NOVI COMMENTARII CADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. I.

ad Annum MDCCXLVII. et MDCCXLVIII.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCL.

MATHEMATICA.

DE SVPERFICIE
CONORVM SCALENORVM,
ALIORVMQVE CORPORVM CONICORVM.

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Quamquam natura conorum a longo iam tempore ita est inuestigata, vt nihil praetermissum videatur, in quo laboraremus; tamen in dimetiendis conorum superficiebus vltra conos rectos, quorum axes ad bases sint normales, non processerunt veteres. Celeb. Varignonius in Miscell. Societatis Regiae Berolinensis Continuatione II. argumentum hoc prorsus nouum primus tractauit, atque lineam curuam, cuius constructio a quadratura circuli pendet, inuenit per cuius rectificationem area cuiusque coni scaleni assignari queat. Subiuncta autem huic dissertationi ibidem reperitur additio Magni Leibnizii, in qua idem negotium per rectificationem curuae algebraicae expeditur. Constructio huius curuae eximium exemplum profundissimi Auctoris ingenii exhibet; verum inaduertentia Viri alias sagacissimi in hanc solutionem sphalma quodpiam irrepsit, quod vti facile emendari potest, ita quoque praestantiae solutionis parum detrahit. Exprimit enim superficiem coni scaleni rectangulo ex linea recta magnitudine data Tab. I.

in

in arcum lineae curuae, cuius conſtructionem expoſuerat, cum iſte arcus antea quantitate quapiam algebraica minui debuiſſet. Quamobrem operam meam non inutiliter mihi equidem collocaſſe videor, ſi primo ſuperficiem coni ſcaleni ope rectificationis lineae algebraicae ordinis ſexti exhibuero, tum vero explanationem ſuperficiei conoidalis cuiuscunque per lineam curuam algebraicam abſoluero, ſimulque lapſum ſummi Leibnizii emendauero.

Fig. 1. §. 2. Sit circulus AMB baſis coni ſcaleni, cuius vertex in ſublimi poſitus ſit V. vnde ad planum baſis demittatur perpendiculum VD; et ex puncto D per centrum baſis C agatur recta DACB. Superficies igitur haec conica generatur, dum linea recta perpetuo per punctum V tranſiens circa peripheriam circuli AMB circumducitur, huiusque ſuperficiei portio arcui AM reſpondens includetur arcu AM et binis rectis ex punctis A et M ad verticem V ductis. Huiusmodi portioni gibbae figuram planam aequalem inueniri oportet. Ponatur radius baſis $AC = BC = a$. longitudo axis $VC = f$ perpendiculum $VD = b$, et interuallum $CD = c$, ita vt ſit $ff = bb + cc$. Hinc erit latus coni minimum $VA = \sqrt{(bb + cc - 2ac + aa)}$ et latus maximum $VB = \sqrt{(bb + cc + 2ac + aa)}$. Sumto nunc arcu quocunque AM, ponatur angulus $ACM = u$, erit arcus $AM = au$; eiusque elementum $Mm = adu$. Ducatur in puncto M tangens MQ, et ex D in eam ducatur perpendicularis DQ, erit recta VQ normalis in tangentem MQ. Quare ſi ductae concipiantur rectae VM et Vm, erit area trianguli $MVm = \frac{1}{2} Mm . VQ$; quae areola erit differentiale portionis ſuperficiei conicae AVM, quam quaerimus.

§. 3

§. 3. Vt igitur longitudinem perpendicularis VQ inuestigemus, in radium CM, si opus est, productum ex D ducamus normalem DN, quae parallela erit et aequalis tangenti MQ, et propterea DQ = MN. Cum ergo in triangulo rectangulo DCN sit hypotenusa CD $= c$ et angulus DCN $= u$, erit CN $= c$ cos u; hincque MN = DQ $= c$ cos $u - a$. Iam quia triangulum VDQ ad D est rectangulum, erit VQ $= \sqrt{(bb + cc \cos. u^2 - 2ac \cos. u + aa)}$; ex quo area trianguli elementaris MVm erit $= \frac{1}{2}$ Mm . VQ $= \frac{1}{2} a du \sqrt{(bb + (c \cos u - a)^2)}$. Quamobrem superficies conica AVM erit $= \frac{1}{2} a \int du \sqrt{(bb + (c \cos u - a)^2)}$. Vnde perspicitur, si conus esset rectus, quo casu interuallum CD $= c$ euanesceret, superficiem coni recti arcui AM respondentis fore $= \frac{1}{2} a \int du \sqrt{(aa + bb)} = \frac{1}{2} au \sqrt{(aa + bb)}$. Aequaretur ergo areae trianguli, cuius basis $= au =$ arcui AM et cuius altitudo sit $= \sqrt{(aa + bb)} =$ VA: vti ex elementis constat.

§. 4. Ex aequatione AVM $= \frac{1}{2} a \int du \sqrt{(bb + (c \cos u - a)^2)}$ statim fluit constructio curuae Varignonianae, per cuius rectificationem superficies conica exhiberi potest. Formetur enim inter coordinatas orthogonales p et q eiusmodi curua vt sit $dp = b du$ et $dq = du(c \cos u - a)$, erit elementum huius curuae $= du \sqrt{(bb + (c \cos u - a)^2)}$. Hinc arcus istius curuae per $\frac{1}{2} a$ multiplicatus praebebit rectangulum, cuius area aequalis erit superficiei conicae AVM. Erit ergo huius curuae abscissa $p = bu = \frac{\text{VD.AM}}{\text{AC}}$; et applicata $q = c \int du \cos u - au = c \sin u - au$ vnde abscissae $p = \frac{b}{a}$. AM respondebit applicata $q =$ QM $-$ AM quae propterea curua ope rectificationis circuli facile construitur. Attendenti autem statim patebit hanc curuam eandem esse, quam Varignonius tradidit.

§. 5. Si hanc superficiem conicam per quadraturas curuarum exprimere velimus, id quidem infinitis modis tam per curuas algebraicas quam transcendentes sine vllo negotio fieri posset. Verum iam pridem summi Geometrae constructiones problematum transcendentium quae fiant per rectificationes curuarum praecipue algebraicarum, illis quae per quadraturas efficiuntur, longe antetulerunt: cum facilius sit longitudinem cuiusque lineae curuae saltem proxime practice assignare, quam eius aream. Hancobcausam eo tempore, quo ista quaestio in Miscellaneis Soc. Regiae est agitata Celeb. Varignonius non parum praestitisse merito est visus, quod explanationem superficiei conicae scalenae ad rectificationem lineae curvae reduxerit, cuius constructio ope rectificationis circuli tam facile expediri possit. Maximi autem sine dubio esset aestimanda solutio Leibnizii, qua idem, quod Varignonius, per curuam algebraicam idque pro omnibus omnino superficiebus conicis praestitit, nisi ob errorem ante memoratum vsu careret. Nunc autem, postquam a Hermanno methodus latissime patens est inuenta quadraturas omnium curuarum ad rectificationes curuarum algebraicarum reuocandi, fere sine vllo negotio scopus, quem Varignonius et Leibnitius sibi proposuerant, obtineri poterit.

§. 6. In hunc finem eliminemus ex formula inuenta $\frac{1}{2}a \int du \sqrt{(bb + (c \cos u - a)^2)}$ quantitatem transcendentem u, ponendo cosinum anguli $u = z$, ita vt, ducto ex M ad diame-

diametrum perpendiculo MP fit $CP = az$, et $MP = a\surd(1 - zz)$, erit $du = \frac{-dz}{\surd(1-zz)}$, et fuperficies conica quaefita $AVM = -\frac{1}{2}a\int\frac{dz\surd(bb+(cz-a)^2)}{\surd(1-zz)}$. Sit iam curuae algebraicae, ope cuius rectificationis haec fuperficies menfurari queat, abfciffa $= x$ et applicata $= y$, ponaturque $dy = p\,dx$, vt fit eius elementum $= dx\surd(1+pp)$. Efficiendum ergo eft vt integratio $\int dx\surd(1+pp)$ ab integratione formulae $\int\frac{dz\surd(bb+(cz-a)^2)}{\surd(1-zz)}$ pendeat. Primo autem requiritur, vt $\int p\,dx$ fiat quantitas algebraica; alioquin enim curua non foret algebraica. Cum igitur fit $\int p\,dx = px - \int x\,dp$, ponatur $\int x\,dp = q$, fietque $x = \frac{dq}{dp}$ et $y = \int p\,dx = \frac{p\,dq}{dp} - q$. Vocetur arcus iftius curuae $= s$, et cum fit $s = \int dx\surd(1+pp)$ fiet $s = x\surd(1+pp) - \int\frac{xp\,dp}{\surd(1+pp)}$; ficque rectificatio curuae ab integratione formulae $\int\frac{xp\,dp}{\surd(1+pp)}$ pendebit, quae formula ob $x\,dp = dq$ abit in hanc $\int\frac{p\,dq}{\surd(1+pp)}$, quae vlterius reducitur ad $\frac{pq}{\surd(1+pp)} - \int\frac{q\,dp}{(1+pp)^{3:2}}$: ita vt futurus fit arcus curuae $s = \frac{dq\surd(1+pp)}{dp} - \frac{pq}{\surd(1+pp)} + \int\frac{q\,dp}{(1+pp)^{3:2}}$. Statuatur nunc $\int\frac{q\,dp}{(1+pp)^{3:2}} = \int\frac{dz\surd(bb+(cz-a)^2)}{\surd(1-zz)}$, fietque $q = \frac{dz(1+pp)^{3:2}\surd(bb+(cz-a)^2)}{dp\surd(1-zz)}$ vbi pro p functionem quamcunque algebraicam ipfius z affumere licet. Quo facto erit q functio algebraica ipfius z cognita, ex eaque porro ipfae coordinatae curuae quaefitae x et y definientur.

§. 7. Defcripta ergo hac curua ope coordinatarum $x = \frac{dq}{dp}$ et $y = \frac{p\,dq}{dp} - q$, fi eius arcus vocetur $= s$ ob $s = \frac{dq\surd(1+pp)}{dp} - \frac{pq}{\surd(1+pp)} + \int\frac{q\,dp}{(1+pp)^{3:2}}$, fiet formula noftra, ex qua fuperficiei ſuperficiei conicae portio AVM determinatur $\int \frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$ $= s - \frac{dq\sqrt{(1+pp)}}{dp} + \frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} +$ Conſt. Quae conſtans ſi ita determinetur, vt poſito $z = 0$, ipſa formula euaneſcat, tum rectangulum $\frac{1}{2}a(\int - \frac{dq\sqrt{(1+pp)}}{dp} + \frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} +$ Cõſt.) aequabitur portioni ſuperficiei conicae EVM, poſito ſcilicet angulo ACE recto.

§. 8. Ponamus; vt rem exemplo illuſtremus $p = \frac{z}{\sqrt{(1-zz)}}$, vt ſit $\sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-zz)}}$ et $dp = \frac{dz}{(1-zz)^{3:2}}$; erit $q = \frac{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$ et $\frac{dq}{dp} = \frac{bbz+(c-az)(cz-a)}{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}$ $= x$ et $y = \frac{(a(cz-a)-bb)\sqrt{(1-zz)}}{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}$: Hinc prodibit portio ſuperficiei conicae EVM $= \frac{1}{2}a(s - \frac{c(cz-a)\sqrt{(1-zz)}}{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}} +$ Conſt.), ſi quidem haec conſtans ita accipiatur, vt iſta formula euaneſcat poſito $z = 0$. Simili autem modo aliis quibuscunque valoribus pro p accipiendis innumerabiles aliae curuae algebraicae obtinebuntur, quarum rectificatione portio ſuperficiei conicae quaecunque in plano exhiberi poterit.

§. 9. In huiusmodi autem lineis curuis non ipſe arcus ſuperficiei conicae eſt proportionalis, ſed eum perpetuo quapiam quantitate algebraica vel augeri vel diminui oportet, vt prodeat expreſſio ſuperficiem conicam abſolute menſurans. Qua circumſtantia etſi praxis non impeditur, tamen eiusmodi lineae curuae, quarum longitudo ſtatim ipſa ſine adiuncta alia quantitate quaeſitum praebet, illis non immerito anteferri ſolent. Hancobrem non abs re erit eiusmodi curuam algebraicam aſſignare, quae ipſa, vti curua illa Varignonii transcendens, ſine aſſumta alia quantitate

titate ſuperficiei conicae portionem quamuis metiatur. Cum igitur portio EVM exprimatur hac formula $\frac{1}{2}a \int \frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$, curua algebraica inueſtigari debebit cuius elementum ſit $= \frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{b\sqrt{(1-zz)}}$. Huius enim curvae ſi arcus quantitati z reſpondens ponatur $= s$, erit ſuperficiei conicae portio EVM $= \frac{1}{2}abs$.

§. 10. Sint coordinatae huius curuae quaeſitae x et y, quae cum per functiones algebraicas ipſius z exprimi debeant, ſtatuatur $dx = \frac{dz(\pi+kz)}{\sqrt{(1-z)}}$ et $dy = \frac{dz(n+kz)}{\sqrt{(+z)}}$ ſic enim ſumtis integralibus fiet

$$x = 2m + \tfrac{4}{3}k - (2m + \tfrac{4}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1-z)}$$

$$y = -2n + \tfrac{4}{3}k + (2n - \tfrac{4}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1+z)}$$

Eiusmodi conſtantibus adiectis, vt poſito $z = 0$, quod euenit in puncto E, ambae coordinatae x et y euaneſcant. Hinc elicietur iſta aequatio:

$$\left.\begin{matrix} +xx - 4mx - \frac{8}{3}kx \\ +yy + 4ny - \frac{8}{3}ky \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 4(n-m)(n+m)z + \frac{8}{3}(n-m)kzz \\ -\frac{8}{3}(n+m)kz \quad - \frac{8}{3}kkzz \end{matrix}\right)$$

Vnde valor ipſius z per x et y facile definitur, qui in altera aequatione ſubſtitutus dabit aequationem algebraicam inter x et y, qua natura curuae quaeſitae continebitur.

§. 11. Cum iam ſit $dx = \frac{(m+kz)dz}{\sqrt{(1-z)}}$ et $dy = \frac{(n+kz)dz}{\sqrt{(1+z)}}$. fiet huius curuae elementum:

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dz\sqrt{\left(\frac{m^2+2mkz+k^2zz}{1-z} + \frac{n^2+2nkz+k^2zz}{1+z}\right)}$$

$$\text{ſeu } \sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{dz\sqrt{\left(\begin{matrix}+nn-nnz+2nkz-2nkzz \\ +mm+mmz+2mkz+2mkzz\end{matrix}+2k^2z^2\right)}}{\sqrt{(1-zz)}}$$

Quod aequale ponatur formae $\frac{dz\sqrt{(aa+bb-2acz+cczz)}}{b\sqrt{(1-zz)}}$ prodibuntque ex comparatione terminorum homogeneorum hae aequationes.

$$aa+bb=(nn+mm)bb$$

$$2ac=(n-m)(n+m)bb-2(n+m)kbb$$

$$cc=2k^2b^2-2(n-m)kbb$$

Ex harum vltima fit $n-m=k-\frac{cc}{2kbb}=\frac{2kkbb-cc}{2kbb}$ qui valor in secunda substitutus dat:

$$2ac=-\frac{(n+m)(2kkbb+cc)}{2k}$$

ergo erit $n+m=\frac{-4ack}{2kkbb+cc}$. Cum ergo sit:

$$n-m=\frac{2kkbb-cc}{2kbb}$$

ex his aequationibus ambae litterae m et n definiuntur.

§. 12. Superest ergo vt tertia incognita k per primam aequationem definiatur. Cum autem quarta incognita b maneat indeterminata, ei pro lubitu valor assignari poterit, statuamus ergo $bb=\frac{cc}{2kk}$, vt euadat $n-m=0$: eritque $n+m=-\frac{2ak}{c}$, ac propterea $m=n=-\frac{ak}{c}$, vnde facta in prima aequatione substitutione etiam incognita k ex calculo egreditur. Fieri ergo nequit $m=n$. Quocirca statuamus $2kkbb=gcc$ seu $bb=\frac{gcc}{2kk}$ eritque $n-m=\frac{(g-1)k}{g}$ et $n+m=\frac{-4ak}{(g+1)c}$. Vnde fit $n=\frac{(g-1)k}{2g}-\frac{2ak}{(g+1)c}=\frac{(gg-1)ck-4agk}{2g(g+1)c}$ et $m=\frac{-2ak}{(g+1)c}-\frac{(g-1)k}{2g}=\frac{-4agk-(gg-1)ck}{2g(g+1)c}$.

§. 13. Ex his valoribus nunc obtinebitur:

$$mm+nn=\frac{16aaggkk+(gg-1)^2cckk}{2gg(g+1)^2cc}$$

Hinc ex prima aequatione $aa+bb=(nn+mm)bb$ fiet $aa+bb=\frac{16aagg+(gg-1)^2cc}{4g(g+1)^2}$

fit

fit $aa+bb=ee$, haecque aequatio euoluta dabit:

$$\begin{aligned} ccg^4-4eeg^3 \quad -2ccgg \quad & -4eeg+cc=0 \\ +16aagg & \\ -8eegg & \end{aligned}$$

ex qua valorem ipsius g quaeri oportet.

§. 14. Quanquam haec aequatio est quarti ordinis, tamen quia non mutatur, si loco g ponatur $\frac{1}{g}$, ea ad resolutionem aequationis quadratae reuocari potest. Fingantur eius factores $cgg-2pg+c=0$ et $cgg-2qg+c=0$ et productum illi aequationi aequale efficiatur. Erit autem hoc productum:

$$\begin{aligned} ccg^4-2cpg^3+2ccgg-2cpg+cc=0 \\ -2cqg^3+4pqgg-2cqg \quad \end{aligned}$$

Quae forma cum aequatione inuenta comparata dabit:

$$p+q=\frac{2ee}{c} \text{ et } pq=4aa-2ee-cc$$

unde fit: $(p-q)^2=\frac{4e^4}{cc}-16aa+4ee+4cc$ et $p-q=\frac{2}{c}\sqrt{(e^4-4aacc+2ccee+c^4)}$. Consequenter

$$p=\frac{ee+\sqrt{(e^4-4aacc+2ccee+c^4)}}{c} \text{ et}$$

$$q=\frac{ee-\sqrt{(e^4-4aacc+2ccee+c^4)}}{c}.$$

§. 15. Inuentis nunc p et q ex aequationibus superioribus valores ipsius g ita definientur vt fit $g=\frac{p\pm\sqrt{(pp-cc)}}{c}$ et $g=\frac{q\pm\sqrt{(qq-cc)}}{c}$. Cum igitur nunc quatuor valores pro quantitate g inuenerimus, habebimus primo $hh=\frac{gca}{2kk}$ seu sumta quantitate h pro arbitrio erit $k=\frac{c}{h}\sqrt{\frac{1}{2}g}$; vnde porro inueniuntur.

$$m=\frac{-(g-1)k}{2g}-\frac{2ak}{(g+1)c}$$

$$n=\frac{+(g-1)k}{2g}-\frac{2ak}{(g+1)c}$$

Ex cognitis denique valoribus litterarum m, n, et k curua quaesita per coordinatus x et y supra exhibitas algebraice describetur, quo facto si eius arcus quantitati z respondens dicatur $= s$, erit superficiei conicae portio $EVM = \frac{1}{2}abs$.

§. 16. Vt exemplum praebeamus, faciat axis coni VC cum basi angulum 60°, incidatque perpendiculum VD in peripheriam, basis erit $CD = CA$ et propterea $c = a$; porro erit $CV = f = 2a$ et $bb = 3aa$ vnde fit $ee = 4aa$ atque $p = a(4 + \sqrt{21})$ et $q = a(4 - \sqrt{21})$. Hinc fit $g = 4 + \sqrt{21} + 2\sqrt{(9 + 2\sqrt{21})}$, quia duo reliqui valores fiunt imaginarii. Erit ergo

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}g} = \tfrac{1}{4}\sqrt{14} + \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(3 + \sqrt{21})}$$

sit $b = 1$ erit $k = \frac{a}{4}(\sqrt{14} + \sqrt{6} + 2\sqrt{(3 + \sqrt{21})})$. Hinc porro irrationalibus debite reductis inuenitur

$$m = \tfrac{a}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{14} - 2\sqrt{(3 + \sqrt{21})}) \text{ et}$$

$$n = \tfrac{a}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{14} - 2\sqrt{(3 + \sqrt{21})}).$$

quibus valoribus inuentis describatur curua inter coordinatas x et y ita, vt sit

$$x = \tfrac{2}{3}k + 2m - (2m + \tfrac{2}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1 - z)}$$

$$y = \tfrac{2}{3}k - 2n + (2n - \tfrac{2}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1 + z)}.$$

Cuius curuae si arcus sinui anguli ECM, qui est $= z$ respondens ponatur $= s$ erit superficiei conicae portio $EVM = \frac{1}{2}as$.

§. 17. Expeditis conis scalenis, qui cum bases habeant circulares, perpendiculum ex vertice in planum basis demissum extra eius centrum cadit, nunc conos quoscunque considerabo, qui formantur, dum linea recta per verticem perpetuo transiens circa lineam quamcunque circumducitur. Sit igitur

igitur figura quaecunque AM basis huiusmodi coni, et punctum V in sublimi positum eius vertex, vnde in basin demittatur perpendiculum VD. Ex D ad punctum curuae AM quodcunque M ducatur recta DM, et in M ducatur recta tangens curuam MQ, in quam D perpendiculum demittatur DQ: et cum basis cognita ponatur, relatio assignari poterit inter DM et DQ. Sit igitur $DM = x$, $DQ = y$, atque habebitur aequatio inter x et y. Ponatur praeterea huius coni altitudo $VD = b$, sumto autem huius curuae elemento Mm, si ducatur Dm et ex M in Dm perpendiculum demittatur Mn, erit $mn = dx$, et ob $MQ = \sqrt{(xx-yy)}$ similitudo triangulorum DMQ, Mmn dabit $Mn = \frac{ydx}{\sqrt{(xx-yy)}}$ et $Mm = \frac{xdx}{\sqrt{(xx-yy)}}$. Fig. 2.

§. 18. His praemissis si in peripheria basis punctum fixum A tanquam principium assumatur. Superficiei conicae portio AVM erit integrale trianguli elementaris MVm. Ad areolam ergo huius trianguli exprimendam, iungatur recta VQ, quae in tangentem MQ erit normalis, ac propterea area trianguli MVm fiet $= \frac{1}{2} Mm.VQ$. Est vero ob triangulum VDQ ad D rectangulum, $VQ = \sqrt{(bb+yy)}$ vnde cum sit $Mm = \frac{xdx}{\sqrt{(xx-yy)}}$, habebitur area trianguli elementaris $MVm = \frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{2\sqrt{(xx-yy)}}$. Atque hinc erit superficiei conicae portio quaesita $AVM = \frac{1}{2}\int \frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$.

§. 19. Maxime naturalis via hanc superficiem exprimendi est, vt ea in planum explicetur. Concipiatur igitur conus charta superductus, quae secundum rectas AV et MV et basin AM excissa in planum explicetur Fig. 3.

VAM; haecque figura mixtilinea VAM aequalis erit portioni superficiei conicae $AVM = \frac{1}{2}\int\frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$. Huius figurae explicatae ducatur in M tangens MQ, et in eam ex V demittatur perpendiculum VQ. Cum igitur hoc triangulum VMQ simile et aequale sit triangulo VMQ in fig. 2. erit $VM = \sqrt{(bb+xx)}$ $VQ = \sqrt{(bb+yy)}$ et $MQ = \sqrt{(xx-yy)}$. Constituto autem triangulo elementari MVm, ductaque Mr ad Vm perpendiculari, erit vt ante $Mm = \frac{xdx}{\sqrt{(xx-yy)}}$, at $mr = \frac{xdx}{\sqrt{(bb+xx)}}$, et $Mr = \frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(bb+xx)(xx-yy)}}$.

§. 20. Inquiramus nunc in constructionem huius curvae ex data basi coni in fig. 2. Ponamus in hunc finem angulum $AVM = v$ et distantiam $VM = z$, erit statim $z = \sqrt{(bb+xx)}$. Tum vero erit $dv = \frac{Mr}{VM} = \frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{(bb+xx)\sqrt{(xx-yy)}}$. Vocemus simili modo in fig. 2. angulum $ADM = u$ erit $du = \frac{Mn}{DM} = \frac{ydx}{x\sqrt{(xx-yy)}}$; Hinc fit $x^4du^2 - xxyydu^2 = y^2dx^2$ et $y^2 = \frac{x^4du^2}{dx^2+x^2du^2}$ ideoque erit $\sqrt{(bb+yy)} = \frac{\sqrt{(bbdx^2+(bb+xx)x^2du^2)}}{\sqrt{(dx^2+x^2du^2)}}$ et $\sqrt{(xx-yy)} = \frac{xdx}{\sqrt{(dx^2+x^2du^2)}}$: vnde oritur $dv = \frac{\sqrt{(bbdx^2+(bb+xx)xxdu^2)}}{bb+xx}$. Quia igitur vel u vel y per x datur, inueniri poterit angulus v, quo cognito curua AM circa V in plano describetur, cuius area AVM aequalis erit superficiei conicae quaesitae.

§. 21. Quoniam assignatio superficiei conicae pendet ab integratione formulae $\int\frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$, hoc negotium tam per quadraturas quam rectificationes curuarum algebraicarum innumerabilibus modis facile expediri potest.

Vt

Vt autem constructionem Leibnizianam, quae est elegantissima, emendemus, peculiari modo nobis erit procecedendum. Perspicuum autem est Virum summum suam constructionem ex consideratione rectarum ad datam curvam sub angulis quibuscunque ductarum deduxisse; hae enim rectae suis concursibus formant nouam curuam, cuius rectificatio tam simpliciter exprimitur, vt quaeuis quadratura eo facile reducatur. Atque ex hoc ipso fonte Celeb. Hermannus methodum suam ingeniosissimam quadraturas curuarum quascunque ad rectificationes curuarum algebraicarum reducendi hausit, quam methodum postea Celeb. Ioh. Bernoulli ex geometria in analysin puram translatam dilucide proposuit.

§. 22. Sumamus pro curua data AM illam ipsam figuram, quae ante basin coni constituerat, atque in eius singulis punctis $M\,m$ in datis cum hac curua angulis ductae concipiantur rectae MS, ms quae suis contactibus forment nouam curuam FSs; per cuius rectificationem superficiem conicam exprimi oporteat. Ponatur arcus curuae cognitae $AM = s$. sitque angulus $SMm = v$, quem recta SM cum curua AM in puncto M constituit, et sumto elemento $Mm = ds$, erit angulus $smN = v + dv$. Quo hinc concursus rectarum MS et ms seu punctum S determinetur, consideretur centrum circuli osculatoris in Mm, quod sit in R, et vocetur radius osculi $MR = mR = r$, erit angulus $MRm = \frac{ds}{r}$: atque ob rectas RM, Rm ad curuam AM normales, erit angulus $RMS = 90° - v$ et angulus $RMS = 90° - v - dv$. Vnde cum sit $RoS = MRm + RMS = MSm + Rms$, fiet ang. $MSm = MRm +$ Fig. 4.

$m+$

m+RMS−R$ms = \frac{ds}{r} + dv$. Nunc in triangulo MS m ob datos angulos et latusculum M$m = ds$, fiet $\frac{ds}{r} + dv : ds = $ fin. v : mS vel MS, eritque igitur MS$= \frac{r\,ds\, fin.\, v}{ds + r\,dv}$; ex qua formula constructio curuae FS consequitur.

§. 23. Ponatur haec recta MS$=z$, vt fit $z = \frac{r\,ds\, fin.\, v}{ds + r\,dv}$; eritque $ms = z + dz$. Ex m in MS ducatur normalis mk, ob angulum mM$k = v$, erit $mk = ds$ fin. v et M$k = ds$ cof. v. Cum igitur fit S$s = ms - k$S$=$ ms−MS+Mk, fiet S$s = ds$ cof. $v + dz$. At eft Ss elementum curuae FS, ex quo erit longitudo huius curvae FS$= \int ds$ cof. $v + z +$ Conft. Ad hanc conftantem definiendam refpondeat curuae FS, punctum F curuae datae AM puncto A, ita vt recta AF fit tangens curuae quaefitae FS in puncto F. Hinc cum fit MS$=z$, prodibit FS$= \int ds$ cof. v+MS−AF, fi quidem integrale $\int ds$ cof. v ita capiatur, vt euanefcat pofito $s = 0$. Quo facto viciffim integrale formulae $\int ds$ cof. v per rectificationem curvae FS exhiberi poterit, erit fcilicet $\int ds$ cof. v=FS+AF−MS.

§. 24. His praemiffis fit D veftigium verticis coni in plano bafis, feu punctum, in quod perpendiculum ex vertice coni in planum bafis demiffum incidit, cuius perpendiculi altitudo VD fupra pofita eft $=b$. Ducta porro ad M tangente MQ, in eamque ex D demiffo perpendiculo DQ, vocauimus DM$=x$ et DQ$=y$, eratque elementum M$m = \frac{x\,dx}{\sqrt{(xx-yy)}}$, quod nunc appellamus $=ds$. Quare cum inuenerimus fuperficiem conicam arcui bafis AM refpondentem $= \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$, erit ifta fupersuperficies $= \frac{1}{2}\int ds\sqrt{(bb+yy)}$. Quo igitur haec superficies per rectificationem curuae FS exprimatur, angulus v vbique ita constitui debet, vt formulae $\int ds \cos. v$ integratio ad integrationem formulae $\int ds\sqrt{(bb+yy)}$ perducatur.

§. 25. Ponamus in hunc finem $\cos. v = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$: et cum cosinus ipsius v vltra radii magnitudinem, quam vnitate metimur nunquam excrescere possit, quantitas k tanta assumi debet, vt $\sqrt{(bb+yy)}$ eam nunquam superare queat. Quare notetur maximus valor, quem formula $\sqrt{(bb+yy)}$ vsquam in cono induere potest, eique k vel aequalis vel etiam maior assumatur. Hoc igitur modo si angulus v fuerit definitus, obtinebitur superficies conica arcui basis AM insistens $\frac{1}{2}\int ds\sqrt{(bb+yy)} = \frac{1}{2}k\int ds \cos. v$; ideoque exprimetur rectangulo $\frac{1}{2}k(FS + AF - MS)$ si scilicet rectae MS vbique ita constituantur, vt sit $\cos. SMm = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$ seu $\sin. RMS = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$ hincque construatur curua FS, rectanguli $\frac{1}{2}k(AF + FS - MS)$ area aequabitur superficiei conicae quaesitae, quae igitur per rectificationem curuae algebraicae FS exhibebitur. Cum enim vbique tam angulus RMS quam longitudo MS algebraice assignari queant, ipsa curua FS erit algebraica.

§. 26. Sumto autem $\cos. v = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$ erit $\sin. v = \frac{\sqrt{(kk-bb-yy)}}{k}$ et differentiando $dv \cos. v = \frac{-ydy}{k\sqrt{(kk-bb-yy)}} = \frac{-ydy}{kk \sin. v}$: vnde fit $dv = \frac{-ydy}{kk \sin. v \cos. v}$. Cum autem natura curuae AM aequatione inter variabiles $DM = x$ et $DQ = y$ exprimatur, erit radius osculi $MR = r = \frac{[illegible]}{dy} =$

$ds\sqrt{}$

$\frac{ds\surd(xx-yy)}{dy}$, vnde fit $dy = \frac{ds\surd(xx-yy)}{r}$ ideoque $dv = \frac{-y\,ds\surd(xx-yy)}{kkr\,\sin.v\cos.v}$. Quia ergo ſupra inuenimus $MS = z = \frac{r\,ds\,\sin.v}{ds+r\,dv}$; nunc habebimus $MS = z = \frac{kkr\sin.v^2\cos.v}{kk\sin.v\cos.v - y\surd(xx-yy)}$ Quam expreſſionem ſequenti modo geometrice conſtruere conabimur.

Fig. 4. et 5. §. 27. Sit iterum curua AM baſis coni, D veſtigium verticis, et M punctum huius curuae quodcunque in quo ducatur tangens MQ et normalis MK. Ductaque recta DM ex D in tangentem demittatur perpendiculum DQ, ſimulque tangenti agatur recta indefinita DC, in qua capiatur DC = altitudini coni $= b$, ductaque CQ erit $CQ = \surd(bb+yy)$. Tum in normali ad curuam capiatur $MK = k$, ſuper qua tanquam diametro deſcripto ſemicirculo KPM applicetur chorda $KP = CQ$, ſi ducatur MP, erit ſinus anguli $KMP = \frac{KP}{k} = \cos.v$, vnde recta MP erit poſitio rectae MS, ſumatur in normali ad curuam $MR = r$, et cum ſit $DQ = y$, et $MQ = \surd(xx-yy)$, fiet $MS = \frac{MK.MR\sin.v}{MK - DQ.MQ : MK\sin.v\cos.v}$ ſeu $MS = \frac{MK\cos.v . MR\sin.v}{MK\cos.v - DQ.MQ : MK\sin.v}$. Cum vero ſit $MK\cos.v = KP$ et $MK\sin.v = MP$, ex R in MP demittatur perpendiculum RT, et erit $MR\sin.v = MT$ fietque $MS = \frac{KP.MT}{KP - DQ.MQ : MP}$. Capiatur $PX = \frac{DQ.MQ}{MP}$, erit $MS = \frac{KP.MT}{KX}$, vnde longitudo rectae MS facile definitur. Quae operatio ſi in ſingulis punctis M inſtituatur, ſingula puncta S determinabunt curuam quaeſitam FS; qua inuenta erit portio ſuperficiei conicae arcui AM inſiſtentis aequalis areae parallelogrammi rectanguli $\frac{1}{2}MK(AF+FS-MS)$.

§. 28.

§. 28. Si curua AM ſtatuatur circulus, extra cuius centrum cadat punctum D, vt conus abeat in conum ſcalenum ordinarium qualem primo ſumus contemplati, atque curua FS ſecundum praecepta hic data conſtruatur, tum eadem prodibit curua, quam Illuſtr. Leibnizius loco ſupra allegato inuenire docuit Ex quo manifeſtum eſt non ipſam hanc curuam FS in rectam elongatam, ſi in rectam quampiam conſtantem ducatur, praebere ſuperficiem conicam quaeſitam, ſed arcum illum FS recta AF auctum longitudine rectae MS minui debere. Hoc ergo modo non ſolum conſtructionem Leibnizianam, quae tantum ad conos ſcalenos erat accommodata, emendauimus, ſed etiam ad conos, quorum baſes ſint figurae quaecunque extendimus.

THEOREMATA
CIRCA DIVISORES NVMERORVM.

AVCTORE
L. EVLERO.

Quouis tempore summi Geometrae agnouerunt in natura numerorum plurimas praeclarissimas proprietates esse absconditas, quarum cognitio fines matheseos non mediocriter esset amplificatura. Primo quidem intuitu doctrina numerorum ad arithmeticae elementa referenda videtur, atque vix quicquam in ea inesse putatur, quod ullam sagacitatem aut vim analyseos requirat. Qui autem diligentius in hoc genere sunt versati, non solum veritates demonstratu difficillimas detexerunt, sed etiam eiusmodi, quarum certitudo percipiatur, etiamsi demonstrari nequeat. Plurima huiusmodi theoremata sunt prolata ab insigni Geometra Fermatio, quorum veritas quamuis demonstratio lateat, non minus euicta videtur. Atque hoc imprimis omnem attentionem meretur, in mathesi adeo pura eiusmodi dari veritates, quas nobis cognoscere liceat, cum tamen eas demonstrare non valeamus; atque hoc adeo in arithmetica vsu venit, quae tamen prae reliquis matheseos partibus maxime pertractata ac perspecta haberi solet: neque facile affirmare ausim, an similes veritates in reliquis partibus reperiantur. In Geometria certe nulla occurit propositio cuius vel veritas vel falsitas firmissimis rationibus euinci nequeat. Cum igitur quaeuis veritas eo magis abstrusa censeatur, quo minus ad eius demonstrationem

onem aditus pateat, in arithmetica certe, vbi natura numerorum perpenditur, omnium abstrusissimas contineri negare non poterimus. Non desunt quidem inter summos mathematicos Viri, qui huiusmodi veritates prorsus steriles, ideoque non dignas iudicant, in quarum inuestigatione vlla opera collocetur; at praeterquam quod cognitio omnis veritatis per se sit excellens, etiamsi ab vsu populari abhorrere videatur, omnes veritates, quas nobis cognoscere licet, tantopere inter se connexae deprehenduntur, vt nulla sine temeritate tanquam prorsus inutilis repudiari possit. Deinde etsi quaepiam propositio ita comparata videatur, vt siue vera sit siue falsa, nihil inde ad nostram vtilitatem redundet, tamen ipsa methodus, qua eius veritas vel falsitas euincitur, plerumque nobis viam ad alias vtiliores veritates cognoscendas patefacere solet. Hanc obrem non inuiliter me operam ac studium in indagatione demonstrationum quarumdam propositionum impendisse confido, quibus insignes circa diuisores numerorum proprietates continentur. Neque vero haec de diuisoribus doctrina omni caret vsu, sed nonnunquam in analysi non contemnendam praestat vtilitatem. Imprimis vero non dubito, quin methodus ratiocinandi, qua sum vsus, in aliis grauioribus inuestigationibus aliquando non parum subsidii afferre possit. Propositiones autem, quas hic demonstratas exhibeo, respiciunt diuisores numerorum in hac formula $a^n + b^n$ contentorum, quarum nonnullae iam ab ante memorato Fermatio, sed sine demonstratione, sunt publicatae. Quoniam igitur hic perpetuo de numeris integris sermo instituetur, omnes alphabeti litterae hic constanter numeros integros indicabunt.

Theo-

Theorema 1.

1. Si p fuerit numerus primus, omnis numerus in hac forma $(a+b)^p - a^p - b^p$ contentus diuisibilis erit per p.

Demonſtratio.

Si binomium $(a+b)^p$ modo conſueto euoluatur, erit $(a+b)^p = a^p + \frac{p}{1} a^{p-1} b + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} a^{p-2} b^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{p-3} b^3 + \dots + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^{p-3} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} a^2 b^{p-2} + \frac{p}{1} a b^{p-1} + b^p$. qua expreſſione ſubſtituta, binisque terminis, qui easdem habent vncias, coniunctis, erit $(a+b)^p - a^p - b^p = \frac{p}{1} ab(a^{p-2} + b^{p-2}) + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} a^2 b^2 (a^{p-4} + b^{p-4}) + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^3 (a^{p-6} + b^{p-6}) + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (a^{p-8} + b^{p-3}) a^4 b^4 +$ etc. Hic primo notandum eſt omnes vncias, quamquam ſub forma fractionum apparent, nihilominus eſſe numeros integros, cum exhibeant, vti conſtat numeros figuratos. Quaelibet ergo vncia cum factorem habeat p, diuiſibilis erit per p, niſi is alicubi per factorem denominatoris vel prorſus tollatur, vel diuidatur. At vbique omnes factores denominatorum minores ſunt quam p quia adeo non vltra $\frac{1}{2}p$ creſcunt, ideoque factor numeratorum p nusquam per diuiſionem tollitur. Deinde cum p ſit per hypoth. numerus primus, is nusquam per diuiſionem minuetur. Quocirca ſingulae vnciae $\frac{p}{1}$; $\frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}$; $\frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; etc. hincque tota expreſſio $(a+b)^p - a^p - b^p$ perpetuo per numerum p ſiquidem fuerit numerus primus, erit diuiſibilis Q. E. D.

Coroll.

Coroll. 1.

2. Si ergo ponatur $a = 1$, et $b = 1$, erit $2^p - 2$ semper diuisibilis per p, si quidem fuerit p numerus primus. Cum igitur sit $2^p - 2 = 2(2^{p-1} - 1)$: alterum horum factorum per p diuisibilem esse oportet. At nisi sit $p = 2$, prior factor 2 per p non est diuisibilis: vnde sequitur formam $2^{p-1} - 1$ perpetuo per p esse diuisibilem, si p fuerit numerus primus praeter binarium.

Coroll. 2.

3. Ponendis ergo pro p successiue numeris primis, erit $2^2 - 1$ diuisibile per 3; $2^4 - 1$ per 5; $2^6 - 1$ per 7; $2^{10} - 1$ per 11 etc. quod in minoribus numeris per se sit perspicuum, in maximis autem aeque erit certum. Sic cum 641 sit numerus primus, iste numerus $2^{640} - 1$ necessario per 641 erit diuisibilis. Seu si potestas 2^{640} per 641 diuidatur, post diuisionem supererit residuum $= 1$.

Theorema 2.

4. Si vtraque harum formularum $a^p - a$ et $b^p - b$ fuerit diuisibilis per numerum primum p, tum quoque ista formula $(a+b)^p - a - b$ diuisibilis erit per eundem numerum primum p.

Demonstratio.

Cum per §. 1. $(a+b)^p - a^p - b^p$ sit diuisibilis per numerum p, si fuerit primus, atque hic formulae $a^p - a$ et $b^p - b$ per p diuisibiles assumantur, erit quoque summa istarum trium formularum nempe $(a+b)^p - a - b$ per p, si fuerit numerus primus diuisibilis Q. E. D.

Coroll.

Coroll. 1.

5. Si ponatur $b=1$, cum $1^p-1=0$ sit diuisibile per p; sequitur, si formula a^p-a fuerit diuisibilis per p, tum quoque formulam $(a+1)^p-a-1$ fore per p diuisibilem.

Coroll. 2.

6. Cum igitur assumta formula a^p-a per p diuisibili, sit quoque formula $(a+1)^p-a-1$ per p diuisibilis; simili modo in eadem hyphothesi erit haec quoque formula $(a+2)^p-a-2$, hincque porro haec $(a+3)^p-a-3$, etc. atque generaliter haec c^p-c diuisibilis per p.

Theorema 3.

7. Si p fuerit numerus primus, omnis numerus huius formae c^p-c per p erit diuisibilis.

Demonstratio.

Si in §. 6 ponatur $a=1$, cum sit $a^p-a=0$ per p diuisibilis, sequitur has quoque formulas 2^p-2; 3^p-3; 4^p-4; etc. et generatim hanc c^p-c fore per numerum primum p diuisibilem. Q. E. D.

Coroll. 1.

8. Quicunque ergo numerus integer pro c assumatur, denotante p numerum primum, omnes numeri in hac forma c^p-c contenti erunt diuisibiles per p.

Coroll. 2.

9. Cum autem sit $c^p-c=c(c^{p-1}-1)$, vel ipse numerus c vel $c^{p-1}-1$ diuisibilis erit per p: vtrumque autem

autem simul per p diuisibilem esse non posse manifestum est. Quare si numerus c non fuerit diuisibilis per p, haec forma $c^{p-1}-1$ certe per p erit diuisibilis.

Coroll. 3.

10. Si ergo p fuerit numerus primus, omnes numeri in hac forma contenti $a^{p-1}-1$ erunt diuisibiles per p exceptis iis casibus, quibus ipse numerus a per p est diuisibilis.

Theorema 4.

11. Si neuter numerorum a et b diuisibilis fuerit per numerum primum p, tum omnis numerus huius formae $a^{p-1}-b^{p-1}$ erit diuisibilis per p.

Demonstratio.

Cum neque a neque b sit diuisibilis per p, atque p denotet numerum primum, tam haec forma $a^{p-1}-1$, quam haec $b^{p-1}-1$ erit diuisibilis per p. Hinc ergo quoque differentia istarum formularum $a^{p-1}-b^{p-1}$ erit diuisibilis per p. Q. E. D.

Coroll. 1.

12. Cum omnis numerus primus praeter binarium, cuius ratio diuidendi per se est manifesta, sit impar, ponatur $2m+1$ pro p, atque perspicuum erit, omnes numeros in hac forma $a^{2m}-b^{2m}$ contentos esse diuisibiles per $p\,2m+1$, siquidem neque a neque b seorsim fuerit per $2m+1$ diuisibilis.

Coroll. 2.

13. Quia b non est diuisibilis per $2m+1$, etiam

b^{2m} et $2b^{2m}$ non diuisibile erit per $2m+1$. Quare si $2b^{2m}$ addatur ad formulam $a^{2m}-b^{2m}$, quae est diuisibilis per $2m+1$, prodibit formula $a^{2m}+b^{2m}$, quae per $2m+1$ non erit diuisibilis; nisi vterque numerus a et b seorsim per $2m+1$ sit diuisibilis.

Coroll. 3.

14. Quoniam ob $2m$ numerum parem formula $a^{2m}-b^{2m}$ factores habet $(a^m-b^m)(a^m+b^m)$, necesse est vt horum factorum alter sit diuisibilis per $2m+1$: ambo autem simul per numerum $2m+1$ diuisibiles esse nequeunt. Quare si $2m+1$ fuerit numerus primus, et neque a neque b diuisibile sit per $2m+1$, tum vel a^m-b^m vel a^m+b^m erit diuisibile per $2m+1$.

Coroll. 4.

15. Si m sit numerus par puta $=2n$, atque a^m-b^m seu $a^{2n}-b^{2n}$ diuisibilis per $2m+1=4n+1$, tum ob eandem rationem vel a^n-b^n vel a^n+b^n diuisibile erit per numerum primum $4n+1$.

Theorema 5.

16. Summa duorum quadratorum $aa+bb$ per nullum numerum primum huius formae $4n-1$ vnquam diuidi potest, nisi vtriusque radix seorsim a et b sit diuisibilis per $4n-1$.

Demonstratio.

Si $4n-1$ fuerit numerus primus, neque a et b per illum sint diuisibiles, tum $a^{4n-2}-b^{4n-2}$ erit diuisibile per $4n-1$ (11), hincque ista formula $a^{4n-2}+b^{4n-2}$ non erit diuisi-

diuisibilis per $4n-1$, neque propterea vllus eius factor. At cum $4n-2=2(2n-1)$ sit numerus impariter par, formula $a^{4n-2}+b^{4n-2}$ factorem habet $aa+bb$; quare fieri nequit, vt iste factor $aa+bb$, hoc est vlla duorum quadratorum summa sit diuisibilis per $4n-1$. Q. E. D.

Coroll. 1.

17. Cum omnes numeri primi vel ad hanc formam $4n+1$ vel ad hanc $4n-1$ reuocentur, si $4n-1$ non fuerit numerus primus, diuisorem habebit formae $4n-1$; namque ex meris numeris formae $4n+1$ nunquam numerus formae $4n-1$ resultare potest. Quare cum summa duorum quadratorum per nullum numerum primum formae $4n-1$ diuidi possit, per nullum quoque numerum eiusdem formae $4n-1$, etiamsi non sit primus diuidi poterit.

Coroll. 2.

18. Summa ergo duorum quadratorum $aa+bb$, per nullum numerum huius seriei:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, etc.

est diuisibilis. Omnes ergo numeri primi praeter binarium, qui vnquam diuisores esse possunt summae duorum quadratorum, continentur in hac forma $4n+1$; siquidem numeri a et b inter se communem diuisorem non habent.

Coroll. 3.

19. Cum omnis numerus sit vel primus vel productum ex primis, summa duorum quadratorum nullum numerum primum pro diuisore habebit, nisi qui continea-

tur in hac forma $4n+1$. Diuisores ergo primi summae duorum quadratorum continebuntur in hac serie: 2, 5, 13; 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, etc.

Scholion.

20. Quod numerus huius formae $4n-1$ nunquam possit esse summa duorum quadratorum, facile intelligitur. Numeri enim quadrati vel sunt pares vel impares, illi in hac forma $4a$, hi vero in hac $4b+1$ continentur. Quare vt summa duorum quadratorum sit numerus impar, alterum par alterum impar esse oportet, hinc oritur forma $4a+4b+1$ seu $4n+1$, ideoque nullus numerus huius formae $4n-1$ summa duorum quadratorum esse potest. Quod vero summa duorum quadratorum ne diuisorem quidem formae $4n-1$ admittat, ab omnibus scriptoribus methodi Diophanteae semper est affirmatum: nemo autem vnquam, quantum mihi constat, id demonstrauit, excepto Fermatio, qui autem suam demonstrationem nunquam publicauit, ita vt mihi quidem videar primus hanc veritatem publice demonstrasse; nullum numerum vel huius formae $4n-1$ vel per numerum eiusdem formae diuisibilem vnquam esse posse summam duorum quadratorum. Hinc ergo sequitur omnem summam duorum quadratorum inter se primorum vel esse numerum primum, vel binario excepto alios diuisores non habere, nisi qui in forma $4n+1$ contineantur.

Theorema 6.

21. Omnes diuisores summae duorum biquadratorum inter se primorum sunt vel 2, vel numeri huius formae $8n+1$. Demon-

Demonstratio.

Sint a^4 et b^4 duo biquadrata inter ſe prima, erit vel vtrumque impar, vel alterum par et alterum impar; priori caſu ſummae $a^4 + b^4$ diuiſor erit 2; vtroque vero caſu diuiſores impares, ſi qui fuerint, in hac forma $4n + 1$ continebuntur. Cum enim biquadrata ſimul ſint quadrata, nullus diuiſor formae $4n - 1$ locum inuenit (16). At numeri $4n + 1$ vel ad hanc formam $8n + 1$ vel ad hanc $8n - 3$ reuocantur. Dico autem nullum numerum formae $8n - 3$ eſſe poſſe diuiſorem ſummae duorum biquadratorum. Ad hoc demonſtrandum ſit primo $8n - 3$ numerus primus, atque per eum diuiſibilis erit haec forma $a^{8n-4} - b^{8n-4}$, vnde haec forma $a^{8n-4} + b^{8n-4}$ per numerum $8n - 3$ prorſus non erit diuiſibilis, niſi vterque numerus a et b ſeorſim diuiſionem admittat, qui caſus autem aſſumtione, quod ambo numeri a et b ſint inter ſe primi excluditur. Cum igitur forma $a^{8n-4} + b^{8n-4} = a^{4(2n-1)} + b^{4(2n-1)}$ diuidi nequeat per $8n - 3$, nullus quoque eius factor per $8n - 3$ diuidi poterit. At ob $2n - 1$ numerum imparem, illius formae factor erit $a^4 + b^4$, qui ergo per nullum numerum primum formae $8n - 3$ diuidi poteſt. Hinc omnes numeri primi praeter binarium, qui vnquam formam $a^4 + b^4$ diuident, erunt huiusmodi $8n + 1$. Ex multiplicatione autem duorum pluriumue talium diuiſorum nunquam numerus formae $8n - 3$ oritur: ex quo ſequitur nullum prorſus numerum huius formae $8n - 3$ ſiue ſit primus ſiue compoſitus, ſummam duorum biquadratorum inter ſe primorum diuidere. Q. E. D.

Coroll. 1.

22. Cum omnes numeri impares in vna harum quatuor formarum contineantur: $8n \pm 1$ et $8n \pm 3$: praeter numeros in forma prima $8n+1$ contentos nullus alius poterit eſſe diuiſor ſummae duorum biquadratorum.

Coroll. 2.

23. Omnes ergo diuiſores primi ſummae duorum biquadratorum inter ſe primorum erunt vel 2 vel in hac ſerie contenti. 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, 193, etc. quae complectitur omnes numeros primos formae $8n+1$.

Coroll. 3.

24. Si quis ergo numerus puta N fuerit ſumma duorum biquadratorum, tum is vel erit primus, vel alios non habebit diuiſores, niſi qui in forma $8n+1$ contineantur; vnde inueſtigatio diuiſorum mirum in modum contrahitur.

Coroll. 4.

25. Nullus igitur numerus, qui diuiſorem habet non in forma $8n+1$ contentum, erit ſumma duorum biquadratorum; niſi forte habeat quatuor diuiſores aequales, qui autem in conſideratione biquadratorum reiici ſolent.

Theorema 7.

26. Omnes diuiſores huiusmodi numerorum a^8+b^8 ſi quidem a et b ſunt numeri inter ſe primi, ſunt vel 2 vel in hac forma $16n+1$ continentur.

Demon.

Demonstratio.

Quia a^8 et b^8 simul sint biquadrata, eorum summa a^8+b^8 alios non admittet diuisores, nisi qui in forma $8n+1$ contineantur. At numeri in hac forma $8n+1$ contenti sint vel $16n+1$ vel $16n-7$. Sit $16n-7$ numerus primus, ac per eum diuidi non poterit forma $a^{16n-8}+b^{16n-8}$ (13). seu $a^{8(2n-1)}+b^{8(2n-1)}$, neque propterea vllus eius factor. Verum ob $2n-1$ numerum imparem haec forma diuisorem habet a^8+b^8, quae ergo per nullum numerum primum $16n-7$ erit diuisibilis, ac propterea alios diuisores primos habere nequit, nisi qui in forma $16n+1$ contineantur. Ex multiplicatione autem duorum pluriumue huiusmodi numerorum $16n+1$, perpetuo productum eiusdem formae nascitur, neque vnquam numerus formae $16n-7$ resultare potest. Vnde cum nullus numerus formae $16n-7$ diuisor ipsius a^8+b^8 existere possit, necesse est vt omnes huius formae a^8+b^8 diuisores, si quos habet, siue sint primi siue compositi, perpetuo in hac formula $16n+1$ contineantur. Q. E. D.

Coroll. 1.

27. Nullus igitur numerus, qui in hac forma $16n+1$ non includitur, vnquam esse potest diuisor summae duarum potestatum octaui gradus inter se primarum.

Coroll. 2.

28 Si quis ergo voluerit numeri cuiuspiam huius formae a^8+b^8 diuisores inuestigare, is diuisionem per nullos alios numeros primos nisi in hac forma $16n+1$ con-

contentos, tentet, cum demonſtratum ſit omnes reliquos numeros primos huius formae diuiſores eſſe non poſſe.

Theorema 8.

29. Summa duarum huiusmodi poteſtatum $a^{2^m}+b^{2^m}$ quarum exponens eſt dignitas binarii alios diuiſores non admittit, niſi qui contineantur in hac forma $2^{m+1}n+1$.

Demonſtratio.

Quemadmodum demonſtrauimus omnes diuiſores formae a^2+b^2 in hac forma $4n+1$ contineri, hincque vlterius diuiſores omnes formae a^4+b^4 in $8n+1$ et formae a^8+b^8 in $16\,n+1$ contineri euicimus; ita ſimili modo oſtendi poteſt formam $a^{16}+b^{16}$ nullos alios diuiſores admittere niſi in formula $32n+1$ contentos. Dehinc porro intelligemus formas $a^{32}+b^{32}$; $a^{64}+b^{64}$ etc. alios diuiſores habere non poſſe, niſi qui in formulis $64n+1$, $128n+1$ etc. includantur. Sicque in genere patebit formae $a^{2^m}+b^{2^m}$ alios non dari diuiſores, niſi qui in formula $2^{m+1}n+1$ contineantur. Q. E. D.

Coroll. 1.

30. Nullus ergo numerus primus, qui in hac forma $2^{m+1}n+1$ non includitur, vnquam eſſe poteſt diuiſor vllius numeri in hac forma $a^{2^m}+b^{2^m}$ contenti.

Coroll. 2.

31. Diuiſores ergo huiusmodi numeri $a^{2^m}+b^{2^m}$ inquiſiturus inutiliter operam ſuam conſumeret, ſi aliis numeris primis praeter eos, quas forma $2^{m+1}n+1$ ſuppeditat, diuiſionem tentare vellet.

Scholion

Scholion 1.

32. Fermatius affirmauerant, etiamsi id se demonstrare non posse ingenue esset confessus, omnes numeros ex hac forma $2^{2^m}+1$ ortos esse primos; hincque problema alias difficillimum, quo quaerebatur numerus primus dato numero maior, resoluere est conatus. Ex vltimo theoremate autem perspicuum est, nisi numerus $2^{2^m}+1$ sit primus eum alios diuisores habere non posse praeter tales, qui in forma $2^{m+1}n+1$ contineantur. Cum igitur veritatem huius effati Fermatiani pro casu $2^{32}+1$ examinare voluissem, ingens hinc compendium sum nactus, dum diuisionem aliis numeris primis, praeter eos, quos formula $64n+1$ suppeditat, tentare non opus habebam. Huc igitur inquisitione reducta mox deprehendi ponendo $n=10$ numerum primum 641 esse diuisorem numeri $2^{32}+1$, vnde problema memoratum, quo numerus primus dato numero maior requiritur, etiamnum manet insolutum.

Scholion 2.

33. Summa duarum potestatum eiusdem gradus vti a^m+b^m semper habet diuisores algebraice assignabiles, nisi m sit dignitas binarii. Nam si m sit numerus impar, tum a^m+b^m semper diuisorem habet $a+b$, atque si p fuerit diuisor ipsius m, tum quoque a^p+b^p formam a^m+b^m diuidet. Sin autem m sit numerus par, in hac formula $2^n p$ continebitur, ita vt p sit numerus impar, hocque casu $a^{2^n}+b^{2^n}$ diuisor erit formae a^m+b^m existente $m=2^n p$. Atque si p habeat diuisorem q, tum

etiam $a^{2^n}q+b^{2^n}q$ erit diuiſor formae a^m+b^m. Quocirca a^m+b^m numerus primus eſſe nequit niſi m ſit dignitas binarii. Hoc igitur caſu, ſi a^m+b^m, non fuerit numerus primus, alios diuiſores habere nequit, niſi qui formula $2mn+1$ contineantur. Contra autem ſi differentia duarum poteſtatum eiusdem gradus proponatur a^m-b^m, ea ſemper diuiſorem habet $a-b$; praeterea vero ſi exponens m diuiſorem habeat p, erit quoque a^p-b^p diuiſor formae a^m-b^m. Hinc ſi m ſit numerus primus forma a^m-b^m praeter $a-b$ alium diuiſorem algebraice aſſignabilem non habebit, quare ſi a^m-b^m fuerit numerus primus, neceſſe eſt vt m ſit numerus primus et $a-b=1$. Interim tamen ne his quidem caſibus forma a^m-b^m ſemper eſt numerus primus; ſed quoties $2m+1$ eſt numerus primus, per eum erit diuiſibilis. Praeterea vero etiam alios diuiſores habere poteſt, quos hic ſum inueſtigaturus.

Theorema 9.

34. Si differentia poteſtatum a^m-b^m fuerit diuiſibilis per numerum primum $2n+1$, atque p ſit maximus communis diuiſor numerorum m et $2n$, tum quoque a^p-b^p erit diuiſibilis per $2n+1$.

Demonſtratio.

Quia $2n+1$ eſt numerus primus, erit $a^{2n}-b^{2n}$ diuiſibilis per $2n+1$, et cum per hypotheſin a^m-b^m ſit quoque diuiſibilis per $2n+1$. Sit $2n=\alpha m+q$, ſeu q ſit reſiduum in diuiſione ipſius $2n$ per m remanens; et cum $a^{\alpha m}-b^{\alpha m}$ ſit quoque per $2n+1$ diuiſibilis, multiplicetur haec forma per a^q, erit $a^{\alpha m+q}-a^q b^{\alpha m}$ per

28

$2n+1$ diuisibilis: at posito $\alpha m+q$ pro $2n$ est quoque $a^{\alpha m+q}-b^{\alpha m+q}$ per $2n+1$ diuisibilis: a qua formula si prior subtrahatur, residuum $a^q b^{\alpha m}-b^{\alpha m+q}=b^{\alpha m}(a^q-b^q)$ quoque per $2n+1$ erit diuisibile. Hinc cum b per hypothesin diuisorem $2n+1$ non habeat, necesse est vt a^q-b^q per $2n+1$ sit diuisibile. Ponatur porro $m=\beta q+r$, et cum vtraque haec formula $a^{\beta q+r}-b^{\beta q+r}$ et $a^{\beta q}-b^{\beta q}$ sit per $2n+1$ diuisibilis, multiplicetur posterior per a^r et a priori subtrahatur, atque residuum $b^{\beta q}(a^r-b^r)$ seu a^r-b^r pariter per $2n+1$ erit diuisibile. Simili modo patebit, si fuerit $q=\gamma r+s$ tam formulam a^s-b^s per $2n+1$ fore diuisibilem; atque si per huiusmodi continuam diuisionem valores litterarum q, r, s, t etc. inuestigentur, tandem peruenietur ad maximum communem diuisorem numerorum m et $2n$, qui ergo si ponatur $=p$, erit a^p-b^p diuisibile per $2n+1$. Q. E. D.

Coroll. 1.

35. Si igitur m fuerit numerus ad $2n$ primus, maximus eorum communis diuisor erit vnitas, ac propterea si a^m-b^m fuerit diuisibile per numerum primum $2n+1$, tum quoque $a-b$ per $2n+1$ erit diuisibile.

Coroll. 2.

36. Si ergo differentia numerorum $a-b$ non fuerit diuisibilis per $2n+1$, tum quoque nulla huiusmodi forma a^m-b^m, vbi m est ad $2n$ numerus primus, per $2n+1$ diuisibilis esse potest.

Coroll. 1.

37. Quodsi ergo m fuerit numerus primus, forma

$a^m - b^m$ per numerum primum $2n+1$ diuidi non poteſt niſi m ſit diuiſor ipſius $2n$; poſito quod $a-b$ non ſit diuiſibile per $2n+1$.

Coroll. 4.

38. Exiſtente ergo m numero primo, haec forma $a^m - b^m$ praeter diuiſorem $a-b$ alios diuiſores habere nequit, niſi qui includantur in hac formula $mn+1$. Vnde diuiſores numeri cuiuspiam in hac forma $a^m - b^m$ contenti inueſtigaturus diuiſionem tantum per numeros primos in forma $mn+1$ contentos tentabit.

Coroll. 5.

39. Niſi ergo numerus $2^m - 1$ ſit primus, exiſtente m numero primo, alios diuiſores habere non poterit, niſi qui includantur in hac forma $mn+1$.

Coroll. 6.

40. Si ergo m ſit numerus primus, diuiſores formulae $a^m - b^m$ praeter $a-b$, ſi quidem a et b fuerint numeri inter ſe primi, continebuntur in hac ſerie: $2m+1$; $4m+1$; $6m+1$; $8m+1$; $10m+1$; etc. ſi hinc numeri non primi expungantur.

Theorema. 10.

41. Si formula $a^m \pm b^m$ diuiſorem habeat p, tum quoque haec expreſſio $(a \pm \alpha p)^m \pm (b \pm \beta p)^m$ per p erit diuiſibilis.

Demonſtratio.

Si poteſtates $(a \pm \alpha p)^m$ et $(b \pm \beta p)^m$ methodo conſueta euoluantur, in vtraque ſerie omnes termini praeter

ter primum diuiſibiles erunt per p. Scilicet formula $(a \pm \alpha p)^m \pm (b \pm \beta p)^m$ abibit in hanc formam:

$$+ a^m \pm m a^{m-1} \alpha p + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} \alpha^2 p^2 \pm \text{ etc.}$$

$$\pm (b^m \pm m b^{m-1} \beta p - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} b^{m-2} \beta^2 p^2 \pm \text{ etc.})$$

Vnde perſpicuum eſt ſi $a^m - b^m$ fuerit diuiſibile, tum quoque haec forma $(a \pm \alpha p)^m - (b \pm \beta p)^m$ per p erit diuiſibilis. Q. E. D.

Coroll. 1.

42. Si igitur $a^m \pm 1$ fuerit diuiſibile per p, tum quoque haec formula $(a \pm \alpha p)^m \pm 1$ per p erit diuiſibilis.

Coroll. 2.

43. Si $a^m \pm b^m$ fuerit diuiſibile per p, tum quoque haec formula $(a \pm \alpha p)^m \pm b^m$, vel haec $a^m \pm (b \pm \beta p)^m$ per p erit diuiſibilis.

Scholion.

44. Eodem quoque modo generaliter demonſtrari poteſt, ſi fuerit $A a^m \pm B b^m$ diuiſibile per p, tum quoque hanc formam $A(a \pm \alpha p)^m \pm B(b \pm \beta p)^m$ fore per p diuiſibilem. Haecque veritas aeque locum inuenit, ſiue p ſit numerus primus ſiue ſecus. Quin etiam non opus eſt, vt vtriusque poteſtatis idem ſit exponens m, ſed etiamſi eſſent inaequales, concluſio perinde valebit. Tum vero quoque ſi m fuerit numerus par ex diuiſibilitate formulae $a^m \pm b^m$ per numerum p, diuiſibilitas etiam huius formulae $(\alpha p \pm a)^m \pm (\beta p \pm b)^m$ ſequitur. Verum haec aliaque ſimilia ex algebrae elementis ſponte patent.

Theorema 11.

45. Si fuerit $a = ff \pm (2m+1)\alpha$, et $2m+1$ numerus primus, tum ista expressio $a^m - 1$ erit diuisibilis per $2m+1$.

Demonstratio.

Cum sit $2m+1$ numerus primus, per eum diuidi poterit haec formula $f^{2m}-1$, seu haec $(ff)^m - 1$. Hinc per theorema praecedens quoque ista formula $(ff \pm (2m+1)\alpha)^m - 1$ erit diuisibilis per $2m+1$. Quare si fuerit $a = ff \pm (2m+1)\alpha$, formula $a^m - 1$ per numerum primum $2m+1$ diuidi poterit. Q. E. D.

Coroll. 1.

46. Si ergo fuerit vel $a = (2m+1)\alpha + 1$ vel $a = (2m+1)\alpha + 4$, vel $a = (2m+1)\alpha + 9$; vel $a = (2m+1)\alpha + 16$ vel etc. tum formula $a^m - 1$ semper erit diuisibilis per $2m+1$, si quidem $2m+1$ fuerit numerus primus.

Coroll. 2.

46. Cum casus, quibus ipse numerus a est diuisibilis per $2m+1$ excludantur, manifestum est in formula $ff \pm (2m+1)\alpha$ numerum f per $2m+1$ diuisibilem esse non posse. Hinc pro f omnes numeri assumi possunt qui per $2m+1$ non sint diuisibiles.

Coroll. 3.

47. Numeri ergo pro f assumendi sunt $(2m+1)k \pm 1$; $(2m+1)k \pm 2$; $(2m+1)k \pm 3$; .... $(2m+1)k \pm m$: in his enim formulis omnes numeri per $2m+1$ non diuisibiles continentur. Hinc sumendis quadratis

dratis formae ipsius a, si quidem partes per $2m+1$ diuisibiles in vnum colligantur, erunt sequentes: $(2m+1)p+1$; $(2m+1)p+4$; $(2m+1)p+9$; .... $(2m+1)p+mm$ quarum numerus est m.

Coroll. 4.

48. Ad valores igitur ipsius a inueniendos, vt a^m-1 per numerum primum $2m+1$ fiat diuisibile, inuestigari oportet residua, quae in diuisione cuiusque numeri quadrati per $2m+1$ remanent. Si enim r fuerit huius modi residuum, erit $(2m+1)p+r$ idoneus valor pro a.

Coroll. 5.

49. Omnia haec residua r erunt autem minora quam $2m+1$, neque tamen omnes numeri minores quam $2m+1$ erunt valores ipsius r; quia numerus valorum ipsius r maior esse nequit quam m. Dabuntur ergo semper m numeri, qui pro r adhiberi non poterunt.

Coroll. 6.

50. Valores vero ipsius r erunt primo omnes numeri quadrati ipso $2m+1$ minores, tum vero residua, quae in diuisione maiorum quadratorum per $2m+1$ remanent, neque tamen vnquam numerus omnium diuersorum valorum ipsius r. maior esse poterit numero m.

Scholion.

51. Vt vsus huius theorematis clarius appareat, atque per exempla numerica illustrari possit, sequentia problemata adiicere visum est, ex quibus non solum veritas theorematis luculentius perspicietur, sed etiam vicissim patebit

tebit, quoties n non habuerit valorem hic assignatum, toties formulam a^m-1 non esse diuisibilem per $2m+1$. Cum igitur haec formula $a^{2m}-1$ semper sit diuisibilis per $2m+1$, quoties a^m-1 diuisionem per $2m+1$ non admittit, toties a^m+1 per $2m+1$ diuisibile esse oportebit.

Exempl. 1.

52. *Inuenire valores ipsius* a, *vt* a^2-1 *fiat diuisibile per* 5.

Residua, quae ex diuisione quadratorum per 5 remanent sunt 1 et 4; hinc necesse est vt sit vel $a=5p+1$ vel $a=5p+4$, siue $a=5p+1$. Priori casu fit $aa-1$ seu $(a-1)(a+1)=5p(5p+2)$ posteriori autem $=(5p-2)5p$. vtroque ergo diuisibilitas per 5 perspicitur. Sin autem fuerit vel $a=5p+2$, vel vel $a=5p+3$ neutro casu formula $aa-1$ per 5 erit diuisibilis.

Exempl. 2.

53. *Inuenire valores ipsius* a, *vt haec forma* a^3-1 *fiat per* 7 *diuisibilis.*

Tria residua, quae in diuisione omnium quadratorum per 7 remanent sunt, 1, 2, 4. Hinc valores ipsius a sunt: $7p+1$; $7p+2$, et $7p+4$, sin autem fuerit vel $a=7p+3$ vel $7p+5$ vel $7p+6$, tum non formula proposita a^3-1 sed haec a^3+1 per 7 fiet diuisibilis.

Exempl. 3.

54. *Inuenire valores ipsius* a *vt haec forma* a^5-1 *fiat per* 11 *diuisibilis.*

Nu-

Numeri quadrati per 11 diuisi dabunt 5 diuersa residua quae sunt: 1, 3, 4, 5, 9. Hinc formula a^5-1 per 11 erit diuisibilis, si fuerit $a = 11p + r$ denotante r vnumquemque ex numeris 1, 3, 4, 5, 9. Sin autem pro a sumatur quidam ex his numeris 2, 6, 7, 8, 10 multiplo quocunque ipsius 11 auctus, tum a^5+1 per 11 erit diuisibile.

Theorema 12.

55. Si fuerit $a = f^3 \pm (3m+1)\alpha$, existente $3m+1$ numero primo, tum haec forma a^m-1 semper erit per $3m+1$ diuisibilis.

Demonstratio.

Ob $3m+1$ numerum primum erit $f^{3m}-1$ diuisibile per $3m+1$. At est $f^{3m}-1 = (f^3)^m - 1$, vnde quoque haec formula $(f^3 \pm (3m+1)\alpha)^m - 1$ erit diuisibilis per $3m+1$. Quare si sumatur $a = f^3 \pm (3m+1)\alpha$, tum haec formula a^m-1 erit per $3m+1$ diuisibilis. Q. E. D.

Coroll. 1.

56. Ad valores ergo ipsius a inueniendos, omnia residua quae oriuntur, si cubi per $3m+1$ diuidantur, notari debent. Vnumquodque enim horum residuorum multiplo ipsius $3m+1$ quocunque auctum dabit valorem idoneum pro a.

Coroll. 2.

57. Cum $3m+1$ esse debeat numerus primus, necesse est vt m sit numerus par, sicque numerus primus $3m+1$ vnitate superabit multiplum senarii. Hinc erunt numeri pro m et $3m+1$ adhibendi sequentes:

m

m 2, 4, 6, 10, 12, 14, 20, 22, 24, 26, 32 etc.
$3m+1$; 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97, etc.

Coroll. 3.

58. Si ergo numeri cubici per hos numeros primos $3m+1$ diuidantur, sequentia residua remanebunt:

Diuisores	Residua
7	1, 6
13	1, 5, 8, 12
19	1, 7, 8, 11, 12, 18
31	1, 2, 4, 8, 15, 16, 23, 27, 29, 30
37	1, 6, 8, 10, 11, 14, 23, 26, 27, 29, 31, 36
	etc.

In his residuis primo occurrunt omnes cubi diuisoribus minores, deinde si quodpiam residuum fuerit r pro diuisore $3m+1$, tum quoque aliud dabitur residuum $=3m+1-r$. si enim cubus f^3 dederit residuum r, cubus $(3m+1-f)^3$ dabit residuum $-r$ seu $3m+1-r$.

Scholion.

59. Notatu hic dignum est numerum residuorum perpetuo esse $=m$, si diuisor fuerit $=3m+1$. Semper ergo dantur tres cubi, quorum radices sint $< 3m+1$, ex quibus idem residuum resultat. Scilicet hi tres cubi 1^3, 2^3, 4^3 per 7 diuisi idem dant residuum $=1$, et hi tres cubi 2^3, 5^3, et 6^3 per 13 diuisi idem dant residuum 8. Praeterea hic notari conuenit, si pro a alii valores praeter hos assignatos capiantur, tum a^m-1 non esse per $3m+1$ diuisibile, quod etsi verum esse facile depre-

prehenditur, tamen eius demonstratio ex praecedentibus non sequitur, pertinetque haec veritas ad id genus, quod nobis nosse, non autem demonstrare licet. His ergo casibus, quibus $a^m - 1$ per $3m + 1$ non est diuisibile, haec formula $a^{2m} + a^m + 1$ diuisionem admittet.

Theorema 13.

60. Si fuerit $a = f^n + (mn + 1)\alpha$ existente $mn + 1$ numero primo, tum haec forma $a^m - 1$ erit diuisibilis per $mn + 1$.

Demonstratio.

Ob $mn + 1$ numerum primum erit $f^{mn} - 1$ diuisibile per $mn + 1$. At est $f^{mn} - 1 = (f^n)^m - 1$, vnde quoque haec forma $(f^n + (mn + 1)\alpha)^m - 1$ erit diuisibilis per $mn + 1$. Quare si ponatur $a = f^n + (mn + 1)\alpha$, haec formula $a^m - 1$ per $mn + 1$ diuidi poterit. Q. E. D.

Coroll. 1.

61. Si ergo potestates exponentis n per numerum primum $mn + 1$ diuidantur, singula residua vel ipsa vel multiplo ipsius $mn + 1$ quocunque aucta idoneos praebebunt valores pro a, vt $a^m - 1$ fiat per $mn + 1$ diuisibile.

Coroll. 2.

62. Hinc si $a^m - 1$ non fuerit per $mn + 1$ diuisibile, tum valor ipsius a in hac expressione $f^n + (mn + 1)\alpha$ non continebitur, seu nulla dabitur potestas exponentis n quae per $mn + 1$ diuisa relinquat a.

 Scho-

Scholion.

63. Propositionis huius conuersa, si omni modo examinetur, quoque vera deprehenditur; ita vt quoties $a^m - 1$ sit diuisibile per $mn + 1$. toties quoque valor ipsius a in formula $f^n \pm (mn + 1)\alpha$ contineatur; seu toties dabitur potestas f^n quae per $mn + 1$ diuisa relinquat a pro residuo. Ita cum obseruassem formulam $2^{64} - 1$ esse per 641 diuisibilem, ob $m = 64$ fiet $n = 10$, dabitur quoque potestas dignitatis decimae, quae per 641 diuisa relinquat 2. Atque reuera huiusmodi potestatem deprehendi esse 96^{10}. Praeterea vero cum $2^{32} - 1$ non sit diuisibile per 641, hoc casu fit $m = 32$ et $n = 20$; nulla igitur datur potestas dignitatis vicesimae, quae per 641 diuisa relinquat 2. Veritas huius posterioris asserti rigorose est euicta, sed adhuc desideratur demonstratio harum propositionum conuersarum: scilicet si $a^m - 1$ fuerit diuisibile per numerum primum $mn + 1$, tum quoque semper a esse numerum in hac formula $f^n \pm (mn + 1)\alpha$ comprehensum. Atque si a non contineatur in formula $f^n \pm (mn + 1)\alpha$ tum quoque $a^m - 1$ per $mn + 1$ diuisionem non admittere. Quarum propositionum si altera demonstrari posset, simul veritas alterius esset euicta. Ceterum theorema hic demonstratum huc redit, vt quoties $f^n - a$ fuerit diuisibile per $mn + 1$, toties quoque formula $a^m - 1$ sit per $mn + 1$ diuisibilis. In hoc genere latius patet theorema sequens.

Theorema 14.

64. Si fuerit $f^n - ag^n$ diuisibile per numerum primum $mn + 1$, tum quoque $a^m - 1$ erit diuisibile per $mn + 1$.

De-

Demonſtratio.

Cum ponatur formula $f^n - ag^n$ diuiſibilis per $mn+1$, erit quoque haec formula $f^{mn} - a^m g^{mn}$, quippe quae per illam diuidi poteſt, diuiſibilis per $mn+1$. At cum $mn+1$ ſit numerus primus, per eum diuiſibilis erit haec forma $f^{mn} - g^{mn}$; vnde quoque differentia $g^{mn}(a^m - 1)$ ſeu ipſa formula $a^m - 1$ per $mn+1$ erit diuiſibilis, propterea quod g per $mn+1$ diuiſionem admittere nequeat, niſi ſimul f per eundem eſſet diuiſibile, qui caſus in noſtro ratiocinio perpetuo excluditur. Q. E. D.

Coroll. 1.

65. Si ergo $a^m - 1$ per $mn+1$ non fuerit diuiſibile, tum quoque nulli dantur numeri f et g vt haec formula $f^n - ag^n$ per $mn+1$ fiat diuiſibilis.

Coroll. 2.

66. Si ſuperioris propoſitionis conuerſa demonſtrari poſſet, tum quoque euictum foret: quoties $f^n - a$ per $mn+1$ diuidi nequeat, tum ne hanc quidem formulam $f^n - ag^n$ diuiſionem per $mn+1$ admittere poſſe, ſimul vero etiam pateret, ſi $f^n - ag^n$ ſit diuiſibile per $mn+1$, tum quoque dari huiusmodi formulam $f^n - a$, quae ſit per $mn+1$ diuiſibilis.

Theorema 15.

67. Si huiusmodi formula $af^n - bg^n$ fuerit diuiſibilis per numerum primum $mn+1$, tum quoque haec formula $a^m - b^m$ erit per $mn+1$ diuiſibilis.

Coroll. 2.

73. Si m ſit numerus par, tum b aeque negatiue atque affirmatiue accipi poteſt, hoc ergo caſu ſi $a^m - b^m$ fuerit diuiſibile per $mn+1$, tum etiam eiusmodi formula $af^n + bg^n$ per $mn+1$ diuiſibilis aſſignari poterit; id quod etiam inde patet, quod n ſit numerus impar, ideoque poteſtas g^n negatiua fieri queat.

Coroll. 3.

74. Simili modo demonſtrabitur, ſi fuerint vt ante m et n numeri inter ſe primi, atque haec formula $a^m - b^m$ ſit diuiſibilis per $mp+1$, tum quoque exhiberi poſſe formulam huiusmodi $af^n - bg^n$ diuiſibilem per $mp+1$.

VARIAE

VARIAE DEMONSTRATIONES GEOMETRIAE.

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Reperitur in commercio epiſtolico Fermatii propoſitio quaedam geometrica, quam Geometris demonſtrandam propoſuit. Quae etſi ad naturam circuli ſpectat, nihilque difficultatis primo intuitu inuoluere videtur, tamen a pluribus Geometris fruſtra eſt ſuſcepta, neque vsquam adhuc eius demonſtratio eſt tradita. Per Analyſin quidem non difficulter eius veritas agnoſcitur, indeque demonſtrationem deriuare non admodum foret arduum, ſed huiusmodi demonſtrationes plerumque ita analyſin olent, vt ab huius artis expertibus vix intelligi queant. Requiritur igitur huius propoſitionis a Fermatio allatae eiusmodi demonſtratio geometrica, quae more veterum Geometrarum ſit adornata, et quae etiam ab iis, qui analyſi non ſint aſſueti, intelligi poſſit. Talem igitur demonſtrationem hic tradam, quae ſequenti lemmate innititur. Tab. II.

Lemmata.

§. 2. Si linea recta AB vtcunque ſecetur in duobus punctis R et S, erit rectangulum ex tota AB in partem mediam RS vna cum rectangulo ex partibus extremis AR et BS aequale rectangulo ex partibus AS et BR, ſeu erit: $AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot BR$. Fig. 1.

$AS^2 + BR^2 + 2AS.BR = AB^2 + RS^2 + 2AB.RS$
Ponatur hic pro RS^2 eius valor $2AR.BS$ fietque
$AS^2 + BR^2 + 2AS.BR = AB^2 + 2AB.RS + 2AR.BS$
At per lemma praemiſſum eſt $AB.RS + AR.BS = AS.BR$ ideoque etiam $2AB.RS + 2AR.BS = 2AS.BR$, quo valore in illa aequalitate ſubſtituto orietur:

$$AS^2 + BR^2 + 2AS.BR = AB^2 + 2AS.BR$$

auferatur vtrinque pars communis $2AS.BR$ ac remanebit:
$AS^2 + BR^2 = AB^2$. Q. E. D.

§. 5. In vulgus deinde nota eſt regula inueniendi aream trianguli ex datis eius tribus lateribus, quae ita ſe habet, vt a ſemiſumma laterum ſingula latera ſeorſim ſubtrahantur et ſolidum ſeu productum ex his tribus reſiduis ortum per ipſam ſemiſummam multiplicetut, tum vero ex iſto producto radix quadrata extrahatur, quae exhibitura ſit aream trianguli propoſiti. Analytice quidem haec regula facile demonſtratur, ac demonſtrationes ex analyſi concinnatae paſſim occurrunt, verum eae a more geometrico non mediocriter diſſident, vt non niſi a lectoribus in Analyſi exercitatis intelligi poſſint. Quocirca iſtius regulae hic demonſtrationem pure geometricam tradam, in qua nullum analyſeos veſtigium percipiatur. Petita eſt ea ex circulo triangulo inſcripto, cuius ſymtomata ab Euclide ſufficienter ſunt expoſita; quibus autem ad demonſtrationem formandam opus habeo, ea in ſequentibus propoſitionibus complectar, quae viam ad memoratae regulae demonſtrationem parabunt.

Theorema

Theorema.

§. 6. Area cuiusque Trianguli ABC aequatur rectangulo ex semisumma laterum in radium circuli inscripti, seu area $\triangle ABC$ est $\frac{1}{2}(AB+AC+BC)OP$. Fig. 4.

Demonstratio.

Ex centro circuli inscripti O in singula latera demittantur perpendicula OPOQ.OR, quae erunt aequalia radio circuli inscripti. Ex O ducantur pariter ad angulos rectae OA.OB.OC quibus triangulum propositum diuidetur in tria triangula AOB, AOC, BOC, eandem altitudinem $OR=OQ=OP$ habentia, et quorum bases sunt latera trianguli AB, AC, BC. Hinc ista triangula iunctim sumta aequantur triangulo cuius basis est summa laterum $AB+AC+BC$, et altitudo radio circuli inscripti OP aequalis, cui cum proinde area ipsius trianguli propositi ABC sit aequalis, haec aequabitur rectangulo ex semisumma laterum in radium circuli inscripti OP, seu erit area $\triangle ABC=\frac{1}{2}(AB+AC+BC)OP$. Q. E. D.

Theorema.

§. 7. Si ex centro O circuli triangulo ABC inscripti in singula latera perpendicula demittantur OP, OQ, OR his latera ita secabuntur, vt posita semisumma laterum $\frac{1}{2}(AB+AC+BC)=S$, futurum sit:
$AR=AQ=S-BC$; $BR=BP=S-AC$ et $CP=CQ=S-AB$. atque $AR+BP+CQ=S$.

Demonstratio.

Nam ob perpendicula OP, OQ, OR inter se aequalia, statim patet fore $AQ=AR$; $BP=BR$ et $CP=CQ$, vnde que multiplicando $S^2 . OP^2 = S . AR . BP . CQ$, hincque radicem quadratam extrahendo habebitur:

$$S . OP = \sqrt{S . AR . BP . CQ}$$

ideoque area trianguli $ABC = \sqrt{S . AR . BP . CQ}$.
sed ex §. 7 patet esse:

$AR = S - BC$; $BP = S - AC$ et $CQ = S - AB$
quibus valoribus substitutis erit.

Area $\triangle ABC = \sqrt{S(S-AB)(S-AC)(S-BC)}$.

Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 10. Hinc etiam concinna expressio pro radio circuli triangulo inscripti OP exhiberi potest. Cum enim sit $S . OP^2 = AR . BP . CQ$ erit $OP^2 = \frac{AR . BP . CQ}{S}$, ideoque $OP = \sqrt{\frac{AR . BP . CQ}{S}}$. Iam ergo pro AR, BP, CQ scriptis valoribus ante indicatis habebitur.

Radius circuli inscripti $OP = \sqrt{\frac{(S-AB)(S-AC)(S-BC)}{S}}$.

Coroll. 2.

§. 11. Quia S denotat semisummam laterum trianguli, ita vt sit $S = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$ erit hoc valore substituto:

$$S-AB = \tfrac{1}{2}AC + \tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}AB = \tfrac{1}{2}(AC + BC - AB)$$
$$S-AC = \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}AC = \tfrac{1}{2}(AB + BC - AC)$$
$$S-BC = \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}AC - \tfrac{1}{2}BC = \tfrac{1}{2}(AB + AC - BC)$$

sic erit: $S(S-AB)(S-AC)(S-BC) =$

$$\tfrac{1}{16}(AB + AC + BC)(AC + BC - AB)(AB + BC - AC)(AB + AC - BC)$$

ideoque area trianguli quoque ita exprimetur.

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(AB + AC + BC)(AC + BC - AB)(AB + BC - AC)(AB + AC - BC)}.$$

Scho-

Scholion.

§. 12. Vltima haec formula pro inuenienda area cuiusque trianguli eſt maxime nota, ac plerumque in elementis geometriae tradi ſolet, etiamſi eius demonſtratio difficulter per elementa confici poſſit. Similis quoque fere regula habetur pro area cuiusque quadrilateri circulo inſcripti inuenienda, quippe quae pari modo ſatis concinne per ſola latera exprimi poteſt. Eius quidem demonſtratio, ſi analyſis in ſubſidium vocetur, non eſt difficilis, ſed qui eam more apud Geometras recepto adornare ſunt conati, maximas experti ſunt difficultates, Cl: quondam Naudaeus non parum in hoc genere laborauit, et geminam huius quoque regulae demonſtrationem protulit in Miſc. Berol. verum vtraque non ſolum maxime eſt intricata et multitudine linearum in figura ductarum obruta, vt ſine ſumma attentione ne capi quidem poſſit, ſed etiam vbique nimis luculenta veſtigia analytici calculi offendunt, Mihi quidem ſequentibus propoſitionibus praemittendis opus eſt.

Theorema.

§. 13. Si quadrilateri circulo inſcripti ABCD Fig. 6. duo latera ſibi oppoſita AB, DC ad occurſum vsque in E producantur, erit area quadrilateri ABCD ad aream trianguli BCE vt $AD^2 - BC^2$ ad BC^2.

Demonſtratio.

Quia tam angulus BAD quam BCE cum angulo BCD conſtituit duos rectos, erit $BAD = BCE$, ſimiliterque $ADC = CBE$, vnde triangula AED et CEB erunt ſimilia, eorumque ergo areae ſe habebunt vt quadrata laterum homologorum, veluti AD et BC: erit itaque $\triangle AED : \triangle CEB = AD^2 : BC^2$ et diuidendo $\triangle AED - \triangle CEB : \triangle CEB = AD^2 - BC^2$ hoc eſt $\square ABCD : \triangle CEB = AD^2 - BC^2 : BC^2$. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 14. Ex cognita ergo area trianguli CEB inuenietur area quadrilateri ABCD: erit namque

$$\square ABCD = \frac{AD^2 - BC^2}{BC^2} . \triangle BEC$$

ſeu ſi area trianguli BEC deſignetur breuitatis gratia littera T, et area quadrilateri ABCD littera Q, erit $Q = \frac{AD^2 - BC^2}{BC^2} . T$.

Coroll. 2.

§. 15. Tum vero quia eſt differentia quadratorum $AD^2 - BC^2 = (AD + BC)(AD - BC)$, erit $\frac{AD^2 - BC^2}{BC^2} = \frac{AD - BC}{BC} . \frac{AD + BC}{BC}$ hincque habebitur haec aequatio

$$Q = \frac{AD - DC}{BC} . \frac{AD + BC}{BC},$$ quae ſumendis quadratis abit in hanc:

$$QQ = \frac{AD - BC}{BC} . \frac{AD - BC}{BC} . \frac{AD + BC}{BC} . \frac{AD + BC}{BC} . T . T$$

Coroll. 3.

§. 16. Ex ſuperiori autem §. 11. colligitur eſſe aream trianguli $BEC = T = \frac{1}{4}\sqrt{(BE + CE + BC)(BE + CE - BC)(BE - CE + BC)(CE - BE + BC)}$ vnde $TT = \frac{1}{16}(BE + CE + BC)(BE + CE - BC)(BE - CE + BC)(CE - BE + BC)$. Hinc ergo prodibit valor quadrati areae quadrilateri ABCD ſeu ipſius QQ combinandis his factoribus ipſius TT cum ante inuentis ita expreſſus

QQ

$$QQ = \tfrac{1}{16} \cdot \frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC} \cdot \frac{(AD-BC)(BE+CE-BC)}{BC} \cdot \frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC} \cdot \frac{(AD+BC)(BC-BE+CE)}{BC}.$$

Coroll. 4.

§. 17. Quam formam ita enunciare licet, vt dicamus quadratum areae ABCD decies sexies sumtum seu 16 QQ aequari producto ex his quatuor factoribus.

I. . . . $\frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC}$

II. . . . . $\frac{(AD-BC)(BE+CE-BC)}{BC}$

III. . . . . . $\frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC}$

IV. . . . . . $\frac{(AD+BC)(BC-BE+CE)}{BC}$.

Theorema.

§. 18. Iisdem positis, quae in theor. praec. sunt assumta erit $BE+CE : BC = AB+CD : AD-BC$.

Demonstratio.

Cum enim triangula BEC et DEA sint similia, erit $BE : DE = BC : AD$ itemque $CE : AE = BC : AD$; vnde ex vtraque prodibit diuidendo

$$BE : DE-BE = BC : AD-BC$$
$$CE : AE-CE = BC : AD-BC$$

Cum igitur tam BE ad DE−BE, quam CE ad AE−CE eandem teneat rationem, vt nempe BC ad AD−BC; etiam summa antecedentium BE+CE ad summam consequentium DE−BE vna cum AE−CE eandem seruabit rationem eritque:

$$BE+CE : DE-BE+AE-CE = BC : AD-BC$$

At est $DE-BE+AE-CE = DE-CE+AE-BE$

$= CD$

$= CE + AB$ ficque erit $BE + CE : AB + CD = BC :$ $AD - BC$ et alternando $BE + CE : BC = AB + CD :$ $AD - BC$. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 19. Cum igitur fit $BE + CE : BC = AB + CD : AD - BC$ erit componendo $BE + CE + BC : BC = AB + CD + AD - BC : AD - BC$ vnde rectangulum extremorum aequale erit rectangulo mediorum, fcilicet: $(AD - BC)(BE + CE + BC) = BC(AB + CD + AD - BC)$ hincque factorum in §. 17 exhibitorum primus erit I. . $\frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC} = AB + CD + AD - BC$

Coroll. 2.

§. 20. Simili modo ex proportione $BE + CE : BC = AB + CD : AD - BC$ orietur diuidendo: $BE + CE - BC : BC = AB + CD - AD + BC : AD - BC$ vnde fequentia rectangula inter fe erunt aequalia: $(AD - BC)(BE + CE - BC) = BC(AB + CD - AD + BC)$ hincque factorum in §. 17 exhibitorum fecundus erit: II. . . $\frac{(AD-BC)(BE+CE-BC)}{BC} = AB + CD - AD + BC$.

Theorema.

§. 21. Iisdem pofitis, fcilicet fi quadrilateri circulo infcripti ABCD duo latera AB, DC ad concurfum vsque in E producantur, erit:

$$CE - BE : AB - DC = BC : AD + BC$$

Demonftratio.

Triangula fimilia BCE et DEA praebent vt ante te has proportiones: $BE:DE=BC:AD$ et $CE:AE=BC:AD$ ex quarum vtraque elicitur componendo

$$BE:DE+BE=BC:AD+BC$$
$$CE:AE+CE=BC:AD+BC$$

Cum ergo tam BE ad $DE+BE$ quam CE ad $AE+CE$ eandem teneat rationem, etiam differentia antecedentium $CE-BE$ ad differentiam consequentium $AE+CE$ demto $DE+BE$ eandem habebit rationem vt BC ad $AD+BC$ erit scilicet:

$$CE-BE:AE+CE-DE-BE=BC:AD+BC$$

At est $AE+CE-DE-BE=AE-BE-DE+CE=AB-CD$ sicque erit $CE-BE:AB-CD=BC:AD+BC$ et alternando $CE-BE:BC=AB-CD:AD+BC$. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 22. Cum igitur hinc sit inuertendo $BC:CE-BE=AD+BC:AB-CD$, erit componendo $BC+CE-BE:BC=AD+BC+AB-CD:AD+BC$. Atque aequatis rectangulis extremorum et mediorum fiet $(AD+BC)(BC+CE-BE)=BC(AD+BC+AB-CD)$ vnde factorum §. 17. exhibitorum quartus erit: IV... $\frac{(AD+BC)(BC+CE-BE)}{BC}=AB+AD+BC-CD$.

Coroll. 2.

§. 23. Simili modo ex proportione $BC:CE-BE=AD+BC:AB-CD$ orietur diuidendo $BC-CE+BE:BC=AD+BC-AB+CD:AD+BC$ hincque erit $(AD+BC)(BC+BE-CE)=BC$

 (AB

(AD+BC+CD−AB) vnde factorum §. 17 exhibitorum tertius erit: III. . . $\frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC} = AD + BC + CD - AB$.

Theorema.

§. 24. Quadrilateri circulo inscripti ABCD area inuenitur, si a semisumma omnium eius laterum singula latera seorsim subtrahantur, haec quatuor residua in se inuicem multiplicentur, atque ex producto radix quadrata extrahatur.

Demonstratio.

Si duo latera opposita AB, CD ad concursum vsque in E producantur, atque quadrilateri ABCD area ponatur $= Q$, vidimus §. 17 valorem 16 QQ aequari producto ex quatuor factoribus, quos eosdem factores in §. §. 19. 20 et §. §. 22. 23 succinctius expressimus, ita vt nunc valor ipsius 16 QQ aequetur producto ex his quatuor factoribus.

I. $\frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC} = AB + CD + AD - BC$

II. $\frac{(AD+BC)(BE+CE-BC)}{BC} = AB + CD - AD + BC$

III. $\frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC} = AD + BC + CD - AB$

IV. $\frac{(AD+BC)(BC-BE+CE)}{BC} = AB + AD + BC - CD$

Hinc ergo erit 16 QQ aequale huic producto $(AB + CD + AD - BC)(AB + CD + BC - AD)(AD + BC + CD - AB)(AB + AD + BC - CD)$. Quod si iam ponatur summa omnium laterum $AB + BC + CD + DA = 2S$ vt semisumma sit $= S$. erit:

2 S

$2S-2AB=BC+CD+DA-AB=$ factori III.
$2S-2BC=AB+CD+DA-BC=$ factori I.
$2S-2CD=AB+BC+DA-CD=$ factori IV.
$2S-2DA=AB+BC+CD-DA=$ factori II.

vnde productum ex his quatuor factoribus erit $(2S-2AB)(2S-2BC)(2S-2CD)(2S-2DA)$, quod binariis seorsim sumtis abit in hanc expressionem: $16(S-AB)(S-BC)(S-CD)(S-DA)$ cui propterea valor ipsius $16QQ$ aequatur. Quare vtrinque per 16 diuiso erit $QQ=(S-AB)(S-BC)(S-CD)(S-DA)$ vnde si radix quadrata extrahatur, fiet: $Q=$ Areae $ABCD=\sqrt{(S-AB)(S-BC)(S-CD)(S-DA)}$. Patet ergo aream quadrilateri ABCD inueniri, si a semisumma laterum S seorsim subtrahantur singula latera AB, BC, CD, DA, haecque quatuor residua $S-AB$, $S-BC$, $S-CD$, $S-DA$ in se inuicem multiplicentur, atque ex producto radix quadrata extrahatur. Q. E. D.

Scholion.

§. 25. His Theorematibus de area trianguli et quadrilateri circulo inscripti demonstratis, quae quidem ipsa satis sunt nota, aliud theorema subiungam nusquam adhuc neque prolatum neque demonstratum. Complectitur id singularem proprietatem omnium quadrilaterorum notatu maxime dignam, quae cum cognita parallelogrammorum natura eximiam habet affinitatem. Quemadmodum enim constat in omni parallelogrammo summam quadratorum ambarum diagonalium aequalem esse summae quadratorum quatuor laterum, ita demonstrabo in omni quadrilatero non parallelogrammo summam quadratorum am-

barum

barum diagonalium semper minorem esse summa quadratorum quatuor laterum, atque adeo defectum facillime posse assignari.

Theorema.

Fig. 7. §. 26. Proposito quocunque trapezio ABCD cum suis diagonalibus AC, BD, si circa bina latera AB, BC compleatur parallelogrammum ABCE, quod cum trapezio tria puncta A, B, C habebit communia, iunganturque reliqua puncta diuersa D et E recta DE, erit summa quadratorum laterum trapezii $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$ maior quam summa quadratorum diagonalium AC^2+BD^2, atque excessus aequabitur quadrato lineae DE: seu erit $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+DE^2$.

Demonstratio.

Ducatur in parallelogrammo ABCE altera diagonalis BE quae ipsi cum trapezio non est communis; tum ponatur CF ipsi AD, et BF ipsi ED parallela et aequalis, et quia BC=AE, istae lineae concurrent in puncto F, vt triangulum CBF simile sit et aequale triangulo AED. Quo facto iungantur lineae AF, DF et EF. Hinc manifestum est fore tam ADCF quam BDEF parallelogrammum; atque diagonales illius esse AC et DF, huius uero BE et DF: vnde per proprietatem parallelogrammorum notam erit

ex ADCF ... $2AD^2+2CD^2=AC^2+DF^2$

ex BDEF ... $2BD^2+2DE^2=BE^2+DF^2$

vnde ex vtraque aequatione valorem DF^2 definiendo habebebitur: $2AD^2+2CD^2-AC^2=2BD^2+2DE^2-BE^2$ $=DF^2$ et AC^2 vtrinque addendo fiet: $2AD^2+2CD^2=2BD^2+2DE^2+AC^2-BE^2$. Iam vero ex natura parallelogrammi ABCE erit $2AB^2+2BC^2=AC^2+BE^2$ quae aequatio ad illam adiecta dabit $2AD^2+2CD^2+2AB^2+2BC^2=2BD^2+2DE^2+2AC^2$ ac p 2 diuidendo obtinebitur $AD^2+CD^2+AB^2+BC^2=BD^2+DE^2+AC^2$ seu $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+DE^2$. At AB, BC, CD, DA sunt quatuor latera trapezii propositi ABCD, et AC, BD eius diagonales vnde summa quadratorum laterum aequalis est summae quadratorum ambarum diagonalium et insuper quadrato lineae DE, qua discrimen trapezii a parallelogrammo exponitur. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 27. Quo magis ergo trapezium a parallelogrammo discrepat, seu quo maius euadit interuallum DE, eo magis summa quadratorum laterum trapezii superabit summam quadratorum diagonalium.

Coroll. 2.

§. 28. Quia igitur in omni parallelogrammo summa quadratorum laterum aequalis est summae quadratorum diagonalium, in omni vero quadrilatero non parallelogrammo maior est, sequitur nullum exhiberi posse quadrilaterum, in quo summa quadratorum laterum minor sit quam summa quadratorum diagonalium.

Coroll. 3.

§. 29. Si vtraque diagonalis AC et BD trapezii propositi ABCD bisecetur, illa in P haec vero in Q, erit recta PQ semissis interualli DE, et DE^2 aequalis erit quadruplo quadrato lineae PQ, vnde excessus summae quadratorum laterum super summam quadratorum diagonalium valebit quadratum lineae PQ quater sumtum.

Coroll. 4.

Fig. 8. §. 30. Theorema ergo propositum sine mentione vllius parallelogrammi ita enunciari poterit: *In omni quadrilatero* ABCD, *si eius diagonales* AC *et* BD *bisecentur in punctis* P *et* Q, *eaque iungantur recta* PQ, *erit summa quadratorum laterum* $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ *aequalis summae quadratorum diagonalium* $AC^2 + BD^2$ *vna cum quadruplo quadrati lineae* PQ: *seu erit*
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2.$$

DE PROPA-

DE PROPAGATIONE PVLSVVM
PER MEDIVM ELASTICVM

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Medium elaſticum in ſtatu aequilibrii verſari nequit, Tab. III. niſi omnes eius particulae aequalibus viribus elaſticis in ſe mutuo agant. Quod ſi autem vna particula adepta fuerit maiorem elaſticitatem, quam reliquae, tum ob ſtatum aequilibrii ſublatum haec ſeſe expandendo, ac reliquas magis comprimendo tamdiu agitabitur, donec perfectum aequilibrium inter omnes vires fuerit reſtitutum. *Particularum enim elaſticarum* eiusmodi eſt indoles, vt quo *magis* expanduntur, eo minorem obtineant vim elaſticam, contra vero, quo magis comprimuntur et in minus volumen rediguntur, earum vis elaſtica augeatur. Quanquam autem hoc incrementum ac decrementum elaſticitatis pro ratione aucti et minuti voluminis diuerſiſſimas proportiones ſequi poteſt, tamen ſi mutatio voluminis fuerit quam minima, augmentum vel decrementum vis elaſticae his ipſis mutationibus proportionale deprehenditur.

§. 2. Difficillima autem maximeque ardua videtur quaeſtio, qua commotio ſingularum particularum medii elaſtici, cum aequilibrium ſemel fuerit ſublatum, quaeritur, ſimul autem reſolutio huius quaeſtionis in phyſica maximi eſt momenti, cum formatio et propagatio ſoni in huiusmodi commotione particularum aeris consistat. Neque etiam amplius dubitare licet, quin ipsum lumen, radiorumque lucidorum propagatio a sublato aequilibrio inter particulas aetheris proficiscatur. Quando enim aeris quaepiam portio in maius minusue spatium compellitur, ob minutam vel auctam eius elasticitatem status aequilibrii cum vicinis aeris particulis turbatur, hincque in istis agitatio oritur, quae sese continuo ad particulas vlteriores extendit, donec vbique tranquillitas fuerit restituta. Hinc igitur sonus, et si in aethere similis agitatio eueniat, inde lumen originem suam trahit.

Fig. 1. §. 3. Cum itaque haec quaestio sit maximi momenti, operam dabo, vt ad eam resoluendam ex primis principiis mechanicae viam sternam. Quo igitur a casu simplicissimo ordiar, primum vnicam considerabo particulam A, quae quidem in se spectata nullius mutationis sit capax, sed quae filis elasticis inertiae expertibus AP et AQ intra parietes firmos P et Q detineatur. Sint autem haec fila seu elastra AP et AQ ita comparata, vt quo fiant breuiora, eo maiori vi elastica polleant; dum autem elongantur, eorum elasticitas diminuatur. His positis manifestum est corpus A fore in aequilibrio, si vtriusque elastri AP et AQ eadem fuerit vis: quod euenire ponamus, si vtriusque elastri longitudo AP et AQ fuerit aequalis. Sit taque $AP = AQ = a$; et vtriusque vis elastica $= g$; quoniam corpusculum A vtrinque aequaliter vrgetur, si semel quieuerit, perpetuo quiescere perseuerabit.

Fig. 2. §. 4. Concipiamus nunc hoc corpusculum A ex situ aequilibrii semel fuisse dimotum, ita vt alterum elastrum

ſtrum longius alterum vero breuius ſit factum. Cum igitur hoc modo ex altera parte vis elaſtica ſit minuta, ex altera vero aucta, neceſſe eſt vt corpuſculum A motum conceperit, quem hic determinabo, in hypotheſi quod elongatio et contractio amborum elaſtrorum ſit minima, ita vt augmentum vel decrementum vis elaſticae ipſi contractioni ſeu elongationi proportionale cenſeri poſſit. Elapſo ergo tempore t peruenerit corpus A, cuius maſſa littera A exprimatur, in ſitum quem figura refert. Ponatur longitudo elaſtri $AP = a + x$; erit ob x prae a valde paruum, eius vis elaſtica $= \frac{ag}{a+x} = g(1 - \frac{x}{a})$: alterius elaſtri AQ longitudo conſequenter erit $= a - x$, eiusque vis elaſtica $= \frac{ag}{a-x} = g(1 + \frac{x}{a})$: vnde corpus A ſecundum directionem AP vrgebitur vi $= \frac{2gx}{a}$.

§. 5. Ponamus tempuſculo dt corpus progredi per elementum ſpatii $= dx$, erit eius celeritas $= \frac{dx}{dt}$. Tempus autem t ita exprimatur, vt haec fractio $\frac{dx^2}{dt^2}$ exhibeat altitudinem celeritati, quam corpus in A habet debitam. Sumto ergo elemento dt conſtante, erit vis ſollicitans $= \frac{2Addx}{dt^2}$, cui aequalis poni debet vis qua corpus actu vrgetur $\frac{2gx}{a}$ quae cum motui renitatur, habebimus hanc aequationem:

$$\frac{2Addx}{dt^2} = -\frac{2gx}{a} \text{ ſeu } A\,addx + gxdt^2 = 0.$$

Multiplicetur haec aequatio per dx, et integretur, erit $A\,adx^2 + gxxdt^2 = gbbdt^2$; vnde fit $dt = \frac{dx\sqrt{Aa}}{\sqrt{g(bb-xx)}}$; et $t = \frac{\sqrt{Aa}}{\sqrt{g}} \text{A ſin.} \frac{x}{b} - C$ hincque $x = b \text{ ſin.} (t + C)\sqrt{\frac{g}{Aa}}$.

§. 6. Vocetur breuitatis gratia $\sqrt{\frac{g}{Aa}} = n$, et mutatis constantibus valor ipsius x ita exprimetur:

$$x = b \text{ fin. } nt + c \text{ cof. } nt$$

quae constantes ex primo aequilibrii turbati statu definiri debent. Posito scilicet $t = 0$, habebitur $x = c$; Deinde cum corporis celeritas sit $= \frac{dx}{dt} = nb \text{ cof. } nt - nc \text{ fin. } nt$, initio, quo $t = 0$, eius celeritas erat $= nb$. Quod si ergo corpus A ipso initio quiescens ponatur, atque intervallum AP tum fuerit $= a + \omega$: fiet $b = 0$, et $c = \omega$; vnde quouis tempore t elapso erit situs corporis A

$$PA = a + x = a + \omega \text{ cof. } nt$$

eiusque celeritas $= -n\omega \text{ fin. } nt$

vbi signum $-$ indicat eius motum versus parietem P fore directum.

§. 7. Corpus ergo A celeritatem habebit maximam, si angulus nt fiat rectus, quo casu fit $PA = a$ ita vt perpetuo in ipso situ aequilibrii celerrime moueatur. Tum vero cum angulus nt ad duos rectos exsurgit, celeritas iterum fit $= 0$, et interuallum $PA = a - \omega$, quod in altera elongatione maxima a puncto medio euenit. Vnde patet corpus alternis motibus circa punctum medium instar penduli motum iri; huncque motum perpetuo esse duraturum, nisi quatenus a resistentia diminuatur. Pendulum igitur simplex assignari poterit, cuius motus oscillatorius conueniat cum isto corporis A motu reciproco; reperietur autem longitudo huius penduli simplicis isochroni $= \frac{Aa}{2g} = \frac{1}{2nn}$. Quod si ergo fiat $nt = 180°$, vt sit $t = \frac{180°}{n}$; tum tempus t aequabitur tempori vnius oscillationis

lationis penduli, cuius longitudo $= \frac{1}{2nn}$. Hinc generaliter, si angulus 180° exprimatur per π, reperiaturque tempus $t = \pi m$, tum hoc tempus cognoscetur in mensura consueta, quoniam aequabitur durationi vnius oscillationis penduli cuius longitudo est $= \frac{1}{2}mm$: quae mensura in sequentibus adhiberi poterit.

§. 8. Casu hoc primo eoque facillimo expedito Fig. 1. contemplemur duo corpuscula A et B, quae cum inter se tum inter parietes immobiles P et Q elastris PA, AB, BQ detineantur. Sint corpora ambo inter se aequalia, et in aequilibrio constituta, quando tria interualla AP, AB, BQ fuerint aequalia. Ponatur hoc casu vniuscuiusque elastri longitudo $= a$ et vis elastica $= g$: itemque vtriusque corporis massa $=$ A. Quodsi iam corpus A ex statu aequilibrii deturbatur, dum propius vel ad P vel ad B *impellitur*, corpus quoque B mox ad motum concitabitur, hocque vicissim in A aget; vnde motus in vtroque orietur, qui a casu praecedente maxime discrepabit, neque amplius motui oscillatorio similis erit, atque ob hoc ipsum multo difficilius definietur. Ad eum autem resoluendum ponamus elapso tempore $= t$, ambo corpora in punctis A et B versari, esseque:

$$PA = a + x;\ AB = a + y;\ BQ = a + z$$

ita vt sit $x + y + z = 0$.

§. 9. Erit ergo vis elastica elastri $AP = g(1 - \frac{x}{a})$ elastri $AB = g(1 - \frac{y}{a})$ et elastri $BQ = g(1 - \frac{z}{a})$ vnde corpus A versus Q propelletur vi $= \frac{g(y-x)}{a}$, et corpus B vi $= \frac{g(z-y)}{a}$. Cum iam sit $PA = a + x$, erit corporis

A

A celeritas $=\frac{dx}{dt}$, et vis ad eius motum requisita $=\frac{2Addx}{dt^2}$, quae ipsi vi $\frac{g(y-x)}{a}$ aequalis esse debet. Deinde ob PB $=2a+x+y$, erit corporis B celeritas $=\frac{dx+dy}{dt}$ et vis ad eius motum requisita $=\frac{2A(ddx+ddy)}{dt^2}$ ipsi $\frac{g(z-y)}{a}$ aequanda; vnde consequimur has binas aequationes: $\frac{2Addx}{dt^2}=\frac{g(y-x)}{a}$; $\frac{2A(ddx+ddy)}{dt^2}=\frac{g(z-y)}{a}$ quarum illa ab hac subtracta relinquit: $\frac{2Addy}{dt^2}=\frac{g(z-2y+x)}{a}$ existente $x+y+z=a$.

§. 10. Haec posterior aequatio ob $x+z=-y$ abibit in hanc: $\frac{2Addy}{dt^2}=-\frac{3gy}{a}$, quae per dy multiplicata et integrata dabit $\frac{2Ady^2}{dt^2}=C-\frac{3gyy}{a}$; vnde fit $dt=\frac{dy\sqrt{2Aa}}{\sqrt{3g(bb-yy)}}$, sit vt supra $\sqrt{\frac{g}{Aa}}=n$ erit $ndt\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$: vnde integrando obtinebitur $y=b\sin.\, nt\sqrt{\frac{3}{2}}+c\cos.\, nt\sqrt{\frac{3}{2}}$. Aequatio vero prior hanc induet formam: $\frac{2ddx}{dt^2}=nn(y-x)$, quae transit in $\frac{2ddx}{nndt^2}+x=b\sin.\, nt\sqrt{\frac{3}{2}}+c\cos.\, nt\sqrt{\frac{3}{2}}$. Ad quam integrandam ponatur $x=vu$, et aequatio $\frac{2vddu+4dvdu+2uddv}{nndt^2}+vu=b\sin.\, nt\sqrt{\frac{3}{2}}+c\cos.\, nt\sqrt{\frac{3}{2}}$ discerpatur in has duas: $\frac{2ddu}{nndt^2}+u=0$ et $\frac{2uddv+4dudv}{nndt^2}=b\sin.\, nt\sqrt{\frac{3}{2}}+c\cos.\, nt\sqrt{\frac{3}{2}}$, quarum prior integrata dabit $u=\mathfrak{a}\sin.\, nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\mathfrak{b}\cos.\, nt\sqrt{\frac{1}{2}}$ vnde et valor ipsius v, hincque porro $x=vu$ inveniri poterit.

§. 11. Ponatur breuitatis gratia $b\sin.\, nt\sqrt{\frac{3}{2}}+c\cos.\, nt\sqrt{\frac{3}{2}}=T$, erit $2uddv+4dudv=nnTdt^2$; quae per u multiplicata et integrata dabit $2uudv=nndt\int Tudt$

et

et $v = \frac{1}{2} nn \int \frac{dt}{uu} \int T u dt$. At valores u et T seu y in sequentes formas transmutari possunt: vt sit

$$T = y = b \sin. nt \sqrt{\tfrac{3}{2}} + c \cos. nt \sqrt{\tfrac{3}{2}} = E \cos. (nt \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \mu)$$

$$u = \alpha \sin. nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \beta \cos. nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} = F \cos. (nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \nu)$$

vnde fit $\int \frac{dt}{uu} = \frac{\frac{1}{2}}{F n \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sin. (nt \sqrt{\frac{1}{2}} + \nu)}{\cos. (nt \sqrt{\frac{1}{2}} + \nu)}$: atque

$T u = EF \cos. (nt \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \mu) \cos. (nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \nu)$. Ponatur

$\int T u dt = P \sin. (nt \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \mu) \cos. (nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \nu) + Q \cos. (nt \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \mu) \sin. (nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \nu)$ fietque differentiando

$$T u = \begin{matrix} n P \sqrt{\tfrac{3}{2}} \\ + n Q \sqrt{\tfrac{1}{2}} \end{matrix} \cos. (nt \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \mu) \cos. (nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \nu) \begin{matrix} - n P \sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ - n Q \sqrt{\tfrac{3}{2}} \end{matrix}$$

$\sin. (nt \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \mu) \sin. (nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \nu)$ vnde est $P = -Q \sqrt{3}$;

et $\frac{nQ - 3nQ}{\sqrt{2}} = EF$. ergo $Q = \frac{-EF}{n\sqrt{2}}$; et $P = \frac{EF\sqrt{3}}{n\sqrt{2}}$.

Ex his porro fiet: $v = \frac{En}{2F\sqrt{2}}$

$$\int \frac{dt (\sqrt{3} \sin (nt \sqrt{\frac{3}{2}} + \mu) \cos (nt \sqrt{\frac{1}{2}} + \nu) - \cos (nt \sqrt{\frac{3}{2}} + \mu) \sin (nt \sqrt{\frac{1}{2}} + \nu))}{\cos (nt \sqrt{\frac{1}{2}} + \nu)^2}$$

seu $v = \frac{-E. \cos. (nt \sqrt{\frac{3}{2}} + \mu)}{2 F \cos. (nt \sqrt{\frac{1}{2}} + \nu)} + G$ ideoque $x = G u - \frac{1}{2} y$; Valoribus ergo pro u et y restitutis erit

$$x = \alpha \sin. nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \beta \cos. nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} b \sin. nt \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{1}{2} c \cos. nt \sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$y = b \sin. nt \sqrt{\tfrac{3}{2}} + c \cos. nt \sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

§. 12. Elapso ergo tempore t, erit corpus A in A ita vt sit

$PA = a + \alpha \sin. nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \beta \cos. nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} b \sin. nt \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{1}{2} c \cos. nt \sqrt{\tfrac{3}{2}}$ eiusque celeritas, qua a pariete P recedit erit: $= n \alpha \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cos. nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} - n \beta \sqrt{\tfrac{1}{2}} \sin nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} nb \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cos. nt \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} nc \sqrt{\tfrac{3}{2}} \sin nt \sqrt{\tfrac{3}{2}}$.

Eodemque momento alterum corpus erit in B vt sit

$PB = 2a + \alpha \sin. nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \beta \cos. nt \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} b \sin. nt \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}$

$c\,\text{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ eiusque celeritas qua pariter a pariete P remouetur, erit $= n\alpha\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\text{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - n\beta\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\text{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}nb\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\text{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{1}{2}nc\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\text{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$. Corporis ergo A celeritas erit maxima iis temporibus quae ex hac aequatione definientur:

$$0 = -\alpha\,\text{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \beta\,\text{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{3}{2}b\,\text{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{3}{2}c\,\text{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

Corporis vero B celeritas erit maxima, quando t habuerit valorem ex hac aequatione

$$0 = -\alpha\,\text{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \beta\,\text{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{3}{2}b\,\text{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{3}{2}c\,\text{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

§. 13. Ponamus ipso initio, quo erat $t = 0$, ambo corpora quieuisse; alterum B quidem in situ suo naturali alterum vero A versus P retractum fuisse e situ suo aequilibrii, ita vt eius distantia AP fuerit $= a - \omega$. Prior conditio praebet hos valores $\alpha = 0$, et $b = 0$; Deinde ob $AP = a - \omega$ fit $\beta - \tfrac{1}{2}c = -\omega$, et ob $BP = 2a$ erit $\beta + \tfrac{1}{2}c = 0$: ideoque $\beta = -\tfrac{1}{2}\omega$, et $c = \omega$. Hoc ergo casu postquam elapsum fuerit tempus t, erit

$$PA = a - \tfrac{1}{2}\omega\,\text{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\omega\,\text{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$PB = 2a - \tfrac{1}{2}\omega\,\text{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\omega\,\text{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

Celeritas ipsius $A = \tfrac{n}{2}\omega\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\text{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{n}{2}\omega\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\text{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$

Celeritas ipsius $B = \tfrac{n}{2}\omega\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\text{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{n}{2}\omega\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\text{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$

Quare corpus A maximam acquirit celeritatem cum fuerit $\text{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + 3\,\text{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} = 0$. corporis vero B celeritas erit maxima, quando fiet $\text{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 3\,\text{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$. Corporis vero A celeritas euanescet, quoties fit $\text{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{3}\,.\,\text{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} = 0$ et corporis B celeritas ad nihilum redigitur, quando est: $\text{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{3}\,.\,\text{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$.

§. 14. Circa motus ergo initium, quando angulus nt est adhuc valde paruus, celeritas corporis ita se habebit, vt sit

cele-

celeritas corporis A $= nn\omega t - \frac{5}{24} n^4 \omega t^3$ et
celeritas corporis B $= -\frac{1}{2} nn\omega t + \frac{1}{6} n^4 \omega t^3$
Initio ergo corpus A a pariete P recedit, corpus vero B ad eundem accedit, donec ad quietem redigatur; atque interea habuerit necesse est maximam celeritatem. Postquam autem versus P accedere desierit, tum demum versus Q promouebitur, et cum acquisierit maximum celeritatis gradum, pulsum acceptum maxima vi in parietem Q exerere erit censendum. Cum igitur corpus B, postquam corpus A iam habuit maximam celeritatem, motu versus Q directo maximum velocitatis gradum adipiscatur, hinc iam euidens est tempore opus esse, antequam pulsus ex corpore A in corpus B transferatur; siquidem in quauis medii elastici particula pulsum tum inesse assumamus, cum maximo velocitatis gradu versus parietem Q mouetur. Si enim in Q organum sensus concipiatur, id hoc momento maximam patietur impressionem.

§. 15. Patet ergo haec duo corpora A et B diversissimos motus recipere posse, prout initio tam eorum situs quam motus fuerit diuersimode comparatus. Quo autem in eam agitationem accuratius inquiramus, cuiusmodi in productione soni et luminis oriri solet, ponamus initio corpus A ex situ suo quietis per interuallum valde paruum $= \omega$ versus P diductum, ibique detentum fuisse, quoad alterum corpus B cedendo quieuerit, tum vero corpus A subito dimitti. Status ergo iste initialis ita erit comparatus, vt posito $t = 0$, vtriusque corporis celeritas sit nulla: vnde fit $\alpha = 0$ et $b = 0$: Deinde quia

 corpus

corpus B ipso initio nulla vi afficitur, erit quoque eius acceleratio nulla, hincque differentiale ipsius celeritatis $= 0$; ex quo erit $\beta + \frac{3}{2}c = 0$. Denique cum isto motus initio sit $PA = a - \omega$ erit $\beta - \frac{1}{2}c = -\omega$; ideoque $c = \frac{1}{2}\omega$ et $\beta = -\frac{3}{4}\omega$. Quibus valoribus substitutis, postquam elapsum fuerit tempus t, erit

$$PA = a - \tfrac{3}{4}\omega \operatorname{cos}. nt\surd\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\omega \operatorname{cos}. nt\surd\tfrac{3}{2}$$

$$PB = 2a - \tfrac{3}{4}\omega \operatorname{cos}. nt\surd\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\omega \operatorname{cos}. nt\surd\tfrac{3}{2}$$

Celeritas ipsius $A = \frac{3}{4\surd 2} n\omega \operatorname{sin}. nt\surd\frac{1}{2} + \frac{\surd 3}{4\surd 2} n\omega \operatorname{sin}. nt\surd\frac{3}{2}$

Celeritas ipsius $B = \frac{3}{4\surd 2} n\omega \operatorname{sin}. nt\surd\frac{1}{2} - \frac{\surd 3}{4\surd 2} n\omega \operatorname{sin}. nt\surd\frac{3}{2}$.

§. 16. Si tempus elapsum t adhuc fuerit tam paruum vt anguli $nt\surd\frac{1}{2}$ et $nt\surd\frac{3}{2}$ sit minimi; quia tum erit proxima:

$$\operatorname{sin}. nt\surd\tfrac{1}{2} = nt\surd\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{12} n^3 t^3 \surd\tfrac{1}{2}$$

$$\operatorname{sin}. nt\surd\tfrac{3}{2} = nt\surd\tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{12} n^3 t^3 \surd\tfrac{3}{2}$$ erit

Celeritas ipsius $A = \frac{3}{4} nnt\omega - \frac{1}{8} n^4 t^3 \omega$

Celeritas ipsius $B = \frac{1}{16} n^4 t^3 \omega$

Statim ergo ab initio corpus B tardissime moueri incipit cum eius celeritas se habeat ad celeritatem corporis A vt $nntt$ ad 12: nt autem sit fractio minima. Tempore ergo quopiam opus est, antequam corpus B sensibiliter moueri incipiat. Inuestigemus ergo momenta, quibus vtrumque corpus maximam celeritatem attingit. Ac primo quidem corpus A celerrime mouebitur, cum fuerit: $\operatorname{cos}. nt\surd\frac{1}{2} = \operatorname{cos}. nt\surd\frac{3}{2} = 0$.

Corpus vero B celeritatem habebit maximam, quando sit $\operatorname{cos}. nt\surd\frac{1}{2} = \operatorname{cos}. nt\surd\frac{3}{2}$.

§. 17.

§. 17. Definiamus primum momenta, quibus corpus A maximo celeritatis gradu concitatur, et quia hoc fit, quando summa cosinuum angulorum $nt\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $nt\sqrt{\frac{3}{2}}$ euanescit: primus casus habebitur, si

$$nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\pi - s \text{ et } nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}\pi + s$$

vnde fit $\frac{nt(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}} = \pi$ et $nt = \frac{\pi\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ seu $t = \frac{\pi\sqrt{2}}{(1+\sqrt{3})n}$; quod tempus definitur vna oscillatione penduli, cuius longitudo est $= \frac{1}{(1+\sqrt{3})^2 nn} = \frac{Aa}{(1+\sqrt{3})^2 g}$. erit autem hoc casu $s = \frac{1}{2}\pi - \frac{\pi}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\pi}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{\pi}{(1+\sqrt{3})^2}$: et celeritas ipsius $A = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} n\omega \cos. \frac{\pi}{(1+\sqrt{3})^2}$. Dehinc vero iterum maximum celeritatis gradum acquirit, si fit $nt\sqrt{\frac{1}{2}} = \pi + s$ et $nt\sqrt{\frac{3}{2}} = 2\pi - s$ seu $nt\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3\pi}{1+\sqrt{3}}$, et $s = \frac{(2-\sqrt{3})\pi}{1+\sqrt{3}}$. Tertio quoque maxima celeritas dabitur in corpore A cum fuerit: $nt\sqrt{\frac{1}{2}} = \pi + s$ et $nt\sqrt{\frac{3}{2}} = 2\pi + s$ vnde fit $nt\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}-1}$, et $s = \frac{(2-\sqrt{3})\pi}{\sqrt{3}-1}$. Generaliter vero corpus A toties habebit maximum celeritatis gradum, quoties fuerit $nt\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{(2i+1)\pi}{\sqrt{3}\pm 1}$ denotante i numerum integrum quemcunque.

§. 18. Corpus autem alterum B maximam celeritatem consequitur, quando fit:

$$\cos. nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \cos. nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

primum ergo hoc euenit quando $nt\sqrt{\frac{1}{2}} = \pi - s$ et $nt\sqrt{\frac{3}{2}} = \pi + s$, seu $nt\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{1+\sqrt{3}}$, ideoque $t = \frac{2\pi\sqrt{2}}{(1+\sqrt{3})n}$. Cum igitur corpus A primum maximae celeritatis gradum nanciscatur elapso tempore $t = \frac{\pi\sqrt{2}}{(1+\sqrt{3})n}$, patet tempus quo corpus B maximam celeritatem acquirit duplo maius esse tempore, quo corpori A maximus celeritatis gradus primum

mum inducitur. Si ergo pulſus tum effectum exerere cenſeatur, cum quaeque particula citiſſime mouetur, pulſus a particula A in particulam B hoc eſt per interuallum a transfertur tempore $t = \frac{\pi\sqrt{2}}{(1+\sqrt{3})n} = \frac{\pi\sqrt{2Aa}}{(1+\sqrt{3})\sqrt{g}}$.

§. 19. Quodſi ergo ponamus pulſum eadem celeritate per reliquas vltra Q ſequentes medii elaſtici partes propagari, et ſi multitudo particularum aliam formulam ſit ſuppeditatura, hinc tempus, quo pulſus ad quamuis diſtantiam transfertur definiri poterit. Sit enim a diſtantia propoſita; eritque multitudo particularum ſeu maſſa A ipſi longitudini a proportionalis. Atque ſi vis elaſtica medii per pondus columnae eiusdem medii exprimatur, ita vt g ſit longitudo columnae; cuius pondus aequetur vi elaſticae, pro A ipſa longitudo poni poterit, atque ideo pulſus per ſpatium a propagabitur tempore $t = \frac{\pi a\sqrt{2}}{(1+\sqrt{3})\sqrt{g}}$: quae formula ſi diuidatur per 250, et longitudines a et g in particulis milleſimis pedis Rhenani exprimantur, exhibebit tempus in minutis ſecundis.

§. 20. Si in hac hypotheſi pro medio elaſtico, per quod pulſus propagatur, aerem ſubſtituamus, erit eius elaſticitas $g = 27980$ ped. Rhen. Vnde tempus quo pulſus in aere ſeu ſonus per interuallum $= a$ propagatur erit $= \frac{\pi a\sqrt{2}}{250(1+\sqrt{3})\sqrt{27980000}}$ minutorum ſecundorum. Hinc ergo primum patet tempora ſpatiis eſſe proportionalia, pulſusque motu vniformi propagari. Si ergo ponatur $\frac{\pi a\sqrt{2}}{250(1+\sqrt{3})\sqrt{27980000}} = 1$ prodibit ſpatium a per quod ſonus vno minuto ſecundo propagatur, quod erit in partibus milleſimis pedis rhenani: $a = \frac{250(1+\sqrt{3})\sqrt{13990000}}{\pi}$ ideoque in

pedi-

pedibus rhenanis $a = \frac{(1+\surd 3)\surd 13990000}{4\pi} = \frac{(1+\surd 3)\surd 874375}{\pi}$ quae formula euoluta dat $a = 813$ ped. Constat autem sonum minuto secundo peragrare spatium circiter 1000 pedum; quod accrementum a multitudine particularum oritur.

§. 21. Antequam autem plures particulas contemplemur, operae pretium erit annotasse ambobus corporibus A et B initio eiusmodi situm tribui posse, vt motu regulari ad similitudinem penduli oscillantis moueantur. Hoc autem duplici modo euenire potest, si quidem vtrumque corpus ab initio quiescere ponamus, ita vt sit $\alpha = 0$, et $b = 0$. Primum scilicet huiusmodi motus orietur si fuerit $c = 0$, et $\mathfrak{C} = -\omega$, quo casu fit: $PA = a - \omega \cos. nt\surd\frac{1}{2}$; $PB = 2a - \omega \cos. nt\surd\frac{1}{2}$; motusque conformis erit motui penduli, cuius longitudo est $= \frac{1}{nn} = \frac{Aa}{g}$. Deinde quoque motus oscillatorius simplex orietur si fit $\mathfrak{C} = c$, et $c = 2\omega$, vt fit: $PA = a - \omega \cos. nt\surd\frac{3}{2}$ et $PB = 2a + \omega \cos. nt\surd\frac{3}{2}$ hocque casu longitudo penduli simplicis isochroni erit $= \frac{1}{3nn} = \frac{Aa}{3g}$. Ad oscillationes scilicet prioris generis producendas, initio ambo corpora per aequalia interualla ex locis suis naturalibus in eandem plagam deduci debent; pro posteriori vero genere in plagas oppositas. Posteriori autem casu oscillationes celeriores erunt, quam priori.

§. 22. Sint nunc tria corpuscula A, B, C aequalia filis elasticis inuicem connexa, quae in aequilibrio versentur cum aequalibus interuallis, tum inter se, tum a parietibus P et Q distent. Ponatur vt ante vniuscuiusque massa $= A$, distantia binorum contiguorum naturalis $= a$, et ig. 4.

et vis elaſtica in hoc ſtatu $= g$. Agitata autem ſint haec corpuſcula vtcunque, ac poſt tempus t peruenerint in ſitum figura exhibitum, in quo ſit:

$PA = a + x$; $AB = a + y$; $BC = a + z$; et $CQ = a + v$

erit $x + y + z + v = 0$.

Erit ergo vis elaſtica fili $PA = g(1 - \frac{x}{a})$; fili $AB = g(1 - \frac{y}{a})$ fili $BC = g(1 - \frac{z}{a})$ et fili $CQ = g(1 - \frac{v}{a})$. Vires autem ad ſingulorum corporum motus conſeruandos requiſitae ſunt:

pro corpore A $= \frac{2Addx}{dt^2}$

pro corpore B $= \frac{2A(ddx + ddy)}{dt^2}$

prò corpore C $= \frac{2A(ddx + ddy + ddz)}{dt^2}$.

§. 23. Ob tenſionem vero ſingulorum elaſtrorum corpus A reuera ſecundum directionem PQ vrgetur vi $= \frac{g(y-x)}{a}$; Corpus B vi $= \frac{g(z-y)}{a}$; Corpus C vi $= \frac{g(v-z)}{a}$ Poſito ergo breuitatis gratia $V \frac{g}{2Aa} = n$ ſeu $\frac{g}{2Aa} = nn$, habebuntur ſequentes aequationes:

$$\frac{ddx}{dt^2} = nn(y - x)$$

$$\frac{ddx + ddy}{dt^2} = nn(z - y)$$

$$\frac{ddx + ddy + ddz}{dt^2} = nn(v - z)$$

ex quibus cum hac $x + y + z + v = 0$ coniunctis motus ad quoduis tempus determinabitur.

§. 24. Quoniam ex praecedentibus forma valorum x, y, z, et v iam colligi poteſt, ponamus:

$$x = \alpha \text{ coſ. } npt + \mathfrak{A} \text{ ſin. } npt$$

$$y = \beta \text{ coſ. } npt + \mathfrak{B} \text{ ſin. } npt$$

$$z = \gamma \text{ coſ. } npt + \mathfrak{C} \text{ ſin. } npt$$

$$v = \delta \text{ coſ. } npt + \mathfrak{D} \text{ ſin. } npt$$

erit

erit primo: $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ et $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}=0$.
Deinde erit poſito dt conſtante:

$$\frac{ddx}{dt^2}=-\alpha nnpp \text{ coſ. } npt-\mathfrak{A}\, nnpp \text{ ſin. } npt$$

$$\frac{ddy}{dt^2}=-\beta nnpp \text{ coſ. } npt-\mathfrak{B}\, nnpp \text{ ſin. } npt$$

$$\frac{ddz}{dt^2}=-\gamma nnpp \text{ coſ. } npt-\mathfrak{C}\, nnpp \text{ ſin. } npt$$

vnde ſequentes orientur aequationes:

$$\begin{array}{l|l} -\alpha pp=\beta-\alpha & -\mathfrak{A}pp=\mathfrak{B}-\mathfrak{A} \\ -(\alpha+\beta)pp=\gamma-\beta & -(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})pp=\mathfrak{C}-\mathfrak{B} \\ -(\alpha+\beta+\gamma)pp=\delta-\gamma & -(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})pp=\mathfrak{D}-\mathfrak{C} \end{array}$$

§. 25. Manifeſtum ergo eſt ex ſimilitudine harum aequationum coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ſimili modo determinari, quo coefficientes α, β, γ, δ. Hos autem inveſtigantes inueniemus:

$$\beta=\alpha-\alpha pp; \qquad \alpha+\beta=2\alpha-\alpha pp$$

$$\gamma=\beta-(\alpha+\beta)pp; =\alpha-3\alpha pp+\alpha p^4$$

$$\alpha+\beta+\gamma=3\alpha-4\alpha pp+\alpha p^4$$

$$\delta=\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)pp=\alpha-6\alpha pp+5\alpha p^4-\alpha p^6.$$

Quare cum ſit $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ habebitur

$$0=4-10pp+6p^4-p^6$$

cuius aequationis factores ſunt:

$$0=(2-pp)(2-4pp+p^4)$$

vnde pro pp ſequentes tres valores reperiuntur:

$$pp=2;\ pp=2+\sqrt{2};\ pp=2-\sqrt{2}.$$

§. 26. Triplices hi valores pro pp inuenti sequentes praebebunt coefficientes:

$pp = 2$	$pp = 2 + \sqrt{2}$	$pp = 2 - \sqrt{2}$
$\alpha = \alpha$	$\alpha = + \alpha$	$\alpha = + \alpha$
$\beta = - \alpha$	$\beta = - (1 + \sqrt{2}) \alpha$	$\beta = - (1 - \sqrt{2}) \alpha$
$\gamma = - \alpha$	$\gamma = + (1 + \sqrt{2}) \alpha$	$\gamma = + (1 - \sqrt{2}) \alpha$
$\delta = + \alpha$	$\delta = - \alpha$	$\delta = - \alpha$
$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$	$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$	$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$
$\mathfrak{B} = - \mathfrak{A}$	$\mathfrak{B} = - (1 + \sqrt{2}) \mathfrak{A}$	$\mathfrak{B} = - (1 - \sqrt{2}) \mathfrak{A}$
$\mathfrak{C} = - \mathfrak{A}$	$\mathfrak{C} = + (1 + \sqrt{2}) \mathfrak{A}$	$\mathfrak{C} = + (1 - \sqrt{2}) \mathfrak{A}$
$\mathfrak{D} = + \mathfrak{A}$	$\mathfrak{D} = - \mathfrak{A}$	$\mathfrak{D} = - \mathfrak{A}$

Cum igitur pro pp triplicem valorem inuenerimus, in expressionibus intergralibus assumtis termini sunt triplicandi; eritque:

$$x = \begin{cases} + \alpha \cos. nt\sqrt{2} + \alpha' \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \alpha'' \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \\ + \mathfrak{A} \sin. nt\sqrt{2} + \mathfrak{A}' \sin. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \mathfrak{A}'' \sin. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} - \alpha \cos. nt\sqrt{2} - (1+\sqrt{2}) \alpha' \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - (1-\sqrt{2}) \alpha'' \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \\ - \mathfrak{A} \sin. nt\sqrt{2} - (1+\sqrt{2}) \mathfrak{A}' \sin. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - (1-\sqrt{2}) \mathfrak{A}'' \sin. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} - \alpha \cos. nt\sqrt{2} + (1+\sqrt{2}) \alpha' \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + (1-\sqrt{2}) \alpha'' \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \\ - \mathfrak{A} \sin. nt\sqrt{2} + (1+\sqrt{2}) \mathfrak{A}' \sin. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + (1-\sqrt{2}) \mathfrak{A}'' \sin. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} + \alpha \cos. nt\sqrt{2} - \alpha' \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - \alpha'' \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \\ + \mathfrak{A} \sin. nt\sqrt{2} - \mathfrak{A}' \sin. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - \mathfrak{A}'' \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \end{cases}$$

§. 27. Si assumamus motus initio, quo erat $t = 0$, singula corpora quieuisse, coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ nulli sunt statuendi, sicque post elapsum tempus t situs corporum sequenti modo determinabitur:

$$PA = a + \alpha \cos nt\sqrt{2} + \alpha' \cos nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \alpha'' \cos nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$

$$PB = 2a + \ast - \alpha'\sqrt{2} \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \alpha''\sqrt{2} \cos nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$

$$PC = 3a - \alpha \cos. nt\sqrt{2} + \alpha' \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \alpha'' \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}.$$

Hinc

Hinc porro cognoſcentur ſingulorum corporum celeritates, erit enim celeritas ſecundum directionem PQ corporis

$$A = -n\alpha\sqrt{2}\,.\sin.nt\sqrt{2} - n\alpha'\sqrt{(2+\sqrt{2})}\,\sin.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - n\alpha''\sqrt{(2-\sqrt{2})}.\sin.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$B = +n\alpha'\sqrt{(4+2\sqrt{2})}.\sin.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - n\alpha''\sqrt{(4-2\sqrt{2})}.\sin.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$C = +n\alpha\sqrt{2}.\sin.nt\sqrt{2} - n\alpha'\sqrt{(2+\sqrt{2})}.\sin.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - n\alpha''\sqrt{(2-\sqrt{2})}.\sin.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$

Quae expreſſiones ſi denuo differentientur, prodibunt accelerationes ſingulorum corporum ſecundum plagam PQ.

$$A = -2nn\alpha\cos.nt\sqrt{2} - (2+\sqrt{2})nn\alpha'\cos.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - (2-\sqrt{2})nn\alpha''\cos.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$B = +(2+\sqrt{2})nn\alpha'\sqrt{2}.\cos.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - (2-\sqrt{2})nn\alpha''\sqrt{2}.\cos.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$C = +2nn\alpha\cos.nt\sqrt{2} - (2+\sqrt{2})nn\alpha'\cos.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - (2-\sqrt{2})nn\alpha''\cos.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$

§. 28. Ponamus nunc corpus A initio de ſitu ſuo quietis deductum fuiſſe per ſpatiolum $= \omega$ verſus P, ibique tamdiu fuiſſe detentum, donec reliqua corpora ſe ad ſtatum aequilibrii compoſuerint; tum vero corpus A ſubito dimitti, ſicque motum paulatim in corpora B et C transferri. Quo igitur formulas inuentas ad hunc caſum accommodemus, primo erit:

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = -\omega$$

Deinde quia reliqua corpora B et C ipſo motus initio nullam accelerationem patiuntur, erit:

$$(2+\sqrt{2})\alpha'\sqrt{2} = (2-\sqrt{2})\alpha''\sqrt{2}$$

et $2\alpha = (2+\sqrt{2})\alpha' + (2-\sqrt{2})\alpha'' = 2(2-\sqrt{2})\alpha''$

ergo $\alpha'' = \frac{\alpha}{2-\sqrt{2}}$; et $\alpha' = \frac{\alpha}{2+\sqrt{2}}$

ideoque $\alpha' + \alpha'' = 2\alpha$; et $3\alpha = -\omega$. Quamobrem habebimus:

$\alpha = -\frac{1}{3}\omega$; $\alpha' = -\frac{1}{3}\omega(2-\sqrt{2})$; $\alpha'' = -\frac{1}{3}\omega(2+\sqrt{2})$.

§. 29. His igitur valoribus pro α, α', α'' inuentis, momenta aſſignare licet, quibus ſingula corpora maximum celeritatis gradum adipiſcuntur. Ac primo quidem corpus A celerrime mouebitur, ſi fuerit:

 o =

$o = 2\cos.\, nt\sqrt{2} + \cos.\, nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \cos.\, nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$
Corpus vero B maximum celeritatis gradum habebit ſi ſit: $o = \cos.\, nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - \cos.\, nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$ At corpus C maximam acquiret celeritatem, quando ſit $o = -2\cos.\, nt\sqrt{2}\cos.\, nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \cos.\, nt\sqrt{(2-\sqrt{2}}$.
Hinc facillime momenta aſſignantur, quibus corpus B celerrime concitatur: primum ſcilicet hoc fiet, quando erit

$$nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} = \pi - s \quad \text{et} \quad nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} = \pi + s$$

vnde fit $nt\sqrt{(4+2\sqrt{2})} = 2\pi$ et $t = \frac{\pi\sqrt{2}}{n\sqrt{(2+\sqrt{2})}} = \frac{\pi\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{n}$; ſeu $t = \frac{\pi\sqrt{2(2-\sqrt{2})Aa}}{\sqrt{g}}$. Tanto ergo tempore pulſus in ſecundum corpus B transfertur: neque vero hoc tempus duplo maius eſt eo, quo corpus A primum celerrime mouetur, neque pari interuallo pulſus in corpus C progreditur. Haec autem experientiae non aduerſantur, qua conſtat pulſus motu aequabili propagari; numerus enim particularum hic conſideratarum nimis eſt paruus, quam vt inde concluſio ad numerum quaſi infinitum inferri queat.

§. 30. Si has formulas attentius conſideremus, iam ordinem in angulis, quorum ſinus et coſinus hic occurrunt, obſeruare licebit. Hoc enim caſu, quo tria corpora A, B, C ſumus contemplati, anguli $nt\sqrt{2}$, $nt\sqrt{(2+\sqrt{2})}$ et $nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$ ita ſe habent, vt poſito ϱ angulo recto ſit:

$$nt\sqrt{2} = 2nt\cos.\, \tfrac{1}{2}\varrho;\quad nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} = 2nt\cos.\, \tfrac{1}{4}\varrho;$$
$$\text{et}\quad nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} = 2nt\cos.\, \tfrac{3}{4}\varrho.$$

iſti ergo anguli ex quadriſectione anguli recti determinantur. Erat vero hic $n = \sqrt{\frac{g}{2Aa}}$. Si pro caſu duorum

rum corporum posuissemus pariter $n = \sqrt{\frac{g}{2Aa}}$; tum prodiissent hi anguli nt, et $nt\sqrt{3}$; qui ita exhibebuntur per trisectionem anguli recti:

$nt = 2nt \operatorname{cos.} \frac{2}{3}\varrho$; $nt\sqrt{3} = 2nt \operatorname{cos.} \frac{1}{3}\varrho$.

simili modo in casu vnici corporis, posito $n = \sqrt{\frac{g}{2Aa}}$ occurrebat angulus $nt\sqrt{2} = 2nt \operatorname{cos.} \frac{1}{2}\varrho$; ideoque ex bisectione anguli recti ϱ definitur. Ex his iam colligere possumus, si numerus corporum sit $= m - 1$ fore angulos solutionem ingredientes:

$2nt \operatorname{cos.} \frac{1}{m}\varrho$; $2nt \operatorname{cos.} \frac{2}{m}\varrho$; $2nt \operatorname{cos.} \frac{3}{m}\varrho \ldots 2nt \operatorname{cos.} \frac{m-1}{m}\varrho$.

§. 31. Ponamus nunc intra parietes P et Q corpora quotcunque aequalia A, B, C, D, E, etc. in linea recta esse constituta, quae interpositis elastris aequalibus in se inuicem nitantur. Sit massa cuiusque corporis $= A$, longitudo singulorum elastrorum, cum se mutuo in aequilibrio seruant $= a$, et vis elastica eiusque elastri in hoc statu aequilibrii sit $= g$. Postquam autem ab actione quacunque status aequilibrii fuerit perturbatus, elapso tempore t singula corpora eum situm teneant, qui in figura repraesentatur, sitque numerus corporum $= \lambda - 1$ erit elastrorum PA, AB, BC, etc. numerus vnitate maior $= \lambda$. Fig. 5.
Vocetur nunc:

$PA = a + x$
$PB = 2a + x^{I}$
$PC = 3a + x^{II}$
$PD = 4a + x^{III}$
$PE = 5a + x^{IV}$
:

$$\vdots$$

$$\frac{ddx^{(\lambda-2)}}{nndt^2} = x^{(\lambda-1)} - 2x^{(\lambda-2)} + x^{(\lambda-3)}$$

Ad quas aequationes resoluendas ponamus:

$$x = \alpha \text{ cos. } ntp$$
$$x^{\mathrm{I}} = \alpha^{\mathrm{I}} \text{ cos. } 2ntp$$
$$x^{\mathrm{II}} = \alpha^{\mathrm{II}} \text{ cos. } 2ntp$$
$$x^{\mathrm{III}} = \alpha^{\mathrm{III}} \text{ cos. } 2ntp$$
$$\vdots$$
$$x^{(\lambda-2)} = \alpha^{(\lambda-2)} \text{ cos. } 2ntp$$

eritque $\alpha^{(\lambda-1)} = 0$, ob $x^{(\lambda-1)} = 0$. Potuissemus hic quoque sinus eiusdem anguli $2ntp$ adiicere, sed cum eorum coefficientes eandem legem teneant, inuentis coefficientibus α, α^{I}, α^{II}, α^{III} etc. cum valoribus constantis quantitatis p, hi termini nullo negotio adiiciuntur.

§. 35. Cum igitur posito dt constante sit:

$$-\frac{ddx}{nndt^2} = 4\alpha\, pp \text{ cos. } 2ntp$$
$$-\frac{ddx^{\mathrm{I}}}{nndt^2} = 4\alpha^{\mathrm{I}}\, pp \text{ cos. } 2ntp$$
$$-\frac{ddx^{\mathrm{II}}}{nndt^2} = 4\alpha^{\mathrm{II}}\, pp \text{ cos. } 2ntp$$
$$-\frac{ddx^{\mathrm{III}}}{nndt^2} = 4\alpha^{\mathrm{III}}\, pp \text{ cos. } 2ntp$$
$$\vdots$$
$$-\frac{ddx^{(\lambda-2)}}{nndt^2} = 4\alpha^{(\lambda-2)}\, pp \text{ cos. } 2ntp$$

se-

sequentes adipiscemur aequationes :

$$
\begin{array}{l|l}
-4\alpha \; pp = \alpha^{\mathrm{I}} - 2\alpha & \alpha^{\mathrm{I}} = 2(1-2pp)\alpha \\
-4\alpha^{\mathrm{I}} \; pp = \alpha^{\mathrm{II}} - 2\alpha^{\mathrm{I}} + \alpha & \alpha^{\mathrm{II}} = 2(1-2pp)\alpha^{\mathrm{I}} - \alpha \\
-4\alpha^{\mathrm{II}} \; pp = \alpha^{\mathrm{III}} - 2\alpha^{\mathrm{II}} + \alpha^{\mathrm{I}} & \alpha^{\mathrm{III}} = 2(1-2pp)\alpha^{\mathrm{II}} - \alpha^{\mathrm{I}} \\
-4\alpha^{\mathrm{III}} \; pp = \alpha^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^{\mathrm{III}} + \alpha^{\mathrm{II}} & \alpha^{\mathrm{IV}} = 2(1-2pp)\alpha^{\mathrm{III}} - \alpha^{\mathrm{II}} \\
\vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots \\
-4\alpha^{(\lambda-2)}pp = \alpha^{(\lambda-1)} - 2\alpha^{(\lambda-2)} + \alpha^{(\lambda-3)} & \alpha^{(\lambda-1)} = 2(1-2pp)\alpha^{(\lambda-2)} - \alpha^{(\lambda-3)}
\end{array}
$$

§. 36. Ponamus nunc esse $p = \text{sin. } \Phi$, erit $1-2pp = \text{cos.} 2\Phi$, hincque fiet

$$\alpha^{\mathrm{I}} = 2\alpha \,\text{cos.} 2\Phi$$
$$\alpha^{\mathrm{II}} = 4\alpha \,\text{cos.} 2\Phi \,\text{cos.} 2\Phi - \alpha = \alpha(1 + \text{cos.} 4\Phi)$$
$$\alpha^{\mathrm{III}} = \alpha(2\,\text{cos.} 2\Phi + 4\,\text{cos.} 2\Phi\,\text{cos.} 4\Phi - 2\,\text{cos.} 2\Phi) = \alpha(2\,\text{cos.} 2\Phi + 2\,\text{cos.} 6\Phi)$$
etc.

quo autem lex harum formularum clarius perspiciatur, ponamus $\alpha = \mathfrak{A} \text{ sin. } 2\Phi$ eritque

$$\alpha = \mathfrak{A} \text{ sin. } 2\Phi$$
$$\alpha^{\mathrm{I}} = \mathfrak{A} \text{ sin. } 4\Phi$$
$$\alpha^{\mathrm{II}} = \mathfrak{A} \text{ sin. } 6\Phi$$
$$\alpha^{\mathrm{III}} = \mathfrak{A} \text{ sin. } 8\Phi$$
$$\alpha^{(\lambda-1)} = \mathfrak{A} \text{ sin. } 2\lambda\Phi = 0.$$

Quia ergo $\text{sin. } 2\lambda\Phi = 0$, sumto ϱ pro angulo recto angulum $2\lambda\Phi$ esse oportet aequalem termino cuipiam huius seriei $0, 2\varrho, 4\varrho, 6\varrho, 8\varrho$, etc. Generaliter ergo erit $2\lambda\Phi = 2m\varrho$ denotante m numerum quemcunque integrum; vnde fit $\Phi = \frac{m}{\lambda}\varrho$; et $p = \text{sin. } \frac{m}{\lambda}\varrho$.

§. 37. Pro p igitur tot inuenimus diuerſos valores quot vnitates continentur in numero $\lambda - 1$, ſeu quot fuerint corpora in ſerie PQ: totidemque terminis conſtabunt valores x, x^{I}, x^{II}, etc. Sumto ergo pro m numero quocunque minori quam λ, erit

$$
\begin{aligned}
p &= \text{ſin.}\, \tfrac{m}{\lambda}\, \varrho \\
a &= \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\, \tfrac{2m}{\lambda}\, \varrho \\
a^{I} &= \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\, \tfrac{4m}{\lambda}\, \varrho \\
a^{II} &= \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\, \tfrac{6m}{\lambda}\, \varrho \\
a^{III} &= \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\, \tfrac{8m}{\lambda}\, \varrho \\
&\vdots \\
a^{(\lambda-1)} &= \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ 2m\varrho = 0
\end{aligned}
$$

vnde ſequentes obtinebuntur valores:

$$
\begin{aligned}
x = {} & \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\tfrac{2}{\lambda}\rho.\text{coſ.}\,2nt\,\text{ſin.}\tfrac{\varrho}{\lambda} + \mathfrak{B}\,\text{ſin.}\tfrac{4}{\lambda}\varrho.\text{coſ}\,2nt\,\text{ſin}\tfrac{2\varrho}{\lambda} + \\
& \mathfrak{C}\,\text{ſin.}\tfrac{6}{\lambda}\varrho.\text{coſ.}\,2nt\,\text{ſin.}\tfrac{3\varrho}{\lambda} \ldots\ldots + \mathfrak{D}\,\text{ſin}\tfrac{4(\lambda-1)\varrho}{\lambda}.\text{coſ}\,2nt\,\text{ſin}\tfrac{2(\lambda-1)\varrho}{\lambda} \\
x^{I} = {} & \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\tfrac{4}{\lambda}\varrho.\text{coſ.}\,2nt\,\text{ſin.}\tfrac{\varrho}{\lambda} + \mathfrak{B}\,\text{ſin.}\tfrac{8}{\lambda}\varrho\,\text{coſ}\,2nt\,\text{ſin}\tfrac{2\varrho}{\lambda} + \\
& \mathfrak{C}\,\text{ſin.}\tfrac{12}{\lambda}\rho.\text{coſ.}\,2nt\,\text{ſin.}\tfrac{3\varrho}{\lambda} + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\,\text{ſin}\tfrac{4(\lambda-1)\varrho}{\lambda}.\text{coſ}\,2nt\,\text{ſin}\tfrac{(\lambda-1)\varrho}{\lambda} \\
x^{II} = {} & \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\tfrac{6}{\lambda}\rho.\text{coſ.}\,2nt\,\text{ſin.}\tfrac{\varrho}{\lambda} + \mathfrak{B}\,\text{ſin.}\tfrac{12}{\lambda}\rho.\text{coſ}\,2nt\,\text{ſin}\tfrac{2\varrho}{\lambda} + \\
& \mathfrak{C}\,\text{ſin.}\tfrac{18}{\lambda}\rho.\text{coſ.}\,2nt\,\text{ſin.}\tfrac{3\varrho}{\lambda} + \ldots + \mathfrak{D}\,\text{ſin}\tfrac{6(\lambda-1)}{\lambda}\varrho.\text{coſ}\,2nt\,\text{ſin}\tfrac{(\lambda-1)\varrho}{\lambda} \\
x^{(\lambda-2)} = {} & \mathfrak{A}\,\text{ſin}\tfrac{2(\lambda-1)}{\lambda}\rho.\text{coſ}\,2nt\,\text{ſin}\tfrac{\varrho}{\lambda} + \mathfrak{B}\,\text{ſin}\tfrac{4(\lambda-1)}{\lambda}\rho.\text{coſ}\,2nt\,\text{ſin}\tfrac{2\varrho}{\lambda} + \\
& \mathfrak{C}\,\text{ſin}\tfrac{6(\lambda-1)}{\lambda}\rho.\text{coſ}\,2nt\,\text{ſin}\tfrac{3\varrho}{\lambda} + \ldots + \mathfrak{D}\,\text{ſin}\tfrac{2(\lambda-1)^2}{\lambda}\rho.\text{coſ}\,2\,nt\,\text{ſin}\tfrac{(\lambda-1)\varrho}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

§. 38. Aequationes iſtae iam ita ſunt comparatae, vt ipſo motus initio, quo erat $t = 0$, ſingulorum corporum

porum celeritates euanefcant; in quem finem finus angulorum $2\pi t$ data opera omifimus. Pro vario ergo fitu cuiusque corporis initiali, refpectu fitus aequilibrii, vnde valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. pendent, innumerabiles diuerfarum agitationum modi refultant, quos quidem fi valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. fuerint cogniti, facile determinare licet, cum ex aequationibus inuentis ad quoduis temporis momentum fingulorum corporum tam fitus quam motus affignari queat. Longe autem difficilius eft pro quouis ftatu initiali propofito, idoneos litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. valores inueftigare, cum tot prodeant aequationes, quot adeffe ponuntur corpora: vnde fi horum corporum numerus fuerit indefinitus, via vix patet, quae ad cognitionem iftorum valorum perducat.

§. 39. Si ponamus initio omnia corpora praeter primum in fitu fuo naturali fuiffe conftituta, primum autem interuallo $= \omega$ de loco fuo naturali fuiffe dimotum, neceffe eft vt pofito $t = 0$ fiat $x = -\omega$, et $x^{I} = 0$, $x^{II} = 0$, $x^{III} = 0$, etc. Hinc ergo fequentes aequationes refultabunt.

$$\mathfrak{A}\,\text{fin.}\,\tfrac{2}{\lambda}\rho + \mathfrak{B}\,\text{fin.}\,\tfrac{4}{\lambda}\rho + \mathfrak{C}\,\text{fin.}\,\tfrac{6}{\lambda}\rho + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\,\text{fin.}\,\tfrac{2(\lambda-1)}{\lambda}\rho = -\omega$$
$$\mathfrak{A}\,\text{fin.}\,\tfrac{4}{\lambda}\rho + \mathfrak{B}\,\text{fin.}\,\tfrac{8}{\lambda}\rho + \mathfrak{C}\,\text{fin.}\,\tfrac{12}{\lambda}\rho + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\,\text{fin.}\,\tfrac{4(\lambda-1)}{\lambda}\rho = 0$$
$$\mathfrak{A}\,\text{fin.}\,\tfrac{6}{\lambda}\rho + \mathfrak{B}\,\text{fin.}\,\tfrac{12}{\lambda}\rho + \mathfrak{C}\,\text{fin.}\,\tfrac{18}{\lambda}\rho + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\,\text{fin.}\,\tfrac{6(\lambda-1)}{\lambda}\rho = 0$$
$$\mathfrak{A}\,\text{fin.}\,\tfrac{8}{\lambda}\rho + \mathfrak{B}\,\text{fin.}\,\tfrac{16}{\lambda}\rho + \mathfrak{C}\,\text{fin.}\,\tfrac{24}{\lambda}\rho + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\,\text{fin.}\,\tfrac{8(\lambda-1)}{\lambda}\rho = 0$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

 $\mathfrak{A}$ fin.

:

$$\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{2(\lambda-1)}{\lambda}\varrho+\mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\tfrac{4(\lambda-1)}{\lambda}\varrho+\mathfrak{C}\,\text{sin.}\,\tfrac{6(\lambda-1)}{\lambda}\varrho+\ldots+\mathfrak{D}\,\text{sin}\,\tfrac{2(\lambda-1)^2}{\lambda}\varrho=0$$

quarum aequationum numerus eſt $=\lambda-1$, ideoque corporum A, B, C, etc. numero aequatur, et vnaquaeque aequatio totidem continet terminos.

§. 40. Videamus ergo, an inductio a caſibus facilioribus quicquam ad generalem litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. determinationem conferat. Sit igitur primo vnicum corpus A, et habebitur vnica aequatio, ob $\lambda-1=1$.

$$\mathfrak{A}=-\omega.$$

Sit $\lambda-1=2$ ſeu $\lambda=3$, habebimus duas aequationes.

I. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{3}\varrho+\mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{3}\varrho=-\omega$; $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{3}\varrho=-\tfrac{1}{2}\omega$

II. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{3}\varrho-\mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{3}\varrho=0$; $\mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{3}\varrho=-\tfrac{1}{2}\omega$

Hinc $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{3}\varrho=-\tfrac{1}{2}\omega$; $\mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{3}\varrho=-\tfrac{1}{2}\omega$; $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{3}\varrho=-\tfrac{1}{2}\omega$ et $\mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\tfrac{8}{3}\varrho=+\tfrac{1}{2}\omega$.

Sit $\lambda-1=3$ ſeu $\lambda=4$, tres habebuntur aequationes.

I. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{4}\varrho+\mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{4}\varrho+\mathfrak{C}\,\text{sin.}\,\tfrac{6}{4}\varrho=-\omega$

II. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{4}\varrho+\mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\tfrac{8}{4}\varrho+\mathfrak{C}\,\text{sin.}\,\tfrac{12}{4}\varrho=0$

III. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{6}{4}\varrho+\mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\tfrac{12}{4}\varrho+\mathfrak{C}\,\text{sin.}\,\tfrac{18}{4}\varrho=0$

ſiue ergo

I. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\varrho+\mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\varrho+\mathfrak{C}\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\varrho=-\omega$ $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}$

II. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\varrho+*-\mathfrak{C}\,\text{sin.}\,\varrho=0$ $(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\varrho=-\tfrac{1}{2}\omega$

$\mathfrak{A}=-\tfrac{1}{4}\omega:\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\varrho$

III. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\varrho-\mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\varrho+\mathfrak{C}\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\varrho=0$ $\mathfrak{C}=-\tfrac{1}{4}\omega:\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\varrho$

$\mathfrak{B}=-\tfrac{1}{2}\omega:\text{sin.}\,\varrho$

Erit ergo

$\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{4}\varrho=-\tfrac{1}{4}\omega$ | $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{4}\varrho=-\tfrac{1}{2}\omega\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\varrho$ | $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{6}{4}\varrho=-\tfrac{1}{4}\omega$

$\mathfrak{B}$ſin.

$\mathfrak{B}\ \text{fin.}\ \tfrac{4}{4}\varrho = -\tfrac{1}{2}\omega$	$\mathfrak{B}\ \text{fin.}\ \tfrac{8}{4}\varrho = 0$	$\mathfrak{B}\ \text{fin.}\ \tfrac{12}{4}\varrho = +\tfrac{1}{2}\omega$
$\mathfrak{C}\ \text{fin.}\ \tfrac{6}{4}\varrho = -\tfrac{1}{4}\omega$	$\mathfrak{C}\ \text{fin.}\ \tfrac{12}{4}\varrho = +\tfrac{1}{2}\omega\,\text{cof.}\ \tfrac{1}{2}\varrho$	$\mathfrak{C}\ \text{fin.}\ \tfrac{18}{4}\varrho = -\tfrac{1}{4}\omega$

§. 41. Hos valores iam fupra eruimus; nunc igitur vlterius progrediamur ac ponamus $\lambda - 1 = 4$, feu $\lambda = 5$.

$$\mathfrak{A}\ \text{fin.}\ \tfrac{2}{5}\varrho + \mathfrak{B}\ \text{fin.}\ \tfrac{4}{5}\varrho + \mathfrak{C}\ \text{fin.}\ \tfrac{6}{5}\varrho + \mathfrak{D}\ \text{fin.}\ \tfrac{8}{5}\varrho = -\omega$$
$$\mathfrak{A}\ \text{fin.}\ \tfrac{4}{5}\varrho + \mathfrak{B}\ \text{fin.}\ \tfrac{8}{5}\varrho + \mathfrak{C}\ \text{fin.}\ \tfrac{12}{5}\varrho + \mathfrak{D}\ \text{fin.}\ \tfrac{16}{5}\varrho = 0$$
$$\mathfrak{A}\ \text{fin.}\ \tfrac{6}{5}\varrho + \mathfrak{B}\ \text{fin.}\ \tfrac{12}{5}\varrho + \mathfrak{C}\ \text{fin.}\ \tfrac{18}{5}\varrho + \mathfrak{D}\ \text{fin.}\ \tfrac{24}{5}\varrho = 0$$
$$\mathfrak{A}\ \text{fin.}\ \tfrac{8}{5}\varrho + \mathfrak{B}\ \text{fin.}\ \tfrac{16}{5}\varrho + \mathfrak{C}\ \text{fin.}\ \tfrac{24}{5}\varrho + \mathfrak{D}\ \text{fin.}\ \tfrac{32}{5}\varrho = 0$$

fit breuitatis gratia:

$$\alpha = \text{fin.}\ \tfrac{2}{5}\varrho = \text{fin.}\ \tfrac{8}{5}\varrho = -\text{fin.}\ \tfrac{12}{5}\varrho = -\text{fin.}\ \tfrac{18}{5}\varrho = -\text{fin.}\ \tfrac{32}{5}\varrho$$
$$\beta = \text{fin.}\ \tfrac{4}{5}\varrho = \text{fin.}\ \tfrac{6}{5}\varrho = -\text{fin.}\ \tfrac{16}{5}\varrho = \text{fin.}\ \tfrac{24}{5}\varrho \text{ erit}\cdot$$

$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\beta + \mathfrak{D}\alpha = -\omega$	$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{C}\beta = -\tfrac{1}{2}\omega$
$\mathfrak{A}\beta + \mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{C}\alpha - \mathfrak{D}\beta = 0$	$\mathfrak{B}\beta + \mathfrak{D}\alpha = -\tfrac{1}{2}\omega$
$\mathfrak{A}\beta - \mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{C}\alpha + \mathfrak{D}\beta = 0$	$\mathfrak{A}\beta - \mathfrak{C}\alpha = 0$
$\mathfrak{A}\alpha - \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\beta - \mathfrak{D}\alpha = 0$	$\mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{D}\beta = 0$

vnde fit $\mathfrak{A}(\alpha^2 + \beta^2) = -\tfrac{1}{2}\alpha\omega$; $\mathfrak{C}(\alpha\alpha + \beta\beta) = -\tfrac{1}{2}\beta\omega$
$\mathfrak{B}(\alpha\alpha + \beta\beta) = -\tfrac{1}{2}\beta\omega$; $\mathfrak{D}(\alpha\alpha + \beta\beta) = -\tfrac{1}{2}\alpha\omega$ ideoque

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{D} = \frac{-\alpha\omega}{2(\alpha^2 + \beta^2)};\ \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \frac{-\beta\omega}{2(\alpha^2 + \beta^2)}$$

et $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} = \alpha : \beta$.

§. 41. Ponamus iam effe $\lambda - 1 = 5$ feu $\lambda = 6$; fitque

$$\alpha = \text{fin.}\ \tfrac{2}{6}\varrho = \text{fin.}\ \tfrac{10}{6}\varrho = \text{fin.}\ \tfrac{50}{6}\varrho$$
$$\beta = \text{fin.}\ \tfrac{4}{6}\varrho = \text{fin.}\ \tfrac{8}{6}\varrho = -\text{fin.}\ \tfrac{16}{6}\varrho = -\text{fin.}\ \tfrac{20}{6}\varrho = \text{fin.}\ \tfrac{32}{6}\varrho = -\text{fin.}\ \tfrac{40}{6}\varrho$$
$$\gamma = \text{fin.}\ \tfrac{6}{6}\varrho = -\text{fin.}\ \tfrac{18}{6}\varrho = \text{fin.}\ \tfrac{30}{6}\varrho$$
$$o = \text{fin.}\ \tfrac{12}{6}\varrho = \text{fin.}\ \tfrac{24}{6}\varrho$$

atque habebimus has aequationes:

$$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{D}\beta + \mathfrak{E}\alpha = -\omega$$

$$\mathfrak{A}\beta + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}o - \mathfrak{D}\beta - \mathfrak{E}\beta = o$$
$$\mathfrak{A}\gamma + \mathfrak{B}o - \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{D}o + \mathfrak{E}\gamma = o$$
$$\mathfrak{A}\beta - \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}o + \mathfrak{D}\beta - \mathfrak{E}\beta = o$$
$$\mathfrak{A}\alpha - \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma - \mathfrak{D}\beta + \mathfrak{E}\alpha = o$$

Harum media dat $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{E}$, fecunda et quarta vero $\mathfrak{A} - \mathfrak{C} = o$; et $\mathfrak{B} - \mathfrak{D} = o$; ergo erit $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}$; $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}$; $\mathfrak{C} = 2\,\mathfrak{A}$. Deinde prima et quinta dat:
$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{E}\alpha = -\frac{1}{2}\omega$; $\mathfrak{B}\beta + \mathfrak{D}\beta = -\frac{1}{2}\omega$

Ergo $\mathfrak{A} = \mathfrak{E} = \frac{-\omega}{4(\alpha+\gamma)}$; $\mathfrak{B} = \mathfrak{D} = \frac{-\omega}{4\beta}$; $\mathfrak{C} = \frac{-\omega}{2(\alpha+\gamma)}$
Eft vero hic $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; et $\gamma = 1$: vnde erit $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} = \beta : \alpha + \gamma = \sqrt{3} : 3 = \alpha : \beta$ et ob $\gamma = 2\alpha$ fiet $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C} = \alpha : \beta : \gamma$.

§. 42. Hinc iam fatis tuto per inductionem conclufio colligi poffet pro generali coefficientium determinatione; fed quo magis confirmemur, ponamus adhuc $\lambda - 1 = 6$ feu $\lambda = 7$; fitque

$$\alpha = \text{fin.}\tfrac{2}{7}\varrho = \text{fin.}\tfrac{12}{7}\varrho = -\text{fin.}\tfrac{16}{7}\varrho = \text{fin.}\tfrac{30}{7}\varrho\ \text{fin.}\tfrac{40}{7}\varrho = -\text{fin.}\tfrac{72}{7}\varrho$$
$$\beta = \text{fin.}\tfrac{4}{7}\varrho = \text{fin.}\tfrac{10}{7}\varrho = -\text{fin.}\tfrac{24}{7}\varrho = -\text{fin.}\tfrac{18}{7}\varrho = \text{fin.}\tfrac{32}{7}\varrho = \text{fin.}\tfrac{60}{7}\varrho$$
$$\gamma = \text{fin.}\tfrac{6}{7}\varrho = \text{fin.}\tfrac{8}{7}\varrho = -\text{fin.}\tfrac{20}{7}\varrho = \text{fin.}\tfrac{36}{7}\varrho = -\text{fin.}\tfrac{48}{7}\varrho = \text{fin}\tfrac{50}{7}\varrho,$$

atque fequentes obtinebuntur aequationes:

$$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{D}\gamma + \mathfrak{E}\beta + \mathfrak{F}\alpha = -\omega$$
$$\mathfrak{A}\beta + \mathfrak{B}\gamma + \mathfrak{C}\alpha - \mathfrak{D}\alpha - \mathfrak{E}\gamma - \mathfrak{F}\beta = o$$
$$\mathfrak{A}\gamma + \mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{C}\beta - \mathfrak{D}\beta + \mathfrak{E}\alpha + \mathfrak{F}\gamma = o$$
$$\mathfrak{A}\gamma - \mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{C}\beta + \mathfrak{D}\beta + \mathfrak{E}\alpha - \mathfrak{F}\gamma = o$$
$$\mathfrak{A}\beta - \mathfrak{B}\gamma + \mathfrak{C}\alpha + \mathfrak{D}\alpha - \mathfrak{E}\gamma + \mathfrak{F}\beta = o$$
$$\mathfrak{A}\alpha - \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma - \mathfrak{D}\gamma + \mathfrak{E}\beta - \mathfrak{F}\alpha = o$$

Harum

Harum aequationum ſecundae, quartae, et ſextae ſatis fit ponendo $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$; $\mathfrak{E} = \mathfrak{B}$ et $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}$; ex quo tres reliquae abeunt in:

$$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma = -\tfrac{1}{2}\omega$$
$$\mathfrak{A}\gamma + \mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{C}\beta = 0$$
$$\mathfrak{A}\beta - \mathfrak{B}\gamma + \mathfrak{C}\alpha = 0$$

Duabus poſterioribus autem ſatisfit ponendo:

$$\mathfrak{A} = \alpha k;\ \mathfrak{B} = \beta k, \text{ et } \mathfrak{C} = \gamma k$$

eſt enim $\alpha\gamma + \alpha\beta - \beta\gamma = 0$. Namque cum ſit generaliter ſin. p ſin. $q = \frac{1}{2}$ coſ. $(p-q) - \frac{1}{2}$ coſ. $(p+q)$ erit

$$\alpha\gamma = \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,\tfrac{4}{7}\varrho - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,\tfrac{8}{7}\varrho = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,\tfrac{3}{7}\varrho + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{7}\varrho$$
$$\alpha\beta = \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,\tfrac{2}{7}\varrho - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,\tfrac{6}{7}\varrho = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,\tfrac{5}{7}\varrho - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{7}\varrho$$
$$\beta\gamma = \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,\tfrac{2}{7}\varrho - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,\tfrac{10}{7}\varrho = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,\tfrac{5}{7}\varrho + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,\tfrac{3}{7}\varrho$$

ideoque $\alpha\gamma + \alpha\beta - \beta\gamma = 0$. Tum vero erit $k = \frac{-\omega}{2(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}$.

§. 43. Si igitur in genere pro caſu quocunque corporum initio omnia corpora quieſcant, ac primum quidem A in diſtantia ω a ſitu naturali, reliqua vero cuncta in ipſo ſitu naturali; aequationibus in §. 39. repertis ſatisfiet ponendo; ſi $\lambda - 1$ indicet numerum corporum:

$$\mathfrak{A} = k\,\text{ſin.}\,\tfrac{2}{\lambda}\varrho;\ \mathfrak{B} = k\,\text{ſin.}\,\tfrac{4}{\lambda}\varrho;\ \mathfrak{C} = k\,\text{ſin.}\,\tfrac{6}{\lambda}\varrho;$$
$$\mathfrak{D} = k\,\text{ſin.}\,\tfrac{8}{\lambda}\varrho;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \mathfrak{O} = k\,\text{ſin.}\,\tfrac{2(\lambda-1)\varrho}{\lambda}$$

Sic enim fiet, vti hic inuenimus $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}$; $\mathfrak{B} = \mathfrak{N}$; $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}$ etc. Tum vero littera k ita definietur vt ſit:

$$k = \frac{-\omega}{2\left(\text{ſin.}\,\tfrac{2}{\lambda}\varrho^2 + \text{ſin.}\,\tfrac{4}{\lambda}\varrho^2 + \text{ſin.}\,\tfrac{6}{\lambda}\varrho^2 + \ldots\ldots + \text{ſin.}\,\tfrac{2(\lambda-1)}{\lambda}\varrho^2\right)}$$

Cum

Cum autem sit 2 sin. $p^2 = 1 - \cos. 2p$ erit;

$k = -\omega;\ (\lambda - 1 - \cos.\frac{4}{\lambda}\varrho - \cos.\frac{8}{\lambda}\varrho - \cos.\frac{12}{\lambda}\varrho \ldots\ldots - \cos.\frac{4(\lambda-1)}{\lambda}\varrho)$

Ponamus:

$s = 1 + \cos.\frac{4}{\lambda}\varrho + \cos.\frac{8}{\lambda}\varrho + \cos.\frac{12}{\lambda}\varrho + \ldots\ldots + \cos.\frac{4(\lambda-1)}{\lambda}\varrho$

erit ob sin. p cos. $q = \frac{1}{2}\sin.(p+q) - \frac{1}{2}\sin.(q-p)$

$s \sin.\frac{2}{\lambda}\varrho = \sin.\frac{2}{\lambda}\varrho + \frac{1}{2}\sin.\frac{6}{\lambda}\varrho \ldots + \frac{1}{2}\sin.\frac{2(2\lambda-3)}{\lambda}\varrho + \frac{1}{2}\sin.\frac{2(2\lambda-1)}{\lambda}\varrho$

$\qquad - \frac{1}{2}\sin.\frac{2}{\lambda}\varrho - \frac{1}{2}\sin.\frac{6}{\lambda}\varrho \quad - \frac{1}{2}\sin.\frac{2(2\lambda-3)}{\lambda}\varrho$

ideoque $s \sin.\frac{2}{\lambda}\varrho = \frac{1}{2}\sin.\frac{2}{\lambda}\varrho + \frac{1}{2}\sin.\frac{2(2\lambda-1)}{\lambda}\rho = 0$

quia est $\sin.\frac{2(2\lambda-1)}{\lambda}\varrho = \sin.(4\varrho - \frac{2}{\lambda}\varrho) = -\sin.\frac{2}{\lambda}\rho$

Hancobrem erit $k = \frac{-\omega}{\lambda}$.

§. 44. Quodsi iam hi valores substituantur, habebitur

$\frac{-\lambda x}{\omega} = \sin\frac{2}{\lambda}\rho \sin\frac{2}{\lambda}\rho \cos 2nt \sin\frac{\rho}{\lambda} + \sin\frac{4}{\lambda}\rho \sin\frac{4}{\lambda}\rho \cos 2nt \sin\frac{2\rho}{\lambda} + \text{etc.}$

$\frac{-\lambda x^{I}}{\omega} = \sin\frac{2}{\lambda}\rho \sin\frac{4}{\lambda}\rho \cos 2nt \sin\frac{\rho}{\lambda} + \sin\frac{4}{\lambda}\rho \sin\frac{8}{\lambda}\rho . \cos 2nt \sin\frac{2\rho}{\lambda} + \text{etc.}$

$\frac{-\lambda x^{II}}{\omega} = \sin\frac{2}{\lambda}\rho \sin\frac{6}{\lambda}\rho \cos 2nt \sin\frac{\rho}{\lambda} + \sin\frac{4}{\lambda}\rho \sin\frac{12}{\lambda}\rho . \cos 2nt \sin\frac{2\rho}{\lambda} + \text{etc.}$

$\vdots$

$\frac{-\lambda x^{(\nu-1)}}{\omega} = \sin\frac{2}{\lambda}\rho \sin\frac{2\nu}{\lambda}\rho . \cos 2nt \sin\frac{\rho}{\lambda} + \sin\frac{4}{\lambda}\rho \sin\frac{4\nu}{\lambda}\rho . \cos 2nt \sin\frac{2\rho}{\lambda} + \text{etc.}$

quae series eo vsque continuari debent, quoad numerus terminorum in vnaquaque fiat $= \lambda - 1$. Hinc ergo vniuscuiusque corporis, cuius index a primo computando sit $= \nu$ ad quoduis tempus assignari poterit tam situs, quam celeritas.

§. 45. Casus autem ad propagationem pulsuum magis erit accommodatus, si ponamus initio, quo omnia cor-

corpora erant in quiete, vires acceleratrices ſingulorum praeter primum fuiſſe nullas. Vt igitur ſuperiori modo coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. indagemus, ponamus primo eſſe $\lambda = 2$; et $\sin. \frac{1}{2}\rho = \alpha = \cos. \frac{1}{2}\rho$, erit $\sin. \rho = 2\alpha\alpha$, fietque ex acceleratione primi et ſolius corporis: $2\mathfrak{A}\alpha^4 = \omega$. Ponamus nunc $\lambda = 3$; ſitque.

$\sin. \frac{1}{3}\rho = \cos. \frac{2}{3}\rho = \alpha$
$\sin. \frac{2}{3}\rho = \cos. \frac{1}{3}\rho = \beta$;
erit $\mathfrak{A}\alpha^2 . \beta + \mathfrak{B}\beta^2 . \beta = \omega$
et $\mathfrak{A}\alpha^2 . \beta - \mathfrak{B}\beta^2 . \beta = 0$

ſicque patet easdem aequationes vt ſupra reſultare, dummodo ibi pro $\mathfrak{A}$ ponatur $\mathfrak{A} \sin. \frac{\rho^2}{\lambda}$; $\mathfrak{B} \sin. \frac{2\rho^2}{\lambda}$ pro $\mathfrak{B}$ et ita porro. Sic igitur his conſtantibus mutatis, erit acceleratio ſingulorum corporum iisdem expreſſionibus, quas ſupra pro x, x^{I}, x^{II}, x^{III} etc. invenimus proportionalis.

§. 46. Hinc ergo pro $\mathfrak{A} \sin. \frac{\rho^2}{\lambda}$, $\mathfrak{B} \sin. \frac{2\rho}{\lambda}$, etc. iidem prodibunt valores, quos ſupra pro litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. inuenimus. Quare elapſo tempore t erit corporis, cuius index in ordine a primo computato eſt $= v$, vis acceleratrix huic expreſſioni proportionalis:

$$\sin \tfrac{2}{\lambda}\rho . \sin. \tfrac{2v}{\lambda}\rho \cos. 2nt \sin \tfrac{\rho}{\lambda} + \sin \tfrac{4}{\lambda}\rho . \sin \tfrac{4v}{\lambda}\rho . \cos 2nt \sin \tfrac{2\rho}{\lambda} + \text{etc.}$$

Quodſi ergo acceleratio corporis vltimi quaeratur, faciendum eſt $v = \lambda - 1$; eritque $\sin. \frac{2v}{\lambda}\rho = \sin. \frac{2}{\lambda}\rho$; $\sin. \frac{4v}{\lambda}\rho = -\sin. \frac{4}{\lambda}\rho$; $\sin. \frac{6v}{\lambda}\rho = \sin. \frac{6}{\lambda}\rho$, etc. Vnde acceleratio vltimi corporis erit iſti expreſſioni proportionalis;

$$\sin \tfrac{2}{\lambda}\rho^2 \cos 2nt \sin \tfrac{\rho}{\lambda} - \sin \tfrac{4}{\lambda}\rho^2 . \cos 2nt \sin \tfrac{2\rho}{\lambda} + \sin \tfrac{6}{\lambda}\rho^2 . \cos 2nt \sin \tfrac{3\rho}{\lambda} - \text{etc:}$$

quae expressio posita $= 0$ ea indicabit temporis momenta, quibus vltimi corporis celeritas est maxima seu quibus pulsus ipsi inesse consendus erit.

§. 47. Si igitur quaeratur, quantum tempus a motus initio sit elapsurum, antequam pulsus per totum interuallum PQ propagetur, tempus hoc t definiri debebit ex hac aequatione:

$$0 = \sin\tfrac{2}{\lambda}\rho^2 . \cos 2nt \sin\tfrac{\rho}{\lambda} - \sin\tfrac{4}{\lambda}\rho^2 . \cos 2nt \sin\tfrac{2\rho}{\lambda} + \sin\tfrac{6}{\lambda}\rho^2 . \cos 2nt \sin\tfrac{3\rho}{\lambda}$$
$$- \sin\tfrac{8}{\lambda}\rho^2 . \cos 2nt \sin\tfrac{4\rho}{\lambda} + \ldots\ldots\ldots \pm \sin\tfrac{2(\lambda-1)}{\lambda}\rho^2 . \cos 2nt \sin\tfrac{(\lambda-1)\rho}{\lambda}$$

Sit tota longitudo $PQ = f$; et g longitudo columnae, cuius pondus ipsi vi elasticae huius fluidi aequetur, erit $f = \lambda a$; $A = a$; ideoque $n = \sqrt{\frac{g}{2aa}} = \frac{1}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}g} = \frac{\lambda}{f}\sqrt{\tfrac{1}{2}g}$. Fingatur nunc tempus quaesitum $t = mf : \sqrt{\tfrac{1}{2}g}$: ita vt, si f et g in particulis millesimis pedis rhenani exprimantur, futurum sit tempus $t = \frac{1}{250} mf : \sqrt{\tfrac{1}{2}g}$ minutis secundis. Totum ergo negotium redit ad determinationem numeri absoluti m, quam ex hac aequatione erui oportet:

$$0 = \sin\tfrac{2}{\lambda}\rho^2 . \cos 2\lambda m \sin\tfrac{\rho}{\lambda} - \sin\tfrac{4}{\lambda}\rho^2 \cos 2\lambda m \sin\tfrac{2\rho}{\lambda} + \sin\tfrac{6}{\lambda}\rho^2 . \cos 2\lambda m \sin\tfrac{3\rho}{\lambda}$$
$$- \sin\tfrac{8}{\lambda}\rho^2 . \cos 2\lambda m \sin\tfrac{4\rho}{\lambda} + \ldots\ldots \pm \sin\tfrac{2(\lambda-1)}{\lambda}\rho^2 . \cos 2\lambda m \sin\tfrac{(\lambda-1)\rho}{\lambda}$$

§. 48. Pendet ergo determinatio numeri m a numero λ seu a numero particularum A, B, C, D, etc. quae in interuallo $PQ = f$ continentur; qui numerus cum in fluidis elasticis, cuiusmodi sunt aer et aether censeri queat infinite magnus, erit $\lambda = \infty$, et valor numeri m ex aequatione infinita definiri debebit. Cum autem arcus, quorum cosinus hic occurrunt, sint incommensurabiles inter se, patet hanc inuestigationem numeri

m

m esse difficillimam, neque sine insigni artificio institui posse.

§. 49. Quoniam in aequatione inuenta terminus vltimum sequens $\sin.\frac{2\lambda}{\lambda}\rho^2 . \cos. 2\lambda m \sin.\frac{\lambda\rho}{\lambda}$ per se euanescit, eum adhuc in aequatione adiicere poterimus. Quo igitur resolutionem aequationis propositae tentemus, singulos cosinus methodo consueta in series infinitas convertamus, denotetque signum summatorium $\int$ summam huiusmodi seriei ad λ terminos continuatae, ita vt sit $\int \cos. v = \cos. v - \cos. 2v + \cos. 3v - 4v + \ldots \pm \cos. \lambda v$. Signum scilicet $\int$ primo termino huismodi seriei praefixum indicet integrum eiusdem seriei valorem. Facta ergo ante memorata cosinuum resolutione fiet $0 = \int \sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2 - \frac{4\lambda^2 m^2}{1.2}\int \sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2 \sin.\frac{\rho^2}{\lambda} + \frac{16\lambda^4 m^4}{1.2.3.4}\int \sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2 \sin.\frac{\rho^4}{\lambda} - \frac{64\lambda^6 m^6}{1.2.3.4.5.6}\int \sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2 \sin.\frac{\rho^6}{\lambda} + \text{etc.}$

§. 50. Vt autem has summas definire queamus, ponamus esse λ numerum parem, reperieturque $\int \cos. v = \cos. v - \cos. 2v + \cos. 3v \ldots - \cos. \lambda v = \frac{\cos.\frac{1}{2}v - \cos.(\lambda+\frac{1}{2})v}{2\cos.\frac{1}{2}v}$ vbi imprimis notari conuenit, esse casus, quibus haec expressio non veram progressionis summam indicet, qui casus eueniunt; quando est $\frac{1}{2}v$, vel ρ, vel 3ρ, vel 5ρ, etc. his enim fractionis tam numerator quam denominator euanescit. His igitur casibus vera seriei summa reperietur $= \frac{\sin.\frac{1}{2}v - (2\lambda+1)\sin.(\lambda+\frac{1}{2})v}{2\sin.\frac{1}{2}v}$ quae ob $\frac{1}{2}v = \rho$ et λ numerum parem, dat $\sin.(\lambda+\frac{1}{2})v = \sin.\frac{1}{2}v = 1$, transit in $-\lambda$, quod idem contingit si fuerit $\frac{1}{2}v = 3\rho$, vel $\frac{1}{2}v = 5\rho$; etc.

§. 51. Ponamus nunc pro v succeſſiue angulos: $\frac{2}{\lambda}\rho$; $\frac{4}{\lambda}\rho$; $\frac{6}{\lambda}\rho$; $\frac{8}{\lambda}\rho$; et generalitrr $\frac{2\mu}{\lambda}\rho$; erit facto $v = \frac{2\mu}{\lambda}\rho$; $\text{coſ.}\,(\lambda + \frac{1}{2})v = \text{coſ.}\,(2\mu\rho + \frac{\mu}{\lambda}\rho) = \pm\,\text{coſ.}\,\frac{\mu}{\lambda}\rho$, vbi ſignorum ambiguorum ſuperius valet, ſi ſit μ numerus par, inferius vero ſi μ numerus impar: erit ergo $\int \text{coſ.}\,\frac{2\mu}{\lambda}\rho = \frac{1 \mp 1}{2}$, vnde ſequentes orientur ſummationes:

$\int \text{coſ.}\,\frac{0}{\lambda}\rho = \int 1 = 0$

$\int \text{coſ.}\,\frac{2}{\lambda}\rho = 1$	excipiuntur caſus
$\int \text{coſ.}\,\frac{4}{\lambda}\rho = 0$	$\int \text{coſ.}\,\frac{2\lambda}{\lambda}\rho = -\lambda$
$\int \text{coſ.}\,\frac{6}{\lambda}\rho = 1$	$\int \text{coſ.}\,\frac{6\lambda}{\lambda}\rho = -\lambda$
$\int \text{coſ.}\,\frac{8}{\lambda}\rho = 0$	$\int \text{coſ.}\,\frac{10\lambda}{\lambda}\rho = -\lambda$
$\int \text{coſ.}\,\frac{10}{\lambda}\rho = 1$	
$\int \text{coſ.}\,\frac{12}{\lambda}\rho = 0$	$\int \text{coſ.}\,\frac{14\lambda}{\lambda}\rho = -\lambda$
etc.	etc.

§. 52. Cum iam ſit $\text{ſin.}\,\frac{2}{\lambda}\rho^2 = \frac{1}{2}(1 - \text{coſ.}\,\frac{4}{\lambda}\rho)$ et $\text{ſin.}\,\frac{\rho^2}{\lambda} = \frac{1}{2}(1 - \text{coſ.}\,\frac{2}{\lambda}\rho)$, ſummae productorum ſuperiorum ſinuum in ſequentes ſummas coſinuum ſimplicium conuertentur:

$$\int \text{ſin.}\,\frac{2}{\lambda}\rho^2 = \tfrac{1}{2}\int\left(1 - \quad * \quad - \text{coſ.}\,\frac{4}{\lambda}\rho\right)$$

$$\int \text{ſin.}\,\frac{2}{\lambda}\rho^2.\,\text{ſin.}\,\frac{\rho^2}{\lambda} = \tfrac{1}{8}\int\left(2 - \text{coſ.}\,\frac{2}{\lambda}\rho - 2\,\text{coſ.}\,\frac{4}{\lambda}\rho + \text{coſ.}\,\frac{6}{\lambda}\rho\right)$$

$$\int \text{ſin.}\,\frac{2}{\lambda}\rho^2.\,\text{ſin.}\,\frac{\rho^4}{\lambda} = \tfrac{1}{32}\int\left(5 - 4\,\text{coſ.}\,\frac{2}{\lambda}\rho - 4\,\text{coſ.}\,\frac{4}{\lambda}\rho + 4\,\text{coſ.}\,\frac{6}{\lambda}\rho - \text{coſ.}\,\frac{8}{\lambda}\rho\right)$$

$$\int \text{ſin.}\,\frac{2}{\lambda}\rho^2.\,\text{ſin.}\,\frac{\rho^6}{\lambda} = \tfrac{1}{128}\int\left(14 - 14\,\text{coſ.}\,\frac{2}{\lambda}\rho - 8\,\text{coſ.}\,\frac{4}{\lambda}\rho + 13\,\text{coſ.}\,\frac{6}{\lambda}\rho - 6\,\text{coſ.}\,\frac{8}{\lambda}\rho + \text{coſ.}\,\frac{10}{\lambda}\rho\right)$$

$$\int \text{ſin.}\,\frac{2}{\lambda}\rho^2.\,\text{ſin.}\,\frac{\rho^8}{\lambda} = \tfrac{1}{512}\int\left(42 - 48\,\text{coſ.}\,\frac{2}{\lambda}\rho - 15\,\text{coſ.}\,\frac{4}{\lambda}\rho + 40\,\text{coſ.}\,\frac{6}{\lambda}\rho - 26\,\text{coſ.}\,\frac{8}{\lambda}\rho + 8\,\text{coſ.}\,\frac{10}{\lambda}\rho - \text{coſ.}\,\frac{12}{\lambda}\rho\right)$$

$$\int \text{ſin.}\,\frac{2}{\lambda}\rho^2.\,\text{ſin.}\,\frac{\rho^{10}}{\lambda} = \tfrac{1}{2048}\int\left(132 - 165\,\text{coſ.}\,\frac{2}{\lambda}\rho - 22\,\text{coſ.}\,\frac{4}{\lambda}\rho + 121\,\text{coſ.}\,\frac{6}{\lambda}\rho - 100\,\text{coſ.}\,\frac{8}{\lambda}\rho + 43\,\text{coſ.}\,\frac{10}{\lambda}\rho - 10\,\text{coſ.}\,\frac{12}{\lambda}\rho + \text{coſ.}\,\frac{14}{\lambda}\rho\right.$$

etc.

In

In quibus feriebus haec lex obferuatur, vt quifque coefficiens numericus bis fumtus demta fumma coefficientium adiacentium praebeat coefficientem refpondentem in ferie fequente; in quo computo figna coefficientium non funt negligenda; ac praeterea termini primi duplo maiores funt aeftimandi, fic eft $+2.40+26+15=+121$, et $-2.48+15-2.42=-165$.

§. 53. Omnes hae fummae igitur fierent $=0$, nifi cafus ante excepti occurrant, vnde ex his fummis foli illi termini relinquuntur, in quibus ineft vel cof. 2ρ vel cof. 6ρ, vel cof. 10ρ vel etc. quorum loco poni debet $-\lambda$. Primum autem huiusmodi terminus occurrit in fumma $\int \sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2.\sin.\frac{\rho}{\lambda}^{2\lambda-4}$; eritque ergo haec fumma $=\pm\frac{\lambda}{2^{2\lambda-3}}$; fequens autem fumma $\int \sin.\frac{2}{\lambda}\rho.\sin.\frac{\rho}{\lambda}^{2\lambda-2}$ erit $=\mp\frac{(2\lambda-2)\lambda}{2^{2\lambda-1}}$. Hinc aequatio ita incipiet:

$$0=\frac{2^{2\lambda-4}\lambda^{2\lambda-4}m^{2\lambda-4}}{1.2.3\ldots\ldots(2\lambda-4)}.\frac{\lambda}{2^{2\lambda-3}}-\frac{2^{2\lambda-2}\lambda^{2\lambda-2}m^{2\lambda-2}}{1.2.3\ldots\ldots(2\lambda-2)}.\frac{\lambda(2\lambda-2)}{2^{2\lambda-1}}+\text{etc.}$$

feu $0=1-\frac{4\lambda^2 m^2}{(2\lambda-3)(2\lambda-2)}.\frac{2\lambda-2}{4}+$ etc.

feu $0=1-\frac{\lambda^2 m^2}{2\lambda-3}+$ etc.

Apparet ergo hanc feriem, fi λ ftatuatur numerus valde magnus, maxime fore diuergentem, ita vt ex ea etiamfi habeatur, vix quicquam concludi queat.

§. 54. Cum igitur hoc modo pro valore numeri m cognofcendo nihil colligere liceat, videamus cuiusmodi formas aequatio refoluenda §. 47. induat, fi loco λ fucceffiue fubftituantur numeri 2, 3, 4, 5, etc. Ac primo quidem fi fit $\lambda=2$ habebitur haec aequatio:

 $0=$

$0 = \sin\rho^2 \cos 4m \sin\frac{\rho}{2}$, ergo $\frac{4m}{\sqrt{2}} = \rho$ et $m = \frac{\rho}{2\sqrt{2}}$, existente $\rho = \frac{1}{2}\pi = 1,57079632$. Atque tempus, quo spatium f a pulsu percurretur erit $= \frac{f}{350} \cdot \frac{\rho}{2\sqrt{g}}$. Sit porro $\lambda = 3$ et orietur haec aequatio:

$$0 = \sin\tfrac{2}{3}\rho^2 \cos 6m \sin\tfrac{1}{3}\rho - \sin\tfrac{2}{3}\rho^2 \cos 6m \sin\tfrac{2}{3}\rho$$

seu $\cos 3m = \cos 3m\sqrt{3}$. Sit ergo $3m = 2\rho - s$ et $3m\sqrt{3} = 2\rho + s$ erit $3m(1+\sqrt{3}) = 4\rho$ et $m = \frac{4\rho}{3(1+\sqrt{3})}$. Ponatur $\lambda = 4$ et prodibit:

$$0 = \sin\tfrac{1}{2}\rho^2 \cos 8m \sin\tfrac{1}{4}\rho - \sin\rho^2 \cos 8m \sin\tfrac{1}{2}\rho + \sin\tfrac{1}{2}\rho^2 \cos 8m \sin\tfrac{3}{4}\rho$$

quae ob $\sin\rho = 1$; $\sin\frac{1}{2}\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sin\frac{1}{4}\rho = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}$ et $\sin\frac{3}{4}\rho = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}$, transibit in hunc:

$$0 = \cos 4m\sqrt{(2-\sqrt{2})} - 2\cos 4m\sqrt{2} + \cos 4m\sqrt{(2+\sqrt{2})}.$$

§. 55. Ascendamus hinc secundum rationem duplam, sitque $\lambda = 8$, erit:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \sin\tfrac{1}{4}\rho^2 . \cos 16m \sin\tfrac{1}{8}\rho - \sin\tfrac{1}{2}\rho^2 \cos 16m \sin\tfrac{1}{4}\rho \\ & + \sin\tfrac{3}{4}\rho^2 . \cos 16m \sin\tfrac{3}{8}\rho - \sin\rho^2 . \cos 16m \sin\tfrac{1}{2}\rho \\ & + \sin\tfrac{3}{4}\rho^2 . \cos 16m \sin\tfrac{5}{8}\rho - \sin\tfrac{1}{2}\rho^2 . \cos 16m \sin\tfrac{3}{4}\rho \\ & + \sin\tfrac{1}{4}\rho^2 . \cos 16m \sin\tfrac{7}{8}\rho. \end{aligned}$$

quae reducitur ad hanc formam magis ordinatam

$$0 = \frac{+\sin\frac{1}{4}\rho^3 . \cos 16m \sin\frac{1}{8}\rho - \sin\frac{1}{2}\rho^2 . \cos 16m \sin\frac{1}{4}\rho + \sin\frac{3}{4}\rho^2 . \cos 16m \sin\frac{3}{8}\rho}{+\sin\frac{1}{4}\rho^2 . \cos 16m \cos\frac{1}{8}\rho - \sin\frac{1}{2}\rho^2 . \cos 16m \cos\frac{1}{4}\rho + \sin\frac{3}{4}\rho^2 . \cos 16m \cos\frac{3}{8}\rho} - \sin\rho^2 . \cos 16m \sin\tfrac{1}{2}\rho$$

Simili modo si ponamus $\lambda = 16$, aequatio resultabit, quae sequentem formam induet.

$$\frac{\sin\frac{1}{8}\rho^2 . \cos 32m \sin\frac{1}{16}\rho - \sin\frac{1}{4}\rho^2 . \cos 32m \sin\frac{1}{8}\rho + \sin\frac{3}{8}\rho^2 . \cos 32m \sin\frac{3}{16}\rho}{\sin\frac{1}{8}\rho^2 . \cos 32m \cos\frac{1}{16}\rho - \sin\frac{1}{4}\rho^2 . \cos 32m \cos\frac{1}{8}\rho + \sin\frac{3}{8}\rho^2 . \cos 32m \cos\frac{3}{16}\rho}$$

$$-\sin.\tfrac{1}{2}\rho^2.\cos.32m\sin.\tfrac{1}{4}\rho+\sin.\tfrac{5}{8}\rho^2.\cos.32m\sin.\tfrac{5}{16}\rho-\sin.\tfrac{3}{4}\rho^2.\cos.32m\sin.\tfrac{3}{8}\rho$$
$$-\sin.\tfrac{1}{2}\rho^2.\cos.32m\cos.\tfrac{1}{4}\rho+\sin.\tfrac{5}{8}\rho^2.\cos.32m\cos.\tfrac{5}{16}\rho-\sin.\tfrac{3}{4}\rho^2.\cos.32m\cos.\tfrac{3}{8}\rho$$

$$\begin{matrix}+\sin.\tfrac{7}{8}\rho^2.\cos.32m\sin.\tfrac{7}{16}\rho\\+\sin.\tfrac{7}{8}\rho^2.\cos.32m\cos.\tfrac{7}{16}\rho\end{matrix}-\sin.\rho^2\cos.32m\sin.\tfrac{1}{2}\rho=0$$

§. 56. Huiusmodi ergo aequatio formari debebit in qua fit λ numerus infinitus seu $\lambda=2^{10}$; ab eiusque resolutione pendebit valor numeri m. Inuentio igitur numeri m accurata, quo celeritas propagationis pulsuum per quoduis medium elasticum definitur, maxime est ardua, neque sine insigni amplificatione doctrinae serierum expectari potest. Interim tamen methodus, qua Celeb. Newtonus ad propagationem pulsuum inuestigandam vsus est, non parum est elegans, et pro idonea approximatione haberi potest, quamuis a rigore geometrico valde abhorreat. Per experientiam autem verus valor ipsius m satis prope cognosci poterit. Cum enim in aere sit $g=27980{,}000$ ped. Rhen. sonusque vno minuto secundo per interuallum 1100 ped. propagetur, hinc proxime reperietur $m=\frac{5\sqrt{14}}{22}=0{,}8504$, neque multum differt a sinu anguli 60°. Ad hunc autem valorem satis celeriter conuergere videntur valores ipsius m pro casibus $\lambda=2$ et $\lambda=3$ inuenti, ex quorum priori prodit $m=0{,}554$, ex posteriori vero $m=0{,}766$, vnde iam tuto colligere licet esse $m>0{,}766$ id quod per experientiam mirifice comprobatur.

§. 57. Quanquam autem hinc verum valorem litterae m elicere non valemus, tamen modum, quo pulsus per medium elasticum propagantur, satis clare perspicimus

mus. Primum enim, cum tempus, quo pulſus per interuallum $= f$ propagatur, inuentum ſit $= \frac{mf}{250 \sqrt{\frac{1}{2}g}}$ videmus in eodem medio tempus ipſi ſpatio eſſe proportionale, ſicque pulſus motu vniformi propagari vti experientia teſtatur. Deinde celeritas iſtius motus, quo pulſus progrediuntur, erit vt $\frac{f}{t}$ hoc eſt vt $\sqrt{g}$. Eſt vero g longitudo columnae eiusdem fluidi, cuius pondus ipſius vi elaſticae aequatur. Vnde ſi vis elaſtica deſignetur per E et denſitas per D, erit pondus columnae g vt Dg, et cum ſit E vt Dg, erit g vt $\frac{E}{D}$. Quare in diuerſis fluidis elaſticis erunt celeritates, quibus pulſus per ea propagantur in ratione ſubduplicata compoſita ex directa elaſticitatum et inuerſa denſitatum, ſeu vt $\sqrt{\frac{E}{D}}$.

§. 58. Haec autem aliunde iam ſatis conſtant, atque a Newtono firmiter ſunt demonſtrata: quoniam ad hoc non eſt opus, vt ipſa ſingularum particularum fluidi elaſtici agitatio ſit perſpecta. Ex hactenus allatis autem ſimul modum, quo ſingulae fluidi elaſtici particulae, dum ipſi in vno loco impulſus infligitur, ſingulis momentis agitantur. Vidimus ſcilicet, ſi vnica particula intra parietes P et Q conſtituatur, eius motum ab impulſu acceptum ſimilem fore motui oſcillatorio penduli, atque ideo perinde vibrationes peragere, ac cordam impulſam. Cum autem duo pluraue corpuſcula intra parietes P et Q collocata concipiuntur, quorum vnum duntaxat impellatur, tum nullum corpuſculum ad ſimilitudinem penduli amplius agitatur, ſed ſingulorum motus ab

hac

hac lege eo magis recedent, quo maior fuerit eorum numerus. Ex quo intelligimus ſonum neutiquam eo modo, quo nonnulli eximii Viri volunt, per aerem propagari, qui ſtatuunt, cum corda vel aliud inſtrumentum ſonorum impellitur, dari in aere eiusmodi particulas, quae ſimilem motum oſcillatorium recipiant, eoque organum auditus excitent. Quae ſententia, cum pluribus aliis incommodis laboret, vti in tractatu meo de lumine et coloribus oſtendi, nunc etiam nequidem cum vera theoria pulſuum per medium elaſticum propagatorum conſiſtere poteſt: atque hinc eo magis corroboratur ea propagationis pulſuum ratio, quam in eodem ſcripto fuſius expoſui.

EXAMEN ARTIFICII NAVIS A PRINCIPIO MOTVS INTERNO PROPELLENDI QVOD QVONDAM AB ACVTISSIMO VIRO IACOBO BERNOVLLI EST PROPOSITVM

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

In operibus *Iacobi Bernoullii*, quae praeterito Anno Geneuae sunt edita, pag. 1109 reperitur insertum schediasma, cui hic titulus est praefixus: *Artificium impellendi nauem a principio motus intra ipsam nauem concluso*; in quo Vir Celeberrimus ostendere conatur, etiamsi vulgo naues non nisi a viribus extrinsecus petitis propelli posse putentur, tamen fieri posse, vt nauis a sola vi interna ad motum incitetur. Quod artificium vt maxime paradoxon videtur, ita siquidem optatum effectum praestaret, plerisque aliis modis, quibus naues promoueri solent, merito longe esset praeferendum. Cum igitur non constet, vtrum periculum vnquam sit factum atque experimentum ex voto successerit, operae pretium fore videtur, hunc mechanismum diligentius expendere atque ad leges motus examinare.

§. 2. Cum nauta stans in littore firmo nauem possit conto propellere, in ipsa autem naui constitutus idem praestare nequeat, propterea quod quantum nauem prorsum impellat, tantumdem eam pedibus carinae innixus retrorsum vrgeat; recte quidem concludi videtur, naui non

non posse motum induci a vi, quae tota intra nauem existat. Quantumuis scilicet homines aliaeue machinae in naui constitutae eandem propellere annituntur, tamen quia reactio actioni perpetuo est aequalis, et vtraque a naui aeque sustinetur, nullum inde motum adipiscitur. Hinc omnes eorum, qui in naui versantur, conatus ad nauem promouendam sunt irriti, nisi sese littori aliiue corpori extra nauem sito applicare queant.

§. 3. Hanc veritatem Bernoullius minime ignoravit, eam vero non ad omnis generis vires patere existimauit, sed putauit eam ad illas tantum vires, quae vulgo mortuae vocari solent; restringi oportere, quae solis pressionibus contineantur; alterum autem virium genus quae viuae appellentur atque a percussione oriantur, ab hac lege esse excipiendum. Hinc non dubitat, quin in naui eiusmodi ictus et percussiones effici queant, a quarum impetu naui motus inducatur. Quae opinio, si ad mentem plerorumque recentiorum philosophorum, qui inter vires viuas et mortuas summum discrimen statuunt, explicetur, firmissimo fundamento inniti videatur; cum autem ostendissem hoc discrimen omni fundamento carere, nihilque per vires viuas effici posse, quod non idem viribus mortuis praestari queat, maxime erit verendum, ne omnis motus, quem Bernoullius ope percussionum nauibus imprimere conatur, euanescat.

§. 4. Machina autem, quam Iac. Bernoulli in hunc finem proposuit, ita se habet: in naui DEFG constitui iubet tabulatum firmum AF in situ ad horizontem perpendiculari, quod sit perfecte elasticum puta chalybeum aut reticulatum, eo saltem in loco C vbi ictus Tab. IV. fig. 1.

O 2 recipit.

recipit. Huic tabulato in A appensum sit pendulum AB cum annexo pondere B itidem perfecte elastico, quod, dum per quadrantem BC descendit impellet tabulatum, et simul totum nauigium proram G versus promouebit. Post ictum autem ob elasticitatem resiliet, iterumque descendendo similes ictus continuo repetet; sicque naui motum perennem inducet. Ne autem iste penduli motus ob resistentiam aeris sensim languescat, sed pendulum constanter ad quadrantis initium B ascendendo pertingat, hoc ope automati, quemadmodum in horologiis pendulis fieri solet, obtineri posse indicat.

§. 5. Si ad hos ictus successiuos, quibus tabulatum A F continuo percutitur, solum respiciamus, dubium prorsus est nullum, quin iis nauis ad motum incitetur, molesque penduli facile eousque augeri posset, vt nauis superata aquae resistentia, quantumuis magnam consequatur celeritatem. Verum hic quoque animaduertendum est pendulum, dum alternatim ascendit et descendit vim contrariam in nauem exerere, qua ea puppim D versus sollicitetur. Quoniam enim pendulum in quouis situ AM tam a pondere, quam a vi centrifuga tenditur, hanc vim punctum suspensionis A sustinet, ab eaque secundum directionem AM trahitur, quae vis cum perpetuo retrorsum dirigatur, nauis ab ea retrorsum impelletur. Hinc impulsio nauis proram G versus efficietur tantum excessu, quo vires percussionis superant has continuas sollicitationes retro directas, siquidem huiusmodi excessus detur.

§. 6.

§. 6. Hic quidem maxima philoſophorum pars, qui Leinbizii ideas de viribus fortaſſe male expoſitas ſequuntur, vireſque viuas mortuis quaſi infinities maiores putant, aſſeuerare non dubitabunt, quin nauis hoc modo notabilem motum ſit impetratura, neque admodum neceſſarium putabunt, vt virium illarum nauem retro pellentium ratio habeatur, cum vis percuſſionis nauem propellens ipſis incomparabiliter maior videatur. Interim tamen Vir ſagaciſſimus Iacobus Bernoullius longe aliter exiſtimauit; atque effectum ab iſtis viribus mortuis oriundum ſtudioſe inueſtigauit, eumque ab effectu, quem quilibet ictus producit, ſubduxit, vt veram nauis propulſionem adipiſceretur. Inuenit autem calculo ſubducto, vires percuſſionum aliquantum praeualere viribus pendulum continuo tendentibus, hincque demum concluſit, nauem ope huiusmodi penduli propelli debere.

§. 7. Quamquam autem vim, qua nauis a penduli percuſſionibus propellitur, non multo maiorem deprehendit altera vi a tenſionibus orta, tamen naui ab ea non mediocrem motum imprimi exiſtimat, vt etiam aquae reſiſtentiae ratione habita, nauis non contemnendam celeritatem acquirere poſſet. Euoluto enim caſu, quo penduli pondus centeſimae totius nauis parti aequale aſſumitur, collegit nauem ſingulis minutis primis per ſpatium 82 $\frac{1}{2}$ pedum propelli debere, vbi quidem diminutionis reſiſtentiae ab idonea prorae figura oriundae nullam habuit rationem. Accommodato autem hoc caſu ad nauem roſtratam, cuius reſiſtentiam decuplo minorem aſſumit, celeritatem ipſi impreſſam vltra 260 pedes

des singulis minutis primis, 15649 pedes vna hora confecturam esse contendit, quae celeritas certe tanta est, vt consueta remigatione vix maior obtineri possit.

§. 8. Quod si ergo iste naues propellendi modus tantum valeret, dubium certe esset nullum, quin is non solum remigationi longe esset anteferendus, sed etiam saepe maximo cum fructu loco venti adhiberi posset. Cum enim pro ratione molis nauis satis magna vis ad remos vibrandos requiratur, ita in praesente mechanismo nulla fere vi est opus. Postquam enim pendulum semel ad situm summum est eleuatum, post primum ictum sponte ad eandem fere altitudinem ascendit, ob maximam cum ipsius corporis tum tabulati elasticitatem; et, quantum ascensus in quaque vibratione tam a resistentia aeris, quam a defectu perfectae elasticitatis imminuitur, id ab exigua vi facile reparatur, ita vt continuus penduli motus vel a puero conseruari posset. Quin etiam loco vnius penduli, ne nimia eius massa impedimento esset, plura minora adhiberi possent, quae parem vel maiorem effectum praestarent; neque difficile foret modum excogitare, quo huiusmodi mechanismus sine vllo nauigationis incommodo ad vsum accommodaretur.

§. 9. Verum haec vtilitas in re nautica nimis est magna, quam ut eam tamdiu latere potuisse verisimile sit, praesertim cum non admodum abscondito mechanismo contineatur, atque adeo ob ipsam commodorum magnitudinem merito in suspicionem incurrit. Neque etiam mediocriter haec suspicio augetur, quod descriptio huius artificii tantum in opusculis posthumis Iacobi Bernoulli repe-

reperiatur, eoque viuente nunquam fit diuulgata. Minime autem probabile videtur, Virum beate defunctum tantum inuentum quod certe omnibus reliquis ipsius inventis, etiamsi sint maxima, palmam longe praeriperet, celaturum fuisse, nisi de felici successu ipse dubitauisset. Quamobrem si demonstrauero huiusmodi penduli ictibus naui nullum prorsus motum imprimi, nihil quicquam de laude ac meritis summi huius Viri detrahetur, cum ipse quoad vixerit, probe cauerit, ne meditatio nondum satis polita in publicum protruderetur.

§. 10. Si igitur effectum huiusmodi penduli ictuum inuestigare velimus, primum dum pendulum per quadrantem BMC descendit, quantum nauis ab eo retro vrgeatur, definire debebimus, deinde ipse ictus erit considerandus, quo nauis propellitur motumque qui naui proram versus inde imprimitur exacte determinari oportebit. Denique cum hic motus a sequente post reflexionem ascensu iterum retardetur, videndum erit, vtrum nauis, postquam pendulum ad B vsque est reuersum motum habeat reliquum antrorsum directum, nec ne, et quantus is sit futurus. Quodsi enim nauis, cum initio descensus quieuisset, post finitum ascensum iterum in statum quietis redigatur, sicque initio secundi descensus denuo in quiete versetur, dubium erit nullum, quin nauis perpetuo in eodem fere loco sit permansura, ita vt totus penduli effectus in alternis progressionibus et regressionibus, quae se mutuo exacte destruant, consumatur. Determinatio autem huius motus reciproci, si resistentiae aquae rationem habere voluerimus, maxime fieret difficilis, neque sine calculo molestissimo expediri posset.

§. 11.

§. 11. Hancobrem aliam viam faciliorem inire studebo qua effectus a successiuis huius modi penduli percussionibus oriundus non minus distincte cognosci et diiudicari queat. Nauim scilicet in loco suo penitus fixam contemplabor, atque sollicitationum momentanearum, quibus nauis durante quouis penduli descensu et ascensu retro pellitur, summam inuestigabo; deinde simili ratione vim ictus, qua nauis propelleretur, seorsim exprimam, vt hoc modo tam tota vis, qua nauis a qualibet penduli actione retro impellitur, quam vis propellens innotescat. Absoluitur autem quaelibet penduli actio primum descensu, secundo ictu, ac tertio ascensu. Quodsi ergo summa virium pellentium ex descensu et subsequenti ascensu natarum aequalis fuerit vi ictus ad nauem propellendam directae, tuto concludere poterimus, naui, etiamsi esset libera, nullum motum progressiuum induci, sin autem vel vis percussionis vel summa virium retrahentium praeualeat, naui liberae quoque vel motus antrorsum vel retrorsum imprimetur.

§. 12. Cum igitur nauis quouis descensus penduli momento puppim versus sollicitetur, quaeratur huius vis magnitudo pro quouis penduli situ AM, eaque per elementum temporis multiplicetur. Haec expressio differentialis deinceps integretur, quae ad totum descensum adaptata praebebit summam omnium virium retrahentium, similique modo haec virium summa pro ascensu colligatur. Constat autem si nauis actioni harum virium libere obsequi posset, tum ab iis ipsi motum inductum iri, cuius quantitas, seu productum ex massa in celeritatem geni-

genitam illi ipsi integrali exacte futurum sit aequale. Deinde quaeratur quantitas motus quae naui, si libera esset, ab ictu penduli imprimeretur, haecque cum illa comparetur, vt pateat vtrum altera sit maior, an vtraque aequalis. Hocque modo tutissime concludere poterimus, vtrum nauis ab his viribus vllum consecutura sit motum, nec ne?

§. 13. Cum igitur in hac inuestigatione multum intersit, vtrum pendulum sit simplex an compositum, ponamus primo pendulum esse simplex, ita vt tota eius massa in ipsius centro grauitatis M collecta concipi queat. Describat itaque hoc pendulum in quolibet ascensu et descensu integrum quadrantem BMC. Sit longitudo Fig. 2. penduli AM = AC = a, eius pondus = M: atque descendendo ex B elapso tempore t iam peruenerit in situm AM, in quo a recta verticali AC etiamnum distet angulo CAM = Φ: erit celeritas eius in M debita altitudini LM = a cos. Φ: hincque ipsa celeritas = $\sqrt{a \cos. \Phi}$, qua cum tempusculo dt absoluat arculum = $-a d\Phi$ erit $dt = -\frac{a d\Phi}{\sqrt{a \cos. \Phi}}$. Hanc enim legem constanter obseruabo, vt celeritates per radices quadratas ex altitudinibus ipsis debitis, et temporis elementa per spatiola interea percursa ad celeritates applicata exprimam.

§. 14. Inuenta altitudine celeritati penduli in M debita = a cos. Φ, erit vis centrifuga = $\frac{2 M a \cos. \Phi}{a}$ = 2 M cos. Φ, qua filum AM tendetur. Deinde cum pendulum a grauitate = M deorsum vrgeatur secundum directionem verticalem MP, haec vis secundum directiones MQ ad AM normalem, et MR resoluta dabit pro directione MQ vim = M sin. Φ, et pro directione MR vim M cos. Φ;

Φ; quarum illa ita tota ad penduli motum accelerandum impenditur, vt filum AM prorſus non tendat. Contra vero altera vis $MR = M\,\text{coſ.}\,\Phi$ tota in filo AM tendendo inſumetur. Hinc ergo et a vi centrifuga coniunctim filum AM tendetur vi $= 3\,M\,\text{coſ.}\,\Phi$, a qua punctum ſuſpenſionis A in directione AM ſollicitabitur. Quare ex huius reſolutione naſcetur vis nauem retro vrgens $= 3\,M\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$.

§. 15. Multiplicetur ergo haec vis $3\,M\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$, qua nauis puppim verſus impellitur, per elementum temporis $dt = \frac{-a\,d\Phi}{\sqrt{a\,\text{coſ.}\,\Phi}} = \frac{-d\Phi\sqrt{a\,\text{coſ.}\,\Phi}}{\text{coſ.}\,\Phi}$; ac prodibit ſollicitatio momentanea $= -3\,M\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{a\,\text{coſ.}\,\Phi}$, cui elementum motus geniti eſt aequale. Quoniam ergo eſt $-d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi = d.\,\text{coſ.}\,\Phi$, ſi ponatur $\text{coſ.}\,\Phi = z$ erit ſollicitatio momentanea $= 3\,M\,dz\sqrt{az}$ cuius integrale eſt $2\,Mz\sqrt{az} = 2\,M\,\text{coſ.}\,\Phi\sqrt{a\,\text{coſ.}\,\Phi}$. Haecque expreſſio praebet ſummam omnium ſollicitationum, quibus nauis retro vrgetur, dum pendulum per arcum BM deſcendit. Fiat ergo $\Phi = 0$, et prodibit ſumma ſollicitationum momentanearum ex deſcenſu penduli integro ortarum $= 2\,M\sqrt{a}$, cui cum aequalis ſit ſumma ſimilium ſollicitationum ex ſubſequente aſcenſu reſultans, in qualibet penduli actione nauis retro impelletur a viribus, quarum ſumma eſt $= 4\,M\sqrt{a}$; ab hisque naui, ſi libera eſſet motus imprimeretur; cuius quantitas futura eſſet $= 4\,M\sqrt{a}$.

Fig. 3. §. 16. Quaeramus nunc etiam quantam vim pendulum exerat in nauem, dum in tabulatum elaſticum AF impingit; vbi quidem tabulatum tanquam immobile ſpectabimus. Incurrit autem in hoc tabulatum corpus penduli, cuius maſſa ſeu pondus eſt $= M$, cum celeritate

tate

tate debita altitudini a, quippe ex qua in descensu est delapsum. Quo autem effectum collisionis distinctius intueri queamus, tabulato in C annexum statuamus elastrum CD, in quod corpus incurrat, cuius quidem longitudinem quantumuis exiguam concipere licet. Tempore iam $= t$, postquam collisionis initium in D erat factum, pertigerit corpus in M, et elastrum in statum MC compresserit. Ponatur spatium DM $= x$, celeritas corporis in M residua debita altitudini $= v$, et vis elastri CM, qua se expandere conatur $=$ P.

§. 17. His positis, dum pendulum vlterius per spatiolum $= dx$ penetrabit, erit per leges sollicitationum $M\,dv = -P\,dx$. Sed quoniam tabulatum AF indeque ipsa nauis in hoc statu antrorsum impellitur vi $=$ P, valorem $\int P\,dt$, quamdiu conflictus durat, scrutari debemus. Cum autem sit $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$; superior aequatio abibit in hanc $\frac{M\,dv}{\sqrt{v}} = -P\,dt$, vnde fit $\int P\,dt = -\int \frac{M\,dv}{\sqrt{v}} = C - 2\,M\sqrt{v}$: quae quantitas cum initio conflictus euanescere debeat, erit $C = 2\,M\sqrt{a}$ ideoque $\int P\,dt = 2\,M\sqrt{a} - 2\,M\sqrt{v}$. Cum iam ambo corpora ponantur perfecte elastica, finito conflictu corpus habebit celeritatem aequalem illi, qua incurrerat, et quae erat $= \sqrt{a}$, sed contrarie directam fietque propterea $\sqrt{v} = -\sqrt{a}$. Quo valore substituto prodibit summa virium momentanearum ex conflictu ortarum nauemque propellentium $= 4\,M\sqrt{a}$.

§. 18. Motus ergo, quem percussio penduli naui imprimere conatur proram versus praecise aequalis est illi, quem vires pendulum tendentes, quamdiu descensus et ascensus vnus absoluitur, in contrariam directionem generare valent. Ex quo manifestum est, etiamsi navis ab ictu penduli propulsionem proram versus accipiat, tamen hunc totum motum deinceps ab ascensu penduli subsequenteque descensu omnino sublatum iri, quae destructio cum post singulos ictus eueniat, nauis nullum motum progressiuum consequi poterit, vti Celeb. Iacobus Bernoulli est suspicatus. Quanquam enim idem fere raciocinium, quo hic visus sum instituit, viresque nauem retrahentes simili modo aestimauit, tamen in determinatione vis propellentis a percussione oriundae, errorem quendam commisit, quem Cl. Cramerus eius Commentator probe animaduertit, neque tamen ob calculi, qui ipsi subeundus videbatur, molestiam correxit.

§. 19. Neque vero haec perfecta virium propellentium et repellentium compensatio tantum locum habet, cum pendulum per integrum quadrantem mouetur; sed etiamsi minores arcus oscillando absoluat, perinde obseruabitur, id quod ostendisse operae erit pretium. Descendat ergo pendulum ante consideratum simplex AM per arcum quadrante minorem HMC, sitque positis vt ante longitudine $AM = a$, et pondere corporis $M = M$, angulus $HAC = \theta$: et elapso tempore $= t$ descripserit arcum HM, sitque angulus $MAC = \Phi$; erit ductis horizontalibus HI et MK, altitudo $AI = a \operatorname{cos.} \theta$ et $AK = a \operatorname{cos.} \Phi$. Hinc ergo erit $IK = a(\operatorname{cos.} \Phi - \operatorname{cos.} \theta)$ quae est altitudo celeritati corporis in M debita: quare eius vis centrifuga erit $= 2M(\operatorname{cos.} \Phi - \operatorname{cos.} \theta)$, qua filum penduli AM tendetur. Cum autem tempusculo dt pendulum per arculum $= -a\,d\Phi$ descendat cum celeritate $= \sqrt{a(\operatorname{cos.} \Phi - \operatorname{cos.} \theta)}$, erit $dt = \frac{-d\Phi \sqrt{a}}{\sqrt{(\operatorname{cos.} \Phi - \operatorname{cos.} \theta)}}$.

Fig. 4

§. 20. Consideretur nunc etiam vis grauitatis, qua pendulum in M secundum MP deorsum vrgetur vi $= M$; hinc per resolutionem nascetur vis pendulum tendens M R $= M \operatorname{cos}. \Phi$. Quamobrem filum AM omnino tendetur vi $= 3 M \operatorname{cos}. \Phi - 2 M \operatorname{cos}. \theta$; quae cum habeat directionem obliquam, pro directione horizontali dabit vim $= 3 M \operatorname{cos}. \Phi \operatorname{sin}. \Phi - 2 M \operatorname{cos}. \theta \operatorname{sin}. \Phi$. Haec ergo per elementum temporis $dt = \frac{-d\Phi \sqrt{a}}{\sqrt{(\operatorname{cos}. \Phi - \operatorname{cos}. \theta)}}$ multiplicetur, vt prodeat sollicitatio momentanea $= \frac{-M d\Phi \operatorname{sin}. \Phi (3 \operatorname{cos}. \Phi - 2 \operatorname{cos}. \theta) \sqrt{a}}{\sqrt{(\operatorname{cos}. \Phi - \operatorname{cos}. \theta)}}$. Ponatur $\operatorname{cos}. \Phi = z$, et $\operatorname{cos}. \theta = b$ erit $-d\Phi \operatorname{sin}. \Phi = dz$, et sollicitatio momentanea erit $= \frac{+ M dz (3z - 2b) \sqrt{a}}{\sqrt{(z-b)}}$; cuius integrale est $= (+ 2 M z \sqrt{a (z-b)} = (+ 2 M \operatorname{cos}. \Phi \sqrt{a (\operatorname{cos}. \Phi - \operatorname{cos}. \theta)}$; quod quia initio vbi $\Phi = \theta$ euanescere debet, erit $C = 0$, ita vt summa omnium virium momentanareum descensui per arcum HM respondentium sit $= 2 M \operatorname{cos}. \Phi \sqrt{a (\operatorname{cos}. \Phi - \operatorname{cos}. \theta)}$.

§. 21. Ponatur iam $\Phi = 0$, ac pro toto penduli descensu erit summa sollicitationum momentanearum $= 2 M \sqrt{a (1 - \operatorname{cos}. \theta)} = 2 M \sqrt{CI}$: seu cum $\sqrt{CI}$ exprimat celeritatem penduli in imo puncto C, ista summa aequabitur duplae quantitati motus, quem pendulum in C acquirit. Cum iam ascensus similis sit descensui, summa virium nauem retro pellentium, quae tam ex ascensu quam descensu originem trahunt, erit $= 4 M \sqrt{CI}$. Ex §. 17 autem obtinebimus vim, quae ex ictu resultat, si loco celeritatis ibi consideratae $\sqrt{a}$ substituamus hanc, qua pendulum in tabulatum incurret, quae est $= \sqrt{CI}$. Quo facto reperietur quoque vis ex percussione orta $= 4 M \sqrt{CI}$: atque adeo etiam hoc casu vires in descensu et aſcenſu retro pellentes ſimul ſumtae aequales erunt vi, qua nauis ab ictu antrorſum propellitur. Neque ergo hoc quoque caſu ab impulſionibus penduli naui motus progreſſiuus induci poterit.

§. 22. Quae hactenus de pendulis ſimplicibus ſunt demonſtrata, ita cum lege quadam conſtantiſſima naturae coniuncta videntur, vt iam pro certo affirmare poſſimus, in pendulis quoque quibusuis compoſitis eandem perfectam aequalitatem inter vires propellentes ac repellentes deprehenſum iri. Quod etſi ex natura centri oſcillationis facile oſtendi poſſet, tamen ceteris naturae legibus tam videtur conſentaneum, vt primis mechanicae principiis merito ſit annumerandum. Quemadmodum ergo in preſſionibus, ſeu viribus mortuis actioni ſemper aequalis et contraria reactio, ita quoque in percuſſionibus ſimilis aequalitas locum habet, quod eo minus eſt mirandum, cum quaelibet percuſſio ad preſſiones reuocari queat. Plus itaque virium quilibet ictus praeſtare nequit, quam ad motum corporum collidentium generandum requiritur, atque hancobrem naues non ſolum hoc modo Bernoulliano propelli non poſſunt, ſed quaecunque aliae machinationes, quae totae naui ſunt incluſae nullique principo externo innituntur, aeque erunt inutiles, neque nauibus vllum motum imprimere valebunt.

§. 23. Stabilito igitur hoc principio viciſſim eiusmodi problemata reſoluere poterimus, quae alias ſolutu longe futura eſſent difficillima. Vti ſi pendulum ſuperius praeterea fuerit flexile, atque non in circulo ſed alia quacunque linea curua moueatur, praetereaque reſiſtentia aliaque motus impedimenta affuerint, quae res calculum inſuperabilem redderent; vel ſi alia quaecunque machina in naui

con-

conſtituatur, quae partim preſſionibus partim percuſſionibus in nauim agat; nihilominus certiſſime affirmare poterimus, perfectam continuo exiſtere aequalitatem inter vires nauem propellentes et eas, quae in regionem oppoſitam effectum exerant. Ac ſi vires quidem ſint omnes prementes ſeu mortuae, iſtud aequilibrium quolibet inſtanti exiſtit, ſin autem machina inſuper percuſſiones complectatur, tum quidem non quouis momento aequilibrium cernetur, ſed fieri poteſt vt nauis per aliquod temporis interuallum a viribus prementibus propellatur; qui autem effectus deinceps ſubito ab inſequente percuſſione penitus deſtruatur. Quamdiu ſcilicet ipſa machina in motu verſatur, et extra aequilibrii ſtatum eſt poſita, naui motus imprimetur, quam primum autem machina in priſtinum ſtatum reſtituitur, ſimul nauis in ſitum primum redigetur.

§. 24. Ratio autem huius principii multo clarius perſpicietur, ſi primum aquam omni reſiſtentia carentem aſſumamus, ita vt nauis perpetuo motum impreſſum ſine vllo impedimento proſequi poſſit. In hac hypotheſi, ſi ſuper naui huiusmodi pendulum aliaue quaecunque machina agitetur, quae nullum recipiat motus principium externum, ex legibus motus manifeſtum eſt commune grauitatis centrum ipſius nauis ac machinae quieſcere debere; niſi quatenus verticaliter vel aſcenditvel deſcendit. Haec enim lex non ſolum obſeruatur, cum machina per preſſiones in nauem agit, quo caſu tam in nauem quam in machinam aequales vires exeruntur: ſed etiam ſi ictus ſeu percuſſiones peraguntur, centri grauitatis ſtatus non ſecus perturbabitur. Quomodocunque ergo machina intra nauem exiſtens fuerit comparata, eiusque actio tam ex

preſſio-

pressionibus quam percussionibus composita, centrum commune grauitatis secundum horizontem nullum motum consequi poterit, neque idcirco vlla huiusmodi machina apta erit ad nauem promouendam.

§. 25. Quodsi vero resistentia aquae simul consideretur, tum lex ante memorata de centro grauitatis aliquantum infringitur, dum nauis a machina sollicitata tantum non cedit, quantum per illam legem cedere deberet, similique modo in collisionibus ob resistentiam aquae commune centrum grauitatis non perfecte quiescet. Difficillimo etiam calculo opus esset, si quis singulos hos effectus secundum praecepta mechanica euoluere vellet. Cum autem totus resistentiae effectus in motu minuendo consumatur, neque ab ea vllus motus produci possit: resistentia aquae certe in causa esse non poterit, vt navi motus imprimatur, cum eadem nauis resistentia sublata quiescere deberet. Vnde summo iure concludimus, quemadmodum nauis remota aquae resistentia a viribus internis nullum motum progressiuum adipisci potest, ei multo minus, si resistentia aquae accedat, ab huiusmodi viribus vllum motum imprimi posse.

Fig. 1. §. 26. Quamquam hoc ratiocinium omni exceptione maius videtur, tamen dantur casus, quibus ob ipsam resistentiam motus producitur, cum nullus ea remota oriretur. Si enim nauis DEFG basi sua EF in plano aspero incumberet, super quo sine sensibili frictione promoueri nequeat, perspicuum est frictionem tantam esse posse, vt a viribus pendulum tendentibus superari nequeat, sicque ab iis naui nullus motus retrorsum imprimatur. Nihilo tamen minus ab ictu penduli contra tabel-

bellatum AF frictio vinci poterit, quo fiet vt nauis a singulis percussionibus penduli aliquantum prorsum protrudatur, quae promotio cum a viribus contrariis non destruatur, nauis vtique promouebitur, qui effectus nullo modo obtineretur, si nulla frictio adesset. In quo memorabile paradoxon mechanicum continetur, quod ipsa frictio motus cuiuspiam causa esse queat, ita vt frictione sublata nullus plane motus sequeretur.

§. 27. Eo maior igitur hinc causa dubitandi suboritur, vtrum ob aquae resistentiam naui ab huiusmodi penduli ictibus nullus motus induci queat, etiamsi certum sit, si resistentia abesset, ipsi hoc modo nullum motum imprimi posse. Quod dubium vt tollamus, consideremus nauem alternatim a duabus viribus; p et P sollicitari, a quarum altera p tempore $= t$ proram versus, ab altera autem P tempore $=$ T puppim versus vrgeatur, hae autem vires p et P ratione temporum t et T ita sint comparatae, vt sit $pt = PT$, quam aequalitatem determinatio virium tam propellentium quam repellentium ante instituta suppeditauit. Quamuis autem neque vis p neque P, quamdiu vtraque agit, inuenta sit constans, tamen commoditatis calculi gratia vtramque constantem sine errore assumere poterimus, cum leuis inaequalitas nullius motus causa esse queat, qui ex aequalitate non aeque sequeretur.

§. 28. Ponamus igitur vim p prius agere, qua nauis propellatur, atque initio nauem fuisse in A, vbi celeritatem habuerit proram versus $= \sqrt{b}$, iamque confecisse spatium $AP = x$ atque in P celeritatem habere de- Fig. 5.

bitam altitudini $= v$. Cum igitur resistentia sit vt quadratum celeritatis, ponatur ea $= \frac{v}{k}$; fietque $dv = pdx - \frac{vdx}{k}$. Ponatur tempus quo ex A in P peruenerit $= t$, erit $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$ et $dx = dt\sqrt{v}$ quo valore loco dx substituto habebimus $k\,dv = (kp - v)\,dt\sqrt{v}$. Sit $\sqrt{b} = c$ et $\sqrt{v} = u$, vt irrationalitas tollatur, erit $2kdu = (kp - uu)dt$. Quia igitur si $t = 0$ fit $u = c$, integrale huius aequationis etiamsi per logarithmos exhiberi posset, tamen expediet per seriem sequenti modo exprimere:

$$u = c + At + Btt + Ct^3 + Dt^4 + \text{etc.}$$

ex qua fit:

$$\frac{2kdu}{dt} = 2Ak + 4Bkt + 6Cktt + \alpha Dkt^3 + \text{etc.}$$

$$\begin{aligned} kp - uu = kp &- 2Act - 2Bctt - 2Cct^3 \\ &- cc \quad\;\; - AAtt - 2ABt^3 \end{aligned} \;\text{etc.}$$

Coaequatio coefficientium igitur dabit:

$$A = \tfrac{1}{2}p - \frac{cc}{2k}.\ B = \frac{-cp}{4k} + \frac{c^3}{4k^2}:$$

$$6Ck = \frac{ccp}{2k} - \frac{c^4}{2kk} - \tfrac{1}{4}pp + \frac{ccp}{2k} - \frac{c^4}{4kk} = -\tfrac{1}{4}pp + \frac{ccp}{k} - \frac{3c^4}{4kk}$$

$$\text{Ergo } C = \frac{-pp}{24k} + \frac{ccp}{6kk} - \frac{c^4}{8k^3}$$

$$8Dk = \frac{cpp}{12k} - \frac{c^3p}{3kk} + \frac{c^5}{4k^3} + \frac{cpp}{4k} - \frac{c^3p}{2kk} + \frac{c^5}{4k^3}$$

$$\text{seu } D = \frac{cpp}{24kk} - \frac{5c^3p}{48k^3} + \frac{c^5}{16k^4} \text{ etc.}$$

Ex his ergo oritur celeritas nauis quaesita finito tempore t:

$$\begin{aligned} u = c &+ \tfrac{1}{2}t\left(p - \frac{cc}{k}\right) - \frac{ctt}{4k}\left(p - \frac{cc}{k}\right) - \frac{t^3}{24k}\left(pp - \frac{4ccp}{k} + \frac{3c^4}{kk}\right) \\ &+ \frac{ct^4}{48kk}\left(2pp - \frac{5ccp}{k} + \frac{3c^4}{kk}\right) + \text{etc.} \end{aligned}$$

§. 29. Simili modo si finito hoc tempore t celeritas nauis antrorsum ponatur $= C$ vt sit $C = u$, tumque vis P nauem retrahat tempore T, si elapso hoc tempore T celeritas nauis residua ponatur $= U$, reperietur

U

$$U = C - \tfrac{1}{2} T \left(P + \frac{CC}{k} + \frac{CTT}{4k}\left(P + \frac{CC}{k}\right) - \frac{T^3}{24k}\right.$$
$$\left(PP + \frac{4CCP}{k} + \frac{3C^4}{kk} + \frac{CT^4}{48kk}\left(2PP + \frac{5CCP}{k} + \frac{3C^4}{kk}\right) - \text{etc.}\right.$$

Quia vero eſt $pt = PT$ ponamus $pt = PT = Q$ erit $p = \frac{Q}{t}$ et $P = \frac{Q}{T}$, quibus valoribus loco p et P ſubſtitutis, erit

$$u = c + \tfrac{1}{2} Q - \frac{cct}{2k} - \frac{cQt}{4k} - \frac{QQt}{24k} + \frac{c^3tt}{4kk} + \frac{ccQtt}{6kk} + \frac{cQQtt}{24kk} - \text{etc.}$$
$$U = C - \tfrac{1}{2} Q - \frac{CCT}{2k} + \frac{CQT}{4k} - \frac{QQT}{24k} + \frac{C^3T^2}{4kk} - \frac{CCQT^2}{6kk} + \frac{CQQT^2}{24kk} \text{ etc.}$$

Cum autem tempus percuſſionis t ſit quaſi infinite paruum poſito $t = 0$, erit $u = c + \frac{1}{2} Q = C$, vnde ab ſubſequente penduli actione ab eius tenſione oriunda fiet:

$$U = c - \frac{T}{24k}(12cc + 6cQ + QQ) + \text{etc.}$$

vbi reliquos terminos negligimus, quia prae his duobus ſunt valde parui.

§. 30. Hinc ergo manifeſtum eſt fore $U < c$, ideoque celeritatem nauis a quauis penduli actione, quae primum ex ictu tum vero ex tenſione penduli componitur, diminui debere. Etiamſi ergo nauis iam habeat celeritatem quamquiam antrorſum directam, eam tamen ab actione penduli mox amittet, vnde multo minus cum quieuerit, a pendulo vllum motum adipiſci poterit. Quod ſi vero obiiciatur nauem forte a pendulo retrorſum repelli permutandis velocitatibus u et U, ſimili modo oſtendetur, celeritatem quoque retrorſum directam, ſi quam nauis habuerit, ab actione penduli continuo imminui debere, atque adeo nullo modo naui ab huiusmodi pendulo imprimi poſſe.

 DIS-

DISSERTATIO GEOMETRICA, DE PROBLEMATIBVS ALIQVOT CONICIS PER ANALYSIN CONCINNE SOLVENDIS.

AVCTORE
GEORG. WOLFFG. KRAFFT.

Theorema.

§. 1.

Tab. V. Fig. 1. Si fuerint, in Ellipsi AMB, axis AB, tangens puncti M cuiuslibet MT; centrum C, ordinatim applicata ad axem PM: erunt CP, CA, CT, proportionales continue.

Demonstratio.

Positis $AC = CB = m$, semiaxe coniugato $CD = n$. Abscissa e centro computata $CP = x$, ordinatim applicata $PM = y$; erit ex natura Ellipseos $PM^2 (y^2) : CD^2 (n^2) = AP \times PB\, (m^2 - x^2) : AC \times CB\, (m^2)$; adeoque aequatio naturam Ellipseos exprimens haec, $y^2 = n^2 - \frac{n^2x^2}{m^2}$. Ducta ordinatim applicata priori infinite vicina pm, et recta MN ad axem AB parallela, erit, ex natura trianguli characteristici MNm infinite parui, $mN\, (dy) : MN (-dx) = PM (y) : PT \left(\frac{-ydx}{dy}\right)$. Est adeoque, substituendo pro dy valorem ipsius ex aequatione Ellipseos desumtum $-\frac{n^2xdx}{m^2y}$, subtangens $PT = \frac{m^2y^2}{n^2x}$; et rursus substituendo valorem ipsius y^2, fit eadem subtangens $PT = \frac{m^2}{x} - x$; ergo $CT = x + PT = \frac{m^2}{x}$; vnde oritur analogia

analogia $x:m = m:CT$; vel $CP:CA = CA:CT$. Q. E. D. Eſt haec propoſitio *Appollonii*, *Conicorum* 37, lib. I. quam vero ſic telae demonſtrationis noſtrae intexere volui.

Theorema.

§. 2. In Ellipſi ſumma quadratorum ex ſemidiametris quibuscunque coniugatis, aequalis eſt ſummae quadratorum ex ſemiaxibus eiusdem Ellipſeos.

Demonſtratio.

Sint axis maior AB, et ſemiaxis coniugatus CD; Fig. 2.
puncti M cuiuslibet tangens MT, ordinatim applicata MP; ſemidiametri coniugatae MC et CH; et puncti H ordinatim applicata ad axem HQ. Quibus ita poſitis ſtatuantur $CP = x$, $PM = y$, $CQ = t$; $CA = CB = m$, $CD = n$. Atque habebuntur, ex theoremate praemiſſo, $PM = y = \frac{n\surd(m^2 - x^2)}{m}$; $PT = \frac{m^2 - x^2}{x}$. Iam, quoniam ſemidiameter CH parallela eſt tangenti TM; erunt triangula PMT et QHC ſimilia. Igitur $PT\ (\frac{m^2-x^2}{x}) : PM\ (\frac{n\surd(m^2-x^2)}{m}) = QC\ (t) : QH\ (\frac{ntx}{m\surd(m^2-x^2)})$. Erit porro, ex natura Ellipſeos, $PM^2\ (\frac{n^2m^2 - n^2x^2}{m^2}) : QH^2 = AP \times PB\ (m^2 - x^2) : AQ \times QB\ (m^2 - t^2)$, vnde conficitur $QH = \frac{n\surd(m^2 - t^2)}{m}$. His itaque duobus valoribus inuentis ipſius QH inter ſe aequatis, oritur facili calculo $t = CQ = \surd(m^2 - x^2)$, et ſubſtituto hoc valore, $QH = \frac{nx}{m}$. Hinc porro deducuntur $CM^2 = PM^2 + CP^2 = \frac{n^2m^2 - n^2x^2}{m^2} + x^2$; nec non $CH^2 = CQ^2 + QH^2 = m^2 - x^2 + \frac{n^2x^2}{m^2}$. Itaque erit

$CM^2 + CH^2 = \frac{n^2m^2 - n^2x^2}{m^2} + x^2 + m^2 - x^2 + \frac{n^2x^2}{m^2} = \frac{n^2m^2}{m^2} + m^2 = n^2 + m^2 = CD^2 + CA^2$. Q. E. D.

Theorema.

Fig. 3. §. 3. Sint Ellipseos axes dimidii CA, CD, et semidiametri coniugatae quaecunque MC, CH: atque rectangulum sub dimidiis axibus aequale erit parallelogrammo sub dimidiis diametris coniugatis.

Demonstratio.

Per extremum diametri M ducatur tangens TME; erit haec parallela ipsi CH; per extremum diametri H ducatur alia tangens HE; erit haec iam parallela ipsi CM; adeoque erit parallelogrammum sub dimidiis diametris coniugatis CMEH. Ponantur denuo $AC = m$, $CD = n$, $MC = a$, $CH = b$, $CP = x$; atque habebitur, (§. 1) $CP(x) : CA(m) = CA(m) : CT(\frac{m^2}{x})$; $PT = \frac{m^2}{x} - x$; $PM = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, consequenter $TM = \sqrt{(\frac{m^4}{x^2} + a^2 - 2m^2)}$. Sed est ex natura Ellipseos $PM^2(a^2 - x^2) : CD^2(n^2) = AP \times PB(m^2 - x^2) : AC^2(m^2)$, vnde deducitur $x^2 = \frac{m^2(a^2 - n^2)}{m^2 - n^2}$; qui valor substitutus efficit $PM = \frac{n\sqrt{(m^2 - a^2)}}{\sqrt{(m^2 - n^2)}}$, $CT = \frac{m\sqrt{(m^2 - n^2)}}{\sqrt{(a^2 - n^2)}}$, et $TM = \frac{\sqrt{(m^2 - a^2)}\sqrt{(m^2 - a^2 + n^2)}}{\sqrt{(a^2 - n^2)}}$; vel, ob $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$ (§. 2), erit $TM = \frac{b\sqrt{(m^2 - a^2)}}{\sqrt{(d^2 - n^2)}}$; adeoque posito sinu toto $= 1$, erit sinus $T = \frac{PM}{TM} = \frac{n\sqrt{(a^2 - n^2)}}{b\sqrt{(m^2 - n^2)}}$. Porro in triangulo CTM est $CM(a) : \text{sin. } T(\frac{n\sqrt{aa - nn}}{b\sqrt{mm - nn}}) = CT(\frac{m\sqrt{mm - nn}}{\sqrt{aa - nn}}) : \text{sin. } CMT(\frac{mn}{ab}) = \text{sin. } MCH = \text{sin. } HCF$, ob parallelas ME et CH. Demissa nunc ex H perpendiculari HF in productam MC, erit in trian-

triangulo CHF finus totus (1) : CH (b) = fin. HCF ($\frac{mn}{ab}$) HF ($\frac{mn}{a}$). Eſt igitur area parallelogrammi CMEH = $CM \times HF = a \times \frac{mn}{a} = mn = AC \times CD$ = rectangulo ſub dimidiis axibus. Q. E. D. Habet hoc elegans theorema *Gregorius a Sancto Vincentio*, de Ellipſi, prop. 72, ſed longe aliter demonſtratum. Vtiliſſimum vero eſt theorema hoc ad varias applicationes concinnas, praecipue ob commodam expreſſionem finus anguli MCH, quem duae diametri coniugatae quaecunque inter ſe faciunt. qui finus nimirum eſt $\frac{mn}{ab}$. Commode et perſpicue iam hinc ſoluitur etiam ſequens

Problema.

§. 4. Datis duabus diametris coniugatis Ellipſeos: inuenire axes.

Solutio.

Sint datarum diametrorum dimidia $MC = a$, $CH = b$; ſemiaxes quaeſiti $AC = x$, $CD = y$; anguli dati MCH, quem ſuppono obtuſum, finus $= e$, coſinus $= -f$; erit ergo anguli HCF finus $= e$, coſin. $= +f$. Ex H in MCN demittatur perpendicularis HF, atque erit *primo*, $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. (§. 2.) Deinde in triangulo CFH erit analogia haec, finus totus (1): CH (b) = fin. HCF (e): HF (be); et ſimili modo $CF = bf$. Erit ergo *ſecundo* $xy = abe$, (§. 3.) aut vero $2xy = 2abe$, quibus additis ad aequationem modo poſitam primam, obtinebitur $x^2 + 2xy + y^2 = a^2 + b^2 + 2abe$, aut vero extracta radice, $x + y = + \sqrt{(a^2 + 2abe + b^2)}$. Subtractis autem $2xy = 2abe$ ab aequatione modo inventa

Fig. 4.

venta prima, eruitur $x^2 - 2xy + y^2 = a^2 + b^2 - 2abe$, aùt vero rurſus extracta radice fit $x - y = \pm \sqrt{(a^2 - 2abe + b^2)}$. Datis autem ſumma et differentia ſemiaxium: dantur ſemiaxes ipſi. Requiritur iam modo, vt valores inuenti commode poſſint conſtrui. Hunc in finem conſiderari debet, eſſe $e^2 + f^2 = 1$. Ergo $x + y = \pm \sqrt{(a^2 + 2abe + b^2e^2 + b^2f^2)} = \sqrt{(\overline{a+be}^2 + b^2f^2)} = \sqrt{(\overline{MC+HF}^2 + CF^2)}$. Nec non $x - y = \sqrt{(a^2 - 2abe + b^2e^2 + b^2f^2)} = \sqrt{(\overline{a-be}^2 + b^2f^2)} = \sqrt{(\overline{MC-HF}^2 + CF^2)}$. Hinc $x + y$ et $x - y$, per triangulum rectangulum, ex theoremate *Pythagorico*, nullo labore capiuntur, quarum deinde ſumma eſt axis transuerſus, differentia vero axis coniugatus. Reſtat determinandus ſitus axeos. Super diametro coniugata CH deſcriptus ſit ſemicirculus, quem axis ſecet in Q: erit CQH rectus angulus; hinc ex natura Ellipſeos eſt $QH^2 : CD^2 = BQ \times QA \; (\overline{AC - CQ} \times \overline{AC + CQ} = AC^2 - CQ^2 = AC^2 - CH^2 + QH^2) : AC^2$; vnde mediis et extremis in ſe ductis, factaque reductione, oritur $QH = \frac{CD\sqrt{(AC^2 - CH^2)}}{\sqrt{(AC^2 - CD^2)}}$. Cum igitur datae iam ſint magnitudine AC et CD; poterit hac leui conſtructione obtineri HQ, qua poſita in ſemicirculo ex H in Q, dabitur Q punctum; et ducendo dein per datum C, et inuentum Q, lineam rectam ACB, dabitur in hac poſitio axeos tranſuerſi. I. Q. E. I.

Scholion.

§. 5. Si praeter diametros coniugatas data etiam ſit perimeter Ellipſeos, quod Veteres in hoc negotio fere ſemper ſuppoſuerunt; tum facilius hoc problema reſol-

vitur,

vitur, vti docet *Appollonius* prop. 46 et 47 lib. II. Fig. 5. Ex dato enim per diametros coniugatas centro Ellipseos C, describatur arcus circuli AB quolibet radio, secans perimetrum datam in A et B; arcus interceptus bisecetur in D; transibit axis per data iam duo puncta C et D. Euidens enim est, fore vt haec CD ordinatam AB bisecet ad angulos rectos. Quodsi vero perimeter data non sit: difficilior euadit huius problematis solutio, vti iam vidimus. Huius itaque ipsius, quod modo solvimus problematis constructionem primus dedit [illegible] *Alexandrinus*, in Collect. Mathem. Libro VIII. prop. 14; sed nullam addidit demonstrationem; hanc supplere conatus est commentator Pappi, *Fred. Commandinus*, verum non satis feliciter; quod testantur *Gregorius a S. Vincentio* de Ellipsi prop. 90, et *Blondellus*, in Memoires de l' Acad. des Sciences depuis, 1666 jusqu' à 1699, pag. 464; qui idem hic etiam de hoc problemate, ex occasione aedificandorum fornicum, agit, nouam eius constructionem exhibet, et mancam *Commandini* demonstrationem emendat. *Pappi* constructionem habet quoque *Gregorius a S. Vincentio*; nec ab eadem multo abludentem tradit *Hospitalius*, des sections coniques, Lib. II. prop. 11. Si quis vero hanc nostram comparare voluerit cum enarratis solutionibus: inueniet eam concinnitate et euidentia reliquos facile superantem.

Problema.

§. 6. Data vna diametrorum coniugatione: inuenire alteram sub angulo quouis dato.

Solutio.

Fig. 4. Inueniantur ex data diametrorum coniugatione axes, (§. 4), quorum dimidia fint $AC = m$, $CD = n$; femidiametri quaefitae vero fint $MC = x$, et $CH = y$, conftituentes inter fe angulum MCH datum, quem fuppono obtufum, cuius adeo fit finus $= e$, cofinus $= -f$. Atque erit *primo* $x^2 + y^2 = m^2 + n^2$, (§. 2). Erit *fecundo* $\frac{mn}{xy} = e$, (§. 3), vel $\frac{2mn}{e} = 2xy$. Additis igitur fibi his d[illegible] [illegible]quationibus prodit $x^2 + 2xy + y^2 = m^2$ [illegible] $+ \frac{2mn}{e}$, fiue, [illegible] $\pm \surd (m^2 + n^2 + \frac{2mn}{e})$. Subtractis vero a fe his prioribus, aequationibus, extractisque rurfus radicibus, oritur $x - y = \pm \surd (m^2 + n^2 - \frac{2mn}{e})$. Data itaque denuo fumma et differentia diametrorum quaefitarum, dabuntur illae ipfae magnitudine. Vt vero cognofcatur earum pofitio: fit M punctum illud perimetri Ellipticae, quod ex fectione diametri quaefitae oritur, et inde ad axem femiordinata PM; atque erit $CP = \frac{m \surd (x^2 - n^2)}{\surd (m^2 - n^2)}$, et $PM = \frac{n \surd (m^2 - x^2)}{\surd (m^2 - n^2)}$; (§. 3.) cum igitur data iam fit magnitudo ipfius x: poterunt facili conftructione reperiri hae duae CP et PM, atque exinde fitus diametri MN cognofci, cui deinde fub imperato angulo MCH iungatur altera diameter priori coniugata. Ab aliis problematibus, quae fimili concinnitate ex his principiis folui poffunt, iam abftineo, contentus viam ad illa adeunda me monftraffe.

DEMON-

DEMONSTRATIONES DVORVM THEOREMATVM GEOMETRICORVM.

AVCTORE

G. W. KRAFFT.

Primum horum Theorematum beneuole mecum communicauit, fine subiuncta demonstratione, Celeberr. Dom. *Leonh. Eulerus*, in literis d. d. 17. Febr. 1748. ad me scriptis; quod nouum non modo visum est, sed et generalitate sua mirum in modum mihi placuit; huius itaque demonstrationem sequentem in modum postea adornaui, vt praemittere debeam ex Trigonometria petitum sequens.

Lemma.

Data sint trianguli acutanguli duo latera BA *et* BC, *cum angulo intercepto* B: *quaeritur magnitudo lateris tertii* AC. Tab. V. fig. 6. Ponantur $BA = \alpha$, $BC = \beta$, anguli acuti B sinus μ, cosinus $\lambda = \sqrt{(1-\mu^2)}$, posito sinu toto $= 1$; et demittatur perpendicularis CD. Erit iam in triangulo rectangulo BDC analogia haec: sinus totus (1): $BC(\beta) =$ sin. DCB (λ): DB $(\beta\lambda)$; hinc est segmentum $AD = \alpha - \beta\lambda$; porro est in eodem triangulo rectangulo BDC etiam haec analogia; sinus totus (1); BC $(\beta) =$ sinus DBC (μ): DC $(\beta\mu)$; ex his iam per Theorema Pythagoricum erit $AC = \sqrt{(AD^2 + DC^2)} = \sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha\beta\lambda + \beta^2\lambda^2 + \beta^2\mu^2)} = \sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha\beta\lambda + (\lambda^2 + \mu^2)\beta^2)} = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\lambda)}$; ob $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. Facile autem apparet, in eo casu, in quo sit angulus B obtusus, eius cosinum λ

 sumi

sumi debere negatiuum, vt nempe tum sit $AC = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\lambda)}$. Quae determinatio Trigonometrica huius lateris AC, quamuis nulla fere difficultate eruatur, vsum tamen insignem habet in soluendis tam plurimis problematibus, quam adstruendis theorematibus Geometricis, qui idem etiam sese ostendit in hoc sequenti meo proposito, cuius iam ipsum est subiunctum

Theorema.

Fig. 7. *Si quadrilateri cuiuscunque* ABCD *diagonales* AC, DB, *bisecentur in* F *et* G; *ducaturque recta* FG; *erit summa quadratorum e lateribus aequalis summae quadratorum e diagoniis una cum quadruplo quadrati* FG; *hoc est, erit* $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + DB^2 + 4FG^2$.

Demonstratio.

Ponantur breuitatis caussa sequentes valores,

$$\begin{array}{lcl} AC = 2A & \text{erunt} & AE = A + a = M \\ DB = 2B & & BE = B - b = N \\ FE = a & & CE = A - a = P \\ EG = b & & DE = B + b = Q \end{array}$$

$$\text{vnde } M - P = 2a$$
$$N - Q = -2b.$$

Sitque anguli AED acuti sinus μ, cosinus λ; obtusi vero AEB sinus iterum μ, sed cosinus $-\lambda$. Erunt nunc ex praemisso Lemmate

$$AB = \sqrt{(M^2 + N^2 + 2MN.\lambda)}$$
$$BC = \sqrt{(N^2 + P^2 - 2NP.\lambda)}$$
$$CD = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ.\lambda)}$$

DA

$DA = \surd\,(M^2 + Q^2 - 2\,MQ.\lambda)$
$FG = \surd\,(a^2 + b^2 - 2\,a\,b.\lambda)$

Hinc itaque, ſubſtitutis hiſce valoribus, deprehendetur, eſſe $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = M^2 + N^2 + 2\,MN.\lambda + N^2 + P^2 - 2\,NP.\lambda + P^2 + Q^2 + 2\,PQ.\lambda + M^2 + Q^2 - 2\,MQ.\lambda = 2\,(M^2 + N^2 + P^2 + Q^2) + 2\lambda(MN - NP + PQ - MQ) = 2\,(M^2 + N^2 + P^2 + Q^2) + 2\,\lambda\,(\overline{M - P} \times \overline{N - Q}) = 2\,(A^2 + 2\,Aa + a^2 + B^2 - 2\,Bb + b^2 + A^2 - 2\,Aa + a^2 + B^2 + 2Bb + b^2) - 8\,ab\lambda, = 4\,(A^2 + B^2 + a^2 + b^2 - 2\,ab\lambda) = 4\,(A^2 + B^2 + FG^2) = 4\,A^2 + 4\,B^2 + 4\,FG^2 = AC^2 + DB^2 + 4\,FG^2$.

I. Q. E. D.

Per ſe itaque patet, ſi quadrilaterum fuerit parallelogrammum: tum FG in nihilum abire, adeoque futurum eſſe $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + DB^2$.

Alterum Theorema non oſtendit minus vſum Lemmatis iam explicati, ſed et multo difficilius demonſtratur, ob ſummam, in qua poſitum eſt, atque extenſiſſimam vniverſalitatem. Inuentorem habet hoc alterum Theorema Celeberr. *Coteſium*, in cuius opuſculis poſtremis editum illud eſt a *Rob. Smith*, ſed ſine demonſtratione; quam deinde alii Geometrae addiderunt; omnibus autem in hac reperiunda palmam praeripuit, vti alias ſemper, *Ioh. Bernoullius*, quem nuper admodum viuis ereptum luget adhuc, diuque lugebit, ciuitas omnis Geometrica. Hanc viri, poſt fata etiam illuſtris, demonſtrationem videre licet in Eiusdem Operibus, Tomo IV. pag. 67, perfecta Inductione, atque euidenti ſerierum conſecutione elaboratam; quae vero, vti tam ſubtilis theorematis indagatio requirit, ſubtilis etiam eſt, neque adeo captu admodum facilis. Sequentes vero meas demonſtrationes, Lemmati ſuperiori innixas, minime pro apodixi aliqua vniuerſali vendito; ſed pro tali, quae in caſibus aliquot, exempli gratia adductis, legitime procedat, adeoque nobiliſſimo huic Cyclometriae, atque abſtruſiſſimo Theoremati clariorem lucem conciliet; ſed ſimul illud, in quolibet propoſitorum exemplorum caſu, rigidiſſime probet. Eſt vero tale ipſum hoc *Coteſianum*

Theorema.

Fig. 8. *Si peripheria circuli, cuius diameter* AI, *centrum* O, *diuiſa fuerit in partes aequales, ſed numero pares; et ex puncto diametri quocunque aſſumto* P *ducantur in diuiſionum omnes notas rectae* PB, PC, PD *&c. Si iam initium fiat in diametro ipſa, et multiplicentur ſingulae alternae hae lineae in ſe; erit factum* $AP \times CP \times EP \times GP \times IP \times LP \times NP \times PP$ *&c. vſque ad numerum horum facto rum* λ, $= AO^\lambda - PO^\lambda$. *Si vero initium fiat ab illa recta, quae diametro proxima eſt, erit denuo factum harum alternarum* $BP \times DP \times FP \times HP \times KP \times MP \times OP \times QP$ *&c. vſque ad numerum horum factorum* λ, $= AO^\lambda + PO^\lambda$. Huius iam Theorematis elegantiſſimi aliquot caſus dabo demonſtratos, quoniam generalis omnium caſuum euictio, *Bernoulliana* memorata melior inueniri vix poterit.

Praeter Lemma ſuperius autem, ſuppono adhuc, poſito anguli ſimpli coſinu $= b$, eſſe coſinum

anguli dupli $= 2b^2 - 1$

tripli $= 4b^3 - 3b$

qua-

$$\text{quadrupli} = 8b^4 - 8b^2 + 1$$
$$\text{quintupli} = 16b^5 - 20b^3 + 5b\,;$$

Deinde ex polygonorum regularium in circulum inscriptione, posito vbique radio $= 1$, esse cosinum anguli

90°	- - - - - - -	0
72	- - - - - - -	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
60	- - - - - - -	$\frac{1}{2}$
54	- - - - -	$\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4}$
45	- - - - - - -	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
36	- - - - - - -	$\frac{\sqrt{(2\sqrt{5}+6)}}{4}$
30	- - - - - - -	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
18	- - - - - - -	$\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$
0	- - - - - - -	1

Quibus itaque praemissis, assumamus peripheriam circuli diuisam esse in partes quatuor; demonstrandum est, esse $AP \times CP = AO^2 - PO^2$; et $BP \times DP = AO^2 + PO^2$. Quod facillime fit ad hanc analogiam, quam in sequentibus quoque retinebo. Ducto radio BO, sit $PO = a$, $AO = r$; atque erit anguli POB recti cosinus $= 0$; igitur ex Lemmate habetur $BP = \sqrt{(r^2 + a^2)} = DP$; quod etiam per se clarum est; pono habemus $AP = r - a$, $CP = r + a$; quare erit omnino $AP \times CP = \overline{r-a}\,.\,\overline{r+a} = r^2 - a^2 = AO^2 - PO^2$. Et rursus $BP \times DP = BP^2 = r^2 + a^2 = AO^2 + PO^2$. Vbi in hoc et sequentibus quoque casibus per se clarum est, posito puncto P extra circulum, proditura esse haec facta talia, $PO^2 - AO^2$. Fig. 9.

Se-

Fig. 10. Secundo ponamus, peripheriam circuli diuisam esse in partes sex; demonstrandum est, esse $AP \times CP \times EP = AO^3 - PO^3$; et $BP \times DP \times FP = AO^3 + PO^3$. Ductis ergo radiis BO, CO, sit denuo $PO = a$, $AO = r$, atque erit anguli POB 60° cosinus $= \frac{1}{2}$, cosinus autem dupli POC $= -\frac{1}{2}$; quibus datis ex Lemmate partim, partim per se, erunt $AP = r - a$, $BP = \sqrt{}(r^2 + a^2 - 2ar . \frac{1}{2}) = FP$; $CP = \sqrt{}(r^2 + a^2 + 2ar . \frac{1}{2}) = EP$; $DP = r + a$. Quare erit $AP \times CP \times EP = AP \times CP^2 = \overline{r - a} . (r^2 + a^2 + ar) = r^3 - a^3 = AO^3 - PO^3$. Et rursus $BP \times DP \times FP = DP \times BP^2 = \overline{r + a} . (r^2 + a^2 - ar) = r^3 + a^3 = AO^3 + PO^3$.

Fig. 11. Tertio ponamus, peripheriam circuli diuisam esse in partes octo; demonstrandum est, esse $AP \times CP \times EP \times GP = AO^4 - PO^4$; nec non $BP \times DP \times FP \times HP = AO^4 + PO^4$. Ductis ergo radiis BO, CO, DO, sint rursus $PO = a$, $AO = r$; atque erit anguli POB, semirecti, cosinus $= \frac{\sqrt{2}}{2}$, cosinus dupli autem POC $= 0$, cosinus tripli POD $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$; quibus datis partim per se, partim ex Lemmate, oritur $AP = r - a$, $BP = \sqrt{}(r^2 + a^2 - 2ar . \frac{\sqrt{2}}{2}) = HP$; $CP = \sqrt{}(r^2 + a^2 - 2ar . 0) = GP$; $DP = \sqrt{}(r^2 + a^2 + 2ar . \frac{\sqrt{2}}{2})$; $EP = r + a$. Quare prodibit $AP \times CP \times EP \times GP = AP \times CP^2 \times EP = \overline{r - a} . (r^2 + a^2) . \overline{r + a} = r^4 - a^4 = AO^4 - PO^4$. Tum vero etiam $BP \times DP \times FP \times HP = BP^2 \times DP^2 = (r^2 + a^2 - ar\sqrt{2})(r^2 + a^2 + ar\sqrt{2}) = r^4 + a^4 = AO^4 + PO^4$.

Atque simili iam huic modo demonstratio haec in reliquis casibus perficitur, quod monuisse sufficit.

PHISICO-

PHYSICO-
MÁTHEMATICA.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE, FACTAE An. 1745, TVBINGAE,

a

Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Simul ac sedem hic loci figere mihi licuit, non negligenter in id etiam incubui, vt et instrumenta adcurata, et commoda loca seligerem, quae continuandis obseruationibus meteorologicis, in Academia Imperiali Petropolitana per longam annorum seriem multo labore institutis, inseruire possent. Leguntur dictae hae obseruationes in *Commentariorum Acad. Scient Imper. Petropol.* Tomo IX, et sequentibus, in quibus aliqua saltim huc facientia, nec animaduersione plane indigna, pertinaci industria reperisse me confido. In his autem *Tubingae* factis obseruationibus vtor, plane vti in praecedentibus, Barometro simplici, bene constructo, locato in conclaui vix aliquantum calefacto durante hyeme, atque eodem modo etiam diuiso vti *Petropolitanum* fuit, scilicet in pollices *Londinenses* duodecimales, et horum partes centesimas, quas puncto a pollicibus separaui; quam diuisionem data opera hanc in finem retinui, vt eo facilius has cum praecedentibus meis obseruationibus connectere atque comparare possim. Tubuli, in quo mouetur mercurius, diameter est $\frac{1}{8}$ praecedentis pollicis, atque ipsum hoc instrumentum situm est in altitudine 60 pedum Londinens. supra libellam proxime praeterfluentis fluuii

 Nicri

Nicri. Thermometrum deinde, quo vſus ſum, methodo *Fahrenheitiana* diuiſum, conſtructum habeo ab inſigni illo artifice Amſtelodamenſi, *Henr. Prinz*, ad illa praecepta, quae exponit Celeberr. *Petrus van Muſſchenbroek* in *Tentaminibus Experimentorum Naturalium Academiae del Cimento*, *pag.* 10. *ſeqq.* et quod ipſum a ſingulari huius Viri perſpicaciſſimi in me beneuolentia ſum adeptus. Locatum vero illud obſeruo in aëre libero, ſed vmbroſo, qui ab omni calore peregrino remotus eſt, excepto pauculo aliquo, qui in diebus aeſtiuis, ſummo mane, ad illud a ſole allabitur, nulla mihi cura euitandus. Huius itaque vtriuſque inſtrumenti fide ſequentia, quae annotaui, conſtant.

§. 2. Notaui igitur Barometri altitudines maximas et minimas in ſingulis menſibus anni 1745. ex quotidianis obſeruatis, ſequentes, quas vna cum vtriuſque differentia huic tabellae includo.

	max.	min.	diff.
Ianuarius	29. 36	28. 60	0. 76
Februarius	29. 30	28. 14	1. 16
Martius	29. 30	28. 03	1. 27
Aprilis	28. 94	28. 08	0. 86
Maius	28. 68	28. 03	0. 65
Iunius	28. 79	28. 10	0. 69
Iulius	28. 75	28. 21	0. 54
Auguſtus	28. 71	28. 30	0. 41
September	29. 04	28. 41	0. 63
October	29. 08	28. 41	0. 67
Nouember	28. 98	27. 80	1. 18
December	29. 07	28. 03	1. 04

§. 3.

§. 3. Ex his Barometri altitudinibus apparet, maximam earum hoc anno fuisse 29. 36. quae visa fuit Ianuarii 2, hora 7 *p. m.* coelum nubibus continuis occupantibus, et insequente vento fortissimo SW diebus aliquot succedentibus, quibus delapsus subito iterum est mercurius. Minima autem harum altitudinum fuit 27. 80. quae accidit Nouembris 26 circa horam 5 *p. m.* quo ipso solo die mercurius repente et decidit, atque iterum ascendit, in tempestate dubia pluuias inter et serenitatem, insequente iterum satis forti SW vento, sed variabili, et niue, quae prima huius hyemis in remotis montium iugis conspicua nobis fuit. Harum duarum altitudinum differentia est 1. 56, vt adeo media Barometri eleuatio apud nos hucusque aestimanda sit 28. 58, nulla habita instrumenti supra *Nicri* fluuii ripam eleuati ratione, quae, vti modo dictum est, 60 pedes adaequat.

§. 4. Ex his iam primis harum obseruationum initiis duo consequuntur. Primum, Barometri variationem annuam hic loci esse multo minorem, quam est *Petropoli.* Nam cum *Petropolitana* haec variatio inuenta sit, nouendecim annorum interuallo 2. 77. vid. *Commentar. Petropol.* Tomus IX, pag. 359; haec nostra *Tubingensis* non est nisi 1. 56. vnius quidem anni spatio definita, sed sine dubio prope tamen veram constituta. Secundum, Barometri variationes menstruas in primis et vltimis anni mensibus esse maiores quam in mediis, si solum Ianuarium excipias: qui vero ab initio admodum fuit tepidus, donec in sui medio ad summum frigus subito descenderet;

ita vt omnia illa his obseruationibus confirmentur, quae in *Commentar. Petropol.* Tomo IX, pag. 325. asserui.

§. 5. Ex obseruationibus Thermometri, in äere vmbroso Boream versus constituti, sequentem formo tabellam, quae cuiusque mensis exhibet gradum caloris maximum, minimum, atque differentiam vtriusque, ita quidem, vt, quoniam gradus *Fahrenheitiani* numerantur ab 0, sursum et deorsum inscripti, illos qui sunt infra 0 denotem signo negationis in Algebra recepto; adeoque − 13 significat gradum 13. infra 0.

	calor max.	min.	diff.
Ianuarius	45	−13	58
Februarius	47	8	39
Martius	67	−5	72
Aprilis	72	32	40
Maius	76	42	34
Iunius	85	48	37
Iulius	89	48	41
Augustus	87	50	37
September	85	41	44
October	71	28	43
Nouember	51	21	30
December	45	10	35

Vnde apparet, maximum calorem huius anni fuisse 89 graduum, qui incidit in diem 8 Iulii, in qua serenitas aliquot dierum subito mutata fuit in grauissimas fulminationes, die 9 insequenti denuo recurrentes, sine vllo vento. Minimus vero calor, hoc est, maximum frigus, gra-

gradum tenuit 13 infra 0, quod debetur diei 21 Ianuarii, quae intensissimum et rarum his terris frigus sentiendum nobis praebuit, in serenitate perfecta, nebulis autem quandoque permixta, flante tenuissimo Euro. Idem hoc frigus, eodem gradu et die, obseruatum quoque est *Stuttgardiae*. Sed *Petropoli* aliter se haec res habuit, vti ex obseruationibus mensis Ianuarii ab *Imper. Scientiar. Academia* mecum communicatis perspicio; ibi enim per dies Ianuarii 12. 13. etc. vsque ad 20. frigus vehemens erat, graduum circiter 8 et 0; sed ipso die 21 erat remissius, nempe graduum 20; quibus itaque diebus cessauit ibi frigus: his iisdem coepit apud nos oriri; ita vt fere materia quaedam mota ex illa regione in nostram produxisse id videatur. *Stuttgardiae* autem experimenta capiente Celeberr. Dom. D. *Ioh. Georg. Du Vernoi* die eodem 21. Ian. sequentes liquores, aëri libero expositi, congelati fuerunt; vinum album tempore 15. min. prim. vinum Burgundicum in 20. min. Spiritus autem frumenti post 12 demum horas frigore coagulari coepit.

§. 6. Addam his comparationes quasdam frigoris et caloris *Petropolitani*, in climate valde iam boreali, obseruatorum, cum iisdem in climate nostro temperatiori. Ibi quidem solis radii, libere ad Thermometrum allabentes, in diebus aestiuis et calidis, horisque postmeridianis 2. et 3. nunquam altius mihi hoc adegerunt, quam ad gradus *Fahrenh.* 103; heic loci autem iidem radii liberi suspensum mercurium tenuerunt ad gradus 102. Maximum frigus hucusque *Petropoli* instrumentis in aëre libero *Obseruatorii Imperialis* ibidem expositis deprehensum fuit anno no 1740. Ianuarii 25 ſt. v. graduum 30 infra 0; atque paullo minus anno 1733. Ianuarii 16 ſt. v. 28½ infra 0; *Tubingae* autem frigus, quod die 21 Ian. huius anni 1745. ſenſimus, maxime inſolens viſum incolis, non erat niſi eorundem graduum 13 infra 0. Porro *Petropoli* calorem äeris vmbroſi maiorem nunquam obſeruaui quam 83 graduum: hic vero hoc anno 89 graduum.

§. 7. Lucem borealem, inter nubes quaſi ludentem, obſeruaui in fine praecedentis anni 1744, Nouembris 25, hora 9 nocturna. Deinde anni huius die 2 Iunii, quo nempe ex aliquot tenuibus nubeculis albicantibus, Boream verſus poſitis, ſubito extinctis atque iterum accenſis, lucem borealem viſus ſum agnoſcere, hora 10 *p. m.* in ſerenitate perfecta. Denique Decembris 29 aurorae borealis veſtigia diſtincta apparuerunt inter nubes hinc et inde valde hiantes hora 9 nocturna. Ianuarii vero 18. huius anni 1745, quo die integro nubibus tectum hic fuit coelum, ſupra laudatus D. D. *Du Vernoi Stuttgardiae* auroram obſeruauit borealem, quae arcum pallidiorem efformare videbatur.

§. 8. Adiiciam his obſeruationes adhuc duas a me factas hoc anno. Nempe Auguſti 12 profectus ſum ad viſendum ſpecum illum prope *Reutlingam* haud incelebrem *Das Nebel-Loch* dictum, qui ſupra medium iugi alicuius montium editorum aditum ſui aperit inter ſyluas, ab initio decliuis valde eſt, ſed dein horizontaliter fere ſub terra protenditur ad diſtantiam aliquot centenorum paſſuum. In vltimis igitur huius ſpecus partibus Thermometrum eo mecum allatum oſtendebat gradus 48, quos calori

calori moderato et temperato assignat hodie in his instrumentis artifex celebris Amstelodamensis supra laudatus, *Henr. Prinz*, secutus *Fahrentheitium*; cum in ingressu atque egressu specus idem monstraret, die quippe aestuosa et serena, gradus 66. In eadem vero hac parte specus postica peluis lapidea est, in qua colliguntur aquae destillantes circumquaque, limpidissimae, quod in calice vitreo faci admoto cognoui, purissimae, sed gradum caloris tenentes non nisi 42. Quem defectum huius caloris ab illo, qui aëri circumfluo inhaeret 48 graduum nulli alii caussae adscribere possim, quam quod haec aqua a pluuiis orta, sed transiens deinde et transsudans per satis magnam soli crassitiem variis salibus referti, haec soluit continuo, et secum aduehit vsque in peluim, ita vt haec aqua non aliter consideranda sit, ac si perpetuo aliquid salis ipsi iniiceretur, ex cuius solutione hanc suam refrigerationem recipit.

§. 9. Secunda obseruatio spectat ad directionem acus magneticae. Hanc 6 pollices longam, pyxidi suae inclusam, libero in aëre fixe positam, constitui ad parietem lapideum fenestrae alicuius in *Collegio Illustri*, palatio ex lapidibus quadratis constructo, Boream versus vtcunque expositae; huiusque acus declinationem, non veram quidem, sed qualem respectu parietis lapidei habebat, deprehendi per multos dies fuisse praecise 11 graduum. Cum vero d. 31 Augusti huius anni 1745 tonitrua vehementissima toto die audirentur, conspicerenturque fulgura frequentissima: vidi hora 3 p. m. hanc declinationem acus magneticae subito mutatam in 10° 45′; de qua mutatione certus plane ſum; eamque eo magis adſcribo fulminationibus illius diei creberrimis, quia de eodem hoc phaenomeno iam conſtat ex *Iournal des Savans*, tom. V. pag. 74; atque ex Celeberr. *Petri van Muſſchenbroek* Diſſertatione de Magnete, Exper. 106. ſed ſimul obſeruationes *Grahami* in *Tranſact. Philoſoph. Angl.* No. 383. teſtantur, eandem hanc declinationem, ſi exacte ad eam attendatur, ſingulus horae quadrantibus mutatam aliquot minutis primis deprehendi, in tempeſtate etiam ordinaria et ſtatu aëris quieto.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE, FACTAE An. 1746. TVBINGAE,

a

G. W. KRAFFT.

§. 1.

Barometro atque Thermometro iisdem, eodemque adhuc modo dispositis et constitutis, quem in descriptione obseruationum meteorologicarum superioris anni indicaui: obseruatae mihi fuerunt hoc praesenti anno, in singulis mensibus, altitudines Barometri maximae et minimae sequentes, quas, vna cum earumdem differentiis, hic appono; intelligendo pedis Londinensis pollices duodecimales, atque eorumdem partes centesimas;

	max.	min.	diff.
Ianuarius	29. 18	27. 95	1. 23
Februarius	29. 15	28. 10	1. 05
Martius	28. 89	27. 65	1. 24
Aprilis	28. 65	27. 98	0. 67
Maius	28. 94	28. 30	0. 64
Iunius	28. 76	28. 20	0. 56
Iulius	28. 80	28. 41	0. 39
Augustus	28. 87	28. 41	0. 46
September	29. 00	28. 33	0. 67
October	28. 88	28. 16	0. 72
Nouember	29. 00	28. 02	0. 98
December	29. 04	27. 93	1. 11

§. 2. Ex quibus apparet, altitudinem Barometri hoc anno fuisse maximam 29. 18, minimam vero 27.

65,

65. manet itaque altitudinum hucusque hic loci obseruatarum adhucdum maxima illa, quae superiori anno annotata fuit, nimirum 29. 36; sed mutanda est superioris anni obseruata minima altitudo, quae nunc habetur 27. 65. et visa fuit huius anni mense Martio, die 3. circa meridiem, flante fortissimo vento S W. et cadente copiosa pluuia. Prioris igitur maximae, et huius nouae iam minimae, differentia est 1. 71; vt adeo media Barometri altitudo apud nos nunc aestimanda sit 28. $50\frac{1}{2}$. nulla habita instrumenti, supra *Nicri* fluuii libellam eleuati, ratione, quae, vti in praecedentis anni descriptione dictum fuit, 60 pedes adaequat.

§. 3. Ex obseruationibus Thermoscopii, in aëre vmbroso Boream versus, constituti, sequentem iterum formo tabellam, quae cuiusque mensis exhibet gradum caloris maximum, minimum, atque differentiam vtriusque, ita quidem, vt vbique sint intelligendi gradus *Fahrenheitiani*;

	max.	min.	diff.		max.	min.	diff.
Ian.	50	9	41	Iul.	94	54	40
Febr.	51	-3	54	Aug.	85	47	38
Mart.	60	14	46	Sept.	82	44	38
Apr.	67	31	36	Oct.	66	30	36
Maius	83	48	35	Nov.	48	24	24
Iun.	75	52	23	Dec.	49	28	21

Ex quibus constat, maximum calorem aestatis huius, longe lateque per totam Europam feruentissimae fuisse hic loci 94 graduum, qui incidit in diem 15 Iulii, quo ipso etiam vehemens, sed breuis, tempestas coorta fuit. Minimus vero calor, siue maximum frigus, graduum dum tenuit 3 infra 0, quod sensimus die 15 Febr. in serinitate, quam tenuis nebula paullo diminuit.

§. 4. Quas aurorae borealis apparitiones vidi: eas sequentibus absoluam. *Ianuarii* 31 circa horam 10 p. m. vestigia mihi huius visa sunt, sed dubia, quoniam luna nubibus permixta lucebat. Similis suspicio mihi oblata quoque fuit *Febr.* 4, circa horam 7 p. m. inter nubes et pluuias. Postea interquieuit plane splendor hoc septentrionalis, quantum ego quidem obseruare potui, vsque ad diem 22 *Octobr.* in quo cum nubes continuae, ac pluuiae rarae, essent: obseruaui tamen hora 10. p. m. distincte auroram borealem, inter nubes fere continuos delitescentem, nullo vento flante, constantem, arcu tranquillo, lucido versus boream, sed multis faculis ludentem quoque versus austrum; donec eadem haec aurora circa horam 11 inciperet formare arcum aliquem humilem, subdubium, sed mihi tamen visum declinantem aliquantum ab austro ad ortum. Rediit haec aurora die sequenti, *Octobris* 23, sed destituta vtroque arcu, in qua boream versus apparebat sola aliqua illuminatio indeterminata. Vtroque die nullae videbantur stellae. *Die* postea 24 denuo deprehendi signa quaedam huius lucis inter nubes continuas; *die* 26 non potui vacare obseruando huic phaenomeno, ob negotia; sed certiorem me reddidit Clariss. Dom. M. *Bischoff*, vicinae nobis ecclesiae Bernhusanae tum temporis Vicarius, visam sibi hoc quoque die fuisse auroram valde amplam et diffusam; cuius deinde adhuc vestigia clara denuo deprehendi *die sequenti* 28. Ita haec continua, per aliquot dierum interualla, apparuit coeli deflagratio. *Nouembris* 10, rurſus inter nubes, viſa mihi fuit clariſſime lux borealis, ludens ſeptentriones verſus globis lucidis, et ſaepius transuerſim motis. *Nouembris* 20 iterum apparuit lux borealis lucida, humilis et tranquilla. Sed *Decembris* 7 alia, diffuſa et coruſcans; quam apertam ſecuta ſunt veſtigia tantum aliqua die 18 *Decembris*; et quarum omnium agmen quaſi clauſit vltima, die 24 Decembris, quae hora $7\frac{1}{2}$ p. m. inter tenues nubeculas, ſeptentriones verſus poſitas, magnis illuminationibus aperte ſe prodidit.

§. 5. Appendicis loco commemorabo hic phaenomenum, quod ſummo iure huc referri meretur atque accenſeri maxime memorabilibus. Excerptum illud eſt ex libro illuſtri, Ruſſica lingua conſcripto, cuius in linguam Germanicam verſi titulus eſt, *Geſchichte des Oſmanniſchen Reiches, durch Demetr. Cantemir, Fürſten der Moldau.* In huius folio 364, ſub Oſmanno II. §. 3, leguntur ſequentia verba: *ſub imperio huius Imperatoris apparuit Conſtantinopoli inſolens meteorum, quale nunquam antea viſum fuit, neque forſan vnquam viſura eſt ſubſequens aetas. Anno 1029, die 28 menſis Rebiul aerwel, conſpiciebatur coelo gladius incuruatus, lanceae longitudinem quinquies ſumtam adaequans, et latitudinem tenens trium pedum. Porrigebatur illud ab oriente occidentem verſus; apparebat poſt occaſum ſolis, in ſplendore claro, per interuallum integri menſis.* Annus indicatus, Turcicae aerae, eſt annus poſt Chriſtum natum 1620, menſis autem et dies indicant in Calendario veteri Iuliano diem 22 Februarii. Ex quibus circumſtantiis manifeſtum eſt, nihil aliud fuiſſe de-

ſcri-

ſcriptum hoc prodigium, quam lumen *Caſſinianum*, inſolito quodam fulgore apparens. Nam conſpici hoc quandoque ſolet inſtar falcis, ad modum gladii incuruati; vid. Celeberr. *De Mairan*, *Traité de l' Aurore Boreale*, pag. 22; longitudinem tenet multo maiorem, quam eſt ipſius latitudo, et, quod omnem probabilitatem ſummo rigore adimplet, extenditur in Februario menſe ab oriente verſus occidentem, ſi incipias progredi viſu a cuſpide ad baſin ipſius; ac denique, quod caput eſt rei, eodem menſe praeſens ſe ſiſtit poſt ſolis occaſum. Si in hac igitur deſcriptione remoueamus ab animo ſimilitudinem haud plane ineptam, et genti, apud quam viſum eſt eo tempore phaenomenum, familiarem et vſitatam; ſi omittamus quoque menſuram, non aſtronomica accuratione, ſed vulgi trepido iudicio, captam: videbimus planam et ſimplicem deſcriptionem, non prodigii alicuius, ſed meteori in curſu naturae ordinarii, nempe lucis *Caſſinianae*; cuius adeo Epocha, quantum ex certis hiſtoriis conſtat, retrahenda nnnc erit ad annum Chriſti 1620, quam alias affigere ſolent anno Chriſti 1659.

DE QVAN-

DE QVANTITATE CALORIS, QVAE POST MISCELAM FLVIDORVM, CERTO GRADV CALIDORVM, ORIRI DEBET, COGITATIONES,

AVCTORE
G. W. Richmann

Praelecta in conuentu Academico Clariss. Krafftii diss. de calore et frigore, formulam, quam ingeniose invenit ad quantitatem siue gradum caloris mixtorum fluidorum determinandum, examinans reuocaui simul in memoriam, quae olim de hac materia meditatus sum. Euolui ergo scripta mea et collectanea, et inueni formulam, quam cognoscendae quantitati caloris in mixto aptam iudicaueram, si modo rite constructum thermometrum adhiberetur. Statim comparaui eam cum Clariss. Krafftii, atque ad casus in dissertatione ipsius adductos adplicaui, vidique maiores oriri gradus calorum secundum meam formulam, quam secundum Clariss. Krafftii, simulque a gradibus thermometro inuentis multum abludere debere; rem ergo totam negligendam, curiositatis tamen gratia antea inquirendum putaui, qua via in formulam inciderim. Quod cum propter simplicitatem statim apparebat simulque formula rationi valde conformis videbatur, apud me constituebam eam cum societate communicare, quod sequentibus faciam.

§. 1. Concepi calorem fluidi certae temperiei distributum aequaliter per totam massam fluidi, et simul cogitaui

cogitaui, si idem caloris gradus per duplam triplam quadruplam etc. massam distributus esset, calorem hinc generatum esse debere prioris subduplum, subtriplum, subquadruplum etc. et ingenere calorem eundem esse in ratione inuersa massarum, per quas distributus est.

§. 2. Ponatur ergo

1) Massa fluidi $= a$, calor distributus per hanc massam $= m$, alia massa, per quam idem calor m massae (a) distribui debet, ponatur $= a + b$, erit calor hinc generatus $= \frac{am}{a+b}$ per (§ 1).

2) Per massam b praeterea calor $= n$ ponatur distributus, distribuatur idem calor n pariter per massam $a+b$, per quam iam calor m massae (a) distributus concipitur, erit calor, a calore n per massam $a+b$ distributo, ortus $= \frac{bn}{a+b}$ (per § 1.)

3) Tali ratione calor massae $(a) = m$ et calor massae $(b) = n$ aequaliter distribuuntur per eandem massam $a+b$; et calor in hac massa, siue in mixto ex (a) et (b), aequalis esse debet summae calorum $m+n$ distributorum per massam $a+b$, siue $= \frac{ma+nb}{a+b}$ (per n. 1 et 2).

§. 3. Vt formulam generalioris vsus obtinerem, ex qua etiam gradus caloris determinari posset, si tres, quatuor, quinque etc. massae eiusdem fluidi diuerso gradu calidae miscerentur, nominaui massas eas a, b, c, d, e etc. et calores respondentes m, n, o, p, q, etc. et simili plane modo concepi quemque calorem per summam massarum omnium distributum, e: g: calorem massae (a) $= m$ distributum per massas $a+b+c+d+e$ etc.

 $=$

$= \frac{am}{a+b+c+d+e}$ etc. (per § 2). Calorem massae b, $= n$, distributum per eandem summam massarum $= \frac{bn}{a+b+c+d+e}$ etc. calorem massae $c = o$, etc: $= \frac{co}{a+b+c+d+e}$ etc. calorem massae d, $= p$, etc: $= \frac{dp}{a+b+c+d+e}$ etc. calorem massae e, $= q$ etc: $= \frac{eq}{a+b+c+d+e}$ etc. et calorem post miscelam omnium massarum calidarum $= \frac{am+bn+co+dp+qe}{a+b+c+d+e}$ etc. i. e. summa massarum fluidi, per quas calor singularum massarum in mixtione aequaliter distribuitur, est ad summam omnium factorum ex massis singulis in singularum massarum calores, vt vnitas ad calorem in mixto.

§. 4. Si nunc thermometrum adhibetur ad calorem mixti mensurandum, primo gradus caloris ebullientis aquae ponitur 212 gr. et secundo calor niuis vel glaciei cum sale ammoniaco mixtae 0, tertio excessus calorum fluidorum examinandorum super 0 ponuntur proportionales altitudinibus mercurii in thermometro, quae oriuntur instrumento fluidis examinandis immerso, et mensurandi initio facto â 0: reuera igitur excessus caloris supra calorem glaciei cum sale ammoniaco mixtae notantur et secundum formulam allatam, si thermometrum Fahren: adhibetur, inuenitur excessus caloris mixti super gr. 0 Therm. Fahr: non verus calor.

§. 5. Cum mixtum aliquod dicta ratione in vase examinandum est, facile patet,

1) Calorem mixti non solum distribui per propriam massam, sed etiam per vasis parietes et thermometrum ipsum.

2)

2) Thermometri ipsius et vasis calorem distribui per mixtum, per vasis parietes, in quo fit mixtio, et thermometrum.

3) partem caloris mixti per interuallum temporis, in quo fit experimentum, transire in liberum aerem, vbi, quemadmodum in Clariss. Krafftii experimentis de calore et frigore stabilitur, calor ex fluido eo tardius aufugit, quo magis accedit calor fluidi ad calorem atmosphaerae ambientis. Si temporis tamen interuallum, per quod fit experimentum, minus est, decrementum caloris ex hac causa praesertim in massis maioribus examinandis insensibile esse debet; hinc negligi potest in calculo.

§. 6. Si circumstantiae § praeced. *n.* 1. 2; in massis examinandis minoribus negligantur, fieri potest, vt gradus thermometro inuenti non concordent cum formula allata, quae vnice exprimit calorem mixti ortum ex caloribus omnium ingredientium distributis per omnium ingredientium massas aequaliter. Cum enim calor etiam thermometro et vasi communicatur et per illa distribuitur, licet non mixtio fiat, massa etiam thermometri et vasis in formula est exprimenda et posito per massam vasis et thermometrum etiam aequaliter distribui calores, erit, positis vt supra massa vna $= a$ massa altera $= b$ massa thermometri $= c$, massa vasis $= d$, calore massae a, $= m$, calore massae b, $= n$, massae c, $= o$, massae d, $= p$, summa calorum, m, n, o, p, distributorum per summam massarum a, b, c, d, $=$ $\frac{am+bn+co+dp}{a+b+c+d}$ $=$ gradui caloris, quem thermometrum ostendere debet, si mixto immergitur, verus autem mixti calor,

 qui

qui iacturam non patitur, superare debet calorem thermometro indicatum quantitate $\frac{am+bn}{a+b} - \left(\frac{am+bn+co+dp}{a+b+c+d}\right)$.

§. 7. Hic mihi videor assecutus esse primariam rationem, cur mea formula non concordet cum Clariss. Krafftii, ipsius enim formula exprimit calorem thermometri sui et vasis, in quo massas fluidi miscuit et massarum ipsarum, distributum per summam massarum fluidorum mixtorum, thermometri et vasis, mea vero caloris gradum ortum ex caloribus vtriusque ingredientis mixti, distributis per massam mixti.

§. 8. Vt comparari possint gradus calorum in mixtis thermometro inuenti cum numeris graduum per formulam Clariss. Krafftii et meam computatis, tabulam hic apponere liceat; notando simul quantum calculus vterque discrepet ab experimentis ipsius in dissertatione de calore et frigore communicatis.

In columna I. sunt numeri, qui indicant, quota mensura affusa sit? vel etiam massam mixti.

In columna II. sunt numeri, qui indicant gradus caloris mixti secundum formulam Clariss. Krafftii computatos.

In columna III. sunt numeri, qui indicant, quantum gradus calculi ipsius discrepent a gradibus thermometro inuentis.

In

In columna IV. ſunt gradus thermometro a Clariſſ. Krafftio inuenti.

In columna V. ſunt numeri, qui indicant, quantum gradus, thermometro inuenti à Clariſſ. Krafftio, differant a gradibus calculi mei.

In columna VI. exſtant gradus calculi mei.

In columna VII. ſunt gradus ſec. formulam meam (§ 6) computati, aſſumtis maſſa vaſis vnius menſurae et maſſa thermometri dimidiae menſurae, calore vero vtriusque poſito aequali calori ingredientis minus calidi: menſura vero vna poſita eſt a Clariſſ. Krafftio in ipſius experimentis de calore et frigore vnius et dimidii pollicis cubici.

In 1. Tab. ſumſit Clariſſ. Krafftius quatuor menſuras aquae ad gr. 42. calidae et affudit eis quintam aquae ebullientis, examinatoque per therm: calore, 5 menſuris ſextam.

In tab. 2. ſumſit menſuras 20. ad gr. 38 calidas et affudit eis 2. menſ. aquae ebul. examineque facto 22 menſuris 2. addidit ect.

	C. I.	C. II.	C. III.	C. IV.	C. V.	C. VI.	C. VII.
Tab. I.	5	68. 12	0. 12	68	8. 00	76. 00	68. 15
	6	86. 28	1. 28	85	7. 00	92. 00	87. 20
	7	98. 73	0. 73	98	5. 14	103. 14	99. 88
	8	108. 73	1. 73	107	5. 25	112. 25	110. 00
	9	115. 75	2. 75	113	5. 66	118. 66	115. 62
	10	120. 42	2. 42	118	4. 90	122. 90	121. 48
	11	124. 37	1. 37	123	3. 54	126. 54	125. 46
	12	128. 52	0. 52	128	2. 42	130. 42	129. 59
	13	132. 80	2. 80	130	4. 46	134. 46	133. 80
	14	134. 34	0. 34	134	1. 85	135. 85	135. 61
Tab. II.	22	49. 80	2. 20	52	1. 82	53. 82	52. 00
	24	61. 92	0. 08	62	3. 33	65. 33	63. 85
	26	70. 58	1. 42	72	1. 54	73. 54	72. 34
	28	79. 42	0. 58	80	2. 00	82. 00	81. 03
	30	86. 52	-1. 52	85	3. 80	88. 80	88. 00
	32	90. 87	0. 13	91	1. 94	92. 94	92. 25
	34	96. 26	0. 74	97	1. 12	98. 12	97. 54
	36	101. 72	1. 28	103	0. 39	103. 39	102. 90
	38	107. 24	0. 76	108	0. 74	108. 74	108. 32
	40	111. 83	-0. 83	111	2. 20	113. 20	112. 86
	42	114. 55	0. 45	115	0. 81	115. 81	115. 49
	44	118. 25	-1. 25	117	2. 41	119. 41	119. 13
	46	120. 04	-1. 04	119	2. 13	121. 13	120. 88
	48	121. 85	0. 15	122	0. 87	122. 87	122. 64
	50	124. 65	-0. 65	124	1. 60	125. 60	125. 39
	52	126. 49	-1. 49	125	2. 38	127. 38	127. 20
	54	127. 37	-1. 37	126	2. 22	128. 22	128. 05
	56	128. 25	-0. 25	128	1. 07	129. 07	128. 92
	58	130. 13	-1. 63	128½	2. 37	130. 87	130. 26
	60	130. 54	-1. 54	129	2. 27	131. 27	131. 00

§. 9.

§. 9. Si tabulas has attentius consideramus obseruamus

1. gradus calorum thermometro inuentos in prima tabula minores esse semper gradibus per formulam Clariss. Krafftii et meam inuentis, in secunda vero tabula decem experimenta eos ostendere maiores, decem reliqua experimenta minores quam gradus per formulam ipsius repertos, semper vero minores gradibus secundum formulam meam computatis.

2.) Comparatis gradibus calorum tabulae I. ex formula Clariss. Krafftii computatis cum gradibus Thermometro inuentis differentiae graduum istorum non decrescunt, sed modo crescunt modo decrescunt. Comparatis vero gradibus Tab. I. ex formula mea deductis cum gradibus Thermometri differentiae tantum non semper decrescunt voluminibus mixti crescentibus: experimentum tamen nonum nimis assertioni contrariatur, vt etiam propter hanc disparitatem mihi conjectura subnascatur, nouam se experimento immiscuisse circumstantiam, quae variationis huius causa fuit.

3.) In tabula secunda nec differentiae graduum, ex formula mea nec ex Clariss. Krafftii computatorum a gradibus thermometro inuentis, voluminibus crescentibus decrescunt, sed modo crescunt modo decrescunt.

4.) Gradus in Tab. I sec. Clariss. Krafftii formulam computati non tantum differunt a gradibus Thermometro inuentis, quam secundum meam formulam computati, at si Thermometri et vasis simul habetur ratio, parua est differentia, vt collatis Col. VII. et III. IV. videre est.

5.)

5.) Varia in secunda Tab. experimenta magis respondent meo calculo, quam Clariss. Krafftii et si thermometri et vasis simul habetur ratio, vt Col: VII. fit, etiam in caeteris experimentis calculus meus ad gradus experimentorum propius accedit, ac sine hac consideratione.

§. 10. Vt rationes horum phaenomenorum ob oculos ponamus, inquiramus, an in experimentis I. et II. dae tab. capiendis disparitas quaedam occurrat, cui hae discrepantiae attribui possint? Quantum ego quidem perspicere valeo, nullam aliam, vt iam supra ingenere monui, offendo disparitatem, quam quod in experimentis Tab. I. minores fluidi massae adhibitae fuerint, in experimentis secundae tabulae maiores, vt ex comparatione numerorum Col. 1. ex I. et IIda Tab. patet. Massa mixti in experimento I. primae tab est quinque mensurarum vel $7\frac{1}{2}$ digt. cub. Deinde in subsequentibus experimentis crescit massa semper vna mensura, vt tandem in vltimo experimento fiat 14 mensurarum. Cum nunc thermometri et vasis massa facile sit $2\frac{1}{4}$ digit. cub. vel vnius et dimidiae mensurae, vt supposuimus (§. 8), in experimento primo calor mixti nonsolum distribuitur per quinque mensuras sed etiam per vnam mensuram et eius dimidiam scil. vasis et thermometri massam. Massa mixti in experimento I. secundae Tab. est viginti duarum mensurarum vel 33. digit. cub. in subsequentibus experimentis crescit semper duabus mensuris, vt tandem in vltimo experimento fiat 60 mensurarum vel 90 digit. cub. In tantis massis calor non potuit tam sensibiliter in paruo temporis interuallo, quo experimentum fiebat, decrecrescere, parte exigua caloris per thermometrum et tenues vasis parietes distributa, quam in minoribus massis Tab. 1. In experimento I. secundae Tab. calor mixti in vase, thermometro immerso, per $35\frac{1}{4}$ dig. cub. distributus fuerit necesse est, cum calor per mixti solius massam per 33 digitos cub: distribui debeat. Haec volumina differunt multo minori parte voluminis mixti ac respondentia volumina tabulae Imae, praesertim primis experimentis, et idem notandum de subsequentibus experimentis. Hinc calor in experimentis Tab. I. plus a formula mea aberrare debuit, quam in experimentis Tabulae 2dae, in quibus minor caloris iactura; vt collata col. VI. Tab. I. cum col. VI, Tab. II. videre est.

Pone nunc Clariss. Krafftium in iis experimentis, quibus ad stabiliendam formulam vsus est, adhibuisse minores fluidi massas, quarum calor distributione per Thermometrum et vas decrementum pati debuit, certe thermometrum in iis experimentis minores gradus ostendere debuit, quam ostendisset, massis maioribus electis, quarum calor distributione tali decrementum tantum pati haud potuisset. Si nunc gradibus istis minoribus, qui vero mixti calori mensurando inseruire haud poterant, ad formulam suam condendam Clariss. vir vsus est, semper per eam formulam minores inueniuntur gradus calorum quam par est, et nunquam, nisi massae fluidi parum differentes ab iis, quas adhibuit ad formulam suam stabiliendam, eligantur, thermometrum ostendet gradus calorum sec. formulam, sed maiores, si massae maiores examinantur; cum tamen per naturam rei nunquam gradus thermometro inuenti gradus per veram formulam determinatos superare debent, ob decrementum caloris durante experimento. (Collato §. 6.)

§. 11. Ex hisce liquet (1 cur in multis experimentis Tab. II. adductis Thermometrum gradus ostenderit maiores quam formula Clariss. Krafftii requirebat

2) cur in experimentis Tab. I. adductis Thermometron semper ostenderit minores gradus, quam formula Cl. Krafftii requirebat, quia scilicet minores massas elegit non multum differentes ab iis, quibus vsus est ad experimenta, quae ad formulam suam condendam adhibuit.

3) Cur semper thermometron ostenderit gradus minores in vtraque tabula, quam secundum formulam meam ostendere debuisset, quia scil. formula mea exprimit verum vtriusque ingredientis calorem distributum per massam mixti, thermometrum vero calorem mixti causis recensitis imminutum prodit. Hinc calculus col. VII. vbi ratio simul habita est thermometri et vasis, parum differt ab experimentis.

4) Cur comparatis gradibus Tab. I. ex formula mea deductis cum gradibus Thermometri differentiae istorum graduum voluminibus crescentibus tantum non semper decrescant, quia scil. massis crescentibus minor caloris iactura fieri debet. In gradibus ex Clariss. Krafftii formula deductis id non apparet, si comparantur cum gradibus Thermometri, indicio, quod ista formula non exprimat verum mixti calorem, sed calorem mixti post iacturam quandam factam: patet

5) cur in tabula 2da hoc non obseruetur, quia ob maiores massas decrementa ex causis, quae in experimen-

mentis Tab. I. occurrunt, fiunt minoris momenti, quam caeteri errores, quibus cautissimus quisque obnoxius esse solet, et qui modo huic modo isti experimento se immiscent: patet etiam

6) cur in tabula 2da multa experimenta aeque meo calculo respondent, quam Clariss. Krafftii et quaedam magis meo quam ipsius, quia ob maiores massas iactura caloris in his experimentis interuallo temporis paruo, quo experimentum quodque durat, parua esse debet.

§. 12. Consideratis his omnibus, cautiones nobis colligere possumus, quibus opus est, si eiusmodi experimenta rite instituere volumus.

1) rationem massae vasis et thermometri habere debemus, calorisque, qui per vtramque massam distributus est.

2) massae examinandae, quae si minor est, distributione caloris per corpora, quae contingit e. g. vas in quo fit experimentum et thermometrum, insignem caloris iacturam patitur.

3) temperiei aeris, in quo fit experimentum, quae, si frigidior, quam massae examinandae, pars caloris ex hac in aerem transit, quamdiu mercurii, in thermometro massae examinandae immerso, contenti altitudo in calore massae examinandae praeualente crescit, praesertim cum massa mixti est minor, eaquepropter superficies eius respectiue maior, hinc calori perdendo aptior.

4) Per Clariss. Krafftii experimenta in diss. de calore et frigore etiam stabilitur, calorem ex fluido eo tardius aufugere, quo magis accedit calor fluidi ad calorem

atmosphaerae ambientis, hinc non inutile esse videtur nonsolum temperiem aeris, in quo fit experimentum, cognoscere, sed etiam interuallum temporis, per quod experimentum durat, vt hinc iudicare liceat, quantum caloris aufugerit. Si ratio huius momenti habeatur, coniectura probabili assequi poterimus rationem, cur in experimentis non decreuerint differentiae graduum thermometro inuentorum a gradibus calculi constanter voluminibus crescentibus, vni enim experimento fortassis plus temporis insumtum est quam alteri et in vltimis experimentis temperies mixti a temperie aeris plus recessit, eaquepropter eodem temporis interuallo plus caloris aufugit ex hac causa, vt tali ratione in vltimis experimentis per hanc causam iactura caloris sit maior, iactura ex distributione caloris per thermometrum et vas vero minor; quamobrem decrementum caloris in primis experimentis decremento caloris in vltimis aliquo modo aequale redditur.

5) Valde probabile mihi videtur differentiam oriri debere insignem in experimentis huiusmodi, si frigidius fluidum calidiori affunditur, cum frigidius fluidum vt densius ima petere debeat et calidius in frigidiori ascendere, consequenter miscela celerius fieri, quam si calidius frigidiori affunditur, quo casu simul plus caloris aufugere videtur ex superficie aquae calidae super aquam frigidam stagnantis. Haec adhuc potest addi ratio cur gradus thermometro sint inuenti minores quam formula mea postulat. Hic etiam notandum, thermometrum ante peractam mixtionem et distributionem caloris, gradum osten-

ſtendere poſſe vel minorem vel maiorem, prout in fluido ſuſtentatur.

6(Figura etiam vaſis, in quo fit miſcela variationis cauſa eſſe poteſt, ſi orificium eſt anguſtius, calor minus cito caeteris paribus aufugere debet. Si ſuperficies eſt maior reſp. maſſae fluidae examinandae, citius diſſipari debet calor caeteris paribus. Si vas in quo miſcela fit eſt ſphaericum et orificium vaſis quantum poſſibile anguſtum tardiſſime calor aufugere debet caeteris paribus: Figurae ergo vaſis etiam ratio venit habenda.

7) Denſitas tandem parietum vaſis variationem efficere poteſt, dum, quo denſiora ſunt corpora eo citius caeteris paribus conferant ad refrigeranda alia corpora.

8) Cum tandem thermometri ipſius capacitas calore augetur, dum vitrum expanditur, mercurius propter hocce capacitatis incrementum deſcendere debet et ſi hoc non fieret, altius eleuaretur. In gradu caloris ſuptuageſimo ſecundo ſec. Muſſchenbroekii Eſſai. de Phyſ. (p. 469) fluidum thermometri lineam vnam propter dilatationem vitri depreſſum fuit. Huius tamen rei ideo habenda non videtur ratio, quia dilatatio vitri in eadem ratione ferme fit in qua fit expanſio Mercurii in thermometro. Si tamen de vno et altero gradu ſermo eſt, non iniuria quaeritur, an dilatatio haec ſit plane contemnenda? cum nondum accurato examine conſtet, exactiſſime in ratione dilatationis vitri expanſionem Mercurii fieri.

§. 13. En quam multae cautelae adhibendae ſint in experimentis hiſce rite capiendis. Exemplum hic ſe nobis offert inſigne, abſtractiones mathematicas in re-

 bus

bus physicis omni cura et quantum possibile esse fugiendas, circumstantiasque omnes in singularibus casibus attendendas. Neque mirum est cur calculi saepissime egregii nimia circumstantiarum variarum accumulatione tantum non prorsus inutiles fiant. Ne tamen in nostris experimentis tot cautelis opus habeamus,

Massa examinanda maior est eligenda, quo casu in interuallo temporis, quo experimentum finiri potest, caloris decrementum erit insensibile et cautelae praeced. §. n. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. euanescent.

§. 14. Generatim hic notari potest in experimentis physicis, in formulis, mensuris vel ponderibus vel potentiis incognitis detegendis inseruientibus, tantum non semper pro cognitis eligendas esse maiores corporum mensuras, pondera vel potentias, quo casu si in excessu vel defectu peccauerimus paululum in exprimendis cognitis per experientiam quantitatibus, quod facile fieri potest, defectus ille vel excessus multiplicatus sec. formulam non parit in determinatione incognitorum tantam à vero discrepantiam, quam si minores quantitates elegeris et eundem errorem in excessu vel defectu commiseris.

Eiusmodi ergo leges seruabo, si nouis experimentis in temperiem mixtorum inquisiuero, quod nunc, quia instrumentis commodis careo, differre cogor, breui tamen exequi animus est ad cogitationes meas de calore et frigore mixtorum perficiendas et ad formulam meam de calore mixtorum à posteriori confirmandam.

§. 15. Coronidis loco apponere liceat duo sequentia problemata ex mea formula facile posse resolui.

I.

I. Data massa fluidi $= a$, datae temperiei $= m$, et data temperie n homogenei fluidi inuenire massam x, quae mixta cum massa data $= a$ producit calorem datum $= c$. Est enim, formula superiori posita $\frac{am + nx}{a + x} = c$, $x = \frac{(c - m)a}{n - c}$.

II. Datis massis fluidi a, et b, et data temperie massae a, $= m$ inuenire temperiem x alterius b, quae mixta cum massa a producit temperiem datam $= c$. Est, posita formula $\frac{am + bx}{a + b} = c$, $x = \frac{(a + b)c - am}{b}$.

* Licet ex §. 4 id patere possit, hic nihilominus monendum iudicaui, me per calorem et temperiem fluidi non intelligere verum calorem sed excessum gr. therm. Fahren. super o. Verorum enim calorum rationes nondum possunt assignari: si m est gradus thermometri massae a, verus calor est m addito incognito x, si n est gradus therm. massae b, verus calor est $n + x$, hinc mixti calor verus sec. formulam datam $\frac{(m + x)a + (n + x)b}{a + b}$ $= x + \frac{ma + nb}{a + b}$.

FORMV-

FORMVLAE PRO GRADV EXCESSVS CALORIS SVPRA GRADVM CALORIS MIXTI EX NIVE ET SALE AMONIACO POST MISCELAM DVARVM MASSARVM AQVEARVM DIVERSO GRADV CALIDARVM CONFIRMATIO PER EXPERIMENTA.

AVCTORE
G. W. Richmann.

§. 1.

Dedi formulam pro gradu exceſſus caloris ſupra gradum caloris mixti ex niue et ſale Ammoniaco poſt miſcelam duarum maſſarum aquearum diuerſo gradu calidarum an. 1744 d. 19. Oct. Vſus ſum experimentis Clariſſ. Krafftii ad formulam meam firmandam, nunc, quae ipſe experimenta hunc in finem inſtituerim cum ſocietate communicabo.

Experim. I.

§. 2. In vaſe fictili, in quo aqua ponderis 12 vnciarum ſtagnabat ad altitudinem 4 pollicum Londinenſium, et cuius orificii circularis aëri expoſiti diameter erat 3 pollicum ferme, calor à gradu (calore aëris ambientis exiſtente 66 graduum;) 128 ad gr. 67 quatuor horis decreuit, et quidem

in 5 minutis primis a gr. 128	ad gr. 122.
10 - - - - - - -	116.
15 - - - - - - -	110.
20 - - - - - - -	108.
25 - - - - - - -	104.

in

à 30 minutis primis à gr. 128 ad gr.		101.
35	- - - - - - - - - -	98.
40	- - - - - - - - - -	96.
45	- - - - - - - - - -	94.
50	- - - - - - - - - -	92.
55	- - - - - - - - - -	90.
60	- - - - - - - - - -	88.
65	- - - - - - - - - -	86.
70	- - - - - - - - - -	$84\frac{1}{3}$.
90	- - - - - - - - - -	83.
110	- - - - - - - - - -	82.
135	- - - - - - - - - -	80.
165	- - - - - - - - - -	79.
200	- - - - - - - - - -	78. etc.

Experim. II.

In eodem vase fictili aqua in eadem altitudine stagnans, ad gr. 116 calida, caloris decrementum patiebatur in aëre gr. 67 calido et quidem.

à gr. 116 ad gr.	112.	minutis tribus primis		
- - - - - - -	108	- - - -	7.
- - - - - - -	104	- - -	12
- - - - - - -	100	- - -	$18\frac{1}{2}$
- - - - - - -	96	- - -	$26\frac{1}{4}$
- - - - - - -	92	- - -	35.
- - - - - - -	88	- - -	45.
- - - - - - -	84	- - -	56.
- - - - - - -	80	- - -	72.
- - - - - - -	76	- - -	90.

Hora vna ergo et 30 minutis primis â gr. 116 ad gr. 76 peruenit aquae temperies, et quia diſcrepantia caloris aëris externi in primo experimento à calore aëris ſecundo experimento eſt parua, eodem tempore ferme ad gradum caloris eundem calor maſſae aqueae decreuit. Aquaque in vtroque experimento quatuor horis circiter calorem 67 gr. obtinuit.

Ex vtroque experimento cernimus, eo celerius calorem aufugere quo maior eſt differentia inter calorem aquae et aëris ambientis, vel calorem primis temporibus celeriter decreſcere, poſterioribus tardius: in qua ratione vero decrementa ſint aequalibus temporibus et in qua ratione tempora ſint, ſi decrementa ſint aequalia, an in conſtanti, an variabili, non videtur determinari poſſe ex experimentis.

Experim. III.

In aëre ad gr. 66 calido, aquae ad gr. 64 calidae, ponderis 24 vnciarum, affudi maſſam aquae ponderis 12 vnciarum ad gr. 178 calidam et poſt miſcelam obſeruatus eſt gradus caloris 100.

Experim. IV.

Maſſa frigidiori ad gr. 88 calida aequali exiſtente maſſae calidiori, ad gr. 172 calidae, gradus caloris poſt miſcelam obſeruatus eſt 126, calore aëris ambientis exiſtente 66. gr.

Experim. V.

Maſſa frigidiori ad gr. 77. calida, mixta cum duabus calidioribus maſſis, maſſae frigidiori aequalibus, ad gr. 156. calidis, eodem exiſtente aeris ambientis calore ac exp. praec. gradus caloris poſt miſcelam obſeruatus 126.

Ex-

Experim. VI.

Massis duabus frigidioribus ad. gr. 70 calidis, aequalibus massae ad gr. 148 calidae, et mixtis cum eadem, gradus caloris post miscelam obseruatus est 94, eodem adhuc existente gradu caloris aëris ambientis.

§. 3. Si haec experimenta consideramus et conferimus, massamque frigidiorem ponimus $= a$, massam calidiorem $= b$. Calorem massae $a = m$, calorem masse $b = n$, est gradus caloris post miscelam

(1) $\frac{am+bn}{a+b}$ secundum formulam meam

(2) Clariss. Krafftius dedit formulam $\frac{11.am+8bn}{11a+8b}$.

(3) Celeberr. Boërhaue, aequalibus massis existentibus, formulam suppeditauit $\frac{n-m}{2}$, conf. Pars I. Chymiae, exper. XX de igne, coroll. 11.

§. 5. Est itaque gradus caloris post miscelam

	secundum Exp.	sec. form. I.	sec. form. II.	sec. form. III.
Ex. III.	100.	102.	$94\frac{2}{3}$.	------
Ex. IV.	126.	130.	$123\frac{7}{19}$	42.
Ex. V.	126.	$129\frac{2}{3}$.	$123\frac{22}{27}$	------
Ex. VI.	94.	96.	$90\frac{4}{27}$.	------

§. 5. Ex experimento IV. collato cum formula Cell. Boerhauii elucet formulam illam veritati repugnare, cum affusione calidioris sec: illam frigidior reddi debeat aqua, quod impossibile est.

§. 6. Cum formula secunda semper det gradum minorem caloris, quam experimenta, formula illa licet verae sit propinqua, nihilominus non potest haberi pro formula vera. Inter experimentum enim semper aliquid caloris aufugere debet et distribui in parietes vasis. Alterum indicium imperfectionis eius est et quidem euidentissimum, quod

(1) In experimento quarto crescat calor plus, quam experimento quinto, cum vtroque experimento calor non crescre sed aequaliter minui deberet sec: (Exp. I. II.); quod

(2) In experimento V. calor augeatur minus quam in experimentis VI. et III. cum sec. Exp. I. II. calor experimento V non augeri possit sed plus minui debeat, quam calor in experimentis VI. et III, si experimenta instituuntur aequalibus temporibus; quod

(3) In experimento VI. III. calores non solum crescant, sed etiam calor in experimento VI minus crescat, quam experimento III, cum sec: Exp. I. et II. aequaliter minui deberent calores, et si quaedam est differentia, calor experimento tertio paulo plus minui debeat, quam calor experim. VI.

§. 7. Cum formula prima semper det gradum caloris maiorem quam experimenta, vnum adest indicium praestantiae eius. Cum secundum experim: I. et II. plus caloris aufugere debuerit aequali tempore, in experimento IV et V quam experimento VI. et III. in experimentis VI. et III. vero aequales caloris gradus et haec omnia formulae primae respondeant, habemus secundum indicium euidentissimum perfectionis formulae primae. Experimento IV et V enim aufugerunt gradus quatuor circiter experimento VI. et III. duo. Contrarium obtinet vt iam monitum,

monitum, si attendimus ad formulam II, vbi experim. IV. crescit calor 2 $\frac{12}{19}$ gr. experim. V. 2 $\frac{5}{17}$ gr. exp. VI. 3 $\frac{5}{21}$ gr., in exp. III. 5 $\frac{3}{5}$ gr. Quod nullo modo fieri potest, cum calor aëris ambientis sit minor, quam mixti. Hisce credidi formulam datam $\frac{am+bn}{a+b}$ confirmari satis posse. Monere tantum liceat, me in experimentis recensitis vsum fuisse duobus thermometris Mercurialibus, Fahrenheitianis, optime constructis ab artifice Amstelodamensi Prins, et respondentibus: pars thermometri capacior, quae aquae immergebatur erat conica, coni crassities maxima erat quatuor ferme linearum Londinensium et altitudo duodecim linearum, et non occupabat maius spatium, quam illud, quod aqua ponderis 30 granorum circiter occupare potest.

INQVISITIO IN LEGEM, SECVNDVM QVAM CALOR FLVIDI IN VASE CONTENTI, CERTO TEMPORIS INTERVALLO, IN TEMPERIE AERIS CONSTANTER EADEM DECRESCIT VEL CRESCIT, ET DETECTIO EIVS, SIMVLQVE THERMOMETRORVM PERFECTE CONCORDANTIVM CONSTRVENDI RATIO HINC DEDVCTA.

Auct. G. W. Richmann.

§. 1.

In confirmatione meae formulae pro gradu excessus caloris supra calorem mixti ex niue et sale Ammaniaco post miscelam duarum massarum aquearum diuerso gradu calidarum, in nota ad exp. II. dubitaui, an determinari possit, in qua ratione decrementa sint in aequalibus temporibus etc. Postquam vero attentius rem consideraui experimentaque omni solertia repetii et comparaui, similitudinem quandam in iis contemplatus incidi in legem, secundum quam decrementa fiunt. Cum haec plane noua sint et scientiae naturali sine dubio incrementum afferant, officii mei erit, ea, qualiacunque sint, cum societate communicare.

§. 2. Primo quidem, vt res clarissime pateat, experimenta exhibebo, compendii tamen causa, et vt facilius calculus cum obseruationibus conferri possit, statim adponam gradus caloris fluidi, diuersis temporibus, secundum legem inuentam erutos. Deinde ex obseruationibus consectaria deriuabo, quae mihi ad legem detegendam inseruierunt.

§. 3

§. 3. Ante omnia cum thermometris ipsis, quibus vsus sum, periculum facere constitui, vt constaret quantum iis fidendum esset in obseruationibus sequentibus,

Experim. I.

Thermometrum primum erat mercuriale Fahrenheitianum ab artificie Amstelodamensi Prins rite constructum, cuius bulbus coniformis quartam partem circiter digiti cubici occupabat. Illud temperiem 64. gr. consecutum in temperie aeris 40. gr.

post. 30. min. pr. ostendebat gr. 42. Calc.
post. 60. min. pr. - - - - gr. 40. 40 + [illegible]

Exeperim. II.

Idem Thermometrum a gradu caloris quadragesimo in temperie aeris 64. gr. ostendebat

post 10. min. pr. gr.	50		Calc.
post 20. - - -	55	- -	55 [illegible]
post 30. - - -	58	- -	59 [illegible]
post 40. - - -	60	- -	61 [illegible]
post 60. - - -	64	- -	63 [illegible]

§. 4. Collato experim. I. et II. videre licet 1) decrescere thermometri calorem a gr. 64 ad gr. 40 aeris ambientis eodem ferme tempore, quo calor thermometri a gr. 40 ad gr. 64. crescit in temperie aeris 64. gr. i. e. *excessus caloris aeris super calorem, quem thermometrum ostendit, communicatur cum thermometro per idem tempus, quo perit in aere, qui temperiem habet, temperiei, quam thermometrum ab initio habebat, aequalem.*

2) Si

2) Si in thermometro mercurius in quinque minutis primis per gradum vnum mouetur à gr. 58 ad gr. 59, differentiam inter temperiem mercurii et aeris initio esse 6 gr. si vero in quinque minutis per gradus duos et dimidium â gr. 50 ad gr. 52½ mouetur, eam esse 14 graduum, et si quinque minutis per 1½ gr. mouetur mercurius dictam differentiam esse 9 graduum.

3) errorem committi saepius, si status aeris praesens resp. caloris ex gradu, quem thermometrum ostendit, iudicatur.

Experim. III.

§. 5. Alterum thermometrum, quo vsus sum, erat pariter Fahrenheitianum ab eodem artifice simili industria constructum, et cum priori ferme concordans. Bulbus eius conformis tamen, minor erat bulbo prioris. In hoc thermometro mercurius in temperie aeris 67. gr. a gr. 25 in 3 min: ascendebat ad gr. 39. Calc.

- 6		49.
- 8	54	
- 9		54. 55.
- 12		58. 71.
- 13	60	
- 15		61. 47.
- 18	64	63. 31
- 23	65	
- 24		65. 37.
- 33	67	67. 515.

§. 6. Si ergo mercurius in tribus minutis primis per 14. gradus mouetur, differentia inter temperiem eius et temperiem aeris initio est 42 gr. si in quinque min. prim.

prim: per quindecim gradus mouetur, differentia dicta est initio 28. gr. si per 6 gradus, illa est 13 gr. si eodem tempore per 4. gr. illa est 7. graduum, si per $1\frac{1}{2}$, trium graduum.

Potest etiam temperies aeris semper differre a temperie mercurii. Pone temperiem mercurii 25 gr. et aerem etiam temperiei 25 graduum; pone mutari temperiem aeris, et fieri 67. gr. mercurius incipiet ascendere et minuto primo temporis nondum absoluet quinque gradus. Pone mutari iterum aeris temperiem, vt fiat 0 — 12 gr. descendet iterum mercurius aequali celeritate (§4); pone rursus temperiem aeris tertio minuto primo mutari et fieri 67. gr. rursus mouebitur contraria directione et sic porro. Tali ratione differentia minima 37. gr. differentia maxima 42. gr. esse potest. Difficulter tamen crediderim tantum saltum in natura fieri, minorem tamen differentiam per aliquod interuallum temporis saepius conseruari, phaenomena quaedam obseruata persuadent, vt credam.

Experim. IV.

§. 7. In temperie aeris, quae a gradu 62 ad gr. 66. crescebat durante experimento; $\frac{7}{16}$ partes librae aquae, in poculo vitreo conico, temperiei 38 graduum, obseruaui acquirere

	obseru.	calc.
post 8 min. prim. - - - gr.	40	
16 - - - - - - - -		43 [illegible]
20 - - - - - -	43	
24 - - - - - - - -		4[illegible]
25 - - - - - -	44	
30 - - - - - -	45	
32 - - - - - - - -		[illegible]

	obseru.	calc.
35 min. prim.	46	
40		46 $\frac{1}{2}$.
45	48	
48		47 $\frac{3}{4}$.
55	50	
56		49
64		50. 40
66	52	
72		51.14
80	54	52
104		54 $\frac{1}{4}$
106	57	
112		54. 9
136		56. 5
140	60	
160		57.$\frac{10}{18}$
180	62	

Experim. V.

Aqua temperiei 64. gr, in aere temperiei 40. et 39 gr. eiusdem quantitatis in vasculo eodem consequebatur

	obs.	calc.
in 30 min. prim.	gr. 54	
60	50	48. $\frac{1}{8}$
90	46	44. 760
120	44	42. 778
150	43	41. 620.
180	42	41
240	40	40. 900.

§. 9.

§. 9. Si ad experimentum quartum et quintum reflectimus, iudicatu facillimum est, aquam tardius adhuc gradum 62 et 40 assecutam fuisse, si temperies aëris constans mansisset scil. 62 et 40 graduum. Cum vero crescebat ibi a gr 62 ad gr 66. et hic a gtadu 39 ad 40 et iterum decrescebat ad gr. 39, ibi aqua citius gradum 62 obtinuit, et hic citius gr. 40. Neque hic tacebo, vasa cum aqua aëri exposita contigisse ex parte alia corpora praeter aërem, de quorum temperie non potui esse certus. Si ad experim. I. II. et III. respicimus facile maiores mutationes aëris, thermometro vix indicandae, discrepantiam efficere potuerunt. Hoc in sequentibus etiam notandnm.

Experim. VI.

§. Aquam eadem quantitate, Temperiei 141. gr. in eodem vase in aëre temperiei 63 gr. ad 65 obseruaui acquirere

	obseru.	calc.
post 5 min. prim.	gr. 132	
10	123	124
15	116	113. 70
20	111	110. 80
25	104	105. 30
30	101	100. 50
35	98	96. 25
40	92	92. 40
55	86	83. 60

Etiam hic vasculum cum aqua aëri expositum contingebat ex parte alia corpora, temperiesque aëris non

Z 2 per-

permanebat constans. Vt remedium aliquod afferrem sequenti modo instituí experimenta sequentia.

Experim. VII.

§. 11. Phialam vitream cum ventre sphaerico et collo angusto suspendi ex filo tenui, vt tantum ab aëre temperiei 68 graduum contingeretur, aquamque ebullientem infudi. Aqua cum phiala, hinc tota massa frigori exposita erat $\frac{56}{32}$ librae. Thermometro immisso obseruaui decrescere calorem a gr: $177\frac{7}{8}$

			obseru.		calc.
1) per	5	min prim. ad gr.	171		
2) -	10	- - - - -	$164\frac{2}{3}$	-	165. 15
3) -	15	- - - - -	$158\frac{1}{2}$	-	159. 63
4) -	20	- - - - -	153 +	-	154. 43
5) -	25	- - - - -	148	-	149. 52
6) -	30	- - - - -	143 +	-	144. 89
7) -	35	- - - - -	139	-	140. 53
8) -	40	- - - - -	135	-	136. 41
9) -	45	- - - - -	131	-	132. 52
10) -	50	- - - - -	$127\frac{1}{2}$	-	128. 86
11) -	55	- - - - -	124	-	125. 40
12) -	60	- - - - -	$120\frac{1}{2}$	-	122. 14
13) -	65	- - - - -	118	-	119. +
14) -	70	- - - - -	$115\frac{1}{2}$	-	116. 16
15) -	75	- - - - -	113	-	113. 43
16) -	80	- - - - -	111	-	110. 82
17) -	85	- - - - -	$108\frac{1}{2}$	-	108. 41
18) -	90	- - - - -	106 +	-	106. 13
19) -	95	- - - - -	104	-	103. 96

20)

		obſeru.	calc.
20)	100	102	102
21)	105	100 $\frac{1}{2}$	99
22)	110	99	98. 18
23)	115	97 $\frac{1}{2}$	96. 46
24)	120	96 +	94. 85
25)	125	95	93. 32
26)	130	94	91. 89
27)	135	92 $\frac{3}{4}$	90. 53
28)	140	91 $\frac{1}{4}$	89. 25
29)	145	90	88. 1
30)	150	89	86. 90
40)	200	81 $\frac{1}{2}$	78. 53
50)	250	76	73. 87
60)	300	74 $\frac{1}{4}$	71. 27
70)	350	71 $\frac{3}{4}$	69. 82
80)	400	70 $\frac{1}{2}$	69. 17
90)	450	70	68. 56
100)	500	69	68. 32

Experim. VIII.

§. 12. Phialam multo minorem priori ſimilem elegi et aquam ei infudi calidam. Phialae cum aqua pondus erat $\frac{18}{32}$ librae. Obſeruaui deinde in temperie aëris eadem ferme ſcil. 68. graduum calorem decreſcere a gradu 158 $\frac{1}{2}$

		obſeru.	calc.
1)	5 min. prim. ad gr.	150 $\frac{1}{2}$	
2)	10	142 $\frac{1}{2}$	143. 16
3)	15	136	136. 50
4)	20	129 $\frac{1}{2}$	130. 50

		obseru.	calc.
5)	25 min. pr.	124	124.9
6)	30	118	119.9
7)	35	114	113.3
8)	40	109 ¼	111.1
9)	45	106 +	107.8
10)	50	102 ½	103.8
11)	55	100	100.6
12)	60	97	97.8
13)	65	94 ½	95.1
14)	70	92 +	92.7
15)	75	90 +	90.6
16)	80	88 ½	88.6
17)	85	87	86.7
18)	90	86	85.5
19)	95	84 ½	83.5
20)	100	83	82.22
21)	110	80 ½	79.82
24)	120	78 ½	77.8
26)	130	76 ½	76.15
28)	140	75	74.8
30)	150	74 ½	73.6
32)	160	73 ¾	72.68
36)	180	72	71.23
40)	200	71	70.23
44)	220	70	69.54

§. 13. Si ad experim. VII. et VIII attendimus, dum phiala cum aqua contingeretur ab aëre solum, non a corporibus aliis diuersae temperiei; non potuit hic a lege

lege tantum aberrari. Attamen effici non poterat, vt temperies aëris perfectissime constans maneret. Etiam horologium, quo vsus sum, dum experimenta per multas horas continuarem, tardius mouebatur vltimis temporibus, quam ab initio.

§. 14. Vt confirmarem ea, quae ex parte in annotationibus ad experimenta allata sunt, constitui simul cum thermometro in experim. III. descripto, mutationes aëris quolibet tempore annotare, credens hac ratione facile iudicium ferri posse, inprimis, si ad Exp. I. II. III. attendatur, cur calor magis crescat vel decrescat ac secundum calculum crescere et decrescere deberet. Hunc in finem etiam differentias inter obseruationes et calculum addidi in vltima columna; et si calculus obseruationem superauit, id signo +, contrarium signo — indicaui.

Experim. IX.

§. 15 Phialae, qua vsus sum experim. VII aquam ebullientem eiusdem quantitatis infudi et in temperie aëris 20 graduum obseruaui decrescere calorem a gr. 182.

	obs.	cal. aër.	calc.	differ.
1) in 5 min. prim. ad gr.	173	$19\frac{1}{4}$		
2) - 10 - - - -	$164\frac{1}{4}$	$19\frac{1}{4}$	164. 5	+ 0. 25
3) - 15 - - - -	$155\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{4}$	156. 4	+ 0. 90
4) - 20 - - - -	148	$19\frac{1}{4}$	148. 9	+ 0. 90
5) - 25 - - - -	141	$19\frac{1}{4}$	141. 7	+ 0. 70
6) - 30 - - - -	134	$19\frac{1}{4}$	134. 9	+ 0. 90
7) - 35 - - - -	$127\frac{1}{4}$	$19\frac{3}{4}$	128. 5	+ 1. 25
8) - 40 - - - -	$121\frac{1}{2}$	20	122. 5	+ 1. 00
9) - 45 - - - -	116	20	116. 9	+ 0. 90

10)

		obserυ.	cal. aër.	calc.	diff.
10)	50 min. pr.	$110\frac{1}{2}$	20	111.	+ 0. 59
11)	55	$105\frac{1}{2}$	20	106.4	+ 0. 99
12)	60	$101\frac{1}{4}$	20	101.58	+ 0. 33
13)	65	$96\frac{1}{4}$	20	97.5	+ 1. 25
14)	70	93	$20\frac{1}{3}$	92.8	− 0. 20
15)	75	$89\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$	88.73	− 0. 77
16)	80	86	21	84.91	− 1. 09
17)	85	83	21	81.30	− 1. 70
18)	90	$79\frac{3}{4}$	21	77.90	− 1. 85
19)	95	76	21	74.67	− 1. 33
20)	100	$73\frac{1}{2}$	21	71.64	− 1. 86
21)	105	$71\frac{1}{4}$	21	68.77	− 2. 48
22)	110	$68\frac{3}{4}$	$21\frac{1}{2}$	66.06	− 2. 69
23)	115	$66\frac{1}{4}$	$21\frac{1}{4}$	63.49	− 2. 76
24)	120	64	$21\frac{1}{4}$	61.09	− 2. 91
25)	125	62	$21\frac{1}{2}$	58.80	− 3. 20
26)	130	60	$21\frac{1}{2}$	56.65	− 3. 35
27)	135	58	$21\frac{3}{4}$	54.61	− 3. 39
28)	140	$56\frac{1}{2}$	$21\frac{3}{4}$	52.69	− 3. 81
29)	145	$55\frac{1}{2}$	22	50.86	− 4. 64
30)	150	$53\frac{1}{2}$	22	49.15	− 4. 35
31)	155	52	22	47.53	− 4. 47
32)	160	$50\frac{1}{4}$	22	46.00	− 4. 25
34)	170	48	$21\frac{3}{4}$	43.19	− 4. 81
36)	180	$45\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$	40.69	− 4. 81
38)	190	$41\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$	38.40	− 3. 10
42)	210	$34\frac{1}{2}$	19	34.41	+ 0.21

Expeꝛ.

Experim. X.

§. 16 Phialam vitream (Experim. VIII.) adhibui, ei $\frac{12}{32}$ librae aquae ebullientis infudi; et in aëre temperiei 23. gr. obseruaui decrescere calorem aquae a gradu 175

		obseru.	calor aëris:	Calc.	diff. inter obs. et calc.
1)	5 min. prim. ad gr.	161½	22½		
2)	10	149	22½	149.2	+ 0. 20
3)	15	137	22½	137.9	+ 0. 90
4)	20	127	22	127.7	+ 0. 70
5)	25	116	22	118.4	+ 2. 40
6)	30	108	22	109.9	+ 1. 90
7)	35	100	22	102.2	+ 2. 20
8)	40	93½	22	95.2	+ 1. 70
9)	45	87	22½	88.8	+ 1. 80
10)	50	81	22½	82.9	+ 1. 90
11)	55	75½	22½	77.6	+ 2. 10
12)	60	71¼	23	72.7	+ 1. 45
13)	65	67½	23	68.3	+ 0. 80
14)	70	63¾	23	64.3	+ 0. 55
15)	75	60¼	23	60.6	+ 0. 35
16)	80	58½	23½	57.3	− 1. 20
17)	85	54½	23½	54.2	− 0. 30
18)	90	53	24	51.4	− 1. 60
19)	95	50½	24	48.9	− 1. 60
21)	105	46¼	24	44.5	− 1. 75
23)	115	43	23	40.8	− 2. 20
25)	125	40	22	37.85	− 2. 15

	obſeru.	calor aëris.	calc.	diff. inter obſ. et cal.
27)135	$35\frac{1}{2}$	22	35.33	-0.17
29)145	$33\frac{1}{2}$	22	33.24	-0.26
31)155	$31\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	31.5	-0.0
33)165	30	$22\frac{1}{2}$	30.06	$+0.06$
35)175	$28\frac{1}{4}$	$22\frac{1}{2}$	28.80	$+0.55$
37)185	$27\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	27.8	$+0.30$
39)195	$27\frac{1}{4}$	$22\frac{1}{2}$	27.	$+-0.25$
41)205	27	23	26.35	-0.65
43)215	$26\frac{1}{2}$	23	25.78	-0.72
49)245	$25\frac{1}{2}$	23	24.59	-0.91
52)260	$25\frac{1}{2}$	24	24.2	-1.30
56)280	25	24	23.83	-1.17

§. 17. Cum ex praecedentibus admiranda harmonia calculi et obſeruationum eluceat ſatis, ne contra officia veritatis amatoris videar experimenta accommodaſſe calculo, adducam experimentum alienum huc pertinens, ſcil. Clariſſ. Krafftii ex diſſ. eius de calore et frigore. In prima columna poſui tempus praeterlapſum ab initio obſeruationum, vt in praecedentibus experimentis factum: in ſecunda columna gradus temperiei aquae quolibet tempore reſiduos: in tertia gradus ſecundum legem a me inventam erutos: in quarta gradus reſiduos ſecundum hypotheſin, decrementa eſſe in ratione ſubduplicata temporum praeterlapſorum.

Clariſſ. Krafftius in temperie aëris 76. graduum obſeruauit, thermometro aquae calidae immiſſo, a gr. 112 deſcendere mercurium

1) min.

	obseru.	calc. sec. leg. meam	calc. sec. hyp. allatam
1) min. prim. ad	110	- - - - -	107. 4
2) - - - -	109	109. 1	107.
4) - - - -	106½	106½ hyp.	101. 8
6) - - - -	104	103. 98	100. 74
8) - - - -	- -	101. 84	98. 99
9) - - - -	101	100. 67	98. 2
11) - - - -	99	98. 68	96. 75
14) - - - -	96	96. -	94. 79
16) - - - -	94½	94. 54	93. 6
18) - - - -	93	92. 90	92. 5
23) - - - -	90	89. 70	89. 5
25) - - - -	89	88. 60	89. 0 ex hyp.
27) - - - -	88	87. 59	88. 1
31) - - - -	86	85. 79	86. 6
36) - - - -	84½	84. 09	84. 40
39) - - - -	83	83. 00	82. 78
42) - - - -	82	82. 17	82. 2
46) - - - -	81	81. 21	80. 8
50) - - - -	80½	80. 41 +	79. 8
54) - - - -	79	79. 73	78. 2
59) - - - -	78	79. 02	76. 67
62) - - - -	77¾	78. 66	75. 80
66) - - - -	77	78. 25	74. 63
73) - - - -	76½	77. 68	72. 07
81) - - - -	76	77. 21	70. 60

 §. 18.

§. 18. Si praecedentem paragraphum consideramus et conferimus calculum secundum legem meam cum experimentis, miram conuenientiam cernimus, vt hinc iudicandum sit, aëris temperiem tempore experimenti fuisse maxime constantem, et omnem possibilem solertiam ab experimentatore adhibitam fuisse. Mira vero harmonia sola satis demonstrat legis inuentae veritatem. Si gradus Columnae quartae vero aspicimus, qui sec. hyp. eruti sunt, decrementa esse in ratione subduplicata temporum, discrepantiam initio et fine obseruationum, vbi a supposito gradu gradus maxime distant, tantam obseruamus, vt prorsus non satisfaciat fini. Taceo impossibile ex calculo sequi, scil. temperiem aquae sec. calculum ita decrescere debere, vt aëris temperies eam 6 gradus superet, quod repugnat.

§. 19. Si nunc ad experimentum VII. respicimus, facile apparet, *decrementa caloris in temporis particulis paruis aequalibus, si massa frigori exposita superficiesque eius et temperies aëris refrigerantis manet eadem, esse vt differentias inter temperiem massae refrigerandae et temperiem aëris refrigerantis*. Descendit enim mercurius quinque minutis primis per $6\frac{1}{3}$ gradus, scil. a gradu $177\frac{1}{3}$ ad gr. 171. Descendit vero etiam a gr. $115\frac{1}{3}$ ad 113, i. e. per $2\frac{1}{3}$ gr. pariter per quinque minuta prima. Sunt ergo decrementa vt $6\frac{1}{3}$ ad $2\frac{1}{3}$. Cum temperies aëris refrigerantis sit 68. graduum, erit differentia inter temperiem aëris et temperiem $177\frac{1}{3}$ gr. 109. 2. et differentia inter temperiem aëris eandem et temperiem $115\frac{1}{3}$ gr. 47. 5. Est vero 109. 2 ad 47. $5 = 6\frac{1}{3} : 2\frac{761}{1098}$, ergo ferme $= 6\frac{1}{3}$ ad ad $2\frac{1}{2}$. Ab 104. ad gr. 102 in quinque minutis percurrit mercurius duos gradus, differentia inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae eſt hic 36. 0. Eſt vero $109.2 : 36.0 = 6\frac{1}{5} : 2\frac{48}{1092}$ i. e. ferme vt $6\frac{1}{5} : 2$. A gradu $81\frac{1}{2}$ in quinque minutis mercurius deſcendit per $\frac{11}{20}$ + gr. Eſt hic differentia inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae 13. 5. Eſt autem $109.2 : 13.5 = 6\frac{1}{5} : \frac{837}{1092}$ vel $0.766 > 0.550$ vel $\frac{11}{20}$, vt eſſe debet. Simili ratione examinari poterunt reliquae experientiae, inprimis §. §. 12. 15. 16. 17; luculenter apparebit propoſitionem confirmari, et ſi quae obſeruatur diſcrepantia, illam attribuendam eſſe inconſtantiae aëris, qui inter experimentum modo fit calidior modo frigidior, et ſpatium paruum obſeruandi difficultati.

§. 20. *Si maſſa refrigeranda et ſuperficies eius manet eadem, temperies aëris vero, in quo experimentum fit, eſt diuerſa, decrementa caloris aequalibus temporis particulis ſunt iterum vt differentiae inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae.* Conferantur obſeruationes experim. VII. et IX. maſſa vtrobique eſt eadem et eadem etiam ſuperficies maſſarum; differentia vero inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris refrigerantis ibi eſt initio 109. 2, hic initio 162. 0. In quinque primis minutis primis ibi mercurius abſoluit $6\frac{1}{5}$, hic 9. gradus. Eſt vero $109.2 : 162.0 = 6\frac{1}{5} : 9\frac{216}{1092} = 6\frac{1}{5} : 9$ ferme.

Abſoluit mercurius experim. IX. a gr. $110\frac{1}{2}$ ad gr. $105\frac{1}{2}$ quinque gradus, quinque minutis. Eſt vero hic differentia inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae 90. 5. Hinc $109.2 : 90.5 = 6\frac{1}{5} : 5\frac{151}{1092} = 6\frac{1}{5} : 5$ ferme.

 Dif-

Diſcrepantia, vt iam ſatis monitum, attribuenda eſt inconſtantiae temperiei aëris vel obſeruandi difficultati. Simili modo caetera exempla examinari poterunt, quae adducere ſuperfluum iudico.

§. 21. *Si maſſae ſunt diuerſae et ſuperficies maſſarum ſunt diuerſae, differentiae vero inter temperiem aëris et aquae eaedem, decrementa aequalibus temporis particulis ſunt in directa ratione ſuperficierum et inuerſa maſſarum.* Conferantur obſeruationes experim. VII. cum obſeruationibus experim. VIII. maſſa refrigeranda ibi eſt ad maſſam refrigerandam hic vt $28 : 9$. Superficies vero phialarum ſunt, quia ſunt corpora ſimilia vt $28^{2:3} : 9^{2:3} = 91809 : 43264$. Ratio ergo compoſita ex directa ſuperficierum et inuerſa voluminum eſt $= \frac{91809}{28} : \frac{43264}{9} = 3278 : 4807$. Experim. VII. mouetur mercurius quinque minutis primis a gr. $158\frac{1}{2}$ ad gr. 153, i. e. per $5\frac{1}{2}$ gradus, et in experim. VIII. a gr. $158\frac{1}{2}$ ad $150\frac{1}{2}$. i. e. per octo gradus pariter quinque minutis primis, temperies aëris vtrobique eſt eadem. Eſt autem $3278 : 4807 = 5\frac{1}{2} : 8\frac{214}{3278}$. parum abludens a $5\frac{1}{2} : 8$.

Mouetur mercurius experim. VIII. a gr. 90 ad gr. $88\frac{1}{2}$ per $1\frac{1}{2}$ gr: quinque minutis primis. Experim. VII. vero a gr. 90 quinque minutis per gradum vnum. Eſt vero $3278 : 4807 = 1 : \frac{4807}{3278} = 1 : 1\frac{1529}{3278}$, ferme vt $1 : 1\frac{1}{2}$. Hoc ex omnibus reliquis exemplis elucet, poſitis conditionibus.

§. 22.

§. 22. *Si massae refrigerandae sunt diuersae, superficies diuersae, differentiae inter temperiem massarum refrigerandarum et aëris refrigerantis diuersae; decrementa aequalibus temporis particulis obseruantur in ratione composita ex ratione directa superficierum et differentiarum inter temperiem aëris et massarum refrigerandarum, simulque ex inuersa ratione massarum refrigerandarum ipsarum.* Hoc vt adpareat, conferantur obseruationes experim. VII. cum obseruationibus exper. X. Est ratio directa superficierum et inuersa massarum vt ante $= 3278 : 4807$. Est ibi differentia inter 177.2 et $68.0 = 109.2$. hic vero differentia inter 175.0 et $23.0 = 152.0$. Consequenter ratio tota composita $3278 . 1092 : 4807 . 1520 = 3579576 : 7306640 = 447447 : 913330$. Spatium vero a mercurio transitum a gr. $177\frac{1}{5}$ in quinque minutis primis est $= 6\frac{1}{5}$; spatium eodem tempore experm. X. a gr. 175 ad $161\frac{1}{2}$ absolutum $= 13\frac{1}{2}$.

Est vero $447447 : 913330 = 6\frac{1}{5} : 12\frac{293282}{447447}$ ergo non multum recedens a $6\frac{1}{5} : 13\frac{1}{2}$. Idem aliis exemplis potest ostendi, quae facile ex obseruationibus peti poterunt.

§. 23. Itaque concludimus ex experimentis, decrementa caloris, et si respicimus ad experim. II. et IV. etiam incrementa caloris esse in ratione composita ex directa ratione superficierum et differentiarum inter temperiem massarum refrigerandarum vel calefaciendarum et aëris pariter directa, simulque ratione inuersa ipsarum massarum refrigerandarum vel calefaciendarum; si scil. tempora sunt aequalia et parua. Hac propositione stabilita nos legi condendae pares erimus, secundum quam decrecrementa vel incrementa caloris quolibet tempore praedicere poterimus in temperie aëris constanti.

§. 24. Sit differentia inter temperiem aëris refrigerantis et massae refrigerandae $= a$, sit decrementum tempore $t. = b.$ erit differentia inter temperiem aëris refrigerentis et massae refrigerandae tempore t praeterlapso residua $= a - b$. Et cum decrementa aequalibus temporis particulis sint vt differentiae inter temperiem massae refrigerandae et aëris per antecedentia (§. 19.) erit $a : a - b = b : b \frac{(a-b)}{a}$, vel decrementum tempore $2t$, differentia igitur inter temperiem massae refrigerandae et aëris erit post tempus $2t = a - b - b\frac{(a-b)}{a} = \frac{a^2 - ab - ab + bb}{a} = \frac{a^2 - 2ab + bb}{a} = \frac{(a-b)^2}{a}$. Eadem ratione erit $a : \frac{(a-b)^2}{a} = b : b\frac{(a-b)^2}{a^2}$ siue decrementum tempore $3t$; differentia igitur inter temperiem massae refrigerandae et aëris erit post $3t = \frac{(a-b)^2}{a} - b\frac{(a-b)^2}{a^2} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a} - \frac{ba^2 + 2ab^2 - b^3}{a^2}$, aequalis $\frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a^2} = \frac{(a-b)^3}{a^2}$ et sic porro. Erunt ergo differentiae inter temperiem aëris et massae refrigerandae temporibus aequalibus continuo sibi suscedentibus paruis et decrementa, vt sequens tabula exhibet.

§. 25. Prima columna exhibet temporum aequalium numerum, secunda columna differentias inter temperiem massae refrigerandae et aëris post determinatum tempus superstites; tertia columna exhibet decrementa aequalibus temporibus.

I.	II.	III.
0	a	0
$1\,t$	$a-b$	b
$2\,t$	$\frac{(a-b)^2}{a}$	$b\,\frac{(a-b)}{a}$
$3\,t$	$\frac{(a-b)^3}{a^2}$	$b\,\frac{(a-b)^2}{a^2}$
$4\,t$	$\frac{(a-b)^4}{a^3}$	$b\,\frac{(a-b)^3}{a^3}$.
$5\,t$	$\frac{(a-b)^5}{a^4}$	$b\,\frac{(a-b)^4}{a^4}$
$6\,t$	$\frac{(a-b)^6}{a^5}$	$b\,\frac{(a-b)^5}{a^5}$
$7\,t$	$\frac{(a-b)^7}{a^6}$	$b\,\frac{(a-b)^6}{a^6}$
$8\,t$	$\frac{(a-b)^8}{a^7}$	$b\,\frac{(a-b)^7}{a^7}$ etc. hinc
$n\,t$	$\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$	$b\,\frac{(a-b)^{n-1}}{a^{n-1}}$

§. 26. Ex praecedenti tabula progreſſio clariſſime patet, et quolibet momento differentia inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris definiri poteſt. Eſt ſcil. differentia inter temperiem initialem maſſae refrigerandae et aëris ſcil. a euecta ad dignitatem, cuius exponens vnitate minor eſt numero momentorum aequalium elapſorum, ad differentiam inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris poſt primum momentum reſiduam, euectam ad dignitatem, cuius exponens aequalis eſt numero momentorum aequalium praeterlapſorum, vt vnitas ad differentiam inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae praeterlapſo tempore reſiduam; quae ſi tali ratione inuenitur, ei addi poteſt temperies aëris, vt temperies ipſa habeatur.

§. 27. Patet porro (1) Logarithmum $a-b$, poſſe multiplicari per exponentem eius, ad obtinendum logarithmum numeratoris. (2) Logarithmum a posse pariter multiplicari per exponentem eius, ad obtinendum logarithmum denominatoris. (3) Logarithmum denominatoris posse subtrahi a logarithmo numeratoris ad obtinendum logarithmum quoti.

§. 28. Potest etiam quolibet tempore indicari decrementum, est scil. a euecta ad dignitatem cuius exponens est vnitate minor numero momentorum elapsorum, ad $(a-b)$ euectam ad dignitatem cuius exponens pariter est vnitate minor numero momentorum aequalium elapsorum, sic decrementum primo momento ad decrementum per aequale tempus post certum temporis interuallum. Similique ratione etiam hic logarithmis vti poterimus.

§. 29. Vt sine molestia pateat, quomodo calculus obseruationibus appositus sit factus, notetur in primo experim. a esse $= 24$ $b = 22$: in secundo experim. a esse $= 24$. $b = 14$; in 3tio experim. $a = 42$. $b = 14$, in 4to, $a = 24$, $b = 2$; in 5to $a = 24$, $b = 10$; in 6to $a = 78$, $b = 9$; in 7mo $a = 109.2$, $b = 6.2$. in experim. 8vo $a = 90.5$, $b = 8.0$. experim. 9no $a = 162$ $b = 9$. experim. 10mo, $a = 152$, $b = 13\frac{1}{2}$.

§. 30. In experimento quod mutuati sumus a Clariss. Krafftio ex dissertatione eius de calore at frigore decrementum initiale sequenti ratione elicui. Decrementum duobus min. prim. a gr. $106\frac{1}{2}$ est secundum obseruationem 2. gr. et dimidii; hinc vno min. primo ferme $1\frac{1}{4}+$ gr. Cum nunc spatia aequalibus temporibus a mercurio transita sint vt differentiae inter temperiem massae refrigerandae et aëris refrigerantis, erit $30\frac{1}{2} : 36 = 1\frac{1}{4} + : \frac{90}{61} +$ vel ad $1.475 +$, erit ergo, $b = 1.475$. Cum $a = 36$.

000, erit $a-b=36.000-1.475=34525$ →, erit igitur $\frac{(a-b)^2}{a}=\frac{3452^2}{3600}$ siue differentia inter temperiem massae refrigerandae et temperiem aëris post duo min. prim. et $\frac{(a-b)^3}{a^2}$ erit $=\frac{3452^3}{3600^2}$ aequalis differentiae inter temperiem aëris et massae refrigerandae tertio min. prim, secundum legem expositam; et sic porro.

§. 31. Geometris facillime patet, notissimam curuam Logarithmicam magni vsus esse in decrementis, singulis temporibus determinandis, quod tandummodo indicare hic volui, cum sufficiat, quod ostenderim, quomodo lege detecta vti possimus ad detegenda decrementa et incrementa caloris in constanti aëris temperie, adhibitis logarithmis numerorum vulgarium.

§. 32. Dum experimenta VII. VIII. IX. X. considero, aëris temperiem posse assumi constantem per totum experimenti tempus absque sensibili errore cerno. Videmus vero etiam, crescente vel decrescente calore aberrare a lege decrementa, conditio enim legis ex parte tollitur. Ipsa sic aberrationis ratio est criterium veritatis legis; considerentur obseruationes experim: IX et X, vbi additae sunt mutationes aëris; quia experim. IX ab initio decreuit calor aëris, statim maiorem calorem exhibet calculus quam obseruationes vsque ad min. pr. 40. Deinde ob crescentem iterum calorem aëris etiam calculus magis magisque respondere incipit obseruationibus, donec ferme cum iis congruit post min. pr. 60. Quia vero postea temperies aëris magis adhuc crescit, vt superet gradum 20, min. primo 70; calculus iam incipit minorem temperiem exhibere, quam obseruationes, quod vſque ad min. primum 180, cernere eſt, vbi incipit denuo decreſcere aëris temperies, et calculus magis magiſque iterum reſpondere obſeruationibus, donec poſt min. primum 210 cum obſeruationibus ferme conueniat.

Eperimento X. minuto primo 15. decreuerat calor aëris a gr. 23 ad 22½, calor maſſae refrigerandae ad gr. 137. Calculus exhibet gr. 137.9, quia calor aëris decreuerat. Sic calculus ob calorem aeris decreſcentem vſque ad min. pr. 65, maiorem exhibet gradum quam obſeruationes. Deinde vero, quia calor aeris min. primo 60 iam rvrſus creſcere incipit, etiam calculus incipit reſpondere magis magiſque obſeruationibus et min. primo 70, ferme eundem gradum exhibere. Quia poſtea vero calor aëris augetur magis, calculus incipit exhibere minorem gradum ac obſeruationes, quod inter min. primum 80 et 115 cernere eſt. A min. primo 115 autem rurſus decreſcit calor aëris; hinc fit, vt calculus denuo reſpondere incipiat obſeruationibus, quod inter min. primum 115 at 195 videre eſt. A minuto primo 205 ad 280 creſcit iterum calor aëris ad gr. 24, quare temperies maſſae refrigeratae maior obſeruatur ac calculus exhibet. Haec omnia ſunt euidentiſſima criteria legis feliciter detectae, vt plura addere in confirmationem ſupervacaneum ſit.

§. 33. Tandem ſi ea perpendimus, quae §. 19. 20. 21 aſſerui et probaui, decrementa ſcil. vel incrementa caloris aequalibus temporum particulis eſſe in ratione compoſita ex directa ſuperficierum et inuerſa maſſarum refrigerandarum vel calefaciendarum ratione, ſi temperies aëris ponuntur aequales et differentiae inter temperiem maſſarum refrigerandarum et aëris; cuique facile

patet

patet, collatis ſimul iis, quae §. §. 4. 5 et 6. annotata ſunt, ad elaborationem thermometrorum perfecte concordantium requiri, vt ſuperficies bulborum thermometricorum, eandem rationem habeant, quam habent volumina bulborum thermometricorum.

Nunquam enim decrementa vel incrementa aequali tempore, mutatione aëris eadem facta erunt aequalia, niſi (poſitis dictis voluminibus V: v et ſuperficiebus S: s.) $\frac{S}{V}$ fit $= \frac{s}{v}$; conſequ. S $v = s$V et S:s=V:v. Collatis §. §. 3. 4. 5. 6 ſimul patet, ea thermometra, quae adhibui non fuiſſe perfecte concordantia; quia differentia inter temperiem aëris et temperiem thermometri in experim. I, II. exiſtente 24 gr. thermometrum temperiem aëris conconſecutum eſt ſexaginta minutis primis, in experim. III. vero thermometrum alterum, differentia inter temperiem aëris et thermometri exiſtente 28 graduum, temperiem aeris conſecutum eſt triginta minutis primis. Nonſolum vero thermometrorum harmonia tali ratione exactior obtinetur, ſed etiam ſequens problema magni momenti et meteorologiae perficiendae inſeruiens ſolui poterit, ſi in ſubſidium vocantur, quae in hac diſſertatione probaui ſcil.

Temperiem aëris inuenire eam; quae, ſi conſtans eſſet per totum diem, vel etiam per multorum dierum interuallum, quin totum annum, eundem effectum produceret in refrigerandis vel calefaciendis per idem tempus corporibus, ac omnes gradus diuerſi caloris ſibi per totum diem, vel longius interuallum e. g. totum annum ſuccedentes. Quia vero in hoc negotio machina quadam et apparatu opus eſt, rem differam, pedemque hic figo.

TENTAMEN LEGEM EVAPORATIONIS AQVAE CALIDAE IN AERE FRIGIDIORI CONSTANTIS TEMPERIEI DEFINIENDI.

AVCTORE
G. W. Richmann.

§. 1.

Qua lege euaporatio aquae calidae in certa aëris temperie minus calida fiat, nondum definitum est a scientiae naturalis cultoribus. Huius problematis solutionem ad physicae incrementum aliquid allaturum non dubitaui; hinc cum quadam pertinacia nonsolum experimenta huc facientia institui, sed etiam iis attente comparatis priorum Academiae traditarum inquisitionum adminiculo in legem, quam experimentis non prorsus contrariam deprehendi, incidi. Haec qualiacunque tentamina initio euulgare nolui, antequam noua experimenta cum peculiari machina ceperim, quam descriptam sub finem anni 1747 tradidi et qua euaporationem exactius mensurari posse speraui. Cum vero nunc laborum, quibus incubui, ex parte rationem reddere velim, cogitata et experimenta, quae imposterum perficere annitar, cum societate communicabo.

§. 2. Simulac mihi subnascebatur suspicio euaporationem aquae calidae in aëre minus calido decrescere vti differentiae inter temperiem aquae et aëris decrescunt, in legem decrementi caloris inquirere incepi et detexi differentias istas decrescere aequalibus temporibus secundum progressiogressionem semiordinatarum logisticae temporibus per abscissas expressis, vti ex inquisitione mea in legem secundum quam calor fluidi vase contenti etc. in temperie aëris constanter eadem crescit vel decrescit, patet. (*)

§. 3. Posito eandem continuo differentiam inter temperiem aquae magis calidae et aëris minus calidi esse, nullum est dubium, aequales aquae quantitates, caeteris om-

(*) Cum (1) vis elastica aëris calore augeatur ita, vt haec vis ad aëris ambientis frigidioris vim elasticam sit vt volumen quod aër calore acquirit ad volumen aëris ambientis minus calidi; et (2) refrigeratio pendeat maximam partem a differentia virium elasticarum, ascendatque aër calidus, a superficie corporis aquae calidi in aëre minus calido vi proportionali excessui vis elasticae aëris magis calidi super vim elasticam aëris minus calidi et tali ratione corporis calor a cuius superficie aër ascendit, simul decrescat; (3) vero excessus vis elasticae aëris calidioris super vim elasticam aëris minus calidi proportionatus sit differentiae temperierum; non mirum est, decrementa caloris aequalibus tempusculis esse vti differentias inter temperiem aquae et aëris. Si enim volumen aëris temperie aquae gelascentis expansi ponitur 1000 volumen aëris calore aquae ebullientis expansi obseruatum est 1500 et volumen aëris calore summo aestiuo expansi 1166. conf. Hauksbéii Phys. Mechan. Exp p. 170. Tentamina experimentorum in Acad. del Ciment p. 39. ed. Musschenbr. Cum vires elasticae sint in eadem ratione, differentia inter vim elasticam aëris aqua ebulliente generatam et vim elasticam aëris aqua gelascente generatam est vt 500; differentia vero inter vim elasticam aëris calore summo aestiuo generatam et vim elasticam aëris aqua gelascente generatam vti 166. Est vero 500: 166 = 180: $59\frac{38}{50}$ i. e. vti differentia inter temperiem aquae ebullientis et temperiem aquae gelascentis ad differentiam inter calorem summum aestiuum et temperiem aquae gelascentis. Si enim ad $59\frac{38}{50}$ additur temperies aquae gelascentis 32. graduum, oritur temperies $91\frac{38}{50}$ graduum, siue calor summus aestiuus.

nibus paribus, aequali tempore euaporare, euaporationes inaequalibus vero temporibus esse in ratione temporum.

§. 4. Si vero tempora et caetera omnia ponuntur aequalia praeter differentias inter temperiem aquae et aëris nondum forte affirmare licebit euaporationes esse in ratione differentiarum inter temperiem aquae et aëris. Quod si obtinet, euaporationes temporibus inaequalibus et differentiis dictis pariter inaequalibus, caeteris vero omnibus paribus, erunt vti spatia logisticae, cuius semiordinatae ponuntur in ratione differentiarum dictarum et abscissae in ratione temporum.

§. 5. Ponatur logisticae axis AC, cuius partes aequales exprimant tempora aequalia, quibus euaporatio fit; semiordinata AB exprimat differentiam initialem inter temperiem aquae et aëris aqua frigidioris; decrescet aquae calor in aëre frigidiori constantis temperiei, vti semiordinatae logisticae decrescunt, et erit post tempus AF differentia inter temperiem aquae et aëris vti semiordinata FG et euaporatio tota post idem tempus vti spatium logisticae ABFG; post tempus AC vero erit differentia inter temperiem aquae et aëris vti CD et euaporatio totalis post idem tempus vti spatium logisticae ABCD. Si nunc logisticae subtangens, quae est constans ponitur $= a$, erit spatium ABFG $= a$ (AB$-$FG) et spatium ABCD $= a$ (AB$-$CD). Conseq. ABFG : ABCD $=$ AB$-$FG : AB $-$ CD; i. e. Euaporationes erunt vti differentiae differentiarum inter temperiem aquae et aëris diuersis temporum interuallis.

§. 6.

§. 6. Hoc an ita habeat, accuratissimis experimentis examinandum est. Talia quidem nondum instituere licuit, quae tamen huc facientia ope vulgaris bilancis instituí, afferam. Quodlibet experimentum in tabula quadam exhibui, in cuius columna I. tempus euaporationis existit, in columna II. temperies aëris, in columna III. temperies aquae, in columna IV. differentiae inter temperiem aquae et aëris, in columna V, pondus aquae evaporatae secundum obseruationem, in VI tandem pondus aquae euaporandae secundum legem suppositam.

Experim. I.

Vas metallicum cylindricum diametri quatuor digitorum, quod capiebat tres libras aquae, mediante fune ex brachio bilancis suspendi et aquam feruentem infudi, thermometrum dein huic aquae immersi et ad aequilibrium perduxi bilancem; statimque notaui tempus, temperiem aëris externi, temperiem aquae, et simul pondus vnius drachmae imposui lanci, cui aqua euaporanda imposita erat. Aequilibrium sic tollebatur: expectaui deinde, donec tantum aquae euapporaret, vt aequilibrium restitueretur; notaui iterum tempus, temperiem aquae et aëris, simulque pondus aquae euaporatae. Hoc continuaui, vti patet ex sequenti tabula.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
post o min. pr.	68	175	107	0	0.
3	68	168	100	1 drach.	1. 15 dr.
6	68	164	96	2	1, 87.
10	68	160	92	3	2 47.
15	68	155	87	4	3. 30.

post 21 min. pr.	68	149	81	5	4.42.
28	68	144	76	6	5.27.
36	68	138	70	7	6.05.
45	67	131½	64½	8	7.03.
57½	67	124	57	9	8.18.
72	67	117½	50½	10	9.33.
91	67	110	43	11	10.48.
130	67	98	31	12	12.44
152	67	93½	26½	13	13.16.
176	67	90	23	13¼	13.76.
212	67	84	17	13½	14.42.
275	67	79	12	14	15.55.
367	65	71	6	15	16.67.
446	64	68	4	15⅓	16.77
1095	63	63	0	17	17. hyp.

Barometri altitudo primis 446 minutis primis non obseruata est sensibiliter mutata.

Experim. iteratum.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
post 0 min. pr.	62	176	114	0	0
3½	62	170	108	1 dracm.	$\frac{9}{11}$ dr.
7	62¾	165½	102¾	2	1 $\frac{46}{110}$.
12	62	160	98	3	2 $\frac{6}{110}$.
17½	63	154	91	4	3 $\frac{72}{110}$.
23½	64	148	84	5	4 $\frac{6}{110}$.
30½	64	143	79	6	4 $\frac{81}{110}$
39½	64	136¼	72¼	7	5 $\frac{75}{110}$
52	64	128	64	8	6 $\frac{84}{110}$

post

post 66½ min. pr.	63	120	57	9	7 89/110.
88½	63	112¼	49¼	10	8 72/110.
119½	63	101½	38½	11	10 50/110.
172	63	90	27	12	11 84/110.
283½	62¾	75	11¼	13	13 87/110.
630	57	61¼	4¼	15	15 hyp.

Barometri altitudo non mutabatur tempore experimenti.

EXPERIMENTVM DENVO ITERATVM.

Vas aliud cylindricum diametri trium digitorum adhibui, quod capiebat libram vnam et dimidiam et eadem obseruaui, quae in experimentis praecedentibus.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
post 0. min. pr.	58	166	108	0	0
1.	58	162	104	30 grana	23 gr.
2½	59	158	99	60	52.
4½	59	154	95	90	75.
7	60	150	90	120	104.
9	60	146	86	150	127.
11½	60	142½	82½	180	147.
15	61	137½	76½	210	181.
18½	61	133	72	240	208.
23	61	128	67	270	236.
29	61	123	62	300	265.
36	61	116	55	330	306.
43	61	112	51	360	328.
53	61	106	45	390	368.
64	61	100	39	420	390.
81	61	93	32	450	430.

post 104	62	86	24	480 grana	475.
176	62	$73\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{2}$	540	546.
316	62	64	2	600	600.
396	62	62	0	620	611.

Barometri altitudo parum mutabatur tempore experimenti dimidiam lineam decrescebat.

EXPERIMENTUM ITERATUM TERTIO.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
post 0	67	177	110	0	0
5	67	156	88	8 semidr.	$11\frac{44}{110}$ s.dr.
10	67	147	80	14	$15\frac{6}{11}$
12	67	144	78	16	$16\frac{6}{11}$
$22\frac{1}{2}$	65	132	67	24	$22\frac{3}{11}$
$26\frac{1}{2}$	65	$127\frac{1}{2}$	$62\frac{1}{2}$	26	$24\frac{6}{11}$
30	65	124	59	28	$26\frac{4}{11}$.
35	65	$121\frac{1}{2}$	$56\frac{1}{2}$	30	$27\frac{7}{11}$.
$39\frac{1}{2}$	66	118	52	32	$30\frac{6}{11}$.
44	67	113	46	34	33.
51	68	109	41	36	$35\frac{8}{11}$.
60	69	105	36	38	$38\frac{38}{110}$.
70	69	101	32	40	$40\frac{46}{110}$.
84	$68\frac{1}{2}$	$95\frac{1}{4}$	$26\frac{1}{4}$	42	$43\frac{58}{110}$.
98	69	$90\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{2}$	44	$45\frac{94}{110}$.
117	66	85	19	46	47.
158	65	78	13	49	$50\frac{59}{110}$.
179	64	74	10	51	$51\frac{96}{110}$.
224	64	68	4	53	$54\frac{123}{110}$.
332	$63\frac{3}{4}$	64	$\frac{1}{4}$	55	$56\frac{95}{110}$.
380	64	64	0	57	57 hyp.

Ba-

Barometri altitudo non mutabatur tempore experimenti.

§. 7. Circa haec experimenta notandum

a) Initio, vbi euaporatio est celerrima propter celeriorem aëris motum cum euaporatione coniunctum bilancem oscillare, vt non appareat, quando aequilibrium restituatur.

b) Aëris temperiem non manere constantem neque aequaliter tranquillum, quod tamen requiritur, si calculus allatus locum habere debet. Hinc forte nec differentiae inter temperiem aquae et aëris sese logisticae accommodant exacte. Primo incommodo imposterum obuiam ire tentabo machina quadam euaporationi destinata. Secundum incommodum difficulter tollitur. Apparet tamen, etiam haec experimenta, quae attuli, legem euaporationis allatam probabilem reddere, et nisi parietes vasorum densiores et corpora contingentia densiora e. g. lanx diutius retinuissent calorem aqua, decrementa etiam caloris se propius accommodasse logarithmicae, vti ex experimentis, quae de decremento caloris communicaui, satis videre licuit. Cum tandem post euaporationem, per interuallum temporis factam superficies totius massae euaporandae mutetur et minor fiat et massa ipsa etiam minuatur, decrementaque caloris in temporibus paruis aequalibus sint in ratione composita ex directa differentiarum temperierum aquae et aëris et superficierum, simulque inuersa voluminum, vt in diss. de inquisitione decrementi caloris ostendi, et horum ratio in calculo non habita sit, cogitare licet, si talem apparatum adhibere licuisset, vt horum omnium rationem in calculo habere potuissem, etiam calculum ipsum experimentis exactius respondisse.

MEDITATIONES
DE
CALORIS ET FRIGORIS
CAVSA,

AVCTORE
Michaele Lomonosow.

§. 1.

Calorem (*) motu excitari notissimum est: manus per mutuam frictionem calescunt, ligna flammam concipiunt, silice ad chalybem alliso scintillae prosiliunt, ferrum crebris et validis ictibus malleatum excandescit; quibus cessantibus calor diminuitur et productus ignis tandem extinguitur. Porro calore concepto, corpora vel in partes insensibiles resoluta per aërem dissipantur, vel in cineres fatiscunt, aut debilitata partium cohaesione liquescunt. Denique corporum generatio, vita, vegetatio, fermentatio, putrefactio, calore promouentur, frigore retardantur. Ex quibus omnibus euidentissime patet, *rationem sufficientem caloris in motu esse positam*. Quoniam autem motus sine materia fieri non potest, necessum igitur est, *vt ratio sufficiens caloris consistat in motu alicuius materiae.*

§. 2. Quamuis autem in corporibus calidis plerumque nullus motus visu percipiatur, tamen per effectus saepius se manifestat. Ita ferrum ad ignitionem prope cale-

(*) quo nomine et vim eius intensiorem, ignem vulgo dictum, intelligimus.

calefactum, licet ad oculum quiescere videatur, corpora tamen sibi admota alia fundit, alia in vapores resoluit, hoc est, partibus eorum in motum excitatis, sibi quoque motum alicuius materiae inesse ostendit. Equidem non ibi motus adeo negandus est, vbi nullus in oculos incurrit: quis enim negabit vento impetuoso syluam perflante, folia arborum et ramos agitari, licet e longinquo spectans nullum motum visu assequeretur? Quemadmodum vero hic ob distantiam, sic in corporibus calidis, ob tenuitatem particularum motae materiae, agitatio visum effugit: in vtroque enim casu angulus visionis tam acutus est, vt neque ipsae particulae sub eo constitutae, neque motus earum videri possit. Sed neminem nisi qualitatum occultarum patronum aliquem fore arbitramur, qui calorem, tot mutationum instrumentum, otiosae cuidam et omni motu, adeoque et vi mouendi destitutae materiae tribuat.

§. 3. Quoniam vero corpora duplici motu agitari possunt, *totali*, quo, quiescentibus iuxta se inuicem partibus, totum corpus mutare continuo suum locum, vel *intestino*, qui in mutatione situs insensibilium partium materiae concipitur; et quia totali saepius pernicissimo nullus, et nullo magnus calor obseruatur; patet ergo *calorem consistere in motu materiae intestino.*

§. 4. Materia in corporibus duplex est, *cohaerens*, nempe quae cum toto corpore mouetur et impetum facit, atque fluminis instar poros illius *interlabens*. Quaeritur itaque, quaenam earum in motu constituta calorem gignat. Huic quaestioni vt satisfiat, excutienda sunt palmaria phae-

nomena

nomena, quae circa corpora calida obſeruantur. Ea vero conſideranti occurrit, 1) calorem in corporibus eo maiorem exiſtere, quo cohaerens eorum materia eſt denſior, et contra. Ita laxior ſtupa flammam concipit magnam quidem, ſed aeſtu multo minore praeditam, quam, vbi illa ſtrictius compacta incenditur. Stramine, quod in mitem flammam alias expandi ſolet, fertilium Ruſſiae camporum, ſyluis carentium, incolae lignorum inſtar vtuntur, indenſos et craſſos rudentes contorto; ligna poroſiora leniore aeſtu ardent, quam quae ſolidiora ſunt, et carbones foſſiles lapideam materiam poris ſuis continentes validius vrunt, quam carbones lignorum vacuis interſtitiis ſpongioſi. Denique aer inferioris atmoſphaerae denſior aura ſuperioris, maiore, quae ambit, afficit tepore, quam illa, vt calidiſſimae valles montibus aeternam glaciem ſuſtinentibus cinctae loquuntur. 2) Conſtat corpora denſiora ſub eodem volumine plus materiae cohaerentis continere, quam interlabentis. Quoniam autem ex legibus mechanicis notum eſt, quantitatem motus eo maiorem eſſe, quo copioſior eſt materia mota, et contra; itaque ſi caloris ratio ſufficiens poſita eſſet in motu inteſtino materiae interlabentis, corpora rariora, ob maiorem copiam in poris eorum materiae interlabentis, maioris caloris capacia eſſent, quam quae denſiora ſunt. Verum quoniam contra quantitas caloris reſpondet potius materiae corporum cohaerentis; Patet igitur *caloris rationem ſufficientem contineri in motu corporum inteſtino materiae cohaerentis.*

§. 5. Confirmatur haec veritas actione coeleſtis illius ignis, cauſticarum ope machinarum corporibus impreſſi,

qui

qui remoto foco, eo diutius in illis viuit, quo magis sunt solida, ita vt in rarissimo illorum aëre nullum sensibile tempusculum duret. Accedit insuper, quod pro diuersa corporum grauitate atque duricie diuersus deprehendatur, ita vt eius intensionem ponderi corporis cum ratione cohaesionis partium illius conspiranti proportionalem esse experientia edocuerit, manifesto indicio, cohaerentem materiam corporum materiam caloris eorum esse. Quamuis autem materia cohaerens duplex sit, propria, ex qua corpus constat, et peregrina, quae in spatiolis a propria materia vacuis hospitatur; verum tamen quoniam vtraque cum ipso corpore mouetur, et in vnam massam coaluit, fieri profecto non potest, quin propria in motum calorificum exagitata, eodem simul moueatur peregrina, et vice versa: quemadmodum spongia calida frigidiorem aquam in poros receptam calefacit, et vicissim, calidior aqua frigidiorem spongiam.

§. 6. Motum intestinum triplici ratione fieri posse concipimus; nimirum 1) si particulae corporis insensibiles locum continuo mutant, vel 2) in eodem loco persistendo continuo gyrantur, aut denique 3) per insensibile spatiolum insensibili tempusculo vltro citroque continuo agitantur. Primum genus *progressiui*, alterum *tremuli*, tertium *gyratorii* motus intestini nomine salutamus. Rursum itaque ratio reddenda est, a quonam istorum motuum calor proficiscatur. Quod vt appareat, principiorum loco sequentia ponenda sunt. 1) *Eum motum intestinum caloris causam non esse, siquem in quibusdam corporibus calidis nullum esse fuerit demonstratum.* 2) *Nec eum* *motum intestinum causam caloris existere, quo praeditum est corpus minus calidum, quam aliud, quod eodem motu caret.*

§. 7. Corporum liquidorum particulae tam leui nexu inter se cohaerent, vt diffluant, nisi duro aliquo corpore cohibeantur, atque nulla fere vi externa opus sit ad tollendam earum cohaesionem, sed sponte sua diuelli, a se inuicem recedere atque motu progressiuo moueri possint. Vnde fit, quod nulla signa durabilia liquoribus imprimi queant, sed omnia momento obliterentur. An progressiuus intestinus motus in omni corpore liquido, etiam gradu caloris vitalis frigidiore, actu fiat, nec ne, non hic disquirimus, cum proposito nostro satisfactum iri non dubitemus, si ostenderimus dari casus frequentissimos, in quibus ille clarissime patet. Id circo solutiones salium in aqua primo in medium producimus. Fit enim lege constanti, vt aqua ad sensum quieta manui sensibile frigus imprimens salem marinum, nitrum, salemue Ammoniacum in medio fundo vasis positum soluens, eum quaqua versus distrahat per totum sui volumen. Quod cum fieri alias nequeat nisi aqueae particulae abreptas salinas moleculas a frusto salis remoueant; satis ergo elucet aqueas particulas ipsas motu progressiuo ferri, vbi salem aliquem dissoluunt. Idem contingere in argento viuo, cum metalla corrodit et particulas eorum distrahit, in spiritu vini, cum tincturas ex vegetabilibus elicit, nemo ibit inficias.

§. 8. Contra autem particulae corporum solidorum praesertim duriorum inorganicorum tam arcto nexu vinctae deprehenduntur, vt vi externa eas diuidenti admodum resistant: quamobrem fieri non potest, vt sponte sua

sua rupto cohaesionis vinculo a se inuicem recedant et motu intestino progressiuo ferantur. Vnde fit, quod etiam subtilissima signa illis incisa per secula durent, nec nisi continuo vsu aut aeris iniuria, aut denique corpore ipsis in statum fluiditatis reducto obliterentur. Magnum ex argento fabrefactorum indicium quod superficiei vtensilium adhaeret, nec nisi frequenti vsu diminuitur. Contra vero momento temporis superficiem relinquit et per totam argenti massam distrahitur, quam primum res ex eo facta et de aurata igne funditur. Haec omnia manifesto indicant particulas corporum solidorum praesertim duriorum et inorganicorum motu progressiuo haud moueri.

§. 9. His ita comparatis, consideremus primo vas aliquod argenteum, seu aliam rem ex eiusmodi metallo fabrefactam, auro obductam et subtilissimis signis incisis caelatam, ad eum gradum calefactam, in quo aqua ebullire solet. Videbimus aurum in superficie inconcussum, signa nec minimum immutata, ipsam duriciem corporis eandem persistere, eaque separationem insensibilium particularum prorsus excludi. Hoc autem clarissime ostenditur corpus posse esse magnopere calidum, sine motu intestino progressiuo. Secundo conferemus durissimum aliquem lapidem, ex gr. adamantem, qui ad gradum liquefacti plumbi calefactus est, (quod saepius sine damno et vlla mutatione gemmae, artifices eum polituri facere solent) cum aqua vtcunque frigida salem soluente, eoque ipso frigidiore facta, vel cum Mercurio argentum corrodente; priorem inueniemus sine motu intestino progressiuo calidissimum,

 poste-

posteriorem eodem motu agitari, calorem tamen adeo exiguum in se prodere, euidentissime que ostendere, saepius fieri, vt corpora motu progressiuo intestino praedita multo minus calida sint iis, quae eodem motu destituuntur. Ex his autem vi principiorum superius (§. 6.) allatorum sequitur *motum materiae coh*[illegible] *[illegible]um* [illegible]

§. 10. Ex definitione motus intestini tremuli (§. 6.) clare perspicitur, illo corporis partes agitante, ipsas cohaerere non posse. Quamuis enim distantiae, quibus subtilissimae vibrationes absoluuntur, sint maxime exiguae, fieri tamen non potest, quin particulae a mutuo contactu recedant, et plerumque extra illum versentur. Ad sensibilem cohaesionem portium corporis requiritur non interruptus earundem mutuus contactus; corporis ergo partes nulla cohaesione sensibili vinciri possunt, si illae tremulo intestino motu concutiuntur. Verum quoniam pleraque corpora ad ignitionem vsque vstulata fortissimam partium cohaesionem conseruant; id circo patet *calorem corporum a motu intestino tremulo materiae cohaerentis haud proficisci.* (§. 6.)

§. 11. Remotis igitur progressiuo et tremulo intestinis motibus, necessario sequitur *calorem consistere in motu intestino gyratorio* (§. 6.) *materiae cohaerentis* (§. 4.) necesse enim est vt cuidam ex tribus tribuatur.

§. 12. Quaeri autem hic potest, vtrum particulae corporum solidorum durante firma cohaesione mutua iuxta se inuicem gyrari possint. Huic quaestioni vt satisfiat, sufficit in mentem reuocare duo marmora politis super-

superficiebus in contactu posita iuxta se inuicem facile moveri, fortissima cohaesione, qua vinciuntur, nihil obstante; item vitra lenticularia vbi poliuntur, formae celerrime in gyrum agitatae [illegible], vt ea secundum lineam plano contactus perpendicularem sine damno removeri nequeant. His consideratis clarissime concipi potest, particulas corporum minutissimas iuxta se inuicem, cohaesione haud obstante, gyrari posse, eo facilius, quo plana contactus ad superficies integras fuerint in ratione minore. Ceterum fluidorum particulas, cum plerumque motu intestino progressiuo moueantur, cohaesione nil morante, etiam in gyrum agi posse, salua eadem, aperte patet.

§. 13. Ex hac nostra theoria sequentia corollaria deducuntur. 1) Ad motum nostrum calorificum nulla corpuscula materiae sphaericis esse aptiora, cum non nisi in puncto vnico se mutuo contingere possint, et frictionem vix aliquam in se inuicem exercere. 2) Cum omnis motus prout quantitas intendi et remitti possit, idem ergo de calorifico motu est sentiendum. Quo autem motus est maior, eo effectus validior esse debet; vnde crescente motu calorifico, hoc est, actis celerius in gyrum particulis materiae cohaerentis, calorem intendi, decrescente remitti necesse est. 3) Corporum calidorum particulas celerius gyrari, frigidorum tardius. 4) Corpora calida contactu frigidorum refrigerari, retardato per illum motu calorifico, et contra frigida calefieri, eodem per contactum accelerato. 5) Quando itaque manus calorem sentit in aliquo corpore, particulae materiae cohaerentis manus in celeriorem motum gyratorium excitantur; sin vero sensu frigidioris materiae afficitur, gyratorius illarum motus retardatur. §. 14.

dente incedens eam fricat; ingruente vero frequentiore ictuum impetu, frictio inter exagitatas ferreae massae partes multiplicatur, motus que gyratorius particularum ferri vsque adeo increscit, vt illud aliquando ad rubedinem ignescat. Non aliter fit, quando bacillus quicunque metallicus, non elasticus praesertim, reciprocis inflexionibus multoties incuruatur: etenim in latere eius conuexo partes massae secundum directiones contrarias distrahuntur, iuxta se inuicem superincessu radente serpunt, fricantur, gyrantur, et curuatura bacilli incalescit.

Phaenom. 6.

§. 18. Si corpus magis calidum A est in contactu cum alio corpore B, quod est minus calidum, particulae corporis A in contactu constitutae, quoniam celerius gyrantur, quam particulae corporis B illis contiguae (§. 13) celeriore igitur rotatione accelerant motum gyratorium particularum corporis B, scilicet partem motus sui illis communicant; adeoque tantum his decedit quantum accedit illis: hoc est quando particulae corporis A motum gyratorium particularum corporis B accelerant, suum tardiorem reddunt. Hinc fit, vt corpus A per contactum calefaciens corpus B ipsum refrigeretur.

Phaenom. 7.

§. 19. Ceterum particulae corporis B in superficie contactus motae contingunt alias particulas eiusdem corporis a superficie contactus remotiores, quae motu suo per mutuam frictionem cum anterioribus accelerato etiam alias sibi vicinas in gyrum agunt, et sic motus intestinus gyratorius a superficie contactus vsque ad superficiem oppositam successiue propagatur. Contra vero particulae corporis A in plano contactus constitutae quoniam in motu tu ſuo retardantur, (§. 18.) ideoque alias ſibi contiguas, hae vero alias atque alias ſucceſſiue vſque ad ſuperficiem contactui oppoſitam praepediunt. Hinc perſpicitur, vnde fiat, vt corporis minus calidi, appoſiti corpori magis calido, ſuperficies in contactu conſtituta prius incaleſcat, quam auerſa, et corporis calidioris admoti corpori frigidiori contigua ſuperficies prius refrigeretur, quam eidem oppoſita.

§. 20. Si corporis minus calidi A ſuperficiebus op- phaenom. 9
poſitis admouentur duo corpora magis calida B et C, ab vtraque ſuperficie propagabitur motus inteſtinus gyratorius verſus alteram, adeoque integrum corpus A celerius occupabit, quam ſi ab vno latere profectus ad alterum pertingere opus haberet, ad moto nempe corpore alterutro B vel C; pariter ſi corpus A eſt magis calidum quam B et C, corpora vtrinque illi admota; motus gyratorius particularum eius celerius debet retardari quam ſi corpus A vno latere eſſet in contactu cum corpore minus calido B vel C. Hinc ſequitur particularum motum gyratorium eo celerius intendi vel remitti, quo maior ſuperficies exponitur corpori calidiori vel frigidiori ambienti. Quoniam autem ſuperficies corporum ſimilium ſunt in duplicata, ſoliditates vero in triplicata ratione diametrorum, rurſum igitur euidens eſt, quare corpora calida eiusdem generis, maioris voluminis in eodem medio ambiente, ex gr. aere, et eiusdem figurae tardius refrigerantur, frigida vero tardius caleſiunt, quam ſi eiusdem voluminis eſſent. phaenom. 10

§. 21. Corpora mota et quieſcentia reſiſtunt pro ratione inertiae, quam grauitati proportionalem eſſe con-

 ſtat

ſtat; particulae igitur grauiores difficilius eadem vi in motum calorificum excitantur, vel motae retardantur, quam quae leuiores ſunt. Iterum ergo perſpicuum eſt, cur corpora frigida ſpecifice grauiora in eodem medio calefaciente tardius calefiant, calida vero in eodem medio frigido tardius refrigerentur, quam ſpecifice leuiora.

phaenom. 11 §. 22. Duriorum corporum particulas fortius cohaerere quam molliorum, certum eſt. Inde vero amplioribus planis contactus easdem iungi haud incongruum videtur. Pro ratione vero planorum contactus etiam particulas ipſas craſſiores eſſe oportere probabili adeo coniectura conſequimur, hoc eſt corporum duriorum particulas eſſe mole maiores iis, quae molliora conſtituunt. Accedit, quod duriorum corporum particulae plerumque ad tactum ſint aſperae atque adeo ſenſibus craſſitudinem ſuam exerant? Quoniam autem corpora maioris voluminis, ceteris paribus, difficilius ex quiete in motum excitari, et mota retardari atque cohiberi poſſunt, quam minora; vnde craſſiores particulae duriorum corporum haud tam facile calorificum motum et recipiunt et ammittunt, quam ſubtiliores molliorum. Non abſcure igitur hinc colligi poteſt ratio, cur duriora corpora ad calorem concipiendum et amittendum ſunt tardiora, quam illa, quae molliora ſunt.

phaenom. 12 §. 23. Particulae corporum calidorum quoniam gyrantur, rationi itaque conſentaneum eſt, eas motis ſuperficiebus ſuis in ſe inuicem agere, adeoque vnamquamque ab alia ſibi vicina pelli, eo fortius, quo motus gyratorius eſt pernicior. Huic repulſioni quoniam contraria eſt cohaeſio particularum, id circo vna earum alteri derogat

derogat, atque adeo crescente motu gyratorio cohaesionem particularum minui oportet. Vnde minime mirum est vi caloris solidorum etiam corporum duritiem debilitari, imo ita infringi, vt prorsus tollatur particularum cohaesio, quorum prius in liquefactis, posterius in resolutis in vapores experimur.

§. 24. Hinc sequitur 1) liquiditatis et fluiditatis corporum caussam esse motum particularum gyratorium, cuius vis repulsiua sufficit ad illarum cohaesionem eousque infringendam, donec vel libere iuxta se inuicem labi et diffluere possint, vel sublato prorsus earum nexu per auras dissipari. 2) Euaporationum et exhalationum caussam plerumque in eo consistere, vt pro vario aeris statu, varia vi concurrente calorifico, eoque centrifugo simul motu, particulae corporum auulsae dissipentur. 3) Corpora fluida et liquida semper calorem in se, licet minimum, habere, quantumuis frigida appareant.

§. 25. Corpus A agens in corpus B maiorem celeritatem motus illi imprimere non potest, quam habet ipsum. Si igitur corpus B fuerit frigidum et immersum corpori fluido calido A; particularum corporis A motus calorificus excitabit in motum calorificum particulas corporis B; verum in particulis corporis B celerior motus excitari non poterit, quam qui est in particulis corporis A; atque adeo corpus frigidum B immersum corpori A maiorem calorem, quam A habet, concipere non posse patet. Hinc autem perspicitur ratio ob quam stannei vasis, aqua pleni, fundum validae adeo flammae, qua alias hoc metallum facile funditur, resistere solet. phaenom. 13 phaenom. 14

Etenim quamuis flamma particulas ſtanni in celerrimum motum ſollicitet, aqua tamen ſuperincumbens, cum eam celeritatem motus calorifici acquirere non poſſit, qua ſtanneae particulae indigent ad ſuam cohaeſionem infringendam, retardat ergo earum motum gyratorium, nec fundi metallum permittit.

§. 26. Reddenda hic videtur eſſe etiam ratio extenſionis corporum, quae plerumque cum calore eorum augeri et minui ſolent. Verum quoniam ea non a calore immediate, ſed ab aëre elaſtico poris corporum incluſo proficiſcitur; ad aliam ergo occaſionem huius phaenomeni expoſitionem reſeruamus. Ceterum nulla motus celeritas tam pernix aſſignari poteſt, qua alia maior mente non concipiatur. Quod cum etiam ad calorificum motum iure referri poſſit; caloris ergo ſummus et vltimus gradus poſſibilis reſpectu motus non eſt. Contra vero idem motus eouſque diminui poteſt, vt tandem corpus prorſus quieſcat, nec vlla motus diminutio vlterius ſubſequi poſſit. Summum igitur gradum et vltimum frigoris in abſoluta quiete a motu gyratorio particularum conſiſtere et dari poſſe neceſſe eſt.

§. 27. Quamuis autem ſummus frigoris gradus ſit poſſibilis, verum documenta non deſunt, quibus aſſeritur, illum in hoc orbe terraqueo haud vſpiam dari. Etenim omne, quod nobis frigidum apparet, eſt ſolummodo minus calidum, quam organa noſtra, quibus ſentimus. Ita frigidiſſima aqua eſt adhuc calida, cum glacies, in quam aqua acutiore gelu conſtringitur, ſit illa frigidior, hoc eſt minus calida. Profecto ſi cera, quae liqueſcit, ſit vere calida

lida, cur igitur aqua, quae nobis frigidissima apparet, revera calida non sit, cum nil aliud sit quam glacies liquefacta. Nec tamen putandum est congelationem corporum summi frigoris esse criterium: etenim metalla statim post liquefactionem consolidata sunt etiam glacies sui generis, sunt tamen ita calida, vt corpora cambustilia sibi admota accendant. Ceterum dantur corpora fluida, quae nullo gradu frigoris cognito congelantur. Quorum fluiditas quoniam a motu calorifico proficiscitur (§. 24.) patet igitur fluida illa corpora calore, quantuscunque ille sit, semper gaudere. Porro corpora eundem gradum caloris habere solent, quo praeditum est medium, in quo illa tempus notabile versantur. Cum vero aer semper et vbique fluidus obseruatur; adeoque calidus (per demonstrata) existit, omnia ergo corpora, quae ambit atmosphaera telluris, sunt calida, licet sensibus frigida appareant; adeoque summus gradus frigoris in globo nostro terraqueo non datur.

§. 28. Cum itaque motum intestinum gyratorium materiae cohaerentis caussam caloris esse a priori demonstratum et a posteriori confirmatum habeamus; ad mentem, quam moderni philosophi plerique de calore habent, examinandam conuertimur. Tribuitur hac nostra tempestate caloris caussa peculiari cuidam materiae, quam plerique calorificam, quidam aetheream, non nulli etiam ignem elementarem appellant. Eo autem maior quantitas eius in quocunque corpore adesse dicitur, quo maior in eo calor obseruatur, ita vt pro diuerso gradu caloris eiusdem corporis etiam quantitas materiae calorifi-

 cae

cae in illo augeatur minuaturue. Et licet aliquando intensitate motus huiusce materiae corpus ingressae calorem in eo augeri doceatur, maxime tamen ingressus et decessus illius in diuersa quantitate pro genuina causa aucti vel diminuti caloris celebratur. Quae opinio cum in multorum mentibus tam altas egit radices, tantumque invaluit, vt passim in Physicorum scriptis legas, memoratam superius materiam quasi phyltro quodam amatorio allectam in corporum poros irruere, aut contra horrore quasi exagitatam ex poris erumpere; quamobrem muneris nostri esse ducimus hanc hypothesim ad examen reuocare. Praesentim autem fontes ipsi lustrandi sunt, ex quibus haec opinio promonauit. Eorum autem praecipui sunt quatuor, quos equidem ad alia potius naturae phaenomena diluenda deriuari oporteret.

§. 29. Post quam calescentium corporum phaenomena attentius considerare coeperunt philosophi, facile animaduerterunt, crescente calore, etiam volumen corporis cuiusque augeri. Et cum nihil praeter calorem illis accessisse certo scirent, atque elementaris antiquorum ignis animis adhuc inhaereret; concludere inde non dubitarunt, materiam aliquam igni propriam, poros corporum, cum incalescunt, intrare, eaque distendere; qua decedente eadem refrigerari, contrahi. Lubenter equidem his assensum praeberemus, si quam facile sit haec supponere, tam pronum quoque esset ostendere id, quo calorifica materia in corpora subito incalescentia compellatur. Qui enim fit, quaeso, vt hyeme frigidissimo gelu late omnia occupante, aut

aut in gelidissimo fundo maris (*) adeoque iuxta hanc hypothesim, calorifica materia fere prorsus deficiente, puluis pyrius exigua scintilla, repente nata, accensus stupenda flamma subito expandatur? Vnde et qua tam mirabili virtute ignea illa materia momento temporis contrahitur? Verum tamen conuolet ea ocyssime, quacunque de causa id fiat, ex remotissimis etiam locis et puluerem pyrium accendat, expandat? Sed tum necessum erit, aut alia corpora illum ambientia aduolante igne prius quam ipsum calefieri et expandi, aut ignem illum aduolantem extra puluerem nec calefacere nec expandere aliquid, adeoque naturae suae obliuisci fatendum erit, quorum tamen prius experientiae, posterius sanae rationi apertissime repugnat.

§. 30. Ceterum rerum natura ita comparata est, vt causa crescente, etiam effectus eius augeatur, et contra eadem decrescente effectus quoque minuatur. Quamobrem vbi in duobus corporibus idem gradus caloris obseruatur, tum, ceteris paribus, etiam idem extensionis incrementum aut decrementum in vtroque esse debet. At quanta in hoc diuersitas deprehenditur! Praetereo aerem, qui a gradu congelationis ad ebullitionem aquae tertia sui parte extenditur, cum ea interim vna vigesima sexta parte totius voluminis augeatur. Ipsa eiusdem fere liquiditatis corpora, vt Mercurius, aqua, spiritus vini, et olea diuersa, item et solida, vt metalla, vitrum etc. mirum quantum discriminis habent inter extensionis incrementa in eodem gradu caloris acquisita. Ne hic tamen maiorem par-

(*) Boerhaaue Elem. Chym. par. 2. ex Sinclairi ante grauitatis p. 302.

partium cohaesionem expansionis impedimento esse quis putet: quippe chalybem fortiore partium cohaesione gaudere quam ferrum nemo est qui ignorat, maiora tamen incrementa extensionis capere, ferrum autem minora experientia docuit. Sic et aurichalcum, corpus cupro durius, eodem calore magis quam id expanditur. Nec etiam aliqua retardatio incalescentiae a maiore pondere profecta, aut quaecunque alia circumstantia, quae in diversis corporibus expansionis impedimento foret, fingi potest, quin exempla contraria occurant, quae ficta destruant, quam diu expansio calefactorum ingredienti materiae tribuitur. Sed haec in diuersis. At vnum idemque corpus aliquando crescente calore in minus spatium contrahitur, eg. aqua ex glacie nata est specifice grauior illa, vt etiam ad insignem gradum calefacta eandem fundum petere prohibeat. Sic ferrum et pleraque alia corpora, quamdiu dura sunt, iisdem ipsis liquefactis ob maius volumen innatant, quamuis eum gradum caloris non dum habeant, quo liquescere solent. Ex his autem omnibus clarissime apparet, expansione incalescentium contractioneque eorum, quae refrigerantur, calorificae materiae miram illam peregrinationem minime probari.

§. 31. Sed hunc pugilem propria sua extensionis vastitate iam labefactum alius forte qui succedit, eriget, et maiore grauitate nos opprimet. Nempe non molis modo, sed etiam ponderis incremento vagabundus ille ignis praesentiam suam in corporibus demonstrare Philosophis videtur, praesertim Chymicis. Celeberrimus Robertus

tus Boyle primus, ni fallor, experimentis docuit corpora per calcinationem pondere augeri (*) adeoque ignis et flammae partes stabiles et ponderabiles reddi posse. Quod si de igne aliquo elementari intelligi posset, firmum haberet infirmanda hic opinio propugnaculum. Verum tamen pleraque fere omnia experimenta illius, circa augmentum ponderis per ignem instituta, huc redeunt, vt vel flammae, qua corpora vstulauit, aut aeris, calcinationis tempore super corpus calcinandum fluentis, partes graues esse iis demonstretur. Etenim vbi lamina metallica flamma sulphuris accensi vstulatur, intumescit quidem et pondere augetur; nihil aliud tamen aucti ponderis causa est, praeter acidum sulphuris, quod a phlogisto liberari et campana colligi et capi solet, tum poros cupri et argenti penetrat, illisque concretum, pondus auget. Sic vbi plumbum in minium calcinatur, flammam atram et fuligine turgidam in liquefactum metallum consulto dirigunt artifices: haec enim sola plumbi calcem rutilo illo colore ornat, et pondus eius cum lucro artificum auget. Reliqua laudati auctoris experimenta in mantissa opusculo subiuncta maioris quidem momenti esse videntur, verum omni suspicione prorsus libera non sunt, cum auctor ipse illis praesto non adfuerit, verum operatori cuidam saepius peragenda remiserit. At esto, quod praeter partes corporis accensi vel particulas in aere circumuolitantes, qui super calcinata continuo fluit, accedat metallis calcinatione durante quaedam alia materia, quae pondus calcium auget. Quoniam autem calces ab igne re-

 mo-

(*) Intractatu de ponderabilitate ignis et flammae.

motae acquisitum pondus etiam frigidissimo gelu continuo seruant, nullum tamen excessum caloris in se ostendunt; accedit igitur calcinationis actu materia quaedam corporibus, verum non illa, quae igni propria esse praedicatur. Cur enim ea in calcibus naturae suae obliuisceretur, non video. Porro calces metallorum in formam metallicam reductae pondus acquisitum amittunt. Cum vero reductio aeque ac calcinatio eodem imo fortiore igne perficiatur, nulla profecto ratio reddi potest, cur idem ignis modo corporibus semet insinuet, modo ex iisdem excutiatur. Ceterum non absimilia experimenta instituerunt viri celebres Boerhaauius (*) et du Clos (**) quae contrarium tueri videntur. Prior enim ferri libras quinque et vncias octo, vt ante ignitionem ita quoque ignitum et extinctum ponderauit, sed nullum ponderis incrementum decrementumue deprehendit. Posterior ponderis augmentum, quod mineralibus per calcinationem accedit, deducit a partibus sulphureis, aeri (vt supra diximus) innatantibus, qui super mineralia ad calcinandum exposita continuo fluit, et illas igne ita resolutis insinuat; id autem experimento demonstrat: nimirum quod ex regulo antimonii in aere libero calcinato ope spiritus vini tincturam rubram extrahi obseruauit; qua separata, massam relinqui eius ponderis, quod regulus habebat ante calcinationem. 2) Regulum antimonii aliter, nempe sine augmento ponderis, calcinatum eiusmodi tincturam non suppeditare. Firma igitur non sunt etiam illa argumenta, quae ad peculiarem igni mate-

(*) Elem. Chim. Par. 2. de igne exper. 20.
(**) Memoires de l'Acad. Royl. des Sciences année 1667.

materiam vindicandam ex augmento ponderis calcinatorum corporum afferuntur.

§. 32. Radii solis speculo vitreo caustico excepti et collecti non minus valide vrunt, quam viuide lucent, qua re ad oculum et quidem sole teste demonstrari creditur, calorificam materiam seu ignem elementarem a sole profectum in foco condensari, eoque splendorem et calorem intendi. Facile autem apparet supponi hic luminis materiam a sole tanquam a fonte fluminis instar diffundi. Quae hypothesis ei simillima est, ac si aerem a corpore sonoro eadem, qua sonus propagatur, celeritate quaqua versum diffundi doceretur. Nec minus euidens est ibidem aetherem et radium confundi, qui tantum inter se differunt, quantum motus et materia inter se diuersa sunt, atque adeo ex foco speculi condensationem materiae igneae remoueri et conspirationem motus calorifici substitui posse liquet. Materiam aetheris in foco vitri vel speculi caustici condensari qui affirmat, is, me iudice, non aliter sentit, ac si contenderet in foco fornicis elliptici non radios sonoros conspirare, sed materiam aeris ipsam comprimi. Ceterum focum solarem non propter maiorem densitatem materiae aethereae, sed propter motum eius calorificum urentissimum esse focus a lunari sidere reflexorum solis radiorum manifesto indicat. Is enim cum sit lucidissimus, vrentissimum quoque esse oporteret, si ille ipse et calor a densitate materiae proficisceretur. Sed abest calor; aut ergo materiae aethereae condensatio, aut conspiratio motus eius lucidum focum efficiat. Materiae condensationem excludere est pugnare contra hypothesim;

 con-

conſpirationem motus remouere eſt materiam igneam ſaepe frigidam, hoc eſt ignem non ignem eſſe, fatendum erit. Haec qui mente a praeiudiciis libera conſiderabit, nobiſcum ſentiet, aeſtu qui in foco cauſticae machinae generatur, materiam calori propriam minime demonſtrari poſſe.

§. 33. Sale culinari niui vel glaciei raſae mixto confici ſolet a Phyſicis materia, frigorifica ab effectu dicta, quod aquam ſibi in vaſe aliquo inſertam in glaciem conuertere ſoleat. Quod dum fit, nix ipſa cum ſale liqueſcit. Hinc rurſum concludi ſolet, materiam illam igneam ex aqua in niuem circumpoſitam demigrare et acceſſu illius hanc liqueſcere, illam vero ob deceſſum eiusdem in glaciem conſtringi. Eggregie quidem! Sed reſtat aliquid tentandum, priusquam palmam nobis eripi patiamur. Inſere, quaeſo, niui thermometrum ſimul cum aqua in vitro contenta, admiſce niui ſalem; videbis quidem aquam in glaciem conuerti et mixturam frigorificam deliqueſcere, ſpiritum tamen in thermometro deprimi, manifeſto indicio, eo ipſo tempore, quo aqua conglaciatur, mixturam frigorificam frigidiorem reddi, adeoque nullum ignem elementarem in eam ex aqua prorumpere; ſed potius niuem tepidioris aquae contactu prius reſolutam ſalem aggredi, ſoluere, refrigerari, maioremque gradum caloris, quam aqua in glaciem abiens habere ſolet, aquirere, inde aquam puram in vaſe cangelaſcere, ipſam vero niuem ob ſalem abſorbtum liquidam perſeuerare. Quis enim ignorat in aqua ſale impregnata aliam puram vitro incluſam ad gradum thermometri Fahrenheitiani 26 in glaciem conuenti, ſalſa liquida manente.

§. 34.

§. 34. His omnibus nil aliud contendimus, quam calorem corporum condensationi subtilis alicuius et ad illum dunctaxat destinatae materiae vindicandum non esse, sed eum consistere in motu intestino gyratorio materiae cohaerentis corporis calidi; eoque ipso non solum asserimus etiam subtilissimam illam materiam aetheris, qua omnia spatia a sensibilibus corporibus vacua replentur, eiusdem motus et caloris esse capacem; verum etiam affirmamus, illam impressum sibi a sole motum calorificum etiam telluri nostrae et reliquis corporibus mundi communicare, eaque calida reddere, atque adeo eam esse medium, quo corpora a se inuicem remota, nullo sensibili intercedente, calorem communicent.

§. 35. Remota materia calori alias enice consecrata finis verbis imponendus esset, si a parte contraria novum nobis negotium non insurgeret. Non enim desunt, qui etiam frigori specialem substantiam dicauerint, nimirum causam eius positiuam in salibus statuerint, producto per solutionem eorum in aqua frigore moti. At quoniam iidem sales etiam calorem non raro gignunt, vt sal communis affuso oleo vitrioli feruet et incalescit; id circo nos quoque pari iure caloris causam salibus ad scribere possemus, si tam incondite disputare non indignum esse putaremus.

TENTAMEN THEORIAE
DE VI AERIS ELASTICA,

AVCTORE
Michaele Lomonosow.

§. 1.

Postquam antliae pneumaticae vſus innotuit, mirum quantum ſcientia naturalis cepit incrementum, ea potiſſimum parte, quae de natura aëris doctrinam complectitur. Proprietates enim illius, quae ante ſeculum prorſus ignotae fuerant, iam hodie non ſolum cognitas habemus, verum etiam mathematicis legibus definitas et in ſummo fere faſtigio diſtinctae cognitionis conſtitutas miramur. Quamuis autem elaſtica eius vis ſaepius quam reliquae proprietates illius Phyſicorum ſcriptis celebratur, et cuilibet ſorum ſcientiae naturalis ingredienti inter palmarias rerum naturalium qualitates ſeſe offert; nihilo tamen minus cauſa illius non dum ſatis perſpecta habetur, in eaque explicanda etiam celebrium naturae ſcrutatorum ingenia caſſo molimine torſa ſunt. Vnde ſcriptores Phyſici plerunque intacta elateris cauſa in ſolis effectibus illius deſcribendis acquieſcunt. Aut ſiqui cauſas aſſignant; eae tamen et inualido pede nituntur, et phaenomenis circa elaterem aeris obſeruatis explicandis non ſufficiunt. Plerumque autem eo ipſo plane nullae ſunt, quod nihil praeter quaeſtionem ipſam, verbis duntaxat mutatis in ſe contineant.

§. 2.

§. 2. Prae omnibus vero, quae hucusque ex Physicorum scriptis nobis innotuerunt, hypothesibus, ad explicandam vim aeris elasticam formatis, plausibiliores esse videntur eae, quae legibus motuum centralium superstructae sunt. Non enim eadem quaestio variata phrasi involuta in illis pro causa ipsa affertur, aut quae proponuntur a motus regulis aliena sunt. Et nos suscepto hoc negotio actum equidem ageremus; si non quaedam ad huc desiderari, aut verius exundare in praeclaro hoc invento videremus.

§. 3. Superfluum nempe esse censemus, vt ad elateris aeris causam exponendam in auxilium vocetur eiusmodi peregrinum fluidum, qualia plerique consuetudine seculi, subtilium materiarum feracis, ducti, iusto saepius ad explicanda rerum naturalium phaenomena vsurpare solent. Ipsius enim aëris subtilitate atque agilitate contenti, in propria eius materia elateris causam quaerimus. Id autem non iniuria facere nos aestimabit, quicunque meditationes nostras de caloris causa legit, et quae sequuntur, cum iisdem conferet.

§. 4. Vt vero in suscepto hoc negotio iusto ordine progrediamur, a clara notione elateris aeris incipimus: id circo et definitionem tractationi huic praemittimus atque vim illam in conatu aeris quaqua versum sese expandendi consistere dicimus. Hinc autem concludimus particulas aëris insensibiles a se inuicem recedere, quam primum remotis obstaculis re ipsa expanditur. Vbi tandem duo consideranda veniunt, natura particularum ipsarum et vis qua a se inuicem remouentur.

§. 5.

§. 5. Particulae aëris duplici modo concipi possunt, nimirum vel singulae ita sunt comparatae, vt vi compositionis alicuius, organicaeve structurae partes suas, exquibus constructae sunt, extendere nitantur, adeoque singulae in maius et minus spacium expandi contrahique possint; aut ab omni compositione physica organicaque structura alienae, non solitariae, sed in aggregato elasticam virtutem exerceant.

§. 6. Prius praeter id, quod simplicissimo naturae ingenio sit maxime incongruum, etiam pelluciditatem et inconcissam aeris durabilitatem tollere videtur. In compositis enim et organicis dari debent partes, quae vi caloris, ad excitandum maiorem elaterem, magis magisque exagitentur. Vnde cum aer calore solis rarescit, fiat necesse est, vt radii illius quamlibet particulam penetrent. Quibus quoniam ex fluido aethereo ambiente (vel si mauis ex vacuo) in solidas particulas, quae in illo subsident, adeoque specifice grauiores sunt, infinities transeundum erit; id circo fieri id nequit, nisi in qualibet particula aeris in ingressu et egressu refractionem patiantur. Et quamuis in particulis eiusmodi refractio forte fiat infinite parua; a superficie tamen atmosphaerae ad tellurem vsque ipsam in particulis numero infinitis refracta lux ita foret debilitata, vt nos sempiterna in nocte versari oporteret. Id autem simili exemplo confirmatur: particulae enim seu moleculae aquae ex atomis eius aggregatae, quae nubes constituunt, etiamsi leuiter admodum lucem singulae refringunt, et in spatio non nimis magno pelluciditati aëris non officiunt; densius tamen et altius congestae piceo colore coelum obducunt, et lucis meridianae vsum fere omnem aliquando prohibere solent.

§. 7.

§. 7. Denique vbi tantas aeris viciſſitudines, rapidiſſimos motus, perniciſſimas colliſiones et fortiſſimas frictiones cum corporibus duriſſimis, premente integra atmoſphaera conſideramus, et Roberuallii experimentum, qui per 15 annos aerem valide compreſſum detinuit et tandem elaterem eius illibatum inuenit, in mentem reuocamus; tum ſingulas particulas aëris, tam ſubtiles, organicas aut compoſitas eſſe et multis partibus ſtupendae exilitatis, ſumme mobilibus indeque leuiſſime inter ſe connexis conſtare, ne concipere quidem poſſumus. Id circo quod §. 5 poſterius eſt, amplectimur, nullique dubitamus *particulas aeris*, nempe eas, *quae in exercendo elatere a ſe inuicem recedere nituntur*, *ab omni compoſitione Phyſica*, *atque organica ſtructura liberas*, *et*, vt tantis viciſſitudinibus ferendis, ſtupendis que effectibus producendis pares ſint, *ſolidiſſimas atque nulli inflexioni obnoxias eſſe*; adeoque iure *atomos* vocari debere. Quae quoniam in res corporeas naturaliter agunt, ipſae etiam ſint corporae atque *extenſae*, neceſſe eſt.

§. 8. Quod ad figuram atomorum aeris ſpectat, nullam equidem aliam agilitati, firmitati, ſimplicitati atque molliſſimae aeris naturae magis conuenire poſſe cenſemus, quam quae ad ſphaericam proxime accedit; idque ex reflexione aeris in fornicibus ellipticis obſeruata non obſcure colligimus. Quoniam autem calidus aer frigida, quae ambit corpora calefacit; atomi ergo illius particulas corporum contiguorum in gyratorium (qui calorem efficit (*)) motum excitant. Hoc tamen fieri non poteſt,

(*) vide meditationes noſtras de cauſa caloris.

quin oriatur inter illas frictio; oriri vero frictio non potest, *nisi atomi aereae sint asperae.*

§. 9. Hoc autem rerum naturae maxime consentaneum est. Quippe in omnibus corporibus mundi totalibus atque partialibus, ea figura, quam quodlibet peculiarem sibi habet, nuspiam tam adaequata reperitur*, quin inaequalitates aliquas in se prodat. Quae quidem ita adsunt, vt ipsa figura, ob pusillam rationem illarum ad totum, seruet suam speciem. Quemadmodum itaque natura telluris nostrae globum montibus, et corpora illius partialia, etiam quo ad sensum laeuissima, et si cum illa comparentur, perpusilla, ad vsus suos inaequalitatibus aspera esse voluit; ita quoque aereas atomos, licet ab omni compositione physica alienas, industria eiusdem naturae, in simplicitate quoque sua callidae, prominentiis subtilissimis firmissimisque ad effectus vtilissimos instructas esse ex analogia colligitur.

§. 10. Remouentur autem atomi aeris elaterem exercentes a se inuicem vel immediata quadam reciproca actione, aut mediante aliquo fluido inter illas diuersante, adeoque multo subtilioribus particulis constante. Vtrum horum in elatere producendo locum habeat, disquirendum nobis incumbit. Ad hoc autem inseruiet nobis proprietatum virtutis elasticae primaria: scilicet, quod aër eo maiore vi elastica gaudeat, quo magis vi externa condensatur, quoque propius atomi eius ad se inuicem accedunt.

§. 11. Ponamus vero primum particulas aeris dispergi actione alicuius fluidi subtilissimi inter illas hospitantis. Quando igitur aer inuase aliquo solido in minus spatium vrgetur, flui-

fluidum illud ipsum simul comprimitur aut non comprimitur. Si prius, erunt 1) latera vasis solidi subtilissimo illi fluido imperuia, adeoque particulae eius debebunt esse vix aut neuix quidem aereis atomis subtiliores contra dicta §. 10; 2) Fluidum hoc aget ipsum in cohibentia vasa, adeoque non erit necessarium, vt particulae aeris fluido illi innatent, cum illud in effectus elateris in corpora exercendos solum sufficiat; 3) particulae illius conatum habebunt a se inuicem recedendi, quare ratio huius rei denuo reddenda erit, atque adeo proposita quaestio haud soluta manebit. Sin vero posterius, tum 1) dictum fluidum in parietes vasorum etiam solidissimos nullam fere vim exercebit, quare nec in tenuissimas aeris atomos, quamcunque vim leuitate et volubilitate sua facile eludentes, agere quid poterit; 2) vbi aer in vase campressus condensabitur, fluidi quod vasa iam facillime penetrat, eadem densitate manente; erit atomorum aeris quantitas in maiore ratione ad quantitatem fluidi, quam fuit ante compressionem. Id circo vis fluidi pro ratione quantitatis eius minor erit, minores quoque in atomos aeris effectus exseret; atque adeo aere vi externa in minus spatium compresso elastica eius virtus decrescet.

§. 12. Haec omnia euidentissime demonstrant vim aeris elasticam a fluido aliquo inter eius particulas diuersante proficisci non posse. Cumque dicta vis pro ratione densitatis materiae aeris propriae, caeteris paribus crescere et decrescere soleat; dubitandum itaque non est *illam ab immediata quadam mutuaque atomorum eius actione proficisci.*

§. 13. Corpus vnum in alterum immediate agere nequit, nisi ipsum contingat; atomi igitur aeris vbi in se mutuo immediate agunt, in contactu sint, necesse est. Porro quoniam aer noster atmosphaericus vi externa adactus tricesies amplius minore spatio comprehendi potest; id circo inter atomos eius dantur interstitia a propria materia eius vacua, quibus plurimae eiusmodi atomi contineri possunt: vnde illae in contactu non sunt. Duae istae apparenter contradictoriae, verissimae tamen, propositiones conciliari aliter nequeunt, nisi hi duo contrarii status atomorum aeris tempore distinguantur; nempe vt ipsae alternis vicibus illos subeant. Alternatio vero istiusmodi ita fiat necesse est, vt nec in omnibus atomis simul idem status contingat, nec sensibile aliquod tempus duret. Alterum enim stupendas in extensione mutationes saepius produceret, alterum vero efficeret, vt expansiones aeris tardae nimium et otiosae redderentur. Patet igitur atomos aeris singulas insensibilibus tempusculis cum aliis sibi vicinis confusa reciprocatione collidi, et cum aliae in contactu sunt, alias tum a se inuicem resilire et in reliquas viciniores tandem incurrere, denuo resulturas, ita vt eiusmodi frequentissimis reciprocisque arietationibus a se inuicem continuo pulsae seorsum dispergi nitantur.

§. 14. His expositis demonstrandum restat, quonam pacto atomi aereae in se mutuo ita agant, vt vna alteram retorqueat. Ad hoc autem non aliud quid argumenta suggerere potest, quam eiusdem elastici aëris palmaria proprietas. Scilicet, quod notissimum est, crescente aeris calore etiam elaterem eius magis magisque inualescere,

decre-

decrescente vero eundem simul debiliorem reddi, ita, vt caeteris paribus, in summo, quem nouimus, calore elater maximus, in minimo vero, seu frigore, quod hunc vsque in diem obseruatum est, maximo minimus constante lege deprehendatur. Vnde patet, atomos aereas pro ratione aucti vel diminuti caloris per mutuum contactum fortius aut remissius in se inuicem agere, atque adeo calore, si vnquam fieri potest, prorsus cessante, illas omni laudata actione destitui debere. Hinc *autem* sequitur *mutuam actionem atomorum aeris a solo calore proficisci.*

§. 15. Calor consistit in motu gyratorio particularum corporis calidi (*) quidquid igitur calor efficit, a motu gyratorio particularum corporis calidi proficiscitur, atque adeo mutua atomorum aeris actio pendet a mutu gyratorio earundem. Verum duo corpora sphaerica absolute laeuia in contractu iuxta se inuicem posita et quam ocyssime in gyrum acta in se mutuo ita agere non possunt, vt a se inuicem dissiliant. Demonstrata igitur superius §. 8. veritas denuo confirmatur, et prouidae naturae ingenium elucet, quae vnico eodemque medio varios effectus in corporibus saepissime producere solet, vti hic atomorum aeris asperitate et calorem eius corporibus aliis communicat (§. 8) et elateri exercendo inseruit.

§. 16. Sint igitur duae atomi aeris A et B a se inuicem distantes ita vt A sit superior atomo B. Vtraque ocyssime moueatur in gyrum ita, vt pars superficiei atomi A atomum B spectans feratur secundum directionem contrariam ei, versus quam dirigitur pars superficiei atomi B, spectans atomum A, prout telorum signa Tab. VII. Fig. 1.

 in-

(*) Meditationes de calore.

indicant. Durante gyratorio mutu, decidat vi gravitatis atomus A super atomum B; in contractu inaequalitates coincident ita, vt vel prominentia *a* atomi A incidat in cauitatem *b* atomi B; vt est in figura 2; vel premat etiam prominentiam *d* atomi B, quemadmodum figura 3 repraesentat. In casu priore prominentia *a* atomi A ex cauitate *b* ascensura prominentiam *f* superare debet, adeoque atomi A et B a se inuicem recedent per distantias *gf* vel *a b*, eo tempusculo, quo tendentes secundum contrarias directiones superficies atomorum A et B arcum *g a* percurrunt. In casu posteriore atomi in contactu eousque iuxta se procedent, donec prominentia *a* atomi A inciderit in cauitatem *e* atomi B. Deinde vero sequentur omnia, quae fieri debent in casu priore.

Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 3.

§. 17. His ita comparatis atomi aeris cum singulae sint graues, vi grauitatis ergo vna supra alteram cadat necesse est. Quo facto tandem motu gyratorio celeriter rotatae post contactum statim seorsum repellentur, eo modo vt paragrapho superiore explicauimus. Quoniam autem in tanta frequentia atomorum fieri non potest, vt quaelibet cadat in summum punctum superficiei inferioris atomi; id circo actio earum repulsiua saepissime secundum lineas ad horizontem plus minusue inclinatas fieri debet, atque adeo vis aeris elastica versus omnes plagas sese exserere.

§. 18. Explicatam hactenus atomorum actionem ostendunt etiam turbines, quibus pueri super glacie ludere solent. Duo enim eiusmodi turbines in gyrum cellerrime acti, postquam tardo quidem passu in contactum admoti fuerint, rapidissime resilire solent; quae repercussio

ſio ab inaequalitate ſuperficierum prouenit. Eae enim quo ſinuoſiores ſunt in contactu, eo pernicius turbines reſiliunt. Id vero ter aut etiam quater inter duos turbines fieri poteſt, antequam gyratione ceſſante concidant, quod fit, vbi flagellis concitari deſinunt.

§. 19. Quamuis propoſita hic theoria non infirmis nititur argumentis; maior tamen euidentia inde nobis eluceſcet, ſi proprietates aeris et phaenomena, quae in eo obſeruari ſolent, per illam ita explicari patuerint, vt cauſae eorum clare imo etiam diſtincte percipiantur. Optima namque illa theoria eſt, quae non ſolum cum nulla proprietate eius rei, pro qua explicanda condita eſt, pugnat; verum etiam earum explicatione non ſecus ac firmiſſimis vtitur argumentis ipſam corroborantibus, id circo et noſtram in ſequentibus examinamus, primarias aëris proprietates variaque phaenomena excutinentes.

§. 20. Atmoſphera conſtat ex infinito numero atomorum aeris, quarum inferiores repellunt ſuperincumbentes atomos ſurſum verſus tantum, quantum omnes reliquae ad ſummam vsque ſupeficiem atmoſphaerae ſuperingeſtae cedunt. Atomi reliquae, quo longius a terra diſtant, eo minorem contra vim arietantium et grauium atomorum nituntur, ita vt ſupremae ipſam ſuperficiem atmoſpaerae occupantes propria tantum grauitate ſua deorſum premantur, atque a proxime inferioribus repercuſſae, tamdiu inſublime ferantur, quamdiu impetus a repercuſſione impreſſi grauitatem earum ſuperant. Qua tandem praeualente deorſum labuntur ab inferioribus rurſus repercutiendae. Hinc autem ſequitur 1) aerem atmoſphaerae eo rariorem eſſe debe-

debere, quo remotior eſt a centro telluris, 2) aërem in infinitum expandi non poſſe: dari enim debet terminus, vbi grauitatio atomorum aeris ſupremorum vim, mutua colliſione ipſis impreſſam, ſuperet.

Fig. 4. §. 21. Superficies atomorum aeris A et B quo celerius percurrunt arcum *ag*, eo ocyus atomi ipſae abſoluunt diſtandiam *ab* vel *fg* a ſe inuicem recedendo, adeoque maiorem celeritatem per repercuſſionem acquirunt, fortius in obſtantia corpora agunt, iisque remotis longius a ſe inuicem diſſiliunt. Quoniam autem motis celerius ſuperficiebus, etiam atomi aeris celerius rotantur, gyratorio autem motu accelerato etiam calor increſcit (*); vnde mirum non eſt aera calidiorem maiorem vim elaſticam habere.

§. 22. Denique experientia docuit ſummum, qui in exteris ad hybernum occaſum ſolis ſitis regionibus obſeruatur, frigoris gradum ſuperari rigore hyemis huius noſtrae regionis, qui tandem ſaeuiſſimo gelu in Iacutarum regione omnia fere fluida praeter aerem conſtringenti multum cedit. Ratione autem conſequimur (vt in meditationibus noſtris de cauſa caloris et frigoris oſtenditur) nullibi in hoc telluris noſtrae globo abſolutum frigus dari poſſe, id circo neque atomos aereas vſpiam a motu gyratorio aliquando ceſſare, atque adeo, neque aërem ſine elatere reperiri poſſe patet.

§. 23. Sonus producitur, quando corpus aliquod in motum tremulum excitatum, eundem imprimit particulis aeris ſibi proximis, quae cum ſequentibus continua ſerie

(*) Medit. de cal.

ſerie eum communicant ad diſtantiam vi percuſſionis proportionalem. Quoniam autem atomi aeris plerumque a contactu remotae ſunt; neceſſe eſt ergo, vt quaelibet atomus ad excitandum in altera motum ſonorum, ſibi a corpore ſonante impreſſum, ad eandem primo accedat atque tempuſculum infinite quidem paruum in motu conſumat, priusquam ictum illi impingat, quae infinite parva tempuſcula ab atomis numero fere infinitis in notabiliore diſtantia ad ſucceſſiuam communicationem adhibita infinities ſumta ſenſibile aliquod temporis momentum efficient. Vnde neceſſe eſt, vt ſonus poſt ictum, a quo producitur, notabili interuallo temporis e longinquo audiatur.

§. 42. Quando aer premit ſuperficiem alicuius corporis; cuius pori maiores quidem ſunt atomis aeris, diametros tamen habent minores diſtantiis, quae tremulatione illarum deſcribuntur; tum atomi aeris per repercuſſionem ad orificia pororum in peculiarem, quendam motum dirigantur, neceſſe eſt. Etenim ſit Porus P inter particulas A et B in ſuperficie corporis ſolidi, vel etiam fluidi denſioris, ſitus, quam premit aer; feriat atomus aliqua aeris particulam A ex *a* in *b*, ab illaque reſiliat verſus *c* ita vt lineam *m m* ſecet; eodem quoque modo incurrat alia aeris atomus in particulam B ex *d* in *e* et reſiliat verſus *c* ita vt linea *e c* cum *b c* efficiant angulum *b c e*. Denique in currant aliae atomi aeris in loca ſuperficiei vtriusque particulae poro P propiora vsque ad *f* et *g*, nempe donec a particulis reflexae via ſua deſcribant lineas efficientes angulum apicem ſuum *h* Fig. 5.

§. 27. Id vero iam olim re ipſa experti ſunt viri celeberrimi et de orbe litterario optime meriti Robertus Boyle, Hermannus Boerhaaue, et recentius clariſſ. Haleſius, qui ſubtilem et elaſticam illam materiam, ex corporibus reſolutis productam, aerem appellare non dubitauerunt. Et nos met ipſos multiplex experientia docuit idem, praeſertim vbi ex ſolutione cupri, aqua forti inſtituta, elaſticum fluidum copioſe productum verum aere eſſe deprehendimus. Etenim in vaſe quo fluidum illud captum erat, continebatur alcali fixum, in aqua copioſe ſolutum, quo rutilus ille vapor, ſolutione durante aſcendens, acidoque ſubtili turgidus, capiebatur: *huic* enim nonnulli, qui renatum aerem ſuo nomine appellare metuunt, et neſcio quod Gas vocitare amant, elaſticam vim fluidi tribuunt. Nihilo tamen minus per aliquot hebdommadas fluidum illud perſtitit, omnes veri aeris qualitates retinens.

§. 28. Plura quidem de aere in poris corporum deliteſcente, eaque varia, et quaedam forte noua proponere hic poſſemus; verum cum ea ad ſingulares eiuſdem captiui aeris effectus explicandos pertineant potius, quam ad cauſam elateris illius illuſtrandam; quamobrem illa ad peculiarem tractationem reſeruamus.

DISSER-

DISSERTATIO DE ACTIONE MENSTRVORVM CHYMICORVM IN GENERE

Auctore M. Lomonosow.

§. 1.

Quamuis ab omni aeuo multam curam atque operam viri solertes ad Chymiam contulerint, et praesertim centum retro annis quasi conspirati eius cultores penitiorem corporum naturalium mixtionem certatim indagauerint; nihilominus tamen scientiae naturalis pars nobilissima profundis etiamnum tenebris inuoluitur et propria sua mole laborat. Latent genuinae rationes mirabilium phaenomenorum, quae per labores Chymicos natura producit, ideoque ignoratur adhuc rectior via, cuius ductu multa detegi possent, quae vtilia forent ad promouendam humani generis felicitatem. Equidem fatendum est, prostare plurima experimenta Chymica, de quorum certitudine non dubitamus; inde tamen pauca ratiocinia, in quibus iudicia Geometricis demonstrationibus exercitata acquiscere possunt, deducta esse iure querimur.

§. 2. Inter palmarias operationes Chymicas est corporum solutio, quae ante reliquas meretur, vt examini Physico subiiciatur; nam et in Chymicorum officinis corporibus examinandis saepissime inseruit, et in collegiis Physicis inter alia experimenta curiosorum oculis subiici solet; verum tamen causae eius nondum ita perspectae habentur, vt phaenomena, quae in hoc negotio sese exserunt, inde explicari possint.

liquidorum corporum confusio. Quae in eo solum discrepant, quod vbi duo corpora liquida confunduntur, vtrumque motu intectino progressiuo alterius poros inuicem penetrat, verum vbi corpus liquidum cum solido iungitur, tum solum corpus liquidum mediante motu progressiuo intestino poros solidi ingreditur.

§. 8. Liquida per confusionem alia libentius alia difficilius permiscentur, e. g. aqua cum spiritibus aquosis, vt sunt acidi et ardentes, facile confunditur, at cum oleis iungi detrectat, pari ratione corpora solida liquefacta, vt metallica metallis, terrea terris, salina salibus multo facilius vniuntur, quam metallica corpora terris vel lapitibus aut salibus fusis. Ex quo elucet, particulas corporum fluidorum eiusdem generis facilius motu progressiuo iuxta se inuicem serpere et poros peruadere, quam particulas corporum liquidorum heterogeneorum.

§. 9. Homogeneitatis igitur ratio etiam in ingressu liquidorum in poros solidorum corporum haberi debet. (§. 7) hoc est fluida poros solidi homogenei facilius, heterogenei difficilius ingrediantur necesse est. Quod sequenti experientia comprobatur. Metalla nobiliora vbi a vilioribus in furno decimastico secernuntur; tum plumbum fusum cupellam non ingreditur, quin prius vitrescat. Nimirum quamdiu inflammabilem materiam, quae metallis et splendorem et ductilitatem conciliat, in mixtione sua retinet, tamdiu cum cineribus cupellam constituentibus misceri et poros illorum peruadere non potest. At postquam phlogicton vi ignis a reliquis plumbi miscibilibus excutitur, tum id amissa ductilitate et splendore metallico vitrescit, trefcit, poros cupellae prout corporis etiam vitrefcibilis et ideo fibi homogenei penetrat, atque omnia quae vitrefactioni obnoxia funt, fecum in eos inuehit. Vnde mirum non eft, aurum et argentum intra cineres cupellae minus ingredi, cum nunquam vitrefcant.

§. 10. Quoniam igitur homogeneitas, qua ingreffus liquidorum in folida facilitatur, confiftit in identitate ipfius materiae, fruftra fane ratio, ob quam certa quaedam menftrua foluendorum corporum poros facile ingrediuntur, in poris ipfis, hoc eft non in materia, quaeritur, cum pori nil aliud fint, quam fpatiola ab ipfa materia corporis vacua.

§ 11. Cum itaque fere omnia, quae hactenus de caufis folutionum alias propofita funt, haud firmo pede nitantur, ideo non inutile fore iudicauimus, vt experimentis Chymicis et Phyficis, quae ad explicandam folutionem conferre aliquid vifa funt, feuerius excuffis et inter fe collatis, magis exactam theoriam de hoc themate conderemus. Non tamen hic apud nos ftatuimus enucleare fingulas virtutes fpecificas, quibus diuerfa menftrua agunt in diuerfa corpora foluenda (quod non ante exponi et dilucidari poterit, quam vbi principiorum Chymicorum numerus fuerit decifus, eorumque natura diftincte cognita) fed tantum in animum induximus exponere folutionum caufas in genere.

§. 12. Genericas igitur folutionum caufas daturi oftendere tenemur, quibus viribus, quaque ratione menftruum foluendi particulas diuellere poffit, fublata mutua earum cohaefione. Verum cum particulae menftrui agentes, tum etiam ipfa actio, fenfibus haud diftincte repraesentantur; restat itaque vt ad sola phaenomena solutiones comitantia attenti veritatem inuestigare periclitemur.

§. 13. Quae cum inter se conferimus, alia aliis gemina, alia vero contraria offendimus. Ad posteriora spectant illa notissima, quod nempe spiritus acidi soluendo metalla incalescant, aqua vero soluendo sales magis frigida reddatur. Contraria ista phaenomena causa exstiterunt, vt suspicaremur, metalla in spiritibus acidis alia ratione solui, quam sales in aqua. Et cum experimenta circa solutiones in vacuo a nobis instituta conceptae antea nostrae theoriae ex asse respondere videremus, eandem nunc certis principiis superstructam, dictis experimentis confirmamus.

§. 14. Aquis fortibus in metalla agentibus efferuescentia suboriri solet, quam contemplaturus accepi filum ferreum breue et tenue, vtramque eius extremitatem orbiculo vitreo agglutinaui cera; super medium fili instillaui guttam spiritus nitri, aqua diluti, eum in finem, vt solutio leni passu procederet (praeceps enim eiusmodi operatio est nimium confusa, contemplationemque turbat) in guttulam ferrum soluentem direxi microscopium satis acutum. Prorumpebant a superficie fili bullulae aereae simul cum particulis ferri, quae erant colore fusco, et non secus ac ipsae bullulae, vitrabantur secundum directionem filo ferreo perpendicularem, et quamuis situm eius saepius immutarem, perpendicularis tamen directio durabat. Post haec adhibito spiritu fortiore solutionem fili rursus per microscopium lustrabam; vibrabatur ingens vis particulacularum cum innumeris bullulis continua ſerie ſuccedentibus, quae perpendiculari directione a ſuperficie fili ferebantur, et ad lumen candelae innumeros fontes ſalientes lucidos, vel potius ignes feſtiuos cumulatim per aerem miſſos repraeſentabant. Particulae ferri in caſu poſteriore non prius conſpiciebantur, quam vbi a filo longius repulſae confuſis motibus in menſtruo agitarentur.

§. 15. Quoniam itaque particulae metalli vibrantur vi menſtrui ſecundum directionem perpendicularem ad corporis ſoluendi ſuperficiem, quamobrem ponamus particulam *a f* propellendam eſſe actione menſtrui a ſuperficie BC corporis BCDE ſecundum directionem *ag*; neceſſe igitur eſt, vt menſtruum agat in illam ſecundum eandem directionem; hoc eſt, eam impellat ex *a* verſus *g*. ſed impellere ex *a* verſus *g* non poteſt, quin impingat in partem ſuperficiei eius *ff* a proxima ſoluendi ſuperficie BC averſam, in hanc vero impingere menſtruum nequit, niſi prius ſit inter particulam *a f* et reliquas partes ſoluendi, in ſpatiolis *ff* conſtitutum; hoc eſt ſpiritus acidi ſoluere metalla nequeunt, niſi ingrediantur poros eorum.

§. 16. Metalla validiſſimo igne fuſa feruent, et non ſecus ac ſpiritus acidi atque aqua bullas aereas proiiciunt, manifeſto indicio in metallis non aliter ac in ſpiritibus acidis atque aqua contineri aerem per poros eorum diſſeminatum, qui calore ex illis excutitur, propria leuitate ſurſum aſcendit et bullas format.

§. 17. Quamprimum metallum ſpiritui acido immergitur, ſtatim bullas aereas a ſuperficie ſua vibrat; vnde patet aerem per poros vtriuſque vel alteriusvtrius

 corporis

corporis disseminatum tempore solutionis expandi, consequenter vim eius elasticam actu exseri; quod triplici de causa proficisci solet; 1.) quando pressio aeris externi tollitur; 2.) si aer ipse maiorem gradum caloris in se recipit; 3.) denique quando maior quantitas aeris in idem receptaculum intruditur.

§. 18. Cum autem solutiones metallorum, comitante efferuescentia menstrui, sub graui atmosphaera semper succedant; a causa igitur priore memoratam aeris expansionem haud proficisci euidentissimum est. Porro spiritus acidus metalla soluens prius ebullit, quam incalescit, et calor qui ebullitionem sequitur, semper multo minor est, quam qui alias in spiritibus acidis igni expositis efferuescentiam excitat, expansio igitur aeris, quae in spiritibus acidis metalla soluentibus ebullitionem generat, ab aucto calore minime dependet, atque adeo ratio sufficiens ebullitionis aquae fortis continetur in constipatione aeris disseminati per poros ipsius aquae fortis, vel metalli.

§. 19. Indigitata aeris condensatio vel in poris spiritus soluentis vel ipsius metalli fiat necesse est. Verum quoniam particulae spiritus tanquam corporis fluidi leuissime cohaerent, vnde aeri in poris suis sese condensanti et ob maiorem elaterem expandenti resistere non possunt, adeoque illi crescenti cedere debent, vt aer placide in bullulas expansus leuitate sua ad liquoris superficiem sine vlla agitatione ascendat. Verum bullulae aereae durante solutione expansae a superficie metalli perpendiculariter cum impetu vibrantur in quolibet eius situ (§. 14.) fieri igitur nequit, vt aer ille in poris spiritus soluentis condensedenſetur, conſequenter in poris corporis ſolidi, hoc eſt, metalli ipſius, a cuius ſuperficie minutis bullulis proſilit.

§. 20. Cum vero in poris metalli aer condenſari nequeat, niſi haerenti in illis aeri nouus accedat, durante autem ſolutione, nullus accedere poteſt, quin cum menſtruo in poros ingrediatur, is nimirum qui in poris eius continetur. Quod etiam ſequentibus comprobatur.

§. 21. Aer per poros fluidi diſſeminatus etiam anguſtiſſimos et compreſſos ſolidorum poros penetrat, quos ſolus peruadere nequit. Ratio huius rei ex theoria noſtra de vi aeris elaſtica §. 24 et 26, facile perſpici poteſt, et veritas ipſa experimentis ab Excell. Wolfio circa poros veſicae inſtitutis comprobata Phyſicis eſt notiſſima.

§. 22. In ſpiritibus acidis ſub campana Antliae conſtitutis, ſubducto per ſuctionem aere, ebullitio multo difficilius excitatur, quam in aqua, vnde apparet, aerem poris ſpirituum acidorum firmius inhaerere, quam poris aquae, conſequenter eundem aerem poros corporum ſolidorum facilius penetrare cum dictis ſpiritibus quam cum aqua.

§. 23. Corpora fluida homogenea quamprimum ſe mutuo contingunt, in vnum confluunt, vt gutta aquae guttam aquae alteram ſibi admotam aſſociat, duo globuli Mercurii quamprimum ad mutuum contactum admittuntur, repente ſe inuicem amplectuntur et vnicum efformant globulum; dubitari igitur nequit, quin etiam particulae aeris cum ſpiritu acido in poros metalli aduectae, et per tam minutam diuiſionem menſtrui liberiores factae

 cum

cum haerentibus inter metalli particulas aereis moleculis coaceruentur.

§. 24. His ita comparatis quid sequi debeat, facilius perspici potest, si prius proprietas illa aeris, quae superius (*) explicatur, quaeque a nobis *vis aeris elastica renata* solutatur, in mentem reuocetur.

§. 25. Nimirum aeris indoles ea est, vt quamdiu particulae eius minutissimae a mutuo contactu semotae et particulis alicuius corporis densioris interclusae haerent, nulla fere vi elastica pollent; Verum hisce carceribus liberatae, suique iuris factae et ad mutuum contactum ad missae emortuum quasi elaterem recuperant, eumque in obstantia corpora exercent. Quod multis experimentis clarissimus Halesius euidentissime ostendit, et nos non pauca in eundem finem instituimus, ex quibus sequens experimentum ad propositam nostram theoriam condendam prae reliquis conuenit. Spiritus nitri drachmas 5 infudi vitro colli angustioris eique immisi cupri drachmas 2, et statim collo vitri vesicam compressam, aere, quantum fieri potuit, expulso firmiter alligaui, solutio post horae circiter quadrantem cessauit, et vesica aere ex metallo et spiritu egresso fuit valide inflata. Quam postquam super collum vitri filo constrixi, a vitro remoui, vero aere plenam esse non dubitaui: nam digito compressa rursus pristinam figuram recuperabat, et niui admota flaccidior, camino autem apposita rursus turgida facta est, et acu perforata et compressa expulso aere leuia obiecta et flammam candelae agitabat. Dimensione sollicite instituta deprehendi

(*) Tentamen theoriae de vi aeris elastica. §. 26.

di volumen aeris renato elatere expansi ad volumen spiritus et mettalli fuisse vt 68 ad 1; ad metallum vero, cuius vna drachma erat soluta, vt 2312: 1. Ex his experimentis euidentissime elucet, aerem per poros corporum disseminatum integro fere sui elatere destitui, et contra particulis eius ex angustiis corporum liberatis et se mutuo contingentibus, elaterem illius denuo restitui.

§. 26. Renata haec aeris elastica virtus quam sit valida, stupendi eius effectus loquuntur. Ea enim vasa, in quibus aqua in glaciem constringitur, rumpuntur, sclopeta ferrea vasto fragore edito dissiliunt. Nimirum urgente frigore, aqua in minus spatium coercetur, pori eius strictiores redduntur, aer ex illis eliditur, testantibus bullis frequentibus, quas frigens aqua emittere solet, particulae eius elisae sibi mutuo occurrunt, et homogeneitatis causa in vnum coaceruantur, innatum sibi, sed ante per segregationem amissum, elaterem recuperant, extenduntur, bullulas formant, et sic ex concursu innumerarum aeris particularum innumeris bullis natis aqua in glaciem iamiam abiens expanditur, et solidissima illa vasa, quibus inclusa est, disrumpit. Veritas haec eo etiam demonstratur, quod glacies ex disruptis vasis recepta innumeris scateat bullis, ideoque omni fere pelluciditate caret.

§. 27. His consideratis non erit arduum ostendere ipsam vim, qua particulae metalli auulsae per spiritus acidos vibrantur. Siquidem particulae aeris, quae cum spiritu poros metalli soluendi intrant, iunguntur cum illis, quae antea in metallo haerebant (§. 21.) quo facto amissam vim elasticam resumunt, (§. 24. 25. 26.) in

maius

maius spatium expandi conantur; et cum pororum angustias ferre nequeant, exitum quaerunt; qui quoniam succedentibus acidi corpusculis obsessus et obstructus est, obstantes igitur sibi particulas metalli abrumpunt et per spiritum vibrant. Ex quo patet, particularum spiritus acidi in soluendo officium esse, particulas aeris in poros metalli inuehere, aeris vero, renato elatere particulas metalli auellere.

§. 28. Ad hanc theoriam examinandam et confirmandam sequentia experimenta instituta sunt. Aquae fortis drachmas quinque vitro cylindrico infudi, atque sub campana antliae pneumaticae constitui. Aliquot agitationibus emboli aere exantlato, surgebant bullae aereae ex aqua forti vtcunque frequentes, tamen exiguae; post horae quadrantem, menstruum exposui aeri libero, eique nummulum cupreum, qui nostratibus Denga dicitur, immisi. Post 20 minuta prima, affusa aqua copiosa nummulum a sordibus et adhaerente humore liberatum ponderaui, quo constitit eum 74 grana amisisse. Denique alterum cupreum nummulum, priori aequalem et similem, eiusdem aquae fortis drachmis 5, sed ex qua aer non erat subductus, in eodem vasculo immersum solutioni exposui eodem in loco. Post 20 minuta prima nummulus 85 granis leuior factus est. Ex hoc experimento elucet, acidum spiritum fortius in metalla agere, si maiore copia aeris disseminati fuerit praeditus, scilicet quaelibet aquae fortis portiuncula maiorem quantitatem aeris secum in poros metalli inuehit, vis elastica celerius renascitur, frequentius frustula metalli abrumpit.

§. 29.

§. 29. Deinde accepi aquae fortis eiusdem duas portiones aequales et in duo vitra aequalia et ſimilia infudi, vtrique immiſi eodem momento ſingulos nummulos cupreos noſtratibus. Poluſchkas dictos, quorum quilibet pendebat grana 50, altero vaſculo relicto in aere libero, alterum ſub campana Antliae conſtitui. Vterque nummulus primo cum pari efferueſcentia menſtrui ſoluebatur. Verum repetitis aliquot agitationibus emboli et aere ex campana ſubducto menſtruum multo vehementius ebulliebat, maioribus et frequentioribus bullis ſurgentibus, quam experimento praecedente. Praeterlapſis 11 minutis primis vtrumque nummulum ex menſtruo ſimul depromtum et a ſordibus atque adhaerente humore liberatum ponderaui. Qui ſub campana ſolutioni erat expoſitus, amiſit grana 10, qui vero in libero aere ſoluebatur, perdidit grana 26. In hoc igitur experimento exceſſus cupri ſoluti in aqua forti integro aere diſſeminato praedita multo maior eſt ratione praecedentis: nimirum in priore erat vt 11 ead 74, in poſteriore vt 16 ad 10. Facti ratio ſequens eſt. Aqua fortis metallum ſub compana antliae ſoluens incaluit, maiorem quantitatem aeris dimiſit quam experimento praecedente, vnde maiore etiam copia aeris diſſeminati menſtruum fuit priuatum, atque adeo minori vi in metallum agere debuit.

§. 30. Nec tamen alia quoque phaenomena ſolutiones metallorum comitantia propoſitae hactenus theoriae non reſpondent, in quibus primas obtinet cum ebullitione menſtrui coniunctus calor. Renato in poris metalli aeris elatere particulae ipſius abripiuntur, per menſtruum vibrantur, particulas illius fricant et in motum gyratorium excitant, qui quoniam caloris caufa exiftit (*), mirum igitur non eft, aquas fortes metalla foluentes incalefcere.

§. 31. Spiritus nitri cum zinco maxime efferuefcit et incalefcit valide, cum ferro paulo minus, fed plus minus cum cupro, multo lenius cum argento, admodum parum cum plumbo et Mercurio. Vnde patet metalla et femimetalla fpecifice leuiora maiorem ebullitionem et calorem in fpiritu nitri producere, quam fpecifice grauiora; quod cum noftra theoriae gregie confentit. Etenim metalla et femimetalla fpecifice leuiora ex minore quantitate materiae cohaerentis conftare Phyfici non dubitant, confequenter maioribus vel frequentioribus poris praedita effe, quam fpecifice grauiora. Vnde maiorem quantitatem aeris diffeminati in iis contineri, copiofioremque aerem cum menftruo ingeri, atque adeo maiorem vim elafticam renafci, fortius in particulas metalli agere, violentius easdem vibrare, particulas fpiritus nitri pernicius in gyrum agi, atque validiorem ebullitionem et calorem gigni.

§. 32. Si ferrum in alcali diffoluitur et aceto praecipitatur, calcem fpiritus nitri foluit fine ftrepitu. Item quando viride aeris in aceto deftillato folutum cum aqua forti confunditur; aqua fortis cuprum in fe recipit, fed nulla efferuefcentia fuboritur. In vtroque cafu quoniam particulae metallorum mutua cohaefione deftitutae funt, vi igitur non indigent, qua alias diuelli folent; fed

(*) De caufa caloris et frigoris meditationes. §. 12.

sed statim particulis menstrui accedentibus adhaerent, cumque illis progressiuo motu incedentibus distrahuntur. Vnde nulla constipatio particularum aeris disseminati subsequitur, vis elastica non reuiuiscit, nulla effervescentia aut calor exoritur.

§. 33. Quando duae portiones aequales eiusdem spiritus acidi, satis concentrati, ad soluendum metallum adhibentur, vna tamen earum diluitur modice aqua affusa. Posterior maiorem quantitatem soluit, quam prior, ob maiorem scilicet quantitatem aeris per maius volumen disseminati.

§. 34. Ad soluendum metallum adhibito spiritu nitri satis valido, solutio breui tempore absoluitur, menstruo non amplius agente. Verum si post aliquot dies metallum eidem spiritui rursus immergitur; quantitas eius non contemnenda denuo soluitur. Nimirum praecipiti solutione furente, spiritus aere ita orbatur, vt in metallum amplius agere nequeat. At super incumbentis aeris particulis successu temporis in poros suos receptis, rursus soluendi, virtutem acquirit.

§. 35. Summa certitudo in rebus Physicis comparatur, si theses a priori erutae et dumonstratae atque experimentis et phaenomenis confirmatae etiam Mathematico examini respondent. Ad hunc itaque euidentiae gradum propositam theoriam deducturi ostendere tenemur, nunquid vis aeris elastica in poro metalli renata ad auellendam eius particulam sufficiat.

§. 36. Primo igitur videndum est quanta sit vis, quae ad hunc effectum producendum requiritur, h. e.

 quam

quam firma sit mutua cohaesio particulae, quae renata vi aeris in poro metalli ab eius superficie auellitur. Celeberrimus Muschenbroekius per experimenta inuenit ad rumpendum filum cupreum, cuius diameter est $\frac{1}{10}$ pollicis pedis Rhenani in 12 eiusmodi partes diuisi, seu $1\frac{19}{120}$ lineae pedis regii Parisini requiri pondus $299\frac{1}{4}$ librae Amstelodamensis, quae aequalis est Parisinae. Per Microscopium, quod diametrum corporis auget ad 360 obseruaui particulas minimas cupri soluti in spiritu nitri habere in diametro apparenti $\frac{1}{2}$ lineae pedis Parisini. Vera igitur earum diameter aequalis est $\frac{1}{720}$ lineae. Concipiamus ex particulis istius modi iuxta se inuicem continua serie dispositis et cohaerentibus constare filum, cuius diameter aequalis est diametro ipsarum particularum. Quoniam vires, ad rumpenda corpora homogenea necessariae, sunt in ratione duplicata diametrorum ipsorum corporum; ad rumpendum igitur tenuissimum illud filum requisita vis erit ad pondus $299\frac{1}{4}$ lib. vt diameter eiusdem fili quadrata ad quadratam diametrum fili pondere $299\frac{1}{4}$ librarum rupti, hoc est $= (\frac{1}{720})^2 : (1\frac{19}{120})^2 = (\frac{1}{720})^2 : (\frac{834}{720})^2 = 1 : 695556$; consequenter aequalis $\frac{1197}{2782224}$ librae seu $3\frac{846288}{2782224}$ grani. Quae vis aequalis est cohaesioni particulae cupri, auellendae elatere aeris, renato in poro metalli.

§. 37. Qui aerem ex metallo cumulatim prorumpentem durante solutione considerat, facile concedet, eum magnam partem spatii in vesica collo vitri alligata occupasse (§. 25). Non equidem negamus surgentibus ex cupro bullis et per spiritum ad superficiem eius tendentibus, aeris particulas per menstruum disseminatas accre-

scere,

ſcere, ſimul veſicam ingredi, eamque diſtendere; verum tamen hoc ſub initium ſolutionis fieri ſolet. Etenim eadem diutius durante bullae ex metallo prorumpentes non ſolum minus ampliores redduntur, verum etiam prorſus euaneſcunt, priusquam ſuperficiem menſtrui attingunt, auido nempe aeris menſtruo (§. 25) eas rurſus per poros diſtrahente, id vero non ſolum in cupro, verum etiam in plumbo et Mercurio ſolutioni expoſito obſeruauimus. Eo autem fit vt non minor copia aeris in metallo renati per poros menſtrui rurſus diſpergatur, nec veſicam ingrediatur, quam initio ſolutionis bullis ſurgentibus in illam accedit. Adde quod ſtatim poſt ſolutionem affuſo alcali fixo ſpiritus vehementer ebulliebat, manifeſto indicio magnam vim aeris in poris eius actui ſolutionis ſuperfuiſſe. Verum ne quid precario aſſumere videamur, ponamus 1312 partes (§. 25) aeris expanſi ex poris menſtrui in veſicam acceſſiſſe, reliquas autem 1000 partes reuera in poris metalli renatas et dilatatas fuiſſe. Erit ergo volumen metalli ſoluti ad volumen aeris in poris eius renati et in veſica expanſi vt 1 ad 1000; conſequenter in quamlibet particulam cupri auellendam agebat portio aeris, quae expanſa erat ad particulam ipſam ratione voluminis vt 1000 ad 1; atque adeo diameter bullae aeris poſt auulſionem corpuſculi expanſae erat ad diametrum corpuſculi vt 10 ad 1, hoc eſt aequalis $\frac{1}{72}$ lin.

§. 38. Mercurii pollex cubicus ponderat vncias 8, drachmas 6 et grana 8. Cylindrus ergo Mercurii ab aere ſuſtentatus, 28 pollices Pariſinos altus, cuius diameter eſt $\frac{1}{72}$ lineae, ponderat fere $\frac{7838596072}{\text{[illegible]}}$ grani, quod

 pon-

pondus quoniam aequale eſt preſſioni columnae aeris ſuper bullulam ex poro metalli egreſſam incumbentis, (§. 37.) quae illum ſuſtentat, quamobrem elater bullulae illius aequalis eſt ponderi dictae columnae Mercurii. Verum quoniam haec bullula ante expanſionem, dum in poro metalli in corpuſculum agebat, coarctata erat in ſpatium millies anguſtius. (§. 37.) (Praetereo hic pororum anguſtias: nam aer ante renatam elaterem non integrum metalli volumen occupabat, ſed propria huius materia magnam partem tenebat) elater igitur eius erat tum millies maius, hoc eſt, aequalis ponderi 124 $\frac{888717312}{931075093112}$ grani, adeoque cohaeſionem particulae cupri (§. 37.) ſuperabat plus quam duabus drachmis. Vnde mirum ſane non eſt particulas cupri abruptas tam celeri motu a ſuperficie ipſius metalli per menſtruum vibrari.

§. 39. His expoſitis inueſtiganda nobis reſtat illa vis, qua ſalium aquae immerſorum particulae a mutua cohaeſione ſeiunguntur et per aquam diſtrahuntur. Quod vt in apricum prodeat, primo notandum eſt omnes ſales abundare inſigni quantitate aquae, quae per deſtillationem in vas recipiens copioſa ex illis elicitur. Et quamuis a quibusdam ſalibus volatilibus nulla ſeparari poteſt, ex analogia tamen et facili cum aqua coniunctione idem de illis aſſerimus.

§. 40. Sales in aqua ſoluti poſt lenem euaporationem in cryſtallos pellucidas concreſcunt, conſequenter in aqua formam ſuam induunt, atque adeo neceſſarium eſt, vt pori ſalium ſint aqua pleni. Quod etiam eorum

pel-

pelluciditate comprobatur: corpora enim porosa et alias minus pellucida, aqua tamen imbuta diaphana fieri solent. Vnde vitriolum leni tepore ad albedinem calcinatum, ita tamen, vt partes eius minutissimae non dilabantur, opacum redditur; at postquam affusam aquam poris imbibit, rursum pellucivitatem recuperat. Saccharum per crystallisationem in aqua concretum pellucidum est, at quod per inspissationem in conis cauis formari solet, vix aut ne vix quidem radios lucis transmittit; verum aqua in poros eius accedente ad pelluciditatem propius accedit.

§. 41. Cum itaque salium (nempe non calcinatorum) pori aqua pleni sint, fieri igitur nequit, vt aquae immersi eam in se recipiant. Vnde patet etiam aerem per aquam disseminatum poros salium minus ingredi, adeoque nec in illis renato elatere expandi, nec in particulas salium agere posse.

§. 42. Asserti veritatem confirmat sequens experimentum. Vasculum vitreum aquae semiplenum posui sub campana Antliae et reiteratis aliquot agitationibus emboli aerem subducebam; surgebant bullae aereae vtcumque frequentes. Tandem aerem ex aqua abunde subductum esse ratus, vasculum exposui aeri libero simul cum altero vasculo aequali et simili, in quo eiusdem aquae (ex qua aer non erat subductus) aequalis quantitas continebatur. Vtrique immisi salis gemmae singula frustula aequalia figurae cubicae, quorum quodlibet pendebat grana 50; post horae vnius spatium frustulum salis, quod soluebatur in aqua exantlata, amisit grana 27, alterum vero grana 15.

§. 43.

§. 43. Ex hoc experimento patet 1) aerem per poros aquae disseminatum non solum ad solutionem salium nihil conferre, verum eidem esse impedimento. Quomodo autem impedimento esse possit §. 47. exponimus et hoc ipso nostram theoriam confirmamus; 2) necessario sequitur particulas salium separari actione particularum ipsius aquae.

§. 44. Quando corpora solida liquida redduntur, particulae eorum excitantur in motum gyratorium celeriorem. Quando igitur sal in aqua liquescit, motus gyratorius particularum eius accederatur. Ceterum quoniam sales soluuntur actione particularum ipsius aquae (§. 43.) consequenter particulae aquae tanquam corporis liquidi celeriore motu gyratorio rotatae et particulis salis aquae immersi admotae, eas, simulqne homogeneas sibi particulas aqueas mixtionem salis constituentes radunt, et motum earum gyratorium accelerant. Quo facto particulae salis a reliqua massa separantur, et aqueis particulis adhaerentes motu progressiuo cum illis incedunt et per ipsum menstruum distrahuntur.

§. 46. Quando aliquod corpus alterius motum accelerat, eidem partem sui motus communicat, communicare autem partem non potest, quin illi eadem pars decedat. Quamobrem particulae aquae accelerando motum gyratorium particularum salis, partem sui motus gyratorii ammitunt. Qui quoniam caloris causa existit, mirum igitur non est, aquam soluto sale refrigerari.

§. 47.

§. 47. Aere per poros aquae disseminato, particulae aquae, aereis interpositae, aliquantum rariores sunt; quod seqnenti experimento demonstratur. Aqua exantlata infundatur vitro colli angustioris, relicto super ea spatiolo aere pleno. Collum obturatum operculo oblinatur cera, ne aeri externo pateat aditus, post diem vnum aut alterum aer super aquam relictus eam ingredietur et vas aqua plenum reddetur, certo indicio aquam ab aere per eum disseminato distendi. Submerso igitur sale in aqua, aere disseminato turgida, minor copia particularum ipsius menstrui superficiem salis attingit, in eamque remissius agit; atque adeo solutio fit tardior.

§. 48. Expositarum hactenus actionum, quibus menstrua soluunt corpora sibi immersa, priorem *mediatam*, posteriorem *immediatam* appellare lubet. Etenim in casu priore menstruum abripit particulas corporis soluendi mediante renato elatere aeris, in casu posteriore ipsum menstruum agit propriis suis particulis. Cum vero mediata solutio calorem, immediata autem frigus producat, phaenomena haec tanquam signa vtriusque censeri debent.

§. 49. Praeter solutiones metallorum in spiritibus acidis, et salium in aqua, exponendae supersunt amalgamationes, solutiones partiales, nempe extractiones et decoctiones, item solutiones bituminum in oleosis etc. quae licet ab illis discrepare videntur, tamen alterutro vel vtroque simul modo eas perfici non dubitamus. Sed quoniam pauca experimenta extant, quae ad eas exponendas quid conferunt,

(**) Ibidem §. 14. 15.

runt, nec nobis ad noua instituenda commoditas data fuit, quamobrem illis exponendis in praesentia supersedemus.

§. 50. Caeterum muneris nostri erat, vt rationem redderemus, quare particulae metallorum et salium specifice grauiores in menstruis suis pendeant, nec lege communi in liquoribus specifice leuioribus subsidant. Verum quoniam hoc ante nos iam a viris eruditissimis Freindio (*) et Heinsio (**) satis dilucide explicatum habemus, ideo eidem reiterando non immoramur.

(*) In praelectionibus Chymicis. (**) In descriptione cometae Anni 1744.

DE

DE MOTV AERIS IN FODINIS OBSERVATO.

AVCTORE

Michaele Lomonosow.

Cum anno 1740 Freibergae in Misnia degerem, vbi Chymiae et rei metallicae operam dabam; accidit aliquoties vt fodinas inuisens obseruarem motum aeris, qui per puteos, cuniculos et fossas latentes etiam tranquillissimo coelo nullis machinis pneumaticis impulsus ita ferebatur, vt aliquando lampades fossoribus vsitatas extingueret. Huius tunc phaenomeni proprietates satis perspicere non mihi licuit, cum aliis rebus, quae ad praxim metallicam spectabant et vbique annotandae occurrebant, essem intendus. Verum postquam in patriam redux Georgii Agricolae libros de re metallica euoluerem, memoratum phaenomenon distincte descriptum inueni. (*) Verba laudati auctoris haec sunt: „Aer exterior se sua „sponte fundit in caua terrae, atque cum per ea pene-„trare potest, rursus euolat foras: sed diuersa ratione hoc „fieri solet. Etenim vernis et aestiuis diebus in altiorem „puteum influit et per cuniculum vel fossam latentem, „permeat, ac ex humiliori effluit: similiter iisdem die-„bus in altiorem cuniculum infunditur et interiecto puteo „defluit in humiliorem cuniculum atque ex eo emanat. „Autumnali autem et hyberno tempore in cuniculum vel „puteum humiliorem intrat et ex altiori exit. Verum

 „ea

(*) Lib. 5. pag. 82.

„ea fluxionum aeris mutatio in temperatis regionibus et „locis fit initio veris et fine autumni; in frigidis vero in „fine veris et in initio autumni. Sed aer vtroque tempo„re, antequam cursum suum illum constanter teneat, ple„rumque quatuordecim dierum spatio crebras habet muta„tiones, modo in altiorem puteum vel cuniculum influens, „modo in humiliorem. Hanc igitur descriptionem a viro rei metallicae peritissimo nobis relictam cum viderim legibus aerometricis et hydrostaticis esse consonam, nullus dubitaui theoriam huius phaenomeni iisdem legibus superstrui et Geometrarum methodo concinnari posse.

Tab. VI. Fig. 1.

Definitio 1.

§. 1. Puteus est fossa profunda angustior, ad horizontem perpendicularis A B, vel ad eundem plus aut minus inclinata C E.

Definitio 2.

§. 2. Fossa latens B E dicitur, quae ab ima parte putei B ad imam partem alterius putei E horizontaliter ducta illos coniungit seu communicat.

Corollarium.

§. 3. Fodina, quae constat ex duobus puteis, fossa latente coniunctis seu communicatis, refert exacte tubos communicantes, quibus vtuntur Physici ad aequilibrium fluidorum demonstrandum, quamobrem corpora fluida eiusmodi fodinae infusa legibus hydrostaticis vt in syphonibus obtemperare debent.

Scholium

Scholium.

§. 4. Putei A B et E C crurum syphonis, fossa autem latens B E baseos illius vicem explent.

Definitio 3.

§. 5. Puteus altior C E dicitur, cuius apertura superior C patet in parte montis editiore. Puteus humilior A B est, cuius apertura superior A patet in parte montis humiliore.

Corollarium.

§. 6. Si vterque puteus et fossa latens replentur fluido, quod aerem externum grauitate specifica superat, fluidum in puteo altiore praeponderabit fluido in puteo humiliori.

Definitio 4.

§. 7. Cuniculus est fossa horizontalis F G vel H K, cuius apertura patet in parte montis decliri, superior F G dicitur, quae montis partem editiorem occupat, inferior H K, quae humiliorem. Fig. 2.

Definitio 5.

§. 8. Puteus interiectus G K est, qui cuniculum superiorem F G cum cuniculo inferiore H K coniugit seu communicat.

Corollarium.

§. 9. Cum etiam fodina FGKH tubos communicantes horizontaliter inclinatos repraesentet, quamobrem circa aequilibrium corporum fluidorum illorum officio fungi potest.

Experientia 1.

§. 10. Aer in fodinis qualibet anni tempestate habet eundem gradum caloris, vbi fossores nullam iniuriam a frigore vel aestu sentiunt. Contra vero in libero aere hyberno tempore frigus, aestiuo aestus dominatur.

Corollarium.

§. 11. Aestate igitur aer in fodinis est frigidior externo, hyeme autem eodem calidior, adeoque aestate specifice grauior externo, hyeme specifice leuior.

Experientia 2.

§. 12. Aer externus tempore aestiuo vel hyberno dum sponte sua vel industria fossorum in caua terrae infunditur, calorem vel frigus foris sibi impressum repente ammittit, et eandem temperiem in se recipit, qua latera fossarum sunt praedita, seu quam habebat aer, qui ante fodinam replebat.

Scholium.

§. 13. Quam repente aer calorem acquirit et amittit, respiratio quolibet momento temporis loquitur, vbi frigidum aera pulmonibus haurimus, calidum effundimus, qui ex ore emanans proxime admotam manum tepore, remotiorem vero leui frigore afficit.

Corollarium.

§. 14. Aer, qui in fodinas infunditur aestate redditur externo specifice grauior, hyeme eodem specifice leuior. (§. 11.)

Theorema

Theorema I.

§. 15. Tempore aestiuo aer debet infundi in puteum altiorem CE et ex puteo humiliori AB egredi. Fig. I.

Demonstratio.

Aer in fodinis aestiuo tempore est specifice grauior quam externus (§. 11.) quamobrem aer in puteo altiote CE praeponderabit aeri in puteo himiliori AB, (§. 6.) Consequenter ex C descendet vsque ad D, vt cum aere in puteo AB contento aequilibrium acquirat; post descensum expellet ex puteo AB quantitatem aeris aequalem quantitati, quae continebatur in parte CD putei EC. Interea aer externus propria sua grauitate descendet in puteum EC vsque ad D, habebitque eundem gradum caloris, quem habet reliqua pars aeris in fodina contenta (§. 12.) h. e. erit specifice gravior externo (§. 14.) Consequenter aer in puteo CE eadem ratione vt ante, praeponderabit aeri in puteo AB contento, et descendens vsque in D, illum per A expellet ex puteo AB, in partem CD putei EC, externum aerem rursum admissurus. Et hac ratione iste aeris motus tamdiu continuabitur, quousque aer in fodina contentus manebit specifice grauior externo, hoc est, tempore aestiuo aer infundetur in puteum altiorem, ex humiliore effluet. Q. E. D.

Scholium.

§. 16. Aer ex puteo humiliore AB egressus in eum qui succedit, integro suo pondere agere et aequilibrium in fodina restituere non potest; quippe quam primum

mum ex apertura A versus L effluit, calore rarefit, cum reliquo aere commiscetur et distrahitur.

Theorema 2.

Fig. 2. §. 17. Tempore aestiuo aer debet infundi in cuniculum superiorem F G, et e cuniculo inferiore H K effluere.

Demonstratio.

Vtriusque putei aperturis H et F insistunt columnae aeris ad superficiem atmosphaerae exporrectae. Quae insistit aperturae F, breuior est altera columna insistente aperturae H, parte H P, quem defectum substituit columna aeris in puteo interiecto G K contenta. Quoniam autem tempore aestiuo aer in fodinis est specifice grauior aere externo (§. 11.) quamobrem pars columnae atmosphaericae in puteo interiecto contenta G K erit specifice grauior parte columnae P H. Reliquae autem columnarum partes ad superficiem atmosphaerae exporrectae sunt eiusdem altitudinis et grauitatis specifice (nam in eadem fere atmosphaerae parte subdio ad vnum terminum extenduntur) quamobrem columna aeris, quae insistit aperturae F cum parte specifice grauiore G K praeponderabit columnae insistenti aperturae H cum parte specifice leuiore H P. Consequenter sublato aequilibrio aer in puteo interiecto G K descendet in cuniculum inferiorem H K, et quantitatem aeris sibi aequalem ex eo foras per H protrudet. In puteum interiectum G K aer defluet ex cumiculo F G, eique succedet externus; qui tandem refrigeratus (§. 12.) in puteum G K influet, et sublato iterum aequilibrio per cuniculum H K foras egredietur;

et

et sic continuo aer in cuniculum superiorem ingredietur, ex inferiore effluet, quousque aer externus manebit specifice leuior interno, hoc est, quamdiu aestas durabit. (§. 11.) Q. E. D.

Corollarium 1.

§. 18. Vbi aestas longiori tempore permanet, ibi etiam aer diutius eam directionem motus conseruabit, qua ingreditur in puteum vel cuniculum altiorem ex humiliore effluit. Et contra vbi aestas breuis est, ibi etiam haec fluxio aeris breuiore tempore durabit.

Corollarium 2.

§. 19. Mirum profecto non est in oris temperatis eiusmodi fluxionem incipere initio veris et fine autumni cessare, in frigidis autem initium capere sub finem veris et sub initium autumni desinere.

Theorema 3.

§. 20. Brumali tempore aer infundi debet in puteum humiliorem A B, et ex puteo altiore E C effluere.

Demonstratio.

Puteus GE est altior puteo AB (per hypoth.) et aer in fodinis tempore hyberno specifice leuior externo (§. 11.). Igitur pars A L columnae insistentis extremitati B erit specifice grauior parte DE columnae insistentis extremitati E: (§. eod.) Quamobrem columna insistens extremitati B praeponderabit columnae insistenti extremitati E, adeoque aer externus irruet in aperturam A putei AB, ac illum, qui ceteras partes fodinae occupat per aperturam C protrudet foras. Et quoniam aer fodinam ingressus hyeme redditur specifice grauior externo (§. 14.) quamobrem semper aequilibrio sublato aer hyberno tempore in puteum humiorem influet, ex altiore effluet. Q. E. D.

Corollarium. 1.

§. 21. Quoniam fodina FGHK eadem ratione est comparata, vt fodina ABCE, nimirum pars HF columnae aeris ad superficiem atmosphaerae exporrectae, aperturae H insistentis, tempore brumali est specifice grauior parte GK, quae replet puteum interiectum, quamobrem aer hyberno tempore infundetur in cuniculum inferiorem, ex superiore egredietur.

Corollarium 2.

§. 22. Aer externus continuo ingreditur in puteos et cuniculos inferiores, ex superioribus egreditur, quamdiu manet specifice grauior interno, consequenter vbi hyems pluribus mensibus dominatur, ibi etiam motus aeris ab apertura inferiore versus superiorem diutius durare debet, quam vbi hyems est breuior, adeoque in regionibus frigidis aer externus incipere debet fluxionem per fodinas ab apertura putei vel cuniculi humilioris versus aperturam putei vel cuniculi altioris sub initium autumni, eamque finire sub exitum veris: sub caelo autem temperato motus hic initium capere debet sub finem autumni, sub initium veris cessare.

Co-

Corollarium 3.

§. 23. Vere et autumno, quando frigus et calor luctantur, aer externus tum calidior tum frigidior redditur interno, qui fodinas occupat, adeoque fit externo tum specifice leuior, tum grauior. Mirum igitur non est his anni tempestatibus motum illius quatuordecim dierum circiter spatio contrariis directionibus fondinas alternatim permeare

Scholium 1.

§. 24. Hanc theoriam de aeris motu spontaneo in fodinis non inutilem fore arbitramur praefectis fodinarum et fossoribsis. Etenim (si locorum situs patitur) puteis, cuniculis et fossis ea ratione ductis, hi laboribus, illi sumptibus parcere possunt: siquidem ad construendas machinas pneumaticas, ad easque mouendas, propter aerem subterraneis vaporibus infectum expellendum, non exigua pecunia et opera impenditur.

Scholium 3.

§. 25. Nec in phaenominis rerum naturalium explicandis non aliqua hinc opera expectari potest. Athanasius Kircherus in Mundo suo subterraneo refert, dari in Italia quasdem speluncas, quae certis anni tempestatibus aerem effundunt et in agris vicinis ventum producunt, quod propositae huius theoriae auxilio dilucidari posse censemus.

DE INSIGNI PARADOXO PHYSICO, AERE SCILICET IN 1837 VOLVMINIS PARTEM AQVA GELASCENTE REDVCTO, ET DE COMPVTATIONE VIS, QVAM AQVA GELASCENS ET SESE IN VOLVMEN MAIVS EXPANDENS IN SPHAERA CAVA FERREA, BOMBA DICTA, AD EAM DISRVMPENDAM IMPENDIT, COGITATIONES

G. W. Richmanni.

§. 1.

Nobiliores quidem videntur illius in rebus physicis partes, qui nouis inueniendis occupatus est, quam eius, qui in ea, quae pro certis et veris habentur, inquirit, et nonsolum, quae talia deprehendit, sed etiam quae incerta et falsa detegit, notat, vt aliis in errores incidendi occasio praecidatur. Non tamen prorsus negligendas sed omnino scientiae naturalis cultore dignas et vtiles puto has posteriores etiam curas. Hinc non inutile arbitror, si paradoxon Celeb. Halesi experimentum examinavero et inquiram, quantum illi tribuendum sit.

§. 2. Describit illud Celeb. autor in egregio suo opere, statica vegetabilium dicto, in appendice. Merita huius viri in scientiam naturalem tanti aestimo, vt tantum absit, vt celeberrimi et ingeniosissimi experimentatoris laudi dubiis meis detrahere velim, vt semper mihi gloriosum ducam ipsius vestigia premere et ad exemplum eius de scientia naturali bene mereri. Improuisis et

variis

variis circumstantiis concurrentibus perspicacissimus saepius experimentator confunditur vt interdum falsa pro experientia comprobatis commendet. Imprimis hoc fit, si ob celeritatem phaenomeni omnes circumstantias obseruare non licet. Caute hinc procedendum est in assensu experimentis eiusmodi praebendo, inprimis si aliquod paradoxon continent, et prius, quomodo instituta sint exactissime nosse debemus, antequam iudicium de iis ferre licet.

§. 3. Compressio aëris tanta, qua in 1837 voluminis partem reductus, hincque duplam aquae et lapidis ferme densitatem obtinuisse asseritur, omnino tale paradoxon physicum mihi est, et hinc priusquam assensus praeberi poterit, antea, quomodo institutum sit experimentum, bene examinandum est.

§. 4. Ad hanc stupendam densitatem aëri tribuendam sequenti methodo ingeniosissima visus est Cel. Hales. Elegit sphaeram ferream cauam, cuius capacitatis diameter $6^{II} 5^{III}$ Lond. erat, et minima parietum crassities $1^{II} 2^{III}$ L. Hanc sphaeram cum vehementer gelabat, aqua impleuit, et tubum vitreum ab vna parte hermetice clausum, cuius capacitatis longitudo erat $4^{II}. 0^{III} 6^{IV}$ et diameter $1^{III} 6^{IV}$. vt drachmam vnam et sex grana aquae recipere posset, phialae paruae vitreae immisit, in cuius fundo parum argenti viui cum supernatante spiritu Terebinthinae per Indigo colorato stagnabat, phialam deinde cum tubo vitreo aquae sphaera ferrea contentae immersit. Hoc facto foramini sphaerae ferreae lignum densum rite tornatum immisit et ope praeli adegit fortissime, ligno prius materia ex mastiche, cera et Terebinthina parata obducto. Tandem ma-

 teria

teria frigorifica ex copiosa glacie contusa et tertia parte salis marini parata sphaeram operuit. Post paruum temporis interuallum sphaera fracta in tres partes dissiliit, quae tamen ab inferiore parte sese contingebant. Glacie copiosis bullulis aereis distincta parietes partium dictarum sphaerae obducti obseruabantur, et crassities glaciei erat ferme $\frac{3}{4}$ partium digiti. Phiala et tubus vitreus in frustula parua dissilierant. Vtraque tamen extremitas tubi, cum ibi finiretur, vbi glacies parietes obduxit, cum glacie coaluerat. Interna superficies frustulorum tubi vitrei fracti in ipso vertice etiam Terebinthina colorata et mercurio maculata obseruabatur.

§. 5. Dum celeb. Hales hoc phaenomenon contemplatur, putat, hinc concludi posse aerem in tubo vitreo sic compressum fuisse, vt spiritus Terebinthinae tantum non ipsum tubi verticem attingere debuerit. Per mercurium enim vel vitrum aerem transiisse et se cum aqua miscuisse impossibile iudicat. Vt vero condensationem definiret, inquisiuit in cohaesionem ferri, quam aquae gelascentis pressioni in sectionem capacitatis sphaerae maximam circularem et hanc aeris in tubo inclusi elasticitati aequalem posuit, et hinc deduxit, aerem in 1837 voluminis partem coactum fuisse. Hinc cel. Musschenbroek in elem. Phys. §. 794. sequentem legitime elicit conclusionem: *ita aer fuisset duplo densior quam aqua, et vltra, adeoque; cum incondensabilis sit, particulae aerem componentes, erunt prorsus diuersae indolis, quam aqueae; caeteroquin enim modo in volumen* 800 *minus circiter comprimi potuissent, tumque eiusdem densitatis ac aqua, viribus quibusuis comprimentibus re-*

restitissent. Conclusio tamen haec, licet legitima, sit inanis, si experimentum ipsum est fallax. Minorem tamen Cel. Hales inuenit densitatem, ac ex datis colligere licet.

§. 6. Plane aliter hinc sentio ac Cel. de Buffon, qui in versione operis staticae vegetabilium in linguam Gallicam calculum Halesi emendaturus minorem densitatem inuenit, quia sectionem sphaerae maximam, cum sectione capacitatis sphaerae maxima comparaturus pro diametro sphaerae assumsit diametrum capacitatis sphaerae simplici crassitie parietum auctam, cum tamen diametrum capacitatis sphaerae duplici crassitie parietum augere debuisset ad diametrum sphaerae totius definiendam. Hoc errore admisso planum cohaesionis multo minus inuenire debuit ac Cel. Hales, hinc densitatem etiam aeris compressi minorem.

§. 7. Ad calculum rite instituendum, pressio aquae gelascentis in sectionem capacitatis sphaerae maximam cohaesioni parietum sphaerae ferreae circiter aequalis poni debet. Ponatur nunc cum autore diameter capacitatis sphaerae $=6^{II}\ 5^{III}$, L. et crassities parietum minima $= 1^{II}\ 2^{III}$ L. diameter sphaerae ipsius erit $= 8^{II}\ 9^{III}$ L. Positaque diametro ad periph. $= 113 : 355$, erit sectio capacitatis sphaerae maxima $= 33^{II}\ 18^{III}$ □, et sectio sphaerae maxima $= 62^{II}\ 21^{III}$, □. Hinc sectio annularis parietum sphaerae, quae simul est planum cohaesionis $= 29^{II}.\ 03^{III}$ □, quod Cel. Buffon ob errorem admissum $= 23^{II}.\ 40^{III}$ □ inuenit. Sit cohaesio fili ferrei diametri $\frac{1}{10}$ dig. Rhen. secundum experimenta Musschen-

broeckii

broeckii in introd. de cohaerentia corporum, 450 librarum Amstelod. vel 418 $\frac{1}{2}$ librar. Lond. posita libra Amst. ad libram Lond. vti 93 ad 100. Cum mensura Rhenana sit ad mensuram Lond. vt 139 ad 135, erit 1^{m} Rhen. = $10,3^{v}$ Lond. ferme, et hinc sectio fili ad axin normalis 8332^{v} □. Quoties haec sectio in plano cohaesionis 2903^{III} □ continetur, toties continentur 418 $\frac{1}{2}$ librae Lond. in numero librarum cohaesionem parietum sphaerae exprimente 1548120. Atmosphaera ponitur in pollicem Lond. quadratum premere pondere 15. $\frac{5}{12}$ libr. Lond. hinc pressio atmosphaerae in sectionem capacitatis sphaerae maximam erit 508 libr. Lond. ferme. Hinc tota resistentia quae aquae gelascenti fit est 1458628 libr. Lond. circiter, si cohaesio ferri fusi ponitur aequalis cohaesioni ferri cusi. Pressio gelascentis aquae in sectionem capacitatis sphaerae maximam 3318^{III} □ comparari potest cum pressione atmosphaerae in aequalem superficiem, quae est 508 libr. Lond. Est hinc pressio aquae gelascentis in sectionem capacitatis sphaerae maximam ad pressionem atmosphaerae in aequalem aream vt 1458628 ad 508, vt 2871 ad 1 ferme. Si tandem volumina aeris ponuntur in ratione inuersa virium comprimentium, aer in tubo vitreo compressione aquae gelascentis in partem voluminis 2871 reductus est, nisi se torturae huic subduxerit per poros vitri vel mercurii; quare vitri purissimi densitatem superauerit necessum est. Si ferri fusi tamen cohaesio ponitur ad cohaesionem ferri cusi vt 1 : 2, in partem voluminis 1435 aër redactus dici debet, discrepantiae huius Cel. Hales rationem habuisse non apparet.

§. 8.

§. 8. Si alia fluida praeter argentum viuum confideramus, aër in eorum interstitiis contentus ad aequilibrium quoddam videtur eniti, et si in fluidis tanta copia adest, vt externus premens et cohaesio partium fluidi non sufficiat illi coercendo, erumpere, si vero parciori adest copia, admittere aërem externum et cum illo vniri, hocque lentissime fieri, si differentia virium contranitentium minor est. Quo maior vero haec differentia est eo celerior est aëris in fluidis inclusi mixtio cum aëre externo, vel externi aëris receptio in interstitia fluidi, si hic minus resistitur. Sic videmus, aqua sub campana orbi antliae pneumaticae imposita et pressione aëris externi minuta, statim aërem in aqua contentum ex aqua forma minimarum bullularum assendere et campanam occupare, aquamque tali ratione aëre suo ex parte orbatam et aëri libero expositam sensim aërem recipere in interstitia, non secus ac spongia aquam in sua interstitia recipit. Pariter aqua per poros ligni et multa alia corpora transit.

§. 9. Si ergo ad haec phaenomena non respicere licet, quia aër cum argento non aeque facile miscetur ac cum aliis fluidis; obseruauit enim celeb. Hales aërem in 37 voluminis partem reductum non penetrasse neque vitrum neque argentum viuum; nondum tamen hinc certus esse possum, ne maiori quidem compressione adhibita mixtionem et penetrationem oriri posse. Si enim considero compressione aucta etiam particulas aëris minui debere, non videtur repugnare, particulas ita minui, vt interstitiis et poris vitri et mercurii recipi possint, non minus ac particulae aeris naturalis densitatis per poros ligni transeunt.

eunt. Si ergo ſpiritus tereb. verticem tubi plane attigit, vt experimentum docuit Clariſſ. Hales, exinde maiori cum veritatis ſpecie concludi poſſe videtur, particulas aëris ita paruas factas, vt tandem per poros vel vitri vel mercurii vel vtriusque tranſierint et ſpiritui terebinthinae et mercurio locum conceſſerint.

§. 10. Cum haec admodum ſpecioſa mihi videantur, repetendum puto experimentum cum ſphaeris diuerſis, quarum parietes craſſitie diſcrepent, vt pateat, an volumina aëris poſt compreſſionem ſint vt vires comprimentes inuerſe. Tubus vitreus in medio capacior adhibeatur, vt ſpatia aëris melius comparari poſſint maiori quantitate aëris compreſſa et ea quidem quam ipſe ſuadet Celeb. autor praecautione. Obſeruauit enim aquam in medio ſphaerae in glaciem non abiiſſe, et hinc iudicauit tubum vitreum cum phiala, ſi in medio ſphaerae rite fulciretur, nulli rupturae periculo obnoxium futurum et ſic altitudinem fluidi in tubum compreſſione eleuati et volumen aëris compreſſi poſt ruptam ſphaeram proditum iri colore coeruleo, quo parietes tubi interni maculari deberent.

§. 11. Si experimentum ſuccedit et 1) altitudo aſcenſus ſpir. tereb. colorati in tubo, poſt fractam ſphaeram ferream illibato, conſequenter ſpatium aëris poſt compreſſionem innoteſcit, et 2) ſpatium iſtud eſt inuerſe vt vis premens, ſi 3) aër in tubo vitreo compreſſione ceſſante idem volumen iterum habet, quod ante compreſſionem habebat, non dubitandum eſt amplius de iis, quae Celeber. Hales aſſeruit. Si vero totus tubus vsque

que ad verticem ſpiritu terebinthinae coloratus eſt, non dubitabo aſſerere, aërem ob diminutionem particularum compreſſione factam ſe per poros vitri vel mercurii ſubduxiſſe.

§. 12. Nihil reſtat, quam vt indicem, quomodo experimentum Haleſi repetendum ſit ita, vt tubus vitreus cum phiala non frangatur, conſequenter de ſtatu aëris, in tubo in ſtatu compreſſionis contenti, iudicium ferri poſſit. Vt hoc obtineatur, expedit conum ligneum, quo obturatur foramen ſphaerae ferreae, cum cauda parallelepipedali inſtruere, quae tantae longitudinis ſit, vt extremitas, ſi immititur ſphaerae, ſesquidigitum diſtet a parietibus ſphaerae. Huic perallelepipedo phiala cum tubo ita adplicanda et firmanda eſt, vt ſi longitudo tubi in duas partes diuidatur, punctum diuiſionis cum centro ſphaerae coincidat cono foramini immiſſo et praelo fortiſſime adacto. Si nunc totus apparatus ſphaerae immittitur et conus cum praelo ſic firmatur vt rupta ſphaera immobilis et praelo connexus maneat, totus apparatus immobilis manebit et illibatus, vt quid in tubo factum ſit, cognoſci poſſit.

TENTAMEN EXPLICANDI PHAENOMENON PARADOXON SCIL. THERMOMETRO MERCVRIALI EX AQVA EXTRACTO MERCVRIVM IN AERE, AQVA CALIDIORI, DESCENDERE ET OSTENDERE TEMPERIEM MINVS CALIDAM, AC AERIS AMBIENTIS EST.

AVCTORE
G. W. Richmann.

§. 1.

Cum experimenta de decremento caloris aquae instituerem, saepius turbatus sum phaenomeno quodam, quod frustra diu animo volui, in rationem phaenomeni inquirens. Tandem vero aliquid, quod maxime probabile visum est, subiit mentem; quod nunc cum societate communicabo. Forte haec qualiscunque inquisitio efficiet, vt paradoxa phaenomena de frigore horrendo aëris nebulosi in Sibyria a Cel. Gmelino et aliis obseruato, explicari saltim ex parte possint. Prius tamen obseruationes paradoxi istius, iteratas saepius, recensebo, quam rationem phaenomeni exponam.

§. 2. Experim. I. anno 1747. dei 7 Ian.

In temperie aëris 59 gr. Therm. Fhar. aqua temperiei 58 gr. collocata erat, cui thermometrum erat immersum, extracto thermometro ex aqua, quinque minutis primis ad gr. $49\frac{1}{4}$ descedenbat mercurius in aëre temperiei 59 graduum; deinde ascendebat in 25 min. pr. sensim ad gr. 56, decreuerat vero tem-

temperies aëris interea a gr. 59 ad gr. 57um. Dum aquae iterum immittebatur thermometrum, oſtendebat temperiem aquae 58$\frac{1}{4}$ gr. Dum vero iterum extrahebam, deſcendebat mercurius ad gr. 54 vno minuto et dimidio, aſcendebat deinde in temperie aëris conſtanter eadem 58 gr. ad gr. 55$\frac{1}{4}$ quatuor minutis primis, haerebat adhuc circa eundem gradum poſt 12 min. pr. Immerſo iterum thermometro aquae thermometrum oſtendebat temperiem aquae 58 gr.

§. 3. Experim. II. die 8 Ian. 1747.

Cum temperies aëris erat 64 graduum extracto thermometro ex aqua temperiei 63 graduum, mercurius deſcendebat quinque minutis primis ad gr. 54. Incepit deinde aſcendere iterum mercurius et in tribus minutis ad gr. 56, in 8 min. prim ad gradum 59, in 12 min. prim. ad gr. 60 et tandem in 25 min. pr. ad gr. 64 peruenit, aquae vero iterum immiſſum 63 gr. oſtendebat. Hoc experimentum eodem die ſexies repetii, et ſemper obſeruaui thermometro ex aqua 63 gr. extracto mercurium in aëre temperiei 64 graduum quinque ferme minutis primis deſcendiſſe ad gr. 54tum et deinde aſcendiſſe tardiori motu.

§. 4. Experim. III. die 9 Ian. 1747.

Extraxi thermometrum ex aqua temperiei 48 graduum in aëre temperiei 50 gr. et deſcendit mercurius ad gradum 46 et deinde iterum aſcendit ad gradum quinquageſimum temperiei aeris.

§. 5. Experim. IV. die 15. Ian. 1747.

In temperie aëris 62 graduum extraxi thermometrum ex aqua temperiei 60$\frac{1}{4}$ gr. et deſcendebat mercurius ad gr. 51 in quinque circiter minutis primis et dein in 9 min. pr. ad gr. 59 aſcendebat et in 12 min. pr. ad gr. 60 et poſt 17 min. pr. ad gr. 62½. Aëris ambientis temperies interim ad gr. 63 creuerat, vt hinc mercurius in aëre, cuius temperies creuit, nihilominus deſcenderit. Paradoxon tali ratione augetur.

Immittebatur thermometrum iterum aquae et oſtendebat gr. 60¼, circa quem gradum per horam vnam atque alteram conſtanter haerebat mercurius, licet interea aëris temperies ad gr. 64 creuiſſet. Extracto thermometro etiam in tali aëre deſcendit mercurius tribus miminutis primis ad gr. 54, poſtea vero incepit aſcendere et in duobus minutis primis attingebat 56 gr. in 4 min. primis 58 gr. in 6 min. pr. 60 gr. poſt 15 min. prim. adhuc circa 60 gr. haerebat, poſt 26 min. prima circa 61 gr. et poſt 30 min. pr. ad 62 gr. et poſt 35 min. pr. ad gr. 64 peruenerat. Hactenus attonitus phaenomenon hoc obſeruavi et quantacunque ſolertia circumſtantias perpenderem, nullam phaenomeni cauſam detegere potui. Tandem incidit in mentem mutare experimentum.

§. 6. Experim. V. eodem die.

Sumſi manu, quae calidor erat ac aër et aqua, aquam temperiei 60¼ gr. et aſperſi thermometrum ſiccum, deſcendebatque mercurius a gr. 64 ad gr. 60 tribus min. pr. et deinde a gr. 60 ad gr. 59 min. primo temporis, haerebat circa 58½ per tria min pr. deinde aſcendere incipiebat, et 4 min. pr. ferme attingebat gr. 60, poſt 9 min pr. 62 gr. poſt 12 min. pr. 63 et tandem poſt 17 min. pr. gradum 64 aëris ambientis. Bulbus etiam thermometri, dum tangebam, ſiccus erat.

§. 7.

§. 7. Experim. VI. die 5 Aug. 1748.

Thermometro in aëre externo ostendente gr. 68 et in aqua 66 gradum Thermometrum ex aqua extractum post 9 min. prim. ostendebat gr. 64.

§. 8. Eperim. VII. die 6 Aug. 1748.

In aëre temperiei 63 gr. ex aqua temperiei 63 gr. thermometrum extraxi, mercurius post min. pr. ostendit gr. 62, post duo min. pr. 61, post 3 min. pr. 60 gr. post 5 min. pr. adhuc haerebat circa 60 gr. Deinde ascendere incepit, et post 9 min pr. ascendit ad 60½ gr. post 15 min pr. ad 61. Tandem priorem terminum 63 gr. iterum attingebat, et bulbus thermometri prorsus siccus deprehendebatur.

§. 9. Experim. VIII.

Eodem die in eadem aëris temperie aquae immersi thermometrum, quod ostendebat gr. 63 et deinde extraxi, post duo min. pr. ostendebat gr. 61, post 4 min. pr. 60 gr. post 9 min. pr. adhuc ostendebat gr. 60, cum contrectarem bulbum thermometri, deprehendi adhuc humidum. Simulac vero humiditatem absterfi, statim ad gr. 63 aëris ambientis eleuabatur mercurius. Hic illud notari meretur, tardum fuisse descensum cum in omnibus ferme caeteris experimentis celerior fuerit. Coelum enim eo die fuit nubibus obtectum et vehemens ventus occidentalis flabat, praecedente proxima nocte pluuia vehementi; ob humiditatem hinc aëris difficulter thermometrum siccum reddebatur.

§. 10. Ex hisce obseruationibus satis patet,

1) Altitudinem mercurii in thermometro ex aqua extracto

tracto in tempeste aëris maiori vel aequali temperiei aquae, ex qua extrahitur, decrescere.

2) Deinde iterum crescere, donec temperiem aëris ostendere incipit.

3) Tempus, quo altitudo decrescit breuius esse tempore quo iterum crescit.

4) Simulac thermometrum ex aqua extractum eundem ostendit gradum, quem aër, etiam thermometri bulbum siccum esse. §. 6. §. 8.

5) Quamdiu vero thermometrum ex aqua extractum non ostendit temperiem aëris, tamdiu bulbum thermometri humidum esse. §. 9.

6) A sola humectatione ergo oriri descensum descriptum mercurii in thermometro, eaque quomodocunque facta descensum fieri, et thermometrum siccum redditum ostendere temperiem aëris.

7) Descensum hunc mercurii modo maiorem modo minorem esse.

§. 11. Saepius etiam obseruaui thermometrum in aëre libero ostendere gradum quendam infra gradum conglaciationis aquae cum tempestas pluuiosa et mitior videbatur. Subiit animum ob humiditatem thermometro adhaerentem simile quid hic factum et thermometrum non ostendisse veram aeris temperiem. Similis obseruatio est Celeb. Krafftii in experimentis physicis suis p. 264. vbi scribit: *Si thermometrum libero are quaquauersum circumdatum neque vlli alii corpori contiguum, quod calorem aliquem illi largiri possit, suspendatur, et aqua ob eandem causam non vase contineatur, sed in linteo tenuissimo et purif-*

purissimo madefacto expansa sit, obseruabitur hoc linteum iam a frigore rigidum, cum gradum 33 *idem thermometrum notat.* Nisi dicere velis aëris temperiem reuera frigidiorem fuisse ac thermometrum notabat, mercuriumque nondum temperiem aëris assumisse, eaquepropter expansam aquam sec. legem decrem. caloris ob auctam superficiem citius obtinuisse gr. 32. ac mercurius in bulbo thermometri.

§. 12. Causam phaenomeni quod attinet, a dilatatione vitri ob calorem aëris maiorem calore aquae fieri debere descensum mercurii, nullo modo potest affirmari, cum differentia inter temperiem aëris et aquae sit exigua et interdum nulla, interdum minor nihilo, et hinc dilatatio vitri sit insensibilis vel prorsus nulla vel etiam in contractionem abeat. Idem iudicauit Cel. Gmelin in Praefatione Florae suae Sibiricae praemissa.

Humiditatem vero bulbi thermometrici cum hoc phaenomeno necessario connexam esse patet ex recensitis experimentis. Exponendum ergo restat, quomodo humiditas huius phaenomeni causa esse queat.

§. 13. Si respicio ad quaedam experimenta, cum mixtione materiarum quarundam cum aqua frigus producitur, reuoco in memoriam inprimis ea, quae Cel. Muschenbroeck in P. 2 tentaminum Acad. Flor. p. 135 in additamentis suis notauit: scil. salis vrinae volatilis drachmas duas affusas ad aquae vnciam produxisse frigus, descendente liquore in thermoscopio a gradu quadragesimo quarto ad gr. 42. et ibid p. 136. sesquiunciam aquae affusam fuliginis e camino vnciae semissi generasse frigus descendente thermoscopio ex gr. 44to ad gr $42\frac{1}{2}$.

§. 14. Oborta est suspicio similes materias in aëre tunc temporis volitasse, quae iunctae cuticulae aquae, qua obductum erat thermometrum, frigus produxerunt, quod mercurium in thermometro descendere coëgit. Vt rem stabilitum irem, tentaui vaporibus salis volatilis vrinae, sale volatili sub thermometri bulbo in quadam distantia posito, cuticulam aqueam thermometri refrigerare, at nullam hinc mutationem, quam speraui tamen, factam esse ingenue confiteor.

§. 15. Interim tamen, quia non semper eadem mutatio, si experimentum instituitur, oritur, sed modo minor modo maior, et mutatio haec necessario ab humiditate pendeat, ea vero semper eadem quantitate adhaereat, scil. ea, quae bulbo thermometri eiusdem adhaerere potest, causa mutationis ex parte in constitutione aëris ambientis latere videtur. Is vero cum calidior sit aqua et nihilominus faciat, vt mercurius descendat, modo plus modo minus, peculiari materia frigorifica modo minori modo maiori quantitate grauidus esse videtur, quae cum cuticula aquea concurrens refrigerii huius causa esse potest.

An in aëre salia talia volitent vel etiam tales materiae quae concursu salia talia constituere possint, quae cum aqua concurrentia frigus producere queant, et qualia haec sint? chymicis diiudicandum relinquo.

C. G.

C. G. KRATZENSTEIN
MECHANICAE COELESTIS
SPECIMEN PRIMVM
CONTINENS:
NOVAM TVBOS LONGIORES COMMODISSIME TRACTANDI METHODVM.

§. 1.

Quotiescunque attentus coeli contemplator aut phaſes eclipſium ſolis et lunae determinare, aut maculas eorumdem delineare, aut diametrum planetarum adparentem per micrometrum dimetiri intendit; toties ipſi optandum foret, vt dicere poſſet: ſol ſiſte gradum; et luna, ne progrediaris vltra. Siquidem motus eorum diurnus aſtronomi operam quouis momento illudit.

§. 2. Nihil vero eſt tam arduum nihilque tam paradoxon, quod vnquam philoſophi efficere non conati ſint. Quamquam enim ſolem ipſum in motu ſuo apparente impedire non audeant, tentauerunt tamen radios eiusdem figere. Primus, qui, quantum ſcio, huius rei periculum fecit, fuit Farenheitius, qui duobus ſpeculis, ope manubrii verſatilibus, radios ſolares, quamdiu voluit, in eadem ſemper directione conſeruauit. Cum vero radii ſolares per duplicem reflexionem a ſpeculo metallico admodum debilitentur; et praeterea tractatio ſpeculorum manualis ſatis taedioſa ſit et ſocium expoſcat; cel. Graueſande in tomo II. edit. nouiſſ. elem. phyſ. cum publico communicauit machinam, huic ſcopo magis accommodatam; vbi ſcilicet ſpeculum ſimplex metallicum per horologium ita dirigitur, vt radius ſolis reflexus in eadem continuo, quae placuerit, maneat directione; eamdemque dicauit experimentis opticis, circa radios ſolares in camera obſcura inſtituendis.

§. 3. Nouam vero haec machina nobis ſuppeditavit meditationem. Cum nimirum in aſtronomia practica ſuſtentatio, eleuatio et directio tuborum praeſertim longiorum ad deſideratam altitudinem et plagam maximas difficultates inuoluat; naturalis eſt concluſio, omnes haſce difficultates euaneſcere, ſi tubus ſemel pro ſemper in ſitu quodam commodo, e. g. horizontali, firmetur et obiectum deſideratum per radium reflexum et fixum continuo ad tubum deferatur; id quod per memoratam machinam praeſtare licet. Operae itaque pretium fore duco, ſi eam ex Graueſandio, quoad eſſentialia quidem non mutatam, emendatam tamen et huic ſcopo magis accommodatam, hic exponam.

§. 4. Vt eo facilius et iucundius diiudicari queat machinae effectus, in explanatione eiusdem methodum obſeruabimus heuriſticam. Erit haec ſimul demonſtrationis loco, quam Graueſandius paullum intricatam, exque alio fonte deductam ſubiunxit. Concipiamus obſeruatorem in ſphaera parallela, i. e. ſub polo, ſolem vero vel quemuis planetam in aequatore eſſe conſtitutum; et radium reflexum continuo horizontaliter in linea meridiana, in qua tubus locatus ſit, eſſe ſeruandum. Iam ex catoptricis conſtat, radium reflexum ſemper duplum anguli, per motum ſpeculi deſcripti, percurrere. Si itaque ad motum radii incidentis accedat motus ſpeculi aequiualens motui radii reflexi, neceſſario ſequitur, ipſum tum radium reflexum perſiſtere debere immobilem. Si e. g. Sol ab hora

hora VI. matutina vsque ad horam VI. vespertinam semicirculum percurrit, speculum quadrantem tantum percurrere debebit. Iam ex natura circuli notum est, angulum ad peripheriam semper esse dimidium anguli centralis. Ideoque si speculum in peripheria circuli fuerit constitutum et promoueatur per radium circuli, mediante crure ad centrum speculi affixo, quod crura anguli ad peripheriam repraesentat, statim quaesitum obtinebitur.

§. 4. Describatur itaque in plano horizontali circulus horarius *a b g d* (n. 1) circa cuius centrum *c* index in extremitate furcatus *c b* sit mobilis. In peripheria huius circuli, et quidem in puncto pro lubitu adsumto, e. g. meridiano, constituatur speculum, in centro auersae partis cauda ad superficiem perpendiculari instructum, quae ab extremitate indicis bifurcata excipi possit. Sit iam punctum orientis in O, meridiei in S et occidentis in W et index circa ortum solis ad horam VI. matutinam conuersus. Quoniam tum angulus *b a c* est semirectus, speculum ad radium incidentem erit inclinatum ad angulum itidem semirectum; vnde per principia catoptrica angulus, quem facit radius incidens cum reflexo, erit rectus; verget hic itaque secundum ductum lineae meridianae ad S. Hora meridiana index conuertatur in XII (n. 2) et radius incidens ad superficiem speculi erit perpendicularis; ideoque radius reflexus iterum in meridiana cogitur incedere. Hora VI. vespertina index ducatur ad *d* (n. 3) et planum speculi iterum efficiet angulum semirectum cum radio occidentalis solis incidente. Hic itaque eodem, vt priori, modo ad angulum rectum i. e. in linea meridia- Tab. VIII. Fig. 1.

na ad S (n. 3) reflectetur. Eadem ratione quauis intermedia hora radius in ea manebit fixus.

§. 5. In hoc casu, quia sol vel planeta nullam habet declinationem, sed in ipso horizonte mouetur, speculum in situ verticali horizontaliter conuertitur. Cum vero sol vel planeta habuerit aliquam declinationem ideoque et altitudinem supra horizontem, et tamen radius reflexus iterum desideratur horizontalis, speculum non retinere potest situm verticalem, sed obliquam obtinebit positionem, quam statim determinabimus.

§. 6. Ponamus itaque declinationem esse aequalem Fig. 2. angulo $c g b$, radius solis, qui supra centrum c circulum diurnum describit erit $= b g$. Haec linea vero est $=$ secanti anguli declinationis $c g b$ ad radium $c g$. Quoniam adeo per antecedentia speculum in peripheria circuli, circulum solis diurnum repraesentantis, constituendum est, eleuetur speculum ad altitudinem tangentis anguli declinationis vsque ad a distantia vero $a b$ fiat $=$ secanti declinationis $b g$, patet centrum speculi iterum esse in peripheria circuli, radio obliquo $b g = b a$ descripti. Porro propter parallelismum linearum $a b$ et $c g$ angulus $a b g$ est angulus complementi declinationis ad $180°$; ideoque, quia triangulum $a b g$ per constructionem est aequicrurum, angulorum a et g vterque erit $= \frac{1}{2}$ angulo declinationis $c g b$ et hic est angulus inclinationis lineae perpendicularis ex centro speculi ductae ad horizontem. Cum iam sol continuo moueatur in eadem altitudine bc angulus inclinationis ad speculum erit aequalis dimidio angulo declinationis; ideoque, quia angulus, quem faciunt radius in-

incidens et reflexus inter ſe, ſemper aequalis eſt duplo angulo inclinationis, hic aequabit angulum declinationis vel altitudinis ſolis ſupra horizontem, adeoque radius reflexus iterum redibit in linea horizontali. Redibit quoque ſecundum quamuis aliam directionem, quam habuit linea *a b*.

§. 7. Cum vero machina vtamur in ſphaera obliqua, planum circuli diurni ad planum aequatoris reddatur parallelum i. e. inclinetur ad eleuationem aequatoris, tum reliqua momenta inter ſe eamdem retinebunt relationem et diſtantia aeque ac altitudo centri ſpeculi ad quamvis declinationem ſolis vel planetae per trigonometriam facile poterit determinari, id quod in machina, ad noſtram eleuationem aequatoris compoſita, deinde ſuppeditabimus.

§. 8. Quoniam cel. Graueſand helioſtatae ſuae automaticae ſtructuram internam non determinauit ſed horologipoei iudicio reliquit, nos eam hic ſubiungimus. Fiat itaque 1) horologii theca ex duabus laminis quadratis 4 pollices latis, quibus rotarum axes inſinuari poſſint. Vnam harum ſiſtit *abcd* 2) Rota prima (das Schneckenrad) inſtruatur dentibus 48 eiusdemque axi affigatur conus truncatus cochleatus *f*, cuius ſulcus vnam et dimidiam circiter conuerſionem faciat. Huic ſulco catenula vel chorda *g* inſeritur, qua mediante vi elateris in capſula cylindrica *h* incluſi rota in motum concitatur. 3) Rota haec prima impellat tympanum dentium 12 alterius rotae *k* dentium 36. 4) Haec impellat tympanum dentium 6 rotae tertiae *m* dentium 42, cuius axis indicem gerit minutorum primorum. 5) Haec circumagat rotam quartam et mediante hac quintam, quarum ambarum tympanum dentibus Tab. IX. Fig. 5.

6

6 et peripheria 42 dentibus est instructa. Posterior harum vero non sit coronaria, quemadmodum vulgo fieri solet, sed radiata. 6) Haec quinta agitet rotam vltimam *n* serratam, 15 dentibus inclinatis instructam, mediante tympano 6 dentium. 7) Supra centrum huius rotae collocetur axis pinnatus *r*, cum pendulo *p*, 7″ circiter longo, connexus. Si iam axi rotae primae affigatur index, partes principales horologii erunt constructae.

§. 9. Opus erat in nostro horologio euitare rotas loculamenti anterioris (das Vorlegewerck) quia alias index aliquantum hinc inde vacillat. Hinc etiam elater mediante ipso indice intendendus est. Adducitur deinde index ad horam desideratam, dum pendulum attollitur, ita, vt omnes rotae in motum concitentur; Attenditur tum ad indicem minutorum, et dum hic momentum praesens indicat, pendulum liberatur et ad oscillandum concitatur. Iam ex constructione horologii facile deducitur, quod si pendulum instruatur tanto ponduseulo, vt intra minutum primum $171\frac{3}{8}$ vibrationes absoluat, rota prima intra 24 horas et tertia intra horam semel circuitum suum perficient.

§. 10. Quo vero index horarius ad speculum convertendum sit idoneus, in eius altera extremitate, ab axe 5 pollices distante, perpendiculariter adferruminetur tubulus
Fig. 6. *q* (n. 1) qui in cauitata sua axin versatilem furcae *u* (n. 3) gerat. Intra crura furcae suspendatur axis *x* tubulum minorem pro insinuanda cauda speculi gerens. Et si machina etiam in minimis altitudinibus vsui esse debet, altitudo furcae supra indicem aequalis sit tangenti eleuationis aequa-

quatoris ad radium diametri horologii cum exceſſu indicis. Adeoque in noſtro horologio erit 4 pollicum.

§. 11. Vt horologium ſecundum eleuationem aequatoris diſponi queat, in inferiori lamina firmetur arcus xy, n. 2. in ſuos gradus diuiſus, et per fulcimentum horologii tranſiens, ita, vt mediante cochlea z horologium in qualibet inclinatione firmari queat. Eadem ex ratione etiam pendulum mediante cochlea ad axin ſuum ita ſemper firmari poteſt, vt eo oſcillante pinnae per dentes rotae vltimae vtrinque aequaliter attollantur. Tab. IX. fig. 6.

§. 12. Deinde quoque circulus horarius in horologio ita conſtruatur, vt circa centrum conuerti queat. Dum enim machina circa planetas vſu venit, pro aſcenſione recta planetae ſemper alia hora lineae meridianae horologii debet reſpondere.

§. 13. Adornandum iam erit ſpeculum. Quia hoc mediante cauda ſua horizontaliter et verticaliter mobile eſſe debet, ſuſpendendum erit in linea per centrum ipſius tranſeunte intra furcam fc, n. 1. mediantibus cochleis acuminatis f et r. Fig. 6. Axis vero furcae cauus ab verſatilis ſit ſuper cylindro acuminato d, n. 2. cuius altera pars in arundine fulcimenti eg pro lubitu attolli et deprimi et mediante cochlea k firmari poteſt. Fig. 6.

§. 14. Paretur iam aſſer rotundus planus, cuius alteratio per repagula in auerſa parte firmata praecaueatur. In tribus punctis circa peripheriam inſtruatur cochleis, quarum ope in ſitum horizontalem diſponi poſſit. Per eius medium ducatur linea, quae meridianam repraeſentet, in cuius parte ſeptentrionali diſponatur horolo-

 gium

gium, ita, vt linea horae duodecimae super eam transeat; quo in situ per cochleam in auersa afferis parte firmetur. In altera parte huius lineae fiat sulcus $mnop$, vt fulcimentum speculi mediante pede π in eo hinc inde duci et plus vel minus horologio admoueri possit.

15. Vt iam praeparata machina eo commodius ad obseruationes vti possimus, determinanda iam erit altitudo speculi et distantia eiusdem ab axe indicis in quouis casu necessaria. Cum ex superioribus constet, distantiam centri speculi aequalem esse secanti declinationis solis vel planetae; concipiamus axin indicis esse prolongatum vltra superficiem horologii $t\,v$ vsque in f, ex a vero, extremitatem indicis designante, erigatur perpendiculum $k\,b$ ad altitudinem furcae; et per b ducatur $b\,e$, parallela ad $t\,a$. Si iam declinatio solis sit $=$ angulo $e\,b\,f$ erit $e\,f$ tangens declinationis, a cuius vertice f distantia speculi $f\,g$ in plano $b\,n$ est determinanda. Demittatur ex f perpendicularis $f\,x$ ad $k\,b$ et in triangulo rectangulo $b\,x\,f$ ex data hypothenusa $b\,f$ et angulo f inveniatur crus oppositum $b\,x$, quod ad horizontalem $g\,f$ $= f\,b$ adiunctum, dabit distantiam $k\,b$. Demittatur iam ex tubulo furcae indicis ad horam XII. conuersi perpendicularis $b\,n$ ad planum afferis; et assumatur punctum n tanquam terminus, a quo distantia metienda sit; iuxta sulcum $o\,p$ vero notentur distantiae pro singulis declinationibus repertae. Ad altitudines vero correspondentes determinandas in eodem triangulo rectangulo $b\,x\,f$ ex data hypothenusa $b\,f$ et angulo $x\,b\,f$ inueniatur crus $f\,x$, quod aequat altitudinem centri speculi supra axin tubuli, a fur-

ca

ca indicis gestati. Singulae altitudines repertae notentur in atlante speculi, qui pro lubitu attolli potest, initium faciendo, cum cauda speculi per tubulum transiens fuerit in situ horizontali. Pro nostra eleuatione aequatoris et machina sequentes reperiuntur altitudines et distantiae centri speculi a termino *b* in digitis eorumque partibus centesimis.

	Borealis				Australis		
Declinat.	30°	20°	10°	0°	10°	20°	30°
Distantiae	8″,66	8,74	8,97	9,33	9,85	10,56	11,54
Altitud.	5,00	4,08	3,26	2,50	174	0,92	0,00

§. 16. Redigatur iam basis machinae in situm horizontalem super mensa commoda et firma *abcd*. Ita, Fig. 4 vt eius linea meridiana cum vera congruat; et horologium inclinetur ad eleuationem aequatoris. Pendulum deinde et huic inclinationi horologii et quoad longitudinem motui diurno planetae conformetur, id quod per experientiam facile determinari potest; *e. g.* ad lunae obseruationes in tantum erit elongandum vt index intra 25 horas periodum semel absoluat, vel intra 24 horas vnam horam retardet. Quaeratur tum declinatio planetae et momentum culminationis eiusdem. Ad normam prioris disponatur speculum quoad altitudinem et distantiam ab horologio; ad posterioris vero normam constitiatur circulus horarius respectu meridiani horologii (§. 12.) Reducatur denique index ad momentum temporis veri; dico radium planetae reflexum iam continuo super linea meridiana horizontaliter incessurum fore.

§. 17. Diſponendus nunc erit tubus pro obſeruatione. Hic licet longiſſimus ſit et grauiſſimus, abſque vllo prolixo adparatu tamen poterit reponi ſuper aliquot
Tab. VIII. fig. 4. ſcabellis vel menſis $efgh$ aut plane in pariete domus ſecundum lineam meridianam, boream verſus, firmari. In foco vitri obiectiui ante micrometrum conſtituatur diaphragma ex charta tenui oleo imbuta vel vitro per attritionem leuiter obfuſcato. In medio eiusdem ſit apertura campo viſionis tubi aequalis ad radios lucis transmittendos. Inſeruit hoc diaphragma, in quo imago planetae delineatur, ad eam deinde facilius ad oculum deferendam. Arundo tubi ex aſſeribus in figura quadrata aut ſexangulari poteſt conglutinari, vbi ſufficit, ſi ad diſtantiam ſingulorum 10 pedum ſcabellis fulciatur. Vel etiam ſi tubis abſque arundinibus vti placet, ſufficit, ſi vitrum obiectiuum annulo inueſtiatur et in ſcabello verticaliter firmetur. In altero ſcabello collocetur oculare cum diaphragmate et micrometro, breuiori tubo incluſum. Ambo ſcabella ita diſponantur, vt axis per centra vitrorum tranſiens ſit horizontalis et cum linea meridiana horologii ſimulque cum centro ſpeculi congruat. Dico ſub hac diſpoſitione planetam quoad integram moram ſupra horizontem per tubum immobilem poſſe obſeruari.

§. 18. Collocauimus iam tubum in linea horizontali verſus ſeptentrionem. Poteſt vero habere quemuis alium ſitum et inclinationem, quem locus obſeruationis concedit, dummodo planeta radios ſuos ad ſpeculum transmittere poſſit, et ſpeculi altitudo et diſtantia ſecundum inclinationem lineae gf fuerint determinatae. Poteſt etiam

etiam haec determinatio mechanice fieri absque calculo. Axi scilicet indicis excauato immittatur stilus tenuis ad eam altitudinem, in qua per tubulum super indice, ad horam praesentem conuerso, planeta extremitatem stili stringere videatur, sic habebitur simul et linea meridiana horologii, et tangens et secans declinationis, quae posterior in cauda speculi signata quamlibet eius positionem concedit, si modo terminus iste signatus cum extremitate stili congruat. Sed quoniam in omnibus aliis dispositionibus aliquo tempore apparitionis planetae radius incidens angulum facit nimis acutum, vnde viuidum obiectum in tubum deferri nequit, nostra reliquis erit praeferenda, vbi angulus incidentiae raro infra 45°. descendit, adeoque repraesentationes magis viuidae sunt.

§. 19. Attendamus nunc ad commoditatem, quae ex nostra methodo in obseruatorem redundat. Hic sellae coram vitro oculari insidens otiosum agit spectatorem respectu directionis tubi. Haec sua otia vero impendere potest ad eo adcuratiorem obseruationem phaenomenorum coelestium. Diametros adparentes planetarum iam ope micrometri nullo fere negotio determinat, expectant enim mensurationem. Eclipses solis et lunae earumque phases quietus attendit. Macularum solarium et lunarium figuram et situm commode delineat. In genere omnia redeunt inde commoda, quae et ex fixatione radiorum et ex firmo et commodo situ tubi fluunt. Longissimi tubi centum et vltra pedum, licet optimae notae, nullius tamen fere vsus sunt, dum vix vltra altitudinem viginti aut triginta graduum attolli, ideoque in contemplandis

 planetis

planetis tantum visui esse possunt, dum versantur circa horizontem. Hic vero vaporibus plerumque obnubilati adparent et potiora phaenomena sua abscondunt; de qua re in astrotheologia sua conqueritur Derhamus. Hinc procul dubio neque de satellite Veneris neque de motu vertiginis Mercurii satis constat. Concidit hic titubatio tubi, quae etiam in minoribus, praesertim vento eos feriente, obseruatorem turbat. Euanescit hic incommoda corporis inflexio, cum altitudo planetae vltra 45° adscendit; quae simul efficit, vt obseruator tantum per vices tubum inspicere queat. Abest difficultas planetam ad oculum redigendi. Carere denique possumus praegrandi illo et pretioso adparatu, qui ad methodum hugenianam, cassinianam et bianchinianam requiritur. Tacemus, quod hac methodo optime curiosis aliis, tubi tractationem ignorantibus, quaeuis phaenomena coelestia facillime monstrare possimus; nec non, quod obseruator hyemali tempo pore in cubiculo persistere possit, si tantum machinam ante fenestram reponat, et radiis transitum per foramen concedat.

§. 20. Nec vero silentio praetereundum erit, quibusdam nostra methodus prematur difficultatibus. Grauissima harum consistit in exquisita praeparatione speculi metallici, dum vitreum propter duplicem reflexionem adhiberi nequit. Desideratur vero in eo perfectio superficiei in eodem gradu, ac in maioribus vitris obiectiuis. Interim, licet plana superficies admodum difficile in eiusmodi perfectionis gradu speculis concilietur, valent tamen nostri aeui artifices eis superficiem conuexam vel concavam ram satis adcuratam inducere, quemadmodum nouissime fabricati tubi newtoniani et gregoriani docent. Conducit tamen, si radius sphaericitatis speculi, quantum fieri potest, superet radium sphaericitatis vitri obiectiui. Alias enim longitudo tubi sensibiliter augetur vel minuitur. Contrahitur nimirum per speculum concauum et elongatur per conuexum. In priori casu augetur quidem claritas obiecti sed minuitur vis augens tubi. In posteriori casu tubus quidem magis auget diametrum obiecti, sed paullo obscurius illud sistit, cui tamen per vitrum oculare maioris foci facile succurritur. Magnitudinem speculi determinat secans anguli semirecti ad radium diametri aperturae vitri obiectiui. Reliquae difficultates omnes per adcuratam machinae dispositionem euitantur.

§. 21. Indicabimus quoque paucis differentiam inter nostram machinae adornationem et inter grauesandianam. Haec in eo consistit vt 1) in nostra dispositio speculi et horologii per huius motum non tam facile turbari queat. 2) Grauesandius opus habet peculiari instrumento, quod positorem vocat, cuius ope situm speculi determinat, dum hunc positorem in quauis noua dispositione fulcimento speculi imponit illudque ad distantiam secantis declinationis, quae in positore designata est, ab axe horologii remouet, qua prolixitate in nostra supersedere possumus. 3) Propter exiguam nimis furcae indicis altitudinem radius in minori altitudine supra horizontem meridiem versus horizontaliter plane reflecti nequit, quae directio tamen potissimum desideratur. 4) Grauesandiana propter immobilitatem circuli horarii mo-

tui

tui solis tantum quadrat, nostra vero pro omnibus planetis accommodari potest. Denique 5) nostra sub qualibet eleuatione aequatoris inseruit, cum grauesandiana tantum in illis locis adhiberi queat, vbi eleuatio aequatoris ab obliquitate horologii non multum discrepat.

§. 22. Superaddimus adhuc, quod M. Bossat iam inciderit in eiusmodi methodum, obiecta per duo specula, manu conuertenda, in tubum reflectendi. Haec vero partim propter taediosam tractationem manualem, partim propter insignem difficultatem, planetam hac ratione ad oculum redigendi, partim etiam propter obscuritatem obiecti ex duplici reflexione ab astronomis non fuit recepta.

SVP.

SVPPLEMENTVM AD MEDITATIONES DE VI AERIS ELASTICA,

AVCTORE
Michaele Lomonosow.

§. 1.

Cum meditationes nostrae de vi aeris elastica in conventu Academicorum praelegerentur, monuit clarissimus Richmannus nos proprietatem aeris elastici palmariam praeteriisse; nempe ex theoria nostra rationem nullam reddidisse, cur elastica vis aeris proportionalis sit eiusdem densitatibus: tum id me dubitatione turbatum praetermisisse, respondi, promisique me inposterum satisfacturum. Dubitatio vero hac de lege orta est primum ex inconuenientia theoriae nostrae cum illa, quam dubitationem tandem assertum celeberrimi Bernoullii magnopere auxit.

§. 2. Deduxit nempe Bernoullius(*) ex ictibus globorum tormentariorum *auram illam elasticam, quae ex puluere pyrio accenso elicitur, aut non aerem esse communem, aut elasticitates in maiore ratione crescere, quam densitates: non posse enim densitatem aeris, qui a puluere pyrio inflammato oritur, esse plus quam millies densitate aeris ordinarii maiorem, si puluis pyrius vel totus ex aere compresso compositus sit, quod ex grauitate pulueris specifica*

(*) Hydrodynamica p. 243.

concludit. Imo elasticitatem aurae illius longe maiorem fieri oportere affirmat, si omnis puluis ad explodenda tormenta adhibitus et quidem in instanti flamma consumeretur.

§. 3. Quod aura illa sit verus aer atmosphaericus, demonstramus alias (*) An vero affirmandum sit, elasticitates aeris densitatibus eius proportionales esse, id non obscure patebit, si ex aliis experimentis ob id institutis deductiones Bernoullianis similes, ipsasque corroborantes elici potuerint. Hunc in finem nulla alia experimenta aptius adhiberi posse censemus, quam vbi compressus admodum aer, in cohibentia vasa agit, ipsaque disrumpit, ex quorum resistentia vis eius elastica determinari et cum volumine comparari potest.

§. 4. Cum vero notissimum sit, aqua in glaciem abeunte, volumen eius crescere, et stupenda vi cohibentia vasa rumpere. Id autem ab aere ex poris aquae iam iam congelascentis liberato, et in bullas collecto proficisci, extra omne dubium est. Hunc in finem confici curauimus aliquot globos vitreos diuersae magnitudinis, cauos, cum tubulis crassis angusti luminis, quos aqua repletos exponebamus magno, qui hac (**) hyeme saeuiebat, frigori. Conglaciata aquae portio, quae quasi crusta quaedam latera cauitatis occupabat, singulos globos disrupit, praeter eos quorum foramen conglaciata prius aqua non satis obturatum fuit, ideoque vi glaciei internae cylindrus glacialis *d* ex lumine extrudebatur. Disruptio facta est secundum varias directiones, plerumque tamen secundum

Tab. X. Fig. 1. 2. 3. 4.

(*) Meditationibus ipsis (§. 27.) et singulari dissertatione quam paramus.
(**) Anno 1749.

dum longitudinem tubuli, vt in figuris 2. 3, 4, ostenditur lineis *m m*. Post ruptionem reliquum aquae effluebat, et cauitatem *c* relinquebat.

§. 5. Huiusmodi globorum vitreorum maximus, quem adhibuimus, habebat diametrum 26 linearum Parisini Regii pedis, diameter cauitatis erat 8 linearum, crusta glacialis $1\frac{1}{2}$ lineas circiter crassa (hanc mensurare cum debita accuratione non potuimus ob inaequalitates, quas effluentis ex medio *c* residuae aquae repentina ad ipsam crustam congelatio, praesertim in parte interiore crustae produxerat, et crassiciem illius augebat; maximam tamen, quam fieri potuit, hic assumimus) adeoque diameter cauitatis in crusta erat 5 linearum. Hinc per calculum deducitur planum ruptionis, excepto tubulo, fuisse 480 lineas quadratas, planum circuli maximi, quem habere debet globus ex crusta glaciali formatus, 41 lin. quadratas. Cylindrus vitreus $\frac{25}{100}$ pollicis Rhenani ruptus est 150 libris (*) vnde per calculum deducitur cylindrum vitreum 1 pollicem Regium Parisinum in diametro habentem rumpi debere 2572 libris; adeoque cylindrum, cuius planum ruptionis est 480 lin. qu. ad ruptionem requirere libras 10925 circiter.

§. 6. Si aqua integra in cauitate globi vitrei conglaciata fuisset, vis glaciei disrumpens aestimanda foret ex plano circuli cauitatem integram bifariam diuidentis; sed quoniam in medio remansit aqua a conglaciatione libera, quae idcirco non producebat aerem, nec agebat in vitrum; aestimari ergo vis agens debet, ex plano circuli maximi, quem habere debet globus ex crusta glaciali formatus, quod est aequale 41 line-

(*) Muschenbroeck in notis ad experimenta Academiae del' Cimento p. P.

is quadratis. Columna Mercurii aereae aequipollens 41 linearum quadratarum baſi incumbens, 28 pollices alta, ponderat grana 40242, ſeu libras 4 et grana 3378. Hinc ſi aqua in cruſtam conglaciata vel integra eſſet aer, condenſatum fuiſſe oporteret in $\frac{1}{2521}$ circiter ſpatii, quod in atmoſphaera occupat, vt globum hunc disrumpere potuiſſet. Vnde ſi denſitates aeris elateri proportionales eſſent, aquam ſe ipſam $2\frac{1}{2}$ plo ſpecifice reddi grauiorem neceſſe foret, cum in glaciem conuerteretur; quod cum abſonum ſit, non obſcure igitur apparet cum Bernouliana deductione noſtram magnopere conſentire.

§. 7. Suſpectam eſſe materiam vitri ingenue fatemur, nempe eam rumpi poſſe etiam ob repentinam refrigerationem ſine conglaciatione aquae in cauitate globi. Verum tamen hoc experimentum duobus aliis globis vitreis aqua repletis et frigori expoſitis repetitum fuit, eodem ſemper ſucceſſu, cum plerique eiusmodi vitrei globi alii, caui, et ab aqua vacui, cum illis ſimul frigori expoſiti ſine ruptionis damno perſtiterint. Vnius diameter erat 18 linearum, cauitatis $5\frac{2}{3}$, cruſtae glacialis craſſities lineae 1 —, alterius diameter 17 lineas cauitatis $5\frac{1}{2}$ lineae, cruſta glacialis $\frac{3}{4}$ lineae craſſa.

§. 8. Commodum clariſſimus collega noſter Richmannus inſtituit, eodem gelu durante, ad aerem vi frigoris in bombis comprimendum experimenta, quae vi congelaſcentis aquae ruptae erant. Vna earum a nobis menſurata fuit, quae habuit in diametro 94 lineas Pariſinas, cauitatis diameter media erat 60 linearum, cruſta vero glacialis 4 linearum, adeoque diameter aquae, quae ad momentum ruptionis

tionis nondum conglaciata fuit, 52 lin. Quod phaenomenon quoniam cum eis, quae ipsi experti sumus, omni ratione conuenit, optime ad propositum nostrum adhiberi potest.

§. 9. Ponamus firmitatem ferri fusi, ex quo bombae parari solent, inter ferri et vitri firmitatem esse mediam, ob mixtas in illo vitrescentes particulas cum ferreis. Quoniam ex Muschenbroeckianis experimentis colligitur firmitatem vitri ad firmitatem ferri esse vt 24 ad 450, erit media 237, adeoque vires ad bombam rumpendam requiri aequales 904105¼ librae. Pollex cubicus Mercurii ponderat grana 5048; columna igitur Mercurialis aereae aequipolens, insistens plano sectionis circuli maximi crustae glacialis in globum reductae ponderabit grana 1375159 seu libras prope 150. Hinc ad rumpendam bombam, si vel integra crusta glacialis fuisset nil nisi compressus aer, requireretur 6000 ies densior atmosphærico, atque adeo crusta glacialis plusquam sexies semet ipsa grauior esse deberet.

§. 10. Aqua sub campana antliae exteriore aere decedente multo maiorem copiam aeris emittit, quam quae ex congelascente aqua gelu elicitur et in bullas vasa rupturas colligitur. Vnde apparet aerem in aqua contentum non omnem resumere vim suam elasticam per congelationem, adeoque nec integrum in cohibentia vasa agere. Id autem si obtineret, multo maiores effectus ab eadem vel iidem a minori copia glaciei exsererentur. Ex hac itaque circumstantia illi, quam Cel. Bernoullius annotavit (*) gemina, etiam apparet aeris elasticitatibus densi-

 tates

(*) Hydrod. p. 242.

tates illius in magnis compressionibus proportionales non esse. Accedit quod etiam Cl. Muschenbroeckius (*) obseruauit, cum aerem plusquam in quadruplo minus spatium redigeret, ipsum non amplius auscultare regulae traditae, sed plus resistere viribus comprimentibus. Id autem quomodo ex nostra theoria sequatur, videamus.

§. 11. Sint massae aeris duae pondere aequales A et B, spatiola vero vibrationis inter corpuscula massae A ad spatiola vibrationis inter corpuscula massae B vt a ad $a-b$; erit volumen massae B ad volumen massae A $= a^3 : (a-b)^3$. Quoniam autem globuli aerei eo frequentius reciprocant vibrationes suas, quo minora habent spatiola vibrationis, erit frequentia ictuum inter globulos, vt spatiola reciproce. Hinc frequentia ictuum inter omnes globulos, massae aereae A secundum omnes tres dimensiones ad similem frequentiam ictuum inter omnes globulos aereos massae B erit $= (a-b)^3 : a^3$. Cum vero ictus reciproci globulorum aeris quo frequentiores sunt, eo fortius a se inuicem illos repelli et vim elasticam aeris eo magis inualescere oportet. Erit ergo vis elastica massae aeris A ad eam massae aeris B $= a-b^3 : a^3$, adeoque elasticitates aeris erunt vt volumina reciproce, seu quod idem est, densitatibus proportionales.

Fig. 5. §. 12. Verissimum hoc foret, si reciprocantes globuli aerei B et C post quemlibet impactum resiliendo semper in proximum aliquem globulum A directe incurrerent, nec per interstitia transsilientes illos saepius praetergrederentur ad alios globulos remotiores sibi obuios tardius impetum facturi

(*) Elem. Phys. Cap. 36. §. 794.

ducturi et supradictae rationi derogaturi. Sed quoniam hoc supponi non posse satis apparet, alia igitur ratio intercedat necesse est. In quo autem ea consistat et vnde proveniat, id, vibrationum varietates attentius considerando, inueniri posse certum habemus.

§. 13. Corpuscula aeris B et C post collisionem saepius etiam per spatiola AA transsilire, corpusculis A intactis, et corpusculorum aeris diametros eo maiorem rationem ad spatiola vabrationis habere, quo magis aer comprimitur, nemo dubitabit. Porro vibrationibus numero infinitis simul consideratis, dari oportet rationem aliquam vibrationum, quae in proximos globulos A impetum faciunt ad vibrationes, quibus per interstitia AA globuli motu in remotiores D incurrunt. Illam autem ad hanc esse vt numerum globulorum aereorum, qui in superficiae sphaerae, semicirculo AFAB descriptae inter globulos A collocari possunt, ad numerum globulorum A, qui singuli a se inuicem distant tantum quantum a centro B. Crescente densitate aeris globuli A propius ad se inuicem accedent, interstitia inter illos decrescent, minor numerus vibrationum globulis A intactis fiet, atque adeo ratio vibrationum, quibus per interstitia AA globuli transsilientes in remotiores D incurrunt, minor erit ad vibrationes, quibus proximi globuli A feriuntur. Hinc maiori frequentiae ictuum a minori distantia globulorum aeris profecta (§. 11.) id quoque accedet, vt propter contracta intersticia AA inter proximos aeris globulos frequentiores quoque impactus fient in ipsos, et hoc ipso resi-

resistentia aeris elastici augebitur vltra assignatam rationem (§. 11.) In ea compressione aeris, in qua vibrationum spatiola minora sunt diametris globulorum, omnes conflictus globulorum erunt cum proximis A; cum per interstitia A A sine impactu penetrare non potuerint. Vnde perspicitur, quantum ratio elasticitatum aeris discrepare debeat a ratione densitatum in summa illius compressione.

PHY-

PHYSICA.

HISTORIA ANATOMICA
OVIS PRO HERMAPHRODITO HABITI.

AVCTORE
Abr. Kaau Boerhaave.

Vt in reliquis partibus, tam externis, quam internis, corpora humana inter se differunt, non modo ratione regionis, natiuitatis, aetatis, vitae et laborum generis, exercitationisue, sed et earumdem dispositione et lineamentis, ita in vtroque sexu genitalia interne, externe pudenda, sedulo obseruata, raro ita inter se conueniunt, vt nulla oculo attentissimo notetur situs vel figurae alia facies, quam in caeteris. Dicta firmant partes: quae vteri fundo appensae, per duplicatos peritonaei processus, easdem ambientes, inter se nectuntur, ouaria scilicet, tubae Fallopianae, ligamenta dicta rotunda, in foeminis. Has nunquam fere obseruaui, eadem plane ratione dispositas in pelui; contigit tamen multa diuersae aetatis dissecta mulierum examinare corpora ad hoc attento. Idem in viris obtinet, siue respiciamus ad organa, quae prolificum semen perficiunt et conseruant, siue ad illa, quae hoc, tempore orgasmi venerei, expellunt.

Vti autem in internis, ita in externis, vix vnquam obseruatur eadem perfecte figura pudendorum, in vtroque sexu, licet partes constituentes sint in genere similes. Quoties vero a naturali statu ita decedunt, vt, vel defectu, vel augmento, oriatur quaedam deformatio, statim de Hermaphroditis cogitatur atque decantatur. Tales an dentur veri, qui ſcilicet in vtramque venerem parati cum foeminis concumbunt, atque viciſſim viros admittunt, vix credere poſſum; ipſa fabuloſa antiquitas talem deſcribit,

nec foemnia dici,

Ouid. Metam IV. Fab. XI. *Nec puer vt poſſit, neutrumque et vtrumque videtur.*

Imo vero an illi quidem exſtant, in quibus vnus ſexus praeualet, addito genitalium alterius quodam ſupplemento, vehementer dubito, quoniam hi attentius examinati, ex teſtimonio Auctorum, vltimum hoc deformatum nec peruium, nec ad opus aliquod venereum, aut ad vrinae excretionem, aptum gerunt. Si puero, rite formatis caeterum genitalibus, intra ſcrotum et anum, cutis perinaei complicata ſulcum, ſed inperuium, ita format, vt inde labia leuiter protuberent, vel ſi ipſum ſcrotum ad ſeptum medium, quod externe ſutura notatur, fiſſum rimam facit, non video, cur illi Hermaphroditi vile nomen imponatur, inprimis, ſi ad procreationem caeterum aptus ſit. Dicam, quid ſentio; omne, quod in vtroque ſexu mixtum ex forma duplici perhibetur, alterius modo credo informem figuram, ſiue aucta, ſiue imminuta, partium ſubſtantia.

Memorabilis eſt Hiſtoria, quam narrat Regnerus de Graaf (1) de Infante, cui baptiſmo nomen Cornelii imponebatur, ob partium genitalium externam figuram, quae deprauata ſexum virilem mentiebatur (2), quae mortua diſſecta inuenta eſt puella (3). Sola clitoris, mole aucta, atque labiorum pudendi tumor errorem impoſuerat. Ta-

(1) De Mulier: organ. gener. inſeru. pag. 299.
(2) Ibid. Tab. XXIII.
(3) Ibid. Tab. XXIV.

Talem examinaui pauperam, ſtolidam, foeminam, viginti et vltra annos Hermaphroditum a natiuitate declamatam. Haec mammoſa in parte ſuperiore rimae pudendi pendulam gerebat, figura ſimilem peni virili virgam, glande rubeſcente, ſed inperforato coronatam, praeputio inſtructam breuiore, quam vt totum glandem tegeret, haec ſesquiunciam circiter longa, minimum digitum craſſa, manibus tractata erigebatur antrorſum, et, vt penis, duplo maior et craſſior, rigeſcebat. Rite autem examinata erat ipſa clitoris, ſub qua, labiis diductis, conſpiciebantur muliebria perfectiſſima, et orificium vrethrae, ſuo loco prominens, patulum. Figura pudendorum externa multum conueniebat cum illa, quam exhibet de Graaf in mox memorata puella, niſi, quod pudendi labia non ita tumeſcebant ad inferiora, in quibus etiam nullum veſtigium tangebatur teſtium. Talem caſum narrat Bartholinus de muliere Hafnia, Hermaphrodito credita, ob elongatam et craſſam clitoridem, quae tamen vera foemina, in itinere, militibus vſum corporis ſui concedebat (1). Et Isbrandus de Diemerbroeck audacter affirmat, eſſe hanc partem increscentem, quae virgam virilem effingit in foeminis, vnde Hermaphroditi creduntur (2), affert ſimul duo memorabilia exempla, quae ipſe vidit et examinauit, ad hoc affirmandum (4). Plures ego Auctores non adducam, etſi plurimos hac de materia compilare poſſem; et nugas omitto refutare de foeminis in viros mutatis, ſatis hoc ſuperque fecit modo laudatus Diemerbroekius (5).

(1) Anat. reform. cap. XXXIV.

(3) Oper. anatom. cap. XXVI.

(4) Ibid.

(5) Ibid.

Vti in foeminis, aucta mole, clitoris, ita in viris, praeter memoratas rationes, sulcum scilicet in perinaeo, vel scroti fissuram, quandoque defectu partium oritur deformatio in genitalibus, vnde illi Hermaphroditi creduntur. Rarus habetur, et forsitan in historia naturali nusquam notatus, casus quatuor hominum Sibiricorum ex duobus parentibus natorum, eadem exacte genitalium deformatione praeditorum, vti recte memorat Cl. Gmelinus, qui primus hos in patria vidit, examinauit, et accuratissimam partium genitalium deformatarum descriptionem ad Academiam misit. Ex qua operae pretium visum fuit, ex Sibiria hos homines Petropolin accersere, vbi et illos coram Academia examinauit et descripsit Cel. Wildius. Vtriusque accuratissima genitalium deformatarum descriptio inter se collata conuenit satis pulchre, sententia tamen diuersa est de definiendo sexu. Pro foeminino stat Cl. Gmelin, contrarium opponit Cel. Wildius; vterque sua attulit argumenta, aliorum Scriptorum etiam auctoritate firmata. Dissertationes autem hae prolixiores a magnis his Viris non in eum finem descriptae sunt, vt publicarentur, multo minus hisce commentariis insererentur. Sufficiet ergo Beati Weitbrechti prima, et vltima inquisitio post triennium repetita, vtpote quae continent accuratissimam simul et breuem descriptionem. Prima quidem in definiendo sexu ambigua, altera, in prouectiore aetate de sexu certior, concludit ad masculinum. Interim non possum, quin hoc addam. Miror scilicet, lite orta de sexu, quod ad hanc componendam, vel saltem ad sententiam alteram firmandam, nemo cogitauerit de dimetiendo corpore, quoniam constat, ambitum pectoris ad peluis esse in foeminis circiter, vt duo ad tria, in viris contra, thoracem latiorem tres habere partes ad duas peluis, vnde viri corporis truncus conuergit inferiora versus, foeminae contra latior diuergit (1): quare, ex amplitudine coxarum, in foeminis artus inferiores (femora scilicet et crura) iterum ad se inuicem conuergunt, in maribus diuergunt: quod optime expressit Vesalius istis figuris, quarum altera Herculem, altera Venerem depingit (2). Multum hoc fecisset tentamen ad enucleandum genus, quoniam reliquae corporis partes rite formatae et ad modulum erant compositae.

Beatus Weitbrechtus autem hos iuuenes primo examinauit anni 1743 mense Octobri, atque illos his verbis descripsit.

1. *Abraham Kusnezov*, 2. *Terentius Kusnezov*, 3. *Michael Luganof*, *Iohanis Luganof*.

Memoratu dignum est omnino, vti Cl. Dn. D. Gmelinus, cum haec subiecta inuenerat, recte indicauit, quatuor pueros, (tali enim habitu incedunt) binos quosque fratres, intra paucos annos, in eodem loco natos, eandem fere genitalium externorum deformationem a natura passos esse. Omnem rem Cl. Gmelinus ita accurate descripsit, vt pauca mihi addenda videantur, quae fortasse non nisi temporis diuturnitate diuersitatem quandam induxerunt; duo enim iam anni sunt, ex quo Cl. Gmelinus obseruationes suas, dum in Sibiria viueret, instituit; et experientia docet, istiusmodi deformitates mirum quantum mutationibus obnoxias esse. Dicam igitur primo

(1) Accuratam dimensionem collegit Cl. Hallerus DCCIX. inst. Boerhauii Tom V. par. II.

(2) In Epitome lib. de corp. hum. Fabr. ad pag. 608.

mo, quid mihi in his subiectis apparuerit, tum vero, quid mihi exinde sequi videatur, adiungam.

In omnibus quatuor pueris propendet in pubis regione media membrum aliquod solitarium, fere cylindricum, non plane rectum, sed aliqua ex parte recuruum, subdurum, quod vel peni masculo vel clitoridi foemininae quodammodo, neutri perfecte, assimiliari potest. Quantum tactu diiudicare licet, vnico tantum corpore constat, quod cauernosum dicere licet: nam membrum, testantibus pueris, sub diluculum plerumque rigidum euadit, quod et accidit, dum illud diutius manu palpes. In apice corpore spongioso rubicundo, vt glans esse solet, munitur. Vrethra autem, dum ex curuatura ossium pubis extrorsum assurgere debebat, non tota cum corpore cauernoso adunatur, sed in media via, quasi truncata sistitur; hinc orificium huius meatus eo loco, quo foeminis esse solet, conspicirur. Limbus orificii ob vrethrae spongiosas reliquias per cutem teneram transparentes liuidiusculo colore gaudet. Meatum autem vrinarium reuera tanquam detruncatum haberi debere, docet sulcus aliquis superficiarius, longitudinalis, eo loco, quo vrethra sub corporibus cauernosis situs esse solet, insculptus, ab ipso illo orificio ad glandis apicem vsque prolongatus. Hic sulcus speciem dimidiatae cauitatis vrethrae plane prae se fert, vtpote lacunis consuetis, imo et minutis corpusculis glandulosis, scatens. Glans ipsa inferne in medio hiulca est pro sulci continuatione, et corona ad latera sulci paulum protuberat, vt sulcus quasi in semi-canalem conuertatur, quod imprimis in Iohanne optime patet. Membrum peniforme in dorso tegitur

gitur cutis admodum laxa, plerumque transuersim rugosa, post glandis coronam, vt in aliis solet, annexa; quo propius glandem accedit, eo amplior, hinc ob spatiosam largitatem suam glandi amplum praeputium paebens. Cutis autem non totum membrum ambit, sed in auersa sede ad compensandum fraenulum, quod propter hiulcum glandis statum, de quo diximus, in medio locari non poterat, ex vtroque latere post memoratam coronae protuberantiam affigitur, et porro sulco ipsi, secundum longitudinem marginis eius, stricte adnascitur; quae quidem stricta atque arcta cutis connexio efficit, vt membrum, quando riget, incuruetur, quia haec strictura non ita facile extensioni cedere potest, ac superior cutis laxior et mobilis. Iuxta membri originem vtrinque cutis protuberat turgidiuscula, laxa in rugas profundas, eleganter crispatas, quemadmodum scrotum corrugatum esse solet, oblique lunatim incuruatas et perinaeum versus descendentes, complicata. Haec cutis structura non inepte quidem pro ruderibus scroti dimidiati et vtrinque sursum retracti haberi potest; sed et labia sinus muliebris simulat. Certe in Michaële superficiario obtuitu perfectam et elegantem concham muliebrem refert. Quid autem in harum rugarum cauitate interna lateat, testes an ouaria? difficile est dictu; solus tactus ad quaestionem soluendam non sufficit. In Abrahamo nulla testiculorum vestigia deprehenduntur; in Terentio autem vtrinque corpus aliquod oblongum vesiculare subesse, et in inguine vsque ad annulos processibus peritonei transmittendis inseruientes pertingere, tactu dignoscitur, quod an pro testiculi simulacro an an pro hernia ventosa, an pro membrana δάρτος incrassata et inflata haberi debeat, ante sectionem diiudicari nequit. Imo, etiamsi certo constaret de testibus, nulla tamen vasa deferentia tetigi. Denique in nullo horum puerorum vaginae vestigium vllum apparet; in Michaële et Iohanne sub vrethrae orificio cutis perinaei vtrinque in labiorum formam turget. Quid sub cute lateat? ignoratur.

Huc vsque Cl. Weitbrechtius prima sua inquisitione: cum autem in initio huius dissertationis recte annotat, temporis tractu multa posse mutari in eiusmodi subiectis, ad elucidationem triennio circiter postea, mense nempe Augusto Anni 1746, disquisitionem suam repetiuit, atque figuris ad viuos delineatis ornauit alteram concinne et breuiter his verbis descriptam dissertationem.

In tribus illis Hermaphroditis, Abrahamo et Terentio Kusnezof fratribus, itemque Iohanne Luganof (Michaël enim Iohannis frater clam euasisse dicitur) repetita inquisitione sequentia inueni.

I. In Abrahamo decimum quintum annum agente pubis regio turget. Lateri dextro membri penduli adiacet bursula, in qua testiculus et epidydimis, et vas deferens distincte tangi queunt. In latere sinistro autem bursula est vacua et pectinatim rugosa. Membrum tegitur cute laxissima amplum praeputium formante. Orificium vrethrae distat a radice glandis pollicem circiter. Sulcus inter hos duos terminos comprehensus scatet lacunulis longitudinalibus a foramine vrethrae glandem versus radiatim assurgentibus, in quibus et minuta corpuscula, glandularum speciem prae se ferentia. Glans hiulca et quasi fissa. Ad huius

fissu-

fissurae margines cutis fraenulum vtrinque laxum format, lateribus sulci autem vtrinque stricte adhaerens impedit membrum, ne rectum extendi queat.

II. In Terentio tredecim annorum, ambae bursulae eleganter rugosae. Quando inspirat, corpora vesicularia vacua, vel aëre, vt videtur, plena in inguina retrahuntur, in exspiratione autem in bursulas exprimuntur. Huic penis multum riget. In sulco sunt quidem lacunae, sed non ita radiatim dispositae; aliqua earum satis profunda, longitudinalis, immediate post glandem sita, foueolam coecam gerit vix aciculae caput capientem. Reliqua vt in Abrahamo.

III. In Iohanne Luganof duodecim annorum, cutis ad latus membri rugosa, et ad bursulas formandas apta. Membrum et praeputium congruit cum figura Gmeliniana. In bursulis nihil tangi potest, quando puer iacet; quando autem sedet, corpora solida, globosa, quae prius in inguine delibuerant, in bursulas descendunt, sulcus brevior est ac in reliquis, et in eo aliquae lacunulae perpendiculariter sibi succedentes. Glans profundius fissa.

IV. In omnibus totus horum genitalium apparatus cum reliquo corporis habitu in maiorem molem increuit. Omnibus membrum tractatum riget. Omnibus corpora cauernosa membri secundum synchondrosin ossium pubis assurgentia tanguntur. Omnes hactenus bene valuerunt. Nulla vocis mutatio hactenus, nulla barba, nulla pubes, nullum semen.

Hac noua disquisitione ego in mea pristina sententia confirmor: In his tribus subiectis esse solam defor-

 mationem

mationem externarum partium genitalium masculinarum; videlicet, membrum pendulum, incuruum esse penem, sulcum esse vrethram fissam, bursulas esse scrotum diuisum et translocatum. An partes genitales internae etiam deformatae sint? definiri certo nequit. In Terentio et Iohanne suspicandum est, testiculos aliquid passos esse. Abrahami autem testiculum, saltem dextrum, ad elaborandum semen aptum fore, maxime probabile videtur.

Haec altera indagine enucleauit, atque sententiam hisce exposuit Ille: mihi vero hos homines in patriam remissos, nec videre, nec examinare, contigit; rogatus interim sententiam, de sexu, dum magnorum Virorum inter se confero obseruationes adeo consentientes, atque inspicio figuras cura Cel. Weitbrechti depictas, quas ad rei veritatem elaboratas affirmat Doctissimus Kleinfeldius, tum illi, iam mihi, in Academia Adiunctus, atque anxius haereo, tantam inter tantos Viros componere litem, licet pleraque pro virili sexu pugnarent argumenta, ecce! bono quidem fortunato adfertur ouis ad Academiam habitus pro Hermaphrodito ob partium genitalium deformationem, quam dum examino, laetus video, esse obseruatis in hominibus Sibiricis simillimam: sic putabam, nactum esse occasionem memet ipsum instruendi de rei veritate, atque ex hac magis tuto concludendi ad illa. Alacris ergo examen aggressus, comperta in illo refero, data simul partium deformatarum vera figura, vt haec cum Sibiricorum comparata, multum tollat de scrupulo.

Ouis erat adultus iustae magnitudinis, cornubus ad posteriora circumflexis ornatus, emaciatus, vt puto, ab vlce-

vlcere ventriculi, in aperto, inuento: nec ad figuram totius corporis aliquid praeternaturale gerebat.

Infra coniunctionem vero ossium pubis, vbi illa in media pube synchondrosi iunguntur, prominebat corpusculum teres, medium circiter digitum crassum, anum versus et sinistrorsum incuruum, penem referens, praeputio mobili, laxo, amplo, leuiter in rugas complicato, naturaliter ornatum, quod in parte anteriore, superiore, constans cute crassa pilis hirta, eleuabatur in apicem acutum (1): inde vero deorsum et ad posteriora versus excrine tenuius porrigebatur, et breuius deficiebat, quam vt totum penem, eiusque glandem, tegeret (2).

(1) Tab. XI. fig. 2. C

(2) ibid. D

Extra hoc autem praeputium extendebatur penis ipse, ad finem suum valde incuruatus (3), glande ibidem rubescente ornatus (4), qui, oue supino iacente, fere totus a corpore penis tegebatur, sub illo delitescens, et ab eiusdem curuitate parum sursum disponebatur, abdomen versus.

(3) ibid. E

(4) ibid. F

Eleuato praeputii apice crassiore (5) vna cum pene, apparebat praeputium, extenuatum, laxum, amplum sensim oblique posteriora versus, et pene iam sursum reclinato, inferiora versus, descendere (6), atque vtrimque in arcum quasi exscissum, iterum ad glandem adscendendo formare fraenulum (7).

(5) Tab. XI. Fig. 3. C

(6) ibid. D

(7) ibid. E

Arcus autem hic praeputii plus lunatim exscindebatur in latere dextro, quam in sinistro, vnde ille ibidem laxior erat (8): inde penis sinistrorsum trahebatur (9) a vinculo fraenuli arctiore ad hoc latus: fraenulum au-

(8) ibid. D E

(9) Fig. 2. E F

autem, ex vtroque arcu vtrimque formatum, inferebatur coronae glandi, sed in medio, vbi sub illo vrethra
(1) Tab. XI. Fig. 3. H transire solet, deliquium patiebatur (1): id inde fiebat, quia eo loco semicanalis vrethrae desinebat, glandem non perforans. Vrethra nempe, qua parte illa sub coniunctione ossium pubis emergit, atque infra corpora cauernosa penis decurrit, iuxta longitudinem quasi transuersim descissa, parte dissecta ablata, formabat semicanalem a perinaeo ad glandem exporrecta, atque ibi-
(2) Fig. 3. HI dem desinebat (2). In parte autem inferiore vrethra ad perinaeum exhibebat canalem integrum, inde eo loco a lateribus parietum semicanalis et ab ambitu perinaei integri, formabatur foramen ouale, ea perfecte ratione, ac illud tum oritur in calamo scriptorio, quando, ad illum litteris exarandis adaptandum, partem dimi-
(3) ibid. I diam canalis auferemus (3). Per hoc foramen tubus immissus transibat sub perinaeum, atque per illum aëre inflato, eleuabatur supra ossa pubis leniter abdomen: vnde statim concludebam, esse foramen hoc vrethrae aperturam, non vuluae, quia vterus non tam facile flatu extenditur ac vesica, neque, vt haec, abdomen eleuat tunc, ob molem minorem.

(4) Fig. 2. et 3. G. Anus (4) suo loco ad exortum caudae et sub eo aperiebatur naturaliter; distantia autem hunc inter et exortum penis, perinaei erat vnius et quartae partis
(5) fig 2. GE Fig. 3 GB pollicis Rhenolandici longa (4), sed nullum in illa prominentis scroti vestigium, aut testium protuberantia percipiebatur, at vero leuis eminentia, quasi in futuram acta, hoc
(6) Fig. 3. L medium diuidebat (6).

Supra

Supra decursum ossium pubis, ad latera inguinum, conspiciebatur ab vtraque parte papilla, et iuxta hanc a latere externo, cutis quasi leuiter perforata, quod foramen rotundulum, caecum tamen, mox finiebatur, capitulum acus maximae circiter admittens; ibidem vero, et inguina versus, vtrimque tactus percipiebat corpus ouale, rotundum, durum, mobile versus annulos musculorum abdominalium, et sub cute fluxile, quod statim propter figuram testium, epididymidum, vasorum dictorum praeparantium et deferentium funiculi, digitis distiguendam, testem vtrumque cum suis vasis suspicabar. Qua in re vt certior essem, cutim incidi, et inueni, in vtroque inguine, bene formatum testem cum suo funiculo vasorum praeparantium et deferentium extra abdomen haerere, et erat in abdominalium musculorum parte insima annulus dictus perfecte, vt solet esse, naturalis a fissura tendinis obliqui externi atque carne musculi interni, vnde oriebatur, sparsis fibris carneis, cremaster validissimus, funiculum spermaticorum vasorum ambiens. Vt per hunc annulum vasa exibant, ita deferentia redibant, atque tam laxe hoc loco testes haerebant sub cute strictore, vt si naturali loco scrotum adfuisset, facile in illud dilapsi fuissent, iam enim, cute incisa, suis inuoluti membranis sponte, sine vi adhibita, vsque ad perinaeum, et sub mentula extendebantur.

Aperto igitur abdomine, exemi omnes partes pelvi contentas vna cum adhaerentibus genitalibus externis, ano et cauda, tumque accuratissime examinaui, nec vllum inveni in internis praeternaturale phaenomenon notandum. Vas de deferens vtrumque, poſt veſicam, ad ſe inuicem conuergens, pone collum eiusdem et initium vrethrae, formabat, vt fieri ſolet in illis animalibus, quae coitum non cito repetunt, extenſum ſaccum, qui in collum anguſtabatur, et in ſuperiore parte vrethrae aperiebatur, vti haec omnia flatus et liquor per vtrumque vas deferens immiſſus, indicabat.

Aëre deinde inflato in alterum cauernoſum penis corpus, altero ita detento, vt inde non exiret, penis erigebatur duplo maior et incuruus. Idem ſi adigeretur intra corpus ſpongioſum vrethrae, quod hanc ad initium integrum circumambibat, et hoc eleuabatur, ſimulque glans penis erigebatur. Tum vero apparebat ibi, vbi vrethra perinaeum inter et glandem exſcindebatur, ablato quaſi ſegmento, quod inferne iuxta ſemicanalem ſemi-corpus ſpongioſum hunc ambiret, atque in fungoſitatem glandis abiret. Aderant et in cauitate vrethrae in ſemicanalem exſectae paruulae cryptae, quae digito ſuppoſito preſſae apparebant, ſed tantillae, vt pictor has exprimere commode non potuerit.

Patet, ni fallor, ex hac deſcriptione, partes genitales viriles eſſe naturales internas, nec hic aliquid culpandum in externis, niſi, quod *primo* ſcrotum ſuo loco in burſam non fuit extenſum ad recipiendos teſtes, vnde illi in inguinibus, ſub ſtrictiore cute, latuerunt extra abdomen. *Secundo*, quod vrethra, ad ortum ſuum integra, ad decurſum naturalis, extra perinaeum non eſt continuata in canalem, ſed ſtatim ac inde emergebat, ſemidiſſecta fuit, et ſic ſemicanalis ad penis glandis coronam expor-

re-

recta, vnde, et quasi ſemicanali hoc altero ablato, itidem ibi deficiebat corpus ſpongioſum vrethrae. *Tertio* quod praeputium et naturali breuius, et in formando fraenulo aliquo modo luſit.

Ouis ergo hic, pro Hermaphrodito habitus, fuit verus mas, in quo partes genitales externae peccant defectu, et nihil omnino in his apparuit, quod alterius ſexus ſignum indicabat aut additamentum, quare et illi nomen maſculinum, minus caeterum uſitatum, apud Varronem et Gellium tamen inueniendum, paſſim impoſui. Tandem ſi deſcriptio partium genitalium externarum atque harum figura in oue comparatur cum deſcriptione et figuris, quas laudati Viri celeberrimi dederunt de hominibus Sibiricis, puto apparere, has ita inter ſe conuenire, vt facile ex inquiſitione Anatomica partium internarum, quam in oue inſtituere ego potui, non illi in viuis hominibus, lis de ſexu finita ſit: quodque, vt hic ouis, ita homines Sibirici habendi ſint pro maribus, non pro foeminis, quod que mixtus neutiquam ſit ſexus, et immerito illis nomen Hermaphroditorum imponatur.

Conſtat ergo, in vtroque ſexu quidem inuenire homines, quibus partes genitales externae ita ſunt deformatae, vt alterum mentiantur, deſideratur interim, cui fidem adhibemus, hiſtoria, et quidem Anatomica, Hermaphroditi veri, qui easdem ex vtroque mixtas, vel ſeparatim diſpoſitas in corpore geſſit externe diſtinguendas, vel interne. Ruyſchius fidelis Naturae ille indagator annuit, multos quidem ſibi exhibitos, nullos vero fuiſſe deprehenſos, Hermaphroditos, atque definit, membrum quod in Pſeudo Hermophroditis ſolet haberi pro pene virili, eſſe ſemper inuentum clitoridem praeter naturam elongatam et incraſſatam: vnde quidem concludere videtur, in ſolo ſexu foeminino fallaciam apparere Androgyni: declarauit inde foeminam hominem, qui iam vigeſimum quartum annum agens primo intuitu vir apparebat, idque vnice, quia membrum prominens erat inperforatum. Hoc tamen argumentum ſolum, niſi alia ſimul adſint phoenomena, nihil declarat, cum proſtant innumera exempla hominum, quibus vrethra neque ad apicem glandis penis pertingit, nec ibidem perforatur, qui, alio loco apertura orta, vrinam et ſemen emittunt, imo vero foeminas impraegnant, liberos procreant, de quibus in fine dicam; vnde nimis praecox iudicium magni Viri exiſtimo, et marem fuiſſe pueris Sibiricis ſimillimum et noſtro arieti inde ſuſpicor, quod ad aſpectum formoſarum Foeminarum non Virorum ſibi erigi hoc membrum faſſus eſt, et ipſe bene meritus Ruyſchius affirmat, duos teſtes, ſeu turbercula, in vtroque inguine vnum, repertos fuiſſe, quale et phaenomenon in pueris Sibiricis et in oue noſtro apparuit. Concludo tandem, in ſexu maſculino, ſi non frequentiorem, quam in foeminis, ſaltem multiplicem adeo ac in illis obſeruari errorem in genitalibus, vt alterum ſexum imponat: vti hanc ſententiam exponunt iam enarrata, ita affirmat eandem caſus Petropoli viſus, contrarius illi, de quo memorat Regnerus de Graaf (1): hic ſcilicet puero datum eſt, ob genitalia informia, baptiſmo nomen foemininum.

1 De mul. org. p. 299.

Anna

Anna Maria coniux Tubicinis, cui nomen Carolus Lang eſt, nono puerperio enixa eſt infantem tempore natiuitatis pro puella habitum, quare illi nomen Charlottae datum eſt. Tractu autem temporis, orta parentibus ſuſpicione circa ſexum, Mater filiolam ſuam putatitiam, iam ſeptem annos natam, Scientiarum Academiae praebet ſpectandam, vt ſcrupulus tollatur. Data tum fuit rei inquiſitio, beato iam Weitbrechto, qui et tum inuentorum amplam reddidit relationem, et merito concluſit creditam puellam fuiſſe puerum, atque defectum genitalium ſolum impoſuiſſe errorem: relata atque argumenta, in compendium contracta, hac occaſione addam.

In elatiore ſede ſynchondroſios oſſium pubis, inter capita prima muſculorum tricipitum (1), ortum membrum peni virili ſimile, nunc flaccidum, nunc rigidum, incuruum terminatur in glandem penis, non clitoridis, ſimilem (2). corpus autem membri tegitur cute, glandem nudam relinquente, poſt coronam illi loco conſueto alligata (3); glans ipſa ſulcum leuiter profundum ſed coecum gerit, dum eo vsque vrethra non pertingit.

Infra hoc membrum vtrimque prominet tumor cutaneus oblongus, turgidus, rugoſus, tactu cauus percipiendus (4), vnde apparet, quaſi ſcrotum iuxta longitudinem ſuturae diſſectum ab vtroque parte ad latus internum reflexum et iterum adunatum foret, vt ita ſeparatum et ſingularem ſaccum vtrimque conſtituat, qui proprio motu flacceſſit, et corrugatur. Vterque autem ſaccus continet corpuſculum quoddam, duriuſculum, ſubrotundum, lubricum, pro teſticulo habendum, quod contrecta-

1 Tab. XI. Fig. 1. A.

(2) ibid. C.

(3) ibid. B.

(4) ibid. D.D.

trectarur, corpore erecto, resupino vero eodem, inguina versus attrahitur. Rugae vtriusque sacculi interiores sunt transuersae et sibi parallelae, exteriores irregulares; adductis cruribus sacculi tumentes sese mutuo exosculantur, sola relicta rima, tumque speciem labiorum foeminini pudendi prae se ferunt. Diductis autem cruribus, adeoque et sacculis, paulo infra horum partem mediam apparet orificium aliquod, quod est vrethrae apertura sub cute in perinaeo descendentis (1), cuius pars exterior cutanea ablata, vnde in adscensu ad glandem, finditur in semicanalem (2). Latera autem huius fissurae cutanea, turgidula prominent rubicunda, et ligamentum habent vtrimque cutaneum horizontaliter dispositum, quibus cum cute sacculorum colliguntur (3). Ligamenta haec latera fissurae diuidunt; pars superior glandem versus latior, inferior vrethrae aperturam versus, arctior, latissima circa ligamenta est. Latus autem dextrum in genere, latere sinistro, latius est: maxima vero laterum latitudo vix lineam geometricam aequat. Ipsa autem fissura exiguam habet profunditatem, in qua conspiciuntur vascula quaedam sanguinea, iuxta longitudinem decurrentia, aliaque exigua splendentia granula, quae glandulae videntur (4). Fissura decem circiter lineas pollicis Londinensis progreditur, neque pertingit ad glandem, sed media via sistitur, succedente in eius locum cute, quae integra aliquantum prominet, suturae scroti corrugati instar: haec infra sulcum coecum, vt fraenulum glandi adnascitur, atque ipsa, ob stricturam incurua, aliquantulum membrum incuruans, impedit, ne illud satis eleuetur atque extendatur,

(1) ibid. E.

(2) ibid. F.

(3) ibid. GG

(4) Ibid. F.

datur, nec in longitudinem ſufficientem excreſcere poſſit; gerit autem leues quasdam impreſſiones diſcretas, quae, tanquam veſtigia fiſſurae oriundae, apparent (1). Vbi autem inferne apertura canalis terminatur et perineum incipit, ſuperficiarias quasdam foueolas itidem hoc gerit (2). Tandem dum mouetur vel rigeſcit membrum, ſecundum longitudinem fiſſurae ſub cute obſeruatur aliqua eleuatio, quae a motu corporum cauernoſorum ſubiacentium prouenit.

(1) Ibid. H

(2) Ibid. I

Primo intuitu quidem apparet deformis partium fabrica ſexum exhibere foemininum; contrarium autem patet.

1. Propter ſedem et poſitionem pudendorum elatiorem, quam in foeminis, in quibus haec ſub curuatura oſſium pubis eſt, hic ſupra eandem.

2. Propter tumores laterales per fiſſuram diſtinctos, qui veri ſacculi caui, cutanei, iam flaccidi, iam rugoſi corpora globoſa, lubrica, veros teſtes habenda, continent, et ſcrotum diuiſum non labia pudendi foeminini declarant, quae ſcilicet a ſubiecta pinguedine dura, ſolida tumescunt.

3. Propter membrum pendulum penem, non clitoridem, referens; vt arguit 1. ſitus elatior 2. directio corporum cauernoſorum, quae in pene recta deſcendunt iuxta longitudinem ſynchondroſios, indicante hoc motu illorum iuxta fiſſuram in attractione et erectione. Clitoridi vero, propter meatum vrinarium, nullus deſcendendi locus relinquitur, ſed diuaricatis cruribus, ſequitur directionem proceſſuum inferiorum oſſis pubis, lateraliter. 3. Tota glans, vt in viro, ab apice coronam ver-

ſus craſſeſcens, totam penis extremitatem ad fraenulum vsque ambiens rotunditate vngulaeformi: dum apex clitoridis lateraliter compreſſus, in duas portiones fiſſus, abit in Nymphas. 4. Magnitudo totius membri conuenit huic aetati pro pene, dum clitoris in illa eſt adeo exigua. Nec ſi quis afferat, eſſe clitoridem in maiorem molem excretam, pudendum reliqua requiſita in foemina poſſidet, contra in viro, etſi mutilatas, gerit partes.

Hinc merito concludo cum beato Anteceſſore meo, fuiſſe hunc puerum, in quo contra naturam ſcrotum in duos ſacculos diuiſum vtrimque teſticulum continet, et vrethra laeſa et fiſſa non penitus deducta eſt ad glandis extremitatem, vt eandem perforet, ſed media via truncata iuxta longitudinem.

Cum ergo in oue diſſecto certum apparet, in pueris vero ſuſpicandum eſt, partes generationi inſeruientes internas eſſe integras, vt ſemen conficere atque emittere valeant prolificum, quaeritur an illi, vel illis ſimiles adulti ad matrimonium apti ſunt admittendi? An doli mali accuſandi ſi, ſimulata partium integritate, vxorem duxerunt, et an tum huic exceptio competit iuris ſui ſibi non tributi? Conceſſo, partes internas, vt in oue, eſſe perfectas, externas vero, vt in his hominibus, mutilatas, ſed ad coeundum habiles, puto, non modo illis nuptias contrahere permiſſum, ſed et ab omni querela eſſe arcendam vxorem; quia conſtant exempla hominum, qui, glande penis imperforata, apertura alio loco infra illam in vrethra orta, cum mulieribus concubuerunt, atque easdem impregnauerunt. Narrat Melchior Fribe (1), vi-

(1) Miſcell. Med. Phyſic. Germ. An. 3. Ob. 98.

virum, cui glans penis deformis et imperforata erat, aperta vero infra fraenulum vrethra, bis vxorem duxisse et sex procreasse liberos non sine voluptate in coitu. Et Vander Herre (1) testatur, se plurimos nouisse, qui pene ad fraenum, imo vero pollicem vnum et dimidium ab extremitate perforato, liberos ex vxoribus procreauerunt. Nec ratio physica latet. Feruente Venere, semen non lente vel iugis fluxu exstillat, sed ad distantiam impetu violento eiicitur, musculis huic operi destinatis vi conuulsiva contractis; vnde etsi non immediate ante os vteri emittitur, hac ex causa eo vsque facillime peruenit. Et hac ratione puto, claustris virginitatis illaesis, semine ante vuluam a viro emisso, nec pene intromisso, puellas factas fuisse grauidas, cuius rei prostant apud Auctores quamplurima exempla; et hac ratione mulieres imperforatas concepisse, certum est. Accusatur tunc vtplurimum vis vuluae attractrix, et hiantis vteri auidus ad resorbendum semen appetitus: credo tamen, licet concedam, incitatae libidine foeminae partes inflammatione calescentes et tensione magis patulas, ad recipiendum semen plus esse, ac secus, dispositas, id obtinere ab impetu, quo semen a Viro emissum ad apertum os vteri defertur, et ipsum intrat; imprimis cum tota copia seminis, vna vice emissi, non requiritur ad conceptum, sed vnica vel minima guttula sufficit, quod iam Aristoteles notauit (2), et hodie ex historia seminis et conceptus firmatur. Cum ergo Virgo, hymene integro, per eiusdem foramen potest recipere vtero semen absque intromissione penis intra vuluam, vti hoc testatur Fabritius ab

(1) De generatione

(2) Histor. animal. L. X.

(1) Chirurg. oper. part. 1.
(2) Anthropol. L. 2. c 31.
(3) De mul. org. p. 57.
(4) ad obseru. 39.
(5) cent. 3. obs. 60.
(6) Anat. L. 1. c. 23.
(7) Obser. 22

ab Aquapendente (1) Riolanus quatuor obseruatis historiis (2) Grafius (3) Stalpartus vander Wiel (4). Vtque mulier imperforata grauida fit, siue magnitudo penis virilis deficiat, siue membrana vuluae interposita durior obstat, quale exemplum legimus apud Hildanum (5) Diemerbroeckum (6) Ruyschium (7), ita credo; omnes memoratos pueros, iuuenes adultos factos, atque alios illis similes, non modo posse cum foeminis concumbere, sed et illas grauidas reddere, quoniam multae adsunt circumstantiae, propter verecundiam reticendae, et quas vnisquisquique facile considerando percipit, quae facilius semen ad os vteri deducunt (inter quas ipsa directio semicanalis vrethrae est) quam factum hoc est in memoratis casibus, locis citatis perlegendis.

Explicatio Figurarum Tab. XI.

Figura prima

A Membrum peniforme.
B Cutis tegens et praeputium formans
C Glans sulcata.
DD Scrotum diuisum in duos saccos a se inuicem diductos.
E Apertura vrethrae.
F Eiusdem semicanalis, in quo vasa et glandulae.
GG Ligamenta.
H Cutis integra cum foueolis.
I Perinaeum cum foueolis.

Figura secunda

AA Ambitus regionis pubis.
B Exortus penis, seu radix.
C Praeputium in apicem eleuatum, pilis hirtum.
D Idem extenuatum in rugas, excrine.
E Penis extra praeputium incurruus.
F Glans sub pene delitescens.
G Anus.
HH Initium caudae.

Figura tertia

AA Ambitus regionis pubis.
B Radix penis.
C Praeputii apex eleuatus, et sursum reclinatus.
DD Eiusdem superficies interna rugosa tenuis a sinistro arcum faciens breuiorem.
E Praeputium in arcum exscissum readscendens ad glandem, et a latere dextro fraenulum formans.
F Glans penis eleuata.
G Anus
H Vrethra in semicanalem quasi exscissa, deficiente parte dimidia, inferiore.
I Foramen ouale in perinaeo, vbi integra vrethra deficere incipit.
L Cutis perinaei in eminentiam distinguentem, suturae instar, eleuata.

DE
VTERO MVLIEBRI
OBSERVATIONES ANATOMICAE.

AVCTORE
Iosia Weitbrecht.

Fortunatum accidit, vt hoc anno quatuor cadauera feminina, mulieris septem menses praegnantis, duarum vetularum et virginis, theatro nostro anatomico infererentur. Quam opportunitatem vt in vsus conuenientes vertere non destiti, sic nunc ex pluribus obseruationibus factis eas potissimum, quae ad vterum imprimis praegnantem pertinent, seligere, et cum Academia communicare, mihi est propositum. In quibus exponendis etsi non omnia noua Vobis videbuntur, aliqua tamen erunt, quae ad huius partis historiam amplificandam et perficiendam facere poterunt.

I. Principio de vteri praegnantis habitu externo aliqua monebo. Dum resupinum iacebat cadauer, abdomen ab vmbilici regione ad pubem vsque omnino protuberabat. Non erat autem tumor rotundus, durus, aequabiliter tensus, vti in hydropicis esse solet, sed mollis, inaequalis, in supremo abdomine latissimus, altissimus immediate infra vmbilicum, ad cuius latus dextrum durities aliqua sentiebatur, tum vero paullatim, pubem versus in pyriformem coangustatus. Hi quidem characteres iustam spem ex mariti testimonio conceptam, vterum grauidum subesse confirmabant. Remotis enim integumentis nudus apparebat vterus a peritoneo immediate tactus et tectus, occupans omnem cauitatem abdominis ab vmbilico ad os pubis, et peluim ipſam, cuius latera exacte claudebat.

II. Circumſtantiae longe aliae comitabantur inſignem tumorem, quem altera vetularum in inferiore abdomine ita geſtabat, vt primo quidem obtuitu ſtatum feminae praegnantis mentiretur, re autem propius examinata, corpus longe diuerſum eſſe deprehenderetur. Erat enim ille tumor rotundus, eleuatus, cuius quaſi centrum vmbilicus. Praeterea ſupra tumorem in regione epigaſtrica cutis erat collapſa, quaſi ibi ventriculus et inteſtina vacua iacerent. Similiter ad lumbos macilenta flacciditas. Infra tumorem denique in hypogaſtrio et ſupra pubem denuo profunda fouea; ita, vt extremitas ſterni, et vmbilicus et os pubis prominerent et tumor medius ſolitarius tamquam foſſa quadam circumdatus eſſet. Hunc tumorem vt nec anaſarcoden macilenta cutis, nec aſciticum vicina collapſa flacciditas teſtabatur: ſic nec de grauiditate quicquam certo affirmare licebat. Vterus enim praegnans nec ita praeciſe in globi formam turgeſcere, neque hiatum ſupra pubem relinquere debebat. Sed dubium omne ſuſtulit inciſio abdominis, quae ovarium dextrum in tumorem globoſum, ex membrana pellucida, tenui, lympham claram, transparentem continente conſtantem excreuiſſe, commonſtrauit. Quam obſeruationem priori propterea vtile duxi adiungere, quia cautelas quasdam ſuggerit, quae in mulierculis vere an falſo grauidis ex ſolo habitu externo diiudicandis, obſcurae ſaepe rei lumen adſpergere queunt. Sed ad vterum redeo.

III.

III. Tunica vteri exterior eſt vera peritonei continuatio (1). Quod poſtquam veſicae planitiem obduxit, et iam ad vterum acceſſit, ſuperata ceruice et vtero ampliari incipiente, haec tunica paullo craſſior euadit, et cinguli albicantis, vteri fibras corroborantis ſpeciem prae ſe fert, cuius figura quodammodo falcata eſt (2).

(1) Tab. XII. fig. 1. a

(2) Ibid. d.

IV. Antequam aperiretur vterus, putaſſes, illum vix tenue linteum vel papyrum craſſitudine ſuperare, adeo tactu mollis erat, et adeo facile contentum foetum tangere, et membra diſtinguere licebat. Sed facta inciſione res aliter ſe habere intelligebatur. Re vera enim craſſities laterum ſectionis tres ſaltem lineas geometricas aequabat. Subſtantia autem vteri erat, vt cum Arantio loquar, fungoſa, ſpongioſa, inſignibus hiatibus et ſinibus venoſis perterebrata, ſed vacuis, ita vt ſectio plane incruenta eſſet (3). Haec craſſitudo in toto vteri ambitu propemodum aequalis erat, aucta tamen parumper circa fundum. Vbi autem vterus a maxima amplitudine anguſtari coepit et cingulum illud (III.) acceſſit, ibi paullo tenuior factus erat vsque ad ceruicis principium (4). Contra vero parietes vterorum reliquorum non praegnantium vltra eam menſuram, ad quatuor, et quinque lineas craſſi fuere; imo diſciſſus vterus vetulae, quae ouario laborauerat, etſi praeter ceruicem plus iuſto elongatam nihil a natura aberraſſet, duplam tamen latitudinem parietum vteri praegnantis exhibuerat. In his autem conſiſtentia parietum triplex eſt. Ea enim pars, quae proxima tunicae peritonei eſt, eſt compacta et quodammodo muſculoſa. In me-

(3) Ibid. e.

(4) Ibid. e.

dio vterus eſt magis ſpongioſus et plurimis cauernulis ac ſinulis venoſis diuerſae amplitudinis interſtinctus. Proxime autem cauitatem internam ſubſtantia iterum compactior euadit. Haec phaenomena magis fauere videntur ſententiae illorum, qui vterum grauidum attenuari docent. Quamquam, ſi meam mentem interponere licebit diſputationi iſti, quae de diuerſa vteri craſſitudine inter artis obſtetricandi magiſtros viget in determinatione menſurae, multum difficultatis et praeterea amphibolice quid ſubeſſe mihi videatur. Qui enim quantitatem iſtam diuerſam iuſte inter ſe comparare volunt, neceſſario obſeruationes ſuas in vno et eodem ſubiecto inſtituere debent. At vero cum hoc fieri nequeat, nulla prior via ad veritatem eſt, quam vt plura exempla colligantur, et, qui modus frequentior ſit, diſpiciatur, in quo exacte determinando a nimis vaga illa per digitos transuerſos dimetiendi methodo abſtinendum, aliamque magis accuratam menſuram in vſum vocandam eſſe putauerim; quo facto vereor, ne, qui a Mauricello diſſentiunt, cauſſa ſua cadant, imprimis vero illi, qui per dilatatum vterum non ſolum maiorem latitudinem parietum vteri in transuerſum ſecti intelligunt, ſed etiam per maiorem craſſitiem, vocabulo hoc amphibolice ſumto, adauctam denſitatem eſſe volunt, qualis Graſii ſententia videtur eſſe. Quamuis enim non negandum ſit, et venoſos ductus ampliari, et fibrarum ſtrata interiecta diſtingui ac in apricum produci vtero praegnante; cum vteri virginei denſa, compacta et ceu in rude corium compacta ſubſtantia appareat: iſta euolutio tamen et ampliatio eo ipſo non ſolum maiorem rari-

raritatem et ſpongioſitatem inducit, ſed etiam, quidquid incrementi totus vterus in longitudinem et latitudinem cepit, id omne craſſitiei virgineae decedat neceſſe eſt.

V. Vaſorum ſanguineorum vteri praegnantis diſcri men inſigne deprehendi. Venae quidem, vt iam ſupra dixi, et olim ab aliis notatum eſt, amplos ſinus et cauernas intra parietes efformabant, ſed vacuae tamen erant et collapſae; ad latera autem tam eae, quae ex ſpermaticis, quam quae ex hypogaſtricis accedunt, vehementer ſanguine turgebant (1); ipſae ſpermaticae a primo ortu ſuo ex emulgente et caua calami ſcriptorii mediocris amplitudinem aequabant. Ligamenta rotunda, fuſca, et fere nigricantia turgida, vt calamum maiorem admitterent, nudae venae ſed ſerpentino ductu inflexae habitum prae ſe ferebant (2). Arteriae contra tam ſpermaticarum exilium, quam hypogaſtricarum propagines tam inſignibus cauitatibus neutiquam luxuriabantur; ſed quod oppido elegans viſu erat, propriis ſuis tunicis gaudentes interna latera ſinuum venoſorum exiguis vltimis canaliculis et ramificationibus perreptabant, ita, vt hae arteriolae intra ſinuum cauitates in ipſo ſanguine venoſo lauarentur, propemodum vti neruus ſextus in durae matris ſinibus balneo quaſi ſanguineo immergi ſolet.

(1) Ibid. ii.

(2) ibid. h.

VI. Iniectione per arterias hypogaſtricas facta ceracea materia etiam in ipſam vteri cauitatem penetrauit ſub ſpecie globulorum exiguorum per arteriolarum extremitates eiectorum, etquidem non ſolum iis in locis, vbi per ſeparationem humoris cuiusdam lymphatici coagulati vteri parietem et chorion interiacentis tunica vteri interna laeſionibus quibusdam

 obnoxia

noxia fuerat; ſed et ibi, vbi huius humoris portiones adhuc firmiter cohaerebant, per ipſum hunc humorem ſimilium globulorum forma tranſudauit. Imprimis vero ea in regione, vbi placenta adhaeſerat, plurimis in locis ſingulares congeries vaſculorum arterioſorum in elegantia glomeramina conuolutorum apparebant, quae denique ex vno aut altero oſculo materiam ceraceam in cauitatem vteri eructabant. Hae vero extremitates an immediate cum placentae venis cohaereant, an vero ſolum illum ſuccum lymphaticum, de quo mox plura, ſecernant, occaſione data diligentius ſcrutari, omnino erit operae praetium.

(1) Ibid. b. VII. An vteri interna cauitas (1) ſingulari tunica inveſtiatur, vt difficile indagatu eſt, ſic obſeruationes meae illorum ſententiae magis fauent, qui illam negant. Saltem in nullo, praeter vltimum, membranam diſtinctam laeuore quodam conſpicuam deprehendi. In vtero praegnante inter membranam chorion et vteri parietes interſperſa erat, vt monui (VI), lympha quaedam coagulata in formam ſingularis membranae extenſa, albicans ad flavedinem tantillum vergens, glutinoſa quidem, ſed non admodum tenax. Difficulter ſeparabatur a chorio, quippe quae membrana vaſculis ſuis ſanguineis in hanc ipſam lympham membraniformem immergebatur; ſed arcte etiam cohaerebat cum ipſo vtero, vt laeſiones aliquas euitare nequirem, et hac de cauſſa nihil de natura ſuperficiei internae affirmare aut negare audeam. In vtero vetulae, cuius ouarium hydropicum, paries anterior et poſterior muco quodam, ſeu ſanie cruenta nigricante diſcernebantur;

tur, quo caute ablato, ſuperficies interna non videbatur inueſtita eſſe ſingulari tunica laeui neque etiam villoſa; ſed erat potius laciniis filamentoſis, tenuibus, irregularibus, quales per detractionem alicuius membranae generari ſolent, obſita. Quamuis nulla diſtincta oſcula cernebantur: tamen vtero paullum compreſſo mox plurimi canaliculi ſubtiles repentes detegebantur ſanguine turgidi, quem in cauitatem vteri effundebant. Virgineus vterus exhibuit ſuperficiem non membranaceam, ſed ſubtiliſſime villoſam. Vterus autem vetulae alterius aſciticae, qui toto habitu ſuo indurationem quandam prae ſe ferebat, non ſolum ſuperficiem leuigata membrana inductam ſed eam quoque expanſionibus ſuis varios loculos efformantem commonſtrauit.

VIII. Detracta penitus, qualis mihi videbatur, interiore tunica vteri praegnantis apparuere plurima ſtrata fibrarum muſcularium. Hae fibrae ſunt planae, compreſſae, ad dimidiam lineam latiuſculae rugoſae, vti fibrae carnis coctae, ſibi inuicem parallelae accubantes. Muſculares voco, quia partim ob colorem rubicundum carneum, partim ob ſtructuram nulli alii rei aequiparandos noui. Directio earum varia eſt, nec adeo exacte determinanda. Muſculum illum orbicularem Ruyſchianum in fundo vteri non inueni, ſed eius loco in vtroque latere circa oſcula tubarum fallopianarum detexi inſigne ſtratum circulare, tanquam orbem muſcularem, ita vt oſculum tubae orbis centrum ſit, et latitudo orbis ad pollicum duorum latitudinem quaquauorſum excurrat. Haec igitur ſtrata conſiderari poſſunt ceu duo muſculi orbiculares laterales, orificio

rificio tubarum circumpositi. In anteriore pariete parum a se inuicem distant (quippe omnino distantia orificiorum anterius mensurata minor est, quam posterius); in quo interuallo aliud stratum longitudinale a fundo ad ceruicem decurrit, cuius fibrae quo propius huc appulerunt, eo magis disiiciuntur et cum aliis transuersis confunduntur. In interuallo posteriore erat illa regio, vbi placenta adhaeserat, et vbi glomeramina ista arteriolarum exsurgebant; quae regio igitur aliquam vtriusque orbis portionem obtegit. Denique infra istos orbes stratum aliquod transversale totam cauitatem vteri tamquam zona lata ambiebat, directione ad axin vteri vel ad fibras longitudinales perpendiculari. Quo propius autem haec zona ad ceruicem accesserat, eo magis eius fibrae disiiciebantur, et cum aliis irregularibus commiscebantur.

IX. Cauitas vteri pragnantis et virginei multum inter si differunt. Hic non dici potest concauus, siue non debet in eo fingi cauitas aliqua spatiosa, laqueata, turgidula; sed paries eius anterior et posterior sibi ceu planum plano accumbunt, et solo muco interstinguuntur, ne concrescant. Ille vero in ampullam expanditur. Praegnans igitur vterus recte vesicae inflatae, virgineus lagenae compressae aequiparatur.

X. Ceruix, siue collum vteri non exigua huius organi portio est. Sed in statu pragnante non in eadem temporis proportione mutationibus et extensioni obnoxiam esse ac fundum, obseruationes nostrae luculenter docuerunt. In virgine et vetulis dimidiam propemodum longitudinem totius vteri, quae vt notum est, vix duos

duos pollices aequat, compleuerat. In praegnante perparum ab hac forma et quantitate recesserat, nisi quod ante dissectionem considerata habitum paullo turgidiorem prae se ferret et duritie fundum superaret. Contra vteri caui longitudo erat vltra octo pollices, latitudo maxima septem propemodum pollices; qua extensione tanta caverna efformabatur, quae foetum septimestrem cum membranis liquore et placenta facile complecteretur. Haec tota specus ex tam spatiosa amplitudine coarctabatur inferius in foraminulum adeo exiguum, vt vix pisum admitteret, ceu osculum vrethrae internum ex contractis vesicae vrinariae tunicis generatur. Hoc foraminulum vocare placet osculum ceruicis internum, vt distinguatur ab altero vulgo cognito, os vteri dicto, transuersa rima in vaginam hiante, quod osculum ceruicis externum appellabimus.

XI. Totum osculum internum occlusum erat muco quodam albicante, pellucido summo glutinoso et tenaci, qui intra ipsam vteri cauitatem paullum exturgescebat. Idem mucus extuberabat ex osculo externo. Erat autem eius tanta copia, vt ob insignem glutinositatem ad multos pollices absque ruptura extraherem. Eundem mucum in virgine et vetulis circa osculi externi rimam, etsi non tam copiosum deprehendi.

XII. Postquam ceruicem, continuata vteri sectione longitudinali, aperui: tota distantia ab vno osculo ad alterum pollicem circiter aequauerat (1); crassitudo parietum, solidiorum quam vteri parietes, quatuor lineas excedebat (2), quam substantiam intimam, tenacem compactam

(1) Tab. XII. fig. 11. e

(2) Ibid. i.

perreptabant vaſcula ſanguinea arterioſa, quae, vt arbitror materiam apportant ad ſecernendum mucum iſtum glutinoſum, quo cauitas ceruicis, tota quanta eſt, infarcta fuerat, et omnes receſſus ac latebrae rugoſae ſcatebant.

XIII. Per hunc mucum transparebant elegantiſſime rugae illae pennatae Huberi, ſiue, vt alii vocant, valuulae, cum columnis intermediis, quarum aliquae vaſculis ſanguineis ſuperbiebant (1). Erant autem hae rugae et co lumnae nihil aliud, niſi ipſiſſimae membranulae tenues, aliquae dimidiam lineam, aliquae integram lineam latae quae altero ſuo margine parieti ceruicis innascuntur, altero autem libere fluctuant, quemadmodum laminae ſeu folia membranea in omaſis ruminantium fluctuant; quae, quia a muco viſcido, perparum fluido ſuſtinebantur, iucundum ſpectaculum exhibebant. Quod cum raro accidat, eas delineari curaui, hac cum cautela, vt, donec delineatio facta eſſet, obiectum liquore balſamico, quo Theſauri Ruyſchiani conſeruantur, immerſum teneretur. Columnae intermediae eminent tam in pariete antico, quam poſtico. Ad has columnas tendunt rugae laterales, et quidem ita, vt ab interno oſculo externum verſus deſcendendo conuergant; quamuis in latere ſiniſtro poſteriore paullulum ab hoc ordine recedant, et irregulariter diſcurrant. Similiter vbi ad oſculum vteri externum peruenere, paullo craſſiores et breuiores fiunt, et hinc magis rugarum formam induunt; terminantur etiam aliquae in ipſo limbo oſculi in extremitates pendulas, rotundiuſculas. Inter has membranas rugoſas obliquas maiores, deliteſcunt aliae minores, anguſtiores, hinc pro-

(1) Ibid. b. c. d.

profundius et transuersim sitae. Omnes vero rugae vel lamellulae ita positae sunt respectu fundi parietum, vt ad angulum acutum inclinent, et deorsum nutent; hinc quando directione ab osculo interno externum versus tendente comprimuntur, squamarum instar sibi accumbunt, et superficies cauitatis plana fit. Si digitum ordine contrario ducas, superficies aspera oritur et multis scrobibus interstincta. Nam inter omnes has membranulas, tam maiores, quam minores, deteguntur profundae lacunulae, foraminula, sinuli, in ipsam substantiam ceruicis penetrantes, quibus liquor ille viscidus tenaciter inhaerescebat, et ex quibus copiose exprimi poterat. Non autem existimandum est, has rugas in omnibus subiectis tam distincte euolutas esse. In virgine vestigia lamellarum multo tenviora erant. In vetularum altera apparebant columnae crassiores quidem, sed non adeo profundae, et sensim euanescentes, eodem fere modo ac a Graafio pinguntur. In altera autem, quae ouario laborauerat, et propter quem tumorem vterus in pelui extensionem aliquam passus erat, manifestabantur membranulae fluctuantes intermediae perpaucae; columnae autem plures, compactiores, solidiores, maiores. Nam in pariete postico erant columnae quatuor, fere omnes parallelae, carnosae ceu auricularum cordis lacertuli, breuissimis membranulis transuersalibus itidem crassiusculis cohaerentes, quae membranulae diductis columnis apparent, sed clausa ceruice et columnis compressis absconduntur. In pariete antico autem erat columna vnica, ad quam lacertuli transuersales ex parietis posterioris columnis pertigere, hoc ordine, vt vtrinque a dextris ad sinistras oblique deorsum vergerent. XIV.

XIV. Quae hactenus de vteri ceruice (X. XI. XII.) annotauimus, ad multas veritates viam nobis pandunt. Primo quidem abunde confirmatur assertum Graafii (1) qui stabiliuit „collum non insequi dilatationem vteri grauidi, sed pristinum fere statum retinere„ id quod de mediis gestationis mensibus intellectum vult. Cum natura rei igitur plane non congruit idea illorum, qui vteri praegnantis ceruicem sibi fingunt ceu vnicum osculum, aunulo quasi membraneo occlusum, qui paullatim mollior fiat et amplior, donec ita hiet, vt foetum transmittere possit, qualem e. g. Deuenter (2) pingit. Hoc enim non nisi de vltimis diebus grauiditatis, quando partus appropinquat et imminet, intelligi debet; tum enim orificium paullatim distenditur et annuli simplicis formam nanciscitur, per quem vix vnum alterumue digitum traiicere liceret. Totalis autem dilatatio tum demum, vti obstestricando experimur, locum habet, quando iam parturiens aliquos dolorum prodromos persentiscere incipit, aquae rumputur, et caput foetus ad ceruicis orificium adigitur. Qua lege autem ceruix post partum contrahatur, nondum memini ab Autoribus determinatum esse. Per experientiam constat, partes animalium vehementer pressas et contusas intumescere solere; credibile est, idem accidere lateribus ceruicis et columnulis ibi ex foetus transitu multum et diu saepe distentis et pressis. Dicam quid ipse expertus fuerim. Cum nuper protractum a rudi obstetrice vterum et vaginam reponerem tertia post partum hora: non solum orificium ceruicis ita hiabat, vt duos digitos facile

(1) Cap. VIII. pag. 95.

(2) In nou. lum. obst. F. 4

le intrudere potuerim, ſed etiam vt rugas craſſas (1), queis margo obſeſſus erat, tactu diſtincte dignoſcerem. (1) T. XII Fig. III.

XV. Exinde porro apparet, quam difficile ſit primis menſibus ex ſolo tactu diiudicare, num femina praegnans ſit nec ne? quia tangens omnino nil, niſi veram ceruicem oblongam duriuſculam cum oſculo labiis mollibus in vaginam prominente perſentiſcit, vnde facile in eam opinionem deduci poteſt ac ſi femina non praegnans eſſet. Certe ex ſolo augmento ceruicis aliquid veri concludere exercitatiſſimam manum et acutum iudicium requirit, quod ab obſtetricibus popularibus non facile expectaveris.

XVI. Neque minus ratio patet, (aliis cauſſis tamen neutiquam poſthabitis) quare mulieres, quae primis vel mediis menſibus abortum patiuntur, doloribus multo vehementioribus et acutioribus diſcrutiari ſoleant, quam ſi iuſtum parturiendi terminum attigerint. In his enim cervix vteri laxior paullatim diſtenditur, et vltimis tandem diebus in ſimplicem annulum efformatur; hinc diſtractionem facilius perferunt, quia pedetentim fit. In illis contra cauitas ceruicis eſt anguſta, ſubſtantia craſſior et ſolidior, fibrarum vis ſtrictior; quae res vt in partu tam immaturo et anticipato multo fortius extenſioni reſiſtunt, ne foetus tam facilem et planam viam inueniat: ita non poſſunt non maximum et acerbiſſimum dolorem mulierculis commouere.

XVII. Ex compreſſa ceruicis figura, et ex muco iſto lento, tenaci, totam cauitatem et omnia eius foraminula ab vno oſculo ad aliud obſidente certe meo quidem iudicio, colligitur: vterum praegnantem perfecte clausum esse; omnem igitur introitum vel aëri vel alii cuipiam humori denegari, nullam igitur superfoetationem fieri posse in systemato vermiculari, neque etiam in non pragnantibus semen in vteri cauitatem ascendere posse, quia idem mucus in omnibus aliis ceruicum osculis, saltem externis, adest.

XVIII. Denique liceat ex obseruationibus meis ea commemorare, quae ad illustrandam historiam ouulorum Nabothianorum facere, et fortassis haud obscuram facem in diiudicanda controuersia afferre poterunt; Memini quidem me olim tales vesiculas vidisse, et conuentui quoque spectandas exhibuisse. Memini etiam, me alio tempore frustra quaesiuisse; memini, quae pridie aderant, postridie euanuisse. Sed de subiectis hoc anno oblatis asseuerare queo, me easdem et non vidisse et vidisse in eadem ceruice, vesiculas adesse et non adesse posse. Explicabo paradoxon. Primo quidem obtuitu illae in nulla ceruice apparuere. Sed cum ex. gr. vterus praegnans delineandi caussa quietus iaceret, in extremo limbo osculi ceruicis externi oriebantur paulatim aliqua corpuscula globosa, magis tamen rubicunda ac mucus qui cauitatem ceruicis obsederat. Accurato examine instituto vidi, non esse vesiculas singulari tunica inclusas, sed esse illum ipsum mucum ex ceruice sponte expressum, in globulorum formam conuolutum, qui in foraminulis supra memoratis tamquam a pedunculis haerebant, et ex illis extrahi et abrumpi non vero ceu vesicula determinatae magnitudinis auferri poterant. Contrectando et premendo plures licebat producere. Maceratione

ratione autem abolebantur, et hinc inde tumores quidam exigui, ſed profundius ſiti, dilute rubicundi, veſiculis Nabothianis perfecte ſimiles, emergebant. Similiter in ceruice vteri alterius vetulae recenti ne veſtigium quidem veſiculae aderat; poſtmodum vero macerando et contrectando copioſe in conſpectum prodibant, etiam ad lenticulae magnitudinem, turgentes humore rubicundo, qui ex aliqnibus, non ex omnibus, exprimi poterat; imo eadem veſicula primo humorem fundens mox plane occludebatur. En igitur, quo me coniectura ducit. Arbitror iſtas veſiculas Nabothianas non eſſe particulas organicas aut conſtitutiuas corporis animalis, non igitur eſſe ouula, neque etiam eſſe hydatides morboſas, ſed eſſe corpuſcula plane fortuita, maceratione et contrectatione nata. Videlicet, non ſolum media ceruix (XIII.), ſed et imprimis labia oſculi externi circa rimam copioſis exiguis foraminulis ſcatent, quae nil ſunt, niſi orificia excretoria canaliculorum mucum ceruicis fundentium. Quando igitur vel contrectando et premendo humor vrgetur et adigitur, vel macerando aqua aut ſpiritus per orificia intrat; canaliculi, quorum reptatus valde obliquus eſt, intumeſcunt, qua parietum diſtractione etiam ipſa oſcula transponuntur: nec ductibus directe reſpondeant ſed intercludantur, quemadmodum vrinae via per vretres intercluditur, inde fit, vt veſiculae ſemper exprimi nequeant, ſed tamquam vndequaque clauſae appareant. Non autem mirandum eſt, cur humor veſicularum rubeat, quum tamen mucus ceruicis ſecundum naturam albicans ſit. Hoc enim inde efficitur, quod vel con-

contrectatione nimia non purus mucus, sed et sanguis simul exprimatur, vel maceratione idem etiam sanguis extrahatur, vnde ista colorum mistio resultat; quemadmodum generaliter experientia docet, omnes humores lymphaticos et serosos corporis animalis, etiamsi secundum naturam purissimi et pellucidissimi sint, quo diutius extra vasa staguant, eo profundius a sanguine extracto tingi.

Explicatio Figurarum TAB. XII..

Figura prima.

Vterus ex muliere septimum mensem praegnante secundum longitudinem apertus, vt cauitas interior, laterum crassitudo, et sinus venosi cum directione fibrarum, pateant.

a. Vteri tunica exterior.
b. Cauitas vasculis sanguineis irrigata.
c. Crassitudo laterum naturalis cum venarum sinibus et fibrarum directione.
d. Zona transuersalis.
e. Pars ceruicis vteri.
f. Tubae fallopianae.
g. Ouarium.
h. Ligamenta rotunda.
i. Vasa vterina ex hypogastricis.

Figura secunda.

Ceruix vteri praegnantis aperta cum portione vaginae.

a. Crassitudo substantiae ceruicis secundum longitudinem lateris sinistri discissae.
b. Columna parietis posterioris.
c. Columna parietis anterioris.
d. Rugae transuersae fluctuantes.
e. Labia osculi externi itidem a sinistris discissa.
f. Portio vaginae.

Figura tertia.

Rugas crassas ceruicis vteri post partum exhibet.

DESCRI-

ABRAHAMI KAAV BOERHAAVE
OBSERVATIONES ANATOMICAE.

Obseruationes Anatomicas daturus praemoneo, inter dissectiones cadauerum, si quid mihi praeter solitum occurrit, fideliter hoc in aduersaria deferre, vt deinde expromam in vsum. Inde forsitan eueniet, vt vel similem, vel et eandem annotationem iam viderit Lector alias. Firmior inde erit veritatis simplicitas. Ego enim inter tot, quae vndequaque apportantur, cadauera, vel in vsum Anatomes, vel ad causam mortis inuestigandam, plus semper intentus sum ipsarum partium inquisitioni, quam aliorum auctorum in Museo compilationi: vnde eundem casum, iam alias notatum, in hisce iterum perlegere, nemo facile vituperabit. Hoc de hisce, et quae in posterum dabo, moneo.

Obseruatio prima.

Flante borea magnoque frigore, Auriga Wyburg tendens Petropolin, cadens a traha inuenitur in niue mortuus. Apertum cadauer praebuit viscera abdominis et thoracis satis sana, cerebrum autem valde inflammatum, inprimis in haemisphaerio dextro. Sed quod maxime mirum! in eodem latere durae matris, itidem valide inflammatae, pars concaua tota succingebatur membrana tenui, sed forti, cuticulae adultae instar crassa, quantum ad oculum apparebat, homogenea, coloris subrubelli, sanguinei quidem, sed diluti, parte inferiore, qua piam matrem respicit, leuissime floculenta, qui flocculi, dum ſpiritui frumenti, et prius aquae, immittebatur, leuiter decidebant ad fundum vitri. Caeterum membrana integra, et (vt dixi) tenuis, ſed fortis, ſatis facile ſeparabatur a durae matris concauitate, illi tamen hinc inde fortius annexa per tenuiſſimas fibrillas: ſuperficies autem, quae continua erat durae matri, glabra, magis albeſcebat, plus neruea. Extendebatur haec membrana a ſinu longitudinali, vbi per fibras complicationem leuem efficientes, accreſcebat ſupra totum haemisphaerium dextrum ad fundum caluariae vsque. Atque ſeſe a latere eodem cum proceſſu falciformi intra haemisphaeria cerebri inſinuabat; a latere autem ſiniſtro tota deſiderabatur, eratque ibidem dura mater, vt ſolet ſuperficie ſua interna, naturalis tam ſupra cerebrum, quam intra eiusdem diuiſionem.

Scio, iam Columbum, Vieuſſenſium, Ridleyum, Pacchionem, aliosque, qui de dura matre ſcripſerunt, illam duplici membrana conſtantem exhibere, inter quas vaſa decurrunt, et has ſuperficies intertextis fibris muſculoſis conſtitui, vnde de vſu mira imaginantur. Poſt diuturnam macerationem in aqua frigida experior, fibras has eſſe contextum cellulosum, ſiue veſicularem, vaſa maiora et minora inter ſe iungentem, tumque ſuperficiem, oſſi contiguam, eſſe tenuiorem contextum membranaceum, quam quae piam matrem reſpicit. Idem in dura matre Elephantis, quibusdam in locis digitum fere craſſa inuenio. Hinc nulla eſt ſuſpicio, membranam deſcriptam, homogeneam, eſſe habendam pro altera harum duplicatura, quia longe alius eſt faciei, et in ſiniſtro latere deficit, quod vt certius appareat, eodem latere, quo hanc ab interna ſuper-

ſuperficie, ibidem duplicaturam durae matris a ſe inuicem ſeparaui. Reſtat ergo dubium, undenam ſcilicet illa membrana? an eſt pars peculiaris in hoc homine connata? an vero a ſumma inflammatione ſuperficies interna ſic integra ſeceſſit, vt membranam mentiatur, vti a cute cuticula? an aucto motu, vaſa nimium dilatata craſſiores humores transmiſerunt ſeroſos, qui collecti adhaeſerunt internae durae matris ſuperficiei, et borea et frigore ſuperueniente, quaſi in vnum concreti hanc formaverunt? vti videmus, quosdam humores in lagenis, non rite occluſis inprimis, contrahere in ſuperiore parte mucaginem, quae abit in pelliculam. Sed hic datur aëri acceſſus: in rite clauſis phaenomenon idem obſeruatur, patet in omphacio: ſed particulae ibidem conſtituentes ſunt ſolidae, tales ſunt et vltimae fluidorum. An docet hoc in dextro ſolum latere praeſentia, abſentia in ſiniſtro? an ſuperficies cerebrum ſpectans holoſerici inſtar villoſa flocculis rubris tenuibus, facile deciduis, idem affirmat?

Obſeruatio ſecunda.

In Noſocomio Maritimo Petropolitano Miles claſſiarius, qui ibidem propter morbum epilepticum, per annos hospes fuerat, in ipſo inſultu adeo violento, vt motus ſpaſmodici totius corporis vix per quatuor robuſtos miniſtros retinerentur, ne ſe de lecto deiiceret, me praeſente, vnico momento, quaſi fulmine tactus, inter horrendas intorſiones, exſpirat.

Duas poſt mortem horas aperio cadauer, in morte faciei lineamentis etiam inordinati motus effecta declarans, nusquam tamen liuidum, ſpuma adhuc os obſidente. Inuenio viscera thoracis et abdominis sanissima, excepto, quod pulmo sinister, hinc inde leniter cohaerebat, concretus cum membrana thoracem succingente. Dissecta autem, more solito, supra aures in orbem cranii parte superiore, dum scutum osseum conor auferre, inueni illud cum dura matre cohaerere ita, vt vix sine dilaceratione huius, adhibito eleuatorio, summa vi separauerim. In ablato autem apparebant disrupta multa et dispersa tubercula, duriuscula, granis hordei simillima, colore flaua, respondentia illis, quae in dura matre vaga locabantur, aggregata magis circa sinum longitudinalem. Pressa haec tubercula, in vtrisque eructabant flauescentem, crassum, humorem, fere materiem solidam prae se ferentem, qui inter digitos pressus tenax extensilis his non adhaerebat; vasa per duram matrem decurrentia, conspicua, sanguine replebantur. Incidi in orbem, ad marginem ossis dissecti, duram matrem, quibusdam in locis triplo et quadruplo, quam caeterum solet, crassiorem et magis resistentem; dum vero hanc a pia eleuare tento, deprehendi cum eadem iterum cohaerere adeo firmiter, vt cultello opus habuerim ad dissecandam intermediam substantiam filamentosam, quasi telam cellulosam videres, sed induratam adeo, vt scalpelli aciei cartilaginis instar resisteret, eo magis, quo propius ad sinum longitudinalem accedebat, vbi firmissime inter se meninges per vinculum hoc iungebantur. Erat autem intermedium hoc tegmen vesiculare infarctum materie flauescente, quibusdam in locis plane exsiccata et dura, in aliis smegmatis instar crassa, quae tenax, albuminis oui instar

instar ductilis erat. In basi cranii autem a pia matre libera erat dura, ossi tam firmiter adhaerens, vt vix tenaculis inde auelli posset. Ibidem autem arachnoidea intermedia tunica, ac vsquam conspicua erat, idque propter humorem, ac in superiore parte tenacem, flauescentem, magis dilutum tamen, quo quasi hydropica erat.

Cortex cerebri vniuersus multum indurabatur, multis in locis scirrhosus, in aliis quasi cartilagineus erat, id iterum eo magis, quo proprior erat vertici. Substantia autem medullaris apparebat naturalis et sana. Humor in ventriculis paucus erat subrubello-flauescens, ac serum sanguinis recens, dilutus. Sapor huius, vti et illius, qui in basi cranii inueniebatur, erat nauseosus, leviter salsus, vt est seri sanguinis, fatuus. Glandula pinealis dura et quasi scirrhosa erat. Cerebellum liberum, sanum, sed valde siccum erat, sana erat oblongata medulla, et spinalis; leuiter autem hydropica erat ibidem arachnoidea humore smegmatico flauescente. Sinus omnes durae matris pleni erant sanguine atro venoso, sano, vt solet inueniri post mortem, ipsi autem duri et incrassati. Homo hic quadragenarius circiter, inter paroxysmos sanus sed semifatuus et tristis, caeterum robustus, fuerat. Tristes autem, stolidos, et meticulosos, fere semper animaduertimus epilepticos, iam aetate prouectos, quod neque miramur, si respicimus ad validos neruorum motus, quibus corpus concutitur, et ob malum comitiale mentis tristitiam, atque insultus recidiuiui metum. Si vero respicimus ad functionem corticis cerebri, non procul quaerenda est morbi recidiuiui, certis, sed inordinatis paroxysmis, ratio; ſanguis quippe per vaſa ſemiobſtructa et ſemiconcreta motus, eiusdem impetus in concreta, vnde noua quotidie naſcuntur obſtacula, non continuo iugis fluxu, ſed interrupto, ſecernit ſpiritus dictos nervoſos, in medullari ſubſtantia protinus elaborandos, vnde nerui iam defectum, iam vero nimiam ſubtiliſſimi liquidi abundantiam, paſſi ſunt. Qualem vero faciat in repleta caeterum vaſa minima comprehenſibilis guttula liquidi impetum et motum, dudum alias docuere experimenta hydraulica. *

An interim non mirum eſt, cum actio neruorum violentiſſima toties in vita inuerterit, et ſuſpenſum tenuerit ſanguinis per cor et vaſa motum, et reſpirationem quaſi oppreſſerit, quod neque in cordis ventriculis, ſinubus, aut auriculis, neque in arteria pulmonali, aut caeteris vaſis, inuentum ſit vllum omnino, quod polypi indicium aut originem indicabat? vt quidem e contrario ſanguis in venis, ſinubus, auriculis, ventriculis cordis, in vaſis pulmonalibus, iam quidem coagulatus, nullo vero modo concretus, apparuerit.

Tandem ſubſtantia inter duram et piam matrem flaueſcens, incraſſata, diſſecanda, celluloſa apparens, an non videtur arachnoidea tunica, humore ſeroſo hydropica, cum vtraque meninge concreta, concretione has iungens? an non inde indurata, quod reſorpto tenuiore, ſuperſtes humidum in ſolidum coiuerit, ſenſim exſiccatum, vti multa exſtant, tam extra corpus, quam intra, exempla? an hoc non affirmat eadem tunica, laxior in baſi

* Vid. diſſert. noſtr. de Impetu Hipp. dicto ad §. 274.

basi cranii simili humore, sed magis diluto grauida, ob spatium amplius, non tam cito exsiccanda et induranda. Denique, an humor serosus non depositus fuit, per vltima vasa exhalantia, dilatatis eorum orificiis ab aucto impulsu eadem quantitate sanguinis, impetu ex resistentia in obstructis et concretis vasculis interim aucto? Tubercula autem hordei simillima, in ablato cranio conspicua videntur obstructa a tenaci toties memorato humore vascula, aeque ac in dura matre.

Obseruatio tertia.

Cerebrum ipsum obnoxium esse inflammationibus, satis superque docent eiusdem morbi acuti. Exitum autem inflammationis in suppurationem et gangraenam ibidem, nuperrime didici in homine, mortuo in via publica inuento, in quo thoracis viscera et abdominis ita sana fuerunt, vt nullum signum subitaneae mortis exhiberent. Ventriculus autem inter reliqua ingesta spiritu vini repletus, eiusdem odorem spirabat. Aperto capite, eleuataque incisa dura matre, lobus cerebri anterior vterque extremo suo, quo supra orbitam exporrectus ad frontem, cristae galli dicto processui medio ex osse cribroso assurgenti, a latere adiacet, ita computruerat, in mucum flauum foetidum verso cortice, vt vascula piae matris libera in illo fluctuarent, neque substantia se ipsam sustineret; ichor autem foetens supra duram matrem, os tegentem, effusus erat, cui vnica et altera guttula puris, non male cocti, innatabat. Sub lobis autem cerebri posterioribus eleuatis, conspiciebatur supra tensam duram matrem, quae cerebrum a cerebello distin-

guit,

guit, vtrimque copia humoris tenuis, ichorosi, subrubello-flauescentis, foetidi, vnicae mensuram, vel paulo plus, referentis. Pia mater autem erat integerrima, sed parum in dextro lobo a cortice eleuata; corticalis autem substantia ipsa, sub hac eleuatione piae matris, leviter protuberabat in mucronem obtusum, et male affecta flauescebat.

In dissecto porro cerebro nihil inueni praeternaturale aut morbosum. Cerebellum itidem erat perfecte sanum. An homo hic obnoxius fuerit morbo neruoso, epilepsiae, vertiginibus? incertum est, quoniam, in pauperis ignoti vitae ante-actae aut morbi genus nulla superfuit inuestigatio.

An causa mortis subitaneae fuit rupta in anteriore cerebri lobo vomica? an ebrietas motum sanguinis augendo accelerauit rupturam? An ichor in parte posteriore capitis supra duram matrem inuentus subrubello-flavescens, integra pia matre, ibidem emissus est per oscula vasorum exhalantium dilatata? an resorptione per venulas minimas tenuissimi stagnando computruit crassior factus, humor reliquus? An demum ex vomica anteriore materies morbosa per vasa resorpta minima, per sensim maiora recepta, dein iterum per decrescentia minora et minima delata ad posteriora, ibidem est deposita.

De abscessibus intra cranium, tam intra membranas, quam ventriculos cerebri, ac in eiusdem substantia ipsa, ortis, prostant exempla apud plurimos auctores Lazarus Riuerius (*) de tribus, in diuersis notatis abscessibus

(*) Obseruat. 38.

ſibus memorat, inter duram matrem et cranium ortis. Intra duram et piam matrem vidit Stalpartus vander Wiel (1) et in cerebri ventriculis. In ipſa cerebri ſubſtantia apparuere Tulpio (2) Bartholino (3) Botio (4). Neque ignorauit Hippocrates, pronunciat enim ὁκόσοισιν ἂν σφακελισθῇ ὁ ἐγκέφαλος, ἐν τρισὶν ἡμέρῃσιν ἀπόλλυνται, ἢν δὲ ταύτας διαφύγωσιν, ὑγιέες γίνονται. (5).

Obſeruatio quarta.

Pericardio deſtituta quaedam animalia memorantur apud Auctores. Columbus autem ſeſe diſſecuiſſe Romae in Academia Diſcipulum affirmat, cui deerat pericardium, hic ſaepe in vita laborauerat ſyncope, et eidem ſimili morbo moriebatur (6). Ex hac hiſtoria, et quia viderat ſine eodem valentem canem, pericardium inutile audacter pronunciauit Medicus ordinis pariſini Lamy (7). Et Cel. Du Vernoi oblatum ſibi hunc defectum ſcribit in diſſectione Elephantis (8). Si addidiſſent bene meriti Viri, qua ratione ergo vaſa ad pulmones tetenderint arterioſa ex corde, et quomodo venae inde reduces ad cordis ſinum pulmonalem ſeſe habuerint, vt cor liberum foret ſuſpenſum inter pulmones, forſan illis herbam porrigerem, iam ex argumentis et autopſia habeo, quod oppono. Vſus, quos praeſtant pericardium et mediaſtina, quoties perpendimus, vix illis poſſe carere animal, concludimus. Praeterquam enim quod cor a contactu pulmonum et celluloſae vtriuſque mediaſtini defendit

(1) Cent. I. Ob. XI. (2) Obſ. L. IV. C. I. (3) Cent. II. Hiſt. 34. (4) De affect. omiſſ. cap. 3. (5) Aph. 50. Sect. VII. Coac. praen. c. II. aph. XI. (6) De Re Anat. Lib. XV. (7) Diſcours Anatomiq. p. III. a Paris 1685. (8) Comm. petrop. Tom. II. p. 289.

pericardium, ne cum illis concrescat, quodque proprium humidum intra se coercens, aditum illi, qui in pectore saepe continetur, humori intercludit, vt sunt sanguis, pus, ichor, et serum hydropicum, atque ita cor cum suis vasis in rore humido fouet, mulcet, et mollit, atque balneo calido, humido, concretionem cum corde impedit: cor a sterno et dorsi vertebris duris ita remouet, vt, dum mouetur, haec non attingat. Sed inprimis vasa cordis ambiens, nectendo firmat ita suspensa, vt haec, neque cor ipsum, intra pericardium vndequaque liberum, inuerti, intorqueri, situ mutari omnino possint, et tamen actiones liberrimas exercere: idque in omni motu corporis, concussu, saltu, inuersione, capiti insistentia. Tam mire ideo fabricatum est pericardium, vt vasa corde egressa mutuent ab ipsa eius extima et tenuissima membrana propagines. Sunt hae arteriae binae, pulmonalis scilicet et aorta, venae cauae ambae, et pulmonales; ab altera parte pulmonum membrana extima suos largitur supra eadem vasa processus, vbi illa sunt extra pericardium, exceptis venis cauis et aorta. Ad concursum autem supra vasa, quae extima est pulmonum membrana, quae intima cordis propago, in ambitum expansae ambae iunguntur inter se per telam cellulosam intermediam, atque a vasis secedentes formant duplicatione saccum, cauum, conoideum non exquisite, quis sectus horizontaliter circulum non facit perfectum, cor et eius vasa intus continens, ab aliis separans (1). Saccus hic ex

(1) De origine Pericardii vid. dissertat. nostr. de perspirat. Hippocrat. ad §. 142 et seqq.

ex lata et orbiculari basi ad diaphragma surgit in apicem obtusum, firmissime tensus, haud ita laxus percipiendus, ac in aperto thorace conspicitur in cadauere: docet id tensio diaphragmatis, pectoris plenitudo, mediastini in eleuando sterno dissecti prior integritas. Sunt enim ambo mediastina, dorsale scilicet et pectorale, vtriusque sacci membranae thoracem succingentis ad dorsum et sternum applicati exsurgentia conniuens, per tegmen cellulosum iuncta, in pericardii membranam exteriorem iterum extensa, quae in viuo homine sano, et in integro cadauere cauum non habent, et vix dimetiendam distantiam. Tenditur ergo pericardium ab opposito latere, per mediastina; inferne per assurgentem basin orbicularem, quae in conuexam curuatur et se diaphragmati accommodans declinat retrorsum. Sursum vero iugulum versus adscendens terminatur cono obtuso ad diuisionem primam tracheae, et ante hanc, et ibidem extensum tenetur per aortam, quam emittit a sinistro, et cauam descendentem venam, quam recipit a latere dextro, paulo posteriora versus per exeuntem arteriam pulmonalem, et redeuntes duas magnas venas, quae sinum sinistrum, seu potius in homine posteriorem, expansae constituunt. Vena caua autem ex abdomine assurgens perforat diaphragma in parte tendinosa dextra, in distantia circiter media vertebras inter et sternum, atque ingreditur pericardium, secum sumens partem membranae, quae conuexam tendinis septi medii superficiem succingit, vaginae instar ambientem, super se tensam, atque deinde in sinum venosum anteriorem dilata-

 tur

tur. Est iterum haec membrana venas cauas ambiens cordis externae continuatio. Per haec vasa cor cum pericardio nectitur, per propriam extensam et tensam membranam, et simul internam superficiem pericardii constituit: hinc cordis basis immota facit, quod inuerti torqueri, aut loco moueri nequeat, etsi reliquo suo corpore sit liberrimum. Praeterea omnia vasa, quae cor ita nectunt, sunt intra pericardium tensa, libera, suspensa quasi in sacello vacuo, secus ac in aliis corporis partibus, vbi inter membranas decurrentia ligantur. Tensum ergo cauum hoc tertium, arcens omnia peregrina, facit insuper, vt pulmones nunquam cor attingere, aut premere possint, illis resistens. Tolle ergo imaginatione hoc propugnaculum, quid quaeso fiet de corde?, Certe expositum erit omni vi, qua pulmones nudum hoc premunt, non semper eadem, sed vicissitudine respirationis varia, neque tendentur suspensa vasa, quae iam basin firmant: trahent ergo pulmones et partes, ad quas tendunt, ab iisdem retracta; denique orietur totius machinae confusio. Hinc potius statuo, cum Excellentissimo Ioanni Maria Lancisio (1), cum sine corde nullum nascatur animal, haud adeo vnquam esse Naturam nouercam, vt illud suo inuolucro priuet, cum et idem in erinaceo inuenerit, negante ibidem eius praesentiam Blasio (2) et Pyero (3).

Ratio autem erroris vtplurimum putatur, pericardii cum corde concretio, cuius multa prostant exempla, et quidem tunc homines isti ante mortem vtplurimum passi fuerunt enormes cordis palpitationes et anxietates.

Nec

(1) In oper. posth. de corde et aneurismat. (2) Anat. animal. pag. 65. (3) Pareg. Anat. pag. 174.

Nec mirum! cum iam destitutum hoc resistente propugnaculo cor, vim omnem pulmonis respirantis experitur, nec adeo facile ipsum mouetur, balneo vaporis demulcitum et emollitum. Multae apud Practicos et Obseruatores prostant historiae, collectionem habet Pyerus (1), et dicit Lancisius, malum hoc in tabidis et asthmate vexatis esse frequentius, obstructis ostiolis, quae intra pericardium humorem stillant (2). Propria autem manu delineatam figuram dedit Cantius (3). Ipse in fine anni praeteriti dissecui cadauer virile, in quo inueni cor per totam suam superficiem cum interno pericardio cohaerere per oblonga, tenuia, splendentia, albicantia filamenta, quae membranosa quasi, adeo tenera erant, vt ad eleuationem incisi pericardii facile dilacerarentur, erant aliis alia longiora, longissima digitum extensum adaequabant, ad ventriculos, sinus, auriculas conspicua, crassitie varia; humor vix in pericardio conspicuus, et, qui paucus aderat, multum incrassatus. Paucos postea dies in viri robusti, sed emaciati cadauere, inuenio cor, sinus, auriculas, cum pericardio interno ita concreta, vt a dissecto iuxta longitudinem eodem auriculae et sinus, vti et pars superior cordis ventriculi dextri facile digiti apice separarentur; inferne vero, vbi diaphragmatis parti neurodi incumbebat, et ad apicem, vbi latus pectoris sinistrum ferit, adhaerebat cordis substantia firmiter adeo, vt cultelli ope ab incrassato pericardio dissecare illam debuerim. Erat autem substantia intermedia connectens vera cellulosa, quod pulcherrime apparebat extendendo

 peri-

(1) Parerg. III p. 198. (2) De subitan. mortib. obseru. III. p. 225. (3) Impr. Anat. Tab. IV. fig. 6.

pericardium, ſed tenax, qualem ſemper obſeruamus, ſi pulmones cum membrana coſtas ſuccingente concretos ab ea ſeparamus, de qua et methodo concreſcendi poſtea ago (1). Erat autem poſt ſeparationem cor, inprimis ad mucronem, et pericardium internum, a diſrupto hoc vinculo, ſcabrum et hirtum.

Vtriusque inciſi cadaueris ignota fuit vitae et morbi ratio, vtpote quae ſaeuiente in fine anni praeteriti frigore intenſiſſimo adeo, vt thermometrum Fahrenheitianum 30 et 32 gradum infra o iudicaret, mortua fuere in via publica inuenta.

Dum iam nactus eram occaſionem examinaui, quid ad externam faciem exhiberet pericardii ſuperficies, vt abſentiam ſuam declararet, cordis extimam membranam mentita, ſed hercule craſſus adeo apparebat in hiſce error, ad figuram cordis nudati fingendam, vt ne quidem lanionem, multo minus Anatomicum deciperet, inprimis cum margo pulmonum in vtroque cadauere liber erat. Nam licet vltimi memorati viri cadauer valde eſſet emaciatum, et vix celluloſa inter mediaſtini duplicaturam quid pingue haberet, et ipſa pericardii membrana tam arcte cum corde concreta foret, nihil tamen externe apparebat, de baſi cordis eiusque appendiculis et vaſis maioribus. Praeterea ſegmenta pleurae, quae mediaſtino disſecto et ſterno eleuato, pericardio adhaerent, et magnum Lanciſium peſſime fefellerunt ſpecie neruorum in explicatione Tabularum Euſtachii (2), liquidiſſime indicabant, quod oculis occurrebat, eſſe cor continens pericardium: hinc credo, qui pericardii abſentiam ex autopſia, non alios exſcribendo aſ-

ſeclae,

(1) Obſeru. 5. (2) Tab. IX, 22-28 22-29.

fechae, ponunt, meliore cum ratione errare; quoties nempe diffecuerunt cadauera, quorum pulmonum concaua superficies plane concreta erat cum pericardio, et tum vt plurimum cum concaua thoracis, sua conuexitate. Praeter etenim casum, quem obseruatione quinta describo, occurrit nuperrime in dissecto cadaueris pectore, sterno valde gracili eleuato, vterque pulmo arctissime cum pericardio et pleura concretus, vt nullo modo collapsus, plenitudinem thoracis, et aëris fictitii absentiam pulcherrime declararet. Apparebat hic, quantilla sit distantia intermedia decernentis mediastini, adeo quidem vt pulmo pulmonem fere attingeret limbo suo, quo alterum a iugulo ad infimam partem sterni respicit. Cum autem in tali separatione adhibetur cultellus, et facile laeditur membrana pericardii pulmoni accreta, inprimis in eleuando sterno itidem concreto, si forte tota haec descinditur, et cum pulmonibus, quibus firmissime adhaeret, eleuatur, reuera apparet cor quasi inter politissimam superficiem pulmonum nudum et liberum. Prudentis tamen tunc est in rem vlterius inquirere, et, quomodo vasa sese ad pulmones et reliquum corpus habeant, examinare et describere, antequam concludat.

Et hic casus videtur, qui fefellit celeberrimum Du Vernoi in elephante, vbi error eo crassior, quo bellua maior; nam licet in aliis bene meritus Vir putet, esse incredibile, lapsum posse committi in re tam euidenti et facili, ad quam oculis tantum opus est apertis, vt est existentia pericardii et mediastini, (1) credo tamen et

(1) Coment. Petrop. Tom. II. pag. 289.

et confido, illum misere cecidisse, saltem a stabili via deflexit, cum modo absentiam ponit, nec vllam addit descriptionem, qua ratione se partes habuerint. Anatomicus non oculis tantum, sed et manibus opus habet, quas si admouisset, haud dubito, quin inuenisset, quod ipse ego in dissectione Elephantis, cui iam per quinque menses incubui, deprehenderim. Scilicet in tanto animali, quod fateor non tam facile, ac hominis cadauer, tractatur, inueni pulmones vndequaque pleurae adhaerere per tenacissimam telam cellulosam, et pericardii toti ambitui et superficiei externae, per eandem contiguos; cum autem vastum hoc animal, quantum congelatum, sinistro lateri incumbens per quadraginta et plures homines, ad id mandatos, nullo modo vel digitum latum loco moueri posset, detracta cute, costae ad articulationem cum vertebris, et sterno dissectae ablatae sunt in latere dextro, sicque totus pulmo, vna cum corde, trachea, et vasis maioribus, inferne cum diaphragmate dissecto, simul thorace exemtus est. Haec omnia dum accuratius repetito examine lustro, inueni omnia inter se concreta, scilicet, ablatis costis, separaui et separare ab illis curaui pleuram vna cum adhaerentibus pulmonibus, quos dum a pericardio abstuli, vidi hoc animalium more, quae prona terram spectant, per processum oblongum, acutum iungi cum diaphragmate, ita vt cor perpendiculariter suspendatur in hoc, vt in caeteris quadrupedibus, inter pulmones intra pericardium, atque per hoc transeuntia vasa maiora illud suspensum et tensum teneant.

In

In aperto autem pericardio, vt erat craſſities notabilis, ita admiranda ſtructura eadem apparuit, quam antea in opuſculo de Perſpiratione Hippocratica deſcripſi.* Et quidem cum cor vna cum pericardio, dum reliqua viſcera de die examino, in aqua pura toties renouata, per quatuor et vltra menſes ſeruaſſem, ab iſta maceratione facillima fuit inquiſitio. Separaui igitur membranam cordis extimam a ſubiecta pinguetudine ad baſin, deinde ab arteria pulmonali ſupra celluloſam vsque, quo loco reflexa in ambitu pericardii membranam internam conſtituit. Separaui itidem membranam a pulmonibus datam, ab altero arteriae latere ad illum vsque ambitum, vbi reflexa membranam cordis externam conſtituit, ſeparaui deinde has membranas, pericardium conſtituentes, in illo ipſo a ſe inuicem. Apparuit tunc, et iucundiſſimo ſpectaculo Auditoribus exhibui, membrana cordis, arteriae intra pericardium, pericardii interna, vna continua, ſed tenera adeo et tenuis, vt tota pelluceret, poſtquam arte et patientia ab omni adhaerente flocculenta materie interne liberaſſem; imo vero tenuiorem nunquam vidi in homine, aut cuiuscunque generis animali, quod ad hunc ſcopum incidi; multa autem diuerſi generis quadrupedum, piscium amphibiorum, ea diſſecui intentione, vt vera fabrica appareret, tam cum Magno Auunculo Hermanno Boerhaaue, cum praelectionem ſuam de corde meditaretur, quam poſtea, ad hoc incitatus, ſolus. Apparuit eadem encheireſi membrana pulmonum, arteriae extra pericardium, pericardii externa, vna continua, tenera, pellucens, craſ-

* ad § 142. et ſeqq.

sior tamen, quam interna. Apparuit tandem maxima pericardii crassities ab intermedia filamentosa tenace substantia, quae rite examinata, leui extensione, inflatione, separatione, conspiciebatur vera et vnica cellulosa, per quam vasa et nerui, ad nudum oculum conspicua, decurrebant. Quae supra arteriam apparuerunt, eadem supra venas pulmonales vera sunt, vt repetere experimenta non opus sit verbis. Haec est vera in Elephante, vt in aliis animantibus pericardii ortus historia, per hoc vasa transeunt, et tensa ipsa pericardium extendunt. Concretio autem his visceribus familiaris, in omnibus forsitan Elepantibus obtinet, qui in stabulis seruantur et aluntur, quoniam motum moli corporis appropriatum neutiquam exercere possunt: cum autem eadem in homine saepe obtineat, puto causam erroris, absentiae scilicet pericardii declaratae, satis esse euidentem. Quod vero ad Parisini Medici sententiam attinet, esse scilicet hoc inuolucrum inutile, nimia volatilitate reor pronunciatum, cum forsitan, vt in toto rerum vniuerso, vix in corpore humano, aliquid aut superfluum aut inutile demonstraturus sit Physicus.

Obseruatio quinta.

Omnia viscera abdominis et thoracis vidi in cadauere Viri in Nosocomio maritimo Petropolitano lenta febre enecti, ita inter se concreta, suo loco tamen disposita, vt nullum plane liberum foret. Omentum infra vmbilicum extensum, superne cum peritoneo, inferne cum intestinis, sese vt solet inter gyros illorum ad certam altitudinem insinuans, et ad latera; gyri Intestinorum inter se, flexurae Mesenterii inter se, firmiter erant

con

concreta. Hepar conuexa sua tota supeficie, etiam illa parte, qua ceterum liberum, diaphragma per reflexam suam membranam concauum tangit. Lien itidem parte sua suprema cum diaphragmate, posteriore cum peritoneo, anteriore sua concaua cum fundo ventriculi firmissime cohaerebant. Vesica vrinaria in hoc corpore magna, supra os pubis extensa ad mediam inter pubem et vmbilicum altitudinem, ad latera sua, sed inprimis ad fundum, erat iuncta cum superincumbentibus intestinis. Colon intestinis et lumbis vndequaque erat accretum. In pectore Pulmones cum membrana thoracem succingente, vbi illa supra costas et conuexum diaphragma extenditur; et cum pericardio, cohaerebant firmissime. Pulmonem, dextrum vomica obsidebat; hinc in saccum pure plenum fere totum conversum. Cor interim in pericardio liberum vna cum suis vasis copiae humoris subrubello flauescentis innatabat. Cranio aperto meninges, disiunctae et cerebri ventriculi naturaliter cauitate distincti, cetera sana erant.

Omnes autem istae concretiones erant (vti tunc temporis Auditoribus exhibui) per membranas extensas, quae, ex duplicatura concretae, tenacula efficiebant splendentia, ratione partium et distantiae concretorum maiora, minoraue, qualia fere cernimus colon intestinum ad peritoneum coniungere, eiidem inserta, in illud abeuntia, et naturaliter suspensum retinentia, vbi flexuris suis ad et descendit. Inter has duplicaturas, dum descindebantur, semper apparebat contextus reticularis seu cellulosus, qualem et semper inuenimus inter concretum cum membrana thoracis interna pulmonem, dum ab illa hunc ſeparamus. Cum iam antea de concretione partium locutus ſum, et notaui tunc intermediam fuiſſe talem cellulofam, quae in ſtatu naturali abeſt, non poſſum, quin de eius ortu ſententiam expono. Inter partes non concretas caua dari impleta ſana ſpiritu in opuſculo de Perſpiratione ex Hippocrate elucidaui antea et experimentis firmaui, et morboſa ichore repleri illa, eodem notante. Quoties autem praeceſſit inflammatio valida, toties fere ſemper poſtea concreſcunt inter ſe, vt vulnera docent, pleuritis et peripneumonia, hepatitis, aliique morbi acuti: adeo quidem vt ex centenis forſitan vix vnus inueniendus, cui pulmo non cohaereret thoraci interno, poſt ſaeuam eiusdem aut pleurae inflammationem, ſiue a cauſa interna ſiue a vulnere. Impedita transpiratione, a ſiccitate hoc fieri putant Auctores, et ipſe credidi. Dum vero toties in ſeparatione concretorum filamenta iſta occurunt, ſuperficie caeterum polita, animum ſubiit indagatio de horum ortu, quem talem puto. Dum inflammatio in quodam loco adeſt, oritur ibidem reſiſtentia prementi a tergo ſanguini ratione obſtructionis, hinc illius vis et impetus augetur, inde oritur febris, vnde non obſtructa vaſa maiorem itidem vim coguntur ſuſtinere, et dato tempore citius transmittere ſanguinem: augetur ergo circulatio, augetur tranſpiratio per vaſa non obſtructa; auctis vero impetu et circulatione, humores magis premuntur intra dilatata inde vaſa, hinc vel noua obſtructio, vel alieni et quidem ſerie craſſioris transmiſſio, vt quae ſpiritum prius, lympham, quae lympham antea, ſerum recipiant et transmittant: imo vero manente eadem vi,

quae

quae ſpiritum prius, iam ſerum, et ſanguinem; vt euidens eſt in oculo inflammato. Pulmo ergo, vel membrana interna thoracis, vel ambo ſimul, quoties inflammantur, atque mox expoſita ibidem obtinent, inter vtramque ſuperficiem, non concretam, deponitur humor, quam ſpiritus ſiue halitus, in ſanis replens, craſſior, qui ſtagnando, et reſorptu tenuioris per venulas diametro haud dilatatas, patulas, magis plaſticus redditur, atque motu continuo pectoris in filamenta ductus, concauum cum conuexo coniungit. Ars naturam imitando id efficit glutine; patet ſi duo ligna, eodem iuncta, a ſe inuicem diſtrahuntur: tum etenim hoc in fila ductile rumpitur. Autopſia vero in recens natis, maxime ante maturitatem vtero excluſis, rem elucidat. In illis etenim, quo loco ſub cute in adulto celluloſa ſubſtantia ſolidior, extenſilis inuenienda, ibidem apparet inter loculos pingui, feros ſmegma mucoſum ductile in filamenta eo tenuius, quo propius ab origine diſtat animal. Hoc in vitulis vaccae vtero exſciſſis, hoc in agnis ex ouibus exemtis, hoc in catulis canum ante partum examinatis, toties vidi, hoc expertus ſum in abortubus humanis. Vnde vix dubito, quin ipſa ſubſtantia celluloſa, ſiue veſicularis, quae ſub vario nomine in corpore occurrit, perperam membrana dicta, ortum ſuum debet iſti ſmegmati naturaliter ſecreto, eo firmior, quia inter partes reliquas ſeparatas, vbi celluloſa tela ingreditur, adeſt in abortu mucus. Haec ſi arridet hypotheſis tum vti in thorace, ita in reliquis apparet partium concretio, qualem in cerebro, pericardio,

 mox

* Obſeru. 2da obſeru. 4ta.

mox exhibui, et iam in omnibus fere visceribus etiam, cuius causa tum facile apparet, si respiciamus ad lentam visciditatem, quam humores induxerunt lenta et diuturna febre intermittente, quae insuper ortum duxerat ex morbo acuto, peruersa diaeta, atque abusu potus spirituosi.

DESCRIP-

DESCRIPTIONES RARIORVM PLANTARVM.

AVCTORE
Stephano Kraſcheninnikow.

DE PERSICARIA *foliis ouatis, glabris.*

Tab. XIII.

Quinque Perſicariae ſpecies rariores in Sibiria obſeruatae ſunt: Perſicaria ſcil. montana foliis longioribus et anguſtioribus. Perſicaria floribus octandris trigynis, foliorum lanceolatorum vaginis hirſutis: Perſicaria caule in latum diffuſiſſimo, foliis lanceolatis: Perſicaria ſpicis longis numeroſiſſimis, vaginis integris, floribus pentandris trigynis, et Perſicaria foliis ouatis, vtrinque incanis: quarum primam *B.* Ammanus in *deſcr. Stirp. rarior. Ruth.* propoſuit, omnes autem Cel. Gmelin in T. III, *Fl. Sib.* breui edendo recenſuit. Sexta erit haec noſtra, quae quanquam non in Sibiria, ſed in Sinarum regno prouenit, Sibiricis tamen iure accenſeri poteſt; cum regiones prouentu eius celebres, borealem dicti imperii partem, conſequenter Sibiriae finitimam, conſtituant.

Caulis huius plantae a ſeſquipede ad duos pedes altus eſt; teres, cauus, glaber, in planta iuniore pallide viridis, ſub tempus floreſcentiae, praecipue infra, rubro colore tinctus, crebris geniculis diſtinctus, ad exortum procumbens, cetera erectus, ab imo ad ſummum ramoſus, ramis inferioribus rectis, longitudinem ipſius caulis aequantibus.

Folia

Folia in caule numerosa, ad singula scilicet genicula singula, alterna, ouata, petiolata, a sesquiuncia ad duos pollices longa, superiora aliquantum breuiora, vnam scil. vnciam lata, saepe etiam paulo latiora aut angustiora, supra laete viridia, infra albidiora, neruosa, vtrinque glaberrima, ad oras breuibus albentibus duris pilis horrida. Petioli eiusdem cum caule coloris, crassiusculi, glabri, infra conuexi, supra plani, ad oras, aeque ac foliorum margo, pilis asperi, diuersae longitudinis; inferiorum enim foliorum petioli vnciales aut et longiores sunt, reliquorum ad spicam vsque floriferam sensim breuiores, ita vt petioli summorum foliorum tertiam vnciae partem longitudine vix superent.

Internodia pro more vaginis tecta sunt; inferiora ad quartam, superiora ad dimidiam fere longitudinis partem. Vaginae membranaceae transparentes, albae aut rubro colore infectae, creberrimis longitudinalibus neruis distinctae, qui ad 2 et 3 lineas vltra membranas excurrentes, summum earum marginem tenuissime laciniatum efficiunt.

Rami e foliorum alis prodeunt; inferiores maturius, superiores multo serius: qui et ipsi in alios minores, eadem prorsus, qua caulis, ratione diuiduntur et subdividuntur.

Folia ramorum et ramulorum, praeter quod minora sint, eorumque vaginae nihil a caulinis abludunt.

Tam caulis, quam rami et ramuli infra singula genicula crebris exiguis glandulis, viridibus aut rubentibus, absque vllo ordine sparsis, obsiti sunt.

Spe-

Spicae floriferae, caules et ramos terminantes, breves, e spiculis partialibus, duas et tres lineas longis, tribus aut quatuor, raro pluribus corollis sessilibus onustis, componuntur.

Foliola singulis spiculis subiecta, alterno situ et forma caulinis similia, sessilia tamen et magis mucronata sunt: inferiora semiunciam, summa vix lineam longa. Vaginae etiam foliolorum a caulinis non differunt, nisi quod tota fere internodia inuestiunt.

Corollae albae, quinquepartitae, duabus laciniis exterioribus breuioribus, latioribus, concauis, in medio dorso viridibus; tribus interioribus longioribus, angustioribus et in extremo saepe laceris.

Filamenta sex, corolla fere dimidio breuiora, vna cum antheris alba.

Germen triquetrum. Styli duo longitudine staminum et stigmata capitata candida.

Folia sicca e viridi coerulescunt.

Duo huius Persicariae exempla e seminibus a Rever. Gaubil superiori Patr. Gall. qui Pekini sunt, et Academiae Scientiarum Petropolitanae honorario Membro, transmissis, produximus, quae floruerumt sub initium Novembris, eodem, quo sata sunt, anno, fructum autem non muturarunt.

Sinae ex relatione laudati Reu. Gaubil. hac Persicaria, ad coeruleum pigmentum, vulgo indigo dictum, conficiendum vtuntur.

Icon sistit ramum ex inferioribus naturali magnitudine, cum spica florifera corollis non dum bene explicatis.

DE SALVIA

Tab. XIV. *foliis cordatis, obtuse crenatis, spicis Florum nutantibus.*

De natali elegantissimae huius plantae loco certo mihi non constat: audiui tamen, si verum est, e seminibus a Cl. Gerbero, Florae Tanäensis Auctore, collectis, in horto nostro Botanico propagatam esse, hinc et in adiacentibus Tanai regionibus crescere eam probabile est.

Altitudine est plerumque bipedali. Caulis tetragonus molli et breui lanugine incanus, intus medulla alba farctus, ab imo ad summum ramosus.

Folia radicalia cordato-acuminata, quinque fere vncias longa et quatuor circa basin lata, supra intense viridia, splendentia, glabra, saltim nullis pilis, nudo oculo conspicuis, obducta, rugosa, infra neruosa, aeque ac caulis, molli hirsutia vestita, margine nonnihil vndulata, obtusissime crenata, petiolata et ad insertionem petiolorum vtrinque quasi erosa. Petioli foliorum longitudine, infra conuexi, albidi, supra sulco excauati, rubentes. Folia caulina opposita, quorum inferiora petiolata, reliqua sessilia. Folia petiolata radicalibus similia, latiora tamen et obtusiora, saepe in extremo profunde laciniata, breuioribus petiolis haerentia: sessilia inferiora vix vncialia, cetera quo superiora, eo breuiora sunt, ita vt summa vix 4 lin. superent; omnia tamen cordatam quodammodo figuram affectant.

Rami nudi, e singulis foliorum alis singuli; inferiores, ex alis scilicet petiolatorum foliorum prodeuntes, altitudine a summo caule non multum deficiunt et erecti caulique approximati sunt: reliqui ad summum vsque gra-

gradatim breuiores euadunt et magis in latum diffunduntur.

Summo cauli et ramis ſpicae floriferae nutantes, conſtanter ternae inſident, quarum mediae binis oppoſitis plerumque longiores ſunt. Verticilli ſpicas componentes ſex floribus ſubſeſſilibus, in orbem diſpoſitis, conſtant, quorum ſingulis binae oppoſitae ligulae, calicibus dimidio breuiores, ſubiectae ſunt.

Calix monophyllus tubulatus, breuis, compreſſus, profunde ſtriatus viridis, ſaepe etiam ſtriis rubro colore tinctis conſpicuus, bilabiatus, labio ſuperiori integro, inferiori bidentato.

Corolla pro more ringens, bilabiata. Labium ſuperius longius, erectum, emarginatum, medio dorſo carinatum, violaceum, extra punctis candidis pictum: Inferius trifidum violaceum absque puctulis, lacinia media propendente maiori, ſubrotunda, integra, margine aliquantum ſurſum erecto, hinc concaua; lateralibus minoribus, oblongis, horizonti parallele extantibus.

Filamenta duo intra labium ſuperius deliteſcentia, alba, cum antheris oblongis incumbentibus fuſcis, luteo polline tectis.

Germen quadrifidum. Stylus ſtaminibus multo longior, imo extra labium ſuperius per emarginaturam eius non parum prominens, infra albus, ſupra purpuraſcens, cum ſtigmate bifido acuto, violaceo.

Semina pro more quatuor, nigra.

Floret ſub finem Iunii. Semina maturat Auguſto.

Icon ſiſtit plantam cum vno tantum petiolatorum foliorum pari, hinc naturali paulo humiliorem. Spicae floriferae summae tantum pictae sunt, reliquae, vt labori pictoris parceretur, absque floribus designatae, florum tamen figura ex descriptione potius, quam ex icone addiscenda est. A. folium radicale naturali magnitudine.

DE LVNARIA
foliis ellipticis incondite dentatis.

Tab. XV. fig. 1. Hanc b. Stellerus in America septentrionali maturum iam fructum ferentem legit, et sub nomine Leucoii saxatilis foliis ad radicem Turritidis in orbem sparsis, asperis, siliquis planis, latis, vtrinque acuminatis, seminibus planis, marginatis, nigris, sequenti modo descripsit.

Planta crescit e saxis versus orientem ad dodrantalem altitudinem. Folia e corona radicis prodeuntia in orbem sparguntur, glauco-viridia sunt, punctulis aspera Turriditis instar, sesquiuncias longa, quinque lineas lata. E medio foliorum caulis dodrantalis surgit, in summitate valde ramosus. Singulis ramulis appensa est siliqua 6. 7. 8 lineas longa, 3 aut 4 lata, vtrinque acuminata, sub maturitatem in medio inflexa seu contorta, et secundum longitudinem falcis instar deorsum curuata, biualuis, lutescens sordide, septo intermedio membranaceo, candido, tenuissimo, diaphano discriminata, cui vtrinque semina nigra, orbiculata, plana et marginata adhaerescunt, quae optime matura collecta sunt. E mea mente ob siliculas curtas, latas, contortas et inflexas, singulare meretur genus, aut sequenti ratione a reliquis Leucoiis distinguenda. Leucoium Turritidis folio, siliquis curtis, latis, contortis et falcatis, semine nigro. Forte Lunariae accensenda. Haec Stellerus: Nunc plantae in nostro solo

natae

natae deſcriptionem ſubiungemus, partim vt ea, quae inuentori obſeruare non licuit, ſuppleamus: partim vt collatis inter ſe deſcriptionibus appareat, quantum diuerſa ſoli natura vnam eandemque plantam mutare valet.

Magnis ceſpitibus naſcitur, et tota breui albenti hirſutia aſpera eſt.

Radice nititur lignoſa, ſupra pennae columbinae craſſitie, inferiora verſus attenuata, ab vncia ad ſesquipollicem longa, oblique in terram deſcendente, plurimis breuibus, capillaribus fibris per totam longitudinem ſtipata, extra fuſca epidermide obducta, intus vireſcente, nullo notabili odore aut ſapore praedita.

Caules ſesquiunciales, biunciales aut et paulo longiores, erecti aut declinati, teretes, e glauco virentes, tribus aut quatuor foliis veſtiti et vnico aut duobus ramulis floriferis, e foliorum alis prodeuntibus, aucti.

Folia elliptica acuta: radicalia plurima in orbem diſpoſita 8 aut 9 lineas longa, 2 et 3 lata; caulina inferiora paulo breuiora, ſummum vix 3 linearum eſt: omnia acutis et longis dentibus, quaedam tamen pluribus alia paucioribus, plerumque circa medium, inſtructa ſunt.

Flores in ſummo caule et ramis quodammodo vmbellati, tenuiſſimis pediculis ab vna linea ad 1½ longis inſiſtunt, quidam et ſeſſiles ſunt.

Calix tetraphyllus, eluteo viridis, foliolis ouatis, erecto patentibus, deciduis; quorum duo oppoſita concaua et baſi gibba ſunt.

Corolla tetrapetala alba. Petala ſubrotunda, leuiſſime emarginata, magna, plana, patentia, in vngues luteſcentes longitudine calicis deſinunt.

Fi-

Filamenta ſex ſubulata, luteſcentia, quorum duo minora intra concaua calicis foliola deliteſcunt et vtrinque ad baſin nectarifera viridi glandula cinguntur; quatuor maiora erecta, ſingula ſingularum quarundam ſquamarum (forte nectariorum) ſummo dorſo inſiſtunt, quae concavae ſunt et germen circumſtant atque inuoluunt. Antherae cordatae, ſulcatae, erectae, flauae.

Germen oblongum, teres, intra ſquamas, longiora ſtamina ſuſtinentes, abſconditum. Stylus longitudine germinis, perſiſtens. Stigma capitatum.

Silicula elliptica plana, vtrinque acuminata, vix 3 lin. longa, et 1½ lata, ſaepe incurua, non raro etiam recta, ſepto valuis parallelo membranaceo, transparente, albo diuiſa.

Semina exactiſſime ita ſe habent, vt in Lunaria Cel. Linnaeus gen. pl. deſcribit: ſunt enim, vt eiusdem verbis vti liceat, reniformia, compreſſa, marginata, in medio ſiliculae poſita, receptaculis filiformibus, ſed brevibus, ſuturis lateralibus inſertis, pendentia, vtrinque tria.

Floruit ſub finem Aprilis. Semina maturauit Iunio. Lunariae coniunxi, quia pleraque eſſentialia cum hoc genere communia habet; ita tamen vt etiam eorum ſententiae faueam, qui forte eam a Lunaria ſeparandam et nouo aliquo nomine appellandam eſſe cenſuerint: cum ſquamae, quae germen circumſtant et maiora ſtamina ſuſtinent, ad eſſentiam generis conſtituendam non minoris momenti aeſtimari poſſe videantur, quam dentes in minoribus Alyſſi ſtaminibus, qui eſſentiam eius generis, Cel. Linnaeo docente, coſtituunt.

Icon

Icon sistit plantam naturali magnitudine. a) Stamina et pistillum nudo oculo conspicua, b) eadem lente spectata c). Stamen maius squamae insistens.

DE THALICTRO.

Caule ramoso, ramis plerumque heteromallis. Tab. XV. fig. 2.

Haec quoque planta e seminibus a b. Stellero a°. 1743 ad Camtschatcam lectis et transmissis sub nomine Thalictri minimi seminibus e singularibus pediculis quaternis, striatis, enata est, de qua tamen ipse Stellerus nihil praeter nomen memoriae prodidit.

Cum Thalictro seminibus triangularibus pendulis, stipulis nullis Cel. Gmelini, tam quo ad habitum, quam quo ad foliorum figuram, nostro multum conuenit; semina tamen nostrae plantae erecta, eorumque figura vt et ramorum dispositio suadent, vt separemus.

Pedali est plerumque altitudine. Caulis pro plantae statura crassus, penna scilicet anserina non multum tenuior, teres, glaber, striatus, viridis, foliosus, infra procumbens, cetera erectus aut ascendens.

Folia caulina alterna, petiolata, duplicato pinnata. Foliola subrotunda, plerumque trifida, non raro etiam bifida aut integra, inferiora obtusa, superiora paulo productiora et acutiora, exigua, $2\frac{1}{2}$ scil. lin. vix excendentia, viridia aut in glaucum non nihil vergentia.

Rami e singulis foliorum alis singuli, longi, aeque ac caulis ramosi, ramis superioribus nudis, inferioribus vno folio circa mediam longitudinem vestitis.

Extre-

Extrema caulis et ramorum in pedunculos vnifloros eadem prorſus ratione, qua caulis in ramos, diuaricantur. Foliola pedunculis ſubiecta plerumque integra, ouata, raro inciſa aut trilobata ſunt.

Flores ochroleuci, ſub initium floreſcentiae, cum pedunculi breues ſunt, racemoſi, iisdem poſthac indies excreſcentibus, in paniculas diffunduntur et verſus vnum latus inclinantur. Hos ſubſequuntur ſex, ſeptem et octo ſiliculae oblongae, ſtriatae, hinc gibbae, inde planae, in apicem acutum reflexum deſinentes. Quod Stellerus quatuor tantum ſemina ſuae adſcribit, id non magni aeſtimandum eſt: nam praeter quod numerus eorum variat, facile etiam fieri potuit, vt Stellero matura ſemina legente non nulla iam deciderent.

Icon ſiſtit ramum ex inferioribus naturali magnitudine. *a*. eſt folium radicale.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DE MOTV NODORVM LVNAE EIVSQVE INCLINATIONIS AD ECLIPTICAM VARIATIONE.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Quanquam luna inter omnia corpora coeleſtia nobis eſt proxima, eiusque adeo diſtantia a terra ope parallaxeos ſatis notabilis quouis tempore ſine ſenſibili errore aſſignari poteſt, quo ſubſidio aſtronomia ratione ſolis ac planetarum, imprimis vero ratione ſtellarum fixarum etiamnunc caret: tamen motus lunae tantopere eſt implicatus, totque perturbationibus obnoxius, vt nullo adhuc modo certis legibus circumſcribi, atque ope tabularum exacte definiri potuerit. Cum enim quilibet planeta primarius in eodem plano motum ſuum abſoluat, atque per perimetrum ellipſis ſecundum leges a Keplero obſeruatas circa ſolem circumferatur, ex loco medio ope vnicae aequationis ab excentricitate orbitae pendentis, eius locus verus ad quoduis tempus definiri poteſt. Luna vero ab iſta motus vniformitate maxime recedit: primum enim motum ſuum non in eadem planitie perficit, et, ſi quouis tempore planum per centrum terrae ductum concipiatur, in quo via a luna deſcripta ſit ſita, non ſolum interſectio huius plani cum ecliptica, quae linea nodorum appellari ſolet, continuo mutatur, atque modo antrorſum modo retrorſum procedit, ſed etiam ipſa Tab. XVI.

istius plani inclinatio ad eclipticam est variabilis, alioque tempore maior alio minor obseruatur. Tum vero luna in ista mutabili semita neque motu vniformi progreditur, neque eandem a centro terrae seruat distantiam, quae quidem inaequalitas quoque in planetas primarios cadit; verum cum in planetarum orbitis ea puncta, in quibus soli sunt vel proximi, vel ab eo maxime remoti, constanter in easdem coeli regiones dirigantur: ita ratione longe diuersa ea puncta orbitae lunaris, quae a terra vel maxime vel minime sunt dissita, non quiescunt, neque etiam minimae eius a terra distantiae, quibus locis luna in perigaeo versari dicitur, omnes sunt inter se aequales, neque maximae, quibus locis luna in apogaeo versari dicitur, hincque tam distantia perigaei seu apogaei a terra, quam eius locus in coelo est variabilis; cuiusmodi inconstantia in nullo planeta primario deprehenditur. Praeterea quoque motus lunae ab apogaeo vel perigaeo mobili nulli tali constanti legi adstringitur, vti fit in planetis, sed pro eadem ab apogaeo elongatione locus verus a loco medio modo magis modo minus discrepat. Quare cum astronomi ad similitudinem planetarum primariorum lunae motum per ellipsin repraesentare velint, in cuius alterutro foco centrum terrae versetur, non solum positionem huius ellipsis seu lineam apsidum continuo mutare, sed etiam eius magnitudinem et excentricitatem variabilem statuere sunt coacti. Neque vero etiam hoc modo inaequalitatem motus ad vnicam correctionem, quae a sola excentricitate et quantitate fictae istius ellipsis penderet, revocare licuit, sed plures insuper tabulas aequationum

num condere oportuit: quae quamuis calculum lunae molestissimum efficiant, tamen neutiquam cum veritate perfecte consentiunt.

§. 2. Quo magis autem motus lunae perturbatus obseruatur, eo magis theoriam motuum coelestium, quam Vir summus Neutonus primus in lucem produxit, confirmat et corrobarat. Postquam enim Neutonus leges a Keplero ex obseruationibus erutas calculo subiecisset, atque secundum veras motus regulas examinasset: omnes planetas perinde moueri demonstrauit, ac moveri deberent, si ad solem vrgerentur viribus, quae quadratis distantiarum a sole reciproce essent proportionales. Hinc enim ostendit, planetas in ellipsibus moueri, quarum alterum focum sol occupet, hocque motu areas temporibus proportionales circa solem emetiri debere: praeterea vero quadrata temporum periodicorum cubis axium transversorum cuiusque ellipsis proportionalia fore. Quae conclusiones cum phaenomenis accuratissime satisfaciant, non dubitauit Neutonus tanquam principium certissimum stabilire, omnes planetas perpetuo ad solem vrgeri viribus, quae quadratis distantiarum reciproce sint proportionales, et cum deinceps inuenisset, motum cometarum ad eandem legem esse comparatum, eo magis veritas principii assumti ipsi confirmabatur. Quoniam porro omne coeli spatium omni materia vacuum statuit, ne a resistentia medii motus planetarum retardarentur, huius vis, qua planetae ad solem sollicitentur, nullam caussam physicam admittere valuit. Hancque ob caussam ipse quidem tacite, at sectatores eius aperte profiteri sunt ausi, solem ista vi immediate a Creatore esse donatum, eaque omnia coeli corpora ad se allicere atque attrahere. Cum autem nullum corpus ab alio attrahi posse agnoscerent, nisi hoc simul ab illo pari vi attrahatur, similem vim attrahendi singulis planetis et cometis attribuerunt, quia vero non constabat, ipsum solem ab istis planetarum viribus sensibiliter impelli, inertiam atque adeo materiam, qua sol constat, multo maximam statuerunt, vt effectus a viribus illis ortus produceretur quam minimus. Hanc opinionem comprobabat quoque stupenda solis magnitudo, qua omnes planetas longissime superat. Praeterea vero ipsa grauitas, qua omnia corpora ad terram vrgeri sentimus, atque nisus, quo luna manifesto terram versus impellitur, talem vim attractiuam in terra euincebat: similique modo motus satellitum Iouis et Saturni, hos planetas vi attractiua praeditos esse docebant. Denique ex phaenomenis aestus marini clarissime apparebat, vti terra lunam ad se attraheret, ita vicissim terram cunctasque eius partes a luna attrahi. Cum igitur hoc modo euicissent omnia corpora mundi se mutuo attrahere, eandem vim ad omnia prorsus corpora extendere sunt conati, atque adeo attractionem proprietatibus materiae adnumerauerunt; quae vltima conclusio, vti nimis est temeraria, ita quoque praecedentis ratiocinii vim non infringit, neque summum vsum, quem Philosophia Neutoni Astronomiae affert, suspectum reddere debet. Cum enim reliqua omnia obseruationibus et indubitatis argumentis sint confirmata, hoc solo excepto, quod attractio sit proprietas materiae essentialis, dubitare profecto non licet, quin omnia corpora mundi reuera ad se se mutuo impellantur, etiamsi caussa huius vis ignoretur. Pro vsu autem astronomico sufficit nosse eiusmodi vires in mundo reipsa existere, quarum effectus cum solus spectetur, perinde est, quaecunque earum sit caussa siue cognita siue incognita, neque in ipsam astronomiam multum inde incrementi redundaret, licet huius phaenomeni caussa abscondita innotesceret.

§. 3. Stabilito ergo hoc principio, quo omnia corpora coelestia se mutuo attrahere statuuntur, determinatio omnium motuum qui in coelo fiunt, ad resolutionem problematum mechanicorum reducitur: mechanica enim est quaestio, qua ex cognitis viribus, quibus duo pluraue corpora in se inuicem agunt, variatio vnius cuiusque motus inde oriunda definiri debet. Ac pro motu planetarum primariorum quidem determinando, etsi ii non solum ad solem vrgentur, sed etiam quilibet a reliquis trahitur, tamen vires a planetis ortae tam sunt exiguae ratione vis, quae ad solem tendit, vt in hoc negotio sine errore sensibili praetermitti queant. Hancob caussam inuestigatio motus cuiusque planetae primarii ad solutionem huius problematis perducitur, vt duorum corporum, quae se mutuo attrahunt in ratione reciproca duplicata distantiarum, motus ac situs ad quoduis tempus assignetur. Quod problema vti non est difficile solutu, ita quoque planetarum primariorum motus facile ope calculi definiuntur, ac tabulae in vsum astronomicum construuntur. Pro luna autem calculus, ad quem haec theoria deducit, tantopere fit molestus, totque difficultatibus implicatus, vt vix quicquam certi ad eius motum determiminandum ex eo elici poſſit. Cum enim luna non ſolum ad terram attrahatur, ſed etiam ad ſolem, harumque virium neutra tam ſit parua, vt reſpectu ad alteram habito pro nulla haberi queat, problema hinc occurrit longe difficillimum, quo motus trium corporum ſe mutuo attrahentium inueſtigandi proponuntur: hicque trium virium ratio haberi debet, vnius, qua ipſa terra ad ſolem vrgetur, ſecundae, qua luna ad terram, et tertiae, qua luna ad ſolem ſollicitatur. Hoc igitur problema, ſi commode ſolui poſſet, determinatio motus lunae in promtu eſſet, verum hoc caſu defectu analyſeos, certaeque methodi huiusmodi intricatos calculos euoluendi, fit vt theoria vix plus circa motum lunae pateficiat, quam ex obſeruationibus colligere licuit. Quicquid autem adhuc aſtronomi ex his theoriae tenebris deducere, et quaſi per tranſennam dignoſcere potuerunt, tam accurate cum experientia conſpirat, vt nullum prorſus dubium ſuperſit, quin vniuerſus lunae motus, cunctis conclusionibus, quae vnquam ex calculo formari queant, exactiſſime ſit reſponſurus. Neutonus, qui ipſe primus hoc negotium eſt adgreſſus, incredibile ſtudium in hac quaeſtione enodanda collocaſſe videtur, hocque ipſo non parum adiumenti in Aſtronomiam attuliſſe merito indicatur: tabulae enim aſtronomicae, quae ad eius mentem ſunt conditae multo propius verum lunae locum quouis tempore exhibent, quam reliquae. Interim tamen tantum abeſt, vt Neutonus opus quod ſuſcepit, confecerit, vt potius ſummas difficultates, quibus iſte calculus etiamnunc laborat, luculenter ob oculos ponat, atque cum cetera ſit obſcuriſſima atque maxima

xima caligine involuta, tum imprimis ea, quae de motu lineae nodorum et de variatione inclinationis ad eclipticam differuit, non vbique rigorem geometricum prae se ferre videntur. Qui autem post Neutonum huic eidem negotio se applicuerunt, non solum non vlterius sunt progressi, sed ne id quidem fere praestiterunt, in quo Neutonum satis feliciter praeuntem habuerunt.

§. 4. Saepenumero quoque ipse istum laborem tentaui, semper autem calculi taediosissimi difficultates me vel deterruerunt vel impediuerunt, quo minus saltem Neutonum assequerer. Neque vero tum adhuc ad discrepantiam orbitae lunaris ab ecliptica respexeram, ne statim ab initio obstacula nimis augerem, hincque mihi quidem recte colligere visus sum, si ipsius plani, in quo luna fertur, mutabilitatis rationem in calculum introducere voluissem, laborem penitus insuperabilem prodituram fuisse. Methodus autem, qua tum temporis eram vsus, impedimenta non mediocriter multiplicabat, resolutis enim viribus lunam vrgentibus, quemadmodum vulgo fieri solet, in tangentiales et normales, ex illis celeritatis lunae vel incrementum vel decrementum, ex his vero curuaturam orbitae inuestigaui; sicque ad aequationes sum deductus differentiales, quae non solum integratu erant difficillimae, sed etiamsi integrari facile potuissent, tamen adhuc longissime a perfecta et commoda motus determinatione fuissent remotae. In astronomia enim neque ipsa lunae celeritas, neque curuatura viae, in qua incedit, per se desideratur, sed calculum ita accommodari oportet, vt ad quoduis tempus, punctum coeli, in quo luna verſari videtur, eiuſque vera a terra diſtantia aſſignari poſſit; quae res ex illis, quas methodus immediate ſuppeditat, non niſi moleſtiſſimo computo deriuari poſſunt. His impedimentis probe perpenſis in eam cogitationem incidi, vtrum determinatio huiusmodi motuum non alia methodo tractari poſſet, quae non per memoratas celeritatis et curauturae ambages ad optatum finem perduceret? et, cum iam nonnullis problematibus mechanicis alias difficillimis ſingularem modum ea reſoluendi detexiſſem, quo ſimilia impedimenta maximam partem remouerentur, eandem methodum non ſine ingenti calculi contractione ad praeſens inſtitutum adhiberi poſſe perſpexi. Imprimis autem hoc modo lineae nodorum motum et inclinationis ad eclipticam variationem, quae res aliis methodis vix calculo comprehendi poſſunt, mihi ſatis commode definire licuit, neque dubito, quin eandem viam perſequendo reliqua motus lunae phaenomena multo felicius explicari queant.

§. 5. Quo autem vis et vſus huius methodi clarius perſpiciatur, expediet primo eius periculum in reſolutione problematis facilioris, quo duorum tantum corporum ſe mutuo attrahentium motus requiritur, feciſſe: cum enim hoc caſu reliquae methodi ſine difficultate in vſum vocari poſſint, eo facilius patebit, quantum ſubſidii a noua methodo in problemate multo abſtruſiori expectare queamus. Praeterea vero, quia motus lunae ſine motu ſolis cognoſci non poteſt, ob hoc ipſum neceſſe erit, vt ſolis motum eadem methodo ante definiam, quam complicatiſſimos lunae motus aggrediar: hocque modo non ſolum iſtius methodi ſpeci-

ſpecimen, ex quo eius indoles intelligi poterit, exhibebitur, ſed etiam determinatio motus ſolis viam praeparabit ad motum lunae definiendum. Quanquam autem reuera terra circa ſolem circumfertur; tamen quoniam in aſtronomia non tam motus veri, quam apparentes ſpectantur, quaeſtionem ita proponamus, vt motus relatiuus determinari debeat, quo ſol ex terra, quae tanquam quieſcens ſpectatur, moueri cernitur. Hoc ergo caſu ſecundum praecepta mechanicae neceſſe eſt, vt primo motum, quo terra reuera progreditur, in oppoſita directione in ſolem transferamus: ſeu vt toti ſpatio, in quo ſol et terra continetur, motum aequalem et contrarium ei quo terra mouetur, imprimi concipiamus: quo pacto terra ad quietem redigetur. Deinde vero ne a viribus continuo ſollicitantibus terra ex hoc ſtatu deturbetur, ſimili modo requiritur, vt totum illud ſpatium quouis momento a viribus contrariis et aequalibus ſollicitari imaginemur; ſiue vt perpetuo in ipſum ſolem easdem vires, quibus terram impelli nouimus, ſed in directionibus contrariis mente transferamus. Haec eadem praecepta erunt obſeruanda, ſi deinceps noſtras inueſtigationes ad lunam quoque extendemus; ſemper ſcilicet, quia ſpectatorem in terra concipimus, eiusque reſpectu motus omnes diiudicamus, motum terrae tam in ſolem, quam lunam contrario modo inducere oportet; tum vero ſingulae vires, quibus terra ſollicitatur, pariter in contrariis directionibus tam ſoli quam lunae affingi debebunt. Hacque ratione tam in ſole, quam in luna eos ipſos motus obtinebimus, non quibus reuera mouentur, ſed quibus ſpectatori in centro terrae poſito et tanquam immobili conſiderato, moueri apparituri eſſent.

Fig. 1. §. 6. Sit igitur centrum terrae in G positum, eoque tanquam immobili spectato sol moueatur in linea curva AFf, ita vt planum tabulae planum eclipticae repraesentet. Sumatur in hoc plano linea fixa GA, ad quam quouis tempore locus solis, qui sit in F, per angulum AGF referatur; quem in finem linea GA vel ad apogaeum vel ad perigaeum solis commodissime ducetur. Elapso igitur tempore $=T$ peruenerit sol ex A in F, ponaturque angulus $AGF = r$, qui erit anomalia vera, dum anomalia media est angulus, qui se habet ad 360°, vti est tempus T ad totum tempus periodicum, seu ad annum sidereum, qui est $365^d, 6^h, 8', 30''$. Ponatur porro distantia solis a terra $FG = v$, ductoque ex F ad rectam GA perpendiculo FP, si sinus totus vnitate designetur, erit $FP = v \sin. r$, et $GP = v \cos. r$. Vocetur autem breuitatis gratia $FP = v \sin. r = y$ et $GP = v \cos. r = x$. Quod si iam tempusculo infinite paruo dT sol elementum Ff conficiat, atque ex f ad AG pariter perpendicularis fp ducatur, et Fr atque fs rectae AG parallelae constituantur, habebitur $Pp = -dx = -dv \cos. r + vdr \sin. r$ et $fr = dy = dv \sin. r + vdr \cos. r$; hincque erit $Ff^2 = dx^2 + dy^2 = dv^2 + v^2 dr^2$: atque si recta Gf ducta concipiatur, erit trianguli minimi FGf area $= \frac{1}{2} vvdr$.

§. 7 Nunc vires sunt perpendendae, quibus motus solis in quouis puncto F perturbatur, ac primo quidem occurrit vis attractiua terrae, quae cum in superficie abeat in grauitatem naturalem, cuius effectus sunt notissimi, merito instar mensurae reliquarum virium attractiuarum assumitur. Posito ergo radio terrae $= g$, quia vis attracti-

va

va terrae in distantia a centro $= g$, aequalis est grauitati, quam vnitate designemus, in quacunque alia distantia puta $= v$, erit vis attractiua terrae $= \frac{gg}{vv}$; propterea quod haec vis quadratis distantiarum a centro reciproce est proportionalis; sicque in proposito casu sol in F ad terram in G secundum directionem FG sollicitabitur vi acceleratrice $= \frac{gg}{vv}$. Vis autem solis se habet ad vim terrae, si distantiae sint aequales, vt massa solis ad massam terrae: vnde si ponamus massam terrae $= G$, et massam solis $= F$, erit in distantia $= v$ vis attractiua solis $= \frac{Fgg}{Gvv}$, hacque ipsa vi terra in G solem versus in F pelletur. Quoniam igitur ob terram in quiete considerandam, vis qua terra sollicitatur in solem sub directione contraria transferri debet, sol hinc in directione FG vrgebitur vi acceleratrice $= \frac{Fgg}{Gvv}$; et cum ante in eadem directione sollicitari sit repertus vi $= \frac{gg}{vv}$, nunc omnino in directione FG sollicitabitur vi $= \frac{(F+G)gg}{Gvv}$. Ceterum hic notandum est, in hac disquisitione, quoties virium mentio occurrit, id semper de viribus acceleratricibus intelligendum esse; atque vim grauitatis acceleratricem perpetuo vnitate indicari, quod ideo monendum est, ne istae vires pro motricibus habeantur, quae ante per massam corporis mouendi diuidi debent, quam vis acceleratrix prodeat. Hic igitur quoniam statim vires acceleratrices obtinemus, non opus est massas corporum mouendorum nosse, cum omnia corpora, quantumuis fuerint magna vel parua, ab eadem vi acceleratrice aequaliter accelerentur.

§. 8. Quantus autem cuiusque vis acceleratricis sit effectus in alterando corporum motu ex primis mechanicae principiis facile intelligitur. Si enim corpus moueatur celeritate tanta, quantam acquirit corpus cadendo ex altitudine $= V$, atque interea, dum spatii elementum $= dX$ percurrit, sollicitetur in eadem directione, secundum quam mouetur vi acceleratrice $= P$ seu quae se habeat ad vim grauitatis vt P ad 1, tum vtique erit $dV = P\,dX$. Verum si praeterea temporis ratio sit habenda, atque tempusculum, quo spatiolum dX percurritur ponatur $= dT$, erit $\frac{dX}{dT}$ celeritati corporis proportionale, quae per radicem quadratam ex altitudine V exprimi potest. Cum autem vnitas, ad quam tempus referatur, sit arbitraria, ea ita assumi potest, vt fiat $\frac{dX}{dT} = \sqrt{V}$, sicque elementum temporis dT exprimatur per fractionem $\frac{dX}{\sqrt{V}}$ et ipsum tempus T per integrale $\int\frac{dX}{\sqrt{V}}$. Ostendi autem in meo tractatu de motu, si in expressione $\int\frac{dX}{\sqrt{V}}$ longitudines exhibeantur in partibus millesimis pedis rhenani, tum istam expressionem in numeris expositam, atque per 125 diuisam, praebituram esse tempus in minutis secundis. Quodsi ergo iste modus tempus exprimendi recipiatur, erit $dT = \frac{dX}{\sqrt{V}}$, ac propterea $\sqrt{V} = \frac{dX}{dT}$, vnde fit $V = \frac{dX^2}{dT^2}$, et si elementum temporis dT constans assumatur, erit $dV = \frac{2dXddX}{dT^2}$: quo valore in aequatione $dV = P\,dX$ substituto, habebitur $\frac{2dXddX}{dT^2} = P\,dX$, ideoque $2\,ddX = P\,dT^2$: seu differentiale secundum spatii emensi bis sumtum aequabitur producto ex vi acceleratrice P in quadratum elementi temporis interea elapsi. Hoc ita se se habet, si corpus secundum eandem directionem in qua mouetur, sollicitetur, sin autem sollicitatio secundum directionem contrariam agat, tum erit $2\,d\,dX = -P\,dT^2$: vtroque autem casu directio corporis a vi sollicitante non variatur. Verum si vis oblique ageret in corpus, tum non solum celeritas, sed etiam directio motus afficeretur. Hoc autem casu in praesente instituto non indigemus, quoniam tam motum corporis, quam ipsas vires sollicitantes perpetuo secundum constantes directiones sum resoluturus, ita vt quiuis motus a nullis aliis viribus vnquam afficiatur, nisi quae eandem habeant directionem.

§. 9. Cum igitur sol in directione Ff moueatur celeritate $= \frac{Ff}{dT}$, resoluatur iste motus in binos secundum directiones Fr et Fs, eritque illius celeritas $= \frac{Fr}{dT} = \frac{-dx}{dT}$ huius vero $= \frac{Fs}{dT} = \frac{dy}{dT}$. Nempe tempusculo dT sol per motum priorem absoluet spatiolum $Fr = -dx$, per posteriorem vero spatiolum $Fs = dy$. Nunc simili modo vis sollicitans $\frac{(F+G)gg}{Gv^2}$ secundum directiones Fr et FP resoluatur, eritque vis secundum $Fr = \frac{(F+G)ggx}{Gv^3}$ et vis secundum $FP = \frac{-(F+G)ggy}{Gv^3}$ ex quibus per lemma praeced. §. praemissum sequentes prodeunt aequationes.

$-2\,ddx - \frac{(F+G)ggx\,dT^2}{Gv^3}$ et $2\,ddy = -\frac{(F+G)ggy\,dT^2}{Gv^3}$

quarum si illa per y, haec vero per x multiplicetur, ambaeque aequationes addantur, habebitur $y\,ddx - x\,ddy = 0$, cuius integrale est $y\,dx - x\,dy = C\,dT$. At vero ob $y = v$ sin. r et $x = v$ cos. r erit $y\,dx - x\,dy = -v^2\,dr$ ob sin. $r^2 +$ cos. $r^2 = 1$, ideoque nacti sumus hanc primam aequationem;

$$vv\,dr = C\,dT.$$

Dein-

Deinde binarum inuentarum aequationum multiplicetur prior per dx, posterior per dy, alteraque ab altera subtracta remanebit:

$$\frac{2dxddx + 2dyddy}{dT^2} = \frac{-(F+G)gg}{Gv^3}(xdx + ydy)$$

Cum autem sit $vv = xx + yy$ erit $xdx + ydy = vdv$ ideoque

$$\frac{2dxddx + 2dyddy}{dT^2} = \frac{-(F+G)ggdv}{Gv^2}$$

cuius integrale est: $\frac{dx^2 + dy^2}{dT^2} = \frac{(F+G)gg}{Gv} + a$. Supra autem notauimus esse $dx^2 + dy^2 = dv^2 + v^2dr^2$, vnde fiet haec altera aequatio:

$$dv^2 + v^2dr^2 = adT^2 + \frac{(F+G)ggdT^2}{Gv}$$

quae cum priori $vvdr = CdT$ coniuncta ad datum quodvis tempus T determinabit ambas incognitas v et r, quae solae in astronomia desiderantur. Quia autem $\frac{1}{2}vvdr$ exprimit elementum areae AGF, fiet ipsa area $AGF = \frac{1}{2}\int vvdr = \frac{1}{2}CT$; vnde patet areas, quas sol circa terram emetiri videtur, temporibus esse proportionales, quam proprietatem Keplerus primus pro sole circa terram, ac pro omnibus planetis primariis circa solem obseruauit.

§. 10. Inuentis ergo his duabus aequationibus: $vvdr = CdT$ et $dv^2 + v^2dr^2 = \left(a + \frac{(F+G)gg}{Gv}\right)dT^2$ prior dat $dr = \frac{CdT}{vv}$, qui valor in altera substitutus praebebit:

$$dv^2 + \frac{C^2dT^2}{v^2} = adT^2 + \frac{(F+G)gg}{Gv}dT^2$$

Ponatur breuitatis gratia $\frac{(F+G)gg}{G} = cc$ eritque

$$v^2dv^2 + C^2dT^2 = av^2dT^2 + ccvdT^2 \text{ siue}$$

$$dT = \frac{vdv}{\surd(-C^2 + ccv + av^2)}$$

hincque $dr = \frac{Cdv}{v\surd(-C^2 + ccv + av^2)}$

Ad

Ad conſtantes definiendas, perpendantur caſus, quibus fit $dv = 0$, id quod in apogaeo ac perigaeo euenire oportet. Erit autem his caſibus $av^2 + ccv - C^2 = 0$, cuius aequationis, cum altera radix ſit affirmatiua, altera negatiua diſtantia autem v reuera nunquam negatiua fieri poſſit: perſpicuum eſt, ſi radix affirmatiua perigaeum denotet, ſolem nunquam ad apogaeum peruenturum eſſe, vnde conſtat, orbitam hoc caſu hyperbolam fore. Hoc autem accidit, ſi a fuerit quantitas affirmatiua; quare vt ellipſin obtineamus, neceſſe eſt, vt a ſit quantitas negatiua: namque reliqui coefficientes cc et C^2, quia ſunt quadrata, negatiui fieri nequeunt. Sit igitur $a = -a$, et aequatio $avv = ccv - CC$ hos dabit valores $v = \frac{cc \pm \sqrt{(c^4 - 4aCC)}}{2a}$; quorum minor dabit diſtantiam perigaei ſolis a terra, quae erit $= \frac{cc - \sqrt{(c^4 - 4aCC)}}{2a}$ maior vero dabit $\frac{cc + \sqrt{(c^4 - 4aCC)}}{2a}$ diſtantiam apogaei: ſumma ergo $\frac{cc}{a}$ erit axis transuerſus, et differentia $\frac{\sqrt{(c^4 - 4aCC)}}{a}$ erit diſtantia focorum, ita vt excentricitas futura ſit $= \frac{\sqrt{(c^4 - 4aCC)}}{cc}$; et axis coniugatus $= \frac{2C}{\sqrt{a}}$, ideoque parameter ſeu latus rectum $= \frac{4CC}{cc}$. Ponamus axem transuerſum $= 2a$, et latus rectum $= 2b$; fiet littera ante adhibita $a = \frac{-cc}{2a}$ et $4CC = 2bcc$, atque $C = c\sqrt{\frac{b}{2}}$. Aequationes ergo differentiales primum inuentae erunt:

$$vvdr = c\,dT\sqrt{\frac{b}{2}} \text{ et } dv^2 + v^2dr^2 = \frac{-ccdT^2}{2a} + \frac{ccdT^2}{v}.$$

Aequationes vero ex his erutae erunt:

$$dT = \frac{v\,dv\sqrt{2a}}{c\sqrt{(-ab + 2av - vv)}} \text{ et } dr = \frac{dv\sqrt{ab}}{v\sqrt{(-ab + 2av - vv)}}$$

exiſtente $cc = \frac{(F+C)g}{G}$; excentricitas vero erit $= \sqrt{\frac{a-b}{a}}$

§. 11. Aequatio autem $dr = \frac{dv\surd ab}{v\surd(-ab+2av-vv)}$, si integretur, dabit $r = \text{A cof.}\,\frac{(b-v)\surd a}{v\surd(a-b)}$, vnde fit cof. $r = \frac{(b-v)\surd a}{v\surd(a-b)}$, eritque r angulus, quem fol circa terram iam a perigaeo defcripfit, fi enim ponatur angulus $r = 0$, fiet cof. $r = 1 = \frac{(b-v)\surd a}{v\surd(a-b)}$; et $v = \frac{b\surd a}{\surd a + \surd(a-b)} = a - \surd(aa-ab)$, quae eft diftantia perigaei a terra. Quare fi punctum A orbitae folaris denotet perigaeum, ex angulo AGF $= r$ feu anomalia vera inuenietur hinc diftantia folis a terra $v = \frac{b\surd a}{\surd a + \text{cof.}\,r\,\surd(a-b)}$ atque fi excentricitas $\surd\frac{a-b}{a}$ ftatuatur $= n$; fiet $v = \frac{b}{1+n\,\text{cof.}\,r}$. Maneat $\surd\frac{a-b}{a} = n$, erit $a = \frac{b}{1-nn}$, atque altera aequatio tranfibit in hanc

$$dT = \frac{vdv\surd 2b}{c\surd(-bb+2bv-vv+nnvv)}$$

vnde fit:

$T = \frac{-\surd 2b}{c(1-nn)}\surd(-bb+2bv-(1-nn)vv) + \frac{b\surd 2b}{(1-nn)c}$ $\int\frac{dv}{\surd(-bb+2bv-(1-nn)v^2)}$ at $\int\frac{dv}{\surd(-bb+2bv-(1-nn)vv)} = \frac{1}{\surd(1-nn)}\,\text{A fin.}\,\frac{v(1-nn)-b}{nb}$ feu $\int\frac{dv}{\surd(-bb+2bv-(1-nn)vv)} = \frac{1}{\surd(1-nn)}\,\text{A cof.}\,\frac{\surd(1-nn)}{nb}\surd(-bb+2bv-(1-nn)v^2)$. Sit A fin. $\frac{v(1-nn)-b}{nb} = \omega$ erit $v = \frac{nbv+b}{1-nn}$ et $\surd(-bb+2bv-(1-nn)v^2) = \frac{nb\,\text{cof.}\,\omega}{\surd(1-nn)}$, vnde fit $T = \frac{b\omega\surd 2b}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c} - \frac{nb\surd 2b}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c}$ cof. ω fiue $T = \frac{b\surd 2b}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c}$ $(\omega - n\,\text{cof.}\,\omega)$, conftans autem addi debet, vt pofito $r = 0$ feu $v = \frac{b}{1+n}$ tempus euanefcat, facto autem $v = \frac{b}{1+n}$ fit $\omega = \text{A fin.} -1 = -\frac{\pi}{2}$, vnde oritur $T = \frac{b\surd 2b}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c}\left(\frac{\pi}{2} + \omega - n\,\text{cof.}\,\omega\right)$ fit $\frac{\pi}{2} + \omega = \Phi$, erit

ω

$\omega = -\frac{\pi}{2} + \Phi$ et cos. $\omega = \sin. \Phi$, ita vt sit:
$T = \frac{b\sqrt{2b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c} (\Phi - n \sin. \Phi) = \frac{a\sqrt{2a}}{c} (\Phi - n \sin. \Phi)$
Cum vero sit sin. $\omega = -\cos. \Phi$, fiet $v = \frac{b - nb \cos. \Phi}{1-nn}$ $= a(1 - n \cos. \Phi)$ atque cos $r = \frac{\cos. \Phi - n}{1 - n \cos. \Phi}$: vnde ratio tabularum solarium facile colligitur.

§. 12. Expeditis hoc modo, quae ad motum solis spectant, et vnde vis methodi, qua vtor, clare perspicitur, ad lunam progrediar. Repraesentetur vt ante planum eclipticae ipso tabulae plano, in eoque sit G centrum terrae, quod tanquam fixum maneret, spectatur, et GA recta pro lubitu assumta fixa. Tempore quocunque T, ab initio quodam stato, elapso versetur sol in F, luna vero extra eclipticam in E, vnde ad planum eclipticae demittatur perpendiculum EM, atque ex M in GA porro normalis MP, iunganturque rectae GE et GM. Quibus factis angulus MGE dabit latitudinem lunae, anguli vero AGF et AGM sunt longitudines solis et lunae a puncto eclipticae fixo A computatae. Vocentur nunc distantia solis a terra GF $= f$ distantiae lunae a terra GE $= v$, et anguli AGF $= r$, AGM $= q$; et EGM $= p$, eritque EM $= v \sin. p$; GM $= v \cos. p$; hincque porro PM $= v \cos. p \sin. q$ et GP $= v \cos. p \cos. q$. Vocentur autem quoque lineae rectae, quae tanquam coordinatae spectantur, GP $= v \cos. p \cos. q = x$; PM $= v \cos. p \sin. q = y$ et ME $= v \sin. p = z$ vt sit $xx + yy + zz = vv$. Promoueatur porro luna tempusculo infinite paruo $= dT$ per orbitae suae elementum Ee, demissoque ex e in planum eclipticae perpendiculo em, et ex m in GA Fig. 2.

 normali

normali mp, compleantur rectangula $Mtem$; $Psmp$; ductaque Mr parallela ipsi GA, motus lunae resoluetur sponte in tres laterales, quorum duo erunt in plano eclipticae alter secundum Mr celeritate $= \frac{Mr}{dT} = \frac{-dx}{dT}$, alter secundum Ms celeritate $= \frac{Ms}{dT} = \frac{dy}{dT}$ tertii autem motus, quo luna a plano eclipticae recedit, directio erit Et, et celeritas $= \frac{Et}{dT} = \frac{dz}{dT}$.

§. 13. Consideremus nunc quoque vires, quibus luna sollicitatur. Ac primo quidem a terra vrgebitur sol in directione FG vi $= \frac{gg}{ff}$; et luna in directione EG vi $= \frac{gg}{vv}$; vti ex ante expositis patet. Deinde posita massa terrae $=$ G, si solis massa statuatur $=$F, a sole vrgebitur terra in directione GF $= \frac{Fgg}{Gff}$; et ducta recta EF positaque EF $= u$, luna ad solem sollicitabitur in directione EF vi $= \frac{Fgg}{Guu}$. Denique si massa lunae ponatur $=$ E, a luna trahetur terra secundum directionem GE vi $= \frac{Egg}{Gvv}$, sol vero a luna trahetur in directione EF vi $= \frac{Egg}{Guu}$; sicque habentur vires, quibus sol, terra et luna in se mutuo agunt, ex quibus hic eas, quae solem afficiunt, negligimus, propterea quod motum solis tanquam cognitum neque a luna perturbari assumimus. Vires autem, quibus terra incitatur, quoniam terram, tanquam in G quiesceret, spectamus, in directionibus contrariis in lunam sunt transferendae, quemadmodum supra ostendimus sicque fiet, vt luna reuera a quatuor viribus impelli sit consideranda. Primo scilicet luna vrgebitur in directione EG vi $= \frac{gg}{vv}$, secundo in directione

EF

EF vi $= \frac{Fgg}{Guu}$, quae ſunt vires proprie in lunam agentes, tertio luna ſollicitabitur in directione EG vi $= \frac{Egg}{Gvv}$, et quarto ſi per E ducatur recta HEI ipſi FG parallela, luna ſollicitabitur in directione EI vi $= \frac{Fgg}{Gff}$. Hoc modo vires quae in lunam agunt ad tres directiones reducuntur; prima erit in directione EG $= \frac{(E+G)gg}{Gvv}$. Secunda in directione EF $= \frac{Fgg}{Guu}$; et tertia in directione EI $= \frac{Fgg}{Gff}$. Media vero in directione EF denuo reſolui poteſt ſecundum directiones EG et EH, eritque illa ſecundum EG $= \frac{Fggv}{Gu^3}$, et haec ſecundum EH $= \frac{Fggf}{Gu^3}$; vnde vires lunam afficientes ad duas directiones perducuntur. Primo ſcilicet luna trahetur in directione EG vi $= \frac{(E+G)gg}{Gv^2} + \frac{Fggv}{Gu^3}$; praeterea vero in directione EH vi $= \frac{Fggf}{Gu^3} - \frac{Fgg}{Gff} = \frac{Fgg}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)$.

§. 14. Cum ſit angulus AGM $= q$, et angulus AGF $= r$, ponamus breuitatis gratia angulum FGM $= q - r = s$, qui diſtantiam lunae a ſole ſecundum longitudinem exhibebit, et quoniam angulus EGM $= p$, erit ex trigonometricis coſinus anguli EGF $=$ coſ. p . coſ. s; hincque in triangulo FGE prodibit ex lateribus FG, EG cum angulo intercepto FGE tertium latus FE $= u = \sqrt{(ff - 2fv \,\text{coſ.}\, p \,\text{coſ.}\, s + vv)}$. Quare cum linea f reſpectu v ſit vehementer magna, erit proxime $\frac{1}{u^3} =$ $(ff - 2fv \,\text{coſ.}\, p \,\text{coſ.}\, s + vv)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{f^3} + \frac{3v \,\text{coſ.}\, p \,\text{coſ.}\, s}{f^4} + \frac{3vv(5 \,\text{coſ.}\, p^2 . \text{coſ.}\, s^2 - 1)}{2f^5}$, cuius expreſſionis vltimus terminus iam eſt tantopere exiguus, vt in computo lunae ſine errore praetermitti poſſit, ſi enim ponamus parallaxin ſolis horizontalem $= 12''$, fiet diſtantia terrae a ſole media $= 17189g$ et cum diſtantia lunae a terra media ſit circiter $= 60g$; fiet $v : s = 1 : 286$, quae ratio eſt tam parua, vt eius poteſtates ſuperiores tuto reiici queant. Hancobrem erit vis qua luna in directione EG vrgetur $= \frac{(E+G)gg}{Gv^2} + \frac{Fggv}{Gs^3}$, et vis qua luna in directione EH vrgetur $= \frac{3Fggv\,coſ.p\,coſ.s}{Gs^3}$. Ne autem, antequam neceſſitas poſtulet, quicquam negligamus, tantiſper priores expreſſiones, in quibus littera u ineſt, retineamus.

§. 15. Reſoluamus nunc porro has vires ſecundum directiones, in quas motum lunae iam diſſoluimus, et vis in directione $EG = \frac{(E+G)gg}{Gv^2} + \frac{Fggv}{Gu^3}$ tres ſequentes vires ſuppeditabit; quarum

prima in directione $Mr = \frac{(E+G)ggx}{Gv^3} + \frac{Fggx}{Gu^3}$

ſecunda in directione $MP = \frac{(F+G)ggy}{Gv^3} + \frac{Fggy}{Gu^3}$

tertia in directione $EM = \frac{(E+G)ggz}{Gv^3} + \frac{Fggz}{Gu^3}$

Altera vis in directione $EH = \frac{Fggf}{Gu^3} - \frac{Fgg}{Gsf}$, quia plano eclipticae eſt parallela, tertium motum in directione EM non afficit: transferatur ergo in planum eclipticae, et habebit directionem ML parallelam ipſi GF, ex qua reſultabit vis

in directione $Mr = \frac{-Fggf\,coſ.r}{Gu^3} + \frac{Fgg\,coſ.r}{Gss}$

in directione $Ms = \frac{Fggf\,ſin.r}{Gu^3} - \frac{Fgg\,ſin.r}{Gsf}$.

His ergo viribus coniunctis terni lunae motus ita mutabuntur, vt ſecundum praecepta ſupra tradita oriantur tres iſtae aequationes:

2 ddx

$$\frac{2ddx}{dT^2} = -\frac{(E+G)ggx}{Gv^3} - \frac{Fggx}{Gu^3} + \frac{Fggf\cos.r}{Gu^3} - \frac{Fgg\cos.r}{Gff}$$
$$\frac{2ddy}{dT^2} = -\frac{(E+G)ggy}{Gv^3} - \frac{Fggy}{Gu^3} + \frac{Fggf\sin.r}{Gu^3} - \frac{Fgg\sin.r}{Gff}$$
$$\frac{2ddz}{dT^2} = -\frac{(E+G)ggz}{Gv^3} - \frac{Fggz}{Gu^3}.$$

Ex quibus eliminando terminos $\frac{(E+G)gg}{Gv^3}$ nascuntur tres sequentes aequationes.

$$\frac{2(zddx - xddz)}{dT^2} = \frac{Fggfz\cos.r}{Gu^3} - \frac{Fggz\cos.r}{Gff}$$
$$\frac{2(zddy - yddz)}{dT^2} = \frac{Fggfz\sin.r}{Gu^3} - \frac{Fggz\sin.r}{Gff}$$
$$\frac{2(yddx - xddy)}{dT^2} = \frac{Fggf(y\cos.r - x\sin.r)}{Gu^3} - \frac{Fgg(y\cos.r - x\sin.r)}{Gff}$$

Cum autem sit $x = v\cos.p\cos.q$ et $y = v\cos.p\sin.q$ erit $y\cos.r - x\sin.r = v\cos.p(\sin.q\cos.r - \cos.q\sin.r) = v\cos.p\sin.s$ ob $q - r = s$. Atque ob $z = v\sin.p$, erit $z\cos.r = v\sin.p\cos.r$ et $z\sin.r = v\sin.p\sin.r$. Ex quo inuentae aequationes transmutabuntur in has:

$$\frac{2d.(zdx - xdz)}{dT^2} = \frac{Fggv\sin.p\cos.r}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)$$
$$\frac{2d.(zdy - ydz)}{dT^2} = \frac{Fggv\sin.p\sin.r}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)$$
$$\frac{2d.(ydx - xdy)}{dT^2} = \frac{Fggv\cos.p\sin.s}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)$$

§. 16. Cum autem sit $x = v\cos.p\cos.q$; $y = v\cos.p\sin.q$ et $z = v\sin.p$ erit vt sequitur:

$$dx = dv\cos.p\cos.q - vdp\sin.p\cos.q - vdq\cos.p\sin.q$$
$$dy = dv\cos.p\sin.q - vdp\sin.p\sin.q + vdq\cos.p\cos.q$$
$$dz = dv\sin.p + vdp\cos.p$$

Hinc itaque efficietur

$$zdx - xdz = -vvdp\cos.q - vvdq\sin.p\cos.p\sin.q$$
$$zdy - ydz = -vvdp\sin.q + vvdq\sin.p\cos.p\cos.q$$
$$ydx - xdy = -vvdq\cos.p^2$$

Quae expressiones si in aequationibus ante inuentis substituantur

tuantur, prodibunt tres aequationes inter quatuor variabiles $T. v. p$ et q. quarum ope ternae ex quarta definiri poterunt. Praeterea autem ex his elementorum dx, dy et dz valoribus notari oportet, fore summam quadratorum eorundem $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dv^2 + v^2 dp^2 + v^2 dq^2 \operatorname{cos}. p^2$; quae formula nouae aequationi ex primo inuentis tribus aequationibus eruendae inseruit. Si enim prima per dx secunda per dy et tertia per dz multiplicetur ob $xdx + ydy + zdz = vdv$ habebimus hanc aequationem

$$\frac{2dxddx + 2dyddy + 2dzddz}{dt^2} = \frac{d.(dv^2 + v^2 dp^2 + v^2 dq^2 \operatorname{cos}. p^2)}{dt^2} =$$

$$- \frac{(E+G)ggdv}{Gv^2} - \frac{Fggvdv}{Gu^3} + \frac{Fgg}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)(dx \operatorname{cos}. r + dy \operatorname{sin}. r).$$

Est vero $dx \operatorname{cos}. r + dy \operatorname{sin}. r = dv \operatorname{cos}. p \operatorname{cos}. s - vdp \operatorname{sin}. p \operatorname{cos}. s - vdq \operatorname{cos}. p \operatorname{sin}. s$ quae cum superioribus coniuncta inuestigationem orbitae lunaris faciliorem reddet.

17 Quoniam vero hic non tam motus lunae ipsos, quam lineae nodorum motionem et inclinationis ad eclipticam variationem indagare constitui, hae duae res imprimis mihi erunt considerandae. Dum igitur luna orbitae suae elementum Ee percurrit; sit recta G☊ linea nodorum, seu intersectio plani eclipticae et plani per punctum G et elementum Ee producti: voceturque angulus AG☊ $= \Phi$. Porro ex M ad G☊ ducatur normalis MQ iunctaque EQ erit angulus EQM inclinationi orbitae lunaris ad eclipticam aequalis. Sit igitur iste angulus $EGM = \theta$; atque ob angulum ☊$GM = q - \Phi$, erit $MQ = v \operatorname{cos}. p \operatorname{sin}. (q - \Phi)$ et $GQ = v \operatorname{cos}. p \operatorname{cos}. (q - \Phi)$: vnde fit $\frac{ME}{MQ} = \frac{v \operatorname{sin}. p}{v \operatorname{cos}. p \operatorname{sin}. (q - \Phi)} = \operatorname{tang}. \theta$, seu $\operatorname{tang}. \theta = \frac{\operatorname{tang}. p}{\operatorname{sin}. (q - \Phi)}$. Quoniam vero positio lineae

nodo-

nodorum et inclinatio ad ambo puncta E et e aeque pertinent, manifestum est, differentiatis p et q angulos Φ et θ inuariatos manere debere: hinc obtinetur ex aequatione tang. $\theta = \frac{tang.\, p}{sin.\,(q-\Phi)}$ differentiando.

$$o = \frac{dp}{cos.\, p^2 . sin.\,(q-\Phi)} - \frac{dq\, tang.\, p\, cos.\,(q-\Phi)}{sin.\,(q-\Phi)^2}$$

vnde oritur $dp = \frac{dq\, sin.\, p\, cos.\, p\, cos.\,(q-\Phi)}{sin.\,(q-\Phi)}$ quo valore supra substituto fit

$$z\,dx - x\,dz = -\frac{vv\,dq\, sin.\, p\, cos.\, p\, cos.\, \Phi}{sin.\,(q-\Phi)}$$
$$z\,dy - y\,dz = -\frac{vv\,dq\, sin.\, p\, cos.\, p\, sin.\, \Phi}{sin.\,(q-\Phi)}$$
$$y\,dx - x\,dy = -vv\,dq\, cos.\, p$$

§. 18. Substituantur iam hi valores in aequationibus supra inuentis eritque:

$$d.\, \frac{vv\,dq\, sin.\, p\, cos.\, p\, cos.\, \Phi}{sin.\,(q-\Phi)} = \frac{Fggv\,dT^2\, sin.\, p\, cos.\, r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$
$$d.\, \frac{vv\,dq\, sin.\, p\, cos.\, p\, sin.\, \Phi}{sin.\,(q-\Phi)} = \frac{Fggv\,dT^2\, sin.\, p\, sin.\, r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$
$$d.\, vv\,dq\, cos.\, p^2 = \frac{Fggv\,dT^2\, cos.\, p\, sin.\, s}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

Vel differentialibus expeditis, et per v vbique diuisione instituta

$$\frac{2dv\,dq\, sin.\, p\, cos.\, p\, cos.\, \Phi}{sin.\,(q-\Phi)} + v\,d.\, \frac{dq\, sin.\, p\, cos.\, p\, cos.\, \Phi}{sin.\,(q-\Phi)} = \frac{Fgg\,T^2\, sin.\, p\, cos.\, r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$
$$\frac{2dv\,dq\, sin.\, p\, cos.\, p\, sin.\, \Phi}{sin.\,(q-\Phi)} + v\,d.\, \frac{dq\, sin.\, p\, cos.\, p\, sin.\, \Phi}{sin.\,(q-\Phi)} = \frac{Fgg\,dT^2\, sin.\, p\, sin.\, r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$
$$2dv\,dq\, cos.\, p^2 + v\,d.\,dq\, cos.\, p^2 = \frac{Fgg\,dT^2\, cos.\, p\, sin.\, s}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

quae transformantur in has:

$$\frac{2dv}{v} + d.\,l\, \frac{dq\, sin.\, p\, cos.\, p\, cos.\, \Phi}{sin.\,(q-\Phi)} = \frac{Fgg\,dT^2\, cos.\, r\, sin.\,(q-\Phi)}{2Gv\,dq\, cos.\, p\, cos.\, \Phi}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$
$$\frac{2dv}{v} + d.\,l\, \frac{dq\, sin.\, p\, cos.\, p\, sin.\, \Phi}{sin.\,(q-\Phi)} = \frac{Fgg\,dT^2\, sin.\, r\, sin.\,(q-\Phi)}{2Gv\,dq\, cos.\, p\, sin.\, \Phi}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$
$$\frac{2dv}{v} + d\,l\,dq\, cos.\, p^2 = \frac{Fgg\,dT^2\, sin.\, s}{2Gv\,dq\, cos.\, p}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

Harum si binae a se inuicem subtrahantur, remanebunt:

$$d\,.\,l\ \text{tang}\ \Phi = \frac{FggdT^2\, \sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi)}{2Gvdq\cos.p\sin.\Phi\cos.\Phi}\left(\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3}\right)$$

$$d\,.\,l\frac{\text{tang.}\,p\sin.\Phi}{\sin.(q-\Phi)} = \frac{FggdT^2(\sin.r\sin.(q-\Phi)-\sin.s\sin.\Phi)}{2Gvdq\cos.p\sin.\Phi}\left(\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3}\right)$$

Cum autem sit sin. A . sin. B $= \frac{1}{2}$ cos. (A − B) − $\frac{1}{2}$ cos. (A + B) erit; sin. r sin. $(q-\Phi) = \frac{1}{2}\cos.(s-\Phi) - \frac{1}{2}\cos.(q+r-\Phi)$ et sin. s sin. $\Phi = \frac{1}{2}\cos.(s-\Phi) - \frac{1}{2}\cos.(q-r+\Phi)$ ob $s = q-r$: ideoque sin. r sin. $(q-\Phi)$ − sin. s sin. $\Phi = \frac{1}{2}\cos.(q-r+\Phi) - \frac{1}{2}\cos.(q+r-\Phi) = \sin.q\sin.(r-\Phi)$; quia vicissim est $\frac{1}{2}\cos A - \frac{1}{2}\cos.B = \sin.\frac{A+B}{2}\,.\,\sin.\frac{B-A}{2}$ Quocirca posterior aequatio transmutabitur in hanc:

$$d\,.\,l\frac{\text{tang.}\,p\sin.\Phi}{\sin.(q-\Phi)} = \frac{FggdT^2\sin.q\sin.(r-\Phi)}{2Gvdq\cos.p\sin.\Phi}\left(\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3}\right)$$

§. 19. Cum igitur sit $d\,.\,l\ \text{tang.}\ \Phi = \frac{d\Phi}{\sin.\Phi\cos.\Phi}$ prior ambarum aequationum inuentarum abibit in hanc,

$$d\Phi = \frac{FggdT^2\sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi)}{2Gvdq\cos.\Phi}\left(\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3}\right)$$

Hucusque ergo aequatione perducta consideremus quod iam supra inuenimus, esse proxime $\frac{1}{u^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{3v\cos.p\cos.s}{f^4}$. ideoque $\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3} = -\frac{3v\cos.p\cos.s}{f^3}$, quo valore introducto habebimus: $d\Phi = -\frac{3FggdT^2\cos.s\sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi)}{2Gf^3dq}$

quia ergo celeritas lineae nodorum exprimitur per $\frac{d\Phi}{dT}$. erit $\frac{d\Phi}{dT} = -\frac{3FggdT\cos.s\sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi)}{2Gf^2dq}$

vbi notandum est, esse $\frac{dq}{dT}$ celeritatem lunae secundum longitudinem. Hinc igitur erit celeritas lineae nodorum retrograda directe, vt cosinus distantiae lunae a sole, sinus distantiae solis a nodo, et sinus distantiae lunae a nodo coniunctim, reciproce vero, vt cubus distantiae solis a terra, et celeritas lunae secundum longitudinem, ita vt motus lineae nodorum ab his quinque rebus memoratis pendeat. Haec expressio mirifice congruit cum determinatione Neutoni, quam tradit prop. XXX. lib. III. Princip. et quia hinc quouis momento celeritas lineae nodorum assignari potest, simul patebit motus horarius nodorum; propterea quod tempus vnius horae sine errore pro elemento temporis dT sumi potest. Si enim ponamus, solem motu medio in distantia a terra mediocri reuolui, quae distantia mediocris sit $= a$, ponamusque $\frac{(F+G)gg}{G} = cc$, et tempusculo $= dT$ solem angulum conficere $= d\omega$ erit per §. 11: $dT = \frac{a\,d\omega\sqrt{2a}}{c}$ et $dT^2 = \frac{2a^3 d\omega^2}{cc} = \frac{2Ga^3 d\omega^2}{(F+G)gg}$, qui valor in superiori aequatione substitutus dabit $d\Phi = -\frac{3Fa^3 d\omega^2}{(F+G)f^3 dq}$ cos. s . sin. $(r-\Phi)$ sin. $(q-\Phi)$ ex qua expressione, si $d\omega$ sumatur pro motu horario medio solis nempe $2'$, $27''$, $50'''$, $37''''$ et dq pro motu horario lunae vero secundum longitudinem, tum $d\Phi$ dabit motum horarium verum nodorum lunae.

§. 20. Secundum Neutonum est ratio F ad G $=$ 227512 : 1 vnde pro fractione $\frac{F}{F+G}$ tuto vnitas scribi poterit: eritque ergo $d\Phi = -\frac{3a^3 d\omega^2}{f^3 dq}$ cos. s sin. $(r-\Phi)$ sin. $(q-\Phi)$, Quo hinc facilius motum nodorum eruamus, ponamus primum tam solem quam lunam circa terram motu vniformi moueri, eritque $f = a$; et dq denotabit motum medium horarium lunae secundum longitudinem, eritque $dq = 32'$, $56''$, $27'''$, 13^{IV}, vnde ob $d\omega = 2'$, $27''$, $50'''$, $37''''$, fiet $d\omega = 532237^{IV}$ et $dq = 7115233^{IV}$ ideoque $\frac{3\,d\omega^2}{dq} = 119437^{IV} = 33''$, $10'''$, 37^{IV}

 ita

ita vt ſit motus horarius nodorum. $d\Phi = -$ coſ. s ſin. $(r-\Phi)$ ſin. $(q-\Phi)$, $33''$, $10'''$, 37^{IV}. Nodi ergo celerrime mouentur, ſi ſinguli iſti ſinus ſinui toti fiant aequales, quod primum euenit, ſi luminaria fuerint in coniunctione, et linea nodorum cum recta ad ſolem ducta GF angulum rectum conſtituat; tum vero idem contingit, ſi luminaria fuerint in oppoſitione, et linea nodorum ad GF pariter normalis: vtroque caſu linea nodorum regreditur ſingulis horis $33''$, $10'''$, 37^{IV}; hicque eſt motus celerrimus retrogradus lineae nodorum. Tum vero motus nodorum prorſus euaneſcit tribus caſibus, primo ſi luminaria quadrato aſpectu ſe mutuo aſpiciant, ſecundo ſi ſol, et tertio, ſi luna in ipſa linea nodorum verſetur. Fieri vero etiam poteſt, vt nodi in conſequentia progrediantur, quod euenit, ſi coſ. s ſin. $(r-\Phi)$ ſin. $(q-\Phi)$ negatiuum induit valorem; qui, quantus euadere poſſit, dum fit maximus, per methodum maximorum et minimorum inuenietur. Apparebit autem hoc euenire, primo ſi ambo luminaria ſextilem aſpectum teneant, et linea nodorum angulum FGE bifariam ſecet, ſecundo ſi luminaria in trigono fuerint conſtituta, et linea nodorum complementum anguli FGE ad duos rectos biſecet: vtroque caſu celeritas nodorum in conſequentia fiet maxima, et quia ſinguli ſinus ſemiſſi radii fuerint aequales, motus horarius maximus in conſequentia erit octaua pars motus celerrimi in antecedentia, atque id circo $= 4''$, $8'''$, $50''''$.

§. 21. Cum igitur nodi multo celerius et ſaepius in antecedentia regrediantur, quam motu contrario in con-

consequentia, hinc efficietur motus nodorum retrogradus; ad quem accurate definiendum necesse est, vt aequationis supra inuentae integrale inuestigemus, hoc enim reperto facile erit ad quoduis tempus positionem lineae nodorum assignare. Hunc in finem tam motum verum solis quam lunae in calculum introduci oportet. Sit ergo distantia media solis a terra $= a$, excentricitas $= n$, et tempore proposito anomalia excentrica solis $= \varrho$; quoniam angulus ω supra ad motum solis medium designandum est assumtus, erit primo $d\varrho\,(1 - n \operatorname{cof.} \varrho) = d\omega$ ideoque $d\varrho = d\omega\,(1 + n \operatorname{cof.} \varrho)$ neglectis terminis, in quibus fractio n plures obtinet dimensiones, porro cum sit anomalia vera proxime $= \varrho + n \operatorname{fin.} \varrho$ erit $dr = d\varrho\,(1 + n \operatorname{cof.} \varrho)$ ideoque $dr = d\omega(1 + 2n \operatorname{cof.} \varrho)$ atque $f = a\,(1 - n \operatorname{cof.} \varrho)$. Deinde quamuis motus lunae non sit adeo certus, ponamus eam in ellipsi vniformiter mobili circa terram ferri, discrepantia enim huius hypothesis a veritate in praesenit negotio non nisi minimum et prorsus insensibilem errorem parere potest. Sit ergo distantia lunae a terra media $= \alpha$; excentricitas $= m$, anomalia excentrica $= \xi$, et distantia vera a terra $= v$; sit porro motus medius lunae ad motum medium terrae seu solis vt λ ad 1, erit vti ex obseruationibus constat $\lambda = 13,3685$. Hinc orietur $d\xi\,(1 - m \operatorname{cof.} \xi) = \lambda d\omega$ ideoque $d\xi = \lambda d\omega(1 + m \operatorname{cof.} \xi)$, et anomalia vera $= \xi + m \operatorname{fin.} \xi$; vnde si motus absidum medium statuatur ad motum medium solis vt x ad 1, vbi ex motu apogaei medio fit $x = 0,112996$, cuius motus si ratio habeatur, fiet $dq = \lambda d\omega + 2\,(\lambda - x)\, m d\omega \operatorname{cof.} \xi$. His ergo valoribus in superiori aequatione substitutis fit

$$d\Phi \frac{-3d\omega}{(1-n\,\mathrm{cos}.\rho)^3(\lambda+2(\lambda-\varkappa)m\,\mathrm{cos}.\xi)} \mathrm{cos}.(q-r)\,\mathrm{sin}.(r-\Phi)\,\mathrm{sin}.(q-\Phi)$$

vbi notandum est anomalias excentricas ϱ et ξ non ab apogaeo vt vulgo fieri solet, sed a perigaeo esse acceptas.

§. 22. Sublatis autem fractionibus et neglectis terminis, in quibus excentricitates m et n vtpote valde paruae, plures habent dimensiones, habebitur:

$$d\Phi = \frac{3d\omega}{\lambda}(1+3n\,\mathrm{cos}.\varrho)\left(1-\frac{2(\lambda-\varkappa)m}{\lambda}\,\mathrm{cos}.\xi\right)\mathrm{cos}.(q-r)\,\mathrm{sin}.(r-\Phi)\,\mathrm{sin}.(q-\Phi)$$

cuius integrale vt indagemus, consideremus quantitatem $(1+3n\,\mathrm{cos}.\varrho)\left(1-\frac{2(\lambda-\varkappa)m}{\lambda}\,\mathrm{cos}.\xi\right)$ tanquam constantem, quoniam nunquam sensibiliter ab vnitate discrepat, sitque breuitatis gratia:

$$(1+3n\,\mathrm{cos}.\varrho)\left(1-\frac{2(\lambda-\varkappa)m}{\lambda}\,\mathrm{cos}.\varrho\right) = i \text{ erit}$$

$$d\Phi = \frac{-3id\omega}{\lambda}\,\mathrm{cos}.(q-r)\,\mathrm{sin}.(r-\Phi)\,\mathrm{sin}.(q-\Phi)$$

Quoniam vero, vt supra vidimus, est $\mathrm{sin}.A\,\mathrm{sin}.B = \frac{1}{2}\mathrm{cos}.(B-A) - \frac{1}{2}\mathrm{cos}.(A+B)$ erit $\mathrm{sin}.(r-\Phi)\,\mathrm{sin}.(q-\Phi) = \frac{1}{2}\mathrm{cos}.(q-r) - \frac{1}{2}\mathrm{cos}.(q+r-2\Phi)$, quo valore substituto erit

$$d\Phi = \frac{-3id\omega}{2\lambda}(\mathrm{cos}.(q-r)\,\mathrm{cos}.(q-r) - \mathrm{cos}.(q-r)\,\mathrm{cos}.(q+r-2\Phi))$$

Porro cum sit $\mathrm{cos}.A\,\mathrm{cos}\,B = \frac{1}{2}\mathrm{cos}.(B-A) + \frac{1}{2}\mathrm{cos}.(B+A)$ fiet:

$$\mathrm{cos}.(q-r)\,\mathrm{cos}.(q-r) = \tfrac{1}{2} + \mathrm{cos}.2(q-r)$$

$$\mathrm{cos}.(q-r)\,\mathrm{cos}.(q+r-2\Phi) = \tfrac{1}{2}\mathrm{cos}.2(r-\Phi) + \tfrac{1}{2}\mathrm{cos}.2(q-\Phi)$$

ideoque habebimus:

$$d\Phi = \frac{-3id\omega}{4\lambda}(1+\mathrm{cos}.2(q-r) - \mathrm{cos}.2(r-\Phi) - \mathrm{cos}.2(q-\Phi)).$$

Quoniam nouimus, variabilitatem ipsius Φ longe minorem esse, quam ipsorum q et r, fingamus initio angulum fum Φ esse constantem in his cosinibus, et cum proxime sit $dq = \lambda d\omega$ et $dr = d\omega$ prodibit hoc integrale:

$$\Phi = C - \frac{3i}{4\lambda}\left(\omega + \frac{\sin. 2(q-r)}{2(\lambda-1)} - \frac{\sin. 2(r-\Phi)}{2} - \frac{\sin. 2(q-\Phi)}{2\lambda}\right)$$

quod autem adhuc multiplici correctione indiget, primo quod angulum Φ constantem assumsimus, deinde quod sumsimus $dq = \lambda d\omega$ et $dr = d\omega$ cum reuera sit $dq = \lambda d\omega + 2(\lambda - \varkappa) m d\omega \cos. \xi$ et $dr = d\omega + 2 n d\omega \cos. \varrho$ tertio vero quod assumsimus quantitatem i constantem quae reuera est variabilis.

§. 23. Sit valor iste pro Φ inuentus veritati iam satis propinquus $= P$ ita vt sit

$$P = C - \frac{3i}{4\lambda}\left(\omega + \frac{\sin. 2(q-r)}{2(\lambda-1)} - \frac{\sin. 2(r-\Phi)}{2} - \frac{\sin. 2(q-\Phi)}{2\lambda}\right).$$

Quo iam correctio a variabilitate ipsius Φ oriunda inueniatur, differentietur P posito solo Φ variabili, sitque differentiale $= Q d\Phi$, erit vti ex natura integralium patet $\Phi = P - \int Q d\Phi$. At facta hac differentiatione fiet:

$$Q d\Phi = \frac{3 i d\Phi}{4\lambda}\left(\cos. 2(r-\Phi) - \frac{\cos. 2(q-\Phi)}{\lambda}\right)$$

Substituatur hic loco $d\Phi$ valor ante inuentus; eritque

$$Q d\Phi = \frac{-9ii}{16\lambda^2} d\omega \left(\begin{array}{r}\cos. 2(r-\Phi) + \cos. 2(r-\Phi)\cos. 2(q-r) - \cos. 2(r-\Phi)\cos. 2(r-\Phi) \\ - \cos. 2(r-\Phi)\cos. 2(q-\Phi)\end{array}\right)$$

$$+ \frac{9ii}{16\lambda^3} d\omega \left(\begin{array}{r}\cos. 2(q-\Phi) + \cos. 2(q-\Phi)\cos. 2(q-r) - \cos. 2(q-\Phi)\cos. 2(r-\Phi) \\ - \cos. 2(q-\Phi)\cos. 2(q-\Phi)\end{array}\right)$$

At per reductionem supra adhibitam, qua erat $\cos. A \cos. B = \frac{1}{2}\cos. (B - A) + \frac{1}{2}\cos. (B + A)$ fiet:

$$Q d\Phi = \frac{+9ii}{16\lambda^2} d\omega \left(\begin{array}{r}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. 4(r-\Phi) - \cos. 2(r-\Phi) - \frac{1}{2}\cos. 2(q-2r+\Phi) - \frac{1}{2}\cos. 2(q-\Phi) \\ + \frac{1}{2}\cos. 2(q-r) + \frac{1}{2}\cos. 2(q+r-2\Phi)\end{array}\right)$$

$$\frac{-9ii}{16\lambda^3} d\omega \left(\begin{array}{r}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. 4(q-\Phi) - \cos. 2(q-\Phi) - \frac{1}{2}\cos. 2(r-\Phi) - \frac{1}{2}\cos. 2(2q-r-\Phi) \\ + \frac{1}{2}\cos. 2(q-r) + \frac{1}{2}\cos. 2(q+r-2\Phi)\end{array}\right)$$

Si

Si nunc iterum vt ante in his angulis, quorum cosinus occurrunt, Φ tanquam constans spectetur ac sumatur $dq = \lambda d\omega$ et $dr = d\omega$ fiet integrando:

$$+\int Q d\Phi = \frac{9ii}{16\lambda^2}\left(\tfrac{1}{2}\omega + \frac{\sin.4(r-\Phi)}{8} - \frac{\sin.2(r-\Phi)}{2} - \frac{\sin.2(q-2r+\Phi)}{4(\lambda-2)}\right.$$
$$\left. - \frac{\sin.2(q-\Phi)}{4\lambda} + \frac{\sin.2(q-r)}{4(\lambda-1)} + \frac{\sin.(q+r-2\Phi)}{4(\lambda+1)}\right)$$
$$\frac{-9ii}{16\lambda^3}\left(\tfrac{1}{2}\omega + \frac{\sin.4(q-\Phi)}{8\lambda} - \frac{\sin.2(q-\Phi)}{2\lambda} - \frac{\sin.2(r-\Phi)}{4}\right.$$
$$\left. - \frac{\sin.2(2q-r-\Phi)}{4(2\lambda-1)} + \frac{\sin.2(q-r)}{4(\lambda-1)} + \frac{\sin.(q+r-2\Phi)}{4(\lambda+1)}\right)$$

quae quantitas ad superiorem valorem ipsius P addi debet, vt prodeat valor ipsius Φ per variabilitatem ipsius Φ correctus. Perspicuum autem hic est plerosque terminos ob λ numerum $= 13, 3685$ fieri vehementer paruos. Maximus enim inter sinus nempe $\frac{9ii}{32\lambda^2}\sin 2(r-\Phi)$ quando iste sinus fit radio aequalis, praebet tantum circiter $5'$. Quia vero ω data quantitate maius fieri potest, isti termini negligi nequeunt. Hinc itaque neglectis terminis nimis paruis fiet:

$$\Phi = C - \frac{3i\omega}{4\lambda}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda^2}\right.$$
$$- \frac{8i\sin.2(q-r)}{8\lambda(\lambda-1)}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda^2}\right)$$
$$+ \frac{3i\sin.2(r-\Phi)}{8\lambda}\left(1 - \frac{3}{4\lambda} - \frac{3}{8\lambda^2}\right) + \frac{9}{128\lambda^2}\sin.4(r-\Phi)$$
$$+ \frac{3i\sin.2(q-\Phi)}{8\lambda^2}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{4\lambda^2}\right)$$

posito scilicet in terminis exiguis $i = 1$.

§. 24. Quia autem differentialia ipsorum q et r hactenus non sunt assumta completa, inquiramus, quanta correctio exinde oriatur. Hancobrem differentiemus primo quantitatem P posito solo q variabili, et loco dq scribamus $2(\lambda-\varkappa)m\,d\omega\cos.\xi$ seu ob $\varkappa$ respectu λ satis par-

vum

vum ponamus $dq = 2\lambda m d\omega \cos.\xi$, eritque

$$dP = \frac{-3i}{4\lambda} d\omega \left(\frac{2\lambda m \cos.\xi}{\lambda-1} \cos.2(q-r) + 2m \cos.\xi \cos.2(q-\Phi)\right)$$

cuius integrale ſubtrahi debet a iam inuento. Productis autem his coſinuum ad ſimplices coſinus reductis fiet

$$dP = \frac{-3imd\omega}{4\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\cos.(2q-2r-\xi) + \frac{\lambda}{\lambda-1}\cos.(2q-2r+\xi) + \cos.(2q-\xi-2\Phi) + \cos.(2q+\xi-2\Phi)\right)$$

Cum iam proxime ſit $dq = \lambda d\omega$ et $d\xi = \lambda d\omega$ fiet integrale $=$

$$\frac{-3im}{4\lambda}\left(\frac{\sin.(2q-2r-\xi)}{\lambda-1} + \frac{\sin.(2q-2r+\xi)}{3(\lambda-1)} + \frac{\sin.(2q-\xi-2\Phi)}{\lambda} + \frac{\sin.(2q+\xi-2\Phi)}{3\lambda}\right)$$

quae expreſſiones, cum ſit $m = 0,1414$, dum fiunt maximae vix duo minuta producunt. Poſito ergo $i = 1$, ad expreſſionem ſupra inuentam inſuper addi debet.

$$\frac{3m}{4\lambda}\left(\frac{4\sin.2(q-r)\cos.\xi - 2\cos.2(q-r)\sin.\xi}{3(\lambda-1)} + \frac{4\sin.2(q-\Phi)\cos.\xi - 2\cos.2(q-\Phi)\sin.\xi}{3\lambda}\right)$$

Simili modo differentietur P poſito tantum r variabili, at pro dr ponatur $2nd\omega\cos.\varrho$; prodibitque

$$dP = \frac{-3i}{4\lambda}\left(\frac{-2nd\omega\cos.\rho}{\lambda-1}\cos.2(q-r) + 2nd\omega\cos.\varrho\cos.2(r-\Phi)\right) \text{ ſeu}$$

$$dP = \frac{-3ind\omega}{4\lambda}\left(\frac{-\cos.(2q-2r-\rho) - \cos.(2q-2r+\rho)}{\lambda-1} + \cos.(2r-\varrho-2\Phi) + \cos.(2r+\varrho-2\Phi)\right)$$

cuius integrale ob $dr = d\omega$ et $d\varrho = d\omega$ erit.

$$-\frac{3in}{4\lambda}\left(\frac{\sin.(2q-2r-\varrho)}{3(\lambda-1)} + \frac{\sin.(2q-2r+\varrho)}{\lambda-1} + \sin.(2r-\varrho-2\Phi) + \frac{\sin.(2r+\varrho-2\Phi)}{3}\right)$$

Ergo ex hoc capite ad valorem ipſius Φ ante inuentum inſuper addi debebit

$$\frac{3n}{4\lambda}\left(\frac{4\sin.2(q-r)\cos.\varrho + 2\cos.2(q-r)\sin.\varrho}{3(\lambda-1)} + \frac{4\sin.2(r-\Phi)\cos.\varrho - 2\cos.2(r-\Phi)\sin.\varrho}{3}\right)$$

§. 25. Reſtat denique vt correctionem ex variabilitate ipſius i oriundam inueſtigemus. Quoniam ergo eſt $i = 1 + 3n\cos.\varrho - \frac{2(\lambda-\nu)}{\lambda} m \cos.\xi$ erit $di = -3nd\omega\sin.\varrho + 2(\lambda-\varkappa)md\omega\sin.\xi$. Differentiato ergo ipſo P poſito tantum i variabili, proueniet

$$dP = +\frac{3\,d\omega}{4\lambda}\left(+3n\omega\,\mathrm{sin.}\,\varrho - \frac{3n\,\mathrm{sin.}\,\varrho\,\mathrm{sin.}\,2(q-r)}{2(\lambda-1)} + \frac{3n\,\mathrm{sin.}\,\varrho\,\mathrm{sin.}\,2(r-\Phi)}{2} + \frac{3n\,\mathrm{sin.}\,\varrho\,\mathrm{sin.}\,2(q-\Phi)}{2\lambda}\right)$$

$$-\frac{3(\lambda-\varkappa)m\,d\omega}{4\lambda}\left(2\omega\,\mathrm{sin.}\,\xi\ \frac{\mathrm{sin.}\,\xi\,\mathrm{sin.}\,2(q-r)}{\lambda-1} + \mathrm{sin}\,\xi\,\mathrm{sin}\,2(r-\Phi) + \frac{\mathrm{sin.}\,\xi\,\mathrm{sin.}\,2(q-\Phi)}{\lambda}\right)$$

cuius integrale quoque a valore ipsius Φ supra inuento subtrahi debet. Est autem ob $d\varrho = d\omega$: $\int \omega\, d\omega\, \mathrm{sin.}\,\varrho = -\omega\,\mathrm{cos.}\,\varrho + \mathrm{sin.}\,\varrho$ et $\int \omega\, d\omega\, \mathrm{sin}\,\xi - \frac{\omega}{\lambda}\,\mathrm{cos.}\,\xi + \frac{\mathrm{sin}\,\xi}{\lambda\lambda}$. Cum igitur sit

$$dP = \frac{9n\,d\omega}{4\lambda}\left(\omega\,\mathrm{sin}\,\varrho + \frac{\mathrm{cos.}(2q-2r-\varrho) - \mathrm{cos.}(2q-2r+\varrho)}{4(\lambda-1)} + \frac{\mathrm{cos.}(2r-\varrho-2\Phi) - \mathrm{cos.}(2r+\varrho-2\Phi)}{4} + \frac{\mathrm{cos.}(2q-\varrho-2\Phi) - \mathrm{cos.}(2q+\varrho-2\Phi)}{4\lambda}\right)$$

$$-\frac{3(\lambda-\varkappa)m\,d\omega}{2\lambda}\left(\omega\,\mathrm{sin}\,\xi + \frac{\mathrm{cos}(2q-2r-\xi) - \mathrm{cos}(2q-2r+\xi)}{4(\lambda-1)} + \frac{\mathrm{cos}(2r-\xi-2\Phi) - \mathrm{cos}(2r+\xi-2\Phi)}{4} + \frac{\mathrm{cos}(2q-\xi-2\Phi) - \mathrm{cos}(2q+\xi-2\Phi)}{4\lambda}\right)$$

Huius integrale erit:

$$\frac{9n}{4\lambda}\left(-\omega\,\mathrm{cos}\,\varrho + \mathrm{sin}\,\varrho + \frac{\mathrm{sin}(2q-2r-\varrho)}{4(\lambda-1)(2\lambda-3)} - \frac{\mathrm{sin}(2q-2r+\varrho)}{4(\lambda-1)(2\lambda-1)} + \frac{\mathrm{sin}(2r-\varrho-2\Phi)}{4} - \frac{\mathrm{sin}(2r+\varrho-2\Phi)}{12} + \frac{\mathrm{sin}(2q-\varrho-2\Phi)}{4\lambda(2\lambda-1)} - \frac{\mathrm{sin}(2q+\varrho-2\Phi)}{4\lambda(2\lambda+1)}\right)$$

$$-\frac{3(\lambda-\varkappa)m}{2\lambda}\left(\frac{-\omega\,\mathrm{cos}\,\xi}{\varkappa} + \frac{\mathrm{sin}\,\xi}{\lambda\lambda} + \frac{\mathrm{sin}(2q-2r-\xi)}{4(\lambda-1)(\lambda-2)} - \frac{\mathrm{sin}(2q-2r+\xi)}{4(\lambda-1)(3\lambda-2)} + \frac{\mathrm{sin}(2r-\xi-2\Phi)}{4(2-\lambda)} - \frac{\mathrm{sin}(2r+\xi-2\Phi)}{4(2+\lambda)} + \frac{\mathrm{sin}(2q-\xi-2\Phi)}{4\lambda\lambda} - \frac{\mathrm{sin}(2q+\xi-2\Phi)}{12\lambda\lambda}\right)$$

His autem debite dispositis et terminis nimis paruis reiectis reperietur

$$\Phi = C - \frac{3\omega}{4\lambda}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda}\right) - \frac{9n\,\mathrm{sin.}\,\varrho}{4\lambda} + \frac{3m\,\mathrm{sin.}\,\xi}{2\lambda^3}$$
$$-\frac{3\,\mathrm{sin.}\,2(q-r)}{8\lambda(\lambda-1)}\left(-\frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda^2}\right)$$
$$+\frac{3\,\mathrm{sin.}\,2(r-\Phi)}{8\lambda}\left(1 - \frac{7}{4\lambda} - \frac{5}{8\lambda\lambda}\right) + \frac{9}{128\lambda^2}\,\mathrm{sin.}\,4(r-\Phi)$$
$$+\frac{3\,\mathrm{sin.}\,2(q-\Phi)}{8\lambda\lambda}\left(1 - \frac{5}{8\lambda} - \frac{3}{4\lambda\lambda}\right).$$

§. 26. Huius expressionis pars prior $C - \frac{3\omega}{4\lambda}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda}\right)$ pendet a solo tempore a data epocha iam elapso; ideoque

eoque dat motum nodorum medium; reliqui termini, qui pendent ab anomaliis ſolis et lunae, itemque horum corporum ſitu tum inter ſe tum reſpectu lineae nodorum, exhibebunt correctiones loci nodorum medii ſeu eius aequationes, quas perpendemus, poſtquam, motum medium definiuerimus. Primum autem poſito $\omega = 360^\circ$, prodibit motus nodorum medius tempore vnius anni ſiderei: cum autem ſit $\lambda = 13,3685$ erit $1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{5}{8\lambda\lambda} = 0,9698506$ fiet motus nodorum annuus $= 19,5878$ graduum in antecedentia, quod eſt $= 19^\circ, 35', 16''$. Tabulae autem aſtronomicae pro hoc tempore plus non exhibent quam $19^\circ, 20', 32''$, ideoque motus ex theoria definitus ſuperat obſeruatum $14', 44''$, ſeu eius parte $\frac{1}{78}$ fere. Differentia haec nimis quidem exigua eſt, quam vt theoriam in ſuſpicionem adducere poſſit; interim tamen eo magis operae pretium eſt hanc diſcrepantiam perpendere, quod Neutonus ſuo, quo vtitur ratiocinio, eum ipſum motum nodorum medium adipiscitur, quem obſeruationes exhibent. Conſiderat autem primum orbitam lunae tanquam circularem, hincque fere eundem motum medium nimis magnum deducit, quem hic inuenimus, vti patet ex eius prop. XXX. lib. III. propoſitione vero ſequente vbi ellipſin in locum circuli ſubſtituit, motum priorem diminuit in ratione axis transuerſi ad coniugatum nempe 70 ad 69, ſicque ad conſenſum cum experientia proxime accedit. Praeterquam autem quod lunam in ellipſi, in cuius centro, non foco alterutro, poſita ſit terra, moueri aſſumit, in quo ipſo ab experientia recedit, integratio noſtra clare euincit motum medium ab ellipticitate orbitae lunaris non affici; ſi quidem terra in foco ellipsis collocetur. Neque vero etiam termini in integratione omissi hunc motum medium diminuerent, quin potius si quantitas superior $\int Q d\Phi$ accuratius inuestigetur, accederent termini motum nodorum medium adhuc aliquantillum, sed insensibiliter, adaugentes. Quare in nulla alia re causa dissensus calculi nostri ab observationibus situs esse potest, nisi in valore ipsius dq, quem contra indolem motus lunae ex ellipsi deduximus. Hinc iste defectus perfecte suppleri ante non poterit, quam ipse motus lunae in sua orbita ad calculum fuerit reuocatus. Sufficiat ergo hic annotasse, motum nodorum medium hic inuentum parte sua $\frac{1}{75}$ diminui oportere, quo cum veritate conspirans reddatur. Coefficiens ergo $1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda}$, qui erat $= 0,9698506$, sua parte $\frac{1}{75}$ minui debebit, eritque propterea $= 0,957693$; cuius logarithmus est $= 9,9812263$.

§. 27. Inuento ergo loco medio lineae nodorum ad quoduis tempus propositum ex aequatione $\Phi = C - \frac{3\omega}{4\lambda}(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda})$, ad quod negotium tabula mediorum motuum lineae nodorum est accommodata; iste locus pluribus aequationibus corrigi debet, quo verus obtineatur. Prima scilicet aequatio oritur ex termino $\frac{-n\,\sin.\varrho}{4\lambda}$, pendetque ab anomalia excentrica solis, quae est medium arithmeticum proxime inter anomaliam mediam et veram. Quia autem discrimen inter anomaliam mediam et veram solis est vehementer exiguum, pro ϱ sine errore adhiberi poterit anomalia media solis a perigaeo computata. Quodsi autem more consueto anomalia media ab apogaeo sumatur, eius sinus negatiue sumi debet. Hinc si ϱ denotet

tet anomaliam mediam ſolis ad locum nodi medium, addi debet angulus ex iſta expreſſione $\frac{9 n \text{ſin.} \varrho}{4 \lambda}$ oriundus; ſicque haec aequatio ab apogaeo ſolis vsque ad perigaeum ſit addenda, a perigaeo autem ad apogaeum ſubtrahenda. Haec aequatio ergo fit maxima, ſi anomalia media ſolis fit 90°, vel 270°, tumque ob $n = 0,\ 01690$ et $\lambda = 13,\ 3685$, valebit ·586″ ſeu 9′, 46″ pro aliis autem anomaliis decreſcit in ratione earum ſinuum. In tabulis Leadbetteri haec aequatio ſinui anomaliae mediae ſolis proportionalis quoque occurrit, maxima vero aequatio ibi eſt tantum 9′, 30″, a noſtra deficiens 16″.

§. 28. Secunda aequatio $\frac{3 m \text{ſin.} \xi}{2 \lambda^3}$ proportionalis eſt ſinui anomaliae excentricae ſeu mediae lunae, quae ſi ab apogaeo computetur, ſubtrahi debet a loco nodi dum luna ab apogaeo ad perigaeum progreditur, dum autem a perigaeo ad apogaeum reuertitur, addi debet. Maxima aequatio hinc oriunda eſt tantum 18″, et hancobrem in calculo aſtronomico ſine ſenſibili errore praetermittitur, neque etiam eius mentio in vllis tabulis aſtronomicis occurrit.

§. 29. Tertia aequatio oritur ex termino $\frac{-3 \text{ſin.} 2(q-r)}{8\lambda(\lambda-1)}$ $(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda})$ ac propterea proportionalis eſt ſinui duplae diſtantiae lunae a ſole, ſubtrahatur ſcilicet locus ſolis a loco lunae, et differentia duplicata dabit eum angulum, cuius ſinui haec aequatio eſt proportionalis. Haec ergo aequatio erit maxima in octantibus, atque tum valebit 475 ſeu 7′, 55″, ex qua pro reliquis aſpectibus aequationes facile definiuntur. Ceterum a nouilunio vsque ad primam quadraturam haec aequatio debet ſubtrahi, indeque ad oppoſitionem addi, porro transeundo ab oppoſitione ad quadraturam iterum debet ſubtrahi, et ab vltima quadratura ad coniunctionem addi. Vel breuius hoc modo: dum luna a ſyzygiis ad quadraturas procedit, haec aequatio debet ſubtrahi, dum autem luna a quadraturis ad ſyzygias tranſit, debet addi. Occurrit quidem in tabulis Leadbetteri aequatio ſub hoc nomine, quae ſinui duplae diſtantiae ſolis a luna eſt proportionalis, cuius maxima correctio eſt $1^\circ, 45', 0''$. Verum haec aequatio confundi videtur cum ſequente, quae a diſtantia ſolis a nodo pendet; vt mox videbimus. Praetermittitur ergo vulgo haec aequatio, etſi ea locum nodi ad $8'$ fere mutare poſſit. Verum quoniam haec aequatio in ſyzygiis, vbi locum nodi quam accuratiſſime noſſe oportet, euaneſcit, in reliquis autem occaſionibus locum lunae non ſenſibiliter afficit, error ex eius praetermiſſione oriundus non ſentitur.

§. 30. Quartam aequationem nodi lunae ſuppeditat iſte terminus, $\frac{\pm 3\, \text{ſin.}\, 2(r-\Phi)}{8\lambda}\left(1-\frac{3}{4\lambda}-\frac{3}{8\lambda\lambda}\right)$, cum quo ob ſimilitudinem nominis iſte $\frac{9}{128\lambda^2}\,\text{ſin.}\, 4(r-\Phi)$ coniungi poteſt: quia ambo a diſtantia ſolis a nodo pendent, prior quidem ab eius duplo, alter ab eius quadruplo. Huius aequationis pars prior, poſtquam ſol a nodo eſt progreſſus vsque ad nonageſimum gradum, debet addi, a nonageſimo vero gradu vsque ad ſequentem nodum, aequatio debet ſubtrahi, maxima autem fit aequatio dum ſol a linea nodorum angulo 45° diſtat; tumque eſt $5449''$ ſeu $1^\circ, 30', 49''$, cum qua aequatione ſine dubio confunditur ea, quam Leadbetter refert ad diſtantiam lunae a ſole. Altera pars huius aequationis, quae cum priori in

eadem

eadem tabula comprehendi poteſt, addi debet a tranſitu ſolis vel a nodo vel a quadrato nodi vsque ad 45°, reliquis caſibus ſubtrahi: maxima autem eſt dum ſol vel a linea nodorum vel a recta illam normaliter ſecante diſtat angulo 22°, 30′, hocque caſu eſt 1′, 21″.

§. 31. Quinta aequatio petenda eſt ex termino $\frac{+ 1\,\text{ſin.}\, 2(q - \Phi)}{8\lambda\lambda}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{4\lambda\lambda}\right)$ ideoque pendet a diſtantia lunae a nodo et quia ſinui huius duplae diſtantiae eſt proportionalis, dum luna a nodo recedit vsque ad maximam inclinationem, ad locum medium addi debet, a quadrato autem nodi vsque ad ipſam lineam nodorum debet ſubtrahi. Maxima autem fit haec aequatio, dum luna a linea nodorum angulo ſemirecto diſtat, quo caſu eſt: 6′, 58″. Cum igitur hae tres vltimae aequationes, ſi ſingulae fiant maximae, coniunctim conſtituant 1°, 45′, 42″, veriſimile eſt eas in tabulis Leadbetteri, in vnicam ſub titulo duplae diſtantiae ſolis a luna eſſe collectas, qui error tolerari poſſet, ſi modo iſti tabulae titulus duplae diſtantiae ſolis a nodo praefigeretur; quoniam aequatio hinc oriunda eſt maxima. Ceterum plures aliae aequationes inſuper huc adduci poſſent, quae autem, quoniam tantum in minutis ſecundis, merito praetermittuntur: cum ipſa formula differentialis et integratio iam ſit ita comparata, vt ad veritatem tantum proxime accedat, ibique iam minuta ſecunda ſint neglecta. Hancobrationem hic quoque correctio ex anomalia media lunae reſultans tuto omittitur, reliquae autem quatuor aequationes neceſſario retinentur; quoniam locum nodorum ad plura minuta prima mutare valent. Ex his quatuor correctioni-

bus

bus duae tantum vt iam notauimus, in tabulis astronomicis recentissimis reperiuntur insertae, hincque ex hoc capite tabulae astronomicae non mediocri emendatione indigent.

§. 32. Determinato loco nodi superest, vt variationem inclinationis orbitae lunae ad eclipticam, quam vocauimus $= \theta$, inuestigemus. Ad hoc in subsidium vocanda est posterior aequatio, quae §. 18 erat inuenta:

$$d.\,l\,\frac{\text{tang.}p.\text{fin.}\Phi}{\text{fin.}(q-\Phi)} = \frac{Fgg\,dT^2\,\text{fin.}q.\text{fin.}(r-\Phi)}{2\,Cv\,dq\,\text{cof.}p\,\text{fin.}\Phi}\left(\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3}\right)$$

seu cum proxime sit $\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3} = \frac{-3v\,\text{cof.}p\,\text{cof.}s}{f^3}$, erit

$$d.\,l\,\frac{\text{tang.}p.\text{fin.}\Phi}{\text{fin.}(q-\Phi)} = \frac{-3Fgg\,dT^2\,\text{fin.}q\,\text{cof.}s\,\text{fin.}(r-\Phi)}{2\,Cf^3\,dq\,\text{fin.}\Phi}$$

At ante ostendimus esse $\frac{\text{tang.}p}{\text{fin.}(q-\Phi)} = \text{tang}\,\theta$, vnde fiet

$$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta.\,\text{fin.}\,\Phi = d.\,l\,\text{tang.}\,\theta + \frac{d\Phi\,\text{cof.}\Phi}{\text{fin.}\Phi} = \frac{-3Fgg\,dT^2\,\text{fin.}q\,\text{cof.}s\,\text{fin.}(r-\Phi)}{2\,Cf^3\,dq\,\text{fin.}\Phi}$$

Quod si autem ponamus solem secundum motum medium circa terram in distantia $= a$, tempore dT angulum $d\omega$ absoluere, fiet $dT^2 = \frac{2Ca^3\,d\omega^2}{Fgg}$; ideoque

$$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{-d\Phi\,\text{cof.}\Phi}{\text{fin.}\Phi} - \frac{3a^3\,d\omega^2\,\text{fin.}q\,\text{cof.}s\,\text{fin.}(r-\Phi)}{f^3\,dq\,\text{fin.}\Phi}$$

At in §. 20 erat:

$$d\Phi = \frac{-3a^3\,d\omega^2\,\text{cof.}s\,\text{fin.}(r-\Phi)\,\text{fin.}(q-\Phi)}{f^3\,dq}$$ hincque obtinebitur

$$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{3a^3\,d\omega^2\,\text{cof.}s\,\text{fin.}(r-\Phi)}{f^3\,dq\,\text{fin.}\Phi}\,(\text{cof.}\,\Phi\,\text{fin.}\,(q-\Phi) - \text{fin.}\,q)$$

at est $\text{fin.}\,q = \text{fin.}\,(q-\Phi)\,\text{cof.}\,\Phi + \text{cof.}\,(q-\Phi\,\text{fin.}\,\Phi$, quo substituto fit

$$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{-3a^3\,d\omega^2\,\text{cof.}s\,\text{fin.}(r-\Phi)\,\text{cof.}(q-\Phi)}{f^3\,dq}$$

Quia vero est fin. A cof. B $= \frac{1}{2}$ fin. $(A+B) - \frac{1}{2}$ fin. $(B-A)$ erit fin. $(r-\Phi)$ cof. $(q-\Phi) = \frac{1}{2}$ fin. $(q+r-2\Phi) - \frac{1}{2}$ fin. $(q-r)$ quod per cof. $s =$ cof. $(q-r)$ multiplicatum dat

dat: $\frac{1}{4}\sin.2(q-\Phi)+\frac{1}{4}\sin.2(r-\Phi)-\frac{1}{4}\sin.2(q-r)$: hincque erit

$$d.l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{-3a^3\,d\omega^2}{4f^3\,dq}\left(\sin.2(q-\Phi)+\sin.2(r-\Phi)-\sin.2(q-r)\right)$$

Cuius formulae integrale ſi fuerit $= R$ erit l tang. $\theta =$ $C+R$ et tang. $\theta = Ce^R$, et quia R erit quantitas valde parua, erit proxime tang. $\theta = C(1+R)$

§. 33. Si ponamus vt ſupra $\lambda : 1$ pro ratione medii motus lunae ad medium motum ſolis, atque ſtatuamus $dr = d\omega$ et $dq = \lambda d\omega$ neglectis aberrationibus exiguis ab his valoribus, erit

$$d.l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{-3d\omega}{4\lambda}\left(\sin.2(q-\Phi)+\sin.2(r-\Phi)-\sin.2(q-r)\right)$$

cuius integrale, ſi Φ tanquam conſtans conſideretur erit.

$$l\,\text{tang.}\,\theta = lC + \frac{3}{8\lambda}\left(\frac{\cos.2(q-\Phi)}{\lambda}+\cos.2(r-\Phi)-\frac{\cos.2(q-r)}{\lambda-1}\right)$$

Variabilitas autem ipſius Φ hic parum mutat, quia angulus θ ipſe eſt ſatis paruus, interim tamen ſi eius rationem habere velimus, differentiemus expreſſionem inuentam poſito Φ tantum variabili, eritque

$$\frac{3d\Phi}{4\lambda}\left(\frac{\sin.2(q-\Phi)}{\lambda}+\sin.2(r-\Phi)\right).$$ Cum autem ſit

$$d\Phi = \frac{3d\omega}{4\lambda}\left(1+\cos.2(q-r)+\cos.2(q-\Phi)+\cos.2(r-\Phi)\right)$$

abibit illud differentiale in hanc formam:

$$\frac{9d\omega}{16\lambda\lambda}\left(\frac{\sin.2(q-\Phi)}{\lambda}+\sin.2(r-\Phi)+\frac{\sin.2(2q-r-\Phi)}{2\lambda}+\frac{\sin.2(r-\Phi)}{2\lambda}+\frac{\sin.2(q-\Phi)}{2}\right.$$
$$-\frac{\sin.2(q-2r+\Phi)}{2}+\frac{\sin.4(q-\Phi)}{2\lambda}+\frac{\sin.2(q+r-2\Phi)}{2}-\frac{\sin.2(q-r)}{2}$$
$$\left.+\frac{\sin.2(q+r-2\Phi)}{2\lambda}+\frac{\sin.2(q-r)}{2\lambda}+\frac{\sin.4(r-\Phi)}{2}\right)$$

Cuius integrale, quod a ſuperiore valore ipſius l tang. θ ſubtrahi debet eſt

$$\frac{-9}{16\lambda\lambda}\left(\frac{\cos.2(q-\Phi)}{4\lambda}+\frac{\cos.2(q-\Phi)}{2\lambda\lambda}+\frac{\cos.2(r-\Phi)}{2}+\frac{\cos.2(r-\Phi)}{4\lambda}-\frac{\cos.2(q-1)}{4(\lambda-1)}+\frac{\cos.2(q-r)}{4\lambda(\lambda-1)}\right).$$

neglectis reliquis terminis vtpote vehementer exiguis.

 Hinc

Hinc ergo erit

$$l\,\text{tang.}\,\theta = l\,C + \tfrac{5}{8\lambda}\,\text{cof.}\,2(r-\Phi)\left(1+\tfrac{7}{4\lambda}+\tfrac{3}{8\lambda\lambda}\right)$$
$$+\tfrac{3}{8\lambda\lambda}\,\text{cof.}\,2(q-\Phi)\left(1+\tfrac{7}{8\lambda}+\tfrac{2}{4\lambda\lambda}\right)$$
$$-\tfrac{3}{8\lambda(\lambda-1)}\,\text{cof.}\,2(q-r)\left(1+\tfrac{3}{8\lambda}-\tfrac{7}{8\lambda\lambda}\right)$$

Pofito ergo breuitatis gratia l tang. $\theta = lC + R$ erit ob R valde paruum tang $\theta = C(1+R)$. Si $R = 0$ fiat inclinatio $\theta = k$, reliquis cafibus fit $\theta = k + u$, erit $C =$ tang. k et tang. $\theta =$ tang. $k + \frac{u}{\text{cof.}\,k^2} =$ tang. $k + R$ tang. k; vnde fit $u = R$ fin. k cof. $k = \frac{1}{2}R$ fin. $2k$. Cognito ergo valore medio inclinationis k ad quoduis tempus correctio, quae ad eam vel addi vel ab ea fubtrahi debet inuenietur: quae aequatio addenda fi ponatur $= u$, erit

$$u = \tfrac{5}{16\lambda}\left(1+\tfrac{5}{4\lambda}+\tfrac{3}{8\lambda\lambda}\right)\text{fin}\,2k\,\text{cof}\,2(r-\Phi) = 0{,}014831\,\text{fin}\,2k\,\text{cof}\,2(r-\Phi)$$
$$+\tfrac{13}{16\lambda\lambda}\left(1+\tfrac{3}{8\lambda}+\tfrac{3}{4\lambda\lambda}\right)\text{fin}\,2k\,\text{cof}\,2(q-\Phi) + 0{,}001082\,\text{fin}\,2k\,\text{cof}\,2(q-\Phi)$$
$$-\tfrac{3}{16\lambda(\lambda-1)}\left(1+\tfrac{3}{8\lambda}-\tfrac{3}{8\lambda\lambda}\right)\text{fin}\,2k\,\text{cof}\,2(q-r) - 0{,}001164\,\text{fin}\,2k\,\text{cof}\,2(q-r)$$

§. 34. Si et fol et luna verfentur in linea nodorum, omnes hi anguli euanefcunt, fitque $u = 0{,}014749$ fin. $2k$, hocque cafu inclinatio orbitae ad eclipticam erit maxima. Sin autem et fol et luna a linea nodorum diftent angulo recto, ita vt fit $q - \Phi = 90°$ et $r - \Phi = 90°$, et $q - r = 0$, inclinatio omnium erit minima, fit autem $u = -0{,}017077$ fin. $2k$. Differentia ergo inter inclinationem maximam et minimam erit $0{,}031826$ fin, $2k$. In plerifque autem tabulis aftronomicis ftatuitur minima lunae inclinatio $= 4°, 59', 35''$; vnde fit $k - 0{,}017077$ fin. $2k = 4°, 59', 35''$, hincque $k = 5°, 10', 7''$, et l fin. $2k = 9{,}2539340$. Maxima ergo

ergo inclinatio, dum ambo luminaria in linea nodorum verſantur erit $= 5°, 19', 13''$. Ceterum ad inclinationem quouis tempore definiendam triplici aequatione erit opus, quae vel addi debent vel ſubtrahi ab inclinatione media $5°, 10', 7''$. Harum aequationum prima, quae reliquas binas magnitudine multum excedit, pendet a diſtantia ſolis a nodo, huiuſque duplae diſtantiae coſinui eſt proportionalis, quae aequatio dum fit maxima erit $9', 9''$. Secunda aequatio proportionalis eſt coſinui duplae diſtantiae lunae a nodo, et dum fit maxima praebet $40''$. Tertia aequatio coſinui duplae diſtantiae ſolis a luna eſt proportionalis, et dum fit maxima, erit $43''$, vnde patet has duas poſteriores aequationes ſine ſenſibili errore in praxi omitti poſſe, ita vt prima ſola a diſtantia ſolis a nodo pendens ſufficere poſſit. Cum autem tabulae maximam inclinationem orbitae lunaris tantum $5°, 17', 20''$ conſtituant, valor ipſius k diminui debet, ſtatuamus ergo $k = 5°, 8', 45''$, vt ſit l ſin. $2k = 9,2520250$, eritque inclinatio maxima $= 5°, 17', 48''$, et minima $= 4°, 58', 16''$. Quamuis autem haec differentia inter inclinationem maximam ac minimam ſit maior quam tabulae exhibent, duobus fere minutis primis, tamen ideo non in ſuſpicionem cadit, tum quoniam in tabulis binae reliquae aequationes negliguntur, tum quia per obſeruationes vehementer eſt difficile hos limites exactiſſime conſtituere.

QVANTVM MOTVS TERRAE A LVNA PERTVRBETVR ACCVRATIVS INQVIRITVR.

AVCTORE
Leonhardo Eulero.

§. 1.

Cum luna perpetuo ad terram vrgeatur, quaecunque huius sollicitationis sit causa, necesse est vt terra simili quadam vi versus lunam nitatur. Si enim sol, a cuius vi motus lunae maxime perturbatur, e medio tolleretur, atque terra cum luna tantum in vniuerso relinqueretur, dubium est nullum, quin terrae et lunae commune centrum grauitatis vel quiesceret, vel vniformiter in directum progressurum esset. Hinc dum luna circa terram reuolueretur, vtrumque corpus simili quodam motu circa centrum grauitatis gyraretur; atque, si vires teneant rationem reciprocam duplicatam distantiarum, tam terra quam luna in sectione conica alterum focum in communi grauitatis centro habente, moueretur. Sin autem tam terra quamluna motu omni priuaretur, recta ad se inuicem accederent, et in communi centro grauitatis conuenirent. Vnde sequitur vires accelerantes, quibus terra et luna sollicitantur, ipsis horum corporum massis reciproce fore proportionales, ita vt vis, qua luna ad terram acceleratur, se habitura sit ad vim, qua terra vicissim ad lunam concitatur vti massa seu quantitas materiae in terra contentae ad massam lunae. Quodsi ergo massa terrae sit $=T$, et massa lunae $=L$, atque vis acceleratrix, qua luna ad terram incitatur, ponatur $=V$, erit vis acceleratrix, qua terra ad lunam vrgebitur $=\frac{LV}{T}$. Cum igitur vis V sit cognita, ex ea quoque vis, qua terra ad lunam sollicitatur, cognoscetur, si modo ratio inter massas terrae et lunae fuerit nota.

§. 2. Vis autem acceleratrix V, qua luna ad terram pellitur, facile ad grauitatem naturalem in superficie terrae comparatur. Indicetur enim vis grauitatis naturalis vnitate, sitque radius terrae $=r$, et distantia lunae a terra $=z$, quoniam vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum, erit vis, qua luna terram versus acceleratur, $=\frac{rr}{zz}=V$; hincque ergo vis, qua terra lunam versus impellitur, erit $=\frac{Lrr}{Tzz}$, seu se habebit ad grauitatem naturalem vti $\frac{Lrr}{Tzz}$ ad 1. Cum igitur terra continuo tanta vi ad lunam vrgeatur viribus, quibus ad solem trahitur, non perfecte obediet, neque idcirco in ellipsi reuoluetur, cuius alter focus sit in centro solis constitutus. In superiori quidem dissertatione, vbi nouas tabulas pro motu solis condere sum conatus, assumsi commune centrum grauitatis terrae et lunae in ellipsi circa solem in eius foco existentem reuolui, atque ex loco lunae aberrationem centri terrae ab ista ellipsi ad quoduis tempus assignaui. Verum quanquam haec hypothesis ad veritatem proxime accedit, atque adeo perfecte conueniret, si vires distantiis directe essent proportionales, tamen operae pretium videtur, in hunc ipsum errorem, quo ista hypothesis a veritate recedit, diligentius inquirerā. Hunc in finem nulla communis centri grauitatis ratione habita, deuiationem terrae de orbita elliptica ex ipsis sollicitationibus lunae inuestigabo, quod negotium ad maxime complicatos calculos deducit, cum illa hyppothesis rem facillime expediuisset.

§. 3. Quo autem vim, qua terra a luna sollicitatur, cognoscamus, necesse est, vt ratio, quam massa lunae ad massam terrae tenet, inuestigetur. Si quidem assumamus corpus lunae ex simili materia esse conflatum, atque terram, ratio illa erit triplicata rationis diametrorum. Quare cum sit diameter terrae ad diametrum lunae vti 365 ad 100, foret massa terrae ad massam lunae vti 4863 ad 100 seu vt 48 ad 1 proxime. Neutonus quidem ex phaenomenis aestus maris terram tricies nouies tantum grauiorem luna constituit, verum Celeb. Daniel Bernoulli in sua eximia de aestu maris dissertatione ostendit vim lunae multo esse minorem, quam Neutonus statuisset, ita vt ratio 48 ad 1 propius ad veritatem accedat, quam ratio 39 ad 1. In hac autem comparatione ad vim solis simul spectatur, quae a distantia solis a terra pendet. Ostendi autem in dissertatione de diminutione motus planetarum, si parallaxis soli horizontalis assumatur 13″, vim solis in distantia 320, 708 r ipsi grauitati fore aequalem; quare si haec distantia 320, 708 r ponatur $= f$, et massa solis $= S$ erit $\frac{S}{ff} = \frac{T}{rr}$; ideoque $S = 102854\,T = \frac{ffT}{rr}$. Quod si autem distantia solis a terra ponatur $= c$, et distantia lunae a terra $= b$, ad mare commouendum est vis solis ad vim lunae vt $\frac{S}{c^3}$ ad $\frac{L}{b^3}$ hoc est vt $\frac{Tff}{c^3 rr}$ ad $\frac{L}{b^3}$. Quare si vis lunae fuerit ad vim solis vt n ad 1, erit $\frac{L}{b^3}$ ad $\frac{Tff}{c^3rr}$. At n ad 1, hincque $L:T = nffb^3 : c^3rr$ vnde si sit $n = 4$. Neutonus deduxit $L : T = 1 : 39$ manet enim ratio ff ad c^3 quaecunque parallaxis assumatur, perpetuo eadem, sin autem esset, vt Cel. Bernoulli statuit $n = 3$, vel tantum $2\frac{1}{2}$ foret $L : T = 1 : 52$ seu $1 : 62$; inter quas rationes illa, quam ex mole lunae deduximus, medium quoddam a veritate fortasse non multum remotum tenet.

§. 4. Cognita ergo vi lunae motum terrae perturbante siue potius ea, quasi esset cognita, assumta, ipsum motum terrae inuestigemus. Quiescat ergo sol in S, cuius massa sit $= S$, circa quem reuoluatur terra in orbita ATB, cuius media a sole distantia sit $= c$: massa autem terrae sit $= T$; statuatur in A terrae aphelium et in B perihelium, quatenus quidem eius motus a luna non perturbaretur. Elapso iam tempore $= t$, postquam terra ex aphelio A est egressa, peruenerit in locum T, voceturque distantia $ST = z$, et angulus $AST = \Phi$. Luna autem nunc versetur in L, ita vt a coniunctione solis distet angulo $STL = \theta$, quem angulum cum tempore t vniformiter crescere assumamus, quoniam variationes a motus lunae inaequalitate oriundae sensibiles esse nequeunt, ob eandemque rationem distantiam lunae a terra LT tanquam constantem considerabimus sitque $LT = e$; et ipsa lunae massa $= L$. Posito iam radio terrae $= r$, et vi grauitatis $= 1$, terra primum ad solem vrgebitur vi $= \frac{Srr}{Tzz}$; tum vero ad lunam vi $= \frac{Lrr}{Tee}$. Ex T ad AB ducatur normalis TP, et TV ipsi AB parallela, viresque sollicitantes secundum has directiones Tab. XVI. Fig. 3.

re-

resoluantur. A vi ergo solis terra in directione TP sollicitabitur vi acceleratrice $= \frac{Srr\,\text{sin.}\,\Phi}{Tzz}$, et in directione TV vi $= \frac{Srr\,\text{cos.}\,\Phi}{Tzz}$. Deinde ob angulum $LTV = \theta + \Phi$, a vi lunae terra in directione TP vrgebitur vi $= \frac{Lrr\,\text{sin.}\,(\theta+\Phi)}{Tee}$, et in directione TV vi $= \frac{Lrr\,\text{cos.}\,(\theta+\Phi)}{Tee}$. Omnino ergo terra incitabitur secundum directionem TP vi $= \frac{Srr\,\text{sin.}\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,\text{sin.}\,(\theta+\Phi)}{Tee}$, et secundum directionem TV vi $= \frac{Srr\,\text{cos.}\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,\text{cos.}\,(\theta+\Phi)}{Tee}$.

§. 5. Ponatur $SP = x$ et $PT = y$, vt sit $x = z\,\text{cos.}\,\Phi$, et $y = z\,\text{sin.}\,\Phi$, atque motus terrae resoluatur secundum directiones Tp et Tt, quae sint coordinatis SP et PT parallelae, eritque ob elementum temporis $= dt$, celeritas terrae secundum directionem $Tp = \frac{dx}{dt}$ seu TV $= -\frac{dx}{dt}$, quia abscissa SP progrediente luna diminuitur: et celeritas terrae secundum directionem $Tt = \frac{dy}{dt}$. Hinc ille motus requirit vim acceleratricem in directione $Tp = \frac{2ddx}{dt^2}$ seu in directione $TV = -\frac{2ddx}{dt^2}$: iste autem motus requirit vim acceleratricem in directione $Tt = \frac{2ddy}{dt^2}$ seu in directione $TP = -\frac{2ddy}{dt^2}$, sumto elemento temporis dt constante. His igitur viribus aequales statuantur illae vires, quibus terra secundum has directiones reuera sollicitari inuenta est, sicque prodibunt duae sequentes aequationes

$$-\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{Srr\,\text{cos.}\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,\text{cos.}\,(\theta+\Phi)}{Tee}$$

$$-\frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Srr\,\text{sin.}\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,\text{sin.}\,(\theta+\Phi)}{Tee}$$

At

At cum ſit $x = z\,\mathrm{cof.}\,\Phi$ et $y = z\,\mathrm{fin.}\,\Phi$ erit:

$$dx = dz\,\mathrm{cof.}\,\Phi - z\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi,\; dy = dz\,\mathrm{fin.}\,\Phi + z\,d\Phi\,\mathrm{cof.}\,\Phi$$

$$ddx = ddz\,\mathrm{cof.}\,\Phi - 2\,dz\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi - z\,dd\Phi\,\mathrm{fin}\,\Phi - z\,d\Phi^2\,\mathrm{cof.}\,\Phi$$

$$ddy = ddz\,\mathrm{fin.}\,\Phi + 2\,dz\,d\Phi\,\mathrm{cof.}\,\Phi + z\,dd\Phi\,\mathrm{cof.}\,\Phi - z\,d\Phi^2\,\mathrm{fin.}\,\Phi$$

qui valores in aequationibus illis ſubſtituti dabunt:

$$ddz\,\mathrm{cof.}\,\Phi - 2\,dz\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi - z\,dd\Phi\,\mathrm{fin.}\,\Phi - z\,d\Phi^2\,\mathrm{cof.}\,\Phi = -\frac{rr\,dt^2}{2\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{S}\,\mathrm{cof.}\,\Phi}{zz} + \frac{\mathrm{L}\,\mathrm{cof.}\,(\theta + \Phi)}{ee}\right)$$

$$ddz\,\mathrm{fin.}\,\Phi + 2\,dz\,d\Phi\,\mathrm{cof.}\,\Phi + z\,dd\Phi\,\mathrm{cof}\,\Phi - z\,d\Phi^2\,\mathrm{fin}\,\Phi = -\frac{rr\,dt^2}{2\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{S}\,\mathrm{fin}\,\Phi}{zz} + \frac{\mathrm{L}\,\mathrm{fin.}\,(\theta + \Phi)}{ee}\right)$$

Ex his ergo duabus aequationibus definiri debet relatio inter tres quantitates variabiles z, Φ et t quoniam θ a t pendens aſſumimus.

§. 6. Harum aequationum inuentarum prior multiplicetur per $\mathrm{fin.}\,\Phi$, poſterior vero per $\mathrm{cof.}\,\Phi$, haecque ab illa ſubtrahatur quo facto prodibit:

$$-2\,dz\,d\Phi - z\,dd\Phi = \frac{\mathrm{L}\,rr\,dt^2\,\mathrm{fin.}\,\theta}{2\mathrm{T}\,ee}.$$

eſt enim $\mathrm{fin.}\,(\theta + \Phi)\,\mathrm{cof.}\,\Phi - \mathrm{cof.}\,(\theta + \Phi)\,\mathrm{fin.}\,\Phi = \mathrm{fin.}\,\theta$. Deinde quia eſt $\mathrm{cof.}\,\theta + \Phi)\,\mathrm{cof}\,\Phi + \mathrm{fin.}\,(\theta + \Phi)\,\mathrm{fin.}\,\Phi = \mathrm{cof}\,\theta$, ſi aequatio prior per $\mathrm{cof.}\,\Phi$ poſterior vero per $\mathrm{fin.}\,\Phi$ multiplicetur ambaeque inuicem addantur, reperitur.

$$ddz - z\,d\Phi^2 = -\frac{rr\,dt^2}{2\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{S}}{zz} + \frac{\mathrm{L}\,\mathrm{cof.}\,\theta}{ee}\right)$$

Ponatur nunc breuitatis gratia $\frac{\mathrm{S}rr}{\mathrm{T}cc} = m$; denotante c diſtantiam mediam terrae a ſole ſeu potius ſemilatus rectum, quod ob excentricitatem valde paruam a diſtantia media non multum diſcrepabit, erit ob $\mathrm{S} = \frac{\mathrm{T}ff}{rr}$, $m = \frac{ff}{cc} = 0,000408587$. Deinde ſit $\frac{\mathrm{L}rr}{\mathrm{T}ee} = n$, et, ſi $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = \frac{1}{40}$ atque $e = 60\,r$ reperietur $n = 0,00000579$, ita vt ſit,

 $n =$

$n = \frac{m}{70}$ circiter. Secundum mentem Neutoni foret $n = \frac{m}{37}$ et secundum Bernoullium $n = \frac{m}{88}$. Erit ergo n prae m quantitas satis parua, vt quantitates multo minores quam n facile reiici queant. Introductis autem his duabus litteris m et n aequationes ante inuentae transibunt in sequentes.

$$2dzd\Phi + zdd\Phi = -\tfrac{1}{2}ndt^2 \sin.\theta \text{ et}$$

$$ddz - zd\Phi^2 = -\tfrac{1}{2}dt\left(\frac{mcc}{zz} + n\cos.\theta\right)$$

in quibus aequationibus differentialibus secundi gradus differentiale dt assumtum est constans; quod in integratione probe est obseruandum.

§. 7. Si luna prorsus abesset, aequatio prior fieret:

$$2dzd\Phi + zdd\Phi = 0.$$

quae per z multiplicata et integrata praebet:

$$zzd\Phi = A\,dt$$

denotante A quantitatem quampiam constantem. Altera autem aequatio hoc casu quo $n = 0$ abit in hanc

$$ddz - zd\Phi^2 = -\frac{mccdt^2}{2zz}.$$

At ex priori est $d\Phi^2 = \frac{A^2dt^2}{z^4}$, quo valore substituto fit

$$ddz = \frac{A^2dt^2}{z^3} - \frac{mccdt^2}{2zz}$$

quae multiplicata per dz et integrata dabit ob dt constans:

$$\tfrac{1}{2}dz^2 = \frac{mccdt^2}{2z} - \frac{A^2dt^2}{2zz} - \frac{Bdt^2}{2}$$

seu $dt = \frac{zdz}{\sqrt{(mccz - AA - Bzz)}}$

et $d\Phi = \frac{Adz}{z\sqrt{(mccz - AA - Bzz)}}$

Ponatur $z = \frac{cc}{u}$ erit $d\Phi = \frac{-Adu}{\sqrt{(mc^4u - AAuu - Bc^4)}}$

Si iam constantes A et B ita determinentur, vt sit $AA = \frac{mc^3}{2}$ seu $A = c\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$ et $B = \frac{m(cc-kk)}{2c}$ inuenietur $u = c - k\cos.\Phi$. Posito ergo $\Phi = 0$, erit $u = c - k$ et distantia

ſtantia aphelii a ſole $AS = \frac{cc}{c-k}$. Verum poſito $\Phi = 180°$, fiet diſtantia perihelii a ſole $BS = \frac{cc}{c+k}$, vnde axis transuerſus $AB = \frac{2c^3}{cc-kk}$, et diſtantia focorum $= \frac{2cck}{cc-kk}$ porroque axis coniugatus $= \frac{2cc}{\sqrt{(cc-kk)}}$ et parameter $= 2c$ vti aſſumſimus.

§. 8. Accedente autem vi lunae, cum ex priori aequatione ſit:

$$2dzd\Phi + zdd\Phi = -\tfrac{1}{2}ndt^2 \text{ ſin. } \theta.$$

erit ob n numerum valde paruum proxime ſaltem

$$zzd\Phi = Adt = cdt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}.$$

et quia orbita terrae fere eſt circularis, ſi pro z ponatur c, erit $d\Phi = \frac{dt\sqrt{m}}{\sqrt{2c}}$, cuius aberratio a veritate tam eſt parua, vt in termino per ſe minimo $\frac{1}{2}ndt^2 \text{ ſin. } \theta$ diſcrimen ſenſibile non producat. Simili modo in hoc termino ratio $d\theta$ ad $d\Phi$ cenſeri poteſt conſtans, ſcilicet ratione motus medii lunae a ſole ad motum medium ſolis quae ratio cum ſit $12,368314 : 1$, ponatur compendii cauſa $i = 12,368314$ eritque $d\theta = id\Phi$ proxime. Multiplicetur nunc aequatio per z erit

$$2zdzd\Phi + zzdd\Phi = -\tfrac{1}{2}nzdt^2 \text{ ſin. } \theta.$$

Hic autem in termino per ſe minimo $\frac{1}{2}nzdt^2 \text{ ſin. } \theta$ ponatur $z = c$, et loco dt ſcribatur $\frac{d\Phi\sqrt{2c}}{\sqrt{m}} = \frac{d\theta\sqrt{2c}}{i\sqrt{m}}$ eritque

$$2zdzd\Phi + zzdd\Phi = -\frac{ncdt\,d\theta \text{ ſin. } \theta}{2i\sqrt{m}}\sqrt{2c}$$

cuius integrale ob dt conſtans eſt:

$$zzd\Phi = cdt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} + \frac{ncdt \text{ coſ. } \theta}{2i}\sqrt{\frac{2c}{m}}$$

ſeu $$zzd\Phi = cdt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} + \frac{ncdt \text{ coſ. } \theta}{im}\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

 Eſt

Eſt autem area $AST = \frac{1}{2}\int zz\,d\Phi$, vnde ob $dt = \frac{d\theta\sqrt{2c}}{i\sqrt{m}}$ erit:

Area $AST = \frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc} + \frac{ncc\,\sin.\theta}{2iim}$

ſeu $\frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc} = \text{Ar}: AST - \frac{ncc\,\sin.\theta}{2iim}$.

§. 9. Vi lunae ergo primum efficitur, vt tempora non amplius ſint areis proportionalia. Scilicet tempus quo terra ab aphelio A ad T peruenit non proportionale eſt areae AST, ſed huic areae minutae ſpatiolo quopiam, quod ſit vt ſinus anguli STL. Hinc quamuis orbita terrae nullam haberet excentricitatem, tamen eius motus non foret vniformis, ſed modo citius modo tardius incederet. Ponamus tempus vnius anni eſſe $= \odot = 365,242305$ dierum, tum niſi luna motum perturbaret, tempore t angulum deſcripſiſſet $AST = \frac{t}{\odot}\,360°$. Ob lunam autem hic angulus AST aliquanto erit maior, qui exceſſus vt pateat, pro area AST ponatur valor $\frac{1}{2}cc\Phi$ et cum, ſi luna abeſſet, foret $\frac{1}{2}cc\Phi = \frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc}$, ſeu $\Phi = t\sqrt{\frac{m}{2c}} = \frac{t}{\odot}.\,360°$, nunc luna ſimul vrgente erit $\frac{1}{2}cc\Phi = \frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc} + \frac{ncc\,\sin.\theta}{2iim}$, ideoque

ang. $AST = \Phi = \frac{t}{\odot}.\,360° + \frac{n\,\sin.\theta}{iim}$.

Ad angulum ergo $\frac{t}{\odot}.\,360°$, quem motus medius praebet inſuper addi debet angulus $\frac{n\,\sin.\theta}{iim}$; hic ſcilicet angulus ab coniunctione vſque ad oppoſitionem ad locum terrae medium addi, dum autem luna ab oppoſitione ad coniunctionem reuertitur, ſubtrahi debebit. Haec ergo correctio maxima erit in quadraturis, vbi erit $= \frac{n}{iim}$; quae quanta ſit videamus. Cum ſit $i = 12,368314$, et $\frac{m}{n} = 70$: fiet $\frac{n}{iim} = 0,000093385$, quae eſt menſura anguli

anguli: 19″, 15‴. Sin autem Neutoni valore $\frac{m}{n} = 57$ essemus vsi, hic angulus prodiisset $= 23''$, $40'''$, cum tamen consideratio centri grauitatis tantum 15″ pro hac aequatione praebuisset. At si cum Bernoullio sumamus $\frac{m}{n} = 88$ fiet iste angulus $= 15''$, $19'''$, ita vt, si haec hypothesis esset veritati consentanea, tabulae nostrae solares manerent saluae, sin autem Neutoni sententia esset vera, correctiones nostrarum tabularum forent nimis paruae plus quam semisse, etiamsi eae Neutoni hypothesi sint superstructae. Vnde patet considerationem centri grauitatis effectum lunae nimis paruum exhibere.

§. 10. Cum igitur inuenerimus hanc aequationem

$$zz\,d\Phi = c\,dt\left(1 + \frac{n\cos.\theta}{i\,m}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}\,m\,c}$$

atque posito $z = \frac{cc}{u}$ pro altera aequatione

$$ddz - z\,d\Phi^2 = -\tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{mcc}{zz} + n\cos.\theta\right)$$

proxime satisfaciat $u = c - k\cos.\Phi$, ponamus reuera esse $u = c - k\cos.\Phi + P$. Primum ergo pro z substituatur $\frac{cc}{u}$, ac prior aequatio transibit in hanc:

$$c^3\,d\Phi = uu\,dt\left(1 + \frac{n\cos.\theta}{i\,m}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

posterior vero in hanc:

$$\frac{-ccddu}{uu} + \frac{2ccdu^2}{u^3} - \frac{ccd\Phi^2}{u} + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{muu}{cc} + n\cos.\theta\right) = 0$$

seu multiplicando per u^4 erit

$$-ccuuddu + 2ccudu^2 - ccu^3d\Phi^2 + \tfrac{1}{2}u^4dt^2\left(\frac{muu}{cc} + n\cos.\theta\right) = 0$$

At ex illa aequatione est:

$$c^6\,d\Phi^2 = \tfrac{1}{2}mcu^4dt^2\left(1 + \frac{n\cos.\theta}{im}\right)^2 \text{ ideoque}$$

$$\tfrac{1}{2}u^4dt^2 = \frac{c^5d\Phi^2}{m} : \left(1 + \frac{n\cos.\theta}{im}\right)^2 = \frac{c^5d\Phi^2}{m} - \frac{2nc^5d\Phi^2\cos.\theta}{imm}$$

reiectis sequentibus terminis vtpote nimis paruis; vnde

 fit

fit $-ccuu\,ddu + 2ccu\,du^2 - ccu^3\,d\Phi^2 + c^3uu\,d\Phi^2 + \frac{nc^3\,d\Phi^2 \operatorname{cos}.\theta}{m}\left(cc - \frac{2uu}{i}\right) = 0$. Cum autem ſit $u = c - k \operatorname{coſ} \Phi + P$ erit $du = k\,d\Phi \operatorname{ſin}.\Phi + dP$ et $ddu = k\,dd\Phi \operatorname{ſin}.\Phi + k\,d\Phi^2 \operatorname{coſ}.\Phi + ddP$. His autem valoribus loco du et ddu ſubſtitutis et per cc diviſis, erit, poſtquam in terminis per ſe minimis vbique loco u ſcriptum fuerit c ob k valde paruum:

$$ddP + P\,d\Phi^2 = \frac{nc\,d\Phi^2 \operatorname{coſ}.\theta}{m}\left(1 - \frac{2}{i}\right)$$

in qua aequatione ob poſitum $z = c$, et n valde paruum elementum $d\Phi$ tanquam conſtans ſpectari poteſt. Indeque ergo reperitur $P = \frac{-nc(i-2)\operatorname{coſ}.\theta}{mi(ii-1)}$

§. 11. Cum igitur inuento valore ipſius P ſit:

$$u = c - k \operatorname{coſ}.\Phi - \frac{nc(i-2)\operatorname{coſ}.\theta}{mi(ii-1)} \text{ erit}$$

$$z = \frac{cc}{c - k \operatorname{coſ}.\Phi} + \frac{nc(i-2)\operatorname{coſ}\theta}{mi(ii-1)}.$$

Ex tabulis ergo pro ellipſi computatis quaeratur more conſueto diſtantia terrae a ſole, tum vero ad eam addatur particula $\frac{nc(i-2)\operatorname{coſ}.\theta}{mi(ii-1)}$, ſicque vera prodibit diſtantia ſolis a terra. A coniunctione ergo vſque ad primam quadraturam diſtantia ex tabulis inuenta augeri debet, tum vero a prima quadratura vſque ad alteram minui, atque a quadratura altera ad coniunctionem vſque denuo augeri. Conueniunt haec apprime cum titulis in tabulis ſolaribus inuentis, vbi etiam correctiones diſtantiae coſinui diſtantiae lunae a ſole repertae ſunt proportionales; tantum ergo ſupereſt, vt videamus, quantum vera quantitas harum correctionum ab illis differat. Hunc in finem indagemus aequationem maximam, quae erit $= \frac{nc(i-2)}{mi(1+ii)}$. Poſito ergo $c = 100000$ ob $i = 12,368314$, erit

$i-2$

$i-2=10,368314$, et $ii-1=151,9752$, atque adeo $\frac{e(i-2)}{i(ii-1)}=551,6005$ in hypothesi $\frac{m}{n}=70$ haec correctio est $=7,8800$ et in hypothesi Neut. $\frac{m}{n}=57$ ea est $=9,6772$ et in hypothesi Bernoulliana $\frac{m}{n}=88$ ea fit $=6,2682$. Atque secundum hanc vltimam hypothesin correctio maxima pro logarithmo distantiae solis a terra, qui ad sex figuras decimales exhiberi solet, futura esset 27, cum in tabulis nostris sit 31. ex Neutoniana vero hypothesi haec correctio prodiret $=42$; ita vt tabulae nostrae non multum a veritate abludant, si quidem assumamus veritatem intra hypotheses Neutoni, et Bernoulli, quod quidem est verisimillimum consistere.

§. 12. Facilius valor litterae P, qua correctio distantiae terrae a sole continetur, inueniri potest, si excentricitas orbitae negligatur. Cum enim excentricitas sit valde parua, ea in valore ipsius P nullam mutationem inferet. Quamobrem cum excentricitas pendeat a littera k sumamus $k=0$, eritque si luna non adesset $z=c$, accedente autem luna sit $z=c+P$, eritque P quantitas minima nullam sensibilem mutationem patiens, etiamsi excentricitas coniungatur. Posito autem $z=c+P$ ob $zz=cc+2cP$ reiecto termino PP ob paruitatem, prima aequatio abibit in hanc formam:

$$c\,d\Phi+2P\,d\Phi=dt\left(1+\frac{n\cos.\theta}{im}\right)V\tfrac{1}{2}mc$$

posterior vero in hanc:

$$ddP-c\,d\Phi^2-P\,d\Phi^2=-\tfrac{1}{2}dt^2\left(m-\frac{2mP}{c}+n\cos.\theta\right)$$

Verum si luna abesset, foret $c\,d\Phi=dt\,V\tfrac{1}{2}mc$, et $\tfrac{1}{2}m\,dt^2=c\,d\Phi^2$, qui valor in terminis per se minimis adhiberi

potest

potest, pro maioribus vero erit

$$\tfrac{1}{2} mcdt^2 \left(1 + \frac{2n\cos.\theta}{im}\right) = ccd\Phi^2 + 4cPd\Phi^2$$

seu $\frac{1}{2} mdt^2 = d\Phi^2 \left(c + 4P - \frac{2n\cos.\theta}{im}\right)$, quo valore in altera aequatione substituto habebitur.

$$ddP - Pd\Phi^2 = -4Pd\Phi^2 + \frac{2ncd\Phi^2\cos.\theta}{im} + 2Pd\Phi^2 - \frac{ncd\Phi^2\cos.\theta}{m}$$

seu $ddP + Pd\Phi^2 = \frac{2ncd\Phi^2\cos.\theta}{im} - \frac{ncd\Phi^2\cos.\theta}{m}$

ad cuius integrale inueniendum, quia $d\theta = id\Phi$, et $d\Phi$ constans assumi potest, ponatur $P = \alpha c \cos.\theta$, erit $dP = -\alpha icd\Phi \sin.\theta$ et $ddP = -\alpha iicd\Phi^2 \cos.\theta$, quibus valoribus substitutis aequatio per $cd\Phi^2 \cos.\theta$ diuisa erit:

$$-\alpha ii + \alpha = \frac{2n}{im} - \frac{n}{m} = \frac{-n(i-2)}{im}$$

ideoque $\alpha = \frac{n(i-2)}{mi(ii-1)}$ et $P = \frac{nc(i-2)\cos.\theta}{mi(ii-1)}$

vti ante inuenimus.

§. 13. Cum igitur excentricitas in valorem ipsius P non ingrediatur, atque sublata luna inuentum sit $z = \frac{cc}{c-k\cos.\Phi}$ erit, si vis lunae motum terrae afficiat:

$$z = \frac{cc}{c-k\cos.\Phi} + \frac{nc(i-2)}{mi(ii-1)} \cos.\theta$$

qui valor in aequatione prius inuenta substitutus praebebit

$$\frac{c^3 d\Phi}{(c-k\cos.\Phi)^2} + \frac{2nccd\Phi(i-2)\cos.\theta}{mi(ii-1)(c-k\cos.\Phi)} = dt\left(1 + \frac{n\cos.\theta}{mi}\right) \sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

Quae aequatio reiectis terminis minimis transibit in hanc

$$dt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} = \frac{c^3 d\Phi}{(c-k\cos.\Phi)^2} - \frac{ncd\Phi\cos.\theta}{mi} + \frac{2ncd\Phi(i-2)\cos.\theta}{mi(ii-1)}$$

Ex qua ad datum tempus t verus angulus AST definietur. Ponamus si luna euanesceret, tempori t respondere anomaliam veram v, eritque $dt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} = \frac{c^3 dv}{(c-k\cos.v)^2}$ nunc autem accedente luna sit angulus AST $= \Phi = v + \omega$, erit $\frac{c^3 d\Phi}{(c-k\cos.\Phi)^2} = \frac{c^3 dv}{(c-k\cos.v)^2} + cd\omega$ proxime, quia tam k quam

quam ω ſunt quantitates minimae, his ergo valoribus ſubſtitutis fiet:

$$0 = d\omega - \frac{nd\Phi\cos\theta}{mi}\left(1 - \frac{2(i-2)}{ii-1}\right)$$

et integrando ob $d\Phi = \frac{d\theta}{i}$ habebitur:

$$\omega = \frac{n\sin.\theta}{mii}\left(1 - \frac{2(i-2)}{ii-1}\right) = \frac{n\sin.\theta}{m}.\ 0,00564505.$$

Tantus ergo angulus ad anomaliam veram ex tabulis ellipticis inuentam v addi debet, qui aliquanto minor eſt eo, quem ſupra §. 9. nulla ipſius orbitae variationis habita ratione elicuimus. Correctio ergo haec fit maxima dum luna in quadraturis verſatur eritque tum, vbi ſin. $\theta = 1$, aequalis angulo, cuius menſura eſt $= \frac{n}{m}.$ 0,00564505. Quare pro variis hypotheſibus fractionis $\frac{m}{n}$ haec correctio maxima ſequenti modo ſe habebit

ſi $\frac{m}{n} = 57$ erit $\omega = 20'', 25'''$

ſi $\frac{m}{n} = 70$ erit $\omega = 16'', 38'''$

ſi $\frac{m}{n} = 88$ erit $\omega = 13'', 14'''$

§. 14. Propter lunam ergo locus ſolis ex tabulis ellipticis inuentus duplici modo corrigi debet, quorum alter ſpectat longitudinem ſolis in ecliptica, alter diſtantiam ſolis a terra. Primo ſcilicet correctio longitudinis ſolis ita ſe habet, vt dum luna a coniunctione ſolis ad oppoſitionem progreditur addi contra vero a plenilunio vſque ad nouilunium a loco ſolis ſubtrahi debeat: haecque correctio eſt ſinui diſtantiae lunae a ſyzygiis proportionalis, vnde innoteſcit ſi modo correctio maxima, quae quadraturis reſpondet, fuerit cognita. Vidimus autem hanc correctionem pro variis hypotheſibus ſequenti modo ſe habere:

Hypothesis			Maxima correctio loci solis in ecliptica
Neutoniana	$\frac{m}{n}$	$= 57$	$20''$, $25'''$
ex Volumine	$\frac{m}{n}$	$= 70$	$16''$, $38'''$
Bernoulliana	$\frac{m}{n}$	$= 88$	$13''$, $14'''$

Deinde distantia solis a terra inuenta ex tabulis ita debet corrigi, vt ea ab vltimo quadrante vsque ad priorem, quo tempore minor lunae pars quam semissis est illuminata, augeri, a prima autem quadratura ad alteram, quo tempore maior lunae portio quam semissis illuminata spectatur, minui debeat. Est vero haec correctio cosinui anguli, quo luna a syzygiis distat, proportionalis: maxima ergo est in ipsis syzygiis, vbi logarithmus distantiae solis a terra, qui ad 6 notas post characteristicam sequentes exhiberi solet, sequentibus numeris vel augeri vel diminui debet.

Hypothesis			Maxima Correctio Log. distantiae solis a terra
Neutoniana	$\frac{m}{n}$	$= 57$	42
ex Volumine	$\frac{m}{n}$	$= 70$	34
Bernoulliana	$\frac{m}{n}$	$= 88$	27.

§. 15. In tabulis autem meis solaribus, vbi has correctiones ex consideratione communis centri grauitatis terrae et lunae elicui, quanquam hypothesi Neutoniana sum vsus, tamen eas notabiliter minores obtinui, quam hic prodierunt. Namque maxima correctio loci solis in ecliptica ibi erat $15''$, cum hic ex eadem hypothesi $20''$, $25'''$ sit inuenta; atque maxima correctio loga-

rith-

rithmi diſtantiae ſolis a terra ibi erat 31, hic vero 42 quarum vtraque hic fere triente maior eſt quam ibi. Ex quo intelligitur commune centrum grauitatis terrae et lunae non ſecundum regulas Keplerianas in ellipſi incedere, vti tum aſſumſeram. Quanquam autem iam ibi innueram, hoc principium examen geometricum non ſuſtinere, tamen eius aberratio non tanta videbatur, quanta nunc eſt reperta. Hancobrem tabulae illae ſolares, ſi hypotheſis Neutoniana veritati eſſet conſentanea, vtique emendatione indigerent: at cum Neutonus lunae vim nimis magnam facere videatur, emendatio iſta tabulas magis a veritate abduceret. Si enim has tabulas ad mentem Celeb. Bernoullii, qui vim lunae in ratione 8 ad 5 fere minuit, ſequi vellem, correctiones ibi adhibitas aliquantillum imminuere deberem. Quare ſi veritas intra hos duos quaſi limites contineatur, atque valor $\frac{z}{p}$ aliquantillum maior ſit quam 70, puta 75 tum eae ipſae correctiones prodituræ eſſent, quae in tabulis ſunt vſurpatae. Talis autem hypotheſis propius ad mentem Cel. Bernoullii accederet, atque corpus lunae paulisper tantum rarius eſſet terra; quae ambae rationes tantum ponderis habere videntur, vt tabulae ante traditae adhuc nulla emendatione indigeant; hancque ob cauſam eas immutatas relinquo.

OBSERVATIO ECLIPSEOS SOLARIS

d. 25 Iulii 1748 Tubingae facta.

a Georgio *Wolffg. Krafft.*

Imago solis, cum maculis in eo haerentibus, circa horam 9 a. m. erecta.

Tab. XVII. Fig. 1.

Instrumenta huic obseruationi adhibita fuerunt 1. Tubus terrestris 4 pedum, optimae notae, obiecta erecta sistens, cuius vitrum oculare fumo erat obductum. 2. Horologium portatile Londinense, singula minuta prima ostendens; ad quod corrigendum inseruiit. 3. Quadrans ligneus, radii 1 pedis, in quo singuli gradus diuisi sunt in suos quadrantes; quo et altitudo meridiana, et reliquae ad corrigendum horologium necessariae, a me fuerunt captae. 4. Thermometrum Fahrenheitiano modo diuisum, et ab insigni artifice Amstelodamensi Prinz elaboratum. His itaque obseruaui

Tempore correcto medio ante mer.			
9^h	$58'$	Initium Eclipseos in A	
10	10	Contingit Lunae discus maculam	*a*.
	52	— — — —	*b*.
11	2	— — — —	*c*.
	9	— — — —	*d*.
	25	— — — —	*e*.
	54	Deserit Lunae discus maculam	*c*.
post merid.			
22	4	— — — —	*b*.

Nubes

Nubes Solem abſcondunt.

37 Deſerit Lunae diſcus maculam *d*.

57 — — — — *e*.

1 10 Finis Eclipſeo in B.

Thermometrum, ſoli libero durante tota Eclipſi expoſitum, monſtrauit paullo ante initium Eclipſeos 98 gradus; circa medium Eclipſeos autem 82 gradus; ita vt ex frigore, durante Eclipſi oborto, per gradus 16, depreſſum fuerit. Poſt finem Eclipſeos autem breui tempore iterum aſcendit ad gradus 100. Vitrum cauſticum amplitudinis 3 poll. circa medium Eclipſeos viſum fuit, multo minus virium habere in comburendo aſſere laeuigato, abietino, et, ex naturali colore, albo.

Solis altitudo meridiana deprehenſa fuit 61° 0′. Barometri altitudo hoc tempore erat 28 $\frac{51}{100}$ pollicum Londinenſ. duo decimalium.

DE
ABERRATIONE FIXARVM.

AVCTORE
Chr. Nic. de Winsheim.

Quae sequuntur de aberratione fixarum computanda praecepta, e commentariis Parisinis aliorumque doctissimorum virorum scriptis, in vsum obseruatorii Petropolitani in ordinem redacta, vel ideo hic exhibere visum fuit, quoniam fallimur, aut nonnullis ob simplicitatem solam se commendabunt.

Manuductio
ad calculum aberrationis stellarum fixarum quoad Declinationem.

Ante omnia exacte determinanda sunt elementa calculi, sc. Longitudo, Latitudo, Ascensio recta et Declinatio, e catalogo quodam fixarum melioris notae e. g. Maraldi, Flamsteedii (ad initium anni, pro quo calculus instituitur) desumenda.

α) Determinandus est angulus ad stellam E per vnam e sequentibus analogiis.

Vt sinus compl. latitud.	*Vt sinus compl. decl. s.*
Ad distantiam asc. rectae a coluro solstitii; (*)	*distantiae a polo boreo l. australi.*
Ita obliquitas eclipticae	*Ad long. s. dist. a col. solstitiorum;* (**)

Ad

(*) (**) Longitudine solis et Asc. recta existente in prima quadratura vtimur compl. ad 90° secunda quadratura subtractis 90° residuum appellatur distantia a coluro solstitiali, *Ad angulum E ad stellam s. ad angulum positionis.* (***) *Ita obliquitas eclipticae Ad ang.* E, *s. positionis.* (****)

β) Hoc angulo E inuento fiat analogia sequens:

Vt sinus latitudinis stellae
Ad radium;
Ita tangens anguli E
Ad tangentem anguli, qui dicitur A.

Hic *angulus* est *minor recto s. acutus*

Angulo E acuto { Si stella est in signis ascend. ♑ ♒ ♓ ♈ ♉ ♊ cum latit. septentrionali
Aut. si stella est in signis descend. ♋ ♌ ♍ ♎ ♏ ♐ cum lat. australi

Et tunc stella est in maxima elongatione a polo, cognomine latitudinis, post tria signa, quando ☉ fuit in M. (*****)

Angu-

tertia quadratura subtractis 180°. sumitur compl. ad 90° grad.
quarta quadratura subtractis 9. signis s. 270°. residuum appellatur distantia a coluro solst. hyberni.

(***) (****) Hic angulus est *Obtusus*, si cadit intra circulum quem polus eclipticae circa polum boreum describit.
Rectus, si cadit in ipsa peripheria praedicti circuli.
Acutus, si cadit extra peripheriam huius circuli a polo eclipticae circa polum mundi descriptum.

(*****) Vide infra γ.

Angulo E obtuſo { Si ſtella eſt in ſecundo quadrante eclipticae cum lat. boreali.
Aut in quarto quadrante eclipticae cum lat. meridionali;

Et tunc ſtella eſt proxima polo eiusdem nominis ac latitudo poſt 3. ſigna, vbi ⊙ fuit in M.

Idem hic *angulus* A erit *maior recto ſ. obtuſus.*

Angulo E acuto { Si ſtella eſt in ſign. deſcend. ♋ ♌ ♍ ♎ ♏ ♐. latit. habens ſeptentrionalem.
Aut ſi ſtella eſt in ſign. aſcendent. ♑ ♒ ♓ ♈ ♉ ♊ cum lat. auſtrali;

Et tunc quidem pro elapſis tribus ſignis a puncto M. ſc. ☌ ⊙ * eadem ſtella eſt maxime vicina ſ. proxima polo eiusdem denominationis cum latitudine.

Angulo E obtuſo { Stella exiſtente in I^ma quadratura eclipticae ♈ ♉ ♊ cum lat. boreali.
Stella exiſtente in 3^tia quadr. ♎ ♏ ♐ cum lat. meridionali,

Et tunc quidem ſtella erit maxime remota a polo eiusdem nominis cum latitudine, poſt elapſa tria ſigna a tempore, vbi ſol fuit in M.

γ) Hic

γ) Hic Angulus A (siue tangens antea inuenta) subtrahendus est a longitudine stellae adiectis 360 gr. ad longitudinem (si alias subtractio fieri nequit) vt habeatur locus solis M quo *apparens declinatio erit nulla*, cui si addantur 6. signa, dabitur alter locus N in quo aberratio iterum erit nulla.

Tribus signis ante et post hunc locum M. aberratio est maxima, secundum praecedentem determinationem. §. β. e. g.

Pro Lyra 1739.

♑ 9 4 57 } locus ☉ vbi aberr. est nulla 27. Dec.
♋ 3 4 57 } 27. Iun.

28. Sept. vers. boream.
♎ 6 4 57 } loc. ☉ vbi aberratio est maxima
♈ 0 4 57 }
25. Mart. vers. austrum

Sc. quia angulus A. erat acutus pariter ac ang. E, et stella versabatur in signo ascendente ♑ post tria signa vbi aberratio erat nulla, vti hic in ♈, stella maxime remota est a polo boreo, qui eiusdem nominis est cum latititudine stellae.

δ) Tandem fiat analogia:

Vt sinus anguli A;
Ad sinum anguli E:
Ita sinus 20″,
Ad maximam aberrationem declinationis apparentis a vera.

Hac aberratione maxima pro 90°. inuenta, eius capiatur dimidium pro 30°.

Et deinde fiat

Vt ſinus totus,
Ad ſinum 60°;
Ita maxima aberratio
Ad aberrationem pro 60°.

Sicque aberratio pro ſingulis menſibus determinata erit: quae poſtea aequaliter diſtribui poteſt.

Aut ſi mauis adhibe ſequentem analogiam pro determinanda quantitate declinationis quouis tempore dato.

Quaere longitudinem ſolis pro illo tempore pro quo cupis declinationis aberrationem determinare: Subtrahe illam a longitudine ſtellae inuentae, quando aberratio declinationis eſt nulla, haec differentia appelletur D.

Infer *Vt radius*,
Ad ſinum arcus D:
Ita maxima aberratio in declinatione,
Ad aberrationem tempore dato.

e) Regula pro aberratione fixae rite applicanda.

Si latitudo ſtellae borealis	Maxima aberratio ſtellae, verſus polum boreum appellatur E. ſ. *Elongatio*, et eſt ſubtrahenda. Maxima aberratio ſtellae verſus polum auſtralem appellatur A. ſiue *Approximatio* et erit addenda.
Si latitudo auſtralis	Maxima aberratio verſus auſtrum dicitur E ſiue *Elongatio*, et eſt ſubtrahenda. Maxima aberr. verſus boream appellatur A. ſiue *Approximatio*, et erit addenda.

Manu-

Manuductio

ad calculum aberrationis ſtellarum fixarum, quoad Latitudinem.

1.

Longitudo et latitudo ſtellae e catalogo fixarum pro initio anni determinandae ſunt.

2. Deinde pro inuenienda aberratione fixae in latitudine adhibeatur ſequens analogia:

Vt radius, ſiue ſinus totus;
Ad ſinum latitudinis ſtellae:
Ita ſinus 20″;
Ad ſinum aberrationis maximae.

niſi magis volupe fuerit ſequentem mediante hac analogia ad dena minuta prima latitudinum ſtellarum a D. de Fontaine de Crutes (*) conſtructam adhibere tabulam, quam in commodum lectoris hic inſerendam curauimus.

(*) Mr. Fontaine de Crutes Traité complet ſur l' aberration des fixes avec une hiſtoire générale de l' aſtronomie: à Paris 1744. 8°.

Gr.	Min.	Min. sec.	P.C.	°	′	″	P. C	°	′	″	P. C
0	00	00	00	6	00	02	09	12	00	04	16
	10	00	06		10	02	15		10	04	22
	20	00	12		20	02	21		20	04	27
	30	00	17		30	02	26		30	04	33
	40	00	23		40	02	32		40	04	39
	50	00	29		50	02	38		50	04	44
1	00	00	35	7	00	02	44	13	00	04	50
	10	00	41		10	02	50		10	04	56
	20	00	47		20	02	55		20	04	61
	30	00	53		30	02	61		30	04	67
	40	00	58		40	02	67		40	94	73
	50	00	64		50	02	72		50	04	78
2	00	00	70	8	00	02	78	14	00	04	84
	10	00	76		10	02	84		10	04	90
	20	00	82		20	02	90		20	04	95
	30	00	88		30	02	95		30	05	01
	40	00	93		40	03	01		40	05	07
	50	00	99		50	03	07		50	05	12
3	00	01	05	9	00	03	13	15	00	05	18
	10	01	11		10	03	19		10	05	23
	20	01	16		20	03	24		20	05	29
	30	01	22		30	03	30		30	05	34
	40	01	28		40	03	36		40	05	40
	50	01	33		50	03	41		50	05	45
4	00	01	39	10	00	03	47	16	00	05	51
	10	01	45		10	03	53		10	05	57
	20	01	51		20	03	59		20	05	62
	30	01	56		30	03	64		30	05	68
	40	01	62		40	03	70		40	05	74
	50	01	68		50	03	76		50	05	79
5	00	01	74	11	00	03	82	17	00	05	85
	10	01	80		10	03	88		10	05	90
	20	01	86		20	03	93		20	05	96
	30	01	91		30	03	99		30	06	01
	40	01	97		40	04	05		40	06	07
	50	02	03		50	04	10		50	06	12

Gr.

°	′		″	P. C.	°	′		″	P. C.	°	′		″	P.C.
18	00	-	06	18	24	00	-	08	13	30	00	-	10	00
	10	-	06	23		10	-	08	18		10	-	10	05
	20	-	06	29		20	-	08	24		20	-	10	10
	30	-	06	34		30	-	08	29		30	-	10	15
	40	-	06	40		40	-	08	34		40	-	10	20
	50	-	06	45		50	-	08	40		50	-	10	25
19	00	-	06	51	25	00	-	08	45	31	00	-	10	30
	10	-	06	56		10	-	08	50		10	-	10	35
	20	-	06	62		20	-	08	56		20	-	10	40
	30	-	06	67		30	-	08	61		30	-	10	45
	40	-	06	73		40	-	08	66		40	-	10	50
	50	-	06	78		50	-	08	72		50	-	10	55
20	00	-	06	84	26	00	-	08	77	32	00	-	10	60
	10	-	06	89		10	-	08	82		10	-	10	65
	20	-	06	95		20	-	08	87		20	-	10	70
	30	-	07	00		30	-	08	92		30	-	10	74
	40	-	07	06		40	-	08	98		40	-	10	79
	50	-	07	11		50	-	09	04		50	-	10	84
21	00	-	07	17	27	00	-	09	09	33	00	-	10	89
	10	-	07	22		10	-	09	14		10	-	10	94
	20	-	07	27		20	-	09	19		20	-	10	99
	30	-	07	33		30	-	09	24		30	-	11	03
	40	-	07	38		40	-	09	29		40	-	11	08
	50	-	07	44		50	-	09	34		50	-	11	13
22	00	-	07	49	28	00	-	09	39	34	00	-	11	18
	10	-	07	54		10	-	09	44		10	-	11	23
	20	-	07	60		20	-	09	50		20	-	11	28
	30	-	07	65		30	-	09	55		30	-	11	32
	40	-	07	70		40	-	09	60		40	-	11	37
	50	-	07	76		50	-	09	65		50	-	11	42
23	00	-	07	81	29	00	-	09	70	35	00	-	11	47
	10	-	07	86		10	-	09	76		10	-	11	52
	20	-	07	92		20	-	09	81		20	-	11	56
	30	-	07	97		30	-	09	85		30	-	11	61
	40	-	08	02		40	-	09	90		40	-	11	66
	50	-	08	08		50	-	09	95		50	-	11	70

°	′		″	P.C.	°	′		″	P.C.	°	′		″	P.C.
36	00	-	11	76	42	00	-	13	38	48	00	-	14	86
	10	-	11	80		10	-	13	42		10	-	14	90
	20	-	11	85		20	-	13	47		20	-	14	94
	30	-	11	89		30	-	13	51		30	-	14	97
	40	-	11	94		40	-	13	55		40	-	15	01
	50	-	11	99		50	-	13	60		50	-	15	05
37	00	-	12	04	43	00	-	13	64	49	00	-	15	10
	10	-	12	08		10	-	13	68		10	-	15	13
	20	-	12	13		20	-	13	72		20	-	15	17
	30	-	12	17		30	-	13	76		30	-	15	20
	40	-	12	22		40	-	13	80		40	-	15	24
	50	-	12	26		50	-	13	85		50	-	15	28
38	00	-	12	31	44	00	-	13	90	50	00	-	15	32
	10	-	12	35		10	-	13	93		10	-	15	36
	20	-	12	40		20	-	13	97		20	-	15	39
	30	-	12	44		30	-	14	01		30	-	15	43
	40	-	12	49		40	-	14	06		40	-	15	46
	50	-	12	53		50	-	14	10		50	-	15	50
39	00	-	12	59	45	00	-	14	14	51	00	-	15	54
	10	-	12	63		10	-	14	18		10	-	15	58
	20	-	12	67		20	-	14	22		20	-	15	62
	30	-	12	72		30	-	14	26		30	-	15	66
	40	-	12	77		40	-	14	31		40	-	15	70
	50	-	12	81		50	-	14	35		50	-	15	74
40	00	-	12	86	46	00	-	14	39	52	00	-	15	77
	10	-	12	90		10	-	14	44		10	-	15	81
	20	-	12	95		20	-	14	48		20	-	15	84
	30	-	12	99		30	-	14	52		30	-	15	87
	40	-	13	03		40	-	14	57		40	-	15	91
	50	-	13	08		50	-	14	62		50	-	15	94
41	00	-	13	12	47	00	-	14	66	53	00	-	15	97
	10	-	13	16		10	-	14	70		10	-	16	00
	20	-	13	21		20	-	14	73		20	-	16	04
	30	-	13	25		30	-	14	76		30	-	16	07
	40	-	13	29		40	-	14	80		40	-	16	11
	50	-	13	34		50	-	14	83		50	-	16	14

Gr.

°	′		″	P. C.	°	′		″	P. C.	°	′		″	P. C.
54	00	-	16	18	60	00	-	17	32	66	00	-	18	27
	10	-	16	21		10	-	17	35		10	-	18	29
	20	-	16	25		20	-	17	38		20	-	18	32
	30	-	16	28		30	-	17	40		30	-	18	34
	40	-	16	31		40	-	17	43		40	-	18	36
	50	-	16	35		50	-	17	46		50	-	18	39
55	00	-	16	38	61	00	-	17	49	67	00	-	18	41
	10	-	16	41		10	-	17	52		10	-	18	43
	20	-	16	45		20	-	17	55		20	-	18	45
	30	-	16	48		30	-	17	57		30	-	18	47
	40	-	16	51		40	-	17	60		40	-	18	50
	50	-	16	55		50	-	17	63		50	-	18	52
56	00	-	16	58	62	00	-	17	66	68	00	-	18	54
	10	-	16	61		10	-	17	69		10	-	18	56
	20	-	16	65		20	-	17	71		20	-	18	58
	30	-	16	68		30	-	17	74		30	-	18	60
	40	-	16	71		40	-	17	77		40	-	18	63
	50	-	16	75		50	-	17	79		50	-	18	65
57	00	-	16	77	63	00	-	17	82	69	00	-	18	67
	10	-	16	80		10	-	17	85		10	-	18	69
	20	-	16	83		20	-	17	87		20	-	18	71
	30	-	16	86		30	-	17	90		30	-	18	73
	40	-	16	89		40	-	17	93		40	-	18	76
	50	-	16	92		50	-	17	95		50	-	18	78
58	00	-	16	96	64	00	-	17	98	70	00	-	18	80
	10	-	16	99		10	-	18	00		10	-	18	82
	20	-	17	02		20	-	18	03		20	-	18	84
	30	-	17	05		30	-	18	05		30	-	18	85
	40	-	17	08		40	-	18	07		40	-	18	87
	50	-	17	11		50	-	18	10		50	-	18	89
59	00	-	17	14	65	00	-	18	13	71	00	-	18	91
	10	-	17	17		10	-	18	15		10	-	18	93
	20	-	17	20		20	-	18	17		20	-	18	95
	30	-	17	23		30	-	18	19		30	-	18	96
	40	-	17	26		40	-	18	22		40	-	18	98
	50	-	17	29		50	-	18	24		50	-	19	00

Gr.

°	′	″	P.C.	°	′	″	P.C.	°	′	″	P.C.
72	00	19	02	78	00	19	56	84	00	19	89
	10	19	04		10	19	57		10	19	90
	20	19	06		20	19	59		20	19	90
	30	19	07		30	19	60		30	19	91
	40	19	09		40	19	61		40	19	92
	50	19	11		50	19	63		50	19	92
73	00	19	13	79	00	19	64	85	00	19	93
	10	19	14		10	19	65		10	19	93
	20	19	16		20	19	66		20	19	94
	30	19	17		30	19	67		30	19	94
	40	19	19		40	19	68		40	19	94
	50	19	20		50	19	69		50	19	95
74	00	19	22	80	00	19	70	86	00	19	95
	10	19	24		10	19	71		10	19	95
	20	19	25		20	19	72		20	19	96
	30	19	27		30	19	73		30	19	96
	40	19	29		40	19	73		40	19	96
	50	19	30		50	19	74		50	19	97
75	00	19	32	81	00	19	75	87	00	19	97
	10	19	33		10	19	76		10	19	97
	20	19	35		20	19	77		20	19	97
	30	19	36		30	19	77		30	19	97
	40	19	38		40	19	78		40	19	98
	50	19	39		50	19	79		50	19	98
76	00	19	41	82	00	19	80	88	00	19	98
	10	19	42		10	19	81		10	19	98
	20	19	44		20	19	82		20	19	98
	30	19	45		30	19	82		30	19	98
	40	19	46		40	19	83		40	19	99
	50	19	48		50	19	84		50	19	99
77	00	19	49	83	00	19	85	89	00	19	99
	10	19	50		10	19	86		10	19	99
	20	19	51		20	19	86		20	19	99
	30	19	52		30	19	87		30	19	99
	40	19	54		40	19	88		40	20	00
	50	19	55		50	19	88		50	20	00
								90	00	20	00

Por-

Porro comparetur locus ſolis cum loco ſtellae, et notetur, ſole et ſtella exiſtente, in coniunctione, aberrationem eſſe nullam.

In quadraturis autem ſ. tribus ſignis elapſis a coniunctione ſ. oppoſitione aberrationem eſſe maximam, et quidem:

Tribus ſignis poſt oppoſitionem, aberrationem eſſe eiusdem denominationis cum latitudine, et per conſequens *Subtrahendam*.

Si latitudo borealis, aberratio erit borealis.

Si latitudo auſtralis, aberratio erit auſtralis.

Poſt coniunctionem autem in quadratura, ſiue poſt tria ſigna a coniunctione, aberratio quoad latitudinem iterum erit maxima, ſed aſſumet denominationem contrariam latitudini et erit *Additiua*.

Si latitudo borealis, aberratio erit meridionalis.

Si latitudo meridionalis, aberratio erit borealis.

3. Vt autem aberratio, quoad latitudinem pro quouis die determinetur praeſuppoſitis quae §. §. antecedentibus determinata ſunt,

Conſtruatur abacus pro ſingulis diebus totius anni e cognita aberratione maxima.

Sc. in ſyzigiis aberratio eſt nulla.

90° poſt ſyz. ſiue 3. ſignis elapſis aberratio eſt maxima, et quidem determinatae quantitatis per §. praecedentem.

30° ſiue vno ſigno elapſo aberrationis capiatur dimidium: et pro

60°. siue pro duobus signis ante vel post syzigias adhibeatur sequens analogia:

Vt radius:
Ad sinum 60°;
Ita aberratio maxima pro latitudine determinata:
Ad aberrationem respondentem.

Hae aberrationes itaque pro singulis signis determinatae erunt, quibus conueniens dies mensis ex ephemeridibus facile adaptari poterit, nempe:

Mediante interpolatione simplici hae aberrationes per spatium 30. siue 31. dierum aequaliter distribui, aut per 3. partes mensis e. g. pro 1. 11. 21. et 31. die mensis determinari possunt.

Qui autem summam desiderat praecisionem siue exactitudinem ille adhibeat sequentem illationem:

Vt sinus totus:
Ad sinum distantiae solis tempore dato a circulo latitudinis verae;
Ita sinus aberrationis maximae in latitudinem:
Ad sinum aberrationis quaesitae.

Ma-

Manuductio

ad calculum aberrationis ſtellarum fixarum quoad Longitudinem.

Maxima aberratio ſtellae in longitudinem obſeruatur in ſyzigiis, et eſt nulla in quadraturis. Cognita igitur longitudine ſtellae, huic addantur 3 ſigna pro obtinenda prima quadratura, vbi aberratio eſt nulla, quibus ſi adiiciantur 6 ſigna obtinebitur locus oppoſitus, ſiue vltima quadratura in qua aberratio iterum erit nulla.

A. prima quadratura ad oppoſitionem longitudo excedit veram verſus *Orientem*, et eſt maxima, in oppoſitione ſemperque diminuitur vſque ad vltimam quadraturam, vbi aequalis.

Ab vltima quadratura ad coniunctionem longitudo excedit veram verſus *Occidentem*, et eſt maxima, in coniunctione a qua iterum imminuitur et aequabit nihilo in prima quadratura vbi ſc. longitudo apparens eſt aequalis longitudini verae.

2. Pro determinanda quantitate aberrationis in longitudinem

inferatur

Vt coſinus latitudinis,
Ad ſinum totum;
Ita ſinus 20″,
Ad ſinum aberrationis maximae in longitudinem.

3. Regula pro applicanda aberratione maxima erit ſequens

α A prima quadratura ad oppoſitionem, et ab ☍ ad ſecundam ſiue vltimam quadraturam, aberratione vergente ad Orientem, pars proportionalis huius aberrationis, reſpondens diſtantiae ſolis a quadratura, erit *ſubtrahenda*.

β Ab vltima ſiue ſecunda quadratura, vbi aberratio iterum erit nulla, ad coniunctionem, et a ☌ ad primam, maxima aberratione vergente ad occidentem, erit *addenda*.

Manuductio

ad calculum aberrationis ſtellarum fixarum quoad Aſcenſionem rectam.

Cognitis elementis longitudinis, latitudinis, declinationis et aſcenſionis rectae pro initio anni cuiusdam, et determinato angulo ad ſtellam, ſiue E, qui et poſitionis dicitur, et per regulas ſupra traditas, *l.* rectus *l.* acutus aut obtuſus eſſe poteſt;

α Inſtituatur analogie ſequens

Vt ſinus latitudinis ſtellae,
Ad radium:
Ita contangens (*ſ. compl. tang.*) *anguli* E,
Ad tangentem anguli B.

Hic angulus B eſt *acutus*

Angulo E acuto $\begin{cases} \text{Stella exiſtente in ſignis deſcendentibus cum latitudine boreali.} \\ \text{Stella exiſtente in ſignis aſcendentibus cum latitudine meridionali.} \end{cases}$

Sole

Sole exiſtente in X infra determinando, addantur 3 ſigna pro inueniendo loco, vbi aberratio aſcenſionis rectae eſt minima, et quidem ad occidentem.

Angulo E obtuſo:
- Si ſtella erit in 1^{mo} quadrante eclipticae cum latitudine boreali.
- Aut in 3^{tio} quadrante cum latitudine meridionali.

Sole exiſtente in X, mox determinando, additis tribus ſignis, aſcenſio recta erit maxima, et quidem ad orientem.

Angulus B eſt obtuſus.

Angulo E acuto:
- Stella exiſtente in ſignis aſc. cum latitudine boreali.
- Stella exiſtente in ſignis deſc. cum latitudine meridionali.

Sole exiſtente in X iamiam determinando, adiectis 3 ſignis ad hunc locum, aſcenſio recta erit minima et ad occidentem.

Angulo E obtuſo:
- Stella exiſtente in 2 quadratura cum latitudine ſeptentrionali.
- Stella exiſtente in vltimo quadrante cum latitudine meridionali.

Sole exiſtente in X, addantur tria ſigna pro determinando loco vbi aſcenſio recta erit maxima et quidem ad orientem.

β. Angulus hic inuentus B ſubtrahatur a longitudine ſolis (abditis 360° ſi opus) vt inueniatur angulus X, qui monſtrat locum vbi aſcenſio recta apparens aequalis eſt verae, ſeu variatio aſcenſionis rectae aut aberratio eſt nulla, idem valet de loco ſolis X cum adiectis 6 ſignis ſiue angulo V.

Tria ſigna ante et poſt hunc locum aſcenſio recta eſt maxima et vel ad orientem vel occidentem, prouti ſupra inuenta.

γ. Quo autem quantitas ipſa eo exactius determinetur, ſequentem in modum producendum.

addatur { α Longarithmus ſinus totius
β — — ſinus 20″
γ — — Coſinus ang. E. ſ. ad ſtellam per declinationem iam inuentus.

de hac ſumma

ſubtrahatur { α Logarith. ſinus arcus B.
β — — coſinus declinationis ſtellae.

Reſiduum erit numerus ſecundorum maximae aberrationis, quoad aſcenſionem rectam.

δ Cognita maxima aberratione, facilis erit diſtributio pro ſingulis menſibus, aut in dies decem, vel ſi mauis in dies ſingulos vniuscuiusuis menſis pari ratione ac ſupra monſtratum eſt.

Vel ſi mauis ſequenti vtendum erit analogia.

Vt ſinus totus,

Ad ſinum arcus (*ſc. differentia longitudinis* X)

§ 2 *determinato*:

Ita

Ita aberratio maxima ascensionis rectae
Ad aberrationem tempore quaesito.

E Regula pro applicanda aberratione maxima ascensionis rectae iam supra indicata, hic maioris euidentiae caussa iterum repetimus.

Si aberratio ascensionis rectae est ad orientem; tunc est subtrahenda.

Si aberratio ascensionis rectae est ad occidentem est addenda.

Est autem ad orientem, si 3 signa addantur loco X.

Ad occidentem si tria signa addantur ad locum oppositum V.

* * *

Dum haec sub prelo sudabat dissertatio, incidit in manus nostras epistola Celeberrimi Anglorum Astronomi *Iacobi Bradleii* ad Illustrissimum Comitem de *Macclesfield*, insignem astronomiae promotorem data, qua motum quendam apparentem in fixis, a motu nodorum lunae pendentem, exposuit, quaeque in actis Anglicanis volumine XLV. No 485. pro mense Ianuario 1747-8 legitur. Placuit igitur ob materiae connexionem, quam ibi pro nouo hoc aberrationis fixarum genere p. 21. suppeditauit regulam, hic, quoniam spatio excludimur, breuibus inserere.

Subtrahatur distantia nodi ascendentis lunae, a principio arietis computata, ab ascensione recta stellae, et notetur residuum:

Deinde fiat analogia:

Vt radius,
Ad sinum residui antea inuenti;
Ita 9. minuta secunda,
Ad numerum minutorum secundorum, quibus stella propior erit aut remotior polo vero, quam medio;

Vbi notandum, si residuum minus est quam 180° stellam propiorem fore polo vero, quam medio;

Contrarium autem obtinere, si idem residuum excedat 180°. gradus.

OB-

OBSERVATIONES
ALIQVOT COELESTES
Lipsiae habitae aestate an. 1746.

a Godofredo Heinsio.

Postquam locum nactus sum, ex quo liber coeli prospectus patet, animum applicui, ad obseruationes instituendas astronomicas, ex quibus situs Lipsiae geographicus congnosci posset. Hunc in finem sequentibus vsus sum instrumentis.

Quadrantem adaptandum curaui orichalceum, ab artifice *Edm. Culpeper*, Anglo, bene elaboratum, cuius diuisio ad bina minuta extenditur; in qua tamen non solum singula minuta, verum etiam minutorum quadrantes aestimare licet. Radius eius a centro ad extremam diuisionis peripheriam est $1\frac{1}{2}$. ped. Anglic. Dioptris telescopicis iste instructus est, quarum focus communis continet reticulum ex quatuor filis tenuissimis argenteis, decussatim sub angulis semirectis compositum, existente lentium distantia 19. pollic. anglican. Instrumentum hoc ope cochlearum infinitarum optime tractari et in omnem plagam commode dirigi potest, ita vt absque obseruatoris incommodo et altitudines syderummetiri et examen instrumenti successu felici instituere liceat. Facto hoc examine plus simplici vice, consentientibus obseruationibus, expertus sum, lineam fiduciae dioptrarum aberrare a radio nonagesimum gradum connectente, angulo $19\frac{1}{4}$ minut. quae ab obseruatis secundum diuisionem limbi Quadrantis alti-

altitudinibus ſubtrahi debent, vt altitudines ſyderum ſuper horizonte innoteſcant.

Horologio deinde vtor oſcillatorio bonae notae, cuius motum vniformem facto per reuolutiones ſyderum examine probe intellexi. Iuxta hoc horologium ad motum ſolis medium proxime compoſitum, meridiem cuiuslibet diei, quantum pro coeli clementia et obſeruationum conditione fieri licuit ac debuit, definiui per obſeruationes altitudinum limbi ſuperioris ſolis reſpondentium; adhibita meridiei debita correctione. Inde et ſtatus horologii reſpectu temporis ſolaris innotuit, et hoc modo ſemper tempus verum in obſeruationibus eclipſium ſatellitum Iouis ſequentibus determinaui.

Denique inſtructus ſum teleſcopio catadioptrico Gregoriano praeſtantiae ſingularis, ab artifice *Short* Anglo, elaborato. Diſtantia focalis ſpeculi maioris eſt $16\frac{1}{8}$ pollic. anglic. Tria adſunt ſpecula minora concaua et duo ocularia ex binis lentibus compoſita, quibus ſucceſſiue ad teleſcopium applicatis efficitur, vt obiecta ſecundum diametrum 52, 84, 97, 126, 157, 240, vicibus augeantur. In obſeruationibus eclipſium Satellitum Iouis ſequentibus eum elegi apparatum, quo per teleſcopium obiecti diameter 52. vicibus maior apparet, quam nudo oculo. In hoc ſtatu maximam obtinui lucis Satellitum copiam, quam conditionem reſpicere debui, cum in his obſeruationibus Iupiter plerumque in vicinia horizontis verſaretur, et altitudo Iouis meridiana vix 18 gradus ſuperaret. Figuram Iouis oualem faſcias atque ſatellites diſtinctiſſime ſub hoc apparatu, coelo ſereno, conſpicere licuit.

Emersiones Satellitis Imi Iouis
Lipsiae obseruatae tempore vero styl. nou.

Iunii. d. 27. 8^h. $50'$. $3''$. Satelles emergere incipiebat, obseruatio quidem in crepusculo sat forti, prope horizontem, et coelo in regione Iouis, paulisper vaporoso existente habita, satis tamen certa est, siquidem Satelles subito emergebat, et Satelles tertius limbo Iouis occidentali tunc fere adhaerens distincte conspiciebatur, quem deinceps ad eclipsin properantem, iudicaui tangere limbum Iouis occidentalem (situ recto, pro apparentia telescopii Gregoriani) hor. 8. $58'$. temp. veri.

Iulii d. 4. 10^h. $42'$. $58''$. Satelles emergere coepit, et post $1\frac{1}{3}$ minut. omne lumen recuperauit. Obseruatio exacta est, coelo in regione Iouis valde sereno.

d. 20. 9^h. $0'$. $18''$. Satellitis primi emersio, qui post $1\frac{1}{3}$ minut. pleno lumine instructus apparuit. Obseruatio exacta est, coelo maxime sereno.

d. 27. 10^h. $56'$. $41''$. Satelles emergere coepit; lente autem emersit, et non nisi post tria minuta lumen omne recuperauit. Iupiter prope horizontem et coelum in regione Iouis paulisper vaporosum erat; obseruationem tamen satis certam habeo, reliquis Satellitibus distincte conspicuis.

Obserua-

Obſeruationes
altitudinem poli reſpicientes

Circa ſolſtitium aeſtiuum, ob coelum plerumque nubilum, non niſi duas altitudines meridianas limbi ſuperioris ſolis debita certitudine acquirere potui, alteram nempe d. 24. Iunii $= 62^\circ. 50'$, alteram d. 25. Iunii $= 62^\circ. 38\frac{1}{3}'$. Exinde poli eleuationem ſequentem in modum deduxi.

	d. 24. Iun.	d. 25. Iun.
alt. limbi ſup. ☉ obſeru.	$62^\circ. 40'. 0''.$	$62^\circ. 38'. 20''.$
aberratio quadrantis ſubtr.	19. 15.	19. 15
	62. 20. 45.	62. 19. 5
paralax. ☉ et refract. ſec. Caſſin.	25.	25
alt. vera limb. ſup. ☉.	62. 20. 20.	62. 18. 40
ſemidiam. ☉ iuxta Caſſin.	15. 50.	15. 50
alt. centri ☉ vera	62. 4. 30.	62. 2. 50
differ. declin. ☉ a declinat. ſolſtitiali ex calculo, add.	1. 36.	2. 56
alt. merid. centri ☉ ſolſtitialis	62. 6. 6.	62. 5. 46
obliquitas eclipticae	23. 28. 20.	23. 28. 20
eleuatio aequatoris	38. 37. 46.	38. 37. 26
eleuatio poli	51. 22. 14.	51. 22. 34

Inde eleuatio poli media erit.

$51^\circ. 22'. 24''.$

Menſibus Iunio et Iulio aliquot fixarum altitudines meridianas repetitis vicibus obſeruaui et exinde, ſumendo

 mediam

mediam ex obſeruatis eiusdem ſtellae altitudinibus, poli eleuationem determinaui prout ſequens tabula monſtrat; in quo negotio refractionem ex Tab. *Caſſini*, declinationem ſtellae vero ad tempus praeſens reductam ex catalogo tum *Halleii* tum *Caſſini* adhibui.

Nomen ſtellae	Alt. merid. ſtellae ex obſ. facta ob aberrat. quadrantis correctione	Eleuatio poli ſumta ſtellae declinatione ex catalogo Halleii	Eleuatio poli ſumta ſtellae declinatione ex catalogo Caſſini
δ ♏	16°. 48′. 53″	51°. 21′. 43″	51°. 21′. 28″
Cor. ♏	12. 51. 45	51. 22. 8	51. 21. 49
η Serpentarii	23. 16. 30	51. 22. 47	51. 22. 37
α Herculis	53. 21. 8	51. 21. 0	51. 20. 43
α Ophiuchi	51. 23. 30	51. 22. 56	51. 22. 55
β Ophiuchi	43. 20. 45	51. 21. 43	51. 21. 40
Quad. Aquilae	46. 51. 15	51. 22. 29	51. 22. 41
Eleuatio poli	media	51. 22. 7	51. 21. 59
			51. 22. 7
		ex alt. ſolſtit.	51. 22. 24

vnde *Eleuatio poli Lipſiae* ſtatui poteſt 51. 22. 10

Tycho de Brahe (in Progymn. P. I. p 630. edit. Vranib. et Prag.) olim iam rimatus eſt eleuationem poli Lipſiae ex obſeruationibus maximae et minimae altitudinis ſolis meridianae ab Homelio Mathematico Lipſienſi, habitis. Maxima ponitur 62°, 11′. minima 15°. 15′. ex quibus *Tycho* ſuis adhibitis correctionibus eleuationum eſſe infert 51°. 19′. *Ricciolus* (in Georg. reform. p. 301) iſtarum

iſtarum obſeruationum annum nuncupat 1560, et factis ſuis correctionibus altitudinem poli producit 51°. 19′. 14″. Si Caſſinianaé parallaxes et refractiones ad altitudines iſtas applicentur, prodit obliquitas eclipticae 23°. 29′. 30″. et eleuatio poli 51°. 18′. 56″. vel rotunde 51°. 19′. Et huius magnitudinis altitudinem poli Lipſiae vſurparunt plerique hactenus Aſtronomi. Non deſunt quidem Autores, qui in tabulis ſuis aſtronomicis eam aliter pronunciant, veluti *Reinboldus* 51°. 25′; *Longomontanus* 51°. 22′, Keplerus 51°. 44′ ex quibus vero fundamentis, me latet. Superior determinatio ex meis obſeruationibus, diuerſis fulta concluſionibus, medium inter has occupat locum.

Obſeruationes aliquot meteorologicae.

Per intergrum fere menſem Iulium aeſtum experti ſumus ingentem, qui etiam in aliis regionibus Bohemia, Sileſia, Morauia, Polonia, Auſtria, Hungaria, triſtia ſui veſtigia reliquit, vt nouellae publicae teſtantur. Aeſtum hunc ſecundum thermometrum mercuriale magnum diiudicaui, cui ſcalam factis experimentis in aqua bulliente et gelaſcente, ad mentem Cel. *de l'Isle* diuiſam applicui; ita vt in aqua ebulliente mercurius ad o. grad. in gelaſcente ad 150. grad. haereret: Mercurius in iſto probe purgatus aere et ipſe ad ebullitionem ope carbonum candentium redactus eſt, antequam thermometrum aquae bullienti deinde immiſſum in ſuperiori loco hermetice clauſum fuit. Calidiſſimi fuerunt dies 6. et 15. Iulii, qui etiam calidiſſimi obſeruati ſunt Vratislauiae. Hic nempe loci thermometrum in loco vmbroſo, ſed aeri libero expoſito, horis pomeridianis monſtrabat

			gradum
Iulii d. 16.	0^h. 50′	- - -	105
	0. 55	- - -	$104\frac{2}{3}$

postea descendebat iterum ☿ius et haerebat adhuc

2^h. 24′. ad gradum 105.

*S*tatim post hoc tempus thermometrum soli libere exposui, coelo valde sereno. Mercurius illico ascendebat et ostendebat

			gradum
2^h.	37′.	- - -	83.
-	48	- - -	$82\frac{1}{4}$
-	50	- - -	$81\frac{1}{2}$
3	1.	- - -	$80\frac{3}{4}$
-	13	- - -	82
-	23	- - -	$78\frac{1}{4}$
-	25	- - -	77
-	28	- - -	$76\frac{5}{8}$
-	30	- - -	$76\frac{1}{3}$

Mercurius tunc haesit, et nonnulla minuta post sol locum reliquit, in quo thermometrum fuit positum. Istud denuo in locum vmbrosum translatum hor. 5. indicauit adhuc $107\frac{3}{4}$ grad.

Iulii d. 15. maximus aestus incidit post meridiem in hor. 3. min. 52. thermometro monstrante $104\frac{1}{4}$ grad. in loco vmbroso aeri libero exposito.

Praeterea sequentes dies noto reliquis plerumque calidiores, quoad summum aestum in singulis diebus

therm.

				therm. in loco vmbroso
Iulii d.	7.	3^b.	24'.	- 108.
	13.	3.	56	- 110
	14.	3.	20	- $106\frac{1}{2}$
	17.	4.	30	- $108\frac{1}{2}$

Hoc modo ſummus calor d. 15. Iulii non niſi $1\frac{1}{4}$ grad. inferior eſt eo, quem an. 1738. d. 14. Iul. ſtyl. nou. Petroburgi experti ſumus 103. graduum; vno fere gradu autem differt tantum a calore maximo $103\frac{1}{3}$ grad. obſeruato, tum in inſula *Bourbon* ſub latitudine auſtrali 22°. ad orientem reſpectu Madagaſcar ſita d. 24. Ianuar. 1734, tum Sylanchae ſub aequatore ad littus Peruuienſe in America d. 16. Maii. 1736; et denique $2\frac{1}{2}$ grad. fere maior eſt calore $106\frac{2}{3}$ grad. qui mari ſub aequatore notatus eſt; prout id Commentarii Acad. Pariſ. an. 1734. 1736. et 1733. facta thermometrum reductione teſtantur.

Effectum ſolis in thermometrum ipſi libere expoſitum nunquam maiorem deprehendi gradu $76\frac{1}{2}$ d. 6. Iulii obſeruato, qui propius accedit ad gradum $54\frac{1}{4}$ cerae liquefactae, quam gradus inter hunc et gradum aeſtus ſummi d. 15. Iulii medius. Sic enim Petroburgi thermometrum ſoli expoſitum indicaſſe tantum notaui maximum calorem an. 1742. ſtyl. nou.

Iulii d.	3.	5^b.	21'.	per gradum 97.
	7.	4.	30	- - - 96.
Aug.	3.	4.	35	- - - $87\frac{3}{4}$.

I

CONTI-

CONTINVATIO OBSERVATIONVM ASTRONOMICARVM LIPSIAE HABITARVM An. 1746 STIL. NOV. TEMP. VERO.

AVCTORE
G. Heinsio.

August d. 12. 9'. 16'. 35''. Satelles 1^{mus} ♃vis incipiebat emergere. Obseruatio sat certa est, reliquis satellitibus distincte, et non nunquam etiam fasciis Iouis conspicuis, licet Iupiter in vicinia horizontis et coelum in regione Iouis paulisper vaporosum esset. Lente autem emersit satelles.

OBSERVATIO
Eclipsis lunae partialis
die 30 August.

Coelum quidem nubibus tectum spem exiguam relinquebat eclipsin hanc rite obseruandi; attamen cum vesperi luna aliquoties per nubium hiatus se conspiciendam praeberet, tubo Gregoriano sub eo apparatu, quo obiecta 52 vicibus secundum diametrum amplificantur, sequentia annotare licuit. Tempus verum definitum est per altitudines solis respondentes diebus subsequentibus captas.

Tempus verum Astronomicum.

11^h. 16'. 0''. Luna in fissura nubis primum constituta penumbram densam in regione Harpali ostendebat. Luna autem statim post nubibus tecta fuit.

11^h.

11. 19'. 30''. Adſpectus Lunae per nubium hiatum me certiorem fecit de eclipſis initio iam facto. Licuit autem ex quantitate obſcurationis aeſtimare, initium eclipſis 1½ vel 2 min. ante notatum tempus contigiſſe; quamobrem initium circiter ponendum eſt 11^h. 18'. Idem animaduerſum eſt per tubum aſtronomicum 6 ped. Totum coelum deinceps nubes occupabant.

Paulo poſt mediam noctem fiſſuras agebant nubes, et coelum ſerenari videbatur, ſparſis tamen hinc inde nubibus. Licet autem coeli regio, apparenter ſerena, reuera vaporoſa eſſet; maculas tamen Lunares et vmbram Terreſtrem, quae valde nigra apparuit, probe diſtinguere potui; quae circumſtantiae ſequentes admiſerunt obſeruationes ſat accuratas.

12^h. 9'. 55''. Mare Criſium tangitur ab vmbra in regione boreali, ſitu recto, pro apparentia teleſcopii.

16. 0. Vmbra per medium maris Criſii transire aeſtimatur.

20. 55. Dionyſius incipit in vmbram incurrere

21. 55. Dionyſius totus immergitur.

12^h. 23'. 10''. Mare Criſium totum intra vmbram abſconditur

Nubes iterum copioſae exurgebant, quae cum hiatus agerent, ſequentes conceſſerunt obſervationes, vmbra nunc valde diluta apparente.

53. 40. Ariſtarchus totus emergit ex vmbra.

13. 5. 40. Pytheas totus emergit.

Poſtea coelum eſt factum maxime vaporoſum, halone lunam cingente, nec vlla ſtella conſpicua, ita vt maculas clariores et vmbram, praeſertim valde dilutam vix diſtinguere liceret; quae conditio reliquas obſeruationes irritas, imo de fine eclipſis valde incertum me reddidit.

58. 0. Limbum Lunae ante eclipſatum nunc vmbra liberum cernere credidi. Ad hoc ergo tempus finem eclipſis circiter referre licet.

14. 1. 0 Certiſſime finis eclipſis iam celebratus eſt, prout id quoque obſeruationes per tubos 6. et 3. ped. confirmarunt.

CONTI-

CONTINVATIO OBSERVATIONVM LIPSIENSIVM
an. 1747 *ſtyl. nou. habitarum.*

Iisdem inſtrumentis, quae ante deſcripſi, et ſub eodem teleſcopii Gregoriani apparatu, quo ſcilicet iſtud obiecta ſecundum diametrum 52. vicibus auget, ſequentes obſeruaui emerſiones ſatellitis primi Iouis.

		Temp. vero	
Auguſt.	8.	$10^h. 21'. 35''$.	Em. prima. Obſeruatio bona coelo ſereno. Tempus non niſi per altitudines fixae d. 8. Aug. et altitudines antemeridianas ſolis d. 9 Aug. corrigere potui. Licet autem deductiones ex his altitudibus factae ſat bene inter ſe conſentiant, ita vt concluſio media ab extremis vix 10 ſecundis differat; ob temporis correctionem tamen per ſolas altitudines inſtitutam, obſervatio ad aliquot ſecunda temporis dubia pronunciari debet.
Auguſt.	24.	$8^h. 43'. 32''$.	Em. prima.
		$45. \quad 0.$	Em. totalis. Iupiter cum reliquis ſatellitibus tempore emerſionis primae paulo vaporoſus viſus eſt. Statim autem cum omnes diſtinctiones apparerent, ſatellitem primum aliquantulum iam emerſum conſpexi, nempe $8^h. 43'. 42''$. quam ob cauſam ex aeſtimio emerſionem primam ſupra 10. ſec. citius notaui. Correctio tempo-

poris fundatur obſeruatione meridiei, quam d. 20. Aug. ſolummodo inſtituere potui; quamobrem, cum nonnullas horologii correctiones aliunde cognitas adhibere debuerim, obſeruatio etiam ex hoc capite aliquantiſper dubia cenſeri debet.

OBSERVATIONES
altitudinem poli reſpicientes.

Circa Solſtitium brumale non niſi duas limbi ſuperioris Solis altitudines meridianas quadrante obtinui; alteram d. 20. Decembr. = 15°. 49¼′ certam; alteram d. 21. Decembr. = 15°. 48′. pauliſper dubiam. Quadrantis ſtatum eundem, vt in praecedentibus, recognoui. Inde deductiones ſequentes.

	d. 20. Dec.			d. 21. Dec.		
alt. limb. ſuper. ☉ obſ.	15°.	49′.	15″.	15°.	48′.	0″
Error. quadrantis ſubtr.		19.	15.		19.	15
	15.	30.	0.	15.	28.	45
Refractio ex Tab. Caſſinii.		3.	30.		3.	30
	15.	26.	30.	15.	25.	15
Semid. ☉ ex Tab. Caſſinii		16.	20.		16.	20
alt. centri. ☉ vera	15.	10.	10.	15.	8.	55
differ. declin. ☉ a ſolſtitiali			39.			ſubtr. 7
alt. centri ☉ ſolſtitialis	15.	9.	31.	15.	8.	48
obliquitas eclipticae	23.	28.	20.	23.	28.	20
Eleuatio aequatoris	38.	37.	51.	38	37.	8
- - - - poli	51.	22.	9.	51.	22.	52
media	51.	22.	31.			vel

vel comparando inter ſe altitudines ſolſtitiales centri Solis, aeſtiuam nempe an. 1746. et brumalem an. 1747 habebitur

altit. centri ☉lis ſolſtitialis media ex obſeruatis			
aeſtate an. 1746 - -	62°.	5'.	56''
hieme an. 1747 - -	15.	9.	10
Inde diſtantia tropicorum	46.	56.	46
obliquitas eclipticae	23.	28.	23 ſubtr.
ab alt. ſolſt. aeſtiua	62.	5.	6
exhibet eleu. aequatoris	38.	37.	33
- - - - poli	51.	22.	27

Hinc *Eleuatio poli* Lipſiae, ſi obſeruationes reliquae an. 1746. conſulantur, ad 51°. $22\frac{1}{4}$', figi poteſt.

De Stellis variabilibus in Conſtellatione Cygni.

Cum d. 9. Iulii variabilem in pectore Cygni, quam *Bayerus* in Vranometria per P. notat, oculo nudo inſtar ſtellae 5^{tae} vel 6^{tae} magn. conſpicerem, Aſtronomis ob apparitionum irregularitates celebrem; animum ſtatim ad obſeruationem huius reliquarumque variabilium in conſtellatione Cygni applicui. Hoc autem die neque variabilem in collo, a *Bayero* litera X ſignatam, neque variabilem ſub capite Cygni, oculo nudo animaduertere potui, Teleſcopium deinceps adhibui terreſtrae trium pedum, quod autem tantam ſtellularum copiam circa P offerebat, vt diiudicare non potuerim, quae ex iſtis fuerit variabilis; praeſertim cum campus repraeſentationis teleſcopii nimis exiguus comparationem ſitus eius reſpectu fixarum vicinarum ex chartis cognitarum non admitteret. Vt huic rei medelam afferrem, ob lubricas nudo oculo obſeruationes, comparaui tubos hollandicos, (ocularis nempe concaui) tum 3 tum 6. pollices longos, qui eximium non ſolum repraeſentationis campum per plures coeli gradus concedebant, verum etiam clariores tantum ſtellulas conſpicuas reddebant, quo fiebat, vt ſitus ſtellarum ad fixas. cognitas promtius diiudicari, et variabilis a reliquis fixis certe diſcerni potuerit. Horum teleſcopiorum adminiculo circa finem Iulii et initium Auguſti poſitionem mutuam et magnitudinem apparentem aliquot ſtellarum Cygni, quae ad ſcopum faciebant, ad ſenſum aeſtimaui et in charta adiecta delineaui, ita quidem, vt ſitum praecipuarum ſtellarum, auctis proportionaliter diſtantiis, deſumſerim ex effigie Cygni in Tab. VI. vol. IV. Part- I. pag. 238. Tranſact. philoſ. abridgd. exhibita, (quam coelo prae ceteris magis conformem deqrehendi) reliquarum vero ſtellarum ſitum ad iſtam normam diiudicauerim; in quo negotio, me parum a vero, quantum ſenſuum iudicio fieri poteſt, aberraſſe, confido. Literae β, γ, Φ, η, χ, P, *b* ſunt notae *Bayeri*; reliquas autem literas ex arbitrio adieci. P eſt variabilis in pectore, X in collo Cygni. Ope huius ſchematis, quod ad cauam coeli ſuperficiem referri debet, viciſſitudines variabilium optime examinare licuit; cuius rei caput huc redit.

Variabilis in pectore P per totum obſeruationum tempus a d. 9 Iulii vsque ad d. 29. Dec. quo deſinunt obſeruationes, tum oculo nudo, tum per tubos hollandicos, eiusdem ſemper magnitudinis apparuit, ipſi *b* aequalis, vel exactius paulo minor, vix tamen ſenſibiliter quam

b,

b, quae est. stella 5^{tae} magnitudinis.

Variabilis sub capite Cygni per istud temporis interuallum nunquam in cospectum venit.

Variabilis in collo X, cuius apparitionem Calendarium Berolinense ad finem Augusti, sed, vt euentus docuit, praemature praedixerat, sequentes subiit vicissitudines, quas semper telescopio hollandico 6. pollicum contemplatus sum, quotiescunque coeli serenitas id permisit.

Octobr. 8. Coelo ante per plures dies nubilo, nunc autem sereno, primum in conspectum venit variabilis X satis clara, nempe ipsi Q 7^{mae} magn. aequalis.

9 et 10. Eadem deprehendi ac d. 8.

21. X apparuit vt M, vel paulo maior quam M quae est 6^{tae} magn. lumen Lunae forte.

Nouembr. 6. Post plures dies nebulosos coelo nunc valde sareno, varialis X maior quam M, minor autem quam η, aequalis ipsi Φ, quae est 5^{tae} magn. visa est.

23. A die 6. Nou. hucusque coelum continuo fuit nebulosum et pluuiosum. Hodie coelo per exiguum tempus serenitatem mentiente, X ipsi M iterum aequalis, vel vix sensibiliter minor quam M apparuit.

29. Coelo sereno X sensibiliter minor quam M, paululum tamen maior quam Q. Hinc X cadit inter stellas 6^{tae} et 7^{mae} magn.

Decembr. 2. Eadem phaenomena vt d. 29. Nou.

6. Variabilis X., quantum ob caelum vaporosum fieri potuit, ipsi Q aequalis indicabatur, ideoque 7^{mae} magn.

9.

9. X, praesente Luna, vix conspicua fuit; certe tamen ipsa Q vel R non maior cernebatur.

29. Post tempestatem valde pluuiosam variabilis X amplius videri non potuit.

Ex his obseruationibus elucet, phasin maximam variabilis X instar stellae 5tae magn. circiter incidisse in d. 6. Nouembr. cuius phasis tempus vt certiori modo innotescat, consulendae sunt phases similes ante et post maximam. Huius generis sunt obseruationes d. 8. Octobr. et d. 6. Decembr. variabilem ipsi Q aequalem indicantes; vnde tempus phasis maximae concluditur d 7. Nou. mane. Eadem conclusio prodit, si diebus 21. Octobr. et 23. Nouebr. variabilis ipsi M aequalis statuatur. Comparatis autem inter se obseruationibus d. 8. Octobr. et 9. Decembr. quae variabilem ipsi Q fere aequalem quoque faciunt, habebitur tempus phasis maximae d. 8. Nou. Ex his satis certe tempus phasis maximae alligare licet ad d. 7. Nouembr. quo stabilito tempus reuolutionis huius stellae seu reditus ad phasin maximam ex plurium annorum interuallo certe definiri poterit. Scilicet *Godofredus Kirchius*, primus huius stellae an. 1686. obseruator, periodum hanc determinauit 404½ dierum in Miscell. Berolinens. Vol. I. p. 211. vsus obseruationibus suis ab an. 1686 vsque ad an. 1713. *Maraldus* in Commentar. Acad. Paris. ad an. 1713. p. 64. ed. Bat. suas obseruationes cum Kirchianis comparans eandem pronunciauit 405. dierum, et Epocham phasis maximae constituit d. 1. Sepmebr. st. n. 1695. et d. 20. April. st. n. 1712. Si Epocha posterior conferatur cum nostra

phasi

phasi maxima d. 7. Nov. 1747. ex interuallo 12984 dierum, consulta periodo 405. dierum, colliguntur 32 reuolutiones interea peractae, et inde demum innotescit periodus $405\frac{1}{4}$ dierum. Sin autem epocha d. 1. Septembr. 1695 cum phasi maxima d. 7. Nou. 1747, quod intervallum excedit dimidium seculum, comparetur, interiectis 19059 diebus, prodeunt 47. reuolutiones, quantitate vnius existente $405\frac{24}{47}$ vel rotunde $405\frac{1}{2}$ dierum.

Obseruationes aliquot meteorologicae.

Barometrum satis amplum, luminis scilicet 3. lin. Paris. extraordinariam ☿ii altitudinem indicauit

an. 1747. Nou. 24. in meridie - - - - 28. dig. $1\frac{2}{3}$ lin mensurae Paris. secundum partes 12mas digiti

25. hor. 3. post merid. - - 28 - - - $1\frac{5}{8}$ - -

vtroque die coelum fuit valde nebulosum.

an. 1748 Ianuar. 12. hor. $9\frac{1}{4}$ mane - - 28 - - $2\frac{2}{3}$ - -

Thermometrum ☿iale idem, quo in praecedentibus vsus sum, ostendit

Frigus maximum

an. 1747. Ianuar. 13. hor. $8\frac{1}{2}$ mane - - - $168\frac{9}{10}$

an. 1748. Ianuar. 12. hor. $9\frac{1}{4}$ mane - - - $171\frac{4}{5}$

Calorem maximum

an. 1747. August. 12. et Sept. 8 - - - 111.

Initio Septembris per plures dies calor ingens fuit obseruatus.

OBSERVATIO ECLIPSIS SOLARIS
die 25 Iulii an 1748 ſt. Nou. Lipſiae habita

a

G. Heinſio

1.

Tab. XVII. Dies, qui praecedebant eclipſin, maxima ex parte ſereni, de ſucceſſu obſeruationis felici ſpem iniiciebant, et commodam offerebant occaſionem ex obſeruationibus altitudinum Solis reſpondentium copioſis, quadrante conſueto factis, ſtatum duorum horologiorum oſcillatoriorum reſpectu temporis veri examinandi, et factis debitis correctionibus cognoſcendi, ita vt de tempore vero obſervationum, quas proferam, maxime certus ſim. Aſt ipſe dies, quo eclipſis contigit, ab initio ſpem fruſtrari videbatur. Ante initium nempe eclipſis copioſae nubes ſe oſtendebant, interruptae tamen et nonquam ſpatium coeli ſerenum admittentes, qui coeli adſpectus, accedente circa hor. $10\frac{3}{4}$ tempeſtate, quam fulgura et tonitrua comitabantur, continuauit fere vſque ad meridiem, quo nubes diſpergi incipiebant, et coelum ſerenum fieri. Inde factum eſt, vt negotium obſeruationum ante meridiem ſaepe turbaretur. Nec initium eclipſis exacte obſeruaui; finem vero per tubum Gregorianum ſub apparatu, quo iſte obiecta 52 vicibus ſecundum diametrum auget, optime annotare licuit hor. 1 19′ 38″ temp. vero.

2. Pracipuae obſeruationes inſtitutae ſunt per tubum aſtronomicum tres pedes pariſinos longum, obiecta ſecundum diamerum 14 vicibus amplificantem, eaque clare reprae-

repraeſentantem (ſi quidem iſte omnes Iouis Satellites nitide exhibet), qui prae ceteris aptus ad hoc negotium iudicabatur, cum per feneſtras conclauis ad Solem altum commode dirigi poſſet, praeterea vero campum repraeſentationis $1\frac{1}{3}$ gradus fere ſiſteret. Impoſitus erat iſte tubus machinae parallacticae atque reticulo inſtructus, quod quatuor fila argentea tenuiſſima ad angulos ſemirectos ſe mutuo ſecantia gerit. Inſtrumento ſic ſtatuto, vt limbus Solis vel ſuperiorvel inferior, pro conditione phaſis, filum aliquod, diurnum exhibens, raderet, numerante ſocio ſecunda horologii, notaui appulſus limbi Solis vel praecedentis vel ſequentis, pro conditione obſcurationis, nec non cornuum phaſis atque limbi Lunae in diſco Solis conſpicui, ad filum horarium diurno normaliter inſiſtens; quantum id coeli facies permiſit.

3. Mora diſci Solaris per filum horarium, ex obſeruationibus copioſis, diebus 23 24 25 Iulii habitis, et bene inter ſe conſentientibus, deprehenſa eſt $= 2' 14\frac{1}{4}''$ temporis Solaris; vnde diameter Solis $= 33' 42''$, in partibus diurni. Pro conuerſione iſtarum in partes circuli maximi, ſi ſumatur Solis declinatio $= 19° 35'$, ex analogia ſin. tot. : coſ. $19° 35' = 33' 42''$: quaeſitum, inuenitur diameter Solis in partibus circuli maximi $= 31' 45''$.

4. In phaſibus decreſcentibus ſeu ante obſcurationem maximam, ex appulſibus limbi Solis ſequentis S, limbi Lunae L, cornu praecedentis A, ſequentis B, ad filum horarium reticuli Ss, acquiſiui in recta sa, ad Ss normali et filum reticuli diurnum exhibente, ſpatia sb, ab, Fig. 2.

 lb,

lb, per partes temporis veri Solaris expreſſa, ductis nempe B*b*, A*a*, L*l*, ad S*s* parallelis. Sumto deinceps momento appulſus B pro momento obſeruationis, ad quod nempe locus centri Lunae C in figura deſignari debuit, quaeſiui correctiones, a ſpatiis *ab*, *lb*, ante definitis ſemper ſubtrahendas, ob progreſſum Lunae indiſco Solis temporibus per ſpatia *ab*, *lb*, factum, iuxta eam methodum, quam fuſe expoſui in deſcriptione eclipſis Solaris d. 4 Auguſt ſt. n. 1739 Petropoli obſeruatae; hunc in finem, vt Luna progreſſu ſuo quaſi priuata eum acquireret in diſco Solis ſitum, quem habuit momento appulſus B. Hoc modo innotuerunt ſpatia *ab*, *lb*, correcta; et per conſtructionem ſchematis ex cognita Solis ſemidiametro et reliquis datis, poſitio centri Lunae in C reſpectu limbi Solis ſequentis et diurni nempe *sc* et *c*C (ducta C*c* ad S*s* parallela); nec non ſemidiameter Lunae. Simili modo in phaſibus creſcentibus ſeu poſt obſcurationem maximam ex appulſibus Fig. 3. limbi Solis praecedentis P, limbi Lunae L, cornu praecedentis B, ſequentis A, ad filum horarium reticuli P*p*, obtinui ſpatia *pb*, *ab*, *lb*, et deinceps ad momentum appulſus B pro momento obſeruationis ſumtum, ſpatia *ab*, *lb*, correcta; poſitionem centri Lunae per *pc* et C*c*, et ſemidiametrum Lunae. Sequens tabula ſiſtit obſetuationes praecipuas quoad data et deductiones inde factas. Figurae autem omnes ſitu erecto delineatae intelligi debent.

Da-

Data ex obſeruatione in phaſibus decreſcentibus deductiones

Locus obſeru. in fig. 3	Momentum obſ. temp. vero	sb	ab correct.	correctio ipſius ab	lb correct.	correctio ipſius lb	Cs	Cc	ſemidiam. Lunae
	h ' ''	' ''	' ''	''	' ''	''	' ''	' ''	' ''
4	10 36 39	1 $26\frac{1}{4}$	$0.45\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0. $1\frac{1}{2}$	0	$2.29\frac{1}{2}$	$0.17\frac{1}{4}$	1. $4\frac{1}{2}$
5	11 2 51	1 $5\frac{1}{4}$	1. $3\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0. $8\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	2. 0	0.32^{3}	1. 4
7	11 14 38	0 52	$1.14\frac{3}{4}$	0	$0.11\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$1.45\frac{1}{4}$	0.38	1. $4\frac{1}{2}$
8	11 25 7	0 $38\frac{1}{2}$	$1.28\frac{1}{4}$	—	$0.14\frac{1}{2}$	—	1.28	0.47	1. $4\frac{1}{8}$
	in phaſibus creſcentibus								
		pb					pc		
11	0. 0. 7	1.26	0. $5\frac{1}{2}$	0	. $1\frac{7}{8}$	$1\frac{7}{8}$	$1.27\frac{3}{4}$	1. $8\frac{1}{2}$	1. 4
12	0. 2.38	$1.23\frac{3}{4}$	$0.12\frac{7}{10}$	$\frac{4}{5}$	$0.55\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	$1.32\frac{3}{4}$	1. 0	1. $3\frac{3}{4}$
13	0. 6.33	$1.19\frac{1}{2}$	$0.21\frac{3}{4}$	1	0.47	1.	$1.36\frac{1}{2}$	$1.12\frac{1}{2}$	1. $3\frac{3}{4}$
14	0.19.52	1.17	0.35	—	0.28	—	$1.53\frac{1}{2}$	$1.21\frac{1}{4}$	1. $4\frac{1}{8}$

Semidiameter Lunae media 1. $4\frac{1}{11}$.

Partes temporis Solaris veri communem menſuram totius tabulae ſiſtunt, quae facile in partes circuli diurni, quem Sol tunc temporis deſcripſit, tranſmutantur, ſi ſingulis 4. ſecundis temporis aſſignetur minutum circuli diurni Additis correctionibus reſpondentibus ad *ab*, *lb* correcta, hiſque comparatis cum momento appulſus B, ipſae obſeruationes, ſi placet, reſtitui poſſunt. Omiſſae autem ſunt correctiones in tabula iis caſibus, quibus appulſus ad fila obliqua reticuli ſunt obſeruati, ſpatia vero *ab*, *lb*, correcta inde deducta; ne ordo tabulae turbetur.

5. Semidiameter Lunae tot obſeruationibus confirmata $= 1'.\ 4''\frac{1}{11}$ conficit in partibus circuli diurni $16'.\ 1\frac{1}{3}''$, in partibus autem circuli maximi (vt §. 3) $15'.\ 5\frac{1}{4}''$; vnde diameter Lunae rotunde $= 30'.\ 11''$. Si haec refera-

 tur

tur ad altitudinem Solis meridianam, quae circiter eſt 58°. 13′; habebitur diameter Lunae horizontalis = 29′. 45″. et parallaxis Lunae horizontalis reſpondens = 54′. 32″, poſita ratione inter horizontales Lunae diametrum et parallaxin = 6 : 11.

6. Ex obſeruationibus praecedentibus §. 4. per *Cc* et *sc* vel *pc* dantur poſitiones centri Lunae reſpectu diſci Solaris et diurni ad data tempora, ideoque ſemita centri Lunae, prout figura 4. ſitu erecto exponit. Ad hanc certiori modo definiendam conducunt etiam deductiones ſequentes, quas ex appulſibus limbi Solis vel praecedentis P vel ſequentis S, limbi Lunae L et cornu A vel B, ſumta Lunae ſemidiametro = 1′. 4″, per conſtructionem ſchematis inueni in eadem menſura, quam §. 4. notaui.

Locus obſeru. in fig. 4	Momentum obſeru. temp. vero	*as*	*al* correct.	*cs*	*Cc*
	h ′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″
6.	11. 7. 6.	2. $6\frac{1}{2}$	1. $17\frac{1}{2}$	1. $53\frac{3}{4}$	0. $36\frac{1}{2}$
		ap		*pc*	
9	11.49. 9	0.53	0. $41\frac{1}{4}$	1. $15\frac{1}{2}$	1. $1\frac{1}{2}$
17	0.37. 2.	2. $2\frac{3}{4}$	0. $53\frac{1}{4}$	2. $13\frac{2}{3}$	1. $31\frac{1}{2}$
18	0.45.31	2. $6\frac{1}{2}$	0. $47\frac{3}{4}$	2. 22	1. 36
		pb	*lb*		
20	0.56.37	1.34	0. 4	2. 37	1. 45

Fig. 2.

Fig. 4. Loca in ſemita centri Lunae per numeros diſtincta exponunt loca centri Lunae pro iis obſeruationibus, quae iisdem reſpectiue numeris inſigniuntur. In initio eclipſis locus centri Lunae fuit in I, in fine in F.

7.

7. In designatam centri Lunae semitam ex centro disci Solaris *e* demissa perpendicularis *e*O manifestat distantiam centri Lunae a centro Solis boream versus minimam $= 0'.\ 8\tfrac{1}{3}''$ in mensura schematis §. 4, $= 2'.\ 5''$. partium diurni vel $1'.\ 58''$. partium circuli maximi. Inde datur quantitas eclipsis $=$ summae semidiametrorum Solis et Lunae demta distantia centrorum minima $= 15'.\ 52\tfrac{1}{2}'' + 15'.\ 5\tfrac{1}{2}'' - 1'.\ 58'' = 29'.\ 0''$ partium circuli maximi vel $=$ 10. digitis cum $57\tfrac{2}{3}$ minutis.

8. Constructa centri Lunae semita, sumtaque Lunae semediametro $= 1'.\ 4''$, reliquae etiam phases assignari potuerunt, quarum obseruatio moram tantummodo inter appulsum limbi Solis praecedentis vel sequentis et alterutrius cornu patefecit. Designato enim vi huius morae cornu loco in peripheria Solis, atque ex eo ope semidiametri Lunae facta intersectione semitae centri Lunae, innotuit locus Lunae ad momentum appulsus cornu ad filum horarium.

9. Hoc pacto phasium singularum magnitudine iuxta indicatas §. 4. 6. 8. methodos repraesentatorum dimensio secundum digitos et minuta ecliptica ope scalae in hunc finem constructae potuit institui. Sequens tabula exhibet momenta phasium et quantitates obscurationum; in qua etiam distantiae centri Lunae in singulis phasibus a loco eius vel in initio eclipsis I, vel in obscuratione maxima O sistuntur expressae per partes temporis veri, quo centrum Lunae spatium inter locum initii et locum centri in data phasi, vel inter hunc et locum obscurationis ma-

maximae, deſcripſit. Scilicet ex comparatione ſitus mutui locorum centri Lunae ad momenta phaſium innotuit motus centri Lunae interuallo 40. minutorum temporis in ſemita = 0'. 57⅓'' conſuetae ſchematis menſurae. Ex hoc autem ſpatio, facta eius diuiſione ſecundum partes temporis, diſtantias memoratas cognoſcere et inde tempus tum initii eclipſis tum obſcurationis maximae definire licuit. Initium nempe medium ex comparatione obſeruationum contigit 10^h. 11'. 41''; obſcuratio autem maxima 11^h. 46'. 32''. tempore vero.

Locus obſeru. in fig. 4	Momentum phaſis temp. vero	Quantitas obſcur.	Dist. obſeru. in tempore ab initio	Tempus initii verum
1	10^h. 18'. 30''	0$^{dig.}$ 56'	7'. 15''	10^h. 11'. 21''
2	22. 30	1. 17	10. 15	12. 15
3	25. 23	1. 47	14. 0	11. 23
4	36. 39	3. 10	24. 55	11 44
			Initium med.	10. 11. 41
			dist. obſer. ab obſcur. max.	Temp. obſcur. max. verum
5	11. 2. 51	6. 2	44. 20	11. 47. 11
6	7. 6	6. 51	38. 45	45. 51
7	11^h. 14'. 38''	7. 30	32. 55	11. 47. 32
8	26. 7	9. 8	19. 20	45. 27
	obſcur. max.	10. 57⅔		
9	49. 9	10. 46	2. 55	46. 14
10	57. 5	10. 14	10. 15	46. 50
11	0. 0. 7	9. 53	13. 25	46. 42
12	2. 38	9. 26	16. 35	46. 3

12

13		6. 33	9. 3	19. 50	46. 43
14		19. 52	7. 26	33. 15	46. 37
15		26. 5	6. 40	39. 30	46. 35
16		31. 44	5. 52	46. 0	45. 44
17		37. 2	5. 26	49. 40	47. 22
				Medium pro obscur. max.	11. 46. 32.
18		45. 31	4. 33		
19		53. 5	3. 26		
20		56. 37	3. 0		
	1.	19. 38	Finis		

10. Ope parallaxis Lunae horizontalis §. 5. inuentae $= 54'. 32''$, ſumtis ex calculo ad tempus nouilunii declinatione Solis $= 19^{\circ}. 34\frac{3}{4}'$, et angulo eclipticae cum meridiano verſus orientem $= 103^{\circ}. 12\frac{1}{2}'$; poſitaque elevatione aequatoris Lipſiae $= 38^{\circ}. 37\frac{3}{4}'$, conſtruxi ſchema conſuetum projectionem Terrae orthographicam tempore nouilunii exhibens, in quo parallelus ellipticus pro latitudine Lipſienſi deſcriptus ad ſingula phaſium obſeruatarum momenta, facta eius diuiſione ſecundum tempus, concedebat locum centri Solis, quod parallelum iſtum percurrere fingitur, cuius centri poſitio reſpectu circuli declinationis ex ſchemate ſimul innoteſcebat. Iam cum ad ſingula phaſium momenta, vi conſtructionis iſtarum, daretur poſitio centri Lunae reſpectu circuli declinationis et centri Solis, facillime loca centri Lunae pro iis momentis in ſchemate aſſignari potuerunt. Inde vero ſe manifeſtabant, orbita Lunae viſa rectilinea inclinata verſus

eclipticam angulo = 5°. 43′, conuergens cum iſta ad partes orientales; latitudo Lunae vera borealis in coniunctione = 28′. 38″. et horarius Lunae a Sole = 27.′ 40″. partium circuli maximi. Ope horarii collatis centri Lunae locis ad phaſium momenta cum loco coniunctionis ſeu interſectione orbitae viſae cum circulo latitudinis innotuerunt interualla inter momenta iſta reſpectiue et momentum coniunctionis ſeu nouilunium. Hoc pacto deductum eſt.

ex obſeru.	Tempus verum nouilunii d. 25. Iuli.	ex obſeru.	Tempus verum nouilunii
4	$0^h. 4'. 19''$.	11.	$0^h. 4'. 2''$
6	4. 46	12.	3. 23
7	5 28	13.	4. 3
obſcur. max.	4. 52	14.	3. 0
9	3. 29	15.	4. 15
10	4. 35	20.	4. 7
		fine	3. 28

Medium pro nouilunio $0^h. 4.' 8''$

11. In ſummam collectis iis, quae hactenus deducta ſunt habentur ex obſeruatione eclipſis noſtrae ſequentia elementa.

Coniunctio vera ☉ et ☽ reſpectu eclipticae ſub meridiano Lipſienſi temp. vero an. 1748. Iulii 25. ſt. nou. $0^h. 4'. 8''$.

Latitudo Lunae vera borealis in ☌ 0°. 28. 38

Inclinatio orbitae ☽ viſae ad circulum latitudinis verſus ortum. 84°. 17′.

Parallaxis ☽ horizontalis 0. 54. 32

Diameter

Diameter ☽ horizontalis 0^h. 29′. 45″
Diameter Solis 0. 31. 45

12. Copiosae erant maculae in Sole, quarum occultationes a Luna annotare decreueram. Hunc in finem ope machinae parallacticae diebus 24 et 25. Iulii horis pomeridianis positiones macularum precipuarum respectu disci et diurni Solis per appulsus limborum Solis praecedentis *p* sequentis *s*, et centri alicuius maculae, ad filum horarium P*p* nec non centri maculae ad fila obliqua obseruaui; vnde sequentes obtinui determinationes, ductis scilicet *k* K, *a* A, *b* B, *m* M, ad *p* P parallelis Fig. 4.

pro macula		d. 24. Iulii hor. 3. 40′.	d. 25. Iul. hor. 5. 30′.
k	PK =	0′. 17½″	0′. 9¼″.
	K*k* =	0. 53½ dub.	0. 48½ dub.
a	PA =	0. 58	0. 43½
	A*a* =	1. 34¾	1. 28. dub.
b	PB =	1. 3½	0. 46¼
	B*b* =	1. 24¼	1. 18½
m	PM =	1. 55¾	1. 46¾
	M*m* =	0. 45½ dub.	0. 44.

Mensura determinationum eadem est, quam pro schemate §. 4. notaui, inuoluens nempe partes temporis, quarum 2′. 14¾″ conficiunt moram disci Solaris per filum horarium. In fig. 4 repraesentaui situm macularum erectum secundum determinationes d. 25. Iulii hor. 5½, reliquarumque macularum in disco Solis tunc conspicuarum loca ad istum ex aestimio definita signaui.

13. Appulſus limbi Lunaris ad ſequentes maculas durante eclipſi obſeruaui per tubum machinae parallacticae, alium enim adhibere diſſuadebat attentio ad obſeruationes principales hactenus enumeratas.

d. 25. Iulii

temp. vero ante meridiem

$10^h. 20'. 34''$. Medium maculae *k* tegitur a limbo ☽ orien-
11. 5. 22 - - - - - - *b* - - - - - (tali
11. 11. 22 - - - - - - *d* - - ſed dubius ſum de nomine maculae

poſt meridiem

0. 21. 5 vel $10''$. Macula *b* tota emergit ad limbum ☽ occident,
0. 24. 16 - - *c* tota - - - -
0. 24. 51. Medium maculae *y* prodit - - - -
0. 46. 1 Macula tota *m* in conſpectum venit

14. Tempore obſeruationis maximae circa eam regionem marginis Lunaris, qui extra Solis diſcum extabat, et cornua in peripheria Solis definiebat, nec ullum lumen, nec annulum lucidum, cuiusmodi ex atmoſphaera Lunae vel inflexione radiorum Solarium ad iſtum Lunae marginem oriundum alias ſuſpicari licebat, per tubum machinae parallacticae animaduertere potui; cornua potius optime terminata apparuerunt. Nec in fine eclipſis Luna penitus e diſco Solis egreſſa ad marginem limbo Solis adhuc maxime vicinum, eiusmodi lumen oſtendebat per tubum Gregorianum, licet totus fere Sol extra campum repreſentationis tubi poneretur, vt eiusmodi lumen, ſi quoddaretur, ſenſibile effici poſſet. Tempore obſcurationis ma-

maximae pallido quidem lumine fruebamur; eo tamen obiecta probe adhuc distinguere licuit, melius, ac nonnunquam Sole occidente fieri solet. Venerem quoque eodem tempore conspexerunt multi oculis nudis, presertim quos iuuabat aedificiorum vmbra; ipse Venerem attentus ad alias obseruationes non vidi.

15. Amicus curam in se susceperat obseruationum meteorologicarum tempore eclipsis. Hunc in finem thermometrum mercuriale Soli libere exponebatur; aliud vero in loco vmbroso, quem aër externus ferire poterat, vna cum barometro, asseruabatur, vtrumque thermometrum ea diuisione instructum erat, qua gradus aquae bullientis per 0, gelascentis per 150, descendendo a priori termino, notatur. Thermometrum in loco vmbroso vix sensibilem subiit mutationem, circa initium et fere per totam eclipsin $115\frac{1}{2}$, circa finem autem 114 monstrauit. Barometrum quoque toto eclipsis tempore constantem retinuit altitudinem. Thermometrum Soli expositum ad quina minuta temporis veri obseruatum est, et variationem quidem ostendit notabilem, ast certae legi non satis adstrictam, quam nubes continuo interuenientes, praesertim ab initio eclipsis vsque ad obscurationem maximam, turbabant. Generaliter tamen circa obscurationem maximam gradum caloris minorem patefecit, ac in initio et fine eclipsis, differentia maxima existente $17\frac{1}{2}$ grad. Sic thermometrum istud indicabat

Temp. vero		gradus therm.	Temp. vero		gradus therm.
10^h.	0′	109	11^h.	45′	114
	10	105		50	114
	20	99		55	114
	25	98	0.	0	$115\frac{1}{2}$
	30	100		10	110
11.	30	112		35	108
			1.	15	105

Hor. 5. 34′. post meridiem thermometrum idem in loco priſtino, aſt iamdudum vmbroſo facto, oſtendebat 110. coelo valde ſereno.

OBSER-

OBSERVATIO ECLIPSIS SOLIS

ANNI MDCCXLVIII. DIE $\frac{14}{25}$ MENSIS IVLII IN SPECVLA ASTROMOMICA IMPERATORIA REPARATA QVAE PETROBVRGI EST PRAESENTE ILLVSTRISSIMO COMITE DE RASVMOVSKI ACADEMIAE SCIENTIARVM PRAESIDE INSTITVTA

A

Ioſeph. Ad. Braunio, et ſocio Popouio.

Quamuis ſpecula aſtronomica imperatoria incendio illo fatali, quod in aedibus academicis circa finem anni MDCCXLVII. factum eſt, maximum ceperit detrimentum, quum inſtrumenta aſtronomica omnia eo ſint conſumta, ipſaque ſpecula paene interierit: tamen cura omni laude maiore Illuſtriſſimi atque Excellentiſſimi Praeſidis noſtri non ita multo poſt ea non ſolum reparata, ſed etiam inſtrumentis neceſſariis ita fuit denuo inſtructa, vt obſeruationes aſtronomicae neceſſariae interim haberi queant, donec noua recentiſſimis, iisque exquiſitiſſimis adornata inſtrumentis erit perfecta. Quod igitur ad hanc eclipſeos ſolis obſeruationem attinet, in ea neceſſariam adhibuimus praeparationem. Linea meridiana de nouo ducta, et ex altitudinibus ſolis reſpondentibus ita correcta, vt pro vera reputari queat, horologia ſecundum verum motum ſolis ſunt directa. Licet diebus aliquot eclipſin hanc antecedentibus coelum ita fuerit pluuium, vt pertenuis ſpes oſtenderetur eam obſeruandi: tamen ipſo, quo contigit, die ſerenitas non defuit. Momenta et phaenomena huius eclipſeos potiora vti ſecundum tempus verum euenere, nobis ſunt hac ratione adnotata:

H. M.

H.	M.	S.	Tempore vero.
11	49	11	initium
	55	7	dig. 1
	55	19	Immerſio maculae A
0	2	50	dig. 2.
	13	12	dig. 3
	24	52	Maculae B immerſio
1	12	3	Maxima obſcuratio = 9 dig. et 7 minutor.
	45	24	Emerſio maculae B
	47	48	Emerſit macula C
	52	46	Emerſit macula D.
2	31	33	Finis

Tab. XVII. f. 5. Diſcus ſolis tempore eclipſis per tubum aſtronomicum adparuit in hunc modum maculis conſperſus, vti figura monſtrat.

Obſeruatio facta eſt partim directe tubo aſtronomico 8. pedum Lond. partim machina tubo aſtronomico 6. pedum Lond. inſtructa, per quem imago ſolis transmiſſa eſt in tabulam in ſuos digitos more conſueto diuiſam. Succeſſiuae digitorum obſcurationes, vti macularum immerſiones et emerſiones omnes propter quaedam impedimenta adcurate obſeruari non potuerunt In maxima ſolis obſcuratione per tubum 14 pedum Lond. limbus lunae viſus eſt circumdari filo quodam lucido albicante eiusmodi nitoris, vti adparet luna plena. Hoc filum lucidum cingebat arcus coloratus ad $\frac{1}{2}$ digitum diametri ſolis in diſcum ſolis porrectus. Colores eodem modo, quo pars iridis ſuperior conſpicitur, adparebant, diſtinctius tamen prope limbum lunae.

ECLIP-

ECLIPSIS LVNAE

Anni MDCCXLVIII die 29 Menſis Iulii ſt. v.

EX OBSERVATORIO IMPERATORIO REPARATO OBSERVATA

a

Ioſeph. Ad. Braunio.

Quod fere in omnibus eclipſium lunarium obſeruationibus contingere ſolet, vt difficillimum ſit terminos vmbrae terreſtris et penumbrae diſtinguere, id quoque in praeſenti nos eſſe expertos confitendum eſt. Vmbra enim terreſtris ita diluta et male terminata adparuit, vt cum penumbra confuſa vix ac ne vix quidem diſtingui potuerit. Obſeruationem tubo aſtr. 12 pedum Lond. micrometro Kirchiano inſtructo inſtituimus, cuius potiora momenta ſunt, quae ſequuntur, ſecundum tempus verum adnotata, quantum per difficultates commemoratas facere licuit.

H.	M.	S.	
0	10	34	Initium aeſtimaui.
	19	17	Vmbra tangit mare humorum.
	23	9	- - Gaſſendum.
	24	50	Capuanus plane immerſus vmbrae eſt
	27	9	Vmbra ad Tychonem.
	28	55	- - Grimaldum.
	31	41	- - Bullialdum.
1	0	18	Maxima obſcuratio = 5 dig. 23. min.
	4	50	Grimaldus emergere coepit.

	49	11	Vieta emergit.
	49	41	Mare humorum plane umbra egressum est.
	52	33	Schikardus plane emersit.
2	3	11	Fracastorius emersit.
	5	18	Tycho plane vmbra liberatus.
	26	43	Finis versus Snellium adparuit.
	29	13	Finis penumbrae.

Quantitas eclipseos determinata est micrometro Kirchiano ad tubum adplicato. Differebant quidem paululum tempora initii atque finis huius eclipsis secundum meam et Popouii obseruationem tubo quadranti adplicato duos pedes longo in turri superiore institutam, quae differentia autem partim diuersitati tuborum, partim confusis vmbrae et penumbrae terminis erit tribuenda.

Tempore eclipsis solaris ratio quoque habita est variationis caloris, aliarumque athmosphaerae mutationum, quae ea durante contigere. Obseruationes has meteorologicas faciendas suscepit Vir Clarif. Lomonosouius. Institutae sunt duobus thermometris mercurialibus concordantibus et barometro in hypaethro aedium academicarum. Thermometrorum alterum e diametro soli expositum, alterum in vmbra columnae ligneae erat collocatum. Bulbi erant aequales figurae sphaericae diametri semidigitatis. Diuisio vtriusque thermometri erat ea, qua gradus aquae bullientis per 0, gelascentis per 150 descendendo insignitur. Barometri diuisio erat secundum pedem Parisinum. Obseruatio integra, vti nobiscum a Viro Cl. est communicata ita se habet.

Tem-

Georg. Wilb. Richmanni, Tentamen explicandi Phaenomenon paradoxon, ſcil. thermometro mercuriali ex aqua extracto mercurium in aëre, aqua calidiori, deſcendere et oſtendere temperiem minus calidam ac aëris ambientis eſt. p. 284.

Chriſtiani Gottl. Kratzenſteinii, Mechanicae coeleſtis ſpecimen primum, continens: Nouam tubos longiores commodiſſime tractandi methodum. p. 291.

Michaëlis Lomonoſowii, Supplementum ad meditationes de vi aëris elaſtica. p. 305.

Phyſicarum.

Abr. Kaau Boerhaauii, Hiſtoria anatomica ouis pro hermaphrodito habiti. p. 315.

Ioſiae Weitbrechtii, De vtero muliebri obſeruationes anatomicae. p. 337.

Abr. Kaau Boerhaauii, Obſeruationes anatomicae. p. 353

Stephani Kraſcheninnikowii, Deſcriptiones rariorum plantarum. p. 375.

Aſtronomicarum.

Leonardi Euleri, De motu nodorum lunae eiusque inclinationis ad eclipticam variatione. p. 387.

Eiusdem Quantum motus terrae a luna perturbetur accuratius inquiritur. p. 428.

Georgii Wolffg. Krafftii, Obſeruatio eclipſeos ſolaris d. 25. Iul. 1748. Tubingae facta. p. 444.

Chr.

Christiani Nicolai de Winsheim De aberratione fixarum. p. 446.

Godofredi Heinsii, Obseruationes aliquot coelestes Lipsiae habitae aestate An. 1746. p. 464.

Eiusdem Continuatio obseruationum Astronomicarum Lipsiae habitarum An. 1746. p. 472.

Eiusdem Continuatio obseruationum Lipsiensium An. 1747. p. 475.

Eiusdem Obseruatio eclipsis solaris d. 25. Iul. 1748. st. n. Lipsiae habita. p. 482

Iosephi Adami Braunii et *socii Nic. Popowii*, Obseruatio eclipsis solis anni 1748 d. $\frac{14}{25}$, mensis Iulii in obseruatorio Imperiali reparato Petroburgi, praesente Illustrissimo Comite de Rasumovsky Academiae Scientiarum Praeside instituta. p. 495.

Eiusdem Obseruatio eclipsis lunae a. 1748 die 29 mensis Iulii st. v. in obseruatorio Imperiali reparato habita. p. 497.

* * *
* *
*

INDEX DISSERTATIONVM

Mathematicarum.

Leonardi Euleri, De superficie conorum scalenorum, aliorumque corporum conicorum. p. 3.

Eiusdem Theoremata circa diuisores numerorum. p. 20.

Eiusdem Variae demonstrationes Geometricae. p. 49.

Eiusdem De propagatione pulsuum per medium elasticum. p. 67.

Eiusdem Examen artificii naues a principio motus interno propellendi, quod quondam ab acutissimo viro Iacobo Bernoullio est propositum. p. 106.

Georgii Wolffgangi Krafftii, Dissertatio Geometrica de problematibus aliquot conicis per analysin concinne soluendis. p. 124.

Eiusdem Demonstrationes duorum Theorematum Geometricorum. p. 131.

Physico-Mathematicarum.

Georgii Wolffgang. Krafftii, Obseruationes Meteorologicae, factae An. 1745 Tubingae. p. 139.

Eiusdem Obseruationes Meteorologicae, factae An. 1746 Tubingae. p. 147.

Geor-

Georgii Wilhelmi Richmanni, De quantitate caloris, quae poſt miſcelam fluidorum, certo gradu calidorum, oriri debet, cogitationes. p. 152.

Eiusdem Formulae pro gradu exceſſus caloris, ſupra gradum caloris mixti ex niue et ſale ammoniaco, poſt miſcelam duarum maſſarum aquearum, diuerſo gradu calidarum, confirmatio per experimenta. p. 168.

Eiusdem Inquiſitio in legem, ſecundum quam calor fluidi in vaſe contenti, certo temporis interuallo, in temperie aëris conſtanter eadem decreſcit vel creſcit, et detectio eius, ſimulque thermometrorum perfecte concordantium conſtruendi ratio hinc deducta. p. 174.

Eiusdem Tentamen legem euaporationis aquae calidae in aëre frigidiori conſtantis temperiei definiendi. p. 198.

Michaëlis Lomonoſowii, Meditationes de caloris et frigoris cauſa. p. 206.

Eiusdem Tentamen theoriae de vi aëris elaſtica. p. 230.

Eiusdem Diſſertatio de actione menſtruorum Chymicorum in genere. p. 245.

Eiusdem De motu aëris in fodinis obſeruato. p. 267.

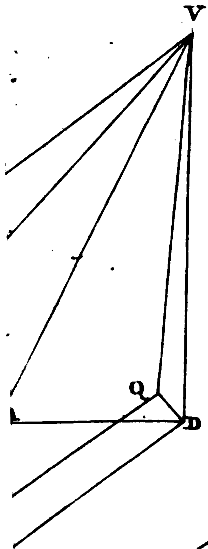
Georg. Wilh. Richmanni, De inſigni paradoxo Phyſico, aëre ſcilicet in 1837. voluminis partem aqua gelaſcente reducto; et de computatione vis, quam aqua gelaſcens et ſeſe in volumen expandens in ſphaera caua ferrea, Bomba dicta, ad eam disrumpendam impendit, cogitationes. p. 276.

Georg.

Tempus	Thermometrum in sole	Thermometrum in vmbra	Barometrum	Status aeris.
H. M.				
8.30	—	128	—	Coelum nubibus albis vndulatis tegebatur.
10.25	95	115	—	nubes rarissimae, tenuissimae
10.32	90	114$\frac{1}{2}$	—	
10.35	83	114	—	
10.58	80	113$\frac{1}{2}$	—	
11.17	77	113	—	Sudum.
11.23	76	113	27.00	
11.30	76	113	26.94	
11.41	76	112$\frac{2}{3}$	26.92	
11.46	74	113	26.88	Sol incipit deficere.
11.50	76	113$\frac{1}{2}$	26.86	
11.55	75	113$\frac{1}{2}$	26.88	nubecula tenuissima
12. —	77	114	—	
— 3	79	114	—	
— 6	84	114$\frac{1}{2}$	26.95	
— 10	84	115	26.95	
— 15	84	116	26.95	
— 20	86	116	27.00	
— 25	85	116$\frac{1}{2}$	27.05	
— 30	95	117	27.05	Sudum.
— 35	96	117	27.08	
— 40	101	117	27.14	
— 45	104	117	27.17	
— 50	107	119	27.19	
— 55	109	120$\frac{1}{2}$	27.20	
1 —	111	121$\frac{1}{2}$	27.23	
— 5	112	122	27.25	
— 10	112	122	27.24	

Tem-

Tempus	Thermometrum in sole	Thermometrum in vmbra	Barometrum	Status aeris.
H. M.				
— 15	112	122½	27. 24	Nubes tenuissimae vndulatae in sole
— 20	111½	123	27. 24	
— 25	106	122½	27. 24	
— 30	104	123	27. 25	
— 35	105	123	27. 25	
— 40	105	122½	27. 25	
— 45	103	122	27. 25	
— 50	101	121½	27. 25	Sudum.
— 55	99	121½	27. 25	
2 —	101	122	27. 25	
— 5	98	121½	27. 25	
— 10	97	121	27. 25	
— 15	101	122	27. 26	
— 20	100½	122	27. 26	
— 25	101	123	27. 26	
h.				
4. 30	—	—	27. 19	
4. 41	85—	120	27. 5	Sudum.
4. 55	85—	115	27. 00	
5. —	88—	115	27. 00	



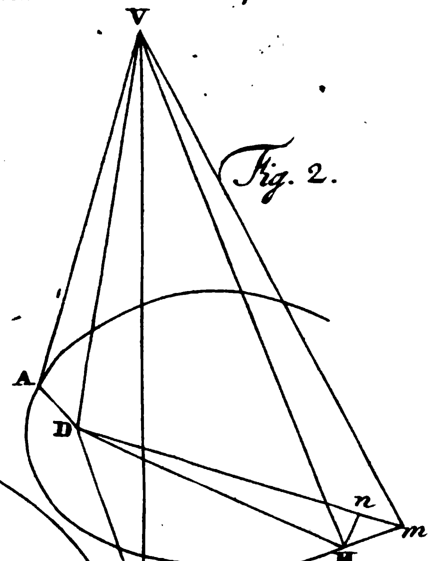


Fig. 2.

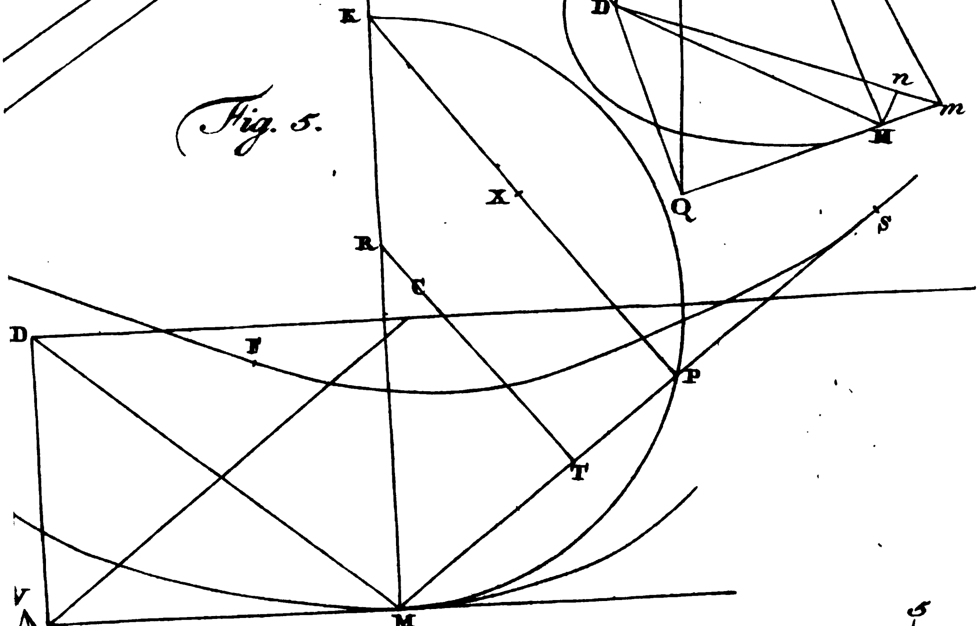


Fig. 5.

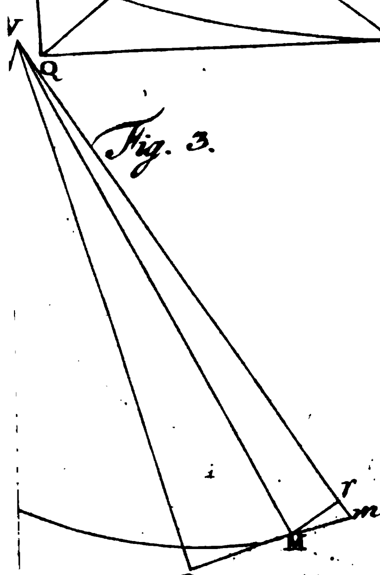


Fig. 3.

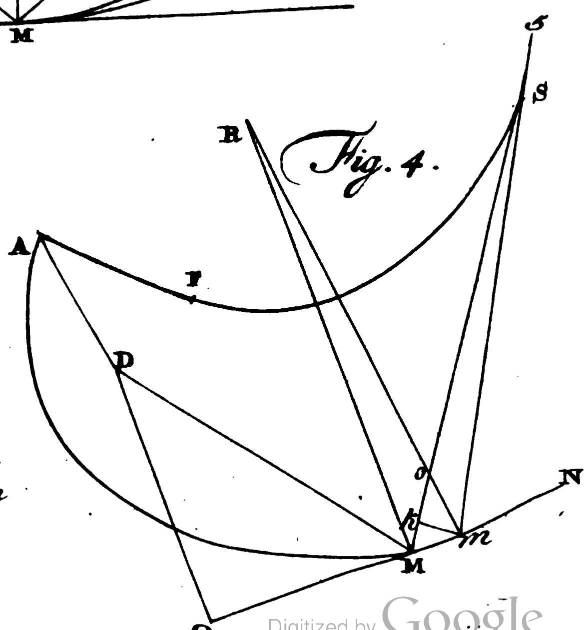


Fig. 4.

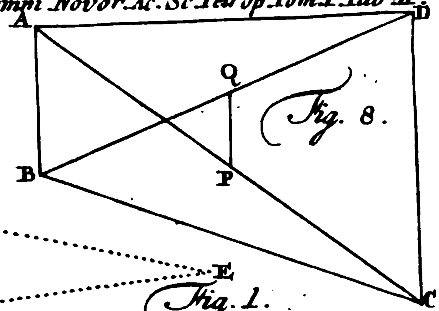


Fig. 8.

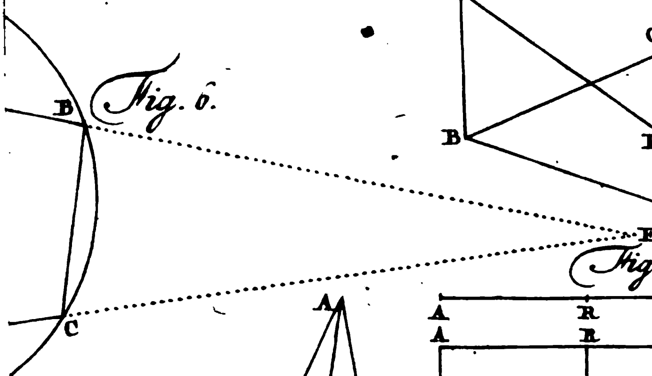


Fig. 6.

Fig. 1.

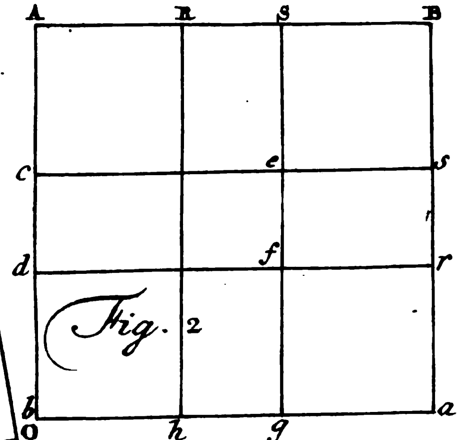


Fig. 2

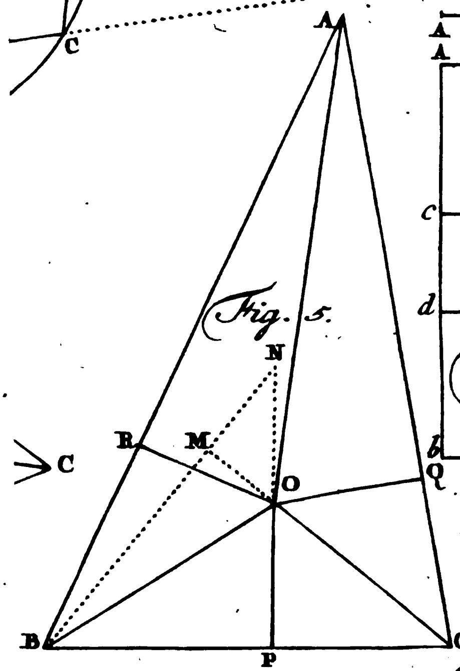
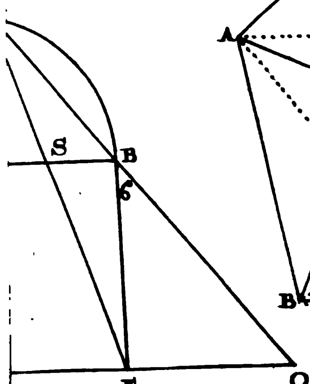


Fig. 5.



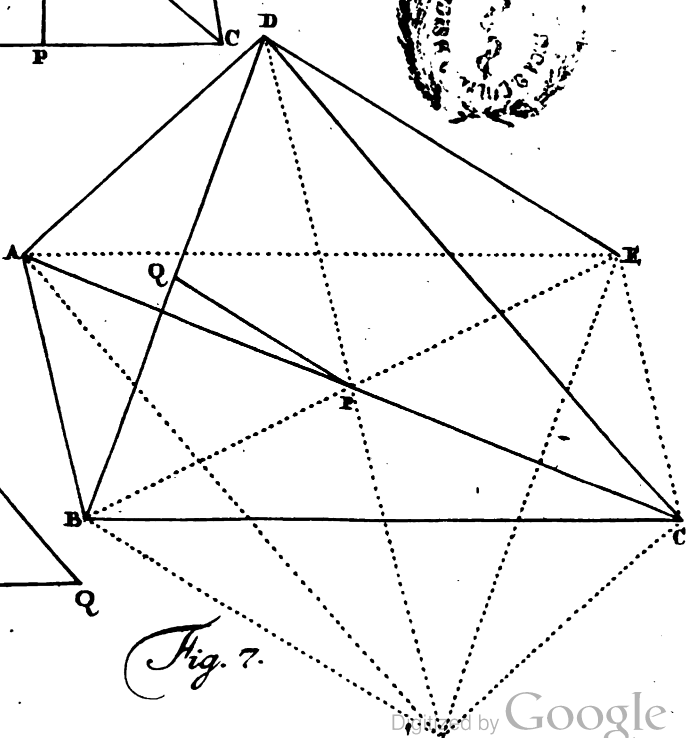
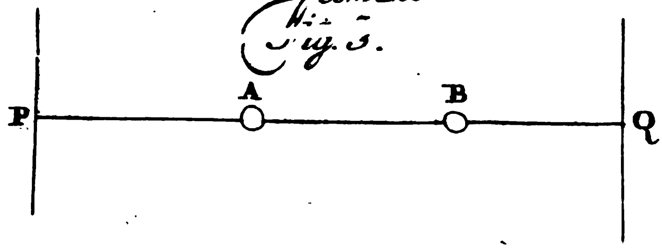


Fig. 7.

Fig. 3.



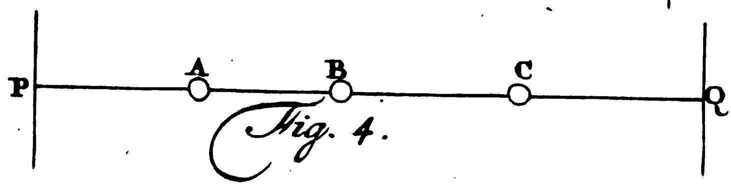


Fig. 4.

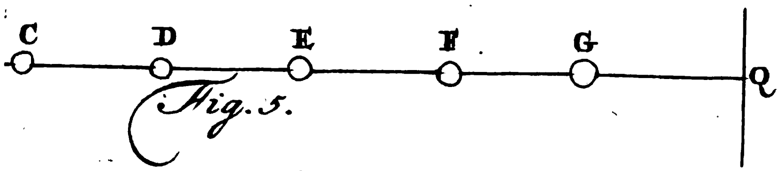


Fig. 5.

Tab. IV.

Fig. 1.

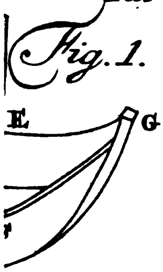


Fig. 2.

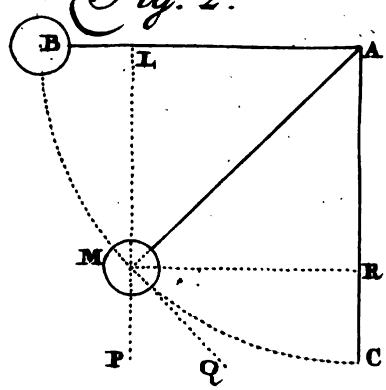


Fig. 4.

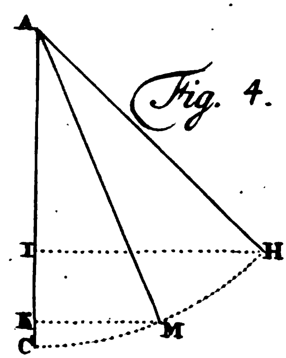
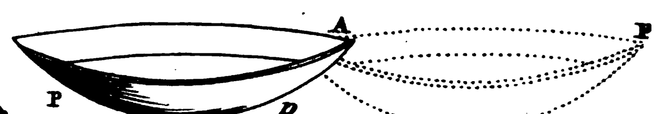
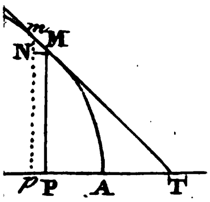


Fig. 5.





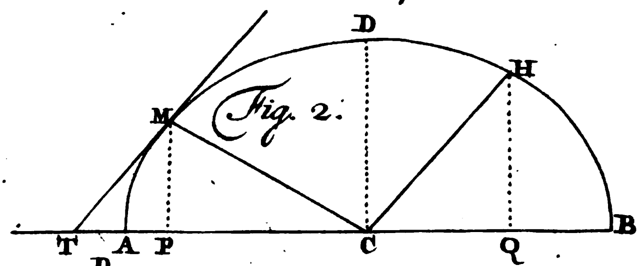


Fig. 2.

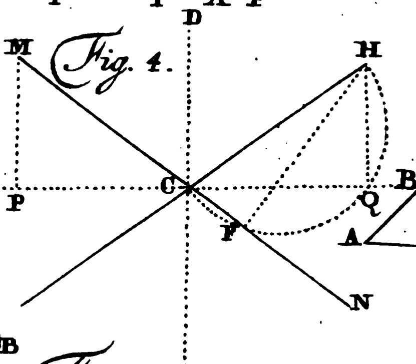


Fig. 4.

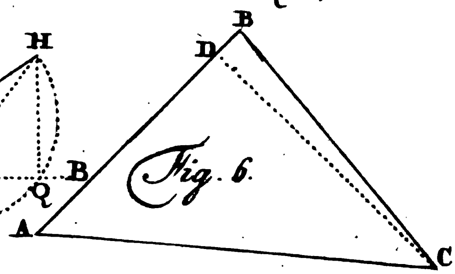


Fig. 6.

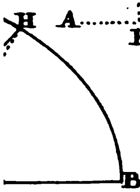
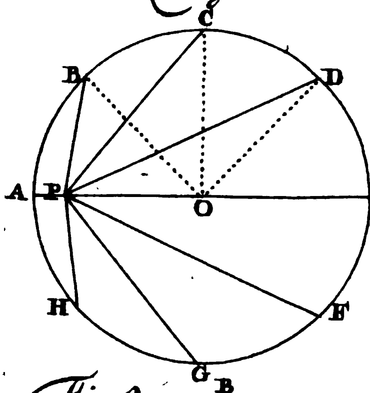


Fig. 11.



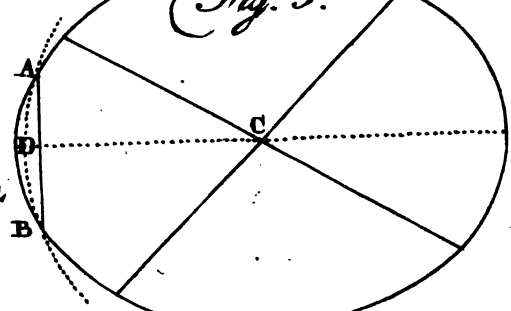
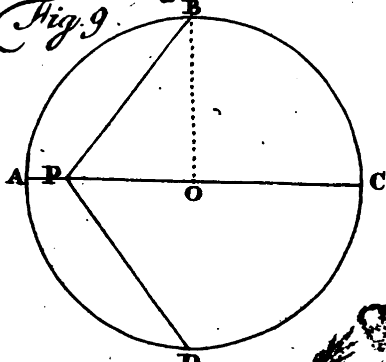


Fig. 5.

Fig. 9



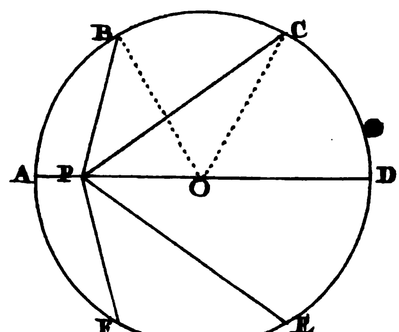
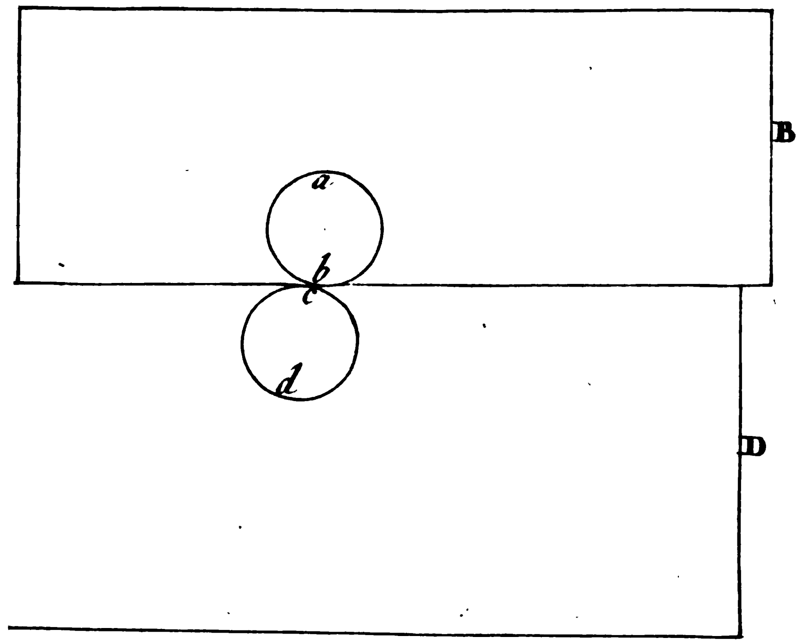


Fig. 10.

. 214.



ig. 251.

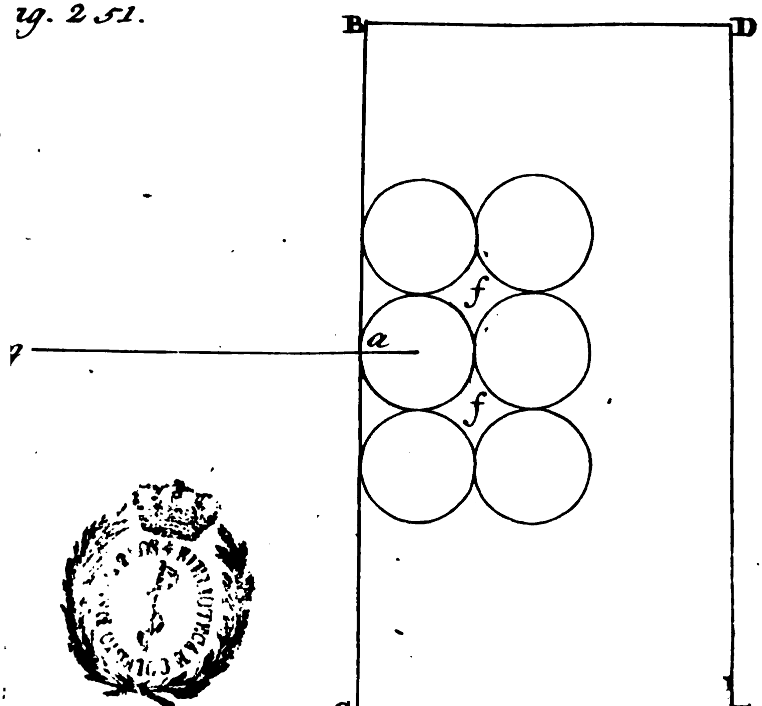


Fig. 4.

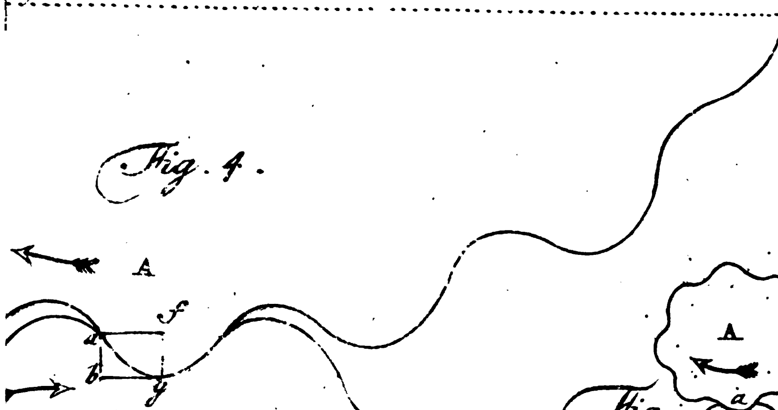


Fig. 2.

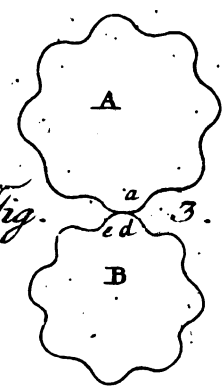
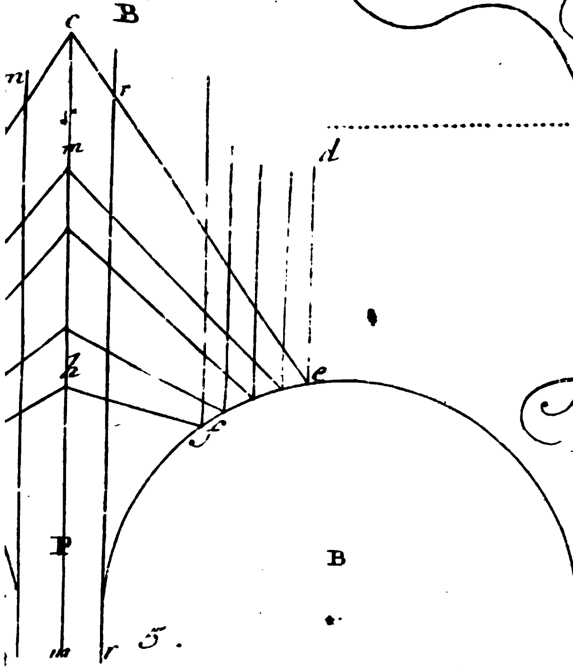
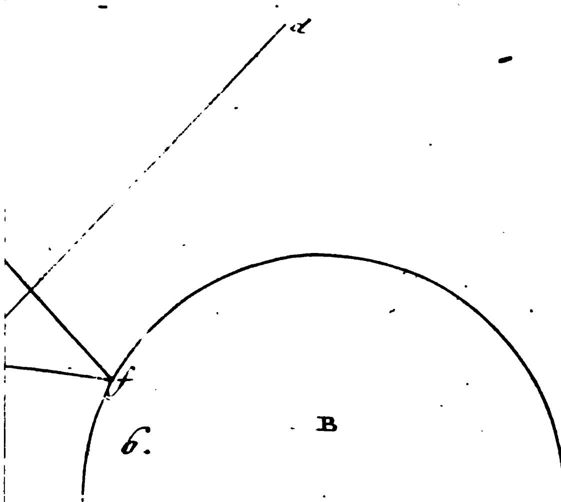


Fig. 3.



5.



6.

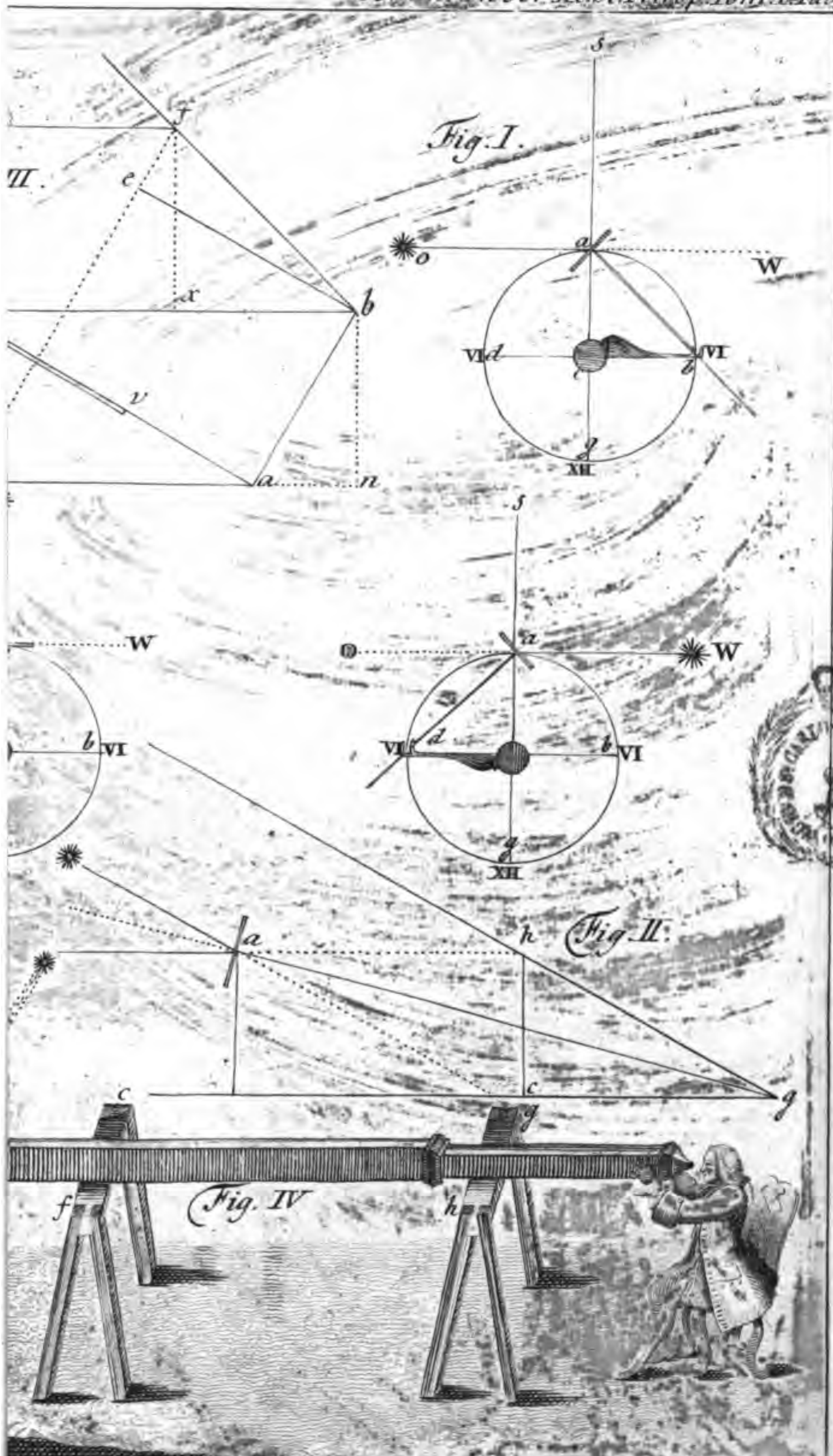


Fig. I.
Fig. II.
Fig. IV
s
a
o
W
VI
d
c
b
g
XII
r
e
x
v
n
h
f

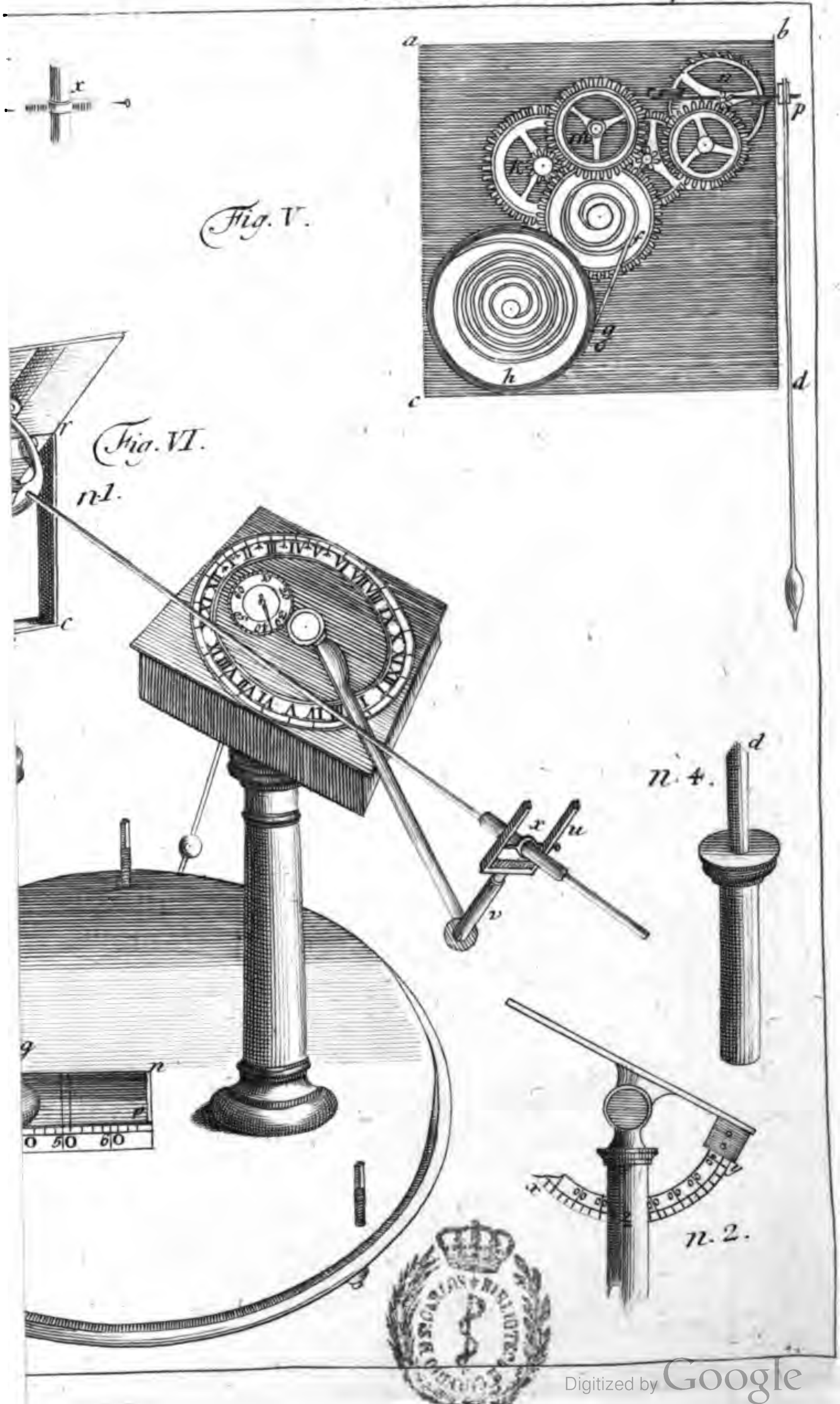
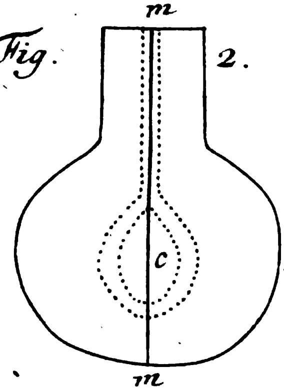


Fig. V.
Fig. VI.
n. 1.
n. 2.
n. 4.

Fig. 2.



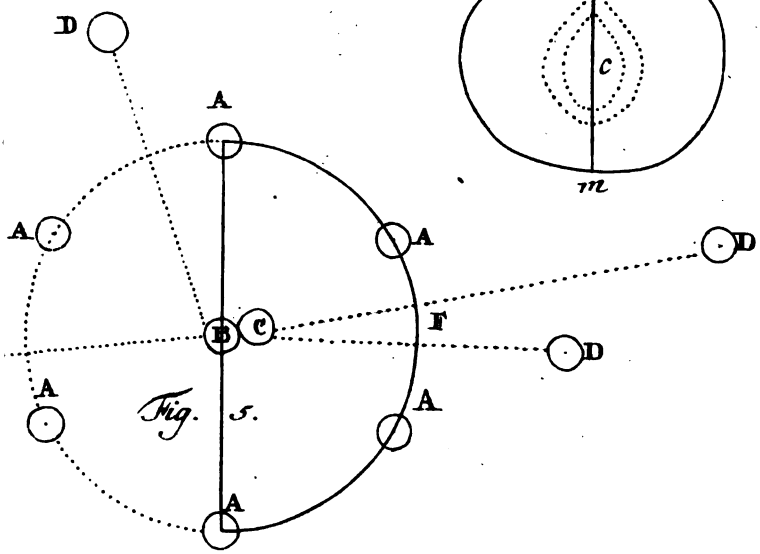
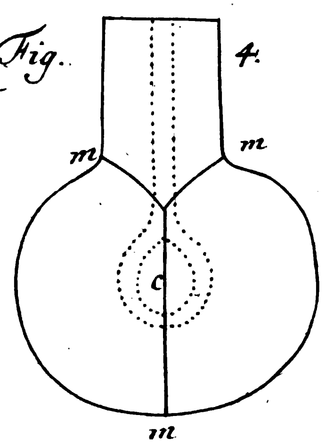
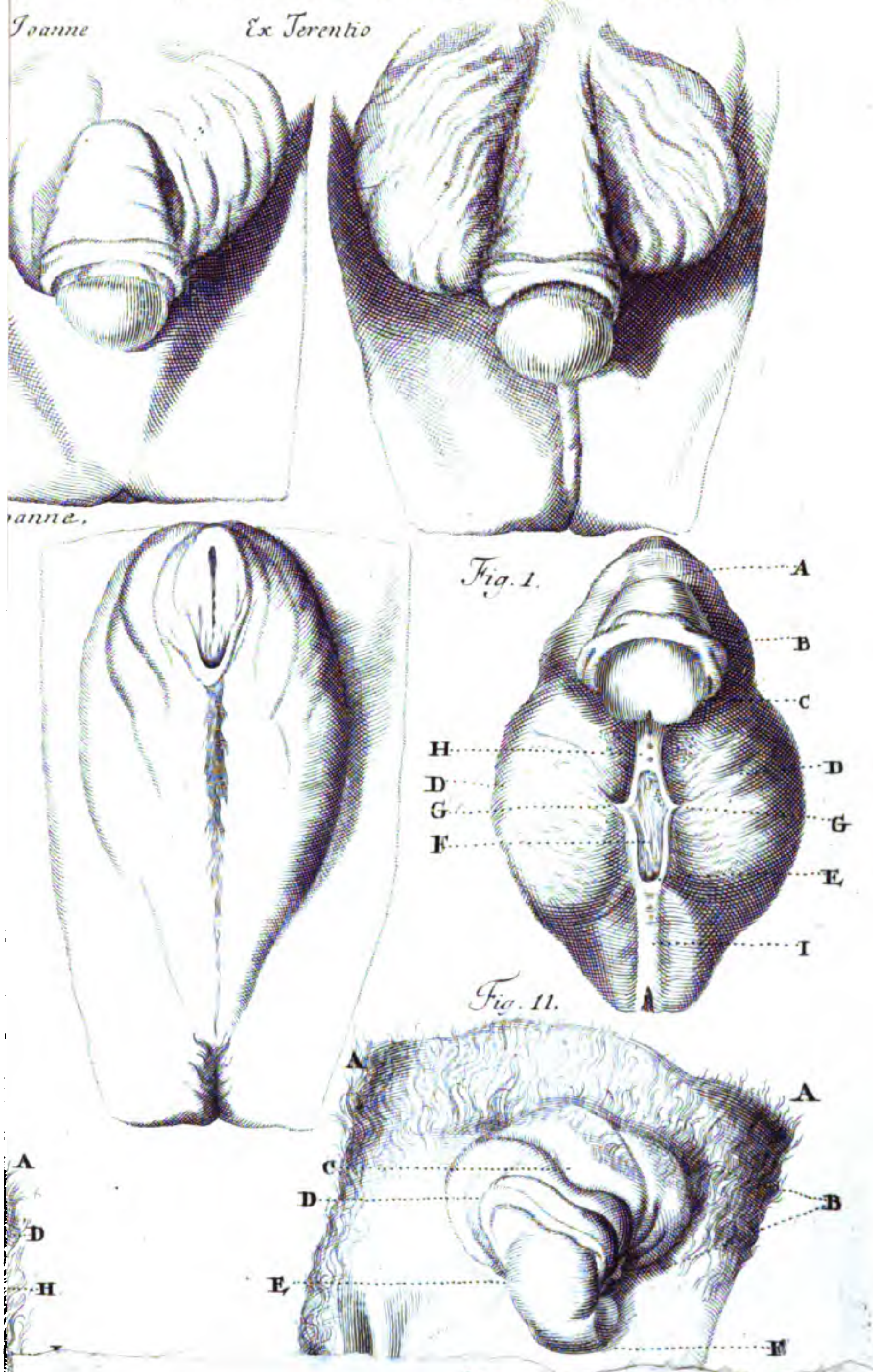


Fig. 5.

Fig. 4.




Joanne
Ex Terentio
…anne.
Fig. 1.
A
B
C
H
D
G
F
D
G
E,
I
Fig. II.
A
A
C
D
B
E,
F
A
D
H

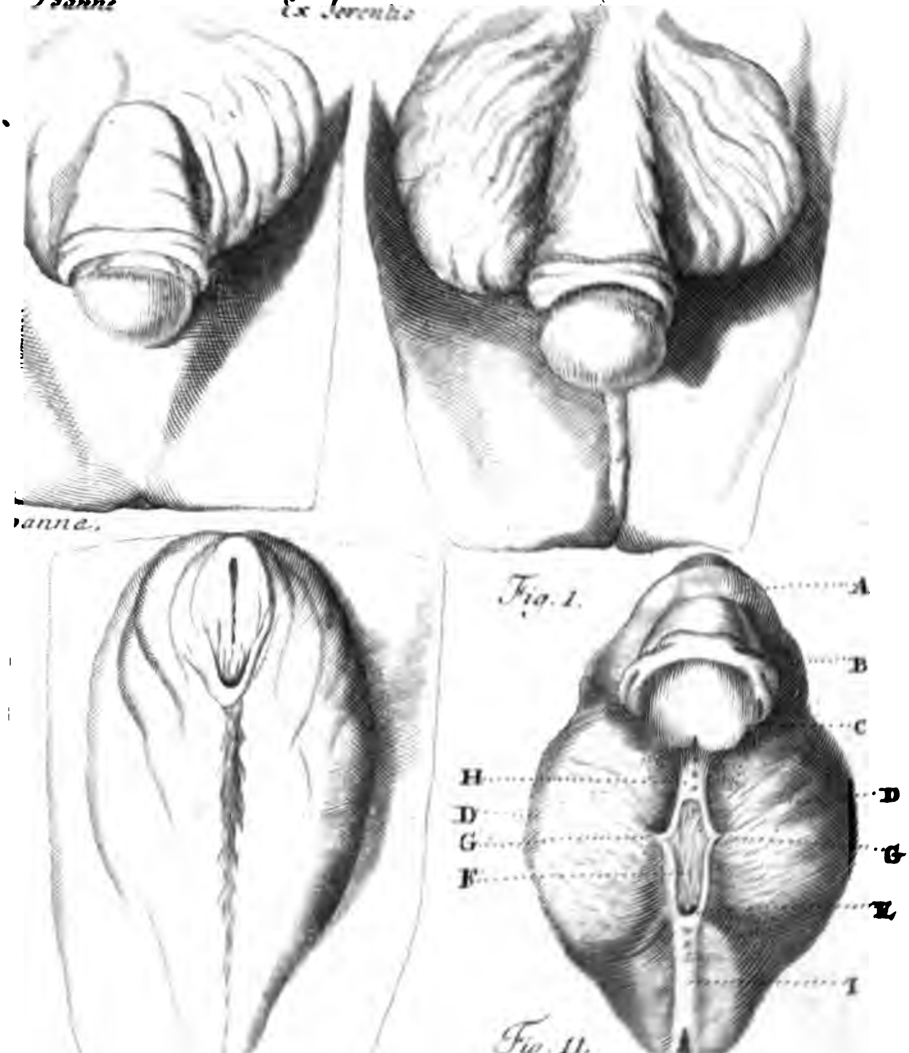


Fig. I.

Fig. II.

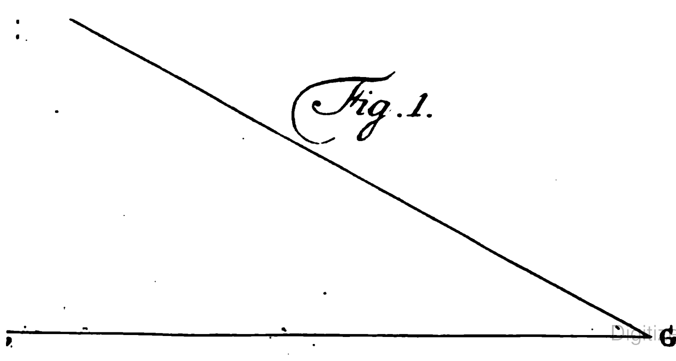
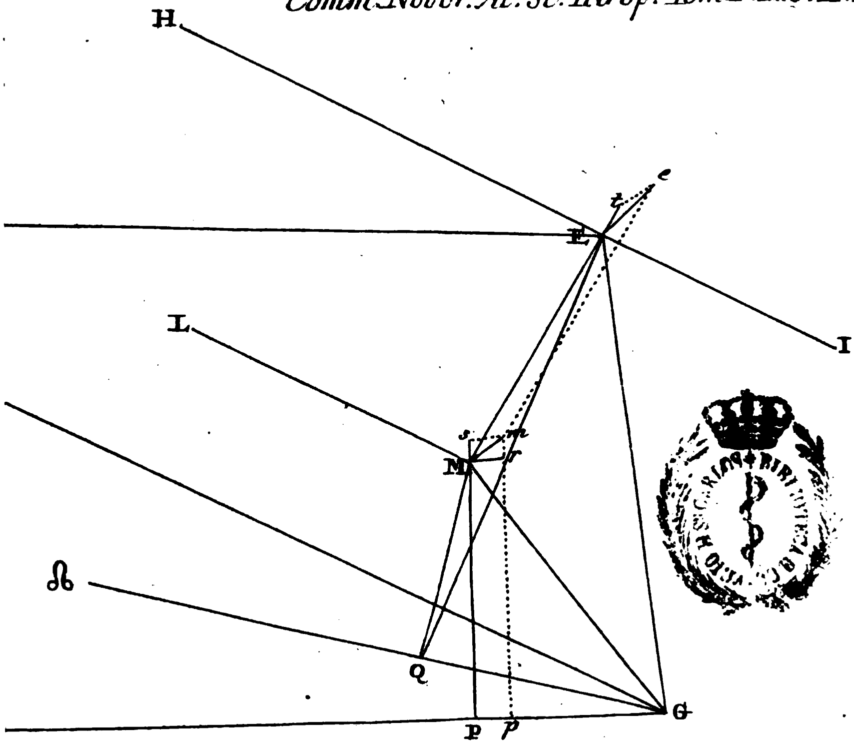


Fig. 1.



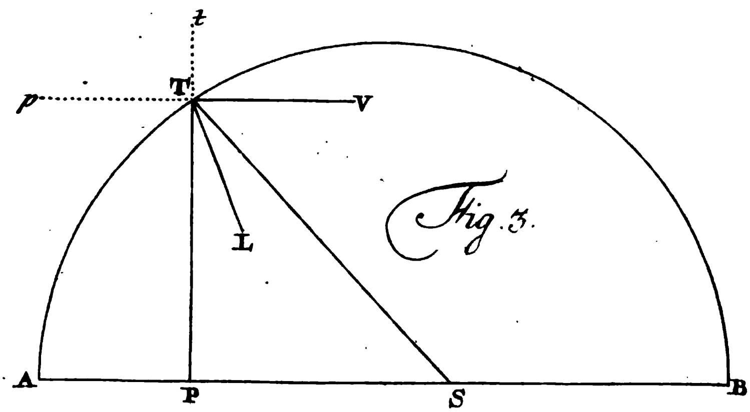


Fig. 3.

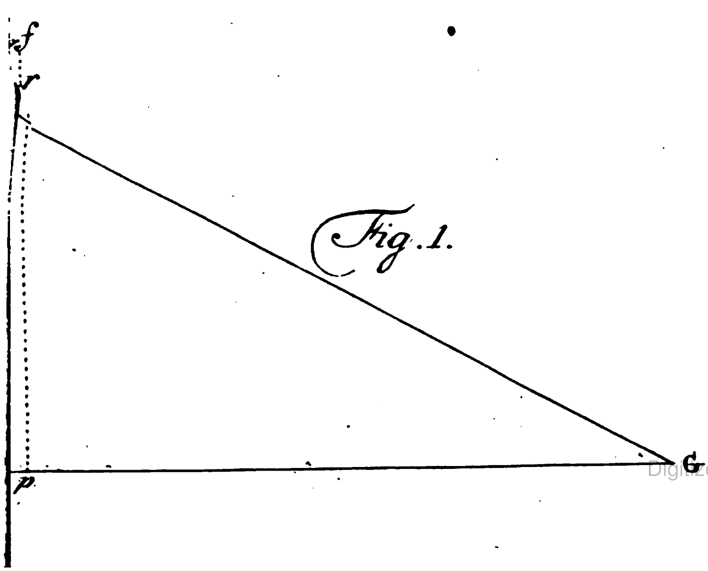
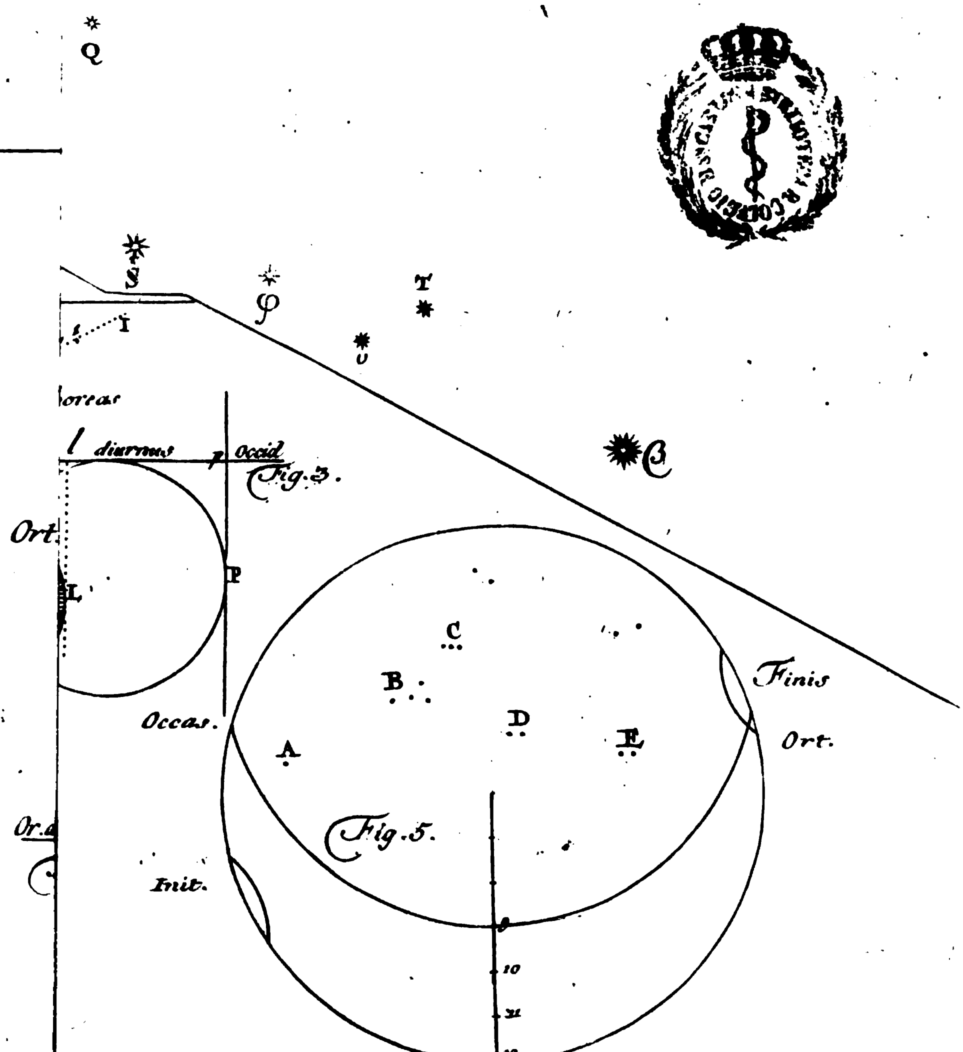


Fig. 1.

Magnitudines apparentes

S ✱ 3^tiæ magn. γ. β.
✱ 4^tæ .... η
✱ 5^tæ .... m. φ. b. h. s. m tamen paulo major reliquis
✱ 6^tæ ..... q. n. k. N. f. e. c. 2n. n paulo major quam 2n.
✱ 7^mæ ... i. a. R. Q. S. T. v. d.
✱ reliquæ valde parvæ sunt ita, ut per tubum hollandicum 6. pollicum vix conspici possint, nisi coelum admodum sit serenum.

P et X sunt stellæ variabiles



UET