interni a me obſeruati plus quam $10''$

augeri non poſſe. Sed cum hoc augmentum in mera coniectura fundetur, et omnis obſeruatio coniecturae ſit praeferenda, in numero minutorum ſecundorum a me obſeruato merito acquieſcimus.

Quanquam momentum contactus exterioris in exitu minus certum ſit ac interioris, verum incertitudo haec non de minutis primis, verum de ſecundis tantum intelligenda eſt. Et cum mora Veneris in limbo Solis a me obſeruata 18′.6″ parum aut nihil differat a reliquis, quaecunque in lucem prodiere, obſeruationibus, errorem in minutis primis ſtatuere, idem eſt, ac ius nobis arrogare, omnes obſeruationes impune et pro lubitu noſtro immutandi.

Euicta itaque certitudine momenti contactus a me Selenginski obſeruati, excutiamus diligentius; num forte differentia meridianorum ſupra a me ſtabilita, mutationis alicuius et quantae capax ſit?

EXAMEN
Longitudinis Vrbis Selenginsk.

Ex quatuor Immerſionibus Satellitum Iouis, et fine Eclipſeos Solaris, Selenginski obſeruatis, Longitudinem obſeruatorii mei deduxeram. Momentis Immerſionum primi Satellitis Iouis ex Tabulis Cel. *Wargentini* deductis, applicui correctionem

−40″,

— 40″, secundi autem nullam, atque ita directe ex quauis obseruatione, differentiam meridianorum investigans, mediam tandem obtinui $6^h.57'.8''$. Verum cum Longitudo vrbis Selenginsk indirecte quoque, et forte certius, ex obseruationibus Satellitum Iouis, circa idem tempus in aliis locis peractis, deduci queat: constitui hic ad rei veritatem probandam, simulque vt pateat, quousque Longitudo obseruatorii mei augeri possit, eam posteriori hac methodo inquirere.

Iulii d. $\frac{20}{31}$. Immersio secundi Satellitis Iouis Selenginski tubo 15 pedes longo obseruata est $14^h.58'.35''$ t. v. Immersiones eiusdem Satellitis huic proximae obseruatae sunt Parisiis d. $\frac{9}{25}$. Iulii $16^h.15'.1''$, et Stockholmiae $\frac{27.\ Iul.}{7.\ Aug.}$ $11^h.43'.1''$ tubo *Dollondiano* 120 vicibus obiecta amplificante.

Immersio ad meridianum Parisinum Selenginskensi homologa prodit, si iuxta Tabulas Cel. *Wargentini* ad Immersionem d. 9. Iulii addantur $10^d.15^h.56'.17''$. Parisiis itaque die 20. Iulii Immersio euenire dabuit $8^h.1'.18''$. Vnde differentia meridianorum quaesita prodit $6^h.57'.17''$.

Quodsi obseruatione Stockholmiensi in praesente negotio vti velimus, a momento Immersionis $11^h.43'.1''$, subtrahendo $7^d.1^h.38'.23''$, prout Tabulae iubent, nanciscimur momentum Immersionis ad meridianum Stockholmiae d. 20. Iulii $9^h.4'.38''$.

 Quare

Quare Longitudo Vrbis Selenginsk a meridiano Stockholmiae verſus ortum numerata prodit $5^h.53'.57''$, quam ſi pro diuerſa vi tuborum $15''$ augeamus, obtinebimus $5^h.54'.12''$.

D. $\frac{14}{25}$. Aug. Selenginski obſeruata eſt Immerſio primi Satellitis Iouis $10^h.46'.24''$. t. v. Omnium circa idem tempus in aliis locis viſarum proxima eſt Pariſiis die $\frac{12}{23}$. Aug. obſeruata $9^h.20'.49''$, intercedente inter vtramque vna tantum reuolutione; additis itaque $1^d.17^h.28'.56''$ prodit momentum Immerſionis primi Satellitis d. 14. Aug. Pariſiis $3^h.49'.45''$ et differentia meridianorum $6^h.56'.39''$.

Eadem die obſeruata eſt Selenginski Immerſio ſecundi Satellitis Iouis $12^h.15'.4''$ t. v. tubo exquiſitiſſimo octo pedes cum dimidio longo. Longitudo obſeruatorii mei deduci potuiſſet ex Immerſione eiusdem Satellitis Stockholmiae $\frac{21. \text{ Aug.}}{1. \text{ Sept.}}$ tubo 120 vicibus amplificante a Cel. *Wargentino* obſeruata $9^h.1'.6''$, ac porro ex Immerſione ibidem eodemque tubo $\frac{3}{14}$. Aug. obſeruata $14^h.21'.37''$: verum ne vlla ratio dubitandi ſuperſit, malo potius Longitudinem obſeruatorii mei ex obſeruatione Pariſina eadem die inſtituta deducere.

D. $\frac{3}{14}$. Aug. Immerſio ſecundi Satellitis Iouis Pariſiis obſeruata eſt, $13^h.18'.39''$. Inter hanc Immerſionem et eam, quae Selenginski obſeruata eſt, iuxta Tabulas Cel. *Wargentini* effluere debebant

10^d.

$10^d. 15^h 59'. 4''$, Immersio itaque Selenginski obseruata Parisiis videri debuisset $5^h 17'. 43''$. Vnde differentia meridianorum prodit $6^h. 57'. 21''$.

Interea si Longitudinem Stockholmiae ponamus $1^h. 2'. 52''$, atque ex obseruationibus Cel. *Wargentini* Longitudinem vrbis Selenginsk inuestigemus; obtinebimus ex priori $6^h. 56'. 51''$ ex posteriori $6^h. 57'. 13''$, nulla habita ratione diuersitatis tuborum, quam omitti hic non posse quisque perspicit; mediam tamen hinc resultantem pluribus quam $20''$ augere non ausim.

Superest Immersio primi Satellitis Iouis $\frac{21. \text{ Aug.}}{1. \text{ Sept.}}$ Selenginski obseruata tubo 15 pedes longo $12^h. 43'. 10''$. Immersio eiusdem ex obseruatione Cel. *Pingre* in insula Rodrigues tubo 18 pedum peracta, est $9^h. 49'. 40''$. Vnde differentia meridianorum Selenginskensis et Rodriguensis prodit $2^h. 53'. 30''$; quae ob diuersitatem tuborum, memoratasque supra circumstantiis $10''$ augeri poterit. Est autem secundum accuratissimas Cel. *Pingre* determinationes Longitudo insulae Rodrigues $4^h. 3'. 26''$, vnde Longitudinem vrbis Selenginsk nanciscimur $6^h. 57'. 6''$.

Ignoro, cuiusmodi tubis Parisiis obseruationes peractae fuere, idcirco Longitudini Selenginsk ex obseruationibus Parisinis deductae, correctionem ex diuersitate tuborum oriundam inducere non audeo.

Ex

Ex his quatuor determinationibus ſecunda diſsidet iuſto plus a reliquis; verum vtrum eius ratio in praeſente negotio habenda ſit, monſtrabit occultatio φ ſagittarii a Luna, ex qua nunc ad Longitudinem obſeruatorii mei deducendam progredior.

Immerſio φ ſagittarii ſub Luna die $\frac{4}{15}$. Iul. obſeruata eſt ad meridianum Selenginskenſem $11^h.24'.51''$ t. v. ſiue $11^h.30'.16''$. t. m. Longitudo φ ſagittarii ex Fundamentis Aſtronomiae de la *Caille* ad initium anni 1750. eſt $276°.41'.21''.6$, et Latitudo auſtralis $3°.55'.19''$. Longitudo ergo ad tempus obſeruationis reducta erit $276°.41'.21''.6+9'.36''.5$ Praec. $-15''.2$, Nutat. $+19''.2$, Aberr. $=276°.51'.2''.1$ et Latitudo $3°.55'.19''.3$ auſtralis.

Aſſumta differentia meridianorum Pariſienſis et Selenginskenſis $7^h.0'.0''$, eo momento, quo Luna Selenginski ſtellam tegere viſa eſt, Pariſiis numerari debebant $4^h.30'.16''$ t. m. Ad hoc tempus ex Tabulis *Maieri* Longitudinem Lunae ab aequinoctio medio computatam reperio $276°.43'.3''.2$ et Latitudinem Lunae auſtralem $3°.8'.34''.7$. Cum vero Tabulae iuxta computum Cel. *Pingre* Longitudinem dent iuſto minorem $33''.2$, et Latitudinem iuſto maiorem $49''.5$ (*Memoires de l'Academie de Paris pour l'année* 1761. *pag.* 432.) Longitudo Lunae correcta reperitur $276°.43'.36''.4$ et Latitudo $3°.7'.45''.2$.

Ex

Ex iisdem Tabulis parallaxin Lunae aequatoream nactus sum 54′.1″ et diametrum Lunae horizontalem 29′.30″. Vnde ratione habita figurae Telluris sphaeroidicae, parallaxin Lunae in Longitudinem obtinui −7′.57″.3 et parallaxin in Latitudinem +52′.11″.9 atque Longitudinem Lunae apparentem 276°.35′.39″.1, Latitudinem 3°.59′.57″.1. Longitudo itaque stellae superare videbatur Longitudinem Lunae 15′.23″.1 et contra Latitudo illius deficere a Latitudine Lunae 4′.37″.8. Differentia longitudinum ducta in cos. Latitudinis dat 15′.20″,8. Hinc distantia stellae a centro Lunae reperitur 961″.8, quae semidiametro Lunae 14′.47″.5 pro altitudine supra horizontem 2″.5 auctae aequalis esse deberet, si positio assumta veram differentiam meridianorum ostenderet. Est autem illa maior semidiametro 74″.3, idcirco alia hypothesis pro differentia meridianorum statuenda est.

Sumamus itaque differentiam meridianorum $6^h.50'.0''$, atque ita eo momento, quo Luna stellam Selenginski occultare visa est, Parisiis numerari debebant $4^h.40'.16''$. t. m. pro quo locus Lunae ex iisdem Tabulis deductus ita se habet. Longitudo Lunae ab aequinoctio medio numerata 276°.47′.57″.4 et Latitudo australis 3°.8′.56″; additis iam ad Longitudinem tabularem 33″.2 et a Latitudine subtractis 49″.5, nanciscimur Longitudinem Lunae correctam 276°.48′.30″.6 et similem Latitudinem

 eius-

eiusdem 3°. 8′. 6″. 5. Longitudine Lunae vera, parallaxi − 7′. 56″. 6 et Latitudine eius parallaxi + 52′. 11″. 8 in apparentem conuersa, obtinemus differentiam Longitudinum stellae et centri Lunae 10′. 28″. 1, quae in cos. Latitudinis ducta dat 10′. 26″, 5 et differentiam Latitudinum 4′. 59″. Quare distantia stellae a centro Lunae reperitur 694″, 2 minor semidiametro Lunae apparente.

Cum Luna e Selenginsk spectata interuallo 10 minutorum ad stellam accessisset 267″, 6 et momento occultationis centrum Lunae a stella distare debuerat 887″. 5 interpolando reperitur vrbem Selenginsk occidentalius sitam esse 2′. 47″ ac in prima hypothesi statutum est. Quare differentia meridianorum prodit 6^h. 57′. 13″ vel 15″.

In computo Longitudinis Lunae neglexi correctionem ex nutatione oriundam, ideo potissimum, quod Cel. *Pingre* in errore Tabularum inuestigando nullam eiusdem rationem habuerit. Quodsi nutationis quoque rationem habere velimus, Longitudo Lunae minuenda foret 15″. 2: ast error in Longitudinem totidem secundis incresceret; differentia ergo meridianorum nunc deducta nullatenus erronea hac ex parte est existimanda.

Cum in definienda Longitudine ex obseruatione φ sagittarii, vsus fuerim numeris Tabularum correctis, ea merito spectari potest, tanquam lapis Lydius, ad quem omnes determinationes exigi debebunt.

bebunt. Tuto igitur determinationem ex Immersione d. $\frac{14}{25}$. Aug. depromtam, vtpote ab omnibus reliquis et ab hac iusto plus dissentientem, reiicere poterimus, atque ita pro Longitudine vrbis Selenginsk sequentes remanebunt determinationes:

I.	- - - - -	$6^h. 57'. 17''$
II.	- - - - -	6. 57. 21
III.	- - - - -	6. 57. 6
IV.	- - - - -	6. 57. 13.

Quarum si mediam $6^h. 57'. 14''$ pro vera spectare nolimus, perspicuum tamen est, differentiam meridianorum Parisiensis et Selenginskensis maiorem $6^h. 57'. 21''$ statui non posse, nisi omnes obseruationes fallere nos existimemus. Illa vero etiamnum tanquam vera assumta, longe adhuc aberimus, vt obseruatio Selenginskensis, collata cum Rodriguensi, eandem ac aliae sistat parallaxin.

Ad conciliandum conclusioni meae maiorem gradum certitudinis, constitueram apud me ex obseruatione Eclipseos Tobolii a Domino Abbate *Chappe* peracta, errorem Tabularum Lunarium inquirere, ac ex fine Eclipseos Selenginski obseruato Longitudinem obseruatorii mei elicere. Verum antequam calculos hos ad finem perducerem, accepimus hic obseruationem Transitus Veneris per discum Solis Pekini peractam. Idcirco missis iis, omne studium in id potius collocandum censui, vt quae-

 rerem,

rerem, quantam obseruatio ista, omnibus in parte Telluris boreali peractis pretiosior, cum aliis collata sistat Solis parallaxin, existimans maius pondus obseruationi Capitis Bonae Spei et Selenginskensi accessurum, si et Pekinensis collata cum aliis, eandem quam illae binae praebuerit parallaxin.

OBSERVATIO

Transitus Veneris per discum Solis Pekini a R. P. Dolliero peracta.

R. P. *Dollierus* refert, obseruationem peractam esse tubo 14 pedes longo ad horologium bonae notae, cuius motum licet praecedentibus ante obseruationem diebus ad examen reuocare ei non licuerit, didicisse tamen se ait a R. P. *Benoit* statum horologii talem fuisse, vt spatio diei Solaris retardaret $16''.44'''$, id quod R. P. ex appulsibus Sirii conclusisse se asseuerauerat. Illa ipsa die, qua Venus discum Solis peragrabat, non obstantibus nubibus, ventoque vehementi, sumsit ante ingressum altitudines Solis, iisque post egressum correspondentes, ex quibus meridies correctus ad horologium prodiit $11^h.56'.7''.43'''$.

Quoniam obseruatio Pekinensis fortasse nunc primum in lucem prodit, consultum esse duxi eam verbis ipsius auctoris referre.

- - je

- - - - je vis la veritable Venus, qui venoit d'entrer, c'étoit à tres peu pres a $9^h. 51'. 25''$ ou $30''$. de tems vrai

Entrée totale de Venus - - horloge		10^h.	$6'$.	$35''$.	$0'''$
pour defaut du midi - - -	+		3.	52.	17
pour retard et equat. - -	—		0.	0.	27
Tems vrai		10.	10.	26.	50
Commencement de sortie - - borolge		3.	56.	6.	0
pour defaut du midi	+		3.	52.	17
pour retard. et equat.	+		0.	0.	59
Tems vrai -		3.	59.	59.	16
Sortie totale de Venus - - borolge		4.	14.	4.	0
pour defaut du midi	+		4.	52.	17
pour retard. et equat.	+		0	1.	4
Tems vrai -		4.	17.	57.	21

INVESTIGATIO
Longitudinis Pekini.

Longitudo Pekini, cuius in praesenti negotio exactissima requiritur cognitio, diuersa a diuersis statuitur. Tria ibi sunt obseruatoria: primum est publicum Imperiale, alterum Collegii Iesuitarum Lusitanorum, et tertium in aedibus Iesuitarum Gallorum, vbi procul dubio obseruatio Veneris peracta est, et cuius Latitudo a Patre *Gaubil* in Comm.

Acad. Scientiarum Imperialis Tomo V. ſtatuitur 39°.55′.15″. Proſtant ibidem obſeruationes definiendae Longitudini illius idoneae; verum non deſunt mihi rationes inquirendi prius in Longitudinem Collegii Ieſuitarum Luſitanorum, ac tandem ex Ichnographia vrbis Pekin *Gaubiliana*, quam ſeruat Academia noſtra, Longitudinem obſeruatorii, vbi obſeruatio Veneris peracta eſt, eruendi.

Communiter Longitudo Pekini, at Rev. autem Patre *Hallerſtein*, Longitudo Collegii Ieſuitarum Luſitanorum a Meridiano Pariſino numerata ſtatuitur $7^h.36'.10''$ quam proxime. Si numerum obſeruationum, quibus determinatio Rev. Pat. innititur, ſpectes, nulla ratio de certitudine eius dubitandi ſubnaſci poterit; nam ex innumeris ab anno 1726 ad 1740 ſuper Satellitibus Iouis Pekini habitis obſeruationibus, collatis cum obſeruationibus in obſeruatorio Imperiali Petropoli inſtitutis, ſumendo medium, differentiam Meridianorum Petropolitani, et Collegii, eruit $5^h.44'.15''$. Verum ſi diſſenſum earum et inſtrumenta, praeſertim horologium, ad quod obſeruationes interea temporis Pekini peractae ſunt, conſideres, vlteriori huius elementi indagatione nouiſſimis obſeruationibus ſuperſtruenda opus nos habere, rerum aſtronomicarum periti inficias non ibunt. Praeſtari autem id poterit ope ſequentium obſeruationum.

Obſer-

Obſeruationes Satellitum Iouis

In Collegio Ieſuitarum Luſitanorum Pekini habitae.

Anno 1751.

Sept.	9.	16^h.	$21'$.	$38''$	Im.	I. Sat.	tubo 13. ped. obſ.	bona
	18.	12.	46.	48	- -	I. - - -	13. - - -	bona
Oct.	3.	11.	7.	58	Im.	I. Sat	tubo 13 ped. obſ.	bona
	17.	14.	59.	49	- -	I. - - -	13. - - -	bona
	19.	9.	29.	2	- -	I. - - -	13. - - -	bona
	24.	16.	54.	24	- -	I. - - -	13. - -	bona
	26.	11.	23.	20	- -	I. - - -	13. - - -	bona
Dec.	20.	10.	2.	56	Em.	I. Sat.	tubo 13. ped. obſ.	bona
	27.	11.	54.	37.	- -	I. - - -	13. ped. obſ.	bona

Anno 1752.

Ian.	3.	13^h.	$45'$.	$34''$	Em.	I. Sat.	tubo 13. ped. obſ.	bona
	5.	8.	13.	37	- -	I. - - -	13. ped. -	bona
	19.	11.	58.	42	- -	I. - - -	13. - - -	bona
	21.	6.	26.	45	- -	I. - - -	13. - - -	bona

His correſpondentes, ex quibus indirecte vt plurimum, praeciſe tamen Longitudo Collegii Ieſuitarum Luſitanorum deduci poterit, in Commentariis Academiae Scientiarum Pariſiuae ſequentes reperio.

Anno

Anno 1751.

Sept.	7. $14^h.16'.33''$	Imm. I Sat.	tub. 14. ped.	*Par.*	*Maraldi*
	14. 16. 12. 40	Imm. I. Sat.	- 18.	- -	de *Thuri*
Oct.	8. 10. 59. 8	Imm. I. Sat.	tub. 14. ped.	-	*Maraldi*
	24. 9. 18. 19	- - I.	- - 18.	- -	de *Thuri*
	22. 15. 53. 43	- - I.	- - 14.	*Cap. B. S.*	la *Caille*
Dec.	25. 10. 56. 7	Em. I. Sat.	- 14.	- - -	la *Caille*

Anno 1752.

Ian.	8. $13^h.33'.41''$	Em. I. Sat.	tub. 18. ped.	*Par.*	*Maraldi*
	10. 9. 6. 52	- - I.	- - - 14. ped.	*Cap. B. S.*	la *Caille*

Pro certitudine harum obſeruationum nomina obſeruatorum militant. Iam vero ex Immerſionibus diebus 7 et 14 Pariſiis obſeruatis, nec non Pekini diebus 9 et 18, tempus reuolutionis primi Satellitis colligitur $1^d.18^h.29'.2''$, quae, ad Immerſionem die 7. Pariſiis obſeruatam addita, dat momentum Immerſionis ad Meridianum Pariſinum d. 9. Sept. $8^h.45'.35''$, et cum Pekini eadem obſeruata fuerit $16^h\,21'.38''$. Differentia Meridianorum prodit $7'.36'.3''$.

Ad Immerſionem d. 14. Sept. Pariſiis obſeruatam addendo duas Satellitis reuolutiones $3^d.12'.58'.4''$. Immerſio die 18. Sept. obſeruanda obtinetur $5^h.10'.44''$, quae collata cum momento Pekini obſeruato, dat Meridianorum differentiam $7^h.36'.4''$, et habita ratione diuerſitatis tuborum $7^h.36'.14''$.

Oct.

Oct. 8. Parisiis Immersio Satellitis obseruata est $10^h.59'.8''$; subtractis inde tribus reuolutionibus sc. $5^d.7^h.27'.6''$ prodit immersio ad diem 3 Octobris $3^h.32'.2''$: vnde differentiam Meridianorum obtinebimus $7^h.35'.56''$. Quodsi ad eandem ipsam addamus quinque Satellitis reuolutiones $8^d.20^h.25''.10''$, prodit Immersio Satellitis Parisiis d. 17. Octobr. $7^h.24'.18''$, quae collata cum Immersione Pekini obseruata differentiam Meridianorum praebet $7^h.35'.31''$.

Vlterius procedens assumo reuolutionem primi Satellitis tantam, quantam praebet medium obseruationum Pekinensium d. 17 et 19 nec non 24 et 26. Oct. scilicet $1^d.18^h.29'.5''$. Iamque ad Immersionem Parisiis die 7. Oct. obseruatam addendo sex reuolutiones, siue $10^d.14^h.54'.30''$, prodit Immersio d. 19. Parisis $1^h.53'.38''$, vnde differentia Meridianorum resultat $7^h.35'.34''$.

Oct. die 24. Pekini Immersio obseruata est $16^h.54'.24''$, eadem vero Parisiis $9^h.18'.19''$. Quare differentia Meridianorum pro diuersitate tuborum $10''$ aucta prodit $7^h.36'.15''$. Quodsi ad Immersionem Parisinam addamus vnam reuolutionem, vt prodeat Immersio Parisiis ad diem 26, differentiam Meridianorum nanciscemur $7^h\ 35'.56''$, vel ob diuersitatem tuborum augendo $10''$,$7^h.36'.6''$.

Cum die 24. Oct. Immersio primi Satellitis Pekini obseruata fuerit $16^h.54'.24''$, subtrahendo inde vnam Satellitis reuolutionem habebimus proximam Immersionem praecedentem die 22. Pekini $22^h.25'.9''$; obseruata vero illa est ad Caput Bonae Spei $15^h.53'.43''$: vnde differentia Meridianorum est $6^h.31'.26''$, atque Longitudo Pekini a Meridiano Parisino numerata, $7^h.35'.51''$.

Obseruationes Pekini diebus 20 et 27. Decembris habitae indigitant, reuolutionem Satellitis fuisse tunc $1^d.18^h.27'.55''$: quam ob rem additis ad Emersionem die 20. Decembr. Pekini obseruatam tribus reuolutionibus, vel ab Emersione diei 27 demtis duabus reuolutionibus, obtinetur Emersio ibidem die 25 obseruanda $17^h.26'.42''$, quae collata cum obseruatione Capitis Bonae Spei Longitudinem Collegii a Meridiano Parisino computatam dabit $7^h.35'.0''$. Ast cum obseruatio in Capite Bonae Spei peracta subdubia sit, determinationis huius non habendam esse rationem existimo.

Emersiones Satellitum Iouis anno 1752. mense Ianuario Pekini peractae tempus reuolutionis Satellitis dant $1^d.18^h.28'.3''$. Quare ad Emersionem Pekini die 3 obseruatam additis tribus reuolutionibus, vel ad Emersionem diei 5 duabus, prodit Emersio Pekini die 8. Ian. obseruanda $21^h.9'.43''$, quae collata cum Emersione Parisiis notata, differentia Meridianorum prodit $7^h.36'.2''$, vel ob diuersitatem tuborum minuta $10''$, $7^h.35'.52''$.

Quodsi ad earundem Emersionum primam addamus quatuor reuolutiones, siue tres ad secundam; nan-

nanciſcimur momentum Emerſionis Pekini d 10. Ian. $15^h.37'.46''$. Eadem vero ad Caput Bonae Spei obſeruata eſt $9^h.6'.52''$, vnde Pekini Longitudo a Capite Bonae Spei computata ſit $6^h.30'.54''$, et a meridiano Pariſino $7^h\ 35'.19''$.

Ex Emerſionibus diebus 5 et 19. Ian Pekini obſeruatis, tempus reuolutionis Satellitis eſt $1^d.18^h.28'.8''$: ſubtractis itaque ab vltima quinque reuolutionibus, prodit Emerſio Pekini die 10 obſeruanda $15^h.38'.2''$. Vnde differentia Meridianorum Pekinum inter et Caput Bonae Spei eruitur $6^h.31'.10''$, et Longitudo Pekini ad Meridianum Pariſinum relata $7^h.35'.35''$.

Denique ab Emerſione diei 21. Ian. Pekini obſeruata demtis ſex reuolutionibus, nanciſcimur momentum Emerſionis homologae ad Caput Bonae Spei obſeruatae, ac tandem differentiam Meridianorum Pariſienſis et Collegii $7^h.35'.30''$.

Harum duodecim determinationum ſi ſumamus medium, Longitudo Collegii Ieſuitarum Luſitanorum a Meridiano Pariſino numerata prodit $7^h.35'\ 48''$. Aedes autem Ieſuitarum Gallorum, vt videre eſt ex Ichnographia Pekini, non niſi $2''$ temporis orientaliores ſunt Collegio; quare Longitudo Obſeruatorii, vbi tranſitus Veneris obſeruatus eſt, non maior ſtatui poterit quam $7^h.35'.50''$.

Ne vero Longitudinem hanc dubiis rationibus motus aſſumere videar, quaeſiui eam directe ex obſeruatione Mercurii in Sole anno 1753. $\frac{25. \text{Apr.}}{5. \text{Maii}}$ a P. *Gaubil* Pekini in aedibus ſuis inſtituta. Contactus internus limborum in exitu eueniſſe illi apparuit $5^h.52'.55''$ t. v. poſt. merid. Eidem phaenomeno Pariſiis Celeberrimi Aſtronomi inuigilantes diuerſi diuerſo tempore contactum eueniſſe obſeruarunt. Obſeruatio Domini *Caſſini de Thury* ab omnibus reliquis diſcedit, et ſi verum eſt, quod diſcrimen hoc pendeat a diuerſitate tuborum, eo tutius medium e reliquis amplectimur, quod Pekini tubo 15 pedum obſeruatio fuit inſtituta.

Momentum contactus interni in exitu ad Meridianum obſeruatorii Regii Pariſini eſt ex obſeruatione

La Landi	- - -	$10^h.18'.41''$. ante mer.
De l'Islii	- - -	10. 18. 41
Bougueri	- - -	10. 18. 44
P. Merville	- - -	10. 18. 37
Libouri	- - - -	10. 18. 36
Medium		10. 18. 40.

Ad computandam hinc Longitudinem Domus Ieſuitarum Gallorum, aſſumſi ſequentia elementa ab Aſtronomis Pariſinis ex obſeruationibus deducta: Momentum coniunctionis apparentis ante meridiem $6^h.36'.15''$ t. v. Latitudinem Mercurii apparentem tempore coniunctionis $2'.33''.5$ auſtr. Motum horarium

rarium Mercurii a Sole in Ecliptica 3′. 58″. 2, Motum horarium in orbita apparente 4′. 2″. 2. Et cum distantia Mercurii a Sole ad distantiam eius a terra secundum Tabulas *Halleianas* tunc fuerit = 45327 : 55679; posita parallaxi Solis 8″. 5 parallaxin Mercurii a Sole obtinui 6″. 92. Momentum coniunctionis ex centro Telluris spectatum 6^h. 35′. 55″ cum Latitudine vera 2′. 27″. 22. Porro assumto diametro Solis 31′. 46″, diametro Mercurii 12″, nec non inclinatione orbitae Mercurii apparentis 10°. 25′. 12″, calculoque peracto inueni contactum internum Parisiis ob parallaxin 11″, et Pekini 1′. 38″ quam proxime accelerari debuisse. Quare contactus internus verus ad Meridianum obseruatorii Iesuitarum Gallorum prodit 5^h. 54′. 33″ post mer. et ad Meridianum Parisinum 10^h. 18′. 51″, vnde differentia Meridianorum est 7′. 35′. 42″.

Pro vltima hac determinatione pugnat praecisio, cuius capax est ipsa obseruatio, pro illa vero multitudo obseruationum. Mediam hinc resultandem 7^h. 35′. 46″, eo tutius pro vera Longitudine Domus Iesuitarum Gallorum assumere licebit, quod obseruationes Satellitum Iouis ibi habitae eandem quam proxime praebent Meridianorum differentiam. In Tomo V. Comment. Academiae Scientiarum Petropolitanae obseruationes Pekinenses sequentem in modum referuntur: Anno 1756.

Febr.	24. $16^h.28'.53''$	Imm. I. Sat.	tub. 13. ped.	
	26. 10. 57. 59	- - - I.	- - - -	
Martii	3. 14. 17. 54	Imm. II. Sat.	13 ped.	
	10. 16. 52. 49	- - - II.	- - 13. ped.	

Innumeras eodem anno obſeruationes ſuper Satellitibus Iouis in aliis locis peractas beneuole communicauit mecum Vir Cel. *Wargentinus*, ex quibus eas tantum hic ſubiungo, quae magis ad inſtitutum noſtrum conducunt.

Febr.	22. $17^h.24'.30''$	Imm. I. Sat.	Par obſeruata
	29 16. 19. 53	- - - I.	- Par. - - -
Febr.	28. 17. 24. 53	Imm. II. Sat.	Par. obſeruata
Martii	10. 10. 20. 25	- - - II. Sat.	Stockh obſeru.

Ex obſeruationibus Pariſiis habitis tempus vnius reuolutionis Satellitis primi colligitur $1^d.18^h.28'.51''$, Tabulae vero Cel. *Wargentini* correctae praebent $1^d.18^h.28'.44''$. Tabularem reuolutionem tanquam veram ſpectabimus, vt plures determinationes Longitudinis Domus Ieſuitarum Gallorum obtineamus. Ad Immerſionem Febr die 22. Pariſiis obſeruatam addita vna reuolutione, prodit Immerſio die 24. Pariſiis obſeruanda $8^h.53'.14''$, quae collata cum Pekinenſi differentiam Meridianorum praebet $7^h.35'.39''$, additis vero duabus reuolutionibus prodit Immerſio die 26. ad Meridianum Pariſinum $3^h.22'.25''$, vnde differentiam Meridianorum quaeſitam obtinemus $7^h.35'.34''$.

Ex

Ex Immerſione die 29. Pariſiis obſeruata, demtis duabus reuolutionibus, Immerſio die 26 ibidem obſeruanda prodit $3^h.22'.25''$, vnde denuo differentia Meridianorum reſultat $7^h.35'.34''$. Ab eadem vero Immerſione ſubtractis tribus reuolutionibus nanciſcimur momentum Immerſionis d. 24. ad Meridianum Pariſinum $8^h.53'.41''$, quod collatum cum Pekinenſi differentiam Meridianorum dat $7^h.35'.12''$.

Obſeruationes ſecundi Satellitis Pekini habitae aeque ac Tabulae correctae Cel. *Wargentini*, tempus reuolutionis Satellitis dant $3^d.13^h.17'.27''$: addita itaque ad Immerſionem Febr. die 28. Pariſiis viſam vna reuolutione, prodit Immerſio Martii die 3 ibidem obſeruanda $6^h.42'.20''$, vnde differentia Meridianorum reſultat $7^h.35'.34''$. Ad eandem Immerſionem additis tribus reuolutionibus, et Immerſione reſultante collata cum Pekinenſi, obſeruata die 10. Martii, differentia Meridianorum prodit $7^h.35'.36''$. Ducta vero in computum Immerſione Stockholmiae et Pekini die 10. Martii obſeruatis, differentia Meridianorum quaeſita prodit $7^h.35'.16''$, ſi ponas Longitudinem Stockholmiae $1^h.2'.52''$ a Meridiano Pariſino numeratam.

Obſeruationes Pekinenſes peractae ſunt tubo 13 pedum, Pariſinenſes autem vtplurimum teleſcopio Gregoriano 4 pedum, et Stockholmienſis tubo 18 aut 20 pedum; quam ob rem mediam ex his

ſeptem

ſeptem determinationibus $7^h. 35'. 30''$ reſultantem $10''$ imo et pluribus augendam, et Longitudinem Domus Ieſuitarum Gallorum a Meridiano Pariſino numeratam, non minorem $7^h. 35'. 46''$ ſtatuendam eſſe, palam eſt.

INVESTIGATIO

Parallaxeos Solis ex obſeruatione Pekini habita, cum aliis collata.

Obſeruatorii, vbi obſeruatio Veneris peracta eſt, ſtabilita Longitudine, quam fieri poteſt accuratiſſime, computandus imprimis erat effectus parallaxeos pro obſeruatore Pekini locato, quem aſſumtis iisdem, quibus ſupra vſus ſum elementis, reperi $5'. 12''. 3$: tot nempe minutis temporis obſeruatori Pekinenſi citius contactus internus apparere debuit, prae contactu ex centro Telluris ſpectato. Et cum pro obſeruatore Selenginskenſi effectus parallaxeos inuentus fuerit $5'. 6''. 7$: differentia Meridianorum obſeruatorii Pekinenſis et Selenginskenſis ex ipſa obſeruatione Veneris prodit $38'. 28''$. Obſeruatio ergo Veneris poſtulat, vt vel Longitudo Domus Ieſuitarum Gallorum ſtatuatur $7^h. 35'. 43''$, vel Longitudo Vrbis Selenginsk ſupra inuenta $7^h. 57'. 14''$ augeatur $4''$ temporis.

Inte-

Interea ſpectatis Longitudinibus Pekini $7^h.35'.46''$ et Selenginski $6^h.57'.14''$ vt veris, vel ſaltem vero proximis, Vpſaliae $1^h.1'.12''$, Stockholmiae $1^h.2'.52''$, Torneae $1^h.27'.49''$, Caianeburgi $1^h.41'.40''$, Tobolii $4^h.23'.51''$, et Göttingae $30'.16''$, aliorum autem locorum iisdem manentibus, quales ſupra exhibita ſunt: parallaxin Solis horizontalem, quanta prodit ex obſeruationibus ad Caput Bonae Spei, Pekini et Selenginski habitis, cum aliis collatis, ſequenti atque vna Tabella complexus ſum.

Nomina Locorum	Parallaxis Solis horizontalis reſultans comparatione obſeruationis habitae.			
	ad Cap. B. S.	Pekini	Selenginski	in Inſ. Rodr.
Rodrigues	5''. 42 : :			
Pekin	8. 39			9''. 39
Selenginsk	8. 34			9. 49
Tobolsk	8. 51	7''. 73 :	7. 34 : :	9. 92
Tornea	8. 40	8. 43	8. 13	9. 95
Caianeburg	8. 50	8. 05	7. 75 : :	10. 13
Vpſala	8. 45	8. 17	8. 00	10. 26
Stockholm	8. 20	8. 96	8. 76	9. 88
Göttinga	8. 30	8. 57	8. 42	10. 48
Grenouicum	8. 43	8. 35	8. 17	10. 76
Pariſii	8. 32	8. 53	8. 37	10. 74
Bononia	8. 36	8. 44	8. 30	11. 00
Roma	8. 39	8. 46	8. 27	11. 35

Exclusis determinationibus, quae signis notatae sunt, praesertim quod discrepantiae earum a reliquis rationem indicare valemus, nanciscimur mediam ex secunda columna parallaxin $8''.38$, ex tertia $8''.49$, et ex quarta denique $8''.32$. Quodsi itaque obseruatio Domini *Pingre* non refragaretur, medium omnium $8''.39$ pro vera quantitate parallaxeos Solis assumere possemus.

Cuinam autem determinationi, vtrum *Pingreanae* an huic, maior fides habenda sit, eius rei iudicium viris defero, qui insigni Astronomiae scientia exercitatione longa firmata, meritisque in artem nostram publicis summorum Astronomorum commeruere titulum. Longitudinem autem Stockholmiae maiorem $1^h.2'.52''$ statui non posse, nouissimae obseruationes Cel. *Wargentinum* docuere: consensus itaque ille, quem Cel. *Pingre*, posita Longitudine Stockholmiae $1^h.3'.13''$ obtinet, obseruationem eius ab omni dubio vindicare non videtur.

ECLI-

ECLIPSIS SOLIS INSIGNIS

D. 1. APRIL AN. 1764. STYL. NOV. TEMP. CIV. OBSERVATIO LIPSIAE HABITA.

Auctore

G. HEINSIO.

Momenta tantum potiora huius Eclipſis annotare mihi licuit. Aduerſa ſcilicet tunc valetudo obſeruationem domi peragendam exigebat; inde factum eſt, vt ob nimiam Solis ſuper horizonte altitudinem vſus ſolummodo Tubi aſtronomici 6. ped. (cuius deſcriptionem in Tom. VI. Comment. Nov. p. 550. tradidi), et machinae alicuius helioſcopicae, concederetur. Per Tubum iſtum, optimae notae, Solem immediate contemplatus ſum, vt momenta initii et finis acquirerem, quae etiam fauente coelo, quoad ipſum Solis et Lunae contactum, tanta exactitudine conſecutus ſum, quantum in eiusmodi obſeruationibus, alio tempore habitis, vix vnquam aſſequi mihi licuit. Machinam helioſcopicam, quae in vitro ſemipellucido imaginem Solis ſub magnitudine 4. digit. $2\frac{2}{3}$ lin. menſurae Paris. duodecimal. ſecundum diametrum

 depin-

depinxit, eum praefertim in finem adhibui, vt tempore obfcurationis maximae rationem latitudinis partis lucidae ad diametrum imaginis folaris, ope circini et fcalae geometricae, determinare valerem. Maxima coeli ferenitas, per plures dies continua, obferuationem optime iuuabat; quae etiam explorationem ftatus duorum horologiorum ofcillatoriorum refpectu temporis veri, ope altitudinum Solis refpondentium, bene conceffit. Contigit autem d. 1. April.

	tempore vero
Initium	$10^h. 6'. 32''$ ante meridiem
Finis	1. 5. 54 poft meridiem.

In obfcuratione maxima ratio diametri Solis ad latitudinem partis lucidae deprehenfa eft $= 364 : 57$. ex qua *quantitas Eclipfis* emergit $=$ 10. digit. 8. min. ecliptic. Circa obfcurationem maximam in machina heliofcopica fedulo inquifiui, an forfan difcus Solaris augeretur, cum eiusmodi augmentum in Eclipfi Solis an. 1748. d. 24. Iulii obferuatum fuit; aft nullum huius rei veftigium deprehendi, fiquidem diameter imaginis Solaris tunc tanta inventa eft, quanta fuit ante eclipfin.

AD

AD OBSERVATIONEM Eclipſis Solis d. 1. Apr. ſt. n. temp. ciuil. 1764. Lipſiae peractam Additamentum.

Potiora tantum phaenomena huius Eclipſis nuper indicaui, et ex obſeruationibus, ope machinae helioſcopicae memoratae, factis eam ſolummodo exhibui, quae quantitatem Eclipſis manifeſtauit. Cum autem plures aliae obſeruationes eadem machina inſtitutae fuerint, quae pleniorem Eclipſis cognitionem praebere, et variis methodis pro deductionibus formandis inſeruire poſſint; expediet, eas hic in medium proferre, et, ad concluſiones formandas, aptas reddere.

Aduerſa valetudo vſum huius machinae portatilis ſuaſerat, qui pro domicilii conditione, ob nimiam Solis tempore Eclipſis altitudinem, moleſtus fuiſſet, niſi machinae ſitum immotum, durante aliqua obſeruatione, conciliaſſem. Firmata igitur machina, imaginem Solis in vitro ſemipellucido leniter motam proſequi, et ope circini ſcalaeque geometricae, partim *diſtantiam cornuum* vel *chordam defectus*, partim latitudinem maximam portionis diſci Solaris non obſcuratae (quam *partem lucidam* vocabo) in electa Eclipſis phaſi metiri licuit, pro eo, vt haec vel illa operatio certior videretur.

Vt autem hae phasium dimensiones comparari possent cum diametro dictae imaginis Solaris; ante eclipsin ea solicite et repetitis operationibus per partes eiusdem scalae geometricae mensurata, et consensu exoptato = 365. partibus dictae scalae deprehensa fuit. Tabula sequens obseruationum seriem manifestat.

Ordo obseruationum	Tempus verum d. 1. Apr. temp. civ. an. 1764.	Distantia cornuum	Pars lucida
	ante meridiem	in partibus scalae	
Initium	$10^h. 6'. 58''$	——	——
1	— 11. 3	115	——
2	— 12. 36	137	——
3	— 14. 13	151	——
4	— 15. 58	160	——
5	— 17. 37	——	319
6	— 19. 27	185	——
7	— 21. 29	——	296
8	— 24. 34	218	——
9	— 26. 24	——	283
10	— 30. 0	245	——
11	— 32. 24	——	259
12	— 38. 46	278	——
13	— 40. 41	——	225
14	— 47. 22	——	202
15	— 58. 24	——	163

Ordo

Ordo obſeruationum	Tempus verum d. 1. Apr. temp. civ. an. 1764.	Diſtantia cornuum	Pars lucida
	ante meridiem	in partibus ſcalae	
16	11^h. 1'. 3''	——	151
17	— 3. 46	327	——
18	— 7. 43	——	128
19	— 11. 59	——	111
20	— 14. 30	——	105
21	— 17. 0	——	97
22	— 20. 52	——	83
23	— 26. 17	——	64
24	— 28. 44	——	58
25	— 32. 26	——	57
26	— 37. 12	——	57
27	— 40. 48	——	63
28	— 54. 23	——	99
29	— 58. 18	——	110
	poſt meridiem		
30	0^h. 1'. 25''	——	124
31	— 9. 34	——	148
32	— 15. 11	——	174
33	— 21. 38	——	198
34	— 24. 33	295	——
35	— 26. 21	——	212

Ordo

Ordo obſeruationum	Temdus verum d. 1. Apr. temp. civ. an. 1764.			Diſtantia cornuum	Pars lucida
	poſt meridiem			in partibus ſcalae	
36	—	32′.	39″	——	235
37	—	33.	49	267	——
38	—	42.	41	——	276
39	—	43.	51	229	——
40	—	45.	24	——	283
41	—	49.	15	207	——
42	—	50.	25	198	——
43	—	51.	27	189	——
44	—	52.	44	186	——
45	—	54.	6	171	——
46	—	55.	17	165	——
47	—	57.	21	155	——
48	—	59.	3	135	——
49	1^h.	0.	5	126	——
50	—	1.	45	109	——
Finis	—	5.	31	——	——

Circa obſcurationem maximam, cum luna fere tota intra imaginem Solarem in machina helioſcopica appareret, *diameter lunae*, repetito examine, ope circini inuenta eſt $=340$. part. ſcalae ante memoratae.

Nunc ad deductiones quasdam progredior, eum praeſertim in finem inſtituendas, vt innoteſcat, quan-

quantum methodo obſeruandi indicatae, pro vſu futuro, fidere liceat. Primum autem ſtatim patet, momenta initii et finis Eclipſis ope machinae helioſc. a Socio annotata tantum rigorem non prae ſe ferre, quantum immediata per Tubum 6. ped. obſeruatio docuit. Initium nempe ſerius in machina contigit, quam in Tubo; finis autem citius ibi, quam hic. Aſt diſcrimen hoc mirum videri nequit, ſi expendatur, quam exacte Tubus momenta iſta patefecerit; cum e contrario conditio repraeſentationis in machina initium tunc demum ſenſui ſubiicere potuerit, poſtquam luna limbum imaginis Solaris iam nonnihil penetraſſet; finem autem indicaverit, cum adhuc limbus lunae cum margine imaginis Solaris confunderetur.

Interim, ſi ex momentis initii et finis, ſumendo inter ea numerum medium arithmetice proportionalem, *tempus obſcurationis maximae* definias, ſub hypotheſi nempe, ſemitam centri lunae apparentem per diſcum Solis rectilineam, et diametrum lunae apparentem durante Eclipſi ad ſenſum conſtantis magnitudinis haberi poſſe; conſenſum exoptatum deprehendes, ſiue obſeruationes per Tubum ſiue per machinam adhibeas. Scilicet ope

	Tubi 6. ped.	machinae
Initium	$10^h. 6'. 32''$	$10^h. 6'. 58''$
Finis	1. 5. 54	1. 5. 32
Tempus obſcur. max.	11. 36. 13	11. 36. $14\frac{1}{2}$

Si dicta hypothesis non arrideat pro determinatione temporis obscurationis maximae; hoc nonnihil propius cognosci poterit ex obseruatis ope machinae partibus lucidis in vicinia obscurationis maximae. Cum enim tunc pars semitae centri lunae (reuera curuae) certiori modo pro recta, et diameter lunae constantis magnitudinis assumi possint; ex partibus lucidis ante et post obscurationem maximam aequalibus, attendendo tempora adscripta et inter haec medium arithmetice proportionale capiendo, tempus obscurationis maximae inuenietur. Si partes eiusmodi lucidae non occurrant aequales (vt plerumque fieri solet); ad electam partem lucidam ex vno latere obscurationis maximae ope interpolationis quaeri potest respondens aequalis ex altero latere vna cum tempore, quod huic conuenit, vt nunc methodo praecedenti tempus obscur. max. innotescat. Hoc modo obtinui

ex obseru.	Tempus obscur. max.
31.16.18	$11^h.35'\ 44\frac{1}{2}''$
30.18.19	11. 35. 9
29 19.20	11. 35. 21
28.20.21	11. 35. 23
medium	11. 35. 24.

quod 49″. propius habetur, ac istud $11^h.36'.13''$ ex initio et fine definitum. Cauendum in eiusmodi deductionibus, ne partes lucidae aequales nimis

vici-

vicinae ad obſcurationem maximam accipiantur, cum lenta tunc earum mutatio aberrationem notabiliorem producere valeat.

Methodum nunc exponam, qua ex tribus partibus lucidis, quomodocunque inaequalibus, itidem tamen et ob eandem rationem in vicinia obſcurationis maximae ſumtis vna cum temporibus adſcriptis, non ſolum diſtantia centrorum Solis et lunae minima, verum etiam tempus obſcurationis maximae definiri poſſit; quae methodus et interpolationem excludet, et, mutatis mutandis, in aliis quoque obſeruationibus frequenter vſui erit. Cognitae primum requiruntur diametri Solis et lunae in iisdem ſcalae partibus, in quibus partes lucidae exhibentur. Obſeruatio immediata eas docuit, Solis nempe $= 365$, lunae $= 340$ part. ſcalae, ideoque ſemidiametrum Solis $= 182,5$. lunae $= 170$. Ex his deinde et ex parte lucida data inueniri debet diſtantia centrorum Solis et lunae, ad idem tempus referenda, quod parti lucidae conuenit. Hunc in finem repraeſentet EAB peripheriam diſci Solaris, centri C radii CE. In L ſit centrum peripheriae diſci lunaris AGB, priorem in A, B, ſecantis, vt figura AFBH partem Solis obſcuratam exponat, recta AB vero chordam defectus. Iuncta ſint centra C, L, recta CL, quae erit diſtantia centrorum Solis et lunae, et protracta in E partem lucidam Tab. XVII. Fig. 1.

EF indicabit. Facile iam patet, esse CL = FL + EF − CE, seu dictam distantiam haberi ex summa semidiametri lunae (FL) et partis lucidae (EF) demta semidiametro Solis (CE). Taceo eiusmodi centrorum distantiam ex chorda defectus quoque et ex semidiametris Solis et lunae posse reperiri, si e re visum fuerit.

Problema nunc soluendum: *Datis tribus centrorum Solis et lunae distantiis cum temporum respondentium interuallis; inuenire distantiam centrorum minimam.* Statuatur ergo centrum Solis in M, et OPQ sit traiectoria centri lunae, in vicinia obscurationis maximae pro rectilinea habenda. Ad data tempora, ad quae distantiae centrorum inuentae sunt, ponatur centrum lunae fuisse successiue in O, P, Q, vt MO, MP, MQ dictas distantias exhibeant. Ex temporibus, quibus centrum lunae loca, O, P, Q, occupauit, dabuntur tempora motus lunae per OP, OQ, quae ergo (cum motus vniformis spectari possit) rationem spatiorum OP, OQ, a luna interim percursorum manifestabunt. Ex M in OQ demissa sit perpendicularis MN, quae distantiam centrorum minimam exponet. Solutio problematis igitur huc redit, vt ex datis MO, MP, MQ, magnitudine, et ratione OP:OQ, inueniantur primum OQ, deinde MN, magnitudine in iisdem partibus scalae, in quibus dantur centrorum distantiae.

Tab. XVII. Fig. 2.

Ex

Ex trigonometricis ſuppono, quod, poſito ſinu toto $= R$, ſit

in triang. OMQ $\qquad \cos. O = R \times \frac{MO^2 + OQ^2 - MQ^2}{2 \times MO \times OQ}$

et ſimiliter

in triang. OMP $\qquad \cos. O = R \times \frac{MO^2 + OP^2 - MP^2}{2 \times MO \times OP}$

$$\begin{aligned} \text{Sint } MO &= a \\ MP &= b \\ MQ &= c \\ \text{ratio } OP : OQ &= n : m \\ OQ &= x \\ \text{ideoque } OP &= \tfrac{nx}{m}. \end{aligned}$$

Habebitur ergo ex duplici ipſius coſ. O valore ſequens aequatio

$$R \times \frac{a^2 + x^2 - c^2}{2ax} = R \times \frac{a^2 + \frac{n^2 x^2}{m^2} - b^2}{\frac{2anx}{m}}$$

quae rite transformata producet

$$\begin{aligned} x^2 &= \tfrac{m}{n} \times \left(a^2 + \tfrac{nc^2 - mb^2}{m - n}\right) \\ &= \tfrac{m}{n} \times \left(a^2 + \tfrac{nc}{m-n} \times c - \tfrac{mb}{m-n} \times b\right) \\ &= \tfrac{m}{n} \times \left(a^2 + f^2 - g^2\right) \end{aligned}$$

ſi breuitatis cauſa ponantur

$$f^2 = \tfrac{nc}{m-n} \times c \qquad g^2 = \tfrac{mb}{m-n} \times b$$

Sic dabitur x ſeu OQ.

Fiat nunc

$$OQ : MO + MQ = MO - MQ : ON - NQ$$

vt $ON - NQ$ innoteſcat. Si enim $\frac{1}{2}(ON - NQ)$ addatur ad $\frac{1}{2}OQ$ ſiue $\frac{1}{2}(ON + NQ)$ inuenietur ON et tandem $MN = \sqrt{MO^2 - ON^2}$.

Exemplum illuſtrationem ſuppeditabit. In obſeruationibus, 16, 21, 29, reſpondent

Tab. XVII. Fig. 1. 2.

locis lunae	tempora	EF	ideoque CL
in O	$11^h. 1'. 3''$	151	138,5
P	11. 17. 0	97	84,5
Q	11. 58. 18	110	97,5

ſiquidem $CL = FL + EF - EC$, et $FL = 170$, $EC = 182,5$ ſemidiametri nempe lunae et Solis.

Tempus motus per $OP = 15'. 57'' = 957''$

- - - - - - $OQ = 57. 15 = 3435$

$$OP : OQ = 957 : 3435 = n : m$$

itaque $m = 3435$

$n = 957$

$m - n = 2478$

$MO(CL) = a = 138,5$

$MP = b = 84,5$

$MQ = c = 97,5$

log.

$$\log. n(957) = 2,9809119$$
$$\log. c(97,5) = 1,9890046$$

$$4,9699165$$
$$\log.(m-n)(2478) = 3,3941013$$

$$\log. \frac{nc}{m-c} = 1,5758152$$
$$\log. c = 1,9890046$$

$$\log. f^2 = 3,5648198$$
$$f^2 = 3671,30$$
$$\log. m(3435) = 3,5359267$$
$$\log. b(84,5) = 1,9268567$$

$$5,4627834$$
$$\log.(m-n) = 3,3941013$$

$$\log. \frac{mb}{m-n} = 2,0686821$$
$$\log. b = 1,9268567$$

$$\log. g^2 = 3,9955388$$
$$g^2 = 9897,80$$
$$f^2 = 3671,30$$

$$f^2 - g^2 = -6226,50$$
$$a^2(138,5^2) = +19182,25$$

$$a^2 + f^2 - g^2 = 12955,75$$

log.

$$
\begin{array}{rl}
\log.\ (a^2+f^2-g^2) & =4,1124625 \\
\log.\ m & =3,5359267 \\
\hline
 & 7,6483892 \\
\log.\ n & =2,9809119 \\
\hline
\log.\ x^2 & =4,6674773 \\
\log.\ x & =2,3337386 \\
x \text{ vel } OQ & =215,6 \\
MO+MQ & =236,0 \\
MO-MQ & =\ \ 41,0 \\
\log.\ 236,0 & =2,3729120 \\
\log.\ \ 41,0 & =1,6127839 \\
\hline
 & 3,9856959 \\
\log.\ 215,6 & =2,3336488 \\
\hline
\log.\ (ON-NQ) & =1,6520471 \\
ON-NQ & =\ \ 44,9 \\
\frac{1}{2}(ON-NQ) & =\ \ 22,4 \\
\frac{1}{2}OQ & =107,8 \\
\hline
ON & =130,2 \\
MO^2(138,5^2) & =19182,25 \\
ON^2 & =16952,04 \\
\hline
MN^2 & =2230,21 \\
MN & =\ \ 47,2.
\end{array}
$$

Definita centrorum diſtantia minima MN, cum puncto N, traiectoriae lunaris OQ, reſpondeat obſcuratio

ratio maxima, huius tempus inueniri poterit, si ex datis OQ, ON, et tempore motus centri lunae per OQ, quaeratur tempus per ON, quod comparatum cum temporis momento, quo centrum lunae fuit in O, *Tempus obscurationis maximae* manifestabit. Sic in exemplo praec. habentur

$$OQ = 215,6$$
$$ON = 130,2$$
$$\text{temp. per } OQ = 3435''$$

Analogia ergo

$$OQ : ON = \text{temp. per } OQ : \text{temp. per } ON$$

producet temp. per $ON = 2074'' = 0^h.34'.34''$.
vnde cum tempus, quo centrum
lunae fuit in O $= 11^h.\ 1.\ 3.$

erit tempus obscurationis max. $= 11.\ 35.\ 37.$

Simili modo ex obseruationibus 19, 28, 31, definiui

$$OQ = 210,4$$
$$ON = 84,6$$
$$MN = 50,3$$
$$\text{temp. obscur. max.} = 11^h.35'.8''.$$

Si inter hoc et istud $= 11^h.35'.37''$ in praec. deductione inuentum capiatur medium $= 11^h.35'.22\frac{1}{2}''$, hoc cum eo $= 11^h.35'.24''$ quod supra comparatio partium lucidarum aequalium docuit, bene conuenit.

Quoniam tempus obſcurationis maximae in Tabula obſeruationum ſuperiori inter obſeruationes 25 et 26. cadit, vtraque partem lucidam = 57. part. ſcalae notante; recte ſumi poteſt numerus 57. pro parte lucida minima in obſcuratione maxima, ex qua diſtantia centrorum minima habetur = 44, 5 part. ſcalae. Haec obſeruationi immediatae reſpondens nonnihil minor deprehenditur iis, 47, 2; 50, 3; quas calculus expoſitus produxit.

Ex iis, quae hactenus pertractata ſunt, elucet, obſeruationes ope machinae helioſcopicae factas ſubminiſtrare concluſiones ſufficienter inter ſe conuenientes, ita, vt, ſi ſors aliter non ferat, dicta machina in obſeruationibus Eclipſium Solarium commode vti liceat. Methodus autem, ex tribus centrorum diſtantiis, notatis ſimul ad eas temporibus reſpondentibus, in congreſſu alicuius corporis coeleſtis cum alio, vniuerſalitate ſua ſe commendat, et in Tranſitu Veneris vel Mercurii per Solem, lunae ad fixam vel planetam, planetae ad fixam vel alium planetam etc. exoptato ſucceſſu adhiberi poteſt, ſi ope micrometri bonae notae (v. c. obiectiui) diſtantiae centrorum, vel mediate (capiendo limborum ſibi viciniſſimorum diſtantias), vel immediate, ſolicite definiantur.

Monendum adhuc, in methodo iam nominata, pro eclipſi Solis ope machinae obſeruata, cognitam requi-

requiri diametrum lunae in iisdem ſcalae partibus, in quibus reliquae dimenſiones indicantur, quam quidem in noſtra Eclipſi circa obſcurationem maximam immediata obſeruatio conceſſit. Cum autem in aliis Eclipſibus rariſſime immediata eiusmodi dimenſio locum habeat, ideoque alia methodo lunae diameter quaeri debeat; periculum iſtius facere conſtitueram, vt ex comparatione huius methodi cum immediata obſeruatione innoteſceret, quid de ea, nunc tradenda, in aliis eclipſibus ſperare liceret. Facile autem patet, ſi ad idem temporis momentum darentur AB (chorda defectus), EF (pars lucida), vna cum radio imaginis Solaris EC; diametrum lunae FG detegi poſſe, protracta ſcilicet CL in G et E. Iungatur nempe radius Solis CB, ex quo et DB ſeu $\frac{1}{2}$ AB dabitur $CD = \sqrt{CB^2 - DB^2}$. Ex CD, EC, EF, habebitur $FD = CD + EC - EF$, ideoque DG ex analogia $FD : BD = DB : DG$. Tandem $FD + DG$ manifeſtabit diametrum lunae FG quaeſitum. Si nunc Tabulam obſeruationum conſulas; ad notatum tempus ex immediata obſervatione chordam defectus quidem cognoſces; aſt ad idem temporis momentum pars lucida immediata non datur, cum chordae defectus et partes lucidae alternis tantum vicibus obſeruari potuerint. Interpolatione igitur opus eſt inter partes lucidas, quarum tempora adſcripta includunt tempus obſeruatae chordae defectus, vt ad idem tempus, quo diſtan- Tab. XVII. Fig. 1.

 tia

tia cornuum explorata est, pars lucida quoque innotescat. Adhibitis variarum obseruarionum numeris successum exoptatum non deprehendi, dissensu notabili inter determinationes diametrum lunae respicientes emergente, ita, vt eiusmodi conclusionibus non satis fidere liceat, sed consultius sit, diametrum lunae eo in casu, quo immediata eius dimensio non conceditur, ex calculo petere, eamque, ob repraesentationem disci lunaris in fundo lucido, parte aliqua minuere, quam in nostra eclipsi pro mea machina 6. secund. circuli maximi cognoui.

OBSER-

OBSERVATIONES ALIQVOT COELESTES ANN. 1765 ET 1766. LIPSIAE HABITAE.

Auctore

G. HEINSIO.

Transitus lunae per Pleiades an. 1765. d. 13. Iulii styl. nov. temp. ciuil. horis matutinis.

Post horam secundam matutinam, coelo sereno, lunam ad culmen aedificii oppositi in orientali coeli plaga in conspectum meum venientem per Tubum astronomicum 3. ped. statim contemplatus sum, vt situm eius inter Pleiades diiudicare possem. Luna, vltra tres dies Quadraturam secundam transgressa, phasin corniculatam exhibebat, parte eius non illuminata lumine debili etiam instructa. Deprehendi autem lunam circa $2\frac{3}{4}$ hor. margine sua lucida in vicinia *Lucidae Pleiadum*, ita, vt occultationem eius ad limbum lucidum futuram suspicarer; licet euentus transitum tantummodo propinquum docuerit. Egregius erat lunae cum fixis Pleiadum praecipuis adspectus per dictum Tubum, quamuis lumen crepuſculi matutini iam dum tam forte eſſet, vt lectioni ſcripti ſufficeret. Vt iam acceſſum lunae lucida ſua margine ad Lucidam Pleiadum certiori modo obſeruare poſſem, Tubum Gregorianum adhibui ſub apparatu, quo iſte obiecta ſecundum diametrum 52. vicibus augere ſolet. Dum autem luna cuſpide ſua inferiori (ſitu erecto) continuo appropinquaret ad Lucidam Pleiadum; inopinato ad marginem lunae obſcuram in vicinia iſtius cuſpidis, hor. 2. 54′. 13″. temp. veri, emergebat ſtellula, de quo emerſionis tempore intra 4 vel 5. ſecunda temporis certus ſum. Stellula haec in vicinia Lucidae Pleiadum conſtituitur, inſignita a *Flamſteedio* in Catalogo Britannico littera *p*, qui eam ſeptimae magnitudinis notat. Redeo ad Lucidam Pleiadum. Huius coniunctio cum cuſpide inferiori lunae tandem contigit, $2^h. 56'. 53''$. temp. veri, per dictum Tubum Gregorianum, quod momentum etiam intra 5. ſecund. certum iudico. Coniunctionem autem nomino conditionem, qua recta ſtellam et cuſpidem inferiorem iungens perpendicularis aeſtimata fuit ad marginem lunae proximam. Minimam hanc diſtantiam oculorum iudicio comparatam cum macula lunari, Grimaldus dicta, habita ratione diametri lunae apparentis, collegi aequalem vni minuto circuli maximi proxime. Figura 1. ſitu erecto delineata exponit circiter locum ſtellulae emergentis ad *p*, et $c\eta$ diſtantiam minimam Luci-

Tab. XVII. Fig. 3.

dae

dae Pleiadum η a cuſpide inferiori *c* in coniunctione. Non multo poſt obſeruatam coniunctionem conſpectum lunae eripiebat aedificium oppoſitum, qui, licet denuo rediret, obſeruationem tamen vlteriorem non admiſit, extinctis ſcilicet interea a lumine crepuſculi, nunc nimis forti, Pleiadum ſtellis. Exploratio ſtatus horologii oſcillatorii, in obſeruationibus adhibiti, reſpectu temporis veri facta eſt ope altitudinum Solis reſpondentium diebus, 13, 14, Iulii coelo ſereno captarum.

Eclipſis Solis partialis d. 16. Auguſt ſtyl. nov. 1765. temp. ciuil. horis pomeridianis.

Nubes licet copioſae exiguam ſpem, Eclipſin videndi, relinquerent; feliciter tamen factum eſt, vt, appropinquante Eclipſis initio, Sol per hiatus nubium bene interdum cerneretur. Adhibito igitur Tubo Aſtronomico 6. ped., cuius deſcriptionem in Tom. VI. Nou. Commentar. p. 550. dedi, Solem diligenter contemplatus ſum, et tandem ingreſſum lunae in diſcum Solis, per nubes tenues tranſlucentis, feliciter deprehendi. Scilicet $4^h.29'.15''$. temp. veri lunam, Solis marginem penetrare incipientem, primum conſpexi; et facile concedebatur aeſtimium, limborum Solis et lunae contactum verum

rum vix 5. ſec. temporis momentum notatum praeceſſiſſe, ita, vt a veritate parum vel nihil aberrare credam, ſi *Initium Eclipſis* $4^h.29'.10''$. temp. veri factum eſſe ponam. Minutum primum temporis poſt, Eclipſis incrementum iam ſenſibile ceperat; tunc autem nubes ſpiſſae et continuae Solem occultabant, et vlteriorem obſeruationem prorſus impediebant. Comparatio temporis horologii, in obſeruatione adhibiti, cum tempore vero innotuit ex altitudinibus Solis reſpondentibus d. 17. Auguſt coelo ſereno captis, nec non ex aliis Solis altitudinibus d. 16 et 18. Auguſt, quantum coelum permiſit, ſumtis.

Tranſitus Lunae per Pleiades an. 1766. d. 22. September ſtyl. nov. temp. aſtronom.

Ante quatuor dies et aliquot horas Luna oppoſitionem cum Sole, ſeu Plenilunium, celebrauerat, quam ob rem phaſin valde gibbam oſtendebat, vt cuſpides eius nec bene terminatae apparuerint, nec linea cuſpides iungens ſatis fidenter, quoad poſitionem, diiudicari potuerit. Ex hac circumſtantia facile praeuidere licuit; momenta, quae in Tranſitu Lunae incidentiam lineae cuſpidum, mente extra diſcum protractae, in ſtellas, ſeu coniunctionem

nem harum cum dicta cuspidum linea, concernunt, non satis certa esse futura; id quod etiam euentus postea docuit. Eadem phasis luce sua nimia, coelo sereno, effecit quoque, vt hor. 10., cum luna multum adhuc abesset a Pleiadum stellis, insigniores tantum stellae, in Fig. 2. consignatae, per Tubum astronomicum 3. ped. simul cum luna conspicuae essent; ex quibus tamen aliquae, cum luna magis magisque ad eas appropinquaret, per Tubos etiam maiores postea conspectum fugiebant. Hoc Tubo 3. ped. praesertim vsus sum, vt viam circiter diiudicare possem, quam luna per Pleiadum constellationem secutura esset, et vt series appulsuum lunae ad stellas prope innotesceret. Sic praeparatus, tum aliquot stellarum occultationes, tum aliarum incidentiam in lineam cuspidum attente expectabam. Vt autem ea, quae postea annotaueram, distincte exponere possem; primum ope proiectionis consuetae semitam centri lunae, attendendo scilicet ad parallaxeos effectum, ad stellam *Maiam* eiusque circulum latitudinis, schemate consignaui, adhibitis in eum finem elementis, quae Ephemerides *P. Hell* suppeditabant; cui schemati deinde constellationem insigniorum in Pleiadibus stellarum per differentias longitudinum et latitudinum, ex catalogo Britannico *Flamsteedii* sumtas inserui. Constructum est schema situ erecto pro caua coeli superficie, et in eo exponunt, DE parallelum eclipticae per stel- Tab.XVII. Fig. 4.

lam *Maiam*, FG huius circulum latitudinis, CL ſemitam centri lunae viſam, AB lineam cuſpidum pro centro lunae in C poſito. Litterae ſtellis adſcriptae ſunt eae, quibus pro diſcernendis Pleiadum ſtellis vſus eſt *Flamſteed* p. 3. Catalogi Britannici in Vol. III. Hiſtor. coeleſtis. In maiorem certitudinem expedit ſignis his litteralibus nomina pro ſtellis Pleiadum introducta adiungere, ea quidem, quae *Caſſini* et *Maraldi* in Commentar. Acad. Sc. Paris. ad an. 1708. p. 384. edit. Batav. adhibuerunt, cum quibus etiam (excepta ſtella *Aſterope*) conueniunt et ſigna et nomina a *P. Hell* in Ephem. an. 1766. p. 8. tradita. Sunt nempe

g.	Celeno. magn.	7	*d*.	Merope magn.	5
b.	Electra - -	5	η.	Alcione ſeu Lucida Pleiadum	3
e.	Taigeta - -	5	*f*.	Atlas - -	6
ι.	Maia - -	6	*h*.	Pleione -	7. 8
k.	Aſterope -	6. 7			

Magnitudines ſtellarum apparentes ſecundum *Flamſteed*. l. c. hic additae ſunt. Nunc ad ipſam phaenomenorum enumerationem

An. 1766. *d.* 22.
Septembris ſt. n. *Obſeruationes.*
temp. vero aſtron.

$11^h. 27'. 5''$. In vicinia limbi lunae lucidi diſparebat ſtella *e* ſeu *Taigeta*, cum diſtantia eius

eius a dicto limbo vix 1. vel $1\frac{1}{2}$ suae diametri iudicaretur. Obseruatio facta est per Tubum Gregorianum sub apparatu, quo iste 52. vicibus secundum diametrum obiecta auget. A momento actualis ad limbum *Immersionis* parum aberrabitur, si istud statuatur $11^h.27'.8''$ vel $9''$.

Dudum ante hanc occultationem in Tubo Gregoriano ex oculis eripuit stellam *g* seu *Celeno* sorte lumen lunae ad eam appropinquantis.

$11^h.40'.22''$ vel $32''$. stella *b* seu *Electra* ope Tubi Gregoriani cuspidi lunae inferiori B (situ erecto) proxima aestimata fuit. Propter dubium cuspidis, quae sola in Tubo conspicua erat, terminum, de momento temporis non satis constat; nec distantiam stellae a cuspide minimam, quam paucorum gradus minutorum recordor, certiori modo diiudicare obseruatio sequens, quae instabat, permisit. Scilicet

$11^h.44'.8''$. Contigit occultatio stellae *c* seu *Maiae* a limbo lunae lucido. Per Tubum Gregorianum sub dicto apparatu, cuius ope Immerſionem obſeruabam, ſtellam vsque ad contactum cum limbo lunae lucido proſequi mihi licuit; ita, vt haec occultationis obſeruatio valde certa ſit.

In eodem Tubo ſtellas minores *k*, *l*, in notabili a limbo lunae lucido diſtantia iam extinxerat forte lumen lunae.

$12^h. 17\frac{1}{4}'$. Per Tubum aſtron. 3. ped. ſupra memoratum, iudicabam ſtellae *d* ſeu *Merope* incidentiam in lineam cuſpidum protractam. Ob rationem initio allatam et ſatis magnam ſtellae a luna diſtantiam, haec obſeruatio omni dubio libera non eſt.

$12^h. 33'. 30''$. Emergebat ſtella *e* ſeu *Taigeta* ad limbum lunae obſcurum. Obſeruatio haec peracta eſt ope Tubi aſtron. 6. ped. in Tom. VI. Nov. Commentar. Acad. Petrop. p. 550. deſcripti, eiusque momentum ad ipſum temporis ſecundum certum eſt.

$12^h. 43'$. Circiter Emerſionem ſtellae *c* ſeu *Maiae* accidiſſe ſuſpicabar; per dictum Tubum aſtron. 6. ped. Scilicet inopinato emerſerat ſtella ad limbum lunae

lunae obſcurum, interea, cum recreationi viſus, in attenta Emerſionis praecedentis expectatione, debilitati, nonnihil indulgerem.

$12^h.54'.45''$ vel $50''$. aeſtimaui, per memoratum Tubum aſtron. 6. ped. incidentiam ſtellae η, ſeu *Lucidae Pleiadum*, in lineam cuſpidum productum. Monitum initio allatum et hic attendi debet, ſi de certitudine obſeruationis iudicium ferre velis; error enim aliquot ſecundorum temporis euitari non potuit.

Haec ſunt praecipua Tranſitus lunae per Pleiades momenta, quorum tempus verum optime deducere licuit ex altitudinibus Solis reſpondentibus, diebus 22, 23, 24, Septembris temp. ciuil. ad tria horologia oſcillatoria comparatis, habita debitarum correctionum ratione.

Coronidis loco monere expedit, poſitionem ſtellae *Maiae* inter reliquas Pleiadum ſtellas, quae ex catalogo *P. Hell* l. c. cognoſcitur, notabiliter differre ab ea poſitione, quam catalogi, *Flamſteedii* l. c., *Caſſini* et *Maraldi* l. c. *de la Hire* in Commentar. Acad. Sc. Paris. ad an. 1708. p. 387.

edit. Batav. aſſignant. Scilicet differentia longitudinum *Lucidae Pleiadum* et *Maiae* eſt ſecundum *P. Hell* = 22′. 15″; aſt ſecundum reliquos ex ordine 18′. 37″; 18′. 37″; 18′. 42″.; quoad latitudinum differentiam autem hi autores ſatis inter ſe conueniunt. Obſeruationes in noſtro tranſitu circa *Maiam* habitae, et cum reliquis obſeruationibus comparatae, manifeſte docuerunt, poſitionem *Maiae* ſecundum *P. Hell* errore laborare; e contrario poſitionem iſtius ſecundum reliquos autores propius conſpirare cum obſeruationibus.

OBSER-

OBSERVATIO ECLIPSEOS LVNARIS DIE $\frac{19}{30}$. AVGVST 1765. HABITA IN OBSERVAVORIO IMPERIALI PETROPOLITANO.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKI.

Vt parata omnia forent ad Eclipſin Solis, quae contigit die 5. Aug. coepi altitudines ſolis correſpondentes die 3. Aug. ex quibus meridies vera ad horologium prodiit $12^h.21'.11''$ habita ratione aequationis meridiei $+20''.49'''$. Coelum nubilum impediit, quominus obſeruatio huius phaenomeni inſtitui potuerit; appropinquante tamen Eclipſi Lunae, multoties ac illa ipſa die, in quam Eclipſis Lunae incidit, obſeruabam tranſitum Arcturi per tubum fixum; vnde comperi horologium Aſtronomicum ſpatio diei ſolaris medii conſtanter acceleraſſe $50''\frac{1}{2}$.

Die $\frac{19}{30}$. Aug. Luna in horizontem Petropolitanum prodiit Eclipſi ipſius iam ad finem vergente: ob vapores et lumen crepuſculare plura momenta quam ſequentia obſeruare non licuit.

Temp.

Temp. Hor.	Temp. verum	
$8^h.11'.15''$	$7^h.39'.55''$	Mare Crisium extra vmbram
8. 13. 0	7. 41. 40	Langraenus extra vmbram.
8. 15. 34	7. 44. 14	Limbum Lunae per vmbram conspicio.
8. 17. 40	7. 46. 20	Penumbrae leue vestig. in limbo Lunae.

Obseruatio peracta est tubo trium pedum vmbra satis bene terminata.

Cel. Aepinus obseruationi interfuit, finemque Eclipseos telescopio Gregoriano duorum circiter pedum aestimauit $7^h.44'.20''$. temp. vero.

TRAN-

TRANSITVS VENERIS PER SOLEM A IESVITS TRANQVEBARIAE IN INDIA ORIENTALI OBSERVATVS.

	hor.	min.	sec.
Primus contactus Veneris ad limbum Solis	7.	29.	39.
Immersio totalis - - - -	7.	46.	52.
Differentia temporis inter primum contactum et totalem immersionem -		17.	13.
Initium Emersionis - - -	1.	40.	25.
Emersio totalis - - - -	1.	56.	34.
Tempus durationis Emersionis -		16.	9.
Duratio totius phaenomeni - -	6.	26.	55.

Obseruatio transitus Veneris per Solem instituta in Madrass Indiae Orientalis d. 6. Iun. 1761.

	hor.	min.	sec.
Primus contactus Veneris in discum Solis ante merid. - - - -	7.	28.	28.
Immersio totalis Veneris in disc. Solis	7.	45.	13.

	hor.	min.	sec.
Differentia temporis contactum externum, inter , et totalem immersionem -		16.	45.
Contactus limbi prioris Veneris ad limbum solis, siue initium emersionis post merid.	1.	37.	1.
Emersio totalis - - - -	1.	53.	7.
Tempus durationis exitus Veneris ex disco Solis fuit - - - - - —		16.	6.

NB. Latitudo vrbis Madrass est circiter 13°.8′. et altitudo obseruatorii supra horizontem circiter 40 pedes. Obseruatorium fuit in aedibus Gubernatoris.

	hor.	min.	sec.
Tempus durationis totius phaenomeni -	6.	24.	39.

INDEX

INDEX
COMMENTARIORVM

Mathematica.

Physico-Mathematica.

Phyſica.

Aſtronomica.

pag. 279. linea penultima pro ſore lege fere.
pag. 283. lin. 9. lege fieri pro fierie.
pag. 306. lin. 19. pro corporis lege corporibus.
pag. 307. lin. 17. pro denſitaten lege denſitatem.
pag. 312. lin. 4 et 6. pro fiſuris lege fiſſuris.
pag. 314. lin. 7. pro qui lege quae.
pag. 317. lin. 23. pro dubia lege dubie.
pag. 365. lin. 2. pro Iuii lege Iunii.
pag. 372. lin. 8. pro gradu lege graduum.
pag. 373. lin. 17. pro dies 11. lege 10.
pag. 376. lin. 13. pro 26. lege 25.

Fig. 2.

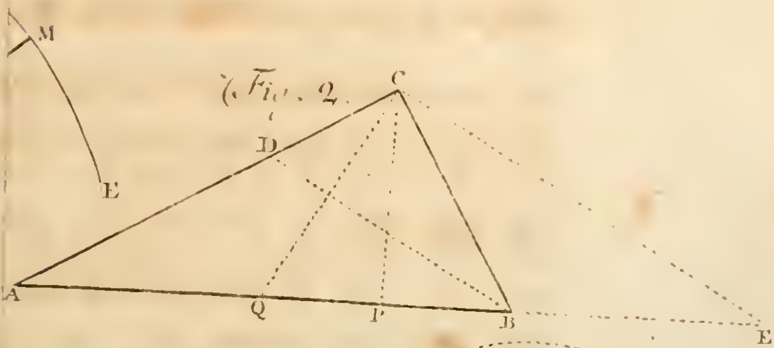


Fig. 3.

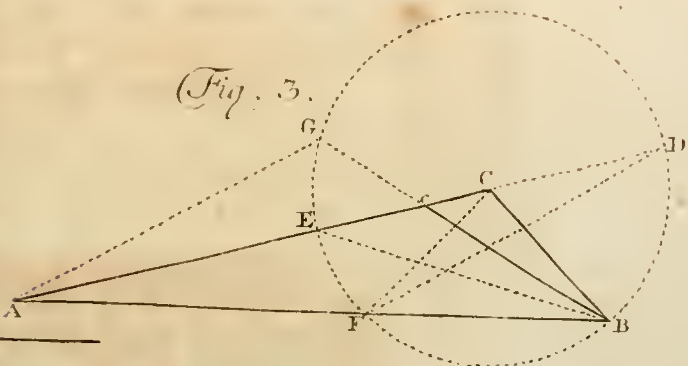
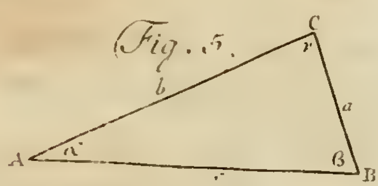


Fig. 5.



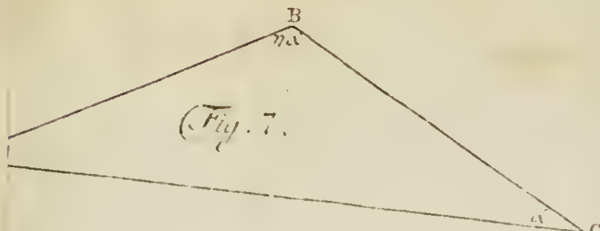


Fig. 7.

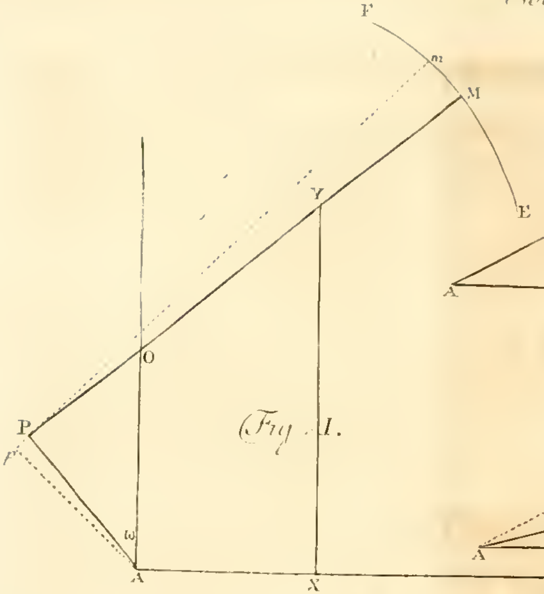


Fig. 1.

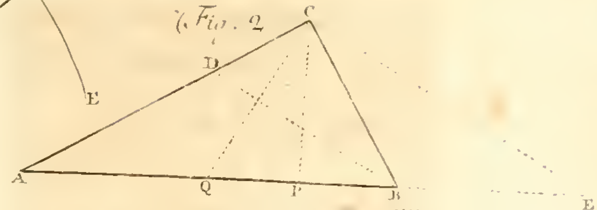


Fig. 2.

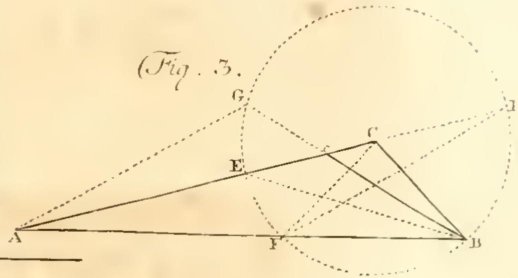


Fig. 3.

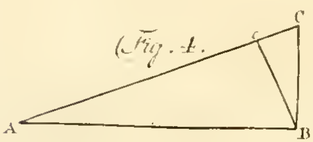


Fig. 4.

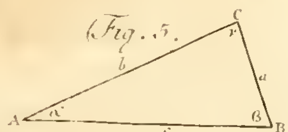


Fig. 5.

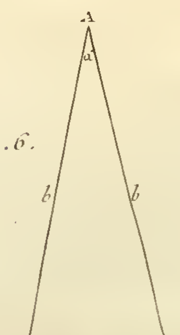


Fig. 6.

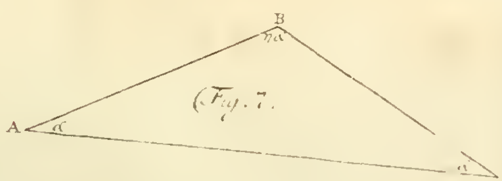


Fig. 7.

Fig. 2.

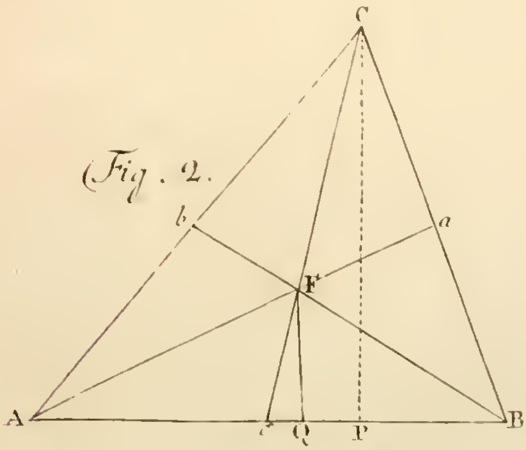


Fig. 4.

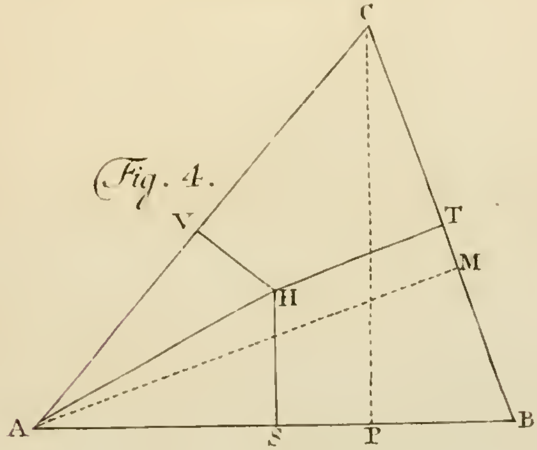


Fig. 6.

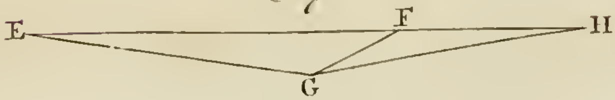


Fig. 7.

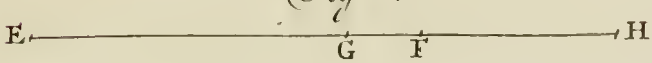


Fig. 1.

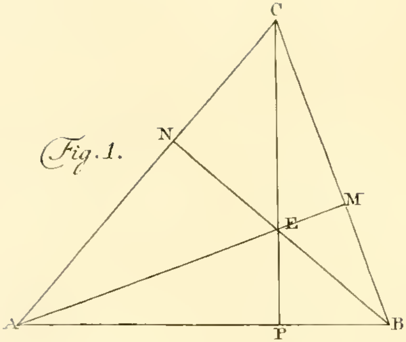


Fig. 2.

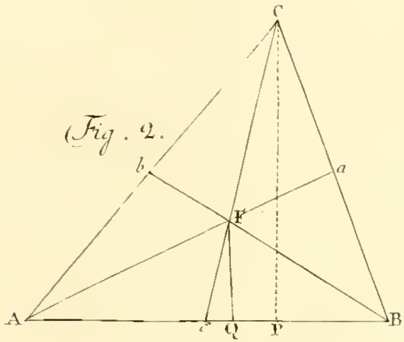


Fig. 3.

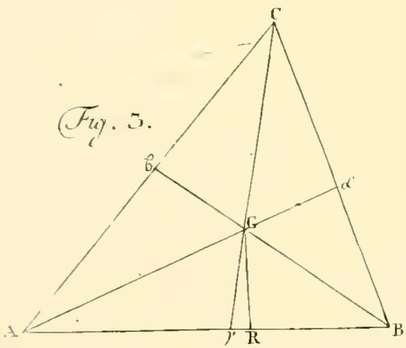


Fig. 4.

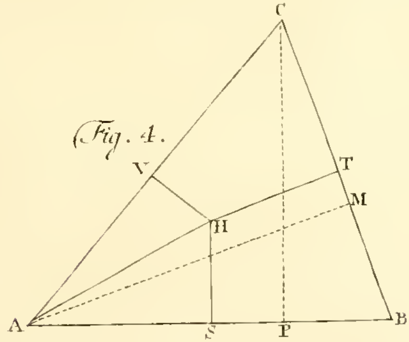


Fig. 5.

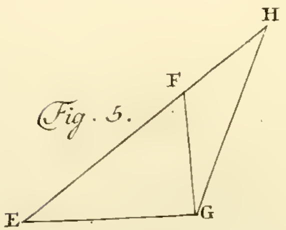


Fig. 6.

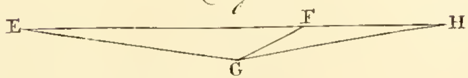


Fig. 7.

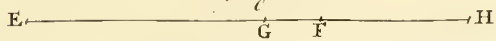


Fig. 8.

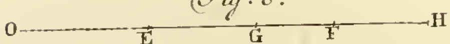
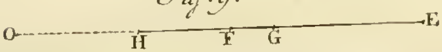
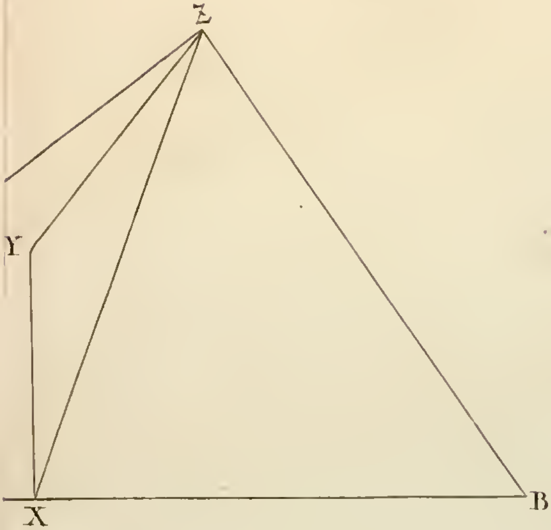


Fig. 9.





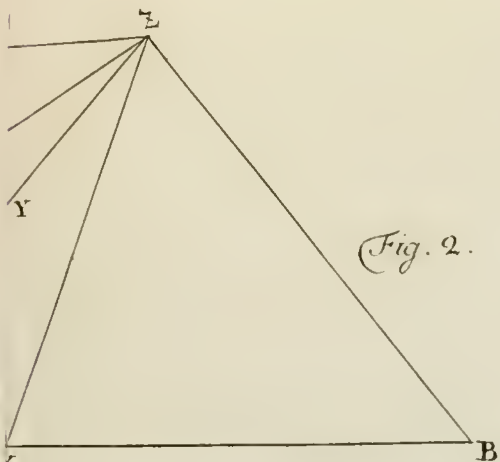
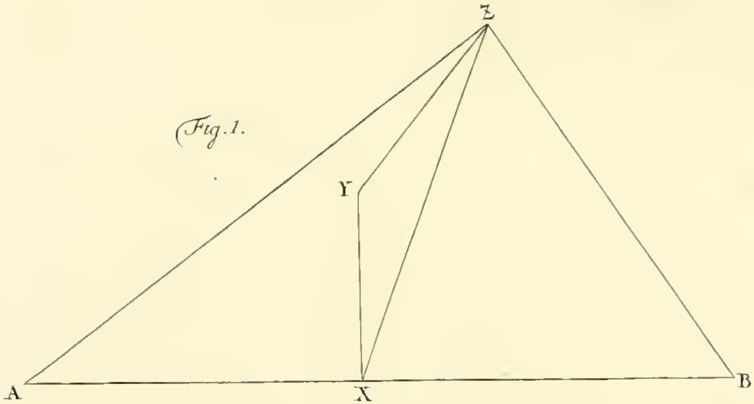


Fig. 2.

Fig. 1.



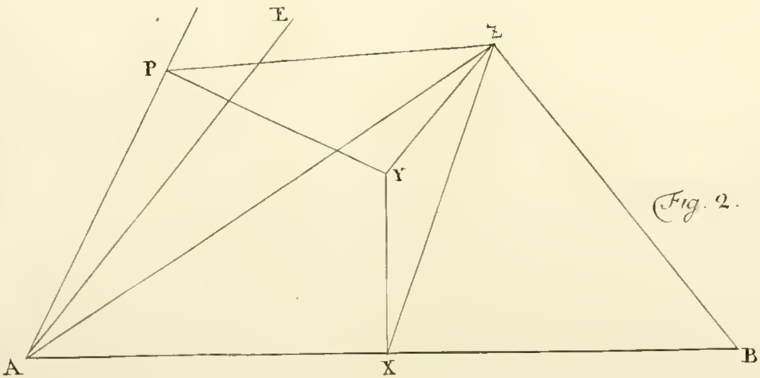


Fig. 2.

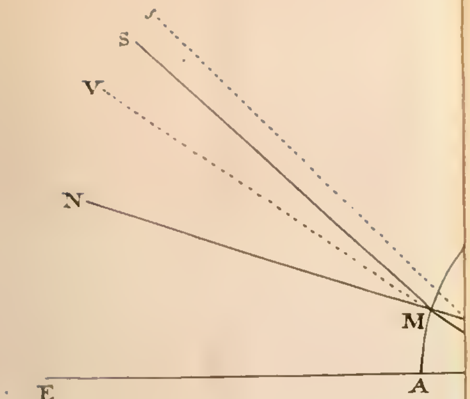
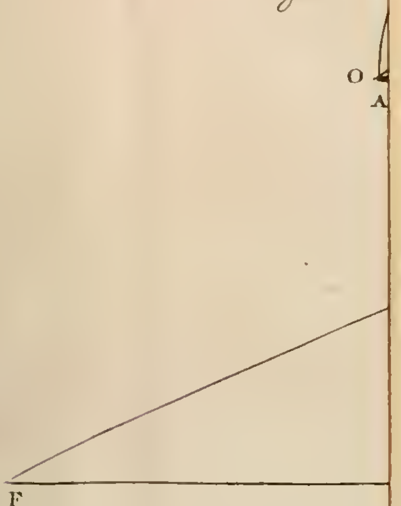


Fig. 2.



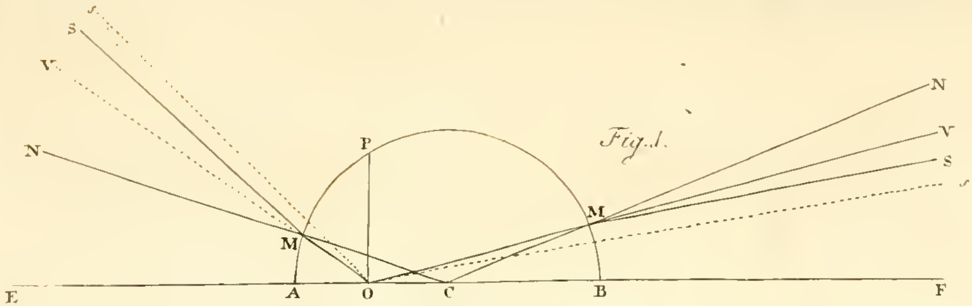
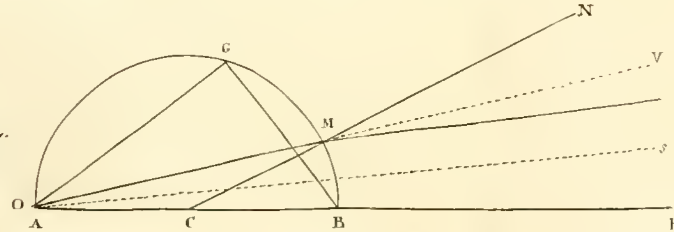


Fig. 1.

Fig. 2.



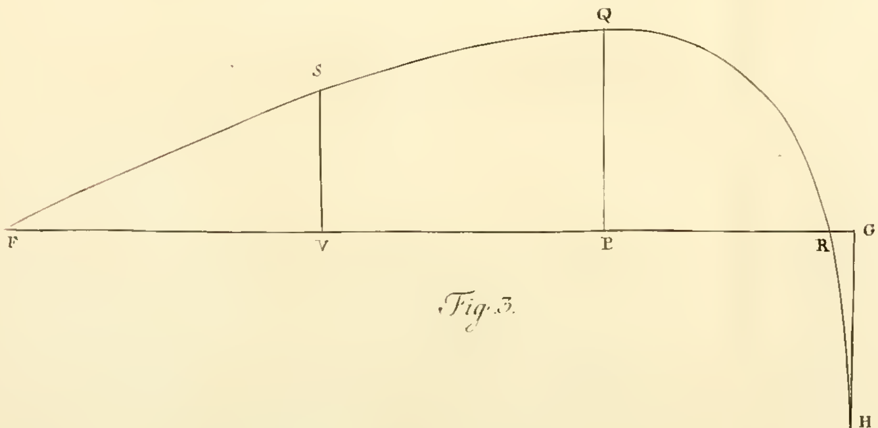
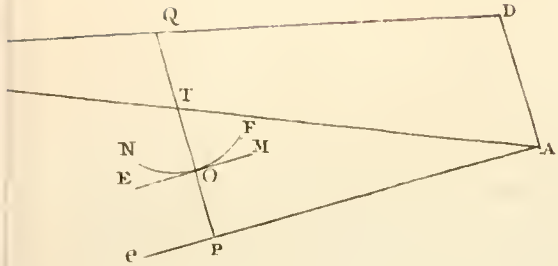
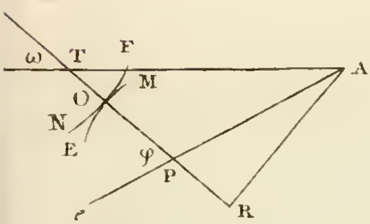


Fig. 3.





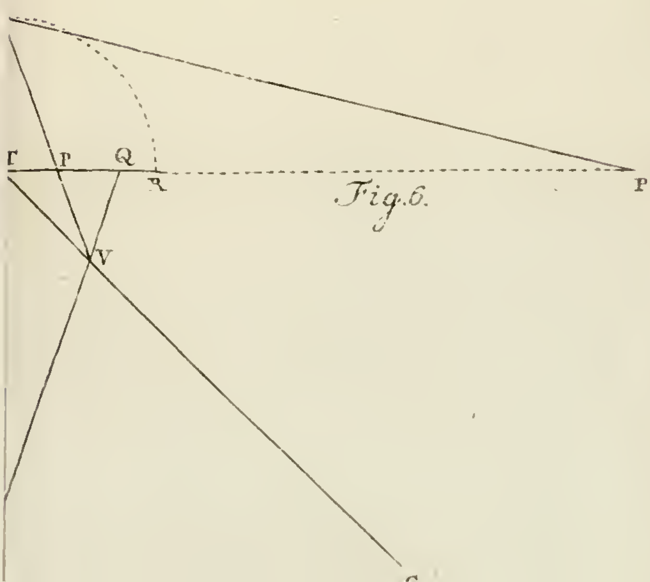


Fig.6.

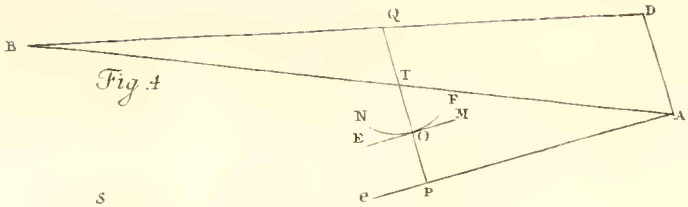


Fig. 4

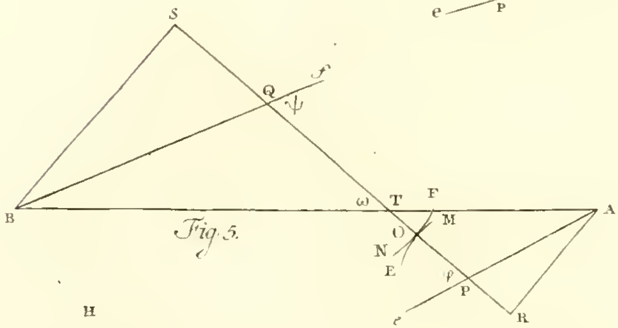


Fig. 5.

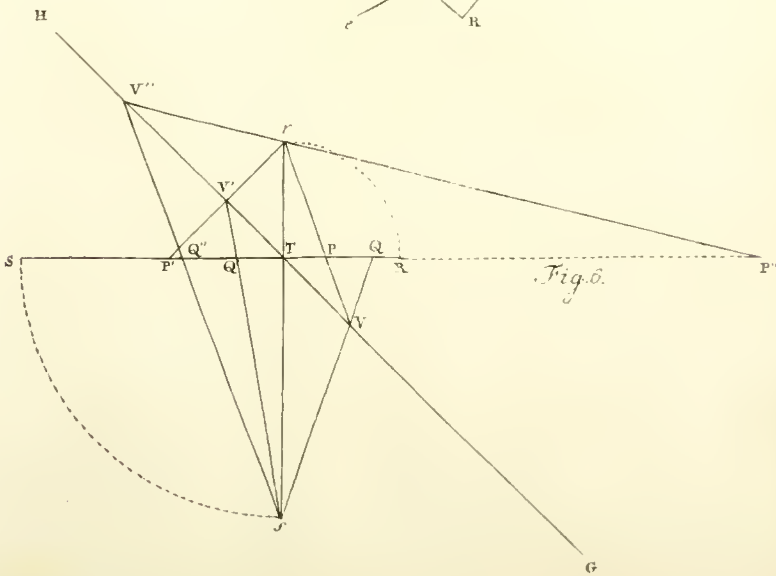


Fig. 6.

Fig. 7.

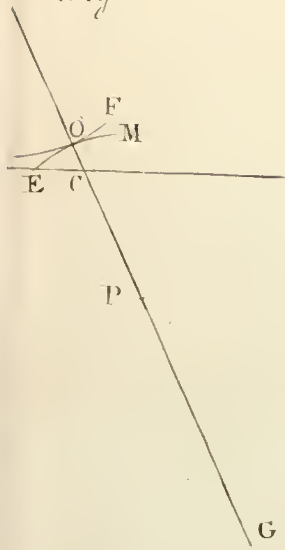
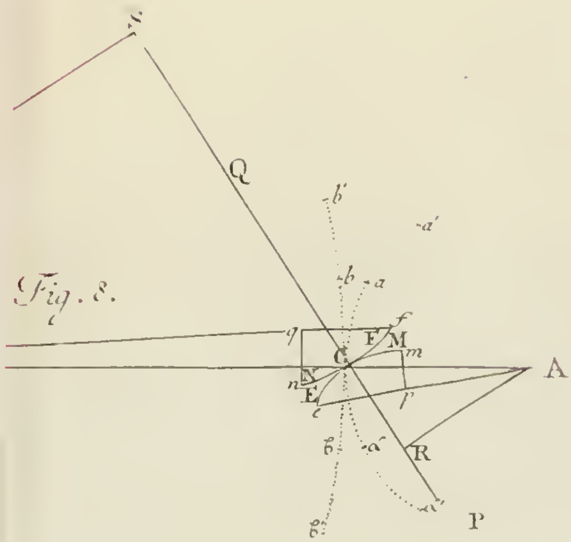


Fig. 8.



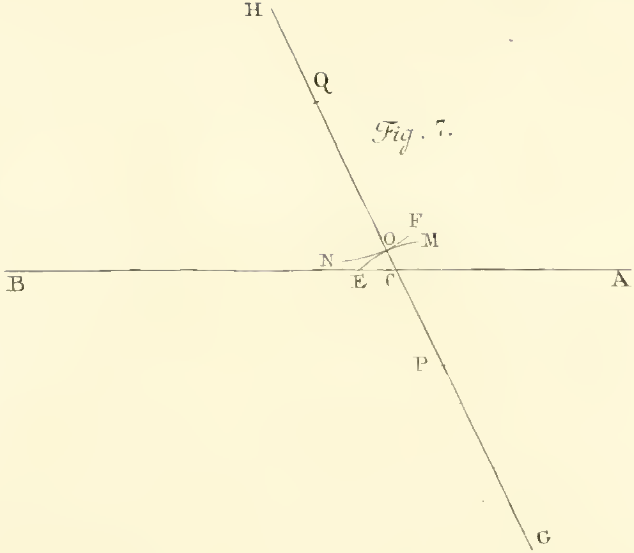


Fig. 7.

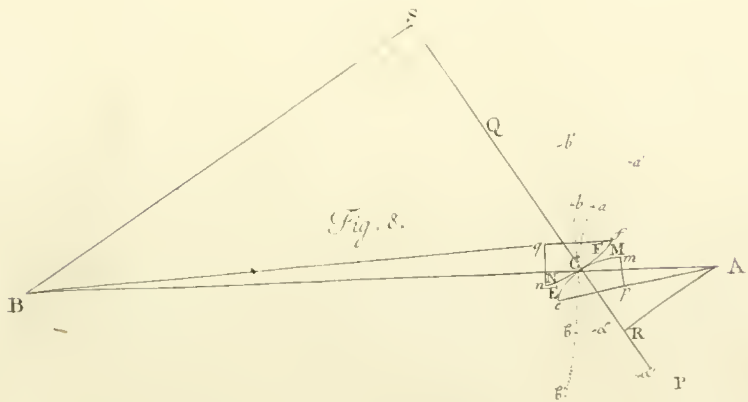
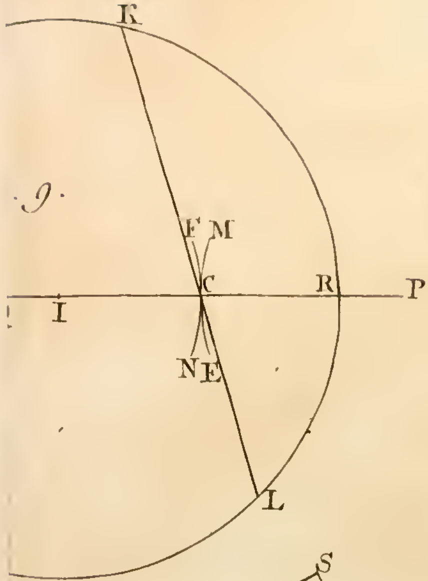


Fig. 8.



·9·

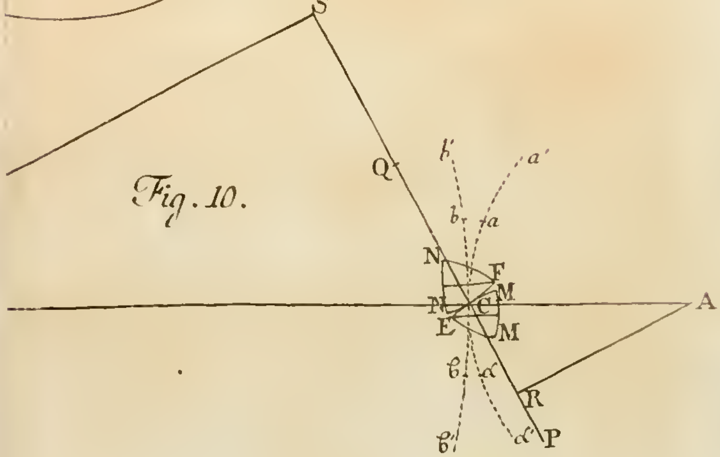
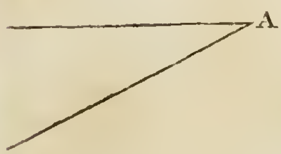


Fig. 10.



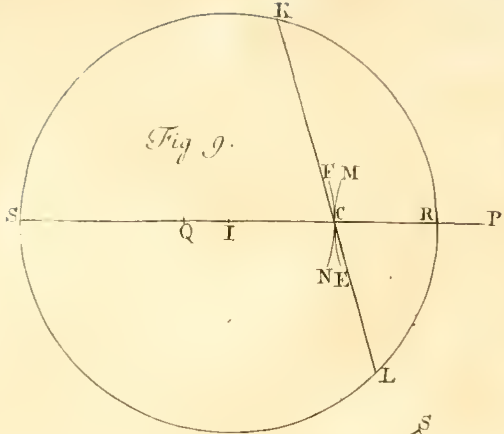


Fig. 9.
K
F
M
S
C
R
P
Q
I
N
E
L

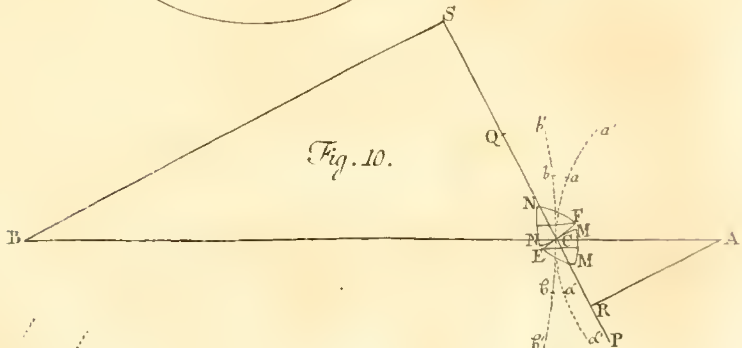


Fig. 10.
S
Q
B
A
N
F
M
E
M
R
P

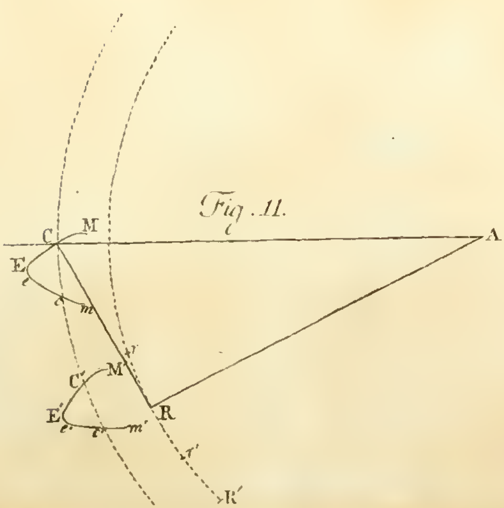
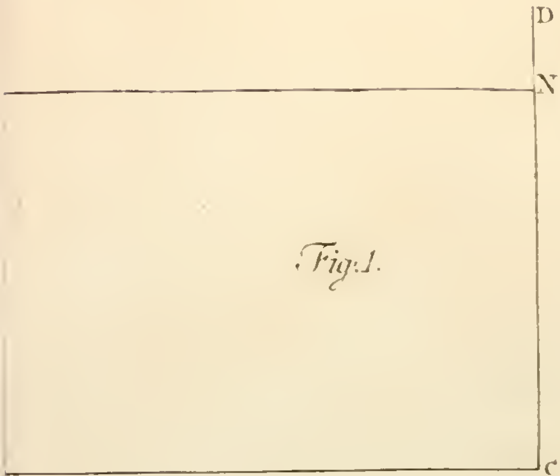
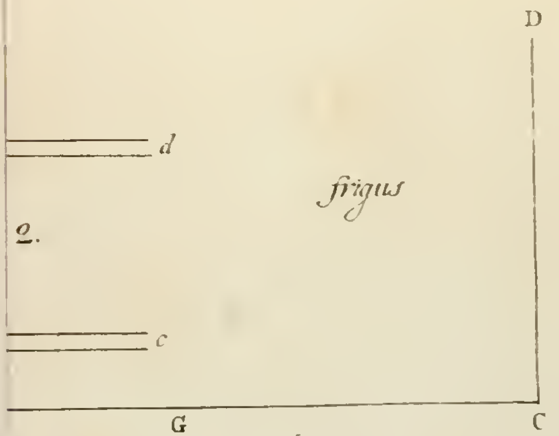
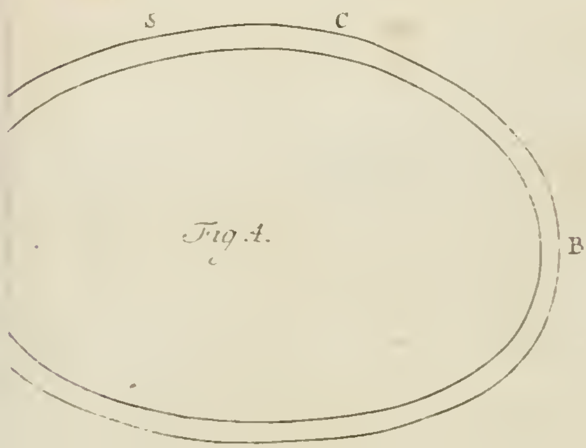


Fig. 11.
C
M
A
E
m
M
R
R'


D
N
Fig. 1.
C


D
d
frigus
2.
c
G
C


S
C
Fig. 4.
B

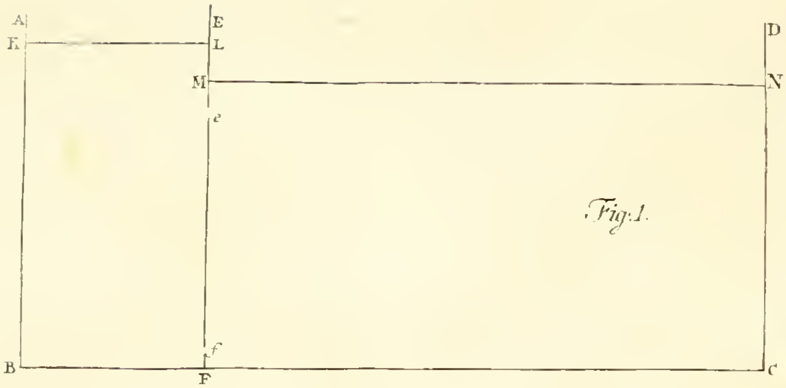


Fig. 1.

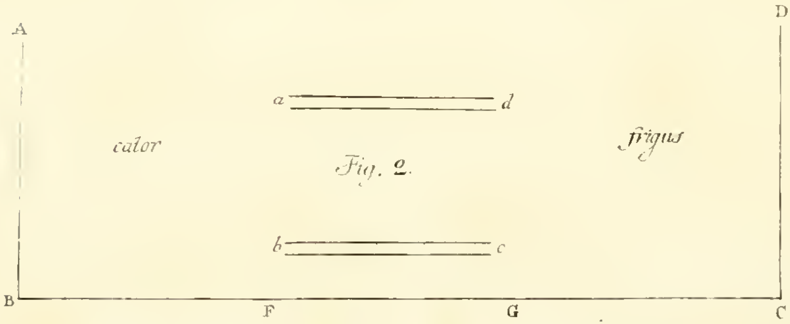
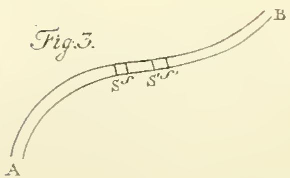


Fig. 2.

Fig. 3.



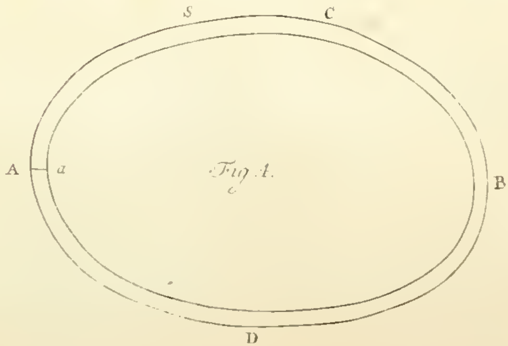
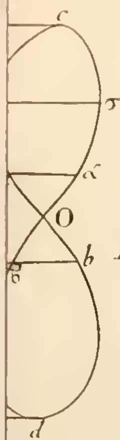


Fig. 4.



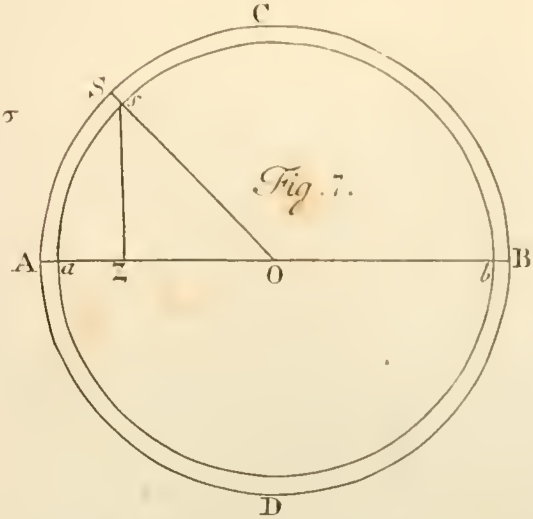


Fig. 7.

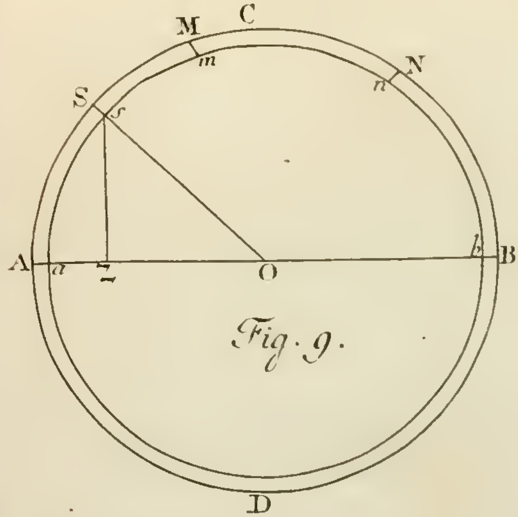
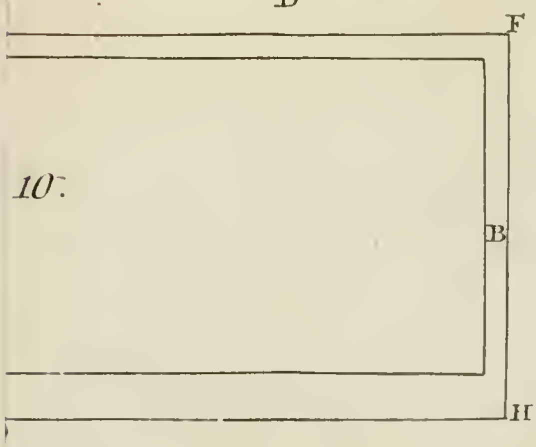


Fig. 9.



10.

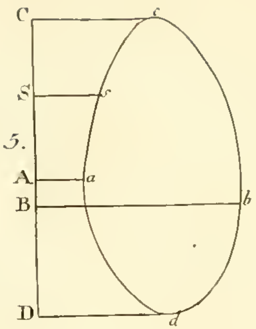


Fig. 5.

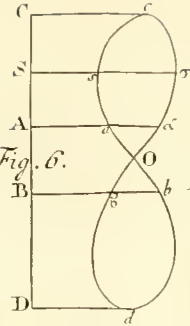


Fig. 6.

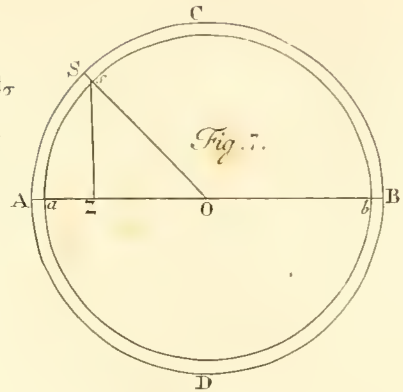


Fig. 7.

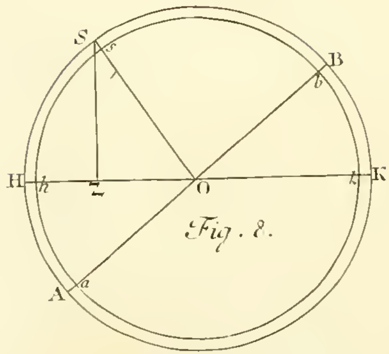


Fig. 8.

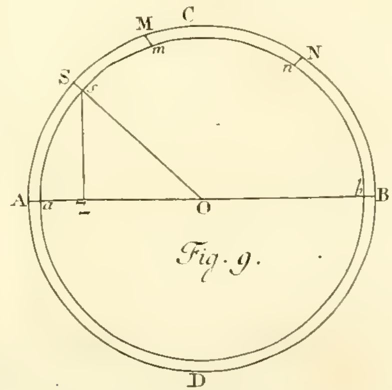


Fig. 9.

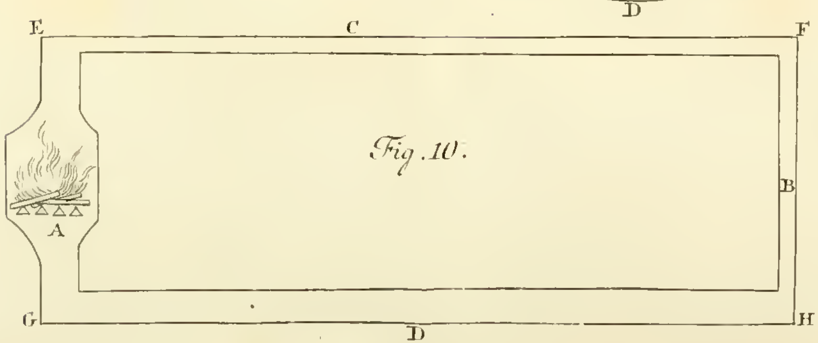


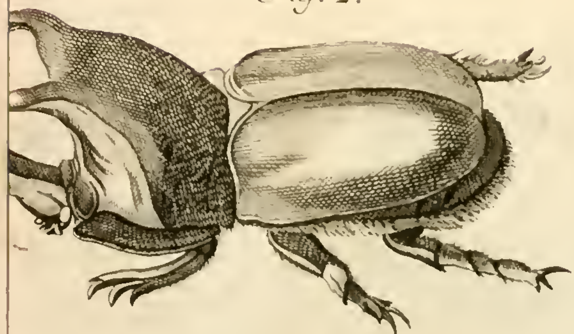
Fig. 10.

Fig. 1.


Fig. 2.
Fig. 1.
Fig. 3.

Nov. Comm. Acad. Sc. Petrop. Tom. XI. Tab XII.

Fig. 2.



.4.

Fig. 1.

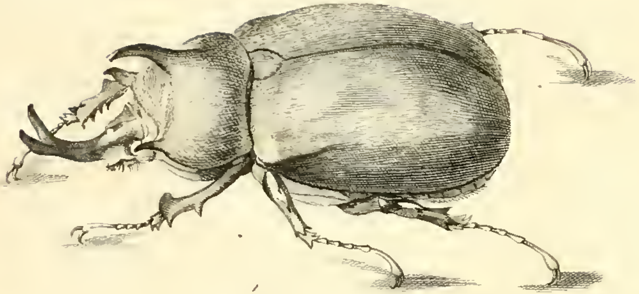


Fig. 2.

Fig. 3.

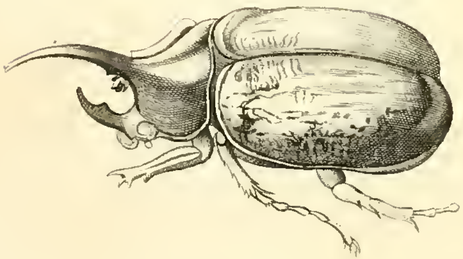


Fig. 4.

Nov. Comm. Acad. Sc. Petrop. Tom. XI. Tab. XIII.

Fig 2

Fig. 1

Fig. 3.


Fig. 2
Fig. 1.
Fig. 3.

G

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

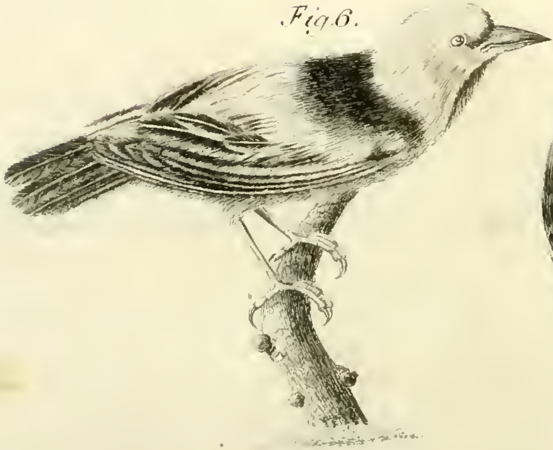


Fig. 7.

G

Fig. 8

Fig. 9

Fig. 10.

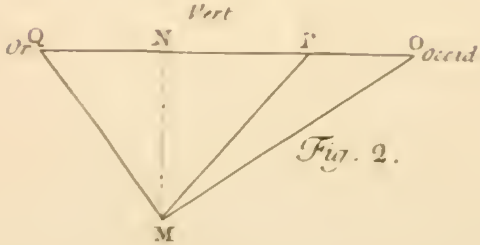


Fig. 2.

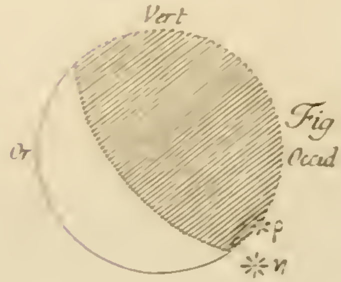
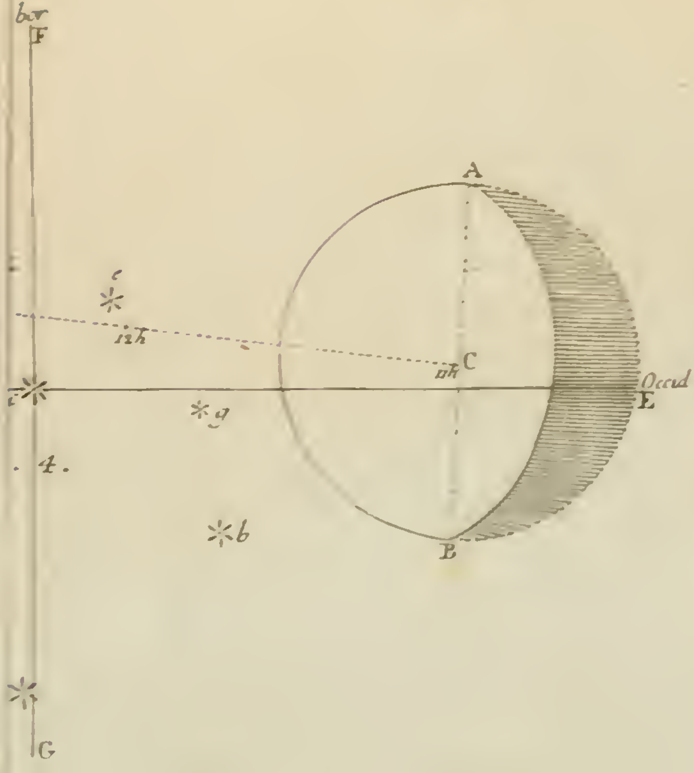


Fig. 3.



4.

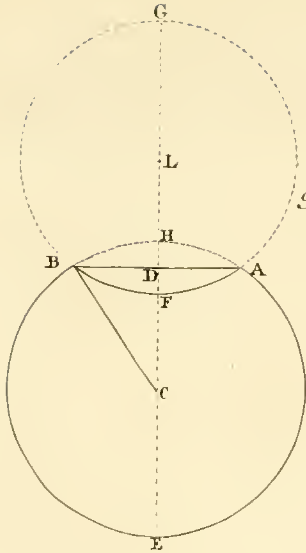


Fig. 1.

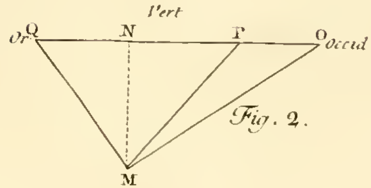


Fig. 2.

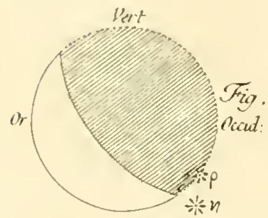


Fig. 3.

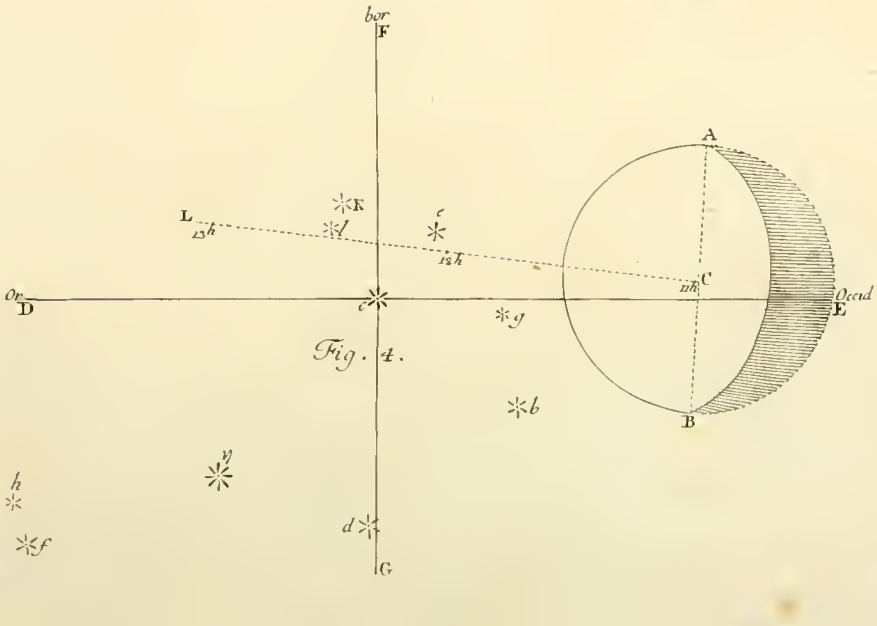


Fig. 4.