NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. X.

pro Anno MDCCLXIV.

PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXVI.

SVMMARIVM
DISSERTATIONVM
QVAS CONTINET
NOVORVM COMMENTARIORVM
TOMVS X.

MATHEMATICA.

I.

De Reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis et hyperbolae.

Auctore Leon. Eulero pag. 3.

Quae quantitates numeris neque integris neque fractis, neque etiam surdis vel irrationalibus exhiberi possunt, transcendentes vocari solent, quarum ergo valores non aliter nisi proxime per numeros exprimere licet. Dari autem huiusmodi quantitates certissimum est, etiamsi ratio ob infinitudinem, quae eas excludere videtur, a plerisque minus distincte perspiciatur; id quod exemplo notissimo peripheriae circuli, cuius diameter vnitate indicetur, euidenter declarari potest. Nullum enim est dubium, quin quantitas huius peripheriae valorem habeat omnino determinatum; quem adeo primo intuitu constat intra limites 3 et 4 contineri. Verum intra hos limites innumerabiles constitui possunt fractiones ratione denominatorum discrepantes, cuiusmodi simpliciores sunt:

$3\tfrac{1}{2}$, $3\tfrac{1}{3}$, $3\tfrac{2}{3}$, $3\tfrac{1}{4}$, $3\tfrac{3}{4}$, $3\tfrac{1}{5}$, $3\tfrac{2}{5}$, $3\tfrac{3}{5}$, $3\tfrac{4}{5}$, etc.

et generatim in hac forma $3\frac{m}{m+n}$ comprehenduntur: vbi cum tam pro m quam pro n omnes plane numeros substitui liceat, nulla tamen huiusmodi formula veram peripheriae quantitatem praebet; sed quaecunque assumatur, semper a veritate recedit, etiamsi error continuo minor reddi possit. Deinde quantitates etiam surdas introducendo multitudo numerorum intra limites 3 et 4 contentorum vlterius in infinitum augetur, qui adeo omnes ab iis, qui in formula $3\frac{m}{m+n}$ continentur discrepant, neque tamen etiam in his vllus reperitur, qui circuli peripheriam exacte dimetiatur: quamobrem eius quantitas merito pro transcendente habetur. Quod idem multo magis de omnibus circuli arcubus est intelligendum, ita vt quicunque capiatur sinus in circulo, arcus ipsi respondens semper sit quantitas transcendens; sicque solus circulus infinitam quantitatum transcendentium multitudinem suppeditet. Deinde vero etiam logarithmi ad classem numerorum transcendentium sunt referendi, qui adeo ab illis, qui ex circulo nascuntur, prorsus sunt diversi. Iam nemo non videt, si praeter fractiones et quantitates transcendentes ex circulo et logarithmis ortae in subsidium vocentur, tum inter binos quosuis numeros multitudinem numerorum mediorum multo magis in immensum augeri; ex quo maxime mirum videbitur, ne hoc quidem modo interualla inter binos numeros integros ita numeris mediis expleri, vt iis omnes plane quantitates intra eosdem terminos contententae exprimi queant. Quin potius praeterea innumerabilia alia quantitatum transcendentium genera, tam inter se quam ab illis ex circulo et logarithmis natis maxime discrepantia, agnosci oportet; inter quae potissimum notari merentur ea, quae ex rectificatione ellipsium et hyperbolarum originem ducunt, propterea quod hae curuae post circulum sunt notissimae et facillime describuntur. Quomodocunque autem tam in ellipsi; quam hyperbola arcus rescindantur, eorum quantitas non solum nullis formulis irrationalibus exprimi, sed etiam nullo modo neque ad arcus circulares neque ad logarithmos reuocari possunt: quin etiam singuli arcus tam elliptici quam hyperbolici peculiares quantitates transcendentes exhibent, quoniam ne inter se quidem, nisi paucissimis casibus exceptis, comparari possunt. Ad innumerabilia alia autem quantitatum transcendentium genera calculus integralis perducit, dum omnibus formulis integralibus, quarum integratio algebraice expediri nequit, certae quantitates transcendentes designantur, in quarum natura euoluenda industria et sagacitas analystarum maxime cernitur. Cum igitur nunc quidem sit compertum omnes huiusmodi formulas integrales $\int V dx$, si V fuerit functio rationalis ipsius x, semper per logarithmos et arcus circulares exprimi posse, nisi forte algebraicam integrationem admittant: artificia integrandi pro iis casibus, quibus V est functio irrationalis ipsius x adhuc potissimum desiderantur, vbi quidem id imprimis esset optandum, vt eae formulae, quibus V est quantitas irrationalis, accuratius

ratius euoluerentur, quarum integratio per arcus ſiue ellipticos ſiue hyperbolicos expediri queat. Atque in hac inueſtigatione Auctor iſtius diſſertationis imprimis eſt occupatus, ſummumque ſtudium contulit ad hanc formulam integralem $\int dx \sqrt{\frac{f+gxx}{h+kxx}}$ explicandam, atque adeo ad arcus ſiue ellipticos ſiue hyperbolicos reducendam: quod negotium multo difficilius eſt, quam initio videatur. Prout enim quantitatum conſtantium f, g, h et k, aliae fuerint vel poſitiuae vel negatiuae, caſus oriuntur natura ſua maxime inter ſe diſcrepantes. Primo enim relatio inter has quatuor quantitates ita poteſt eſſe comparata, vt formula integralis arcum quendam ſiue ellipticum ſiue hyperbolicum ſimpliciter exprimat. Deinde fieri poteſt, vt integrale binis conſtet partibus, altera algebraica, altera arcum ſiue ellipticum ſiue hyperbolicum exprimente. Praeterea vero etiam eiusmodi dantur caſus quibus integrale neutro modo exhiberi poteſt, ſed praeter partem algebraicam duos arcus alterum ellipticum, alterum hyperbolicum requirit. In tractatione igitur formulae $\int dx \sqrt{\frac{f+gxx}{h+kxx}}$ ob iſtam varietatem Auctor coactus eſt duodecim caſus conſtituere, quos ſingulos operoſo calculo ita feliciter expediuit, vt iam facile ſit, quaecunque quantitates litteris f, g, h, k deſignentur, integrale conceſſa ellipſium et hyperbolarum rectificatione aſſignare. Saepenumero autem euenire poteſt, vt formulae integrales multo magis complicatae ope ſubſtitutionum idonearum ad talem formam perduci queant, quibus er-

ergo

go omnibus casibus integratio expedita est censenda; ex quo haec inuestigatio calculo integrali haud leue incrementum attulisse est aestimanda.

II.

Elementa Calculi variationum

et III.

Analytica explicatio methodi Maximorum et Minimorum.

Auctore Leon. Eulero pag. 51. et 94.

Iam ante celeberrimum problema isoperimetricum insignia quaedam specimina huc pertinentia a Geometris sunt edita, cum antiquissimis iam fuerit exploratum, circulum inter omnes alias figuras pari perimetro inclusas maximam aream complecti; quam quidem proprietatem ex circuli natura concluserunt, minime vero ipsam quaestionem directe aggredi sunt ausi, vt inter omnes figuras aequali perimetro terminatas eam inuestigarent, quae maximam aream includeret. Haec scilicet quaestio nimis est ardua, quam vt ante insignem calculi infinitorum promotionem de ea saltem cogitare licuisset. Mox vero primis quasi iactis huius calculi fundamentis ab acutissimo *Iohanne Bernoulli* quaestio de brachystochronis felicissimo successu est resoluta: quippe qua inter omnes lineas a puncto sublimiori ad humilius ductas ea quaerebatur, super qua graue tempore breuissimo descendat, quam egregiam proprietatem cycloidi competere inuenerat. Methodus autem, qua Vir celeberrimus erat vsus, fratri ipsius natu maiori *Iacobo Bernoulli* manifesto occasionem praebuisse videtur solutionem magni problematis isoperimetrici, quod deinceps tractauit, meditandi. Latissimo scilicet ambitu omnes huius generis quaestiones in hoc problemate est complexus, vt inter omnes lineas intra data duo puncta ducendas, siue debeant esse eiusdem longitudinis, (vnde quîdem nomen isoperimetrici est natum) siue alia quadam indole communi praeditae, eam inuestigaret, quae vel maximam aream, vel circa datum axem rotata maximum solidum, vel in genere quamcumque maximi minimiue proprietatem contineret. Methodum autem, qua summus illius temporis Geometra est vsus, perpendentes ancipites haeremus, vtrum magis eius incredibilem patientiam in prolixissimis et taediosissimis calculis expediendis, an summam sagacitatem in conclusionibus satis concinnis inde deducendis admirari debeamus. Ob hanc ipsam autem causam, quod conclusiones prodierint satis concinnae, mox suspicari licebat, viam planiorem ac breuiorem dari eodem perducentem; quam etiam eius frater iunior *Iohannes* satis feliciter est ingressus, etiamsi statim pro quibusdam casibus nimis absconditis negotium minus successerit, quem tamen defectum deinceps, toto hoc argumento profundius retractato, largiter

giter compensauit. Longo postea interiecto tempore Auctor harum dissertationum in eodem problemate euoluendo summum studium collocauit, et cum perspexisset, omnes huius generis quaestiones eo redire, vt eiusmodi linea curua aequatione inter coordinatas x et y exprimenda inuestigetur, in qua talis formula integralis $\int V\,dx$ quomodocunque quantitas V per x et y fuerit data, maximum minimumue valorem obtineat. Nunc autem euidens est in ista quantitate V infinitam varietatem locum habere posse, prout in eam praeter ipsas variabiles x et y tam earum differentialia cuiuscunque ordinis, quam nouae insuper formulae integrales ingrediuntur. Quodsi iam solutiones *Bernoullianae* ad hanc normam examinentur, eae tantum ad eos casus, quibus quantitas V sola differentialia primi gradus inuoluit, restrictae reperiuntur, ac praeterea casus, quibus in quantitate V nouae formulae integrales insunt, inde penitus excluduntur, paucissimis exceptis, quos facile pro indole quaestionis ab hoc incommodo liberare licet. Hunc igitur defectum noster Auctor felicissime cum in his Commentariis, tum in opere singulari de hoc argumento edito, suppleuit, vt vix quicquam quod amplius desiderari queat, reperiatur. Interim tamen ipsa methodus, etiamsi totum negotium satis expedite conficiat, tamen ipsi non satis naturalis est visa, propterea quod vis solutionis tota in consideratione elementorum curuae inuestigandae erat posita, ipsa vero quaestio facile ita adornari possit, vt ex Geometria penitus ad solam Analysin puram reuocetur.

cetur. Quaestio enim ita proposita, vt data quantitate V vtcunque ex binis variabilibus x, y, earumque differentialibus cuiuscunque ordinis, quin etiam ex formulis integralibus vtcunque conflata, ea inter x et y relatio inuestigari debeat, qua formulae integrali $\int V\,dx$ maximus minimusue valor concilietur? hoc inquam modo quaestio proposita prorsus a Geometria segregatur; ex quo etiam methodus genuina eam resoluendi a Geometria immunis esse debebat: et quo difficilius Analysis ad hunc scopum accommodari poterat, eo maiora incrementa huius scientiae, si res successerit, merito sperare licebat. Tametsi autem Auctor de hoc diu multumque esset meditatus, atque amicis hoc desiderium aperuisset, tamen gloriae primae inuentionis acutissimo Geometrae Taurinensi la Grange erat reseruata, qui sola Analysi vsus eandem plane solutionem est adeptus, quam Auctor ex considerationibus geometricis elicuerat. Verum ipsa illa solutio ita erat comparata, vt nouam plane Analyseos speciem constituere, eiusque fines non mediocriter promouere, videretur; ex quo Auctori occasio est oblata hanc scientiam nouo Calculi genere locupletandi, quem *Calculum variationum* appellat, et cuius elementa hic tradere ac dilucide explicare constituit. Hic quidem calculus perinde ac differentialis in incrementis infinite paruis inter se comparandis versatur, verum in ratione tractationis ab eo maxime discrepat. Cum enim in calculo differentiali ex data quantitatum variabilium relatione, relatio inter earum differentialia cuiusque ordinis inuestigetur;

in

in calculo variationum ipſa relatio inter variabiles infinite parum immutari concipitur: ita vt dum ſecundum relationem datam pro quouis alterius variabilis x valore, altera y certum valorem ſortitur, calculo variationum huic ipſi valori y incrementum quoddam infinite paruum adiiciatur, ex quo deinceps, quemadmodum formulae tam differentiales quam integrales varientur, definiri oportet. Incrementum illud cuicunque valori y adiectum ab Auctore eius variatio vocatur, ac ne cum differentialibus confundatur hoc charactere δy deſignatur: cum igitur hinc omnes formulae tam differentiales quam integrales, quatenus quantitatem y inuoluunt, certas variationes nanciſcantur, auctor in priore diſſertatione principia ac praecepta ſtabilit, quorum ope omnium huiusmodi formularum variationes definiri poſſunt: ita ſi W denotet huiusmodi formulam quamcunque; eius variationem δ W per regulas peculiares aſſignare docet. Quo ſingulari calculo conſtituto deinceps in ſequente diſſertatione eius applicationem ad omnia problemata, quae circa maxima et minima excogitari poſſunt, clariſſime oſtendit, inque negotio hoc imprimis obſeruari meretur, quod ita noua methodus mere analytica multo pleniores ac perfectiores ſolutiones ſuppeditet, quam prior illa ex Geometria petita.

IV.

De insigni Promotione Methodi Tangentium Inuersae.

Auctore Leon. Eulero pag. 135.

Notum est Analysin infinitorum primam originem ex eo Geometrarum studio traxisse, quo omnium linearum curuarum tangentes ducere sunt conati. Cum enim iam pridem ante Geometrae maxime fuissent solliciti, vt methodum certam cuiusque lineae curuae tangentes inueniendi scrutarentur, atque ad hunc scopum continuo propius accessissent, sagacitate tandem summorum ingeniorum *Newtoni* et *Leibnizii* calculus differentialis est inuentus, quo mox felicissime successu sunt vsi ad tangentes omnium linearum curuarum, cunctaque phaenomena ab situ tangentium pendentia definienda. Quoniam vero iam ante certa quaedam artificia ita etsi multo imperfectius praestandi erant explorata, tamen hinc nouae istius inuentionis gloria haud mediocriter imminui est visa, nisi ea ad eiusmodi inuestigationes accommodaretur, quae illorum artificiorum vim penitus superarent. Hinc primis inuentoribus statim in mentem venit statum quaestionis, quae praecipue circa tangentes versabatur, inuertere, iisque qui minus splendide de nouo isto calculi genere sentiebant, eiusmodi quaestiones proponere, quibus ex data quadam tangen-

tangentium proprietate ipsarum linearum curuarum natura esset inuestiganda. Cum igitur methodus huiusmodi quaestiones resoluendi etiam esset inuertenda, hinc methodus tangentium inuersa est nata, quae quoniam a differentialibus ad ipsas quantitates reuerti oportebat, hinc calculus integralis mox insignia accepit incrementa, ita vt incredibilis promotio, ad quam hic calculus deinceps est perductus, potissimum methodo tangentium inuersa accepta sit referenda. Primum quidem in hoc genere eiusmodi tantum quaestiones sunt tractatae, in quibus conditio quaedam tangentium in singulis curuae quaerendae punctis proponebatur, ita vt in iis soluendis ad vnicum curuae punctum, quod autem indefinite sumtum ad omnia plane puncta transferri queat, respexisse sufficiat. Cuiusmodi quaestio erat, quo quaerebatur curua, cuius tangens ad resectam, seu differentiam inter abscissam et subtangentem, vbique datam teneret rationem: vocata enim pro curuae puncto quocunque abscissa $= x$, et applicata $= y$, quia tangens est $= \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$ et subtangens $= \frac{y\,dx}{dy}$, hac quaestione postulabatur, vt esset $\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$ ad $x - \frac{y\,dx}{dy}$ in data ratione: quae ratio si ponatur $= m:n$, ad hanc aequationem peruenitur:

$$m(x\,dy - y\,dx) = ny\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$

quae integrata naturam curuae quaesitae declarabit. Deinde vero etiam eiusmodi quaestiones sunt agitatae, quibus tangentium conditio praescripta simul ad bina curuae puncta pertineret, cuiusmodi fuerat problema tra-

traiectoriarum reciprocarum, cuius ſolutiones a variis Auctoribus prolatae Analyſin infinitorum clariſſimis inuentis locupletarunt. Eodem quoque referenda eſt quaeſtio catoptrica ab ipſo Auctore huius diſſertationis olim euoluta, qua circa punctum lucidum eiusmodi linea curua deſcribenda proponitur, vt omnes radii ab iſta curua bis reflexi in ipſum punctum lucidum reuertantur: in qua quaeſtione reſoluenda omnino neceſſe eſt, vt bina ſimul curuae puncta, in quibus quilibet radius reflectitur, in calculum introducantur; quae bina puncta ita inter ſe eſſe relata manifeſtum eſt, vt inter ſe permutationem admittant. Cum igitur huiusmodi quaeſtiones longe aliam ſoluendi methodum requirant, ac queſtiones prioris generis, vbi vnicum curuae punctum conſideraſſe ſufficit, Auctor hinc duas claſſes quaeſtionum ad methodum tangentium inuerſam pertinentium conſtituit: iisque adeo in hac diſſertatione tertiam claſſem adiungit, quae eiusmodi quaeſtiones complectitur, in quibus ſimul ad innumerabilia curuae puncta, quae certo quodam modo inter ſe cohaereant, reſpici oportet. Quoniam igitur huiusmodi quaeſtiones methodum prorſus peculiarem poſtulant, quam Auctor in hac diſſertatione dilucide exponit, eiusque eximium vſum in variis problematibus ſoluendis oſtendit, nullum plane eſt dubium, quin haec ſpeculatio Analyſi inſignem promotionem ſit allatura.

V.

V.

Dilucidationes de Tautochronis in medio resistente.

Auctore Leon. Eulero pag. 156.

Cum primum pendula ad tempus dimetiendum motumque horologiorum temperandum adhiberi sunt caepta, oscillationes non prorsus aequalibus temporibus absolui, sed maiores excursiones aliquanto plus temporis insumere sunt deprehensa. Cuius inaequalitatis caussa mox in eo posita esse reperiebatur, quod corpus super arcu circuli descendens aliquanto tardius ad punctum infimum pertingat, quo altius descensum inceperit, etiamsi discrimen sit tam exiguum, vt nonnisi accuratioribus obseruationibus animaduerti queat. Cum igitur aequabile curuamen, quale in arcubus circularibus inest, non sit aptum ad omnes descensus isochronos efficiendos, facile colligere licebat, si loco circuli alia curua adhibeatur, cuius curvatura ascendendo continuo fieret maior, fieri posse, vt tum omnes descensus ad temporis aequalitatem perducerentur. Verum tam ob Analyseos quam Mechanicae defectum natura huius curuae definiri non poterat, donec Vir summo ingenii acumine praeditus ostendisset, hanc proprietatem in cycloidem competere: et quoniam commodissime euenit, vt huius curuae euoluta iterum sit cyclois, inuenti istius applicatio ad praxim eo facilior euaserat, quod tantum pendulum intra binas cycloides suspendi opus erat, siquidem tum imum penduli ponduſculum iterum cycloidem esset descripturum. Verum tamen ne hoc quidem artificio omnis inaequalitas tolli videbatur, nisi motus fieret in vacuo, cum ob aëris resistentiam motus non mediocriter ab ea lege, cui Theoria innitebatur, recederet, quare, quamdiu natura huius resistentiae minus erat perspecta, vera curua quae omnes oscillationes paribus temporis interuallis ederet, ne inuestigari quidem poterat. Interim tamen summus *Neutonus* demonstrauerat, siue aëris resistentia fuerit constans, vel, eius loquendi more, momentis temporis proportionalis, siue ipsam celeritatum rationem sequatur, nihilominus omnes oscillationes in cycloide factas inter se isochronas esse futuras, ita vt his casibus resistentia non impediret, quo minus cyclois pari successu in vsum vocari posset, atque in vacuo. Deinde vero resistentiae natura tam experimentis quam ratione accuratius explorata, ea neutiquam celeritatibus, sed potius celeritatis quadratis proportionalis est deprehensa; quae proportio nullo amplius modo cum cycloidis natura consistere poterat, atque adeo iam non erat difficile per calculum accurate definire, quantum oscillationes in cycloide factae ob aëris resistentiam ab isochronismi ratione recederent. Quantumuis autem tum temporis Geometrae in eo elaborauerint, vt veram curuam, quae in medio resistente omnes oscillationes isochronas produceret, inuestigarent; tamen in ipsa Analysi tantas

offen-

offenderunt difficultates, quae vix superari posse viderentur. At postquam etiam Auctor huius dissertationis diu multumque in hac inuestigatione desudauisset, voti tandem compos est factus, veramque curuam tautochronam in medio, quod secundum rationem celeritatum duplicatam resistit, felici successu elicuit. Interim tamen methodus, qua in hac inuestigatione erat vsus, nullo modo ad alias resistentiae hypotheses transferri poterat; tametsi enim certum videbatur in natura aliam resistentiae legem praeter duplicatam celeritatum rationem locum habere non posse, tamen eadem quaestio de tautochronis in aliis resistentiae hypothesibus non tam in Mechanica quam in ipsa Analysi merito maximi momenti iudicabatur, propterea quod tantae difficultates, quae hanc inuestigationem impedirent, superari non possunt, quin simul Analysis eximia inde accipiat incrementa. Verum quod in hoc negotio haud parum mirum videbitur, quod methodus Auctoris ne ad eam quidem hypothesin, qua resistentia ipsi celeritati proportionalis fingitur, extendatur, cum tamen hic casus iam pridem fuisset exploratus. At hic quidem imprimis notari conuenit, a *Newtono* tautochronam in hac resistentiae hypothesi non a priori esse inuentam, sed potius cum forte in motum super cycloide inquireret, quasi inopinato deprehendisse, tautochronismi proprietatem ab hac resistentia non turbari; quamobrem hactenus methodus directa merito desiderabatur, qua simul tam in ratione celeritatum simplici, quam duplicata curuae tautochronae inueniri queant. Quo in negotio quidem Auctor sibi nihil laudis vindicat, cum talis methodus a Celeb. *Fontaino* sit excogitata, neque tamen ideo abs re fore est arbitratus, si idem argumentum suo more pertractauerit, hancque aeque nouam ac maxime ingeniosam methodum luculenter exposuerit, quo eius amplissimus vsus in Analysi magis in apricum collocaretur. Interim tamen maxime est dolendum, ne hanc quidem methodum vltra eas hypotheses resistentiae, quibus tautochronae iam erant cognitae, patere.

VI.

Demonstratio Theorematis Bernoulliani.

Auctore Leon. Eulero pag. 179.

A *Hugenio* primum curuarum euolutio est inuestigata, qua filum curuae cuique circumplicatum paulatim euolui eiusque termino nouam curuam describi assumsit: hancque nouam curuam ex euolutione prioris natam, istam vero illius euolutam vocauit. Consideratio autem tautochronismi Virum summum ad hanc meditationem impulerat, qua inuenit curuae cycloidis euolutam iterum esse cycloidem illi similem at situ inuerso positam: vnde vicissim sequebatur, si semissis cycloidis, a cuspide vsque

ad

ad locum, vbi eius curuamen est minimum, sumta, ita vt tangentes in his terminis ductae sint inter se normales, ex loco minimi curuaminis euoluatur, curuam inde natam iterum esse cycloidem, hancque adeo simili modo euolutam denuo cycloidem producere, sicque porro in infinitum innumerabiles nasci cycloides: quae speculatio cum Geometris maxime placuisset, vir sagacissimi ingenii *Ioh. Bernoulli* obseruauit, si loco cycloidis initio alia quaecunque linea curua constituatur, cuius tangentes extremae inter se sint normales, atque euolutio simili modo, vt in cycloide est factum, continuo repetatur, curuas hinc natas continuo propius ad cycloidis naturam accedere, ac tandem euolutione infinities repitita in perfectas cycloides abire. Insigne igitur hoc Theorema soli quasi obseruationi innixum, Auctor huius dissertationis ideo demonstrare suscepit, quoniam ipsa demonstratio ad plurimas alias pulcherrimas speculationes manuducit, cuiusmodi nonnullas euoluit, quae haud exigui momenti esse videntur. Ac certe cum hoc modo omnes curuae ad cycloidem tandem perducantur, haecque curua rectificationem admittat, hinc eximias approximationes petere licet. Veluti si prima curua sit quadrans circuli, ac posito radio $= 1$, eius arcus vocetur $= q$, qui est semissis numeri $\pi = 3,14159265$ etc. longitudo curuarum sequentium ex continua euolutione natarum ita se habere deprehenditur:

Longitudo curuae primae $= q$

- - - - - - secundae $= \frac{1}{1.2} q^2$

- - - - - - tertiae $= \frac{2}{1.2.3} q^3$

- - - - - - quartae $= \frac{5}{1.2.3.4} q^4$

- - - - - - quintae $= \frac{16}{1.2.3.4.5} q^5$

- - - - - - sextae $= \frac{61}{1.2.3.4.5.6} q^6$

- - - - - - septimae $= \frac{274}{1.2.3.4.5.6.7} q^7$

- - - - - - octauae $= \frac{1385}{1.2.3.4.5.6.7.8} q^8$

- - - - - - nonae $= \frac{7986}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} q^9$

etc.

quae ergo longitudines continuo propius ad rationem aequalitatis accedere est necesse, et cum infinitesima sit cyclois, eiusque longitudo $= \frac{2}{q}$, si hinc illae aequentur, continuo propius ad veritatem accedetur his scilicet formulis:

$$q^2 = 2\,;\; q^3 = 2.\frac{1.2}{1}\,;\; q^4 = 2.\frac{1.2.3}{2}\,;\; q^5 = 2.\frac{1.2.3.4}{5}\,;$$
$$q^6 = 2.\frac{1.2.3.4.5}{16}$$

hic imprimis notandi sunt numeratores illarum formularum quorum, qui sunt ordine pares 1, 5, 61, 1385, etc. ita quisque per praecedentes definitur, vt sit:

$$5 - \frac{4.3}{1.2}.1 + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} = 0$$

$$61 - \frac{6.5}{1.2}.5 + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\,1 - \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} = 0$$

$$1385 - \frac{8.7}{1.2}.61 + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\,5 - \frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6}\,1 + \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8} = 0$$

ac si totae formulae pro locis paribus inuentae ponantur:

$1 q^0$; $A q^2$; $B q^4$: $C q^6$; $D q^8$; $E q^{10}$; $F q^{12}$; $G q^{14}$ etc.
habebimus vt sequitur:

$$A - \frac{1}{1.2} = 0$$

$$B - \frac{A}{1.2} + \frac{1}{1\ldots4} = 0$$

$$C - \frac{B}{1.2} + \frac{A}{1\ldots4} - \frac{1}{1\ldots6} = 0$$

$$D - \frac{C}{1.2} + \frac{B}{1\ldots4} - \frac{A}{1\ldots6} + \frac{1}{1\ldots8} = 0$$

vnde concludimus fore hanc seriem

$$1q^0 + Aq^2 + Bq^4 + Cq^6 + Dq^8 + \text{etc.} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1.2}q^2 + \frac{1}{1\ldots4}q^4 - \frac{1}{1\ldots6}q^6 \text{ etc.}} = \frac{1}{\cos. q}.$$

Haecque consideratio ad plurimas alias speculationes non spernandas perducere poterit.

VII.

Demonstratio seriei

$$\frac{2.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ \ldots\ldots (4n-10)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ \ldots\ldots (n-1)}.$$

Auctore S. Kotelnikow pag. 199.

Cum Auctor in subsidium artis agrimensoriae occupatus fuisset in constructione polygonorum ex tot datis siue lateribus, siue angulis, siue diagonalibus, quot ad figurae determinationem re-

qui-

quiruntur, euoluenda, caſus quo praeter omnia latera totidem, demtis tribus, dantur diagonales, (tot ſcilicet quaeſtiones determinatio poſtulat) hic inquam caſus ipſum perduxerat ad eandem ſpeculationem, qua in Vol. VII. Celeber. *Segner* oſtendit, quot variis modis quodque Polygonum per diagonales in triangula reſolui poſſit. Arctiſſime ſcilicet hae duae inueſtigationes inter ſe ſunt connexae, etiamſi conuenientia primo intuitu minus appareat. Incidit ergo Auctor in numeros 1, 2, 5, 14, 42, quorum autem progreſſionis legem, vtpote ſatis abſconditam ex ſola figurarum contemplatione perſpicere non poterat. At ex conſideratione horum ipſorum numerorum, quos iam elicuerat, ſatis ingenioſe in ipſam progreſſionis legem inquirit, ad eamque feliciter pertingit, coniectura maxime probabili adiutus, quod hi numeri ſecundum factores egregio ordine progredi debeant. In vberiorem quidem confirmationem ipſarum quoque polygonorum vnde hi numeri ſunt orti, rationem habet, ſed ea etiam praetermiſſa eiusdem coniecturae adminiculo totum negotium hoc modo confici poſſe videtur: Diuidatur iſtorum numerorum quilibet per praecedentem, vt obtineantur hi quoti:

$$\tfrac{2}{1}=2;\ \tfrac{5}{2}=\tfrac{5}{2};\ \tfrac{14}{5}=\tfrac{14}{5};\ \tfrac{42}{14}=3,$$

qui cum non ſint integri omnes per eiusmodi fractiones exhibeantur, quarum denominatores ſint 3, 4, 5, 6, quandoquidem in tertio denominator quinario minor eſſe nequit: ſicque habebitur:

$$\tfrac{2}{1}=\tfrac{6}{3};\ \tfrac{5}{2}=\tfrac{10}{4};\ \tfrac{14}{5}=\tfrac{14}{5};\ \tfrac{42}{14}=\tfrac{18}{6},$$

vbi

vbi cum etiam numeratores progressionem arithmeticam teneant, vix vllum dubium superesse posset, quo minus statuamus omnes hos quotos sequenti ordine progredi, in primo loco ob analogiam $\frac{2}{2}$ praefixo:

$$\frac{2}{2}.\ \frac{6}{3}.\ \frac{10}{4}.\ \frac{14}{5}.\ \frac{18}{6}.\ \frac{22}{7}.\ \frac{26}{8}.\ \frac{30}{9}\ \text{etc.}$$

Cum in VII volumine veritas huius formulae rigorosissime sit demonstrata, aliaeque formae ipsi aequiualentes sint exhibitae, vsu non carebit obseruasse hos numeros 1, 2, 5, 14, 42 etiam hoc modo per factores repraesentari posse:

$$\frac{2}{2};\ \frac{3.4}{2.3};\ \frac{4.5.6}{2.3.4};\ \frac{5.6.7.8}{2.3.4.5};\ \frac{6.7.8.9.10}{2.3.4.5.6};\ \frac{7.8.9.10.11.12}{2.3.4.5.6.7},$$

quae formulae porro in has transformantur:

$$1;\ \frac{4}{2};\ \frac{5.6}{2.3};\ \frac{6.7.8}{2.3.4};\ \frac{7.8.9.10}{2.3.4.5};\ \frac{8.9.10.11.12}{2.3.4.5.6},\ \text{etc.}$$

tum vero succinctius adhuc in has:

$$1;\ 2.\ 1;\ 2.\frac{5}{2};\ 2.\frac{6.7}{2.3};\ 2.\frac{7.8.9}{2.3.4};\ 2.\frac{8.9.10.11}{2.3.4.5},$$

quarum prima pro triangulo, secunda quadrilatero, tertia pentagono etc. valet: vnde in genere pro polygono n laterum valebit haec forma:

$$2.\frac{n}{2}.\frac{n+1}{3}.\frac{n+4}{4}\ \ldots\ \frac{2n-5}{n-3},$$

Verum nullum est dubium, quin forma ab Auctore considerata ad vsum multo magis sit accommodata.

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

De motu corporis ad duo virium centra attracti.

Auctore Leon. Eulero pag. 207.

Argumentum huius dissertationis Auctor in eius praefatione tam dilucide et copiose explicauit, vt superfluum foret de eius eximio vsu, cum in Astronomia tum vero in Analysi, hic quicquam commemorare. Priorem ergo huius dissertationis partem vberiori istius quaestionis explicatione destinatam hic transcriptam putemus, cum cuique a calculis etiam abhorrenti eam ante huius recensionis lectionem euoluere liceat. In quaestione igitur, quam Auctor hic tractat, duo puncta fixa assumuntur. Ad quae corpus quodpiam attrahatur in ratione reciproca duplicata distantiarum, et postquam huic corpori motus quicunque fuerit impressus, qua lege deinceps sit progressurum, quaeritur. Neutiquam vero Auctor in solutione imperfecta et ad veritatem tantum appropinquante, qua ratione huiusmodi quaestiones adhuc tractari sunt solitae, acquiescit, sed potius omnes cum ingenii tam calculi vires eo intendit, vt motum illius corporis ad duo virium centra fixa attracti omni rigore geometrico definiat, atque

atque adeo aequationem pro curua descripta eliciat, ex qua eius constructio confici queat. Postquam autem aequationes differentiales secundi gradus, quas principia motus statim suppeditant, felici successu ad primum gradum perduxisset, aequationem tantopere complicatam est assecutus, vt inde vix plus subsidii quam ex primis formulis differentio-differentialibus expectandum videretur: propterea quod binae variabiles maxime inter se erant permixtae. Cum igitur quasi de vlteriori successu desperaret, eum casum quo alterutra vis centripeta euanescit, euoluendum suscepit; quoniam aliunde constabat, curvam hoc casu descriptam sectionem conicam esse debere: in qua inuestigatione, quae adhuc maximis difficultatibus erat implicata, Auctori vsu venit, vt in enormem errorem illaberetur. Quem lapsum, tantum abest, vt occultandum et reticendum putaret, vt eum potius ingenue confiteatur, cum huic ipsi errori, perfecta huius quaestionis solutio vnice accepta, sit referenda. Postquam enim omni studio in originem huius erroris inquisiuisset, molestissimosque calculos expediuisset praeter omnem expectationem in eiusmodi methodum incedit, cuius beneficio ipsa quaestio latissimo sensu accepta ita ad exoptatum finem perduci posset, vt in solutione nihil amplius esset desiderandum, ad quod eximium inuentum, quod non solum in Astronomia, sed etiam in Analysi maximi certe est momenti, nunquam pertigisset, nisi felicissimo euentu in errorem illum incidisset. Totam autem huius problematis solutionem perduxit ad hanc aequationem differentialem primi gradus, in qua binae variabiles adeo a se invicem sunt separatae.

$$\frac{dr}{\sqrt{r(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr)}}=\frac{ds}{\sqrt{s(-A+B-D+2Es+(A-B-D)ss)}}$$

vbi litterae A et B intensiones vtriusque centri virium denotant. D vero et E sunt constantes a prima motus impressione pendentes, at variabiles r et s per angulos $BAM=\zeta$ et $ABM=\eta$ ita definiuntur vt sit $r=\text{tang.}\frac{1}{2}\zeta.\text{tang.}\frac{1}{2}\eta$ et $s=\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\zeta}{\text{tang.}\frac{1}{2}\eta}$, ex quo, ope aequationis inuentae, curua a corpore descripta facile construi potest. Alio loco autem Auctor ostendet, hanc aequationem infinitis casibus algebraice integrari posse, ita vt infinitis modis fieri queat, vt corpus circa duo haec centra virium A et B curuam adeo algebraicam describat. Manifesto scilicet haec sequuntur ex iis, quae Auctor est commentatus de aequatione hac:

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3+\varepsilon x^4)}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma yy+\delta y^3+\varepsilon y^4)}}$$

cuius integrale ostendit semper algebraice assignari posse, quoties numeri m et n sunt inter se commensurabiles. Verum praeter hos casus innumerabiles dantur alii duo maxime simplices, quos immediate ex aequatione differentiali inuenta deriuare licet. Ostendit enim Auctor alibi, quoties habeatur aequatio differentialis separata inter binas variabiles r et s, ei semper duobus modis satisfieri posse, altero quo ipsi r altero vero ipsi s certus tribuitur valor constans. Secundum praecepta autem, quae in hac

hac inueſtigatione obſeruari oportet, ſi fiat $r=\alpha$, neceſſe eſt vt $\alpha-r$ ſit factor quantitatis $\sqrt{r}(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr)$ ideoque ipſa quantitas $A+B+D+2Er-(A+B-D)rr$ factorem habeat $(\alpha-r)^2$ hinc diuiſa illa forma per $D-A-B$ ſtatuatur $\frac{A+B+D}{D-A-B}=\alpha\alpha$ et $\frac{E}{D-A-B}=-\alpha$, et conſtantes ambae D et E a motus initio pendentes ita definiuntur, vt ſit $D=\frac{(\alpha\alpha+1)(A+B)}{\alpha\alpha-1}$ et $E=\frac{-2\alpha(A+B)}{\alpha\alpha-1}$. Quare ſi motus corpori initio impreſſus his valoribus fuerit conformis, curua deinceps deſcripta hac exprimetur aequatione: $\text{tang.}\frac{1}{2}\zeta.\text{tang.}\frac{1}{2}\eta=\alpha$: vnde cum poſitis $AP=x$, $BP=a-x=t$, $AM=v$, et $BM=u$ ſit $\text{tang.}\frac{1}{2}\zeta=\frac{v-x}{y}=\frac{y}{v+x}$ et $\text{tang.}\frac{1}{2}\eta=\frac{u-t}{y}=\frac{y}{u+t}$, fiet $\alpha=\frac{v-x}{u+t}$. Hinc cum ſit $x=\frac{aa+vv-uu}{2a}$ et $t=\frac{aa-vv+uu}{2a}$, erit

$$v-x=(u+v-a)(a+u-v) \text{ et } u+t=(u+v+a)(a+u-v)$$

ita vt iam ſit $\alpha=\frac{u+v-a}{u+v+a}$ et $u+v=\frac{(\alpha+1)a}{1-\alpha}$ ſeu $AM+BM$ conſtans. Ex quo manifeſtum eſt hoc caſu curuam a corpore deſcriptam fore ellipſin, cuius ambo foci in ipſis binis centris virium A et B ſint conſtituti.

En ergo obſeruationem notatu maxime dignam, qua nunc quidem conſtat fieri poſſe, vt corpus ad duo virium centra attractum etiam in conica ſectione reuoluatur, cuius adeo foci in illa centra virium incidant: ad hoc quippe requiritur vt corpus initio certa quadam ratione proiiciatur, quam inſignem proprietatem haud memini a quoquam eſſe animaduerſam.

Quemadmodum autem hic ponendo $r = \alpha$ omnis generis ellipſes ſumus adepti, ita ſi pro altera aequationis parte ſtatuamus $s = \beta$ ſimili modo ad hyperbolas perueniemus, quarum foci itidem in centris virium reperiuntur.

Ceterum Auctor hic aſſumſit motum fieri in eodem plano cum ambobus virium centris, verum etiamſi motus non abſoluatur in eodem plano, tamen methodus qua hic Auctor eſt vſus, pari ſucceſſu adhibetur, quemadmodum alia occaſione ab ipſo oſtendetur, quo ſimul ſpes Aſtronomorum non mediocriter confirmari videtur, fore aliquando, vt omnes perturbationes motuum coeleſtium ab actione plurium virium oriundae per calculum accurate queant definiri.

II.

De Motu vibratorio Tympanorum

item III.

Tentamen de Sono Campanarum.

Auctore Leon. Eulero pag. 243 et 261.

Duae inueſtigationes ad Acuſticam pertinentes atque in ſe tantopere difficiles ſuſcipiuntur, vt is iam plurimum praeſtitiſſe ſit cenſendus, qui ſaltem quodammodo hos ſonos ad calculum reuocare valuerit. Abunde nunc quidem conſtat, quantis difficultatibus

tatibus quaeſtio de motu vibratorio cordarum fuerit inuoluta, cum ante eam perfecte expedire non licuerit, quam noua quaſi calculi integralis pars tractari atque excoli ſit coepta. Cum igitur in his quaeſtionibus quae de ſono ſeu motu vibratorio tympanorum et campanarum inſtituuntur, non fili cuiusdam veluti cordae, ſed totius ſuperficiei atque adeo corporis agitationes inueſtigentur, facile intelligitur, ad hoc multo profundiora calculi myſteria requiri. Praecipuum autem negotium in eo conſiſtit, vt hi motus eorumque variationes debite ad calculum reuocentur; id quod ſine certis hypotheſibus pro ſtructura horum corporum ſtabilitis, nullo modo fieri poteſt. Hinc Auctor harum diſſertationum in priori rationem conſtituit, qua vibrationes membranae extenſae dum pulſatur, euenire concipi oportet; in poſteriori vero ſimilem rationem pro campanis definit, vnde deinceps formulas analyticas ſecundum motus principia deriuat, quarum euolutio tandem ad veram motus vtriusque cognitionem perducere debet. Formulae autem hae, quae pro tympanis ſunt differentiales ſecundi, pro campanis autem adeo quarti gradus, multo magis ſunt complexae quam eae, quibus cordarum motus exprimitur, neque etiam in genere, vti illae, inueſtigationem admittunt. Quamobrem Auctor etiam vtramque ſolutionem ad eum caſum reſtringit, quo oſcillationes regulares certis temporum interuallis diſtinctae oriuntur, quandoquidem hae maxime in ſenſus incurrunt, ſonosque certi tenoris repraeſentant. Deinde autem hic

idem

idem quoque vſu venit, quod in cordis eſt obſervatum, vt tam tympana quam campanae pro varia impulſionis ratione diuerſos ſonos ſimplices edere queant, tum vero etiam hoc potiſſimum, vt quos ſonos haec inſtrumenta ſeorſim edere valent eosdem quoque coniunctim producere poſſint, quemadmodum idem in cordis contingit. Verum cum diuerſi ſoni, quibus edendis eadem corda eſt apta, ſint inter ſe maxime harmonici, in ratione quippe numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5 etc. procedentes, hic in tympanis et campanis maximum cernitur diſcrimen, dum ſoni ſimul editi adeo inter ſe incommenſurabiles, ideoque maxime ab harmonia abhorrentes. Ex quo facile intelligitur, quid de illa inſignis Muſici Gallici de Rameau opinione ſit ſentiendum, qui memorata illa cordarum proprietate deceptus, verum omnis harmoniae principium in natura corporum ſonorum ſitum eſſe putauit, exiſtimans omnes ſonos ab eodem corpore ſimul editos natura ſua inter ſe eſſe conſonos. Ratione campanarum prouocat adeo ad experientiam, et affirmat campana pulſa ſe ſemper ſimul ſonum acutiorem, qui ad principalem eſſet *decima maior* ſeu in ratione 5 ad 2, exaudire. At Auctor noſter dilucide oſtendit hunc ſonum non rationem $5:2$ ſed potius hanc irrationalem $\sqrt{6}:1$ illa tantillo minorem tenere, ita vt vel hoc experimento opinio illa funditus euertatur.

IV.

IV.

Obſeruationes quaedam ad Opticam pertinentes.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 282.

In Commentariis Academiae Scientiarum Pariſinae anni 1743. proſtat Cel. *Buffoni* diſſertatio, titulo de Coloribus accidentalibus inſignita, quae praeter colores accidentales tractat etiam de morbo, vbi maculae nigrae tanquam muſcae oculo obuolitare videntur, nec non de coloribus vmbrarum a corporibus ſole oriente aut occidente proiectarum. Auctori huius Diſſertationis circa haec tria nonnullae Cel. *Buffono* ignotae ſeſe obtulerunt obſeruationes, atque idcirco eas hic perſequitur.

Diſſertatio haec continet tres obſeruationes: Prima ſpectat ſenſationem diuerſorum colorum in organo viſus ſuccedentium, ſi Sol, dum eſt horizonti propinquus, vel raris obtectus nubibus, vt ſplendor ipſius oculum laedere nequeat, per quartam partem minuti primi conſpiciatur. Auerſis enim tunc a Sole oculis ſenſationem durare per tria aut quatuor minuta prima expertus eſt Auctor, ſiue illi aperti, ſiue clauſi teneantur. Singulares et a nemine hucusque obſeruatas circumſtantias, quae ſenſationem hanc concomitantur, longum foret hic recenſere; idcirco qui illas concluſionesque inde deductas cognoſcere cupiunt, ad ipſam diſſertationem ablegandos eſſe cenſemus.

 Secun-

Secunda obſeruatio ſpectat morbum oculorum, quo ante oculum obiectum quoddam album aut lucidum contemplantem, maculae nigrae, tanquam muſcae, obuolitare videntur. Multi equidem hoc morbi genere laborant, aſt nemo maiori cura quam Auctor in ſedem morbi inquiſiuit. Plerique medicorum quaeſiuerunt infirmitatis huius cauſam in particulis opacis humori aqueo innatantibus, alii opacitati partium lentis cryſtallinae, et alii denique partibus tunicae retinae ſenſatione priuatis, ſiue paralyſi affectis, quae opinio Cel. *Buffono* quoque arridet, attribuerunt. Vltima ſententia, licet magis legibus dioptricis conſentiat, propria tamen experientia conuictus eſt Auctor, dari caſus, vbi hic morbus ſedem in tunica retina non habet, et in hanc ſententiam deſcendit, vt ſedem morbi non alibi quam in humore vitreo quaerendam eſſe, atque oriri a dilatatione ſubtiliſſimorum vaſorum lympham diaphanam vehentium, et introitum partibus craſſioribus et opacis praebentium, aliterque lumen ac lympha refringentium, exiſtemet. Obſeruationes et experientiae Auctoris ita comparatae eſſe videntur, vt nullum dubium relinquant, quin veram ſedem morbi ſaltem ſui ipſius, aſſignaſſe ſit cenſendus.

In obſeruatione tertia, quae de vmbrarum coloribus agit, refert primum Auctor obſeruationem, *Buffonianae* ſimilem aſt nouam, quod vmbrae a candela accenſa proiectae, tempore crepuſculi matutini aut veſpertini, non prout exſpectare fas videtur, nigrae, ſed nunquam non eleganter coeruleae inue-

nian-

niantur, si plano albo excipiantur; virides vero appareant, si in planum flauescens proiiciantur. Orta hinc erat suspicio Auctori, qui inter innumeros casus, nunquam viderat vmbras a Sole occidente productas, nisi coeruleas, irrepsisse in *Buffoni* obseruata inaduertentiam aliquam, dum celeber. Vir saepe virides apparere vmbras has perhibuerat, quod quidem Auctori non nisi huic circumstantiae attribuendum fuisse videbatur, quod in obseruationibus *Buffoni* vmbrae in planum flauum inciderint. Ast propriis post haec obseruationibus edoctus fuit, apparere posse vmbras a Sole occidente productas, etiamsi plano albo excipiantur, virides, dum nempe aër sparsis nubibus rubicundo aut aureo colore tinctis repletus est.

Tentat quoque Auctor rationem reddere horum phaenomenorum, non tamen illam pro vera proponere audet.

V.

Similitudinis effectuum vis Magneticae et Electricae nouum specimen.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 296.

Varia ab Auctore in lucem edita sunt scripta, similitudinem effectuum et analogiam vis magneticae atque electricae demonstrantia. Prima huius rei fundamenta iecit in sermone anno 1758. publice prae-

praelecto, et vberius eandem Theoriam exposuit in egregio opere, cui titulus est: *Tentamen Theoriae Electricitatis et Magnetismi.* Quanquam itaque hac ex parte Auctor in scriptis suis nihil desiderandum reliquerit, phaenomenon tamen, quod hic describit, vtriusque vis tantam sistit similitudinem, vt obseruator omnino distinguere nequeat, vtrum id pro operatione vis Electricae, an vero Magneticae habendum sit. Haec est praecipua causa, ob quam experimentum hoc describendum esse existimavit. Simplex quidem illud est, sed similitudinem vtriusque vis luculentissime probat.

VI.

Descriptio duplicis Microscopii Solaris apparatus obiectis opacis adaptati.

Auctore I. E. Zeihero pag. 299.

Microscopium Solare ad inuenta recentiora pertinere satis constat. Tribuitur illius inuentio *Liberkühnio*, Academico celebri quondam Berolinensi, quamuis non desint, qui hoc inuentum antiquius esse volunt, et *Liberkühnium* tantum illud perfecisse contendunt.

Microscopium solare variarum adhuc perfectionum est capax, vti solent recentiora inuenta, quae non statim ab initio summo perfectionis gradu gaudere

gaudere solent, vti vel antlia pneumatica exemplo esse potest perspicuo, a variis, aucta variis perfectionibus. Microscopia solaria prima et ordinaria adcommodata tantum sunt ad obiecta pellucida obseruanda. Duplex perfectio est ab Auctore excogitata pro obiectis opacis Microscopio solari adplicandis. Altera inseruire debet obiectis minimis, valde amplificandis, quae alias commode in lentis foco collocari nequeunt; altera vero obiectis maioribus integris mediocriter augendis, vt monetis, gemmis et aliis. Hunc duplicem scopum Auctor sibi in dissertatione sua proposuit, ad quem obtinendum duas capsulas reperit cum adparatu coniungendas cum microscopio solari. Sed quum hic adparatus duplex sine figuris distincte intelligi et repraesentari nequeat; lectorem ad ipsam dissertationem remissum volumus.

VII.

Methodus expedita Velocitatem venti absolutam determinandi.

Auctore I. E. Zeihero pag. 302.

Extant quidem iam multae methodi celeritatem ventorum determinandi, a variis auctoribus excogitatae, inter quas praecipue notatu digna est, ingeniosissima illa viri quondam celeberrimi *Ons-en-Bray*, quam descripsit in Memoriis Academiae

Parisiensis anno 1734. Tamen in omnibus his methodis iure adhuc desiderari potest, quod non satis sint expeditae et commodae quauis occasione celeritatem ventorum determinandi. Scopus igitur dissertationis est methodum commodiorem et expeditiorem exhibere. Ad hunc scopum obtinendum coniunxit duo instrumenta satis iam nota, alterum est viri celeberrimi quondam *Bougueri*, alterum celeberrimi Smeatonii angli. Instrumentum *Bougueri* est descriptum in eius tractatu de naui, et est anemometrum ingeniosissime excogitatum, et simplicissime confectum. Consistit illud generatim in elatere spirali tubo incluso, qui a vento, maiore et minore, magis minusqus intrudi solet, si scilicet planum ex charta confectum elateri adfixum, vento obuertatur. Sed quum sine figuris structura huius anemometri distincte intelligi et repraesentari nequeat: lectorem ad inspiciendam figuram remittere cogimur. Si igitur anemometrum hoc *Bouguerianum* celeritatis absolutae ventorum gradus monstrare debet; opus est, vt celeritate aequali et vniformi contra aërem quietum moueatur et hac ratione velocitatis gradus simul in eo signari queant.

Motus circularis Auctori hic videtur aptissimus, quem ope machinae Smeatonii facillime perficere existimat. Descripta est haec machina Vol. LI, Transact. angl. Vsus est ea Smeaton occasione experimentorum circa aquae et venti vires institutorum. Ipsa machina distincte per figuram est repraesentata, ita vt vlteriore eius descriptione hic superfedere ſedere poſſimus, quae igitur eſt ipſa inſpicienda. Haec machina Smeatoniana ad ſcopum ſuum ab Auctore eſt accommodata. Tota igitur machina ex inſtrumento *Bougueriano*, et Smeatoniano ita eſt compoſita, vt mediante confibula anemometrum *Bouguerianum* parti ſuperiori machinae Smeatonii ſit affixum, vbi figura ipſa eſt inſpicienda. Vnicae eiusmodi machinae auxilio innumerabilia anemometra velocitatem ventorum abſolutam indicantia, confici et vbiuis mitti poſſe facile intelligitur.

Poteſt poſt tempus aliquod praeterlapſum elater ſpiralis fieri imperfectior. Verificandum igitur hoc inſtrumentum erit, et explorandum, an elater ſpiralis ab elaſticitate ſua aliquid amiſerit.

Quod quomodo ſit faciendum, vltimo loco exponitur.

PHYSI-

PHYSICA.

I.

Caloris diminuti et aucti Phaenomena noua paradoxa et Considerationes.

Auctore I. A. Braunio pag. 309.

In rerum natura multa euenire solent, quae paradoxa videntur, dum contrarium eius, quod secundum leges ordinarias fieri debet, conspiciendum praebent. Deteguntur eiusmodi phaenomena paradoxa partim adcuratis obseruationibus, in quantum scilicet illa a solis naturae viribus sunt perducta eoque solius naturae sunt effectus; partim et praecipue Experimentis, quatenus scilicet phaenomena eiusmodi accedente arte oriuntur, eoque effectus et naturae et artis simul sunt, ita vt sine arte, sine dispositione artificiali nunquam se conspicienda praebuissent. Eiusmodi quaedam paradoxa phaenomena Auctor multis iisque adcuratissimis experimentis pro sua, vt in arte obseruandi, sic in arte experimentandi peritia satis nota, detexit, quae in hac dissertatione proposuit, non nude, sed explicare quoque pro suo acumine studuit. Experimenta pertinent ad caloris diminutionem et auctionem paradoxam, h. e. quae legibus physicis stabilitis repugnare videtur, dum calor diminuitur, quum tamen augeri

augeri, ſaltim non variari, et e contrario augetur, quum diminui, certe idem manere debeat.

Pro diuerſitate fluidorum, quae ad haec experimenta ſunt electa, caloris diminutio maior et minor adparebat, quin in quibusdam fluidis nulla plane conſpiciebatur. Experimenta in conclaui ſunt inſtituta, quod vel eiusdem temperiei cum fluidis, vel calidius illis erat.

In caſu igitur priori thermometrum mercuriale quod eſt adhibitum, eundem caloris gradum monſtrare debebat, ex fluido extractum, quem habebat, fluido adhuc immerſum, et in caſu poſteriori calor augeri eoque thermometrum adſcendere debebat. Sed in vtroque caſu ſecus accidit. Calor enim eſt diminutus ſemper in plerisque fluidis tentatis, cum exceptione tamen quorundam, quae vel plane nullam caloris mutationem, vel parum aut nihil mutationis monſtrarunt. Ad ea fluida, quae frigoris nihil ſub dictis circumſtantiis producere ſolent, pertinent omnia olea expreſſa et deſtillata. Spiritus acidi quidam, vt ſpiritus nitri et ſalis, parum aut nihil mutationis oſtenderunt, excepto oleo vitrioli, quod loco frigoris 5. 6 et plures gradus caloris ſub dictis circumſtantiis produxit. Ceterum ſpiritus ſulphuris, aceti, acidum citri, acetum vini, ſpiritus ſalis ammoniaci frigoris gradus aliquot produxere.

In omnibus aliis fluidis tentatis, productio frigoris ſine omni exceptione cernebatur, vt in ſpiritu vini rectificatiſſimo, ſpiritu vini francico, in vinis omnibus tentatis, in cereuiſiis, in ſolutionibus ſalium, et aliis, de aqua iam ante constitit hoc phaenomenum extraordinarium. Sed haec hactenus de phaenomenis, quae hic sufficere possunt. De explicatione horum phaenomenorum et experimentorum adhuc dicendum restat. Primum A. demonstrat, neque frigus, neque calorem in recensitis phaenomenis esse adparentem, ita scilicet, vt potius haec caloris diminuti et aucti phaenomena a contractione et dilatatione vitri, quam a contractione et dilatatione mercurii ipsius pendeat, sed realem, revera enim in productione frigoris, mercurius in thermometro contrahitur, et in productione caloris dilatatur. Sed quaenam caussa physica producti frigoris paradoxi in plerisque fluidis, et quaenam ratio producti caloris paradoxi in oleo potissimum vitrioli? Phaenomenum frigoris paradoxi explicare A. studet per solutionem frigidam, dum scilicet fluidum bulbo thermometri adhaerens in vapores resoluitur, quemadmodum alias frigus augeri animaduertimus, dum madida corpora lintea etc. exsiccari solent. Eiusmodi frigoris productio durat, quamdiu resolutio fluidi in vapores, durare solet. Hinc cur olea parum aut nihil mutationis caloris producere soleant intelligi potest, quia scilicet exsiccatio bulbi thermometri, eoque resolutio in vapores, parum aut nihil omnino in oleis fieri solet. Contra caloris paradoxi causam in vitrioli oleo non dubitat Auctor deducere ex attracta ab oleo vitrioli aqua, quae cum oleo vitrioli mixta calorem ad tempus producere solent, quod multis experimentis ostendi potest et est ostensum.

Tandem

Tandem adhuc notandum eſt, occaſione horum experimentorum errorem quorundam Phyſicorum magni nominis eſſe detectum, qui ſtatuerunt frigus quoque produci ſolere, ſi ſpiritus vini oleis eſſentialibus miſceatur. Sed hi ſine dubio ignari phaenomenorum paradoxorum recenſitorum miſtioni olei eſſentialis cum ſpiritu vini tribuerunt, quod effectus ſolius ſpiritus vini, (per antecedentia) eſſe ſolet, dum thermometrum extrahitur, et in aëre etiam calidiore ſuſpenditur. Multis experimentis hoc quoque egregie confirmatum eſt.

II.

Piſcium rariorum e Muſeo Petrop. exceptorum deſcriptiones continuae.

Auctore I. T. Koehlreutero pag. 329.

Tredecim a Clariſſ. Koehlreutero piſcium deſcriptiones nobis reſtare Tom. VIII. diximus. Harum deſcriptionum tres dicto Tomo inſeruimus. Sex in praecedente reperiuntur. Sequuntur in praeſenti quatuor reliquae. Prima earum, Lophium oſſiculo frontis tentaculis carnoſis, centralibus, terminato, depingit. Secunda Molam aculeatam, limbo abdominis producto, attenuato, carnoſo, monſtrat. Percis pinnae dorſualis radiis vndecim ſpinoſis, quatuordecim mollibus; faſciis duabus latis, albicantibus, tertiae dissertationis est obiectum. Hunc piscem Clar. Auctor vnum eundemque cum Sciaena lineis obliquis lacteis in vtroque latere, Gronou. Mus. Ichthiol. esse opinatur. Sequitur, in Dissertatione quarta, Percis fasciis tribus albicantibus, osse malae vtrinque in duas spinas, vnam longam alteram brevem, producto. In describendis his piscibus eadem methodo eademque solertia vsus est, quam lectores in antecedentibus forsitan obseruarunt. Suo tempore et reliqui, Ichthiophylacii nostri pisces rariores, eodem modo describentur; hoc etenim modo historiae piscium naturali maius tutiusque lumen forsitan accendetur, quam vsque adhuc multis naevis subiectam nouimus.

III.

Dentalii Americani ingentis magnitudinis descriptio.

Auctore I. T. Koehlreutero pag. 352.

Dentalios, qui non raro ex continente nunc soli nunc inter alia conchylia et petrefacta eruuntur, merito ad domicilium vermium marinorum quorundam pertinere, nemo est qui sibi non persuadeat, quamuis ipsos vermes videre nemini adhuc contigerit. Variae indolis, structurae et magnitudinis reperiri, diuersa exemplaria in Lithophylaciis Curiosorum forum asseruata docent. Clariss. Auctor igitur duos Dentalios ingentis magnitudinis describit, eosque Dentalios arcuatos, spongiosos, fuscos, superficie tuberculis contiguis exasperata, nominat. Ambo hi Dentalii magnitudine sua insigni se commendant. Maximum eorum secundum lineam rectam 4. pedes Parisinos cum duobus pollicibus, secundum arcum curuaturae 4. pedes et 5. pollices aequat. Latitudo extremitatis inferioris vnius est pollicis, superioris trium pollicum quinque linearum. Extremitas inferior frusto Madreporae insidet. Substantia ipsa corneae est duritiei. Corpus ipsum tuberculis subrotundis obsitum, interius ruso-fusci exterius vero plane fusci coloris est. Inprimis vero notata dignum est, ex basi maximi huius dentalii, alium pusillum 1. pollicem cum 8. lineis longum excreuisse. Reliquum hoc frustum rarissimum a nauta quodam olim Archangelopolin aduectum, et a PETRI MAGNI Archiatro D. *Areskin* Petropolin missum fuit. Alterum frustum quod Clariss. Auctor describit, tres pollices cum 8. lineis longum non aeque elegans ac antecedens, magis irregulare, non vbique tuberculosum et pallidiore gaudens colore cernitur. Adhaerent diuersis in locis testae parasiticae, scyphiformes, quadri-vel quinque laterae, inuerso-conicae, cuius indolis et in antecedente conspiciuntur. Reliquum haec frusta propter insignem et fere inconsuetam magnitudinem rarissimis omnino sunt annumeranda.

IV.

Obſeruationes Meteorologicae potiores Anni MDCCLIX. Petroburgi factae; et in eas Conſiderationes.

Auctore I. A. Braun p. 357 et ſeqq.

Satis iam conſtat adcuratio et methodus Auctoris, qua in obſeruationibus Meteorologicis concinnandis, vti ſolet. Nimirum adcuratiſſime notantur primum Altitudines Barometricae maximae et minimae in Barometro ſimplici ſecundum pollices pariſienſes, eorumque partes centeſimas per ſingulos menſes totius anni cum differentiis. 2. Calor maximus et minimus, ſiue frigus maximum per ſingulos quoque anni menſes cum differentiis adnotatur. 3. Meteora recenſentur potiora, additis vbique, vbi ſcilicet e re videtur, conſiderationibus et conſectariis, potiſſimum ex comparationibus deductis. Cuilibet regioni propria eſſe meteora, non ſolum, ſed cuilibet quoque anno eiusdem loci, ſatis conſtat.

Nos igitur notatu digniora enotabimus, quae hoc anno Petroburgi ſunt obſeruata. Denuo monendum eſt, obſeruationes has meteorologicas omnes ſecundum ſtilum Veterem eſſe confectas, quoniam hic, vti conſtat, eſt adhuc vſitatus.

Obſeruationes Barometricae primum occurrunt. Summa Barometri altitudo huic anno et huic loco pro-

propria, erat = 28. 82. Nou. 9. obſeruata; infima = 27. 00 Ianuarii 24 et 26 notata. Ergo ſumma altitudo huius anni minor eſt, maxima alias hic obſeruata, ſcilicet 1757 = 29. 12, et quidem $\frac{30}{100}$ ſiue fere $3\frac{1}{2}$ lineae duodec. pollicis pariſienſis. Altitudo Barometri infima 27. 00, ſi comparetur cum infima alias hic obſeruata, nempe 26. 41. deprehenditur maior $\frac{59}{100}$ ſiue fere 7 lin. ſeu partibus duodecimis pollicis pariſienſis.

Ceterum variationes Barometricae primis et vltimis menſibus, quam mediis, maiores et hoc anno deprehenduntur, ita vt vix aut rariſſime ab hac lege exceptio occurrere ſoleat.

Minima variatio Barometrica fuit = $\frac{59}{100}$ ſiue fere 7 lin. menſe Nouembri. Minores differentiae et variationes hoc anno deprehenſae ſunt Menſe Aprili, Maio, Iunio, Iulio et Auguſto, eoque per 5 menſes, nonnunquam per 4 menſes tantum reperiuntur. Ceterum nec maxima neque minima variatio ſemper iisdem menſibus occurrunt, quod per antecedentes obſeruationes iam conſtat.

Quod ad obſeruationes thermometricas attinet, ſingulare et plane extraordinarium fuit frigus Dec. 26 obſeruatum = 212, quo Auctor huius diſſertationis ſuum egregium inuentum de congelando mercurio perficiendi, occaſionem arripuit, et perfecit. Tantum frigus antea nunquam hic eſt obſeruatum, maximus enim frigoris gradus vltra 202 et 203 nunquam adhuc fuit notatus.

Calor

Calor maximus huius anni = 104, Maii 26 et Iulii 18 et 19 obseruatus, solet esse fere ordinarius. A maximo calore igitur 97°. 1757 et 1758. hic obseruato, differt 7°. Septem scilicet gradibus minor est.

Haec hiems potest igitur iure pro frigidissima haberi, quae vnquam hic contigit, quae notata est, id quod et frigoris gradus reliqui insigniores quoque recensiti satis demonstrare possunt.

Penetratio insignioris huius frigoris in terram extra vrbem, tanta quoque est deprehensa, quanta forsitan antea nunquam, sc. 30 pollicum Londinensium, quum *Kraftius* vltra 12 pollices eam mitiore hieme non deprehenderit. Vid. ipsius Physicam p. 265. P. 1.

Interim glacies Neuae frigore hoc saeuo crassior non multum est reperta, quam ordinarie solet, scilicet 29 Poll. pedis Lond. Ordinaria esse solet 1 Arschin = 28 Poll. Lond. Altitudo aquae pluuiae fuit mediocris, nimirum per sex menses aestiuos, a Maio ad Octobrem 11 pollicum paris: Aestas igitur non humida, et annus sat fertilis fuit.

Primum tonitru hoc anno quoque eatenus extraordinarium fuit, quod solito citius contigit, scilicet iam Martii 25. Ceterum 12 diebus tonitrua sunt audita. Congelatio vltima fuit Apr. 22.

Prima rursus Sept. 22.

Declinatio acus magneticae et hic loci quoque per dies variabilis in acu praestanti est deprehensa, sed parum, ita vt differentia inter maximam et minimam

nimam ſit vix aliquot minutorum. Denique notatu dignus eſt motus vibratorius acus magneticae tempeſtate inprimis fulminea imminente obſeruatus, qui ſine dubio eſt effectus electricitatis aëris.

V.

Obſeruationes Meteorologicae, Anni MDCCLX. factae Petroburgi, et Conſectaria.

Auctore I. A. Braunio pag. 369.

Quae generatim de obſeruationibus meteorologicis anni praecedentis praemonuimus, de huius anni quoque obſeruationibus valent. Statim igitur ad ea enotanda progredimur, quae huic anno propria fuerunt, et notatu ſunt digniora.

1) Quod ad obſeruationes Barometricas attinet, notamus primum altitudinem huius anni ſummam et infimam. Summa hoc anno fuit = 28. 58. et infima 26. 74. Summa hoc anno mediocris fuit, et ab altitudine omnium adhuc obſeruatarum ſumma, ſcilicet 29. 12 differt $\frac{64}{100}$ pollicis Pariſienſis quibus minor eſt. Minor quoque eſt altitudine anni praecedentis ſumma ſcilicet 28. 82. Nouemb. 9. obſeruata, $\frac{24}{100}$. Summa huius anni altitudo menſe Septembri, anni praecedentis contra, menſe Nouembri eſt obſeruata, et iam ex antecedentibus obſeruationi-

Parisiensis anno 1734. Tamen in omnibus his methodis iure adhuc desiderari potest, quod non satis sint expeditae et commodae quauis occasione celeritatem ventorum determinandi. Scopus igitur dissertationis est methodum commodiorem et expeditiorem exhibere. Ad hunc scopum obtinendum coniunxit duo instrumenta satis iam nota, alterum est viri celeberrimi quondam *Bougueri*, alterum celeberrimi Smeatonii angli. Instrumentum *Bougueri* est descriptum in eius tractatu de naui, et est anemometrum ingeniosissime excogitatum, et simplicissime confectum. Consistit illud generatim in elatere spirali tubo incluso, qui a vento, maiore et minore, magis minusqus intrudi solet, si scilicet planum ex charta confectum elateri adfixum, vento obuertatur. Sed quum sine figuris structura huius anemometri distincte intelligi et repraesentari nequeat: lectorem ad inspiciendam figuram remittere cogimur. Si igitur anemometrum hoc *Bouguerianum* celeritatis absolutae ventorum gradus monstrare debet; opus est, vt celeritate aequali et vniformi contra aërem quietum moueatur et hac ratione velocitatis gradus simul in eo signari queant.

Motus circularis Auctori hic videtur aptissimus, quem ope machinae Smeatonii facillime perficere existimat. Descripta est haec machina Vol. LI, Transact. angl. Vsus est ea Smeaton occasione experimentorum circa aquae et venti vires institutorum. Ipsa machina distincte per figuram est repraesentata, ita vt vlteriore eius descriptione hic supersedere

ſedere poſſimus, quae igitur eſt ipſa inſpicienda. Haec machina Smeatoniana ad ſcopum ſuum ab Auctore eſt accommodata. Tota igitur machina ex inſtrumento *Bougueriano*, et Smeatoniano ita eſt compoſita, vt mediante confibula anemometrum *Bouguerianum* parti ſuperiori machinae Smeatonii ſit affixum, vbi figura ipſa eſt inſpicienda. Vnicae eiusmodi machinae auxilio innumerabilia anemometra velocitatem ventorum abſolutam indicantia, confici et vbiuis mitti poſſe facile intelligitur.

Poteſt poſt tempus aliquod praeterlapſum elater ſpiralis fieri imperfectior. Verificandum igitur hoc inſtrumentum erit, et explorandum, an elater ſpiralis ab elaſticitate ſua aliquid amiſerit.

Quod quomodo ſit faciendum, vltimo loco exponitur.

PHYSI-

PHYSICA.

I.

Caloris diminuti et aucti Phaenomena noua paradoxa et Considerationes.

Auctore I. A. Braunio pag. 309.

In rerum natura multa euenire solent, quae paradoxa videntur, dum contrarium eius, quod secundum leges ordinarias fieri debet, conspiciendum praebent. Deteguntur eiusmodi phaenomena paradoxa partim adcuratis obseruationibus, in quantum scilicet illa a solis naturae viribus sunt perducta eoque solius naturae sunt effectus; partim et praecipue Experimentis, quatenus scilicet phaenomena eiusmodi accedente arte oriuntur, eoque effectus et naturae et artis simul sunt, ita vt sine arte, sine dispositione artificiali nunquam se conspicienda praebuissent. Eiusmodi quaedam paradoxa phaenomena Auctor multis iisque adcuratissimis experimentis pro sua, vt in arte obseruandi, sic in arte experimentandi peritia satis nota, detexit, quae in hac dissertatione proposuit, non nude, sed explicare quoque pro suo acumine studuit. Experimenta pertinent ad caloris diminutionem et auctionem paradoxam, h. e. quae legibus physicis stabilitis repugnare videtur, dum calor diminuitur, quum tamen augeri

augeri, faltim non variari, et e contrario augetur, quum diminui, certe idem manere debeat.

Pro diuerfitate fluidorum, quae ad haec experimenta funt electa, caloris diminutio maior et minor adparebat, quin in quibusdam fluidis nulla plane confpiciebatur. Experimenta in conclaui funt inftituta, quod vel eiusdem temperiei cum fluidis, vel calidius illis erat.

In cafu igitur priori thermometrum mercuriale quod eft adhibitum, eundem caloris gradum monftrare debebat, ex fluido extractum, quem habebat, fluido adhuc immerfum, et in cafu pofteriori calor augeri eoque thermometrum adfcendere debebat. Sed in vtroque cafu fecus accidit. Calor enim eft diminutus femper in plerisque fluidis tentatis, cum exceptione tamen quorundam, quae vel plane nullam caloris mutationem, vel parum aut nihil mutationis monftrarunt. Ad ea *fluida*, quae frigoris nihil fub dictis circumftantiis producere folent, pertinent omnia olea expreffa et deftillata. Spiritus acidi quidam, vt fpiritus nitri et falis, parum aut nihil mutationis oftenderunt, excepto oleo vitrioli, quod loco frigoris 5. 6 et plures gradus caloris fub dictis circumftantiis produxit. Ceterum fpiritus fulphuris, aceti, acidum citri, acetum vini, fpiritus falis ammoniaci frigoris gradus aliquot produxere.

In omnibus aliis fluidis tentatis, productio frigoris fine omni exceptione cernebatur, vt in fpiritu vini rectificatiffimo, fpiritu vini francico, in vinis omnibus tentatis, in cereuifiis, in folutionibus falium, et aliis, de aqua iam ante constitit hoc phaenomenum extraordinarium. Sed haec hactenus de phaenomenis, quae hic sufficere possunt. De explicatione horum phaenomenorum et experimentorum adhuc dicendum restat. Primum A. demonstrat, neque frigus, neque calorem in recensitis phaenomenis esse adparentem, ita scilicet, vt potius haec caloris diminuti et aucti phaenomena a contractione et dilatatione vitri, quam a contractione et dilatatione mercurii ipsius pendeat, sed realem, revera enim in productione frigoris, mercurius in thermometro contrahitur, et in productione caloris dilatatur. Sed quaenam caussa physica producti frigoris paradoxi in plerisque fluidis, et quaenam ratio producti caloris paradoxi in oleo potissimum vitrioli? Phaenomenum frigoris paradoxi explicare A. studet per solutionem frigidam, dum scilicet fluidum bulbo thermometri adhaerens in vapores resoluitur, quemadmodum alias frigus augeri animaduertimus, dum madida corpora lintea etc. exsiccari solent. Eiusmodi frigoris productio durat, quamdiu resolutio fluidi in vapores, durare solet. Hinc cur olea parum aut nihil mutationis caloris producere soleant intelligi potest, quia scilicet exsiccatio bulbi thermometri, eoque resolutio in vapores, parum aut nihil omnino in oleis fieri solet. Contra caloris paradoxi causam in vitrioli oleo non dubitat Auctor deducere ex attracta ab oleo vitrioli aqua, quae cum oleo vitrioli mixta calorem ad tempus producere solent, quod multis experimentis ostendi potest et est ostensum.

Tandem

Tandem adhuc notandum eſt, occaſione horum experimentorum errorem quorundam Phyſicorum magni nominis eſſe detectum, qui ſtatuerunt frigus quoque produci ſolere, ſi ſpiritus vini oleis eſſentialibus miſceatur. Sed hi ſine dubio ignari phaenomenorum paradoxorum recenſitorum miſtioni olei eſſentialis cum ſpiritu vini tribuerunt, quod effectus ſolius ſpiritus vini, (per antecedentia) eſſe ſolet, dum thermometrum extrahitur, et in aëre etiam calidiore ſuſpenditur. Multis experimentis hoc quoque egregie confirmatum eſt.

II.

Piſcium rariorum e Muſeo Petrop. exceptorum deſcriptiones continuae.

Auctore I. T. Koehlreutero pag. 329.

Tredecim a Clariſſ. Koehlreutero piſcium deſcriptiones nobis reſtare Tom. VIII. diximus. Harum deſcriptionum tres dicto Tomo inſeruimus. Sex in praecedente reperiuntur. Sequuntur in praeſenti quatuor reliquae. Prima earum, Lophium oſſiculo frontis tentaculis carnoſis, centralibus, terminato, depingit. Secunda Molam aculeatam, limbo abdominis producto, attenuato, carnoſo, monſtrat. Percis pinnae dorſualis radiis vndecim ſpinoſis, quatuordecim mollibus; faſciis duabus latis, albicantibus,

bus, tertiae differtationis eft obiectum. Hunc pifcem Clar. Auctor vnum eundemque cum Sciaena lineis obliquis lacteis in vtroque latere, Gronou. Muf. Ichthiol. effe opinatur. Sequitur, in Differtatione quarta, Percis fafciis tribus albicantibus, offe malae vtrinque in duas fpinas, vnam longam alteram brevem, producto. In defcribendis his pifcibus eadem methodo eademque folertia vfus eft, quam lectores in antecedentibus forfitan obferuarunt. Suo tempore et reliqui, Ichthiophylacii noftri pifces rariores, eodem modo defcribentur; hoc etenim modo hiftoriae pifcium naturali maius tutiusque lumen forfitan accendetur, quam vsque adhuc multis naevis fubiectam nouimus.

III.

Dentalii Americani ingentis magnitudinis defcriptio.

Auctore I. T. Koehlreutero pag. 352.

Dentalios, qui non raro ex continente nunc foli nunc inter alia conchylia et petrefacta eruuntur, merito ad domicilium vermium marinorum quorundam pertinere, nemo eft qui fibi non perfuadeat, quamuis ipfos vermes videre nemini adhuc contigerit. Variae indolis, ftructurae et magnitudinis reperiri, diuerfa exemplaria in Lithophylaciis Curio-forum ſorum aſſeruata docent. Clariſſ. Auctor igitur duos Dentalios ingentis magnitudinis deſcribit, eosque Dentalios arcuatos, ſpongioſos, fuſcos, ſuperficie tuberculis contiguis exaſperata, nominat. Ambo hi Dentalii magnitudine ſua inſigni ſe commendant. Maximum eorum ſecundum lineam rectam 4. pedes Pariſinos cum duobus pollicibus, ſecundum arcum curuaturae 4. pedes et 5. pollices aequat. Latitudo extremitatis inferioris vnius eſt pollicis, ſuperioris trium pollicum quinque linearum. Extremitas inferior fruſto Madreporae inſidet. Subſtantia ipſa corneae eſt duritiei. Corpus ipſum tuberculis ſubrotundis obſitum, interius rufo-fuſci exterius vero plane fuſci coloris eſt. Inprimis vero notata dignum eſt, ex baſi maximi huius dentalii, alium puſillum 1. pollicem cum 8. lineis longum excreuiſſe. Reliquum hoc fruſtum rariſſimum a nauta quodam olim Archangelopolin aduectum, et a PETRI MAGNI Archiatro D. *Areskin* Petropolin miſſum fuit. Alterum fruſtum quod Clariſſ. Auctor deſcribit, tres pollices cum 8. lineis longum non aeque elegans ac antecedens, magis irregulare, non vbique tuberculoſum et pallidiore gaudens colore cernitur. Adhaerent diuerſis in locis teſtae paraſiticae, ſcyphiformes, quadri-vel quinque laterae, inuerſo-conicae, cuius indolis et in antecedente conſpiciuntur. Reliquum haec fruſta propter inſignem et fere inconſuetam magnitudinem rariſſimis omnino ſunt annumeranda.

IV.

Obſeruationes Meteorologicae potiores Anni MDCCLIX. Petroburgi factae; et in eas Conſiderationes.

Auctore I. A. Braun p. 357 et ſeqq.

Satis iam conſtat adcuratio et methodus Auctoris, qua in obſeruationibus Meteorologicis concinnandis, vti ſolet. Nimirum adcuratiſſime notantur primum Altitudines Barometricae maximae et minimae in Barometro ſimplici ſecundum pollices pariſienſes, eorumque partes centeſimas per ſingulos menſes totius anni cum differentiis. 2. Calor maximus et minimus, ſiue frigus maximum per ſingulos quoque anni menſes cum differentiis adnotatur. 3. Meteora recenſentur potiora, additis vbique, vbi ſcilicet e re videtur, conſiderationibus et conſectariis, potiſſimum ex comparationibus deductis. Cuilibet regioni propria eſſe meteora, non ſolum, ſed cuilibet quoque anno eiusdem loci, ſatis conſtat.

Nos igitur notatu digniora enotabimus, quae hoc anno Petroburgi ſunt obſeruata. Denuo monendum eſt, obſeruationes has meteorologicas omnes ſecundum ſtilum Veterem eſſe confectas, quoniam hic, vti conſtat, eſt adhuc vſitatus.

Obſeruationes Barometricae primum occurrunt. Summa Barometri altitudo huic anno et huic loco pro-

propria, erat $=28. 82$. Nou. 9. obseruata; infima $=27. 00$ Ianuarii 24 et 26 notata. Ergo summa altitudo huius anni minor est, maxima alias hic obseruata, scilicet 1757 $=29. 12$, et quidem $\frac{30}{100}$ siue fere $3\frac{1}{2}$ lineae duodec. pollicis parisiensis. Altitudo Barometri infima 27. 00, si comparetur cum infima alias hic obseruata, nempe 26. 41. deprehenditur maior $\frac{59}{100}$ siue fere 7 lin. seu partibus duodecimis pollicis parisiensis.

Ceterum variationes Barometricae primis et vltimis mensibus, quam mediis, maiores et hoc anno deprehenduntur, ita vt vix aut rarissime ab hac lege exceptio occurrere soleat.

Minima variatio Barometrica fuit $=\frac{59}{100}$ siue fere 7 lin. mense Nouembri. Minores differentiae et variationes hoc anno deprehensae sunt Mense Aprili, Maio, Iunio, Iulio et Augusto, eoque per 5 menses, nonnunquam per 4 menses tantum reperiuntur. Ceterum nec maxima neque minima variatio semper iisdem mensibus occurrunt, quod per antecedentes obseruationes iam constat.

Quod ad obseruationes thermometricas attinet, singulare et plane extraordinarium fuit frigus Dec. 26 obseruatum $=212$, quo Auctor huius dissertationis suum egregium inuentum de congelando mercurio perficiendi, occasionem arripuit, et perfecit. Tantum frigus antea nunquam hic est obseruatum, maximus enim frigoris gradus vltra 202 et 203 nunquam adhuc fuit notatus.

Calor

Calor maximus huius anni = 104, Maii 26 et Iulii 18 et 19 obſeruatus, ſolet eſſe fere ordinarius. A maximo calore igitur 97°. 1757 et 1758. hic obſeruato, differt 7°. Septem ſcilicet gradibus minor eſt.

Haec hiems poteſt igitur iure pro frigidiſſima haberi, quae vnquam hic contigit, quae notata eſt, id quod et frigoris gradus reliqui inſigniores quoque recenſiti ſatis demonſtrare poſſunt.

Penetratio inſignioris huius frigoris in terram extra vrbem, tanta quoque eſt deprehenſa, quanta forſitan antea nunquam, ſc. 30 pollicum Londinenſium, quum *Kraftius* vltra 12 pollices eam mitiore hieme non deprehenderit. Vid. ipſius Phyſicam p. 265. P. 1.

Interim glacies Neuae frigore hoc ſaeuo craſſior non multum eſt reperta, quam ordinarie ſolet, ſcilicet 29 Poll. pedis Lond. Ordinaria eſſe ſolet 1 Arſchin = 28 Poll. Lond. Altitudo aquae pluuiae fuit mediocris, nimirum per ſex menſes aeſtiuos, a Maio ad Octobrem 11 pollicum paris: Aeſtas igitur non humida, et annus ſat fertilis fuit.

Primum tonitru hoc anno quoque eatenus extraordinarium fuit, quod ſolito citius contigit, ſcilicet iam Martii 25. Ceterum 12 diebus tonitrua ſunt audita. Congelatio vltima fuit Apr. 22.

Prima rurſus Sept. 22.

Declinatio acus magneticae et hic loci quoque per dies variabilis in acu praeſtanti eſt deprehenſa, ſed parum, ita vt differentia inter maximam et minimam

nimam ſit vix aliquot minutorum. Denique notatu dignus eſt motus vibratorius acus magneticae tempeſtate inprimis fulminea imminente obſeruatus, qui ſine dubio eſt effectus electricitatis aëris.

V.

Obſeruationes Meteorologicae, Anni MDCCLX. factae Petroburgi, et Conſectaria.

Auctore I. A. Braunio pag. 369.

Quae generatim de obſeruationibus meteorologicis anni praecedentis praemonuimus, de huius anni quoque obſeruationibus valent. Statim igitur ad ea enotanda progredimur, quae huic anno propria fuerunt, et notatu ſunt digniora.

1) Quod ad obſeruationes Barometricas attinet, notamus primum altitudinem huius anni ſummam et infimam. Summa hoc anno fuit = 28. 58. et infima 26. 74. Summa hoc anno mediocris fuit, et ab altitudine omnium adhuc obſeruatarum ſumma, ſcilicet 29. 12 differt $\frac{64}{100}$ pollicis Pariſienſis quibus minor eſt. Minor quoque eſt altitudine anni praecedentis ſumma ſcilicet 28. 82. Nouemb. 9. obſeruata, $\frac{24}{100}$. Summa huius anni altitudo menſe Septembri, anni praecedentis contra, menſe Nouembri eſt obſeruata, et iam ex antecedentibus obſeruationi-

bus constat summas Barometri altitudines iisdem mensibus non contingere vti quoque infimas.

Infima hoc anno = 26. 74 obseruata est Octobr. 21. Minima vero anni praecedentis = 27.00 Ianuarii 24. et 26. Minima haec huius anni licet satis parua, maior tamen est $\frac{33}{100}$. minima omnium adhuc hic obseruatarum, quae est 26. 41.

Differentia siue variatio menstrua maxima altitudinum Barometricarum reperta est mense Octobri 1. 78. Minima $\frac{65}{100}$ mense Iunio. Minores hoc anno 4. tantum mensibus sunt repertae, scilicet Aprili, Maio, Iunio, Iulio, anno praecedenti quoque mense Augusto, ideoque per 5. menses. Anno praecedenti differentia minima fuit = $\frac{59}{100}$ eoque minor $\frac{6}{100}$ huius anni. Minima variatio huius anni incidit in mensem Iunium, anno praecedenti autem in Aprilem.

Maxima differentia et variatio menstrua huius anni maior est, quam anni antecedentis. Est enim huius anni = 1. 78. anni praecedentis 1. 55. Hoc anno deprehensa mense Octobri est, anno vero praecedenti mense Nouembri.

In obseruationibus thermometricis sequentia memorabilia.

Frigus maximum, quod incidit in Ianuar. 13. huius anni fuit = 206. eoque 6 gradibus minus est, quam anno praecedenti, quo fuit = 212°. Decembris 26. Calor maximus hoc anno non insignis = 109°. incidit in mensem Maium, anno antecedenti in mensem quoque Maium et Iulium, qui fuit

fuit = 104°. Gradus 109. raro maximus per annum esse hic solet, neque frequens in mensem Maium, sed frequentius in Iunium et Iulium incidere solet.

Aestas igitur minus calida, contra hiems satis gelida erit censenda.

Ad meteora quod attinet, primum aurorae boreales 7, quarum tres insignes et perfectae erant, hoc anno sunt notatae.

Phaenomenum solare, quod fuit halo circa solem cum tribus pareliis adparuit Ianuarii 12. circa meridiem. Phaenomenum hoc in peculiari figura est repraesentatum. Alia halo solaris adparuit cum pareliis, sed non distinctis, Martii 2.

Tonitru primum hoc anno solito tardius euenit, scilicet Maii 16. quum anno praecedenti contra solito citius, iam Martii 25. ceterum tonitrua nouem diebus sunt audita.

Halo circa solem elliptica, Augusti 4. h. 8. mane obseruata, est notatu dignissima, rarissime enim eiusmodi halones occurrere solent. Vid. Figuram.

Niues, ad instar paruorum spiculorum, quum non frequenter occurrere soleant, hic quoque sunt adnotandae. Cecidere eiusmodi niues Decembris 10.

Altitudo niuis ad altitudinem aquae ex illa liquefacta fuit vt 11. ad 1. recenti niue lapsa, alias vt 9. 8. et 7. ad 1.

Altitudo aquae pluuiae per sex menses a mense Maio ad Octobrem fuit = 16. poll. Paris. 5. lin.

Mense Iulio maxima, et Septembri minima pluuiae copia cecidit.

Dies sereni aut maiorem partem sereni erant 234.

Venti vehementiores 32. Numerus ventorum vehementiorum maximus mense Ianuario, Septembri autem nullus fuit.

Aëris electrici effectus saepius in acu magnetica se conspiciendos praebuere per vibrationes, non solum coelo nubilo et tempestate fulminea imminente, sed etiam coelo sereno. In auroris contra borealibus vestigium electricitatis in acu magnetica adparuit nullum.

VI.

Recensiones binarum Dissertationum. Historia et Examen Chymicum Lapidis Nephritici.

Auctore D. I. G. Lehmanno pag. 381.

Diuersae Auctorum de hoc lapide opiniones ex omni tempore fuere, et vno eodemque nomine nunc verum Lapidem Nephriticum, nunc Malachitem, nunc Lapidem Amatonum, nunc Gallorum Iade, aliosque lapides opacos viridescentes insigniuerunt. Auctor dissertationis, iure, ad genus Smectitis, eiusque speciem, Lapidem Serpentinum, eum refert. Hanc suam sententiam sequentibus argumentis comprobat. 1) Quod plerumque in fodinis Lapidis Serpentini in-

inueniantur, et vna cum hoc Lapide eruantur. 2) Eadem duritie cum his gaudent. 3) Color ambobus vt plurimum communis et idem 4) Partes constitutiuae ambobus fere eaedem et 5) per Experimenta Chymica eadem producta oriuntur, quae a Lapide Serpentino prouenire solent. Quin immo affinitatem quandam Lapidem inter Nephriticum et Serpentinum et Amianthum, Asbestum et Granatos esse, opinatur, ideo quoniam plerumque in vno eodemque loco natali, et satis arcte interdum connati reperiuntur. Id quod inprimis quoque elegantissima ab Auctore exhibita Exemplaria comprobarunt, quae ex fodina Reicher Trost prope Reichensteinum effossa sunt, et in quibus Lapis Nephriticus cum Amiantho in Lapide Cornuo nigro arctissime connatus cernitur. Exponit postea Auctor labores Chymicos, quos cum hoc lapide instituit. Menstrua acida parum tantum ex hoc lapide extraxerunt, quod indolis martialis esse ex praecipitationibus cognouit. Easdem partes martiales per sublimationes cum Sale Ammoniaco, Mercurio Sublimato, Sale Alembrot, detexit. Fundendo cum Sale Tartari et Borace in Vitrum subluteum, cum Tartaro Vitriolato in Vitrum viride, abit. Eodem colore gaudebat vitrum ex hoc lapide et arsenico fixo conflatum. Lapis cum Argilla sola, nec non cum Argilla et Smectite simul fusus, vitrum dedit durum, cum chalybe scintillas spargens. Ex his Experimentis Analogiam insignem Lapidis Nephritici cum Amiantho et Asbesto deducit et comprobatam

 credit

credit, ideo quoniam Asbestus et Amianthus eodem modo se habent. Haec Dissertatio ne meris tantum Experimentis omni vtilitate destitutis, concinnata videatur, in fine vsum paucis quamuis tantum indigitat, qui exinde in artem fusoriam redundare potest. Notum est in Imperio Augustissimae nostrae, Mineras Cupri per se satis diuites reperiri, Lapide Nephritico et Amiantho intertextas et interspersas, quae propterea refractariis annumerantur. Cum vero ex adductis in Dissertatione Experimentis pateat, mediante argilla hoc lapidis genus in vitrum bene fusum vel quod vnum idemque est, in scoriam bene fusam (dünne Schlacke) abire, hoc modo forsitan paucis impensis hoc Minerarum genus cum fructu in furnis fusoriis, solo argillaceo additamento adhibito, fundi poterit, qui euentus, si expectationi respondet, non exigui momenti esse debet.

VII.

De Entrochis et Asteriis Columnaribus trochleatis, vulgo Schraubensteinen. Accedit Problema de Petrefacto incognito nouiter inuento.

Auctore D. I. G. Lehmanno p. 413.

Haud diu est et vix Seculum elapsum ex quo Historiae naturalis amatores petrefacta paullo penitius considerare, examinare, dignati sunt. Haec dis-

disquisitio pro voto in eis petrefactis successit, quorum Originalia ex regno animali et vegetabili satis fuerunt cognita. Pluribus vero difficultatibus ea sunt subiecta, quorum Originalia sagacitati Physicorum hucusque effugerunt. Huius indolis petrefactis nostri quoque aeui auctores complures, Entrochos Columnares trochleatos annumerarunt; eosque nunc Conchylia nunc Zoophita petrefacta esse crediderunt. Auctor Dissertationis per complura Exemplaria non tantum allegata, verum quoque in Consessu Academico demonstrata, hos lapides Entrochis Columnaribus iure annumerat, qui, vti notum est, de Stellis marinis diuersi generis, Encrinis, et Capitibus Medusae, ortum suum trahunt. De hac re certior factus est in Exemplare quodam ex ferrifodinis Huttenrodanis in Hercynia eruto, quod diffractum eandem stellam pentagonum monstrat, quam in compluribus Trochis et Entrochis Columnaribus cernimus. Tab. XII. fig. 5. eius iconem exhibet. Sententia auctoris magis adhuc corroboratur per aliud adhuc Exemplar Tab. XII. fig. 7. delineatum, vbi *a* axem Entrochi monstrat, cui Trochus circa hanc axem versatilis inhaeret. Quin immo, ipsae hae axes luculenter testantur, Lapides istos ad Entrochorum familiam pertinere, cum neminem fugiat, Trochos complures in centro perforatos reperiri. Omnibus vero argumentis, nostra quidem sententia palmam praeripere videtur, Anatome ramorum vel brachiorum Capitis Medusae Archangelopolitani ab Auctore institutum, quae ei eandem cum Entrochis figu-

figuram, ſtructuram et conformationem monſtrauit. Haec omnia ſimul ſumta ſententiam extra dubium ponent, Trochleas iſtas lapideas ad Entrochos Columnares, id eſt, ad partes ſtellarum marinarum, Capitum Meduſae, Encrinorum, petrefactas, pertinere. Colophonis loco proponit Auctor Diſſertationis Problema de Petrefacto quodam incognito, quod, vti adiectae figurae Tab. XII. fig. 8. 9. monſtrant, mox piſcem mox concham quandam ſimulat. Poſteaquam haec diſſertatio Academiae exhibita fuit, inuenit Auctor in Ephemeridibus Acad. Scient. Suecicae Tom. 21. pag. 20. et in Muſaeo Teſſiniano pag. 98. No. 3. deſcriptionem a Cl. Domino Equite de Linne concinnatam petrefacti, quod plurima ex parte cum noſtro conuenit. Cl. Eques de Linne l. c. illud Enthomolithum paradoxum appellat, et tres eius allegat ſpecies. 1) Dorſo laeui aequali. 2) Dorſo ſtriis transuerſis conuexis integris viginti. 3) Dorſo ſtriis transuerſis conuexis interruptis viginti, punctisque ſex longitudinalibus. Ad quam vero Enthomolithorum Claſſem proprie pertineant, determinare non auſus eſt, ſed potius quaſi Intermedium quoddam eſſe credit Cancros inter et Oniſcos et Monoculos. Cum huius generis petrefacta rariſſimis fere ſint annumeranda, cumque eorum Originalia in hunc vsque diem reperta non ſint, optandum foret, vt plures Minerophili eorum originem inueſtigare ſtuderent.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

I.

Dissertatio Astronomica De effectu Parallaxeos in transitu Planetarum sub Sole.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 133.

Appropinquante celebri illo coelesti phaenomeno, transitu Veneris per discum Solis anno 1761, Cl. Auctor exhibuit Academiae dissertationem, de qua hic sermo est, eique adiunxit mappam, principiis hic expositis superstructam, in qua vno quasi intuitu conspicere erat loca, quae praecipua huius phaenomeni momenta, immersionem scilicet atque emersionem Veneris dato tempore, citius aut tardius, ob parallaxin prae centro Telluriis spectare debebant. Cel. *De l'Islius* primus huiusmodi mappam occasione transitus Mercurii per discum Solis anno 1753 visi, in lucem edidit. Ast celauit artificia, quibus in constructione ipsius vsus est. Praecipuus itaque scopus, quem Cl. Auctor hac dissertatione intendit, is est, vt ostendat, qua ratione eiusmodi mappae pro transitu Planetarum sub Sole construi queant.

Cum effectus parallaxeos in eo consistat, vt immersio Veneris in discum Solis aeque ac emersio e diuersis telluris locis, diuerso tempore fieri conspiciatur, Cl. Auctor de effectu parallaxeos agens, primum sibi proponit sequens problema soluendum: *Inuenire momentum quo distantia centrorum Solis et Planetae ex dato puncto videtur sub angulo dato.* Vt ad solutionem illius viam sternat, rem orditur a generalibus contemplationibus, ex quibus cum perspexisset infinita dari puncta problemati satisfacientia, in superficie sita, quae producitur rotatione circuli super recta distantiam centrorum Solis et Planetae referente, deducitur ad principale problema, quo quaeritur, *quonam momento datum telluris punctum in hac superficie reperiatur?* Non alia enim puncta globi terrestris elongationem Planetae ac Solis sub dato angulo videre poterunt, nisi quae in intersectione superficiei Telluris, cum superficie supra memorata fuerint locata.

Ne vero in solutione problematis, vti propositum est, ad formulas intricatas deuoluatur, primum circulum tantum telluris, qui formatur intersectione a plano per centra Solis, Terrae ac Planetae transeunte considerat. Euoluta iam formula generali, qua exprimitur proprietas punctorum in plano huius circuli existentium, et distantiam centrorum Solis ac Planetae sub dato angulo conspicientium, id agit, vt ostendat, qua ratione pro quouis puncto, in hoc plano reperiundo, problema solui, atque ad Immer-

sionem

sionem aeque ac ad Emersionem erutae formulae adaptari debeant.

Absolutis generalibus descendit Cl. Auctor ad specialia, quae in transitu Planetarum sub Sole veniunt consideranda; ostendit scil. qua ratione formulae ad centrum telluris accommodari debeant, et determinari queant loci, quorum alter primum, alter vltimum omnium Immersionem aut Emersionem conspiciunt, atque indicat modum, ad quem computus commodissime peragi debeat.

Quoniam plura semper dantur superficiei telluris puncta Immersionem siue Emersionem Veneris eodem tempore conspicientia, omnia vero sita sunt in circulo quodam in superficie telluris ducto, prout patet ex iis, quae in principio dissertationis dicta sunt, Cl. Auctor exponit modum circulos hos designandi tam in globo artificiali, quam in plano proiectionem telluris exhibente. Pro primo casu definit polum et eius distantiam a perimetro circuli describendi; pro secundo vero docet artificia, quorum ope circulus hic in proiectionem telluris transferendus est, atque sic omnia, quae ad finem, quem proposuerat, obtinendum faciunt, Cl. Auctor absoluisse est existimandus. Dissertationem hanc orbi erudito gratam et acceptam vel ideo maxime fore confidimus, quod peculiari, et prorsus noua ratione abstrusam hanc theoriam pertractauerit.

II.

Dissertatio II.

De effectu parallaxeos in Transitu Planetarum sub Sole.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 454.

In prima dissertatione Cl. Auctor occupatus fuit in enucleanda theoria generali effectus parallaxeos in transitu Planetarum sub Sole, formulisque analyticis concinnandis in hoc negotio adhibendis, neque de earum abbreuiatione, nisi quatenus calculi analytici difficultates superandae permiserant, fuit sollicitus. Vt igitur illas contrahat, concinnioresque reddat, adplicat ad casum specialem, ad proximum nempe qui euenerat transitum. In Astronomia non raro offerunt sese casus, vbi non minor solertia in formulis, quae problematis solutionem continent, condendis, quam iis ad vsum deducendis requiritur: Hic certe ad numerum eorum referri debet. Concinnitati itaque formularum Cl. Auctor intentus, rem perquam vtilem praestitisse est censendus, dum integram theoriam suam exemplo illustrauerit, et rationem in similibus casibus formulas suas adhibendi monstrauerit. Ex hoc fonte promanauit mappa illa cuius supra mentionem fecimus.

III.

III.

De Venere in Sole visa Anno 1761. d. 6. Iunii St. nou.

Auctore G. Heinsio pag. 473.

In obseruatione rarissimi huius phaenomeni peragenda, eodem instrumentorum apparatu, eademque methodo vsus est Cl. Auctor, quam in Nou. Comm. Tomo VI. occasione Mercurii in Sole Anno 1753. ab eodem Lipsiae obseruati, copiosissime exposuit. In conclusionibus vero ex obseruatis suis deducendis, in locum constructionis Geometricae ibidem traditae, rectissime calculum hic substituere maluit.

Non sine ratione Cl. Auctor in limine de intempestiua caeli facie conqueritur: Nam si caelum faueret, per bihorium et amplius a sole orto iucundissimo spectaculo frui illi licuisset, antequam tubo astronomico sex pedes longo libella et reticulo instructo, Venerem, vt semitam eius apparentem definiret, venari cepisset. Institutis nouem huius indolis obseruationibus, cum Venus emersioni propinqua iam foret, praeparauit sese Cl. Auctor ad contactus obseruandos tubo Gregoriano 52. vicibus obiecta amplificante, atque incredibili mentis et oculorum celeritate obseruationem hanc perfecit: plurima etenim momenta paucissimis secundis sese excipientia obseruauit.

Dum difficultates, obseruationem afficientes, atque in parallaxin solis resultantes anxie persequitur, dubitat, quodnam momentum contactus ne interior vtriusque limbi $8^{h.}$ $8'$ $7''$, totalis ne luminis ad marginem Veneris disparitio $8^{h.}$ $8'$ $27''$ ad merid. Lipſ. pro initio egressus assumendum sit, et quemuis obseruatorem per viginti secunda et amplius haesitare in eo posse Cl. Auctori persuasum est. Interim misso contactu momentum disparitionis luminis inter limbum Veneris, lineamque a reliqua disci solaris peripheria quasi separatam, et a Cl. obseruatore visam sc. $8^{h.}$ $8'$ $27''$ pro initio egressus assumi debere existimat.

Si quis modum, quo Cl. Auctor ex Obseruationibus tubo suo libella et reticulo instructo peractis, positionem Veneris in disco Solis visam elicit, scire cupit, is ex ipsa dissertatione ipsum haurire poterit. Id solum hic monuisse sufficiat: Ex nouem diuersis obseruationibus Latitudinem Veneris momento coniunctionis visam ex computo Auctoris profluxisse $9'$ $57''$ Austr. ipsum momentum coniunctionis centrorum Solis et Veneris in Ecliptica Iunii d. 5. $6^{h.}$ $35'$ $7''$ ad merid. Lipſ. et Latitudinem denique heliocentricam $3'$ $57''\frac{1}{2}$ non habita ratione parallaxeos.

Solemne est Cl. Auctori summa tantum capita obseruationum suarum referre. Verum optandum est, vt ad normam a celeberr. Astronomis probatam, examen saltem horologii in tam graui obserſeruatione iudicio lectorum ſubmitteret, quo maior fides et certitudo ipſis obſeruatis concilietur.

IV.

De effectu parallaxis in Tranſitu Veneris per Solem.

Auctore G. Heinſio pag. 501.

In diſſertatione praecedente, cuius iſtam tanquam Continuationem Auctori nominare placet, inueſtigauit Cl. Auctor ex obſeruationibus Lipſiae habitis ſemitam Veneris intra diſcum Solis, qualis apparuiſſet, ſi Sol et Venus ad infinitam quaſi diſtantiam a Terra remoti fuiſſent, atque inde concluſiones vſui Aſtronomico inſeruientes elicuit. Cum vero hypotheſis iſta veritati non ſit conſentanea, concluſiones ibi erutas correctione indigere vltro patet: Parallaxin etenim Solis nec non et Veneris ſenſibilem eſſe aliae obſeruationes euincunt, atque idcirco ſemita Veneris a ſpectatore in centro Telluris conſtituto viſa, prorſus diuerſa debet eſſe ab ea, quam videt ſpectator in ſuperficie Telluris locatus, et pro diuerſo ſitu obſeruatoris, diuerſa quoque ſemita apparens locum habeat neceſſe eſt. Quam ob rem concluſiones in vſum Aſtronomicum ex obſeruationibus in ſuperficie Telluris habitis deriuari non poterunt, niſi eae prius ad centrum Telluris reducantur: Id quod eo curatius praeſtari poterit, quo exactiori cognitione parallaxeos Solis inſtructi fuerimus.

Quo-

Quoniam Astronomi in enodanda subtili quaestione de quantitate parallaxeos Solis vti et Veneris omnem spem in transitum hunc coniecerant, et absque exacta illius cognitione semita Veneris ex dato superficiei Telluris loco visa, ad centrum Telluris reduci nequit, perspicuum est, vtramque quaestionem ita inter se connecti, vt altera alterius postulet solutionem. In enodanda igitur quaestione de quantitate parallaxeos Solis, ad methodum indirectam confugiendum est, vt sc. supposita parallaxi aliunde cognita, calculo inquiramus in effectus, qui inde pro datis locis resultent, eosque comparemus cum iis, quos obseruationes manifestarunt. Comparatione instituta patebit quantum assumta parallaxis a vera discrepet. Inquisitio autem effectuum supponit semitam Veneris ad centrum Telluris reductam. Hanc ob rem Cl. Auctor, vt ordine procedat in ista dissertatione, primariam quaestionem, *concessis parallaxibus et semita Veneris ad centrum Telluris explorare effectus parallaxeos*, enodandam sibi proponit.

Rem integram orditur a primis principiis, et in genere persequitur effectus, quales in diuersis circumstantiis a parallaxi profecturi sunt. Vt doctrinam suam illustret, descendit ad specialia: Ex Tabulis Astronomicis sumtis elementis ad schema pro obseruatore in centro Telluris constituto construendum, praecipua momenta transitum spectantia per calculum elicit Cognito schemate ad centrum Telluris, perpendit circumstantias sub quibus obseruatori in superficie Telluris locato phaenomenon hoc apparitu-

rum

rum sit, dein integram theoriam illustrat exemplo ad obseruatorem Lipsiensem applicato. Posita parallaxi solis 10″ et calculo ad methodum expositam instructo, inuenit Lipsiae ob parallaxin centrum Veneris 1′ 38″ citius egredi debere, et ingredi 6′ 29″ tardius prae obseruatore in centro Telluris constituto. Eandem rem praestitit sub aliis quoque hypothesibus.

In introitu iam Cl. Auctor monuit, multos non nisi ad primarios effectus parallaxeos circa ingressum nempe et egressum attendisse, aliorum tamen effectuum durante transitu considerationem non fuisse postponendam. Idcirco expositis effectibus in introitu et exitu Veneris pro obseruatore Lipsiensi accingit sese Auctor ad solutionem problematis: *ad datum tempus definire positionem mutuam centri Veneris in puncto aliquo semitae suae haerentis, et centri Solis a dato obseruatore in aliquo semitae suae Eclipticae loco visi*; et retenta eadem parallaxi Solis, seriem locorum semitam centri Veneris exhibentem in transitu per discum Solis Lipsiae visam calculo inuestigat.

Impletis 42 paginis argumentum hoc spectantibus Cl. Auctor filum abrumpit, idem in alia dissertatione aliaque methodo pertractaturus, quam facilius iudicium de quantitate parallaxeos largitum iri existimat.

V.

Conſiderationes de motu Corporum Coeleſtium.

Auctore Leon. Eulero pag. 544.

Licet nullum ſit dubium, quin leges, quibus corpora coeleſtia in motibus ſuis obediunt, a *Keplero* detectae, a *Neutono* vero in maximum Aſtronomiae incrementum demonſtratae ſint, minime tamen exiſtimandum eſt theoriam Aſtronomiae ad ſummum gradum perfectionis euectam eſſe. Poſſumus equidem motum duorum corporum in ratione directa maſſarum et inuerſa quadratorum diſtantiarum in ſeſe agentium, perfecte definire: verum ſi iis accedat tertium, vt vnum quodque in reliqua ſecundum illam legem agat, motui eorum enodando omnia hucusque inuenta Analyſeos artificia minime ſufficiunt. Quidquid autem de motu Lunae et reliquorum corporum coeleſtium a viris celeberr. hucvsque praeſtitum eſt, id non niſi approximationibus innititur, quae eatenus locum inueniunt, quod inter ternas vires vna prae reliquis maxime ſemper emineat, ita vt effectus a reliquis oriundus veluti minimus ope approximationum definiatur, quae tamen negotium minime conficiunt.

Quoniam Solutio problematis de tribus Corporibus, ſecundum memoratam legem in ſeſe inui-

cem

tem agentibus, ſenſu generali accepti vires humanas Cel. Auctori merito transcendere videtur, tentauit illud reſtrictum ſoluere poſita maſſa vnius prae binis reliquis euaneſcente, vt ſcilicet incipiendo a caſibus particularibus viam ſternat ad ſolutionem problematis ſenſu generali accepti; Verum reſtricto etiam ſic problemate tantae difficultates in ſolutione eius ſeſe obtulerant, vt ipſe Cel. Auctor fruſtra in euoluendo eo ſe deſudaſſe fateatur. Interea obſeruauit caſum per quam ſingularem et notabilem, quo Lunae eiusmodi motus imprimi potuiſſet, vt perpetuo vel in oppoſitione vel in Coniunctione cum Sole apparuiſſet, ſi ſc. Luna quater fere longius a nobis remota, et ei eiusmodi motus impreſſus fuiſſet, vt pari paſſu cum Terra in plano Eclipticae ingredi inciperet. Licet fictam hypotheſin Cel. Auctor in calculum introduxerit, veram nihilo minus exinde et minime expectatam elicuit de limite Satellitum Terrae concluſionem; corpora nempe quae quadruplo magis a nobis ac Luna diſtant in numerum planetarum primariorum, propiora vero in numerum Satellitum terrae referenda ſunt.

Vt Luna coniuncta vel oppoſita perpetuo Soli maneat, motus illi in plano Eclipticae idemque cum Tellure imprimatur neceſſe eſt; quodſi vero ille a lege hac diſcrepet, Luna exiguas excurſiones hinc inde oſcillando tanquam conficiet. Cel. Auctor naturam quoque earum adhibitis approximationibus eo, quo pollet acumine, in diſſertatione iſta ſcrutatus eſt.

INDEX
COMMENTARIORVM.

Mathematica.

Physico-Mathematica.

Aepini,

Physica.

Astronomica.

Addita-

Additamentum *Ioh. Gottl. Lehmanni*, ad Differtationem fuam pag. 430. huius Tomi.

Dies diem docet: et ex eo tempore quo tanquam problema petrefactum iftud incognitum hiftoriae naturalis amatoribus explicandum propofui, iam biennium eft elapfum, non defii penitius in naturam eius inueftigare, et expertus fum, hoc petrefactum effe Entomolithum Onifci, et quidem Tab. XI. Fig. 8. 9. et Tab. XII. Fig. 8. 9. Onifcum petrefactum, dorfo ftriis transuerfalibus conuexis integris viginti, monftrat. Fig. 10. Tab. XII. vero Onifcum, dorfo ftriis transuerfis conuexis interruptis viginti, punctisque fex longitudinalibus in lapide calcareo petrefactis innumeris referto, ex Gothlandia, exhibet. Huius infecti fpecies haud raro his quoque in confiniis Petropolis, in oftiis finus Finnici et fluminis Fontalkae aut Fontanae, viuae et diuerfae magnitudinis a Secretario Academiae noftrae, Status Confiliario Dom. *de Staehlin* repertae fuerunt. Celeberrimus Eques Dom. de *Linne* in Act. Academ. Vpfal. Tom. 21. huius infecti non minus quam in Muf. Teffin. pag. 98. No. 3. mentionem facit, rem tamen in ambiguo relinquens, pertineatne ad Cancrorum, Monoculorum, Onifcorum familias; et ideo quoque hoc petrefactum Entomolithum paradoxum appellauit, vel Intermedium quoddam Cancrum, Onifcum, Monoculum inter. Mihi in praefentiarum fufficit explicuiffe, hoc petrefactum ad Entomolithos Onifcorum pertinere. D. 17. Mart. 1766.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE
REDVCTIONE FORMVLARVM INTEGRALIVM AD RECTIFICATIONEM ELLIPSIS AC HYPERBOLAE.

Auctore

L. EVLERO.

Egregia omnino ſunt, quae acutiſſimi Geometrae *Maclaurin* et *D'Alembert* de reductione formularum integralium ad rectificationem Ellipſis et Hyperbolae ſunt commentati; cum in iis non ſolum inſignis vis ingenii ſpectetur, ſed etiam haud exigua ſpes affulgeat, his rectificationibus in calculo aeque commode vtendi, atque adhuc arcus circulares et logarithmos adhibere ſumus ſoliti. Nullum enim eſt dubium, quin haec inueſtigatio a ſummis Geometris tam felici ſucceſſu ſuſcepta latiſſime pateat, atque vberrimos fructus aliquando ſit allatura; quamuis enim iam plurimum in hoc negotio ſit praeſtitum, minime tamen totum argumentum quaſi exhauſtum eſt cenſendum. Nam poſtquam longe diuerſa methodo vſus eo perueni, vt tam in Ellipſi quam Hyperbola diuerſos arcus definire potuerim, quarum differentiam geometrice aſſignare liceat, de quo quidem laudati viri dubitaſſe videntur, hinc non leuis acceſſio in tractatione huius ar-

 gumenti

gumenti expectari poterit. Imprimis autem hic idoneus ſignandi modus deſiderari videtur, cuius ope arcus elliptici aeque commode in calculo exprimi queant, ac iam logarithmi et arcus circulares ad inſigne Analyſeos incrementum per idonea ſigna in calculum ſunt introducti. Talia ſigna nouam quandam calculi ſpeciem ſuppeditabunt, cuius hic quaſi prima elementa exponere conſtitui.

Quemadmodum autem omnes arcus circulares ad circulum, cuius radius vnitati aequalis ſtatuitur, referri ſolent, ita etiam pro omnibus ſectionibus conicis, quas in calculum recipere volumus, menſuram quandam fixam vnitate exprimendam aſſumi conueniet, quae ad omnes ſpecies aeque pertineat. Perſpicuum autem eſt, hanc menſuram axi transuerſo tribui non poſſe, cum is in parabola neceſſario fiat infinitus, in hyperbolis autem negatiuum valorem conſequatur: aeque parum axis coniugatus ad hoc inſtitutum eſt accommodatus, quippe qui in parabola quoque fit infinitus, et in hyperbolis valorem adeo imaginarium adipiſcitur. Relinquitur igitur parameter, cui, quominus perpetuo valor fixus tribui queat, nihil plane obſtat; et quoniam pro circulo parameter abit in diametrum, huiusque ſemiſſis vnitate exprimi ſolet, conſtanter in ſequentibus parametrum binario indicabo, vt eius ſemiſſis vnitate exprimatur.

Hypotheſis I.

I. Perpetuo igitur mihi vnitas ſemiparametrum, ſeu ſemilatus rectum ſectionis conicae, exprimat.

Coroll.

Coroll. 1.

2. Si ergo a denotet semiaxem transuersum, in quo abscissae x a vertice capiantur, iisque applicatae y normaliter constituantur, habebitur ista aequatio:

$$yy = 2x - \frac{xx}{a}.$$

Coroll. 2.

3. Quamdiu a quantitatem positiuam denotat, aequatio erit pro ellipsi, quae quidem, si $a = 1$, abit in circulum; at posito $a = \infty$ habebitur parabola. Valores autem negatiui ipsius a ad hyperbolas pertinent.

Coroll. 3.

4. Ex hac aequatione fit $dy = \frac{dx(a-x)}{\sqrt{a(2ax - xx)}}$, hincque arcus abscissae x respondens $= \int \frac{dx \sqrt{(aa - 2a(1-a)x + (1-a)xx)}}{\sqrt{a(2ax - xx)}}$ seu $= \int dx \sqrt{\left(\frac{a}{2ax - xx} + \frac{a-1}{a}\right)}$ pro ellipsi, si fuerit a numerus positiuus.

Coroll. 4.

5. Posito $a = 1$, fit pro circulo arcus abscissae x, quae est eius sinus versus, respondens $= \int dx \sqrt{\frac{1}{2x - xx}}$, vti constat, ac posito $a = \infty$, prodit parabolae arcus abscissae x respondens $= \int dx \sqrt{\left(\frac{1}{2x} + 1\right)}$.

Coroll. 5.

6. Si denique a habeat valorem negatiuum, puta $a = -c$, erit pro hyperbolis arcus abscissae x respondens $= \int dx \sqrt{\left(\frac{c}{2cx + xx} + \frac{c+1}{c}\right)}$.

Hypothesis 2.

7. In sectione conica, cuius semiparameter $= 1$ et semiaxis transuersus $= a$, atque abscissae in axe transuerso a vertice capiantur, arcum abscissae x respondentem hac scriptione $\Pi x [a]$ indicabo.

Coroll. 1.

8. Post signum ergo Π scribetur abscissa in axe transuerso a vertice computata, cui subiungetur semiaxis transuersus intra vncinulas [ ] expressus.

Coroll. 2.

9. Haec ergo expressio $\Pi x [a]$ designat arcum ellipticum, si a sit quantitas positiua, et circularem quidem, si $a = 1$, cuius sinus versus $= x$. At si $a = \infty$, exprimit ea arcum parabolicum, ac denique si a sit quantitas negatiua, arcum hyperbolicum.

Coroll. 3.

10. Habet ergo huiusmodi expressio $\Pi x [a]$ valorem determinatum, eaque non solum sectio conica definitur, sed etiam eius arcus illa expressione indicatur.

Coroll. 4.

11. Manifestum autem est, vt istius expressionis valor fiat realis, abscissam x non solum realem, sed etiam positiuam, esse debere. Tum vero praeterea, si fuerit a quantitas positiua, necesse est, vt abscissa x limitem $2a$ non transgrediatur. Quantitatem a autem necessario realem esse oportet.

Coroll.

Coroll. 5.

12. Haec ergo expressio $\Pi x[a]$ imaginaria erit, si vel 1^{mo}. numerus a fuerit imaginarius, vel 2^{do}. x quantitas imaginaria, vel 3^{tio}. quantitas negatiua, vel 4^{to}. positiua quidem, sed maior quam $2a$, si scilicet a sit quantitas positiua.

Coroll. 6.

13. Notetur quoque, hanc formulam $\Pi x[a]$ eiusmodi functionem ipsius x exhibere, quae euanescat euanescente x, ita vt sit $\Pi o[a] = o$. Sin autem sit x quantitas infinite parua $= \omega$, erit $\Pi \omega[a] = \sqrt{2\omega}$, neque ergo ab a pendet.

Theorema 1.

14. Si haec formula differentialis $dx\sqrt{\left(\frac{a}{2ax-xx} + \frac{a-1}{a}\right)}$ ita integretur, vt integrale euanescat posito $x = o$, erit $\int dx \sqrt{\left(\frac{a}{2ax-xx} + \frac{a-1}{a}\right)} = \Pi x[a]$.

Demonstratio.

Vtraque enim expressio refertur ad sectionem conicam, cuius semiparameter $= 1$, et semiaxis transuersus $= a$, atque arcum eius denotat a vertice sumtum, qui abscissae x respondet, abscissa in axe transuerso sumta, ac pariter a vertice computata.

Coroll. 1.

15. Si pro a scribamus $-a$, habebitur:

$$\int dx \sqrt{\left(\frac{a}{2ax+xx} + \frac{a+1}{a}\right)} = \Pi x[-a]$$

quo casu, si quantitas vncinulis inclusa sit negatiua, arcus hyperbolicus indicatur.

Coroll.

Coroll. 2.

16. Si sit $a = \infty$, quo casu prodit rectificatio parabolae, erit $\int dx \sqrt{\left(\frac{1}{2x} + 1\right)} = \Pi x [\infty]$, cuius valor, vbi constat, per logarithmos exhiberi potest.

Coroll. 3.

17. At si sit $a = 1$, vt habeatur $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x - xx)}} = \Pi x [1]$, hac expressione arcus circuli, cuius radius $= 1$, exprimitur, cuius sinus versus $= x$; eius ergo cosinus erit $= 1 - x$, et sinus $= \sqrt{(2x - xx)}$.

Coroll. 4.

18. Cum eidem abscissae x geminus arcus, alter positiuus, alter negatiuus, respondeat, expressio $\Pi x [a]$ per se geminum exhibebit valorem, perinde vti signa radicalia quadratica; erit ergo functio biformis, tam valorem negatiuum, quam positiuum, continens.

Scholion.

19. Quoties autem expressio $\Pi x [a]$ ad ellipsin refertur, ea non solum duos, verum adeo infinitos, valores complectitur, perinde vti in circulo infiniti dantur arcus eidem sinui verso x conuenientes. Naturam ergo huius functionis infinitiformis pro ellipsibus accuratius perpendamus.

Problema 1.

20. Inuenire omnes arcus ellipticos eidem abscissae x respondentes, seu definire omnes valores formulae $\Pi x [a]$ conuenientes.

Solutio.

Solutio.

Sit z minimus arcus abſciſſae x reſpondens in ellipſi, cuius ſemiaxis transuerſus eſt $=a$, ponatur ſemiperimeter ellipſis $=A$, vt ſit tota perimeter $=2A$, atque manifeſtum eſt, eidem abſciſſae x etiam reſpondere arcus $2A-z$; $2A+z$; $4A-z$; $4A+z$; $6A-z$; $6A+z$ etc. qui omnes cum ſuis negatiuis continentur in formula $\Pi x\,[a]$: ita vt eius valor in genere ſit $\pm 2nA \pm z$, denotante n numerum integrum quemcunque.

Coroll. 1.

21. Cum $\frac{1}{2}A$ ſit quarta pars perimetri ellipſis, eique abſciſſa $x=a$ conueniat, erit $\frac{1}{2}A=\Pi a\,[a]$, ſemiperimetro autem A conuenit abſciſſa $2a$, vnde $A=\Pi.\,2a\,[a]$, ergo $\Pi\,2a\,[a]=2\,\Pi a\,[a]$.

Coroll. 2.

22. Si capiatur abſciſſa $=2a-x$, erit arcus ei reſpondens $=A-\Pi x\,[a]$, vnde colligitur haec aequalitas:

$$\Pi x[a]+\Pi(2a-x)[a]=2\,\Pi a[a]$$

vbi vincula ( ) quibus abſciſſa inſcribitur, ab vncinulis [ ] ſemiaxem transuerſum continentibus, probe diſtingui oportet.

Coroll. 3.

23. Eadem aequalitas ex integrali poteſt colligi: poſito enim $2a-x$ loco x, erit:

$$\Pi(2a-x)[a]=-\int dx\sqrt{\left(\frac{a}{2ax-xx}+\frac{a-1}{a}\right)}=-\Pi x[a]+\text{Conſt.}$$

Constans vero ex quodam casu debet colligi. Scilicet si ponatur $x = 0$, fit Const. $= \Pi\, 2a\,[a]$, vel si ponatur $x = a$, prodit Const. $= \Pi a[a] + \Pi a[a] = 2\,\Pi a[a]$.

Scholion.

24. Arcus elliptici praeterea hanc habent proprietatem, vt, si axis transuersus $2a$ minor fuerit parametro, quod scilicet euenit, si axis minor pro transuerso capiatur, iidem arcus sumi possint in alia ellipsi, cuius axis sit maior parametro. Nititur haec reductio similitudine ellipsium, quarum semiaxes sunt a et $\frac{1}{a}$, manente parametro eadem $= 2$.

Problema 2.

25. Arcum ellipticum $\Pi x[a]$, si fuerit $a < 1$, ad aliam ellipsin reducere, cuius semiaxis sit vnitate maior.

Solutio.

Cum sit $\Pi x[a] = \int dx \sqrt{\left(\frac{a}{2ax - xx} + 1 - \frac{1}{a}\right)}$, statuatur $\sqrt{(2ax - xx)} = a - aay$, eritque $2ax - xx = aa(1 - 2ay + aayy)$; hincque $a - x = a\sqrt{(2ay - aayy)}$; vnde fit $dx = \frac{-aady(1 - ay)}{\sqrt{(2ay - aayy)}}$.

Facta hac substitutione consequemur:

$$\Pi x[a] = \int \frac{-aady(1 - ay)}{\sqrt{(2ay - aayy)}} \sqrt{\left(\frac{1}{a(1 - ay)^2} + 1 - \frac{1}{a}\right)}, \text{ seu}$$

$$\Pi x[a] = -a\sqrt{a}.\int dy \sqrt{\frac{1 + (a - 1)(1 - ay)^2}{2ay - aayy}},$$

quae expressio reducitur ad hanc formam:

$$\Pi x[a] = -a\sqrt{a}.\int dy \sqrt{\left(\frac{1}{2y - ayy} + 1 - a\right)}.$$

Ponamus

Ponamus in formula integrali $a = \frac{1}{b}$, vt sit $b = \frac{1}{a}$, ac fiet ea

$$\int dy \sqrt{\left(\frac{b}{2by - yy} + 1 - \frac{1}{b}\right)} = \Pi y[b] + \text{Const.}$$

Quare restituta littera a obtinebitur, ob $y = \frac{a - \sqrt{(2ax - xx)}}{aa}$,

$$\Pi x[a] = \text{Const.} - a\sqrt{a}.\Pi \frac{a - \sqrt{(2ax - xx)}}{aa}\left[\frac{1}{a}\right]$$

vbi ex casu $x = 0$ definitur constans $= a\sqrt{a}.\Pi \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\right]$ ita vt sit:

$$\Pi x[a] = a\sqrt{a}.\Pi \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\right] - a\sqrt{a}.\Pi \frac{a - \sqrt{(2ax - xx)}}{aa}\left[\frac{1}{a}\right]$$

sicque arcus ellipsis, cuius semiaxis est a, reductus est ad arcus alius ellipsis, cuius semiaxis est $= \frac{1}{a}$.

Coroll. 1.

26. Si ponatur $x = a$, fit $\frac{a - \sqrt{(2ax - xx)}}{aa} = 0$, ideoque $\Pi a[a] = a\sqrt{a}\ \Pi \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\right]$. Scilicet perimeter prioris ellipsis, cuius semiaxis $= a$, est ad perimetrum posterioris, cuius semiaxis $= \frac{1}{a}$, vti $a\sqrt{a}$ ad 1, seu vt $a^{\frac{3}{4}}$ ad $\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}$.

Coroll. 2.

27. Cum arcus abscissae $\frac{a - \sqrt{(2ax - xx)}}{aa}$ respondens, posito $x = 0$, fiat $= \Pi \frac{1}{a}$, hinc aucto x decrescat donec euanescat, posito $x = a$, lex coutinuitatis exigit, vt sumto $x > a$ iste arcus negatiuum obtineat valorem.

Coroll. 3.

28. Facto ergo $x = 2a$, erit $\Pi \frac{a - \sqrt{(2ax - xx)}}{aa}\left[\frac{1}{a}\right] = -\Pi \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\right]$, quo notato fiet hoc casu $x = 2a$ $\Pi 2a[a]$

 $= 2$

$= 2\Pi a[a] = 2a\sqrt{a}\,\Pi\frac{1}{a}[\frac{1}{a}]$, id quod consentit cum Coroll. 1.

Scholion.

29. Substitutione hic adhibita: $\sqrt{(2ax-xx)} = a - aay$, formulam integralem in aliam sui similem transmutauimus, cuius valor per arcum alius ellipsis exhiberi poterat. Si autem aliis substitutionibus vtamur, semper adipiscimur formulas integrales, quarum integratio per rectificationem sectionum conicarum expediri potest; quia vero a tam negatiuum, quam positiuum, valorem recipere potest, substitutiones eaedem tam ad ellipses, quam hyperbolas, extendi possunt.

Problema 3.

30. Formulam integralem $\int dx\sqrt{(\frac{a}{2ax-xx}+1-\frac{1}{a})}$ per substitutiones idoneas in alias formulas concinniores transformare, quarum valor semper futurus sit $=\Pi x[a]$.

Solutio.

Prima reductio fit ponendo $x = a - naz$, quo facto formula integralis induit hanc formam:

$$\int -ndz\sqrt{\frac{aa-nna(a-1)zz}{1-nnzz}} = \Pi a(1-nz)[a]$$

multiplicetur ea per m, vt sit:

$$\int -dz\sqrt{\frac{m^2n^2aa+m^2n^4a(a-1)zz}{1-nnzz}} = m\Pi a(1-nz)[a]$$

quam expressionem iam ad hanc formam, concinnam aeque ac generalem, reducere licet:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$$

fieri

fieri scilicet oportet:

$$m^2 n^2 a^2 b = f;\ m^2 n^4 a(1-a) b = g;\ -nnb = k$$

vnde ob $nnb = -k$, et $n = \sqrt{\frac{-k}{b}}$,

erit $-mmaak = f$; $mma(1-a)kk = gb$,

hincque $\frac{(a-1)k}{a} = \frac{gb}{f}$, et $a = \frac{fk}{fk-gb}$.

Porro est $m = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{-f}{k}}$, seu $m = \frac{fk-gb}{fk}\sqrt{\frac{-f}{k}}$,

ex quibus valoribus concluditur fore:

$$\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = C - \frac{(fk-gb)}{fk}\sqrt{\frac{-f}{k}}.\Pi \frac{fk}{fk-gb}\left(1-z\sqrt{\frac{-k}{b}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gb}\right].$$

Hoc ergo integrale, nisi forma sit imaginaria, per rectificationem ellipsis absoluitur, si fuerit $\frac{fk}{fk-gb}$ quantitas positiua, sin autem sit negatiua, integratio arcum hyperbolicum indicat.

Coroll. 1.

31. Vt ergo haec forma ab imaginariis sit libera, necesse est, vt tam $\frac{-f}{k}$ quam $\frac{-k}{b}$ sit quantitas positiua. Si alterutra vel ambae fuerint negatiuae, expressio imaginariis implicatur; nihilo vero minus eius valor erit realis, si modo differentiale ipsum sit reale.

Coroll. 2.

32. Cum autem formula differentialis ponatur realis, assumere licet tam $f+gzz$, quam $b+kzz$, esse quantitates positiuas; si enim ambae essent negatiuae, mutatis signis ad positiuas reduci possent. Ita statuamus esse $f+gzz>0$, et $b+kzz>0$.

Coroll. 3.

33. Vt autem formula nostra inuenta arcum realem sectionis conicae exprimat, non sufficit, esse $\frac{-f}{k}$ et $\frac{-k}{b}$ quantitates reales, sed praeterea requiritur, vt abscissa sit positiua; vbi duos casus perpendi conuenit, prout sectio conica fuerit ellipsis, vel hyperbola.

Coroll. 4.

34. Sit ergo primo sectio conica ellipsis, seu $\frac{fk}{fk-gb}$ quantitas positiua, atque necesse est, vt sit $1 - z\sqrt{\frac{-k}{b}} > 0$, seu $1 > \frac{-kzz}{b}$, vnde fit $\frac{b+kzz}{b} > 0$. At per hypothesin est $b+kzz > 0$. Quare casu, quo $\frac{fk}{fk-gb} > 0$, ad realitatem insuper requiritur, vt b sit quantitas positiua.

Coroll. 5.

35. Pro hyperbola, seu si $\frac{fk}{fk+gb}$ fuerit quantitas negatiua, integratio nostra ita debet repraesentari:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = C + \frac{(gb-fk)}{fk}\sqrt{\frac{-f}{k}}.\Pi\frac{fk}{gb-fk}\left(z\sqrt{\frac{-k}{b}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb-fk}\right]$$

ita vt $\frac{fk}{gb-fk}$ iam sit quantitas positiua. Necesse autem est, vt sit $z\sqrt{\frac{-k}{b}} > 1$, seu $\frac{b+kzz}{b} < 0$, quare ob $b+kzz > 0$, arcus hyperbolicus non erit realis, nisi sit b quantitas negatiua.

Coroll. 6.

36. Pro ellipsi ergo, seu si sit $\frac{fk}{fk-gb} > 0$, nostra expressio arcum continebit realem, si fuerit $1^{mo}.\, b < 0$; $2^{do}.\, k < 0$; ac $3^{tio}.\, f > 0$. Pro hyperbola autem, seu si $\frac{fk}{gb-fk} > 0$, arcus erit realis, si fuerit: $1^{mo}.\, b < 0$; $2^{do}.\, k > 0$; et $3^{tio}.\, f < 0$.

Scho-

Scholion. 1.

37. Ope formulae igitur inuentae nonnisi aliquot casus integralis propositi $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ expedire possumus. Nempe cum in genere litterae f, g, h, et k quantitates, siue positiuas, siue negatiuas, significent, si iam ad casus descendentes eas tantum pro positiuis assumamus, sequentes integrationes reales consequemur:

$$\text{I. } \int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h-kzz}} = C - \frac{(fk+gh)}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}} . \Pi_{\frac{fk}{fk+gh}} \left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)$$

$$\left[\frac{fk}{fk+gh}\right]$$

$$\text{II. } \int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}} = C - \frac{(fk-gh)}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}} . \Pi_{\frac{fk}{fk-gh}} \left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)$$

$$\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

at hoc casu requiritur, vt sit $fk > gh$.

$$\text{III. } \int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}} = C + \frac{(gh-fk)}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}} . \Pi_{\frac{fk}{gh-fk}} \left(z\sqrt{\frac{k}{h}} - 1\right)$$

$$\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right]$$

hoc vero casu requiritur, vt sit $gh > fk$.

Cum igitur in hoc tertio casu indoles litterarum f, h, k iam sit definita, pro g autem quantitatem negatiuam assumere non liceat, hos tantum tres casus per nostrum problema expedire licet. Reliqui vero omnes excluduntur, dum ad arcus imaginarios perducuntur. Interim tamen cum certo habeant valores reales, quemadmodum hi per alios arcus reales exprimi queant, in sequentibus inuestigabimus.

Scholion 2.

38. Antequam autem hoc opus suscipiamus, e re erit, omnes casus pro diuersitate signorum, quibus litte-

rae

rae f, g, h, k affectae esse possunt, enumerare, vbi etiam fieri potest, vt quidem ob aliam conditionem in binos subdiuidi debeant, quemadmodum supra in secundo et tertio vsu venit. Hac conditione adiecta sequentes 12 habebimus casus, vbi quidem litterae f, g, h, k tantum positiuos valores habere accipiuntur.

I. $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$, si fuerit $fk > gh$.

II. $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$, si fuerit $gh > fk$.

III. $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h-kzz}}$, nulla limitatione adiuncta.

IV. $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{kzz-h}}$, nulla limitatione adiuncta.

V. $\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{h+kzz}}$, nulla limitatione adiuncta.

VI. $\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$, si fuerit $fk > gh$.

VII. $\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$, si fuerit $fk < gh$.

VIII. $\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}}$, hic necessario est $fk > gh$.

IX. $\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}}$, nulla limitatione adiuncta.

X. $\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}$, hic necessario est $fk < gh$.

XI. $\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}$, si fuerit $fk > gh$.

XII. $\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}$, si fuerit $fk < gh$.

atque ex his duodecim casibus hactenus tantum tres scilicet III. VI ac XII. conficere licuit, quorum integralia per arcus simplices sectionum conicarum exprimuntur.

Scholion 3.

39. Quanquam autem his tribus casibus integralia per arcus, siue ellipticos, siue hyperbolicos, expressimus,

mus, tamen quaedam dantur relationes inter litteras f, g, h, et k, quibus nostra expressio tantis incommodis implicatur, vt verus valor integralis inde erui nequeat, etiamsi per se sit perquam facilis. Ac primo quidem in genere, si in formula $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ fuerit $fk = gh$, valor integralis ita quantitatibus euanescentibus et infinitis inuoluitur, vt eius vera quantitas inde perspici nequeat, cum tamen ea per se sit planissima; posito enim $k = \frac{gh}{f}$, erit $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \int dz \sqrt{\frac{f(f+gzz)}{h(f+gzz)}}$ $= \int dz \sqrt{\frac{f}{h}} = C + z\sqrt{\frac{f}{h}}$, ita vt reuera sit ob $gh = fk$

$$C - \frac{(fk-fk)}{fk}\sqrt{\frac{-f}{k}} . \Pi \frac{fk}{fk-fk}\left(1 - z\sqrt{\frac{-k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk-fk}\right] = z\sqrt{\frac{f}{h}}$$

etsi ratio huius aequalitatis difficulter perspiciatur, cum haec formula potius arcum parabolicum abscissae infinitae respondentem, qui autem per factorem euanescentem sit multiplicatus, indicare videatur. Interim tamen si perpendamus in parabola arcum, qui abscissae infinitae respondeat, ad abscissam rationem aequalitatis habere, erit

$$\Pi \frac{fk}{fk-fk}\left(1 - z\sqrt{\frac{-k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk-fk}\right] = \frac{fk}{fk-fk}\left(1 - z\sqrt{\frac{-k}{h}}\right)$$

qui arcus per factorem $= \frac{(fk-fk)}{fk}\sqrt{\frac{-f}{k}}$ multiplicatus praebet productum finitum $= -\left(1 - z\sqrt{\frac{-k}{h}}\right)\sqrt{\frac{-f}{k}} = -\sqrt{\frac{-f}{k}}$ $+ z\sqrt{\frac{f}{h}}$, qui valor cum veritate egregie congruit. Reliquas difficultates casus particulares percurrentes seorsim examinemus.

Integratio Casus III.

$$\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h-kzz}} = C - \frac{(fk+gh)}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}} . \Pi \frac{fk}{fk+gh}\left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk+gh}\right]$$

40. Si f, g, b, k denotent quantitates nihilo maiores, arcus ellipticus pro integrali facile aſſignatur; neque turbat caſus, quo $g = 0$; quippe qui per arcum circularem expeditur; eritque

$$\int \frac{dz \sqrt{f}}{\sqrt{(b-kzz)}} = C - \sqrt{\tfrac{f}{k}} . \Pi \left(1 - z\sqrt{\tfrac{k}{b}}\right) [1].$$

Deinde b euaneſcere nequit, quin ſimul formula differentialis ipſa fiat imaginaria. At ſi f vel k euaneſcat, quorum priori caſu integrale eſt algebraicum, poſteriori vero per logarithmos dari poteſt, noſtra formula refertur ad ellipſin euaneſcentem, nihilque inde concludere licet; mox autem pro eodem caſu aliam integralis formam exhibebimus, vnde vera integralis quantitas facilius elici poterit.

Integratio Caſus VI.

$$\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{b-kzz}} = C - \frac{(fk-gb)}{fk} \sqrt{\tfrac{f}{k}} . \Pi_{\frac{fk}{fk-gb}} \left(1 - z\sqrt{\tfrac{k}{b}}\right) \left[\frac{fk}{fk-gb}\right]$$

ſi fuerit $fk > gb$.

41. Hic iterum nulla difficultas occurrit, quicunque valores litteris f, g, b, et k tribuantur, dummodo ſit $fk > gb$; ſemper enim integrale per arcum ellipticum exprimitur, neque etiam negotium faceſſit caſus $g = 0$, quo, vt ante, arcus circularis denotatur. At ſi ſit $k = 0$, neque enim f et b in nihilum abire poſſunt, conditio $fk > gb$ non amplius ſaluari poteſt, ſicque hic nullum incommodum locum habet, praeter id, quo eſt $fk = gb$, quod autem iam ante in genere expediuimus.

Integratio

Integratio Casus XII.

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}=C+\frac{(gh-fk)}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}}.\Pi\frac{fk}{gh-fk}\left(z\sqrt{\frac{k}{h}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right],$$
si fuerit $gh>fk$.

42. Hoc casu integrale arcu hyperbolico definitur, vbi neque g, neque k, potest fieri negatiuum. S fuerit $f=0$, quo casu integrale fit algebraicum, axis hyperbolae euanescit, neque hinc valor integra is cognoscitur. At si $h=0$, conditio necessaria $gh>fk$ euertitur, difficultas ergo tantum casu $f=0$ subsistit, quae autem in aliis formulis infra pro eodem hoc casu tradendis tolletur.

Problema 4.

43. Formulam integralem $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ per substitutionem in aliam sui similem transformare.

Solutio.

Tentanti huiusmodi substitutionem $z=\sqrt{\frac{\alpha+\beta xx}{\gamma+\delta xx}}$ patebit, sumi debere $x=\sqrt{(h+kzz)}$; vnde fit $z=\sqrt{\frac{xx-h}{k}}$, $dz=\frac{x\,dx}{\sqrt{k(xx-h)}}$ et $f+gzz=\frac{fk-gh+gxx}{k}$, ideoque

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{fk-gh+gxx}{xx-h}},$$

quae locum habet, quoties k est quantitas positiua, quoniam tum $xx-h=kzz$ est quantitas positiua. Sin autem k fuerit quantitas negatiua, ideoque $h-xx$ positiua, transformatio ita est repraesentanda:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{gh-fk+gxx}{h-xx}}.$$

Coroll. 1.

44. Comparantes formulam $\int dx\sqrt{\frac{fk-gb+gxx}{xx-b}}$ cum formula initio generatim integrata $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$, habebimus $z=x$; $f=fk-gb$; $g=g$; $b=-b$; $k=1$, vnde $fk-gb=fk$ et integrale:

$$\int dx\sqrt{\frac{fk-gb+gxx}{xx-b}}=C-\frac{fk}{fk-gb}\sqrt{(-fk+gb)}\,\Pi\frac{fk-gb}{fk}$$
$$(1-x\sqrt{\tfrac{1}{b}})\left[\frac{fk-gb}{fk}\right]$$

Coroll. 2.

45. Substituto hoc valore cum sit $x=\sqrt{(b+kzz)}$, erit:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=C+\frac{f}{\sqrt{(gb-fk)}}\Pi\frac{gb-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{(b+kzz)}}{\sqrt{b}}-1\right)\left[\frac{-gb+fk}{fk}\right]$$

qui arcus, vt sit realis, necesse est, vt primo sit $gb-fk>0$, tum vero etiam $b>0$. Erit ergo ad hyperbolam, si fk sit quantitas positiua et k positiua: ad ellipsin esse nequit, nisi sit k quantitas negatiua, f vero positiua, quia hoc casu esse debet fk quantitas negatiua.

Coroll. 3.

46. Simili modo altera forma $\int dx\sqrt{\frac{gb-fk-gxx}{b-xx}}$, cum canonica $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ comparata, dat $z=x$; $f=gb-fk$; $g=-g$; $b=b$; et $k=-1$; vnde $fk-gb=fk$ et

$$\int dx\sqrt{\frac{gb-fk-gxx}{b-xx}}=C-\frac{fk}{fk-gb}\sqrt{(gb-fk)}.\,\Pi\frac{fk-gb}{fk}(1-x\sqrt{\tfrac{1}{b}})\left[\frac{fk-gb}{fk}\right].$$

Coroll. 4.

47. Substituto ergo pro x valore $\sqrt{(b+kzz)}$, erit vt ante:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=C+\frac{f}{\sqrt{(gb-fk)}}.\,\Pi\frac{gb-fk}{-fk}\left(1-\frac{\sqrt{(b+kzz)}}{\sqrt{b}}\right)\left[\frac{gb-fk}{-fk}\right]$$

quae

quae locum habere nequit, nisi $gb-fk$ et b sit quantitas positiua. Pro ellipsi erit, si k sit quantitas negatiua et f positiua, contra autem pro hyperbola, si k et g sint positiuae, quemadmodum iam ante definiuimus, ita vt hos duos casus distinguere non opus fuerit.

Coroll. 5.

48. Geminis his integralibus formulae generalis: $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ inter se collatis, habebimus:

$$\Pi \frac{fk}{fk-gb}\left(1-z\sqrt{\frac{-k}{b}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gb}\right] = \frac{fk\sqrt{fk}}{(fk-gb)^{\frac{3}{2}}}\, \Pi \frac{fk-gb}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{(b+kzz)}}{\sqrt{b}}\right)\left[\frac{fk-gb}{fk}\right]$$

quae aequalitas, posito ad abbreuiandum $\frac{fk}{fk-gb} = \frac{m}{n}$ et $z\sqrt{\frac{-k}{b}} = t$, abit in hanc formam:

$$\Pi \frac{m}{n}(1-t)\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m\sqrt{m}}{n\sqrt{n}}\, \Pi \frac{n}{m}\left(1-\sqrt{(1-tt)}\right)\left[\frac{n}{m}\right].$$

Coroll. 6.

49. Arcus igitur ellipticus quicunque respondens abscissae $=1-t$, semiaxe existente $=\frac{m}{n}$, reducitur ad arcum alius ellipsis, cuius semiaxis est $=\frac{n}{m}$ et abscissa $=1-\sqrt{(c-tt)}$, hunc arcum per $\frac{m\sqrt{m}}{n\sqrt{n}}$ multiplicando, cuius aequalitatis ratio est similitudo harum duarum ellipsium. Simili autem modo arcus hyperbolicus ad alium reduci nequit, quia ob $\frac{m}{n}$ negatiuum fit $\sqrt{\frac{m}{n}}$ imaginarium.

Scholion.

50. Hinc nouas integrationes nanciſcimur realiter expreſſas: primam ſuggerit §. 45. arcum hyperbolicum inuoluentem, vbi hae conditiones requiruntur: $1^{mo}\, b > 0$; $2^{do}\, k > 0$; $3^{tio}\, f > 0$ et $4^{to}\, gb > fk$, vnde ob $b > 0$, erit quoque $g > 0$; hisque Caſus II §. 38. enumeratorum continetur. Deinde arcus ellipticus negotium conficiet his conditionibus: $1^{mo}\, k < 0$; $2^{do}\, b > 0$; $3^{tio}\, gb - fk > 0$; et $4^{to}\, f > 0$ ob $-fk > 0$, vnde g etiamnunc poſitiue et negatiue capi poteſt. Si ſumatur poſitiue, prodit Caſus III, ſin negatiue Caſus VI, qui quidem iam ſupra ſunt ſoluti. Verum in genere notandum, omnes arcus ellipticos duplici modo exprimi poſſe per §. praeced. Integralia ergo horum trium caſuum ita ſe habebunt:

Integratio Caſus II.

$$\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = C + \frac{f}{\sqrt{(gb-fk)}} \Pi \frac{gb-fk}{fk} \left(\frac{\sqrt{(b+kzz)}}{\sqrt{b}} - 1\right)\left[\frac{-gb+fk}{fk}\right]$$

ſi fuerit $gb > fk$

51. Ob conditionem $gb > fk$, neque g, neque b, euaneſcere poteſt. Si f euaneſcat, hyperbola abit in parabolam, cuius arcus abſciſſae infinitae reſpondens hic indicatur, qui ergo abſciſſae aequalis eſt cenſendus; vnde pro caſu $f = 0$, habebitur iſtud integrale:

$$\int dz \sqrt{\frac{gzz}{b+kzz}} = C + \frac{\sqrt{gb}}{k}\left(\frac{\sqrt{(b+kzz)}}{\sqrt{b}} - 1\right) = C + \frac{\sqrt{g(b+kzz)}}{k}$$

quod veritati omnino eſt conſentaneum.

52. Alter caſus moram faceſſens eſt, quo $k = 0$; et hyperbola iterum abit in parabolam. At ob $k = 0$ erit

erit $V(1+\frac{kzz}{b})-1=\frac{kzz}{2b}$; vnde integratio per arcum parabolicum abſoluetur hoc modo:

$$\int dz\,V\frac{f+gzz}{b}=C+\frac{f}{\sqrt{gb}}\,\Pi\,\frac{gzz}{2f}\,[\infty]$$

quae eadem operatione conſueta elicitur. Si inſuper eſſet $g=0$, ob $\Pi\frac{gzz}{2f}=z\,V\frac{g}{f}$ (13) foret $\int dz\,V\frac{f}{b}=C+z\,V\frac{f}{b}$.

Integratio Caſus III.

$$\int dz\,V\frac{f+gzz}{b-kzz}=C+\frac{f}{\sqrt{(gb+fk)}}\,\Pi\,\frac{gb+fk}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{(b-kzz)}}{\sqrt{b}}\right)\left[\frac{gb+fk}{fk}\right]$$

ſine vlla limitatione.

53. Hinc caſus $b=0$ ſponte excluditur; vnde tres ſingulares relinquuntur. Si primo ſit $k=0$, ellipſis abit in parabolam, et ob $1-V(1-\frac{kzz}{b})=\frac{kzz}{2b}$ habetur vt ante:

$$\int dz\,V\frac{f+gzz}{b}=C+\frac{f}{\sqrt{gb}}\,\Pi\,\frac{gzz}{2f}\,[\infty]$$

ſi deinde ſit $f=0$, denuo parabola, et arcus abſciſſae infinitae reſpondens ideoque aequalis cenſendus prodit, vnde ſit:

$$\int dz\,V\frac{gzz}{b-kzz}=C+\frac{\sqrt{gb}}{k}\left(1-\frac{\sqrt{(b-kzz)}}{\sqrt{b}}\right)=C-\frac{\sqrt{g(b-kzz)}}{k}$$

ſi tertio ſit $g=0$, ellipſis abit in circulum, ſitque:

$$\int dz\,V\frac{f}{b-kzz}=C+\frac{f}{\sqrt{fk}}.\,\Pi\left(1-\frac{\sqrt{(b-kzz)}}{\sqrt{b}}\right)[1]$$

ſicque caſus difficiliores ſupra §. 40 memoratos hic expediuimus.

Integratio Caſus VI.

$$\int dz\,V\frac{f-gzz}{b-kzz}=C+\frac{f}{\sqrt{(fk-gb)}}\,\Pi.\frac{fk-gb}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{(b-kzz)}}{\sqrt{b}}\right)\left[\frac{fk-gb}{fk}\right]$$

ſi modo fuerit $fk>gb$.

54.

54. Hoc casu aeque ac supra §. 41, vbi idem est pertractatus, nulla difficultas relinquitur, quia ob $fk > gb$, neque f, neque k, euanescere potest, neque vero etiam b in nihilum abire potest, quin denominator $b - kzz$ fiat negatiuus. At si $g = 0$, nulla occurrit difficultas, cum integratio ad arcum circularem reuocetur.

Scholion.

55. Hac ergo reductione id sumus lucrati, vt iam praeter casus III, VI et XII, ante euolutos, etiam casum II. expediuerimus. Reliqui vero octo casus nullo modo per arcus simplices reales integrari possunt, sed praeterea partem algebraicam continent; quin etiam nonnulli praeter hanc partem algebraicam binos arcus, alterum ellipticum, alterum hyperbolicum, complectuntur. Ad haec autem integralia inuestiganda necesse est, vt alias formulas integrales affines, praeter variabilem z bina radicalia $\surd(f+gzz)$ et $\surd(b+kzz)$ inuoluentes, contemplemur, quae ad formam $\int dx \surd\frac{\alpha+\beta xx}{\gamma+\delta xx}$ sint reductibiles.

Problema 5.

56. Alias formulas integrales, praeter z, bina radicalia $\surd(f+gzz)$ et $\surd(b+kzz)$ continentes, invenire, quarum integratio ad formam $\int dx \surd\frac{\alpha+\beta xx}{\gamma+\delta xx}$ reduci queat.

Solutio.

Fit hoc substitutionibus, quarum praecipuas hic percurramus:

1. Sit

1. Sit $x = \frac{1}{z}$, erit $z = \frac{1}{x}$; $\sqrt{(f+gzz)} = \frac{\sqrt{(fxx+g)}}{x}$ et $\sqrt{(h+kzz)} = \frac{\sqrt{(hxx+k)}}{x}$. Hinc ob $dx = -\frac{dz}{zz}$, erit:

$$dx\sqrt{\frac{fxx+g}{hxx+k}} = -\frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}},$$ ideoque

$$\int\frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = -\int dx\sqrt{\frac{fxx+g}{hxx+k}}.$$

2. Ponatur $x = \sqrt{(f+gzz)}$ erit $dx = \frac{gzdz}{\sqrt{(f+gzz)}}$; $z = \sqrt{\frac{xx-f}{g}}$ et $\sqrt{(h+kzz)} = \sqrt{\frac{gh-fk+kxx}{g}}$, vnde conficitur:

$$dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{gzzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}$$ et

$$dx\sqrt{\frac{gh-fk+kxx}{xx-f}} = gdz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$$ omittenda,

quare erit:

$$\int\frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = \frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}}.$$

3. Si ponatur $x = \sqrt{(h+kzz)}$, erit simili modo:

$$\int\frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = \frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{xx-h}{fk-gh+gxx}}.$$

4. Sit $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ erit $dx = \frac{-gzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}$; $z = \frac{\sqrt{(1-fxx)}}{x\sqrt{g}}$;

$\sqrt{(f+gzz)} = \frac{1}{x}$; et $\sqrt{(h+kzz)} = \sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{gxx}}$

vnde fit:

$$dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}} = \frac{-gzzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}}$$ et

$$dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}} = \frac{-gdz\sqrt{(h+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}$$

hincque

$$\int\frac{zzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}} = -\frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}}$$ et

$$\int\frac{dz\sqrt{(h+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}}.$$

 5. Si-

5. Simili modo si ponatur $x = \frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$, reperitur:

$$\int \frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(f+gzz)}} = -\tfrac{1}{k} \int dx \sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}}$$

$$\int \frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}} = -\tfrac{1}{k} \int dx \sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}}$$

6. Ponatur $x = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$, erit $dx = \frac{f\,dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}$

tum $z = \frac{x\sqrt{f}}{\sqrt{(1-gxx)}}$; $\sqrt{(f+gzz)} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(1-gxx)}}$

et $\sqrt{(h+kzz)} = \sqrt{\frac{h+(fk-gh)xx}{1-gxx}}$, unde conficitur:

$$dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}} = \frac{f\,dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(h+kzz)}}$$

$$dx\sqrt{\frac{h+(fk-gh)xx}{1-gxx}} = \frac{f\,dz\sqrt{(h+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}.$$ Quare

$$\int \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(h+kzz)}} = \tfrac{1}{f} \int dx \sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}}$$

$$\int \frac{dz\sqrt{(h+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{f} \int dx \sqrt{\frac{h+(fk-gh)xx}{1-gxx}}.$$

7. Simili modo ponendo $x = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$, reperitur:

$$\int \frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(f+gzz)}} = \tfrac{1}{h} \int dx \sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}}$$

$$\int \frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{h} \int dx \sqrt{\frac{f+(gh-fk)xx}{1-kxx}}.$$

8. Po-

8. Ponatur $x=\frac{\sqrt{(f+gzz)}}{z}$, erit $dx=\frac{-fz}{zz\sqrt{(f+gzz)}}$, tum $z=\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(xx-g)}}$; $\sqrt{(f+gzz)}=\frac{x\sqrt{f}}{\sqrt{(xx-g)}}$, atque $\sqrt{(h+kzz)}=\sqrt{\frac{hxx+fk-gh}{xx-g}}$, vnde fit:

$$dx\sqrt{\frac{hxx+fk-gh}{xx-g}}=\frac{-fdz\sqrt{(h+kzz)}}{zz\sqrt{(f+gzz)}} \text{ et}$$

$$dx\sqrt{\frac{xx-g}{hxx+fk-gh}}=\frac{-fdz}{zz\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}$$

vnde deducitur:

$$\int\frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}=-\tfrac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{hxx+fk-gh}{xx-g}}$$

$$\int\frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}=-\tfrac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{xx-g}{hxx+fk-gh}}.$$

9. Simili modo ponendo $x=\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{z}$, reperietur:

$$\int\frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=-\tfrac{1}{h}\int dx\sqrt{\frac{fxx-fk+gh}{xx-k}}$$

$$\int\frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}=-\tfrac{1}{h}\int dx\sqrt{\frac{xx-k}{fxx-fk+gh}}.$$

10. Ponatur $x=\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$, erit $dx=\frac{(gh-fk)zdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}$

tum $z=\sqrt{\frac{hxx-f}{g-kxx}}$, vnde colligitur:

$$\int\frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}=\frac{1}{gh-fk}\int dz\sqrt{\frac{hxx-f}{g-kxx}}$$

$$\int\frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}=\frac{1}{gh-fk}\int dx\sqrt{\frac{g-kxx}{hxx-f}}$$

11. Simili modo ponendo $x = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$, reperitur:

$$\int \frac{zzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}} = \frac{1}{fk-gh}\int dx \sqrt{\frac{fxx-h}{k-gxx}}$$

$$\int \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}} = \frac{1}{fk-gh}\int dx \sqrt{\frac{k-gxx}{fxx-h}}.$$

Coroll. 1.

57. Formulas has in ordinem reducentes, quia quaelibet duplici modo ad formam canonicam reducitur, habebimus primo:

$$\int \frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = -\int dx \sqrt{\frac{fxx+g}{hxx+k}} = -\frac{1}{h}\int dy \sqrt{\frac{fyy-fk+gh}{yy-k}},$$

existente $x = \frac{1}{z}$ et $y = \frac{\sqrt{(h+kzz)}}{z}$

$$\int \frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} = -\int dx \sqrt{\frac{hxx+k}{fxx+g}} = -\frac{1}{f}\int dy \sqrt{\frac{hyy+fk-gh}{yy-g}},$$

existente $x = \frac{1}{z}$ et $y = \frac{\sqrt{(f+gzz)}}{z}$.

Coroll. 2.

58. Secunda forma haec esto:

$$\int \frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = \frac{1}{g}\int dx \sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{1}{k}\int dy \sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$$

exstitente $x = \sqrt{(f+gzz)}$ et $y = \sqrt{(h+kzz)}$, quae permutatis formulis $\sqrt{(f+gzz)}$ et $\sqrt{(h+kzz)}$ non mutatur.

Coroll. 3.

Coroll. 3.

59. Tertia forma ita constituatur:

$$\int \frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}} = -\tfrac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}}$$

$$= \tfrac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$$

existente $x = \frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$

$$\int \frac{dz\sqrt{(h+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} = -\tfrac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}}$$

$$= \tfrac{1}{f}\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$$

existente $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$.

Coroll. 4.

60. Quarta forma haec statuatur:

$$\int \frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = -\frac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{xx-g}{hxx+fk-gh}}$$

$$= -\frac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{yy-k}{fyy-fk+gh}}$$

existente $x = \frac{\sqrt{(f+gzz)}}{z}$ et $y = \frac{\sqrt{(h+kzz)}}{z}$.

Coroll. 5.

61. Quinta forma erit geminata:

$$\int \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}} = \frac{1}{f}\int dx \sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}}$$

$$= \frac{1}{fk-gh}\int dy \sqrt{\frac{k-gyy}{fyy-h}}$$

existente $x = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

$$\int \frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} = \frac{1}{h}\int dx \sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}}$$

$$= \frac{1}{gh-fk}\int dy \sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}}$$

existente $x = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$

Coroll. 6.

62. Sexta denique forma erit:

$$\int \frac{zzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}} = -\frac{1}{g}\int dx \sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}}$$

$$= \frac{1}{fk-gh}\int dy \sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$$

existente $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

$$\int \frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} = -\frac{1}{k}\int dx \sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}}$$

$$= \frac{1}{gh-fk}\int dy \sqrt{\frac{hyy-f}{g-kyy}}$$

existente $x = \frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$.

Problema 6.

Problema 6.

63. Inuenire casus, quibus expressio $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ aequatur quantitati algebraicae $\alpha z\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ vna cum arcu sectionis conicae.

Solutio.

Ponatur $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = \alpha z\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} + Z$ eritque differentiando:

$$dZ = \frac{dz((1-\alpha)fb+(fk+(1-2\alpha)gb)zz+(1-\alpha)gkz^4)}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}$$

vbi numerator, neque per $f+gzz$, neque per $b+kzz$, reddi potest diuisibilis, quin simul fiat $fk=gb$, reducetur autem Z ad formam posteriorem §. 62., ponendo $\alpha=1$,

eritque $Z=(fk-gb)\int\frac{zzdz}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}$.

Hinc habebimus vel:

$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = z\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} + \frac{gb-fk}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-kxx}{g+(fk-gb)xx}}$

existente $x=\frac{z}{\sqrt{(b+kzz)}}$, vel etiam:

$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = z\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} - \int dy\sqrt{\frac{byy-f}{g-kyy}}$

existente $y=\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$.

Coroll. 1.

64. Quoties ergo, vel formula $\int dx\sqrt{\frac{1-bxx}{g+(fk-gb)xx}}$, vel haec: $\int dy\sqrt{\frac{byy-f}{g-kyy}}$, ad quempiam casuum iam tractatorum referri potest, toties quoque formula $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ partim

partim quantitati algebraicae, partim arcui sectionis conicae aequabitur.

Coroll. 2.

65. Cum sit $x = \frac{1}{\sqrt{(b+kzz)}}$, erit $1 - bxx = kxxzz$; ergo nisi sit k quantitas positiua, formula prior non ita, vt fecimus, repraesentari potest. Scilicet si k sit quantitas negatiua, ita scribi debet:

$$\int dx \sqrt{\frac{bxx-1}{(gb-fk)xx-g}}.$$

Coroll. 3.

66. In altera formula $\int dy \sqrt{\frac{byy-f}{g-kyy}}$, vbi $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ qui est $byy - f = \frac{(gb-fk)zz}{b+kzz}$, sumitur $gb > fk$. Quare si fuerit $gb < fk$, ea ita scribi debet: $\int dy \sqrt{\frac{f-byy}{-g+kyy}}$. Prior scriptio ergo locum habet, si $gb - fk > 0$; posterior vero, si $fk - gb > 0$.

Exemplum 1.

67. Reducatur forma $\int dx \sqrt{\frac{1-bxx}{g+(fk-gb)xx}}$ ad casum III esseque oportet $k > 0$; $b < 0$; $g > 0$ et $fk - gb < 0$, vnde $f < 0$, habebiturque:

$$\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{-b+kzz}} = z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-b+kzz}} + \frac{fk-gb}{k}\int dx \sqrt{\frac{1+bxx}{g-(fk-gb)xx}}$$

vbi esse debet $fk > gb$. Iam per §. 40 erit:

$$\int dx \sqrt{\frac{1+bxx}{g-(fk-gb)xx}} = C - \frac{fk}{(fk-gb)^{\frac{3}{2}}} \Pi \frac{fk-gb}{k} \left(1 - x\sqrt{\frac{fk-gb}{g}}\right)\left[\frac{fk-gb}{fk}\right]$$

vel per §. 53.

$$\int dx \sqrt{\frac{1+bxx}{g-(fk-gb)xx}} = C + \frac{1}{\sqrt{fk}} \Pi \frac{fk}{fk-gb}\left(1 - \frac{\sqrt{(g-(fk-gb)xx)}}{\sqrt{g}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gb}\right]$$

vbi

vbi eſt $x = \frac{1}{\sqrt{(-h+kzz)}}$ et $\sqrt{(g-(fk-gh)xx)} = \frac{\sqrt{k(gzz-f)}}{\sqrt{(-h+kzz)}}$ ſicque conſtruitur caſus XI.

Integratio Caſus XI.

$$\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}} = C + z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h-kzz}} - \frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}} \Pi \frac{fk-gh}{fk} \left(1 - \frac{\sqrt{(fk-gh)}}{\sqrt{g(-h+kzz)}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right]$$

$$\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}} = C + z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}} + \frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}} \Pi \frac{fk}{fk-gh} \left(1 - \frac{\sqrt{k(-f+gzz)}}{\sqrt{g(-h-kzz)}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right].$$

68. Hoc ergo integrale conſtat parte algebraica et arcu elliptico, et quia debet eſſe $k > gh$, fieri nequit $=0$, ſin autem ſit $h=0$, ellipſis abit in circulum, atque habebitur:

$$\int \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{-f+gzz}{k}} = C + \sqrt{\frac{-f+gzz}{k}} - \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{k}} \Pi \left(1 - \frac{\sqrt{f}}{z\sqrt{g}}\right)[1] \text{ ſeu}$$

$$\int \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{-f+gzz}{k}} = C + \sqrt{\frac{-f+gzz}{k}} + \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{k}} \Pi \left(1 - \frac{\sqrt{(-f+gzz)}}{z\sqrt{g}}\right)[1]$$

vti per integrationem facile inuenitur.

Exemplum 2.

69. Reducatur formula $\int dx \sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}}$ ad caſum VI, eritque $h>0$, $g>0$, $gh-fk>0$ et $k>0$, cum autem hoc caſu debeat eſſe $gh-fk>gh$, quantitatem f negatiue capi oportet, vt ſit, poſito $x = \frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$,

$$\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}} = z\sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}} + \frac{gh+fk}{k} \int dx \sqrt{\frac{1-hxx}{g-(fk+gh)xx}}.$$

At ex §. 41 habetur:

$$\int dx \sqrt{\frac{1-hxx}{g-(fk+gh)xx}} = C - \frac{fk}{(fk+gh)^{\frac{3}{2}}} \Pi \frac{fk+gh}{fk} \left(1 - x\sqrt{\frac{fk+gh}{g}}\right)\left[\frac{fk+gh}{fk}\right]$$

 vnde

vnde caſus IX conficitur.

Integratio Caſus IX.

$$\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{b+kzz}} = C + z\sqrt{\frac{-f+gzz}{b+kzz}} - \frac{f}{\sqrt{(fk+gb)}}\,\Pi\,\frac{fk+gb}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{(fk+gb)}}{\sqrt{g(b+kzz)}}\right)\left[\frac{fk+gb}{fk}\right].$$

70. Caſus ergo huius integrale conſtat parte algebraica, et arcu elliptico, qui, vt ſemper, adhuc alio modo exprimi poſſet; verum praeferenda eſt illa ellipſis, cuius axis parametrum ſuperat, ne certis caſibus euaneſcere queat. Caeterum hunc caſum ex praecedente XI deriuare potuiſſemus, ponendo b negatiuum, atque ſi in forma poſteriori faciemus $gb > fk$ habebimus aliam integrationem caſus XII.

Integratio Caſus XII.

$$\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{-b+kzz}} = C + z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-b+kzz}} - \frac{(gb-fk)}{k\sqrt{fk}}\,\Pi\,\frac{fk}{gb-fk}\left(\frac{\sqrt{k(-f+gzz)}}{\sqrt{g(-b+kzz}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb-fk}\right].$$

71. En aliam integrationem caſus XII. iam ſupra § 42 tractati, quae praeter arcum hyperbolicum continet partem algebraicam; cum prior ſolo arcu hyperbolico exprimatur. Aequalitas ergo harum duarum expreſſionum perpendi meretur, quod quo concinnius fiat, ponamus $\frac{fk}{gb-fk} = \frac{m}{n}$; et $z\sqrt{\frac{k}{b}} = t$, eritque

$$\Pi\,\frac{m}{n}(t-1)\left[\frac{-m}{n}\right] + \Pi\,\frac{m}{n}\left(\sqrt{\frac{(m+n)tt-m}{(m+n)(tt-1)}}-1\right)\left[\frac{-m}{n}\right]$$
$$= C + \frac{m}{n}\,t\sqrt{\frac{(m+n)tt-m)}{m(tt-1)}},$$

vnde

vnde constante debite definita diuersi arcus hyperbolici inter se comparari possunt. Scilicet posito semiaxe $\frac{m}{n} = \alpha$, sumtisque duabus variabilibus t et u, erit:

$$\Pi\alpha(t-1)[-\alpha]-\Pi\alpha(u-1)[-\alpha]+\Pi\alpha\left(\sqrt{\tfrac{(\alpha+1)tt-\alpha}{(\alpha+1)(tt-1)}}-1\right)[-\alpha]$$
$$-\Pi\alpha\left(\sqrt{\tfrac{(\alpha+1)uu-\alpha}{(\alpha+1)(uu-1)}}-1\right)[-\alpha] = \alpha t\sqrt{\tfrac{(\alpha+1)tt-\alpha}{\alpha(tt-1)}}$$
$$-\alpha u\sqrt{\tfrac{(\alpha+1)uu-\alpha}{\alpha(uu-1)}}.$$

Exemplum 3.

72. Ponamus f et k negatiua, et posterior expressio dat:

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{b-kzz}} = z\sqrt{\frac{-f+gzz}{b-kzz}} - \int dy\sqrt{\frac{f+hyy}{g+kyy}}$$

existente $gb > fk$. Iam ex Casu II. §. 51. tractato habemus:

$$\int dy\sqrt{\frac{f+kyy}{g+kyy}} = C + \frac{f}{\sqrt{(gb-fk)}}\Pi\frac{gb-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{(g+kyy)}}{\sqrt{g}}-1\right)\left[\frac{-gb+fk}{fk}\right].$$

Cum igitur sit $y = \sqrt{\frac{-f+gzz}{b-kzz}}$, erit $\sqrt{(g+kyy)} = \frac{\sqrt{(gb-fk)}}{\sqrt{(b-kzz)}}$, vnde casus decimus expeditur:

Integratio casus X.

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{b-kzz}} = C + z\sqrt{\frac{-f+gzz}{b-kzz}} - \frac{f}{\sqrt{(gb-fk)}}\Pi\frac{gb-fk}{fk}$$
$$\left(\frac{\sqrt{(gb-fk)}}{\sqrt{g(b-kzz)}}-1\right)\left[\frac{-gb+fk}{fk}\right]$$

72. Huius ergo casus decimi integrale constat parte algebraica et arcu hyperbolico. Sin autem k sumatur negatiue, oritur integrale casus noni iam ante §. 70. exhibitum, ex quo hic ipse casus deriuari potuisset.

Exemplum 4.

74. Capiantur g et k negatiue, vt sit $y = \sqrt{\frac{f-gzz}{b-kzz}}$ eritque:

$$\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{b-kzz}} = z\sqrt{\frac{f-gzz}{b-kzz}} - \int dy \sqrt{\frac{byy-f}{kyy-g}}.$$

Quodsi forma $\int dy \sqrt{\frac{byy-f}{kyy-g}}$ hoc modo repraesentetur ob g et k negatiue sumtas, debet esse $fk-gb>0$ tum autem non in casu XII. continetur, verum hoc modo $\int dy \sqrt{\frac{f-byy}{g-kyy}}$ repraesentata exigit $gb>fk$, quae conditio casui VI, quorsum esset referenda, aduersatur.

Scholion.

75. Ope ergo praecedentis problematis casus IX. X. et XI. sumus executi, cum ante iam casus III, VI et XII. tum vero etiam II. per simplices arcus expediuerimus. Restant ergo quinque casus nondum realiter resoluti, quorum nonnullos ita tractare poterimus, vt integrale constet arcu sectionis conicae et quantitate algebraica formae $z\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$.

Problema 7.

76. Inuenire casus, quibus expressio $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ aequatur quantitati algebraicae $\alpha z \sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$ vna cum arcu sectionis conicae.

Solutio.

Ponatur $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = \alpha z \sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}} + Z$ erit differentiando:

$$dZ = \frac{dz(ff - \alpha fb + 2f(g-\alpha k)zz + g(g-\alpha k)z^4)}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(b+kzz)}}$$

vbi

vbi notandum est, numeratorem per $f+gzz$ reddi non posse diuisibilem, quin simul α euanescat. At si ad quandam superiorum formularum reducere velimus, poni oportet $\alpha = \frac{g}{k}$, quo facto oritur:

$$dZ = \frac{f(fk-gh)}{k} \cdot \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(h+kzz)}}$$

huius integratio per §. 61. constat. Habebimus ergo vel

$$\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C + \frac{g}{k} z \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{(fk-gh)}{k} \int dx \sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}}$$

existente $x = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$ vel

$$\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C + \frac{g}{k} z \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{f}{k} \int dy \sqrt{\frac{k-gyy}{fyy-h}}$$

existente $y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$.

Coroll. 1.

77. Cum sit $x = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$, erit $1-gxx = \frac{fxx}{zz}$; quare, si fuerit f quantitas positiua, formula recte hoc modo $\int dx \sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}}$ exprimitur; sin autem sit $f<0$, ita debet repraesentari: $\int dx \sqrt{\frac{gxx-1}{(gh-fk)xx-h}}$.

Coroll. 2.

78. Cum sit $y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$, erit $fyy-h = \frac{(fk-gh)zz}{f+gzz}$, vnde, si formula integralis ita exhibeatur: $\int dy \sqrt{\frac{k-gyy}{fyy-h}}$, necesse est sit $fk-gh>0$; sin autem ita exprimatur: $\int dy \sqrt{\frac{-k+gyy}{h-fyy}}$, oportet sit $gh-fk>0$.

Exemplum 1.

79. Referatur forma $\int dx \sqrt{\frac{1-gxx}{k+(fk-gh)xx}}$ ad caſum III. et quia eſt $f>0$, ſumi debet $g<0$, $h>0$; et $k<0$, vnde obtinetur:

$$\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}} = C + \frac{g}{k} z \sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}} + \frac{(fk-gh)}{k} \int dx \sqrt{\frac{1+gxx}{h-(fk-gh)xx}}$$

eſt vero ex caſu III. (40)

$$\int dx \sqrt{\frac{1+gxx}{h-(fk-gh)xx}} = \frac{-fk}{fk-gh} \sqrt{\frac{1}{fk-gh}} \cdot \Pi \frac{fk-gh}{fk} \left(1-x\sqrt{\frac{fk-gh}{h}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right]$$

vbi, cum ſit $fk>gh$, iterum caſus VI. occurrit:

Integratio caſus VI.

$$\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}} = C + \frac{g}{k} z \sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}} - \frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}} \Pi \frac{fk-gh}{fk} \left(1 - \frac{z\sqrt{(fk-gh)}}{\sqrt{h(f-gzz)}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right]$$

80. Si ellipſin in aliam ſui ſimilem inuertamus, erit:

$$\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}} = C + \frac{g}{k} z \sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}} + \frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}} \Pi \frac{fk}{fk-gh} \left(1 - \frac{\sqrt{f(h-kzz)}}{\sqrt{h(f-gzz)}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

quod integrale cum ſuperiori (41) comparatum egregiam ſuppeditat arcuum ellipticorum relationem. Sit autem ſemiaxis $\frac{fk}{fk-gh}=a$, et $z\sqrt{\frac{k}{h}}=t$, ſeu $zz=\frac{htt}{k}$, erit $\sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}} = \sqrt{\frac{h}{f} \cdot \frac{a(1-tt)}{a-(a-1)tt}}$, ob $gh=\frac{a-1}{a}fk$; vnde fit:

$$\Pi a(1-t)[a] + \Pi a\left(1-\sqrt{\frac{a(1-tt)}{a-(a-1)tt}}\right)[a] + (a-1)t\sqrt{\frac{a(1-tt)}{a-(a-1)tt}} = C.$$

Sumtis ergo duabus variabilibus t et u, habebitur:

$$\left.\begin{array}{l} +\Pi a(1-t)[a] + \Pi a\left(1-\sqrt{\frac{a(1-tt)}{a-(a-1)tt}}\right)[a] \\ -\Pi a(1-u)[a] - \Pi a\left(1-\sqrt{\frac{a(1-uu)}{a-(a-1)uu}}\right)[a] \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} -(a-1)t\sqrt{\frac{a(1-tt)}{a-(a-1)tt}} - \\ +(a-1)u\sqrt{\frac{a(1-uu)}{a-(a-1)uu}} \end{array}\right.$$

vnde

vnde comparationes arcuum ellipticorum dudum a me demonstratae facile colliguntur.

Si hic sumatur g negatiue, oritur casus III. et tum formula $\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{1-(fk+gb)xx}}$ ad casum VI. referenda fuisset, quare non opus est, vt hunc casum euoluamus.

Exemplum 2.

81. Haec forma nisi inuertatur $\int dx\sqrt{\frac{gxx-1}{(gb-fk)xx-b}}$, ad casum XII. reduci nequit; vbi esse debet $f<0$, habebimus ergo:

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{b+kzz}}=C+\frac{g}{k}z\sqrt{\frac{b+kzz}{-f+gzz}}-\frac{(fk+gb)}{k}\int dx\sqrt{\frac{gxx-1}{(fk+gb)xx-b}},$$

verum nunc ad casum XI. refertur; indeque acquireremus casum IX. iam supra inuentum.

Exemplum 3.

82. Verum formulam $\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{b+(fk-gb)xx}}$, ad casum II. reducamus, quod fit sumendo $g<0$, existente $f>0$, et $x=\frac{z}{\sqrt{(f-gzz)}}$, vt habeatur:

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{b+kzz}}=C-\frac{g}{k}z\sqrt{\frac{b+kzz}{f-gzz}}+\frac{(fk+gb)}{k}\int dx\sqrt{\frac{1+gxx}{b+(fk+gb)xx}}$$

verum haec reductio non succedit, nisi $k<0$, ita vt sit:

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{b-kzz}}=C+\frac{g}{k}z\sqrt{\frac{b-kzz}{f-gzz}}-\frac{(gb-fk)}{k}\int dx\sqrt{\frac{1+gxx}{b+(gb-fk)xx}}$$

existente $x=\frac{z}{\sqrt{(f-gzz)}}$; eritque ex §. 51.

$$\int dx\sqrt{\frac{1+gxx}{b+(gb-fk)xx}}=\frac{1}{\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gb-fk}\left(\frac{\sqrt{(b+(gb-fk)xx)}}{\sqrt{b}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb-fk}\right]$$

et $\sqrt{(b+(gb-fk)xx)}=\frac{\sqrt{f(b-kzz)}}{\sqrt{(f-gzz)}}$, vnde casus VII. colligitur.

Inte-

Integratio casus VII.

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{b-kzz}}=C+\frac{g}{k}z\sqrt{\frac{b-kzz}{f-gzz}}-\frac{(gb-fk)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gb-fk}\left(\frac{\sqrt{f(b-kzz)}}{\sqrt{b(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb-fk}\right]$$

existente $gb>fk$

83. Constat ergo hoc integrale parte algebraica et arcu hyperbolico, hicque casus ad iam expeditos de nouo accedit.

Scholion.

84. Hactenus ergo octo casus per valores reales integrauimus, qui sunt II, III, VI, VII, IX, X, XI et XII. et reliqui quatuor ita sunt comparati, vt per similes formas nullo modo integrari queant. Exigunt scilicet praeter partem algebraicam duos arcus, alterum ellipticum, alterum hyperbolicum, ac pars quidem algebraica, vel huius formae $z\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$, vel huius $z\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$, assumi potest: vnde duo adhuc problemata euolui conueniet.

Problema 8.

85. Inuenire casus, quibus expressio $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ aequatur quantitati algebraicae $\alpha z\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ vna cum duobus arcubus sectionum conicarum.

Solutio.

Posito $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=\alpha z\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}+Z$, erit differentiando:

$$dZ=\frac{dz((1-\alpha)fb+(fk+(1-2\alpha)gb)zz+(1-\alpha)gkz^4)}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}$$

quae

quae in duas partes, formulis Probl. 5. traditis contentas, resoluantur.

1. Ponatur $Z = p\int \frac{dz}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} + q\int \frac{zzdz}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}$ fierique debet:

$(1-\alpha)fb = p;\; fk + (1-2\alpha)gb = q;\; (1-\alpha)gk = 0$

vnde ob $\alpha = 1$, euanesceret quoque p contra hypothesin.

2. Ponatur $Z = p\int \frac{dz}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} + q\int \frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}}$ fierique debet:

$(1-\alpha)fb = p + qf;\; fk + (1-2\alpha)gb = qg$, et $(1-\alpha)gb = 0$,

vnde $\alpha = 1$; $q = \frac{fk-gb}{g}$; $p = \frac{-f(fk-gb)}{g}$.

ideoque

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = C + z\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} + \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{byy-f}} - \frac{(fk-gb)}{gk}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gb)xx}{1-bxx}}$$

existente $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ et $x = \frac{1}{\sqrt{(b+kzz)}}$.

3. Ponatur $Z = p\int \frac{dz}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} + q\int \frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(b+kzz)}}$ ac fieri necesse est:

$(1-\alpha)fb = p,\; fk + (1-2\alpha)gb = qb;\; (1-\alpha)gk = qk$,

vnde deducitur $\alpha = \frac{fk}{gb}$; $q = \frac{gb-fk}{b}$; $p = \frac{f(gb-fk)}{g}$.

Quocirca habebimus:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C + \frac{fk}{gh}z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}}$$
$$+\frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}}$$

existente $y=\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ et $x=\sqrt{(f+gzz)}$.

4. Ponatur $Z = p\int\frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}$
$+q\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$ fierique oportet:

$(1-\alpha)fh = p+qhh$; $fk+(1-2\alpha)gh = 2qhk$;
$(1-\alpha)gk = qkk$

vnde deducitur $fk-gh=0$, quod eſt abſurdum.

5. Ponatur $Z = p\int\frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}$
$+q\int\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}}$ fiet:

$(1-\alpha)fh=qf$; $fk+(1-2\alpha)gh=p+qg$ et $(1-\alpha)gk=0$
vnde nihil ob $q=0$ concludere licet.

6. Ponatur $Z = p\int\frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}$
$+q\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$, fietque:

$(1-\alpha)fh = qhh$; $fk+(1-2\alpha)gh = p+2ghk$;
$(1-\alpha)gk = qkk$,

vnde pariter nihil colligi poteſt.

7.

7. Ponatur $Z = p\int \frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}} + q\int \frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}$

eritque:

$(1-\alpha)fh = pf;\ fk + (1-2\alpha)gh = pg + qh;$
$(1-\alpha)gk = qk,$

unde quoque nihil concluditur.

8. Ponatur $Z = p\int \frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}} + q\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

eritque:

$(1-\alpha)fh = pf + qhh;\ fk - gh + 2(1-\alpha)gh = pg + 2qhk;$
$(1-\alpha)gk = qkk,$

vnde elicitur $\alpha = \frac{gh-fk}{gh}$; $p = \frac{fk-gh}{g}$; $q = \frac{f}{h}$.

Quare erit:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C + \frac{gh-fk}{gh} z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + \frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{fk-gh}{gh}\int dy\sqrt{\frac{f-(fk-gh)yy}{1-kyy}}$$

existente $y = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$.

Plures combinationes idoneas instituere non licet.

Coroll. 1.

86. Ex hypothesi vltima sponte sequitur integratio casus primi, quo est $fk > gh$; ex casu enim II. est

$$\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} = \frac{h}{\sqrt{(fk-gh)}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{f}} - 1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

deinde ex casu VI. est (41)

$$\int dy\sqrt{\frac{f-(fk-gh)yy}{1-kyy}} = -\frac{gh}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}}.\ \Pi\frac{fk}{gh}(1-y\sqrt{k})\left[\frac{fk}{gh}\right]$$

hincque colligitur.

Inte-

Integratio casus I.

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=C-\frac{(fk-gb)}{gb}z\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$$
$$+\frac{f}{\sqrt{(fk-gb)}}\Pi^{\frac{fk-gb}{gb}}\left(\frac{\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{f}}-1\right)\left[\frac{-fk+gb}{gb}\right]$$
$$-\frac{(fk-gb)}{k\sqrt{fk}}\Pi^{\frac{fk}{gb}}\left(1-\frac{z\sqrt{k}}{\sqrt{(b+kzz)}}\right)\left[\frac{fk}{gb}\right].$$

Coroll. 2.

87. Ex hypothesi n°. 3. casus V. deduci posse videtur, vnde fit:

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{b+kzz}}=\frac{-fk}{gb}z\sqrt{\frac{f-gzz}{b+kzz}}-\frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g+kyy}{f-kyy}}$$
$$+\frac{fk+gb}{gb}\int dx\sqrt{\frac{f-xx}{fk+gb-kxx}}$$

existente $y=\sqrt{\frac{f-gzz}{b+kzz}}$ et $x=\sqrt{(f-gzz)}$

sed haec vltima formula ex casu VI. confici nequit; neque etiam ex hypothesi n°. 2.

Coroll. 3.

88. Consideremus formam VIII, vbi g et b sunt negatiua $fk>gb$, atque n°. 3. huc transferendo habebimus

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{-b+kzz}}=\frac{fk}{gb}z\sqrt{\frac{f-gzz}{-b+kzz}}-\frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g+kyy}{f+byy}}$$
$$+\frac{gb-fk}{gb}\int dx\sqrt{\frac{f-xx}{fk-gb-kxx}}$$

existente $y=\sqrt{\frac{f-gzz}{-b+kzz}}$ et $x=\sqrt{(f-gzz)}$

nunc vero est ex casu II.

$$\int dy\sqrt{\frac{g+kyy}{f+byy}}=\frac{g}{\sqrt{(fk-gb)}}\Pi^{\frac{fk-gb}{gb}}\left(\frac{\sqrt{(f+byy)}}{\sqrt{f}}-1\right)\left[\frac{-fk+gb}{gb}\right]$$

existente $\sqrt{(f+byy)}=\frac{z\sqrt{(fk-gb)}}{\sqrt{(-b+kzz)}}$

deinde

deinde ex casu VI.

$$\int dx\sqrt{\frac{f-xx}{fk-gb-kxx}}=\frac{-gb}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gb}\left(1-x\sqrt{\frac{k}{fk-gb}}\right)\left[\frac{fk}{gb}\right]$$

vnde sequitur

Integratio casus VIII.

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{-b+kzz}}=C+\frac{fk}{gb}z\sqrt{\frac{f-gzz}{-b+kzz}}$$
$$+\frac{(fk-gb)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gb}\left(1-\frac{\sqrt{k(f-gzz)}}{\sqrt{(fk-gb)}}\right)\left[\frac{fk}{gb}\right].$$

Scholion.

89. Sic igitur casus duos nouos I. et VIII. sumus adepti, ita vt tantum IV. et V. supersint, quos ope sequentis problematis superare licebit.

Problema 9.

90. Inuenire casus, quibus expressio $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ aequatur quantitati algebraicae $\alpha z\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$ vna cum duobus arcubus sectionum conicarum.

Solutio.

Posito $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=\alpha z\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}+Z$ erit differentiando

$$dZ=\frac{dz(ff-\alpha fb+2f(g-\alpha k)zz+g(g-\alpha k)z^4)}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(b+kzz)}}$$

cuius resolutio in duas partes idoneas sequenti modo instituatur:

1. Ponatur $Z = p\int \frac{zz\,dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}}$ $+ q\int \frac{dz\sqrt{(h+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}$ fietque

$f(f-\alpha h) = qh$; $2f(g-\alpha k) = p + qk$; $g(g-\alpha k) = 0$,

vnde colligitur: $\alpha = \frac{g}{k}$

ac propterea: $q = \frac{f(fk-gh)}{hk}$; $p = \frac{-f(fk-gh)}{h}$

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C + \frac{gz}{k}\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} - \frac{f}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$$
$$+ \frac{fk-gh}{hk}\int dx\sqrt{\frac{h+(fk-gh)xx}{1-gxx}}$$

existente $y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$ et $x = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$

2°. Ponatur $Z = p\int \frac{zz\,dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}}$ $+ q\int \frac{zz\,dz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}$ fietque

$f(f-\alpha h) = 0$, $2f(g-\alpha k) = p + qf$; $g(g-\alpha k) = qg$

hincque $\alpha = \frac{f}{h}$; $p = \frac{f(gh-fk)}{h}$ et $q = \frac{gh-fk}{h}$

quare habebitur:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C + \frac{fz}{h}\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} - \frac{f}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$$
$$+ \frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}}$$

existente $y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$ et $x = \sqrt{(f+gzz)}$

3°. Ponatur $Z = p\int \frac{zz\,dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}} + q\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

fietque:

$f(f-\alpha h) = qfh$; $2f(g-\alpha k) = p + q(fk+gh)$; $g(g-\alpha k) = qgk$

vnde

vnde nihil concludere licet.

4°. Ponatur $Z = p\int \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}} + q\int \frac{zz\,dz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}$ fietque:

$f(f-\alpha h) = p$; $2f(g-\alpha k) = qf$; $g(g-\alpha k) = qg$

vnde nihil concludere licet.

5°. Ponatur $Z = p\int \frac{dz\sqrt{(h+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} + q\int \frac{zz\,dz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}$

fietque:

$f(f-\alpha h) = ph$; $2f(g-\alpha k) = pk+qf$; $g(g-\alpha k) = qg$

vnde nihil colligere licet.

6°. Ponatur $Z = p\int \frac{dz\sqrt{(h+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} + q\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

fieri debet:

$$f(f-\alpha h) = ph+qfh); \quad 2f(g-\alpha k) = pk+q(fk+gh); \quad g(g-\alpha k) = qgk$$

vnde colligitur:

$$\alpha = \frac{gh-fk}{hk}; \quad p = \frac{f(fk-gh)}{hk} \text{ et } q = \frac{f}{h}, \text{ ideoque}$$

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C + \frac{gh-fk}{hk}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{fk-gh}{hk}\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}} + \frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$$

existente $y = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$.

Coroll. 1.

91. Hinc omnes quatuor casus difficiliores deriuari possunt. Primus nempe statim deducitur ex no. 6; nam ob $fk > gh$, erit ex casu III.

$$\int dy\sqrt{\frac{h+(fk+gh)yy}{1-gyy}} = -\frac{fk}{g\sqrt{gh}}\,\Pi\,\frac{gh}{fk}(1-y\sqrt{g})\left[\frac{gh}{fk}\right]$$

existen-

existente $y = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$, tum vero ex casu II.

$$\int dz \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} = \frac{h}{\sqrt{(fk-gh)}}\, \Pi \frac{fk-gh}{gh} \left(\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{\sqrt{h}} - 1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

hincque

Integratio casus I.

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C - \frac{(fk-gh)}{hk}\, z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$$
$$- \frac{f(f-gh)}{gh\sqrt{gh}}\, \Pi \frac{gh}{fk}\left(1-\frac{z\sqrt{g}}{\sqrt{(f+gzz)}}\right)\left[\frac{gh}{fk}\right]$$
$$+ \frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}}\, \Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{\sqrt{h}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

Coroll. 2.

92. Hic membrum medium per inuersionem ellipsis abit in

$$+\frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}}\, \Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$

vnde si g negatiue capiatur pro casu V manifesto fit pro hyperbola. At sumto g negatiuo, erit vltimum membrum ex casu III.

$$\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f-gzz}} = \frac{-(fk+gh)}{gh}\sqrt{\frac{h}{g}}.\, \Pi\frac{gh}{fk+gh}\left(1-z\sqrt{\frac{g}{f}}\right)\left[\frac{gh}{fk+gh}\right]$$
$$= +\frac{h}{\sqrt{(fk+gh)}}.\, \Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{f}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$

vnde deducitur

Integratio casus V.

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h+kzz}} = C - \frac{(fk+gh)}{hk}\, z\sqrt{\frac{h+kzz}{f-gzz}}$$
$$+ \frac{(fk+gh)}{k\sqrt{fk}}\, \Pi\frac{fk}{gh}\left(\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right]$$
$$+ \frac{f}{\sqrt{(fk+gh)}}\, \Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{f}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right].$$

Coroll.

Coroll. 3.

93. Per n°. 2. construitur casus IV. quo h negatiue capitur. Erit enim

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{-h+kzz}} = C - \frac{fz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f+gzz}} + \frac{f}{h}\int dy\sqrt{\frac{h+fyy}{k-gyy}}$$
$$+ \frac{fk+gh}{gh}\int dx\sqrt{\frac{-f+xx}{-fk-gh+kxx}}$$

existente $y=\sqrt{\frac{-h+kzz}{f+gzz}}$ et $x=\sqrt{(f+gzz)}$.

Nunc vero est

$$\int dy\sqrt{\frac{h+fyy}{k-gyy}} = \frac{-(fk+gh)}{gh}\sqrt{\frac{h}{g}}.\Pi\frac{hh}{fk+gh}\left(1-y\sqrt{\frac{g}{k}}\right)\left[\frac{gh}{fk+gh}\right]$$
$$= + \frac{h}{\sqrt{(fk+gh)}}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{(k-gyy)}}{\sqrt{k}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$

existente $\sqrt{(k-gyy)}=\frac{\sqrt{(fk+gh)}}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et

$$\int dx\sqrt{\frac{-f+xx}{-fk-gh+kxx}} = \frac{gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(x\sqrt{\frac{k}{fk+gh}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right]$$

vnde colligitur

Integratio casus IV.

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{-h+kzz}} = B - \frac{fz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f+gzz}}$$
$$+ \frac{f}{(\sqrt{fk+gh})}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{(fk+gh)}}{\sqrt{k(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$
$$+ \frac{fk+gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(\frac{\sqrt{k(f+gzz)}}{\sqrt{(fk+gh)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right].$$

Coroll. 4.

94. Si hic insuper g sumamus negatiue, prodit

Integratio casus VIII.

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}} = C - \frac{fz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f-gzz}}$$
$$+ \frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{(fk-gh)}}{\sqrt{k(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$
$$+ \frac{fk+gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{k(f-gzz)}}{\sqrt{(fk-gh)}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$

hocque modo omnes plane 12. casus expediuimus.

Concluſio.

95. Intelligimus ergo duodecim caſus formulae $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ ſupra enumeratos in tres claſſes diſtingui, quarum quaelibet quatuor caſus complectatur. Prima ſcilicet claſſis eos continebit caſus, quorum integratio ſimplici arcui ſectionis conicae abſoluitur: ſecunda vero eos, qui inſuper partem algebraicam aſſumunt. At tertia claſſis praeter partem algebraicam duos arcus, alterum ellipticum, alterum hyperbolicum, poſtulat. Cum igitur in enumeratione caſuum ad hunc ordinem non reſpexerimus, iam ita diſponendi videntur:

Claſſis		Integralia exprimuntur
Prima	III. VI.	arcu elliptico
	II. XII.	arcu hyperbolico
Secunda	XI. IX.	parte algebraica et arcu elliptico
	X. VII.	parte algebraica et arcu hyperbolico
Tertia	I. IV. V. VIII.	parte algebraica et duobus arcubus, altero elliptico, altero hyperbolico.

ELEMEN-

ELEMENTA CALCVLI VARIATIONVM.

Auctore

L. EVLERO.

Mox poſt inuenta calculi differentialis principia eiusmodi problemata tractari ſunt coepta, quae plane ſingularem huius calculi applicationem requirebant. Cum enim munus calculi differentialis in hoc potiſſimum conſiſtat, vt propoſita functione quacunque quantitatis variabilis x eius incrementum inueſtigetur, dum quantitas x ſuo differentiali dx creſcere aſſumitur: translatione ad Geometriam facta in promtu erat inde linearum curuarum tangentes et ipſas curuaturas definire, quarum rerum inueſtigatio immediate ex natura differentialium deriuatur. Aliter vero comparata eſt ratio eiusmodi problematum, quibus innumerabiles lineae curuae ſub quapiam generali aequatione contentae proponuntur, a quibus arcus longitudine aequales, ſiue qui a graui deſcendente eodem tempore percurrantur, abſcindi oporteat, ex quo poſteriori genere problema curuarum ſynchronarum eſt natum. In his enim quaeſtionibus non tam id eſt ſpectandum, quantum incrementum cuiusque curuae applicata accipiat, dum abſciſſa ſuo differentiali augetur; quam, quantum ſiue tempus deſcenſus per eundem varietur, ſi ipſe arcus in alia curua capiatur. Talia problemata per differentiationem parametrorum resolui dicuntur, quandoquidem variabilitas parametri omnes illas innumerabiles curuas propositas complectitur. Quo autem clarius perspiciatur principium, ex quo huiusmodi problematum solutio est petenda, proposita sit aequatio quaecunque inter abscissam x et applicatam y, quae insuper quantitatem constantem a parametrum vocandam contineat; quae quamdiu eundem valorem retinet, aequatio praebebit vnam quandam lineam curuam, verum si ipsi a successiue alii atque alii valores tribuantur, aliae continuo lineae curuae orientur. Quodsi iam quaestio circa arcus harum curuarum versetur, quoniam cuiusque curuae arcus per $\int V(dx^2+dy^2)$ exprimitur, in qua integratione parameter a pro constanti assumitur; totum negotium huc redit, vt formulae integralis $\int V(dx^2+dy^2)$ incrementum definiatur, quod accipit, dum in ea loco quantitatis a eadem suo incremento da aucta substituatur. Generatim igitur si loco arcus alia quaecunque expressio integralis $\int Z dx$ tractetur, quae integratio ex data inter x et y aequatione sit conficienda, parametro a pro constanti habita; quaeritur quantam variationem eadem expressio $\int Z dx$ iam integrata sit passura, si in aequatione inter x et y data parameter a elemento da augeatur. Eodem referendum est celebre illud traiectoriarum orthogonalium problema, in quo etiam infinitae lineae curuae sub data aequatione inter abscissam x, applicatam y, et parametrum variabilem a, contentae proponuntur, atque eiusmodi linea curua quaeritur, quae illas omnes ad angulos rectos traiiciat. Ad quod problema soluendum applicata y vt functio ipsarum

ipsarum x et a spectari solet, ex cuius differentiatione talis forma $dy = p\,dx + q\,da$ emergere concipitur, tum vero peruenitur ad hanc aequationem differentialem: $dx(1 + pp) + pq\,da = 0$, siue ad hanc: $dx + p\,dy = 0$, ex qua cum illa coniuncta parametrum a eliminari oportet, vt eliciatur aequatio inter x et y, naturam curuae quaesitae exprimens. Quando quidem curuae secandae per aequationem algebraicam inter x et y dantur, res nullam habet difficultatem, cum inde valor ipsius y absolute per x et a definiri, indeque per differentiationem valores litterarum p et q assignari queant, vnde aequatio differentialis inter duas tantum variabiles x et a obtinetur; verum si aequatio pro curuis secandis ipsa iam sit differentialis, parametrum a vt quantitatem constantem inuoluens; quae idcirco erit huius formae $dy = p\,dx$, seu $y = \int p\,dx$ ante omnia inuestigari oportet, cuius modi aequatio differentialis proditura esset, si praeter x etiam parameter a vt variabilis statuatur, vt inde quantitas q innotescat; quae inuestigatio saepe maxime fit difficilis, atque adeo vires Analyseos superare videtur. Etiamsi autem ratio huius inuestigationis ex solis calculi differentialis principiis sit petenda, tamen in ipsa tractatione ingens statim cernitur discrimen; propterea quod, cum differentiatio ordinaria nulli difficultati soleat esse obnoxia, hic tota difficultas in inuentione differentialium ex variabilitate parametri oriundorum resideat, haecque ipsa inuentio singulares regulas requirat. Quam ob rem non praeter necessitatem partes Analyseos infinitorum multiplicari videbuntur, si inuestigationem huiusmodi differentiarentialium, quae ex variabilitate parametri nascuntur, ad peculiarem calculum referamus, quem distinctionis causa *Calculum variationum* appellare liceat. Cuius necessitas adhuc clarius perspicietur, si perpendamus, eius vim multo latius patere, quam ad solam parametrorum variabilitatem, qua etsi lineae curuae in infinitum multiplicantur, omnes tamen semper sub certo quodam genere, quod scilicet in data aequatione contineatur, comprehenduntur. Nostrum autem calculum variationum non solum ad huiusmodi genera curuarum determinata extendi conueniet, sed etiam ad omnes omnino curuas, quae quidem concipi queant, veluti si inter omnes plane curuas ea sit definienda, quae data quapiam maximi minimiue proprietate gaudeat. Atque huc referendum erit celebratissimum illud problema isoperimetricum latissimo sensu acceptum, prout id quidem in libro singulari pertractaui; quem qui attente legerit, non dubitabit, quin huius generis inuestigationes calculi speciem prorsus singularem postulent, a consuetis Analyseos regulis non parum diuersam. Haec enim problemata ad talem quaestionem reducuntur, vt eiusmodi aequatio inter binas variabiles x et y determinetur, ex qua expressio quaepiam integralis $\int Z dx$, quomodocunque Z per x et y componatur, maximum siue minimum valorem consequatur. Ad hoc autem efficiendum necesse est, vt proposita huiusmodi formula $\int Z dx$ quacunque, quae quidem ex assumta quauis relatione inter x et y determinatum valorem accipiat, in genere definiatur, quantam mutationem ea formula sit subitura, si ipsa relatio inter x

et

et y infinite parum quomodocunque varietur; haecque quaestio iam infinities latius patet, quam superior, vbi tantum mutatio ex variatione parametri oriunda assignari debebat. Potest etiam loco simplicis formulae integralis $\int Z dx$ expressio quaecunque, vtcunque ex x, y, harumque differentialibus atque formulis integralibus composita, considerari, quo longius haec tractatio extendatur; tum vero calculus variationum regulas suppeditabit, mutationem huiusmodi expressionum definiendi, quae ob relationem variabilium x et y, vtcunque infinite parum mutatam, ipsis inducitur. Methodus quidem in solutione problematum isoperimetricorum adhiberi solita iam eximia huius calculi specimina suggerit, quae autem cum sint ex alieno quasi fonte, Geometria scilicet, hausta, non ad constitutionem principiorum istius calculi desiderati referri possunt. Deinde vero etiam haec specimina ad scopum nimis particularem sunt adstricta, quam vt amplitudinem nostri calculi complecti possint. Quam ob rem constitui eius elementa ex primis Analyseos principiis repetere, eaque ita euoluere, vt non solum problematibus supra commemoratis facile et concinne soluendis inseruire possint, sed etiam nouum quasi campum aperiant, sese ad plurima alia talium quaestionum genera extendentem, in quo Geometrae non sine insigni finium Analyseos promotione vires suas exercere queant.

Elemen-

Elementa Calculi Variationum.

Hypothesis 1.

1.

Detur inter variabiles binas x et y aequatio quaecunque, qua earum relatio mutua exprimatur, ita vt inde quicunque valor determinatus ipsi x tribuatur, valor quoque determinatus pro y definiatur.

Coroll. 1.

2. Proposita ergo aequatione inter binas variabiles x et y, singulis valoribus ipsius x, quicunque concipi possunt, determinati valores ipsius y responde-bunt.

Coroll. 2.

3. Vi ergo istius aequationis propositae erit y certa quaedam functio ipsius x, et quemadmodum ipsi x respondet y, ita illius valori sequenti $x' = x + dx$, respondebit $y' = y + dy$, cuius differentia a praecedente y, differentiale nempe dy, per vulgares differentiandi regulas assignari poterit.

Coroll. 3.

4. Cum y sit functio ipsius x, etiam $\frac{dy}{dx}$ erit functio ipsius x, per relationem inter x et y datam assignabilis; ac si ponatur $\frac{dy}{dx} = p$, simili modo $\frac{dp}{dx}$ erit certa

certa functio ipsius x: ac si porro ponamus $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$, $\frac{dr}{dx}=s$ etc. etiam hae quantitates q, r, s etc. erunt certae functiones ipsius x itidem per relationem inter x et y datam assignabiles.

Coroll. 4.

5. Si deinde V sit expressio quomodocunque ex x et y conflata, ea quoque ope relationis inter x et y datae ita erit comparata, vt pro omnibus valoribus ipsius x valores determinatos adipiscatur. Ac si V' designet valorem sequentem, seu ipsi $x+dx$ conuenientem; erit $V'=V+dV$, siue $dV=V'-V$, secundum prima calculi differentialis principia.

Hypothesis 2.

6. Quaecunque proponatur relatio inter x et y, quia inde simul relatio differentialium dx et dy innotescit, ponam in sequentibus perpetuo:

$$\frac{dy}{dx}=p;\ \frac{dp}{dx}=q;\ \frac{dq}{dx}=r;\ \frac{dr}{dx}=s \text{ etc.}$$

eruntque p, q, r, s etc. perinde ac y, functiones ipsius x, per illam relationem datam assignabiles.

Coroll. 1.

7. Quemadmodum littera p relationem differentialium dx et dy continet, ita q complectetur relationem differentialium secundi gradus; r vero differentialium tertii gradus, s quarti gradus etc.

Coroll. 2.

8. Viciſſim igitur etiam, ſi qua in expreſſione V differentialia, ſiue primi, ſiue ſecundi, ſiue altioris ordinis, inſint, ea introducendis his qnantitatibus p, q, r, s, etc. ex calculo tolli poterunt.

Axioma.

9. Si inter variabiles x et y alia relatio a propoſita infinite parum diſcrepans conſtituatur, valores ipſius y, ſingulis valoribus ipſius x reſpondentes, ab iis, quos propoſita relatio praebet, infinite parum diſcrepabunt.

Coroll. 1.

10. Cum huiusmodi relatio variata infinitis modis a relatione propoſita diſcrepare poſſit, ita vt diſcrepantia ſit infinite parua, euenire poteſt, vt vnus pluresue valores ipſius y, qui certis valoribus ipſius x reſpondent, nullam inde mutationem patiantur.

Coroll. 2.

11. Iſta variatio relationis ita generalis concipi poteſt, vt inde omnes valores ipſius y mutationes quascunque patiantur, quo nullo modo a ſe inuicem pendeant. Quo igitur haec tractatio latiſſime pateat, huiusmodi variationem relationis generaliſſime conceptam intelligi conueniet.

Hypotheſis 3.

12. Si relatio inter x et y propoſita parum mutetur, valorem ipſius y, qui inde ipſi x reſpondet,
per

per $y + \delta y$ designemus, ita vt δy variationem denotet, quam y ob variatam relationem patitur.

Coroll. 1.

13. Simili modo cum y' sit valor ipsi $x + dx$ vi relationis propositae respondens, eius valorem, qui eidem $x + dx$ vi relationis variatae conuenit, per $y' + \delta y'$ exprimamus, ita vt $\delta y'$ variationem ipsius y' denotet, quae ex variatione relationis oritur.

Coroll. 2.

14. Cum igitur sit $y' = y + dy$, erit $\delta y' = \delta(y + dy) = \delta y + \delta dy$, et $\delta dy = \delta y' - \delta y$. Denotabit autem δdy variationem ipsius dy, ex variatione inter x et y propositae ortam.

Coroll. 3.

15. Quemadmodum autem y' statum sequentem ipsius y denotat, statu scilicet sequente ad $x + dx$ relato; ita $\delta y'$ statum sequentem ipsius δy denotat, ex quo $\delta y' - \delta y$ exprimet differentiale ipsius δy, quod est $d \delta y$. Cum ergo sit $\delta dy = \delta y' - \delta y$, erit $\delta dy = d \delta y$.

Coroll. 4.

16. Hinc ergo consequimur istam insignem proprietatem: quod variatio differentialis ipsius y aequalis sit differentiali variationis ipsius y. Est enim δdy variatio ipsius dy, hoc est differentialis ipsius y, et $d\delta y$ est differentiale ipsius δy, hoc est variationis ipsius y.

Definitio 1.

17. Si V ſit expreſſio vtcunque ex x et y conflata, propoſita quadam relatione inter x et y, eius variatio, quam per δV indicabo, eſt incrementum, quod quantitas V capit, ſi relatio inter x et y propoſita infinite parum varietur.

Coroll. 1.

18. Probe ergo diſtingui oportet differentiale dV, et variatio δV; differentiale enim denotat incrementum ipſius V, dum x ſuo elemento dx augetur, manente relatione inter x et y propoſita; variatio autem denotat incrementum ipſius V, dum ipſa relatio variatur manente x.

Coroll. 2.

19. Cum per variationem relationis, inter x et y propoſitae, quantitas y incrementum capiat δy, manente x eadem; quomodocunque quantitas V ex x et y fuerit conflata, eius variatio reperietur, ſi loco y vbique ſcribatur $y + \delta y$, et a valore hinc pro V oriundo ipſe valor V ſubtrahatur.

Coroll. 3.

20. Scilicet ſi in V vbique pro y ſcribatur $y + \delta y$, prodibit valor variatus ipſius V, qui eſt $V + \delta V$; ipſa autem variatio reperitur, ſi a valore variato $V + \delta V$ valor primitiuus V ſubtrahatur.

Definitio.

Definitio 2.

21. Calculus variationum est methodus inueniendi variationes quantitatum vtcunque ex binis variabilibus x et y conflatarum, quas patiuntur, si relatio inter x et y proposita infinite parum quomodocunque immutetur.

Coroll. 1.

22. Proposita ergo relatione inter x et y, si V denotet quantitatem quomodocunque ab x et y pendentem, hic calculus docet inuenire variationem ipsius V, seu valorem ipsius δV.

Coroll. 2.

23. Quia relationem inter x et y datam vtcunque immutari assumimus, vt y pro singulis valoribus ipsius x variationes quascunque, quae etiam a se inuicem non pendeant, accipiat, hic calculus latissime patet, atque ad quasuis conditiones variationum datas accommodari poterit.

Scholion 1.

24. Quo vsus huius calculi clarius perspici queat, exemplum afferamus. Proposita ergo sit haec relatio inter x et y:

$$aayy - bbxx = aabb$$

quae scribendo $b + db$ loco b infinite parum immutetur. Iam si proponatur quantitas quaepiam ab x et y pendens, veluti $\int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{y}}$, huius variatio ex illa immutatione relationis oriunda ope istius calculi exhiberi poterit; cum enim sit $y = \frac{b}{a} \sqrt{(aa-xx)}$ erit $\delta y = \frac{db}{a} \sqrt{(aa-xx)}$ quae est variatio ipsius y. Quemadmodum autem ex cognita variatione ipsius y quantitatum vtcunque ab y et x pendentium, ideoque etiam huius: $\int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{y}}$, variationes inde natae determinari debeant, in hoc calculo est ostendendum; vnde patet, omnia, quae de variabilitate parametrorum passim sunt tradita, hic contineri. Deinde vero etiam quaestiones inuerti possunt, veluti si proposita huiusmodi formula $\int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{y}}$ ea relatio inter x et y quaeratur, vnde variatio istius formulae datae prodeat magnitudinis, vel etiam nulla, quo posteriori casu relatio inuenta formulae propositae maximum minimumue valorem comparabit; atque huc referenda erunt omnia problemata, quae circa curuas maximi minimiue proprietate gaudentes adhuc sunt tractata.

Scholion 2.

25. Praecepta huius calculi ad diuersitatem rationis, qua formula quaepiam proposita V a binis variabilibus x et y pendet, sunt accommodanda, quae diuersitas cum sit infinita, eam ad aliquot genera praecipua reuocari conueniet. Primum ergo genus complectatur eas formulas, quae ex ipsis quantitatibus x et y earumque deriuatis $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$ etc. vtcunque sunt compositae, ita tamen, vt nullas formulas integrales inuoluant. Ad secundum genus refero eas formulas, quae integralia huiusmodi $\int Z\, dx$ contineant, ita tamen, vt ipsa

ipsa formula Z ad primum genus pertineat. Tertium genus comprehendet eiusmodi formulas, in quibus non solum integralia $\int Z\,dx$ insunt, sed vbi quantitas Z ipsa insuper integralia inuoluit. Tandem sequetur quartum genus, in quo formula varianda V non absolute, sed demum per aequationem differentialem, vel primi, vel adeo altioris gradus, definitur, quod genus vtique latissime patet, ac praecedentia omnia in se complectitur. Quod autem ad aequationem, qua relatio inter x et y exprimitur, attinet, etsi eam vt datam specto, tamen non definio, ne praecepta tradenda vllo modo limitentur.

Theorema 1.

26. Variatio differentialis cuiusuis quantitatis V aequalis est differentiali variationis eiusdem, seu est $\delta d V = d\delta V$.

Demonstratio.

Cum sit $dV = V' - V$ denotante V' valorem sequentem ipsius V, qui ipsi $x + dx$ conuenit, vti V ipsi x respondet, erit $\delta dV = \delta V' - \delta V$; verum $d\delta V$ exprimit differentiam inter δV eiusque valorem sequentem, qui est $\delta V'$, ita vt sit $d\delta V = \delta V' - \delta V$, vnde perspicuum est, esse $\delta dV = d\delta V$.

Coroll. 1.

27. Eodem modo, si loco V scribamus dV, patet esse $\delta ddV = d\delta dV$; sed $\delta dV = d\delta V$, vnde fit $d\delta dV = dd\delta V$, sicque aequales inter se erunt hae tres formae:

$$\delta ddV = d\delta dV = dd\delta V.$$

Coroll. 2.

28. Porro vero si et hic pro V scribamus dV, obtinebimus aequalitatem inter has quatuor formas:

$$\delta dddV = d\delta ddV = dd\delta dV = ddd\delta V$$

tum vero inter has quinque:

$$\delta d^4 V = d\delta d^3 V = d^2\delta d^2 V = d^3\delta dV = d^4\delta V.$$

Coroll. 3.

29. Si habeatur differentiale cuiuscunque ordinis ipsius V, nempe $d^n V$, cuius variatio sit inuestiganda, erit:

$$\delta d^n V = d^m \delta d^{n-m} V = d^n \delta V$$

aequatur scilicet differentiali ordinis n ipsius variationis δV. Hinc ergo reducitur variatio differentialium ad differentiationem variationis.

Problema 1.

30. Determinare variationes quantitatum p, q, r, s etc. rationem differentialium ipsarum x et y in se continentium.

Solutio.

Quia variatio non ad x pertinere censetur, erit $\delta x = 0$, et variatio ipsius y, nempe δy, tanquam cognita spectatur. Hinc cum sit $p = \frac{dy}{dx}$, erit $\delta p = \frac{\delta dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}$. Deinde ob $q = \frac{dp}{dx}$ erit $\delta q = \frac{\delta dp}{dx} = \frac{d\delta p}{dx}$; sumto autem elemento dx constante, est $d\delta p = \frac{dd\delta y}{dx}$, hincque $\delta q = \frac{dd\delta y}{dx^2}$; et $d\delta q = \frac{d^3 dy}{dx^2}$. Porro autem cum sit $r = \frac{dq}{dx}$, erit $\delta r = \frac{\delta dq}{dx} = \frac{d\delta q}{dx}$, ideoque $\delta r = \frac{d^3\delta y}{dx^3}$, vnde variationes quanti-

quantitatum ex x et y deriuatarum p, q, r, s, etc. ita ſe habebunt:

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx};\ \delta q = \frac{d^2\delta y}{dx^2};\ \delta r = \frac{d^3\delta y}{dx^3};\ \delta s = \frac{d^4\delta y}{dx^4};\ \text{etc.}$$

ſi quidem elementum dx pro conſtante aſſumatur.

Coroll. 1.

31. Haec differentialia primi altiorumque graduum variationis δy determinantur per variationes valorum ipſius y, qui conueniunt ſequentibus valoribus ipſius x, ſcilicet $x+dx$; $x+2dx$; $x+3dx$; etc. Si enim ſequentes valores ipſius y ita exhibeantur: y', y''; y''', y'''' etc. eorumque variationes ita: $\delta y'$; $\delta y''$; $\delta y'''$; $\delta y''''$ ex natura differentialium nouimus eſſe:

$$d\delta y = \delta y' - \delta y;\ dd\delta y = \delta y'' - 2\delta y' + \delta y;$$
$$d^3\delta y = \delta y''' - 3\delta y'' + 3\delta y' - \delta y\ \text{etc.}$$

Coroll. 2.

32. Si ergo ſolus valor y variationem pateretur, ſequentes vero y', y'', y''' nulli eſſent obnoxiae, vt eſſet $\delta y' = 0$, $\delta y'' = 0$, $\delta y''' = 0$ etc. foret

$$d\delta y = -\delta y;\ dd\delta y = +\delta y;\ d^3\delta y = -\delta y;\ d^4\delta y = +\delta y\ \text{etc.}$$

ideoque:

$$\delta p = -\frac{\delta y}{dx};\ \delta q = +\frac{\delta y}{dx^2};\ \delta r = -\frac{\delta y}{dx^3};\ \delta s = +\frac{\delta y}{dx^4}.\ \text{etc.}$$

Problema 2.

33. Si V fuerit quantitas quomodocunque ex variabilibus x et y earumque differentialibus cuiuscunque

 ordinis

ordinis conflata, seu si fuerit functio quaecunque quantitatum x, y, p, q, r, s etc. determinare eius variationem δV.

Solutio.

Differentietur more consueto haec functio V, prodeatque

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds + \text{etc.}$$

quod differentiale nil aliud est, nisi incrementum quod functio V capit, si loco quantitatum x, y, p, q, r, s etc. substituantur istae $x+dx$; $y+dy$; $p+dp$; $q+dq$; $r+dr$ etc. Simili ergo modo si pro x, y, p, q, r, s etc. substituantur

$$x+0;\ y+\delta y;\ p+\delta p,\ q+\delta q,\ r+\delta r,\ s+\delta s \text{ etc.}$$

incrementum, quod inde functio V capit, erit eius variatio:

$$\delta V = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + \text{etc.}$$

Quare, si pro δp, δq, δr etc. valores supra inuenti scribantur, prodibit variatio quaesita:

$$\delta V = N\delta y + \frac{P\,d\delta y}{dx} + \frac{Q\,dd\delta y}{dx^2} + \frac{R\,d^3\delta y}{dx^3} + \frac{S\,d^4\delta y}{dx^4} \text{ etc.}$$

Theorema 2.

34. Proposita formula integrali quacunque $\int Z\,dx$ eius variatio aequalis est integrali variationis differentialis $Z\,dx$, seu erit $\delta\int Z\,dx = \int \delta Z\,dx$.

Demonstratio.

Cum $\int Z\,dx$ exprimat summam omnium $Z\,dx$, eius variatio $\delta \int Z\,dx$ comprehendet summam omnium varia-

variationum ipsius Zdx, seu erit $\delta\int Zdx = \int\delta Zdx$. Quod etiam hoc modo distinctius ostendi potest: sit $\int Zdx = V$, ita vt definiri oporteat δV; cum igitur sit $dV = Zdx$, erit $\delta dV = \delta Zdx = d\delta V$; vnde sumtis integralibus fiet $\delta V = \int\delta Zdx$.

Problema 3.

35. Proposita formula integrali $\int Zdx$, in qua Z quantitas quomodocunque ex ipsis x et y, earumque differentialibus cuiuscunque ordinis conflata, inuestigare eius variationem $\delta\int Zdx$.

Solutio.

Cum ergo Z sit functio ipsarum x, y, p, q, r, s etc. eius differentiale more consueto sumtum huiusmodi formam habebit:

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds \text{ etc.}$$

vnde eiusdem quantitatis Z variatio erit:

$$\delta Z = N\delta y + \frac{Pd\delta y}{dx} + \frac{Qdd\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3\delta y}{dx^3} + \frac{Sd^4\delta y}{dx^4} \text{ etc.}$$

Cum nunc sit $\delta\int Zdx = \int\delta Zdx$, erit:

$$\delta\int Zdx = \int N\delta y dx + \int Pd\delta y + \int\frac{Qdd\delta y}{dx} + \int\frac{Rd^3\delta y}{dx^2} + \text{ etc.}$$

ne iam in vlteriori reductione expressio δy turbet, ponamus tantisper $\delta y = \omega$, et reductiones ita se habebunt:

$$\int Pd\omega = P\omega - \int\omega dP$$

$$\int\frac{Qdd\omega}{dx} = \frac{Qd\omega}{dx} - \int\frac{dQ}{dx}d\omega = \frac{Qd\omega}{dx} - \frac{\omega dQ}{dx} + \int\frac{\omega ddQ}{dx}$$

$$\int\frac{Rd^3\omega}{dx^2} = \frac{Rdd\omega}{dx^2} - \frac{dRd\omega}{dx^2} + \frac{\omega ddR}{dx^2} - \int\frac{\omega d^3R}{dx^2}$$

etc.

 Colli-

Colligantur omnes isti valores, et pro ω restituatur δy, sicque obtinebitur:

$$\delta\int Z dx = \int \delta y dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d^3\delta y}{dx^3}\left(S - \text{etc.}\right)$$

in qua expressione differentiale dx sumtum est constans.

Coroll. 1.

36. Constat ergo variatio formulae integralis $\int Z dx$ ex parte integrali $\int \delta y dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}\right)$ et partibus absolutis, quae praeter ipsam variationem δy etiam eius differentialia $d\delta y$, $dd\delta y$, $d^3\delta y$ etc. complectuntur.

Coroll. 2.

37. Partem autem integralem per reductiones adhibitas ita instruximus, vt tantum ipsam variationem δy complecteretur, ab eiusque differentialibus immunis exhiberetur, quae forma in applicatione calculi variationum maximam praestat vtilitatem.

Problema 4.

38. Si in formula integrali $\int Z dx$, quantitas Z non solum litteras x et y cum relationibus differentialium p, q, r, s etc. sed etiam formulam integralem $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ vtcun-

vtcunque complectatur, in qua autem sit $\mathfrak{Z}$ functio ipsarum x, y, p, q, r, s etc. definire variationem formulae illius integralis $\int Z\,dx$.

Solutio.

Cum quantitas Z praeter quantitates x, y, p, q, r, s etc. etiam formulam integralem $\Pi = \int \mathfrak{Z}\,dx$ involuat, spectari poterit tanquam functio quantitatum Π, x, y, p, q, r, s etc. vnde si more solito differentietur, prodibit talis forma:

$$dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds \text{ etc.}$$

vnde colligitur variatio ipsius Z:

$$\delta Z = L\,\delta\Pi + N\,\delta y + P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + S\,\delta s + \text{etc.}$$

Cum deinde sit $\mathfrak{Z}$ functio ipsarum x, y, p, q, r, s etc. ponatur:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq + \mathfrak{R}\,dr + \mathfrak{S}\,ds + \text{etc.}$$

atque ex praecedente problemate erit $\delta\Pi$, seu

$$\begin{aligned}\delta\int\mathfrak{Z}\,dx = {} & \int\delta y\,dx\left(\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \text{etc.}\right)\\ & + \delta y\left(\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{S}}{dx^3} + \text{etc.}\right)\\ & + \frac{d\delta y}{dx}\left(\mathfrak{Q} - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{S}}{dx^2} - \text{etc.}\right)\\ & + \frac{dd\delta y}{dx^2}\left(\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{S}}{dx} + \text{etc.}\right)\\ & + \frac{d^3\delta y}{dx^3}\left(\mathfrak{S} - \text{etc.}\right)\end{aligned}$$

Vel sumatur potius prior forma:

$$\begin{aligned}\delta\int\mathfrak{Z}\,dx = {} & \int\mathfrak{N}\,\delta y\,dx + \int\mathfrak{P}\,d\delta y + \int\frac{\mathfrak{Q}\,dd\delta y}{dx} + \int\frac{\mathfrak{R}\,d^3\delta y}{dx^2}\\ & + \int\frac{\mathfrak{S}\,d^4\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\end{aligned}$$

eritque ob $\delta\Pi = \delta\int \mathfrak{Z}\,dx$:

$$\delta Z = \mathfrak{L}\int \mathfrak{N}\,\delta y\,dx + \mathfrak{L}\int \mathfrak{P}\,d\delta y + \mathfrak{L}\int \frac{\mathfrak{Q}\,dd\delta y}{dx} + \mathfrak{L}\int \frac{\mathfrak{R}\,d^3\delta y}{dx^2}$$
$$+ \mathfrak{L}\int \frac{\mathfrak{S}\,d^4\delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$
$$+ N\,\delta y + \frac{P\,d\delta y}{dx} + \frac{Q\,dd\delta y}{dx^2} + \frac{R\,d^3\delta y}{dx^3} + \frac{S\,d^4\delta y}{dx^4}.$$

Cum igitur ſit $\delta\int Z\,dx = \int\delta Z\,dx$, habebimus :

$$\delta\int Z\,dx = \int\mathfrak{L}\,dx\int\mathfrak{N}\,\delta y\,dx + \int\mathfrak{L}\,dx\int\mathfrak{P}\,d\delta y + \int\mathfrak{L}\,dx\int\frac{\mathfrak{Q}\,dd\delta y}{dx}$$
$$+ \int\mathfrak{L}\,dx\int\frac{\mathfrak{R}\,d^3\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$
$$+ \int N\,\delta y\,dx + \int P\,d\delta y + \int\frac{Q\,dd\delta y}{dx} + \int\frac{R\,d^3\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Ponatur $\int\mathfrak{L}\,dx = W$, ſeu $\mathfrak{L}\,dx = dW$, et ob

$$\int\mathfrak{L}\,dx\int\mathfrak{N}\,\delta y\,dx = W\int\mathfrak{N}\,\delta y\,dx - \int\mathfrak{N}W\,\delta y\,dx$$
$$\int\mathfrak{L}\,dx\int\mathfrak{P}\,d\delta y = W\int\mathfrak{P}\,d\delta y - \int\mathfrak{P}W\,d\delta y$$
$$\int\mathfrak{L}\,dx\int\frac{\mathfrak{Q}\,dd\delta y}{dx} = W\int\frac{\mathfrak{Q}\,dd\delta y}{dx} - \int\frac{\mathfrak{Q}W\,dd\delta y}{dx}$$

obtinebimus :

$$\delta\int Z\,dx = W\int\mathfrak{N}\,\delta y\,dx + W\int\mathfrak{P}\,d\delta y + W\int\frac{\mathfrak{Q}\,dd\delta y}{dx}$$
$$+ W\int\frac{\mathfrak{R}\,d^3\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$
$$+ \int(N - \mathfrak{N}W)\,\delta y\,dx + \int(P - \mathfrak{P}W)\,d\delta y$$
$$+ \int(Q - \mathfrak{Q}W)\frac{dd\delta y}{dx} + \int(R - \mathfrak{R}W)\frac{d^3\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Hae formulae eodem modo vt ſupra reductae dabunt:

$$\delta\int Z\,dx = W\int\delta y\,dx\left(\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ W\,\delta y\left(\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{R}}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{W\,d\delta y}{dx}\left(\mathfrak{Q} - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{W\,dd\delta y}{dx^2}\left(\mathfrak{R} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \int\delta y\,dx\left((N - \mathfrak{N}W) - \frac{d(P - \mathfrak{P}W)}{dx} + \frac{dd(Q - \mathfrak{Q}W)}{dx^2} - \frac{d^3(R - \mathfrak{R}W)}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y\left((P - \mathfrak{P}W) - \frac{d(Q - \mathfrak{Q}W)}{dx} - \frac{dd(R - \mathfrak{R}W)}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left((Q - \mathfrak{Q}W) - \frac{d(R - \mathfrak{R}W)}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left((R - \mathfrak{R}W) - \text{etc.}\right)$$

Coroll.

Coroll. 1.

39. Quia reductiones adhibitae quouis casu facile expediri possunt, iis praetermissis variatio quaesita hoc modo succinctius exhibitur, posito $W = \int L dx$:

$$\delta \int Z dx = W \int dx \left(\mathfrak{N} \delta y + \frac{\mathfrak{P} d \delta y}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} dd\delta y}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R} d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc}\right)$$
$$+ \int dx \left((N - \mathfrak{N} W) \delta y + (P - \mathfrak{P} W) \frac{d\delta y}{dx} + (Q - \mathfrak{Q} W) \frac{dd\delta y}{dx^2} + (R - \mathfrak{R} W) \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

Coroll. 2.

40. Ac si quantitas Z inuoluat insuper aliam formulam integralem $\Pi' = \int \mathfrak{Z}' dx$, vt sit:

$$dZ = L d\Pi + L d\Pi' + M dx + N dy + P dp + Q dq + \text{etc.}$$

tum vero:

$$d\mathfrak{Z}' = \mathfrak{M}' dx + \mathfrak{N}' dy + \mathfrak{P}' dp + \mathfrak{Q}' dq + \mathfrak{R}' dr + \text{etc.}$$

Si ponatur $\int L dx = W$, $\int L' dx = W'$, insuperque ad abbreuiandum:

$$N - \mathfrak{N} W - \mathfrak{N}' W' = (N); \quad P - \mathfrak{P} W - \mathfrak{P}' W' = (P)$$
$$Q - \mathfrak{Q} W - \mathfrak{Q}' W' = (Q); \quad R - \mathfrak{R} W - \mathfrak{R}' W' = (R) \text{ etc.}$$

erit variatio quaesita:

$$\delta \int Z dx = W \int dx \left(\mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R} \frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ W' \int dx \left(\mathfrak{N}' \delta y + \mathfrak{P}' \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}' \frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R}' \frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \int dx \left((N) \delta y + (P) \frac{d\delta y}{dx} + (Q) \frac{dd\delta y}{dx^2} + (R) \frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

Problema 5.

41. Si in formula $\int Z dx$ quantitas Z praeter litteras x, y, p, q, r etc. inuoluat formulam integralem

lem $\Pi = \int \mathfrak{Z}\, dx$, in qua quantitas $\mathfrak{Z}$ praeter litteras x, y, p, q, r etc. insuper complectatur formulam integralem $\pi = \int \mathfrak{z}\, dx$, vbi $\mathfrak{z}$ autem sit functio solarum litterarum x, y, p, q, r etc. inuenire variationem formulae $\int Z\, dx$.

Solutio.

Cum Z sit functio quantitatum x, y, p, q, r etc. et $\Pi = \int \mathfrak{Z}\, dx$, eius differentiale more consueto sumtum erit huius formae:

$$dZ = L\, d\Pi + M\, dx + N\, dy + P\, dp + Q\, dq + R\, dr + \text{etc.}$$

ideoqne eius variatio

$$\delta Z = L\, \delta\Pi + N\, \delta y + P \frac{d\,\delta y}{dx} + Q \frac{dd\,\delta y}{dx^2} + R \frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

vnde variatio quaesita erit $\delta \int Z\, dx = \int \delta Z\, dx =$

$$\int L\, dx\, \delta\Pi + \int dx \left(N\, \delta y + P \frac{d\,\delta y}{dx} + Q \frac{dd\,\delta y}{dx^2} + R \frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$

At cum sit $\mathfrak{Z}$ functio quantitatum x, y, p, q, r etc. et $\pi = \int \mathfrak{z}\, dx$, erit differentiando:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\, d\pi + \mathfrak{M}\, dx + \mathfrak{N}\, dy + \mathfrak{P}\, dp + \mathfrak{Q}\, dq + \mathfrak{R}\, dr + \text{etc.}$$

hincque variatio eius

$$\delta \mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\, \delta\pi + \mathfrak{N}\, \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R} \frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

quare cum sit $\Pi = \int \mathfrak{Z}\, dx$, erit $\delta\Pi = \delta \int \mathfrak{Z}\, dx = \int \delta \mathfrak{Z}\, dx$, ac propterea:

$$\delta\Pi = \int \mathfrak{L}\, dx\, \delta\pi + \int dx \left(\mathfrak{N}\, \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R} \frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$

vnde reperitur:

$$\int L\, dx\, \delta\Pi = \int L\, dx \int \mathfrak{L}\, dx\, \delta\pi + \int L\, dx \int dx \left(\mathfrak{N}\, \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right)$$

Supereſt

Superest ergo vt definiamus $\delta\pi$, est autem $\pi = \int z\,dx$, et quia z est functio litterarum x, y, p, q, r etc. tantum, fiat differentiando:

$$dz = \mathfrak{m}\,dx + \mathfrak{n}\,dy + \mathfrak{p}\,dp + \mathfrak{q}\,dq + \mathfrak{r}\,dr + \text{etc.}$$

ex quo concluditur eius variatio:

$$\delta z = \mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

tum vero, ob $\delta\pi = \delta\int z\,dx = \int\delta z\,dx$, erit:

$$\delta\pi = \int dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

Quamobrem habebimus $\int L\,dx\int\mathfrak{L}\,dx\,\delta\pi =$

$$\int L\,dx\int\mathfrak{L}\,dx\int dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

Vt iam hanc formulam a signis integralibus multiplicatis liberemus, ponamus $\int L\,dx = W$, eritque:

$$\int L\,dx\,\delta\Pi = W\delta\Pi - \int W\,d\delta\Pi,$$

verum $d\delta\Pi = \delta Z\,dx$, vnde $\int L\,dx\,\delta\Pi = W\delta\Pi - \int W\delta Z\,dx$ ideoque:

$$\int L\,dx\,\delta\Pi = W\int\mathfrak{L}\,dx\,\delta\pi + W\int dx\left(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$
$$-\int\mathfrak{L}W\,dx\,\delta\pi \quad \int W\,dx\left(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$

fit $\int\mathfrak{L}\,dx = \mathfrak{W}$, erit $\int\mathfrak{L}\,dx\,\delta\pi = \mathfrak{W}\delta\pi - \int\mathfrak{W}\delta z x$ hincque:

$$\int\mathfrak{L}\,dx\,\delta\pi = \mathfrak{W}\int dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$-\int\mathfrak{W}\,dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

Porro ponatur $\int\mathfrak{L}W\,dx = \int W\,d\mathfrak{W} = \mathfrak{V}$, vt sit:

$$\int\mathfrak{L}W\,dx\,\delta\pi = \mathfrak{V}\int dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$-\int\mathfrak{V}\,dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

Ex his omnibus colligetur variatio quaesita $\delta\int Z dx =$

$$(W\mathfrak{W} - \mathfrak{V})\int dx(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.})$$
$$- W\int \mathfrak{W} dx(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.})$$
$$+ \int \mathfrak{V} dx(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.})$$
$$+ W\int dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.})$$
$$- \int W dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.})$$
$$+ \int dx(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.})$$

Coroll. 1.

42. Si quaeratur variatio formulae $\int Z dx$ a valore $x = 0$ vsque ad valorem determinatum $x = a$, sumantur integralia $W = \int L dx$, $\mathfrak{W} = \int \mathfrak{L} dx$ et $\mathfrak{V} = \int W d\mathfrak{W}$, ita vt euanescant posito $x = 0$, tum vero facto $x = a$ fiat $W = A$, $\mathfrak{W} = \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{V} = \mathfrak{B}$, quos valores in formula inuenta loco litterarum W, $\mathfrak{W}$ et $\mathfrak{V}$, vbi extra signum integrale occurrunt, ponere licebit.

Coroll. 2.

43. Ponatur ergo ad abbreuiandum:

$$N + (A - W)\mathfrak{N} + (A\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - A\mathfrak{W} + \mathfrak{V})\mathfrak{n} = (N)$$
$$P + (A - W)\mathfrak{P} + (A\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - A\mathfrak{W} + \mathfrak{V})\mathfrak{p} = (P)$$
$$Q + (A - W)\mathfrak{Q} + (A\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - A\mathfrak{W} + \mathfrak{V})\mathfrak{q} = (Q)$$
$$R + (A - W)\mathfrak{R} + (A\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - A\mathfrak{W} + \mathfrak{V})\mathfrak{r} = (R)$$

etc.

et variatio quaesita formulae $\int Z dx$ vsque ad valorem determinatum $x = a$ erit:

$$\int dx((N)\delta y + (P)\frac{d\delta y}{dx} + (Q)\frac{dd\delta y}{dx^2} + (R)\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.})$$

Coroll.

Coroll. 3.

44. Quodsi iam hic reductiones superiores adhibeantur, reperietur eadem variatio ita expressa:

$$\begin{aligned}\delta\int Z\,dx = \int dx\,\delta y\Big((N) - \tfrac{d(P)}{dx} + \tfrac{dd(Q)}{dx^2} - \tfrac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.}\Big)\\ + \delta y\Big((P) - \tfrac{d(Q)}{dx} + \tfrac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.}\Big)\\ + \tfrac{d\delta y}{dx}\Big((Q) - \tfrac{d(R)}{dx} + \text{etc.}\Big)\\ + \tfrac{dd\delta y}{dx^2}\Big((R) - \text{etc.}\Big)\end{aligned}$$

Coroll. 4.

45. Cum sit $\mathfrak{V} = \int W\,d\mathfrak{W}$, erit $A\mathfrak{W} - \mathfrak{V} = \int(A-W)\mathfrak{L}\,dx$; quare si ponatur integrale $\int(A-W)\mathfrak{L}\,dx = X$, ita sumtum, vt euanescat, posito $x = 0$, tum vero facto $x = a$, fiat $X = B$, ita vt sit:

$\int\mathfrak{L}\,dx = W$, et posito $x = a$, fiat $W = A$,
$\int(A-W)\mathfrak{L}\,dx = X$, et posito $x = a$, fiat $X = B$

superiores valores Coroll. 2. exhibiti ita se habebunt:

$$\begin{aligned}N + (A-W)\mathfrak{N} + (B-X)\mathfrak{n} &= (N)\\ P + (A-W)\mathfrak{P} + (B-X)\mathfrak{p} &= (P)\\ Q + (A-W)\mathfrak{Q} + (B-X)\mathfrak{q} &= (Q)\\ R + (A-W)\mathfrak{R} + (B-X)\mathfrak{r} &= (R)\end{aligned}$$

etc.

Problema 6.

46. Si in formula integrali $\Phi = \int Z\,dx$, quantitas Z praeter litteras x, y, p, q, r etc. etiam ipsam formulam integralem Φ inuoluat, determinare eius variationem $\delta\Phi = \delta\int Z\,dx$.

 Solutio.

Solutio.

Cum Z ſit functio quantitatum x, y, p, q, r etc. inſuperque ipſam formulam integralem $\Phi = \int Z dx$ involuat, differentietur more ſolito ac prodeat

$$dZ = L d\Phi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

Hinc igitur erit variatio ipſius Z ſcilicet:

$$\delta Z = L \delta \Phi + N \delta y + P \frac{d \delta y}{dx} + Q \frac{dd \delta y}{dx^2} + R \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

ideoque ob $\delta \Phi = \delta \int Z dx = \int \delta Z dx$

$$\delta \Phi = \int L dx \delta \Phi + \int dx \left(N \delta y + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{dd\delta y}{dx^2} + R \frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$

Ponamus $\delta \Phi = z$, cum ſit id ipſum quod quaeritur, et breuitatis gratia $\int dx \left(N dy + P \frac{d \delta y}{dx} + Q \frac{dd \delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) = u$, vt habeatur $z = \int L z dx + u$, et differentiando:

$$dz = L z dx + du, \text{ eritque integrando}$$

$$z = e^{\int L dx} \int e^{-\int L dx} du;$$

ſtatuatur breuitatis gratia $\int L dx = W$, et habebitur variatio quaeſita:

$$\delta \int Z dx = e^{W} \int e^{-W} dx \left(N \delta y + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right)$$

ſi deſideretur variatio vsque ad datum terminum $x = a$, fiatque tum $W = A$; ponatur ad abbreuiandum

$$e^{A-W} N = (N); \quad e^{A-W} P = (P); \quad e^{A-W} Q = (Q) \text{ etc.}$$

eritque reductionibus vt ſupra factis variatio:

$$\begin{aligned}\delta \int Z dx = \int dx \delta y \left((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ + \delta y \left((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\ + \frac{d\delta y}{dx} \left((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \text{etc.} \right) \\ + \frac{dd\delta y}{dx^2} \left((R) - \text{etc.} \right)\end{aligned}$$

Corol-

Corollarium.

47. Si ergo quantitas varianda Φ definiatur per hanc aequationem differentialem $d\Phi = Z dx$, in qua Z inuoluat vtcunque ipsam quantitatem Φ et insuper litteras x, y, p, q, r etc. eius variatio $\delta\Phi$ per hoc problema assignari poterit.

Problema 7.

48. Si in formula integrali $\Phi = \int Z dx$ quantitas Z praeter litteras x, y, p, q, r etc. non solum ipsam quantitatem Φ, sed insuper adhuc aliam formulam integralem $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ quomodocunque implicet, in qua autem quantitas $\mathfrak{Z}$ tantum per litteras x, y, p, q, r etc. detur; inuestigare variationem huius formulae $\delta\Phi = \delta\int Z dx = \int \delta Z dx$.

Solutio.

Cum Z sit functio quantitatum x, y, p, q, r etc. insuperque formularum $\Phi = \int Z dx$, et $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$, praebeat ea differentiando:

$$dZ = K d\Phi + L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + \text{etc.}$$

vnde eius variatio erit:

$$\delta Z = K\delta\Phi + L\delta\Pi + N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Porro autem cum $\mathfrak{Z}$ sit functio litterarum x, y, p, q, r etc. tantum ponatur:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{etc.}$$

eritque ob $\delta\Pi = \int\delta\mathfrak{Z} dx$

$$\delta\Pi = \int dx\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

Ponatur vt ante $\delta\Phi = z$ et $L\delta\Pi + N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} = u$; ob $\delta\Phi = \int\delta Z dx = z$ erit $\delta Z = \frac{dz}{dx}$ ideoque $\frac{dz}{dx} = Kz + u$; vnde oritur

$$z = e^{\int K dx}\int e^{-\int K dx} u\, dx = \delta\Phi$$

sit $\int K dx = V$, eritque

$$e^{-\int K dx} u\, dx = e^{-V}\mathfrak{L}\, dx \int dx\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ e^{-V} dx\left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$

statuatur porro $\int e^{-V} L dx = W$, eritque integrando variatio quaesita:

$$\delta\Phi = e^{V} W \int dx\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$
$$- e^{V}\int W dx\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ e^{V}\int e^{-V} dx\left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$

Si variatio vsque ad datum terminum $x = a$ desideretur, ac posito $x = a$, fiat $V = A$ et $W = B$, tum statuatur breuitatis gratia:

$$e^{A-V}N + e^{A}(B-W)\mathfrak{N} = (N)$$
$$e^{A-V}P + e^{A}(B-W)\mathfrak{P} = (P)$$
$$e^{A-V}Q + e^{A}(B-W)\mathfrak{Q} = (Q)$$
$$e^{A-V}R + e^{A}(B-W)\mathfrak{R} = (R)$$
$$\text{etc.}$$

quo facto erit variatio formulae $\Phi = \int Z dx$ vsque ad terminum $x = a$ extensa:

$$\delta\Phi = \int dx\,\delta y\left((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.}\right.$$
$$+ \delta y\left((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left((R) - \text{etc.}\right)$$

Corol-

Corollarium.

49. Sic ergo variatio definitur quantitatis Φ per aequationem differentialem $d\Phi = Z\,dx$ datae, in qua Z non solum praeter litteras x, y, p, q, r etc ipsam Φ, sed insuper formulam integralem $\int \mathfrak{z}\,dx = \Pi$ vtcunque inuoluit, dummodo $\mathfrak{z}$ per solas litteras x, y, p, q, r etc. determinetur.

Problema 8.

50. Si in formula integrali $\Phi = \int Z\,dx$ quantitas Z praeter litteras x, y, p, q, r etc. formulam integralem $\Pi = \int \mathfrak{z}\,dx$ inuoluat, hic autem quantitas $\mathfrak{z}$ praeter litteras x, y, p, q, r etc. ipsam formulam integralem $\Pi = \int \mathfrak{z}\,dx$ contineat, definire variationem formulae propositae $\Phi = \int Z\,dx$.

Solutio.

Cum Z sit functio quantitatum x, y, p, q, r etc. et ipsius $\Pi = \int \mathfrak{z}\,dx$, eius differentiale erit huiusmodi:
$$dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.}$$
hinc eius variatio erit
$$\delta Z = L\,\delta\Pi + N\,\delta y + P\frac{d\,\delta y}{dx} + Q\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$
ex quo ob $\delta\Phi = \int \delta Z\,dx$ habebitur:
$$\delta\Phi = \int L\,dx\,\delta\Pi + \int dx\left(N\,\delta y + P\frac{d\,\delta y}{dx} + Q\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$
At quia $\mathfrak{z}$ est functio ipsarum x, y, p, q, r etc. et $\Pi = \int \mathfrak{z}\,dx$, sit eius differentiale:
$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{L}\,d\Pi + \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq + \text{etc.}$$
eritque
$$\delta\mathfrak{z} = \frac{d\,\delta\Pi}{dx} = \mathfrak{L}\,\delta\Pi + \mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Ponatur

Ponatur $\int \mathfrak{L}\,dx = \mathfrak{W}$, eritque:

$$\delta\Pi = e^{\mathfrak{W}}\int e^{-\mathfrak{W}}dx\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$

Fiat $\int e^{\mathfrak{W}} L\,dx = W$ et obtinebitur:

$$\begin{aligned}\delta\Phi = {} & W\int e^{-\mathfrak{W}}dx\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)\\ & -\int e^{-\mathfrak{W}}W\,dx\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)\\ & +\int dx\left(N\,dy + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)\end{aligned}$$

Si hanc variationem ad terminum $x = a$ vsque extendi oporteat, ac posito $x = a$ fiat $W = A$, vocetur breuitatis gratia

$$\begin{aligned} N + e^{-\mathfrak{W}}(A-W)\mathfrak{N} &= (N)\\ P + e^{-\mathfrak{W}}(A-W)\mathfrak{P} &= (P)\\ Q + e^{-\mathfrak{W}}(A-W)\mathfrak{Q} &= (Q)\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

eritque reductiones supra expositas introducendo variatio formulae integralis $\Phi = \int Z\,dx$ ad terminum $x - a$ extensa:

$$\begin{aligned}\delta\int Z\,dx = {} & \int dx\,\delta y\left((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.}\right)\\ & + \delta y\left((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.}\right)\\ & + \frac{d\delta y}{dx}\left((Q) - \frac{(dR)}{dx} + \text{etc.}\right)\\ & \frac{dd\delta y}{dx^2}\left((R) - \text{etc.}\right)\end{aligned}$$

Scholion.

51. Vsus huius problematis cernitur in descensu corporum super lineis curuis in medio quocunque resistente, dum corpora a viribus quibuscunque sollicitantur, si variationem temporis descensus definire velimus, dum curua quomodocunque variatur. Denotet hoc casu

casu Φ tempus descensus per arcum, qui abscissae x respondeat, sitque applicata $=y$, et Π altitudo celeritati acquisitae debita; ac tempus descensus erit $\Phi=\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{\Pi}}$, posito $dy=pdx$, vt $dx\sqrt{(1+pp)}$ elementum arcus designet. Verum ex sollicitationibus erit:

$$d\Pi=Xdx+Ydy-V\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$

vbi X et Y significant functiones ipsarum x et y, et V functionem ipsius Π, cui resistentia est proportionalis. Erit ergo ob $dy=pdx$

$$\Pi=\int(X+Yp-V\sqrt{(1+pp)})dx$$

ideoque $\mathfrak{Z}=X+Yp-V\sqrt{(1+pp)}$, existente $Z=\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{\Pi}}$.

Corollarium.

52. Si ad similitudinem valorum (N), (P), (Q) ponatur:

$$M+e^{-\mathfrak{W}}(A-W)\mathfrak{M}=(M)$$

erit $(M)dx+(N)dy+(P)dp+(Q)dq+(R)dr+$ etc. differentiale verum huius formulae:

$$Z+e^{-\mathfrak{W}}(A-W)\mathfrak{Z}.$$

Conclusio.

53. Quaecunque ergo formula integralis $\Phi=\int Zdx$ proponatur, cuius variationem inuestigari oporteat, eius

variatio, vsque ad terminum $x=a$ extensa, semper exprimetur hoc modo:

$$\begin{aligned}\delta\Phi = \int dx\,\delta y\Big((N) - \tfrac{d(P)}{dx} + \tfrac{dd(Q)}{dx^2} - \tfrac{d^3(R)}{dx^3} + \tfrac{d^4(S)}{dx^4} - \text{etc.}\Big)\\ + \delta y\Big((P) - \tfrac{d(Q)}{dx} + \tfrac{dd(R)}{dx^2} - \tfrac{d^3(S)}{dx^3} + \text{etc.}\Big)\\ + \tfrac{d\delta y}{dx}\Big((Q) - \tfrac{d(R)}{dx} + \tfrac{dd(S)}{dx^2} - \text{etc.}\Big)\\ + \tfrac{dd\delta y}{dx^2}\Big((R) - \tfrac{d(S)}{dx} + \text{etc.}\Big)\\ + \tfrac{d^3\delta y}{dx^3}\Big((S) - \text{etc.}\Big)\end{aligned}$$

sumto elemento dx constante. Quemadmodum autem litterae (N), (P), (Q), (R), (S) etc. se habeant, id quouis casu patebit.

Casus I.

54. Si $dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds$ etc. erit

$$(N)=N;\ (P)=P;\ (Q)=Q;\ (R)=R;\ (S)=S \text{ etc.}$$

Casus II.

55. Si $dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$ existente $\Pi = \int \mathfrak{Z}\, dx$, et

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{etc.}$$

sit $\int L dx = W$, ac posito $x=a$, fiat $W=A$, quo facto erit:

$$\begin{aligned}&(N)=N+(A-W)\mathfrak{N}; \quad (P)=P+(A-W)\mathfrak{P}\\ &(Q)=Q+(A-W)\mathfrak{Q}; \quad (R)=R+(A-W)\mathfrak{R}\\ &(S)=S+(A-W)\mathfrak{S}; \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

Casus

Casus III.

56. Si fuerit

$$dZ = L\,d\Pi + L'\,d\Pi' + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.}$$

existente $\Pi = \int \mathfrak{Z}\,dx$ et $\Pi' = \int \mathfrak{Z}'\,dx$, tum vero:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq + \mathfrak{R}\,dr + \text{etc.}$$

$$d\mathfrak{Z}' = \mathfrak{M}'\,dx + \mathfrak{N}'\,dy + \mathfrak{P}'\,dp + \mathfrak{Q}'\,dq + \mathfrak{R}'\,dr + \text{etc.}$$

ponatur $\int L\,dx = W$, et $\int L'\,dx = W'$, ac facto $x = a$, fiat

$$W = A \text{ et } W' = A'$$

quo facto erit:

$$(N) = N + (A - W)\mathfrak{N} + (A' - W')\mathfrak{N}'$$

$$(P) = P + (A - W)\mathfrak{P} + (A' - W')\mathfrak{P}'$$

$$(Q) = Q + (A - W)\mathfrak{Q} + (A' - W')\mathfrak{Q}'$$

$$(R) = R + (A - W)\mathfrak{R} + (A' - W')\mathfrak{R}'$$

etc.

Casus IV.

57. Si Z contineat formulam integralem $\Pi = \int \mathfrak{Z}\,dx$, vt sit:

$$dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.}$$

quantitas $\mathfrak{Z}$ vero formulam integralem $\pi = \int \mathfrak{z}\,dx$, vt sit:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\,d\pi + \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq + \mathfrak{R}\,dr + \text{etc.}$$

at $\mathfrak{z}$ nullum porro integrale inuoluat, ita vt sit:

$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{m}\,dx + \mathfrak{n}\,dy + \mathfrak{p}\,dp + \mathfrak{q}\,dq + \mathfrak{r}\,dr + \text{etc.}$$

Ponatur $\int L\,dx = W$, et posito $x = a$, fiat $W = A$;

 tum

tum vero ponatur $\int(A-W)\mathfrak{L}dx=\mathfrak{W}$, casuque $x=a$ fiat $\mathfrak{W}=\mathfrak{A}$, quo facto erit:

$$(N)=N+(A-W)\mathfrak{N}+(\mathfrak{A}-\mathfrak{W})\mathfrak{n}$$
$$(P)=P+(A-W)\mathfrak{P}+(\mathfrak{A}-\mathfrak{W})\mathfrak{p}$$
$$(Q)=Q+(A-W)\mathfrak{Q}+(\mathfrak{A}-\mathfrak{W})\mathfrak{q}$$
$$(R)=R+(A-W)\mathfrak{R}+(\mathfrak{A}-\mathfrak{W})\mathfrak{r}$$

etc.

Casus V.

58. Si Z contineat ipsam formulam $\Phi=\int Zdx$, vt sit:

$$dZ=Kd\Phi+Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr+\text{etc.}$$

ponatur $\int Kdx=V$, et facto $x=a$, fit $V=C$, erit:

$$(N)=e^{C-V}N;\ (P)=e^{C-V}P;\ (Q)=e^{C-V}Q;\ (R)=e^{C-V}R \text{ etc.}$$

Casus VI.

59. Si Z praeter formulam $\Phi=\int Zdx$ contineat aliam formulam integralem $\Pi=\int\mathfrak{Z}dx$, sitque:

$$dZ=Kd\Phi+Ld\Pi+Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr+\text{etc.}$$

tum vero $\mathfrak{Z}$ nullam formulam integralem inuoluat:

$$d\mathfrak{Z}=\mathfrak{M}dx+\mathfrak{N}dy+\mathfrak{P}dp+\mathfrak{Q}dq+\mathfrak{R}dr+\text{etc.}$$

sit $\int Kdx=V$, et posito $x=a$, fiat $V=C$. Deinde sit $\int e^{C-V}Ldx=W$, et posito $x=a$, fiat $W=A$, eritque:

$$(N)=e^{C-V}N+(A-W)\mathfrak{N}$$
$$(P)=e^{C-V}P+(A-W)\mathfrak{P}$$
$$(Q)=e^{C-V}Q+(A-W)\mathfrak{Q}$$
$$(R)=e^{C-V}R+(A-W)\mathfrak{R}$$

etc.

Casus

Casus VII.

60. Si Z contineat formulam $\Pi = \int \mathfrak{Z}dx$, vt sit:
$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr +$ etc.
tum vero $\mathfrak{Z}$ denuo eandem formulam $\Pi = \int \mathfrak{Z}dx$ inuoluat, vt sit:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}d\Pi + \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr + \text{etc.}$$

Ponatur $\int \mathfrak{L}dx = \mathfrak{W}$, et posito $x = a$, fiat $\mathfrak{W} = \mathfrak{A}$; deinde ponatur $\int e^{-\mathfrak{A}+\mathfrak{W}} Ldx = W$, et posito $x = a$, fiat $W = A$, eritque

$$(N) = N + e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{W}}(A-W)\mathfrak{N}$$
$$(P) = P + e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{W}}(A-W)\mathfrak{P}$$
$$(Q) = Q + e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{W}}(A-W)\mathfrak{Q}$$
$$(R) = R + e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{W}}(A-W)\mathfrak{R}$$
etc.

61. Simili modo hanc inuestigationem ad alias formulas complicatas extendere licet, verum cum tales vix vnquam occurrere soleant, labor superfluus foret. Cum igitur formularum integralium tam simpliciorum, quam magis compositarum, variationes definire docuerim, calculus variationum fere penitus absolutus videtur; quomodocunque enim quantitas varianda fuerit, tam ex formulis absolutis, quam integralibus, conflata, ope differentiationis ordinariae eius variatio reperiri poterit. Veluti si quantitas varianda U contineat formulas integrales quascunque:

$$\Phi = \int Zdx;\ \Phi' = \int Z'dx;\ \Phi'' = \int Z''dx \text{ etc.}$$

differentietur ea more solito, prodeatque:

$$\delta U = Kd\Phi + K'd\Phi' + K''d\Phi'' \text{ etc.}$$

 tum

tum euidens eſt, fore eius variationem:

$$\delta U = K\delta\Phi + K'\delta\Phi' + K''\delta\Phi'' \text{ etc.}$$

at variationes $\delta\Phi$, $\delta\Phi'$, $\delta\Phi''$ etc. per praecepta modo expoſita aſſignabuntur. Simul vero patet, variationem δU ſemper huiusmodi forma expreſſum iri, vt ſit:

$$\delta V = \int (A)\, dx\,\delta y + (B)\delta y + (C)\frac{d\delta y}{dx} + (D)\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

vbi (A), (B), (C), etc. ſunt functiones ex regulis ſupra traditis inueniendae. Iſtius autem calculi variationum vſum in ſolutione celeberrimi problematis iſoperimetrici, latiſſima ſignificatione accepti, breuiter indicari conueniet.

Applicatio Calculi variationum ad ſolutionem problematis iſoperimetrici latiſſima ſignificatione accepti.

62. Problema primarium huc ſpectans ita enunciari poteſt, vt inter omnes curuas ſuper eadem data baſi $x = a$ extruendas, ea definiatur, pro qua formula quaepiam U maximum minimumue valorem obtineat. Etſi enim enunciatio problematis curuas tantum eiusdem longitudinis complectitur, tamen haec conditio commode, vt eius ambitus latius pateat, omittitur, neque etiam commemoratione vnicae formulae U, cuius valor maximus minimusue euadere debet, eius vis reſtringi eſt cenſenda; poſtquam in genere demonſtraui: ſi inter omnes curuas ſuper eadem baſi $x = a$ extruendas, pro quibus formula V eundem nanciſcatur valorem, definiri

niri debeat ea, in qua valor formulae U maximus euadat minimusue; quaestionem huc reduci, vt inter omnes plane curuas, super basi $x=a$ extruendas, ea definiatur, pro qua haec formula composita $\alpha V+\beta U$ consequatur maximum minimum ve valorem. Interim tamen et huius reductionis ratio ex ipsis calculi variationum principiis dilucide explicari potest.

63. Quaestio autem haec a consideratione linearum curuarum remota hoc modo proponi potest:

Proposita formula quacunque U *definire eam relationem inter binas variabiles* x *et* y, *per quam si valor ipsius* U *determinetur, atque a valore* $x=o$ *vsque ad valorem* $x=a$ *extendatur, is prodirurus sit siue maximus siue minimus.*

Spectemus ergo relationem inter x et y tanquam iam inuentam, ita vt inde oriatur valor ipsius U maximus vel minimus; atque manifestum est, si relatio inter x et y infinite parum immutetur, nullam inde mutationem in valore ipsius U nasci debere; seu quod eodem redit variationem ipsius U seu δU nihilo aequalem esse oportere; sicque aequatio $\delta U=o$ relationem quaesitam inter x et y complectetur.

64. Variationem autem δU inde definire docuimus, quod pro quouis valore ipsius x valorem ipsius y, qui ipsi vi relationis quaesitae competeret, particula quapiam δy augeri assumsimus. Cum igitur relatio quaesita inter omnes plane possibiles hac praerogatiua gaudere debeat, variatio δU semper esse debet nihilo aequalis, quomodocunque singuli valores ipsius y tali-

bus

bus particulis δy augeantur; et quomodocunque haec augmenta fuerint comparata, quoniam prorſus ſunt arbitraria, neque vllo modo a ſe inuicem pendentia. Neque etiam opus eſt, vt omnibus valoribus ipſius y huiusmodi variationes tribuantur, ſed ſiue vnicus quispiam, ſiue duo, ſiue quotcunque pro lubitu varientur, ſemper aeque neceſſe eſt, vt variatio, quae inde in totum valorem ipſius U, quatenus is a termino $x = o$ vsque ad terminum $x = a$ extenditur, redundat, in nihilum abeat.

65. Ex iis autem, quae ſupra ſunt tradita, manifeſtum eſt, variationem ipſius U ſemper hoc modo exprimi, vt ſit:

$$\delta U = \int (A) dx \delta y + (B) \delta y + (C) \frac{d \delta y}{dx} + (D) \frac{dd \delta y}{dx^2} \text{ etc.}$$

cuius formae ſingulas partes ſeorſim conſiderari conuenit. At praeter primum membrum integrale reliquae partes $(B) \delta y$, $(C) \frac{d \delta y}{dx}$ etc. tantum a variatione vltimi valoris y, qui valori $x = a$ conuenit, pendent, neque rationem variationis praecedentium implicant; vt enim tota variatio ipſius U obtineatur, in expreſſione inuenta vbique ſtatui debet $x = a$, quod in ſingulis partibus praeter primam actu fieri poteſt, ſicque in iis δy denotabit variationem, quae ſoli vltimo valori ipſius y tribuitur, et quae omnino eſt arbitraria, neque a praecedentibus pendet. Vnde perſpicuum eſt, niſi membrum integrale adeſſet, ex reliquis partibus nihil plane pro relatione inter x et y concludi poſſe.

66. Verum membrum integrale $\int (A) dx \delta y$ etiam variationes, quae omnibus praecedentibus valoribus ipſius y tribuun-

tribuuntur inuoluit, dum continet summam omnium elementorum $(A)dx\delta y$ ex variatione singulorum valorum y oriundorum. Ita si vnicus eius valor ipsi x quasi determinatum valorem haberet, spectato respondens varietur, seu particula δy augeatur, membrum illud integrale tantum esset $=(A)dx\delta y$, nihilque summandum haberetur; sin autem insuper sequens valor y' ipsi $x+dx$ respondens, particula $\delta y'$ augeatur, positoque $x+dx$, loco x functio (A) abeat in $(A)'$ membrum integrale constabit his duabus partibus:

$$(A)\,dx\,\delta y + (A)'\,dx\,\delta y'$$

Simili modo si tres pluresue valores successiui y, y', y'', y''', y^{IV} etc. particulis δy, $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$ etc. augeantur, membrum integrale aequiualebit huic expressioni:

$$(A)dx\delta y+(A)'dx\delta y'+(A)''dx\delta y''+(A)'''dx\delta y'''+\text{etc.}$$

quae series tam retrorsum vsque ad terminum $x=0$, quam antrorsum vsque ad terminum $x=a$, continuata concipi potest.

67. Etsi igitur variatio δU ad terminum determinatum $x=a$ adstringitur, tamen ob membrum integrale omnes variationes intermedias complectitur; vnde si pro reliquis partibus absolutis, quae tantum ad terminum vltimum $x=a$ referuntur, breuitatis gratia scribamus I, variatio δU ita erit expressa, vt sit:

$$\delta U=(A)dx\delta y+(A)'dx\delta y'+(A)''dx\delta y''+(A)'''dx\delta y''' + \text{etc.} + I$$

quae, vt problemati satisfiat, nihilo aequari debet. Cum autem variationes δy, $\delta y'$, $\delta y''$ etc. non a se inuicem pendeant, sed singulae mere sint arbitrariae, illa annihilatio locum habere nequit, nisi singulae partes sigillatim euanescant; ex quo necesse est, vt sit:

$$(A)=o, \; (A)'=o, \; (A)''=o, \; (A)'''=o, \text{ etc.}$$

quae aequatiunculae omnes in hac vna indefinita $(A)=o$ continentur, seu quicunque valor ipsi x tribuatur, perpetuo esse oportet $(A)=o$, hacque aequatione relatio quaesita inter x et y continetur.

68. En igitur solutionem facilem problematis propositi, quo ea relatio inter x et y requiritur, ex qua pro formula praescripta U, postquam eius valor a termino $x=o$ vsque ad $x=a$ fuerit extensus, maximus minimusue valor resultet. Quaeratur scilicet variatio formulae U pariter a termino $x=o$ vsque ad $x=a$ extensa, quae per praecepta supra tradita huiusmodi formam habere debet:

$$\delta U=\int (A)\, dx\, \delta y+(B)\, \delta y+(C)\frac{d\delta y}{dx}+(D)\frac{dd\delta y}{dx^2}+\text{etc.}$$

hincque ex solo membro integrali $\int (A)\, dx\, \delta y$ relatio inter x et y quaesita ita definietur, vt sit $(A)=o$, reliquae autem partes, quia vltimum tantum valorem ipsius y afficiunt, nihil conferunt ad relationem indefinitam inter x et y, quae desideratur.

69. Istae tamen partes posteriores relationi inventae magis determinandae inseruire possunt; eatenus enim tantum huiusmodi partes accedunt, quatenus in membro integrali $\int (A)\, dx\, \delta y$ functio (A) differentialium rationem $\frac{dy}{dx}=p$, vel etiam rationes differentialium superiorum, nempe $q=\frac{dp}{dx}$; $r=\frac{dq}{dx}$ etc. inuoluit. Quando autem hoc vsu venit, aequatio $(A)=o$ erit differentia-

rentialis vel primi vel etiam altioris gradus; ficque relatio quaefita inter x et y poft vnam pluresue demum integrationes reperitur. Cum autem quaelibet integratio quantitatem conftantem arbitrariam inuehat, hoc modo ad aequationem finitam vagam peruenietur, atque nunc noua quaeftio exiftet, quomodo has conftantes arbitrarias determinari oporteat, vt valor ipfius U omnium maximus minimusue prodeat. Cum enim quaelibet illarum conftantium determinatio iam per fe maximi minimiue proprietate fit praedita, hic porro vel maximum maximorum vel minimum minimorum inueftigandum relinquitur.

70. Ad hoc igitur nouum problema acceſſorium refoluendum partes illae a figno integrali immunes adhiberi poterunt. Conftantes fcilicet per integrationes inuectas ita determinari conueniet, vt pofito $x = a$ coefficientes ipfarum δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{dd\delta y}{dx^2}$ etc. finguli feorfim euanefcant, fiue vt hoc cafu fatisfiat his conditionibus:

$$(B) = 0;\ (C) = 0;\ (D) = 0 \text{ etc.}$$

Deinde quia ambos terminos $x = 0$, et $x = a$, inter fe permutare licet, etiam, pofito $x = 0$, efficiendum erit, vt fiat $(B) = 0$, $(C) = 0$, $(D) = 0$ etc. Etfi enim partes, quae hoc exigant, in noftra expreſſione non continentur, tamen eae in membro integrali contineri funt cenfendae.

71. Ex iisdem principiis etiam problemata, quae ad methodum relatiuam retuli, folui poſſunt; haec autem problemata ita generaliter enunciare licet:

Inter omnes relationes, quibus y per x definitur, quae hac communi gaudent proprietate, vt pro formula U posito $x = a$ eundem valorem exhibeant, determinare eam relationem, ex qua formula U, siquidem a termino $x = o$ vsque ad terminum $x = a$ extendatur, maximum vel minimum consequatur valorem.

Hic igitur variationes, quae singulis valoribus ipsius y tribuuntur, non omnes sunt arbitrariae, sed ita statuendae sunt, vt fiat $\delta\mathfrak{U} = o$, si quidem eius valor a termino $x = o$ vsque ad $x = a$ extendatur. Tum vero etiam natura maximi minimiue postulat, vt secundum eandem extensionem sit, vt ante, $\delta U = o$.

72. Per methodum ergo ante expositam tam formulae $\mathfrak{U}$, quae debet esse communis, quam formulae U, quae maxima fieri debet vel minima, quaeratur variatio a termino $x = o$ vsque ad terminum $x = a$ extendenda; atque relatio quaesita inter x et y ex coniunctione harum duarum aequationum $\delta\mathfrak{U} = o$ et $\delta U = o$ erit inuestiganda. At hae variationes ita expressae reperientur:

$$\delta\mathfrak{U} = \int (\mathfrak{A})\, dx\, \delta y + (\mathfrak{B})\, \delta y + (\mathfrak{C}) \frac{d\delta y}{dx} + (\mathfrak{D}) \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

$$\delta U = \int (A)\, dx\, \delta y + (B)\, \delta y + (C) \frac{d\delta y}{dx} + (D) \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

vbi de membris a signo integrali liberis eadem sunt tenenda, quae supra iam obseruaui; ideoque relationem inter x et y quaesitam tantum ex membris integralibus deriuari oportebit.

73.

73. Hinc itaque binas ſequentes conſequemur aequationes:

$$(\mathfrak{A})\delta y + (\mathfrak{A})'\delta y' + (\mathfrak{A})''\delta y'' + (\mathfrak{A})'''\delta y''' + \text{etc.} = 0$$
$$(A)\delta y + (A)'\delta y' + (A)''\delta y'' + (A)'''\delta y''' + \text{etc.} = 0$$

quarum priore aſſumtio variationum δy, $\delta y'$, $\delta y''$ etc. conditioni communi praeſcriptae conueniens definitur, quae deinde in alteram introducta relationem quaeſitam manifeſtabit. Omnes ergo variationes δy, $\delta y'$, $\delta y''$ etc. praeter vnam, vt arbitrariae, ſpectari poſſunt, quippe quae vna ex priori aequatione eſt definienda. Iam vero euidens eſt, poſtquam vna ita fuerit ſumta, vt priori aequationi ſatisfiat, tum ſimul alteri ſatisfactum iri, ſi ſtatuatur $(A) = n(\mathfrak{A})$, ſumendo pro n quantitatem quamcunque conſtantem.

74. Problema igitur propoſitum hac reſoluetur aequatione:

$$\alpha(A) + \beta(\mathfrak{A}) = 0$$

ſumtis pro α et β quantitatibus quibusuis conſtantibus. Eadem autem ſolutio prodiiſſet, ſi inter omnes omnino relationes inter x et y ea exquiri debuiſſet, vnde formula $\alpha U + \beta \mathfrak{U}$ maximum minimum ve valorem impetraret; ex quo ſimul intelligitur, binas formulas $\mathfrak{U}$ et U propoſitas inter ſe permutari poſſe, eaque omnia, quae in Tractatu meo annotaui hinc multo magis fiunt perſpicua. Simili enim modo res ſe habebit, ſi non vna formula $\mathfrak{U}$ ſed plures debeant eſſe communes; ſicque ſtabilito *Calculo variationum* omnia huius generis problemata facillime et breuiſſime expediuntur.

ANALYTICA EXPLICATIO METHODI MAXIMORVM ET MINIMORVM.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Quae vulgo in elementis de methodo maximorum et minimorum tradi solent, ea in functionibus vnius cuiuspiam quantitatis variabilis potissimum consumuntur, ita vt proposita functione quacunque V, quae vtcunque ex quantitate variabili z et constantibus fuerit composita, eas variabilis z determinationes inuestigari oporteat, quae functioni V maximum minimumue valorem inducant. Interdum etiam functiones duarum plurium ve variabilium z, y, x considerantur valoresque iis singulis assignandi quaeruntur, quibus functio maximum vel minimum valorem consequatur. Methodus autem, qua huius posterioris generis quaestiones resoluuntur, prorsus conuenit cum ea, quae in genere priori adhibetur; si enim plures implicentur variabiles successiue vnica tanquam variabilis spectatur, eiusque valor pro maximo minimo ve producendo idoneus indagatur; quae operatio, si per singulas variabiles fuerit instituta, omnium valores innotescunt; quibus valor functionis propositae vel maximus vel minimus reddatur.

II.

II.

Haud aliter res se habet, si proponatur functio duarum variabilium x et y, quaeraturque valor ipsi y tribuendus, vt, cum pro x data quantitas a fuerit posita, ipsa functio maximum minimumue valorem impetret: statim enim vbique pro x scribatur a, et quaestio manifesto ad primum genus erit reducta. Verum si illa functio variabilium x et y non fuerit euoluta, sed per integrationem determinetur, quaestiones ad genus omnino diuersum erunt referendae, methodumque soluendi longe diuersam requirunt. Veluti si Z fuerit functio quaecunque ipsarum x et y, ac proponatur formula integralis $\int Z\,dx$, quaestionem ita enunciari conueniet: *Definire relationem inter binas variabiles* x *et* y, *vt valor istius formulae, postquam posuerimus* $a = x$, *fiat omnium maximus vel minimus.*

III.

Quantum inter huiusmodi quaestiones et eas, quas ad prius genus retuli, intersit, ad sequentia momenta vel leuiter attendenti mox patebit. Sit enim V functio euoluta ipsarum x et y, pro qua inuestigari debeat valor ipsius y, vt posito $x = a$ valor functionis V euadat maximus minimus ve; atque ad hanc quaestionem soluendam statim poni potest $x = a$, quo facto valor ipsius y per methodum priorem ita determinabitur, vt non pendeat a valore indefinito ipsius x. At proposita formula integrali $\int Z\,dx$, non in formula differentiali $Z\,dx$, sed demum post integrationem ipsi x valorem illum determinatum a tribuere licet; neque vt

tum

tum formulae $\int Z dx$ valor euadat maximus minimusue. Valor quidam determinatus pro y sumendus negotium conficit, sed relatio quaedam inter x et y assignari debet; propterea quod etiam si post integrationem ponatur $x = a$, tamen valor integralis $\int Z dx$ a relatione indefinita, quae inter z et y intercedit, pendeat, et per omnes valores medios ipsius y determinetur.

IV.

Verum tales quaestiones circa formulam $\int Z dx$ maximam minimam ve reddendam multo latius patent, neque tantum ad casus, quibus Z est functio ipsarum x et y, restringuntur, sed pro Z assumi potest expressio quaecunque, quae relatione quapiam inter x et y assumta determinetur. Hinc Z inuoluere poterit praeter ipsas variabiles x et y etiam relationem differentialium earum, neque solum primi ordinis, sed etiam altiorum ordinum quorumcunque; scilicet si hae differentialium rationes ita exprimantur, vt sit $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{dp}{dx} = q$; $\frac{dq}{dx} = r$ etc. quantitas Z spectari poterit vt functio quaecunque omnium harum x, y, p, q, r etc. Quin etiam quantitas Z praeterea in se complecti potest nouas formulas integrales vtcunque in ea inuolutas; vnde plura genera huiusmodi quaestionum nascuntur, ad quae methodus soluendi accommodari debet.

V.

Huiusmodi problemata primum occasione famosi illius Problematis Isoperimetrici, a *Iacobo Bernoullio* olim in summum Analyseos incrementum agitati, tractari sunt coepta, quod arduum negotium etsi mira sagaci-

ſagacitate a Viro illo acutiſſimo eſt expeditum, tamen methodus ab eo adhibita tantum ad caſus, quibus quantitas Z praeter x et y ſolum earum differentialia prima ſeu litteram p inuoluebat, extendebatur, et quouis caſu ſingulari quaſi ex conſiderationibus geometricis repeti debebat. Poſtquam autem in vberiori huius argumenti enodatione diu deſudaſſem, methodum tandem maxime generalem ſum adeptus, cuius ope omnia huiusmodi problemata, quibus quantitas Z non ſolum differentialia cuiusque ordinis ſed etiam formulas integrales quascunque in ſe contineret, reſolui poſſunt, quam methodum libro ſingulari ample ſum perſecutus.

CVI.

Etſi autem haec methodus ita eſt comparata, vt eius applicatio nullas figuras geometricas requirat, tamen ipſa iſtius methodi inueſtigatio ex contemplatione linearum curuarum eſt petita, quam ob cauſam mihi etiam tum non ſatis naturalis eſt viſa. Cum enim haec quaeſtio, qua relatio inter x et y quaeritur, vt formula integralis $\int Z\,dx$, poſito poſt integrationem $x = a$, maximum minimum ve valorem obtineat, ſine vllo reſpectu ad geometriam proponi poſſit, ſolutio etiam adaequata et ex veris principiis deducta ab omni geometrica conſideratione immunis eſſe debere videtur. Quod deſiderium cum in meo tractatu non obſcure eſſem teſtatus, Vir quidam Clariſſimus et in arte Analytica verſatiſſimus, *de la Grange Tournier*, litteris Taurini ad me datis nunciauit, ſe huius voti compotem eſſe factum, ſimulque fundamenta ſuae Ana-

 lyſeos

lyſeos mecum beneuole communicauit. Quae cum plurimum in receſſu habere videantur, meo more explicanda et vberius excolenda ſtatui.

VII.

Conſideremus igitur in genere formulam integralem $\int Z\,dx$, in qua ſit Z functio vtcunque per x et y compoſita, quae etiam rationem differentialium non ſolum primi ſed etiam ſuperiorum ordinum inuoluat, ac praeterea quoque vnam plures ve formulas integrales complectatur. Pro eius autem determinatione aſſumamus integrale ita capi, vt euaneſcat poſito $x = 0$; tum vero poſt integrationem tribuamus ipſi x valorem quendam datum $x = a$, ſitque A valor, quem formula integralis tum recipit. Iam quaeſtio in hoc verſatur, vt definiri debeat ea relatio inter x et y, ex qua per iſtas operationes maximus vel minimus valor pro A obtineatur. Hanc igitur relationem inter x et y, quae quaeſito ſatisfaciat, aequatione quadam ſiue finita ſiue differentiali cuiuscunque ordinis exprimi oportet, quae ſimulac fuerit inuenta, problema pro ſoluto erit habendum.

VIII.

Ponamus, vti in Analyſi fieri ſolet, hanc relationem inter x et y, quae quaeritur, iam conſtare, ita vt quicunque valor definitus pro x aſſumatur, inde y quoque, ac proinde etiam functio Z, valorem determinatum adipiſcatur. Concipiantur hoc modo ſucceſſiue pro x omnes poſſibiles valores a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = a$ ſubſtitui, qui interuallis infinite

paruis

paruis dx progrediantur; tum vero valores ipſius Z, qui his ſingulis valoribus ipſius x reſpondent, per dx multiplicari; haecque omnia producta in vnam ſummam collecta eam quantitatem, quam littera A indicauimus, conſtituent, quae maxima vel minima eſſe debet. Quod ita eſt intelligendum, vt, ſi ex alia relatione inter x et y quacunque ſingulis valoribus ipſius x alii valores ipſi y hincque ipſi Z conueniant, ex iis pro A, ſi fuerit maximum, valor certe minor, ſin autem fuerit minimum, certe maior ſit proditurus, quam ſi iuſta relatio inter x et y fuiſſet adhibita.

IX.

Quod ſi autem hae variationes, quae ſingulis valoribus ipſius y inducuntur, infinite paruae concipiantur, tum per indolem maximorum et minimorum inde nulla mutatio in quantitatem A redundare debet; atque ex hoc ipſo fonte determinatio maximorum et minimorum peti ſolet. Cum ſcilicet valoribus ipſius y pro arbitrio variationes infinite paruas tribuerimus, mutatio, quae inde in valoribus omnibus ipſius $Z\,dx$, ac proinde in eorum ſumma tota A oritur, calculo colligi debet, quae deinceps nihilo aequalis poſita praebebit aequationem, in qua natura maximi minimi ve, ideoque quaeſita relatio inter x et y continebitur. Hac igitur operatione methodus huiusmodi maxima vel minima inueſtigandi abſoluitur, quae idcirco iisdem principiis atque vulgaris methodus maximorum ac minimorum innititur; quae, quomodo per ſola Analyſeos praecepta, ſine vllis ex Geometria petitis ſubſidiis, inſtitui poſſit,

 accuratius

accuratius perpendamus, quandoquidem hoc idem negotium principiis geometricis innixus iam satis prospero successu sum executus.

X.

Cum igitur variationes infinite paruae singulis valoribus ipsius y inductae nullam mutationem in valore quantitatis A producere debeant, hocque fieri oporteat, vtcunque illae variationes accipiantur, dummodo fuerint infinite paruae; sufficiet in vnico tantum quodam valore ipsius y huiusmodi variationem concipere, et mutationem, quae inde in quantitate A oritur, euanescentem reddere, ex quo fonte etiam vniuersa mea methodus maximorum et minimorum est petita. Verum etiamsi pluribus valoribus ipsius y, quin etiam plane omnibus, huiusmodi variationes infinite paruae quaecunque inducantur, nihilominus natura maximorum et minimorum exigit, vt mutatio, quam quantitas A inde adipiscitur, ad nihilum redigatur, atque hoc vsu venire debet, vtcunque illae variationes, quippe quae omnes mere sunt arbitrariae, assumantur.

XI.

Sed quoniam in mea praecedente solutione vnicum quendam valorem ipsius y variationem infinite paruam accipere posui, dum reliqui omnes immutati manerent, in hoc principium continuitatis vim patiebatur, haecque praecipua erat causa, quod tota inuestigatio per sola Analyseos praecepta expediri nequiuerit, sed contemplatio figurae geometricae, in qua valores ipsius y per applicatas lineae curuae repraesentarentur, in in subsidium vocari debuerit, quo inde variationes, quas ratio differentialium cuiusque ordinis subiret, commodius elici possent. Quam ob rem ne nimis principio continuitatis aduersemur, quo applicatio praeceptorum mere Analyticorum impediebatur, singulis valoribus ipsius y variationes infinite paruas tribuamus, quae tamen ita sint indefinitae, vt singulae deinceps ad libitum determinari, atque adeo omnes praeter vnam ad nihilum redigi possint, quo pacto ad solutiones meas priores deuoluamur necesse est.

XII.

Cum autem nunc non solum vni valori ipsius y, sed innumerabilibus, quin plane omnibus, variationes infinite paruas quidem, sed tamen arbitrarias, tribuimus, dubium est nullum, quin haec methodus multo latius pateat, quam praecedens, atque ad solutionem plurium aliorum problematum manuducat, ad quae prior methodus vel difficilius vel etiam frustra adhiberetur. Si enim illae variationes certo quodam modo determinentur, quaestione ad Geometriam translata huiusmodi problemata resolui poterunt, in quibus non inter omnes plane lineas curuas, sed tantum eas numero quidem infinitas, quae sub certa quadam specie comprehenduntur, ea debeat assignari, quae maximi minimi ve cuiuspiam proprietate sit praedita. Tales autem quaestiones plerumque plurimum difficultatis implicare deprehenduntur; verum praeterea hinc adhuc plura incrementa in Analysi merito expectare licet.

XIII.

Cum igitur hic ſingulis valoribus ipſius y variationes infinite paruas tribuamus, duplicem ſtatum formulae $\int Z\,dx$ conſideramus, in quorum altero ſinguli valores ipſius y ſint ii ipſi, quos quaeſita relatio inter x et y requirit, in altero autem iidem valores variati contineantur; priorem ſtatum diſtinctionis cauſa *principalem*, alterum vero *ſtatum variatum* appellabo. Natura ergo maximorum et minimorum poſtulat, vt differentia inter hos duos ſtatus euaneſcat. Quemadmodum igitur in ſtatu principali valor ipſius y quicunque, dum variabilis x differentiali dx creſcere ſumitur, incrementum dy capere cenſetur, ita manente x, dum a ſtatu principali ad ſtatum variatum progredimur, valorem ipſius y elemento δy augeri ſtatuamus; vnde diſcrimen inter has duas expreſſiones differentiales dy et δy probe notetur. Dum autem ſingulis valoribus ipſius y, tranſitu ad ſtatum variatum facto, huiusmodi incrementa δy tribuimus, ea tanquam plane indeterminata, neque vllo modo ab ipſis valoribus ipſius y pendentia, ſunt ſpectanda.

XIV.

His poſitis indagari debet, quantum incrementum quaecunque functio Z pro quolibet valore ipſius x, dum a ſtatu principali ad variatum transfertur, capiat; quod incrementum a ſola variatione ipſius y, quatenus hac translatione elemento δy augetur, proficiſcitur. Indicemus hoc incrementum per δZ, ita vt valor ipſius Z a ſtatu principali ad variatum translatus ſit $= Z + \delta Z$; ac primo ſtatim patet, ſi functio Z a ſola variabili

variabili x penderet, neque alteram y implicaret, fore $\delta Z = o$; neque igitur variabilis x, vtcunque ea in formationem functionis Z ingrediatur, quicquam ad δZ conferet, sed eius valor a solo elemento δy, quo variabilis y crescere concipitur, resultat. Hic autem prout Z vel solas quantitates finitas x et y, vel etiam earum differentialium rationem, vel adeo formulas integrales inuoluit, ita diuersi casus erunt examinandi.

XV.

Ponamus ergo primo, functionem Z tantum ipsas quantitates finitas x et y inuoluere, ita vt neque ratio differentialium, neque vllae formulae integrales, in eam ingrediantur, atque ad eius variationem δZ definiendam, in functione Z vbique loco y scribi oportet $y + \delta y$, relicto x inuariato, sicque prodibit valor variatus $Z + \delta Z$, a quo si principalis Z subtrahatur, remanebit variatio δZ. Manifestum ergo est, hanc variationem obtineri, si functio Z more solito differentietur, posita sola y variabili, dummodo pro dy scribatur δy. Quare si differentiatione more solito instituta, sumta vtraque quantitate x et y variabili, fuerit $dZ = Mdx + Ndy$, erit pro translatione a statu principali ad variatum $\delta Z = N\delta y$; haec ergo variatio reperitur, si in differentiali ordinario pro dx scribatur o, pro dy autem δy; hocque modo casum primum facillime expediuimus.

XVI.

Videamus autem porro, quomodo pro hoc casu primo, quo Z est functio ipsarum x et y tantum, formulae integralis $\int Z dx$ valor maximus vel minimus inueniri queat. Cum igitur pro quouis valore ipsius x functio Z crescat elemento $N\delta y$, ideoque $Z dx$ particula

ticula $N\,dx\,\delta y$; summa omnium harum particularum a termino $x = o$ vsque ad $x = a$ dabit variationem ipsius A, quae si ponatur δA, erit $\delta A = \int N\,dx\,\delta y$; quae expressio cum debeat euanescere, quamcunque legem variationes δy teneant, necesse est, vt pro singulis valoribus ipsius x sit $N = o$. Haec ergo aequatio exprimit relationem inter x et y quaesitam, ex qua formula $\int Z\,dx$ adipiscitur valorem vel maximum vel minimum: neque haec proprietas tantum locum habebit casu praescripto $x = a$, sed etiam quicunque alius valor ipsi x tribuatur.

XVII.

Complectatur secundo functio Z praeter x et y etiam rationem differentialium primorum, seu posito $\frac{dy}{dx} = p$, sit Z functio quaecunque quantitatum x, y et p, qua more solito differentiata prodeat $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$. Hinc igitur quaeri debet variatio ipsius Z, dum a statu principali in statum variatum transfertur, qua translatione quantitas x manet eadem, y vero augetur elemento δy, elementum autem, quo quantitas p crescit, sit δp. Cum autem sit $p = \frac{dy}{dx}$, si in statu principali valorem ipsius y, qui ipsi $x + dx$ respondet, per y' indicemus, erit $p = \frac{y' - y}{dx}$; crescat iam in translatione in situm variatum y elemento δy, et y' elemento $\delta y'$, eritque $\delta p = \frac{\delta y' - \delta y}{dx}$. At $\delta y' - \delta y$ exprimit incrementum ipsius δy, dum x crescit differentiali dx, ita vt sit $\delta y' - \delta y = d\delta y$: tum vero etiam $\delta y' - \delta y$ spectari potest vt variatio ipsius $y' - y = dy$, dum in statum variatum progredimur, sicque erit quoque $\delta y' - \delta y = \delta\,dy$; vnde perficitur, esse $d\delta y = \delta\,dy$, ideoque $\delta p = \frac{d\delta y}{dx} = \frac{\delta\,dy}{dx}$.

XVIII.

XVIII.

Simili autem modo, si Z praeter x et y etiam differentialia superiorum ordinum inuoluat, vt positis $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$ etc. sit Z functio quaecunque quantitatum x, y, p, q, r etc. et more solito differentiando $dZ=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr$ etc. incrementa quantitatum q, r etc. dum a statu principali in variatum transferuntur, determinantur. Nam ob $q=\frac{dp}{dx}$ erit $\delta q=\frac{\delta p'-\delta p}{dx}=\frac{d\delta p}{dx}=\frac{\delta dp}{dx}$; pariterque $\delta r=\frac{d\delta q}{dx}=\frac{\delta dq}{dx}$ etc. Verum ex superioribus est $d\delta p=\frac{dd\delta y}{dx}=\frac{d\delta dy}{dx}$, et $\delta dp=\frac{\delta ddy}{dx}$, ita vt sit:

$$\delta q=\frac{dd\delta y}{dx^2}=\frac{d\delta dy}{dx^2}=\frac{\delta ddy}{dx^2}$$

eodem vero modo perspicitur fore:

$$\delta r=\frac{ddd\delta y}{dx^3}=\frac{dd\delta dy}{dx^3}=\frac{d\delta ddy}{dx^3}=\frac{\delta dddy}{dx^3}$$

quarum formularum specie diuersarum aequalitas probe est tenenda.

XIX.

Dum igitur functio Z ex statu principali in variatum transit, quia quantitas x incrementum nullum capit, y vero incrementum δy, tum quantitas p incrementum $\frac{d\delta y}{dx}$, quantitas q incrementum $\frac{dd\delta y}{dx^2}$, quantitas r incrementum $\frac{ddd\delta y}{dx^3}$ etc. ipsius functionis Z incrementum huic translationi conueniens reperietur per ordinariam differentiationem, ponendo $dx=0$, $dy=\delta y$, $dp=\frac{d\delta y}{dx}$, $dq=\frac{dd\delta y}{dx^2}$, $dr=\frac{ddd\delta y}{dx^3}$ etc. vnde id erit:

$$\delta Z=N\delta y+P\frac{d\delta y}{dx}+Q\frac{dd\delta y}{dx^2}+R\frac{ddd\delta y}{dx^3}+\text{etc.}$$

Hincque ergo variatio functionis Z pro quouis ipsius x valore definiri poterit; quae forma adhuc magis illustrabitur, si, quemadmodum est $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr$ etc. obseruetur, esse oportere, ob $\delta x = 0$,

$$\delta Z = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}$$

tum vero esse, ob $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$ etc.

$$\delta p = \frac{\delta dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx};\ \delta q = \frac{\delta dp}{dx} = \frac{d\delta p}{dx} = \frac{dd\delta y}{dx^2};\ \delta r = \frac{ddd\delta y}{dx^3}.$$

XX.

Cum ergo translatione in statum variatum functio Z incrementum capiat δZ, ipsa formula $\int Z\,dx$ incrementum nanciscetur $\int \delta Z.dx$, quod itaque erit:

$$\int dx\left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + R\frac{ddd\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

in quo, si post integrationem ponatur $x = a$, obtinebitur variatio ipsius A, seu δA, quae nihilo aequalis posita inducet quantitati A valorem maximum seu minimum. In hac autem integratione non amplius ad transitum in statum variatum respicitur, sed ea per omnia incrementa ipsius x extendi debet, cum denotet summam omnium variationum singulis valoribus ipsius x a termino $x = 0$ vsque ad $x = a$ conuenientium. Ne igitur ratio differentialium per δ indicatorum turbet, pro δy scribatur ω, ita vt ω exhibeat quantitatem infinite paruam arbitrariam vtcunque ab x pendentem; ac superius incrementum nihilo aequandum erit:

$$\int dx\left(N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{dd\omega}{dx^2} + R\frac{d^3\omega}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

XXI.

Perspicuum est, in his differentialibus superioribus elementum dx assumi constans; quia enim posuimus

mus $\frac{d\delta p}{dx}$, seu $d.\frac{\delta p}{dx} = \frac{dd\delta y}{dx^2}$, ob $\delta p = \frac{d\delta y}{dx}$, aperte dx constans est assumtum. Hoc ergo obseruato, si singulas partes integralis inuenti seorsim integremus, habebimus:

$$\int dx. N\omega = \int N\omega dx$$

$$\int dx. P\frac{d\omega}{dx} = \int P d\omega = P\omega - \int \omega dP$$

$$\int dx. Q\frac{dd\omega}{dx^2} = \int \frac{Q dd\omega}{dx} = \frac{Q d\omega}{dx} - \frac{\omega dQ}{dx} + \int \frac{\omega ddQ}{dx}$$

$$\int dx. R\frac{d^3\omega}{dx^3} = \int \frac{R d^3\omega}{dx^2} = \frac{R dd\omega}{dx^2} - \frac{dR d\omega}{dx^2} + \frac{\omega ddR}{dx^2} - \int \frac{\omega d^3 R}{dx^2}$$

etc.

Hinc itaque variatio quaesita partim ex membris integralibus, partim ex absolutis constabit, eritque:

$$\int \omega dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \omega\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.}\right) + \frac{d\omega}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\omega}{dx^2}(R - \text{etc.})$$

XXII.

Restituamus δy pro ω, ac formulae integralis $\int Z dx$, existente $dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds$ etc. et $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$, $= s\frac{dr}{dx}$ etc. incrementum, dum in statum quemcunque variatum transfertur, quod hoc modo $\delta \int Z dx$ exprimere licet, ita se habebit:

$$\int dx \delta y \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.}\right) + \frac{d^3\delta y}{dx^3}(S - \text{etc.})$$

 in

in quibus formulis, quatenus differentialia ſuperiorum graduum inuoluunt, differentiale dx conſtans eſt aſſumtum. At δy pro ſingulis valoribus ipſius x valorem habet arbitrarium.

XXIII.

Si igitur pro valore $x = a$ formula $\int Z dx$ maxima vel minima fieri debeat, incrementum modo inventum, ſi in eo ſtatuatur $x = a$, nihilo aequale poni oportet; hocque ita vt ſemper euaneſcat, quomodocunque variationes δy aſſumantur. Quare etiam, ſi talis variatio vnico cuipiam valori y, qui conuenit valori cuicunque ipſius x, minori quam a, tribuatur, expreſſio inuenta in nihilum abire debet. Tum autem nulla mutatio inde valoribus vltimis ipſius y, qui ipſi $x = a$ reſpondent, inducuntur; quare cum, poſito $x = a$, pars incrementi abſoluta $\delta y (P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3 S}{dx^3} + \text{etc.}) + \frac{d\delta y}{dx} (Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.}) + \frac{dd\delta y}{dx^2} (R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.}) + \text{etc.}$ tantum ab vltimorum ipſius y valorum variatione pendeat, pro iis erit $\delta y = 0$, $d\delta y = 0$, $dd\delta y = 0$ etc. ſicque haec pars ſponte euaneſcit. Ex quo neceſſe eſt, vt ſola pars integralis ſeorſim nihilo aequalis reddatur, indeque fieri debeat:

$$\int dx \delta y (N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^4} - \text{etc.}) = 0.$$

XXIV.

Haec autem expreſſio ſummam omnium variationum, quae ex ſingulorum ipſius y variationibus naſcuntur, complectitur; ſed quia talis mutatio in vnico valore fieri concipitur, tota ſumma ad hanc vnam variationem

riationem reducitur, reliquis omnibus euanescentibus; quare necesse est, vt pro hoc casu sit

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0.$$

Quoniam vero, in quocunque loco haec variatio fieri concipiatur, natura maximi minimi ve aeque hanc annihilationem postulat, necesse est, vt pro omnibus valoribus ipsius x sit $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0$; quae ergo aequatio continet relationem indefinitam inter x et y, qua efficitur, vt inde oriundus valor formulae integralis $\int Z dx$ fiat maximus vel minimus, posito $x = a$, vnde patet, hanc relationem non ab ista quantitate a pendere.

XXV.

Haec iam est eadem aequatio, quam pro solutione eiusdem problematis olim in Tractatu meo de Maximis ac Minimis dedi; nunc autem ex meris principiis analyticis deriuaui; quod negotium ideo commode successit, quod singulis valoribus ipsius y variationes accedere assumsi, quibus in statum variatum transferantur. Deinde vero reductio formularum integralium §. 21. facta negotium penitus confecit, qua illae ita fuerunt in partes resolutae, vt aliae a signo summatorio $\int$ essent liberae, quae autem eo manserunt adstrictae, eae tantum ipsam variationem $\omega = \delta y$, sine eius differentialibus, inuoluerent; quo ipso hoc commodi sumus nacti, vt, cum quaelibet variatio seorsim ad nihilum perduci debeat, formula integralis statim praebuerit aequationem

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.} = 0,$$

 qua

qua indefinite relatio inter x et y exprimeretur, reliquae vero incrementi partes abſolutae, vtpote ad vltimos tantum ipſius y valores pertinentes, non in computum venirent.

XXVI.

Neque tamen hae partes abſolutae fruſtra ſunt inuentae, ſed ſingularem praeſtant vſum, ad quem methodus mea prior, quae tantum aequationem $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \text{etc.} = 0$ ſuppeditauit, minus eſt accommodata; quam ob cauſam haec methodus illi longe eſt anteferenda. Quem vſum quo clarius exponam, ſit primo Z functio tantum ipſarum x et y, earum differentialia non inuoluens, ita vt ſit $dZ = Mdx + Ndy$, exiſtentibus $P = 0$, $Q = 0$, etc. ac manifeſtum eſt, hoc caſu partes abſolutas ſponte euaneſcere, atque adeo problema perfecte eſſe ſolutum, ſtatim ac fecerimus $N = 0$. Ita ſi $(bb - nxy + \frac{y^3}{c})dx$ debeat eſſe maximum vel minimum, ob $N = -nx + \frac{3yy}{c}$ quaeſtioni ſatisfit, ſtatuendo $yy = \frac{1}{3}ncx$, neque hic quicquam vltra determinandum ſupereſt.

XXVII.

At ſi Z praeterea inuoluat $p = \frac{dy}{dx}$, vt ſit $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$, tum, vt $\int Zdx$ fiat maximum vel minimum, vtique neceſſe eſt, ſit $N - \frac{dP}{dx} = 0$. Verum quia haec aequatio eſt differentialis, atque adeo differentio-differentialis, ſi functio P ipſam quantitatem $p = \frac{dy}{dx}$ inuoluat, integratio eius vnam vel duas conſtantes arbitrarias accipiet, neque propterea relatio inter x et y penitus determinabitur. Obſeruaui igitur iam

iam in meo tractatu, hanc relationem maximo minimo ve conuenientem ita praeterea ad lubitum definiri posse, vt, posito $x = a$, altera variabilis y datum valorem obtineat; ac si illa aequatio $N - \frac{dP}{dx} = 0$ fuerit differentialis secundi gradus, insuper vnam determinationem arbitrio nostro relinqui. His igitur casibus conditioni maximi vel minimi adhuc alia conditio, ad valores extremos ipsius y pertinens, adiungi potest.

XXVIII.

Porro igitur quaeri potest, cum his casibus relatio inter x et y non penitus determinetur, eaque adhuc infinitis modis exhiberi queat, quinam prae omnibus reliquis maximum minimum ve producat. Hoc vero colligere poterimus ex parte incrementi absoluta ante neglecta, quae hoc casu est $P\delta y$; cuius igitur valor, quem induit posito $x = a$, etiam euanescere debet. Atque hinc in genere intelligimus, si $\int Z dx$ debeat esse maximum vel minimum, existente $dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds$ etc. aequationem $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} -$ etc. $= 0$, ita vlterius determinari debere, vt, posito $x = a$, sequentibus satisfiat aequationibus:

$$P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

$$Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.} = 0$$

$$R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.} = 0; \; S = 0 \text{ etc.}$$

XXIX.

Quia exemplo haec clariora euadent, quaeratur relatio inter x et y, vt posito $x=a$ haec formula $\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$, existente $p=\frac{dy}{dx}$, maximum minimum ve obtineat valorem. Cum ergo sit $Z=\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$, erit $M=0$, $N=-\frac{\sqrt{(1+pp)}}{2y\sqrt{y}}$ et $P=\frac{p}{\sqrt{y(1+pp)}}$, sicque primo adimplenda est haec aequatio $N-\frac{dP}{dx}=0$, seu $Ndx-dP=0$, quae per p multiplicata dat $Ndy=pdP$. At ob $M=0$ est $dZ=Ndy+Pdp$, ideoque $dZ=pdP+Pdp$, quae integrata praebet $Z=Pp+C$, seu $\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}=\frac{pp}{\sqrt{y(1+pp)}}+C$ hoc est $\frac{1}{\sqrt{y(1+pp)}}=C=\frac{1}{\sqrt{b}}$. Hinc porro nanciscimur $b=y(1+pp)$ et $p=\sqrt{\frac{b-y}{y}}=\frac{dy}{dx}$, ita vt sit $dx=\frac{ydy}{\sqrt{(by-yy)}}$ et integrando $x=c-\sqrt{(by-yy)}+b\,\mathrm{A\,sin.}\frac{2\sqrt{(by-yy)}}{b}$. Verum ad pleniorem determinationem debet esse $P=0$, posito $x=a$, hoc est $p=0$, et $y=b$; vnde positis $x=a$, et $y=b$, constans c ita definitur, vt sit $c=a-\pi b$. Ac si velimus, vt posito $x=0$ fiat et $y=0$, debet esse $b=\frac{a}{\pi}$.

XXX.

Antequam hanc inuestigationem analyticam ad casus, quibus functio Z etiam formulas integrales in se complectitur, accommodemus, ipsam analysin, qua hactenus sumus vsi, diligentius examinemus, ac momenta, quibus innititur, accuratius perpendamus. Versatur autem haec Analysis circa duas variabiles x et y, quae partim ad statum, quem vocaui principalem, partim ad statum variatum referuntur, ita vt earum altera x ad vtrumque statum aeque pertineat, altera vero

vero y, dum a ſtatu principali ad variatum transfertur, incrementum capiat δy, dum autem in eodem ſtatu ad valorem $x+dx$ promouetur, augmentum differentiale conſuetum dy accipiat; hinc ſi variabilis y ſimul a ſtatu principali in variatum et locum ipſi $x+dx$ reſpondentem promoueatur, augmentum eius erit $dy+\delta y$. Cum autem x ad vtrumque ſtatum aeque referatur, erit $\delta x=0$.

XXXI.

Si iam habeatur alia quaecunque functio V ad locum x in ſtatu principali relata, eaque in eodem ſtatu ad locum $x+dx$ promoueatur, eius incrementum, quod ei accedet, more ſolito per dV exprimamus. Sin autem ea, manente valore ipſius x eodem, e ſtatu principali in variatum proferatur, eius augmentum nouo more per δV exponamus. Quodſi iam functio illa V ſit ex quantitatibus x, y, p, q, r etc. vtcunque compoſita, litterae autem p, q, r etc. eiusmodi quantitates deſignent, quarum vtraque incrementa dp, dq, dr etc. et δp, δq, δr etc. exhiberi queant; hinc conſueto differentiandi modo etiam ambo incrementa functionis V aſſignari poterunt. Si enim fuerit, pro translatione a loco x ad locum $x+dx$, in eodem ſtatu, ex differentiatione conſueta

$$dV=M\,dx+N\,dy+P\,dp+Q\,dq+R\,dr+\text{etc.}$$

erit, pro translatione a ſtatu principali in variatum, eodem vero loco x, exiſtente, vti notauimus, $\delta x=0$,

$$\delta V=M\,\delta x+N\,\delta y+P\,\delta p+Q\,\delta q+R\,\delta r \text{ etc.}$$

 XXXII.

XXXII.

Deinde ſi haec duplicis generis differentialia inter ſe permiſceantur, ex ſuperioribus iam conſtat eſſe

$$\delta d V = d \delta V.$$

Hinc ſi V iam ſit differentiale formae dV, erit

$$\delta dd U = d \delta d U = dd \delta U, \text{ ob } \delta d U = d \delta V$$

atque in genere, quocunque ordine bina differentiationis ſigna d et δ fuerint conſtituta, eorum ordo pro lubitu permutari poteſt ſalua ſignificatione: ſic erit

$$\delta d^3 V = d \delta d^2 V = d^2 \delta d V = d^3 \delta V.$$

Quia autem hic vnicum ſtatum variatum conſideramus, ad quem tranſitus ſigno δ indicatur, hoc ſignum nunquam plus quam ſemel in huiusmodi compoſitionibus ineſſe poteſt; ſemper autem e re eſt ſignum δ in talibus formulis in vltimum locum promouere.

XXXIII.

Eadem permutatio quoque ad ſigna integralia extenditur; ſi enim proponatur formula integralis $\int V$, denotante $\int$ ſummam omnium valorum in eodem ſtatu, qui omnibus valoribus ipſius x reſpondent, ſumtorum, erit etiam

$$\delta \int V = \int \delta V$$

id quod per ſe eſt perſpicuum, cum incrementum translatitium totius ſummae aequale ſit ſummae omnium incrementorum elementarium in eadem translatione exiſtentium. Atque ex hoc ipſo fonte ſuperior Analyſis eſt deducta; nam cum propoſita eſſet formula integralis $\int Z\, dx$, cuius variatio in ſtatum variatum erat defi-

definienda, assumsimus esse $\delta\int Z\,dx = \int\delta(Z\,dx) = \int\delta Z.dx$, quia $\delta(Z\,dx) = \delta Z\,dx + Z\delta\,dx$, est vero $\delta\,dx = 0$, vti $\delta x = 0$. Quin etiam si occurreret integratio geminata $\int\int V$, foret eodem modo

$$\delta\int\int V = \int\delta\int V = \int\int\delta V.$$

XXXIV.

Alterum artificium in transformatione integralium, quando post signum integrale signa d et δ inuicem coniunguntur, vt saltem in integratione signum δ solitarium relinquatur. Ita proposita formula integrali $\int V\delta\,dv$, ob $\delta\,dv = d\delta\,v$, considerando $\delta\,v$ vti quantitatem simplicem, erit

$$\int V\delta\,dv = \int V\,d\delta\,v = V\delta\,v - \int\delta\,v\,dV.$$

Eodemque porro modo perspicitur fore:

$$\int V\,dd\delta v = V\,d\delta v - \delta v\,dV + \int\delta v\,ddV$$

$$\int V\,d^3\delta v = V\,dd\delta v - d\delta v\,dV + \delta v\,ddV - \int\delta v\,d^3V$$

$$\int V\,d^4\delta v = V\,d^3\delta v - d^2\delta v\,dV + d\delta v\,ddV - \delta v\,d^3V + \int\delta v\,d^4V$$

etc.

est enim $\int V\,dd\delta v = V\,d\delta v - \int d\delta v\,dV$, at est

$$\int d\delta v\,dV = \delta v\,dV - \int\delta v\,ddV$$

vnde ratio harum transformationum perspicitur.

XXXV.

His regulis analyticis praemissis non erit difficile, omnes quaestiones huiusmodi circa maxima et minima resoluere, etiamsi in formula $\int Z\,dx$ functio Z formulas integrales quascunque in se contineat. Totum negotium, scilicet, huc redit, vt incrementum $\delta\int Z\,dx$, quod formula proposita $\int Z\,dx$, dum a statu principali in variatum transfertur, accipit, definiatur; quippe quod nihilo aequale positum solutionem maximi minimi ve continebit. Vocabo autem hoc incrementum variationem differentialem formulae $\int Z dx$, quae oriri intelligenda est, si singuli valores ipsius y particulis infinite paruis δy iisque arbitrariis augeantur. Tum vero hanc variationem per omnes valores ipsius x, a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = a$, extendi debere perspicuum est, pro cuius completa determinatione obseruandum est, eam ita sumi oportere, vt posito $x = 0$ ea euanescat. Hinc igitur sequentia problemata ope huius methodi resoluamus, circa quae tenendum est, litteras p, q, r, s etc. rationem differentialium binarum variabilium x et y ita inuoluere, vt sit

$$p = \frac{dy}{dx};\ q = \frac{dp}{dx};\ r = \frac{dq}{dx};\ s = \frac{dr}{dx} \text{ etc.}$$

Problema I.

Si Z sit functio quaecunque variabilium x et y, quantitatumque earum differentialia inuoluentium, p, q, r, s etc. ita vt eius differentiale sit huiusmodi:

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds \text{ etc.}$$

inuenire variationem differentialem formulae integralis $\int Z dx$ a termino $x = 0$ vsque ad $x = a$ extensam.

Solutio.

Quaeri ergo debet $\delta \int Z dx$, et cum sit $\delta \int Z dx = \int \delta Z dx$, habebimus statim, ob $\delta x = 0$,

$$\delta Z = N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + S \delta s \text{ etc.}$$

Est

Est vero, sumto differentiali dx constante,

$$\delta p = \frac{\delta dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}$$
$$\delta q = \frac{\delta dp}{dx} = \frac{d\delta p}{dx} = \frac{dd\delta y}{dx^2}$$
$$\delta r = \frac{\delta dq}{dx} = \frac{d\delta q}{dx} = \frac{d^3\delta y}{dx^3}$$
$$\delta s = \frac{\delta dr}{dx} = \frac{d\delta r}{dx} = \frac{d^4\delta y}{dx^4};$$

vnde obtinebimus:

$$\delta Z = N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{d^2\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\delta y}{dx^3} + S\frac{d^4\delta y}{dx^4} \text{ etc.}$$

Iam pro integratione formulae $\int \delta Z dx$, per partes instituenda, vidimus esse

$$\int N\delta y\,dx = \int \delta y\,dx.\,N$$
$$\int P\,d\delta y = P\delta y - \int \delta y\,dP$$
$$\int Q\frac{dd\delta y}{dx} = Q\frac{d\delta y}{dx} - \frac{\delta y}{dx}dQ + \int\frac{\delta y}{dx}ddQ$$
$$\int R\frac{d^3\delta y}{dx^2} = R\frac{dd\delta y}{dx^2} - \frac{d\delta y}{dx^2}dR + \frac{\delta y}{dx^2}ddR - \int\frac{\delta y}{dx^2}d^3R$$
$$\int S\frac{d^4\delta y}{dx^3} = S\frac{d^3\delta y}{dx^3} - \frac{dd\delta y}{dx^3}dS + \frac{d\delta y}{dx^3}ddS - \frac{\delta y}{dx^3}d^3S - \int\frac{\delta y}{dx^3}d^4S$$

etc.

Ex his ergo colligitur variatio differentialis quaesita:

$$\begin{aligned}\delta\int Z\,dx = \int \delta y\,dx\Big(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}\Big)\\ + \delta y\Big(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}\Big)\\ + \frac{d\delta y}{dx}\Big(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.}\Big)\\ + \frac{dd\delta y}{dx^2}\Big(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.}\Big)\\ + \frac{d^3\delta y}{dx^3}(S - \text{etc.})\end{aligned}$$

vbi pars prima integralis a termino $x = 0$ vsque ad $x = a$ extendi debet, quae ergo omnes variationes intermedias complectitur: in reliquis autem partibus absolutis statim ponere licet $x = a$, et δy denotabit incremencrementum extremi valoris ipſius y; at $d\delta y$, $dd\delta y$ etc. pendebunt inſuper ab incrementis valorum contiguorum.

Coroll. 1.

Si ergo formula integralis $\int Z dx$ debeat eſſe maximum vel minimum pro termino $x = a$, neceſſe eſt, vt eius variatio differentialis euaneſcat, quomodocunque variationes δy accipiantur. Primum ergo oportet ſit, pro omnibus valoribus intermediis ipſius x,

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0$$

qua aequatione relatio requiſita inter x et y continetur.

Coroll. 2.

Hinc autem, ſi termini P, Q, R etc. adſint, ob integrationes inſtituendas relatio inter x et y non penitus determinatur, quia in eam per ſingulas integrationes conſtantes quantitates arbitrariae ingrediuntur. His igitur caſibus ad quaeſtionem maximi vel minimi aliae nonnullae conditiones adiungi poſſunt, veluti vt pro datis quibusdam valoribus ipſius x, altera variabilis y datos valores obtineat.

Coroll. 3.

Omiſſis autem huiusmodi conditionibus, noua quaeſtio formari poteſt, quemadmodum conſtantes illae per integrationem introductae definiri debeant, vt vel maximum maximorum vel minimum minimorum obtineatur:

tineatur: pro hoc autem necesse est, vt, posito $x = a$, his aequationibus satisfiat:

$$P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} = 0$$
$$Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} = 0$$
$$R - \frac{dS}{dx} = 0$$
$$S = 0.$$

Coroll. 4.

Deinde vero ob easdem rationes opus est, vt pro altero termino $x = 0$, iisdem hisce aequationibus satisfiat. Nam cum variatio differentialis euanescere debeat posito $x = 0$, pars integralis eiusmodi constantem inuoluit, quae hanc conditionem adimpleat; haec autem constans terminos absolutos, si in iis ponatur $x = 0$, ad nihilum redigere debet. Quare formulae illae $P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} -$ etc. $Q - \frac{dR}{dx} +$ etc. $R - \frac{dS}{dx}$ etc. aeque euanescere debent casu $x = 0$, atque casu $x = a$.

Problema 2.

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam quandam integralem $\Phi = \int \mathfrak{Z}\, dx$ vtcunque implicet, vt sit

$$dZ = L\, d\Phi + M\, dx + N\, dy + P\, dp + Q\, dq + R\, dr + S\, ds \text{ etc.}$$

in formula autem Φ sit $\mathfrak{Z}$ functio quaecunque ipsarum x, y, p, q, r etc. existente

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\, dx + \mathfrak{N}\, dy + \mathfrak{P}\, dp + \mathfrak{Q}\, dq + \mathfrak{R}\, dr + \mathfrak{S}\, ds \text{ etc.}$$

atque his ita se habentibus, oporteat definiri variationem differentialem huius formulae integralis $\int Z\, dx$, a termino $x = 0$ ad terminum $x = a$ extensam.

Solutio.

Solutio.

Cum sit $\delta\int Z dx = \int\delta Z dx$, quaeramus ante omnia δZ, ac primo quidem statim patet esse

$$\delta Z = L\delta\Phi + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r \text{ etc.}$$

vbi, vt ante, habebitur

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx};\ \delta q = \frac{dd\delta y}{dx^2};\ \delta r = \frac{d^3\delta y}{dx^3};\ \delta s = \frac{d^4\delta y}{dx^4} \text{ etc.}$$

verum ob $\delta\Phi = \delta\int\mathfrak{Z}dx = \int\delta\mathfrak{Z}dx$, erit simili modo

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.}$$

hincque

$$\delta\Phi = \int dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$

Cum igitur primum membrum formulae $\delta Z dx$ sit $L dx\delta\Phi$, erit

$$\int L dx\delta\Phi = \int L dx\int(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})dx$$

Ponatur nunc $\int L dx = V$, ac habebitur

$$\int L dx\delta\Phi = V\int dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$
$$-\int V dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$

Perinde hic est, qua lege integrale $\int L dx = V$ capiatur, quamcunque enim constantem adiiceremus, ea in hac expressione iterum tolleretur. Ponamus ergo istud integrale ita capi, vt euanescat, posito $x = a$, et quia variatio differentialis ad terminum $x = a$ accommodari debet, erit

$$\int L dx\delta\Phi = -\int V dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.})$$

ad quod si addantur reliquae partes, colligimus fore

$$\delta\int Z dx = \int dx(N - V\mathfrak{N})\delta y + (P - V\mathfrak{P})\delta p + (Q - V\mathfrak{Q})\delta q \text{ etc.})$$

vbi

vbi, ſi reductiones ſupra indicatas adhibeamus, prodibit iſta variatio differentialis iam ad terminum $x = a$ adſtricta:

$$\int \delta y dx \left((N - V\mathfrak{N}) - \frac{d(P - V\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - V\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - V\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y\left((P - V\mathfrak{P}) - \frac{d(Q - V\mathfrak{Q})}{dx} + \frac{dd(R - V\mathfrak{R})}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left((Q - V\mathfrak{Q}) - \frac{d(R - V\mathfrak{R})}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left((R - V\mathfrak{R}) - \text{etc.}\right)$$

cuius expreſſionis conſtitutio per ſe eſt manifeſta.

Coroll. 1.

Haec ergo ſolutio ex praecedente oritur, ſi loco quantitatum ſimplicium N, P, Q, R, etc. ſubſtituantur hae compoſitae:

$$N - V\mathfrak{N},\ P - V\mathfrak{P},\ Q - V\mathfrak{Q},\ R - V\mathfrak{R} \text{ etc.}$$

vbi eſt $V = \int L dx$, integrali hoc ita ſumto, vt euaneſcat, poſito $x = a$.

Coroll. 2.

Si igitur formula integralis $\int Z dx$ debeat reddi maximum vel minimum pro termino $x = a$, efficiendum eſt, vt ex variatione omnium valorum intermediorum ipſius y nulla variatio differentialis reſultet, vnde relatio inter x et y ita definitur, vt ſit:

$$(N - V\mathfrak{N}) - \frac{d(P - V\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - V\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - V\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

quae ergo relatio iam terminum praeſcriptum $x = a$ inuoluit, ita vt, ſi alius terminus praeſcribatur, alia quoque relatio indefinita inter x et y eſſet reſultatura, propterea quod quantitas V hunc valorem $x = a$ in ſe complectitur.

Coroll. 3.

Hoc modo eiusmodi relatio inter x et y inuenitur, ex qua formula $\int Zdx$ ita maximum minimum ve valorem adipiſcatur, vt manentibus valoribus ipſius y extremis iisdem, quomodocunque valores intermedii immutentur, formulae $\int Zdx$ valor proditurus ſit ſemper vel minor caſu maximi, vel maior caſu minimi, quam ſi iuſta relatio adhiberetur.

Coroll. 4.

Si vero etiam valores extremi determinationi noſtrae permittantur, ex variatione differentiali inuenta etiam hos definire licet. Relatio ſcilicet inuenta per integrationes ita determinari debet, vt poſito $x = a$ etiam pars abſoluta euaneſcat. Hinc itaque efficiendum eſt, vt poſito $x = a$, ſit

$$(P - V\mathfrak{P}) - \frac{d(Q - V\mathfrak{Q})}{dx} + \frac{dd(R - V\mathfrak{R})}{dx^2} - \text{etc.} = 0$$

$$(Q - V\mathfrak{Q}) - \frac{d(R - V\mathfrak{R})}{dx} + \frac{dd(S - V\mathfrak{S})}{dx^2} - \text{etc.} = 0$$

$$(R - V\mathfrak{R}) - \frac{d(S - V\mathfrak{S})}{dx} + \text{etc.} = 0 \quad \text{etc.}$$

Coroll. 5.

Hoc quidem caſu fit $V = 0$, verumtamen hinc nonniſi eos terminos, qui ipſam quantitatem V inuoluunt, eiicere licet. Vbi enim eius differentialia occurrunt, quia eſt $\frac{dV}{dx} = L$, pro L ſcribi debet valor, quem induit poſito $x = a$, qui forte hoc caſu non euaneſcit, quod idem tenendum eſt de differentialibus ſequentibus: $\frac{ddV}{dx^2} = \frac{dL}{dx}$, $\frac{d^3V}{dx^3} = \frac{ddL}{dx^2}$, etc. qui valores prius in genere ſunt capiendi, antequam in iis ponatur $x = a$.

Coroll.

Coroll. 6.

Sin autem quoque valores primi ipsius y nostrae determinationi relinquantur, tum iisdem aequationibus satisfieri debet ponendo $x=0$, vbi eadem sunt observanda, quae modo notauimus. Aequationes scilicet has ante penitus euolui oportet, quam in iis statuatur $x=0$. His autem conditionibus quantitates tantum constantes in relationem indefinitam inter x et y ingressae determinantur.

Problema 3.

Si functio Z praeter quantitates $x, y, p, q\ r$ etc. etiam duas formulas integrales $\Phi=\int \mathfrak{Z}\,dx$ et $\Phi'=\int \mathfrak{Z}'dx$ vtcunque inuoluat, vt sit

$$dZ=Ld\Phi+L'd\Phi'+Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr \text{ etc.}$$

in iis autem formulis Φ et Φ' functiones $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{Z}'$ tantum per quantitates x, y, p, q, r etc. determinentur, vt sit

$$d\mathfrak{Z}=\mathfrak{M}\,dx+\mathfrak{N}\,dy+\mathfrak{P}\,dp+\mathfrak{Q}\,dq+\mathfrak{R}\,dr \text{ etc.}$$
$$d\mathfrak{Z}'=\mathfrak{M}'dx+\mathfrak{N}'dy+\mathfrak{P}'dp+\mathfrak{Q}'dq+\mathfrak{R}'dr \text{ etc.}$$

definire relationem inter x et y, vt haec formula integralis $\int Z dx$, quatenus a termino $x=0$ vsque ad $x=a$ extenditur, maximum minimum ve valorem consequatur.

Solutio.

Oportet igitur variationem differentialem formulae $\int Z dx$ definiri, quae cum sit $\delta \int Z dx=\int \delta Z dx$, habemus primo:

$$\delta Z=L\delta\Phi+L'\delta\Phi'+N\delta y+P\delta p+Q\delta q+R\delta r \text{ etc.}$$

 deinde

deinde vero est $\delta\Phi = \delta\int \mathfrak{Z}dx = \int\delta\mathfrak{Z}dx$ et $\delta\Phi' = \int\delta\mathfrak{Z}'dx$, hincque propterea:

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.}$$
$$\delta\mathfrak{Z}' = \mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r \text{ etc.}$$

ex quibus colligimus:

$$\delta\Phi = \int dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$
$$\delta\Phi' = \int dx(\mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r \text{ etc.})$$

Cum igitur sit variatio differentialis quaesita

$$\delta\int Z dx = \int L dx\delta\Phi + \int L'dx\delta\Phi' + \int N dx\delta y + \int P dx\delta p \text{ etc.}$$

ponamus $\int L dx = V$ et $\int L'dx = V'$, eritque vt supra,

$$\int L dx\delta\Phi = V\int dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$
$$- \int V dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$
$$\int L'dx d\Phi = V'\int dx(\mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r \text{ etc.}$$
$$- \int V'dx(\mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r \text{ etc.})$$

Ponamus autem, haec integralia $V = \int L dx$ et $V' = \int L'dx$ ita capi, vt euanescant, posito $x = a$, ac praecedentium formularum partes priores sponte in nihilum abibunt, siquidem earum valores pro termino $x = a$ capi debent. Omnibus igitur partibus coniungendis obtinebimus

$$\begin{aligned}\delta\int Z dx = &\int dx\delta y(N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}')\\ &+ \int dx\delta p(P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}')\\ &+ \int dx\delta q(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')\\ &+ \int dx\delta r(R - V\mathfrak{R} - V'\mathfrak{R}')\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Cum

Cum vero sit

$$\int P dx \delta p = P\delta y - \int \delta y dP$$

$$\int Q dx \delta q = Q\frac{d\delta y}{dx} - \frac{\delta y}{dx}dQ + \int \frac{\delta y}{dx} ddQ$$

$$\int R dx \delta r = R\frac{dd\delta y}{dx^2} - \frac{d\delta y}{dx^2}dR + \frac{\delta y}{dx^2}ddR - \int \frac{\delta y}{dx^2}d^3R$$

etc.

eliciemus variationem differentialem quaesitam

$$\delta\int Z dx = \int dx\delta y\Big((N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}') - \frac{d(P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}')}{dx} + \frac{dd(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')}{dx^2} - \text{etc.}\Big)$$
$$+ \delta y\Big((P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}') - \frac{d(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')}{dx} + \text{etc.}\Big)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\Big((Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}') - \frac{d(R - V\mathfrak{R} - V'\mathfrak{R}')}{dx} + \text{etc.}\Big)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\Big((R - V\mathfrak{R} - V'\mathfrak{R}') - \text{etc.}\Big) \text{ etc.}$$

Coroll. 1.

Ponamus breuitatis gratia:

$$N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}' = (N); \quad P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}' = (P);$$
$$Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}' = (Q) \text{ etc.}$$

ac relatio indefinita inter x et y exprimetur hac aequatione:

$$(N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

quae tamen iam inuoluit terminum praescriptum $x = a$, quia formulae integrales $V = \int L dx$, et $V' = \int L' dx$, ita sunt captae, vt euanescant, posito $x = a$.

Coroll. 2.

Cum autem integratio huius aequationis, si fuerit differentialis, constantes arbitrarias inuoluat, si et hae determinationi nostrae relinquantur, vt formula

$\int Z dx$ valorem omnium maximum vel minimum adipiſcatur, eas ita definiri conuenit, vt tam poſito $x=0$, quam $x=a$, etiam his aequationibus ſatisfiat:

$$(P)-\frac{d(Q)}{dx}+\frac{dd(R)}{dx^2}\text{ etc.}=0;\ (Q)-\frac{d(R)}{dx}\text{etc.}=0;\ (R)-\text{etc.}=0.$$

Coroll. 3.

Si functio Z non ſolum duas huiusmodi formulas integrales $\Phi=\int \mathfrak{Z} dx$, $\Phi'=\int \mathfrak{Z}' dx$, ſed etiam plures $\Phi''=\int \mathfrak{Z}'' dx$, $\Phi'''=\int \mathfrak{Z}''' dx$ etc. inuoluat, ita tamen, vt litterae $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}', \mathfrak{Z}''$ etc. denotent tantum functiones quantitatum x, y, p, q, r etc. neque vltra vllas formulas integrales inuoluant; ex ſolutione problematis etiam huiusmodi formularum variationes differentiales facile aſſignantur.

Problema 4.

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam integralem $\Phi=\int \mathfrak{Z} dx$ vtcunque implicet, vt ſit

$$dZ=L d\Phi+M dx+N dy+P dp+Q dq+R dr\text{ etc.}$$

functio autem $\mathfrak{Z}$ etiam praeter $x, y, p, q, r,$ etc. aliam denuo formulam integralem $\phi=\int \mathfrak{z}\, dx$ inuoluat, vt ſit

$$d\mathfrak{Z}=\mathfrak{L} d\phi+\mathfrak{M} dx+\mathfrak{N} dy+\mathfrak{P} dp+\mathfrak{Q} dq+\mathfrak{R} dr+\text{etc.}$$

functio vero $\mathfrak{z}$ tantum ex quantitatibus x, y, p, q, r etc. ſit compoſita, exiſtente

$$d\mathfrak{z}=\mathfrak{m} dx+\mathfrak{n} dy+\mathfrak{p} dp+\mathfrak{q} dq+\mathfrak{r} dr\text{ etc.}$$

definire relationem inter x et y, vt haec formula integralis $\int Z dx$, quatenus a termino $x=0$ vsque ad termi-

terminum $x = a$ extenditur, maximum minimum ve valorem consequatur.

Solutio.

In hunc igitur finem variationem differentialem formulae $\int Z\,dx$ exquiri conuenit; quae cum sit $\delta \int Z dx = \int \delta Z dx$, habemus primo:

$$\delta Z = L\delta\Phi + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r \text{ etc.}$$

ideoque variatio differentialis erit

$$\delta \int Z dx = \int L dx \delta\Phi + \int N dx \delta y + \int P dx \delta p + \int Q dx \delta q + \int R dx \delta r \text{ etc.}$$

Nunc autem, ob $\delta\Phi = \delta\int \mathfrak{Z} dx = \int \delta \mathfrak{Z} dx$, et

$$\delta \mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\delta\Phi + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.}$$

habebimus simili modo

$$\delta\Phi = \int \mathfrak{L} dx \delta\Phi + \int \mathfrak{N} dx \delta y + \int \mathfrak{P} dx \delta p + \int \mathfrak{Q} dx \delta q + \int \mathfrak{R} dx \delta r \text{ etc.}$$

Denique vero est $d\Phi = \delta\int \mathfrak{z} dx = \int \delta \mathfrak{z} dx$, ideoque ob

$$\delta \mathfrak{z} = \mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r \text{ etc.}$$

erit

$$\delta\Phi = \int \mathfrak{n} dx \delta y + \int \mathfrak{p} dx \delta p + \int \mathfrak{q} \delta q + \int \mathfrak{r} dx \delta r \text{ etc.}$$

Sit iam $\int \mathfrak{L} dx = v$, ac fiet

$$\int \mathfrak{L} dx \delta\Phi = v\int dx (\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r \text{ etc.}) - \int v dx (\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r \text{ etc.})$$

vnde acquirimus

$$\delta\Phi = v\int dx(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r \text{ etc.}) + \int dx \delta y (\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + \int dx \delta p (\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) + \int dx \delta q (\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) \text{ etc.}$$

Pona-

Ponamus ergo porro $\int L\,dx = V$ et $\int L\,v\,dx = T$, eritque

$$\int L\,dx\,\delta\Phi = T\int dx(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})$$
$$-\int T\,dx(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})$$
$$+V\int dx\,\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + V\int dx\,\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) + V\int dx\,\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) \text{ etc.}$$
$$-\int V\,dx\,\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) - \int V\,dx\,\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) - \int V\,dx\,\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) \text{ etc.}$$

His igitur omnibus colligendis prodibit variatio differentialis quaesita

$$\delta\int Z\,dx = T\int dx(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \delta\mathfrak{q}q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})$$
$$+V\int dx\,\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + V\int dx\,\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p})$$
$$+V\int dx\,\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) \text{ etc.}$$
$$+V\int dx\,\delta y(N - V\mathfrak{N} + Vv\mathfrak{n} - T\mathfrak{n})$$
$$+\int dx\,\delta p(P - V\mathfrak{P} + Vv\mathfrak{p} - T\mathfrak{p})$$
$$+\int dx\,\delta q(Q - V\mathfrak{Q} + Vv\mathfrak{q} - T\mathfrak{q})$$
$$\text{etc.}$$

quae cum ad terminum vsque $x = a$ extendi debeat, ponamus integralia $\int L\,dx = V$, et $\int L\,dx\int \mathfrak{L}\,dx = T$, quandoquidem determinatio integrationis nostro arbitrio relinquitur, ita capi, vt euanescant, posito $x = a$; quo nostra expressio facilior reddatur. Deinde vero ponamus breuitatis gratia:

$$N - V\mathfrak{N} + (Vv - T)\mathfrak{n} = (N)$$
$$P - V\mathfrak{P} + (Vv - T)\mathfrak{p} = (P)$$
$$Q - V\mathfrak{Q} + (Vv - T)\mathfrak{q} = (Q)$$
$$R - V\mathfrak{R} + (Vv - T)\mathfrak{r} = (R)$$
$$\text{etc.}$$

existente

existente, vt assumsimus, $v = \int \mathfrak{L} dx$, atque variatio differentialis quaesita reducetur ad hanc formam:

$$\delta \int Z dx = \int dx \delta y \left((\mathrm{N}) - \frac{d(\mathrm{P})}{dx} + \frac{dd(\mathrm{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(\mathrm{R})}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \delta y \left((\mathrm{P}) - \frac{d(\mathrm{Q})}{dx} + \frac{dd(\mathrm{R})}{dx^2} - \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{d \delta y}{dx} \left((\mathrm{Q}) - \frac{d(\mathrm{R})}{dx} + \text{etc.} \right.$$
$$+ \frac{dd \delta y}{dx^2} \left((\mathrm{R}) - \text{etc.} \right) \text{ etc.}$$

Coroll. 1.

Cum sit $v = \int \mathfrak{L} dx$, erit $\mathrm{V}v = \int \mathrm{L} dz . \int \mathfrak{L} dx$ et $\mathrm{V}v - \mathrm{T} = \int \mathrm{L} dx . \int \mathfrak{L} dx - \int \mathrm{L} dx \int \mathfrak{L} dx = \int \mathfrak{L} dx \int \mathrm{L} dx$. Quia autem per determinationes assumtas expressio $\mathrm{V}v - \mathrm{T}$ euanescit, posito $x = a$, si ponamus $\int \mathrm{L} dx = \mathrm{V}$ et $\int \mathfrak{L} \mathrm{V} dx = \mathfrak{V}$, ambo haec integralia ita capi oportet, vt euanescant, posito $x = a$.

Coroll. 2.

His igitur formulis $\int \mathrm{L} dx = \mathrm{V}$, et $\int \mathfrak{L} \mathrm{V} dx = \mathfrak{V}$, in computum introductis, ponendum erit:

$$\mathrm{N} - \mathrm{V}\mathfrak{N} + \mathfrak{V}\mathfrak{n} = (\mathrm{N})$$
$$\mathrm{P} - \mathrm{V}\mathfrak{P} + \mathfrak{V}\mathfrak{p} = (\mathrm{P})$$
$$\mathrm{Q} - \mathrm{V}\mathfrak{Q} + \mathfrak{V}\mathfrak{q} = (\mathrm{Q})$$
$$\mathrm{R} - \mathrm{V}\mathfrak{R} + \mathfrak{V}\mathfrak{r} = (\mathrm{R})$$
etc.

et variatio differentialis per litteras (N), (P), (Q) etc. perinde exprimetur, ac supra casu primo per litteras N, P, Q etc. erat definita.

Coroll. 3.

Ex his iam facile colligere licet, si etiam functio $\mathfrak{z}$ nouam formulam integralem inuoluat, quemadmodum tum variatio differentialis exprimatur; si scilicet fuerit $d\mathfrak{z} = \mathfrak{l}\,d\Phi' + \mathfrak{m}\,dx +$ etc. tum ad formulas $V = \int L\,dx$ et $\mathfrak{V} = \int \mathfrak{L}V\,dx$ insuper tertia $\mathfrak{v} = \int \mathfrak{l}\mathfrak{V}\,dx$ accederet; reliqua attendenti facile se offerent.

Problema 5.

Si functio Z, praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam integralem $\Phi = \int \mathfrak{Z}\,dx$ vtcunque implicet, vt sit

$$dZ = L\,d\Phi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr \text{ etc.}$$

functio vero $\mathfrak{Z}$ praeter quantitates x, y, p, q, r etc. eandem denuo formulam integralem $\Phi = \int \mathfrak{Z}\,dx$ inuoluat, vt sit

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\,d\Phi + \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq + \mathfrak{R}\,dr \text{ etc.}$$

definire relationem inter x et y, vt haec formula integralis $\int Z\,dx$, quatenus a termino $x = 0$ ad terminum datum $x = a$ extenditur, maximum minimum ve valorem adipiscatur.

Solutio.

Variatio differentialis est, vt hactenus,

$$\delta \int Z\,dx = \int L\,dx\,\delta\Phi + \int N\,dx\,\delta y + \int P\,dx\,\delta p + \int Q\,dx\,\delta q + \int R\,dx\,\delta r \text{ etc.}$$

deinde vero habemus $\delta\Phi = \delta \int \mathfrak{Z}\,dz = \int \delta\mathfrak{Z}\,dx$ et

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\,\delta\Phi + \mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r \text{ etc.}$$

Cum

Cum autem sit $\Phi = \int \mathfrak{Z}\, dx$, erit $\mathfrak{Z} = \frac{d\Phi}{dx}$, et $\delta\mathfrak{Z} = \frac{\delta d \Phi}{dx} = \frac{d\delta\Phi}{dx}$; ponamus tantisper $\delta\Phi = u$, et $\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r$ etc. $= \omega$, vt obtineatur haec aequatio $\frac{du}{dx} = \mathfrak{L}u + \omega$, cuius integrale sumto e pro numero, cuius logarithmus $= 1$, est

$$e^{-\int \mathfrak{L} dx} u = \int e^{-\int L dx} \omega dx \text{, ideoque}$$

$$\delta\Phi = e^{\int \mathfrak{L} dx} \int e^{-\int \mathfrak{L} dx} dx (\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$

vnde deducitur

$$\int L dx \delta\Phi = \int e^{\int \mathfrak{L} dx} L dx \int e^{-\int \mathfrak{L} dx} dx (\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.})$$

Ponatur iam $\int e^{\int \mathfrak{L} dx} L dx = V$, quod integrale ita capiatur, vt euanescat, posito $x = a$, sitque $e^{-\int \mathfrak{L} dx} V = U$, erit

$$\int L dx \delta\Phi = -\int U dx (\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.})$$

cui parti si reliquae partes addantur, reductionesque superiores fiant, prodibit variatio differentialis quaesita

$$\delta \int Z dx =$$

$$\begin{aligned}
&\int dx \delta y \left((N - U\mathfrak{N}) - \frac{d(P - U\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - U\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - U\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.}\right)\\
&+ \delta y \left((P - U\mathfrak{P}) - \frac{d(Q - U\mathfrak{Q})}{dx} + \frac{dd(R - U\mathfrak{R})}{dx^2} - \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{d\delta y}{dx}\left((Q - U\mathfrak{Q}) - \frac{d(R - U\mathfrak{R})}{dx} + \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left((R - U\mathfrak{R}) - \text{etc.}\right)
\end{aligned}$$

ex qua, vt supra, ea relatio inter x et y elicitur, qua formulae integrali $\int Z dx$ pro termino $x = a$ valor maximus vel minimus conciliatur; haec enim relatio exprimetur ista aequatione:

$$(N - U\mathfrak{N}) - \frac{d(P - U\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - U\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - U\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.}) = 0.$$

Tum vero pro constantium per integrationem inuectarum determinatione singulae partes absolutae tam pro casu $x = a$, quam pro casu $x = 0$, nihilo aequales effici poterunt.

Corollarium.

Quia posuimus $e^{-\int \mathfrak{L} dx} V = U$, erit $V = e^{\int \mathfrak{L} dx} U$, vnde differentiando fiet $dV = e^{\int \mathfrak{L} dx}(dU + U \mathfrak{L} dx)$. Cum autem sit $dV = e^{\int \mathfrak{L} dx} L dx$, habebitur ista aequatio differentialis:

$$dU + U \mathfrak{L} dx = L dx$$

ex qua quantitatem U ita definiri oportet, vt ea euanescat, posito $x = a$.

Problema 6.

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam integralem $\Phi = \int Z dx$ inuoluat, ita vt sit

$$dZ = L d\Phi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

definire relationem inter x et y, vt haec formula $\int Z dx$ maximum minimum ve valorem induat, quatenus quidem a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = a$ extenditur.

Solutio.

Cum variatio differentialis sit

$$\delta \int Z dx = \int L dx \delta \Phi + \int N dx \delta y + \int P dx \delta p + \int Q dx \delta q + \int R dx \delta r \text{ etc.}$$

habebitur etiam $\delta \Phi = \delta \int Z dx$, vnde fit differentiando:

$$d\delta \Phi = L dx \delta \Phi + N dx \delta y + P dx \delta p + Q dx \delta q + R dx \delta r \text{ etc.}$$

hincque inuenitur, vt ante,

$$\delta \Phi = e^{\int L dx} \int e^{-\int L dx} dx (N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{etc.})$$

ex

ex quo adipiscimur, ob $\int e^{\int L dx} L dx = e^{\int L dx}$,

$$\int L dx \delta \Phi = e^{\int L dx} \int e^{-\int L dx} dx (N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}) - \int dx (N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc})$$

quod postremum membrum a reliquis partibus tollitur. Quare, si ponamus $e^{-\int L dx} = T$, erit tota variatio differentialis

$$\delta \int Z dx = \tfrac{1}{T} \int dx \delta y \left(TN - \frac{d.TP}{dx} + \frac{dd.TQ}{dx^2} - \frac{d^3.TR}{dx^3} + \text{etc.}\right.$$
$$+ \delta y \left(TP - \frac{d.TQ}{dx} + \frac{ddTR}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left(TQ - \frac{d.TR}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}(TR - \text{etc.}) \text{ etc.}$$

Quo igitur formula $\int Z dx$ euadat maxima vel minima, relatio indefinita inter x et y hac aequatione exprimetur:

$$TN - \frac{d.TP}{dx} + \frac{dd.TQ}{dx^2} - \frac{d^3TR}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

partes vero absolutae singulae inseruient constantibus per integrationem ingressis determinandis.

Scholion.

Hac igitur Analysi nullas considerationes geometricas inuoluente non solum omnium problematum ad hanc maximorum et minimorum methodum pertinentium easdem adepti sumus solutiones, quas iam in libro meo de maximis et minimis dedi, sed etiam haec methodus peculiarem suppeditauit determinationem constantium, quae priori methodo indeterminatae relinquuntur; vnde innumera problemata singularia expedite resolui possunt, ad quae prior methodus minus con-

 grue

grue accommodatur. Veluti si inter omnes lineas, a dato, puncto non ad aliud punctum, sed ad lineam quandam datam, siue rectam, siue curuam, ducendas, ea requiratur, super qua corpus ab illo puncto descendens tempore breuissimo ad hanc lineam perueniat, per considerationem illarum partium absolutarum hoc problema facile resoluitur, dum iis ista conditio praescribitur, vt curua quaesita ad datam sit normalis. Antequam autem finiam, examini Analystarum egregium Theorema subiiciam, cuius veritas ex principiis hactenus positis haud difficulter perspicitur, et quod in calculo integrali eximium vsum praestare videtur.

Theorema.

Proposita formula differentiali $Z dx$, in qua Z sit functio quaecunque quantitatum x, y, $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$ etc. eaque differentiata prodeat:

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

ita vt haec formula differentialis $Z dx$ differentialia non solum prima, sed etiam altiora cuiusque ordinis, complectatur; tum facile diiudicari poterit, vtrum ista formula integrationem admittat, siue sit differentiale completum, nec ne? Consideretur enim ista expressio, sumto dx constante,

$$V = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \text{etc.}$$

quae si reperiatur nihilo aequalis, formula $Z dx$ erit integrabilis; verum si non fuerit $V = 0$, ea non erit integrabilis.

DE

DE INSIGNI PROMOTIONE METHODI TANGENTIVM INVERSAE.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Ad methodum tangentium inuersam referri solent ea problemata, quibus eiusmodi lineae curuae quaeruntur, quae certa quadam praescripta proprietate ratione tangentium sint praeditae; et cum per tangentes directio tractus curuarum determinetur, ac mutua relatione differentialium coordinatarum contineatur, ista methodus latissime patet, atque omnia problemata, quibus praescripta proprietas differentialia inuoluit, in se complectitur. Hac methodo plurima passim existunt problemata soluta, e quibus Analysis infinitorum maxima cepit incrementa; verum problemata eo pertinentia ad diuersa genera reuocanda videntur, prout proprietas praescripta, vel ad singula tantum curuae puncta, vel ad bina plura ve, immo infinita, respicit. Atque adhuc quidem alia problemata vix reperiuntur tractata, nisi in quibus proprietas praescripta, vel ad singula curuae puncta, vel ad bina, refertur, quae igitur primo vel secundo generi essent annumeranda.

2. Quae distinctio, cum minus sit vsitata, quo clarius percipiatur, eam exemplis ad singula genera perti-

Tab. I. Fig. 1. pertinentibus illuſtrari conueniet. Ex primo ergo genere exemplo ſit problema olim tractatum, quo quaeritur curua AM, vt ducta ad axem AB ex quouis puncto M tangente MN, data ratio inter rectas AN et MN ſubſiſtat. Hic ſcilicet praeſcripta proprietas ad vnum punctum M ſpectat, et per coordinatas huius puncti $AP = x$, et $PM = y$, earumque differentialia exprimi poteſt; cum enim poſito curuae elemento $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, ſit $MN = \frac{y\,ds}{dy}$ et $AN = x - \frac{y\,dx}{dy}$, rationem datam $m : n$ exiſtere oportet inter has lineas, vnde obtinetur aequatio:

$$m(x\,dy - y\,dx) = ny\,ds$$

quae cum alias lineas, niſi quae ſolum punctum M (in ſe quidem indefinitum) reſpiciunt, non contineat, problema ad primum genus refero.

3. **Genus** autem ſecundum eiusmodi problemata complectetur, ad quae ſoluenda coordinatae ad duo curuae puncta pertinentes ſimul conſiderari debent; cuiusmodi erat problema de traiectoriis reciprocis, illudque problema catoptricum, quod ante aliquot annos tractaui. Cum enim in his continuo bina curuae puncta inter ſe conferantur, et coordinatae ad ea pertinentes in computum ingrediantur; per principium continuitatis effici debet, vt bina haec puncta ad eandem lineam curuam referantur, ſicque aequatio inter coordinatas vnicum punctum ſpectantes eliciatur. Quam ob rationem huiusmodi problemata merito multo difficiliora cenſentur iis, in quibus ſingula tantum puncta ſeorſim conſideranda proponuntur; quoniam hic praeter condi-

conditiones propositas etiam principii continuitatis ratio est habenda. Quod quemadmodum ad calculum accommodari conueniat, ex solutione problematis traiectoriarum reciprocarum, catoptrici illius aliorumque similium intelligi potest, cui argumento propterea fusius explicando hic supersedeo.

4. Circa huiusmodi autem bina puncta, ad quae in talibus problematibus simul est respiciendum, hoc imprimis notari meretur, quod ita inter se debeant esse correlata, vt qua lege ab vno transitus fit ad alterum, eadem lege vicissim ab isto ad illud fiat reuersio. Ita si quaepiam variabilis ad alterum relata ponatur $=z$, res commodissime ita concipi solet, vt eadem negatiue sumta ad alterum referatur; sic enim dum haec denuo negatiue capitur, quia tum iterum euadit positiua, ad prius punctum fit transitus. Atque ex hoc fonte, qui cum principio continuitatis arctissime est coniunctus, solutiones illorum problematum sunt haustae, sine quo vix via ad eas patuisset. Alio autem modo tractari debebunt problemata, in quibus ad terna puncta correlata simul est respiciendum, vel adeo ad quaterna pluraue, quorsum referri possunt ea, quae nuper de curuis, in quibus omnes arcus datae cuiuspiam amplitudinis debent esse inter se aequales, sum meditatus.

5. Verum si conditio praescripta ita ad duo curvae puncta simul respiciat, vt non simili modo regressus ab altero ad alterum locum habeat, sed eo modo, quo a primo ad secundum transitus, eodem modo a secundo ad tertium quodpiam, hincque ad quartum

et ita in infinitum transitus procedat; tum non duo sed innumerabilia curuae puncta simul ad propositam conditionem referri sunt aestimanda; quam ob rem methodus pro duobus punctis vsurpari solita hic nullo successu adhiberi poterit. Cum igitur ne meminerim quidem vllum adhuc problema huius generis vel propositum esse, vel solutum, haud ingratum Analyseos cultoribus fore arbitror, si nonnulla huiusmodi problemata hic in medium attulero, simulque methodum ea soluendi aperuero. Tantum autem abest, vt hac methodo omnia problemata, quae in hoc genere excogitari possunt, resolui posse credam, vt potius eius insufficientiam lubens agnoscam: verum quia cultura noui plane generis haud parum temporis postulat, neminem hos primos conatus meos in hac insueta Analyseos parte excolenda reprehensurum esse confido.

Problema I.

Tab. I. Fig. 2. *Super axe* AV *eiusmodi construere lineam curuam* EO, *vt ducta ad quoduis punctum* I *normali* IQ *applicata ex puncto* Q *educta* QK *aequalis sit ipsi illi normali* QI.

6. Hic quidem duo curuae puncta I et K inter se conferuntur, dum punctum K per applicatam QK in termino Q subnormalis PQ, quae puncto I respondet, erectam definitur; ac problema exigit, vt sit $QK = QI$; verum eadem conditio postulat, vt si ad K ducatur normalis KR, ipsi quoque applicata RL sit aequalis. Tum vero etiam si ad L normalis ducatur

tur LS, et in S constituta applicata SM ad M denuo normalis agatur MT, sicque porro ex T applicata TN, et ad N normalis NV, fit continuo

$$QK = QI;\ RL = RK;\ SM = SL;\ TN = TM;\ VO = VN \text{ etc.}$$

Vnde vt problemati satisfiat, sumto curuae puncto quocunque I, cum eo combinari debent alia puncta innumerabilia K, L, M, N, O etc. quae ergo simul cum eo in calculum introduci oportet; in quo ipso nouitas et difficultas huius problematis consistit.

7. Si abscissa puncto primo I respondens ponatur $AP = x$, et applicata $PI = y$, quia est subnormalis $PQ = \frac{y\,dy}{dx}$, et ipsa normalis $QI = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$, per principium continuitatis talis aequatio inter x et y desideratur, vt si in ea loco x scribatur $AQ = x + \frac{y\,dy}{dx}$, valor applicatae euadat $QK = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$. Verum quemadmodum haec conditio sit adimplenda, difficillime perspicitur. Aequatio quidem infinita solutionem problematis complectens exhiberi potest; si enim breuitatis gratia ponamus $\frac{y\,dy}{dx} = t$, quoniam pro x scribi debet $x + t$, vt valor sequentis applicatae prodeat, qui est $y\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx} = \sqrt{(yy + tt)}$, habebimus $\sqrt{(yy + tt)}$ $= y + \frac{t\,dy}{1\,dx} + \frac{tt\,ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{t^3\,d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{t^4\,d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} +$ etc. sumto differentiali dx constante; sed haec ipsa aequatio differentialis infinitesimi ordinis ita est comparata, vt nullo modo pateat, quomodo ei per aequationem quampiam finitam sit satisfaciendum.

8. Haud

8. Haud parum autem subsidii ad hoc problema soluendum afferet proprietas cum conditione praescripta coniuncta, qua declaratur, omnes has subnormales PQ, QR, RS, ST etc. inter se esse aequales; quod quidem ita facillime geometrice ostenditur: Ductis tam applicata pi, quam normali qi proximis, si ex Q in qi demittatur perpendiculum $Q\mu$, erit triangulum $Qq\mu$ simile triangulo IQP, ideoque $Qq : q\mu = QI : PQ$. Tum vero ob normalitatem designat $q\mu$ incrementum normalis QI, vnde cum etiam sequens applicata proxima qk aequalis sit normali qi, erit eius incrementum $k\nu = q\mu$, ducta scilicet axi parallela $K\nu$, ita vt sit $K\nu = Qq$. Quare cum pro normali KR sit $QK : QR = K\nu : \nu k$, erit quoque $QK : QR = Qq : q\mu = QI : PQ$. At per hypothesin est $QK = QI$; vnde sequitur fore $QR = PQ$, atque ob eandem rationem perspicuum est, omnes illas subnormales PQ, QR, RS, ST etc. inter se aequales esse debere. Neque vero hinc vicissim concludere licet, si omnes istae subnormales fuerint aequales, etiam singulas applicatas normalibus antecedentibus aequales esse futuras.

Tab. I. Fig. 3.

Fig. 2.

9. Ratiocinium hoc, quo aequalitatem subnormalium demonstraui, quantumuis sit rigidum, tamen vni exceptioni est obnoxium, quae locum habet, si elementa Qq et $q\mu$ in nihilum abeant, quoniam tum ratio $Qq \cdot q\mu$ euadit indefinita, neque amplius subnormali sequenti QR definiendae inseruit. Vnicum igitur hunc casum seorsim euolui conuenit, in quo cum sit Qq seu differentiale lineae $AQ = o$, ipsa AQ erit constans, et omnes curuae normales in eodem axis puncto

puncto Q concurrent. Habebitur ergo hoc casu circulus, in qua cum applicata ex Q erecta QK sit normali QI quippe radio aequalis, circulus hoc singulari modo problemati satisfacit. Cum, enim omnes normales in centro conueniant, et applicata ex centro erecta ipsis sit aequalis, problema vtique per circulum resoluitur, etsi hic aequalitas subnormalium locum non habet. Verum haec solutio penitus est singularis et maxime discrepat ab ea, qua aliae curuae satisfacientes inuestigari debent, in quibus omnino ad infinita curuae puncta simul est respiciendum, quae aequalibus subnormalibus a se inuicem sunt dissita.

10. Neque vero hinc concludere licet, quod infinitis punctis eadem conueniat subnormalis: vbique prorsus quantitatem subnormalis esse eiusdem magnitudinis, ideoque constantem; parabola enim, cui haec proprietas competit, nostro problemati minime satisfacit, etiamsi omnes omnino subnormales habeat aequales. Atque hanc ob rem modo monueram, ne illa propositio, quae cum indole praescripta punctorum I, K, L, M etc. aequalitatem subnormalium coniunxerat, inuertatur. Res igitur ita concipi debet, vt, quemadmodum punctum I ad innumerabilia alia puncta K, L, M, etc. deducit, quibus cum illo communis subnormalis conueniat, ita ab alio quouis puncto incipiendo peculiaris series infinitorum punctorum oriatur, quibus pariter communis subnormalis, sed ab illa diuersa, conueniat, sicque in curua infinitae series innumerabilium punctorum concipi debent, quarum vnaquaeque sibi peculiarem subtangentis quantitatem habeat; ita vt nullum curuae punctum simul ad plures series pertineat. Ex quo quaelibet illa-

 rum

rum infinitarum serierum a reliquis magnitudine subtangentis distinguetur, ac sumta quapiam subtangentis quantitate $= t$, ea communis erit infinitis curuae punctis, quae cum ea quasi connexa sunt intelligenda.

11. Haec autem consideratio nos ad solutionem problematis manuducit: cum enim subnormali t infinita curuae puncta I, K, L, M, N etc. ideoque etiam infinitae abscissae AP, AQ, AR, AS etc. conueniant, hae abscissae per functionem infinitiformem subnormalis t exprimendae sunt. Sumto ergo quodam angulo Φ, per cuius sinum et cosinum subnormalis t determinetur, idem valor t conueniet his infinitis angulis

$$\Phi;\ 2\pi+\Phi;\ 4\pi+\Phi;\ 6\pi+\Phi;\ 8\pi+\Phi;\ 10\pi+\Phi \text{ etc.}$$

denotante π semiperipheriam circuli, seu angulum $180°$. Quare si T aliam quamuis functionem sin. Φ et cos. Φ designet, atque abscissa x, ita exprimatur, vt sit $x = at\Phi + T$, pro eodem valore t habebuntur istae infinitae abscissae:

$$at\Phi + T;\ at(2\pi+\Phi)+T;\ at(4\pi+\Phi)+T;\ at(6\pi+\Phi)+T \text{ etc.}$$

quae arithmeticam progressionem constituunt differentia existente $2a\pi t$, quae cum esse debeat $= t$, erit $a = \frac{1}{2\pi}$, atque expressio idonea pro abscissa $x = \frac{t\Phi}{2\pi} + T$, siquidem t et T sint functiones binarum quantitatum sin. Φ et cos. Φ, vt eosdem valores retineant, etiamsi pro Φ scribatur successiue $2\pi+\Phi$, $4\pi+\Phi$, $6\pi+\Phi$ etc.

12. Inuenta iam idonea expressione pro abscissa $x = \frac{t\Phi}{2\pi} + T$, sit y applicata ei conueniens, et quia subnor-

subnormalis esse debet $=t$, habebimus $\frac{y\,dy}{dx}=t$, ideoque $yy=2\int t\,dx$. Cum igitur sit

$$dx=\frac{t\,d\Phi}{2\pi}+\frac{\Phi\,dt}{2\pi}+dT$$

erit $t\,dx=\frac{tt\,d\Phi}{2\pi}+\frac{\Phi\,t\,dt}{2\pi}+t\,dT$

siue $t\,dx=\frac{tt\,d\Phi+2\Phi\,t\,dt}{4\pi}+\frac{tt\,d\Phi}{4\pi}+t\,dT$, vnde fit

$\int t\,dx=\frac{tt\,\Phi}{4\pi}+\int\frac{tt\,d\Phi}{4\pi}+\int t\,dT$, ita vt sit

$$yy=\frac{1}{2\pi}tt\Phi+\frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi+2\int t\,dT.$$

Hoc igitur modo si pro t et T sumantur functiones quaecunque binarum quantitatum sin Φ et cos. Φ, nacti sumus idoneos valores pro coordinatis curuae x et y, qui sunt

$$x=\frac{t\Phi}{2\pi}+T \text{ et}$$

$$yy=\frac{1}{2\pi}tt\Phi+\frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi+2\int t\,dT.$$

13. Hoc quidem modo id sumus adepti, vt eadem subnormalis t conueniat infinitis curuae punctis I, K, L, M etc. verum hac proprietate nondum tota problematis natura exhauritur; siquidem aequalitas subnormalium non necessario aequalitatem cuiusque applicatae et normalis praecedentis includit. Vt igitur et hanc proprietatem complectamur, quia est $PQ=t$, et

$$PI^2=yy=\frac{1}{2\pi}tt\Phi+\frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi+2\int t\,dT$$

erit quadratum normalis QI, ideoque et applicatae sequentis QK,

$$QK^2=tt+\frac{1}{2\pi}tt\Phi+\frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi+2\int t\,dT$$

qui idem valor resultare debet, si in expressione ipsius PI^2 loco Φ scribatur $2\pi+\Phi$. At hoc reuera euenit, dum-

dummodo formulae integrales $\frac{1}{2\pi}\int ttd\Phi + 2\int tdT$ nullam mutationem subeant, si loco Φ scribatur $2\pi + \Phi$. Quare necesse est, vt formula $\frac{1}{2\pi}\int ttd\Phi + 2\int tdT$ sit functio quantitatum $\sin.\Phi$ et $\cos.\Phi$, et quidem vniformis, ne eidem abscissae plures applicatae respondeant.

14. Cum autem T et t sint huiusmodi functiones ipsarum $\sin.\Phi$ et $\cos.\Phi$, erit et Tt huiusmodi; vnde cum sit

$$\frac{1}{2\pi}\int ttd\Phi + 2\int tdT = 2Tt + \frac{1}{2\pi}\int tt\Phi - 2\int Tdt$$

denotet V quoque functionem $\sin.\Phi$ et $\cos.\Phi$, ac ponatur

$$\frac{1}{2\pi}\int ttd\Phi - 2\int Tdt = 2V$$

fietque $T = \frac{ttd\Phi}{4\pi dt} - \frac{dV}{dt}$.
Quare si t et V sint functiones quaecunque vniformes formularum $\sin.\Phi$ et $\cos\Phi$, problemati proposito satisfiet perfecte per sequentes coordinatarum expressiones:

$$x = \frac{t\Phi}{2\pi} + \frac{ttd\Phi}{4\pi dt} - \frac{dV}{dt}$$
$$yy = \frac{tt\Phi}{2\pi} + \frac{t^3 d\Phi}{2\pi dt} + \frac{2tdV}{dt} + 2V$$

quae solutionem generalissimam continent. Hinc autem patet, nullas lineas algebraicas exhiberi posse, quae problemati satisfaciant, circulo scilicet excepto, quem modo prorsus singulari problema soluere vidimus.

15. Vt exemplum talis curuae in medium afferamus, ponamus

$t = a(1 - n\cos.\Phi)$, erit $dt = nad\Phi\sin.\Phi$, et $\frac{tt}{dt} = \frac{a(1-n\cos.\Phi)^2}{nd\Phi\sin.\Phi}$, vnde

vnde $\frac{t t d \Phi}{4 \pi d t} = \frac{a(1 - n \cos. \Phi)^2}{4 n \pi \sin. \Phi}$. Statuatur iam $V = \frac{a a}{4 \pi}(\alpha + \beta \sin. \Phi + \gamma \sin. \Phi \cos. \Phi)$, erit $dV = \frac{a a d \Phi}{4 \pi}(\beta \cos. \Phi + 2 \gamma \cos. \Phi^2 - \gamma)$, atque

$$\frac{t t d \Phi}{4 \pi d t} - \frac{d V}{d t} = \frac{a}{4 n \pi \sin. \Phi}(1 - 2 n \cos. \Phi + n n \cos. \Phi^2 + \gamma - \beta \cos. \Phi - 2 \gamma \cos. \Phi^2).$$

Quo nunc $\sin. \Phi$ hinc ex denominatore abeat, quia alioquin casu $\Phi = 0$ et $\Phi = \pi$ expressio fieret infinita, ponamus $\beta = -2 n$, et $1 + \gamma = + 2 \gamma - n n$, seu $\gamma = + n n + 1$, obtinebimusque

$$\frac{t t d \Phi}{4 \pi d t} - \frac{d V}{d t} = \frac{(n n + 2) a \sin. \Phi}{4 n \pi} \text{ et } x = \frac{a \Phi(1 - n \cos. \Phi)}{2 \pi} + \frac{(n n + 2) a \sin. \Phi}{4 n \pi}.$$

16. Porro vero erit $\frac{t t \Phi}{2 \pi} = \frac{a a \Phi(1 - n \cos. \Phi)^2}{2 \pi}$, et $\frac{t^2 d \Phi}{2 \pi d t} - \frac{2 t d V}{d t} = \frac{(n n + 2) a a \sin. \Phi(1 - n \cos. \Phi)}{2 n \pi}$, vnde fit

$$y y = \frac{a a \Phi(1 - n \cos. \Phi)^2}{2 \pi} + \frac{(n n + 2) a^2 \sin. \Phi(1 - n \cos. \Phi)}{2 n \pi}$$
$$+ \frac{a a}{2 \pi}(\alpha - 2 n \sin. \Phi + (n n + 1) \sin. \Phi \cos. \Phi),$$

quae expressio reducitur ad hanc:

$$y y = \frac{a a \Phi(1 - n \cos. \Phi)^2}{2 \pi} + \frac{\alpha a a}{2 \pi} + \frac{a a \sin. \Phi}{2 n \pi}(2 - n n - n \cos. \Phi).$$

Pro exemplo magis speciali ponamus $n = 1$, et pro coordinatis habebimus, facto $\alpha = 0$,

$$x = \frac{a \Phi(1 - \cos. \Phi)}{2 \pi} + \frac{3 a \sin. \Phi}{2 \pi} + \frac{a}{2 \pi}(\Phi(1 - \cos. \Phi) + \tfrac{3}{2} \sin. \Phi)$$
$$y y = \frac{a a \Phi(1 - \cos. \Phi)^2}{2 \pi} + \frac{a a}{2 \pi} \sin. \Phi(1 - \cos. \Phi) = \frac{a a}{2 \pi}(1 - \cos. \Phi)$$
$$(\Phi(1 - \cos. \Phi) + \sin. \Phi)$$

fietque subnormalis $\frac{y d y}{d x} = t = a(1 - \cos. \Phi)$
vnde figura curuae iam quodammodo colligi, ac per cognitas subnormales construi poterit.

17. Curua autem adhuc fimplicior obtinetur, fi ponamus $t = \frac{2a\,\text{fin.}\,\Phi}{1+\text{cof.}\,\Phi}$, feu $t = 2a\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi$, tum enim fit $dt = \frac{ad\Phi}{\text{cof.}\,\frac{1}{2}\Phi^2}$ et $\frac{ttd\Phi}{dt} = 4a\,\text{fin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2$, ideoque $\frac{ttd\Phi}{4\pi dt} = \frac{a}{\pi}\,\text{fin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2$; vnde erit

$$x = \frac{a}{\pi}\Phi\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi + \frac{a}{\pi}\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2 - \frac{dV\,\text{cof.}\,\frac{1}{2}\Phi^2}{ad\Phi}$$

$$yy = \frac{2aa}{\pi}\Phi\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2 + \frac{4aa}{\pi}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2 - \frac{4dV}{d\Phi}\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\Phi + 2V$$

ftatuatur $V = 2ab\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi$, vt fit $dV = \frac{abd\Phi}{\text{cof.}\,\frac{1}{2}\Phi^2}$ hincque

$$x = \frac{a}{\pi}\Phi\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi + \frac{a}{\pi}\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2 - b$$

$$yy = \frac{2aa}{\pi}\Phi\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2 + \frac{4aa}{\pi}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2$$

vbi patet fine detrimento amplitudinis poni poffe $b=0$, ita vt fit

$$x = \frac{a}{\pi}(\Phi\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi + \text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2)$$

$$yy = \frac{2aa}{\pi}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi(\Phi\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi + 2\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2)$$

vnde erit $yy - 2ax\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi = \frac{2aa}{\pi}\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi\,\text{fin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2$. Quare cum fit $\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi = \frac{t}{2a} = \frac{ydy}{2adx}$ et $\text{fin.}\,\frac{1}{2}\Phi = \frac{ydy}{\surd(4aadx^2+yydy^2)}$, hinc aequatio differentialis inter ipfas coordinatas x et y elicietur, quae eft

$$\frac{\pi}{a}(ydx - xdy) = \frac{yydy^2}{4aadx^2+yydy^2}.$$

18. Hoc autem problemate foluto per easdem formulas quoque fequens problema latius patens folui poterit:

Proble-

Problema 2.

Super axe AV *eiusmodi construere lineam curuam* EO, *vt ducta ad quoduis punctum* I *normali* IQ, *applicatae ex puncto* Q *eductae* QK *quadratum superet quadratum ipsius normalis* QI *dato spatio* cc, *seu vt sit* $QK^2 = QI^2 + cc$. Tab. I. Fig. 2.

Cum etiam hoc casu omnes subnormales successiuae PQ, QR, RS etc. sint inter se aequales, vti ex praecedente demonstratione facile intelligitur; quandoquidem subnormalis $\frac{y\,dy}{dx} = t$ eadem prodit, etiamsi quadratum applicatae yy, quantitate constante siue augeatur siue minuatur: in superiori solutione omnia manebunt inuariata vsque ad finem §. 12. Quare sumtis pro t et T functionibus vniformibus formularum sin. Φ et cos. Φ, pro determinatione coordinatarum $AP = x$, $PI = y$ habebimus:

$$x = \frac{t\Phi}{2\pi} + T$$

$$yy = \frac{1}{2\pi}tt\Phi + \frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi + 2Tt - 2\int T\,dt.$$

19. Cum iam pro primo problemate formulas integrales $\frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi - 2\int T\,dt$ aequauerimus functioni vniformi ipsarum sin. Φ et cos. Φ, hic rem generalius expediri oportet. Quoniam vero t et T sunt functiones vniformes ipsarum sin. Φ et cos. Φ, huiusmodi integralia praeter tales functiones insuper ipsum angulum Φ complecti possunt, ita vt haec positio latissime pateat:

$$\frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi - 2\int T\,dt = \frac{C\Phi + V}{2\pi}$$

vnde fit $T = \frac{tt\,d\Phi - C\,d\Phi - dV}{4\pi\,dt}$

denotante V functionem quamcunque vniformem ipsarum sin. Φ et cos. Φ. Hoc modo pro omnibus curuis, in quibus subnormales successiuae PQ, QR, RS etc. sunt inter se aequales, prodibunt sequentes coordinatarum determinationes:

$$x=\frac{t\Phi}{2\pi}+\frac{ttd\Phi-Cd\Phi-dV}{4\pi dt}$$

$$yy=\frac{tt\Phi}{2\pi}+\frac{t^3d\Phi-Ctd\Phi-tdV}{2\pi dt}+\frac{C\Phi+V}{2\pi}$$

vnde differentia inter quadrata cuiusque normalis et applicatae sequentis existit constans.

20 Posita igitur abscissa $AP=x$, cum sit $PI^2=\frac{tt\Phi+C\Phi+V}{2\pi}+\frac{t^3d\Phi-Ctd\Phi-tdV}{2\pi dt}$, erit, ob $PQ=t$, $QI^2=\frac{2\pi tt+tt\Phi+C\Phi+V}{2\pi}+\frac{t^3d\Phi-Ctd\Phi-tdV}{2\pi dt}$.
Posito autem $2\pi+\Phi$ loco Φ valor, ipsius PI^2 abit in QK^2, vnde fit

$$QK^2=\frac{2\pi tt+2\pi C+tt\Phi+C\Phi+V}{2\pi}+\frac{t^3d\Phi-Ctd\Phi-tdV}{2\pi dt}$$

ideoque $QK^2-QI^2=C$. Cum igitur debeat esse $QK^2=QI^2+cc$, capiendum est $C=cc$, vnde solutio ad problema propositum accommodata erit:

$$x=\frac{t\Phi}{2\pi}+\frac{(tt-cc)d\Phi-dV}{4\pi dt}$$

$$yy=\frac{(tt+cc)\Phi+V}{2\pi}+\frac{t(tt-cc)d\Phi-tdV}{2\pi dt}$$

vbi pro t et V functiones quaecunque vniformes quantitatum sin. Φ et cos. Φ assumi possunt.

21. Si ex his aequationibus ipse angulus Φ eliminetur, obtinebitur haec aequatio:

$$tyy-(tt+cc)x=\frac{tV}{2\pi}+\frac{(tt-cc)^2d\Phi-(tt-cc)dV}{4\pi dt}$$

ex qua si quantitates sin. Φ et cos. Φ hincque ipse angulus Φ definiatur, eorumque valores in altera priorum aequa-

aequationum substituantur, reperietur aequatio inter coordinatas x et y, quae autem ob angulum Φ erit transcendens. Vnicus vero datur casus, quo curua prodit algebraica, qui locum habet, si post eliminationem anguli Φ simul quantitates a $\sin.\Phi$ et $\cos.\Phi$ pendentes ex calculo abeant, quod vsu venit, si fuerit $t=c$ et $V=0$, seu $V=$ Constanti; tum enim postrema aequatio statim praebet inter x et y hanc aequationem:

$$cyy-2ccx=C, \quad \text{seu } yy=2cx+C$$

statim autem perspicitur, parabolam huic problemati satisfacere, cum eius subnormalis sit constans. At reliquae curuae omnes problemati satisfacientes sunt transcendentes.

22. Vt etiam curuae transcendentis exemplum addamus, et quidem tale, quod casum parabolae in se complectatur, ponamus

$$t=c-a\cos.\Phi \text{ et } V=-2ac\sin.\Phi+aa\sin.\Phi\cos.\Phi,$$

vnde fit

$$dt=ad\Phi\sin.\Phi \text{ et } dV=-2acd\Phi\cos.\Phi+2aad\Phi\cos.\Phi^2-aad\Phi$$

quibus valoribus substitutis adipiscemur:

$$x=\frac{(c-a\cos.\Phi)\Phi}{2\pi}+\frac{a\sin.\Phi}{4\pi}$$

$$yy=\frac{(2cc-2ac\cos.\Phi+aa\cos.\Phi^2)\Phi}{2\pi}-\frac{ac\sin.\Phi}{2\pi}$$

vnde si capiatur $a=0$, fit

$$x=\frac{c\Phi}{2\pi} \text{ et } yy=\frac{2cc\Phi}{2\pi}, \text{ ideoque } yy=2cx.$$

In genere autem erit

$$yy-2cx=\frac{aa\Phi}{2\pi}\cos.\Phi^2-\frac{ac\sin.\Phi}{\pi} \text{ et}$$

$$yy+2cx=\frac{(2c-a\cos.\Phi)^2\Phi}{2\pi}$$

 vbi

vbi notandum eſt, quo minor valor ipſi a tribuatur, eo propius curuam ad figuram parabolae eſſe acceſſuram.

23. Duo haec problemata in hoc vno comprehendi potuiſſent, vt curuae quaererentur, in quibus ſubnormales ſucceſſiuae PQ, QR, RS, ST etc. eſſent inter ſe aequales. Simul enim atque haec proprietas in quapiam curua locum habet, quadratum cuiusque applicatae a quadrato normalis praecedentis quantitate conſtante differt, quae ergo ſiue ſit euaneſcens, vt in problemate primo, ſiue data, vti in ſecundo, determinationem minus eſſentialem inuoluit; problema enim fieret impoſſibile, ſi iſta differentia, neque euaneſcens, neque conſtans, eſſe deberet. Verum inter has ſubnormales ſucceſſiuas PQ, QR, RS etc. aliae leges progreſſionis conſtitui poſſunt, vnde problemata alia non parum curioſa naſcentur. Hinc autem binas progreſſionis leges ſum contemplaturus, alteram arithmeticam, alteram geometricam, quoniam hinc methodus alia huiusmodi problemata ſoluendi facile colligi poterit.

Problema 3.

Tab. I. Fig. 2. 24. *Si ad terminum cuiusque ſubnormalis applicata conſtituatur, vt ex quouis curuae puncto* I *ſeries infinita huiusmodi ſubnormalium ſucceſſiuarum* PQ, QR, RS *etc. oriatur, inuenire eas lineas curuas, in quibus iſtae ſubnormales ſucceſſiuae progreſſionem arithmeticam conſtituant.*

Pro variabili principali aſſumatur angulus Φ reſpondens curuae puncto I, qui ſi creſcendo abeat in

$2\pi + \Phi$, $4\pi + \Phi$, $6\pi + \Phi$ etc. respondeat punctis curuae sequentibus K, L, M etc. Horum autem singulorum angulorum, tam sinus, quam cosinus, esse eosdem, euidens est. Quare si litterae P, Q, R, S etc. denotent functiones quascunque quantitatum $\sin.\Phi$ et $\cos\Phi$, eae communes erunt omnibus curuae punctis I, K, L, M etc. ac pro omnibus eosdem valores retinebunt. Quod si ergo subnormalis prima PQ statuatur $= P\Phi + Q$, erit secunda $QR = 2\pi P + P\Phi + Q$, tertia $RS = 4\pi P + P\Phi + Q$, quarta $ST = 6\pi P + P\Phi + Q$ etc. sicque istae subnormales successiuae progressionem arithmeticam constituent, cuius differentia est $= 2\pi P$, vti problema postulat. Vnde si in cunctis his subnormalium progressionibus eadem esse debeat differentia, functionem P constantem esse oportet.

25. Quoniam autem ipsae hae subnormales differentias praebent abscissarum successiuarum AP, AQ, AR, AS etc. statuatur abscissa prima

$$AP = x = L\Phi^2 + M\Phi + N$$

existentibus L, M, N functionibus ipsarum $\sin.\Phi$ et $\cos\Phi$, eritque abscissa secunda

$$AQ = L\Phi^2 + M\Phi + N + 4\pi L\Phi + 4\pi\pi L + 2\pi M$$

vnde fit differentia

$$PQ = 4\pi L\Phi + 4\pi\pi L + 2\pi M$$

quae cum aequalis esse debeat primae subnormali $PQ = P\Phi + Q$, erit

$$P = 4\pi L \text{ et } Q = 4\pi\pi L + 2\pi M$$

hocque

hocque modo simul sequentes subnormales fiunt differentiae abscissarum sequentium. Hinc igitur sumta pro prima abscissa expressione

$$AP = x = L\Phi^2 + M\Phi + N, \text{ subnormalis erit}$$

$$PQ = 4\pi L\Phi + 4\pi\pi L + 2\pi M = t$$

et sequentes secundum differentiam $8\pi\pi L$ progrediuntur.

26. Ponamus nunc applicatam curuae $PI = y$, et quia ex subnormali $PQ = t$ habetur $\frac{y\,dy}{dx} = t$, erit $yy = 2\int t\,dx$, ideoque

$$yy = 4\pi\int(2L\Phi + 2\pi L + M)(\Phi\Phi dL + 2\Phi L d\Phi + \Phi dM + M d\Phi + dN)$$

quae formula euoluta praebet:

$$yy = 4\pi\int\left\{\begin{array}{l} 2L\Phi^3 dL + 4LL\Phi^2 d\Phi + 2LM\Phi d\Phi + 2\pi LM d\Phi \\ \qquad + 2L\Phi^2 dM + 2L\Phi dN + 2\pi L dN \\ \qquad + 2\pi L\Phi^2 dL + 4\pi LL\Phi d\Phi + MM d\Phi \\ \qquad + M\Phi^2 dL \quad + 2\pi L d\Phi M + \quad M dN \\ \qquad\qquad + 2LM\Phi d\Phi \\ \qquad\qquad + M\Phi dM \end{array}\right\}$$

quae siue integrari potest, siue secus, semper valorem idoneum pro applicata y praebet. Veluti si ponatur $M = 0$, et $N = 0$, at L statuatur constans, vt sit $x = L\Phi^2$, erit

$$yy = 4\pi\int(4LL\Phi^2 d\Phi + 4\pi LL\Phi d\Phi), \text{ seu}$$

$$yy = \tfrac{16}{3}\pi LL\Phi^3 + 8\pi\pi LL\Phi^2 + \text{Const.}$$

Cum ergo sit $\Phi = \sqrt{\frac{x}{L}}$, erit $yy = \frac{16}{3}\pi x\sqrt{Lx} + 8\pi\pi Lx + \text{Const.}$ Sit $8\pi\pi L = a$; fiet $yy = \frac{4}{3}x\sqrt{2ax} + ax + ab$, pro curua algebraica ordinis quarti.

Proble-

Problema 4.

27. *Si ad terminum cuiusque subnormalis applicata constituatur, vt a quouis curuae puncto* t *incipiendo series infinita subnormalium successiuarum* PQ, QR, RS *etc. proueniat, inuenire eos casus, quibus istae subnormales constituant progressionem geometricam, cuius exponens sit datus* $= n$.

Posita ergo prima subnormali $PQ = t$, requiritur, vt sit secunda $QR = nt$, tertia $RS = n^2 t$, quarta $ST = n^3 t$, et ita porro, sumatur iterum angulus Φ pro variabili puncto I respondente, ita vt punctis sequentibus K, L, M etc. respondeant anguli $2\pi + \Phi$, $4\pi + \Phi$, $6\pi + \Phi$ etc. quorum omnium idem est sinus $= \sin \Phi$, idemque cosinus $= \cos. \Phi$; atque functiones quaecunque vniformes ipsarum $\sin. \Phi$ et $\cos. \Phi$ illis curuae punctis infinitis I, K, L, M etc. aeque conuenient, cuiusmodi functiones litteris maiusculis P, Q, R etc. indicemus. Problemati ergo satisfiet, si ponamus $t = n^{\frac{\Phi}{2\pi}} P$, tum enim posito $\Phi + 2\pi$ loco Φ, subnormalis secunda erit $= n^{\frac{\Phi + 2\pi}{2\pi}} P = nt$, similique modo sequentes praescriptam progressionem geometricam constituent.

28. Pro abscissa igitur $AP = x$ assumi debet huiusmodi expressio $x = \frac{1}{n-1} \cdot n^{\frac{\Phi}{2\pi}} P + Q$, vt posito $\Phi + 2\pi$ pro Φ, abscissa AP abeat in $AP + PQ$; vnde si vocemus applicatam $PI = y$, ob $\frac{y\,dy}{dx} = t$, habebimus $yy = 2\int t\,dx$, ideoque:

$$yy = \frac{1}{n-1} n^{\frac{\Phi}{\pi}} PP + 2\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} P\,dQ.$$

 Quare

Quare pro curuis problemati satisfacientibus assecuti sumus has formulas generales:

$$x = \frac{1}{n-1} n^{\frac{\Phi}{2\pi}} P + Q$$

$$yy = \frac{1}{n-1} n^{\frac{\Phi}{\pi}} PP + 2\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} P\,dQ$$

vnde si sit $Q=0$, et pro $2\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} P\,dQ$ scribatur $\pm aa$, obtinetur statim curua algebraica hac aequatione contenta:

$$yy \pm aa = (n-1)xx$$

quae praebet hyperbolam, ac, si fuerit $a=0$, lineam rectam $y = x\sqrt{(n-1)}$.

29. Euoluamus etiam exemplum curuae transcendentis sitque $P=a$ et $Q=b\,\text{sin.}\,\Phi$, vt sit

$$x = \frac{a}{n-1} n^{\frac{\Phi}{2\pi}} + b\,\text{sin.}\,\Phi, \text{ et } yy = \frac{aa}{n-1} n^{\frac{\Phi}{\pi}} + 2ab\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{cos}\,\Phi$$

Cum autem sit

$$\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{cos.}\,\Phi = n^{\frac{\Phi}{2\pi}}\text{sin.}\,\Phi - \frac{l\,n}{2\pi}\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{sin.}\,\Phi \text{ et}$$

$$\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{sin.}\,\Phi = -n^{\frac{\Phi}{2\pi}}\text{cos.}\,\Phi + \frac{l\,n}{2\pi}\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{cos.}\,\Phi, \text{ erit}$$

$$\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{cos}\,\Phi = n^{\frac{\Phi}{2\pi}}\text{sin.}\,\Phi + \frac{l\,n}{2\pi} n^{\frac{\Phi}{2\pi}}\text{cos.}\,\Phi - \left(\frac{l\,n}{2\pi}\right)^2 \int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{cos.}\,\Phi$$

Quoniam igitur haec integratio ad se ipsam reducitur, si breuitatis gratia ponamus $\frac{l\,n}{2\pi} = \lambda$, adipiscimur

$$\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{cos.}\,\Phi = \frac{n^{\frac{\Phi}{2\pi}}(\text{sin.}\,\Phi + \lambda\,\text{cos.}\,\Phi)}{1+\lambda\lambda}$$

hincque

hincque curua quaesita his formulis determinabitur:

$$x = \frac{a}{n-1} n^{\frac{\Phi}{2\pi}} + b \sin. \Phi$$

$$yy = \frac{aa}{n-1} n^{\frac{\Phi}{\pi}} + \frac{2ab}{1+\lambda\lambda} n^{\frac{\Phi}{2\pi}} (\sin \Phi + \lambda \cos. \Phi) \pm cc$$

vnde, eliminanda quantitate exponentiali, fit

$$yy \mp cc = \frac{(n-1)(x - b \sin. \Phi)}{1+\lambda\lambda} ((1+\lambda\lambda)x + (1-\lambda\lambda) b \sin. \Phi + 2\lambda b \cos. \Phi).$$

30. Solutione autem horum quatuor problematum methodum aperuisse videor, cuius ope alia quoque huius generis problemata resolui queant, in quibus scilicet simul ad infinita lineae curuae inuestigandae puncta est respiciendum. Methodus vero ista in hoc consistit, quod loco primariae variabilis accipi debeat angulus Φ, qui, dum continuo quaternis rectis augetur, successiue conueniat singulis illis punctis; quoniam enim hi anguli omnes Φ, $2\pi + \Phi$, $4\pi + \Phi$ $6\pi + \Phi$, etc. eundem habent sinum $= \sin. \Phi$, eundemque cosinum $= \cos. \Phi$, functiones quaecunque vniformes harum duarum quantitatum omnibus illis punctis correlatis aeque conuenient. Per compositionem autem idoneam talium functionum, vna cum ipso angulo Φ, huiusmodi problematum solutiones sunt suscipiendae, eo modo, quo in his quatuor problematibus sum vsus.

DILVCIDATIONES
DE TAVTOCHRONIS IN MEDIO RESISTENTE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Difficillima est quaestio de inueniendis curuis tautochronis in medio resistente, quae scilicet hanc habeant proprietatem, vt corpus super iis descendens semper eodem tempore ad punctum infimum perueniat, ex quocunque curuae puncto descensum inceperit. Curua autem hac proprietate praedita vocari solet *tautochrona descensuum*; dum ea curua, quae ad ascensus aequidiurnos est accommodata, *tautochrona ascensuum* appellatur. Neque enim hae duae curuae in medio resistente, vti fit in vacuo, inter se conueniunt; verum vtraque seorsim inuestigari debet, vbi quidem commode vsu venit, vt, si altera fuerit reperta, eadem methodo altera expedite assignari possit; ex quo sufficiet, hanc inquisitionem, vel pro solo descensu, vel ascensu, suscepisse.

2. Pro vacuo quidem *Hugenius* immortalem laudem est assecutus, dum demonstrauit, in motu corporum super cycloide, tam omnes descensus, quam ascensus, aequalibus absolui temporibus. Deinde *Newtonus* ostendit, eandem tautochronismi proprietatem cycloidi etiam nunc

conue-

conuenire in medio, quod resistat in ratione simplici celeritatum, ita vt etiam hoc casu tautochrona ascensuum non discrepet a tautochrona descensuum, perinde vti fit in vacuo. Hanc insignem cycloidis proprietatem *Newtonus* geometrice demonstrauit, quo ipse summas difficultates, quae in inuestigatione Analytica occurrunt, feliciter superauit. Neque vero ambo hi summi Viri quaestionem a priori aggressi negotium confecerunt, sed, dum sibi proposuerant, motum corporum super cycloide scrutari, quasi praeter expectationem tautochronismi proprietatem deprehenderunt.

3. In aliis medii resistentis hypothesibus diu frustra tautochronae sunt inuestigatae, donec tandem mihi contigit, pro mediis, quae in duplicata ratione celeritatum resistunt, tautochronas definire, in quo quidem negotio vsus sum methodo directa, quae me ad cognitionem harum curuarum deduxit. Verum haec methodus ita est comparata, quoniam expressionem finitam pro celeritate corporis in quouis curuae loco requirit, vt ad alias resistentiae hypotheses, quibus talem expressionem exhibere non licet, accommodari non possit. Neque etiam ei locus relinquitur in medio, cuius resistentia ipsam celeritatum rationem sequitur, etsi aliunde constet tautochronismi proprietatem in cycloidem competere. Interim tamen, si resistentia sit quam minima, per methodum approximandi in omnibus hypothesibus tautochronas assignaui, quod argumentum fusius pertractaui in Mechanicae meae Tomo secundo. Inde tamen nullum subsidium suppeditabatur ad tautochronas determinandas, si resistentia fuerit ma-

 ior;

ior; ita vt hoc problema pro aliis hypothesibus praeter eas, quae vel ipsis celeritatibus, vel earum quadratis sint proportionales, adhuc pro insoluto sit habendum.

4. Quoniam autem hae duae hypotheses diuersissimas methodos requirunt, eaque methodus, qua tautochronam in medio, quod resistit in duplicata ratione celeritatum, elicui, nullum vsum praestat in medio, quod in ipsa celeritatum ratione resistit; haud parum is praestitisse erit censendus, qui eiusmodi methodum tradiderit, quae ad ambas has hypotheses pari cum successu adhiberi queat. Talem autem methodum Clar. *Fontainio* acceptam referre debemus, quae vti a summa ingenii sagacitate est profecta, ita etiam omnino digna videtur, quae diligentius perpendatur, eiusque vsus vberius explicetur; praesertim cum eius ope etiam in medio, cuius resistentia partim rationem simplicem, partim rationem duplicatam, celeritatum sequitur, tautochrona inueniri possit, quod mea methodo praestari nequit.

Tab. I. Fig. 4. 5. In curua igitur tautochrona inuestiganda Vir Celeberrimus considerat duos arcus AF et AF′ infinite parum a se inuicem discrepantes, in eamque curuae affectionem inquirit, vt tempora, quibus hi arcus absoluuntur, fiant inter se aequalia. Ponamus ergo arcum $AF = a$, et $AF' = a + da$, vt sit $FF' = da$; et quoniam duos motus per AF et AF′ eodem tempore absoluendos inter se comparari oportet, sit t portio quaecunque indefinita huius temporis, cui in motu per AF respondeat arcus $AM = s$, in altero autem motu per

AF′

AF' arcus $AM' = s'$; ita vt in motu per AF arcus AM, et in motu per AF' arcus AM', eodem tempore t percurratur. Ex quo sequitur, si tempus t euanescat, vtrumque arcum $AM = s$ et $AM' = s'$ in nihilum abire, ideoque eorum differentiam $MM' = s' - s$ euanescere debere; sin autem pro t assumatur tempus totius motus, necesse est, vt tum arcus $AM = s$ abeat in $AF = a$, et arcus $AM' = s'$ in $AF' = a + da$; eorumque ergo differentia MM' fiat $= da$. Crescente ergo arcu AM crescet particula $MM' = s' - s$, ita, vt sumto $s = 0$, fiat $s' - s = 0$, et sumto $s = a$, fiat $s' - s = da$.

6. Quodsi autem arcus indefinitus $AM = s$ valorem quemcunque minorem quam AF obtineat, differentia $MM' = s' - s$ minor erit quam $FF' = da$, atque a da ita pendebit, vt quo maius extiterit elementum FF', in eadem ratione elementum MM' crescat. Statuatur ergo $MM' = s' - s = Q da$; et quantitas Q pendebit certo quodam modo, tam ab arcu $AM = s$, quam ab arcu toto $AF = a$, ita vt si fiat $s = 0$, simul ipsa euanescat, at posito $s = a$ vt euadat $Q = 1$. Quare cum Q sit functio quantitatum s et a, posita vtraque variabili, statuatur $dQ = M ds + N da$. Vnde patet, si arcui $AM = s$ incrementum tribuatur ds, manente puncto F fixo, tum functionem Q abire in $Q + M ds$. Capiatur ergo $Mm = ds$, simulque $M'm' = ds'$; et cum sit $\frac{MM'}{da} = Q$, pro statu proximo, quo s abit in $s + ds$, habebitur $\frac{mm'}{da} = Q + M ds$; ideoque $M ds = \frac{mm' - MM'}{da} = \frac{ds' - ds}{da}$. Hinc igitur indoles

doles functionis Q nobis praebet $ds' - ds = M ds da$, cum esset $s' - s = Q da$, existente $dQ = M ds + N da$.

7. Ponamus iam in motu per arcum AF celeritatem corporis in M esse $= v$, et in $m = v + dv$, ita vt curuae elementum Mm conficiatur tempusculo $dt = \frac{ds}{v}$; eodem autem tempusculo necesse est, vt in motu per arcum AF$'$ conficiatur elementum $M'm' = ds'$: si ergo in hoc motu statuatur celeritas corporis in $M' = v'$, et in $m' = v' + dv'$, erit etiam $dt = \frac{ds'}{v'}$, vnde sequitur, fore $\frac{ds'}{v'} = \frac{ds}{v}$; hincque $v' = \frac{v\,ds'}{ds}$; et $v' - v = \frac{v(ds' - ds)}{ds} = M v da$, ob $ds' - ds = M ds da$. Quam ob rem habebimus $v' = v(1 + M da)$, sicque si functio Q esset cognita, ex celeritate in puncto M pro motu per AF innotesceret celeritas in puncto homologo M' pro motu per AF$'$, sumtis arcubus AM et AM$'$ in vtroque motu isochronis. Verum ex ratione resistentiae et viribus sollicitantibus per principia motus elicitur aequatio differentialis, qua acceleratio elementaris in vtroque motu per AF et AF$'$ definitur. Posito ergo $dM = L ds$, dum arcus s incrementum ds capit, celeritasque v abit in $v + dv$, erit $dv' = dv(1 + M da) + L v ds da$.

8. His pro conditione motus ad tautochronismum obtinendum in genere praemissis, progrediamur ad ipsam motus determinationem, ac tantum quidem consideremus casum grauitatis naturalis, qua corpus perpetuo deorsum vrgetur, quia vires sollicitantes absolutae inuestigationem tautochronarum parum afficiunt; resistentia vero sit functioni cuicunque celeritatis v, quae denotetur per V, proportionalis, designetque V$'$ similem

lem functionem ipsius v'. Hunc in finem capiatur axis verticalis AE, super quo sit abscissa arcui $AM = s$ respondens $AP = x$; ac natura curuae certa quadam relatione inter s et x continebitur, quae vbique immunis esse debet a quantitate arcus $AF = a$, quandoquidem vtcunque arcus a varietur, omnes siue ascensus siue descensus toti eodem tempore super eadem curua absolui debent. Si igitur ponamus $dx = p\,ds$, necesse est, vt quantitas p arcum a non inuoluat, sed sit functio ipsius s tantum, et quantitatum vere constantium.

9. Nunc autem, posita littera g pro grauitate deorsum sollicitante, leges motus pro motu per arcum AF praebent hanc aequationem:

$$2v\,dv = -g\,dx \pm V\,ds = -gp\,ds \pm V\,ds$$

vbi signum superius ad descensum, inferius vero ad ascensum refertur. Neglecta ergo hac ambiguitate, quippe quae commode ipsi quantitati V inuoluitur, consideremus hanc aequationem:

$$2v\,dv = -gp\,ds + V\,ds,$$

ex qua pro motu per arcum AF′ habebimus hanc:

$$2v'\,dv' = -gp'\,ds' + V'\,ds',$$

quae ex illa nascitur, si pro v scribamus v', et arcui s incrementum tribuamus $s' - s = Q\,da$. Quodsi ergo p eiusmodi sit functio ipsius s, vt fiat $dp = q\,ds$, erit $p' = p + qQ\,da$. Tum vero iam obtinuimus $ds' = ds(1 + M\,da)$ $v' = v(1 + M\,da)$ et $dv' = dv(1 + M\,da) + Lv\,ds\,da$.

10. Substituamus igitur hos valores in posteriori aequatione, ac prodibit

$$2vdv(1+Mda)^2+2Lvvdsda(1+Mda)=-gpds(1+Mda)$$
$$-gqQdsda(1+mda)+V'ds(1+Mda)$$

quae per $(1+Mda)^2$ diuisa dat

$$2vdv=-\frac{2Lvvdsda-gpds-gqQdsda+V'ds}{1+Mda}.$$

Cum igitur ex priori sit $2vdv=-gpds+Vds$, erit aequatione facta,

$$-2Lvvdsda-gqQdsda+V'ds=-gpMdsda$$
$$+V'ds+Vdsda$$

quae per $dsda$ diuisa praebet

$$2Lvv+gqQ-gpM+MV=\tfrac{1}{da}(V'-V).$$

Totum ergo hoc negotium huc redit, vt ista aequatio conficiatur, quod quo commodius fieri possit, cum sit V functio ipsius v, ponamus $dV=Udv$, et cum V' oriatur ex V, si pro v ponatur $v'=v+Mvda$, erit $V'=V+MUvda$, nostra aequatio adimplenda erit

$$2Lvv+gqQ-gpM+MV-MUv=0,$$

cui quomodo satisfieri possit, in sequentibus exemplis videamus.

Problema I.

11. In hypothesi grauitatis vniformis g, si nulla fuerit resistentia, corpusue in vacuo moueatur, inuenire curuam tautochronam.

Solutio.

Quia resistentia est nulla, erit $V=0$, et $U=0$, ideoque habebitur haec aequatio:

$$2Lvv+gqQ-gpm=0$$

vbi

vbi est $dp = qds$; tum vero $dQ = Mds$, et $dM = Lds$, siquidem a pro constante accipiatur; vbi notandum est, quantitates Q M et L inuoluere posse a, at p et q ab a liberas esse debere. Cum igitur v tantum insit in primo termino, fiat $L = 0$, eritque $M = f$ et $Q = fs + g$; quia vero posito $s = 0$ fieri oportet $Q = 0$, et casu $s = a$, $Q = 1$; euidens est, poni debere $g = 0$; et $f = \frac{1}{a}$; ita vt sit $M = \frac{1}{a}$ et $Q = \frac{s}{a}$, quibus valoribus substitutis aequatio nostra abit in $\frac{gqs}{a} - \frac{gp}{a} = 0$, seu $p = qs$. At est $q = \frac{dp}{ds}$, eritque $pds = sdp$, hincque $p = \frac{s}{c}$, existente c constante, ab a non pendente; ex quo pro curua quaesita resultat haec aequatio: $dx = pds = \frac{sds}{c}$, seu $ss = 2cx$, quae est pro cycloide.

Problema 2.

12. In hypothesi grauitatis vniformis g, si resistentia fuerit constans, seu momentis temporum proportionalis, inuenire curuam tautochronam.

Solutio.

Sit igitur resistentia $V = k$, quae quantitas constans vtique non implicat a, eritque $U = 0$, et aequatio adimplenda est

$$2Lvv + gqQ - gpM + kM = 0$$

existente $dp = qds$; $dQ = Mds$; et $dM = Lds$. Fiat ergo iterum $L = 0$, eritque vt ante $M = \frac{1}{a}$, et $Q = \frac{s}{a}$; vnde adipiscimur hanc aequationem:

$$\frac{gqs}{a} - \frac{gp}{a} + \frac{k}{a} = 0, \text{ seu } gqs - gp + k = 0,$$

 quae

quae per ds multiplicata ob $qds = dp$ praebet

$$gsdp - gpds + kds = 0,$$ et integrando $\frac{gp}{s} = \frac{k}{s} + \frac{g}{c}$

siue $p = \frac{s}{c} + \frac{k}{g} = \frac{dx}{ds}$, vnde denuo integrando obtinebitur $ss + \frac{2kcs}{g} = 2cx$, quae aequatio iterum est pro cycloide, in qua punctum A ibi est capiendum, vbi tangens cum verticali AE angulum facit, cuius cosinus est $= \frac{k}{g}$; nisi ergo resistentia k minor sit grauitate g, quaestio absurdum implicat, ac si esset $k = g$, punctum A in cuspidem cycloidis incideret, arcusque motui destinatus euanesceret.

Problema 3.

13. In hypothesi grauitatis vniformis g, si resistentia ipsis celeritatibus fuerit proportionalis, inuenire curuam tautochronam.

Solutio.

Sit igitur resistentia $V = mv$, erit $U = m$, et aequatio habebitur

$$2Lvv + gqQ - gpM + mvM - mvM = 0$$

quae ergo ad eam, quam pro vacuo inueuimus, reducitur; ita vt esse debeat: $L = 0$, $M = \frac{1}{a}$ et $Q = \frac{s}{a}$, sicque, vt ibi, prodit $p = qs$, porroque $p = \frac{s}{c}$ et $ss = 2cx$. Hoc ergo casu perinde atque in vacuo cyclois tautochronismi proprietatem conseruat.

Problema 4.

14. In hypothesi grauitatis vniformis g, si resistentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis, inuenire curuam tautachronam.

Solutio.

Solutio.

Statuatur resistentia $V = nv^2$, vt sit $U = 2nv$, habebiturque haec aequatio:

$$2Lvv + gqQ - gpM + nMv^2 - 2nMv^2 = 0$$

seu $2Lvv - nMv^2 + g(qQ - pM) = 0$.

Iam primo vt termini continentes vv tollantur, fiat $2L = nM$, et cum sit $dQ = Mds$ et $dM = Lds$, considerata hic quantitate a vt constante, conficietur $2Lds = 2dM = nMds$, et integrando $M = \alpha e^{\frac{ns}{2}}$, porroque $Q = \frac{2\alpha}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1)$, vt fiat $Q = 0$, si $s = 0$, at quia sumto $s = a$, fieri debet $Q = 1$, erit $\alpha = \frac{n}{2(e^{\frac{na}{2}} - 1)}$.

His autem valoribus inuentis consequimur

$qQ - pM = 0$, quae per α diuisa dat

$\frac{2q}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) = e^{\frac{ns}{2}}p$, et per ds multiplicando, ob $qds = dp$,

$$2dp(e^{\frac{ns}{2}} - 1) = ne^{\frac{ns}{2}}pds \text{ seu } \frac{dp}{p} = \frac{ne^{\frac{ns}{2}}ds}{2(e^{\frac{ns}{2}} - 1)}$$

vnde fit $p = \frac{1}{c}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) = \frac{dx}{ds}$.

Quare aequatio pro tautochrona erit

$$cdx = ds(e^{\frac{ns}{2}} - 1) \text{ et } \frac{2}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) - s = cx$$

quae est eadem, quam ex diuersissimis principiis olim inueni.

Problema 5.

15. In hypothesi grauitatis vniformi g, si resistentia fuerit partim constans, partim ipsis celeritatibus, partim vero quadratis celeritatum proportionalis, inuenire curuam tautochronam.

Solutio.

Statuatur ergo resistentia $V = k + mv + nvv$; et cum sit $U = m + 2nv$, nostra aequatio erit

$$\left.\begin{aligned}2Lvv + g(qQ - pM) + kM + mMv + nMvv\\ - mMv - 2nMvv\end{aligned}\right\} = 0$$

siue $2Lvv - nMvv + g(qQ - pM) + kM = 0$.

Fiat ergo iterum $2L = nM$, et ob $dQ = Mds$, $dM = Lds$, erit, vt ante,

$$M = \alpha e^{\frac{ns}{2}} \text{ et } Q = \frac{2\alpha}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) \text{ existente } \alpha = \frac{n}{2(e^{\frac{na}{2}} - 1)},$$

quibus valoribus substitutis, et aequatione per α diuisa, habebimus,

$$\frac{2gq}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1)\, gpe^{\frac{ns}{2}} + ke^{\frac{ns}{2}} = 0$$

quae per ds multiplicata, ob $qds = dp$, dat

$$\frac{2gdp}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) - gpe^{\frac{ns}{2}}ds + ke^{\frac{ns}{2}} = 0 \text{ seu}$$

$$\frac{gdp}{gp - k} = \frac{ne^{\frac{ns}{2}}ds}{2(e^{\frac{ns}{2}} - 1)}, \text{ cuius integrale est}$$

$gp - k = \frac{g}{c}(e^{\frac{ns}{2}} - 1)$, hincque $gcdx = ckds + g(e^{\frac{ns}{2}} - 1)ds$

vnde

vnde tautochrona quaesita hac continebitur aequatione:

$$gcx = cks + \frac{2g}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) - gs$$

seu $x = \frac{(ck-g)}{gc} + \frac{2}{nc}(e^{\frac{ns}{2}} - 1)$.

16. En ergo methodum a Cel. *Fontanio* excogitatam, cui eo maior debetur laus, quod pari successu tam pro resistentia celeritatibus, quam earum quadratis proportionali, tautochronas exhibeat, dum mea methodus ad resistentiam celeritatibus ipsis proportionalem nullo modo accommodari patitur. Cum igitur casus postremi problematis neque mea methodo, neque vlla alia etiamnunc cognita, expediri possit, plurimum profecto Vir Acutissimus praestitisse est censendus, quod tam eximiam methodum in medium attulerit, quae ad alias non minus arduas inuestigationes viam parare videtur. Interim tamen non sine dolore fateri cogimur, hanc ingeniosam methodum non vltra hos quinque casus, vel saltem vltimum, qui reliquos omnes in se complectitur, extendi posse; si enim resistentia alii celeritatum dignitati proportionalis assumatur, non amplius celeritatem ex aequatione eliminare, neque idcirco ex ea aequationem pro tautochrona elicere licet. Nihilo vero minus id ipsum, quod haec methodus nobis largitur, grato animo agnoscere debemus.

17. Curua igitur tautochrona, quam pro resistentia $V = k + mv + nvv$ sumus adepti, vtique meretur, quae accuratius examinetur, motus super ea, ex quo tautochronismus nascitur, diligentius perpendatur.

tur. Quod quidem ad ipsam curuam attinet, eius natura hac exprimitur aequatione finita:

$$c(gx-ks)-\frac{2g}{n}(e^{\frac{ns}{2}}-1)-gs$$

quam ex hac aequatione differentiali eruimus:

$$c(gdx-kds)=g(e^{\frac{ns}{2}}-1)ds.$$

Hinc igitur, si quantitatem exponentialem eliminemus, obtinebimus hanc aequationem differentialem:

$$gdx-kds=\frac{n}{2}ds(gx-ks)+\frac{ng}{2c}sds$$

circa quas aequationes imprimis notandum est, quantitatem m in determinationem tautochronae non ingredi, ita vt resistentia ipsis celeritatibus proportionalis naturam tautochronae non immutet.

18. Cognita iam curua videamus, quomodo motus corporis super ea sit comparatus; ac si celeritatem in M ponamus $=v$, erit ex conditione motus

$$2vdv=-gdx+(k+mv+nvv)ds$$

cum autem sit $gdx-kds=\frac{g}{c}(e^{\frac{ns}{2}}-1)ds$, eliminando dx, habebimus

$$2vdv+\frac{g}{c}(e^{\frac{ns}{2}}-1)ds-mvds-nvvds=0$$

vnde ad quoduis curuae punctum celeritas corporis determinatur. Phaenomena autem huius motus, quatenus arcus $AF=a$ et $AF'=a+da$ inter se comparantur, ita se habebunt, vt sit, sumtis arcubus AM et AM′ aequidiurnis, in hoc gemino motu

$$MM'=\frac{e^{\frac{ns}{2}}-1}{e^{\frac{na}{2}}-1}.FF';\quad M'm'=Mm+\frac{ne^{\frac{ns}{2}}.MmFF'}{2(e^{\frac{na}{2}}-1)}$$

Cele-

Celeritas vero in puncto M′ pro motu per AF′ erit

$$v' = v + \frac{ne^{\frac{ns}{2}} v . FF'}{2(e^{\frac{na}{2}} - 1)}.$$

At $\frac{ds}{v}$ dat elementum temporis t, quo arcus AM absoluitur, quod integratum et per totum arcum AM extensum erit constans.

19 Quanquam autem hinc certi sumus, omnes siue descensus, siue ascensus, super hac curua inter se esse aequidiurnos, tamen ipsum tempus difficulter assignatur, multoque minus in promtu est, ex aequatione inter s et v rationem tautochronismi demonstrare, quod tamen facile praestari posset, si pars illa resistentiae, quae ipsis celeritatibus est proportionalis, abesset, seu si esset $m = 0$; atque in hoc ipso caussa latet, quod ista resistentiae hypothesis meam methodum respuat. Operae ergo pretium erit, inuestigare, quemadmodum expressio temporis pro motu corporis super hac curua in genere futura sit comparata, et quomodo ea ad tautochronismum perducatur. Hunc in finem integratio huius aequationis:

$$2vdv - mvds - nvvds + \lambda(e^{\frac{ns}{2}} - 1)ds = 0$$

inuestigari debet, in qua pro $\frac{g}{c}$ posui λ, ita vt λ iam sit constans arbitraria.

20. Primo quidem intuitu haec aequatio tractatu admodum difficilis videtur; verum haec substitutio $v = (e^{\frac{ns}{2}} - 1)u$, qua fit $dv = (e^{\frac{ns}{2}} - 1)du + \frac{n}{2}e^{\frac{ns}{2}}uds$, feliçi cum successu adhibebitur: fiet enim

$$2udu(e^{\frac{ns}{2}} - 1) - muds + nuuds + \lambda ds = 0$$

 quae

quae sponte variabilium separationem offert, cum prodeat:

$$\frac{ds}{e^{\frac{ns}{2}}-1}+\frac{2udu}{\lambda-mu+nuu}=0$$

tum vero ob $dt=\frac{ds}{u}$ et $v=(e^{\frac{ns}{2}}-1)u$ simul pro tempore t determinando obtinebimus:

$$dt+\frac{2du}{\lambda-mu+nuu}=0.$$

Hic primum obseruo formulae $\frac{ds}{e^{\frac{ns}{2}}-1}$, quia huic est aequalis $\frac{e^{\frac{-ns}{2}}ds}{1-e^{\frac{-ns}{2}}}$ integrale esse $=\frac{2}{n}l(1-e^{\frac{-ns}{2}})$; quocirca erit:

$$-\frac{2}{n}l(1-e^{\frac{-ns}{2}})=\int\frac{2udu}{\lambda-mu+nuu}=\frac{1}{n}l(\lambda-mu+nuu)$$
$$+\frac{m}{n}\int\frac{du}{\lambda-mu+nuu}\quad \text{et } t=-\int\frac{2du}{\lambda-mu+nuu}.$$

21. Quod nunc ad tautochronismum attinet, quia posito $s=0$, fieri debet $v=b$, denotante b celeritatem corporis in ipso puncto A, pro hoc loco fiet $u=\frac{b}{0}=\infty$; deinde, quia in puncto F celeritas v euanescit, fit ibi $u=0$; vnde pro tempore primum per arcum AM indefinite inueniendo formulae $-\int\frac{2du}{\lambda-mu+nuu}$ integrale ita capi debet, vt euanescat, posito $u=\infty$, quo facto totum tempus per arcum AF resultabit, si ponatur $u=0$; his autem operationibus manifestum est, neque quantitatem b, neque quantitatem arcus AF $=a$, in-

in calculum ingredi; sicque totum tempus euidenter prodit constans. Per integrationem autem reperitur
$t = \frac{4}{\sqrt{(4\lambda n - mm)}}\left(-\text{A tang.}\frac{\sqrt{(4\lambda n - mm)}}{m} + \text{A tang.}\frac{u\sqrt{(4\lambda n - mm)}}{-2\lambda + mu}\right)$
posito ergo $u = 0$, erit totum tempus per AF

$$\frac{4}{\sqrt{(4\lambda n - mm)}}\left(\pi - \text{A tang.}\frac{\sqrt{(4\lambda n - mm)}}{m}\right).$$

22. Quo hae formulae quoque ad casum, quo $n = 0$, accommodari queant, loco constantis arbitrariae λ ponamus $\frac{\alpha}{n}$, et cum resistentia fuerit $V = k + mv + nvv$, aequatio pro curua tautochrona, et quidem descensuum, erit

$$g\,dx - k\,ds = \frac{\alpha}{n}\left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right)ds$$

seu $gx - ks = \frac{2\alpha}{nn}\left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right) - \frac{\alpha s}{n}$.

Tum vero tempus vniuscuiusque descensus, ob $\lambda n = \alpha$, erit

$$\frac{4}{\sqrt{(4\alpha - mm)}}\left(\pi - \text{A tang.}\frac{\sqrt{(4\alpha - mm)}}{m}\right).$$

At pro tautochrona ascensuum, sumendis k, m, n negatiue, habebitur haec aequatio:

$$g\,dx + k\,ds = \frac{\alpha}{n}\left(1 - e^{\frac{-ns}{2}}\right)ds, \text{ et integrando}$$

$$gx + ks = \frac{\alpha s}{n} - \frac{2\alpha}{nn}\left(1 - e^{\frac{-ns}{2}}\right).$$

Tempus autem, quo singuli ascensus absoluuntur, erit

$$\frac{4}{\sqrt{(4\alpha - mm)}}\,\text{A tang.}\frac{\sqrt{(4\alpha - mm)}}{m}$$

vbi notandum est, me hic, loco $-\text{A tang.}\frac{\sqrt{(4\alpha - mm)}}{m}$, quia hic angulus maior est quadrante, posuisse $\pi - \text{A tang.}\frac{\sqrt{(4\alpha - mm)}}{m}$, vt capi queat minimus arcus, cuius tangens eſt $\frac{\sqrt{(4\alpha - mm)}}{m}$; pro aſcenſibus autem hac reductione non erat opus.

23. Hic notatu dignum deprehendimus, quod in aequatione pro curua tautochrona littera m, in expreſſione autem temporis littera n, non reperiatur, neque etiam littera k; ita vt, manente conſtante α eadem, tempus tantum a parte reſiſtentiae, quae ipſi celeritati eſt proportionalis, afficiatur. Quodſi haec pars penitus abſit, ſeu $m = 0$ ob $A\,\text{tang.}\,\infty = \frac{\pi}{2}$, fit tam deſcenſus quam aſcenſus tempus $= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$, at exiſtente quantitate m quam minima, tempus deſcenſus colligitur $= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{m}{\alpha}$; tempus vero aſcenſus $= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{m}{\alpha}$. Creſcente autem porro quantitate m, donec fiat $m = 2\sqrt{\alpha}$, tempus deſcenſus in infinitum excreſcit, quia corpus nunquam vsque ad punctum infimum ſuper curua peruenire poteſt, aſcenſus vero tempus hoc caſu fit $= \frac{4}{m} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$. Si fieret $m > 2\sqrt{\alpha}$, tum multo magis deſcenſus nunquam finirentur, aſcenſus autem tempus a logarithmis pendebit, eritque $= \frac{2}{\sqrt{(mm - 4\alpha)}}\, l\, \frac{m + \sqrt{(mm - 4\alpha)}}{m - \sqrt{(mm - 4\alpha)}}$.

24. Pro deſcenſu autem celeritas in ſingulis curvae punctis per hanc aequationem integralem determinabitur:

$$l\, \frac{\frac{\alpha}{n}\left(1 - e^{\frac{-na}{2}}\right)}{\frac{\alpha}{n}\left(1 - e^{\frac{-ns}{2}}\right)^2 - m e^{\frac{-ns}{2}} v \left(1 - e^{\frac{-ns}{2}}\right) + n e^{\frac{-ns}{2}} vv} = \frac{2m}{\sqrt{(4\alpha - mm)}}$$

$$\left(\pi - A\,\text{tang.}\, \frac{e^{\frac{-ns}{2}} v \sqrt{(4\alpha - mm)}}{m e^{\frac{-ns}{2}} v - \frac{2\alpha}{n}\left(1 - e^{\frac{-ns}{2}}\right)}\right).$$

Pro

Pro ascensu vero haec habebitur celeritatis determinatio

$$l\frac{\frac{\alpha}{n}(e^{\frac{na}{2}}-1)^2}{\frac{\alpha}{n}(e^{\frac{ns}{2}}-1)^2+me^{\frac{ns}{2}}v(e^{\frac{ns}{2}}-1)+ne^{ns}vv}=\frac{2m}{\sqrt{(4\alpha-mm)}}$$

$$\text{A tang.}\frac{e^{\frac{ns}{2}}v\sqrt{(4\alpha-mm)}}{me^{\frac{ns}{2}}v+\frac{2\alpha}{n}(e^{\frac{ns}{2}}-1)}$$

quae formulae, si in resistentia $V=k+mv+nvv$ terminus mv euanescat, multo fiunt simpliciores; nam ob $m=0$, erit pro descensu:

$$\alpha(1-e^{\frac{-na}{2}})^2=\alpha(1-e^{\frac{-ns}{2}})^2+nne^{-ns}vv$$

et pro ascensu:

$$\alpha(e^{\frac{na}{2}}-1)^2=\alpha(e^{\frac{ns}{2}}-1)^2+nne^{ns}vv$$

sin autem sit $n=0$, erit pro descensu:

$$l\frac{\frac{1}{4}\alpha aa}{\frac{1}{4}\alpha ss-\frac{1}{2}mvs+vv}=\frac{2m}{(\sqrt{4\alpha-mm})}\left(\pi-\text{A tang.}\frac{v\sqrt{(4\alpha-mm)}}{mv-\alpha s}\right)$$

et pro ascensu:

$$l\frac{\frac{1}{4}\alpha aa}{\frac{1}{4}\alpha ss+\frac{1}{2}mvs+vv}=\frac{2m}{\sqrt{(4\alpha-mm)}}\text{A tang.}\frac{v\sqrt{(4\alpha-mm)}}{mv+\alpha s}.$$

25. Tum vero si tempus per arcum quemcunque $AM=s$ ponatur $=t$, erit pro descensu super tautochrona descensuum:

$$t=\frac{4}{\sqrt{(4\alpha-mm)}}\left(\text{A tang.}\frac{e^{\frac{-ns}{2}}v\sqrt{(4\alpha-mm)}}{me^{\frac{-ns}{2}}v-\frac{2\alpha}{n}(1-e^{\frac{-ns}{2}})}-\text{A tang.}\frac{\sqrt{(4\alpha-mm)}}{m}\right)$$

et pro ascensu super tautochrona ascensuum

$$t = \frac{4}{\sqrt{(4\alpha - mm)}} \left(\text{A tang.} \frac{\sqrt{(4\alpha - mm)}}{m} - \text{A tang.} \frac{e^{\frac{ns}{2}} v \sqrt{(4\alpha - mm)}}{m e^{\frac{ns}{2}} v + \frac{2\alpha}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1)} \right)$$

Vnde si sit $m = 0$, erit pro descensu:

$$t = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\pi}{2} - \text{A tang.} \frac{n e^{\frac{-ns}{2}} v}{(1 - e^{\frac{-ns}{2}})\sqrt{\alpha}} \right)$$

et pro ascensu:

$$t = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\pi}{2} - \text{A tang.} \frac{n e^{\frac{ns}{2}} v}{(e^{\frac{ns}{2}} - 1)\sqrt{\alpha}} \right)$$

vbi quidem valores ipsius v ex superioribus aequationibus per arcum s determinari debent.

26. Ex his igitur perspicuum est, quomodo curvae, per methodum Celeb. *Fontanii* inuentae, tautochronismum producant, id quod ex ipsa inuestigationis ratione minus intelligitur. At vero in hoc ipso praestantia huius methodi consistit, quod non indigeat indefinita temporis expressione, ita vt etiamsi, eius ope curuae tautochronae sint inuentae, tamen inde nihil certi, neque de motu corporis super his curuis, neque de ipsa temporis quantitate, innotescat. Has igitur res demum post inuentas curuas tautochronas per calculum peculiarem inuestigare licuit; ac nisi modus se obtulisset hanc aequationem differentialem resoluendi:

$$2 v dv - m v ds - n v v ds + \lambda(e^{\frac{ns}{2}} - 1) ds = 0$$

hanc

hanc illustrationem ne quidem absoluere in potestate fuisset, quod eo magis mirandum videtur, quod etiam sine huius aequationis resolutione conuicti fuerimus, curvas inuentas reuera tautochronismi proprietate esse praeditas, etiamsi ipsa motus determinatio latuisset; quam ob causam haec methodus tautochronas inuestigandi summis laudibus digna est censenda.

27. Si autem attentius examinemus, in quanam re vis huius admirabilis methodi consistat, eam in hoc positam reperiemus, quod non ex ipsa aequatione fundamentali:

$$2vdv + gpds - Vds = 0,$$

qua motus natura in genere exprimitur, tautochronismi conditio petatur, sed ex ea per indolem tautochronismi alia aequatio, in qua non amplius insit differentiale dv, eliciatur, cui sit satisfaciendum. Introducta scilicet functione indefinita ipsarum s et a, quae erat Q, et quam ita comparatam esse oportet, vt posito $s=0$, fiat $Q=0$, posito autem $s=a$, fiat $Q=1$, posuimus $dQ=Mds$, et $dM=Lds$, tum vero $dp=qds$, et $dV=Udv$; quibus positis satisfieri oportebat huic aequationi:

$$2Lvv + g(qQ - pM) + M(V - Uv) = 0$$

ita vt etiamsi quantitates Q, M et L inuoluant quantitatem a, tamen quantitates p et q ab ea immunes resultent.

28. Cum autem haec aequatio adhuc celeritatem v contineat, quae quemadmodum ab s et a pendeat, ex aequatione principali $2vdv + gpds - Vds = 0$ defi-

definiri deberet, in quo ipso autem summa difficultas versatur: dispiciendum est, vtrum illa aequatio non sine huius subsidio resolui possit. Quod si in genere praestari posset, haberetur methodus latissime patens, omnes tautochronas in quocunque medio resistenti inueniendi; verum talis resolutis iis tantum casibus succedit, quibus functionem Q cum suis deriuatis ita per s et a determinare licet, vt quantitas v prorsus ex calculo exterminetur; tum enim cuiuscunque ea fuerit naturae, quae quidem aequatione principali determinatur, quoniam non amplius in calculo inest, aequatio residua definiet quantitates p et q, vnde ob $dx = pds$, et $dp = qds$, natura curuae quaesitae determinatur, si modo quantitas a ex ea penitus abierit, vti vsu venit in exemplis supra allatis.

29. Facile autem perspicitur, hoc commodum locum habere non posse, nisi resistentia eiusmodi celeritatis functionem sequatur, vt sit $V = k + mv + nvv$; tum enim ob $U = m + 2nv$, fit $V - Uu = k - nvv$, et aequatio nostra induit hanc formam:

$$2Lvv + g(qQ - pM) + kM - nMvv = 0$$

in qua cum nonnisi eadem potestas ipsius v insit, ea ex calculo tollitur sola positione $2L = nM$, remanetque tum aequatio ab v liberata $g(qQ - pM) + kM = 0$, quae determinat naturam curuae, quomodocunque etiam celeritas v per aequationem principalem determinetur, ita vt eius resolutione his casibus non indigeamus ad curuas tautochronas inueniendas. Nisi autem quantitas

V-Uv

$V - Uv$ ad hanc formam $k - nvv$ rediisset, altera ista aequatio nullam vtilitatem attulisset.

30. Si enim exempli gratia resistentia cubis celeritatum esset proportionalis, vt haberemus $V = nv^3$, ob $U = 3nvv$ foret $V - Uv = -2nv^3$, hincque nostra aequatio abiret in

$$2Lvv + g(qQ - pM) - 2nMv^3 = 0$$

in qua iam functio Q nullo modo per s et a ita definiri potest, et termini $2Lvv$ et $2nmv^3$ ex aequatione expellantur. Quamobrem huic aequationi satisfieri nequit, nisi simul aequatio principalis: $2vdv + gpds - Vds = 0$ in computum trahatur, quae cum expediri nequaquam possit, hinc etiam nullum lucrum consequimur. Etsi enim ex combinatione harum aequationum conficitur ista:

$$4Mvdv - 2Lvvds + 3gMpds - gqQds = 0$$

cuius integrale est

$$vv = \tfrac{1}{2}gM\int\frac{(qQ - 3pM)ds}{MM}$$

quod integrale ita est capiendum, vt, posito $s = a$, fiat $v = 0$; tamen si hinc valores pro vv et v^3 in aequatione

$$2Lvv + g(qQ - pM) - 2nMv^3 = 0$$

substituatur, quantitates a et s ita erunt inter se permixtae, vt nulla via pateat, functionem Q ita definiendi, vt quantitas a prorsus ex calculo exstirpetur, litteraeque p et q per solam variabilem s determinari

 possint.

possint. Per differentiationem quidem etiam celeritas v eliminari potest; nam posito $dL = K ds$ et $dq = r ds$ reperitur:

$$3nLv^2 + 4Kvv + 3ng(qQ + pM)v + g(rQ - 3pL) = 0$$

quae cum hac: $2Lvv + g(qQ - pm) - 2nmv^2 = 0$ perducet ad aequationem ab v liberam. Verum haec ita fiet complicata, vt negotium resolutionis frustra suscipiatur.

DEMON-

DEMONSTRATIO THEOREMATIS BERNOVLLIANI QVOD EX EVOLVTIONE CVRVAE CVIVSCVNQVE RECTANGVLAE IN INFINITVM CONTINVATA TANDEM CYCLOIDES NASCANTVR.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Inter alias insignes proprietates, quibus curua Cyclois cum in Mechanica, tum in Geometria, eminet, ratio euolutionis haud postremum locum tenere censenda est, qua constat, euolutam cycloidis iterum esse cycloidem. Quando ergo series curuarum consideratur, quarum quaelibet praecedentis est euoluta, si vna earum fuerit cyclois, omnes sequentes quoque cycloides sint necesse est; de antecedentibus autem idem iudicium non valet, cum ex eadem curua per euolutionem infinitae curuae diuersae generari queant, quae omnes communi euoluta vtentes sibi parallelae existimari solent.

II.

Huiusmodi autem curuarum seriem Celeb. *Ioh. Bernoulli* inuerso ordine olim est contemplatus, ita vt quaelibet sequentis sit euoluta, atque ex euolutione antecedentis nascatur. De tali iam curuarum serie affirmauerat, si primum locum occupet curua quaecunque rectangula sequentes ita continuo propius ad naturam cycloidis accedere, vt infinitesimae omnino in cycloides sint abiturae. Hanc ergo egregiam proprietatem ante accuratius explicari conueniet, quam de eius demonstratione simus solliciti.

III.

Cum igitur ista curuarum series a curua quacunque, modo sit rectangula, inchoari possit, a definitione curuae rectangulae ordiendum videtur. Non autem curuae rectangulae peculiarem curuarum speciem constituere sunt putandae, sed ex qualibet curua abscindi potest portio, cui haec denominatio competit, quando tangentes, in eius terminis ductae, sibi sunt perpendiculares, siue etiam quando normales in terminis ductae sibi ad angulum rectum occurrunt. Hic scilicet non qualitas curuae, sed quantitas portionis assumtae, spectatur; ac tanta cuiusque curuae portio, cuius normales extremae inter se sunt perpendiculares, curua rectangula vocatur; vnde commodius huiusmodi curuae portio arcus rectangulus vocabitur.

IV.

Planiora haec reddentur ex notione amplitudinis, quae cuilibet curuae portioni conuenire dicitur. Est autem amplitudo cuiuslibet arcus curuae angulus, quo normales ad eius extremitates ductae inuicem inclinantur. Ita si AMPB fuerit curua quaecunque, erit portionis eius AM amplitudo aequalis angulo ANM, quem rectae AN et MN ad eius terminos A et M normales constituunt; et ducta ad eius quoduis aliud punctum P normali

Tab. II. Fig. 1.

normali PQ, praebebit angulus AQP amplitudinem arcus AMP. Hinc arcus AMPB erit rectangulus, si eius normales extremae AC et BC ad se inuicem fuerit perpendiculares.

V.

Consideratur igitur a Celeb. *Bernoullio* arcus cuiuscunque curuae rectangulus AMB, qui filo circumplicato ex altero termino A ita euoluatur, vt oriatur curua ANB′, quae pariter erit rectangula. Hinc porro per euolutionem in termino B′ incipiendo, noua describatur curua B′M′A′; atque ex hac a puncto A′ facto euolutionis initio denuo noua curua A′N′B″; ex hacque vlterius a termino B″ incipiendo curua B″M″A″. Talis euolutio alternatim a punctis A et B incipiendo in infinitum continuata concipiatur, atque hoc modo series curuarum infinita nascetur, quae omnes inter parallelas BE et CF erunt contentae. Tab. II. Fig. 2.

VI.

De hac iam curuarum serie *Bernoullius* affirmauit, a quacunqua curua AMB initium fuerit tractum, curvas inde natas continuo propius ad cycloidis formam perduci, atque cum in infinitum processerimus, omnes huius seriei curuas re ipsa euadere cycloides. Hoc igitur est *Theorema Bernoullianum* ab omni ambiguitate liberatum, cui prima fronte ideo obnoxium videatur, quod ex quauis curua per euolutionem infinitae curuae oriri possunt; haec autem ambiguitas per determinatum cuiusque curuae initium penitus est sublata.

VII.

Si ad ordinem harum curuarum attendamus, manifestum eſt, tertiam, quintam, ſeptimam, nonam etc. parem ſitum reſpectu parallelarum BE et CF tenere atque primum AMB, dum ſuperiorem BE tangunt, inferiori vero CF perpendiculariter inſiſtunt. Contra vero ſecunda, quarta, ſexta, octaua, etc. ſitu inuerſo rectam inferiorem CF tangunt, ad ſuperiorem vero BE ſunt perpendiculares. Alternatim ergo hae curuae ſitum tenent erectum et inuerſum.

VIII.

Hinc iam non leue argumentum pro veritate Theorematis aſſequimur. Si enim in hac curuarum ſerie eam, cuius ordo a prima numero *n* indicatur, ponamus P, ſequentem Q, hancque ſequentem R, indicem *n* vero infinitum aſſumamus; quoniam curuae P et R ambae a principio infinite diſtant, paremque ſitum inter parallelas ſeruant, ad primam quoque eandem relationem tenere, ideoque inter ſe aequales eſſe debent. Ex quo vtramque cycloidem eſſe debere manifeſto ſequitur, vnde et reliquae interiectae erunt cycloides ſitu inuerſo poſitae.

IX.

Obiici autem non ſine ingenti veri ſpecie poteſt, quod ſi curuae infiniteſimae fuerint cycloides, tum omnes praecedentium pariter cycloides eſſe deberent, neque igitur primum locum curua quaecunque occupare poſſet. Verum ad hanc obiectionem facile reſpondetur, curuas infiniteſimas ita conſiderari oportere, quaſi infinite

infinite parum a cycloide discrepent, indeque praecedentes continuo magis recedere, donec tandem in infinitum regrediendo ad curuas maxime a cycloidis natura diffidentes perueniatur.

X.

Aliam dubitandi rationem praebere videntur curvae, quae suis euolutis ordinis cuiuscunque sunt aequales. Si enim AMB fuerit curua suae euolutae tertiae aequalis, eique ergo aequalis sit curua A′N′B″, seu quarta in nostra serie, ob eandem rationem ipsi quoque aequales erunt septima, decima, tertia decima et ita porro; vnde cum prima non sit cyclois, etiam in infinitesimis cyclois non occurret. Verum si res accuratius perpendatur, mox patebit, talem euolutae, verbi gratia tertiae, conuenientiam cum praescriptis hic euolutionibus consistere non posse.

XI.

Cum autem haec argumenta, etsi in se plurimum roboris habent, tamen non satis firma videantur, vt demonstrationis loco admitti queant, quoniam non ex ipsa rei natura sunt petita; conueniet hanc continuam euolutionem accuratius expendi, et, in cuius generis curuas tandem desinere debeat, inuestigari. Hinc enim non solum clarius theorematis veritatem perspiciemus, sed etiam methodus, qua vtar, ad alia praeclara deducere posse videtur.

XII.

Primam autem obseruo, ex natura euolutionis secundae curuae ANB′ radium osculi in A esse nullum,

in

in B' vero finitum $= BB' = BMA$; tum vero tertiae curuae $B'M'A'$ radium osculi in A' esse $= AA'$, in B' vero $= 0$. Porro curuae quartae $A'N'B''$ radium osculi in A' esse $= 0$, in B'' vero $= B'B''$; curuae autem quintae $B''M''A''$ radium osculi in A'' esse $= A'A''$, in B'' vero $= 0$; haecque conditio in omnibus curuis sequentibus ita cernitur, vt tam in punctis A et B radius osculi alternatim euanescat, et per quantitatem finitam exprimatur; negatiuis enim hic omnis locus praecluditur.

XIII.

Sumatur porro in curua data AMB punctum quodcunque M, et ducta ibi normali ML huius inclinatio ad rectam AC dabit amplitudinem arcus AM, quae sit $= v$; tum ducta ad M tangens MN erit secundae curuae ANB' radius osculi in puncto N, ita vt arcus AN eadem futura sit amplitudo $= v$. Simili modo tangens ex N educta NM' erit radius osculi tertiae curuae in M', hincque tangens $M'N'$ radius osculi quartae curuae in N', indeque porro ducta tangens $N'M''$ radius osculi quintae curuae in M'', et ita deinceps; omnium autem arcuum AM, AN, $A'M'$, $A'N'$, $A''M''$ etc. eadem erit amplitudo $= v$, vti ex natura euolutionis constat.

XIV.

Ponamus iam pro prima curua data AMB arcum $AM = s$, cuius amplitudo cum sit $= v$, concipiamus dari aequationem inter s et v, quae ita comparata sit necesse est, vt posito $v = 0$, euanescat s;

posita

posita ergo amplitudine $v =$ angulo recto, cuius nota sit ϱ, seu $v = \varrho$, praebebit s longitudinem totius arcus AMB, quae sit $= a$. Dari ergo ponimus aequationem inter s et v, talem, vt, posito $v = 0$, sit $s = 0$, et posito $v = \varrho$, sit $s = a$.

XV.

Hinc definitur curua secunda ANB′ ex illius euolutione nata; cum enim arcus AN amplitudo sit quoque $= v$, et radius osculi $NM = AM = s$, si ponatur arcus $AN = t$, erit $\frac{dt}{s} = dv$, ideoque $t = \int s\,dv$, quod integrale ita capiatur, vt euanescat, posito $v = 0$. Tum vero, posito $v = \varrho$, exprimet $\int v\,ds$ totum arcum ANB′, qui si vocetur $= b$, posito $v = 0$, erit $t = 0$, posito autem $v = \varrho$, erit $t = b$.

XVI.

Pro tertia porro curua A′M′B′ sit arcus $A'M' = s'$, cuius amplitudo cum sit $= v$, radius osculi vero $M'N = ANB' - AN = b - t$, erit $\frac{ds'}{b-t} = dv$, hincque $s' = bv - \int t\,dv$, seu $s' = bv - \int dv \int s\,dv$. Oportet autem, vt hic iterum fiat $s = 0$, si $v = 0$; prodeat vero $s' = a'$, posito $v = \varrho$, ita vt a' denotet totam curuam A′M′B′.

XVII.

Quodsi simili modo pro curua quarta A′N′B″ ponamus arcum $A'N' = t'$, cuius amplitudo est $= v$, et $A'N'B'' = b'$, erit etiam $\frac{dt'}{s'} = dv$. Pro curua autem quinta A″M″B″, ponendo arcum $A''M'' = s''$, et totum arcum $A''M''B'' = a''$, erit $\frac{ds''}{b' - t'} = dv$. Pro curua sexta respondeat amplitudini v arcus $= t''$, amplitudini vero ϱ arcus $= b''$, eritque $\frac{dt''}{s''} = dv$. Pro septima curua respondeat amplitudini v arcus $= s'''$, at amplitudini ϱ arcus $= a'''$, erit $\frac{d s'''}{b'' - t''} = dv$, ficque progredi licet in infinitum.

XVIII.

Regrediamur autem a qualibet curua ad praecedentes; et assumta curua secunda, seu aequatione inter t et v, erit $s = \frac{dt}{dv}$. Sumta autem tertia curua, seu aequatione inter s' et v, erit $b - t = \frac{ds'}{dv}$, seu $t = b - \frac{ds'}{dv}$ et sumto dv constante $s = -\frac{dds'}{dv^2}$. Sumto vero pro quarta curua aequatione inter t' et v, erit $s' = \frac{dt'}{dv}$; $t = b - \frac{ddt'}{dv^2}$; et $s = -\frac{d^3 t'}{dv^3}$. At sumta pro quinta curua aequatione inter s'' et v, erit $b' - t' = \frac{ds''}{dv}$, seu $t' = b' - \frac{ds''}{dv}$; et $s' = -\frac{dds''}{dv^2}$; $t = b + \frac{d^3 s''}{dv^3}$; $s = \frac{d^4 s''}{dv^4}$.

XIX.

Cum iam, posito $v = 0$, fiat $s = 0$, $t = 0$, $s' = 0$, $t' = 0$ $s'' = 0$ etc. posito autem $v = \varrho$, sit $s = a$, $t = b$, $s' = a'$, $t' = b'$, $s'' = a''$ etc. sequentes proprietates functionum s, t, s', t', s'', t'', etc. erunt perspicuae; erit

$$\text{I.}\quad \begin{array}{l} \text{si } v = 0 \\ \text{si } v = \varrho \end{array}\left\{ \begin{array}{l} s = 0 \\ s = a \end{array} \right.$$

$$\text{II.}\quad \begin{array}{l} \text{si } v = 0 \\ \text{si } v = \varrho \end{array}\left\{ \begin{array}{l} t = 0;\ \frac{d}{dv} = 0 \\ t = b;\ \frac{dt}{dv} = a \end{array} \right.$$

$$\text{III.}\quad \begin{array}{l} \text{si } v = 0 \\ \text{si } v = \varrho \end{array}\left\{ \begin{array}{l} s' = 0;\ \frac{ds'}{dv} = b;\ \frac{dds'}{dv^2} = 0 \\ s' = a',\ \frac{ds'}{dv} = 0;\ \frac{dds'}{dv^2} = -a \end{array} \right.$$

$$\text{IV.}\quad \begin{array}{l} \text{si } v = 0 \\ \text{si } v = \varrho \end{array}\left\{ \begin{array}{l} t' = 0;\ \frac{dt'}{dv} = 0;\ \frac{ddt'}{dv^2} = b;\ \frac{d^3 t'}{dv^3} = 0 \\ t' = b';\ \frac{dt'}{dv} = a';\ \frac{ddt'}{dv^2} = 0;\ \frac{d^3 t'}{dv^3} = -a \end{array} \right.$$

$$\text{V.}\quad \begin{array}{l} \text{si } v = 0 \\ \text{si } v = \varrho \end{array}\left\{ \begin{array}{l} s'' = 0;\ \frac{ds''}{dv} = b;\ \frac{dds''}{dv^2} = 0;\ \frac{d^3 s''}{dv^3} = -b;\ \frac{d^4 s'''}{dv^4} = 0 \\ s'' = a'';\ \frac{ds''}{dv} = 0;\ \frac{dds''}{dv^2} = -a';\ \frac{d^3 s''}{dv^3} = 0;\ \frac{d^4 s''}{dv^4} = a. \end{array} \right.$$

XX.

XX.

Hinc ergo patet, cuiusmodi proprietates ſit habitura curua infiniteſima in iſto curuarum ordine, cuius quidem exponens ſit impar. Si enim amplitudini v reſpondeat arcus $= z$, aequatio inter v et z erit ita comparata, vt ſit:

$$\begin{matrix}\text{ſi } v=0\\ \text{ſi } v=\rho\end{matrix}\Bigg\}\,;\; z=\begin{cases}0\\+f\end{cases};\; \frac{dz}{dv}=\begin{cases}+g\\0\end{cases};\; \frac{ddz}{dv^2}=\begin{cases}0\\-f'\end{cases};\; \frac{d^3z}{dv^3}=\begin{cases}-g'\\0\end{cases};\; \frac{d^4z}{dv^4}=\begin{cases}0\\+f''\end{cases}$$

$$\begin{matrix}\text{ſi } v=0\\ \text{ſi } v=\rho\end{matrix}\Bigg\}\,;\; \frac{d^5z}{dv^5}=\begin{cases}+g''\\0\end{cases};\; \frac{d^6z}{dv^6}=\begin{cases}0\\-f'''\end{cases};\; \frac{d^7z}{dv^7}=\begin{cases}-g'''\\0\end{cases} \text{ etc.}$$

vbi litterae f, f', f'' etc. g, g', g'' etc. denotant quantitates finitas et poſitiuas.

XXI.

Quia hae proprietates ſunt numero infinitae, eae ſufficiunt ad curuam determinandam. Si enim amplitudini $v+x$ reſpondeat arcus y, dum arcus amplitudini v reſpondens eſt z, erit

$$y = z + \frac{x\,dz}{1\,dv} + \frac{x^2\,ddz}{1\cdot 2\,dv^2} + \frac{x^3\,d^3z}{1\cdot 2\cdot 3\,dv^3} + \frac{x^4\,d^4z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dv^4} + \text{etc.}$$

Ponatur iam $v=0$, ita vt y ſit arcus amplitudini x reſpondens, erit

$$y = \frac{gx}{1} - \frac{g'x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{g''x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{g'''x^7}{1\cdot 2\cdot \ldots\cdot 7} + \text{etc.}$$

ac pro x et y, reſtitutis prioribus valoribus v et z, erit

$$z = \frac{gv}{1} - \frac{g'v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{g''v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{g'''v^7}{1\cdot 2\cdot \ldots\cdot 7} + \text{etc.}$$

XXII.

Tribuantur his constantibus g, g', g'' etc. valores sequentes:

$$g = A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + E\varepsilon + \text{etc.}$$
$$g' = A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 + \text{etc.}$$
$$g'' = A\alpha^5 + B\beta^5 + C\gamma^5 + D\delta^5 + E\varepsilon^5 + \text{etc.}$$
$$g''' = A\alpha^7 + B\beta^7 + C\gamma^7 + D\delta^7 + E\varepsilon^7 + \text{etc.}$$
etc.

nihil enim impedit, quo minus talis positio semper locum habere queat; his autem valoribus substitutis, obtinebitur

$$z = A\,\text{sin.}\,\alpha v + B\,\text{sin.}\,\beta v + C\,\text{sin.}\,\gamma v + D\,\text{sin.}\,\delta v + E\,\text{sin.}\,\varepsilon v + \text{etc.}$$

hacque forma iam satisfit ei conditioni, vt, posito $v = 0$, fiat

$$z = 0;\ \frac{dz}{dv} = +g;\ \frac{ddz}{dv^2} = 0;\ \frac{d^3z}{dv^3} = -g';\ \frac{d^4z}{dv^4} = 0;\ \frac{d^5z}{dv^5} = +g''\ \text{etc.}$$

XXIII.

Superest igitur, vt, posito $v = \varrho$, satisfiat his conditionibus

$$z = f;\ \frac{dz}{dv} = 0;\ \frac{ddz}{dv^2} = -f';\ \frac{d^3z}{dv^3} = 0;\ \frac{d^4z}{dv^4} = +f''\ \text{etc.}$$

hinc vero erit:

$$f = A\,\text{sin.}\,\alpha\varrho + B\,\text{sin.}\,\beta\varrho + C\,\text{sin.}\,\gamma\varrho + D\,\text{sin.}\,\delta\varrho + \text{etc.}$$
$$0 = A\alpha\,\text{cos.}\,\alpha\varrho + B\beta\,\text{cos.}\,\beta\varrho + C\gamma\,\text{cos.}\,\gamma\varrho + D\delta\,\text{cos.}\,\delta\varrho + \text{etc.}$$
$$f' = A\alpha^2\,\text{sin.}\,\alpha\varrho + B\beta^2\,\text{sin.}\,\beta\varrho + C\gamma^2\,\text{sin.}\,\gamma\varrho + D\delta^2\,\text{sin.}\,\delta\varrho + \text{etc.}$$
$$0 = A\alpha^3\,\text{cos.}\,\alpha\varrho + B\beta^3\,\text{cos.}\,\beta\varrho + C\gamma^3\,\text{cos.}\,\gamma\varrho + D\delta^3\,\text{cos.}\,\delta\varrho + \text{etc.}$$
$$f'' = A\alpha^4\,\text{sin.}\,\alpha\varrho + B\beta^4\,\text{sin.}\,\beta\varrho + C\gamma^4\,\text{sin.}\,\gamma\varrho + D\delta^4\,\text{sin.}\,\delta\varrho + \text{etc.}$$
etc.

XXIV.

Oportet ergo pro α, β, γ, δ, etc. eiusmodi numeros assumi, vt fiat

$\operatorname{cos}. \alpha\varrho = 0$; $\operatorname{cos}. \beta\varrho = 0$; $\operatorname{cos}. \gamma\varrho = 0$; $\operatorname{cos}. \delta\varrho = 0$ etc.

vnde perspicitur, nonnisi numeros impares loco litterarum α, β, γ, δ etc. substitui posse. Erit itaque

$$g = A + 3\,B + 5\,C + 7\,D + 9\,E + \text{etc.}$$
$$g' = A + 3^3 B + 5^3 C + 7^3 D + 9^3 E + \text{etc.}$$
$$g'' = A + 3^5 B + 5^5 C + 7^5 D + 9^5 E + \text{etc.}$$
$$g''' = A + 3^7 B + 5^7 C + 7^7 D + 9^7 E + \text{etc.}$$
etc.

et pro curua infinitissima habebitur haec aequatio inter z et v:

$$z = A \operatorname{sin}. v + B \operatorname{sin}. 3v + C \operatorname{sin}. 5v + D \operatorname{sin}. 7v + E \operatorname{sin}. 9v + \text{etc.}$$

XXV.

Porro vero ob $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$, $\delta = 7$ etc. erit $\operatorname{sin}. \alpha\varrho = 1$; $\operatorname{sin} \beta\varrho = -1$; $\operatorname{sin}. \gamma\varrho = +1$; $\operatorname{sin}. \delta\varrho = -1$; $\operatorname{sin}. \varepsilon\varrho = +1$ etc.

vnde pro f, f', f'', f''', etc. sequentes valores prodibunt:

$$f = A - B + C - D + E - \text{etc.}$$
$$f' = A - 3^2 B + 5^2 C - 7^2 D + 9^2 E - \text{etc.}$$
$$f'' = A - 3^4 B + 5^4 C - 7^4 D + 9^4 E - \text{etc.}$$
$$f''' = A - 3^6 B + 5^6 C - 7^6 D + 9^6 E - \text{etc.}$$
etc.

XXVI.

Verum natura rei postulat, vt omnium litterarum f, f', f'', f''' etc. item g, g', g'', g''' etc. valores

lores ſint poſitiui et finiti; quorum numerus cum ſit infinitus, erunt infiniteſimarum valores:

$$g^{(\infty)} = A + 3^{\infty}B + 5^{\infty}C + 7^{\infty}D + 9^{\infty}E + \text{etc.}$$

$$f^{(\infty)} = A - 3^{\infty}B + 5^{\infty}C - 7^{\infty}D + 9^{\infty}E - \text{etc.}$$

qui finiti ambo eſſe nequeunt, niſi omnes litterae B, C, D, E etc. euaneſcant; alioquin enim ambo valores certo fiant infiniti.

XXVII.

Hinc igitur conficitur, in ordine curuarum noſtrarum curuam infiniteſimam tali aequatione inter arcum z et amplitudinem v exprimi, vt ſit $z = A \sin. v$, quae manifeſto eſt pro cycloide. Cum ergo haec eadem aequatio reſultet, quaecunque curua in locum primae AMB aſſumatur, dummodo eius amplitudo ſit 90°, manifeſtum eſt, infiniteſimas curuarum, quae per continuam euolutionem naſcuntur, ſemper in cycloides abire; ſicque habemus perfectam demonſtrationem theorematis *Bernoulliani.*

XXVIII.

Tab. II. Fig. 3. Simili modo ſi amplitudo curuae datae AMB maior minor ve fuerit angulo recto, atque euolutio pari modo alternatim inſtituatur, definiri poterit natura curvarum, ad quas poſt euolutiones infinitas peruenietur. Sit enim ANB′ curua ex euolutione prima in A incepta nata; indeque oriatur, euolutionem in B′ inchoando, curua B′MA′, ex hac porro, euolutionem in A′ incipiendo, curua A′N′B″; et ex hac curua B″M″A″, hincque vltra curua A″N″B‴ et ita porro; quaeriturque

turque natura curuarum infinitesimarum hoc modo descriptarum.

XXIX.

Primo autem patet, omnes has curuas eiusdem fore amplitudinis, et tam puncta A, A′, A″, etc. quam puncta B, B′, B″, etc. in directum sita. Tum etiam manifestum est, has rectas CF et BE fore diuergentes, si amplitudo curuarum angulum rectum superet, excessus scilicet amplitudinis supra angulum rectum metietur inclinationem. Sin autem amplitudo fuerit minor recto, illae rectae conuergent, et coibunt sub angulo, defectui ab angulo recto aequali. Illo ergo casu curuae tandem in infinitum expandentur, hoc vero in spatium euanescens coarctabuntur.

XXX.

Sit amplitudo primae curuae $AMB = \Phi$, quae simul omnibus sequentibus conueniet; ac figura 3 repraesentat casum, quo hic angulus Φ superat angulum rectum ϱ, ita vt $\Phi - \varrho$ exhibeat inclinationem rectarum EB et FC. Sumta iam amplitudine quacunque $= v$, sint arcus in serie curuarum huic amplitudini respondentes:

$$AM = s;\ AN = t;\ A'M' = s';\ A'N' = t';\ A''M'' = s'';\ A''N'' = t'';\ A'''M''' = s''' \text{ etc.}$$

qui posito $v = \Phi$ fiant:

$$s = a;\ t = b;\ s' = a';\ t' = b';\ s'' = a'';\ t'' = b'';\ s''' = a''' \text{ etc.}$$

qui valores praesenti casu $\Phi > \varrho$ continuo crescunt: sin autem esset $\Phi < \varrho$, continuo decrescunt, tandemque euanescunt.

XXXI.

XXXI.

Cum iam sint radii osculi

$NM = s$; $M'N = b - t$; $N'M' = s'$; $M''N' = b' - t'$; $N''M'' = s''$ etc.

erit ex natura euolutionis

$$\frac{dt}{s} = dv;\ \frac{ds'}{b-t} = dv;\ \frac{dt'}{s'} = dv;\ \frac{ds''}{b'-t'} = dv;\ \frac{dt''}{s''} = dv \text{ etc.}$$

siue

$$s = \frac{dt}{dv};\ b-t = \frac{ds'}{dv};\ s' = \frac{dt'}{dv};\ b'-t' = \frac{ds''}{dv};\ s'' = \frac{dt''}{dv} \text{ etc.}$$

Quodsi ergo consideretur curua septima, cuius arcus amplitudini v conueniens est $= s'''$, et amplitudini toti $\Phi = a'''$, erit

$$b''-t'' = \frac{ds'''}{dv};\ s'' = -\frac{dds'''}{dv^2};\ b'-t' = -\frac{d^3s'''}{dv^3};\ s' = \frac{d^4s'''}{dv^4};\ b-t = \frac{d^5s'''}{dv^5}.$$

XXXII.

Cum autem, posito $v = 0$, omnes quantitates s, t, s', t' etc. euanescant, apparet, in curua septima casu $v = 0$ fore

$$s''' = 0;\ \frac{dt'''}{dv} = b'';\ \frac{dds'''}{dv^2} = 0;\ \frac{d^3s'''}{dv^3} = -b';\ \frac{d^4s'''}{dv^4} = 0;\ \frac{d^5s'''}{dv^5} = b \text{ etc.}$$

Casu autem $v = \Phi$, cum sit $s = a$; $t = b$; $s' = a'$; $t' = b'$; $s'' = a''$; $t'' = b''$; $s''' = a'''$ etc. erit quoque pro curua septima, posito $v = \Phi$,

$$s''' = a''';\ \frac{ds'''}{dv} = 0;\ \frac{dds'''}{dv^2} = -a'';\ \frac{d^3s'''}{dv^3} = 0;\ \frac{d^4s'''}{dv^4} = a';\ \frac{d^5s'''}{dv^5} = 0.$$

XXXIII.

Pro curua ergo infinitesima, quae quidem in ordine locum imparem sortietur, si arcus amplitudini v conue-

conueniens fit $=z$, natura eius ita erit comparata, vt posito $v=0$, fit

$$z=0;\ \frac{dz}{dv}=+g;\ \frac{ddz}{dv^2}=0;\ \frac{d^3z}{dv^3}=-g';\ \frac{d^4z}{dv^4}=0;\ \frac{d^5z}{dv^5}=+g'';\ \text{etc.}$$

fin autem ponatur $v=\Phi$, erit

$$z=f;\ \frac{dz}{dv}=0;\ \frac{ddz}{dv^2}=-f';\ \frac{d^3z}{dv^3}=0;\ \frac{d^4z}{dv^4}=+f'';\ \frac{d^5z}{dv^5}=0\ \text{etc.}$$

quantitates autem f et g erunt, vel infinitae, vel infinite paruae, prout fuerit, vel $\Phi>\varrho$, vel $\Phi<\varrho$, earumque deriuatae f', g', f'', g'' etc. continuo, vel decrefcent, vel crefcent, ita vt infinitefimae fiant finitae.

XXXIIII.

Si iam ratiocinium pari modo, quo fupra §. XXI. inftituamus, intelligemus, naturam curuae tali aequatione inter z et v exprimi, vt fit:

$$z=A\,\text{fin.}\,\alpha v+B\,\text{fin.}\,\beta v+C\,\text{fin.}\,\gamma v+D\,\text{fin.}\,\delta v+E\,\text{fin.}\,\varepsilon v\ \text{etc.}$$

ex qua differentiando fiet:

$$\frac{dz}{dv}=A\alpha\,\text{cof.}\,\alpha v+B\beta\,\text{cof.}\,\beta v+C\gamma\,\text{cof.}\,\gamma v+D\delta\,\text{cof.}\,\delta v+E\varepsilon\,\text{cof.}\,\varepsilon v+\text{etc.}$$

$$\frac{ddz}{dv^2}=-A\alpha^2\,\text{fin.}\,\alpha v-B\beta^2\,\text{fin.}\,\beta v-C\gamma^2\,\text{fin.}\,\gamma v-D\delta^2\,\text{fin.}\,\delta v-\text{etc.}$$

$$\frac{d^3z}{dv^3}=-A\alpha^3\,\text{cof.}\,\alpha v-B\beta^3\,\text{cof.}\,\beta v-C\gamma^3\,\text{cof.}\,\gamma v-D\delta^3\,\text{cof.}\,\delta v-\text{etc.}$$

$$\frac{d^4z}{dv^4}=+A\alpha^4\,\text{fin.}\,\alpha v+B\beta^4\,\text{fin.}\,\beta v+C\gamma^4\,\text{fin.}\,\gamma v+D\delta^4\,\text{fin.}\,\delta v+\text{etc.}$$

$$\frac{d^5z}{dv^5}=+A\alpha^5\,\text{cof.}\,\alpha v+B\beta^5\,\text{cof.}\,\beta v+C\gamma^5\,\text{cof.}\,\gamma v+D\delta^5\,\text{cof.}\,\delta v+\text{etc.}$$

etc.

XXXV.

Posito iam $v = 0$, in nihilum abeunt valores z, $\frac{d\,d\,z}{d\,v^2}$, $\frac{d^4\,z}{d\,v^4}$ etc. vti oportet. Tum vero obtinebitur:

$$g \;= A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + E\varepsilon + \text{etc.}$$
$$g' = A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 + \text{etc.}$$
$$g'' = A\alpha^5 + B\beta^5 + C\gamma^5 + D\delta^5 + E\varepsilon^5 + \text{etc.}$$
$$g''' = A\alpha^7 + B\beta^7 + C\gamma^7 + D\delta^7 + E\varepsilon^7 + \text{etc.}$$
etc.

valores autem infinitesimos oportet fieri finitos, seu necesse est, sit:

$$A\alpha^{\infty} + B\beta^{\infty} + C\gamma^{\infty} + D\delta^{\infty} + E\varepsilon^{\infty} + \text{etc.} = \text{quant. finitae.}$$

XXXVI.

Cum autem, posito $v = \Phi$, valores $\frac{dz}{dv}$, $\frac{d^3 z}{dv^3}$, $\frac{d^5 z}{dv^5}$, etc. euanescere debeant, isti cosinus euanescant necesse est:

$$\text{cos.}\,\alpha\Phi = 0,\; \text{cos.}\,\beta\Phi = 0,\; \text{cos.}\,\gamma\Phi = 0,\; \text{cos.}\,\gamma\Phi = 0 \text{ etc.}$$

alii autem non dantur anguli, quorum cosinus euanescant, praeter ϱ, 3ϱ, 5ϱ, 7ϱ, 9ϱ etc. vnde capi oportet

$$\alpha = \frac{\varrho}{\Phi};\; \beta = \frac{3\varrho}{\Phi};\; \gamma = \frac{5\varrho}{\Phi};\; \delta = \frac{7\varrho}{\Phi};\; \varepsilon = \frac{9\varrho}{\Phi} \text{ etc.}$$

tum vero eorundem angulorum sinus erunt:

$$\text{sin}\,\alpha\Phi = +1;\; \text{sin.}\,\beta\Phi = -1;\; \text{sin.}\,\gamma\Phi = +1;\; \text{sin.}\,\delta\Phi = -1;\; \text{sin.}\,\varepsilon\Phi = +1 \text{ etc.}$$

XXXVII.

XXXVII.

Posito ergo $v = \Phi$, obtinebuntur sequentes aequationes:

$$\begin{aligned} f &= A - B + C - D + E - \text{etc.} \\ f' &= A\alpha^2 - B\beta^2 + C\gamma^2 - D\delta^2 + E\varepsilon^2 - \text{etc.} \\ f'' &= A\alpha^4 - B\beta^4 + C\gamma^4 - D\delta^4 + E\varepsilon^4 - \text{etc.} \\ f''' &= A\alpha^6 - B\beta^6 + C\gamma^6 - D\delta^6 + E\varepsilon^6 - \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

quorum valorum infinitesimi iterum finiti euadere debent, seu esse oportet:

$A\alpha^\infty - B\beta^\infty + C\gamma^\infty - D\delta^\infty + E\varepsilon^\infty -$ etc. $=$ quant. finitae.

XXXVIII.

Substituamus ergo pro α, β, γ, δ etc. valores, qui ipsis conuenire possunt, ac ponendo ad abbreuiandum $\frac{\rho}{\Phi} = n$, vt sit

$$\alpha = n;\ \beta = 3n;\ \gamma = 5n;\ \delta = 7n, \text{ etc.}$$

atque necesse est, vt sit:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tam } An^\infty + 3^\infty Bn^\infty + 5^\infty Cn^\infty + 7^\infty Dn^\infty + \text{etc.} \\ \text{quam } An^\infty - 3^\infty Bn^\infty + 5^\infty Cn^\infty - 7^\infty Dn^\infty + \text{etc.} \end{array}\right\} \text{quant. finita}$$

siue requiritur, vt sit

$n^\infty(A \pm 3^\infty B + 5^\infty C \pm 7^\infty D + \text{etc.})$ quantitas finita et quidem positiua.

XXXIX.

Quodsi iam An^∞ sit quantitas finita, perspicuum est, reliquas litteras B, C, D etc. omnes esse debere euanescentes. Ponamus ergo $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ etc. atque $An^\infty = a$, vt sit $A = \frac{a}{n^\infty} = \frac{a\Phi^\infty}{\rho^\infty}$, atque pro cur-va infinitesima, quae per continuam euolutionem curvae datae AMB, cuius amplitudo est Φ, nascitur, habebimus hanc aequationem: $z = \frac{a\Phi^{\infty}}{\varrho^{\infty}}$ sin. $\frac{\varrho}{\Phi} v$, vel $z = \frac{a}{n^{\infty}}$ sin. nv, posito $n = \frac{\varrho}{\Phi}$. Constat autem, hanc aequationem esse pro epicycloide, vel hypocycloide, quas curuas notum est similes esse suis euolutis. Si enim radius circuli immobilis sit $= b$, et mobilis $= k$, erit $n = \frac{\varrho}{\Phi} = \frac{b}{b + 2k}$, ideoque $\frac{k}{b} = \frac{\Phi - \varrho}{2\varrho}$.

XL.

Hinc iam facile perspicitur id, quod iam notauimus, si sit $\Phi > \varrho$, seu $n < 1$, curuas infinitesimas in infinitum expandi; fit enim $n^{\infty} = 0$, ideoque $\frac{a}{n^{\infty}} = \infty$, vnde arcus, cuicunque amplitudini respondens, erit infinitus. Altero autem casu, quo $\Phi < \varrho$, seu $n > 1$, ob $n^{\infty} = \infty$, erit $\frac{a}{n^{\infty}} = 0$, sicque curua infinitesima in spatium infinite paruum contrahitur. Semper ergo quaecunque curua pro AMB accipiatur post infinitas euolutiones, vel ad epicycloides, si $\Phi > \varrho$, vel ad hypocycloides, si $\Phi < \varrho$ peruenietur; cyclois vero communis prodit, si $\Phi = \varrho$, qui est casus, quem supra euoluimus, quo $n = 1$, ideoque n^{∞} neque in infinitum augetur, neque diminuitur.

XLI.

Tab. II. Fig. 4.

Sit AMB curua similis ei, quae per euolutionem infinitesimam nascitur, in qua sumto arcu quocunque

cunque $AM = z$, cuius amplitudo seu angulus ANM sit $= v$, et natura huius curuae hac aequatione $z = c$ sin nv continebitur, vnde patet, curuam istam esse rectificabilem. Praeterea vero euidens est, eam simul esse algebraicam, quoties n est numerus rationalis, solo casu $n = 1$ excepto, quo cyclois vulgaris enascitur.

XLII.

Si enim ponantur coordinatae orthogonales $AP = x$, $PM = y$, ob angulum $ANM = v$ et elementum curvae $= dz$, erit $\frac{dx}{dz} = \text{sin.}\, v$ et $\frac{dy}{dz} = \text{cos.}\, v$. At est $dz = ncdv\,\text{cos.}\, nv$, vnde fit

$$dx = ncdv\,\text{sin.}\, v\,\text{cos.}\, nv = \tfrac{1}{2}ncdv(\text{sin.}(1+n)v + \text{sin.}(1-n)v)$$

$$dy = ncdv\,\text{cos.}\, v\,\text{cos.}\, nv = \tfrac{1}{2}ncdv(\text{cos.}(1+n)v + \text{cos.}(1-n)v)$$

quae formulae sunt integrales, excepto casu $n = 1$, quippe quo, ob $\text{cos.}(1-n)v = 1$, applicata y determinaretur per ipsum angulum v, sicque a circuli quadratura penderet. Integratio vero praebet:

$$x = \tfrac{1}{2}nc\left(\frac{1-\text{cos.}(1+n)v}{1+n} + \frac{1-\text{cos.}(1-n)v}{1-n}\right)$$

$$y = \tfrac{1}{2}nc\left(\frac{\text{sin.}(1+n)v}{1+n} + \frac{\text{sin.}(1-n)v}{1-n}\right).$$

XLIII.

Hae coordinatae etiam ita possunt exprimi, vt sit

$$x = \frac{nc}{1-nn}(1 - \text{cos.}\, v\,\text{cos.}\, nv - n\,\text{sin.}\, v\,\text{sin.}\, nv)$$

$$y = \frac{nc}{1-nn}(\text{sin.}\, v\,\text{cos.}\, nv - n\,\text{cos.}\, v\,\text{sin.}\, nv).$$

Ac si sumatur $AC = \frac{nc}{1-nn}$, ponaturque $CP = t$, erit

$$t = \frac{nc}{1-nn}(\text{cos.}\, v\,\text{cos.}\, nv + n\,\text{sin.}\, v\,\text{sin.}\, nv)$$

vnde fit

$$CM = \sqrt{(tt+yy)} = \frac{nc}{1-nn}\sqrt{(\text{cos}.\,nv^2 + nn\,\text{sin}.\,uv^2)}.$$

Pro altero ergo termino curuae B, vbi fit amplitudo $v = \Phi$, et $nv = \varrho$, erit $CB = \frac{nnc}{1-nn}$, ita vt fit $AC : BC = 1 : n$. Eft vero C centrum circuli immobilis, CB eius radius, et $AC - BC = \frac{nc}{1+n}$ diameter circuli mobilis pro defcriptione epicycloidis, vel hypocycloidis.

XLIV.

Cum fit $AN = x + \frac{y\,dy}{dx} = x + \frac{y\,\text{cof}.\,v}{\text{fin}.\,v}$, erit

$$AN = \frac{nc}{1-nn}\left(1 - \frac{n\,\text{fin}.\,nv}{\text{fin}.\,v}\right) \text{ et } CN = \frac{nnc}{1-nn}\cdot\frac{\text{fin}.\,nv}{\text{fin}.\,v}$$

ideoque, ob $CB = \frac{nnc}{1-nn}$, erit

$$CN : CB = \text{fin}.\,nv : \text{fin}.\,v.$$

Quare fi centro C radio CB defcribatur circulus rectam MN fecans in L, ducaturque $CL = CB$, ob angulum $ANM = v$ et $CN : CL = \text{fin}.\,CLN : \text{fin}.\,v$, erit angulus $CLN = nv$, et angulus $ACL = (1-n)v$.

XLV.

Porro eft $MN = \frac{y\,dz}{dx} = \frac{y}{\text{fin}.\,v} = \frac{nc}{1-nn}\left(\text{cof}.\,nv - \frac{n\,\text{cof}\,v\,\text{fin}.\,nv}{\text{fin}.\,v}\right)$ tum vero ex triangulo CNL reperitur

$$LN = \frac{nnc}{1-nn}\cdot\frac{\text{fin}.\,(1-n)v}{\text{fin}.\,v} = \frac{nnc}{1-nn}\left(\text{cof}.\,nv - \frac{\text{cof}.\,v\,\text{fin}.\,nv}{\text{fin}.\,v}\right)$$

vnde concluditur $LM = \frac{n(1-n)c}{1-nn}\,\text{cof}.\,nv = \frac{nc}{1+n}\,\text{cof}.\,nv$. At radius ofculi curuae in M eft $= \frac{dz}{dv} = nc\,\text{cof}.\,nv$, qui cum cadat in rectam ML, erit radius ofculi ad ML vt $1+n$ ad 1, hoc eft in ratione conftanti, quae funt proprietates epicycloidum et hypocycloidum.

DEMON-

DEMONSTRATIO SERIEI

$$\frac{4.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ 22.\ \ldots\ldots\ (4n-10)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ \ldots\ldots\ (n-1)}$$

EXHIBITAE IN RECENSIONE VI. TOMI VII. COMMENTARIORVM A. S. P.

Auctore

S. *KOTELNIKOW.*

Quum a quibusdam amicis intellexissem, desiderari libellum, artem agrimensoriam continentem, ad scribendum me accinxi, atque demonstrato theoremate, *in omni figura rectilinea vt construi possit debere datorum numerum esse* $2n-3$, denotante n numerum laterum, ad hanc aequationem perueni $2n-3 = x+y+z$, vbi, x numerum datorum laterum, y angulorum poligoni, z diagonalium, denotat. In enumeratione itemque euolutione praecipuorum constructionis casuum in hac aequatione contentorum, continet enim multos, respexi potissimum ad tres sequentes, quibus

I. $x=n$, $y=n-3$, $z=0$

II. $x=n-2$, $y=n-1$, $z=0$

III. $x=n$, $y=0$, $z=n-3$.

et euolutis duobus prioribus, deduxi etiam formulas, exhibentes numerum constructionum pro quouis poligono, sequentes

pro

Pro I casu

$$\frac{4.5.6.7.8.9 \text{ - - - - - } n}{1.2.3.4.5.6 \text{ - - - - - } (n-3)} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$$

Pro II. casu

$$\frac{3.4.5.6.7.8 \text{ - - - - - - - } n}{1.2.3.4.5.6 \text{ - - - - - } (n-2)} = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}.$$

Sed postquam perueni ad tertium casum euoluendum, multum desudaui; nunquam tamen, nec ex delineatione figurarum, nec ex aliis ratiociniis, ad legem, qua figurae pro quibusuis casibus formantur, peruenire potui: nec vnquam plures his quatuor 1, 2, 5, 14, certis et 42 incerto numero, detegere potui. Omissis itaque delineationibus figurarum, ad ratiocinia me conuerti et legem numerorum detectorum scrutans ad illam seriem delapsus sum. De cuius veritate tamen dubitaui, et iure quidem, nam ex quatuor tantum numeris certis 1, 2, 5, 14 et quinto 42 incerto, vti dixi, eruta est: et quamquam scirem in similibus demonstrationibus inductioni aliquantillum indulgendum esse, in medium tamen proferre non ausus sum, etiamsi mihi viderer, legitima ratiocinia in eruenda ista serie adhibuisse.

At cum nuper VII. Commentariorum tomum adeptus essem, volens me confirmare de veritate seriei inuentae, inspexi dissertationem Cel. *Segneri*, vt aliquid ibi ad meam vtilitatem detegerem; cumque nihil tale inuenissem, ad summarium dissertationum conuersus, vt iudicium de ea latum inspicerem, vidi inopinanter maximo mihi gaudio, eandem seriem, a summo quodam

dam geometra communicatam, cuius auctoritas maximum pondus demonſtrationi meae addidit, meque de veritate illius ſeriei prorſus conuictum reddidit. Puto etiam illum iisdem ratiociniis ad hanc ſeriem perueniſſe, quibus ego deductus ſum. Sunt autem haec:

Quum in qualibet figura numerus triangulorum eam componentium ſit $n-2$, facile patet, ex datis lateribus n et diagonalibus $n-3$, poſſe atque debere tot triangula conſtrui, quot neceſſe eſt ad conſtruendam figuram omnibus modis poſſibilibus, atque illa triangula ita conſtrui poſſe, vt ſemper $n-2$ combinata praebeant verum conſtructionis modum, illam, non aliam, figuram exhibentem. Pone iam numerum triangulorum, qui combinati $n-2$ exhibent omnes conſtructionis modos eandem figuram praebentes, N: erit numerus modorum conſtructionis pro quauis figura $\frac{N}{n-2}$. Hinc

Pro triangulo $\frac{N}{1}$
Pro —— IV. $\frac{N}{2}$
—— V. $\frac{N}{3}$
—— VI. $\frac{N}{4}$
—— VII. $\frac{N}{5}$.

Numeri vero inuenti conſtructionis modorum, ita ſe habent:

Pro	triangulo	III.	1
——	——	IV.	2
——	——	V.	5
——	——	VI.	14
——	——	VII.	42.

De numero 42 quanquam ſim incertus, tamen eum aſſumo propterea, quod a lege reliquorum non abhorreat.

His ergo poſitis, habeo ſequentes aequationes:

$$\tfrac{N}{1} = 1;\ \tfrac{N}{2} = 2;\ \tfrac{N}{3} = 5;\ \tfrac{N}{4} = 14;\ \tfrac{N}{5} = 42.$$

Ex quibus ſequitur, numeros modorum conſtructionis 1, 2, 5, 14, 42, poſſe exprimi hoc modo:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2\cdot 2}{2},\ \frac{3\cdot 5}{3},\ \frac{4\cdot 4}{4},\ \frac{5\cdot 42}{5}.$$

ſiue

$$\frac{1}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{15}{3},\ \frac{56}{4},\ \frac{210}{5}.$$

Numeri ſuperiores denotant numerum triangulorum, quorum certi quidam $n-2$ dant figuram quaeſitam.

Cum in prioribus caſibus duobus numeri modorum conſtruendi figuras, ex datis lateribus n et $n-3$ angulis, item ex datis $n-2$ lateribus et $n-1$ angulis, per factores exhibeantur, concludo etiam hic per factores debere exprimi, quem in finem retineo numeros

$$\frac{1}{1},\ \frac{2\cdot 2}{2},\ \frac{3\cdot 5}{3},\ \frac{4\cdot 14}{4},\ \frac{5\cdot 42}{5}.$$

Ex numero primo $\frac{1}{1}$ nihil concludere poſſum, ſumo ſecundum $\frac{2\cdot 2}{2}$, eumque transformo, vt aliquod indicium capiam de progreſſione factorum denominatoris, qui iam aliquam legem tenent, creſcunt ſcilicet vnitate, quam legem perpetuo retinebo in omnibus numeris. Transformo vero numerum $\frac{2\cdot 2}{2}$ in $\frac{2\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3}$. Hic nouus $\frac{2\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3}$ poteſt demum transformari in $\frac{3\cdot 4}{2\cdot 3}$ et $\frac{2\cdot 6}{2\cdot 3}$.

Eodem

Eodem modo tertium muto in $\frac{4.5.6}{2.3.4}$ et in $\frac{2.6.10}{2.3.4}$; aliter enim retentis iisdem denominatorum factoribus transformari non possunt, vt in numeratore constans aliqua lex pateat.

Notum vero, series per factores expressas hac proprietate gaudere, vt abiecto vel addito aliquo, vel aliquibus factoribus, semper certos casus exhibeant, qua proprietate posteriores $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}$ et $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}.\frac{10}{4}$ gaudent. Enim vero abiecto factore $\frac{10}{4}$, exhibetur $\frac{2.6}{2.3}=2$, casus pro quadrilatero, et abiecto demum factore $\frac{6}{3}$, habetur $\frac{2}{2}=\frac{1}{1}=1$, pro triangulo; priores vero $\frac{3}{2}.\frac{4}{3}$ et $\frac{4}{2}.\frac{5}{3}.\frac{6}{4}$ hanc proprietatem non habent, quare retineo posteriores, et habeo pro III. $\frac{2}{2}$; pro IV $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}$; pro V. $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}.\frac{10}{4}$.

Simili modo numerum $\frac{4.14}{4}$ transmuto in $\frac{2.3.4.5.14}{2.3.4.5}$ $=\frac{2.6.10.14}{2.3.4.5}$, duobus prioribus viam monstrantibus, et hac ratione inuenio pro VI $\frac{2.6.10.14}{2.3.4.5}$, qui omnes numeros, pro III. IV. et V scilicet, in se continet.

Postremo assumo quintum numerum $\frac{42.5}{5}=\frac{5.6.7}{5}$, et transmuto eum in $\frac{2.3.4.5.6.7.6}{2.3.4.5.6.}=\frac{2.6.10.14.18}{2.3.4.5.6}$, quare habeo sequentes numeros modorum construendi figuras:

Pro trigono $\frac{2}{2}$
Pro quadrilatero $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}$
Pro pentagono $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}.\frac{10}{4}$
Pro hexagono $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}.\frac{10}{4}.\frac{14}{5}$
Pro heptagono $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}.\frac{10}{4}.\frac{14}{5}.\frac{18}{6}$.

In quibus iam lex progreſſionis facile patet, terminusque generalis erit $\frac{4n-10}{n-1}$, nam denominatoris factores a numero laterum vnitate deficiunt; factores vero numeratoris a quadruplo numero laterum denario. Conſequenter numerus conſtructionum variarum ex datis lateribus et diagonalibus pro omni figura erit

$$\frac{2.6.10.14.18 - - - - - (4n-10)}{2.3.4.5.6 - - - - - (n-1)}.$$

PHYSICO-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE MOTV CORPORIS AD DVO CENTRA VIRIVM FIXA ATTRACTI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Cum nunc quidem nullum amplius dubium superfit, quin corpora coelestia perinde moueantur, ac si se mutuo attraherent in ratione reciproca duplicata distantiarum theoria Astronomiae ad summum fastigium eueheretur, si motum quotcunque corporum se mutuo in ista ratione attrahentium definire liceret. Hinc Astronomiae perfectio a Mechanica est expectanda, ex cuius principiis cum motus illi facile ad aequationes differentiales reuócentur, totum negotium ab Analysi pendet, eaque eius parte, quae in resolutione aequationum differentialium consumitur. Quae ergo in Astronomia nondum satis sunt explorata, eorum cognitio ex sola Analysi est haurienda, cuius adhuc insignis promotio desideratur, antequam vel vnici phaenomeni perfectam explicationem reddere valeamus.

2. Quod autem in hoc negotio adhuc praestare licuit, tam exiguam vniuersae theoriae particulam complectitur, quae fere pro nihilo sit reputanda; plus enim ab Auctoribus, qui hoc argumentum tractauerunt, non est effectum, quam vt motum tantum duorum

duorum corporum, quae se mutuo in ratione reciproca distantiarum duplicata attrahunt, accurate definire docuerint. Statim ac tria corpora se hac lege attrahentia proponuntur, qui tamen casus a scopo praefixo adhuc longissime abest, cum numerus corporum in mundo se mutuo attrahentium sit maximus; omnia artificia, quae quidem adhuc in Analysi sunt inuenta, ei enodando minime sufficiunt. Et qui hoc problema sunt aggressi, plus non praestiterunt, quam vt casu, quo vnius corporis vis prae duobus reliquis valde est exigua, eorum motus vero tantum proxime assignauerint.

3. Ex hoc fonte omnia sunt hausta, quae adhuc de motu Lunae, ac de perturbationibus, quibus motus planetarum afficiuntur, sunt explorata, vbi commode vsu venit, vt vis, qua Luna ad Terram vrgetur, plurimum superet vim ad Solem directam, in planetis autem vis ad Solem tendens multo maior sit viribus, quibus in se inuicem agunt. Quae circumstantia nisi accederet, omnis opera in motuum determinatione frustra impenderetur. Quod ad Lunam attinet, cuius motum adhuc per approximationes satis exacte definire licuit, si longius a Terra esset remota, non video, quomodo vix vllam eius motus notitiam adipisci possemus, si scilicet tam longe a Terra esset remota, vt sortem satellitis Terrae esset amissura, iam in ordinem planetarum primariorum transitura. Tum nimirum eius motus mediam quandam legem sequeretur inter motum satelliti telluris et motum planetae primarii, cuius autem rationem vix vllo modo perspicere liceret, quandoquidem approximationibus nullus amplius locus relinqueretur.

4.

4. Quod si Luna Terrae esset vicinior, quam re vera est, vis perturbans a Sole profecta minueretur, ideoque Luna in motu suo circa Terram exactius leges *Keplerianas* sequeretur; aberrationes autem facilius certiusque definirentur. Quo longius autem Lunam a Terra remoueri fingamus, eo maiores aberrationes eius motum inquinabunt, quoad in eiusmodi regionem perueniat, vbi vis ad Solem tendens multum superet vim Terrae, ibique quasi Terram deferens, incipiet rationem motus planetarum primariorum sequi, verum tamen quasdam adhuc perturbationes a vi Terrae patietur, quas denuo, sed alio modo, per approximationes inuestigare licebit, perinde ac perturbationes in motibus planetarum primariorum repraesentari solent.

5. Motus autem Lunae maxime foret indeterminabilis, si quater vel quinquies a Terra magis esset remota, quam re vera est, ac si creatori libuisset, Lunae motum in tali regione assignare, Astronomi certe miris modis in eius inuestigatione, ac fortasse in cassum, defatigarentur, qui cum nunc sine auxilio Theoriae locum Lunae ad datum tempus sine notabili errore definire haud potuerint, eo casu semper in Lunae locis assignandis enormes errores essent commissuri, etiamsi fortasse innumerabiles obseruationes collegissent. Quin etiam ne suspicari quidem licet, qualem formam tum tabulis Astronomicis induci conueniret; neque patet, quomodo tabula mediorum motuum construi queat, cum eos neque ad Terram, neque ad Solem, referre liceat, multo minus intelligitur, quibusnam argumentis pro anomaliis definiendis esset vtendum. Ita tanquam eximium Astro-

nomiae commodum spectare debemus, quod in systemate saltem nostro solari non eiusmodi dentur corpora, de quibus dubium sit, vtrum planetis primariis an secundariis annumerari debeant.

6. In crassissima autem ignorantia circa motus coelestes versaremur, si ipsa Terra ita inter reliqua corpora fuisset disposita, vt neque legem planetarum primariorum neque secundariorum sequeretur; quoniam tum motus Solis apparens, cui cognitio reliquorum motuum innititur, nobis omnino esset inexplicabilis, quamuis plurium saeculorum obseruationes collegissemus. Vnica via ad Astronomiae notitiam perueniendi vtique per Analysin pateret, cuius beneficio problema de motu trium pluriumue corporum se mutuo attrahentium resolui deberet, neque hoc subsidio destituti quicquam in hac scientia praestare possemus. Verum etiamnum solutio huius problematis summam esset allatura vtilitatem, dum motus coelestes, quos iam proxime tantum agnoscere datur, accurate assignare valeremus; ita vt tum demum Astronomiae studium ad summum perfectionis gradum euehi sit censendum.

7. Cum igitur euolutio casus plurium corporum nequicquam ante sit expectanda, quam casus trium fuer t expeditus, hic tanquam fundamentum plenioris cognitionis astronomicae spectari debet, qui propterea omnino dignus est iudicandus, ad cuius resolutio n m omnes Geometrae vires suas coniunctim impendan. Maximae quidem occurrunt difficultates, quas frustra adhuc superare conati sunt Geometrae, verum fructu inde

inde sperandi nimis sunt pretiosi, quam vt ab vlteriori inuestigatione deterreri quemquam conueniat. Ac si hoc ipsum problema tentantes omnes vias penetrandi occlusas offendimus, quod in aliis laboribus saepe vsui fuit adminiculum, dum tractatio aliarum quaestionum affinium tandem ad quaesitum scopum perduxit, eodem et hic vtamur, atque vires in aliis quaestionibus similibus, etiamsi per se nullum vsum habiturae videantur, exerceamus, certa spe freti, inde quicquam luminis ad tenebras illas dissipandas esse affulsurum.

8. Hoc igitur institutum sequens, istud problema tractandum suscepi, vt propositis duobus corporibus fixis motum tertii cuiusdam corporis, quod ad vtrumque attrahatur, inuestigarem. Sint scilicet corpora fixa in A et B, quorum massae iisdem litteris A et B indicentur, tertium autem corpus, cuius motum in eodem plano cum punctis A et B absolui assumo, iam elapso aliquo tempore t versetur in M, cuius motus assignari debeat. Quod problema, etsi in mundo casus similis non occurrat, similibus tamen difficultatibus, atque id cui vniuersa Astronomia innititur, implicatum deprehenditur, quae autem propterea, quod hic duo corpora A et B immota finguntur, facilius superari posse videntur; casus enim continet aliquos per se perspicuos, quorum consideratio ad euolutionem generalem perducere videatur. Tab. III. Fig. 1.

9. Primum enim obseruo, si massa alterius corporis A vel B euanescat, motum corporis M leges *Keplerianas* esse secuturum, ita vt sectionem conicam

circa alterutrum punctum B vel A esset descriptum. Quod idem proxime eueniet, si corpus M ita fuerit proiectum, vt alteri corpori maneat valde vicinum, ab altero autem tantopere semper distet, vt vis eo tendens prae altera sit minima. Vnde patet motum eo magis a regulis *Keplerianis* abhorrere, quominus distantiae a punctis A et B futurae sint inaequales; hocque casu motus corporis M non adeo dissimilis videtur ei, quem secuturus esset, si corpora A et B non forent fixa, vt inde nihil luminis sperari posset. Tum vero etiam hic notari meretur casus, quo ambo corpora A et B inter se sint aequalia, corpusque M ita mouetur, vt eius orbita ad ambo aequaliter referatur; hoc enim casu motus quoque in sectione conica fieri deprehendetur.

10. His igitur obseruatis statuamus distantiam constantem $AB = a$, et variabiles $AM = v$, $BM = u$; tum vero demisso ab M in AB perpendiculo MP, sit $AP = x$, et $PM = y$, hincque $BP = a - x$ et

$$v = \sqrt{(xx + yy)} \text{ atque } u = \sqrt{((a-x)^2 + yy)}.$$

Cum iam vis acceleratrix, qua corpus M ad A attrahitur, sit $\frac{A}{vv}$, et qua ad B attrahitur, vt $\frac{B}{uu}$, hinc nascetur vis secundum directionem $PA = \frac{Ax}{v^3} - \frac{B(a-x)}{u^3}$ et secundum directionem $MP = \frac{Ay}{v^3} + \frac{By}{u^3}$; ex quibus sumto elemento temporis dt constante principia mechanica has suppeditant formulas:

$$\text{I. } ddx = -2g\,dt^2 \left(\frac{Ax}{v^3} - \frac{B(a-x)}{u^3}\right)$$

$$\text{II. } ddy = -2g\,dt^2 \left(\frac{Ay}{v^3} + \frac{By}{u^3}\right)$$

quae

quae motus determinationem continent, vbi g est certa quaedam quantitas constans pro mensuris absolutis introducta.

11. Cum neutra harum aequationum integrationem admittat, videndum est, num eas ita inter se combinare liceat, vt inde aequatio integrabilis exsurgat, hocque duplici modo praestari necesse est. Atque vna quidem huiusmodi combinatio in promtu est; priore enim per dx et altera per dy multiplicata summa prodit

$$dx\,ddx + dy\,ddy = 2g\,dt^2\left(\frac{A(x\,dx + y\,dy)}{v^3} + \frac{B(y\,dy - (a-x)\,dx)}{u^3}\right)$$

quae ob $v\,dv = x\,dx + y\,dy$ et $u\,du = y\,dy - (o-x)\,dx$ abit in hanc

$$dx\,ddx + dy\,ddy = -2g\,dt^2\left(\frac{A\,dv}{vv} + \frac{B\,du}{uu}\right)$$

cuius integralis, introducta noua constante, est

$$dx^2 + dy^2 = 4g\,dt^2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right)$$

vbi cum $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ elementum curuae a corpore M tempusculo dt descriptae exprimat, erit $\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dt}$ vera corporis M celeritas, quae ergo per distantias v et u commode determinatur.

12. Vna integratione expedita, vt aliam insuper exploremus, elidamus ex formulis primo inuentis alteram massam, sicque obtinebimus has aequationes:

$$(a-x)\,ddy + y\,ddx = -2g\,dt^2 \cdot \frac{Aay}{v^3}$$

$$x\,ddy - y\,ddx = -2g\,dt^2 \cdot \frac{Bay}{u^3},$$

vnde quidem parum lucri consecuturi videmur. Verum si perpendamus esse

$$d.\frac{x}{v} = \frac{(xx+yy)\,dx - x(x\,dx + y\,dy)}{v^3} = \frac{y(y\,dx - x\,dy)}{v^3} \quad \text{et}$$

$$d.\frac{a-u}{u} = -\frac{dx((a-x)^2+yy) - (a-x)(y\,dy - (a-x)\,dx)}{u^3} = -\frac{y(y\,dx + (a-x)\,dy}{u^3}$$

multi-

multiplicemus priorem per $xdy - ydx$ et posteriorem per $(a-x)dy + ydx$, habebimusque

$$(xdy-ydx)((a-x)ddy+yddx) = 2g\,\mathrm{A}\,adt^2.d\frac{x}{v}$$

$$((a-x)dy+ydx)(xddy-yddx) = 2g\,\mathrm{B}\,adt^2.d.\frac{a-x}{u}.$$

13. Cum iam sit $(a-x)ddy + yddx = d.((a-x)dy + ydx)$ et $xddy - yddx = d.(xdy - ydx)$, commode euenit, vt summa harum aequationum sit integrabilis, integrali prodeunte:

$$(xdy-ydx)((a-x)dy+ydx) = 2gadt^2\left(\frac{\mathrm{A}x}{v} + \frac{\mathrm{B}(a-x)}{u} + \mathrm{D}\right)$$

sicque problema iam perduximus ad resolutionem aequationum differentialium primi gradus, quousque in solutione problematis de tribus corporibus mobilibus pertingere adhuc non licuit. Quodsi iam elementum temporis dt hinc elidamus, peruenimus ad hanc aequationem simpliciter differentialem:

$$a(dx^2+dy^2)\left(\frac{\mathrm{A}x}{v} + \frac{\mathrm{B}(a-x)}{u} + \mathrm{D}\right) = 2(xdy-ydx)((a-x)dy + ydx)\left(\frac{\mathrm{A}}{v} + \frac{\mathrm{B}}{u} + \frac{\mathrm{C}}{a}\right)$$

inter binas variabiles x et y, qua natura curuae quaesitae determinatur; ita vt nunc quidem totum negotium ad resolutionem aequationis differentialis primi gradus sit perductum, quo in genere Analysis iam eximiis adminiculis est instructa.

14. Duo autem hic obstacula occurrunt, alterum quod differentialia dx et dy ad duas dimensiones ascendunt, alterum vero in quantitatibus irrationalibus v et u consistit. Quo haec obstacula facilius vincere queamus, pona-

ponamus angulos $BAM = \zeta$, $ABM = \eta$, eritque $x = v\cos.\zeta$; $y = \sin.\zeta = u\sin\eta$; et $a - x = u\cos.\eta$, vnde colligitur

$$dx^2 + dy^2 = dv^2 + vvd\zeta^2 = du^2 + uud\eta^2$$

$$xdy - ydx = vvd\zeta \text{ et } (a-x)dy + ydx = uud\eta$$

quibus valoribus aequatio nostra ad hanc formam simpliciorem reducitur:

$$a(dv^2 + vvd\zeta^2) A\cos.\zeta + B\cos.\eta + D) = 2vvuud\zeta d\eta \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right).$$

Porro autem ob $v = \frac{a\sin.\eta}{\sin.(\zeta+\eta)}$ et $u = \frac{a\sin.\zeta}{\sin.(\zeta+\eta)}$ erit $x = \frac{a\cos.\zeta\sin.\eta}{\sin.(\zeta+\eta)}$ et $y = \frac{a\sin.\zeta\sin.\eta}{\sin.(\zeta+\eta)}$, hincque $dx = -\frac{ad\zeta\sin.\eta\cos.\eta + ad\eta\sin.\zeta\cos.\zeta}{\sin.(\zeta+\eta)^2}$ et $dy = \frac{ad\zeta\sin.\eta^2 + ad\eta\sin.\zeta^2}{\sin.(\zeta+\eta)^2}$, vnde fit $dx^2 + dy^2 = \frac{aa(d\zeta^2\sin.\eta^2 + d\eta^2\sin.\zeta^2 - 2d\zeta d\eta\sin.\zeta\sin.\eta\cos.(\zeta+\eta))}{\sin.(\zeta+\eta)^4} = dv^2 + vvd\zeta^2$.

15. Si ope horum valorum aequationem nostram ad solos binos angulos ζ et η reducamus, nanciscemur:

$$(d\zeta^2\sin.\eta^2 d\eta^2\sin.\zeta^2 - 2d\zeta d\eta\sin\zeta\sin.\eta\cos.(\zeta+\eta))(A\cos.\zeta \; B\cos.\eta + D)$$
$$= 2d\zeta d\eta\sin.\zeta^2\sin.\eta^2\left(\frac{A\sin.(\zeta+\eta)}{\sin.\eta} + \frac{B\sin.(\zeta+\eta)}{\sin.\zeta} + C\right)$$
$$= 2d\zeta d\eta\sin.\zeta\sin.\eta(A\sin.\zeta\sin.(\zeta+\eta) + B\sin.\eta\sin(\zeta+\eta) + C\sin.\zeta\sin.\eta)$$

quae reuocatur ad hanc formam multo simpliciorem:

$$(d\zeta^2\sin.\eta^2 + d\eta^2\sin.\zeta^2)(A\cos.\zeta + B\cos.\eta + D) = 2d\zeta d\eta\sin.\zeta\sin.\eta (A\cos.\eta + B\cos\zeta + C\sin.\zeta\sin.\eta + D\cos.(\zeta+\eta)).$$

Vel

Vel ob $\cos.(\zeta+\eta)=\cos.\zeta\cos.\eta-\sin.\zeta\sin.\eta$ statuamus $C-D=E$, vt habeamus:

$$d\zeta^2\sin.\eta^2+d\eta^2\sin.\zeta^2=\frac{2d\zeta d\eta\sin.\zeta\sin.\eta(A\cos.\eta+B\cos.\zeta+D\cos.\zeta\cos.\eta+E\sin.\zeta\sin.\eta)}{A\cos.\zeta+B\cos.\eta+D}$$

vnde si ponamus breuitatis gratia

$$A\cos.\eta+B\cos.\zeta+D\cos.\zeta\cos.\eta+E\sin.\zeta\sin.\eta=P \text{ et}$$

$$A\cos.\zeta+B\cos.\eta+D=Q$$

deducimus radicem extrahendo:

$$\frac{d\zeta\sin.\eta}{d\eta\sin.\zeta}=\frac{P\pm\sqrt{(PP-QQ)}}{Q}.$$

16. Cum nulla via pateat huiusmodi aequationes resoluendi, contemplemur casus, quibus resolutio est in potestate, qui sunt, quando vel $A=0$, vel $B=0$; tametsi enim etiam his casibus aequatio postrema parum tractabilis videtur, tamen ex formulis principalibus solutio facile deducitur. Si enim ponamus $B=0$, prior integratio praebet:

$$dx^2+dy^2=4g\,dt\left(\frac{A}{v}+\frac{C}{a}\right)$$

tum vero ex §. 12. ob $B=0$ impetramus

$$xddy-yddx=0 \text{ hincque } xdy-ydx=\text{Const. } dt$$

ponamus ergo $(xdy-ydx)^2=4gFa\,dt^2$, fietque

$$Fa(dx^2+dy^2)^2=2(xdy-ydx)^2\left(\frac{A}{v}+\frac{C}{a}\right)=v^4d\zeta^2\left(\frac{A}{v}+\frac{C}{a}\right)$$

et factis substitutionibus supra indicatis:

$$F(d\zeta^2\sin.\eta^2+d\eta^2\sin.\zeta^2-2d\zeta d\eta\sin.\zeta\sin.\eta\cos.(\zeta+\eta))$$
$$=d\zeta^2\sin.\eta^4\left(\frac{A\sin.(\zeta+\eta)}{\sin.\eta}+C\right)$$

seu

$$d\zeta^2\sin.\eta^2\left(1-\frac{A\sin.\eta\sin.(\zeta+\eta)-C\sin.\eta^2}{F}\right)+d\eta^2\sin.\zeta^2$$
$$=2d\zeta d\eta\sin.\zeta\sin.\eta\cos.(\zeta+\eta)$$

cuius

cuius quidem resolutio vix facilior videtur, quam praecedentis; at extracta radice quadrata satis fit manifesta.

17. Verum antequam ad hanc vltimam aequationem inter ζ et η pertigimus, iam assecuti eramus aequationem duabus tantum litteris v et ζ constantem, hanc:

$$Fa(dv^2 + vvd\zeta^2) = v^4 d\zeta^2 \left(\frac{A}{v} + \frac{C}{a}\right)$$

ex qua statim elicitur

$$Fadv^2 = vvd\zeta^2 \left(Av + \frac{Cvv}{a} - Fa\right) \text{ seu}$$

$$Fadv^2 = v^4 d\zeta^4 \left(\frac{C}{a} + \frac{A}{v} - \frac{Fa}{vv}\right)$$

vnde fit

$$\frac{dv}{vv} \sqrt{Fa} = d\zeta \sqrt{\left(\frac{C}{a} + \frac{A}{v} - \frac{Fa}{vv}\right)}$$

ex qua indoles sectionum conicarum more solito elici solet. Posito nempe $\frac{1}{v} = \frac{z}{a}$, fit

$$-dz = d\zeta \sqrt{\left(\frac{C + Az}{F} - zz\right)}, \text{ vnde sequitur}$$

$$\zeta + \alpha = \text{Arc. cos.} \frac{2Fz - A}{\sqrt{(AA + 4CF)}}$$

hincque $2Fz = A + \cos.(\zeta + \alpha). \sqrt{(AA + 4CF)}$

ita vt sit $v = \frac{2Fa}{A + \cos.(\zeta + \alpha). \sqrt{(AA + 4CF)}} = \frac{a \sin. \eta}{\sin. (\zeta + \eta)}$.

18. Hinc ergo aequatio integralis inter angulos ζ et η ita exprimitur, vt sit

$$\frac{2F \sin. (\zeta + \eta)}{\sin. \eta} = A + \cos. (\zeta + \alpha). \sqrt{(AA + 4CF)}$$

seu, quo ex dato angulo ζ angulus η facilius inueniri possit, ob $\sin.(\zeta + \eta) = \sin. \zeta \cos. \eta + \cos. \zeta \sin. \eta$, erit

$$2F \sin. \zeta \cot. \eta + 2F \cos. \zeta = A + \cos.(\zeta + \alpha). \sqrt{(AA + 4CF)}$$

seu mutata forma constantium:

$$\cot. \eta + \cot. \zeta = \frac{A + M \cos. \zeta + N \sin. \zeta}{2F \sin. \zeta}.$$

 Atque

Atque hinc simul intelligimus, si ponamus $A = 0$, fore

$$\cot.\zeta + \cot.\eta = \frac{B + M'\cos.\eta + N'\sin.\eta}{2F'\sin.\eta}.$$

Quare iam constant formae, ad quas integrale aequationis differentialis §. 15. datae casibus vel $A = 0$ vel $B = 0$ perducatur, quo ipso via ad haec integralia perveniendi inuestigari poterit.

Pro casu $B = 0$.

19. Hoc casu aequatio nostra principalis §. 15. inuenta abit in hanc formam:

$$d\zeta^2 \sin.\eta^2 + d\eta^2 \sin.\zeta^2 = \frac{2\,d\zeta\, d\eta \sin.\zeta \sin.\eta (A\cos.\eta + D\cos.\zeta\cos.\eta + E\sin.\zeta\sin.\eta}{A\cos.\zeta + D}$$

cuius ergo nouimus integralem huiusmodi formam esse habituram:

$$\cot.\eta + \cot.\zeta = \frac{A + M\cos.\zeta + N\sin.\zeta}{2F\sin.\zeta}$$

seu breuius $\cot.\eta = \alpha + \frac{\beta + \gamma\cos.\zeta}{\sin.\zeta}$

quae igitur quomodo ex differentiali sit eruenda, inuestigari oportet. Quod etiamsi non difficulter per calculum statim ab initio ad hunc casum accommodatum perspiciatur, tamen consideratio corporis B calculum ita immutauit, vt haec conclusio non nisi per ambages inde colligi posse videatur. Primum autem intelligimus, loco anguli η non inutiliter eius cotangentem introductum iri; aequatione ergo per $\sin.\eta^4$ diuisa habemus

$$\frac{d\zeta^2}{\sin.\eta^2} + \sin.\zeta^2 (d.\cot.\eta)^2 = - \frac{2\,d\zeta \sin.\zeta\, d.\cot.\eta (A\cot.\eta + D\cos.\zeta\cot.\eta + E\sin.\zeta)}{A\cos.\zeta + D}.$$

20. Ponamus $\cot.\eta = z$, ob $\sin.\eta = \frac{1}{\sqrt{(1+zz)}}$ erit:

$$d\zeta^2 (1+zz) + dz^2 \sin.\zeta^2 = - \frac{2\,d\zeta\, dz \sin.\zeta (z(A + D\cos.\zeta) + E\sin.\zeta)}{A\cos.\zeta + D}$$

vnde

vnde radicem extrahendo fit

$$\frac{dz\,\text{fin.}\,\zeta}{d\zeta} = -\frac{z(A+D\,\text{cof.}\,\zeta) - E\,\text{fin.}\,\zeta \pm \sqrt{\left\{(AA-DD)zz\,\text{fin.}\,\zeta^2 + 2E(A+D\,\text{cof.}\,\zeta)z\,\text{fin.}\,\zeta + EE\,\text{fin}\,\zeta^2 - (A\,\text{cof.}\,\zeta + D)^2\right\}}}{A\,\text{cof.}\,\zeta + D}$$

vbi notetur, quantitatem figno radicali inuolutam ita referri poffe:

$$\left(z\,\text{fin.}\,\zeta.\sqrt{(AA-DD)} + \frac{E(A+D\,\text{cof.}\,\zeta)}{\sqrt{(AA-DD)}}\right)^2 - \frac{(AA-DD+EE)(A\,\text{cof.}\,\zeta+D)^2}{AA-DD}$$

Quare pofito

$$z\,\text{fin.}\,\zeta.\sqrt{(AA-DD)} + \frac{E(A+D\,\text{cof.}\,\zeta)}{\sqrt{(AA-DD)}} = \frac{s(A\,\text{cof.}\,\zeta+D)\sqrt{(AA-DD+EE)}}{\sqrt{(AA-DD)}}$$

vt fit

$$z\,\text{fin.}\,\zeta = -\frac{E(A+D\,\text{cof.}\,\zeta) + s(A\,\text{cof.}\,\zeta+D)\sqrt{(AA-DD+EE)}}{AA-DD}$$

erit quantitas figno radicali implicata

$$\frac{(A\,\text{cof.}\,\zeta+D)\sqrt{(AA-DD+EE)}}{\sqrt{(AA-DD)}}\sqrt{(ss-1)}.$$

21. Ponatur breuitatis gratia haec quantitas formulae irrationali aequalis $= V$, et cum noftra aequatio fit

$$dz\,\text{fin}\,\zeta\,(A\,\text{cof.}\,\zeta+D) + zd\zeta\,(A+D\,\text{cof.}\,\zeta) + Ed\zeta\,\text{fin}\,\zeta = Vd\zeta$$

diuidatur ea per $(A\,\text{cof.}\,\zeta + D)^2$, et ita repraefentari poterit

$$d.\frac{Az\,\text{fin.}\,\zeta + E}{A(A\,\text{cof.}\,\zeta + D)} = \frac{V\,d\zeta}{(A\,\text{cof.}\,\zeta + D)^2}.$$

At per noftram fubftitutionem eft

$$Az\,\text{fin.}\,\zeta + E = -\frac{DE(A\,\text{cof.}\,\zeta+D) + As(A\,\text{cof.}\,\zeta+D)\sqrt{(AA-DD+EE)}}{AA-DD}$$

quo valore fubftituto, fimulque valore ipfius V reftituto, erit

$$d.\frac{-DE+As)\sqrt{(AA-DD+EE)}}{A(AA-DD)} = \frac{d\zeta\sqrt{(AA-DD+EE)}}{(A\,\text{cof.}\,\zeta+D)\sqrt{(AA-DD)}}\sqrt{(ss-1)}$$

feu

$$\frac{ds}{\sqrt{(AA-DD)}} = \frac{d\zeta\sqrt{(ss-1)}}{A\,\text{cof.}\,\zeta+D} \text{ vel } \frac{ds}{\sqrt{(ss-1)}} = \frac{d\zeta(AA-DD)}{A\,\text{cof.}\,\zeta+D}$$

 quae

quae etiam ita repraesentari potest:

$$\frac{-ds}{\sqrt{(1-ss)}} = \frac{d\zeta\sqrt{(DD-AA)}}{A\cos.\zeta+D}$$

cuius integrale est

$$\text{Arc.}\cos. s = \text{Arc.}\cos\frac{A+D\cos.\zeta}{A\cos.\zeta+D} + \alpha.$$

22. Cum iam sit $\text{Arc.}\cos.\frac{A+D\cos.\zeta}{A\cos.\zeta+D} = \text{Arc.}\sin.\frac{\sin.\zeta\sqrt{(DD-AA)}}{A\cos.\zeta+D}$

fiet $s = \frac{(A+D\cos.\zeta)\cos.\alpha-\sin.\alpha\sin.\zeta.\sqrt{(DD-AA)}}{A\cos.\zeta+D}$

siue hoc modo:

$$s = \frac{n(A+D\cos.\zeta)-\sin.\zeta\sqrt{(1-nn)(DD-AA)}}{A\cos.\zeta+D}$$

vbi si fuerit $D<A$, numerum $n>1$ capi conuenit.

Hoc itaque valore substituto aequatio integralis quaesita erit:

$$\sin.\zeta\cot.\eta = \frac{E(A+D\cos.\zeta)}{DD-AA} - \frac{n(A+D\cos.\zeta)+\sin.\zeta\sqrt{(1-nn)(DD-AA)}}{DD-AA}\sqrt{(AA-DD+EE)}$$

et posito $n = \frac{E-F}{\sqrt{(AA-DD+EE)}}$ erit

$$\sin.\zeta\cot.\eta = \frac{F(A+D\cos.\zeta)}{DD-AA} + \frac{\sin.\zeta.\sqrt{(AA-DD+2EF-FF)}}{\sqrt{(DD-AA)}}$$

vbi F est quantitas constans arbitraria per nouam integrationem introducta. Ea autem mutata erit

$$\sin.\zeta\cot.\eta = \frac{A+D\cos.\zeta}{G} + \sin.\zeta.\sqrt{\left(\frac{2E}{G}+\frac{AA-DD}{GG}-1\right)}.$$

Pro casu $A=B$ et $D=E=0$.

23. Simili modo expeditur casus $A=0$, et aequatio integralis non differt a praecedente, nisi quod litterae A et B, item anguli ζ et η, inter se permutentur. Verum hoc casu, quo $A=B$, atque $D=E=0$, aequatio nostra fit

$$d\zeta^2\sin.\eta^2 + d\eta^2\sin.\zeta^2 = 2\,d\zeta\,d\eta\sin.\zeta\sin.\eta$$

quae

quae manifesto praebet $d\zeta \sin.\eta = d\eta \sin.\zeta$, hincque integrando

$$l\,\mathrm{tang.}\tfrac{1}{2}\zeta = \mathrm{Const.} + l\,\mathrm{tang.}\tfrac{1}{2}\eta, \text{ vnde fit}$$

$$m\,\mathrm{tang.}\tfrac{1}{2}\zeta = n\,\mathrm{tang.}\tfrac{1}{2}\eta, \text{ seu } m(1-\mathrm{cos}.\zeta)\sin.\eta = n(1-\mathrm{cos}.\eta)\sin.\zeta$$

ita vt tangentes semissium angulorum BAM et ABM perpetuo eandem rationem seruent. Cum iam coordinatis x et y introductis sit $\mathrm{cos}.\zeta = \frac{x}{v}$; $\sin.\zeta = \frac{y}{v}$; $\mathrm{cos}.\eta = \frac{a-x}{u}$ et $\sin.\eta = \frac{y}{u}$, erit

$$\frac{m(v-x)y}{vu} = \frac{n(u-a+x)y}{vu} \text{ seu } m(v-x) = n(u-a+x)$$

ita vt sit $m(\mathrm{AM}-\mathrm{AP}) = n(\mathrm{BM}-\mathrm{BP})$.

24. Cum igitur sit $m(v-x) = n(u-a+x)$, notetur esse

$$x = \frac{aa+vv-uu}{2a} \text{ et } a-x = \frac{aa+uu-vv}{2a}, \text{ vnde fit}$$

$$m(uu-(a-v)^2) = n(vv-(a-u)^2) \text{ seu}$$

$$m(u+v-a)(u+a-v) = n(v+u-a)(v+a-u)$$

quae diuisa per $u+v-a)$ praebet

$$m(a+u-v) = n(a+v-u) \text{ seu } (m+n)(u-v) = (n-m)a$$

ita vt sit $u-v = \frac{(n-m)a}{m+n}$, quae comparetur cum hac:

$$nu-mv = na-(m+n)x, \text{ vnde colligitur}$$

$$(n-m)u = \frac{(mm+nn)a}{m+n} - (m+n)x, \text{ et}$$

$$(n-m)v = \frac{2mna}{m+n} - (m+n)x$$

quae quadrata suppeditat

$$(n-m)^2yy + (n-m)^2xx = \frac{4mmnnaa}{(m+n)^2} - 4mnax + (m+n)^2xx$$

seu $(n-m)^2yy = \frac{4mmnnaa}{(m+n)^2} - 4mnax + 4mnxx$.

 25. Su-

25. Sumamus abſciſſas a puncto medio C, ſitque $CA = CB = b$, ideoque $a = 2b$; et ponatur $CP = z$; tum vero ſtatuatur $m + n = b$ et $n - m = c$, et habebimus, ob $x = b - z$,

$$cv = bz - cc \quad \text{et} \quad cu = bz + cc$$

hincque $yy = \frac{bb - cc}{cc}(zz - cc)$, vnde patet, curuam eſſe hyperbolam centro C deſcriptam, cuius ſemiaxis $= c$, et diſtantia focorum a centro $CA = CB = b$, foreque tang. $\frac{1}{2}\zeta$: tang. $\frac{1}{2}\eta = b + c : b - c$. Cum porro ſit $dy = \frac{z\,dz}{\sqrt{(zz - cc)}} \cdot \frac{\sqrt{(bb - cc)}}{c}$, erit $dx^2 + dy^2 = dy^2 + dz^2 = \frac{dz^2(bbzz - c^4)}{cc(zz - cc)}$; vnde quia ob $C = D + E = 0$ et $B = A$ habemus $dx^2 + dy^2 = 4Ag\,dt^2\left(\frac{c}{bz - cc} + \frac{c}{bz - cc}\right) = \frac{8Abcgz\,dt^2}{bbzz - c^4}$, erit celeritas in $M = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dt} = \frac{2\sqrt{2Abcgz}}{\sqrt{(bbzz - c^4)}}$, et poſito $z = c$, prodit celeritas in vertice hyperbolae $= \frac{2\sqrt{2Abg}}{\sqrt{(bb - cc)}}$. Etſi ergo hyperbola abeat in ellipſin ſumendo $c > b$, tamen euidens eſt, motum in ellipſi abſolui non poſſe, quia celeritas foret imaginaria, ita vt hoc caſu corpus M nonniſi in hyperbola moueri poſſit.

26. Quemadmodum autem iſte motus in hyperbola futurus ſit comparatus, ex temporis ratione colligetur. Scilicet cum

ſit $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dz}{c}\sqrt{\frac{bbzz - c^4}{zz - cc}}$ erit

$$2\,dt\sqrt{2Abcg} = \frac{dz(bbzz - c^4)}{c\sqrt{z(zz - cc)}} \quad \text{ideoque}$$

$$2ct\sqrt{2Abcg} = \int \frac{dz(bbzz - c^4)}{\sqrt{z(zz - cc)}}.$$

Per reductionem autem integralium conſtat eſſe:

$$\int \frac{zz\,dz}{\sqrt{z(zz - cc)}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{z(zz - cc)} + \tfrac{1}{3}cc\int \frac{dz}{\sqrt{z(zz - cc)}}$$

vnde

vnde tempus t ita determinatur, vt sit

$$2ct\sqrt{2Abcg} = \tfrac{2}{3}bb\sqrt{z(zz-cc)} + \tfrac{1}{3}cc(bb-3cc)\int\frac{dz}{\sqrt{z(zz-cc)}}.$$

Pendet ergo determinatio temporis ab integratione formulae $\int\frac{dz}{\sqrt{z(zz-cc)}}$, quam neque ad quadraturam circuli, neque hyperbolae, reduci posse constat.

27. Reducamus hanc determinationem quoque ad angulum $BAM = \zeta$, et cum sit tang $\frac{1}{2}\zeta = \frac{v-x}{y} = \frac{v-b+z}{y}$, habebimus tang. $\frac{1}{2}\zeta = \sqrt{\frac{b+c}{b-c}\cdot\frac{z-c}{z+c}}$, hincque $z = \frac{c(b-c\cos.\zeta)}{c-b\cos.\zeta}$, vnde fit $v = \frac{bb-cc}{c-b\cos.\zeta}$. Quare porro nanciscimur

$\sqrt{(zz-cc)} = \frac{c\sin.\zeta.\sqrt{(bb-cc)}}{c-b\cos.\zeta}$ et $dz = -\frac{c(bb-cc)d\zeta\sin.\zeta}{(c-b\cos.\zeta)^2}$.

Ergo $\frac{dz}{\sqrt{(zz-cc)}} = -d\zeta.\sqrt{(bb-cc)}$ et

$$\frac{dz}{\sqrt{z(zz-cc)}} = -\frac{d\zeta\sqrt{(bb-cc)(c-b\cos.\zeta)}}{\sqrt{c(b-c\cos.\zeta)}}$$

vnde colligimus

$$2ct\sqrt{2Abcg} = \frac{2bbc\sin.\zeta\sqrt{(bb-cc)c(b-c\cos.\zeta)}}{3(c-b\cos.\zeta)\sqrt{(c-b\cos.\zeta)}}$$

$$-\tfrac{1}{3}cc(bb-3cc)\int\frac{d\zeta\sqrt{(bb-ce)(c-b\cos.\zeta)}}{\sqrt{c(b-c\cos.\zeta)}} \text{ siue}$$

$$\frac{2t\sqrt{2Abg}}{\sqrt{(bb-cc)}} = \frac{2bb\sin.\zeta\sqrt{(b-c\cos.\zeta)}}{3(c-b\cos.\zeta)^{\frac{3}{2}}} - \tfrac{1}{3}(bb-3cc)\int\frac{d\zeta\sqrt{(c-b\cos\zeta)}}{\sqrt{(b-c\cos.\zeta)}}.$$

28. Casus hic notatu dignus occurrit, quo $bb = 3cc$, quoniam eo tempus algebraice assignari potest. Tum autem erit celeritas in vertice hyperbolae $= 2\sqrt{\frac{Ag\sqrt{3}}{c}} = 2\sqrt{\frac{3Ag}{b}}$. Quae celeritas si dicatur $= k$, erit

$$kt = \frac{2cc\sin.\zeta}{c-b\cos.\zeta}\sqrt{\frac{b-c\cos\zeta}{c-b\cos.\zeta}} = \frac{2c\sin.\zeta}{1-\cos.\zeta.\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\sqrt{3}-\cos.\zeta}{1-\cos.\zeta.\sqrt{3}}},$$

vel breuius ita: $\frac{t}{c}\sqrt{2Abcg} = \sqrt{z(zz-cc)}$, vnde vt ad datum tempus t definiatur locus corporis M, resolui oportet hanc aequationem cubicam:

$$z^3 - ccz = \frac{2Acgtt}{cc} = \frac{2Agtt\sqrt{3}}{c}.$$

Pro

Pro aliis autem casibus praeter tractatos vix quicquam circa motum definire licebit; hic vero occasio se obtulit eiusmodi artificia adhibendi, quae forte in vberiore huius argumenti tractatione vtilitatem afferre poterunt. Adiungamus tamen adhuc casum, quo corpus in ellipsi, cuius ambo foci sint in punctis A et B, mouebitur.

De motu corporis M in Ellipsi.

29 Quoniam casu praecedente vidimus corpus in hyperbola moueri posse, dubium est nullum, quin etiam certo quodam casu motus in ellipsi fieri queat, qui autem diuersus erit a praecedenti, quo erat $D=0$ et $E=0$, existente $A=B$. Vt autem ellipsis prodeat, necesse est, vt fiat $\text{tang.}\frac{1}{2}\zeta.\text{tang.}\frac{1}{2}\eta=m$, seu retentis valoribus $CP=z$, et $CA=CB=b$, vt fiat $(v-b+z)(u-b-z)=myy$. Cum autem sit

$$\text{vel } yy=vv-(b-z)^2=(v-b+z)(v+b-z)$$
$$\text{vel } yy=uu-(b+z)^2=(u-b-z)(u+b+z)$$

erit, vtroque seorsim adhibito,

vel $u-b-z=m(v+b-z)$, vel $v-b+z=m(u+b+z)$ quibus additis prodit $u+v-2b=m(u+v+2b)$ ita vt sit $u+v=\frac{2(1+m)b}{1-m}=2c$, seu $m=\frac{c-b}{c+b}$, denotante $2c$ axem transuersum. Cum igitur sit $uu-vv=4bz$, erit hac per illam diuisa $u-v=\frac{2bz}{c}$, ideoque $v=c-\frac{bz}{c}$ et $u=c+\frac{bz}{c}$, hincque $yy=\frac{cc-bb}{cc}(cc-zz)$.

30. Cum nunc sit $l\text{tang.}\frac{1}{2}\zeta+l\text{tang.}\frac{1}{2}\eta=lm$, erit differentiando $\frac{d\zeta}{\sin.\zeta}+\frac{d\eta}{\sin.\eta}=0$, hincque $\frac{d\zeta\sin.\eta}{d\eta\sin.\zeta}=-1$.

Quare

Quare ex §. 15. necesse est, vt sit $\frac{P-\surd(PP-QQ)}{Q}=-1$, ideoque $P+Q=0$, vnde esse oportet

$$(A+B)(\cos.\zeta+\cos.\eta)+D+D\cos.\zeta\cos.\eta + E\sin.\zeta\sin.\eta=0$$

vbi constantes ita sunt definiendae, vt haec aequatio conueniat cum natura ellipsis $\tang.\frac{1}{2}\zeta.\tang\frac{1}{2}\eta=m=\frac{c-b}{c+b}$ seu hac $\frac{(1-\cos\zeta)(1-\cos.\eta)}{\sin.\zeta\sin.\eta}=m=\frac{c-b}{c+b}$. Cum ergo sit $\sin\zeta\sin.\eta=\frac{1-\cos.\zeta-\cos\eta+\cos.\zeta\cos.\eta}{m}$, hoc valore ibi substituto fit

$$\left.\begin{matrix} m(A+B)(\cos\zeta+\cos.\eta)+mD+mD\cos.\zeta\cos.\eta \\ -E(\cos\zeta+\cos.\eta)+\ E+\ E\cos.\zeta\cos.\eta \end{matrix}\right\}=0$$

quocirca hae conditiones requiruntur, vt sit $E=m(A+B)$ et $D=-\frac{E}{m}=-A-B$, hincque $E=\frac{c-b}{c+b}(A+B)$ et $C=D+E=\frac{-2b}{c+b}(A+B)$.

31. Vt iam motus rationem in hac ellipsi definiamus ob $dy=-\frac{zdz}{\surd(cc-zz)}\cdot\frac{\surd(cc-bb)}{c}$ erit $dz^2+dy^2=\frac{dz^2(c^4-bbzz)}{c\surd(cc-zz)}$ et $\surd(dz^2+dy^2)=\frac{dz\surd(c^4-bbzz)}{c\surd cc-zz)}$ supra autem inuenimus esse

$$dx^2+dy^2=4g\,dt^2\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{2b}\right)\ \text{seu}$$

$$dx^2+dy^2=4g\,dt^2\left(\frac{Ac}{cc-bz}+\frac{Bc}{cc+bz}-\frac{A-B}{c+b}\right)$$

quae transit in hanc formam:

$$dx^2+dy^2=\frac{4bg\,dt^2(A(c+z)(cc+bz)+B(c-z)(cc-bz))}{(c+b)(c^4-bbzz)}$$

vnde colligimus

$$\frac{4bccg\,dt^2}{b+c}=\frac{dz^2(c^4-bbzz)^2}{(cc-zz)(A(c+z)(cc+bz)+B(c-z)(cc-bz)}$$

 hinc-

hincque integrando

$$2ct\sqrt{\frac{bg}{b+c}}=\int\frac{(c^4-bbzz)\,dz}{\sqrt{(cc-zz)(A(c+bz)+B(c-z)(cc-bz))}}$$

32. Si ponamus $B=0$, casus reducitur ad vnicum centrum virium A, cuius calculum supra expedivimus; verum haec solutio cum illa minime conuenit, vnde methodus hic vsurpata non parum suspecta redditur. Cuius singularis phaenomeni causam inuestigaturus obseruo, per superiorem aequationem (§. 30.) ne ambas quidem litteras D et E determinari. Ex aequatione enim $(1-\cos.\zeta)(1-\cos.\eta)=m\sin.\zeta\sin.\eta$ quadrata colligimus $(1-\cos.\zeta)(1-\cos.\eta)=mm(1+\cos.\zeta)(1+\cos.\eta)$, vnde fit

$$(1-mm)(1+\cos.\zeta\cos.\eta)=(1+mm)(\cos.\zeta+\cos.\eta).$$

Cum nunc esse debeat

$$(E+MD)(1+\cos.\zeta\cos.\eta)=(E-m(A+B))(\cos.\zeta+\cos.\eta);$$

sufficit, vt sit

$$E(1+mm)+Dm(1+mm)=E(1-mm)-(A+B)m(1-mm)$$

vnde fit $2Em+D(1+mm)+(A+B)(1-mm)=0$, seu $E=-\frac{(A+B)(1-mm)}{2m}-\frac{D(1+mm)}{2m}$, hincque

$$C=D+E=-\frac{(A+B)(1-mm)}{2m}-\frac{D(1-m)^2}{2m}.$$

33. Hinc vitium methodi, qua hic sum vsus, eo clarius in oculos incurrit. Cum enim quantitas D maneat indeterminata, etiamsi curua a corpore M descripta sit data, celeritas corporis M in quolibet orbitae suae puncto non esset determinata, sed quasi arbitrio nostro relinqueretur. Nam pro vertice ellipsis foco

A.

A propiore, quo est distantia $v = c - b$, et $u = c + b$, seu ob $\frac{c-b}{c+b} = m$, $v = \frac{2mb}{1-m}$ et $u = \frac{2b}{1-m}$, erit celeritatis quadratum $\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{2g}{b}\left(\frac{A(1-m)}{2m} + \frac{B(1-m)}{2} - \frac{(A+B)(1-mm)}{2m} - \frac{D(1-m)^2}{2m}\right) = \frac{g}{mb}(-Am(1-m) - B(1-m) - D(1-m)^2)$ ideoque ipsa celeritas $\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dt} = \sqrt{\frac{(1-m)g}{mb}}(-Am\,B - D(1-m))$, quae cum indefinita esse nullo modo possit, manifestum est, methodum §. 30. adhibitam esse vitiosam; id quod adhuc clarius perspicitur, si ambo corpora A et B euanescentia statuamus, quo casu certe corpus M in linea recta esset incessurum, neque ergo ellipsim, quam hic assumsimus, describere poterit, etiamsi calculus noster aliter ostendat. Plurimum igitur intererit vitium huius methodi nosse, ne simili methodo alias vtentes in errores delabamur.

34. Quoniam in calculo nullum vitium deprehenditur, ipsum ratiocinium, quo vsus sum, fallax sit necesse est, quod isti innititur fundamento, quod aequationi differentiali

$$\frac{d\zeta \sin.\eta}{d\eta \sin.\zeta} = \frac{P + \sqrt{(PP+QQ)}}{Q} \text{ inde §. 15.}$$

satisfaciat aequatio finita $(1 - \cos.\zeta)(1 - \cos.\eta) = m \sin.\zeta \sin.\eta$, (quae vtique est pro ellipsi) siquidem vna constantium D et E certo modo assumatur. Verum iam alia occasione obseruaui fieri posse, vt aequationi cuipiam differentiali aequatio quaedam finita satisfaciat, quae tamen in aequatione per integrationem inde deducta minime contineatur. Veluti aequationi $ds\sqrt{(1-zz)} = dz$ manifesto satisfacit valor $z = 1$, qui tamen in aequatione integrali $s = \alpha + \text{Arc.}\sin.z$ vel $z = \sin.(s - \alpha)$

 neuti-

neutiquam continetur, quicunque valor constanti arbitrariae α tribuatur. Nullum ergo est dubium, quin ob similem causam methodus hic adhibita in errorem induxerit.

35. Cum in originem huius erroris accuratius inquirerem, praeter expectationem incidi in completam problematis propositi solutionem, ex qua omnia, quae hactenus in hoc argumento erant desiderata, perspicue cognoscentur, simulque origo erroris hic commissi ita dilucide intelligetur, vt haud difficulter in aliis similibus casibus huiusmodi errores euitare queamus. Atque hoc modo tractatio problematis mechanici tantas dilucidationes in ipsa Analysi suppeditauit, quas alias forte frustra quaesiuissemus, quod quidem non insolitum est censendum, cum pleraque artificia, quae adhuc in Analysi sint inuenta, quaestionibus Mechanicis ac Physicis accepta sint referenda. In his enim saepe eiusmodi inuestigationes occurrunt, quae occasionem praebent, indolem aequationum accuratius rimandi, atque adeo non raro commissio errorum illustribus inuentis fuit compensata, quemadmodum mihi hoc problema tractanti vsu venit, cuius solutionem, nisi in praedictum errorem fuissem delapsus, certe nunquam inuenissem.

Solutio completa Problematis propositi.

36. Cum problema propositum pendeat ab integratione istius aequationis differentialis:

$$\frac{d\zeta \sin.\eta}{d\eta \sin.\zeta} = \frac{P + \sqrt{(PP - QQ)}}{Q}$$

posito

posito breuitatis gratia

$P = A \cos. \eta + B \cos. \zeta + D \cos. \zeta \cos. \eta + E \sin. \zeta \sin. \eta$

$Q = A \cos. \zeta + \cos. \eta + D$

eam redigo ad hanc formam:

$$\frac{d\zeta \sin. \eta + d\eta \sin. \zeta}{d\zeta \sin. \eta - d\eta \sin. \zeta} = \frac{P + Q + \surd(PP - QQ)}{P - Q + \surd(PP - QQ)} = \frac{\surd(P+Q)}{\surd(P-Q)}$$

Tum vero posito tang $\frac{1}{2}\zeta = p$, et tang. $\frac{1}{2}\eta = q$, vnde cum sit $\frac{d\zeta}{\sin. \zeta} = \frac{dp}{p}$ et $\frac{d\eta}{\sin. \eta} = \frac{dq}{q}$, nostra aequatio resoluenda erit

$$\frac{qdp + pdq}{qdp - pdq} = \surd \frac{P+Q}{P-Q}.$$

37. At posito tang. $\frac{1}{2}\zeta = p$ et tang. $\frac{1}{2}\eta = q$, erit $\sin. \zeta = \frac{2p}{1+pp}$; $\cos. \zeta = \frac{1-pp}{1+pp}$; $\sin. \eta = \frac{2p}{1+qq}$; $\cos. \eta = \frac{1-qq}{1+qq}$.
Quare cum sit $P + Q = (A + B)(\cos. \zeta + \cos. \eta)$
$+ D(1 + \cos. \zeta \cos \eta) + E \sin. \zeta \sin. \eta$.

fiet

$$P + Q \frac{2(A+B)(1+ppqq) + 2D(1+ppqq) + 4Epq}{(1+pp)(1+qq)}.$$

Deinde quia $P - Q = (A - B)(\cos. \eta - \cos. \zeta) - D(1 - \cos \zeta \cos. \eta)$
$+ E \sin. \zeta \sin. \eta$.

fiet

$$P - Q = \frac{2(A-B)(pp-qq) - 2D(pp+qq) + 4Epq}{(1+pp)(1+qq)}.$$

His ergo valoribus introductis, nostra aequatio resoluenda erit

$$\frac{qdp + pdq}{qdp - pdq} = \surd \frac{(A+B)(1 - ppqq) + D(1 + ppqq) + 2Epq}{(A-B)(pp - qq) - D(pp + qq) + 2Epq}$$

quam facile patet ad separationem variabilium perduci posse, cum posterioris membri numerator sit functio ipsius pq, in denominatore autem quantitates p et q vbique duas dimensiones compleant.

38. Hunc in finem ſtatuamus $pq = r$ et $\frac{p}{q} = s$ vt ſit $p = \sqrt{rs}$ et $q = \sqrt{\frac{r}{s}}$, vnde ob $pdq + qdp = dr$ et $qdp - pdq = qqds$ fiet

$$\frac{dr}{qqds} = \sqrt{\frac{(A+B)(1-rr)+D(1+rr)+2Er}{qq((A+B)(ss-1)-D(ss+1)+2Es)}} \text{ ſeu}$$

$$\frac{dr}{ds} = \sqrt{\frac{r((A+B)(1-rr)+D(1+rr)+2Er)}{s((A-B)(ss-1)-D(ss+1)+2Es)}}$$

ex qua forma ſeparatio variabilium r et s manifeſta eſt, erit enim

$$\frac{dr}{\sqrt{r(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr)}} = \frac{ds}{\sqrt{s(-A+B-D+2Es+(A-B-D)ss)}}$$

Vel ſi ponamus $r = xx$ et $s = yy$, habebitur

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+B+D+2Exx-(A+B-D)x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(-A+B-D+2Eyy+(A-B-D)y^4)}}$$

Quia autem r et s valores habere poſſent negatiuos, haec transformatio incommodum implicare poſſet.

39. Verum etſi hoc modo ad aequationem ſeparatam peruenimus, tamen vtriusque partis integratio magna laborat difficultate, cum neque per circuli quadraturam, neque per logarithmos, abſolui poſſit; conſtructio autem per arcus ſectionum conicarum hic parum lucis eſſet allatura. Atque haec difficultas non minuitur, etſi ſtatuamus $B = 0$, quo tamen caſu ſolutio aliunde eſt nota; quin etiam caſus $A = 0$ et $B = 0$, quo linea a corpore M deſcripta certo eſt recta, haud minore difficultate impeditur. Neceſſe igitur eſt, vt his caſibus ambae quantitates tranſcendentes, quae ex vtraque integratione naſcuntur, eiusmodi inter ſe teneant relationem, vt adeo aequationem algebraicam inter r et s complectantur. Ex quo nouus aperitur campus in aequationes algebraicas, quae forte in huiusmodi

iusmodi aequationibus differentialibus continentur, inquirendi. Atque in hoc negotio alia adhuc methodus non constat praeter eam, quam ante aliquot annos exposui, et cuius ope infinitos arcus, tam ellipticos, quam hyperbolicos, inter se comparaui, quae mihi iam tum maximum vsum aliquando habitura videbatur.

40. Sed antequam ad hanc methodum confugiamus, haud abs re erit, originem erroris supra commissi indicare, quae nunc quidem est manifesta. Cum enim ad aequationem differentialem separatam inter r et s peruenerimus, euidens est, ei satisfieri, si vel ipsi r eiusmodi valor constans α tribuatur, vt fiat:

$$A + B + D + 2Er - (A + B - D)rr = 0$$

vel ipsi s eiusmodi valor constans β, vt fiat

$$-A + B - D + 2Es + (A - B - D)ss = 0$$

quod vtrumque duobus modis fieri potest. Atque inde quidem $r = \alpha$, sequitur $pq = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\zeta\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}\eta = \alpha$, quae est aequatio pro ellipsi, hinc autem $s = \beta$, prodit $\frac{p}{q} = \beta$ seu $\text{tang.}\tfrac{1}{2}\zeta = \beta\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}\eta$, quae est aequatio pro hyperbola. Neque vero hae curuae problema soluunt, nisi iidem valores in aequatione integrata contineantur. Euidens ergo est, nos in similem errorem illapsuros fuisse, si corporis M motum in hyperbola fieri assumsissemus.

41. Perpendamus iam aequationem integralem, quam casu $B = 0$ supra §. 22 ex nostra aequatione differentiali eliciuimus, quae erit

$$\frac{\sin.\zeta \cos.\eta}{\sin.\eta} = \frac{A + D\cos.\zeta}{G} + \sin.\zeta.\ \surd\left(\frac{2E}{G} + \frac{AA - DD}{GG} - 1\right)$$

haec-

haecque, posito tang. $\frac{1}{2}\zeta = p$ et tang. $\frac{1}{2}\eta = q$, porroque $pq = r$ et $\frac{p}{q} = s$, abit in hanc formam:

$$\left.\begin{array}{ll} GG(r+s)^2 + 2G(A+D)(r-s) & -8EGrs + (A+D)^2 \\ \quad + 2G(A-D)rs(r-s) & \quad -2(AA-DD)rs \\ & \quad + (A-D)^2 rrss \end{array}\right\} = 0$$

quae est ergo aequatio integralis completa, huic aequationi differentiali conueniens

$$\frac{dr}{\sqrt{r(A+D+2Er-(A-D)rr)}} = \frac{ds}{\sqrt{s(-A-D+2Es+(A-D)ss)}}$$

quandoquidem in illa noua constans arbitraria G continetur.

42. Vt generaliter in talem aequationem integralem inquiramus, ponamus breuitatis gratia

$$\frac{A+B}{2E} = m; \quad \frac{A-B}{2E} = n, \text{ et } \frac{D}{2E} = k$$

vt aequatio hoc modo integranda, siquidem id fieri potest, sit

$$\frac{dr}{\sqrt{r(m+k+r-(m-k)rr)}} = \frac{ds}{\sqrt{s(-n-k+s+(n-k)ss)}}$$

cuius integralem in hac forma contineri fingamus:

$$\mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}r + 2\beta s + \mathfrak{C}rr + \gamma ss + 2\mathfrak{D}rs + 2\mathfrak{E}rrs + 2\varepsilon rss + \mathfrak{F}rrss = 0$$

vnde deducimus:

$$rr = \frac{-2\mathfrak{B}r - 2\mathfrak{D}rs - 2\varepsilon rss - \mathfrak{A} - 2\beta s - \gamma ss}{\mathfrak{C} + 2\mathfrak{E}s + \mathfrak{F}ss} \quad \text{et}$$

$$ss = \frac{-2\beta s - 2\mathfrak{D}rs - 2\mathfrak{E}rrs - \mathfrak{A} - 2\mathfrak{B}r - \mathfrak{C}rr}{\gamma + 2\varepsilon r + \mathfrak{F}rr}.$$

Tum vero est differentiando:

$$dr(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}r + \mathfrak{D}s + 2\mathfrak{E}rs + \varepsilon ss + \mathfrak{F}rss) + ds(\beta + \gamma s + \mathfrak{D}r + \mathfrak{E}rr + 2\varepsilon rs + \mathfrak{F}rrs) = 0.$$

43.

43. Ex illis autem aequationibus radicem extrahendo obtinemus

$$r(\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}s+\mathfrak{F}ss)+\mathfrak{B}+\mathfrak{D}s+\varepsilon ss=S=$$
$$\surd((\mathfrak{B}+\mathfrak{D}s+\varepsilon ss)^2-(\mathfrak{A}+2\beta s+\gamma ss)(\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}s+\mathfrak{F}ss))$$

atque

$$s(\gamma+2\varepsilon r+\mathfrak{F}rr)+\beta+\mathfrak{D}r+\mathfrak{E}rr=-R=$$
$$-\surd((\beta+\mathfrak{D}r+\mathfrak{E}rr)^2-(\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}r+\mathfrak{C}rr)(\gamma+2\varepsilon r+\mathfrak{F}rr))$$

qui valores in differentiali adhibito praebent

$$Sdr-Rds=0 \quad \text{seu} \quad \frac{dr}{R}=\frac{ds}{S}.$$

Supereſt ergo tantum, vt formulae irrationales R et S iis, quas noſtra aequatio reſoluenda continet, aequales efficiantur, ſeu vt fiat

$$R=\surd((m+k)r+rr-(m-k)r^3) \quad \text{et}$$
$$S=\surd(-(n+k)s+ss+(n-k)s^3).$$

44. Cum igitur hic vtrinque tam termini primi conſtantes, quam vltimi r^4 et s^4 continentes, ſint nulli, fieri debet

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}-\mathfrak{A}\mathfrak{C}=0;\ \varepsilon\varepsilon-\gamma\mathfrak{F}=0;\ \beta\beta-\mathfrak{A}\gamma=0;\ \mathfrak{E}\mathfrak{E}-\mathfrak{C}\mathfrak{F}=0.$$

Erit ergo

$$\mathfrak{C}=\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}=\frac{\mathfrak{E}\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}} \quad \text{et} \quad \gamma=\frac{\varepsilon\varepsilon}{\mathfrak{F}}=\frac{\beta\beta}{\mathfrak{A}}$$

hincque $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{F}}=\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}{\mathfrak{E}\mathfrak{E}}=\frac{\beta\beta}{\varepsilon\varepsilon}$.

Porro ob terminos rr et ss fieri oportet

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}+2\mathfrak{B}\varepsilon-\mathfrak{A}\mathfrak{F}-4\beta\mathfrak{E}-\gamma\mathfrak{C}=1$$
$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}+2\beta\mathfrak{E}-\mathfrak{A}\mathfrak{F}-4\mathfrak{B}\varepsilon-\gamma\mathfrak{C}=1$$

 vnde

vnde fit $6\mathfrak{B}\varepsilon = 6\beta\mathfrak{E}$, seu $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{E}} = \frac{\beta}{\varepsilon}$, tum vero

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D} - 2\beta\mathfrak{E} - \mathfrak{A}\mathfrak{F} - \gamma\mathfrak{C} = 1, \text{ seu}$$

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D} - 2\beta\mathfrak{E} - \mathfrak{A}\mathfrak{F} - \frac{\beta\beta\mathfrak{E}\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}\mathfrak{F}} = 1, \text{ hincque}$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{F}(\mathfrak{D}\mathfrak{D} - 1) = (\beta\mathfrak{E} + \mathfrak{A}\mathfrak{F})^2$$

vel $\beta\mathfrak{E} = -\mathfrak{A}\mathfrak{F} + \sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{F}(\mathfrak{D}\mathfrak{D} - 1)} = \mathfrak{B}\varepsilon$:
siue, cum sit $\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{E}\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}$, erit

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D} = 2\beta\mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{E}\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}\beta\beta}{\mathfrak{A}\mathfrak{A}} + 1 = \left(\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{B}\beta}{\mathfrak{A}}\right)^2 + 1.$$

45. Reliqui termini dant

$$2\beta\mathfrak{D} - 2\mathfrak{A}\varepsilon - 2\mathfrak{B}\gamma = m + k$$
$$2\mathfrak{D}\mathfrak{E} - 2\mathfrak{C}\varepsilon - 2\mathfrak{B}\mathfrak{F} = -m + k$$
$$2\mathfrak{B}\mathfrak{D} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{E} - 2\beta\mathfrak{C} = -n - k$$
$$2\mathfrak{D}\varepsilon - 2\gamma\mathfrak{E} - 2\beta\mathfrak{F} = -n - k$$

quarum summa praebet hanc aequalitatem:

$$\mathfrak{D}(\beta + \mathfrak{B} + \varepsilon + \mathfrak{E}) - \mathfrak{A}(\varepsilon + \mathfrak{E}) - \mathfrak{F}(\beta + \mathfrak{B}) - \mathfrak{C}\varepsilon - \gamma\mathfrak{E}$$
$$- \mathfrak{B}\gamma - \beta\mathfrak{C} = 0.$$

Cum nunc inuenerimus $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{E}} = \frac{\beta}{\varepsilon}$, ponamus $\mathfrak{B} = \lambda\beta$, et $\mathfrak{E} = \lambda\varepsilon$, erit $\mathfrak{C} = \frac{\lambda\lambda\beta\beta}{\mathfrak{A}}$; $\gamma = \frac{\beta\beta}{\mathfrak{A}}$, et $\mathfrak{F} = \frac{\varepsilon\varepsilon}{\beta\beta}\mathfrak{A}$; vnde ponatur porro $\mathfrak{A} = \mu\beta\beta$ et $\mathfrak{F} = \mu\varepsilon\varepsilon$; vt sit $\mathfrak{C} = \frac{\lambda\lambda}{\mu}$, et $\gamma = \frac{1}{\mu}$, hincque $\mathfrak{D}\mathfrak{D} = 1 + (\mu\beta\varepsilon + \frac{\lambda}{\mu})^2$, quibus valoribus, praeter hunc vltimum, ibi substitutis obtinebimus

$$\mathfrak{D}(\lambda + 1)(\beta + \varepsilon) - \mu\beta\varepsilon(\lambda + 1)(\beta + \varepsilon) - \frac{\lambda(\lambda + 1)(\beta + \varepsilon)}{\mu} = 0$$

seu $(\lambda + 1)(\beta + \varepsilon)(\mathfrak{D} - \mu\beta\varepsilon - \frac{\lambda}{\mu}) = 0$
cuius aequationis tres factores totidem praebent solutiones.

46. *Resolutio I.* Sit $\lambda = -1$, erit $\mathfrak{B} = -\beta$; $\mathfrak{E} = -\varepsilon$; $\mathfrak{C} = \frac{1}{\mu}$; $\gamma = \frac{1}{\mu}$; $\mathfrak{A} = \mu\beta\beta$; $\mathfrak{F} = \mu\varepsilon\varepsilon$; hincque $\mathfrak{D}\mathfrak{D} = (\mu\beta\varepsilon - \frac{1}{\mu})^2 + 1$, vnde conditiones adimplendae erunt:

$$k = \mathfrak{D}(\beta-\varepsilon) + \frac{\beta-\varepsilon}{\mu} - \mu\beta\varepsilon(\beta-\varepsilon) = (\beta-\varepsilon)(\mathfrak{D} + \tfrac{1}{\mu} - \mu\beta\varepsilon)$$

$$m = \mathfrak{D}(\beta+\varepsilon) + \frac{\beta+\varepsilon}{\mu} - \mu\beta\varepsilon(\beta+\varepsilon) = (\beta+\varepsilon)(\mathfrak{D} + \tfrac{1}{\mu} - \mu\beta\varepsilon)$$

$$n = \mathfrak{D}(\beta+\varepsilon) + \frac{\beta+\varepsilon}{\mu} - \mu\beta\varepsilon(\beta+\varepsilon) = (\beta+\varepsilon)(\mathfrak{D} + \tfrac{1}{\mu} - \mu\beta\varepsilon).$$

Hinc ergo foret $m = n$, et $B = 0$, ita vt haec resolutio tantum ad casum $B = 0$ accommodari possit. Hoc igitur casu cum sit $\frac{m}{k} = \frac{\beta+\varepsilon}{\beta-\varepsilon}$, ponatur $\beta+\varepsilon = m$ et $\beta-\varepsilon = k$, vt sit $\beta = \frac{k+m}{2}$ et $\varepsilon = \frac{m-k}{2}$; oportetque esse $\mathfrak{D} + \frac{1}{\mu} - \mu\beta\varepsilon = 1$, vnde oritur

$$1 + 2(\mu\beta\varepsilon - \tfrac{1}{\mu}) + (\mu\beta\varepsilon - \tfrac{1}{\mu})^2 = 1 + (\mu\beta\varepsilon - \tfrac{1}{\mu})^2$$

ideoque $\mu\mu = \frac{1}{\beta\varepsilon} = \frac{4}{mm-kk}$, et $\mu = \frac{2}{\sqrt{(mm-kk)}}$. Vnde colligimus $\mathfrak{D} = 1$, eritque pro casu $m = n$ aequatio integralis

$$\mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}r + 2\beta s + \mathfrak{C}rr + \gamma ss + 2\mathfrak{D}rs + 2\mathfrak{E}rrs + 2\varepsilon rss + \mathfrak{F}rrss = 0.$$

47. At haec aequatio integralis, quia nulla noua inest constans, non est completa; cuius ratio est, quod quantitates $\beta-\varepsilon$ et $\beta+\varepsilon$ ipsis numeris k et m non aequales, sed tantum proportionales statui debent. Sit ergo

$\beta-\varepsilon = \frac{k}{\nu}$; $\beta+\varepsilon = \frac{m}{\nu}$; erit $\beta = \frac{m+k}{2\nu}$; $\varepsilon = \frac{m-k}{2\nu}$ et

$\mathfrak{D} = \nu + \mu\beta\varepsilon - \frac{1}{\mu} = \sqrt{(1 + (\mu\beta\varepsilon - \frac{1}{\mu})^2)}$, vnde fit

$\mu\beta\varepsilon - \frac{1}{\mu} = \frac{1-\nu\nu}{2\nu}$ et $\mathfrak{D} = \frac{1+\nu\nu}{2\nu}$.

vbi ν eſt quantitas arbitraria, per quam numerus μ definiri debet. Quoniam ergo β et ε per m et k cum ν dantur, aequatio integralis erit

$$0=\mu\beta\beta+2\beta(s-r)+\tfrac{1}{\mu}(rr+ss)+\tfrac{1+\nu\nu}{\nu}rs+2\varepsilon rs(s-r)$$
$$+m\varepsilon\varepsilon rrss$$

quae pro β et ε ſubſtitutis valoribus, per μ multiplicando abit in hanc formam:

$$0=\tfrac{\mu\mu(m+k)^2}{4\nu\nu}+\tfrac{\mu}{\nu}(m+k)(s-r)+rr+ss+\tfrac{\mu\mu}{4\nu\nu}(m-k)^2rrss$$
$$+\tfrac{\mu}{\nu}(m-k)rs(s-r)+\tfrac{\mu(1+\nu\nu)}{\nu}rs.$$

Sit $\frac{\mu}{\nu}=2f$, vt f ſit conſtans arbitraria, ſumtoque $f(mm-kk)=\frac{1}{f}+1-\nu\nu$, erit aequatio integralis completa.

$$0=ff(m+k)^2+2f(m+k)(s-r)+rr+ss+ff(m-k)^2rrss$$
$$+2f(m-k)rs(s-r)+2f(1+\nu\nu)rs.$$

48. Cum vero ſit $\nu\nu=1+\frac{1}{f}-f(mm-kk)$, erit $2f(1+\nu\nu)=4f+2-2ff(mm-kk)$; hincque aequatio integralis completa ita ſe euoluta habebit:

$$0=ff(m+k)^2+2f(m+k)(s-r)+(r+s)^2+ff(m-k)^2rrss$$
$$+2f(m-k)rs(s-r)+4frs.$$
$$-2ff(mm-kk)rs$$

quae extracta radice induit hanc formam:

$$s-r+f(m+k)+f(m-k)rs=2\sqrt{rs(ff(mm-kk)-f-1)}$$

et facta reſtitutione $s=\frac{p}{q}$; $r=pq$ fit

$$\frac{p(1-qq)}{q}+f(m+k)+f(m-k)pp=2p\sqrt{(ff(mm-kk)-f-1}$$

quae cum integrali completo ſupra exhibito conuenit. Verum probe notandum, hoc integrale tantum ad caſum $B=0$ pertinere.

49. *Resolutio II.* Ponamus nunc $\varepsilon = -\beta$, habebimusque primo $\mathfrak{B} = \lambda\beta$; $\mathfrak{E} = -\lambda\beta$; $\mathfrak{C} = \frac{\lambda}{\mu}$; $\gamma = \frac{1}{\mu}$; $\mathfrak{A} = \mu\beta\beta$; $\mathfrak{F} = \mu\beta\beta$ et $\mathfrak{D}\mathfrak{D} = 1 + (\frac{\lambda}{\mu} - \mu\beta\beta)^2$. Tum vero hinc concludimus:

$$k = \beta(1-\lambda)(\mathfrak{D} - \frac{\lambda}{\mu} + \mu\beta\beta)$$

$$m = \beta(1+\lambda)(\mathfrak{D} - \frac{\lambda}{\mu} + \mu\beta\beta) = -n$$

ita vt haec resolutio locum non inueniat, nisi sit $m+n=0$, ideoque $A=0$. Pro hoc autem casu erit porro $\frac{k}{m} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, hincque $\lambda = \frac{m-k}{m+k}$, vnde sequitur $k = \frac{2\beta k}{m+k}(\mathfrak{D} - \frac{\lambda}{\mu} + \mu\beta\beta)$ seu $\mathfrak{D} = \frac{\lambda}{\mu} - \mu\beta\beta + \frac{m+k}{2\beta}$; ergo

$$1 = \frac{m+k}{\beta}(\frac{\lambda}{\mu} - \mu\beta\beta) + \frac{(m+k)^2}{4\beta\beta} \quad \text{et}$$

$\frac{\lambda}{\mu} - \mu\beta\beta = \frac{\beta}{m+k} - \frac{(m+k)}{4\beta}$, ideoque $\mathfrak{D} = \frac{\beta}{m+k} + \frac{m+k}{4\beta}$. Littera β manet indefinita, et μ definitur per hanc aequationem: $\frac{m-k}{\mu(m+k)} - \mu\beta\beta = \frac{\beta}{m+k} - \frac{(m+k)}{4\beta}$.

50. His valoribus substitutis resultat aequatio integralis completa pro casu $A=0$:

$$0 = \mu\beta\beta + 2\lambda\beta r + 2\beta s + \frac{\lambda\lambda}{\mu}rr + \frac{1}{\mu}ss + \frac{2\beta rs}{m+k} + \frac{(m+k)}{2\beta}rs$$
$$-2\lambda\beta rrs - 2\beta rss + \mu\beta\beta rrss$$

Statuamus $\mu\beta = f$, erit $\frac{m-k}{m+k} - ff = \frac{f}{m+k} - \frac{\mu\mu(m+k)}{4f}$ et illa aequatio per μ multiplicata erit

$$0 = ff + 2\lambda fr + 2fs + \lambda\lambda rr + ss\,\frac{2frs}{m+k} + \frac{\mu\mu(m+k)}{2f}rs$$
$$-2\lambda frrs - 2frss + ffrrss$$

quae ob $\frac{\mu\mu(m-k)}{2f} = \frac{2f}{m+k} + 2ff - 2\lambda$ induit hanc formam:

$$0 = ff(1+rs)^2 + (\lambda r - s)^2 + \frac{4frs}{m+k} + 2f(\lambda r + s) - 2frs(\lambda r + s)$$

 seu

ſeu hanc:

$$0 = ff(1-rs)^2 + (\lambda r + s)^2 + 2f(1-rs)(\lambda r + s) + \frac{4frs}{m+k} + 4ffrs - 4\lambda rs$$

quae extracta radice praebet

$$f(1-rs) + \lambda r + s = 2\sqrt{rs\left(\frac{m-k}{m+k} - ff - \frac{f}{m+k}\right)}$$

Eſtque haec ſolutio ſimilis omnino praecedenti, dum illa ad caſum $B = 0$, haec vero ad caſum $A = 0$, adſtringitur.

51. Tertius factor $\mathfrak{D} - \mu\beta\varepsilon - \frac{\lambda}{\mu}$ nihil monſtrat, quia eius annihilatio cum aequatione $\mathfrak{D}\mathfrak{D} = 1 + (\mu\beta\varepsilon + \frac{\lambda}{\mu})^2$ conſiſtere nequit, ſicque duos tantum caſus habemus, reſolutionem algebraicam admittentes, ſcilicet ſi vel $B = 0$, vel $A = 0$. Praeterea vero etiam tertius caſus ſupra euolutus, quo erat $A = B$, et $D = 0$ $E = 0$, hic ſponte ſe offert, tum enim aequatio §. 38. abit in hanc: $\frac{dr}{\sqrt{(A+B)r(1-rr)}} = \frac{ds}{\sqrt{s.0}}$. quae ſubſiſtere nequit, niſi ſit $ds = 0$, ideoque $s = \frac{p}{q} = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\zeta}{\text{tang.}\frac{1}{2}\eta} = \text{Conſt.}$ qua aequatione hyperbola definitur. Reliquis caſibus conſtructio aequationis

$$\frac{dr}{\sqrt{r(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr)}} = \frac{ds}{\sqrt{s(B-A-D+2Es-(B-A+D)ss)}}$$

in ſubſidium eſt vocanda. Quod enim haec aequatio in genere integrale algebraicum non admittat, vel ex caſu $D = A + B$ patet, quo prius membrum a quadratura ſectionum conicarum pendet, poſterius vero altiores quadraturas poſtulat.

52. Inuenta autem relatione inter r et s, vnde ſimul ratio angulorum ζ et η innoteſcit, cognitio motus per tempus hauritur. Cum enim ſit

$$vvuud\zeta d\eta = 2gadt^2(A\cos.\zeta + B\cos\eta + D)$$

ob

ob $v = \frac{a \sin. \eta}{\sin. (\zeta + \eta)}$ et $u = \frac{a \sin. \zeta}{\sin. (\zeta + \eta)}$, atque tang. $\frac{1}{2}\zeta = p$ et tang. $\frac{1}{2}\eta = q$, erit $d\zeta = \frac{dp \sin. \zeta}{p}$, et $d\eta = \frac{dq \sin. \eta}{q}$, seu:

$d\zeta = \frac{2 dp}{1 + pp}$ et $d\eta = \frac{2 dq}{1 + qq}$, hincque porro

$v = \frac{aq(1 + pp)}{(p + q)(1 - pq)}$ et $u = \frac{ap(1 + qq)}{(p + q)(1 - pq)}$, vnde fit

$$\frac{4a^3 ppqq(1 + pp)(1 + qq) dp dq}{(p + q)^4 (1 - pq)^4} = 2g dt^2 \left(\frac{A(1 - pp)}{1 + pp} + \frac{B(1 - qq)}{1 + qq} + D \right).$$

Fiat iam porro $pq = r$, $\frac{p}{q} = s$, seu $pp = rs$ et $qq = \frac{r}{s}$ erit $2p dp = r ds + s dr$ et $2q dq = \frac{s dr - r ds}{ss}$, ergo $4pq dp dq = \frac{ss dr^2 - rr ds^2}{ss}$, hincque tandem:

$$\frac{a^3 (r + s)(1 + rs)(ss dr^2 - rr ds^2)}{rs(1 + s)^4 (1 - r)^4} = 2g dt^2 \left(\frac{A(1 - rs)}{1 + rs} + \frac{B(s - r)}{r + s} + D \right).$$

53. Ponamus nunc breuitatis gratia:

$$RR = r(A + B + D + 2Er - (A + B - D)rr)$$
$$SS = s(B - A - D + 2Es - (B - A + D)ss)$$

vt sit $\frac{dr}{R} = \frac{ds}{S}$, statuamusque:

$\frac{dr}{R} = \frac{ds}{S} = dV$, vt sit $dr = R dV$ et $ds = S dV$, fietque:

$$2g dt^2 = \frac{a^3 (r + s)^2 (1 + rs)^2 (RRss - SSrr) dV^2}{rs(1 + s)^4 (1 - r)^4 (A(r + s)(1 - rs) + B(s - r)(1 + rs) + D(s + r)(1 + rs))}.$$

Est vero

$$RRss - SSrr = rs(A(r + s)(1 - rs) + B(s - r)(1 + rs) + D(r + s)(1 + rs))$$

quo valore substituto prodit

$2g dt^2 = \frac{a^3 (r + s)^2 (1 + rs)^2 dV^2}{(1 + s)^4 (1 - r)^4}$, ideoque

$$dt \sqrt{\frac{2g}{a}} = \frac{a(r + s)(1 + rs) dV}{(1 + s)^2 (1 - r)^2} = a dV \left(\frac{r}{(1 - r)^2} + \frac{s}{(1 + s)^2} \right)$$

ita vt sit:

$$\frac{dt \sqrt{2g}}{a \sqrt{a}} = \frac{dr \sqrt{r}}{(1 - r)^2 \sqrt{(A + B + D + 2Er - (A + B - D)rr)}} + \frac{ds \sqrt{s}}{(1 + s)^2 \sqrt{(B - A - D + 2Es - (B - A + D)s^2)}}$$

sicque

ſicque etiam determinatio temporis ad integrationem formularum ſimplicium eſt perducta.

54. Cum igitur hoc problema, quod primo aſpectu vix facilius quam id, quo omnia tria corpora mobilia aſſumuntur, viſum erat, perfecte reſoluere licuerit, maiorem ſpem concipimus, fore aliquando, vt et iſtud problema, cui tanquam fundamento vniuerſa Aſtronomia inniti eſt cenſenda, reſoluatur. Equidem fateor, me hinc nullam adhuc viam ad hunc ſcopum perueniendi perſpicere, ſed etiam ad hoc plurimos ac fortaſſe operoſiſſimos conatus requiri agnoſco. Caeterum circa hoc ipſum problema, quod hic tractaui, obſeruationem Geometris forte haud ingratam adiicio, ſcilicet praeter caſus hic euolutos, innumerabiles alios dari, quibus curua, a corpore M deſcripta, futura ſit algebraica, quarum inueſtigatio Analyſi haud contemnenda incrementa allatura videtur.

55. Quanquam autem ſolutionem huius problematis ad quadraturas curuarum perduximus, tamen moleſtum foret, curuam a corpore M deſcriptam definire multoque magis ad datum tempus locum corporis aſſignare. Sin autem huiusmodi caſus in mundo exiſteret, operae pretium eſſet, hanc ſolutionem accuratius euoluere, quod hoc modo commodiſſime fieri poſſe videtur. Pro tali ſcilicet caſu, poſtquam per plura tentamina conſtantes A, B, D, E proxime ſaltem innotuerint deinceps corrigendae, tabula condi debebit pro ſingulis valoribus ipſius r valores conuenientes litterae s referens, cui deinceps tabula tempora t exhibens

bens adiungi deberet, ex qua porro viciſſim pro dato tempore t valores litterarum r et s, hincque angulos ζ et η concludere liceret. Quae determinatio ſi cum obſeruationibus minus conueniret, indicio id eſſet, conſtantes non recte eſſe aſſumtas, ſicque tandem pluribus huiusmodi tabulis conſtructis, veritas inde non difficulter erueretur.

56. Cum autem inprimis et corporis M loca noſſe conueniat, vbi eius diſtantia ab alterutro punctorum fixorum A et B eſt maxima vel minima, quemadmodum hoc definiri oporteat videamus. Quia diſtantia AM eſt $v = \frac{a\,\text{ſin.}\,\eta}{\text{ſin.}(\zeta+\eta)}$, eius differentiale

$$\frac{dv}{a} = \frac{d\eta\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}(\zeta+\eta) - (d\zeta+d\eta)\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}(\zeta+\eta)}{\text{ſin.}(\zeta+\eta)^2} = \frac{d\eta\,\text{ſin.}\,\zeta - d\zeta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}(\zeta+\eta)}{\text{ſin.}(\zeta+\eta)^2}$$

nihilo aequale poſitum, ſeu $\frac{d\eta}{\text{ſin.}\,\eta} = \frac{d\zeta}{\text{ſin.}\,\zeta}\,\text{coſ.}(\zeta+\eta)$ indicabit loca, quibus diſtantia AM eſt vel maxima, vel minima. Poſito ergo tang. $\frac{1}{2}\zeta = p$ et tang. $\frac{1}{2}\eta = q$, ob coſ. $(\zeta+\eta) = \frac{(1-pp)(1-qq)-4pq}{(1+pp)(1+qq)}$, habebimus $\frac{dq}{q} = \frac{dp}{p}\cdot\frac{(1-pq)^2-(p+q)^2}{(1+pp)(1+qq)}$. Factoque porro $pq = r$, $\frac{p}{q} = s$, ſeu $p = \sqrt{rs}$, $q = \sqrt{\frac{r}{s}}$, fiet $(\frac{dr}{r} - \frac{ds}{s})(s(1+rr)+r(1+ss)) = (\frac{dr}{r} + \frac{ds}{s})(s(1-r)^2 - r(1+s)^2)$ ſeu $dr(1+s)^2 = ds(1-r)^2$. Vbi ergo eſt $\frac{dr}{(1-r)^2} = \frac{ds}{(1+s)^2}$ ibi diſtantia $AM = v$ eſt vel maxima vel minima.

57. Cum igitur ſupra inuenerimus $\frac{dr}{R} = \frac{ds}{S}$, pro his locis habemus $\frac{R}{(1-r)^2} = \frac{S}{(1+s)^2}$, vnde relatio inter quantitates finitas r et s eruitur, quae eſt:

$$r(1+s)^4(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr) =$$
$$s(1-r)^4(B-A-D+2Es-(B-A+D)ss)$$

vnde posito breuitatis gratia

$$\frac{A+B+D}{2E}=m, \quad \frac{B-A-D}{2E}=n$$
$$\frac{A+B-D}{2E}=\mu, \quad \frac{B-A+D}{2E}=\nu$$

vt sit $\mu+\nu=m+n$, enascitur haec aequatio

$$\left.\begin{array}{lllll} +mr+rr & -\mu r^3 & +4(n-\mu)r^4s-nr^4s & -r^4ss & \\ -ns+4(m+n)rs & +(4-6n)rrs+4(m-\nu)rs^3 & +(4-6\mu)r^3ss-4(\mu+\nu)r^3s^3 & +\nu r^4s^3 & \\ -ss & +(4+6m)rss & +(4+6\nu)rrs^3+rrs^4 & +\mu r^3s^4 & \\ & +\nu s^3 & +mrs^4 & & \end{array}\right\}=0$$

quae aequatio in genere nullos factores habere videtur. At aequatio inter p et q erit

$$(p+q)^4(m+pq-\mu ppqq)=(1-pq)^4(nqq+pq-\nu pp).$$

58. Restitutis autem ipsis angulis ζ et η, inter eos aequatio pro hoc casu, quo distantia v fit vel maxima vel minima, ita se habebit:

$$\sin.\left(\tfrac{\zeta+\eta}{2}\right)^4(D(1+\cos.\zeta\cos.\eta)+(A+B)(\cos\zeta+\cos\eta)$$
$$+E\sin.\zeta\sin.\eta)=$$
$$\cos.\left(\tfrac{\zeta+\eta}{2}\right)^4(D(\cos.\zeta\cos.\eta-1)+(B-A)(\cos.\zeta-\cos\eta)$$
$$+E\sin.\zeta\sin.\eta)$$

vbi est $\sin\left(\frac{\zeta+\eta}{2}\right)^4=\frac{1}{4}(1-\cos(\zeta+\eta))^2$ et $\cos.\left(\frac{\zeta+\eta}{2}\right)^4$ $=\frac{1}{4}(1+\cos.(\zeta+\eta))^2$ vnde colligimus:

$$(1+\cos.(\zeta+\eta)^2)(A\cos.\zeta+B\cos.\eta+D)=2\cos(\zeta+\eta)$$
$$(A\cos.\eta+B\cos.\zeta+D\cos.\zeta\cos.\eta+E\sin.\zeta\sin.\eta)$$

quae autem aequatio aeque parum resolutionem admittit. Caeterum quia permutatis angulis ζ, η et massis A et B aequatio non mutatur, eadem loca indicat, vbi distantia $BM=u$ fit vel maxima vel minima. Verum radice quadrata extracta bini casus a se inuicem separantur.

DE

DE MOTV VIBRATORIO TYMPANORVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae adhuc a Geometris de motu vibratorio ſunt inueſtigata, ad corpora tantum vna dimenſione praedita, vel quae potius tanquam talia conſiderare liceat, ſunt reſtricta, cuius modi ſunt cordae tenſae, et laminae elaſticae, quarum vnica tantum dimenſio ſecundum longitudinem extenſa in calculum ingreditur, caeteris neglectis. Hinc quomodo ſuperficies, cuiusmodi eſt linteum vel membrana extenſa, ad motum vibratorium ſit comparata, a nemine adhuc, quantum mihi quidem conſtat, eſt definitum. Pertinet huc imprimis doctrina ſonorum, quos tympanum tenſum ac pulſum edere ſolet, cuius doctrinae hic quidem prima quaſi fundamenta iacere conſtitui, quae eo magis omni attentione digna videtur, quod nouum fere calculi genus requirit; cum enim in cordarum vibrationibus infinita varietas locum habeat, in vibrationibus membranarum infinities maiorem varietatem admitti oportere euidens eſt, quam idcirco calculus exhibere debet.

2. Quo igitur huiusmodi superficiei motum, ac potissimum tensionem, in calculum facilius inducere possimus, ad eius generationem, textura filorum secundum longitudinem et latitudinem expansorum ortam respici conueniet, cum hac ratione lintea reuera efficiantur, in membranis autem filorum numerum quasi infinitum concipere liceat. Primum ergo interualla filorum se mutuo normaliter traiicientium tanquam finita spectemus, quae littera ω indicentur, qua simul latitudo singulorum filorum exponatur, quasi omnia ita essent compressa, vt planitiem vbique aequaliter compleant.

Tab. III. Fig. 2. In figura ergo filorum lateri AB parallelorum numerus est $=\frac{AC}{\omega}$, longitudo $=AB$, et latitudo $=\omega$, vnde summa eorum est $=AC.AB$. Simili modo alterorum filorum ipsi AC parallelorum summa est $=AB.AC$, ita vt planities rectanguli tota sit $=2AB.AC$, quoniam ob texturam materia eorum vbique duplicatur. Si haec quantitas $2AB.AC$, seu dupla area insuper in crassitiem, quae sit $=k$ ducatur, habebitur volumen lintei $=2k.AB.AC$. quo simul massam indicemus.

3. Singulis filis peculiarem tensionem tribuere possemus, sed ne calculus nimis fiat molestus, et quia ob eorum mutuam implicationem inaequalitas tensionis vix subsistere potest, ponamus singula fila lateribus AB et CD parallela tendi vi tanta, quae aequetur ponderi voluminis eiusdem materiae $=bk\omega$, vnde omnia simul tendentur vi $=bk.AC$; singula autem fila lateribus AC et BD parallela tendantur vi $=fk\omega$, vt omnium tensio sit $=fk.AB$. Quodsi iam elementum quodcunque in puncto Y collectum concipiamus, vbi scilicet materia vnum quadratulum complens, quae est

$=2$

$= 2k\omega\omega$, sit congregata, perpendendum est, fili portionem pq tendi vi $= bk\omega$, fili autem alterius transversi qr tensionem esse $= fk\omega$. Quare si haec puncta a situ naturali in sublime sint diducta per minima interualla, quae per $\Pi.Y$, $\Pi.p$, $\Pi.q$, $\Pi.r$ et $\Pi.y$ indicemus, elementum Y deorsum premetur, ob tensionem fili py,

$$\text{vi} = bk\omega\left(\frac{2\Pi.Y - \Pi.p - \Pi.y}{\omega}\right) = bk(2\Pi Y - \Pi p - \Pi y)$$

at ob tensionem fili qr

$$\text{vi} = fk\omega\left(\frac{2\Pi Y - \Pi q - \Pi r}{\omega}\right) = fk(2\Pi Y - \Pi q - \Pi r)$$

vnde ex principiis mechanicis oritur

$$2k\omega\omega\left(\frac{dd.\Pi Y}{dt^2}\right) = -2gbk(2\Pi Y - \Pi p - \Pi q)$$
$$-2gfk(2\Pi Y - \Pi q - \Pi r)$$

4. Quodsi iam filorum interualla ω infinite parua statuamus, et pro puncto quocunque Y, quod in statu naturali in plano ABCD versatur, ponamus coordinatas orthogonales $CX = x$, et $XY = y$, tum vero id in statu violento ab hoc plano sursum fuerit diductum per interuallum $= z$, vt sit $\Pi Y = z$, erit z functio quaedam tam binarum variabilium x et y, quam temporis t. Tum vero erit $\Pi Y - \Pi p = \omega\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et

$$\Pi y - 2\Pi Y - \Pi p = \omega\omega\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

simili modo ob $\Pi Y - \Pi r = \omega\left(\frac{dz}{dy}\right)$ erit

$$\Pi q - 2\Pi Y - \Pi r = \omega\omega\left(\frac{ddz}{dy^2}\right).$$

Quibus substitutis aequatio nostra per $\omega\omega$ diuisa induet hanc formam:

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = gb\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + gf\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

 vnde

vnde etiam craſſities membranae k ex calculo exceſſit. Hic autem g denotat altitudinem lapſus vno minuto ſecundo, dum tempus t in minutis ſecundis exprimitur, at quantitas b tenſioni filorum abſciſſae x parallelorum, f vero applicatae y parallelorum, eſt proportionalis, ſecundum menſuras ſupra expoſitas.

5. Quo rationem harum tenſionum clarius perſpiciamus, habeat membrana figuram rectangularem ABCD; etſi enim aliam habuerit quamcunque, rationem tenſionis ad illum caſum reducere licet. Sit, vt ante, k craſſities membranae, eiusque pondus $= M$, quatenus ſcilicet eius figura eſt ABCD. Hinc quia ante vires per volumina materiae homogeneae, cuiusmodi eſt ipſa membrana, expreſſimus, erit $M = 2k\, AB.AC$. Deinde ſit vis lateribus oppoſitis AC et BD applicata, qua omnia fila AB.CD abſciſſis x parallela diſtenduntur $= E$, vis autem lateribus AB et CD applicata, qua fila omnia AC.BD applicatis y parallela tenduntur $= F$, erit $E = bk.AC$, et $F = fk.AB$, hincque ob $k = \frac{M}{2\, AB.AC}$ habebimus

$$b = \frac{2\, E.AB}{M} \text{ et } f = \frac{2\, F.AC}{M}$$

ex quo, omnibus ad menſuras determinatas reductis, aequatio noſtra motum vibratorium membranae exprimens erit

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \frac{2\, Eg.AB}{M}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{2\, Fg.AC}{M}\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

in qua autem neutiquam aſſumitur, membranae figuram eſſe ABCD, ſed quaecunque ea fuerit ad eam aequationem ipſam accommodari oportet.

6.

6. Quamcunque ſcilicet membrana tenſa, velut tympanum, habuerit figuram, eius terminos, in quibus quaſi eſt fixa, ſollicite notari oportet; tum vero ſuperior aequatio ita reſolui debet, vt coordinatis x et y ad hos terminos porrectis, quantitas z omni tempore euaneſcat, ſeu vt z eiusmodi ſit functio ipſarum x, y et t, vt prioribus x et y ad terminos membranae relatis, fiat $z = 0$, quicquid ſit t. Tum vero etiam in reſolutione noſtrae aequationis ad agitationem membranae initio inductam attendi conuenit, vt non ſolum functio z ſingulorum punctorum Y deturbationem de ſtatu naturali indicet, ſed etiam formula $(\frac{dz}{dt})$ celeritatem cuique impreſſam exhibeat. Ad aequationem autem noſtram ſuccinctius exprimendam, ponamus $\frac{2Eg.AB}{M} = ee$, et $\frac{2Fg.AC}{M} = ff$, vt noſtra aequatio fiat:

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = ee\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + ff\left(\frac{ddz}{dy^2}\right).$$

Plerumque autem poni $ff = ee$ conueniet, vt tenſio per totam membranam ſit eadem, ac diſcrimen inter filamenta ſecundum longitudinem et latitudinem extenſa tollatur. Sit ergo $ff = ee$, atque habebimus:

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = ee\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + ee\left(\frac{ddz}{dy^2}\right).$$

7. Ponamus $z = v\,\text{ſin.}(\alpha t + \mathfrak{A})$, ſitque v tantum functio ipſarum x et y, atque aequatio noſtra ad duas tantum variabiles reducetur, excluſo tempore t, fietque

$$0 = \frac{\alpha\alpha v}{ee} + \left(\frac{ddv}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dy^2}\right).$$

Ponamus porro $v = u\,\text{ſin.}(\frac{\beta x}{a} + \mathfrak{B})$, vt etiam variabilem x ex calculo elidamus, fietque u functio ſolius y ex hac aequatione determinanda:

$$0 = \frac{\alpha\alpha u}{ee} - \frac{\beta\beta u}{aa} + \frac{ddu}{dy^2},$$

vnde

vnde, si ponamus $u = \sin.(\frac{\gamma y}{b} + \mathfrak{C})$, erit

$$\frac{\alpha\alpha}{ee} = \frac{\beta\beta}{aa} + \frac{\gamma\gamma}{bb}.$$

Quare sumto $\alpha = e\sqrt{(\frac{\beta\beta}{aa} + \frac{\gamma\gamma}{bb})}$ habebimus huiusmodi aequationem finitam:

$$z = A\sin.(\alpha t + \mathfrak{A})\sin.(\frac{\beta x}{a} + \mathfrak{B})\sin.(\frac{\gamma y}{b} + \mathfrak{C})$$

vbi A denotat lineolam quandam minimam, quandoquidem particula z semper debet esse minima. Cum autem hic numeri β, γ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ pro lubitu accipi queant, infinitae huiusmodi formulae exhiberi possunt, quae non solum singulae, sed etiam iunctim sumtae, problemati satisfaciunt.

8. Incipiamus a casu simplicissimo, quo est

$$z = A\cos.\alpha t.\ \sin.\frac{\beta x}{a}.\ \sin.\frac{\gamma y}{b}.$$

vbi est $\alpha = e\sqrt{(\frac{\beta\beta}{aa} + \frac{\gamma\gamma}{bb})}$; ita vt posito $t = 0$ aequatio $z = A\sin.\frac{\beta x}{a}\sin.\frac{\gamma y}{b}$ statum tympano initio impressum denotet, quo momento cum in genere sit cuiusque puncti celeritas:

$$(\frac{dz}{dt}) = -A\alpha\sin.\alpha t\sin.\frac{\beta x}{a}\sin.\frac{\gamma y}{b}$$

euidens est, in hoc statu violento tympanum fuisse in quiete. Inuestigemus nunc terminos tympani, qui perpetuo maneant immoti, ac primo quidem manifestum est, fore $z = 0$, tam si $x = 0$, quam si $y = 0$, quare tam linea recta AC, quam CD, constituet tympani terminos. Tum vero fit etiam $z = 0$, si fit $x = \frac{2\pi a}{\beta}$, et $y = \frac{2\pi b}{\gamma}$, vnde sumta $CD = \frac{2\pi a}{\beta}$ et $CA = \frac{2\pi b}{\gamma}$, reli-

reliqui termini erunt in rectis AB et BD, ita vt tympani figura prodeat *rectangulum* ABCD.

9. Sit ergo parallelogrammum rectangulum AB CD figura tympani in perimetro fixi, et vndequaque tensi vi per litteram e relata. Ponamus latera AB $=$ CD $= a$, et AC $=$ BD $= b$, erit $\beta = \gamma = 2\pi$, ac pro motu vibratorio huius tympani habebimus: Tab. III. Fig. 3.

$$z = A \operatorname{cof.} \alpha t \operatorname{fin.} \frac{2\pi x}{a} \operatorname{fin.} \frac{2\pi y}{b},$$

existente $\alpha = 2\pi e \sqrt{\left(\frac{1}{aa} + \frac{1}{bb}\right)} = \frac{2\pi e}{ab}\sqrt{(aa+bb)}$. Tempus ergo vnius vibrationis prodibit posito $\alpha t = \pi$, vnde id fit $t = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{ab}{2e\sqrt{(aa+bb)}}$ min. secund. sicque hoc tympanum singulis minutis secundis tot edet vibrationes, quot vnitates continentur in formula $\frac{2e\sqrt{(aa+bb)}}{ab}$. Quodsi iam pondus membranae ABCD sit $= M$, erit vis, qua latera AC et BD distrahuntur, $E = \frac{Mee}{2ga}$, et qua latera AB et CD distrahuntur, $F = \frac{Mee}{2gb}$. At ducta alterutra diagonali BC, si in eam ex altero reliquorum angulorum A demittatur perpendiculum AE, erit $AE = \frac{ab}{\sqrt{(aa+bb)}}$, vnde numerus vibrationum vno minuto secundo editarum erit $= \frac{2e}{AE}$, vbi e est in ratione subduplicata tensionis.

10. Verum idem tympanum rectangulare praeter hunc sonum, qui est principalis, infinitos alios simplices edere potest, qui scilicet ex pluribus aliis non sint permixti. Sumtis enim pro m et n numeris quibusuis integris, haec aequatio

$$z = A \operatorname{cof.} \alpha t \operatorname{fin.} \frac{2m\pi x}{a} \operatorname{fin.} \frac{2n\pi y}{b}$$

 ita

ita eſt comparata, vt, poſitis tam $x=0$ et $y=0$, quam $x=a$ et $y=b$, fiat $z=0$. Tum autem ob $\alpha=2\pi e\sqrt{(\frac{mm}{aa}+\frac{nn}{bb})}$ tempus vnius vibrationis erit $\frac{\pi}{\alpha}=\frac{ab}{2e\sqrt{(nnaa+mmbb)}}$ min. ſecund. ac tempore vnius minuti ſecundi vibrationum editarum numerus eſt $=\frac{2e\sqrt{(nnaa+mmbb)}}{ab}$, cui ipſe ſonus cenſetur proportionalis. Ponamus, tympanum eſſe quadratum, ſeu $b=a$ et omnes ſoni, quos hoc tympanum reddere valet, in hac formula $\frac{2e}{a}\sqrt{2(mm+nn)}$ continentur, vbi pro m et n numeros integros quoscunque capere licet. Neglecto ergo factore communi $\frac{2e}{a}\sqrt{2}$, hi ſoni ſunt inter ſe vt numeri

$$\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 2\sqrt{2},\ \sqrt{10},\ \sqrt{13},\ \sqrt{17},\ 3\sqrt{2},\ 2\sqrt{5}.\ 5,\ \sqrt{26},\ \sqrt{29},\ 4\sqrt{2}\ \text{etc.}$$

qui ſi infimus nota muſica C indicetur, erunt

C; G*s*; *c*; *d*; *e**; *g*^{b}; *g*; *gs*; *b*; *b**; *b**; *c*

vbi ſtellula * notat, ſonum eſſe aliquantillum acutiorem, littera *b* vero grauiorem quam in ſyſtemate muſico.

11. Cum quantitas z pluribus eiusmodi formulis ſimul ſumtis aequari poſſit, tympanum hoc quadratum plures ſonos ſimul edere poteſt, prout impulſio initio facta fuerit comparata; vix vnquam enim eueniet, vt ſonus inde ſimplex oriatur, quin potius plerumque omnes iſti ſoni coniunctim producentur. Qui cum inter ſe maxime ſint diſſoni, ac tanta multitudine cumulentur, ſonitus ex iis mixtus ab harmonia muſica multum abhorrebit. Prae reliquis autem ſonus principalis

palis et grauiſſimus dominabitur, qui ſingulis minutis ſecundis $\frac{2e\sqrt{2}}{a}$ vibrationes edet. Eſt autem $e = \sqrt{\frac{2Ega}{M}}$, vbi M eſt pondus membranae quadratae A B C D et E pondus, quo ſingula latera diſtenduntur, exiſtente g altitudine $15\frac{5}{8}$ ped. Rhen. Vnde numerus vibrationum ſingulis minutis ſecundis editarum eſt $= 4\sqrt{\frac{Eg}{Ma}}$. Ponamus latus quadrati a eſſe vnius pedis, eritque hic numerus $= 4\sqrt{\frac{125}{8} \cdot \frac{E}{M}} = 5\sqrt{\frac{10E}{M}}$. Quare ſi E ſit $= 100$ M, ſingulis minutis ſecundis edentur 160 vibrationes, qui ſonus conueniet propemodum cum claue F, tribuendo claui C quaſi 120 vibrationes.

12. Ita ſe habent ſoni a tympanis quadratis ac rectangularibus editi, ſin autem tympanum aliam quamcunque habeat figuram, difficillimum eſt, aequationem noſtram ad eam accommodare. In genere autem pro quauis figura tenendum eſt, ex ea primo innumerabiles ſonos ſimplices elici poſſe, tum vero eandem plures eorum coniunctim edere valere; perpetuo enim quod inſtrumentum plures ſonos ſimplices ſeorſim edere poteſt, idem ad eosdem ſonos coniunctim reddendos erit aptum. Soni autem ſimplices oriuntur, ſi noſtra formula vnicum terminum tempus inuoluentem contineat, veluti cof. αt, vt ſit

$$z = A \operatorname{cof.} \alpha t \operatorname{fin.} (\mu x + \mathfrak{M}) \operatorname{fin.} (\nu y + \mathfrak{N})$$

exiſtente $\mu\mu + \nu\nu = \frac{\alpha\alpha}{ee}$. Cum enim pro eodem numero α, binae litterae μ et ν in infinitum variari queant, idem factor cof. αt cum infinitis huiusmodi binorum ſinuum productis coniungi poterit, ex quibus omnibus cuiusque vibrationis tempus prodit $= \frac{\pi}{\alpha}$ min. sec. Talis autem formula generalius ita repraesentari potest:

$$z = \text{cos.}\,\alpha t \left\{ \begin{array}{l} + A \text{ sin.}\,\mu x \text{ sin.}\,\nu y + B \text{ sin.}\,\mu x \text{ cos.}\,\nu y + C \text{ cos.}\,\mu x \text{ sin.}\,\nu y \\ \qquad + D \text{ cos.}\,\mu x \text{ cos.}\,\nu y \\ + A' \text{ sin.}\,\mu' x \text{ sin.}\,\nu' y + B' \text{ sin.}\,\mu' x \text{ cos.}\,\nu' y + C' \text{ cos.}\,\mu' x \text{ sin.}\,\nu' y \\ \qquad + D' \text{ cos.}\,\mu' x \text{ cos.}\,\nu' y \\ + A'' \text{ sin.}\,\mu'' x \text{ sin.}\,\nu'' y + B'' \text{ sin.}\,\mu'' x \text{ cos.}\,\nu'' y + C'' \text{ cos.}\,\mu'' x \text{ sin.}\,\nu'' y \\ \qquad + D'' \text{ cos.}\,\mu'' x \text{ cos.}\,\nu'' y \end{array} \right.$$

etc.

dummodo litterae μ; ν; μ'; ν'; μ''; ν''; etc. ita capiantur, vt sit $\frac{\alpha\alpha}{ee} = \mu\mu + \nu\nu = \mu'\mu' + \nu'\nu' = \mu''\mu'' + \nu''\nu''$ etc. coefficientes vero A, B etc. penitus arbitrio nostro relinquuntur, si modo sint minimi.

13. Hinc autem minime patet, quomodo tympano figura quaepiam data veluti circularis conciliari possit, vt scilicet in perimetro figurae vbique fiat $z = 0$. In hunc finem aequationem nostram differentialem

$$\frac{1}{ee}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

Tab. III. Fig. 4. in aliam formam transfundi conueniet, introducendo loco x et y binas alias variabiles. Scilicet cum sit $CX = x$ et $XY = y$, ponatur recta $CY = r$, et angulus $ACY = \Phi$, quae binae quantitates r et Φ loco x et y introducantur, vt iam z existat functio quantitatum r et Φ, insuperque temporis t. Primum igitur terminus $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ non mutabitur; pro reliquorum vero transformatione notetur, ob $x = r$ cos. Φ et $y = r$ sin. Φ, esse

dx

$dx = dr\,\text{cof.}\,\Phi - r\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi$ et $dy = dr\,\text{fin.}\,\Phi + r\,d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi$ hincque $dr = dx\,\text{cof.}\,\Phi + dy\,\text{fin.}\,\Phi$ et $d\Phi = \frac{dy\,\text{cof.}\,\Phi - dx\,\text{fin.}\,\Phi}{r}$. Quaeritur ergo, quomodo hinc in formulis $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ et $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$ loco differentialium dx et dy, ad quae referuntur, ratio nouorum differentialium dr et $d\Phi$ introduci debeant, et cuiusmodi hinc formulae loco earum fint prodituгae.

14. Confideretur in genere functio quaecunque ipfarum x et y, quae fit v, et quae eadem erit quoque functio ipfarum r et Φ. Cum igitur fit

$$dv = dx\left(\frac{dv}{dx}\right) + dy\left(\frac{dv}{dy}\right) = dr\left(\frac{dv}{dr}\right) + d\Phi\left(\frac{dv}{d\Phi}\right)$$

erit pro dr et $d\Phi$, fubftitutis valoribus per dx et dy expreffis,

$$dx\left(\frac{dv}{dx}\right) + dy\left(\frac{dv}{dy}\right) = (dx\,\text{cof}\,\Phi + dy\,\text{fin.}\,\Phi)\left(\frac{dv}{dr}\right)$$
$$+ \left(\frac{dy\,\text{cof.}\,\Phi - dx\,\text{fin.}\,\Phi}{r}\right)\left(\frac{dv}{d\Phi}\right)$$

vbi terminos tam per dx, quam per dy, affectos feorfim aequari oportet, ficque erit

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \text{cof.}\,\Phi\left(\frac{dv}{dr}\right) - \frac{\text{fin.}\,\Phi}{r}\left(\frac{dv}{d\Phi}\right) \quad \text{et}$$
$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \text{fin.}\,\Phi\left(\frac{dv}{dr}\right) + \frac{\text{cof.}\,\Phi}{r}\left(\frac{dv}{d\Phi}\right).$$

Sit breuitatis gratia $\left(\frac{dv}{dr}\right) = p$ et $\left(\frac{dv}{d\Phi}\right) = q$, erit

$$\left(\frac{ddv}{dx^2}\right) = -p\,\text{fin.}\,\Phi\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \text{cof.}\,\Phi\left(\frac{dp}{dx}\right) - \frac{q\,\text{cof.}\,\Phi}{r}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)$$
$$+ \frac{q\,\text{fin.}\,\Phi}{rr}\left(\frac{dr}{dx}\right) - \frac{\text{fin.}\,\Phi}{r}\left(\frac{dq}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{ddv}{dy^2}\right) = p\,\text{cof.}\,\Phi\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) + \text{fin.}\,\Phi\left(\frac{dp}{dy}\right) - \frac{q\,\text{fin.}\,\Phi}{r}\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)$$
$$- \frac{q\,\text{cof.}\,\Phi}{rr}\left(\frac{dr}{dy}\right) + \frac{\text{cof}\,\Phi}{r}\left(\frac{dq}{dy}\right)$$

Erit vero ex formulis fupra propofitis:

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = -\frac{\text{fin.}\,\Phi}{r};\; \left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = \frac{\text{cof.}\,\Phi}{r};\; \left(\frac{dr}{dx}\right) = \text{cof.}\,\Phi;\; \left(\frac{dr}{dy}\right) = \text{fin.}\,\Phi$$

 vnde

vnde conficitur:

$$\left(\frac{ddv}{dx^2}\right)=\frac{p\sin.\Phi^2}{r}+\cos.\Phi\left(\frac{dp}{dx}\right)+\frac{2q\sin.\Phi\cos.\Phi}{rr}-\frac{\sin.\Phi}{r}\left(\frac{dp}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{ddv}{dy_2}\right)=\frac{p\cos.\Phi^2}{r}+\sin.\Phi\left(\frac{dp}{dy}\right)-\frac{2q\sin.\Phi\cos.\Phi}{rr}+\frac{\cos.\Phi}{r}\left(\frac{dq}{dy}\right).$$

15. Nunc vero, cum quantitatum p et q eadem sit ratio ac supra ipsius v, erit:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)=\cos.\Phi\left(\frac{dp}{dr}\right)-\frac{\sin.\Phi}{r}\left(\frac{dp}{d\Phi}\right)=\cos.\Phi\left(\frac{ddv}{dr^2}\right)-\frac{\sin.\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{drd\Phi}\right)$$
$$\left(\frac{dq}{dx}\right)=\cos.\Phi\left(\frac{dq}{dr}\right)-\frac{\sin.\Phi}{r}\left(\frac{dq}{d\Phi}\right)=\cos.\Phi\left(\frac{ddv}{drd\Phi}\right)-\frac{\sin.\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{d\Phi^2}\right)$$
$$\left(\frac{dp}{dy}\right)=\sin.\Phi\left(\frac{dp}{dr}\right)+\frac{\cos.\Phi}{r}\left(\frac{dp}{d\Phi}\right)=\sin.\Phi\left(\frac{ddv}{dr^2}\right)+\frac{\cos.\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{drd\Phi}\right)$$
$$\left(\frac{dq}{dy}\right)=\sin.\Phi\left(\frac{dq}{dr}\right)+\frac{\cos.\Phi}{r}\left(\frac{dp}{d\Phi}\right)=\sin.\Phi\left(\frac{ddv}{drd\Phi}\right)+\frac{\cos.\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{d\Phi^2}\right)$$

hincque colligimus:

$$\left(\frac{ddv}{dx^2}\right)=\frac{\sin.\Phi^2}{r}\left(\frac{dv}{dr}\right)-\frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{rr}\left(\frac{dv}{d\Phi}\right)+\cos.\Phi^2\left(\frac{ddv}{dr^2}\right)$$
$$-\frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{drd\Phi}\right)+\frac{\sin.\Phi^2}{rr}\left(\frac{ddv}{d\Phi^2}\right)$$
$$\left(\frac{ddv}{dy^2}\right)=\frac{\cos.\Phi^2}{r}\left(\frac{dv}{dr}\right)-\frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{rr}\left(\frac{dv}{d\Phi}\right)+\sin.\Phi^2\left(\frac{ddv}{dr^2}\right)$$
$$+\frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{drd\Phi}\right)+\frac{\sin.\Phi^2}{rr}\left(\frac{ddv}{d\Phi^2}\right).$$

Scribamus iam z pro v, quoniam tempus t hic nihil turbat, et habebimus:

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)=\frac{\sin.\Phi^2}{r}\left(\frac{dz}{dr}\right)+\frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{rr}\left(\frac{dz}{d\Phi}\right)+\cos.\Phi^2\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$$
$$-\frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{r}\left(\frac{ddz}{drd\Phi}\right)+\frac{\sin.\Phi^2}{rr}\left(\frac{ddz}{d\Phi^2}\right)$$
$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=\frac{\cos.\Phi^2}{r}\left(\frac{dz}{dr}\right)-\frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{rr}\left(\frac{dz}{d\Phi}\right)+\sin.\Phi^2\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$$
$$+\frac{2\sin.\Phi\cos.\Phi}{r}\left(\frac{ddz}{drd\Phi}\right)+\frac{\cos.\Phi^2}{rr}\left(\frac{ddz}{d\Phi^2}\right)$$

quibus collectis nostra aequatio induet hanc formam:

$$\frac{1}{ee}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{dz}{dr}\right)+\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)+\frac{1}{rr}\left(\frac{ddz}{d\Phi^2}\right)$$

Modus

Modus autem, quo hanc aequationem elicuimus, nouam quandam algorithmi speciem constituit, quae omni attentione digna videtur.

16. Ponamus hic iterum ad tempus elidendum $z = v\,\text{fin.}(\alpha t + \mathfrak{A})$, vt iam v tantum sit functio ipsarum r et Φ, eritque

$$o = \frac{\alpha\alpha}{ee} v + \frac{1}{r}\left(\frac{dv}{dr}\right) + \left(\frac{ddv}{dr^2}\right) + \frac{1}{rr}\left(\frac{ddv}{d\Phi^2}\right).$$

Statuatur porro ad anguli Φ rationem tollendam $v = u\,\text{fin}\,(\beta\Phi + \mathfrak{B})$, vt u sit functio solius r, eritque

$$o = \frac{\alpha\alpha}{ee} u - \frac{\beta\beta}{rr} u + \frac{du}{rdr} + \frac{ddu}{dr^2},$$

vnde iam valor ipsius u per r definiri debet; cum autem β pro lubitu assumi possit, innumerabiles valores pro v exhibere licet, qui omnes iunctim sumti cum $\text{fin.}(\alpha t + \mathfrak{A})$ combinari possunt, sicque pro quouis numero α, vnde tempus vnius vibrationis fit $= \frac{\pi}{\alpha}$ min. sec. expressio maxime generalis valorem z exhibens obtinebitur. Aequatio autem inuenta, posito $lu = \int p\,dr$, abit in

$$o = \frac{\alpha\alpha}{ee} - \frac{\beta\beta}{rr} + \frac{p}{r} + \frac{dp}{dr} + pp, \text{ quae posito } p = \frac{q}{r} \text{ fit}$$

$$dq + \frac{qq\,dr}{r} + \frac{\alpha\alpha}{ee} r\,dr - \beta\beta . \frac{dr}{r} = o$$

quae ad eiusmodi casus aequationis Riccatianae reducitur, qui integrationem admittunt, quoties β fuerit numerus huius formae: $i - \frac{1}{2}$, denotante i numerum integrum quemcunque.

17. Confugiamus ergo ad series, ac primo quidem in aequatione

$$o = \frac{\alpha\alpha}{ee} u - \frac{\beta\beta}{rr} u + \frac{du}{rdr} + \frac{ddu}{dr^2}$$

ponamus

Ponamus $u = r^\beta s$, vt nanciſcamur hanc aequationem:

$$0 = \frac{\alpha\alpha}{ee} s + \frac{(2\beta+1)ds}{rdr} + \frac{dds}{dr^2}.$$

Sit breuitatis gratia $2\beta + 1 = n$, ſeu $\beta = \frac{n-1}{2}$, vt ſit $u = r^{\frac{n-1}{2}} s$

et ponamus $s = A - Br^2 + Cr^4 - Dr^6 + Er^8 -$ etc. factaque ſubſtitutione fit:

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{\alpha\alpha}{ee}A - \tfrac{\alpha\alpha}{ee}Br^2 + \tfrac{\alpha\alpha}{ee}Cr^4 - \tfrac{\alpha\alpha}{ee}Dr^6 + \tfrac{\alpha\alpha}{ee}Er^8 \\ - 2nB + 4nC - 6nD + 8nE - 10nF \\ - 2B + 12C - 30D + 56E - 90F \end{aligned}$$

hincque:

$B = \frac{\alpha\alpha A}{2(n+1)ee}$; $C = \frac{\alpha\alpha B}{4(n+3)ee}$; $D = \frac{\alpha\alpha C}{6(n+5)ee}$; $E = \frac{\alpha\alpha D}{8(n+7)ee}$ etc.

vnde obtinemus:

$$u = Ar^\beta\left(1 - \frac{\alpha\alpha r^2}{2(n+1)ee} + \frac{\alpha^4 r^4}{2.4(n+1)(n+3)e^4} - \frac{\alpha^6 r^6}{2.4.6(n+1)(n+3)(n+5)e^6} + \text{etc.}\right)$$

exiſtente $n = 2\beta + 1$, eritque $z = u \sin(\alpha t + \mathfrak{A}) \sin(\beta\Phi + \mathfrak{B})$.

Quodſi iam, poſito $r = a$, fiat $u = 0$, habebitur tympanum circulare, cuius radius $CA = a$. At poſito $r = a$, pro quouis numero β vel n, ſcribendo $\frac{\alpha a}{e} = l$ aequatio

$$1 - \frac{ll}{2(n+1)} + \frac{l^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \frac{l^6}{2.4.6(n+1)(n+3)(n+5)} + \text{etc.} = 0$$

infinitos exhibet valores pro l, ideoque etiam pro α, ex quo infiniti ſoni ſimplices reſultabunt. Cum autem angulis Φ, $2\pi + \Phi$, $4\pi + \Phi$ etc. idem valor ipſius z reſpondere debeat, euidens eſt, pro β alios numeros accipi non poſſe niſi integros; vnde pro n omnes numeros

meros

meros impares ſumere licet, ex quorum ſingulis infiniti valores pro α, ideoque infiniti ſoni, exſurgunt.

18. Verum haec ſeries tantum integrale particulare noſtrae aequationis differentio - differentialis exhibet, cum vnicam conſtantem arbitrariam inuoluat; ſeries autem duas conſtantes ab arbitrio noſtro pendentes reperietur, ſi ponatur $s = p \sin.\frac{\alpha r}{e} + q \cos.\frac{\alpha r}{e}$, ac tum aequationis reſultantis partes tam per $\sin.\frac{\alpha r}{e}$ quam $\cos.\frac{\alpha r}{e}$ affectas ſeorſim nihilo aequentur, indeque quantitates p et q per ſeries definiantur. Calculo hoc ſubducto, ſi breuitatis gratia ponamus $\frac{\alpha r}{e} = \theta$, vt ſit $r = \frac{\theta}{\alpha} e$, maneatque $n = 2\beta + 1$, erit

$$u = + r^{\beta} \sin.\theta \Big(A + \mathfrak{A}\theta - \frac{(n+2)A\theta\theta}{2(n+1)} - \frac{(n+2)(n+4)\mathfrak{A}\theta^3}{2\cdot3(n+1)(n+2)} + \frac{(n+2)(n+4)(n+6)A\theta^4}{2\cdot3\cdot4(n+1)(n+2)(n+3)} + \text{etc.}\Big)$$
$$+ r^{\beta} \cos.\theta \Big(\mathfrak{A} - A\theta - \frac{(n+2)\mathfrak{A}\theta\theta}{2(n+1)} + \frac{(n+2)(n+4)A\theta^3}{2\cdot3(n+1)(n+2)} + \frac{(n+2)(n+4)(n+6)\mathfrak{A}\theta^4}{2\cdot3\cdot4(n+1)(n+2)(n+3)} - \text{etc.}\Big)$$

vbi, vt ante, obſeruandum eſt, loco β nonniſi numeros integros accipi poſſe; tum autem erit $z = u \sin.(\alpha t + \gamma) \sin.(\beta\Phi + \delta)$ at A et $\mathfrak{A}$ ſunt binae conſtantes arbitrariae per duplicem integrationem introductae. Quodſi ergo breuitatis gratia ponamus:

$$1 - \frac{(n+2)\theta\theta}{2(n+1)} + \frac{(n+2)(n+4)(n+6)\theta^4}{2\cdot3\cdot4(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)(n+10)\theta^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + \text{etc.} = P$$
$$\theta - \frac{(n+2)(n+4)\theta^3}{2\cdot3(n+1)(n+2)} + \frac{(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)\theta^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \text{etc.} = Q$$

habebimus:

$$u = r^{\beta}(A P \sin.\theta + \mathfrak{A} Q \sin.\theta + \mathfrak{A} P \cos.\theta - A Q \cos.\theta).$$

Si ergo ponamus $P = R \cos \eta$ et $Q = R \sin. \eta$, erit
$u = r^\beta (A R \sin.(\theta - \eta) + \mathfrak{A} R \cos.(\theta - \eta)) = C R r^\beta \sin.(\theta - \eta + \varepsilon)$
vbi est $R = \sqrt{(PP + QQ)}$ et tang $\eta = \frac{Q}{P}$.

19. Cum hic duae habeantur constantes arbitrariae A et $\mathfrak{A}$, eae semper ita definiri possunt, vt, posito $r = a$, fiat $z = 0$, quicunque etiam numeri pro α et β accipiantur, vnde idem tympanum ad omnes omnino sonos edendos aptum videtur. Verum quemadmodum vidimus, pro β alios numeros nisi integros assumi non posse, quia alioquin pro eodem puncto plures valores ipsius z orirentur, quod esset absurdum, ita ob eandem rationem alia insuper circumstantia est spectanda. Necesse enim est, expressionem pro z ita esse comparatam, vt manente angulo Φ, sumta autem distantia r negatiua, idem prodeat valor, ac si angulus Φ duobus rectis seu π augeatur, distantia autem r maneat positiua, vtrinque enim ad idem punctum peruenitur. Hinc intelligitur, cum $r^m \sin. (\beta \Phi + \delta)$ sit forma cuiusque partis, si β sit numerus impar, exponentem m quoque imparem esse debere, sin autem β sit par, etiam m parem esse oportere. Vtroque ergo casu necesse est, vt sit $m = \beta \pm$ numero pari, seu vt $\frac{u}{r^\beta}$ nonnisi potestates pares ipsius r inuoluat. Hanc ob rem fiat necesse est $A = 0$, sicque habebimus:

$$u = \mathfrak{A} r^\beta (Q \sin. \theta + P \cos \theta)$$

quae expressio cum supra inuenta (§. 17.) perfecte congruit.

20. Haec formula non solum ad tympana circularia est accommodata, sed etiam ad alias figuras patet.

Si

Si enim tantum in vibrationibus regularibus subsistere velimus, vt valor numeri α maneat idem, pro β autem successiue quicunque numeri integri 0, 1, 2, 3, 4, etc. sumantur, vnde capiatur $n = 2\beta + 1$, denotet formula $\Sigma(r, \beta)$ valorem huius seriei infinitae:

$$r^{\beta}\left(1 - \frac{\alpha\alpha r^2}{2(n+1)e^2} + \frac{\alpha^4 r^4}{2 \cdot 4(n+1)(n+3)e^4} - \frac{\alpha^6 r^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(n+1)(n+3)(n+5)e^6} + \text{etc.}\right)$$

atque pro motu vibratorio regulari habebimus:

$$z = \sin.(\alpha t + \mathfrak{A})\big(A\Sigma(r,0) + B\Sigma(r,1)\sin.(\phi + \mathfrak{B}) + C\Sigma(r,2)\sin.(2\phi + \mathfrak{C}) + \text{etc.}\big)$$

Haec expressio si nihilo aequetur, dabit terminos tympani fixos, qui determinantur aequatione quadam inter distantiam r et angulum ϕ. Verum methodus non patet coefficientes A, B, C cum angulis $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. ita definiendi, vt pro terminis data aequatio resultet. Aeque parum autem constat, quomodo pro eadem tympani figura plures valores numeri α reperiri queant, ex quibus omnes sonos simplices, quos id reddere valeat, cognoscere liceat.

21. Imprimis autem haec formula apta est ad sonos a tympano circulari editos definiendos; posito enim radio tympani $= a$, et $\frac{a}{e} = m$, considerentur sequentes aequationes infinitae:

$$1 - \frac{m^2\alpha^2}{2 \cdot 2} + \frac{m^4\alpha^4}{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4} - \frac{m^6\alpha^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{m^8\alpha^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \text{etc.} = 0$$

$$1 - \frac{m^2\alpha^2}{2 \cdot 6} + \frac{m^4\alpha^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{m^6\alpha^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{m^8\alpha^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} - \text{etc.} = 0$$

$$1 - \frac{m^2\alpha^2}{2 \cdot b} + \frac{m^4\alpha^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{m^6\alpha^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{m^8\alpha^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} - \text{etc.} = 0$$

$$1 - \frac{m^2\alpha^2}{2 \cdot 8} + \frac{m^4\alpha^4}{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 10} - \frac{m^6\alpha^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \frac{m^8\alpha^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} - \text{etc.} = 0$$

etc.

quarum vnaquaeque infinitos valores pro α praebet, ita vt infinities infiniti valores ipsius α obtineantur, quorum quilibet peculiarem denotat sonum, cuiusque vibrationis tempore existente $= \frac{\pi}{\alpha}$ min. sec. Tum vero notandum est, quos sonos simplices hoc tympanum seorsim reddere valet, eosdem quoque coniunctim vtcunque mixtos edere posse. Verum ipsa harum aequationum resolutio aliter nisi per approximationem institui non posse videtur, neque etiam postquam radices vnius inuenerimus, nullum auxilium inde ad reliquas soluendas peti potest.

22. Specie quidem amplior resolutio aequationis nostrae

$$\frac{1}{ee}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

exhiberi potest, vnde autem parum vtilitatis ad casus particulares expediendos redundat. Satisfacit scilicet huic aequationi ista expressio:

$$z = \Phi(\alpha x + \beta y + \gamma t) \text{ si sit } \alpha\alpha + \beta\beta = \frac{\gamma\gamma}{ee},$$

et cum huiusmodi formulae infinitis modis formari possint, aggregatum ex earum quotcunque valorem idoneum pro z praebet sicque habebitur:

$$z = \Phi(\alpha x + \beta y + \gamma t) + \Psi(\alpha' x + \beta' y + \gamma' t) + \Omega(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' t) \text{ etc.}$$

existente

$$\alpha\alpha + \beta\beta = \frac{\gamma\gamma}{ee};\ \alpha'\alpha' + \beta'\beta' = \frac{\gamma'\gamma'}{ee};\ \alpha''\alpha'' + \beta''\beta'' = \frac{\gamma''\gamma''}{ee} \text{ etc.}$$

neque vero patet, quomodo huiusmodi expressio ad datam tympani figuram, neque quomodo ad datam impulsionem initio factam accommodari queat. Interim tamen perspicuum est, hanc solutionem latissime patere, cum characteres Φ, Ψ, Ω functiones quascunque denotent, vnde maxime desideratur methodus huiusmodi formulas ad vsum applicandi.

TENTA-

TENTAMEN DE SONO CAMPANARUM.

Auctore

L. EULERO.

1.

Inter ea corpora, quae percussa contremiscunt, sonumque edunt, cordae tensae et laminae elasticae omni cura sunt exploratae, quae inuestigatio a Geometris eo diligentius est suscepta, quod non solum Physicae insignem illustrationem afferat, sed etiam principiis Acusticae et Musicae stabiliendis inseruiat. Quin etiam Celebris harmonicorum concentuum artifex *de Rameau* in hoc sibi verum harmoniae fundamentum detexisse videtur, quod pleraque corpora percussa plures simul sonos edere deprehendantur, quo phaenomeno naturam nobis ipsam sonos harmonicos declarare putat. Tanquam principium enim assumit, quos sonos idem corpus sonorum percussum coniunctim producat, eos pro consonis esse habendos. De cordis quidem tensis Celeberrimus *Bernoulli* luculenter ostendit, quomodo ab iis simul duo plures ve soni edi queant, qui secundum interualla consona octauae, quintae ac tertiae discrepent. Instrumentis porro musicis, quae inflatu tractantur, haec opinio mirifice confirmari videtur, dum soni, quos diuersimode inflata edere solent, secundum seriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, etc. progrediuntur. Tum vero etiam in campanis Celeb. *de Rameau* varios sonos simul se audire profitetur, inter quos potissimum interuallum tertiae seu decimae maioris emineat, hincque principium suum verae harmoniae antehac penitus ignoratum cumulatissime confirmari arbitratur.

2. Causa ergo, cur interualla *octauae*, *quintae* ac *tertiae* pro consonis sint habenda, hinc Auctori non tam in simplicitate rationum, quas auditu facile percipiamus, quaerenda videtur; sed potius in eo, quod eadem interualla saepenumero a corporibus sonoris percussis exhibeantur; quae ratio iis, qui regulis philosophandi sunt assueti, parum congrua videri debet. Si enim causa harmoniae in simplicitate rationis, quam vibrationes eodem tempore peractae inter se tenent, consistit, parum refert, vtrum huiusmodi soni harmonici ab eodem corpore percusso simul edantur, nec ne? ac duo soni interuallo octauae vel quintae remoti suauius non sonabunt, siue a duabus cordis diuersis edantur, siue ab eadem simul. Ac si duo huiusmodi soni in eodem corpore simul percipiantur, tantum abest, vt in hoc ipso causa consonantiae constitui possit, vt potius noua quaestio inde nascatur, quomodo eueniat, vt ab eodem corpore duo soni consoni simul edantur. Cum autem hoc principium per se sit infirmum, tum funditus iam est euersum per ea, quae Celeb. *Bernoulli* et ego de laminis elasticis sumus commentati, quos sonos maxime dissonos simul edere posse ostendimus. Atque nunc etiam monstrabo, binos illos sonos in campanis percipiendos, quos Celeb. *de Rameau* pro decima maiore habet, tantillum ab hac ratione deficere, eorumque interuallum adeo irrationale, sicque maxime esse dissonum. Ex quo exemplo cum laminis elasticis coniuncto patebit,

na-

naturam aeque sonorum dissonorum productione atque consonorum delectari, neque hinc quicquam ad principiorum harmonicorum per se solidissime stabilitorum maiorem confirmationem, atque adeo ne ad illustrationem quidem, peti posse.

3. Satis perspicuum videtur, dum campana pulsa contremiscit, sonumque edit, eius figuram ita continuo immutari, vt annuli elementares, quibus constare concipitur, a figura circulari rapidissime detorqueantur, atque alternatim figuram quasi ellipticam elongatam et compressam recipiant. Quare si rationem huius tremoris inuestigare velimus, tales annulos tenuissimos, in quos campana sectionibus horizontalibus resolui concipitur, seorsim considerare debemus, ita vt haec quaestio nobis sit imprimis euoluenda, quomodo annulus elasticus percussus vibrationes suas sit peracturus, quae ergo quaestio affinis est ei, quam de vibrationibus laminarum elasticarum instituimus, nisi quod hic figura corporis elastici naturalis est circularis, cum ibi esset linea recta. Sit igitur propositus huiusmodi annulus circularis ABMNCD, cuius latitudo ponatur $MN = c$, et radius medius $= a$, ita vt circuli interioris radius sit $OM = a - \frac{1}{2}c$ et exterioris $ON = a + \frac{1}{2}c$, vnde superficies annuli erit $= \pi(a+\frac{1}{2}c)^2 - \pi(a-\frac{1}{2}c)^2 = 2\pi ac$, denotante 2π peripheriam circuli, cuius radius $= 1$. Hinc si sectore infinite paruo, cuius angulus ad $O = \omega$, exscindatur elementum $MNmn$, erit eius areola $= ac\omega$. Tab. IV. Fig. 1.

4. Iam elasticitatem huius annuli contemplari oportet, vnde eius frustum quodcunque ABCD a vi quapiam in M ita incuruari pono, vt portio CMmD fiet Fig. 2.

ciet ab altera parte AMNB angulo infinite parvo $NMn = \omega$, et effectum elasticitatis in minimis elastris $Nn.Zz$, quae vi sese contrahendi praedita ambas annuli partes in statum naturalem restituere conentur. Quaero igitur momentum omnium harum virium elementarium, quippe cui momentum vis, quae hanc inflexionem producere valet, aequale est statuendum. Vis autem singulorum horum elastrorum Zz ipsorum elongationi proportionalis est censenda, ex quo, si ponatur $MZ = z$, ob $Zz = \omega z$, erit vis huius elastri vt $\omega z dz$, eiusque momentum respectu puncti quasi immobilis $M = \omega zzdz$; vnde summa horum momentorum est $= \frac{1}{3}\omega z^3$, et expansione ad totam latitudinem $MN = c$ facta, erit totum momentum hanc inflexionem producens vt $\frac{1}{3}c^3\omega$. Magnitudinem huius momenti absolutam hic non curo, quippe quam pro quouis casu per experimenta explorare licet. Sufficiat ergo nosse, eam esse angulo inflexionis $NMn = \omega$ et cubo latitudinis annuli $MN = c$ coniunctim proportionalem. Dum ergo annulus ita in M inflectitur, vt angulus inflexionis sit $NMn = \omega$, momentum virium ad hunc effectum producendum requisitum statuo $= Ec^3\omega$; ita si vis quaedam CV hunc effectum producat, eius momentum pro puncto M erit $= Ec^3\omega$. Ac si etiam crassitiem huius annuli, quae sit $= b$ simulque minima, introducere velimus, prodibit istud momentum $= Ebc^3\omega$.

5. Quo haec ad institutum nostrum magis accommodemus, ponamus in annulo figuram circularem iam a causa quacunque periisse, atque in M seu potius puncto medio inter M et N radium curuedinis non

Tab. IV. Fig. 1.

non amplius esse $= a$, sed iam factum esse $= r$. Cum igitur nunc curuatura sit vt $\frac{1}{r}$, dum in statu naturali est $\frac{1}{a}$, differentia $\frac{1}{r}-\frac{1}{a}$ seu $\frac{1}{a}-\frac{1}{r}$ id repraesentat, quod supra angulo elementari ω designabatur. Quare virium momentum ad hanc inflexionem in M requisitum erit $= Ebc^2(\frac{1}{a}-\frac{1}{a})$ vel $Ebc^2(\frac{1}{a}-\frac{1}{r})$, prout r fuerit vel minor vel maior quam a; priori scilicet casu momentum assignatum tendet ad inflexionem minuendam, posteriori vero ad augendam, quia hoc casu annuli limbus minus est incuruatus, quam in statu naturali. Hinc patet, literam E ita quampiam vim inuoluere, vt E sit vis per quadratum lineae cuiusdam diuisae; scilicet eius forma erit $\frac{P}{ff}$, vbi P vim quandam absolutam, et f lineam quandam rectam denotat, quas quantitates per experimenta definiri conuenit.

6. Comparemus iam statum annuli quemcunque violentum cum naturali et circulari, cuius centrum O, et ne figura nimis fiat confusa, loco annuli latitudine c praediti, tantum circulum AXx radio $OA = a$ descriptum consideremus, qui per annuli medium in statu naturali sit ductus, in violento autem in curuam BYy sit detortus. Cum deinde haec immutatio minima sit statuenda, puncta A, X, x ita e statu naturali in violentum in B, Y, y translata concipere licet, vt rectae AB, YX, yx productae per centrum O transeant, et puncta B, Y, y situm suum naturalem A, X, x affectent. Puncto ergo A tanquam fixo spectato, vocemus arcum $AX = X$, et particulam $XY = Y$, tum vero pro alio puncto y arcum $Ax = x$, et particulam $xy = y$, ita vt qualis functio y sit ipsius x, talis fun- Tab. IV. Fig. 3.

 ctio

ctio Y esse debeat ipsius X. Nunc igitur perpendendum est, elementum annuli circa y eatenus in statu violento versari, quatenus radius osculi in y vel maior est, vel minor, quam a. Ad eum ergo inuestigandum fig. 4. magis ad hunc scopum accommodata vtor, vbi Oxy sit radius ipsi OXY proximus, et Yv arculus centro O descriptus; hic ob AX $= x$, XY $= y$, et OX $= a$, erit X$x = dx$, Y$v = (1 + \frac{y}{a})dx$, et $vy = dy$, vnde fit Y$y = \sqrt{((1+\frac{y}{a})^2 dx^2 + dy^2)} = ds$. Ducatur ad Y tangens, in eamque ex O demittatur perpendiculum OT $= \Pi$, erit $ds : (1 + \frac{y}{a})dx = a + y : \Pi$; hincque $\Pi = \frac{(a+y)^2 dx}{a\,ds}$. Constat autem, esse radium curuedinis YR $= \frac{(a+y)dy}{d\Pi}$. At sumto dx constante est $d\Pi = \frac{2(a+y)dx\,dy}{a\,ds} - \frac{(a+y)^2 dx\,dds}{a\,ds^2}$; quod ob $dds = \frac{(a+y)dx^2 dy + aa\,dy\,ddy}{aa\,ds}$, abit in

Tab. IV. Fig. 4.

$$d\Pi = \frac{(a+y)^3 dx^3 dy + 2aa(a+y)dx\,dy^3 - aa(a+y)^2 dx\,dy\,ddy}{a^3 ds^3}$$

hincque $$YR = \frac{a^3 ds^3}{(a+y)^2 dx^3 + 2aa\,dx\,dy^2 - aa(a+y)dx\,ddy}.$$

7. Nunc autem cogitemus, esse y prae a quantitatem minimam, indeque etiam rationem $dy : dx$ euanescere; atque proxime erit $ds = dx$, hincque

$$YR = \frac{a^3 dx^3}{aa\,dx^3 + 2aa\,dx\,dy^2 - a^3 dx\,ddy} = \frac{a\,dx^2}{dx^2 - a\,ddy}.$$

Fig. 3. Quare posito radio osculi in $y = r$, erit $r = \frac{a\,dx^2}{dx^2 - a\,ddy}$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} - \frac{ddy}{dx^2}$; vnde si $\frac{ddy}{dx^2}$ vt positiuum spectemus, radius osculi in y maior erit quam a, et conatus aderit ad annulum in y magis incuruandum, cuius momentum, vt ante ostendimus, aestimari debet $= Ebc^3 \cdot \frac{ddy}{dx^2}$, vel momentum, quod annulus exerit ad curuaturam in y minuendam, erit $= -Ebc^3 \cdot \frac{ddy}{dx^2}$, quod momentum ad

ipsum

ipſum punctum y applicatum eſt cenſendum. Quatenus ergo annulus in ſingulis elementis vel magis incuruatus eſt, vel minus, quam in ſtatu naturali, eatenus vires naſcuntur, ſingula annuli elementa in ſtatum naturalem pellentes. Sit igitur vis, qua elementum ad y vrgetur verſus $x = p\,dx$, ſimilique modo vis elementaris ſecundum $YX = P\,dX$, quas vires ex ſuperioribus ſollicitationibus determinari oportet; ac quin volumen elementi in y ſit $= bc\,dx$, in Y autem $= bc\,dX$, erunt eorum maſſae per denſitatem δ quaſi multiplicando $\delta bc\,dx$ et $\delta bc\,dX$, vnde introducendo tempus $= t$ in minutis ſecundis expreſſum, ſi g ſit altitudo lapſus vno minuto ſecundo, erit ex principiis ſollicitationum $\delta bc\,dx\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -2gp\,dx$ ſeu $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{2gp}{\delta bc}$.

8. Ad has autem vires elementares $p\,dx$ et $P\,dX$ inueniendas, quibus ſingula annuli elementa actu ad ſtatum naturalem vrgentur, concipiamus ſingulas has vires contrarie applicatas, quibus ergo efficietur, vt annulus in hoc ſtatu violento conſeruetur. Repraeſentet recta YP hanc vim $P\,dX$, huiusque cum reliquis omnibus effectus ratione puncti y in hoc conſiſtet, vt ab eorum momentis iunctim ſumtis curuatura in y tantum minuatur, quantum ob elaſticitatem augeri conatur, quod momentum ante vidimus eſſe $= Ebc^2 . \frac{ddy}{dx^2}$, cui ergo ſumma omnium momentorum ex viribus elementaribus $P\,dX$ natorum aequalis eſſe debet. Hunc in finem punctum y tanquam fixum ſpectemus, punctum vero Y per totum annuli ambitum variari ponamus, vt x et y tantisper ſint quantitates conſtantes, ſolae autem X et Y cum vi incognita $P\,dX$

variabiles. Ac huius quidem vis $YP = PdY$ momentum in punctum y est $= PdX . \text{sin.} XOx : Oy$ $= (a+y) PdX \,\text{sin.}\left(\frac{x}{a} - \frac{X}{a}\right) = aPdX\left(\text{sin.}\frac{x}{a}\text{cos.}\frac{X}{a} - \text{cos.}\frac{x}{a}\text{sin}\frac{X}{a}\right)$; quia y prae a vt euanescentem spectamus, vnde summa horum momentorum est $a\,\text{sin.}\frac{x}{a}\int PdX\,\text{cos.}\frac{X}{a}$ $- a\,\text{cos.}\frac{x}{a}\int PdX\,\text{sin.}\frac{X}{a}$, quod vsque ad ipsum punctum y est extendendum, quo fit $X = x$ et $P = p$.

9 Nunc igitur variabilitas puncti Y in ipsum punctum y transfertur, ac iam x et p vt variabilibus spectatis erit summa omnium momentorum curuaturam in y minuere tendentium $= a\,\text{sin.}\frac{x}{a}\int pdx\,\text{cos.}\frac{x}{a} - a\,\text{cos}\frac{x}{a}\int pdx\,\text{sin.}\frac{x}{a}$, ipsi $Ebc^2 . \frac{ddy}{dx^2}$ aequalis statuenda, vnde vim elementarem pdx hactenus incognitam definire licebit. Sumto autem elemento dx constante, differentiatio praebet:

$$\text{cos.}\frac{x}{a}\int pdx\,\text{cos.}\frac{x}{a} + \text{sin}\frac{x}{a}\int pdx\,\text{sin.}\frac{x}{a} = Ebc^2 . \frac{d^3y}{dx^3}$$

porro autem differentiando adipiscimur

$$-\frac{1}{a}\text{sin.}\frac{x}{a}\int pdx\,\text{cos.}\frac{x}{a} - \frac{1}{a}\text{cos.}\frac{x}{a}\int pdx\,\text{sin.}\frac{x}{a} + p = Ebc^2 . \frac{d^4y}{dx^4}.$$

Cum vero sit

$$\frac{1}{a}\text{sin.}\frac{x}{a}\int pdx\,\text{cos.}\frac{x}{a} - \frac{1}{a}\text{cos.}\frac{x}{a}\int pdx\,\text{sin.}\frac{x}{a} = Ebc^2 . \frac{ddy}{aadx^2}$$

addendo prodibit

$$p = Ebc^2\left(\frac{ddy}{aadx^2} + \frac{d^4y}{dx^4}\right)$$

qui valor per duplicem differentiationem ortus idem esse debet, quaecunque constantes in integrationibus formularum $\int pdx\,\text{cos.}\frac{x}{a}$ et $\int pdx\,\text{sin.}\frac{x}{a}$ fuerint adiectae. Neque ergo hinc vllum dubium nasci potest, quod supra his integrationes non satis sollicite determinauerimus;

mus; vtcunque enim determinentur, ſemper idem valor pro littera p obtinetur.

10. Cum igitur nunc, vbi ad variationem temporis fluxu oriundam ſimul ſpectamus, quantitas y non tantum, vt functio ipſius x, ſed etiam temporis t, tractari debeat, loco formularum $\frac{ddy}{dx^2}$ et $\frac{d^4y}{dx^4}$, vbi temporis nulla eſt ratio habita, more recepto ſcribere debemus $(\frac{ddy}{dx^2})$ et $(\frac{d^4y}{dx^4})$, et quoniam ſupra inuenimus $(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{2gp}{\delta bc}$, aequatio motum annuli ad quoduis tempus determinans erit

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{2gEcc}{\delta}\left(\frac{1}{aa}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)\right).$$

Quare ſi breuitatis gratia ponamus $\frac{2gE}{\delta} = ff$, quae eſt quantitas conſtans pro omnibus annulis ex eadem materia confectis, vtcunque ratione radii a et latitudinis e inter ſe diſcrepent, (craſſities enim b penitus ex calculo exceſſit,) aequatio noſtra reſoluenda erit

$$0 = \frac{1}{ffcc}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + \frac{1}{aa}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$$

cuius reſolutio per ſe non determinata ex ſtatu initiali, quo tam figura annulo impreſſa, quam celeritates ſingulorum elementorum dantur, determinari debet. Tum vero etiam ad hoc reſpici oportet, quod ſi pro x ſcribatur $2\pi a + x$, vel in genere $2i\pi a + x$, valor ipſius y idem reſultet, quandoquidem hi arcus omnes in eodem puncto x terminantur. Denique etiam recordandum eſt, nullas alias reſolutiones locum habere poſſe, niſi quae pro y valores quam minimos, nunquam vltra certos limites augendos, exhibeant, ad quas conditiones in reſolutione probe attendi oportet.

11. Ex aequatione inuenta temporis ratio statim tollitur ponendo $y = v\,\text{fin.}(nt + \nu)$, vt v sit functio solius x; tum enim ob $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -nnv\,\text{fin.}(nt + \nu)$ totam aequationem per $\text{fin.}(nt + \nu)$ diuidendo habebimus:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{ddv}{aadx^2} - \frac{nnv}{ffcc} = 0$$

cuius integrale completum huiusmodi formae erit:

$$v = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + C\,\text{fin.}\,\beta x + D\,\text{cof.}\,\beta x$$

ita vt sit:

$$\alpha^4 + \frac{\alpha\alpha}{aa} = \frac{nn}{ffcc} \text{ et } \beta^4 - \frac{\beta\beta}{aa} = \frac{nn}{ffcc}$$

hincque $\alpha^4 - \beta^4 + \frac{\alpha\alpha + \beta\beta}{aa} = 0$, et $\alpha\alpha - \beta\beta + \frac{1}{aa} = 0$. Cum ergo sit $\beta\beta = \frac{1}{2aa} + \sqrt{\left(\frac{1}{4a^4} + \frac{nn}{ffcc}\right)}$, erit $\alpha\alpha = \frac{1}{2aa}$ $+ \sqrt{\left(\frac{1}{4a^4} + \frac{nn}{ffcc}\right)}$. Verum quia valor ipsius v idem esse debet, etiamsi pro x scribatur $2i\pi a + x$, manifestum est, casu nostro fore $A = 0$ et $B = 0$; tum vero vt $\text{fin.}(2i\pi\beta a + \beta x) = \text{fin.}\,\beta x$, necesse est sit βa numerus integer. Statuatur ergo $\beta a = i$, seu $\beta = \frac{i}{a}$, hincque numerus n ita definitur, vt sit

$$\frac{nn}{ffcc} = \frac{i^4 - ii}{a^4} \text{ seu } n = \frac{ifc}{aa}\sqrt{(ii - 1)}.$$

Quocirca cum sit $v = C\,\text{fin.}\,\frac{ix}{a} + D\,\text{cof.}\,\frac{ix}{a}$, habebimus

$$y = \left(C\,\text{fin.}\,\frac{ix}{a} + C\,\text{cof.}\,\frac{ix}{a}\right)\text{fin.}\left(\frac{ifct}{aa}\sqrt{(ii - 1)} + \nu\right)$$

quae aequatio facilius ita exhibetur:

$$y = A\,\text{fin.}\left(\frac{ix}{a} + \alpha\right)\text{fin.}\left(\frac{ifct}{aa}\sqrt{(ii - 1)} + \nu\right).$$

12. Quoniam A, α, ν sunt quantitates prorsus arbitrariae, et pro i numerum integrum quemcunque accipere licet, infinitas huiusmodi formulas exhibere poterimus,

rimus, quae singulae pro y positae quaestioni satisfaciant. Quilibet autem, posito breuitatis gratia $\frac{ifc}{aa}\sqrt{(ii-1)}$, generalius ita exprimi potest, vt sit

$$y = Aa\sin.\frac{ix}{a}\sin.nt + Ba\sin.\frac{ix}{a}\cos.nt + Ca\cos.\frac{ix}{a}\sin.nt + Da\cos.\frac{ix}{a}\sin.nt$$

vbi iam coefficientes A, B, C, D sunt numeri arbitrarii iique minimi, quandoquidem problema ita resoluimus, vt tremores sint quam minimi. Pro i autem quoscunque numeros integros accipere licet, vnde innumerabiles huiusmodi formulae exhiberi possunt, quae non solum singulae satisfaciunt, sed etiam binae pluresue iunctim sumtae. Verum hic obseruo, casum $i=1$, quo fit $n=0$, nullum motum indicare; aequatio enim $y = Ba\sin.\frac{x}{a} + Da\cos.\frac{x}{a}$ eiusmodi annuli mutationem refert, qua figuram circularem retinet, ac tantum de suo loco aliquantillum remouetur, quod ad motum vibratorium nihil confert, vnde huic casui, ne in compositione quidem, locus relinquitur.

13. Casus ergo simplicissimus motum vibratorium annuli exhibens oritur ponendo $i=2$, vnde fit $n=\frac{2fc}{aa}\sqrt{3}$, atque

$$y = a(A\sin.\frac{2x}{a} + C\cos.\frac{2x}{a})\sin.\frac{2fc}{aa}t\sqrt{3} + a(B\sin.\frac{2x}{a} + D\cos.\frac{2x}{a})\cos\frac{2fc}{aa}t\sqrt{3}$$

vnde simul celeritas cuiusque puncti y pro quouis tempore t cognoscitur, quae est

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2fc\sqrt{3}}{a}(A\sin.\frac{2x}{a} + C\cos.\frac{2x}{a})\cos.\frac{2fc}{aa}t\sqrt{3} - \frac{2fc\sqrt{3}}{a}(B\sin\frac{2x}{a} + D\cos.\frac{2x}{a})\sin.\frac{2fc}{aa}t\sqrt{3}$$

qui

qui motus ex eo statu initiali nascitur, quo erat

$$y = a\left(B \sin. \tfrac{2x}{a} + D \cos. \tfrac{2x}{a}\right)$$

et $\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2fc\sqrt{3}}{a}\left(A \sin. \tfrac{2x}{a} + C \cos. \tfrac{2x}{a}\right)$

vnde singulorum punctorum tam variatio de statu naturali, quam celeritas impressa nascitur. Tum vero vibrationes erunt regulares; elapso enim quoque tempore t vt sit $\frac{2fc}{aa} t \sqrt{3} = 2\pi$, annulus in statum pristinum reducitur. Quoniam igitur interea binas vibrationes absoluisse censetur, tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi aa}{2fc\sqrt{3}}$, singulisque minutis tot vibrationes absoluentur, quot indicat numerus $\frac{2fc\sqrt{3}}{\pi aa}$, cui ipse sonus editus censetur proportionalis. Ex quo patet, pro annulis ex eadem materia confectis sonum esse directe vt annuli latitudinem, et reciproce vt quadratum radii.

14. Hic ergo est sonus principalis, quem annulus pulsus edere potest. Secundus casus vibrationum regularium oritur sumendo $i = 3$, quo fit $n = \frac{3fc}{aa}\sqrt{8}$ et

$$y = a\left(A \sin. \tfrac{3x}{a} + C \cos. \tfrac{3x}{a}\right) \sin. \tfrac{3fc}{aa} t \sqrt{3} + a\left(B \sin. \tfrac{3x}{a} + D \cos. \tfrac{3x}{a}\right) \cos. \tfrac{3fc}{aa} t \sqrt{8}$$

et celeritas puncti y elapso tempore t

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{3fc\sqrt{8}}{a}\left(A \sin. \tfrac{3x}{a} + C \cos. \tfrac{3x}{a}\right) \cos. \tfrac{3fc}{aa} t \sqrt{8} - \frac{3fc\sqrt{8}}{a}\left(B \sin. \tfrac{3x}{a} + D \cos. \tfrac{3x}{a}\right) \sin. \tfrac{3fc}{aa} t \sqrt{8}.$$

Hic ergo casus oritur, si annulus ita percutiatur, vt initio posito $t = 0$ fuerit

$$y = a\left(B \sin. \tfrac{3x}{a} + D \cos. \tfrac{3x}{a}\right) \text{ et}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{3fc\sqrt{8}}{a}\left(A \sin. \tfrac{3x}{a} + C \cos. \tfrac{3x}{a}\right)$$

quod

quod adhuc ob A, B, C, D arbitrarias infinitis modis fieri poteſt. Tum autem annulo ita percuſſo, is, elapſo tempore $t = \frac{2\pi aa}{3fc\sqrt{8}}$, iterum in ſtatum priſtinum reducitur, ſicque ſingularum vibrationum tempus erit $= \frac{\pi aa}{3fc\sqrt{8}}$, ſeu vno minuto ſecundo tot edentur vibrationes, quot hic numerus $\frac{3fc\sqrt{8}}{\pi aa}$ continet vnitates, cui numero ergo hic ſecundus ſonus ab annulo editus erit proportionalis. Hic igitur ſonus ad principalem rationem tenet vt $\frac{3\sqrt{8}}{2\sqrt{3}}$ ad 1, ſeu vt $\sqrt{6}:1$. Vnde ſi ſonus principalis conueniat cum ſono muſico C, ſecundus ſonus aliquanto grauior eſt ſono *e*, ita vt interuallum parumper deficiat a *decima maiore*.

15. Tertius caſus vibrationum regularium, ideoque tertius ſonus ſimplex, quem annulus pulſus edere valet, oritur ponendo $i = 4$, et $n = \frac{4fc}{aa}\sqrt{15}$, vnde fit:

$$y = a\left(A\,\text{ſin.}\,\frac{4x}{a} + C\,\text{coſ.}\,\frac{4x}{a}\right)\text{ſin.}\,\frac{4fc}{aa}t\sqrt{15} + a\left(B\,\text{ſin.}\,\frac{4x}{a}\right.$$
$$\left. + D\,\text{coſ.}\,\frac{4x}{a}\right)\text{coſ.}\,\frac{4fc}{aa}t\sqrt{15}$$

et celeritas:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{4fc\sqrt{15}}{a}\left(A\,\text{ſin.}\,\frac{4x}{a} + C\,\text{coſ.}\,\frac{4x}{a}\right)\text{coſ.}\,\frac{4fc}{aa}t\sqrt{15} - \frac{4fc\sqrt{15}}{a}\left(B\,\text{ſin.}\,\frac{4x}{a}\right.$$
$$\left. + D\,\text{coſ.}\,\frac{4x}{a}\right)\text{ſin.}\,\frac{4fc}{aa}t\sqrt{15}$$

qui motus oritur, ſi annulus ita percutiatur, vt motus initio fuerit:

$$y = a\left(B\,\text{ſin.}\,\frac{4x}{a} + D\,\text{coſ.}\,\frac{4x}{a}\right) \text{ et}$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{4fc\sqrt{15}}{a}\left(A\,\text{ſin.}\,\frac{4x}{a} + C\,\text{coſ.}\,\frac{4x}{a}\right)$$

qui ergo caſus etiam infinitis modis produci poteſt, tum autem annulus ad ſtatum priſtinum redit elapſo tempore

pore $t = \frac{2\pi aa}{4fc\sqrt{15}}$, ita vt ſingularum vibrationum tempus futurum ſit $= \frac{\pi aa}{4fc\sqrt{15}}$ min. ſec. Singulis ergo minutis ſecundis tot edentur vibrationes, quot vnitates continet iſte numerus $\frac{4fc\sqrt{15}}{\pi aa}$, cui ſimul ipſe ſonus eſt proportionalis. Quare ſi ſonus principalis, quem ſigno muſico C reſpondere ponamus, vnitate exprimatur, hic tertius ſonus erit $= \frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{5}$, ſeu tantillo minor quam $\frac{9}{2}$; paulisper igitur grauior erit ſono $\bar{d}$, et interuallum valde parum deficit ab interuallo ex duplici octaua et tono maiore compoſito.

16. Quartus caſus vibrationum regularium, quartusque ſonus ſimplex, quem annulus edere valet, oritur ponendo $i = 5$ et $n = \frac{5fc}{aa}\sqrt{24}$, vnde fit

$$y = a\left(A \sin.\frac{5x}{a} + C \cos.\frac{5x}{a}\right)\sin.\frac{5fc}{aa}t\sqrt{24} + a\left(B \sin.\frac{5x}{a} + D \cos.\frac{5x}{a}\right)\cos.\frac{5fc}{aa}t\sqrt{24}$$

et celeritas:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{5fc\sqrt{24}}{a}\left(A \sin.\frac{5x}{a} + C \cos.\frac{5x}{a}\right)\cos.\frac{5fc}{aa}t\sqrt{24} - \frac{5fc\sqrt{24}}{a}\left(B \sin.\frac{5x}{a} + D \cos.\frac{5x}{a}\right)\sin.\frac{5fc}{aa}t\sqrt{24}$$

qui motus oritur, ſi annulus ita percutiatur, vt poſito $t = 0$ fuerit

$$y = a\left(B \sin.\frac{5x}{a} + D \cos.\frac{5x}{a}\right) \text{ et}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{5fc\sqrt{24}}{a}\left(A \sin.\frac{5x}{a} + C \cos.\frac{5x}{a}\right).$$

Ad ſitum ergo priſtinum annulus reducitur elapſo tempore $t = \frac{2\pi aa}{5fc\sqrt{24}}$, vnde ſingularum vibrationum tempus erit $= \frac{\pi aa}{5fc\sqrt{24}}$ min. ſec. ita vt ſingulis minutis ſecundis tot edantur vibrationes, quot vnitates conti-

net

net hic numerus $\frac{5fc\sqrt{24}}{\pi aa}$, cui ipſe ſonus eſt proportionalis. Quare ſi ſonus principalis conueniat cum ſono C, qui vnitate exponatur, hic ſonus quartus erit $=\frac{5\sqrt{24}}{2\sqrt{3}}=5\sqrt{2}$, ideoque tantillum ſuperat 7. Cum nunc 6 ſit ſonus g', noſter ſonus paulisper acutior eſt quam a', et interuallum a principali parumper excedit interuallum ex duplici octaua et ſexta maiore compoſitum.

17. Soni ergo ſimplices, quos in eodem annulo excitare licet, ſiquidem principalis vnitate exponatur, ſequenti modo ſe habebunt:

I.	. . 1	$= 1 =$	$1,00000$	. . C
II.	. . $\frac{3\sqrt{8}}{2\sqrt{3}}$	$=\sqrt{6}=$	$2,44949$	. . $e-$
III.	. . $\frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{3}}$	$=\sqrt{20}=$	$4,47214$	. . $\bar{d}-$
IV.	. . $\frac{5\sqrt{24}}{2\sqrt{3}}$	$=\sqrt{50}=$	$7,07107$	. . $\bar{b}-$
V.	. . $\frac{6\sqrt{35}}{2\sqrt{3}}$	$=\sqrt{105}=$	$10,24695$	. . $\bar{\bar{e}}+$
VI.	. . $\frac{7\sqrt{48}}{2\sqrt{3}}$	$=\sqrt{196}=$	$14,00000$	. . $\bar{\bar{b}}-$
VII.	. . $\frac{8\sqrt{63}}{2\sqrt{3}}$	$=\sqrt{336}=$	$18,33024$	. . $\bar{\bar{\bar{d}}}+$

Hi ergo ſoni continuo fiunt acutiores; interuallis autem irrationalibus diſtinguuntur, ſecus ac fit in cordis, ita vt hi ſoni maxime ſint diſſoni, plurimumque ab harmonia abhorreant. Atque ſingulos hos ſonos idem annulus, ſi certo modo percutiatur, ſingulatim edere poteſt, ſin autem percuſſio non ita fuerit comparata, vti plerumque vſu venire debet, annulus non ſimplicem edet ſonum, ſed mixtum ex binis pluribusue ſimplicibus, ideoque inter ſe diſſonis; ex quo principium Cel. *de Rameau* funditus euertitur.

18. Operae pretium erit inuestigare, quomodo impulsionem initialem comparatam esse oporteat, vt quisque sonorum simplicium purus edatur; id quod clarissime inde perspicietur, si definiamus, in quot punctis figura annuli distorta naturalem intersecet, seu vbi fiat $y = 0$; in totidem enim punctis quoque, etsi non iisdem, celeritas impressa $(\frac{dy}{dt})$ euanescere debet. Cum enim pro statu initiali sit in genere

$$\frac{y}{a} = B \sin.\frac{ix}{a} + D \cos.\frac{ix}{a} \text{ et } (\frac{dy}{dt}) = \alpha(A \sin.\frac{ix}{a} + C \cos.\frac{ix}{a})$$

totidem locis tam y, quam $(\frac{dy}{dt})$, euanescit, nisi forte vel y vbique vel etiam celeritas fuerit nulla. Puncta ergo, quibus fit siue $y = 0$, siue $(\frac{dy}{dt}) = 0$ huiusmodi aequatione tang. $\frac{ix}{a} =$ Const. determinantur, vnde si Const. $=$ tang. θ, valores anguli $\frac{ix}{a}$ sunt θ, $\pi + \theta$, $2\pi + \theta$, $3\pi + \theta$, $4\pi + \theta$ etc vnde anguli $AOx = \frac{x}{a}$ valores sunt:

$$\frac{\theta}{i};\ \frac{\pi+\theta}{i};\ \frac{2\pi+\theta}{i};\ \frac{3\pi+\theta}{i} \ldots \text{ vsque ad } \frac{(2i-1)\pi+\theta}{i}$$

quorum numerus est $2i$. Pro quouis ergo numero i tam numerus intersectionum, quam locorum, vbi celeritas est nulla, est duplo maior $= 2i$.

19. Vt igitur annulus sonum principalem purum edat, impulsio ita debet esse comparata, vt figura impressa figuram naturalem in quatuor punctis aequidistantibus intersecet, et vt celeritas in similibus quatuor punctis sit nulla. Sin autem figura impressa figuram naturalem vel in sex, vel octo, vel decem etc. punctis intersecet, in totidemque locis celeritas fuerit nulla, annulus

annulus edet ſonum, vel ſecundum, vel tertium, vel quartum etc. Ex quo intelligitur, rariſſime id obtineri poſſe, vt vllus horum ſonorum purus edatur, ac ſemper fere eueniet, vt quomodocunque annulus percutiatur, plures ſoni ſimul exaudiantur, qui tantum abeſt, vt perfectam harmoniam referant, vt potius interualla maxime diſſona conſtituant. Inter hos autem diuerſos ſonos modo alii aliique eminebunt, prout impulſio ad rationem cuiuspiam ſoni ſimplicis propius acceſſerit. In genere autem vibrationes frequentiores, quibus ſoni acutiores reſpondent, a reſiſtentia citius extinguentur, praecipue ſi per ſe fuerint debiliores, at ſonus principalis grauiſſimus diutiſſime durabit, reliquisque plerumque multum antecellet. Vix autem euenire poterit, vt idem annulus ſaepius impulſus eandem plane ſonorum mixturam exhibeat.

20. Hinc cuiusmodi ſonos campanae reddant, quodammodo colligere licet, quandoquidem mente campanas in huiusmodi annulos reſolutas concipimus. Ac primo quidem intelligitur, ſi omnes iſti annuli fuerint inter ſe aequales, vt forma prodeat cruſtae cylindricae, eandem ſonorum rationem eſſe futuram, quaecunque fuerit campanae altitudo, propterea quod ſinguli annuli ad pares vibrationes ſunt inſtructi. Verum idem quoque euenire debet, licet annuli ratione amplitudinis differant, dummodo latitudo ſingulorum quadrato radii ipſorum fuerit proportionalis. Scilicet ſi poſito cuiusque annuli radio $= r$, eius latitudo fuerit $s = \frac{rr}{p}$, ſinguli annuli ad pares ſonos edendos erunt accommodati,

 ſicque

ſicque tota campana eosdem ſonos, ſiue ſimplices, ſiue mixtos, reddere poterit, qui formula $\frac{ifs\sqrt{(ii-1)}}{\pi rr}$ indicantur, ex quo ſonus principalis erit $= \frac{2fs\sqrt{3}}{\pi rr}$. Quodſi plures campanae huiusmodi inter ſe ſimiles habeantur, erunt ſoni principales ab iis editi reciproce, vt latera homologa, ſeu diametri amplitudinum, vel, quod eodem redit, in ratione reciproca ſubtriplicata ponderum. Quare, vt duae campanae ſonos edant rationem $m : n$ tenentes, earum diametri rationem $n : m$, pondera autem rationem $n^3 : m^3$, tenere debent, ſiquidem inter ſe fuerint ſimiles, quam regulam etiam experientia comprobat. Verum hinc probe notetur, vnamquamque campanam praeter ſonum principalem plerumque plures alios ſonos ſimul edere, ſecundum interualla ſupra indicata, qui a vera harmonia maxime abhorreant.

21. At Theoria campanarum non mediocriter perfici videtur, ſi campanae non per ſectiones horizontales in annulos planos, ſed potius per ſectiones ad earum ſuperficiem normales in annulos conicos ſecari intelligantur, quoniam priori modo neque ſupremus campanae fundus, neque infimus limbus repraeſentari poteſt. Sit igitur AC axis campanae, circa quem figura $Aa\ Ss$ B rotata corpus campanae gignat Ponatur pro hac figura $AQ = p$: $QS = q$, normalis ad curuam $SR = r$, et craſſities in S normaliter capta $Ss = s$; erit $QR = \frac{qdq}{dp}$ et $rr = \frac{qq(dp^2 + dq^2)}{dp^2}$. Hinc fit elementum curuae $S\Sigma = \frac{rdp}{q}$, quod in $Ss = s$, et inſuper circuli radio $QS = q$ deſcripti peripheriam $2\pi q$ ductum

Tab. IV. Fig. 5

ductum dat soliditatem elementi campanae $= 2\pi r s dp$, vnde tota campanae soliditas erit $= 2\pi \int r s dp$, si scilicet hoc integrale per totam figuram extendatur. Caeterum hic aequatio inter coordinatas p et q, neque ad curuam interiorem ASB, neque exteriorem asB, sed ad lineam quandam mediam pertinere est censenda.

22. Nunc ergo eiusmodi annulum contemplemur, qui ex rotatione elementi $Ss\Sigma\sigma$ circa axem AC generetur, et cuius figura crustam coni truncati referet. Hunc annulum cono vertice R et latere RS circumplicatum concipiamus, cuius autem tantum quasi medium circulum SEXx in figura exprimimus, in qua propterea erit $SQ = Qx = q$, et $RS = Rx = r$; atque s denotat hic latitudinem annuli, quae supra fuerat c, dum radius, qui supra erat a, hic est q. Iam huius annuli vibrationes ita fieri concipiamus, vt is perpetuo in superficie huius coni maneat; peruenerit ergo annulus ex statu naturali EXx in statum eYy, pro quo ponamus arcus $EX = X$ et $Ex = x$, spatiola vero $XY = Y$ et $xy = y$, quae sint minima. Quatenus ergo curuatura annuli in y maior minorue est, quam in statu naturali, eatenus elasticitas in y virium momentum inuoluit, quod, vt supra, aestimari debet $= Ebs^3 \frac{ddy}{dx^2}$, vbi b crassitiem annuli denotat, quae autem deinceps ex calculo euanescit. Manifestum hoc fit, si superficiem conicam in planum explicemus; tum enim quaestio ad superiorem casum sponte reducitur. Momentum ergo, quod elasticitas exerit ad curuaturam minuendam, est $= -Ebs^3 \frac{ddy}{dx^2}$, quod non modo ad punctum

Tab. IV. Fig. 6.

ctum y, sed axem ibi ad superficiem coni normalem yz est referendum.

23. Ratiocinium vt supra instituturi, sit vis elementum annuli in y secundum yx vrgens $= p\,dx$, eritque vt ibi: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{-2gq}{\delta bs}$; spectemus autem punctum y vt fixum. In Y autem vis respondens PdX contrarie applicata concipiatur, quae ergo secundum RX trahens, resoluatur secundum directiones RT et RV, quarum illa pro axe yz, vtpote in eodem plano nullum momentum, haec vero momentum RV, Ry = vis RV. r. At ex X ad Sx demittatur perpendicularis XT, cui RV est parallela et aequalis, et ob X$x = x -$ X, est XT $= q\,\text{fin.}\left(\frac{x}{q} - \frac{X}{q}\right)$; hincque vis RX (P$d$X) : vim RV = RX($r$) : $q\,\text{fin.}\left(\frac{x}{q} - \frac{X}{q}\right)$, vnde fit

vis RV $= \frac{Pq\,dX}{r}\left(\text{fin.}\frac{x}{q}\,\text{cof.}\frac{X}{q} - \text{cof.}\frac{x}{q}\,\text{fin.}\frac{X}{q}\right)$ et summa omnium momentorum:

$$q\,\text{fin.}\frac{x}{q}\int P\,dX\,\text{cof.}\frac{X}{q} - q\,\text{cof.}\frac{x}{q}\int P\,dX\,\text{fin.}\frac{X}{q}$$

quod ad y vsque extensum praebet

$$q\,\text{fin.}\frac{x}{q}\int p\,dx\,\text{cof.}\frac{x}{q} - q\,\text{cof.}\frac{x}{q}\int p\,dx\,\text{fin.}\frac{x}{q} = Ebs^2.\frac{ddy}{dx^2}$$

hincque vt supra colligitur

$$p = Ebs^2\left(\frac{ddy}{qq\,dx^2}\right) + \frac{d^4y}{dx^4})$$

ac posito $\frac{2gE}{\delta} = ff$ erit pro motu annuli

$$o = \frac{1}{ffss}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + \frac{1}{qq}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right).$$

Tab. IV. fig. 5. 24. Haec est eadem plane aequatio, quae prodiisset, si campanam per sectiones horizontales in annulos secuissemus. Verum s veram crassitiem campanae in in quouis loco S denotat, vbi imprimis notandum est, normalem $SR = r$ ex calculo excessisse. Caeterum videntur campanae pulsae hanc potius legem vibrationum sequi, quam eam, quae sectionibus horizontalibus conuenit. Quare, vt omnes annuli ad pares sonos edendos disponantur, necesse est, in singulis locis S crassitiem $Ss = s$ quadrato radii $QS = q$ esse proportionalem. Hinc campanae inferne, vbi amplitudo est maxima, maximam crassitiem tribui conueniet, minimam superne circa Aa, vbi clauditur. Hac lege neglecta, vibrationes singulorum a reliquis turbabuntur, indeque sonus, vel minus fortis, vel raucus, edetur. Interim tamen nondum satis constat, num haec lex ad constructionem campanarum absolute sit necessaria, quandoquidem longe alia ratione tremorem concipere potest, atque hic supposuimus. Desideratur scilicet adhuc methodus, motum tremulum corporum formae cuiuscunque definiendi; methodi enim adhuc vsitatae tantum ad certa corporum genera sunt restricta, cuiusmodi sunt cordae, vel laminae tenuissimae, quare his, quae in ista dissertatione exposui, plus tribui non oportet, quam per hypotheses expresse stabilitas licet.

OBSERVATIONES QVAEDAM AD OPTICAM PERTINENTES.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Academiae regiae Parisinae Commentarii Anni 1743 continent elegantissimam quandam, ac obseruationibus quam maxime notabilibus opticis repletam, Celeberrimi *Buffoni* dissertationem, de coloribus accidentalibus inscriptam. Quanquam autem in scriptionis huius titulo non nisi colorum accidentalium mentio iniiciatur, tractat ipsa nihilominus praeterea adhuc duo obiecta alia. Suam enim Vir Celeberrimus sententiam de eo oculorum morbo, vbi maculae nigrae ante oculum circumuolitare videntur, declarat, atque prorsus nouam, de coloribus, quibus vmbrae a Sole oriente aut occidente proiectae tinguntur, obseruationem annectit. Obtulerunt se mihi circa omnia haec tria obiecta obseruationes, vti videtur, Celeb. *Buffono* incognitae, dignae tamen, quae obliuioni non tradantur, quarumque proinde breuem descriptionem Illustrissimae Academiae non ingratam futuram, coniicio.

OBSER-

OBSERVATIO I.

De coloribus accidentalibus.

Dum Sol vel horizonti propinquus, vel raris obtectus eſt nubibus, ita vt ſplendor ipſius nimius aliquantum ſit hebetatus, neque oculum laedere, ſat validam tamen in ipſum impreſſionem producere valeat, attente, oculisque non commotis, per quartam circiter minuti primi partem, adſpiciatur. Si tum oculi a Sole auertantur, impreſſio, indeque orta ſenſatio, non ſtatim euaneſcit, ſed per tria vel quatuor minuta prima, immo adhuc longius, perdurat. Aeque autem perſtat haec ſenſatio, ſiue oculi claudantur, ſiue aperiantur, aſt ſingulares ſunt, quae has ſenſationes comitantur, circumſtantiae, quas repetitis tentaminibus reduci poſſe ad leges ſequentes reperi. Namque

1) Si ſtatim, dum oculi a Sole auertuntur, claudantur, videtur macula irregulariter circularis, cuius area interna *abcd* colorem habet flauum, quodammodo ad viridem vergentem, qualis eſſe ſolet ſulphuris communis. Area autem haec flaua cingitur margine, ſiue annulo *efgh*, qui rubro colore tinctus videtur. Tab. V. Fig. 1.

2) Aperiantur tum oculi, atque coniiciantur in parietem aut tabulam dealbatam, atque fundo huic albo inhaerere videbitur macula, cum iſta, quae oculis clauſis conſpicitur, quoad magnitudinem et figuram omnino coincidens, longe autem alia ratione colorata. Namque

3) area, quae oculis clausis videbatur flaua, apertis apparet rubea, seu potius colore brunneo in rubrum vergente tincta. Margo autem, qui ruber videbatur quamdiu oculi clausi erant, in fundo albo, apertis oculis coeruleus videtur.

4) Si tum oculi rursus claudantur, redit apparentia num. 1. si aperiantur illa num. 2 et 3, ast colores non omnino iidem manent, sed continuo magis magisque immutantur. Quodsi ad has mutationes attendatur, obseruabitur, post minutum circiter primum temporis

5) oculis clausis aream maculae videri eleganter viridem, marginemque equidem perstitisse rubrum, ast rubrum huncce colorem ita mutatum esse, vt a priori num. 1 sensibiliter iam differat.

6) Oculis apertis, in fundo albo, aream maculae magis ad rubrum vergere, marginemque laetiori, quam antea, colore coeruleo gaudere.

7) Post aliud minutum primum circiter, oculis clausis, area maculae videbitur equidem viridis adhuc, sed magis ad coeruleum vergens; margo erit ruber, ast color hic rursus ab eo num. 1 et 5 diuersus.

8) Oculis autem apertis, in fundo albo area cernetur adhuc rubra, margo coeruleus, colores autem hi cum antea obseruatis non erunt prorsus iidem.

9) Post 4 tandem aut 5 minuta, oculis clausis, rea videbitur penitus coerulea, margoque eleganter rubeus;

beus; oculis autem apertis, area rubra, margo viuide coeruleus.

10) Ita perstat sensatio haec per quoddam adhuc temporis spatium, vsquedum magis magisque debilitata prorsus tandem euanescat. Existimandum autem non est, quasi hoc interuallo colores omnino iidem permaneant, sed potius tenendum, quanquam idem conseruent genus, speciem tamen continuo mutare.

Fateor, me occasiones instituendi hoc experimentum euitasse potius, quam quaesiuisse; frequenter enim oculos tam forti exercere impressione, res videtur periculo non omnino carens. Quanquam igitur tentamina non sint saepius repetita, id tamen asserere possum, phaenomena leges antea expositas constanter fere seruare; pro omnino enim constantibus venditare ipsas non audeo, quoniam vna alteraue vice aliam quodammodo colorum successionem obseruaui, quam hic descripsi.

Variae autem ex obseruationibus istis notatu dignae deduci possunt conclusiones, quas paucis hic iungam.

Extra dubium positum est, radios Solis directos, a fundo oculi exceptos, in neruos agere, certamque ipsis imprimere mutationem, cuius anima nostra conscia est. Perspicimus autem ex obseruationibus hic descriptis, mutationem hanc neruis inductam, siue impressionem, non cessare simul cum cessante, quae ipsam produxit, lucis actione, sed perdurare potius per sat longum adhuc tempus, animamque eodem modo afficere, quasi vere adesset obiectum extra oculum, a quo reflexi lucis radii actionem in neruos exercerent. Quodsi hoc, prouti quam maxime euidens, supponamus, concludere debemus ex obseruationibus antea expositis

1) Impressionem a radiis lucis vehementioribus excitatam, postquam actio ipsa cessauit, transire in impressionem radiorum flauorum, hanc in eam radiorum viridium, hancque tandem in eam, quam radii coerulei producere alias solent, id est, neruos successiue, cessante radiorum alborum actione, in eum deuenire statum, quem flaui, virides, coeruleique radii imprimere ipsis solent.

2) Impressionem a colore albo parietis aut tabulae dealbatae excitatam, compositam cum impressione, quae debetur colori flauo, viridi atque coeruleo, generare eandem impressionem, quam brunneus minus magisque in rubrum vergens color producere solet.

3) Impressionem ab imagine Solis in oculi fundo factam, se circumcirca partibus tunicae retinae proxime adiacentibus, ad quas imago ipsa non pertingit, communicare, eamque ipsis imprimere mutationem, quae alias radiis rubrum colorem producentibus debetur.

4) Impressionem hanc cum ea, quam generat parietis aut tabulae color albus, compositam, producere impressionem coeruleo colori debitam.

Admodum notabile hic inuenio, quod in coloribus his accidentalibus similiter prorsus, vt in realibus fieri

fieri solet, color flauus in coeruleum transeat per viridem. Notissimum enim est, in posterioris generis coloribus, flauum ab admixto successiue coeruleo maiori maiorique copiá vergere primum in viridem, fieri mox omnino viridem, tum magis magisque continuo vergere in coeruleum, inque hunc tandem penitus transire, si successiue maior maiorque coerulei copia flauo admisceatur.

Obseruabunt, qui experimentum hoc repetere voluerint, adhuc rem aliam, quam non omnino reticendam iudico. Si nempe quis oculis apertis maculam in fundum album proiiciat, obseruabit, subito interdum maculam euanescere, alternisque vicibus mox redire, mox rursus euanescere. Valde dubius sub initium haesi de paradoxi huius phaenomeni causa, animaduerti autem tandem, euanescere semper tunc maculam, cum conatum exsererem, admodum exacte ipsam contemplandi; redire, si oculos quasi non attendens in planum coniicerem. Difficultatem hoc aliqualem sub initium in instituendo experimento creabat. Eo enim ipso momento, quo anima sibi proponit, ad maculam attendere, oculus se statim, insciis et inuitis nobis, ita disponit, vt visio tabulae, in quam macula proiicitur, fiat distincta, eodemque momento macula euanescit. Aliquale igitur praerequiritur ad rite instituendum experimentum exercitium; assuefacere enim se debet obseruator, vt anima attendat quidem maculae, oculi vero inhibeantur, ne se ita disponant, vt tabulae visio fiat distincta. Concludendum autem hinc est, dum oculus se ita disponit, vt obiectum aliquantum

dissitum

diſſitum. diſtincte conſpiciat, neruos redire eum in ſtatum, quem habent, ſi non afficiuntur, priſtinum autem mox recuperare ſtatum, ſi oculus ſe denuo aliter diſponit. Aſt vereor, ne in errores incidam, ſi concluſiones deducere pergam, ſpectantes materiam, quae tenebris tamdiu inuoluta erit, quamdiu, in quonam praeciſe impreſſio lucis in neruos viſioni ſubſeruientes conſiſtat, ignoramus.

OBSERVATIO II.

De maculis nigris oculo obuolitantibus.

Notiſſimus eſt morbus, quo ante oculum, obiectum quoddam album aut lucidum contemplantem, circumuolitare videntur maculae nigrae, eandem fere producentes apparentiam, quaſi muſcae aliaue inſecta nigricantia inter obiectum ac oculum circumuolitarent. Quaeſiuerunt infirmitatis oculorum huius cauſam, antequam vera viſionis oeconomia diſtincte ſatis cognita erat, medicorum plerique, in particulis quibusdam opacis humori aqueo admixtis et innatantibus. Alii opacitatem quarundam lentis cryſtallinae partium accuſarunt, tandem vero ea praeualuit opinio, quae ex partibus quibusdam tunicae retinae ſenſatione orbatis, ſiue paralyſi affectis, morbum hunc deducit, in qua quoque opinione Celeberrimus, quem ſupra allegaui, eſt *Buffonus*.

Quan-

Quanquam autem vltima haec ſententia phaenomenis, veriſque dioptrices legibus, magis conſentiat, quam priores, neque aſſerere auſim, omnino morbum huncce ortum hinc trahere non poſſe, propria tamen experientia conuictus exiſto, dari minimum interdum caſus, vbi morbus eiusmodi ſedem ſuam in tunica retina omnino non habet.

Laboro nempe ipſe hoc morbo ex longo iam tempore, ac forſitan a primis infantiae annis; ortum enim ipſius ignoro, neque vnquam has maculas me obſeruaſſe memini, niſi ante 10 circiter annos, cum obiectum quoddam eleuatum, coelo exiſtente admodum ſereno, contemplans, primum eas obſeruarem. Ex eo tempore penitus eaedem perſtiterunt, vsque ad tempus, quo haec ſcribo, vbi adhuc numero, magnitudine et loco praeciſe tales apparent, vti apparebant, dum primum ipſas cernerem.

Opportunitatem itaque nactus, ope experientiae in veram morbi naturam inquirendi, exactius, quae ipſum comitantur, circumſtantias annotaui. Animaduerti autem ſtatim, duplicis eſſe, quae mihi apparent, generis, maculas; namque

1) ſi obiectum album, aut coelum ſerenum, contemplor, video figuras, quae referunt fila nodoſa, varia ratione ſibi implexa, ac transparentia, quaſi cernerem vaſa lymphatica, aliquoties ſibi implexa, lymphaque admodum transparente turgida.

2) Obſeruo maculas quasdam prioribus adhaerentes, rotundas atque opacas, non penitus tamen, ſed

 inſtar

inſtar fumi aut nebulae rarioris, quodammodo transparentes.

Prioris generis macularum me vnquam reperiſſe apud alios mentionem iniectam, non recordor.

In poſterioris generis maculis peculiare obſeruaui phaenomenon, quod, qualis ſit macularum iſtarum indoles, diſtincte monſtrare videtur. Si nempe linea
Tab. V. Fig. 2. FG ſeparet corpus quoddam opacum HFGI, a transparente FGKL, quod a lumine tranſeunte viuide illuſtratur, ac oculus ita diſponatur, vt macula quaedam incidat dimidia ſui parte ADC in opacum, altera ABC in transparens corpus, pars ABC nebula quaſi obtecta apparet, pars vero ADC, quae opaca videri deberet, etiam ſenſibiliter illuminata apparet, ita vt ſpatium opacum videatur non ſeparari a transparente per lineam rectam FG, ſed quaſi terminatum eſſet per lineam FADCG, ex rectis duabus et ſemicirculo compoſitam.

Vix ſubſiſtere poſſe videtur hoc phaenomenon, cum opinione ea, quae morbum hunc pro paralytico habet affectu; ſi enim talis foret, ſpatium ADC nullatenus illuminatum apparere poſſet, ſed potius apparentia eiusmodi eſſe deberet, quaſi corpus opacum terminaretur linea FABCG, non vero, vti ſemper euenit, linea FADCG. Dioptricis itaque legibus conformiter concludendum eſt, adeſſe in oculo meo obſtaculum quoddam, poſt pupillae aperturam prope tunicam retinam ſitum, quod radios aliquos a tranſitu impedit, caeteros irregulariter diſpergit. Hoc enim ſuppoſito eius

eius quod descripsi phaenomeni, sufficiens explicatio dari poterit.

Locum autem obstaculi huius prope tunicam retinam statuere eapropter debemus, quoniam, si vel ante pupillam, vel proxime post eam, in humore crystallino, aut alibi, haereret, dioptricis legibus conformiter, claritati quidem imaginis in oculi fundo depictae praeiudicium afferre, ast ipsum sui picturam in tunicam retinam proiicere non posset. Similiter nempe, vt in camera obscura, in qua corpus opacum, lenti obiectiuae applicatum, aut parum ab ipsa distans, quosdam, ad quemuis penicillorum radiosorum pertinentes, radios intercipiens, imaginem pariete exceptam, debilitat quidem, ast ipsum non depingitur.

Cum itaque oculus vniuersus prope tunicam retinam humore sic dicto vitreo repletus sit, certi iam esse possumus, sedem morbi non alibi, quam in corpore hoc, quaerendam esse. Cum autem humoris vitrei substantia contineat sine dubio vasa subtilissima, lympham valde diaphanam vehentia, indubium videtur, oriri maculas, de quibus hactenus disserui, a dilatatione vasculorum istorum vehementiori, qua efficitur, vt partes crassiores, opacae, ac lumen aliter ac lympha, quam in statu naturali vehunt, refringentes, ipsa intrent; breuibus, pro varice quasi vasculorum lymphaticorum habendas esse has maculas, iudico. Non mediocriter quoque confirmor in hac sententia per maculas primi generis supra descriptas, opacis adhaerentes; hae enim,

 in

in quo consistat morbus immediate, quasi oculo cernendum praebent.

Non sine difficultate, neque nisi post crebrius exercitium, eo perueni, vt obseruationem, quam supra descripsi, rite instituere possem. Cum enim adsueti simus, vt si obiectum aliquod attentius contemplari volumus, etiam inscio et inuito animo, oculorum axes praecise eo dirigamus, idem quoque mihi accidebat. Ast sitae sunt maculae in oculo meo extra oculi axin. Quodsi itaque oculum eo conuertebam, macula statim fugiens locum obseruationi commodum, limitem nempe, qui corpus opacum a transparente separat, relinquebat. Difficillimam itaque eousque expertus sum obseruationem, vsquedum me non paruo labore ad maculam quidem attendere, ast oculi axin eo non dirigere, assuefeceram.

OBSERVATIO III.

De colore vmbrarum.

Quanquam mihi iam diu cognitae fuerint Celeberrimi *Buffoni* obseruationes, vmbras, quas Sole, vel oriente, vel occidente, proiiciunt corpora, fere semper esse coeruleas, interdum quoque virides, non tamen nisi fortuito, in simile phaenomenon aliud incidi. Cum enim crepusculi tempore accensam mecum haberem candelam, obseruaui, vmbram, quam stylus, quem manibus tenebam, in chartae albae folium proiiciebat, elegantissime esse coeruleam. Rei nouitas, ac cum obser-

obſeruatis *Buffonianis* ſimilitudo, excitauit me, ad experimentum ſaepius, ac diuerſis ſub circumſtantiis, coelo nempe mox ſereno, mox nubilo, repetendum, ac inveni, nunquam non vmbram ope candelae accenſae in chartam proiectam, tempore diluculi, aut matutini aut veſpertini, elegantiſſime coeruleum, prouti dixi, exhibere colorem.

Cum color coeruleus flauo mixtus producere ſoleat viridem, experiri volui, an idem hoc accidat in colore hoc, quo vmbrae tinctae videntur. Excepi itaque vmbram in tabula ex ſulphure communi fuſa, quam ad experimenta electrica adhibebam, ac omnino, vti exſpectaueram, vmbram viridem colorem admodum laetum exhibere obſeruaui.

Nunquam autem, inter plures quam triginta obſeruationes, inueni, vmbram a candela ardente proiectam viridem eſſe, ſed ipſam conſtanter, vti eſſe quoque ſolent a Sole oriente vel occidente proiectae, coeruleam deprehendi, niſi excepta fuerit a plano flauedine tincto. Suſpicio hinc mihi ſubnaſcitur, in Celeberrimi *Buffoni* obſeruatis leuem quandam ſubeſſe inaduertentiam, Solemque etiam nunquam niſi coeruleum vmbris conciliare colorem, ac quod Vir Celeberrimus aliquoties ipſas viderit virides, aliunde ortum non traxiſſe, niſi quod ſuperficies, quae vmbras exceperunt, fuerint non omnino albae, ſed flaueſcentes. (*)

(*) Aliter iam de hac re iudico, ex quo ipſe aliquoties vidi, vmbras a Sole occidente proiectas, et plano albo exceptas, fuiſſe

Quanquam de causa phaenomeni huius dubius haeream, suspicor tamen inde peti eam debere, quod

1) Sol oriens ac occidens luceat radiis rubris, idemque fiat a candelis, quibus vtimur, consuetis.

2) Quod praeter directum Solis lumen, corpora omnia illustrentur luce adhuc alia, quam lucem diurnam vocamus. Dum enim Solis radii incidunt in aerem, nubes, corporaque terrestria caetera, irregulariter hinc reflectuntur, ac quaquauersus distribuuntur, haec vero lux reflexa, in corpora incidens, valide ipsa illustrat, quanquam Solis radii directi eo non pertingant.

Tab. V. Fig. 3. Si ergo EF repraesentet tabulam, in qua vmbra excipitur, AB corpus vmbram proiiciens, cadatque vmbra, quam efficiunt aut Solis horizonti propinqui, aut candelae radii directi in CD

1) pars tabulae EC ac DF illustrabitur tam a lumine diurno, quam a lumine rubescente, quod Solis aut candelae radii suppeditant.

2) Cum corpus AB intercipiat radios rubros a Sole aut candela emanantes, pars CD non illustratur, nisi luce diurna sola. Constat itaque, eam tabulae partem, quae diurna solum luce illustratur, videri in hoc

---

fuisse satis eleganter virides. Erat, cum hoc obseruarem, aer sparsis nubibus rubicundo, aut aureo potius, colore tinctis, repletus, vnde vix dubium esse potest, flauos radios a nubis reflexos, coeruleo vmbrarum colori mixtas, virides reddidisse vmbras.

hoc experimento coeruleam. Nonne concludere hinc licet, lucem diurnam per ſe eſſe coeruleam? Crederem omnino, hoc ita probari per experimentum hocce, vt extra omne poſitum ſit dubium, modo concipere poſſem, quomodo fiat, vt non omne corpus album, a luce diurna ſola colluſtratum, videatur coeruleum, ſed hoc contingat ſolum, ſub iis, quas experimentum requirit, circumſtantiis.

SIMILI-

SIMILITVDINIS EFFECTVVM VIS MAGNETICAE ET ELECTRICAE NOVVM SPECIMEN.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Phaenomena electrica omnia ad binas classes redigi posse, in *Tentamine* meo *Theoriae Electricitatis et Magnetismi*, monui atque probaui. Alia nempe phaenomena electrica oriuntur ab actuali fluidi electrici ex vno corpore in aliud transitu, alia, ab actione fluidi huius in corpore quodam haerentis vnice pendent. Ad priorem classem spectant scintillae, phaenomenaque electrica luminosa omnia, in posteriori autem comprehenduntur attractiones et repulsiones, a corporibus electrificatis exerceri solitae.

Phaenomenorum magneticorum et electricorum comparationem instituenti mihi, magno vsui fuit haec distinctio. Eius enim ope statim discernere potui, quaenam phaenomena electrica ea sint, in quae suspicio cadere potest, quod inter magnetica, aliqua dentur, ipsis analoga. Euidens namque est, non nisi de phaenomenis, ad posteriorem classem supra indicatam pertinentibus, quaestionem institui posse, atque de his quidem, esse ipsa magneticis simillima, ita luculenter me probasse existimo, vt qui de rei veritate dubitet, ad Tentamen meum *Theoriae Electricitatis et Magnetismi*, ablegandus solummodo mihi videatur.

Etsi

Etſi itaque ex hac parte, a me nihil deſiderandum reliquerim, obtulit tamen ſe mihi nuper phaenomenon, quod dignum videtur, vt publice eius mentio iniiciatur. Eſt enim in experimento iſto mox deſcribendo, tanta vis vtriusque ſimilitudo conſpicua, vt ex euentu ſolo, quantumuis perſpicax ſpectator, omnino diſtinguere nequeat, an, quod videt, phaenomenon pro operatione electricae; an magneticae virtutis, agnoſcere debeat.

Eſt experimentum hoc ſequens. Acus tenuis, ferrea, mollis, longitudinis pollicis vnius circiter, CD, capitulo ſphaerico, C, D, vtrinque terminata, libere ſuſpendatur, ex filo ſerico, tenui, ſicco, A C, pollices 5 ad 6 longo. Ad manus ſint, filum ferreum molle F E, craſſitiei calami anſerini, longitudinis 5 ad 6 pollicum, cuius extrema parumper ſint rotundata; praetereaque virga chalybea G H fortiter magnetica, atque tubus vitreus, aut cylinder ex ſulphure, vel cera hiſpanica conſtans, *gh*. Tab. V. Fig. 4 et 5.

Iam 1.) Magnes G H, horizontaliter detentus, admoueatur acui CD, vt acus alterutri magnetis polo verticaliter immineat, ad diſtantiam pollicis dimidii aut integri, atque in hoc ſitu magnes GH immotus detineatur. Quodſi nunc filum FE inferiori acus extremo D admoueatur, obſeruabitur, repelli hanc acus partem a filo FE. Sin autem filum FE acus extremo ſuperiori C appropinquetur, ex hac parte acus ad filum FE accedere, et ab ipſo attrahi deprehendetur. Fig. 4.

Fig. 5. Deinde 2.) Cylinder vitreus, aut ſulphureus *gh*, (perinde enim eſt, quinam adhibeatur) panno laneo rite fricatus, magneti GH ſubſtituatur; eritque experimenti euentus penitus idem, qui antea obſeruabatur, tanta cum ſimilitudine, vt, niſi aliunde noueris, an magnetem, an cylindrum electricum in vſum vocauerit experimentator, ex euentu tentaminis diuinare hoc nulla prorſus ratione queas.

Phaenomeni hactenus deſcripti, quatenus magnetem ſpectat, in *Tentamine Theoriae Electr. et Magnet.* §. 158, aliquam mentionem feci, aſt non vſus ſum ibi ipſo, niſi vt probarem, ferrum magneti propinquum in magnetem conuerti, ea lege, vt extremitas, magnetis polo propinquior, oppoſitum, auerſa, homologum acquirat magnetismum. Prodigioſae autem, quam ſiſtit, ſimilitudinis effectuum vis electricae, et magneticae nullam mentionem inieci, ad hanc enim animum nondum aduerteram.

Superflua acturus eſſem, ſi de explicatione phaenomeni hic deſcripti, vel verbum addere vellem. Tam obuia enim haec eſt, vt, qui principia Theoriae electricae et magneticae, a me ſtabilita, nouit, ipſa plane non indigeat.

DE-

DESCRIPTIO DVPLICIS MICROSCOPII SOLARIS APPARATVS OBIECTIS OPACIS ADAPTATI.

Auctore

I. E. ZEIHERO.

Quoniam inter obiecta, praecipue opaca, microscopiorum ope inuestiganda, multa occurrunt, quae in frustula minima dissecari, hocque modo, in lentis focum commode locari non possunt: praeter apparatum obiectis minimis inseruientem, adhuc alter requiritur, obiectis prius memoratis idoneus; quam ob causam duplicem constructionem pro obiectis opacis, microscopio solari applicandis, excogitaui, alteram nempe obiectis minimis, valde amplificandis, alteram autem obiectis maioribus, integris, mediocre adaugendis, e. g. monetis, gemmis exsculptis etc. inseruientem. Ad posteriorem vero finem obtinendum Fig. 1. repraesentat capsulam ABCD, cuius extremitas AB machinamento microscopii solaris consueto inseritur. EF est microscopium, quod cochleae ope antrorsum vel retrorsum dirigi potest, donec ab obiecto, in disco GH posito, iusto interuallo distet. IK est operculum, sub angulo 37 ad 38° circiter cum axe *vz* positum, ac eo modo confectum, vt commode desumi, ac iterum immitti possit. Lamina *ab*, intra frustula *cd*, *ef* mobilis, vni vel alteri obiecti parti collocandae inseruit: cum eadem enim discus GH, capitulo L Tab. VI. Fig. 1.

 instructus,

instructus, coniunctus est. Ad MN operculum IK est exscissum, ne capitulum, si lamina *ab* vnum vel alterum versus latus sit mouenda, impediatur; *gb* denotat crenam, in qua discus GH, vna cum suo capitulo, sursum vel deorsum moueri queat. Ad *i, i*, est elater, disci vacillationem impediens; discus insuper, vna cum suo capitulo, ita est formatus, vt circa axem suum moueri, ac per consequens obiectum facillimo negotio in situm iustum collocari possit.

Experientia me docuit, operculum IK ratione axis *vz* ad obiecta repraesentanda situm obtinere aptissimum, si angulus, quem efficiunt, 37 ad 38 vsque gradus non superet: sub angulo enim 45, qui initio maxime mihi videbatur idoneus, obiecta nimis obliqua posita sunt, quo fit, vt, si nonnihil sint magna, eorum margo semper obscurus repraesentetur; quoniam marginis partis puncta ad G nimis extra, puncta autem ad H nimis intra focum cadunt. Quodsi e contrario angulus minor sit 37°, conus radiorum solarium, a lente collectiua concentratorum, nimium obliquus, secaretur a plano GH, ac obiecta non satis illuminarentur. Porro notandum est, microscopii lentis focus non minor decem aut duodecim lineis esse debere, si vtriusque marginis obiecti in pariete delineationem claram desideremus.

Tab. VI. Fig. 2.

Capsula obiectis opacis minutissimis inseruiens amplificandis, sequenti modo est constructa: AB est tubus exterior, microscopii solaris machinamento immittendus; hincque

que inseritur alter, interior CDEF, microscopii apparatu instructus. Fundus EF speculum concauum *mn* in medio perforatum fixum tenet, simulque cochlea concaua est praeditus, qua mediante microscopium GH, cochlea solida pariter praeditum, eidem inseri, ac antrorsum vel retrorsum moueri potest. Discus *o*, in quo obiecta sunt affigenda, cum duabus alis *pq*, *rs* est coniunctus, ita, vt simul sumtae vnicum constituant frustum, ad n°. 2 et 3 repraesentatum, quod, obiectis in disco prius affixis, in tubum transuersim immittitur. Ad *tv* sunt elateres, qui illam sursum vel deorsum dirigi posse quidem sinunt, sed vacillationem eiusdem simul impediunt. Interioris tubi foraminum latera trabeculae lateribus accurate adiacent, exterioris autem foramina *x*, *y*, magis sunt aperta, ac quidem eum ob finem, vt interior tubus sine impedimento antrorsum vel retrorsum dirigi, ac per consequens speculi focus ad discum vel admoueri vel ab eodem remoueri possit.

METHODVS EXPEDITA
VELOCITATEM VENTI ABSOLVTAM DETERMINANDI.

Auctore

I. E. ZEIHERO.

Celeberrimi ac ingenioſiſſimi mathematici *Bouguerii* Anemometrum, in tractatu eiusdem de naui (Traité du Navire, p. 359 ſqq.) deſcriptum, anſam mihi praebuit, modum inueniendi, quo inſtrumentum hoc, tam ſimplex, quam ingenioſum, ita componi poteſt, vt eiusdem ope celeritates venti abſolutas, pari modo ac relatiuas, metiri queamus. Prius autem, quam methodum meam expono, non incongruum iudico, commodae inſtrumenti Bougueriani ſtructurae interioris deſcriptionem praemittere ſequentem.

Tab. VII. Fig. 1. AB eſt cylindrus cauus, elaterem ſpiralem C includens, cuiusque pars anterior apertura quadrangulari *op* praeditus, poſterior autem ad *qr* capulo D inſtructus eſt. EG repraeſentat virgam, ad E vsque quadrangularem, ac ad H diſco praeditam, quippe qui, ſi virga ab actione venti repellitur, elaterem C premit. Pars virgae poſterior HG eſt rotunda, in recuſu cauitatem F, capuli D, introiens. Vſus autem huius partis, quae cauitatem F iuſto quidem implere, ſed tamen ~~ſine difficultate eandem ingredi debet~~, in eo conſiſtit, vt virga aequaliter libereque moueatur. Capulum D vel protrudi, vel retrahi, poſteaque mediante cochlea

cochlea B in situ suo firmari potest: id quod ei fini inseruit, vt spatium *op*, *qr*, vel diminui, vel amplificari, ac consequenter spiralis tam magis tendi, quam iterum relaxari possit. I est theca, extremitatem partis virgae quadrangularem excipiens, atque cochlea *s*, qua mediante firmari potest, instructa. Ad modo dictam thecam affigitur planum, in quo ventus vim suam exserere debet; *n* designat trochleam, super qua inferius virgae latus mouetur, ne ista nimiam patiatur frictionem: quam ob causam, in experimentis instituendis, haec pars solo semper obuertitur. Ad *m t* est elater valde tenuis atque subtilis, stilo e cerussa facto ad *m* instructus, qui actionis venti effectibus, in virgae latere superiori denotandis, inseruit.

Ad designandos vero, in instrumento modo descripto, celeritatis absolutae gradus quod attinet, facili negotio id praestari potest, si idem celeritate aequali ac vniformi contra aerem mouetur quietem et tranquillum, quod per motum circularem commodissime est perficiendum Ad hunc vero finem obtinendum machina requiritur peculiaris, cuius descriptio iam sequitur. (*)

ABC est fulcimentum pyramidale, partes mouendas sustinens. DE denotat ergatam perpendicularem, cui radius seu brachium FG, instrumentum anemometricum Tab. VII. Fig. 2.

(*) Hac machina vsus est ingeniosissimus Anglus Dn. *Smeaton*, occasione experimentorum circa aquae et venti vires institutorum (vid. Philos. Transact. Vol. LI. p. I. p 138 sqq.) Omne id, quod ad scopum nostrum non pertinet, omisi, reliqua ad hunc finem melius accommodaui.

tricum iusta et requisita distantia ab axe gerens, est affixus. N eiusdem repraesentat contrapondium. H est tympanum, fune circumuolutum, cuius alteram extremitatem manu trahit Dn. *Smeaton*, quo rotatio axis et brachii exoritur. Ad scopum vero nostrum commodius mihi visum est, eiusdem loco gyrgillum IK, quatuor vel pluribus tympanis, crassitie diuersa, instructum adaptare. Dn. *Smeaton* ad fulcimentum modo descriptum pendulum L M collocauit, quod ex duobus globulis constat metallicis, super pertica lignea mobilibus, quo id eo modo ordinari potest, vt desideratas ac determinatas efficiat oscillationes. Commodissimam penduli dispositionem iam laudatus Vir iudicat eam, vbi, reuolutione brachii vnica peracta, illud oscillationes duas absoluit. Quilibet secundum arbitrium suum, vel pendulo modo memorato, vel horologio vulgari, pendulo instructo, vti potest.

Ad brachium autem supra delineatum FG affigatur instrumentum Bouguerianum G, mediante consibula O, et eo quidem modo, vt eiusdem axis, seu linea ad planum KL perpendicularis, cum tangente arcus, quem radius DG describit, sit parallelus. Hac re peracta, machinaque in loco, vbi aer est tranquillus, posita, circumagatur brachium DG, tempore desiderato, i. e. moueatur planum G, tempore dato, per spatium cognitum, ac aliquot reuolutionibus peractis, obseruetur, quousque virga fuerit intrusa, quod vestigium a stilo in virgae superficiei relictum indicabit. Denotetur tunc hic celeritatis absolutae gradus in instrumento, posteaque operatio repetatur.

Non

Non opus eſt, omnes celeritatum gradus machinae auxilio determinare; ſed quibusdam illius ope denotatis, reliquae interiacentes ſubdiuiſione interpolari poſſunt. Ne autem aliquid deficiat, quod experimentum accuratius reddere poſſit, Barometri nec non Thermometri altitudines non negligendae ſunt.

Breui exercitio acquirere poſſumus conſuetudinem, quartam, vel dimidiam partem reuolutionis, vel reuolutionem integram, ſpatio temporis vnius minuti ſecundi, motu admodum vniformi, efficiendi; per conſequens vnico radio DG, tympano H, ac quadruplici trochlea, gyrgillo affixa, velocitatem ſedecies commutare, inſuperque tympani H mutatione, facili negotio illius variationem multiplicare poſſumus. Modus velocitates variandi iam deſcriptus, melior mihi viſus eſt, quam radii commutatio: forſitan enim radio nimis decurtato, vortices, velocitatum determinationes aliquo modo reddentes incertas, oriri poſſint. Vnicae eiusmodi machinae auxilio innumerabilia Anemometra, velocitatum abſolutarum gradibus praedita, elaborari ac vbiuis mitti poſſe, per ſe conſtat.

Quodſi elater pro maxima celeritate in inſtrumento Bougueriano notanda nimis debilis inueniretur, tunc facili negotio huic mederi poſſumus, mediante capulo D, vlterius protruſo; aut eodem retracto, ſi contrarium contigerit. Vt linea autem, ſtili affrictu orta, melius ſit diſtinguenda, ſuperficiei virgae ſplendor pumicis ope eſt demendus.

Tab. VII. Fig. 1. Designatis vero omnibus in instrumento velocitatum gradibus, stilus *m* vna cum elatere suo aufertur: Si quis autem iudicet, frictionem a stilo ortam, quamuis valde exiguam, tamen non esse negligendam, is valorem eius ponderibus, instrumenti plano impositis, facili negotio determinare potest.

Vt autem semper sit in manu nostra, elapso quodam tempore, instrumentum verificare, ac diiudicare, an elater spiralis ab elasticitate sua aliquid perdiderit, nec ne? requiritur, vt statim ab initio, quantum pondus plano impositum, hoc vel illo celeritatis gradu respondeat, inueniamus, istudque accurate denotemus; posteaque, si opus nobis videtur, disquiramus, an idem scalae gradus eodem pondere denuo respondeat, aut punctum eum denotans vlterius descendat, siue euanescat? id quod verum est indicium, spiralem de elasticitate sua aliquid amisisse, cui tunc, capulum vlterius protrudendo, possumus mederi.

PHYSICA.

PHYSICA.

CALORIS DIMINVTI ET AVCTI PHAENOMENA NOVA PARADOXA, ET CONSIDERATIONES.

Auctore

I. A. BRAVNIO.

In physicis saepe occurrere phaenomena, quae principiis naturae et legibus repugnare videntur, adeoque admirabilitatem maximam faciunt, satis constare existimo. Deteguntur eiusmodi phaenomena extraordinaria et insolita tam obseruationibus, quam experimentis, quamquam illud rarius, hoc frequentius contingere solet. Et quia eiusmodi phaenomena contra omnium opinionem esse videntur, recte paradoxa adpellari possunt et solent, quae mirationem faciunt, vti caussarum ignoratio in re noua alias solet. Phaenomena eiusmodi naturae varii generis esse possunt et solent, prouti materiae et corpora varia sunt, in quibus obseruationes et experimenta instituuntur. Nos in praesenti cum Academia quaedam paradoxa noua communicamus, multis experimentis nobis detecta, quae ad diminutionem caloris et auctionem extraordinariam spectant, simulque alia quaedam, falso pro talibus habita, refutata exhibemus.

Monuimus in dissertatione nostra de Congelatione Hydrargyri a nobis detecta p. 26. experimenta illa nobis non successisse, quae frigus quoddam producere perhibentur, ſi oleis eſſentialibus adfundatur ſpiritus vini, praecipue rectificatiſſimus. Quoniam autem viri celeberrimi, et in arte experimentandi verſatiſſimi, hoc adfirmarunt: experimenta omni cura et diligentia repetenda cenſui, vt, ſi quod vitium ſubreptionis vel a me, vel ab aliis, commiſſum eſſet, detegeretur.

Inſtitui experimenta cum multis oleis eſſentialibus puris deſtillatione paratis, quae ad manus idcirco erant, quoniam in iis cepi experimenta ad cognoſcendum, vtrum, et quae, gelaſcerent, vel frigore naturali, vel frigore artificiali, de quo alias. Olea nominatim erant Terebinthinae, Menthae, Carui, Foeniculi, Aniſi, Rutae, Serpilli et alia, etiam Succini, quae omnia in medium afferre nihil attinet, quum euentus fuerit idem.

Vt haec experimenta quam adcuratiſſime caperemus, omnem operam adhibuimus et diligentiam, vt temperies eadem omnino et conclauis et ſpiritus vini et olei eſſet, id quod in eiusmodi liquoribus non tam facile obtineri poſſe, ſaepius experientia me docuit. Nam olea et ſpiritus, quamuis, non per vnum diem ſolum, ſed per plures etiam, in eodem conclaui ſteterint; tamen vno alteroque gradu caloris differre comperi. Quin cauendum quoque eſt, ne loca conclauis, vbi experimenta inſtituuntur, commutentur. Nam differentia caloris inſignis non ſolum deprehenditur inter loca ſuperiora et inferiora conclauis, ſed in eiusdem quoque altitudinis locis diuerſis, vt in medio conclaui, ad feneſtras etc. differentia obſeruari ſolet non contemnenda,

nenda, vnius, duorum et plurium graduum. Quodsi igitur fluida ex vno loco in alterum transferantur, temperiei mutatio fiat necesse est, et experimentum vitiosum. Temperies quoque in vno eodemque loco diu eadem permanere non solet, hinc nisi animum attendamus ad hanc mutationem, vitium subreptionis irrepat oportet in experimenta. Denique liquorum quantitatis et proportionis rationem quoque in eiusmodi experimentis esse habendam, quis non videt? Cautiones has, qua potui adcuratione, obseruare studui in experimentis meis. Liquorum quantitas fuit vtplurimum vnius drachmae; fere enim partes aequales olei et spiritus vini rectificatissimi adhibuimus, nonnunquam maiorem copiam spiritus vini, duplum quoque, sed differentiam in effectu obseruare non potuimus. Thermometrum erat mercuriale scalae Delilianae, et ita comparatum, vt dimidii gradus bene distingui potuerint, longitudine vnius pedis; pars inferior, vt commode immergi posset, ad duos fere pollices tabula carebat. Praeparatione debite facta, explorato calore olei, spiritus vini, et loci conclauis, et eodem deprehenso, immersi thermometrum in oleum, calyce vitreo contentum, et adfudi spiritum vini rectificatissimum, quo facto adcuratissime attendi, non solum primis minutis, sed etiam ad dimidiam horam, quam requirunt, et vlterius integram horam, et nullam mutationem caloris, nullam frigoris productionem obseruare nobis licuit, temperie scilicet conclauis inuariata, neque in oleo terebinthinae, neque in aliis mihi hoc modo exploratis, quamdiu thermometrum immersum manebat, sed thermometro

ex-

extracto, confestim mercurius ad gradus 4 et 5 descendere in thermometro coepit intra pauca minuta. Hunc mercurii descensum, hanc frigoris productionem in conclaui eiusdem temperiei, non a mistione, vel solutione olei a spiritu vini pendere, sed aliunde, facile erat ad intelligendum et iudicandum. Conieci igitur, hoc phaenomenum forsitan imposuisse illis, qui eiusmodi experimenta fecerunt et descripserunt primi.

Primus procul dubio fuit *Geoffroy*, Academicus Parisiensis celeberrimus, qui eiusmodi experimenta fecit et euulgauit in Historia Academiae Parisiensis ad annum 1727. vbi adfirmauit, omnia fere olea plantarum destillatione parata, mista cum spiritu vini, frigus producere. Imitatus haec est *Muschenbroek*, naturae scrutator clarissimus, qui et alia adiecit, descripta in Additamento ad tentamina Experimentorum Academiae del Cimento P. II. p. 141. et sqq. Conf. quoque *Kraft* Academiae nostrae quondam socius Cel. in Experimentis physicis p. 200. Sed hi Auctores ipsi de his phaenomenis dubie pronunciarunt. *Geoffroy* fassus est, se nullam caloris mutationem, nullam frigoris productionem obseruare potuisse, neque in oleo Lauendulae, neque Caryophyllorum, cum spiritu vini mistis. *Muschenbroekius* quoque negat, se in oleo Foeniculi cum spiritu vini misto mutationis aliquid caloris obseruasse. Idem contigit in oleo stillatitio Carui cum spiritu vini. In oleo Anisi vnum gradum obseruasse sibi visus est, qui facile vel a mutatione caloris externi, vel neglecta adcuratione supra indicata, proficisci potuit. Quum enim phaeno-

phaenomenum non primo tempore, ſed ad minimum poſt horam dimidiam ſe conſpiciendum (ex opinione eorum) praebere debeat; interea temporis facile mutationem temperiei contingere poſſe, quis eſt, qui non videat?

Vitium igitur ſubreptionis in experimenta irrepſiſſe a Viris Celeberrimis inſtituta, ſecundum experimenta mea non dubitandum videtur, hinc paradoxum in illis euaneſcat neceſſe eſt. Valde mirandum eſt, idcirco ait *Muſchenbroekius*, olea plantarum ſtillatitia, quae adeo calida ſunt, corpori noſtro adplicata, vt et ſpiritum vini, frigus producere, atque ita expellere per aliquod temporis ſpatium ex ſeſe mutuo ignem, addit, durat haec expulſio, quamdiu motu inteſtino agitantur. Si hoc, cur demum poſt dimidiam horam et amplius motus inteſtinus incipit? Vtrum, ſi in vacuo haec inſtituantur experimenta, aliquot frigoris gradus producantur, vti contendit *Muſchenbroekius*, quamuis in aere aperto nulla adpareat mutatio caloris, definire in praeſentia non poſſumus, quoniam in vacuo hoc quidem tempore capere experimenta nobis non licuit, interim, quum eiusmodi experimenta in vacuo inſtituenda multo delicatiora ſint et difficiliora factu, quoniam circumſtantiae omnes non tam in poteſtate ſunt, vt cautiones omnes obſeruari poſſint, quam in aere: non ſine ratione probabili de iis quoque tantiſper nobis dubitare liceat, dum per experimenta noua res decidatur.

Sed quam incertum et nullum paradoxum eſt in recenſitis hactenus phaenomenis, tam certum et extra omne dubium positum est illud paradoxum, quod in extracto thermometro se conspiciendum mihi praebuit, et semper praebere solet, quod scilicet frigus 4, 5, et 6 graduum, quin plurium, obseruatur maius, quam est loci temperies, vbi experimenta capiuntur. Haec phaenomena igitur nunc adcuratius consideranda sunt, quum et potissimum haec nobis examinanda proposuerimus.

Quum confestim iudicarem, productionem frigoris in extracto thermometro ex liquoribus dictis obseruatam, non esse effectum mistionis vel solutionis oleorum cum spiritu vini: separatim hos liquores explorandos censui, quo facto et cognoui, iudicium opinionemque meam me non fefellisse. Cepi olea diuersa, Terebinthinae, Foeniculi, Carui, Anisi, Rutae, Succini, et alia multa, quibus immersi thermometrum, quo extracto, nullam caloris mutationem sensibilem conspicere potui, mercurius eundem retinebat gradum in thermometro, olea autem et conclaue, seu potius locus conclauis, vbi experimenta capiebantur, eandem tenebant temperiem. Hoc facto sumsi spiritum vini rect. solum, immersi in eum thermometrum probe antea purgatum, et obseruaui mercurium ad 7 et 8 grad. descendisse profundius, quam stare debebat secundum leges ordinarias, conclaue enim 8° calidior erat, scilicet eiusdem caloris cum liquore, nempe S. v. R ante extractum thermometrum. Repetii haec experimenta innumero numero, et semper eundem effectum obseruaui, scilicet extractum ex spiritu vini thermometrum monstrabat inter 5 ad summum 6 minuta temporis, descensum mercurii, adeoque frigus 7 et 8°, ita vt primis minutis, vt alias, quam posterioribus vioribus multo celerius descenderet. His igitur experimentis certus factus sum, hanc frigoris productionem extraordinariam, neque esse effectum mistionis spiritus vini et oleorum, neque oleorum tantum, sed solius spiritus vini quacunque de caussa, quam indagare in sequentibus studebimus. Phaenomenum igitur hoc simile iudicaui illi, quod *Richmannus* quondam obseruauit in aqua, et descripsit Academiae Comment. Nou. Tom. I. p. 284. et sqq. *Richmannus* primus sibi visus est hoc phaenomenum paradoxum in aqua obseruasse, sed, si dicendum quod res est, obseruatio huius phaenomeni est antiquior. Nam *Amontonsius* iam illius facit mentionem Memoriis Acad. Reg. Paris. ad annum 1699. et *Muschenbroekius* simile quid obseruavit, atque descripsit in Essai de Physique §. 962 Sed vterque obiter tantum huius phaenomeni meminerunt, neque adcurate satis descripserunt, et exposuerunt; ab hoc tempore vsque ad *Richmannum*, nulla, quod sciam, huius phaenomeni in vllo libro mentio facta fuit, quamvis notatu dignissimum illud in physicis esse nemo harum rerum peritus negare, aut dubitare queat. Non igitur mirandum est, hac ratione saepius egregia inuenta in obliuionem venire posse, et saepius solere, quo ipso fiat necesse est, vt alii inuentores se credant, dum vetera ignorant, et bona fide sua tanquam noua inuenta aliis proponunt, quibus venia omnino danda est, dum aliena sibi non scientes tribuunt; quis enim omnia legere potest, aut legendi occasionem habet? neutiquam autem illis, qui scientes aliena arrogare sibi nefario audent.

Sed haec hactenus de inuenti historia, reuertendum est ad propositum. Quum obseruaui phaenomenum frigoris extraordinarii et paradoxi in aliis oriri, in aliis non; nouis experimentis in phaenomena eiusmodi inquirere operae pretium esse existimaui. Conspexi videlicet frigoris nihil produci, si ex oleis essentialibus extrahatur thermometrum, et quamuis nonnunquam differentia $\frac{1}{2}$ aut 1°. videretur: tamen aliunde pendere illud cognoui, dum omnia non aequaliter calebant, e. g. conclaue paullo minus, quam reliqua. Cepi igitur porro olea expressa, nominatim Oleum Cannabinum, Lini, Oliuarum, Amygdalarum, et alia, quibus immersi thermometrum, ita vt cautiones supra indicatas quam adcuratissime obseruarem, et nullam caloris mutationem, nullam frigoris productionem, in vllo dictorum oleorum conspicere potui.

Porro spiritus acidos sumsi explorandos, videlicet spiritum nitri et aquam fortem, spiritum salis, spiritum sulphuris, et thermometrum ex hisce extractum omnibus phaenomenon frigoris dicti non, vel parum monstrabat, sensibilis mutatio caloris orta non conspiciebatur. Probabile videbatur Oleum Vitrioli eodem modo se habiturum esse, sed nihil minus. Nam plane contrarium accidit. Quam primum enim extraxi thermometrum, quod illi immersum erat; animaduerti, mercurium in eo adscendere incepisse, et ad 5. 6. et plures gradus caloris produxisse. Hoc phaenomenum, productionem scilicet caloris nouam aeque paradoxam, ac productionem frigoris nouam censendam esse, quis non videt? In solo oleo vitrioli hoc mihi est obser-

vatum.

vatum. Nam ſpiritus vitrioli dulcis, vt alii dulcificati, 9° frigoris produxerunt. Deſcendit ſcilicet mercurius a gradu 130, qui erat conclauis, ad 139. intra 5 minuta, ad eundem gradum quoque intra dictum tempus, vt alias, deſcendit quoque mercurius in thermometro ex Liquore *de la Motte*, vel potius *Beſtuſchefii*, extracto. In aliis autem liquoribus omnibus, quos exploravi, frigus ortum vidi, hac tamen cum differentia, vt in aliis maius, in aliis minus, conſpiceretur. Explorauimus autem praeterea vina omnis generis, cereuiſias, lac bubulum et liquores ſpirituoſos, vt ſpiritum Vini gallicum, et alios viliores, et pretioſiores, vt *l'Eau de la Bergamotte*, vbi mercurius in extracto thermometro deſcendit a 129. ad 137, adeoque 8°. frigus productum, in *l'Eau de la Lavande* immerſum et extractum thermometrum monſtrauit productum frigus 6°. deſcenderat enim mercurius a 132. ad 138; in ſpiritu Vini gallico conſpiciendum ſe frigus oſtendit 7°. Nam hydrargyrus deſcenderat a 132. ad 139. intra dictum tempus 5. minutorum fere etc. Vt vno conſpectu differentia diminutionis et auctionis caloris pro diuerſitate liquorum et temporis ſpectari poſſit; potiores tanquam in tabula repraeſentabimus ſequenti modo:

1.) Olea expreſſa omnia, vt Lini, Cannabis, Nucum, Amygdalarum, Papaueris etc. produxerunt frigus - - - - - - - - - = 0.
Nam thermometrum ex hiſce oleis extractum mutationem caloris nullam monſtrauit in conclaui aeque calenti.

2.) Olea plantarum essentialia, et alia destillata mutationem caloris sensibilem vix monstrarunt, adeoque haberi quoque potest frigoris productio - - - - = 0

3.) Spiritus acidi diuersi diuerso se habuere modo.

Spiritus nitri fortior interdum ½. interdum 1°, saepius nil diminutionis caloris monstrauit in therm. extracto, ita vt mutatio omnino reputari queat quoque - - - - - - - - - - - - = 0.

De spiritu salis idem valet - - - - - = 0.

Spiritus sulphuris frigus contra monstrauit = 2. et 3.

Spiritus aceti - - - - - - - - - = 4. et 5.

Acidum Citri et Acetum vini - - = 4. et 5.

Oleum vitrioli, loco diminutionis, auctionem caloris monstrauit - - = 8. 9. et 10.

Porro spiritus salis ammoniaci frigus produxit = 4 et 5.

Spiritus Cornu cerui - - - - - - - = 4. et 5.

Spiritus vini rectificatiss. - - - - - = 8. et 9.

Spiritus vini gall. - - - - - - - - = 7.

Spiritus Vitrioli dulcis - - - - - - = 9.

Liquor *de la Motte*, s. *Bestuschefii* - = 9.

L'eau de la Bergamotte - - - - - = 8.

L'eau de la Lavande - - - - - - = 6.

Cereuisia ordin. - - - - - - - - - = 4. et 5.

Lac - - - - - - - - - - - - - - = 4. et 5.

Vinum gall. - - - - - - - - - - = 5. et 6.

Mistum ex partibus aequalibus vini et Spir. V. Gall. - - - - - - - - - 7.

Aqua

Aqua pura - - - - - - - - - - - - 6. et 6½.
Solutiones ſalium per aquam, vt ſalis comm. Vitrioli, Aluminis, Nitri etc. circiter - - - - - - - - - =6.

Ex comparatione harum differentiarum ſequentia pateſcunt:

1) In plerisque experimentis, extracto thermometro, frigus, ſeu diminutio caloris, eſt obſeruata.

2) Exceptionem facit oleum vitrioli, dum phaenomenum plane contrarium detexi, ſcilicet loco diminutionis, auctionem caloris.

3) Exceptionem porro faciunt olea tam expreſſa, quam deſtillata, quippe quae, extracto thermometro, neque diminutionem, neque auctionem monſtrant. Item ſpiritus acidi Nitri et Salis.

4) Termini inter frigus ſunt inter 1. et 9. vel ad ſummum 10. qui omnino vltimus et ſummus videtur. Idem de productione caloris ab oleo Vitr. valet. Adſcenſum mercurii in thermometro inde extracto vltra hunc terminum 10° nunquam vidi. Omnia haec experimenta facta ſunt in muſeo, calore temperato ab 128. ad 133. vnico thermometro.

Hactenus de phaenomenis, nunc ad explicationem eorum eſt veniendum. Difficiles haec phaenomena habere explicatus, nemo negabit, qui iſta adcuratius conſideret. Nam ſunt re vera paradoxa, eaque ſibi contraria. Producitur frigus, deſcendit hydrargyrus in thermometro, quum tamen, vel adſcendere, vel ſubſiſtere debeat. Contra ea adſcendit mercurius, quum tamen, vel deſcendere, vel ſubſiſtere eum

eum oporteat. Repugnant igitur legibus ordinariis phyſicis phaenomena propoſita, dum caloris diminutio et auctio oritur, vbi nulla ſecundum leges phyſicas ſtabilitas oriri debet. Eſtne igitur forſitan nonnunquan natura in operationibus ſuis ſibimet contraria, et vna eadem cauſſa contrarios effectus producere poteſt? Minime gentium. Sequitur natura leges conſtantiſſimas, ſibi ſemper conſentit, quamuis interdum repugnantia inter operationes iſtius adeſſe videatur. Repugnantia igitur tantum adparens etiam in phaenomenis noſtris adeſſe debet, quam in ſequentibus detegere ſtudebimus.

Ante omnia autem indagandum eſt, vtrum haec frigoris et caloris productio extraordinaria ſit vera et realis, an adparens? Quodſi enim cognitum fuerit, in noſtris phaenomenis veram hydrargyri contractionem et dilatationem adeſſe; de vera diminutione caloris et auctione dubitari nequit. Sin deſcenſus et adſcenſus mercurii aliunde, ac a contractione et dilatatione illius, pendet; certum eſt, eiusmodi frigus et calorem eſſe tantum adparentem. Nam fieri poteſt, et ſolet, vt dilatatio, vel expanſio, ſubito in vitro oriatur per calorem externum, antequam ipſe mercurius in thermometro ab iſto calore affici et dilatari queat, quo caſu non poteſt non deſcenſus mercurii ſequi, et frigus paradoxum, ſed tantum adparens. Luculentiſſimum eiusmodi frigoris adparentis producti exemplum praebet illud experimentum, quo, interueniente ipſo igne, aqua frigidior, ſed tantum adparenter, reddi poteſt. Scilicet ſi in phiolam aqua plenam thermometrum inſeritur, et phiola cum thermometro vaſi alii aqua pleno no immittitur, et, eadem in phiolae aqua et vasis eam continentis, temperie orta, iniicitur subito copia prunarum: obseruabitur hydrargyrum subito in thermometro descendere, quod satis paradoxum videtur, quum a calore carbonum candentium iniectorum mercurius non descendere, sed adscendere debeat, adeoque calorem, non frigus monstrare. Sed hoc frigus est tantum adparens, non verum, non reale, pendet enim non a contractione mercurii in thermometro contento, sed a dilatatione vitri mercurium continentis subita, antequam mercurius a calore affici et dilatari potest; nam communicato calore statim mercurius adscendere incipit.

Pari modo calor adparens oriri potest a subita vitri mercurium continentis contractione, dum, vt hoc potissimum vtamur, thermometrum ex aqua feruente et bulliente subito in loco frigidiore extrahitur. Adscendit subito in extracto thermometro mercurius, seu saltus subitus oritur, quo facto statim, vt debet, rursum descendere incipit.

Estne igitur forsitan in nostris phaenomenis talis caloris diminutio et auctio a dilatatione et contractione vitri thermometrici solum pendens, adeoque frigus et calor tantum adparens? De frigore, siue diminutione caloris, primum videamus, dein de calore, qui in thermometro ex oleo vitrioli extracto oritur. Si animum attendamus ad circumstantias, sub quibus descensus mercurii contingere solet; facile conspicietur, hunc mercurii descensum, hanc caloris diminutionem, seu frigoris productionem, adparentem esse non posse,

 sed

ſed veram et realem. Nam deſcendit mercurius, ſi aer ambiens vel aequalis caloris eſt cum liquore, vel paullo maioris.

Sed haec exigua temperiei differentia, vel plane nulla, quomodo dilatationem vitri thermometrici ſolum efficere poteſt? fieri hoc nullo modo poteſt. Idem cenſendum erit de phaenomeno contrario, de auctione caloris in extracto ex oleo vitrioli thermometro, ſi aer ambiens eſt vel aequalis caloris, vel paullo frigidior. Nulla vitri thermometrici contractio, adeoque caloris productio adparens cogitari et hic poteſt. Quid igitur relinquitur? nil niſi hoc, veram mercurii ipſius contractionem, et dilatationem fieri, adeoque veram caloris diminutionem et auctionem in phaenomenis et experimentis noſtris.

Sed vnde haec caloris diminutio, ſeu frigus verum, oriri poteſt (hoc enim primum conſiderabimus) quum aer ambiens ſit vel aequalis, vel paullo maioris caloris? Hic duo potiſſimum modi cogitari poſſunt. Vel enim hoc frigus a materia quadam frigefaciente, in aere ambiente verſante, vel a reſolutione fluidi adhaerentis bulbo thermometri in vapores, tanquam ſolutione frigida, pendeat neceſſe eſt. Prius placuit quondam reſpectu aquae *Richmanno* in tentamine explicationis huius phaenomeni. Verum eſt, aerem atmoſphaericum ambientem variis particularum generibus, oleoſis, ſalinis, ſpirituoſis, etc. abundare, ex quibus forſitan ſalina principia, fluido bulbo adhaerenti vnita,

ad

ad breue tempus frigus producere queant. At enim vero exigua adhaerentis liquoris copia frigus 6. 7. 9°. non videtur producere posse, vnita cum principio salino, deinde in aqua alia quoque aperta, hoc frigus oriri debebat, quod tamen fieri non solet. Tacemus alia, hanc sententiam minus probabilem reddentia, inprimis, quod phaenomenis minus satisfacere videtur, quam altera, quae omnino phaenomenis ita conueniens est, vt eorum resolutio inde omnino petenda videatur. A siccatione bulbi thermometri descensus mercurii, adeoque productio frigoris, siue diminutio caloris, pendere, inde patere videtur, quod phaenomenum cum initio exsiccationis incipit, et cum fine illius desinit. Quid vero siccatio aliud est, nisi fluidi vel liquoris solutio in vapores? et prouti haec resolutio celerius tardiusue pro natura liquorum fieri solet, ita siccatio rerum humidarum et madefactarum celerior tardiorque succedere cernitur. Sua sponte hinc fluere videtur explicatio phaenomenorum oleorum, tam expressorum, quam destillatorum, quae omnia nihil aut parum frigoris ostendunt. Ratio enim omnino inde repetenda est, quoniam horum liquorum resolutio in vapores, vel plane nulla, vel admodum exigua est, nisi est violenta. Nam et propriis experimentis edocti sumus, olea expressa nihil; stillatitia autem pleraque parum aut nihil omnino euaporare. Quid igitur mirandum, in his nullum produci frigus in aere ambiente, quum olei adhaerentis vel nulla vel vix sensibilis fiat resolutio in vapores, et siccatio. Semper euaporatio naturalis, quae fit in temperie temperata, a violenta ope ignis et caloris maioris est distinguenda, illa, non haec, hic intelligitur.

Quum plerique reliqui liquores, in quibus capta sint experimenta, talis sint naturae, vt resolui in vavapores facile possint et soleant; frigus quoque in aere aperto ambiente oriatur necesse est. Differentia diminutionis caloris maioris et minoris igitur deducenda erit a perfectiore et minus perfecta resolutione liquoris bulbo adhaerentis. Hinc spiritus vini maius videmus frigus producere, quam reliquos liquores, quod facile et plene in vapores resolui soleant. Interim, quamuis liquores spirituosi ocyus quoque resoluuntur in vapores, tamen haec celeritas in hac siccatione tam breuis temporis, non fit sensibilis, quocirca quoque tempus siccationis fere aequale, scilicet 5 minutorum, reperitur, licet et pro ratione tempestatis differentiae quaedam, sed exiguae, occurrere soleant; prouti scilicet aer humidior et siccior est, ita siccatio tardius citiusque euenit, et minus maiusque frigus oriatur necesse est in vno eodemque liquore, diuerso tempore. Superfluum ducimus hanc theoriam ad singula experimenta hic accommodare, quum sua sponte phaenomena considerantii pateat; potius hanc legem generalem inde deducemus. Quidquid liquoris in aere ambiente facile siccari, adeoque in vapores resolui potest, id verum frigus producere solet, et eo maius, quo perfectior liquoris est resolutio, nisi impedimentum obstet, de quo in sequenti.

quentibus agemus. Solent in aulis, tempestate calidiore, fontes salientes adhibere ad refrigeranda conclauia, maior refrigeratio igitur obtineretur sine dubio, si liquores spirituosi adhiberentur, nisi nimis esset pretiosum. Homines alii humectare tantum solent pauimenta refrigerationis caussa. Vnde igitur refrigeratio, quae hisce modis in vita communi obtinetur, nisi potissimum a resolutione aquae in vapores. Hinc lintea madefacta refrigerare aquam aliosque liquores proxime eos ambientia, mirandum non est. Est igitur siccatio rerum humidarum et madefactarum, adeoque resolutio aquae aliorumque liquorum in vapores, ad solutiones frigidas referenda, quales varii generis dari satis constat, quas idcirco hic in medium afferre non attinet, vt solutio salis in aqua est. etc. Sed quomodo haec theoria cum phaenomenis, quae in oleo vitrioli, et aliis quibusdam spiritibus acidis, spiritu Nitri et Salis, obseruantur, conciliari potest? An hic nulla in vapores resolutio est? Et tamen, vel nullum produci frigus vidimus, vel e contrario calorem insignem, veluti in oleo vitrioli obseruauimus. Siccatur bulbus thermometri oleo vitrioli immersus, et inde extractus fere eodem tempore, quo reliqui liquores, qui frigus producere solent. Nam adscendit mercurius etiam intra quinque et sex minuta, vti eodem fere tempore descendere solet in liquoribus dictis Quodsi igitur extrinsecus ex aere ambiente nihil accederet, quod descensum impediret non solum, sed e contrario adscensum produceret, fore existimamus, vt aeque in oleo vitrioli, extracto thermometro, hydrargyrus deſcenderet in aere, ac in reliquis liquoribus, vt in ſpiritu vini etc. Sed quidnam ex aere atmoſphaerico, variis partibus heterogeneis conſtante, accedere poteſt, et cur illud prae caeteris? Oleum vitrioli imbibere humores et attrahere, experientia ſatis docuit; hinc loco hygrometri adhiberi poſſe hoc oleum multi aſſerere non dubitarunt, quod quidem recte fieri poſſe omnino cenſendum eſſet, ſi modo humores aeque dimitteret ac adſumeret. Dubitandum igitur non videtur, humores, vapores aqueos ex aere atmoſphaerico, ad bulbum thermometri oleo vitrioli humectatum accedere. Sed poſſuntne etiam particulae aqueae ex aere atmoſphaerico attractae calorem producere?

Oſtendimus experimentis multis in diſſertatione noſtra de congelatione mercurii, oleum vitrioli omnium liquorum, qui aquam calefacere ſolent, maxime hunc effectum praeſtare, et repetiimus hoc experimentum nunc duplici modo. Primum particulas aqueas inſtillavimus in oleum vitrioli, et continuo obſeruauimus calorem productum, maiorem minoremue, pro diuerſa guttularum copia inſtillatarum. Deinde linteum tantum aqua humectauimus, et bulbo thermometri admouimus, ita, vt vix attingeret bulbum oleo vitrioli humectatum, et confeſtim quoque mercurius adſcendere coepit, et quum propius admoueremus, adſcendere perrexit ad 100°. et amplius, quin hinc inde partes lintei, vti igne ſolet aperto, ſunt combuſtae. Cauſſa igitur idonea,

et

et ratio adeſt, cur oleum vitrioli potius calorem, quam frigus, in aere, extracto inde thermometro, producere, adeoque phaenomenum contrarium poſſit et debeat.

Phaenomeno hoc explicato, reliquorum, quae exceptionem adhuc faciunt, rationem facile reddi poſſe arbitramur, ſcilicet cur ſpiritus nitri fortior, et ſalis, parum aut nihil omnino frigoris producere ſoleant, quum tamen aeque facile, ac illi, qui frigus producant, quin facilius in vapores reſolui ſolent. Spiritum nitri et ſpiritum ſalis ad eos pertinere quoque liquores, qui aquae mixti calorem producant, conſtat. Hinc, eandem et hic rationem obtinere, adfirmare non dubitamus, quae in oleo vitrioli. Scilicet exiſtimamus, et hic attractos ex aere atmoſphaerico humores in cauſſa eſſe, cur mercurius non deſcendat. Minor ſcilicet in ſpiritu nitri et ſpiritu ſalis attractio humorum eſt, quam in oleo vitrioli. Ex quo efficitur, vt mercurius non, vti in oleo vitrioli, adſcendere, ſed tantum gradum ſiſtere poſſit et debeat. A maiore vel minore copia acidi contenti hoc pendere, ex experimentis euidens eſſe videtur. Nam ex ſpiritu nitri fumante mercurius in thermometro inde extracto plane non deprimitur, ex aqua forti ſaepius vnum gradum, ex ſpiritu nitri 3°. et 4°. An hi liquores aliter inter ſe differunt, niſi copia acidi contenti? Addi quidem alia maioris illuſtrationis et confirmationis cauſſa poſſent, ſpeciatim quae ad vſum in refrigerandis corporibus ſpectant, quae

vero,

vero, vt nunc video, a *Hanouio* V. C. fusius iam sunt exposita, quemque in theoria ratione frigoris generali quoque mecum consentire cognosco. Sed quia haec in praesenti sufficere pro scopo nostro posse existimamus, et ne longiores simus, filum abrumpendum hic putamus.

PISCIVM

PISCIVM RARIORVM

E MVS. PETROP. EXCEPTORVM DESCRIPTIONES CONTINVATAE.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

X.

Lophius, officulo frontis tentaculis carnofis, centralibus, terminato.

DESCRIPTIO.

Corpus maxima ex parte ventricofum, craffum, dorfum verfus et circa caudam cathetoplateum. Color abdominis albicans, immaculatus, laterum vero, capitis, dorfi, caudae, omniumque fere pinnarum e luteo albicans, lituris latiusculis, irregularibus, hinc et inde confluentibus, maculisque, e bruno ferrugineis variegatus. Liturarum iftarum fex feptemue ab oculo, tanquam ex communi centro, deorfum ac latera verfus procedunt radiorum flexuoforum fub forma; reliquae, in lateribus ac dorfo confpiciendae, maxima ex parte transuerfum et obliquum nonnihil fequuntur ductum. Liturae pinnarum, caeteris longe faturiores, fiue obfcuriores, macularum potius nomen merentur: oblongae enim partim, partim fubrotundae, plus minusue regulares nec raro caudatae, funt. His vtraque pinnae Tab. VIII. Fig. 1.

dorſi, ani et caudae facies picta eſt, in pinnis ventralibus vero ac pectoralibus poſticam tantum occupant, antica facie immaculata fere ac albicante. Squamarum loco, quibus penitus caret piſcis, verrucis ſcabris, maioribus ac rarioribus, inſtructa, papillisque denticulatis, biſetis, minoribus, innumeris obſita eſt cutis; hinc ſcabra et ad tactum aſpera omnis corporis ſuperficies, excepta areola iſta modice concaua, inter corniculi capitis et dorſualis baſin, plane laeui, papillis verrucisue omnino deſtituta. Illarum, (ſc. verrucarum) maxima ſeries, lineam quaſi longitudinalem efformans, a fronte incipit arcuato ſupra oculum ductu, inde iuxta corniculum dorſuale flexu illi contrario pergit; ductuque denuo arcuato, longo, inter dorſum et latus ventricoſum verſus ani pinnam deſcendit, toto fere itinere dorſo, quam abdomini, longe proprior. Numerus harum verrucarum ad 29-30 accedit, earumque magnitudo, a primis ad vltimas, ſenſim decreſcit. Extra harum ſeriem quatuor vel quinque inter oculum et corniculi dorſualis baſin occurrunt. Nonnullae etiam circa maxillarum ambitum et in lateribus capitis conſpiciendae, quarum hae tres quatuorue ſeries minores, arcuatas, aequali fere ſpatio a ſe inuicem remotas efformant, arcus conuexitate abdomen, concauitate oculum reſpiciente. Singula autem omnium harum verrucarum, microſcopii ope viſa, e duabus laminis ſcabris, denticulatis et oblique conniuentibus eſt conſtructa. Papillarum ſupra memoratarum ſingula duobus denticulis ſiue ſetis, rectis, auctis et diuergentibus inſtructa eſt. Quae caput, dorſum et latera occupant, breuiſſimo

licet,

licet, longiori tamen interuallo a se inuicem distant, maioribusque et rigidioribus praeditae sunt denticulis, quam eae, quae in immaculata, albicante corporis parte, sc. in pectore et abdomine, occurrunt. Praeter has verrucas ac papillas barbulae, siue cirri cuticulosi, a basi apices versus sensim attenuati ac flexiles, etiam notandi, qui circa os, caput, dorsum, latera, dorsi pinnam, posticamque pinnarum pectoralium faciem hinc et inde obuiam veniunt, quorumque maximi dimidium pollicem, minimi lineam circiter, exaequant, in pisce, liquori immerso, longe melius, quam extra illum, conspiciendi. Caput cathetoplateum, corpori quasi immersum, eodemque angustius. Os clausum situ perpendiculare, semicirculare ambitu ac simum. Rictus oris sat amplus. Maxillae, ore clauso, aequales; aperto autem eodem, quantum licet, inferior recta antrorsum et horizontaliter producta, prae superiore valde eminet. Vtraque maxilla, vt in Gadis et Vranoscopis lamina instructa est ossea, in medietate latiore septo diuisa, denticulis subcylindricis, tenuibus, nec admodum acutis, plurimis, retrorsum spectantibus, introrsumque etiam mobilibus, obsita. Lamina maxillae inferioris, respectu ambitus, magis elliptica, quam semicircularis. Margo vtriusque laminae interior membrana lata, introrsum expansa, terminatus. Harum inferiori linguae extremitas respondet, lata, obtusa, albicans et cartilaginea, superiori vero vtrinque laminae osseae, denticulatae, duae, valde ellipticae, sibique contiguae. Omnes quatuor in palato anteriori semicirculariter distributae. Dorsum linguae griseum, ab extremitate sinu distinctum, tuberculisque ſuperficiariis, albis praeditum. Pone hoc laminae oſſeae, denticulatae, duae, ex oblongo acuminatae, latiori extremo ſibi contiguae, in arcum diſpoſitae, illis, quae palatum anterius occupant, maiores, ſituque paulo poſteriores. Omnia harum laminarum genera ſubſtantia et denticulorum forma inter ſe conveniunt. Denique in palato poſteriori vtrinque puluilli duo, oſſei, ſubrotundi, conuexi, denticulati, protuberantes, et ad baſin cute laxius obueſtiti, quorum anterior poſteriore minor. Infra hos faucis amplioris latera carnoſa, et extra haec arcus tres oſſei, branchias ſuſtinentes, in conſpectum veniunt introſpicienti. Foramen vtrinque ſub pinnae pectoralis baſi, ad branchias patens, vnicum, ſubrotundum, diametri $1\frac{1}{3}$ lin. Ad hoc conſtituendum ex infimo modo dictae pinnae margine productus eſt tubulus cuticuloſus, $1\frac{1}{2}$ lin. longus, retrorſum ſpectans, plus quam dimidio ipſius ambitu, eoque interiori, corpori adnatus, exteriori liber. Oculi, reſpectu corporis, parui, in ſummis capitis lateribus perpendiculariter fere ſiti, ac cuticula capitis pellucida obtecti. Nares nullae. Medio ac extremo maxillae ſuperioris margini innititur oſſiculum compreſſum, laeue, ſuperius latius, baſin verſus tenuius, antrorſum incuruatum, inque corniculum contiguum reclinatum. Extremitas huius oſciculi inferior, ſiue baſis, condyloidea, cute craſſiore, ſcabra obducta, maxima ambitus parte libera, facie poſtica corniculi contigui baſi, articulo mediante, iuncta, cuius ope reponi, erigi, et ad angulum cum maxilla obtuſum vsque antrorſum moueri poteſt; ſuperior autem tentaculis cen-

tralibus

tralibus octo, imbellis, carnosis, e basi crassiore versus apicem sensim attenuatis terminata est; hinc polypum apprime refert hoc instrumentum, officulo sc. cum ventre, siue corpore, tentaculis cum polypi pedibus comparatis. Tentacula ista et longitudine et crassitie parum inter se diuersa. Corniculum mediae fronti adnatum, reclinatum, officulo, tentacula sustinenti, contiguum, eodemque crassius, denticulis bisetis vndique scabrum, subcylindricum, obtusum, dorsum versus modice incuruatum, maculosum, et extremitatem versus cirris haud paucis, cuticulosis, satis longis instructum. Ad initium dorsi, e regione, pinnis pectoralibus opposita, aliud corniculum, priori per omnia simile. Horum vtrumque postico, eoque inferiore, margine, cuti, e corpore productae ac lituris pictae, late cohaeret, quae, freni instar, nimiam eorum erectionem valde coercet. Corniculi capitis extremitas posticum areolae concauae, glabrae, marginem tantum lambit, nec corniculi dorsualis basin attingit. Pone hoc superficiarium sinum exhibet dorsum, hinc vero suam versus pinnam denuo ascendit coarctatum. Cauda, respectu ad insignem corporis molem habito, breuis, angusta, et vtrinque valde compressa. Inter anum et pinnae ani basin sinus, siue carina concaua. Anus ipse, 3 lin. ante pinnam modo dictam, patulus, leviterque prominens. Pinnae omnes, si caudae pinnam excipias, ad basin carnosae, et tunica satis crassa obvestitae. Pinna dorsi vnica, radiorum duodecim, basin prae omnibus reliquis pinnis latissimam habet, papillis denticulatis, bisetis, vtrinque obsita, excepta

 mem-

membrana tenuiore, radios scabros, vt in caeteris pinnis, connectente. Radii hi simplices omnes, excepto penultimo, bipartito, a primo ad sextum ex ordine longiores, a sexto ad duodecimum vero ex ordine breuiores. Pinnae ventrales duae, sibi mutuo vicinae, paruulae, pectoralibus situ longe anteriores, pauloque inferiores, in regione ori aperto circiter opposita, radiorum quinque, carnosorum, quorum quatuor superiores simplices, infimus bipartitus, intermediique lateralibus, et praesertim supremo, parum longiores. Margo horum radiorum posticus denticulis minimis rarioribus obsitus; reliqua pinnarum omnia glabra. Pinnae pectorales, siue potius laterales, duae, ventralibus multo maiores, inter latera et abdomen sitae, directe fere infra corniculi dorsualis basin, perpendiculares, longo latoque a se inuicem abdominis interuallo distant, radiisque vndecim sunt instructae, carnosis, mollibus, simplicibus, vtrinque ab extimo ad intimum ex ordine longioribus. Facies harum pinnarum postica omnis denticulis bisetis obsita, antica maxima ex parte, eaque exteriore, glabra. Pinna ani prope caudam, extremae pinnae dorsualis parti directe opposita, vnica, ab vtraque superficie scabra, pectoralibus paulo minor, radiorum septem, bipartitorum, vtrinque ab extimo ad intimum ex ordine longiorum. Pinna caudae, vt videtur, indiuisa, e radiis nouem, scabris, bipartitis, vtrinque ab extimo ad intimum ex ordine longioribus, constructa.

Mensura.

Menſura.

	Poll. Pariſ.	Lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum - -	5	5
A maxillae ſuperioris medio ad oculi medium -	—	7
- - - - - - - - - - - - - - oſſiculi capitis baſin - - -	—	2
- - - - - - - - - - - - - - corniculi dorſualis baſin - -	1	
- - - - - - - - - - - - - - primi pinnae dorſualis radii baſin	2	2
Ab angulo oris ad ſupremi pinnae pectoralis radii baſin - -	1	8
- - - - - - - - - - - - - - ventralis radii baſin - -	1	3
Longitudo oſſiculi capitis - - - - - - - - - -	—	6
- - - - tentaculorum eiusdem oſſiculi longiorum - - - - - - - - - -	—	7
- - - - corniculi capitis - - - - - - - - -	—	$6\frac{2}{3}$
- - - - - - - - dorſualis - - - - - - - -	—	$8\frac{1}{2}$
- - - - pinnarum pectoralium - - - - - -	—	11
- - - - - - - - - - - ventralium - - - - - -	—	$4\frac{1}{2}$
- - - - pinnae dorſi ad baſin - - - - - -	1	7
- - - - - - - - - - ani - - - - - - - - - - -	—	8
- - - - - - - - - - caudae - - - - - - - - - - -	1	1
Diameter pupillae - - - - - - - - - - - - -	—	$\frac{2}{3}$
Amplitudo rictus oris transuerſa - - - - - -	—	10
Diſtantia inter oculos - - - - - - - - - - -	—	8

Diſtan-

	Poll.	Lin. parif.
Diftantia inter membranae corniculi dorfualis et primi pinnae dorfi radii bafin - - - -	—	8
- - - - infimorum pinnarum ventralium radiorum bafin - - - - - - -	—	7
- - - - anum et pinnae ani initium - - -	—	3
- - - - pinnam ani et pinnam caudae - -	—	$5\frac{1}{2}$
Latitudo horizontalis per oculorum axes - - -	1	4
- - - - - - - - - pinnarum pectoralium bafin - - - - -	2	6
- - - - - - - - - pinnae ani initium -	—	7
- - - - - - - - - - - - - - dorfi finem -	—	$8\frac{1}{2}$
Latitudo perpendicularis per oculum - - - -	2	9
- - - - - - - - - - - pinnam pectoralem	2	10
- - - - - - - - - - - initium pinnae dorfi	2	6
- - - - - - - - - - - - - - - - - ani -	1	8
- - - - - - - - - - - - pinnae ani dorfique finem - - - -	—	$7\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - pinnae caudae initium - - - -	—	$6\frac{1}{2}$

* * *

XI.

Mola aculeata, limbo abdominis producto, attenuato, carnoso.

DESCRIPTIO.

Corpus cathetoplateum, ac circumscriptione ouatum: extremitate superiore, dorso nempe, latiore, inferiore, siue abdomine, paulo angustiore, illaque plus, hac minus elliptica; hinc, quum latitudo eius longitudinem superet, non integrum piscem, sed caput tantum quoddam detruncatum esse, facile sibi persuaderet, qui obiter illud inspexerit. Facies piscis antica, inter os atque dorsi initium, depressa, postica, inter pinnam dorsualem ac pinnam ani, decliuis valde, et, in linea recta ac perpendiculari fere, detruncata quasi, ita, vt hac plane excludatur cauda, quam re vera nullam habet piscis. (In alio indiuiduo, tria ista, quae possidemus, minora magnitudine longe superante, sc. 1. poll. 10. lini lato, ac 1. poll. 6. lin. longo, postica corporis facies limbo aucta est angusto, carnoso, ad marginem crenis acutis inciso, quarum apices tenuissimis aliquot filamentis instructi sunt.) Latera corporis subconuexa. Squamae nullae, sed cutis papillata et aculeata. Papillae per vniuersam corporis superficiem dispersae, minimae, innumerae, subrotundae, striatae, hisque interstratae, hinc et inde nonnullae aliae maiores, magisque prominentes. Color, in spiritu vini sine dubio valde mutatus; dorsum versus in fuscum, abdomen versus in albicantem vergit. Aculei in toto corpore circiter viginti sex,

Tab. VIII. Fig. 2.

Fig. 3.

(variant enim numero et in diuersis indiuiduis, et in vno eodemque, scil. respectu huius vel illius lateris) magnitudinis diuersae, coloris bruni, e lata fixaque basi subito in acutum apicem terminati, striisque ab imo ad summum longitudinalibus exarati. Horum vnus in ima fronte inter oculos, paruus; duo vtrinque ad superiorem orbitae marginem, mediae magnitudinis; tres in contractiore ac crenato dorsi margine, quorum anterior paruus, intermedius mediae magnitudinis, posterior maximus; ad latera dorsi duo, quorum posticus maximus; porro quinque alii vtrinque, inter dorsum et abdomen, in recta fere ac longitudinali serie dispositi, variae magnitudinis; infra hos minorum vnus alterue; denique in extremo limbi abdominis attenuati margine tres, satis validi, quorum intermedius antico paulo propior, quam postico. Caput ab ipso corpore minus distinctum, eidemque penitus quasi immersum; hinc totum piscem caput esse, facile dixeris. Verticis et frontis regio planiuscula; ambitus autem circa maxillam superiorem connexus. Os paruulum, horizontale, perparum prominens, rostratum potius quam dentatum dicendum: vtraque enim maxilla solida nudaque lamina est, substantiae osseae, exterius conuexa, interius concaua, marginibusque secantibus praedita. Maxilla superior, clauso ore, super inferiorem obtusam deflexa, adunca. Labia oris nulla. Narium foramina vtrinque duo, contigua, in antico orbitae margine sita. Oculi, respectu ad integri piscis magnitudinem habito, magni, perpendiculares, tenui cutis communis propagine obtecti: iridibus argenteis.

Rima

Rima vtrinque vnica, ſemilunaris, perpendicularis, ſub membrana, retrorſum expanſa ad branchias patet, proxime ante pinnae pectoralis baſin. Margo totius abdominis, ab iugulo ad anum vsque, limbo ſemilunari, producto, craſſiuſculo, papillato, ac ſubſtantia cum pinna ſic dicta adipoſa Truttarum fere conueniente, auctus eſt. Extremus huius limbi ac dorſi margo in piſce minore, inter aculeos, glaber, in maiore vero denticulatus. Linea longitudinalis nulla. Anus inter limbi mox dicti finem et pinnam ani huic proximam. Pinnae tantum quatuor, duae nempe pectorales, vnica dorſi, et ani vna, diſpoſitae ita, vt, linea recta ab vna ad alteram ducta, aream vtrinque includant triangularem. Pinna pectoralis in medio fere corpore, ori directe oppoſita, baſi oblique deorſum ac retrorſum ſpectans, radiorum tredecim, a primo ad quartum ex ordine longiorum, et ab hoc ad vltimum ex ordine ſenſim breuiorum. Pinna dorſualis in marginis corporis poſtici ſummitate oblique ſita, proxime ad tertium dorſi aculeum, radiorum ad minimum quindecim, quorum intermedii lateralibus longiores ac filiformes. Pinna ani, dorſuali ſimilis, eidemque directe ſubiacens, ſitu obliquo in marginis corporis poſtici imo, radiorum ad minimum ſedecim, intermediis longioribus filiformibus. Pinna caudae, vt ipſa cauda, nulla.

Menſura.

	Lin.	Parſ.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad poſticum corporis marginem — — — — — — — — —		$7\frac{1}{4}$

	Lin.
Ab adunco maxillae superioris apice ad oculi medium	$2\frac{1}{2}$
— — — — — — — — — — — — — — pinnae pectoralis basin —	4
— — — — — — — — — — — — — — pinnae dorsualis basin —	7
— — — — — — — — — — — — — — pinnae ani basin —	7
Diameter oculi — — — — — — — — — — — — —	2
— — — pupillae — — — — — — — — — — — —	$\frac{1}{2}$
Ab vno oris angulo ad alterum — — — — —	1
Distantia inter anticum oculorum marginem — —	$1\frac{1}{2}$
— — — — — vltimi pinnae dorſ. et pinnae ani radii basin — — — — — — — — — — —	$2\frac{1}{2}$
Latitudo horizontalis per dorsi medium — — —	$3\frac{1}{2}$
— — — perpendicularis per pupillae medium —	7
— — — — — — — — — — — rimam branchiarum	$8\frac{1}{2}$
— — — limbi abdominis in medio — — — —	$1\frac{1}{2}$

XII.

Percis pinnae dorſualis radiis XI. ſpinoſis, XIV. mollibus; faſciis duabus latis, albicantibus.

An? Sciaena lineis obliquis lacteis in vtroque latere. *Gronou. Muſ. Ichth.* 1. p. 38. no. 91.

DESCRIPTIO.

Tab VIII. Fig. 4. Color piſcis pallide ſpadiceus, faſciis duabns latis, albicantibus, transuerſis; quarum vna per caput, altera per

per truncum ducta est, interiectis. Capitis fascia, circa occiput, et potissimum circa dorsi initium, lato ac leviter arcuato orta principio, iuxta posticum oculi marginem super operculum branchiarum deflectitur, ac, angustior sensim facta, in inferiore huius margine terminatur.

Margo huius fasciae anterior, praeprimis inter oculum ac inferiorem operculi marginem, rectus, posterior pinnam pectoralem et praecipue dorsum versus subconuexo sub ductu modice arcuatus. Trunci fascia, priore latior, a summo dorso, inter nonum spinosorum sextumque mollium radium satis largo orta principio, sub ductu parum obliquo ac antrorsum vergente, ad imi abdominis marginem vsque descendit, inter pinnarum ventralium extremitates ac anum terminata. Margo huius fasciae anterior ab initio suo sensim fit conuexus, ad anteriora tendens, maxima vero ex parte, eaque inferiore rectus fere ac perpendicularis est; posterior totus rectus, ast a summo ad imum oblique antrorsum vergens. Maxima eiusdem fasciae latitudo paulo supra ipsius medietatem, media circa principium, minima circa finem. Corpus ex ouato-oblongum, cathetoplateum, ab anterioribus posteriora versus crassitie sensim decrescens.

A prona capitis parte, latiuscula, subconuexa ac modice decliui, dorsum mox mediocri sub arcu ascendit vsque ad tertium pinnae dorsualis radium spinosum, abhinc secundum lineam fere rectam sensim sensimque descendit ad pinnae modo dictae finem vsque, et ab hoc recta fere in pinnae caudae principium abit. Inferior corporis margo in pectore subarcuato descendit, in abdomine rectus ac horizontalis fere est; secundum ani pinnam adscendit, indeque in pinnae caudae principium recta fere excurrit. Dorsum pectore et abdomine contractius. Caput obtusum, vtrinque compressum, ac prona parte laeue. Operculum branchiarum, laminaque vtriusque lateris intermedia squamis instructa. Margo illius posterior duabus distinctis spinarum prominentium ac inter se diuergentium seriebus est armatus. Os obtusum, parum sursum spectans, situ oculis inferius, arcuatum ac latus vtrumque versus deflexum. Labia oris dentes vix tegentia. Maxillae, ore clauso, fere aequales, aperto autem, inferior superiore paulo longior. Harum singula vnica tantum dentium conicorum, breuium ac obtusiusculorum serie instructa. Oculi ad latera capitis, magni versus anteriora spectantes, ac ob frontem latiusculam a se inuicem satis remoti. Nares oculis, quam ori, paulo propiores. Aperturae branchiarum pone ac subtus largo hiatu patentes. Membrana branchiostega sub inferiore operculi parte recondita, contractior, tribusque tantum ossiculis suffulta. Squamae dense arcteque congestae, magnitudine mediocres. Linea longitudinalis, ex angulo operculi branchiarum superiore prodiens, versus dorsum primo oblique adscendit, inde, e regione quarto pinnae dorsualis radio spinoso opposita, inflexa sensim, ad eiusdem pinnae finem vsque, cursu rectiori et cum huius basi parallelo, descendit, tandemque breui, ast recta fere via, in superius pinnae caudae principium excurrit, toto suo itinere superiori, quam inferiori, corporis margini longe propior. Anus inter pinnarum ventra-

ventralium compositarum apices et pinnae ani principium. Pinna dorsi vnica, e regione, pinnae pectoralis basi fere opposita, initium capiens, habito ad ipsius basin respectu, longa, in medio sinuosa, continua tamen, ex duplici radiorum genere, vno sc. spinosorum, altero mollium, siue inermium, constructa. Illorum sunt vndecim, subincurui; a primo ad quartum ex ordine longiores, et ab hoc ad vndecimum ex ordine breuiores. Horum, sc. inermium, quatuordecim sunt, spinosos longitudine superantes, subramosi, a primo ad nonum ex ordine longiores, ab hoc vero ad decimum quartum ex ordine breuiores.

Pinnae pectorales duae: vtrinque vnica, obtusa, radiorum nouendecim, ramosorum, exceptis duobus exterioribus, tam superioribus, quam inferioribus, simplicibus. Pinnae ventrales, binae, contiguae, in anteriore abdominis margine sub pinnis pectoralibus sitae, lanceolatae, subfuscae, radiorum sex, quorum exterior simplex, rigidus et spinosus, caeteri inermes, ac ramosi. Pinna ani mox post anum, e regione pinnae dorsualis radiorum inermium sita, radiorum quatuordecim; horum primus rigidus, spinosus, omniumque breuissimus, secundus priori similis, ast longior, caeteri omnes inermes, subramosi, ac longitudine inter se fere aequales. Caeterum finis huius pinnae fini pinnae dorsi exacte respondet. Pinna caudae integra, aequalis, circa basin squamis vestita, radiorum octodecim, praeter laterales aliquot minores; extimis vtriusque lateris simplicibus, breuioribus; caeteris, iisdemque plurimis, maioribus, ramosis, ac longitudine aequalibus.

Mensura.

Mensura.

	Poll. Paris.	Lin.
Longitudo tota, sc. ab oris extremo ad longiorum pinnae caudae radiorum apices	3	4
— — — ab oris extremo ad extremitatem corporis squamosam — — — — — — — —	2	9
Ab oris extremo ad oculi medium — — — —	—	$3\frac{1}{2}$
— — — — — — angulum operc. br. superiorem — — — — — — — — — — — — — —	—	$8\frac{1}{2}$
— — — — — — principium pinnae dorsi — —	1	
— — — — — — — — — — pinn. pectoralium	—	11
— — — — — — — — — — — — — ventralium	—	11
— — — — — — — — — — pinnae ani — —	1	9
— — — — — — — — — — — — — caudae —	2	$7\frac{1}{2}$
Longitudo pinnae dorsi, ad basin — — — — — —	1	$5\frac{3}{4}$
— — — — — — — — radiorum mollium longiorum — — — — — — — — — — —	—	$5\frac{3}{4}$
— — — pinnarum pectoralium — — — — —	—	$7\frac{3}{8}$
— — — — — — — ventralium — — — — — —	—	$7\frac{1}{2}$
— — — pinnae ani, ad basin — — — — — —	—	9
— — — — — — — — radiorum longiorum — —	—	$3\frac{1}{2}$
— — — — — — caudae, sc. a primis radiis, seu ab eius principio ad longiorum radiorum apices — — — — — — — — — —	—	9
Extremitas corporis squamosa in caudae pinnam extensa ad — — — — — — — — —	—	2
Diameter oculi — — — — — — — — — — — —	—	$2\frac{3}{16}$

Distantia

	Poll.	Lin. Parif.
Diftantia inter primi pinn. dorf. primique pinn. pect. radii bafin — — — — — — — — —	—	9
— — — — — vltimi pinn. dorf. primique pinn. caudae radii bafin — — — — — — — —	—	$4\frac{1}{2}$
— — — — — infimi pinn. pect. primique pinnae ventralis radii bafin — — — — — — — —	—	3
— — — — — pinnarum ventralium bafin et pinnae ani principium — — — — — — — —	—	11
— — — — — vltimi pinnae ani radii bafin et primum pinnae caudae radium — — — —	—	$4\frac{1}{2}$
Latitudo horizontalis per oculorum axes — — — —	—	$5\frac{1}{2}$
— — — — — — — — — pofticum operc. branch. marginem — — — — — — — — — — — — — —	—	6
— — — — — — — — — pinnae ani principium	—	4
— — — — — — — — — — — finem — —	—	$2\frac{1}{3}$
— — — — — — — — — — caudae princip.	—	$1\frac{3}{4}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium — —	—	9
— — — — — — — — dorfi initium — — —	—	$11\frac{1}{4}$
— — — — — — — — principium pinn. dorfi	1	$2\frac{1}{2}$
— — — — — — — — — — — — — ani	1	
— — — — — — — — pinnae ani finem —	—	$5\frac{1}{2}$
— — — — — — — — principium pinnae caudae —	—	5

* * *

XIII.

Percis fasciis tribus albicantibus; osse malae vtrinque in duas spinas, vnam longam, alteram breuem, producto.

DESCRIPTIO.

Tab VII. Fig. 5. Color piscis a spiritu vini valde mutatus, pallidus. Fasciae albicantes vtrinque tres, transuersae, angustae et arcuatae: prima sc. inter caput et corpus, secunda in medio corpore, tertia in cauda, conspiciendae. Prima ad dorsi initium, principio vtrique lateri communi ac 2½ lin. lato, orta, mox vero cis oculum contracta, sensimque valde angustata, sub ductu arcuato et parum irregulari, omnem anteriorem operculi branchiarum partem, lineae instar, decurrit, inque imo eiusdem margine, quem ad aliquot vsque lineas antrorsum sequitur, suam tandem, eandemque angustissimam, figit extremitatem. Conuexitas arcus, quem haec ipsa fascia describit, trunco est obuersa. Fascia secunda, ex membrana, octauum cum nono radio spinoso connectente, ortum ducens, medium truncum, modico sub arcu, cuius conuexitas caput respicit, transversim percurrit, ac ante primi pinnae ani radii spinosi basin in abdominis margine terminatur. Latitudo huius fasciae vbique fere eadem, sc. duas lin. paris. tertias exaequans, superiorem versus extremitatem paulo maior tamen, quam inferiorem versus. Tertia fascia, transuersim per caudam ducta, eiusdem cum antecedente

dente

dente et aequalis vbique latitudinis, arcuata pariter, ita, vt ipsius conuexitas capiti, concauus margo pinnae caudae respondeat, ac vtroque extremo vtrique pinnae modo dictae principio insistat. Corpus oblongum, cathetoplateum. A prona capitis parte, latiuscula, planiuscula ac modice decliui dorsum conuexum mox mediocri sub arcu ascendit. vsque ad tertium quartumue pinnae dorsualis radium spinosum, abhinc contractum magis vtrinque planiori sub arcu sensim sensimque descendit ad pinnae modo memoratae finem vsque, et ab hoc sub angulo valde obtuso in pinnae caudae principium abit. Inferior corporis margo in pectore perparum arcuato descendit, in abdomine rectus ac horizontalis fere est, secundum ani pinnam adscendit, indeque sub angulo valde obtuso in pinnae caudae principium excurrit. Caput subtriangulare, vtrinque compressum, ac prona parte laeue. Operculum branchiarum subconuexum, nudum, glabrum, adeoque diaphanum, vt branchiarum pars, maximae illius laminae subiacens, transpareat. Secunda operculi lamina in leuem eminentiam, vna alteraue crena minuta incisam, producta. Margo operculi membrana terminatur. Lamina ossea, regioni capitis laterali, musculosae, squamigerae et operculo interiecta nuda, glabra, margineque postico dentata.

Malae os (quod etiam inferiorem posterioremque orbitae partem efformat) nudum, superficiei inaequalis ac sinuosae, duabus instructum est spinis, quarum superior, ex inferiore eademque postica orbitae parte prodiens, 5 lin. longa, compressa, retrorsumque

 ducta,

ducta, inferior, priore longe minor, ac obtusior, iuxta oris angulum sita, retrorsum ac paulo deorsum spectans. Apex spinae longae zonam primam, per operculum ductam, paulo transcendit. Vtraque spina regioni musculosae laterali, squamigerae, arcte est adpressa, hinc in carne, quatenus ab eadem tangitur, sinus impressi origo. Os situ oculis inferius, semilunare, vtrinque perparum deflexum. Ostia mucifera in maxillae inferioris ambitu decem. Labia oris satis crassa. Maxillae, ore clauso, aequales, aperto autem, inferior prae superiore parum eminens: vtraque vnica tantum dentium conicorum, breuium, valdeque obtusorum serie instructa. Oculi subrotundi, in summis capitis lateribus, versus anteriora nonnihil spectantes, ac ob latiusculum sinciput a se inuicem satis remoti. Nares simplices, vnico sc. vtrinque foramine peruiae, labio maxillae superioris propiores, quam oculis. Aperturae branchiarum pone ac subtus largo hiatu patentes. Membrana branchiostega sub inferiore operculi parte latens, contractior, tribusque tantum officulis suffulta. Squamae dense arcteque congestae, mediae magnitudinis, tenues, laeues, pellucidae, lineis albicantibus, cuti propriis, plurimis, totamque corporis longitudinem percurrentibus, per series superstratae. Linea longitudinalis ab angulo operculi branchiarum superiore versus dorsum modice arcuato sub ductu ascendit, inde cum pinnae dorsualis basi parallela, ad decimum radium mollem vsque excurrit, inque huius regione persistit penitus obliterata, toto decursu superiori, quam inferiori, corporis margini longe propior. Anus ante

pinna-

pinnarum ventralium compoſitarum apices. Pinna dorſi vnica, e regione, angulo operculi branchiarum ſuperiori oppoſita, initium capiens, habito ad ipſius baſin reſpectu, longa, in medio ſinuoſa, continua tamen, ex duplici radiorum genere, vno ſc. ſpinoſorum, altero mollium, ſiue inermium, conſtructa. Illorum ſunt nouem, ſubincurui, quorum primus $6\frac{1}{3}$ lin. longus, ſecundus primo, tertiusque ſecundo paulo longior; his quartus, quintus et ſextus ex ordine breuiores, hoc vero ſeptimus, octauus et nouus, ex ordine longiores. Inermium octodecim ſunt, ſpinoſos longitudine ſuperantes, ſubramoſi, a primo ad decimum tertium circiter ex ordine longiores, ab hoc vero ad decimum octauum ex ordine breuiores. Pinnae pectorales duae: vtrinque vnica, oualis, radiorum ſeptendecim, ramoſorum, exceptis exterioribus, tam ſuperiore, quam inferiore, ſimplicibus. Pinnae ventrales binae, contiguae, in anteriore abdominis margine ſub pinnis pectoralibus ſitae, lanceolatae, radiorum ſex, quorum exterior ſimplex, rigidus et ſpinoſus, caeteri inermes ac ramoſi; intimus vtriusque pinnae, membrana mediante, ſecundum dimidiam ipſius longitudinem, abdomini cohaeret; caeterum extremitates harum pinnarum faſciam ſecundam iuxta pinnae ani initium tranſcendunt. Pinna ani e regione pinnae dorſualis radiorum inermium ſita, radiorum ſedecim: primus horum rigidus, ſpinoſus, duas lineas longus, ſecundus priori ſimilis, longitudine quinque linearum, caeteri omnes inermes, ſubramoſi, ac longitudine inter ſe non multum diuerſi. Finis huius pinnae fini pinnae dorſi exacte reſpondet, vtraque etiam harum pinnarum circa basin carnosa et squamosa est. Pinna caudae integra, ad extremum rotundata, squamisque circa basin vestita, radiorum circiter octodecim, maxima ex parte ramosorum, ab extimis vtriusque lateris simplicibus ad intimos ex ordine longiorum.

Mensura.

	Poll. Paris.	Lin.
Longitudo tota, sc. ab oris extremo ad longiorum pinnae caudae radiorum apices -	4	6
— — ab oris extremo ad extremitatem corporis squamosam - - - - - - -	3	9
Ab oris extremo ad oculi medium - - - -	—	$5\frac{1}{2}$
— — — — angulum operc. br. superiorem - - - - -	1	
— — — — principium pinnae dorsi -	1	3
— — — — — — — pinnarum pect. -	1	3
— — — — — — — pinnarum ventral	1	6
— — — — — — — pinnae ani - -	2	3
— — — — — — — — — caudae	3	6
Longitudo pinnae dorsi, ad basin - - - -	2	3
— — — — — radiorum mollium, longiorum - - -	—	10
— — pinnarum pectoralium - - - - -	—	11
— — — — ventralium - - - - -	—	10
— — pinnae ani, ad basin - - - -	1	$1\frac{1}{2}$

Lon-

	poll.	lin.
Longitudo pinnae ani radiorum longiorum -	-	8
- - - - - caudae, sc. a primis radiis, seu ab eius principio, ad longiorum radior apices	1	
Extremitas corporis squamosa in caudae pinnam extensa ad - - - - - - -	-	2
Diameter oculi - - - - - - - - - -	-	$2\frac{2}{3}$
Distantia inter primi pinn. dors. primique pinnae pect. radii basin - - - - - -	1	
- - - - - vltimi pinn. dors. primique pinn. caudae radii basin - - -	-	$4\frac{1}{2}$
- - - - infimi pinn pect. primique pinnae ventralis radii basin - -	-	3
- - - - pinnarum ventralium basin et pinnae ani principium - -	-	$9\frac{1}{2}$
- - - - vltimi pinnae ani radii basin et primum pinnae caudae radium	-	$4\frac{1}{2}$
Latitudo horizontalis per oculorum axes - - -	-	6
- - - - - - - posticum operc. br. marginem - - - -	-	8
- - - - - - - pinnae ani principium	-	6
- - - - - - - - - - - finem -	-	$2\frac{1}{2}$
- - - - - - - - caudae principium	-	$1\frac{1}{2}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium - -	-	$10\frac{1}{3}$
- - - - - - - - - dorsi initium - - -	1	
- - - - - - - - - princip. pinn. dorsi	1	$5\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - ani	1	8
- - - - - - - - - pinnae ani finem -	-	7
- - - - - - - - - princ. pinn. caudae	-	$7\frac{1}{4}$

DENTALII

DENTALII

AMERICANI, INGENTIS MAGNITVDINIS, DESCRIPTIO.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Quum portentosissimum obiectum, circa quod versatur nostra dissertatio, in Gazophylacio rerum naturalium Petropolitano non sine summa admiratione primum videremus, ex forma eius, qua tubulis marinis, quos Dentalia vocant, simillimum est, vermis cuiusdam marini habitaculum illud statim pronunciare non dubitauimus; et, ecce! effato consentanea omnino erat relatio; sciscitantes enim, cuius esset originis, vermis marini Americani domicilium, a nauta quodam ex America Archangelopolin aduectum, indeque a D. D. *Areskin*, PETRI MAGNI olim Archiatro, tunc temporis in maritima, hac ciuitate commorante, Petropolin ad rerum naturalium Thesaurum esse transmissum, comperimus.

Quod inter quadrupedia Elephas, inter aues Struthio, inter amphibia Crocodilus, inter pisces Balaena, insecta inter Scarabeus *Hercules*, hic Vermis vermes inter profecto est; monstrum sane horrendum, ast, quod dolemus, a nobis non visum: inane tantum est domicilium, quo habitatoris magnitudinem metimur, et vastitate et structura sua singulari insigne, nec ad alia sui quidem generis comparandum.

Substan-

Quum ab ipſo animali nequeamus, a domicilio nomen ſpecificum deſumere nobis liceat, et vocare illud:

Dentalium arcuatum, ſpongioſum, fuſcum; ſuperficie tuberculis contiguis exaſperata.

Deſcriptio.

Longitudo ab vna ad alteram extremitatem, ſecundum lineam rectam, 4 ped. 2 poll. Pariſ. ſecundum curuaturae arcum vero menſurata, 4 ped. 5 poll. Latitudo ad extremitatem inferiorem, ſeu radicem, 1 poll. ad ſuperiorem 3 poll. 5 lin. Diameter luminis circularis circa radicem 3 lin. alterius extremi vero 2. poll. 6 lin. exaequat. Craſſities ſubſtantiae vbique fere eadem, ſcil. 5 circiter linearum, nec, niſi extremitatem verſus ampliorem, ſenſim attenuata. Tab. IX. Fig. 1.

Forma buccini quoddam genus, quo bubulci in nonnullis Germaniae tractibus boues conuocare ſolent, optime refert; ex radice ſcil. leuiſſime dilatata, tenuique ortum principio, alterum verſus extremum ſub arcuato flexu ſenſim ſenſimque ampliatur.

Extremitas iſta inferior Madreporae cuiusdam fruſto, ex lamellis parallelis, lapideis, diaphragmatum ope inter ſe coniunctis, conſtanti, arcte inhaeret, et e largiori eiusdem corporis baſi et amplexu vi auulſa eſſe videtur. Fig. 2. a. a.

Subſtantia fibrarum, corneae duritiei, ramoſiſſimarum, ſibi inuicem implicitarum, inque plexum denſiſſimum, digiti impreſſioni non cedentem, diſpoſitarum, multiplex et rigidum rete eſt.

Interior huius ſuperficies, domicilii cauitati obverſa, complanata, maculas, in Dentalii longitudinem diductas, ellipticas, hisque interſperſa aequali fere et aliquot linearum ſpatio inter ſe inuicem remota foraminula, maculis ipſis maiora, et facile ab iis diſtinguenda, vndique exhibet.

Fig. 1, 2 et 3. Exterior e contrario ſuperficies inaequabilis, tuberculisque prominulis, contiguis, tota exaſperata eſt.

Color e ruſo-fuſcus ab interiore exteriorem verſus ſuperficiem ſenſim mutatur in fuſcum, ſaturatiorem, quo etiam tubercula, a reliqua ſubſtantiae textura maxime ſe diſtinguunt.

Tubercula autem circumſcriptione ſubrotunda, vel oblonga, tres quatuorue lineas lata, plus minusue elevata, fibrae efformant horizontaliter compreſſae, ſiue tot quaſi laminulae anguſtae, ſitu perpendiculares, a peripheria verſus commune centrum excurrentes, ac in decurſu ſuo, inconſtante lege, hinc et inde confluentes; hinc omnis horum tuberculorum facies incondite radiata apparet. Accedit etiam, quod gluten quoddam concretum, quod plurimorum ſubiit interſtitia, eandem paulo reddat deformiorem.

E centro nonnullorum, modo dictorum, tuberculorum patulo, tentacula emergunt fibroſa, irregulariter ramoſa, ſibi inuicem implicata, ciusdem cum ſubſtrato

ſtrato plexu; cuius verae ac ſine dubio animatae ſunt propagines, ſubſtantiae ac coloris, hinc a tuberculis ipſis, ſaturatiore tinctis, facile diſtinguenda. Aſt plurimorum tuberculorum centra clauſa penitus ſunt, nec tentacula ſua, retracta et abſcondita, conſpicienda praebent.

Teſtae quoque paraſiticae, ſcyphiformes, quadri- vel quinque-laterae, inuerſo-conicae, e fundo ſcil. planiusculo ſenſim ampliatae, patentes, ſubſtantiae calcariae, albicantis, intus ſtriis ſeu ſulcis longitudinalibus exaratae, in ſuperficie paſſim in conſpectum veniunt, ipſi Dentalii ſubſtantiae ad 2 circiter linearum profunditatem totae immerſae, eidemque firmiter agglutinatae, nec absque fracturae periculo extrahendae.

Denique puſilli etiam Dentalii, ex adulti baſi propullulantis, facienda eſt mentio: conicae id figurae eſt, 1 poll. longum, 8 lin. ad baſin, quam, pariter vt adultum, clauſam habet, latum, luminis 3 linearum; textus ex altera parte craſſioris, ex altera tenuioris, vniformis, ac tuberculis prorſus deſtituti. Fig. 1. b. et Fig. 2. c.

* * *

Alterum, quod ad manus habemus, indiuidium, ſecundum curuaturae arcum menſuratum 3 ped. 8 poll. longum, inconditum et irregulare magis eſt, coloreque pallidiore, e ruſo-fuſco tinctum. Non omnis enim huius ſuperficies in tubercula eleuata eſt, ſed aequales etiam, vniformes, nec ab ipſo ſubſtantiae textu discrepantes eius occurrunt regiones, et, quae tuberculis donatae sunt aliae, ea partim regularia, quasi stellata, partim irregularia, luxuriantia, valdeque prominentia, nec ab ipso substantiae textu, vel colore, vel structura, diuersa habent.

Longe pluribus quoque hoc obsessum est testis supra memoratis, quam prius, earumque plurimae per angustiorem, vel inferiorem, Dentalii extremitatem sunt dispersae.

Basi gaudet integra, patente, lumine 3 lin. diametri; his notis a priore potissimum differt, caeterum textura, forma, substantia, duritie, ac internae superficiei conformatione, illi simillimum.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE POTIORES ANNI MDCCLIX. PETROBVRGI FACTAE, ET IN EAS CONSIDERATIONES.

Auctore

I. A. BRAVN.

Quum huius anni 1759. obſeruationes meteorologicae iisdem inſtrumentis factae ſint, et eadem elaboratae methodo, ac antecedentes: parum aut nihil omnino praemonendum eſſe videtur. Sunt ſcilicet barometricae factae eodem barometro ſimplici in altitudine 12 circiter pedum ſupra mare Balticum. Altitudines ſecundum pollices Pariſienſes ſunt notatae, et eorum partes centeſimas, ita vt numerus ante punctum pollices, numerus autem poſt punctum partes pollicis dicti centeſimas indicet. Altitudinum barometricarum ſummae et infimae cum differentiis per omnes anni menſes ſunt et hic nobis enotatae. Ad obſeruationes thermometricas quod attinet, et hae thermometro ſcalae Delilianae ſunt factae, vbi ciphra calorem aquae bullientis, et numerus 150 punctum congelationis notat, quo aqua in glaciem abire ſolet. Tempus, quo hae obſeruationes ſunt notatae, fuit ordinarie ſub ortum ſolis, et hora ſecunda, vel inter ſecundam et tertiam post meridiem, quoniam illo tempore calor minimus, hoc autem maximus, caeteris paribus, et hic Petroburgi esse solet. Vbi vero sub ortum solis obseruationem commode instituere non potuimus, ob solis ortum tempore aestiuo nimis matutinum; post horam vndecimam post meridiem vtplurimum obseruationem fecimus, ad calorem minimum consignandum, quum caloris inter hoc tempus et tempus ortus solis tempore aestiuo vtplurimum differentiae parum aut nihil esse hic soleat. Caeterum et in obseruationibus thermometricis summi et infimi caloris gradus singulorum anni mensium cum differentiis sunt enotati.

In impetu ventorum tantum quatuor gradus cum aliis distinguere solemus, ita, vt gradus quartus procellam notet, alios et octo gradus vehementiae ventorum distinguere constat.

Quantitas pluuiae tantum mensibus aestiuis nunc est notata, quia horum mensium pluuiae praecipue in fertilitatem et infertilitatem anni influunt, et quantitas niuium mihi commode notari non potuit; quoties autem ninxit, adnotauimus, vti et reliqua meteora nobis quolibet mense obseruata.

Denique, quae ex hisce obseruatis concludi potissimum eorum comparatione proxime possunt, indicavimus, animaduersionesque, vbi e re videbantur, adiecimus. En ipsas obseruationes et quidem primum barometricas:

Altitudo

Altitudo Barometri.

Menſis	Maxima	Minima	Differentia
Ianuarii 16.	28. 45	27 00 d. 24 et 26	1. 45
Februarii 5.	28. 68	27. 59 d 13	1. 09
Martii 31.	28. 53	27. 05 d. 6	1. 48
Aprilis 30.	28. 19	27. 60 d. 3	0. 59
Maii 31.	28. 25	27. 25 d. 15	1. 00
Iunii 30.	28. 50	27. 55 d. 24	0. 95
Iulii 1.	28. 50	27. 60 d. 15	0. 90
Auguſti 17.	28. 42	27. 40 d. 31	1. 02
Sept. 17.	28 67	27. 55 d. 1	1. 12
Oct. 13.22.31.	28. 35	27. 15 d. 6	1. 20
Nouemb. 9.	28. 82	27. 27 d. 1	1. 55
Decembr 15.	28. 17	27. 65 d 22	1. 05

Conſectaria, quae ex collatione hac ſummarum et infimarum altitudinum barometricarum fluunt, ad ſequentia capita redeunt:

1.) Summa hoc anno altitudo barometri fuit 28. 82; infima 27.00. Ergo maxima differentia 1.82.

Quodſi haec maxima altitudo barometrica comparatur, cum ſumma omnium adhuc obſeruatarum Petroburgi, quae eſt ſecundum obſeruationes antecedentes anni 1757. 29.12. adparet, eam eſſe minorem hac $\frac{30}{100}$ ſiue fere $3\frac{1}{2}$ lin. pollicis Pariſ.

Contra altitudo barometri infima huius anni eſt maior minima 26.41. ad hoc vsque tempus hic obſeruata $\frac{59}{100}$ poll. Pariſ. ſiue fere 7. lin. eiusdem pollicis.

Eſt igitur differentia maxima altitudinum barometricarum huius anni aequalis pollici vni et 82. partibus eius centeſimis, ſiue 1″.10‴. fere, adeoque minor

minor ſumma variatione ſiue differentia, quae huc vsque eſt 2.71. minor $\frac{88}{100}$ ſiue $10\frac{1}{2}$. lin. et quod excedit. Quodſi medium arithmeticum ſumatur, vti ſemper ſumſit *Kraftius* in ſuis obſeruationibus meteorologicis, media huius anni altitudo prodit hoc ſenſu 27.91. Alias per mediam altitudinem proprie eam intelligi, conſtat, quae reſultat, ſi per numerum obſeruationum ſumma. Earum diuidatur eadem reſultat, ſi ſumma maximae et minimae altitudinis per 2. diuidatur, vt alias ſolet.

Caeterum maxima altitudo barometrica obſeruata eſt Nouembris 9. ſub ſequentibus circumſtantiis. A Nouembris 1, quo altitudo barometrica fuit 27.27, vsque ad diem 9. perpetuo Mercurius adſcendit, donec dicto die ſummam nactus ſit altitudinem. H. 10. p. m. iam ad 28.70. deſcenderat, et perrexit ad d. 12. quo 27.75. rurſus altitudo eſt obſeruata. Ventus diebus hisce fuit admodum debilis S 1. plerumque, ſaepe nullus, vti quoque die antecedenti, et hoc ipſo die fuit nullus, ſequente vento O. et SO2. Thermometrum mane fuit 180. quod maximum hoc menſe fuit frigus, excepto die 30, quo fuit nocte 183. et p. m. 172. Tempeſtas erat ſerena, vti quoque diebus aliquot antecedentibus, ſequentibus autem diebus coelum fuit nubilum et niuoſum.

Minima altitudo 27.00. contigit Ian. 24. h. 8. a. m. Deſcendere coepit Mercurius ab altitudine 28.15, quae d. 21. h. 8. a. m. eſt obſeruata, et die ſequenti 25. rurſus ad 27.43. adſcendit, ſed d. 26. denuo ad 27.00. deſcendit, poſtea vero adſcendere perrexit ad diem 28. vsque, quo h. 11. p. m. altitudo 27.86. fuit notata. Thermometrum monſtrabat d. 24. 148. et d. 26. 151. diebus

diebus proxime antecedentibus altitudo thermometrica fuit 150 et 148, sequentibus autem duobus post d. 26. inter 171 et 158 variabatur. Dies aliquot antecedentes fuere nubili et niuosi, et sequentes quoque ad d. 27, quo et die sequenti tempestas fuit serena, quo 5. maculas in sole obseruaui, quae neque respectu qualitatis neque quantitatis aliquid peculiare et extraordinarii habebant. Hoc tamen forsan adnotare conuenit generatim, me omni die sereno solem obseruasse, et nullo eum sine maculis hoc anno vidisse.

Numerus macularum fuit diuersus et a 2. ad 11. variatus; diuersae magnitudinis, vt solent, fuere, earum maximam tamen triplo, quin quadruplo maiorem aestimaui, quam Mercurius solem transiens solet adparere. Micrometrum adcuratius nunc defuit, quo exactius magnitudinem determinare licuisset.

Secundum obseruationes thermometricas variationes caloris fuere hoc anno sequentes, per singulos menses.

	Calor Minimus.			Maximus.		Differentia.
Ian.	21	- 179	-	145 d. 11	-	34
Febr.	15	- 187	-	139 d. 28	-	48
Mart.	8	- 165	-	130 d. 25	-	35
April.	6	- 157	-	122 d. 30	-	35
Maii	13	- 149	-	104 d. 26	-	45
		in Sole		82		
Iunii	10 et 11	- 141	-	107 d. 2	-	34
		in Sole		97		

	Calor Minimus.	Maximus.	Differentia.
Iul. 18 et 19	- 131	- 104 d. 2	- 27
		in Sole 93	
Augusti. 30	- 141	- 108 d. 5 et 6	- 33
		in Sole 92	
Sept. 29	- 158	- 126 d. 8	- 32
Octobr. 21	- 161	- 126 d. 2	- 35
Nou. 30	- 183	- 147 d. 2	- 36
Dec. 26	- 212	- 150 d. 3	- 62

Quodsi has variationes caloris et frigoris, maximos scilicet et minimos caloris gradus, per singulos menses comparamus, patescit frigus maximum fuisse 212. et calorem maximum in vmbra 104; in Sole vero 82. Fuit igitur differentia annua 108, qua maior annua ad hoc tempus non est obseruata, vti quoque tantus frigoris gradus hic Petroburgi nunquam adhuc est notatus, maximum enim frigus ad hoc vsque tempus obseruatum fuit 201, secundum *Kraftii* obseruationes, et meas duodecim annorum, *Delilius* tamen in vno thermometro 104. et in altero 103. notauit vti in memoriis suis adnotauit. Calor vero hoc anno maximus minor est maximo alio tempore obseruato per antecedentes obseruationes, scilicet 97. 1757. et 1758. mihi notato. Manet igitur hic gradus 97. summus caloris gradus et spatium variationum thermometricarum erit nunc = 115., scilicet a 97. ad 212.

Frigus summum hoc anno contigit Decembris 26. h. 10. a. m.; h. 8 erat 210 et h. 3. p. m. 208. Diebus duobus antecedentibus variabatur a 185 ad 201 et et duobus sequentibus a 206 ad 173. Notari hic conuenit die antecedenti 25 per totum diem gradum 212 esse obseruatum Archangelopoli, ita vt videatur inde ad nos profectum frigus. Reliquae circumstantiae, sub quibus hoc frigus contigit, huc redeunt: Ventus erat nullus per totum diem; duobus diebus antecedentibus O 1. et sequentibus O O. Dies 26. erat serenus, vti quoque duo dies antecedentes; dies sequens fere fuit serenus, reliqui proxime sequentes fuerunt mixti, ex parte scilicet sereni, ex parte nubili et niuosi. Barometrum d. 26. fuit 28 40 per totum diem a die 22, quo erat 27 70 adscendebat paullatim ad dictam altitudinem, sequenti die 27 descendere coepit, et perrexit ad diem 28, quo altitudo 28. 18 est notata, et pauca nix cecidit. Non alienum erit, hic alios insigniores frigoris gradus adnotare, qui mensibus Nouembri et Decembri huius anni sunt obseruati.

Nouembris	8 - 170	altit. barometri respondens	28. 78
	9 - 180	- - - -	28. 82
	28 - 175	- - - -	27. 44
	29 - 178	- - - -	27. 58
	30 - 183	- - - -	28. 18
Decembris	1 - 179	- - - -	28. 25
	5 - 174	- - - -	28. 21
	6 - 178	- - - -	28. 12
	7 et 8 - 189	- - - -	28. 20
	12 - 195	- - - -	28. 18
	13 - 191	- - - -	28. 21
	14 - 200	- - - -	28. 31
	15 - 201	- - - -	28 65

Decembris 17 - 203	-	-	-	-	28. 35
27 - 207	-	-	-	-	28 35
28 - 185	-	-	-	-	28. 22
29 - 187	-	-	-	-	28. 33
31 - 190	-	-	-	-	28. 60

Die 14, quo hic loci gradus 200 eſt obſeruatus, Archangelopoli 213½ eſt notatus.

Regiomonti Decembris 26. gradus frigoris 4 infra o coelo ſereno, vento O, eſt notatus ſecundum thermometrum *Fahrenheitianum*, qui aequalis 181 ſcalae noſtrae, qui maximus quoque omnium Regiomonti obſeruatorum fuit hoc anno.

Frigus hoc ſaeuum circa finem Decembris in terram pollices 30 pedis Londinenſis penetrauerat.

Glacies Neuae fluminis craſſiſſima vbi fuit, adaequabat 29 poll. pedis Lond. quae fere ordinaria craſſities eſſe ſolet, quin maior interdum hieme mitiore eſt deprehenſa, id quod inde eſſe videtur, quod hac hieme aqua rariſſime ita alta fuit, vt glaciem Neuae fluminis transgrederetur, id quod aliis annis frequenter fieri conſueuit.

Calor maximus Maii 26. contigit ſub ſequentibus circumſtantiis: Dies 26 fuit ſerenus, vti quoque dies antecedentes a 22, et ſequentes quoque ad Iunii 6. Ventus erat S 1, et aliquot diebus ſequentibus continuauit, dein verſus in O. Diebus antecedentibus a 22 S et O alternabant, qui leniter ſpirabant.

Barometri altitudo erat 28. 12. die antecedenti 28. 01. et ſequenti 28. 15.

Cae-

Caeterum gradus caloris praeter hunc insigniores fuere sequentes: Maii 23. 113, in sole 98. d. 24. 108, in sole 95 d. 25. 107 d. 27. 106, in sole 92 d. 28. 106, in sole 92 d. 29 et 30. 110.

Iunii 1. 109 d. 2. 107 d. 29. 110 d. 30. 111. Reliqui intermedii minus calidi fuere, ita vt thermometrum saepe monstraret 133. 136. 140 et 141.

Iulii 1. 108. d. 21. 112 d. 24. 111. d. 25. 106, in sole 98. d. 30. 112. in sole 96. d. 31. 112, in sole 96.

Augusti 1. 111, in sole 103. d. 2. 110, in sole 96. et 109, in sole 92. d. 3. 111. d. 4. 110. d. 7. 111. d. 8. 111. d. 9. 110. d. 10. 111, in sole 102. d. 11. 109, in sole 104. d. 13. 112. d. 14. 112. sequuti sunt dein dies minus calidi.

Meteora potiora hoc anno huc fere redeunt:

1) Venti vehementiores contigere Ianuarii 15 et 16, seu potius nocte inter 15 et 16 W 4 d. 10 et 11 W 4 et 3 d. 18. W 3 d. 20 et 21 *S* 3. Nocte inter 23 et 24. W 3 Februarii 9. W. 3 d. 11. W 3 d. 13. W 4. Martii 4 et 5 SW 3 et 4 d. 12. W 3 d. 21 W 3 et 4. Aprilis 30. S 3. Maii 4. S 3 d. 16 W 3 et 4. Iunii 27. W 3. Iulii 10. W 3 d. 13 W 3 d 15. W 3 d 18. W 4 d. 21 et 22. W 3 d. 25. S 3. Augusti 10 et 11 S 3 et 4. Septembri nullus vehementior ventus. Octobris 6. W et SW 3 d. 9. W 3 et 4. Mense Novembri ventus vehementior nullus. Decembris 2. W 3 et 4. d. 3. W 3.

2) Altitudines pluuiae per menses aestiuos, siue a Maio ad Octobrem, fuerunt, quae sequuntur.

Pluuiae altitudo Mense Maio $= 16\frac{1}{2}$ Lin. Iunio, 19. Iulio 14. Augusto 42. Septembri $9\frac{1}{2}$. Octobri 31. Altitudines hae lineis Parisiensibus sunt expressae, ex quarum comparatione patet, maximam pluuiae altitudinem fuisse mense Aug. 42; minimam Septembri $9\frac{1}{2}$. Summa igitur pluuiae delapsae per hos sex menses aequalis est lineis 132. siue pollicibus 11.

3) Meteora ignea, fulmina cum tonitru, sequentia contigere hoc anno.

Primum tonitru solito citius hoc anno contigit Martii 25, sed semel tantum mihi auditum. Accidit h. 11. p. m. et fulmen satis viuidum est conspectum. Thermometrum erat 137 et Barometrum 28.25. Ventus S 1 et coelum tantum nubibus tenuibus obductum. Circa h. 8. p. m. thermometrum monstrabat 125. h. 3. p. m. 130. Porro Aprilis 30 ab h. 5 ad septimam tonitrua ingentia cum fulminibus viuidissimis sunt audita. Obseruaui hic semel motum fulminis in linea spirali, quod videre mihi nondum contigerat. Maii 20 inter h. 1 et 2. p. m. tonitrua vehementia cum fulminibus et vento vehementissimo et pluuia larga, durauit fere 1 horam D. 28. tonitru tantum e longinquo auditum est aliquoties. Iunii 6 inter h 6 et 7. p. m. tonitru sed tantum e longinquo, Iulii 4 tonitru cum vento vorticoso, et pluuia mediocri. D. 3. tonitru comitatum vento vehementiore W. Porro d. 5 mane et nocte tonuit, item d. 25 et 28. Augusti

Augusti 20 et 21 vltima tonitrua sunt audita. Tonuit igitur mense Martio semel, Aprili semel, Maio bis, Iunio semel, Iulio quinquies, Augusto bis. Ergo per totum hunc annum tonitrua fuere 12 diebus. Quamvis sub altitudine barometri maiore, scilicet vltra 28 poll. non facile tonet; tamen ex recensitis adparet, vltra hanc altitudinem tamen contigisse tonitrua, sed tantum e longinquo.

4) Meteora emphatica:

Februarii 26 et 28. halo pallida circa lunam; Decembris 16. halo circa solem coloribus iridis corusca, item d. 9. h. 7. p. m. halo pallida circa lunam; d. 24 rursus eiusmodi halo circa solem colorata et nocte halo pallida circa lunam cum duabus paraselenis; d. 22 quoque halo circa lunam sed pallidissima.

5) Aurorae boreales:

Martii 7. Aurora borealis placida sine motu.

Aprilis 11. Lux borealis sine motu, item d. 14. et 18.

Octobris 20. Lucis borealis vestigia.

Nouembris 30. Dec. 3 et 14. lux borealis placida.

Caeterum notandum adhuc est, glaciem Neuae fluminis esse fractam Aprilis 10. h. 9. a. m. et constitisse glacie Nouembri mense nocte inter 8 et 9.

Congelatio vltima fuit Apr. 22. Primum rursus congelari coepit Septembris 22. Si igitur quis huius anni aestatem ab vltima congelatione ad primam computare velit; illa erit adcurate 5 mensium, breuior autem alias esse solet. Ceterum aestas sat fertilis fuit.

Obserua-

Obseruationes acus magneticae circa eius declinationem mediam fere nihil variationis monstrarunt. Est quidem et hic declinatio variabilis per dies, maior scilicet et minor, sed tam parua, vt vix aliquot minutorum primorum sit differentia inter maximam et minimam.

Notatu vero dignior est motus vibratorius acus magneticae, quem obseruaui tempestate fulminea imminente, vel tantum coelo nubibus obducto, qui omnino effectus electricitatis aeris videtur, de quo in sequentibus agam pluribus; monendum tamen hic est, acum mobilissimam esse debere. Nam ordinariae monstrare non solent hunc motum.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE ANNI MDCCLX. FACTAE PETROBVRGI.

Auctore

I. A. BRAVN.

Communicamus rurſus hic obſeruationum meteorologicarum potiora momenta, vt in antecedentibus a nobis factum eſt. Nimirum altitudines barometri ſummas et infimas, quae quolibet anni menſe contigere, pariter maximos frigoris gradus et minimos cuiuslibet anni menſis, et denique ipſa meteora potiora. Ex antecedentibus obſeruationibus iam ſatis conſtat, in barometri altitudinibus notatis numeros ante punctum poſitos denotare pollices pedis Pariſienſis, poſt punctum autem eiusdem pollicis partes centeſimas. Gradus thermometri et hic ſecundum ſcalam Delilianam ſunt adnotati, vbi o calorem aquae ebullientis, et numerus 150. punctum congelationis aquae indicat.

Altitudines barometricae ſummae et infimae per ſingulos anni menſes in altitudine 15 pedum circiter ſupra mare Balticum obſeruatae, cum differentiis fuere ſequentes:

Altitudines Barometricae

St. V.		Maxima.		Minima.		Differ.
Ianuar.	1 et 24	28.50	- -	26.97	d. 15	1.53
Februar.	12	28.43	- -	27.10	7	1.33
Martii	13 et 15	28.45	- -	27.33	19	1.12

Aprilis		25	28.40	27.60	5	0.80
Maii		19	28.40	27.65	11	0.65
Iunii		19	28.26	27.62	4	0.64
Iulii	3 et	4	28.25	27.55	12	0.70
Augusti		30	28.56	27.53	5	1.03
Septembr.		2	28 58	27.50	28	1.08
Octobr.		21	28.52	26.74	7	1.78
Nouembr.		19	28.35	26.95	22	1.40
Decembr.		27	28 53	27.18	15	1.35

Ex comparatione harum barometri altitudinum conspicitur primum, maximam totius anni fuisse 28.58, et minimam 26.74. Quum altitudo huius anni maxima minor sit altitudine 1757 mihi obseruata, scilicet 29. 12; manet haec omnium adhuc hic obseruatarum maxima.

Altitudo minima huius anni, quoniam maior est minima, alias hic obseruata, 26.41; patet, et hanc omnium hic loci obseruatarum manere minimam, adeoque spatium variationum barometricarum manere inuariatum 2.71, siue $2'' 9''' - \frac{1}{100}$. Porro adparet, altitudinem maximam hoc anno accidisse mense Septembri, minimam autem mense Octobri.

Maxima sub sequentibus obseruata est circumstantiis: Thermometrum monstrabat mane h. 6. 138, et h. 2. p. m. 124. Ventus erat OO, vti quoque die antecedenti fuit et sequenti. Coelum serenum erat, vti aliquot diebus antecedentibus et consequentibus. Effectus electricitatis aeris in acu magnetica diebus aliquot antecedentibus et consequentibus admodum sensibiles fuere. Alti-

Altitudo minima comitata his circumſtantiis fuit: Thermometrum monſtrabat 146. Ventus ex occidente ſpirabat vehementia 3, quae dein aucta eſt. Die antecedenti ventus erat S 3, et ſequenti ad meridiem vsque NW 3, ſequente veſperi et nocte tranquillitate, ſeu V. 00.

Coelum erat pluuioſum, vti quoque die antecedenti. Pluuia delapſa erat = poll. 1. lin. 1. Pariſ. Poſt meridiem pluuia niui mixta cecidit. Circa h. 4 p. m. Neuae aquae altiores fieri coepere, id quod ad mediam noctem continuauit. Dies ſequens poſt meridiem ſerenus factus eſt. Barometrum ab hac altitudine parua celerrime adſcendere coepit, ita vt ab h. 7. a. m. ad h. $3\frac{1}{2}$ p. m. ad 27. 00. et vsque ad h. 7. ſequentis diei 27. 35, et hinc tempore 24 horarum $\frac{61}{100}$ = lin. $7\frac{1}{3}$ fere. Solet vtplurimum poſt tempeſtatem et exiguam altitudinem barometricam eiusmodi adſcenſus celerior et aeris tranquillitas ſequi.

Ad differentias altitudinum barometri menſtruas quod attinet, facile conſpicitur, et hoc anno legem illam ſeruari, ſecundum quam variationes barometricae primis et vltimis, quam mediis, menſibus maiores eſſe ſolent. Maxima variatio menſtrua contigit menſe Octobri 1.78, minima $\frac{64}{100}$ menſe Iunio. Variatio annua eſt = 1. 84. parum diuerſa a menſtrua menſis Octobris, ſcilicet tantum maior $\frac{6}{100}$. Quum variatio barometrica omnium maxima hic loci ſit 2.71. ſuperat haec variationem huius anni $\frac{87}{100}$. adeoque manet adhuc omnium hic loci maxima; ſeu ſpatium variationum barometricarum maximum. Haec hactenus de obſeruationibus

 baro-

barometricis; sequitur vt ad obseruationes thermometricas recensendas progrediamur, quae caloris maximos et minimos gradus cum differentiis cuiuslibet huius anni mensis secundum thermometri scalam Delilianam complectuntur.

En ipsas obseruationes:

Caloris Gradus.

		Minimi.	Maximi.	Differ.
Ian.	13	206	- 147 d. 19	- 53
Febr.	11 et 28	185	- 147 - 3	- 38
Martii	15	176	- 145 - 19	- 31
April.	2	168	- 132 - 11	- 36
Maii	2	154	- 109 - 16 et 17	- 45
Iunii	1 et 6	138	- 110 - 20	- 28
Iulii	27	138	- 113 - 21	- 25
August.	20 et 28	142	- 111 - 14	- 31
Sept.	30	157	- 122 - 13	- 35
Octobr.	5	165	- 141 - 30	- 24
Nou.	24	176	- 137 - 2	- 39
Dec.	6	186	- 147 - 18 et 30	- 39

Si hi frigoris et caloris gradus inter se conferantur; adparet primum, frigus maximum fuisse 206 graduum. Notatum hoc mihi est Ianuarii 13. h. 11. p. m. sub sequentibus circumstantiis. Die antecedenti 12. h. 11. p. m. thermometrum notabat 200. Die ipso 13. mane h. 8. 204. die sequenti mane h. 7. 196.

Barometrum notabat tempore obseruationis 27.76. mane h. 8. 27.90. die sequenti 27.32. Coelum erat serenissimum, vti quoque die antecedenti et sequenti.

Ventus

Ventus erat nullus, antecedente W 2, et sequente $WgS3$. Die antecedenti circa meridiem obseruaui halonem circa Solem cum tribus pareliis; quod phaenomenum occidente sole rursus adparuit, sed non tam distincte, quam antea. Quum hic gradus frigoris maximus 206. huius anni sit minor gradu 212, anno antecedenti notato; manere hunc maximum omnium hic loci obseruatorum patet.

Caeterum gradus frigoris insigniores hoc anno fuere mihi notati Ianuarii 8. 189, d. 12. h. 3. p. m. 196, d. 14. 192. Februarii 9. 180, d. 10. 181. Mense Martio d. 13. et 14. 173, d. 24. 170, d. 29. 174.

Gelu in terram penetrauerat 30. poll. mense Ianuario. Maxima glaciei crassities $= 29''$. Lond. mihi reperta est. Calor maximus igitur hoc anno fuit 109. Notaui hunc die Maii 16. et 17. h. $2\frac{1}{2}$. p. m. Circa meridiem thermometrum monstrabat 112. d. 16. et 112. die 17. mane h. 8. Altitudo barometri d. 16. erat 28. 27, die 17, 28. 30. Ventus et d. 16. et 17. vix erat sensibilis W. Dies 16. fere serenus, dies 17. autem perfecte serenus erat. Die 16. inter h. 4. et 5, primum tonitru, sed e longinquo, auditum est. Quum calor huius anni maximus superetur multum a calore maximo 1757. mihi obseruato, scilicet 97; manet adhuc omnium hic obseruatorum maximus caloris gradus 1757. mihi adnotatus. Notatu dignum est calorem maximum incidisse in mensem Maium, quod raro accidit, frequentius mense Iunio vel Iulio ille obseruari solet.

Gradus maiores caloris hoc anno praeterea fuerunt Maii 18. 114, Iunii 9. 114, d. 10. 112, in sole 93. d. 11. 114, d. 19. 113, in sole 103, d. 20. 110, d. 26. 114. Iulii 4. et 6. 115, d. 21. 113. Augusti 14. 111, d. 13. 113.

Ex comparatione differentiarum, siue variationum, caloris porro conspicitur, maximum variationis caloris spatium hoc anno fuisse 97 graduum, quod quum minus sit spatio in antecedentibus obseruationibus stabilito, scilicet 115; manet hoc adhuc hic loci summum. Caeterum minima variatio fuit mense Iulio et Octobri graduum 25 et 24, et maxima menstrua 53 mense Ianuario et Maio 45.

Vti hiems igitur satis gelida, ita aestas contra minus calida erit censenda per obseruationes thermometricas recensitas. Nam neque maximus caloris gradus fuit insignis, neque caloris gradus maiores fuerunt continui.

Restant Meteora potiora, quae per singulos huius anni menses mihi sunt obseruata, et huc redeunt.

Mense Ianuario venti vehementiores fuere sequentes d. 1. W 3, d. 3. W 3, d. 11. O 3, d. 26. S 3, d. 29. W 3, d. 30. S 3, d. 31. NW 3. Nulla igitur procella hoc mense contigit. Caeterum W regnauit.

Dies plerique fuere nubili et niuosi, vti solet, hoc mense, ita vt vix septem claros et serenos numerare licuerit; noctes serenae paullo plures.

Vestigia lucis borealis d. 6. notaui, nulla autem lux borealis insignior et perfecta adparuit, mihi saltem conspecta, hoc mense.

Phae-

Phaenomenum solare obseruaui circa meridiem d. 12. Scilicet halo cum tribus pareliis adparuit. Bina parelia ad latus Solis posita erant horizontaliter more consueto, tertius parelius Zenith versus conspiciebatur, vti figura monstrat. Pars inferior ob coelum nebulosius ibi videri non potuit. Idem phaenomenum circa solem occidentem denuo spectandum se praebuit, cum hac tantum differentia, quod parelii horizontales minus distincte, tertius vero verticalis maior illis adparuerit, et nunc pars inferior halonis ob nubes spectari non potuit, et mox occidentem solem. Tab. X. Fig. 1.

Portiones quaedam halonis, vbi coelum vaporosius erat, coloribus iridis superbiebant. Caeterum coelum erat toto die sereno-vaporosum, thermometrum h. 3. 196. et h. 11. p. m. 200. Barometrum autem h. 3. p. m. 27.80. et h. 11. 27 85. Ventus O 2.

Mense Februario venti vehementiores fuere W 3 d. 1. S 3. d. 3. caeteri leniores ex variis plagis spirarunt.

Dies sereni fuere 10; reliqui nubili et niuosi. Nebula spissa d. 19. mane, sequente serenitate post meridiem, barometro monstrante 28.35 et thermometro 165.

Mense Martio venti vehementiores contigere d. 18 W 4, d. 3. S 3, d. 19 et 20. W 3, sequente, vti vtplurimum solet, tranquillitate aeris, caeterum potissimum regnauit O.

Plurimi huius mensis dies fuere sereni. Nam decem tantum erant nubili et niuosi.

Lux borealis placida d. 22. 28. 29.

Nebula

Nebula crassa d. 31. mane ab h. 7. ad 9. durauit, vento W vix sensibili, barometro 27.78. h. 11. p. m. 28.00, sequente serenitate. Thermometrum erat 163.

Tab. X. Fig. 2. Halo circa solem d. 2. inter h. 3 et 4 p. m. adparuit cum pareliis. Halo erat duplex cum arcu duplici inuerso. Parelius nullus distincte conspiciebatur, vid. Fig. ita scilicet, vt discus eorum rotundus beneque terminatus esset.

Mense Aprili venti vehementiores mihi sunt notati sequentes. D. 12. W 3. d. 22. W 3.

Dies 14 fuere sereni.

Nebula d. 10 mane sequente serenitate p. m.

Vestigia lucis borealis d. 7. d. 1 et 12. Lux borealis debilis.

Mense Maio venti vehementiores d. 2. 3 et 4 W 3 et 4. sequente aeris tranquillate. D. 20. W 3 d. 30. O 3. W regnauit.

Dies 16. erant sereni, reliqui nubili et pluuiosi.

Pluuia delapsa hoc mense = poll. 2.

Tonitru primum et vnicum hoc mense contigit d. 16. p. m. inter h. 4 et 5. Barometro 28.27 descendere incipiente. Veniebat ex S et durauit $1\frac{1}{2}$ h. Thermometro h. $2\frac{1}{2}$ monstrante 109. E longinquo tantum tonitru est auditum.

Nebulae d. 9 et 14. vento vix sensibili vel debili, vt solet.

Iris duplex adparuit d. 9. h. 7. p. m. sub altitudine solis 10°. Altera erat ordinaria, altera tantum segmentum, quod columnam rectam repraesentabat, situ

situ colorum, vt in priore. Orientem versus columna conspiciebatur.

Mense Iunio ventus vehementior d. 3. S4. cum tonitru e longinquo breuis durationis, d. 16. O, dein mutatus in S3 et 4 cum tonitru, rursus breuis durationis. Nnllus ventus praecipue regnauit.

Dies sereni fuere 18.

Pluuiae hoc mense altitudo = lin. 29½ = poll. 2. lin. 5½.

Tonitrua d. 3. 16. 17. Quod d. 3. contigit, prope ad nos non accessit, neque illud d. 17. multo propius, sed illud d. 16 fuit vehementissimum cum pluvia largissima. Coepit circa h. 1. p. m. et circa h. 3. cessauit. Thermometrum h. 12. monstrabat 111. in sole 105, barometrum 28.05, quod ad h. 3 adscendit ad 108, et mox ad 105 descendere rursus coepit. Omnes tempestates hae ex S venere.

Mense Iulio contigere venti vehementiores d. 6. 7. W et NW4. d. 31 SW4.

Dies sereni tantum fuerunt 11.

Pluuiae altitudo hoc mense adscendit ad lin. 50 = poll. 4. lin. 2.

Tonitrua d. 19. ex O, horam fere durans, d. 22. ex S profectum. In acu magnetica vibrationes insignes conspiciebantur, quae tempestate praeterita cessabant. Durante tempestate fulminea S4. flauit. Barometrum monstrabat 27.86. descendens a 27.88. Thermometrum 124.

Menſe Auguſto venti vehementiores d. 10. W 3 d. 14 W 3. ſequente malacia.

Dies ſereni 16.

Pluuiae altitudo lin. 36 = 3 poll.

Tonitrua d. 6. barometro 27.70 adſcendente, thermometro 127. monſtrantibus. Acus magnetica inſignes oſcillationes conſpiciendas praebebat. D. 13. tonitru e longinquo bis auditum h. 6. p. m. barometro 28.18 deſcendente, thermometro 113 monſtrante h. 3. p. m.

Nebula d. 23.

Lux borealis d. 3 et 12. Prior inſignis cum motu radiorum ad Zenith fere vsque, poſterior radios quidem vel columnas ad Zenith extenſas habebat, ſed ſine motu ſenſibili. Halo circa ſolem mihi conſpecta eſt d. 4. h. 8. mane, quae durauit ad h. 2. p. m. Halo haec ellipticam habebat figuram verticem verſus. Menſus ſum ſemidiametrum halonis a ſolis centro ad partem eius ſuperiorem, et aequalem reperi 21°. Semidiameter contra a centro ſolis ad partem inferiorem horizontalem erat = 25°. Ab initio in parte ſuperiore Zenith verſus duae quaſi anſae adparebant, quae vero diu non durarunt. Colores iridis ſaepius exhibebat, ita vt limbus exterior coeruleos, interior vero rubros monſtraret. Coelum erat ſereno-vaporoſum. Barometrum ab h. 6. ad 2. deſcendit a 27.85. ad 27.78. thermometrum monſtrabat 122 in vmbra, in ſole 110. Ventus S 1 et 2, dein vehemens ad tempus factus.

Tab. IX. Fig. 3.

Menſe Septembri venti omnes ex omnibus plagis varie ſpirarunt, et fiere leniores.

Dies

Dies sereni fuere 10.

Altitudo pluuiae = lin. 13.

Nebula d. 8.

Aeris electrici effectus saepius in acu magnetica se conspiciendos praebuere, et coelo sereno et nubilo, maxime vero nubilo et fulmineo.

Congelatio prima d. 15. et pruina, et d. 29. nix 1. pollicem alta cecidit primum.

Mense Octobri venti vehementiores d 8. NW 3 et 4. d. 16. O 3. d. 17. SW 3. caeterum venti potiores S et W flauere.

Dies sereni 7.

Pluuiae altitudo lin. $44\frac{1}{2}$ = poll. 3. lin. $8\frac{1}{2}$.

Aqua Neuae altior d. 8. vento W 3.

Glacies in Neua flumine copiosa d. 17. quae die sequenti rursus cessauit.

Grando mediocris cecidit d. 16. h. 2. p. m. vento O 3 et 4.

Nebula densa d. 11. h. 8. a. m. vento vix sensibili, sequente coelo mixto p. m.

Aurora borealis insignis et perfecta d. 21. h. 9. p. m. incepit, et totum hemisphaerium coeli boreale occupauit, quod flammans et fulgurans adparuit. Electricitatis effectus nulli in acu magnetica conspiciebantur; ventus vix sensibilis erat, quod vtplurimum fit.

Mense Nouembri venti vehementiores d. 7. W 3. d. 10. SW 3. d. 8. S 3. d. 20. W 3. et 4.

Dies sereni 3 tantum, d. 19 24. 25. Nox autem d. 26. serenissima.

Nebula d. 12. h. 7. a. m.

Halo pallida circa lunam d. 8. h. 8. p. m. coelo nebuloſo, vento S 1. barometro 27.67. thermometro 157.

Menſe Decembri venti vehementiores d. 4. primum S dein W 3. veſperi d. 25. S 3. nocte d. 28. W 3. d 29. nocte W 3 et 4. caeterum plerique ex W et S. ſpirauere.

Dies ſereni 4.

Nix ſingularis ad inſtar paruorum ſpiculorum circa meridiem d. 10 cecidit, thermometro 154, barometro 27. 30 adſcendente.

Altitudo niuis ad altitudinem aquae liquefactae vt plurimum ſe habebat vt 11. ad 1, ſi nempe recens lapſa et rarior erat, alias diuerſae rationes obtinent.

Altitudo igitur aquae pluuiae interuallo ſex menſium, a menſe Maio ad menſem Octobrem, fuit = 16. poll. 5. lin. Menſe Iulio maxima, et Septembri minima pluuiae copia cecidit.

Dies ſereni aut maiorem partem ſereni erant 134. adeoque plures quam tertia anni pars.

Venti vehementiores 32. et tonitrua 9. obſervabantur. Numerus ventorum vehementiorum maximus erat menſe Ianuario, Septembri autem nullus.

Aurorae boreales 7, quarum tres perfectae et inſignes erant, notabantur.

Halones circa ſolem cum pareliis ſunt 3, et vna halo circa lunam adnotatae.

HISTO-

HISTORIA ET EXAMEN CHYMICVM LAPIDIS NEPHRITICI.

Auctore

D. I. G. LEHMANNO.

§. 1.

Historiam naturalem et inprimis regni mineralis, innumeris adhuc scatere tenebris, amphiboliis, praeiudiciis et fictionibus, nemo est quem fugiat, qui vel extremis, quod aiunt labiis, hoc studii genus degustauit. Fundamentum omnium horum errorum diversis rationibus innititur, quarum nonnullas hic enumerare, non abs re fore, mihi equidem videtur.

Primam suppeditat praeiudicium auctoritatis, cui complures ita sunt addicti, vt non pro vitio tantum, verum pro peccato habeant, de effatis veterum dubitare, nedum eis contradicere. Rationis sufficientis omni exceptione maioris locum tenet: „*Sic iubet diuinus Pla-* „*to, sic Aristoteles, Plinius, Cordus, Aldrouandus etc.*„ et quis, secundum eorum sententiam, audeat de tantorum virorum fide dubitare, aut eorum effata in ambiguum vocare. Consentientes veterumque opiniones approbantes, si quoque recentiores magnique nominis viros reperiant, quae illis fiducia causae? cui insistunt.

Aut ſi dura ſilex aut ſit marbeſia cautes.

Secundam admiſſorum in hiſtoria naturali errorum rationem praebet, defectus experimentorum. Complures abhorrent ab experimentis inſtituendis, timent microſcopia, ne oculi quid detrimenti capiant, vitant ignem, ne vapores venenati pulmones afficiant, carbonumque puluis niueos denigret manus. Suauiter de obiectis hiſtoriae naturalis ſomniant, et ficta ſibimet ipſis pro viſis renunciant. Nonnulli ſudant in myriadibus experimentorum inſtituendis, ſed non ſatis obſeruant, neque phaenomena, neque producta; Satis illis eſt innumera, idque breui temporis ſpatio, coaceruaſſe experimenta. Hemerodromi, vel venatores curſorii Chymici (Chymiſche par force Jäger) dici merentur. Eſt et aliud Chymicorum genus, quid pro quo in laboribus ſuis admittentes. Parum ſollicitis de puritate obiectorum ſuorum, ſufficit ea ſub hoc vel illo nomine ipſis oblata eſſe.

Producta, ſi eorum praeconceptae opinioni minus reſpondeant, vel abiiciuntur, vel ſilentio praetermittuntur. De hiſtoria ſubiecti, de loco natali, de eius ſpeciebus, de concomitantibus corporibus heterogeneis, ne muſſitant quidem, et ſic plerumque dato vno abſurdo ſequuntur plura.

Tertiam errorum matrem non raro ſynonymia format. In vulgus notum eſt, quot diuerſis nominibus non pauca hiſtoriae naturalis ſubiecta inſigniantur. Praeprimis vero id in Mineralogia accidere ſolet. Sic e. g. nomine Aſteriae nunc Aſtroitae, nunc oculus felis, vel Pſeudoopalus, falſo decorantur. Cum tamen vera Aſteria *Plinii* Lib. 37. Cap. 19. Hiſtor. natur. gemma plane ſit ſingularis, vti in Actis Academiae Regiae Bero-

Berolinenſis Tomo X. pag. 67. vberrime demonſtraui. Natron nunc Aphronitrum, nunc ſal alcali minerale, nunc terram ſale alcalino minerale refertam, nunc boracem crudam apud auctores denotat, vt ne quid addam, cum innumera huius theſeos teſtimonia vbiuis exiſtant.

Accedit *quarto* diuerſa vnius rei ab auctoribus communicata deſcriptio. Exempli loco ſit Malachites, quo nomine nunc minerae cupri virides ſtriatae, ſtriis ex centro verſus peripheriam excurrentibus, polituram admittentes, nunc Iaſpidis genus, nunc Chryſocollae nonnullae veneunt. A nonnulis hic lapis nunc diaphanus, nunc opacus, nunc ſemidiaphanus, perhibetur, cum tamen verus lapis Malachites nihil ſit, quam ſpathum nunc ſeleniticum, nunc calcareum, viride montano, vel Chryſocolla tinctum. Alia huiuscemodi exempla lubens praetereo.

Multa praeiudicia inſuper induxerunt *quinto* veterum medicorum ſomnia, qui iuxta tritum illud: in verbis, herbis et lapidibus multa vis eſt, lapidibus ingentes virtutes in medicandis corporum animalium morbis, absque omni ratione, omnique fundamento deſtituti, tribuerunt. Quae veſania certe non paucas praeconceptas opiniones introduxit, multosque non infimae ſortis viros ſeduxit, falſasque hypotheſes produxit.

Ex hoc labyrintho nullus exitus ſperari vnquam poterit, niſi filum Ariadneum in ſubſidium vocetur, quod Chymia nobis offert. Chymicis inquam opus eſt examinibus, iisque ſtudioſiſſimis et iteratis, ad cognoſcendam veram corporum naturam. Aſt quo labore, quibus impenſis, quanto tempore opus erit, antequam hoc Augiae ſtabulum mundificetur, cum obiectorum innumera

mera ſit quantitas, et in dies plura non ab exteris tantum aduehantur, verum etiam ante noſtros fere pedes detegantur. Herculeus labor requiritur. Interim

—— tentanda via eſt —— —— ——

et Hercules admota manu implorandus, i. e. ſuſcipiendus eſt labor, et corpora ſingula cum Deo et die ſenſim ſenſimque examinanda ſunt. Laborem multorum ſaeculorum hic indigito, verum eſt, ſed idem

—— —— —— labor improbus omnia vincit, et vis vnita fortior. Hoc enim modo cum tempore ad penitiorem naturae eiusque corporum cognitionem peruenire, penetrare poterimus. Aſt quid multis lectorem moror? Rem ipſam, de qua dicturus ſum, aggrediar.

§. 2.

Inter complura lapidum genera non vltimum ea occupant locum, quae plerumque ſub titulo apyrorum comprehenduntur. Huc pertinent exempli gratia Amianthus, Asbeſtus, Talcum, Mica etc. De Amiantho et Asbeſto eorumque natura vberrime in Academia Regia Berolinenſi locutus ſum. De talco et mica aliorum quoque extant ſcripta. Interim alii huius generis lapides adhuc ſuperſunt, inter quos *Lapis nephriticus* non vltimo recenſendus mihi quidem videtur. Dignum ideo cenſui, qui vlterius examinaretur, idque eo magis, quoniam praeter *Caſparum Bartholinum* neminem norim, qui ex inſtituto de eo egerit, ita tamen, vt plus ad eius in arte medica vſum, quam ad eius naturam chymice examinatam reſpexerit. Accedit ingens de hoc lapide auctorum diſſenſus, quem in ſubſequentibus vlterius exponendum mihi ſumam.

Nomen

Nomen lapidis noſtri quod attinet, ideo nephriticus a maioribus noſtris dictus eſt, quoniam morbis renum praeprimis mederi hunc lapidem, falſo ſibi perſuaſerunt. Antiquiſſimis hiſtoriae naturalis ſcrutatoribus plane incognitus fuiſſe videtur, quippe neque nomen, neque vlla eius deſcriptio, in eorum ſcriptis habetur. Quamuis inficias ire non poſſim, Comenſem *Plinii* lapidem apprime cum nephritico noſtro conuenire (vid. *Plin.* Hiſt. natur. Lib. XXXVI. Cap. 22.) cum non tantum viridi gaudeat colore, verum etiam tornatoris manum admittat, ſeque caelari patiatur, et elegantiſſimam excipiat polituram. Accedit, quod ſaeculo elapſo primum ficta eius vis medicamentoſa et antinephritica medicorum animos obrepſerit. Sufficit, neque a *Plinio*, neque ab *Agricola*, *Fabricio*, *Matthesio*, *Albino*, *Kentmanno*, *Barba*, *Cardano*, eius mentionem fieri. Quin et *Mynsichtius* in Armamentario Chymico, inter innumera fere medicamenta nephritica, diuretica, lithontriptica, quorum compoſitionem ad nauſeam vsque communicauit, de lapide noſtro ne muſſitat quidem, ex quo ſatis apparet, nephriticum lapidem famam ſuam virtutis diureticae et lithontripticae nouiſſimis temporibus primum adeptum eſſe. Supereſt auctor tractatus cuiusdam de lapidibus Bezoardicis et medicamentoſis *Iohannes Wittichius* de anno 1589. qui pag. 83. tractatus ſui Cap. V. lapidem nephriticum Indiae occidentalis allegat, mirificasque ei virtutes tribuit. Sed tantum abeſt, vt noſtrum cognouerit lapidem, vt potius de lapide Amazonum, vel Gallorum Iade, locutum eſſe, quilibet facile perſpiciat. Tribuit lapidi ſuo colorem viridiusculum ſtriis lacteis intermixtum, optimumque perhibet praſium, ſuccum ſpinae ceruinae aemulantem, variasque ex eo in India caelatas et formatas piſcium, pſittacorum et coralliorum figuras allegat, perforatas, vt pro amuletis geſtari poſſint. Audiamus vero et celeberrimos Americae auſtralis metatores, *Condaminium*, *Bougerium et Barrerium* dico, qui in itinerario per Guianam, Peruuianam et Amazonum, vel Marannon fluuium, adiacentem regionem, occaſione nationis Galibum et Tapuyum, horum lapidum amplam ſatis mentionem faciunt, dicentes: *Varias ex huiusmodi lapidibus formari figuras, perforatas omnes, duritie ſumma praeditas, nec non niſi puluere adamantino ſcindendas, perforandas, poliendas*. Quae omnia cum lapide noſtro nephritico, lapide molle et tenero, nullatenus conueniunt, quamuis eaedem vires huic lapidi Amazonum adſcribantur, quae lapidi noſtro ab auctoribus tributa reperimus. Vt reliqua, quae de hoc Amazonum lapide eiusque origine referuntur, tanquam ſuperuacanea praeteream. Multo minus ad lapides, nedum noſtros, alius a *Wittichio* l. c. p. 25. allegatus lapis nephriticus pertinet, quippe qui potius ad oſſa Tricheci *Linnaei*, vel Manati *Artedi*, referri debet. *Ferrandus Imperatus* in Hiſtoria naturali Lib. XXV. Cap. 8. Laconicum quendam viridem commemorat lapidem, quem et ſerpentinis annumerat, cuius deſcriptio plurima ex parte cum nephritico noſtro conuenire videtur, ita vt fere mihi perſuaſum habeam, vnum eundemque cum noſtro eſſe, idque eo magis, quoniam nephritici lapidis nullam alias iniecit mentionem. *Boetius de Boot* in Hiſtoria gem-

gemmarum Lib. 2. Cap. 60. lapidem nephriticum pro Smaragdoprasio habet, ambiguus tamen est, annon potius cum lapide Amazonum et Chlorite *Plinii* vnus idemque sit. Reliquum ipsi complures medicamentosas vires tribuit. Cap. 108. Iaspide duriorem nullamque polituram admittentem, perhibet, et Cap. 109. eius patriam Americam, Hispaniam, Bohemiam aliasque regiones asserit. Ex quo constat, vt mihi equidem persuadeo, lapidem nostrum nunquam ab eo visum fuisse. *Lemery* in Dictionaire de Drogues p. 295. lapidem nephriticum ex America et Bohemia ad nos afferri refert, multisque laudibus eius vires effert, lapidemque vere diuinum, Gallis *pierre divine*, esse, certissime credit. Ast quis non videt, virum Celeberrimum lapidem Amazonum, Iade, quem Galli nomine *pierre divine* insigniunt, cum nostro confundere, nullum enim vnquam verum nephriticum ex America allatum audiui, aut ab auctoribus relatum legi. *Pomet* in Histoire de Drogues Parte 3. pag. 104. lapidem nephriticum gryseum appellat subcoeruleumque, et ex noua Hispania allatum, figuramque capitis auiculae referentem. *Valentinus* in Museo Museorum p. 44. multas virtutes huic lapidi tribuit, insimulque monet, ne quis sibi loco nephritici lapidis Malachitem substitui patiatur. Sed hac admonitione facile supersedere poterat; tantum enim Malachitem inter et lapidem nephriticum interest discrimen, vt non nisi imperito imponi possit, vti §. 1. iamiam exposui, et ante triennium Academiae Electorali Moguntinae in dissertatione de Molochite *Plinii* et generatione minerarum striatarum et radiatarum vberius explanaui. *Olaus Wormius* in Museo pag. 95. quatuor species lapidis nephritici allegat: 1) obscure viridem, pinguem, oleosum, qui versus solem aut candelam detentus, maculas virides obscuriores in albo aut sub luteo corpore exhibet 2) Nephriticum lapidem colore melleo vel ex viride subflauo. 3) Alium colore magis viridescente punctulis albis variegatum. 4) Viridem flauum, album, purpureum nigricantem. Omnes hos lapides ex America allatos fatetur, quin immo ex Amazonum regione aduectos iactat, vtque huic suo asserto maior habeatur fides, *Gesnerum* allegat, qui huius generis lapides Oripendulas appellat, ideo quod nationes flumen Marannon adiacentes ex eo figuras diuersi generis perforatas conficiunt, et confectas perforatis inferiorum labrorum foraminibus indunt, non exiguum decoris accrementum ex hoc ornamento sibi somniantes. *Carthеuserus* in Mineralogia recte quidem lapidem nephriticum ad Smectitis genus refert, cum quo et *Woltersdorfius* in Systemate minerali concordat. *Cramerus* in Docimasia P. I. §. 50. dubius de hoc nostro lapide videtur, et mox viridem silicem, mox marmoris frusta, quin immo talcum, sub hoc nomine vendi perhibet. Miror vero, quo fundamento nixus vir Experientissimus l. c. Malachitem eundem esse lapidem censeat, quem germanice Schröckstein vocamus, cum tamen in vulgus notum, hoc nomen proprie lapidi nephritico in frustula dissecto et polito tribui, ideo quod amuleti loco infantibus a superstitiosis appendi contra terrorem soleat. *De Justi* in Mineralogia merito lapidem nostrum.

strum serpentinis annumerat; quae vero de orientalibus suspicatur, nullo nituntur fundamento; sub nomine enim orientalium ordinarie vel Amazonum lapides, vel Malachites, vel Iaspides virides orientales, exhibentur. *Henckelius* in scriptis suis minoribus edit. *Zimmermann.* p. 616. lapidem, de quo dicturus sum, pro vero nephritico habet, et orientales cum maioribus ad Jaspidum genus relegat. Quo vero iure Clarissimus *Wallerius* lapidem nephriticum lapidibus gypseis annumeret, perspicere nequeo, quas enim allegat rationes, nullatenus in lapidem verum nephriticum quadrant; 1) enim nunquam filamentosum et scabrum offendi, lamellosum fere semper. 2) Polituram melius, quamuis difficilius, admittit, quam gypsum. 3) Pinguior est tactu, quam quoduis gypsum. 4) Quoad texturam suam neque ab igne, neque a succis vegetabilium, vllo modo mutatur. Verisimile igitur mihi videtur, speciem, cuius *Wormius* mentionem facit, non ad lapides nephriticos pertinere, quin immo ab igne noster durior euadit, cum coloris tamen iactura, id quod multo aliter fit in lapide gypseo. Miror propterea, quomodo *Pottius* eum in numerum lapidum calcareorum olim recipere potuerit, id quod tamen parte secunda Lithogeognosiae p. 51. publice reuocauit, sibique cum lapide suppofititio rem fuisse confessus est. 5) Calcinatus cum puluere carbonum nullum hepati sulphuris analogum magma constituit. 6) Calcinatus, et ad modum lapidis Bononiensis tractatus, nunquam lumen ab alio lumine attrahit. 7) A nullo acido soluitur, sed tantum particulae quaedam martiales extrahuntur. 8) Per destillationem nullum Oleum foetidum, sed liquorem tantum alcalinum, nactus sum. 9) Calcinatus aqua non mollescit, vt gypsum. 10) In aqua nullo modo, nec coquendo quidem, soluitur, id quod tamen in selenite ex parte fieri consueuit. Plura signa diagnostica lapidis nostri a gypso, parte secunda huius dissertationis experimenta, cum eo instituta continente, se manifestabunt. Optime et quasi acu rem tetigit, mea quidem sententia, Clarissimus *Cronstedt*, nunc director minerarum Suecicarum, qui in Mineralogia §. 81. sub titulo, Argillae solidae partibus maioribus. vel lapidis serpentini, primam speciem constituit lapidem fibrosum serpentinum, sequentem addens descriptionem: *Lapis serpentinus fibrosus meris constat fibris, ita vt facile pro asbesto haberi deberet, nisi fibrae ita essent contiguae, vt ne vix quidem in scindendo et poliendo obseruari possent.* Inter huius generis lapides iuxta viri Clarissimi sententiam primas tenet: *Lapis nephriticus colore obscure viridi*, quem ex loco incognito Germaniae sibi allatum refert. Reliquorum de hoc lapide auctorum sententias e. g. *Neumanni*, *Koenigii*, *Marbodaei*, *Aurelii Gimmae*. *Aldrouandi etc.* lubens praetereo, ne nauseam lectoribus in enumerandis multorum virorum innumeris erroribus moueam. Propius ad metam mihi ipsi propositam accedo, et quae ad historiam huius lapidis pertinere censeo, vlterius exponam.

§. 3.

Lapis nephriticus est lapis lamelloso-fibrosus, laeuis, compactus, mediocriter durus, in igne indurescens, menstruis acidis et alcalinis summe resistens, caeterum vero *ro polituram admittens; coloris plus vel minus viridis et plerumque ex parte diaphanus.* Itali hunc lapidem Ofioda, vel Sciatica, Galli Sciadre, vel pierre nefretique, Belgae Kallsbeé appellant. Germani vocant Nieren-stein, Schröckstein, cuius vltimi nominis rationem §, praecedente reddidi. De nomine latino non est quod reddam, cum in vulgus notum sit, quid νεφρος significet. Reliqua Synonyma, si quae sunt, plurima ex parte falsa, minusque lapidi nostro conuenientia, obseruantur, e. g. Iade, lapis Amazonum, Malachites, Iaspis, et id genus alia, quae quo minus materiae nostrae conueniunt, eo minus vel expositionem, vel refutationem merentur.

§. 4.

Locus natalis lapidis nostri, quantum ego quidem scio, est Saxonia, Bohemia, Italia, Hungaria, Silesia, et; nisi me omnia fallunt, etiam Hispania. An in nostris regionibus crebro quoque inueniatur, adhuc ignoro, nullus tamen dubito, cum Amianthus et Asbestus in satis larga quantitate in Sibiria et prope Olonetz effodiantur, ex quo vltimo loco elegantissima quoque lapidis nostri fragmenta possideo, et si lapidem nephriticum congenerum his lapidibus declarare licet, aliis quoque in locis obventurum, cum certissimis credo. Quis autem scrutatus est? Ad minimum sub hoc titulo varia huius lapidis exemplaria elegantissima et viridissima vidi, quae ex Sibiria allata dicebantur. Ille, quem *Saxonia* porrigit, praeprimis Zoeblicii prope Mariaebergam vna cum lapide serpentino effoditur, cuius comes et nonnunquam crusta (das Saalband) esse solet. Nec minus etiam in aliis *Hermundurorum* montibus reperitur, et quamuis

Stein-

Steinbachius in Chronico Zoeblicensi nullam huius lapidis faciat mentionem, nihilominus ex variis exemplaribus, quae in exiguo meo rerum naturalium et inprimis mineralium gazophylacio seruo, constat, lapidem nostrum saepissime ibi locorum occurrere. Fossores et lapicidae lapidis serpentini eum plerumque corticem venae horizontalis lapidis serpentini (ein Saalband, eine Flötzschaale) appellant, quamuis negare non possim, hoc nomen et aliis lapidibus cum lapide serpentino effractis saepe tribui, e. g. Talco, Amiantho, Asbesto etc. Vt paucis multa complectar, hoc hominum genus omnes lapides hoc nomine insignire solet, qui non eandem cum lapide serpentino duritiem in tornando, poliendo et excauando monstrant, cum tamen certo certius sit, lapidem nostrum nephriticum purissimum iisdem vsibus aptissimum esse, quibus serpentinus destinatur. Ex eo fit, quod nonnullae species lapidis nephritici pro lapide serpentino vendantur, si modo ad vasa et vtensilia ex eis paranda, sint idonea. Huius generis est 1) ea species, quae melleum ostendit colorem, lineis, maculis et punctis obscure viridibus distinctum ex fodina Zoeblicensi, quae ex mola asseres scindente nomen habet, (dem Brethmühlenbruche). 2) Alia species obscure nigra lineis et punctis pallide virentibus et flauis ornata ex sic dicto Hartenhahnbruche. 3) Oliuascens lapis obscure viridibus et albicantibus lineis superbiens ex fodina kleinen Seebruch. 4) Obscure nigricans lapis nephriticus venis obscurissimis nigris et paucis mellei coloris praegnans, ex fodina altgrünen Bruche. Huc pertinet 5) lapis subfuscus punctis liuidis et nigricantibus inter intertextus, ex sic dicto Wiesenbruche. 6) Lapis flauescens punctis obscure nigris refertus, ex sic dicto Leichenbruche. 7) Lapis obscure brunus maculis liuescentibus et summe porosus, ex sic dicto Königlichem rothen Bruche. 8) Nephriticus lapis flauus venis obscure viridibus et punctis eiusdem coloris ornatus, ex supra dicto Brethmühlenbruche. 9) Lapis obscure viridis lineis albis et dilute viridibus nec non particulis talcosis refertus ex durstigen Brüderbruche. 10) Lapis obscure viridis lineis flauis et talco intermixtus ex hartem Hahnbruche. 11) Lapis coloris pallide sulphurei talcosi punctis et lineis obscure viridibus intermixtus ex Seebruche 12) Lapis pallide sulphureus nigricantibus et pallide viridibus maculis distinctus ex Gartenbruche. Omnes hi lapides ex fodinis Zoeblicensibus desumti plurima ex parte in examine Chymico lapidem nephriticum ostendunt. Sed satis sit de lapide nephritico Hermundurorum dictum, plura eius generis specimina allegare superuacaneum foret. *Italici* plerumque sub nomine lapidis lebetum viridis, vel lapidis Comensis viridis, noti sunt, ideo quod prope vrbem Comensem effodiuntur. In *Vngaria* vna cum lapide Amiantho et Asbesto reperiuntur. In *Bohemia* raro, et non nisi in quibusdam fodinis stanni, quantum ego quidem scio, e. g. Plattae, in valle *Ioachimica*, *Hengstae*, et impuri minusque solidi reperiuntur. Ex *Hispania* Bielsenses ex Arragonia vidi, sed lapide calcareo intermixtos, ideoque cum acido ex parte efferuescentes et impuros. *Silesiaci* variae sunt indolis, et miror *Volckmannum* in Silesia subterranea, *Hennelium* ab *Hennefeld* in Silesiographia, *Curaeum* in Chronico Silesiaco et *Swencfeldium* nullam eorum mentionem iniecisse. Praeprimis vero duae huius generis species reperi, quarum prior ex monte Zobten in Ducatu Swidnicensi, perfecte viridis punctis albicantibus intermixtus, cum acidis non efferuescens, satis durus et elegantissimam polituram admittens. Ab incolis pro marmore habetur, et rex Borussorum ex hoc sic dicto marmore, non pauca sibi suoque palatio Potstampiensi et horto suo *Sans Souçi*, fieri fecit, ornamenta. Posterior in Ducatu Monsterbergensi occurrit, et quidem in fodinis prope Reichenstein, in fodina **reicher Trost Israels**, et in cuniculis **Ludwigs** et **tiefer Fürstenstollen**, et **goldner Esel**. Mirum in modum delectatus sum, cum ante octo et quod excurrit annos has fodinas visitarem, et simul obseruarem, sub humo 1) occurrere lapidem calcareum album, quem ex imperitia metallifossores eius loci Quartzum appellant. Hunc excipit 2) lapis corneus niger cum pyrite albo arsenicali arbusculorum modo intertextus, cui simul Amianthus et lapis nephriticus adhaeret Sub hoc sequitur 3) pyrites albus solidus purus arsenicalis. Agmen claudit 4) lapis subfuscus durus pyrite sulphureo interspersus, interdum auri natiui miculas oculo armato exhibens. Haec de loco natali lapidis nostri sufficiant.

§. 5.

Superest, vt de reliquis qualitatibus externis lapidis nephritici nonnulla in medium proferam.

1) Fi-

1) Figura gaudet irregulari in ſtatu naturali, et nunc in maioribus nunc minoribus craſſioribus aut tenuioribus fruſtis occurrit.

2) Textura vt plurimum gaudet lamelloſa, lamellis nunc parallelis vtplurimum, nonnunquam transverſis, ſibi inuicem incumbentibus, et in eo ab Asbeſti cuiusdam viridis ſpecie differt, qui ex meris fibris et filamentis contextus eſt, caeterum polituram admittens.

3) Colore omnes gaudent viridi, nunc obſcuriore, nunc dilutiore, interdum ad flauum inclinante. Quo puriores, eo viridiores.

4) Diaphanos nunquam videre mihi contigit. Semidiaphanos pleroſque obſeruaui, ſi in tenues ſcindantur lamellas et poliantur.

5) Contuſi, in puluerem gryſeum abeunt.

6) Igne magis indureſcunt, et colore ſuo priuantur.

7) Tactu ſunt pingues et lubrici ſteatitis inſtar.

8) Linguae nullum imprimunt guſtum.

9) In menſtruis aquoſis, oleoſis, ſpirituoſis, acidis, alcalinis, neque molleſcunt, neque ſoluuntur.

10) Ad vtenſilia ex eis varia conficienda aptiſſimi obſeruantur, et in hoc lapidi ſerpentino parum cedunt.

11) Metalli, praeter partes martiales, quibus colorem ſuum debent, nihil continent, ſi puri ſint.

12) Plerumque Lapis serpentinus, Amianthus, Asbestus, Talcum quin et Granathi inter se proximi sunt vicini, id quod de eorum homogeneitate, si ita loqui fas est, testimonium non exiguum exhibet. Quod reliquum est, in experimentis nunc enumerandis, lapide nephritico Saxonico, Sibirico, Silesiaco, Bohemico vsus sum, ita tamen, vt semper purissima selegerim frusta, et sic haec omnia et singula ratione loci natalis diuersa exemplaria, vnius eiusdemque naturae esse, cognoui, paucis circumstantiis exceptis, si experimentis Chymicis exponantur Et haec lectorem scire volui. Sequitur examen chymicum.

§. 6.

In examinando lapide nostro nephriticio, sequente vsus sum methodo, vt

1) Menstrua fluida

2) Salia sicca

3) Corpora varia mixta

in subsidium laborum meorum vocauerim, et ne quid erroris committerem, non crudum tantum lapidem, verum etiam calcinatum, examini submisi, et propemodum eosdem euentus laborum meorum in ambobus expertus sum. In praecedenti §. iamiam monui, me tantum purissima frusta adhibuisse, tantum enim abest, vt semper purus hic lapis obueniat, vt potius plerumque nunc talco, nunc amiantho, nunc asbesto, quin immo interdum pyrite arsenicali non minus quam sulphureo, et lapide corneo varii generis inquinatus et remixtus occur-

occurrat. Duplici autem methodo in *Calcinatione* lapidis vſus ſum. Primo lapidem, in ſubtiliſſimum puluerem redactum, crucibulo recenti impoſui, quod leuiter tantum operculo obtexi. Secundo lapidem meum tenuiſſime pulueriſatum crucibulo commiſi, quod cum operculo non ſolum clauſi, verum etiam luto in igne perſiſtente accuratiſſime obliniui, ne quid pulueris carbonum vel flammae immediate accedere poſſet. Ambo crucibula furno anemio impoſui, quem carbonibus extinctis repletum in ſuperficie prius calefeci, et per gradus ignem ad ſummum vsque gradum augendo, per horas duas in ſummo feruore conſeruaui. Igne tandem per ſe extincto, omnibusque refrigeratis, crucibula mea integra reperi, pondere lapidis parum imminuto; vnciae enim duae vix ac ne vix quidem ſcrupulum vnum cum granis duobus perdiderant. Color lapidis erat ex albo ſubluteus, conſiſtentia dura, crudo multo durior. Repetii idem experimentum cum integris fruſtis lapidis noſtri puriſſimi. Euentus praecedenti erat plane ſimilis, cum chalybe tamen percuſſa nullas ſcintillas edebant, in eo naturam lapidis crudi plane aemulantia, qui ſi purus nulloque quartzo mixtus fuerit, hoc in paſſu nunquam lapidem corneum affectat. Structura erat magis lamelloſa et fiſſa, i. e lamellae ſibi inuicem ſuperincumbentes magis inter ſe diſtantes obſeruabantur. Eodem modo etiam mediante deſtillatione ex retorta terrea igne aperto calcinatio lapidis noſtri inſtitui poteſt. Sub hac operatione libra eius dimidia ſcrupulum circiter vnum liquoris cuiusdam fundit, qui cum acidis leuiter efferueſcit, et ſal alcali quoddam volatile in ſe fouet.

§. 7.

I. Ad menſtrua fluida quod attinet, *Aqua deſtillata* vulgaris, tanquam menſtruum ſimpliciſſimum et debiliſſimum, lapidi noſtro ſuperfuſa, neque emolliendo neque extrahendo quicquam effecit, multo minus ſoluendo vllam vim in lapidem noſtrum exercuit, quamuis non digerendo tantum, verum etiam coquendo, rem tentauerim; per chartam enim bibulam puriſſimam filtrata et lente euaporata, neque terreas, neque ſalinas, in vaſe reliquit partes. Lapis pulueriſatus, tam crudus, quam calcinatus, eodem modo tractatus, eadem monſtrauit phaenomena.

§. 8.

Oleum vitrioli album, tam crudo quam calcinato lapidi affuſum, plane intactum illum relinquit, niſi quod certo modo coagulum quoddam, vel gelatinam, cum pulveriſato conſtituat, et neſcio quem moſcho aemulum odorem exhalet. Affuſis tamen tribus aquae deſtillatae partibus, ſi ad pondus olei vitrioli adhibiti reſpicitur, parum extraxit, in tam parca tamen quantitate, vt ne colorem quidem menſtrui mutauerit, quippe qui, poſt longam eamque fortem digeſtionem, albus et puriſſimi laticis inſtar permanet, quod omnino dubium mouere poteſt, et merito debet, ſitne baſis lapidis nephritici, indolis argillaceae, id quod complures perhibuerunt, non pauci ſtrenuiſſime negarunt Verum enim vero noſtram hanc litem non faciemus, cum nondum ſatis de characteribus ſpecificis corporum, inprimis mineralium, generalibus conſtet. Si enim induratio in igne characterem terrae argilloſae conſtituit, lapis noſter

multum

multum ad eius naturam accedit; quando vero extractio terrae aluminosae mediantibus acidis, et emollitio mediante aqua simplici, de terra argillosa testari debent, lapis noster toto coelo ab argillosis differt, vti in subsequentibus vberius demonstrabitur. Haec extractio filtrata in filtro nihil praeter lapidem nullo modo mutatum reliquit. Postquam huius extracti partem euaporationi et crystallisationi exposueram, crystalli emergebant omni ex parte crystallis similes, quae sub nomine salis vitrioli, vel Gillae Paracelsi, notae sunt. Hae crystalli in aqua destillata solutae, et cum oleo tartari per deliquium debita encheirisi mixtae, ne vestigium quidem aluminis monstrauerunt, sed potius verum tartarum vitriolatum exhibuerunt, id quod tamen multo aliter fit in lixiuiis aluminosis, quippe ex quibus si in affusione salis alcali, tam fixi, quam volatilis, debitum obseruatur punctum, crystalli aluminis inde emergunt, si largior salis alcalini quantitas addatur, terra aluminis praeceps datur. Reliquam huius extracti vitriolici partem aliis modis examinaui, et primo cum lixiuio sanguinis bouini cum sale alcali fixo calcinati guttatim miscui, vnde elegans quamuis parcum coeruleum proueniebat praecipitatum, testis irrefragabilis partes nonnullas martiales ex lapide nostro extractas fuisse, id quod clarius adhuc apparet, quando crystalli antea commemoratae denuo aqua destillata soluuntur, et cum hoc lixiuio sanguinis bouini praecipitantur; sub hac enim operatione plus praecipitati coerulei et adhuc obscurioris obtinetur. Cum vero praecipitationem extracti huius vitriolici cum oleo tartari per deliquium tentarem, vix ac ne vix qui-

quidem nubeculam exiguam ex albo flauescentem obseruare potui, et cum sale alcali volatili plane nihil fundum petebat. Sed ne quis miretur, quod nullum fere sub hac operatione praecipitatum apparuerit, scitu erit opportunum, lixiuium sanguinis bouini cum sale alcali fixo calcinati, vel minutissimas martis partes manifestare, quae alias vix ac ne vix quidem detegi possunt.

Notum insuper est Zincum, martem in acidis solutum, in forma metallica praecipitare, vt igitur nihil intentatum relinquerem, et hoc experimentum, quamvis frustra, in subsidium vocaui, ex quo satis constat, acido vitriolico non nisi parum efficaciae in lapidem nostrum tribui posse.

§. 9.

Acidum salis communis optime rectificatum lapidi crudo puluerisato affusum cum ebullitione quadam, eum aggrediebatur, et plus quam acidum vitrioli extrahebat, ita tamen, vt plurima ex parte intactum relinqueret; drachmae enim duae lapidis repetitis vicibus cum hoc acido infusae, postea vero rite edulcoratae et siccatae, non nisi grana sex ponderis sui amiserant. Extractio erat coloris flaui, et cum Oleo tartari per deliquium confusa, flauum exhibebat praecipitatum. Cum lixiuio autem sanguinis bouini elegantissimum coeruleum praeceps ibat, quoad colorem saturatius eo, quod §. praecedente commemoraui. Lapis calcinatus cum hoc acido tentabatur, neque tamen cum hoc acido ebulliebat, neque alia solutionis indicia edebat, interim tamen nonnullas partes martiales extraxerat, id quod praecipitatum pallide coeru-

coeruleum ab affuso sanguinis bouini lixiuio ortum, luculenter demonstrabat. Cum sale alcali fixo nulla fere praecipitatio oriebatur, et vix tenuis nubecula apparebat.

§. 10.

Lapis noster tam crudus, quam calcinatus, in subtilissimum puluerem redactus, *acido nitri purissimo immersus*, paucas eructat bullulas, et parum ex eo extrahitur, cum Ol. tart. p. del. tamen non minus quam cum spiritu salis ammon. aquoso ochraceum, cum lixiuio sanguinis bouini coeruleum offert praecipitatum.

§. 11.

Aqua regis ex partibus vij. acidi nitri purissimi et parte vna salis Ammon. depur. parata, tam ex crudo, quam ex calcinato lapide, absque tamen effervescentia, plus quam omnia acida praedicta extrahit, ita vt proinde alcali fixum et volatile multum ochrae, lixiuium autem sanguinis bouini praecipitatum ex flauo fuscum deiiciat. *Acet. destill.* neque in crudum, neque in calcinatum egit lapidem.

§. 12.

Menstrua alcalina tam fixa, quam volatilia, nullam in lapidem nostram vim exercuerunt, luculentissimo indicio, colorem huius lapidis viridem non a partibus venereis dependere; hoc enim si foret, spiritus vrinosus, vt solet, coeruleum, vel ad minimum coerulescentem, extraxisset tincturam, quamuis non pauci historiae naturalis scriptores et Chymici, iique non vltimi nominis, cuprum in lapide nostro latere, firmiter sibi aliisque persuadeant.

§. 13.

Haec de actione salium in formam fluidam redactorum, quam in lapidem nostrum exercent, sufficiant. Superest, vt

II. *Phaenomena recenseam, quae salia in forma sicca adhibita producunt.* Hic primum Salia media in subsidium vocabantur, et varium in modum tentabantur, ita vt

α) calcinando

β) destillando et sublimando

γ) fundendo

vires suas in lapide nostro experiri possent.

α) *Partes anaticae lapidis nostri et nitri depurati* crucibulo candenti committebantur, et per horam dimidiam in fusione detinebantur. Inter ingerendum in crucibulum parum tantum detonabat nitrum, sed continuato igne mirum in modum mixtum intumescebat, in fine vero denuo subsidebat, et in massam pultaceam abibat, quae calida elegantem pallide viridem colorem (*Celadon* vocant) monstrabat, qui tamen color post refrigerationem euanescebat, et ex luteo gryseum exhibebat. Notandum insuper, durante fusione per subtilissimos crucibuli poros nonnihil mixti huius versus exteriorem vasis superficiem et pedistaculum, cui insidebat, extrauasasse. Extrauasatum colorem pallidum roseum, dum adhuc calebat, prae se ferebat, et breui temporis spatio aeri liberioberiori expositam, in liquorem spissum, plurima ex parte alcalinum, deliquescebat. Massam in crucibulo hac methodo fusam, et aqua destillata calida solutam, per filtrum, quantum fieri potuit, traieci, et in eo integrum pondus lapidis mei puluerisati reperi. Liquor filtratus plurima ex parte post euaporationem nitrum exhibuit, ita tamen, vt in fine lixiuium quoddam alcalinum remanéret, quod omnino a debili detonatione nitri ortum suum ducebat. Notatu hac occasione erit opportunum, plurimos sic dictos lapides apyros cum nitro, quin immo cum purissimo sale alcali fixo vegetabili, tractatos colorem viridem, et accedente Phlogisto rubentem, exhibere colorem. Obseruauit iam hocce phaenomenon Excellentissimus Dominus Director *Marggrafius* in dissertatione de *Platina del Pinto* §. 20 et 21. Quin et ego in Dissertatione de Amiantho eandem communicaui obseruationem.

Lapidis nostri et Salis commun. depurati partes anaticae eodem modo tractatae, vti in praecedenti de nitro dictum est, paucissimos tantum de se spargebant fumos, reliqua in massam satis duram post refrigerationem crucibuli coaluerant, quae massa, in aqua destillata soluta et filtrata, post debitam euaporationem, sal commune reddebat. Lapis puluerisatus in filtro remanens, neque respectu ponderis, neque coloris, mutationem quandam passus erat. Lapis nephriticus, cum *Sale tartari purissimo* in proportione anatica calcinatus, eundem induerat colorem viridem, quem cum nitro nactus erat. Reliquum nullo modo mutatum obseruaui. Superest, vt experimentum supra §. 2. allegatum prolixius exponam.

 Huic

Huic fini recepi ℥ij. lapidis pulverisati et ℥β. pulveris carbonum pini. Bene inuicem mixtas crucibulo indidi, quod conueniente operculo texi, iuncturisque probe lutatis, furno anemio per horas duas commisi, per gradus fortissimum subministrans ignem. Omnibus frigefactis, et ablato operculo, neque odorem hepati sulphuris aemulum, neque aliam obseruaui immutationem, id quod tamen necessario fieri debuisset, si lapis noster ad lapides seleniticos pertineret, quippe qui igne clauso cum carbonibus calcinati semper speciem quandam hepatis sulphuris exhibent. Sed ne quid intentatum relinquerem, lapidem nephriticum tam crudum, quam calcinatum, eodem modo tractaui, quo *Lemery*, *Mentzelius*, *Marsiglius et Marggrafius* in praeparatione phosphori sic dicti Bononiensis vsi sunt. Pulverisatum nimirum lapidem cum mucilagine Tragacanthi in pastam redegi, quam probe siccatam carbonibus imposui, et more consueto calcinaui. Sed nec hic quidem vllum vestigium selenitis apparuit, neque lumen ab alio lumine attraxit.

§. 14.

β) Dicendum nunc erit de actione salium in lapidem nostrum *per destillationem et sublimationem*. Lapis tam crudus, quam calcinatus, cum aequali quantitate *nitri* depurati mixtus, et ex retorta vitrea probe loricata igne aperto destillatus, aliquot guttas acidi nitri in vas recipiens propulerat. Massa in fundo retortae remanens eodem modo se gerebat, ac illa, quam per calcinationem (§. anteced.) nactus fueram, id est, cum aqua destil-

destillata soluta, filtrata, euaporata et ad crystallisationem exposita, nitrum adhibitum maxima ex parte refundebat.

Cum *sale commune* mixtus lapis eundem edebat effectum, nonnullas acidi salis guttulas propellens. Reliqua massa sal commune, praedictis enchirisibus adhibitis, reddebat, lapis ipse nullam mutationem subierat.

ʒj. lapidis cum ʒiij. salis ammoniaci depurati mixta, et ex retorta vitrea loricata igne aperto destillata, parum salis alcali volatilis vrinosi dederat. Reliquum sal ammoniacum primo in forma florum purissimorum alborum, tandem vero aurantio colore sublimabatur, luculentissimo indicio, in lapide nostro inesse partes martiales. Puluis lapidis in fundo remanens, gryseum nactus erat colorem, ex quo iterum apparet, colorem lapidis nostri a partibus martialibus dependere.

ʒij lapidis nostri crudi cum ʒjß. mercurii sublimati mixtae, et eodem modo, quo antecedentes sublimationes, tractatae, colorem ex rubro flauescentem induerunt, sublimato merc. sublim. in forma solita alba splendescente, quoniam nullam passus erat destructionem. Immutatio coloris lapidis ex corrosione dependebat, quam acidum hoc salis concentratissimum in eo tentauerat.

Lapidis nostri et mercur. sublim. ʒj. salis ammon. ʒij. ex retorta vitrea loricata igne aperto destillatae, praeter flores paucissimos aurantios, parum peculiaris exhibebant, ſal enim *Alembrot* colore et forma ſolita ſublimatum reperiebatur, et lapis nihil fere de pondere ſuo amiſerat. Color ipſi erat cinereus. Lapidis nephritici ʒij. arſenic. albi cryſtallini pulueriſati ʒj. ℈j. inuicem mixtae et ſublimatae, arſenicum album plurima ex parte refundebant. In fine laboris ſubſequebatur parum reguli arſenicalis in forma pulueris nigri, id quod plerumque in huiusmodi experimentis accidere ſolet, quando materiae cum arſenico tractatae phlogiſton quoddam continent.

§. 15.

γ) *Salia* in fundendis terrarum et lapidum generibus non minus, quam in fuſione metallorum, inſignem vim exerere, in vulgus notum eſt. Videamus in praeſentiarum, quid in lapidem noſtrum poſſint.

De nitro et ſale communi iam dictum eſt §. 13. Supereſt, vt de reliquis ſalibus magis mixtis et compoſitis ſermonem faciamus. Huius generis ſunt omnia ea ſalia, quae fuſioni, reductioni, ſcorificationi et vitrificationi, vel per ſe, vel cum aliis mineralibus vitreſcibilibus mixta, inſeruiunt. Antequam vero experimenta hunc in modum facta ſeparatim exponam, paucis tantum referam, quantum lapis noſter per ſe igni reſiſtat. *Vncia eius dimidia* pulueriſata, crucibulo bene clauſo commiſſa, et igni fortiſſimo in furno noſtro anemio, qui praeſertim vitrificationibus duriſſimis inſeruit, (*Cerberum Henckelianum* plerumque ſalutant) per horas tres cum ſemiſſe expoſita, vix ac ne vix quidem coaluerat; digitis enim facili negotio in puluerem redigi poterat.

De

De pondere nihil defecerat. Color erat ex flauo brunus. *Drachmae tres grana* 18. per horas duas furno, commissae, in quem ventus per folles admittitur, eodem modo se habebant, et non nisi grana quatuor perdiderant, quamuis pedistaculum non minus, quam fundus crucibuli, ex parte in vitrum abierant.

Lapis nephriticus, *cum dupla portione* salis tartari purissimi per horas duas in igne furni anemii fortissimo detentus, in massam quandam semiuitrificatam abit, colorem ex flauo viridescentem prae se ferentem.

Drachma vna lapidis cum ℥iß. salis tartari et ℈j. boracis cocta, per horas duas in furno anemio fusa, in vitrum elegans obscure luteum coaluerat.

Lapidis nephritici ℥j. cum ℥ß. tartari vitriolati per horas $2\frac{1}{2}$ in furno anemio detenta massam exhibebat spongiosam, satis firmiter cohaerentem, coloris pallide rubri. Sed per horas $3\frac{1}{2}$ fusum hoc mixtum, vitrum elegans viridescens praebebat.

Cum experientia compertum habeam, *nitrum fixum arsenicale*, ex partibus anaticis nitri depurati et arsenici albi crystallini per fusionem paratum, complura corpora, igni alias per longum temporis spatium resistentia, breui tempore in fluxum redigere, sequens institui experimentum.

Miscui nimirum ℥ß. huius nitri fixi cum ℥ij. lapidis nostri, tam crudi, quam calcinati, et crucibulo commisi,

misi, quod per horam vnam et semissem igni expositum, post refrigerationem vitrum continebat viridescens. Inter fluendum, mixtum spumescebat, et se in crucibulo mirum in modum subleuabat. Hoc experimentum eo maiore gaudio me affecit, quo magis ex eo conuenientia quaedam lapidis nostri cum amiantho elucescebat, quippe qui eadem phaenomena, non tantum cum nitro hoc fixo, verum etiam cum Tartaro vitriolato, mihi exhibuerat.

Progredior nunc ad experimenta, cum sic dictis fluoribus chymicis instituta. Hic primo loco *fluoris sic dicti crudi* ℥j cum ʒij. lapidis calcinati igni fusorio per horam vnam exposui, et omnibus refrigeratis scoriam adeptus sum coloris obscure nigri.

Fluor niger et lapis calcinatus, in praedicta quantitate iisdem encheirisibus fusioni expositi, idem dederunt productum.

Eodem pondere quoque in adhibendo fluore albo vsus sum, et productum praecedenti simile obtinui.

Fluoris nigri ℥jß boracis coctae ℥j. lapidis calcinati ʒij. per integram horam fusae elegantissimum praebebant vitrum nigrum, sed nullum reguli cuiusdam vestigium obseruare licuit.

Lapidis calcinati ʒij. fluoris cuiusdam, quo in docimasia minerarum martialium plerumque vtimur, ʒvj, eodem modo, vti antecedens, se gerebant. Hic fluor ex

parti-

partibus tribus fluoris albi, parte vna vitri viridis puluerisati, fellis vitri et pulueris carbonum aa. parte ß. constat, et ideo eum in subsidium vocaueram, vt experirer, an martiales particulae lapidi nostro inhaerentes in forma regulina separari possent, id quod tamen propter earum paucitatem non successit. Et haec de actione salium in lapidem nostrum sufficiant.

§. 16.

III. Superest, vt tertio loco de effectu loquar, quem *varia alia corpora mixta in* lapidem nostrum exerunt. Sub hoc capite varias aliorum mineralium cum lapide nostro mixtiones et fusiones comprehendo.

Partes anaticae argillae albae purissimae lotae Moscouicae et lapidis nostri tam calcinati quam crudi per horas duas in sic dicto Cerbero nostro detentae, vitrum obscure fuscum reddebant, durum semidiaphanum, cum chalybe percussum, scintillas edens. Idem mixtum follibus expositum, post horam vnam et dimidiam huiusmodi vitrum largitur.

Argillae praedictae ℥ij. Lapidis nephritici ℥ß. igni, per folles per horas 2. perpetuo aucto, expositae, vitrum eiusdem naturae et coloris sed non aeque diaphanum offerebant, cum chalybe tamen scintillas de se spargens.

Argillae ℥ß. lapidis nostri tam crudi quam calcinati ℥ij. post bihorium in furno anemio, parum tantum cohaeserant, neque igni per folles excitato, expositae, vitrum largiebantur, sed in massam tantum coierant.

Terrae *Smectitis et lapidis nephritici* aa. ʒß. per integras tres horas fusioni in furno anemio expositae leuissime tantum cohaeserat. Idem mixtum follibus expositum post horam 1½ eodem modo se habebat.

Lapidis nephritici et terrae Smectitis aa. ʒß. *Argillae albae lotae* ʒj. per horam vnam et semissem follibus expositae, in vitrum obscure fuscum coierant.

Lapidis nostri tam crudi quam *calcinati*, *boracis coctae* aa. ʒij. *lapidis selenitici purissimi calcinati* ʒj. per horam j. fundebantur, et ex hoc labore vitrum oliuaceum emergebat.

Lapidis nephritici ʒj. *Quartzi albi purissimi crystallini calcinati et puluerisati* ʒiij. *selenitis calcinati et puluerisati* ʒj. *sal. tartari* ʒv. post horam vnam in furno anemio in vitrum obscure fuscum mutabantur.

Lapidis nephritici ʒj. *Vitri saturni ex partibus* iv. *minii et parte j. silicis purissimi calcinati et puluerisati*, *praeparati* ʒiij. *arsenici albi crystallini puluerisati* ʒj. ℈j *Silicis praeparati* ʒv. Post fusionem 2 horar. hoc mixtum neque in furno anemio neque coram follibus in vitrum abierat, sed tantum modo satis firmiter coaluerat.

Lapidis nephritici crudi non minus quam calcinati ʒj. *Silicis praeparatae* ʒiij. *sal. tartari* ʒß. post fusionem item 24 horarum in igne fortissimo cerberi sic dicti vitrum ex parte cauernosum dederant, coloris subuiridis.

Lapis nephriticus tam crudus quam calcinatus *cum partibus* IV. *pyritis sulphurei et vitriolici* purissimi, et partibus 2. silicis praeparatae, mixtus et fusus massam semimetallicam dedit, quae Germanicis Stein appellatur, in qua non nisi paucissima lapidis vestigia apparebant, quae pristinam seruauerant figuram. Quoad metalla nobiliora in lapide nostro reperiunda, nulla mihi vnquam spes affulserat, cum tamen in Chymia plus experiri quam hariolari conueniat, etiam hic nihil intentatum relinquere volui, ℥j *igitur lapidis nostri calcinati cum* ℥j. ℨij. *saturni granulati* sub tegula coquebatur. Regulus in cineritio more consueto depuratus, nil praeter granum exiguum argenti relinquebat, quod tamen non ex lapide nephritico sed ex plumbo adhibito ortum suum traxerat, et in aqua forte solutum nihil solaris monstrabat. Sed ne quis sibi persuadeat hoc experimentum superuacaneum fuisse, scitu erit necessum, dari quoque species nonnullas quamuis rarissimas, quae praeter ferrum etiam aliquid argenti quin et vestigia auri continent, id quod immixtis et inspersis horum metallorum mineris adscribi debet.

§. 17.

Ex huc vsque adductis experimentis luculentissime apparet.

1) Lapidem nostrum summopere cum amiantho conuenire, ideo quod in plerisque cum eo institutis

 expe-

experimentis, eadem producta eosdemque effectus produxerat, quae conuenientia ex laboribus cum amiantho a me institutis et publici iuris factis cuiuis facile apparebit.

2) Haec experimenta nos docent vel exiguam quantitatem partium martialium, non tantum in vitrificatione, verum etiam in generatione lapidum, mirum in modum corpora terrea tingere posse.

3) Et quod in primis ponendum fuisset ex tractatione lapidis nostri cum argilla discimus, quomodo facili negotio et absque multis impensis minerae auri, argenti, cupri, plumbi, fundi possint, quando cum lapide nephritico, amiantho, et asbesto tanquam lapidibus refractariis sunt permixtae, quam theoriam in arte fusoria non exiguam allaturam fore vtilitatem certus spero.

DE

DE ENTROCHIS ET ASTERIIS COLVMNARIBVS TROCHLEATIS VVLGO von Schraubensteinen.

ACCEDIT PROBLEMA DE PETREFACTO INCOGNITO NOVITER INVENTO.

Auctore

D. I. G. LEHMANNO.

§. 1.

Quot capita tot sensus, est vetus adagium, cuius veritas quotidie adhuc confirmatur. Inprimis vero haec opinionum diuersitas circa corpora mineralia non raro obseruatur, idque varias ob causas, quarum nonnullas, quamuis in transitu tantum recensere, opportunum erit. Sic ergo

1) Infinitus corporum fossilium numerus ambiguas saepissime Physicorum reddit opiniones.

2) Defectus characterum specificorum externorum, quippe qui nondum adeo determinati sunt, vt certi quid de omnibus et singulis primo statim intuitu asseuerare queamus.

3) Conuenientia formae, quae saepe, quamuis non ex toto, tamen ex parte, diuersis subiectis familiaris esse solet.

4) Multitudo fossilium nouorum, quae de die in diem adhuc deteguntur.

Praesertim haec opinionum diuersitas circa petrefacta versatur, quorum non exiguus numerus Historiae naturalis scrutatores non parum torquet, qui saepenumero, visis huiusmodi nouis petrefactis animo haerent, ad quam classem ea referre debeant. In praesentiarum huius rei exemplum proponam, et quantum fieri poterit, rem in apricum deducam.

§. 2.

Versantur adhuc dubia circa lapides figuratos cochleae figuram referentes, et opiniones auctorum de eis sunt diuersae. *Lapides cochleati* (Schraubensteine) *sunt lapides columnares cylindrici, vel pentagoni, nunc siliceae nunc calcareae, vtplurimum martialis indolis, ex lamellis per certas distantias a se inuicem plus minusue seiunctis, et axi per medium earum transeunti, adhaerentibus, constantes, et cochleae referentes figuram.*

Plotius (*a*) primum, quantum ego quidem scio, huius lapidis mentionem iniecit, ex quo postea *Luidius* (*b*) diuersas species, quas in Lithophylacio suo seruabat, allegauit. Ex eo tempore nemo fere hos lapides figuratos commemorauit, si vnicum excipiamus *Bruckmannum*, (*c*) *Ritterum* et *Harenbergium*, (*d*) qui de Wirtenber-

(*a*) Natural History of Staffordshire Cap. 5.
(*b*) *Luidii* Lithophylacium Brittannicum p. m. 55.
(*c*) Epist. Itinerar. Cent. Ima Epist. 83.
(*d*) De Encrino.

tenbergensibus nonnulla obseruauit. Interim neque *Wallerius*, neque *Linnaeus*, quidquam de eis scriptum reliquerunt. Tandem insurgebat Dom. Licent. *Lieberoth* (*e*) et lapides nostros conchyliis petrefactis annumerabat. Hanc sententiam iure meritoque reuellebat Dom. *Christlob Mylius*, (*f*) eosque fragmentis capitis Medusae petrefactis annumerabat. Haec refutatio Dom. *Lieberoth* male habuit, et satis acerbe ideo eum reuulsit; (*g*) Dom. *Christ. Frid. Schultzius* (*h*) sententiam suam, vti solet, docte postea de his petrefactis diuulgauit.

Anno elapso Clar. Dom. Prof. *Vogel* (*i*) in Mineralogia eorum mentionem fecit, et Clar. Dom. Prof. *Walchius* (*k*) sententiam suam argute dixit. Clar. Dom. *Cramerus* (*l*) cochlithis eos annumerat.

§. 3.

Sententiae horum auctorum de ortu et origine horum lapidum sunt diuersissimae. *Plotius* iudicium suum

---

(*e*) Hamburg. Magazin 9ter Band S. 73.

(*f*) Physical. Belustigungen Tom. 2. p. 145. Errauit igitur Dom. *Lieberoth*, qui me in Hamb. Magazin Tom. XIV. p. 104. pro auctore huius refutationis habet, quamuis negare nequeam, me eandem de his lapidibus fouere sententiam, quae a *Mylio* proposita fuit, vti ex subsequentibus patebit.

(*g*) Hamburg. Magazin Tom. XIV. p. 104.

(*h*) Hamburg. Magazin Tom. XVI. Neue gesellschaftliche Erzählungen p. 151. Von versteinerten Seesternen.

(*i*) Mineralsystem p. 236.

(*k*) Steinreich p. 81.

(*l*) Probierkunst p. 46.

sium suspendit, et praeter descriptionem parum de eorum origine pronunciauit. *Luidius* l. c. No. 1133. 1136. 1137. Entrochis eos annumerat. Pag. 103. in litteris, ad *Guilielmum Nicolson* datis, partes Encrini esse Entrochos perhibet. Pag. 116. seqq in Epist. ad D. *Archerum* scripta, ad stellas marinas eos relegat. *Bruckmannus* nihil certi de eis asserere ausus est. *Harenbergius* occasione Encrinorum eorum mentionem iniecit. Dom. Lic. *Liebenroth* conchyliis petrefactis eos annumerat, quam sententiam quoque Clar. Dom. Prof. *Vogel* secutus est. *Mylius* et *Schultzius* recte eos Entrochis et Asteriis columnaribus accensent. Clar. Dom. Prof. *Walchius* rem in suspenso relinquit, pronus tamen esse videtur ad sententiam *Mylii* et *Schultzii* amplectendam. *Ego* in Mineralogia §. 65. inter Entrochos columnares eos collocaui, vt errorem, quem in tractatu de matricibus metallorum p. 249. commiseram, corrigerem.

§. 4.

Affirmanti incumbit probatio. Huic legi et me obedire oportet. Eo fine argumenta mea et obseruationes, a me sedulo institutas, in medium proferam. Antequam vero ad rem ipsam me accingam, primo paucissimis de Trochis, Asteriis, Entrochis et Asteriis columnaribus differam.

Trochi appellantur lapilli rotundi, plani, nunc maiores, nunc minores, in centro mox perforati, mox vero solidi, in superficie nunc figuram stellae, non raro floris pentapetali, vel hexapetali, regularis, multoties radios ex

centro

centro versus periphaeriam excurrentes, nonnunquam circulos, referentes.

Entrochi sunt columnae cylindricae, ex trochis sibi inuicem incumbentibus compositae.

Asteriae sunt lapilli plerumque quinquangulares, interdum perforati, non raro vero solidi, in superficie stellae, vel floris pentapetali, icone insigniti.

Asteriae columnares sunt columnae, ex huiusmodi Asteriis compositae.

Ex his praemissis definitionibus apparet, Entrochos et Asterias non nisi forma externa a se inuicem differre, cum hae semper polyedrae, illae rotundae perpetuo obseruentur.

Determinandum nunc erit vndenam ambo haec petrefacta originem traxerint, et ad quodnam genus referenda sint. Paucis dicam, quae mea de eis sit sententia. Partes sunt Encrinorum, Encrini vero species stellarum marinarum petrefactae, idque earum, quae petiolo innituntur. Pro hoc asserto dimicant

a) Encrini petrefacti et petiolo instructi, qui in minerophylacio locupletissimo S. R. M. Polon. Dresdae asseruantur, vbi non tantum rotunda, verum etiam pentagona petiola articulata, quin immo articulationes ipsae visuntur, omni modo Entrochos et Asterias columnares referentes. Mentionem horum exemplarium fecerunt Excellentissimus Dominus Consiliarius metallicus et Inspector Musaei Regii Dresdensis, *Eilenburg*, (*m*) et Cele-

(*m*) Description du Cabinet Roïal de Dresde p. 27.

Celeberr. Dom. *Schultzius*, (n) quin et ego repetitis vicibus ipſa vidi.

b) Accedit nitidiſſimum et maximum illud exemplar Encrini, quod Celeberr. Dom. Prof. *Langius* Halae ſeruat, vbi non tantum petiolum rotundum, verum etiam eius articulationes in conſpectum veniunt, exacte Trochos et Entrochos repraeſentantes.

Tab. XI. Fig. 1. *c*) Exhibeo Tab. XI. Fig. 1. Encrinum in matrice, nempe in lapide albo calcareo ſpataceo, vbi *a*. Encrinum ipſum ſuperiorem, vel radios huius ſtellae marinae contractos, *b*. baſin, vulgo den Gelenckſtein, quae Encrinum cum petiolo connectit, *c*. Articulationes radiatas petioli inſtar Entrochorum, *d* vero baſes diffractas aliorum Encrinorum monſtrat. Inueni hunc lapidem in fodina lapidis calcarei prope Dardesheim, in principatu Halberſtadienſi. Delineatio magnitudinem veram oſtendit.

Fig. 2 *d*) Offero iconem fig. 2. Encrini ibidem reperti calcareo-ſpatacei pallide cinerei, vbi *a*. radios Encrini, *b*. baſin eorum, *c*. fruſtum petioli et in eo *d*. ſtellam pentagonam exhibet. Ex hoc exemplari apparet, vt mihi equidem veriſimile videtur, Entrochos et Trochos, Aſterias et Aſterias columnares, iure meritoque ad partes Encrinorum pertinere. Veram magnitudinem delineatio monſtrat. De articulationibus infra loquemur.

§. 5.

(n) Von verſteinerten Seeſternen. p. 28.

§. 5.

His nunc praesuppositis, et, vti spero, sufficienter comprobatis, progredior nunc ad Examen lapidum cochleatorum ipsum. Definitionem horum lapidum §. 2. dedi. Patria ipsis est Anglia, Germania et in ea inprimis Westphalia, Saxonia, regiones Hercyniam syluam adiacentes, Silesia, Ducatus Würtenbergensis et complures aliae prouinciae Sueuiae, Franconia, aliaeque regiones. Praeprimis vero ii magnam sibi famam acquisiuerunt, qui in principatu Blankenburgensi ex ferrifodinis Huttenrodanis eruuntur. Secundum sibi locum vindicant, qui Goslariam inter et Clausthalum prope aedes Venatorias, *Auerhahn* dictas, eruuntur. Color eorum varius esse solet, nunc enim cinereus, nunc ochraceus, interdum et roseus obseruatur. Superest, vt demonstrem, eos vere ad Entrochos et Asterias pertinere.

Omnes et singuli huius generis lapides trochleati sunt vel

1) cylindrici, vel

2) polyedri.

1) Cylindrici ex omni parte cum Entrochis columnaribus conueniunt, si solas incisuras excipiamus, quippe quae profundiores in nostris sunt lapidibus, quam in Entrochis, cuius phaenomeni causam infra videbimus. Conueniunt, inquam, quoad reliqua cum Entrochis, et quidem respectu

a) Formae, quae, vti in Entrochis et Asteriis columnaribus, nunc rotunda, nunc polygona est.

 β) Ra-

β) Ratione figurarum, quas in superficiebus ostendunt, quae in lapidibus nostris cochleatis eaedem, quae
Tab. XII. in Entrochis et Asteriis sunt. Sic e. g. Tab. XII.
Fig. 1. fig. 1. *a.* lapidem exhibet trochleatum cylindricum, cuius lamellae ex centro versus peripheriam radiatae sunt. *b* sunt tres lamellae circa axem versatiles. *c.* est Ectypus lamellae stellatae, in cuius medio axis adhuc prominet. Lapis ipse est albus calcareus, prope
Fig. 2. aedes venatorias, *Auerbahn* dictas, erutus. Fig. 2. est lapis aeque calcareus albus, in quo *a.* axem ab omnibus lamellis denudatam, in medio cauitatis constitutam, monstrat, fundus et pars superior vacui typum Entrochi radiati monstrat. *b.* repraesentat vacuum rotundum priori simile, excepto, quod non nisi pars exigua axis diffractae in centro eius sit constituta. *c.* monstat typos Entrochorum radiatorum cum axibus ex parte promi-
Fig. 3. nulis. *d.* diuersa conchylia petrefacta exhibet. Fig. 3. est minera martis ex parte silicea Huttenrodensis, in
Fig. 4. qua trochlea *a.* octo constans Entrochis radiatis. Fig. 4. eiusdem indolis mineram monstrat, vbi *a. a.* duas trochleas; *b b.* duos typolithos eiusdem generis cum partibus axium suarum diffractarum; *c.* typolithum sine axe; *d.* axem integram, in cuius medio particula
Fig. 5. exigua entrochi radiati efosi *e.* haeret, offerunt. Fig. 5. trochleam ferrugineam Huttenrodanam monstrat 66. lamellis compositam, magnitudinem et crassitiem icon exhibet. *a.* igitur est trochlea ipsa; *b.* sunt quasi columellae perpendiculares et parallelae numero quinque; *c.* est figura stellae quinquangularis siliceae albae, halone quasi quodam ochraceo circumdata, qui cylindricam huic

huic trochleae conciliabat figuram. Non raro casui inventionem veritatis debemus, id quod et in hoc lapide accidit. Integrum ipse inueneram, et neque in superiore, neque in inferiore parte eius, stella apparebat. Cum locum mutarem et Petropolin peterem, vna cum reliquis mineralibus hanc trochleam quoque deportabam. Casu in itinere diffringebatur. Dolebam primam iacturam, quam feceram, quae mihi eo maior videbatur, quo rarius huius magnitudinis exemplaria occurrunt. Diffractam interim cum considerarem, stellam elegantissimam quinquedram obseruabam, qualem complures Entrochi monstrare solent. In bina adhuc diffregi frustula, elegantissimum hoc exemplar curiositati meae, vel potius veritati, sacrificans, et ecce vbique eadem stellae figura ob oculos veniebat. Columellae *b* perpendiculariter descendentes, vt mihi quidem videtur, ab angulis huius stellae dependent. Plura de eis infra dicam.

§. 6.

Pluribus forsitan exemplis supersedere possem, ast ne quid intactum relinquam, quod sententiam meam confirmare possit, nonnulla alia exempla suppeditabo. Fig. 6. sistit marmor egregie ex vno latere politum, viride, trochleis coloris incarnati et Entrochis eiusdem coloris condecoratum. Hoc marmor vna duntaxat vice prope Suckow in Marchia Vkerana repertum fuit. Icon veram magnitudinem eius monstrat. Hic igitur *a*. trochleas petrefactas et perpendiculariter dissectas offert, quarum lamellae incarnatae, interstitia viridia sunt. *b*. sunt trochleae horizontaliter dissectae; *c*. est Entro- Tab XII. Fig. 6.

 chus

chus magis oualis. Partem auersam, sed non politam, Tab. XI. Fig. 3. exhibet Tab. XI. fig. 3. vbi *a*. Entrochos sic dictos ramosos, *b*. complures vulgares monstrat. Hos icones Tab XII. fig. 6. *a*. veras trochleas, et non Entrochos vulgares esse, ex earum structura apparet, quoniam lamellae, vel trochi, satis late a se inuicem distant, et spatia intermedia lapide diuersi coloris sunt repleta. Tab. XII. Fig. 7. Vnum adhuc addam, nempe exemplum Tab. XII. fig. 7 delineatum, in quo *a*. frustum trochleae diffractae repraesentat, nempe in fundo ectypus Entrochi radiati cernitur, in cuius centro axis, cui adhuc lamella, sed circum circa erosa, adhaeret, *b*. sunt ectypi Entrochorum radiatorum cum prominentibus axibus effractis, *c*. monstrat partem exiguam trochleae duabus tantum lamellis constantem, *d*. vero vacuum rotundum, cui trochlea insederat, quod ex parte axis adhuc inhaerente apparet. Lapis ipse est calcareus coloris cinerei cum adhaerente Quartzo crystallino *e*. et prope Clausthalium in sylua Hercynia est repertus.

§ 7.

2. *Polyedri* lapides trochleati cum asteriis columnaribus omni modo conueniunt, nisi quod articulationes latius ab inuicem distent Hoc genus quamuis cylindricis sit rarius, nihilosecius tamen adest. Iconem eius Tab. XI. Fig. 4. exhibet Tab. XI. fig. 4. Plerumque quinquangulares, raro sexangulares esse consueuerunt. Quin immo easdem figuras stellatas et florum monstrant, quas in asteriis, tam singulis, quam columnaribus, obseruamus.

§. 8.

§. 8.

Hactenus de figuris et formis lapidum dixi. Progredior nunc ad reliqua argumenta, ex quibus mihi persuasum habeo, Entrochos et Asterias columnares vnum idemque cum trochleis nostris esse. (vid. §. 5.)

γ) Foramina, quae in Entrochis aeque ac lamellis nostris lapidum trochleatorum obueniunt. De Entrochis notissimum est, de lapidibus trochleatis lamellae istae circa axem suam mobiles Tab. XII. fig. 1. *b.* testantur, quin immo et ipsae axes, nunc integrae, nunc diffractae, reliquorum exemplarium de perforatione lamellarum testes esse queunt. Verisimile mihi inde videtur, in statu naturali, et ante petrificationem, axes istas nihil aliud, quam canales, siue siphunculos, fuisse, qui in petrificatione materia lapidea expleti fuerunt. Forsitan hi siphunculi neruo quodam instructi fuerunt, mediante quo se mox extendere, mox vero, et pro lubitu, iterum contrahere quiverunt. Clarissimus *Schultzius* in Tractatu de stellis marinis petrefactis p. 32 locum allegat ex *Bibliotheque raisonnée* Tom. XXXVII. p. 266. his verbis. „Il a deccuvert (Msr. *Griffith Hugues*) une „nouvelle espece d'étoile de mer, laquelle sort du „rocher par une espece de pedicule, et elle exprime „exactement la figure raionnée de la fleur d'une ficoide. „Mais cette fleur est presque sensitive. Au moindre „attouchement elle se replie, et va se cacher avec „son pedicule, dans le rocher, d'où elle étoit sortie. „Ses raions sont des bras, qui ont bien l'air de ceux „d'un polype.„ Idem etiam sequens testimonium *Olai Magni* Tract. de gentib. Septentr. Lib. 21. Tab. XII. Fig. 1.

Cap.

Cap. 23. citat. „Spongia valde multiplicata penes lit-
„tora Norwegiae eius est naturae, quod conueniat cum
„caeteris animalibus in motu dilatationis et contractio-
„nis. Quaedam vero earum immobiles sunt a saxis,
„et si abrumpantur a radicibus recrescunt; quaedam
„autem sunt mobiles de loco ad locum, et hae in
„maxima copia in littoribus praedictis reperiuntur.„
Haec opinio eo magis roboratur, si structuram capitum medusae eorum radiorum consideramus. Cum praesertim mare album circa Archangelopolin varias species eorum suppeditet, quantum fieri potuit, complura huc aduecta curiosissime examinaui, et obseruaui

Tab. XI. Fig. 5. Tab. XI. fig. 5. ramos eorum 1) membrana quadam *a.* obductos esse. 2) In parte inferiori compressa, et quasi plana, canalis *b.* iuxta longitudinem ad extremitatem excurrit, in quo neruus, pili equini crassitie, latet, qui ramulos extra membranam exiguos ad ambo latera canalis protrudit *c.* 3) Pars interior *d.* dura, instar ossis, alba, aquae immersa non mollescit, sed

Fig. 6. figuram exhibet, quam fig. 6. monstrat. Detracta membrana, hic cylinder exacte lapides nostros trochleatos quoad figuram refert, ita tamen, vt interstitia lamellarum materia quadam gelatinosa repleta sint. Haec obseruatio attentionem meam magis incitabat, et ad petrefacta mea me reducebat. Diffringebam eo fine iuxta longitudinem vnum ex Encrinis, diffractum oblique adhuc semel frangebam; et probe consideratis omnibus, vestigia huius canalis, ast non in medio, verum in parte magis compressa, obseruabam. Haec omnia hactenus adducta sane opinionem verisimilem

reddunt,

reddunt, Trochos, Entrochos, Afterias et earum columnas, lapides trochleatos ad vnum idemque genus pertinere, et non nifi refpectu fpeciei a fe inuicem differre. Recordemur hac occafione lapidis trochleati Huttenrodani ftellati Tab. XII. fig. 5. delineati et §. 5. defcripti. Argumenti loco porro inferuire poteft

δ) Zoophyton a *Mylio* defcriptum Tab. XI. fig. 7. quod mihi quidem ad fpecies ftellarum marinarum Encrinos producentium pertinere videtur, et forfitan vnum idemque eft cum eo, quod *Hugues* et *Olaus Magnus* allegarunt, ideoque prolixior effe nolo. Mirum interim eft, plerasque ftellas marinas, quin et Zoophyta ab Hugues, Olao Magno, et Mylio defcripta, in oceano feptentrionali huc vsque repertas effe. Quod vero originalia huius generis ftellae marinae non nifi rariffime ex fundo maris fint extracta, in caufa eft forfitan *a*) quod mediante petiolo fuo tam firmiter fundo maris petrofo adhaerent. *b*) Quoniam fecundum obferuationem Huguefii ad leuiffimum contactum fe contrahunt, et inter petras earumque rimas recedunt. *c*) Quam pauci Nauarchorum et mercatorum hiftoriae naturali ftudent? Imprimis vbi de marinis fermo eft. Et quis adhuc originalia Concharum anomiarum, Lituorum, Belemnitarum obferuauit? Accedit *d*) defectus hiftoriae reuolutionum, quas tellus noftra fubiit, vt nihil dicam de regionibus Oceani nobis plane adhuc incognitis. Tab. XI. Fig. 7.

§. 9.

Ex omnibus huc vsque prolatis mihi quidem perfuafum habeo, *Trochos*, *Entrochos*, *Afterias fingulas* *et columnares et trochleas lapidum cochleatorum unius eiusdemque esse originis, i. e. articulationes singulas vel aggregatas petrefactas petioli stellae cuiusdam marinae.* Rationes, quae me huius sententiae faciunt certiorem, §. 5. 6. 8. exposui, et ideo superuacaneum foret, eas repetere. Dicendum nunc erit, vndenam diuersitas Entrochos inter et trochleas petrefactas oriatur. Haec diuersitas in subsequentibus consistit:

α) Lamellae, vel Trochi Entrochorum et Asteriarum crassiores sunt lamellis trochlearum.

β) Trochi et Entrochi non minus quam Asteriae vndique aequali gaudent crassitie, trochleae non raro versus axem satis crassae, versus marginem tenuissimae obseruantur.

γ) Trochi in Entrochis et Asteriis columnaribus immediate se inuicem tangunt, ita vt nulla spatia vacua intermedia obseruentur, trochleae contra a se inuicem distant, et plerumque non nisi mediante axe inuicem cohaerent.

δ) Nunquam trochleae perforatae visae sunt, trochi complures.

Ad primam et secundam igitur differentiam quod attinet, negandum omnino non est, graciles et tenues semper obseruari lamellas trochlearum, cuius tamen rei causa in erosione et destructione quaerenda est, nempe hi Entrochi petrefacti non tantum respectu diametri sui horizontalis verum quoque perpendicularis, erosionem patiuntur. Haec erosio nunc partibus salino acidis, in non nullis

nullis vero aquae tantum adſcribenda eſt, et a peripheria verſus centrum progreditur. Videmus ideo in nonnullis exemplaribus lamellas a ſe inuicem plane ſeiunctas eſſe, vt Tab. XII. fig. 1. *a*. et in reliquis fere omnibus, in quibus vbique axes nunc integrae nunc autem diffractae cernuntur. Hanc eroſionem vero, vere his lapidibus contigiſſe, monſtrant *a*) cauitates cylindricae et gyratae, quibus trochleae inſidere ſolent, quae gyros et annulos habere non poſſent, niſi diameter trochlearum initio maior fuiſſet. *b*) Apparet Tab. XII. fig. 4. *d*. axis, in cuius medio veſtigium exiguum rotundum lamellae eroſae adhuc haeret. His rationibus etiam obiectio tertia reuelli poteſt. Quod ad quartam attinet, icon Tab. XII. fig. 1. *b*. tres lamellas circa axin verſatiles monſtrat, quae ſi axin diffringere placeret, ſingulae lamellam trochlae perforatam monſtraturae forent. Ex his omnibus patet, diuerſitatem et diſcrimen lapides noſtros trochleatos inter et Entrochos columnares, nullius fere momenti eſſe, et non niſi caſu oriri. Stringentiſſimum autem argumentum, vt mihi quidem videtur, in trochlea martiali latet, Tab. XII. fig. 5. vbi in *c*. vera ſtructura ſtellata Entrochi deprehenditur.

Tab XII. Fig. 1.

Fig. 4.

Fig. 1.

Fig. 5.

§. 10.

Antequam colophonem huic diſſertationi imponam, tribus quod aiunt verbis tantum, meam de origine Trochorum, Entrochorum, Aſteriarum ſingularum et columnarium ſententiam adhuc dicam. In antecedentibus iam plus vna vice haec petrefacta partibus diffractis stellae marinae cuiusdam annumeraui. Cum vero compluies harum stellarum dentur species, definiendum erit, ad quam commodissime sint referenda. Mea quidem sententia ad eas proxime pertinet species, quae petrefactae, Encrinos constituunt. i. e. ad stellas marinas πολυσακτίνοδας, petiolo insidentes, et scopulis in fundo maris adhaerentes, *Olai Magni*, *Huguesii*, et *Mylii*, et quidem ad partes petiolorum earum, quippe quibuscum optime conueniunt. Ideoque in lapidibus nostris trochleatis lamellae erunt articulationes erosae, axes vero cauitates, quibus, dum animal adhuc viueret, neruus motorius tanquam vaginae inerat, materia lapidea repletae. Hanc opinionem non omni carere probabilitate vel ex eo patet, quod ipsi Trochi et Entrochi mox perforati, mox vero solidi et integri reperiantur.

§. 11.

Dicendum nunc adhuc erit de phaenomeno quodam in lapidibus trochleatis quamuis rarius obuio, nempe de trochlea. Clar. *Schultzius* eius mentionem fecit in neuen gesellschaftlichen Erzählungen Tom. I. p. 155. et figuram eius Tab. XII. fig. 2. *e*. exhibet. Quid de hoc phaenomeno sentiam, paucis exponam. Videtur esse ramus petioli in eo adhuc latens, qui cum tempore forsitan excreuisset, et petrefactus Entrochum ramosum constituisset, vel vti Cl. *Walchius* loqui amat, radicem Encrini, et ideo forte non plane absurdum foret, hoc genus stellae marinae cum *Ellisio* pro specie polypi habere, id quod tamen illis

Tab. XII. Fig. 2.

illis decidendum relinquam, qui in historia polyporum me sunt versatiores. Optandum foret, vt inter piscatores et nauigatores, inprimis Archangelopolitanos, piscaturae balaenarum aliorumque piscium operam nauantes, nonnulli forent, qui occasione data in mari septentrionali fundum eius curiosius inuestigarent, fortassis penitius genera stellarum marinarum, capitum Medusae et polyporum cum tempore cognosceremus. Ast haec sine dubio diu adhuc ad pia vota pertinebunt.

§. 12.

Pergo nunc ad petrefactum mihi plane incognitum, et a nemine auctorum, quantum ego quidem norim, descriptum. Figuram eius exhibet Tab. XII. fig. 9. non minus quam veram magnitudinem. Primo intuitu piscis videri poterat, in quo *a.* caput repraesentat, ast cum in *b.* et *c.* testa naturalis conchylii in Originali adhuc haereat, omnino ad Conchylia referendum hoc petrefactum mihi videtur. *d.* sunt duae protuberantiae, an Cornua, an Siphunculi fuerint, quibus oculi inhaeserunt, affirmare non audeo. In *e.* apparent vestigia squamarum impressa. Si partem posteriorem spectemus, egregie cum concha triloba, quam sub titulo *Cacadu* Muschel (*o*) descripsi, conuenit, vid. Tab. XII. fig. 8. Forsitan, quam eo tempore pro concha singulari habui, fragmentum tantum huius petrefacti est. Confirmari haec mea sententia eo magis videtur, si pe- Tab. XII. Fig. 9. Fig. 8.

 trefa-

(*o*) Versuch einer Geschichte von Flötzgebürge pag. 72.

Tab. XI. Fig. 8. 9. trefactum Tab. XI. fig. 8. 9. consideramus, quod quasi incuruatum et complicatum hoc nostrum petrefactum, de quo nobis sermo est, exhibet. Ex ambobus ideo lateribus designari curaui. Et propterea Fig. 8. fig. 8. *a.* protuberantias istas, *b.* sulcos parallelos, *c.* Fig. 9. caput exhibet, cum contra fig. 9. partem posteriorem cum cauda repraesentet. Materia, ex qua conflatum est hoc petrefactum, est lapis corneus sublutescens, locus natalis latet, ex Heluetia tamen eum accepi. Lapis ipse antecedens est calcareus ex albo cinereus, et quod dolendum, in inferiore parte politus. De patria eius non est quod dicam, cum eum hic Petropoli, vel abiectum, vel, quod vero similius, perditum sub dio invenerim. Cum igitur nihil certi de hoc noviter inuento petrefacto asseuerare queam, rogo atque obtestor omnes Historiae naturalis scrutatores, vt, quae de hoc subiecto sentiant, vel priuatim mecum, vel publice cum Imperatoria Academia Scientiarum, beneuole communicare non dedignentur.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DISSER-

DISSERTATIO ASTRONOMICA DE EFFECTV PARALLAXEOS IN TRANSITV PLANETARVM SVB SOLE.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Praecipua tranſitus Planetae ſub Sole phaenomena, ex dato loco ſpectabilia, determinantur, per apparentem Planetae ſub Solis diſco ſemitam, eiusque poſitionem, et immerſionis emerſionisque momenta; ex quibus nempe datis, ad omnes, quae circa eiusmodi tranſitum inſtitui poſſunt, quaeſtiones, facile reſpondetur. Cum ad expediendum, quod hic tractamus negotium, ſufficiat, ad emerſionis immerſionisque momenta ſolum reſpicere, notamus, diſtingui poſſe in immerſione ac emerſione Planetae momenta tria praecipua: contactum nempe limborum Solis ac Planetae exteriorem, immerſionem ac emerſionem centri Planetae, ac contactum marginum interiorem. Per ſe autem patet, fieri contactum exteriorem, cum apparens diſtantia centri Planetae ac Solis, ſummae; contactum interiorem, cum eadem haec diſtantia, differentiae ſemidiametrorum Solis ac Planetae; tandemque immerſionem ac emerſionem centri, dum haec diſtantia Solis ſemidiametro apparenti, aequalis eſt. Quaeſtio itaque, de immersione ac emersione Planetae, ad hoc Problema generale reducitur:

Inuenire momentum, quo centrorum Solis ac Planetae distantia, ex dato puncto videatur, sub angulo dato, quem in sequentibus δ vocabimus.

Vt solutio huius Problematis minori negotio absolui queat, in antecessum notare generalia quaedam, conueniens erit. Concipiatur planum FG, per Solis A, Planetae B, ac Terrae centrum transiens, angulus vero, ad punctum C, a rectis CA, CB comprehensus $=\delta$, statimque patet, videri equidem ex puncto C, centrorum Solis ac Planetae elongationem sub angulo δ, ast dari praeterea infinitum punctorum numerum, ex quibus haec elongatio, eodem momento, sub eodem conspicitur angulo. Rotato enim primum angulo ACB circa rectam AB, punctum C describit circulum C*c*, cuius peripheriae puncta omnia rectam AB sub eodem vident angulo. Quodsi deinde in plano, per triangulum ACB traiecto, in quocunque hoc situ constitutum sit, describatur circulus, per puncta A, B et C, aliusque ad oppositas partes, A*k*B*m*, priori aequalis; quodcunque assumatur in arcubus AHCB, et A*k*B punctum, eadem, qua prius dicta, praeditum erit proprietate, cum contra, quae in arcubus A*m*B, A*n*B reperiuntur puncta, rectam AB non sub angulo δ, sed ipsius complemento ad 2 rectos conspiciant. Constat ex his, si quaeratur punctum, ex quo distantia AB videtur sub angulo δ, infinita dari puncta huic problemati satisfacientia, locari vero haec puncta omnia, in

Tab. XIII. Fig. 1.

in superficie quadam, cuius, a qua quippe problematis nostri solutio pendet, natura breuiter nobis excutienda erit. Non autem opus est, vt exactam hic instituamus disquisitionem, cum principaliores, quarum hic vsus erit, huius superficiei proprietates, et sine instituto calculo facile pateant. Liquet nempe statim, si haec superficies secetur plano per AB quocunque, figuram intersectionis fore 2 circulos ABH, ABK, inter se aequales, in punctis A et B se mutuo constanter intersecantes; sectione autem ad planum FG ac rectam AB normali, itidem produci 2 circulos, ast concentricos, centrum habentes in recta AB, si opus, producta; vnde, quod tota haec superficies rotatione circuli ABH super recta AB generetur, statim patet, quaeque sit curuaturae ipsius indoles ac natura, imaginari facile licet. Eadem ex calculo concludere licuisset, quem si quis instituere voluerit, ad easdem perueniet conclusiones. Fateor equidem prodituras pro intersectionibus planorum, aequationes quarti gradus, vnde colligere quis posset, intersectiones non esse circulares, sed exhibere lineas quarti ordinis. Ast notandum, fore has curuas, quas exhibent aequationes istae, ex genere earum, quas Ill. *Eulerus* complexas vocauit; non enim lineam quarti ordinis, sed 2 circulos comprehendunt.

Superficies haec, quam latius nunc considerauimus, cum comprehendat omnia puncta, quae Planetae a Solis centro distantiam, vno eodemque momento, sub angulo δ conspiciunt, fieri non poterit, vt vllum Telluris punctum, elongationem Planetae ac Solis sub angulo dicto obseruet, nisi superficies Terrae superficiei hic euolutae occurrat, ipsamque vel tangat, vel secet, quare problema nostrum huc redit: vt, *quonam momento datum Telluris punctum in intersectione huius superficiei cum globo terrestri reperiatur?* inuestigandum sit. Ne vero disquisitio nostra ad ratiocinationes atque formulas iusto complicatiores nos deducat, quod euitari vix posset, si problema, vti propositum est, soluere conaremur, primum non totum Terrae globum, aut vniuersam eius superficiem, sed solum circulum, qui producitur intersectione globi terrestris, cum plano per Solis, Terrae ac Planetae centra transeunte, considerabimus, et quomodo, pro quouis in huius circuli plano reperiundo puncto, problema solui queat, inquiramus.

Tab. XIII. Fig. 2. Concipiatur itaque constanter planum, per Solis A, Planetae B, ac Terrae centrum *c* traiectum, et formabit hoc planum intersectione cum superficie saepius dicta, 2 circulos ABH, ABK, cum Terra vero, circulum T. Constat hic sine negotio, punctum *g*, in circuli T superficie vtcunque adsumtum, videre Solis ac Planetae elongationem sub angulo δ, dum vel circulo ABH, vel ABK occurrit. Fieri hoc potest in vtroque horum circulorum duplici vice, vel circa A, vel ex altera parte circa B. Ast facile patet, priorem casum pertinere ad coniunctiones Planetae cum Sole superiores; distat enim tunc Planeta magis quam Sol a Terra, vnde in praesenti, non nisi ad occursus circa B contingentes, quippe qui valent pro coniunctionibus inferioribus, respiciendum nobis est.

Licet

Licet iam ad calculum ipſum progredi, antea autem, quam hoc negotium aggrediamur, notandum erit, id quod vel ſolo figurae intuitu patet, fieri immerſionem Planetae, ſi punctum g circulo ABH, obſeruatori in ſole conſtituto ad ſiniſtram poſito, emerſionem vero, ſi alteri circulo ABK occurrit. Adaptabimus calculum noſtrum immerſioni, et quomodo formulae pro immerſione repertae immutandae ſint, vt emerſioni aptentur, poſtea indicabimus.

Denotemus igitur in circulo ABH rectam AB per A, ac angulum AgB per δ, ductaque ex centro C recta CB, aliaque CD ad AB perpendiculari, erit angulus BCD$=\delta$, vnde reperitur CB, ſeu radius circuli ABH$=\frac{A}{2\,\sin.\,\delta}$, ac CD$=\frac{A}{2\,\mathrm{tang.}\,\delta}$. Quodſi nunc ex quouis circuli ABH puncto F demittatur ad rectam AB perpendicularis FE, ſumendo FE ac AE pro coordinatis, ac vocando, FE$=y$, AE$=x$, ex circuli proprietatibus notiſſimis, obtinetur haec, circulum ABH ad rectam AB relatum, definiens aequatio, $y^2+x^2-Ax-\frac{Ay}{\mathrm{tang.}\,\delta}=0$. Sit nunc in circulo T, quem planum, per Solis, Terrae, ac Planetae centra tranſiens, in Terra deſignat, datum punctum g, cui occurrat circulus ABH, ductaque recta Ac, Solis ac Terrae centra connectente, ac diametro Terrae huic rectae perpendiculari st, ex puncto g ad vtramque harum linearum demittantur perpendiculares gm et gn, quas r et v vocabimus. Dicatur angulus BA$c=\Phi$, ac diſtantia Solis a Terra cA$=$D, eritque

1) ob $gm : lm = 1 : \text{tang.}\Phi$, $ml = r\,\text{tang.}\Phi$, hinc $lA = D - v + r\,\text{tang.}\Phi$, vnde obtinetur, $Ak = (D - v)\,\text{cof.}\Phi + r\,\text{fin.}\Phi$.

2) Cum fit $gm : gl = \text{cof.}\Phi : 1$, hinc $gl = \frac{r}{\text{cof.}\Phi}$, reperitur $kg = kl - gl = (D - v)\,\text{fin.}\Phi + r\,\text{tang.}\Phi\,\text{fin.}\Phi - \frac{r}{\text{cof.}\Phi} = (D - v)\,\text{fin.}\Phi + \frac{r\,\text{fin.}\Phi^2 - r}{\text{cof.}\Phi} = (D - v)\,\text{fin.}\Phi - r\,\text{cof.}\Phi$.

Quodfi itaque hi valores in fupra reperta aequatione loco x et y fubftituantur, prodibit aequatio, pro eo cafu, vbi ex puncto g Planetae in Solis difcum immerfio confpicitur. Licet autem in hac aequatione negligere omnes terminos, in quibus v et r, vel fingulae, vel coniunctim, ad plures quam vnam dimenfionem afcendunt, cum v et r nunquam radium Terrae fuperent, hinc admodum fint paruae, fic vt pars pq circuli ABH, in circulum T incidens, pro recta tuto haberi queat. Prodit vero tunc fequens aequatio:

$$(D^2 - 2Dv)\,\text{fin.}\delta - A(D - v)\,\text{fin.}(\Phi + \delta) + Ar\,\text{cof.}(\Phi + \delta) = 0.$$

quam adhuc concinniorem reddere licet, ponendo $D : A = 1 : \mu$; haec enim ratio ex theoria Solis ac Planetae data cenfenda eft. Fit autem tunc

$$(D - 2v)\,\text{fin.}\delta - \mu(D - v)\,\text{fin.}(\Phi + \delta) + \mu r\,\text{cof.}(\Phi + \delta) = 0.$$

Similis per omnia calculus pro emerfione inftitui poteft, ac fimilis prodit formula, non nifi in eo ab hacce, quam pro immerfione eruimus, diuerfa, quod vltimus terminus fiat negatiuus, affumendo nempe conftanter, vti antea fecimus, r pofitiua cadere a centro circuli T verfus dextram.

Adapta-

Adaptari ſtatim poteſt haec formula, ad immerſionem ac emerſionem, vti ex Terrae centro conſpiciuntur. Cum enim ſit pro centro Terrae v et $r = o$, valebit pro vtroque caſu haec formula:

$D \sin.\delta - \mu D \sin.(\Phi + \delta) = o$, ſiue $\sin.(\Phi + \delta) = \frac{\sin.\delta}{\mu}$, quare, dum Φ eum adipiſcitur valorem, vt huic aequationi ſatisfaciat, immerſio ac emerſio pro centro Terrae contingere debent. Eruendum itaque eſt momentum, quo Φ hunc valorem accipit, quod, cum tabulae aſtronomicae longitudinem ac latitudinem Planetae heliocentricam ad datum momentum ſuppeditent, facili negotio fieri poteſt.

Sit planum Aml, planum Eclipticae, ac in eo Tab.XIV. AT, recta, Solis ac Terrae centra connectens, in n Fig. 2. vero extra hoc planum, locus Planetae, et per hunc ac Solem traductum planum nAl Eclipticae perpendiculare. Erit igitur $nAm = \Phi$, nAl, Planetae latitudo heliocentrica, quam λ, et mAl, differentia longitudinum Terrae et Planetae heliocentricarum, quae angulus commutationis appellari ſolet, quem L vocabimus, et ex praeceptis trigonometriae ſphaericae erit $\cos. \Phi = \cos. L \times \cos. \lambda$. Cum igitur ad quoduis momentum dentur L et λ ex tabulis, ex his vero per formulam modo indicatam Φ obtineri queat, methodis, alias ſimilibus in caſibus Aſtronomis vſitatis, non difficulter inueſtigari poterit momentum quo Φ eum adipiſcitur valorem, vt ſit $\sin.(\Phi + \delta) = \frac{\sin.\delta}{\mu}$, quo nempe Planeta ex Terrae centro in Solis diſcum incurrere, aut ipſum derelinquere, conſpicietur. Ex iisdem principiis, quibus hic vſus ſum, angulus lmn, qui aequatur inclinationi planorum lmA, et nmA ad

ſe

ſe inuicem, reperiri poteſt, quare cum aliquis eius futurus ſit in ſequentibus vſus, hic annotamus, dicto hoc angulo I, fore tang. $I = \frac{tang.\ \lambda}{ſin.\ L}$.

Deriuari poſſunt ex eadem formula ſupra eruta adhuc duo momenta alia, in tranſitu Planetae ſub Sole maxime notabilia. Liquet ex ſupra adductis, locum, qui primus videt immerſionem, eſſe eum, vbi ſuperficies, omnia puncta, quae Planetae a Sole elongationem conſpiciunt, ſub angulo δ comprehendens, Tellurem interius, ſeu concauitate ſua, ac e contra eum, qui vltimus videt immerſionem, iſtum, in quo dicta ſuperficies Tellurem exterius conuexitate ſua contingit, contrarium vero valere pro emerſione. Facile autem perſpicitur, fieri hos contactus in plano, per Solem, Terram atque Planetam tranſeunte, vnde formula noſtra etiam hiſce caſibus aptari poteſt. Inueni autem dicto radio terrae ϱ, pro contactu exteriore, ſin. $(\Phi + \delta) = \frac{D\,ſin.\,\delta - \mu\varrho}{\mu D}$, ac pro interiori, ſin. $(\Phi + \delta) = \frac{D\,ſin.\,\delta + \mu\varrho}{\mu D}$, quare methodus determinandi primum et vltimum immerſionis aut emerſionis momentum ſatis conſtat.

Obtinuimus iam ſcopum, quem primum nobis propoſuimus, vnde nunc ad alteram problematis partem procedendum nobis eſt, et inquirendum, quomodo pro dato quouis ſuperficiei terreſtris puncto problema reſolui queat. Diſtinguendi autem hic erunt aliquot caſus, vti ex ſequenti conſideratione patet.

Immenſae ſuperficiei, in qua locantur puncta omnia, quae eodem momento, eandem vident Planetae a Sole elongationem, non niſi pars minima ter-

reſtri

restri globo occurrit. Generatur vniuersa haec superficies rotatione circuli ABH circa rectam AB; dum vero hoc fit, pars huius circuli pq, in Terram incidens, cum pro recta haberi queat, describit zonam quandam, aut annulum conicum, pertinentem ad superficiem coni recti, axin habentis rectam AB. Facile autem patet, solum hunc annulum conicum, praetereaque nullam aliam totius superficiei saepius dictae partem, superficiem Telluris secare posse, vnde quiuis Telluris locus tunc immersionem aut emersionem Planetae conspiciet, dum in communi intersectione superficiei terrestris annulique huius versatur. Diametri basium huius annuli non difficulter inuestigantur; si enim angulus BAp vocetur ψ, angulus vero BAq dicatur ψ', erit semidiameter baseos superioris, seu Soli propioris, proxime $= D \sin.\psi$, baseos vero inferioris $= D \sin.\psi'$. Tab XVI. Fig. 2.

Liquet autem, vel ex solo figurae intuitu, vtrumque horum angulorum ψ et ψ' ab angulo Φ perparum differre. Differentia enim haec angulorum ψ et ψ' ab angulo Φ nunquam superare potest parallaxin Solis horizontalem, siue angulum, sub quo semidiameter Terrae ex Solis centro conspicitur, vnde necessario perpetuo est admodum parua. Modo itaque Φ non sit admodum paruum, differentiam hanc negligere, et vtriusque baseos semidiametrum a valore $D \sin.\Phi$ sensibiliter non aberrare, supponere licebit, saltem de relatiua vtriusque semidiametri ad radium Terrae magnitudine, ex valore $D \sin.\Phi$ tuto satis iudicari poterit. Tres autem distinguere tunc licet casus, ſi haec comparatio inſtituatur, vel enim D ſin Φ tantum eſt, vt eius ratio ad radium terrae pro inaſſignabili haberi queat, aut quanquam haec ratio ſit aſſignabilis, tamen eſt adhuc admodum magna, aut tandem ratio haec ſit admodum parua. Priori caſu, curuatura annuli conici, in perparua iſta, quae globum telluris ſecat, ipſius portione non erit ſenſibilis, ſed annuli iſta pars pro plana haberi poterit.

Euoluamus, antequam ad reliquos tranſeamus, hunc caſum paulo attentius. Cum hocce caſu curuatura annuli, in ea parte, quae globum terreſtrem ſecat, negligi queat, pro plano per pq tranſeunte, ad planum circuli T perpendiculari haberi poteſt. Loca itaque omnia, quae eodem momento, Planetae in Solis diſcum immerſionem, aut ex ipſo emerſionem conſpiciunt, in interſectione plani, cum globi terreſtris ſuperficie, hinc in circulo quodam, in telluris ſuperficie ducto, ſita erunt. Admodum igitur facilis, ac expedita erit hoc caſu problematis noſtri ſolutio. Si nempe circulus ADB, deſignet circulum T, qui interſectione plani, per Solem, Terram ac Planetam tranſeuntis, cum terreſtri globo producitur, punctum ſuperficiei terreſtris E, cum puncto F, quod deſignatur demiſſa ex E ad planum ABD perpendiculari, immerſionem ſimul conſpiciet. Nil itaque opus eſt, niſi vt recta GF ac HF, ſitum puncti F, quod quouis momento puncto E reſpondet, determinantes eruantur, earumque valores in ſupra euolutam formulam introducantur. Patet autem ad hoc negotium perficiendum via, ſequenti ratione:

Tab. XIV. Fig. 4.

Ex

Ex theoria proiectionum orthographicarum, quarum in vniuersa Astronomia frequens est vsus, satis constat, si circulus epl repraesentet, plani ad Eclipticam et Terrae Solisque centra iungentem lineam, perpendicularis, cum globo terrestri; el vero huius plani cum ipso Eclipticae plano intersectionem; sique dicatur radius Telluris $=\varrho$, obliquitas Eclipticae $=\omega$, Solis a solstitio aestiuo distantia $=\varepsilon$; proiectionem m Poli borei in hoc planum, determinari ita, vt sit $fc=\varrho$ cos. ω, fm vero ad fc perpendicularis ex puncto m $=\varrho$ sin. ω sin. ε. Est autem tunc sinus anguli, sub quo axis Telluris ad planum epl inclinatur, qui angulus declinationi Solis semper aequatur, $=$ sin. ω cos. ε, quem angulum compendii causa per α designabimus. Quodsi vlterius nunc detur punctum quoddam superficiei Telluris, cuius complementum latitudinis sit $=\gamma$, elongatio vero a meridiano, quae ex loci longitudine geographica ac tempore innotescit, $=e$, punctum k, in quod proiicitur hoc punctum, determinatur, faciendo $cb=\varrho$(cos. γ cos. $\alpha-$ sin. γ sin. α cos. e), et bk ad cb perpendicularem $=\varrho$ sin. γ sin. e. Tab. XIV. Fig. 5.

Determinant formulae istae puncti cuiusuis in planum Eclipticae perpendiculare proiectionem. Non difficulter vero hinc deducuntur quoque aequationes, quarum ope punctum istud in ipsum Eclipticae planum proiicitur. Concipiatur enim, ex k demitti ad rectam el perpendicularem kg, dictoque angulo $fcm=\psi$, reperietur $cg=cb$ sin. $\psi+kb$ cos. ψ, ac $kg=cb$ cos. ψ $-kb$ sin. ψ. Si igitur sit $apbel$ hemisphaerium Telluris, $aebl$ Eclipticae planum, ab rectam Solis ac Terrae Fig. 5. Fig. 6.

 centra

centra iungentem, indicante; k vero puncti dati m in planum eclipticae perpendiculare, epl proiectio, erit $st = cg = ch \sin. \psi + kh \cos \psi$, ct vero $= km$ $= \sqrt{\varrho^2 - cg^2 - kg^2} = \sqrt{\varrho^2 - ch^2 - kh^2}$.

Tab XIV. Fig. 7. Sit tandem planum AB, planum Eclipticae, EF planum, per Solis, Terrae ac Planetae centra traiectum, ac in c centrum Terrae, erit, retentis in hac figura iisdem litteris, quibus pro antecedenti vtebamur, ct $= v = \sqrt{\varrho^2 - ch^2 - kh^2}$, ac tq siue $r = ch \sin.(\psi - \mathrm{I})$ $+ kh \cos.(\psi - \mathrm{I})$ indicante I angulum inclinationis planorum AB ac EF ad se inuicem, (qui quomodo inuestigetur, supra iam indicauimus) ac intelligendo rectam mq, ex puncto m, cuius proiectio quaeritur, in planum EF perpendicularem.

Assignando itaque v et r, modo repertos valores, formula

$$(\mathrm{D} - 2v) \sin. \delta - \mu (\mathrm{D} - v) \sin. (\Phi + \delta) \pm \mu r \cos (\Phi + \delta) = 0,$$

immersionem ac emersionem, pro puncto quouis superficiei terrestris determinabit. Nil enim opus est, nisi vt momentum, quo L et λ, angulus nempe commutationis, et latitudo planetae heliocentrica, eos habent valores, vt huic aequationi satisfiat, inuestigentur. Verum equidem est, fieri vix posse, ob calculi complicationem, vt directe scopum hunc consequamur, ast indirecta methodo in vsum vocata, satisfacere problemati facilius licebit. Optima videtur methodus, si sequenti ratione procedamus: Inuentis prius momentis, quibus immersio ex Terrae centro conspicitur, quod T vocemus, binisque istis momentis R et S, quae supra

supra primum et vltimum immersionis momentum vocaui, fiant aliquot hypotheses: contingere nempe supponatur immersio pro dato loco, momentis $T+\tau$, et $T+\theta$, quae vero momenta intra limites R et S cadere debent. Ad haec tempora determinentur, v, Φ, ac I, et ex posteriori, angulo nempe I, inuestigetur r dato loco et tempori respondens. Valores isti in formulam supra erutam introducti, si ipsam euanescere non faciant, difficile non erit, interpolando quaerere tempus, quod eiusmodi pro v, Φ, I ac r, suppeditat valores, qui formulam nostram ad zero redigunt, sicque problema propositum soluunt. Idem de emersionis momento statuendum est.

Occasionem praebent hae disquisitiones eleganti cuidam problemati resoluendo, quod, praeterquam quod et per se huc pertineat, laborem in superiori calculo deuorandum insigniter imminuere valet, praesertim si non pro vnico, sed pro pluribus locis, immersionis atque emersionis momenta eruenda sunt. Supra iam annotaui, plura semper esse Telluris loca immersionem ac emersionem simul conspicientia, omnia vero ista loca deprehendi in circulo quodam in Telluris superficie ducto. Fieri itaque potest, vt isti circuli, ex quorum perimetro immersio aut emersio dato videntur momento, actu designentur, vel in globo artificiali, vel in plano, totius Telluris proiectionem exhibente. Ad hoc vero opus est, vt cuiusuis horum circulorum tam polus, quam perimetri ipsius a polo distantia, determinetur, quorum igitur vtrumque quomodo inuestigetur, disquirendum nobis est.

centra iungentem, indicante; k vero puncti dati m in planum eclipticae perpendiculare, epl proiectio, erit $st = cg = ch\,\text{ſin.}\,\psi + kh\,\text{coſ}\,\psi$, ct vero $= km$ $= \sqrt{\varrho^2 - cg^2 - kg^2} = \sqrt{\varrho^2 - ch^2 - kh^2}$.

Tab XIV. Fig. 7. Sit tandem planum AB, planum Eclipticae, EF planum, per Solis, Terrae ac Planetae centra traiectum, ac in c centrum Terrae, erit, retentis in hac figura iisdem litteris, quibus pro antecedenti vtebamur, ct $= v = \sqrt{\varrho^2 - ch^2 - kh^2}$, ac tq ſiue $r = ch\,\text{ſin.}(\psi - \text{I})$ $+ kh\,\text{coſ.}(\psi - \text{I})$ indicante I angulum inclinationis planorum AB ac EF ad ſe inuicem, (qui quomodo inueſtigetur, ſupra iam indicauimus) ac intelligendo rectam mq, ex puncto m, cuius proiectio quaeritur, in planum EF perpendicularem.

Aſſignando itaque v et r, modo repertos valores, formula

$$(\text{D} - 2v)\,\text{ſin.}\,\delta - \mu(\text{D} - v)\,\text{ſin.}(\Phi + \delta) \pm \mu r\,\text{coſ}(\Phi + \delta) = 0,$$

immerſionem ac emerſionem, pro puncto quouis ſuperficiei terreſtris determinabit. Nil enim opus eſt, niſi vt momentum, quo L et λ, angulus nempe commutationis, et latitudo planetae heliocentrica, eos habent valores, vt huic aequationi ſatisfiat, inueſtigentur. Verum equidem eſt, fieri vix poſſe [illegible] calculi complicationem, vt directe ſcopum [illegible] conſequamur, aſt indirecta methodo in vſum voc[illegible] ſatisfacere [illegible]blemati facilius licebit. Optima [illegible] methodo [illegible] ſequenti ratione procedamus: In[illegible] prius m[illegible] quibus immerſio ex Terrae cen[illegible]icitur, [illegible] vocemus, binisque iſtis [illegible] et [illegible] supra primum et vltimum [illegible] in- vocaui, fiant aliquot hypotheses [illegible] me- supponatur immersio pro dato loco [illegible] me- et $T+\theta$, quae vero momenta [illegible] I. cadere debent. Ad haec temp[illegible] quo- Φ, ac I, et ex posteriori, an[illegible] con- tur r dato loco et tempori [illegible] ndi, in formulam supra erutam [illegible] ussi- nescere non faciant, diffic[illegible] era- quaerere tempus, quod [illegible] solu- suppeditat valores, qui [illegible] sit digunt, sicque problem[illegible] *bnp*, emersionis momento [illegible] fieri

Occasionem [illegible] o et cuidam problemati [illegible] *bnp* quod et per se [illegible] s sit, calculo deuorandum [illegible] nstat. sertim si non pr[illegible] hic mersionis atque [illegible] ctio- Supra iam [illegible] cir- immersionem [illegible] cum vero ista [illegible] com- ris super[illegible] facile culi, [illegible] viden[illegible] arti[illegible] ereo- e[illegible] ac- pro- udine ibendi polus,

Tab. XIV. Fig. 5.

Fig. 10.

Tab. XIV. Fig. 8. Sit itaque circulus afp interſectio plani, per Solem, Planetam, Terramque tranſeuntis, cum globo terreſtri, ſitque pq proiectio circuli hic deſcribendi in hoc planum. Ex centro b ad rectam pq, ducta perpendiculari brm, erit punctum m, Polus hic quaeſitus. Vt igitur hoc punctum determinetur, inueſtigandus erit angulus bnp. Liquet vero, cum recta qp definiatur aequatione:

$$(D-2v)\text{ſin.}\delta-\mu(D-v)\text{ſin.}(\Phi+\delta)\pm\mu r\text{coſ.}(\Phi+\delta)=0.$$

fore $\text{tang.}bnp=\frac{2\,\text{ſin.}\,\delta-\mu\,\text{ſin.}\,(\Phi+\delta)}{\pm\mu\,\text{coſ.}\,(\Phi+\delta)}$, et cum angulus mbf ſit ipſius bnp complementum, eſſe $\text{tang.}\,mbf=\frac{\pm\mu\,\text{coſ.}\,(\Phi+\delta)}{2\,\text{ſin.}\,\delta-\mu\,\text{ſin.}\,(\Phi+\delta)}$. Cognito igitur angulo mbf, Poli hic quaeſiti diſtantia a puncto f, cui Sol dato momento verticalis eſt, arcus nempe fm, ſimul innoteſcit. Determinari equidem iam poteſt, dato arcu fm, locus puncti m, cum autem nec in ſphaera artificiali, nec in proiectione globi terreſtris ſtereographica, qua communiter vti ſolemus, facile determinare liceat punctum quoddam, niſi per datam ipſius longitudinem et latitudinem, vt pro Polo hic quaeſito haec determinemus neceſſe eſt. Sit igitur Terrae Polus borreus in P, punctum, cui Sol verticalis, in E, et punctum, cuius longitudinem latitudinemque quaerimus, in p, ac tranſeuntibus circulis maximis per haec tria puncta, in triangulo ſphaerico PEp, ex latere Pp latitudo, ac ex angulo EPp longitudo puncti p determinatur. Cognita autem ſunt in hoc triangulo latera Ep, quod modo inueſtigare docuimus, atque PE, quod ex theoria Solis facile innoteſcit. Nec minus facile

Fig. 9.

cile habetur angulus PEp, a lateribus PE ac Ep inclusus. Cum enim hic angulus sit inclinatio plani meridiani, ad planum, per Solem, Terram atque Planetam traiectum, erit $=$ angulo $mcs = 90^\circ - fcm + \mathrm{I}$. Tab. XIV. Fig. 5. Ex his vero datis, latus Pp, ac angulus EPp, quomodo deriuentur, ex trigonometria sphaerica satis constat. Inuento hac ratione Polo circuli hic describendi, superest, vt perimetri a Polo distantia quoque inuestigetur. Opus autem non est, vt per calculum quaeratur, cum constructio satis exactam suppeditet solutionem. Facile haec absoluitur: cum enim sit $br = \frac{D\,\sin.\delta - \mu D\,\sin.(\Phi + \delta)}{\pm \mu\,\cos.(\Phi + \delta)}$ (assumimus nempe tang. bnp, a sinu huius anguli non sensibiliter differre, quod fieri licet, quoniam pro Planetis inferioribus, Mercurio et Venere, casuque, quem hic tractamus, angulus bnp satis paruus est) angulusque bpn iam supra inuentus sit, quomodo constructio instituenda sit, per se satis constat.

Sufficiunt haec ad descriptionem circuli, qui hic desideratur, in sphaera artificiali, si vero in proiectionem superficiei terrestris transferendus est eiusmodi circulus, artificiis quibusdam opus est, quae vero, cum ratio ipsorum ex principiis, quibus innititur, qua communiter vtuntur, stereographica telluris proiectio, facile pateat, solummodo adduxisse, sufficiet.

Concipiatur proiectio hemisphaerii telluris stereographica, descripta in circulo $ABEQ$, vbi EQ aequatoris, BA meridiani, in quo oculus constituitur, proiectionem exhibet. Fig. 10. Determinetur ex data longitudine ac latitudine punctum, quod est circuli describendi

polus,

polus, sitque hoc punctum p. Ducatur recta Cp, et Cn fiat $= Cp$. Ex B ducatur per n recta Bnr, ac ex r vtrinque abscindantur arcus rs et rq, distantiae perimetri circuli hic describendi a polo suo aequales. Ducantur porro ex B, per q et s rectae Bq, Bs, quae EQ, si opus, productam secent in t et u. Recta vt bisecetur in k, ac in recta Cp fiat $Cf = Ck$, et $fg = vk$. Quodsi tunc centro f, radio gf, describatur circulus lgm, factum erit, quod quaerebatur.

Qui proiectionum theoriam modice solum callet, fundamenta huius operationis leui negotio detegere poterit, simulque facile perspiciet, si contingat, punctum p non cadere in hemisphaerium EBQA, punctum, polo p diametraliter oppositum, in vsum vocandum esse, nec minus, si circulus non comprehendatur totus ab hemisphaerio EBQA, operationem similem, pro describenda reliqua circuli parte, in hemisphaerio altero instituendam esse.

Methodo hac ad quoduis momentum, loca, quae Planetae in Solis discum immersionem, aut ex ipso emersionem, conspiciunt, graphice exhiberi poterunt. Quo vero ex tali proiectione, omnem, quem intendimus, vsum obtinere queamus, ita in designatione horum circulorum, vt procedamus, conueniens erit, vt

1) punctum, quod primum, et quod est vltimum in terrae globo, eorum, quae immersionem aut emersionem conspiciunt, designentur, quod quomodo fieri queat, satis ex superioribus constat.

2) De-

2) Deſignetur circulus, in quo ſita ſint puncta omnia, quae ſimul cum Terrae centro immerſionem ac emerſionem planetae conſpiciunt.

3) Aſſumantur tempora, aequalibus, ſed paruis interuallis, v. g. minuto primo integro aut dimidio, diſtantia, intra limites ſupra definitos cadentia, et ad quoduis horum momentorum deſignetur circulus, loca, Planetae immerſionem aut emerſionem videntia, comprehendens.

Quodſi haec circulorum deſignatio in exacta globi terreſtris deſcriptione, maiori aliquantum forma expreſſa, inſtituatur, vel ſolo oculorum iudicio, cum exactitudine paucorum minutorum ſecundorum, tempus immerſionis et emerſionis, pro dato telluris loco quovis, determinari poterit, quae approximatio, quantum imminuere valeat calculi taedia, ſi quis pro dato vnico vel pluribus locis tempora haec exacte eruere voluerit, ſatis liquet.

Talem, qualem latius deſcripſi proiectionem, primus exhibuit Celeb. *de l'Isle*, pro tranſitu Mercurii ſub Sole, A. 1753. contingente, ſed methodum, qua aſſecutus eſt hos circulos, hactenus celauit, neque quisquam alius rei, difficultate non carentis, theoriam hactenus expoſuit, quae vero ex modo, quo rem hic conſideraui, ſponte profluit.

Valent hactenus explicata, non niſi pro eo caſu, vbi D ſin. Φ tantum habet valorem, vt radium globi terreſtris in immenſum fere ſuperet. Si vero diameter baſeos annuli conici terram ſecantis, de quo ſupra locutus ſum, non fuerit tanta, vt in parte ipſius, terrae globo occurrente, curuatura omnino negligi queat, nec calculus ſupra vſurpatus, nec proiectio modo deſcripta, vlterius locum habere poterunt. Interim ſi D ſin. Φ, habeat valorem adhuc ſatis magnum, quod accidit in Veneris tranſitu, proiectio eiusmodi non omni vſu carebit. Sic error a neglectu curuaturae oriundus, pro Veneris tranſitu A. 1761, vbi eſt maximus, vix vltra decimam minuti primi partem notabiliter aſſurgit, qui error tam paruus eſt, vt non obſtante eo, proiectio, in qua quippe non ſumma quaeritur exactitudo, adhuc egregium praeſtare queat vſum, praecipue ſi quis in aeſtimatione proiectioni innixa, ad leuem, quae adhiberi debet correctionem, quodammodo reſpicere voluerit. Aſt in diſquiſitionibus, maiorem deſiderantibus exactitudinem, error eiusmodi non foret excuſabilis, vnde quoque tunc formulae ſuperius erutae adhiberi non poterunt.

Quo igitur formulam ſatis exactam pro hoc caſu eruamus, notemus

1) Semidiametrum vtriusque baſeos annuli conici, non ſenſibiliter a valore D ſin. Φ, hinc nec inter ſe differre, modo Φ notabilem habeat relatiue ad Parallaxin Solis horizontalem, magnitudinem, quod pro Venere et Mercurio omnino ſemper locum habet.

2) Cum igitur baſes huius annuli pro aequalibus haberi queant, multo magis, hoc de circulis, qui producuntur ſectione annuli huius, per plana baſibus parallela valebit, vnde cuiuis horum circulorum ſemidiametrum D ſin. Φ tribuere licet.

3) Quan-

3) Quanquam diametri basium annuli conici continuo mutentur, toto tamen immersionum aut emersionum tempore tam paruas subeunt mutationes, vt hanc variabilitatem negligere liceat. Angulus enim Φ toto hoc tempore sensibiliter non mutatur. Quare Φ eum valorem, quem tenet, dum pro centro Terrae immersio, aut emersio, contingit, constanter seruare supponere licet.

Suppositis his, facile patet, solui posse problema, modo punctum in plano per Solem, Terram ac Planetam transeunte assignare valeamus, quod cum puncto superficiei dato immersionem, aut emersionem, simul conspicit. Quomodo igitur hoc fieri queat, inquiramus.

Sit FGHeq hemisphaerium terrestre, plano per Solem, Terram et Planetam transeunti insistens; leA recta, quae producta per Solis centrum transit; ab diameter Terrae huic rectae perpendicularis; RA recta Solis ac Planetae centra coniungens; pq annuli conici cum plano FGpq intersectio; in m vero punctum, quod immersionem conspicit, quodque propterea in annuli cum terrae globo intersectione constituitur. Si annulus hic secetur plano, ad rectam RA et subiectum planum perpendiculari, siue, si secetur plano basibus parallelo, sectione transeunte per punctum m, producet haec sectio circulum smQ, per punctum quoddam s rectae pq transeuntem, cuius diameter $= 2\,D \sin.\Phi$. Demittatur ex m, ad planum FGqp perpendicularis mk, quam s vocabimus, ex k vero ducantur perpendiculares kb et kd, per v et r indicandae. Perspicuum hic est, non punctum k, sed punctum s, fore istud, quod cum m simul immersionem Tab. XV. Fig. 11. et 12.

 conspisi haec comparatio instituatur, vel enim D sin Φ tantum est, vt eius ratio ad radium terrae pro inassignabili haberi queat, aut quanquam haec ratio sit assignabilis, tamen est adhuc admodum magna, aut tandem ratio haec sit admodum parua. Priori casu, curuatura annuli conici, in perparua ista, quae globum telluris secat, ipsius portione non erit sensibilis, sed annuli ista pars pro plana haberi poterit.

Euoluamus, antequam ad reliquos transeamus, hunc casum paulo attentius. Cum hocce casu curuatura annuli, in ea parte, quae globum terrestrem secat, negligi queat, pro plano per pq transeunte, ad planum circuli T perpendiculari haberi potest. Loca itaque omnia, quae eodem momento, Planetae in Solis discum immersionem, aut ex ipso emersionem conspiciunt, in intersectione plani, cum globi terrestris superficie, hinc in circulo quodam, in telluris superficie ducto, sita erunt. Admodum igitur facilis, ac expedita erit hoc casu problematis nostri solutio. Si Tab. XIV. Fig. 4. nempe circulus ADB, designet circulum T, qui intersectione plani, per Solem, Terram ac Planetam transeuntis, cum terrestri globo producitur, punctum superficiei terrestris E, cum puncto F, quod designatur demissa ex E ad planum ABD perpendiculari, immersionem simul conspiciet. Nil itaque opus est, nisi vt recta GF ac HF, situm puncti F, quod quouis momento puncto E respondet, determinantes eruantur, earumque valores in supra euolutam formulam introducantur. Patet autem ad hoc negotium perficiendum via, sequenti ratione:

Ex

Ex theoria proiectionum orthographicarum, quarum in vniuersa Astronomia frequens est vsus, satis constat, si circulus epl repraesentet, plani ad Eclipticam et Terrae Solisque centra iungentem lineam, perpendicularis, cum globo terrestri; el vero huius plani cum ipso Eclipticae plano intersectionem; sique dicatur radius Telluris $=\varrho$, obliquitas Eclipticae $=\omega$, Solis a solstitio aestiuo distantia $=\varepsilon$; proiectionem m Poli borei in hoc planum, determinari ita, vt sit $fc=\varrho$ cos. ω, fm vero ad fc perpendicularis ex puncto m $=\varrho\,\text{sin.}\,\omega\,\text{sin.}\,\varepsilon$. Est autem tunc sinus anguli, sub quo axis Telluris ad planum epl inclinatur, qui angulus declinationi Solis semper aequatur, $=\text{sin.}\,\omega\,\text{cos.}\,\varepsilon$, quem angulum compendii causa per α designabimus. Quodsi vlterius nunc detur punctum quoddam superficiei Telluris, cuius complementum latitudinis sit $=\gamma$, elongatio vero a meridiano, quae ex loci longitudine geographica ac tempore innotescit, $=e$, punctum k, in quod proiicitur hoc punctum, determinatur, faciendo $cb=\varrho(\text{cos}\,\gamma\,\text{cos}\,\alpha-\text{sin}\,\gamma\,\text{sin.}\,\alpha\,\text{cos.}\,e)$, et bk ad cb perpendicularem $=\varrho\,\text{sin.}\,\gamma\,\text{sin.}\,e$. Tab.XIV. Fig. 5.

Determinant formulae istae puncti cuiusuis in planum Eclipticae perpendiculare proiectionem. Non difficulter vero hinc deducuntur quoque aequationes, quarum ope punctum istud in ipsum Eclipticae planum proiicitur. Concipiatur enim, ex k demitti ad rectam el perpendicularem kg, dictoque angulo $fcm=\psi$, reperietur $cg=cb\,\text{sin.}\,\psi+kb\,\text{cos.}\,\psi$, ac $kg=cb\,\text{cos.}\,\psi-kb\,\text{sin.}\,\psi$. Si igitur sit $apbel$ hemisphaerium Telluris, $aebl$ Eclipticae planum, ab rectam Solis ac Terrae Fig. 5. Fig. 6.

 centra

centra iungentem, indicante; k vero puncti dati m in planum eclipticae perpendiculare, epl proiectio, erit $st = cg = cb$ fin. $\psi + kb$ cof ψ, ct vero $= km$ $= \sqrt{\varrho^2 - cg^2 - kg^2} = \sqrt{\varrho^2 - cb^2 - kb^2}$.

Tab XIV. Fig. 7. Sit tandem planum AB, planum Eclipticae, EF planum, per Solis, Terrae ac Planetae centra traiectum, ac in c centrum Terrae, erit, retentis in hac figura iisdem litteris, quibus pro antecedenti vtebamur, ct $= v = \sqrt{\varrho^2 - cb^2 - kb^2}$, ac tq fiue $r = cb$ fin. $(\psi - I)$ $+ kb$ cof. $(\psi - I)$ indicante I angulum inclinationis planorum AB ac EF ad fe inuicem, (qui quomodo inueftigetur, fupra iam indicauimus) ac intelligendo rectam mq, ex puncto m, cuius proiectio quaeritur, in planum EF perpendicularem.

Affignando itaque v et r, modo repertos valores, formula

$$(D - 2v) \text{fin.} \delta - \mu (D - v) \text{fin.} (\phi + \delta) \pm \mu r \text{cof} (\phi + \delta) = 0,$$

immerfionem ac emerfionem, pro puncto quouis fuperficiei terreftris determinabit. Nil enim opus eft, nifi vt momentum, quo L et λ, angulus nempe commutationis, et latitudo planetae heliocentrica, eos habent valores, vt huic aequationi fatisfiat, inueftigentur. Verum equidem eft, fieri vix poffe, ob calculi complicationem, vt directe fcopum hunc confequamur, aft indirecta methodo in vfum vocata, fatisfacere problemati facilius licebit. Optima videtur methodus, fi fequenti ratione procedamus: Inuentis prius momentis, quibus immerfio ex Terrae centro confpicitur, quod T vocemus, binisque iftis momentis R et S, quae fupra ſupra primum et vltimum immerſionis momentum vocaui, fiant aliquot hypotheſes: contingere nempe ſupponatur immerſio pro dato loco, momentis $T + \tau$, et $T + \theta$, quae vero momenta intra limites R et S cadere debent. Ad haec tempora determinentur, v, Φ, ac I, et ex poſteriori, angulo nempe I, inueſtigetur r dato loco et tempori reſpondens. Valores iſti in formulam ſupra erutam introducti, ſi ipſam euaneſcere non faciant, difficile non erit, interpolando quaerere tempus, quod eiusmodi pro v, Φ, I ac r, ſuppeditat valores, qui formulam noſtram ad zero redigunt, ſicque problema propoſitum ſoluunt. Idem de emerſionis momento ſtatuendum eſt.

Occaſionem praebent hae diſquiſitiones eleganti cuidam problemati reſoluendo, quod, praeterquam quod et per ſe huc pertineat, laborem in ſuperiori calculo deuorandum inſigniter imminuere valet, praeſertim ſi non pro vnico, ſed pro pluribus locis, immerſionis atque emerſionis momenta eruenda ſint. Supra iam annotaui, plura ſemper eſſe Telluris loca immerſionem ac emerſionem ſimul conſpicientia, omnia vero iſta loca deprehendi in circulo quodam in Telluris ſuperficie ducto. Fieri itaque poteſt, vt iſti circuli, ex quorum perimetro immerſio aut emerſio dato videntur momento, actu deſignentur, vel in globo artificiali, vel in plano, totius Telluris proiectionem exhibente. Ad hoc vero opus eſt, vt cuiusuis horum circulorum tam polus, quam perimetri ipſius a polo diſtantia, determinetur, quorum igitur vtrumque quomodo inueſtigetur, diſquirendum nobis eſt.

 Sit

Tab. XIV. Fig. 8. Sit itaque circulus afp interſectio plani, per Solem, Planetam, Terramque tranſeuntis, cum globo terreſtri, ſitque pq proiectio circuli hic deſcribendi in hoc planum. Ex centro b ad rectam pq, ducta perpendiculari brm, erit punctum m, Polus hic quaeſitus. Vt igitur hoc punctum determinetur, inueſtigandus erit angulus bnp. Liquet vero, cum recta qp definiatur aequatione:

$$(D-2v)\,\text{ſin.}\,\delta-\mu(D-v)\,\text{ſin.}(\Phi+\delta)\pm\mu r\,\text{coſ.}(\Phi+\delta)=0.$$

fore tang. $bnp=\frac{2\,\text{ſin.}\,\delta-\mu\,\text{ſin.}\,(\Phi+\delta)}{\pm\mu\,\text{coſ.}\,(\Phi+\delta)}$, et cum angulus mbf ſit ipſius bnp complementum, eſſe tang. $mbf=\frac{\pm\mu\,\text{coſ.}\,(\Phi+\delta)}{2\,\text{ſin.}\,\delta-\mu\,\text{ſin.}\,(\Phi+\delta)}$. Cognito igitur angulo mbf, Poli hic quaeſiti diſtantia a puncto f, cui Sol dato momento verticalis eſt, arcus nempe fm, ſimul innoteſcit. Determinari equidem iam poteſt, dato arcu fm, locus puncti m, cum autem nec in ſphaera artificiali, nec in proiectione globi terreſtris ſtereographica, qua communiter vti ſolemus, facile determinare liceat punctum quoddam, niſi per datam ipſius longitudinem et latitudinem, vt pro Polo hic quaeſito haec determinemus neceſſe eſt. Sit igitur Terrae Polus boreus in P, punctum, cui Sol verticalis, in E, et punctum, cuius longitudinem latitudinemque quaerimus, in p, ac tranſeuntibus circulis maximis per haec tria puncta, in triangulo ſphaerico P Ep, ex latere Pp latitudo, ac ex angulo E Pp longitudo puncti p determinatur. Cognita autem ſunt in hoc triangulo latera Ep, quod modo inueſtigare docuimus, atque P E, quod ex theoria Solis facile innoteſcit. Nec minus facile

Fig. 9.

cile habetur angulus P E p, a lateribus P E ac E p incluſus. Cum enim hic angulus ſit inclinatio plani meridiani, ad planum, per Solem, Terram atque Planetam traiectum, erit $=$ angulo $mcs = 90^\circ - fcm + \mathrm{I}$. Tab. XIV. Fig. 5.
Ex his vero datis, latus Pp, ac angulus E Pp, quomodo deriuentur, ex trigonometria ſphaerica ſatis conſtat. Inuento hac ratione Polo circuli hic deſcribendi, ſupereſt, vt perimetri a Polo diſtantia quoque inueſtigetur. Opus autem non eſt, vt per calculum quaeratur, cum conſtructio ſatis exactam ſuppeditet ſolutionem. Facile haec abſoluitur: cum enim ſit $br = \frac{D\,\mathit{ſin.}\,\delta - \mu D\,\mathit{ſin.}\,(\Phi + \delta)}{\pm \mu\,\mathit{coſ.}\,(\Phi + \delta)}$ (aſſumimus nempe tang. bnp, a ſinu huius anguli non ſenſibiliter differre, quod fieri licet, quoniam pro Planetis inferioribus, Mercurio et Venere, caſuque, quem hic tractamus, angulus bnp ſatis paruus eſt) angulusque bpn iam ſupra inuentus ſit, quomodo conſtructio inſtituenda ſit, per ſe ſatis conſtat.

Sufficiunt haec ad deſcriptionem circuli, qui hic deſideratur, in ſphaera artificiali, ſi vero in proiectionem ſuperficiei terreſtris transferendus eſt eiusmodi circulus, artificiis quibusdam opus eſt, quae vero, cum ratio ipſorum ex principiis, quibus innititur, qua communiter vtuntur, ſtereographica telluris proiectio, facile pateat, ſolummodo adduxiſſe, ſufficiet.

Concipiatur proiectio hemiſphaerii telluris ſtereographica, deſcripta in circulo A B E Q, vbi E Q aequatoris, B A meridiani, in quo oculus conſtituitur, proiectionem exhibet. Determinetur ex data longitudine ac latitudine punctum, quod eſt circuli deſcribendi polus, Fig. 10.

polus, sitque hoc punctum p. Ducatur recta Cp, et Cn fiat $= Cp$. Ex B ducatur per n recta Bnr, ac ex r vtrinque abscindantur arcus rs et rq, distantiae perimetri circuli hic describendi a polo suo aequales. Ducantur porro ex B, per q et s rectae Bq, Bs, quae EQ, si opus, productam secent in t et v. Recta vt bisecetur in k, ac in recta Cp fiat $Cf = Ck$, et $fg = vk$. Quodsi tunc centro f, radio gf, describatur circulus lgm, factum erit, quod quaerebatur.

Qui proiectionum theoriam modice solum callet, fundamenta huius operationis leui negotio detegere poterit, simulque facile perspiciet, si contingat, punctum p non cadere in hemisphaerium EBQA, punctum, polo p diametraliter oppositum, in vsum vocandum esse, nec minus, si circulus non comprehendatur totus ab hemisphaerio EBQA, operationem similem, pro describenda reliqua circuli parte, in hemisphaerio altero instituendam esse.

Methodo hac ad quoduis momentum, loca, quae Planetae in Solis discum immersionem, aut ex ipso emersionem, conspiciunt, graphice exhiberi poterunt. Quo vero ex tali proiectione, omnem, quem intendimus, vsum obtinere queamus, ita in designatione horum circulorum, vt procedamus, conueniens erit, vt

1) punctum, quod primum, et quod est vltimum in terrae globo, eorum, quae immersionem aut emersionem conspiciunt, designentur, quod quomodo fieri queat, satis ex superioribus constat.

2) De-

2) Deſignetur circulus, in quo ſita ſint puncta omnia, quae ſimul cum Terrae centro immerſionem ac emerſionem planetae conſpiciunt.

3) Aſſumantur tempora, aequalibus, ſed paruis interuallis, v. g. minuto primo integro aut dimidio, diſtantia, intra limites ſupra definitos cadentia, et ad quoduis horum momentorum deſignetur circulus, loca, Planetae immerſionem aut emerſionem videntia, comprehendens.

Quodſi haec circulorum deſignatio in exacta globi terreſtris deſcriptione, maiori aliquantum forma expreſſa, inſtituatur, vel ſolo oculorum iudicio, cum exactitudine paucorum minutorum ſecundorum, tempus immerſionis et emerſionis, pro dato telluris loco quouis, determinari poterit, quae approximatio, quantum imminuere valeat calculi taedia, ſi quis pro dato vnico vel pluribus locis tempora haec exacte eruere voluerit, ſatis liquet.

Talem, qualem latius deſcripſi proiectionem, primus exhibuit Celeb. *de l'Isle*, pro tranſitu Mercurii ſub Sole, A. 1753. contingente, ſed methodum, qua aſſecutus eſt hos circulos, hactenus celauit, neque quisquam alius rei, difficultate non carentis, theoriam hactenus expoſuit, quae vero ex modo, quo rem hic conſideraui, ſponte profluit.

Valent hactenus explicata, non niſi pro eo caſu, vbi D ſin. Φ tantum habet valorem, vt radium globi terreſtris in immenſum fere ſuperet. Si vero diameter baſeos annuli conici terram ſecantis, de quo ſupra locutus sum, non fuerit tanta, vt in parte ipsius, terrae globo occurrente, curuatura omnino negligi queat, nec calculus supra vsurpatus, nec proiectio modo descripta, vlterius locum habere poterunt. Interim si D sin. Φ, habeat valorem adhuc satis magnum, quod accidit in Veneris transitu, proiectio eiusmodi non omni vsu carebit. Sic error a neglectu curuaturae oriundus, pro Veneris transitu A. 1761, vbi est maximus, vix vltra decimam minuti primi partem notabiliter assurgit, qui error tam paruus est, vt non obstante eo, proiectio, in qua quippe non summa quaeritur exactitudo, adhuc egregium praestare queat vsum, praecipue si quis in aestimatione proiectioni innixa, ad leuem, quae adhiberi debet correctionem, quodammodo respicere voluerit. Ast in disquisitionibus, maiorem desiderantibus exactitudinem, error eiusmodi non foret excusabilis, vnde quoque tunc formulae superius erutae adhiberi non poterunt.

Quo igitur formulam satis exactam pro hoc casu eruamus, notemus

1) Semidiametrum vtriusque baseos annuli conici, non sensibiliter a valore D sin. Φ, hinc nec inter se differre, modo Φ notabilem habeat relatiue ad Parallaxin Solis horizontalem, magnitudinem, quod pro Venere et Mercurio omnino semper locum habet.

2) Cum igitur bases huius annuli pro aequalibus haberi queant, multo magis, hoc de circulis, qui producuntur sectione annuli huius, per plana basibus parallela valebit, vnde cuiuis horum circulorum semidiametrum D sin. Φ tribuere licet.

3) Quan-

3) Quanquam diametri basium annuli conici continuo mutentur, toto tamen immersionum aut emersionum tempore tam paruas subeunt mutationes, vt hanc variabilitatem negligere liceat. Angulus enim Φ toto hoc tempore sensibiliter non mutatur. Quare Φ eum valorem, quem tenet, dum pro centro Terrae immersio, aut emersio, contingit, constanter seruare supponere licet.

Suppositis his, facile patet, solui posse problema, modo punctum in plano per Solem, Terram ac Planetam transeunte assignare valeamus, quod cum puncto superficiei dato immersionem, aut emersionem, simul conspicit. Quomodo igitur hoc fieri queat, inquiramus.

Sit FGHeq hemisphaerium terrestre, plano per Solem, Terram et Planetam transeunti insistens; leA recta, quae producta per Solis centrum transit; ab diameter Terrae huic rectae perpendicularis; RA recta Solis ac Planetae centra coniungens; pq annuli conici cum plano FGpq intersectio; in m vero punctum, quod immersionem conspicit, quodque propterea in annuli cum terrae globo intersectione constituitur. Si annulus hic secetur plano, ad rectam RA et subiectum planum perpendiculari, siue, si secetur plano basibus parallelo, sectione transeunte per punctum m, producet haec sectio circulum smQ, per punctum quoddam s rectae pq transeuntem, cuius diameter $= 2\,D\,\text{sin}.\,\Phi$. Demittatur ex m, ad planum FGqp perpendicularis mk, quam s vocabimus, ex k vero ducantur perpendiculares kb et kd, per v et r indicandae. Perspicuum hic est, non punctum k, sed punctum s, fore istud, quod cum m simul immersionem

Tab. XV. Fig. 11. et 12.

 conspi-

conſpicit. Vt igitur hoc punctum determinetur, ducantur ex s perpendiculares st ac sg, ac ſatis liquet, producta st vsque ad i inueniri sg, minuendo kb recta ik, rectam vero st haberi, minuendo bc ſeu kd recta is.

Notemus hic Fig. 12. exhibere vndecimae ichnographiam. Litteris, quibus in ipſa vſus ſum, denotantur puncta reſpondentia punctis figurae antecedentis, iisdem literis notatis. Addidi hanc figuram, quoniam viſum eſt, ad meliorem comprehenſionem plurimum ipſam conferre poſſe.

Liquet ex vtriusque figurae intuitu, triangulum kis ad i eſſe rectangulum, angulum vero $ksi = \Phi$. Modo igitur detur ipſius hypothenuſa ks, reliqua latera ſimul innoteſcent. Eſt autem in circulo Qms, $2D \sin.\Phi - ks : mk = mk : ks$, hinc $mk^2 = s^2 = 2D \sin.\Phi \times ks - ks^2$. Negligere autem licet terminum ks^2, qui in ſuppoſitione noſtra ſemper eſt admodum paruus, vnde prodit $ks = \frac{s^2}{2D \sin.\Phi}$, ac $ki = \frac{s^2}{2D}$, et $si = \frac{s^2 \cos.\Phi}{2D \sin.\Phi} = \frac{s^2}{2D \tang.\Phi}$, vt ſic reperiatur $sg = v - \frac{s^2}{2D}$, ac $st = r - \frac{s^2}{2D \tang.\Phi}$. Rurſum hic in valore ipſius sg terminum $\frac{s^2}{2D}$, tanquam valde paruum et incomparabilem, abiicere licet, quare tuto ſupponitur $sg = kb = v$.

Vſurpando hos valores pro sg ac st repertos, eosque in ſupra repertam formulam ſubſtituendo, aſſumit ipſa hanc formam:

$$(2D - v)\sin.\delta - \mu(D - v)\sin.(\Phi + \delta) \pm \mu r \cos.(\Phi + \delta) = 0$$
$$\mp \frac{\mu s^2 \cos.(\Phi + \delta)}{2D \tang.\Phi}$$

Sicque

Sicque obtinuimus aequationem, ex qua momentum immerſionis et emerſionis pro puncto s, ſimul vero pro puncto m, determinari poteſt.

Methodum, quae adhibenda, vt ope huius aequationis momentum quaeſitum eruatur, hic non attingimus, cum ſupra prolatae omnino ſit ſimilis. Id ſolum notare expediet, eſſe $s^2 = \varrho^2 - v^2 - r^2$, ac, ſi approximatio iam eo perducta eſt, vt momentum immerſionis, vel emerſionis, iam intra errorem vnius alteriusue minuti primi innotuerit, terminum $\frac{s^2}{2 D \, tang. \Phi}$ pro conſtanti haberi poſſe; quapropter ſolutio problematis, pro hocce caſu vix difficilior euadit, quam pro prius euoluto, vbi annuli conici Terram ſecantis curuatura prorſus negligebatur.

Expedito hoc negotio, caſuum, quos ſupra indicauimus, adhuc tertius ſe nobis offert, vbi annuli conici diameter exiſtet ita parua, vt minorem quandam ad diametrum terrae habeat rationem. Locantur tunc puncta omnia, eodem momento, Planetae a Solis centro elongationem, ſub eodem conſpicientia angulo, in curua quadam, duplici curuatura praedita, ac deſcriptu ſatis difficili. Nec minus formulae analyticae pro hoc caſu valentes admodum euadunt complicatae. Cum autem caſus iſte ad negotium, quod tractamus, plane non pertineat, omnino ipſum hic praetermittimus.

DISSERTATIO II.

DE EFFECTV PARALLAXEOS IN TRANSITV PLANETARVM SVB SOLE.

Auctore

E. V. T. AEPINO.

Cum negotium, in diſſertatione praecedente, Academiae nuper tradita, expediendum, in eo ſolum conſtiterit, vt theoriam generalem, formulasque analyticas, in disquiſitionibus circa parallaxeos effectum in tranſitu Planetarum ſub Sole, inſtituendis, adhibendas, eruerem, de concinnitate formularum, earumque abbreuiatione non ſollicitus fui, niſi quatenus calculi analytici difficultates ſuperandae hoc requirebant. Dantur autem egregia, partim conſulto, partim quod ſine numerorum abſolutorum conſideratione ratio ipſorum reddi vix poterat, a me omiſſa, calculi compendia, quorum ope inſigniter contrahi poteſt, ſi a me euolutae formulae generales in dato caſu adhibendae ſunt. Scopus itaque huius diſſertationis eo redit, vt exemplo tranſitus ♀ ſub ſole, An. 1761. contingente, partim methodus generalis illuſtretur, partim calculi compendia, de quibus locutus ſum, explicentur.

Vſus ſum in calculo inſtituendo Tabulis Halleianis, ex quibus longitudinem atque latitudinem Veneris, Solis

Solis longitudinem, caeteraque, quae calculum ingrediuntur elementa, quaesiui, ad momentae, tempori immersionis et emersionis centri Planetae, satis propinqua. Inuenta autem sunt a me ex hisce tabulis

An. 1761. d. 25. Maii styl. vet. tempore medio, ad meridianum Grenouicensem

h. 14.	Longitudo ♀ vera helioc.	8^s	15°	$21'$	$1''$
	Latitudo ♀ australis helioc.			$3'$	$3''$
	logar. distantiae ♀ *a* ☉	4, 861181			
	Longitudo ☉	2^s	15°	$26'$	$55''$
h. 21.	Longit. ♀ vera helioc.	8^s	15°	$48'$	$47''$
	Latit. ♀ austr helioc.			$4'$	$40''$
	logar. dist. ♀ *a* ☉	4, 861201			
	Longitudo ☉	2^s	15°	$43'$	$39''$

Concluditur immediate ex his elementis

Horarius ☉ in longit.	$2'$ $23''$, 43
Horarius ♀ in latit.	$13''$, 86
Ang. commut. ad h. 14.	$+ 5'$ $54''$
Ang commut. ad h. 21.	$- 5'$ $8''$
Horarius in ang. commut.	$1'$ $34''$, 57.

Data haec sufficiunt, ad calculum vniuersum absoluendum.

Initium calculi ducamus ab inuestigatione momenti immersionis pro centro Terrae, pro quo inuenta est formula $\sin(\Phi + \delta) = \frac{\sin.\delta}{\mu}$. Cum anguli Φ et δ, sint satis parui, vt statim patebit, loco sinuum, arcus ipsi tuto substituuntur, vnde obtinetur $\Phi + \delta = \frac{\delta}{\mu}$, siue $\log.(\Phi + \delta) = \log.\delta - \log.\mu$. Inuenitur autem δ ex tabulis $= 15'\ 49''$, ac log. μ, ex supra inuen-

inuentis elementis $= -0,145500$, vnde ſequitur $\Phi = 6'$, $17''$, 68, qui valor etiam pro emerſione valet, cum nec μ nec δ tempore 7 circiter horarum ſenſibilem patiantur mutationem. Fit itaque immerſio pro centro Terrae, ſi Φ adipiſcitur valorem $6', 17'', 68$, quare, quonam hoc contingat momento, diſpiciendum erit.

Per ea, quae in Diſſert. antecedente demonſtrata ſunt, eſt $\cos. \Phi = \cos. L \times \cos. \lambda$, qui anguli omnes cum ſint admodum parui, ſupponi poterit, $\Phi^2 = L^2 + \lambda^2$. Inuenitur autem per hanc formulam, Φ ad h. 14. $= 6', 38''$, vnde patet, immerſionem cadere poſt h. 14. Optime inueſtigatur momentum, cui reſpondet, ope falſarum poſitionum, quod, vt eo minori opera fieri queat, annotamus:

1) Variationes in L et λ contingentes, in calculo noſtro, quaſi vniformiter peragantur, aſſumi poſſe, vnde variationes ipſius L ad variationes ipſius λ, eodem tempore contingentes, rationem habent conſtantem, quae ex horariis ſupra inuentis ſtatuenda eſt, vti $1 : 0, 1465$.

2) Si igitur datur variatio in L, reſpondens variatio in λ ſimul datur, vnde cum L et λ ad h. 14 ſint cognita, cuiuis L reſpondens λ aſſignari poterit.

Per aliquot itaque tentamina non difficulter determinantur L et λ, quae reddunt $\Phi = 6' 17'', 68$. Inuenio in noſtro caſu $L = 5' 28'', 27$, et $\lambda = 3' 6'', 77$. Cum igitur tota variatio, quae contingit in L, inter h. 14, ac momentum immerſionis, ſit $= 25'', 73$, ob horarium ipſius L cognitum, dabitur tempus, huic

varia-

variationi respondens, quod reperitur $16', 19''$, quare immersio pro centro Terrae fieri debet $14^h. 16'. 19''$.

Inuestigato hoc momento, vlterius iam procedendum est, ad momentorum, quibus primo ac vltimo ex Terrae superficie immersio conspicitur, determinationem. Erutae sunt pro his momentis formulae, $\sin.(\Phi + \delta) = \frac{D \sin. \delta + \mu \varrho}{\mu D}$, et $\sin(\Phi + \delta) = \frac{D \sin. \delta - \mu \varrho}{\mu D}$. Ob angulos satis paruos, adhibendo loco sinuum arcus ipsos, fit $\Phi + \delta = \frac{\delta}{\mu} \pm \frac{\varrho}{D}$; est autem $\frac{\delta}{\mu}$ aequale $\Phi + \delta$, quod immersioni pro Terrae centro respondet, quare si in posterum, Φ pro centro Terrae, indicemus per γ, erit Φ pro primo ac vltimo immersionis momento $= \gamma \pm \frac{\varrho}{D}$. Cum autem sit $\frac{\varrho}{D} =$ sinui parallaxeos Solis horizontalis, seu parallaxi horizontali ipsi, quam $10''$ assumamus, (in qua quippe ipsius magnitudine statuenda, hactenus institutae obseruationes exactiores, fere consentiunt) fit:

Φ pro momento immers. primo $= 6', 27'', 68$
Φ pro momento immers. vltimo $= 6', 7'', 68$.

Quodsi nunc tempora, quibus Φ hos adipiscitur valores, adhibendo methodum supra indicatam, inuestigemus, reperitur:

momentum primum immers. $14^h. 8'. 25''$
ac pro hoc momento $L = 5'. 40'', 72$
$\lambda = 3'. 4'', 94$
momentum vltim. immers. $14^h. 24'. 21''$
ac pro hoc momento $L = 5'. 15'', 62$
$\lambda = 3'. 8'', 62$.

Via nunc patet ad proiectionis, pro hoc ♀ transitu, qualem in dissertatione antecedente descripsi, constructionem, quam vt exhibeamus, tempus inter immersionis primum ac vltimum momentum interceptum, sequenti ratione distribuamus:

$14^h.\ 8'.\ 25''$	$14^h.\ 16'.\ 19''$
9. 0	17. 0
10. 0	18. 0
11. 0	19. 0
12. 0	20. 0
13. 0	21. 0
14. 0	22. 0
15. 0	23. 0
	24. 21

et ad quoduis horum momentorum circulum in proiectione Telluris designemus, qui per loca, eodem momento immersionem conspicientia, proxime transit.

Annotamus hic primum generatim, angulum bnp, Fig. 8. Differt. praeced. pro constanti haberi posse. Cum enim sit tang. $bnp = \frac{2\,\text{sin.}\,\delta - \mu\,\text{sin.}\,(\Phi + \delta)}{\mu\,\text{cos.}\,(\Phi + \delta)}$, erit proxime $bnp = \frac{2\delta}{\mu} - (\Phi + \delta)$. Sit, vti supra posuimus, $\frac{\delta}{\mu} = \gamma + \delta$, atque erit $bnp = 2\gamma + 2\delta - (\Phi + \delta)$. Variatur hic equidem Φ pro quouis momento, ast cum omnia Φ contineantur intra limites $\gamma + 10''$ et $\gamma - 10''$, hinc differentia ipsius Φ a γ nunquam $10''$ superare queat, quae differentia tam parva est, vt tuto negligi possit, assumi poterit constanter $\Phi = \gamma$, vnde est $bnp = 2\gamma + 2\delta - \gamma - \delta =$ pro

nostro

nostro casu, $22'.6''$. Sequitur hinc, *fm*, seu poli, circuli hic describendi, a puncto, cui Sol quouis momento verticalis est, distantiam, constanter $90^\circ.22'$. assumendam esse.

Computanda itaque nunc erunt loca, quibus, supra assignatis momentis, Sol verticalis existit. Latitudo horum locorum aequalis est declinationi Solis, quae, cum interuallo 16 quasi minutorum sensibiliter non varietur, loca omnia, quibus Sol durante immersione verticalis fit, in eodem parallelo sita, ac distantiam $67^\circ.17'$ a polo boreo habere censenda sunt. Vt vero istorum locorum longitudo inuestigetur, peculiari calculo opus est. Ante omnia autem momenta, ad quae circuli in proiectione Telluris exhibendi sunt, cum tempus medium exhibeant, ad tempus solare reducenda sunt. Cum itaque sit aequatio temporis ad A. 1761. d. 25 Maii styl. vet, h. $14 = + 1'.54''$, erunt momenta supra assignata in tempore solari:

$14^h.10'.19''$	$14^h.18'.13''$
10. 54	18. 54
11. 54	19. 54
12. 54	20. 54
13. 54	21. 54
14. 54	22. 54
15. 54	23. 54
15. 54	24. 54
16. 54	25. 54
	26. 15

 Datur

Datur hinc elongatio punctorum, quibus Sol quovis momento verticalis exiſtit, a meridiano Grenouicenſi, verſus orientem, in tempore:

$9^h.49'.41''$	$9^h.41'.47''$
49. 6	41. 6
48. 6	40. 6
47. 6	39. 6
46. 6	38. 6
45. 6	37. 6
44. 6	36. 6
43. 6	35. 6
	33. 45.

Quae tempora, in arcus aequatoris conuerſa, dant elongationem orientalem horum punctorum a meridiano Grenouicenſi:

$147°.25'.15''$	$145°.26'.45''$
16. 30	1. 30
1. 30	144. 46. 30
146. 46. 30	31. 30
31. 30	16. 30
16. 30	1. 30
1. 30	143. 46. 30
145. 46. 30	31. 30
	26. 15.

Obtinuimus ſic omnia data, ad reſoluendum triangulum PEp, Fig. 9. Differt. praeced. neceſſaria, praeter angulum PEp, pro quo inuenta eſt formula $90° - fcm + I$. Eſt vero valor anguli $fcm = 6°.13'$, quoniam, vti ex Differt. praeced. patet, tang. fcm $=$ tang. ω ſin. ε tang. I inuenta eſt $= \frac{\text{ſin. } \lambda}{\text{tang. L}}$. Cum vero ſinus

sinus et tangentes arcuum paruorum sint proxime arcubus proportionales, supponi poterit, tang. $I = \frac{\lambda}{L}$, vnde reperitur

I - - - - pro primo immers. momento $= 28°.29'$

pro centro Terrae $= 29.\ 38$

pro vltimo immers. momento $= 30.\ 52$.

Vnde, cum variationes anguli I sint pro hoc negotio satis exacte tempori proportionales, quaerendo I, pro momentis intermediis, per interpolationem, sequens obtinetur series angulorum PEp.

112°.16′	113°.25
21	31
30	40
38	50
47	59
56	114. 8
113. 5	17
13	26
	39.

Ex his vero datis sequitur, polorum, circulorum hic describendorum

I. Latitudo australis.

20°.36′	21°.39′
41	45
49	53
56	22. 1
21. 4	10
12	18
20	26
28	34
	46

II. Elongatio a meridiano Grenouicensi versus orientem.

225°. 48′.	226°. 12′
37	0
17	225. 42
227. 57	23
37	5
18	224. 47
226. 58	29
38	11
	223. 46.

In valores hos, non omnes, calculo directo inquisiui, sed inuentis aliquibus, reliquos interpolando obtinui, vnde quoque ab errore vnius alteriusue minuti primi, non immunes sunt, qui vero error hic tuto pro nullo habetur.

Superest adhuc valor rectae br, Fig. 8. Dissert. praeced. pro quouis assumtorum momentorum inuestigandus. Formula, quam pro ipsa eruimus, erat $\frac{D\,\sin.\delta - \mu\, D\,\sin.(\Phi+\delta)}{\mu\,\cos.(\Phi+\delta)}$. Supponere vero hic licet, sine errore sensibili, $\cos.(\Phi+\delta)=1$, ac $\sin.\delta=\delta$, vt et $\sin.(\Phi+\delta)=\Phi+\delta$, vnde obtinetur formula $\frac{D\delta - \mu\, D(\Phi+\delta)}{\mu} = br$. Cum autem sit $\frac{\delta}{\mu} = \Phi+\delta$ pro centro Terrae, indicando Φ pro centro Terrae per γ, prodibit $D\gamma + D\delta - D\Phi - D\delta = D(\gamma-\Phi)$. Est autem $D = \frac{f}{10''}$, vnde fit $br = \frac{f}{10}(\gamma-\Phi)$. Ad exhibenda itaque br, necesse est, vt ad quoduis assumtorum momentorum Φ respondens inuestigetur. Prolixus foret calculus, si omnia haec Φ directe quaerenda forent, et facilius multo negotium absoluitur interpolando, quod sequenti ratione commode fieri potest.

Indi-

Indicando decrementum ipsius Φ per x, ac tempus huic decremento respondens per z, supponatur esse $z = ax^2 + bx + c$. Definiri facile possunt coefficientes, a, b, c, cum enim iam ad tria momenta Φ sint cognita, obtinemus has tres aequationes, $0 = c$, $474 = 100a + 10b + c$, ac $956 = 400a + 20b + c$, vnde obtinetur $c = 0$, $a = 0,04$, $b = 47$, quare constanter $0,04x^2 + 47x = z$, cuius formulae ope, adhibendo differentias primas et secundas, nullo negotio construitur sequens tabula:

Decrem. Φ.	Tempora.	Differ. I.	Differ. 2.
0″	0″	47,04	8
1	47,04	47,12	8
2	94,16	47,20	8
3	141,36	47,28	8
4	188,64	47,36	8
5	236,00	47,44	8
6	283,44	47,52	8
7	330,96	47,60	8
8	378,56	47,68	8
9	426,24	47,76	8
10	474,00	47,84	8
11	521,84	47,92	8
12	569,76	48,00	8
13	617,76	48,08	8
14	665,84	48,16	8
15	714,00	48,24	8
16	762,24	48,32	8
17	810,56	48,40	8
18	858,96	48,48	8
19	907,44	48,56	
20	956,00		

Ex qua Φ ad quoduis momentum, capiendo partes proportionales, admodum facile elicitur. Prodeunt vero pro Φ sequentes valores:

6′, 27″, 680	6′, 17″, 680	(γ)
26, 936	16, 823	
25, 662	15, 571	
24, 392	14, 322	
23, 124	13, 081	
21, 858	11, 831	
20, 595	10, 588	
19, 336	9, 349	
	7, 680.	

Et cum, capiendo ϱ pro radio br, fiant cosinus arcuum qm, erunt hi cosinus:

+ 1,0000	− 0,0857
0,9256	0,2109
0,7982	0,3358
0,6712	0,4599
0,5444	0,5849
0,4178	0,7092
0,2915	0,8331
0,1656	1,0000
0,0000	

ac arcus ipsi, seu distantiae perimetrorum a polis

0°. 0′	90°. 0′
22. 14	94. 55
37. 2	102. 11
47. 50	109. 37
57. 1	117. 23
65. 18	125. 48
73. 3	135. 10
80. 28	146. 25
	180. 0.

Plane simili ratione pro emersione calculum institui, ac inueni

momentum emers. primum $20^{h}\ 22'.\ 4''$
et respondens $L = 4'.\ 8'',21$
$\lambda = 4'.\ 31'',24$
momentum emers. pro centro Terrae $20^{h}.\ 30'.\ 6''$
et respondens $L = 4'.20'',87$
$\lambda = 4'.33'',09$
momentum emers. vltimum $20^{h}.38',\ 0''$
et respondens $L = 4'.33'',33$
$\lambda = 4'\ 34'',92$

Tempora inter haec momenta intercepta sequenti ratione distributa sunt:

$20^{h}.22'.4''$	$20^{h}.30'.6''$
23 0	31. 0
24. 0	32. 0
25. 0	33. 0
26. 0	34. 0

27. 0	35. 0
28. 0	36. 0
29. 0	37. 0
	38. 0.

Quibus addendo aequationem temporis pro h. 20 = 1′. 52″, prodeunt haec momenta, in tempore solari:

$20^h. 23'. 56''$	$20^h. 31'. 58''$
24. 52	32. 52
25. 52	33. 52
26 52	34. 52
27. 52	35. 52
28 52	36. 52
29. 52	37. 52
30. 52	38. 52
	39. 52.

Vnde prodit punctorum, quibus Sol his momentis verticalis existit, (quorum distantia a polo boreali aequalis est $67°. 16'$) elongatio a meridiano Grenouicensi versus orientem, in arcu aequatoris:

$54°. 1'$	$52°. 2'$
53. 47	51. 47
32	32
17	17
2	2
52. 47	50. 47
32	32
17	17
	2.

Porro

Porro fiunt I

47°.32	46°.18′
23	10
14	2
5	45.53
46.56	45
46	36
37	27
28	19
	10

ac cum sit pro hoc casu angulus PEp, seu $mcs = 90° - fcm - I$, erunt anguli PEp

36°.15′	37′.29′
24	37
33	45
42	54
51	38. 2
37. 1	11
10	20
19	28
	37.

Vnde cum circuli cuiusuis hic describendi polus a puncto, cui Sol verticalis, distet arcu 89°.38′, concluditur

I. Latitudo polorum borealis.

48°.17′	47°.16′
10	8
2	1

47. 54	46. 54
47	47
39	39
31	32
24	25
	18.

II. Elongatio a meridiano Grenouicensi versus orientem

171°. 22′	168°. 18′
1	167. 58
170. 38	37
15	15
169. 52	166. 53
29	32
6	10
168. 43	165. 48
	26.

Inueniuntur porro simili, qua supra vsus sum, interpolatione, Φ, quae cuiuis momento respondent

6′. 7″. 680	6′. 17. 680	(γ)
8. 833	18. 811	
10. 072	20. 069	
11. 312	21. 332	
12. 556	22. 596	
13. 802	23. 863	
15. 050	25. 132	
16. 272	26. 405	
	27. 680	

Quare

Quare, sumta ϱ pro radio, sunt arcuum *mq* cosinus

+1,0000	−0,1131
0,8847	0,2389
0,7608	0,3652
0,6368	0,4916
0,5124	0,6183
0,3878	0,7452
0,2630	0,8725
0,1408	1,0000
0,0000	

et arcus ipsi

0° 0′	96° 30′
27 47	103 49
40 28	111 25
50 26	119 27
59 10	128 12
67 11	138 11
74 45	150 45
81 54	180 0
90 0	

Numerorum hactenus euolutorum ope, constructa est proiectio pro transitu Veneris, quam Academiae, simul cum dissertatione hacce exhibeo, quaeque ab ea, quam non ita pridem edidit V. Cel. *De l'Isle*, parum differt. Etsi itaque primarium, quod in hac dissertatione tractare constitueram, negotium, executioni iam dederim, aliquae tamen adhuc disquisitiones, nobis non negligendae, supersunt.

Affirmaui in Diſſert. praecedente, pro Veneris ſub Sole tranſitu, curuaturam ſaepius ibi dicti annuli conici, ſine errore condamnabili, negligi non poſſe, non tamen obſtante eo, correctionem, formulis, quae prodeunt, ſi haec curuatura negligitur, adhibendam, eſſe admodum paruam. Rei huius hic reddere rationem non difficile erit. Liquet nempe, errorem eſſe eo maiorem pro dato loco, quo maius eſt s, quod huic loco reſpondet. Maximus itaque erit error, vbi s valorem maximum, valorem nempe ϱ adipiſcitur. Cum igitur pro hoc caſu fiat correctio rectae, quam per r indicauimus, adhibenda $= \frac{\varrho^2}{2\,D\,tang.\,\Phi}$, erit loco tang. Φ, ſubſtituendo γ, a quo parum differt, ac loco D ipſius valorem $\frac{\varrho}{10}$, reliquosque numeros abſolutos introducendo, haec correctio $= \frac{\varrho \times 10}{2 \times 378} = \varrho \times 0{,}0132$. Cum igitur vbiuis error in longitudine rectae br, Fig. VIII. diſſert. praeced. commiſſus, qui $\varrho \times 0{,}0021$ aequalis eſt, procreet in tempore errorem vnius circiter minuti ſecundi, ac error in recta r fere aequivaleat errori in recta br; error qui ex curuaturae neglectu ortum trahit, quando eſt maximus, $6''$ fere non ſuperat. In omnibus aliis locis nequidem eo aſcendit, ac pro pleriſque locis fere eſt inſenſibilis. Negligi itaque quidem poteſt hic error, vbi ſumma exactitudo non quaeritur, aſt in diſquiſitionibus exactioribus omnino ipſius ratio habenda eſt.

Cum deinde ex modo traditis perſpiciamus, errorem 0,0021 partium ipſius ϱ, in valore rectae r commiſſum, tempora non niſi vnico minuto ſecundo reddere

reddere erronea, ac facile pateat, similem errorem, in valore rectae v commissum, itidem parum nocere posse, patet, tuto nos, etiam in disquitionibus exactioribus, supponere posse, $\cos.\Phi = 1$, $\sin.(\Phi + \delta) = \Phi + \delta$, $\sin.\delta = \delta$, ac angulum bnp, Fig. VIII. Differt. praeced. vt constantem. Tam parum enim valores veri per suppositiones hasce mutantur, vt error inde oriundus omnino insensibilis sit reputandus. Multo itaque concinniores reddi possunt, formulae, in dissertatione praecedente erutae, quod quidem ibi iam facere non licebat, cum ex sola theoria, puraque analysi, sine numerorum absolutorum ope, quantus futurus sit error, et an sit euanescens, diiudicari non potuerit.

Adplicemus ratiocinia nostra, ad Figuram adiectam, Figurae VIII, Differt. praeced. similem, ac formulam, qualem hic quaerimus, concinniorem, eruere laboremus. Cum angulus bnp, quem recta pq, cum recta nf, Solis ac Terrae centra connectente, includit, sit constans, $= \gamma + \delta = \frac{\delta}{\mu}$, ac br semper $= D(\gamma - \Phi)$, vt supra ostendimus, reperitur, si loco sinus et tangentis anguli bnp, angulus ipse adhibeatur, $br = D(\gamma - \Phi)$, ac $bn = \frac{\mu D(\gamma - \Phi)}{\delta}$. Cum igitur sit $bn : br = nt : ts$, erit $\frac{\mu D(\gamma - \Phi)}{\delta} : D(\gamma - \Phi) = \frac{\mu D(\gamma - \Phi)}{\delta} + v : r$, vnde obtinetur aequatio, $\mu D(\gamma - \Phi) + v\delta - \mu r = 0$, quae formula, ob $\gamma = \frac{\delta(1 - \mu)}{\mu}$, transit in Tab. XV. Fig. 13.

$$(1 - \mu)D\delta - \mu D\Phi + v\delta - \mu r = 0.$$

Simili

Simili ratione calculum instituendo pro emersione, prodibit

$$(1-\mu)D\delta-\mu D\Phi-v\delta-\mu r=0.$$

Quodsi ad curuaturam annuli respiciendum sit, debitam pro r correctionem adhibendo, fit

$$(1-\mu)D\delta-\mu D\Phi\pm v\delta-\mu r=0.$$
$$+\frac{\mu s^2}{2D\Phi}$$

quae formulae tuto semper adhiberi possunt.

DE

DE VENERE IN SOLE VISA LIPSIAE AN. 1761. D. 6. IVNII STYL. NOV. HORIS MATVTINIS TEMP. CIVILI.

Auctore

G. HEINSIO.

I.

Praestantiae huius phaenomeni commendationem eo libentius mitto, quo certius insignis raritas istam praedicat, quae reditum phaenomeni vltra saeculum, et quod excurrit, morari plerumque solet, quaeque effecit, vt post telescopii inuentionem illud secunda demum vice se nunc conspiciendum praebuerit; et quo magis phaenomeni nostri dignitas ex eo elucet, quod inter horrificos armorum strepitus placidam Principum munificentiam, et singularem Astronomorum industriam illud excitauerit; vnde etiam factum est, vt per totum fere terrarum orbem phaenomeno nostro sub circumstantiis exquisitis insidiari licuerit. Proposito potius accommodum esse arbitror, si ea statim enumerem, quae pro obseruatione eius rite expedienda suscepi, et quae peragenda coeli clementia permisit; in quo negotio *Commentatio mea de Mercurio in Sole an.* 1753. *viso*, Tomo VI. Nouor. Commentar. Acad. Imper. p. 547. seqq. inserta, compendium aliquod afferet,

 cum

cum in praesenti casu, illi analogo, eadem obseruandi methodo, iisdemque instrumentis, vsus sim; quam ob rem in concinnanda recensione ad scriptum istud beneuolum Lectorem saepe ablegare licebit. Conclusiones deinde obseruationibus recensitis innixae, vna cum methodis istas deducendi, suo ordine sequentur.

2. Primum de statu duorum horologiorum oscillatoriorum respectu temporis veri recte cognoscendo solicitus eram; quam ob rem die 4. Iunii, et per dies subsequentes vsque ad d. 10. Iunii, quotiescunque coelum fauit, (nubes enim subinde, fulgureae interdum, interueniebant) copiose altitudines Solis respondentes obseruaui, quae dictum horologiorum statum, eorumque consensum mutuum, peroptato patefecerunt.

3. Cum *mora disci Solis per horarium* in ea methodo requiri soleat, quae positionis centri Veneris in disco Solis determinationem respicit (conf. T. VI. Nou. Comm. p. 555); de ea per obseruationes cognoscenda d. 5. Iunii cogitaui. Quem in finem Tubum astron. 6. ped. cum libella, l. c. p. 550. descriptum, adhibui, eiusque ope moram transitus disci Solis, tum per filum horizontale, tum per verticale, repetitis vicibus exploraui, vt ex his datis secundum ea, quae l. c. p. 556. proferuntur, mora per horarium posset inueniri. Loco autem constructionis geo-
Tab. XVI. Fig. 1. metricae ibi traditae, rem calculo prosequi malui. Docetur nempe l. c. quod, si in triangulo BCG ad C rectangulo BC moram disci per verticale filum exponat, et CG moram per horizontale; BC autem in

Bc

Bc transferatur, et ce ad GC parallela agatur; haec ce moram disci per horarium exhibeat Si igitur in partibus temporis ponantur $BC(=Bc)=v$, $CG=b$, $ce=m$; fiet $Be=\frac{mv}{b}$, ob $GC:BC=ce:Be$; et inde $m^2=v^2-\frac{m^2v^2}{b^2}$, ob $ce^2=Bc^2-Be^2$; quare tandem inuenitur

$$m=\frac{bv}{\sqrt{b^2+v^2}}.$$

Sic in obseruatione aliqua, circa hor. 4. 25′ post meridiem peracta, deprehendi $v=3'.9\frac{3}{4}''$, $b=3'.19''$; quibus reductis ad quartas secundorum partes, fit $v=759$, $b=796$; et in iisdem partibus acquiritur $m=549,31$ vel $549\frac{1}{3}$ fere, vnde $m=2'.17\frac{1}{3}''$. In deductionibus ex reliquis obseruationibus similem in modum institutis, capiendo medium, inueni *moram Solis per horarium* $=2'.17''$. Si nunc pro tempore inter antemeridianas et pomeridianas obseruationes intermedio statuatur declinatio Solis borealis $=22°.37'$, facto consueto calculo, habetur *Diameter Solis* in partibus circuli maximi $=31'.37''$, vel $1897''$. Tam exacte diameter Solis etiam ab iis indicatur, qui elementa praedictionis phaenomeni nostri certiora publicarunt. Maculae etiam in Sole erant conspicuae, numero nouem, ex quibus duas, semitae Veneris futurae forsan, vt tunc iudicabam, vicinas, quoad positionem in disco Solis, dum moram huius per horarium inquirerem, simul obseruaui, ast, cum euentus nullum istarum macularum vsum docuerit, earum quoque descriptionem mittam.

4. Illucebat tandem desideratissimus ille dies, qui iucundissimum Veneris in Sole spectaculum offerre

 debe-

debebat. Vtinam coeli facies ex voto ſemper annuiſſet! Circa horam matutinam $2\frac{1}{2}$. coelum in regione horizontis, in qua futurum Solis ortum expectabam, ſpiſſis nubibus tegebatur. Hor. 3 ſpes excitabatur, cum in iſta regione nubes interrumpi et hiatus agere viderentur, quam coeli facies nonnunquam aluit, plerumque autem, nouis interuenientibus nubibus, eripuit. Sic ortum Solis, qui hoc die hor. 3.50'. contingere debuit, conſpicere non licebat. Hor. 4.9' ſuperiorem quidem Solis partem (ſitu erecto) in hiatu nubium conſtitutam per Tubum terreſtrem 4 ped. videbam; aſt inferior, cui ex calculo Venus ineſſe debuiſſet, poſt nubes latebat. Adſpectus hic per minutum primum temporis tantummodo durauit; deinceps vero continua Solis a nubibus occultatio ſequebatur, donec tandem hor. 5.35', prima vice Solem integrum, ad pauca licet temporis momenta, cernere liceret. Et en Venus in Sole, hoſpes gratiſſima, conſpicua, multum iam intra Solis diſcum progreſſa. Statim nouae nubes interueniebant, quae poſtea per interualla, exigua licet, Solis adſpectum admittebant. Caſum hunc extemplo ad vſum applicabam, et, cum prolixiores obſeruationes inſtituere breuis Solis apparitio non permitteret, de diſtantia centri Veneris a proximo Solis limbo ope Micrometri *Kirchiani*, quo Tubus aliquis aſtronomicus 6. ped. inſtructus erat, menſuranda ſollicitus eram. Praeſtiti id duabus vicibus, hor. $5.49\frac{1}{2}'$, et h. $5.54\frac{1}{2}'$. temp. veri, et in vtraque obſeruatione dictam diſtantiam $= 5'.50''$. circuli maximi deprehendi.

5. Tan-

5. Tandem coelum magis fauere incipiebat, vt obſeruationes, determinationem poſitionis centri Veneris in diſco Solis concernentes, ſuſcipere liceret. In hoc negotio Tubum aſtronomicum 6. ped. cum libella, Tom. VI. Nouor. Comment. p. 550. ſeqq. fuſe deſcriptum, eo lubentius adhibui, quo certior eram de praeſtantia eius in hoc obſeruationum genere. Libella ſcilicet eum in finem applicari ſolet, vt reticuli Tubo inſerti filum alterum horizontalem, alterum verticalem, ſitum obtineat, ne refractio obſeruationem turbet; quam quidem adornationem quiuis Quadrans aſtronomicus, dioptris teleſcopicis inſtructus, abſque libella, concedit. Aſt cum eiusmodi Quadrans, ſi eius copia detur, portatilis eſſe debeat, ideoque Tubum circiter 3. pedes longum tantummodo admittere ſoleat; libella pretioſo huic apparatui non ſolum commode ſubſtituitur; verum etiam, quod praecipuum eſt, maioribus Tubis, 6, 8, vel plures pedes longis, facillimo negotio applicatur, qui vtique, prae minoribus teleſcopiis, in obſeruatione appulſuum Syderis ad fila reticuli maiorem certitudinem conciliare debent. Sic Tubus memoratus, diebus ſextum Iunii praecedentibus ad examen rite reuocatus, bene inſeruiit obſeruationibus poſitionis Veneris in diſco Solis d. 6. Iunii ſuſceptis, quas, cum methodus obſeruandi ex citato loco p. 552. pateat, ſtatim ex ordine enumerabo, facta ſemper horologii, quo vſus ſum, mentione, dum diſcriminis gratia alterum horologium N, alterum H, vocaui. Reliqua phaenomena, incidenter notata, merito in ſuum locum reſeruantur. In appulſibus ad fila reticuli ſignificant *p* Solis limbum

praecedentem, *c* consequentem, *s* apparenter superiorem; ♀ autem centrum Veneris.

Obseruatio 1.
temp. horol. N.

$6^h.14'.\ 7''$ *p* ad |
15. 11. ♀ ad |
15. 27½ ♀ ad —
16. 14¾ *s* ad —
17. 5½ *c* ad |

Obseru. 2.
horol. N.

$6^h.19'.30\frac{3}{4}''$ *p* ad |
20. 32¼. ♀ ad |
21. 1 ♀ ad —
21. 48½ *s* ad —
22. 30¼ *c* ad |

Obs. 3.
horol. N.

$6^h.26'.42\frac{3}{4}''$ *p* ad |
27. 43 ♀ ad |
27. 59½ ♀ ad \
28. 18¾ ♀ ad —
29. 8 *s* ad —
29. 43¾ *c* ad |
nubes deinceps copiosae.

Obs. 4.
horol. N.

$6^h.58'.\ 9''$ *p* ad |
58. 59. ♀ ad |
59. 10½ ♀ ad —
7^h. 0. 5¾ *s* ad —
1. 11½ *c* ad |

Obs. 5.
horol. N.

$7^h.\ 5'.13''$ *p* ad |
6. 0½ ♀ ad |
6. 14 ♀ ad \
6. 29¼ ♀ ad —
7. 25 *s* ad —
8. 15½ *c* ad |
nubes copiosae diutine sequebantur.

Obs. 6.
horol. H.

$8^h.\ 0'.37''$ *p* ad |
1. 5 ♀ ad |
1. 42½ ♀ ad —
2. 50½ *s* ad —
3. 35¾ *c* ad |
per nubes tenues, obseruatio tamen bona. Post denuo nubes spissae.

Obs.

Obſ. 7.
horol. H.

$8^h.16'.\ 1''$ *p* ad |
16. $24\frac{1}{2}$ ♀ ad |
17. 7 ♀ ad —
18. $17\frac{1}{2}$ *s* ad —
19. 0 *c* ad |

Solis lumen in hac obſeruatione per nubes tenues debile videbatur, quod appulſibus nonnihil officiebat.

Obſ. 8.
horol. H.

$8^h.34'.\ 24\frac{3}{4}$ *p* ad |
34. $42\frac{3}{4}$ ♀ ad |
35. 31 ♀ ad —
36. $45\frac{1}{2}$ *s* ad —
37. 22 *c* ad |

per nubes tenues; obſeruatio tamen bona.

Obſ. 9.
horol. H.

$8^h.41'.\ 51''$ *p* ad |
42. 6 ♀ ad |
42. 50 ♀ ad —
44. $6\frac{1}{2}$ *s* ad —
44. $47\frac{3}{4}$ *c* ad |

Deinceps quidem nonnullas obſeruationes porro tentabam; aſt nubes ſpiſſae, continuo interuenientes, eas rite exequi non permiſerunt.

6. Tempus nunc monebat praeparationem ad obſeruandum Veneris e diſco Solis egreſſum. In quo negotio peragendo adhibui Tubum *Gregorianum* ſub apparatu, quo iſte obiecta ſecundum diametrum 52 vicibus auget. Maius augmentum applicare disſuadebat frequens nubium interuentus, quo fieri potuiſſet, vt pro adſpectu Solis momentaneo Sol difficilius inueniretur; cuius praeterea pars exigua ſub eiusmodi apparatu campum repraeſentationis cito percurrere ſolet, et exiguus

guus inſtrumenti motus obſeruationem turbat. Tubo ſic adornato immotus continuo aſſidebam, ad phaenomena attentus, interea dum ſocius, in mathematicis verſatiſſimus, minuta ſecunda horologii H clare numerabat, cuiusmodi adminiculo in obſeruationibus etiam, paragrapho praecedenti deſcriptis, ſimiliter vſus ſum. Notabo autem in ſequenti recenſione ſemper tempus verum Solare, ex annotato tempore horologii H deductum.

Temp. vero	
$9^h.7'.40''$.	Contactus marginis occidentalis Veneris cum occidentali Solis limbo (ſitu nempe erecto, prout Tubus obiecta repraeſentare ſolet) vel initium egreſſus, prope inſtare videbatur, ſiquidem linea tantum luminoſa, admodum tenuis, limbum Solis clare iam conſpicui, et occidentalem Veneris marginem, interiacebat, et peripheriam diſci Solaris continuare videbatur.
9. 7. 57.	Dubitare incipiebam, an non contactus iſte iam locum haberet; interim tamen linea lucida valde gracilis ad marginem Veneris occidentalem adhuc ſe oſtendebat.
9. 8. 7.	Contactum nunc celebrari maiori certitudine credebam, licet lineola iſta luminoſa gracillima ad occidentalem Veneris marginem, aſt a reliqua diſci Solaris peripheria nunc quaſi ſeparata, adhuc conſpicua eſſet. Singulare ſcilicet phaenomenum hic

hic se offerebat, quod exactam contactus memorati, respectu momenti temporis respondentis, aestimationem valde impediebat. Linea nempe praedicta lucida, quae longitudine nonnihil minor cernebatur, quam diameter disci Veneris ad V repraesentati, huius limbo occidentali instar tangentis *ab* adhaerebat, sic, vt abrupta quasi continuationem reliquae Solis peripheriae, cuius pars ad AB exhibetur, nunc non referret, sed limbus Veneris occidentalis peripheriam Solis, pauxillum licet, penetrasse videretur. Nouum huc accedebat phaenomenum non expectatum. Scilicet extra Solem disci alicuius nigricantis partem, quae notabile disci Veneris segmentum aemulabatur, in situ opposito ad D cernere credebam, ita, vt linea lucida *ab*, instar tangentis communis, eius peripheriam et marginem Veneris occidentalem separaret. Nonnunquam loco segmenti ad D, fascia nigricans, quae latitudine diametrum disci Veneris aequabat, sic conspiciebatur, ac si discus Veneris vmbram, terminis parallelis comprehensam, extra discum Solis proiiceret, interiecta tamen ad *ab* lineola. Fallaciam visus hoc phaenomenum denotare quisque sibi persuadebit. Interim tamen istud perdurabat vsque ad

Tab. XVI. Fig. 2.

$9^h.8'.27''$ quo momento linea lucida *ab*, saepius memorata, prorsus euanescebat. De hoc disparitionis momento intra duo temporis secunda certus sum. Sane ante 5. secunda occidentali Veneris limbo, in regione puncti contactus, quod linea *ab* antea effecit, flammula aliqua, gracillima licet, adhaeserat. Post momentum $9^h.8'.27''$. nihil lucidi amplius ad occidentalem Veneris marginem discernere potui.

9. 8. 37. Initium egressus Veneris certissime peractum erat, nec vllum lucis vestigium ad marginem Veneris occidentalem extabat.

Hucusque Sol distincte, et in peripheria sua bene terminatus, conspici potuit; qui vero paulo post e conspectu ad aliquod tempus a nubibus interuenientibus eripiebatur. Redibat Sol et copiam faciebat egressum centri Veneris aestimio obseruandi. Sic

9. 16. 40. centrum Veneris ad V exhibitae nondum in peripheria Solis AB per discum Veneris mente producta constitutum erat.

Tab XVI. Fig. 3.

9. 17. 37. Centrum Veneris notabiliter propius ad dictam Solis peripheriam accedebat.

9. 18. 17. Certe dimidium disci Veneris a peripheria Solis producta resectum erat. Hanc phaenomeni conditionem, ob motum Veneris lentum alias facile ambiguam, aestimio non admodum dubio diiudicare licuit, ita,

ita, vt a vero parum aberrare crederem, si egressum centri Veneris ad $9^h.18'.7''$ statuerem, vel, si numerum rotundum malles, ad $9^h.18'.0''$.

Spissae nubes postea Solem, intempestiue sane, tegebant, quae, proh! totalem Veneris egressum obseruare prorsus impediebant.

$9^h.26'.20''$. Cum Sol denuo a nubibus liber conspiceretur; nullum vestigium Veneris ad peripheriam Solis, bene terminatam licet, deprehendere potui.

7. Phaenomenum adhaerentis lineae lucidae ad limbum Veneris occidentalem, quod §. praec. ad momentum $9^h.8'.7''$. descripsi, ita comparatum est, vt ab inflexione luminis ad marginem Veneris proficisci videatur. Obstare non credo conditionem repraesentationis Tubi Gregoriani in obseruationibus solaribus Tom. VI. Nouor. Comment. p. 548. indicatam: Sol enim ad illud tempus distinctus et in peripheria bene terminatus apparebat; et, licet linea praedicta (*ab*) interdum bifida cerneretur, momentaneus tamen tantummodo fuit hic adspectus, repraesentationi Tubi nonnunquam tremulae absque dubio adscribendus. E contrario istius lineae lucidae apparitio constans, et per 20. secunda temporis continuata, pariter ac successiuum luminis eius decrementum vsque ad flammulam, tandem euanescentem, vtique suadent, praecipuam huius phaenomeni causam in inflexione luminis esse quaerendam.

Si hanc concedat; noua oritur quaestio: quodnam criterium egressus Veneris e disco Solis initium patefaciat? an contactus interior vtriusque limbi, an vero totalis luminis disparitio ad marginem Veneris occidentalem? Discrimen sane inter vtramque conditionem constitui debet. Totalis disparitio bene et intra duo secunda certe obseruari potuit $9^{h}.8'.27''$. E contrario contactus certo citius contigit hoc momento, quo limbus Veneris peripheriam Solis nonnihil iam, licet vix sensibiliter, penetrauerat. An contactum cum separatione lineae lucidae ad momentum $9^{h}.8'.7''$. connectere; an vero per plura temporis secunda ante hoc momentum constituere satius sit? Sane in eiusmodi contactus diiudicatione per viginti et plura secunda facile quis haesitare potest. Sed mittam contactum, et pro egressus initio certius momentum, totalis nempe luminis disparitionis, eligam. Pone, egressus initium in omnibus terrae locis eodem instanti contingere, seposito tantisper parallaxis effectu; an disparitio luminis itidem eodem instanti vbique accidet? certe ex diuersa Tuborum opticorum praestantia, diuersaque atmosphaerae constitutione, notabile discrimen oriri posse videtur. Pone, obseruatorem eundem, eodemque tubo instructum, et initium et finem egressus obseruasse. Cum peripheriae Solaris integra restitutio finem egressus docere debeat; de momento autem, quo ita accurate contingat, ob motum Veneris admodum lentum ambigue tantum iudicare liceat, accedentibus inflexionis lucis effectu aliisque circumstantiis, v. c. peripheriae Solis tremulae etc. an non verisimile est, tempus egressus centri ex vtroque momento diiu-

diiudicatum diuersum prodire debere ab eo momento, quo centrum disci Veneris re vera in peripheria Solis producta haesit? Simile ratiocinium de initio et fine ingressus Veneris in Solis discum potest institui; et similis haesitatio de vero ingressus centri momento locum habebit. Nonne mora totalis centri Veneris per discum Solis dubia inde emergere debet? si iam diuersos obseruatores in diuersis terrae locis, Tubis diuersae praestantiae instructos, si diuersitatem constitutionis atmosphaerae etc. consideres, mora praedicta pro singulis nouum admittet discrimen, etiamsi ab omni parallaxis effectu abstrahas. Nonne igitur differentiae morarum in diuersis locis, accedente parallaxis effectu, obseruatarum, pars aliqua se immiscebit, quae, vi praecedentis ratiocinii, parallaxis effectui non debetur, quaeque exactam ex ista morarum differentia parallaxis cognitionem notabiliter turbare potest? Recte igitur in hoc negotio commendat *Halleius*, Auctor suasorque egregiae illius methodi, parallaxin Veneris inuestigandi, moram a totali ingressu Veneris intra discum Solis, seu prima fili luminis Solaris apparitione, ad principium egressus ex eodem, seu totalem dicti fili disparitionem, ope Tubi praegrandis v. c. 24. ped. longi obseruare, eamque in praedictum finem adhibere. Facile assentior tanto Astronomo, et de euentu exoptato in transitu Mercurii per Solem experientia optime edocto; attamen phaenomena supra exposita indicare mihi quidem videntur, periculum incertitudinis cuiuspiam maxima quidem ex parte minui, non autem prorsus tolli; nisi forsan Tuborum astronomicorum praegandium indoles praeſtantior in obſeruationibus Solaribus omnem dubitandi vim deſtruat. Nec animus eſt, eximiam *Halleii* methodum haeſitatione nimia excipiendi, quin potius enodationem difficillimae quaeſtionis exoptatiſſimam inde ſperem; ſi etiam tanta ſubtilitate, quantam methodus promittit, rem plene aſſequi non liceret. Enumeraui tantum, quae vidi, et quae colligere potui. Quamuis autem hic facilis ſim; miſſis reliquis, non aeque de mora tranſitus diſci Veneris per limbum Solis ſtatui poſſe puto. Phaenomena ante explicata iſtam breuiorem forſitan exhibent, ac reuera eſt; vnde diameter diſci Veneris praeter diminutionem, quae ipſi ex repraeſentatione corporis opaci in fundo lucido contingit, etiam ex hoc capite minor emergere debet. Inprimis autem differentiam Tuborum, in obſeruationibus eiusmodi adhibitorum, notabile diſcrimen producere poſſe facile credo. Sed de iſta Veneris per limbum Solis mora plura ſuo loco.

8. Dum Venerem, expoſito hactenus modo, in tranſitu per diſcum Solis proſecutus ſum, attentus quoque ſemper fui, an deſideratum illum Veneris ſatellitem, cuius exiſtentiam variae obſeruationes docere videntur, deprehendere poſſem; aſt nullum eius veſtigium per omne tempus obſeruationum mearum apparuit. Haec ſatellitis abſentia etiam poſtea comprobata fuit, cum hor. 10. hunc in finem Solis diſcum denuo perluſtrarem. Nubes deinceps copioſae iterum oriebantur, et tandem tonitrua circa meridiem e longinquo; poſt horam 3. vero pomeridianam in vicinia audiebantur.

9 Ac-

9. Accedo nunc ad elaborationem obseruationum, ad finem §. 5. exhibitarum, vt ex iis determinatio positionis centri Veneris in disco Solis pro respondentibus temporum momentis perficiatur. Constructione geometrica eiusmodi inuestigationem peragendam proposui in Tom. VI. Nouor. Comment. p. 555. Cum autem illi saepe ambiguitas aliqua se immiscere soleat; satius hic duxi, rem calculo prosequi, supposito constructionis sensu. Sit ergo Fig. 4., situ inuerso delineata, analoga figurae quartae l. c., quam constructio respicit. BFG, BCE, VPH, PVD, sint triangula ad F, E, P, D, respectiue rectangula, et inter se similia, ita vt EC ad FG, PH ad FG, PV ad FB sint parallelae, PD autem ad VH perpendicularis. Scilicet FG filum horizontale, FB filum verticale, GCB diurnum centri Solis repraesentant. In C est centrum Solis, cuius peripheria rectas FB, FG, tangit; in P vero supponitur centrum Veneris. Sint iam Tab. XVI. Fig. 4.

Semimora disci Solis per horarium $= CE = m$

- - - - - - - - - - - filum verticale $= CB = v$

Interuallum inter appulsum limbi Solis

praec. *p* ad | et ♀ris ad | $= BV = a$

Interuallum inter appulsum limbi Solis

(apparenter) superioris *s* ad — et ♀ ad — $= GH = b$

Hae quantitates omnes sunt cognitae; *m* nempe per §. 3; reliquae *v*, *a*, *b*, ex obseruatione quauis §. 5. Si ex iis inueniri possent VD, PD; haberetur CD($=$BV $+$VD$-$BC) *differentia ascensionum rectarum centrorum*

rum Solis et Veneris; PD autem *differentiam declinationum centrorum Solis et Veneris* manifestaret. Daretur ergo positio centri Veneris respectu centri Solis, huiusque diurni, quae quaeritur. Res igitur huc redit, vt VD, PD, reperiantur. Primum autem patet, cognosci posse rationem rectarum VD, PD, ex similitudine triangulorum PVD, CEB, ope analogiae $EB:CE = VD:PD$; modo daretur EB. Cum $EB^2 = CB^2 - CE^2 = v^2 - m^2$; erit $EB = \sqrt{(v+m)\times(v-m)}$, quam breuitatis causa ponam $= n$, et instar quantitatis datae habebo. Igitur $n:m = VD:PD$; et data VD, dabitur etiam PD. Vt nunc VD acquiratur, fiat

$$BC : EB = VH : PV$$
$$BC : EB = PV : VD \text{, vnde}$$
$$\overline{BC^2 : EB^2 = VH : VD}$$
$$v^2 : n^2 = VH : VD.$$

Prima analogia patet ex similitudine triangulorum CEB, VPH; secunda autem ex similitudine triangulorum CEB, PVD. Cognosceretur ergo VD per VH. Cum

$$BG = BV + VH + HG$$
$$= a + VH + b$$

$$\text{fit } VH = BG - (a+b)$$

ex similitudine autem triangulorum CEB, GFB, est

$$\binom{EB:BC}{n:v} = BF : BG$$

et $BF = EB + EF = EB + EC = n + m$ (ob EF = radio disci Solis $= EC = m$), ita vt fit $BG = \frac{v\times(n+m)}{n}$

quare

quare $VH = \frac{v \times (n+m)}{n} - (a+b)$; et denique ob $v^2 : n^2 = VH : VD$, fit

$$VD = \frac{n^2}{v^2} \times \frac{v \times (n+m) - n \times (a+b)}{n}$$
$$= \frac{n}{v} \times \left((n+m) - \frac{n \times (a+b)}{v}\right).$$

10. Calculus igitur pro inueniendis VD, PD, CD, commode ſic inſtituti poteſt, vt

ex datis $EC = m$
$BC = v$
$BV = a$
$GH = b$ quaerantur

primum $\sqrt{(v+m) \times (v-m)} = n$

deinde $\frac{n \times (a+b)}{v}$ quae ſit c

porro $n + m - c$, quae ſit $= d$

tandem $VD = \frac{n \times d}{v}$, et inde

$PD = \frac{m \times d}{v}$, ob $n : m = VD : PD$

ac $CD = BV + VD - BC$

$= a + VD - v$, vel $= a - v + VD$.

Schema calculi illuſtrationem addet. Mora Solis per horarium in omnibus obſeruationibus §. 5. eſt eadem $= 2'.17''$ (§. 3), idequo ſemimora, ſeu $m = 1'.8\frac{1}{2}''$. vel $68\frac{1}{2}''$. Cum reliquae quantitates v, a, b, item in ſecundis temporis cum fractionibus ſubinde obtineantur, ad euitandas iſtas fractiones expedit, ſingulas illas quantitates per 8 multiplicare, ſeu eas in partibus octauis minuti ſecundi temporis exhibere, quas *partes ſchematis* voca-

 bo,

bo, ita vt nunc $m = 548$. part. schem. Elaboranda iam sit obseruatio 6ta (§. 5.)

c ad | $8^h. 2'. 35\frac{1}{2}''$.
p ad | 8. 0. 37.

ergo mora ☉.
per vertic. 2. $58\frac{5}{8}$.
et semimora
seu v — 1. $29\frac{5}{16} = 715$. part. schem.
♀ ad | $8^h. 1'. 5''$.
p ad | 8. 0. 37.

ergo BV, seu a 28. $= 224$. part. schem.
s ad — $8^h. 2'. 50\frac{1}{2}''$.
♀ ad — 8. 1. $42\frac{1}{2}$.

ergo GH seu b 1. 8. $= 544$. part. schem.

Dantur itaque

$m = 548$. part. schem.
$v = 715$. — — —
$a = 224$. — — —
$b = 544$. — — —

quan-

quantitates inde deducendae in iisdem partibus schematis acquiruntur, nempe

$v+m=1263$	$\log.(v+m)$	$=3,1014034$
$v-m=167$	$\log.(v-m)$	$=2,2227165$
		$5,3241199$
$n=459,26$	$\log. n$	$=2,6620599$
$a+b=768$	$\log.(a+b)$	$=2,8853612$
		$5,5474211$
	$\log. v$	$=2,8543060$
$c=493,3$	$\log. c$	$=2,6931151$
$n+m=1007,26$	$\log. n$	$=2,6620599$
$d=513,96$	$\log. d$	$=2,7109293$
		$5,3729892$
	$\log. v$	$=2,8543060$
$VD=330,13$	$\log. VD$	$=2,5186832$
$a-v=-491$	$\log. m$	$=2,7387806$
$CD=-160,87$	$\log. d$	$=2,7109293$
		$5,4497099$
	$\log. v$	$=2,8543060$
$PD=393,92$	$\log. PD$	$=2,5954039.$

11. Hoc modo pro singulis obseruationibus §. 5. valores rectarum CD, PD, locum Veneris in disco Solis indicantium, calculo inuestigaui. Obtinuit autem recta CD valorem tum positiuum, tum negatiuum; positiuum, si centrum Veneris per PD ad diurnum BG relatum respectu centri Solis C ita situm fuit, vt (fig. 4) D caderet a C versus G; negatiuum e contrario, si D a C versus B ponebatur. PD respectu diur-

ni BG semper ad partes anguli BFG sita censeri debet. In hoc negotio tacite suppositum fuit, Venerem, durante, in singulis obseruationibus, transitu per fila reticuli, locum suum in disco Solis non mutasse, vel potius mutationem loci interea non sensibilem fuisse, quam suppositionem ex simili ratiocinio, cuiusmodi de Mercurio in Tom. VI. Nou. Comment. p. 557. protuli, facile quisque concedet, praesertim cum in obseruationibus semper prospexerim de exiguo inter appulsus Veneris ad | et — interuallo obtinendo, quippe quod semper minus extitit minuto primo temporis, imo saepe dimidio minuto. Sic quoque, vt l. c. p. 558, medium dicti interualli momentum pro eo accepi, cui locus Veneris in disco Solis respondere deberet, *momentum obseruationis* deinceps vocandum. His ita explicatis, Tabula sequens ea, quae inueni, distincte ob oculos ponet, in qua momenta obseruationum statim in tempore vero Solari exhibentur:

In obs. §. 5.	Momentum obs. temp. vero mane	CD in part. schem.	PD in part. schem.
1	$6^h. 16'. 50''$	+ 77,	334,02
2	6. 22. 18	+ 63,8	342,3
3	6. 29. 32	+ 51,51	339,82
4	7. 0. 36	− 16,85	355,82
5	7. 7. 47	− 30,14	363,77
6	8. 2. 0	− 160,87	393,92
7	8. 17. 22	− 190,24	401,67
8	8. 35. 44	− 229,77	408,36
9	8. 43. 5	− 250,94	412,75.

12.

12. Ope huius Tabulae facili negotio constructio schematis perfici potest, quod intra discum Solis, ad assumtum centri eius diurnum, singula centri Veneris loca, ex obseruationibus acquisita, eorumque seriem rite exponet. Descripto nempe circulo, Solem exhibente (fig. 5.), centri C, radii $AC = 548$. part. schem. (§. 10.) ope scalae alicuius, et assumta diametro AR pro *diurno centri Solis*, si in hoc pro electis obseruationibus, verbi caussa 1. et 7, capiantur $CD (= +77)$, $Cd (= -190,24)$ ad sensum signorum secundum eandem scalam; deinceps in D, *d*, perpendiculares PD, *pd*, ad diurnum erigantur, eaeque respectiue aequales fiant 334, 401,67 part. schem. dabuntur in P, *p*, loca centri Veneris in obseruationibus 1, 7. Et si de reliquis similia peragantur; habebitur series locorum, per quae, mediam viam insistendo, *semita centri Veneris Lipsiae visa* EI duci poterit, secans peripheriam Solis in I *puncto Ingressus*, et E *puncto Egressus centri Veneris*. Ex C ad AR erecta perpendicularis CH *circulum declinationis* vel *horarium centri Solis* repraesentabit, et rectam EI in loco M secabit, in quo centrum ♀ris versatur *tempore coniunctionis centrorum Solis et Veneris quoad Ascensionem rectam*; in qua coniunctione recta CM *differentiam declinationum centrorum* ☉ et ♀ manifestabit: denique angulus IMC erit *inclinatio semitae visae ♀ris ad horarium* ad partes ingressus I, cuius complementum ad 90°. *inclinationem semitae visae ad diurnum* patefacit. Figura 5. situ inuerso delineata est, vt accommodatior sit ad figuram 4 Sic quidem loca Veneris referuntur ad diurnum constantem, Tab. XVI. Fig. 5.

 qui

qui tamen re vera ſitum ſuum reſpectu Eclipticae durante tranſitu Veneris ab obſeruatione 1 ad 9 mutauit; attamen cum variatio anguli diurni et Eclipticae interea admodum ſit exigua, circiter $2\frac{1}{2}$ minut. eaque ad dimidium minuatur, ſi dictus angulus ſtatuatur ad tempus inter obſ. 1. et 9 medium; in conſtructione ſchematis, imo quoque in calculo poſtea inſtituendo, absque periculo ſenſibilis erroris poſitio diurni reſpectu ſemitae Veneris conſtans haberi poteſt.

13. Schema hoc modo acquiſitum apparentem Veneris tranſitum repraeſentat, viſum nempe e ſuperficie terrae et quidem Lipſiae; quod ergo effectum ex differentia parallaxium Solis et Veneris reſultantem ſimul comprehendit. Effectus hic in variis circumſtantiis vtique ſenſibilis eſſe debet; et re vera ex obſeruationibus, quibus ſchema ſuperſtructum eſt, eius indicia haud obſcura extiterunt; quae vero ad aliud tempus exponenda reſeruo. In praeſenti, ſi concluſiones ex ſchemate in vſum aſtronomicum deduci, et cum iis conditionibus, quas calculus adſpectui e centro terrae aptatus produxit, comparari deberent; neceſſe eſſet, vt, remoto parallaxium effectu, ſchema iſtud in aliud transmutaretur, quod tranſitum Veneris exhiberet, cuiusmodi appariturus ille fuiſſet obſeruatori in centro terrae poſito. Haec quidem trasmutatio, conceſſis parallaxibus, vtique effici poteſt; aſt, cum deciſionem quaeſtionis de quantitate parallaxium Veneris et Solis ex ipſis huius Tranſitus obſeruationibus, variis in locis inſtitutis, expectemus; interea vero conducat, conditiones noſtri Tranſitus, quamuis nondum exceptione immunes,

munes, propius tamen et approximando, cognoscere, et ex earum comparatione cum calculo ad centrum terrae accommodato iudicium qualecunque de effectus parallaxium indiciis instituere: fingere tantisper licebit, nullum sensibile discrimen locum habere inter schema immediate ex obseruatione acquisitum, et schema, quod illi respectu centri terrae respondere debet. Commode hoc fiet, si ex calculo pro centro Terrae assumentur, *inclinatio semitae visae Veneris ad diurnum*, et *motus horarius Veneris in ista visus*, quae elementa reliquis certiora esse solent; et, si deinceps illis loca Veneris §. 11. inuenta accommodentur.

14. Supponatur ergo inclinatio semitae visae Veneris ad diurnum $= 14°. 39\frac{1}{2}'$., quae vi calculi ex inclinatione semitae visae Veneris ad Eclipticam $= 8°. 30'. 10''$., et inclinationis diurni ad Eclipticam $= 6°. 9'. 20''$., capiendo summam, acquiritur. Si ex M recta Mq parallela agatur ad diurnum AR, angulus pMq dictae inclinationi semitae visae Veneris ad diurnum aequalis erit ($= 14°. 39\frac{1}{2}'$.). Ope huius ex dato loco centri Veneris p per rectas Cd, pd (§. 11.), inueniri poterit CM §. 12. explicata. Secet enim Mq rectam pd in q, orietur triangulum Mqp ad q rectangulum, in quo, praeter pMq datum, Mq = Cd habetur. Dabitur ergo pq, quae a pd subtracta relinquit qd = CM, si locus Veneris p versus orientem respectu ipsius CM ponatur; si vero locus Veneris, vt P, respectu CM occidentem versus situs sit, dicta linea inuenta ad PD addi debet, vt prodeat CM. Tabula sequens quantitatem

tatem rectae CM ex singulis obseruationibus §. 11. praecedenti modo deductam exponet.

Ex obseru. §. 11.	CM
1. — — — — —	354, 16 part. schem.
2. — — — — —	358, 99 — — —
3. — — — — —	353, 29 — — —
4. — — — — —	351, 41 — — —
5. — — — — —	355, 89 — — —
6. — — — — —	351, 84 — — —
7. — — — — —	351, 91 — — —
8. — — — — —	348, 26 — — —
9. — — — — —	347, 11 — — —
media CM ex omnibus	352, 54 — — —

Discrepantiam conclusionum, interdum notabilem, ne mireris. Sunt enim istae non solum hypotheticae, verum etiam innituntur obseruationibus appulsum vtriusque Syderis ad fila reticuli (§. 5.), in quorum vnoquoque error ad $\frac{1}{4}$ secundi temporis ascendens euitari vix potest, qui errores, si in appulsibus eiusdem obseruationis se mutuo non destruant, sed in omnibus ad eandem partem cadant, facile errorem totalem vnius vel $1\frac{1}{4}$. secundi temporis, hoc est, 8. vel 10. octauarum partium secundi, seu partium schematis, procreare possunt.

15. Supponatur nunc porro ex calculo motus horarius Veneris in semita visa $= 3'. 58''$, 3 part. circuli maximi vel $= 238''$, 3. Si ex eo motus relativus

vus horarius respectu diurni et quidem in partibus schematis inueniatur; ope huius quantitates rectarum CD, C*d*, (§. 11. et 12.) in tempus conuerti poterunt, et ex respondentibus obseruationum momentis *tempus coniunctionis centrorum Veneris et Solis quoad Ascensionam rectam* cognosci, quo Venus in M vel relatiue ad diurnum in C extitit. Ponamus enim *p*M (fig. 5.) repraesentare horarium Veneris in semita ($=238''$,3). In triangulo M*qp* ad *q* rectangulo (§. 14) ex datis *p*M, *p*M*q*=($14^{\circ}.39\frac{1}{2}'$.) dabitur M*q*=C*d*=$230''$,54. part. circuli maximi. Iam radius disci AC=548. (§. 10), vel diameter AR=1096. part. schem. cum diameter disci etiam contineat $1897''$. circuli maximi (§ 3.); inferendo 1897: 1096.=230,54: quaes. dabitur horarius Veneris in diurno =133,19. part. schem. Nunc quaeris recta CD §. 11. in tempore exprimi potest, inferendo 133,19. part. schem.: $3600''$. temporis =CD in part. schem.: temporis interuallum quaesitum. Verbi causa in obseru. 2. ex data CD=63,8. habetur CD in tempore =$1724''$.=$28'.44''$, quod tempus ad momentum obseruationis $6^{h}.22'\ 18''$. additum producit tempus coniunctionis centrorum Veneris et Solis quoad Ascensionem rectam, (=$6^{h}.\ 51'\ 2''$.), quod quaeritur. Scilicet CD in tempore expressum addi debet ad momentum obseruationis, si D ponatur a C occidentem versus; e contrario ab eo subduci, si *d* ad partes orientis respectu C cadat, vt habeatur tempus coniunctionis. Tabula sequens conclusiones manifestat:

Ex obseruatione.	Tempus coniunctionis centrorum ♀. et ☉. quoad Ascens. rectam
1. — — — — —	$6^h.51'.31''$. mane temp. vero.
2. — — — — —	6. 51. 2.
3. — — — — —	6. 52. 44.
4. — — — — —	6. 53. 1.
5. — — — — —	6. 54. 12.
6. — — — — —	6. 49. 32.
7. — — — — —	6. 51. 40.
8. — — — — —	6. 52. 14.
9. — — — — —	6. 50. 3.
Medium	6. 51. 46.

De discrepantia mutua harum conclusionum idem monitum valet, quod sub finem §. 14. adiectum est. Concedas enim, in quantitate CD errorem 10. part. schem. interdum prodire posse, iste in tempore ipsi CD respondente, ideoque etiam in tempore coniunctionis, aberrationem $4\frac{1}{2}$. minut. prim. temporis efficiet, lento Veneris in semita sua gressui adscribendam.

16. Sit MCL angulus inclinationis circuli latitudinis CL ad circulum declinationis $CM = 6°.9'.20''$; CL ad semitam Veneris EI in L terminata exponet *latitudinem centri Veneris in Coniunctione quoad Eclipticam*. Cum CMI vel CML sit complementum inclinationis semitae ad diurnum, quae supposita est $= 14°.39\frac{1}{2}'$. (§ 14.); erit $CML = 75°.20'.30''$, et in triangulo CML dabantur omnes anguli vna cum $CM = 352, 54$. part. schem. (§. 14.). Inuenietur ergo

CL

CL in part. schem. et ope rationis 1096:1897. (§. 15.) tandem quoque in partibus circuli maximi $= 597''$, ita vt *latitudo geocentrica ♀ris in ☌ cum ☉le quoad Eclipticam* $= 9'.57''$. australis, si nempe situs fig. 5. erectus concipiatur. Per L ad MC ducatur parallela L*r* ad diurnum in *r* terminata, vt oriatur triangulum CL*r* ad *r* rectangulum, in quo CL*r* = MCL = $6°.9'.20''$. Igitur ex data CL in part. schem dabitur C*r* in part. iisdem, quae ope rationis 133, 19: 3600''. (vt in §. 15. rectae CD) in tempus respondens transmutari possunt, quod erit $= 16'.39''$. Centrum Veneris fuit in M $6^h.51'.46''$. (§. 15.), ideoque in L, $6^h.35'.7''$, ita, vt *Coniunctio centrorum Solis et Veneris in Ecliptica* contigerit $6^h.35'.7''$. temp. vero. Ad hoc tempus ex Tabulis Solaribus *de la Caille* est *longitudo Solis vera* $= 15°.36'.20''$. ♊; quare *longitudo Veneris heliocentrica* $= 15°.36'.20''$. ♐. Si ope rationis distantiarum Veneris a Sole et Veneris a Terra, vi calculi cognitae, ex latitudine Veneris geocentrica $= 9'.57''$, inueniatur *Latitudo Veneris heliocentrica in ☌ quoad Eclipticam*; haec erit $= 3'.57\frac{1}{2}''$.

17. Sufficiant hae conclusiones hypotheticae suo loco vlterius expendendae. Vnicam iis tantummodo addam, quae interuallum temporis inter coniunctionem in M et egressum centri Veneris in E in ista hypothesi concernit. Hunc in finem ex E ad MC intelligatur parallela E*e*, terminata ad diurnum AR in *e*. Cum in triangulo ECM dentur EC = 548. (§. 10.), CM = 352,54. (§. 14.), EMC = $90°. + 14°.39\frac{1}{2}'$. (§. 14.) $= 104°.39'.30''$; dabitur ECM = $36°.51'.5''$ = CE*e*;

ideoque ex hoc et radio EC in triangulo EeC ad e rectangulo inuenietur $eC = 328,66$. part. schem., quae ope rationis $133,19 : 3600$. (vt in §. §. 15. 16.) in tempus conuersae producunt $5583''$. vel $2^h. 28'. 3''$., quod est quaesitum temporis interuallum inter coniunctionem in M et egressum centri Veneris in E ex hypothesi. Si ex §. 15. Tempus coniunctionis in M supponatur $= 6^h. 51'. 46''$. idque cum momento egressus centri Veneris (§ 6.) obseruato $= 9^h\ 18'\ 7''$. comparetur, emerget interuallum temporis inter coniunctionem in M et egressum centri Veneris obseruatum $= 2^h. 26'. 21''$., quod $1'. 42''$. minus est illo hypothetico ante inuento. Haec discrepantia vtique hypothesis, imo parallaxium effectum indicare videtur. Sed de hoc aliisque plura suo tempore. Coronidis loco adiiciam figuram 6, quae situ erecto in cauitate coeli semitam centri Veneris in disco Solis repraesentat, prout istam series locorum centri Veneris secundum numeros obseruationum et data §. 11, quibus loca ista innituntur, mediam viam insistendo (§ 12), produxit, in qua figura litterae eaedem homonymas lineas figurae 5, quae situ tantum inuerso exhibita est, designant.

Tab XVII. Fig. 6.

DE

DE EFFECTV PARALLAXIS IN TRANSITV VENERIS PER SOLEM.

Auctore
G. HEINSIO.

Obseruatio Transitus Veneris per Solem, quam spectator in superficie terrae positus suscipere solet, schema largitur, quod seriem locorum centri Veneris, ad diuersa tempora arte deprehensorum, intra discum Solis et respectu circulorum coelestium luculenter exponit. Statim istud in vsum astronomicum conuerti posset, si Sol et Venus ad tantam a terra distantiam ponerentur, vt de sensibili parallaxis effectu nullus metus locum haberet, hoc est, si supponere liceret, obseruatorem in centro terrae constitutum eadem prorsus animaduertere debuisse, quae spectator in superficie terrae deprehendit. Sub eiusmodi hypothesi in *dissertatione de Venere in Sole an: 1761. visa* (quam *primam* in sequentibus vocabo), varias deduxi conclusiones astronomicas, hypotheticas vtique, et limae subiiciendas, si parallaxis sensibiles effectus producere valeret. Pone effectus eiusmodi in sensus incurrentes; et statim patet, schemata eiusdem Transitus a diuersis, praesertim longe a se inuicem in superficie terrae remotis, obseruatoribus constructa nec inter se conuenire, nec immediate schema pro obseruatore in centro terrae posito sup-

suppeditare posse, ad quod centrum tamen, tanquam ad terminum constantem, semper schema relatum requiritur, vt conclusionibus in vsum astronomicum inseruiat. Re vera Veneris a terra distantia sub debitis circumstantiis ita comparata est, vt sensibilem ista parallaxin subeat, intellectam ex obseruationibus ab Astronomis, ast omnibus numeris perfecte nondum cognitam. Omnem hinc Astronomi spem coniecerunt in nuperum Veneris per Solem Transitum, vt ex eo quoque subtilissimae quaestionis de exacta Veneris, vti et Solis, parallaxis quantitate enodationem discerent. Hoc igitur modo a praedicto Transitu obseruato duplicis quaestionis solutionem expectare debemus. *Altera* nempe respicit inuestigationem parallaxis exactam ex comparatione mutua schematum, quae diuersi, et valde dissiti, spectatores in superficie terrae ex obseruatione acquisiuerunt; *altera* vero, inuenta parallaxi, concernit transmutationem cuiusuis ex istis schematibus in tale schema, quale obseruatori in centro terrae constituto competere debet. Postremum, vt in sequentibus breuior explicatio locum habeat, *schema ad centrum terrae*; vnumquodque vero ex illis, *schema obseruatoris*, adiecta loci obseruationis significatione, v. c. *Lipsiensis*, vocabimus. Ambae quaestiones nexu mutuo admodum sunt implicitae, si in priori circumstantiarum ratio habeatur, quae exactissimam parallaxis cognitionem pollicentur, ita, vt prior quaestio posteriorem, cuius tamen solutioni ista inseruire debet, vt cognitam, continuo praesupponat. Interim a dictis circumstantiis recedendum non est, nisi sine exoptato exci-

excidere velimus. Methodum igitur, his ita comparatis, indirectam in subsidium vocare debemus, qua, supposita parallaxi tanta, quantam circiter aliunde coniecimus, in effectus inde pro dictis circumstantiis resultantes inquiramus, eosque cum illis, quos obseruationes in diuersis locis institutae manifestarunt, comparemus: sic enim consensus vel dissensus patefaciet, an supposita parallaxis retineri possit, an vero reiici debeat; et in casu posteriori, cuiusmodi forsan suppositionis mutatio suscipienda sit, vt ad finem quaesitum propius accedatur. Cum eiusmodi effectuum diiudicatio et parallaxi et schemate ad centrum terrae, tanquam fundamento, nitatur; vtriusque autem determinatio in quaestione sit (siquidem posterius, quomodo ex Tabulis astronomicis habetur, ipsum examine ad obseruationes indigeat); facile patet, primariam quaestionem huc redire: *quomodo concessis parallaxi et schemate ad centrum terrae effectus parallaxeos sint explorandi*; hac enim enucleata, reliquis finibus etiam prospicere licebit. Nullus dubito, quin quaestio ista sufficienter iam sit pertractata, siquidem indicia studii hac in re ab Astronomis impensi luculenta, et passim, et occasione quoque nostri Transitus, extant. Ast fateri cogor, omne id, quod hucusque, impedito plerumque per exitiosum bellum commercio litterario, mihi innotuit, quaestionem potius indicasse, quam solutionem eius explanasse. Praeterea ad primarios parallaxis effectus, circa ingressum nempe et egressum Veneris, potissimum attentio facta est, quibus tamen, licet in iis cardo rei vertatur, consideratio aliorum quoque effectuum prorsus

sus postponi non debet. Sic necessitas exigebat, ut de solutione quaestionis ipse cogitarem, et viam ad reliquas considerationes sternerem. Haec ergo disquisitio, quam nunc suscipio, instar continuationis spectari potest eorum, quae iam in *dissertatione* supra nominata *prima*, *de Venere in Sole an.* 1761. *visa* in medium a me prolata sunt; quare etiam, studio breuitatis et euidentiae, paragraphos et figuras istius dissertationis quoad numeros, quibus insigniuntur, ex ordine continuabo.

Tab. XVIII. fig. 7. §. 18. Intelligatur planum chartae figur. 7. referre planum Eclipticae, in quo centra Solis et Terrae in S et T immota habeantur, iuncta recta ST. Sectio istius plani et globi Solaris sit circulus PRX; globi vero terrestris circulus $bfqg$. Recta SC, pars ipsius ST, exponat distantiam curtatam centri Veneris a centro Solis tempore coniunctionis inferioris quoad Eclipticam e centro Terrae T visae, ideoque CT distantiam centri Veneris curtatam a centro telluris. Per punctum C in plano Eclipticae ducta sit recta $ACB\beta$ perpendicularis ad ST, quae pro radio CT et spectatore in T, tanquam centro, portionem exiguam Eclipticae, vt rectilineam, repraesentet. In eodem plano ex S et T ducantur rectae Sf, TP, quae tangant circulos $bfqg$, PRX, respectiue in f, P; rectam AB autem secent in F, B. Si iam duo spectatores fingantur, alter in centro terrae T, alter in eius superficie in f, et pro vtroque apparentiarum vicissitudines adstringantur ad rectam $AB\beta$, quam pro exigua Eclipticae portione habent; patet, spectatorem in T videre

dere centrum Solis in C, et radium disci Solaris sub magnitudine rectae CB; e contrario spectatori in f apparere centrum Solis in F, et radium disci Solaris sub magnitudine rectae Fβ, si nempe ex f ad P tangens ducatur, quae secet ABβ in β. Effectus ergo parallaxis in hoc casu est translatio centri disci Solaris ex C in F, et radii eius ex CB in Fβ; ideoque, si, manentibus Sole et Terra immotis, centrum Veneris in ipsa recta AB motu relatiuo ex A versus B successu temporis moueri fingatur, spectator in centro Terrae T citius coniunctionem centrorum ♀ et ☉ videbit in C, quam spectator in superficie Terrae ad f positus, cui ista apparebit, centro ♀ris in F haerente. Similiter egressus centri ♀ris e disco Solis obseruatori in T continget, dum centrum ♀ris in B; spectatori autem in f, dum centrum ♀ris in β versatur, ita, vt ex parallaxi discrimen temporis oriatur pro vtroque obseruatore, tum quoad coniunctionem, tum quoad egressum, ex temporibus motus ♀ris per CF, Bβ, cognoscendum; qui effectus in tempore eo sensibilior euadit, quo lentior est motus ♀ris relatiuus in recta AB. Hanc quidem apparentiarum vicissitudinem recta AB per sectiones in C, F, B, β, manifestat; ast si ista in coelo apparente intelligibilis reddi debeat, res per angulos et motus angulares vt explicetur, necesse est. Primum autem patet, angulum STP vel CTB pro obseruatore in T; angulum SfP vel F$f\beta$ pro spectatore in f, exhibere semidiametrum Solis apparentem, eandem pro vtroque, ob immensam Solis a terra distantiam; quibus angulis CTB, F$f\beta$, inter se aequa-

 libus

libus ad ſenſum quoque aequales rectae CB, Fβ, reſpondent, ſiquidem dicti anguli ſunt exigui, et puncta C, F, ſibi valde propinqua Puncta F, T, iungantur recta FT; orietur angulus CTF, qui rectam CF, effectum parallaxis in coniunctione pro caſu noſtro, reſpiciet. Cum CTF, CTB, anguli ſint admodum exigui, et TC perpendicularis ad CB; rectae CF, CB (vti et Fβ) eandem rationem inter ſe habebunt, quam ſequuntur anguli CTF, CTB (vel Fſβ); quam ob rem iſtae per conſuetam menſuram angularem in minutis et ſecundis commode exprimi poterunt. Dimenſio igitur rectae CB conſtat ex ſemidiametro Solis apparente; dimenſio autem ipſius CF ex angulo CTF peti debet. Hic habetur ex differentia angulorum TFſ, TSſ, quorum prior eſt parallaxis horizontalis Veneris in F verſantis, poſterior parallaxis horizontalis Solis. Ergo dimenſio rectae CF datur per differentiam parallaxium horizontalium Veneris et Solis. Similiter ſpatia dato tempore a Venere in recta AB motu relatiuo percurſa per angulos metiri licet, qui ipſis ad centrum T reſpondent; cuiusmodi eſt *horarius Veneris apparens* per minuta et ſecunda anguli conuenientis expreſſus. Vt autem in ſequentibus breuitati proſpiciamus, expediet, per *Parallaxin horizontalem* ſimpliciter, ſemper ſignificare differentiam parallaxium horizontalium Veneris et Solis; et per *Parallaxin altitudinis* eam, quae reuera eſt differentia parallaxium Veneris et Solis in eadem altitudine; niſi expreſſe aliud moneatur. Eiusmodi nempe parallaxium differentia vt ſimplex aliqua parallaxis ſemper ſpectari poteſt. Sic differentia paral-

parallaxium horizontalium ♀ris et ☉lis erit ad differentiam parallaxium ♀ris et ☉lis in eadem altitudine visa, vt sinus totus ad cosinum istius altitudinis, quae propositio vnicuique parallaxi simplici competit; vti et prior propositio ex posteriore facile ostendi potest.

§ 19. Expositis sic primis effectuum a parallaxi proficiscentium lineamentis, eos nunc magis excolere, et ad illustrationem nostri Veneris per Solem Transitus accommodare licebit. Primum autem necesse est, vt de *schemate* eius *ad centrum Terrae*, tanquam basi pro reliquis considerationibus, cogitemus. Hunc in finem referat figura 8. idem linearum systema, quod in fig. 7. §pho praec. constructum fuit, exceptis rectis TF, $f\beta$P. Intelligatur deinde planum YZ, per rectam AB transiens, et ad planum Eclipticae seu chartae normale, cuius pars superior YB boream, inferior AZ austrum respiciat. Spectatori in T plaga orientalis sit versus sinistram, occidentalis versus dextram. Habeatur autem planum YZ instar valde exiguae portionis superficiei sphaericae, quam centro S radio SC circa Solem descriptam concipere licet, vt, sub hypothesi, Venerem distantiam suam a Sole tempore transitus per Solem sensibiliter non mutare, motus centri ♀ris (relatiuus ad Solem immotum) in dicto plano YZ repraesentari possit ad ductum rectae lineae, vt IE, quae sub debita ad Eclipticam AB, itidem rectilineam, positione spectatori in centro Terrae T *Semitam Veneris apparentem* exponat. In eodem plano ad Eclipticam AB in C perpendicularis sit αC vel αCO partem rectilineam exhibens circuli latitudinis in dicta sphaera radii SC pro centro Solis in C viso a spectatore in T, ita Tab. XVIII. fig. 8.

 vt

vt pars eius CO, inter C et semitam ♀ris IE intercepta, *latitudinem geocentricam centri Veneris* referat in coniunctione eius cum centro Solis quoad Eclipticam; et angulus COE vel COI sit *Inclinatio semitae Veneris apparentis ad circulum latitudinis*. Inclinetur quoque recta δDC in C ad αC angulo tanto, quantus est angulus inclinationis circuli declinationis in dicta sphaera radii SC per C transeuntis ad circulum latitudinis αC, vt δDC partem exiguam rectilineam illius *circuli declinationis* repraesentet. Si cogitetur centro T radio TC circa Terram descripta sphaera, quae cum sphaera radii SC circa Solem ficta, pro parte quasi communi habeat planum YZ, systema linearum AB, IE, αCO, δDC, easdem circumstantias, quas indicauimus, spectatori in centro Terrae T repraesentabit, ast in superficie coeli caua, situ erecto; scilicet AB Eclipticam, IE semitam ♀ris apparentem, αCO circulum latitudinis, δDC circulum declinationis centri Solis in C ex T visi. Manente plano YZ immoto cum systemate dictarum linearum, concipiatur angulus STP inuariatae magnitudinis circa axem ST circumuolui; punctum B, in quo recta TP planum YZ traiicit, in hoc plano reuolutione ista describet circulum BδAE centri C et radii CB *discum Solis* ibi repraesentantem, qui positione sua respectu praedicti linearum systematis *Schema Transitus Veneris per Solem pro obseruatore in centro Terrae* T plene exponet. Sic ex motu centri ♀ris relatiuo (pro Sole immoto) in semita IOE diiudicare licebit, quando centrum ♀ris in I, E, punctis intersectionum semitae ♀ris apparentis cum peripheria disci Solaris, versari, ideoque *ingressum* et *egressum* celebrare de-

debeat; quemadmodum appulſus centri ♀ris ad O *Momentum coniunctionis centrorum ♀ris et ☉lis quoad Eclipticam* notabit; et ſic porro. Schema hoc ad centrum Terrae, cuius conſtructionem per cognita ex aſtronomicis artificia in ſequentibus ſuppono, in hunc vſum nunc adhiberi debet, vt ipſi effectus parallaxeos pro obſeruatoribus, in ſuperficie Terrae poſitis, ex comparatione cum apparentiis e centro Terrae aeſtimandos, commode inſeri poſſint.

§. 20. Ordiamur ab iis, quae reliquis viam aperiunt. Maneat ergo planum Y Z, vt in §. 19, cum ſyſtemate linearum ibi memoratarum, immotum, et intelligatur nunc triangulum STf, quod ducta Tf ex T ad punctum contactus f tangentis Sf, (ob immenſam Solis a Terra diſtantiam) rectangulum ad STf haberi poteſt, circa ST tanquam axem reuolui. Recta Tf deſcribet circulum globi terreſtris maximum $fdgk$, cuius planum normale eſt ad rectam ST, ideoque parallelum ad planum YZ, et qui circulus hemiſphaerium Terrae a Sole illuminatum ſeparat ab hemiſphaerio tenebroſo, ſeu pro ſpectatore in Sole S *diſcum Terrae illuminatum* refert. Oritur hoc modo conus rectus Sfg, cuius baſis eſt diſcus Terrae $fdgk$, vertex S et axis SCT. Dum planum YZ hunc ſecat, formatur in illo circulus FDGK radii CF, cuius facies prorſus oppoſita eſt faciei diſci telluris $fdgk$, ita quidem, vt, ſi punctum f, ſeu ſpectator in f, in geneſi coni praedicti percurrat ſemiperipheriam diſci borealem fdg, punctum F ipſi f reſpondens itidem peragret ſemiperipheriam borealem FDG in eundem ſenſum et ſecundum eundem ordinem; et similiter translationi puncti f per semiperipheriam disci australem gkf respondeat translatio puncti F per semiperipheriam GKF itidem australem. Spectatori in superficie Terrae in f apparet centrum disci Solaris in F; si ergo per totam peripheriam $fdgk$ obseruatores dispositi concipiantur, vnusquisque centrum disci Solaris referet ad peculiare punctum circuli FDGK secundum ordinem indicatum; et *effectus parallaxis pro iis obseruatoribus est diuersa centri disci Solaris positio in peripheria circuli* FDGK *radii* CF, cum qua simul diuersus situs disci Solaris in plano YZ pro vnoquoque obseruatore connectitur. Loca peripheriae istius circuli FDGK diiudicare licet ex situ eorum respectu systematis linearum AB, αC, δC, quas circulus secat; et dato eiusmodi loco, verbi caussa L, obseruator in l statim assignari poterit, qui centrum disci Solaris in L videt, si nempe per S et L recta SLl cogitetur feriens circulum $fdgk$ in l. Vicissim ex dato l dabitur L. Similiter parti GCF Eclipticae AB respondet recta gTf in disco Terrae, et puncto D punctum d, vel rectae DC recta Td, quae Td in disco terrae circulum declinationis (circulo declinationis DC respondentem) exprimet, eiusque positionem respectu Eclipticae gTf indicabit; ita vt praedictum systema linearum in plano YZ facile transferri possit in planum disci Terrae. Caeterum dimensio circuli FDGK respectu circuli BδAE Solis discum exhibentis patet ex ratione radiorum CF ad CB, seu parallaxis horizontalis ad semidiametrum Solis apparentem (§. 18.).

§. 21.

§. 21. Tandem quoque effectus parallaxis pro quouis obseruatore in superficie Terrae vbicunque constituto examinare licebit, quos iste obseruat, dum in motu vertiginis Terrae translatus phaenomena motus primi Solis percipit. Concipiatur nempe proiectio superficiei terrestris orthographica in planum circuli *fdgk*, seu in discum Terrae illuminatum. Istam pro explicandis motus primi Solis phaenomenis recte suscipi posse, ex astronomicis abunde constat. Obseruator datus, v. c. Lipsiensis, in motu vertiginis Terrae circa polos eius describit circulum ad aequatorem terrestrem parallelum, cuius proiectio orthographica, per artificia in astronomicis cognita, semper in potestate est, quaeque semitam obseruatoris in disco Terrae illuminato exponit. Sit haec, verbi caussa, Ellipsis *lmn* pro spectatore Lipsiensi, constructa ad circulum declinationis T*d*, qui meridianum vniuersalem repraesentat. Dum in ista semita spectator in *l* ad marginem occidentalem disci Terrae haeret, Solem orientem; quando in motu per *lm* ad meridianum vniuersalem in *m* appellit, Solem culminantem; et tandem Solem occidentem videt, quando in motu suo per *mn* orientalem disci Terrae marginem attingit. A spectatore in *l* posito ducta intelligatur ad centrum Solis S recta *l*S, transiens planum YZ in puncto L peripheriae circuli FDGK, quod puncto *l* disci *fdgk* (§. 20.) respondet. Hanc rectam secum ducat spectator in motu suo per *lmn*; formabitur conus, verticis S, et baseos ellipticae *lmn* sitae in plano disci Terrae, qui sectus per planum YZ ad planum disci *fdgk* parallelum, in illo producit ellipsin LMN,

LMN, ellipsi *lmn* in disco terrae prorsus similem et respectu circuli declinationis DC similiter positam; cuius ergo constructio intra circulum FDGK similem in modum perficitur, ac constructio semitae *lmn* in disco Terrae. Spectatori in *l* haerenti centrum Solis apparet in L; translato autem per *lmn* respondet translatio centri Solis per LMN. Est igitur *effectus parallaxeos pro obseruatore nostro in motu eius diurno* (seu in motu apparenti Solis diurno) *diuersa centri disci Solaris positio in peripheria ellipsis* LMN, cum qua simul diuersus situs disci Solaris in plano YZ connectitur. Ordinem translationis centri Solis per LMN optime dignoscere licet ex ordine temporis. Quemadmodum enim horis antemeridianis spectator per *lm*, pomeridianis per *mn* fertur; ita etiam translatio centri Solis perficitur horis antemeridianis per LM, pomeridianis per MN, ab occidente versus orientem in apparente Solis disco BδAE (pro obseruatore in T) immoto. Puncto M intersectionis ellipsis LMN cum circulo declinationis δDC respondet meridies; quare data in motu primo elongatione Solis a meridie in tempore, per artificia consueta dabitur positio centri Solis respectu M in ellipsi LMN, pro obseruatore per *lmn* moto. Cum figura FDGK cum systemate inscriptarum linearum prorsus similis sit proiectioni orthographicae superficiei terrestris in planum disci Terrae *fdgk*; illa, breuitatis causa, commode *Proiectio in discum terrae* dici potest. Nullum datur discrimen inter vtramque figuram, praeter magnitudinem et facies oppositas. Si figura FDGK eiusdem magnitudinis cogitetur

tetur cum diſco *fdgk*, et planum YZ motu ſibi parallelo ad planum diſci *fdgk* accedere intelligatur, peruadente puncto C rectam CT, donec plana YZ, *fdgk*, coincidant; congruent ſibi omnes lineae homonymae, et mutuum ectypum facierum ſibi oppoſitarum efficient.

§. 22. Hactenus parallaxis effectus generaliter pro quouis obſeruatore in ſuperficie terrae diiudicauimus; nunc rem ampliato ſchemate (fig. 9.), Schemati in plano YZ (fig. 8.) analogo, illuſtrare, atque computo pro dato obſeruatore ſubiicere oportet. Primum autem *Schema ad centrum Terrae* (§. 19.) pro noſtro tranſitu propius vt cognoſcatur, neceſſe eſt; in quo negotio, cum ſchema ex obſeruationibus correctum nondum ſupponere liceat, et ſequentia potius ſpeciminis tantum loco accipi debeant; elementa conſtructioni ſchematis inſeruientia ſumere licebit ea, quae ex Tabulis aſtronomicis, methodo conſueta, depromta fuerunt, cum praeparatio ad obſeruationem noſtri Tranſitus Veneris per Solem inſtitueretur. Referant ergo in figura 9, ad apparentias in cauitate coeli ſitu erecto (vt poſcit ſchema in plano YZ fig. 8. deſcriptum) accommodata, AEB marginem diſci Solaris; C eius centrum; CE vel CI radium; ACB Eclipticam; CO circulum latitudinis centri Solis, et in eo recta CO latitudinem centri ♀ris geocentricam tempore coniunctionis centrorum ☉ et ♀ quoad Eclipticam; IOE ſemitam centri ♀ris apparentem, quae marginem Solis in I et E ſecet; COE inclinationem eius ad circulum latitudinis occidentem verſus; DCH circulum declinationis centri Tab. XIX. Fig. 9.

 Solis

Solis C ad tempus dictae coniunctionis, cuius situm respectu circuli latitudinis CO tantisper inuariatum durante transitu accipiamus, ideoque OCH inclinationem circuli declinationis ad circulum latitudinis constantem; et denique CH differentiam declinationum centrorum ☉lis et ♀ris tempore coniunctionis quoad ascensionem rectam in H. Iuncta intelligantur puncta C, I; C, E, per radios disci Solis CI, CE, vt systema triangulorum in fig. 9. emergat; et sint ex Tabulis, vt ante monuimus:

$$CE \text{ vel } CI = 948'',5 \text{ part. circ. maximi, existente diam. ☉ app.} = 1897'' = 31'.37''$$

$$CO = 603,2 \text{ part. circ. max.} = 10'.\ 3''.2$$

$$COE = 98^\circ.\ 30'.\ 10''$$

$$COI = 81.\ 29.\ 50$$

$$OCH = 6.\ \ 9.\ 20.$$

Ex his datis reliquarum schematis conditionum dimensiones facile innotescunt. Sic

	ex datis	inueniuntur
in △COE	CE	CEO = CIO (ob CE, CI, in △CIE aequales)
	CO	$= 38^\circ.\ 58'.\ 25''$
	COE	OCE $= 42.\ 31.\ 25$
		OE $= 648'',21.$
in △COI	CIO	OCI $= 59^\circ.\ 31'.\ 45''$
	COI	OI $= 826'',58$
	CI	ICE $= 102^\circ.\ 3'.\ 10''$ = OCI + OCE
		IE $= 1474''.79$ = OI + OE

in

in $\triangle$ OCH CO OHC $= 75^\circ.20'.30''$ et
COH vel COE CHE $= 104\ 39.\ 30$
OCH OH $= 66''.85 +$
CH $= 616,64 = 10'.16'',64$

HE $= 581''.36 =$ OE $-$ OH
HI $= 893.\ 44 =$ OI $+$ OH.

Si motus centri Veneris in ſemita IE e centro terrae viſa per interualla temporis reſpondentia expreſſos deſideres, opus eſt *motu horario* eius in iſta ſemita relatiuo (pro Sole immoto), quem ex calculo per Tabb. ponamus $= 3'\ 58''.3$, vel $238''.3$ part. circ. max. ex quo, inferendo $238''.3 : 1.$ hor. vel $3600'' =$ datum ſpatium a centro ♀ris percurſum: interuallum temporis reſpondens, hoc inueniri poteſt. Sic, verbi cauſa, tempus per IE, ſeu mora totius tranſitus centri ♀ris, erit $= 6^h.11'.20''$; et ſic de reliquis temporibus per HE, HI, OH, etc. Tandem, ſi de ipſis temporis momentis quaeſtio ſit, quibus centrum ♀ris in datis ſemitae punctis, verbi cauſa, in I, H. E, haeſit, neceſſe eſt, vt *tempus coniunctionis centrorum* ☉ *et* ♀ *quoad Eclipticam* in O, inſtar *termini a quo*, notum ſit, cuius ope ex temporibus per OI, OE, OH, etc. momenta Ingreſſus, Egreſſus, Coniunctionis quoad Aſcenſionem rectam etc. facile reperiuntur.

§. 23. Huc vsque centrum Veneris ſolummodo attendimus; cum autem Venus diſculo notabili praedita ſit, huius quoque in quibusdam circumſtantiis, praeſertim circa ingreſſum et egreſſum, ratio haberi debet. Tunc ſcilicet celebrantur *contactus limborum Solis et*

Veneris, alter quidem *exterior* poſito ♀ris diſculo extra Solis diſcum; alter *interior*, dum diſculus ♀ris intra diſcum Solis conſtituitur. Vt horum contactuum conditiones ad calculum reuocari poſſint, in fig. 10. partem figurae 9. ſeorſim exhibere placet, ne linearum multitudine haec obſcura euadat. Sit ergo in fig. 10. COE idem triangulum, quod in fig. 9. per COE inſignitum occurrit. Centro C radio CE (= ſemidiametro Solis) deſcripta ſit pars limbi Solaris $\alpha E \beta$. Capiantur, Ce = ſummae, Ci = differentiae, ſemidiametrorum Solis et Veneris; atque centro C, radiis Ce, Ci, fiant circuli concentrici, $\delta e i \gamma$, ſecantes ſemitam centri ♀ris OE (productam) in e, i. Patet centro ♀ris in e haerente celebrari contactum exteriorem ad β; interiorem vero ad α, dum centrum ♀ris in i verſatur; iunctis ſcilicet Ce, $Ci\alpha$. Pro cognoſcendis triangulorum COe, COi, conditionibus, circa egreſſum

Tab. XIX. Fig. 10.

	ex datis	inueniuntur
in $\triangle COe$	Ce	CeO
	CO	OCe
	COe vel COE	Oe
in $\triangle COi$	Ci	CiO
	CO	OCi
	COi vel COE	Oi.

Hinc dantur, mora totius tranſitus diſculi ♀ris per limbum Solis ex ſpatio $ie = Oe - Oi$; mora a contactu interiore ad appulſum centri ex ſpatio $iE = OE - Oi$; mora a tranſitu centri ♀ris per limbum Solis ad contactum exteriorem ex ſpatio $Ee = Oe - OE$; ſi ſcili-

cet

cet haec ſpatia per horarium ſupra indicatum in tempus conuertantur. Ex modo procedendi facile intelligitur, rem omnem transferri poſſe ad figuram 9. tanquam generalem. Si enim in triangulo COE cogitetur CE = ſummae ſemidiametrorum Solis et Veneris, manentibus CO, COE; inuenientur CEO, OCE, OE, pro contactu exteriore circa egreſſum; pro interiore autem, ſi CE ſumatur = differentiae ſemidiametrorum ☉lis et ♀ris. Similiter pro ingreſſu, poſita CI = ſummae ſemidiametrorum ☉lis et ♀ris, manentibus CO, COI, acquiri poterunt CIO(=CEO), OCI, OI, pro contactu exteriore; pro interiore e contrario, ſi CI = differentiae ſemidiametrorum ☉lis et ♀ris capiatur. Comparatis deinde lineis OE, OI, pro contactibus reſpectiue, cum homonymis OE, OI, pro centro ♀ris; conditiones diſculi ♀ris per limbum ☉lis, et quoad ſpatia, et quoad tempus (ope horarii) innoteſcent. Praeſtat, hanc methodum adhibere, ne figurarum multitudine, vel linearum multiplicatione, obruamur. Speciminis loco ſupponatur Tab. XIX. Fig. 9.

Semidiameter Veneris apparens $= 29''$, erit
Summa ſemidiametrorum ☉ et ♀ $= 977,5$
Differentia - - - - - - $= 919,5$

et dabuntur:

Pro contactu exteriore

Circa Ingreſſum	*Circa Egreſſum*
$CIO = 37°.36'.40''$	$CEO = 37°.36'.40''$
$OCI = 60.53.30$	$OCE = 43.53.10$
$OI = 863''.53$	$OE = 685''.16$
$HI = 930.38 = OI + OH.$	$HE = 618.30 = OE - OH$

 ſpa-

ſpatium pro mora a contactu exter. ad appulſum centri ♀ - - $= 36''.94$	ſpatium pro mora ab appulſu centri ad contactum exteriorem $= 36''.94$
mora ipſa - $= 0^h. 9'. 18''$	mora ipſa - $= 0^h. 9'. 18''$

Pro contactu interiore

$CIO = 40°. 27'. 0''$	$CEO = 40°. 27'. 0''$
$OCI = 58 \quad 3. 10$	$OCE = 41. \quad 2. 50$
$OI = 788''\ 90$	$OE = 610''. 52$
$HI = 855.75 = OI + OH$	$HE = 543.67 = OE - OH$
ſpatium pro mora ab appulſu centri ad cont. inter. $= 37''.69$	ſpatium pro mora a contactu inter ad appulſum centri $= 37''.69$
mora ipſa $= 0^h. 9'. 29''.4$	mora ipſa $= 0^h. 9'. 29''.4$

Spatium pro mora totius tranſitus ♀ris per limbum ☉lis $= 74''. 63$
mora ipſa - - - $= 0^h. 18'. 47''. 4.$

§. 24. Cognito per praec. ſchemate ad centrum terrae, ea, quae cuiuis obſeruatori in ſuperficie terrae obuia fiunt, calculo perſequi nunc licebit. Hunc in finem in fig. 9. e centro diſci Solaris C, radio CF vel CD, qui ſit ad radium diſci Solaris in ratione parallaxis horizontalis ad ſemidiametrum Solis apparentem (§. 18. 20), deſcriptus intelligatur circulus FDGK, qui diſcum terrae FDGK (fig. 8. §. 21.) aemuletur. Dicta ratio in effectione circuli FDGK (fig. 9.) obſeruari non potuit, qui iuſto maior repraeſentari debuit, vt inſcribendarum linearum euidentiae conſulere-

Tab. XIX Fig. 9.

tur.

tur. Reliqua calculus ſupplebit. Intra circulum FDGK nunc ea efficiantur, quae ad proiectionem in diſcum terrae (fig. 8. §. 21.) requiruntur; in quo negotio recte ex aſtronomicis ſupponi poſſunt, quae ibi de conſtructione ſchematis, ope proiectionis globi terreſtris orthographicae, ad cognoſcendas Eclipſis Solis vel potius Terrae conditiones pro dato in ſuperficie terrae obſeruatore, tradi ſolent. Igitur circa DC circulum declinationis, nunc meridianum vniuerſalem (§. 21.), cogitetur ſemita obſeruatoris dati v. c. Elliptica. Sumamus exempli loco Lipſienſem, qui in noſtro Veneris per Solem tranſitu Ellipſin percurrat SM*s*, cuius centrum ſit Z, axis maior SZ*s* (ad angulos rectos cum DC), minor M*m* (pars ipſius DC), ita vt ſemiſſis anterior ſit SM*s* (ob Solis declinationem borealem), cuius quadrantem SM obſeruator peragret horis antemeridianis a 6ta ad 12mam; quadrantem vero M*s* horis pomeridianis a meridie ad ſextam. Eadem deinceps eſt translatio centri diſci Solaris per SM*s*; ad cognoſcendos, pro obſeruatore Lipſienſi, parallaxis effectus (§. 21.); cum praecedens idea potius imaginationem iuuet ex conuenientia cum ſchemate pro eclipſi aliqua terrae. Per M, *m*, ducantur reſpectiue rectae PT, *pt*, ad S*s* parallelae, vel ad DC perpendiculares, peripheriam circuli FDGK ſecantes in P, T, *p*, *t*; intra quas integra ellipſis comprehenditur. Ex S, *s*, ad rectam S*s* intelligantur perpendiculares SL, *s*N, ſecantes dictum circulum in L, N; ex D autem reſecentur arcus D*a*, D*b*, inter ſe et declinationi Solis (ad tempus coniunctionis in O) aequales. Sint

De-

Declinatio Solis seu $Da(=Db)$ $=d$

Eleuatio aequatoris pro dato obseruatore (v. c. Lipsiensi) $=e$

His positis ex theoria proiectionum patet: Si mente recta ab (hic omissa) puncta a, b, iungens concipiatur, eam in recta DM signare proiectionem poli (hic quoque omissam), qui boreus, in nostro casu, in anteriore disci facie apparet,

arcum aT (vel bP) aequalem esse eleuationi aequatoris $=e$

arcum DL (vel DN) itidem aequalem esse eleuationi aequatoris $=e$

vt ZS (existente LS ad DZ parallela, vtraque nempe ad ZS perpendiculari) sit $=$ sinui arcus DL (pro sinu toto DC) $=\text{sin.}\,e$

arcum $DT = aT + Da$ $= e + d$.

arcum $Dt = Dp$

$= pa - Da$ $= e - d$

siquidem arcus pa inter punctum a, quod proiectioni poli, et punctum p, quod proiectioni in m puncti semitae obseruatoris in posteriori disci facie remotissimi respondet, interceptus, distantiae istius puncti a polo, hoc est, eleuationi aequatoris aequalis est.

Ad inueniendas nunc semitae ellipticae SMs dimensiones, facile intelligitur, pro sinu toto DC, qui trigonometrice consideratus semper dicatur R, esse

$$CM = \text{cos. arcus } DT = \text{cos.}(e+d)$$
$$= \frac{\text{cos.}\,e \times \text{cos.}\,d - \text{sin.}\,e \times \text{sin.}\,d}{R}$$

Cm

$$Cm = \text{cos. arcus } Dt = \text{cos.}(e-d)$$
$$= \frac{\text{cos. } e \times \text{cos. } d + \text{sin. } e \times \text{sin. } d}{R}$$
$$Mm = Cm - CM = \frac{2 \times \text{sin. } e \times \text{sin. } d}{R}$$
$$ZM = \tfrac{1}{2} Mm (= \text{semiaxi minori})$$
$$= \frac{\text{sin. } e \times \text{sin. } d}{R}$$
$$ZS = \text{semiaxi maiori, per praec.} = \text{sin. } e$$
$$CZ = CM + ZM = \frac{\text{cos. } e \times \text{cos. } d}{R}.$$

Hae lineae ZS, ZM, CZ, trigonometrice expressae ad eam mensuram reuocari debent, quae in figura 9. in partibus circuli maximi constituta est, id quod fiet, si capiatur DC radius circuli FDGK = parallaxi horizontali (= differentiae parallaxium horizontalis ♀ et ☉ §. 18.) in partibus circ. max. quae sit $= p$, et inferatur, $R : p =$ data recta (verbi causa ZM) trigonometrice expressa : eandem (ZM) in partibus circuli maximi. Hoc modo acquiruntur

$$ZS = \frac{p \times \text{sin. } e}{R}$$
$$ZM = \frac{p \times \text{sin. } e \times \text{sin. } d}{R^2}$$
$$CZ = \frac{p \times \text{cos. } e \times \text{cos. } d}{R^2}$$

vt situs cuiusuis loci, puta V, semitae ellipticae SMs in eadem mensura innotescat; fiat Vu ad MZ parallela secans ZS in u; et manifestum est, inuentis Zu, uV, dari locum V. Hunc in finem in fig. 11. circa axem maiorem SZs ellipsis $SMsm$ centro z, radio ZS, descriptus concipiatur circulus $S\mu s$; et producantur ZM, uV, vsque ad occursum cum eius peripheria in μ, v. Iste circulus parallelum (ad aequatorem) obserua- Tab. XIX. Fig. 11.

ſeruatoris dati in ſuperficie terrae repraeſentat, ita vt μ proiecto puncto M, et v proiecto loco obſeruatoris V in ſuperficie terrae reſpondeat, et arcus μv elongationem obſeruatoris a meridiano in dicto parallelo exhibeat ex dato tempore, ad quod locus V quaeritur, facile cognoſcendus. Sit arcus iſte μv, ſeu elongatio a meridiano $= m$; pro radio ZS erit $Zu = \text{ſin.}\, m$, et $uv = \text{coſ.}\, m$. Igitur

$$R : \text{ſin.}\, m = ZS : Zu$$
$$= \frac{p \times \text{ſin.}\, e}{R} : Zu$$
$$Zu = \frac{p \times \text{ſin.}\, e \times \text{ſin.}\, m}{R^2}$$

Deinde ex natura ellipſis eſt

$$Z\mu\,(= ZS) : uv = ZM : uV$$

quare cum $ZS : uV = R : \text{coſ.}\, m$, fiet

$$R : \text{coſ.}\, m = ZM : uV$$
$$= \frac{p \times \text{ſin.}\, e \times \text{ſin.}\, d}{R^2} : uV$$

et $uV = \dfrac{p \times \text{ſin.}\, e \times \text{ſin.}\, d \times \text{coſ.}\, m}{R^3}$.

§. 25. His ita praeparatis ad ſpecialiora deſcendere licet. Habeamus autem tantiſper declinationem Solis ſeu d (ad tempus coniunctionis quoad Eclipticam inuentam) per totum tranſitus noſtri tempus conſtantem, prout (§. 22.) angulum circuli declinationis cum circulo latitudinis, ſeu OCH, conſtantem quoque aſſumſimus. Si igitur pro eodem obſeruatore (v. c. Lipſienſi) varia phaenomena ſint excutienda, cui conſtans elevatio aequatoris, ſeu e, reſpondet; et parallaxis horizontazontalis, seu p, vel radius CD, etiam sit inuariatae magnitudinis; erit Tab. XIX. Fig. 9.

$$CZ = \frac{p \times \cos. e \times \cos. d}{R^2} \quad (\S.\ 24.)$$

quantitas constans; nec non $ZH = CZ + CH$, cum CH ex calculo generali (§. 22.) detur. Exempli gratia sint:

$p = 25''$ (scil. pro parallaxi ☉ horiz. $= 10''$.)
$d = 22^\circ.42'$. bor.
$e = 38.38$. pro obseruatore Lipsiensi

fient log. p = 1,3979400
log. cos. e = 9,8927385
log. cos. d = 9,9649843

21,2556628
log. R^2, = 20,0000000

log. CZ = 1,2556628
CZ = 18'',016
et cum CH = 616,64 (§. 22.)

ZH = 634,656.

Reliquae disquisitiones pro eodem obseruatore exposcunt tempus datum, expressum in partibus diei Solaris veri, ad quod effectus parallaxis explorari debet. Hoc enim comparatum cum meridie in M, si tempus datum inter horam sextam matutinam et sextam vespertinam ordine naturali cadat, patefacit distantiam loci centri Solis, a dato obseruatore ad datum tempus in V visi, a meridie in M, seu arcum proiectum VM in tempore, quod in gradus etc. conuersum (assignando singulis horis gradus 15. etc.) *elongationem centri*

Solis visi a meridiano, per arcum proiectum VM, exponit, quam nunc semper per m (§. 24.) insignire licet. Si tempus datum inter horam 6tam vespertinam et 6tam matutinam ordine naturali cadat, comparatio eius cum media nocte in m instituitur, vt elongatio centri Solis visi a meridiano in posteriore ellipsis semisse innotescat. In genere ex dato tempore facile diiudicari potest, in quonam ellipsis quadrante locus centri Solis visus ponatur. Sit iste in puncto V per m dato. Quaerantur:

Tab. XIX. Fig 9. 11.

Fig. 9.

$$Zu = \frac{p \times \text{sin. } e \times \text{sin. } m}{R^2} \quad (\text{§. } 24.)$$

$$uV = \frac{p \times \text{sin. } e \times \text{sin. } d \times \text{cos. } m}{R^3}$$

Producta intelligatur uV (ad ZM parallela) vsque ad occursum in Q cum semita centri ♀ris IOE, vt uQ parallela sit ad ZH. Ex H fiat HR parallela ad Zu, seu perpendicularis ad ZH, secans uQ in R; erit recta $uR = ZH$, quae proinde datur; et HRQ erit triangulum ad R rectangulum. In hoc triangulo dabitur $HR = Zu$, et angulus RHQ = CHQ (CHE) − recto = 104°. 39′. 30″ (§. 22.) − 90° = 14°. 39′. 30″. qui ex hyp. CHE (ex COE et OCH deductum) inuariatum manere, etiam constans erit. Inferendo igitur, vt sinus totus (R): tang. RHQ = HR : RQ, nec non, cos. RHQ : sin. tot. (R) = HR : HQ; dabuntur RQ, HQ. Inueniri ergo potest $VQ = uR\,(ZH) - uV + RQ$, si punctum V in quadrante ellipsis SM, vt in nostro casu, situm sit. In reliquis casibus ex positione puncti V, (et respondentis Q), citra vel vltra rectam ZH, et in anteriore vel posteriore ellipsis semisse,

misse, facile diiudicatur quantitas rectae VQ ex uR (ZH), uV, RQ. Per rectas autem VQ, HQ, sub angulo dato VQH=OHC (§. 22.), vel eius deinceps posito, comprehensas, datur positio centri Solis visi V respectu semitae centri ♀ris et dati in ea puncti H; ex qua deinde reliquae conditiones cognosci possunt.

§. 26. Quaeramus, exempli loco, effectum parallaxis in egressu centri ♀ris e disco Solis Lipsiae viso, quem $9^h.18'.9''$. ante meridiem d. 6. Iunii 1761. obseruatum fuisse ponamus. Erit ergo distantia ipsius V a meridie ad M in tempore $=2^h.41'.51''$, et elongatio $m=40°.27'.45''$, V in quadrante SM ellipsis haerente. Fient autem sequentia, manentibus datis §phi 25.

$$
\begin{array}{l}
\log. p = 1,3979400 \\
\log. \sin. e = 9,7954171 \\
\log. \sin. m = 9,8122113 \\
\hline
\log Zu = 1,0055684 \\
\text{demto scil. log. } R^2 \\
Zu = HR = 10'',129
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\log. p = 1,3979400 \\
\log. \sin. e = 9,7954171 \\
\log. \sin. d = 9,5864816 \\
\log. \operatorname{cos}. m = 9,8812881 \\
\hline
\log. uV = 0,6611268 \\
\text{demto scil. log. } R^2 \\
uV = 4'',583
\end{array}
$$

in triangulo HRQ

$$\log. HR(Zu) = 1,0055684$$

$$\log.\text{tang}\left(\begin{matrix}RHQ\\14^\circ.39'.30''\end{matrix}\right) = 9,4175846$$

$$\log. RQ = 0,4231530$$

demto scil. log. R

$$RQ = 2'', 649$$

$$ZH = uR = 634, 656\ (\S.\ 25.)\ \text{add.}$$

$$uQ = 637, 305$$

$$uV = 4, 583\ \text{subtr.}$$

$$VQ = 632, 722$$

$$\log. R + \log. HR = 11,0055684$$

$$\log.\text{cos}\left(\begin{matrix}RHQ\\14^\circ.39'.30''\end{matrix}\right) = 9,9856294$$

$$\log. HQ = 1,0199390$$

$$HQ = 10'',47$$

Vt nunc conditio egressus centri ♀ris introducatur; centro V, radio Ve = semidiametro disci Solis, intersecetur semita centri ♀ris in e versus E. Cum tempore istius egressus locus centri Solis visus pro spectatore Lipsiensi sit in V, et circulus centro V, radio Ve, mente descriptus pro eodem exponat peripheriam disci Solaris, patet simul ac centrum ♀ris appellit ad e, istud a spectatore Lipsiensi videri constitutum in occidentali Solis margine, ideoque in ipso egressu; cum e contrario spectator in centro terrae tunc demum centrum

trum ♀ris in egressu deprehendit, quando istud in E versatur (§. 19. 22.). Spatium ergo eE, ope motus horarii ♀ris (§. 22.) in tempus conuersum, docet effectum parallaxis circa egressum centri ♀ris in tempore, quo scilicet spectatori Lipsiensi egressus citius contingit, quam obseruatori in centro terrae, hoc est, *accelerationem egressus*. Vt spatium eE innotescat; cum dentur, HE (§. 22), HQ (ante reperta), $QE = HE - HQ$; patet, inuenta Qe, acquiri $eE = QE - Qe$. Cognoscitur autem Qe ex resolutione trianguli VQe, in quo dantur recta VQ (ante deducta $= 632'', 722.$), $Ve =$ semidiametro Solis $= 948'',5$ (§. 22.); $VQe = CHE$ (ob VQ, CH, parallelas) $= 104^\circ.39'.30''$ (§. 22.); quare patefiunt, VeQ, ex analogia Ve : sin. $VQe = VQ$: sin. VeQ; QVe, ex VQe, VeQ; Qe ex analogia sin. $VeQ : VQ =$ sin. $QVe : Qe$. Schema calculi hoc est:

log. sin. $VQe = 9,9856294$	$VeQ = 40^\circ.11'.35''$
log. $VQ = 2,8012130$	$VQe = 104.\ 39.\ 30$
$12,7868424$	$144.\ 51.\ 5$
log. $Ve = 2,9770373$	$179.\ 59.\ 60$
log. sin. $VeQ = 9,8098051$	$QVe = 35.\ 8.\ 55$
$VeQ = 40^\circ.11'.35''$	
log. $VQ = 2,8012130$	$HE = 581''.36$ (§. 22.)
log. sin. $QVe = 9,7601956$	$HQ = 10.\ 47$
$12,5614086$	$QE = 570.\ 89$
log. sin. $VeQ = 9,8098051$	$Qe = 564.\ 42$
log. $Qe = 2,7516035$	$eE = 6.\ 47$
$Qe = 564''.42$	

hora-

horarius ♀ris in semita $=238'',3$ (§. 22.)

$$\log. eE(6'',47) = 0,8109043$$
$$\log. 3690 = 3,5563025$$
$$4,3672068$$
$$\log. 238'',3 = 2,3771240$$
$$\log. \text{temp. per } eE = 1,9900828$$
$$\text{tempus per } eE = 97'',74$$
$$= 1',\ 38''. \text{ rotunde}$$

quod accelerationem egressus quaesitam exponit.

§ 27. Similem in modum inquirere licet effectum parallaxis in ingressu centri ♀ris in Solis discum, quem (inuisibilem licet) obseruatori Lipsiensi mane $3^h\ 6'.49''$. contigisse fingamus. Cadit ergo locus centri Solis tunc visus in quadrantem ellipsis mS (fig. 11.); quem vero in V retineamus, ne linearum multitudo schema obscurum reddat, mente supplendo reliqua. Facta relatione ad mediam noctem fit elongatio seu $m = 46^\circ.42'.15''$ et inueniuntur

$$Zu = HR = 11'',\ 36$$
$$uV = 4,\ 131$$
$$RQ = 2,\ 971$$
$$HQ = 11,\ 742$$
$$VQ = 641'',758 = uR\,(ZH) + uV + RQ$$

(§. 25.) in hoc casu.

Centro V, radio Vi = semidiametro Solis, si fiat intersectio semitae ♀ris in i versus I; ingressus centri ♀ris continget obseruatori in centro terrae in I, spectatori Lipsiensi in i, ideoque serius; et spatium Ii ope

ope horarii in tempus conuersum manifestabit *retardationem Ingressus.* Reperiuntur autem in triangulo QVi, ex Vi, VQ, iQV ($=OHC=75^\circ.20'.30''$. §. 22.), anguli, $QiV=40^\circ.53'.20''$, $QVi=63^\circ.46'.10''$, et recta $Qi=879'',45$; quae si comparetur cum $QI=905'',182$. scil. $=HI$ ($893'',44$. §. 22.) $+HQ$ ($11'',742$), producit $Ii=25'',73$. et tempus per $Ii=388'',7=6'.29''$ rotunde, seu retardationem quaesitam. Periculum quoque facere placuit, quanta pro eodem obseruatore Lipsiensi proditura sit acceleratio egressus vel retardatio ingressus centri ♀ris, si, manentibus omnibus reliquis, parallaxis horizontalis seu p alius magnitudinis accipiatur. En Tabulam inuenta comprehendentem:

Si ponantur		erunt	
parallaxis horiz. ☉	vel respondens parall. horiz. p	acceleratio egressus	retardatio ingressus
10''	25''	1'. 38''	6'. 29''
10. 85	27. 275	1. 47	7. 5
15	37. 707	2. 31	9. 54

ex qua patet, exiguae parallaxis horizontalis Solis variationi notabilem mutationem in effectibus parallaxis respondere, ita, vt ad eos in egressu et ingressu prae caeteris respiciendum sit, si aliquando de magnitudine parallaxis Solis horiz. iudicium ex iis instituti debeat. Notandum autem est in eiusmodi deductionibus: si tempus egressus vel ingressus immediate ex obseruatione acquisitum sit, calculum pro effectu parallaxis ad id institutum nulla indigere correctione. Ast, si tem-

 pus

pus egressus vel ingressus detur ex schemate ad centrum terrae, quo centrum ♀ris fuit in E vel I pro obseruatore in centro terrae, facta tantisper suppositione, schema istud ex Tabulis deductum coelo esse conforme; correctione tunc aliqua opus est. Reputetur nempe tempus datum v. c. egressus in E, ac si pro dato spectatore, v. c. Lipsiensi, immediate ex obseruatione acquisitum fuisset, et quaeratur ad istud, vt in §. 26, effectus parallaxis seu tempus per *e* E. Hoc a dato tempore in E subtrahatur, et satis prope cognoscetur tempus egressus pro obseruatore Lipsiensi, ad quod calculus §phi 26. denuo repetatur, qui demum iustam egressus accelerationem patefaciet.

§. 28. Si circa egressum vel ingressum desideretur effectus parallaxis in contactu limborum Solis et Veneris vel interiore vel exteriore, quos contactus prae reliquis circumstantiis attendere solent Astronomi; ex tempore eiusmodi contactus dato (ponamus, per obseruationem) rectae VQ, HQ, respondentes prorsus, vt in § 25, inueniuntur. Si nunc *de contactu interiore* quaestio sit; primam in schemate ad centrum terrae accipi debet CE vel CI (hucusque pro centro ♀ris = semidiametro Solis) nunc = differentiae semidiametrorum Solis et Veneris, vt deducantur respondentes rectae HE, HI, (§. 23.); deinde etiam in resolutione trianguli, vel VQ*e*, vel VQ*i*, sumi debet V*e* vel V*i* = differentiae semidiametrorum Solis et Veneris, ad inueniendam rectam Q*e* vel Q*i*, quae cum QE vel QI (ex HE vel HI et HQ deducta) si ſi comparetur, producit eE vel Ii, et ope horarii tempus per eE vel per Ii, hoc eſt, *contactus interioris* vel *accelerationem* circa egreſſum, vel *retardationem* circa ingreſſum. Econtrario ſi *de contactu exteriore* quaeſtio inſtituatur; in ſchemate ad centrum terrae, aſſumto radio CE vel $CI =$ ſummae ſemidiametrorum Solis et Veneris, reperiri debent HE, HI (§. 23.) et ope HQ, rectae QE, QI; in reſolutione autem trianguli, vel VQe, vel VQi capi etiam debet Ve vel $Vi =$ ſummae ſemidiametrorum ☉ et ♀ris, vt innoteſcant Qe vel Qi, eE vel Ii, et tandem tempus per eE vel per Ii, hoc eſt, *contactus exterioris* vel *acceleratio* circa egreſſum, vel *retardatio* circa ingreſſum. Exemplum pro contactu interiore Lipſiae $9^h.8'.27''$ ante meridiem circa egreſſum obſeruato ſit ſequens. Erit ergo elongatio a meridie $= 2^h.51'.33''$ in tempore, et $m = 42°.53'.10''$ rotunde. Simili iam modo, vt in §. 25. 26, inueniuntur ſub hyp. eſſe $p = 25''$.

$Zu = HR = 10'',622$

$uV = \quad 4,\ 413$

$RQ = \quad 2,\ 778$

$HQ = \quad 10,\ 979$

$VQ = \quad 633,\ 021 = uR\,(ZH\ \text{§. }25.) - uV + RQ$

in hoc caſu.

Deinde fiunt

$CE (=$ differ. femid. ☉ et ♀$) = 919'',5$ (§. 23.) $= Ve$
$HE = 543'',67$ (§. 23.)
$QE = 532,691 = HE - HQ$
$Qe = 525,69$
$Ee = 7,0$
tempus per $eE = 105'',74$
$= 1'.46''$. rotunde

feu acceleratio contactus interioris. Si tempus alicuius contactus ex obferuatione immediate non habeatur, fed ex fchemate ad centrum terrae, peti debeat; repetitio calculi eum in modum inftituitur, qui fub finem §phi praec. expofitus eft.

§. 29. Sed redeamus ad confiderationem centri Veneris, atque ea, quae motum ♀ris per difcum Solis pro dato obferuatore (v. c. Lipfienfi) parallaxi involutum concernunt, attendamus. Hunc in finem folvi debet problema: *Ad datum tempus definire pofitionem mutuam, centri Veneris ad iftud tempus in aliquo femitae fuae puncto* x *haerentis, et centri Solis a dato obferuatore in aliquo fuae femitae ellipticae loco* V *vifi.* Quaerantur, vt in §. 25., ad datum tempus rectae VQ, HQ, quae fub dato angulo $VQH = OHC$ (§. 22.), vel eius deinceps pofito, comprehenfae, pofitionem centri Solis vifi V refpectu femitae centri ♀ris IHE, et dati in ea puncti H manifeftant. Tempus nunc cognitum effe debet, quo centrum ♀ris fuit in H, feu pro obferuatore in centro terrae coniunctionem

cum

cum centro Solis C quoad Afcenfionem rectam celebrauit. Sit iftud, fpeciminis loco, Lipfiae $=6^h.48'.20''$ mane; quod conferatur cum dato tempore, atque ex interuallo vtriusque ope horarii ($=238''.3$. (§. 22.) inueniatur fpatium in part. circ. max. quod diftantiam centri ♀ris x ab H per Hx feu locum eius in x ad datum tempus patefaciet, x vel verfus E vel verfus I refpectu H pofito, prout tempus datum vel fequitur vel antecedit tempus in H ($=6^h.48'.20''$.). Si deinde HQ cum Hx comparetur, habita ratione fitus tum puncti Q tum puncti x refpectu H, innotefcet Qx, x vel verfus E vel verfus I refpectu Q fito. Per rectas autem VQ, Qx, fub dato angulo VQx, qui in cafu figurae deinceps pofitus eft ipfius VQH vel OHC (§ 22.) comprehenfas, datur pofitio ipfius x refpectu V, quae quaeritur. Ex. gr. datum tempus fit $=7^h.48'.20''$. mane, loco centri Solis V in quadrante SM verfante. Elongatio a meridie erit $=4^h.11'.40''$. et $m=62°.55'$. quare manentibus, p, e, d, (§. 25.), inueniuntur:

$Zu = HR = 13'',897$
$uV = 2,742$
$RQ = 3,635$
$HQ = 14,364$
$VQ = 635,549 = uR(ZH) - uV + RQ$.

Tempus datum $=7^h.48'.20''$. a tempore in H $=6^h.48'.20''$. differt integra hora, cui pro fpatio Hx ipfe horarius $=238'',3$ refpondet, x inter H et E pofito; quare cum Q etiam inter H et E fitum

 fit;

sit; erit $Qx = Hx - HQ = 223'', 936$. Datis autem

$$VQ = 635'', 549$$
$$Qx = 223, 936$$
$$VQx = 104^{\circ}.39'.30'' = CHE \text{ (§. 22.)}$$

datur positio centrorum V, x, quaesita ad datum tempus $7^h.48'.20''$.

Similem in modum pro $5^h.48'.20''$. acquiruntur

$$VQ = 639'', 039$$
$$HQ = 16, 112 \quad \text{Q inter H et E posito.}$$
$$Hx = 238, \quad 3 \quad x \text{ inter H et I sito}$$
$$Qx = 254, 412 = Hx + HQ$$
$$VQx = 75^{\circ}.20'.30'' = OHC \text{ (§. 22.)}.$$

Pro tempore $6^h.48'.20''$, instar termini *a quo* sumto, quo centrum ♀ris fuit in H, fiunt

$$VQ = 637'', 387$$
$$HQ = 15, 776 = Qx, \; x \text{ in H cadente}$$
$$VQx = 75^{\circ}\ 20'.30'' = OHC$$

Pro egressu centri ♀ris habentur (§. 26.)

$$VQ = 632'', 722$$
$$Qx \text{ nunc } Qe = 564, \quad 42$$
$$VQx \text{ vel } VQe = 104^{\circ}.39'.30''.$$

Pro ingressu centri ♀ris (§. 27.) innotuerunt

$$VQ = 641'', 758$$
$$Qx \text{ nunc } Qi = 879, \quad 45$$
$$VQx \text{ vel } VQi = 75^{\circ}.20'.30'' = OHC.$$

§. 30.

§. 30. Iis nunc subsidiis instructi sumus, quae confectioni schematis inseruire possunt, quod transitus Veneris per Solem conditiones pro dato obseruatore, v. c. Lipsiensi, et parallaxis effectus ex comparatione eius cum schemate ad centrum terrae, plene exponit. Res huc redit, vt positiones centri ♀ris ad centrum Solis mobile (in sua semita elliptica) pro datis temporibus definitae transferantur ad centrum Solis fixum, pro quo recte sumi potest centrum C disci Solaris, cui inscriptum est schema ad centrum terrae; hoc enim modo statim comparatio apparentiarum pro dato obseruatore cum illo schemate elucescit. Exhibeat igitur figura 12. schema ad centrum terrae §. 22. constructum, rectis ACB, CE, CH, CO, CI, IOE, eadem denotantibus, quae in fig. 9. homonymae rectae significarunt. Istius autem figurae 12 cum fig. 9. continua fiat comparatio. Cum pro egressu centri ♀ris Lipsiae triangulum VQe repraesentet positionem puncti egressus e siti in peripheria disci Solaris, cuius centrum est V (fig. 9.); cogitetur recta VQ cum annexo triangulo VQe motu sibi parallelo transferri in CH, ita vt V cadat in C, et VQ in CH productam: triangulum istud in fig. 12. situm obtinebit Cqe, e nunc in peripheriam disci Solaris AEB, centri C, incidente, existentibus Ce, Cq, qe, iis rectis, quae in fig. 9. per Ve, VQ, Qe, signantur. Fiunt ergo (§. 29.) $Cq = 632'',722$, $qe = 564'',42$, $Hq = Cq - CH = 632'',722 - 616'',64$ (§. 22.) $= 16'',082$, et qe ad HE parallela; dabiturque in schemate fig. 12. punctum egressus e pro obseruatore Lipsiensi, cum in eodem E sit

Tab. XIX. et XX. Fig. 9. 12.

sit punctum egressus pro spectatore in centro terrae. Eundem in modum pro ingressu centri ♀ris Lipsiae transferatur triangulum VQi fig. 9, vt V in C, et VQ in CH productam cadat, atque positionem Cri in fig. 12. acquirat, factis Vi, VQ, Qi (fig. 9.) respectiue aequalibus Ci, Cr, ri (§. 12.), ideoque (§. 29.) $ri = 879'',45$; $Cr = 641'',758$; $Hr = Cr - CH = 25'',118$. In schemate igitur fig. 12. i pro obseruatore Lipsiensi, I pro spectatore in centro terrae punctum ingressus repraesentant. Vt locus centri ♀ris Lipsiae visus ad datum tempus v. c. $7^h.48'.20''$ schemati fig. 12. inseratur; cogitetur fig. 9. vt ante, recta VQ cum annexa Qx (dum x locum centri ♀ris in semita IE ad datum tempus exhibet, et VQ cum Qx datum angulum comprehendit) ita translocari, vt V in C, VQ in CH productam incidat, atque in fig. 12. Cd, dx, eas rectas exponant, quae in fig 9. fuerunt VQ, Qx, existentibus in fig. 12. dx ad HE parallela $= 223'',936$, $Cd = 635'',549$, $Hd = Cd - CH = 18'',909$ (§. 29.); quibus factis, in fig. 12. punctum x locum centri ♀ris Lipsiae visum ad dictum tempus indicabit. Per x ducatur xy parallela ad CHd, terminata per HE in y, vt emergat parallelogrammum $Hdxy$, et fiat $Hy = dx = Qx$ (fig 9.); nec non $yx = Hd = Cd - CH = VQ - CH$ (fig. 9.). Hoc modo per deductiones §phi 29. absque ambagibus ad datum tempus locus centri ♀ris (Lipsiae) visus in schemate fig. 12. assignari potest. Sic

pro

pro $7^h.48'.20''$ capiantur Hy (= Qx fig. 9) = $223'',936$
yx, ad CH parallela (= VQ − CH fig. 9.)
= $635'',549 - 616'',64$
= $18,909$

$6^h.48'.20''$ - - - Hc (= Qx fig. 9.) = $15'',776$
cf ad CH parallela (= VQ − CH fig 9)
= $637'',387 - 616'',64$
= $20,747$

$5^h.48'.20''$ - - - Hg (= Qx fig. 9.) = $254'',412$
gk ad CH parallela (= VQ − CH fig. 9.)
= $639'',039 - 616'',64$
= $22,399$

eruntque in x, f, k, loca centri Veneris viſa ad tempora $7^h.48'.20''$; $6^h.48'.20''$; $5^h.48'.20''$. reſpectiue. Praeſtat quoque, *loca relatiua* y, c, g, in ſemita IE ad eadem reſpectiue tempora attendere, vt conditio motus centri ♀ris pro obſeruatore Lipſienſi facilius innoteſcat. Series locorum i, k, f, x, e, exponit *ſemitam centri Veneris in tranſitu per diſcum Solis* (Lipſiae) *viſam*; et tempora adſcripta conditionem motus in ea patefaciunt.

§. 31. Comparemus iam *ſemitam* inuentam, quam pro dato obſeruatore in ſuperficie terrae *viſam* breuitatis cauſa nuncupabimus, cum *ſemita centri Veneris* IOE pro obſeruatore in centro terrae conſtituto, quae *vera* dicatur; attendendo, ſpeciminis loco, obſeruatorem Lipſienſem.

1) ex conditione poſitionis ſemitae centri Solis eclipticae MSs reſpectu C, (fig. 9.) patet, in fig. 12. Tab. XX. Fig. 12.

 ſemi-

semitam centri ♀ris visam infra veram austrum versus esse sitam.

2) Semita vera est rectilinea; e contrario semita visa re vera curuilinea prodire debet, orta nempe ex combinatione motus centri Solis V in curua SMs (fig. 9.) cum motu centri ♀ris rectilinea in semita vera IE. Ast incuruatio semitae visae tam exigua est, vt absque periculo erroris sensibilis in plerisque casibus rectilinea haberi possit semita, praesertim si eam componere velis cum tramite, quam spectator ex obseruatione immediata artificiis debitis delineat, in quo negotio, omni etiam cura adhibita, eiusmodi minutiae in sensus non incurrunt, quae curuaturam semitae visae producere solent. Sumas ie rectilineam; cum gk, cf, yx, sint inter se parallelae, erit $gc:gy = gk - cf : gk - yx$; quare si dentur gc, gy, gk, cf, inueniri poterit yx ex hypothesi, atque cum yx (§ 30.) reperta comparari, vt discrimen innotescat. Sic erunt

$gc = Hg - Hc = 254'',412 - 15'',776$ (§ 30) $= 238'',636$
$gy = Hg + Hy = 254,412 + 223'',936$ (§. 30.) $= 478,348$
$gx = 22'',399$ (§ 30)
$cf = 20,747$ (§. 30.)
$gk - cf = 1,652$

quare fient

$gk - yx = 3,311$
$yx = 19,088$ quae ab
$yx = 18,909$ (§. 30.)
differt $0,179$

tam

tam exigua minuti secundi parte, vt eam attendere superuacaneum esset. Licet autem in plerisque casibus curuatura semitae visae tuto negligi possit; attamen casus quoque dantur, qui rationem curuaturae habendam poscunt, vt mox patefiet.

3) Inclinatio semitae visae, instar rectae spectatae, ad circulum declinationis CHn alius est magnitudinis ac inclinatio semitae verae ad eundem in casibus plerisque, hoc est, angulus Cne differt ab angulo CHE et ille in nostro casu minor est hoc. Simile ratiocinium valet (si desideretur) circa angulum semitarum cum circulo latitudinis. Sumatur integra semita visa ine rectilinea. Cum

$rCi (= QVi$ fig. 9 §. 30$) = 68°. 46'. 10''$ (§. 27.) $= nCi$

$qCe (= QVe$ fig. 9. §. 30$) = 35. \quad 8. 55$ (§. 26) $= nCe$

fit $iCe = 98°. 55'. 5'' = nCi + nCe$

et $Cie = Cei$ (ob Ce, Ci, aequales) $= 40°. 32'. 27''\frac{1}{2} = Cen$

quare habetur

$Cne = 104°. 18'. 37''\frac{1}{2}$ ex nCe, Cen

cum econtrario erat

$CHE = 104°. 39'. 30''$ (§. 22.)

differentia ad $0°. 20'. 52''\frac{1}{2}$ ascendente.

In determinatione anguli eiusmodi curuaturam semitae visae subinde respicere oportet in casu, quo pars eius tantum rectilinea habetur, si quidem iste pro partibus diuersis notabiliter variabilis prodire solet; quae circumstantia non negligenda, si comparatio cum parte semitae visae ex obseruatione acquisita institui debeat.

 Sic

pus egressus vel ingressus detur ex schemate ad centrum terrae, quo centrum ♀ris fuit in E vel I pro obseruatore in centro terrae, facta tantisper suppositione, schema istud ex Tabulis deductum coelo esse conforme; correctione tunc aliqua opus est. Reputetur nempe tempus datum v. c. egressus in E, ac si pro dato spectatore, v. c. Lipsiensi, immediate ex obseruatione acquisitum fuisset, et quaeratur ad istud, vt in §. 26, effectus parallaxis seu tempus per *e*E. Hoc a dato tempore in E subtrahatur, et satis prope cognoscetur tempus egressus pro obseruatore Lipsiensi, ad quod calculus §phi 26. denuo repetatur, qui demum iustam egressus accelerationem patefaciet.

§. 28. Si circa egressum vel ingressum desideretur effectus parallaxis in contactu limborum Solis et Veneris vel interiore vel exteriore, quos contactus prae reliquis circumstantiis attendere solent Astronomi; ex tempore eiusmodi contactus dato (ponamus, per obseruationem) rectae VQ, HQ, respondentes prorsus, vt in § 25, inueniuntur. Si nunc *de contactu interiore* quaestio sit; primam in schemate ad centrum terrae accipi debet CE vel CI (hucusque pro centro ♀ris = semidiametro Solis) nunc = differentiae semidiametrorum Solis et Veneris, vt deducantur respondentes rectae HE, HI, (§. 23.); deinde etiam in resolutione trianguli, vel VQ*e*, vel VQ*i*, sumi debet V*e* vel V*i* = differentiae semidiametrorum Solis et Veneris, ad inueniendam rectam Q*e* vel Q*i*, quae cum QE vel QI (ex HE vel HI et HQ deducta) si fi comparetur, producit eE vel Ii, et ope horarii tempus per eE vel per Ii, hoc eſt, *contactus interioris* vel *accelerationem* circa egreſſum, vel *retardationem* circa ingreſſum. Econtrario ſi *de contactu exteriore* quaeſtio inſtituatur; in ſchemate ad centrum terrae, aſſumto radio CE vel CI $=$ ſummae ſemidiametrorum Solis et Veneris, reperiri debent HE, HI (§. 23.) et ope HQ, rectae QE, QI; in reſolutione autem trianguli, vel VQe, vel VQi capi etiam debet Ve vel Vi $=$ ſummae ſemidiametrorum ☉ et ♀ris, vt innoteſcant Qe vel Qi, eE vel Ii, et tandem tempus per eE vel per Ii, hoc eſt, *contactus exterioris* vel *acceleratio* circa egreſſum, vel *retardatio* circa ingreſſum. Exemplum pro contactu interiore Lipſiae $9^h.8'.27''$ ante meridiem circa egreſſum obſeruato ſit ſequens. Erit ergo elongatio a meridie $=2^h.51'.33''$ in tempore, et $m=42°.53'.10''$ rotunde. Simili iam modo, vt in §. 25. 26, inueniuntur ſub hyp. eſſe $p=25''$.

$Zu=HR=10'',622$

$uV=\quad 4,413$

$RQ=\quad 2,778$

$HQ=\quad 10,979$

$VQ=\quad 633,021=uR(ZH\ §.25.)-uV+RQ$

in hoc caſu.

Deinde fiunt

$CE (= \text{differ. femid.} \odot \text{ et } ♀) = 919'',5$ (§. 23.) $= Ve$
$HE = 543'',67$ (§. 23.)
$QE = 532, 691 = HE - HQ$
$Qe = 525, 69$
$Ee = 7, 0$
tempus per $eE = 105'',74$
$= 1'. 46''$. rotunde

feu acceleratio contactus interioris. Si tempus alicuius contactus ex obferuatione immediate non habeatur, fed ex fchemate ad centrum terrae, peti debeat; repetitio calculi eum in modum inftituitur, qui fub finem §phi praec. expofitus eft.

§. 29. Sed redeamus ad confiderationem centri Veneris, atque ea, quae motum ♀ris per difcum Solis pro dato obferuatore (v. c. Lipfienfi) parallaxi inuolutum concernunt, attendamus. Hunc in finem folvi debet problema: *Ad datum tempus definire pofitionem mutuam, centri Veneris ad iftud tempus in aliquo femitae fuae puncto* x *haerentis, et centri Solis a dato obferuatore in aliquo fuae femitae ellipticae loco* V *vifi.* Quaerantur, vt in §. 25., ad datum tempus rectae VQ, HQ, quae fub dato angulo VQH = OHC (§ 22.), vel eius deinceps pofito, comprehenfae, pofitionem centri Solis vifi V refpectu femitae centri ♀ris IHE, et dati in ea puncti H manifeftant. Tempus nunc cognitum effe debet, quo centrum ♀ris fuit in H, feu pro obferuatore in centro terrae coniunctionem

cum

cum centro Solis C quoad Afcenfionem rectam celebrauit. Sit iftud, fpeciminis loco, Lipfiae $=6^h.48'.20''$ mane; quod conferatur cum dato tempore, atque ex interuallo vtriusque ope horarii ($=238''.3.$ (§. 22.) inueniatur fpatium in part. circ. max. quod diftantiam centri ♀ris x ab H per Hx feu locum eius in x ad datum tempus patefaciet, x vel verfus E vel verfus I refpectu H pofito, prout tempus datum vel fequitur vel antecedit tempus in H ($=6^h.48'.20''.$). Si deinde HQ cum Hx comparetur, habita ratione fitus tum puncti Q tum puncti x refpectu H, innotefcet Qx, x vel verfus E vel verfus I refpectu Q fito. Per rectas autem VQ, Qx, fub dato angulo VQx, qui in cafu figurae deinceps pofitus eft ipfius VQH vel OHC (§ 22.) comprehenfas, datur pofitio ipfius x refpectu V, quae quaeritur. Ex. gr. datum tempus fit $=7^h.48'.20''.$ mane, loco centri Solis V in quadrante SM verfante. Elongatio a meridie erit $=4^h.11'.40''.$ et $m=62°.55'.$ quare manentibus, p, e, d, (§. 25.), inueniuntur:

$$
\begin{aligned}
Zu = HR &= 13'',897\\
uV &= 2,\ 742\\
RQ &= 3,\ 635\\
HQ &= 14,\ 364\\
VQ &= 635,\ 549 = uR(ZH) - uV + RQ.
\end{aligned}
$$

Tempus datum $=7^h.48'.20''.$ a tempore in H $=6^h.48'.20''.$ differt integra hora, cui pro fpatio Hx ipfe horarius $=238'',3$ refpondet, x inter H et E pofito; quare cum Q etiam inter H et E fitum

 fit;

fit; erit $Qx = Hx - HQ = 223'', 936$. Datis autem

$$VQ = 635'',549$$
$$Qx = 223, 936$$
$$VQx = 104^\circ.39'.30'' = CHE \text{ (§. 22.)}$$

datur positio centrorum V, x, quaesita ad datum tempus $7^h.48'.20''$.

Similem in modum pro $5^h.48'.20''$. acquiruntur

$$VQ = 639'',039$$
$$HQ = 16, 112 \quad \text{Q inter H et E posito.}$$
$$Hx = 238, \quad 3 \quad x \text{ inter H et I sito}$$
$$Qx = 254, 412 \quad = Hx + HQ$$
$$VQx = 75^\circ.20'.30'' = OHC \text{ (§. 22.)}.$$

Pro tempore $6^h.48'.20''$, instar termini *a quo* sumto, quo centrum ♀ris fuit in H, fiunt

$$VQ = 637'',387$$
$$HQ = 15, 776 = Qx, \ x \text{ in H cadente.}$$
$$VQx = 75^\circ\ 20'.30'' = OHC$$

Pro egressu centri ♀ris habentur (§. 26.)

$$VQ = 632'',722$$
$$Qx \text{ nunc } Qe = 564, \quad 42$$
$$VQx \text{ vel } VQe = 104^\circ.39'.30''.$$

Pro ingressu centri ♀ris (§. 27.) innotuerunt

$$VQ = 641'',758$$
$$Qx \text{ nunc } Qi = 879, \quad 45$$
$$VQx \text{ vel } VQi = 75^\circ.20'.30'' = OHC.$$

§. 30.

§. 30. Iis nunc subsidiis instructi sumus, quae confectioni schematis inseruire possunt, quod transitus Veneris per Solem conditiones pro dato obseruatore, v. c. Lipsiensi, et parallaxis effectus ex comparatione eius cum schemate ad centrum terrae, plene exponit. Res huc redit, vt positiones centri ♀ris ad centrum Solis mobile (in sua semita elliptica) pro datis temporibus definitae transferantur ad centrum Solis fixum, pro quo recte sumi potest centrum C disci Solaris, cui inscriptum est schema ad centrum terrae; hoc enim modo statim comparatio apparentiarum pro dato obseruatore cum illo schemate elucescit. Exhibeat igitur figura 12. schema ad centrum terrae §. 22. constructum, rectis ACB, CE, CH, CO, CI, IOE, eadem denotantibus, quae in fig. 9. homonymae rectae significarunt. Istius autem figurae 12 cum fig. 9. continua fiat comparatio. Cum pro egressu centri ♀ris Lipsiae triangulum VQ*e* repraesentet positionem puncti egressus *e* siti in peripheria disci Solaris, cuius centrum est V (fig. 9.); cogitetur recta VQ cum annexo triangulo VQ*e* motu sibi parallelo transferri in CH, ita vt V cadat in C, et VQ in CH productam: triangulum istud in fig. 12. situm obtinebit C*qe*, *e* nunc in peripheriam disci Solaris AEB, centri C, incidente, existentibus C*e*, C*q*, *qe*, iis rectis, quae in fig. 9. per V*e*, VQ, Q*e*, signantur. Fiunt ergo (§. 29.) C*q* $= 632'',722$, $qe = 564'',42$, $Hq = Cq - CH = 632'',722 - 616'',64$ (§. 22.) $= 16'',082$, et *qe* ad HE parallela; dabiturque in schemate fig. 12. punctum egressus *e* pro obseruatore Lipsiensi, cum in eodem E

Tab. XIX. et XX. Fig. 9. 12.

sit

sit punctum egressus pro spectatore in centro terrae. Eundem in modum pro ingressu centri ♀ris Lipsiae transferatur triangulum VQi fig. 9, vt V in C, et VQ in CH productam cadat, atque positionem Cri in fig. 12. acquirat, factis Vi, VQ, Qi (fig. 9.) respectiue aequalibus Ci, Cr, ri (§. 12.), ideoque (§. 29.) $ri = 879'',45$; $Cr = 641'',758$; $Hr = Cr - CH = 25'',118$. In schemate igitur fig. 12. i pro obseruatore Lipsiensi, I pro spectatore in centro terrae punctum ingressus repraesentant. Vt locus centri ♀ris Lipsiae visus ad datum tempus v. c. $7^h.48'.20''$ schemati fig. 12. inseratur; cogitetur fig. 9. vt ante, recta VQ cum annexa Qx (dum x locum centri ♀ris in semita IE ad datum tempus exhibet, et VQ cum Qx datum angulum comprehendit) ita translocari, vt V in C, VQ in CH productam incidat, atque in fig. 12. Cd, dx, eas rectas exponant, quae in fig 9. fuerunt VQ, Qx, existentibus in fig. 12. dx ad HE parallela $= 223'',936$, $Cd = 635'',549$, $Hd = Cd - CH = 18'',909$ (§. 29.); quibus factis, in fig. 12. punctum x locum centri ♀ris Lipsiae visum ad dictum tempus indicabit. Per x ducatur xy parallela ad CHd, terminata per HE in y, vt emergat parallelogrammum $Hdxy$, et fiat $Hy = dx = Qx$ (fig 9.); nec non $yx = Hd = Cd - CH = VQ - CH$ (fig. 9.). Hoc modo per deductiones §phi 29. absque ambagibus ad datum tempus locus centri ♀ris (Lipsiae) visus in schemate fig. 12. assignari potest. Sic

pro

pro $7^h.48'.20''$ capiantur Hy (= Qx fig. 9) = $223'',936$

yx, ad CH parallela (= VQ − CH fig. 9.)
= $635'',549 - 616'',64$
= $18,909$

$6^h.48'.20''$ - - - Hc (= Qx fig. 9.) = $15'',776$

cf ad CH parallela (= VQ − CH fig 9)
= $637'',387 - 616'',64$
= $20,747$

$5^h.48'.20''$ - - - Hg (= Qx fig. 9.) = $254'',412$

gk ad CH parallela (= VQ − CH fig. 9.)
= $639'',039 - 616'',64$
= $22,399$

eruntque in x, f, k, loca centri Veneris visa ad tempora $7^h.48'.20''$; $6^h.48'.20''$; $5^h.48'.20''$. respectiue. Praestat quoque, *loca relatiua* y, c, g, in semita IE ad eadem respectiue tempora attendere, vt conditio motus centri ♀ris pro obseruatore Lipsiensi facilius innotescat. Series locorum i, k, f, x, e, exponit *semitam centri Veneris in transitu per discum Solis* (Lipsiae) *visam*; et tempora adscripta conditionem motus in ea patefaciunt.

§. 31. Comparemus iam *semitam* inuentam, quam pro dato obseruatore in superficie terrae *visam* breuitatis caussa nuncupabimus, cum *semita centri Veneris* IOE pro obseruatore in centro terrae constituto, quae *vera* dicatur; attendendo, speciminis loco, obseruatorem Lipsiensem.

1) ex conditione positionis semitae centri Solis ellipticae MSs respectu C, (fig. 9.) patet, in fig. 12. semi- Tab. XX. Fig. 12.

semitam centri ♀ris visam infra veram austrum versus esse sitam.

2) Semita vera est rectilinea; e contrario semita visa re vera curuilinea prodire debet, orta nempe ex combinatione motus centri Solis V in curua SMs (fig. 9.) cum motu centri ♀ris rectilinea in semita vera IE. Ast incuruatio semitae visae tam exigua est, vt absque periculo erroris sensibilis in plerisque casibus rectilinea haberi possit semita, praesertim si eam componere velis cum tramite, quam spectator ex obseruatione immediata artificiis debitis delineat, in quo negotio, omni etiam cura adhibita, eiusmodi minutiae in sensus non incurrunt, quae curuaturam semitae visae producere solent. Sumas ie rectilineam; cum gk, cf, yx, sint inter se parallelae, erit $gc : gy = gk - cf : gk - yx$; quare si dentur gc, gy, gk, cf, inueniri poterit yx ex hypothesi, atque cum yx (§ 30.) reperta comparari, vt discrimen innotescat. Sic erunt

$gc = Hg - Hc = 254'',412 - 15'',776$ (§. 30) $= 238'',636$
$gy = Hg + Hy = 254,412 + 223'',936$ (§. 30.) $= 478,348$
$gx = 22'',399$ (§ 30.)
$cf = 20,747$ (§. 30.)
$gk - cf = 1,652$

quare fient

$gk - yx = 3,311$
$yx = 19,088$ quae ab
$yx = 18,909$ (§. 30.)

differt 0,179

tam

tam exigua minuti ſecundi parte, vt eam attendere ſuperuacaneum eſſet. Licet autem in plerisque caſibus curuatura ſemitae viſae tuto negligi poſſit; attamen caſus quoque dantur, qui rationem curuaturae habendam poſcunt, vt mox patefiet.

3) Inclinatio ſemitae viſae, inſtar rectae ſpectatae, ad circulum declinationis CHn alius eſt magnitudinis ac inclinatio ſemitae verae ad eundem in caſibus plerisque, hoc eſt, angulus Cne differt ab angulo CHE et ille in noſtro caſu minor eſt hoc. Simile ratiocinium valet (ſi deſideretur) circa angulum ſemitarum cum circulo latitudinis. Sumatur integra ſemita viſa *ine* rectilinea. Cum

rCi (= QVi fig. 9 §. 30) = $68°.46'.10''$ (§. 27.) = nCi

qCe (= QVe fig. 9. §. 30) = $35. \quad 8.55$ (§. 26) = nCe

fit $iCe = 98°.55'.5'' = nCi + nCe$

et $Cie = Cei$ (ob Ce, Ci, aequales) = $40°.32'.27''\frac{1}{2} = Cen$

quare habetur

$Cne = 104°.18'.37''\frac{1}{2}$ ex nCe, Cen

cum econtrario erat

$CHE = 104°.39'.30''$ (§. 22.)

differentia ad $0°.20'.52''\frac{1}{2}$ aſcendente.

In determinatione anguli eiusmodi curuaturam ſemitae viſae ſubinde reſpicere oportet in caſu, quo pars eius tantum rectilinea habetur, ſi quidem iſte pro partibus diuerſis notabiliter variabilis prodire ſolet; quae circumſtantia non negligenda, ſi comparatio cum parte ſemitae viſae ex obſeruatione acquiſita inſtitui debeat.

 Sic

Sic si a loco f vsque ad locum e semita visa tantum rectilinea spectetur; inuenietur inclinatio eius ad circulum declinationis seu $cfe = 104^{\circ}.12'.42''$, quae a CHE ($= 104^{\circ}.39'.30''$.) nunc $0^{\circ}.26'.48''$ differt. Facile autem acquiritur iste angulus cfe, si triangulum cogitetur, cuius alterum latus sit (in hoc casu) $= He + qe (= 580'', 196$ vi §. 30.); alterum $= cf - Hq$ ($= 4'', 665$ vi §. 30.); et angulus interceptus $= 104^{\circ}.39'.30''$; in resolutione enim huius trianguli angulus e duobus reliquis maior est quaesitus cfe, minor autem dicta differentia ($= 26'.48''$.).

4) Motus centri ♀ris in semita vera est vniformis; in semita visa difformis. Horarius in illa est constans ($= 238'', 3$, § 22.); in hac pro diuersis semitae visae partibus variabilis. Attendamus loca centri ♀ris relatiua (§. 30.) g, c, y, ad tempora $5^h.48'.20''$, $6^h.48'.20''$, $7^h\,48'.20''$ respectiue, et inueniamus spatia respondentia gc, cy, quae motus horarios relatiuos exponent. Erunt autem

$$gc = Hg - Hc = 254'', 412 - 15'', 776 \text{ (§. 30.)}$$
$$= 238,\ 636$$
$$cy = Hy + Hc = 223,\ 936 + 15,\ 776 \text{ (§ 30.)}$$
$$= 239,\ 712.$$

Iis vti licet, si partes semitae visae, quae in tempus conuerti debent, respectu horarii respondentis sint exiguae; si vero propius accedant ad ipsum horarium, et rigor omnis sit obseruandus; hic horarius transmutari debet in alium secundum rationem sinus inclinationis visae ad sinum inclinationis verae (partis semitae ad circulum

culum declinationis) siquidem pars semitae ex. gr. hf ad horarium relatiuum gc non est parallela, sed inclinata ad hunc angulo, qui est ante inuenta differentia inter vtramque inclinationem. Ponamus eam circa partem hf = 21'. rotunde, vt inclinatio visa sit 104°. 18'. 30'', existente vera = 104°. 39'. 30'', et horarius relatiuus gc sit 238'',636; fieri debet sin. 104°. 18'. 30'': sin. 104°. 39'. 30'' = 238'',636: horarium quaesitum hf, qui erit = 238'',26.

5) Tempus coniunctionis centrorum ☉ et ♀ quoad Ascensionem rectam (Lipsiae) visae differt a tempore eiusmodi coniunctionis pro obseruatore in centro terrae. Hic nempe dictam coniunctionem deprehendit, quando centrum ♀ris videt in H (6^h. 48'. 20''. §. 29.); ast eodem tempore obseruatori Lipsiensi centrum ♀ris apparet in f (§. 30.) vel relatiue in c; quapropter ille nondum percipit coniunctionem, sed ea demum contingit, quando locus centri ♀ris pro obseruatore Lipsiensi in ipsam CH productam incidit, puta in n, vel relatiue ad H peruenit. Discrimen inter vtramque coniunctionem manifestat tempus per cH, ex horario cy quaerendum. Sic, cum cH = 15'',776 (§. 30.) et cy = 239'',712 (§. 31. n. 4.) erit tempus per cH = 3'. 57''. et tempus coniunctionis Lipsiae visae = 6^h. 52', 17''. Simile ratiocinium valet circa tempora coniunctionum quoad eclipticam.

§. 32. Tandem respiciamus eam conditionem, qua angulum circuli declinationis cum circulo latitudinis OCH (§. 22.) et declinationem Solis seu d (§. 25.) Tab. XIX. Fig. 9.

 pen

per totum transitus nostri tempus inuariatae magnitudinis assumsimus. Quantitates istae re vera sunt variabiles pro diuersitate temporis; quare, si omnem rigorem attendere vellemus, calculus vtique valde prolixus euasurus esset. Ast in plerisque casibus, si non omnibus, eiusmodi rigore opus non est. Locus Eclipticae, in quo Transitus noster contingit, ita comparatus est, vt circa eum variatio declinationis Solis diurna admodum sit exigua, circiter ad 6′. ascendens, cuius ergo quarta circiter pars, si totum transitum spectes, influere potest in determinationes linearum a declinatione Solis pendentium. (§. 24. 25.) Sed huius discriminis effectus tam paruus est, vt v. c. in semiaxe minore ZM vix centesimae partis minuti secundi discrepantiam producere valeat; et sic de reliquis. Tuto igitur eiusmodi aberrationem a variatione declinationis Solis pendentem negligere licet. E contrario, si angulum OCH consideres, effectus ex variatione eius resultans notabilior videtur. Variatio diurna est circiter 25′. et horaria 1. min. Licet ergo in vicinia loci coniunctionis O haec variatio tuto contemni possit; in locis tamen ab O magis remotis, praesertim circa ingressum et egressum, metus sensibilis effectus superest. Sic variato OCH mutatur quantitas ipsius OH, quae in determinationes rectarum HE, QE, etc. influit. Et licet discrimen vltra dimidium secundum circuli maximi circa ingressum vel egressum, cum coniunctione in O comparatum, vix ascendat; attamen istud, ob motum ♀ris relatiuum admodum lentum, aberrationem 7. vel 8. secundorum temporis gignere valet; cuius discrepantiae ratio vtique haben-

habenda esset. Interim et hic aliqua compensatio feliciter emergit, quae discrepantiam istam valde minuit, vt ea tuto negligi possit. Perpendamus v. c. egressum ♀ris e disco ☉lis, (§. 26.) et augeamus, pro ratione temporis ab O vsque ad E elapsi, angulum OCH circiter tribus minutis primis. Augebitur ergo OH, manentibus CO, COH vel COE. Hinc minuitur HE, et ab ea pendens QE. Augebitur autem quoque CHE vel VQe; quare manentibus VQ, Ve, minuitur Qe. Effectus igitur parallaxis eE est differentia inter diminutam QE et diminutam Qe; quae a differentia inuariatarum QE, Qe (§. 26.) sensibiliter non differet. Facto tentamine et aucto OCH tribus minutis, reperi eE = 6''.50; quae (§. 26.) = 6''.47 circ. max. inuenta fuit. Hoc modo de variatione anguli OCH et declinationis Solis nimium soliciti ne simus. Sufficiet quantitates istas, ad tempus coniunctionis in O inuentas, inuariatas retinere. Nunc filum abrumpendum est, ne limites dissertationis transiliam. Argumentum autem, quod hactenus tractaui, in alia dissertatione secundum aliam methodum inuestigandum resumere licebit, quae forsan facilius iudicium de quantitate parallaxis ex eius effectibus largietur.

CONSI-

CONSIDERATIONES DE MOTV CORPORVM COELESTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Etsi nullum est dubium, quin leges motus corporum coelestium a *Keplero* obseruatae atque a *Neutono* confirmatae, Astronomiae maxima incrementa attulerint, tamen nunc quidem certissimum est, nullum in coelo reperiri corpus, quod leges istas in motu suo perfecte sequatur, cum potius in omnibus haud leues aberrationes ab istis legibus deprehendantur. Vera scilicet omnium motuum coelestium causa in mutua horum corporum attractione est posita, qua vnumquodque ad singula reliqua vrgetur viribus rationem compositam ex directa simplici massarum, et inuersa duplicata distantiarum tenentibus. Semper autem commode vsu venit, vt inter has vires vna prae reliquis maxime emineat, ideoque motus proxime regulis *Keplerianis* conformis euadat; sicque effectus a reliquis oriundus veluti minimus per methodos appropinquandi definiri possit. Quod nisi eueniret, in maxima adhuc ignoratione motuum coelestium versaremur; cum nulla methodus adhuc sit inuenta, cuius ope trium saltem corporum se mutuo attrahentium motus assignari queat; nisi forte vna vis caeteras plurimum superet.

2. Ve-

2. Verum etiam hic casus, in quo solo Geometrae operam suam non omnino frustra consumserunt, neutiquam pro confecto haberi potest, cum ipsa methodus appropinquandi, qua Geometrae vti solent, plurimis difficultatibus adhuc sit inuoluta, atque infinita minorum perturbationum multitudo negligatur, quo fit vt haec ipsa approximatio negotium minime conficiat, sed ad eam perficiendam plurima adhuc adminicula desiderentur. Quare etsi motus Lunae ex hac Theoria satis accurate est definitus, id tamen potius singularibus circumstantiis, quae in Luna locum inueniunt, est tribuendum, quam cuipiam perfectioni, ad quam Theoria euecta censeri queat; si enim Luna bis vel ter longius a terra abesset, vel eius orbita magis esset excentrica, omnes labores adhuc exantlati omni fructu caruissent, ac ne nunc quidem eius motum obiter saltem ad certam quandam regulam reuocare liceret.

3. Plurimum igitur is in Theoria Astronomiae praestitisse esset censendus, qui in hypothesi ficta, qua Luna multo longius a terra abesset, eius motum assignare valuerit, cum inde maxima adiumenta in hanc scientiam certo essent redundatura. Si quidem Luna centies longius a terra esset remota, nullum est dubium, quin leges motus planetae principalis esset secutura, neque amplius, tanquam satelles terrae, spectari posset. Sin autem decies tantum magis distaret, eius motus ita foret comparatus, vt in dubio relinqueretur, vtrum planetis primariis, an secundariis, esset accensenda. Tantopere certe ab omnibus motibus in coelo obseruatis

discreparet, vt vix intelligi possit, quemadmodum saltem ideam motus medii constitui conueniat. Innumerabiles forsitan obseruationes legem quandam aperuissent, ex qua in posterum eius loca quodammodo praedicere licuisset; nequaquam autem patet, quomodo Theoria ad huiusmodi motum explicandum accommodari potuisset. Imbecillitati nostrae sapientissimus creator consuluisse videtur, quod nulla corpora in coelo ita collocauerit, vt eorum motus, neque ad legem planetarum principalium, neque satellitum, referri posset.

4. Huiusmodi inuestigationem, quae vires ingenii humani tantum non transcendere videtur, certe non subito suscipi conueniet, sed potius conatus nostros pedetentim eo dirigi oportebit. Generale ergo problema trium corporum se mutuo attrahentium ita commodissime restringetur, vt vnius massa prae binis reliquis quasi euanescat, quo pacto id commodi assequemur, vt duo corpora, maiora scilicet, secundum leges *Keplerianas* moueantur, omnisque perturbatio in motu tertii consumatur, cuius situs et motus si ab initio ita fuerit comparatus, vt ad ambo maiorum aequa vi quasi attrahatur, habebimus eiusmodi casum, cuius inuestigatio nouam plane methodum postulat. Plurimum abest, vt hoc problema aggredi ausim, vt potius, frustra in eo euoluendo desudasse, fateri cogar; verum tamen casum obseruaui omnino singularem, ac simplicitate memorabilem, quo Lunae eiusmodi motus imprimi potuisset, vt perpetuo Soli, vel coniuncta, vel opposita, appaitura fuisset, cuius casus consideratio, cum forte vsu in

hoc

hoc difficillimo negotio non destituatur, haud displicitura videtur.

5. Motum igitur tam Solis, quam Lunae, ex terra visum in plano ecliptico fieri assumens, terram quiescentem in T, et post aliquod tempus elapsum Solem in S, Lunam vero in L, versari pono, et ducta recta fixa TA, ad principium arietis directa, statuo, angulos $ATS = \theta$, $ATL = \Phi$, et $STL = \Phi - \theta = \eta$, tum vero distantias $TS = u$, $TL = v$ et $LS = \sqrt{(uu - 2uv \cos.\eta + vv)} = z$. Sit porro longitudo Solis media $= \zeta$, eiusque distantia media a terra $= a$, hisque positis pro motu Solis vtpote regulari habebimus: Tab. XX. Fig. 13.

$$\frac{2\,du\,d\theta + u\,dd\theta}{d\zeta^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{ddu - u\,d\theta^2}{d\zeta^2} + \frac{a^3}{uu} = 0$$

pro motu autem Lunae:

$$\frac{2\,dv\,d\Phi + v\,dd\Phi}{d\zeta^2} - \frac{a^3}{uu}\left(1 - \frac{u^3}{z^3}\right)\sin\eta = 0$$

$$\frac{ddv - v\,d\Phi^2}{d\zeta^2} + \frac{n.n\,c^3}{vv} + \frac{a^3 v}{z^3} + \frac{a^3}{uu}\left(1 - \frac{u^3}{z^3}\right)\cos.\eta = 0,$$

vbi c est distantia media, ad quam Luna, a sola vi terrae sollicitata, pari motu medio reuolueretur, existente $n:1$ ratione motus medii Lunae ad motum medium Solis. Caeterum circa differentialia secundi gradus hic est monendum, elementum $d\zeta$ constans esse sumtum.

6. Tota ergo difficultas in resolutione harum duarum aequationum consistit, vt scilicet inde ad quodvis tempus, seu longitudinem Solis mediam ζ, tam distantia v, quam angulus Φ, definiatur. Quod cum in genere fieri nequeat, Geometrae adhuc in eo laborauerunt, vt saltem pro casu, quo distantia v, prae u,

est vehementer parua, simulque n numerus mediocriter magnus, idoneas approximationes eruerent, in quo tamen negotio plurimum adhuc iure desideratur. Hic autem binas istas aequationes in genere specto, sine vllo respectu ad Lunam habito, et quosdam casus sum euoluturus, quibus iis absolute satisfieri queat. Eiusmodi scilicet motus in coelo locum habere posse ostendam, quos perfecte cognoscere in nostra sit potestate, etiamsi eorum ratio maxime a motu regulari abhorreat.

7. Primum igitur obseruo, has duas aequationes absolutam resolutionem admittere casu $\eta = 0$, seu $\phi = \theta$, ita vt tum Luna perpetuo in coniunctione cum Sole esset apparitura. Cum enim sit $\sin.\eta = 0$, et $\cos.\eta = 1$, erit $z = u - v$, nostrae aequationes has induent formas:

$$\frac{2dv\,d\theta + v\,dd\theta}{d\zeta^2} = 0, \text{ et } \frac{ddv - v\,d\theta^2}{d\zeta^2} + \frac{nnc^3}{vv} + \frac{a^3 v}{(u-v)^3} + \frac{a^3}{uu}\cdot\frac{-3uuv + 3uv^2 - v^3}{(u-v)^3} = 0$$

seu $\frac{ddv - v\,d\theta^2}{d\zeta^2} + \frac{nnc^3}{vv} - \frac{a^3 v(3uu - 3uv + vv)}{uu(u-v)^3} = 0$

quae cum formulis, pro motu Solis datis, comparatae statim dant $v = \alpha u$, quippe quo pacto prioribus aequationibus satisfit. Hinc altera aequatio pro Luna erit

$$\frac{\alpha(ddu - u\,d\theta^2)}{d\zeta^2} + \frac{nnc^3}{\alpha\alpha uu} - \frac{\alpha a^3(2 - 3\alpha + \alpha\alpha)}{(1-\alpha)^3 uu} = 0.$$

Quare cum altera aequatio pro Sole sit

$$\frac{ddu - u\,d\theta^2}{d^2} + \frac{a^3}{uu} = 0$$

necesse est sit: $\alpha a^3 = \frac{nnc^3}{\alpha\alpha} - \frac{\alpha a^3(2 - 3\alpha + \alpha\alpha)}{(1-\alpha)^3}$

seu $\frac{nnc^3}{\alpha\alpha a^3} = \frac{3\alpha - 3\alpha\alpha + \alpha^3}{(1-\alpha)^2}$

vbi

vbi cum sit $\frac{nnc^3}{a^3}$ quantitas constans, ponatur breuitatis causa: $\frac{nnc^3}{a^3}=m$, eritque $m(1-\alpha)^2=\alpha\alpha(3\alpha-3\alpha^2+\alpha^3)$ seu $m(1-\alpha)^2=\alpha\alpha-\alpha\alpha(1-\alpha)^3$. Posito ergo $1-\alpha=x$, fit $mxx=(1-x^3)(1-x)^2$, seu

$$1-2x+xx-mxx-x^3+2x^4-x^5=0.$$

8. Pendet ergo determinatio numeri α vel x ab aequatione quinti gradus, pro cuius resolutione notari oportet, esse m fractionem quam minimam; quare cum sit

$$m(1-\alpha)^2=3\alpha^3-3\alpha^4+\alpha^5$$

euidens est quoque, α minimum esse habiturum valorem, et quam proxime fore $\alpha=\sqrt[3]{\frac{m}{3}}=\frac{c}{a}\sqrt[3]{\frac{nn}{3}}$, accuratius autem $\alpha=\sqrt[3]{\frac{m}{3}}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{mm}{9}}-\frac{1}{27}m+\frac{8}{81}m\sqrt[3]{\frac{m}{3}}$. Primus autem terminus sufficit, sicque est $v=\frac{cu}{a}\sqrt[3]{\frac{nn}{3}}$ vnde cum sit proxime $u=a$, et $nn=175$, erit circiter $v=4c$; seu si Luna fere quater longius a nobis esset remota, eiusmodi motum habere posset, vt Soli perpetuo iuncta appareret. Talis Luna aequo iure tanquam Satelles terrae ac planeta primarius spectari posset, et vterque motus maxime foret regularis, hoc tantum a regulis *Keplerianis* recedens, quod Soli propior, quam terra, pari tamen tempore reuoluatur, ob vim scilicet terrae vis Solis tantum imminuitur, vt cum maiori tempore periodico consistere possit. Hinc distantiam a terra quasi quadruplo maiorem, quam Luna reuera inde distat, tanquam limitem spectare licet, vt corpora magis remota pro planetis primariis, propiora vero pro satellitibus terrae sint habenda. Similes limites circa reliquos planetas constitui poterunt.

9. Quemadmodum casus euolutus in perpetua coniunctione cum Sole constat, ita etiam perpetua oppositio similem casum suppeditat. Pro quo ponamus $\eta = 180^\circ$, vt sit $\sin.\eta = 0$, $\cos.\eta = -1$ et $\Phi = 180^\circ + \theta$, ideoque $d\Phi = d\theta$, atque $z = u + v$. Aequationes ergo pro motu Lunae sequentes induent formas:

$$\frac{2\,dv\,d\theta + v\,dd\theta}{d\zeta^2} = 0, \text{ et } \frac{ddv - v\,d\theta^2}{d\zeta^2} + \frac{nnc^3}{v^2} + \frac{a^3 v}{(u+v)^3}$$
$$- \frac{a^3}{uu}\left(1 - \frac{u^3}{(u+v)^3}\right) = 0$$

quae posterior reducitur ad hanc:

$$\frac{ddv - v\,d\theta^2}{d\zeta^2} + \frac{nnc^3}{vv} - \frac{a^3}{uu} + \frac{a^3}{(u+v)^2} = 0.$$

Prior cum motu Solis collata praebet statim $v = \alpha u$, vnde posterior fit

$$\frac{\alpha(ddu - u\,d\theta^2)}{d\zeta^2} + \frac{nnc^3}{\alpha\alpha uu} - \frac{a^3}{uu} + \frac{a^3}{(1+\alpha)^2 uu} = 0.$$

At ex motu Solis est $\frac{ddu - u\,d\theta^2}{d\zeta^2} = -\frac{a^3}{uu}$, ex quo fit $-\alpha a^3 + \frac{nnc^3}{\alpha\alpha} - a^3 + \frac{a^3}{(1+\alpha)^2} = 0$, seu

$$\frac{nnc^3}{a^3} - \alpha\alpha(1+\alpha) + \frac{\alpha\alpha}{(1+\alpha)^2} = 0$$

et posito breuitatis gratia $\frac{nnc^3}{a^3} = m$, erit

$$m(1+\alpha)^2 = \alpha\alpha(1+\alpha)^3 - \alpha\alpha$$

quae ex superiori nascitur, sumendis m et α negatiuis. Quamobrem hinc colligitur

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{m}{3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{mm}{9}} - \frac{1}{27}m - \frac{1}{81}m\sqrt[3]{\frac{m}{3}}$$

satis

satis autem exacte est $\alpha = \sqrt[3]{\frac{m}{3}}$ et $v = \frac{cu}{6}\sqrt[3]{\frac{nn}{18}}$ vt ante.

10. Casus hi eo magis sunt notatu digni, quod sine vlla approximatione absolute expediri possunt, etiamsi ambae vires Solis et terrae ad motum producendum concurrant, id quod nullo alio casu praestare licet. Tali autem motu simplici corpus re vera moueretur, si ipsi in distantia assignata, dum Soli, vel coniunctum, vel oppositum, ex terra appareret, eiusmodi motus imprimeretur, vt cum terra pari passu in plano eclipticae ingredi inciperet. Sin autem motus impressus tantillum ab hac lege discrepet, non quidem perpetuo Soli, vel coniunctum, vel oppositum, maneret, sed exiguas excursiones hinc inde quasi oscillando conficeret. Quo casu cum motus minime ab inuenta ratione esset discrepaturus, more solito, approximando etiam, eiusmodi motum definire licebit; in quo cum quasi initium motuum irregularium, quos nullo etiamnum modo ad calculum reuocare licet, conspiciatur, vsu certe non carebit, si in naturam istiusmodi motuum accuratius inquisiuero.

11. Cum autem haec inuestigatio haud leuibus difficultatibus implicetur, statim ab initio aequationes nostras tractatu faciliores reddi conueniet, quod, cum distantia v prae u vehementer sit exigua, commode per approximationem fieri potest. Scilicet ob $z = \sqrt{(uu - 2uv \cos.\eta + vv)}$ eliciemus proxime $\frac{1}{z^3} = \frac{1}{u^3} + \frac{3v\cos.\eta}{u^4} - \frac{3vv}{2u^5} + \frac{15vv\cos.\eta^2}{2u^5}$, ideoque $1 - \frac{u^3}{z^3} = -\frac{3v}{u}\cos\eta + \frac{3vv}{2uu}(1 - 5\cos.\eta^2)$, ex quo aequationes no-

nostrae, pro motu Lunae inuentae, in sequentes formas transibunt:

$$\text{I. } \frac{2dvd\Phi + vdd\Phi}{d\zeta^2} + \frac{3a^3v}{u^3}\sin.\eta\cos.\eta - \frac{3a^3vv}{2u^4}\sin.\eta(1-5\cos.\eta^2) = 0$$

$$\text{II. } \frac{ddv - vd\Phi^2}{d\zeta^2} + \frac{nnc^3}{vv} + \frac{a^3v}{u^3}(1-3\cos.\eta^2 + \frac{3a^3vv}{3u^4}(3\cos.\eta - 5\cos.\eta^3) = 0.$$

Deinde etiam calculus non parum subleuabitur, si motum Solis, vt vniformem, spectemus, vt sit $u = a$, et $\theta = \zeta$, ideoque $\eta = \Phi - \zeta$, seu $\Phi = \eta + \zeta$, vnde sequentes emergunt aequationes:

$$\text{I. } \frac{2dvd\eta + vdd\eta}{d\zeta^2} + \frac{2dv}{d\zeta} + 3v\sin.\eta\cos.\eta - \frac{3vv}{2a}\sin.\eta(1-5\cos.\eta^2) = 0$$

$$\text{II. } \frac{ddv}{d\zeta^2} - v(1+\frac{d\eta}{d\zeta})^2 + v(1\,3\cos.\eta^2) + \frac{nnc^3}{vv} + \frac{3vv}{2a}\cos.\eta(3-5\cos.\eta^2) = 0,$$

vbi etiam postrema membra facile omitti possunt, quia fractio $\frac{v}{a}$ est vehementer parua, etiamsi distantia Lunae quadruplo maior statuatur.

12. Vt iam hinc casum memoratum, quo Luna circa Solem motu quasi oscillatiorio nutare videbitur, eliciamus, angulum η quam minimum concipiamus, vt sit $\sin.\eta = \eta$, et $\cos.\eta = 1 - \frac{1}{2}\eta\eta$, et habebimus:

$$\text{I. } \frac{2dvd\eta + vdd\eta}{d\zeta^2} + \frac{2dv}{d\zeta} + 3v\eta\eta = 0$$

$$\text{II. } \frac{ddv}{d\zeta^2} - v(1 + \frac{d\eta}{d\zeta})^2 + \frac{nnc^3}{vv} - 2v + 3v\eta\eta = 0.$$

Deinde quia distantia v parum immutatur, ponamus $v = b(1+x)$, vt x sit quantitas minima, tum vero sit breuitatis gratia $\frac{nnc^3}{b^3} = m$, eritque:

$$\text{I. } \frac{2dxd\eta + xdd\eta}{d\zeta^2} + \frac{dd\eta}{d\zeta^2} + \frac{2dx}{d\zeta} + 3\eta + 3x\eta = 0$$

$$\text{II. } \frac{ddx}{d\zeta^2} - 3 - 3x - \frac{2d\eta}{d\zeta} - \frac{2xd\eta}{d\zeta} - \frac{d\eta^2}{d\zeta^2} - \frac{xd\eta^2}{d\zeta^2} + 3\eta\eta + 3x\eta\eta + m - 2mx + 3mxx = 0,$$

vnde

vnde pro quouis angulo ζ valores quantitatum x et η definiri oportet.

13. Cum angulus η sit minimus, alternatimque positiuus euadat et negatiuus; quoniam Luna vltro citroque a Sole digredi conspicietur: facile colligere licet, eum per quempiam angulum ω ad ζ datam rationem tenente ita definiri, vt sit

$$\eta = A \sin.\omega + B \sin.2\omega + C \sin.3\omega \text{ etc.}$$

atque $d\omega = \alpha d\zeta$. Quo posito erit

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \alpha A \cos.\omega + 2\alpha B \cos.2\omega + 3\alpha C \cos.3\omega \text{ et}$$

$$\frac{dd\eta}{d\zeta^2} = -\alpha^2 A \sin.\omega - 4\alpha^2 B \sin.2\omega - 9\alpha\alpha C \sin.3\omega.$$

Quare cum aequatio prima in hanc formam transfundatur

$$\frac{2dx}{1+x} + \frac{dd\eta + 3\eta d\zeta^2}{d\eta + d\zeta} = 0$$

fiet $2l(1+x) + l(1 + \frac{d\eta}{d\zeta}) + 3\int \frac{\eta d\zeta}{1 + \frac{d\eta}{d\zeta}} = \text{Const.}$

seu ob x et $\frac{d\eta}{d\zeta}$ minima:

$$\begin{aligned} &2x - xx + \tfrac{2}{3}x^3 + \frac{d\eta}{d\zeta} - \frac{d\eta^2}{2d\zeta^2} + \frac{d\eta^3}{3d\zeta^3} + 3\int \eta d\zeta \\ &\quad - \tfrac{3}{2}\eta\eta + 3\int \frac{\eta d\eta^2}{d\zeta} - 3\int \frac{\eta d\eta^3}{d\zeta^2} = \text{Const.} \end{aligned}$$

Nunc vero ob $d\zeta = \frac{d\omega}{\alpha}$ est

$$\int \eta d\zeta = -\frac{A}{\alpha}\cos.\omega - \frac{B}{2\alpha}\cos.2\omega - \frac{C}{3\alpha}\cos.3\omega$$

$$\begin{aligned} \eta\eta = {} & \tfrac{1}{2}AA + AB\cos.\omega - \tfrac{1}{2}AA\cos.2\omega - AB\cos.3\omega \\ & + \tfrac{1}{2}BB \qquad\qquad + AC \end{aligned}$$

$$\frac{d\eta^2}{d\zeta^2} = \tfrac{1}{2}\alpha\alpha AA + 2\alpha\alpha AB\,\text{cof.}\,\omega + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha AA\,\text{cof.}\,2\omega + 2\alpha\alpha AB\,\text{cof.}\,3\omega$$
$$+ 2\alpha\alpha BB \qquad\qquad + 3\alpha\alpha AC$$

$$\frac{d\eta^3}{d\zeta^2} = + \alpha^3 AAB + \tfrac{3}{4}\alpha^3 A^3\,\text{cof.}\,\omega + \alpha^3 AAB\,\text{cof.}\,2\omega$$
$$+ 4\alpha^3 ABB$$

vbi ob literas A, B, C, minimas altiores poteſtates merito negligimus.

14. Cum ergo ſit

$$\frac{\eta\, d\eta^2}{d\zeta^2} = \tfrac{1}{4}\alpha\alpha A^3\,\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{3}{2}\alpha\alpha AAB\,\text{ſin.}\,2\omega + \tfrac{1}{4}\alpha\alpha A^3\,\text{ſin.}\,3\omega$$
$$+ 3\alpha\alpha ABB + 2\alpha\alpha BBB \qquad + \tfrac{3}{8}\alpha\alpha A^2 C$$
$$- \tfrac{3}{8}\alpha\alpha A^2 C \qquad\qquad + \alpha\alpha ABB$$

ob $d\zeta = \frac{d\omega}{\alpha}$ habebimus integrando:

$$\int \frac{\eta\, d\eta^2}{d\zeta} = - \tfrac{1}{4}\alpha A^3\,\text{cof.}\,\omega - \tfrac{3}{4}\alpha AAB\,\text{cof.}\,2\omega - \tfrac{1}{12}\alpha A^3\,\text{cof.}\,3\omega$$
$$- 3\alpha ABB \quad - \alpha B^3 \qquad - \tfrac{1}{8}\alpha A^2 C$$
$$+ \tfrac{3}{8}\alpha A^2 C \qquad\qquad - \tfrac{1}{3}\alpha ABB$$

vbi cum ſeries A, B, C maxime decreſcat, plura membra omitti poſſunt. Deinde cum ſit

$$\frac{\eta\, d\eta^3}{d\zeta^3} = \tfrac{7}{8}\alpha^3 A^3 B\,\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{3}{8}\alpha^3 A^4\,\text{ſin.}\,2\omega + \tfrac{7}{8}\alpha^3 A^3 B\,\text{ſin.}\,3\omega$$

erit integrando

$$\int \frac{\eta\, d\eta^3}{d\zeta^2} = - \tfrac{7}{8}\alpha^2 A^3 B\,\text{cof.}\,\omega - \tfrac{3}{16}\alpha^2 A^4\,\text{cof.}\,2\omega - \tfrac{7}{24}\alpha^2 A^3 B\,\text{cof.}\,3\omega$$

atque ex his tandem conficitur haec aequatio omiſſis partibus conſtantibus:

$$\begin{array}{llll}
2x - xx + \tfrac{2}{3}x^3 & +\alpha A\cos.\omega & +2\alpha B\cos.2\omega & +3\alpha C\cos.3\omega = 0 \\
 & -\alpha\alpha AB & -\tfrac{1}{4}\alpha\alpha AA & -\alpha\alpha AB \\
 & +\tfrac{1}{4}\alpha^3 A^3 & -\tfrac{3}{2}\alpha\alpha AC & -\tfrac{3C}{2\alpha} \\
 & -\tfrac{3-\alpha}{\alpha} & +\tfrac{1}{3}\alpha^3 AAB & +\tfrac{3}{2}AB \\
 & -\tfrac{3}{2}AB & -\tfrac{3B}{2\alpha} & -\tfrac{1}{4}\alpha A^3 \\
 & -\tfrac{3}{4}\alpha A^3 & +\tfrac{3}{4}AA & +\tfrac{1}{4}\alpha^3 A^3 \\
 & & -\tfrac{3}{2}AC & \\
 & & -\tfrac{3}{2}\alpha AAB. &
\end{array}$$

15. Ad valorem ipsius x hinc definiendum ponamus breuitatis gratia

$$(\alpha - \tfrac{3}{\alpha})A - (\alpha\alpha + \tfrac{3}{2})AB + \tfrac{1}{4}\alpha(\alpha\alpha - 3)A^3 = \mathfrak{A}$$

$$\frac{4\alpha\alpha - 3}{2\alpha}B - \frac{(\alpha\alpha - 3)}{4}AA = \mathfrak{B}$$

$$\frac{3\alpha\alpha - 1}{\alpha}C - \frac{(2\alpha\alpha - 3)}{2}AB + \tfrac{1}{4}\alpha(\alpha\alpha - 1)A^3 = \mathfrak{C}$$

vt sit $2l(1+x) + \mathfrak{A}\cos.\omega + \mathfrak{B}\cos.2\omega + \mathfrak{C}\cos.3\omega = 0$

et $1 + x = e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{A}\cos.\omega - \frac{1}{2}\mathfrak{B}\cos.2\omega - \frac{1}{2}\mathfrak{C}\cos.3\omega}$

vnde concludimus fore

$$\begin{array}{llll}
x = & -\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\cos.\omega & -\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\cos.2\omega & -\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}\cos.3\omega \\
 & +\tfrac{1}{8}\mathfrak{A}\mathfrak{B} & +\tfrac{1}{16}\mathfrak{A}\mathfrak{A} & +\tfrac{1}{8}\mathfrak{A}\mathfrak{B} \\
 & +\tfrac{1}{64}\mathfrak{A}^3 & & -\tfrac{1}{192}\mathfrak{A}^3.
\end{array}$$

Verum ne in calculos nimis taediosos immergamur, rem aliquanto minus curate expediamus, neglectoque angulo triplo, vt sit $\eta = A\sin.\omega + B\sin.2\omega$, habebimus

$$x = -\frac{(\alpha\alpha - 3)}{2\alpha}A\cos.\omega - \frac{(4\alpha\alpha - 3)}{4\alpha}B\cos.2\omega + \frac{3(\alpha\alpha - 1)(\alpha\alpha - 3)}{16\alpha\alpha}AA$$

 vbi

vbi breuitatis gratia scribamus:

$$x = E \operatorname{cos} \omega + F \operatorname{cos} 2\omega, \text{ vt sit}$$

$$E = \frac{1-\alpha\alpha}{2\alpha}A \text{ et } F = \frac{1-4\alpha\alpha}{4\alpha}B + \frac{3(\alpha\alpha-1)(\alpha\alpha-3)}{16\alpha\alpha}AA.$$

16. Hi iam valores in aequatione secunda substituantur, atque reperiemus:

$$\begin{array}{llll}
\frac{ddx}{d\zeta^2} & = & -\alpha\alpha E \operatorname{cos}\omega & -4\alpha\alpha F \operatorname{cos} 2\omega \\
-3-3x & = -3 & -3E & -3F \\
-\frac{2d\eta}{d\zeta} & = -\alpha AE & -2\alpha A & -4\alpha B \\
 & & -2\alpha BE & -\alpha AE \\
-\frac{2xd\eta}{d\zeta} & = & -\alpha AF & \\
-\frac{d\eta^2}{d\zeta^2} & = -\frac{1}{2}\alpha\alpha AA + 2\alpha\alpha AB & & -\frac{1}{2}\alpha\alpha AA \\
+3\eta\eta & = +\frac{3}{2}AA & +3AB\operatorname{cos}\omega & -\frac{3}{2}AA\operatorname{cos}2\omega \\
+m & = +m & & \\
-2mx & = & -2mE & -2mF \\
+3mxx & = +\frac{3}{2}mEE + 3mEF & & +\frac{3}{2}mEE
\end{array}$$

vnde primo concludimus:

$$m(1+\tfrac{3}{2}EE) = 3 + \alpha AE + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha AA - \tfrac{3}{2}AA = 3$$

$$\text{ideoque } m = 3 - \tfrac{9}{2}EE$$

pro determinatione numeri m indeque distantia b: Manifestum autem est, esse proxime $m = 3$, ideoque $b = c\sqrt[3]{\frac{nn}{3}}$. Porro autem fit

$$-\alpha\alpha E - 9E - 2\alpha A - 2\alpha BE - \alpha AF + (2\alpha\alpha+3)AB + 9EF = 0.$$

vnde neglectis terminis minimis ob $\frac{E}{A} = \frac{1-\alpha\alpha}{2\alpha}$, erit $(\alpha\alpha+9)(3-\alpha\alpha)+4\alpha\alpha = 0$, seu

$$\alpha^4 + 2\alpha\alpha - 27 = 0, \text{ hincque } \alpha\alpha = \sqrt{28} - 1.$$

Tertia

Tertia denique aequatio dat

$$-(4\alpha\alpha+9)F-4\alpha B-\alpha AE-\tfrac{1}{2}\alpha\alpha AA-\tfrac{3}{2}AA+\tfrac{9}{8}EE=0$$

ideoque:

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{(4\alpha\alpha-3)(4\alpha\alpha+9)}{4\alpha}B & -\frac{3(\alpha\alpha-1)(\alpha\alpha-3)(4\alpha\alpha+9)}{16\alpha\alpha}AA\\ -4\alpha B & +\frac{(\alpha\alpha-3)}{2}AA\\ & -\frac{(\alpha\alpha+3)}{2}AA\\ & +\frac{9(\alpha\alpha-3)^2}{8\alpha\alpha}AA\end{array}\right\}=0$$

vnde colligitur:

$$B(16\alpha^4+8\alpha\alpha-27)=\tfrac{3}{2}AA\alpha(13-7\alpha\alpha+2\alpha^4)$$

seu ob $27=\alpha^4+2\alpha\alpha$

$$3B(5\alpha\alpha+2)=\frac{3AA}{2\alpha}(13-7\alpha\alpha+2\alpha^4)$$

ideoque $B=\frac{13-9\alpha\alpha+2\alpha^4}{2\alpha(5\alpha\alpha+2)}AA=\frac{67-13\alpha\alpha}{3\alpha(5\alpha\alpha+2)}AA$

$$F=\frac{291-94\alpha\alpha-23\alpha^4}{8\alpha\alpha(5\alpha\alpha+2)}AA=-\frac{165-24\alpha\alpha}{4\alpha\alpha(5\alpha\alpha+2)}AA.$$

17. Quantitas ergo A arbitrio nostro relinquitur, a qua digressiones a linea syzygiarum pendent, pro ea autem valde paruam fractionem assumi oportet, quae si fuerit tam exigua, vt eius quadratum nulluis sit momenti, primi termini sufficiunt. Pro distantia ergo $v=b(1+x)$ erit $b=c\sqrt[3]{\frac{nn}{8}}$, et angulus ω ita definitur, vt sit $\omega=\alpha\zeta+\beta$ existente $\alpha\alpha=\sqrt{28}-1$, hincque $\alpha\alpha=4,291502$ et $\alpha=2,071594$. Tum vero erit $\eta=A\sin.\omega$ et $v=b(1-\frac{(\alpha\alpha-3)}{2\alpha}A\cos.\omega)$ seu $v=b(1-0,311717\,A\cos.\omega)$.

Excursiones fiunt maximae, si angulus ω fit $90°. 270°.$ etc. ergo ab vna digressione maxima ad sequentem est $\alpha\zeta = 180°$ et $\zeta = 86°, 53\frac{1}{2}'$: at in digressionibus maximis est $v = b$. Verum etiam huiusmodi librationis, si maior existeret, determinatio insignibus laborat difficultatibus, vt, quo accuratius omnes variationes definire vellemus, eo minus certi de reliquis neglectis redderemur.

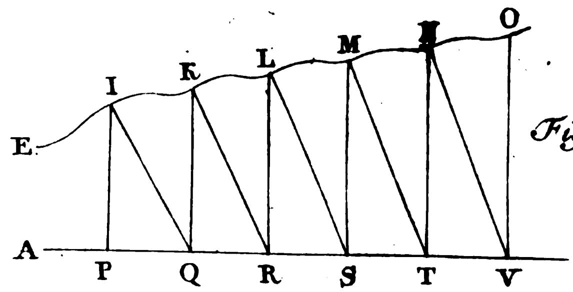


Fig. 2.

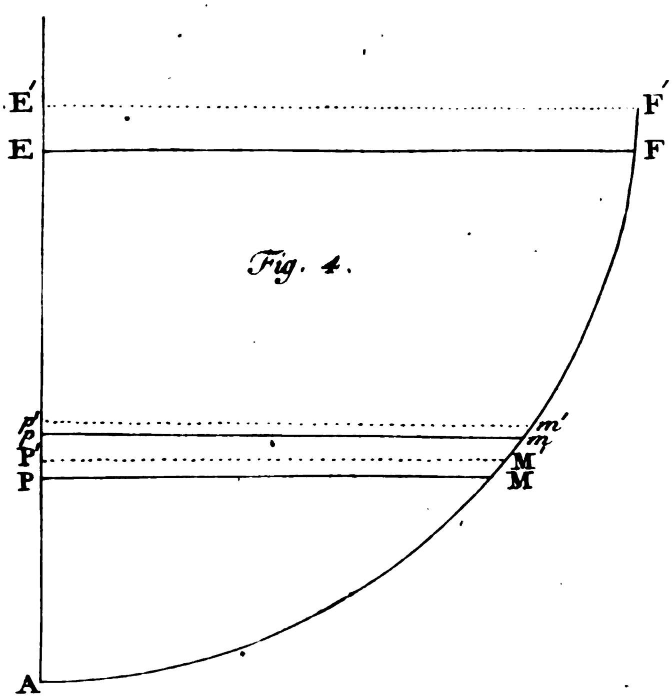


Fig. 4.

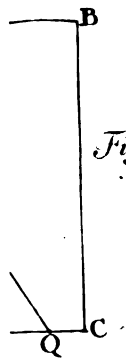


Fig: 1.

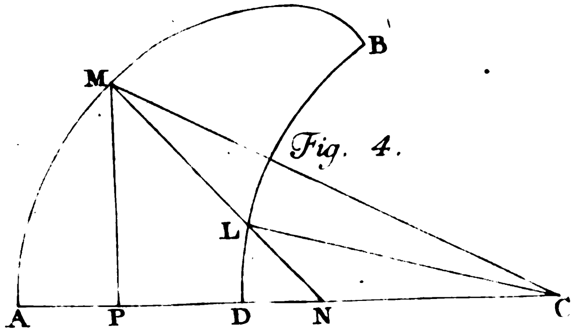
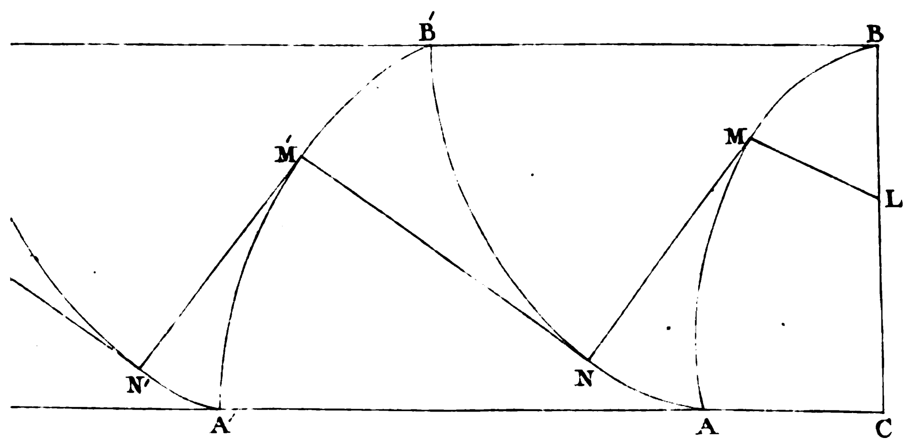


Fig. 4.



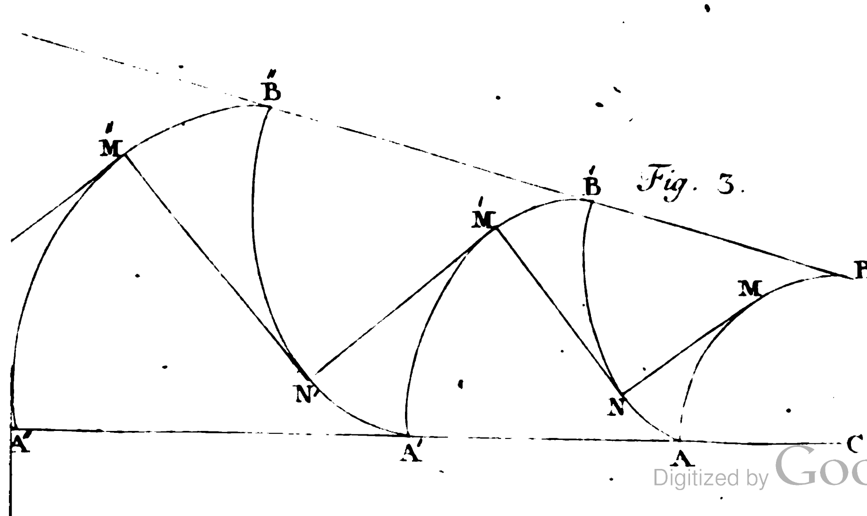


Fig. 3.

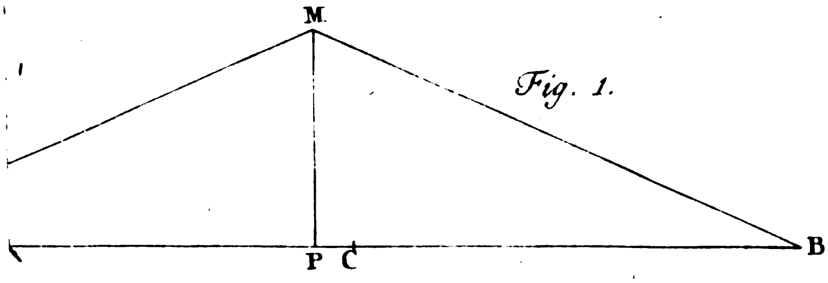
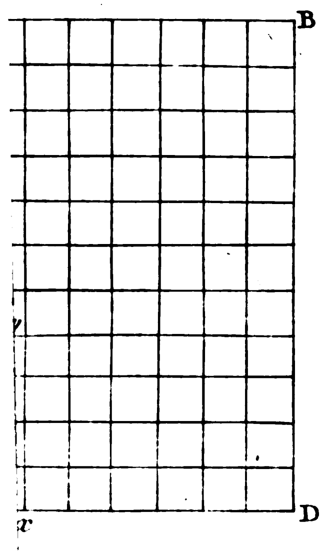


Fig. 1.

2.



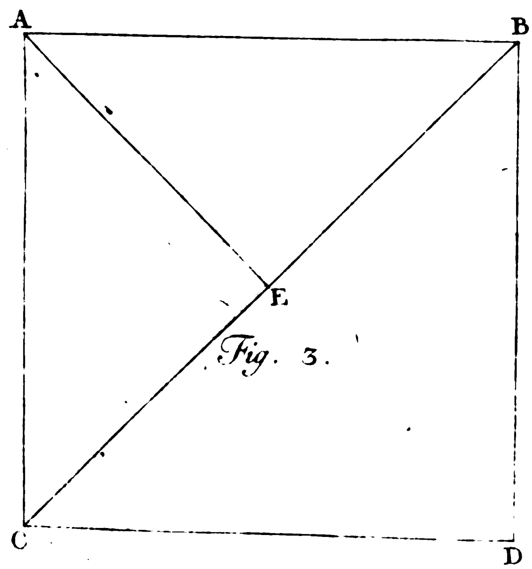


Fig. 3.

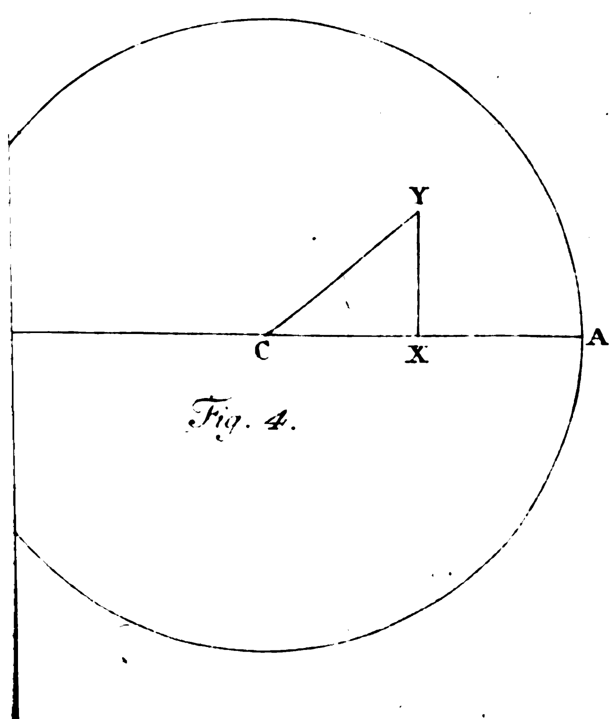
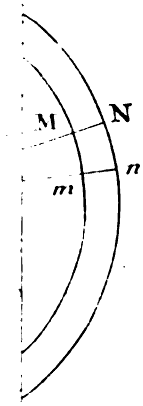
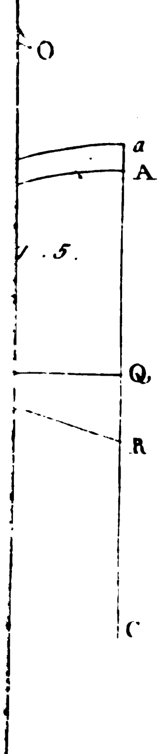


Fig. 4.





...g. 5.

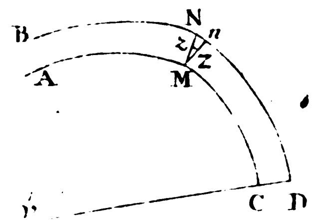


Fig. 2.

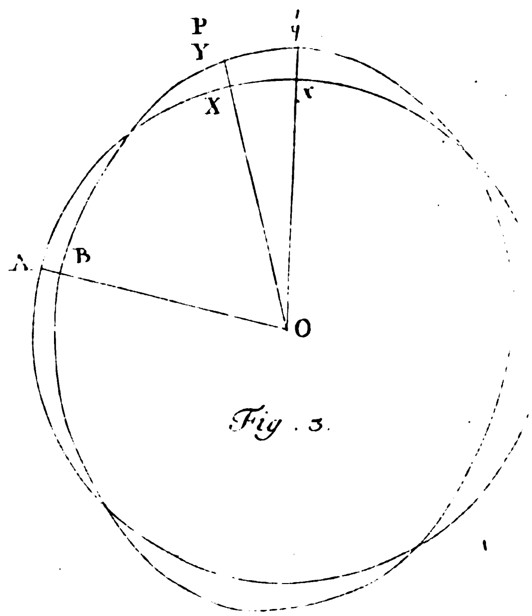


Fig. 3.

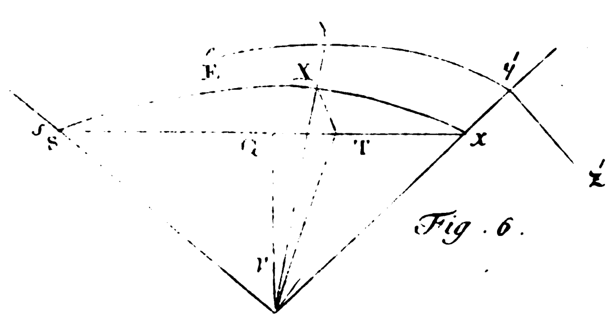
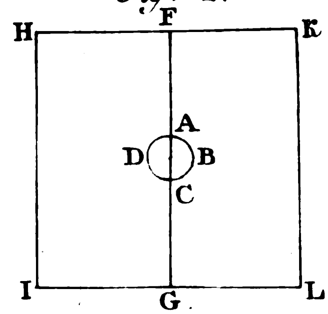
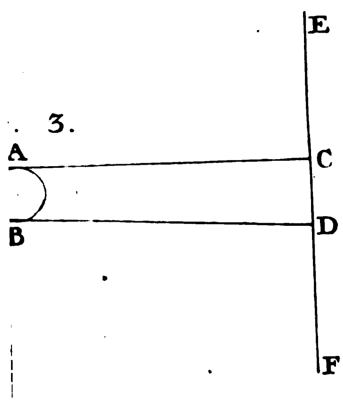


Fig. 6.

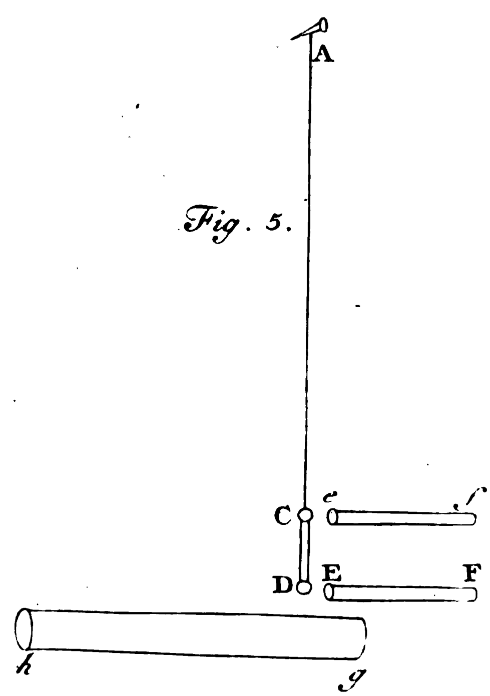
Fig. 2.

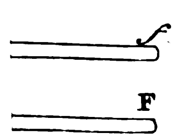




. 3.

Fig. 5.





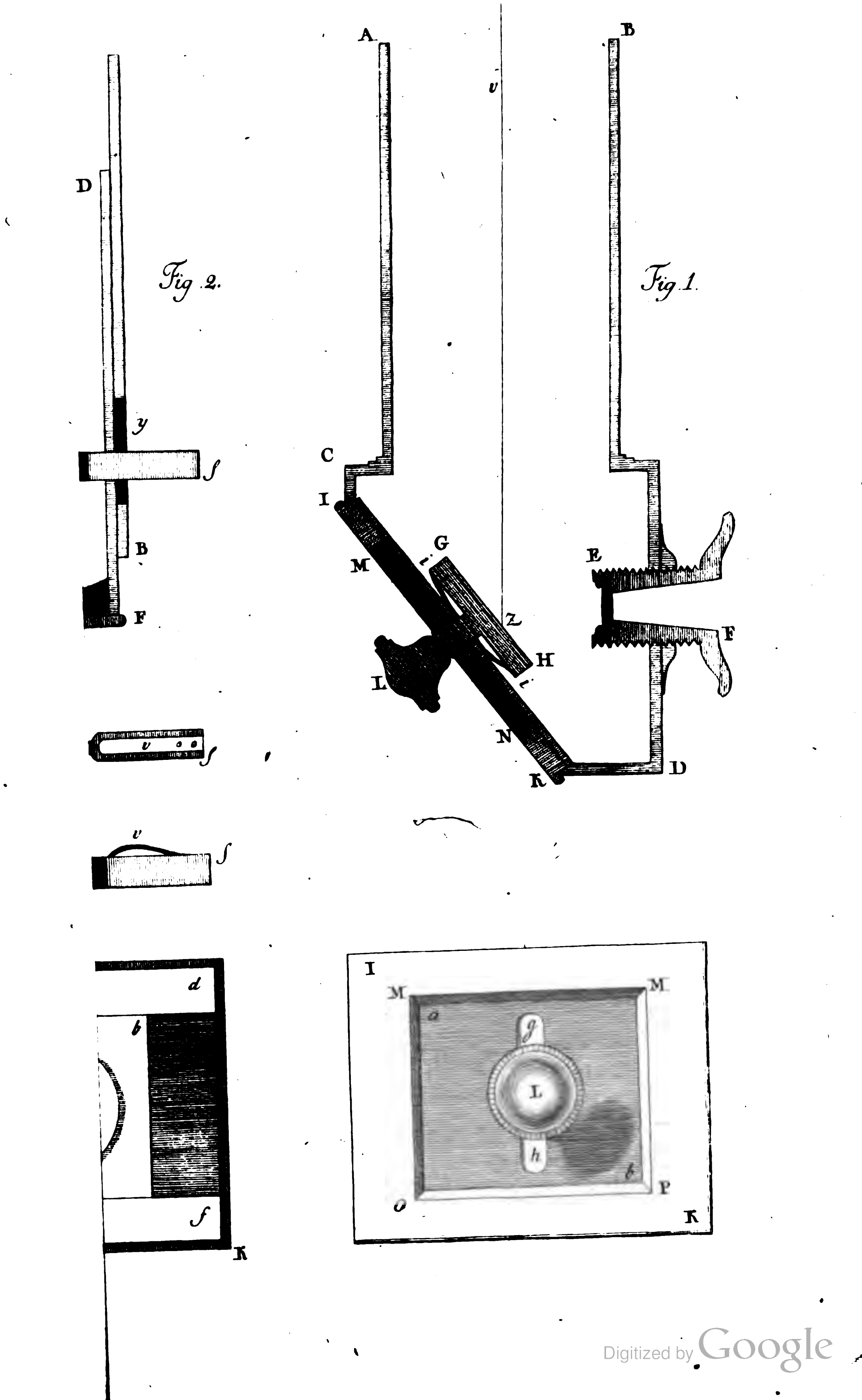


Fig. 2.
Fig. 1.
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
Z
v
y
f
o
P
g
h
d
b

Fig. 1.

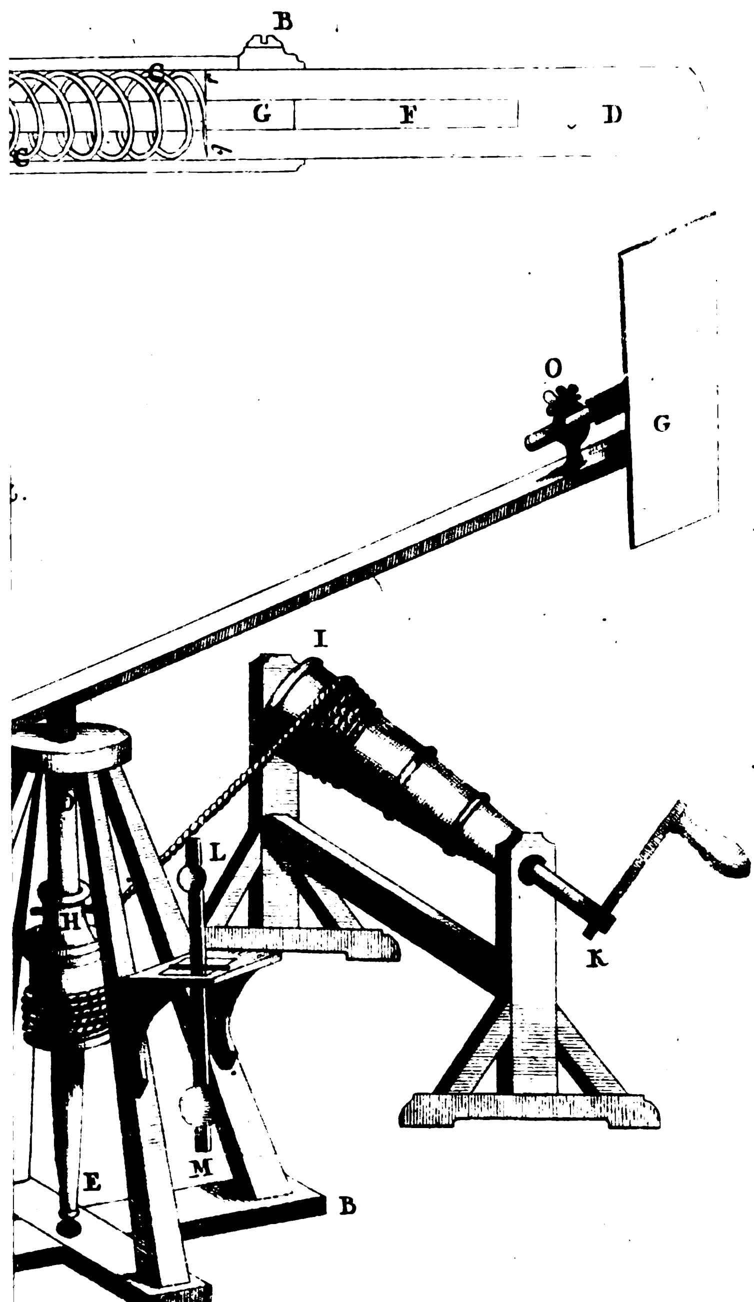
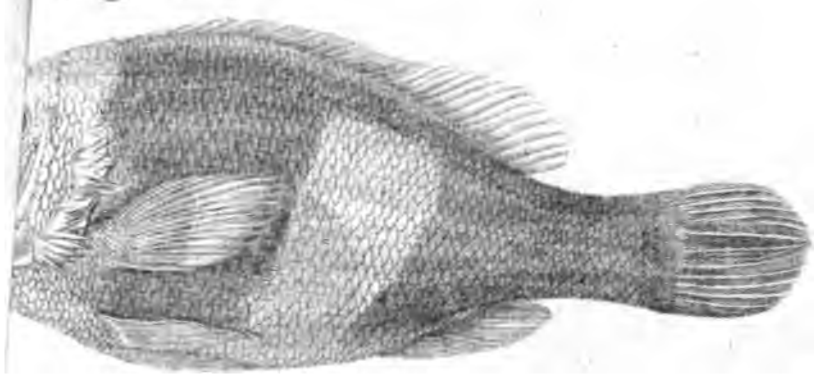
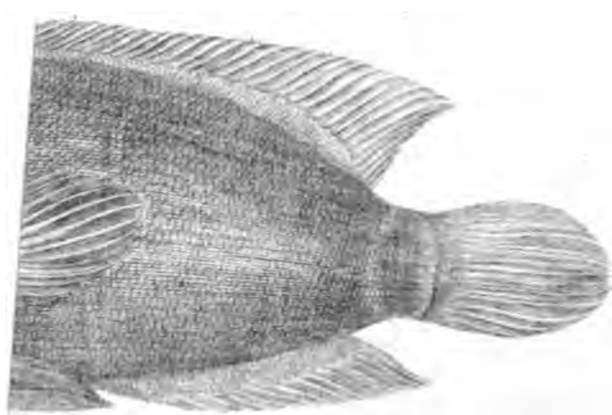


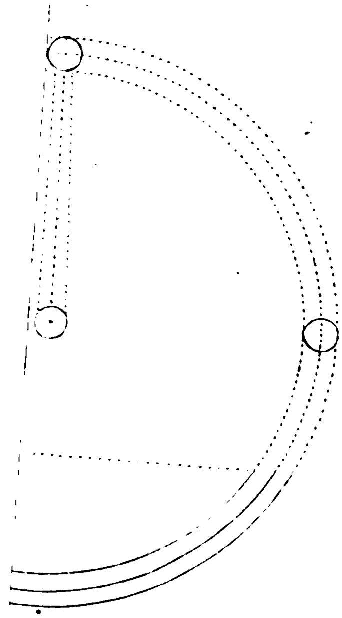
Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 4.







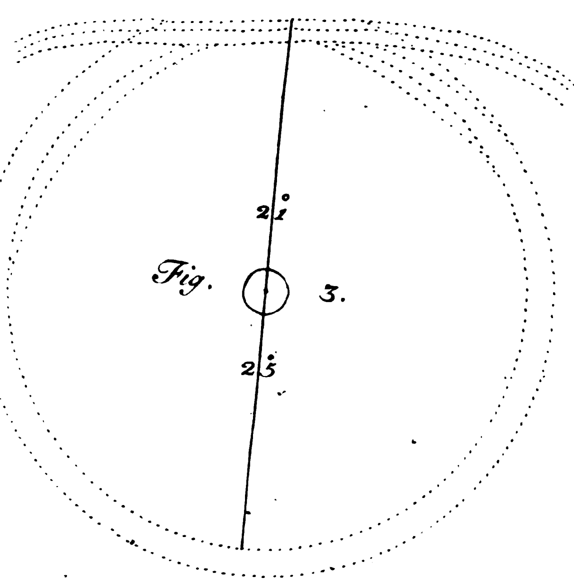
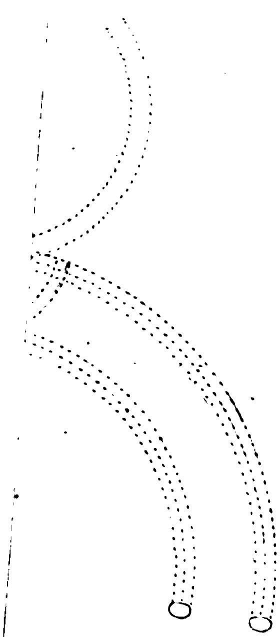


Fig. 3.



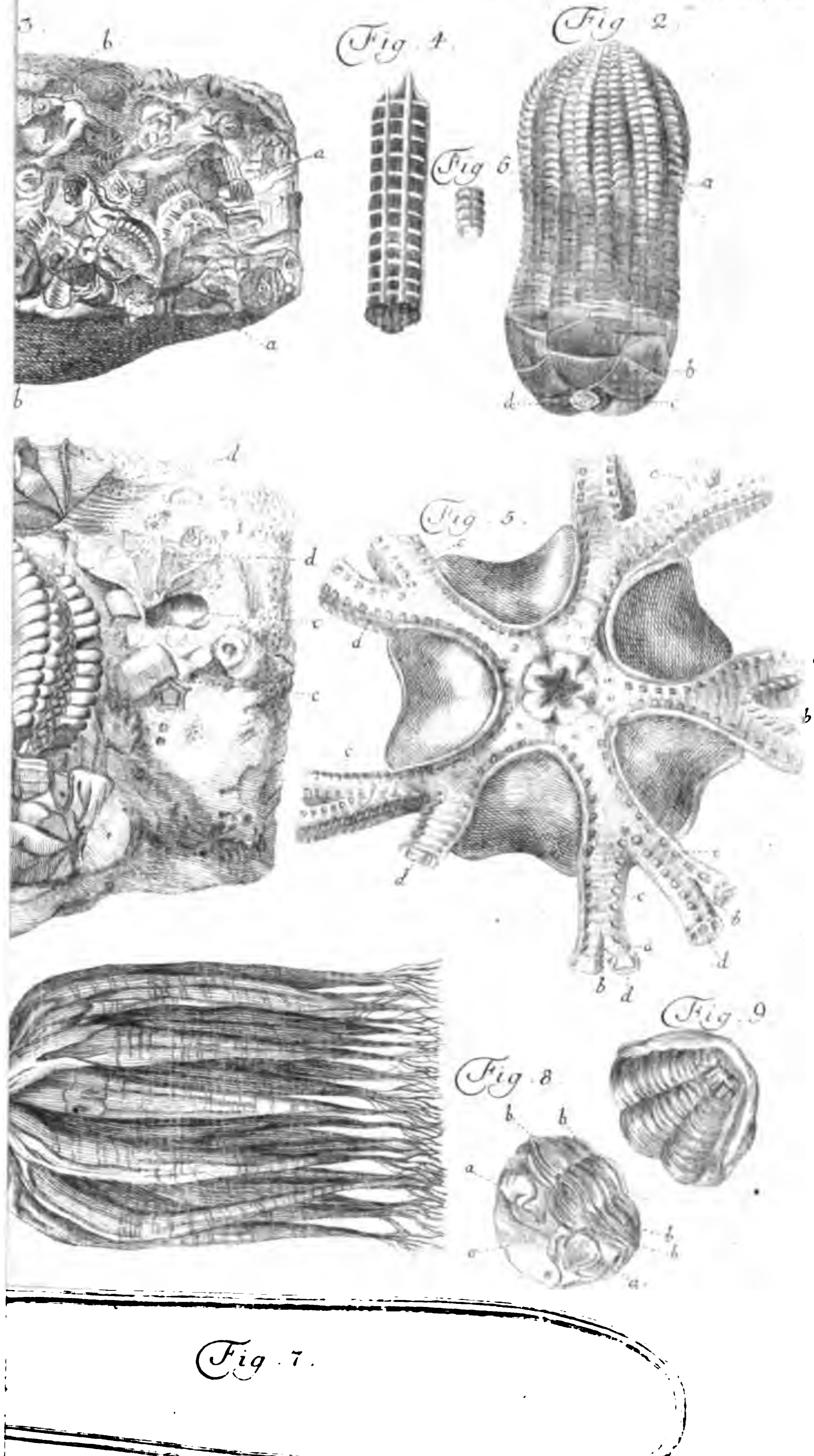


Fig. 4
Fig. 2
Fig. 6
Fig. 5
Fig. 9
Fig. 8
Fig. 7.

Fig. 2.

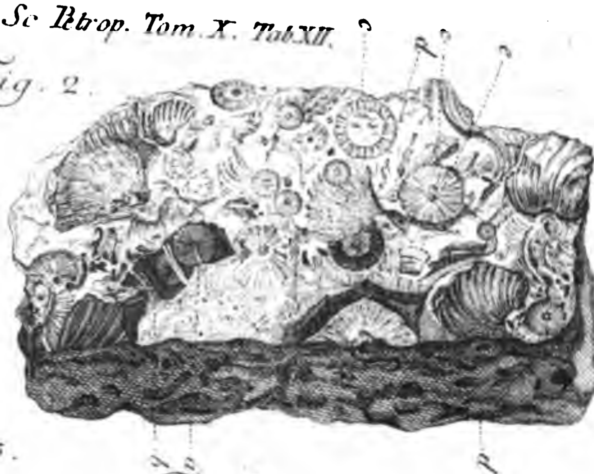
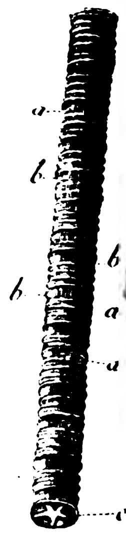


Fig. 5.

Fig. 4.



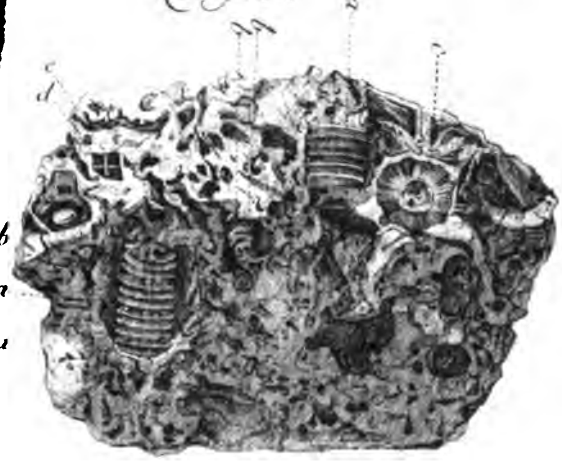


Fig. 7.

Fig. 9.

Fig. 10.

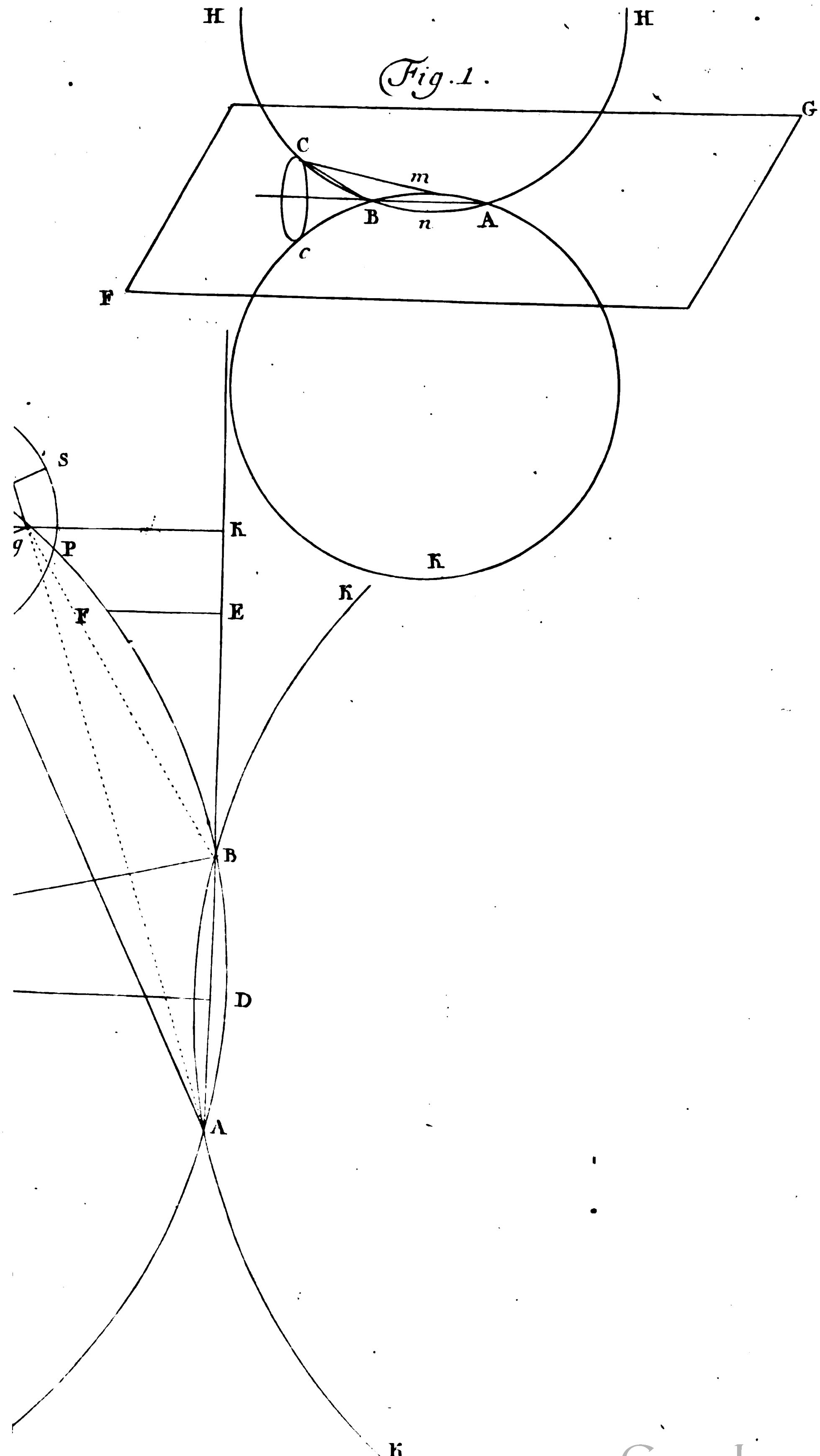
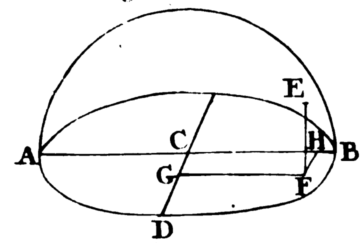
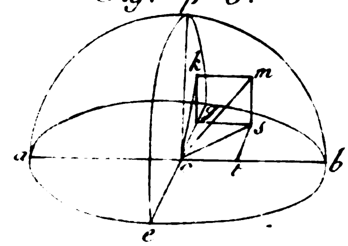

H
H
Fig. 1.
G
C
m
B
n
A
c
F
K
S
K
q
P
F
E
K
B
D
A
K

Fig. 4.



A

Fig. 6.



7.

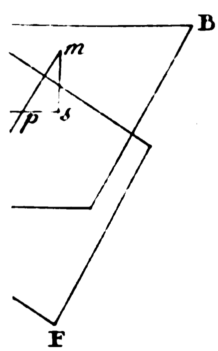
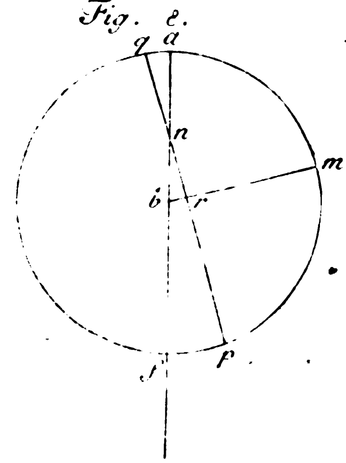


Fig. 8.



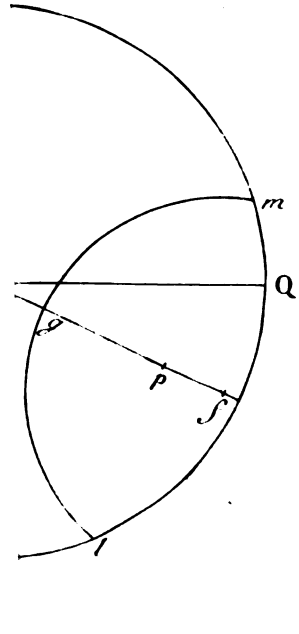
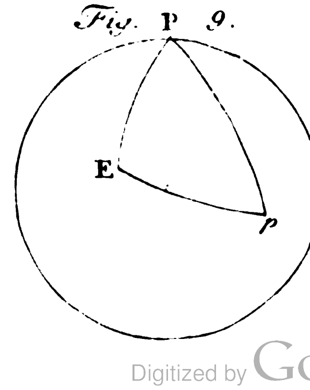


Fig. 9.



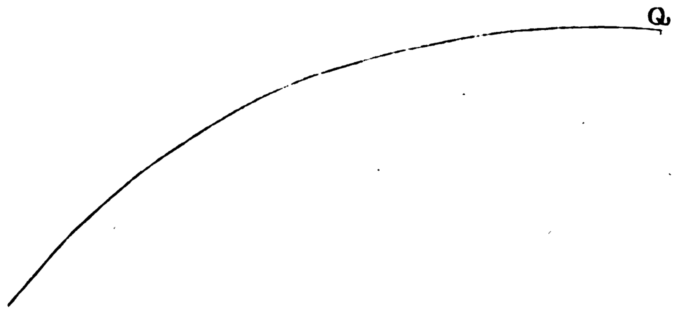
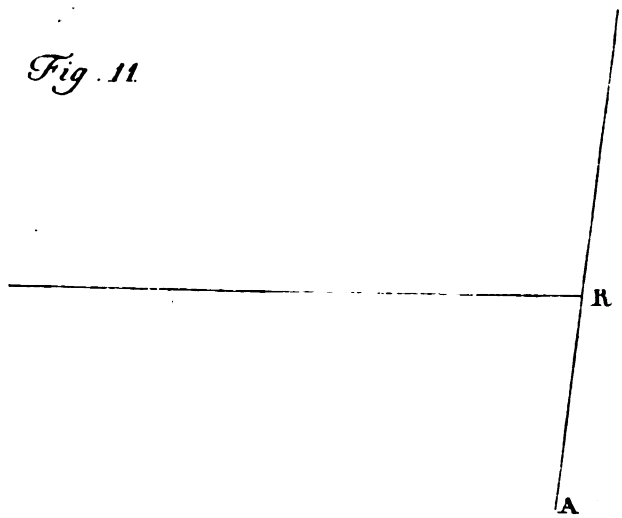


Fig. 11.



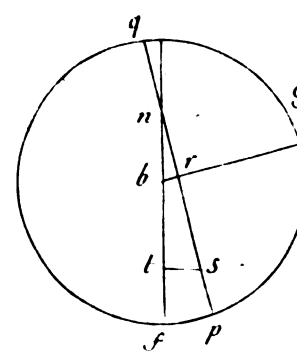


Fig. 13.

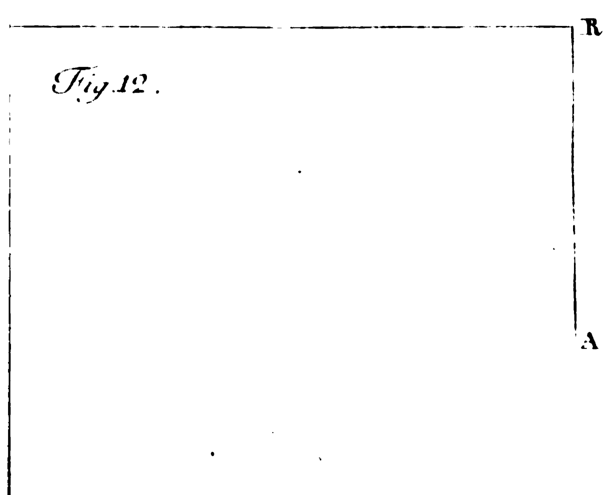
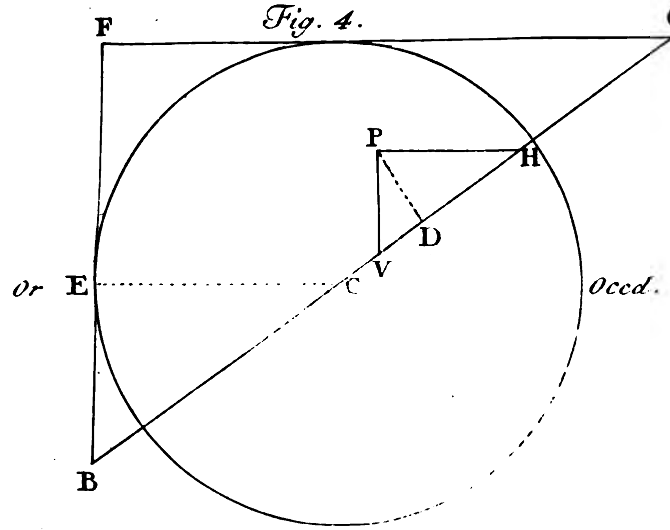


Fig. 12.

Fig. 4.



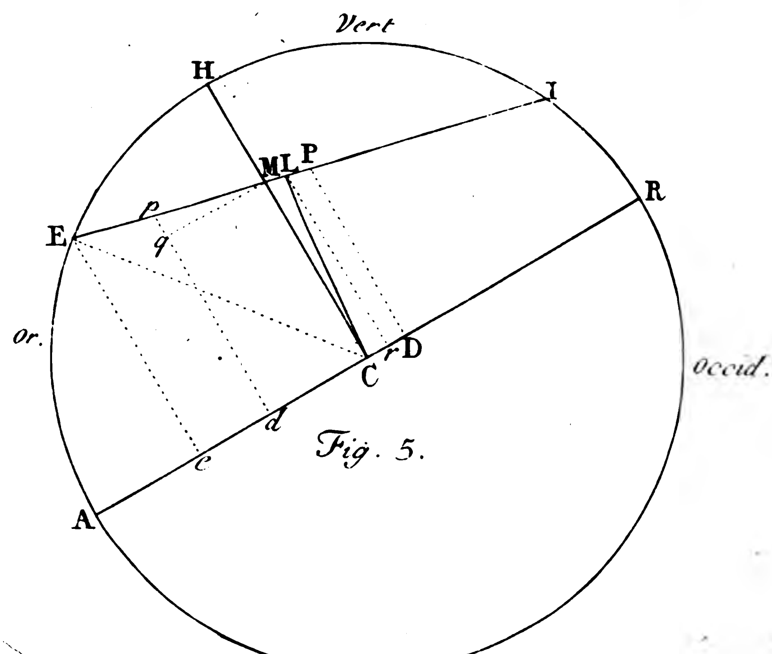
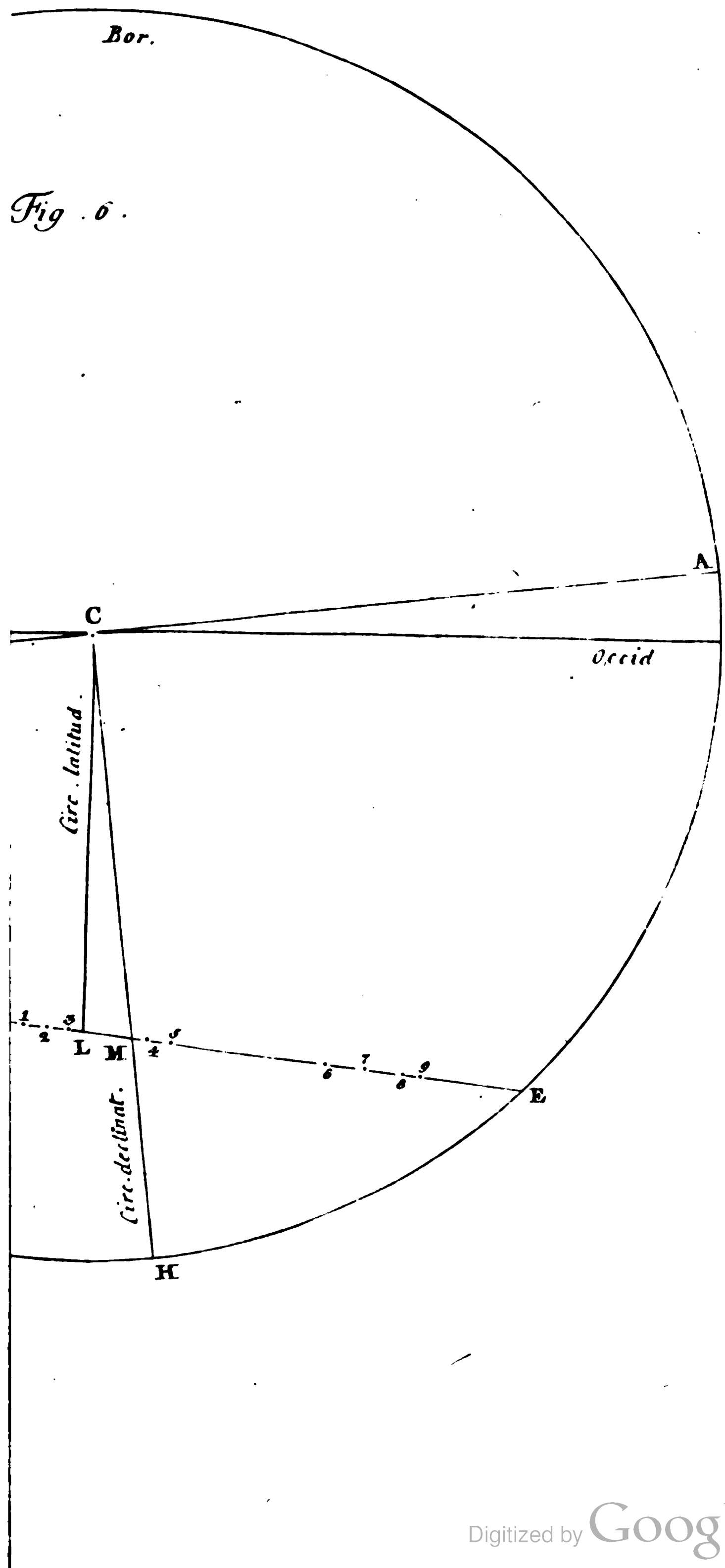


Fig. 5.

Fig. 6.



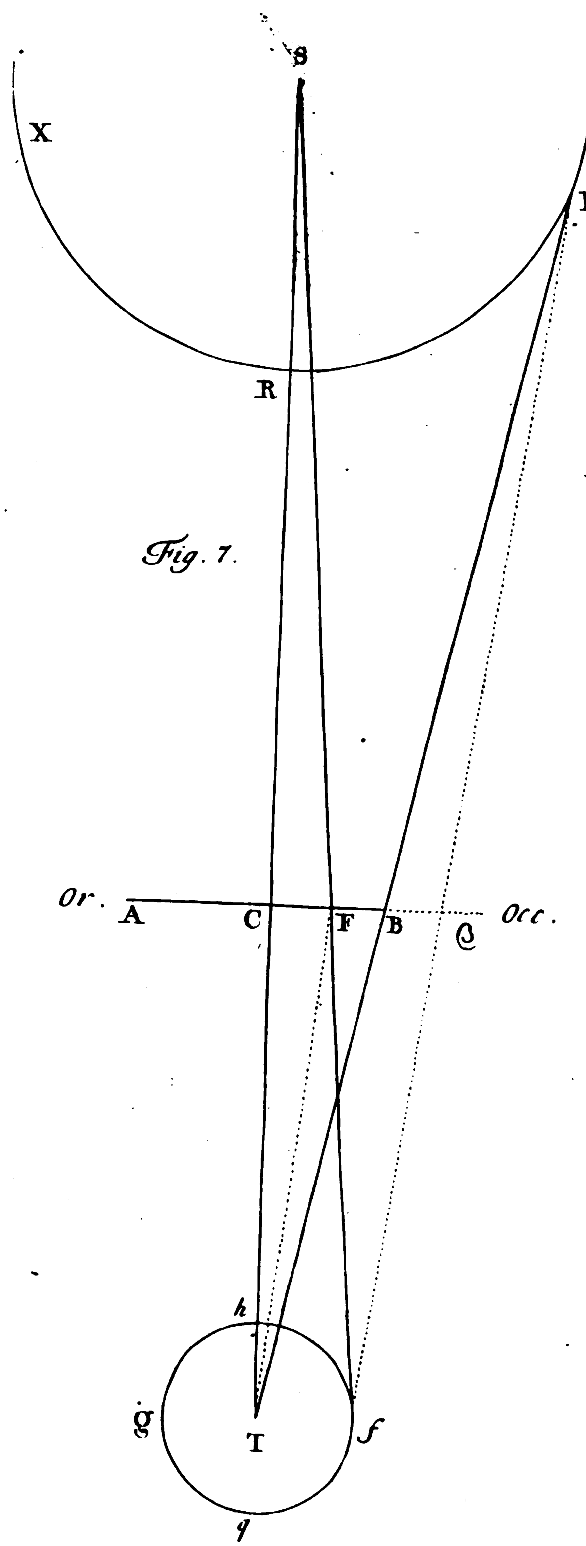
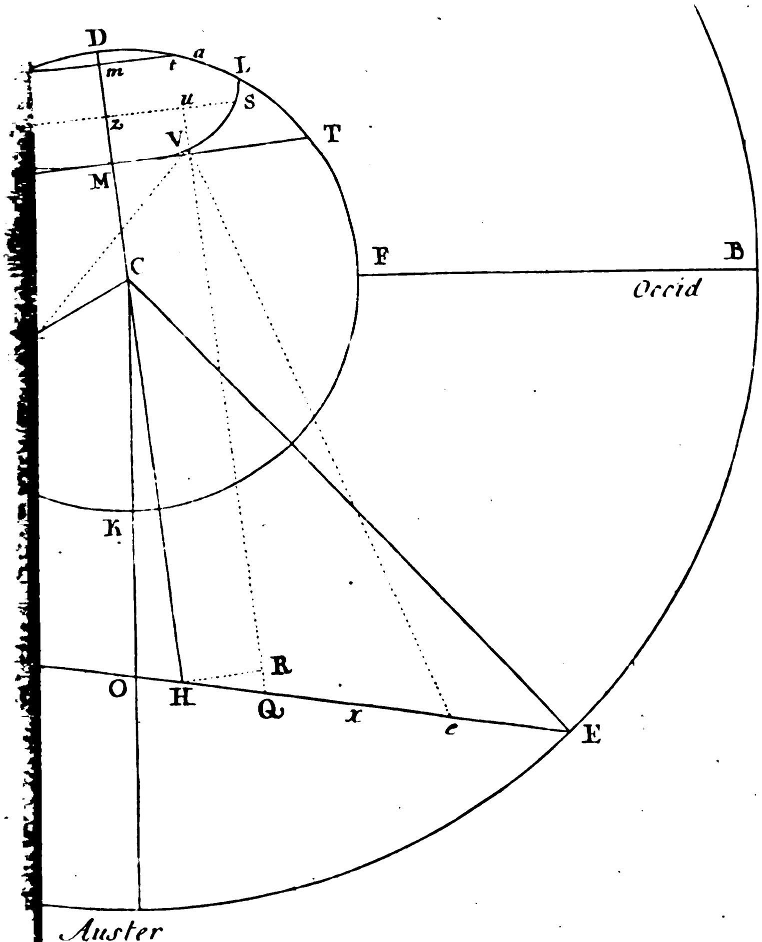
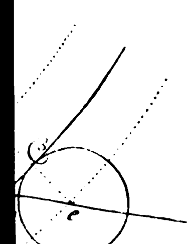


Fig. 7.





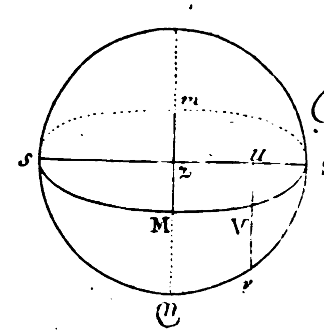


Fig. 11.

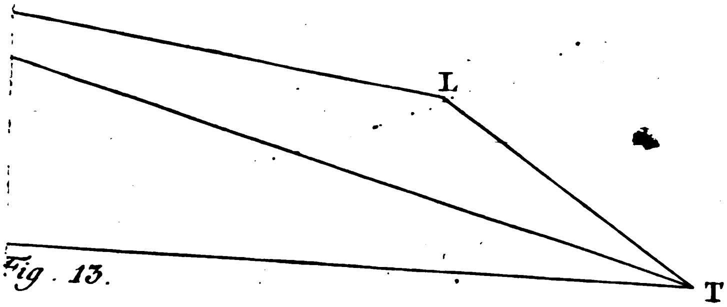


Fig. 13.